



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

INTERACCIÓN DE SOLITONES PARA LA ECUACIÓN DE KORTEWEG-DE VRIES

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRA EN CIENCIAS

P R E S E N T A

ERIKA FABIOLA FERNÁNDEZ GÓMORA

DIRECTOR DE LA TESINA: DR. JORGE GILBERTO FLORES GALLEGOS

MÉXICO, D.F.

JUNIO, 2009



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen. En este trabajo estudiamos la evolución de ondas solitarias en la ecuación de KdV, latiz de Toda, latiz de FPU y ecuación cúbica de Shrödinger. Para la ecuación de KdV usamos el método de Hirota y el método de Whitham para estudiar la evolución de dos ondas solitarias.

1. Introducción

En 1834 el ingeniero escocés John Scott Russel realizaba experimentos en el canal ‘Union’ (cerca de Edinburgo) con el propósito de relacionar caballos de fuerza con la fuerza del vapor. Esto la hacía usando un bote jalado por dos caballos en dicho canal. Un día (Agosto 1844) una de las cuerdas que sujetaba el bote al caballo se rompió y observó:

“El bote se detuvo súbitamente, no así la masa de agua que se había puesto en movimiento. Esta se acumuló alrededor de la proa del bote y se movió hacia adelante con la forma de una larga elevación solitaria. La seguí a caballo. La elevación de agua, que era de unos 10 metros de largo y 50 centímetros de alto, continuó su curso por el canal, aparentemente sin cambio de forma o disminución de su velocidad, que era de unos 15 kilómetros por hora. Su altura disminuyó después de 3 kilómetros”.

Russel continuó estudiando la onda solitaria en tanques y canales y encontró que era un ente dinámico independiente que se mueve con velocidad y forma constantes. Logró demostrar que:

- Las ondas solitarias tienen la forma $\text{sec } h^2(k(x - ct))$.
- Se crean dos o más ondas solitarias si se inicia con una masa de agua suficientemente grande.
- Las ondas solitarias se cruzan sin experimentar cambio alguno en forma y velocidad.
- Una onda de altura h viaja en un canal de profundidad d con velocidad $v = \sqrt{g(d + h)}$, con g la aceleración debida a la gravedad.

Implicando con ésto que a mayor amplitud de onda mayor será la velocidad a la que viaja.

En 1895 Korteweg y De Vries [KdV] publicaron su teoría de ondas en aguas poco profundas, deduciendo la ecuación de movimiento para la superficie libre de estas ondas que ahora lleva sus nombres (KdV):

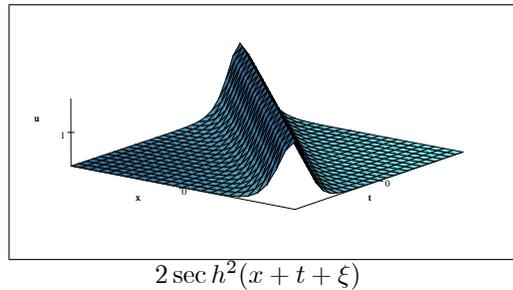
$$u_t + u_x u + u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

Y aunque hace más de 100 años se derivó esta ecuación, tiene tantas características que se ha creado una categoría en la MSC200 (Mathematical Classification Scheme) llamada “KdV-like Equations”.

Una de sus características más importantes es que es completamente integrable [Mc] y por lo tanto, aún siendo una ecuación no lineal, podemos encontrar formas explícitas para muchas de sus soluciones. Por ejemplo, como lo reportaron Korteweg y De Vries, la ecuación tiene una familia de solitones como solución:

$$u(x, t) = u(x, t; k, \xi) = 2k^2 \operatorname{sech}^2(kx + k^3t + \xi)$$

Tomando a t como parámetro, estas soluciones se ven como una “campana” o una “joroba” con altura $2k^2$ que viaja hacia la izquierda con velocidad k^2 con posición inicial al tiempo $t = 0$ determinada por el valor de ξ .



Fue hasta los años 60's que se descubrió la existencia de soluciones que asintóticamente se ven como combinación lineal de dos o más ondas solitarias para $|t|$ grande. Kruskal y Zabusky [KZ] encontraron que las alturas y velocidades de los solitones son las mismas cuando $t \rightarrow \pm\infty$ pero el parámetro ξ cambia, dando resultado al famoso *cambio de fase*.

A lo largo de este trabajo nos centraremos en la evolución de 2 solitones, estudiando su dinámica usando distintas técnicas.

2. Solitones

A finales de 1940, Fermi, Pasta y Ulam [FPU] propusieron el primer problema científico para la computadora MANIAC en los Alamos: la dinámica de equipartición de energía en una latiz de cristal ligeramente no lineal, relacionada con conductividad térmica. El experimento numérico que propusieron FPU en 1955 [FPU] fue diseñado para ver hasta donde la incorporación de términos no lineales en la fuerza restitutiva de los resortes de un sistema de N osciladores acoplados activaría los modos que no fuesen excitados inicialmente. Conjeturaron que la energía eventualmente se equidistribuiría sobre todos los modos, es decir ocurriría el proceso de termalización. Sin embargo, el experimento reveló que la energía recorría los modos, excitando un único modo mientras que en otro se extinguía. Este comportamiento continuó de forma cíclica, el fenómeno fue

llamado “Recurrencia FPU”. Dejaron correr el programa y este proceso continuó indefinidamente casi periódicamente sin que ocurriera la termalización.

Su experimento consistió en 64 masas unidas mediante resortes idénticos cuya fuerza restitutiva es no lineal. La energía potencial de dicho sistema está dada por

$$\frac{1}{2}\alpha(q_{i+1} - q_i)^2 + \frac{1}{3!}\beta(q_{i+1} - q_i)^3$$

con $\alpha > 0$ y $\beta \neq 0$ siendo $q_{i+1} - q_i$ el desplazamiento de la posición inicial.

Fue hasta 1965 que Kruskal y Zabusky [KZ] fueron capaces de explicar el fenómeno de “Recurrencia FPU” derivando la ecuación de KdV al tomar el límite continuo de las ecuaciones de FPU

$$\partial_{tt}q_i = [\alpha(q_{i+1} - q_i) + \frac{1}{2}\beta(q_{i+1} - q_i)^2] - [\alpha(q_i - q_{i-1}) + \frac{1}{2}\beta(q_i - q_{i-1})^2] \text{ FPU}$$

Luego simularon numéricamente la ecuación de KdV con condiciones de frontera periódicas y encontraron que a pesar de la no linealidad de la ecuación, la condición inicial eventualmente se descompone en ondas que viajan a diferente velocidad y que interactúan de forma tal que pareciera se superponen. La única indicación de que hubo una interacción no lineal es un *cambio de fase*. A las ondas que se crearon les llamaron “solitones” y su estabilidad inusual durante la interacción sugirió que era la responsable de la recurrencia FPU. La energía podía ser transportada a lo largo de la latiz indefinidamente sin que hubiera dispersión debido a la existencia y resistencia de los solitones.

Para darnos una mejor idea del modelo analizaremos primero el caso lineal, es decir $\beta = 0$, y después el caso $\beta \neq 0$.

2.1. Caso lineal

Consideremos la ecuación (FPU) con $\beta = 0$

$$\partial_{tt}q_i = \alpha(q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}), \quad (2)$$

fijando las masas iniciales y finales $q_0 = q_{N+1} = 0$. Proponemos como solución

$$q_i(t) = a(i)\theta(t). \quad (3)$$

Por lo que se debe cumplir

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\ddot{\theta}}{\theta} = \frac{a(i+1) - 2a(i) + a(i-1)}{a(i)} = \lambda, \quad (4)$$

con λ constante (independiente de i y de t). Proponemos a

$$a(i) = C_1 \sin(\lambda i) + C_2 \cos(\lambda i)$$

como solución de la ecuación

$$a(i+1) - 2a(i) + a(i-1) = \lambda a(i).$$

Para satisfacer las condiciones de frontera hacemos $C_2 = 0$ y $\lambda = \frac{\pi k}{N+1}$ con $k = 1, 2, \dots, N$. Por lo tanto,

$$a_k(i) = C_1 \sin\left(\frac{\pi k}{N+1}i\right) \quad (5)$$

Para encontrar la forma explícita de $\theta(t)$ sustituimos (5) en (4) y resolvemos

$$\ddot{\theta}(t) = -(w_k)^2 \theta(t)$$

con

$$w_k = 2\sqrt{\lambda} \sin\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right), \quad (6)$$

obteniendo

$$\theta_k(t) = A_k \sin(w_k t) + B_k \cos(w_k t).$$

Por lo tanto para $k = 1, \dots, N$

$$q_i^{(k)}(t) = a_k(i)\theta_k(t).$$

Para que se cumplan las condiciones iniciales

$$q_i^{(k)}(0) = C_k \sin\left(\frac{k\pi}{N+1}i\right) \quad \text{y} \quad \dot{q}_i^{(k)}(0) = 0, \quad (7)$$

resulta $A_k = 0$ y $B_k = \frac{1}{C_1} q_i^{(k)}(0)$. Por lo tanto

$$q_i^{(k)}(t) = C_k \sin\left(\frac{k\pi}{N+1}i\right) \cos\left(2\sqrt{\lambda} \sin\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)t\right).$$

Estas soluciones son llamadas los "modos normales" de la latiz. La evolución natural del sistema esta dada por

$$Q_i(t) = \sum_{k=1}^N q_i^{(k)}(t).$$

Notemos que la amplitud C_k de cada modo esta dada por la condición inicial.

Veamos ahora que no hay transferencia entre los modos. Definimos la energía del i -esimo modo por

$$E_i = \frac{1}{2} \left((\dot{\mu}_i)^2 + (w_i)^2 (\mu_i)^2 \right),$$

con

$$\mu_i = \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^N Q_j(t) \sin\left(\frac{i\pi}{N+1}j\right).$$

Por lo que la energía total del sistema es $E = \sum_i E_i$. Entonces, si la condición inicial esta dada por (7) se tiene que $Q_i(t) = q_i(t)$ y la energía total del sistema es $\frac{1}{2}(C_k)^2(w_k)^2$. Esto es cierto para todo tiempo incluido el tiempo $t = 0$, por lo tanto los modos no comparten energía.

Notemos que al considerar de (6):

$$w_k = 2\sqrt{\lambda} \left| \sin \left(\frac{k\pi}{2(N+1)} \right) \right|,$$

tenemos una relación entre el número de onda y la frecuencia. Para $k \rightsquigarrow 0$, la frecuencia es baja y la longitud de onda es larga.

2.2. Potencial FPU

Kruskal y Zabusky derivaron la ecuación de KdV a partir de las ecuaciones (FPU) tomando $\beta \neq 0$ de la siguiente forma:

- $q_i = q_i(t)$ denota el desplazamiento al tiempo t de la partícula i -ésima de la latiz en equilibrio.
- $r = r_i = q_{i+1} - q_i$ el desplazamiento relativo
- $p = \partial_t r$ el momento de la latiz

Suponiendo que todas estas funciones están en l^2 , escribimos (FPU) de la siguiente forma:

$$\partial_{tt}q_i = \alpha(q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1})\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha}(q_{i+1} - q_{i-1})\right].$$

Si denotamos por h la longitud del resorte y hacemos expansión de Taylor de q_{i+1} y q_{i-1} en términos de q_i , obtenemos (quitando el subíndice i)

$$\partial_{tt}q = \alpha h^2(\partial_{xx}q + \frac{h^2}{12}\partial_{xxxx}q)(1 + \frac{\beta}{\alpha}h\partial_xq). \quad (8)$$

Sean $\alpha h^2 = c^2$, $\frac{h\beta}{\alpha} = \epsilon$ y $\frac{h^2}{12\epsilon} = \delta^2$ con ϵ y h parámetros pequeños. Por lo que la ecuación, después de quitar productos de dos términos pequeños, queda como

$$\partial_{tt}q - c^2\partial_{xx}q = \epsilon c^2\partial_xq\partial_{xx}q + \epsilon c^2\delta^2\partial_{xxxx}q.$$

Buscamos soluciones que se aproximen a ondas viajeras con a lo más una forma que varía lentamente. Por lo que tiene sentido usar escalas múltiples. Proponemos

$$q = q^{(0)}(\xi, T) + \epsilon q^{(1)}(x, t) + \dots, \quad (9)$$

con $\xi = x - ct$ y $T = \epsilon t$.

La ecuación correspondiente a orden ϵ es:

$$2cq_{\xi T}^{(0)} + c^2 q_{\xi}^{(0)} q_{\xi\xi}^{(0)} + c^2 \delta^2 q_{\xi\xi\xi\xi}^{(0)} = 0.$$

Que al aplicarle el cambio de variables $u = q_{\xi}^{(0)}$ y $\tau = \frac{cT}{2}$, se transforma en KdV:

$$u_{\tau} + u_{\xi}u + \delta^2 u_{\xi\xi\xi} = 0. \quad (10)$$

Zabusky y Kruskal [ZK] analizaron este problema y publicaron sus resultados en el Physical Review Letters (1965), encontraron un comportamiento sorprendente en la evolución de estas ondas.

La ecuación de KdV describe ondas en aguas poco profundas como se explicó anteriormente. Pero también describe ondas largas en cristales anarmónicos.

Para valores pequeños de δ^2 , el fenómeno observado computacionalmente se puede describir en términos de tres intervalos de tiempo:

1. Inicialmente los primeros dos términos de KdV dominan y ocurre el clásico rebase: u se inclina en regiones donde tiene pendiente negativa.
2. Cuando u se ha inclinado suficiente, el término de dispersión se vuelve importante y sirve para prevenir discontinuidades. En vez de discontinuidades aparecen oscilaciones de corta longitud de onda (de orden δ) en el lado izquierdo del frente. Las amplitudes de las oscilaciones crecen y finalmente cada oscilación alcanza una amplitud casi constante (que aumenta linealmente de izquierda a derecha) y es casi idénticamente en forma a una onda solitaria de KdV.
3. Cada pulso solitario o soliton comienza a moverse uniformemente a un paso (relativo a la velocidad inicial del pulso) que es linealmente proporcional a su amplitud. Por lo que los solitones se separan. Debido a la periodicidad, dos o más solitones eventualmente se traslapan o “colisionan” e interactúan no linealmente para posteriormente reaparecer virtualmente sin ser afectados en tamaño ni en forma. En otras palabras, los solitones pasan uno sobre el otro sin perder su identidad.

A partir de sus descubrimientos buscaron soluciones tipo soliton con velocidad c . Sustituyendo $u = U(x - ct)$ en (10) para obtener una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden no lineal para u . La solución asintóticamente constante en infinito ($u = u_{\infty}$ en $x = \pm\infty$) es:

$$u = u_{\infty} + (u_0 - u_{\infty}) \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{u_0 - u_{\infty}}{12\delta^2}}(x - x_0)\right),$$

donde u_0 , u_{∞} y x_0 son constantes arbitrarias y $c = u_{\infty} + \frac{(u_0 - u_{\infty})}{3}$.

Por lo que entre mayor sea la amplitud y menor sea δ más angosto será el pulso. Lo sorprendente es que estos impulsos, que son soluciones por sí solos de la ecuación, existen aún estando uno cerca del otro e interactúan sin perder su individualidad excepto en el momento en que se “traslapan”.

Los resultados numéricos de Kruskal y Zabusky los mostramos en la sección de cálculos numéricos. Este fue el primero trabajo que dio luz sobre como interactúan dos o más solitones, mostrando que pueden interactuar pero eventualmente recuperan su forma inicial.

2.3. Latiz de Toda

En (FPU) se considera el potencial no lineal $V(r) = \frac{1}{2}\alpha r^2 + \frac{1}{3!}\beta r^3$ y debido a esta no linealidad se tiene recurrencia. ¿Qué pasa si consideramos un potencial más general?

Consideremos el potencial

$$V(r) = \frac{k}{\lambda}e^{-\lambda r} + kr \quad (11)$$

propuesto por Toda [To]. Observemos que $V(r) \approx \frac{k}{\lambda} + \frac{\lambda k}{2}r^2$ cuando $|r| \ll 1$, que es el potencial de la latiz lineal.

Es importante este ejemplo pues resulta un sistema completamente integrable [Fla][Ma], en el sentido que las ecuaciones de movimiento tienen una infinidad de cantidades conservadas. Las ecuaciones de movimiento para el sistema son:

$$\ddot{r}_i = V'(r_{i+1}) - 2V'(r_i) + V'(r_{i-1}) \quad (12)$$

Haciendo $f_i = -V'(r_i) = k(e^{-\lambda r_i} - 1)$, obtenemos de (12) las ecuaciones de movimiento para f_i :

$$\partial_{tt}\left(-\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{f_i}{k} + 1\right)\right) = -f_{i+1} + 2f_i - f_{i-1}. \quad (13)$$

Por lo que

$$f_i(t) = \frac{1}{\lambda}B^2 \sec h^2(b_i \pm Bt), \quad (14)$$

con $B = \sqrt{k\lambda} \sinh(b)$ y la posición inicial de las masas $x_i = b_i$. La solución (14) es una onda solitaria que viaja a velocidad

$$c = \sqrt{k\lambda} \frac{\sinh(b)}{b}. \quad (15)$$

El régimen de onda larga corresponde al límite $b \rightarrow 0$. Lo cual da una velocidad de la onda de $c = \sqrt{k\lambda}$. La onda solitaria siempre viaja a mayor velocidad que esta velocidad crítica para $b \neq 0$.

Hirota [Hir] demostró que la latiz de Toda tiene cadenas de solitones verificando directamente que una generalización de la solución tipo soliton de (13) es solución. La solución de Hirota esta dada por

$$q_i(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ln(g(\theta_i)), \quad (16)$$

con g una función conocida y $\theta_i = \alpha t - \beta i - \delta$. En la sección 3.1 utilizaremos este método para encontrar solitones de KdV.. La solución puesta de esta forma fue encontrada por Hirota para la ecuación de KdV [Hir2]. En la siguiente sección haremos cálculos numéricos para ver la evolución de solitones dados como soluciones de este tipo en el tiempo.

2.4. Ecuación cúbica de Schrödinger

En el contexto de esta ecuación entenderemos por solitones paquetes de ondas localizados que sobreviven colisiones.

En el verano de 1972, Newell y sus colegas [Ne] organizaron un taller de investigación en solitones. Lo interesante es que una de las contribuciones más significativas llegó después. De la antigua Unión Soviética llegó un artículo de Zakharov y Shabat [SZ] donde formulan el ISM de Kruskal para la ecuación cúbica de Schrödinger:

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} + 2|\varphi|^2\varphi = 0. \quad (17)$$

A diferencia de la ecuación de KdV y la latiz de Toda la variable dependiente en esta ecuación es compleja en vez de real por lo que la ecuación rige la evolución de dos cantidades: amplitud y fase. Esto debido a que (17) es una generalización no lineal de la ecuación lineal

$$iu_t + u_{xx} + u = 0,$$

soluciones de la cual involucran una envolvente y un paquete de onda. Como la ecuación lineal es una ecuación de Schrödinger en mecánica cuántica para la probabilidad de la amplitud de una partícula (como un electrón) que se mueve en un dominio con potencial uniforme, es natural llamarle a la ecuación (17) la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS). Cuando se usa la ecuación de Schrödinger para modelar paquetes de ondas en hidrodinámica, óptica no lineal, acústica no lineal, ondas de plasma y dinámica biomolecular sus soluciones no tienen un carácter cuántico. Las conclusiones del trabajo de Shabat y Zakharov y del taller de solitones son que cuatro ecuaciones no lineales (KdV, Sine-Gordon, NLS y la latiz de Toda) muestran ondas solitarias con la misma propiedad que llevó a Kruskal y Zabusky en 1965 a formular el término soliton [Ne].

Encontremos ahora ondas solitarias para (17). Sea

$$\varphi(x, t) = e^{i(kx-wt)}v(x-ct),$$

entonces

$$\begin{aligned} \varphi_t &= -iwe^{i(kx-wt)}v(x-ct) - ce^{i(kx-wt)}v'(x-ct) \\ \varphi_x &= ike^{i(kx-wt)}v(x-ct) + e^{i(kx-wt)}v'(x-ct) \\ \varphi_{xx} &= -k^2e^{i(kx-wt)}v(x-ct) + i2ke^{i(kx-wt)}v'(x-ct) + e^{i(kx-wt)}v''(x-ct). \end{aligned}$$

Por lo que la ecuación (17) correspondiente es

$$v'' + i(2k-c)v' + (w-k^2)v + 2|v|^2v = 0. \quad (18)$$

Queremos que v sea real, entonces necesitamos que $2k-c=0$, es decir

$$k = \frac{c}{2}.$$

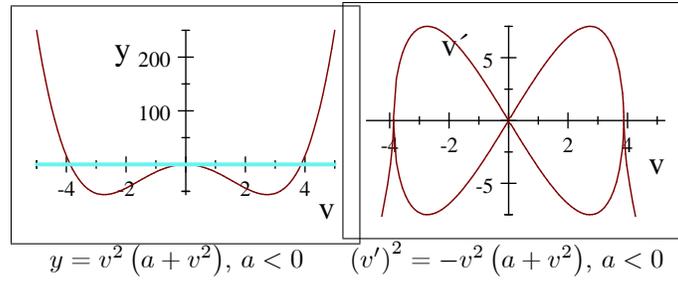
Por lo tanto (18) se reduce a

$$v'' + \left(w - \frac{c^2}{4}\right)v + 2v^3 = 0, \quad (19)$$

que es un sistema conservativo que tiene soluciones periódicas en términos de funciones elípticas de Jacobi y una onda solitaria. Esto lo podemos ver al integrar (19), pues obtenemos

$$v' = \pm \sqrt{2A - v^2(a + v^2)}, \text{ con } A \text{ constante.}$$

La onda solitaria viene de tomar el límite cuando $A \rightarrow 0$



Es decir, es solución de

$$v' = \pm \sqrt{-v^2(a + v^2)} \text{ con } a < 0. \quad (20)$$

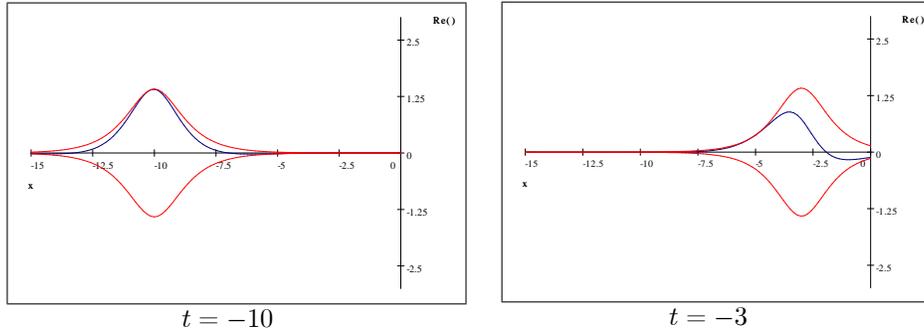
Por lo tanto

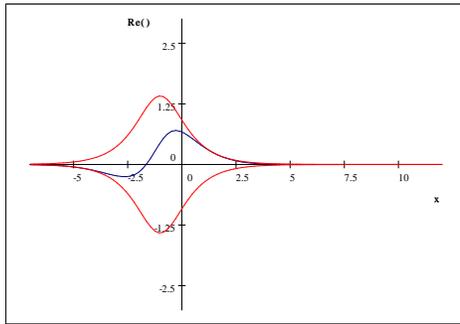
$$v(x - ct) = \sqrt{-2a} \operatorname{sech}(\sqrt{-a}(x - ct)).$$

La parte real de la solución $\varphi(x, t)$ de (20), esta dada por

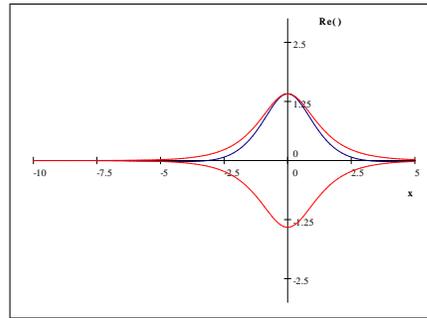
$$\cos\left(\frac{c}{2}x - \left(\frac{c^2}{4} + a\right)t\right) \sqrt{-2a} \operatorname{sech}(\sqrt{-a}(x - ct))$$

con $a < 0$. En seguida mostramos (en azul) la evolución de (??) con $a = -1$ y $c = 1$ y de $|\varphi(x, t)|$ (en rojo):

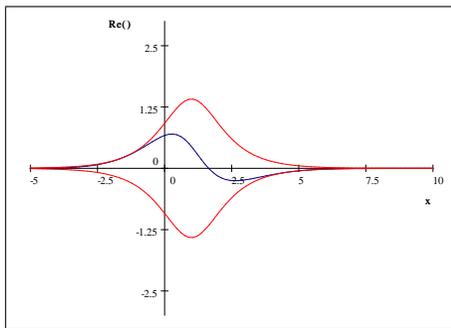




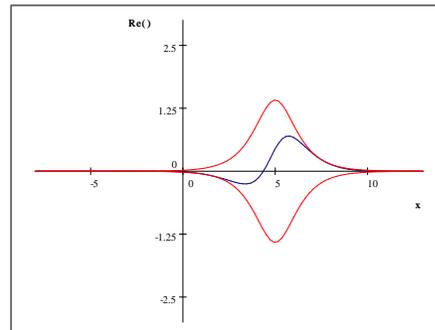
$t = -1$



$t = 0$



$t = 1$



$t = 5$

La evolución de $|\varphi(x, t)|$ es la de una onda solitaria que modula a $\text{Re}(\varphi(x, t))$.

3. Cálculos Numéricos

Hemos encontrado ondas solitarias como soluciones de la ecuación de KdV y de la latiz de Toda. Y encontramos que los solitones interactúan sin perder su individualidad. Ahora usaremos algunos métodos numéricos para observar estos resultados. Investigaremos el caso de dos ondas solitarias como condición inicial.

3.1. Método de Hirota

Consideremos soluciones $\Psi_i(x, t)$ de la ecuación de partícula libre de Schrödinger. Es decir soluciones de

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_i = E_i \Psi_i. \quad (21)$$

Sea

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln (W (\Psi_1, \dots, \Psi_n)), \quad (22)$$

con W el wronskiano, $\Psi_i = \Psi_i(\xi_i)$ y

$$\xi_i = k_i(x - 4k_i^2 t) \text{ si } E_i < 0$$

o

$$\xi_i = k_i(x + 4k_i^2 t) \text{ si } E_i > 0.$$

Entonces $u(x, t)$ es solución de la ecuación de KdV

$$u_t + 6u_x u + u_{xxx} = 0. \quad (23)$$

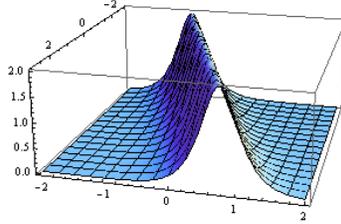
Sea $n = 1$ y $\Psi_1(\xi) = \cosh(\xi)$ solución de (21) correspondiente a $E_1 < 0$, entonces

$$2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(W(\Psi_1)) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(\cosh(\xi)) = \frac{2k_1^2}{\cosh^2(xk_1 - 4tk_1^3)}$$

por lo que de (22)

$$u_1(x, t) = \frac{2k_1^2}{\cosh^2(k_1(x - (2k_1)^2 t))}$$

es el soliton correspondiente a la ecuación de KdV (23) con velocidad $4k_1^2$:



$u(x, t)$ con $k_1 = 1$

Sea ahora $n = 2$ y

$$\{\Psi_1(\xi), \Psi_2(\xi)\} = \{\cosh(\xi), \cosh(\xi)\}$$

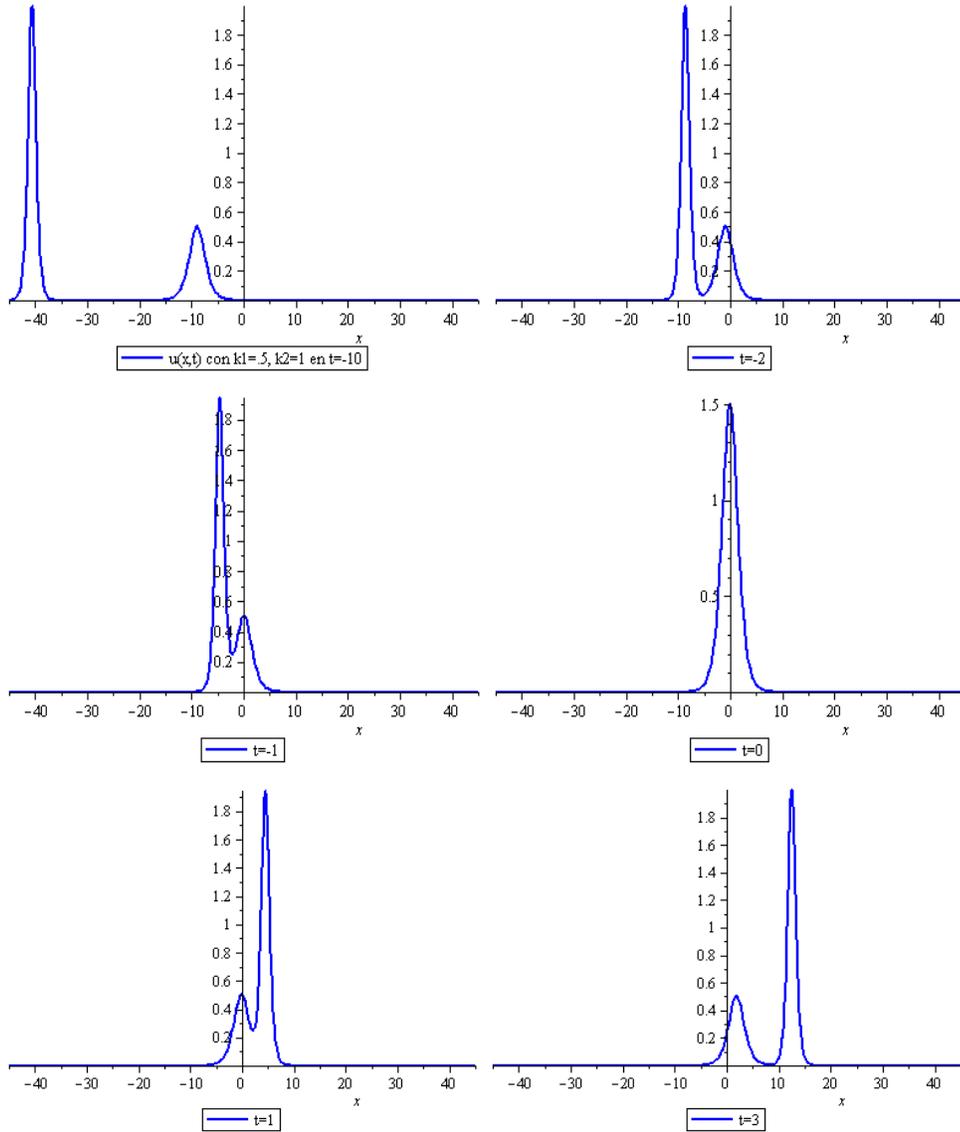
soluciones de (21) correspondientes a $E_i < 0$, entonces

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(W(\Psi_1, \Psi_2)) &= 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \left(\begin{vmatrix} \cosh(k_1(x - (2k_1)^2 t)) & \sinh(k_2(x - (2k_2)^2 t)) \\ k_1 \sinh(k_1(x - (2k_1)^2 t)) & k_2 \cosh(k_2(x - (2k_2)^2 t)) \end{vmatrix} \right) = \\ &= 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(k_2 \cosh(k_1(x - (2k_1)^2 t)) \cosh(k_2(x - (2k_2)^2 t)) + \\ &\quad (-k_1) \sinh(k_1(x - (2k_1)^2 t)) \sinh(k_2(x - (2k_2)^2 t))). \end{aligned}$$

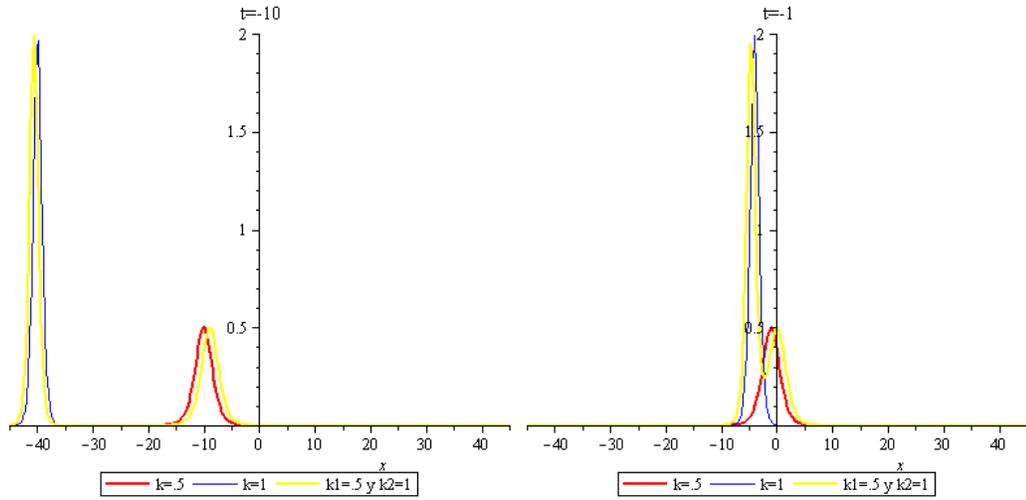
Por lo que de (22)

$$u_2(x, t) = \frac{2(k_1^2 - k_2^2)(k_2^2 \cosh^2(xk_1 - 4tk_1^3) + k_1^2 \sinh^2(xk_2 - 4tk_2^3))}{(k_2 \cosh(xk_1 - 4tk_1^3) \cosh(xk_2 - 4tk_2^3) - k_1 \sinh(xk_1 - 4tk_1^3) \sinh(xk_2 - 4tk_2^3))^2} \quad (24)$$

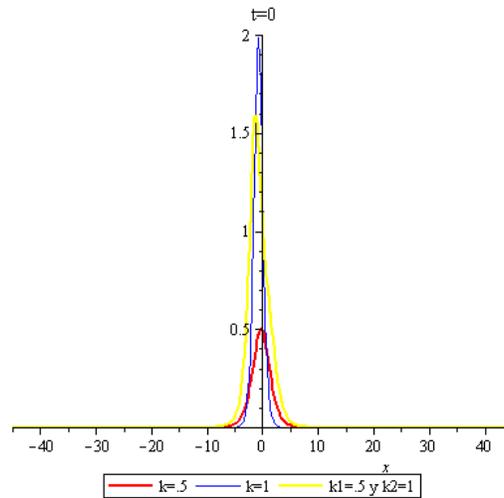
es la solución correspondiente a la ecuación de KdV (23) con dos solitones como condición inicial que evolucionan en el tiempo de la siguiente forma:



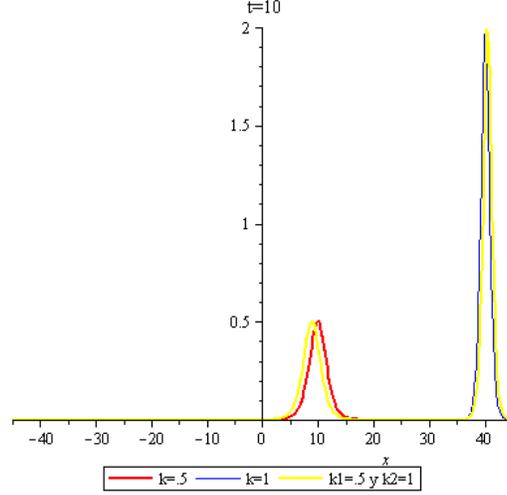
Empezamos con dos solitones, interactuaron y recobraron su forma. Que es lo que Kruskal y Zabusky descubrieron numericamente. Veamos ahora el cambio de fase. En color rojo está el soliton u_1 correspondiente a $k = \frac{1}{2}$, en azul el soliton u_1 correspondiente a $k = 1$ y en amarillo el 2-soliton u_2 correspondiente a $k_1 = \frac{1}{2}$ y $k_2 = 1$.



Observemos que la onda amarilla de mayor amplitud empieza más rezagada que la azul mientras que la onda amarilla de menor amplitud empieza por delante de la roja. En el momento del traslape total la onda amarilla queda con una única joroba de altura menor a 2:



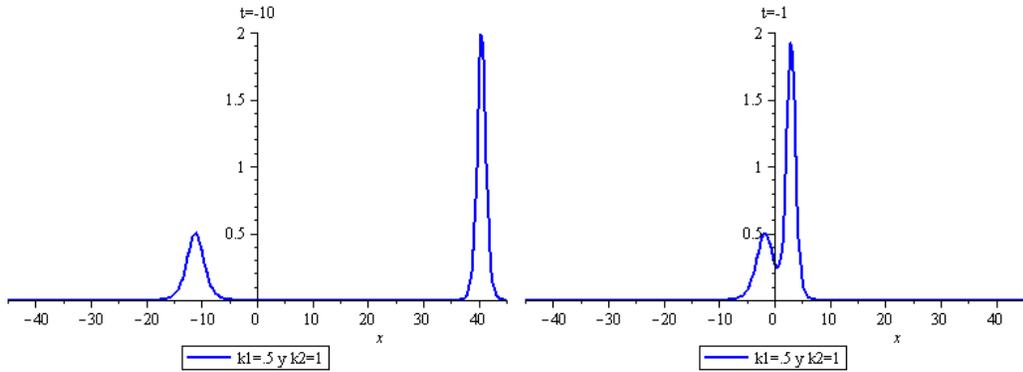
Al tiempo $t = 10$ las ondas ya están separadas y observamos el cambio de fase pues la onda de mayor amplitud amarilla ahora esta por delante de la azul mientras que la onda de menor amplitud amarilla quedó rezagada por la roja.

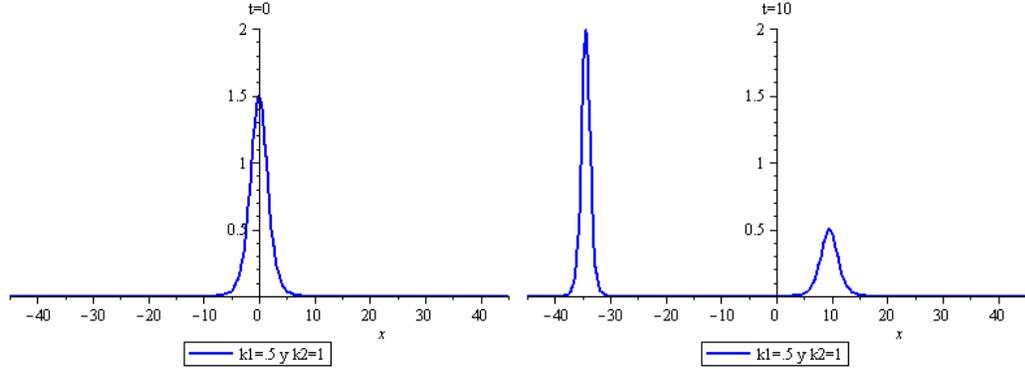


Veamos ahora como sería la interacción si las ondas comienzan trasladándose en dirección contraria, es decir, ahora consideremos ξ_2 correspondiente a $E_2 > 0$. En este caso, procediendo como en (24)

$$u_2(x, t) = \frac{-2(k_1^2 - k_2^2)(k_2^2 \cosh^2(xk_1 - 4tk_1^3) + k_1^2 \sinh^2(xk_2 - 4tk_2^3))}{(k_2 \cosh(xk_1 - 4tk_1^3) \cosh(xk_2 - 4tk_2^3) - k_1 \sinh(xk_1 - 4tk_1^3) \sinh(xk_2 - 4tk_2^3))^2}.$$

Notamos que las ondas se acercan conforme avanza el tiempo hasta el momento del traslape para después recobrar sus formas originales y continuar su camino:





Obtuvimos estas gráficas utilizando Maple

3.2. Método de Whitham

Consideremos la ecuación de KdV

$$u_t + \sigma u_x u + u_{xxx} = 0. \quad (25)$$

Vamos a estudiar la interacción de dos solitones usando la transformación de Cole-Hopf, sea

$$u = p_x,$$

entonces (25) se transforma en

$$p_t + \frac{\sigma}{2} p_x^2 + p_{xxx} = 0. \quad (26)$$

Haciendo otro cambio de variables

$$\sigma p = 12 \frac{\partial}{\partial x} \log(F),$$

es decir

$$u = \frac{12}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log(F) \quad (27)$$

transformamos (26) en

$$F(F_t + F_{xxx})_x - F_x(F_t + F_{xxx}) + 3(F_{xx}^2 - F_x F_{xxx}) = 0. \quad (28)$$

Veamos que le hace estas transformaciones a las soluciones que conocemos de KdV. A decir de

$$u(x, t) = 3\alpha^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\xi - \xi_0}{2} \right) \quad (29)$$

con $\xi = \alpha(x - \alpha^2 t)$. Esta u corresponde a

$$p = \int u = 6\alpha \left[\tanh\left(\frac{\xi - \xi_0}{2}\right) - 1 \right]$$

que a su vez corresponde a $F = 1 + e^{-(\xi - \xi_0)}$ o en términos de x y t

$$F(x, t) = 1 + e^{-\alpha(x - s_0) + \alpha^3 t}$$

Sea $F = 1 + \epsilon F^{(1)} + \epsilon^2 F^{(2)} + \dots$ y agrupamos (28) por potencias de ϵ .

■ A orden ϵ :

$$(F_t^{(1)} + F_{xxx}^{(1)})_x = 0,$$

integramos con constante de integración $k = 0$ para obtener

$$F_t^{(1)} + F_{xxx}^{(2)} = 0$$

■ A orden ϵ^2 :

$$(F_t^{(2)} + F_{xxx}^{(2)})_x = -3 \left((F_{xxx}^{(1)})^2 - F_x^{(1)} F_{xxx}^{(1)} \right), \quad (30)$$

Tomemos

$$F^{(1)} = f_1 + f_2$$

con

$$f_j = e^{-\alpha_j(x - s_j) + \alpha_j^3 t}.$$

Entonces la ecuación para $F^{(2)}$ es

$$(F_t^{(2)} + F_{xxx}^{(2)})_x = -3(\alpha_1 - \alpha_2)^2 \alpha_1 \alpha_2 f_1 f_2.$$

Cuya solución esta dada por

$$F^{(2)} = \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^2 f_1 f_2.$$

Por lo que

$$F = 1 + f_1(x) + f_2(x) + \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^2 f_1(x) f_2(x)$$

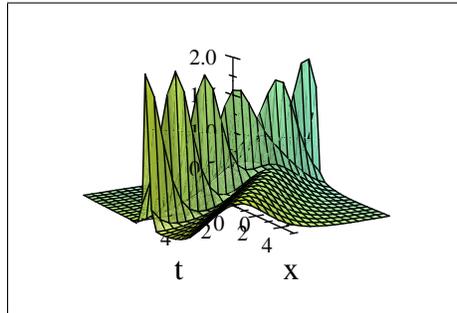
es solución exacta de (28) pues para ordenes mayores las ecuaciones para $F^{(j)}$ ($j > 2$) tienen lado derecho igual a cero y por lo tanto las podemos tomar como idénticamente cero [W]. Entonces, de (27)

$$u(x, t) = \frac{12}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log\left(1 + f_1 + f_2 + \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^2 f_1 f_2\right).$$

Que desarrollando queda en la forma:

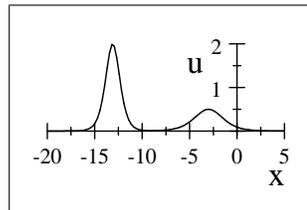
$$u(x,t) = \frac{12 \alpha_1^2 f_1 + \alpha_2^2 f_2 + 2(\alpha_2 - \alpha_1)^2 f_1 f_2 + \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^2 (\alpha_2^2 f_1^2 f_2 + \alpha_1^2 f_1 f_2^2)}{\sigma \left(1 + f_1 + f_2 + \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^2 f_1 f_2\right)^2},$$

que es la misma que obtuvimos en 3,1 usando el método de Hirota y por lo tanto solución de KdV con dos solitones como condición inicial. Sea $\alpha_1 < \alpha_2$, las dos ondas solitarias evolucionan de la siguiente forma:

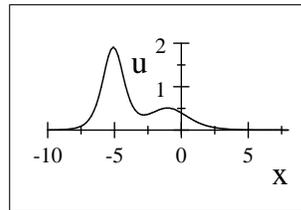


$$\sigma = 6, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$$

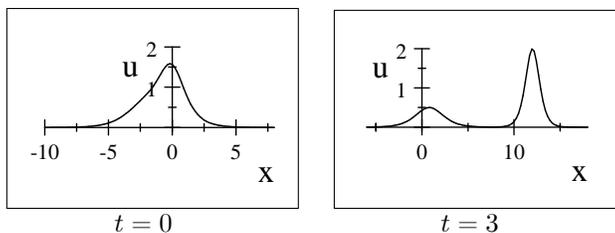
Nuevamente observamos las dos ondas que en el momento del choque interaccionan para luego recobrar su forma y seguir su curso como si no estuviese la otra onda excepto por el cambio de fase. En secciones de tiempo se aprecia de mejor forma:



$$t = -3$$



$$t = -1$$



3.3. Kruskal y Zabusky

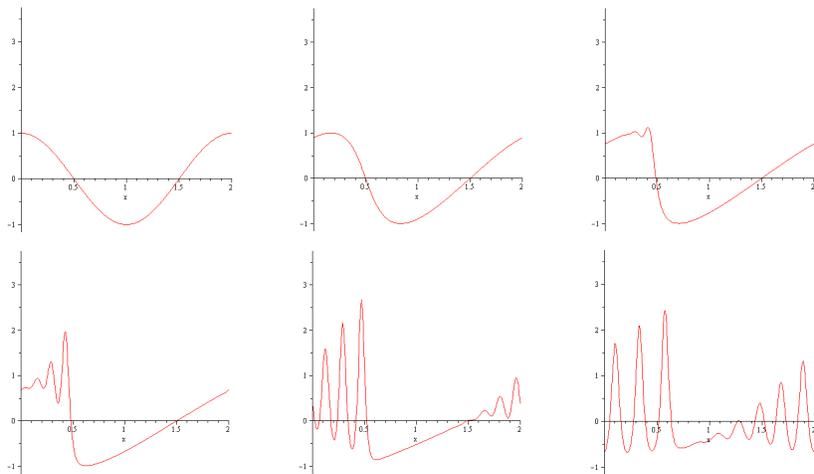
Comprobaron sus resultados descritos en la sección 2.2 usando el siguiente método numérico:

Sea u_m^n la solución de KdV al instante (hm, kn) con $n, m = 0, 1, \dots$

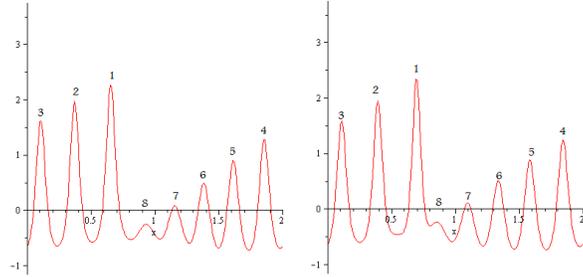
La ecuación de KdV discretizada correspondiente es

$$u_m^{n+1} = u_m^{n-1} - \frac{k}{3h}(u_{m+1}^n + u_m^n + u_{m-1}^n)(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) - \frac{k\delta^2}{h^3}(u_{m+2}^n - 2u_{m+1}^n + 2u_{m-1}^n - u_{m-2}^n)$$

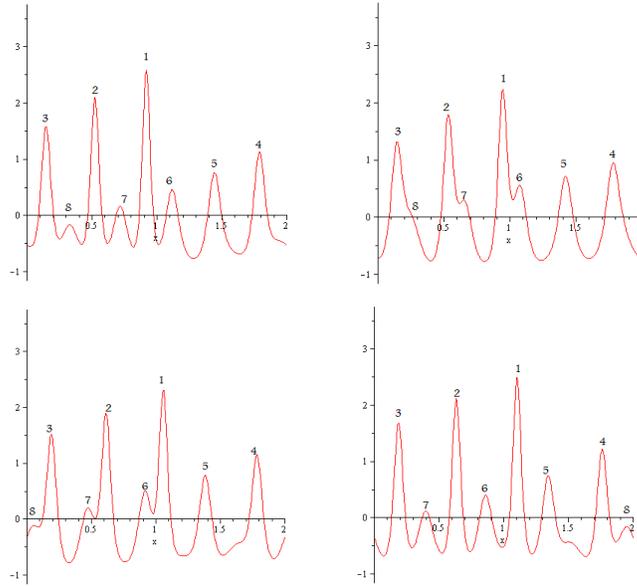
Usando este método numérico con condiciones periódicas en la frontera, Kruskal y Zabusky aproximaron la evolución de la ecuación de KdV tomando como condición inicial $\cos(\pi x)$ en el intervalo $[0, 2]$ con $\delta = .022$. Los resultados numéricos fueron sorprendentes pues se observa como evoluciona el $\cos(\pi x)$ apareciendo ondas solitarias:



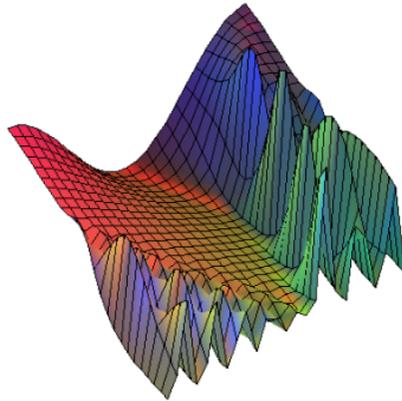
Al tiempo $t \rightsquigarrow 1.2$ se forman 8 ondas solitarias (numeradas de mayor a menor amplitud):



Se observa como interactúan de acuerdo a su tamaño. Las ondas 1, 2 y 3 están avanzado a la derecha mientras que el resto avanzan a la izquierda hasta llegar a la frontera y debido a la condición de periodicidad en la frontera continúan avanzando cíclicamente:



La evolución en espacio tiempo se ve de la siguiente forma:



Es importante este resultado numérico, pues como lo dijo Zabusky [Z] en su momento, fue la primera vez en la historia de la ciencia que los investigadores tuvieron el poder del computo científico para realizar experimentos numéricos que les ayudara a explicar fenómenos y obtener nuevos descubrimientos.

4. Conclusiones

Encontramos que tanto la ecuación de Korteweg- de Vries como la latiz de Toda tienen ondas solitarias como solución. Más aun, usando los métodos de Hirota (16) y Whitham (26) para KdV teniendo como condición inicial dos solitones encontramos que evolucionan como si no se dieran cuenta de la existencia uno del otro hasta el momento del choque donde interaccionan para luego recobrar su forma original y seguir evolucionando individualmente. Mientras que la ecuación cúbica de Schrödinger tiene soluciones tipo soliton, en el sentido que es una onda que se propaga (paquete y una envolvente) que después de interactuar con otras ondas recupera su identidad. Lo resaltante de los métodos de Hirota y Whitham es que pueden aplicarse a otras ecuaciones como la ecuación cúbica de Schrödinger y Sine-Gordon entre otras.

Referencias

- [Fla] Flaschka, H., On the Toda lattice, *Prog. Theoret. Phys.*, 51:703-16, 1974.
- [FPU] Fermi, E., Pasta, J., Ulam, S., Studies of nonlinear problems, Los Alamos Sci. Lab. Report LA-1940, 1955 (reimpreso en *Lec. Appl. Math.*, 15:143-56)
- [Hir] Hiroata, R., Exact N-soliton solution of a nonlinear lumped network equation, *J. Phys. Soc. Japan* (1973), 35:286-88
- [Hir2] Hirota, R., Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons. *Phys. Rev. Lett.* (1971), 18:1192-94.

- [KdV] Korteweg, D., J., de Vries, G., On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves, *Phil. Mag.* 39 (1985), 422-443
- [KZ] Kruskal, M., Zabusky, N., Interactions of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Letters* 15 (1965), 240-243
- [Ne] Newell, A., C., (editor), *Nonlinear Wave Motion*, Providence, R.I: American Mathematical Society, 1974
- [Mc] McKean, H., P., *Integrable Systems and Algebraic Curves*, Lecture Notes in Mathematics, Global Analysis, Proceedings, Calgary (1978), Vol. 755
- [Oma] Omar, M., A., *Elementary Solid State Physics: Principles and Applications*, Addison-Wesley Pub. Co., London, 1975
- [SK] Shabat, A., B., Zakharov, V., E., Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Soviet Physics* (1972), *JETP*, 34: 62-69
- [To] Toda, M., *Theory of Nonlinear Lattices*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1981
- [W] Whitham, G., B., *Linear and Nonlinear Waves*, Pure and Applied Mathematics, Wiley Inter-Science Series of Texts, Monographs, and Tracts, New York, 1999
- [Z] Zabusky, N., J., Computational synergetics and mathematical generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation, *J. Math. Phys.* 9 (1968), pp.1202-1204