



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CAMPOS PRODUCIDOS POR MEDIOS
POLARIZADOS Y MAGNETIZADOS EN
MOVIMIENTO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
FÍSICO

PRESENTA:
MÓNICA ARACELI CANALES LIZAOLA

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. JOSÉ LUIS JIMÉNEZ RAMÍREZ



2009



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

<p>1. Datos del alumno Apellido paterno Apellido materno Nombre(s) Teléfono Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Carrera Número de cuenta</p>	<p>1. Datos del alumno Canales Lizaola Mónica Araceli 55 28 39 69 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 091356451</p>
<p>2. Datos del tutor Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>2. Datos del tutor M. en C. José Luis Jiménez Ramírez</p>
<p>3. Datos del sinodal 1 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>3. Datos del sinodal 1 M. en C. Mirna Villavicencio Torres</p>
<p>4. Datos del sinodal 2 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>4. Datos del sinodal 2 Dr. Raúl Patricio Esquivel Sirvent</p>
<p>5. Datos del sinodal 3 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>5. Datos del sinodal 3 Dr. Carlos Villarreal Luján</p>
<p>6. Datos del sinodal 4 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>6. Datos del sinodal 4 Dr. Javier Vitela Escamilla</p>
<p>7. Datos del trabajo escrito. Título Número de páginas Año</p>	<p>7. Datos del trabajo escrito Campos producidos por medios polarizados y magnetizados en movimiento. 73 p 2009</p>

Agradecimientos

A mi asesor, José Luis Jiménez por su apoyo incondicional, sus enseñanzas, su dedicación y su infinita paciencia que hizo posible finalizar este trabajo.

A los integrantes del comité sinodal, M. en C. Mirna Villavicencio Torres, Dr. Raúl Esquivel Sirvent, Dr. Javier Vitela Escamilla, Dr. Carlos Villareal Luján, por sus valiosas observaciones y sugerencias que enriquecieron el presente trabajo.

Al profesor Ignacio Campos por el tiempo que dedico a revisar gran parte del trabajo, gracias por sus comentarios y sugerencias.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Ciencias que me dio la oportunidad de acceder a sus aulas y darme las herramientas para poder desarrollarme como un mejor ser humano.

A mis padres que siempre han estado a mi lado brindándome todo su apoyo y su amor; por todas sus enseñanzas y consejos, sin los cuales no hubiera podido realizar ninguna de las metas que me he propuesto.

A mis hermanos con quienes he compartido experiencias que me han enseñado la importancia de la familia.

A Chimis por todo el apoyo que me ha dado; porque este camino lo hemos recorrido juntos y mis logros también han sido suyos. Por ser una parte insustituible en mi proyecto de vida.

A Dalia y a Genaro, por su amistad, por toda la ayuda que me brindaron durante la carrera y en la realización de este trabajo.

A todos mis amigos que están y han estado muy presentes en mi vida; sin ustedes este largo viaje por la facultad hubiera sido terriblemente aburrido. Gracias por hacerme reír, por los buenos consejos que me han dado y apoyarme en los momentos difíciles.

A Kaiser.

“No hay método más poderoso para introducir conocimiento en la mente que presentarlo de cuantas maneras diferentes se pueda...”

James C. Maxwell.

Índice General

Introducción	I
1. Ecuaciones de Maxwell en medios materiales	1
1.1. Comportamiento de un medio debido al campo eléctrico \mathbf{E}	1
1.1.1. Polarización de un dieléctrico.	2
1.1.2. Densidad de polarización \mathbf{P}	3
1.1.3. Potencial eléctrico debido a la materia polarizada	4
1.2. Comportamiento de un medio debido al campo magnético \mathbf{B} .	6
1.2.1. Magnetización de un medio material.	6
1.2.2. Densidad de magnetización \mathbf{M}	7
1.2.3. Potencial magnético debido a la materia magnetizada.	8
1.3. Ecuaciones de Maxwell en medios materiales en reposo	10
1.3.1. Ecuaciones de Maxwell con los vectores de polarización \mathbf{P} y de magnetización \mathbf{M} .	11
1.3.2. Ecuaciones de Maxwell en términos de los vectores \mathbf{D} y \mathbf{H} .	13
2. Ecuaciones de Maxwell para medios materiales en movimiento	15
2.1. Ecuaciones de Maxwell para medios en movimiento.	15
2.1.1. Derivada convectiva o total	16
2.1.2. Ley de Faraday	18
2.1.3. Ley de Ampère-Maxwell	20
2.1.4. Análisis de Ley de Ampère-Maxwell forma diferencial	22
2.2. Simetría entre dieléctricos y medios magnetizados en movimiento	24
2.2.1. Dieléctrico polarizado en movimiento	24
2.2.2. Medio material magnetizado en movimiento	25
3. Potenciales Retardados.	28
3.1. Potenciales electromagnéticos.	28
3.2. Solución de la ecuación de onda inhomogénea	30
3.2.1. Tiempo retardado	34

3.3. Potenciales de Liénard- Wiechert	37
3.3.1. Potencial escalar de Liénard-Wiechert.	40
4. Solución del Problema	43
4.1. Método propuesto	43
4.2. Método usado por Jefimenko	47
4.3. Ventajas de un método sobre el otro	51
4.3.1. ¿Ejerce fuerza sobre una carga en reposo una espira neutra, con corriente, moviéndose con velocidad constante?	51
4.4. Método Alternativo	55
4.5. Solución relativista de las ecuaciones para \mathbf{P} y \mathbf{M}	58
Conclusiones	63
A. Expansión multipolar	64
A.1. Expansión multipolar del potencial escalar	64
A.2. Expansión multipolar del potencial vectorial	66
Bibliografía	70

Introducción

Cuando estudiamos los campos que producen los medios polarizados que se mueven a velocidad constante, encontramos un resultado interesante, el cual muestra que un medio polarizado en movimiento es equivalente a un medio magnetizado. Este resultado motiva a preguntarnos si un medio magnetizado en movimiento será equivalente a un medio polarizado.

El presente trabajo tiene dos objetivos fundamentales: el primero, de carácter pedagógico, consiste en deducir cada uno de los resultados importantes para entender claramente los fenómenos de polarización y magnetización en la materia cuando ésta se encuentra en reposo y en movimiento.

El segundo, y eje principal del trabajo, es proponer un método para encontrar la ecuación que relaciona un medio magnetizado en movimiento con un medio polarizado, utilizando sólo resultados de la teoría electromagnética clásica desde un enfoque no relativista. El método se basa en el uso de los potenciales producidos por fuentes en movimiento; además queremos mostrar que este método tiene una ventaja sobre el propuesto previamente por Oleg D. Jefimenko: su generalidad, pues no depende de algún modelo particular, como el de Jefimenko.

En el capítulo 1 estudiamos las principales características de los medios cuando se encuentran dentro de un campo eléctrico ó magnético, definimos conceptos importantes como la densidad de polarización \mathbf{P} y de magnetización \mathbf{M} . Estos conceptos juegan un papel importante en la elaboración de un modelo para medios en presencia de campos electromagnéticos.

También estudiamos los diferentes tipos de densidades de carga y corriente asociados con medios polarizados y magnetizados en reposo. Los resultados obtenidos los usamos para presentar cada una de las ecuaciones de Maxwell, en forma diferencial, para medios materiales en reposo en términos de los vectores auxiliares \mathbf{D} y \mathbf{H} .

En el capítulo 2, obtenemos las ecuaciones de Maxwell para medios en movimiento utilizando el concepto de la derivada convectiva. Debido a la importancia que tiene este concepto para establecer las ecuaciones de Maxwell para medios en movimiento, parte importante de este capítulo es la deducción de ésta derivada.

Cuando analizamos la ley de Ampere-Maxwell, encontramos que debido a la modificación de la densidad de corriente total J para medios en movimiento, de esta ley se obtiene un resultado fundamental para nuestro trabajo, un medio polarizado moviéndose con velocidad constante es equivalente a un medio magnetizado, apoyándonos en este resultado luego obtuvimos, de forma cualitativa, la ecuación que relaciona a medios magnetizados en movimiento con medios polarizados, y señalamos las diferentes simetrías que hay entre campos eléctricos y magnéticos en la teoría.

Por su parte en el capítulo 3, debido a que la ecuación propuesta antes mencionada no se obtiene directamente de las ecuaciones de Maxwell, construimos la estructura teórica necesaria para poder demostrarla. Encontramos primero la solución general a las ecuaciones de Maxwell : los potenciales retardados, analizamos luego el concepto de tiempo retardado, puesto que es fundamental para resolver el problema planteado.

De igual manera, obtuvimos los potenciales retardados para una carga puntual con movimiento arbitrario, esto es, los potenciales de Liénard-Wiechert, para después analizar el potencial escalar para una carga puntual que se mueve a velocidad constante.

Finalmente en el capítulo 4, exponemos el método por el cual demostramos que la ecuación propuesta en el capítulo 2 para medios magnetizados en movimiento efectivamente se satisface. Ya que esta relación fue encontrada por Jefimenko por medio de un caso particular, en este capítulo también presentamos su método.

Con el fin de ilustrar la importancia de los resultados obtenidos, analizamos un ejemplo mediante el método propuesto.

Por último mostramos la solución al problema desde una perspectiva relativista, verificando así que nuestros resultados son correctos, y exhibiendo que la teoría electromagnética clásica es una teoría plenamente relativista.

Capítulo 1

Ecuaciones de Maxwell en medios materiales

Antes de escribir las ecuaciones de Maxwell en medios materiales necesitamos estudiar el comportamiento de estos en presencia de campos eléctricos y magnéticos.

1.1. Comportamiento de un medio debido al campo eléctrico E

En el siglo XIX aún no se tenía desarrollada una teoría atómica de la materia, es decir, todavía se tenía una visión macroscópica de ella y se le consideraba como una substancia sin estructura alguna, sin embargo, se logró tener una teoría que podía caracterizar de una manera simple el comportamiento eléctrico de la misma, pues al tratar de determinar cuanto vale el campo eléctrico en un punto exterior de diferentes medios materiales cuando estos se encontraban dentro de un campo eléctrico, lo que hallaron fue que lo único que necesitaban para poder describir adecuadamente tales efectos era introducir un factor característico del material llamado susceptibilidad eléctrica, que suele denotarse por χ_e .

Bajo esta visión, no podemos explicarnos de forma completa lo que pasa en el interior de un medio material cuando éste se encuentra en presencia de un campo eléctrico, por esta razón nos es útil modelar a la materia desde un punto de vista microscópico o atómico.

Como no nos interesa estudiar los efectos cuánticos en la materia, vamos a adoptar un modelo simple, podríamos decir que hasta ingenuo, que la describa, pero con el cual sea posible entender el comportamiento eléctrico de una gran variedad de medios materiales,

por lo que consideraremos a la materia como un conjunto de moléculas o átomos¹ neutros estables formados por partículas cargadas.

Por sus propiedades eléctricas los materiales se clasifican en dos tipos: *conductores* y *dieléctricos*.

Los conductores son aquellos que contienen un gran número de portadores de carga que se mueven con facilidad dentro del material, por esta razón, a estas cargas las denominamos *cargas libres*, las cuales en presencia de un campo eléctrico, se mueven, en promedio, en dirección contraria a él.

En los dieléctricos la mayoría de sus portadores de carga están fuertemente ligados a sus moléculas de manera que no hay posibilidad de que haya desplazamiento de estos en el material mas allá de la molécula de la cual forman parte. Estos materiales son por lo tanto no conductores. A las cargas que lo forman les llamamos *cargas ligadas*.

Nos interesa conocer el comportamiento de las cargas ligadas dentro de un medio cuando éstas se encuentran en presencia de un campo eléctrico, por lo que estudiaremos sólo a los medios dieléctricos².

1.1.1. Polarización de un dieléctrico.

Si un dieléctrico se encuentra en presencia de un campo eléctrico externo, sus cargas experimentan una fuerza debida al campo, la cual produce pequeños desplazamientos de las cargas, de manera que las cargas negativas se separan de las positivas, dando como resultado una nueva distribución de carga en las moléculas que conforman al medio, en esta nueva distribución las cargas positivas se alinean en dirección del campo eléctrico neto \mathbf{E} , producido tanto por el medio como por el campo externo, cuando esto pasa decimos que el material se ha polarizado.

Cuando el medio polarizado es neutro, la nueva distribución de carga que tenemos dentro de él la podemos representar como si estuviera formada sólo por pequeños dipolos inducidos, por lo que lo único que necesitamos considerar para describirla totalmente son sus momentos dipolares.

Los dieléctricos se clasifican en dos grupos principales: *dieléctricos no polares* y *dieléctricos polares*.

En los dieléctricos no polares, en ausencia de campo eléctrico, sus cargas se encuentran distribuidas de tal forma que tienen momento dipolar igual a cero.

¹ En este trabajo se usara de forma indistinta átomos o moléculas, así como también los consideraremos medios isotrópicos.

²En todo el análisis supondremos que es un medio dieléctrico ideal, es decir, aquel que no tiene cargas libres

En los dieléctricos polares, debido a su estructura interna, tenemos que algunas de sus moléculas ya tienen una distribución de carga positiva y negativa separadas, de modo que ya existe un momento dipolar eléctrico, tales moléculas reciben el nombre de moléculas polares y a su momento dipolar se le llama momento dipolar permanente, un ejemplo de este tipo de medios es el agua; en este tipo de dieléctrico, los dipolos están orientados al azar, y en presencia de un campo eléctrico tienden a alinearse con éste.

Otro tipo de medio dieléctrico es aquel en donde sus momentos dipolares se encuentran alineados aún en ausencia de campo eléctrico, a estos materiales se les denomina *electretos*, un ejemplo de este tipo de medio material sería la cera.

1.1.2. Densidad de polarización \mathbf{P}

Ahora sabemos que en un medio neutro que se ha polarizado, la distribución de carga de cada una de sus moléculas la podemos describir por su momento dipolar. Definamos entonces el momento dipolar por molécula como

$$\mathbf{p}_m = \int_{mol} \mathbf{r}' dq. \quad (1.1)$$

Si tomamos un pequeño elemento de volumen ΔV dentro del medio (alrededor de la posición \mathbf{r}'), pero aún grande en comparación con el tamaño de las moléculas (hay muchísimas dentro de él), lo que observamos es que podemos reemplazar a todos los momentos dipolares asociados a las moléculas que se encuentran contenidas en él por uno solo, el cual está dado por

$$\Delta \mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{m_i}. \quad (1.2)$$

Como este momento dipolar depende del tamaño del volumen, conviene definir el momento dipolar por unidad de volumen

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{m_i}, \quad (1.3)$$

por lo tanto, desde un punto de vista macroscópico, si $\Delta V \rightarrow 0$, es decir, si las dimensiones del volumen se hacen cada vez más pequeñas en comparación con la distancia desde donde estamos observando la polarización, podemos reemplazar a esta suma de momentos dipolares por elemento de volumen por una función $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$, la cual es una función que caracteriza la

polarización de un dieléctrico en cada punto r' , a esta función vectorial se le conoce como densidad de polarización \mathbf{P} ³.

Se ha mencionado que la polarización de un dieléctrico ocurre como respuesta al campo eléctrico en el medio, por lo que es de esperarse que exista una relación entre \mathbf{P} y \mathbf{E} . Como esta es una descripción del medio, sabemos que el grado de la polarización depende no sólo del campo aplicado, sino de las propiedades de las moléculas que forman el material.

Por lo que tenemos que, desde un punto de vista macroscópico, el comportamiento de el material está completamente determinado por una relación que se encuentra en forma experimental, llamada *ecuación constitutiva* $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$, donde \mathbf{E} es el campo neto.

Si el material es isótropo y lineal, la ecuación que se propone para medios polarizados es

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (1.4)$$

donde χ_e es la susceptibilidad eléctrica del material. [Reitz1996]

1.1.3. Potencial eléctrico debido a la materia polarizada

Nos interesa el φ en el exterior del dieléctrico, por lo que basta con calcular el potencial debido a esta nueva distribución de carga dipolar en puntos distantes a él [Figura 1.1].

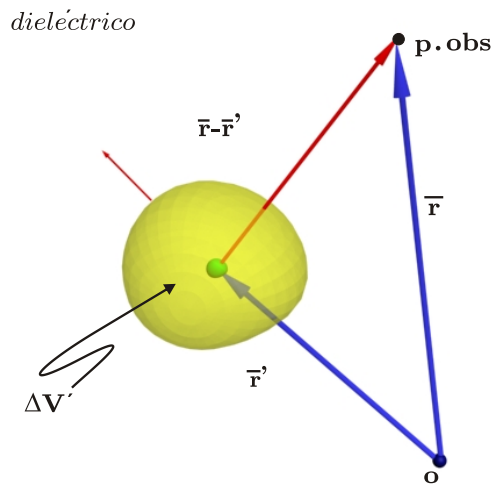


Fig. 1.1 Vectores que intervienen en el cálculo del potencial φ de un medio polarizado

³ \mathbf{P} tiene unidades de carga por unidad de área

Tomamos un momento dipolar $d\mathbf{p}'$ que hay en el elemento de volumen dv' , es decir

$$d\mathbf{p}' = \mathbf{P}(\mathbf{r}') dv'. \quad (1.5)$$

La contribución de $d\mathbf{p}'$ al potencial φ en el punto \mathbf{r} es

$$d\varphi = \frac{d\mathbf{p}' \cdot \hat{\mathbf{R}}}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{R}}}{4\pi\epsilon_0 R^2} dv', \quad (1.6)$$

donde $|\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ y $\hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}$.

La ec.(1.6) se define como el potencial escalar de un dipolo eléctrico, la cual se obtiene por medio de la expansión multipolar del potencial escalar φ [ver Apéndice A].

Integrando sobre todo el volumen V' , obtenemos

$$\varphi = \int_{V'} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{R}}}{4\pi\epsilon_0 R^2} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dv', \quad (1.7)$$

y como

$$\mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) + \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{R} \right) \quad (1.8)$$

entonces, la ec.(1.7) es

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} -\frac{(\nabla' \cdot \mathbf{P})}{R} dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{R} \right) dv'. \quad (1.9)$$

Finalmente, usando el Teorema de Gauss en la segunda integral, resulta

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} -\frac{(\nabla' \cdot \mathbf{P})}{R} dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{s'} \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{R} da'. \quad (1.10)$$

Por otro lado la ecuación para el potencial $\varphi(\mathbf{r})$, en términos de la densidad volumétrica de carga ρ y la densidad superficial de carga σ [Wangness2001] es

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{s'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{R} da'. \quad (1.11)$$

Si comparamos la ec.(1.10) con la ec.(1.11), conviene definir dos nuevas cantidades

$$\rho_{lig} = - (\nabla \cdot \mathbf{P}), \quad (1.12)$$

conocida como la densidad volumétrica de carga ligada y

$$\sigma_{lig} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.13)$$

la densidad superficial de carga ligada.

La interpretación de la ecuaciones (1.12) y (1.13) resulta sencilla: el potencial de una distribución de dipolos inducidos en el material, es el mismo que el de una distribución densidad de carga volumétrica y una densidad de carga superficial.

1.2. Comportamiento de un medio debido al campo magnético \mathbf{B} .

Al igual que en el caso eléctrico, buscamos explicar el fenómeno de la magnetización en la materia desde un punto de vista clásico, por esta razón, utilizaremos el modelo propuesto por Ampère, quien sugiere que debido al movimiento de cargas que hay dentro del material se crean pequeñas corrientes atómicas, las cuales podemos ver como pequeños circuitos cada uno confinado a un átomo. Estas corrientes atómicas aunque no dan origen a un transporte de carga neto dentro del medio, pueden dar origen a campos magnéticos, por lo que a cada uno de estos circuitos lo podemos caracterizar por medio de dipolos magnéticos.

1.2.1. Magnetización de un medio material.

Si tenemos un campo magnético \mathbf{B} inducido, y los dipolos magnéticos del medio se orientan en la misma dirección, entonces decimos que el material se ha magnetizado.

A los materiales magnetizados en donde sus dipolos magnéticos se han alineado en sentido contrario al campo magnético \mathbf{B} , se les conoce como *materiales diamagnéticos*.

Existen otro tipo de materiales en donde los dipolos se alinean en el mismo sentido del campo, a estos los conocemos como *materiales paramagnéticos*.

En la naturaleza también encontramos materiales en donde aún en ausencia de campo magnético \mathbf{B} , sus dipolos ya se encuentran alineados, estos son conocidos como *imanes permanentes*.

1.2.2. Densidad de magnetización \mathbf{M}

La densidad de magnetización \mathbf{M} la podemos definir de la misma forma que como lo hicimos para la densidad de polarización eléctrica \mathbf{P} .

En este caso no tenemos un momento monopolar magnético, por lo que sólo habrá momentos dipolares magnéticos asociados a la materia magnetizada.

Definamos entonces el momento dipolar magnético \mathbf{m} por molécula como

$$\mathbf{m}_{mol} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J} dv'. \quad (1.14)$$

Si tomamos un pequeño elemento de volumen ΔV dentro del medio, pero aún grande en comparación con el tamaño de las moléculas, tenemos que el momento dipolar magnético de las moléculas que están contenidas dentro de este volumen es

$$\Delta \mathbf{m} = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_{mol_i}, \quad (1.15)$$

este momento magnético depende del tamaño del volumen, al igual que en el caso de los materiales dieléctricos, definimos el momento dipolar magnético por unidad de volumen como

$$\mathbf{M} = \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_{mol_i}, \quad (1.16)$$

por lo tanto, desde un punto de vista macroscópico, si $\Delta V \rightarrow 0$, entonces tenemos que $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ caracteriza la magnetización del medio en cada punto r' , a esta función vectorial se le conoce como densidad de magnetización \mathbf{M}^4 .

La magnetización de los medios materiales también ocurre como respuesta a los campos magnéticos que se encuentran dentro del medio, por lo que desde un punto de vista macroscópico tenemos que la relación funcional $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$ que se obtiene en forma experimental para medios magnetizados isotropicos homogéneos lineales está dada por

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (1.17)$$

en donde χ_m es la susceptibilidad magnética. [Reitz1996]

⁴ Sus unidades son Ampère por unidad de longitud

1.2.3. Potencial magnético debido a la materia magnetizada.

Análogamente a lo que se hizo para obtener el potencial de un medio polarizado, obtenemos el potencial vectorial \mathbf{A} para un medio magnetizado [Figura 1.2].

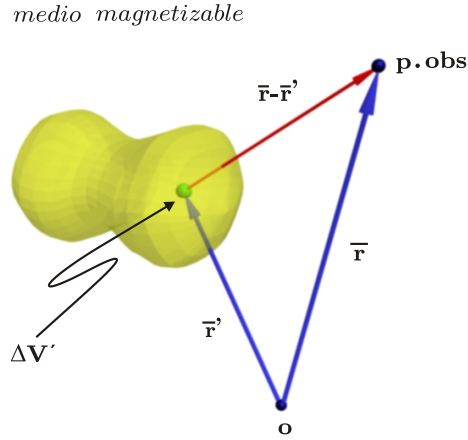


Fig.1.2 Vectores involucrados en la expresión del potencial \mathbf{A} para un medio magnetizado.

El momento dipolar magnético \mathbf{m} en el volumen dv' está dado por

$$d\mathbf{m}' = \mathbf{M}(\mathbf{r}') dv', \quad (1.18)$$

donde su contribución al potencial se obtiene de

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{m}' \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} dv'. \quad (1.19)$$

Integrando sobre todo el volumen V' ,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dv', \quad (1.20)$$

y usando la identidad $\nabla \times (\lambda \mathbf{a}) = \lambda(\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \times (\nabla \lambda)$, podemos reescribir la ec.(1.20) como

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{R} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[-\nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}}{R} \right) \right] dv'. \quad (1.21)$$

Si aplicamos el teorema de Gauss al segundo término de la integral resulta que

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{R} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{s'} \frac{\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}}{R} da'. \quad (1.22)$$

Si comparamos la ec.(1.22) con el potencial vectorial dado por, [Wangsness2001]

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{s'} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{r}')}{R} da'. \quad (1.23)$$

Podemos decir que cualquier distribución volumétrica de dipolos magnéticos es equivalente a tener una densidad volumétrica de corriente \mathbf{J}_m y una densidad superficial de corriente \mathbf{k}_m definidas como

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}. \quad (1.24)$$

$$\mathbf{k}_m = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.25)$$

Tenemos que para el caso de los medios magnetizados, también es posible encontrar un potencial escalar φ_m^* , el cual es de gran utilidad cuando el medio tiene magnetización \mathbf{M} y su densidad de corriente es igual a cero. Este potencial está dado por

$$\varphi_m^* = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} dv', \quad (1.26)$$

donde podemos usar que

$$\mathbf{M} \cdot \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} = \mathbf{M} \cdot \nabla' \cdot \left(\frac{1}{R} \right) = \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{M}}{R} \right) - \frac{1}{R} \nabla' \cdot \mathbf{M}. \quad (1.27)$$

Al sustituir en la ec.(1.26) tenemos

$$\varphi_m^* = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{M}}{R} \right) dv' - \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}}{R} dv'. \quad (1.28)$$

Usando el teorema de Gauss en la primera integral, obtenemos

$$\varphi_m^* = \frac{1}{4\pi} \oint_{s'} \frac{\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{R} da' - \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}}{R} dv'. \quad (1.29)$$

Por analogía con el potencial escalar φ de un dieléctrico polarizado, definimos estas dos cantidades

$$\rho_m = -\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}'). \quad (1.30)$$

$$\sigma_m = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.31)$$

Observamos que estas ecuaciones desempeñan la misma función que sus análogas eléctricas, es decir, podemos considerar a estas densidades como si fueran "polos magnéticos" debidos a cargas magnéticas ficticias, los cuales serían las fuentes del campo magnético.

1.3. Ecuaciones de Maxwell en medios materiales en reposo

Como los campos eléctrico y magnético quedan determinados por todas sus fuentes, antes de escribir las ecuaciones de Maxwell en medios materiales, necesitamos enlistar todas las fuentes que dan origen a estos campos dentro de un medio material.

Por lo estudiado anteriormente, sabemos que las fuentes de campo eléctrico \mathbf{E} en un medio material pueden ser de dos tipos:

- a) La densidad de carga libre ρ_f debida a las cargas libres del medio.
- b) La densidad de carga de polarización ρ_{lig} debida a las cargas ligadas que se encuentran en el material.

Por otro lado, sabemos que las fuentes del campo magnético \mathbf{B} son todas las corrientes que se producen por el movimiento de las cargas en el medio, incluidas aquellas en donde este movimiento no implique un transporte neto de carga, por lo que podemos dividir las en dos categorías: las producidas por el movimiento de cargas libres \mathbf{J}_f y las que están asociadas al movimiento de las cargas ligadas en el medio.

Las corrientes debidas las cargas ligadas son de dos tipos:

- a) Las corrientes de magnetización \mathbf{J}_m ; asociadas con el momento magnético del medio, estas son las pequeñas corrientes consideradas por Ampère. [Sección 1.2.1]
- b) Las corrientes de polarización \mathbf{J}_p ; debidas al cambio de la polarización en el tiempo.

1.3.1. Ecuaciones de Maxwell con los vectores de polarización \mathbf{P} y de magnetización \mathbf{M} .

Partiendo de las ecuaciones de Maxwell en el vacío y lo mencionado antes , construiremos cada una de las ecuaciones de Maxwell en medios materiales.

Para obtener la **Ley de Gauss** en medios materiales utilizamos las siguientes ecuaciones

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{total}. \quad (1.32)$$

donde

$$\rho_{total} = \rho_f + \rho_{lig} \quad (1.33)$$

y

$$\rho_{lig} = - (\nabla \cdot \mathbf{P}) \quad (1.34)$$

sustituyendo en la ec.(1.32) obtenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} [\rho_f - (\nabla \cdot \mathbf{P})]. \quad (1.35)$$

Como en la **Ley de Gauss magnética** no intervienen la densidad de carga o la corriente, ésta no cambia, esto es,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.36)$$

Ley de Ampère-Maxwell

El procedimiento es análogo al que se siguió para la Ley de Gauss, es decir,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{total} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.37)$$

donde

$$\mathbf{J}_{total} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_m \quad (1.38)$$

con la corriente de polarización

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (1.39)$$

y la corriente de magnetización

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}, \quad (1.40)$$

en donde \mathbf{J}_f es la corriente libre.

Ahora si sustituimos en la ecuación (1.37), tenemos que la ley de Ampère-Maxwell se expresa como

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left[\mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right] + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.41)$$

Ley de Faraday

La ley de Faraday se expresa como

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (1.42)$$

donde el flujo magnético Φ está dado por

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.43)$$

y la fuerza electromotriz, ε_{ind} inducida se define como

$$\varepsilon_{ind} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.44)$$

La ec.(1.42) también la podemos escribir como

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (1.45)$$

Si el medio se encuentra en reposo, es decir, la curva C asociada con el circuito no varía ni en forma ni en tamaño, entonces la única razón por lo cual el flujo está variando se debe a que el campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}', t)$ varía en el tiempo, esto es,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}. \quad (1.46)$$

Usando el teorema de Stokes, tenemos

$$\int_S \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (1.47)$$

y como es válida para cualquier superficie S , entonces

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.48)$$

que es la Ley de Faraday en forma diferencial.

1.3.2. Ecuaciones de Maxwell en términos de los vectores \mathbf{D} y \mathbf{H} .

Si tomamos la ecuación (1.35) y reagrupamos términos, obtenemos

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f, \quad (1.49)$$

observamos que en el lado derecho únicamente aparece la densidad de la carga libre, por lo que podemos definir un nuevo vector auxiliar \mathbf{D} , esto es,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (1.50)$$

Este vector tiene como característica principal que su divergencia se relaciona únicamente con la densidad de carga libre.

Al igual que en el caso eléctrico, si tomamos la ecuación (1.41) reagrupando, tenemos

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_f + \frac{\partial (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}{\partial t}, \quad (1.51)$$

así

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.52)$$

Tenemos que del lado derecho de la ecuación aparece sólo la densidad de corriente libre, en este caso también nos conviene definir un nuevo vector auxiliar \mathbf{H} como

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}. \quad (1.53)$$

Lo más significativo de este vector, es que su rotacional está asociado con la densidad de corriente libre del material.

A los vectores \mathbf{D} y \mathbf{H} , se les conoce históricamente como desplazamiento eléctrico e intensidad de campo magnético respectivamente, para mayor comodidad seguiremos la propuesta de Purcell [Purcell1980], y los llamaremos simplemente vectores auxiliares, por otro lado llamaremos campo magnético al vector \mathbf{B} .

Finalmente, las ecuaciones de Maxwell en forma general son:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}\tag{1.54}$$

Esta es la forma más común en que se expresan las ecuaciones de Maxwell, sin embargo, en el desarrollo del trabajo usaremos las ecuaciones en términos de \mathbf{P} y \mathbf{M} .

Capítulo 2

Ecuaciones de Maxwell para medios materiales en movimiento

En el capítulo anterior describimos los efectos de polarización y magnetización que se originan cuando se introduce un medio material dentro de campos eléctricos o magnéticos, además se obtuvieron las ecuaciones de Maxwell en estos medios cuando se encuentran en reposo.

Ahora estamos interesados en analizar las modificaciones que deben hacerse a las ecuaciones de Maxwell para que sean válidas cuando estamos tratando con un medio material en movimiento.

2.1. Ecuaciones de Maxwell para medios en movimiento.

Si consideramos que el medio se mueve con velocidad constante \mathbf{u} , es necesario tomar en cuenta que las cantidades vectoriales que describen los campos electromagnéticos del medio varían en el tiempo, tanto explícitamente como a través de $\mathbf{r}(t)$.

Por esta razón, es conveniente introducir el concepto de *derivada convectiva o total*, la cual toma en cuenta este tipo de variaciones, y es válida para cualquier campo vectorial \mathbf{F} .

2.1.1. Derivada convectiva o total

Desarrollaremos paso a paso la deducción de esta derivada. Definimos el flujo a través de una superficie S como

$$\Phi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.1)$$

en donde el cambio respecto al tiempo está dado por

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (2.2)$$

Buscamos expresar el cambio respecto al tiempo de la integral de superficie de $\mathbf{F}(\mathbf{R}, t)$ cuando la superficie S se mueve con velocidad \mathbf{u} , por lo que consideramos a la superficie en dos tiempos diferentes t y $t + \Delta t$, entonces la ec.(2.2) la podemos escribir como

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta t} \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{F}_{t+\Delta t} \cdot d\mathbf{s} - \int_{S(t)} \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} \right]. \quad (2.3)$$

Tenemos que la superficie cambia en un pequeño intervalo de tiempo Δt , si desarrollamos en serie a $\mathbf{F}_{t+\Delta t}$ con respecto a t , resulta que

$$\mathbf{F}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_t + \frac{\partial \mathbf{F}_t}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_t}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + \dots \quad (2.4)$$

Si consideramos sólo los términos a primer orden, al sustituir en la ec.(2.3) obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S_{t+\Delta t}} \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} + \int_{S_{t+\Delta t}} \frac{\partial \mathbf{F}_t}{\partial t} \Delta t \cdot d\mathbf{s} - \int_{S_t} \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} \right], \quad (2.5)$$

de aquí, se sigue que

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_t} \frac{\partial \mathbf{F}_t}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S_{t+\Delta t}} \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} - \int_{S_t} \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} \right], \quad (2.6)$$

con esto logramos tener a la superficie F evaluada al tiempo t .

Si ahora construimos la superficie cerrada $S_{cerrada}$ [Figura 2.1]

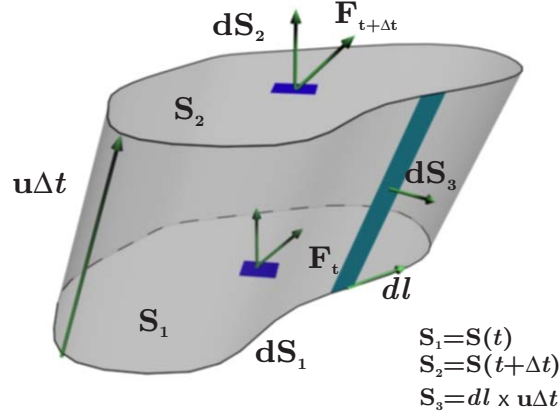


Fig.2.1 Superficie en movimiento en el tiempo t y $t + \Delta t$.

Tenemos que $S_{cerrada} = S_1 + S_2 + S_3$, en donde, S_3 es la superficie lateral formada por el desplazamiento del vector $\mathbf{u}\Delta t$.

Notemos que el segundo término de lado derecho de la ec.(2.6) se puede escribir como

$$\int_{S_2} \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} - \int_{S_1} \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} = \oint_{S_{cerrada}} \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} - \int_{S_3} \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s}_3. \quad (2.7)$$

Si aplicamos el teorema de Gauss al volumen encerrado por $S_{cerrada}$, obtenemos que

$$\oint_{S_{cerrada}} \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F}_t dv \quad (2.8)$$

y como $d\mathbf{s}_3 = d\mathbf{l} \times \mathbf{u}\Delta t$ y $dv = \mathbf{u}\Delta t \cdot d\mathbf{s}$, entonces

$$\int_{S_2} \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} - \int_{S_1} \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} \nabla \cdot \mathbf{F}_t (\mathbf{u}\Delta t \cdot d\mathbf{s}) - \oint_{C(t)} \mathbf{F}_t \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{u}\Delta t) \quad (2.9)$$

y usando la identidad $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$ en el segundo término, resulta que

$$\int_{S_2} \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} - \int_{S_1} \mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s} = \Delta t \int_{S_1} \nabla \cdot \mathbf{F}_t (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}) + \Delta t \oint_{C(t)} (\mathbf{F}_t \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.10)$$

Utilizando el teorema de Stokes y sustituyendo en la ec.(2.6), encontramos que

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{F}_t}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\Delta t \int_{S_1} (\nabla \cdot \mathbf{F}_t) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + \Delta t \int_{S_1} \nabla \times (\mathbf{F}_t \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{s} \right]. \quad (2.11)$$

Si ahora tomamos el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, resulta

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \int_{S(t)} \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{s} + \int_{S(t)} (\nabla \cdot \mathbf{F}) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.12)$$

esto es,

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{F}) \mathbf{u} \right] \cdot d\mathbf{s}. \quad (2.13)$$

Entonces, podemos definir

$$\frac{D\mathbf{F}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{F}) \mathbf{u} \quad (2.14)$$

como la *derivada convectiva*.

Por lo tanto, el cambio del flujo Φ cuando la superficie \mathcal{S} se mueve, está dado por

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{D\mathbf{F}}{Dt} \cdot d\mathbf{s}. \quad (2.15)$$

Apoyándonos en este resultado vamos a analizar cada una de las ecuaciones de Maxwell.

2.1.2. Ley de Faraday

Cuando el medio se encuentra en movimiento, tenemos que considerar que la variación del flujo puede depender tanto del cambio del campo magnético \mathbf{B} en el tiempo, así como también del movimiento del circuito \mathcal{C} por el cual atraviesa este campo.

Es por ésta razón que para obtener la Ley de Faraday para medios en movimiento necesitamos encontrar

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.16)$$

por lo que en lugar de la derivada ordinaria $\frac{d}{dt}$ debemos usar la derivada convectiva $\frac{D}{Dt}$, entonces por la ec.(2.15) tenemos que,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{D\mathbf{B}}{Dt} \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.17)$$

y puesto que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, entonces se satisface

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{u}) \quad (2.18)$$

sustituyendo ésta ecuación en la ec.(2.17), se obtiene que

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{s}. \quad (2.19)$$

Por otro lado, sabemos que la ley de Faraday la podemos expresar como

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (2.20)$$

Debemos tener presente que en esta ecuación hay dos sistemas de referencia involucrados, el campo eléctrico E' , el cual está medido en el sistema en movimiento (el circuito C), mientras que $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ está medido en el sistema en reposo (laboratorio).

Si ahora sustituimos la ec.(2.19) en la ec.(2.20) y aplicando el teorema de Stokes, obtenemos

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}') \cdot d\mathbf{s} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \int_S \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.21)$$

que puede reescribirse como

$$\int_S \nabla \times (\mathbf{E}' - \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.22)$$

de manera que

$$\nabla \times (\mathbf{E}' - \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.23)$$

Esta ecuación es la Ley de Faraday en forma diferencial para medios en movimiento, en donde ahora tenemos que $(\mathbf{E}' - \mathbf{u} \times \mathbf{B})$ y \mathbf{u} , \mathbf{B} y $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, están medidos en el sistema en reposo (laboratorio).

Esto es, si en el sistema en reposo tenemos una carga q con una velocidad \mathbf{u} , esta carga experimenta una fuerza \mathbf{F} debida a los campos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} .

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.24)$$

donde ambos campos se miden en el sistema en reposo.

Si ahora nos colocamos en el sistema en movimiento, en donde q se encuentra en reposo, la única fuerza que actúa sobre ella es debida al campo eléctrico \mathbf{E}' , es decir,

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}', \quad (2.25)$$

y como los sistemas son inerciales, se debe cumplir que $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$, entonces

$$q\mathbf{E}' = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (2.26)$$

por lo que resulta

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (2.27)$$

Regresando a la ecuación de Faraday ec.(2.23), concluimos que puede expresarse como

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.28)$$

Este resultado indica que la ley de Faraday en forma diferencial tiene una forma independiente del movimiento del medio.

2.1.3. Ley de Ampère-Maxwell

Partimos de la Ley de Ampère-Maxwell la cual se puede expresar como

$$\oint_C \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}_T \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.29)$$

donde la densidad de corriente total \mathbf{J}_T está dada por

$$\mathbf{J}_T = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t}, \quad (2.30)$$

en donde es importante tomar en cuenta que el campo magnético \mathbf{B}' y el campo eléctrico \mathbf{E}' se miden en el sistema en movimiento (circuito C).

Sustituyendo en la ec(2.29), obtenemos

$$\oint_C \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.31)$$

y como necesitamos determinar todas las corrientes que se generan debido al movimiento de las cargas, así como también al movimiento del medio, utilizaremos la derivada convectiva, esto es,

$$\oint_C \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}_f + \frac{D\mathbf{P}}{Dt} + \nabla \times \mathbf{M} + \epsilon_0 \frac{D\mathbf{E}'}{Dt} \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.32)$$

la cual se puede escribir como

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{P})\mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{M} \\ + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times (\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{u}) + (\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Si consideramos que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} [\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}], \quad (2.34)$$

entonces,

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}_f + \mathbf{u} \rho_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}) \\ + \nabla \times \mathbf{M} + \nabla \times (\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{u}) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Utilizando el teorema de Stokes, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_S \nabla \times \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}_f + \mathbf{u} \rho_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}) \\ + \nabla \times \mathbf{M} + \nabla \times (\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{u}) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (2.36)$$

y reagrupando términos, encontramos que la Ley de Ampère-Maxwell se puede expresar de la siguiente forma

$$\int_S \nabla \times (\mathbf{B}' - \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{u} - \mu_0 \mathbf{M}) = \mu_0 \int_S \mathbf{J}_f + \mathbf{u} \rho_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}), \quad (2.37)$$

de manera que

$$\nabla \times (\mathbf{B}' + \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{u} \times \mathbf{E} - \mu_0 \mathbf{M}) = \mu_0 \left[\mathbf{J}_f + \mathbf{u} \rho_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right], \quad (2.38)$$

y si consideramos que

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' + \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{u} \times \mathbf{E} \quad (2.39)$$

entonces, encontramos que \mathbf{B} es el campo medido en el sistema de en reposo (laboratorio)¹, por lo que concluimos que la Ley de Ampère-Maxwell puede expresarse como

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left[\mathbf{J}_f + \mathbf{u} \rho_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}) + \nabla \times \mathbf{M} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right]. \quad (2.40)$$

Vale la pena mencionar el tratamiento que hace Wolfgang K.H. Panofsky [Panofsky2005] de la ley de Ampère-Maxwell en forma diferencial, por la sencillez con la que se analiza ésta.

2.1.4. Análisis de Ley de Ampère-Maxwell forma diferencial

Como en la ley Ampère-Maxwell interviene la densidad de corriente total del medio, necesitamos determinar todas las corrientes debidas al movimiento de las cargas libres y ligadas, así como también las corrientes generadas debido al movimiento del medio mismo.

Por lo que la densidad de corriente total está constituida por las siguientes contribuciones:

- 1) La densidad de corriente libre o corriente de conducción \mathbf{J}_f que se debe al movimiento de las cargas libres en el medio.
- 2) La densidad de corriente debida al movimiento de todas las cargas que constituyen el medio, llamada corriente convectiva \mathbf{J}_c

$$\mathbf{J}_c = \mathbf{u} (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}) \quad (2.41)$$

¹Este resultado se hace más claro cuando estudiamos las transformaciones de Lorentz [sección 4.4]

3) La densidad de corriente de polarización que incluye tanto a la corriente producida por el cambio de la polarización en el tiempo, como a la corriente debida al movimiento del medio, esta corriente está dada, en nuestro caso, por la derivada convectiva de \mathbf{P} , esto es,

$$\mathbf{J}_p = \frac{D\mathbf{P}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{P}) \mathbf{u} \quad (2.42)$$

4) La corriente de magnetización

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (2.43)$$

5) La corriente de desplazamiento en el vacío.

$$\mathbf{J}_{dv} = \epsilon_0 \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.44)$$

Estas contribuciones, (1)-(5), al sustituirlas en la Ley de Ampère en forma diferencial resulta

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left[\mathbf{J}_f + \mathbf{u} (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}) + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{P}) \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{M} + \epsilon_0 \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \right] \quad (2.45)$$

que puede expresarse como

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left[\mathbf{J}_f + \mathbf{u} \rho_f + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}) + \nabla \times \mathbf{M} + \epsilon_0 \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \right] \quad (2.46)$$

Puesto que las ecuaciones que tienen que ver con la divergencia de los campos no involucran al tiempo ni a las corrientes, consideramos que éstas no se modifican debido al movimiento del medio.

Observamos que para medios en movimiento, sólo se hizo una modificación en la densidad de corriente total que produce el campo magnético \mathbf{B} , por lo que las ecuaciones de Maxwell para medios en movimiento quedan de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mu_0 \left[\mathbf{J}_f + \mathbf{u} \rho_f + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}) + \epsilon_0 \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \right]$$

Las cuales serán la base para nuestro análisis posterior.

2.2. Simetría entre dieléctricos y medios magnetizados en movimiento

Si tenemos un dieléctrico polarizado en movimiento, el cual no contiene cargas ni corrientes libres, las ecuaciones de Maxwell obtenidas anteriormente se pueden expresar como

a) $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$

b) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

c) $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

d) $\nabla \times [\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{P} \times \mathbf{u}] = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

2.2.1. Dieléctrico polarizado en movimiento

Si analizamos la ley de Ampère-Maxwell, para este medio polarizado (sin cargas ni corrientes libres), encontramos una relación interesante, la cual nos indica que cuando tenemos un dieléctrico polarizado en movimiento, este equivale a tener un medio magnetizado, con densidad de magnetización \mathbf{M} dada por

$$\mathbf{M}_{eq} = \mathbf{P} \times \mathbf{u}. \quad (2.47)$$

Este comportamiento del medio es fácil de entender, sabemos que la polarización \mathbf{P} del medio se debe a la suma de todos los momentos dipolares asociados a los dipolos que contiene, si suponemos que el medio se mueve con una velocidad constante \mathbf{u} , ortogonal a \mathbf{P} , como se muestra en la Figura 2.2.

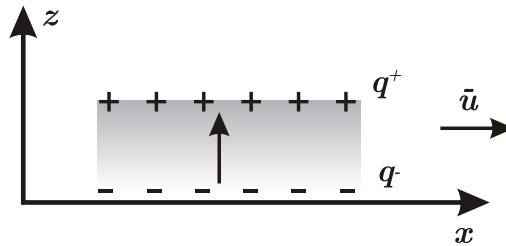


Fig.2.2 Medio polarizado con velocidad constante u

Las cargas positivas, dan lugar a una corriente en la dirección en la que se mueve el medio y las cargas negativas van a originar una corriente en dirección contraria al movimiento del medio, por lo que estas cargas en movimiento constituyen un circuito con corriente \mathbf{I} , que por supuesto, va a generar una magnetización \mathbf{M} ortogonal a este circuito. Este efecto ha sido discutido por varios autores como: Roentgen, Eichenwald, entre otros [Panofsky2005].

2.2.2. Medio material magnetizado en movimiento

Si ahora tuviéramos un medio magnetizado en movimiento, es inevitable preguntarnos: ¿este medio equivaldría a tener un medio polarizado? Si graficamos al conjunto de vectores que representa el comportamiento del medio polarizado en movimiento [Figura 2.3], tenemos

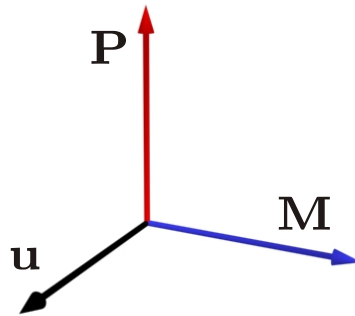


Fig.2.3 Vectores \mathbf{M} , \mathbf{P} , \mathbf{u}

Es interesante señalar que al observar este conjunto de vectores, de alguna manera podríamos pensar que \mathbf{P} es originado por \mathbf{M} en movimiento, mas aún, que \mathbf{P} es proporcional al producto vectorial $\mathbf{M} \times \mathbf{u}$.

Entonces si tenemos un medio magnetizado que se mueve con velocidad \mathbf{u} constante, éste generaría un medio polarizado en donde su polarización estaría dada por

$$\mathbf{P}_{eq} = \alpha (\mathbf{u} \times \mathbf{M}) \quad (2.48)$$

donde α es constante².

²En esta sección sólo estamos mostrando este resultado de forma heurística, por lo que por el momento no nos interesa las unidades de esta constante, esto lo estableceremos rigurosamente en el capítulo 4.

Notemos que podemos encontrar a \mathbf{P} en términos de \mathbf{M} , en el caso simple cuando \mathbf{P} es ortogonal a \mathbf{u} , es decir, si multiplicamos vectorialmente por un vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ a la ecuación (2.47), tenemos que

$$\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{M} = \hat{\mathbf{u}} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{u}), \quad (2.49)$$

si ahora usamos la identidad vectorial $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ y puesto que $\mathbf{P} \perp \mathbf{u}$, entonces

$$\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{M} = \mathbf{P} (\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}), \quad (2.50)$$

esto es

$$\mathbf{P} = \frac{1}{|\mathbf{u}|} (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{M}); \quad (2.51)$$

por lo que, si $\alpha = \frac{1}{|\mathbf{u}|}$, obtenemos la ec.(2.48) propuesta antes.

Este resultado nos hace pensar que posiblemente, la ecuación que relaciona a los medios polarizados con los medios magnetizados en movimiento es simétrica a la ecuación que obtuvimos para medios polarizados en movimiento. Por lo que surge la pregunta: ¿no debería existir este tipo de simetrías para medios en movimiento?

Una de las razones que también nos hace inferir que debe existir este tipo de simetrías para los medios en movimiento es que las cantidades básicas de la electrostática tienen sus análogas para la magnetostática. [Shadowitz1988]

\mathbf{E}	\mathbf{D}	ϵ	\mathbf{E}	ρ	φ	\cdot	\times
\mathbf{B}	\mathbf{H}	$\frac{1}{\mu}$	$-\mathbf{M}$	\mathbf{J}	\mathbf{A}	\times	\cdot

Así como también podemos apreciar que existe un tipo de simetría en las ecuaciones para los campos magnetostáticos y electrostáticos, cuando se expresan como

\mathbf{E}	$\mathbf{E} = -\nabla\varphi_e$	$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$	$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$	$\nabla^2\varphi_e = 0$
\mathbf{B}	$\mathbf{H} = -\nabla\varphi_m$	$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$	$\nabla^2\varphi_m = 0$

A lo largo de esta discusión, hemos dado argumentos cualitativos que nos podrían llevar a sospechar que efectivamente la ecuación propuesta (2.48) es correcta.

Esto nos lleva nuevamente a preguntarnos ¿cuáles son las consideraciones que se necesitan para poder demostrar que debe de existir una relación de este tipo entre \mathbf{M} y \mathbf{P} ?

Ya que sólo tenemos las ecuaciones de Maxwell para medios polarizados en movimiento y que por medio de un análisis análogo no podemos obtener las ecuaciones para un medio magnetizado en movimiento, lo que se nos ocurre es que debemos atacar el problema por medio de la solución misma de las ecuaciones, esto es, por medio de los potenciales o los campos que generan este tipo de fuentes en movimiento, por lo que lo analizaremos dentro del campo de la electrodinámica.

Lo que haremos es determinar los potenciales debido a fuentes en movimiento, procediendo de la manera usual para resolver este tipo de problema : resolviendo las ecuaciones que los gobiernan y obteniendo así los *potenciales retardados* .

Capítulo 3

Potenciales Retardados.

En este capítulo vamos a determinar los potenciales que producen fuentes en movimiento mediante la solución de la ecuación que los gobierna. Dicha solución es, como veremos, los potenciales retardados, los cuales necesitamos obtener para resolver el problema planteado.

3.1. Potenciales electromagnéticos.

Sabemos que los campos electromagnéticos los podemos expresar en función de los potenciales de la siguiente manera

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.2)$$

Si sustituimos la ec.(3.1) en la ley de Gauss, resulta

$$(\nabla \cdot \nabla\varphi) + \left(\nabla \cdot \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho, \quad (3.3)$$

que podemos escribir como

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho. \quad (3.4)$$

Si ahora sustituimos las ecuaciones para los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} en la Ley de Ampère tenemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \left(-\frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right), \quad (3.5)$$

e invirtiendo el orden de derivaciones en el tercer término de la derecha obtenemos que

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \quad (3.6)$$

Usando la identidad vectorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$ y reagrupando, resulta que

$$\left(\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (3.7)$$

Las ecs. (3.4) y (3.7) son ecuaciones acopladas de segundo orden, las cuales son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell, pero escritas en términos de los potenciales.

Estas ecuaciones no definen de manera única a los potenciales pero, si los elegimos de forma adecuada, es decir, si de todas las parejas \mathbf{A}' , φ' , tomamos aquellas que producen los mismos campos \mathbf{E} y \mathbf{B} que los potenciales φ , \mathbf{A} , es posible desacoplarlas. Por lo que, si tomamos la siguiente transformación para cada uno de ellos

$$\varphi' \rightarrow \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{A}' \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \Lambda, \quad (3.9)$$

en donde Λ es una función escalar arbitraria, encontramos que al sustituirlas en las ecs.(3.1) y (3.2), estas transformaciones dejan invariantes a los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} .

A estas transformaciones se les conoce como transformaciones de norma (**gauge**).

Si además pedimos que los potenciales φ' y \mathbf{A}' cumplan la condición,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0 \quad (3.10)$$

donde

$$\nabla \cdot \Lambda + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Lambda}{\partial t} = 0, \quad (3.11)$$

la cual se le conoce como norma de Lorentz, entonces, de las ecs.(3.4) y (3.7) obtenemos las ecuaciones desacopladas para los potenciales, las cuales son

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (3.12)$$

$$\nabla^2 \varphi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (3.13)$$

observamos que el operador que se aplica a ambas es el mismo,

$$\square = \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (3.14)$$

que es conocido como operador de d'Alembert.

Por lo tanto, las ecuaciones para los potenciales en esta norma tienen la forma general de una ecuación de onda inhomogénea

$$\square \psi(r, t) = -g(r, t) \quad (3.15)$$

la cual necesitamos resolver para poder encontrar los potenciales que producen fuentes en movimiento.

3.2. Solución de la ecuación de onda inhomogénea

Vamos a seguir el método de la función de Green, $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$, la cual se define mediante la ecuación

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G = -\delta(r - r') \delta(t - t'). \quad (3.16)$$

Para encontrar G usamos el método de la transformada de Fourier en t ; así, si

$$G_w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G e^{i\omega t} dt, \quad (3.17)$$

la ec.(3.16) se transforma en

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 G e^{i\omega t} dt - \frac{1}{c^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} e^{i\omega t} dt = \\ & -\delta(r - r') \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t') e^{i\omega(t-t')} dt, \end{aligned} \quad (3.18)$$

esto es,

$$\nabla^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G e^{i\omega t} dt - \frac{1}{c^2} (-i\omega)^2 G_w = -\delta(r - r'), \quad (3.19)$$

o bien

$$\nabla^2 G_w + \frac{w^2}{c^2} G_w = -\delta(r - r'). \quad (3.20)$$

Si a la ecuación (3.20) la expresamos en coordenadas esféricas, entonces como G_w sólo depende de R ($R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$), podemos escribir el Laplaciano en términos de esta variable, así

$$\nabla^2 G_w = \frac{1}{R^2} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) G_w = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} R G_w. \quad (3.21)$$

Sustituyendo ahora en la ec.(3.20) obtenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} R G_w + \frac{w^2}{c^2} R G_w = -\delta(R). \quad (3.22)$$

Si $R \neq 0$, es decir $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$, (suponemos que $\mathbf{r} > \mathbf{r}'$), y además definimos

$$\Psi = R G_w \quad y \quad k = \frac{w}{c}, \quad (3.23)$$

la ec.(3.22) podemos expresarla de la siguiente manera

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} \Psi + k^2 \Psi = 0. \quad (3.24)$$

Ahora tenemos una ecuación homogénea de segundo grado, cuya solución es,

$$\Psi = A e^{\pm ikR} \quad (3.25)$$

por lo que

$$G_w = \frac{A e^{\pm ikR}}{R} \quad (3.26)$$

Para poder encontrar la constante A, hacemos una integral de volumen en una vecindad muy pequeña Ω alrededor de $\mathbf{R} = 0$. Entonces la ec.(3.22) se transforma en

$$\int_{\Omega} \left(\nabla^2 \frac{A e^{\pm ikR}}{R} + k^2 \frac{A e^{\pm ikR}}{R} \right) dv' = -1. \quad (3.27)$$

Como Ω es muy pequeño, debe cumplirse que

$$A \int_{\Omega} \nabla^2 \frac{e^{\pm ikR}}{R} dv' = -1 \quad (3.28)$$

y como también $R \simeq 0$, entonces

$$\frac{e^{\pm ikR}}{R} \simeq \frac{1}{R}, \quad (3.29)$$

por lo que resulta que

$$A \int_{\Omega} \nabla^2 \frac{1}{R} dv' = -1. \quad (3.30)$$

Como sabemos que

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \frac{1}{R} dv' = -4\pi \quad (3.31)$$

obtenemos entonces que

$$A = \frac{1}{4\pi}. \quad (3.32)$$

Sustituyendo en la ec.(3.26) tenemos la expresión deseada,

$$G_w = \frac{e^{\pm ikR}}{4\pi R}, \quad (3.33)$$

y como

$$\left(\nabla^2 + \frac{w^2}{c^2} \right) G_w = -g_w, \quad (3.34)$$

entonces, tenemos que

$$\Psi_w = - \int G_w g_w dv', \quad (3.35)$$

la cual la podemos escribir como

$$\Psi_w = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm ikR}}{R} g_w dv'. \quad (3.36)$$

Aplicando ahora la transformada inversa de Fourier a la ecuación anterior, podemos obtener $\Psi(R)$. Entonces

$$\begin{aligned}\Psi(R) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm ikR}}{R} g_w \right] e^{-iwt} dw dv' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} dv' \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} g_w e^{-iw\left(t \mp \frac{R}{c}\right)} \right] dw.\end{aligned}\quad (3.37)$$

El término entre paréntesis es la transformada inversa de Fourier, y como sólo nos interesa el tiempo en que se producen los efectos que son originados por la carga y la corriente en estos potenciales (principio de causalidad), tomaremos el signo menos del exponente. Entonces

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_w e^{-iw\left(t - \frac{R}{c}\right)} dw = g\left(t - \frac{R}{c}\right), \quad (3.38)$$

por lo que al sustituir la ec.(3.38) en la ec.(3.37) obtenemos

$$\Psi(R) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{g\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} dv', \quad (3.39)$$

que es precisamente es el resultado buscado, por lo cual tenemos que si $\mathbf{g} = -\mu_0 \mathbf{J}$, entonces

$$\Psi(R) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} dv' = \mathbf{A} \quad (3.40)$$

y si $g = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$, entonces

$$\Psi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} dv' = \varphi. \quad (3.41)$$

En donde a

$$\left(t - \frac{R}{c}\right), \quad (3.42)$$

se le conoce como *tiempo retardado*.

Escribimos las expresiones de los potenciales obtenidos de la siguiente manera

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{J}]}{R_{t'}} dv' \quad (3.43)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[\rho]}{R_{t'}} dv' \quad (3.44)$$

donde el paréntesis [] nos indica que la función dentro de él, está evaluada en el tiempo retardado (t') y $R_{t'} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|$.

Como los potenciales están dados como función de sus fuentes, y éstas dependen del tiempo, observamos que el potencial en el punto \mathbf{r} al tiempo t , se puede interpretar como aquel potencial producido por un elemento de carga que se encuentra dentro de un volumen alrededor de \mathbf{r}' al tiempo $t' = \left(t - \frac{R_{t'}}{c}\right)$.

3.2.1. Tiempo retardado

Para poder entender mejor el significado de las funciones retardadas, consideremos el siguiente modelo:

Supongamos que tenemos una barra cargada que se mueve con una velocidad constante \mathbf{u} a lo largo del eje x y sea $P(x, t)$ el punto de observación, [Figura 3.1]

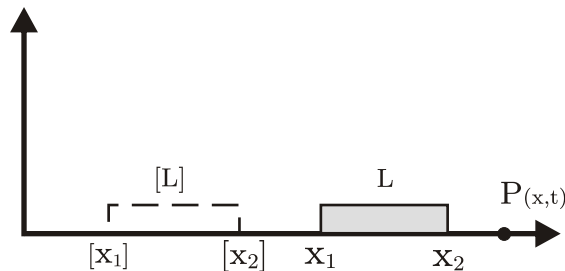


Fig.3.1 Modelo de la barra en movimiento

Se satisface que

$$[L] = [x_2] - [x_1] \quad (3.45)$$

en donde $[L]$ es la longitud de la barra en el tiempo retardado y

$$L = x_2 - x_1. \quad (3.46)$$

es la longitud de la barra en el tiempo t cuando se recibe la señal luminosa en el punto P .

Observamos que el tiempo que tarda la luz en recorrer la distancia que va desde el punto $[x_2]$ hasta el punto x , en donde se recibe la señal luminosa que proviene de este punto, debe ser el mismo tiempo que tarda la barra en recorrer la distancia $x_2 - [x_2]$, por lo que tenemos

$$\frac{x_2 - [x_2]}{u} = \frac{x - [x_2]}{c}. \quad (3.47)$$

Podemos hacer este mismo razonamiento para el punto $[x_1]$ y x_1 , por lo que resulta

$$\frac{x_1 - [x_1]}{u} = \frac{x - [x_1]}{c} \quad (3.48)$$

Si ahora restamos las ecuaciones (3.47) y (3.48), obtenemos

$$\frac{(x_2 - [x_2]) - (x_1 - [x_1])}{u} = \frac{(x - [x_2]) - (x - [x_1])}{c} \quad (3.49)$$

y

$$\frac{(x_2 - x_1) - ([x_2] - [x_1])}{u} = \frac{-([x_2] - [x_1])}{c} \quad (3.50)$$

que con la ayuda de (3.45) y (3.46), podemos expresar como

$$\frac{L - [L]}{u} = -\frac{[L]}{c}. \quad (3.51)$$

Entonces

$$\frac{L}{u} = [L] \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{c} \right), \quad (3.52)$$

y de aquí obtenemos que

$$[L] = \frac{L}{\left(1 - \frac{u}{c}\right)}. \quad (3.53)$$

Esto nos dice que la longitud “efectiva“ de la barra que envió señales al punto x y llegaron al tiempo t , en este caso, es mayor que la longitud real de la misma, puesto que difiere por un factor $\left(1 - \frac{u}{c}\right)^{-1}$.

En general este resultado es válido si consideramos que el punto de observación se encuentra lejos y forma un ángulo θ respecto a la velocidad \mathbf{u} de la barra [Figura 3.2].

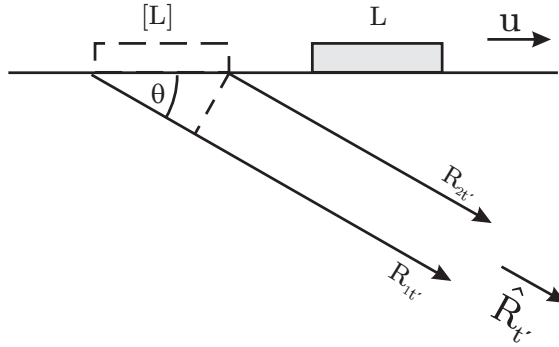


Fig.3.2 Barra en movimiento cuando el observador se encuentra a un ángulo θ

En este caso siguiendo el mismo procedimiento que el caso anterior, tenemos que

$$\frac{x_2 - [x_2]}{u} = \frac{|\mathbf{r} - [\mathbf{r}_2]|}{c}, \quad (3.54)$$

y

$$\frac{x_1 - [x_1]}{u} = \frac{|\mathbf{r} - [\mathbf{r}_1]|}{c}, \quad (3.55)$$

donde $\mathbf{R}_{1t'} = \mathbf{r} - [\mathbf{r}_1]$ y $\mathbf{R}_{2t'} = \mathbf{r} - [\mathbf{r}_2]$.

Si ahora restamos las ecuaciones (3.54) y (3.55), obtenemos

$$\frac{(x_2 - [x_2]) - (x_1 - [x_1])}{u} = \frac{|\mathbf{r} - [\mathbf{r}_2]| - |\mathbf{r} - [\mathbf{r}_1]|}{c}, \quad (3.56)$$

y como el punto de observación se encuentra muy lejos de la barra, tenemos que $\mathbf{R}_{1t'}$ y $\mathbf{R}_{2t'}$ los podemos considerar como paralelos, es decir, en ángulo que forman con el vector \mathbf{u} es el mismo, entonces

$$|\mathbf{R}_{2t'}| - |\mathbf{R}_{1t'}| = -[L]\cos\theta. \quad (3.57)$$

Sustituyendo este resultado y con la ayuda de la ec.(3.51), obtenemos que

$$\frac{[L]\cos\theta}{c} = \frac{[L] - L}{u}, \quad (3.58)$$

y de aquí

$$[L] = \frac{L}{1 - \frac{u}{c}\cos\theta}. \quad (3.59)$$

Usando la definición de producto escalar, tenemos que el término del denominador se puede escribir de la siguiente manera

$$[L] = \frac{L}{1 - \frac{\mathbf{u}}{c} \cdot \hat{\mathbf{R}}_{t'}}. \quad (3.60)$$

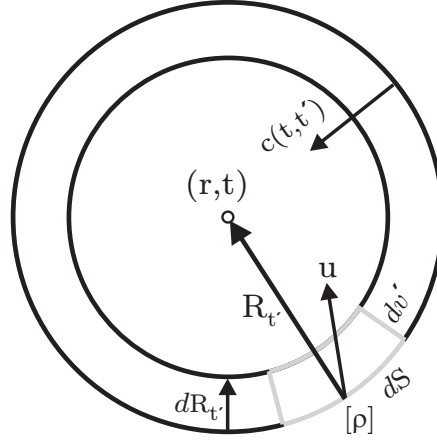
Analizaremos una aplicación importante de estos potenciales.

3.3. Potenciales de Liénard- Wiechert

Los potenciales de Liénard- Wiechert proporcionan una solución general a la ecuación de onda [sección 3.2] cuando la fuente que estamos considerando es una carga puntual con movimiento arbitrario.

Para encontrar los potenciales vamos a tomar el mismo modelo que usa Wolfgang Panofsky para analizar este caso [Panofsky2005].

Consideremos una esfera de radio $\mathbf{R}_{t'}$ que converge radialmente en el punto r al tiempo t con una velocidad c ; a esta esfera le llamamos esfera “recolectora” [figura 3.4].


 Fig.3.4 Elemento dS de la esfera para una carga q con velocidad \mathbf{u} .

Si la partícula cargada se encuentra en reposo, tenemos que la cantidad de carga que barre esta esfera cuando se contrae una distancia $dR_{t'}$, en un tiempo dt , está dada por $[\rho]dSdR_{t'}$. Si ahora la partícula tiene una velocidad diferente de cero, tenemos que la cantidad de carga que barre la esfera en un tiempo dt disminuye una cantidad dada por

$$[\rho]dS \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}_{t'}}{R_{t'}} \right) dt, \quad (3.61)$$

donde \mathbf{u} es la velocidad de la partícula y $\mathbf{R}_{t'} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')$.

Por lo que tenemos que la cantidad de carga que se observa por medio de la esfera “recolectora” es

$$dq = [\rho] dv' - [\rho] dS \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}_{t'}}{R_{t'}} dt. \quad (3.62)$$

Como $dt = \frac{dR_{t'}}{c}$ y $dSdR_{t'} = dv'$ entonces,

$$dq = [\rho] dv' - [\rho] \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}_{t'}}{cR_{t'}} dv', \quad (3.63)$$

o bien

$$dq = [\rho] dv' \left[1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}_{t'}}{cR_{t'}} \right], \quad (3.64)$$

que también se puede escribir como

$$\frac{[\rho] dv'}{R_{t'}} = \frac{dq}{R_{t'} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}_{t'}}{c}}. \quad (3.65)$$

Sustituyendo este resultado en las expresiones para los potenciales retardados φ y \mathbf{A} ecs.(3.43) y (3.44), tenemos

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\mathbf{R}_{t'}| - \frac{\mathbf{u}}{c} \cdot \mathbf{R}_{t'}}, \quad (3.66)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{u} dq}{R_{t'} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}_{t'}}{c}}, \quad (3.67)$$

pero como $\int dq = q$, resulta que

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{R_{t'} - \frac{\mathbf{u}}{c} \cdot \mathbf{R}_{t'}} \right], \quad (3.68)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{q\mathbf{u}}{R_{t'} - \frac{\mathbf{u}}{c} \cdot \mathbf{R}_{t'}} \right]. \quad (3.69)$$

Estas ecuaciones son los potenciales de Liénard-Wiechert. Es importante recordar que estos potenciales retardados caracterizan el campo de una carga puntual con velocidad arbitraria.

3.3.1. Potencial escalar de Liénard-Wiechert.

Estamos interesados en el potencial escalar de Liénard-Wiechert para una partícula que se mueve con velocidad constante, ya que este resultado nos será útil más adelante [Figura 3.5].

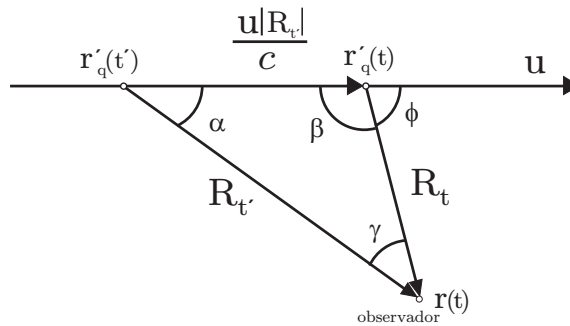


Fig.3.5 Partícula cargada con velocidad constante u .

Vamos a evaluar el denominador de los potenciales de Liénard- Wiechert de la partícula cargada q , en términos de la posición actual r , al tiempo t .

De la Figura 3.5 tenemos que

- 1) $r'_q(t')$ es la posición retardada de la partícula
- 2) $r_q(t)$ es posición actual de la partícula
- 3) $\mathbf{R}_{t'} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')$
- 4) $\mathbf{R}_t = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)$

y se puede ver que

$$R_{t'} \text{sen} \alpha = R_t \text{sen} \beta, \quad (3.70)$$

donde $\beta = \pi - \phi$, por lo cual resulta

$$R_{t'} \text{sen} \alpha = R_t \text{sen} \phi. \quad (3.71)$$

Si ahora multiplicamos por $|\mathbf{u}|$, tenemos

$$uR_{t'}\text{sen}\alpha = uR_t\text{sen}\phi \quad (3.72)$$

por lo que obtenemos

$$|\mathbf{R}_{t'} \times \mathbf{u}| = |\mathbf{R}_t \times \mathbf{u}|. \quad (3.73)$$

Si ahora definimos

$$s = R_{t'} - \frac{\mathbf{u}}{c} \cdot \mathbf{R}_{t'}, \quad (3.74)$$

queremos demostrar que se cumple

$$s^2 = R_t^2 - \left| \frac{\mathbf{R}_t \times \mathbf{u}}{c} \right|^2. \quad (3.75)$$

Por la Ley de cosenos sabemos que podemos escribir a R_t de la siguiente forma

$$R_t^2 = R_{t'}^2 - \frac{u^2 R_{t'}^2}{c^2} - 2\frac{u}{c} R_{t'}^2 \cos \alpha, \quad (3.76)$$

o bien

$$R_t^2 = R_{t'}^2 \left(1 + \frac{u^2}{c^2} - 2\frac{u}{c} \cos \alpha \right). \quad (3.77)$$

Por otro lado tenemos de la ec.(3.74) que

$$s^2 = \left(R_{t'} - \frac{\mathbf{u}}{c} \cdot \mathbf{R}_{t'} \right)^2 = R_{t'}^2 - 2\frac{u}{c} R_{t'}^2 \cos \alpha + \left(\frac{\mathbf{u}}{c} \cdot \mathbf{R}_{t'} \right)^2, \quad (3.78)$$

esto es,

$$s^2 = R_{t'}^2 - 2R_{t'}^2 \frac{u}{c} \cos \alpha + \frac{u^2}{c^2} R_{t'}^2 \cos^2 \alpha \quad (3.79)$$

y factorizando, resulta

$$s^2 = R_{t'}^2 \left(1 - 2\frac{u}{c} \cos \alpha + \frac{u^2}{c^2} \cos^2 \alpha \right). \quad (3.80)$$

Si ahora al segundo término de la ecuación anterior lo reescribimos como

$$\frac{u^2}{c^2} \cos^2 \alpha = \frac{u^2}{c^2} - \frac{u^2}{c^2} \text{sen}^2 \alpha, \quad (3.81)$$

tenemos que al sustituir este resultado en la ec.(3.80), obtenemos

$$s^2 = R_{t'}^2 \left(1 - 2u \cos \alpha + \frac{u^2}{c^2} \right) - R_{t'}^2 \frac{u^2}{c^2} \text{sen}^2 \alpha, \quad (3.82)$$

en donde vemos que el primer término resulta ser R_t^2 [ec.(3.80)], esto es,

$$s^2 = R_t^2 - \left| \frac{\mathbf{R}_{t'} \times \mathbf{u}}{c} \right|^2, \quad (3.83)$$

y por la ec.(3.73) sabemos que

$$|\mathbf{R}_{t'} \times \mathbf{u}| = |\mathbf{R}_t \times \mathbf{u}|, \quad (3.84)$$

entonces,

$$s^2 = R_t^2 - \left| \frac{\mathbf{R}_t \times \mathbf{u}}{c} \right|^2, \quad (3.85)$$

o bien,

$$s^2 = R_t^2 - R_t^2 \frac{u^2}{c^2} \text{sen}^2 \phi. \quad (3.86)$$

Por lo tanto si escribimos el denominador de la ec.(3.68) en términos de la posición actual \mathbf{R}_t al tiempo t como

$$s = R_t \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2} \text{sen}^2 \phi} \quad (3.87)$$

entonces el potencial retardado φ_{ret} de Liénard- Wiechert, resulta

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{R_t \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2} \text{sen}^2 \phi}} \right] \quad (3.88)$$

donde ϕ es el ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{R}_t .

Con este último ejemplo terminamos de construir todo lo necesario para así proponer un método que nos permita resolver el problema que hemos planteado.

Capítulo 4

Solución del Problema

Cuando estudiamos las ecuaciones de Maxwell en medios en movimiento, encontramos que un medio polarizado en movimiento genera un medio magnetizado [Panofsky2005], y que además se satisface la ecuación $\mathbf{M} = \mathbf{P} \times \mathbf{u}$. La pregunta inicial era: ¿Podemos mostrar que los medios magnetizados en movimiento generan un medio polarizado? Es más, no sólo queremos comprobar que este fenómeno se da, si no que también queremos mostrar que la ecuación que lo describe es $\mathbf{P} = \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{M}$, la cual, es simétrica a la ecuación encontrada para los medios polarizados en movimiento. Suponemos que este resultado es correcto, ya que sabemos que éste se puede obtener mediante la relatividad especial, pero nosotros lo vamos a demostrar como una consecuencia exclusiva de la teoría electromagnética clásica.

4.1. Método propuesto

La manera en que vamos a mostrar este fenómeno, es por medio del potencial escalar retardado φ_{ret} , para distribuciones de carga y corriente que se mueven con velocidad constante.

Partimos de la expresión para el potencial φ_{ret} dada por [ecuación (3.44)]

$$\varphi_{ret} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[\rho]}{R_{t'}} dv' \quad (4.1)$$

donde

$$[\rho] = \rho(r', t' = t - \frac{\mathbf{R}_{t'}}{c}), \quad (4.2)$$

y

$$|\mathbf{R}_{t'}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|. \quad (4.3)$$

Por otro lado se satisface que

$$[\rho] = \frac{\rho}{\left(1 - \frac{\widehat{\mathbf{R}}_{t'} \cdot \mathbf{u}}{c}\right)}; \quad (4.4)$$

esta expresión la usamos para quitar la dependencia que tiene la densidad de carga $[\rho]$ con el tiempo retardado t' , por lo que al sustituir en la ec.(4.1) obtenemos

$$\varphi_{ret} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{R_{t'}} \frac{1}{\left(1 - \frac{\widehat{\mathbf{R}}_{t'} \cdot \mathbf{u}}{c}\right)} dv'. \quad (4.5)$$

Si ahora consideramos que

$$s = R_{t'} \left(1 - \frac{\widehat{\mathbf{R}}_{t'} \cdot \mathbf{u}}{c}\right), \quad (4.6)$$

se puede reescribir en términos de la posición actual $|\mathbf{R}_t| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)|$ con la ayuda de un resultado previamente demostrado [Sección 3.3.1], es decir,

$$s = R_t \left[1 - \left|\frac{\widehat{\mathbf{R}}_t \times \mathbf{u}}{c}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.7)$$

Sustituyendo la ec.(4.7) en la ec.(4.5), ésta queda expresada como

$$\varphi_{ret} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{R_t} \left[1 - \left|\frac{\widehat{\mathbf{R}}_t \times \mathbf{u}}{c}\right|^2\right]^{-\frac{1}{2}} dv', \quad (4.8)$$

si consideramos que $\frac{u}{c} \ll 1$, entonces el integrando lo podemos aproximar por medio de un desarrollo binomial

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \dots, \quad (4.9)$$

y conservando sólo los dos primeros términos del desarrollo, obtenemos que el integrando se puede expresar como

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{R_t} \left[1 - \left| \frac{\widehat{\mathbf{R}}_t \times \mathbf{u}}{c} \right|^2 \right]^{-\frac{1}{2}} &\simeq \frac{\rho}{R_t} \left[1 + \frac{1}{2c^2} \left| \widehat{\mathbf{R}}_t \times \mathbf{u} \right|^2 \right] = \\ &\rho \left[\frac{1}{R_t} + \frac{1}{2c^2 R_t} \left(\widehat{\mathbf{R}}_t \times \mathbf{u} \right) \cdot \left(\widehat{\mathbf{R}}_t \times \mathbf{u} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Sustituyendo este resultado en la ec.(4.8) se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_{ret} &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho \left[\frac{1}{R_t} + \frac{1}{2c^2 R_t} \left(\widehat{\mathbf{R}}_t \times \mathbf{u} \right) \cdot \left(\widehat{\mathbf{R}}_t \times \mathbf{u} \right) \right] dv' = \\ &\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int \frac{\rho}{R_t} dv' + \int \frac{\rho}{2c^2 R_t} \left(\widehat{\mathbf{R}}_t \times \mathbf{u} \right) \cdot \left(\widehat{\mathbf{R}}_t \times \mathbf{u} \right) dv' \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Nos interesa analizar el segundo término de la integral, al cual llamaremos I_2 , esto es

$$I_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{2c^2 R_t} \left(\widehat{\mathbf{R}}_t \times \mathbf{u} \right) \cdot \left(\widehat{\mathbf{R}}_t \times \mathbf{u} \right) dv', \quad (4.12)$$

y considerando que $\mathbf{J} = \rho\mathbf{u}$, la integral I_2 se puede reescribir como

$$I_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{2c^2 R_t} \left(\widehat{\mathbf{R}}_t \times \mathbf{J} \right) \cdot \left(\widehat{\mathbf{R}}_t \times \mathbf{u} \right) dv'. \quad (4.13)$$

Si ahora usamos la identidad vectorial $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ tenemos que

$$\mathbf{u} \cdot \left[\left(\widehat{\mathbf{R}}_t \times \mathbf{J} \right) \times \widehat{\mathbf{R}}_t \right] = \frac{1}{2c^2 R_t^2} \mathbf{u} \cdot \left[\left(\mathbf{R}_t \times \mathbf{J} \right) \times \widehat{\mathbf{R}}_t \right], \quad (4.14)$$

Sustituyendo esta expresión en la ec.(4.12), resulta

$$I_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{2c^2 R_t^2} \mathbf{u} \cdot \left[\left(\mathbf{R}_t \times \mathbf{J} \right) \times \widehat{\mathbf{R}}_t \right] dv', \quad (4.15)$$

como $\mathbf{u} = cte$, la ec.(4.15) queda expresada como

$$I_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{u}}{c^2} \cdot \int \frac{1}{2} \left(\mathbf{R}_t \times \mathbf{J} \right) \times \frac{\widehat{\mathbf{R}}_t}{R_t^2} dv'. \quad (4.16)$$

Por otro lado sabemos que el momento dipolar \mathbf{m} se define como

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \left(\mathbf{R}_t \times \mathbf{J} \right) dv', \quad (4.17)$$

si ahora consideramos un elemento diferencial de este,

$$d\mathbf{m} = \frac{1}{2} \mathbf{R}_t \times \mathbf{J} dv', \quad (4.18)$$

entonces sustituyendo en la ec.(4.16) obtenemos que

$$I_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \int d\mathbf{m} \times \frac{\widehat{\mathbf{R}}_t}{R_t^2} \quad (4.19)$$

y usando la identidad vectorial $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ resulta

$$I_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\widehat{\mathbf{R}}_t}{R_t^2} \cdot \left(\frac{\mathbf{u}}{c^2} \times d\mathbf{m} \right). \quad (4.20)$$

Si ahora definimos

$$d\mathbf{p} = \frac{\mathbf{u}}{c^2} \times d\mathbf{m},, \quad (4.21)$$

entonces la ec.(4.20) se puede reescribir como

$$I_2 = \int \frac{\widehat{\mathbf{R}}_t \cdot d\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 R_t^2} \quad (4.22)$$

pero, para el potencial de un dipolo eléctrico \mathbf{p} tenemos que

$$d\varphi_{dip} = \frac{\widehat{\mathbf{R}}_t \cdot d\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 R_t^2}. \quad (4.23)$$

Observamos entonces que la ec.(4.23) es el potencial escalar debido a un dipolo eléctrico, esto es

$$\varphi_{dip} = \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \widehat{\mathbf{R}}_t}{4\pi\epsilon_0 R_t^2} \right). \quad (4.24)$$

Por lo tanto encontramos el resultado buscado: el potencial dipolar eléctrico φ , se debe al movimiento de un dipolo magnético, por lo tanto podemos concluir, que si sólo consideramos la contribución dipolar de este potencial, la fuente que genera el campo eléctrico \mathbf{E} buscado es el dipolo magnético \mathbf{m} en movimiento.

4.2. Método usado por Jefimenko

Oleg D. Jefimenko [Jefimenko1993] analiza y resuelve el mismo problema mediante un modelo particular. Este modelo consiste en una espira rectangular eléctricamente neutra con corriente, la cual se encuentra inicialmente en reposo (sistema de laboratorio).

Como la corriente I en la espira es producida por una cantidad igual de cargas positivas y negativas, podemos considerar que las densidades de carga positiva y negativa en la espira son

$$\lambda^+ = \frac{q}{L} \quad (4.25)$$

y

$$\lambda^- = \frac{-q}{L}. \quad (4.26)$$

Si consideramos que las cargas positivas se encuentran en reposo, entonces la corriente I en la espira se debe al movimiento de las cargas negativas, las cuales se mueven a una velocidad \mathbf{u} constante en la dirección negativa del eje x , [Figura 4.1].

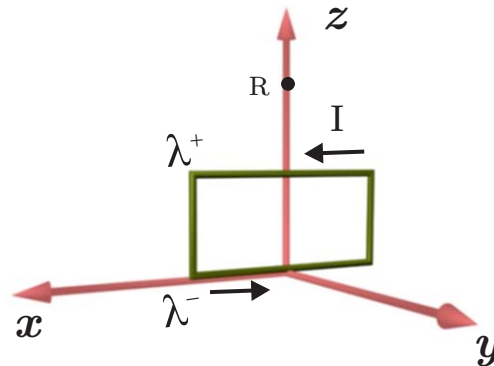


Fig 4.1 Modelo de Jefimenko.

si λ es la densidad de carga, entonces

$$I = \lambda u = \frac{qu}{L}. \quad (4.27)$$

Para resolver el problema mediante este método, utilizaremos el resultado que se obtuvo para el potencial escalar φ_{ret} de una carga puntual que se mueve a velocidad constante [Liénard-Wiechert, sección 3.3.1, ec.(3.88)], esto es

$$\varphi(r, t)_{ret} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{R_t \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2} \text{sen}^2\phi}} \right], \quad (4.28)$$

y suponemos que $u \ll c$, entonces el potencial φ_{ret} lo podemos aproximar por medio de la ecuación

$$\varphi_{ret} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_t} \left\{ 1 + \frac{u^2}{2c^2} \text{sen}^2\theta \right\}. \quad (4.29)$$

Si ahora la reescribimos como

$$\varphi_{ret} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_t} + \frac{qu^2 \text{sen}^2\theta}{4\pi\epsilon_0 R_t}, \quad (4.30)$$

tenemos que, por el principio de superposición, para un observador en reposo el potencial φ_{ret} es producido por dos cargas q y q' , es decir,

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_t} \quad (4.31)$$

y

$$\varphi_2 = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R_t}, \quad (4.32)$$

en donde

$$q' = \frac{qu^2}{2c^2} \text{sen}^2\theta. \quad (4.33)$$

Si ahora calculamos el potencial eléctrico que produce la espira en un punto de observación en el eje z (ver Figura 4.1), tenemos que, debido a que el punto se encuentra lejos de la fuente, podemos considerar que la densidad de carga λ^+ constituye una sola carga q^+ y que la densidad de carga λ^- constituye una sola carga q^- .

El potencial eléctrico debido a la carga q^+ resulta ser

$$\varphi^+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_t}. \quad (4.34)$$

Como la carga q^- se mueve con velocidad constante \mathbf{u} , el potencial producido por esta carga debe ser el potencial retardado φ_{ret} [Liénard- Wiechert, ec.(4.29)], y como \mathbf{R}_t y \mathbf{u} son ortogonales, tenemos que

$$\varphi_{ret}^- = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_t} \left(1 + \frac{u^2}{2c^2}\right). \quad (4.35)$$

Por lo tanto, el potencial eléctrico total φ_T resultante es

$$\varphi_T = \varphi^+ + \varphi_{ret}^- = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_t} \left(\frac{u^2}{2c^2}\right). \quad (4.36)$$

Podemos pensar que este potencial se debe a una carga aparente de magnitud

$$q_{aparente} = -\frac{qu^2}{2c^2} \quad (4.37)$$

y por la ec.(4.27), la podemos escribir como

$$q_{aparente} = -\frac{I^2 L^2}{2qc^2}. \quad (4.38)$$

Si ahora la espira se mueve con una velocidad constante \mathbf{v} en la dirección x y hacemos un análisis análogo al caso en el cual la espira se encontraba en reposo, podemos considerar que q^+ tiene una velocidad \mathbf{v} y q^- una velocidad $(\mathbf{v} - \mathbf{u})$, por lo que en este caso los potenciales eléctricos para ambas cargas son,

$$\varphi_{ret}^+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_t} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right), \quad (4.39)$$

y

$$\varphi_{ret}^- = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_t} \left(1 + \frac{(v-u)^2}{2c^2}\right). \quad (4.40)$$

Entonces el potencial retardado total debido a estas dos contribuciones de carga es

$$\varphi_T = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_t} \left(\frac{2uv - u^2}{2c^2}\right). \quad (4.41)$$

Por lo tanto, el potencial total φ_T lo podemos considerar como si estuviera constituido por dos contribuciones de carga, una debida a la carga aparente de la espira en reposo y la otra debida al movimiento de la espira, esto es,

$$q_{aparente} = \frac{quv}{c^2} - \frac{qu^2}{2c^2}. \quad (4.42)$$

Si comparamos esta ecuación con la ec.(4.37) observamos que aparece un término, debido al movimiento de la espira. Dicho término se puede expresar como

$$q_{aparente}^+ = \frac{quv}{c^2} = \frac{ILv}{c^2}, \quad (4.43)$$

y

$$q_{aparente}^- = -\frac{quv}{c^2} = -\frac{ILv}{c^2}, \quad (4.44)$$

que representan la carga aparente en la parte superior e inferior de la espira.

Como la espira modificó su corriente debido al movimiento, tenemos que en el sistema del laboratorio (reposo), esta espira constituye un dipolo magnético \mathbf{m} .

Si la espira es un pequeño cuadrado de longitud L , el dipolo magnético \mathbf{m} está dado por

$$\mathbf{m} = -IL^2\hat{\mathbf{j}}. \quad (4.45)$$

Por otro lado, tenemos que la espira la podemos ver como si la carga $q_{aparente}^+$ se encontrará en el lado superior de la espira y la carga $q_{aparente}^-$ en el lado inferior de ésta, por lo que en el sistema de laboratorio la espira no solo constituye un dipolo magnético, sino también un dipolo eléctrico \mathbf{p} , donde

$$\mathbf{p} = q_{apa}L\hat{\mathbf{k}}. \quad (4.46)$$

Si sustituimos la ec.(4.43) en la ec.(4.46), obtenemos

$$\mathbf{p} = \frac{quvL}{c^2}\hat{\mathbf{k}} = \frac{IL^2v}{c^2}\hat{\mathbf{k}} \quad (4.47)$$

y de la ec.(4.45) tenemos que

$$\mathbf{p} = \frac{mv}{c^2}\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{m}}{c^2}. \quad (4.48)$$

Este resultado nos dice que un dipolo magnético en movimiento genera un dipolo eléctrico.

4.3. Ventajas de un método sobre el otro

Si analizamos los dos procedimientos mostrados para poder llegar a la conclusión de que un dipolo magnético en movimiento genera un dipolo eléctrico, encontramos que el método que planteamos tiene una ventaja sobre el de Jefimenko : su generalidad, ya que lo único que utilizamos fue el potencial escalar de cualquier distribución de carga y corriente arbitraria con movimiento uniforme.

Al poder deducir la ecuación propuesta $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{m}$, encontramos que la contribución dipolar eléctrica al potencial puede ser generado por el dipolo magnético en movimiento, por lo que este resultado nos permite afirmar que este fenómeno ocurre en general, así establecimos lo que buscamos desde un principio, ya que, como un medio magnetizado lo podemos describir por medio de un conjunto de dipolos magnéticos, tenemos que si éste se mueve con una velocidad constante, encontramos que este medio produce una polarización eléctrica, en donde evidentemente la ecuación que tenemos para estos medios conserva la simetría con respecto a la ecuación que se tiene para los medios polarizados que se mueven a velocidad constante.

Para poder ilustrar la importancia de este resultado, podemos ver un ejemplo, en donde para obtener el resultado correcto necesitamos usar la ecuación que se obtuvo mediante el método propuesto.

4.3.1. ¿Ejerce fuerza sobre una carga en reposo una espira neutra, con corriente, moviéndose con velocidad constante?

Cuando nos preguntamos ¿Cuál será la fuerza que ejerce una espira neutra, con corriente, sobre una carga en movimiento?, no tenemos problemas en afirmar que es la fuerza de Lorentz debida al campo magnético \mathbf{B} producido por la espira neutra con corriente; pero ¿Qué pasa si ahora estamos interesados en determinar la fuerza en otro sistema de referencia inercial en donde la carga esta en reposo y la espira con corriente se mueve con velocidad constante? A primera vista, la respuesta inmediata suele ser que, debido a que la espira con corriente es eléctricamente neutra, y como la fuerza que ejerce ésta sobre la carga depende sólo del campo eléctrico \mathbf{E} , entonces la fuerza es cero, por lo que tendríamos que ¡la misma situación física no es igual en los dos sistemas inerciales!, esto es una conclusión sorprendente y equivocada, ya que sabemos que la fuerza debe ser la misma desde cualquier sistema de referencia inercial.

El origen del error se debe a que suponemos que la espira, a la cual siempre nos estamos refiriendo, neutra en el sistema de referencia del laboratorio, sigue siéndolo, aún cuando

ésta se mueve. Es importante señalar que no estamos interesados en introducir conceptos de la relatividad especial. Es por eso que nos limitaremos a lo que la electrodinámica clásica predice, como ya lo hemos señalado antes. Sabemos que para poder calcular correctamente la fuerza que ejerce esta espira, que se mueve con velocidad constante, sobre una carga que se encuentra en reposo, debemos hacerlo mediante los resultados obtenidos en los capítulos anteriores para un dipolo magnético en movimiento.

Partiendo de los potenciales retardados, analizaremos el segundo caso antes mencionado. Sea una carga q en reposo y una espira con corriente en movimiento uniforme con velocidad \mathbf{v} . La fuerza que se ejerce sobre la carga q puede deberse sólo al campo eléctrico \mathbf{E} , pero como es un sistema que involucra una corriente en movimiento, el campo eléctrico que se genera debe ser analizado a partir de los potenciales retardados, es decir,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad (4.49)$$

donde

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi_{ret} - \frac{\partial\mathbf{A}_{ret}}{\partial t}. \quad (4.50)$$

Vamos analizar los dos términos del campo eléctrico \mathbf{E} por separado.

Si consideramos a la espira como un dipolo magnético \mathbf{m} en movimiento, sabemos, por el resultado obtenido en la sección 4.1, que el potencial escalar φ_{ret} que produce este dipolo magnético \mathbf{m} en movimiento es equivalente al de un dipolo eléctrico \mathbf{p} , dado por la ec.(4.48), esto es,

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{u}}{c^2} \times \mathbf{m}. \quad (4.51)$$

Por lo consiguiente, tenemos que

$$\varphi_{ret} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right), \quad (4.52)$$

por lo que el campo eléctrico \mathbf{E} es

$$-\nabla\varphi_{ret} = -\nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = \mathbf{E}_{dipolo}. \quad (4.53)$$

Por otro lado, como

$$\mathbf{E}_A = -\frac{\partial\mathbf{A}_{ret}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{1}{R} \left[\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t} \right] dv', \quad (4.54)$$

y considerando que la corriente $\mathbf{J}(x', y', z')$ tiene una velocidad \mathbf{v} relativa al sistema en reposo en donde se encuentra la carga q , entonces la densidad de corriente \mathbf{J} se puede considerar como función de $(x' - v_x t, y' - v_y t, z' - v_z t)$, esto es

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t). \quad (4.55)$$

Si ahora derivamos a \mathbf{J} respecto al tiempo t , obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla') \mathbf{J}. \quad (4.56)$$

Sustituyendo este resultado en la ec.(4.54), tenemos

$$\mathbf{E}_A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{R} (\mathbf{v} \cdot \nabla') \mathbf{J} dv'. \quad (4.57)$$

Si ahora usamos la identidad

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a}, \quad (4.58)$$

resulta que

$$\nabla'(\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}) = \mathbf{v} \times (\nabla' \times \mathbf{J}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla') \mathbf{J}. \quad (4.59)$$

Usando este resultado en la ec.(4.57), obtenemos que

$$\mathbf{E}_A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{R} \nabla'(\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}) dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{v} \times \int \frac{(\nabla' \times \mathbf{J})}{R} dv'. \quad (4.60)$$

Por otro lado sabemos que la ecuación del campo magnético \mathbf{B} producido por una densidad de corriente \mathbf{J} está dada por [Jefimenko1966]

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \mathbf{J}}{R} dv'. \quad (4.61)$$

Si comparamos las ecs.(4.60) y (4.61), encontramos que la primera se puede reescribir como

$$\mathbf{E}_A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{R} \nabla'(\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}) dv' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (4.62)$$

Por otra parte tenemos que el operador gradiente depende de las variables primadas y además satisface

$$\frac{\nabla'(\mathbf{v} \cdot \mathbf{J})}{R} = \nabla \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}}{R} \right) + \nabla' \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}}{R} \right); \quad (4.63)$$

entonces la ec.(4.62) se transforma en

$$\mathbf{E}_A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}}{R} \right) dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla' \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}}{R} \right) dv' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (4.64)$$

Si ahora usamos en el segundo término de la integral la identidad,

$$\oint U ds' = \int \nabla' U dv', \quad (4.65)$$

y dado que no tenemos una densidad de corriente al infinito tenemos que el segundo término de la integral es cero, entonces la ec.(4.64) puede escribirse como

$$\mathbf{E}_A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}}{R} \right) dv' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (4.66)$$

y como el gradiente no depende de las coordenadas de la fuente, entonces

$$\mathbf{E}_A = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}}{R} dv' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (4.67)$$

Ahora analicemos la integral

$$\mathbf{I} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}}{\mathbf{R}} dv'; \quad (4.68)$$

como $\mathbf{v} = cte.$ tenemos que

$$\mathbf{I} = \mathbf{v} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{R}} dv'. \quad (4.69)$$

Entonces, por ahora, nos basta con considerar la integral

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{R}} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (4.70)$$

Observamos que esta integral es el potencial vectorial \mathbf{A} , el cual está definido por [ver Apéndice A.]

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (4.71)$$

Por lo tanto la ec.(4.69) resulta ser

$$\mathbf{I} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad (4.72)$$

y usando la identidad $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, podemos escribirla como

$$\mathbf{I} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{v}). \quad (4.73)$$

Sustituyendo en la ec.(4.67) y tomando en cuenta que $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$, obtenemos que

$$\mathbf{E}_A = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \nabla \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (4.74)$$

Entonces, podemos reescribir la ec.(4.74) de la siguiente manera,

$$\mathbf{E}_A = \nabla \left\{ \left(\frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{m} \right) \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right\} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (4.75)$$

y como $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{m}$, resulta que

$$\mathbf{E}_A = \nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) - \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (4.76)$$

De acuerdo a la ecuación (4.53), obtenida anteriormente, el primer término de la ec.(4.76) es $-\mathbf{E}_{dipolo}$, por lo que obtenemos

$$\mathbf{E}_A = -\mathbf{E}_{dipolo} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (4.77)$$

Tenemos entonces que la fuerza que se ejerce sobre la carga q debido a la espira que se encuentra en movimiento uniforme es

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_{ret} = q(\mathbf{E}_{dipolo} - \mathbf{E}_{dipolo} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (4.78)$$

Este resultado nos dice que efectivamente la fuerza que medimos en dos diferentes sistemas inerciales es invariante.

4.4. Método Alternativo

La ecuación (2.36) que se encontró para el dipolo magnético inducido por un dipolo eléctrico en movimiento, se obtuvo fácilmente de la ecuación de Ampère-Maxwell y el uso de la derivada convectiva, ¿por qué la ecuación que relaciona un dipolo eléctrico inducido por el movimiento de un dipolo magnético no se obtiene tan fácilmente? Ya que esperaríamos que esta relación se obtuviera por medio de la Ley de Faraday, el problema que encontramos se debe a que esta Ley está expresada sólo en términos de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} .

Observamos que si la Ley de Faraday en forma diferencial la expresamos de manera poco usual, esto es, si la escribimos en términos de los campos \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{P} y \mathbf{M} , tenemos que es posible encontrar este resultado de una forma sencilla, además de que el procedimiento es análogo al que se utilizó para encontrar la ecuación que relaciona a un dipolo magnético inducido por el movimiento de un dipolo eléctrico.

Partimos de la Ley de Faraday en su forma usual

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.79)$$

usando las ecuaciones constitutivas

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (4.80)$$

y

$$\mathbf{E} = \epsilon_0(\mathbf{D} - \mathbf{P}). \quad (4.81)$$

Tenemos que la ec.(4.79) se puede reescribir como

$$\nabla \times \epsilon_0(\mathbf{D} - \mathbf{P}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (4.82)$$

Como el medio se encuentra en movimiento, sustituimos la derivada convectiva como se hizo para estudiar la Ley de Ampère-Maxwell [sección 2.1], esto es,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \implies \mu_0 \frac{D(\mathbf{H} + \mathbf{M})}{Dt}, \quad (4.83)$$

entonces, la ecuación(4.82) se transforma en

$$\nabla \times \epsilon_0(\mathbf{D} - \mathbf{P}) = -\mu_0 \frac{D}{Dt}(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (4.84)$$

Si ahora desarrollamos el miembro derecho de la ec.(4.84) tenemos que

$$\frac{D}{Dt}(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = -\mu_0 \left[\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H} + \mathbf{M}) + \nabla \times [(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \times \mathbf{u}] + (\nabla \cdot [(\mathbf{H} + \mathbf{M})])\mathbf{u} \right], \quad (4.85)$$

reagrupando términos y sustituyendo en la ec.(4.84) resulta

$$\nabla \times [\epsilon_0 \mathbf{D} + \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{H} \times \mathbf{u} - \epsilon_0 \mathbf{P} + \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{u}] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{u} \quad (4.86)$$

y como

$$(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0, \quad (4.87)$$

obtenemos que

$$\nabla \times [\epsilon_0 \mathbf{D} + \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{H} \times \mathbf{u} - \epsilon_0 \mathbf{P} + \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{u}] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.88)$$

Podemos definir

$$\mathbf{D}' = \epsilon_0 \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{H} \times \mathbf{u}, \quad (4.89)$$

y

$$\mathbf{P}' = \epsilon_0 \mathbf{P} - \frac{1}{c^2} \mathbf{M} \times \mathbf{u}. \quad (4.90)$$

Entonces la ec.(4.88) puede reescribirse como

$$\nabla \times (\mathbf{D}' - \mathbf{P}') = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.91)$$

y considerando que \mathbf{E}' debe satisfacer

$$\mathbf{E}' = (\mathbf{D}' - \mathbf{P}'), \quad (4.92)$$

resulta

$$\nabla \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.93)$$

Tenemos a la Ley de Faraday nuevamente escrita en su forma usual, pero como se encontró de forma indirecta, entonces se requiere que satisfaga las ecuaciones (4.89) y (4.90).

Por otro lado vemos que la ec.(4.90) ya nos da el resultado buscado, el cual nos dice que un dipolo magnético induce un dipolo eléctrico, por lo que si tenemos un medio magnetizado, en este caso la ecuación se reduce a

$$\mathbf{P}_{ind} = \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{M}. \quad (4.94)$$

La cual es la relación que obtuvimos de manera formal, mediante el método que se propusimos anteriormente.

4.5. Solución relativista de las ecuaciones para P y M

Para finalizar creemos que es conveniente comentar brevemente la teoría electromagnética para medios en movimiento desde un enfoque relativista.

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho & \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{J} \end{aligned}$$

pueden expresarse de manera explícitamente covariante como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \quad (4.95)$$

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} = 0 \quad (4.96)$$

donde su tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$ esta dado por

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.97)$$

su tensor dual,

$$F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (4.98)$$

como

$$F^{*\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ -B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.99)$$

donde el tensor antisimétrico $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ de rango 4 está definido como:

+1 para $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 2, \delta = 3$ cualquier permutación par
-1 para cualquier otra permutación
0 si cualquier par de índices son iguales

La cuadricorriente J^ν la definimos por

$$J^\nu = (c\rho_0, \mathbf{J}) \quad (4.100)$$

la cual satisface

$$\partial_\nu J^\nu = 0, \quad (4.101)$$

que es la ecuación de continuidad, como sabemos expresa la Ley de la conservación de la carga.

De igual manera, las ecuaciones de Maxwell en medios materiales pueden expresarse como

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu, \quad (4.102)$$

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} = 0 \quad (4.103)$$

donde el tensor $G^{\mu\nu}$ está dado por

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{D_x}{c\epsilon_0} & \frac{D_y}{c\epsilon_0} & \frac{D_z}{c\epsilon_0} \\ -\frac{D_x}{c\epsilon_0} & 0 & \mu_0 H_z & -\mu_0 H_y \\ -\frac{D_y}{c\epsilon_0} & -\mu_0 H_z & 0 & \mu_0 H_x \\ -\frac{D_z}{c\epsilon_0} & \mu_0 H_y & -\mu_0 H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.104)$$

que también lo podemos escribir como

$$G^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + N^{\mu\nu} \quad (4.105)$$

con $N^{\mu\nu}$ dado por

$$N^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{P_x}{c\epsilon_0} & \frac{P_y}{c\epsilon_0} & \frac{P_z}{c\epsilon_0} \\ -\frac{P_x}{c\epsilon_0} & 0 & -\mu_0 M_z & \mu_0 M_y \\ -\frac{P_y}{c\epsilon_0} & \mu_0 M_z & 0 & -\mu_0 M_x \\ -\frac{P_z}{c\epsilon_0} & -\mu_0 M_y & \mu_0 M_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.106)$$

Podemos definir a la cuadracorriente ligada J_{medios}^ν , como

$$J_{medios}^\nu = \partial_\mu N^{\mu\nu} \quad (4.107)$$

si aceptamos que $N^{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico de segundo rango y puesto que ∂_ν es un tensor simétrico, entonces se satisface automáticamente la ecuación de continuidad, es decir, si aplicamos ∂_ν a la ec.(4.107)

$$\partial_\nu J_{medios}^\nu = \partial_\nu \partial_\mu N^{\mu\nu} \quad (4.108)$$

resulta que

$$\partial_\nu J_{medios}^\nu = 0. \quad (4.109)$$

En donde encontramos que las componentes del tensor $\partial_\mu N^{\mu\nu}$, están dadas por las siguientes expresiones

1) La densidad de carga ligada J_{medios}^0

$$\frac{1}{\epsilon_0} (-\nabla \cdot \mathbf{P}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_P \quad (4.110)$$

2) La corriente de polarización y de magnetización J_{medios}^n , con $n = 1, 2, 3$.

$$\frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 (\nabla \times \mathbf{M}) = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} [\mathbf{J}_P + \mathbf{J}_M]. \quad (4.111)$$

Por lo tanto, el cuadvivector J_{medios}^ν contiene las fuentes debido a la polarización y magnetización del medio, y queda expresado como

$$J_{medios}^\nu = \left(\rho_P, \frac{J_P + J_M}{c} \right). \quad (4.112)$$

Por lo que ahora la cuadricorriente J_{Total}^ν la definimos como

$$J_{Total}^\nu = \frac{1}{\epsilon_0}(J^\nu + J_{medios}^\nu), \quad (4.113)$$

Es bien conocido que puede obtenerse la transformación de los campos eléctricos y magnéticos mediante la transformación de Lorentz, representada (en la dirección de \mathbf{x}), por la matriz

$$\Lambda_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.114)$$

esto es,

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu F^{\alpha\beta} \quad (4.115)$$

y obtenemos que

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})_y & B'_y &= \gamma(\mathbf{B}_y - \frac{\mathbf{u}}{c^2} \times \mathbf{E})_y \\ E'_z &= \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})_z & B'_z &= \gamma(\mathbf{B}_z - \frac{\mathbf{u}}{c^2} \times \mathbf{E})_z. \end{aligned}$$

En general esta transformación la podemos escribir de manera más simple, si definimos a los vectores \mathbf{E} y \mathbf{B} en términos de las componentes paralelas \mathbf{E}_\parallel y \mathbf{B}_\parallel y transversales \mathbf{E}_\perp y \mathbf{B}_\perp respecto de \mathbf{u} , por lo que tenemos que la transformación para ambos campos es

$$\mathbf{E}'_\parallel = \mathbf{E}_\parallel \quad (4.116)$$

$$\mathbf{B}'_\parallel = \mathbf{B}_\parallel \quad (4.117)$$

$$\mathbf{E}'_\perp = \gamma(\mathbf{E}_\perp + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_\perp) \quad (4.118)$$

$$\mathbf{B}'_\perp = \gamma(\mathbf{B}_\perp - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_\perp) \quad (4.119)$$

Procediendo de manera análoga con el tensor $N^{\mu\nu}$, tenemos que

$$N'^{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} N^{\alpha\beta} \quad (4.120)$$

y entonces resulta que la transformación de Lorentz para (\mathbf{P}, \mathbf{M}) es

$$\begin{aligned} P'_x &= P_x & M'_x &= M_x \\ P'_y &= \gamma(\mathbf{P} - \frac{\mathbf{u}}{c^2} \times \mathbf{M})_y & M'_y &= \gamma(\mathbf{M} + \mathbf{u} \times \mathbf{P})_y \\ P'_z &= \gamma(\mathbf{P} - \frac{\mathbf{u}}{c^2} \times \mathbf{M})_z & M'_z &= \gamma(\mathbf{M} + \mathbf{u} \times \mathbf{P})_z. \end{aligned}$$

Al igual que las transformaciones para los campos, podemos escribir de forma más simple las transformaciones para ambos momentos, esto es

$$\mathbf{P}'_{\parallel} = \mathbf{P}_{\parallel} \quad (4.121)$$

$$\mathbf{M}'_{\parallel} = \mathbf{M}_{\parallel} \quad (4.122)$$

$$\mathbf{P}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{P}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{M}_{\perp}) \quad (4.123)$$

$$\mathbf{M}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{M}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{P}_{\perp}) \quad (4.124)$$

Las ecuaciones (4.123) y (4.124) nos indican que la relatividad especial predice los efectos que producen los medios en movimiento cuando se analizan en otro sistema de referencia inercial. Aunque el efecto que produce un medio polarizado en movimiento puede reconocerse al analizar las corrientes equivalentes para medios en movimiento en la ecuación de Ampère-Maxwell, al no haber un análogo en las ecuaciones de Maxwell para un medio magnetizado en movimiento, ya que se suele afirmar que el dipolo eléctrico inducido por un dipolo magnético en movimiento es un efecto relativista pero, es interesante ver que para este tipo de medio material, este efecto se puede obtener mediante argumentos no relativistas, usando sólo resultados conocidos de la electrodinámica.

Conclusiones

En este trabajo hemos obtenido un resultado que consideramos importante e interesante para entender la electrodinámica de medios materiales en movimiento.

Utilizando sólo conceptos de la teoría clásica, proponemos un método para encontrar la ecuación que relaciona a un medio magnetizado que se mueve con velocidad constante con un medio polarizado, lo cual exhibe la simetría con la ecuación para medios polarizados que se mueven con velocidad constante y medios magnetizados, relación que se puede obtener directamente de la Ley de Ampère-Maxwell.

El método que proponemos se basa en el uso del potencial escalar retardado, y es, a diferencia de un método propuesto por Oleg D. Jefimenko, general, independiente de un modelo particular como el método de Jefimenko. Esto nos muestra la necesidad de mayor discusión del concepto de retardo temporal en la teoría electromagnética, y en especial en nuestros cursos.

Al haber obtenido el resultado mencionado sin recurrir a conceptos de relatividad especial, mostramos, la importancia de reconocer a la teoría electromagnética como una teoría intrínsecamente relativista.

Apéndice A

Expansión multipolar

A.1. Expansión multipolar del potencial escalar

Partimos del potencial escalar

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (\text{A.1})$$

Si usamos la ley de cosenos para reescribir a $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, tenemos que

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{A.2})$$

y como estamos calculando el potencial en un punto $P(\mathbf{r})$ fuera de la distribución de carga, de manera que $r > r'$, podemos desarrollar al segundo factor por medio de una serie de potencias, esto es

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots, \quad (\text{A.3})$$

por lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} &\approx 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} \right] + \frac{3}{8} \left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} \right]^2 \approx \\ &1 + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \left(3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')^2 - 1\right) + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

el cual es el desarrollo en serie para \mathbf{R} .

Nos interesa considerar sólo a los términos lineales, sustituyendo en la ec.(A.2) resulta que

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \simeq \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'. \quad (\text{A.5})$$

Si ahora sustituimos este resultado en la ec.(A.1), entonces

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{r}') dv' + \frac{1}{r^2} \int \rho(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' dv' \right], \quad (\text{A.6})$$

observamos que se obtienen los dos primeros términos del desarrollo multipolar para el potencial escalar φ .

Analizando el primer término de la integral, el cual es el término monopolar del potencial escalar, encontramos que este se reduce simplemente a

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad (\text{A.7})$$

en donde

$$Q = \int \rho(r') dv'. \quad (\text{A.8})$$

Si ahora consideramos que la densidad de carga total en la distribución es cero, tenemos que el término que domina esta distribución es el término dipolar, por lo que el potencial escalar resulta

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int \rho(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' dv', \quad (\text{A.9})$$

el cual se puede escribir como

$$\varphi_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \int r' \rho(\mathbf{r}') dv'. \quad (\text{A.10})$$

En donde, si usamos la definición del momento dipolar eléctrico, esto es,

$$\mathbf{p} = \int r' \rho(\mathbf{r}') dv', \quad (\text{A.11})$$

por lo que al sustituir esta ecuación en la ec.(A.10) resulta

$$\varphi_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad (\text{A.12})$$

que es potencial escalar de un dipolo eléctrico.

A.2. Expansión multipolar del potencial vectorial

Para obtener el desarrollo multipolar del potencial vectorial \mathbf{A} , utilizaremos un procedimiento similar al que se hizo para obtener el potencial escalar eléctrico.

Tenemos que el potencial vectorial \mathbf{A} está dado por

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{R}} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (\text{A.13})$$

Como lo hicimos para el potencial escalar eléctrico tomaremos el desarrollo en serie de \mathbf{R} y sólo consideraremos los términos lineales de éste, el cual es

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \simeq \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'. \quad (\text{A.14})$$

Si ahora lo sustituimos en la ec.(A.13), obtenemos el desarrollo multipolar para el vector potencial \mathbf{A} , es decir,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' + \frac{1}{r^2} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' dv' \right]. \quad (\text{A.15})$$

Vamos a demostrar que el primer término se anula, ya que éste representa al término monopolar del desarrollo, de la siguiente manera:

Si tenemos que la densidad de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ está totalmente contenida en una región del espacio, y la superficie está fuera de esa región, entonces se cumple que

$$\oint (\mathbf{J}\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (\text{A.16})$$

donde definimos a la diada o tensor de segundo rango ($\mathbf{J}\mathbf{r}'$) como [Tai1992]

$$(\mathbf{J}\mathbf{r}') = \begin{pmatrix} J_1 r'_1 & J_1 r'_2 & J_1 r'_3 \\ J_2 r'_1 & J_2 r'_2 & J_2 r'_3 \\ J_3 r'_1 & J_3 r'_2 & J_3 r'_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

así

$$(\mathbf{J}\mathbf{r}') \Rightarrow J_i r'_j \quad (\text{A.18})$$

$$i, j = 1, 2, 3.$$

Si aplicamos el teorema de Gauss a la ec.(A.16), tenemos

$$\int \nabla' \cdot (\mathbf{J}\mathbf{r}') dv' = 0, \quad (\text{A.19})$$

o bien, en términos de sus componentes

$$\int \partial_i (J_i r'_j) dv' = 0, \quad (\text{A.20})$$

y como $\mathbf{J}(r')$ es estacionaria, es decir

$$\nabla' \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{A.21})$$

o bien

$$\partial_i J_i = 0 \quad (\text{A.22})$$

resulta entonces que

$$\partial_i (J_i r'_j) = r'_j (\partial_i J_i) + J_i (\partial_i r'_j) = J_i \delta_{ij} \quad (\text{A.23})$$

Esto implica que

$$\int \partial_i (J_i r'_j) dv' = \int J_j dv' = 0. \quad (\text{A.24})$$

por lo que obtenemos que el primer término de la ec.(A.15) es cero, esto es,

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' = 0, \quad (\text{A.25})$$

por lo tanto el potencial vectorial \mathbf{A} se reduce a

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \int \mathbf{J}\mathbf{r}' dv'. \quad (\text{A.26})$$

Como veremos, este es el término dipolar magnético.

Para obtener el término dipolar magnético nos apoyamos en la demostración que hicimos para el término monopolar, esto es, como estamos considerando que \mathbf{J} se encuentra totalmente contenida en una región del espacio y la superficie se encuentra fuera de esa región, entonces

$$\oint (\mathbf{J} \mathbf{r}' \mathbf{r}') ds = 0. \quad (\text{A.27})$$

en donde definimos a la triada o tensor de tercer rango $(\mathbf{J} \mathbf{r}' \mathbf{r}')$ por sus componentes como

$$\begin{aligned} (\mathbf{J} \mathbf{r}' \mathbf{r}') &\Rightarrow J_i r'_j r'_k. \\ i, j, k &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Al igual que para el término monopolar, tenemos que por el teorema de Gauss debe cumplirse que,

$$\int \nabla' \cdot (\mathbf{J} \mathbf{r}' \mathbf{r}') dv' = 0, \quad (\text{A.29})$$

o bien, en términos de sus componentes

$$\int \partial_i (J_i r'_j r'_k) dv' = 0 \quad (\text{A.30})$$

y como $\partial_i J_i = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_i (J_i r'_j r'_k) &= (\partial_i J_i) r'_j r'_k + J_i (\partial_i r'_j) r'_k + J_i r'_j (\partial_i r'_k) = \\ &= J_i \delta_{ij} r'_k + J_i r'_j \delta_{ik}, \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

por lo que resulta

$$\partial_i (J_i r'_j r'_k) = J_j r'_k + J_k r'_j. \quad (\text{A.32})$$

Esto implica que

$$\int \partial_i (J_i r'_j r'_k) dv' = \int J_j r'_k + J_k r'_j dv' = 0. \quad (\text{A.33})$$

Despejando de la integral

$$\int J_j r'_k dv' = - \int J_k r'_j dv', \quad (\text{A.34})$$

por otro lado, sabemos que al integrando del lado derecho lo podemos reescribir como

$$J_k r'_j = \frac{1}{2} [J_k r'_j + J_k r'_j + r'_k J_j - r'_k J_j], \quad (\text{A.35})$$

esto es,

$$\int J_k r'_j dv' = \frac{1}{2} \int [J_k r'_j + J_j r'_k] dv' + \frac{1}{2} \int [r'_j J_k - r'_k J_j] dv' \quad (\text{A.36})$$

por la ec.(A.33), vemos que el primer sumando de la integral se anula, por lo que obtenemos

$$\int J_k r'_j dv' = \frac{1}{2} \int [J_k r'_j - r'_k J_j] dv' \quad (\text{A.37})$$

si ahora sustituimos en la ec.(A.34), tenemos que

$$\int J_j r'_k = \frac{1}{2} \int [r'_k J_j - J_k r'_j] dv'. \quad (\text{A.38})$$

Esta ecuación también la podemos escribir de la siguiente forma,

$$\int \mathbf{J} \mathbf{r}' dv' = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r}' \mathbf{J} - \mathbf{J} \mathbf{r}'] dv', \quad (\text{A.39})$$

al sustituir esta integral en la ec.(A.26) resulta que

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \int [\mathbf{r}' \mathbf{J} - \mathbf{J} \mathbf{r}'] dv' \right\}, \quad (\text{A.40})$$

la cual se puede escribir como

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \frac{1}{2} \left\{ \int [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{r}'] dv' \right\}, \quad (\text{A.41})$$

usando la identidad $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, podemos expresar a ésta como

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} \times \frac{1}{2} \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) dv'. \quad (\text{A.42})$$

Si ahora usamos la definición del momento dipolar magnético

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) dv', \quad (\text{A.43})$$

obtenemos el potencial vectorial para un dipolo magnético, el cual está dado por

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (\text{A.44})$$

Bibliografía

- [Arfken1995] George B. Arfken, Hans J. Weber, *Mathematical methods for physicists* , Academic, San Diego 1995.
- [Feynman1998] Richard Feynman , Robert B. Leighton, Matthew Sands, *Electromagnetismo y materia* , Volumen 2 , Addison Wesley Longmann , México 1998.
- [Griffiths1999] David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics, Third Edition*, Prentice-Hall Inc., New Jersey 1999.
- [Jackson1999] John David Jackson, *Classical Electrodynamics, Third Edition*, John Wiley and Sons Inc., New York 1999.
- [Jefimenko1966] Oleg D. Jefimenko, *Electricity and magnetism : An introduction to the theory of electric and magnetic fields*, Appleton-century-crofts, New York 1966.
- [McQuistan1985] Richmond B. McQuistan, *Campos escalares y vectoriales*, Editorial Limusa, México 1985.
- [Panofsky2005] Wolfgang K.H. Panofsky, Melba Phillips, *Classical Electricity and Magnetism, Second Edition*, Dover Publications, New York 2005.
- [Purcell1980] Edward M. Purcell, *Electricidad y magnetismo, Berkeley Physics course volumen 2*, Editorial Reverté, Madrid 1980.
- [Reitz1996] John R. Reitz, Frederick J. Milford, Robert W. Christy, *Fundamentos de la teoría electromagnética, Cuarta Edición*, Addison-Wesley Iberoamericana, México 1996.

- [Shadowitz1988] Albert Shadowitz *The electromagnetic field, Dover Publications, New York 1988.*
- [Tai1992] Tai Chen-To, *Generalized Vector and Dyadic Analysis, IEEE, New York 1992.*
- [Wangsness2001] Roald K. Wangsness, *Campos Electromagnéticos, Editorial Limusa, México 2001.*
- [Jefimenko1993] Oleg D. Jefimenko, *Force exerted on a stationary charge by a moving electric current or by a moving magnet, Am. J. Phys., Vol 61, No.3, March 1993, p.218-222.*