



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EVALUACIÓN DE EVENTOS DE RUINA
BAJO EL MODELO CRAMER—LUNDBERG

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

ACTUARIO

PRESENTA:

GABRIEL DARÍO RAMÍREZ SIERRA

TUTOR: DR. MARTÍN ROMERO MARTÍNEZ



2009



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO

1. Datos del alumno

Ramírez
Sierra
Gabriel Darío
56 86 01 29
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
099260727

2. Datos del tutor

Dr.
Martín
Romero
Martínez

3. Datos de Sinodales

Dra.
Ana
Meda
Guardiola

M. en C.
José Luis
Pérez
Garmendia

Act.
Miguel Ángel
Chong
Rodríguez

M. en A.P.
María del Pilar
Alonso
Reyes

4. Datos de la Tesis

Evaluación de eventos de ruina bajo el modelo Cramer—Lundberg
69 p.
2009

Agradezco

A mi mamá, no hay palabras para expresar tu amor prodigado desde mi llegada a tu existencia. Valiente, infatigable y dotada de una fortaleza que retas a la condición humana, nunca te ha vencido empresa alguna. Mamá, con la profunda devoción que llevas tu vida construyes la medida que dimensiona la mía.

A mis hermanos, solo ustedes conocen cuan largo y tumultuoso ha sido el camino, pero al fin nos llega la hora largamente esperada, en la que se han depositado ya tantas esperanzas. Crecer a su lado es la mayor aventura de mi vida.

A mi papá, por tu educación cimentada en hechos, silencioso y absorto en tu labor, pido día a día sabiduría y templanza que me hagan llevar a cabo una empresa que equipare lo admirable de tu obra.

A mis abuelos, guías y maestros, siempre esmerados en llevarme a la honradez, el respeto y el trabajo; en los momentos de mayor adversidad acudo a sus enseñanzas, en ellas yo encuentro mi trago de la paz.

A mi familia entera, su vigilia no ha sido vana y a través de su esfuerzo y confianza llega el momento de la retribución. Ustedes me han hecho creer firmemente en que debemos creer en un mundo mejor, luchar por un mundo mejor. Y ser parte de un mundo mejor. Entrego mi vida en pos de realizar esta visión.

A mis amigos, que han tenido parte en cuanto yo he hecho en esta vida, así en la derrota como en la hora de la victoria, díganme a los ojos ¿Cuán diferentes fueran las cosas de no haber contribuido todos con ser y alma de la forma que ya lo hemos hecho? ¿Y qué recompensa mayor podemos reclamarnos que las vivencias de penas y alegrías compartidas mientras continuamos en esta historia? A pesar de la distancia, persistirá en mi memoria su recuerdo, que ya siempre formará parte de mi existencia.

A todos aquellos, que aunque yo no esté con ellos, me llevan en su pensamiento.

A todos aquellos, que aunque no están conmigo, los llevo en el corazón.

Gabriel Darío.

INDICE

INTRODUCCION	1
CAPITULO I MODELO DE RUINA DE CRAMER—LUNDBERG	4
1.1 Generalidades del Modelo	4
1.2 Limitaciones del Modelo Clásico	7
1.3 Momento de Ruina	9
1.4 Condición de Ganancia Neta	11
1.4.1 La Condición de ganancia neta $\rho > 0$	14
1.4.2 Proceso de riesgo con excedente de prima negativo $\rho < 0$	16
1.5 Exponente de Lundberg	18
1.6 Distribuciones de <i>baja reclamación y gran reclamación</i>	20
CAPITULO II SEVERIDAD DE LA RUINA	22
2.1 Derivación del resultado para obtener la <i>Función de Pago Esperado</i>	25
2.2 Solución cerrada de la <i>Función de Pago Esperado</i>	35
CAPITULO III SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DE VOLTERRA CON REGLAS DE INTEGRACION GAUSSIANAS	39
3.1 Fundamentos para el cálculo de Ecuación de Volterra de grado II con reglas de integración Gaussianas: Ecuaciones de Fredholm	39
3.2 Reglas de integración Gaussianas	43
3.3 Ecuación de Fredholm de Segundo Tipo	48
3.4 Solución numérica de la ecuación de Volterra con reglas de integración Gaussianas	57
ANEXOS	62
BIBLIOGRAFIA	67

INTRODUCCION

El riesgo en el contexto actuarial se define como el daño potencial que puede ocurrir por el desarrollo de un evento; el riesgo combina la probabilidad de que ocurra un evento con las consecuencias que dicho evento causaría. En la evaluación del riesgo, el tiempo es un componente fundamental porque puede cambiar tanto la cantidad y calidad de la información disponible como los factores que aumentan o disminuyen el riesgo y su probabilidad. En resumen, tratar con riesgos requiere que se respondan dos preguntas ¿Cuánto puedo perder? y ¿Cuál es la probabilidad de que esa pérdida ocurra?

Existen al menos dos razones para el manejo del riesgo. En primer lugar, el riesgo debe ser limitado y administrado porque tiene consecuencias negativas que se traducen en pérdidas. En segundo, conocer los riesgos a los cuales se está expuesto permite elegir la estrategia de administración de riesgo adecuada. La administración del riesgo se encarga de establecer la mejor cobertura para mitigar el efecto de los riesgos. La cobertura de un riesgo se define como el conjunto de decisiones y acciones destinadas a transferir, evitar o absorber los riesgos.

De acuerdo con Chavas [4], existen tres factores principales que contribuyen a la existencia y prevalecencia de los riesgos. En primer lugar los riesgos existen por la incapacidad de controlar o medir con precisión todos los factores de un evento; en segundo, los riesgos existen debido a la capacidad limitada para procesar información y en tercero, aún obteniendo y procesando una gran cantidad de información, no significa que toda la información será utilizada por el costo del análisis, lo que repercute en el incremento de la incertidumbre.

El riesgo al que nos enfocaremos en esta tesis será el riesgo de ruina de entidades económicas que se definen como *organizaciones cuya operación es medible*

en término de la relación ingreso—egreso de flujos contingentes de efectivo. Con la definición anterior vamos a estudiar la capacidad que tienen las entidades económicas de sobrevivir a las pérdidas, especialmente de aquellos riesgos que provoquen egresos que la entidad no pueda soportar, generándose la *ruina* de la entidad, que se entiende como:

Ruina: Condición que hace insostenible la continuidad de la entidad.

El problema de la ruina y el cálculo de su probabilidad son típicos de entidades que tienen flujos contingentes de efectivo como aseguradoras, reaseguradoras y el sistema bancario, entidades que por ley deben administrar los riesgos de su operación siguiendo lineamientos de organismos reguladores nacionales e internacionales. Ejemplos de organismos reguladores son, en el ámbito internacional: *Securities and Exchanges Commission* de Estados Unidos, *Financial Services Authority* del Reino Unido así como los bancos centrales de diversos países que integran el *Bank of International Settlements*. En el caso de México, los organismos encargados de estas tareas son la Comisión Nacional Bancaria y de Valores, la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas y el Banco de México.

Por medio de la tesis se estudiará el cálculo del valor esperado de la ruina en el Modelo Clásico de Ruina Cramer—Lundberg. El modelo clásico de ruina sirve para modelar los ingresos y egresos de entidades económicas como las aseguradoras. Este modelo posee tres componentes: capital inicial u , los ingresos y los egresos hasta el tiempo t . El ingreso es ct , donde se asume que la entidad percibe ingresos de magnitud constante c por unidad de tiempo; los egresos se representan por $S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$,

compuesta por la suma de variables aleatorias X_j independientes e idénticamente distribuidas y donde $N(t)$ es el número de egresos que presenta la entidad hasta el tiempo t , con el supuesto de que $N(t)$ sigue una distribución Poisson con parámetro λt . La variable $X_j \geq 0$ es la magnitud individual de cada uno de los egresos. En el Modelo Clásico se define el *momento de ruina* como el tiempo $t = T$ en que la entidad económica no sostiene una diferencia positiva de ingresos—egresos en su operación.

Gerber [9] examina en el Modelo Clásico la distribución del tiempo de ruina, el capital inmediatamente anterior a la ruina y el déficit de capital en el momento de ruina del Modelo Clásico; además el tiempo de ruina y se obtienen expresiones para calcular el valor esperado de la pérdida en el momento de ruina, que se resuelven por medio de una ecuación de Volterra de grado II. En esta tesis se presenta una solución numérica a dicha ecuación por medio de aplicar reglas de integración Gaussianas.

El contenido de la tesis se presenta de la siguiente forma: En el capítulo I se describe el Modelo Clásico de Ruina de Cramer—Lundberg así como la *probabilidad de ruina*. En el capítulo II se discute la distribución del tiempo de ruina, el capital de la ruina inmediatamente antes de la ruina y el capital después de la ruina, dichas distribuciones se toman como factores para medir la severidad de ruina. Finalmente en el capítulo III se presentan las reglas de integración Gaussianas, así como una estimación numérica del valor esperado de la pérdida en el momento de ruina, donde se considera una distribución de egreso exponencial y un valor de ruina visto como una función de pago que realiza la entidad en el momento que ocurre la ruina.

CAPITULO I

MODELO DE RUINA DE CRAMER—LUNDBERG

1.1 Generalidades del Modelo

Este capítulo describe el *Modelo Clásico de Ruina* y los supuestos que maneja, además de presentar las expresiones para la *probabilidad de ruina* y el *momento de ruina*; también se discuten las condiciones que se deben cumplir para garantizar que la ruina no ocurra con toda seguridad.

El modelo de Cramer—Lundberg fue propuesto por Lundberg en 1903 y extendido por Cramer en 1953 y se conoce como el *Modelo Clásico de Ruina*. El modelo explica el comportamiento del capital total de una entidad que tiene ingresos constantes y egresos aleatorios en el tiempo, esto es

$$U(t) = u + ct - S(t) \quad (1.1.1)$$

donde:

- u Capital inicial.
- ct Ingresos constantes al tiempo t .
- X_j La j -ésima magnitud de egreso. $\{X_j\}$ son variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, con función de distribución F , media y varianza finita, es decir $\mu = E[X_1] < \infty$ y $\sigma^2 = \text{var}(X_1) < \infty$.
- $N(t)$ Proceso de Egresos, indica el número de reclamaciones en el intervalo $[0, t]$ tal que $N(t) = \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}$, $t \geq 0$

donde

- Las reclamaciones ocurren en un tiempo t_n , entonces
 $0 < t_1 < t_2 < \dots$
- Los intervalos de reclamaciones son $Y_1 = t_1$, $Y_k = t_k - t_{k-1}$,
 $k = 2, 3, \dots$ son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas.
- Se define $\text{sup } \emptyset = 0$ y T_n es el momento de ruina en n .
- Las secuencias (X_k) y (Y_k) son independientes entre sí; además, si $N(t)$ es un proceso homogéneo Poisson, entonces
 $E[Y_1] = 1/\lambda$.

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j \text{ es el agregado de egresos hasta el tiempo } t. \quad (1.1.2)$$

En el Modelo Clásico $N(t)$ es un proceso homogéneo Poisson con parámetro λt , es decir

$$P(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.3)$$

Y tiene las siguientes propiedades:

- El número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo o región específicos es independiente del número que ocurre en cualquier otro intervalo disjunto de tiempo o región del espacio disjunto.
- La probabilidad de que en un resultado ocurra en un intervalo de tiempo muy corto o en una región pequeña es proporcional a la longitud del intervalo de tiempo o al tamaño de la región.
- La probabilidad de que ocurra más de un evento en un intervalo de tiempo suficientemente pequeño es despreciable (no se producirán eventos simultáneos).

La última propiedad implica que la ruina se deberá a la ocurrencia de un número pequeño de eventos de una gran magnitud y se descarta la posibilidad de la ocurrencia de un número muy grande de eventos de pequeña magnitud, que es el otro posible escenario para la ocurrencia de ruina.

Las entidades que pueden ser modeladas por el Modelo Clásico se caracterizan por poseer egresos contingentes, un capital inicial que sirve como cobertura para las fluctuaciones negativas que resulten de la operación y un ingreso que depende de los periodos de operación. Entre los casos típicos de entidades con estas características destacan las aseguradoras, donde se observan directamente las siguientes correspondencias con el Modelo Clásico: el nivel de ingreso del modelo ct con el monto obtenido por las primas de los seguros que emita la institución, X_j representa las reclamaciones de los siniestros cubiertos por la entidad en el cual la frecuencia y

severidad total del conjunto de siniestros es $S(t)$, u es el capital inicial más reservas con que debe contar para garantizar las operaciones. Las entidades de estudio tienen implícito que sean lucrativas, debido a ello es de interés identificar las condiciones con las cuales se obtiene una diferencia positiva de ingresos—egresos que resulta de sus operaciones, es decir, $U(t) > 0$.

1.2 Limitaciones del Modelo Clásico

Debido a los supuestos del Modelo Clásico, éste tiene limitaciones en la práctica. Taylor y Buchanan [26] mencionan que la teoría del Modelo Clásico es bien conocida y tiene un desarrollo avanzado, pero tiene aspectos que carecen de realismo en la práctica y requiere modificaciones substanciales para su aplicación. La principal limitación del modelo son los supuestos para la frecuencia y magnitud de los egresos, en particular que las variables aleatorias en el proceso de egresos son independientes, pero en la práctica existe dependencia entre las variables que puede darse en varios niveles. Por su parte Philipson [24] describe las limitaciones los siguientes ejemplos aplicados a la evaluación de seguros:

- Existen eventos para los cuales la frecuencia de reclamaciones en dos periodos distintos del tiempo no son independientes. En la práctica, los seguros que protegen a las casas habitación de tormentas y precipitaciones pluviales, las tasas de ocurrencia se ven afectadas por los patrones climáticos estacionales.
- Los montos de reclamación entre eventos pueden depender entre sí. Con el mismo caso de los seguros de tormentas, una tormenta que ocurra en un

área en particular puede ocasionar el mismo nivel de daños en las propiedades en esa área, lo que tiene como consecuencia que se registren reclamaciones de la misma magnitud.

Finalmente Philipson [24] indica que la generalidad de los resultados proviene de las restricciones que definen al modelo.

Estos hallazgos de dependencia entre los eventos tienen efectos relevantes en la distribución del agregado de reclamaciones $S(t)$ y en consecuencia en los resultados del Modelo Clásico. Por lo tanto, en la práctica la interdependencia de los eventos en el proceso de reclamación de seguros debe considerarse en los requerimientos iniciales de reservas en las nuevas líneas de negocio.

Con base en lo anterior se realizó un análisis de los supuestos utilizados en el Modelo Clásico para identificar aquellos que representan dificultades en la práctica; se obtuvieron los siguientes hallazgos.

El Modelo Clásico se define como un sistema cerrado donde sus componentes son independientes de factores exógenos, esta es una limitante porque las entidades no se desarrollan sino en ambientes abiertos. Además el modelo considera a ct como un monto constante que crece como producto del tiempo de operación transcurrido. También se asume que el ingreso se realiza de forma constante en el tiempo. Es posible estimar el ingreso por periodo como un valor esperado a través de pronósticos basados en la experiencia de la entidad, sin embargo no se considera el efecto en la moratoria y prepago y los ingresos ct no incluyen ingresos adicionales, por ejemplo rendimientos en inversiones. Finalmente, el capital inicial de la entidad u se define como una constante arbitraria que determina el nivel inicial de capital con que se realiza la

modelación. El capital representa la garantía de pago porque en todos los puntos del tiempo en que los ingresos sean superados por las reclamaciones, el capital compensará las diferencias. En la práctica, el capital debe ser proporcional con el volumen de flujos de efectivo que maneja la organización y el capital debe variar en el tiempo. Además el Modelo Clásico asume un comportamiento estático de las variables, en la práctica, las variaciones de capital no se realizan de forma instantánea; la organización puede ajustar el capital en función de la estimación de los requerimientos de la operación, así como por indicaciones de los organismos reguladores, de forma tal que se garantice que la entidad posea el capital necesario para garantizar un nivel de pago de las pérdidas.

1.3 Momento de Ruina

Una vez expuesto el *Modelo Clásico*, se procederá al cálculo de la *probabilidad de ruina* y el estudio de las condiciones que producen eventos de ruina en el modelo. En Embrechts [5] se calcula la probabilidad de ruina con el Modelo Clásico.

Probabilidad de ruina: La probabilidad de ruina en tiempo finito (o con horizonte finito) se define como $\psi(u, T)$

$$\psi(u, T) = P(U(t) < 0 \quad \text{para alguna } t < T), \quad 0 < T < \infty, \quad u \geq 0$$

La probabilidad de ruina en tiempo infinito (o con horizonte infinito)

$$\psi(u) = \psi(u, \infty), \quad u \geq 0$$

Tiempo de ruina:

$$\tau(T) = \inf\{t : 0 \leq t \leq T, U(t) < 0\}, \quad 0 < T \leq \infty \quad (1.3.1)$$

Para obtener una expresión que permita el cálculo de la *probabilidad de ruina* en tiempo finito o infinito, Embrechts [8] calcula la probabilidad de ruina mediante el uso de caminatas aleatorias. Si la ruina ocurre en un tiempo de reclamación T , entonces para $u \geq 0$,

$$\begin{aligned} \psi(u) &= P(u + ct - S(t) < 0 \text{ para alguna } t \geq 0) \\ &= P(u + cT_n - S(T_n) < 0 \text{ para alguna } n \geq 1) \\ &= P\left(u + \sum_{k=1}^n (cY_k - X_k) < 0\right) \text{ para alguna } n \geq 1 \\ &= P\left(\sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n (X_k - cY_k) > u\right) \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Si $\psi(u) < 1$ entonces

$$1 - \psi(u) = P\left(\sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n (X_k - cY_k) \leq u\right) > 0, \quad u \geq 0 \quad (1.3.3)$$

Entonces la probabilidad de ruina es dada por

$$1 - \psi(u) = P\left(\sup_{n \geq 1} R_n \leq u\right) \quad (1.3.4)$$

donde R_n es una caminata aleatoria. El cálculo para llegar de (1.3.3) a (1.3.4) se determina por medio de la identidad de Spitzer, cuyo cálculo se presenta detalladamente en Feller [7].

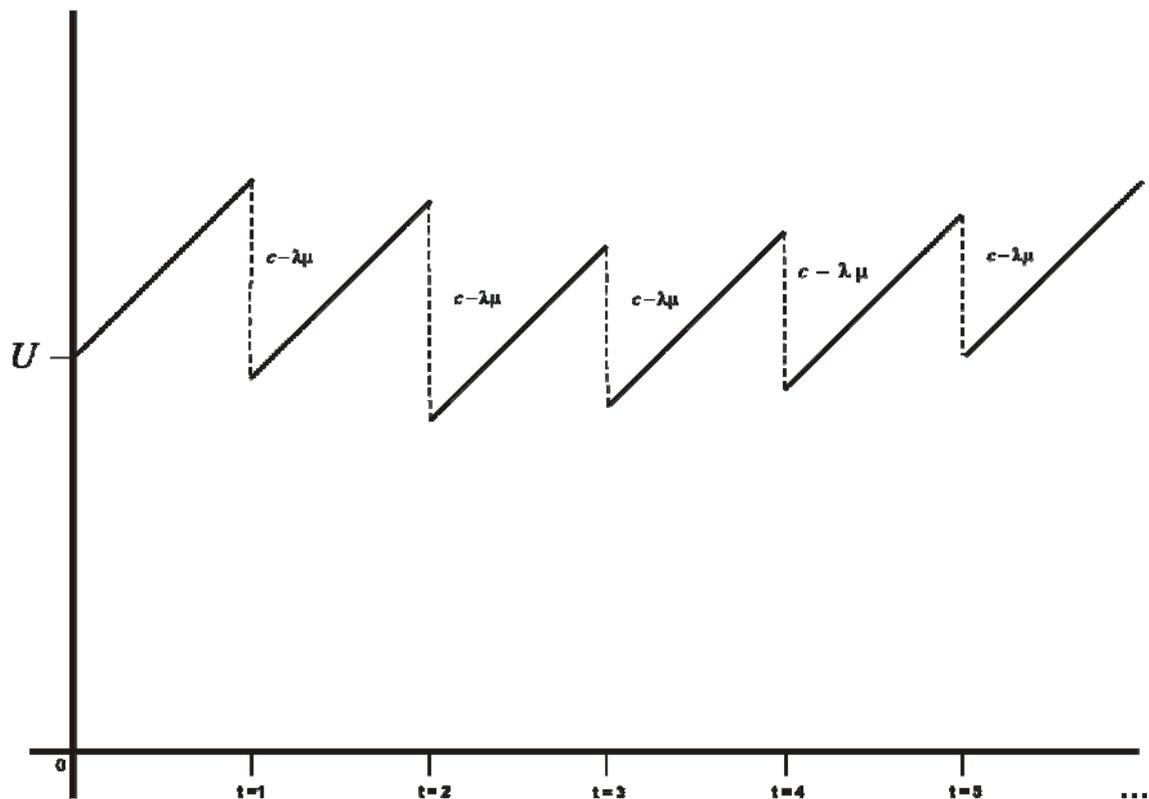
1.4 Condición de Ganancia Neta

En el Modelo Clásico, es importante identificar las condiciones iniciales bajo las cuales *con toda seguridad* se producirá la *ruina de la entidad*, esto sucede cuando $\psi(u) = 1$. En Embrechts [5] se toma (1.3.2) para mostrar que la ruina de la entidad se dará si para la sucesión de variables aleatorias $Z_k = cY_k - X_k$ que representa el balance parcial de ingreso en el intervalo $(t_{k-1}, t_k]$, la esperanza $E[Z_k] \leq 0$, es decir, que los ingresos esperados de la entidad por unidad de tiempo sean menores que los egresos esperados para ese mismo periodo. Es decir, si $E[Z_k] > 0$ entonces $E[cY_k - X_k] > 0$ y los tiempos de reclamación $Y_k = t_k - t_{k-1}$ son exponenciales con esperanza λ^{-1} entonces

$$\begin{aligned} E[c(Y_k - Y_{k-1}) - X_k] &> 0 \\ E[c(\lambda^{-1}) - X_k] &> 0 \\ c\lambda^{-1} - \mu &> 0 \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

La expresión (1.4.1) se conoce como *Condición de Ganancia Neta* y se define de la siguiente forma:

La Condición de Ganancia Neta: Valor esperado positivo de la diferencia de ingresos y egresos, tal que se garantiza que no se da una condición de ruina con toda seguridad en el Modelo Clásico.



Gráfica 1.1 $U(t)$ con $t = 1, 2, \dots$. En el ejemplo se ilustra cómo interactúa el nivel de utilidad en t en función de la diferencia entre ingresos y egresos.

En la gráfica 1.1 se observa que cada t el capital tiene saltos que resultan del valor de la diferencia ingresos—egresos. Si se cumple la condición de ganancia neta (1.4.1) la esperanza de $Z_k = cY_k - X_k$ es positiva, entonces u no llegará a cero con toda seguridad y $\psi(u) < 1$, la probabilidad de ruina es estrictamente menor que uno. Un

índice adicional que se utiliza para calcular la probabilidad de ruina es el cociente de la esperanza de ingresos sobre la esperanza de los egresos y se representa por ρ tal que

$$\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0 \quad (1.4.2)$$

A continuación se muestran tres simulaciones con diferentes valores de ρ para apreciar el impacto que produce ρ en el proceso de egresos del Modelo Clásico. Se usa la expresión (1.1.1) para realizar las simulaciones del proceso de egresos y se fijan los valores de capital inicial y el ingreso constante por periodo. Las simulaciones se realizan suponiendo que el monto de egresos de la entidad tiene una distribución de probabilidad exponencial. Los valores fijos se dan con respecto con la siguiente tabla.

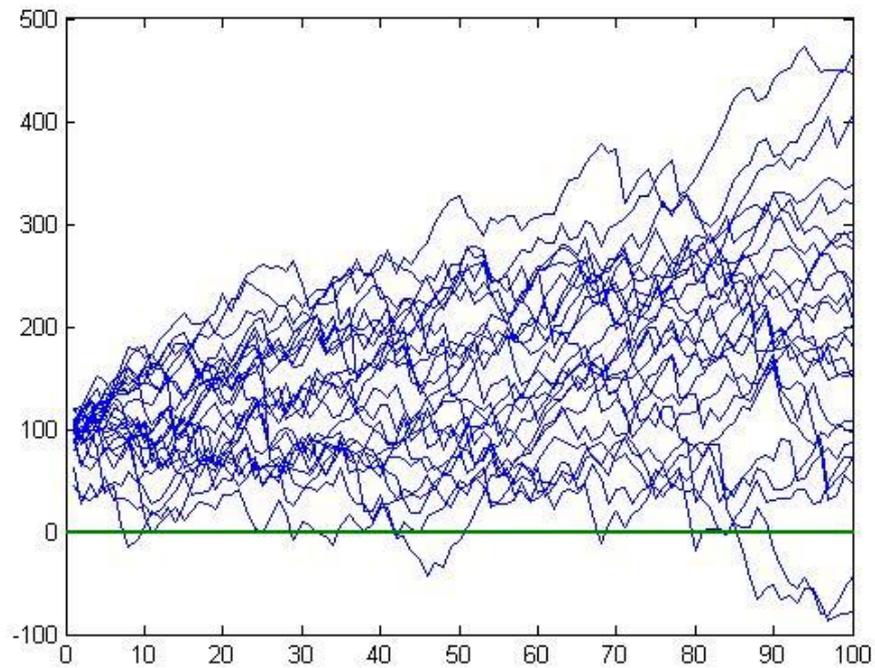
Cuadro 2.1 Valores para la simulación del Modelo Clásico

Parámetro	Valor
Simulaciones	25, 1000
$u(0)$	100
c	20

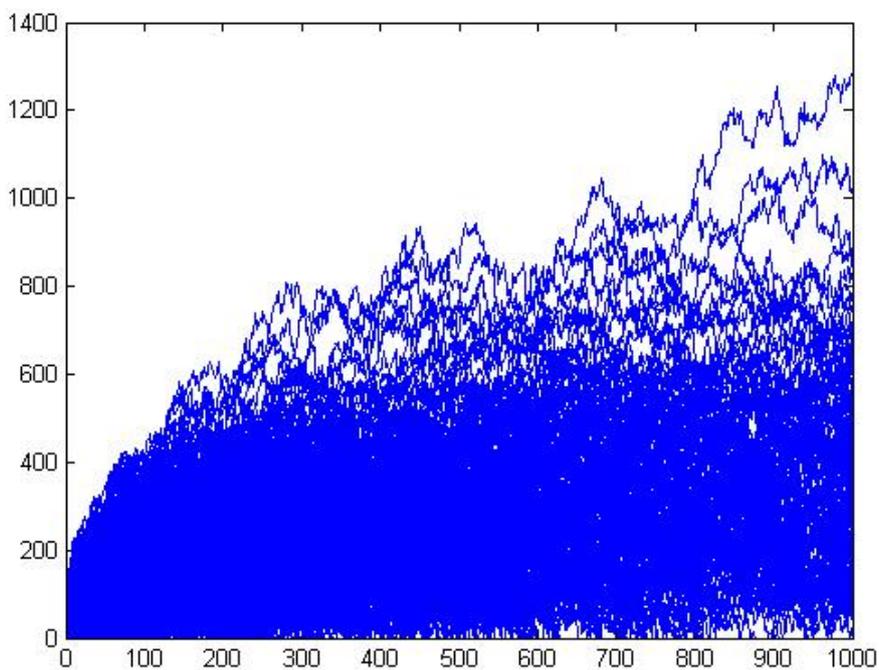
Simulación	ρ	λ	μ
1	0.013	5	3.95
2	-0.013	5	4.05

A continuación se muestran los gráficos en los que se presenta el proceso de egresos del Modelo Clásico cuando ocurre la primera ruina.

1.4.1 Condición de ganancia neta $\rho > 0$

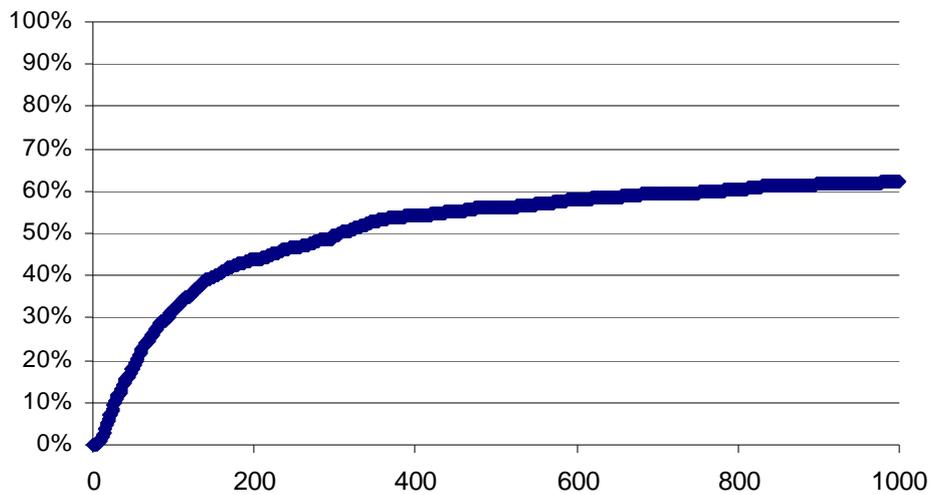


Gráfica 1.2 Simulación 1 del proceso de ruina con $\rho = 0.013$ con 25 simulaciones.



Gráfica 1.3 Simulación 1 del proceso de ruina con $\rho = 0.013$ con 1000 simulaciones.

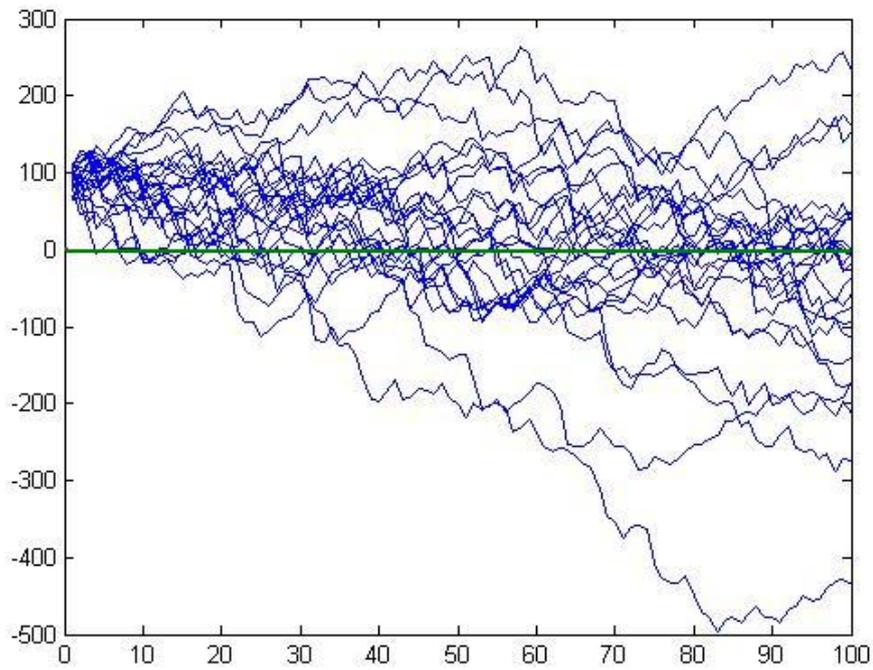
En el gráfica 1.4 se observa la evolución de la probabilidad de ruina, nótese que la probabilidad de ruina tiende a estacionarse alrededor de 0.65.



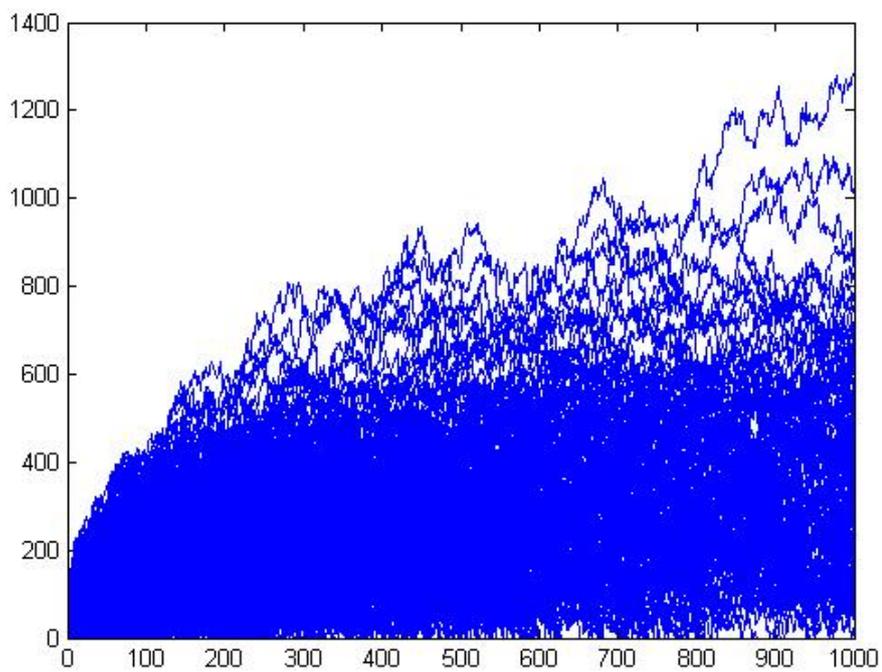
Gráfica 1.4 Probabilidad de ruina de Simulación 1 proceso de ruina con $\rho = 0.013$

En la gráfica 1.4 se observa una tendencia de las caminatas aleatorias donde el valor del capital sigue trayectorias con valores positivos, esto se debe a que en esperanza existe un excedente positivo de la diferencia de ingresos—egresos, dicha situación garantiza que la entidad no experimenta con toda seguridad la ruina. La afirmación anterior puede observarse tan sólo con extender de forma suficiente el número de periodos y se observe que la probabilidad de la ruina se estaciona antes de llegar a 1.

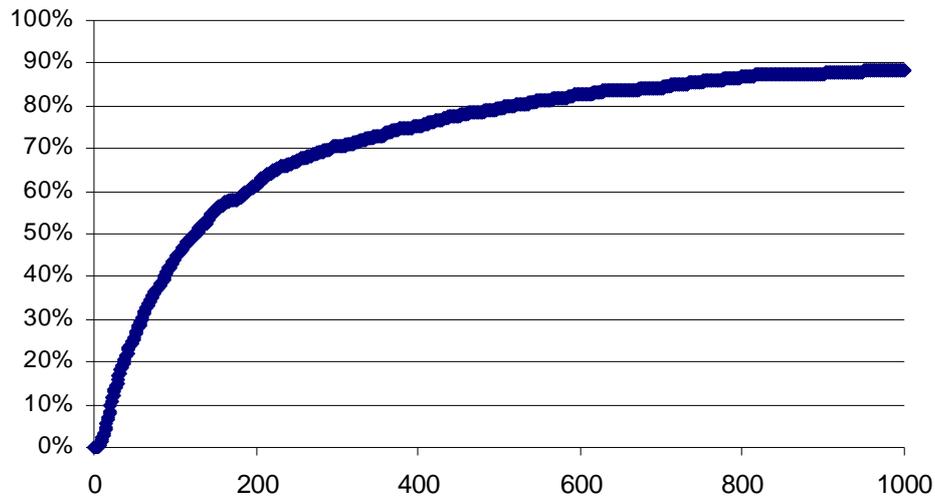
1.4.2 Proceso de riesgo con excedente de prima negativo $\rho < 0$



Gráfica 1.5 Simulación 2 del proceso de ruina con $\rho = -0.013$ con 25 simulaciones.



Gráfica 1.6 Simulación 2 del proceso de ruina con $\rho = -0.013$ con 1000 simulaciones.



Gráfica 1.7 Probabilidad de ruina de Simulación 2 proceso de ruina con $\rho = -0.013$

Al utilizar $\rho < 0$ no se cumple la condición de ganancia neta necesaria para garantizar que no se origine con toda seguridad la ruina, de esta forma, por cada uno de los periodos de tiempo los ingresos son superados por los egresos en esperanza y la diferencia negativa se descuenta del capital, mismo que se consume por los egresos hasta que se produce la ruina en la entidad. Es relevante mencionar que en los primeros mil periodos de observación, una diferencia de ρ de 0.026 entre la Simulación 1 y 2 causa un incremento en la probabilidad de ruina de 0.65 a 0.90, lo cual sugiere que la probabilidad de ruina en el Modelo Clásico tiene una gran sensibilidad frente a pequeños cambios en el valor ρ .

1.5 Exponente de Lundberg

El exponente de Lundberg establece la existencia de un valor $\nu > 0$ tal que la probabilidad de ruina $\psi(u)$ se acota superiormente por una función que decrece exponencialmente, en Embrechts [8], esta propiedad se formaliza por el siguiente teorema

Teorema

En el *Modelo Clásico* (1.1.1) si se cumple la *condición de ganancia neta* (1.4.3), y existe $\nu > 0$ tal que

$$\hat{f}_I(-\nu) = \int_0^{\infty} e^{\nu x} dF_I(x) = \frac{c}{\lambda\mu} = 1 + \rho \quad (1.5.1)$$

donde

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy, \quad x \geq 0 \quad (1.5.2)$$

denota la distribución de la cola y $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, $x \geq 0$, entonces se siguen las siguientes relaciones

Para toda $u \geq 0$,

$$\psi(u) \leq e^{-\nu u} \quad (1.5.3)$$

Lo que significa que existe una función que acota superiormente al valor de la probabilidad de ruina. Si, más aún

$$\int_0^{\infty} x e^{vx} \bar{F}(x) dx < \infty \quad (1.5.4)$$

entonces

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{-vu} \Psi(u) = C < \infty \quad (1.5.5)$$

donde

$$C = \left[\frac{v}{\rho \mu_0} \int_0^{\infty} x e^{vx} \bar{F}(x) dx \right]^{-1} \quad (1.5.6)$$

Dada una distribución de egreso de la entidad $F(x)$ y con diferencial dfF , la constante $v > 0$ que satisface

$$\int_0^{\infty} e^{vx} \bar{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda} \quad (1.5.7)$$

se llama *Exponente de Lundberg* o *Coficiente de Ajuste* del proceso de riesgo.

Con todo lo anterior, podemos obtener una aproximación de la probabilidad de ruina para distribuciones de probabilidad para las cuales existe el Coeficiente de Ajuste.

$$\psi(u) \approx C e^{-vu} \quad (1.5.8)$$

1.6 Distribuciones de *baja reclamación* y *gran reclamación*

De acuerdo con (1.5.1) la existencia de ν implica que $\hat{f}_l(s)$ existe para una vecindad no vacía de 0, lo que implica que la cola \bar{F}_l está acotada por

$$\bar{F}(x) \leq e^{-\nu x} E[e^{\nu X_1}], \quad x > 0$$

Esta desigualdad significa que mientras las reclamaciones se hacen más grandes, su probabilidad de ocurrencia disminuye exponencialmente, por este motivo (1.5.1) se conoce como *condición de baja reclamación*. A continuación se presentan dos cuadros, el cuadro 2.1 contiene distribuciones para las cuales existe ν y por lo tanto satisfacen (1.5.1) entonces se les conoce como distribuciones de baja reclamación. El cuadro 2.2 contiene distribuciones que no satisfacen (1.5.1) y se definen como distribuciones de *gran reclamación*.

Cuadro 2.2 Distribuciones de baja reclamación, definidas en $(0, \infty)$. Embrechts [8]

Nombre	Cola \bar{F} o densidad f	Parámetros
Exponencial	$\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$	$\lambda > 0$
Gamma	$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$	$\alpha, \beta > 0$
Weibull	$\bar{F}(x) = e^{-cx^\tau}$	$c > 0, \tau \geq 1$
Normal Trunca	$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	—

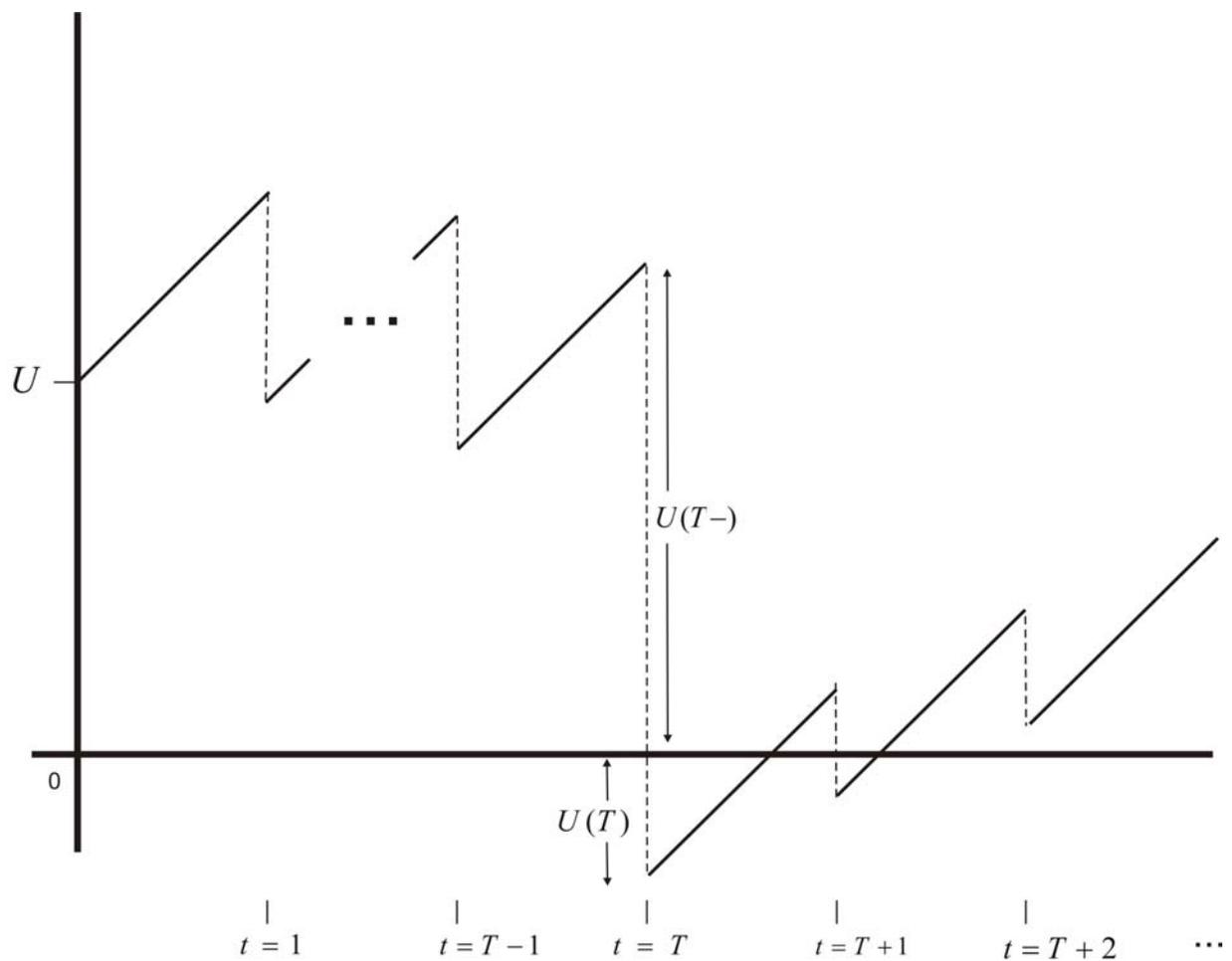
Cuadro 2.3 Distribuciones de gran reclamación, están definidas en $(0, \infty)$, excepto las distribuciones Benktander y la Loggamma definidas en $(1, \infty)$. Embrechts [8]

Nombre	Cola \bar{F} o densidad f	Parámetros
Lognormal	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mu \in \mathfrak{R}, \sigma > 0$
Pareto	$\bar{F}(x) = \left(\frac{k}{k+x}\right)^\alpha$	$a, k > 0$
Burr	$\bar{F}(x) = \left(\frac{k}{k+x^\tau}\right)^\alpha$	$a, k, \tau > 0$
Benktander tipo I	$\bar{F}(x) = (1 + 2\frac{\beta}{\alpha} \ln x) e^{-\beta(\ln x)^2 - (\alpha+1)\ln x}$	$\alpha, \beta > 0$
Benktander tipo II	$\bar{F}(x) = e^{\frac{\alpha}{\beta} x^{-(1-\beta)}} e^{-\alpha \frac{x^\beta}{\beta}}$	$\alpha > 0, 0 < \beta < 1$
Weibull	$\bar{F}(x) = e^{-cx^\tau}$	$c > 0, 0 < \tau < 1$
Loggamma	$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$	$\alpha, \beta > 0$

CAPITULO II

SEVERIDAD DE LA RUINA

En el Modelo Clásico, Gerber [11] define la severidad de las reclamaciones en el tiempo t como la diferencia que experimenta el capital $u(t)$ entre los periodos $t -$ y t , donde $t -$ representa el momento inmediatamente anterior de t . Cuando $t = T$ entonces la diferencia de capital entre los periodos $T -$ y T define la *severidad de ruina*. En la gráfica 2.1 se ejemplifica la severidad de la ruina alrededor del tiempo T .



Gráfica 2.1 Capital inmediatamente antes de la ruina $U(T-)$ y después de la ruina $U(T)$.

Gerber [11] obtiene la distribución conjunta de tres variables aleatorias: el capital inmediatamente anterior a la ruina, la reclamación que produce la ruina y el tiempo de ruina. El objetivo de la distribución conjunta antes mencionada es estimar el valor esperado del monto de reclamación en la ruina.

Para construir la distribución conjunta a partir del Modelo Clásico, Gerber [11] considera dos variables, $U(T-)$ denota el monto del capital en el momento inmediato anterior a la ruina y $U(T)$ el capital que se registra en el momento de ruina. A continuación se mostrará la distribución conjunta que se desarrolla en Gerber [11]. Sea $U(0) = u \geq 0$, capital inicial mayor que cero; denotamos

$$f(x, y, t | u) dx dy dt \tag{2.0.1}$$

la función de distribución conjunta de la severidad con argumentos $U(T-)$, $|U(T)|$ y T , donde se toma el valor absoluto $|U(T)|$ para manejar el saldo negativo como un monto de capital.

Si se considera la probabilidad de ruina $\psi(u)$ que cumple la condición de ganancia neta (1.4.1) entonces se garantiza que la ruina no se cumple con toda seguridad

$$\psi(u) < 1 \tag{2.0.2}$$

La función (2.0.1) se trata de una distribución exponencial que mide el primer periodo que registra un evento de ruina

$$f(x, y, t | u) dx dy dt = \lambda e^{-\lambda t} p(u + ct + y) dy dt \tag{2.0.3}$$

donde p en (2.0.3) es la probabilidad de que el capital $u(t)$ tenga la magnitud $u + ct + y$ cuando ocurre la ruina.

Después de considerar las condiciones que debe respetar la función (2.0.1) en Gerber [11] se determina que (2.0.1) es una ecuación de Volterra de tipo II de la forma

$$\phi = \phi * g + h \quad (2.0.4)$$

donde

$$\phi(u) = E[w(U(T-), |U(T)|)e^{-\delta T} I_{(T < \infty)} | U(0) = u] \quad (2.0.5)$$

$$g(x) = \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{-\rho z} p(x+z) dz \quad x \geq 0 \quad (2.0.6)$$

y

$$h(x) = \int_x^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\rho(u-x)} w(u, y) p(u+y) dy du \quad x \geq 0 \quad (2.0.7)$$

Si interpretamos a δ como una tasa de interés y w como una función de pago sobre el capital cuando la ruina ocurre, entonces $\phi(u)$ es la esperanza del monto de reclamación en el tiempo de ruina. Si w es interpretada como una función que indica el beneficio que tiene que pagar la entidad al momento de la ruina, entonces $\phi(u)$ es el ingreso simple que recibe la entidad después de descontar el pago de las reclamaciones.

Definimos a ϕ como la *Función de pago esperado* que realiza la entidad cuando ocurre la ruina.

Los cálculos que utiliza Gerber [11] para llegar de (2.0.3) al resultado (2.0.4) se discuten en la siguiente sección. Al final del capítulo se presenta una solución numérica cerrada de la *función de pago esperado* donde se emplea en el contexto del cálculo de opciones, la penalización de la ruina se reemplaza por el pago de la opción al momento de ejercerla. El pago de la opción considerado en Gerber [11] es

$$w(x, y) = \max\{K - e^{a-y}, 0\} \quad (2.0.8)$$

donde $a \leq \text{Min}(u, \ln K)$, K es el precio de ejercicio de una opción put americana y e^a es el valor límite de ejercicio de la opción. Finalmente, en el capítulo III se presenta un método y la teoría que lo soporta para estimar una solución numérica de (2.0.4).

2.1 Derivación del resultado para obtener la *Función de Pago Esperado*

Para resolver (2.0.3) en Gerber [11] se aplica convenientemente una transformada de Laplace. Sea $\delta \geq 0$, se define

$$f(x, y | u) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f(x, y, t | u) dt \quad (2.1.1)$$

Donde δ se interpreta como una tasa de descuento y en el contexto de la Transformada de Laplace como una variable independiente. Con dicha transformación la distribución de la severidad se pone solo en términos del capital inicial y la diferencia de capital alrededor de T . A continuación se define una función no negativa $w(x, y)$ para $x > 0$, $y > 0$ con argumentos $U(T-)$ y $|U(T)|$ respectivamente; mientras que para $u \geq 0$ se define la función $\phi(u)$ (2.0.5) con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
 \phi(u) &= E[w(U(T-), |U(T)|)e^{-\delta T} I_{(T < \infty)} | U(0) = u] \\
 &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w(x, y) e^{-\delta t} f(x, y, t | u) dt dx dy \\
 &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w(x, y) f(x, y | u) dx dy \tag{2.1.2}
 \end{aligned}$$

El objetivo consiste en obtener una solución de $\phi(u)$ por medio de la aplicación de algún algoritmo iterativo. Para $h > 0$, consideremos el intervalo $(0, h)$, el tiempo t y el monto x de la primera reclamación en ese intervalo de tiempo. Nótese que la probabilidad de que no se registre ninguna reclamación en el tiempo h es $1 - F(h)$ que se distribuye exponencial, entonces $e^{-\lambda h}$, mientras que la probabilidad de que la primera reclamación ocurra entre algún punto del intervalo de tiempo t y $t + \Delta t$ es $\lambda e^{-\lambda t} \Delta t$; si $x > u + ct$ significa que la ruina ha ocurrido con la primera reclamación. Entonces se expresa $\phi(u)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\phi(u) = & \\
& e^{-(\delta+\lambda)h} \phi(u+ch) + \int_0^h \left[\int_0^{u+ct} \phi(u+ct-x) p(x) dx \right] e^{-(\delta+\lambda)t} \lambda dt \\
& + \int_0^h \left[\int_{u+ct}^{\infty} w(u+ct, x-u-ct) p(x) dx \right] e^{-(\delta+\lambda)t} \lambda dt \tag{2.1.3}
\end{aligned}$$

La función $\phi(u)$ contiene los posibles valores que puede adoptar en todos los posibles escenarios; $e^{-(\delta+\lambda)h} \phi(u+ch)$ corresponde a que el evento de ruina no se dé en el intervalo de tiempo $(0, h)$. Ahora bien, dada la condición anterior, ocurren dos cosas:

$\int_0^h \left[\int_0^{u+ct} \phi(u+ct-x) p(x) dx \right] e^{-(\delta+\lambda)t} \lambda dt$ Mide a la reclamación que puede ser cubierta por el capital acumulado.

$\int_0^h \left[\int_{u+ct}^{\infty} w(u+ct, x-u-ct) p(x) dx \right] e^{-(\delta+\lambda)t} \lambda dt$ Es la reclamación que no puede ser cubierta con el capital acumulado y está en función del valor que tome la función w . Constituye el factor que determina la ruina.

Diferenciando (2.1.3) con respecto de h y haciendo $h=0$ obtenemos

$$0 = -(\delta + \lambda)\phi(u) + c\phi'(u) + \lambda \int_0^u \phi(u-x)p(x)dx + \lambda \int_u^{\infty} w(u, x-u)p(x)dx \tag{2.1.4}$$

$$0 = -(\delta + \lambda)\phi(u) + c\phi'(u) + \lambda \int_0^u \phi(u-x)p(x)dx + \lambda\omega(u) \tag{2.1.5}$$

donde

$$\omega(u) = \int_u^{\infty} w(u, x-u)p(x)dx \quad (2.1.6)$$

$$= \int_0^{\infty} w(u, y)p(u+y)dy \quad (2.1.7)$$

Cabe mencionar que $\omega(u)$ no depende de la función ϕ .

A continuación se elige un método que facilite la resolución de la ecuación diferencial, si consideramos una ecuación diferencial ordinaria

$$g'(x)+a(x)g(x) = b(x) \quad (2.1.8)$$

Donde $g(x)$ es una función desconocida de x mientras que $a(x)$ y $b(x)$ son funciones dadas de la ecuación. El factor de integración se desarrolla volviendo la parte izquierda de la ecuación en la forma de una derivada de un producto. Consideremos la función $M(x)$, aplicando este producto a ambos extremos de (2.1.8)

$$M(x)g'(x) + M(x)a(x)g(x) = M(x)b(x) \quad (2.1.9)$$

Se desea que la parte izquierda de (2.1.9) tenga la forma de la derivada de un producto, es decir de la forma $h(x)k'(x) + k(x)h'(x)$, entonces podemos hacer un arreglo del lado izquierdo de (2.1.9) se obtiene

$$(M(x)g(x))' = M(x)b(x) \quad (2.1.10)$$

usamos el Teorema Fundamental del Cálculo

$$M(x)g(x) = \int b(x)M(x)dx + C \quad (2.1.11)$$

y obtenemos

$$g(x) = \frac{\int b(x)M(x)dx + C}{M(x)} \quad (2.1.12)$$

Ahora obtengamos una expresión para $M(x)$ de acuerdo a la forma $h(x)k'(x) + k(x)h'(x)$; a partir del lado izquierdo de (2.1.10) y obtenemos

$$(M(x)g(x))' = M(x)g'(x) + g(x)M'(x) = M(x)b(x) \quad (2.1.13)$$

lo que hace evidente que

$$M'(x) = a(x)M(x) \quad (2.1.14)$$

$\frac{M'(x)}{M(x)} = a(x)$ Cuya forma es la de una derivada de una función logarítmica, lo que nos

arroja la expresión

$$M(x) = e^{\int a(x)dx} \quad (2.1.15)$$

Se va a utilizar (2.1.15) para obtener una solución de (2.1.5) donde se elige como función $M(x)$

$$\phi_\rho(u) = e^{-\rho u} \phi(u) \quad (2.1.16)$$

Donde el valor ρ es un número negativo que será especificado posteriormente.

Multiplicando (2.1.5) por el factor (2.1.16) y reagrupando obtenemos:

$$c\phi'_\rho(u) = (\delta + \lambda - c\rho)\phi_\rho(u) - \lambda \int_0^u \phi_\rho(u-x)e^{-\rho x} p(x) dx - \lambda e^{-\rho u} \omega(u) \quad (2.1.17)$$

Ahora vamos a establecer el valor de esta variable ρ para resolver (2.1.17), a través de una función definida por

$$\ell(\xi) = \delta + \lambda - c\xi \quad (2.1.18)$$

Entonces el coeficiente de $\phi_\rho(u)$ en (2.1.17) es $\ell(\rho)$, ahora obtengamos el coeficiente ρ . Definamos por \mathfrak{L} la transformada de Laplace de la función f entonces por la definición

$$\mathfrak{L}(\xi) = \int_0^\infty e^{-\xi x} f(x) dx \quad (2.1.19)$$

La transformada de Laplace de p , $\mathfrak{T}_p'(\xi)$, está definida para todos los números no negativos ξ y además es una función decreciente porque

$$\mathfrak{T}_p'(\xi) = -\int_0^{\infty} e^{-\xi x} x p(x) dx < 0 \quad (2.1.20)$$

$$\mathfrak{T}_p''(\xi) = -\int_0^{\infty} e^{-\xi x} x^2 p(x) dx > 0 \quad (2.1.21)$$

Consideremos la ecuación

$$\ell(\xi) = \lambda \mathfrak{T}_p(\xi) \quad (2.1.22)$$

Esta función lineal $\ell(\xi)$ tiene una pendiente negativa y su raíz

$$\ell(0) = \delta + \lambda \geq \lambda = \lambda \mathfrak{T}_p(0) \quad (2.1.23)$$

La ecuación (2.1.23) tiene una única raíz positiva, a la que llamaremos ξ_1 . Además si la función de densidad de la reclamación es lo suficientemente regular, (2.1.23) tiene además una segunda raíz, ξ_2 , la cual es negativa. Esta raíz negativa será denotada como $-R$. Cuando $\delta = 0$, R es el coeficiente de ajuste en el Modelo Clásico.

Retomando la ecuación (2.1.17) y bajo el desarrollo anterior, se resolverá la ecuación utilizando el valor de

$$\rho = \xi_1 \quad (2.1.24)$$

entonces (2.1.17)

$$c\phi'_\rho(u) = (\delta + \lambda - c\rho)\phi_\rho(u) - \lambda \int_0^u \phi_\rho(u-x)e^{-\rho x} p(x) dx - \lambda e^{-\rho u} \omega(u)$$

Con $\rho = \xi_1$

$$\begin{aligned} c\phi'_\rho(u) &= \lambda \mathfrak{S}_\rho(\rho)\phi_\rho(u) - \lambda \int_0^u \phi_\rho(u-x)e^{-\rho x} p(x) dx - \lambda e^{-\rho u} \omega(u) \\ &= \lambda \left[\lambda \mathfrak{S}_\rho(\rho)\phi_\rho(u) - \int_0^u \phi_\rho(x)e^{-\rho(u-x)} p(u-x) dx - e^{-\rho u} w(u) \right] \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

Queremos averiguar el comportamiento de (2.1.25) con respecto del comportamiento del capital inicial u . Se realiza un cambio de variable con $z > 0$ y se integra (2.1.25) desde $u = 0$ hasta $u = z$. Después de dividir por λ el resultado de la ecuación es

$$\begin{aligned} &\frac{c}{\lambda} [\phi_\rho(z) - \phi_\rho(0)] \\ &= \mathfrak{S}_\rho(\rho) \int_0^z \phi_\rho(u) du - \int_0^z \left[\int_0^u \phi_\rho(x)e^{-\rho(u-x)} p(u-x) dx \right] du - \int_0^z e^{-\rho u} \omega(u) du \\ &= \mathfrak{S}_\rho(\rho) \int_0^z \phi_\rho(u) du - \int_0^z \left[\int_x^z e^{-\rho(u-x)} p(u-x) du \right] \phi_\rho(x) dx - \int_0^z e^{-\rho u} \omega(u) du \\ &= \int_0^z \phi_\rho(x) \left[\int_{z-x}^\infty e^{-\rho y} p(y) dy \right] dx - \int_0^z e^{-\rho u} \omega(u) du \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

Ahora, hacemos $z \rightarrow \infty$ para reconocer el comportamiento de (2.1.26) sobre todo el espectro del capital inicial u , por lo cual al tomar el límite de z se simplifican los primeros términos de ambos lados de (2.1.26), lo que nos muestra que

$$\begin{aligned}\phi_\rho(0) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-\rho u} \omega(u) du \\ \phi_\rho(0) &= \frac{\lambda}{c} \mathfrak{I}_\omega(\rho)\end{aligned}\tag{2.1.27}$$

Ya tenemos el valor de $\phi_\rho(0)$ el cual resulta ser una transformada de Laplace de la función w ; sustituyendo en (2.1.26) y simplificando ambos lados obtenemos

$$\phi_\rho(z) = \frac{\lambda}{c} \left\{ \int_0^z \phi_\rho(x) \left[\int_{z-x}^\infty e^{-\rho y} p(y) dy \right] dx + \int_z^\infty e^{-\rho u} \omega(u) du \right\} \quad z \geq 0 \tag{2.1.28}$$

Multiplicando (2.1.28) por $e^{\rho z}$ y aplicando (2.1.16).

$$\phi(z) = \frac{\lambda}{c} \left\{ \int_0^z \phi(x) \left[\int_{z-x}^\infty e^{\rho(z-x-y)} p(y) dy \right] dx + \int_z^\infty e^{\rho(z-u)} \omega(u) du \right\} \tag{2.1.29}$$

Con la ecuación (2.1.29) obtenemos por resultado el valor esperado del capital una vez ocurrida la ruina. A continuación vamos a distinguir cada uno de sus elementos para la solución por medio de una Ecuación de Volterra de tipo II. Para dos funciones integrables f_1 y f_2 definida en el intervalo $[0, \infty)$, la convolución de f_1 y f_2 es la función

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(y)f_2(x-y)dy \quad x \geq 0 \quad (2.1.30)$$

Si usamos esta propiedad en la construcción de las funciones $g(x)$ (2.0.6) y $h(x)$ (2.0.7) donde

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\lambda}{c} \int_x^\infty e^{-\rho(y-x)} p(y) dy & (2.1.31) \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-\rho z} p(x+z) dz & x \geq 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_x^\infty e^{-\rho(u-x)} \omega(u) du & (2.1.32) \\ &= \int_x^\infty \int_0^\infty e^{-\rho(u-x)} w(u, y) p(u+y) dy du & x \geq 0 \end{aligned}$$

Entonces la ecuación (2.1.29) puede ser escrita como (2.0.4)

$$\phi = \phi * g + h$$

La ecuación (2.0.4) es una Ecuación de Volterra de tipo II; la función $g(x)$ es no negativa en el intervalo $[0, \infty)$ y puede ser interpretada como una función de densidad de probabilidad; en la teoría de la probabilidad (2.0.4) es conocida como una ecuación de renovación de la función ϕ . La solución de (2.0.4) se puede expresar como una serie de Neumann, la cuál es una serie infinita de funciones de la forma

$$\phi = h + g * h + g * g * h + g * g * g * h + g * g * g * g * h + \dots \quad (2.1.33)$$

2.2 Solución cerrada de la *Función de Pago Esperado*

Para resolver la ecuación (2.0.4) numéricamente, se requiere determinar una función de pago w . El siguiente ejemplo muestra una solución cerrada para el problema de la *función de pago esperado* con un ejemplo de opciones. Consideremos una opción put americana *perpetua* con precio de ejercicio K , la expresión *perpetua* se refiere a que la opción no tiene una fecha de liquidación mientras que al hacer mención de la opción americana se refiere a que el tenedor de la opción puede ejercerla en cualquier momento. Por lo tanto, el pago de la opción es la siguiente función

$$\begin{aligned} \Pi(s) &= \max(K - s, 0) \\ &= (K - s)_+ \quad s \geq 0 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Si el tenedor de la opción elige ejercer la opción en el tiempo t , $t \geq 0$, recibe

$$\Pi(A(t)) = \max(K - A(t))_+$$

Debido a que la opción es perpetua, el pago óptimo de la opción no varía con respecto del tiempo. Entonces es suficiente con considerar la estrategia de ejercer la opción de la forma

$$T = \inf \{ t \mid A(t) < e^a \} \quad (2.2.2)$$

Con $a \leq \min(u, \ln K)$. Se define $V(u, a)$ la esperanza del pago al ejercer la opción.

$$V(u, a) = E\left[e^{-\delta T} I_{(T < \infty)} \Pi(A(t)) \mid A(0) = e^u\right] \quad u \geq a \quad (2.2.3)$$

Como la función de pago se determina por la opción put entonces

$$w(x, y) = \Pi(e^{a-y}) \quad (2.2.4)$$

se tiene para $u \geq a$

$$V(u, a) = \varphi(u - a) \quad (2.2.5)$$

Entonces la función

$$\varphi(z) = V(a + z, a) \quad z \geq 0$$

satisface la ecuación

$$\varphi = \varphi^* g + h$$

y por (2.0.7)

$$h(z) = \frac{\lambda}{z} \int_z^\infty \left[\int_z^\infty e^{-(x-z)} \Pi(e^{a-y}) p(x+y) dy \right] dx \quad (2.2.6)$$

Si el precio de la opción put es

$$\begin{aligned}\Pi(e^{a-y}) &= (K - e^{a-y})_+ \\ &= K - e^{a-y} \quad y \geq 0\end{aligned}$$

entonces (2.2.6) es

$$h(z) = \frac{\lambda e^z}{c} \left\{ K \int_z^\infty e^{-x} [1 - P(x)] dx - e^a \int_z^\infty \left[\int_0^\infty e^{-x-y} p(x+y) dy \right] dx \right\} \quad (2.2.7)$$

Se realiza el siguiente cambio de variables $\xi = x + y$ y $x = x$, la doble integral (2.2.7) es

$$\int_z^\infty \left[\int_z^\xi e^{-\xi} p(\xi) dx \right] d\xi = \int_z^\infty (\xi - z) e^{-\xi} p(\xi) d\xi \quad (2.2.8)$$

Debido a que

$$V(a, a) = \varphi(0) = h(0)$$

Podemos obtener una expresión explícita para $V(a, a)$. Al Aplicar (2.2.7), (2.2.8) con

$\xi = \rho = 1$ tenemos

$$V(a, a) = \frac{\lambda}{c} \left\{ K \int_0^\infty e^{-x} [1 - P(x)] dx - e^a \int_0^\infty \xi e^{-\xi} p(\xi) d\xi \right\}$$

$$= \frac{\lambda}{c} \left[\frac{K(c - \delta)}{\lambda} + e^a \mathfrak{I}_p'(1) \right] \quad (2.2.9)$$

Este resultado permite determinar \tilde{a} , el valor óptimo de a , por lo que $e^{\tilde{a}}$ es el valor óptimo del ejercicio de la opción. Si

$$V(a, a) < \Pi(e^a),$$

Si asumimos que $\tilde{a} > a$, y si

$$V(a, a) > \Pi(e^a)$$

concluimos que $\tilde{a} < a$. Por lo tanto \tilde{a} se determina por

$$\begin{aligned} V(\tilde{a}, \tilde{a}) &= \Pi(e^{\tilde{a}}) \\ &= K - e^{\tilde{a}} \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Sustituimos (2.2.9) con $a = \tilde{a}$ en la parte izquierda de (2.2.10) y obtenemos una ecuación lineal para $e^{\tilde{a}}$. La solución es

$$e^{\tilde{a}} = K \frac{\delta}{c + \lambda \mathfrak{I}_p'(1)} \quad (2.2.11)$$

Entonces, para $u \geq \tilde{a}$, el precio de la opción put es $V(u, \tilde{a}) = \varphi(u - \tilde{a})$. Para $u < \tilde{a}$, la opción se ejerce inmediatamente y el precio es simplemente $K - e^u$.

CAPITULO III

SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DE VOLTERRA CON REGLAS DE INTEGRACION GAUSSIANAS

En Gerber [11] se obtiene una solución analítica de (2.0.1) para calcular el valor esperado de la ruina, lo que da por resultado una ecuación de Volterra de grado II definida por (2.0.4). Toledo [27] muestra que las ecuaciones de Volterra de grado II son un caso particular de las Ecuaciones de Fredholm, dichas ecuaciones pueden resolverse por medio de la aplicación de reglas de integración Gaussianas, las cuales consisten en aproximar la integral de la ecuación de Fredholm por medio de la suma de los productos de la función a integrar por un polinomio utilizado como ponderador.

En las secciones 3.1, 3.2 y 3.3 se presentan los fundamentos que permiten resolver la ecuación (2.0.4) por métodos numéricos mediante reglas de integración Gaussianas, debido a que la ecuación (2.0.4) es una ecuación de Volterra de grado II y por lo tanto es caso particular de las ecuaciones de Fredholm. Finalmente en la sección 3.4 se discuten los resultados de una solución numérica de (2.0.4) donde se utilizan diferentes funciones de pago w que realiza la entidad al momento de ocurrir la ruina.

3.1 Fundamentos para el cálculo de Ecuación de Volterra de grado II con reglas de integración Gaussianas: Ecuaciones de Fredholm

Hay una estrecha correspondencia entre las ecuaciones integrales lineales, que especifican relaciones lineales entre funciones de un espacio de funciones de dimensión finita, y las conocidas ecuaciones lineales, que especifican relaciones análogas entre

vectores de un espacio vectorial de dimensión finita. Las ecuaciones de Fredholm involucran integrales definidas con límites fijos. Una ecuación no homogénea de Fredholm de primera especie tiene la forma

$$g(t) = \int_a^b K(t,s)f(s)ds \quad (3.1.1)$$

donde $f(t)$ es una función desconocida a resolver, $g(t)$ es una función conocida. La función de dos variables $K(s,t)$ es llamada el *kernel*. La ecuación (3.1.1) es análoga a la ecuación matricial

$$K \cdot f = g \quad (3.1.2)$$

cuya solución es $f = K^{-1} \cdot g$, donde K^{-1} es la matriz inversa. Así como la ecuación (3.1.2), la ecuación (3.1.1) tiene solución única donde quiera que g sea no nula y K es invertible. Sin embargo, esta última condición es a menudo una excepción que la regla. Por otra parte el problema de autovalores en dimensión finita

$$(K - \sigma 1) \cdot f = g \quad (3.1.3)$$

es llamada la *ecuación de Fredholm de segunda especie*, usualmente escrita como

$$f(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)f(s)ds + g(t) \quad (3.1.4)$$

donde λ en (3.1.4) es $\frac{1}{\sigma}$ de la ecuación (3.1.3), mientras que g es $-\frac{g}{\lambda}$. Si g es nula, entonces la ecuación es *homogénea*. Si el kernel $K(t,s)$ es acotado, entonces la ecuación (3.1.4) tiene la propiedad de que su forma homogénea tiene soluciones para al menos un conjunto infinito numerable $\lambda = \lambda_n$, $n = 1, 2, \dots$, los *autovalores*. En el caso no homogéneo, en que g es no nula, las ecuaciones (3.1.3) y (3.1.4) son solubles excepto cuando λ ó σ respectivamente, es un autovalor, porque entonces el operador integral (o matriz) es singular. La ecuación (3.1.4) puede ser escrita como

$$\int_a^b [K(t,s) - \sigma \delta(t-s)] f(s) ds = -\sigma g(t) \quad (3.1.5)$$

donde $\delta(t-s)$ es la delta de Dirac (se ha cambiado λ por su recíproco σ por claridad). Si σ es suficientemente grande en magnitud entonces la ecuación (3.1.5) es diagonalmente dominante y por tanto bien condicionada. Solamente para σ pequeño volveremos al caso que se comporta mal.

Las *ecuaciones de Volterra* son un caso especial de las ecuaciones de Fredholm con $K(t,s) = 0$ para $s > t$. Las ecuaciones de Volterra se escriben en una forma en que el límite superior de integración es la variable independiente t .

La *ecuación de Volterra de tipo I*

$$g(t) = \int_a^t K(t,s) f(s) ds \quad (3.1.6)$$

tiene su ecuación matricial análoga (ahora escrita en componentes)

$$\sum_{j=1}^k K_{jk} f_j = g_k \quad (3.1.7)$$

Al realizar la comparación de (3.1.7) con (3.1.2), vemos que la ecuación de Volterra corresponde a una matriz K que es triangular inferior, con entradas nulas sobre la diagonal.

La ecuación de Volterra de grado II es

$$f(t) = \int_a^t K(t,s) f(s) ds + g(t) \quad (3.1.8)$$

cuyo análogo matricial es la ecuación

$$(K - 1) \cdot f = g \quad (3.1.9)$$

donde K es una matriz triangular inferior.

De este modo se ponen las definiciones al caso de ecuaciones integrables lineales. Los integrandos en las versiones no lineales de las ecuaciones (3.1.1) o (3.1.6) serían $K(t,s, f(s))$ en lugar de $K(t,s) f(s)$; las versiones no lineales de las ecuaciones (3.1.4) o (3.1.8) tienen un integrando de la forma $K(t,s, f(t), f(s))$. Las ecuaciones no lineales de Fredholm son considerablemente más complicadas que sus contrapartes lineales, sin

embargo no se dan frecuentemente en la práctica. En contraste, resolver una ecuación no lineal de Volterra involucra usualmente solo una pequeña modificación al algoritmo para ecuaciones lineales.

Casi todos los métodos para resolver numéricamente ecuaciones integrales hacen uso de *reglas de integración*, frecuentemente reglas de integración Gaussianas.

3.2 Reglas de integración Gaussianas

Considere la integral

$$\int_a^b W(x)f(x)dx$$

donde $W(x)$ es una función de ponderación conocida.

La idea de las reglas de integración Gaussianas es proporcionar la capacidad de elegir las W_k , sino también las abscisas en que la función será evaluada, por lo que se rompe con la partición regular de W . En general, este método permite una mejor aproximación de las integrales. Un aspecto adicional de las fórmulas de integración Gaussianas que amplía su utilidad es poder arreglar la elección de los W_k y las abscisas para hacer integrales exactas de la clase: $p(x)W(x)$, donde $p(x)$ es un polinomio. Además, la función $W(x)$ puede ser escogida de modo que pueden eliminar singularidades de la integral. Dado $W(x)$ y un entero N , podemos encontrar un conjunto de w_k y abscisas x_k tal que la aproximación

$$\int_a^b W(x)f(x)dx \approx \sum_{j=1}^N w_j f(x_j) \quad (3.2.1)$$

es exacta si $f(x)$ es un polinomio. (3.2.1) puede ser escrita sin hacer explícita la

función W si se toma $g(x) = W(x)f(x)$ y $v_j = \frac{w_j}{W(x_j)}$, entonces se reduce (3.2.1) a

$$\int_a^b g(x)dx \approx \sum_{j=1}^N v_j g(x_j) \quad (3.2.2)$$

Caso general: Las abscisas que se usarán corresponden a los ceros de un conjunto de polinomios ortogonales. Una sucesión de polinomios $\{p_j\}_{j=0}^{\infty}$, con $p_n(x)$ de grado n , se llamará sucesión de polinomios ortogonales respecto al producto escalar

$$(f, g) := \int_a^b f(x)g(x)dw(x)$$

si se verifica que

$$(p_j, p_k) = 0, \quad j \neq k$$

En el caso general a continuación, se usarán polinomios ortogonales fijos en el intervalo (a, b) . Podemos definir el producto escalar de las funciones f y g sobre la función de ponderación W como

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b W(x) f(x) g(x) dx \quad (3.2.3)$$

El producto escalar es un número. El conjunto de funciones mutuamente ortogonales e individualmente normalizadas se llama *conjunto ortonormal*.

Se puede encontrar un conjunto de polinomios que (i) incluya exactamente un polinomio de orden j , llamado $p_j(x)$, para $j = 1, 2, \dots$, y (ii) todos los polinomios sean ortogonales sobre la función de ponderación $W(x)$. Un procedimiento para obtener un conjunto de polinomios con estas características es por medio de la siguiente recurrencia

$$\begin{aligned} p_{-1}(x) &= 0 \\ p_0(x) &= 1 \\ p_{j+1}(x) &= (x - a_j)p_j(x) - b_j p_{j-1}(x) \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

donde

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{\langle xp_j | p_j \rangle}{\langle p_j | p_j \rangle} \quad j = 0, 1, \dots \\ b_j &= \frac{\langle p_j | p_j \rangle}{\langle p_{j-1} | p_{j-1} \rangle} \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

donde el coeficiente b_0 es arbitrario, podemos hacerlo 0.

Los polinomios definidos por (3.2.4) son mónicos, es decir, el coeficiente de la mayor potencia es la unidad. Si dividimos cada $p_j(x)$ por la constante $[\langle p_j | p_j \rangle]^{1/2}$ podemos obtener el conjunto de polinomios ortonormales. Se pueden hallar polinomios ortonormales con otras normalizaciones. Siempre se pueden obtener mónicos dividiendo el polinomio j por el coeficiente λ_j de la mayor potencia.

Si trabajamos sobre el campo de los números complejos, entonces por el *teorema fundamental del álgebra*, el polinomio de orden j tiene exactamente j raíces en su dominio. Además, se puede demostrar que las raíces de $p_j(x)$ entrelazan las $j-1$ raíces de $p_{j-1}(x)$, es decir, hay exactamente una raíz de la primera entre cada dos raíces adyacentes de la segunda. Este hecho puede resultar útil si se requiere encontrar todas las raíces.

Las raíces obtenidas se utilizarán como las abscisas donde evaluaremos no sólo la función a integrar y la función de ponderación $W(x)$ escogida. Una vez conocidas las abscisas, necesitamos encontrar los w_j . Una manera práctica de hacerlo es utilizando la siguiente expresión

$$w_j = \frac{\langle p_{N-1} | p_{N-1} \rangle}{p_{N-1}(x_j) p'_N(x_j)} \quad (3.2.6)$$

donde $p'_N(x_j)$ es la derivada del polinomio ortonormal en su cero x_j .

El cálculo de una regla de integración Gaussianas tiene dos aspectos distintos: (i) la generación de polinomios ortonormales p_0, \dots, p_N , es decir, el cálculo de los coeficientes a_j y b_j en (3.2.4); (ii) la determinación de los ceros de $p_j(x)$ y el cálculo

de las ponderaciones w_j asociadas. En el caso de polinomios ortogonales clásicos, los coeficientes a_j y b_j son explícitamente conocidos.

A continuación se presenta una lista con las funciones $W(x)$, intervalos y relaciones de recurrencia que generan los polinomios ortogonales que se usan con mayor frecuencia y sus correspondientes fórmulas de integración Gaussianas:

Gauss—Legendre:

$$\begin{aligned} W(x) &= 1 & -1 < x < 1 \\ (j+1)P_{j+1} &= (2j+1)xP_j - jP_{j-1} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Gauss—Chevyshev:

$$\begin{aligned} W(x) &= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} & -1 < x < 1 \\ T_{j+1} &= 2xT_j - T_{j-1} \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Gauss—Laguerre:

$$\begin{aligned} W(x) &= x^\alpha e^{-x} & 0 < x < \infty \\ (j+1)L_{j+1}^\alpha &= (-x+2j+\alpha+1)L_j^\alpha - (j+\alpha)L_{j-1}^\alpha \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Gauss—Hermite:

$$\begin{aligned} W(x) &= e^{-x^2} & -\infty < x < \infty \\ H_{j+1} &= 2xH_j - 2jH_{j-1} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Gauss—Jacobi:

$$\begin{aligned}
 W(x) &= (1-x)^\alpha (1+x)^\beta & -1 < x < 1 \\
 c_j P_{j+1}^{(\alpha,\beta)} &= (d_j + e_j x) P_j^{(\alpha,\beta)} - f_j P_{j-1}^{(\alpha,\beta)} & (3.2.11)
 \end{aligned}$$

donde los coeficientes c_j, d_j, e_j y f_j son dados por

$$\begin{aligned}
 c_j &= 2(j+1)(j+\alpha+\beta+1)(2j+\alpha+\beta) \\
 d_j &= (2j+\alpha+\beta+1)(\alpha^2 - \beta^2) \\
 e_j &= (2j+\alpha+\beta)(2j+\alpha+\beta+1)(2j+\alpha+\beta+2) \\
 f_j &= 2(j+\alpha)(j+\beta)(2j+\alpha+\beta+2) & (3.2.12)
 \end{aligned}$$

3.3 Ecuación de Fredholm de Segundo Tipo

Nos interesa encontrar una solución numérica para $f(t)$ en la ecuación

$$f(t) = \lambda \int_a^b K(t,s) f(s) ds + g(t) \quad (3.3.1)$$

El método para resolver (3.3.1) se conoce como *Método de Nystrom*. Se requiere de una regla de integración

$$\int_a^b y(s) ds = \sum_{j=1}^N w_j y(s_j) \quad (3.3.2)$$

después de aplicar (3.3.2) en (3.3.1) resulta

$$f(t) = \lambda \sum_{j=1}^N w_j K(t, s_j) f(s_j) + g(t) \quad (3.3.3)$$

se evalúa (3.3.3) en los puntos de integración

$$f(t_i) = \lambda \sum_{j=1}^N w_j K(t_i, s_j) f(s_j) + g(t_i) \quad (3.3.4)$$

Sea f_i el vector $f(t_i)$, g_i el vector $g(t_i)$, K_{ij} la matriz $K(t_i, s_j)$, y definamos

$$\tilde{K}_j = K_{ij} w_j \quad (3.3.5)$$

La notación matricial de (3.3.4) es

$$(1 - \lambda \tilde{K}) \cdot f = g \quad (3.3.6)$$

Este es un conjunto de N ecuaciones lineales con N incógnitas que puede ser resuelto con técnicas estándar de descomposición triangular.

Descomposición Triangular

Supongamos que la matriz A se descompone como el producto de dos matrices

$$L \cdot U = A \quad (3.3.7)$$

donde L es triangular inferior y U es triangular superior (en ambos casos los elementos de la diagonal son no nulos). Podemos usar este tipo de descomposición para resolver el conjunto lineal

$$A \cdot x = (L \cdot U) \cdot x = L \cdot (U \cdot x) = b \quad (3.3.8)$$

mediante primero resolver para el vector y tal que

$$L \cdot y = b \quad (3.3.9)$$

y entonces resolver

$$U \cdot x = y \quad (3.3.10)$$

La ventaja de proceder así es que la solución de un conjunto triangular de ecuaciones es muy trivial; la ecuación (3.3.9) puede ser resuelta por sustitución hacia delante, como sigue

$$y_1 = \frac{b_1}{\alpha_{11}}$$

$$y_i = \frac{1}{\alpha_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} y_j \right] \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (3.3.11)$$

donde α_{ii} son los elementos de L . La ecuación (3.3.10) se resuelve por sustitución hacia atrás

$$x_N = \frac{y_N}{\beta_{NN}}$$

$$x_i = \frac{1}{\beta_{ii}} \left[y_i - \sum_{j=i+1}^N \beta_{ij} x_j \right] \quad i = N-1, N-2, \dots, 1 \quad (3.3.12)$$

donde los β_{ii} son elementos de U .

Aplicación de la Descomposición Triangular

Primero, escribimos la (i, j) -ésima componente de la ecuación (3.3.7). Esa componente es siempre una suma

$$\alpha_{i1}\beta_{1j} + \dots = \alpha_{ij} \quad (3.3.13)$$

El número de términos en la suma depende, sin embargo, del número menor entre i y j . Tenemos tres casos

$$i < j: \quad \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{ii}\beta_{ij} = \alpha_{ij} \quad (3.3.14)$$

$$i = j: \quad \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{ii}\beta_{jj} = \alpha_{ij} \quad (3.3.15)$$

$$i > j \quad \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{ij}\beta_{jj} = \alpha_{ij} \quad (3.3.16)$$

Las ecuaciones (3.3.14), (3.3.15) y (3.3.16) totalizan N^2 ecuaciones para $N^2 + N$ incógnitas α y β (La diagonal aparece dos veces). Ya que el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones, debemos especificar N de las incógnitas arbitrariamente y entonces resolver las otras. De hecho siempre es posible tomar

$$\alpha_{ii} = 1 \quad i = 1, \dots, N \quad (3.3.17)$$

Lo siguiente es usar el algoritmo de Crout, el que de manera muy trivial resuelve el sistema de $N^2 + N$ ecuaciones (3.3.14)-(3.3.17) para todos los α y β , mediante reordenar las ecuaciones de la siguiente forma:

Sean $\alpha_{ii} = 1$, $i = 1, \dots, N$ a partir de (3.3.17)

Para cada $j = 1, 2, 3, \dots, N$ se realizan dos procedimientos: Primero, para $i = 1, 2, 3, \dots, j$, se utilizan (3.3.14), (3.3.15) y (3.3.17) para resolver los β , esto es

$$\beta_{ij} = \alpha_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{ik}\beta_{kj} \quad (3.3.18)$$

si $i = 1$ en (3.3.18) la suma es cero. Segundo, para $i = j + 1, j + 2, \dots, N$ se utiliza (3.3.16) para resolver los α_{ij} , esto es

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{\beta_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{ik}\beta_{kj} \right) \quad (3.3.19)$$

Debemos asegurarnos de realizar ambos procedimientos antes de proseguir con el siguiente j . Además es necesario realizar la operación llamada *pivote parcial* que consiste en hallar el mayor β en una fila, dividir toda la fila por dicho valor y mover esa fila para poner el 1 producido en la diagonal. Solo de esta forma se asegura que el algoritmo sea estable.

Para resumir, este procedimiento resuelve la ecuación (3.3.6) mediante encontrar las matrices L y U tales que $L \cdot U = 1 - \lambda \tilde{K}$, y luego aplicar (3.3.11) y (3.3.12). Ahora que tenemos la solución en los puntos de integración $\{t_i\}$, para obtener un valor aproximado de la solución en otros puntos, Nystrom observó que debemos usar la ecuación (3.3.3) como fórmula de interpolación, y así mantener la precisión ya obtenida.

Una desventaja de los métodos basados en las reglas de integración Gaussianas es que no hay una manera simple de estimar el error del resultado. El mejor método práctico consiste en incrementar el valor de N en un porcentaje fijo y tratar la diferencia entre las dos estimaciones como una aproximación del error obtenido en el resultado con N más grande.

A continuación se presentan las soluciones de la ecuación homogénea. Si ponemos $\lambda = \frac{1}{\sigma}$ y $g = 0$, entonces la ecuación (3.3.6) queda como una ecuación de autovalores estándar

$$\tilde{K} \cdot f = \sigma f \tag{3.3.20}$$

Notemos que si el problema original tiene kernel simétrico, entonces la matriz K es simétrica. Sin embargo, ya que las ponderaciones w_j no son iguales para la mayoría de

las reglas de integración, la matriz \tilde{K} no es simétrica. El problema de autovalores es más sencillo para matrices simétricas, y por lo tanto debemos restaurar la simetría si es posible. Dado que los w_j son positivos, podemos definir la matriz diagonal

$D = \text{diag}(w_j)$ y su raíz cuadrada, $D^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(\sqrt{w_j})$. La ecuación (3.3.20) se convierte

en

$$K \cdot D \cdot f = \sigma f \quad (3.3.21)$$

Al multiplicar (3.3.21) por $D^{\frac{1}{2}}$ se obtiene

$$\left(D^{\frac{1}{2}} \cdot K \cdot D^{\frac{1}{2}} \right) \cdot h = \sigma h \quad (3.3.22)$$

donde $h = D^{\frac{1}{2}} \cdot f$. La ecuación (3.3.22) está ahora en forma simétrica.

La solución de las ecuaciones (3.3.21) y (3.3.22) dará en general N autovalores, donde N es el número de puntos de integración usados. Para kernels de cuadrado integrable, se obtendrá una buena aproximación a los N autovalores más bajos de la ecuación integral. Kernels de *rango finito* (también llamados degenerados o kernels separables) tienen solo un número finito de autovalores no nulos (posiblemente ninguno). Uno puede diagnosticar esta situación al notar una acumulación de autovalores σ nulos en la precisión del cálculo.

El número de autovalores no nulos permanecerá constante al incrementar N para mejorar la precisión.. Existe una consideración de atención: un kernel no degenerado puede tener un número infinito de autovalores con un punto de acumulación

en $\sigma = 0$. Se puede distinguir los dos casos por el comportamiento de la solución al incrementar N . Si sospechamos que el kernel es degenerado, se utilizan otro tipo de herramientas analíticas descritas ampliamente en textos especializados con el tema.

Ecuaciones de Volterra

Una ecuación típica de Volterra de grado II es

$$f(t) = \int_a^t K(t,s)f(s)ds + g(t) \quad (3.3.23)$$

La mayoría de los algoritmos para ecuaciones de Volterra comienzan de $t = a$ y se construye la solución a medida que avanza. En este sentido, éste no solo nos recuerda la sustitución hacia delante, sino también los problemas de condiciones iniciales para ecuaciones diferenciales.

La manera más simple de proceder es resolver la ecuación en una partición uniforme:

$$t_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{b-a}{N} \quad (3.3.24)$$

la más simple es la regla trapezoidal:

$$f_0 = g_0$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}hK_{ii}\right)f_i = h\left(\frac{1}{2}K_{i0}f_0 + \sum_{j=1}^{i-1}K_{ij}f_j\right) + g_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.3.25)$$

Para una ecuación de Volterra de tipo I, el 1 a la izquierda no existe y g tiene signo negativo, para el resto de la ecuación los cambios son directos. La ecuación (3.3.25) es un método explícito que da la solución $O(N^2)$ operaciones. A diferencia de las ecuaciones de Fredholm, no es necesario resolver un sistema lineal de ecuaciones. De modo que las ecuaciones de Volterra usualmente envuelven menos trabajo que la correspondiente de Fredholm. Si interpretamos la ecuación (3.3.23) como una ecuación vectorial de m funciones $f(t)$, entonces el kernel $K(t,s)$ es una matriz $m \times m$. La ecuación (3.3.25) ahora debe ser entendida como una ecuación vectorial. Para cada i , tenemos que resolver $m \times m$ ecuaciones lineales algebraicas por eliminación Gaussianas.

Para ecuaciones de Volterra no lineales, hay que transformar la ecuación (3.3.25) reemplazando el producto $K_{ii}f_i$ por $K_{ii}(f_i)$, y similarmente para los otros productos de K y f . Así para cada i resolvemos una ecuación no lineal para f_i con un lado derecho conocido. El método de Newton con una elección inicial para f_{i-1} usualmente funciona muy bien siempre y cuando el tamaño de paso no sea muy grande.

3.4 Solución numérica de la ecuación de Volterra con reglas de integración Gaussianas

En el capítulo II se obtuvo para $\phi(u)$ la *función de pago esperado* (2.0.4), es decir, la esperanza del monto de reclamación al momento de ruina, (2.0.4) es una solución donde interviene la convolución donde participan las funciones ϕ , g y h . La relevancia de (2.0.4) es que las funciones g y h dependen únicamente de la distribución del egreso p y la función de pago w , por lo que se reparametriza el problema del cálculo de (2.1.3). Este potente resultado nos indica que basta con conocer la distribución del egreso $p(x)$ y la función de pago $w(x, y)$ para conocer la esperanza del monto de pago que realiza la entidad en el momento de la ruina.

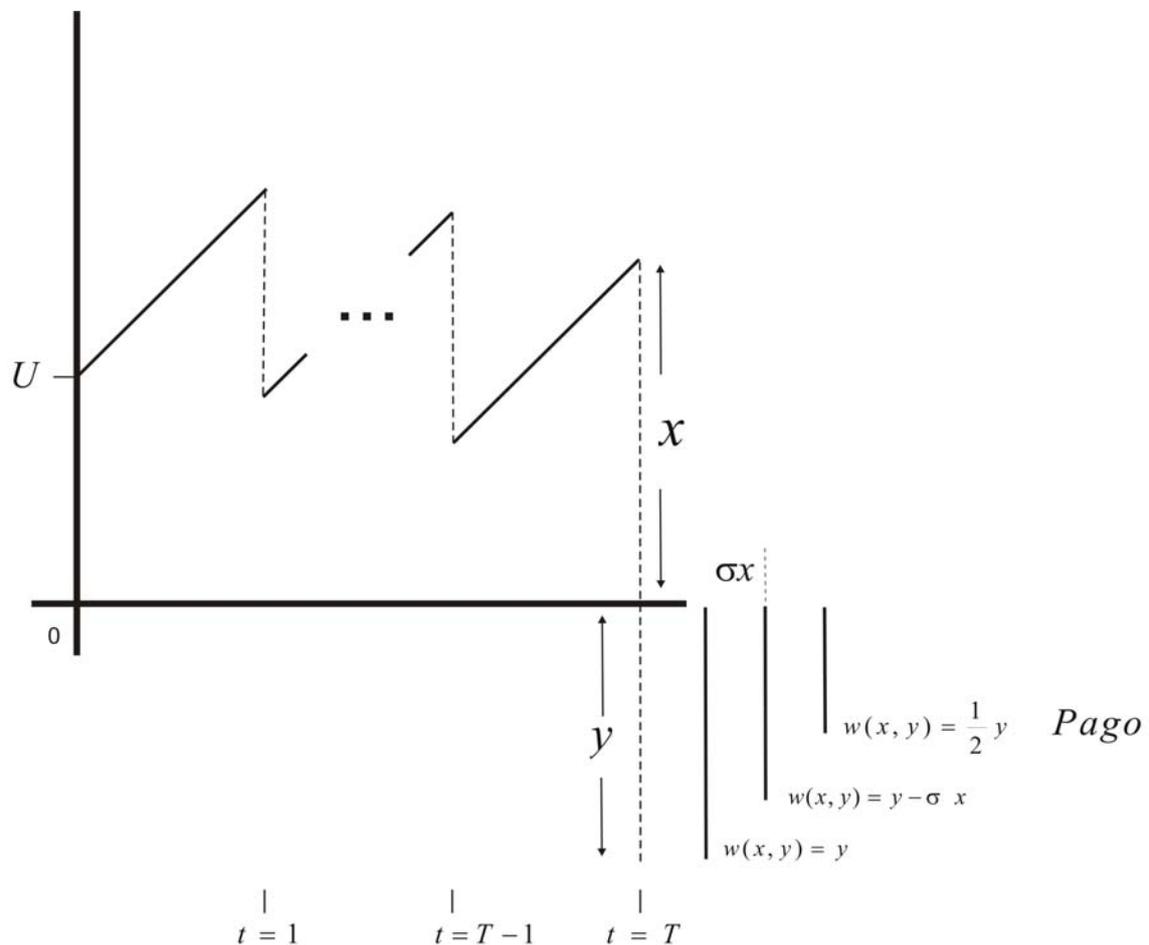
Se realizó un programa para estimar (2.1.3) donde se usó el método con la regla trapezoidal (3.3.25), el objetivo de las simulaciones a continuación es describir el valor esperado del pago que realiza la entidad en el tiempo de ruina T . Cabe mencionar que con la reparametrización de (2.1.3) la función de pago $w(x, y)$ se convierte en una herramienta que nos permite estimar diferentes gráficas de pago de capital con una severidad de pérdida dada.

Para ejemplificar el valor esperado de la ruina en $t = T$ se realizaron tres simulaciones suponiendo que la función de egreso de la entidad es $p(x) = \alpha e^{-x\alpha}$ distribución exponencial y se tomaron para cada simulación los siguientes valores de la función de pago $w(x, y)$: en la primera simulación $w(x, y) = y$, la función de pago será igual a la ruina de la entidad. La segunda simulación utiliza la función de pago $w(x, y) = \frac{1}{2}y$, es decir que la institución pagará la mitad del monto de ruina y . Finalmente, la tercera simulación tiene la función de pago $w(x, y) = y - \sigma x$, en este caso suponemos que la entidad realizará un pago de y menos una proporción del capital antes de la ruina. En la gráfica 3.1 se ejemplifica qué tipo de valor de pago

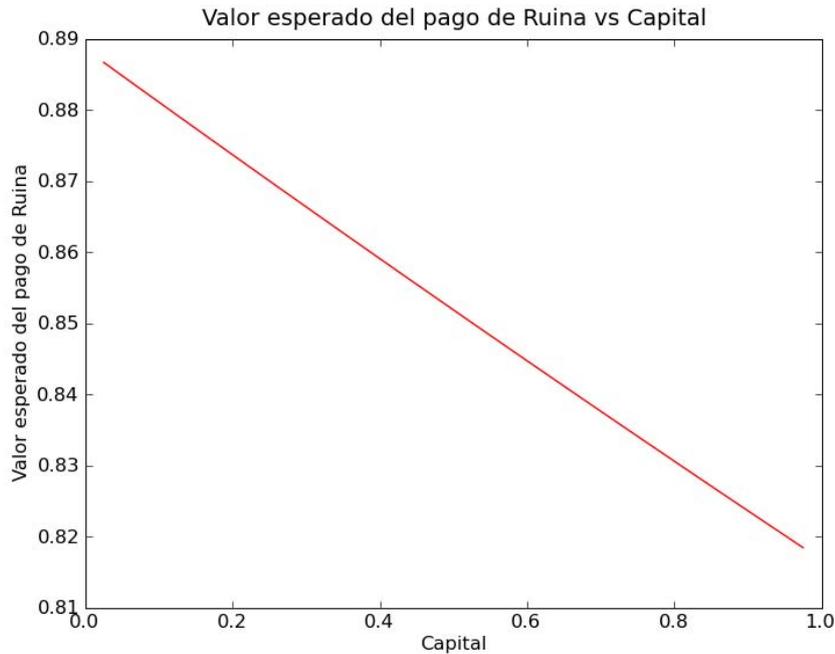
esperado pagará la entidad con cada función de pago $w(x, y)$. En las simulaciones se fijaron los siguientes parámetros

Cuadro 3.1 Parámetros de simulación del valor esperado de ruina dada una función de pago $w(x, y)$

α	1
ρ	0.1
λ	0.5
c	0.5



Gráfica 3.1 Funciones de pago $w(x, y)$ cuando se da el momento de ruina en $t = T$.

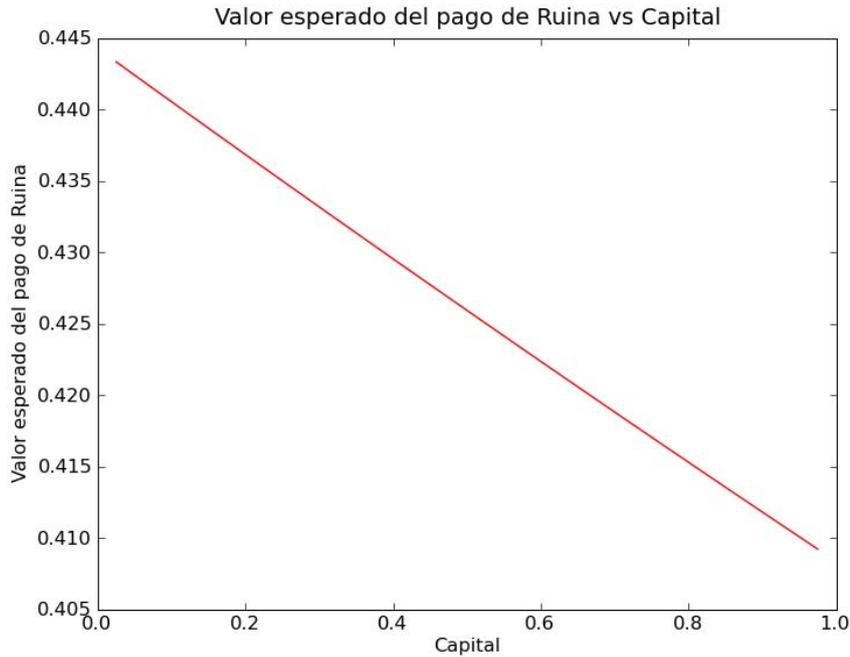


Gráfica 3.2 Valor esperado del pago de la ruina vs. Capital cuando $w(x, y) = y$

En la gráfica 3.2 se tiene el valor esperado de la ruina de la simulación 1 suponiendo que la entidad realiza el pago total de la ruina, cualquiera que esta sea. Cabe mencionar que a mayor nivel de capital el valor esperado del pago será menor debido a que al momento de ruina habrá más capital para compensar la pérdida.

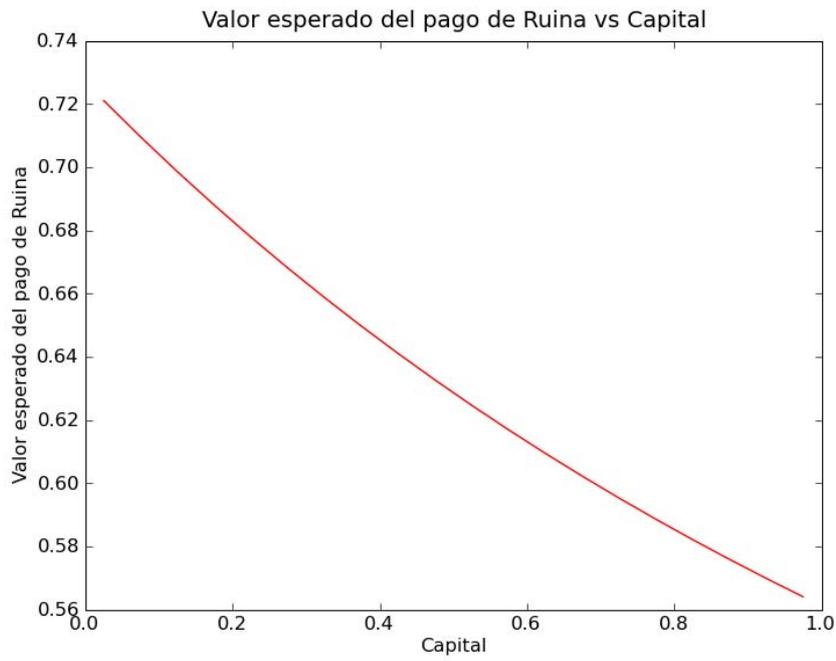
En la simulación 2 lo que suponemos es que a pesar de que registre un monto de severidad de ruina en $t = T$, la entidad únicamente pagará una parte proporcional de esa pérdida. Un ejemplo en la práctica son el nivel de suma asegurada que emiten las empresas aseguradoras, a pesar que el monto de un siniestro ocurrido tenga una magnitud m , la responsabilidad de la asegura esta acotada por la suma asegurada n de tal forma que la aseguradora cubrirá totalmente el siniestro sólo si $n \geq m$. El Gráfica 3.3 muestra la segunda simulación donde suponemos que la entidad pagará la mitad de la

ruina cuando esta ocurra, es decir $w(x, y) = \frac{1}{2} y$.



Gráfica 3.3 Valor esperado del pago de la ruina vs. Capital cuando $w(x, y) = \frac{1}{2} y$

Para la tercera simulación buscamos ver el efecto de valor esperado de pago cuando se manejan coaseguros o deducibles, en este caso se puede suponer que para el pago de una suma asegurada por parte de la entidad, es necesario que la contraparte pague una parte proporcional del riesgo. Dicho porcentaje puede estar basado en una parte proporcional del valor del capital en riesgo, si suponemos $w(x, y) = y - \sigma x$ con $\sigma \in [0,1]$ se interpreta que el asegurado deberá pagar la proporción σ del valor de capital. Supongamos que $\sigma = 0.2$ la función de pago es la siguiente: La entidad pagará el valor de la ruina y el asegurado una proporción σ sobre el valor del capital al momento de la ruina.



Gráfica 3.4 Valor esperado del pago de la ruina vs. Capital cuando $w(x, y) = y - 0.2x$

ANEXOS

Los anexos contienen dos scripts: El primer script está escrito en Matlab 7 y con él se obtiene la simulación del Modelo Clásico que se utilizó para la obtención de los gráficos y la probabilidad de ruina del capítulo I. El segundo script está escrito en Python 2.5.2 y con él se estima numéricamente del valor esperado de la ruina dado un nivel de capital y una función de pago w , se utiliza la regla trapezoidal para dicha estimación.

ANEXO 1

```
clear all

%este programa simula Modelo Cramer Lundberg con monto de reclamaciones que
siguen
%distribución exponencial
%suponemos que las reclamaciones siguen una distribución Poisson
u = input('Introduzca el valor del capital inicial: ');
c = input('Introduzca el valor de la prima: ');
L = input('Introduzca la esperanza del monto de reclamación: ');
Z = input('Introduzca la esperanza del numero de riesgos por periodo: ');
t = input('Introduzca el número de periodos de evaluación: ');
j = input('Introduzca el número de corridas: ');
v=u;
k=0;
for r=1:j
```

```

for i=1:t
    for n=1:poissrnd( Z );
        m=exprnd( L );
        N{n,1}=m;
        M=N{n,1}+k;
        k=M;
    end
    w{i,r}=v+c-M;
    v=v+c-M;
    k=0;
    M=0;
end
v=u;
end
x=t;
y=j;
for r=1:y;
    plot (cell2mat(w(1:x,r:r)), 'DisplayName', 'cell2mat(w(1:x,r:r))', 'YDataSource',
'cell2mat(w(1:x,r:r)); figure(gcf)
    hold on;
end
hold off;

```

ANEXO 2

```
from numpy import *
from numpy.random import uniform
from math import *
from matplotlib.mlab import griddata
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as numpy
#
# funcion de densidad
#
#
# Nota : escribir 2.0
def p(x):
    global Alfa
    return Alfa*exp(-x*Alfa)

def g(x):
    global Rho,Lambda,C,Epsilon
    global w_menos,w_center,w_mas,fgauss

    suma = 0
    continua = True
    ii=1.0
    deltat = 1
    while continua:
        t_center = deltat*(ii-0.5)
        t_mas = t_center + deltat/2.0*fgauss
        t_menos = t_center - deltat/2.0*fgauss

        Ft_menos = exp(-Rho*t_menos)*p(x+t_menos)
        Ft_center = exp(-Rho*t_center)*p(x+t_center)
        Ft_mas = exp(-Rho*t_mas)*p(x+t_mas)

        temporal = deltat*( w_menos*Ft_menos + w_center*Ft_center +
w_mas*Ft_mas )/2.0
        suma = suma + temporal
        if abs(temporal/suma)<Epsilon :
            continua = False
            ii = ii+1
    return suma

def w(x,y):
    # x = capital antes de la ruina
    # y = capital en la ruina
    global Rho,Lambda,C,Epsilon
    return y

def u(x):
    global Rho,Lambda,C,Epsilon
    global w_menos,w_center,w_mas,fgauss

    suma = 0
    continua = True
    ii=1.0
    deltat = 1
    while continua:
        t_center = deltat*(ii-0.5)
```

```

t_mas      = t_center + deltat/2.0*fgauss
t_menos    = t_center - deltat/2.0*fgauss

Ft_menos   = w(x,t_menos)*p(x+t_menos)
Ft_center  = w(x,t_center)*p(x+t_center)
Ft_mas     = w(x,t_mas)*p(x+t_mas)

temporal   = deltat*( w_menos*Ft_menos + w_center*Ft_center +
w_mas*Ft_mas )/2.0
suma = suma + temporal
if abs(temporal/suma)<Epsilon :
    continua = False
    ii = ii+1
return suma

def h(x):
    global Rho,Lambda,C,Epsilon
    global w_menos,w_center,w_mas,fgauss

    suma = 0
    continua = True
    ii=1.0
    deltat = 1
    while continua:
        t_center = deltat*(ii-0.5)
        t_mas     = t_center + deltat/2.0*fgauss
        t_menos   = t_center - deltat/2.0*fgauss

        Ft_menos = u(t_menos+x)*exp(-Rho*t_menos)*Lambda/C
        Ft_center = u(t_center+x)*exp(-Rho*t_center)*Lambda/C
        Ft_mas    = u(t_mas+x)*exp(-Rho*t_mas)*Lambda/C

        temporal = deltat*( w_menos*Ft_menos + w_center*Ft_center +
w_mas*Ft_mas )/2.0
        suma = suma + temporal
        if abs(temporal/suma)<Epsilon :
            continua = False
            ii = ii+1
    return suma

def resuelve(n,X):
    # sistema a resolver
    global w_menos,w_center,w_mas,fgauss

    KM = zeros( (n,n) )
    x = zeros( (n,1) )
    #
    Kb = zeros( (n,1) )
    for ii in range(0,n):
        x[ii] = (ii+0.5)*X/n
        Kb[ii] = h(x[ii])
    deltat = X/float(n)
    # Se calcula la matriz del sistema
    for ii in range(0,n):
        KM[ii,ii] = 1
        for jj in range(0,ii):
            t_center = deltat*(jj+0.5)
            t_mas     = t_center + deltat/2.0*fgauss
            t_menos   = t_center - deltat/2.0*fgauss

            Ft_menos = g( deltat*(ii+0.5) - t_menos)

```

```

        Ft_center = g( deltat*(ii+0.5) - t_center)
        Ft_mas    = g( deltat*(ii+0.5) - t_mas)

        temporal = deltat*( w_menos*Ft_menos + w_center*Ft_center +
w_mas*Ft_mas )/2.0
        KM[ii, jj ]= KM[ii,jj] - temporal
        # Se resuelve el sistema
        #
        phi = linalg.solve(KM,Kb) # vector solucion
        print phi
        print x
        # Se grafica la solucion
        plt.figure()
        pp0 = plt.plot(x,phi,'r')
        plt.xlabel('Capital')
        plt.ylabel('Valor esperado del pago de Ruina')
        titulo = "Valor esperado del pago de Ruina vs Capital"
        plt.title(titulo)
        plt.show()

        return

# Parametros del modelo
Alfa = 1.0
Rho = 0.1
Lambda = 0.5
C = 0.5
Epsilon = 0.000001

# Constantes de integracion

fgauss = sqrt(float(3)/float(5))
w_menos = float(5)/float(9)
w_center = float(8)/float(9)
w_mas = float(5)/float(9)

resuelve(20,1)

```

Nota: En las simulaciones presentadas en el Capítulo III, cambia el valor de la función

de pago en $w(x, y) = y$, $w(x, y) = \frac{1}{2}y$ y $w(x, y) = y - 0.2x$. En el script se reemplaza:

```

def w(x,y):
    # x = capital antes de la ruina
    # y = capital en la ruina
    global Rho,Lambda,C,Epsilon
    return y

```

por

```

return y/2           para  $w(x, y) = \frac{1}{2}y$ 

```

```

return y - 0.20 * x   para  $w(x, y) = y - 0.2x$ 

```

BIBLIOGRAFIA

1. ASB, ACTUARIAL STANDARDS BOARD, *Risk Classification (for all Practice Areas), Number 12*, Task Force of the General Committee of the Actuarial Standards Board, 2005.
2. BANSEFI, *Administración de Riesgos Financieros*, Banco Nacional de Ahorro y Servicios Financieros, SNC, 2003.
3. BELLOSTA, Rosana, *Salud Emocional*, Asesoría Psicológica del Ayuntamiento (CIPAJ) y la Universidad de Zaragoza, 2006.
4. CHAVAS, Jean—Paul, *Risk analysis in theory and practice*, Elsevier Academic Press, 2004.
5. EMBRECHTS, Paul, Kluppelber C., Mikosch T., *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer—Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.
6. FELLER, W, *An Introduction to probability Theory and Its Applications*, volume I, 3rd ed., New York: Wiley, 1950.
7. FELLER, W, *An Introduction to probability Theory and Its Applications*, volume II, 2nd ed., New York: Wiley, 1971.
8. FMI, *Prevención y Solución de Crisis Financieras*, Comité Provisional de la Junta de Gobernadores sobre el Sistema Monetario Internacional del Fondo Monetario Internacional, 1998.
9. GERBER, Hans, SHIU, *From Ruin Theory to Option Pricing*, paper from École des hautes études commerciales Université de lausanne, Switzerland.
10. GERBER, Hans, SHIU, *On the Probability and severity of Ruin*, paper from École des hautes études commerciales Université de lausanne, Switzerland.

11. GERBER, Hans, SHIU, *On the Time Value of Ruin*, paper from École des hautes études commerciales Université de lausanne, Switzerland.
12. LAVELL Allan, *Viviendo el Riesgo*, Red de Estudios Sociales y de Prevención de América Latina, 1997.
13. M.E.N., D.N.P, FONADE, *Misión de ciencia y tecnología, Estructura científica, Desarrollo tecnológico y Entorno Social*, volumen 2, tomo I, Santa Fe de Bogotá, 1990.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

14. BOWER Jennifer, et. al., *Enterprise Risk Management, Specialty Guide*, 2006.
15. BREGMAN, Yuliya, Klüppelberg C., *Ruin Estimation in Multivariate Models with Clayton dependence structure*, University of Munich, 2005.
16. BULLMAN, *A Distribution Free Method for General Risk Problems*, Zurich Switzerland, 1964.
17. DICKSON, David, REIS, WATERS, *Some stable algorithms in ruin theory and their application*, paper of University of Melbourne.
18. HUBBARD, Douglas, *How to Measure Anything: Finding the Value of Intangibles in Business*, John Wiley & Sons, 2007, p. 46.
19. JUN, Kay, *Cramer—Lundberg asymptotics*, 2005.
20. KLUGMAN, Stuart, Panjer H., Willmot G., *Loss Models: From Data to Decisions*, John Wiley & Sons, Inc., United States of America, 1998.
21. MEYFREDI, *History of the Risk Concept and Risk Modeling*, Edhec Risk and asset Management Research Centre, October 2004.

22. MAHER, David, *A Note on the Ruin Problem with Risky Investments*, 2005.
23. MORDECKI, Ernesto, *Distribución del Máximo de un proceso de Lévy y aplicaciones en finanzas y matemática actuarial*, Facultad de Ciencias, Centro de Matemática de Iguá, Uruguay, 2003.
24. PHILIPSON, Carl, *A review of collective theory risk*, Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1968.
25. TAYLOR, *A Heuristic review of some ruin theory results*. E.S. Knight & Co., Sydney.
26. TAYLOR, Gregory, Robert Buchanan, *The management of solvency In Classical Insurance Solvency Theory*. Ed. J. David Cummins and Richard A. Derrig, Chapter 2, 49–151. Boston: Kluwer Academic Publishers.
27. TOLEDO, Benjamín, *Introducción a las ecuaciones integrales*, 20 Noviembre 2000.
28. VOLCHAN, Sergio, *The fundamental theorem of actuarial risk science*, Pontificia Universidad Católica de Río de Janeiro.