UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

La Categoría de k-espacios

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMÁTICO

P R E S E N T A

DIOSEL LÓPEZ CRUZ

DIRECTOR DE TESIS
DR. CARLOS PRIETO DE CASTRO

MÉXICO, D.F. 2009

Berelele

Zitu nuáa ' xquidxé ',
bedaniáa ' ti berelele,
ñuunda ' ra lidxe '.

Ti berelele bedaniá ',
ñuunda ' ra lidxe',
ti zaqué qui nibana ' xquidxe '.

Ti dxi biyube ' laame ndaani ' lidxe ',
bipapame, zéme,
laaca bibáname xquidxe. . .

El alcaraván

Lejos me encuentro de mi pueblo,
traje un alcaraván,
que cantara en mi casa.

Un alcaraván traje,
que cantara en mi casa,
a ver si así no siento nostalgia de mi pueblo.

Un día lo busqué dentro de mi casa,
había volado, se había ido,
también tuvo nostalgia de mi pueblo.

Gabriel López Chiñas.

Agradecimientos

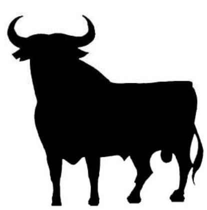
Primero que nada quiero agradecer a DIOS.

A mis padres, Miguel y Estela.

A mi asesor Carlos Prieto de Castro, a mis sinodales Marcelo Aguilar, Francisco Marmolejo, Israel Moreno y Gerardo Acosta. Gracias por toda su ayuda y comprensión para la culminación de este trabajo.

Finalmente y a manera de dedicatoria, a mis hermanos, Maxy, Jose Alfredo, Sergio, Gregorio y Miguel. A mis sobrinos, Jose Manuel, Fharid, Elda María, Gael y Sergio jr. A mis amigos de toda la vida, a las mujeres que en algún momento estuvieron a mi lado. A los monarcas del trincherazo, toreros, torerazos. A los reyes del costalazo. A todos esos personajes reales y ficticios que han sido parte importante de mi vida, y que de alguna u otra manera han influido en mi forma de ser.

Que Dios reparta suerte...



Índice general

Introducción

Para muchas cuestiones en teoría de homotopía, la categoría $\mathscr{T}\!op$ de espacios topológicos y aplicaciones continuas es inconveniente para trabajar, principalmente por las siguientes razones: si $q : X \longrightarrow Y$ es una identificación, entonces $1_Z \times q : Z \times X \longrightarrow Z \times Y$ no necesariamente lo es, además la ley exponencial no se cumple en general.

La finalidad de esta tesis es presentar una categoría conveniente de espacios topológicos, que sea suficientemente pequeña para cumplir con ciertas condiciones razonables y suficientemente amplia para contener a muchos de los espacios importantes que surgen en las aplicaciones de la topología. Durante mucho tiempo la siguiente categoría gozó de mucha popularidad entre los topólogos algebraicos:

$(*)$ La categoría de Steenrod de espacios compactamente generados de Hausdorff $\mathscr{CG}$. Un espacio X está en $\mathscr{CG}$ si es Hausdorff y $A \subseteq X$ es cerrado si y sólo si $A \cap K$ es cerrado, para todo $K \subseteq X$ compacto.

La categoría $\mathscr{CG}$ es adecuada para el estudio de H-espacios, espacios clasificantes, productos simétricos infinitos, etc. Desafortunadamente para un diagrama D en $\mathscr{CG}$, el colímite colim D no necesariamente está en $\mathscr{CG}$. Más aún el funtor $F : \mathscr{CG} \longrightarrow \mathscr{S}\!et$ no conserva colímites. Por ejemplo si $p : X \longrightarrow X'$ es una identificación y $X \in \operatorname{ob} \mathscr{CG}$, entonces X' no necesariamente es compactamente generado. Además el dominio del funtor k de Steenrod es la categoría de espacios Hausdorff $\mathscr{T}_2$ y no $\mathscr{T}\!op$, la categoría de espacios topológicos.

Presentaremos entonces una subcategoría plena de $\mathscr{T}\!op$ que goce de las buenas propiedades de $\mathscr{CG}$, pero que no tenga las desventajas antes mencionadas. A saber, consideraremos la categoría de k-espacios, construida por R. M. Vogt en [10], para remediar las dificultades que la categoría $\mathscr{CG}$, presenta.

En el capítulo 1 introducimos las nociones de categoría, funtor y transformación natural. Utilizaremos estas definiciones principalmente como herramientas para los capítulos siguientes. Éstas son nociones básicas de categorías, para las cuales no daremos demostraciones, salvo en casos especiales.

En el capítulo 2 se presenta la categoría de $k_{\mathscr{S}}$-espacios, se dan sus propiedades fundamentales y se caracteriza esta categoría. Asimismo se prueba que el funtor inclusión $i : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{Top}$ es adjunto del funtor $k_{\mathscr{S}}$-ificación $k_{\mathscr{S}} : \mathscr{Top} \longrightarrow \mathscr{K}_{\mathscr{S}}$ y que el funtor que olvida $F : \mathscr{K}_{\mathscr{S}} \longrightarrow \mathscr{Set}$ conserva colímites. Además se demuestra que ésta categoría es cerrada bajo ciertas operaciones estándar, contiene límites y colímites de diagramas en $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$ (es decir, la categoría de $k_{\mathscr{S}}$-espacios es completa y cocompleta), subespacios abiertos y cerrados de $k_{\mathscr{S}}$-espacios estan en $\mathscr{K}$ y si $q : X \longrightarrow X'$, con $X \in \text{ob } \mathscr{K}$, es una identificación, entonces $X' \in \text{ob } \mathscr{K}_{\mathscr{S}}$.

En el capítulo 3 consideramos ya a la categoría de k-espacios y algunos ejemplos, consideramos también a la categoría de espacios debilmente de Hausdorff. Probamos que la categoría de Steenrod $\mathscr{CG}$ es una subcategoría de los k-espacios, además de que los espacios más importantes en la Teoría de Homotopía, los complejos CW, son k-espacios.

El capítulo 4 es una de las partes principales de éste trabajo. Se presenta la topología compacto-abierta, se define el producto y el espacio de funciones en $\mathscr{K}$ bajo el funtor k-ificación, se ve que $\mathscr{K}$ es una categoría cartesianamente cerrada y que es monoidal simétrica con el k-producto. También probamos que el funtor $\mathscr{K}_t(-, X) : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{K}$ transfiere colímites a límites y que el producto de identificaciones entre k-espacios es nuevamente una identificación en $\mathscr{K}$. El capítulo finaliza con el concepto de encaje y se hacen algunas observaciones con respecto a esta definición y a la de colímite en $\mathscr{K}$.

En el capítulo 5 consideramos la categoría $\mathscr{K}_*$ de los k-espacios basados; esta categoría cumple con las buenas condiciones de $\mathscr{K}$. Los colímites y límites de $\mathscr{K}_*$ son los mismos que los de $\mathscr{K}$, pero con punto básico y el funtor que olvida punto básico $F : \mathscr{K}_* \longrightarrow \mathscr{K}$ conserva límites. Observamos tambien que el producto reducido (smash) no es asociativo en $\mathscr{Top}_*$. Asimismo probamos que con este producto tenemos un criterio de categoría conveniente para $\mathscr{K}_*$. Y finalmente probamos que el funtor $- \wedge (X, x_0) : \mathscr{Top}_* \longrightarrow \mathscr{Top}_*$ admite un adjunto derecho siempre y cuando X sea exponenciable en la categoría $\mathscr{Top}$.

Capítulo 1
Categorías, funtores y adjunciones

En este capítulo daremos nociones básicas del lenguaje de la teoría de categorías y probaremos que podemos unificarlas con las ideas que a nosotros nos conciernen en espacios topológicos. De hecho las principales aplicaciones de la teoría de categorías son en el campo de la topología algebraica, particularmente en la teoría de homología y homotopía. Los conceptos de la teoría de categorías que daremos aquí, pueden ser vistos con mayor claridad en el libro de S. Awodey [2].

1.1. Categorías y funtores

Definición 1.1.1 *Una **categoría** $\mathscr{C}$ consiste en lo siguiente:*

- *Una clase de **objetos**: A, B, C,..., llamada* ob $\mathscr{C}$*;*
- *Una clase de **morfismos**: f, g, h,..., llamada* mor $\mathscr{C}$*;*
- *Para cada morfismo f, existen objetos,* $\mathrm{dom}(f)$ *y* $\mathrm{cod}(f)$*, llamados el **dominio** y **codominio** de f. Si* $\mathrm{dom}(f) = A$ *y* $\mathrm{cod}(f) = B$*, decimos que f es un morfismo de A en B y escribimos $f : A \longrightarrow B$.*
- *Dados dos morfismos $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, es decir, tales que:* $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$*, existe un morfismo, $g \circ f : A \longrightarrow C$, llamado la **composición** de f y g.*
- *Para cada objeto A, existe un morfismo $1_A : A \longrightarrow A$, llamado el **morfismo identidad** de A.*

Lo anterior tiene las siguientes propiedades:

- ▲ ***Asociatividad**: $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$ para todo morfismo $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow D$.*

- ▲ ***Unidad**: $f\circ 1_A = f = 1_B\circ f$, para todo morfismo $f : A \longrightarrow B$.*

Además los morfismos de A en B constituyen un conjunto, que denotaremos por $\mathscr{C}(A, B)$. Notemos que la clase de objetos de $\mathscr{C}$, ob $\mathscr{C}$, no es en general un conjunto.

Definición 1.1.2 *Una categoría $\mathscr{C}$ es llamada **pequeña** si la clase de objetos* ob $\mathscr{C}$ *es un conjunto. En otro caso, decimos que $\mathscr{C}$ es **grande**.*

Ejemplos 1.1.3 *En los siguientes ejemplos, la composición de morfismos es la composición usual de funciones.*

(1) *La categoría $\mathscr{S}et$, que consta de todos los conjuntos, y los morfismos entre ellos son las funciones. Existe también la categoría $\mathscr{S}et_{fin}$ cuyos objetos son los conjuntos finitos y cuyos morfismos son las funciones entre ellos.*

(2) *La categoría $\mathscr{T}op$ cuyos objetos son todos los espacios topológicos y, cuyos morfismos son las aplicaciones continuas.*

(3) *La categoría $\mathscr{T}op_*$ en la que los objetos son los espacios punteados, esto es, parejas (X, x) donde X es un espacio topológico y $x \in X$ es el llamado punto básico. Un morfismo f de (X, x) en (Y, y) es una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f(x) = y$.*

(4) *La categoría $\mathscr{A}b$, cuyos objetos son los grupos abelianos y cuyos morfismos son los homomorfismos de grupos.*

Definición 1.1.4 *Una categoría $\mathscr{C}'$ es una subcategoría de $\mathscr{C}$ si se tiene lo siguiente:*

(i) ob $\mathscr{C}' \subseteq$ ob $\mathscr{C}$;

(ii) $\mathscr{C}'(C, D) \subseteq \mathscr{C}(C, D)$ *para todo* $C, D \in$ ob $\mathscr{C}'$;

(iii) $\mathscr{C}'$ *es cerrada bajo* dom, cod, 1_C *y* $\circ$.

*Decimos que $\mathscr{C}'$ es **plena** si $\mathscr{C}'(C, D) = \mathscr{C}(C, D)$, para todo $C, D \in$* ob $\mathscr{C}'$.

Definición 1.1.5 *Un* ***funtor*** $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$*, entre dos categorías* $\mathscr{C}$ *y* $\mathscr{D}$ *asigna a cada objeto* $C \in \mathscr{C}$ *un objeto* $F(C) \in \mathscr{D}$ *y, a cada morfismo* $f : A \longrightarrow B$ *en* $\mathscr{C}$ *un morfismo* $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ *en* $\mathscr{D}$*, de modo que:*

$$\text{(a) } F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \qquad y \qquad \text{(b) } F(1_A) = 1_{F(A)}.$$

Ejemplos de funtores:

(1) Si $\mathscr{C}$ es una categoría , tenemos el funtor identidad $1_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ definido por $1_{\mathscr{C}}(C) = C$ para todo objeto C y $1_{\mathscr{C}}(f) = f$, para todo morfismo f.

(2) El funtor que olvida $F : \mathscr{T}\!op \longrightarrow \mathscr{S}\!et$, de la categoría de los espacios topológicos en la categoría de los conjuntos, es el funtor que olvida la estructura de espacio topológico sobre los objetos de $\mathscr{T}\!op$. Es decir, si $X \in \mathscr{T}\!op$, entonces $F(X) = X$ es el conjunto subyacente del espacio topológico X y, si f es una aplicación de espacios topológicos entonces $F(f)$ es f vista como función entre los conjuntos subyacentes.

(3) El funtor $P : \mathscr{T}\!op_* \longrightarrow \mathscr{T}\!op$, tal que, para cualquier espacio punteado (X, x_0), olvida el punto básico, es decir, que $P(X, x_0) = X$ y $P(f) = f$.

Definición 1.1.6 *En una categoría* $\mathscr{C}$*, un morfismo* $f : A \longrightarrow B$ *es llamado un* ***isomorfismo*** *si existe un morfismo* $g : B \longrightarrow A$ *en* $\mathscr{C}$ *tal que*

$$g \circ f = 1_A \qquad y \qquad f \circ g = 1_B.$$

Decimos que A *y* B *son* ***isomorfos****, y escribimos* $A \cong B$*, si existe un isomorfismo entre ellos.*

Ahora que tenemos una variedad de categorías, consideremos algunas construcciones que producen nuevas categorías a partir de las anteriores.

1. La categoría *coma* $\mathscr{C}\downarrow_B$ de una categoría $\mathscr{C}$ sobre un objeto $B \in \mathscr{C}$, tiene como objetos a todos los morfismos $f \in \mathscr{C}$ tales que $\operatorname{cod}(f) = B$, y como un morfismo g de $f : X \longrightarrow B$ a $f' : X' \longrightarrow B$ a un morfismo $g : X \longrightarrow X'$ en $\mathscr{C}$ tal que $f' \circ g = f$, es decir, tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & X' \arrow[dl, "f'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

conmuta. También tenemos la categoría *cocoma* $\mathscr{C}\downarrow^{A}$ de una categoría $\mathscr{C}$ bajo un objeto $A \in \mathscr{C}$ que tiene como objetos a todos los morfismos f de $\mathscr{C}$ tales que $\mathrm{dom}(f) = A$, y como un morfismo de $f : A \longrightarrow X$ a $f' : A \longrightarrow X'$, a un morfismo $h : X \longrightarrow X'$ en $\mathscr{C}$ tal que $h \circ f = f'$, es decir, tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ X \arrow[rr, "h"'] & & X'. \end{tikzcd}$$

2. La categoría *opuesta* (o dual) $\mathscr{C}^{op}$ de una categoría $\mathscr{C}$ tiene los mismos objetos que $\mathscr{C}$, y un morfismo $f : C \longrightarrow D$ en $\mathscr{C}^{op}$ es un morfismo $f^{op} : D \longrightarrow C$ en $\mathscr{C}$. Luego $\mathscr{C}(C, D) = \mathscr{C}^{op}(D, C)$.
   Es conveniente, en esta notación, distinguir un objeto (resp. morfismo) en $\mathscr{C}$ de uno de $\mathscr{C}^{op}$. Luego, escribimos:

$$f^{op} : D \longrightarrow C$$

   en $\mathscr{C}^{op}$ para $f : C \longrightarrow D$ en $\mathscr{C}$. Con esta definición podemos definir la composición y la unidad en $\mathscr{C}^{op}$ en términos de la operación correspondiente en $\mathscr{C}$, tenemos así,

$$1_C^{op} = 1_C \qquad \text{y} \qquad f^{op} \circ g^{op} = g \circ^{op} f,$$

   es decir, un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

   es equivalente a un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}^{op}$:

$$\begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "f^{op}"'] \\ & C \arrow[u, "g^{op}"'] \arrow[ul, "f^{op} \circ g^{op}"] \end{tikzcd}$$

Así resulta que $(\mathscr{C}^{op})^{op} = \mathscr{C}$. La posibilidad de asociar a cada categoría $\mathscr{C}$ con su categoría dual $\mathscr{C}^{op}$ nos permite definir, para cada concepto categórico y cada enunciado categórico, sus respectivas versiones duales.

La construcción anterior nos da paso a un principio muy importante en la teoría de categorías, llamado el *principio de dualidad*.

Observación 1.1.7 ***El principio de dualidad***
Para cualquier enunciado P en el lenguaje de teoría de categorías, si P se sigue de los axiomas de categorías, entonces el enunciado dual P^* tambien.

Para tener un mejor concepto, nótese que si P implica algún diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

entonces P^* implica el diagrama obtenido de éste invirtiendo la dirección y el orden de la composición de los morfismos.

$$\begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "f"'] \\ & C \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "f\circ g"] \end{tikzcd}$$

Notese que una interpretación de un enunciado P en $\mathscr{C}$ automáticamente nos da una interpretación de P^* en $\mathscr{C}^{op}$.

1.2. Límites y colímites

En esta sección definiremos los primeros conceptos de "límite", así como sus enunciados duales, que resultan ser casos especiales de la definición general de límite y de colímite. Es decir, definiremos los conceptos de objeto terminal, producto, igualador y cuadrado cartesiano (pullback) para el concepto de límite; y objeto inicial, coproducto, coigualador y cuadrado cocartesiano (pushout) para el de colímite.

Definición 1.2.1 *En una categoría $\mathscr{C}$, un morfismo $f : A \longrightarrow B$ se llama* ***monomorfismo****, si dados dos morfismos $g, h : C \longrightarrow A$, la igualdad $f\circ g = f\circ h$ implica que $g = h$,*

$$C \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B\ ;$$

*dualmente, f se llama **epimorfismo**, si dados dos morfismos $i, j : B \longrightarrow D$, la igualdad $i \circ f = j \circ f$ implica que $i = j$,*

$$A \xrightarrow{f} B \underset{j}{\overset{i}{\rightrightarrows}} D \, .$$

Ya que la definición de epimorfismo es dual a la definición de monomorfismo, se tiene que f es un epimorfismo en la categoría $\mathscr{C}$ si y sólo si f es un monomorfismo en la categoría $\mathscr{C}^{op}$.

Definición 1.2.2 *En una categoría $\mathscr{C}$, un objeto 0 es **inicial** si para cualquier objeto C, existe un único morfismo*

$$0 \longrightarrow C.$$

*Dualmente, un objeto 1 es **terminal** si para cualquier objeto C, existe un único morfismo*

$$C \longrightarrow 1.$$

Tanto con monomorfismos y epimorfismos, como con los objetos iniciales y terminales, notemos que existe una dualidad en sus definiciones. Más precisamente, un objeto terminal en $\mathscr{C}$ es un objeto inicial en $\mathscr{C}^{op}$. Observemos que para cualquier categoría $\mathscr{C}$ y cualquier $C \in \mathrm{ob}\, \mathscr{C}$, entonces el morfismo identidad $1_C : C \longrightarrow C$ es un objeto terminal en $\mathscr{C}{\downarrow_C}$ e inicial en $\mathscr{C}{\downarrow^C}$. A saber, para todo objeto $f : B \longrightarrow C$ en $\mathscr{C}{\downarrow_C}$ se tiene:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[dl, "1_C"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

es decir, f es el único morfismo de $f : B \longrightarrow C$ a $1_C : C \longrightarrow C$. De la misma manera se obtiene el resultado dual para un objeto inicial.

La prueba del siguiente resultado es inmediata.

Lema 1.2.3 *Los objetos iniciales (terminales) son únicos salvo isomorfismos.*

Definición 1.2.4 *Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $P \in \text{ob}\,\mathscr{C}$. Consideremos una familia de objetos $\{A_i\}_{i\in I}$ y una familia de morfismos $p_i : P \longrightarrow A_i$. Decimos que P junto con los morfismos $\{p_i\}_{i\in I}$ es un* ***producto*** *para los objetos $\{A_i\}_{i\in I}$, si se cumple lo siguiente:*

Para cualquier objeto $U \in \mathscr{C}$ y para cualquier familia $\{u_i\}_{i\in I}$ de morfismos $u_i : U \longrightarrow A_i$, existe un único morfismo $\eta : U \longrightarrow P$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, dashed, "\eta"] \arrow[dr, "u_i"'] & & P \arrow[dl, "p_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

es conmutativo para toda $i \in I$. Denotamos generalmente a $P = \prod_{i\in I} A_i$.

En $\mathscr{T}\!op$ se tiene lo siguiente:

Ejemplo: El producto de dos espacios topológicos X y Y, como se define usualmente, realmente es un producto en la categoría $\mathscr{T}\!op$. Para esto, supongamos que tenemos dos espacios X y Y, y el espacio producto $X \times Y$ con sus proyecciones:

$$X \xleftarrow{p_1} X \times Y \xrightarrow{p_2} Y$$

Consideremos que $\mathcal{B}(X, Y)$ es la topología generada por los abiertos básicos de la forma $U \times V$ donde $U \in \mathcal{B}(X)$ y $V \in \mathcal{B}(Y)$, luego todo $W \in \mathcal{B}(X \times Y)$ es unión de tales abiertos básicos.

i) La aplicación p_1 es continua, puesto que ${p_1}^{-1}(U) = U \times X$, que es abierto, si U es abierto. Análogamente se ve que p_2 es continua.

ii) Dadas cualesquiera dos aplicaciones continuas $f_1 : Z \longrightarrow X$ y $f_2 : Z \longrightarrow Y$, sea $f : Z \longrightarrow X \times Y$ la aplicación $f = (f_1, f_2)$ definida, para $z \in Z$, como $f(z) = (f_1(z), f_2(z))$. Es claro que $p_1 \circ f = f_1$ y $p_2 \circ f = f_2$. Ahora solo hay que ver que f es continua. Es suficiente probar que si $U \subset X$, $V \subset Y$ son abiertos, $f^{-1}(U \times V)$ es abierto en Z. Como

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= f^{-1}((U \times Y) \cap (X \times V)) \\ &= f^{-1}(U \times Y) \cap f^{-1}(X \times V) \\ &= f^{-1} \circ {p_1}^{-1}(U) \cap f^{-1} \circ {p_2}^{-1}(V) \\ &= {f_1}^{-1}(U) \cap {f_2}^{-1}(V) \end{aligned}$$

y además, ${f_1}^{-1}(U)$ y ${f_2}^{-1}(V)$ son abiertos, puesto que f_1 y f_2 son continuas, por lo tanto f es continua.

La noción dual del producto es la de coproducto.

Definición 1.2.5 *Un objeto Q en una categoría $\mathscr{C}$ junto con una familia de morfismos $q_i : A_i \longrightarrow Q$ es un **coproducto** para la familia de objetos $\{A_i\}_{i\in I}$, si se cumple la siguiente propiedad:*

Si dado un objeto $W \in \mathscr{C}$ y morfismos $w_i : A_i \longrightarrow W$, existe un único morfismo $\eta : Q \longrightarrow W$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & A_i \arrow[dl, "q_i"'] \arrow[dr, "w_i"] & \\ Q \arrow[rr, dashed, "\eta"'] & & W \end{tikzcd}$$

es conmutativo para toda $i \in I$. Denotamos al coproducto como $Q = \coprod_{i\in I} A_i$.

Un coproducto de dos objetos en una categoría es exactamente un producto en la categoría opuesta. A continuación tenemos el siguiente ejemplo:

Ejemplos 1.2.6 (1) *En $\mathscr{T}\!op$ el coproducto $X+Y$ de dos espacios X y Y, es la suma topológica, es decir, la unión ajena con la topología $\mathcal{B}(X+Y) \cong \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$.*

(2) *En $\mathscr{T}\!op_*$, si (X, x_0) y (Y, y_0) son espacios punteados, entonces el coproducto es $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$, es decir, la suma topológica en el cual se identifican los puntos básicos en un sólo punto.*

Como en casos anteriores, el producto y el coproducto son únicos salvo isomorfismos.

Definición 1.2.7 *En una categoría $\mathscr{C}$, dados dos morfismos $f, g : A \longrightarrow B$, un **igualador** de f y g consiste en un objeto E y un morfismo $e : E \longrightarrow A$, con la propiedad de que $f \circ e = g \circ e$, y de que, dado $z : Z \longrightarrow A$ con $f \circ z = g \circ z$ existe un único morfismo $u : Z \longrightarrow E$ con $e \circ u = z$. Lo anterior se ilustra en el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ Z \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[ur, "z"'] & & \end{tikzcd}$$

Proposición 1.2.8 *En una categoría $\mathscr{C}$, si $e : E \longrightarrow A$ es un igualador de alguna pareja de morfismos, entonces e es un monomorfismo.*

Demostración. Supongamos que $e \circ h = e \circ k$ y consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ Z \arrow[u, shift left, "h"] \arrow[u, shift right, "k"'] \arrow[ur, "l"'] & & \end{tikzcd}$$

donde e es un igualador de f y g y sea $l = e \circ h = e \circ k$. Entonces $f \circ l = f \circ e \circ h = g \circ e \circ h = g \circ l$. Como e es un igualador de f y g y, además $f \circ l = g \circ l$, existe un único morfismo $u : Z \longrightarrow E$ tal que $e \circ u = l$. Pero de $e \circ h = l$ y $e \circ k = l$, se sigue que $h = u = k$. Luego e es un monomorfismo. $\square$

Ahora consideremos la noción dual de igualador, comúnmente llamado coigualador

Definición 1.2.9 *Para cualesquiera morfismos $f, g : A \longrightarrow B$ en una categoría $\mathscr{C}$, un* ***coigualador*** *consiste en un objeto Q y un morfismo $q : B \longrightarrow Q$, con la propiedad de que $q \circ f = q \circ g$, y de que, dado cualquier Z y $z : B \longrightarrow Z$, si $z \circ f = z \circ g$, entonces existe un único $u : Q \longrightarrow Z$ tal que $u \circ q = z$, como en:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "z"'] & Q \arrow[d, dashed, "u"] \\ & & Z. \end{tikzcd}$$

Aquí observemos que, por dualidad, sabemos que un coigualador q en una categoría $\mathscr{C}$ es un igualador en $\mathscr{C}^{op}$. Luego q es un epimorfismo en $\mathscr{C}$. Tenemos entonces lo siguiente:

Proposición 1.2.10 *Si $q : B \longrightarrow Q$ es un coigualador de alguna pareja de morfismos, entonces q es un epimorfismo.*

El concepto de cuadrado cartesiano, al igual que el de producto, aparece muy a menudo en cualquier rama de las matemáticas.

Definición 1.2.11 *Dados dos morfismos $f_1 : A_1 \longrightarrow A$ y $f_2 : A_2 \longrightarrow A$ en una categoría $\mathscr{C}$, diremos que el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\ A_1 \arrow[r, "f_1"] & A \end{tikzcd}$$

*es un **cuadrado cartesiano** para f_1 y f_2, si para todo par de morfismos $q_1 : Q \longrightarrow A_1$ y $q_2 : Q \longrightarrow A_2$ tales que $f_1 \circ q_1 = f_2 \circ q_2$, existe un único morfismo $u : Q \longrightarrow P$ tal que $q_1 = p_1 \circ u$ y $q_2 = p_2 \circ u$. Es decir, hay una única u tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & A_2 \arrow[d, "f_2"'] \\ & A_1 \arrow[r, "f_1"] & A. \end{tikzcd}$$

Los cuadrados cartesianos son claramente únicos salvo isomorfismos, puesto que están dados por una propiedad universal.

Proposición 1.2.12 *Si una categoría $\mathscr{C}$ tiene productos binarios e igualadores, entonces ésta tiene cuadrados cartesianos.*

Demostración. Dados dos morfismos $f : A \longrightarrow C$ y $g : B \longrightarrow C$, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, dashed, "e"] \arrow[drr, bend left, "p_2"] \arrow[ddr, bend right, "p_1"'] & & \\ & A \times B \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[d, "\pi_1"] & B \arrow[d, "g"'] \\ & A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

donde e es un igualador de $f \circ \pi_1$ y $g \circ \pi_2$ y $p_1 = \pi_1 \circ e$, $p_2 = \pi_2 \circ e$. Lo que afirmamos es que el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

es un cuadrado cartesiano para f y g. Consideremos los morfismos $z_1 : Z \longrightarrow A$ y $z_2 : Z \longrightarrow B$, tales que $f \circ z_1 = g \circ z_2$. Entonces para $z = (z_1, z_2) : Z \longrightarrow A \times B$ si tenemos que, $f \circ \pi_1 \circ z = g \circ \pi_2 \circ z$, entonces por ser e un igualador de $f \circ \pi_1$ y $g \circ \pi_2$ existe un único morfismo $u : Z \longrightarrow E$ tal que $e \circ u = z$, luego:

$$p_1 \circ u = \pi_1 \circ e \circ u = \pi_1 \circ z = z_1 \qquad \text{y} \qquad p_2 \circ u = \pi_2 \circ e \circ u = \pi_2 \circ z = z_2.$$

Ahora supongamos que existe $u' : Z \longrightarrow E$ tal que $p_i \circ u' = z_i, i = 1, 2$, entonces $\pi_i \circ e \circ u' = z_i$, luego $e \circ u' = z = e \circ u$, así resulta que $u = u'$, puesto que e es un monomorfismo, esto concluye con la prueba. $\square$

La noción dual de la de cuadrado cartesiano es la de *cuadrado cocartesiano*.

Definición 1.2.13 *Dados dos morfismos $f_1 : A \longrightarrow A_1$ y $f_2 : A \longrightarrow A_2$, diremos que el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & A_1 \arrow[d, "p_1"] \\ A_2 \arrow[r, "p_2"'] & P \end{tikzcd}$$

*es un **cuadrado cocartesiano** para f_1 y f_2 si para todo par de morfismos $q_1 : A_1 \longrightarrow Q$ y $q_2 : A_2 \longrightarrow Q$ tales que $q_1 \circ f_1 = q_2 \circ f_2$, existe un único morfismo $u : P \longrightarrow Q$ tal que $q_1 = u \circ p_1$ y $q_2 = u \circ p_2$. Es decir, hay una única u tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"'] \arrow[d, "f_2"] & A_1 \arrow[d, "p_1"'] \arrow[ddr, bend left, "q_1"] & \\ A_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[drr, bend right, "q_2"'] & P \arrow[dr, dashed, "u"] & \\ & & Q. \end{tikzcd}$$

Dualmente a como se hizo con el cuadrado cartesiano, se pueba que si el cuadrado cocartesiano existe, éste es único salvo isomorfismos. La versión dual de 1.2.12 es la siguiente.

Proposición 1.2.14 *Si una categoría $\mathscr{C}$ tiene coproductos y coigualadores, entonces tiene cuadrados cocartesianos.*

Ya hemos visto que las nociones de producto, igualador y cuadrado cartesiano no son independientes; la relación precisa entre ellas es ésta, que es consecuencia de 1.2.12.

Proposición 1.2.15 *Una categoría tiene productos finitos e igualadores si y sólo si tiene cuadrados cartesianos y objeto terminal.*

Como ya habíamos mencionado antes, producto, objeto terminal, igualador y cuadrado cartesiano, son todos casos particulares de la noción general de límite, que vamos a considerar ahora. Primeramente, necesitamos unas definiciones preliminares.

Definición 1.2.16 *Sean $\mathscr{J}$ y $\mathscr{C}$ categorías. Un* ***diagrama*** *de tipo $\mathscr{J}$ en $\mathscr{C}$ es un funtor $D : \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{C}$.*

A $\mathscr{J}$ se le llama *categoría de índices del diagrama* y sus objetos se suelen denotar por i, j, etc, y los correspondientes objetos de la categoría $\mathscr{C}$ bajo el funtor se denotan por D_i, D_j, etc.

Definición 1.2.17 *Un* ***cono*** *para el diagrama D consta de un objeto $C \in \mathscr{C}$ y una familia $\{c_j : C \longrightarrow D_j\}$ de morfismos en $\mathscr{C}$, uno para cada objeto $j \in \mathscr{J}$, tales que para cada morfismo $\alpha : i \longrightarrow j$ en $\mathscr{J}$, $D_\alpha \circ c_i = c_j$, es decir, tal que el siguiente triángulo conmuta.*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "c_j"] \arrow[d, "c_i"'] & D_j \\ D_i. \arrow[ur, "D_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Denotamos el cono por (C, c_j).

Definición 1.2.18 *Un* ***morfismo de conos*** *$\eta : (C, c_j) \longrightarrow (C', c'_j)$ es un morfismo $\eta : C \longrightarrow C'$ en $\mathscr{C}$ tal que para toda $j \in \mathscr{J}$, $c'_j \circ \eta = c_j$, es decir, tal que hace que cada triángulo*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "c_j"'] & C' \arrow[d, "c'_j"] \\ & D_j \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Luego, tenemos una aparente categoría **Cono**(D) de conos de D.

Definición 1.2.19 *Un* ***límite*** *para un diagrama* $D : \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{C}$ *es un objeto terminal en* ***Cono***(D)*. Se dice que el límite es* ***finito*** *si es un límite para un diagrama en una categoría finita* $\mathscr{J}$ *de índices.*

A menudo se denota al límite como:

$$p_i : \lim D \longrightarrow D_i.$$

a los morfismos p_i se les llama *morfismos estructura*. Por ser un objeto terminal en **Cono**(D), tenemos que el límite de un diagrama D tiene la siguiente propiedad universal: Dado cualquier cono (C, c_i) en D, existe un único morfismo $u : C \longrightarrow \lim D$ tal que para todo i, $p_i \circ u = c_i$.

Definición 1.2.20 *Decimos que una categoría* $\mathscr{C}$ *es* ***completa*** *si para todo diagrama pequeño* $D : \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{C}$*, el límite de* D *existe en* $\mathscr{C}$*.*

Proposición 1.2.21 *Una categoría* $\mathscr{C}$ *es completa si y sólo si tiene productos e igualadores (resp. cuadrados cartesianos y objeto terminal).*

Demostración. Lo que probaremos es que cualquier límite puede ser construido a partir de productos e igualadores. Entonces consideremos el siguiente diagrama:

$$D : \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{C}.$$

Consideremos los productos

$$\prod_{i \,\in\, \mathrm{ob}\, \mathscr{J}} D_i \qquad \text{y} \qquad \prod_{(\alpha : i \longrightarrow j) \in \mathscr{J}} D_j.$$

Definimos dos morfismos

$$\prod_i D_i \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightrightarrows}} \prod_{(\alpha : i \longrightarrow j)} D_j \ .$$

Ahora consideremos las composiciones con las proyecciones π_α del segundo producto, entonces:

$$\pi_\alpha \circ \phi = \phi_\alpha = \pi_{\mathrm{cod}(\alpha)} \qquad \text{y} \qquad \pi_\alpha \circ \psi = \psi_\alpha = D_\alpha \circ \pi_{\mathrm{dom}(\alpha)}$$

donde $\pi_{\mathrm{cod}(\alpha)}$ y $\pi_{\mathrm{dom}(\alpha)}$ son las proyecciones del primer producto. Consideremos el igualador

$$E \xrightarrow{e} \prod_i D_i \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightrightarrows}} \prod_{(\alpha:i\longrightarrow j)} D_j .$$

Lo que probaremos es que (E, e_i) es un límite para D, donde $e_i = \pi_i \circ e$. Tomemos cualquier morfismo $c : C \longrightarrow \prod_i D_i$, y escribimos $c = \langle c_i \rangle$ para $c_i = \pi_i \circ c$. Observemos que la familia $(c_i : C \longrightarrow D_i)$ es un cono para D si y sólo si $\phi \circ c = \psi \circ c$. En efecto, $\phi \circ \langle c_i \rangle = \psi \circ \langle c_i \rangle$ si y sólo para toda α, $\pi_\alpha \circ \phi \circ \langle c_i \rangle = \pi_\alpha \circ \psi \circ \langle c_i \rangle$. Pero,

$$\pi_\alpha \circ \phi \circ \langle c_i \rangle = \phi_\alpha \circ \langle c_i \rangle = \pi_{\mathrm{cod}(\alpha)} \circ \langle c_i \rangle = c_j$$

y

$$\pi_\alpha \circ \psi \circ \langle c_i \rangle = \psi_\alpha \circ \langle c_i \rangle = D_\alpha \circ \pi_{\mathrm{dom}(\alpha)} \circ \langle c_i \rangle = D_\alpha \circ c_i.$$

De esta manera $\phi \circ c = \psi \circ c$ si y sólo si para toda $\alpha : i \longrightarrow j$ tenemos $c_j = D_\alpha \circ c_i$, luego $(c_i : C \longrightarrow D_i)$ es un cono, como habíamos afirmado. De esta manera se sigue que (E, e_i) es un cono, y que cualquier cono $(c_i : C \longrightarrow D_i)$ nos da un morfismo $\langle c_i \rangle : C \longrightarrow \prod_i D_i$ con $\phi \circ \langle c_i \rangle = \psi \circ \langle c_i \rangle$, luego existe una única factorización $u : C \longrightarrow E$ de $\langle c_i \rangle$ a través de E, el cual es claramente un morfismo de conos. Esto prueba que (E, e_i) es un objeto terminal en la categoría de conos de D, de esta manera (E, e_i) es un límite para D. □

A continuación presentamos una aplicación de límites por productos e igualadores.

Definición 1.2.22 *Un funtor $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ se dice que* ***conserva límites*** *de tipo $\mathscr{J}$ si, siempre que el cono $p_j : L \longrightarrow D_j$ sea un límite para un diagrama $D : \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{C}$; entonces el cono $Fp_j : FL \longrightarrow FD_j$, es un límite para el diagrama $FD : \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{D}$. En otras palabras*

$$F(\lim\, D_j) \cong \lim\, F(D_j).$$

Definición 1.2.23 *Un* ***cocono*** *para el diagrama D consiste en un objeto C (vértice) y morfismos $c_j : D_j \longrightarrow C$ para cada $j \in \mathscr{J}$, tal que para todo $\alpha : i \longrightarrow j$ en $\mathscr{J}$, $c_j \circ D(\alpha) = c_i$.*

Un morfismo de coconos $f : (C, c_j) \longrightarrow (C', c'_j)$ es un morfismo $f : C \longrightarrow C'$ en $\mathscr{C}$ tal que $f \circ c_j = c'_j$ para todo $j \in \mathscr{J}$. De esta manera, obtenemos una categoría **Cocono**(D) de coconos de D.

Definición 1.2.24 *Un **colímite** para un diagrama $D : \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{C}$ es, un objeto inicial en **Cocono**(D) la categoría de coconos.*

Denotamos al colímite por:

$$q_j : D_j \longrightarrow \text{colim } D.$$

Por ser un objeto inicial en **Cocono**(D), tenemos que el colímite de un diagrama D tiene la siguiente propiedad universal: Dado cualquier cocono (C, c_j) en D, existe un único morfismo $u : \text{colim } D \longrightarrow C$ tal que para todo j, $u \circ q_j = c_j$.

Una categoría $\mathscr{C}$ es llamada *cocompleta*, si para todo diagrama pequeño $D : \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{C}$, el colímite de D, colim D esta en $\mathscr{C}$.

Observación 1.2.25 *Sea $\mathscr{A}$ una subcategoría plena y pequeña de una categoría $\mathscr{C}$. Para cada objeto $C \in \mathscr{C}$ el **diagrama canónico** de $\mathscr{C}$, es el diagrama de todos los morfismos $A \longrightarrow C$, donde $A \in \text{ob } \mathscr{A}$; más aún, el diagrama canónico es un funtor natural que olvida $D_C : \mathscr{A} \downarrow_C \longrightarrow \mathscr{C}$. El diagrama canónico $D_C : \mathscr{A} \downarrow_C \longrightarrow \mathscr{C}$ tiene un **colímite canónico**, el cual es el cocono $\{\alpha_i : A_i \longrightarrow C\}$, a este colímite se suele llamr el colímite de $\mathscr{A}$-objetos junto con las morfismos estructura $\alpha_i : D_C(A_i \longrightarrow C) = A_i \longrightarrow C$ del colímite.*

1.3. Transformaciones naturales

Una transformación natural es un morfismo de funtores. Lo que motiva esta definición es, ver cuando dos funtores son adjuntos, es decir, cuando existe un $isomorfismo\ funtorial$ entre los conjuntos $\mathscr{D}(F(C), D)$ y $\mathscr{C}(C, G(D))$, donde F es un funtor de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$ y G un funtor de $\mathscr{D}$ a $\mathscr{C}$.

Definición 1.3.1 *Para las categorías $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ y los funtores*

$$F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D},$$

*una **transformación natural** $\eta : F \longrightarrow G$ es una familia de morfismos en $\mathscr{D}$ $(\eta_C : FC \longrightarrow GC)$ con índices en objetos de $\mathscr{C}$, tal que, para cualquier morfismo $f : C \longrightarrow C'$ en $\mathscr{C}$, $\eta_{C'} \circ F(f) = G(f) \circ \eta_C$, es decir, tal que el* *siguiente cuadrado conmuta:*

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "f"'] & FC \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & GC \arrow[d, "G(f)"] \\
C' & FC' \arrow[r, "\eta_{C'}"'] & GC'.
\end{tikzcd}
$$

En dicha transformación natural $\eta : F \longrightarrow G$, el morfismo en $\mathscr{D}$ $\eta_C : FC \longrightarrow GC$ es llamado la *componente* de η en C.

1.4. Funtores adjuntos

Presentaremos ahora un concepto básico en la teoría de categorías debido a Kan.

Definición 1.4.1 *Una **adjunción** entre las categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ consta de dos funtores $\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$ y una transformación natural:*

$$\eta : 1_{\mathscr{C}} \longrightarrow G \circ F$$

con la propiedad siguiente:
$(*)$ Para cualesquiera objetos $C \in \mathscr{C}, D \in \mathscr{D}$ y $f : C \longrightarrow G(D)$, existe una única $g : F(C) \longrightarrow D$ tal que:

$$f = U(g) \circ \eta_C;$$

es decir, tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
G(F(C)) \arrow[r, "G(g)"] & G(D) \\
C \arrow[u, "\eta_C"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

*F es llamado el **adjunto izquierdo**, G el **adjunto derecho** y η es llamada la **unidad** de la adjunción. El enunciado $(*)$ es la propiedad universal de la unidad η.*

Proposición 1.4.2 *Dadas categorías y funtores, $\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *F es adjunto izquierdo de G.*

(b) *Para cualquier $C \in \mathscr{C}$ y $D \in \mathscr{D}$ existe un isomorfismo,*

$$\phi : \mathscr{D}(F(C), D) \cong \mathscr{C}(C, G(D))$$

que es natural tanto en C como en D.

(c) *Existe una transformación natural:*

$$\epsilon : F \circ G \longrightarrow 1_{\mathscr{D}}$$

con la siguiente propiedad universal:
($*$) Para cualesquiera objetos $C \in \mathscr{C}, D \in \mathscr{D}$ y $g : F(C) \longrightarrow D$, existe una única $f : C \longrightarrow G(D)$ tal que:

$$g = \epsilon_D \circ F(f).$$

Proposición 1.4.3 *Funtores adjuntos derechos conservan límites, y adjuntos izquierdos colímites.*

Demostración. Supongamos que tenemos la siguiente adjunción

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$$

donde F es el adjunto izquierdo y G el adjunto derecho y supongamos que dado un diagrama $E : \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{D}$ lim D_j existe en $\mathscr{D}$. Entonces para cualquier $C \in \text{ob}\, \mathscr{C}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathscr{C}(C, G(\lim D_j)) &\cong \mathscr{D}(F(C), \lim D_j) \\ &\cong \lim \mathscr{D}(F(C), D_j) \\ &\cong \lim \mathscr{C}(C, G(D_j)) \\ &\cong \mathscr{C}(C, \lim G(D_j)) \end{aligned}$$

luego por Yoneda, tenemos el isomorfismo requerido

$$G(\lim D_j) \cong \lim G(D_j).$$

Y así por dualidad tenemos que adjuntos izquierdos conservan colímites. □

Capítulo 2

La construcción de $k_{\mathscr{S}}$-Espacios

En este capítulo haremos una construcción de nuevos espacios topológicos a partir de la categoría $\mathscr{T}op$, es conveniente ajustar adecuadamente la topología de los objetos de $\mathscr{T}op$, con el fin de obtener espacios con propiedades mejores. Lo que haremos es estudiar una clase muy importante de espacios, cuya topología está determinada por la topología final del espacio dado. Veremos que esta construcción no altera demasiado la topología. Seguiremos principalmente el trabajo de R. M. Vogt [10], y algunas referencias de [7].

2.1. Propiedades de $k_{\mathscr{S}}(X)$

Sea $\mathscr{S}$ una subcategoría plena de $\mathscr{T}op$ no vacía. Dado cualquier espacio topológico X, construyamos la categoría coma de $\mathscr{S}$ sobre X, $\mathscr{S}\downarrow_X$ cuyos objetos son todas las aplicaciones $f : B_f \longrightarrow X$ en $\mathscr{T}op$, donde $B_f \in \text{ob } \mathscr{S}$, y cuyos morfismos de $f : B_f \longrightarrow X$ a $g : B_g \longrightarrow X$ son todas las aplicaciones $h : B_f \longrightarrow B_g$ en $\mathscr{S}$ tales que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} B_f \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & B_g \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

conmuta. Los espacios $B_f's$ y las aplicaciones $h : B_f \longrightarrow B_g$ forman un diagrama asociado a X, es decir, el funtor que olvida $D_X : \mathscr{S}\downarrow_X \longrightarrow \mathscr{T}op$, generalmente conocido como el diagrama canónico de X. El cual a un objeto $f : B_f \longrightarrow X \in \mathscr{S}\downarrow_X$, le asocia el espacio B_f y a una aplicación continua $h : B_f \longrightarrow B_g$, a la misma aplicación $h \in \mathscr{T}op$. El funtor $D_X : \mathscr{S}\downarrow_X \longrightarrow \mathscr{T}op$ no es precisamente pequeño, puesto que la categoría $\mathscr{S}\downarrow_X$ puede ser grande.

Para el objeto $X \in \mathscr{Top}$, definamos el espacio $k_{\mathscr{S}}(X)$ que tiene como conjunto subyacente a X con la topología dada como sigue: $U \subset X$ es abierto si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto, para todo $f : B \longrightarrow X$, con $B \in \mathrm{ob}\ \mathscr{S}$. Entonces $k_{\mathscr{S}}(X)$ tiene la topología más fina que hace continua a todas las aplicaciones $f : B_f \longrightarrow X$. Dado un espacio topológico X, a $k_{\mathscr{S}}(X)$ lo llamaremos la $k_{\mathscr{S}}$-ificación de X y a un espacio topológico Y que cumpla con tal propiedad lo llamaremos $k_{\mathscr{S}}$-espacio. Es inmediato de esta definición que si $B \in \mathrm{ob}\ \mathscr{S}$ entonces $k_{\mathscr{S}}(B) = B$, es decir, todo objeto de $\mathscr{S}$ es un $k_{\mathscr{S}}$-espacio.

La siguiente propiedad universal caracteriza la construcción de $k_{\mathscr{S}}(X)$.

Proposición 2.1.1 *Sea X un espacio topológico. La aplicación identidad $l : k_{\mathscr{S}}(X) \longrightarrow X$ tiene la siguiente propiedad universal que la caracteriza.*

$(*)$ *Sea $Y \in$ ob $\mathscr{S}$ y $f : Y \longrightarrow X$ continua, entonces existe una único levantamiento $\hat{f} : Y \longrightarrow k_{\mathscr{S}}(X)$ continua, tal que conmuta el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} k_{\mathscr{S}}(X) \arrow[r, "l"] & X \\ Y. \arrow[u, dashed, "\hat{f}"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

De hecho, esta única aplicación $\hat{f}$ es, a nivel de conjuntos, la misma función f.

Demostración. Veamos que $l : k(X)_{\mathscr{S}} \longrightarrow X$ satisface $(*)$. Para ver esto, consideremos a $\hat{f}$ igual a f como función; puesto que $Y \in \mathrm{ob}\ \mathscr{S}$, $k_{\mathscr{S}}(Y) = Y$, por lo que $\hat{f} = k_{\mathscr{S}}(f)$ es continua. Es claro que $\hat{f}$ es única y que el diagrama conmuta.

Por otro lado, si $\tilde{X}$ es un k-espacio y la aplicación $i : \tilde{X} \longrightarrow X$ satisface $(*)$, luego, para la identidad $l : k_{\mathscr{S}}(X) \longrightarrow X$ existe una única aplicación $\hat{l} : k_{\mathscr{S}}(X) \longrightarrow \tilde{X}$, tal que $i \circ \hat{l} = l$. De la misma manera, porque $l : k_{\mathscr{S}}(X) \longrightarrow X$ satisface $(*)$, existe una única aplicación $\hat{i} : \tilde{X} \longrightarrow k_{\mathscr{S}}(X)$, tal que $l \circ \hat{i} = i$. Aplicando dos veces la unicidad exigida por $(*)$, concluimos que $\hat{l} \circ \hat{i} = 1_{\tilde{X}}$ y que $\hat{i} \circ \hat{l} = 1_{k(X)}$, es decir, $\tilde{X}$ es homeomorfo a $k_{\mathscr{S}}(X)$. $\square$

Acontinuación tenemos la siguiente proposición que resume las propiedades generales de la construcción de $k_{\mathscr{S}}(X)$.

Proposición 2.1.2 (a) *La aplicación identidad* $l : k_{\mathscr{S}}(X) \longrightarrow X$ *es continua.*

(b) *Si* $B \in \mathrm{ob}\ \mathscr{S}$*, entonces existe una correspondencia uno a uno entre las aplicaciones* $B \longrightarrow X$ *y* $B \longrightarrow k_{\mathscr{S}}(X)$*. Es decir* $\mathscr{T}\!op(B_f, X) = \mathscr{T}\!op(B_f, k_{\mathscr{S}}(X))$*.*

(d) *Si las composiciones* $h \circ f : B_f \longrightarrow k_{\mathscr{S}}(X) \longrightarrow Y$ *son continuas para todas las aplicaciones* $f : B_f \longrightarrow k_{\mathscr{S}}(X)$ *con* $B_f \in \mathrm{ob}\ \mathscr{S}$*, entonces* h *es continua.*

Demostración.

(a) Es obvia, pues cada abierto en X lo es en $k_{\mathscr{S}}(X)$, pues si $U \subseteq X$ es abierto, entonces $f^{-1}(U) \subseteq B_f$ es abierto para toda aplicación continua $f : B_f \longrightarrow X$.

(b) Se sigue inmediatamente de 2.1.1.

(d) Supongamos que $h \circ f$ es continua para toda $f \in \mathrm{ob}\ \mathscr{S}{\downarrow}_{k_{\mathscr{S}}(X)}$, y sea $U \subset Y$ abierto, entonces $f^{-1}(h^{-1}(U)) = (h \circ f)^{-1}(U)$ es abierto en B_f, luego $h^{-1}(U)$ es abierto en $k_{\mathscr{S}}(X)$, y de esta manera $h : k_{\mathscr{S}}(X) \longrightarrow Y$ es continua. □

El siguiente lema prueba que $k_{\mathscr{S}}(X)$ es el colimite para el diagrama $D_X : \mathscr{S}{\downarrow}_X \longrightarrow \mathscr{T}\!op$.

Lema 2.1.3 *Para cualquier espacio topológico* X*, existe una elección canónica del colímite del diagrama* $D_X : \mathscr{S}{\downarrow}_X \longrightarrow \mathscr{T}\!op$*, el cual resulta ser* $k_{\mathscr{S}}(X)$*.*

Demostración. Sea $k_{\mathscr{S}}(X)$ como fue definido anteriormente. Entonces la función identidad $1 : k_{\mathscr{S}}(X) \longrightarrow X$ es continua, y cada $f \in \mathrm{ob}\ \mathscr{S}{\downarrow}_X$ factoriza continuamente por 2.1.2 (b), como:

$$\begin{tikzcd}
& B_f \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "f"] & \\
k_{\mathscr{S}}(X) \arrow[rr, "1"] & & X
\end{tikzcd}$$

en $\mathscr{T}\!op$, lo cual hace a $\{f : B_f \longrightarrow k_{\mathscr{S}}(X)\}$ un cocono para el diagrama $D_X : \mathscr{S}{\downarrow}_X \longrightarrow \mathscr{T}\!op$ ahora consideremos otro cocono (Z, h_f) para el diagrama, es decir dadas aplicaciones $h_f : B_f \longrightarrow Z$, una para cada objeto B_f en $\mathscr{T}op$, $h_g \circ q = h_f$ para cualquier aplicación $q : B_f \longrightarrow B_g$ en $\mathscr{T}op$. Lo que probaremos es que, existe una única aplicación $h : k_{\mathscr{S}}(X) \longrightarrow Z$ tal que $h \circ f' = h_f$. Definiremos a h de la siguiente manera: para cada $y \in k_{\mathscr{S}}(X)$, existe $x \in B_f$ tal que $f'(x) = y$, en efecto, puesto que $k_{\mathscr{S}}(X)$ tiene la topología final con respecto a todos los espacios B_f, de esta manera $f' : B_f \longrightarrow k_{\mathscr{S}}(X)$ es suprayectiva, para toda $f' \in$ ob $\mathscr{S}\downarrow_{k_{\mathscr{S}}(X)}$. Hagamos forzadamente $h(y) = h_f(x)$, de esta manera h esta bien definida.

$$\begin{tikzcd}
 & B_f \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "q"] \arrow[dr, "f'"] \arrow[drr, bend left, "h_f"] & & \\
X & & k_{\mathscr{S}}(X) \arrow[r, dashed, "h"] & Z \\
 & B_g \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "g'"] \arrow[urr, bend right, "h_g"'] & &
\end{tikzcd}$$

Para ver que h esta definida de forma única, supongamos ahora que existe $z \in B_g$, para algún B_g, tal que $g'(z) = y$. Luego podemos encontrar un B_r y aplicaciones $u : B_r \longrightarrow B_f$ y $v : B_r \longrightarrow B_g$ en $\mathscr{T}op$ tal que $u(B_r) = x$ y $v(B_r) = z$. De aquí:

$$h_f(x) = h_f \circ u(B_r) = h_r(B_r) = h_g \circ v(B_r) = h_g(z),$$

luego h esta definida de forma única. La continuidad de h se sigue del hecho de que si $U \subseteq Z$ es abierto. Luego:

$$f'^{-1}(h^{-1}(U)) = h_f^{-1}(U)$$

es abierto para toda f. Por lo tanto $h^{-1}(U)$ es abierto en $k_{\mathscr{S}}(X)$. Así resulta que el espacio $k_{\mathscr{S}}(X)$ es el colímite canónico para el funtor $D_X : \mathscr{S}\downarrow_X \longrightarrow \mathscr{T}op$. □

El lema anterior nos permite definir al $k_{\mathscr{S}}$**-espacio** $k_{\mathscr{S}}(X)$, de la siguiente manera:

Definición 2.1.4 *Para un objeto $X \in \mathscr{T}op$ y para el diagrama canónico $D_X : \mathscr{S}\downarrow_X \longrightarrow \mathscr{T}op$, definamos a $k_{\mathscr{S}} = \operatorname{colim} D_X$.*

Hay que recalcar hasta aquí que nuestro proposito principal es el caso en que $\mathscr{S}$ es la categoría de espacios compactos de Hausdorff. Denotemos por $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$ a la subcategoría plena de $\mathscr{T}\!op$ que consiste de todos los objetos $k_{\mathscr{S}}(X)$ o $k_{\mathscr{S}}$-espacios, tal que a cada $X \in$ ob $\mathscr{T}\!op$ le asociamos a $k_{\mathscr{S}}(X)$ y a una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$, la misma f, pero a nivel de $k_{\mathscr{S}}$-espacios. El propósito de este trabajo, descarta inmediatamente el caso $\mathscr{S} = \mathscr{T}\!op$. Puesto que la categoría resultante $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$ es exactamente la categoría $\mathscr{T}\!op$, que por lo mencionado en la introducción, no resulta ser muy interesante para nuestra finalidad. Otro ejemplo es, el caso en que $\mathscr{S}$ sea la categoría que consiste de un sólo punto, entonces $k_{\mathscr{S}}(X) = X$ con la topología discreta, es decir, si $\mathscr{K}_{\mathscr{S}} = \mathscr{W}$, entonces $k : \mathscr{T}\!op \longrightarrow \mathscr{W}$ aplica a cada espacio topológico X en el conjunto subyacente de X con la topología discreta. Luego la categoría $\mathscr{U}$ no es particularmente interesante.

Definición 2.1.5 *Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es una* ***equivalencia homotópica débil*** *si:*

$$f_* : \pi_n(X, x) \longrightarrow \pi_n(Y, f(x))$$

es un isomorfismo para toda $n \geq 0$ y para toda $x \in X$. Es decir, f induce isomorfismos en grupos de homotopía.

Una propiedad interesante, para cuando $\mathscr{S}$ es la categoría de espacios compactos de Hausdorff o la categoría de localmente compactos, posiblemente las dos categorías más interesantes para $\mathscr{S}$, es que la aplicación $l : k_{\mathscr{S}}(X) \longrightarrow X$ es una equivalencia homotópica débil.

Proposición 2.1.6 *Si las esferas estándar $\mathbb{S}^n$ están en $\mathscr{S}$, para $n \geq 0$, entonces la aplicación identidad $l : k_{\mathscr{S}}(X) \longrightarrow X$ es una equivalencia homotópica débil. Además si los n-simplejos estandar topológicos Δ^n están en $\mathscr{S}$, entonces la misma aplicación identidad induce isomorfismos en homología singular.*

Demostración. Por 2.1.2 (c), tenemos que para todo objeto $B \in \mathscr{S}$, $\mathscr{T}\!op(B, X) = \mathscr{T}\!op(B, k_{\mathscr{S}}(X))$, ahora si las esferas $\mathbb{S}^n$ están en $\mathscr{S}$, entonces $\mathscr{T}\!op(\mathbb{S}^n, X) = \mathscr{T}\!op(\mathbb{S}^n, k_{\mathscr{S}}(X))$, de esta manera tenemos que:

$$\pi_n(k_{\mathscr{S}}(X), x) = [\mathbb{S}^n, k_{\mathscr{S}}(X)] = [\mathbb{S}^n, X] = \pi_n(X, l(x))$$

luego $l : k_{\mathscr{S}}(X) \longrightarrow X$ induce isomorfismos en grupos de homotopía. Por lo tanto $l : k_{\mathscr{S}}(X) \longrightarrow X$ es una equivalencia homotópica débil.

De nuevo tenemos que $\mathscr{T}op(\Delta^n, X) = \mathscr{T}op(\Delta^n, k_{\mathscr{S}}(X))$, si los n-simplejos estándar Δ^n están en $\mathscr{S}$, pero esto quiere decir, que $k_{\mathscr{S}}(X)$ y X tienen los mismos n-simplejos singulares, y luego sus módulos de homología singular coinciden. □

Lema 2.1.7 *Para cualquier aplicación $h : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{T}op$, la aplicación $k_{\mathscr{S}}(h) := h : k_{\mathscr{S}}(X) \longrightarrow k_{\mathscr{S}}(Y)$ es continua.*

Demostración. Puesto que la aplicación $h \circ f : B_f \longrightarrow k_{\mathscr{S}}(X) \longrightarrow Y$ es continua, luego por la proposición 2.1.2 (c), $k_{\mathscr{S}}(h) \circ f'$ es continua, así por 2.1.2 (d), tenemos que la aplicación $k_{\mathscr{S}}(h) := h : k_{\mathscr{S}}(X) \longrightarrow k_{\mathscr{S}}(Y)$ es continua, el siguiente diagrama ilustra la demostración:

$$\begin{tikzcd}
B_f \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & X \arrow[r, "h"] & Y \\
 & k_{\mathscr{S}}(X) \arrow[u, "l_X"] \arrow[r, "k_{\mathscr{S}}(h)"] & k_{\mathscr{S}}(Y) \arrow[u, "l_Y"']
\end{tikzcd}$$

y el lema queda probado. □

Del lema anterior se sigue que $k_{\mathscr{S}}$-ificar es una construccion *funtorial*, es decir, esta construcción define un funtor idempotente $k_{\mathscr{S}} : \mathscr{T}op \longrightarrow \mathscr{K}_{\mathscr{S}}$, donde $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$ es la subcategoría plena de $\mathscr{T}op$ que consiste de todos los objetos $k_{\mathscr{S}}(X)$ o $k_{\mathscr{S}}$-espacios, tal que a cada $X \in$ ob $\mathscr{T}op$ le asociamos a $k_{\mathscr{S}}(X)$ y a una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$, la misma f, pero a nivel de $k_{\mathscr{S}}$-espacios.

2.2. La categoría $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$

De manera similar a como se hizo con el colímite en $\mathscr{T}op$, si tenemos un diagrama pequeño $F : \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{T}op$, un límite de F es obtenido por pasar el límite a $\mathscr{S}et$, y dandole la topología como un subespacio del producto topológico $\prod F_i$. Puesto que $\mathscr{T}op$ es completa (tiene todos sus límites pequeños), bastaría ver entonces como son los límites en $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$. Para ver esto, probaremos que el funtor $k_{\mathscr{S}}$-ificación es adjunto derecho del funtor inclusión $i : \mathscr{K}_{\mathscr{S}} \longrightarrow \mathscr{T}op$.

Teorema 2.2.1 *El funtor inclusión $i : \mathscr{K}_{\mathscr{S}} \longrightarrow \mathscr{T}\!op$ es adjunto izquierdo del funtor $k_{\mathscr{S}} : \mathscr{T}\!op \longrightarrow \mathscr{K}_{\mathscr{S}}$. Es decir, tenemos la igualdad:*

$$\mathscr{K}_{\mathscr{S}}(X, k_{\mathscr{S}}(Y)) = \mathscr{T}\!op(i(X), Y),$$

donde $X \in$ ob $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$, $Y \in$ ob $\mathscr{T}\!op$.

Demostración. Sean $X \in$ ob $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$ y $Y \in$ ob $\mathscr{T}\!op$, entonces por la proposición 2.1.2 (b) tenemos que, existe una biyección entre las aplicaciones continuas de $i(X)$ a Y y las de X a $k_{\mathscr{S}}(Y)$. Entonces lo que afirmamos es que la transformación natural $l : k_{\mathscr{S}}(Y) \longrightarrow Y$ es la counidad de adjunción. Lo que tenemos que probar ahora es que l tiene la propiedad universal de la proposición 1.4.2, consideremos entonces una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{T}\!op$, por 2.1.1 existe una única aplicación $\hat{f} : X \longrightarrow k_{\mathscr{S}}(Y) \in$ ob $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$ tal que $f = l \circ i(\hat{f})$, es decir, el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} k_{\mathscr{S}}(Y) & & i(k_{\mathscr{S}}(Y)) \arrow[r, "l"] & Y \\ X \arrow[u, dashed, "\hat{f}"] & & i(X) \arrow[u, "i(\hat{f})"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto y de acuerdo a 1.4.2 $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}(X, k_{\mathscr{S}}(Y)) \cong \mathscr{T}\!op(i(X), Y)$, de esta manera i es adjunto izquierdo de $k_{\mathscr{S}}$. $\square$

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, tenemos lo siguiente:

Corolario 2.2.2 *El funtor $k_{\mathscr{S}} : \mathscr{T}\!op \longrightarrow \mathscr{K}_{\mathscr{S}}$ conserva límites y el funtor $i : \mathscr{K}_{\mathscr{S}} \longrightarrow \mathscr{T}\!op$ conserva colímites. Además el funtor que olvida $F : \mathscr{K}_{\mathscr{S}} \longrightarrow \mathscr{S}\!et$ conserva límites y colímites.*

Como una observación de este capítulo tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.3 *Dadas subcategorías plenas $\mathscr{S}_1$ y $\mathscr{S}_2$ de $\mathscr{T}\!op$ con categorías resultantes $\mathscr{K}_1$ y $\mathscr{K}_2$ respectivamente y funtores $k_i : \mathscr{T}\!op \longrightarrow \mathscr{K}_i$, $i = 1, 2$.*

(a) *Si $\mathscr{S}_1 \subseteq \mathscr{S}_2$, entonces $\mathscr{K}_1 \subseteq \mathscr{K}_2$.*

(b) *Si $\mathscr{S}_1 \subseteq \mathscr{S}_2 \subseteq \mathscr{K}_1$, entonces $\mathscr{K}_1 = \mathscr{K}_2$ y $k_1 = k_2$.*

Demostración.

(a) Lo que tenemos que probar es que todo k_1-espacio es un k_2-espacio. Sea entonces X un k_1-espacio, es decir, $X \in$ ob $\mathscr{K}_1$, y sea $U \subseteq X$ tal que $f^{-1}(U)$ es abierto para toda aplicación $f : B \longrightarrow X$ con $B \in$ ob $\mathscr{S}_2$. Puesto que $B \in$ ob $\mathscr{S}_2$, luego se cumple en particular para todo $B \in$ ob $\mathscr{S}_1$, de aquí $U \subseteq X \in$ ob $\mathscr{K}_1$ es abierto. Así $X \in$ ob $\mathscr{K}_2$. Por lo tanto, X es k_2-espacio.

(b) Sea X un espacio topológico. Entonces $k_i(X)$ tiene la topología más fina tal que $f : B \longrightarrow X$ factoriza a través de $k_i(X)$ si $B \in$ ob $\mathscr{S}$, $i = 1, 2$, como $\mathscr{S}_1 \subseteq \mathscr{S}_2$, luego la topología de $k_1(X)$ es más fina que la de $k_2(X)$. Si consideramos ahora una aplicación $f : B \longrightarrow X$, con $B \in$ ob $\mathscr{S}_2$, de la proposición 2.1.2(c) obtenemos que $f : B \longrightarrow k(X)$ es continua. Por lo tanto la topología de $k_2(X)$ es mas fina que $k_1(X)$. Así resulta que $k_1 = k_2$ y $\mathscr{K}_1 = \mathscr{K}_2$. $\square$

Similar a 2.2.1, uno ve que el funtor inclusión $i : \mathscr{K}_1 \longrightarrow \mathscr{K}_2$ es un adjunto izquierdo del funtor $k_1 : \mathscr{K}_2 \longrightarrow \mathscr{K}_1$.

Observación 2.2.4 *La construcción del funtor $k_{\mathscr{S}}$ de $\mathscr{S}$, se da como extensión de Kan del funtor inclusión $\xi : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{T}op$, y se hace de la siguiente manera: Dado $\xi : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{T}op$ un funtor, con $\mathscr{S}$ una subcategoría plena de $\mathscr{T}op$ y $\mu : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{K}_{\mathscr{S}}$ en la que la composición $\xi\downarrow_X \longrightarrow \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{K}_{\mathscr{S}}$ tiene un colímite en $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$, entonces existe un funtor $k : \mathscr{T}op \longrightarrow \mathscr{K}_{\mathscr{S}}$, con $k_{\mathscr{S}}\xi = \mu$ (es decir $k_{\mathscr{S}}$ extiende a μ) tal que la transformación natural identidad $1 : k_{\mathscr{S}}\xi \longrightarrow \mu$ hace a $k_{\mathscr{S}}$ una extensión de Kan de μ a través de la inclusión $\xi : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{T}op$.*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{S}\downarrow_X \arrow[r] & \mathscr{S} \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "\mu"'] & \mathscr{T}op \arrow[d, dashed, "k_{\mathscr{S}}"] \\ & & \mathscr{K}_{\mathscr{S}}. \end{tikzcd}$$

La categoría $\mathscr{T}op$ es completa y cocompleta. Ya hemos mencionado como se obtienen los colímites en esta categoría, y los límites son obtenidos con la topología inicial.

Teorema 2.2.5 *Sea $D : \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{K}_{\mathscr{S}}$ un diagrama, con $\mathscr{J}$ posiblemente grande.*

(a) *Si* colim D *existe en $\mathscr{T}op$, entonces existe en $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$. Es decir, C es un colímite en $\mathscr{T}op$ si y sólo si C es un colímite en $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$.*

(b) *Si* lim *D existe en* $\mathscr{T}op$*, entonces existe en* $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$*. Es decir* $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$ *tiene a todos sus límites, los cuales se obtienen de aplicar el funtor* $k_{\mathscr{S}}$ *al límite correspondiente en* $\mathscr{T}op$*.*

Demostración.

(a) Sea D un diagrama en $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$, y sea colim $D = C \in \mathscr{T}op$. Pero $k_{\mathscr{S}}(K_j) = K_j$ puesto que K_i es un $k_{\mathscr{S}}$-espacio. Sea entonces $\{c_j : K_j \longrightarrow C \mid K_j \in \text{ob } \mathscr{K}_{\mathscr{S}}\}$ el cocono de D con vértice C. Como $k(K_i) = K_i$, la aplicación $c_i : K_i \longrightarrow k(C)$ es continua y $c_j \circ d_\alpha = c_i$, para todo $d_\alpha : K_i \longrightarrow K_j$, de esta manera $(k_{\mathscr{S}}(C), c_i)$ es otro cocono para D, por la propiedad universal de C, existe una única aplicación continua $1 : C \longrightarrow k_{\mathscr{S}}(C)$ tal que el diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
D_j \arrow[rr, "c_j"] \arrow[dr, "c_j"'] & & C \arrow[dl, dashed, "1"] \\
& k_{\mathscr{S}}(C) &
\end{tikzcd}$$

además $1 : k_{\mathscr{S}}(C) \longrightarrow C$ es continua, de esta manera resulta que $k_{\mathscr{S}}(C) = C$. Por lo tanto $C \in \text{ob } \mathscr{K}_{\mathscr{S}}$.

(b) Ahora consideremos que lim $D = L \in \mathscr{T}op$, pero el funtor $k_{\mathscr{S}}$ conserva límites, luego $k_{\mathscr{S}}(L) = k_{\mathscr{S}}(\text{lim } K_j) = \text{lím}\, k_{\mathscr{S}}(K_j) = \text{lim } D = L$, es decir $k_{\mathscr{S}}(L) = L$ y, por ende $L \in \text{ob } \mathscr{K}_{\mathscr{S}}$. □

El teorema anterior prueba que la categoría de $k_{\mathscr{S}}$-espacios es completa y cocompleta.

Una de las preguntas más naturales que nos podemos hacer hasta el momento es, si cualquier espacio de identificación de un $k_{\mathscr{S}}$-espacio vuelve a serlo. En $\mathscr{CG}$ una condición necesaria para que lo sea es que el espacio de identificación sea de Hausdorff, condición que no se siempre se cumple. En $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$ tenemos lo siguiente, sin pedir hipótesis adicionales sobre el espacio de identificación.

Teorema 2.2.6 *En* $\mathscr{T}op$*,* $f : X \longrightarrow Z$ *es una identificación si y sólo si es un coigualador de una pareja de aplicaciones.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Z$ una identificación en $\mathscr{T}op$, entonces f coincide con la función natural $\pi : X \longrightarrow X/\pi_f$, donde $\pi_f \subseteq X \times X$ consiste precisamente de aquellas parejas de puntos (x, y) tal que $f(x) = f(y)$. Consideremos ahora las proyecciones en la primera y segunda entrada

$$p_1 : X \times X \longrightarrow X \quad \text{y} \quad p_2 : X \times X \longrightarrow X$$

y tomemos la inclusión $i : \pi_f \hookrightarrow X \times X$, entonces tenemos las siguientes aplicaciones:

$$r_1 = p_1|_{\pi_f} : \pi_f \longrightarrow X \quad \text{y} \quad r_2 = p_2|_{\pi_f} : \pi_f \longrightarrow X.$$

Entonces $\pi : X \longrightarrow X/\pi_f$ es un coigualador de r_1 y r_2. Puesto que si $f : X \longrightarrow Z$ es una identificación, f es compatible con $\pi : X \longrightarrow X/\pi_f$, y así existe una única aplicación $\hat{f} : X/\pi_f \longrightarrow Z$ tal que $\hat{f} \circ \pi = f$, así π es un coigualador.

Inversamente, supongamos que dada una pareja de aplicaciones $g, h : X \longrightarrow Y$, y R la relación de equivalencia en Y para la cual $g(x)$ y $h(x)$ son equivalentes con $x \in X$. Entonces la identificación $\omega : Y \longrightarrow Y/R$ es el coigualador de g y h. Es obvio que $\omega \circ g = \omega \circ h$, puesto que $g(x)$ y $h(x)$ son equivalentes para $x \in X$, es decir, $\omega(g(x)) = \omega(h(x))$ para cada $x \in X$. Ahora si dada una aplicación $f : Y \longrightarrow R^*$ tal que $f \circ g = f \circ h$, definamos una relación de equivalencia π_f por $(y, y') \in \pi_f$ si y soló si $f(y) = f(y')$ es asignado a f. Entonces $g(x)$ y $h(x)$ son equivalentes con respecto a π_f. Luego $R \subseteq \pi_f$. Así existen dos aplicaciones 1_Y^* y s tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "1_Y"] \arrow[d, "\omega"'] & Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\omega^*"] & R^* \\
Y/R \arrow[r, "1_Y^*"] & Y/\pi_f \arrow[ur, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta (ω^* es la aplicación natural). Entonces $f = f' \circ \omega$ donde $f' = s \circ 1_Y^*$. Así es una aplicación en $\mathscr{T}op$. Obviamente f' es única, puesto que si existe $f'' : Y/R \longrightarrow R^*$ tal que $f = f'' \circ \omega$, entonces $f' \circ \omega = f'' \circ \omega$, pero ω es un epimorfismo, luego $f' = f''$. Por lo tanto f' es única. Luego se sigue que $\omega : Y \longrightarrow Y/R$ es un coigualador. $\square$

Corolario 2.2.7 *Sea X un $k_{\mathscr{S}}$-espacio y sea $q : X \longrightarrow Z$ una identificación. Entonces Z es un $k_{\mathscr{S}}$-espacio.*

Demostración. Sabemos que $q : X \longrightarrow Z$ es un coigualador en $\mathscr{T}op$. Ya que todo coigualador es un colímite y los colímites de $\mathscr{T}op$ de diagramas en $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$ son colímites en $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$. Por lo tanto $Z \in \text{ob } \mathscr{K}_{\mathscr{S}}$. $\square$

2.3. Subespacios

En $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$ no podemos asegurar que cualquier subespacio con la topología relativa de un objeto X esté de nuevo en $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$. De hecho podemos encontrar ejemplos en [8], en los cuales un subconjunto cerrado $C \subseteq X \in \text{ob}\, \mathscr{C}\mathscr{G}$ es siempre compactamente generado y un subconjunto abierto $U \subseteq X$ está en $\mathscr{C}\mathscr{G}$ si éste es un subconjunto abierto *regular*, es decir, si para cada punto $x \in U$ tiene una vecindad en X cuya cerradura está en U.
Para el caso de la categoría de los $k_{\mathscr{S}}$-espacios debemos dar una retopologización de los subespacios, para la cual cualquier subespacio de un $k_{\mathscr{S}}$-espacio sea nuevamente un $k_{\mathscr{S}}$-espacio.

Definición 2.3.1 *Sea $X \in$ ob $\mathscr{T}\!op$ y sea $A \subseteq X$. Si $\mathcal{B}$ es la topología en X, entonces $\mathcal{B}' = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$ es la topología de A* ***relativa*** *a X. La topología $\mathcal{B}'$ es la más gruesa que hace continua a la inclusión denominada i. Denotemos por A_r al subconjunto A con la topología relativa y definamos a $A_{k_{\mathscr{S}}} = k_{\mathscr{S}}(A_r)$.*

Sea $Z \in$ ob $\mathscr{T}\!op$ y sea $A_r \subseteq X$. La topología inducida por X en A esta caracterizada por una propiedad universal: $f' : Z \longrightarrow A_r$ es continua si y sólo si $f = i \circ f' : Z \longrightarrow A_r \longrightarrow X$ es continua. A continuación probaremos que $A_{k_{\mathscr{S}}}$ tiene la misma propiedad universal para $k_{\mathscr{S}}$-espacios.

Proposición 2.3.2 *Sea X un $k_{\mathscr{S}}$-espacio y $A \subseteq X$. Una función $f' : Z \longrightarrow A_{k_{\mathscr{S}}}$, donde Z es un $k_{\mathscr{S}}$-espacio, es continua si y sólo si $f = i \circ f' : Z \longrightarrow A_{k_{\mathscr{S}}} \longrightarrow X$ es continua. En un diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A_{k_{\mathscr{S}}} \arrow[r, "i"] & X \\ Z. \arrow[u, dashed, "f'"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

$$f' \text{ es continua} \iff f \text{ es continua.}$$

Demostración. Supongamos que f' es continua, entonces claramente $f = i \circ f'$ es continua, puesto que la topología $\mathcal{B}'$ es la más gruesa que hace continua la inclusión i.

Inversamente supongamos que f es continua. Probaremos que las composiciones $f' \circ r : B \longrightarrow Z \longrightarrow A_{k_{\mathscr{S}}}$ son continuas para toda aplicación r :

$B \longrightarrow Z$, con $B \in$ ob $\mathscr{S}$, entonces por 2.1.2 (d) tendremos que f' es continua. Puesto que $Z \longrightarrow A_{k_{\mathscr{S}}} \longrightarrow A_r$ es continua, entonces por 2.1.2 (b) las composiciones $f' \circ r$ son continuas. Así resulta que f' es continua. $\square$

Ahora probaremos que bajo ciertas condiciones para la categoría base $\mathscr{S}$ y A, las topologías de A_r y $A_{k_{\mathscr{S}}}$ coinciden, introduciendo los siguientes axiomas:

Axioma I. Si A es un subconjunto abierto de un objeto en $\mathscr{S}$, entonces A_r es un $k_{\mathscr{S}}$-espacio.

Axioma II. Si A es un subconjunto cerrado de un objeto en $\mathscr{S}$, entonces A_r es un $k_{\mathscr{S}}$-espacio.

Proposición 2.3.3 *Si $\mathscr{S}$ satisface el axioma I (resp. II) y A es un subconjunto abierto (resp. cerrado) de un $k_{\mathscr{S}}$-espacio, entonces $A_r = A_{k_{\mathscr{S}}}$.*

Demostración. Sea A un subconjunto abierto de un $k_{\mathscr{S}}$-espacio X. Para cualquier aplicación $f : B_f \longrightarrow X$ ($f \in$ ob $\mathscr{S}\downarrow_X$) sea $A_f = f^{-1}(A)$, si cambiamos los vértices B_f y los morfismos $h : B_f \longrightarrow B_g$ en el diagrama $D(X) : \mathscr{S}\downarrow_X \longrightarrow \mathscr{T}\!op$ por $A_f \subseteq B_f$ y $h|_{A_f} : A_f \longrightarrow A_g$, obtenemos un nuevo diagrama D, el cual por hipótesis esta en $\mathscr{K}_{\mathscr{S}}$, es decir, $D : \mathscr{S}\downarrow_X \longrightarrow \mathscr{K}_{\mathscr{S}}$, tal que $D(f|_{A_f} : A_f \longrightarrow X) = A_f$. Ahora sea $U \subseteq A_r$ tal que $f|_{A_f}^{-1}(U)$ es abierto para toda aplicación $f|_{A_f}$. Entonces $f^{-1}(U)$ es abierto en B_f, y como X es $k_{\mathscr{S}}$-espacio, luego U es abierto en X y de esta manera $U \subseteq A$ es abierto. Por lo tanto A con la topología inducida por X es un $k_{\mathscr{S}}$-espacio. Luego $A_r = k_{\mathscr{S}}(A_r) = A_{k_{\mathscr{S}}}$. $\square$

El caso en el que A es cerrado, se sigue de manera similar.

Observación 2.3.4 *Si $\mathscr{S}$ es la categoría de espacios localmente compactos, sean $\mathscr{K}_{LC}$ la categoría resultante y $\mathscr{K}$ la categoría resultante para los espacios compactos de Hausdorff, entonces $\mathscr{K}_{LC} \subset \mathscr{K}$. Lo que no se sabe es que si esta inclusión es propia ó no.*

Capítulo 3
La categoría de k-espacios

En este capítulo describiremos la categoría de espacios topológicos en el cual los topólogos algebraicos acostumbran trabajar. Esta categoría cumple perfectamente con las propiedades antes probadas, de hecho es la categoría que buscamos. Esta categoría ha gozado de una popularidad muy importante en los últimos años, frecuentemente utilizada por J. P. May y toda su escuela. Además, en años recientes se le ha encontrado utilidad en la geometría algebraica, en cuestiones de teoría de homotopía motívica de esquemas.

3.1. k-Espacios

Definición 3.1.1 *Un **k-espacio** X es un espacio topológico tal que para cualquier aplicación continua $f : K \longrightarrow X$, con K compacto de Hausdorff, $U \subset X$ es abierto (resp. cerrado) si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto (resp. cerrado) en K.*

Si τ es la topología de X, denotemos por $k(\tau)$ a su k-topología, luego $\tau \subset k(\tau)$. Ahora si denotamos como $k(X)$ a X con la topología $k(\tau)$, entonces decimos que X es un k-espacio si $k(X) = X$. Aquí estamos considerando a $\mathscr{S}$ como la categoría de espacios compactos de Hausdorff, y denotaremos por $\mathscr{K}$ a la categoría resultante, a la que llamaremos la **categoría de k-espacios**. Puesto que $\mathscr{S}$ satisface todos los axiomas antes mencionados, entonces la categoría $\mathscr{K}$ de k-espacios cumple con todos los resultado probados. Es inmediato también de 2.1.2 (b) que si K es un espacio compacto de Hausdorff, entonces $f : K \longrightarrow X$ es una aplicación continua con respecto a τ si y sólo si es continua con respecto a $k(\tau)$.

Definición 3.1.2 *Un espacio topológico X es **débilmente de Hausdorff** si y sólo si para cualquier aplicación continua $f : K \longrightarrow X$, donde K es compacto* *de Hausdorff, $f(K) \subset X$ es cerrado.*

Recordemos que un espacio Y es Hausdorff si y sólo si la diagonal es cerrada en $Y \times Y$. Con esta convención un k-espacio X es débilmente de Hausdorff si y sólo si la diagonal es cerrada en $X \times_k X$, denotemos a la categoría de espacios débilmente de Hausdorff por $w\mathscr{H}$. Notemos que si X es débilmente de Hausdorff, entonces cualquier subconjunto de X con la topología relativa es débilmente de Hausdorff y que $k(X)$ es débilmente de Hausdorff, puesto que la topología de $k(X)$ es más fina que la de X.

Proposición 3.1.3 *Un espacio de Hausdorff es débilmente de Hausdorff.*

Demostración. Si X es Hausdorff, K compacto de Hausdorff y $f : K \longrightarrow X$ es continua, entonces $f(K)$ es subconjunto compacto de X, luego es cerrado en X. Por lo tanto X es débilmente Hausdorff. $\square$

La propiedad de ser débilmente de Hausdorff está estrictamente entre los espacios T_1 (los puntos son cerrados) y la propiedad de ser Hausdorff. Un ejemplo de un espacio débilmente de Hausdorff que no es de Hausdorff, se puede encontrar en el artículo de S. P. Franklin [3].

Proposición 3.1.4 *Todo espacio métrico es un k-espacio.*

Demostración. Sea X un espacio métrico, y consideremos $A \subset X$ tal que $f^{-1}(A)$ es cerrado, para toda aplicación continua $f : K \longrightarrow X$, donde K es compacto de Hausdorff. Ahora, supongamos que tenemos una sucesión convergente $a_k \to x$ con $a_k \in A$, lo que probaremos es que $x \in A$. Sea C la compactación en un punto de $\mathbb{N}$, y definamos $u : C \longrightarrow X$ como $u(c) = a_k$ y $u(\infty) = x$. Esta aplicación es continua, puesto que la sucesión converge. De esta manera $u^{-1}(A)$ es cerrado en C, pero $\mathbb{N} \subset u^{-1}(A)$ y $\mathbb{N}$ es denso en C, luego $\infty \in u^{-1}(A)$ así $x = u(\infty) \in A$. Por lo tanto A es cerrado. $\square$

Proposición 3.1.5 *Todo espacio localmente compacto de Hausdorff es un k-espacio.*

Demostración. Sea X un espacio localmente compacto de Hausdorff, y consideremos $A \subset X$ tal que $f^{-1}(A)$ es cerrado, para toda aplicación continua $f : K \longrightarrow X$, donde K es compacto de Hausdorff. Supongamos que $x \in \overline{A}$; necesitamos probar que $x \in A$. Puesto que X es localmente compacto, x tiene una vecindad U tal que $C = \overline{U}$ es compacto. De esta manera $x \in \overline{C \cap A}$. Como la inclusión $j : C \rightarrowtail X$ es continua tenemos que $C \cap A = j^{-1}(A)$ es cerrado en C. Por lo tanto $x \in A$. Luego A es cerrado. $\square$

Otros ejemplos de k-espacios:

(1) Espacios localmente compactos.

(2) Espacio 1-numerables (en particular, espacios discretos e indiscretos).

(3) Realizaciones geométricas de cualquier complejo simplicial.

(4) Espacios debilmente de Hausdorff 1-numerables.

En [5], M. C. McCord prueba que si X es débilmente de Hausdorff, entonces para cualquier aplicación continua $f : K \longrightarrow X$, K compacto de Hausdorff, $f(K)$ es compacto de Hausdorff. Notemos que con este resultado, para un subconjunto $A \subset X$, $f^{-1}(A) \subset K$ es cerrado si y sólo si la intersección con cada subconjunto compacto de X es cerrado.

Proposición 3.1.6 *Sea X un k-espacio débilmente de Hausdorff. Entonces para $A \subset X$, $f^{-1}(A)$ es cerrado en C, para toda aplicación continua $f : C \longrightarrow X$ con C compacto de Hausdorff, si y sólo si para cada espacio compacto de Hausdorff $K \subset X$ el conjunto $A \cap K$ es cerrado en K. En particular, un espacio débilmente de Hausdorff X es un k-espacio si y sólo si: $A \subset X$ es cerrado $\Leftrightarrow$ para cada espacio compacto de Hausdorff $K \subset X$ la intersección $A \cap X$ es cerrado en K.*

Demostración. Sea $A \subset X$ tal que $f^{-1}(A)$ es cerrado en K, para cada aplicación continua de $f : K \longrightarrow X$ donde K es compacto de Hausdorff. Entonces $A \cap K$ es cerrado en K.

Inversamente, supongamos que A satisface que para cada espacio compacto de Hausdorff $K \subset X$, la intersección $A \cap K$ es cerrado en K. Consideremos $f : L \longrightarrow X$ una aplicación continua, donde L es compacto de Hausdorff, puesto que X es débilmente de Hausdorff, $f(L)$ es compacto de Hausdorff y luego $f(L) \cap A$ es cerrado en $f(L)$. Entonces $f^{-1}(A) = f^{-1}(f(L) \cap A)$ es cerrado en $L = f^{-1}(f(L))$. Lo cual prueba que $f^{-1}(A)$ es cerrado. □

De esta manera resulta que la categoría de espacios compactamente generados es exactamente la categoría de k-espacios débilmente de Hausdorff. En particular, la categoría de k-espacios contiene a una de las categorías más importantes dentro de la topología algebraica, particularmente en la teoría de homotopía, que es la categoría de Steenrod, $\mathscr{CG}$.

Proposición 3.1.7 *Si* $\{X_i\}$ *es una familia de* k*-espacios, entonces la unión ajena* $X = \coprod_i X_i \in \mathscr{K}$*.*

Demostración. Sea $A \subset X$ tal que $f^{-1}(A)$ es cerrado, donde f es una aplicación continua de un compacto de Hausdorff K a X. Entonces A tiene la forma $\coprod_i A_i$, donde $A_i = A \cap X_i$, ahora es suficiente ver que A_i es cerrado en X_i. Puesto que X_i es un k-espacio, bastaría ver que $u^{-1}(A_i)$ es cerrado, donde $u : K \longrightarrow X_i$. Entonces la composición $f : K \longrightarrow X_i \longrightarrow X$ es continua y luego $u^{-1}(A_i) = f^{-1}(A)$, es cerrado ya que $f^{-1}(A)$ es cerrado. Por lo tanto $A \subset X$ es cerrado y de esta manera X es un k-espacio. $\square$

Una clase de espacios muy importante para la topología algebraica, y en particular para la teoría de homotopía es, la clase de los complejos CW. Es conocido que la realización geometrica de cualquier complejo simplicial es un complejo CW, a continuación probaremos que cualquier complejo CW es un espacio compactamente generado, de esta manera un k-espacio y así justificar el inciso 3 del ejemplo anterior.

Definición 3.1.8 *Sea* $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de conjuntos ajenos tal que* $I_0 \neq \emptyset$*. Apartir de esta sucesión construiremos una sucesión de espacios topológicos* $\{X_n\}$ *de la siguiente manera:*

(i) *Para* $n = 0$*, hagamos* $X^0 = I_0$ *con la topología discreta en* I_0*.*

(ii) *Si* X^{n-1} *esta ya construido, hagamos* $X^n = X^{n-1}$ *si* $I_n = \emptyset$*. Ahora, si* $I_n \neq \emptyset$*, supongamos que tenemos una familia de aplicaciones continuas* $\{\varphi^i : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X^{n-1} \mid i \in I_n\}$*, llamadas* ***aplicaciones caracteristicas****, y hagamos* $D_n = \amalg_{i \in I_n} \mathbb{D}_i^n$ *y* $S_n = \amalg_{i \in I_n} \mathbb{S}_i^{n-1} \subset D_n$*, donde* $\mathbb{D}_i^n = \mathbb{D}^n$ *y* $\mathbb{S}_i^{n-1} = \mathbb{S}^{n-1}$*. La familia* $\{\varphi_i\}$ *determina una aplicación* $\varphi : S_n \longrightarrow X^{n-1}$*, definida por* $\varphi_n|_{\mathbb{S}_i^{n-1}} = \varphi^i$*. Definimos entonces* $X^n = X^{n-1} \cup_{\varphi_n} D_n$ *(espacio de adjunción o pushout).*

(iii) *Claramente, tenemos encajes cerrados* $X^{n-1} \subseteq X^n$*. Definimos* $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$ *con la topología de la unión determinada por la familia* $\{X^n\}$*; a saber,* $C \subset X$ *es cerrado si y sólo si* $K \cap X^n$ *es cerrado en* X^n *para toda* n*.*

Un espacio topológico homeomorfo a un espacio X obtenido de esta manera es llamado un **complejo CW**.

Teorema 3.1.9 *Sea K un subconjunto compacto de un complejo CW X. Entonces K está contenido en una unión finita de celdas abiertas de X.*

Demostración. Sea $S \subset K$ obtenido por tomar un punto $x_e \in e \cap K$ de cada celda abierta e que intersecta a K; lo que probaremos es que S es finito.

Observemos que $S \cap X^0 = K \cap X^0$ es un subespacio discreto y cerrado de K y luego, $S \cap X^0$ es finito. supongamos ahora, por inducción, que $S \cap X^{n-1}$ es finito. Para toda n-celda cerrada $\overline{e}$, $S \cap \overline{e}$ consta de a lo más x_e y una cantidad finita de elementos de $S \cap X^{n-1}$ y luego, $S \cap \overline{e}$ es ó vacio ó es un conjunto finito, en cualquier caso, es un subconjunto cerrado de $\overline{e}$. Pero X^n es en si mismo un complejo CW, y puesto que la topología de un CW esta determinada por la familia de sus celdas cerradas; luego $S \cap X^n$ es un subconjunto cerrado de X^n el cual es discreto y está contenido en el espacio compacto K y de esta manera, es un conjunto finito. Ahora tenemos que probar que, para toda $n \geq 0$, $S \cap X^n$ es un conjunto finito y luego, S es un subconjunto discreto y cerrado de X y de K; pero un subconjunto discreto y cerrado de un espacio compacto siempre es finito, luego S es finito. □

Es fácil ver que un complejo CW X es un espacio de Hausdorff. Ahora, puesto que los espacios compactamente generados tienen la *topología coherente* con respecto a sus subespacios compactos y los complejos CW con respecto a sus celdas cerradas. Como todo subcomplejo finito de X es generado por sus celdas cerradas, entonces es generado por sus subcomplejos finitos, los cuales son compactos. Luego los CW están generados por sus subespacios compactos, es decir, tienen la topología coherente con respecto a ellos. Como una consecuencia inmediata de la proposición anterior, resulta que:

Corolario 3.1.10 *Si X es un complejo CW, entonces X es compactamente generado.*

Demostración. Puesto que X es de Hausdorff, sea ahora $A \subset X$ tal que $A \cap K$ es cerrado en K para todo compacto K en X. Por el teorema anterior tenemos que K está contenido en una unión finita de celdas abiertas de X, es decir, $K \subset e_1 \cap e_2 \cap \cdots \cap e_k$. Entonces $A \cap K = ((A \cap \overline{e_1}) \cup (A\overline{e_2}) \cup \cdots \cup (A \cap \overline{e_k})) \cap K$ es cerrado en K, puesto que cada $\overline{e_i}$ es compacto, luego cada $A \cap \overline{e_i}$ es cerrado en $\overline{e_i}$. Ahora, como X tiene la topología coherente con respecto a sus celdas cerradas, luego $A \subset X$ es cerrado. De esta manera X es compactamente generado. □

Como ya sabemos el funtor $k : \mathscr{T}\!op \longrightarrow \mathscr{K}$ es un adjunto derecho del funtor inclusión $i : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{T}\!op$, además tenemos las siguientes adjunciones:

$$\begin{tikzcd} w\mathscr{H} \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[d, shift left, "k"] & \mathscr{T}\!op \arrow[l, shift left, "w"] \arrow[d, shift left, "k"] \\ \mathscr{C}\mathscr{G} \arrow[u, shift left, "i"] \arrow[r, shift left, "i"] & \mathscr{K} \arrow[l, shift left, "w"] \arrow[u, shift left, "i"] \end{tikzcd}$$

donde el funtor i es la inclusión o el funtor que olvida la topología de la categoría dominio a la categoría codominio, el funtor k es el que k-ifica y el funtor w es el que asigna a un espacio topológico su cociente débilmente de Hausdorff máximo.

El siguiente resultado fue probado por L. G. Lewis jr. en su tesis de doctorado en 1978:

Proposición 3.1.11 *Sean X y Y k-espacios. Si uno de ellos es localmente compacto o si ambos son 1-numerable, entonces:*

$$X \times_k Y = X \times Y.$$

Más aún, si Y es o localmente compacto o 1-numerable, entonces Y es de Hausdorff si y sólo si es débilmente de Hausdorff.

El resultado anterior nos dice que las definiciones de espacio Hausdorff y debilmente de Hausdorff son equivalentes para espacios 1-numerable y localmente compactos.

Una observación sobre encaje y colímites en $\mathscr{K}$ y $\mathscr{C}\mathscr{G}$ es la siguiente.

Lema 3.1.12 *Sean $i_n : X_n \longrightarrow X_{n+1}$, $n \geq 0$, una sucesión de encajes en $\mathscr{K}$ con colímite X. Supongamos que $X/X_0 \in \mathscr{C}\mathscr{G}$. Entonces, para un espacio compacto de Hausdorff C, la aplicación natural*

$$\operatorname{colim} \mathscr{K}(C, X_n) \longrightarrow \mathscr{K}(C, X)$$

es una biyección, donde el colímite se considera en $\mathscr{S}et$.

Demostración. El punto es que X_0 no necesariamente está en $\mathscr{C}\mathscr{G}$. Sea $f : C \longrightarrow X$. Entonces la composición de f con la identificación $q : X \longrightarrow X/X_0$ tiene su imagen en algún X_n/X_0, luego f tiene su imagen en X_n. Y la conclusión se sigue inmediatamente. $\square$

Capítulo 4
Productos y espacios de funciones

Uno de los requisitos principales que una categoría de espacios topológicos debe cumplir para ser conveniente es, que esta sea *cartesianamente cerrada*. En este capítulo probaremos que la categoría de k-espacios es cartesianamente cerrada y que el producto de identificaciones en la categoría $\mathscr{K}$ es nuevamente una identificación y, que esto no necesariamente sucede en $\mathscr{T}\!op$, lo cual prueba que $\mathscr{T}\!op$ no es cartesianamente cerrada. En este capítulo consideraremos solamente como categoría base $\mathscr{S}$ a la categoría de espacios compactos de Hausdorff, aunque otra categoría que satisface los axiomas que ya hemos mencionado y los que mencionaremos en este capítulo es la categoría de espacios localmente compactos de Hausdorff. Pero, si denotamos por por $\mathscr{K}_{LH}$ a la categoría resultante para los espacios localmente compactos de Hausdorff, entonces $\mathscr{K}_{LH} = \mathscr{K}$, donde $\mathscr{K}$ denota a la categoría resultante para los espacios compactos de Hausdorff. Es inmediato de 2.2.3, puesto que los espacios localmente compactos de Hausdorff están en $\mathscr{K}$ y además todos los espacios compactos de Hausdorff son localmente compactos de Hausdorff.

4.1. Productos y exponenciables en $\mathscr{K}$

Sean X y $Y \in \operatorname{ob} \mathscr{T}\!op$ y recordemos que $\mathscr{T}\!op(X,Y)$ es el conjunto de aplicaciones continuas de X en Y, este conjunto puede tener muchas topologías entre las que figuran las topologías *conjunto-abiertas*, consideradas por R. Vázquez en [9], es decir la topología que tiene como subbase a la familia $W(F,U)$, donde F es miembro de una familia de subconjuntos de X y U un abierto en Y, pero para nuestro propósito consideraremos el caso especial en el que F varía en la familia de los compactos en X.

Definición 4.1.1 *Sean X y Y espacios topológicos. Dado un subconjunto compacto K de X y un subconjunto abierto U de Y, sea:*

$$W(K,U) = \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ es continua y } f(K) \subseteq U\}$$

*La **topología compacto-abierta** en el conjunto de aplicaciones continuas de X a Y es la topología dada por las uniones de intersecciones finitas de los $W(K,U)$ cuando K varía en la familia de los subconjuntos compactos de X y U en la los subconjuntos abiertos de Y. Denotemos por $\mathscr{T}(X,Y)$ al espacio topológico resultante.*

Es fácil ver que $\mathscr{T}(X,-)$, el funtor que a un espacio topológico Y le asocia el espacio topológico $\mathscr{T}(X,Y)$, es un endofuntor de $\mathscr{Top}$.

Definición 4.1.2 *Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ una familia de espacios topológicos y consideremos el producto cartesiano $\prod X_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda$, sea $p_\alpha : \prod X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$ la proyección canónica. Entonces la topología en $\prod X_\alpha$ generada por los subconjuntos:*

$$\{p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid U_\alpha \text{ es abierto en } X_\alpha, \alpha \in \Lambda\},$$

*es llamada la **topología producto**. A $\prod X_\alpha$ con esta topología se le llama **producto topológico**.*

En este capítulo requeriremos que $\mathscr{S}$, la subcategoría plena base, satisfaga el siguiente axioma:

Axioma 4.1.3 (a) *Si $X, Y \in \text{ob}\, \mathscr{S}$, entonces $X \times Y \in \text{ob}\, \mathscr{S}$.*

(b) *Si $X \in \text{ob}\, \mathscr{S}$ y $Y \in \text{ob}\, \mathscr{Top}$, entonces la función evaluación:*

$$\epsilon_{X,Y} : \mathscr{T}(X,Y) \times X \longrightarrow Y$$

definida como $\epsilon_{X,Y}(f,x) = f(x)$ es continua.

Por otro lado, un ejemplo de C. H. Dowker muestra que el producto topológico de dos k-espacios no necesariamente es un k-espacio (de hecho, lo que Dowker prueba es que el producto de dos *complejos* CW, que, por su definición, son k-espacios, no tiene por qué ser un complejo CW, precisamente porque no es un k-espacio, más aún el producto de dos complejos CW es un complejo CW si uno de ellos es localmente compacto ó ambos tienen una cantidad numerable de celdas), por ejemplo $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ no es un k-espacio, siendo que cada uno de los factores es un k-espacio. Esto prueba que el producto topológico no define un producto en la categoría de k-espacios, por tal razón, conviene modificar el producto topológico en $\mathscr{K}$.

Definición 4.1.4 *Sean X y Y k-espacios, su k-**producto** se define como:*

$$X \times_k Y = k(X \times Y).$$

En efecto, este es un buen producto en el sentido categórico para la categoría de k-espacios, en vista de que tiene la propiedad universal del producto para k-espacios, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 4.1.5 *Las proyecciones $p : X \times_k Y \longrightarrow X$ y $q : X \times_k Y \longrightarrow Y$ son continuas y si Z es un k-espacio y $f : Z \longrightarrow X \times_k Y$, entonces f es continua si y sólo si las funciones $p \circ f$ y $q \circ f$ son continuas.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama, en el que X, Y y Z son k-espacios:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dr] & \\ X & X \times_k Y \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"'] & Y \end{tikzcd}$$

Ya que las proyecciones del producto topológico $X \times Y$ son continuas, entonces, por la proposición 2.1.2 (a), p y q son continuas.

Sea Z un k-espacio. Si $f : Z \longrightarrow X \times_k Y$ es continua, entonces también lo son las composiciones $p \circ f$ y $q \circ f$. Inversamente, si estas últimas son continuas, por la propiedad universal del producto topológico usual, $f : Z \longrightarrow X \times Y$ es continua. Así, al ser Z un k-espacio, por el lema 2.1.7, f es continua como una aplicación de Z en $X \times_k Y$. $\square$

Sabemos también que el producto en $\mathscr{Top}$, define un funtor:

$$- \times X : \mathscr{Top} \longrightarrow \mathscr{Top},$$

el cual asocia a un espacio topológico Y el producto $Y \times X$ en $\mathscr{Top}$ y, a una aplicación continua f la aplicación producto $f \times 1_X$ en $\mathscr{Top}$. Más aún para k-espacios X y Y; es claro que el k-producto nos define un bifuntor $- \times_k - : \mathscr{K} \times \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{K}$.

Definición 4.1.6 *Un espacio topológico Y es **localmente compacto** si para todo $y \in Y$ existe una vecindad U de y, tal que U es compacto.*

Es muy conocido que la función evaluación tiene la siguiente propiedad universal: dada una aplicación $f : X \times Y \longrightarrow Z$, existe una única aplicación continua $\hat{f} : X \longrightarrow \mathscr{T}(Y, Z)$, véase [1], llamado el adjunto de f, tal que:

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[d, "\hat{f}\times 1"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathscr{T}(Y,Z) \times Y \arrow[r, "\epsilon_{Y,Z}"'] & Z \end{tikzcd}$$

conmuta, donde $\hat{f}(x)(y) = f(x, y)$.

Definición 4.1.7 *Un espacio topológico X es **exponenciable**, cuando el funtor producto*

$$- \times X : \mathscr{Top} \longrightarrow \mathscr{Top}$$

admite adjunto derecho, es decir, un funtor $\mathscr{T}(X, -) : \mathscr{Top} \longrightarrow \mathscr{Top}$.

Proposición 4.1.8 *Si X es un espacio exponenciable, entonces el funtor $- \times X$ conserva colímites.*

Demostración. Se sigue del hecho de que funtores adjuntos izquierdos conservan colímites. $\square$

Acontinuación daremos ejemplo, debido a J. Dieudonné, en el que se muestra que en general, el producto de identificaciones no resulta ser una identificación.

Ejemplo 4.1.9 *Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales con la topología relativa y tomemos la relación $\sim$ que identifica en un punto a todos los enteros. Sea $p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\sim$ la aplicación cociente; sin embargo el producto:*

$$p \times 1_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow (\mathbb{Q}/\sim) \times \mathbb{Q}$$

no es una identificación, puesto que la identificación p no es una aplicación abierta, pero sí cerrada. De hecho una de las razones más fuertes para que esto no se cumpla, es que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.

Un resultado muy conocido es que para un espacio localmente compacto Y, la función biyectiva $l : \mathscr{T}(X, \mathscr{T}(Y, Z)) \longrightarrow \mathscr{T}(X \times Y, Z)$, dada por $l(f)(x, y) = f(x)(y)$, es un homeomorfismo natural.

Para la siguiente proposición daremos una demostración meramente topológica.

Proposición 4.1.10 *Todo espacio espacio localmente compacto Y es exponenciable.*

Demostración. Sea Y un espacio localmente compacto, consideremos la aplicación continua $f : X \times Y \longrightarrow Z$, y su aplicación adjunta correspondiente $\hat{f} : X \longrightarrow \mathscr{T}(Y, Z)$. Para probar la continuidad de $\hat{f}$, tomemos un compacto $K \subseteq Y$ y un compacto $U \subseteq Z$; entonces

$$\hat{f}^{-1}\langle K, U\rangle = \{x \in X \mid \text{para toda } y \in K \ f(x, y) \in U\}.$$

Donde $\langle K, U\rangle = W(K, U)$, definido en 4.1.1. Fijemos un punto $x \in \hat{f}^{-1}\langle K, U\rangle$, ahora tenemos que construir una vecindad abierta W de x contenida en $\hat{f}^{-1}\langle K, U\rangle$. Para toda $y \in K$, $f^{-1}(U)$ es una vecindad abierta de (x, y), luego contiene una vecindad abierta de la forma $W_y \times V_y$. Los subconjuntos abiertos V_y cubren al subconjunto compacto K, así K es cubierto por una cantidad finita de V_y's, sean estos $V_{y_1}, ..., V_{y_n}$. Hagamos $W = W_{y_1} \cap \cdots \cap W_{y_n}$ de esta manera obtenemos una vecindad abierta de x. Sea $x' \in W$ tal que $x \in W_{y_i}$, luego $f(x', y) \in U$. Por lo tanto W esta totalmente contenido en $\hat{f}^{-1}\langle K, U\rangle$.

Inversamente, consideremos una aplicación continua $g : X \longrightarrow \mathscr{T}(Y, Z)$ y su adjunto correspondiente $\hat{g} : X \times Y \longrightarrow Z$. Para probar la continuidad de $\hat{g}$, consideremos $x \in X$,$y \in Y$ y $z \in Z$ tales que $\hat{g}(x, y) = z$ y una vecindad abierta U de Z;

$$\hat{g}^{-1}(U) = \{(x', y') \in X \times Y \mid g(x')(y') \in U\}.$$

Puesto $g(x)$ es continua, entonces $g(x)^{-1}(U)$ es una vecindad de y. Ahora como Y es localmente compacto, podemos tomar una vecindad compacta C de y tal que $C \subseteq g(x)^{-1}(U)$. Ya que g es continua:

$$g^{-1}\langle K, U\rangle = \{x' \in X \mid \text{para toda } y' \in K \ g(x')(y') \in U\}$$

es abierto en X. Inmediatamente tenemos que

$$(x, y) \in g^{-1}\langle K, U\rangle \times K \subseteq \hat{g}(U),$$

probando que $\hat{g}^{-1}(U)$ es una vecindad de (x, y). Por lo tanto $\hat{g}$ es continua. $\square$

Esto prueba que $- \times X$ conmuta con colímites cuando X es localmente compacto. El siguiente resultado, debido a J. H. C. Whitehead, es una fuerte aplicación de que la compacidad local, resuelve el problema de cuándo el producto de identificaciones vuelve a ser una identificación, caso que en general, no se da, como lo muestra el ejemplo 4.1.9

Teorema 4.1.11 *Sea $p : X \longrightarrow X'$ una identificación y sea Y localmente compacto. Entonces la aplicación:*

$$p \times 1_Y : X \times Y \longrightarrow X' \times Y$$

es una identificación.

Demostración. Puesto que Y es localmente compacto, el funtor $- \times Y : \mathscr{T}\!op \longrightarrow \mathscr{T}\!op$ conserva cólimites, ya que Y es exponenciable. Así el funtor conserva identificaciones, por lo tanto tenemos que $p \times 1 : X \times Y \longrightarrow X' \times Y$ es una identificación. $\square$

Usando los resultados anteriores D. E. Cohen probó lo siguiente:

Proposición 4.1.12 *Si Y es localmente compacto, entonces $X \times Y$ es un k-espacio para todo $X \in$ ob $\mathscr{K}$.*

Demostración. Por definición, $X =$ colim D_X puesto que X es un k-espacio. Ahora como Y es localmente compacto tenemos que el funtor $- \times Y : \mathscr{T}\!op \longrightarrow \mathscr{T}\!op$ conserva colímites. Y como los colímites en $\mathscr{T}\!op$ y $\mathscr{K}$ coinciden, luego:

$$\begin{aligned} X \times_k Y &= \text{colim } (D_X \times_k Y) \\ &= \text{colim } (D_X \times Y) \\ &= (\text{colim } D_X) \times Y \\ &= X \times Y \end{aligned}$$

Por lo tanto $X \times Y$ es un k-espacio. $\square$

Por ejemplo, el producto $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ es un k-espacio, puesto que $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es una identificación con dominio un k-espacio, luego $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es un

k-espacio, y como $\mathbb{R}$ es localmente compacto. De esta manera $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ es un k-espacio. Sin embargo, el producto $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ no es un k-espacio, siendo que sus dos factores son k-espacios. Además $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ como un subespacio de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ no es k-espacio de acuerdo con 2.3.3, precisamente por que como subconjunto no es abierto ni cerrado.

Las buenas condiciones de los espacios localmente compactos, son insuficientes en las aplicaciones para la teoría de homotopía, y esa es una de las razones por la cual se sustituyen por espacios topológicos más adecuados. Para la teoría de homotopía es suficiente enfocarse en espacios "razonables". Los complejos CW son ejemplos de espacios razonables, pero no forman una buena categoría. Un buen sustituto de estos es, la categoría conveniente de k-espacios.

Proposición 4.1.13 Ley exponencial. *Si $X,\ Y \in \mathrm{ob}\,\mathscr{S}$, entonces*

$$l : \mathscr{T}(X, \mathscr{T}(Y, Z)) \longrightarrow \mathscr{T}(X \times Y, Z),$$

es un homeomorfismo natural.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T}(X, \mathscr{T}(Y, Z)) \times X \times Y \arrow[r, "\epsilon_1 \times 1"] \arrow[d, "l \times 1 \times 1"'] & \mathscr{T}(Y, Z) \times Y \arrow[d, "\epsilon_2"] \\
\mathscr{T}(X \times Y, Z) \times X \times Y \arrow[r, "\epsilon_3"] \arrow[ur, "\hat{\epsilon}_3 \times 1"] & Z
\end{tikzcd}$$

donde $\epsilon_1 = \epsilon_{X, \mathscr{T}(Y,Z)}$, $\epsilon_2 = \epsilon_{Y,Z}$, $\epsilon_3 = \epsilon_{X \times Y, Z}$. Puesto que l hace conmutar el cuadrado, entonces es continua por la propiedad universal de ϵ_3. El triángulo inferior conmuta por la propiedad de $\hat{\epsilon}_3$ y la universalidad de ϵ_2. Ahora $\hat{\epsilon}_3 \circ (l \times 1) = \epsilon_1$ por la propiedad universal de ϵ_2. Por la propiedad universal de ϵ_1, existe una única aplicación:

$$h : \mathscr{T}(X \times Y, Z) \longrightarrow \mathscr{T}(X, \mathscr{T}(Y, Z))$$

tal que $\epsilon_1 \circ (h \times 1) = \hat{\epsilon}_3$. Luego:

$$\epsilon_3 \circ ((l \circ h) \times 1 \times 1) = \epsilon_2(\epsilon_1 \times 1) \circ (h \times 1 \times 1) = \epsilon_2 \circ (\hat{\epsilon}_3 \times 1) = \epsilon_3,$$

$$\epsilon_1 \circ ((h \circ l) \times 1) = \hat{\epsilon}_3 \circ (l \times 1) = \epsilon_1.$$

Asi $l \circ h = 1$ y $h \circ l = 1$ por la propiedad universal de ϵ_3 y ϵ_1. $\square$

Corolario 4.1.14 (a) *Si* $X \in \text{ob}\,\mathscr{S}$*, entonces el funtor* $-\times X : \mathscr{T}\!op \longrightarrow \mathscr{T}\!op$ *conserva colímites.*

(b) *Si* $X \in \text{ob}\,\mathscr{S}$ *y* Y *es un* k*-espacio, entonces* $X \times Y = X \times_k Y$*.*

Demostración.

(a) Por la ley exponencial tenemos que $\mathscr{T}(X, -) : \mathscr{T}\!op \longrightarrow \mathscr{T}\!op$ es adjunto derecho del funtor $- \times X$, luego $- \times X : \mathscr{T}\!op \longrightarrow \mathscr{T}\!op$ conserva colímites.

(b) Por definición tenemos que $X \times_k Y = \text{colim}\ \ D(X \times Y)$. Puesto que $X \times D(Y)$ es un subdiagrama cofinal[1] de $D(X \times Y)$, luego

$$\text{colim}\ \ D(X \times Y) = \text{colim}\ \ (X \times D(Y)).$$

Así por (a) tenemos que:

$$X \times_k Y = \text{colim}\ \ (X \times D(Y)) = X \times \text{colim}\ \ D(Y) = X \times Y. \qquad \square$$

Nótese que el inciso (b) es consecuencia del hecho de que el funtor $- \times X$ es adjunto izquierdo del funtor $\mathscr{T}(X, -)$ y luego conserva colimites. En general, el producto $- \times X$ en $\mathscr{T}\!op$ no conmuta con colímites.

4.2. Espacio de funciones

A continuación haremos algunas consideraciones relacionadas con la topología de espacio de funciones, para el caso en que X y Y sean k-espacios.

Sean X y Y k-espacios; si, nuevamente, $\mathscr{T}(X, Y)$ denota el espacio de aplicaciones continuas de X a Y con la topología compacto-abierta, tenemos, como en otros casos, que, aunque X y Y sean k-espacios $\mathscr{T}(X, Y)$ no necesariamente lo es; por ejemplo si X es discreto con dos puntos, $\mathscr{T}(X, Y) = Y \times Y$; como ya mencionamos, el ejemplo de C. H. Dowker, visto anteriormente muestra que este espacio puede no ser un k-espacio.

[1]Por una subactegoría cofinal, entendemos a una subcategoría $\mathscr{I}$ de una categoría $\mathscr{J}$, tal que si $j \in \mathscr{J}$, entonces existe un morfismo $j \to i$ con $i \in \mathscr{I}$ y para cada morfismo $f : j \to i$ con $i \in \mathscr{I}$, existen morfismos $f' : j \to i'$ y $h : i \to i'$ tal que $h \circ f = f'$. Un subdiagrama cofinal para un diagrama $F : \mathscr{J} \to \mathscr{C}$, es un diagrama de la forma $F \circ \epsilon : \mathscr{I} \to \mathscr{C}$, donde $\epsilon : \mathscr{I} \to \mathscr{J}$ es la inclusión, para la cual colim $F \circ \epsilon =$ colim F.

Definición 4.2.1 *Sean X y Y k-espacios. Definimos:*

$$\mathscr{K}(X,Y) = k(\mathscr{T}(X,Y))$$

*el cual llamaremos el **k-espacio funcional** con dominio X y codominio Y.*

Probaremos ahora una versión de la ley exponencial para k-espacios.

Lema 4.2.2 (a) *Para una aplicación $f : X \times_k Y \longrightarrow Z$, donde X y Y son k-espacios, el adjunto $\hat{f} : X \longrightarrow \mathscr{K}(Y,Z)$ es una aplicación continua.*

(b) *La función evaluación $\epsilon_{Y,Z} : \mathscr{K}(Y,Z) \times_k Y \longrightarrow Z$, con Y un k-espacio, es continua.*

Demostración.

(a) Sea $B \in \mathrm{ob}\, \mathscr{S}$ y $r : B \longrightarrow X$ una aplicación. La conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
B \times_k Y \arrow[r, "r \times_k 1_Y"] \arrow[d, "="'] & X \times_k Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"] & Z \\
B \times Y \arrow[r, "r \times 1_Y"] & X \times Y \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

prueba que $f \circ (r \times 1_Y)$ es continua y luego tiene adjunto. Puesto que $f \circ (r \times 1_Y) : B \times Y \longrightarrow Z$ el adjunto es $h : B \longrightarrow \mathscr{T}(Y,Z)$. Como cada $x \in X$ está en la imagen de algún r, existe una factorización

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r"'] & \mathscr{T}(Y,Z) \\
X \arrow[r, "\hat{f}"] & \mathscr{K}_t(Y,Z) \arrow[u, "1"']
\end{tikzcd}$$

por la propiedad universal de la evaluación y como $\mathscr{T}(Y,Z) = \mathscr{K}(Y,Z)$, entonces tenemos que $\hat{f} \circ r : B \longrightarrow X \longrightarrow \mathscr{K}(Y,Z)$ es continua, así por la proposición 2.1.2 (d) $\hat{f}$ es continua.

(b) Sea de nuevo $B \in \mathrm{ob}\, \mathscr{S}$ y $r = (r_1, r_2) : B \longrightarrow \mathscr{K}(Y,Z) \times_k Y$ una aplicación, $r_1 : B \longrightarrow \mathscr{K}(Y,Z)$ y $r_2 : B \longrightarrow Y$. Del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
B \times_k B \arrow[r, "r_1 \times_k 1_B"] & \mathscr{K}(Y,Z) \times_k B \arrow[r, "r_2^* \times_k 1_B"] & \mathscr{K}(B,Z) \times_k B \arrow[r, "1"] & \mathscr{T}(B,Z) \times B \arrow[d, "\epsilon_{B,Z}"] \\
B \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "r"'] & \mathscr{K}(Y,Z) \times_k Y \arrow[rr, "\epsilon_{Y,Z}"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

donde r_2^* es una aplicación de $\mathscr{K}(Y,Z)$ a $\mathscr{K}(B,Z)$, tenemos que $\epsilon_{Y,Z} \circ r$ es continua por la propiedad universal de $\epsilon_{B,Z}$. De igual manera, por la proposición 2.1.2 (d) $\epsilon_{Y,Z}$ es continua. $\square$

Del lema anterior y de manera similar a la proposición 4.1.13 obtenemos lo siguiente.

Teorema 4.2.3 Ley exponencial en $\mathscr{K}$. *Sean X y Y k-espacios. Entonces*

$$\mathscr{K}(X, \mathscr{K}(Y,Z)) \cong \mathscr{K}(X \times_k Y, Z).$$

Definición 4.2.4 *Una categoría $\mathscr{C}$ es* ***cartesianamente cerrada*** *si admite todos sus productos finitos y, para cada $C \in \operatorname{ob} \mathscr{C}$, C es exponenciable.*

Una categoría con productos finitos es cartesianamente cerrada si y sólo si para cada par de objetos X y Y existe un objeto $\mathscr{C}(X,Y)$ junto con una función evaluación $\epsilon_{X,Y} : \mathscr{C}(X,Y) \times X \longrightarrow Y$ con la propiedad universal: para cada morfismo $f : X \times Z \longrightarrow Y$ existe un único morfismo $\hat{f} : Z \longrightarrow \mathscr{C}(X,Y)$ tal que:

$$\begin{tikzcd} Z \times X \arrow[d, "\hat{f} \times 1"'] \arrow[drr, "f"] & & \\ \mathscr{C}(X,Y) \times X \arrow[rr, "\epsilon_{X,Y}"'] & & Y \end{tikzcd}$$

conmuta.

Corolario 4.2.5 *La categoría $\mathscr{T}\!op$ no es cartesianamente cerrada.*

Demostración. Esto se sigue del hecho de que el funtor $- \times \mathbb{Q} : \mathscr{T}\!op \longrightarrow \mathscr{T}\!op$ no conserva identificaciones, y luego no conserva colímites. $\square$

El teorema 4.2.3 tiene un número de interesantes consecuencias, a continuación presentamos las siguientes.

Teorema 4.2.6 *La categoría de k-espacios es cartesianamente cerrada.*

Demostración. Como ya vimos anteriormente, $\mathscr{K}$ tiene todos sus productos finitos y si $X \in \operatorname{ob} \mathscr{K}$, entonces X es exponenciable lo que resulta de la ley exponencial en $\mathscr{K}$, ya que el funtor $\mathscr{K}(X,-) : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{K}$ es el adjunto derecho de $- \times_k X : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{K}$. $\square$

Corolario 4.2.7 *El funtor* $\mathscr{K}(X,-):\mathscr{K}\longrightarrow\mathscr{K}$ *conserva límites.*

Demostración. $\mathscr{K}(X,-)$ es adjunto derecho de $-\times_k X$, lo cual implica el resultado. □

En particular se tiene el siguiente homeomorfismo natural:

$$\mathscr{K}(X, Y\times_k Z)\cong\mathscr{K}(X,Y)\times_k\mathscr{K}(X,Z).$$

Teorema 4.2.8 *El funtor exponencial contravariante para X,* $\mathscr{K}(-,X):\mathscr{K}^{op}\longrightarrow\mathscr{K}$ *es adjunto de* $\mathscr{K}^{op}(-,X):\mathscr{K}\longrightarrow\mathscr{K}^{op}$*. Es decir, el funtor* $\mathscr{K}(-,X):\mathscr{K}\longrightarrow\mathscr{K}$ *transfiere colímites a límites.*

Demostración. Puesto que los funtores $\mathscr{K}(-,X)$ y $-\times_k X$ son adjuntos tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathscr{K}(Y,\mathscr{K}(Z,X)) &\cong \mathscr{K}(Y\times_k Z, X)\\ &\cong \mathscr{K}(Z,\mathscr{K}(Y,Z))\\ &= \mathscr{K}^{op}(\mathscr{K}(Y,X),Z).\end{aligned}$$

Así resulta que el funtor $\mathscr{K}(-,X):\mathscr{K}^{op}\longrightarrow\mathscr{K}$ es adjunto izquierdo del funtor $\mathscr{K}^{op}(-,X):\mathscr{K}\longrightarrow\mathscr{K}^{op}$. Por lo tanto transfiere colímites a límites. □

En general este resultado se da para categorías cartesianamente cerradas.

Sean $p:X\longrightarrow X'$, $q:Y\longrightarrow Y'$ identificaciones en $\mathscr{T}op$. Como mostramos anteriormente, no siempre el producto

$$p\times q: X\times Y\longrightarrow X'\times Y'$$

es una identificación. Una de las ventajas en la clase de k-espacios es que, redefiniendo de manera adecuada el producto, el producto de identificaciones vuelve a ser una identificación sin hipótesis adicionales sobre los factores, de modo que la clase de los espacios donde esto es válido es mucho más amplia.

Corolario 4.2.9 *Sean* $p:X\longrightarrow X'$ *y* $q:Y\longrightarrow Y'$ *identificaciones entre k-espacios. Entonces* $p\times_k q: X\times_k Y\longrightarrow X'\times_k Y'$ *es una identificación.*

Demostración. Puesto que $p \times_k q = (p \times_k 1) \circ (1 \times_k q)$ y como la composición de identificaciones es una identificación, luego es suficiente probar el resultado para el caso en que $q = 1_Y$. Pero X' es un espacio cociente , luego es un colímite, así es conservado por el funtor $- \times_k Y$. Por lo tanto $p \times_k 1_Y$ es una identificación. $\square$

4.3. Encajes y colímites

Sea Y un k-espacio y $X \subseteq Y$, puede suceder que X, con la topología relativa, no sea un k-espacio. Por ejemplo, consideremos $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ con la topología relativa es un espacio talmente inconexo, pero $\mathbb{Q}$ no es un k-espacio, puesto que $k(\mathbb{Q})$ es $\mathbb{Q}$ con la topología discreta.

Definición 4.3.1 *Sea Y un k-espacio y $X \subseteq Y$. El subespacio con la topología relativa de Y asociado a X es k(X). Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre k-espacios es un encaje si f es un homeomorfismo de X en el subespacio k(f(X)). Decimos que el encaje es cerrado si $f(X)$ es cerrado.*

Un encaje entre k-espacios $f : X \longrightarrow Y$ está caracterizada por una propiedad universal análoga a la que tiene la topología inducida.

($\star$) A saber, $f : X \longrightarrow Y$ es un encaje entre k-espacios, si existe una aplicación $h : Z \longrightarrow X$, con Z un k-espacio, tal que ésta es continua si y sólo si $f \circ h$ lo es.

Puesto que la definición de encaje es dual a la de identificación, entonces tenemos el siguiente resultado.

Lema 4.3.2 *Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{K}$ es un encaje si y sólo si es un igualador.*

El siguiente resultado, dual al corolario anterior, es inmediato.

Proposición 4.3.3 *Si $f : X \longrightarrow X'$ y $g : Y \longrightarrow Y'$ son encajes de k-espacios, entonces $f \times_k g : X \times_k Y \longrightarrow X' \times_k Y'$ tambien lo es.*

Ahora haremos algunas observaciones sobre encajes y colímites. Recalquemos que una aplicación es un encaje si ésta es un homeomorfismo sobre su imagen. De hecho, encajes no necesariamente tienen imagenes cerradas. Como es notado por Strøm, un ejemplo simple de un encaje no cerrado en $\mathscr{K}$ es el encaje $i : \{a\} \hookrightarrow \{a, b\}$, donde $\{a, b\}$ tiene la topología indiscreta. Aquí i es tanto la inclusión de un retracto como una cofibración.

Lema 4.3.4 *Sea $i : X \longrightarrow Y$ una aplicación en $\mathscr{K}$.*

(a) *Si existe una aplicación $r : Y \longrightarrow X$ tal que $r \circ i = 1_X$, entonces i es un encaje. Si ahora $Y \in \mathrm{ob}\, \mathscr{CG}$, entonces i es un encaje cerrado.*

(b) *Si i es una cofibración, entonces i es un encaje. Si, $Y \in \mathrm{ob}\, \mathscr{CG}$, entonces i es un encaje cerrado.*

Demostración. Puesto que los encajes $i : X \longrightarrow Y$ estan caracterizados por la propiedad de que una aplicación $j : Z \longrightarrow X$ es continua si y sólo si $i \circ j$ es continua. Esto implica el primer enunciado del inciso (a). Ahora podemos notar que una aplicación en $\mathscr{K}$ es un encaje si y sólo si éste es un igualador en $\mathscr{K}$, y una aplicación en $\mathscr{CG}$ es un encaje cerrado si y sólo si es un igualador en $\mathscr{CG}$. Puesto que i es un igualador de $i \circ r$ y de la identidad en Y, luego $X \cong \{y \in Y : y = i(r(y))\} \cong i(X)$, esto implica ambos enunciados de (a). Para el inciso (b), sea M_i el cilindro de aplicación de i ($M_i = Y \cup_i (X \times I)$). La aplicación canónica $j : M_i \longrightarrow Y \times I$ tiene una inversa izquierda r y es así un encaje ó un encaje cerrado en los respectivos casos. Los encajes cerrados evidentes $i_1 : X \longrightarrow M_i$ y $i_1 : Y \longrightarrow Y \times I$ satisfacen $j \circ i_1 = i_1 \circ i$, y así tenemos la parte (b). $\square$

Hay que observar en la demostración anterior que X esta equipada con la topología final con respecto a r, es decir, X es un cociente de Y equipado con la topología final, luego $r : Y \longrightarrow X$ es una identificación.

Puesto que el producto $\times_k$ es asociativo, podemos definir la siguiente composición:

$$\varphi : \mathscr{K}(X, Y) \times_k \mathscr{K}(Y, Z) \longrightarrow \mathscr{K}(X, Z),$$

donde $\varphi(f, g) = g \circ f$.

Teorema 4.3.5 *Para X, Y y Z k-espacios , la composición de aplicaciones induce una aplicación continua:*

$$\varphi : \mathscr{K}(Y, Z) \times_k \mathscr{K}(X, Y) \longrightarrow \mathscr{K}(X, Z),$$

dada por $\varphi(f,g) = f \circ g$.

Demostración. Observemos que φ es adjunto de la siguiente composición, $\epsilon_{Y,Z} \circ (1 \times_k \epsilon_{X,Y})$, dada por la función evaluación $\epsilon_{X,Z} : \mathscr{K}(X,Z) \times X \longrightarrow Z$:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{K}(X,Y) \times_k \mathscr{K}(Y,Z) \times_k X \arrow[rr, "\varphi \times_k 1_X"] \arrow[d, "="'] & & \mathscr{K}(X,Z) \times_k X \arrow[d, "\epsilon_{X,Z}"] \\
(\mathscr{K}(X,Y) \times_k X) \times_k \mathscr{K}(Y,Z) \arrow[r, "\epsilon_{X,Y} \times_k 1"] & \mathscr{K}(Y,Z) \times_k Y \arrow[r, "\epsilon_{Y,Z}"] & Z
\end{tikzcd}$$

que por definición son continuas, luego $\epsilon_{Y,Z} \circ (1 \times_k \epsilon_{X,Y})$ es continua. Por lo tanto φ es continua. $\square$

Capítulo 5
La categoría de espacios punteados

Para cuestiones en teoría de homotopía, podemos considerar la categoría $\mathscr{K}_*$ de k-espacios punteados, donde los objetos son los espacios $X \in \text{ob}\,\mathscr{K}$ con un punto básico distinguido, y los denotaremos como (X, x_0) o simplemente como X. Sean X y Y espacios punteados, denotemos por $\mathscr{K}_*(X, Y)$ al conjunto de aplicaciones de X en Y que conservan el punto básico. Ya que $\mathscr{K}_*(X, Y) \subseteq \mathscr{K}(X, Y)$, consideremos a $\mathscr{K}_*(X, Y)$ como un subespacio de $\mathscr{K}(X, Y)$.

5.1. El Producto reducido

Podemos decir que la categoría $\mathscr{K}_*$ de k-espacios con punto básico en $\mathscr{K}$ disfruta de las mismas propiedades convenientes de $\mathscr{K}$. Puesto que $\mathscr{K}_*$ puede ser considerado como $\mathscr{K}\downarrow^{\{*\}}$, es decir, la categoría cocoma de $\mathscr{K}$ bajo $\{*\}$. Es decir, un objeto de $\mathscr{K}_*$ es una aplicación $* \xrightarrow{x_0} X$ en $\mathscr{K}$, y escribimos (X, x_0). Podemos pensar a (X, x_0) como un k-espacio junto con un punto básico x_0, una aplicación de (X, x_0) a (Y, y_0) es un k-espacio funcional $f : X \longrightarrow Y$ que aplica a x_0 en y_0. Los siguientes resultados se siguen de argumentos formales.

Proposición 5.1.1 *La categoría $\mathscr{K}_*$ es completa y cocompleta.*

Este resultado se puede obtener de manera similar a 2.2.5 como una derivación de $\mathscr{K}_*$ de la categoria $\mathscr{T}\!op_*$. En efecto, si $D : \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{K}_*$ es un funtor de una categoría $\mathscr{J}$ (posiblemente grande) a $\mathscr{K}_*$, el límite de D como un funtor a $\mathscr{K}$ es naturalmente un objeto de $\mathscr{K}_*$. El colímite es ligeramente distinto. Si denotamos por $\mathcal{J}$ a $\mathscr{J}$ con el objeto inicial $*$. Entonces D define un funtor $G : \mathcal{J} \longrightarrow \mathscr{K}$, donde $G(*) = *$, y G de una aplicación $* \longrightarrow i$ es el punto básico de $D(i)$. El colímite de G en $\mathscr{K}$ tiene entonces un punto básico canónico, y éste define el colímite en $\mathscr{K}_*$ de D. Por ejemplo, el colímite de un diagrama vacio, en $\mathscr{K}_*$ es $*$, y el coproducto de X y Y es $X \vee Y$, el cociente de $X \amalg Y$ obtenido por identificar los puntos básicos.

Entonces los colímites de $\mathscr{K}_*$ son los de $\mathscr{T}\!op_*$. Los límites de $\mathscr{K}_*$ son los de $\mathscr{K}$ pero, con el punto básico distinguido. De hecho, el funtor que olvida $F : \mathscr{K}_* \longrightarrow \mathscr{K}$ conserva límites, ya que admite como adjunto izquierdo al funtor $F_+ : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{K}_*$, que asocía a un k-espacio X la unión ajena, $X_+ = (X \amalg *, *)$, de X con el punto básico $*$, el cual es punteado por obvias razones. Además el funtor F_+ define un encaje fiel (pero, no pleno) de $\mathscr{K}$ a la categoría punteada $\mathscr{K}_*$. Una de las ventajas de $\mathscr{K}_*$ con respecto a $\mathscr{T}\!op_*$ es que tiene un *producto reducido* (*smash product*) que se comporta muy bien.

Definición 5.1.2 *Sea $\{X_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ una familia de espacios punteados, definimos la* ***suma reducida*** *(wedge sum) como el cociente:*

$$\bigvee_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = \coprod X_\alpha / \{x_\alpha | \alpha \in \Lambda\},$$

donde para cada α, $x_\alpha \in X_\alpha$ es el punto básico.

Hay que recordar que la suma reducida $\bigvee_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ es un coproducto en la categoría $\mathscr{T}\!op_*$. Las inclusiones canónicas $(X, x_0) \longrightarrow (\prod X_\alpha, *)$, inducen un encaje:

$$\bigvee_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \hookrightarrow \prod X_\alpha.$$

luego podemos definir al producto reducido de la siguiente manera.

Definición 5.1.3 *El* ***producto reducido*** *de una familia de espacios punteados X_α es el cociente:*

$$\bigwedge_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = \prod X_\alpha / \bigvee X_\alpha.$$

Si $f_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$, son aplicaciones en $\mathscr{K}_*$, luego su producto reducido $\bigwedge_{\alpha=1}^n f_\alpha = f_1 \wedge ... \wedge f_n : \bigwedge_{\alpha=1}^n X_\alpha \longrightarrow \bigwedge_{\alpha=1}^n Y_i$, es la aplicación inducida por tal producto. Más aún cada k-espacio punteado X determina un funtor producto reducido $X \wedge - : \mathscr{K}_* \longrightarrow \mathscr{K}_*$, $Y \mapsto X \wedge Y$ el cual es obviamente punteado; en el caso especial en el cual X sea el intervalo unitario $I = [0, 1]$ (con punto básico 0) y la 1-esfera $I/(0,1) \cong \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ nos referimos entonces al funtor *cono* $C : \mathscr{K}_* \longrightarrow \mathscr{K}_*$ y al funtor *suspensión reducida* $\Sigma : \mathscr{K}_* \longrightarrow \mathscr{K}_*$. Luego una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{K}_*$, nos da una sucesión:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i(f)} C_f$$

donde el *cono de aplicación* C_f es el cociente obtenido de $CX \vee Y$ identificando $1 \wedge x \in CX$ con $f(x) \in Y$, y $i(f) : Y \longrightarrow C_f$ es el encaje de Y en la base C_f. Un resultado inmediato de esta construcción es que $C_f/Y = \Sigma X$.

Reemplazando producto cartesiano por producto reducido, tenemos un criterio similar de categoria conveniente para espacios punteados. Pero aquí la asociatividad del producto reducido no es muy clara, de hecho en la categoría $\mathscr{T}\!op_*$ el producto reducido no es asociativo.

En un artículo de 1958, Dieter Puppe aseguró el siguiente resultado, pero, para el cual no dió una demostración. Esto propició una serie de pláticas entre Mike Cole, Tony Elmendorf, Gaunce Lewis y J. Peter May. El contraejemplo siguiente se debe principalmente a Kathlen Lewis.

Sean $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$ los números racionales y naturales respectivamente, con la topología inducida por $\mathbb{R}$ y con punto básico cero. Consideremos el producto reducido como espacio cociente sin aplicar el funtor k-ificación. Entonces tenemos el siguiente contraejemplo a la asociatividad del producto reducido en $\mathscr{T}\!op_*$.

Teorema 5.1.4 *En* $\mathscr{T}\!op_*$, $(\mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q}) \wedge \mathbb{N}$ *no es homeomorfo a* $\mathbb{Q} \wedge (\mathbb{Q} \wedge \mathbb{N})$.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \arrow[dl, "1\times p'"'] \arrow[dd, "q"] \arrow[dr, "p\times 1"] & \\
\mathbb{Q} \times (\mathbb{Q} \wedge \mathbb{N}) \arrow[d, "f"'] & & (\mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q}) \times \mathbb{N} \arrow[d, "h"] \\
\mathbb{Q} \wedge (\mathbb{Q} \wedge \mathbb{N}) & \mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q} \wedge \mathbb{N} \arrow[l, "g"'] \arrow[r, "\cong"] & (\mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q}) \wedge \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

Aquí $\mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q} \wedge \mathbb{N}$ denota evidentemente el espacio cociente de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{N}$. Las aplicaciones p, p', q, f y h son identificaciones. Puesto que $\mathbb{N}$ es localmente compacto, luego $p \times 1$ es también una identificación, así $h \circ (p \times 1)$ también lo es. La propiedad universal de los espacios cocientes nos da el homeomorfismo

$\mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q} \wedge \mathbb{N} \cong (\mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q}) \wedge \mathbb{N}$. Como $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto, $1 \times p'$ no es necesariamente una identificación, de hecho no lo es. La aplicación g es una biyección continua dada por la propiedad universal de la identificación q, y afirmamos que g no es un homeomorfismo. Para probar esto, exhibiremos un subconjunto abierto de $\mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q} \wedge \mathbb{N}$ cuya imagen bajo g no es abierto.

Sea $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $0 < \beta < 1$, y sea $\gamma = (1-\beta)/2$. Definamos $V'(\beta)$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como la unión de los siguientes cuatro conjuntos:

1) La vecindad abierta de radio β centrada en el origen.

2) Los tubos $[1,\infty)\times(-\gamma,\gamma)$, $(-\infty,1]\times(-\gamma,\gamma)$, $(-\gamma,\gamma)\times[1,\infty)$ y $(-\gamma,\gamma)\times(-\infty,1]$.

3) Las vecindades abiertas de radio γ centradas en los cuatro puntos $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$.

4) Para cada $n \geq 1$, la vecindad abierta de radio $\gamma/2^n$ centrada en los cuatro puntos $(\pm\gamma_n, 0)$, $(0, \pm\gamma_n)$, donde $\gamma_n = 1 - \sum_{k=0}^{k=n-1} \gamma/2^k$.

Definamos $V(\beta) = V'(\beta) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$. Notemos que los únicos puntos de los ejes coordenados de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ que no estan en $V'(\beta)$ son $(\pm\beta, 0)$ y $(0, \pm\beta)$. Puesto que β es irracional, $V(\beta)$ contiene a los ejes coordenados de $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$. Como los radios de las vecindades en la sucesión son decresientes, para cada $\varepsilon > \beta$, no existe ningun $\delta > 0$ tal que $((-\varepsilon,\varepsilon) \times (-\delta,\delta)) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ este contenido en $V(\beta)$.

Ahora sea α un número irracional, $0 < \alpha < 1$. Sea $\bullet$ el punto básico de $\mathbb{Q} \wedge \mathbb{N}$ y $\star$ el punto básico de $\mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q} \wedge \mathbb{N}$. Sea U la unión de $\{\star\}$ y la imagen bajo q de $\bigcup_{n\geq 1} V(\alpha/n) \times \{n\}$. Este es un subespacio abierto de $\mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q} \wedge \mathbb{N}$ ya que:

$$q^{-1}(U) = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \{0\} \cup (\bigcup_{n\geq 1} V(\alpha/n) \times \{n\})$$

es un subconjunto abierto de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{N}$. Luego afirmamos que $g(U)$ no es abierto en $\mathbb{Q} \wedge (\mathbb{Q} \wedge \mathbb{N})$. Supongamos que $g(U)$ es abierto. Entonces $f^{-1}(g(U)) = (id \times p')(q^{-1}(U))$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{Q} \times (\mathbb{Q} \wedge \mathbb{N})$, así este contiene una vecindad abierta V de $(0, \bullet)$. Ahora V debe contener a $((-\varepsilon,\varepsilon) \cap \mathbb{Q}) \times W$ para alguna $\varepsilon > 0$ y alguna vecindad abierta W de $\bullet$ en $\mathbb{Q} \wedge \mathbb{N}$. Ya que $\mathbb{Q} \wedge \mathbb{N}$ es homeomorfo a la suma reducida para $n \geq 1$ de los espacios $\mathbb{Q} \times \{n\}$, W debe contener a la suma reducida para $n \geq 1$ de los subconjuntos $((-\delta_n, \delta_n) \cap \mathbb{Q}) \times \{n\}$, donde $\delta_n > 0$. Por definición de U, esto implica que:

$$((-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\delta_n, \delta_n)) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \subset V(\alpha/n).$$

Más aún, para n suficientemente grande, tal que $\varepsilon > \alpha/n$, no existe δ_n para la cual se cumpla, lo cual contradice el hecho de $g(U)$ es abierto en $\mathbb{Q} \wedge (\mathbb{Q} \wedge \mathbb{N})$. Por lo tanto g no es un homeomorfismo. $\square$

Observación 5.1.5 *La asociatividad se cumple en $\mathscr{T}\!op_*$ para espacios bien punteados, es decir, espacios $(X, *) \in$ ob $\mathscr{T}\!op_*$, para los cuales el encaje $* \hookrightarrow X$ es una cofibración.*

Contrario a lo que sucede en $\mathscr{T}\!op_*$, en $\mathscr{K}_*$ tenemos lo siguiente, lo que prueba la asociatividad del producto reducido en esta categoría.

Proposición 5.1.6 *Sea Γ la unión ajena de A y B. Entonces existe un homeomorfismo natural:*

$$(\bigwedge_{\alpha \in A} X_\alpha) \wedge (\bigwedge_{\beta \in B} X_\beta) \cong \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma.$$

en $\mathscr{K}_*$.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f"'] & (\prod_{\alpha \in A} X_\alpha) \times_k (\prod_{\beta \in B} X_\beta) \arrow[r, "p \times_k q"] & (\bigwedge_{\alpha \in A} X_\alpha) \times_k (\bigwedge_{\beta \in B} X_\beta) \arrow[d, "g"] \\
\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \arrow[rr, "h"] & & (\bigwedge_{\alpha \in A} X_\alpha) \wedge (\bigwedge_{\beta \in B} X_\beta)
\end{tikzcd}$$

Aqui f, g, p y q son identificaciones y h es la biyección que hace conmutar el diagrama. Puesto que f y $g \circ (p \times_k q)$ son identificaciones por estar en $\mathscr{K}_*$, luego h es un homeomorfismo. $\square$

Definición 5.1.7 *Para un producto $\odot$ en una categoría $\mathscr{C}$ y un bifuntor covariante $\odot : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$. Decimos que el producto es asociativo, si existe una transformación natural invertible:*

$$\varphi : \odot(1 \times \odot) \longrightarrow \odot(\odot \times 1)$$

es decir, si $\odot(1 \times \odot) \approx \odot(\odot \times 1) : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$.

Como una consecuencia inmediata de la proposición anterior tenemos que:

Corolario 5.1.8 *El funtor* $- \wedge - : \mathscr{K}_* \times \mathscr{K}_* \longrightarrow \mathscr{K}_*$ *es asociativo.* □

Hay que resaltar hasta aquí que el producto reducido $X \wedge Y$ no es un producto en $\mathscr{T}\!op_*$ en el sentido categórico, es decir, no tiene la universalidad que el producto topológico tiene en $\mathscr{T}\!op$. Es bien conocido que el producto topológico no tiene adjunto derecho en $\mathscr{T}\!op_*$ [Awodey [2]]. El producto topológico es el producto en $\mathscr{T}\!op_*$, así como lo es en $\mathscr{T}\!op$, y existe una biyección $\mathscr{T}\!op_*(X, Y \times Z) \simeq \mathscr{T}\!op_*(X, Y) \times \mathscr{T}\!op_*(X, Z)$, pero el homeomorfismo $\mathscr{T}_*(X, Y \times Z) \cong \mathscr{T}_*(X, Y) \times \mathscr{T}_*(X, Z)$ no siempre se cumple. En $\mathscr{T}\!op_*$ la biyección exponencial $\mathscr{T}\!op_*(X, Y \wedge Z) \cong \mathscr{T}\!op_*(X, \mathscr{T}_*(Y, Z))$ tampoco se cumple siempre.

Al igual que para la categoría de k-espacios $\mathscr{K}$ con el producto retopologizado, como para la categoría $\mathscr{K}_*$ con el producto reducido aplicando el funtor k-ificación, tenemos una versión de la ley exponencial. Hasta aquí podemos decir que el producto reducido en $\mathscr{K}_*$ es asociativo, conmutativo y que $\wedge$ y $\mathscr{K}_*(-,-)$ estan relacionados por la siguiente adjunción. Consideremos $\mathscr{K}_*(X, Y)$ como un subconjunto de $\mathscr{K}(X, Y)$ que olvida el punto base, y definimos:

$$\mathscr{K}_*(X, Y) = \mathscr{K}_*(X, Y)_k \subseteq \mathscr{K}(X, Y).$$

El punto base de $\mathscr{K}_{*t}(X, Y)$ es el natural, es decir, la aplicación constante (la aplicación que manda a X en $*_Y$).

Teorema 5.1.9 *(* **Ley exponencial en** $\mathscr{K}_*$ *). Los funtores* $- \wedge X$ *y* $\mathscr{K}_*(X, -)$ *son adjuntos, es decir, existe un homeomorfismo natural:*

$$\mathscr{K}_*(X, \mathscr{K}_*(Y, Z)) \cong \mathscr{K}_*(X \wedge Y, Z).$$

Demostración. Definamos $\hat{\epsilon}_{X,Y} : \mathscr{K}_*(X, Y) \wedge X \longrightarrow Y$ la función evaluación dada por el producto reducido, es decir, $\hat{\epsilon}(\varphi \wedge x) = \varphi(x)$. Ésta es continua, puesto que se obtiene de $\epsilon_{X,Y} : \mathscr{K}(X, Y) \times_k X \longrightarrow Y$ vía la restricción $\epsilon_1 : \mathscr{K}_*(X, Y) \times_k X \longrightarrow Y$, lo cual se sigue de la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{K}_*(X, Y) \times_k X \arrow[r, "i \times_k 1_X"] \arrow[d, "p"] & \mathscr{K}(X, Y) \times_k X \arrow[d, "\epsilon_{X,Y}"] \\
\mathscr{K}_*(X, Y) \wedge X \arrow[r, "\hat{\epsilon}_{X,Y}"] & Y
\end{tikzcd}$$

donde p es la identificación e i la inclusión.

Sea $f : Z \wedge X \longrightarrow Y$ una aplicación $\mathscr{K}_*$ y consideremos la identificación $q : Z \times_k X \longrightarrow Z \wedge X$ dada por el producto reducido. La composición $f \circ q$ tiene un adjunto $r : Z \longrightarrow \mathscr{K}(X,Y)$, el cual nos da la evaluación $\epsilon_{X,Y} : \mathscr{K}(X,Y) \times_k X \longrightarrow Y$, al que podemos factorizar como:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "g"'] & & \mathscr{K}(X,Y) \\ & \mathscr{K}_*(X,Y) \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

puesto que r es continua, luego por la proposición 2.3.2, g es continua. Y definimos a g como el adjunto de f en la categoría $\mathscr{K}_*$. Así obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Z \wedge X \arrow[d, "g \wedge 1_X"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathscr{K}_*(X,Y) \wedge X \arrow[r, "\hat{\epsilon}_{X,Y}"'] & Y \end{tikzcd}$$

que por definición conmuta y g es la única aplicación que satisface $\hat{\epsilon}_{X,Y} \circ (g \wedge 1_X) = f$. De esta manera, el resultado se sigue inmediatamente. $\square$

La nesecidad del funtor k es ilustrada por la no-asociatividad del producto reducido. Como caso particular, para $Y = \mathbb{S}^1$ se tiene que los funtores Σ y Ω, suspensión y espacio de lazos respectivamente, son adjuntos como funtores en $\mathscr{K}_*$, $\Omega, \Sigma : \mathscr{K}_* \longrightarrow \mathscr{K}_*$, donde:

$$\Sigma X = X \wedge \mathbb{S}^1 \qquad \text{y} \qquad \Omega X = X^{(\mathbb{S}^1,*)}.$$

Podemos dar una buena cantidad de consecuencias de lo que hemos hecho hasta aquí. Pero, haremos mención de una en particular.

Teorema 5.1.10 *El funtor $X \wedge - : \mathscr{K}_* \longrightarrow \mathscr{K}_*$ conserva colímites.*

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata del teorema anterior. Pero, aquí daremos una demostración alternativa dada por la adjunción del teorema anterior. Puesto que:

$$\begin{aligned}
\mathscr{K}_*(X \wedge \operatorname{colim}\ Y_\alpha, Z) &= \mathscr{K}_*(X, \mathscr{K}_*(\operatorname{colim}\ Y_\alpha, Z)) \\
&= \mathscr{K}_*(X, \lim\ \mathscr{K}_*(Y_\alpha, Z)) \\
&= \lim\ \mathscr{K}_*(X, \mathscr{K}_*(Y_\alpha, Z)) \\
&= \lim\ \mathscr{K}_*(X \wedge Y_\alpha, Z) \\
&= \mathscr{K}_*(\operatorname{colim}\ (X, Y_\alpha), Z).
\end{aligned}$$

Así resulta que $X \wedge \operatorname{colim}\ Y_\alpha \cong \operatorname{colim}\ (X \wedge Y_\alpha)$. Por lo tanto, el funtor $X \wedge - : \mathscr{K}_* \longrightarrow \mathscr{K}_*$ conserva colímites. $\square$

Usando el resultado anterior, junto con los conceptos de suma reducida e identificaciones, se prueban los siguientes resultados: Si $X \in \operatorname{ob} \mathscr{K}_*$, el funtor $X \wedge - : \mathscr{K}_* \longrightarrow \mathscr{K}_*$ conserva sumas reducidas e identificaciones. El siguiente resultado es inmediato de estas observaciones, ya que la suma reducida es un coproducto en la categoría $\mathscr{K}_*$. Es decir, el funtor $X \wedge -$ conmuta con colímites.

Corolario 5.1.11 *Existe un homeomorfismo natural basado:*

$$X \wedge (\bigvee_{\alpha \in A} Y_\alpha) \cong \bigvee_{\alpha \in A} (X \wedge Y_\alpha).$$

donde $\bigvee_{\alpha \in A} Y_\alpha$ *es la suma reducida de la familia* $Y_\alpha, \alpha \in A$.

Demostración. Se sigue del hecho de que el funtor $X \wedge - : \mathscr{K}_* \longrightarrow \mathscr{K}_*$ conmuta con colímites. $\square$

5.2. Exponenciables en $\mathscr{T}\!op_*$

Podemos considerar nuevamente en $\mathscr{T}\!op_*$, al endofuntor $- \wedge (X, x_0)$ y preguntarnos cuándo éste tiene un adjunto derecho. Lo que probaremos ahora es que los espacios (X, x_0) para los cuales el funtor $- \wedge (X, x_0)$ tiene adjunto derecho son exactamente los espacios X que son exponenciables en $\mathscr{T}\!op$, independientemente de la elección de x_0. Para ello daremos una demostración similar a 5.1.9.

Teorema 5.2.1 *Si X es exponenciable en $\mathscr{T}\!op$, entonces el funtor $-\wedge(X, x_0)$ tiene adjunto derecho en $\mathscr{T}\!op_*$, para cualquier $x_0 \in X$ como punto básico.*

Demostración. Supongamos que X es exponenciable en $\mathscr{T}\!op$ y consideremos cualquier espacio topológico Y; sea $\epsilon : \mathscr{T}(X,Y) \times X \longrightarrow Y$ la función evaluación. Consideremos en $\mathscr{T}(X,Y)$ el subespacio $\mathscr{T}_*(X,Y)$ y la restricción ϵ_1 de ϵ a $\mathscr{T}_*(X,Y) \times X$ la cual es una aplicación en $\mathscr{T}\!op_*$, es decir $\epsilon_1 : \mathscr{T}_*(X,Y) \times X \longrightarrow Y$. La aplicación ϵ_1 es compatible con la identificación en la definición del producto reducido y, luego podemos considerar la función evaluación $\hat{\epsilon} : \mathscr{T}_*(X,Y) \wedge X \longrightarrow Y$ inducida por ϵ_1.

Sea $f : Z \wedge X \longrightarrow Y$ una aplicación en $\mathscr{T}\!op_*$ y consideremos la identificación $p : Z \times X \longrightarrow Z \wedge X$ dada por el producto reducido. Puesto que X es exponenciable en $\mathscr{T}\!op$, y como $f \circ p : Z \times X \longrightarrow Y$ existe una aplicación $\widehat{f \circ p} : Z \longrightarrow \mathscr{T}(X,Y)$ en $\mathscr{T}\!op$ tal que $\epsilon(\widehat{f \circ p} \times 1_X) = f \circ p$. La aplicación $\widehat{f \circ p}$ conserva el punto básico y sus imagenes son subespacios de $\mathscr{T}_*(X,Y)$, luego podemos factorizar a $\widehat{f \circ p}$ a través de la inclusión de $\mathscr{T}_*(X,Y)$ en $\mathscr{T}(X,Y)$ y consideremos el factor h como una aplicación en $\mathscr{T}\!op_*$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, "\widehat{f\circ p}"] \arrow[dr, "h"'] & & \mathscr{T}(X,Y) \\
& \mathscr{T}_*(X,Y) \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

De manera que obtenemos $h \wedge 1_X : Z \wedge X \longrightarrow \mathscr{T}_*(X,Y) \wedge X$. Por construcción, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z \wedge X \arrow[d, "h\wedge 1_X"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathscr{T}_*(X,Y) \wedge X \arrow[r, "\hat{\epsilon}"'] & Y
\end{tikzcd}$$

conmuta y, esto quiere decir que el funtor $- \wedge X$ admite adjunto derecho en $\mathscr{T}\!op_*$. $\square$

Bibliografía

[1] M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto, *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*, UTX, Springer-Verlag. 2002.

[2] S. Awodey, *Category Theory*, Oxford University Press. 2006.

[3] S. P. Franklin, "Spaces in wich sequences suffice", *Fund. Math.* **57**, 107-105 (1965). II *Fund. Math* **61**, 51-56 (1967).

[4] J. P. May, J. Sigurdsson, *Parametrized Homotopy Theory*, American Mathematical Society, Providence, RI. 2006.

[5] M. C. McCord, "Classifying spaces and infinite symmetric products", *Trans. Amer. Math. Soc.* **146** (1969). 273-298.

[6] R. A. Piccinini, *Lectures on Homotopy Theory*, Mathematics Studies, North-Holland. 1992.

[7] C. Prieto, *Topología básica*, Fondo de Cultura Económica. 2003.

[8] N. E. Steenrod, "A Convenient Category of Topological Spaces", *Mich. Math. J.*, **14** (1967), 133-152.

[9] R. Vázquez, "Espacios funcionales y funtores adjuntos", I y II., *An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma de México*, **6,7** (1966, 1967) 7-46, 65-82.

[10] R. M. Vogt, "Convenient Categories of Topological Spaces for Homotopy Theory", *Archiv der Math.*, **22** (1971), 545-555.

Índice alfabético