



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

ILUMINACIÓN CON K MODEMS

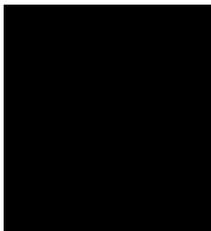
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

ANDRÉS JACINTO RUIZ VARGAS



**DIRECTORES DE TESIS:
DR. JORGE URRUTIA GALICIA
DR. RUY FABILA MONROY**

2009



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Mayra D. Bermudez Contreras

Agradecimientos

Agradecer a todos y a todo lo que merece ser agradecido sería un trabajo muy tedioso, me limitaré a mencionar a las personas que contribuyeron directamente a esta tesis.

Antes que nada, me gustaría agradecerles a mis asesores de tesis al Dr. Jorge Urrutia y al Dr. Ruy Fabila por todo el apoyo y tiempo que me dedicaron al dirigirme esta tesis.

Recordando como fue que acabe haciendo esta tesis, me da gusto poder agradecer a Isabel Urrutia: por haberme llevado a la clase de Jorge, animado a hacer mi tesis con el y por su valiosa amistad. Ya hablando de amistad, quisiera agradecer a todos mis amigos, los cuales me soportaron, apoyaron, y alegraron la vida, sin ellos no hubiera acabado o bien me hubiera vuelto loco. En particular agradezco a mis mejores amigos de la facultad, sin ellos los malos momentos no se hubieran convertido en buenos momentos, gracias: Pancho, Andrés, Jaz y May. Agradezco a mis demás amigos que por una u otra razón no frecuento tanto como quisiera, los tengo presente con cariño, y espero que nos sigamos llevando al pasar los años, sin que nos separe más de lo necesario la distancia o el tiempo, gracias: Diana, Pau, Gus, Pani, Velvet, la Tocalla, Eduardo, Adolfo, Marini, el Cubano, Heiblum, el Gordo, el Baeza, Alex, y David. Me disculpo por cualquier olvido. Una vez más quisiera volver a agradecerles a todos mis amigos, que les estoy más agradecido que lo que usualmente dejo ver.

Tinta y papel se las debo a mi Papá y mi Mamá, los cuales siempre me han apoyado, escuchado y dado todo lo necesario. Mis hermanos han hecho también su parte, Samuel y Sofía.

Agradezco también a mis Sinodales, David Flores, Jose Galaviz y Juan Jose Montellano, por sus importantes correcciones, y por haberlas hecho en tan poco tiempo. Me disculpo por estos parrafos no alineados, tienen un sentido no mostrado.

Índice general

1. Introducción	7
2. Iluminación	9
2.1. Dos teoremas de Galerías de Arte e Iluminación	9
2.1.1. Galería de Arte de Chvátal	9
2.1.2. Galerías de Arte tradicionales	11
2.2. Vigilando polígonos ortogonales	13
2.3. La fortaleza	15
2.3.1. Polígonos generales	15
2.3.2. Polígonos ortogonales	17
2.3.3. Guardias en el plano	19
2.4. El problema de la cárcel	24
2.4.1. Guardias Móviles	25
3. Iluminación con k-modems	27
3.1. Introducción	27
3.2. Polígonos Monótonos	28
3.3. Polígonos monótonos ortogonales	32
4. Arreglos de Líneas	37
4.1. Líneas	37
4.1.1. Propiedades básicas	37
4.2. Dualidad	39
5. Iluminación de arreglos de líneas con k-modems	41
5.1. Introducción	41
5.2. Interpretaciones en el dual y primal	46
5.2.1. Punto central (centerpoint)	46
5.2.2. Distancia entre dos rectas	47
5.2.3. Las tres líneas concurrentes	47
5.3. Cara central para arreglos de líneas	49

5.3.1. El bisector de dos caras	49
5.3.2. Cara central	64
5.4. Iluminación con dos k-modems	68
5.5. Conclusiones	71

Capítulo 1

Introducción

Los problemas de iluminación han sido populares en las matemáticas discretas por algún tiempo [O'R87] [Urr00]. Se hicieron conjeturas en los cincuentas, que no fueron demostradas hasta los ochenta; como ejemplo de estas están las siguientes dos preguntas postuladas por Ernst Strauss [Tok69] en 1969. La primera de ellas, fue probada falsa con relativa facilidad y usando únicamente conceptos básicos de geometría por G.T. Tokarsky [Kle95]. La segunda pregunta sigue abierta, se espera que su respuesta, así como la de Tokarsky, sea simple y bonita. Supongamos que vivimos en un cuarto de dos dimensiones, cuyas paredes son espejos que forman un polígono simple P :

- ¿Será cierto que si ponemos una lámpara en algún punto de P , todo P será iluminado ya sea con rayos directos, o reflejos de rayos?
En caso de que la respuesta a esta pregunta sea negativa:
- ¿Existirá siempre un punto en P tal que si ponemos una lámpara ahí, todo P será iluminado?

Aunque en el fondo estas preguntas se encuentran en alguno de los caminos sinuosos que ha recorrido la matemática para pasar por esta tesis, ya sea silenciosamente por su tangente o de alguna otra manera más substancial, la siguiente pregunta, hecha por Victor Klee en una conferencia en Stanford en agosto de 1976, es un progenitor más claro de este trabajo. Es impresionante que siendo una pregunta tan sencilla, nadie la hubiera formulado antes:

¿Cuántos guardias son suficientes para vigilar cualquier polígono con n vértices?

Al poco tiempo, V. Chvátal dió una respuesta completa: $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ son suficientes, y a veces necesarios para vigilar el polígono [Chv75]; con ello abrió las puertas a los problemas de galería de arte, motivando también los problemas de iluminación en general. Cabe decirse que a pesar de que en general estos problemas pueden ser explicados a un niño de primaria, muchos yacen sin respuesta, y conforme se responden algunos, se crean otros.

En el capítulo 2, Iluminación, empezamos demostrando la respuesta de V. Chvátal, luego continuamos con el estudio de como iluminar o vigilar distintos tipos de polígonos.

También estudiamos como cambian los resultados al cambiarle los requisitos a las fuentes de luz (o guardias), ya sea restringiendo las fuentes de luz a ser posicionados en vértices, o en cualquier lugar del plano. También vemos varios problemas en los que buscamos iluminar el exterior de un polígono, o como en el problema de la cárcel iluminamos tanto el interior como el exterior de un polígono. Se han dado muchos resultados en este tipo de problemas, presentamos aquí resultados simples, en el sentido de que son fáciles de explicar y demostrar, más no obstante, dichos resultados fueron en su momento un gran mérito para los autores. Ejemplo de esto es la respuesta de V. Chavatal a la pregunta ¿Cuántos guardias son suficientes para vigilar cualquier polígono con n vértices?, ya que su demostración fue complicada, no obstante la demostración que presentamos debida a S. Fisk [Fis78] es simple y elegante.

Continuamos nuestro estudio de problemas de Iluminación en el capítulo 3, Iluminación con k -modems [AAH⁺09] [FMVU09] [AFMFP⁺09], presentamos el concepto de k -modem, que en realidad es una fuente de luz capaz de atravesar k paredes, o un guardia capaz de ver a través de k paredes. Estudiamos algunos resultados de k -modems en polígonos monótonos.

Antes de llegar a los resultados de esta tesis, hacemos una pausa para familiarizar al lector con los arreglos de líneas y el concepto de Dualidad en el capítulo 4, Arreglos de Líneas. Introducimos cosas muy básicas, como la cantidad de caras en un arreglo de líneas simple, un poco de notación, y algunas demostraciones.

Culminamos con el capítulo 5, Iluminación de arreglos de líneas con k modems, en donde presentamos la cara central de un arreglo de líneas, una cara a no más de $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ de distancia de cualquier otra cara, donde la distancia la definimos como la cantidad de líneas que se tienen que cruzar para ir de una cara a otra. De esta forma logramos iluminar un arreglo de líneas con un k modem de potencia $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Iluminamos también el plano con $2k$ modems de potencia $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, y demostramos que si dichos k modems tuvieran menor potencia, no podríamos iluminar todo el plano con ellos.

Capítulo 2

Iluminación

En este capítulo daremos un panorama de lo que han sido los problemas de galerías de arte, mencionando y demostrando, cuando el espacio nos lo permita, los resultados más bonitos en mi humilde opinión. Con el fin de que el lector pueda apreciar los problemas de galería de arte y sus derivados, comenzaremos con tres resultados clásicos.

2.1. Dos teoremas de Galerías de Arte e Iluminación

2.1.1. Galería de Arte de Chvátal

Empezaremos con el problema clásico de galerías de arte, el progenitor de todos ellos, y con esto el antepasado más lejano pero aun directamente relacionado a esta tesis. Antes, como es de esperarse, regalamos unas definiciones.

Definición 1. *Un polígono P es un sucesión de puntos distintos p_1, p_2, \dots, p_n ($n \geq 3$) en el plano, llamados los vértices de P , junto con un conjunto de segmentos de recta uniendo p_i con p_{i+1} ($i = 1, \dots, n - 1$) y p_n con p_1 , llamadas las aristas de P .*

Decimos que P es un *polígono simple* si la intersección de cualesquiera dos aristas no consecutivas es vacía, y cualesquiera dos aristas consecutivas viven en rectas distintas. En general se trabaja con polígono simples por lo que se usa polígono en general, para referirse a polígonos simples. Nosotros haremos lo mismo y de ahora en adelante usaremos polígono para referirnos a un polígono simple.

Un polígono simple divide al plano en dos regiones conexas, a la región acotada la llamamos el *interior del polígono*, llamamos el *exterior del polígono* a la región no acotada, y *frontera* a los puntos sobre las aristas de P . Decimos que un punto esta sobre P si esta sobre su frontera o en su interior.

Decimos que un polígono es *monótono* si existe una dirección tal que cualquier recta paralela a esta dirección intersecta la frontera del polígono en a lo más dos puntos.

En este capítulo representaremos nuestro mundo en dos dimensiones, de esta forma podemos representar una galería de arte con un polígono, nuestro propósito será el de vigilar polígonos con guardias, o lo que es lo mismo, iluminar polígonos con fuentes de luz. Decimos que un punto x en P está vigilado (iluminado) por un guardia (foco o fuente de luz) posicionado en y sobre P , si el segmento de recta que los une \overline{xy} no intersecta en su interior a la frontera de P , es decir si todos los puntos en \overline{xy} están en el interior de P , con la posible excepción de x y y . Usaremos distintos tipos de guardias, llamamos guardias *estacionarios* a aquellos que, como su nombre otorga, no se pueden mover. Entre estos, se destacan los guardias de *vértice*, aquellos guardias estacionarios, posicionados sobre algún vértice del polígono.

Definición 2. Sea P un polígono en el plano, decimos que e es una diagonal de P si

- es un segmento de recta con puntos finales en vértices de P ,
- esta contenida en P ,
- no es una arista de P .

Definición 3. Definimos una gráfica G como un conjunto de elementos V llamados vértices, y un conjunto de parejas de vértices, llamadas aristas.

Decimos que dos vértices de una gráfica son adyacentes si existe una arista entre ellos. El *grado* de cada vértice será el número de aristas que lo contienen. Llamamos *apareamiento* a un subconjunto del conjunto de aristas, tal que en dicho subconjunto no existan dos aristas que contengan el mismo vértice, denotando al caso en el que todos los vértices pertenecen a alguna arista del apareamiento como un apareamiento *perfecto*.

Definición 4. Una triangulación T de un polígono P es un conjunto maximal de diagonales de P con interiores ajenos.

Es un resultado simple que cualquier polígono con al menos 4 vértices tiene una diagonal, de donde si T no dividiera a P en triángulos, entonces existiría una diagonal d de P que tal que no intersecta en su interior a las diagonales de T , haciendo una contradicción, de donde toda triangulación T divide a P en triángulos. Definimos $G(T)$ la *gráfica dual* de T de la siguiente manera: $G(T)$ es una gráfica que tiene un vértice por cada triángulo en el que T divide a P , y dados $a, b \in T$ existirá una arista entre ellos (ie. $a \sim b$) si y sólo si sus triángulos correspondientes comparten una arista. Es un resultado conocido que para cualquier triangulación de un polígono, si vemos a la triangulación como una gráfica, entonces podemos 3 colorear dicha gráfica. Sin más definiciones por el momento procedemos al primer teorema, presentamos la demostración de S. Fisk [Fis78], la cual opaco la demostración original de Chvátal.

Teorema 1. $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias estacionarios son suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar una galería de arte poligonal con n vértices.

Demostración. Sea P un polígono simple con n vértices. Sea T una triangulación de este. Como mencionamos anteriormente podemos colorear los vértices de P usando tres colores $\{1, 2, 3\}$ de tal manera que si dos vértices son adyacentes en T , entonces tendrán colores distintos. Esto particiona a los vértices de P en tres clases crómicas C_1, C_2, C_3 . Como los vértices de cualquier triángulo en T tendrán los 3 colores, entonces cualquiera de las clases cromáticas vigila a P . Como tenemos 3 clases cromáticas, la más chica de ellas tendrá a lo más $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ vértices, pongamos un guardia en cada vértice de dicha clase cromática, esto nos implica la suficiencia. Para ver que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias son necesarios ocasionalmente fijemonos en el polígono con forma de peine $Comb_m$ con $n = 3m$ vértices (Figura 2.1). Como cada triángulo necesita un guardia para quedar vigilado, es claro que se necesitan al menos m guardias para vigilar $Comb_m$, el caso cuando $n = 3m + 1$ o $n = 3m + 2$ se sigue de agregar una o dos aristas que esencialmente no cambien el dibujo. □

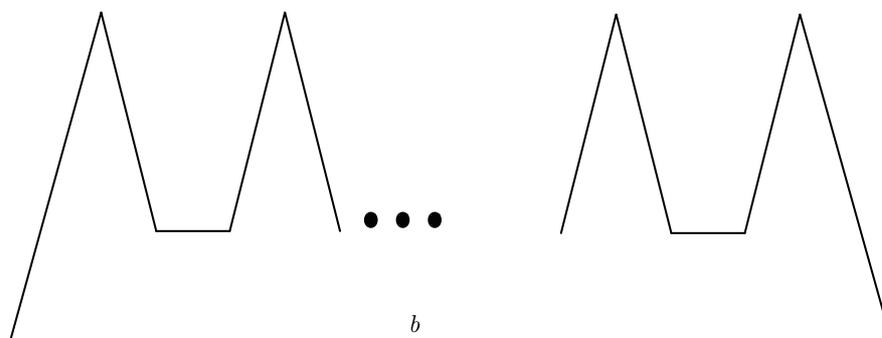


Figura 2.1: Polígono que necesita $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias.

2.1.2. Galerías de Arte tradicionales

En el teorema de la Galería de Arte clásico (es decir el de Chvátal), una Galería de Arte es un polígono simple en el plano. En un contexto más realista, o bien menos imaginario, supongamos que una galería de arte tradicional se encuentra en un edificio rectangular dividido en cuartos rectangulares, y que cualesquiera dos cuartos adyacentes tienen una puerta que los conecta. (Véase Figura 2.2). Decimos que Q representa una *galería de arte tradicional* si Q es un rectángulo dividido en subrectángulos.

¿Cuántos guardias se necesitan para vigilar todos los cuartos? Notemos que si un guardia está en una puerta, entonces podrá vigilar dos cuartos al mismo tiempo. Como ningún guardia puede vigilar tres cuartos se sigue que si la galería de arte tiene n cuartos entonces necesitamos al menos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ guardias. Ahora probaremos, que estos siempre son suficientes.

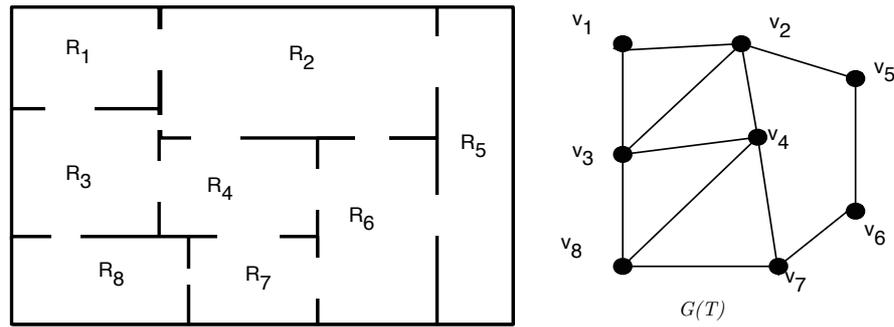


Figura 2.2: Galería tradicional y su gráfica dual.

Teorema 2. [CRCS⁺94] *Cualquier galería de arte rectangular con n cuartos puede ser vigilada con exactamente $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ guardias.*

Demostración. Dada una galería de arte rectangular cualquiera T con cuartos R_1, R_2, \dots, R_n podemos asociar a ella la gráfica dual $G(T)$ en la cual cada cuarto R_i de T queda representado como un vértice v_i de $G(T)$, y las adyacencias entre los vértices representan si sus rectángulos correspondientes comparten pared.

Probaremos que si $G(T)$ tiene un número par de vértices, entonces $G(T)$ tendrá un apareamiento perfecto M . Esto es suficiente para probar el teorema ya que podemos poner los guardias de la siguiente manera: para cada arista $\{v_i, v_j\}$ en M ponemos un guardia en la puerta que conecta a los cuartos R_i y R_j . Claramente serán $\frac{n}{2}$ guardias, y estos vigilarán todos los cuartos de T . Si fueran una cantidad impar de cuartos, dividase uno de ellos en dos, y con el mismo argumento, vigilarémos la galería de arte con $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ guardias. Supongamos que $G(T)$ tiene un número par de vértices.

Para probar que $G(T)$ tiene un apareamiento perfecto nos fijaremos en que cumple las hipótesis del teorema de Tutte para la existencia de un apareamiento perfecto: que para cualquier conjunto S de vértices de $G(T)$, el número de componentes impares (componentes con un número impar de vértices) de $G(T) - S$ no es mayor que $|S|$. Sea k el número de componentes conexas de $G(T) - S$. Cada componente conexa C_i de $G(T) - S$ se puede ver como un subpolígono ortogonal P_i de T . Cada uno de estos polígonos tiene al menos 4 esquinas, por lo tanto el número de esquinas generadas por las k componentes de $G(T) - S$ es al menos $4k$.

$G(T) - S$ lo podemos imaginar como la galería de arte T , con la peculiaridad de que los cuartos que estén representados por vértices en S están cerrados. Observemos que si uno de los cuartos cerrados, lo abrimos, entonces a lo más 4 esquinas, de las generadas por las componentes conexas, desaparecerán.

Si abriéramos todos los cuartos, todas las esquinas desaparecerían, a excepción de las 4 esquinas de T . Entonces al abrir $|S|$ cuartos desaparecen a lo más $4|S|$ esquinas, como

teníamos al menos $4k$ esquinas, y tienen que desaparecer $4k - 4$ esquinas se concluye que

$$4k - 4 \leq 4|S| \Rightarrow k \leq |S| + 1.$$

Ahora, para finalizar la prueba, probaremos por inducción que si $k = |S| + 1$ entonces al menos una de las componentes será par.

Si $k = 1$ tendremos una sola componente conexa, es decir todo. Y como supusimos que teníamos un número par de vértices, queda probada la base de la inducción.

Supongamos que el resultado es cierto para $k \leq n$. Sea $k = |S| + 1$, y supongamos que $k = n + 1$. Por las observaciones previas, esta igualdad se da únicamente cuando cada vez que se abra un cuarto desaparezcan 4 esquinas. Esto quiere decir que si tuviéramos abiertos todos los cuartos de S a excepción de uno R_i , tendríamos 8 esquinas, y al abrir este último desaparecerán 4 de estas. Es fácil ver, que la única manera de que esto suceda, es que R_i cubra el largo o ancho de toda nuestra galería. Por lo tanto si C_1, C_2 son las dos componentes conexas antes de abrir R_i , al ser completamente rectangulares, las podemos ver como galerías de arte rectangulares por si mismas. Y como el número de cuartos era par, entonces o C_1 o C_2 tendrá un número par de cuartos. Sean S_1, S_2 los cuartos de S en C_1 y C_2 respectivamente y k_1, k_2 el número de componentes conexas en C_1, C_2 respectivamente. Entonces $|S| + 1 = k = k_1 + k_2$ y por lo probado anteriormente $k_1 \leq |S_1| + 1, k_2 \leq |S_2| + 1$ (recordemos que para este resultado no usamos la paridad de la galería y por ello puede ser aplicado tanto a C_1 como a C_2), por lo tanto $k \leq |S_1| + 1 + |S_2| + 1 = |S| + 1$ y como esta igualdad se da, entonces $k_1 = |S_1| + 1, k_2 = |S_2| + 1$. Como $k_1, k_2 < k = n + 1$ el resultado se sigue aplicando la hipótesis de de inducción sobre C_1 o bien sobre C_2 (la que tenga una cantidad par de cuartos). \square

2.2. Vigilando polígonos ortogonales

Seguiremos por el resto de éste capítulo la exposición de O'Rourke en su libro *Teoremas y Algoritmos de Galerías de Arte*[O'R87]. Si nos fijamos en polígonos con ciertas propiedades, podemos mejorar las cotas. Este es el caso de los polígonos ortogonales.

Definición 5. Sea P un polígono, decimos que es ortogonal si todas sus aristas son u horizontales o verticales

Se ha trabajado mucho en problemas de iluminación de polígonos ortogonales, en parte porque la mayoría de las galerías de arte en la vida real son ortogonales, lo cual hace que sean mejor modelo para aplicar resultados. Desde un punto de vista matemático, la estructura de los polígonos ortogonales nos permite encontrar resultados no solo interesantes sino también estéticos. El teorema que presentaré a continuación, el primero de acuerdo al tiempo, es debido a Kahn, Klawe, y Kleitman [kKK83].

Teorema 3. *Cualquier polígono ortogonal con n vértices puede ser iluminado con $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias de vértice. A veces son necesarios.*

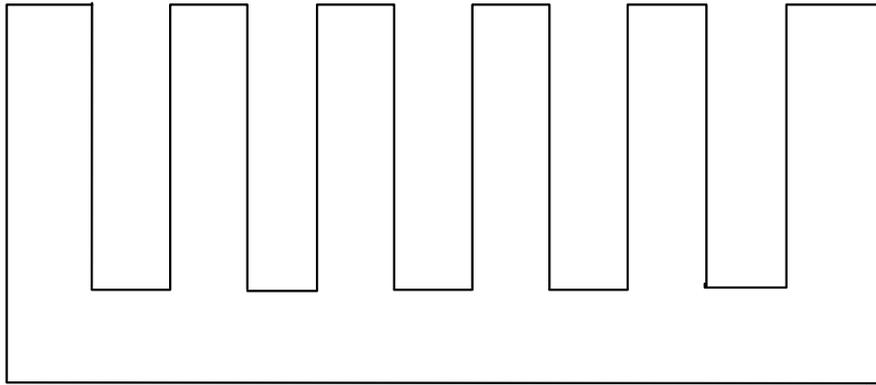


Figura 2.3: Polígono ortogonal que necesita $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias.

Así como la demostración original del teorema de galería de Arte de Chvátal fue eclipsada por la demostración de Fisk, la demostración de este teorema de Kahn et al ha sido eclipsada por muchas otras demostraciones más simples. La demostración de este teorema, por su longitud, no se dará; mas si hablaremos un poco de ella.

Es claro e intuitivo que todo polígono puede ser triangulado, mas no es evidente que todo polígono ortogonal pueda ser particionado en cuadriláteros convexos. Llamamos a una partición de un polígono en cuadriláteros, una *cuadrilaterización* de este. El siguiente lema fue demostrado para la prueba del Teorema 3, más por la extensión de su demostración, la omitiremos.

Lema 1. (Kahn et al 1980.) *Todo polígono ortogonal (con o sin hoyos) se puede cuadrilaterizar en cuadriláteros convexos.*

Ya establecido este lema, que por cierto no es utilizado en otras pruebas del teorema, podemos esbozar el resto de la demostración.

Demostración. Sea P un polígono ortogonal, y G una cuadrilaterización, agregamos a G las diagonales de los cuadriláteros. Aunque no es obvio, G es plana, y por lo tanto 4-coloreable. Si coloreamos G con 4 colores, y ponemos guardias en los vértices de la clase cromática más chica, la mitad del resultado se sigue, el resto, la necesidad, se establece de la Figura 2.3. Es importante notar, que en la demostración formal de este teorema, se ponen guardias únicamente sobre vértices cóncavos, es decir con grado de 270° . \square

2.3. La fortaleza

Otro problema de iluminación interesante, y a la vez bonito, es el problema de la fortaleza. Imaginemos que tenemos una ciudad amurallada por un polígono P , lo que se quiere es vigilar todo el exterior del polígono con guardas posicionados en vértices de P . Decimos que un guardia posicionado en un vértice p de P ve un punto q en el exterior de P si el segmento de recta que une a p con q no intersecta al interior de P .

2.3.1. Polígonos generales

En un polígono convexo, necesitamos que cada tercer vértice tenga un guardia, se sigue que a veces necesitamos $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ guardias (Ver Figura 2.4). Podríamos, impulsivamente, pensar que al posicionar un guardia un vértice sí, uno no, siempre iluminaríamos todo el exterior de cualquier tipo de polígono, no es así, como podemos ver en el ejemplo de la Figura 2.5 (debida a Shermer), en el cual el exterior no se ilumina poniendo guardias en todos los vértices pares, o en todos los impares. Afortunadamente podemos probar que $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ guardias son suficientes con un truco: triangulando. El siguiente teorema fue probado por O'Rourke y Wood en 1983.

Teorema 4. $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ guardias de vértice son suficientes, y a veces necesarios, para vigilar el exterior de un polígono P con n vértices.

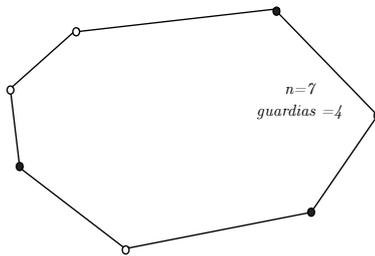


Figura 2.4: Polígono que necesita $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ guardias (los puntos blancos), todos los convexos en general necesitan $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Demostración. Sea Q el cierre convexo del polígono P . Triangulamos los polígonos que nos queden afuera de P y adentro de Q . (Ver Figura 2.6 para la siguiente construcción). Como los vértices de Q son también vértices de P , en realidad seguimos con n vértices. Llamemos G'' a estos vértices, con la triangulación ya mencionada. Agregamos un vértice más a G'' , v_∞ , afuera de Q y el segmento de recta de v_∞ a todos los vértices de G'' . A esta nueva gráfica con $n + 1$ vértices la llamamos G' . Finalmente, sea x un vértice en Q , lo

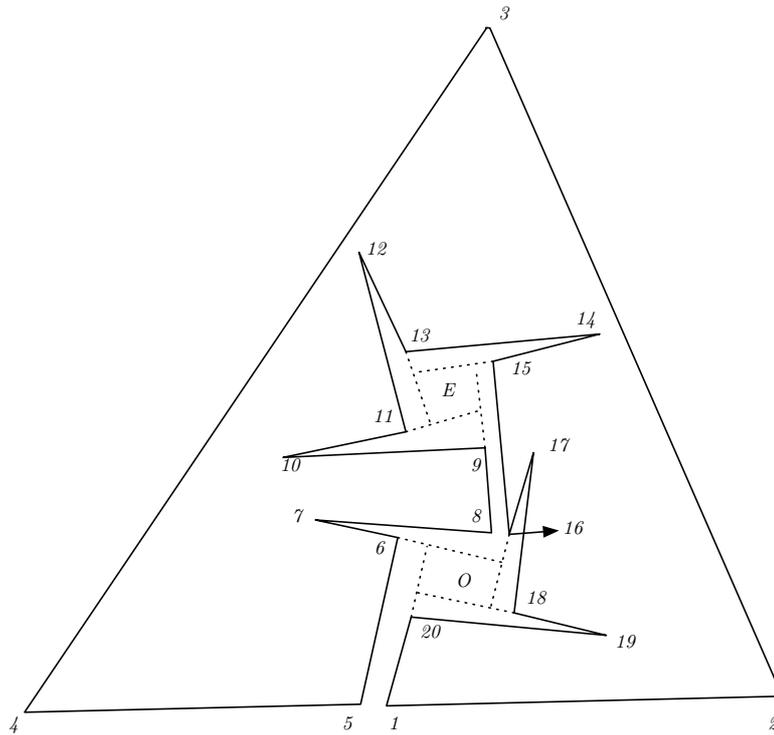


Figura 2.5: Guardias en los vértices pares dejan a E descubierto, en los impares dejan a O descubierto.

dividimos en x' y x'' , y las adyacencias de x las repartimos entre x' y x'' de manera que la gráfica continúe siendo plana. Agregamos una arista más, para que v_∞ sea adyacente tanto a x' como a x'' . Llamaremos G a la gráfica resultante de $n + 2$ vértices. Si separamos a x' de x'' , y movemos a v_∞ suficientemente lejos, de tal manera que todas las aristas que incidan en v_∞ pueden ser dibujadas como líneas rectas, entonces es claro que G es una triangulación de un polígono, y al serlo, puede ser 3-coloreada. El color menos usado, digamos el rojo, será usado a lo más $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor$ veces, si v_∞ no es color rojo, entonces podemos iluminar el exterior del polígono colocando un guardia en todos los vértices rojos y usamos a lo más $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ guardias. En otro caso, si v_∞ es rojo, entonces la estrategia no funcionara, puesto que no podemos poner un guardia en v_∞ , en este caso pondremos guardias en el segundo color menos usado. Si $a \leq b \leq c$ son el número de vértices coloreados de cada color, entonces $a + b + c = n + 2$. Como $a \geq 1$, $b + c \leq n + 1$ y por lo tanto $b \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Mostraremos ahora que poniendo guardias en el segundo color menos usado, vigi-
laremos todo el exterior. Todo triángulo adyacente a v_∞ estará vigilado, y como v_∞ no
tendrá guardia, entonces el casco convexo Q tendrá un guardia en cada tercer vértice, y por
lo tanto el exterior de Q quedará claramente vigilado. La región afuera de P y adentro de

Q quedará claramente vigilada, por el argumento usual para vigilar triángulaciones. \square

2.3.2. Polígonos ortogonales

Pese a que en general necesitamos más guardias para vigilar el exterior de un polígono que el interior ($\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{3}$ respectivamente), para polígonos ortogonales sólo se necesita un guardia más para vigilar el exterior que los necesarios para vigilar el interior, $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$ guardias para vigilar el exterior y $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardias para vigilar el interior. El siguiente teorema lo probó Aggarwal en 1983 [Agg84]:

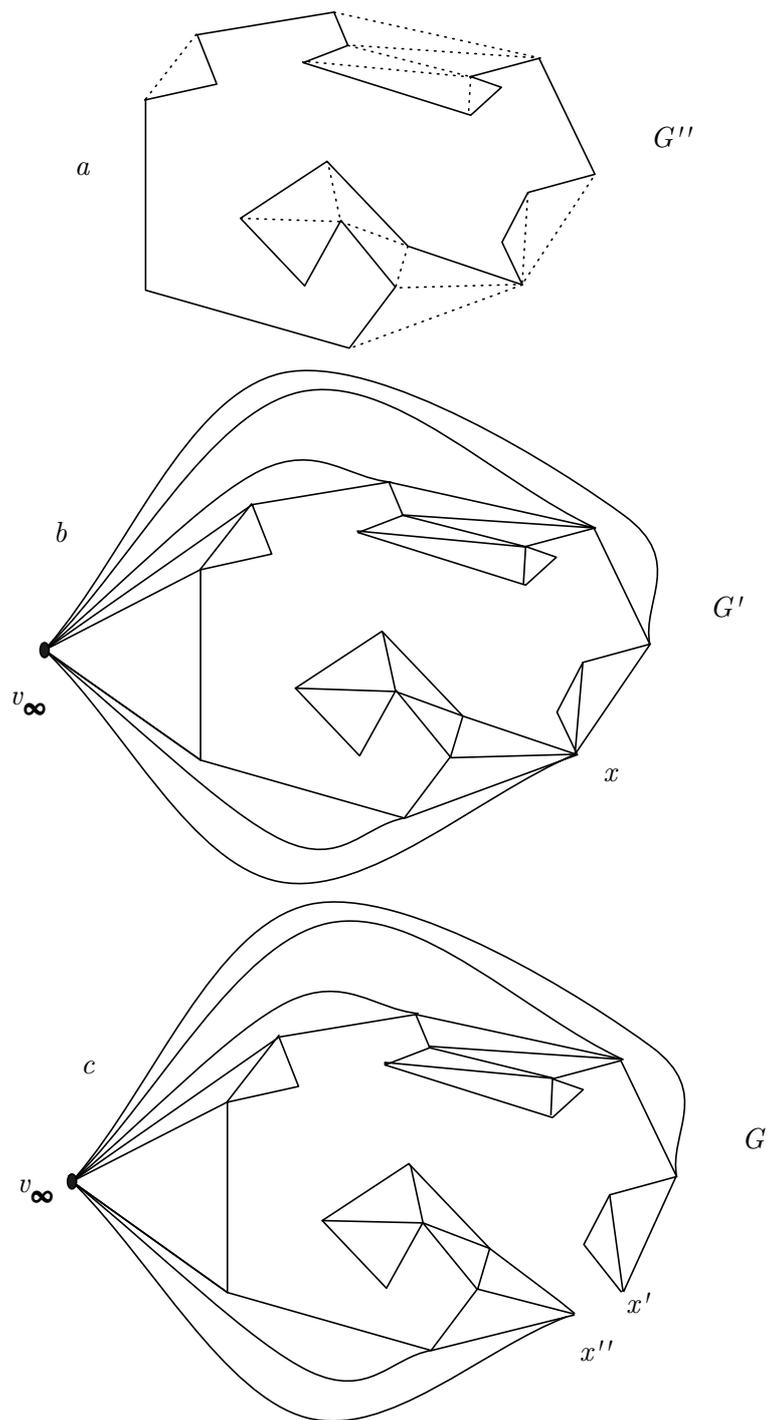
Teorema 5. $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$ guardias de vértice son necesarios y suficientes para vigilar el exterior de un polígono ortogonal con n vértices.

Demostración. La necesidad se sigue de la espiral de $n = 4m$ vértices que mostramos en la Figura 2.7. Checando los casos, podemos ver que una solución óptima sería $1, 4, 8, \dots, 4(m-1), 4m$, otra sería $1, 4, 8, 12, \dots, 4(m-3), 4(m-2)+2, 4(m-1)+2, 4m-1$. Existen otros casos, y todos acaban con $m + 1$ guardias. Si extendemos la espiral en dos vértices más, necesitaremos un guardia más, en total $m + 2$, pero en cualquier caso necesitaremos $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$ guardias.

La prueba de que siempre podemos vigilar el exterior con $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$ guardias es muy fácil y bonita. Sea P un polígono ortogonal, con sus lados paralelos a los ejes coordenados. Sea e la arista horizontal con coordenadas y más grande, o una de ellas en caso de existir varias, y d, f las aristas verticales adyacentes a e . Encasillamos P con un rectángulo, y prolongamos las aristas a y b hasta que intersecten con el rectángulo como se muestra en la Figura 2.8 a , nos queda un polígono P' con $n + 4$ vértices, y el interior de este coincide con el exterior inmediato a P , a excepción de el rectángulo Q , el cual es exterior a ambos polígonos.

Recordemos, que para iluminar el interior de un polígono con el Teorema 3 solo se ponen guardias en vértices con 270° y por lo tanto si pusiéramos guardias de acuerdo al Teorema 3 en P' para iluminar el interior, como los vértices de P' que no están en P tienen ángulos de 90° , estos guardias yacerían sobre P , y por lo tanto al iluminar el exterior inmediato de P , es claro que iluminaríamos todo el exterior de P . Por el Teorema 3 podemos vigilar el interior de P' con $\lfloor \frac{n+4}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$ guardias. La región Q necesitará un guardia, y por ello en total nos quedan $\lfloor \frac{n+4}{4} \rfloor + 2$ guardias. Si $n \equiv 2 \pmod{4}$, $\lfloor \frac{n+4}{4} \rfloor + 2 = \lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$.

Si $n \equiv 0 \pmod{4}$, como el Teorema 3 tiene la función piso, entonces podemos aumentar la cantidad de puntos en P' , y en lugar del polígono que estábamos usando, ahora usamos un P' de tal manera que el interior de P' coincide, a excepción de una parte infinitesimal como se muestra en la Figura 2.8, con el exterior inmediato de P . Ahora podemos cubrir este exterior inmediato de P , interior de P' con $\lfloor \frac{n+6}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$, y como n es divisible por 4 entonces $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor = \lceil \frac{n}{4} \rceil$. \square

Figura 2.6: Construcción de G a partir de G''

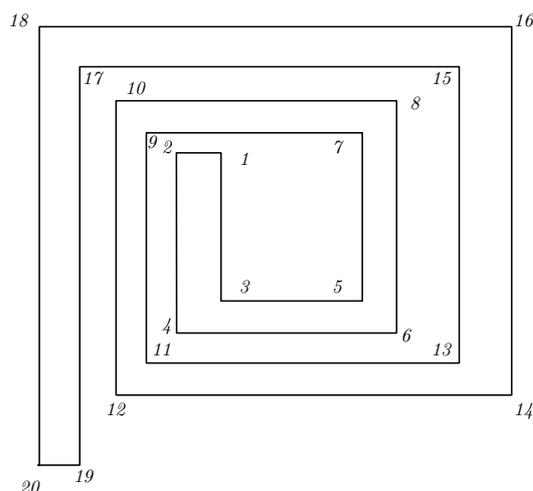


Figura 2.7: Polígono ortogonal que requiere $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$ guardias

2.3.3. Guardias en el plano

Existe una asimetría entre el Teorema 1 y el Teorema 4, iluminando el interior con $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias, y el exterior con $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ guardias, respectivamente. Esta asimetría desaparece si le quitamos la restricción a los guardias de tener que ser posicionados en un vértice, es decir si usamos guardias de punto, en lugar de los de vértice. En esta sección demostraremos que usando guardias de punto, necesitamos y serán suficientes $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias. Incluso parece natural que se cambie el operador piso, por el techo.

Comenzaremos probando un lema que casi alcanza la cota.

Lema 2. $\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$ guardias son suficientes para vigilar el exterior de un polígono P con n vértices.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponemos que P tiene un punto a más alto y uno b más bajo. Digamos que b coincide con el origen del plano cartesiano, encontramos dos puntos α con coordenada x negativa y β con coordenada x positiva, tales que ambos puntos estén abajo de b , y que el segmento de recta que los une al punto a no interseccione a P mas que en a . Sea Q el cierre convexo de P , y como en el Teorema 4 triangulamos los polígonos que quedan afuera de P pero adentro de Q . Agregamos los segmentos de rectas de α y β a todos los puntos de Q que les sean visibles y el segmento de recta que une a α con β . (Ver Figura 2.9). Una vez más como en el Teorema 4 dividimos a en dos, a' y a'' , y repartimos las adyacencias de manera que nos siga quedando una gráfica plana. Lo que tenemos ahora, es un polígono triangulado P' con $n + 3$ vértices. Iluminamos el polígono con dicha triangulación con $\lfloor \frac{n+3}{3} \rfloor = \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$ guardias, y lo único que nos queda por

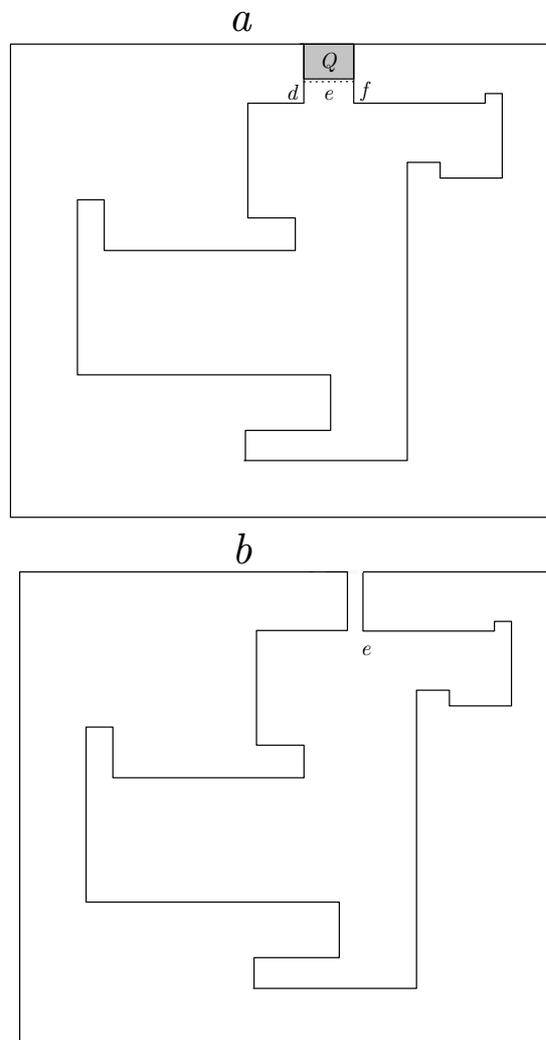


Figura 2.8: Encasillamos un polígono P y creamos un polígono P' tal que el interior de P' es el exterior inmediato de P . Las construcciones varían, usamos a si $n \equiv 2 \pmod{4}$ y b si $n \equiv 0 \pmod{4}$.

demostrar, es que quedará vigilado todo el exterior de P . Es claro que el área adentro de Q y afuera de P quedará iluminada, solo resta checar el exterior de Q . Sea H la recta que pasa por el punto a y b . Fijemonos en la mitad del plano, a la derecha de H . Si β tiene un guardia, entonces es claro que quedará iluminado el exterior de Q a la derecha de H . De lo contrario, como todos los puntos de Q a la derecha de H ven a β , Entonces cada arista de Q a la derecha de H , es parte de un triángulo, con tercer punto β , de donde habrá un guardia en cada tercer vértice de los vértices de Q a la derecha de H , por lo tanto el semiplano a la derecha de H quedará iluminado. Análogamente, el semiplano a la izquierda de H también será vigilado.

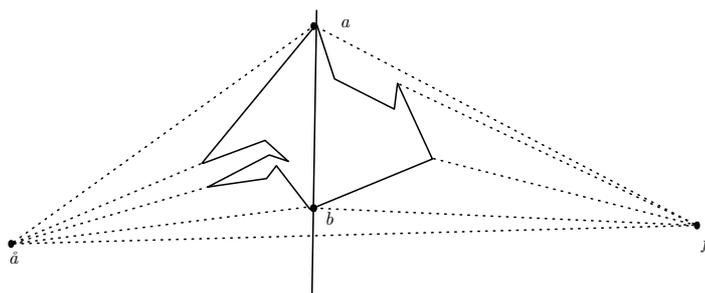


Figura 2.9: Construcción del lema 2 antes de triangular las bolsas

□

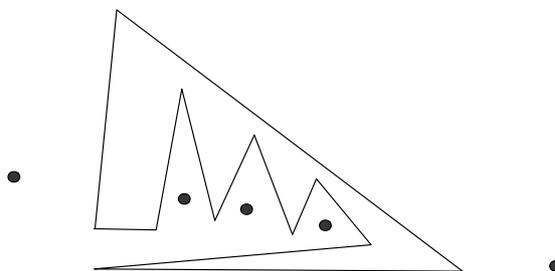


Figura 2.10: $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ son necesarios para iluminar el exterior de este polígono.

La primera demostración que le quitaba el sobrante al lema anterior (Aggarwal 1984) era larga, y abandonaba la geometría sustituyéndola por combinatoria complicada. Afortunadamente, como paso con el teorema de la galería de arte de Chvátal, en que se ha encontrado una demostración mucho más simple que la original. Esta usa un argumento conciso de coloración, debido a Shermer.

Teorema 6. (Aggarwal y O'Rourke 1984) $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ guardias son necesarios y suficientes para vigilar el exterior de un polígono P con $n > 3$ vértices.

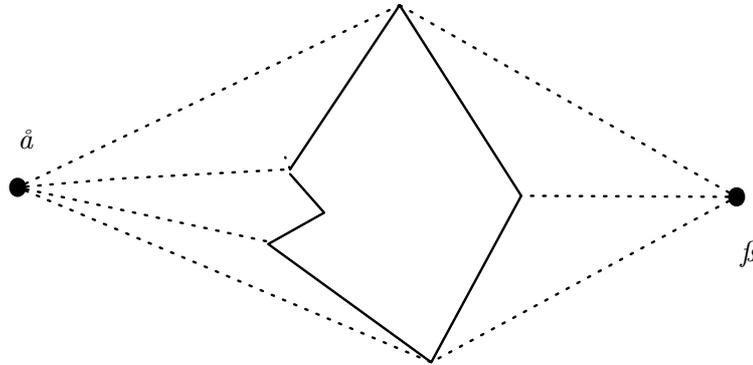


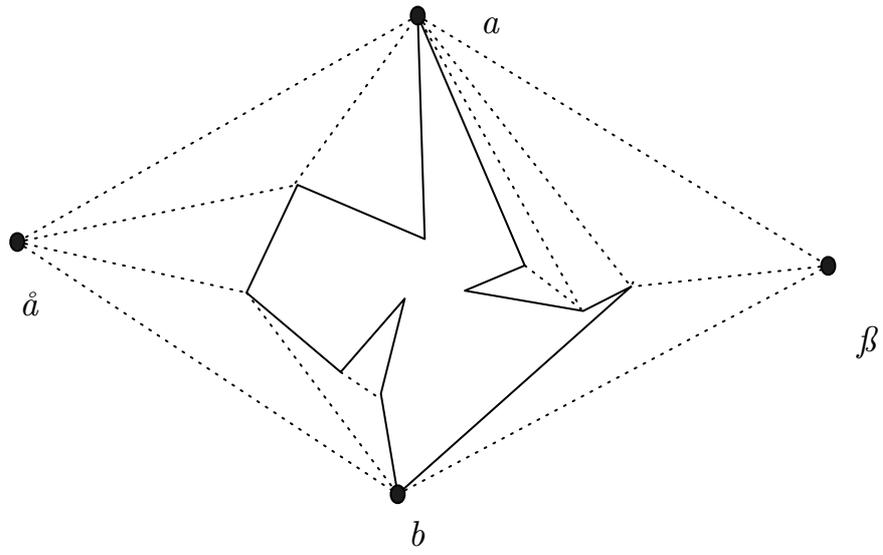
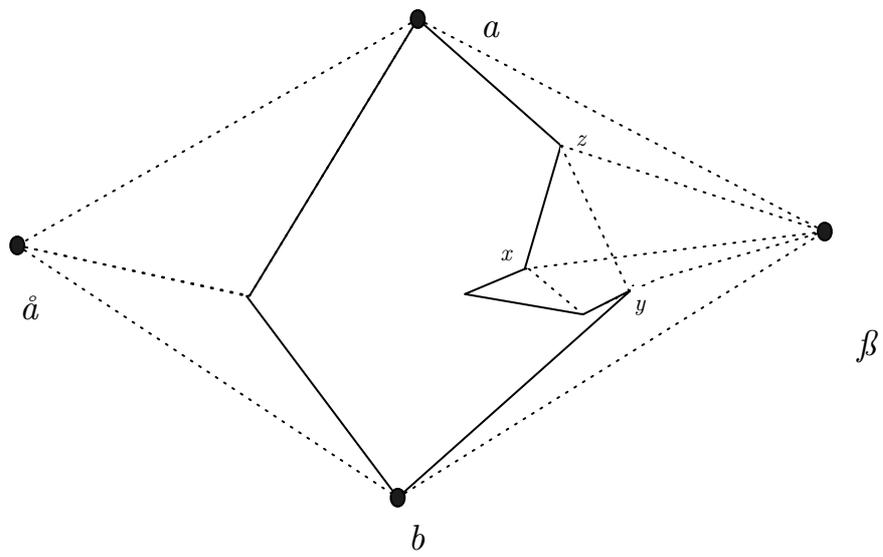
Figura 2.11: Gráfica G construida como en la demostración del teorema 6 que no es 3 coloreable.

Demostración. (Debida a Shermer 1986). La necesidad se sigue de un ejemplo de alguna manera contrario al ejemplo del Teorema 2.1, ver la Figura 2.10. La construcción general de esta Figura, con k triángulos hacia adentro utiliza $n = 3k + 4$ vértices, y requiere $k + 2 = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ guardias. La necesidad para los otros valores modulo 3 de n se sigue de agregar uno, o dos puntos casi aleatoriamente al ejemplo.

Suficiencia: Si P es un polígono convexo entonces dos guardias posicionados suficientemente lejos, en lados opuestos de P son suficientes para cubrir el exterior, y como $n > 3$ entonces $2 \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Supongamos que P no es convexo, osea que tiene al menos una bolsa, es decir un polígono exterior a P interior al cierre convexo Q , y acotado por una arista de Q . Rotamos P para que exista un vértice a más alto y uno b más bajo. Tomamos como en el lema anterior, α y β en lados opuestos de P , tal que ambos puedan ver a a y b . Triangulamos las bolsas de Q y conectamos a y b a todos sus puntos visibles de Q . Sea G la gráfica inducida por la triangulación que acabamos de construir. Como $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, nos gustaría que la gráfica de triangulación G fuera 3-coloreable. Como podemos ver con el ejemplo de la Figura 2.11 requiere 4 colores. La idea de Shermer, es modificar la gráfica para que sea 3-coloreable. Sea $|Q| = h$ el número de vértices de Q , consideraremos dos casos, cuando h es par, y cuando es impar.

h par: En este caso, G siempre será 3-coloreable. ¿Porque? Coloreamos los vértices de Q con los colores 1 y 2 alternadamente. Coloreamos α y β con el color 3. Cada bolsa, es en realidad un polígono, y hasta el momento solo hemos coloreado dos vértices por

Figura 2.12: Cuando h es parFigura 2.13: Cuando h es impar.

bolsa, y estos dos adyacentes y con colores distintos, por lo tanto podemos 3-colorear cada bolsa, respetando que la arista que comparten con Q se mantenga con los colores ya dados. De esta manera hemos 3-coloreado G , y por lo tanto podemos vigilar estos triángulos con $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias. Por los mismos argumentos que en el lema anterior, estos guardias vigilarán el exterior de P . (Ver Figura 2.12)

h es impar: (Ver Figura 2.13) En este caso no podremos hacer lo mismo que cuando h es par, puesto que no podremos bicolorar el cierre convexo Q . Lo que haremos es modificar la triangulación: Supongamos que yz es una arista de Q que también es arista de una bolsa. Como tenemos una triangulación de las bolsas, sea x el vértice en P adyacente a y y z . Rotaremos P y escogemos α de manera que:

- α pueda ver a x (que P no intersecte en su interior a $x\alpha$),
- α está lo suficientemente lejos para poder ver dos vértices opuestos a y b del polígono (en el sentido que podemos orientar P de tal modo que estos dos vértices a será el más alto y b el más bajo).

Escogemos β del otro lado del polígono, que también pueda ver a a y b . Nótese que pedimos que a sea el más alto, osea, que no haya ningún otro vértice a la misma altura, lo mismo con b . Es claro que esta α siempre existe. El cuadrilátero $\alpha y x z$ cumple que $x\alpha$ intersecta a yz y por lo tanto es convexo. De la gráfica G borramos la diagonal yz y añadimos la $x\alpha$, con esto tenemos una triangulación G' que si es 3-coloreable. ¿Porque? Si consideramos a x como parte del cierre convexo, este tendrá un número par de vértices, y por lo tanto será bicolorable. Coloreamos el casco convexo incluyendo a x con los colores 1 y 2. Coloreamos α y β con el color 3. Y el resto nos quedan puras bolsas, osea polígonos con una arista ya coloreada (la que esta sobre el casco convexo con x agregado), estos los podemos 3-colorear respetando los colores ya asignados, y nos queda una 3-coloración de G' . Ponemos guardias en la clase cromática con menos vértices, que tendrá a lo más $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ vértices. El argumento del lema anterior tiene que ser modificado un poco, para ver que en efecto se vigila todo el exterior. Esto porque en el caso en el que la clase cromática con menos vértices no es la del color 3, podría ser que dos vértices de Q adyacentes no tengan vigilante: y y z , pero en este caso, x tendría vigilante, y tomando todo igual que en dicho lema, todo quedaría vigilado. □

2.4. El problema de la cárcel

Este es finalmente, la combinación de el problema de iluminación exterior con el de iluminación interior. Nos preguntamos: ¿Cuántos guardias de vértice son necesarios para vigilar simultáneamente el interior y el exterior de un polígono P con n vértices? Decimos que un guardia en el vértice z vigila el punto exterior x si el segmento \overline{xz} no intersecta el interior, y decimos que ve un punto interior y si el segmento de recta \overline{yz} no intersecta

el exterior del polígono. Solo usaremos guardias vértice, el problema cambia mucho si permitimos guardias muy lejanos a P . Y se cree que si permitiéramos que los guardias estuvieran en cualquier punto de la frontera de P el problema tendrá la misma complejidad, y por lo tanto no consideraremos dichos casos.

J. O'Rourke conjeturo en 1987 que $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ guardias eran suficientes para vigilar el interior y exterior de un polígono P , ya era conocido que este número de guardias era necesario, el polígono convexo muestra un ejemplo que claramente necesita $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ guardias, los mismos que si solo se quisiera vigilar su exterior. Esta conjetura fue probada cierta en 1990, aunque publicada hasta 1993.

Teorema 7. $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ guardias de vértices son suficientes para vigilar tanto el exterior como el interior de un polígono P con n vértices. En el caso en el que P no es convexo solo necesitamos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ guardias.

Esta demostración la omitiremos por falta de espacio, pero presentamos la idea:

Usando los n vértices de P y agregando el punto al infinito, podemos triangular el plano entero. Por el teorema de los cuatro colores, si G es la gráfica inducida por dicha triangulación entonces existe un subconjunto C de los vértices de G (las dos clases cromáticas más chicas) con a lo mas $\frac{n+1}{2}$ vértices que cubre a todos los triángulos, el problema es que uno de estos vértices podría ser el infinito. De aquí, que la esencia de la prueba es demostrar que para cualquier gráfica G y un vértice w existe un subconjunto C tal que $w \notin C$ y C cubre todos los triángulos. Resulta que esto no se cumple para cualquier G y $w \in G$, pero para este tipo de gráficas si se cumple, y nos lleva a dos conjuntos de vértices que vigilarían todo. [FK94]

2.4.1. Guardias Móviles

En lugar de los guardias usuales, los guardias móviles son más, digamos, fuertes, ya que les permitimos caminar sobre un segmento de línea contenido en P . Formalmente, sea s una línea completamente contenida en P , en el interior y la frontera, entonces decimos que un guardia en s vigila un punto x en P , si existe un punto $y \in s$ tal que xy esta contenido completamente en P . De esta manera x esta vigilado por un guardia en s si existe un punto en s desde donde x sea visible, esto fue llamado *visibilidad débil* desde un segmento de línea por Avis y Touissant [AT81], la *visibilidad fuerte* es cuando un punto x es visible desde cualquier punto en el segmento de recta.

Lo interesante de los guardias móviles es que llevan a teoremas muy limpios, unos muy difíciles, y a problemas abiertos interesantes, al menos, en esa época ese era el caso. Se conocen varios resultados en guardas móviles, entre ellos los dos teoremas siguientes, que por falta de espacio, no demostraremos.

Teorema 8. $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ guardas móviles son necesarios y suficientes para cubrir un polígono P con n vértices.

Teorema 9. $\left\lfloor \frac{3n+4}{16} \right\rfloor$ guardias móviles son necesarios y suficientes para cubrir un polígono ortogonal P con n vértices.

Omitimos las demostraciones. El teorema anterior puede parecer menos atractivo que los que hemos visto hasta el momento, considerando los resultados con fracciones muy simples que hemos visto hasta el momento, pues de hecho hemos preferido mostrar problemas con respuestas naturales, y demostraciones elegantes. No obstante, existe una belleza en este número. Hemos visto que podemos vigilar el interior de un polígono cualquiera con $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ guardias de vértice, y en el caso ortogonal con únicamente $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ guardias, es decir es $3/4$ veces más fácil vigilar un polígono ortogonal. El Teorema 8 nos sugiere que los guardias móviles son $3/4$ más fuertes, pues nos reduce el número de guardias para vigilar el interior de un polígono en $3/4$. Con este razonamiento, llegamos a que el teorema anterior debería necesitar $\frac{3^2}{4^2} \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ guardias, en efecto, necesitamos $\left\lfloor \frac{3n+4}{16} \right\rfloor$ guardias móviles.

Capítulo 3

Iluminación con k-modems

3.1. Introducción

Hemos dado un panorama de los problemas de galerías de arte usuales, ahora presentaremos un problema que de alguna manera nos acerca más a conocer la estructura topológica de un polígono, no en el sentido usual ya que los polígonos son homeomorfos a los círculos, sino en conocer como se comportan, se envuelven en giros, y prácticamente se pueden encontrar en el exterior de ellos mismos. El artículo en el que se basa este capítulo [AFMFP⁺09] no es el primer trabajo realizado en iluminación con modems inalámbricos; por ejemplo está el trabajo sobre el jardín de las esculturas [EGS07] en donde se busca posicionar modems, y crear una fórmula simple para saber si un punto se encuentra adentro o afuera del jardín. Sin embargo, el trabajo *Iluminación de polígonos monótonos con modems* [AFMFP⁺09], es el antepasado directo al resultado final de esta tesis, y en ello radica su importancia.

Hemos visto como el problema de vigilar una galería de arte tiene muchas variantes interesantes. Supongamos ahora que queremos que nuestra galería de arte tenga una conexión inalámbrica, para el propósito que más nos plazca. El problema se sigue del hecho de que para conectarse a un modem los dos factores más importantes son: la distancia a él, la cantidad de paredes entre uno y el modem. Modelaremos, en lugar de fuentes de luz, modems inalámbricos con potencia de atravesar k paredes, y distancia ilimitada, los llamamos *k-modems*. Demostraremos que cualquier polígono monótono con n vértices puede ser iluminado con $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$ k -modems, y exhibiremos ejemplos en los que $\lceil \frac{n}{2k+2} \rceil$ k -modems son necesarios. También mostraremos para polígonos ortogonales monótonos que siempre pueden ser iluminados con $\lceil \frac{n}{2k+4} \rceil$ guardias, y ejemplos en donde $\lceil \frac{n}{2k+4} \rceil$ son necesarios para k par y $\lceil \frac{n}{2k+6} \rceil$ para k impar.

Decimos que un punto p en un polígono está conectado a un modem m en P si el segmento de línea que une a p y m cruza a lo más k aristas de P en su interior, es decir si el modem, el punto, o ambos se encuentran sobre aristas, estas no las contamos.

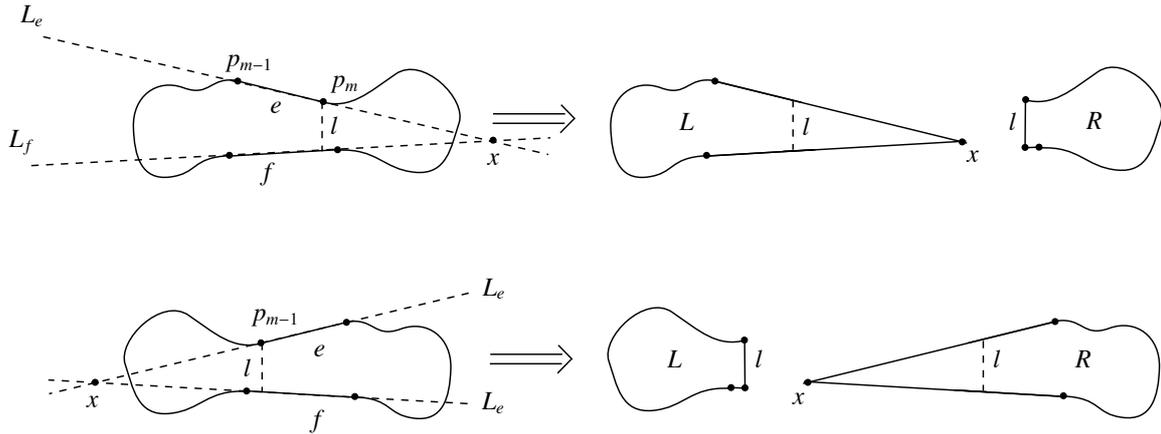


Figura 3.1:

Permitimos que un modem este en un punto q sobre una arista e de P , en este caso si p es un punto interior de P , el segmento de línea que une a q y p puede intersectar a un número impar de aristas de P . Esto se sigue del hecho de que el segmento que une a q y p no tiene que cruzar a la arista e de P que contiene a q . En este capítulo trabajaremos con el siguiente problema:

Problema de Iluminación con Modems: Sea P una galería de arte modelada por un polígono P con n vértices. ¿Cuántos k -modems son suficientes, y ocasionalmente necesarios para iluminar todos los puntos en P ?

Para $k = 0$ el problema corresponde a el problema de la Galería de Arte de Chavatal, que discutimos en el capítulo pasado, el cual dice que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardias son suficientes, y a veces necesarios para vigilar una galería de arte con n vértices. Muchas generalizaciones del problema de la Galería de Arte se han estudiado, y hemos hablado de varias en el capítulo pasado. Por otra parte, iluminación de polígonos con aparatos inalámbricos también ha sido estudiado últimamente, aunque en un contexto diferente, en el problema del jardín con esculturas. En este capítulo daremos cotas superiores e inferiores para el problema de Iluminación con Modems en polígonos monótonos, y monótonos ortogonales, los cuales modelan a la perfección la mayoría de los problemas en la vida real.

Por razones técnicas supondremos lo siguiente: para un polígono monótono no-ortogonal, asumimos que no habrá una pareja de aristas paralelas. Como ha sido hasta ahora, cuando hablemos de un polígono, nos estaremos refiriendo tanto a su frontera, como su interior.

3.2. Polígonos Monótonos

El siguiente lema será nuestra herramienta principal para probar cotas superiores en cuanto al número necesario de modems para iluminar polígonos monótonos. Este nos

permite *partir* el polígono en subpolígonos de una manera que podemos iluminar los subpolígonos independientemente de los otros.

Lema 3. (*Lema de partición*) Sea P un polígono monótono con vértices p_1, \dots, p_n , ordenados de izquierda a derecha. Para cada entero positivo $m < n$, existe un segmento de recta vertical l y dos polígonos monótonos L y R tales que:

- L tiene m vértices y R tiene $n - m + 2$ vértices.
- l es una cuerda de L y una arista de R , o es una cuerda de R y una arista de L .
- p_m o p_{m+1} es un punto delimitador de l .
- Si denotamos L' el subconjunto de L a la izquierda de l y a R' el subconjunto de R a la derecha de l , entonces $P = L' \cup l \cup R'$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponemos que p_{m-1} está en la cadena poligonal superior de P . Sea f la arista de P directamente abajo de p_{m-1} y sea e la arista de P que tiene a p_{m-1} como su vértice izquierdo. Sea $e_l = p_{m-1}$ y e_r el vértice izquierdo y derecho respectivamente. De la misma manera sean f_l, f_r el vértice izquierdo de f y el derecho de f respectivamente. Extendemos e y f a líneas en el plano, siendo L_e la línea que contiene a e y L_f la que contiene a f . Como estamos asumiendo que ningún par de aristas son paralelas, entonces L_e y L_f se intersectan en algún punto x . Dos caminos distintos pueden surgir (como en la Figura 3.1):

1. si x está a la izquierda de p_{m-1}

En este camino lo que haremos es trazar una línea vertical que pase por p_{m-1} , y l será la intersección de esta línea vertical con P . Sea P^- el subconjunto de P a la izquierda de l y sea $L = P^- \cup l$. Definimos R como el polígono acotado por:

- la cadena poligonal superior de P de e_r a p_n ,
- la cadena poligonal inferior de P de f_r a p_n ,
- el segmento de línea de x a e_r y el que va de x a f_r .

2. dado el caso que el sendero que se bifurca nos da como resultado que x está a la derecha de p_{m-1} entonces trazaremos una línea vertical que pase por p_m y l será la intersección de esta con P . Sea P^+ el subconjunto de P a la derecha de l y sea $R = P^+ \cup l$. En este caso definimos a L como el polígono acotado por:

- la cadena poligonal superior de P que va de p_1 a p_{m-1}
- la cadena poligonal inferior de P de p_1 a f_l
- el segmento de línea de x a $e_l = p_{m-1}$ y el que va de x a f_l

Notemos que en ambos caminos las tres propiedades que queríamos para L, R, l y P se cumplen. \square

Antes de enunciar el teorema principal de este capítulo, demostraremos dos lemas de gran utilidad.

Lema 4. *Cualquier polígono monótono con $k + 2$ lados puede ser iluminado con un k -modem colocado en cualquier punto de P , ya sea en el interior, o en la frontera.*

Demostración. Sea P un polígono con $k + 2$ lados. Sean p y q dos puntos en la frontera de P . Es claro que cualquier línea en el plano l , intersecta a lo más a $k + 2$ aristas del polígono, pues solo tiene $k + 2$ aristas. Y por lo tanto cualquier segmento de recta en P intersecta a lo más a k aristas en su interior. De donde si colocamos un k -modem en cualquier punto sobre P , en el interior o en la frontera, iluminaremos todo P . \square

Lema 5. *Cualquier polígono monótono con $2k + 2$ lados puede ser iluminado con un k -modem puesto en su vértice $k + 1$ o $k + 2$.*

Demostración. Sea P un polígono monótono con $2k + 2$ lados. Aplicando el lema de partición a P podemos obtener un segmento de línea l y dos polígonos monótonos L y R con $k + 2$ vértices cada uno, y con las propiedades que nos dá el lema. Ponemos un k -modem en uno de los puntos finales de l , y por el lema 4 este k -modem iluminará a L' y R' (notación del lema de partición), y por lo tanto iluminará a L y a R . \square

Para los casos particulares de $k = 1, 2, 3$ el lema 5 puede ser mejorado de la siguiente manera:

Lema 6. *Para todo heptágono monótono existe un punto, entre su segundo y sexto vértice, donde un 1-modem puede iluminar el polígono completo.*

Omitimos la prueba por falta de espacio.

Lema 7. *Todo pentágono monótono puede ser iluminado con un 2-modem en cualquier punto en su interior o en la frontera.*

Demostración. Sea p un punto sobre un pentágono monótono P . Supongamos que existe un punto q en P , tal que el segmento de recta pq intersecta a P tres veces o más. Es claro que no puede intersectar a las cinco aristas en su interior, porque entonces q tendrá que estar en el exterior del polígono. Si el segmento intersectará 4 veces al polígono en su interior, estas 4 aristas contendrían todos los puntos del polígono, y el pentágono se vuelve imposible de trazar. Si lo intersecta tres veces, entonces ó p , ó q estarían sobre una arista, y por la misma razón el pentágono se vuelve imposible. \square

Lema 8. *Todo hexágono monótono puede ser iluminado con un 3-modem puesto en su primer o último vértice.*

Omitimos la prueba, es por casos, análoga a la anterior.

Lema 9. *Todo octágono monótono puede ser iluminado con un 2-modem.*

Demostración. Aplicando el lema 3 dividimos el octágono en dos pentágonos monótonos. Poniendo un 2-modem en cualquier punto en la intersección de estos, iluminaremos todo el polígono por el lema 7. \square

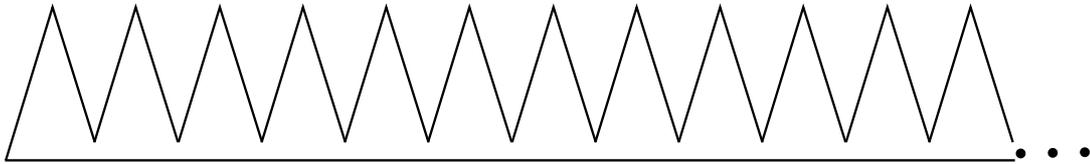


Figura 3.2: Un polígono con n vértices que requiere $\lceil \frac{n}{2k+2} \rceil$ k -modems.

Lema 10. *Un polígono monótono de nueve lados puede ser iluminado con un 3-modem.*

Demostración. Trazamos una línea vertical que pase por el quinto vértice, y así dividimos el polígono en dos hexágonos. Ponemos un 3-modem en cualquier punto en la intersección de estos hexágonos y por el lema 8 el polígono quedará iluminado. \square

Teorema 10. *Todo polígono monótono P con n vértices puede ser iluminado con $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$ k -modems, y existen polígonos monótonos con n lados, que necesitan $\lceil \frac{n}{2k+2} \rceil$ k -modems para ser iluminados.*

Demostración. Un ejemplo que requiera $\lceil \frac{n}{2k+2} \rceil$ k -modems es el de la Figura 3.2. Como cada k -modem puede ver a lo más $2k + 2$ triángulos, se sigue que necesitamos $\lceil \frac{n}{2k+2} \rceil$ k -modems. Solo falta probar la cota superior, usando el *lema de partición* partimos nuestro polígono recursivamente en $m = \lceil \frac{n}{2k} \rceil$ subpolígonos con $2k + 2$ vértices de la siguiente manera: Aplicamos el lema para obtener una línea l_1 y un polígono L_1 con $2k + 2$ vértices y un polígono R_1 con $n - 2k$ vértices. Volvemos a aplicar el lema pero esta vez al polígono R_1 , para así obtener un segmento de línea l_2 , un polígono monótono L_2 con $2k + 2$ vértices y otro polígono monótono R_2 con $n - 4k$ vértices. Continuando recursivamente, obtenemos $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$ polígonos monótonos con $2k + 2$ vértices, L_1, \dots, L_m y segmentos de líneas l_1, l_2, \dots, l_m ; todos satisfaciendo las condiciones del lema 3.

Para cada L_i ($1 < i < m$), sea Q_i el subconjunto de L_i a la izquierda de l_i y a la derecha de l_{i-1} . Para L_1 y L_m , sea Q_1 el subconjunto de L_1 a la izquierda de l_1 y Q_m el subconjunto de L_m a la derecha de l_{m-1} .

Por el lema 5, cada L_i puede ser iluminado con un k -modem colocado en Q_i . Como $P = (\cup Q_i) \cup (\cup L_i)$, colocando un modem en cada Q_i , con $\lceil \frac{n}{2k} \rceil$ k -modems iluminamos P . \square

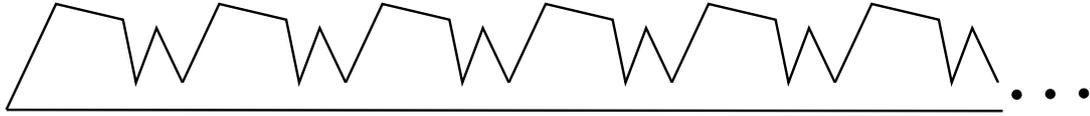


Figura 3.3: Un polígono monótono con n vértices que requiere $\lceil \frac{n}{5} \rceil$ 1-modems.

Teorema 11. *Todo polígono monótono P con n lados, puede ser iluminado con $\lceil \frac{n}{5} \rceil$ 1-modems, a veces son necesarios.*

Demostración. La necesidad se establece del ejemplo dado en la Figura 3.3 Usando el lema 3 recursivamente, podemos dividir P en $\lceil \frac{n}{5} \rceil - 1$ heptágonos y un polígono de m vértices (con $0 \leq m \leq 5$ dependiendo de n). Por el lema 6 podemos iluminar estos $\lceil \frac{n}{5} \rceil$ polígonos, con un 1-modem cada uno. \square

Análogamente a esta demostración, son las demostraciones de los siguientes teoremas, dividiendo el polígono en octágonos y nonágonos respectivamente. Y iluminando cada subpolígono con un modem, usando el lema 9 y el lema 10.

Teorema 12. *Todo polígono monótono P con n vértices, puede ser iluminado con $\lceil \frac{n}{6} \rceil$ 2-modems*

Teorema 13. *Todo polígono monótono P con n vértices, puede ser iluminado con $\lceil \frac{n}{7} \rceil$ 3-modems.*

3.3. Polígonos monótonos ortogonales

En esta sección daremos cotas superiores e inferiores en cuanto a la cantidad de k -modems requeridos para iluminar polígonos ortogonales, y polígonos monótonos ortogonales.

Recordemos que para la motivación de este capítulo, iluminar con modems inalámbricos todo un edificio, los polígonos ortogonales son escenarios bastante realistas.

Proposición 1. *Cualquier polígono ortogonal P con a lo más $k+4$ lados se puede iluminar con un k -modem colocado en cualquier parte de su interior, o la frontera.*

Demostración. Cualquier segmento de línea l , con puntos delimitadores adentro de P , ya sea en la frontera o en su interior, no puede interseccionar propiamente (ie: en el interior de l) ninguna de las siguientes aristas: la más baja, la más alta, la más a la izquierda y la más a la derecha de P . Como P tiene a lo más $k + 4$ líneas, entonces l intersecciona a lo más a $k + 4 - 4 = k$ líneas. Y por lo tanto, si ponemos un k -modem en el interior o la frontera de P , este iluminará a todo P . \square

Proposición 2. *Para cualquier polígono monótono y ortogonal con $k + 5$ lados, existe un punto en su arista más a la izquierda (o más a la derecha), donde un k -modem puede ser colocado para iluminar todo el polígono.*

Demostración. Sea a_l la arista más a la izquierda, y e y f las aristas adyacentes a a_l , e arriba de f . Si e no es la arista más alta entonces podríamos poner un k -modem en el punto de intersección de a_l y e y si no es f la más baja, podríamos poner un k -modem en la intersección de a_l y f y con esto iluminaríamos el polígono. ¿Porqué? Esto se sigue de la demostración de la proposición anterior, y el hecho de que e no bloquea nunca los rayos del modem.

Si este no es el caso, consideremos las dos aristas adyacentes a la arista más a la derecha, sean estas g y h , como P tiene por hipótesis $k + 5$ lados, osea al menos 5 lados, una de estas aristas no será ni la más alta ni la más baja de P . Sin pérdida de generalidad, supongamos que g no es la más alta, ni más baja, y que el interior del polígono esta abajo de g . Sea l_g la línea en el plano que contiene a g , como a_l es adyacente a la arista más alta, así como a la más, entonces l_g intersecciona a a_l en su interior. Si colocamos un k -modem sobre a_l y abajo de l_g iluminaremos todo el polígono. ¿Porqué? Por los mismos argumentos que en la proposición anterior, la arista más baja, la más alta, la más a la izquierda, y la más a la derecha no bloquearan los rayos del modem, falta una arista más que no nos bloquee, esta es g , lo demostraremos: sea q un punto sobre a_l abajo de l_g , sea p un punto en P tal que el segmento de línea pq intersecciona en su interior a g , entonces como q esta por debajo de l_g entonces p tiene que estar arriba de l_g , y como q esta a la izquierda de g entonces p tiene que tener coordenada x igual que algún punto de g o a la derecha de g . No puede estar a la derecha, puesto que g intersecciona a la arista más a la derecha, y por ello está arriba de g . Esto quiere decir que si trazáramos una línea paralela al eje y que pasará sobre p , esta interseccionaría al polígono P al menos dos veces, lo cual es una contradicción. Por lo tanto no existe un punto p tal que pq intersecciona en su interior a g , es decir, g no estorabará los rayos del k -modem. \square

Proposición 3. *Cualquier polígono P monótono y ortogonal con $2k + 6$ vértices puede ser iluminado con un k -modem.*

Demostración. Si k es par, entonces dividimos nuestro polígono con una línea vertical en dos polígonos con $k + 4$ lados cada uno, y ponemos un k -modem en su intersección común.

La proposición 1 nos garantiza que todo quedara iluminado. Esto sólo se puede cuando k es par, debido a que al ordenar los puntos sobre el eje x , quedaran empalmados de dos en dos.

Si k es impar, dividimos en un polígono con $k + 3$ vértices, y otro con $k + 5$. Por la proposición 2 existirá un punto en la intersección de estos dos polígonos donde un k-modem iluminaría el polígono con $k + 5$ lados, ese mismo punto por la proposición 1 ilumina al otro subpolígono. \square

Ahora probaremos nuestro resultado principal para polígonos monótonos ortogonales.

Teorema 14. *Cualquier polígono P monótono y ortogonal, con n vértices puede ser iluminado con $\left\lceil \frac{n-2}{2k+4} \right\rceil$ k-modems.*

Demostración. Dividimos el polígono en subpolígonos con $2k + 6$ vértices y con la proposición ref2k+6 queda claro que solo necesitamos un k-modem por cada subpolígono. Podemos ver sin mucha dificultad que en efecto serán $\left\lceil \frac{n-2}{2k+4} \right\rceil$ subpolígonos. Nada más falta notar de donde sale el "-2": La forma de dividir el polígono es la siguiente, ordenamos los puntos de izquierda a derecha, nos quedaran empalmados de dos en dos. Sobre la pareja $k + 3$ (osea de izquierda a derecha los puntos que se encuentran en la posición $2k + 5$ y $2k + 6$ al mismo tiempo) trazamos una línea vertical que pase por ambos puntos. De un lado, el izquierdo, nos quedará un polígono con $2k + 6$ lados, y del otro uno con $n - 2k - 4$ vértices. A este lo dividiremos, de la misma manera. Si repetimos el proceso y nos quedá un polígono del lado derecho, con $2k + 6$ lados o menos, este ya no lo dividiremos. Y he ahí donde ganamos el -2. \square

Cuando k es par, la cota del teorema 14 es justa, como mostramos en la Figura 3.4, el de la derecha con un polígono monótono ortogonal que necesita $\left\lceil \frac{n-2}{2k+4} \right\rceil$ k-modems para ser iluminado. Si k es impar el ejemplo muestra un polígono que necesita $\left\lceil \frac{n-2}{2k+6} \right\rceil$, y con ello damos una cota inferior.

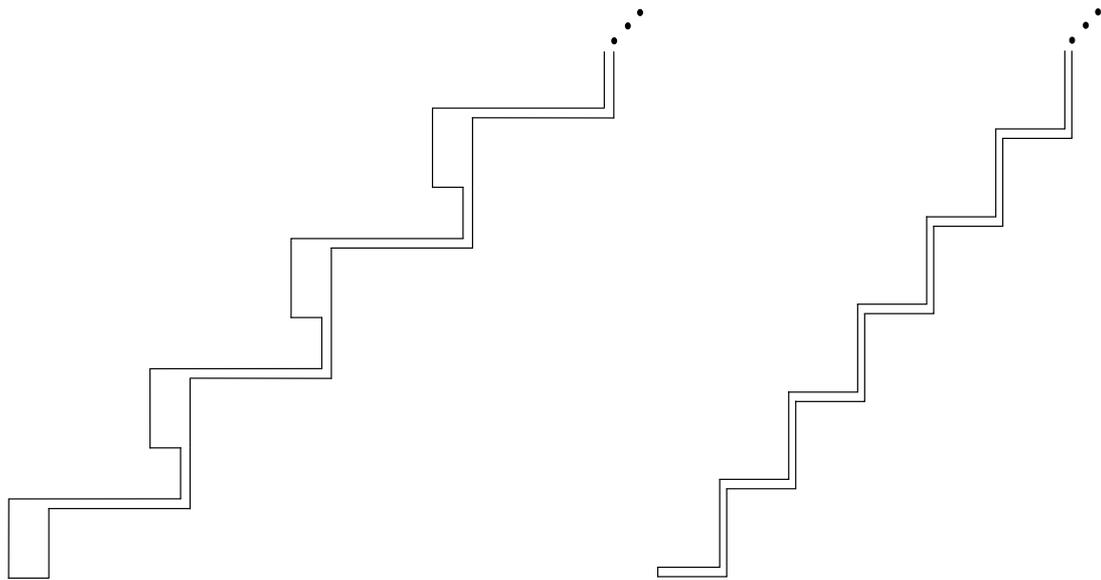


Figura 3.4: Un polígono que requiere $\lceil \frac{n}{6} \rceil$ 1-modems (izquierda); y uno que requiere $\lceil \frac{n-2}{2k+4} \rceil$ k -modems (derecha)

Capítulo 4

Arreglos de Líneas

Antes de hablar del resultado de esta tesis en el siguiente capítulo, hay que familiarizarnos con los arreglos de líneas. Sea L un conjunto de n líneas en el plano, es importante entender las diferentes estructuras que puede inducir L al dividir el plano, llamamos a estas divisiones del plano generadas por L , el arreglo de líneas inducido por L . Con base en la dualidad entre un arreglo de líneas y un arreglo de puntos, concepto que estudiaremos en este capítulo, se han encontrado formas para pasar problemas difíciles de resolver en un arreglo de puntos, a problemas fácilmente solubles sobre un arreglo de líneas dual. Se han estudiado algunas propiedades del concepto generalizado a d dimensiones, es decir, arreglos de hiper planos. Más le hemos encontrado belleza, recordando que esta es subjetiva, al estudio de iluminar arreglos de líneas con modems inalámbricos. Es más, hemos a través de este enfoque, encontrado propiedades dignas de ser mencionadas por su belleza matemática.

4.1. Líneas

4.1.1. Propiedades básicas

Sea L un conjunto de n líneas en el plano. L induce una subdivisión del plano que consiste en vértices, lados, y caras. La mayoría de las aristas y caras están acotadas, pero habrá $2n$ caras, y $2n$ aristas no acotadas. Se refiere usualmente a la subdivisión como el arreglo inducido por L , y es denotado $A(L)$. Llamamos a un arreglo simple, si no tiene líneas paralelas, y no existen tres de ellas concurrentes. Estos arreglos, así como sus equivalentes para dimensiones mas altas, son objetos que aparecen recurrentemente en la geometría computacional. Los arreglos de líneas de n simples tienen mucha estructura, esto es claro del hecho de que tanto el número de vértices, como el de aristas, y de caras, es de orden cuadrático. Probaremos que un arreglo simple L con n líneas tiene siempre $\frac{n(n-1)}{2}$ vértices, n^2 aristas, y $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1$ caras, y que cuando el arreglo no es simple, tendrá menos vértices,

menos aristas, y menos caras.

Enunciaremos antes un lema clásico de Euler (1752), enunciado en su forma más simple, para el plano, este marca uno de los orígenes en común de la teoría de gráficas y la topología. El lema relaciona el número de vértices, de aristas, y de caras.

Lema 11. *Sea G una gráfica plana y conexa con n vértices, e aristas, y f caras. Entonces*

$$n - e + f = 2$$

No daremos la prueba

Teorema 15. *Sea L un conjunto de n líneas en el plano, y sea $A(L)$ el arreglo inducido por L .*

(i) *El número de vértices de $A(L)$ es a lo más $\frac{n(n-1)}{2}$.*

(ii) *El número de aristas de $A(L)$ es a lo más n^2 .*

(iii) *El número de caras de $A(L)$ es a lo más $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1$*

La igualdad en estos tres enunciados se cumple si y sólo si $A(L)$ es simple.

Demostración. (Seguimos la prueba de [dBCvKO97]) Primero demostraremos que el número de vértices, aristas, y caras en un arreglo plano es máximo cuando el arreglo es simple. Sea $l \in L$ una línea paralela a una o más líneas en L . Si rotamos l un poco, entonces intersectará a las líneas que eran paralelas a l . Si rotamos l lo suficientemente poco, entonces los únicos cambios en la estructura combinatoria del arreglo, serán las nuevas intersecciones con las líneas paralelas a l , creando así nuevos vértices, nuevas aristas, y nuevas caras, pues el hecho de que ahora intersecte a estas nuevas líneas divide en dos a algunas aristas, y algunas caras. Similarmente, sea $l \in L$ una línea que pasa por el vértice v en el cual concurren al menos 2 líneas mas. Si trasladamos l un poco, se creara al menos un triángulo con un vértice en v , y dos vértices nuevos, y dos aristas nuevas, este será una cara nueva. Si la traslación es lo suficientemente pequeña, las nuevas intersecciones con las líneas concurrentes en v serán los únicos cambios en la estructura combinatoria de $A(L)$, por lo tanto tendremos más vértices, más aristas, y más caras. Concluimos que el arreglo con la complejidad máxima será simple.

Ahora analizaremos $A(L)$ con la suposición de que es un arreglo simple. Sea n_v el número de vértices de $A(L)$, n_e el número de aristas, y n_f el número de caras. El número de vértices es fácil de calcular, cada par de líneas se intersectan en un vértice, por el que no pasa ninguna otra línea, por lo tanto son $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ vértices. El número de aristas también es fácil de calcular, cada línea l tendrá $l_v + 1$ aristas, donde l_v es el número de vértices sobre l , como l intersecta a todas las líneas en L , entonces $l_v = n - 1$, por lo tanto si l_e denota el número de aristas contenidas en l , $l_e = n^2$. Para calcular el número de caras, usaremos el lema anterior, junto con las cotas para el número de vértices y el número de caras.

Como $A(L)$ tiene aristas que tienen sólo un vértice (las aristas infinitas), no es una gráfica. Para solucionar esto, y aplicar el lema, agregamos un vértice v_∞ , el infinito, y

conectamos a este todas las aristas infinitas. De esta manera, obtenemos una gráfica plana con $n_v + 1$ vértices, n_e aristas, y n_f caras. Por lo tanto, por el lema de Euler:

$$\begin{aligned} n_f &= 2 - (n_v + 1) + n_e \\ &= 2 - \left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right) + n^2 \\ &= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1 \end{aligned}$$

□

4.2. Dualidad

Un punto en el plano tiene dos parámetros, su coordenada x y su coordenada y . Una línea no vertical también tiene dos parámetros, su pendiente y su intersección con el eje y . Por lo tanto es posible hacer un mapa de un conjunto de puntos en el plano a un conjunto de líneas en el plano, y viceversa. Incluso podemos hacer esto de una manera que algunas propiedades del conjunto de puntos se traduzcan a otras propiedades en el conjunto de líneas. Por ejemplo, que tres puntos colineales se mapeen a tres líneas concurrentes. Existen muchos mapeos diferentes con esa propiedad, a estos mapeos los llamamos *transformaciones duales*. La imagen de un objeto bajo la transformación dual es llamada el dual del objeto. Un ejemplo de una transformación dual, y el que utilizaremos en esta tesis, es el siguiente: Sea $p = (m, b)$, el dual de p , denotado p^* es la línea definida como:

$$p^* = (y = mx - b).$$

Análogamente definimos el dual de una línea $l = (y = mx + b)$, de manera que el dual del dual de un punto, sea ese mismo punto, es decir el dual de l será un punto p tal que $p^* = l$.

$$l^* = (m, -b)$$

En adelante cuando nos refiramos a una transformación dual, nos referimos a esta. Nótese que esta transformación dual no está definida para líneas verticales, mas en la mayoría de los casos, estas pueden ser manejadas de otra forma. En esta tesis, como usaremos arreglos de líneas simples, siempre podremos rotar nuestro arreglo, de manera que no haya líneas verticales.

Decimos que la transformación dual mapea objetos del plano primal al plano dual. Como habíamos mencionado, algunas propiedades que aparecen en el plano primal, permanecen bajo la transformación dual.

Observación 1. Sea p un punto en el plano y l una línea no vertical. La transformación dual $o \rightarrow o^*$ tiene las siguientes propiedades:

- *Preserva incidencias:* $p \in l \Leftrightarrow l^* \in p^*$.
- *Preserva orden:* p esta abajo de $l \Leftrightarrow l^*$ esta abajo de p

Como ya hemos mencionado, esta transformación manda tres puntos colineales a tres líneas concurrentes. De aquí en adelante, cuando hablemos del dual de un objeto, estaremos hablando del objeto bajo esta transformación dual.

Proposición 4. Sean p_1, p_2, p_3 tres puntos en el plano, y l_1, l_2, l_3 sus respectivos duales. Entonces p_1, p_2, p_3 serán colineales si y sólo si l_1, l_2, l_3 son tres líneas concurrentes.

Demostración. Supongamos que $p_i = (m_i, b_i)$. Los tres puntos serán colineales si y sólo si, están sobre la misma línea. Entonces si son colineales,

$$\frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} = \frac{b_3 - b_2}{m_3 - m_2} = \frac{b_3 - b_1}{m_3 - m_1}.$$

Por otra parte las tres líneas $p_i^* = (y = m_i x - b_i)$ son concurrentes si y sólo si cumplen

$$\frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} = \frac{b_3 - b_2}{m_3 - m_2} = \frac{b_3 - b_1}{m_3 - m_1}.$$

De donde es claro que los puntos p_1, p_2, p_3 son colineales si y sólo si p_1^*, p_2^*, p_3^* son concurrentes. □

Capítulo 5

Iluminación de arreglos de líneas con k-modems

Ya hemos expuesto los antecedentes más importantes para esta tesis. El sinuoso jardín de senderos que se bifurcan en este mundo de coincidencias me ha llevado a encontrar, junto con mis asesores, el resultado que presentaré en este capítulo, la cara central. Es natural pensar en ella, una cara que de alguna manera está posicionada lejos de las orillas de un arreglo de líneas, es decir lejos de las caras infinitas. Y a pesar de parecer un dual del punto central de un arreglo de puntos, no es lo mismo.

5.1. Introducción

Decimos que un k-modem en un punto y en el plano ilumina a un punto x en el plano, si el segmento de línea xy que une a x con y , intersecta en su interior a lo más a k líneas de L . Observemos que dados dos k-modems en el interior de la misma cara, ambos iluminarán el mismo conjunto de puntos, por ello en general hablamos de k-modems en el interior de una cara, omitimos que estará en el interior, pues siempre nos referiremos a k-modems en el interior de caras. En esta tesis estudiamos la iluminación de arreglos de líneas con k-modems. Recordemos que todos nuestros arreglos de líneas son simples.

Observación 2. Sean D y F dos caras en un arreglo de líneas $A(L)$, sean x y y dos puntos en el interior de D y F respectivamente. Sea d el conjunto de rectas de L que intersecta al segmento de recta xy , entonces d es independiente de la elección de x y y .

La siguiente definición es correcta gracias a la observación 2.

Definición 6. Dadas un punto x y una cara F definimos la distancia de x a F , y la denotamos $d(x, F)$, como la cantidad de líneas de L que intersectan al segmento xy en su interior, con y un punto en el interior de F

Definición 7. Sean D, F dos caras en $A(L)$, definimos la distancia $d(D, F)$ entre ellas, como la cantidad de rectas de L que intersectan a un segmento de recta con extremos en el interior de D y F .

Esta definición que damos así, en su forma más general, contempla el caso en el que x sea un punto sobre una recta de $A(L)$, en cuya instancia dicha línea donde se encuentra x no será contada en la distancia de x a F , mas para fines de esta tesis, pocas veces agarramos puntos sobre una línea, en caso de hacerlo, seremos claros al respecto.

Sea L un conjunto de n líneas en el plano y $A(L)$ el arreglo de líneas simple inducido por L . $A(L)$ tendrá caras no acotadas, llamamos a estas las *caras infinitas* de $A(L)$. Si F es una cara infinita entonces decimos que F_∞ es la cara infinitamente opuesta a F , es decir la única cara infinita a distancia n de F , la llamamos únicamente la cara opuesta a F cuando no produzca confusión con la siguiente definición:

Definición 8. Diremos que dos caras D y F son adyacentes si comparten una arista. Lo denotamos $D \sim F$.

Definición 9. Sea J una cara en un arreglo de líneas, y x un vértice en J . La cara opuesta a J por x será la otra cara que contiene a x y no es adyacente a J , la denotamos J_x .

Observación 3. Sea L un conjunto de n líneas en el plano, y $A(L)$ el arreglo inducido por L , entonces:

- $A(L)$ tiene $2n$ caras infinitas
- Si F es una cara infinita, entonces F_∞ existe y es única.

A pesar de que la observación es muy simple, la demostraremos para irnos familiarizando con los arreglos de líneas y la forma en la que los usaremos en este capítulo. La prueba de las $2n$ caras infinitas se sigue de notar que cada cara infinita tiene que ser acotada por dos aristas infinitas, y que cada línea se dividirá en n aristas, de las cuales únicamente dos serán infinitas. La prueba de existencia y unicidad de F_∞ la desarrollamos con más notación para poder ser precisos y formales, en realidad la demostración consiste en lo siguiente: Sea F una cara infinita, recordando que todas las caras de un arreglo de líneas son convexas podemos asegurar que para cualquier punto en su interior existirá una semirecta totalmente contenida adentro de F , al fijarnos en la recta que contiene a dicha semirecta, esta intersectará a todas las líneas de L , siendo dividida en segmentos de recta, dos de ellos infinitos. Uno de estos segmentos infinitos contendrá a la semirecta que hemos mencionado, y estará completamente contenido en F , el otro segmento infinito estará contenido en otra cara, que por ende será infinita, y a distancia n de F (Ver Figura 5.1). La unicidad se sigue a partir de asignarles valores vectoriales a las caras.

Demostración. Es claro que cada arista en $A(L)$ pertenece únicamente a dos caras. También es fácil ver que una cara infinita tendrá que tener dos aristas infinitas, y que las dos caras a

las que pertenece una arista infinita, son dos caras infinitas. Ahora notemos, que cada línea $l \in L$ tendrá dos aristas infinitas, esto se sigue de que cada línea proporciona n aristas al arreglo, y estas, que comparten entre sí a lo más un punto, juntas ocupan la línea entera, por lo tanto tienen que haber dos aristas infinitas, y únicamente dos. De esto se deduce que hay $2n$ aristas infinitas, cada una de ellas en dos caras infinitas, y cada cara infinita con dos aristas infinitas. Entonces si c es el número de caras, $2c$ será contar dos veces las aristas infinitas, $2c = 2(2n)$, Se sigue que son $2n$ caras infinitas.

Sea F una cara infinita. Ya que F es una cara no acotada y convexa, aseguramos que si tomamos un punto P en el interior de F existe una semirecta e que contenga a P que cumple lo siguiente (Ver Figura 5.1):

- e esta contenida en F ,
- no es paralela a ninguna línea de L ,
- comienza en una arista de F .

Llamamos S al punto donde e comienza. La forma de construir dicha semirecta es tomando una semirecta con punto final P y contenida en F que no sea paralela a ninguna de las rectas de L , luego tomamos la recta que contiene a dicha semirecta, y nos fijamos en la semirecta que queda contenida en F , esta es la buscada. Sea l la recta que contiene a e , como esta no es paralela a ninguna recta de L , entonces interseca a todas las rectas de L . Las rectas de L dividirán a l en $n + 1$ pedazos, dos de ellos no acotados, uno de estos será claramente e , sea f el otro segmento de recta no acotado de los que L induce en l . Cada uno de estos segmentos estará contenido en alguna cara de $A(L)$.

Sea D la cara en donde esta contenida f , y Q un punto en f sobre el interior de D , entonces el segmento de recta PQ interseca a todas las líneas de L , y por lo tanto $d(F, D) = n$. Como D contiene una semirecta, entonces D no está acotada y por ende es una cara infinita, $D = F_\infty$. (Ver Figura 5.1)

En realidad, dada una cara F , existe a lo más una cara D a distancia n de F . Y en general, ésta sólo existe cuando F es infinita. Primero demostraremos que si F, D son dos caras, tales que $d(D, F) = n$, entonces D y F son caras infinitas. Sean D, F dos caras tales que $d(D, F) = n$, P un punto en el interior de F y Q un punto en el interior de D . El segmento de recta PQ interseca a n líneas, es decir a todas las rectas de L . Por lo tanto si l es la recta que contiene a PQ , y l_1 la semirecta contenida en l con punto final P y que no pasa por Q , y l_2 la semirecta con punto final Q que no contiene a P y que esta contenida en l , entonces l_1 estará completamente contenida en F y l_2 estará contenida en D , como D y F contienen ambas a una semirecta, no están acotadas, y por lo tanto son infinitas.

Antes de continuar, notemos que a cada cara la podemos describir como un vector con n coordenadas. ¿Cómo? Suponiendo que ninguna recta es paralela al eje y , dado una numeración de las rectas de L como l_1, l_2, \dots, l_n , podemos asignarle a una cara F un vector de n coordenadas, donde la i -ésima coordenada será cero si la cara se encuentra debajo de l_i , y

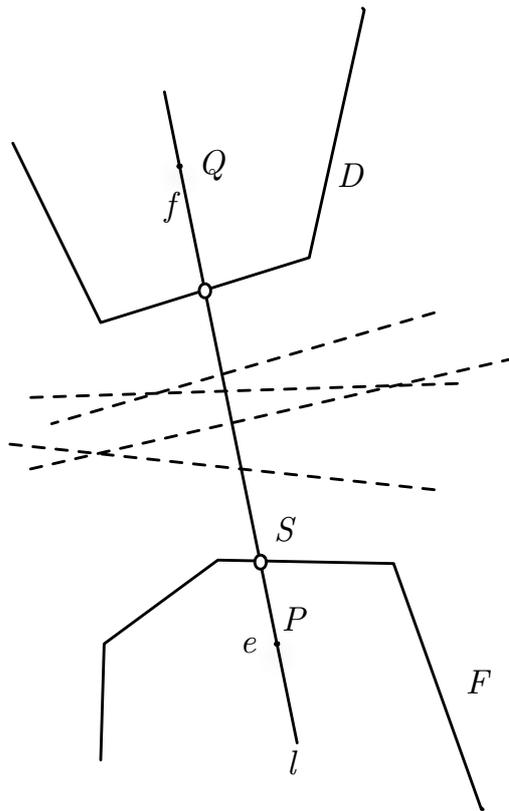


Figura 5.1: La cara $D = F_\infty$ infinita y opuesta a F .

uno si se encuentra arriba. Denotamos a dicho vector como V_D , sin preocuparnos por como hemos numerado las rectas, mas asumiendo que siempre usamos la misma numeración. Denotamos como $\overline{V_D}$ al vector de n coordenadas con unos donde V_D tiene ceros, y ceros donde V_D tiene unos. Es claro que no todos los vectores de n coordenadas, de ceros y unos, representaran caras, pues en general hay 2^n vectores de esta forma, y el número de caras es $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1$. Hay que notar también que no habrá dos caras representadas por el mismo vector bajo la misma numeración de las rectas.

Ahora probaremos que dada una cara F no existen dos caras distintas D_1, D_2 con $d(F, D_1) = d(F, D_2) = n$. Sea F una cara y D_1, D_2 caras tales que $d(F, D_1) = d(F, D_2) = n$. Viendo a cada cara, como un vector con n coordenadas, tales que todas son ceros o unos. Un poco de razonamiento, nos hace deducir que distancia entre dos caras A y B con vectores V_A, V_B será la cantidad de coordenadas distintas de cero del vector $V_A - V_B$. Esto quiere decir que como D_1 esta a distancia n de F , $V_{D_1} = \overline{V_F}$ y lo mismo $V_{D_2} = \overline{V_F}$, de donde $V_{D_1} = V_{D_2}$ y por lo tanto $D_1 = D_2$. \square

Hay que notar que dos caras infinitas y opuestas D y D_∞ cumplen una bonita propiedad, al tomar cualquier punto s en el interior de una cara F , y p y q puntos en el interior de D y D_∞ respectivamente, entre los segmentos de línea ps y qs intersectan a todas las líneas de L , mas una única vez a cada una. Esto indicara que para cualquier cara F , y D una cara infinita $d(D, F) + d(D_\infty, F) = n$.

Proposición 5. Sean A y A_∞ dos caras infinitas y opuestas en un arreglo simple de líneas $A(L)$, p y q dos puntos en el interior de A y A_∞ respectivamente, tales que el segmento de línea pq no sea paralelo a ninguna de las líneas de L . Si s es un punto interior de alguna cara de $A(L)$ entonces cada línea del arreglo siempre intersecta o a ps o a qs , mas solo a uno de estos segmentos.

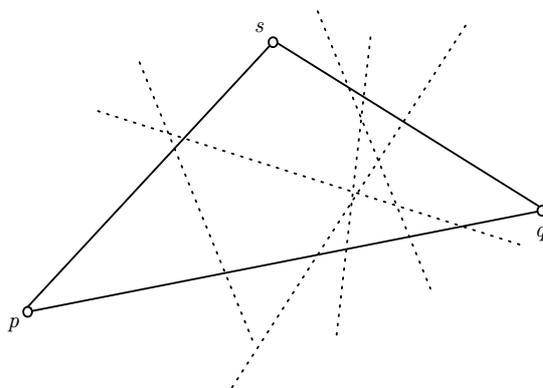


Figura 5.2: Como todas las líneas intersectan a pq entonces estas intersectan o a ps o a qs .

Demostración. Sea $|L| = n$, como A y A_∞ son caras infinitas opuestas su distancia será n por lo que pq intersecta a todas las líneas de L . Es claro que si una línea intersecta a un triángulo entonces lo hace en dos lados, tomando esto en cuenta, nos fijamos en el triángulo pqs . Sabemos que toda línea de L intersecta a pq , por lo que toda línea de L intersecta a pqs , de donde se deduce que toda línea en L intersecta a ps o a qs , mas solo a uno. Ver Figura 5.2. \square

De la anterior proposición construimos fácilmente el siguiente lema, el cual nos recuerda que de existir una forma topológica de ver los arreglos de líneas, está será lejana a la forma usual de ver el plano. Esto se debe a que si consideráramos a las caras infinitas de un arreglo de líneas como las orillas de nuestro arreglo, el siguiente lema nos dice que la suma de las distancias de cualquier cara a las caras de la orilla siempre será la misma, sin importar la cara que escogamos.

Lema 12. La suma de las distancias de una cara a todas las caras exteriores es n^2

Omitimos la demostración.

5.2. Interpretaciones en el dual y primal

Teorema 16. *Sea L un conjunto de n rectas y $A(L)$ el arreglo inducido por este. Entonces siempre existirá una cara C en $A(L)$, tal que la distancia de C a cualquier otra cara del arreglo es a lo más $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$.*

Mas adelante demostraremos este teorema. Por el momento nos enfocaremos en hacer notar que este resultado a pesar de su similitud y analogía al punto central de un conjunto de puntos, es distinto, su demostración no es sólo distinta, ya que no usa el teorema de Helly, sino que también nos otorga la promesa de poder utilizar las técnicas usadas en diagramas de Voronoi en arreglos de líneas. Daremos la interpretación que tienen el dual de dos resultados importantes sobre arreglos de puntos, el punto central de un conjunto de puntos, y el resultado que dice que para un conjunto de puntos existirán 3 líneas concurrentes que dividirán al conjunto de puntos en seis partes iguales, en caso de que $|P| \equiv 0 \pmod{6}$. Otra interpretación importante será definir la distancia entre dos rectas en un arreglo de puntos de manera que esta sea análoga a la distancia entre dos puntos en un arreglo de líneas.

5.2.1. Punto central (centerpoint)

Teorema 17. *Sea S un arreglo simple de puntos en el plano (un conjunto de puntos en posición general), existe un conjunto convexo en el plano, tal que cualquier línea que lo interseque, deja en cada uno de sus semiplanos a lo más a $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ puntos de S .*

Omitimos la demostración.

¿Que interpretación le podemos dar al dual del punto central en un arreglo de puntos? El dual de un arreglo de puntos P será un arreglo de líneas L . El teorema del punto central nos da un conjunto convexo C en el plano tal que cualquier línea que pase por este deja a lo más $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ puntos de cada lado. Tomamos un punto cualquiera c de C , sea T el conjunto de todas las líneas que pasan por c con excepción de la vertical. Entonces T^* serán todos los puntos sobre c_1^* , es decir los puntos sobre una línea. ¿Como interpretamos que cada línea l en T divida el conjunto de puntos en dos subconjuntos con a lo más $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ puntos? En realidad divide a los puntos P en dos conjuntos: P_u los puntos que se encuentran arriba de l y P_d los puntos que se encuentran abajo de l . Al irnos al dual l se transforma en un punto p , recordamos que la relación que un punto este arriba de una línea es equivalente a que en el dual la línea que es dual del punto, se encuentre arriba del punto que es dual de la línea, por lo tanto el punto p estará por debajo de a lo más $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ líneas, y por arriba de $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ líneas de L . De esta forma cada punto en $T^* = c^*$ cumple que se encuentra a lo más abajo de $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ líneas de L y a lo más arriba de $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ líneas de L .

De lo anterior que C^* es una colección de líneas, tal que para cualquier $x \in l \in C^*$, a lo más $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ líneas de L están por debajo, o por arriba de x .

5.2.2. Distancia entre dos rectas

Ya hemos hablado de la distancia entre dos puntos x, y en el plano, sobre un arreglo de líneas simple $A(L)$. Sea $P = L^*$ entonces P será un arreglo de puntos simple. Si la distancia de x a y es m , ¿qué significado tendrá esto en el espacio dual? Sobre nuestro arreglo de líneas $d(x, y) = m$ significa que hay m rectas de L que separan a x de y , es decir que existe un subconjunto K de L con $|K| = m$ y tal que sea maximal respecto a la siguiente propiedad: para toda $l \in K$, x se encuentra abajo de l si y sólo si y se encuentra arriba, y y se encuentra abajo de l si y sólo si x se encuentra arriba. Al irnos al dual K se vuelve K^* un conjunto de puntos, x y y se vuelven dos líneas x^* y y^* y cumplen la misma propiedad, un punto $l^* \in K^*$ estará arriba de x^* y abajo de y^* o viceversa (dicho K^* también será maximal respecto a esta propiedad). En la Figura 5.3 podemos apreciar la distancia entre dos rectas.

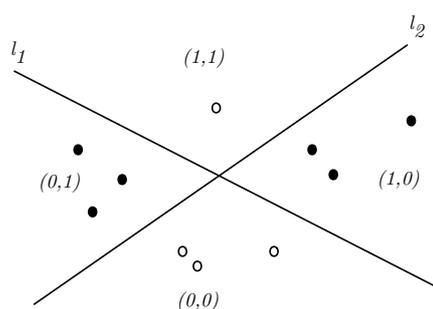


Figura 5.3: La distancia entre l_1 y l_2 son los puntos rellenos. Se muestran los vectores de cada cara, siendo la primera coordenada correspondiente a l_1 y la segunda a l_2 .

Entonces es lógico definir la distancia entre dos rectas l_1 y l_2 en un arreglo de líneas como la cantidad de puntos en las dos caras que se extienden hacia los lados. Es claro que todos los arreglos de líneas con dos líneas son análogos, y por ello las caras siempre tendrán los mismos vectores para representarlas como en la Figura 5.3, definimos formalmente la distancia entre l_1 y l_2 como la cantidad de puntos en el interior de la cara $(0, 1)$ y la cara $(1, 0)$.

5.2.3. Las tres líneas concurrentes

Teorema 18. *Sea P un arreglo simple de $6n$ puntos en el plano, entonces existen tres líneas l_1, l_2, l_3 concurrentes en un punto p tal que las 6 caras en las que dividen al plano contienen n puntos, cada una.*

Este resultado clásico, tampoco será demostrado, mas si lo interpretaremos. ¿Como se vería en el dual? Sea $p_i = l_i^*$, entonces p_1, p_2, p_3 son tres puntos colineales. De la Figura 5.4 es fácil deducir que la distancia entre l_1 y l_2 es $2n$, lo mismo la distancia entre l_2 y l_3 .

La distancia entre l_1 y l_3 es claramente $4n$. También es claro que para para las tres rectas, la mitad de los puntos se encuentran por arriba de ellas, y la mitad por abajo. Traducción final: p_1, p_2, p_3 son tres puntos colineales, con distancias $d(p_1, p_2) = 2n, d(p_2, p_3) = 2n, d(p_1, p_3) = 4n$, y tal que p_1, p_2, p_3 se encuentra cada uno abajo de exactamente $3n$ rectas y arriba de $3n$ rectas. Es claro que siempre habrá una cara que se encuentre arriba de todas las líneas y una que se encuentre abajo de todas, si las denotamos U y D respectivamente, la cantidad de líneas arriba de un punto será la distancia de dicho punto a U , y la cantidad de líneas abajo de un punto será la distancia de dicho punto a D . Ver la Figura 5.5 para un diagrama representativo de lo anterior.

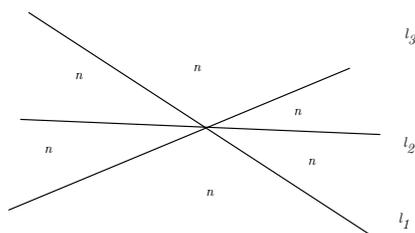


Figura 5.4: Representación del teorema 18, con n líneas en cada cara

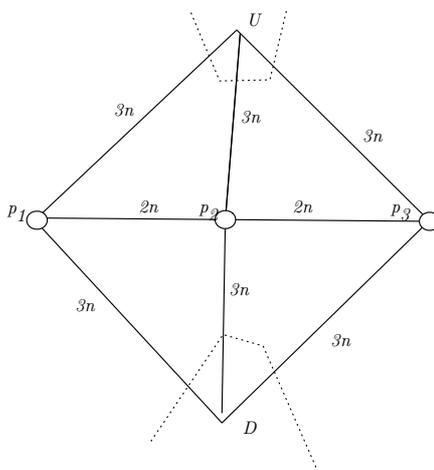


Figura 5.5: Diagrama representativo de las propiedades de p_1, p_2, p_3 , los números sobre los segmentos de recta son las distancias entre los puntos, y entre puntos y caras.

5.3. Cara central para arreglos de líneas

Hemos dado las interpretaciones anteriores, no sólo para mostrar la estructura de los arreglos de líneas, sino también para aclarar que la cara central no es equivalente al punto central, a pesar de tener una sensación muy parecida. Se puede apreciar en todo esto la diferencia entre manejar un arreglo de líneas y uno de puntos, a pesar de que la dualidad nos preserve prácticamente toda la información, existen cosas que son claramente muy interesantes, y fáciles de apreciar sobre un arreglo de líneas, y que tienen un sentido más abstracto sobre un arreglo de puntos, y viceversa.

Ya hemos mencionado lo que es la cara central, una cara cuya distancia a cualquier otra cara es a lo más $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Esto nos dará explícitamente una forma de iluminar todo arreglo de líneas con un un k modem de potencia $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ situado en dicha cara. Mostraremos un ejemplo en el que para iluminar un arreglo con un sólo k modem se necesita que este tenga potencia $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$; esto nos implica un teorema de iluminación de necesidad y suficiencia, es decir a lo que aspiramos. Daremos ahora la herramienta más importante para demostrar la existencia de la llamada cara central.

5.3.1. El bisector de dos caras

Definición 10. *El bisector, o mediatriz, de dos caras D y F es un conjunto de puntos en el plano, denotado por $M_{D,F}$, con la propiedad siguiente: x está en $M_{D,F}$ si y sólo si $d(x, D) = d(x, F)$.*

Lo que demostraremos en esta subsección es que el bisector de cualesquiera dos caras en un arreglo existe. Y es una curva que divide al plano en tres (un conjunto de caras, o de aristas conectadas, dependiendo de la paridad de la distancia entre las caras), los puntos a la izquierda del bisector, los que están a la derecha, y el bisector. Mostraremos también como se ven los bisectores. Comenzaremos fijándonos en el bisector de dos caras infinitas opuestas.

Sea L un conjunto de n líneas y D y D_∞ dos caras infinitas opuestas en $A(L)$ ¿Como se vé el bisector M_{D,D_∞} ? Recordemos que existen $2n$ caras infinitas, es claro que podemos nombrarlas como C_1, C_2, \dots, C_{2n} de tal forma que $C_i \sim C_{i+1}$ para $i = 1, 2, \dots, 2n-1$ y $C_{2n} \sim C_1$. Si tomáramos un círculo γ en el plano, que contuviera en su interior todos los puntos de intersección de $A(L)$ entonces al intersectar γ con $A(L)$ dividiríamos a γ en pedazos, y nos quedarían $2n$ pedazos, uno en cada cara infinita, como en la Figura 5.6. De aquí que podemos imaginarnos a las caras infinitas como las caras que rodean a $A(L)$, formando una especie de círculo, y un ciclo en cuanto a sus adyacencias. Llamamos a la gráfica con vértices C_1, C_2, \dots, C_{2n} y tal que $C_i \sim C_{i+1}$ para $i = 1, 2, \dots, 2n-1$ y $C_{2n} \sim C_1$ el *ciclo de las caras infinitas*, y cómodamente lo denotamos G_∞ . Notemos que las adyacencias en G_∞ están dadas por las aristas infinitas de $A(L)$. Si γ fuera un círculo que contiene a todos los vértices de $A(L)$ en su interior, la intersección de este círculo con $A(L)$ la podemos usar

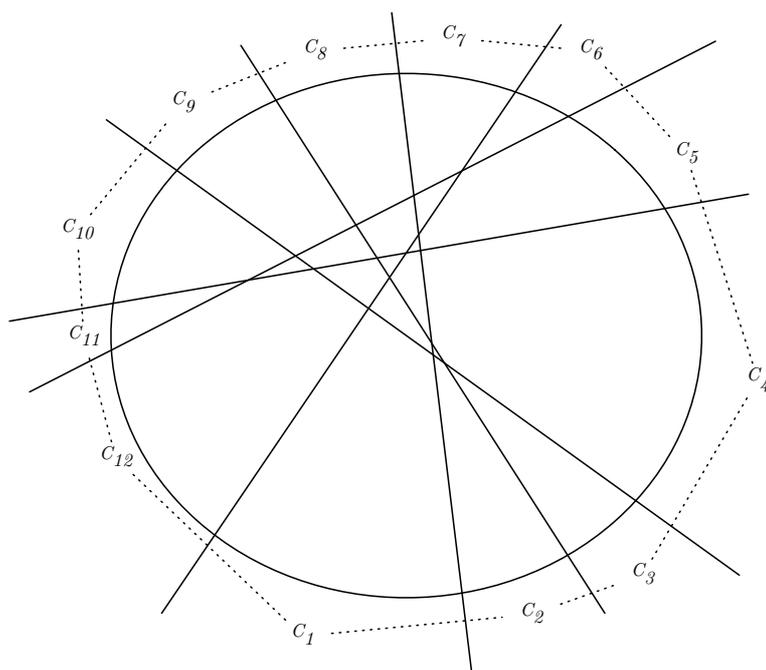


Figura 5.6: Un arreglo de líneas, sus caras infinitas y G_∞ , las adyacencias representadas por las líneas punteadas.

para dibujar G_∞ siendo los semiarcos en los que $A(L)$ divide al círculo los vértices de G_∞ y los puntos de intersección de γ con $A(L)$ las aristas de G_∞ . Denotaremos como $d_{G_\infty}(D, F)$ a la distancia en la gráfica G_∞ de los vértices correspondientes a la cara infinita D y a la cara infinita F , hablamos de D como una cara de $A(L)$ y como un vértice de G_∞ de la misma forma, cuando esto no produzca confusión.

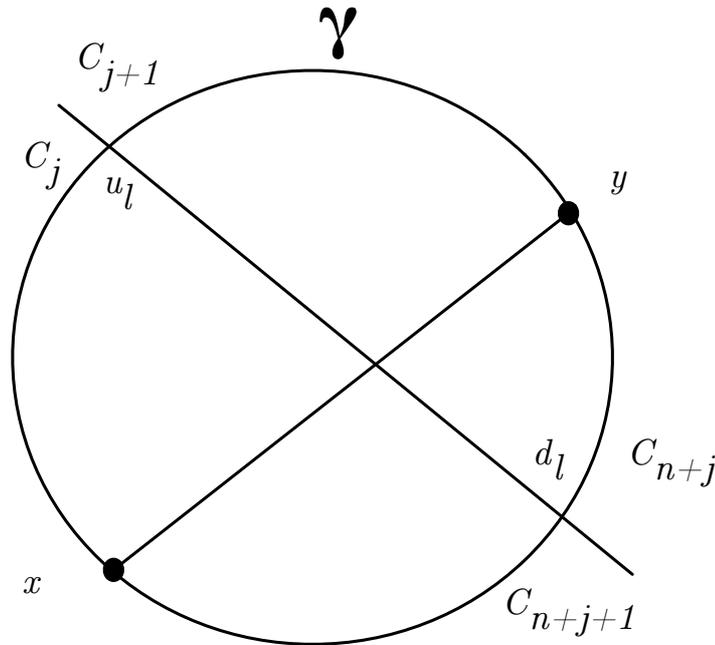


Figura 5.7: Círculo para representar G_∞ , notar que si una línea intersecta a \overline{xy} entonces en G_∞ cualquier camino de la cara de x a la cara de y pasara por una arista dada por u_l o d_l

Proposición 6. Sean D, F dos caras infinitas, entonces $d(D, F) = d_{G_\infty}(D, F)$, donde $d_{G_\infty}(D, F)$ es la cantidad de aristas en el camino mas corto en G_∞ entre los vértices correspondientes a D y F .

Demostración. Sea l una línea que separa a D y a F , es decir que si x es un punto en el interior de D y y uno en el interior de F , entonces el segmento de línea xy intersecta a l en su interior. Denotemos por u_l a la arista superior e infinita de l y a d_l a la arista inferior e infinita de l como se muestra en la Figura 5.7.

Supongamos que x y y son puntos suficientemente lejos, de tal manera que podamos pasar por ellos un círculo γ que contenga en su interior todos los puntos de intersección de $A(L)$. Como xy intersecta en su interior a l , entonces l intersecta a γ en un punto p arriba de xy y uno q abajo de xy . Si recordamos que podemos usar γ para trazar la gráfica

G_∞ deducimos que cualquier camino en G_∞ de D a F pasa por una arista proveniente de l , u_l o d_l . Como $d_{G_\infty}(D, F)$ es la cantidad de aristas en el camino mas corto entre D y F , concluimos que $d(D, F) \geq d_{G_\infty}(D, F)$.

Para demostrar la otra desigualdad, y así completar la demostración, haremos una observación muy fácil. $d_{G_\infty}(D, F)$ es la cantidad de líneas que intersectan a uno de los semiarcos de γ delimitado por x y y , de hecho es al semiarco con menos intersecciones. Este semiarco, llamemoslo κ es una curva que une a x con y . Es claro que cualquier curva que una a x con y tendrá igual o más intersecciones con líneas de L que el segmento xy , de donde se sigue la otra desigualdad, y con ello la igualdad. \square

De la proposición 6 deducimos que si tenemos un conjunto L con $2n$ líneas, y D y D_∞ son dos caras infinitas y opuestas en $A(L)$, entonces $d(D, D_\infty) = 2n$ y por lo tanto, los dos caminos simples en G_∞ de D a D_∞ tienen distancia $2n$, de donde existe una cara en cada uno de estos dos caminos, a distancia n de D y D_∞ . Estas dos caras serán equidistantes a D y D_∞ . Es claro de la gráfica G_∞ que sólo hay dos caras infinitas equidistantes a D y D_∞ .

Para construir nuestro bisector nos fijaremos en que dada una cara F en $A(L)$, si F pertenece a M_{D, D_∞} entonces existen otras caras opuestas a F por algún vértice, de tal manera que estas son también equidistantes a D y D_∞ . Formalmente:

Lema 13. *Sea L un conjunto con $2n$ líneas, y D y D_∞ dos caras infinitas y opuestas, si F es una cara en $A(L)$ equidistante a D y D_∞ entonces:*

Si F es una cara infinita, entonces existirá un único vértice X en F tal que F_X sea equidistante a D y a D_∞ .

Si F es una cara acotada, entonces existirán dos, y sólo dos, vértices X y Y en F tales que F_X y F_Y son equidistantes a D y D_∞

Demostración. Sean p, q, s puntos en el interior de D, D_∞, F respectivamente. Como F es equidistante a D y D_∞ , de la proposición 5 sp y sq dividen a L en dos conjuntos ajenos L_{sp} y L_{sq} de las líneas que intersectan a sp y las que intersectan a sq respectivamente. Sea L_F las líneas de L que contienen aristas de F , este subconjunto a su vez estará dividido en dos subconjuntos, Fl_{sp} el de las líneas que intersectan a sp y Fl_{sq} el de las líneas de L_F que intersectan a sq . Lo importante es ver que ni Fl_{sp} ni Fl_{sq} serán vacíos. Esto se sigue del hecho de que s esta en el interior de F y p y q en el exterior, entonces en ambos casos, cualquier segmento de recta que acabe afuera de F tiene que intersectar a alguna recta de L_F , como se muestra en la Figura 5.8.

Recordemos que las caras de todo arreglo de líneas simples son convexas, cada vértice será la intersección de dos líneas de L_F , mas no toda intersección de líneas de L_F es un vértice de F . Ordenemos las líneas de L_F como l_1, l_2, \dots, l_m , de tal forma que los vértices de F sean en orden contrario de las manecillas del reloj v_1, v_2, \dots, v_m tal que $v_i = l_i \cap l_{i+1}$ para $i = 1, 2, \dots, m-1$ y $v_m = l_m \cap l_1$. Como $Fl_{sp} \neq \emptyset$ y $Fl_{sq} \neq \emptyset$, entonces existirá un vértice v_j tal que $l_j \in Fl_{sp}$ y $l_{j+1} \in Fl_{sq}$ (si $j = m$ entonces $j+1 = 1$). Afirmamos que F_{v_j} es equidistante a D y D_∞ . Sea s' un punto en el interior de F_{v_j} ,

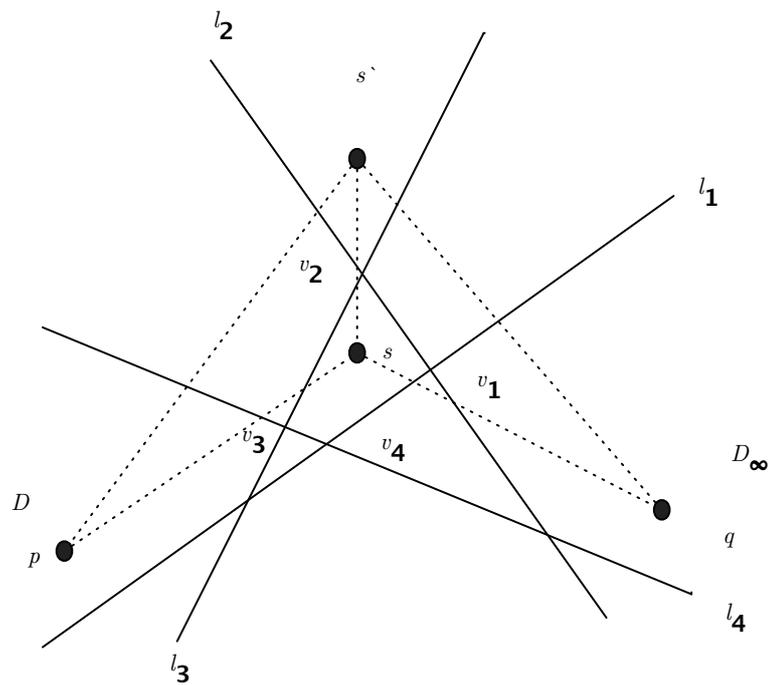


Figura 5.8: Representación del lema 13

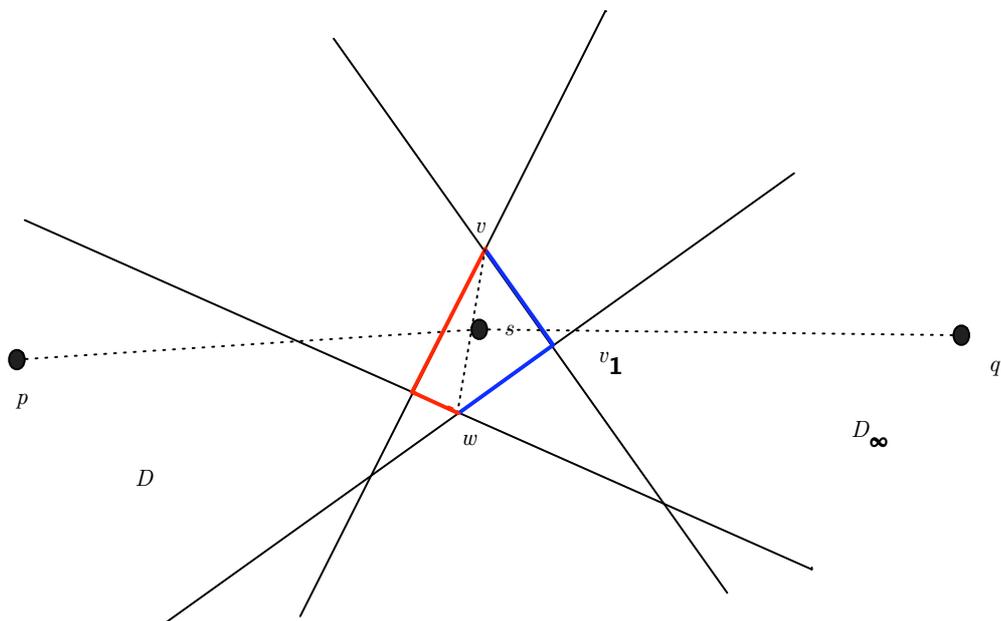


Figura 5.9: Construcción de γ en el lema 13 cuando la cara F es acotada.

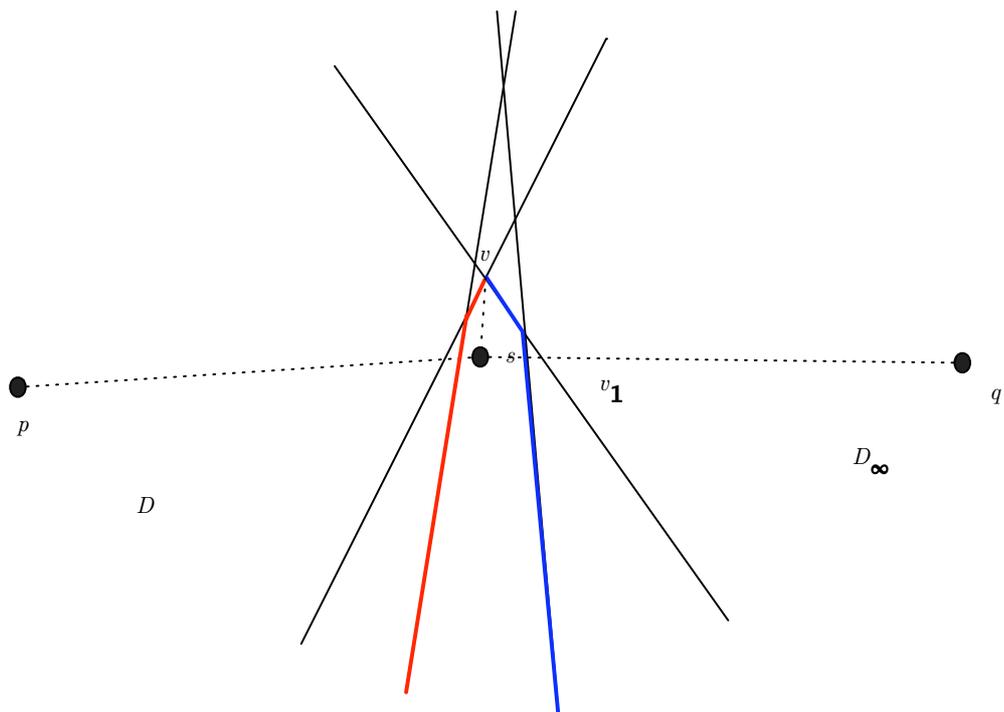


Figura 5.10: Construcción de γ en el lema 13 cuando la cara F es infinita.

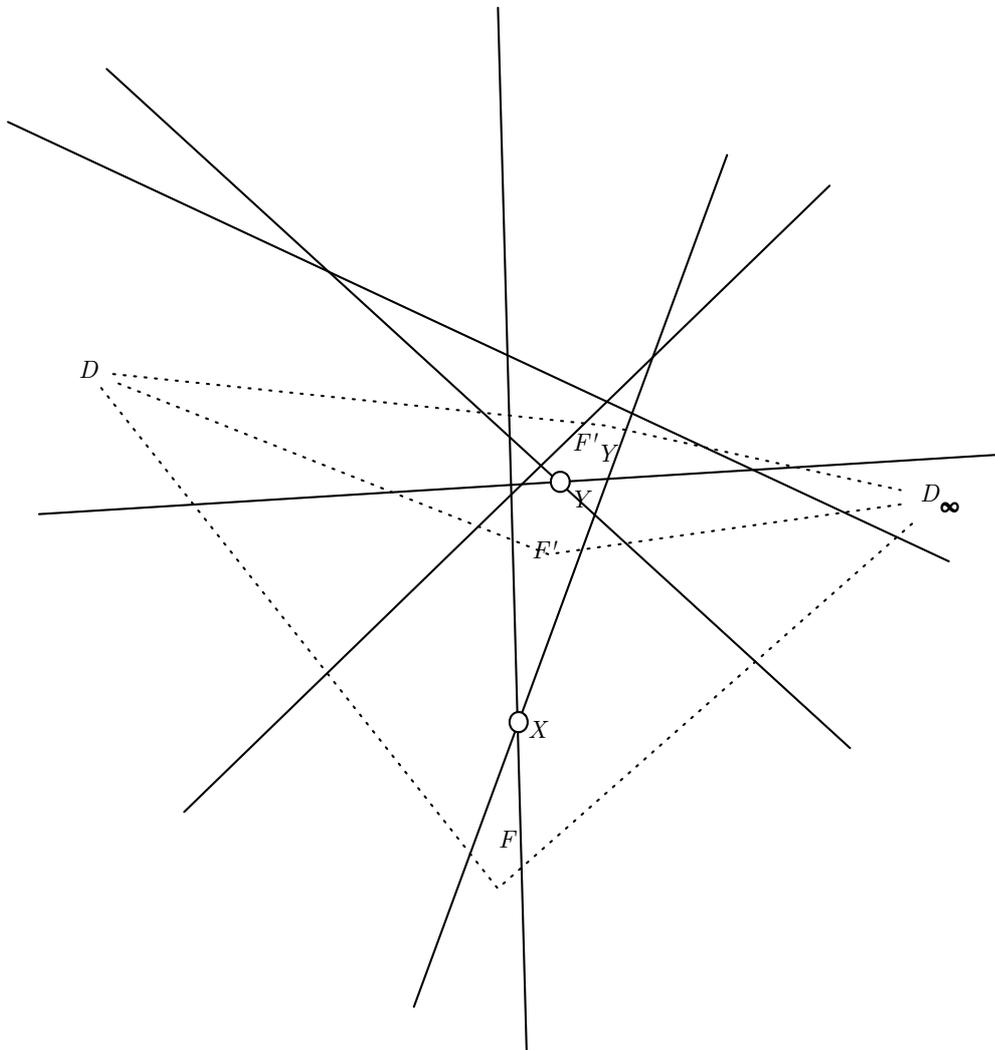


Figura 5.11: El vértice X para F , y X y Y para F' tal y como nos indica el lema. $F, F' = F_X$ y F'_Y son todos equidistantes a D y D_∞ .

Por la proposición 5, s' determina una división de L en dos subconjuntos ajenos, las rectas $L_{s'q}$ que intersectan a $s'q$ y las rectas $L_{s'p}$ las que intersectan a $s'p$. Es claro que las líneas que intersecten a $s'q$ serán casi las mismas que las que intersectan a sq , es decir serán las mismas, a excepción de l_{j+1} que no intersectará a $s'q$, mas l_j si intersectará a $s'q$, análogamente las líneas que intersectan a $s'p$ serán las mismas que las que intersectan a sp menos l_j mas l_{j+1} , como se puede ver en la figura 5.8. Una forma fácil de ver lo anterior, es fijandonos en el cuadrilátero $psqs'$ y su diagonal $s's$, como s' está en F_{v_j} , entonces ss' sólo intersecta de L a las rectas l_j y l_{j+1} , y por ello ambiguamente podemos decir que son las únicas líneas que cambian de lado. Todas las demás rectas no intersectan a ss' y por lo tanto las rectas de $L - \{l_j, l_{j+1}\}$ que intersectan a sp intersectarán a $s'p$, y las que intersectan a sq intersectarán a $s'q$. Se deduce que F_{v_j} efectivamente bisecta a D y D_∞ .

De la misma Figura, es claro deducir por las mismas razones, que si j es tal que F_{v_j} bisecta a D y D_∞ entonces, $l_j \in Fl_{sp}$ y $l_{j+1} \in Fl_{sq}$ ó $l_{j+1} \in Fl_{sp}$ y $l_j \in Fl_{sq}$, y por lo tanto la cantidad de caras opuestas por un vértice a F que sean parte del bisector M_{D,D_∞} estará dada por los vértices bicolorados de F al colorear las líneas de F como color azul si son de Fl_{sq} o de rojo si son de Fl_{sp} . Entonces, para finalizar la prueba, solo hay que mostrar que si F es acotada, habrá siempre dos, y nunca mas, vértices bicolorados, y si F es infinita habrá siempre un vértice bicolorado, y no mas,

Sea F acotada. Entonces F es un un polígono convexo. Como podemos ver a F como una gráfica cíclica en la que coloreamos las aristas, es claro que habrá dos vértices bicolorados, si demostramos que sólo hay dos vértices bicolorados, habremos acabado. Sea γ la curva dada por la unión de sp y sq , supongamos que sp y sq no pasan por ningún vértice de $A(L)$, y como p está sobre D y q está sobre la cara infinita opuesta podemos suponer que p y q están suficientemente alejados entre si, para simular que la curva γ es para fines prácticos una curva recta, y también que esta no será paralela a ninguna arista de F . Ahora, tomando a γ como si fuera un segmento de recta, podemos encontrar en F el vértice v más lejano hacia arriba y el vértice w más lejano hacia abajo respecto a γ . Entonces las aristas de F nos quedan divididas en las que están a la izquierda de la diagonal vw y las que están a la derecha. Como en el dibujo (Figura 5.9), supongamos que p esta a la izquierda de la recta dada por prolongar vw y q a la derecha de la misma recta. Entonces queda claro que si e es una arista de F a la derecha de vw entonces intersectará a sq y si e esta a la izquierda de vw entonces intersectará a sp , de donde los único vértices bicolorados serán v y w .

Sea F infinita. Hacemos la misma construcción que en el caso cuando F es acotada (Ver Figura 5.10). Más al fijarnos en la curva γ , si ponemos s lo suficientemente lejos, entonces todos los vértices de F quedarán arriba de γ y por lo tanto encontraremos un vértice v en F lo más alejado posible de γ . Nos fijamos en que las aristas a la izquierda de la recta definida por el segmento vs cortan a sp y las aristas a la derecha de dicha recta, cortan a sq , de donde como F es un convexo no acotado, sólo habrá un vértice bicolorado, específicamente v será el único vértice bicolorado. Podemos apreciar en la Figura 5.11 la implicación de este lema en un arreglo de líneas.

□

Lema 14. *El bisector de dos caras D y D_∞ infinitas y opuestas en un arreglo de $2n$ líneas es un conjunto de caras, que podemos ordenar como F_1, \dots, F_m de tal forma que F_1 y F_m son las únicas caras infinitas, y $F_i \sim F_{i+1}$ para $i = 1, \dots, 2n - 1$*

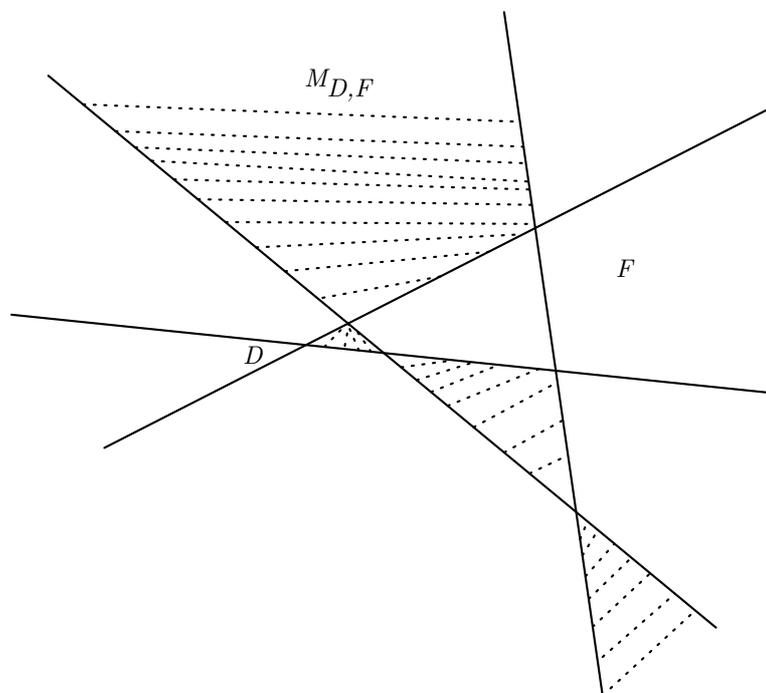


Figura 5.12: El bisector de dos caras infinitas y opuestas D y F a distancia par

Demostración. Hemos ya visto que para D y D_∞ habrá dos caras infinitas en M_{D,D_∞} , y de la proposición 6 se deduce que sólo hay dos caras infinitas en M_{D,D_∞} . Llamemos F_1 a una de las caras infinitas equidistantes a D y D_∞ , por el lema 13 (el anterior) podemos conseguir una cara F_2 opuesta a F_1 por un vértice, y en el bisector. Inductivamente, construimos F_3, F_4, \dots cada nueva cara tiene que ser distinta a las anteriores, es decir, si tenemos construidas las caras distintas F_1, \dots, F_k cumpliendo las hipótesis del lema (a excepción de que F_k sea cara infinita), entonces por el lema 13 para F_i $i = 1, \dots, k-1$ las únicas caras opuestas por un vértice que también estén en el bisector son F_{i-1}, F_{i+1} (si $i = 1$ la única cara adyacente es F_2), por lo tanto si F_k no es una cara infinita entonces tendrá una cara F_{k+1} opuesta por un vértice de F_k , que este en el bisector, y sea distinta de F_i $i = 1, \dots, k-1$. Como en $A(L)$ tenemos una cantidad finita de caras, este proceso no puede seguir para siempre, es decir, eventualmente, para alguna m , F_m será una cara infinita, y como sólo hay dos caras

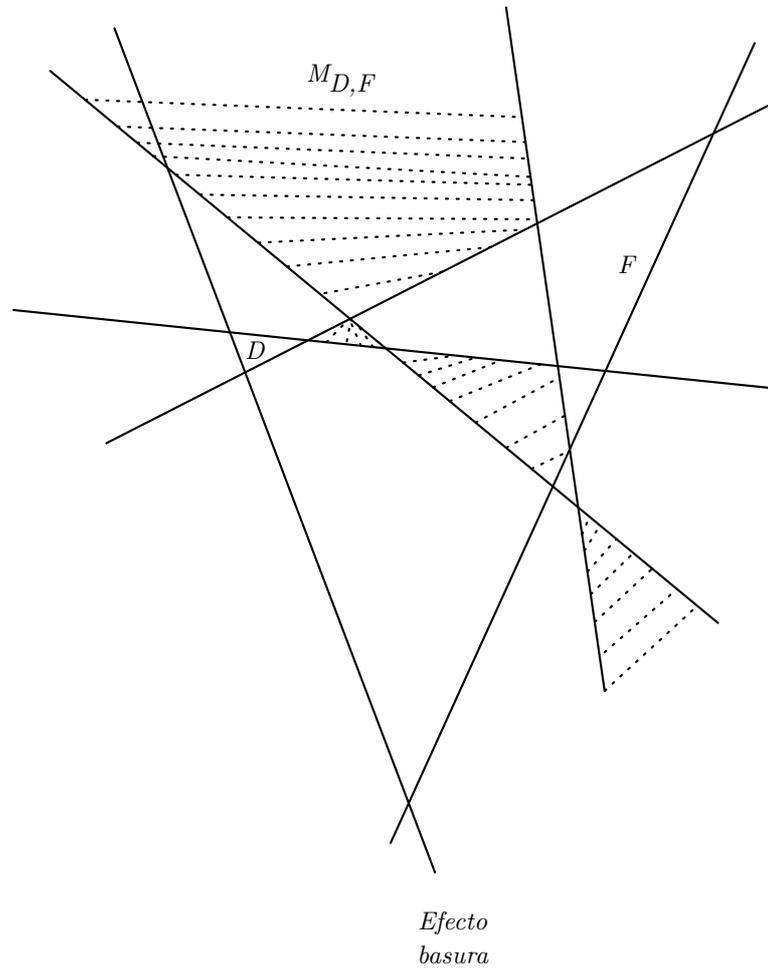


Figura 5.13: El bisector de dos caras D y F a distancia par. Es la misma Figura que el dibujo anterior, con 2 líneas más, se aprecia como al quitar estas dos líneas D y F quedan como caras infinitas y opuestas, aquí se puede encontrar de forma mas intuitiva el bisector, al trazar de nuevo estas dos líneas, no sucede nada. Llamamos por ello coloquialmente el *efecto basura* a las líneas extras.

infinitas en el bisector, y F_1 ya es una de ellas, entonces F_m es la otra. Apreciamos este bisector entre caras infinitas a distancia par en la Figura 5.12. \square

Ahora que ya podemos hablar del bisector de dos caras infinitas y opuestas cuando el número de líneas es par, entonces podemos preguntarnos que pasa cuando las caras no son infinitas. Sean D y F caras en $A(L)$ tal que $d(D, F)$ es par, entonces el bisector de D y F existirá, y se verá muy similar a el caso en cuando D y F son caras infinitas. En realidad, nos olvidaremos de las líneas que no separan a D de F , y veremos que en realidad no cambian nada. Antes de enunciar el siguiente lema, necesitamos dar un poco de notación. Sea $L' \subseteq L$, y F una cara en $A(L)$, entonces denotamos como $F^{L'}$ a la cara en $A(L')$ que contiene a F , usamos esta notación también para conjuntos de caras, es decir si T es un conjunto de caras de $A(L)$ entonces $T^{L'}$ será el conjunto de caras de $A(L')$ que contengan a las caras de T , ie $T^{L'} = \{F \in A(L') \text{ tal que } F \text{ contiene a alguna cara } D \text{ de } T\}$. Sea D una cara en $A(L')$, entonces denotamos a $D^{L'}$ como el conjunto de caras en $A(L)$ tales que $x \in D$ si y sólo si existe $F \in D^{L'}$ tal que $x \in F$, si tenemos un conjunto de caras M decimos que $M^{L'} = \cup_{D \in M} D^{L'}$. Abusando un poco de la notación, diremos que $d_{L'}(x, F)$ es la distancia en $A(L')$ de x a $F^{L'}$, es decir el número de líneas de L' que intersectan al segmento xy con y en el interior de F , el cual es el mismo que si y esta en el interior de $F^{L'}$, y por ello abusamos de la notación sin sentir remordimiento. En general cuando no pongamos subíndice a d la función que nos otorga distancia, entonces está será la distancia en $A(L)$.

Es importante analizar lo que significará nuestra notación. Mientras la cara en $A(L')$ que contiene a F puede no ser F y por lo tanto $F^{L'}$ puede contener propiamente a F , al revés si tenemos una igualdad, es decir si D es una cara en $A(L')$ entonces $D^{L'}$ es un conjunto de caras en $A(L)$ que juntas tienen todos los puntos de D , y ninguno de más.

Lema 15. *Sean D y F dos caras en un arreglo $A(L)$ con n líneas, tal que $d(D, F)$ es par, entonces $M_{D,F}$ existe, y divide al plano en 3, los puntos a la derecha de $M_{D,F}$, a la izquierda, y $M_{D,F}$.*

Demostración. Sea L' el subconjunto de L tal que $l \in L'$ si y sólo si l separa a D de F (es decir cualquier segmento de línea xy con x en el interior de D y y en el interior de F , intersecta a l), como $d(D, F) = |L'|$ entonces $|L'|$ es par, y como L' son las líneas que separan a D de F , entonces $D^{L'}$ y $F^{L'}$ son caras infinitas y opuestas en $A(L')$. Ahora podemos usar el lema 14 para construir el bisector M de $D^{L'}$ y $F^{L'}$ en $A(L')$, éste en $A(L')$ se ve como lo construimos en el lema 14 y por lo tanto divide el plano en 3, tal y como queremos probar. Sea $M_{D,F} = M^{L'}$, entonces en realidad son los mismos puntos que M , y por lo tanto dividen el plano en tres tal y como queremos, solo falta probar que en efecto los puntos en el interior de $M_{D,F}$ todos equidistan a D y F . Sea $x \in M_{D,F}$ entonces $d_{L'}(x, D) = d_{L'}(x, F)$, sabemos que $d(x, D) = d_{L'}(x, D) + d_{L-L'}(x, D)$ y análogamente $d(x, F) = d_{L'}(x, F) + d_{L-L'}(x, F)$. Como x está en el bisector M de las caras $D^{L'}$ y $F^{L'}$ en $A(L')$ entonces $d_{L'}(x, D) = d_{L'}(x, F)$, y sólo falta probar que $d_{L-L'}(x, D) = d_{L-L'}(x, F)$. Sean p, q puntos en el interior de D y F . Fijémonos en el triángulo xpq , como las líneas de $L - L'$ no separan a D de F entonces

no intersectan a pq , y por lo tanto si una línea l de $L - L'$ intersecta al triángulo, como lo intersectará en dos lados, entonces intersectarán tanto a xp como a xq , se sigue que $d_{L-L'}(x, D) = d_{L-L'}(x, F)$. De esto se sigue a su vez que las líneas en $L - L'$ no afectan en nada, es decir podemos sacar el bisector en $A(L')$ y este es el mismo que en $A(L)$, (Se aprecia lo anterior en la Figura 5.13, la cual en este caso se muestra el bisector sobre $A(L)$, sin diferencia al bisector en $A(L')$ mostrado en la Figura 5.12).

Nota: M es un conjunto de caras, y cuando hablamos de puntos en el interior de M realmente hablamos de puntos en el interior del conjunto $\cup M$. \square

Como notabamos previamente, las líneas que no separan a D de F en realidad no nos cambian nada, sin embargo, al hacer un dibujo y buscar la mediatriz de dos caras, es difícil ver que es lo que esta sucediendo puesto que en algunos lugares el bisector es grueso, y de ello no queda claro como se ve el bisector. En realidad los lugares donde el bisector es lo que llamaríamos intuitivamente, grueso, en realidad son caras del bisector en $A(L')$ las cuales se vuelven varias al agregar el resto de las líneas de L . A nuestra vista, las rectas en $L - L'$ hacen el efecto *basura*, puesto que si no nos olvidáramos de ellas para calcular el bisector de D y F , estas no nos dejarán identificar claramente el bisector.

El bisector de dos caras a distancia impar

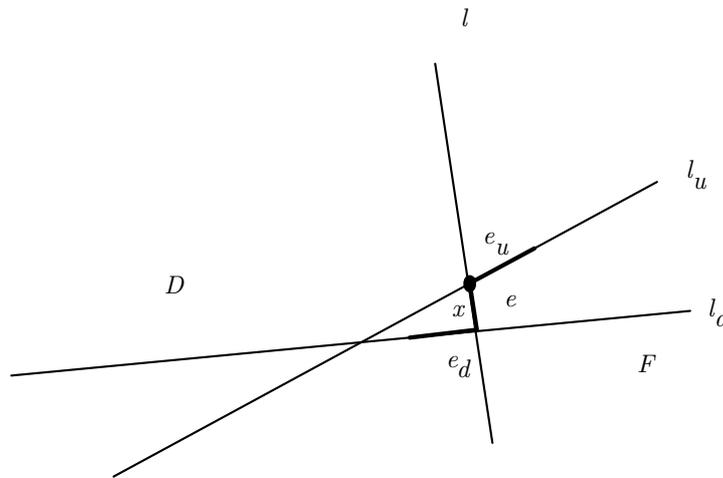


Figura 5.14: Construcción para el lema 16

Hemos analizado el caso en el que la distancia entre dos caras es par, en este caso el bisector se vuelve un conjunto de caras que dividen el plano como si fuera una curva. Apesar de que las cosas no se ven tan bonitas cuando la distancia entre dos caras es impar, el bisector existe, y esta vez en realidad si es una curva.

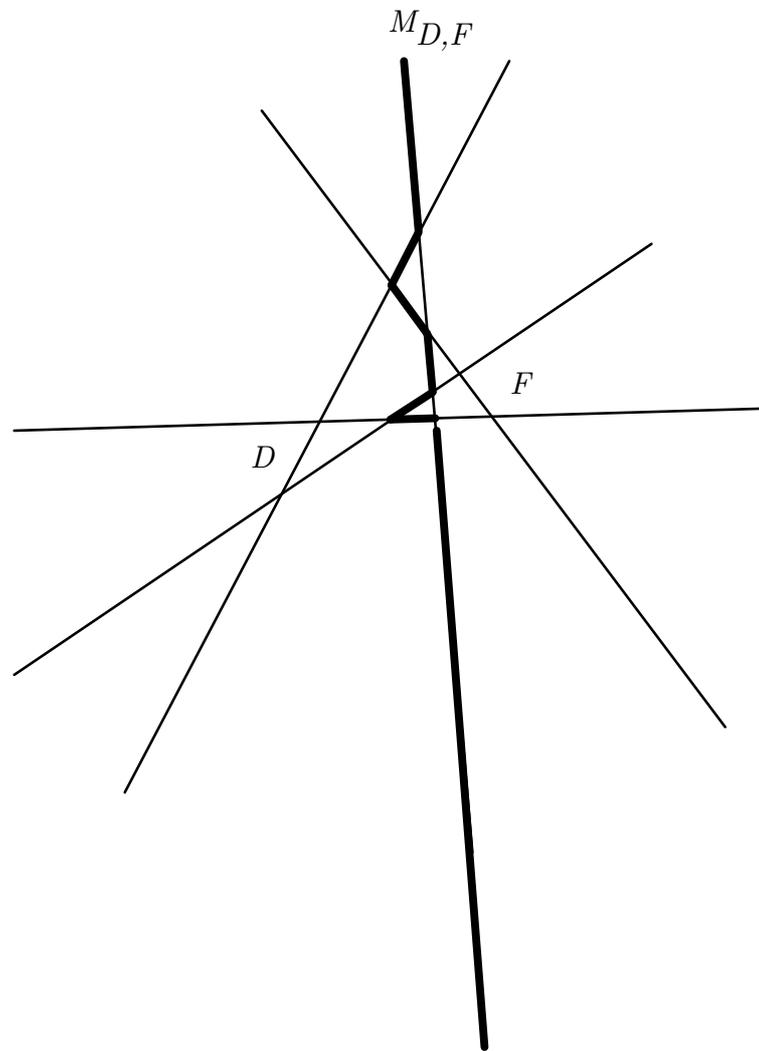


Figura 5.15: El bisector de cosas caras infinitas y opuestas D y F a distancia impar.

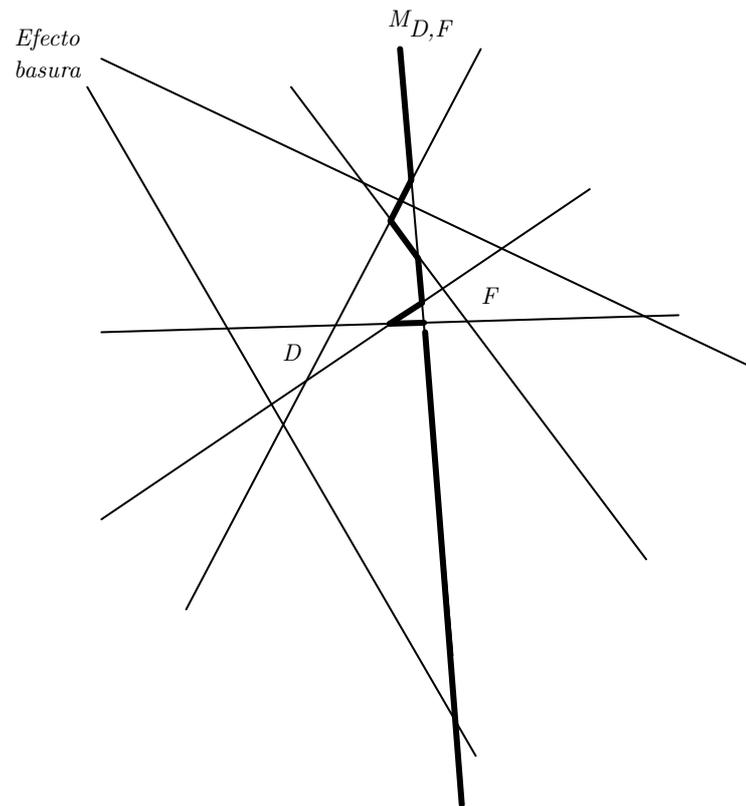


Figura 5.16: El bisector de las caras D y F a distancia impar. Es la misma Figura que el dibujo anterior, con 2 líneas más, se aprecia como al quitar estas dos líneas D y F quedan como caras infinitas y opuestas, aquí se puede encontrar de forma mas intuitiva el bisector, al trazar de nuevo estas dos líneas, no sucede nada.

Lema 16. *El bisector entre dos caras D y F de un arreglo de líneas $A(L)$ a distancia impar, será una curva que dividirá al plano en tres, los puntos a su derecha, a su izquierda, y el bisector. Esta curva será la unión de aristas de $A(L)$.*

Demostración. Demostraremos el lema sólo para caras infinitas y opuestas, recordando el efecto basura, es claro que el bisector entre dos caras D y F quedará determinado por las líneas que separen a dichas caras.

Sean D y F dos caras infinitas y opuestas en $A(L)$ un arreglo con n líneas. Si tomamos un punto en una línea l , de la definición de distancias en arreglos de líneas deducimos que la distancia de dicho punto a cualquier cara, no incluirá a la línea l . Entonces, recordando como construimos G_∞ , podemos ver que habrá dos aristas infinitas equidistantes a D y F . A partir de cualquiera de estas dos aristas infinitas construiremos nuestro bisector, mas por ahora veremos como a partir de cualquier arista bisectora e de D y F , existirán únicamente dos aristas bisectoras que compartirán un vértice con e (sólo una en caso de que e sea infinita).

Sea e una arista no infinita y proveniente de una línea l , bisectora de D y F . Supongamos que hacia arriba e esta delimitada por la línea l_u y por abajo por la línea l_d . Denotaremos como e_u, e_d la arista proveniente de l_u, l_d respectivamente, que también sea parte del bisector. Nos fijamos en un punto x sobre el interior de e , lo que determinara las cosas será como separa l_u al plano, si deja del mismo lado a x que a F y del otro lado a D , o si deja a x y D del mismo lado y del otro lado a F . En nuestra figura 5.14 l_u deja del mismo lado a x y F , y l_d deja del mismo lado a x y a D . En este caso, como l_u deja del mismo lado a x y a F , entonces tomamos como e_u la arista de l_u que comparte un vértice con e , y que esta separada de D por l . En el caso para obtener e_d , será la arista proveniente de l_d que tenga un vértice en común con e , y que este separada de F por l . Es decir, la regla es muy fácil: si $l_u(l_d)$ deja a x y F del mismo lado entonces $e_u(e_d)$ será la arista proveniente de $l_u(l_d)$ con un vértice común con e y que este separada de D por l ; si $l_u(l_d)$ deja a x y D del mismo lado entonces $e_u(e_d)$ será la arista proveniente de $l_u(l_d)$ con un vértice común con e y que este separada de F por l . De esta forma es fácil ver en la figura 5.14 que tanto e_u como e_d bisectarán a D y a F , y también que la otra arista de $l_u(l_d)$ que tiene un vértice en común con e no bisectará a D de F .

De lo anterior podemos construir fácilmente todo el bisector. Empezamos con una arista e_1 infinita y bisectora de D y F , dicha arista sólo estará delimitada por una recta, arriba de ella u abajo de ella, sin importar, a partir de la recta que la delimite podremos conseguir otra arista que bisecte a D y F y que comparta un vértice con e_1 , tal y como hicimos anteriormente (que la arista sea infinita sólo afecta en que en lugar de poder encontrar dos aristas, encontramos sólo una). Llamamos e_2 a dicha arista, y de ella podremos encontrar dos aristas que también bisecten a D y a F , una de ellas será e_1 , la otra la llamamos e_3 . Procedemos inductivamente, y como cada arista no infinita sólo tendrá dos aristas que compartan un vértice con ella y que también bisecten, entonces eventualmente llegaremos a otra arista infinita, y con ello habremos construido el bisector buscado. Es claro que

cualquier otro punto en el plano no puede bisectar a D de F .

Apreciamos el bisector de dos caras infinitas a distancia impar en 5.15, y en dos caras en general en 5.16.

□

5.3.2. Cara central

Finalmente probaremos la existencia de que en todo arreglo de líneas $A(L)$ existe al menos una cara central, es decir una cara C tal que cualquier otra cara F de $A(L)$ está a lo más a $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ de distancia de cualquier otra cara. Esto implica que podremos iluminar cualquier arreglo de líneas con un k modem de potencia $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$. También mostraremos un ejemplo en el que para iluminar con un k- modem un arreglo $A(L)$ con n líneas es necesario que la potencia del modem sea $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Así obtenemos el primer resultado de necesidad y suficiencia para iluminación de arreglos de líneas con k- modems.

Necesidad

Es claro que todos los arreglos simple de tres líneas son análogos, y por lo tanto tomemos cualesquiera tres líneas l_1, l_2, l_3 que formen un arreglo simple. Primero probaremos el resultado para un arreglo con $n \equiv 0 \pmod{3}$ líneas. Lo que haremos es lo siguiente, construimos un arreglo de n líneas, sustituyendo cada una de las líneas l_1, l_2, l_3 por un arreglo de $n/3$ líneas que tengan todas sus intersecciones en una forma conveniente, dentro de los círculos como se muestra en la Figura 5.17

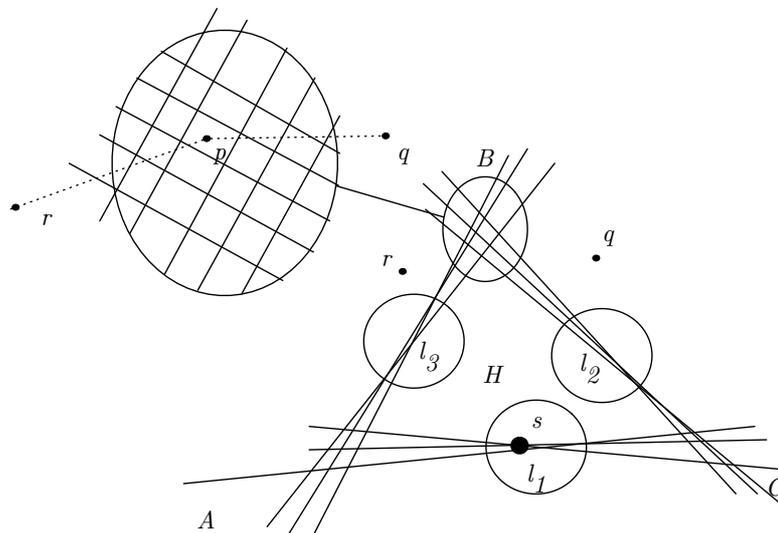


Figura 5.17: Arreglo de líneas que necesita un modem de potencia $2n/3$.

De esta manera la intersección de l_1 con l_2 es para fines prácticos una cuadrícula, lo mismo la de l_2 con l_3 y la de l_3 con l_1 . Sea p un punto adentro de alguna de estas cuadrículas, y en el interior de alguna cara, digamos la dada por la intersección de l_2 con l_3 como en la Figura. Fijémonos en las caras A y C de la Figura 5.17. Para llegar de p a A y C tenemos que pasar todas las líneas que provienen de l_1 , de las $\frac{2n}{3}$ líneas de la cuadrícula unas las tenemos que pasar para llegar a A y las otras para llegar a C (esto se muestra en la Figura 5.17, para salir de la cuadrícula e ir a A sería equivalente a primero ir a r , y para ir a C sería equivalente a ir primero a q), entonces para alguna de las caras A o C hay que cruzar la mitad de estas, de donde $d(p, A)$ o $d(p, C)$ es mayor o igual que $\frac{2n}{3}$. Y por lo tanto existe una cara a distancia $\frac{2n}{3}$ de p , es decir si posicionáramos un k modem en la cara que contiene a p necesitaríamos que este tuviera potencia de al menos $\frac{2n}{3}$ para poder iluminar todo el arreglo. Sea s un punto en lo que llamamos, adentro de una de las líneas l_1, l_2, l_3 , es decir en algún punto adentro de los círculos que delimitan las intersecciones de líneas que no forman parte de una de las cuadrículas (En este caso como en la Figura, nos lo tomamos en el interior del círculo de l_1). En este caso la cara B estará a distancia de s de al menos $\frac{2n}{3}$, pues para llegar a ella hay que cruzar todas las líneas de l_2 y l_3 , y posiblemente algunas de l_1 . Habiendo considerado puntos en el interior de caras sobre la cuadrícula, y puntos adentro de uno de nuestros conjuntos de líneas l_1, l_2, l_3 , hemos considerado todas las caras, por lo tanto para este arreglo L con $n \equiv 0 \pmod{3}$ líneas, necesitamos un k -modem de potencia $\lceil \frac{2n}{3} \rceil = \frac{2n}{3}$ para iluminar todo el plano.

Cuando $n \equiv 1 \pmod{3}$, entonces $\lceil \frac{2n}{3} \rceil = \frac{2n-2}{3} + 1$. Como en el caso anterior, sustituimos l_1 y l_2 por arreglos con $\frac{n-1}{3}$ líneas y l_3 por un arreglo con $\frac{n-1}{3} + 1$ líneas, y por las mismas razones que hace rato necesitaremos un modem de potencia $\lceil \frac{2n}{3} \rceil = \frac{2(n-1)}{3} + 1$ para iluminar todo el plano.

Cuando $n \equiv 2 \pmod{3}$, sustituimos l_1 como ya hemos hecho, con un arreglo con $\frac{n-2}{3}$ líneas y l_2 y l_3 por arreglos con $\frac{n-2}{3} + 1$ líneas, y por los mismos argumentos, para iluminar todo el plano con un k -modem, necesitamos que este tenga potencia $2\left(\frac{n-2}{3} + 1\right)$ y como $2\left(\frac{n-2}{3} + 1\right) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ hemos acabado.

Suficiencia

Teorema 19. *Para iluminar con un k -modem todo arreglo de líneas $A(L)$ con n líneas, es suficiente y ocasionalmente necesario que el modem tenga de potencia $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$*

Demostración. La necesidad ya la hemos visto con la Figura 5.17. Sólo falta probar la suficiencia. Supongamos por un momento que n es divisible por 3. Sea L un conjunto con n líneas, y $A(L)$ el arreglo de líneas inducido por L . Recordemos que G_∞ será una gráfica cíclica con $2n$ vértices, cada uno correspondiente a una cara infinita de $A(L)$. Claramente podemos encontrar 3 vértices a, b, c en G tales que $d(a, b) = d(b, c) = d(a, c) = \frac{2n}{3}$, de hecho podemos encontrar $\frac{2n}{3}$ ternas de este tipo. Llamamos a estos conjuntos de tres caras

infinitas provenientes de tres vértices como esos, una *terna equilátera* de caras, por la semejanza a un triángulo equilátero. Sea A, B, C una terna equilátera, por ello la distancia entre cualesquiera dos caras de A, B, C será $\frac{2n}{3}$, es decir será par, y podemos construir un bisector como el del lema 15 entre cualesquiera dos. Es claro que, para cualesquiera dos caras de A, B, C la tercera cara está en el bisector de las otras dos. Por ejemplo A está en el bisector de B y C . Nos fijamos en la intersección del bisector $M_{A,B}$ y $M_{A,C}$, probaremos que la intersección será un conjunto de caras, y que cualquiera de estas será la cara central que buscamos. Es claro de G_∞ que B y B_∞ están en la mediatriz $M_{A,C}$ y que B estará a la derecha de $M_{A,B}$ y B_∞ a la izquierda de $M_{A,B}$ o viceversa. Por lo tanto $M_{A,C}$ tiene partes a la derecha de $M_{A,B}$ y partes a la izquierda, de donde la intersección de $M_{A,C}$ y $M_{A,B}$ es no vacía. Si tan sólo probamos que esta intersección tiene que darnos al menos una cara, habremos acabado. En lugar de hacer esto, lo cual se reduce a analizar porque la intersección de los bisectores tiene que tener interior, haremos un análisis que nos parece más bonito.

Sea L' el conjunto de líneas que separan a A de B . Le asignamos una pareja ordenada a F para todo $F \in M_{A,B}$ que denotaremos como $(a(F), b(F))$, donde $a(F) = d(F, A) = d(F, B)$ y $b(F) = d(F, C)$. Si F y G son dos caras en $M_{A,B}$ tales que $F \sim G$ entonces F y G comparten, por definición de adyacentes, una arista, determinada por una línea de $L - L'$, de esto se deduce que $a(F) = a(G) + 1$ o $a(F) = a(G) - 1$, lo cual es fácil de observar en la 3a figura de la Figura 5.18. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a(F) = a(G) - 1$, esto nos implica que $b(F) = b(G) + 1$ y si denotamos $c(F) = a(F) - b(F)$ para toda cara F en el bisector, entonces es claro que si F y G son adyacentes entonces $c(F) = c(G) - 2$. Sea F una cara en $M_{A,B}$, X un vértice en F y supongamos que F_X está en $M_{A,B}$. Los primeros dos dibujos de la Figura 5.18 contemplan los posibles casos que pueden surgir al tener dos caras F y F_X en $M_{A,B}$, ahí denotadas como M_i y M_{i+1} . En todos los casos, las rectas que determinan el punto X (en la figura es el punto dado por la intersección de l_1 con l_2) separan a A de B , y quedan los casos en los que C y C_∞ no están separadas de la misma forma que A y B 1er dibujo (es decir en el arreglo de líneas que consta de l_1 y l_2 los puntos de A y B están en caras distintas que los de C y C_∞), y los casos en los que están separadas de la misma forma 2o dibujo.

- La distancia a C permanece igual,
- ó la distancia a C aumenta en dos.

Es simple notar, recordando la forma de un bisector entre caras a distancia par, que $a(F) = a(F_X)$, del dibujo deducimos que $b(F) = b(F_X) + -2$ o $b(F) = b(F_X)$, de donde $c(F) = c(F_X) + -2$ o $c(F) = c(F_X)$.

Notemos que $c(C) = d(C, A) - d(C, C) = \frac{2n}{3} - 0$ y que $c(C_\infty) = d(C_\infty, A) - d(C_\infty, C) = \frac{n}{3} - n = -\frac{2n}{3}$. Es claro que podemos hacer una secuencia C_0, C_1, \dots, C_m de caras en el bisector $M_{A,B}$ tales que $C_0 = C$ y $C_m = C_\infty$, y tales que para $i = 0, 1, \dots, m-1$ ó $C_i \sim C_{i+1}$ ó C_i y C_{i+1} sean opuestos por un vértice. De esta forma tenemos una cadena de caras tales que $c(C_0) = \frac{2n}{3}$ y $c(C_m) = -\frac{2n}{3}$ (note que ambos valores son pares) y por la forma de construirle para

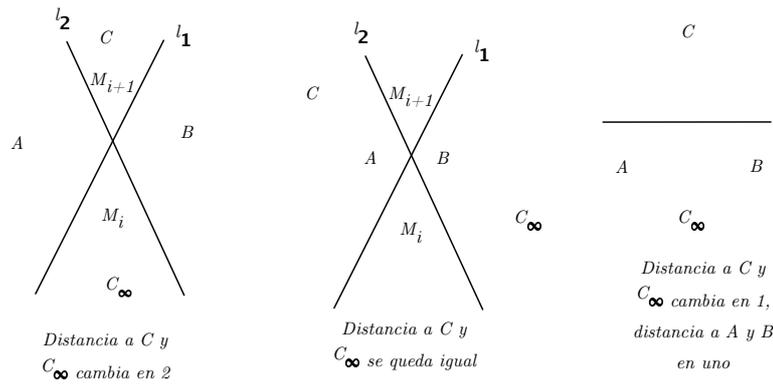


Figura 5.18: Al cruzar el vértice dado por dos líneas que separan a A y B nos quedan cuatro posibles casos, dos análogos (de izquierda a derecha la 1er dibujo) y otros dos análogos (2o dibujo). Al cruzar una línea que no separa a A y B nos quedan también dos casos, aunque estos últimos son análogos (3er dibujo), el otro caso será cuando C esta del mismo lado de la línea que A y B y C_∞ del otro lado. Solamente hemos puesto las líneas relevantes.

toda $i = 1, \dots, m - 1$ ó $c(C_i) = c(C_{i+1}) + -2$ ó $c(C_i) = c(C_{i+1})$. Esto da una cadena de caras, la primera da positiva al evaluarla en C y la última da negativa al evaluarla en c , ambos valores pares, y cambia de dos en dos, esto nos implica que existe una j tal que $c(C_j) = 0$. Esto implica que $d(C_j, A) = d(C_j, B) = d(C_j, C)$, es decir una cara equidistante a A, B y C , como la cadena C_0, C_1, \dots, C_m no es única, podrán haber mas de una cara equidistante. Llamamos al conjunto de caras que estén a la misma distancia de A, B y C el circuncentro de A, B, C y lo denotamos $\Gamma(A, B, C)$, llamamos *circumcéntricas* a A, B, C a las caras en $\Gamma(A, B, C)$.

Podemos pedirle una condición más a la cadena de caras que cruza al bisector. Que cada línea de $L - L'$ se pase una sola vez, y que cuando se cruce un vértice, este sea la intersección de dos líneas en L' . Llamamos a dichas cadenas, cadenas *simples*. De esta manera será claro que la función a será no creciente y b será no decreciente. De donde c será no creciente. Sean F y G dos caras en $\Gamma(A, B, C)$. Recordemos que $M_{A,B}$ proviene de una cadena de caras opuestas por vértices de $A(L')$. Supongamos que F y G provienen de la misma cara de $A(L')$, entonces

$$d(F, A)_{L'} = d(G, A)_{L'}, d(F, C)_{L'} = d(G, C)_{L'}. \tag{5.1}$$

Es claro que $d(F, A)_{L-L'} + d(F, C)_{L-L'} = |L - L'| = d(G, A)_{L-L'} + d(G, C)_{L-L'}$. Sabemos que $d(F, A) = d(F, C)$ y $d(G, A) = d(G, C)$, de donde $d(F, A)_{L-L'} = d(F, A) - d(F, A)_{L'}$ y que $d(F, C)_{L-L'} = d(F, C) - d(F, C)_{L'} = d(F, A) - d(F, C)_{L'}$, sumando estas dos últimas ecuaciones observamos que

$$d(F, A)_{L-L'} + d(F, C)_{L-L'} = d(F, A) - d(F, A)_{L'} + d(F, A) - d(F, C)_{L'}$$

$$\Rightarrow |L - L'| = 2d(F, A) - d(F, A)_{L'} - d(F, C)_{L'} \Rightarrow d(F, A) = \frac{|L - L'| + d(F, A)_{L'} + d(F, C)_{L'}}{2}$$

Análogamente

$$d(G, A) = \frac{|L - L'| + d(G, A)_{L'} + d(G, C)_{L'}}{2}$$

y por las igualdades de la ecuación 5.1 obtenemos que $d(G, A) = d(F, A)$.

Supongamos ahora que F y G provienen de dos caras distintas en $A(L')$, esto implica que existirá una cadena simple que pase por F y por G . Sea C_0, \dots, C_m una de estas cadenas, y sin pérdida de generalidad supongamos que $C_i = F, C_j = G$ y $i < j$. Como F y G son circuncéntricas, entonces $c(F) = 0 = c(G)$. Como a es no creciente y b es no decreciente en estas cadenas, entonces lo anterior implica que $a(F) = a(G)$ de donde la distancia de F a A, B, C es la misma que la de G a A, B, C . Concluimos que todas las caras circuncéntricas a una terna Δ esta a la misma distancia de A, B y C . Gracias a lo anterior podemos asignar a toda terna equilátera Δ un valor $r(\Delta)$, la distancia de las caras de su circuncentro a A, B, C , es decir $r(\Delta) = d(H, A)$ para cualquier H en el circuncentro de Δ , y A en Δ , y lo anterior hace que este bien definido.

Para finalizar la demostración, supongamos que n no es divisible por tres.

Si $n \equiv 1 \pmod{3}$, entonces quitamos una línea l , encontramos una cara central al arreglo inducido por $L - \{l\}$, sea esta C , la cara central que buscamos será C^L . Como la única recta extra que se puede interponer es l , la distancia de C^L a cualquier cara F de $A(L)$ será a lo más uno más que la distancia en $A(L - l)$ de C a un punto p en el interior de F , es decir a lo más será $\frac{2(n-1)}{3} + 1 = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Colocaríamos en este caso, un modem en C^L con potencia $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ y con esto iluminaríamos todo el plano.

Si $n \equiv 2 \pmod{3}$, entonces $\lceil \frac{2n}{3} \rceil = \frac{2n+2}{3}$ de donde podríamos agregar una línea l extra a L . Sea $L' = L \cup l$ entonces $|L'| = n + 1$ y como $n + 1 \equiv 0 \pmod{3}$, entonces existirá una cara C en $A(L')$ que este a lo más a distancia $\lceil \frac{2(n+1)}{3} \rceil = \frac{2(n+1)}{3} = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ de todas las demás caras, es claro que si esto sucede, al tomar C^L está cumplirá en $A(L)$ estar de todas las demás caras a distancia de a lo más $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$.

En la Figura 5.19 se muestra como al recorrer el bisector dándole valores a sus caras, el primer número indica la distancia a B y C , la cual es la misma, el segundo número indica la distancia a A , cuando estas se vuelven igual, tenemos una cara central. Si nuestro bisector hubiera sido *grueso* el dibujo quedaría un poco distinto, pero esencialmente igual.

□

5.4. Iluminación con dos k-modems

Ya planteado el problema de iluminar arreglos de líneas con k-modems, la cantidad de preguntas específicas que surgen es muy grande. En particular nos podemos hacer la pregunta, para cualquier k, w en los naturales, ¿cuántos k-modems serán suficientes y necesarios para iluminar un arreglo con n líneas? y ¿qué potencia será necesaria y suficiente para

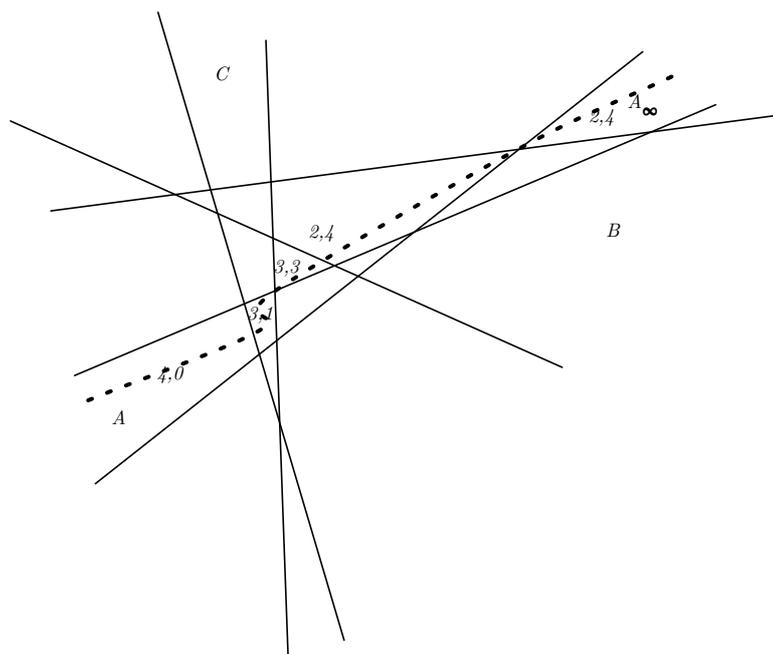


Figura 5.19: Cara central

iluminar con w k-modems? Recordemos que hemos encontrado el bisector de dos caras en la sección anterior, esto sugiere que la distancia entre dos caras hace que el plano presente una especie de topología que hasta ahora nos es desconocida. Para conocer esta topología seguimos el camino de la iluminación, creemos que al ir respondiendo las preguntas formuladas anteriormente, iremos conociendo la topología dada al plano por nuestra distancia entre caras. De alguna manera, para responder a la pregunta: ¿que potencia será necesaria y suficiente para iluminar con w k-modems?, necesitamos saber como se ven los diagramas de Voronoi considerando la distancia entre caras.

Nos preguntamos: ¿que potencia será necesaria y suficiente para iluminar con 2 k-modems? Hemos respondido el análogo de esta pregunta para un k-modem, y quedo claro que es necesario buscar una cara apropiada para posicionar nuestro k-modem. Si posicionamos un k-modem en una cara infinita necesitamos ponerle potencia n , en cambio si escogemos una cara mas céntrica, la cara central, podemos iluminar el plano con un k-modem de potencia $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$; de forma peculiar, cuando queremos iluminar el plano con 2 k-modems, no importa donde posicionemos los k-modems, la potencia necesaria será la misma: $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Teorema 20. *Para iluminar un arreglo de n líneas con dos k-modems, es suficiente y siempre necesario que los modems tengan potencia $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

Demostración. Sea L un conjunto con n líneas y $A(L)$ el arreglo de líneas inducido por L , sean D y F dos caras en $A(L)$, ponemos un k-modem en cada una y nos preguntamos que

potencia necesitan para iluminar el plano. Lo que haremos para probar nuestro teorema es encontrar para D y F un punto a distancia $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ de ambos, como D y F son cualesquiera dos caras en $A(L)$, la suficiencia se sigue de notar que al colocar 2 k-modems de potencia $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ en caras infinitas y opuestas iluminamos el plano. (Ver proposición 5).

Sea $d(D, F) = m$, si m es impar el bisector $M_{D,F}$ será una curva sin grosor, y si m es par, está tendrá grosor en todos lados excepcion de en una cantidad finita de puntos. La paridad no nos perjudicará mucho, olvidémonos de ella por un segundo, es decir supongamos que n y m son pares. Sea L' el subconjunto de líneas de L que separarán a D de F . Entonces los puntos en el bisector de $M_{D,F}$ están a la misma distancia de D y de F , sean p y q puntos en el interior de D y F respectivamente. Por la forma en el que construimos el bisector, cada punto x en el interior de $M_{D,F}$ cumplirá que xp intersectará en su interior a la mitad de las líneas de L' y xq intersectará a la otra mitad. Cada línea de $L - L'$ tendrá a pq por debajo o por arriba, y sin pérdida de generalidad supongamos que la mitad o más de estas líneas tendrán a pq por debajo. Nos fijamos en la parte de arriba de $M_{D,F}$, es decir la que se encuentra arriba de pq , existirá un punto y en el interior del bisector que se encontrará arriba de todas las líneas de $L - L'$. Y por lo tanto los segmentos de línea yp y yq intersectarán a la mitad o más de las líneas de $L - L'$, y ya intersectaban a la mitad de las líneas de L , y por lo tanto intersectan a al menos la mitad de las líneas de L , es decir, para iluminar a y necesitamos potencia $\frac{n}{2}$. De manera más precisa:

Si n es par, y m es impar. Entonces $|L - L'| = n - m$ es impar. En este caso $M_{D,F}$ es una curva sin grosor, y cada punto x sobre $M_{D,F}$ cumplirá que xp y xq intersectan a $\frac{m-1}{2}$ líneas de L' en su interior. Sin pérdida de generalidad de las líneas de $L - L'$ la mitad o más estarán arriba de pq , como $n - m$ es impar, podemos suponer que $\frac{n-m+1}{2}$ líneas de $L - L'$ están arriba de pq . Sea y un punto en $M_{D,F}$ arriba de todas las líneas de $L - L'$, entonces yp y yq intersectarán a al menos $\frac{n-m+1}{2}$ líneas de $L - L'$ y a $\frac{m-1}{2}$ líneas de L' , es decir en total intersectarán a al menos $\frac{n}{2}$ líneas de L . Y por lo tanto $d(y, D) \geq \frac{n}{2}$ y $d(y, F) \geq \frac{n}{2}$.

Si n es par y m es par. En este caso $n - m$ es par, entonces sin pérdida de generalidad la mitad o más de las líneas de $L - L'$ están arriba de pq , entonces encontramos un punto y en el interior de $M_{D,F}$ y por lo tanto los segmentos yp y yq cada uno intersectará a al menos la mitad de las líneas de L' y la mitad de $L - L'$, es decir a al menos la mitad de las líneas de L , de donde $d(y, D) \geq \frac{n}{2}$ y $d(y, F) \geq \frac{n}{2}$.

Si n es impar y m es impar. $M_{D,F}$ no tiene grosor, suponemos que la mitad o más de las líneas de L'_L están arriba de pq , tomamos $y \in M_{D,F}$ tal que este arriba de todas las líneas de L'_L , por ello yp y yq intersectará en su interior cada una a al menos la mitad de las líneas de L'_L y a $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = \frac{m-1}{2}$ de líneas de L' , intersectando así a al menos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ líneas.

Si n es impar y m es par. $M_{D,F}$ tendrá grosor, suponemos que la mitad o más de las líneas de L'_L están arriba de pq (como aquí la mitad no es entero entonces serán $\frac{n-m+1}{2}$ líneas o mas), tomamos y en el interior de $M_{D,F}$ tal que este arriba de todas las líneas de L'_L , por ello yp y yq intersectará en su interior cada una a al menos la mitad de las líneas de L'_L y a $\frac{m}{2}$ de líneas de L' , intersectando así a al menos a $\frac{m}{2} + \frac{n-m+1}{2} > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ líneas. \square

5.5. Conclusiones

No hay mucho que concluir, hemos respondido en esta tesis a sólo dos preguntas (Teoremas 19 y 20) de todas las que se pueden hacer a partir del concepto de k modem. Hemos continuado el trabajo. Al momento de imprimir esta tesis ya tenemos los siguientes resultados, no hemos incluido demostraciones por falta de tiempo:

Teorema 21. [FMVU09] *Cualquier polígono ortogonal con n aristas puede ser cubierto con un k modem de potencia $\lceil \frac{n}{3} \rceil$. A veces es necesaria dicha potencia.*

Teorema 22. *Podemos iluminar todo arreglo de n líneas con 3 k modems de potencia $\lceil \frac{5n}{12} \rceil$*

Encontrar cotas inferiores para este tipo de problemas nos ha costado trabajo, falta mucho que investigar con respecto a la topología de los arreglos de líneas. Conforme se conozca la topología se conocerán más respuestas a las preguntas postulables con el concepto de k modem, y viceversa. En general queda abierta la siguiente pregunta: Si tenemos w k -modems ¿Cómo se comporta una respecto a la otra para poder siempre iluminar un arreglo de líneas? Todas las preguntas abiertas hechas para arreglos de líneas quedan también abiertas para polígonos.

Bibliografía

- [AAH⁺09] O. Aichholzer, F. Aurenhammer, F. Hurtado, P. Ramos, and J. Urrutia. Two-convex polygons. *Proc. 25th European Workshop on Computational Geometry EuroCG '09, Brussels, Belgium*, pages 117–120, 2009.
- [AFMFP⁺09] O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, T. Hackl, C. Huemer, J. Urrutia, and B. Vogtenhuber. Modern illumination of monotone polygons. In *Proc. 25th European Workshop on Computational Geometry EuroCG '09*, pages 167–170, Brussels, Belgium, 2009.
- [Agg84] Alok Aggarwal. *The art gallery theorem: its variations, applications and algorithmic aspects*. PhD thesis, The Johns Hopkins University, 1984.
- [AT81] D. Avis and G. T. Toussaint. An optimal algorithm for determining the visibility of a polygon from an edge. *IEEE Trans. Comput.*, C-30:910–914., 1981.
- [Chv75] V. Chvátal. A combinatorial problem in plane geometry. *J. Combin. Theory Ser B*, 18:39–41, 1975.
- [CRCS⁺94] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo, N. Santoro, J. Urrutia, and J. Zaks. Guarding rectangular art galleries. *Discrete Math.*, 50:149–157, 1994.
- [dBCvKO97] Mark de Berg, Otfried Cheong, Marc van Kreveld, and Mark Overmars. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer, Berlin, 3rd ed. edition, 1997.
- [EGS07] D. Eppstein, M.T. Goodrich, and N. Sitchinava. Guard placement for efficient point-in polygon proofs. *Proc. 23rd Symposium on Computational Geometry*, pages 27–36, 2007.
- [Fis78] S. Fisk. A short proof of chavatal’s watchmen theorem. *J. Combin. Theory Ser B*, 24:374, 1978.
- [FK94] Zoltán Füredi and Daniel J. Kleitman. The prison yard problem. *Combinatorica*, 14(3):287–300, 1994.

- [FMVU09] R. Fabila-Monroy, Andres Ruiz Vargas, and J Urrutia. On modern illumination problems. *Proc. XIII Encuentros de Geometría Computacional, Zaragoza, España*, 2009.
- [kKK83] J. Kahn, M. Klawe, and D. Kleitman. Traditional galleries require fewer watchmen³. *SIAM J. Algebraic and Discrete Methods*, 4:194–206, 1983.
- [Kle95] V. Klee. Polygonal rooms not illuminable from every point. *Amer. Math. Monthly*, 102:867–879, 1995.
- [O’R87] J. O’Rourke. *Art Gallery Theorems and Algorithms*. Oxford University Press, New York, NY, 1987.
- [Tok69] G.T. Tokarsky. Is every polygonal region illuminated from some point? *Amer. Math. Monthly*, 76:180, 1969.
- [Urr00] Jorge Urrutia. Art gallery and illumination problem. In Jörg-Rüdiger Sack and Jorge Urrutia, editors, *Handbook of Computational Geometry*, chapter 22, pages 973–1015. Elsevier, 2000.