



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**“PREDICCIÓN DE MASAS NUCLEARES  
UTILIZANDO LA RECONSTRUCCIÓN DE  
PATRONES Y LAS CORRELACIONES  
SISTEMATICAS EN LA SUPERFICIE DE MASAS.”**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)**

PRESENTA:

**Irving Omar Morales Agíss**

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. ALEJANDRO FRANK HOEFLICH**

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTORAL:

**DR. JORGE GUSTAVO HIRSCH GANIEVICH  
DR. JOSE RUBEN ALFARO MOLINA**



posgrado en ciencias físicas  
u n a m

MÉXICO, D.F. AGOSTO 2009.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*A todo aquel que de alguna manera contribuyo a la  
formación del ser humano que soy...*

*... Gracias ...*

# Índice general

<b>1. Marco teórico</b>	<b>1</b>
1.1. Importancia de las masas nucleares . . . . .	1
1.2. Masas y energía de amarre . . . . .	4
1.3. Técnicas experimentales de medición de la masa nuclear . . . . .	8
<b>2. Modelos teóricos de masas nucleares</b>	<b>13</b>
2.1. El modelo de la gota . . . . .	13
2.2. Correcciones microscópicas al modelo de la gota . . . . .	16
2.3. El modelo de la gota de rango finito, FRDM . . . . .	19
2.4. Modelos tipo Hartree-Fock . . . . .	22
2.5. El modelo de Duffo y Zucker . . . . .	24
2.6. Modelos locales, las relaciones de Garvey-Kelson . . . . .	25
2.7. Extrapolaciones de Audi y Wapstra . . . . .	29
2.8. Comparación de los modelos teóricos. . . . .	30
<b>3. Reconstrucción de imágenes, CLEAN</b>	<b>39</b>
3.1. Deconvolución, el algoritmo CLEAN . . . . .	40
3.2. Pruebas de predicción . . . . .	46
3.2.1. La prueba AME95-03 . . . . .	47
3.2.2. Prueba del borde . . . . .	50
3.3. Conclusiones . . . . .	54
<b>4. Predicciones de corto alcance.</b>	<b>57</b>
4.1. Comparación entre Garvey-Kelson y Audi-Wapstra. . . . .	57
4.2. Comparación entre Garvey-Kelson y otros modelos teóricos. . . . .	61
4.3. Error del proceso iterativo como función de la distancia. . . . .	62
4.4. Mejorando las relaciones de Garvey-Kelson. . . . .	67
4.5. Conclusiones . . . . .	74
<b>5. Las relaciones de Garvey-Kelson y CLEAN.</b>	<b>77</b>
5.1. La precisión de CLEAN como función de la distancia . . . . .	77
5.2. Uniendo las relaciones de Garvey-Kelson y el algoritmo CLEAN . . . . .	79
5.3. Conclusiones . . . . .	82
<b>6. Conclusiones generales</b>	<b>85</b>
6.1. Predicciones a partir de AME03 . . . . .	87



# Índice de tablas

2.1.	Valor de los parámetros utilizados en el modelo de la gota. . . . .	16
2.2.	Desviación cuadrática media (rms) para los núcleos pertenecientes a la compilación AME03, del modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota con correcciones microscópicas (LDMM), el modelo de la gota de rango finito (FRDM), cálculos tipo Hartree-Fock (HF), el modelo de Duflo-Zuker (DZ) y las relaciones de Garvey-Kelson (GK) . . . . .	30
2.3.	Prueba de predicción AME95. Desviación cuadrática media (rms) para los 1760 núcleos en el ajuste y los 389 núcleos en la predicción, del modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota con correcciones microscópicas (LDMM), el modelo de la gota de rango finito (FRDM), calculos tipo Hartree-Fock (HF), el modelo de Duflo-Zuker (DZ), las relaciones de Garvey-Kelson (GK) y las extrapolaciones de Audi-Wapstra (AW) . . . . .	33
2.4.	Prueba de consistencia con las relaciones de Garvey-Kelson. Desviación cuadrática media (rms) al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson sobre las predicciones de cada uno de los modelos en los 2149 núcleos del ajuste y en los núcleos de la predicción, del modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota con correcciones microscópicas (LDMM), el modelo de la gota de rango finito (FRDM), calculos tipo Hartree-Fock (HF), el modelo de Duflo-Zuker (DZ) . . . . .	34
3.1.	Prueba de predicción AME95-03. Desviación cuadrática media (rms) sobre los 371 núcleos pertenecientes al subconjunto de predicción, para el modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota con correcciones microscópicas (LDMM) y el modelo de Duflo-Zuker (DZ), así como la versión de estos modelos utilizando el algoritmo CLEAN. . . . .	47
3.2.	Prueba de predicción AME95-03, consistencia con las relaciones de Garvey-Kelson. Desviación cuadrática media (rms) al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson sobre las masas experimentales y las obtenidas con el modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota con correcciones microscópicas (LDMM) y el modelo de Duflo-Zuker (DZ), así como la versión de estos modelos utilizando el algoritmo CLEAN para la región de ajuste en esta prueba (1454 núcleos) y la región predicha dentro de las líneas de goteo ( $\sim 7000$ núcleos). . . . .	49
3.3.	Prueba de predicción “borde”. Desviación cuadrática media (rms) sobre los 301 núcleos pertenecientes al subconjunto de predicción, para el modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota con correcciones microscópicas (LDMM) y el modelo de Duflo-Zuker (DZ), así como la versión de estos modelos utilizando el algoritmo CLEAN. . . . .	52
4.1.	Desviaciones cuadráticas medias $\sigma^i$ y $A\sigma^i$ en MeVs para los núcleos predichos en cada iteración del proceso utilizando las relaciones de Garvey-Kelson GK y las extrapolaciones de Audi-Wapstra. La primera columna muestra el número de iteración, la segunda columna muestra el número de núcleos predichos hasta la iteración $i$ , en parentesis se muestra el número de núcleos predichos en la iteración $i$ únicamente. Una comparación grafica de estos datos se muestra en la figura 4.3. . . . .	61
4.2.	Desviaciones cuadráticas medias $\sigma^i$ y $A\sigma^i$ en MeVs para los núcleos predichos en cada iteración del proceso utilizando las relaciones de Garvey-Kelson GK y las predicciones obtenidas con el modelo de la gota LDM, el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas LDMM y el modelo de Duflo-Zuker DZ. La primera columna muestra el número de iteración, la segunda columna muestra el número de núcleos predichos hasta la iteración $i$ , en parentesis se muestra el número de núcleos predichos en la iteración $i$ únicamente. Una comparación grafica de estos datos se muestra en la figura 4.4. . . . .	63

4.3.	Parámetros para la energía de separación de un neutrón, eq. 4.11. . . . .	71
4.4.	Parámetros para la energía de separación de un protón eq. 4.16. . . . .	71
4.5.	Prueba de predicción AME95-03 para la energía de separación de un neutrón. Desviación cuadrática media (rms) obtenidas con la parametrización de la ecuación 4.11, el modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota con correcciones microscópicas (LDMM) y el modelo de Duflo-Zuker (DZ) para la región de ajuste en esta prueba (1293 núcleos) y el subconjunto de predicción (224 núcleos). . . . .	71
4.6.	Prueba de predicción AME95-03 para la energía de separación de un protón. Desviación cuadrática media (rms) obtenidas con la parametrización de la ecuación 4.16, el modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota con correcciones microscópicas (LDMM) y el modelo de Duflo-Zuker (DZ) para la región de ajuste en esta prueba (1232 núcleos) y el subconjunto de predicción (208 núcleos). . . . .	72
4.7.	Número de núcleos predichos por iteración en las primeras diez iteraciones del proceso utilizando las relaciones originales de Garvey-Kelson (IGK1) y el proceso iterativo utilizando las relaciones de Garvey-Kelson modificadas de las ecuaciones 4.11 y 4.16 (IGK2). . . . .	72
4.8.	Desviaciones cuadráticas medias $\sigma^i$ y $A\sigma^i$ en MeVs para los núcleos predichos en cada iteración del proceso iterativo IGK2 y las predicciones obtenidas con el proceso IGK1, las extrapolaciones de Audi-Wapstra AW, el modelo de la gota LDM, el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas LDMM y el modelo de Duflo-Zuker DZ. Se muestra el número de núcleos predichos en la iteración $i$ y en paréntesis se muestra el número de núcleos predichos hasta la iteración $i$ . . . . .	73
4.9.	Desviaciones cuadráticas medias $\sigma^i$ y $A\sigma^i$ en MeVs para los núcleos predichos en cada iteración del proceso IGKDZ. Se muestra el número de núcleos predichos en la iteración $i$ y en parentesis se muestra el número de núcleos predichos hasta la iteración $i$ . . . . .	74
5.1.	desviaciones $\sigma^i$ y $A\sigma^i$ en MeVs como función de la distancia en la prueba de predicción AME95-03 para el proceso iterativo con las relaciones de Garvey-Kelson IGK1, el modelo de la gota LDM, el modelo de la gota mejorado con el algoritmo CLEAN, el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas LDMM y su versión mejorada con CLEAN, el modelo de Duflo-Zuker DZ y el modelo de Duflo-Zuker mejorado con CLEAN. La segunda columna muestra el número de núcleos utilizados para calcular dichas desviaciones. Una comparación gráfica de estos resultados se muestra en la figura 5.1. . . . .	80
5.2.	Desviaciones cuadráticas medias $\sigma^i$ y $A\sigma^i$ en MeVs para los núcleos predichos en cada iteración del proceso iterativo IGK2CL. Se muestra el número de núcleos predichos en la iteración $i$ y en paréntesis se muestra el número de núcleos predichos hasta la iteración $i$ . . . . .	82
6.1.	Energía de amarre BE(N,Z) en MeVs predichas por el proceso iterativo IGKDZ en la columna cuatro y por el modelo de Duflo-Zuker corregido con el algoritmo de reconstrucción CLEAN en la columna cinco. Las primeras tres columnas muestran el número de neutrones, el número de protones y la iteración del proceso iterativo IGKDZ en el cual cada núcleo es predicho. . . . .	87



# Índice de figuras

1.1. Abundancia relativa de los isótopos de los elementos en el sistema solar como función del número de nucleones. Los isótopos han sido creados esencialmente en 3 procesos: Durante el big-bang (región en azul), debido a procesos de fusión dentro de las estrellas (región naranja) y debido a procesos de nucleosíntesis (región en rojo). El recuadro muestra en amarillo los cerca de 9000 núcleos que pueden existir, sistemas ligados entre las “líneas de goteo”, mientras que en verde se muestran los aproximadamente 2000 núcleos para los cuales se ha medido experimentalmente la masa, en negro aquellos núcleos que son sistemas estables y en rojo los núcleos que participan en los procesos r de nucleosíntesis. . . . .	2
1.2. Valor experimental de la masa nuclear correspondiente a los núcleos en AME03 [2], 2149 núcleos. . . . .	4
1.3. Energía de amarre como función de $A$ para los núcleos conocidos experimentalmente y reportados en la compilación de masas AME03 [2]. . . . .	5
1.4. Energía de amarre por nucleón, $BE/A$ , como función de: (a) el número de nucleones y (b) el número de neutrones y protones para los núcleos conocidos experimentalmente y reportados en la compilación de masas AME03 [2]. . . . .	6
1.5. Acercamiento de los valores experimentales de la energía de amarre por nucleón $BE/A$ en la región de los núcleos ligeros. El modelo de la gota se muestra con una línea punteada. . . . .	7
1.6. Tabla de isótopos mostrando aquellos núcleos en el interior de las líneas de goteo, la región azul indica los núcleos reportados en AME03. . . . .	8
1.7. Energía de separación de dos neutrones en las regiones (a) $N \approx 30 - 65$ y (b) $N \approx 75 - 100$ . Las líneas unen núcleos con el mismo número de protones. . . . .	9
1.8. Tabla de isótopos mostrando las mediciones experimentales realizadas por los diferentes programas de medición de masas alrededor del mundo. . . . .	11
2.1. $BE/A$ de acuerdo al modelo de la gota (curva D), el término de volumen (A), el término de volumen más el de superficie (B), el término de volumen más el de superficie más el de Coulomb (C). . . . .	15
2.2. Valores experimentales de la energía de amarre $BE$ , para $A = 100$ como función de $Z$ . El modelo de la gota se muestra con una línea punteada. . . . .	16
2.3. Diferencias entre los valores experimentales de la energía de amarre y aquellos generados con el modelo de la gota, eq. 2.4, para los núcleos contenidos en la compilación AME03 con respecto al número de neutrones $N$ . . . . .	17
2.4. Diferencias entre los valores experimentales de la energía de amarre y aquellos generados con el modelo de la gota, eq. 2.4, para los núcleos contenidos en la compilación AME03 con respecto al número de protones $Z$ . . . . .	18
2.5. Diferencias entre los valores de la energía de amarre obtenidos a partir de las masas nucleares medidas experimentalmente en la compilación AME03 y aquellos obtenidos con el modelo de la gota. . . . .	19
2.6. Diferencias entre los valores de la energía de amarre obtenidos a partir de las masas nucleares medidas experimentalmente en la compilación AME03 y aquellos obtenidos con el modelo de la gota incluyendo correcciones esquemáticas para los efectos de capa. . . . .	20
2.7. Comparación entre las desviaciones microscópicas de la energía de amarre experimentales y las calculadas por el modelo FRDM con respecto al número de neutrones . . . . .	21

2.8. Diferencias entre los valores de la energía de amarre obtenidos a partir de las masas nucleares medidas experimentalmente en la compilación AME03 y aquellos obtenidos con el modelo de la gota de rango finito FRDM. . . . .	22
2.9. Diferencias entre las masas experimentales y las masas calculadas con la fórmula HFB13 como función del número de neutrones $N$ . . . . .	24
2.10. Diferencias entre los valores de la energía de amarre obtenidos a partir de las masas nucleares medidas experimentalmente en la compilación AME03 y aquellos obtenidos con el modelo de Duflo-Zuker . . . . .	25
2.11. Diagrama de los niveles de partícula independiente que están involucrados en la primera de las relaciones de Garvey-Kelson . . . . .	26
2.12. Diferencias entre los valores de la energía de amarre obtenidos a partir de las masas nucleares medidas experimentalmente en la compilación AME03 y aquellos obtenidos con las relaciones de Garvey-Kelson. . . . .	28
2.13. Diferencias entre las masas nucleares predichas por algunos de los modelos teóricos existentes, las masas nucleares experimentales y el modelo de Duflo-Zuker tomado como referencia, como función del número de neutrones para los isótopos de Cesio ( $Z=55$ ) [7]. Ya que los modelos son ajustados a las masas conocidas las diferencias en esta región entre los diferentes modelos son casi nulas. Las zonas sombreadas indica las posibles regiones donde $S_n$ y $S_p$ se hacen cero, así como la región donde es posible que se lleve acabo la nucleosíntesis por medio del proceso de captura rápida de neutrones y la región de masas conocidas experimentalmente. . . . .	31
2.14. Diferencias entre los valores de la energía de amarre obtenidos a partir de las masas nucleares obtenidas con el modelo de la gota de rango finito (FRDM) y aquellos obtenidos con el modelo de Duflo-Zuker (DZ). . . . .	32
2.15. Diferencias entre los valores de la energía de amarre obtenidos a partir de las masas nucleares obtenidas con el modelo de la gota de rango finito (FRDM) y aquellos obtenidos con el modelo de Duflo-Zuker (DZ) para la parte medida experimentalmente conocida (a) y para la parte no conocida (b). . . . .	32
2.16. Nucleos utilizados en la prueba de predicción AME95, en rojo se muestran aquellos núcleos reportados en la compilación AME95 los cuales son usados para ajustar los modelos. En amarillo se muestra aquellos núcleos reportados en la compilación AME03 que no se encontraban en la compilación anterior, estos núcleos conforman el conjunto a predecir. . . . .	33
2.17. Diferencias entre las masas nucleares predichas con el modelo de la gota (LDM) y las obtenidas al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson sobre dicho modelo. . . . .	35
2.18. Diferencias entre las masas nucleares predichas con el modelo de la gota incluyendo correcciones microscopicas (LDMM) y las obtenidas al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson sobre dicho modelo. . . . .	36
2.19. Diferencias entre las masas nucleares predichas con el modelo de la gota de rango finito (FRDM) y las obtenidas al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson sobre dicho modelo. . . . .	36
2.20. Diferencias entre las masas nucleares predichas con cálculos tipo Hartree-Fock (HF) y las obtenidas al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson sobre dicho modelo. . . . .	37
2.21. Diferencias entre las masas nucleares predichas con el modelo de Duflo-Zuker (DZ) y las obtenidas al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson sobre dicho modelo. . . . .	37
3.1. Esquema del producto entre las 2 imágenes, la máscara binaria y la imagen donde se encuentra el valor de todas las masas. La imagen resultante es la figura 2.5. . . . .	41
3.2. a) Señal sinusoidal $t(x)$ . b) Transformada de Fourier de $t(x)$ , se puede apreciar que consta de una componente. c) Máscara binaria $w(x)$ . d) Transformada de Fourier de $w(x)$ . e) Producto de la señal original y la máscara, $i(x) = w(x) \cdot t(x)$ . f) Transformada de Fourier de $i(x)$ , $I(u) = W(u) \otimes T(u)$ . . . . .	42
3.3. Reconstrucción obtenida despues de aplicar el algoritmo de deconvolución CLEAN a las diferencias entre las masas predichas por el modelo de la gota y las masas experimentales reportadas en la compilación AME03. . . . .	46

3.4.	Prueba AME9503. Los paneles (a), (c) y (e) muestran las reconstrucciones realizadas por el algoritmo $\text{CLEAN} \Delta m_{ext}(N, Z)$ para el modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota más correcciones microscópicas (LDMM) y el modelo de Dufflo-Zuker (DZ) respectivamente. Los paneles (b), (d) y (f) muestran la diferencia entre la reconstrucción y el patrón original $\Delta m_{ext}(N, Z) - \Delta m_{exp}(N, Z)$ para aquellos núcleos que se encuentran en el subconjunto de predicción, para el modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota más correcciones microscópicas (LDMM) y el modelo de Dufflo-Zuker (DZ) respectivamente. . . . .	48
3.5.	(a) Diferencias entre las masas experimentales y las obtenidas al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson sobre ellas mismas. Las partes (b), (c) y (d) muestran la diferencia entre las masas nucleares predichas y las obtenidas al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson para el modelo de la gota, el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas y el modelo de Dufflo-Zuker mejorados con CLEAN respectivamente. . . . .	50
3.6.	Prueba AME95-03: Energía de separación de 2 neutrones $S_{2n}$ . Las líneas unen núcleos con el mismo número de protones. En azul se muestran la energía de separación de 2 neutrones predichas por: (a) el modelo de la gota y (b) el modelo de la gota mejorado con la reconstrucción del algoritmo CLEAN. El valor de $S_{2n}$ obtenido a partir de las masas experimentales se muestra en rojo para los núcleos pertenecientes al subconjunto de ajuste y en verde para los núcleos en el subconjunto de predicción. . . . .	51
3.7.	Prueba AME95-03: Energía de separación de 2 neutrones $S_{2n}$ . Las líneas unen núcleos con el mismo número de protones. En azul se muestran la energía de separación de 2 neutrones predichas por: (a) el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas y (b) el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas mejorado con la reconstrucción del algoritmo CLEAN. El valor de $S_{2n}$ obtenido a partir de las masas experimentales se muestra en rojo para los núcleos pertenecientes al subconjunto de ajuste y en verde para los núcleos en el subconjunto de predicción. . . . .	51
3.8.	Prueba AME95-03: Energía de separación de 2 neutrones $S_{2n}$ . Las líneas unen núcleos con el mismo número de protones. En azul se muestran la energía de separación de 2 neutrones predichas por: (a) el modelo de Dufflo-Zuker y (b) el modelo de Dufflo-Zuker mejorado con la reconstrucción del algoritmo CLEAN. El valor de $S_{2n}$ obtenido a partir de las masas experimentales se muestra en rojo para los núcleos pertenecientes al subconjunto de ajuste y en verde para los núcleos en el subconjunto de predicción. . . . .	51
3.9.	Núcleos utilizados en la prueba de predicción “borde”, en rojo se muestran aquellos núcleos pertenecientes al subconjunto de ajuste. En amarillo se muestra aquellos núcleos que conforman el conjunto a predecir. . . . .	52
3.10.	Prueba del “borde”. Los paneles (a), (c) y (e) muestran las reconstrucciones realizadas por el algoritmo $\text{CLEAN} \Delta m_{ext}(N, Z)$ para el modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota más correcciones microscópicas (LDMM) y el modelo de Dufflo-Zuker (DZ) respectivamente. Los paneles (b), (d) y (f) muestran la diferencia entre la reconstrucción y el patrón original $\Delta m_{ext}(N, Z) - \Delta m_{exp}(N, Z)$ para aquellos núcleos que se encuentran en el subconjunto de predicción, para el modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota más correcciones microscópicas (LDMM) y el modelo de Dufflo-Zuker (DZ) respectivamente. . . . .	53
3.11.	Prueba del borde: Energía de separación de 2 neutrones $S_{2n}$ . Las líneas unen núcleos con el mismo número de protones. En azul se muestran la energía de separación de 2 neutrones predichas por: (a) el modelo de la gota y (b) el modelo de la gota mejorado con la reconstrucción del algoritmo CLEAN. El valor de $S_{2n}$ obtenido a partir de las masas experimentales se muestra en rojo para los núcleos pertenecientes al subconjunto de ajuste y en verde para los núcleos en el subconjunto de predicción. . . . .	54
3.12.	Prueba del borde: Energía de separación de 2 neutrones $S_{2n}$ . Las líneas unen núcleos con el mismo número de protones. En azul se muestran la energía de separación de 2 neutrones predichas por: (a) el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas y (b) el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas mejorado con la reconstrucción del algoritmo CLEAN. El valor de $S_{2n}$ obtenido a partir de las masas experimentales se muestra en rojo para los núcleos pertenecientes al subconjunto de ajuste y en verde para los núcleos en el subconjunto de predicción. . . . .	54

3.13. Prueba del borde: Energía de separación de 2 neutrones $S_{2n}$ . Las líneas unen núcleos con el mismo número de protones. En azul se muestran la energía de separación de 2 neutrones predichas por: (a) el modelo de Duflo-Zuker y (b) el modelo de Duflo-Zuker mejorado con la reconstrucción del algoritmo CLEAN. El valor de $S_{2n}$ obtenido a partir de las masas experimentales se muestra en rojo para los núcleos pertenecientes al subconjunto de ajuste y en verde para los núcleos en el subconjunto de predicción. . . . .	55
4.1. Número de estimaciones utilizadas para predecir cada núcleo en la prueba de predicción AME95-03. . . . .	59
4.2. Núcleos que son predichos en cada iteración del proceso de predicción utilizando las relaciones de Garvey-Kelson en la prueba AME95-03. . . . .	60
4.3. Comparación entre las desviaciones $\sigma^i$ (a) y $A\sigma^i$ (b) en MeVs para los núcleos predichos en cada iteración utilizando las relaciones de Garvey-Kelson (negro) y la desviación sobre esos mismo núcleos predichos por las extrapolaciones de Audi-Wapstra (azul) como función del número acumulado de núcleos predichos en cada iteración. . . . .	61
4.4. Comparación entre las desviaciones $\sigma^i$ (a) y $A\sigma^i$ (b) en MeVs para los núcleos predichos en cada iteración utilizando las relaciones de Garvey-Kelson (negro) y la desviación sobre esos mismo núcleos predichos por el modelo de la gota LDM (azul), el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas LDMM (verde) y el modelo de Duflo-Zuker DZ (rojo) como función del número acumulado de núcleos predichos en cada iteración. . . . .	62
4.5. Núcleos pertenecientes al subconjunto de ajuste (azul) y los núcleos a predecir (rojo) para la prueba de predicción de largo alcance. En amarillo se muestran aquellos núcleos que no estan incluidos en la prueba. . . . .	64
4.6. (a) Núcleos que son predichos en cada iteración para la prueba de predicción de largo alcance. (b) Desviación $A\sigma^i$ (en MeVs) para las predicciones del proceso iterativo en la prueba de predicción de largo alcance usando las masas predichas por varios modelos, el modelo de la gota (línea azul), el modelo de la gota con correcciones microscópicas (línea verde) y el modelo de Duflo-Zuker (línea negra). . . . .	65
4.7. Prueba de predicción de largo alcance. (a) Errores producidos en el proceso iterativo usando las predicciones del modelo de la gota. (b) Interacción promedio entre los últimos protones y neutrones de valencia, $\delta V_{np}$ , calculados a partir del modelo de la gota. (c) Segunda derivada con respecto a (N-Z) de los errores mostrados en la parte (a). (d) Segunda derivada con respecto a (N-Z) de los valores $\delta V_{np}$ mostrados en la parte (b). . . . .	66
4.8. Prueba de predicción de largo alcance. (a) Errores producidos en el proceso iterativo usando las predicciones del modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas. (b) Interacción promedio entre los últimos protones y neutrones de valencia, $\delta V_{np}$ , calculados a partir del modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas. (c) Segunda derivada con respecto a (N-Z) de los errores mostrados en la parte (a). (d) Segunda derivada con respecto a (N-Z) de los valores $\delta V_{np}$ mostrados en la parte (b). . . . .	67
4.9. Prueba de predicción de largo alcance. (a) Errores producidos en el proceso iterativo usando las predicciones del modelo de Duflo-Zuker. (b) Interacción promedio entre los últimos protones y neutrones de valencia, $\delta V_{np}$ , calculados a partir del modelo de Duflo-Zuker. (c) Segunda derivada con respecto a (N-Z) de los errores mostrados en la parte (a). (d) Segunda derivada con respecto a (N-Z) de los valores $\delta V_{np}$ mostrados en la parte (b). . . . .	68
4.10. valores de la interacción residual promedio entre los últimos neutrones de valencia y los últimos protones de valencia, $\delta V_{np}$ , calculados a partir de las masas experimentales reportadas en la compilación AME03. . . . .	69
4.11. Regiones de núcleos predichos por iteración en las primeras diez iteraciones del proceso utiizando (a) las relaciones originales de Garvey-Kelson (IGK1) y (b) el proceso iterativo utilizando las relaciones de Garvey-Kelson modificadas de las ecuaciones 4.11 y 4.16 (IGK2). 73	

5.1.	Desviaciones $\sigma^i$ (a) y $A\sigma^i$ (b) como función del número de núcleos predichos por unidad de distancia en la prueba de predicción AME95-03 para el proceso iterativo con las relaciones de Garvey-Kelson IGK1(negro), el modelo de la gota LDM (azul), el modelo de la gota mejorado con el algoritmo CLEAN (azul punteadas), el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas LDMM (verde) y su versión mejorada con CLEAN (verde punteado), el modelo de Duffo-Zuker DZ (rojo) y el modelo de Duffo-Zuker mejorado con CLEAN (rojo punteado). . . . .	78
5.2.	(a) Diferencias entre las energías de separación de un neutrón obtenidas con la ecuación 4.11 y las calculadas a partir de las masas nucleares experimentales reportadas en la compilación AME95. (b) Diferencias entre las energías de separación de un neutrón obtenidas con la ecuación 4.11 y las calculadas a partir de las masas nucleares experimentales reportadas en la compilación AME95. . . . .	81



# Resumen

La descripción correcta de las propiedades nucleares es esencial para ampliar nuestro conocimiento del universo. Entre estas propiedades sin duda alguna la de mayor importancia es la masa del núcleo. Experimentalmente las técnicas existentes en la actualidad son de una complejidad impresionante y han permitido poco a poco el conocimiento sistemático del comportamiento de las masas nucleares como función del número de neutrones y del número de protones. Sin embargo el extender la frontera de la región de núcleos conocidos es cada vez más difícil ya que los núcleos a estudiar son cada vez más inestables y es mucho más difícil producirlos. Debido a esto es necesario el uso de modelos teóricos para predecir el valor de la masa para núcleos que aun no han sido producidos experimentalmente.

De particular importancia es el comportamiento sistemático y suave que tienen las masas en el plano  $(N,Z)$ . Al graficar el valor de la masa como función del número de neutrones y el número de protones se obtiene una superficie cuyas propiedades son pieza clave para poder predecir las masas nucleares desconocidas. En este trabajo de investigación se presentan un par de técnicas de predicción de masas nucleares las cuales se concentran principalmente en el comportamiento y las propiedades sistemáticas de esta superficie.

La primera de ellas pretende caracterizar de manera global las estructuras sistemáticas y los patrones cuasiperiódicos que aparecen al obtener la diferencia entre las masas experimentales conocidas y las predicciones de alguno de los modelos teóricos utilizados en la actualidad. Estos patrones reflejan características físicas que no están incluidas en el modelo utilizado, las cuales se modelan en términos de funciones armónicas. Las diferencias entre el modelo teórico y las masas experimentales conforman una imagen la cual es considerada como el producto de otras dos, una imagen en la cual aparecen los valores de las masas para todos los núcleos con posibilidad de existir y la otra una máscara binaria hecha de ceros y unos que nos permite “ver” únicamente aquellas masas cuyo valor es conocido experimentalmente. Al considerar este producto, el problema se expresa en términos de una deconvolución la cual se realiza a través del algoritmo CLEAN. Utilizando esta aproximación es posible detectar y modelar propiedades periódicas del patrón y estructuras sistemáticas que aparecen en la imagen de las diferencias de masas.

La segunda aproximación es de carácter local y utiliza las relaciones de Garvey-Kelson de manera iterativa para poder predecir el valor de la masa nuclear. Estas relaciones se han utilizado de manera previa para predecir masas nucleares, sin embargo en este trabajo se presenta una manera de aprovechar todas las posibles estimaciones a una masa lo cual permite realizar predicciones más precisas. A lo largo del proceso iterativo se van utilizando en las relaciones masas predichas por la técnica en iteraciones previas lo cual genera un error acumulativo que se incrementa con cada iteración y disminuye la precisión de las predicciones. Se presenta una posible optimización de este proceso iterativo a través de una reducción en los grados de libertad involucrados en cada iteración incorporando la información de las energías de separación de un neutrón y de un protón en las relaciones de Garvey-Kelson. Utilizando esta información es posible aumentar el número de núcleos predichos por el proceso en cada iteración con lo cual la velocidad con la que el error se acumula se ve reducida.

Para ambas técnicas se realizó un estudio detallado del poder predictivo y del rango de validez como función de la distancia a la zona conocida experimentalmente con el objetivo de realizar una predicción razonable. Esta predicción se presenta para ambas aproximaciones en las conclusiones generales del trabajo y proporciona el valor de la energía de amarre para 2000 núcleos no conocidos en la actualidad.

*The correct description of nuclear properties is essential for expanding our knowledge of the universe. Among these properties undoubtedly the most important is the mass of the nucleus. The currently available experimental techniques are impressively complex and gradually allowed the systematic knowledge of the behavior of nuclear masses as function of the neutron number and the proton number. However, to expand the boundary of the known nuclei is increasingly difficult as the nuclei to study are more unstable and much more difficult to produce. Because of this it is necessary to use theoretical models to predict the value of mass for nuclei that have not been produced experimentally.*

*Of particular importance is the smooth and systematic behavior of the masses at the plane  $(N, Z)$ . By plotting the value of the mass as a function of the number of neutrons and the number of protons a surface is obtained whose properties are keystone to predict the masses of the unknown nuclei. In this research a couple of techniques for predicting nuclear masses are presented both of them are based mainly on the behavior and properties of systematic of this surface.*

*The first one of these techniques aims to characterize globally the systematic structures and the quasiperiodic patterns that appear obtaining the difference between the known experimental masses and predictions of some theoretical model. These patterns reflect physical phenomena that are not included in the used model which are modeled in terms of harmonic functions. Differences between the theoretical and experimental masses produce an image which is considered as a product of two images, an image consisting of the nuclear masses values for all nuclei with the possibility to exist and the other a binary mask made of zeros and ones allowing us to see only those nuclei whose mass value is known experimentally. The problem of nuclear mass prediction is expressed in terms of a deconvolution which is performed through the CLEAN algorithm. Using this approach it is possible to detect and model periodic properties of the pattern and systematic structures appearing on the mass difference image.*

*The second approach is local in nature and utilizes the Garvey-Kelson relations in an iterative way to predict the value of nuclear masses. These relationships have been used before to predict nuclear masses, however in this work is presented a way to exploit all possible mass estimates allowing more accurate predictions. Along the iterative process previously predicted values for the nuclear masses are used in the relations, this creates a pre cumulative error which increases with each iteration and reduces the accuracy of the predictions. We present a possible optimization of this process through a reduction in the degrees of freedom involved in each iteration, incorporating information from separation energies of one neutron and one proton in the Garvey-Kelson relations. Using this information can increase the number of nuclear masses predicted by the process in each iteration decreasing the speed at which the error accumulates.*

*For both techniques, we conducted a detailed study of the predictive power and the range of validity as a function of the distance to the experimentally known region in order to make a reliable prediction. This prediction is presented for both approaches in the general conclusions of the work and provides the value of the mass for 2000 nuclei unknown at present.*



# Introducción

La física nuclear estudia uno de los sistemas físicos más fascinantes que existen en la naturaleza, los núcleos atómicos. Los núcleos son sistemas particularmente complejos y difíciles de describir. Una de las principales dificultades radica en el hecho de que el número de partículas componentes de los núcleos puede ir desde un solo protón hasta sistemas con más de 300 nucleones. La cantidad de constituyentes es muy grande como para hacer un análisis microscópico detallado debido a que el número de posibles configuraciones para estos constituyentes es brutalmente grande, por otro lado los componentes son muy pocos como para aplicar las técnicas y métodos de la física estadística en las cuales es un ingrediente primordial que el número de constituyentes tienda a infinito. Las partículas que componen el núcleo interactúan a través de las fuerzas electromagnética, fuerte y débil, cuyo conjunto resulta en una fuerza efectiva entre nucleones. En la actualidad, esta fuerza efectiva y la manera en la como se ve afectada por la presencia del medio nuclear no se entienden del todo, por lo general se parametriza con fuerzas extraídas de la interacción nucleón-nucleón. El sistema nuclear presenta una gran variedad de comportamientos diferentes como función del número de partículas que lo constituyen, así como en función de la escala de energía que se esté analizando. Algunos de estos comportamientos resaltan el carácter de entes individuales o de partícula de los componentes y son bien descritos por modelos que consideran a los nucleones como partículas independientes moviéndose en un potencial promedio creado por los mismos nucleones constituyentes. Otros fenómenos resaltan el carácter colectivo del núcleo y es necesario un tratamiento más fenomenológico para describirlos en el cual se considera esencialmente al núcleo como una gota de líquido, muy densa, cargada, libre en el espacio y capaz de vibrar y rotar en conjunto como un todo. En la actualidad es imposible describir la totalidad de la gran variedad de fenómenos nucleares observados con un solo modelo [1].

Los núcleos están compuestos de nucleones, específicamente  $N$  neutrones de carga neutra y  $Z$  protones cargados positivamente, los cuales se mantienen unidos debido a las interacciones efectivas entre ellos, sin embargo sólo un número finito de combinaciones de estos nucleones puede mantenerse ligados. En el plano  $(N, Z)$  los núcleos que pueden existir se encuentran restringidos a una franja estrecha, al aumentar el número de protones llega un momento en el cual el sistema deja de estar ligado debido a la fuerza de repulsión electromagnética entre estas partículas de carga positiva. Por otro lado, si aumentamos el número de neutrones, el sistema deja de estar ligado debido a que la fuerza nuclear fuerte es de corto alcance con lo cual llega un momento en el que ya no es suficiente para mantener al núcleo unido. Aproximadamente 9000 núcleos tienen posibilidad de existir como sistema ligado, de los cuales cerca de 270 son sistemas estables, los demás son radioactivos y decaen en sistemas más simples en tiempos increíblemente diversos, desde unos cuantos nanosegundos hasta millones de años. De estos 9000 núcleos posibles aproximadamente 3000 han sido producidos y detectados experimentalmente [2] (ver el recuadro de la figura 1.1).

Un gran esfuerzo se lleva a cabo para medir experimentalmente las propiedades de estos núcleos, sin embargo conforme nos alejamos de la línea de estabilidad los experimentos se vuelven más complicados e imprecisos, debido a que estos núcleos son muy difíciles de producir y su vida media es muy corta. Debido a esto los modelos teóricos son de suma importancia para predecir las propiedades que caracterizan a estos núcleos casi imposibles de medir así como para guiar los experimentos a zonas de interés físico, especialmente en la región de los núcleos con exceso de neutrones.

En el presente trabajo, la atención se concentra especialmente en una de las propiedades más importantes de los sistemas nucleares, la masa. El interés en la medición, descripción y predicción de la masa

nuclear así como de la manera en la que el valor de ésta cambia a lo largo de la tabla de isótopos ha estado presente en la física nuclear desde su inicio. Existen intentos por medir con precisión las masas nucleares y modelos teóricos para describirlas desde hace aproximadamente 70 años, sin embargo el camino aún es largo y la cantidad de información que hace falta es impresionante, por lo cual sigue existiendo un gran interés por conocer valores cada vez más precisos de las masas nucleares, estos valores en conjunto con el conocimiento de otras propiedades proporcionan pruebas para los modelos actuales que describen la naturaleza. Dependiendo del grado de precisión, las masas son útiles para comprobar modelos de la física nuclear, de la astrofísica, de la interacción débil, de la electrodinámica cuántica e incluso para el modelo estándar, por mencionar algunos [3]. Como se mencionó anteriormente, conforme los núcleos bajo estudio se encuentran en regiones más lejanas a la zona de estabilidad es mucho más difícil medir sus propiedades con precisión, debido a esto es necesario desarrollar modelos que sean capaces de predecir las propiedades y características de estos núcleos exóticos.

A lo largo de este trabajo presentaremos diferentes métodos y técnicas para predecir masas nucleares, todas basadas en intentos de explotar las correlaciones sistemáticas que existen en las masas de diferentes núcleos y en el análisis exhaustivo de la manera en como varía el valor de la masa nuclear como función del número de neutrones,  $N$ , y del número de protones,  $Z$ . Cada una de las metodologías propuestas considera a las masas nucleares conocidas experimentalmente como un conjunto de aproximadamente 2000 datos que contienen la información necesaria para intuir la sistemática y los patrones involucrados en el comportamiento general de los valores de las masas nucleares en el conjunto completo de 9000 masas.

El capítulo 1 plantea un marco teórico del problema, enfatizando la definición de masa nuclear y la importancia de la precisión en las mediciones y predicciones de ésta. Se describen brevemente algunos de los problemas para los cuales es importante el conocimiento preciso de las masas nucleares. Por último se describen de manera muy esquemática algunas de las técnicas de medición de la masa nuclear para mostrar las dificultades inherentes a la medición de esta propiedad en los núcleos exóticos y demostrar la necesidad de los modelos teóricos para la descripción de las masas en regiones inalcanzables experimentalmente por el momento.

En el capítulo 2 se describen algunos de los principales modelos teóricos existentes en la actualidad con los cuales es posible predecir masas nucleares. Los modelos más representativos son analizados, comenzando por el modelo de la gota que es en su totalidad macroscópico, después se analizan versiones mejoradas de este modelo, las cuales incluyen correcciones que toman en cuenta efectos microscópicos necesarios para una correcta descripción del comportamiento nuclear. Estos efectos pueden ir desde simples parametrizaciones esquemáticas de los efectos de cerradura de capas hasta correcciones realmente complejas que incluyen la deformación de los núcleos como por ejemplo en el modelo de la gota de rango finito. También se describen modelos de tipo Hartree-Fock y el modelo con las mejores predicciones de masa hasta el momento, el modelo de Duflo-Zuker. Después se realiza una comparación del poder de ajuste a los datos conocidos y el poder predictivo de cada uno de estos modelos. Se presentan las relaciones de Garvey-Kelson las cuales pueden ser utilizadas de manera local para predecir masas así como para analizar la estabilidad y consistencia de los demás modelos teóricos en distintas regiones de la tabla de isótopos.

El capítulo 3 es la parte primordial de este trabajo y presenta un nuevo procedimiento para predecir masas nucleares, el cual combina los modelos nucleares conocidos con técnicas de reconstrucción de imágenes y reconocimiento de patrones. Una imagen en código de colores es creada al tomar la diferencia entre las masas medidas y las predicciones dadas por los diferentes modelos teóricos. Esta imagen es considerada como parte de un arreglo más grande en el plano  $(N,Z)$  en el cual las masas nucleares no conocidas permanecen escondidas, cubiertas por una máscara que solamente nos permite observar aquellas que han sido medidas experimentalmente. Hemos aplicado el algoritmo de deconvolución CLEAN usado en observaciones astronómicas, el cual en este caso ha sido adaptado para abrir la máscara y observar la parte oculta del patrón. Se presentan distintas pruebas cuyo resultado muestra que utilizando esta técnica es posible mejorar significativamente la predicción de masas en la región cercana a las masas conocidas experimentalmente.

En el capítulo 4 se plantea el uso de las relaciones de Garvey-Kelson mediante un proceso iterativo para predecir masas nucleares en la vecindad de las masas conocidas experimentalmente. Se muestra que las predicciones utilizando este procedimiento son mejores que aquellas obtenidas con los mejores modelos de masas nucleares y que son comparables con las extrapolaciones de Audi-Wapstra, ofreciendo un procedimiento simple y reproducible para realizar predicciones de corto alcance. Se realiza un estudio sistemático de la manera en la que crece el error como función de la iteración y de la distancia a la región conocida, mostrando que existe una correlación entre el error y las interacciones residuales entre los protones y neutrones de valencia. Por último se presenta un intento de extender la región donde las relaciones de Garvey-Kelson predicen con una precisión aceptable utilizando las energías de separación como una manera de reducir los grados de libertad involucrados en el proceso iterativo.

En el capítulo 5 muestra cómo es posible utilizar las relaciones de Garvey-Kelson como una herramienta para definir el grado de precisión del algoritmo CLEAN, así como una manera de juntar estos dos métodos y así poder generar predicciones de masas nucleares más confiables utilizando las cualidades de ambas técnicas.

Finalmente el capítulo 6 presenta las conclusiones generales de este trabajo y una tabla con las predicciones a 2000 núcleos realizadas con las técnicas desarrolladas a lo largo de la investigación.



# Capítulo 1

## Marco teórico

### 1.1. Importancia de las masas nucleares

Una de las propiedades más importantes del núcleo es su masa. El entendimiento de la masa nuclear pone a prueba nuestros conceptos más básicos de estructura nuclear y a través de ellos la descripción general que tenemos del universo en el cual vivimos. La masa nuclear es una cantidad sumamente importante para el desarrollo de modelos tanto en física nuclear como en otras ramas de la física. Es ingrediente esencial en gran cantidad de problemas físicos actuales. A través de la masa nuclear tenemos información acerca de la energía que mantiene ligados a los núcleos y a los átomos, es decir, la energía de amarre, la cual representa la suma de todas las interacciones atómicas y nucleares.

Uno de las áreas donde las masas nucleares juegan un papel fundamental es en la astrofísica [3], particularmente en la descripción de cómo se crearon los elementos que existen ahora en el universo y por que existen con la abundancia que lo hacen, es decir, el problema de la nucleosíntesis [4]. La figura 1.1 muestra la abundancia relativa de los elementos en el sistema solar [5, 6] determinada a partir del análisis de meteoritos y del espectro obtenido de la luz solar. El hidrógeno y el helio son los elementos más abundantes, estos elementos fueron los únicos producidos en el big-bang, elementos más pesados tuvieron que haber sido producidos por procesos nucleares, la mayoría en el interior de las estrellas y en explosiones estelares. La abundancia relativa de estos isótopos pesados está especialmente relacionada con la masa nuclear de cada uno de ellos [3, 4, 6], por ejemplo, si consideramos las posibles reacciones de fusión entre los isótopos producidos en el big-bang, dos hidrógenos formando un núcleo de helio ( ${}^2\text{He}$ ), hidrógeno con helio produciendo  ${}^5\text{Li}$  o 2 núcleos de helio formando  ${}^8\text{Be}$ , sería de esperarse que estos isótopos también se hubieran producido en el big-bang, sin embargo el  ${}^8\text{Be}$ ,  ${}^2\text{He}$  y el  ${}^5\text{Li}$  tienen una vida media muy pequeña debido a que pueden decaer rápidamente en fragmentos, esto es posible ya que la masa total de los fragmentos es menor que la masa del núcleo en cuestión. Esta diferencia de masa, de acuerdo a la ecuación  $E = mc^2$  corresponde a la energía con la que están ligados los fragmentos, la energía de amarre la cual es liberada en el decaimiento. Estos isótopos decaen casi inmediatamente después de ser creados, por lo cual son muy poco abundantes en la naturaleza, las condiciones en el big-bang como la densidad y el tiempo disponible no son suficientes como para permitir que reacciones de fusión se lleven a cabo con estos isótopos. Si la masa del  ${}^8\text{Be}$  fuera menor en un 1/1000 por ciento el decaimiento en dos núcleos de helio no podría llevarse a cabo y el isótopo de  ${}^8\text{Be}$  sería estable, con lo cual elementos más pesados podrían haber sido producidos en el big-bang, y esto cambiaría por completo la composición de nuestro universo [6].

La figura 1.1 muestra que los núcleos con número de nucleones alrededor de  $A=56$  son muy abundantes, esta abundancia también está relacionada íntimamente con la masa nuclear. La energía de amarre entre nucleones (protones y neutrones) al interior del núcleo es la diferencia entre la masa de un núcleo y la suma de las masas de sus constituyentes. La gran abundancia del hierro y el níquel es debido a que son los núcleos con mayor energía de amarre por nucleón, aproximadamente 8 MeVs, ni la fusión de hierro con otro isótopo, ni la fisión de hierro en dos núcleos más ligeros son procesos que liberen energía, es decir, para que estos procesos se lleven a cabo es necesario proporcionar energía al sistema. Debido a este hecho, la serie de reacciones de fusión nuclear en el interior de las estrellas que produce energía al convertir núcleos con menor energía de amarre en núcleos con mayor energía de amarre por nucleón

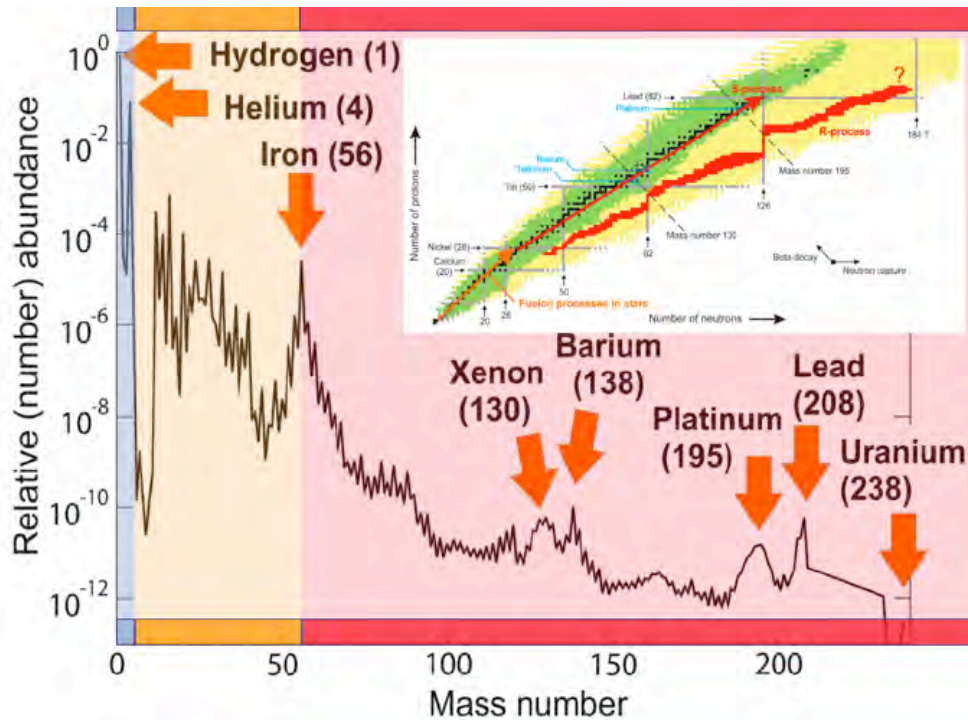


Figura 1.1: Abundancia relativa de los isótopos de los elementos en el sistema solar como función del número de nucleones. Los isótopos han sido creados esencialmente en 3 procesos: Durante el big-bang (región en azul), debido a procesos de fusión dentro de las estrellas (región naranja) y debido a procesos de nucleosíntesis (región en rojo). El recuadro muestra en amarillo los cerca de 9000 núcleos que pueden existir, sistemas ligados entre las “líneas de goteo”, mientras que en verde se muestran los aproximadamente 2000 núcleos para los cuales se ha medido experimentalmente la masa, en negro aquellos núcleos que son sistemas estables y en rojo los núcleos que participan en los procesos r de nucleosíntesis.

termina en el hierro y en el níquel. Los núcleos más ligeros que el hierro se producen principalmente en estas reacciones de fusión que alimentan energéticamente a las estrellas [3, 6].

El origen de elementos más pesados que el hierro no se entiende del todo en la actualidad, se piensa que este proceso se lleva a cabo en el medio interestelar, que está asociado con la expulsión de materia nuclear en las explosiones de supernovas y que la mayoría de estos procesos involucran la captura de neutrones [4, 6]. Un núcleo semilla captura neutrones hasta formar un isótopo radioactivo el cual decae por medio de decaimiento beta y forma de esta manera un isótopo de un elemento más pesado. Este proceso se repite creando núcleos cada vez más pesados. Cuando un isótopo tiene un número de neutrones igual a un número mágico ( $N=50, 82, 126$ ) el proceso de captura de neutrones es menos eficiente debido a que estos núcleos son más estables por tener su configuración de neutrones en una capa cerrada, con lo cual, estos núcleos tienen más probabilidad de decaer hacia isótopos estables, esto explica los picos en la curva de abundancia para los números de masa  $A=130, 138, 195, 208$ .

Esencialmente existen 2 procesos de captura de neutrones que producen isótopos pesados, los procesos lentos, llamados procesos s y los procesos rápidos llamados procesos r, donde el nombre hace referencia a la velocidad con la que se llevan a cabo los decaimientos beta. Para determinar la trayectoria exacta a través de la tabla de isótopos de estos procesos es necesario conocer con gran precisión algunas propiedades de los núcleos involucrados, entre estas propiedades se encuentran la sección eficaz del núcleo en cuestión para capturar neutrones y la energía liberada al separar un neutrón del núcleo, es decir la energía de separación de un neutrón, la cual puede definirse en términos del valor de la masa nuclear. Si conocemos la masa de todos los núcleos involucrados en una cierta reacción o en un proceso de decaimiento podemos calcular la energía liberada en dicho proceso, con lo cual podemos determinar los

modos de decaimiento de un sistema. En los procesos  $s$ , la captura de neutrones es mucho más lenta que los decaimientos beta, por lo cual los isótopos radioactivos decaen en núcleos estables antes de la captura del siguiente neutrón. El lugar donde se llevan a cabo los procesos  $s$  está bien identificado y las masas y demás propiedades nucleares de los núcleos involucrados en estos procesos son bien conocidas, por lo cual la abundancia relativa debida a estos procesos puede calcularse de una manera muy precisa [4].

Al menos la mitad de los isótopos pesados son producidos en los procesos rápidos de captura de neutrones. Estos procesos se llevan a cabo en ambientes donde la densidad de neutrones libres es increíblemente grande, de tal manera que la captura de neutrones se lleva a cabo mucho más rápidamente que los decaimientos beta. Los núcleos estables formados en este proceso son producto de una gran cantidad de decaimientos beta consecutivos que se dan cada que el proceso de captura de neutrones se encuentra en equilibrio con las reacciones de fotodesintegración las cuales hacen que los núcleos emitan neutrones [4, 6, 3]. El conocimiento de la masa de los núcleos involucrados es esencial para la descripción correcta de la abundancia debida a estos procesos. La masa nuclear determina el camino de estos procesos a través de la tabla de isótopos así como la velocidad del proceso y el patrón de abundancia final. Para una correcta descripción de las abundancias isotópicas y del camino a través del cual se crean estos elementos es necesario conocer la masa de los núcleos involucrados con una gran precisión, sin embargo, desafortunadamente la mayoría de estos núcleos no están al alcance de los laboratorios actuales [3, 7]. Los picos de abundancia mostrados en la figura 1.1 para  $A=130$  y  $A=195$  son producidos a través de este proceso principalmente, con lo cual se podría deducir que el proceso  $r$  atraviesa las líneas con número de neutrones  $N=82$  y  $N=126$  en núcleos con masa alrededor de  $A=130$  y  $A=195$  respectivamente, sin embargo estos núcleos son muy inestables. El núcleo con  $A=130$  y  $N=82$  es  $^{130}\text{Cd}$  cuya vida media es aproximadamente 162 milisegundos, mientras que aquel con  $A=195$  y  $N=126$  es  $^{195}\text{Tm}$  y nunca ha sido detectado en el laboratorio [4]. Esto es un ejemplo de lo difícil que es obtener información de los núcleos que están involucrados en estos procesos debido a que la mayoría de estos es imposible producirlos en los laboratorios actuales.

Debido a la falta de datos experimentales en la región de isótopos involucrados en los procesos rápidos de captura de neutrones es necesario utilizar predicciones teóricas para el valor de las masas nucleares, sin embargo estas predicciones no cuentan con la precisión necesaria [3], en la actualidad las predicciones de los diferentes modelos teóricos difieren por una parte en 10,000. Una precisión mejor por un factor de 100 es necesaria para los cálculos astrofísicos que determinan la abundancia debida a estos procesos. Este hecho es una de las principales motivaciones de este trabajo de investigación.

Otra área para la cual es importante el conocimiento de las masas nucleares es la física de partículas. La diferencia entre las masas del núcleo inicial y final en el decaimiento beta doble determinan la posición precisa del pico de decaimiento, necesario para investigar la existencia de neutrinos de Majorana. Así mismo la determinación de la constante de acoplamiento correspondiente a la componente vectorial de la interacción débil  $G_v$  depende de la energía liberada en los decaimientos beta nucleares  $0^+ \rightarrow 0^+$ , el valor de esta constante de acoplamiento es importante para determinar la unitariedad de la matriz Cabibbo-Kobayashi-Maskawa [3].

Si bien las masas nucleares involucradas en los procesos de física de partículas son conocidas experimentalmente con gran precisión, el conocimiento experimental de la mayoría de las masas nucleares necesarias para la determinación de los caminos de decaimiento en los procesos- $r$  correspondientes a la nucleosíntesis es limitado debido a que estos procesos comienzan en regiones muy lejanas a la línea de estabilidad, la vida media de estos núcleos es muy corta por lo cual es muy difícil desarrollar las técnicas de medición necesarias.

Debido a esta falta de información experimental es necesario desarrollar modelos nucleares que sean capaces de predecir el valor de la masa nuclear para núcleos exóticos. Sin embargo la creación de estos modelos es una tarea sumamente compleja. La mayoría de los modelos existentes tienen un carácter semiempírico ya que ajustan cierta cantidad de parámetros a las masas conocidas con el objetivo de extrapolar los datos a regiones desconocidas.

## 1.2. Masas y energía de amarre

Para un núcleo con número atómico  $A$  y carga  $Z$  la masa atómica está compuesta por la suma de la masa de los elementos que conforman al núcleo menos la energía que tiene el sistema por estar ligado. Las masas atómicas son usualmente tabuladas en términos del exceso de masa definido como

$$\Delta(N, Z) = M(N, Z) - uA, \quad (1.1)$$

donde  $u$  es la unidad de masa atómica definida por  $u = M(^{12}\text{C})/12 = 931.49386\text{MeV}/c^2$ . La fig. 1.2 muestra la posición de las masas nucleares medidas y el error experimental asociado para los núcleos reportados en la compilación de Audi, Wapstra y Thibault del 2003, AME03 [2], donde AME se refiere a "Atomic Mass Evaluation". Existen 2127 núcleos medidos con una precisión de 0.2 MeV o mejor y 101 núcleos medidos con una precisión mayor a 0.2 MeV. Usualmente la cantidad que es medida experimentalmente es la masa atómica, sin embargo a lo largo de esta investigación trabajamos con la masa nuclear, la cual se relaciona con la masa reportada en las compilaciones de la siguiente manera

$$M^{AME}(N, Z) = M(N, Z) + Zm_e - B_{el}(Z) + ZB_{el}(1), \quad (1.2)$$

donde  $m_e$  es la masa del electrón y  $B_{el}(Z)$  es la energía de amarre de los electrones en el átomo. La energía de amarre de los electrones depende claramente del número de electrones  $Z$  y puede ser estimada con la siguiente parametrización [3]

$$B_{el}(Z) = 14.4381Z^{2.39} + 1.55468 \times 10^{-6}Z^{5.35}, \quad (1.3)$$

la cual tiene una desviación cuadrática media sobre todas las masas medidas de 150 eV.

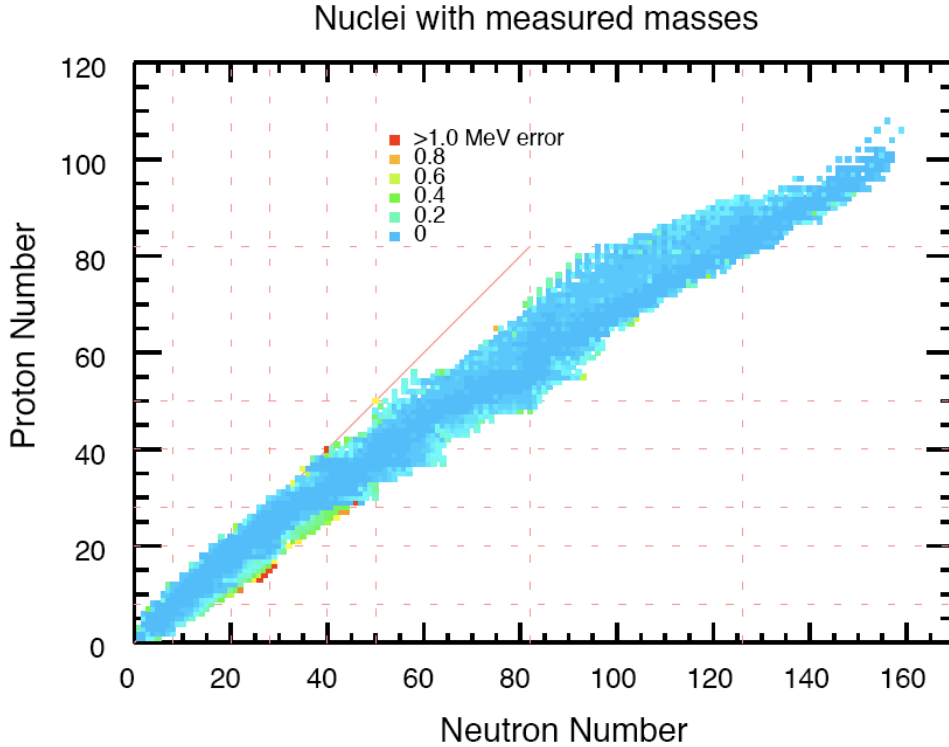


Figura 1.2: Valor experimental de la masa nuclear correspondiente a los núcleos en AME03 [2], 2149 núcleos.



La energía de amarre nuclear está definida como la energía requerida para romper un núcleo en sus partes constituyentes, es decir en  $N$  neutrones y  $Z$  protones. Es la diferencia de energías entre los constituyentes nucleares conformando el núcleo y la energía de éstos en estado libre. En términos de la masa atómica  $M(N, Z)$  la energía de amarre  $BE(N, Z)$  está definida como:

$$BE(N, Z) = ZM_Hc^2 + NM_nc^2 - M(N, Z)c^2, \quad (1.4)$$

donde  $M_H$  es la masa del átomo de hidrógeno y  $M_n$  es la masa del neutrón. En términos del exceso de masa la energía de amarre está dada por:

$$BE(N, Z) = Z\Delta_Hc^2 + N\Delta_nc^2 - \Delta(N, Z)c^2, \quad (1.5)$$

donde  $\Delta_Hc^2 = 7.2890\text{MeV}$  y  $\Delta_nc^2 = 8.0713\text{MeV}$ .

Estamos interesados en entender el comportamiento de la energía de amarre como función de  $N$  y  $Z$ . La energía de amarre total es mostrada en la figura 1.3 como función del número total de nucleones  $A$ . Se puede observar un incremento lineal con  $A$  llegando a un valor máximo cercano a  $2\text{GeV}$  para los núcleos más pesados. Es posible obtener más información de la manera en la que varía la energía de amarre a lo largo de la tabla de isótopos graficando  $BE/A$  con respecto a  $A$ , fig 1.4a, y con respecto a  $N$  y  $Z$ , fig 1.4b. La figura 1.5 muestra un acercamiento de los valores experimentales de  $BE/A$  para los núcleos ligeros, tomando los núcleos más estables de cada isóbaro. Las propiedades globales de este conjunto de datos así como las desviaciones del promedio son descritas por medio de modelos de estructura nuclear.

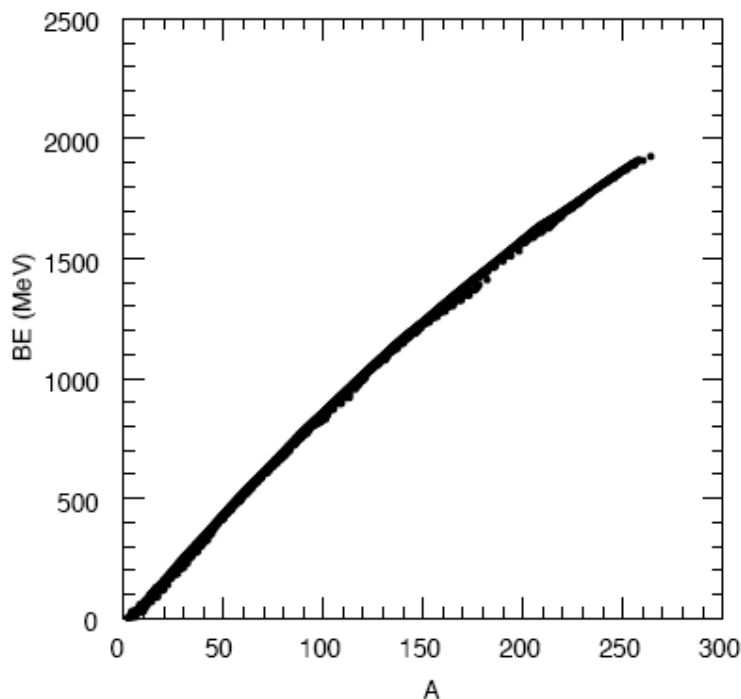


Figura 1.3: Energía de amarre como función de  $A$  para los núcleos conocidos experimentalmente y reportados en la compilación de masas AME03 [2].

La energía de amarre por nucleón tiene un máximo en el núcleo  $^{58}\text{Ni}$ . Este núcleo representa el sistema más ligado compuesto de nucleones, es decir, el sistema con menor energía. Por lo tanto la fusión de dos núcleos ligeros con una masa combinada  $A < 58$  libera energía. Es importante entender los procesos

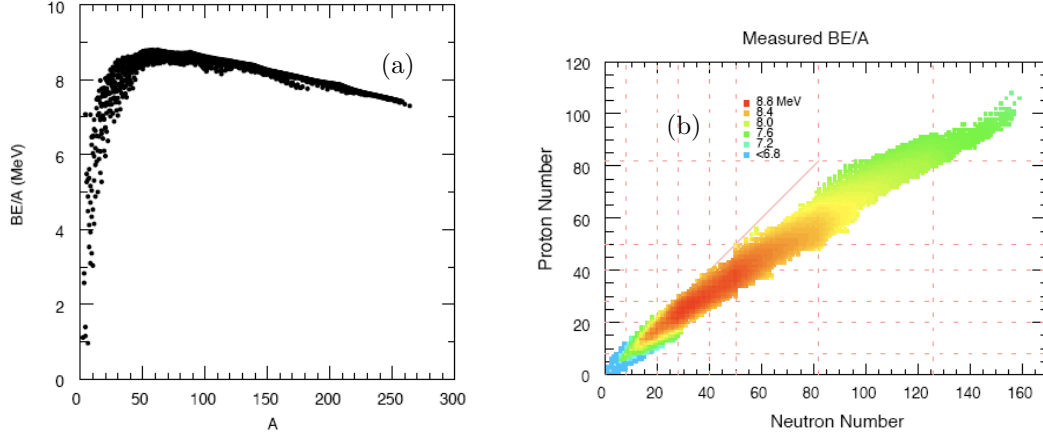


Figura 1.4: Energía de amarre por nucleón,  $BE/A$ , como función de: (a) el número de nucleones y (b) el número de neutrones y protones para los núcleos conocidos experimentalmente y reportados en la compilación de masas AME03 [2].

de fusión para describir la creación de elementos con  $A < 58$  en los medios interestelares. La caída en la energía de amarre por nucleón para  $A > 58$  implica que la mayoría de estos núcleos pueden decaer espontáneamente en núcleos más ligeros. Los más comunes de estos procesos son el decaimiento alfa, donde una partícula alfa o  ${}^4\text{He}$  es emitida, y la fisión, donde el núcleo se parte en fragmentos más ligeros. Los productos de la fisión usualmente son acompañados de neutrones.

La energía de amarre representa la suma de todas las interacciones nucleónicas que dan pie a las correlaciones de muchos cuerpos, por lo cual está íntimamente relacionada con la estructura nuclear. A partir de la sistemática en la superficie formada por las masas y las energías de amarre en el espacio  $(N,Z)$  es posible obtener información acerca de la estructura de los núcleos, de la estructura de capas, de la deformación de los núcleos, de las interacciones residuales y de comportamientos colectivos.

La energía necesaria para separar el núcleo en dos fragmentos se obtiene con la diferencia entre la energía de amarre del núcleo en cuestión y la energía de amarre del núcleo residual después de la separación, a esta cantidad de energía se le llama energía de separación. Sin duda alguna, las más importantes son la energía de separación de una y dos partículas, protones o neutrones. Estas cantidades son importantes debido a que muestran de una manera muy clara efectos de estructura nuclear como por ejemplo efectos de capa y transiciones de fase. En el caso de la separación de neutrones están definidas como

$$S_n = BE(N, Z) - BE(N - 1, Z), \quad (1.6)$$

$$S_{2n} = BE(N, Z) - BE(N - 2, Z), \quad (1.7)$$

y para el caso en el cual se separan protones protones las energías de separación se definen como

$$S_p = BE(N, Z) - BE(N, Z - 1), \quad (1.8)$$

$$S_{2p} = BE(N, Z) - BE(N, Z - 2), \quad (1.9)$$

La frontera entre valores positivos y negativos de  $S$  define la línea de goteo. Los núcleos que están entre las líneas de goteo son estables con respecto a la emisión de nucleones, mientras que aquellos que se encuentran fuera de las líneas de goteo pueden decaer espontáneamente emitiendo uno o dos nucleones,

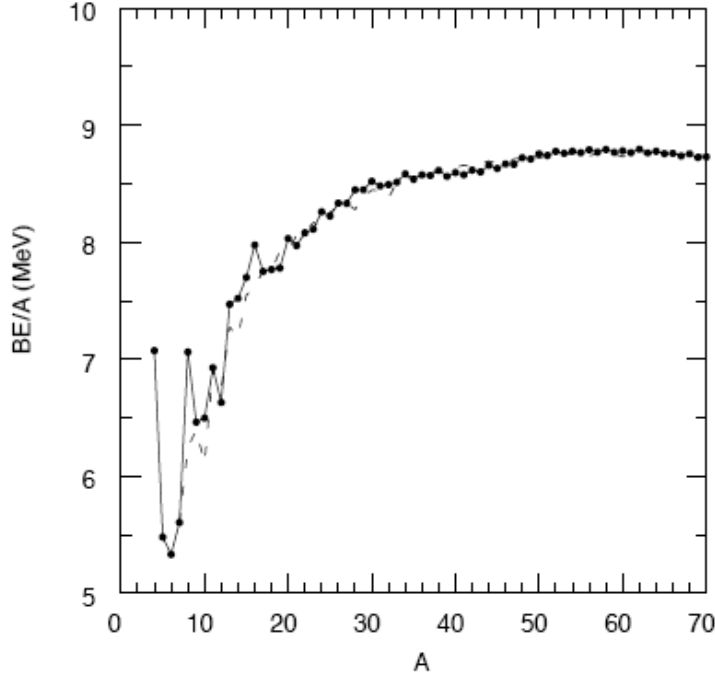


Figura 1.5: Acercamiento de los valores experimentales de la energía de amarre por nucleón  $BE/A$  en la región de los núcleos ligeros. El modelo de la gota se muestra con una línea punteada.

lo cual los imposibilita a existir ya que los últimos nucleones de valencia no se encuentran ligados en estos sistemas. La figura 1.6 muestra la posición de las líneas de goteo predichas mediante un cálculo usando Hartree-Fock [8], en azul se muestran aquellos núcleos para los cuales se conoce la masa experimentalmente y ha sido reportada en la compilación AME03 [2]. Dentro de las líneas de goteo se encuentran aproximadamente 9000 núcleos de los cuales conocemos aproximadamente 2000 (en azul), es decir, existen cerca de 7000 núcleos (en amarillo) de los cuales no tenemos información experimental todavía. Las propiedades de muchos de estos núcleos sin observar son sumamente importantes, como ya se mencionó anteriormente, para la comprensión de los modelos nucleares así como para la descripción de algunos procesos astrofísicos de creación de elementos.

La figura 1.7 muestra las energías de separación de 2 neutrones calculadas a partir de las masas experimentales conocidas, para las regiones cercanas a los números mágicos  $N=50$  y  $N=82$ . Se puede apreciar como la energía necesaria para desprender un par de neutrones es menor conforme el número de neutrones crece, este comportamiento es suave, sin embargo justo en los números mágicos existe una caída súbita en este valor, después de la cual la sistemática promedio continúa. Esta caída abrupta es debido a que aquellos núcleos que se encuentran en los números mágicos son más estables que los núcleos de su alrededor debido a la configuración de capa cerrada en la que se encuentran los nucleones que lo constituyen, por lo cual, arrancar un par de neutrones de estos núcleos requiere mucho más energía que arrancarlo de los núcleos con configuraciones vecinas. Estas desviaciones del comportamiento promedio debido a los efectos de capa son los fenómenos más visibles en la sistemática de las energías de separación, sin embargo no es el único rastro de estructura nuclear que podemos encontrar en estas superficies, la figura 1.7a muestra para la región entre  $N=57$  y  $N=62$ , en la parte baja, desviaciones del comportamiento promedio, debidas principalmente a cambios y transiciones entre la forma del núcleo, la figura 1.7b muestra estructuras similares alrededor de  $N=90$ . La existencia de más números mágicos en las regiones con  $N$  y  $Z$  donde aún no se ha medido experimentalmente así como la permanencia de los ya existentes en la región rica en neutrones son problemas abiertos que motivan al avance en las mediciones experimentales para regiones cada vez más lejanas a la línea de estabilidad así como la mejora de los modelos teóricos.

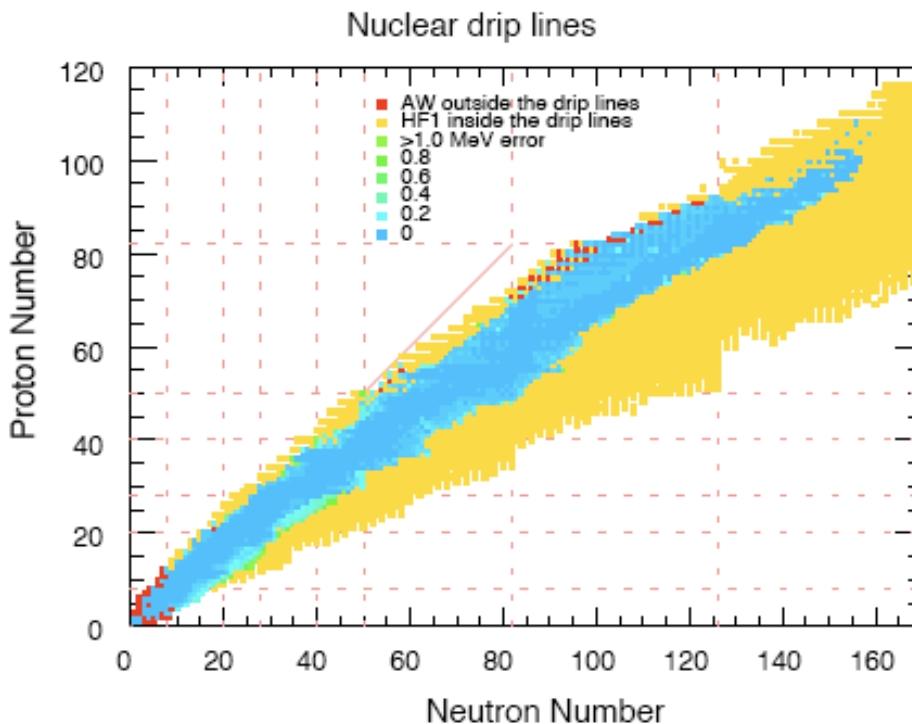


Figura 1.6: Tabla de isótopos mostrando aquellos núcleos en el interior de las líneas de goteo, la región azul indica los núcleos reportados en AME03.

### 1.3. Técnicas experimentales de medición de la masa nuclear

Las dificultades técnicas para estudiar experimentalmente las regiones lejanas al valle de estabilidad son muchas, el principal de estos problemas al realizar experimentos con núcleos exóticos es producirlos. La mayoría de estos núcleos tienen vidas medias muy pequeñas, por lo cual se producen en muy pequeñas cantidades, las técnicas experimentales utilizadas requieren gran precisión y sensibilidad, el mayor esfuerzo se realiza al identificar y eliminar errores sistemáticos que surgen debido a que la mayoría de las mediciones actuales son en términos de valores de masa conocidos previamente. La precisión requerida en el valor de la masa nuclear depende de la física que se esté investigando.

La masa de un núcleo puede ser determinada experimentalmente de muchas maneras diferentes, debido a esto se realiza un gran esfuerzo en recopilar y evaluar la información de manera sistemática. La “evaluación de masas atómicas” [9, 2] (AME por sus siglas en inglés) además de recopilar toda la información disponible acerca de las mediciones de masas, concilia las diferencias entre estas mediciones, y se asegura de que cada una de las mediciones que aparecen en la compilación sea compatible con la información obtenida previamente, es decir, con las masas ya conocidas. La principal razón para esto es que las mediciones de masas nucleares rara vez son mediciones absolutas, casi siempre están relacionadas ya sea directa o indirectamente con masas de referencia conocidas de manera previa. La compilación de masas funciona como una red coordinada, que es capaz de decir como se ve afectado el conjunto de masas conocidas por una medición nueva.

Las técnicas de medición pueden catalogarse en mediciones “indirectas” a través de reacciones y decaimientos y mediciones “directas” a través de diferencias entre masas [3].

Las mediciones indirectas por medio de reacciones se llevan a cabo al producir una reacción del tipo  $A(a,b)B$  donde las masas de A, a y b son conocidas. La masa del núcleo B es obtenida mediante la medición del valor Q de la reacción. La cinemática de la masa desconocida es determinada por medio de

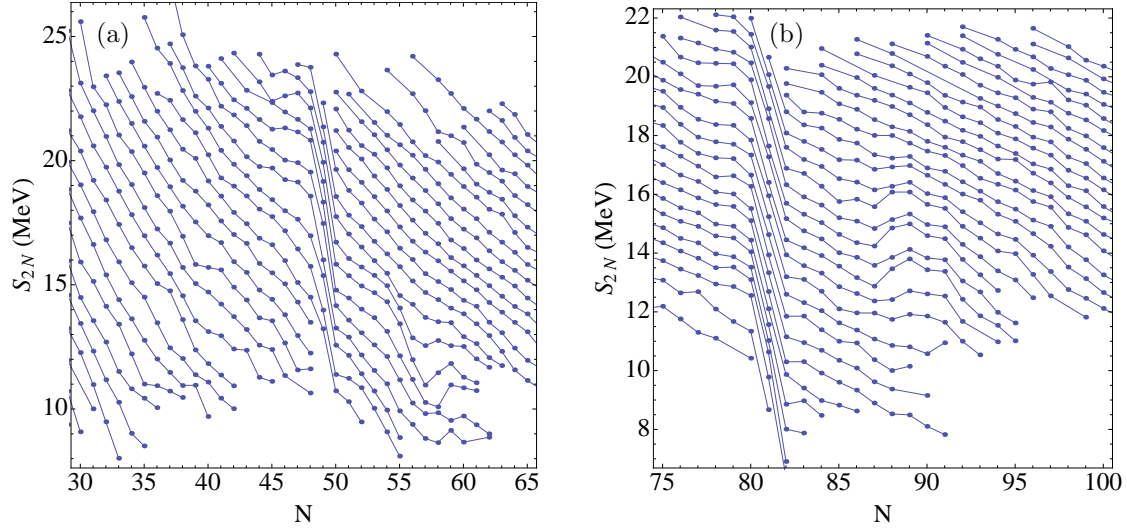


Figura 1.7: Energía de separación de dos neutrones en las regiones (a)  $N \approx 30 - 65$  y (b)  $N \approx 75 - 100$ . Las líneas unen núcleos con el mismo número de protones.

un espectrómetro de masas. Esta técnica sufre de limitaciones muy serias en la sensibilidad ya que cubrir un ángulo sólido suficiente para determinar los valores  $Q$  con detectores de partículas es muy difícil. Por otro lado, las mediciones indirectas basadas en decaimientos utilizan el valor  $Q$  del proceso para obtener la diferencia de masa entre el núcleo “padre” y el núcleo “hijo”, sin embargo para obtener un valor de masa, estas diferencias tienen que ser conectadas con una masa de referencia conocida, la cual puede en ocasiones estar lo suficientemente lejos como para inducir un error acumulativo, además de esto es posible que no todos los canales de decaimiento se conozcan, lo cual puede producir ambigüedades y errores. Usualmente se utilizan el decaimiento beta así como el decaimiento alfa, ambos son una manera muy precisa de obtener el valor de la masa nuclear en regiones lejanas a la estabilidad, el decaimiento alfa es mejor debido a que la energía del decaimiento no se comparte con un neutrino, como en el caso del decaimiento beta, lo cual asegura que el proceso inicie y termine en el estado base a veces a través de una serie de decaimientos  $\gamma$ .

Las técnicas de medición directa se basan en medir el tiempo de vuelo o la frecuencia. Se producen núcleos exóticos por medio de fragmentación, después de esto los fragmentos son seleccionados y transportados a un espectrómetro [10], donde se deduce la masa de la relación

$$B\rho = \frac{\gamma m v}{q}, \quad (1.10)$$

en la cual  $B\rho$  es la rigidez magnética de una partícula en reposo de masa  $m$ , carga  $q$  y velocidad  $v$ . Al determinar con gran precisión la rigidez magnética y la velocidad del ion por medio del tiempo de vuelo, es posible determinar la masa. Esta técnica se encuentra restringida a mediciones de núcleos con  $A \leq 70$ . La resolución de dicha medida está limitada al tiempo total de vuelo, por lo cual si el tiempo total de vuelo es extendido de alguna manera la resolución de la medición se incrementa. Esto puede conseguirse por medio de un ciclotrón [11], el cual ofrece excelentes condiciones para acumular tiempo de vuelo, el ciclotrón acelera iones con cociente carga-masa diferente de acuerdo a la relación

$$\frac{\delta(m/q)}{m/q} = \frac{\delta t}{t}. \quad (1.11)$$

Estas diferencias de tiempo entre iones son medidas y a partir de ellas se puede obtener la masa. Alternativamente se puede utilizar un anillo de almacenamiento donde la frecuencia de revolución está determinada por la velocidad del ion dividida por la circunferencia, la cual dependerá de las propiedades del anillo, debido a esto es necesario minimizar el área del haz ya que es una posible fuente de incertidumbre, así mismo es deseable tener la mayor cantidad de iones de diferente clase almacenados en el anillo [12].

La diferencia relativa en la frecuencia de revolución depende de dos componentes la diferencia en los radios carga-masa y la diferencia en las velocidades

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{\gamma_T^2} \frac{\Delta(m/q)}{m/q} + \left(1 - \frac{\gamma^2}{\gamma_T^2}\right) \frac{\Delta v}{v}, \quad (1.12)$$

donde  $\gamma$  es el factor de Lorentz y  $\gamma_T$  es el llamado punto de transición y es determinado utilizando valores de masa conocidos. El objetivo es hacer esta relación independiente de la velocidad, es decir, eliminar el segundo término. Esto se lleva a cabo de 2 maneras diferentes: 1) Minimizando la dispersión en velocidad,  $\Delta v$ , a través de enfriamiento por medio de un haz de electrones que se hace viajar con el haz de iones y el cual disminuye la velocidad de éste debido a la fuerza de Coulomb entre los electrones y la carga positiva de los iones. Sin embargo este método necesita de algunos segundos para enfriar el haz de iones lo cual limita la medición a núcleos con vidas medias de ese orden. A pesar de las desventajas, gran cantidad de masas nucleares lejanas a la zona de estabilidad han sido medidas. 2) Una manera alternativa de minimizar el segundo término y evitar el proceso de enfriamiento es operar el anillo en modo isócrono, donde  $\gamma_T = \gamma$ .

Utilizando la técnica de separación de isótopos en línea, (ISOL por sus siglas en inglés), se pueden producir haces de iones exóticos de una gran calidad y con una energía muy baja. Estos haces son utilizados en espectrómetros que utilizan trampas de Penning, estas trampas ofrecen la posibilidad de almacenar iones por largos periodos de tiempo, esencialmente en reposo y en un ambiente libre de perturbaciones, con lo cual se logran medidas de masa nuclear de una precisión impresionante. La trampa de Penning consiste de un campo eléctrico cuadrupolar producido por electrodos colocados en el eje de un campo magnético estático. El campo magnético confina a los iones radialmente mientras que el campo eléctrico los confina longitudinalmente para poder almacenar los iones en esta trampa. La determinación de la masa en una trampa de Penning esta basada en la frecuencia de ciclotrón,  $v_c = qB/(2\pi m)$ , de los iones almacenados. Al determinar las frecuencias principales del movimiento del ion dentro de la trampa debido a los campos que lo confinan y relacionarlas con la frecuencia de ciclotrón permite determinar la masa del ion atrapado.

Un esfuerzo increíble utilizando las técnicas descritas anteriormente se lleva a cabo para extender la frontera de las masas conocidas experimentalmente, la figura 1.8 muestra la distribución a lo largo de la tabla de isótopos de las masas nucleares medidas a partir de 1994 alrededor del mundo. Existe una gran cantidad de programas alrededor del mundo que tienen como objetivo la medición de masas nucleares, CPT en Canadá, GANIL en Francia, GSI en Alemania, Jyvaskyla en Finlandia, ISOLDE en el CERN, Suiza, RIKEN en Japón, TRIUMF en Canadá, ANL y MSU en Estados Unidos, SMILETRAP en Suecia. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, estos esfuerzos no son suficientes y existen algunas aplicaciones que requieren el conocimiento de masas nucleares en regiones muy alejadas a la región accesible experimentalmente en la actualidad. Para compensar esta deficiencia y generar estos valores se utilizan modelos teóricos, el siguiente capítulo menciona algunos de los principales.

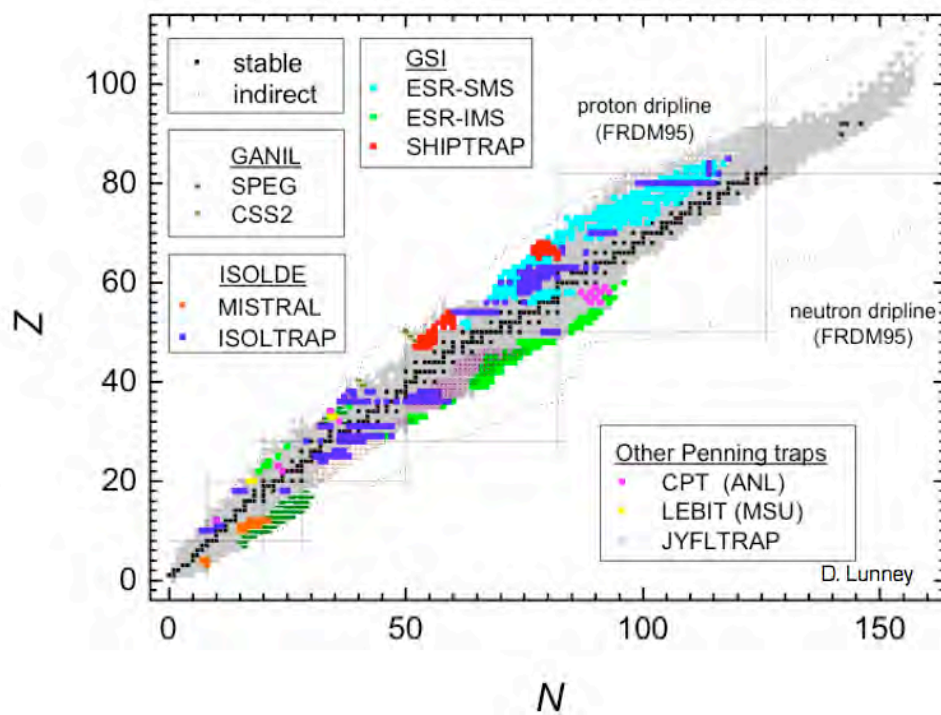


Figura 1.8: Tabla de isótopos mostrando las mediciones experimentales realizadas por los diferentes programas de medición de masas alrededor del mundo.





## Capítulo 2

# Modelos teóricos de masas nucleares

La información experimental que tenemos acerca de las masas nucleares no es suficiente, para la mayoría de las aplicaciones mencionadas anteriormente es necesario el conocimiento de la masa de núcleos con un gran exceso de neutrones, los cuales se encuentran en una región muy lejana a la línea de estabilidad y por lo tanto tienen una vida media muy corta. Si bien los esfuerzos experimentales son enormes, la mayoría de estos núcleos no serán medidos en los próximos años, debido a esto son necesarios modelos de masas nucleares que sean capaces de extrapolar a la zona desconocida con una gran precisión. En esta sección se presentan en términos generales los modelos más importantes desarrollados hasta la fecha, es importante mencionar que los modelos aquí presentados no son los únicos existentes, sin embargo en conjunto son representativos de las técnicas utilizadas en la predicción de la masa nuclear. [3]

La mayoría de los modelos actuales para predecir masas nucleares son de tipo semiempírico, de alguna u otra manera son fórmulas o algoritmos que contienen parámetros, los cuales son ajustados a las masas conocidas y permiten extrapolar esta información a las regiones desconocidas. Podemos hacer una separación entre métodos “globales” que consideran toda la información de las masas conocidas e intentan tener un rango de validez global a lo largo de la tabla de isótopos y aproximaciones locales que consideran la información de las masas conocidas únicamente en la región cercana a la masa a predecir, estos se basan esencialmente en el hecho de que el valor de la masa no cambia drásticamente de un núcleo a otro, es decir, en la suavidad de la superficie generada en el plano  $(N,Z)$  con los valores de las masas.

### 2.1. El modelo de la gota

Los núcleos están ligados debido a la interacción fuerte que existe entre los nucleones. Esta interacción es atractiva, de corto alcance, ocurre esencialmente entre los nucleones vecinos y es debida al intercambio de mesones. Una de las principales características de la interacción nuclear es que se satura, lo cual da lugar a una densidad de nucleones casi constante en el interior del núcleo y a un radio de superficie de aproximadamente  $1.2A^{1/3}$ . Al hacer una analogía de la situación anterior con una gota de líquido incompresible, cargada y esférica, surge el modelo de la gota introducido por Weizsacker[13] y por Bethe y Bacher [14], en el cual la energía de amarre es expresada de la siguiente manera

$$BE(N, Z) = \alpha_1 A - \alpha_2 A^{2/3} - \alpha_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - \alpha_4 \frac{(N-Z)^2}{A}. \quad (2.1)$$

El primer término representa la atracción entre nucleones vecinos y es llamado término de volumen. Debido a que la densidad de la gota se considera constante, todos los nucleones interactúan con el mismo número de vecinos, excepto aquellos que están en la superficie, este efecto es considerado por el segundo término que es una corrección debida al hecho de que los nucleones de la superficie solamente interactúan con aquellos nucleones que se encuentran en el interior, a este término se le llama de superficie, es análogo a la tensión superficial en una gota de líquido y es proporcional al área de la gota. El tercer término es debido a la interacción repulsiva electromagnética entre los protones, es conocido

como término de Coulomb y asume que la carga está distribuida uniformemente con un radio nuclear dado por  $R = r_0 A^{1/3}$ . El cuarto término es llamado de simetría y es debido a que protones y neutrones ocupan “pozos de potencial” distintos cuyos niveles de Fermi deben ser iguales en los núcleos estables.

La formula 2.1 permite extrapolar al caso de la materia nuclear infinita al tomar el limite  $A \rightarrow \infty$  así como “apagando” el término debido a la interacción electromagnetica, con lo cual la energía por nucleón resultante es

$$\frac{BE(N, Z)}{A} = \alpha_1 - \alpha_4 \frac{(N - Z)^2}{A^2}. \quad (2.2)$$

la cual puede escribirse en términos de la densidad nuclear como

$$\frac{BE(N, Z)}{A} = \alpha_1 - \alpha_4 \frac{(\rho_n - \rho_p)^2}{\rho^2}. \quad (2.3)$$

donde  $\rho_n$  y  $\rho_p$  son las densidades de neutrones y de protones respectivamente y  $\rho = \rho_n + \rho_p$  es la densidad nuclear total de tal manera que  $\alpha_1$  representa la energía por nucleón de la materia nuclear infinita con simetría de carga. Si consideramos que la formula 2.1 se refiere a la energía de amarre en el estado base, entonces podemos definir para el caso de materia nuclear infinita una densidad de equilibrio  $\rho_0 = (3/4\pi)r_0^{-3}$  en términos de la constante  $r_0$  que podemos relacionar con el radio nuclear R. Si bien  $\alpha_1$ ,  $\alpha_4$  y  $r_0$  son parámetros del modelo de la gota, también pueden ser relacionados con los modelos de materia nuclear infinita.

Valores típicos para las constantes de este modelo los cuales reproducen el comportamiento promedio de los datos experimentales son los siguientes  $\alpha_1 = 15.49$  MeV,  $\alpha_2 = 17.23$  MeV,  $\alpha_3 = 0.697$  MeV y  $\alpha_4 = 22.6$  MeV. La figura 2.1 muestra el efecto de cada uno de estos términos en la energía de amarre por nucleón. La parte (A) muestra el término de volumen como únicamente un promedio, al incluir el término de superficie, parte (B), se observa como aquellos núcleos con mayor número de partículas se vuelven más ligados debido a que tienen más superficie, por último, con la inclusión del término de Coulomb (C) y del término de simetría, la energía de amarre por nucleón refleja un comportamiento global muy parecido al mostrado por los datos experimentales, figura 1.4a.

El término de simetría determina la manera en que la energía de amarre disminuye conforme nos alejamos de la estabilidad. Para observar el efecto de este término podemos analizar una cadena de isóbaros como función de  $Z$ . En la figura 2.2 se muestran los valores experimentales de  $BE(N, Z)$  vs  $Z$  para  $A = 100$ . La energía de amarre tiene un máximo en  $Z_{max} = 44$ . Sin la interacción Coulombiana entre protones, el máximo debería ocurrir en  $N = Z$  debido al término de simetría. Cuando agregamos la interacción Coulombiana, el máximo es desplazado hacia la región más rica en neutrones.

Existen gran cantidad de intentos por mejorar el modelo de la gota, la mayoría de estas gotas mejoradas se basan en la inclusión de correcciones o términos provenientes de consideraciones microscópicas. Por ejemplo, la figura 2.2 muestra una oscilación en los valores experimentales la cual no está presente en ninguno de los cuatro términos de la ecuación 2.1. Esta oscilación es debida a que la interacción entre los nucleones favorece el acoplamiento de éstos en pares de momento angular 0 y preferentemente de la misma especie, por lo cual núcleos con número par de neutrones o de protones están más ligados que sus vecinos con número impar de protones o neutrones, a este efecto se le conoce como apareamiento. Así mismo, el modelo de la gota se puede mejorar separando el término de simetría en una componente volumétrica y otra de superficie, tomando en cuenta el hecho de que la superficie de los núcleos muy ricos en neutrones esta prácticamente constituida por neutrones [15, 16, 17]. Otra contribución que se puede incorporar al modelo de la gota es el llamado término de Wigner el cual toma en cuenta el hecho de que núcleos con  $N=Z$  tienen una energía de amarre extra con respecto a los demás [18]

La parametrización de la gota incluyendo estas correcciones tiene la siguiente forma [19]:

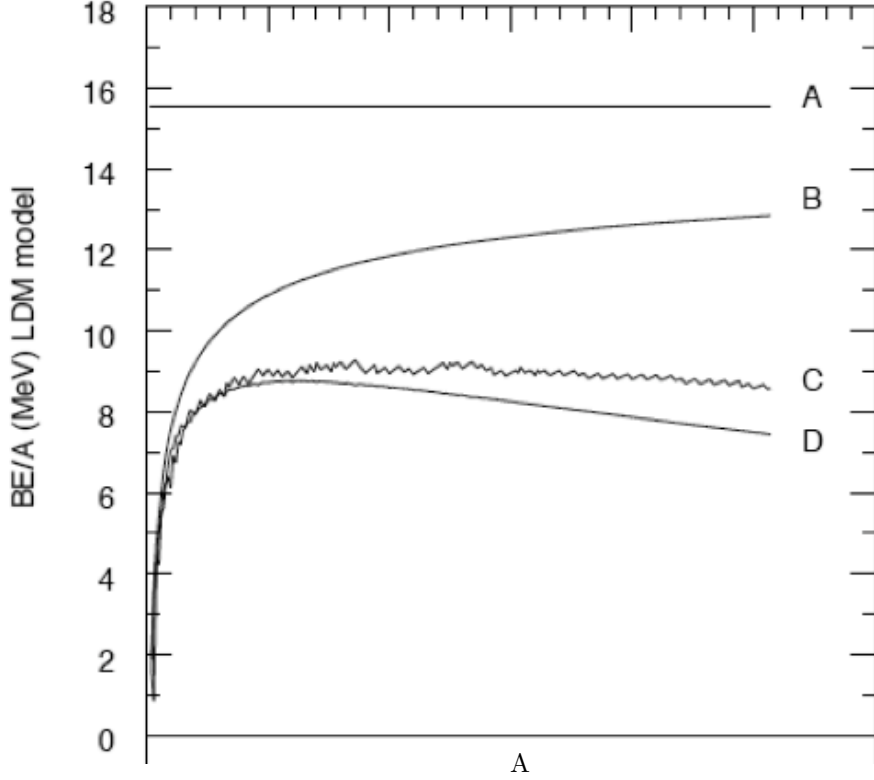


Figura 2.1:  $BE/A$  de acuerdo al modelo de la gota (curva D), el término de volumen (A), el término de volumen más el de superficie (B), el término de volumen más el de superficie más el de Coulomb (C).

$$BE(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + a_p \frac{\delta(N, Z)}{A^{1/2}} - \frac{a_{vs}}{1 + \frac{a_{vs}}{a_{ss}} A^{-1/3}} \frac{4T(T+r)}{A}, \quad (2.4)$$

con  $T = \text{Abs}[N - Z]/2$ ,  $\delta(N, Z) = 1$  si se trata de un núcleo con  $N$  y  $Z$  par,  $\delta(N, Z) = -1$  con  $N$  y  $Z$  impar y 0 en cualquier otro caso.

El valor óptimo de los parámetros se muestra en la tabla 2.1 y se obtiene minimizando la desviación cuadrática media (rms)

$$\sigma^2 = \frac{1}{N_{nucl}} \sum_{i=1}^{N_{nucl}} (M_i - M_i^{exp})^2 \quad (2.5)$$

donde  $M_i$  son las masas nucleares predichas por el modelo y  $M_i^{exp}$  las medidas experimentalmente. El rms de este modelo es de  $\sigma = 2.4$  MeV, valor que es impresionante si lo comparamos con el valor de la energía de amarre para los núcleos más pesados que es del orden de 2 GeV. El modelo de la gota describe de manera correcta el comportamiento promedio de las energías de amarre, sin embargo la mayoría de las áreas de la física para las cuales es esencial el conocimiento de masas nucleares necesitan de una mayor precisión.

El interés principal de esta investigación radica en comprender la sistemática de las desviaciones entre los valores experimentales de la energía de amarre y los valores obtenidos con los diferentes modelos teóricos. Las figuras 2.3 y 2.4 muestran la diferencia entre el valor experimental de la energía de amarre y el modelo de la gota como función de  $N$  y de  $Z$  respectivamente, comenzando en  $N = 8$  y  $Z = 8$  para los núcleos que se encuentran reportados en la compilación AME03. En estas gráficas observamos que

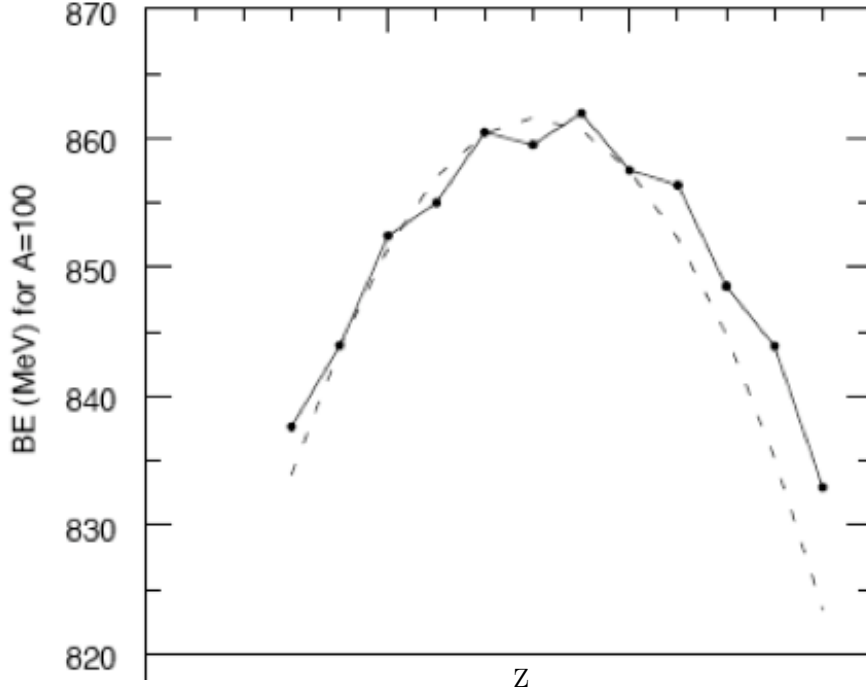


Figura 2.2: Valores experimentales de la energía de amarre  $BE$ , para  $A = 100$  como función de  $Z$ . El modelo de la gota se muestra con una línea punteada.

Tabla 2.1: Valor de los parámetros utilizados en el modelo de la gota.

$a_v$	$a_s$	$a_c$	$a_{vs}$	$a_{ss}$	$a_p$	$r$
15.425	16.995	0.685	49.956	6.2391	11.59	2.3893

los núcleos con  $Z$  o  $N = 28, 50, 82$  y  $126$  están más ligados que el promedio. Estos son los números mágicos del modelo de capas nucleares, los cuales indican configuraciones de capa cerrada. Por otro lado se observan regiones que están menos ligadas que el promedio, estos efectos son en su mayoría debidos a la deformación de los núcleos, muestran un déficit en la energía de amarre debido a que el modelo considera una gota esférica la cual tiene mayor energía de amarre que gotas deformadas. En la figura 2.5 se observan estas diferencias en dos dimensiones en el plano  $(N, Z)$ . Podemos apreciar con mayor detalle los efectos debidos al comportamiento microscópico en las regiones cercanas a los números mágicos, así como los efectos debidos a la deformación.

Al observar con cuidado las desviaciones de la figura 2.5 podemos apreciar un patrón cuasi periódico [20, 21]. Observamos claramente que las desviaciones del modelo con respecto a los datos experimentales son desviaciones sistemáticas, el error está correlacionado y aparece en grandes regiones, estos errores conforman una superficie suave a lo largo de el plano  $(N, Z)$ . La sistemática presentada se repite a través de toda la tabla de isótopos, es decir el patrón que se observa es repetitivo y cuasiperiódico, siguiendo un cambio de escala muy parecido al cambio en los números mágicos. Nuestro objetivo es aprovechar este patrón y sus regularidades para predecir valores de masa nuclear desconocidos.

## 2.2. Correcciones microscópicas al modelo de la gota

Las desviaciones mostradas en la figura 2.5 tienen un comportamiento sistemático, especialmente aquellas producidas por los efectos de las cerraduras de capa. Estos efectos mostrados en la figura como

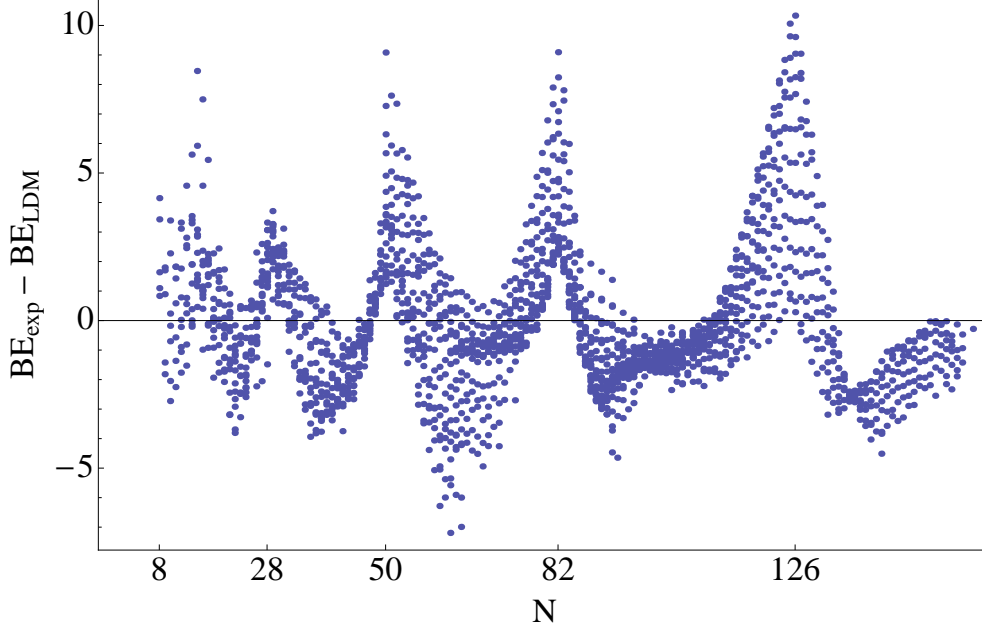


Figura 2.3: Diferencias entre los valores experimentales de la energía de amarre y aquellos generados con el modelo de la gota, eq. 2.4, para los núcleos contenidos en la compilación AME03 con respecto al número de neutrones  $N$ .

regiones rojas con formas romboides rodeando los números mágicos así como el efecto promedio de la deformación, mostrada como zonas verdes entre los números mágicos, pueden ser parametrizados con la inclusión de correcciones esquemáticas por medio de un par de términos en la fórmula empírica del modelo de la gota [22]. Estos efectos son debido a fenómenos microscópicos en el interior del núcleo, la estructura de capas.

Las configuraciones de partículas con número igual a alguno de los números mágicos son especialmente estables. El modelo de capas considera como aproximación que los nucleones forman un “carozo” estable que es muy difícil de perturbar y que está conformado por un número de partículas igual a alguno de los números mágicos, los nucleones que quedan fuera de este “carozo” son considerados como las únicas partículas excitables, es decir, partículas de valencia. Así, por ejemplo el núcleo  ${}_{84}^{211}\text{Po}_{127}$  cuenta con 84 protones y 127 neutrones, de los cuales 82 protones y 126 neutrones forman el “centro” y los tres nucleones restantes son partículas de valencia.

Las correcciones microscópicas incluidas al modelo de la gota son términos lineales y cuadráticos en el número de neutrones de valencia  $n_\nu$  y en el número de protones de valencia  $n_\pi$  sean partículas o agujeros, contados a partir de la cerradura de capa mas cercana y tienen la siguiente forma [22]

$$BE_{\text{LDMM}}(N, Z) \equiv BE_{\text{LDM}}(N, Z) - a_f F_{\text{max}} + a_{\text{ff}} FF_{\text{max}} + a_{\text{const}}, \quad (2.6)$$

donde  $BE_{\text{LDM}}$  es la energía de amarre obtenida en el modelo de la gota descrito anteriormente (eq. 2.4) y donde  $F_{\text{max}}$  y  $FF_{\text{max}}$  tienen la siguiente forma [22]

$$\begin{aligned} F_{\text{max}} &= \frac{n_\nu + n_\pi}{2} - \left\langle \frac{n_\nu + n_\pi}{2} \right\rangle, \\ FF_{\text{max}} &= \left( \frac{n_\nu + n_\pi}{2} \right)^2 - \left\langle \left( \frac{n_\nu + n_\pi}{2} \right)^2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.7)$$

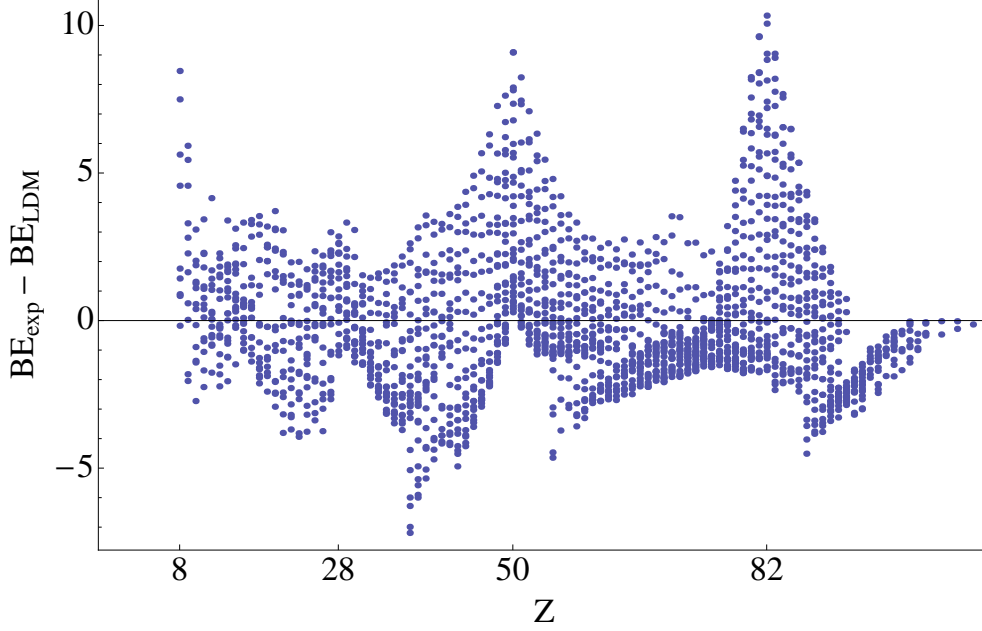


Figura 2.4: Diferencias entre los valores experimentales de la energía de amarre y aquellos generados con el modelo de la gota, eq. 2.4, para los núcleos contenidos en la compilación AME03 con respecto al número de protones  $Z$ .

las cantidades en brackets son valores promedio que se agregan para asegurarse que la contribución de este par de términos tenga promedio nulo, estos promedios están definidos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{n_\nu + n_\pi}{2} \right\rangle &= \frac{\langle n_\nu \rangle + \langle n_\pi \rangle}{2}, \\ \left\langle \left( \frac{n_\nu + n_\pi}{2} \right)^2 \right\rangle &= \frac{\langle n_\nu^2 \rangle + \langle n_\pi^2 \rangle + 2\langle n_\nu \rangle \langle n_\pi \rangle}{4}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde

$$\begin{aligned} \langle n_\nu \rangle = \langle n_\pi \rangle &= \frac{\eta_c}{2}, \\ \langle n_\nu^2 \rangle = \langle n_\pi^2 \rangle &= \frac{2\eta_c^2 + 1}{6} \end{aligned} \quad (2.9)$$

con  $\eta_c$  siendo la semi-degeneración de la capa la cual se define como la diferencia entre la cerradura de capa siguiente y la anterior al núcleo en cuestión, con respecto a neutrones y protones  $\eta_c = (N_{c+1} - N_c)/2$ .

Los parámetros  $a_{const}$ ,  $a_f$  y  $a_{ff}$  son encontrados ajustando las masas experimentales. Los valores óptimos para estos parámetros son  $a_f = 1.3349$ ,  $a_{ff} = 0.0469$  y  $a_{const} = -0.2759$ . Estos términos son muy similares a la exitosa parametrización propuesta por Casten [1]. La inclusión de estos términos reduce la desviación cuadrática media (rms) a  $\sigma = 1.3361$  MeV. La figura 2.6 muestra el error de este modelo para cada núcleo, podemos observar como prácticamente el patrón regular formado con las diferencias entre el modelo de la gota (LDM) y los valores experimentales ha desaparecido casi por completo, sin embargo el error que se obtiene, a pesar de ser más pequeño, aun está correlacionado y presenta patrones sistemáticos. Ciertamente la regularidad de estos patrones ya no es evidente a simple vista, sin embargo es posible que estas regularidades existan e incluso puedan ser aprovechadas.

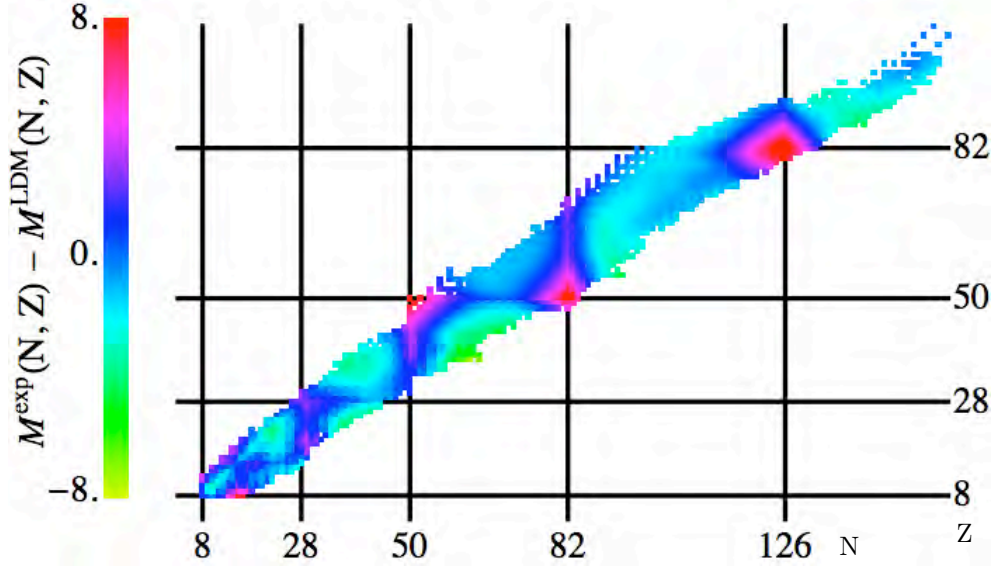


Figura 2.5: Diferencias entre los valores de la energía de amarre obtenidos a partir de las masas nucleares medidas experimentalmente en la compilación AME03 y aquellos obtenidos con el modelo de la gota.

### 2.3. El modelo de la gota de rango finito, FRDM

Este modelo es usualmente el modelo de referencia para los experimentalistas. Fue desarrollado en 1995 por P. Moller y J.R. Nix [23]. El modelo consta principalmente de una parte macroscópica, que es mucho más compleja que aquella considerada en el modelo de la gota y correcciones microscópicas que incluyen correcciones de capa tipo Strutinsky, correcciones de apareamiento tipo BCS y un término de Wigner.

El término macroscópico se divide principalmente en una contribución de volumen, una de superficie y un término de Coulomb.

$$E_{mac} = E_{vol} + E_{sup} + E_{coul}. \quad (2.10)$$

El término de volumen es diferente con respecto al considerado en el modelo de la gota, ya que toma en cuenta que un núcleo finito se verá deformado debido a la influencia de su tensión superficial y a la presencia de la repulsión Coulombiana. Es conveniente expresar la densidad central o de volumen  $\rho^c = \rho_n^c + \rho_\pi^c$  en términos de la dilatación  $\epsilon = (\rho_0 - \rho^c)/3\rho_0$  donde  $\rho_0$  es la densidad de equilibrio para un sistema simétrico con un número infinito de nucleones, de esta manera, tenemos que la energía por nucleón debida a la contribución de volumen es

$$E_{vol}/A = a_{vol} + \frac{1}{2}K_{vol}\epsilon^2 + (\alpha_4 - L\epsilon)\delta^2 + \dots \quad (2.11)$$

donde  $\alpha_4$  es el parámetro de simetría del modelo de la gota y donde  $\delta = (\rho_n^c - \rho_\pi^c)/\rho^c$  y L determina la densidad de equilibrio de un sistema asimétrico con un número infinito de nucleones de acuerdo con

$$\rho_{eq} = \rho_0[1 - (3L/K_{vol})I^2] \quad (2.12)$$

donde  $I$  es el parámetro de asimetría de carga definido como  $I = (N - Z)/A$  y  $K_{vol}$  es un parámetro a ajustar.

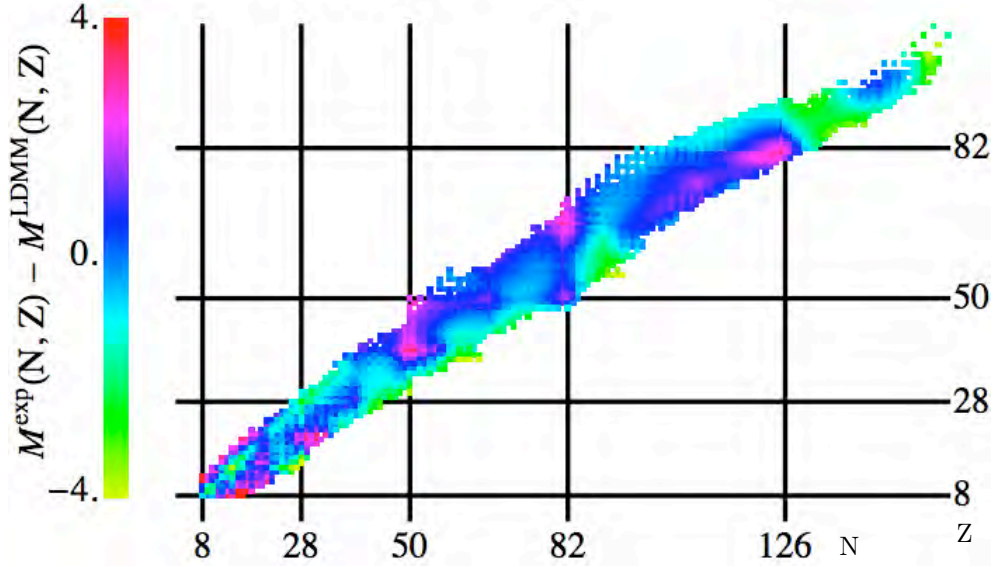


Figura 2.6: Diferencias entre los valores de la energía de amarre obtenidos a partir de las masas nucleares medidas experimentalmente en la compilación AME03 y aquellos obtenidos con el modelo de la gota incluyendo correcciones esquemáticas para los efectos de capa.

Con respecto al término de superficie, la principal diferencia con el modelo de la gota es la inclusión de un grado de libertad que permite que las superficies de neutrones y de protones se separen, con este propósito se define la profundidad de la superficie de neutrones

$$\theta_n = R_n - R_\pi = \frac{3}{2}r_0(I - \delta)A^{1/3} \quad (2.13)$$

donde  $R_n$  y  $R_\pi$  son el radio de la distribución de neutrones y protones respectivamente y  $r_0 = (4\pi\rho_0/3)^{-1/3}$ . La energía de la superficie ahora depende de la composición que está en términos de protones y neutrones a través de  $\theta_n$  con lo cual, a primer orden, tenemos

$$E_{su} = (1 + 2\epsilon)a_s A^{2/3} + \frac{4}{9}Q(I - \delta)^2 A^{4/3} \quad (2.14)$$

donde  $Q$  es el coeficiente de rigidez de la superficie y  $a_s$  es el parámetro de superficie del modelo de la gota.

Por último, si para el término de Coulomb tomamos

$$E_{coul} = \frac{3}{5} \frac{e^2 Z^2}{R_\pi} \quad (2.15)$$

y minimizamos la energía total macroscópica  $E_{mac}$  con respecto a  $\delta$  y  $\epsilon$  tenemos

$$\delta = \frac{I + (9e^2/40r_0Q)Z^2 A^{-5/3}}{1 + (9\alpha_4/4Q)A^{-1/3}} \quad (2.16)$$

y

$$\epsilon = \frac{-2a_s A^{-1/3} + L\delta^2 + (3e^2/5r_0)Z^2 A^{-4/3}}{K_{vol}} \quad (2.17)$$

con lo cual tenemos para la energía de superficie



$$\begin{aligned}
E_{mac} = & (a_{vol} + \alpha_4 \delta^2 - \frac{1}{2} K_{vol} \epsilon^2) A \\
& + (a_{su} + \frac{9\alpha_4^2}{4Q} \delta^2) A^{2/3} \\
& + \frac{3e^2}{5r_0} Z^2 A^{-1/3} - \frac{9e^4}{400r_0^2 Q} Z^4 A^{-2}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

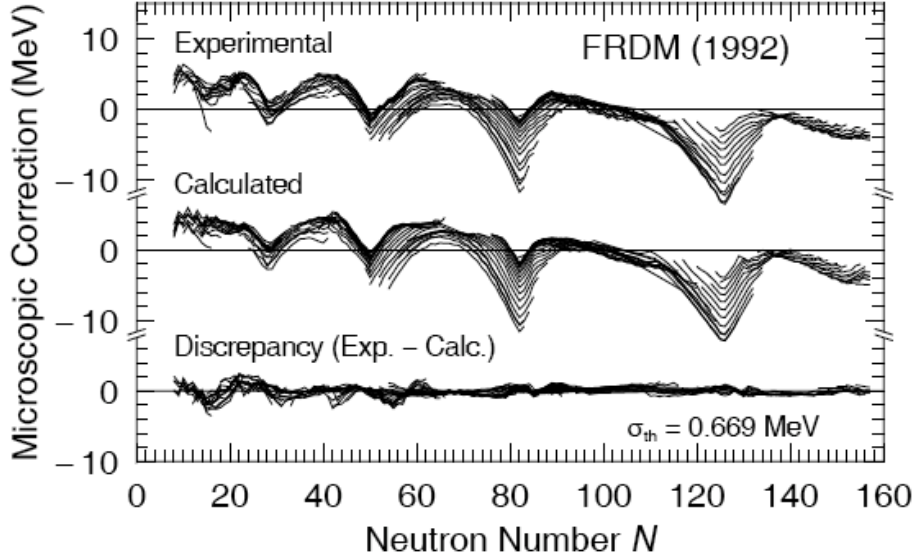


Figura 2.7: Comparación entre las desviaciones microscópicas de la energía de amarre experimentales y las calculadas por el modelo FRDM con respecto al número de neutrones

El término Coulombiano de la ecuación 2.15 únicamente considera una esfera clásica uniformemente cargada con una superficie bien definida, sin embargo pueden tomarse en cuenta correcciones con respecto a la difusión de la superficie, efectos de intercambio, efectos de redistribución y el tamaño finito de los protones.

Los términos mostrados anteriormente se limitan a describir núcleos esféricos, sin embargo la ecuación 2.18 puede ser generalizada de tal manera que tome en cuenta la deformación de los núcleos [24], esto se logra al multiplicar cada término por un factor de corrección  $B_i$  que es función de la deformación.

El modelo FRDM cuenta con 31 parámetros independientes relacionados con la masa de los cuales únicamente 19 son ajustados a las masas nucleares conocidas, los otros 12 son predeterminados por otras propiedades antes de ajustar a las masas. Al ajustar este modelo a las masas reportadas en la compilación AME03 se obtiene un rms de  $\sigma = 0.676$  MeV [23].

En la figura 2.7 se muestra una comparación entre las desviaciones microscópicas experimentales y las calculadas con el modelo FRDM, se puede observar que este modelo reproduce el comportamiento general de estas desviaciones, podríamos pensar al analizar el panel inferior de la gráfica 2.7 que las correlaciones, es decir, zonas con un error sistemático han desaparecido, sin embargo al observar la diferencia entre los valores experimentales de la energía de amarre y los calculados por este modelo 2.8 observamos que existen grandes zonas con errores sistemáticos y que existen aun algunos efectos que no se han tomado en cuenta.

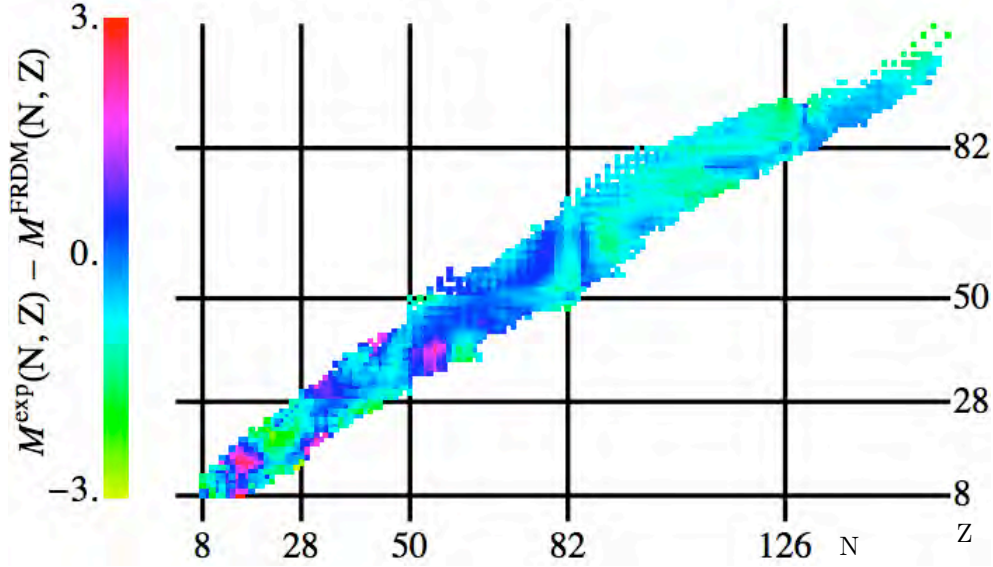


Figura 2.8: Diferencias entre los valores de la energía de amarre obtenidos a partir de las masas nucleares medidas experimentalmente en la compilación AME03 y aquellos obtenidos con el modelo de la gota de rango finito FRDM.

## 2.4. Modelos tipo Hartree-Fock

En principio debería ser posible obtener con un cálculo *ab initio* la masa así como las demás propiedades nucleares, todas éstas derivadas a partir de la interacción entre nucleones. Considerando que el núcleo está descrito por la ecuación de Schrödinger

$$H\Psi = E\Psi \quad (2.19)$$

donde

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_i \nabla_i^2 + \sum_{i>j} V_{ij} + \sum_{i>j>k} V_{ijk} \quad (2.20)$$

donde  $V_{ij}$  y  $V_{ijk}$  son los potenciales correspondientes a la interacción entre dos nucleones y la interacción debida a tres nucleones respectivamente.

Podríamos pensar en diagonalizar este Hamiltoniano en una base de estados correspondientes al modelo de capas, sin embargo este procedimiento no es practicable para núcleos pesados debido a que el número de estados posibles o configuraciones es increíblemente grande.

Otra posibilidad es utilizar métodos de Monte Carlo, sin embargo la complejidad aumenta rápidamente con el número de nucleones  $A$ , por lo cual, únicamente es posible realizar este tipo de cálculos para núcleos con  $A < 12$ .

Con el objetivo de eliminar estas dificultades podemos asumir que todos los nucleones se mueven en un campo promedio de partícula independiente. Es decir la dinámica del sistema nuclear de muchas partículas es representada por nucleones independientes moviéndose en un potencial promedio. No es necesario suponer que este campo medio es esféricamente simétrico, sin embargo supondremos que la forma del campo promedio es independiente del tiempo.

El método de Hartree-Fock es un método variacional en donde se considera una función de onda de prueba, la cual es un determinante de Slater  $\Phi = \det\{\phi_i(x_i)\}$  y además es el producto de las funciones de onda de partícula independiente  $\phi_i$ .

Ya que la función de prueba  $\Phi$  no puede ser idéntica a la función de onda verdadera que describe el problema,  $\Psi$ , el valor de expectación del Hamiltoniano  $\langle \Phi | H | \Phi \rangle$  será siempre mayor al autovalor exacto de la energía. Para que el cálculo Hartree-Fock resulte en el valor exacto de la energía es necesario reemplazar  $H$  por un hamiltoniano efectivo

$$H^{eff} = -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_i \nabla_i^2 + \sum_{i>j} v_{ij}^{eff} \quad (2.21)$$

en donde  $v_{ij}$  proviene de alguna fuerza nuclear efectiva, que por lo general se obtiene de ajustar a los valores medidos de la energía los valores de expectación

$$E_{HF} = \langle \Phi | H^{eff} | \Phi \rangle = \int \epsilon(r) d^3r \quad (2.22)$$

donde  $\epsilon(r)$  es el funcional de densidad de energía. Por lo general este funcional se aproxima con potencias y gradientes de las densidades nucleónicas del estado base y no está relacionado con alguna interacción nucleón - nucleón.

Una vez que la fuerza efectiva se ha seleccionado, se procede a minimizar  $E_{HF}$  con respecto a variaciones arbitrarias en las funciones de onda de partícula independiente  $\phi_i(x_i)$ , las cuales son soluciones de la ecuación de Hartree-Fock

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_i^2 + U\right) \phi_i = \epsilon_i \phi_i \quad (2.23)$$

donde  $U$  es un campo de partícula independiente que en general es no local, deformado y dependiente del espín, pero que está completamente determinado por la fuerza efectiva. Sin embargo, este campo depende explícitamente de las funciones de partícula independiente  $\phi_i(x_i)$  de tal manera que la ecuación 2.23 tiene que ser resuelta iterativamente hasta alcanzar autoconsistencia en las funciones  $\phi_i(x_i)$ . Después de obtener las soluciones autoconsistentes  $\phi_i(x_i)$  se puede obtener  $E_{HF}$ .

La mayoría de los cálculos de Hartree-Fock ocupan fuerzas efectivas de tipo *Skyrme*[25], las cuales son parametrizadas esencialmente con la información experimental de los núcleos doble mágicos, por ejemplo

$$\begin{aligned} v_{ij} = & t_0(1 + x_0 P_\sigma) \delta(\mathbf{r}_{ij}) + t_1(1 + x_1 P_\sigma) \frac{1}{2\hbar^2} \{p_{ij}^2 \delta(\mathbf{r}_{ij}) + H.c.\} \\ & + t_2(1 + x_2 P_\sigma) \frac{1}{\hbar^2} \mathbf{p}_{ij} \cdot \delta(\mathbf{r}_{ij}) \mathbf{p}_{ij} + \frac{1}{6} t_3(1 + x_3 P_\sigma) \rho^\gamma \delta(\mathbf{r}_{ij}) \\ & + \frac{i}{\hbar^2} W_0(\sigma_i + \sigma_j \cdot \mathbf{p}_{ij} \times \delta(\mathbf{r}_{ij}) \mathbf{p}_{ij} \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde  $\mathbf{p}_{ij}$  es el momento conjugado de  $\mathbf{r}_{ij}$  y  $P_\sigma = \frac{1}{2}(1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2)$  es el operador de intercambio de espín. Es importante notar que todos los términos en este potencial son términos de contacto, es decir, tienen alcance cero. El término  $t_3$  es dependiente de la densidad local nucleónica,  $\rho = \rho_\pi + \rho_n$ , donde  $\rho_\pi$  y  $\rho_n$  son las densidades locales de protones y de neutrones respectivamente.

A pesar de que la función de onda  $\Phi$  satisfaga la ecuación de Hartree-Fock 2.23, jamás será idéntica a la función de onda real  $\Psi$ . Por tal motivo es necesario introducir efectos que no pueden ser tomados en cuenta en el esquema de Hartree-Fock, a estos efectos se les llama correlaciones y pueden ser tomados en cuenta al considerar mezcla de configuraciones de diversos determinantes de Slater. Entre estas correlaciones se encuentran efectos como el *pairing*, el efecto de Wigner, proyecciones en el momento angular

y en el operador de número de partículas, mezcla de deformaciones, correlaciones cuadrupolares.

Existe una gran cantidad de fórmulas de masas basadas en cálculos tipo Hartree-Fock con interacciones efectivas tipo *Skyrme* [8], [26], sin embargo la mayoría no son consistentes entre si. La mejor de estas fórmulas es la llamada HFB13, contiene alrededor de 20 parámetros y tiene un rms de  $\sigma = 0.717$  MeV, las diferencias entre las masas experimentales y las calculadas con esta fórmula se pueden observar en la figura 2.9, se puede observar que aun existen correlaciones.

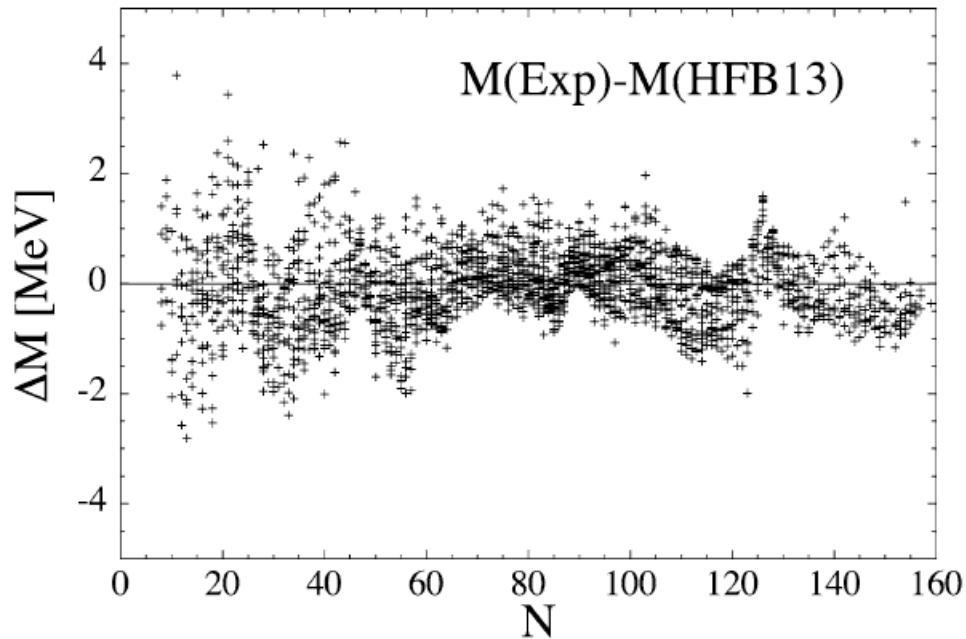


Figura 2.9: Diferencias entre las masas experimentales y las masas calculadas con la fórmula HFB13 como función del número de neutrones  $N$

## 2.5. El modelo de Duflo y Zucker

Este modelo [27] es prácticamente un funcional de la ocupación de las órbitas del modelo de capas, por lo tanto está basado en la descripción microscópica del modelo de capas pero no es un modelo microscópico propiamente debido a que no aparecen explícitamente interacciones entre nucleones. El modelo consta esencialmente de una línea base o parte macroscópica a la cual se le añaden efectos de capa representados por términos cuadráticos, cúbicos y de cuarto orden en el número de protones y neutrones de valencia.

El modelo de Duflo-Zucker incluye en su parte macroscópica algunas correcciones a los modelos de gota de líquido usuales. Considera un radio de carga diferente al radio de masa, los cuales incluyen una corrección de Isoespín. El término de Coulomb depende del radio de carga y tiene una dependencia en el número de protones que va como  $Z(Z - 1)$  e incluye una corrección de superficie. El modelo supone que existen interacciones efectivas o pseudo potenciales cuyo hamiltoniano puede ser separado en dos términos, un término monopolar y un término multipolar

$$H = H_m + H_M. \quad (2.25)$$

El término monopolar,  $H_m$ , es responsable de la saturación y de las propiedades de partícula independiente y podría funcionar en principio como base para cálculos de tipo Hartree-Fock. por otro lado, el

término multipolar,  $H_M$ , actúa como una interacción residual que incluye los efectos debidos a la interacción de apareamiento y las correlaciones debidas al término de Wigner. La deformación está asociada en este modelo con la promoción o excitación de cuatro neutrones o cuatro protones a la siguiente capa, debido a esto, el número de partículas de valencia aumenta en 4 mientras que el número de agujeros de valencia disminuye en 4.

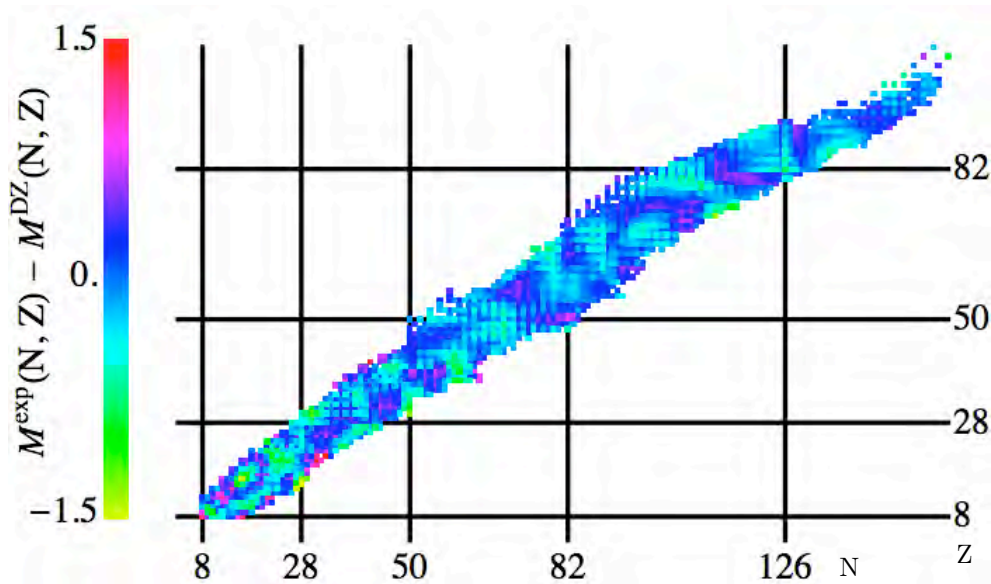


Figura 2.10: Diferencias entre los valores de la energía de amarre obtenidos a partir de las masas nucleares medidas experimentalmente en la compilación AME03 y aquellos obtenidos con el modelo de Duflo-Zucker

La fórmula de masas de este modelo parametriza la parte monopolar y multipolar del hamiltoniano, consta de 28 parámetros y ajusta los núcleos reportados en la compilación AME03 con un rms de  $\sigma = 0.353$  MeV. La figura 2.10 muestra las diferencias entre los valores experimentales de la energía de amarre y los calculados por el modelo de Duflo-Zucker. Se puede observar que a pesar del buen ajuste, aún existen zonas con errores sistemáticos.

## 2.6. Modelos locales, las relaciones de Garvey-Kelson

Existen algunos modelos o fórmulas de masas que son locales en el sentido que no dependen de la información de todas las masas conocidas experimentalmente, estas fórmulas locales son capaces de predecir el valor de una masa nuclear utilizando únicamente el valor de los vecinos más cercanos.

En 1966 Garvey y Kelson desarrollaron un par de relaciones algebraicas entre las masas de algunos núcleos vecinos [28]. Consideraron un modelo de partícula independiente, donde los nucleones se mueven en un potencial promedio creado por los demás nucleones. Cada nivel puede ser ocupado por un protón y un neutrón con espín arriba y abajo, es decir, 4 partículas en total. Se considera que la interacción residual es principalmente entre nucleones que se encuentran en el mismo nivel. Para la validez de esta relación únicamente es necesario asumir que los niveles de partícula independiente y la interacción efectiva cambian muy lentamente conforme  $A$  varía. Estas relaciones involucran las masas de 6 núcleos vecinos y tienen la forma siguiente

$$\begin{aligned}
& M(N+2, Z-2) - M(N, Z) + M(N, Z-1) \\
& - M(N+1, Z-2) + M(N+1, Z) - M(N+2, Z-1) = 0, \\
& M(N+2, Z) - M(N, Z-2) + M(N+1, Z-2) \\
& - M(N+2, Z-1) + M(N, Z-1) - M(N+1, Z) = 0,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

con estas relaciones se puede conocer el valor de una masa nuclear si se conocen las otras cinco involucradas en la fórmula.

Si se utiliza la primera de las relaciones de la ecuación 2.26 en forma recursiva, se obtiene la siguiente ecuación más general

$$\begin{aligned}
& M(N + \Delta T, Z - \Delta T) - M(N, Z) = \\
& \sum_{i=1}^{\Delta T} M(N + i, Z - \Delta T - 1 + i) - M(N - 1 + i, Z - \Delta T + i)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

para la cual la primera ecuación de 2.26 es el caso particular con  $\Delta T = 2$ .

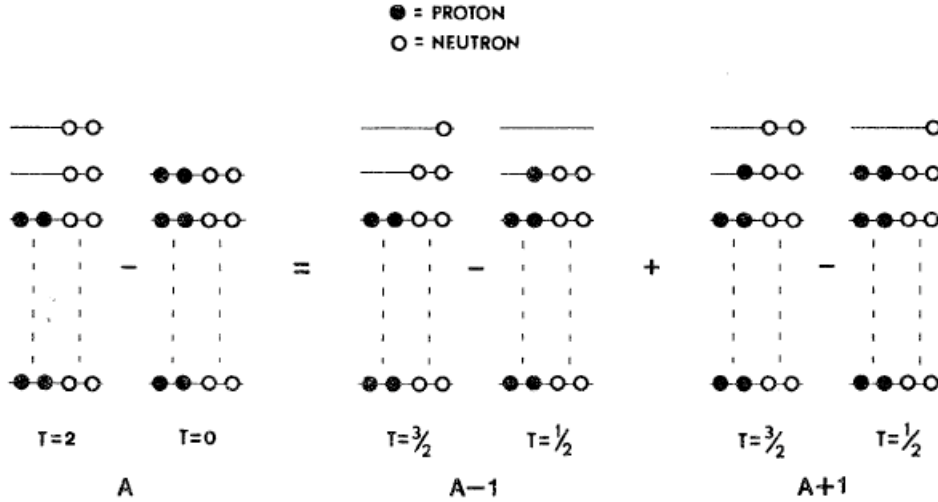


Figura 2.11: Diagrama de los niveles de partícula independiente que están involucrados en la primera de las relaciones de Garvey-Kelson

La figura 2.11 muestra un diagrama de los niveles de partícula independiente involucrados en la primera relación, se puede observar que las interacciones residuales neutrón-neutrón, protón-protón y neutrón-protón se cancelan. Para que las interacciones se cancelen correctamente es necesario que ningún núcleo en las relaciones tenga  $N = Z$  para  $N$  impar y para la relación 1 es necesario que  $N > Z$ , esto para asegurar que la dependencia en el isoespín de la interacción residual se cancele correctamente.

En la primera de las relaciones podemos escribir para cada término involucrado el número de nucleones como  $A = A_0 + a$ , donde  $A_0 = N + Z$ , con lo cual existen términos con  $a=0$ ,  $a=1$  y  $a=-1$ . Para cada uno de estos valores de  $a$  existe un término positivo y un término negativo, por lo cual esta relación cancela inmediatamente cualquier término en la energía de amarre que sea función de  $A$ . Con respecto al isoespín observamos que todos los términos son de la forma  $T/2 = T_0 + t$ , donde  $T_0 = (N - Z)/2$  existen un término positivo con  $t=2$ , uno negativo con  $t=0$ , dos positivos con  $t=3/2$  y dos negativos con  $t=1/2$ , estos términos se cancelan entre todos sin embargo, si consideramos términos en el isoespín que

vayan como  $T^n$  y tratamos de cancelarlos, observamos que no para cualquier valor de  $n$  es posible. La parte residual que no se cancela, en el caso general es

$$(T + 2)^n - T^n + 2\left(T + \frac{1}{2}\right)^n - 2\left(T + \frac{3}{2}\right)^n, \quad (2.28)$$

por lo cual únicamente términos en la energía de amarre que vayan como  $T^n$  con  $n=1$  y  $2$  cumplen con la relación de Garvey-Kelson exactamente.

Si hacemos un análisis similar para la segunda relación observamos que ésta se satisface exactamente para cualquier función de  $T$ , ya que existen un término positivo y otro negativo para cada uno de los valores de  $t$  involucrados,  $t = 1, 3/2$  y  $1/2$ , sin embargo, para términos que vayan como  $A^n$  queda un residuo de

$$(A + 2)^n - (A - 2)^n + 2(A - 1)^n - 2(A + 1)^n \quad (2.29)$$

la cual cancela exactamente para valores de  $n=1$  y  $2$ .

Podemos utilizar el modelo de la gota de líquido de la ecuación 2.4 para obtener una expresión aproximada de la energía de amarre y ver si los términos involucrados cumplen con las relaciones de Garvey-Kelson.

El primer término, el de volumen, se anula para ambas relaciones debido a que es proporcional a  $A$ . El término de superficie, proporcional a  $A^{2/3}$  se anula en la primera relación y en la segunda queda la siguiente contribución residual

$$a_s \left( -(A - 2)^{2/3} + 2(A - 1)^{2/3} - 2(A + 1)^{2/3} + (A + 2)^{2/3} \right) \quad (2.30)$$

El término de Coulomb, proporcional a  $Z(Z - 1)$  y con una dependencia en  $A^{1/3}$  no se elimina por completo para ninguna de las dos relaciones, de esta manera, en la relación 1 queda una contribución residual de

$$2a_c \left( -\frac{2}{(-1 + A)^{1/3}} + \frac{3}{(A)^{1/3}} - \frac{1}{(1 + A)^{1/3}} + Z \left( \frac{1}{(-1 + A)^{1/3}} - \frac{2}{(A)^{1/3}} + \frac{1}{(1 + A)^{1/3}} \right) \right) \quad (2.31)$$

y para la segunda relación tenemos

$$a_c \left( -\frac{(-3 + Z)(-2 + Z)}{(-2 + A)^{1/3}} + \frac{(-3 + Z)(-2 + Z)}{(-1 + A)^{1/3}} + \frac{(-2 + Z)(-1 + Z)}{(-1 + A)^{1/3}} - \frac{(-2 + Z)(-1 + Z)}{(1 + A)^{1/3}} - \frac{(-1 + Z)Z}{(1 + A)^{1/3}} + \frac{(-1 + Z)Z}{(2 + A)^{1/3}} \right) \quad (2.32)$$

para el termino de apareamiento proporcional a  $A^{-1/2}$  tenemos para la relación 1

$$-2a_p \frac{\delta^*(N, Z) (\sqrt{-1 + A} - \sqrt{1 + A})}{\sqrt{-1 + A}\sqrt{1 + A}} \quad (2.33)$$

y para la segunda relación tenemos

$$a_p \frac{\delta(N, Z) (\sqrt{-2+A} - \sqrt{2+A})}{\sqrt{-2+A}\sqrt{2+A}} \quad (2.34)$$

$\delta^*(N, Z) = 1$  si se trata de un núcleo con N par y Z impar,  $\delta(N, Z) = -1$  con N impar y Z par y 0 en cualquier otro caso.

Por último para el término de simetría supondremos que  $N > Z$  con lo cual es válido  $T = (N - Z)/2$  y entonces para la primera relación tenemos

$$\begin{aligned} a_{ss} a_{vs} & \left( -\frac{2T(2r+2T)}{Aa_{ss} + A^{2/3}a_{vs}} + \frac{(1+2T)(1+2r+2T)}{(-1+A)a_{ss} + (-1+A)^{2/3}a_{vs}} + \right. \\ & \frac{(1+2T)(1+2r+2T)}{(1+A)a_{ss} + (1+A)^{2/3}a_{vs}} - \frac{(3+2T)(3+2r+2T)}{(-1+A)a_{ss} + (-1+A)^{2/3}a_{vs}} - \\ & \left. \frac{(3+2T)(3+2r+2T)}{(1+A)a_{ss} + (1+A)^{2/3}a_{vs}} + \frac{(4+2T)(4+2r+2T)}{Aa_{ss} + A^{2/3}a_{vs}} \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

y para la segunda relación tenemos

$$\begin{aligned} a_{ss} a_{vs} & \left( \frac{(1+2T)(1+2r+2T)}{(-1+A)a_{ss} + (-1+A)^{2/3}a_{vs}} - \frac{(1+2T)(1+2r+2T)}{(1+A)a_{ss} + (1+A)^{2/3}a_{vs}} - \right. \\ & \frac{(2+2T)(2+2r+2T)}{(-2+A)a_{ss} + (-2+A)^{2/3}a_{vs}} + \frac{(2+2T)(2+2r+2T)}{(2+A)a_{ss} + (2+A)^{2/3}a_{vs}} + \\ & \left. \frac{(3+2T)(3+2r+2T)}{(-1+A)a_{ss} + (-1+A)^{2/3}a_{vs}} - \frac{(3+2T)(3+2r+2T)}{(1+A)a_{ss} + (1+A)^{2/3}a_{vs}} \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Para cada una de las relaciones es posible obtener la masa de un núcleo en términos de 5 masas vecinas conocidas y esto puede hacerse de 6 maneras diferentes considerando las diferentes posiciones disponibles en las relaciones. As, utilizando ambas relaciones se cuenta con 12 posibles maneras diferentes de estimar la masa de un núcleo utilizando las masas conocidas de los núcleos vecinos [29, 30].

Si utilizamos estas relaciones sobre las masas conocidas obtenemos un rms  $\sigma = 0.147$  MeV, en la figura 2.12 se pueden observar las diferencias entre los valores experimentales de la masa y los valores calculados utilizando las relaciones de Garvey-Kelson, se aprecia que prácticamente ya no existe ninguna estructura en el error, es decir ya no hay errores sistemáticos.

Para predecir el valor de una masa nuclear utilizando estas relaciones es necesario conocer por lo menos 5 masas vecinas. Es claro que muy pocos núcleos no conocidos experimentalmente cumplen con las condiciones antes mencionadas, debido a esto, las relaciones de Garvey-Kelson son efectivas para predecir masas nucleares usualmente en regiones muy cercanas a la zona conocida experimentalmente, sin embargo es posible hacer predicciones más lejanas utilizando un proceso iterativo, es decir utilizando las masas predichas por las relaciones en pasos anteriores como masas conocidas. Es importante llevar a cabo este proceso con mucha precaución debido a que el error en la predicción debido al uso de masas predichas en iteraciones anteriores crece velozmente. En el capítulo 4 se realiza un estudio detallado de la manera en la que estas relaciones son utilizadas para predecir y de cómo el error crece con respecto al número de iteraciones utilizadas en el proceso.

Si bien las relaciones de Garvey-Kelson están definidas para las masas nucleares, se satisfacen de igual manera sobre la superficie de energías de amarre, debido a que la función que relaciona estas con las masas nucleares es una función muy simple en N y Z.



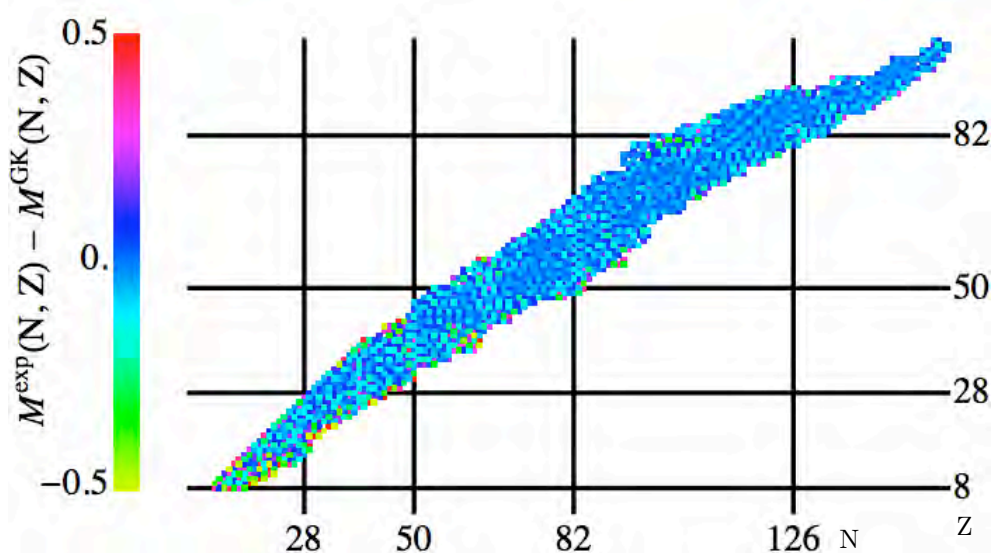


Figura 2.12: Diferencias entre los valores de la energía de amarre obtenidos a partir de las masas nucleares medidas experimentalmente en la compilación AME03 y aquellos obtenidos con las relaciones de Garvey-Kelson.

## 2.7. Extrapolaciones de Audi y Wapstra

Al graficar las masas nucleares como función del número de neutrones y el número de protones en el plano  $(N, Z)$  se obtiene una superficie 3-dimensional. Debido al efecto de apareamiento entre nucleones, es conveniente separar esta superficie en 4, aquella con núcleos con número de neutrones par y número de protones par, aquella con estas cantidades impares y aquellas dos con una de estas cantidades par y la otra impar. Estas 4 superficies en la región conocida experimentalmente son casi paralelas entre si, es decir, la energía en la cual difieren varía suave y lentamente con respecto a  $N$  y  $Z$ . A su vez, las 4 superficies también varían suavemente, pero de una manera más rápida. Las superficies generadas por las derivadas de primer orden y las derivadas de segundo orden de las masas tienen un comportamiento similar, varían muy suavemente, excepto en algunos lugares donde se presentan estructuras, las cuales están asociadas con cambios importantes en la estructura nuclear, como por ejemplo efectos de capa, efectos debido a la deformación, transiciones de fase, y algunos otros fenómenos. Como ya se mencionó anteriormente las características y sistemáticas de estas superficies están íntimamente ligadas con la estructura nuclear y este trabajo de investigación está basado por completo en el estudio de estas regularidades sin embargo, no somos los primeros que han intentado sacar provecho de estas características.

La regularidad en las superficies de la masa y sus derivadas es una propiedad esencial de la sistemática y el comportamiento de las masas y no hay ninguna razón para creer que deje de ser válida lejos de la zona de estabilidad, por lo cual esta propiedad puede ser utilizada en el estudio de las masas nucleares. Audi y Wapstra, en su compilación de masas atómicas [2], hacen uso de ella para diversos propósitos, como por ejemplo detectar errores en las mediciones experimentales. La regularidad en estas superficies también permite el estimar o predecir en la región cercana a las masas conocidas.

Las superficies obtenidas a partir de la masa nuclear no son la manera más eficiente de representar los datos para su estudio, es posible obtener más información a partir de las superficies generadas por las derivadas de esta primera, es decir por las superficies generadas por la diferencia de masas entre dos núcleos cercanos, como por ejemplo las energías de decaimiento alfa y beta, y las energías de separación de protones y neutrones. Estas funciones presentan suavidad tal como lo hace la superficie de masas y tienen la ventaja de mostrar variaciones mucho más pequeñas, sin embargo tienen la desventaja de necesitar para cada punto de la superficie dos valores de la masa lo cual puede ser origen de ambigüedades al tratar de estimar masas nucleares. Otra manera eficaz de obtener una superficie más útil que aquella

producida con las masas nucleares es restar a ésta una función suave de  $N$  y de  $Z$ , como por ejemplo alguno de los modelos descritos anteriormente, (el modelo de la gota). Sin embargo para poder estimar nuevos valores de masas nucleares es necesario no tomar en cuenta aquellos modelos que consideran la deformación, esto debido a que por lo general la posición de las zonas de deformación en la mayoría de los modelos es estimada de manera incorrecta, lo cual produciría en la superficie efectos que no existen y que podrían ser el orgien de errores en la estimación.

Audi y Wapstra desarrollaron un programa gráfico [31] con el cual es posible la observación simultánea de algunas de estas superficies así como el efecto en ellas al modificar el valor de una de las masas ya existentes y el efecto debido a la inclusión de nuevos valores, de esta manera se puede estimar el valor de algunas de las masas no conocidas en regiones muy cercanas a la zona medida experimentalmente, observando la continuidad de estas superficies y el efecto en ellas debido a la estimación. El valor que se da a éstas nuevas masas se basa en la tendencia de las sistemáticas de las superficies descritas al demandar que estas sean lo más suaves posible, excepto en los lugares donde se espera la aparición de efectos debido a la estructura de capas y la deformación nuclear. A pesar de ser un método completamente subjetivo, las extrapolaciones de Audi y Wapstra basadas en la suavidad de la superficie de masas nucleares y sus derivadas proveen de las mejores predicciones de corto alcance, es decir, en la región cercana a los núcleos conocidos.

## 2.8. Comparación de los modelos teóricos.

En las secciones anteriores se presentaron algunos de los modelos teóricos que permiten la obtención de masas nucleares en zonas donde es imposible realizar mediciones experimentales hasta ahora. Los modelos presentados no son todos los existentes, pero son los más representativos de las técnicas utilizadas para predecir masas. Las figuras 2.5, 2.6, 2.8, 2.9, 2.10 y 2.12 muestran las diferencias de las masas obtenidas con estos modelos y las masas conocidas experimentalmente y la tabla 2.2 muestra la desviación cuadrática media (rms) de estos modelos para los núcleos pertenecientes a la compilación AME03 es decir para los núcleos conocidos experimentalmente. El modelo de la gota refleja la falta de consideraciones microscópicas en un rms bastante alto comparado con los demás y la imagen de su diferencia con los datos experimentales (fig. 2.5) muestra desviaciones sistemáticas bien localizadas en las regiones donde el comportamiento de partícula independiente del núcleo es importante, por ejemplo las cerraduras de capa y las transiciones de forma en el núcleo. Al introducir correcciones microscópicas (LDMM) se obtiene una mejoría en el rms sin embargo ésta no es suficiente, así mismo el patrón observado en las diferencias de este modelo con los datos experimentales (fig. 2.6) es menos regular y más difícil de asociar con fenómenos de la estructura nuclear, pero aún muestra cierta sistemática y correlaciones con respecto a la posición de las desviaciones. El modelo de la gota de rango finito y los cálculos tipo Hartree-Fock reducen el rms tomando más en serio el comportamiento de partícula independiente, así mismo, el rms en el modelo de Duflo-Zuker es impresionante y se acerca a las precisiones requeridas en la astrofísica, sin embargo los patrones en las desviaciones de estos modelos, figuras 2.8, 2.9 y 2.10, muestran sistemáticas en una escala mucho más baja que los modelos anteriores, pero evidentes. Por último el valor tan bajo del rms para las relaciones de Garvey-Kelson y la imagen de las diferencias entre las masas obtenidas con estas relaciones y los valores experimentales (fig 2.12) muestra que estas relaciones son sin duda satisfechas por las masas nucleares.

Tabla 2.2: Desviación cuadrática media (rms) para los núcleos pertenecientes a la compilación AME03, del modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota con correcciones microscópicas (LDMM), el modelo de la gota de rango finito (FRDM), cálculos tipo Hartree-Fock (HF), el modelo de Duflo-Zuker (DZ) y las relaciones de Garvey-Kelson (GK)

Modelo	LDM	LDMM	FRDM	HF	DZ	GK
$\sigma(rms)$ MeV	2.404	1.336	0.676	0.717	0.353	0.147

Los resultados anteriores reflejan el comportamiento de estos modelos en la zona conocida y cómo

estos modelos se ajustan a los datos ya existentes, lo cual es sin duda alguna de mucho interés. Sin embargo el objetivo de los modelos teóricos es predecir valores de masa nuclear en aquellas regiones donde es imposible por el momento llevar a cabo mediciones experimentales, aunque los modelos descritos anteriormente lo hagan muy bien en la región conocida, si no son consistentes y mantienen rms similares en las regiones no conocidas entonces no son de gran utilidad.

Es importante comparar el comportamiento de los diferentes modelos existentes y la diferencia entre estos para la zona en la cual no se conocen masas experimentales [3]. La figura 2.13 muestra una comparación de las predicciones entre diferentes modelos, incluidos los descritos anteriormente como función del número de neutrones para los isótopos de Cesio ( $Z=55$ ) [7]. Claramente las diferencias entre los valores calculados por los modelos en la zona conocida experimentalmente coinciden, es decir, el ajuste de las masas nucleares conocidas es realizado con éxito por la mayoría de los modelos. Sin embargo, podemos observar que en la región no conocida, las diferencias entre los valores calculados por los modelos son muy grandes, especialmente en la zona rica en neutrones. Es importante notar que la divergencia entre modelos comienza inmediatamente después de que termina la zona conocida, la misma figura muestra como rectángulos sombreados las posibles regiones donde la energía de separación de un protón,  $S_p$  y de un neutrón  $S_n$  se vuelve cero así como la región de núcleos donde posiblemente se lleva a cabo el proceso astrofísico de captura rápida de neutrones. Tomando en cuenta esta divergencia en el valor teórico de las masas nucleares necesarias para el cálculo de los procesos astrofísicos es imposible escoger cual de los modelos utilizar.

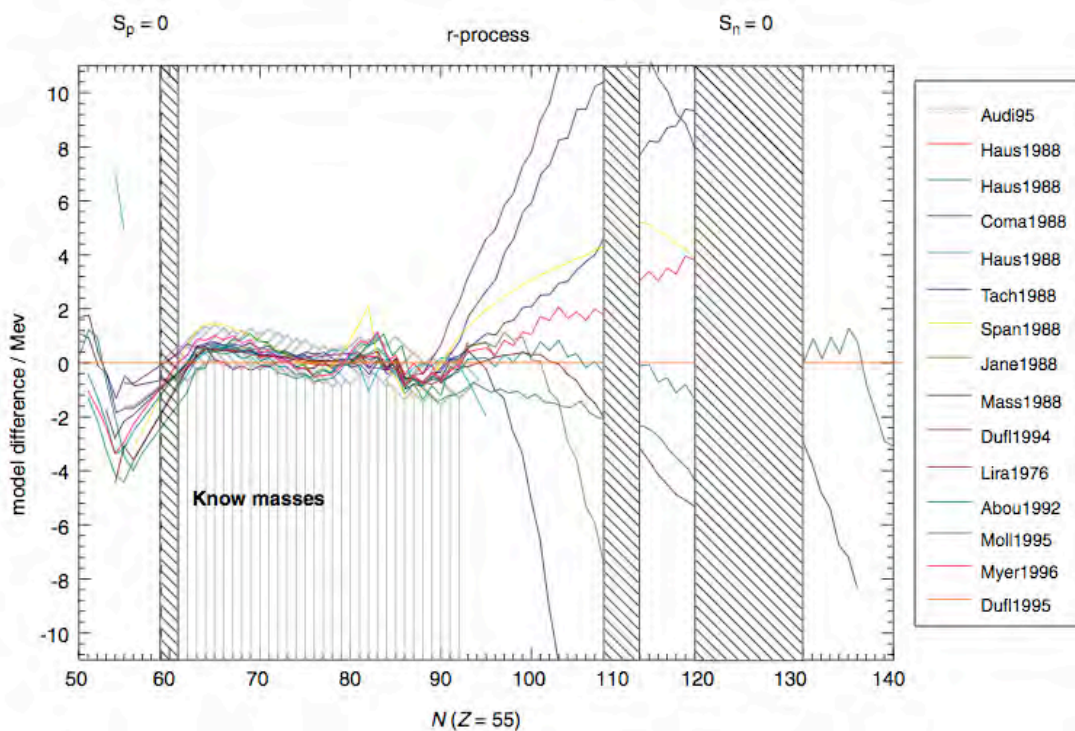


Figura 2.13: Diferencias entre las masas nucleares predichas por algunos de los modelos teóricos existentes, las masas nucleares experimentales y el modelo de Dufflo-Zuker tomado como referencia, como función del número de neutrones para los isótopos de Cesio ( $Z=55$ ) [7]. Ya que los modelos son ajustados a las masas conocidas las diferencias en esta región entre los diferentes modelos son casi nulas. Las zonas sombreadas indica las posibles regiones donde  $S_n$  y  $S_p$  se hacen cero, así como la región donde es posible que se lleve a cabo la nucleosíntesis por medio del proceso de captura rápida de neutrones y la región de masas conocidas experimentalmente.

Los modelos teóricos más utilizados en el cálculo de los procesos de nucleosíntesis astrofísicos son

el modelo de la gota de rango finito (FRLDM) y el modelo de Duflou-Zuker (DZ) y es conveniente ver como difieren las predicciones de estos. La figura 2.14 muestra las diferencias entre estos dos modelos, todos aquellos núcleos que aparecen en color rojo son diferentes por más de 2 MeVs lo cual está muy lejos de las precisiones necesarias para cualquier aplicación. Se puede observar que existe una región en donde las diferencias no son tan grandes, esta región comprende por supuesto la zona medida experimentalmente, sin embargo, podemos observar que para la región de los núcleos con exceso de neutrones, es decir aquellos necesarios para los cálculos de los procesos de nucleosíntesis las predicciones de ambos modelos son considerablemente diferentes. Al separar esta imagen en 2, una con aquellos núcleos que pertenecen a la región conocida, figura 5.2a y otra con aquellos núcleos para los cuales no ha sido medida la masa nuclear, figura 5.2b, obtenemos una situación muy parecida a la mostrada anteriormente para los isótopos de Cesio en la figura 2.13. En la región conocida las diferencias entre ambos modelos son razonables, pero casi inmediatamente fuera de esta, es decir uno o dos núcleos a partir del borde las diferencias son mayores que 2 MeVs, es decir demasiado grandes.

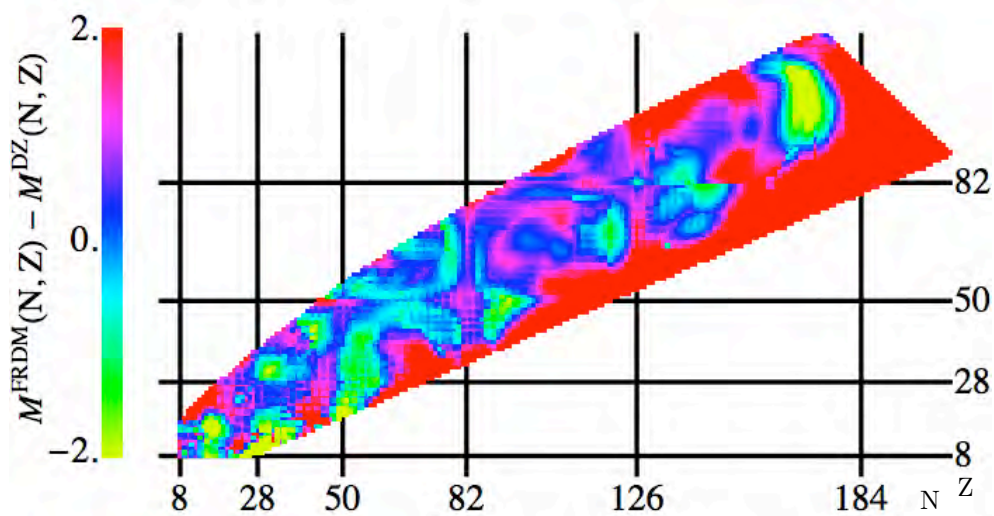


Figura 2.14: Diferencias entre los valores de la energía de amarre obtenidos a partir de las masas nucleares obtenidas con el modelo de la gota de rango finito (FRDM) y aquellos obtenidos con el modelo de Duflou-Zuker (DZ).

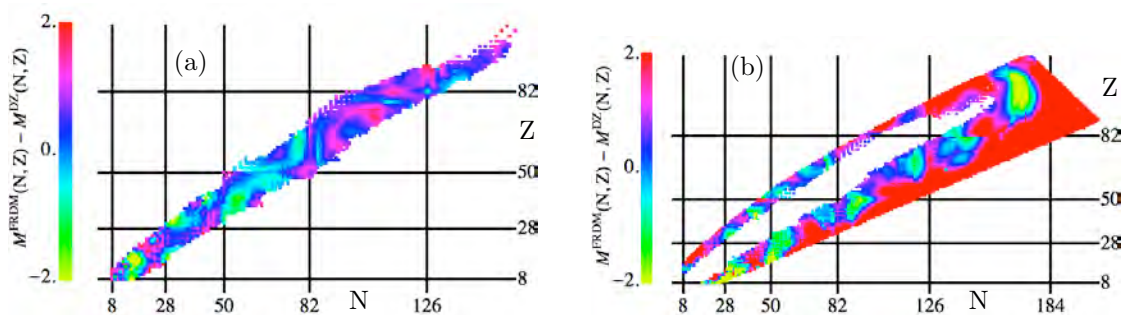


Figura 2.15: Diferencias entre los valores de la energía de amarre obtenidos a partir de las masas nucleares obtenidas con el modelo de la gota de rango finito (FRDM) y aquellos obtenidos con el modelo de Duflou-Zuker (DZ) para la parte medida experimentalmente conocida (a) y para la parte no conocida (b).

Es importante tener una medida de la capacidad de predicción de cada modelo, con este objetivo se desarrolló la siguiente prueba [3, 32]. Para ajustar los parámetros de cada modelo se utilizaron los núcleos reportados en la compilación de masas atómicas AME95 [9] (fig 2.16, núcleos en rojo) este conjunto de

datos consta de 1760 núcleos. Después se utilizó cada modelo para predecir el valor de la masa para el conjunto de 389 núcleos que se encuentran en la compilación de AME03 [2] y que no se encontraban en AME95, es decir los núcleos que fueron medidos entre 1995 y 2003 (fig 2.16, núcleos en amarillo).

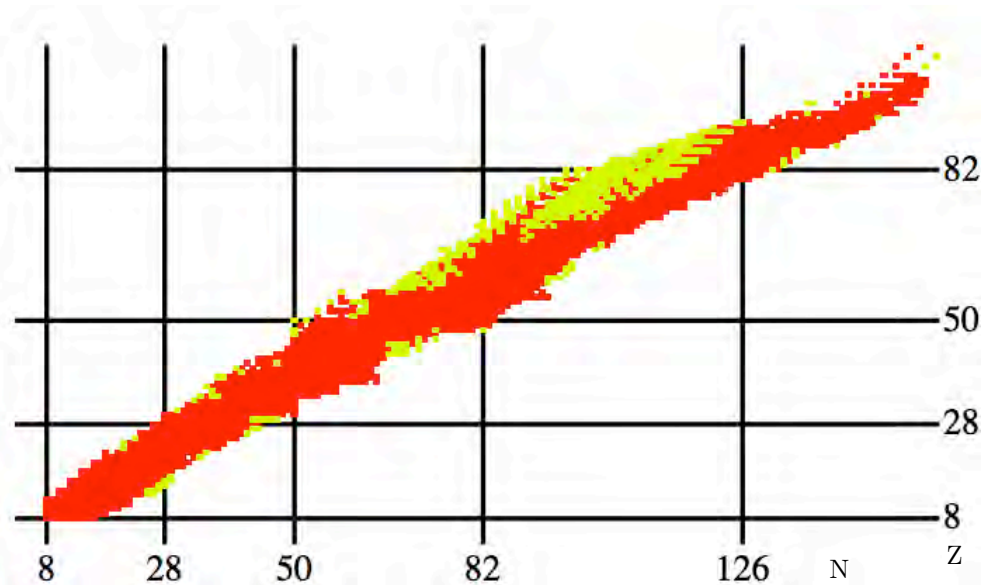


Figura 2.16: Núcleos utilizados en la prueba de predicción AME95, en rojo se muestran aquellos núcleos reportados en la compilación AME95 los cuales son usados para ajustar los modelos. En amarillo se muestra aquellos núcleos reportados en la compilación AME03 que no se encontraban en la compilación anterior, estos núcleos conforman el conjunto a predecir.

La tabla 2.3 muestra los resultados de esta prueba. Para cada modelo excepto para las extrapolaciones de Audi-Wapstra se muestran dos valores del rms, el primero sobre los 1760 núcleos pertenecientes al ajuste y el segundo sobre los 389 núcleos a predecir. En los primeros tres modelos, el modelo de la gota, el modelo de la gota más correcciones microscópicas y el modelo de la gota de rango finito, ambos valores del rms son muy parecido lo cual habla de la consistencia en sus predicciones, sin embargo, el rms de predicción para estos modelos, así como para los cálculos tipo Hartree-Fock y las relaciones de Garvey-Kelson, indica que las predicciones de estos modelos no tienen la precisión requerida para los modelos astrofísicos. El rms de predicción obtenido por el modelo de Duflo-Zuker se aproxima a la precisión requerida. Por otro lado, las relaciones de Garvey-Kelson ajustan muy bien las masas conocidas, sin embargo al utilizar estas relaciones de manera iterativa para predecir, el error crece en cada iteración demasiado rápido como para confiar en las predicciones más allá de algunos núcleos, por lo cual no son utilizables en la región donde se llevan a cabo los procesos de captura de neutrones. Por último, las extrapolaciones de Audi-Wapstra basadas en la suavidad y en la sistemática de las superficies de masa y sus derivadas son muy buenas para predecir, como lo muestra el rms de predicción obtenido en esta prueba, sin embargo, tal como las relaciones de Garvey-Kelson, no son utilizables en regiones lejanas a la zona conocida experimentalmente.

Las relaciones de Garvey-Kelson nos proporcionan una manera de evaluar la continuidad y suavidad de las predicciones realizadas por cada modelo [20]. Las relaciones de Garvey-Kelson se ven satisfechas por las masas nucleares homogéneamente y como ya se mencionó anteriormente, no hay razón para pensar que la superficie de masas deje de satisfacer estas relaciones en alguna región. Debido a esto los modelos teóricos de masas deben satisfacer estas relaciones de una manera parecida. Con el objetivo de analizar la manera en la que los diferentes modelos satisfacen las relaciones se obtuvo el rms de las relaciones de Garvey-Kelson sobre las masas obtenidas con cada uno de los modelos. Las relaciones se aplicaron sobre todas las masas dentro de las líneas de goteo y se separó este conjunto de núcleos en dos subconjuntos, aquellos núcleos utilizados para ajustar el modelo, 2149 núcleos pertenecientes a la compilación AME03 y aquellos núcleos que predice el modelo, aproximadamente 7000, para cada uno de estos subconjuntos

Tabla 2.3: Prueba de predicción AME95. Desviación cuadrática media (rms) para los 1760 núcleos en el ajuste y los 389 núcleos en la predicción, del modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota con correcciones microscópicas (LDMM), el modelo de la gota de rango finito (FRDM), calculos tipo Hartree-Fock (HF), el modelo de Duflo-Zuker (DZ), las relaciones de Garvey-Kelson (GK) y las extrapolaciones de Audi-Wapstra (AW)

Modelo	LDM	LDMM	FRDM	HF	DZ	GK	AW
$\sigma(rms)$ MeV ajuste (1760 núcleos)	2.498	1.368	0.678	0.651	0.346	0.277	
$\sigma(rms)$ MeV predicción (389 núcleos)	2.069	1.318	0.655	0.857	0.403	0.717	0.317

se calculó el rms entre la predicción del modelo y la predicción de las relaciones de Garvey-Kelson.

Tabla 2.4: Prueba de consistencia con las relaciones de Garvey-Kelson. Desviación cuadrática media (rms) al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson sobre las predicciones de cada uno de los modelos en los 2149 núcleos del ajuste y en los núcleos de la predicción, del modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota con correcciones microscópicas (LDMM), el modelo de la gota de rango finito (FRDM), calculos tipo Hartree-Fock (HF), el modelo de Duflo-Zuker (DZ)

Modelo	LDM	LDMM	FRDM	HF	DZ
$\sigma(rms)$ MeV ajuste (2149 núcleos)	0.021	0.023	0.159	0.138	0.031
$\sigma(rms)$ MeV predicción (7000 núcleos aproximadamente)	0.004	0.006	0.388	0.343	0.058

La tabla 2.4 y las figuras 2.17, 2.18, 2.19, 2.20 y 2.21 muestran los resultados de la prueba de consistencia usando las relaciones de Garvey-Kelson para el modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota más correcciones microscópicas (LDMM), el modelo de la gota de rango finito (FRDM), cálculos tipo Hartree-Fock (HF) y el modelo de Duflo-Zuker (DZ) respectivamente. Para el modelo de la gota, su versión con correcciones microscópicas y el modelo de Duflo-Zuker se puede observar que el rms es muy bueno, las relaciones de Garvey-Kelson se cumplen casi con exactitud excepto para algunos núcleos, esto es debido a que estos modelos esencialmente son fórmulas y funciones que dependen del número de neutrones y del número de protones, los núcleos en donde las relaciones no se cumplen del todo son aquellos donde el modelo sufre un cambio drástico en la formula, por ejemplo en el modelo de la gota con correcciones microscópicas las relaciones no se cumplen en los números mágicos ni a la mitad de las capas debido a que en estos núcleos las partículas de valencia se vuelven agujeros de valencia y viceversa. En el modelo de Duflo-Zuker las regiones para las cuales las relaciones no se cumplen son aquellas en donde el modelo hace una transición entre los nucleos que considera deformados y los que no tienen deformación. Los tres modelos anteriores cumplen demasiado bien las relaciones lo cual no es bueno ya que las masas experimentales las cumplen con un error que parece ruido blanco (ver figura 2.12) el cual no aparece en el error de ninguno de estos modelos. En cierta forma les falta textura. El modelo de la gota de rango finito y los cálculos tipo Hartree-Fock presentan esta textura, sin embargo, cumplen las relaciones en la región de predicción con un rms cercano al doble del rms sobre los núcleos ajustados, es decir sus predicciones no son consistentes con los núcleos ajustados, también se puede observar cómo para ambos modelos existen regiones con error sistemático donde las relaciones de Garvey-Kelson no se cumplen del todo, ambos fenómenos señalan que estos modelos no son consistentes con las relaciones de Garvey-Kelson en todas las regiones donde predicen.

La diferencia entre las masas nucleares obtenidas con los diferentes modelos para la zona que aun no ha sido medida experimentalmente así como el hecho de que ninguno de los modelos satisface las relaciones de Garvey-Kelson con la misma precisión con la que lo hacen las masas experimentales motiva

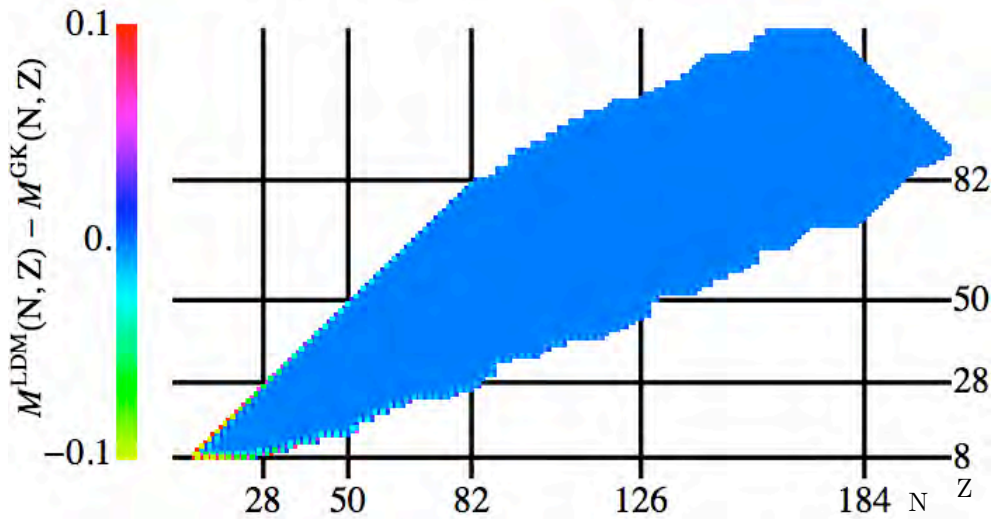


Figura 2.17: Diferencias entre las masas nucleares predichas con el modelo de la gota (LDM) y las obtenidas al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson sobre dicho modelo.

a la creación de nuevas técnicas para predecir masas y nuevos modelos que tomen en cuenta la física que no está incluida en los anteriores. Los patrones y sistemáticas obtenidos con las diferencias entre las masas experimentales y las predicciones de los modelos mostradas en las figuras 2.5, 2.6, 2.8, 2.9, 2.10 y 2.12 son muestra de los fenómenos físicos que no se están tomando en cuenta en cada uno de los modelos teóricos. Este trabajo de investigación se motiva precisamente en estos patrones y sistemáticas, las cuales son la herramienta necesaria para incluir correcciones a los modelos existentes y para crear nuevos modelos y técnicas. La parametrización de estas diferencias y la identificación de los fenómenos físicos que las producen son el camino a seguir si se pretenden predicciones de masas nucleares más precisas.

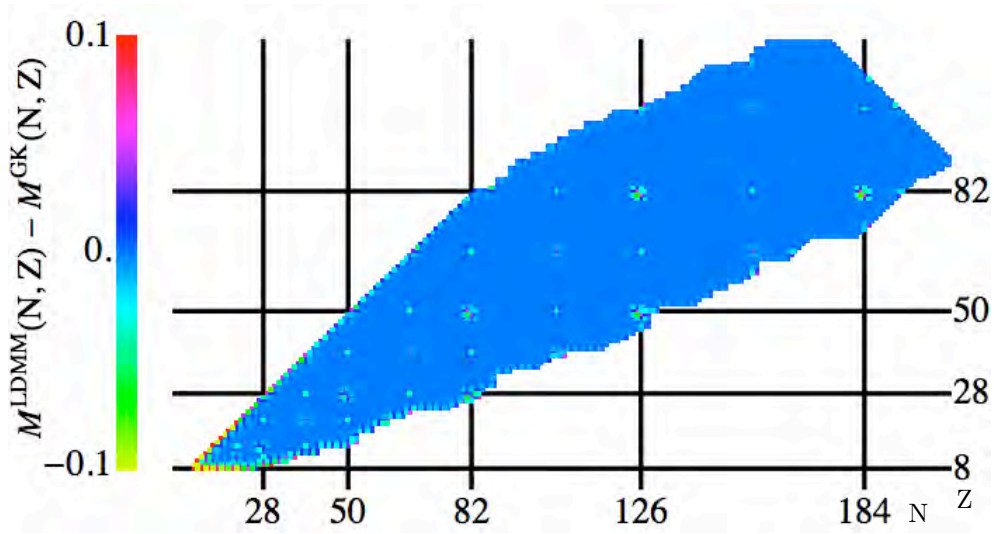


Figura 2.18: Diferencias entre las masas nucleares predichas con el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas (LDMM) y las obtenidas al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson sobre dicho modelo.

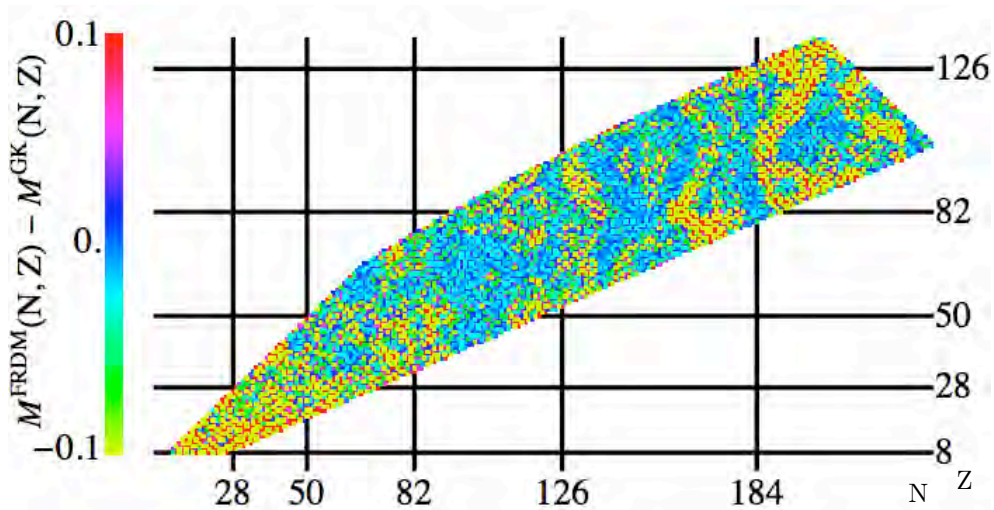


Figura 2.19: Diferencias entre las masas nucleares predichas con el modelo de la gota de rango finito (FRDM) y las obtenidas al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson sobre dicho modelo.



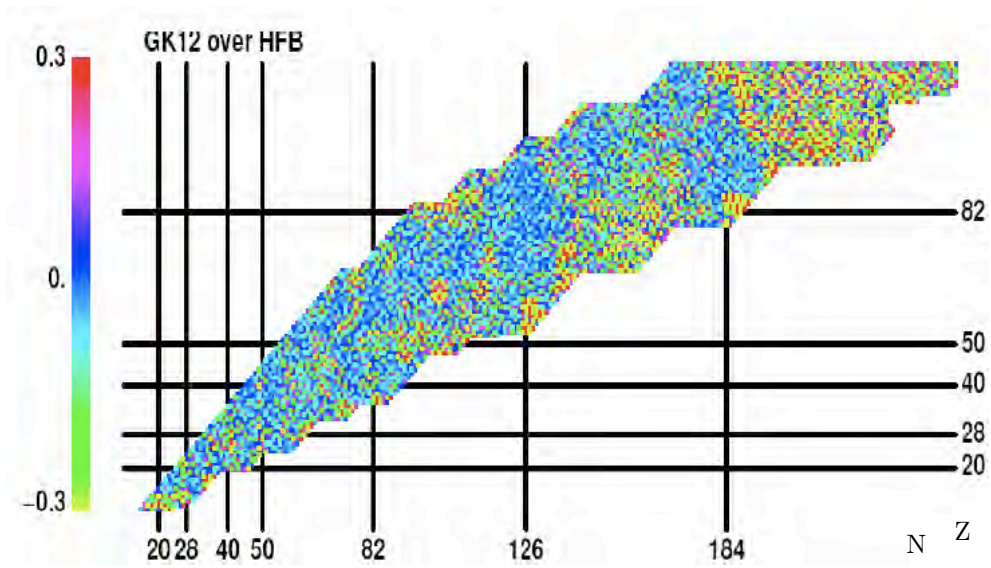


Figura 2.20: Diferencias entre las masas nucleares predichas con cálculos tipo Hartree-Fock (HF) y las obtenidas al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson sobre dicho modelo.

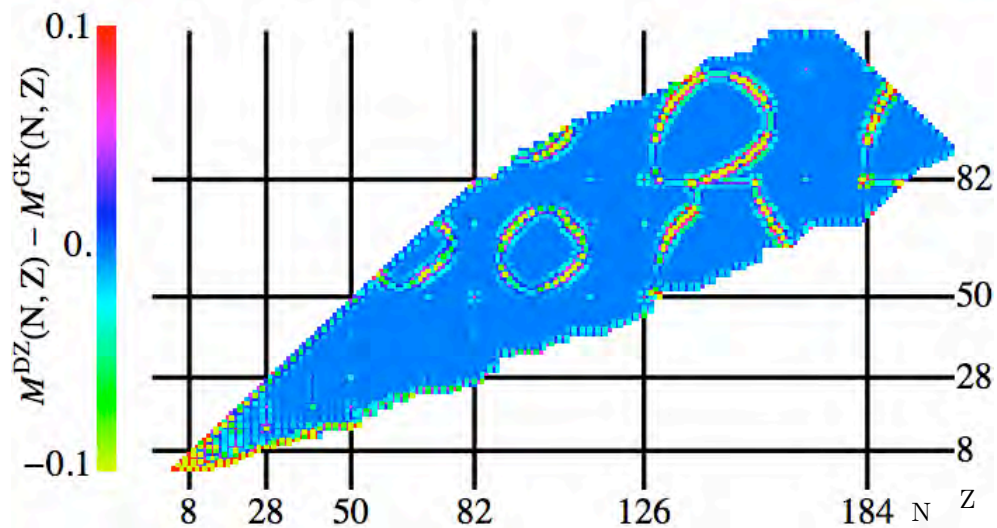


Figura 2.21: Diferencias entre las masas nucleares predichas con el modelo de Duflo-Zuker (DZ) y las obtenidas al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson sobre dicho modelo.



## Capítulo 3

# Reconstrucción de imágenes, CLEAN

Las diferencias entre los valores de las masas nucleares experimentales y aquellos calculados con el modelo de la gota muestran un patrón cuasi-regular (fig. 2.5), este patrón resalta los efectos microscópicos involucrados en la sistemática de las energías de amarre a través de la tabla de isótopos. Al restar este modelo como si fuera el comportamiento promedio macroscópico de las masas se puede observar que las energías de amarre conocidas experimentalmente hasta ahora contienen información acerca de las cerraduras de capa, de la deformación nuclear y de las interacciones residuales. Situaciones similares suceden con los otros modelos, donde al restar el modelo de las masas experimentales se obtienen patrones que muestran de manera gráfica todos aquellos fenómenos que no incluye el modelo. Conforme el modelo describe con mayor precisión las masas el patrón residual se encuentra en una escala mucho más pequeña y pierde periodicidad y estructura, sin embargo sigue siendo evidente la sistemática en los errores.

Después de 70 años de esfuerzos por describir teóricamente de manera correcta las masas nucleares se podría pensar que no es posible describirlas más allá de cierta precisión, sin embargo el hecho de que los errores estén correlacionados, sean sistemáticos y presenten patrones muestra que aun existen efectos nucleares que no se están considerando. La figura 2.12 muestra estas diferencias al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson sobre las masas conocidas, se puede observar que el error no muestra patrones ni efectos sistemáticos, los errores parecen completamente al azar, no hay ninguna indicación de que las masas dejen de satisfacer estas relaciones fuera de la zona conocida e incluso en ninguna zona dentro de las líneas de goteo lo cual indica que las masas pueden ser predichas al menos tan bien como lo hacen las relaciones de Garvey-Kelson, por supuesto, esta aseveración motiva plenamente este trabajo.

La pregunta clave es: ¿Será posible que la información que se encuentra en las 2149 energías de amarre conocidas sea suficiente para conocer o predecir la energía de amarre de todos los núcleos que se encuentran dentro de las líneas de goteo? Es decir, ¿La información del comportamiento de las masas nucleares con la que contamos experimentalmente es suficiente para describir el comportamiento en la región no conocida?

Los patrones mostrados en las figuras 2.5, 2.6, 2.8, 2.9, 2.10 y 2.12 sugieren un enfoque a la predicción de masas nucleares basado en las técnicas de reconstrucción de imágenes [33]. La idea básica es considerar que las más de 2000 diferencias entre los diferentes modelos y las masas nucleares conocidas representan una vista parcial de un arreglo más grande en el plano  $(N,Z)$  y que el resto de las diferencias (alrededor de 7000) que existen entre las líneas de goteo de neutrones y de protones permanecen cubiertas por una “máscara”. De tal manera que la pregunta es ¿Será posible abrir la ventana para revelar el patrón oculto, o al menos parte de él? Mostraremos aquí que efectivamente esta información puede ser revelada utilizando técnicas de reconstrucción de imágenes, al menos para regiones cercanas a las masas medidas experimentalmente. El éxito de esta aproximación depende de que las características físicas asociadas con los patrones puedan ser codificadas y expresadas en términos de regularidades globales en el plano  $(N,Z)$  y por lo tanto modeladas por un número finito de componentes armónicas. Una de las suposiciones

principales de esta aproximación es que las regularidades observadas y la suavidad relativa de la superficie de las diferencias entre masas permanece a través del plano (N,Z) [31]. A pesar de que la superficie de diferencias de masas puede sufrir cambios significativos en un intervalo pequeño, debido por ejemplo a la estructura de capas o las transiciones de forma, no existen saltos súbitos en ella.

Las diferencias entre masas son pensadas como un arreglo bidimensional de pixeles, donde cada núcleo tiene un valor, con N en el eje horizontal y Z en el eje vertical. Estas diferencias entre las masas conocidas experimentales  $m_{\text{expt}}(N, Z)$  y las calculadas por algún modelo definen una función representada en una imagen a color

$$i(N, Z) \equiv m_{\text{th}}(N, Z) - m_{\text{expt}}(N, Z). \quad (3.1)$$

podemos considerar que cualquiera de las imágenes obtenidas con las diferencias entre modelos y masas experimentales está compuesto de tal manera que es el producto de 2 imágenes [20]. La primera imagen contiene la información de las masas de todos los núcleos que se encuentran dentro de las líneas de goteo (aproximadamente 9000 núcleos) y la segunda imagen es una máscara binaria que contiene ceros en todo el plano excepto en las posiciones de las masas conocidas experimentalmente (2149 núcleos), esta máscara multiplica a la primera imagen de tal manera que únicamente podemos ver la información de las masas conocidas experimentalmente. Los 7000 núcleos restantes están ocultos debajo de la máscara. El producto de estas dos imágenes se muestra esquemáticamente en la figura 3.1.

La relación entre  $i(N, Z)$  y el patrón completo esta dada por

$$i(N, Z) = m(N, Z) \cdot w(N, Z), \quad (3.2)$$

donde  $w(N, Z)$  es una función que representa una máscara binaria, la cual toma el valor 1 para las posiciones (N,Z) donde la masa del núcleo en cuestión es conocida y 0 en cualquier otro lugar. Para poder predecir masas nucleares, necesitamos de alguna manera extraer  $m(N, Z)$  de la ecuación 3.2.

### 3.1. Deconvolución, el algoritmo CLEAN

De acuerdo a la discusión anterior, asumimos las imágenes de las diferencias  $i(N, Z)$  como un producto entre la imagen hipotética que contiene las diferencias de todas las masas nucleares existentes dentro de las líneas de goteo  $m(N, Z)$  y una máscara binaria con valor 1 en aquellas posiciones N y Z donde conocemos la masa experimentalmente y con valor 0 en cualquier otro lado  $w(N, Z)$ , si logramos extraer de alguna manera  $m(N, Z)$  de la ecuación 3.2 estaríamos prediciendo las masas nucleares desconocidas.

Al realizar la transformada de Fourier discreta de la ecuación 3.2 y usando el teorema de convolución tenemos

$$I(k_N, k_Z) = M(k_N, k_Z) \otimes W(k_N, k_Z) \quad (3.3)$$

donde  $I(k_N, k_Z)$ ,  $M(k_N, k_Z)$  y  $W(k_N, k_Z)$  representan las transformadas de Fourier discretas de  $i(N, Z)$ ,  $m(N, Z)$  y  $w(N, Z)$  respectivamente.

Si esta convolución puede ser revertida entonces podemos obtener la función  $M(k_N, k_Z)$  ya que  $i(N, Z)$  y  $w(N, Z)$  son conocidas por completo y sus transformadas de Fourier pueden ser evaluadas directamente. Así al conocer  $M(k_N, k_Z)$  podemos obtener finalmente  $m(N, Z)$  realizando la transformada inversa de Fourier.

$$M(k_N, k_Z) = I(k_N, k_Z) \otimes^{-1} W(k_N, k_Z). \quad (3.4)$$

Formalmente esto es un problema de deconvolución, sin embargo el proceso de deconvolución no tiene una solución única.

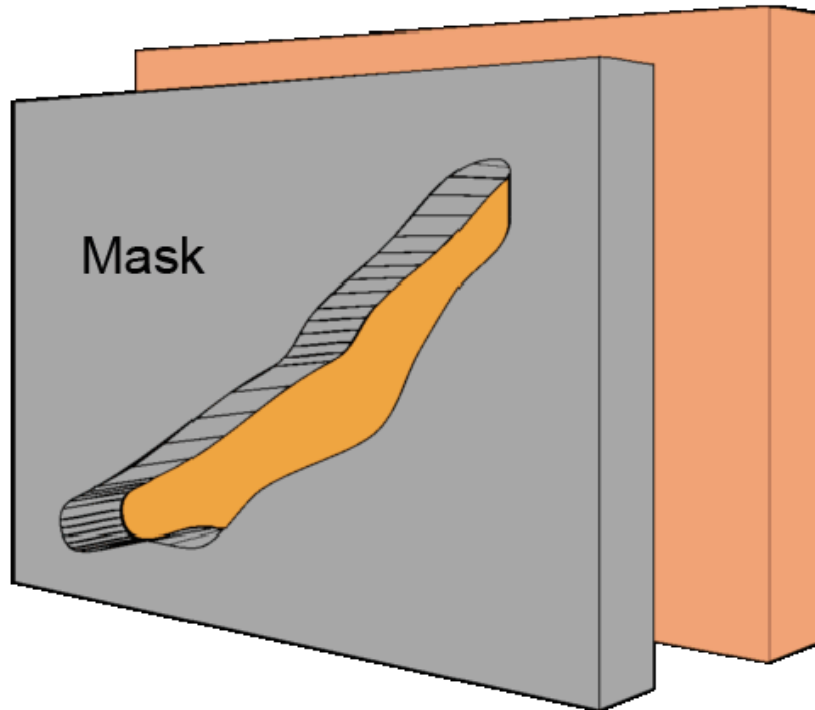


Figura 3.1: Esquema del producto entre las 2 imágenes, la máscara binaria y la imagen donde se encuentra el valor de todas las masas. La imagen resultante es la figura 2.5.

Existen gran cantidad de algoritmos de deconvolución. Todos estos algoritmos intentan escoger una solución que sea compatible con la información disponible y que incluya las características esenciales de esta información. Los algoritmos mas comunes son CLEAN utilizado frecuentemente en radioastronomía [34] y el método de máxima entropía [35]. En el presente trabajo hemos escogido una versión especial del algoritmo CLEAN adaptada para la reconstrucción de texturas [36, 37].

El algoritmo de deconvolución CLEAN fue desarrollado originalmente en el campo de la radio astronomía [34], donde se utiliza para “limpiar” las imágenes del cielo de algunos efectos artificiales que son producidos por las limitaciones de los aparatos de medición. Sin embargo, en las aplicaciones de radio astronomía la falta de información es en el espectro de Fourier lo cual produce una convolución en el espacio de la imagen real. Este escenario es inverso al problema de la reconstrucción de las masas nucleares.

La principal suposición del algoritmo CLEAN es que los patrones remanentes  $i(N, Z)$  pueden ser modelados por un número finito de componentes armónicas. El método CLEAN considera que el espectro de Fourier  $I(k_N, k_Z)$  es una versión corrupta, por la presencia de la máscara, del espectro de Fourier del conjunto completo de datos  $M(k_N, k_Z)$ . Este algoritmo se basa en la detección de aquellas componentes del espectro de Fourier corrupto que proporcionan la mejor explicación a los patrones observados en  $i(N, Z)$ . El objetivo principal del algoritmo es remover el ruido introducido por la máscara y obtener un espectro de Fourier sin corrupción escogiendo aquellas componentes que si pertenecen a la descripción del conjunto de datos. Las componentes seleccionadas se filtran a través de la mascara y con ellas se forma el llamado espectro de Fourier “limpio”. Después se elimina la huella de estas componentes en el espectro corrupto.

El ingrediente principal de la deconvolución con CLEAN es el hecho de que el efecto de la máscara es corromper las amplitudes de las frecuencias pero las posiciones quedan intactas, esto se puede apreciar

con un ejemplo sencillo en una dimensión.

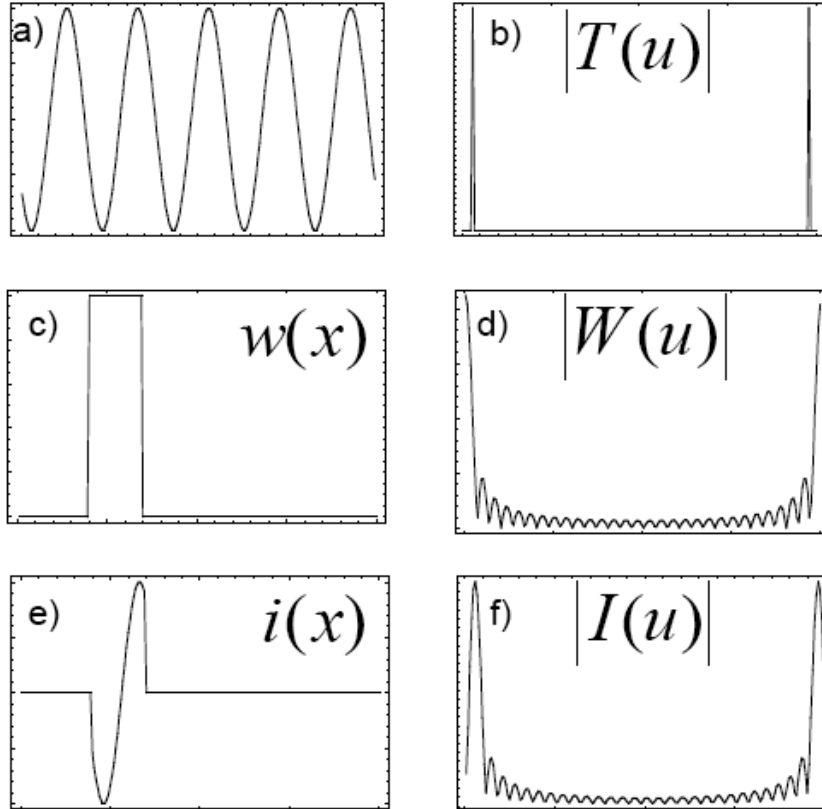


Figura 3.2: a) Señal sinusoidal  $t(x)$ . b) Transformada de Fourier de  $t(x)$ , se puede apreciar que consta de una componente. c) Máscara binaria  $w(x)$ . d) Transformada de Fourier de  $w(x)$ . e) Producto de la señal original y la máscara,  $i(x) = w(x) \cdot t(x)$ . f) Transformada de Fourier de  $i(x)$ ,  $I(u) = W(u) \otimes T(u)$ .

Consideremos una señal en una dimensión constituida únicamente por una componente sinusoidal de amplitud  $A$ , frecuencia  $\hat{u}$  y fase  $\phi$  (Fig. 3.2 panel a).

$$t(x) = A \cos(2\pi \hat{u} x + \phi) \quad (3.5)$$

el espectro de Fourier de esta señal (Fig. 3.2 panel b),  $T(u)$ , está dado por

$$T(U) = a \delta(u - \hat{u}) + a^* \delta(u + \hat{u}) \quad (3.6)$$

donde  $a = \frac{A}{2} e^{i\phi}$ . Este espectro de Fourier únicamente está compuesto por un par de funciones delta de Dirac, las cuales representan una componente.

Ahora supongamos que únicamente podemos observar parte de esta señal,  $i(x)$  (Fig. 3.2 panel e), debido a que esta multiplicada por una máscara binaria  $w(x)$  (Fig. 3.2 panel c).

$$i(x) = w(x) \cdot t(x) \quad (3.7)$$

realizando la transformada de Fourier tenemos la convolución

$$I(u) = T(u) \otimes W(u) \quad (3.8)$$

al expandir esta convolución (Fig. 3.2 panel f) tenemos

$$I(u) = aW(u - \hat{u}) + a^*W(u + \hat{u}) \quad (3.9)$$

El espectro que consistía de una sola frecuencia (eq.3.6) se ha corrompido, el efecto principal es la creación de picos adicionales, es decir, componentes espurias debidas a la presencia de la máscara (Fig. 3.2 panel f). Para recuperar la señal  $t(x)$  a partir de la ecuación 3.9 es necesario llevar a cabo una deconvolución.

Para llevar a cabo la deconvolución es necesario determinar las propiedades que caracterizan la señal original  $t(x)$ , es decir, la frecuencia o posición en el espectro de Fourier de la componente que conforma la señal  $\hat{u}$  y la amplitud de esta  $a$ .

La forma de la máscara garantiza que la componente dominante en su transformada de Fourier,  $W(u)$ , será el término en  $u = 0$ . Debido a esto, solamente se verán afectadas las amplitudes de las componentes de la señal original, las posiciones quedan sin alterar. Es importante notar que las componentes que eran parte de la señal original siguen siendo las de mayor importancia, es decir, las más grandes en el espectro de Fourier corrupto.

Debido a que los efectos de la máscara sobre el espectro completo de Fourier es añadir picos o componentes espurias alrededor de las componentes principales y debido a que estas componentes espurias son de un tamaño mucho menor a las componentes principales y verdaderas del espectro completo, únicamente tenemos que localizar las componentes con amplitud más grandes y determinar las amplitudes correctas a partir de la información que tenemos, es decir, a partir del espectro corrupto  $I(u)$  y de la transformada de Fourier de la máscara  $W(u)$ .

Substituyendo  $u = \hat{u}$  en la ecuación 3.9 tenemos

$$I(\hat{u}) = aW(0) + a^*W(2\hat{u}) \quad (3.10)$$

y usando las propiedades de simetría ante la conjugación obtenemos el valor de  $a$  a partir de  $I(u)$  y  $W(u)$

$$a = \frac{I(\hat{u})W(0) - I^*(\hat{u})W(2\hat{u})}{W(0)^2 - |W(2\hat{u})|^2}. \quad (3.11)$$

A partir del valor de  $a$  podemos obtener la amplitud  $A$  y la fase  $\phi$  de la componente en cuestión, con lo cual tendremos todo lo necesario para reconstruir la señal original  $t(x)$  creando un espectro de Fourier "limpio" y obteniendo la transformada inversa de Fourier.

Para construir el espectro limpio únicamente necesitamos colocar en las posiciones  $\hat{u}$  y  $-\hat{u}$  un par de funciones delta de Dirac con amplitudes  $a$  y  $a^*$  respectivamente. Si son necesarias más de una componente para recuperar la señal original  $t(x)$ , el proceso debe realizarse iterativamente. Pero antes de localizar la siguiente componente es necesario borrar la huella de la anterior en el espectro corrupto, la manera de hacerlo es convolucionando esta componente con la máscara y el resultado restarlo al espectro corrupto, de esta manera generamos el llamado espectro residual

$$R^i(u) = R^{i-1}(u) - (a^iW(u - \hat{u}^i) + (a^i)^*W(u + \hat{u}^i)) \quad (3.12)$$

donde  $i$  es el número de iteración y  $R^0$  es el espectro corrupto  $I(u)$ .

Después de generar el espectro residual, se localiza la componente con mayor amplitud en él y se repite el proceso. Sin embargo es importante considerar que al existir más de una componente en la señal original, en el proceso de convolución la amplitud de las componentes se verá afectada no solamente por la presencia de la máscara sino también por la presencia de las otras componentes, para tomar en cuenta este efecto se introduce el parámetro  $g$  o ganancia, el cual se encuentra en el rango  $(0, 1]$  y determina la proporción de la componente que será tomada en cuenta.

Generalizar a 2 dimensiones es trivial, el algoritmo de deconvolución y reconstrucción de imágenes en 2 dimensiones tiene la siguiente forma.

1. Encontrar la posición de la componente  $i$ , la cual se encuentra en el valor máximo  $(\hat{k}_N^i, \hat{k}_Z^i)$  de  $|R^{i-1}(k_N, k_Z)|$ .
2. Calcular la amplitud verdadera  $a^i$  usando la fórmula

$$a^i = g \cdot \frac{I(\hat{k}_N^i, \hat{k}_Z^i)W(0, 0) - I^*(\hat{k}_N^i, \hat{k}_Z^i)W(2\hat{k}_N^i, 2\hat{k}_Z^i)}{W(0, 0)^2 - |W(2\hat{k}_N^i, 2\hat{k}_Z^i)|^2} \quad (3.13)$$

3. Generar el espectro residual  $i$

$$R^i(k_N, k_Z) = R^{i-1} - [a^i W(k_N - \hat{k}_N^i, k_Z - \hat{k}_Z^i) + (a^i)^* W(k_N + \hat{k}_N^i, k_Z + \hat{k}_Z^i)] \quad (3.14)$$

4. Actualizar el espectro limpio colocando un par de funciones delta de Dirac en las posiciones  $(\hat{k}_N^i, \hat{k}_Z^i)$

$$C^i(k_N, k_Z) = C^{i-1} + [a^i \delta(k_N - \hat{k}_N^i, k_Z - \hat{k}_Z^i) + (a^i)^* \delta(k_N + \hat{k}_N^i, k_Z + \hat{k}_Z^i)] \quad (3.15)$$

5. Si el número máximo de iteraciones se ha alcanzado entonces el proceso se detiene, de otra manera regresar al paso número 1

Una vez que el proceso iterativo se detuvo, se obtiene la señal original realizando la transformada inversa del espectro limpio.

Este algoritmo se ha programado en Fortran y en Mathematica con el objetivo de aplicarlo a las diferencias entre los valores experimentales de las masas nucleares y los valores calculados por los modelos teóricos expuestos en la sección anterior. Utilizando el algoritmo CLEAN es posible extrapolar los patrones remanentes obtenidos con las diferencias de masas definida formalmente como

$$\Delta m = m_{exp}(N, Z) - m_{teo}(N, Z) \quad (3.16)$$

donde  $m_{exp}(N, Z)$  son las masas experimentales y  $m_{teo}$  son las masas predichas por algún modelo. Una vez que el patrón extrapolado es obtenido es posible predecir masas nucleares sumando las masas predichas por el modelo

$$m(N, Z) = \Delta m_{ext}(N, Z) + m_{teo}(N, Z) \quad (3.17)$$

donde  $\Delta m_{ext}(N, Z)$  es el patrón extrapolado.

Como ya se mencionó anteriormente, el proceso de deconvolución no es único. Algunas consideraciones con respecto a la estabilidad del algoritmo CLEAN y la variabilidad de la solución deben ser tomadas en cuenta. Existen 3 puntos a considerar, el criterio para terminar las iteraciones dentro del algoritmo, el parámetro de ganancia y el tamaño del espacio de funciones que se utilizaran para realizar las transformadas de Fourier.

El algoritmo CLEAN en cada iteración selecciona la frecuencia principal en el espectro residual, este proceso lo lleva a cabo consecutivamente hasta que algún criterio para detener el programa se hace válido. El criterio puede ser el número de iteraciones, sin embargo esto es muy ambiguo debido a que carecemos de la información necesaria para saber cuantas componentes principales tiene el espectro que intentamos obtener, debido a esto es mejor escoger criterios que de alguna manera considere un umbral para el tamaño de las frecuencias que se consideraran como verdaderas y para las frecuencias que se consideraran únicamente como ruido, realizar este proceso en el espectro de Fourier es simple pero de nuevo ambiguo debido a que no tenemos información del tamaño mínimo con el que cuentan las frecuencias en el espectro que intentamos reproducir. Sin embargo, es posible considerar este nivel de ruido en el espacio de la imagen al calcular el rms con los datos de entrada, los datos conocidos inicialmente. En todos los



cálculos realizados se detuvo el programa después de alcanzar un rms entre los datos de entrada y los datos reconstruidos de  $\sigma = 100$  keV.

Al seleccionar una frecuencia, el algoritmo CLEAN considera que esta frecuencia es por completo una componente principal y que el cambio en la amplitud en ésta es únicamente debido a la corrupción de la máscara, sin embargo también es posible que algún pico espurio perteneciente a otra componente principal se localice exactamente en la posición de la primera frecuencia, lo cual afectaría la amplitud de ésta. Para tomar en cuenta este efecto, la amplitud calculada por la ecuación 3.11 se multiplica por el parámetro de ganancia  $g$ , el cual puede tener valores entre 0 y 1, de tal manera que en vez de tomar toda la componente solamente se tome un porcentaje de ella. Valores pequeños de la ganancia son mejores en cuanto a la estabilidad del algoritmo se refiere, por lo cual, siempre usamos  $g = 0.1$ .

Por último, es importante considerar el tamaño de la ventana en la cual se hace la reconstrucción, es decir, los límites para el número de neutrones y el número de protones. El tamaño de la ventana es importante debido a que éste determina el número de funciones de la base de Fourier en la cual es expandida la función que representa a la superficie de las diferencias de masa. El escoger ventanas de tamaño muy grande nos permite tener muchas más funciones armónicas con las cuales reproducir el patrón esperado. Lo ideal sería tener una ventana de tamaño infinito, sin embargo esto no es posible, el gasto computacional depende principalmente de la ventana. En este trabajo de investigación se escogió una ventana de dimensiones lo suficientemente grandes como para considerar que se tiene una base capaz de representar la superficie de diferencias de masas, el tamaño de esta es de 1050 unidades en el número de neutrones y 630 en el número de protones.

Con respecto a los datos de entrada es importante tomar una consideración extra. Las predicciones de la mayoría de los modelos teóricos tienen dificultades en la región de los núcleos ligeros, esto es debido a que por lo general, los modelos consideran una parte macroscópica la cual asume al núcleo como una gota cargada de líquido incompresible, sin embargo esta suposición falla por completo en las regiones donde hay muy pocos nucleones. En estas regiones el número de partículas es tan pequeño que el comportamiento de partícula independiente es el único evidente. La diferencia de masas entre las conocidas experimentales y aquellas predichas por los modelos se comporta con desviaciones bruscas en la región de los núcleos ligeros y deja de ser suave, lo cual afecta considerablemente el rendimiento del algoritmo de reconstrucción. Debido a esto, todas las pruebas que se presentan en este trabajo consideran únicamente aquellos núcleos con un número de neutrones y un número de protones mayores a 28.

Utilizando estas condiciones, se puede asegurar que el algoritmo es estable con respecto al tamaño de las ventanas utilizadas y al valor del parámetro de ganancia, la mezcla de un valor pequeño para el parámetro de ganancia y un tamaño de la ventana lo suficientemente grande crea estabilidad en la predicción de CLEAN. La figura 3.3 muestra una reconstrucción típica obtenida después de aplicar el algoritmo al patrón obtenido con las diferencias entre las masas predichas por el modelo de la gota y las masas experimentales reportadas en AME03.

La reconstrucción mostrada en la figura 3.3 presenta características interesantes, por ejemplo en el cruce de los números mágicos  $N=82$  y  $Z=28$  se puede observar una estructura similar a las presentadas en los cruces de números mágicos en la imagen de las diferencias originales (figura 2.5), esta desviación con respecto a la energía de amarre del modelo de la gota es de  $\Delta m_{ext}(82, 28) = 4.484$  MeV. Lo mismo aunque en menor grado sucede en los cruces de los números mágicos  $N=82$  y  $Z=82$  así como en el cruce  $N=126$  y  $Z=50$  con desviaciones de  $\Delta m_{ext}(82, 82) = 4.096$  MeV y  $\Delta m_{ext}(126, 50) = 2.307$  MeV respectivamente. La reconstrucción también presenta algunas zonas donde se aprecia una energía de amarre mayor a la del promedio que en este caso es el modelo de la gota, estas zonas podrían asociarse con islas de estabilidad. Estas regiones están centradas alrededor de los siguientes núcleos,  $\Delta m_{ext}(156, 82) = 4.085$  MeV,  $\Delta m_{ext}(126, 100) = 3.806$  MeV,  $\Delta m_{ext}(150, 66) = 3.617$  MeV,  $\Delta m_{ext}(156, 120) = 2.570$  MeV y  $\Delta m_{ext}(180, 102) = 2.484$  MeV. También aparecen algunas regiones que muestran efectos de deformación.

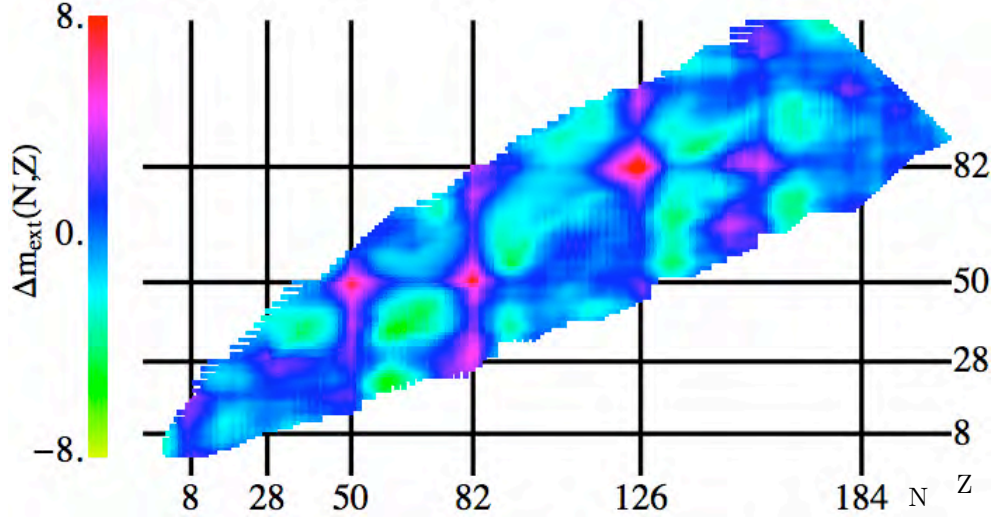


Figura 3.3: Reconstrucción obtenida después de aplicar el algoritmo de deconvolución CLEAN a las diferencias entre las masas predichas por el modelo de la gota y las masas experimentales reportadas en la compilación AME03.

### 3.2. Pruebas de predicción

La figura 3.3 muestra que es posible utilizar la información de las masas conocidas para predecir nuevas utilizando el método de deconvolución y reconstrucción de imágenes CLEAN sobre los patrones obtenidos al considerar las diferencias entre las masas conocidas experimentalmente y las masas obtenidas mediante un modelo. Al considerar este patrón como debido a los efectos físicos que no están presentes en el modelo, a través del algoritmo CLEAN es posible parametrizar estos efectos y predecir que forma tiene esta superficie en la región no conocida. La reconstrucción obtenida presenta el mismo tipo de estructuras que el patrón inicial y sin duda alguna es plausible utilizarla para generar las masas nucleares en toda la región dentro de las líneas de goteo, con esta técnica podemos predecir cerca de 7000 masas que se encuentran en la región no medida experimentalmente. Sin embargo es importante no olvidar que el algoritmo CLEAN trabaja sobre las predicciones ya existentes de un modelo y es necesario cuantificar la calidad de estas predicciones, su precisión y el alcance de su validez en el plano  $(N,Z)$ . Con esto en mente, se presentan a continuación una serie de pruebas que pretenden cuantificar el desempeño del algoritmo CLEAN.

Las pruebas de predicción [32] consisten en dividir el conjunto de datos conocidos experimentalmente, la compilación AME03, en 2 subconjuntos. El primero de ellos se utilizará para generar el patrón de entrada para el algoritmo CLEAN obteniendo las diferencias entre las masas experimentales y algún modelo teórico que previamente se ajustó utilizando únicamente este conjunto de datos, este subconjunto debe ser lo suficientemente grande como para suponer que en el patrón obtenido se encuentra toda la información necesaria para predecir las masas faltantes, a este subconjunto de datos lo llamamos el subconjunto de “ajuste”. El otro subconjunto consiste en todos aquellos núcleos que se encuentran en la compilación AME03 y no están incluidos en el subconjunto de ajuste, por definición este subconjunto es mucho más pequeño y lo llamaremos el subconjunto de “predicción”, el predecir las masas de los núcleos pertenecientes a este subconjunto es la finalidad de las pruebas.

La predicción del algoritmo CLEAN en los núcleos pertenecientes al subconjunto de predicción se compara con el valor experimental de su masa y con la predicción del modelo utilizado para generar el patrón, esta comparación se lleva a cabo a través de la obtención del rms. Algunos de los modelos teóricos requieren de un trabajo impresionante para ajustarlos a nuevos subconjuntos de datos lo cual hace imposible para nosotros el utilizarlos en estas pruebas de predicción, debido a esto utilizaremos únicamente 3 modelos en estas pruebas. El modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota incluyendo

correcciones microscópicas (LDMM) y el modelo de Duflo-Zuker (DZ).

### 3.2.1. La prueba AME95-03

La elección de la primera prueba resulta obvia, en el capítulo anterior se presentó como una manera de evaluar el desempeño de los modelos teóricos las predicciones de aquellos núcleos medidos entre la compilación AME95 y la compilación AME03 partiendo de las masas reportadas en AME95. En esta prueba el subconjunto de ajuste constaba de 1760 núcleos y el objetivo era predecir 389 núcleos, (ver figura 2.16). Si restringimos estos subconjuntos a aquellos núcleos que cumplan con la restricción  $N \geq 28$  y  $Z \geq 28$  se cuenta con un subconjunto de ajuste con 1454 núcleos mientras que el subconjunto de predicción incluye 371 núcleos. A esta prueba la llamaremos prueba de predicción AME95-03.

Tabla 3.1: Prueba de predicción AME95-03. Desviación cuadrática media (rms) sobre los 371 núcleos pertenecientes al subconjunto de predicción, para el modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota con correcciones microscópicas (LDMM) y el modelo de Duflo-Zuker (DZ), así como la versión de estos modelos utilizando el algoritmo CLEAN.

Modelo	rms $\sigma$	rms $\sigma$ (con CLEAN)
LDM	1.930 MeV	0.876 MeV
LDMM	0.995 MeV	0.371 MeV
DZ	0.338 MeV	0.279 MeV

La tabla 3.1 muestra los rms obtenidos para el modelo de la gota, el modelo de la gota más correcciones microscópicas y el modelo de Duflo-Zuker en esta prueba, así como el rms obtenido después de realizar la reconstrucción del patrón y modificar las masas de los modelos agregando el patrón extrapolado. Es importante notar que en los tres casos, el algoritmo CLEAN ha logrado mejorar el rms de cada uno de los modelos, es decir el patrón extrapolado con CLEAN que se agrega a las predicciones de cada uno de los modelos introduce en ellos parte de los efectos físicos que no incluían. En esta prueba se logra mejorar la predicción del modelo de la gota con correcciones microscópicas en un  $\sim 62\%$ . El rms mejorado es sorpresivamente comparable con el rms correspondiente al modelo de Duflo-Zuker. Para el modelo de la gota encontramos una gran reducción en el rms de  $\sim 54\%$  mientras que para el modelo de Duflo-Zuker la mejora es de únicamente del  $\sim 20\%$ . El hecho de que para este modelo la mejora sea menor es comprensible debido a que el modelo de Duflo-Zuker cuenta con una precisión muy buena al predecir masas experimentales y el patrón obtenido tiene una escala muy pequeña, sin embargo la reducción en el rms es aún significativa.

Las reconstrucciones  $\Delta m_{ext}(N, Z)$  realizadas por el algoritmo CLEAN para el modelo de la gota, el modelo de la gota con correcciones microscópicas y el modelo de Duflo-Zuker se muestran en las figuras 3.4a, 3.4c y 3.4e respectivamente. Se puede observar como para cada uno de los casos el algoritmo de reconstrucción trabaja en diferentes escalas y como realmente captura las características primordiales del patrón a extrapolar, distribuyéndolas a lo largo de toda la tabla de isótopos. Las figuras 3.4b, 3.4d y 3.4f presentan la diferencia entre el patrón extrapolado  $\Delta m_{ext}(N, Z)$  y el patrón obtenido a través de las diferencias entre la predicción del modelo y las masas experimentales  $\Delta m_{exp}(N, Z)$ , es decir muestra el error en el algoritmo CLEAN y como está distribuido en los núcleos pertenecientes al subconjunto de predicción para el modelo de la gota, el modelo de la gota con correcciones microscópicas y el modelo de Duflo-Zuker respectivamente. Es notable como las zonas de error están bien localizadas y los núcleos cuyo error es muy cercano a cero son la mayoría.

Con respecto a las relaciones de Garvey-Kelson, es de esperarse que la manera en que se ven satisfechas por cada uno de los modelos sea mejorada al aumentar  $\Delta m_{ext}(N, Z)$ . En el caso de los tres modelos utilizados, la deficiencia con respecto a las relaciones de Garvey-Kelson es que estas relaciones se satisfacen demasiado bien, no existe una fluctuación intrínseca que se presenta al utilizar las relaciones sobre los datos experimentales, ver figuras 2.17, 2.18, 2.21 y 2.12. Además, como se mencionó anteriormente,

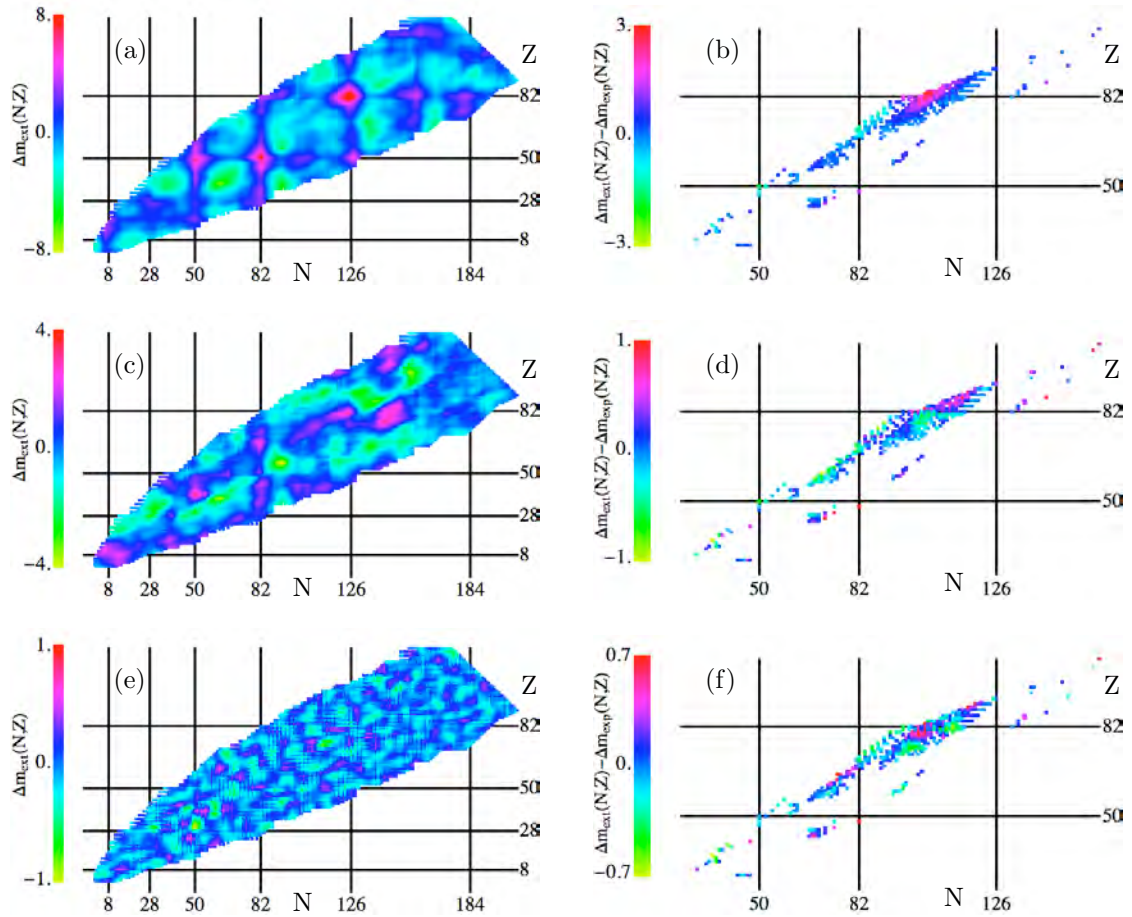


Figura 3.4: Prueba AME9503. Los paneles (a), (c) y (e) muestran las reconstrucciones realizadas por el algoritmo CLEAN  $\Delta m_{ext}(N, Z)$  para el modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota más correcciones microscópicas (LDMM) y el modelo de Dufflo-Zuker (DZ) respectivamente. Los paneles (b), (d) y (f) muestran la diferencia entre la reconstrucción y el patrón original  $\Delta m_{ext}(N, Z) - \Delta m_{exp}(N, Z)$  para aquellos núcleos que se encuentran en el subconjunto de predicción, para el modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota más correcciones microscópicas (LDMM) y el modelo de Dufflo-Zuker (DZ) respectivamente.

el rms de las relaciones sobre la región predicha (cerca de 7000 núcleos) es mucho mayor que el rms de la región ajustada, lo cual no debería de ocurrir si suponemos que las relaciones de Garvey-Kelson se satisfacen de igual manera a lo largo de la tabla de isótopos. La tabla 3.2 muestra los rms obtenidos al aplicar las relaciones sobre las predicciones de estos modelos y su versión mejorada con CLEAN, tanto para la región de ajuste como para el resto de los núcleos que se encuentran dentro de las líneas de goteo. Para cada uno de los modelos el rms aumentó lo cual es correcto ya que de esta manera se acerca al obtenido al aplicar las relaciones sobre las masas experimentales, también mostrado en la tabla 3.2. Así mismo, la diferencia entre el rms sobre la región de ajuste y el rms en el resto de los núcleos se ve reducida con lo cual las relaciones se satisfacen consistentemente. Estas mejoras en la consistencia son debidas a que el algoritmo de reconstrucción CLEAN aumenta la fluctuación en las predicciones de cada uno de los modelos. Las figuras 3.5b, 3.5c y 3.5d muestran al compararlas con las figuras 2.17, 2.18 y 2.21, las fluctuaciones agregadas por el algoritmo CLEAN. Estas fluctuaciones son de carácter muy parecido a las que presentan las masas experimentales al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson sobre ellas, mostradas en la figura 3.5a.

Los resultados obtenidos con el rms así como la consistencia con las relaciones de Garvey-Kelson demuestran que el algoritmo CLEAN es capaz de mejorar las predicciones de los modelos teóricos uti-

Tabla 3.2: Prueba de predicción AME95-03, consistencia con las relaciones de Garvey-Kelson. Desviación cuadrática media (rms) al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson sobre las masas experimentales y las obtenidas con el modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota con correcciones microscópicas (LDMM) y el modelo de Dufflo-Zuker (DZ), así como la versión de estos modelos utilizando el algoritmo CLEAN para la región de ajuste en esta prueba (1454 núcleos) y la región predicha dentro de las líneas de goteo ( $\sim 7000$  núcleos).

Modelo	rms $\sigma$ (ajuste)	rms $\sigma$ (predicción)
Masas experimentales	0.109 MeV	
LDM	0.004 MeV	0.010 MeV
LDM + CLEAN	0.045 MeV	0.042 MeV
LDMM	0.006 MeV	0.012 MeV
LDMM + CLEAN	0.046 MeV	0.043 MeV
DZ	0.017 MeV	0.058 MeV
DZ + CLEAN	0.024 MeV	0.061 MeV

lizados. Sin embargo el rms es únicamente una medida de cómo se comporta el algoritmo en promedio. Es importante ver más de cerca el desempeño de la reconstrucción. Para este objetivo, la superficie de las energías de separación de 2 neutrones  $S_{2n}$  permite analizar de una manera más simple la estructura de la reconstrucción que la superficie de masas. La energía de separación de dos neutrones,  $S_{2n} = BE(N, Z) - BE(N - 2, Z)$ , contiene información detallada de los efectos debidos a la estructura nuclear. Las figuras 3.6, 3.7 y 3.8 muestran en líneas azules la energía de separación de 2 neutrones en la región  $N \sim 78-128$  para el modelo de la gota, el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas y el modelo de Dufflo-Zuker respectivamente. Las predicciones calculadas por el modelo se muestran en la parte (a) de cada una de las figuras y las predicciones del modelo mejorado con el algoritmo CLEAN en la parte (b). También se muestra en todas las figuras las energías de separación de 2 neutrones calculadas a partir de las masas experimentales, en líneas rojas para los núcleos utilizados al ajustar los modelos y en líneas verde para los núcleos que se intentan predecir en la prueba AME95-03. Todas las líneas unen cadenas de isótopos es decir núcleos con el mismo número de protones.

Las predicciones del modelo de la gota, como lo muestra la figura 3.6 son completamente planas, no contienen ningún tipo de estructura. Sin embargo, los datos experimentales muestran una variación abrupta en los números mágicos  $N=82$  y  $126$  y algunas subestructuras cerca alrededor de  $N \sim 90$ . El modelo de la gota falla por completo en la descripción de estas estructuras y podemos apreciar como en efecto únicamente predice las masas nucleares en promedio. Al agregar la reconstrucción de CLEAN estas estructuras se describen correctamente en la región de ajuste, a su vez, las estructuras debidas a la estructura de capas en los números mágicos aparecen sobre la región a predecir. Sin embargo, aparecen también estructuras adicionales que a pesar de ser pequeñas en magnitud no aparecen en los datos experimentales (región en verde). Para minimizar estos efectos es necesario imponer constricciones adicionales lo cual puede ser realizado al utilizar un modelo teórico más preciso para generar el patrón a extrapolar, por ejemplo el modelo de la gota que incluye correcciones microscópicas.

En el modelo de la gota que incluye correcciones microscópicas se incorporan los números mágicos desde el principio, por lo cual las discontinuidades que presentan los datos experimentales en los números mágicos son descritas correctamente por las predicciones del modelo. Sin embargo, estas predicciones son planas entre los números mágicos y no presentan ningún tipo de subestructura similar a la que se encuentra alrededor de  $N \sim 90$  en los datos experimentales. Después de aplicar la reconstrucción esta subestructura es descrita correctamente y las estructuras espurias que aparecían en el caso del modelo anterior han desaparecido. La predicción se hace mas suave debido a que el patrón a extrapolar se encontraba en una escala mucho mas pequeña. Las correcciones microscópicas añadidas al modelo de la gota son suficientes como constricción para desaparecer las estructuras espurias que aparecen en la reconstrucción con el modelo de la gota.

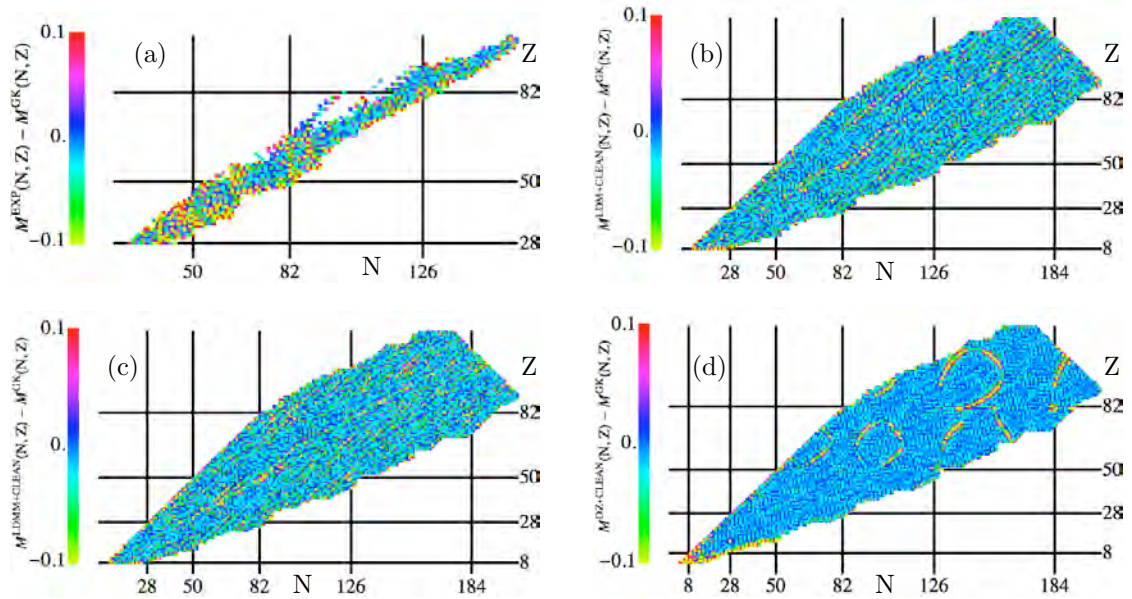


Figura 3.5: (a) Diferencias entre las masas experimentales y las obtenidas al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson sobre ellas mismas. Las partes (b), (c) y (d) muestran la diferencia entre las masas nucleares predichas y las obtenidas al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson para el modelo de la gota, el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas y el modelo de Duflo-Zuker mejorados con CLEAN respectivamente.

En el caso del modelo de Duflo-Zuker presenta ambos tipos de estructuras, tanto las debidas a los efectos de capa centradas en los números mágicos como la subestructura debida a la deformación cercana a  $N \sim 90$ , sin embargo si observemos cuidadosamente, estas estructuras solo se describen en promedio. El patrón obtenido con el modelo de Duflo-Zuker es de una escala mucho menor al de los otros dos modelos debido a que el modelo describe de una manera muy buena las estructuras en la superficie de masas, al aplicar la reconstrucción sobre este, el único efecto producido es el modificar un poco las suavidad de estas subestructuras, esta pequeña modificación es suficiente para mejorar el rms en  $\sim 20\%$ . En los tres casos, el efecto de CLEAN es el de agregar textura a las superficies demasiado planas de los modelos teóricos lo cual se ve corroborado por los resultados de las pruebas de consistencia con las relaciones de Garvey-Kelson descritas anteriormente.

### 3.2.2. Prueba del borde

La imagen 2.13 muestra que la mayoría de los modelos son diferentes entre sí incluso uno o dos núcleos después de la zona de las masas conocidas experimentalmente. Por otro lado la suavidad de las superficies de las masas y sus derivadas es considerada como una propiedad esencial que cumplen los datos experimentales y que deben cumplir los modelos teóricos. Es importante cuantificar la suavidad de las predicciones realizadas con el algoritmo de deconvolución CLEAN y el desempeño específico de estas predicciones en la zona inmediata a la región conocida. Con este objetivo se creó la siguiente prueba a la cual llamamos prueba del borde. Se tomó como subconjunto a predecir todos aquellos núcleos que se encuentran en el borde de la región conocida experimentalmente, y como conjunto de ajuste todos los demás núcleos. La figura 3.9 muestra los 1524 núcleos pertenecientes al subconjunto de ajuste en rojo y los 301 núcleos pertenecientes al subconjunto de predicción en amarillo.

Los resultados de esta prueba son similares a los de la prueba anterior. La tabla 3.3 muestra la desviación cuadrática media (rms) sobre los 301 núcleos a predecir de el modelo de la gota, el modelo de la gota con correcciones microscópicas y el modelo de Duflo-Zuker así como la versión mejorada de

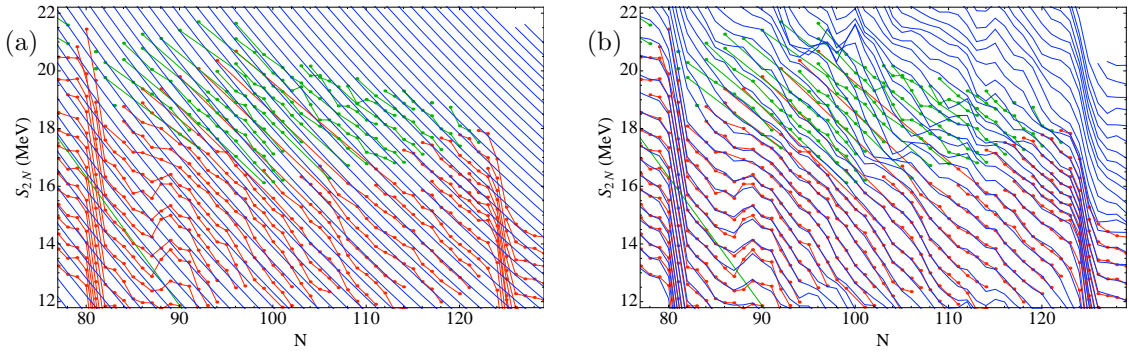


Figura 3.6: Prueba AME95-03: Energía de separación de 2 neutrones  $S_{2n}$ . Las líneas unen núcleos con el mismo número de protones. En azul se muestran la energía de separación de 2 neutrones predichas por: (a) el modelo de la gota y (b) el modelo de la gota mejorado con la reconstrucción del algoritmo CLEAN. El valor de  $S_{2n}$  obtenido a partir de las masas experimentales se muestra en rojo para los núcleos pertenecientes al subconjunto de ajuste y en verde para los núcleos en el subconjunto de predicción.

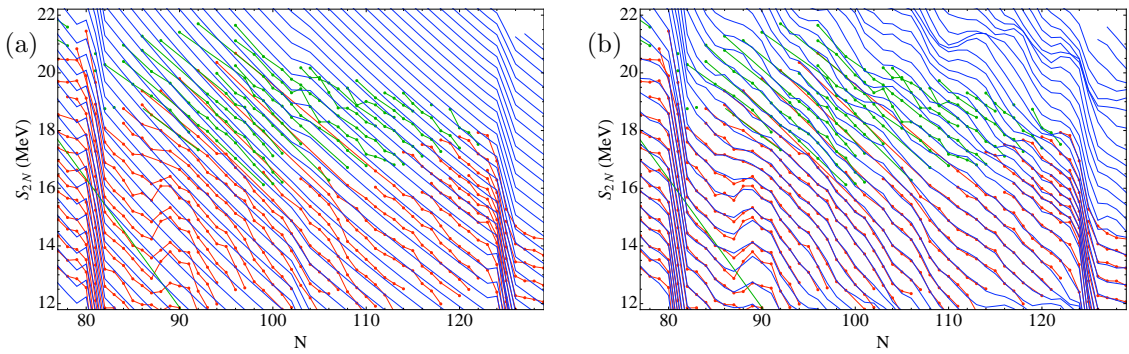


Figura 3.7: Prueba AME95-03: Energía de separación de 2 neutrones  $S_{2n}$ . Las líneas unen núcleos con el mismo número de protones. En azul se muestran la energía de separación de 2 neutrones predichas por: (a) el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas y (b) el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas mejorado con la reconstrucción del algoritmo CLEAN. El valor de  $S_{2n}$  obtenido a partir de las masas experimentales se muestra en rojo para los núcleos pertenecientes al subconjunto de ajuste y en verde para los núcleos en el subconjunto de predicción.

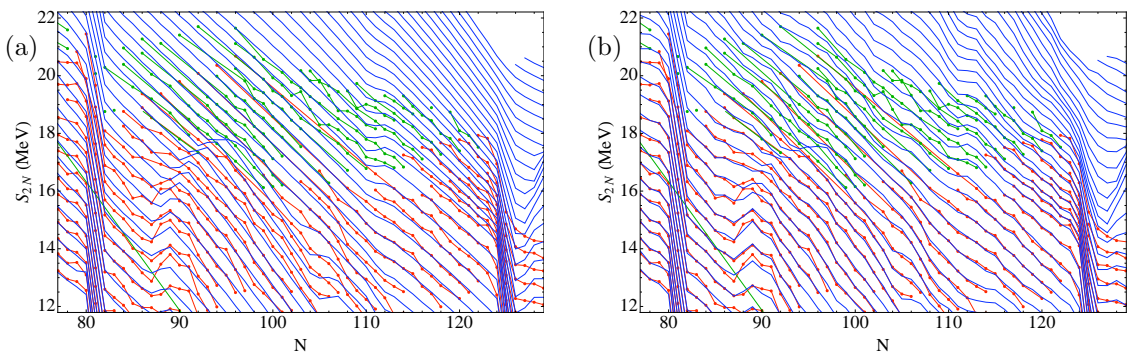


Figura 3.8: Prueba AME95-03: Energía de separación de 2 neutrones  $S_{2n}$ . Las líneas unen núcleos con el mismo número de protones. En azul se muestran la energía de separación de 2 neutrones predichas por: (a) el modelo de Duﬂo-Zuker y (b) el modelo de Duﬂo-Zuker mejorado con la reconstrucción del algoritmo CLEAN. El valor de  $S_{2n}$  obtenido a partir de las masas experimentales se muestra en rojo para los núcleos pertenecientes al subconjunto de ajuste y en verde para los núcleos en el subconjunto de predicción.

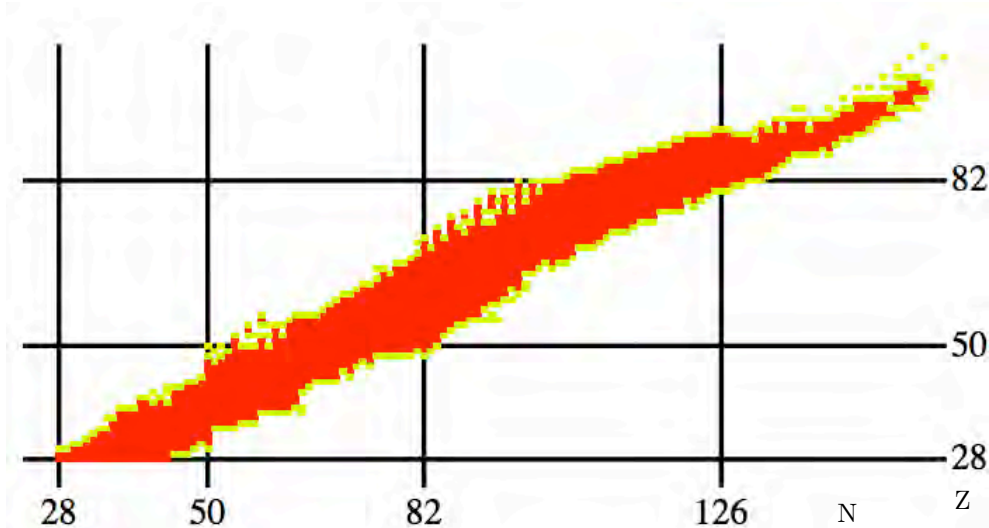


Figura 3.9: Núcleos utilizados en la prueba de predicción “borde”, en rojo se muestran aquellos núcleos pertenecientes al subconjunto de ajuste. En amarillo se muestra aquellos núcleos que conforman el conjunto a predecir.

cada uno de estos modelos al agregar la respectiva reconstrucción de CLEAN. Lo primero que hay que notar es que esta prueba es mucho más difícil como se ve reflejado al comparar los rms obtenidos en esta prueba con los obtenidos en la anterior a pesar de que el número de núcleos a predecir es incluso menor. El hecho de que sea más difícil es debido a que esta prueba consiste en extrapolación por completo, los núcleos a predecir tienen muy pocos vecinos debido a la definición misma de la prueba. Sin embargo, aún así el algoritmo CLEAN es capaz de mejorar las predicciones realizadas por el modelo en cada uno de los casos. A diferencia de la prueba anterior, la mejora más significativa en este caso ocurre para el modelo de la gota, aproximadamente 66 %. Seguido del modelo de la gota que incluye correcciones microscópicas el cual se ve mejorado por el algoritmo CLEAN en un 52 %. Una vez más, el rms en el caso del modelo de Duflo-Zuker decrece en un 20 % aproximadamente.

Tabla 3.3: Prueba de predicción “borde”. Desviación cuadrática media (rms) sobre los 301 núcleos pertenecientes al subconjunto de predicción, para el modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota con correcciones microscópicas (LDMM) y el modelo de Duflo-Zuker (DZ), así como la versión de estos modelos utilizando el algoritmo CLEAN.

Modelo	rms $\sigma$	rms $\sigma$ (con CLEAN)
LDM	2.776 MeV	0.9168 MeV
LDMM	1.980 MeV	0.933 MeV
DZ	0.403 MeV	0.313 MeV

Las figuras 3.10a, 3.10c y 3.10e muestran las reconstrucciones  $\Delta m_{ext}(N, Z)$  realizadas por el algoritmo CLEAN sobre esta prueba para el modelo de la gota, el modelo de la gota con correcciones microscópicas y el modelo de Duflo-Zuker respectivamente. De nuevo se observa las diferentes escalas en las que trabaja el algoritmo y cómo realmente captura las características primordiales del patrón a extrapolar, distribuyéndolas a lo largo de toda la tabla de isótopos. Es importante notar que estas reconstrucciones tienen aproximadamente las mismas estructuras y características que las reconstrucciones de la prueba anterior (figuras 3.4a, 3.4c y 3.4e), lo cual muestra cierta consistencia con respecto a las soluciones seleccionadas por el algoritmo al problema de convolución y estabilidad frente a los datos de entrada. Las figuras 3.10b, 3.10d y 3.10f presentan la diferencia entre el patrón extrapolado  $\Delta m_{ext}(N, Z)$  y el patrón obtenido a través de las diferencias entre la predicción del modelo y las masas experimentales  $\Delta m_{exp}(N, Z)$ , es



decir muestra el error en el algoritmo CLEAN y cómo está distribuido en los núcleos pertenecientes al subconjunto de predicción para el modelo de la gota, el modelo de la gota con correcciones microscópicas y el modelo de Dufflo-Zuker respectivamente.

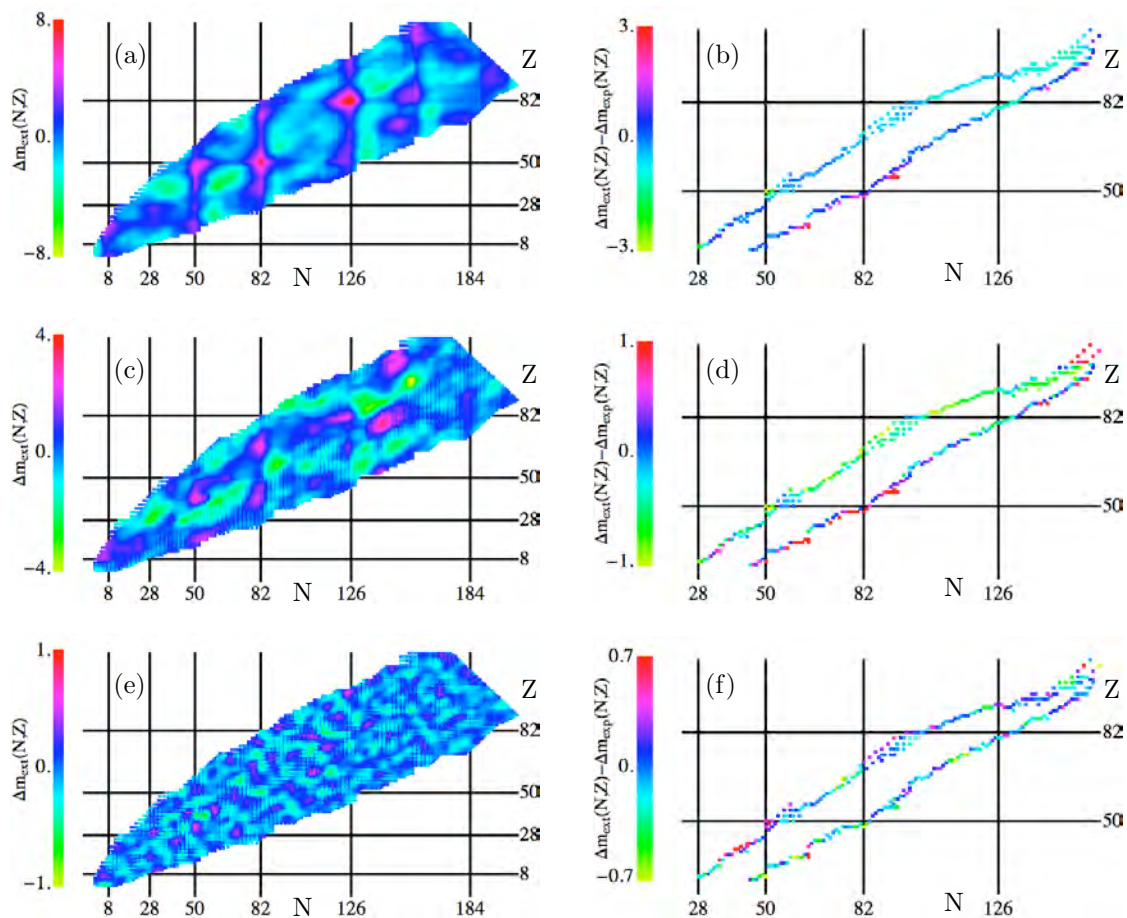


Figura 3.10: Prueba del “borde”. Los paneles (a), (c) y (e) muestran las reconstrucciones realizadas por el algoritmo CLEAN  $\Delta m_{ext}(N, Z)$  para el modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota más correcciones microscópicas (LDMM) y el modelo de Dufflo-Zuker (DZ) respectivamente. Los paneles (b), (d) y (f) muestran la diferencia entre la reconstrucción y el patrón original  $\Delta m_{ext}(N, Z) - \Delta m_{exp}(N, Z)$  para aquellos núcleos que se encuentran en el subconjunto de predicción, para el modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota más correcciones microscópicas (LDMM) y el modelo de Dufflo-Zuker (DZ) respectivamente.

A pesar de que en esta prueba los núcleos a predecir están dispersos a lo largo de la tabla de isótopos es útil el analizar las estructuras que aparecen debido a la reconstrucción. Por lo cual, las figuras 3.11, 3.12 y 3.13 muestran la superficie de las energías de separación de 2 neutrones  $S_{2n}$  en la región  $N \sim 110-160$ . La relación de los colores es la misma que en el caso de la prueba anterior. Nuevamente es posible apreciar cómo las predicciones del modelo de la gota son planas por completo y no contienen información alguna acerca de los efectos debidos a la estructura nuclear, efectos que aparecen al añadir la reconstrucción de CLEAN, se puede apreciar como la estructura debida a los efectos de capa aparecen en el número mágico  $N=126$  y un nuevo número mágico aparece alrededor de  $N=156$ . También es posible apreciar varias subestructuras entre estos dos números mágicos y una estructura grande debido a efectos de deformación nuclear en la parte inferior de la figura 3.11. Las fluctuaciones añadidas por la reconstrucción forman estructuras semejantes a las que aparecen comúnmente debido a la estructura nuclear, sin embargo, tal como en el caso anterior, estas desviaciones son algo bruscas y les hace falta suavidad, una vez más es posible dotar a las predicciones de esta suavidad agregando correcciones microscópicas

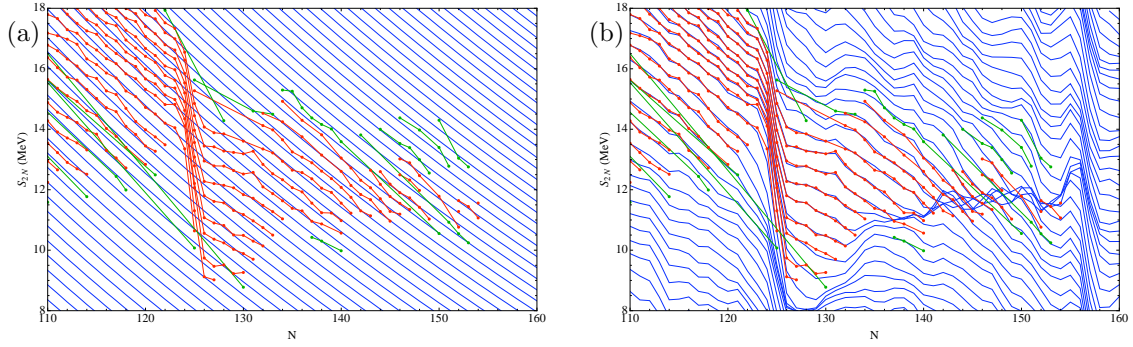


Figura 3.11: Prueba del borde: Energía de separación de 2 neutrones  $S_{2n}$ . Las líneas unen núcleos con el mismo número de protones. En azul se muestran la energía de separación de 2 neutrones predichas por: (a) el modelo de la gota y (b) el modelo de la gota mejorado con la reconstrucción del algoritmo CLEAN. El valor de  $S_{2n}$  obtenido a partir de las masas experimentales se muestra en rojo para los núcleos pertenecientes al subconjunto de ajuste y en verde para los núcleos en el subconjunto de predicción.

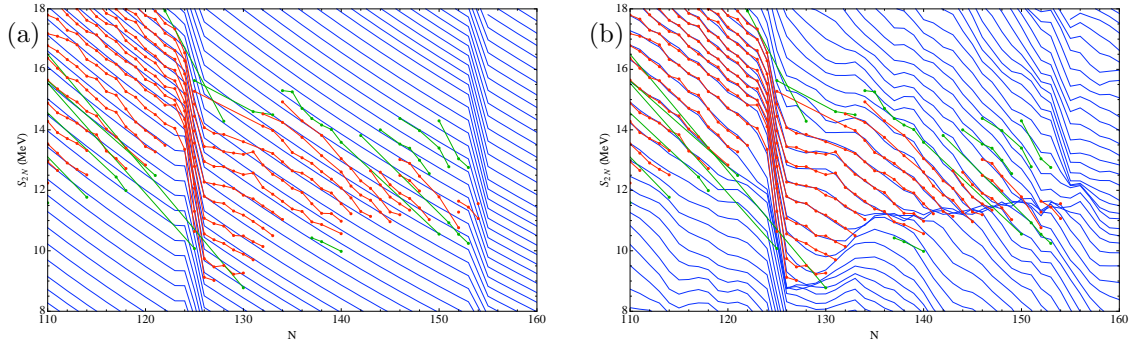


Figura 3.12: Prueba del borde: Energía de separación de 2 neutrones  $S_{2n}$ . Las líneas unen núcleos con el mismo número de protones. En azul se muestran la energía de separación de 2 neutrones predichas por: (a) el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas y (b) el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas mejorado con la reconstrucción del algoritmo CLEAN. El valor de  $S_{2n}$  obtenido a partir de las masas experimentales se muestra en rojo para los núcleos pertenecientes al subconjunto de ajuste y en verde para los núcleos en el subconjunto de predicción.

al modelo utilizado en generar el patrón a extrapolar.

Al incluir correcciones microscópicas en el modelo de la gota se introduce la información de la posición de las capas, tal como se muestra en la superficie generada con las predicciones de este modelo mostrada en la figura 3.12, es notable que las estructuras que aparecen después de mejorar el modelo agregando la reconstrucción de CLEAN son muy semejantes a las estructuras aparecidas en el caso del modelo de la gota, sin embargo éstas son mucho más suaves, tal como lo esperábamos. En el caso del modelo de Duflo-Zuker, imagen 3.13, se puede observar como el modelo ya cuenta con estructuras debidas a las cerraduras de capas así como debidas a la deformación, sin embargo tal como en el caso de los dos modelos anteriores, estas predicciones son demasiado planas. El efecto de CLEAN una vez más es agregar una pequeña fluctuación o textura a esta superficie, estas desviaciones a pesar de ser sumamente suaves y en una escala muy pequeña logran mejorar el rms sobre la predicción en un 20 % aproximadamente.

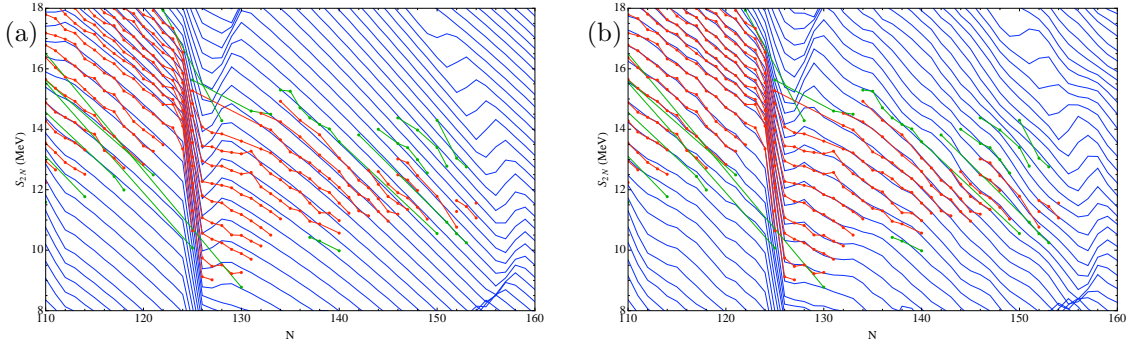


Figura 3.13: Prueba del borde: Energía de separación de 2 neutrones  $S_{2n}$ . Las líneas unen núcleos con el mismo número de protones. En azul se muestran la energía de separación de 2 neutrones predichas por: (a) el modelo de Dufo-Zuker y (b) el modelo de Dufo-Zuker mejorado con la reconstrucción del algoritmo CLEAN. El valor de  $S_{2n}$  obtenido a partir de las masas experimentales se muestra en rojo para los núcleos pertenecientes al subconjunto de ajuste y en verde para los núcleos en el subconjunto de predicción.

### 3.3. Conclusiones

Los resultados tanto de esta prueba como de la anterior muestran que el método CLEAN es capaz de mejorar la predicción de masas de el modelo teórico que se ocupe para generar el patrón a extrapolar. Sin embargo estos resultados solamente muestran el comportamiento global del modelo, las pruebas aquí presentadas demuestran que el algoritmo es capaz de predecir los núcleos que se utilizaron como prueba de predicción los cuales se encontraban en una región cercana a las masas conocidas experimentalmente. Sería ingenuo pensar que la calidad en la predicción mostrada para los núcleos predichos se mantiene a lo largo de toda la zona desconocida en la tabla de isótopos. Por lo tanto es necesario medir la calidad o validez de la extrapolación realizada por CLEAN como función de la distancia a los núcleos conocidos experimentalmente. Este estudio se presentará en un capítulo más adelante debido a que utiliza las relaciones de Garvey-Kelson como herramienta y es necesario realizar un estudio sistemático de como funcionan dichas relaciones.

El algoritmo CLEAN se ha presentado en este capítulo, utilizando este algoritmo es posible mejorar las predicciones de masas nucleares de algún modelo teórico arbitrario. El método para mejorar estas predicciones está basado en la detección y extrapolación de las regularidades presentes en el patrón obtenido al calcular las diferencias entre las masas conocidas experimentalmente y las masas predichas por el modelo a mejorar. Se ha demostrado utilizando 3 modelos representativos y 2 pruebas que el algoritmo CLEAN es capaz de detectar efectos en la superficie de diferencias de masas que están asociadas a las características físicas no incluidas en el modelo. En todos los casos el método CLEAN presenta mejoras considerables sobre las predicciones de los modelos utilizados. Al analizar con más detalle los efectos de CLEAN utilizando la superficie de las energías de separación de 2 neutrones es posible observar como el algoritmo es capaz de detectar e incluir en los modelos efectos debido a las cerraduras de capa y a la deformación nuclear. Además de esto, el método para mejorar las predicciones de los modelos utilizando el algoritmo CLEAN tiene como ventaja la facilidad con la que puede ser implementado y las predicciones de éste pueden ser mejoradas constantemente con la inclusión de nuevas mediciones experimentales.



## Capítulo 4

# Predicciones de corto alcance.

Las predicciones de tipo global como las mostradas en el capítulo anterior suponen que la información con la que contamos actualmente de manera experimental con respecto a las masas nucleares es suficiente y necesaria para describir el comportamiento de las masas fuera de la región conocida. Este tipo de aproximaciones pretende de alguna manera utilizar toda la información disponible para predecir una cantidad impresionante de información. Se centran principalmente en poder explicar las características generales y las sistemáticas globales de la superficie de masas en el plano  $N, Z$ . Si bien se realiza un gran esfuerzo por capturar esencialmente estas sistemáticas de manera global, puede resultar que al tratar de predecir tanta información, pequeños detalles y estructuras de la superficie en escalas muy pequeñas no sean del todo tomados en cuenta. La mejora del algoritmo CLEAN sobre los modelos descritos anteriormente se lleva a cabo mediante la inclusión de “textura” y son este tipo de estructuras y efectos agregados los que logran disminuir de manera sustancial la desviación cuadrática media sobre las masas experimentales. Si bien es importante la descripción cualitativa de el comportamiento global de las masas nucleares, las aplicaciones de los valores de las masas requieren gran precisión en las predicciones, principalmente en regiones específicas las cuales no se encuentran muy alejadas de la zona conocida experimentalmente.

En este capítulo se analizan algunas de las técnicas para predecir masas nucleares de manera muy precisa, pero limitadas con respecto a la distancia de la zona experimental. Es posible, como ya se menciono anteriormente, la predicción de las masas nucleares utilizando únicamente la sistemática de la superficie de masas y sus derivadas, las energías de separación y los valores  $Q_\beta$  y  $Q_\alpha$  de los decaimientos beta y alfa [2]. Existen esencialmente dos métodos que predicen masas de esta manera, las relaciones de Garvey-Kelson [28] y las extrapolaciones de Audi-Wapstra [2]. Estas técnicas podrían considerarse como aproximaciones locales, ambas predicen núcleo a núcleo y lo hacen únicamente considerando las estructuras de la vecindad y como estas varían en función del número de neutrones y el número de protones. Las relaciones de Garvey-Kelson son un método más local ya que solamente necesitan 5 masas vecinas mientras que para aplicar las extrapolaciones de Audi-Wapstra es necesario considerar como varían las superficies en una región más grande. Actualmente en cualquier aplicación para la cual se necesiten valores de la masa nuclear en la región cercana a la zona conocida experimentalmente se utilizan las predicciones de alguno de estos dos modelos. Debido a esto es necesario cuantificar las predicciones de ambos modelos y el rango de validez de éstas. En este capítulo se realiza una comparación entre las predicciones de ambos métodos y se intenta medir la manera en la que el error de éstas crece en función de la distancia a la zona conocida [38]. También se presentan algunas posibilidades para poder hacer predicciones más lejanas utilizando las relaciones de Garvey-Kelson.

### 4.1. Comparación entre Garvey-Kelson y Audi-Wapstra.

Como ya se mencionó anteriormente, las relaciones de Garvey-Kelson, eq. 2.26, son relaciones entre masas vecinas, las cuales son obtenidas al considerar un modelo de partícula independiente para el cual las interacciones entre neutrones y protones de valencia varían suavemente a lo largo del plano  $(N, Z)$ . Debido a esta suposición están íntimamente relacionadas con las extrapolaciones de Audi-Wapstra basadas precisamente en la suavidad de las superficies en el plano  $(N, Z)$ . Si bien, las extrapolaciones

de Audi-Wapstra pueden considerarse como un método más preciso, es mucho más subjetivo y elaborado.

Las relaciones de Garvey-Kelson pueden utilizarse para predecir masas nucleares de una manera iterativa [3]. Si consideramos ambas relaciones y las 6 posiciones de cada una, existen hasta 12 maneras diferentes de predecir una masa, siempre y cuando se conozcan todas las masas vecinas necesarias. Cada una de estas 12 opciones presenta una solución para la masa en cuestión que se promediará con las demás, mientras contemos con más soluciones o aproximaciones diferentes a una masa, la predicción de ésta será más precisa. Utilizando las masas conocidas experimentalmente es posible predecir una primera generación de masas cercanas. Si repetimos el proceso iterativamente, considerando las masas predichas en el paso anterior como masas conocidas, entonces es posible llevar la predicción más lejos. Sin embargo, las relaciones de Garvey-Kelson no se cumplen exactamente, sobre las masas conocidas experimentalmente existe un error de aproximadamente 100 KeVs, es de esperarse que este error produzca diferencias entre la masa obtenida y la masa verdadera a la hora de predecir y más aún, es de esperarse que este error crezca con cada iteración.

Las extrapolaciones de Audi-Wapstra sufren de una deficiencia similar, esta manera de predecir masas no se realiza iterativamente, sin embargo con cada nuevo núcleo se utiliza la sistemática de los núcleos predichos anteriormente, además de esto, las superficies utilizadas en la predicción no son suaves monotónicamente, si no que cuentan con discontinuidades en las regiones donde los efectos de la estructura nuclear se hacen presentes, por ejemplo en las zonas donde existen cerraduras de capas o transiciones de forma. Es prácticamente imposible predecir estas estructuras e irregularidades extrapolando a partir de la suavidad y de la sistemática de estas superficies, por lo cual este proceso necesita realizarse con sumo cuidado.

Para comparar el poder predictivo de las relaciones de Garvey-Kelson con el de las extrapolaciones de Audi-Wapstra aplicamos la misma prueba que en los capítulos anteriores para comparar predicciones, es decir, la prueba AME95-03 donde se toman los núcleos reportados en la compilación AME95 y se predicen aquellos núcleos medidos entre esta compilación y la aparición de la compilación de masas AME03. El proceso iterativo de predicción utilizando las relaciones de Garvey-Kelson permite hacer un análisis más detallado y comparar ambos métodos predicción a iteración.

Las relaciones de Garvey-Kelson han sido utilizadas iterativamente como método de predicción anteriormente y un análisis de su poder predictivo ya ha sido publicado [3], sin embargo en este estudio previo únicamente se utiliza una de las relaciones y una de las posibles posiciones, lo cual limita al método. La figura 4.1 muestra el número de estimaciones utilizadas para predecir cada núcleo en la prueba AME95-03 en nuestra aproximación. Si bien, la mayoría de los núcleos son predichos únicamente con una estimación, es importante notar que ésta es una de 12 posibilidades, la existencia de éstas permite que el proceso de Garvey-Kelson abarque más núcleos en cada iteración con lo cual el conjunto completo de la prueba se cubre rápidamente evitando la menor cantidad posible de error debido a las iteraciones. Para cubrir la mayor cantidad de núcleos en el conjunto de predicción de esta prueba se necesitan alrededor de 11 iteraciones, después de las cuales 340 núcleos de 389 son predichos. En la aproximación utilizada anteriormente se necesitaban 21 iteraciones para predecir esta cantidad de núcleos. La figura 4.2 muestra la iteración en la cual es predicho cada núcleo correspondiente a esta prueba. Aquellos núcleos marcados como predichos en la iteración 0 necesitan más de 12 iteraciones por lo cual no son considerados en este análisis debido a que el error en estas iteraciones ya es demasiado grande.

Utilizando las relaciones de Garvey-Kelson, predecimos la masa de todos aquellos núcleos para los cuales es posible utilizar al menos una de las posibles relaciones. Si es posible obtener más de una predicción para alguna masa se toma como valor final el promedio entre las estimaciones obtenidas. El proceso se repite iterativamente considerando como masas conocidas a las masas predichas en la iteración anterior. Para poder cuantificar y comparar adecuadamente con el valor experimental y el valor de la predicción obtenido mediante las extrapolaciones de Audi-Wapstra, se utilizan cuatro cantidades en cada iteración. La desviación cuadrática media para los núcleos predichos en la iteración  $i$  ( $\sigma^i$ ) la cual describe el comportamiento del proceso iterativo en cada iteración, la desviación cuadrática media para los núcleos predichos hasta la iteración  $i$  ( $A\sigma^i$ ) que describe el desempeño global del proceso iterativo y las versiones “mod” de las dos cantidades previas  $\sigma_{mod}^i$  y  $A\sigma_{mod}^i$  las cuales toman en cuenta el error

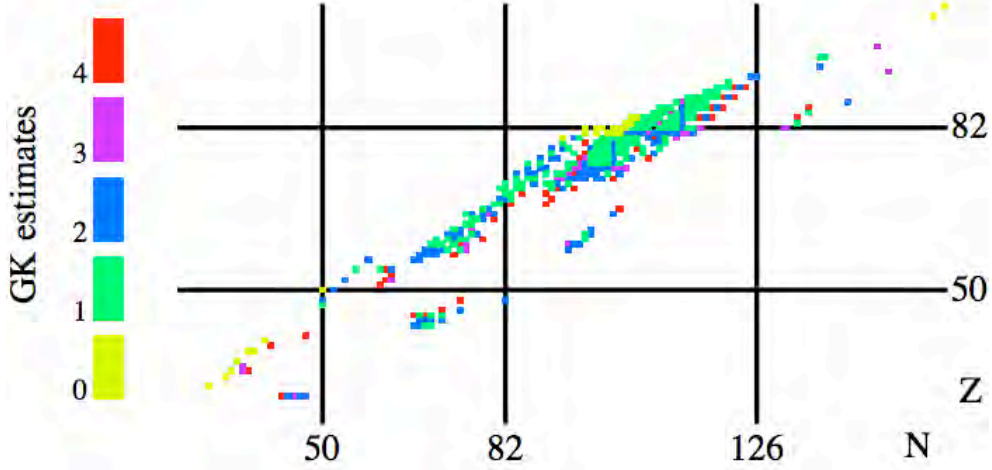


Figura 4.1: Número de estimaciones utilizadas para predecir cada núcleo en la prueba de predicción AME95-03.

experimental [39]. Estas cuatro cantidades se definen en términos de las masas experimentales  $M^{exp}$  y las masas calculadas teóricamente con el modelo en cuestión  $M^{teo}$ , ya sea las relaciones de Garvey-Kelson o las extrapolaciones de Audi-Wapstra, de la manera siguiente:

$$\sigma^i = \left( \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} (M_{i,j}^{teo} - M_{i,j}^{exp})^2 \right)^{1/2} \quad (4.1)$$

$$\sigma_{mod}^i = \left( \frac{1}{\sum w_{i,j}} \sum_{j=1}^{N_i} w_{i,j} ((M_{i,j}^{teo} - M_{i,j}^{exp})^2 - (e_{i,j})^2) \right)^{1/2} \quad (4.2)$$

donde el índice  $j$  corre sobre los  $N_i$  núcleos predichos en la iteración  $i$ ,  $e_{i,j}$  es el error experimental y  $w_{i,j}$  está definido como

$$w_{i,j} = \frac{1}{((e_{i,j})^2 + (\sigma_{mod}^i)^2)^2} \quad (4.3)$$

mientras que las versiones acumuladas de estas desviaciones cuadráticas medias ( $A\sigma^i$  y  $A\sigma_{mod}^i$ ) para los núcleos predichos hasta un número total de iteraciones  $n_i$  están definidas como

$$A\sigma^i = \left( \frac{1}{\sum N_i} \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{N_i} (M_{i,j}^{teo} - M_{i,j}^{exp})^2 \right)^{1/2} \quad (4.4)$$

$$A\sigma_{mod}^i = \left( \frac{\sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{N_i} w_{i,j} ((M_{i,j}^{teo} - M_{i,j}^{exp})^2 - (e_{i,j})^2)}{\sum \sum w_{i,j}} \right)^{1/2} \quad (4.5)$$

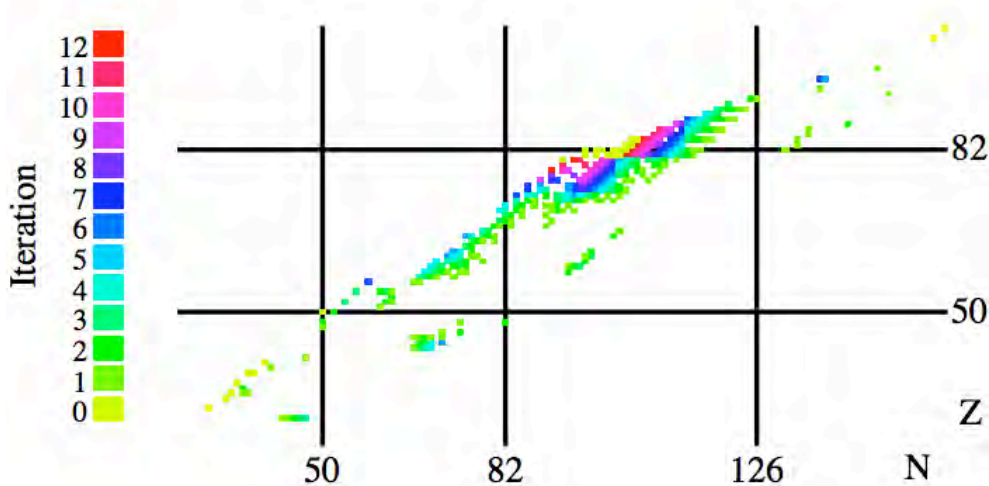


Figura 4.2: Núcleos que son predichos en cada iteración del proceso de predicción utilizando las relaciones de Garvey-Kelson en la prueba AME95-03.

al comparar estas cantidades para cada uno de los modelos se pretende analizar el desempeño de las relaciones de Garvey-Kelson de una manera controlada y observar como crece el error con respecto al número de iteraciones.

La figura 4.3 y la tabla 4.1 muestran una comparación para cada iteración entre las desviaciones  $\sigma^i$  y  $A\sigma^i$  de las predicciones utilizando las predicciones de las relaciones de Garvey-Kelson y las masas predichas por las extrapolaciones de Audi-Wapstra con respecto a las masas experimentales. La segunda columna de la tabla 4.1 muestra el número de núcleos predichos hasta cada iteración y en paréntesis se muestra el número de núcleos predichos en cada iteración. La figura 4.3 muestra los datos de esta tabla en función del número de núcleos predichos en cada iteración. Se puede observar cómo el error en las relaciones de Garvey-Kelson crece conforme la iteración aumenta. Es importante notar como el proceso iterativo utilizando las relaciones de Garvey-Kelson es capaz de proporcionar un gran número de predicciones con muy pocas iteraciones. En la primera iteración se predicen 93 de los 389 núcleos que constituyen la prueba a predecir y en las primeras 3 iteraciones más de la mitad ya han sido predichos. Las predicciones de estas 3 primeras iteraciones son comparables con las predicciones utilizando las extrapolaciones de Audi-Wapstra y son mejores que las predicciones de cualquiera de los otros modelos existentes en el mercado.

Como ya se mencionó, existen intentos previos por utilizar las relaciones de Garvey-Kelson de forma iterativa, pero ninguno considerando todas las posibles predicciones para una masa. Es importante comparar con este intento previo. En la referencia que cita al intento anterior [3] se menciona “En el límite de 7 iteraciones, por ejemplo, 242 núcleos de 382 masas nuevas pueden ser calculados con una desviación de  $A\sigma_{mod} = 0.232$  MeV. Un total de 21 iteraciones fueron requeridas para predecir 340 de estas masas, con la desviación  $A\sigma_{mod} = 0.717$  MeVs, la cual resulta demasiado grande”. Utilizando el proceso iterativo propuesto en este trabajo, se logran predecir 340 núcleos con únicamente 11 iteraciones, lo cual evita que el error crezca obteniendo una desviación  $A\sigma = 0.628$  MeVs. Las primeras 5 iteraciones producen predicciones para 242 núcleos con una desviación de  $A\sigma = 0.350$  MeVs las cuales son de excelente calidad.

Las predicciones realizadas por las relaciones de Garvey-Kelson usadas de manera iterativa son comparables con las extrapolaciones de Audi-Wapstra en las primeras 3 iteraciones, para zonas mas lejanas, el error de estas crece por lo cual es mejor utilizar las predicciones de Audi-Wapstra, sin embargo éste método es subjetivo en gran medida y difícil de implementar ya que requiere de un complicado análisis gráfico de la superficie de masas y sus derivadas. Las relaciones de Garvey-Kelson proporcionan una



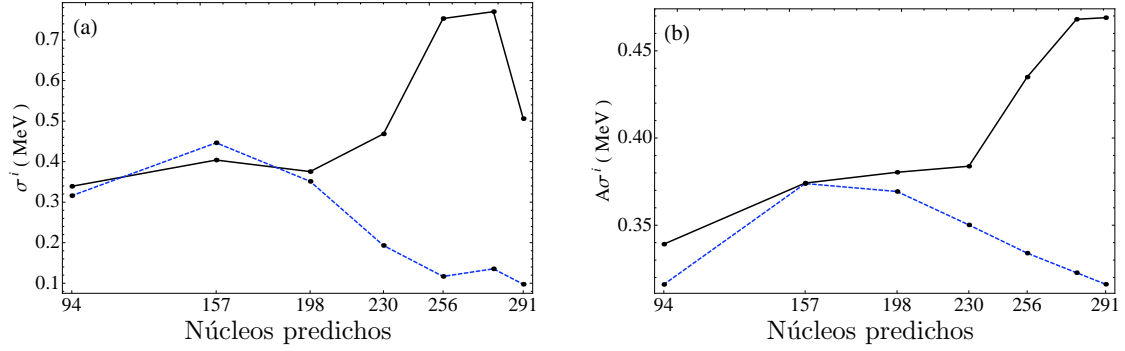


Figura 4.3: Comparación entre las desviaciones  $\sigma^i$  (a) y  $A\sigma^i$  (b) en MeVs para los núcleos predichos en cada iteración utilizando las relaciones de Garvey-Kelson (negro) y la desviación sobre esos mismo núcleos predichos por las extrapolaciones de Audi-Wapstra (azul) como función del número acumulado de núcleos predichos en cada iteración.

manera simple, sistemática y eficaz de obtener estimaciones de gran precisión en regiones muy cercanas a la zona de masas conocidas experimentalmente.

Tabla 4.1: Desviaciones cuadráticas medias  $\sigma^i$  y  $A\sigma^i$  en MeVs para los núcleos predichos en cada iteración del proceso utilizando las relaciones de Garvey-Kelson GK y las extrapolaciones de Audi-Wapstra. La primera columna muestra el número de iteración, la segunda columna muestra el número de núcleos predichos hasta la iteración  $i$ , en parentesis se muestra el número de núcleos predichos en la iteración  $i$  únicamente. Una comparación grafica de estos datos se muestra en la figura 4.3.

$i$	núcleos predichos	$\sigma^i$ GK	$\sigma^i$ Audi	$\sigma_{mod}^i$ GK	$\sigma_{mod}^i$ Audi	$A\sigma^i$ GK	$A\sigma^i$ Audi	$A\sigma_{mod}^i$ GK	$A\sigma_{mod}^i$ Audi
1	94 (94)	0.3391	0.3160	0.1459	0.1092	0.3391	0.3160	0.1459	0.1092
2	157 (63)	0.4039	0.4465	0.1596	0.1381	0.3742	0.3739	0.1334	0.1219
3	198 (41)	0.3754	0.3513	0.3325	0.1479	0.3803	0.3693	0.1362	0.1275
4	230 (32)	0.4685	0.1930	0.4702	0.1838	0.3838	0.3501	0.2539	0.1378
5	256 (26)	0.7531	0.1168	0.7565	0.1060	0.4349	0.3340	0.3483	0.1346
6	278 (22)	0.7700	0.1355	0.7801	0.0876	0.4681	0.3227	0.4012	0.1317
7	291 (13)	0.5062	0.0973	0.5062	0.0929	0.4690	0.3161	0.4069	0.1297

## 4.2. Comparación entre Garvey-Kelson y otros modelos teóricos.

Con respecto a las extrapolaciones de Audi-Wapstra, las predicciones de las relaciones de Garvey-Kelson son precisas únicamente para la región cercana a la zona conocida experimentalmente, sin embargo es importante comparar el desempeño de estas predicciones con respecto a las predicciones de los modelos utilizados en el capítulo anterior. Para realizar esta comparación, nuevamente se utilizó la prueba de predicción AME95-03. Las relaciones de Garvey-Kelson se compararon iteración a iteración con el modelo de la gota, el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas y el modelo de Dufflo-Zuker.

La figura 4.4 muestra una comparación gráfica entre las desviaciones  $\sigma$  y  $A\sigma$  obtenidas para los núcleos predichos en cada iteración por las relaciones de Garvey-Kelson en negro y la desviación para esos mismos núcleos predichos por el modelo de la gota en azul, el modelo de la gota con correcciones microscópicas en verde y el modelo de Dufflo-Zuker en rojo. Es importante hacer notar que los núcleos que

se están comparando son únicamente aquellos pertenecientes al conjunto de predicción de la prueba de predicción AME95-03 por lo cual el número de núcleos predichos en cada iteración disminuye conforme el número de iteraciones aumenta ya que el conjunto se va completando cada vez mas. Las predicciones de los 3 modelos a comparar son bastante regulares y estables con respecto al número de iteración que se este comparando. Las predicciones realizadas por las relaciones de Garvey-Kelson son mejores sustancialmente que los modelos tipo gota y comparables con el modelo de Dufflo-Zuker hasta la iteración número 7 en la cual ya se han predicho cerca de 300 núcleos.

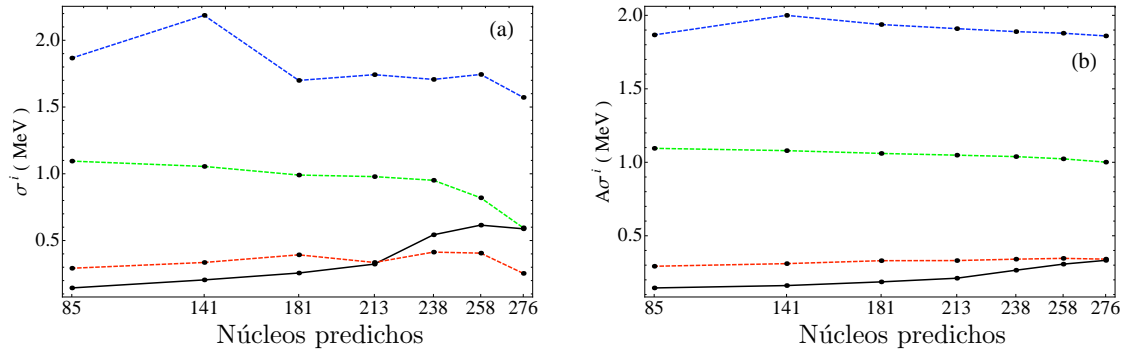


Figura 4.4: Comparación entre las desviaciones  $\sigma^i$  (a) y  $A\sigma^i$  (b) en MeVs para los núcleos predichos en cada iteración utilizando las relaciones de Garvey-Kelson (negro) y la desviación sobre esos mismo núcleos predichos por el modelo de la gota LDM (azul), el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas LDMM (verde) y el modelo de Dufflo-Zuker DZ (rojo) como función del número acumulado de núcleos predichos en cada iteración.

La tabla 4.2 muestra la comparación descrita anteriormente de forma detallada hasta la iteración número 13. Se puede apreciar con mayor precisión cómo el error en el proceso iterativo utilizando las relaciones de Garvey-kelson crece desmedidamente y cómo la predicción en estas últimas iteraciones es realmente mala, por lo tanto, podemos concluir que las predicciones de las relaciones de Garvey-Kelson son mucho mejores que los modelos utilizados en esta comparación en la región que abarca aquellos núcleos que son predecibles dentro de las primeras 7 iteraciones.

### 4.3. Error del proceso iterativo como función de la distancia.

Conforme el número de iteraciones aumenta, los núcleos predichos se encuentran más alejados de la zona conocida experimentalmente. La figura 4.2 muestra que es posible asociar el número de iteraciones con cierta noción de distancia a la región conocida, lo cual nos permite pensar en el análisis anterior como un estudio del incremento en el error del proceso iterativo como función de la distancia. Sin embargo, la prueba AME95-03 no es la optima para realizar este estudio. Para analizar correctamente la dependencia del error producido en el proceso iterativo con la distancia a la zona conocida, es necesaria una prueba que abarque una gran cantidad de núcleos. También es importante que todos los núcleos predichos en una iteración se encuentren a la misma distancia de la región conocida y que estos se encuentren un “paso” más cerca que aquellos núcleos que se estimaran en la siguiente iteración. Desafortunadamente las masas conocidas experimentalmente no son suficientes como para crear una prueba con las características descritas anteriormente.

Las predicciones de los modelos utilizados anteriormente, el modelo de la gota, el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas y el modelo de Dufflo-Zuker, proporcionan excelentes conjuntos de datos, 9000 núcleos aproximadamente, que como se demostró anteriormente satisfacen las relaciones de Garvey-Kelson. La prueba que se describe a continuación no pretende predecir el valor correcto y preciso de las masas nucleares. Es importante recordar que si bien estos modelos satisfacen las relaciones de Garvey-Kelson, esta propiedad no es suficiente para asegurar que estas masas sean cercanas al valor

Tabla 4.2: Desviaciones cuadraticas medias  $\sigma^i$  y  $A\sigma^i$  en MeVs para los núcleos predichos en cada iteración del proceso utilizando las relaciones de Garvey-Kelson GK y las predicciones obtenidas con el modelo de la gota LDM, el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas LDMM y el modelo de Dufflo-Zuker DZ. La primera columna muestra el número de iteración, la segunda columna muestra el número de núcleos predichos hasta la iteración  $i$ , en parentesis se muestra el número de núcleos predichos en la iteración  $i$  únicamente. Una comparación grafica de estos datos se muestra en la figura 4.4.

$i$	núcleos	$\sigma^i$	$\sigma^i$	$\sigma^i$	$\sigma^i$	$A\sigma^i$	$A\sigma^i$	$A\sigma^i$	$A\sigma^i$
	predichos	GK	LDM	LDMM	DZ	GK	LDM	LDMM	DZ
1	85 (85)	0.144	1.866	1.095	0.299	0.144	1.866	1.095	0.299
2	141 (56)	0.205	2.186	1.055	0.329	0.161	1.999	1.079	0.311
3	181 (40)	0.256	1.698	0.990	0.392	0.186	1.937	1.060	0.331
4	213 (32)	0.323	1.741	0.978	0.334	0.211	1.909	1.048	0.331
5	238 (25)	0.543	1.706	0.951	0.388	0.265	1.888	1.038	0.338
6	258 (20)	0.615	1.743	0.819	0.388	0.306	1.878	1.023	0.342
7	276 (18)	0.587	1.571	0.594	0.292	0.332	1.859	1.001	0.339
8	291 (15)	0.841	1.566	0.579	0.268	0.375	1.845	0.983	0.336
9	304 (13)	1.326	1.879	0.751	0.268	0.456	1.847	0.974	0.333
10	319 (15)	1.206	1.850	0.822	0.253	0.515	1.847	0.968	0.330
11	330 (11)	1.567	1.891	0.744	0.305	0.582	1.848	0.961	0.329
12	339 (9)	1.054	2.067	1.022	0.213	0.583	1.854	0.963	0.326
13	345 (6)	1.822	1.890	0.672	0.382	0.624	1.855	0.959	0.327

verdadero de las masas. Existe una gran cantidad de posibles soluciones que satisfacen las relaciones de Garvey-Kelson y que se alejan de las predicciones de cada uno de los modelos. En esta prueba se toman algunos núcleos de estas predicciones y se intenta predecir el valor teórico para los núcleos restantes.

Con el objetivo de cuantificar el error del proceso iterativo como función de la distancia, se realizó la siguiente prueba de predicción utilizando todos los núcleos predichos teóricamente entre las líneas de goteo que cumplan con la condición  $A > 160$ . Estos núcleos se separan en dos subconjuntos. El subconjunto de ajuste que consta de todos aquellos núcleos para los cuales  $(N - Z) < 44$  y que se muestra en la figura 4.5 en azul y el subconjunto de predicción que consta de todos aquellos núcleos que satisfacen  $44 \leq (N - Z) \leq 74$  y la figura 4.5 los muestra en rojo. De la misma manera que en las pruebas anteriores se utiliza el subconjunto de ajuste como conjunto de núcleos iniciales y se intenta predecir a partir de estos el subconjunto de predicción. Las condiciones impuestas para producir los subconjuntos de ajuste y predicción permiten que en cada iteración sean estimados núcleos con un valor del isoespin N-Z constante. De esta manera la distancia al subconjunto de ajuste aumenta linealmente con el número de iteraciones tal como se muestra en la figura 4.6a, a esta prueba la llamamos prueba de predicción de largo alcance.

Debido a que las predicciones de los tres modelos a utilizar satisfacen las relaciones de Garvey-Kelson con una precisión de algunos keVs, el error que se produzca en esta prueba al predecir una región de estos núcleos con las relaciones de Garvey-Kelson puede asociarse casi por completo al proceso de iteración, lo cual nos permite efectivamente analizar la manera en la que crece este error como función de la distancia. Esta prueba se aplicó a las predicciones de cada uno de los tres modelos utilizados anteriormente, el modelo de la gota, el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas y el modelo de Dufflo-Zuker. En cada uno de los casos se calculo la desviación cuadratica media acumulada en cada iteración  $A\sigma^i$  entre la predicción de los modelos utilizados y la obtenida con las relaciones de Garvey-Kelson, esta desviación se muestra en la figura 4.6b para cada uno de los conjuntos de datos utilizados, el modelo de la gota en azul, el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas en verde y el modelo de Dufflo-Zuker en negro. Es importante notar que la manera en la que crece el error es totalmente controlada y sistemática, depende de las características de la superficie en donde se están

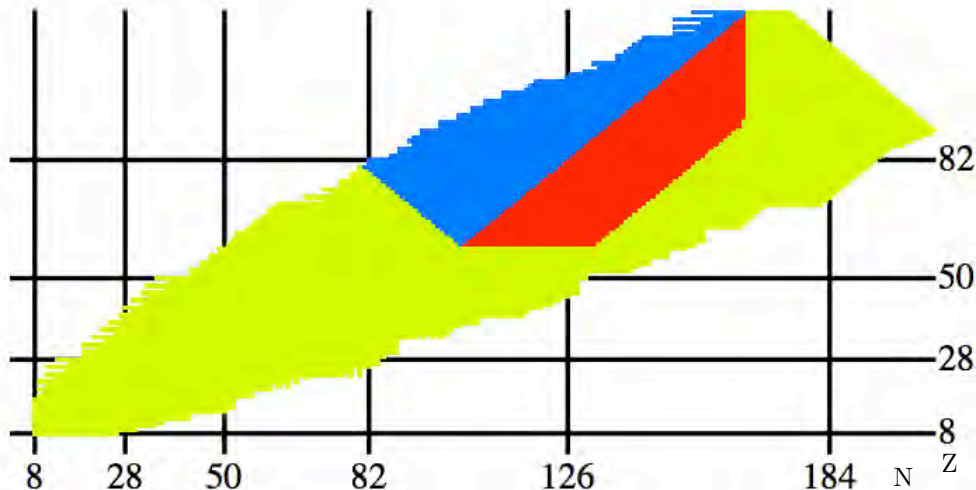


Figura 4.5: Núcleos pertenecientes al subconjunto de ajuste (azul) y los núcleos a predecir (rojo) para la prueba de predicción de largo alcance. En amarillo se muestran aquellos núcleos que no están incluidos en la prueba.

utilizando las relaciones de Garvey-Kelson.

Es importante notar cómo el error crece más rápido conforme la predicción del modelo utilizado contiene más información debida a la estructura nuclear. El error sobre los datos producidos con el modelo de la gota crece muy lentamente debido a que la predicción de este modelo es totalmente plana mientras que para el modelo de Dufflo-Zuker, el error crece más rápidamente debido a que este modelo incluye efectos de cerraduras de capa y efectos debido a la deformación nuclear. Estas estructuras introducen error en las relaciones de Garvey-Kelson que no es producto del proceso iterativo y que contamina de cierta manera el análisis presentado, sin embargo también se puede observar que el error crece sistemáticamente con respecto al número de iteraciones, con lo cual se puede asegurar que la componente principal de estos errores es debida al proceso iterativo.

Como ya se mencionó anteriormente, la desviación  $A\sigma$  es una medida global de como varía el error. Las figuras 4.7a, 4.8a y 4.9a muestran la distribución del error,  $M^{\text{modelo}}(N, Z) - M^{GK}(N, Z)$ , para el caso de los datos del modelo de la gota, el modelo de la gota con correcciones microscópicas y el modelo de Dufflo-Zuker respectivamente. El error en el caso del modelo de la gota varía suavemente y no muestra ningún tipo de estructura, sin embargo, los dos casos restantes muestran que el error se concentra en regiones y es sistemático. Así mismo, se alcanza a observar que el error presenta algunas de las estructuras inherentes al modelo, por ejemplo efectos de cerradura de capas y medias cerraduras en el caso del modelo de la gota con correcciones microscópicas y efectos de deformación nuclear en el caso del modelo de Dufflo-Zuker. Esta correlación entre el error del proceso iterativo y las estructuras producidas por los efectos nucleares puede analizarse al considerar la interacción residual entre los nucleones de valencia al interior del núcleo.

La principal suposición de las relaciones de Garvey-Kelson es considerar que la interacción residual entre nucleones varía suavemente como función del número de partículas  $N+Z$  y el valor del Isoespín  $N-Z$  de tal manera que estas interacciones residuales se cancelan al relacionar las 6 masas vecinas involucradas. Debido a esto, las relaciones de Garvey-Kelson están íntimamente relacionadas con la energía de interacción de los últimos  $i$  neutrones con los últimos  $j$  protones en el interior del núcleo.

$$\epsilon_{in-jp}(N+i, Z+j) = BE(N+i, Z+j) - BE(N, Z+j) - BE(N+i, Z) + BE(N, Z). \quad (4.6)$$

Inclusive, es posible derivar las relaciones de Garvey-Kelson al realizar suposiciones acerca de las cantidades  $\epsilon_{1n-1p}$ ,  $\epsilon_{1n-2p}$  y  $\epsilon_{2n-2p}$  [40]. La primera de las relaciones asume que  $\epsilon_{1n-1p}$  es independiente de

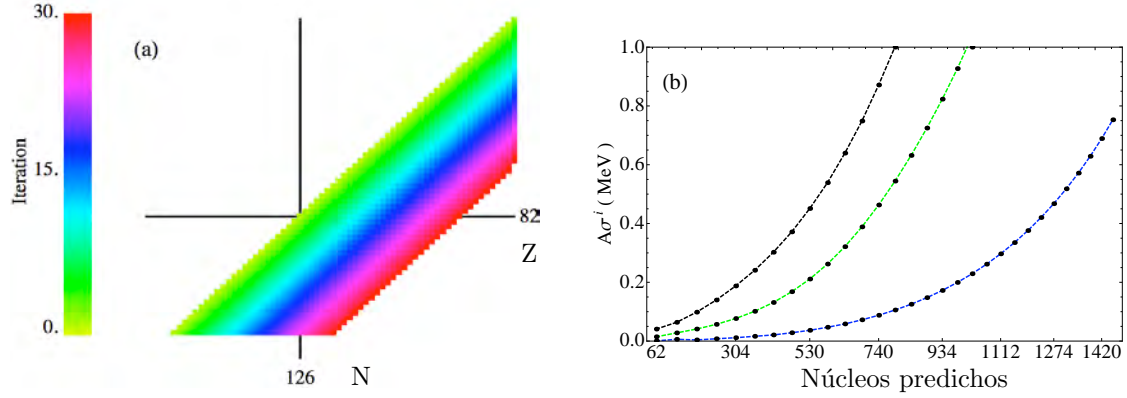


Figura 4.6: (a) Núcleos que son predichos en cada iteración para la prueba de predicción de largo alcance. (b) Desviación  $A\sigma^i$  (en MeVs) para las predicciones del proceso iterativo en la prueba de predicción de largo alcance usando las masas predichas por varios modelos, el modelo de la gota (línea azul), el modelo de la gota con correcciones microscópicas (línea verde) y el modelo de Duflo-Zuker (línea negra).

$N+Z$  mientras que la segunda asume que esta cantidad es independiente con respecto a  $N-Z$ , sin embargo, ha sido demostrado que las masas experimentales no satisfacen estas suposiciones exactamente [41] lo cual produce errores sistemáticos en las predicciones obtenidas con las relaciones de Garvey-Kelson. Si  $\epsilon_{1n-1p}$  no varía suavemente y presenta discontinuidades en el plano  $(N, Z)$  en cada iteración las interacciones involucradas en las relaciones no se cancelan completamente y esto produce un error que es acumulativo conforme el número de iteraciones aumenta. Comportamientos de este tipo han sido observados previamente en la interacción promedio entre los últimos neutrones y los últimos protones de valencia, definida como  $\delta V_{np} = \frac{1}{4}\epsilon_{2n-2p}$ , incluso ha sido demostrado que esta cantidad no varía suavemente y que presenta a lo largo del plano  $(N, Z)$  patrones bien definidos [42]. De acuerdo a la discusión anterior podemos suponer que discontinuidades en la variación de  $\delta V_{np}$  producen que el error del proceso iterativo utilizando las relaciones de Garvey-Kelson se incremente.

Las figuras 4.7b, 4.8b y 4.9b muestran los valores de  $\delta V_{np}$  calculados a partir de los conjuntos de datos utilizados en cada una de las pruebas de largo alcance, provenientes del modelo de la gota, el modelo de la gota con correcciones microscópicas y el modelo de Duflo-Zuker respectivamente. Al comparar la variación de los errores debidos al proceso iterativo y los valores de  $\delta V_{np}$  podemos observar que ambas cantidades presentan en los tres casos la misma tendencia e incluso ambas cantidades están correlacionadas de cierta manera. Como es de esperarse la variación de  $\delta V_{np}$  en el modelo de la gota varía suavemente y no presenta ningún tipo de estructura. En el caso del modelo de la gota con correcciones microscópicas  $\delta V_{np}$  presenta discontinuidades evidentes en las cerraduras de capas y en las medias cerraduras, estas discontinuidades son producidas debido a que las correcciones microscópicas añadidas al modelo de la gota dependen del número de nucleones de valencia y en estas regiones justamente la naturaleza de los nucleones de valencia cambia entre “partículas” y “agujeros”, al comparar las figuras 4.8a y 4.8b se puede observar que estas discontinuidades en  $\delta V_{np}$  conforman fronteras para las regiones donde el error en el proceso iterativo se acumula.

Al comparar el error del proceso iterativo con el valor de  $\delta V_{np}$  en el caso del modelo de Duflo-Zuker se muestra con mayor claridad que las regiones sistemáticas son producidas por las variaciones abruptas en  $\delta V_{np}$ . En el modelo de Duflo-Zuker las variaciones en  $\delta V_{np}$  se presentan debido a que en él compiten 2 comportamientos para cada capa. Un término que modela a los núcleos como esféricos y otro término que los describe como deformados, en aquellas regiones donde existe un cambio de uno de estos comportamientos al otro se producen discontinuidades que se muestran aparentes en el valor de  $\delta V_{np}$ , estas regiones se pueden observar al aplicar las relaciones de Garvey-Kelson sobre las predicciones del modelo como se muestra en la figura 2.21. Además de estos efectos, la figura 4.9b también muestra discontinuidades debidas a las cerraduras de capas y a las medias cerraduras. Ambos tipos de discontinuidades forman fronteras para las regiones donde el error debido al proceso iterativo se acumula.

Comparando las figuras 4.7a, 4.8a y 4.9a con las figuras 4.7b, 4.8b y 4.9b es evidente que existe una correlación entre las regiones con errores sistemáticos en el proceso iterativo y la interacción residual neutrón-protón. Al menos dos efectos producen esta correlación, la dependencia de  $\delta V_{np}$  con  $N+Z$  y  $N-Z$  y las discontinuidades o cambios abruptos en  $\delta V_{np}$ . Estas discontinuidades se observan en el comportamiento de los modelos utilizados y es claro que la posición de estas discontinuidades está correlacionado con el error en el proceso iterativo. Esta correlación es entre la variación de la pendiente en el error conforme el proceso iterativo avanza y la variación de la pendiente en el valor de  $\delta V_{np}$ , para observar estas variaciones en la pendiente se ha calculado la segunda derivada del error y de  $\delta V_{np}$  con respecto  $N-Z$  que es la dirección en la cual el proceso iterativo avanza. Las figuras 4.7c, 4.8c, 4.9c muestran la segunda derivada del error con respecto a  $N-Z$  y son comparables con las figuras 4.7d, 4.8d y 4.9d que muestran la segunda derivada de  $\delta V_{np}$  con respecto a la misma dirección. Al comparar para cada caso estas derivadas, la correlación entre el aumento en el error y los cambios abruptos en  $\delta V_{np}$  se vuelve mucho mas aparente.

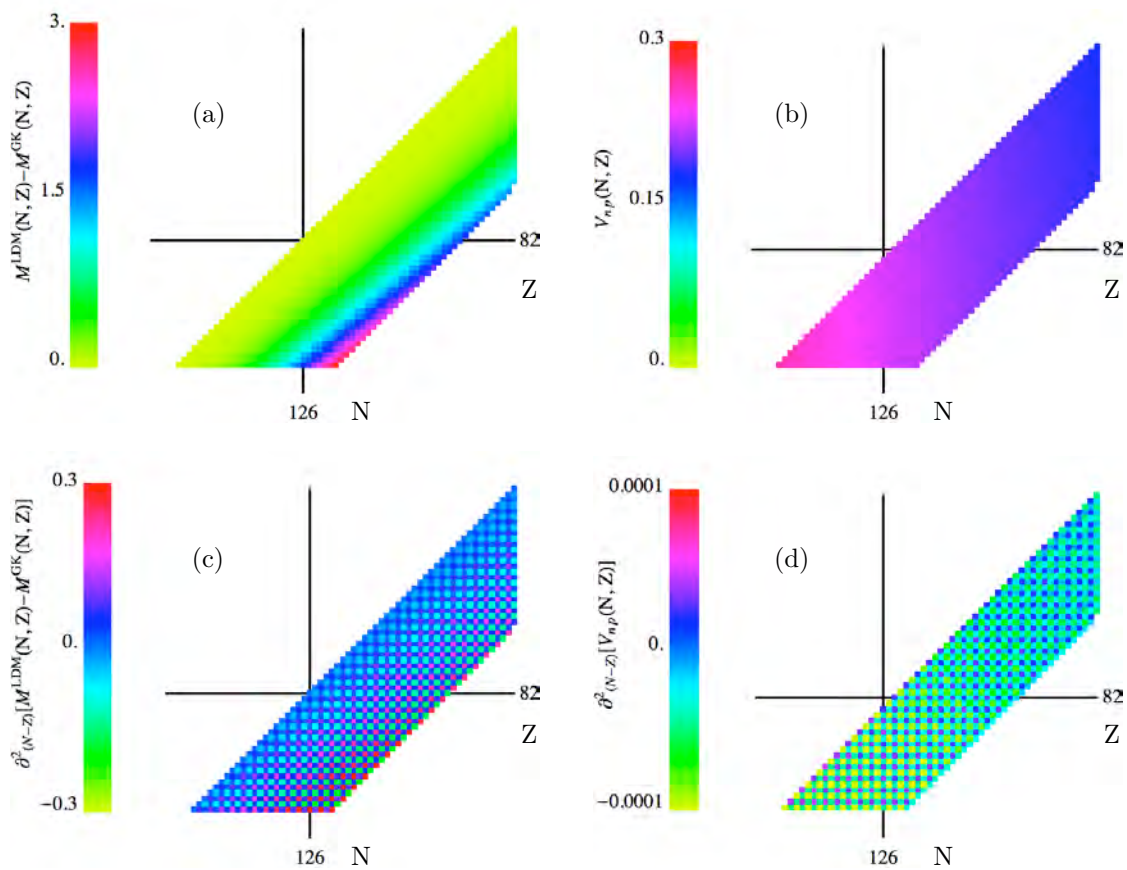


Figura 4.7: Prueba de predicción de largo alcance. (a) Errores producidos en el proceso iterativo usando las predicciones del modelo de la gota. (b) Interacción promedio entre los últimos protones y neutrones de valencia,  $\delta V_{np}$ , calculados a partir del modelo de la gota. (c) Segunda derivada con respecto a  $(N-Z)$  de los errores mostrados en la parte (a). (d) Segunda derivada con respecto a  $(N-Z)$  de los valores  $\delta V_{np}$  mostrados en la parte (b).

El análisis presentado en esta sección muestra que variaciones abruptas en el valor de  $\delta V_{np}$  producen que el error en el proceso iterativo crezca. Sin embargo las discontinuidades observadas en los valores de  $\delta V_{np}$  están presentes en las predicciones de los modelos debido a suposiciones de estos y no es obvio que este tipo de discontinuidades se encuentren presentes en la superficie de los valores de  $\delta V_{np}$  calculados a partir de las masas experimentales. La figura 4.10 muestra los valores de la interacción residual  $\delta V_{np}$

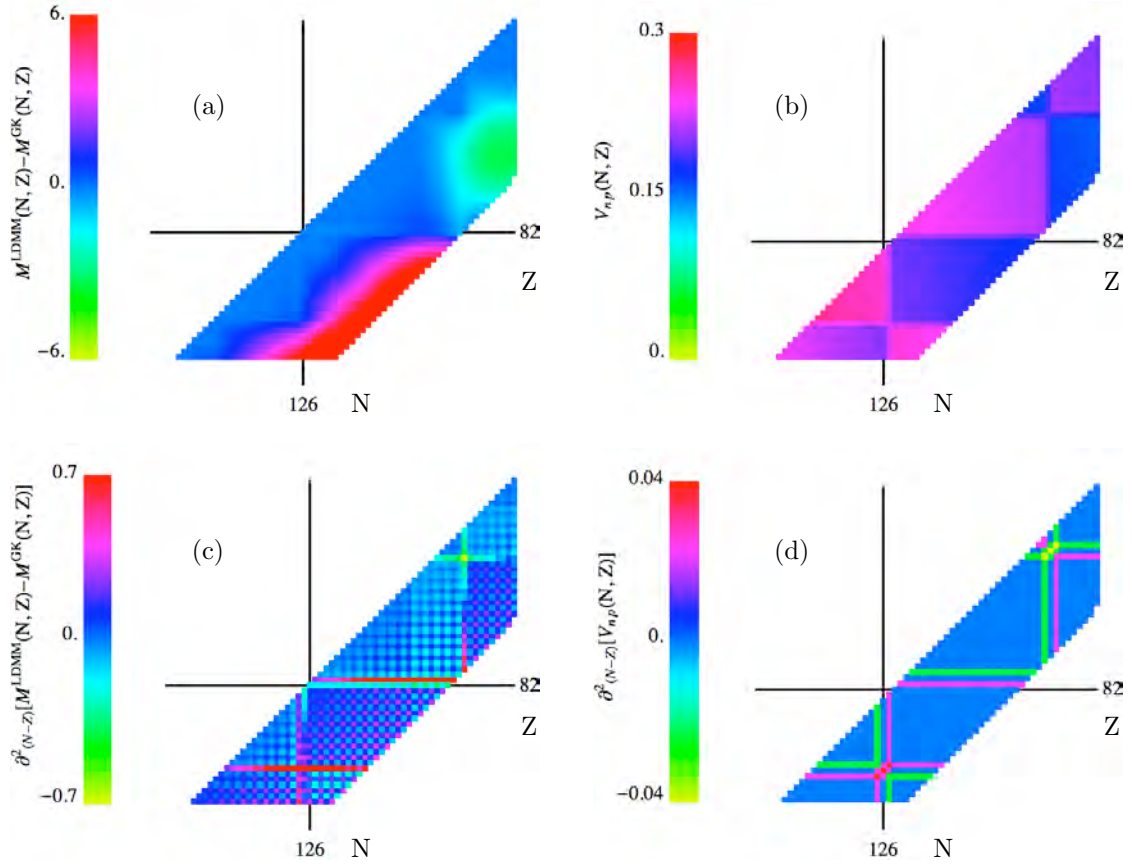


Figura 4.8: Prueba de predicción de largo alcance. (a) Errores producidos en el proceso iterativo usando las predicciones del modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas. (b) Interacción promedio entre los últimos protones y neutrones de valencia,  $\delta V_{np}$ , calculados a partir del modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas. (c) Segunda derivada con respecto a  $(N-Z)$  de los errores mostrados en la parte (a). (d) Segunda derivada con respecto a  $(N-Z)$  de los valores  $\delta V_{np}$  mostrados en la parte (b).

calculados a partir de las masas experimentales reportadas en la compilación AME03. Esta figura y el análisis en [42] muestran que en efecto los datos experimentales presentan este tipo de discontinuidades. Debido a esto es importante tomar en cuenta estos efectos al predecir con las relaciones de Garvey-Kelson y de alguna manera incluirlos en el proceso iterativo para poder mejorar, hacer más fiable y de mayor alcance la predicción de las relaciones.

#### 4.4. Mejorando las relaciones de Garvey-Kelson.

En la sección anterior se demostró que es posible realizar predicciones de masa nuclear utilizando las relaciones de Garvey-Kelson de manera iterativa. El principal inconveniente al predecir de esta manera es que el error generado en cada iteración se acumula y crece de manera desmedida conforme el número de iteraciones aumenta, esto es debido a que en cada paso se utilizan masas estimadas en el paso anterior. Para cuantificar la manera en la que este error crece se realizó la prueba de largo alcance y para comparar la calidad de las predicciones con respecto a las obtenidas con las extrapolaciones de Audi-Wapstra se realizó la prueba de AME95-03. Las predicciones con el proceso iterativo son de muy buena calidad en la región cercana a las masas medidas experimentalmente. En esta sección se propone una manera de mejorar las predicciones de estas relaciones logrando que el proceso iterativo prediga más núcleos en una sola iteración, con lo cual el error crece mucho más lentamente.

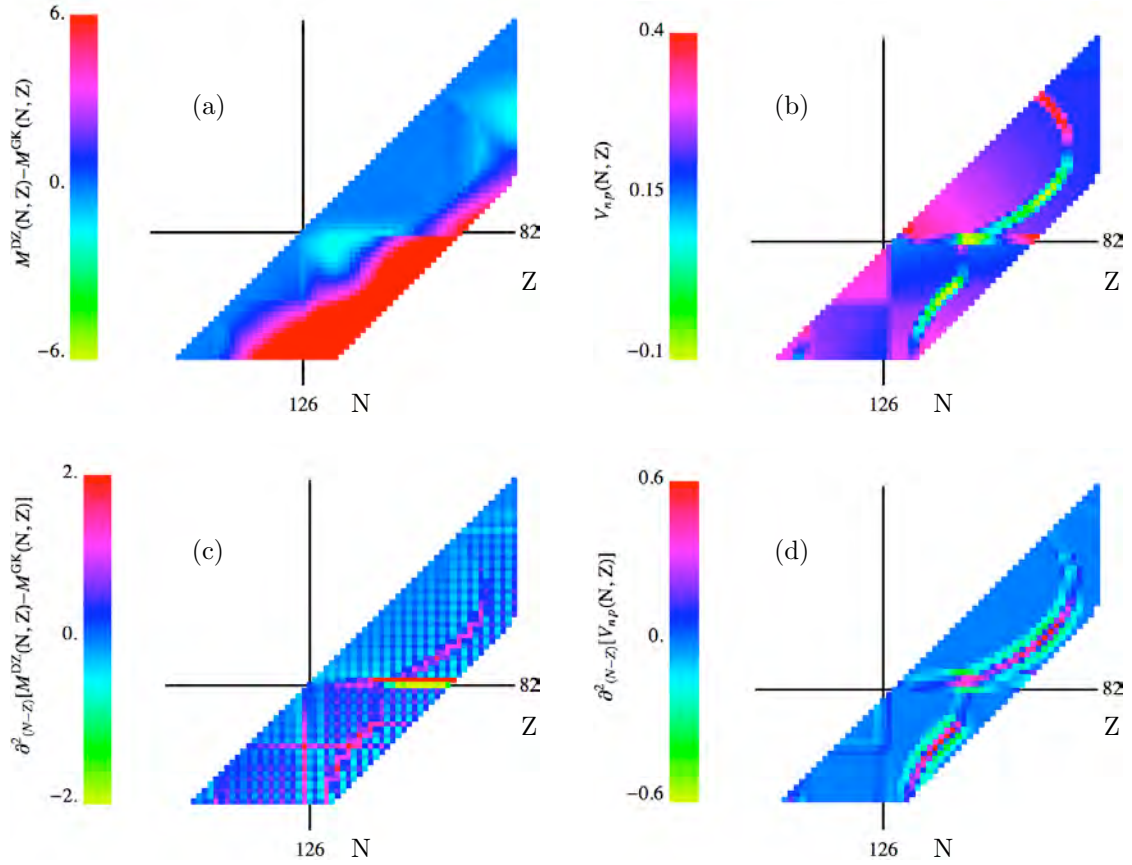


Figura 4.9: Prueba de predicci3n de largo alcance. (a) Errores producidos en el proceso iterativo usando las predicciones del modelo de Duflo-Zuker. (b) Interacci3n promedio entre los 3ltimos protones y neutrones de valencia,  $\delta V_{np}$ , calculados a partir del modelo de Duflo-Zuker. (c) Segunda derivada con respecto a  $(N-Z)$  de los errores mostrados en la parte (a). (d) Segunda derivada con respecto a  $(N-Z)$  de los valores  $\delta V_{np}$  mostrados en la parte (b).

Esencialmente las relaciones de Garvey-Kelson involucran 5 grados de libertad para predecir una masa, si bien estos grados de libertad est3n correlacionados y no son independientes uno de otro, es posible que a trav3s del proceso iterativo cada uno de estos grados de libertad acumule error, por lo cual la predicci3n se vuelve mucho m3s imprecisa. Es posible reducir el error del proceso utilizando la manera en la que se relacionan los diferentes grados de libertad involucrados. La primera de las relaciones de Garvey-Kelson, eq. 2.26 puede expresarse de las siguientes dos maneras en t3rminos de las energ3as de separaci3n de neutrones y de protones

$$\begin{aligned}
 S_n(N+2, Z-2) + S_n(N+1, Z) + M(N, Z-1) - M(N+2, Z-1) &= 0 \\
 S_p(N+2, Z-1) + S_p(N, Z) - M(N+1, Z) + M(N+1, Z-2) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

donde

$$\begin{aligned}
 S_n(N+2, Z-2) &= M(N+2, Z-2) - M(N+1, Z-2) \\
 S_n(N+1, Z) &= M(N+1, Z) - M(N, Z) \\
 S_p(N+2, Z-1) &= M(N+2, Z-1) - M(N+2, Z-2) \\
 S_p(N, Z) &= M(N, Z) - M(N, Z-1)
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$



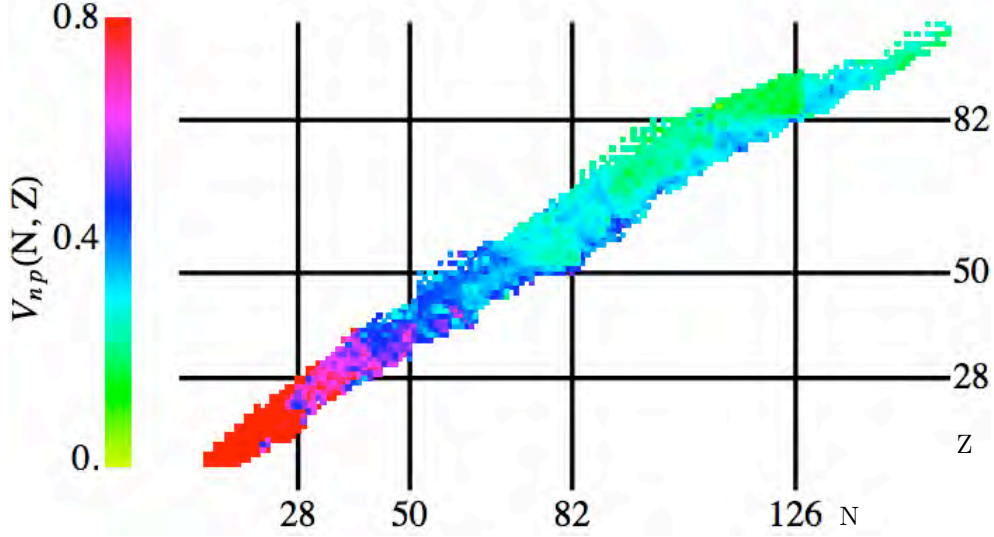


Figura 4.10: valores de la interacción residual promedio entre los últimos neutrones de valencia y los últimos protones de valencia,  $\delta V_{np}$ , calculados a partir de las masas experimentales reportadas en la compilación AME03.

de la misma manera, es posible expresar la segunda relación como

$$\begin{aligned} S_n(N+2, Z) + S_n(N+1, Z-2) - M(N+2, Z-1) + M(N, Z-1) &= 0 \\ S_p(N+2, Z) + S_p(N, Z-1) + M(N+1, Z-2) - M(N+1, Z) &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde

$$\begin{aligned} S_n(N+2, Z) &= M(N+2, Z) - M(N+1, Z) \\ S_n(N+1, Z-2) &= M(N+1, Z-2) - M(N, Z-2) \\ S_p(N+2, Z) &= M(N+2, Z) - M(N+2, Z-1) \\ S_p(N, Z-1) &= M(N, Z-1) - M(N, Z-2) \end{aligned} \quad (4.10)$$

las ecuaciones 4.7 y 4.9 relacionan dos energías de separación con un par de masas. Si obtenemos de alguna manera los valores de las energías de separación involucradas en las relaciones es posible reducir el número de grados de libertad en juego y conseguir que el error en el proceso iterativo crezca de una manera mucho más lenta, dados los valores de las energías de separación existen 8 posibles maneras de estimar el valor de una masa nuclear en términos de otra de acuerdo a las ecuaciones 4.7 y 4.9. Al contar con una predicción buena para las energías de separación los valores de estos grados de libertad quedan definidos antes del proceso iterativo, por lo cual en él se obtiene el valor de una masa en términos de otra únicamente, es decir, el número de grados de libertad en los cuales puede acumularse el error se reduce a uno por relación. Otra ventaja de utilizar estas relaciones en términos de las energías de separación es la posición de las masas restantes. En los cuatro casos, se cuenta con relaciones con las cuales es posible obtener el valor de una masa en términos de otra que se encuentra en la misma línea de isótopos o en la misma línea de isótonos, es decir, las dos masas involucradas tienen el mismo número de neutrones o de protones, lo cual permite que el proceso iterativo avance directamente a la región rica en neutrones o a la región rica en protones, con lo que aumenta la velocidad del proceso. Debido a esto, mayor canti-

dad de núcleos son predichos en cada iteración y por lo tanto el incremento en el error es mucho más lento.

Los valores de las energías de separación varían de una manera mucho más suave que la superficie de masas ya que están definidas en términos de las diferencias de éstas. Debido a esto, las energías de separación son cantidades mucho más fáciles de parametrizar. Como aproximación más simple tomaremos la parametrización descrita en [43] la cual supone que las energías de separación de un neutrón puede parametrizarse de la siguiente forma

$$S_n(N, Z) = (an_1 + an_2A^{1/3}) \left(\frac{N}{Z}\right)^{-1} - an_3 + an_p \frac{\delta(N)}{A^{1/2}} - an_s \mu(N) \quad (4.11)$$

La parametrización anterior consiste principalmente de tres términos y algunas correcciones sobre ellos. los términos principales son

$$(an_1 + an_2A^{1/3}) \left(\frac{N}{Z}\right)^{-1} - an_3 \quad (4.12)$$

a los cuales se aumenta una contribución que modela los efectos de apareamiento

$$an_p \frac{\delta(N)}{A^{1/2}} \quad (4.13)$$

donde  $\delta(N) = 1$  si el número de neutrones es par y  $\delta(N) = -1$  si es impar. Una corrección debida a los efectos de capas

$$an_s \mu(N) \quad (4.14)$$

con la cual se subtrae una energía constante en cada una de las capas, donde el valor de  $\mu$  depende de la capa a la que pertenezca  $N$ .  $\mu(N) = 0$  si  $1 \leq N \leq 28$ ,  $\mu(N) = 1$  si  $29 \leq N \leq 50$ ,  $\mu(N) = 2$  si  $51 \leq N \leq 82$ ,  $\mu(N) = 3$  si  $83 \leq N \leq 126$  y  $\mu(N) = 4$  si  $127 \leq N$ .

Con respecto a las energías de separación de un protón la parametrización es equivalente, sólomente se intercambia  $N$  por  $Z$  y se aumenta un término para modelar la energía debida a la interacción de Coulomb entre protones, el cual tiene la siguiente forma

$$ap_c \frac{Z}{A^{1/3}} \quad (4.15)$$

con lo cual, la energía de separación de un protón se puede expresar como

$$S_p(N, Z) = (ap_1 + ap_2A^{1/3}) \left(\frac{Z}{N}\right)^{-1} - ap_3 + an_p \frac{\delta(Z)}{A^{1/2}} - ap_s \mu(Z) - ap_c \frac{Z}{A^{1/3}} \quad (4.16)$$

donde  $\delta(Z)$  y  $\mu(Z)$  tienen el mismo comportamiento que  $\delta(N)$  y  $\mu(N)$  en el caso de los neutrones.

Las dos parametrizaciones anteriores se han ajustado a las energías de separación de un neutrón y de un protón obtenidas a partir de las masas experimentales para los núcleos con  $N \geq 28$  y  $Z \geq 28$  reportados en la compilación AME95 minimizando la desviación cuadrática media entre los valores obtenidos con la parametrización y los valores experimentales.

Con el objetivo de comparar qué tan buenas son estas parametrizaciones se realizó una prueba similar a la prueba de predicción AME95-03 descrita anteriormente. Se calculó la desviación cuadrática media

Tabla 4.3: Parámetros para la energía de separación de un neutrón, eq. 4.11.

$an_1$	$an_2$	$an_3$	$an_p$	$an_s$
5.178	3.549	5.354	11.169	1.566

Tabla 4.4: Parámetros para la energía de separación de un protón eq. 4.16.

$ap_1$	$ap_2$	$ap_3$	$ap_p$	$ap_s$	$ap_c$
11.120	1.054	1.043	12.473	1.474	1.111

sobre las energías de separación de un neutrón y un protón en los núcleos que se utilizaron para el ajuste, aquellos correspondientes a la compilación AME95, y también sobre aquellos núcleos que pertenecen al conjunto de predicción, en este caso todos aquellos núcleos para los cuales se pueda calcular la energía de separación de un neutrón y de un protón que se encuentren en la compilación AME03 y no se encuentren reportados en AME95. La parametrización de la energía de separación de un neutrón logra ajustar 1293 núcleos con una desviación cuadrática media de  $\sigma = 0.364$  mientras que la parametrización a la energía de separación de un protón logra ajustar 1232 núcleos con una desviación de  $\sigma = 0.382$ . Con respecto a los valores de predicción, con la eq. 4.11 se obtiene una desviación de  $\sigma = 0.383$  en 224 núcleos y la eq. 4.16 una desviación sobre 208 núcleos de  $\sigma = 0.443$ .

Es posible utilizar las predicciones de los diferentes modelos de masa nuclear para calcular las energías de separación tanto en los núcleos utilizados para ajustar el modelo como para los núcleos pertenecientes al subconjunto de predicción y de esta manera comparar el desempeño de la parametrización propuesta con estos modelos. La tabla 4.5 muestra una comparación entre las desviaciones del modelo de la gota, el modelo de la gota con correcciones microscópicas, el modelo de Duflo-Zuker y la parametrización a la energía de separación de un neutrón propuesta en la ecuación 4.11. La tabla 4.6 muestra la misma comparación pero en el caso de la energía de separación de un protón y la ecuación 4.16.

Tabla 4.5: Prueba de predicción AME95-03 para la energía de separación de un neutrón. Desviación cuadrática media (rms) obtenidas con la parametrización de la ecuación 4.11, el modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota con correcciones microscópicas (LDMM) y el modelo de Duflo-Zuker (DZ) para la región de ajuste en esta prueba (1293 núcleos) y el subconjunto de predicción (224 núcleos).

Modelo	rms $\sigma$ (ajuste)	rms $\sigma$ (predicción)
Ecuación 4.11	0.364 MeV	0.383 MeV
LDM	0.603 MeV	0.431 MeV
LDMM	0.404 MeV	0.334 MeV
DZ	0.243 MeV	0.264 MeV

La comparación entre las parametrizaciones propuestas para la energía de separación de un neutrón y de un protón y los modelos utilizados en la predicción de masas muestran que las ecuaciones 4.11 y 4.16 tienen una precisión comparable con los modelos utilizados en esta investigación, por lo tanto es posible utilizarlas en el proceso iterativo descrito anteriormente.

Las parametrizaciones anteriores nos permiten obtener valores confiables para las energías de separación de un neutrón y de un protón en la región cercana a los núcleos cuya masa ha sido medida experimentalmente. Utilizando las relaciones 4.7 y 4.9 y los valores obtenidos para las energías de separación es posible realizar un proceso iterativo en el cual el error crece mucho más lentamente debido principalmente a dos razones. La primera es que el número de grados de libertad, cuyo valor proviene de iteraciones previas, y que están involucrados en cada estimación es mucho menor que en el proceso iterativo descrito anteriormente. La segunda razón por la cual el error es menor es debido a que en cada iteración el proceso estima una cantidad mucho mayor de núcleos debido a que las condiciones necesarias

Tabla 4.6: Prueba de predicción AME95-03 para la energía de separación de un protón. Desviación cuadrática media (rms) obtenidas con la parametrización de la ecuación 4.16, el modelo de la gota (LDM), el modelo de la gota con correcciones microscópicas (LDMM) y el modelo de Duffo-Zuker (DZ) para la región de ajuste en esta prueba (1232 núcleos) y el subconjunto de predicción (208 núcleos).

Modelo	rms $\sigma$ (ajuste)	rms $\sigma$ (predicción)
Ecuación 4.16	0.382 MeV	0.443 MeV
LDM	0.590 MeV	0.449 MeV
LDMM	0.427 MeV	0.406 MeV
DZ	0.246 MeV	0.225 MeV

para realizar una estimación son más fáciles de cumplir y obligan a que la dirección del proceso sea estrictamente en las direcciones en las que aumenta el número de neutrones y el número de protones.

El número de núcleos que es posible predecir en cada iteración del proceso iterativo que ocupa la versión original de las relaciones de Garvey-Kelson mostrado en la tabla 4.2 se refiere únicamente a aquellos núcleos que pertenecen al subconjunto de predicción de la prueba AME95-03, en general el proceso iterativo es capaz de predecir una gran cantidad de núcleos, sin embargo como ya se mencionó anteriormente mientras mayor cantidad de núcleos sean predichos en una iteración el error crece más lentamente. La tabla 4.7 compara la cantidad de núcleos predichos por iteración en las primeras 10 iteraciones para el proceso utilizando la versión original de las relaciones de Garvey-Kelson y para el proceso con las relaciones 4.7 y 4.9, en ambos casos a partir de los núcleos reportados en la compilación AME03.

Tabla 4.7: Número de núcleos predichos por iteración en las primeras diez iteraciones del proceso utilizando las relaciones originales de Garvey-Kelson (IGK1) y el proceso iterativo utilizando las relaciones de Garvey-Kelson modificadas de las ecuaciones 4.11 y 4.16 (IGK2).

Iteración	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
IGK1	163	131	135	134	133	131	132	132	131	126
IGK2	560	516	494	486	465	428	375	338	306	277

La figura 4.11 muestra la región predicha por iteración en las primeras diez iteraciones para cada uno de los procesos iterativos presentados, el proceso iterativo utilizando las relaciones de Garvey-Kelson originales (IGK1) en la parte (a) y el proceso iterativo (IGK2) utilizando las relaciones propuestas en las ecuaciones 4.7 y 4.9 en la parte (b). En esta figura se aprecia perfectamente como el proceso iterativo IGK2 es mucho más eficiente y rápido ya que logra predecir mayor cantidad de núcleos en cada iteración. Otra ventaja de este método es que tiene la capacidad de predecir hacia “adelante”, es decir, en regiones donde no se ha medido experimentalmente ningún isótopo con el mismo número de nucleones, se puede observar en la parte (a) de la figura que esto es prácticamente imposible con el proceso iterativo IGK1, ya que las condiciones para estimar alguna masa en esta región no se cumplen nunca.

Si bien, la figura 4.11 y la tabla 4.7 muestran que el proceso iterativo IGK2 avanza mucho más rápido, es importante comparar la precisión de sus predicciones de masa nuclear con las realizadas por otros modelos. Con este objetivo se ha realizado la prueba de predicción AME95-03 de una manera similar a la utilizada en el caso del proceso iterativo IGK1, es decir, se utiliza el proceso iterativo para predecir los núcleos contenidos en el subconjunto de predicción de la prueba. Una vez más restringiremos los núcleos a aquellos que cumplan con las condiciones  $N \geq 28$  y  $Z \geq 28$ , con lo cual el subconjunto de ajuste se reduce a 1454 núcleos y el conjunto de predicción a 371. De la misma manera que con el proceso iterativo anterior, en cada iteración del proceso se calcula la desviación cuadrática media sobre los núcleos predichos en esa iteración  $\sigma$  y los núcleos predichos hasta esa iteración y se compara con las desviaciones de los modelos a comparar en los mismos subconjuntos de núcleos.

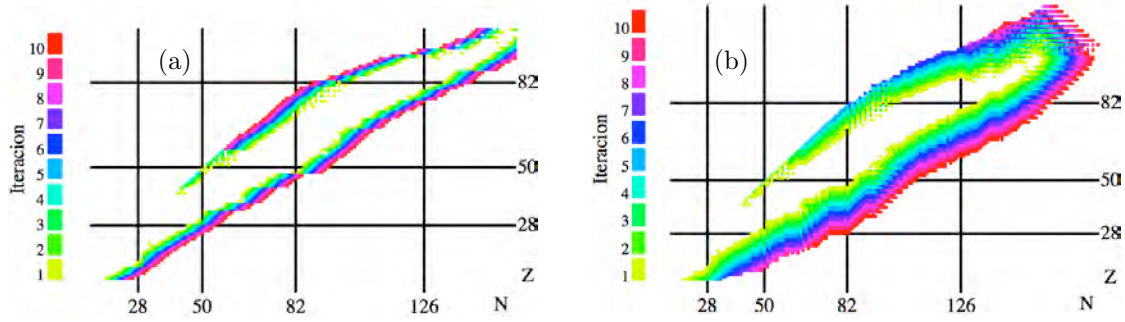


Figura 4.11: Regiones de núcleos predichos por iteración en las primeras diez iteraciones del proceso utiizando (a) las relaciones originales de Garvey-Kelson (IGK1) y (b) el proceso iterativo utilizando las relaciones de Garvey-Kelson modificadas de las ecuaciones 4.11 y 4.16 (IGK2).

La tabla 4.8 muestra el desempeño de las predicciones del proceso iterativo en cada iteración y lo compara con las predicciones de los modelos utilizados en las pruebas anteriores, el modelo de la gota LDM, el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas LDMM, el modelo de Duflo-Zuker DZ, las extrapolaciones de Audi-Wapstra AW, y el proceso iterativo con las relaciones de Garvey-Kelson originales IGK1. Es importante notar que el proceso iterativo IGK2 después de las dos primeras iteraciones ha cubierto casi la totalidad de los núcleos pertenecientes al subconjunto de predicción de la prueba, 319 de 371 núcleos. La más importante de estas comparaciones es aquella con respecto al otro proceso iterativo, IGK1, se puede observar cómo en cada iteración las desviaciones tanto por iteración  $\sigma$  como acumulativa  $A\sigma$  son menores al predecir con el proceso IGK2 que con IGK1. En el caso de la primera iteración, la cual incluye 227 núcleos, la desviación cuadrática media es menor en más de 50%. Al comparar con respecto a los demás modelos el proceso iterativo es mejor que los modelos tipo gota. Sin embargo, el modelo de Duflo-Zuker y las extrapolaciones de Audi-Wapstra muestran una capacidad predictiva mayor que esta técnica.

Tabla 4.8: Desviaciones cuadráticas medias  $\sigma^i$  y  $A\sigma^i$  en MeVs para los núcleos predichos en cada iteración del proceso iterativo IGK2 y las predicciones obtenidas con el proceso IGK1, las extrapolaciones de Audi-Wapstra AW, el modelo de la gota LDM, el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas LDMM y el modelo de Duflo-Zuker DZ. Se muestra el número de núcleos predichos en la iteración  $i$  y en paréntesis se muestra el número de núcleos predichos hasta la iteración  $i$ .

Modelo	Iteración 1		Iteración 2		Iteración 3		Iteración 4	
	$\sigma^i$	$A\sigma^i$	$\sigma^i$	$A\sigma^i$	$\sigma^i$	$A\sigma^i$	$\sigma^i$	$A\sigma^i$
IGK2	0.445	0.445	0.824	0.580	1.129	0.653	1.300	0.679
IGK1	1.002	1.002	0.925	0.981	1.536	1.047	2.517	1.108
AW	0.153	0.153	0.146	0.151	0.157	0.151	0.259	0.155
LDM	1.868	1.868	1.742	1.832	1.931	1.842	2.288	1.856
LDMM	1.003	1.003	0.911	0.978	0.935	0.974	1.205	0.981
DZ	0.326	0.326	0.335	0.329	0.319	0.328	0.396	0.330

Los resultados anteriores muestran que al utilizar la información de las energías de separación en las relaciones de Garvey-Kelson es posible mejorar el poder predictivo del proceso iterativo y por lo tanto mejorar el rango para el cual las predicciones realizadas con esta técnica son de una precisión comparable a la de otros modelos disponibles. Sin embargo, como se muestra en la tabla 4.8 las predicciones del modelo de Duflo-Zuker y de las extrapolaciones de Audi-Wapstra son mejores. La parametrización

propuesta en las ecuaciones 4.11 y 4.16 son muy simples y funcionan únicamente como primera aproximación, el proceso iterativo puede ser mejorado sin duda al encontrar mejores modelos para las energías de separación. Como ejemplo de esto utilizaremos las energías de separación obtenidas a través de las predicciones de masa del modelo de Duflo-Zuker. Si bien, este modelo no está creado especialmente para predecir el comportamiento de las superficies de las energías de separación, las tablas 4.5 y 4.6 muestran que las predicciones de éste son mucho mejores que la parametrización propuesta anteriormente, lo cual debe verse reflejado al utilizarlas en el proceso iterativo.

Al proceso iterativo utilizando las energías de separación obtenidas con el modelo de Duflo-Zuker lo llamaremos IGKDZ. Utilizando este proceso iterativo podemos repetir la prueba de predicción AME95-03 y comparar con las predicciones de los demás modelos, estos resultados se muestran en la tabla 4.9 la cual complementa y es comparable con la tabla 4.8 ya que los núcleos predichos en cada iteración por ambos procesos son exactamente los mismos.

Tabla 4.9: Desviaciones cuadráticas medias  $\sigma^i$  y  $A\sigma^i$  en MeVs para los núcleos predichos en cada iteración del proceso IGKDZ. Se muestra el número de núcleos predichos en la iteración  $i$  y en parentesis se muestra el número de núcleos predichos hasta la iteración  $i$ .

	Iteración 1		Iteración 2		Iteración 3		Iteración 4	
Modelo	$\sigma^i$	$A\sigma^i$	$\sigma^i$	$A\sigma^i$	$\sigma^i$	$A\sigma^i$	$\sigma^i$	$A\sigma^i$
IGKDZ	0.227	0.227	0.300	0.250	0.286	0.254	0.370	0.258

Al comparar los resultados de la tabla 4.9 con los resultados obtenidos para los demás modelos (tabla 4.8) observamos cómo la predicción del proceso iterativo mejora considerablemente y es incluso mejor que el modelo de Duflo-Zuker. Debido a esto, podemos concluir que el proceso iterativo es mejorable. Podría parecer que es de cierta manera redundante el utilizar las predicciones de un modelo muy bueno, en este caso el modelo de Duflo-Zuker, para obtener las energías de separación y de esta manera obtener predicciones de masa, sin embargo podemos observar que las predicciones realizadas con el proceso iterativo mejoran en algunas decenas de keVs las masas predichas por el modelo de Duflo-Zuker. Es importante recordar que para el proceso iterativo es suficiente contar con la información de las energías de separación las cuales usualmente son mucho más suaves y mejor comportadas que las masas nucleares, por lo cual es más fácil parametrizarlas.

## 4.5. Conclusiones

En este capítulo se demostró que es posible utilizar la información de la sistemática de las superficies de masa de manera local para predecir en la región cercana a la zona conocida experimentalmente. Existen dos métodos que aprovechan la información cercana para estimar masas, las relaciones de Garvey-Kelson y las extrapolaciones de Audi-Wapstra. Las predicciones obtenidas por medio de estas dos técnicas son de gran precisión y en la región cercana ambos métodos son los utilizados usualmente para predecir, sin embargo el error en las predicciones de estos aumenta como función de la distancia a la zona conocida y rápidamente dejan de predecir correctamente. Se realizó una comparación entre las predicciones de ambos modelos como función de la distancia, tomando como definición de distancia las iteraciones del método que utiliza las relaciones de Garvey-Kelson.

De particular importancia es la predicción obtenida con las relaciones de Garvey-Kelson debido a que de los dos métodos es el único que se realiza de una manera sistemática y controlada. Se analizó extensamente cómo se comportan las predicciones de este modelo y cómo se incrementa el error como función de la distancia al irse acumulando en cada iteración. Así mismo se encontró una correlación evidente entre las zonas donde crece el error del proceso iterativo y las discontinuidades en la superficie de la energía de interacción residual entre los últimos neutrones y protones de valencia.

Se propone una manera de mejorar dicho proceso iterativo al reducir los grados de libertad involucrados en él utilizando la información proporcionada por las energías de separación de un neutrón y de un protón, de esta manera se logra además que el proceso prediga más núcleos por iteración con lo cual el error crece más lentamente. Esto conduce a mejorar la calidad de las predicciones y a extender el rango en el cual estas tienen buena precisión. Esta aproximación puede mejorarse si se utilizan modelos de la energía de separación más realistas.





## Capítulo 5

# Las relaciones de Garvey-Kelson y CLEAN.

A lo largo de esta investigación se ha resaltado la importancia de los patrones y las sistemáticas de las superficies generadas con los valores de la masa nuclear como función del número de neutrones y del número de protones, así como las superficies generadas al “derivar” esta superficie, es decir, las superficies de las energías de separación de una y dos partículas y las superficies generadas con los valores de la energía liberada en los decaimientos beta y alfa. En los capítulos anteriores se presentaron dos maneras de aprovechar esta información y así predecir masas nucleares. El algoritmo de deconvolución CLEAN considera la información de patrones y sistemáticas globales y realiza una predicción completa, es decir, los valores de la masa predichos dependen de los valores conocidos de manera global y se ven determinados por las características generales de la superficie descrita anteriormente. Por otro lado también se presentó una manera de predecir masas nucleares utilizando las relaciones de Garvey-Kelson a través de un proceso iterativo, en este método a diferencia del anterior la información utilizada para estimar el valor de una masa es de carácter local, únicamente es necesario conocer el valor de masa de los núcleos vecinos. Las dos técnicas son capaces de proporcionar predicciones de masa nuclear en la región cercana a los núcleos medidos experimentalmente con una precisión similar a la de los mejores modelos que existen en la actualidad.

Ambas aproximaciones son muy diferentes, sin embargo tienen en común el suponer que el valor de la masa nuclear puede ser estimado a partir de la manera en la que varía sistemáticamente la información experimental con la que contamos, así como las periodicidades y los patrones que se repiten en estos valores a través de la tabla de isótopos. El objetivo de este capítulo es utilizar de alguna manera ambas técnicas de manera conjunta para aprovechar las ventajas y cualidades de cada una y disminuir el efecto de sus debilidades.

Primero se presenta una aplicación de las relaciones de Garvey-Kelson y el proceso iterativo donde se utilizan para determinar el rango de validez donde el algoritmo CLEAN mejora las predicciones obtenidas con respecto a las del modelo utilizado para generar el patrón residual extrapolado. Por último se presenta una manera de juntar el poder predictivo de ambas técnicas para obtener predicciones más precisas.

### 5.1. La precisión de CLEAN como función de la distancia

Los resultados obtenidos en el capítulo 3 utilizando el algoritmo CLEAN representados en las tablas 3.1 y 3.3 muestran que el algoritmo CLEAN es capaz de mejorar las predicciones de masa nuclear de los modelos utilizados para generar el patrón a extrapolar, sin embargo estos resultados muestran el desempeño del algoritmo CLEAN de manera global. Como ya se mencionó anteriormente es necesario determinar la precisión del algoritmo con respecto a la distancia a la zona conocida experimentalmente, sin embargo definir esta distancia no es una tarea simple.

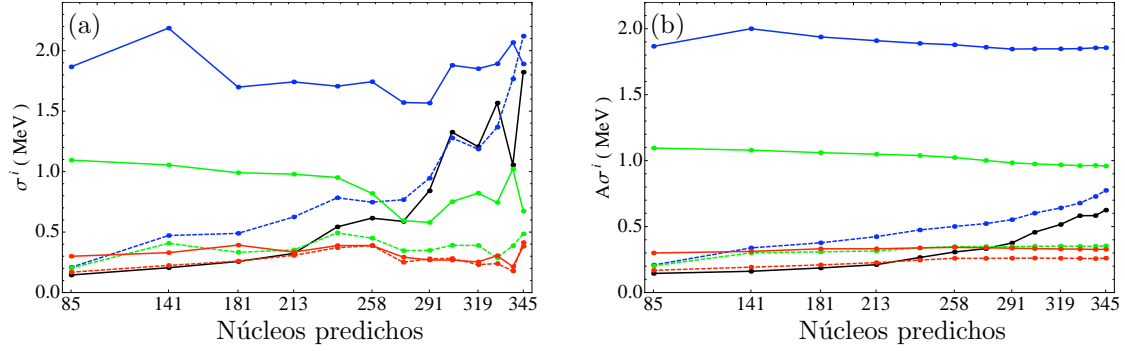


Figura 5.1: Desviaciones  $\sigma^i$  (a) y  $A\sigma^i$  (b) como función del número de núcleos predichos por unidad de distancia en la prueba de predicción AME95-03 para el proceso iterativo con las relaciones de Garvey-Kelson IGK1 (negro), el modelo de la gota LDM (azul), el modelo de la gota mejorado con el algoritmo CLEAN (azul punteadas), el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas LDMM (verde) y su versión mejorada con CLEAN (verde punteado), el modelo de Dufflo-Zuker DZ (rojo) y el modelo de Dufflo-Zuker mejorado con CLEAN (rojo punteado).

Como ya se demostró en el capítulo anterior, las relaciones de Garvey-Kelson utilizadas iterativamente proporcionan una manera de realizar predicciones de masa nuclear en la región cercana a la zona conocida. Podemos utilizar este proceso iterativo para definir una distancia, es decir a los núcleos predichos en la primera iteración les podemos asociar un valor de la distancia a la zona conocida igual a uno, aquellos que son predichos en la segunda iteración se encontraran a dos unidades de distancia lejos de la zona conocida y así sucesivamente, de esta manera la figura 4.2 muestra el valor de la distancia a la cual se encuentran los núcleos que pertenecen al subconjunto de predicción en la prueba AME95-03 y muestra que efectivamente el número de iteración en el cual cada núcleo es predicho es una buena definición de distancia a la zona conocida experimentalmente. Utilizando esta definición de distancia es posible medir la manera en la que el algoritmo CLEAN mejora las predicciones de cada uno de los modelos y como esta mejoría conforme la distancia aumenta se va haciendo menor. Con este objetivo utilizaremos nuevamente la prueba de predicción AME95-03 pero esta vez nos concentraremos en la predicción del modelo utilizado para generar el patrón a extrapolar y su diferencia con respecto a la predicción del mismo modelo mejorado con el algoritmo CLEAN, especialmente la manera en la que esta diferencia varía con la distancia. Los modelos utilizados son nuevamente el modelo de la gota, el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas y el modelo de Dufflo-Zuker.

La figura 5.1 muestra el desempeño del algoritmo CLEAN con respecto a la distancia comparando las desviaciones  $\sigma$  en la parte (a) y  $A\sigma$  en la parte (b). Estas desviaciones se muestran para cada uno de los modelos utilizados, el modelo de la gota en azul, el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas en verde y el modelo de Dufflo-Zuker en rojo, las líneas punteadas muestran la desviación para la versión de los modelos mejorada con CLEAN correspondiente a cada color. Además se muestran las desviaciones  $\sigma$  y  $A\sigma$  obtenidas con el proceso iterativo IGK1 en negro. Esta figura confirma que el algoritmo CLEAN mejora la precisión de la predicción realizada por cada uno de los modelos y además muestra el grado de la mejoría como función de la distancia. En el caso del modelo de la gota (líneas azules) se puede observar que las predicciones del modelo después de aplicar el algoritmo CLEAN mostradas en la línea azul punteada mejoran para valores de la distancia pequeños, también se observa claramente cómo conforme la distancia aumenta la desviación debida a la versión del modelo mejorado con CLEAN va creciendo hasta que alcanza el valor de la desviación del modelo en la iteración número trece, a partir de esta distancia es de esperarse que la línea punteada sólo oscile alrededor de la línea sólida y que las predicciones de CLEAN consistan únicamente en ruido aleatorio alrededor de la superficie de diferencias de masa del modelo que no tienen un efecto neto en la desviación cuadrática media del modelo. La mejoría del algoritmo CLEAN con respecto al modelo de la gota al aumentar las correcciones microscópicas se vuelve mucho más estable tal como lo muestran las líneas verdes en la figura 5.1 lo cual se refleja en el aumento del rango para el cual CLEAN mejora al modelo, desafortunadamente la prueba de predicción AME95-03 no contiene la cantidad de datos suficiente como para determinar la distancia

en la cual la línea verde punteada comienza a oscilar alrededor de la línea verde y por lo tanto no es posible con esta prueba determinar el rango de validez de CLEAN en este caso, solamente es posible decir que este rango es mayor a trece unidades de distancia. En el caso del modelo de Dufflo-Zucker, mostrado con líneas rojas, es evidente como a partir de cuatro unidades de distancia, las predicciones del modelo mejorado con CLEAN comienzan a oscilar sobre las predicciones del modelo, con lo cual podemos definir el rango donde el algoritmo CLEAN mejora las predicciones de este modelo igual a cuatro unidades de distancia. Una comparación detallada de estos valores se presenta en la tabla 5.1 para cada uno de los modelos utilizados y en cada una de las iteraciones.

Es importante notar cómo el algoritmo CLEAN mejora las predicciones del modelo de la gota de una manera sustancial, de tal manera que para la región comprendida entre las tres primeras unidades de distancia, estas predicciones son tan buenas como las obtenidas con el modelo de Dufflo-Zucker. Esto es debido a que el patrón obtenido al calcular las diferencias entre las masas del modelo de la gota y las masas experimentales es sumamente claro y se repite a lo largo de toda la tabla de isótopos cambiando únicamente la escala en la cual se presenta tal como lo muestra la figura 2.5. Por otro lado, es claro que el patrón obtenido con el modelo de Dufflo-Zucker es mucho más difícil de modelar y extrapolar correctamente con el algoritmo CLEAN.

Los resultados anteriores demuestran que las extrapolaciones realizadas con el algoritmo de reconstrucción CLEAN mejoran las predicciones del modelo utilizado para generar el patrón en la región cercana a la zona conocida experimentalmente, el rango en el cual estas predicciones son válidas depende del modelo utilizado a través de la complejidad y periodicidad del patrón, es decir, sistemáticas simples para las cuales el patrón es cuasiperiódico de una manera evidente son mucho más fáciles de modelar y por lo tanto el rango en el cual las predicciones son válidas es mayor. Es importante notar que una vez alcanzado el valor de la distancia para el cual las predicciones dejan de ser mejoradas estas no se ven empeoradas, por lo cual el error introducido por el algoritmo CLEAN en regiones fuera de este rango no afecta la predicción de manera negativa.

## 5.2. Uniendo las relaciones de Garvey-Kelson y el algoritmo CLEAN

El algoritmo de deconvolución CLEAN y el proceso iterativo utilizando las relaciones de Garvey-Kelson son dos técnicas cuyo potencial predictivo en la región cercana a las masas medidas experimentalmente es competitivo con aquel de los mejores modelos utilizados en la actualidad para predecir masas nucleares. Ambos métodos tienen cualidades que nos gustaría explotar de una manera más efectiva y deficiencias que estamos interesados en eliminar o controlar para que afecten la predicción de la menor manera posible.

El método de predicción utilizando el algoritmo CLEAN se centra principalmente en reconstruir aquellos defectos o estructuras obtenidas debido a la física no considerada en el modelo utilizado para generar el patrón extrapolable, el método funciona esencialmente añadiendo textura a las predicciones de dicho modelo. La textura agregada es de una escala mucho menor que los valores de masa nuclear lo cual permite que dentro de la región de validez las predicciones del modelo mejoren considerablemente y fuera de esta zona la textura no tiene efectos negativos sobre la predicción, lo cual es una ventaja ya que si bien es importante determinar el rango de validez en cada caso, el considerar predicciones fuera de este rango no afecta sustancialmente la calidad de las predicciones previas. Sin embargo, debido a esto las predicciones son completamente dependientes del modelo utilizado en el patrón lo cual sin duda alguna es una deficiencia, si estas predicciones se alejan de manera considerable de los valores de masa verdaderos en regiones lejanas a la zona conocida, es muy difícil que el algoritmo CLEAN corrija en una escala mayor a la del patrón de diferencias en la zona conocida experimentalmente.

Las relaciones de Garvey-Kelson utilizadas de manera iterativa permiten realizar predicciones de gran precisión en la vecindad de la zona conocida, sin embargo a diferencia de la predicción utilizando CLEAN en esta técnica si es necesario determinar perfectamente el rango de validez de las predicciones ya que

Tabla 5.1: desviaciones  $\sigma^i$  y  $A\sigma^i$  en MeVs como función de la distancia en la prueba de predicción AME95-03 para el proceso iterativo con las relaciones de Garvey-Kelson IGK1, el modelo de la gota LDM, el modelo de la gota mejorado con el algoritmo CLEAN, el modelo de la gota incluyendo correcciones microscópicas LDMM y su versión mejorada con CLEAN, el modelo de Duflo-Zuker DZ y el modelo de Duflo-Zuker mejorado con CLEAN. La segunda columna muestra el número de núcleos utilizados para calcular dichas desviaciones. Una comparación gráfica de estos resultados se muestra en la figura 5.1.

distancia	núcleos	GK	LDM	LDM + CLEAN	LDMM	LDMM + CLEAN	DZ	DZ + CLEAN
$\sigma^1$	85	0.144	1.866	0.208	1.095	0.202	0.299	0.168
$A\sigma^1$	85	0.144	1.866	0.208	1.095	0.202	0.299	0.168
$\sigma^2$	56	0.205	2.186	0.471	1.055	0.407	0.329	0.224
$A\sigma^2$	141	0.161	1.999	0.338	1.079	0.301	0.311	0.192
$\sigma^3$	40	0.256	1.698	0.489	0.990	0.332	0.392	0.260
$A\sigma^3$	181	0.186	1.937	0.376	1.060	0.308	0.331	0.209
$\sigma^4$	32	0.323	1.741	0.624	0.978	0.352	0.334	0.307
$A\sigma^4$	213	0.211	1.909	0.423	1.048	0.315	0.331	0.226
$\sigma^5$	25	0.543	1.706	0.783	0.951	0.493	0.388	0.370
$A\sigma^5$	238	0.265	1.888	0.474	1.038	0.338	0.338	0.245
$\sigma^6$	20	0.615	1.743	0.747	0.819	0.449	0.388	0.387
$A\sigma^6$	258	0.306	1.878	0.500	1.023	0.348	0.342	0.259
$\sigma^7$	18	0.587	1.571	0.767	0.594	0.346	0.292	0.250
$A\sigma^7$	276	0.332	1.859	0.522	1.001	0.348	0.339	0.259
$\sigma^8$	15	0.841	1.566	0.945	0.579	0.348	0.268	0.279
$A\sigma^8$	291	0.375	1.845	0.552	0.983	0.348	0.336	0.260
$\sigma^9$	13	1.326	1.879	1.278	0.751	0.390	0.268	0.281
$A\sigma^9$	304	0.456	1.847	0.601	0.974	0.350	0.333	0.261
$\sigma^{10}$	15	1.206	1.850	1.186	0.822	0.389	0.253	0.230
$A\sigma^{10}$	319	0.515	1.847	0.641	0.968	0.352	0.330	0.259
$\sigma^{11}$	11	1.567	1.891	1.367	0.744	0.287	0.305	0.239
$A\sigma^{11}$	330	0.582	1.848	0.677	0.961	0.350	0.329	0.259
$\sigma^{12}$	9	1.054	2.067	1.766	1.022	0.386	0.213	0.178
$A\sigma^{12}$	339	0.583	1.854	0.728	0.963	0.351	0.326	0.257
$\sigma^{13}$	6	1.822	1.890	2.120	0.672	0.485	0.382	0.413
$A\sigma^{13}$	345	0.624	1.855	0.774	0.959	0.353	0.327	0.260

conforme la distancia a la zona de masas conocidas aumenta, el error producido por las relaciones en el proceso iterativo se acumula generando predicciones que se desvían de manera sustancial al valor de la masa verdadera. El rango de validez de este proceso puede ampliarse al reducir los grados de libertad involucrados en él al añadir la información de las energías de separación provenientes de algún modelo externo. Esto además tiene la ventaja de provocar que en cada iteración del proceso se predigan más núcleos, con lo cual el proceso avanza más rápidamente a lo largo de la tabla de isótopos y por lo tanto el error crece de manera mucho más lenta.

Como ya se mencionó anteriormente la calidad de las predicciones obtenidas con el proceso iterativo depende principalmente de la calidad del modelo utilizado para las energías de separación, en el capítulo anterior se utilizaron las energías de separación provenientes de dos modelos. Primero se utilizaron las parametrizaciones a la energía de separación de un neutrón y de un protón propuestas en las ecuaciones 4.11 y 4.16 que fueron ajustadas a las energías de separación calculadas a partir de las masas experimentales conocidas y las cuales son de buena calidad pero demasiado simples y por lo tanto mejorables. Como segunda aproximación se utilizaron las energías de separación calculadas a partir de las predicciones de masa nuclear obtenidas con el modelo de Duflo-Zuker, las cuales son mejores que la parametrización anterior pero provienen de un modelo de masas. Sin duda alguna es posible mejorar el desempeño del proceso iterativo mejorando la información de las energías de separación para lo cual se puede utilizar el algoritmo CLEAN.

Debido a la simplicidad de la parametrización a las energías de separación de un neutrón y de un protón de las ecuaciones 4.11 y 4.16 es de esperarse que algunos efectos físicos presentes en las energías de separación no hayan sido considerados en estas. La figura 5.2 muestra las diferencias entre las energías de separación obtenidas con las parametrizaciones anteriores y las energías de separación calculadas a partir de las masas experimentales conocidas para los núcleos reportados en la compilación AME95, el caso de la energía de separación de un neutrón en la parte (a) y las energías de separación de un protón en la parte (b). La principal característica de estas diferencias es que el error nuevamente se acumula en ciertas regiones, es sistemático y forma patrones, mismos que pueden ser modelados y extrapolados por el algoritmo CLEAN.

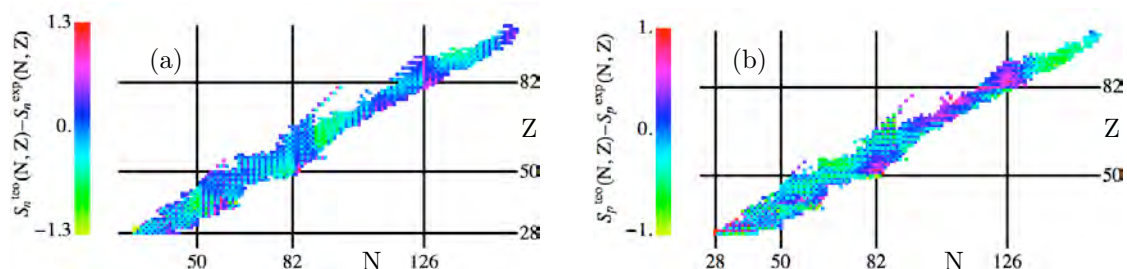


Figura 5.2: (a) Diferencias entre las energías de separación de un neutrón obtenidas con la ecuación 4.11 y las calculadas a partir de las masas nucleares experimentales reportadas en la compilación AME95. (b) Diferencias entre las energías de separación de un neutrón obtenidas con la ecuación 4.11 y las calculadas a partir de las masas nucleares experimentales reportadas en la compilación AME95.

Con el objetivo de analizar la mejoría del algoritmo CLEAN sobre los modelos propuestos en las ecuaciones 4.11 y 4.16 realizamos la prueba de predicción AME95-03 en las energías de separación. Se obtienen las diferencias del modelo a mejorar con los datos experimentales las cuales son presentadas en la figura 5.2. Estas diferencias se consideran patrones cuasiperiódicos en los cuales se utiliza el algoritmo CLEAN para detectar la sistemática en ellos y extrapolarlos. Hemos utilizado el algoritmo CLEAN hasta alcanzar una desviación  $\sigma = 100$  keVs en los núcleos pertenecientes al subconjunto de ajuste, 1293 en el caso de la energía de separación de un neutrón y 1232 en el caso de la energía de separación de un protón. Después de obtener la extrapolación se suma esta contribución a la predicción del modelo y se comparan los resultados obtenidos y las energías de separación calculadas a partir de los datos de masa experimentales, esta comparación es realizada en los núcleos pertenecientes al subconjunto de predicción.

Al aplicar esta técnica se obtiene una desviación  $\sigma = 0.294$  MeVs en los 224 núcleos que componen el subconjunto de predicción para el caso de la energía de separación de un neutrón y una desviación de  $\sigma = 0.367$  MeVs en 208 núcleos para el caso de la energía de separación de un protón. Al comparar estos resultados con las tablas 4.5 y 4.6 se puede observar que se obtienen mejorías de aproximadamente 100 keVs con lo cual se ratifica que el algoritmo CLEAN es capaz de mejorar las predicciones del modelo utilizado para generar el patrón a extrapolar y demuestra que es posible utilizar el algoritmo CLEAN sobre otras observables siempre y cuando la superficie generada con las diferencias entre el modelo y los datos experimentales sea suave y sistemática.

Al aplicar el algoritmo CLEAN sobre las predicciones para las energías de separación de las ecuaciones 4.11 y 4.16 se han conseguido valores más precisos de estas. Estos valores pueden ser utilizados ahora en el proceso iterativo descrito anteriormente, en este lo llamaremos IGK2CL ya que de alguna manera es el proceso iterativo IGK2 mejorado con el algoritmo CLEAN. La eficacia de corregir las predicciones de las energías de separación se pueden cuantificar al predecir las masas pertenecientes al subconjunto de predicción de la prueba AME95-03 con el proceso iterativo IGK2CL. La tabla 5.2 muestra los resultados de utilizar estas energías de separación en el proceso iterativo en la prueba de predicción AME95-03. Estos resultados son comparables con la entrada IGK2 de la tabla 4.8 que muestran los resultados de esta prueba con el proceso iterativo sin corregir las energías de separación con el algoritmo CLEAN, IGK2. Se puede observar cómo el proceso IGK2CL es mejor en cada iteración tal como era de esperarse al utilizar mejores predicciones para las energías de separación.

Tabla 5.2: Desviaciones cuadráticas medias  $\sigma^i$  y  $A\sigma^i$  en MeVs para los núcleos predichos en cada iteración del proceso iterativo IGK2CL. Se muestra el número de núcleos predichos en la iteración  $i$  y en paréntesis se muestra el número de núcleos predichos hasta la iteración  $i$ .

	Iteración 1		Iteración 2		Iteración 3		Iteración 4	
	227	(227)	92	(319)	34	(353)	10	(363)
Modelo	$\sigma^i$	$A\sigma^i$	$\sigma^i$	$A\sigma^i$	$\sigma^i$	$A\sigma^i$	$\sigma^i$	$A\sigma^i$
IGK2CL	0.275	0.275	0.624	0.408	1.072	0.511	1.472	0.560

Las predicciones del proceso iterativo IGK2CL son de mayor precisión que las obtenidas con el proceso IGK2 tal como lo muestra la comparación entre las tablas 4.8 y 5.2. Sin embargo aun no son comparables con las predicciones de los mejores modelos. Como ya se mencionó anteriormente es posible mejorar las predicciones de estos procesos iterativos al utilizar mejores modelos para los valores de las energías de separación.

### 5.3. Conclusiones

En capítulos anteriores ha quedado demostrado que las relaciones de Garvey-Kelson a través de un proceso iterativo y el mejoramiento de las predicciones de un modelo utilizando el reconocimiento y reconstrucción de patrones con el algoritmo CLEAN son un par de excelentes herramientas en la predicción de masas nucleares. En el capítulo anterior se realizó un estudio extenso del error provocado en el proceso iterativo con el objetivo de definir un rango en el cual las predicciones realizadas con esta técnica sean de una precisión comparable con los mejores modelos de predicción de masas. De la misma manera en este capítulo se realiza un estudio del error en el segundo de estos métodos, el algoritmo CLEAN. En este estudio se utilizaron como herramienta las iteraciones del proceso IGK1 con el objetivo de definir una noción de distancia a la zona conocida de tal manera que sea posible definir un rango de validez para el algoritmo CLEAN. Se encontró que este rango de validez es dependiente del modelo utilizado para generar el patrón a extrapolar, siendo mucho más amplio en los casos donde el patrón es más simple y contiene periodicidades evidentes. El caso más interesante sin duda alguna resulta al utilizar el modelo de Dufflo-Zucker para generar el patrón, modelo con el cual después de la reconstrucción se logran predicciones de gran precisión sin embargo el rango en el cual el algoritmo CLEAN mejora

estas predicciones es pequeño. Es de suma importancia recalcar que al salirnos del rango de validez en el cual la mejoría debida a la reconstrucción es evidente el algoritmo CLEAN no afecta de manera negativa las predicciones del modelo utilizado.

En un intento por aprovechar las cualidades de ambas técnicas se utilizó el algoritmo de reconstrucción CLEAN para mejorar las predicciones de las energías de separación de un neutrón y de un protón de las parametrizaciones mostradas en las ecuaciones 4.11 y 4.16 las cuales son utilizadas en el proceso iterativo IGK2, después de aplicar la reconstrucción, el incremento en la precisión de las predicciones con este proceso es evidente, a este proceso lo llamamos IGK2CL y comprueba que al utilizar mejores predicciones para las energías de separación las predicciones en masa son mejores. Sin duda alguna es necesario desarrollar modelos más precisos de las energías de separación.





## Capítulo 6

# Conclusiones generales

La correcta descripción de las propiedades nucleares es esencial para ampliar nuestro conocimiento del mundo microscópico y del universo en general, entre estas propiedades sin duda alguna la de mayor importancia es la masa del núcleo. Desde los principios de la física nuclear grandes esfuerzos se han llevado a cabo tanto experimental como teóricamente para determinar el valor de la masa nuclear en todos aquellos núcleos que se cree existen en la naturaleza. Experimentalmente las técnicas existentes en la actualidad son de una complejidad impresionante y han permitido poco a poco el conocimiento sistemático del comportamiento de las masas nucleares como función del número de neutrones y del número de protones. Sin embargo el extender la frontera de la región de núcleos conocidos es cada vez más difícil ya que los núcleos a estudiar son cada vez más inestables y es mucho más difícil producirlos. Debido a esto es necesario el uso de modelos teóricos para predecir el valor de la masa para núcleos que aun no han sido producidos experimentalmente. En la actualidad existen gran cantidad de modelos y técnicas para predecir masas, todas ellas de alguna u otra manera utilizan la información de las masas nucleares conocidas para determinar propiedades físicas generales en éstas, a través de las cuales es posible determinar el valor de la masa para los núcleos en los cuales no se conoce. la mayoría de los modelos teóricos existentes son capaces de describir el comportamiento de las masas conocidas experimentalmente con una precisión aceptable, sin embargo en la región no conocida los diferentes modelos y técnicas predicen valores de la masa para un mismo núcleo los cuales divergen uno de otro de manera importante, haciendo verdaderamente difícil el elegir un modelo y sus predicciones.

De particular importancia es el comportamiento sistemático y suave que tienen las masas en el plano  $(N,Z)$ . Al graficar el valor de la masa como función del número de neutrones y el número de protones se obtiene una superficie cuyas propiedades son de suma importancia para poder predecir las masas nucleares desconocidas. La parte medular de este trabajo de investigación presenta un par de técnicas de predicción de masas nucleares las cuales se concentran principalmente en el comportamiento y las propiedades sistemáticas de esta superficie. En la primera de ellas se pretende caracterizar de manera global las estructuras sistemáticas y los patrones cuasiperiódicos que aparecen al obtener la diferencia entre las masas experimentales conocidas y las predicciones de alguno de los modelos teóricos utilizados en la actualidad. Estos patrones reflejan características físicas que no están incluidas en el modelo utilizado, las cuales se modelan en términos de funciones armónicas. Las diferencias entre el modelo teórico y las masas experimentales conforman una imagen la cual es considerada como el producto de otras dos, una imagen en la cual aparecen los valores de las masas para todos los núcleos con posibilidad de existir y la otra una máscara binaria hecha de ceros y unos que nos permite “ver” únicamente aquellas masas cuyo valor es conocido experimentalmente. Al considerar este producto, el problema se expresa en términos de una deconvolución la cual se realiza a través del algoritmo CLEAN. Utilizando esta aproximación es posible detectar y modelar propiedades periódicas del patrón y estructuras sistemáticas que aparecen en la imagen de las diferencias de masas.

La segunda aproximación es de carácter local y utiliza las bien conocidas relaciones de Garvey-Kelson de manera iterativa para poder predecir el valor de la masa nuclear. Las relaciones de Garvey-Kelson consisten en ecuaciones que relacionan 6 masas vecinas en el plano  $(N,Z)$ . Estas relaciones se han utilizado de manera previa para predecir masas nucleares, sin embargo en este trabajo se presenta una manera de

aprovechar todas las posibles estimaciones a una masa lo cual permite realizar predicciones más precisas. A lo largo del proceso iterativo se van utilizando en las relaciones masas predichas por la técnica en iteraciones previas lo cual genera un error acumulativo que se incrementa con cada iteración y disminuye la precisión de las predicciones. Se presenta una posible optimización de este proceso iterativo a través de una reducción en los grados de libertad involucrados en cada iteración incorporando la información de las energías de separación de un neutrón y de un protón en las relaciones de Garvey-Kelson. Utilizando esta información es posible aumentar el número de núcleos predichos por el proceso en cada iteración con lo cual la velocidad con la que el error se acumula se ve reducida.

Para ambas técnicas se realizó un estudio detallado del poder predictivo utilizando como punto de partida para los modelos las masas reportadas en la compilación AME95 y como núcleos prueba a predecir aquellos que se midieron experimentalmente entre dicha compilación y la más reciente AME03. A lo largo de la investigación se realiza esta prueba para cada una de las aproximaciones presentadas y los resultados se comparan con los obtenidos en esta misma prueba por los modelos más utilizados. Los resultados en ésta y otras pruebas demuestran de manera contundente y nos permiten concluir que ambas aproximaciones son capaces de predecir masas nucleares en la región cercana a la zona conocida experimentalmente de gran calidad y con una precisión comparable a la de los modelos más utilizados en la actualidad. Para definir el concepto de distancia se utilizó el proceso iterativo de Garvey-Kelson y los núcleos predichos en cada una de las iteraciones, con lo cual los núcleos predichos en la primera iteración se encuentran a distancia uno, aquellos predichos en la segunda iteración se encuentran a dos unidades de distancia a la zona conocida y así sucesivamente.

Las predicciones de la aproximación en la cual se utiliza el algoritmo de deconvolución CLEAN evidentemente dependen del modelo teórico utilizado para generar el patrón de diferencias de masas a extrapolar. En todos los casos utilizados para analizar el comportamiento del algoritmo y el poder predictivo de esta técnica se observó que el algoritmo CLEAN es capaz de mejorar considerablemente las predicciones del modelo. Esta mejoría tiene una dependencia con la distancia a la zona en donde el patrón es conocido. La distancia para la cual el algoritmo deja de mejorar las predicciones del modelo se define como el rango de validez de la aproximación y se encontró que este depende de las características del patrón de diferencias y por lo tanto del modelo utilizado como punto de partida.

Con el objetivo de definir un rango de validez para el cual la precisión de las predicciones obtenidas con el proceso iterativo de las relaciones de Garvey-Kelson es aceptable se realizó un estudio exhaustivo de la manera en la cual crece el error en función de la distancia a la zona conocida antes de aplicar el proceso y como función del número de iteración realizadas en el proceso. Se encontró que el error en el proceso iterativo crece de manera sistemática y que la velocidad con la que crece depende de las características de la superficie que se intenta predecir, en esta dirección se demostró de manera gráfica que el error se acumula sistemáticamente por regiones. La posición de estas regiones esta correlacionada íntimamente con la manera en la que varía la energía residual de interacción entre los últimos neutrones y protones de valencia. La precisión de las predicciones obtenidas mediante el proceso iterativo son comparables con las de los mejores modelos únicamente en las primeras iteraciones, sin embargo es posible ampliar este rango de validez incluyendo la información de las energías de separación de un neutrón y de un protón en las relaciones de Garvey-Kelson. Esta información se obtiene a partir de modelos para las energías de separación, conforme la predicción de estos modelos sea mejor la predicción de masas nucleares del proceso iterativo se ve mejorada. Al utilizar las predicciones de masa del modelo de Dufflo-Zuker para generar las energías de separación se consigue mejorar de manera importante el desempeño del proceso iterativo.

Puntualmente podemos concluir que ambas aproximaciones, la reconstrucción de patrones y el proceso iterativo, son capaces de predecir eficazmente valores de la masa nuclear en la región no conocida experimentalmente. Ambas técnicas se basan en las características y el comportamiento sistemático de las superficies generadas a partir del valor de las masas nucleares, además tanto la reconstrucción de imágenes como el proceso iterativo utilizan como apoyo modelos ya existentes, la reconstrucción de imágenes para generar el patrón de diferencias extrapolable y el proceso iterativo para generar la información de las energías de separación necesaria. La validez y precisión de estas predicciones depende de la calidad de los modelos utilizados como apoyo. En el estado actual de la investigación ambas técnicas son capaces

de predecir con una precisión comparable con aquella de los mejores modelos de predicción de masas en la región cercana a la zona conocida experimentalmente.

Las técnicas para reconstruir imágenes pueden ser utilizadas con otras observables nucleares, por ejemplo las energías de separación tal como se hizo en la última parte de esta investigación para después utilizarlas en el proceso iterativo. Los únicos ingredientes necesarios son una cantidad de datos experimentales suficiente como para capturar las propiedades generales del comportamiento sistemático de la observable y algún modelo teórico capaz de describir el comportamiento de éstas de manera razonable. A partir de estos dos ingredientes es posible generar un patrón que incluya aquellas propiedades físicas que no están incluidas en el modelo, si este patrón contiene regularidades entonces es posible que sea extrapolable.

## 6.1. Predicciones a partir de AME03

A lo largo de esta investigación se han estudiado diferentes alternativas para predecir masas nucleares, todas las técnicas desarrolladas utilizan como ingrediente principal el comportamiento sistemático de las masas nucleares. Para cuantificar el desempeño de estas aproximaciones se ha utilizado principalmente la prueba de predicción AME95-03. En esta prueba las predicciones de dos de las técnicas utilizadas destacan por su precisión. Las predicciones del modelo de Duflo-Zuker mejoradas con el algoritmo de reconstrucción CLEAN y las predicciones del proceso iterativo utilizando las relaciones de Garvey-Kelson y la información de las energías de separación de un neutrón y de un protón obtenidas a partir de las predicciones de masa del modelo de Duflo-Zuker. De acuerdo con la tabla 4.9 la precisión de esta segunda aproximación es de calidad superior al modelo de Duflo-Zuker al menos para las cuatro primeras iteraciones del proceso. Si confiamos en que esta precisión se mantiene no sólo para los núcleos pertenecientes al subconjunto de predicción de la prueba AME95-03 y se extiende a todos los núcleos predichos hasta la cuarta iteración entonces es posible predecir con este método alrededor de 2000 núcleos a partir de todas las masas reportadas en la compilación AME03 con  $N \geq 28$  y  $Z \geq 28$ . A continuación se muestra en la tabla 6.1 la predicción de las dos técnicas para estos núcleos. En cada núcleo se muestra el número de iteración en la cual es predicho para llevar un control de la distancia a la cual se encuentran estos núcleos de la zona conocida. Se puede observar que las predicciones realizadas por ambas técnicas son muy similares entre sí. Estas predicciones serán reportadas en un artículo a publicarse.

Tabla 6.1: Energía de amarre  $BE(N,Z)$  en MeVs predichas por el proceso iterativo IGKDZ en la columna cuatro y por el modelo de Duflo-Zuker corregido con el algoritmo de reconstrucción CLEAN en la columna cinco. Las primeras tres columnas muestran el número de neutrones, el número de protones y la iteración del proceso iterativo IGKDZ en el cual cada núcleo es predicho.

N	Z	iteración	$BE(N,Z)$ en MeVs (IGKDZ)	$BE(N,Z)$ en MeVs (DZ+CLEAN)
42	40	1	695.05	694.374
43	41	1	707.2	706.912
43	42	1	711.191	710.969
44	40	1	718.192	718.306
44	43	1	726.761	726.375
45	43	1	738.617	738.046
45	44	1	742.543	741.929
46	43	1	752.001	752.094

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
46	44	1	756.559	756.494
47	44	1	768.09	768.061
47	45	1	770.286	769.636
48	29	1	647.83	647.866
48	44	1	782.142	782.03
48	45	1	784.196	784.056
48	46	1	788.619	788.29
48	47	1	789.579	789.264
49	29	1	652.166	652.479
49	30	1	668.359	668.569
49	45	1	796.076	795.641
49	46	1	800.582	800.264
49	47	1	802.348	801.723
50	29	1	657.598	658.455
50	49	1	821.699	821.504
51	31	1	690.872	691.783
51	32	1	706.323	706.904
51	33	1	718.499	718.891
51	48	1	831.196	830.973
52	30	1	680.865	682.267
52	31	1	695.21	696.213
52	32	1	711.252	712.174
52	33	1	723.671	724.338
52	49	1	845.276	845.211
52	51	1	847.297	847.685
53	32	1	714.771	714.914
53	33	1	727.816	727.878
53	50	1	859.205	859.452
53	51	1	858.772	858.544
54	32	1	719.19	719.561
54	33	1	732.871	732.678
54	53	1	871.166	871.478
55	33	1	735.948	735.71
55	34	1	751.095	750.985
55	51	1	881.919	881.926
55	52	1	883.396	883.807
56	33	1	740.05	739.923
56	34	1	755.817	756.044
56	51	1	894.154	894.364
56	55	1	895.24	895.323
57	33	1	742.154	742.497
57	34	1	758.446	758.696

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
57	51	1	904.151	904.15
57	54	1	907.87	908.133
58	35	1	776.55	776.661
58	36	1	792.132	792.142
58	53	1	919.185	919.235
58	57	1	920.014	919.976
59	35	1	779.162	779.699
59	36	1	795.055	795.273
59	51	1	925.372	925.309
59	56	1	933.049	933.194
60	35	1	783.059	783.903
60	36	1	800.022	800.313
60	55	1	944.585	944.702
60	56	1	947.185	946.92
61	35	1	785.987	786.563
61	36	1	802.717	803.043
61	53	1	951.243	951.189
61	55	1	954.961	955.32
61	56	1	957.592	957.878
62	35	1	789.878	790.316
62	36	1	807.911	807.649
62	56	1	970.747	970.958
62	57	1	970.54	970.956
63	36	1	810.262	810.009
63	37	1	824.526	824.603
63	57	1	981.423	981.777
63	58	1	983.854	984.118
64	35	1	796.912	795.968
64	36	1	815.105	814.214
64	39	1	859.329	858.911
64	40	1	874.396	874.216
64	57	1	994.148	994.551
64	58	1	997.002	997.354
65	38	1	848.837	848.538
65	39	1	863.469	862.581
65	40	1	878.154	877.971
65	41	1	889.99	889.916
65	57	1	1004.59	1004.78
65	58	1	1007.72	1007.88
66	37	1	836.521	835.668
66	38	1	854.177	853.283
66	41	1	896.164	895.67

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
66	42	1	909.836	909.788
66	57	1	1016.71	1016.88
66	58	1	1020.39	1020.45
67	41	1	899.374	899.811
67	42	1	914.111	913.996
67	58	1	1030.23	1030.36
67	59	1	1031.11	1031.35
68	41	1	904.978	905.169
68	42	1	919.836	920.084
68	59	1	1043.33	1043.56
68	60	1	1046.66	1046.79
69	41	1	908.976	909.002
69	42	1	923.849	923.961
69	60	1	1056.57	1056.81
69	61	1	1057.19	1057.44
70	43	1	941.778	942.021
70	44	1	956.096	956.317
70	61	1	1069.4	1069.74
70	62	1	1072.37	1072.55
71	42	1	932.647	932.918
71	43	1	945.847	945.975
71	61	1	1079.46	1079.56
71	62	1	1082.18	1082.61
72	44	1	966.218	966.31
72	45	1	977.899	978.106
72	62	1	1094.7	1094.7
72	63	1	1094.83	1095.19
73	44	1	969.939	970.173
73	45	1	982.292	982.668
73	46	1	996.217	996.488
73	63	1	1104.8	1105.15
73	64	1	1107.18	1107.72
73	65	1	1106.73	1107.47
74	44	1	975.467	975.895
74	45	1	988.625	988.483
74	63	1	1116.6	1116.89
74	64	1	1119.74	1119.88
74	65	1	1119.13	1119.89
75	46	1	1007.08	1007.43
75	47	1	1019.08	1019.4
75	64	1	1129.39	1129.67
75	67	1	1130.76	1131.34

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
76	46	1	1013.45	1013.71
76	47	1	1025.95	1025.78
76	66	1	1144.34	1144.67
76	67	1	1143.44	1144.34
77	46	1	1017.71	1017.92
77	47	1	1030.71	1030.68
77	65	1	1151.8	1152.3
77	66	1	1154.5	1155.
78	46	1	1023.99	1023.95
78	47	1	1037.23	1036.8
78	67	1	1166.99	1167.58
78	68	1	1169.3	1169.75
79	46	1	1027.48	1027.96
79	47	1	1041.85	1041.51
79	67	1	1177.62	1177.89
79	68	1	1179.97	1180.24
79	70	1	1181.44	1181.39
80	46	1	1033.56	1033.75
80	47	1	1047.79	1047.36
80	68	1	1192.73	1192.69
80	69	1	1192.39	1192.61
80	70	1	1194.77	1194.43
80	71	1	1193.52	1193.31
81	47	1	1051.99	1051.88
81	48	1	1067.31	1067.45
81	69	1	1203.08	1203.04
81	72	1	1205.59	1205.45
82	46	1	1042.55	1043.12
82	47	1	1057.69	1057.48
82	72	1	1218.99	1218.7
82	73	1	1217.56	1217.51
83	47	1	1059.31	1059.56
83	48	1	1076.37	1075.78
83	70	1	1226.8	1226.74
83	71	1	1226.66	1226.66
84	48	1	1079.11	1079.45
84	49	1	1093.27	1093.17
84	74	1	1240.82	1240.52
84	75	1	1239.07	1239.02
85	49	1	1095.24	1095.46
85	50	1	1111.52	1111.01
85	51	1	1122.7	1122.07

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
85	72	1	1249.15	1249.28
85	73	1	1248.91	1248.94
86	50	1	1115.31	1114.94
86	51	1	1126.21	1126.07
86	52	1	1138.89	1139.01
86	76	1	1262.3	1261.96
86	77	1	1260.21	1260.1
87	52	1	1141.75	1141.67
87	53	1	1152.46	1152.18
87	74	1	1271.54	1271.59
87	75	1	1270.96	1270.92
88	52	1	1146.14	1146.05
88	53	1	1156.84	1156.62
88	73	1	1280.71	1280.82
88	77	1	1282.48	1282.49
88	78	1	1283.29	1282.95
89	53	1	1159.76	1159.68
89	54	1	1172.21	1172.15
89	75	1	1292.01	1292.06
89	76	1	1293.5	1293.54
90	53	1	1163.96	1163.83
90	54	1	1177.12	1176.96
90	79	1	1303.37	1303.37
90	80	1	1303.71	1303.38
91	53	1	1166.78	1166.65
91	56	1	1202.96	1202.9
91	75	1	1312.7	1312.59
91	78	1	1314.89	1315.01
92	53	1	1170.35	1170.5
92	54	1	1184.48	1184.41
92	57	1	1218.44	1218.43
92	75	1	1323.65	1323.52
92	81	1	1323.61	1323.64
92	82	1	1323.49	1323.16
93	53	1	1172.71	1173.16
93	56	1	1212.17	1212.03
93	57	1	1222.58	1222.64
93	77	1	1335.	1334.83
93	80	1	1335.71	1335.89
94	55	1	1203.32	1203.57
94	56	1	1217.32	1217.25
94	57	1	1228.15	1227.93

continúa en la siguiente página



**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
94	58	1	1240.29	1240.44
94	81	1	1346.08	1346.01
94	82	1	1346.09	1345.95
95	55	1	1206.35	1206.78
95	57	1	1232.06	1231.81
95	58	1	1244.52	1244.36
95	60	1	1266.22	1265.86
95	77	1	1355.07	1355.1
95	82	1	1355.94	1356.1
96	58	1	1250.26	1249.91
96	59	1	1260.4	1260.11
96	83	1	1365.23	1365.01
96	84	1	1363.88	1363.65
97	59	1	1264.61	1264.29
97	60	1	1276.35	1276.31
97	63	1	1305.42	1305.07
97	79	1	1376.82	1377.11
97	82	1	1377.83	1378.05
98	60	1	1282.49	1282.14
98	61	1	1292.27	1291.8
98	62	1	1302.99	1303.21
98	63	1	1311.78	1311.64
98	83	1	1387.38	1387.24
98	84	1	1386.69	1386.46
99	61	1	1296.66	1296.23
99	62	1	1307.72	1307.66
99	63	1	1316.64	1316.67
99	64	1	1326.79	1326.86
99	81	1	1398.08	1398.47
99	84	1	1396.55	1396.63
100	64	1	1333.2	1333.55
100	65	1	1341.42	1341.37
100	83	1	1409.04	1408.87
100	84	1	1408.86	1408.66
101	63	1	1327.23	1327.4
101	64	1	1337.95	1338.2
101	83	1	1418.18	1418.58
101	84	1	1418.24	1418.53
102	64	1	1344.05	1344.44
102	65	1	1352.87	1352.86
102	83	1	1429.87	1429.91
102	84	1	1430.49	1430.24

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
103	64	1	1348.57	1348.67
103	65	1	1357.57	1357.64
103	84	1	1439.67	1439.82
103	85	1	1437.56	1437.96
104	65	1	1363.56	1363.47
104	66	1	1373.86	1374.16
104	85	1	1449.34	1449.51
104	86	1	1450.03	1449.63
105	66	1	1378.46	1378.53
105	67	1	1387.11	1386.82
105	68	1	1396.45	1396.25
105	85	1	1458.79	1459.17
105	86	1	1459.51	1459.42
106	67	1	1393.04	1392.78
106	68	1	1402.8	1402.76
106	85	1	1470.4	1470.37
106	86	1	1471.24	1470.99
107	67	1	1397.98	1397.27
107	68	1	1407.74	1407.26
107	85	1	1479.84	1479.71
107	86	1	1480.43	1480.46
108	68	1	1413.34	1413.31
108	69	1	1421.9	1421.32
108	86	1	1491.98	1491.69
108	87	1	1490.48	1490.28
109	69	1	1426.94	1426.54
109	70	1	1436.66	1436.47
109	87	1	1500.1	1499.78
109	88	1	1500.37	1500.27
110	70	1	1443.08	1443.31
110	71	1	1450.37	1450.26
110	87	1	1510.93	1510.77
110	88	1	1512.	1511.63
111	70	1	1447.42	1448.24
111	71	1	1455.64	1455.68
111	87	1	1519.89	1519.93
111	88	1	1521.05	1520.89
112	70	1	1453.15	1454.74
112	71	1	1461.32	1462.19
112	88	1	1532.05	1531.87
112	89	1	1530.79	1530.68
113	71	1	1466.01	1466.89

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
113	72	1	1475.45	1476.17
113	88	1	1540.88	1540.89
113	89	1	1539.94	1540.03
114	72	1	1481.3	1482.59
114	73	1	1489.03	1489.7
114	89	1	1550.91	1550.9
114	90	1	1551.83	1551.86
115	72	1	1486.06	1487.15
115	73	1	1494.1	1494.82
115	89	1	1559.66	1560.01
115	90	1	1560.86	1561.03
116	72	1	1492.33	1493.32
116	73	1	1500.68	1501.05
116	89	1	1570.39	1570.56
116	90	1	1571.88	1571.9
117	74	1	1514.72	1515.45
117	75	1	1522.5	1522.74
117	90	1	1580.35	1580.76
117	91	1	1579.41	1579.93
118	74	1	1521.29	1521.98
118	75	1	1529.11	1529.35
118	90	1	1591.14	1591.31
118	91	1	1590.2	1590.52
119	74	1	1526.6	1526.67
119	75	1	1534.6	1534.6
119	91	1	1598.91	1599.39
119	92	1	1599.8	1600.38
120	74	1	1532.64	1532.93
120	75	1	1540.91	1540.92
120	91	1	1609.25	1609.62
120	92	1	1610.67	1610.94
121	76	1	1555.65	1555.68
121	77	1	1563.45	1563.25
121	92	1	1619.22	1619.48
121	93	1	1618.07	1618.64
122	75	1	1551.93	1551.96
122	76	1	1562.11	1562.28
122	92	1	1629.42	1629.67
122	93	1	1628.4	1628.85
123	76	1	1566.92	1567.06
123	77	1	1575.81	1575.28
123	92	1	1638.1	1637.86

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
123	93	1	1636.99	1637.35
124	77	1	1581.73	1581.66
124	78	1	1591.73	1591.64
124	92	1	1647.62	1647.66
124	93	1	1646.97	1647.17
125	78	1	1596.69	1596.77
125	79	1	1605.13	1604.67
125	93	1	1655.43	1655.29
125	94	1	1657.1	1656.54
126	78	1	1603.02	1603.41
126	79	1	1611.6	1611.39
126	93	1	1664.64	1664.69
126	94	1	1666.36	1666.25
127	78	1	1605.88	1606.38
127	79	1	1614.64	1614.77
127	93	1	1671.54	1671.46
127	94	1	1673.56	1673.11
128	79	1	1619.32	1619.22
128	80	1	1628.64	1629.2
128	92	1	1679.54	1679.23
128	93	1	1680.2	1679.57
129	79	1	1622.66	1622.48
129	80	1	1631.97	1632.35
129	92	1	1686.24	1685.93
129	93	1	1687.	1686.61
130	80	1	1637.	1637.1
130	81	1	1644.86	1644.75
130	92	1	1694.6	1694.52
130	93	1	1695.37	1695.33
131	80	1	1640.37	1640.15
131	81	1	1648.4	1648.21
131	91	1	1697.98	1697.87
131	94	1	1705.18	1705.12
132	80	1	1644.86	1644.79
132	81	1	1652.63	1652.75
132	94	1	1713.99	1714.07
132	95	1	1714.48	1714.61
133	81	1	1655.78	1656.12
133	82	1	1666.21	1666.36
133	93	1	1718.03	1718.03
133	94	1	1720.99	1721.17
134	82	1	1671.15	1671.37

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
134	83	1	1677.24	1677.42
134	95	1	1730.77	1730.96
134	96	1	1733.65	1733.69
135	83	1	1680.84	1681.3
135	84	1	1688.74	1689.12
135	93	1	1733.16	1733.02
135	96	1	1741.13	1741.08
136	84	1	1694.2	1694.57
136	85	1	1700.13	1700.45
136	95	1	1746.8	1746.77
136	96	1	1750.13	1750.03
137	85	1	1704.13	1704.73
137	86	1	1711.89	1712.37
137	95	1	1753.97	1753.81
137	98	1	1761.01	1760.79
138	85	1	1709.69	1710.03
138	86	1	1717.78	1718.21
138	95	1	1762.17	1762.02
138	98	1	1770.16	1769.96
139	85	1	1713.59	1714.1
139	86	1	1721.9	1722.32
139	93	1	1761.63	1761.39
139	96	1	1772.78	1772.63
140	85	1	1718.83	1719.14
140	86	1	1727.64	1727.91
140	95	1	1777.04	1776.67
140	96	1	1781.08	1780.97
141	86	1	1731.53	1731.78
141	87	1	1738.17	1738.55
141	95	1	1783.65	1783.14
141	96	1	1787.75	1787.5
142	85	1	1727.68	1727.78
142	86	1	1737.09	1737.11
142	95	1	1791.11	1790.71
142	98	1	1801.63	1801.68
143	87	1	1748.12	1748.06
143	88	1	1756.44	1756.54
143	96	1	1801.96	1801.73
143	97	1	1804.99	1804.47
144	87	1	1753.02	1753.15
144	88	1	1762.21	1762.15
144	89	1	1768.64	1768.63

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
144	97	1	1812.36	1812.21
144	100	1	1821.34	1821.79
145	88	1	1766.27	1766.05
145	89	1	1773.19	1773.03
145	97	1	1818.78	1818.54
145	98	1	1822.89	1822.92
146	89	1	1778.65	1778.37
146	90	1	1787.18	1786.99
146	99	1	1832.99	1833.07
146	102	1	1840.45	1841.16
147	89	1	1783.06	1782.5
147	90	1	1791.38	1791.11
147	99	1	1839.52	1839.52
147	100	1	1843.14	1843.4
148	90	1	1796.89	1796.65
148	91	1	1803.51	1803.24
148	99	1	1846.93	1847.04
148	102	1	1855.71	1856.47
149	91	1	1808.08	1807.56
149	92	1	1816.01	1815.73
149	99	1	1853.32	1853.16
149	100	1	1857.4	1857.48
150	92	1	1821.6	1821.44
150	93	1	1827.78	1827.57
150	99	1	1860.38	1860.31
150	104	1	1874.62	1875.12
151	92	1	1825.73	1825.44
151	93	1	1832.35	1832.04
151	97	1	1856.8	1856.71
151	99	1	1866.09	1866.09
151	102	1	1877.1	1877.28
152	92	1	1831.05	1830.83
152	95	1	1851.25	1851.21
152	101	1	1880.75	1880.74
152	106	1	1892.84	1892.78
153	94	1	1849.95	1849.72
153	95	1	1855.85	1855.81
153	101	1	1886.44	1886.59
153	104	1	1895.86	1896.1
154	94	1	1855.37	1855.24
154	95	1	1861.24	1861.32
154	103	1	1900.07	1900.18

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
154	104	1	1903.61	1903.8
154	108	1	1909.92	1909.7
155	94	1	1859.17	1859.06
155	97	1	1878.72	1878.71
155	103	1	1905.8	1906.09
155	104	1	1909.63	1909.71
156	96	1	1878.72	1878.81
156	97	1	1884.21	1884.33
156	102	1	1910.09	1910.48
156	103	1	1912.89	1913.01
156	106	1	1922.14	1921.86
156	110	1	1927.81	1928.07
157	96	1	1882.85	1882.73
157	98	1	1895.58	1895.7
157	99	1	1900.63	1900.66
157	102	1	1915.51	1915.63
157	103	1	1918.75	1918.57
157	106	1	1928.05	1928.51
158	98	1	1901.26	1901.42
158	99	1	1906.19	1906.36
158	100	1	1912.47	1912.8
158	101	1	1916.63	1916.74
158	108	1	1941.15	1941.4
159	100	1	1917.22	1917.22
159	101	1	1921.93	1921.8
159	104	1	1935.89	1936.11
159	108	1	1947.23	1948.18
161	106	1	1955.96	1956.9
46	45	2	757.57	757.571
47	46	2	773.53	773.367
49	48	2	805.588	805.326
51	29	2	660.386	660.945
51	30	2	677.634	677.96
51	50	2	835.654	835.704
52	29	2	663.501	664.367
53	30	2	683.917	684.093
53	31	2	698.213	698.882
53	52	2	859.259	859.596
54	30	2	686.714	687.766
54	31	2	702.087	702.659
55	31	2	704.981	704.813
55	32	2	721.717	721.766

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
55	53	2	882.623	882.59
55	54	2	883.053	883.398
56	31	2	708.226	707.999
56	32	2	725.528	725.849
57	31	2	709.279	709.692
57	32	2	727.294	727.574
57	53	2	906.551	906.511
57	56	2	907.252	907.309
58	33	2	746.252	746.177
58	34	2	763.088	763.243
59	33	2	747.89	748.338
59	34	2	765.226	765.46
59	53	2	929.369	929.34
59	55	2	931.155	931.444
59	58	2	932.584	932.719
60	33	2	750.779	751.532
60	34	2	769.246	769.541
60	57	2	945.911	946.091
60	58	2	947.539	947.295
61	33	2	752.679	753.32
61	34	2	771.006	771.361
61	57	2	957.173	957.5
61	58	2	958.779	959.06
62	33	2	755.722	756.07
62	34	2	775.276	775.016
62	58	2	972.676	972.97
62	59	2	971.482	971.94
63	34	2	776.701	776.476
63	35	2	792.183	792.631
63	59	2	983.199	983.524
63	60	2	984.566	984.821
64	33	2	760.897	759.864
64	34	2	780.629	779.74
64	59	2	996.677	997.121
64	60	2	998.482	998.854
65	36	2	816.507	816.235
65	37	2	831.963	831.754
65	59	2	1007.91	1008.09
65	60	2	1009.99	1010.14
66	35	2	801.858	800.921
66	36	2	820.96	820.069
66	39	2	868.025	867.435

continúa en la siguiente página



**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
66	40	2	884.029	883.609
66	59	2	1020.77	1020.99
66	60	2	1023.37	1023.48
67	38	2	856.169	855.853
67	39	2	871.196	870.791
67	40	2	887.176	887.025
67	60	2	1033.93	1034.12
67	61	2	1033.79	1034.01
68	37	2	842.598	841.752
68	38	2	861.132	860.239
68	39	2	875.126	875.261
68	40	2	892.038	892.291
68	61	2	1046.69	1046.99
68	62	2	1048.93	1049.1
69	39	2	878.225	878.323
69	40	2	895.253	895.389
69	62	2	1059.48	1059.82
69	63	2	1059.09	1059.32
70	41	2	913.789	913.985
70	42	2	929.437	929.684
70	63	2	1071.99	1072.35
70	64	2	1073.82	1074.02
71	40	2	902.459	902.748
71	41	2	917.093	917.184
71	63	2	1082.63	1082.83
71	64	2	1084.26	1084.76
71	65	2	1083.1	1083.82
72	42	2	937.984	938.074
72	43	2	951.007	951.216
72	64	2	1097.45	1097.53
72	65	2	1096.31	1096.88
73	42	2	940.912	941.164
73	43	2	954.797	955.035
73	66	2	1108.38	1108.92
73	67	2	1106.8	1107.51
74	42	2	945.659	946.084
74	43	2	960.23	960.016
74	66	2	1121.45	1121.74
74	67	2	1119.73	1120.62
75	44	2	979.286	979.552
75	45	2	992.466	992.848
75	66	2	1131.7	1132.1

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
75	69	2	1130.31	1131.06
76	44	2	984.666	985.034
76	45	2	998.575	998.402
76	68	2	1145.48	1145.93
76	69	2	1143.75	1144.68
77	44	2	988.277	988.494
77	45	2	1002.57	1002.58
77	67	2	1154.57	1155.05
77	68	2	1156.44	1156.84
77	70	2	1156.81	1156.83
78	44	2	993.788	993.746
78	45	2	1008.38	1007.88
78	69	2	1168.67	1169.1
78	70	2	1170.25	1170.34
78	71	2	1168.75	1168.53
79	44	2	996.527	997.016
79	45	2	1012.18	1011.87
79	69	2	1179.85	1179.95
79	72	2	1180.51	1180.43
80	44	2	1001.87	1002.05
80	45	2	1017.43	1016.93
80	72	2	1194.47	1194.16
80	73	2	1192.39	1192.27
81	45	2	1020.82	1020.74
81	46	2	1037.2	1037.56
81	71	2	1204.38	1204.34
81	74	2	1204.42	1204.28
82	44	2	1009.43	1009.94
82	45	2	1025.9	1025.56
82	74	2	1218.47	1218.23
82	75	2	1216.23	1216.23
83	45	2	1026.78	1027.07
83	46	2	1045.1	1044.55
83	72	2	1228.39	1228.36
83	73	2	1227.51	1227.5
84	46	2	1047.1	1047.6
84	47	2	1062.75	1062.57
84	76	2	1239.72	1239.4
84	77	2	1237.15	1237.08
85	47	2	1064.05	1064.32
85	48	2	1081.67	1081.12
85	74	2	1250.23	1250.32

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
85	75	2	1249.17	1249.14
86	48	2	1084.36	1084.47
86	49	2	1098.93	1098.77
86	78	2	1260.44	1260.1
86	79	2	1257.48	1257.4
87	49	2	1100.56	1100.8
87	50	2	1117.33	1116.9
87	51	2	1129.2	1128.7
87	76	2	1271.88	1271.93
87	77	2	1270.45	1270.38
88	50	2	1120.88	1120.55
88	51	2	1132.58	1132.39
88	79	2	1280.68	1280.7
88	80	2	1280.6	1280.26
89	51	2	1134.82	1134.79
89	52	2	1148.53	1148.45
89	77	2	1292.45	1292.48
89	78	2	1293.	1293.08
90	51	2	1138.38	1138.18
90	52	2	1152.66	1152.55
90	81	2	1300.66	1300.69
90	82	2	1300.05	1299.78
91	51	2	1140.43	1140.34
91	54	2	1179.9	1179.8
91	77	2	1314.13	1313.96
91	80	2	1313.51	1313.66
92	51	2	1143.36	1143.46
92	52	2	1158.61	1158.52
92	83	2	1318.73	1318.78
92	84	2	1316.53	1316.22
93	51	2	1144.93	1145.39
93	54	2	1187.39	1187.27
93	79	2	1335.51	1335.31
93	82	2	1333.36	1333.58
94	53	2	1176.76	1176.94
94	54	2	1191.76	1191.75
94	83	2	1342.33	1342.19
94	84	2	1340.41	1340.24
95	53	2	1178.96	1179.47
95	56	2	1220.63	1220.48
95	79	2	1356.37	1356.51
95	84	2	1350.82	1350.98

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
96	55	2	1210.69	1210.94
96	56	2	1225.49	1225.32
96	57	2	1236.97	1236.71
96	85	2	1359.92	1359.72
96	86	2	1357.84	1357.63
97	55	2	1213.38	1213.82
97	57	2	1240.49	1240.24
97	58	2	1253.58	1253.46
97	81	2	1377.22	1377.54
97	84	2	1373.96	1374.11
98	58	2	1258.97	1258.61
98	59	2	1269.85	1269.49
98	85	2	1383.23	1383.11
98	86	2	1381.81	1381.59
99	59	2	1273.63	1273.3
99	60	2	1286.01	1285.97
99	83	2	1396.84	1397.22
99	86	2	1392.25	1392.32
100	60	2	1291.72	1291.37
100	61	2	1302.14	1301.68
100	62	2	1313.45	1313.72
100	63	2	1322.9	1322.78
100	85	2	1406.03	1405.88
100	86	2	1405.11	1404.92
101	61	2	1305.92	1305.71
101	62	2	1317.72	1317.76
101	85	2	1415.73	1416.12
101	86	2	1415.05	1415.33
102	62	2	1322.99	1323.38
102	63	2	1333.11	1333.06
102	85	2	1427.9	1428.01
102	86	2	1427.92	1427.6
103	62	2	1326.91	1327.01
103	63	2	1337.12	1337.28
103	86	2	1437.67	1437.7
103	87	2	1434.71	1435.1
104	63	2	1342.62	1342.48
104	64	2	1354.1	1354.45
104	87	2	1447.	1447.19
104	88	2	1446.96	1446.56
105	64	2	1358.18	1358.26
105	65	2	1367.87	1367.83

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
105	87	2	1456.98	1457.34
105	88	2	1456.96	1456.86
106	65	2	1373.36	1373.2
106	66	2	1384.28	1384.46
106	87	2	1469.19	1469.08
106	88	2	1469.19	1468.96
107	65	2	1377.83	1377.16
107	66	2	1388.53	1388.41
107	87	2	1479.15	1478.91
107	88	2	1478.95	1478.92
108	66	2	1393.92	1393.9
108	67	2	1403.14	1402.78
108	88	2	1490.98	1490.65
108	89	2	1488.68	1488.5
109	67	2	1407.65	1406.87
109	68	2	1418.26	1417.83
109	89	2	1498.81	1498.47
109	90	2	1498.33	1498.23
110	68	2	1423.94	1424.1
110	69	2	1433.21	1432.84
110	89	2	1510.09	1509.97
110	90	2	1510.44	1510.08
111	68	2	1427.65	1428.47
111	69	2	1437.99	1437.76
111	89	2	1519.53	1519.58
111	90	2	1519.97	1519.81
112	68	2	1432.85	1434.4
112	69	2	1442.89	1443.71
112	90	2	1531.31	1531.25
112	91	2	1529.39	1529.33
113	69	2	1447.05	1447.89
113	70	2	1458.12	1458.88
113	90	2	1540.58	1540.67
113	91	2	1538.99	1539.06
114	70	2	1463.23	1464.67
114	71	2	1471.95	1472.74
114	91	2	1550.32	1550.34
114	92	2	1550.52	1550.57
115	70	2	1467.53	1468.63
115	71	2	1476.42	1477.27
115	91	2	1559.39	1559.81
115	92	2	1559.94	1560.1

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
116	70	2	1473.18	1474.17
116	71	2	1482.53	1482.86
116	91	2	1570.5	1570.75
116	92	2	1571.33	1571.36
117	72	2	1496.68	1497.65
117	73	2	1505.37	1505.94
117	92	2	1580.08	1580.58
117	93	2	1578.51	1579.01
118	72	2	1502.67	1503.56
118	73	2	1511.59	1511.91
118	92	2	1591.27	1591.49
118	93	2	1589.64	1589.99
119	72	2	1507.56	1507.64
119	73	2	1516.55	1516.56
119	93	2	1598.67	1599.18
119	94	2	1598.89	1599.46
120	72	2	1512.99	1513.28
120	73	2	1522.26	1522.24
120	93	2	1609.36	1609.78
120	94	2	1610.09	1610.37
121	74	2	1537.32	1537.37
121	75	2	1545.98	1545.92
121	94	2	1618.99	1619.25
121	95	2	1617.13	1617.69
122	73	2	1532.05	1532.04
122	74	2	1543.09	1543.34
122	94	2	1629.52	1629.78
122	95	2	1627.78	1628.26
123	74	2	1547.36	1547.51
123	75	2	1557.21	1556.69
123	94	2	1638.68	1638.29
123	95	2	1636.72	1637.07
124	75	2	1562.44	1562.42
124	76	2	1573.29	1573.37
124	94	2	1648.44	1648.41
124	95	2	1647.	1647.22
125	76	2	1577.75	1577.87
125	77	2	1587.22	1586.72
125	95	2	1655.8	1655.64
125	96	2	1656.76	1656.2
126	76	2	1583.62	1583.86
126	77	2	1592.97	1592.78

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
126	95	2	1665.4	1665.37
126	96	2	1666.43	1666.23
127	76	2	1585.98	1586.5
127	77	2	1595.69	1595.86
127	95	2	1672.74	1672.64
127	96	2	1674.05	1673.6
128	77	2	1600.08	1599.95
128	78	2	1610.46	1610.91
128	94	2	1681.79	1681.65
128	95	2	1681.71	1681.29
129	77	2	1603.06	1602.9
129	78	2	1613.28	1613.75
129	94	2	1688.93	1688.61
129	95	2	1689.07	1688.45
130	78	2	1618.06	1618.16
130	79	2	1626.91	1626.8
130	94	2	1697.79	1697.79
130	95	2	1697.72	1697.77
131	78	2	1621.1	1620.9
131	79	2	1630.14	1629.97
131	93	2	1702.72	1702.55
131	96	2	1707.35	1707.29
132	78	2	1625.26	1625.2
132	79	2	1634.07	1634.17
132	96	2	1716.74	1716.8
132	97	2	1716.34	1716.49
133	79	2	1636.88	1637.25
133	80	2	1647.91	1647.75
133	95	2	1722.18	1722.16
133	96	2	1724.38	1724.45
134	80	2	1652.29	1652.27
134	81	2	1660.55	1660.54
134	97	2	1733.72	1733.92
134	98	2	1735.73	1735.77
135	81	2	1663.56	1663.83
135	82	2	1674.47	1674.68
135	95	2	1738.43	1738.26
135	98	2	1743.82	1743.68
136	82	2	1679.25	1679.5
136	83	2	1685.96	1686.19
136	97	2	1750.8	1750.8
136	98	2	1753.31	1753.17

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
137	83	2	1689.35	1689.88
137	84	2	1697.9	1698.31
137	97	2	1758.52	1758.35
137	100	2	1762.86	1762.63
138	83	2	1694.24	1694.54
138	84	2	1703.15	1703.54
138	97	2	1767.22	1767.09
138	100	2	1772.5	1772.31
139	83	2	1697.52	1698.04
139	84	2	1706.64	1707.07
139	95	2	1769.09	1768.78
139	98	2	1777.48	1777.29
140	83	2	1702.19	1702.48
140	84	2	1711.8	1712.07
140	97	2	1783.12	1782.77
140	98	2	1786.23	1786.14
141	84	2	1715.11	1715.37
141	85	2	1722.51	1722.99
141	97	2	1790.26	1789.73
141	98	2	1793.42	1793.16
142	83	2	1709.89	1709.95
142	84	2	1720.11	1720.13
142	97	2	1798.08	1797.81
142	100	2	1805.71	1805.97
143	85	2	1731.43	1731.39
143	86	2	1740.53	1740.73
143	98	2	1808.48	1808.38
143	99	2	1810.7	1810.16
144	85	2	1735.81	1735.91
144	86	2	1745.8	1745.79
144	99	2	1818.43	1818.4
144	102	2	1824.54	1825.12
145	86	2	1749.37	1749.16
145	87	2	1757.12	1757.04
145	99	2	1825.31	1825.19
145	100	2	1828.47	1828.62
146	87	2	1761.85	1761.84
146	88	2	1771.47	1771.37
146	101	2	1838.17	1838.27
146	104	2	1842.77	1843.48
147	87	2	1766.01	1765.47
147	88	2	1775.23	1774.99

continúa en la siguiente página



**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
147	101	2	1845.17	1845.16
147	102	2	1847.82	1848.08
148	88	2	1780.26	1780.02
148	89	2	1787.81	1787.53
148	101	2	1853.02	1853.15
148	104	2	1859.04	1859.67
149	89	2	1791.91	1791.37
149	90	2	1800.75	1800.47
149	101	2	1859.87	1859.69
149	102	2	1862.91	1863.05
150	90	2	1805.92	1805.7
150	91	2	1813.04	1812.78
150	101	2	1867.34	1867.3
150	106	2	1877.02	1877.24
151	90	2	1809.52	1809.23
151	91	2	1817.24	1816.8
151	101	2	1873.44	1873.5
151	104	2	1881.54	1881.75
152	90	2	1814.37	1814.15
152	93	2	1837.59	1837.43
152	103	2	1886.57	1886.63
152	108	2	1893.83	1893.81
153	92	2	1834.79	1834.52
153	93	2	1841.79	1841.59
153	103	2	1892.68	1892.89
153	106	2	1899.22	1899.46
154	92	2	1839.78	1839.59
154	93	2	1846.58	1846.64
154	105	2	1904.81	1904.94
154	110	2	1911.04	1911.13
155	92	2	1843.08	1842.97
155	95	2	1865.61	1865.6
155	105	2	1910.96	1911.24
155	106	2	1913.71	1913.89
156	94	2	1864.31	1864.25
156	95	2	1870.67	1870.76
156	104	2	1916.84	1917.04
156	105	2	1918.62	1918.59
156	112	2	1928.29	1928.55
157	94	2	1867.87	1867.75
157	97	2	1888.68	1888.7
157	105	2	1925.22	1924.89

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
157	108	2	1932.17	1932.88
158	96	2	1887.91	1888.02
158	97	2	1893.83	1893.96
158	102	2	1921.98	1922.18
158	103	2	1925.31	1925.25
158	106	2	1936.61	1936.62
158	110	2	1944.19	1944.45
159	96	2	1891.85	1891.62
159	98	2	1905.33	1905.42
159	99	2	1910.84	1910.8
159	102	2	1927.33	1927.51
159	103	2	1931.28	1931.24
159	110	2	1950.68	1951.62
160	98	2	1911.29	1911.41
160	99	2	1916.68	1916.81
160	100	2	1923.5	1923.8
160	101	2	1928.29	1928.36
160	108	2	1956.15	1956.4
161	100	2	1928.63	1928.69
161	101	2	1933.81	1933.69
161	104	2	1948.74	1949.2
161	108	2	1961.94	1962.89
163	106	2	1969.25	1970.19
53	29	3	665.546	666.181
54	29	3	668.206	668.937
55	29	3	670.317	670.225
55	30	3	688.926	689.049
56	29	3	672.714	672.381
56	30	3	691.347	692.152
57	29	3	672.708	673.199
57	30	3	692.637	692.948
57	55	3	906.592	906.713
58	31	3	712.55	712.344
58	32	3	730.881	731.146
59	31	3	713.158	713.625
59	32	3	732.178	732.436
59	57	3	931.671	931.957
60	31	3	715.134	715.791
60	32	3	735.248	735.545
60	59	3	945.111	945.446
61	31	3	715.988	716.701
61	32	3	736.06	736.444

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
61	59	3	957.342	957.638
61	60	3	957.89	958.166
62	31	3	718.175	718.429
62	32	3	739.39	739.132
62	60	3	972.549	972.893
62	61	3	970.306	970.804
63	32	3	739.873	739.676
63	33	3	756.904	757.521
63	61	3	982.846	983.141
63	62	3	983.122	983.369
64	31	3	721.461	720.336
64	32	3	742.873	741.983
64	61	3	997.066	997.551
64	62	3	997.796	998.187
65	34	3	781.115	780.87
65	35	3	797.701	797.968
65	61	3	1009.08	1009.25
65	62	3	1010.08	1010.22
66	33	3	764.006	762.981
66	34	3	784.665	783.776
66	61	3	1022.66	1022.94
66	62	3	1024.17	1024.32
67	36	3	822.067	821.776
67	37	3	838.446	838.208
67	62	3	1035.42	1035.69
67	63	3	1034.25	1034.45
68	35	3	806.159	805.23
68	36	3	826.157	825.267
68	63	3	1047.84	1048.18
68	64	3	1048.97	1049.16
69	37	3	843.86	844.012
69	38	3	862.673	862.504
69	64	3	1060.16	1060.58
69	65	3	1058.49	1058.94
70	37	3	848.049	847.21
70	38	3	867.446	866.554
70	39	3	882.303	882.431
70	40	3	900.034	900.304
70	65	3	1072.21	1072.69
70	66	3	1073.01	1073.22
71	38	3	867.944	868.254
71	39	3	884.784	884.901

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
71	66	3	1084.1	1084.62
71	67	3	1081.85	1082.54
72	40	3	907.	907.087
72	41	3	921.397	921.575
72	66	3	1097.88	1098.08
72	67	3	1095.55	1096.3
73	40	3	909.153	909.405
73	41	3	924.488	924.655
73	68	3	1107.31	1107.84
73	69	3	1104.77	1105.3
74	40	3	913.104	913.525
74	41	3	929.091	928.802
74	68	3	1121.06	1121.32
74	69	3	1118.49	1119.38
75	42	3	948.734	948.982
75	43	3	963.34	963.652
75	68	3	1132.13	1132.56
75	70	3	1131.26	1131.37
75	71	3	1127.8	1128.52
76	42	3	953.277	953.679
76	43	3	968.608	968.385
76	70	3	1145.04	1145.35
76	71	3	1142.46	1142.83
77	42	3	956.166	956.396
77	43	3	971.794	971.845
77	69	3	1155.52	1155.95
77	72	3	1154.5	1154.48
78	42	3	960.929	960.88
78	43	3	976.92	976.342
78	72	3	1168.79	1168.69
78	73	3	1166.25	1166.1
79	42	3	962.925	963.424
79	43	3	979.905	979.634
79	71	3	1179.98	1179.99
79	74	3	1177.96	1177.86
80	42	3	967.536	967.705
80	43	3	984.476	983.903
80	74	3	1192.57	1192.3
80	75	3	1189.64	1189.6
81	43	3	987.079	987.034
81	44	3	1004.7	1005.13
81	73	3	1204.01	1203.97

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
81	76	3	1201.62	1201.47
82	42	3	973.683	974.17
82	43	3	991.523	991.083
82	76	3	1216.36	1216.14
82	77	3	1213.31	1213.34
83	43	3	991.652	992.001
83	44	3	1011.29	1010.76
83	74	3	1228.42	1228.39
83	75	3	1226.74	1226.7
84	44	3	1012.65	1013.17
84	45	3	1029.72	1029.42
84	78	3	1236.95	1236.62
84	79	3	1233.53	1233.46
85	45	3	1030.28	1030.6
85	46	3	1049.23	1048.68
85	76	3	1249.61	1249.68
85	77	3	1247.72	1247.64
86	46	3	1051.04	1051.42
86	47	3	1067.19	1067.
86	80	3	1256.86	1256.53
86	81	3	1253.03	1252.97
87	47	3	1068.2	1068.49
87	48	3	1086.38	1085.87
87	78	3	1270.47	1270.53
87	79	3	1268.2	1268.1
88	48	3	1088.96	1088.93
88	49	3	1104.01	1103.81
88	81	3	1277.11	1277.13
88	82	3	1276.05	1275.81
89	49	3	1105.45	1105.6
89	50	3	1122.62	1122.25
89	79	3	1291.11	1291.12
89	80	3	1290.72	1290.83
90	49	3	1108.63	1108.31
90	50	3	1125.93	1125.62
90	83	3	1294.72	1294.76
90	84	3	1291.87	1291.58
91	49	3	1109.99	1109.87
91	52	3	1154.79	1154.7
91	79	3	1313.72	1313.52
91	82	3	1310.25	1310.48
92	49	3	1112.32	1112.3

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
92	50	3	1130.27	1130.18
92	85	3	1311.	1311.07
92	86	3	1308.08	1307.79
93	49	3	1113.19	1113.63
93	52	3	1160.57	1160.43
93	81	3	1334.16	1333.93
93	84	3	1327.05	1327.25
94	51	3	1148.15	1148.23
94	52	3	1164.15	1164.03
94	85	3	1335.87	1335.71
94	86	3	1333.24	1333.03
95	51	3	1149.52	1149.98
95	54	3	1194.42	1194.28
95	81	3	1355.82	1356.03
95	86	3	1344.2	1344.36
96	53	3	1182.7	1182.89
96	54	3	1198.48	1198.41
96	87	3	1353.22	1353.03
96	88	3	1350.95	1350.78
97	53	3	1184.6	1185.1
97	56	3	1228.35	1228.21
97	83	3	1374.93	1375.26
97	86	3	1368.54	1368.66
98	55	3	1217.35	1217.6
98	56	3	1232.9	1232.67
98	57	3	1245.04	1244.74
98	87	3	1377.61	1377.51
98	88	3	1375.8	1375.62
99	55	3	1219.68	1220.14
99	57	3	1248.18	1247.92
99	58	3	1261.89	1261.79
99	85	3	1393.28	1393.64
99	88	3	1386.65	1386.67
100	58	3	1266.89	1266.54
100	59	3	1278.48	1278.08
100	87	3	1401.53	1401.4
100	88	3	1399.94	1399.7
101	59	3	1281.78	1281.5
101	60	3	1294.81	1294.8
101	87	3	1411.8	1412.17
101	88	3	1410.38	1410.66
102	60	3	1299.89	1299.78

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
102	61	3	1311.06	1310.72
102	87	3	1424.47	1424.63
102	88	3	1423.82	1423.47
103	60	3	1302.7	1302.81
103	61	3	1314.43	1314.36
103	88	3	1434.13	1434.1
103	89	3	1430.38	1430.75
104	61	3	1319.11	1318.93
104	62	3	1331.81	1332.19
104	89	3	1443.17	1443.4
104	90	3	1442.41	1442.02
105	62	3	1335.32	1335.42
105	63	3	1346.18	1346.29
105	89	3	1453.7	1454.04
105	90	3	1452.93	1452.83
106	63	3	1351.2	1351.05
106	64	3	1363.3	1363.6
106	89	3	1466.44	1466.31
106	90	3	1465.66	1465.44
107	63	3	1355.11	1354.46
107	64	3	1366.98	1367.
107	89	3	1476.92	1476.62
107	90	3	1475.96	1475.9
108	64	3	1371.93	1371.91
108	65	3	1382.31	1382.08
108	90	3	1488.47	1488.13
108	91	3	1485.41	1485.25
109	65	3	1386.25	1385.63
109	66	3	1397.68	1397.44
109	91	3	1496.04	1495.69
109	92	3	1494.82	1494.72
110	66	3	1402.76	1402.75
110	67	3	1412.95	1412.55
110	91	3	1507.76	1507.68
110	92	3	1507.41	1507.05
111	66	3	1405.73	1406.56
111	67	3	1417.4	1416.93
111	91	3	1517.7	1517.75
111	92	3	1517.42	1517.25
112	66	3	1410.41	1411.93
112	67	3	1421.55	1422.3
112	92	3	1529.15	1529.17

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
112	93	3	1526.52	1526.52
113	67	3	1425.17	1426.03
113	68	3	1437.28	1438.08
113	92	3	1538.85	1538.98
113	93	3	1536.57	1536.63
114	68	3	1441.87	1443.39
114	69	3	1452.39	1453.17
114	93	3	1548.28	1548.31
114	94	3	1547.75	1547.81
115	68	3	1445.77	1446.89
115	69	3	1456.35	1457.18
115	93	3	1557.7	1558.15
115	94	3	1557.57	1557.72
116	68	3	1450.97	1451.96
116	69	3	1461.99	1462.2
116	93	3	1569.17	1569.49
116	94	3	1569.32	1569.36
117	70	3	1476.9	1477.9
117	71	3	1486.4	1487.16
117	94	3	1578.4	1578.95
117	95	3	1576.15	1576.64
118	70	3	1482.29	1483.19
118	71	3	1492.17	1492.49
118	94	3	1589.97	1590.22
118	95	3	1587.63	1588.
119	70	3	1486.6	1486.68
119	71	3	1496.52	1496.56
119	95	3	1597.01	1597.54
119	96	3	1596.53	1597.11
120	70	3	1491.42	1491.71
120	71	3	1501.67	1501.61
120	95	3	1608.05	1608.51
120	96	3	1608.09	1608.37
121	72	3	1517.05	1517.12
121	73	3	1526.65	1526.65
121	96	3	1617.34	1617.6
121	97	3	1614.76	1615.31
122	71	3	1510.25	1510.2
122	72	3	1522.2	1522.47
122	96	3	1628.2	1628.47
122	97	3	1625.74	1626.24
123	72	3	1525.88	1526.04

continúa en la siguiente página



**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
123	73	3	1536.68	1536.19
123	96	3	1637.78	1637.3
123	97	3	1635.03	1635.37
124	73	3	1541.31	1541.28
124	74	3	1553.	1553.19
124	96	3	1647.87	1647.76
124	97	3	1645.63	1645.87
125	74	3	1556.94	1557.07
125	75	3	1567.38	1566.88
125	97	3	1654.77	1654.6
125	98	3	1655.03	1654.46
126	74	3	1562.33	1562.44
126	75	3	1572.43	1572.29
126	97	3	1664.77	1664.66
126	98	3	1665.11	1664.82
127	74	3	1564.19	1564.73
127	75	3	1574.85	1575.04
127	97	3	1672.53	1672.42
127	98	3	1673.14	1672.68
128	75	3	1578.91	1578.76
128	76	3	1590.37	1590.69
128	96	3	1682.75	1682.65
128	97	3	1681.97	1681.59
129	75	3	1581.5	1581.37
129	76	3	1592.68	1593.19
129	96	3	1690.18	1689.86
129	97	3	1689.61	1689.19
130	76	3	1597.14	1597.25
130	77	3	1606.99	1606.87
130	96	3	1699.42	1699.4
130	97	3	1698.57	1698.54
131	76	3	1599.82	1599.65
131	77	3	1609.86	1609.72
131	95	3	1705.79	1705.55
131	98	3	1707.82	1707.76
132	76	3	1603.64	1603.58
132	77	3	1613.49	1613.56
132	98	3	1717.76	1717.82
132	99	3	1716.49	1716.66
133	77	3	1615.92	1616.31
133	78	3	1628.01	1627.83
133	97	3	1724.6	1724.57

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
133	98	3	1726.03	1725.99
134	78	3	1632.05	1632.01
134	79	3	1641.26	1641.32
134	99	3	1734.91	1735.14
134	100	3	1736.05	1736.1
135	79	3	1643.94	1644.3
135	80	3	1655.2	1655.12
135	97	3	1741.93	1741.74
135	100	3	1744.7	1744.52
136	80	3	1659.48	1659.52
136	81	3	1668.17	1668.12
136	99	3	1753.03	1753.04
136	100	3	1754.68	1754.51
137	81	3	1671.04	1671.31
137	82	3	1682.4	1682.63
137	99	3	1761.27	1761.08
137	102	3	1762.9	1762.67
138	81	3	1675.57	1675.48
138	82	3	1687.02	1687.24
138	99	3	1770.46	1770.35
138	102	3	1773.02	1772.83
139	81	3	1678.98	1678.76
139	82	3	1689.74	1690.17
139	97	3	1774.69	1774.35
139	100	3	1780.34	1780.12
140	81	3	1683.82	1683.34
140	82	3	1694.3	1694.57
140	99	3	1787.35	1787.02
140	100	3	1789.47	1789.47
141	82	3	1697.03	1697.29
141	83	3	1705.24	1705.76
141	99	3	1795.	1794.46
141	100	3	1797.22	1796.96
142	81	3	1691.71	1691.08
142	82	3	1701.44	1701.46
142	99	3	1803.18	1803.04
142	102	3	1807.96	1808.38
143	83	3	1713.05	1713.02
143	84	3	1722.96	1723.19
143	100	3	1813.11	1813.13
143	101	3	1814.52	1813.96
144	83	3	1716.89	1716.96

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
144	84	3	1727.69	1727.7
144	101	3	1822.64	1822.68
144	104	3	1825.91	1826.56
145	84	3	1730.73	1730.53
145	85	3	1739.32	1739.28
145	101	3	1830.	1829.92
145	102	3	1832.19	1832.4
146	85	3	1743.47	1743.53
146	86	3	1753.98	1753.95
146	103	3	1841.44	1841.55
146	106	3	1843.19	1843.91
147	85	3	1747.18	1746.65
147	86	3	1757.27	1757.05
147	103	3	1848.9	1848.87
147	104	3	1850.58	1850.84
148	86	3	1761.81	1761.56
148	87	3	1770.08	1769.97
148	103	3	1857.16	1857.31
148	106	3	1860.52	1860.95
149	87	3	1773.86	1773.33
149	88	3	1783.6	1783.35
149	103	3	1864.47	1864.28
149	104	3	1866.49	1866.67
150	88	3	1788.32	1788.08
150	89	3	1796.37	1796.09
150	103	3	1872.32	1872.34
150	108	3	1877.35	1877.45
151	88	3	1791.41	1791.14
151	89	3	1800.14	1799.65
151	103	3	1878.83	1878.95
151	106	3	1884.05	1884.28
152	88	3	1795.79	1795.57
152	91	3	1821.93	1821.7
152	105	3	1890.45	1890.55
152	110	3	1893.66	1893.66
153	90	3	1817.66	1817.38
153	91	3	1825.77	1825.42
153	105	3	1896.98	1897.22
153	108	3	1900.79	1900.88
154	90	3	1822.2	1821.99
154	91	3	1829.97	1830.
154	107	3	1907.7	1907.74

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
154	112	3	1910.65	1910.82
155	90	3	1825.19	1824.93
155	93	3	1850.62	1850.49
155	107	3	1914.61	1914.65
155	108	3	1916.53	1917.02
156	92	3	1847.86	1847.72
156	93	3	1855.15	1855.21
156	107	3	1922.93	1923.07
156	114	3	1926.22	1926.49
157	92	3	1851.16	1850.79
157	95	3	1874.72	1874.72
157	107	3	1930.28	1930.11
157	110	3	1934.69	1935.52
158	94	3	1872.74	1872.62
158	95	3	1879.52	1879.55
158	104	3	1929.91	1930.13
158	105	3	1932.44	1932.6
158	112	3	1945.46	1945.74
159	94	3	1876.41	1876.29
159	97	3	1898.01	1898.01
159	105	3	1939.13	1938.98
159	112	3	1952.37	1953.31
160	96	3	1897.26	1897.35
160	97	3	1903.51	1903.59
160	102	3	1934.24	1934.5
160	103	3	1938.15	1938.22
160	106	3	1950.72	1950.81
160	110	3	1959.99	1960.25
161	96	3	1901.63	1901.45
161	98	3	1915.86	1915.91
161	99	3	1921.84	1921.75
161	102	3	1939.61	1939.79
161	103	3	1944.03	1943.93
161	110	3	1966.2	1967.13
162	98	3	1921.67	1921.78
162	99	3	1927.46	1927.59
162	100	3	1934.68	1934.97
162	101	3	1939.87	1939.94
162	108	3	1970.55	1970.8
163	100	3	1939.53	1939.58
163	101	3	1945.1	1944.98
163	104	3	1961.07	1961.69

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
163	108	3	1976.04	1976.98
165	106	3	1981.92	1982.85
58	29	4	675.138	674.814
58	30	4	694.914	695.537
59	29	4	674.69	675.214
59	30	4	695.61	695.896
60	29	4	675.786	676.342
60	30	4	697.724	698.022
61	29	4	675.581	676.369
61	30	4	697.575	697.989
62	29	4	676.905	677.06
62	30	4	699.958	699.698
63	30	4	699.483	699.316
63	31	4	718.285	719.006
64	29	4	678.278	677.055
64	30	4	701.54	700.649
64	63	4	995.269	995.792
65	32	4	742.423	742.208
65	33	4	760.47	761.01
65	63	4	1008.06	1008.22
65	64	4	1007.95	1008.09
66	31	4	722.703	721.585
66	32	4	745.056	744.167
66	63	4	1022.35	1022.68
66	64	4	1022.76	1022.94
67	34	4	784.868	784.606
67	35	4	802.496	802.632
67	64	4	1034.67	1035.03
67	65	4	1032.36	1032.65
68	33	4	766.499	765.482
68	34	4	788.071	787.182
68	65	4	1046.7	1047.13
68	66	4	1046.76	1046.97
69	35	4	806.466	806.676
69	36	4	826.937	826.684
69	66	4	1058.6	1059.08
69	67	4	1055.75	1056.29
70	35	4	809.877	808.945
70	36	4	830.756	829.854
70	67	4	1070.13	1070.76
70	68	4	1069.93	1070.16
71	36	4	830.46	830.792

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
71	37	4	848.791	848.965
71	68	4	1081.69	1082.22
71	69	4	1078.33	1079.01
72	37	4	852.541	851.71
72	38	4	872.387	871.823
72	39	4	888.35	888.465
72	68	4	1096.04	1096.36
72	69	4	1092.65	1093.46
73	38	4	873.132	873.42
73	39	4	890.68	890.836
73	70	4	1104.68	1105.
73	71	4	1100.76	1101.42
74	38	4	876.376	876.794
74	39	4	894.573	894.177
74	70	4	1119.06	1119.45
74	71	4	1115.57	1116.22
75	40	4	915.446	915.67
75	41	4	931.473	931.715
75	72	4	1127.55	1127.6
75	73	4	1123.26	1123.95
76	40	4	919.196	919.586
76	41	4	935.923	935.631
76	72	4	1142.18	1142.3
76	73	4	1138.88	1138.99
77	40	4	921.325	921.569
77	41	4	938.295	938.387
77	71	4	1154.33	1154.71
77	74	4	1150.55	1150.5
78	40	4	925.352	925.294
78	41	4	942.742	942.087
78	74	4	1165.6	1165.43
78	75	4	1162.1	1162.01
79	40	4	926.616	927.126
79	41	4	944.926	944.695
79	73	4	1178.27	1178.23
79	76	4	1173.76	1173.63
80	40	4	930.513	930.672
80	41	4	948.837	948.188
80	76	4	1189.03	1188.8
80	77	4	1185.27	1185.28
81	41	4	950.663	950.656
81	42	4	969.618	970.084

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
81	75	4	1202.03	1201.97
81	78	4	1197.2	1197.03
82	40	4	935.253	935.736
82	41	4	954.471	953.952
82	78	4	1212.64	1212.43
82	79	4	1208.77	1208.82
83	41	4	953.842	954.248
83	42	4	974.846	974.349
83	76	4	1226.82	1226.78
83	77	4	1224.34	1224.25
84	42	4	975.576	976.079
84	43	4	994.063	993.66
84	80	4	1232.49	1232.16
84	81	4	1228.23	1228.17
85	43	4	993.867	994.239
85	44	4	1014.17	1013.64
85	78	4	1247.28	1247.35
85	79	4	1244.57	1244.46
86	44	4	1015.25	1015.73
86	45	4	1032.89	1032.62
86	82	4	1251.47	1251.22
87	45	4	1033.19	1033.54
87	46	4	1052.76	1052.23
87	80	4	1267.3	1267.39
87	81	4	1264.2	1264.08
88	46	4	1054.42	1054.67
88	47	4	1071.06	1070.86
88	83	4	1270.09	1270.14
89	47	4	1071.82	1072.1
89	48	4	1090.52	1090.07
89	81	4	1287.99	1287.97
89	82	4	1286.56	1286.79
90	47	4	1074.54	1074.17
90	48	4	1092.96	1092.84
90	85	4	1285.74	1285.81
91	47	4	1075.24	1075.17
91	50	4	1127.4	1127.08
91	81	4	1311.49	1311.25
91	84	4	1302.69	1302.91
92	47	4	1077.02	1076.96
92	48	4	1096.31	1096.23
93	47	4	1077.24	1077.73

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
93	50	4	1131.53	1131.41
93	83	4	1329.82	1329.57
93	86	4	1319.24	1319.43
94	49	4	1115.8	1115.78
94	50	4	1134.39	1134.25
94	87	4	1328.05	1327.94
94	88	4	1325.22	1325.05
95	49	4	1116.45	1116.89
95	52	4	1166.01	1165.86
95	83	4	1352.46	1352.71
95	88	4	1336.79	1336.97
96	51	4	1152.54	1152.64
96	52	4	1169.34	1169.26
96	89	4	1346.07	1345.95
96	90	4	1343.06	1342.9
97	51	4	1153.65	1154.19
97	54	4	1200.75	1200.61
97	85	4	1370.21	1370.54
97	88	4	1362.08	1362.27
98	53	4	1187.96	1188.16
98	54	4	1204.5	1204.38
98	89	4	1371.44	1371.41
98	90	4	1369.14	1368.97
99	53	4	1189.54	1190.05
99	56	4	1235.32	1235.19
99	87	4	1388.27	1388.59
99	90	4	1380.52	1380.62
100	55	4	1223.27	1223.53
100	56	4	1239.54	1239.26
100	57	4	1252.35	1252.01
100	89	4	1396.	1395.93
100	90	4	1394.22	1394.09
101	55	4	1225.25	1225.72
101	57	4	1255.06	1254.82
101	58	4	1269.41	1269.34
101	89	4	1406.71	1406.9
101	90	4	1404.96	1405.27
102	58	4	1273.94	1273.68
102	59	4	1286.25	1285.86
102	89	4	1419.7	1419.78
102	90	4	1418.65	1418.25
103	58	4	1275.96	1276.09

continúa en la siguiente página



**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
103	59	4	1289.09	1288.9
103	90	4	1429.32	1429.03
103	91	4	1425.08	1425.46
104	59	4	1293.06	1292.83
104	60	4	1307.32	1307.38
104	91	4	1438.14	1438.17
104	92	4	1436.94	1436.59
105	60	4	1309.9	1310.01
105	61	4	1322.17	1322.17
105	91	4	1448.96	1449.27
105	92	4	1447.73	1447.39
106	61	4	1326.5	1326.32
106	62	4	1339.82	1340.17
106	91	4	1462.19	1462.06
106	92	4	1460.69	1460.46
107	61	4	1329.8	1329.18
107	62	4	1342.93	1343.
107	91	4	1473.2	1472.85
107	92	4	1471.49	1471.41
108	62	4	1347.35	1347.33
108	63	4	1358.98	1358.78
108	92	4	1484.48	1484.14
108	93	4	1480.66	1480.53
109	63	4	1362.43	1361.81
109	64	4	1374.98	1374.9
109	93	4	1491.8	1491.43
109	94	4	1489.85	1489.74
110	64	4	1379.45	1379.4
110	65	4	1390.62	1390.13
110	93	4	1503.96	1503.93
110	94	4	1502.91	1502.56
111	64	4	1381.66	1382.49
111	65	4	1394.53	1393.95
111	93	4	1514.41	1514.45
111	94	4	1513.4	1513.22
112	64	4	1385.81	1387.28
112	65	4	1398.07	1398.73
112	94	4	1525.56	1525.62
112	95	4	1522.19	1522.24
113	65	4	1401.13	1402.01
113	66	4	1414.31	1415.13
113	94	4	1535.67	1535.82

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
113	95	4	1532.69	1532.73
114	66	4	1418.44	1419.96
114	67	4	1430.06	1430.8
114	95	4	1544.77	1544.83
114	96	4	1543.52	1543.59
115	66	4	1421.88	1423.
115	67	4	1433.51	1434.37
115	95	4	1554.58	1555.03
115	96	4	1553.73	1553.88
116	66	4	1426.61	1427.59
116	67	4	1438.73	1438.91
116	95	4	1566.41	1566.77
116	96	4	1565.86	1565.91
117	68	4	1454.16	1455.23
117	69	4	1465.2	1466.
117	96	4	1575.3	1575.86
117	97	4	1572.35	1572.82
118	68	4	1459.1	1460.06
118	69	4	1470.55	1470.77
118	96	4	1587.23	1587.51
118	97	4	1584.18	1584.57
119	68	4	1463.01	1463.11
119	69	4	1474.35	1474.34
119	97	4	1593.93	1594.45
119	98	4	1592.74	1593.3
120	68	4	1467.39	1467.67
120	69	4	1479.01	1478.83
120	97	4	1605.31	1605.8
120	98	4	1604.64	1604.94
121	70	4	1494.93	1494.95
121	71	4	1505.4	1505.43
121	98	4	1614.25	1614.51
121	99	4	1610.97	1611.5
122	69	4	1486.55	1486.38
122	70	4	1499.47	1499.7
122	98	4	1625.46	1625.73
122	99	4	1622.28	1622.8
123	70	4	1502.52	1502.68
123	71	4	1514.24	1513.77
123	98	4	1635.42	1634.91
123	99	4	1631.94	1632.26
124	71	4	1518.29	1518.24

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
124	72	4	1530.86	1531.1
124	98	4	1645.89	1645.7
124	99	4	1642.86	1643.12
125	72	4	1534.25	1534.39
125	73	4	1545.64	1545.16
125	99	4	1652.35	1652.16
125	100	4	1651.91	1651.33
126	72	4	1539.15	1539.16
126	73	4	1550.05	1549.93
126	99	4	1662.74	1662.57
126	100	4	1662.38	1662.03
127	72	4	1540.51	1541.06
127	73	4	1552.1	1552.33
127	99	4	1670.93	1670.8
127	100	4	1670.83	1670.37
128	73	4	1555.82	1555.64
128	74	4	1568.35	1568.54
128	98	4	1682.42	1682.23
128	99	4	1680.83	1680.47
129	73	4	1558.01	1557.91
129	74	4	1570.15	1570.68
129	98	4	1690.11	1689.93
129	99	4	1688.8	1688.54
130	74	4	1574.24	1574.37
130	75	4	1585.11	1584.96
130	98	4	1699.59	1699.33
130	99	4	1697.98	1698.04
131	74	4	1576.56	1576.4
131	75	4	1587.59	1587.48
131	97	4	1707.09	1706.86
131	100	4	1707.03	1706.53
132	74	4	1580.	1579.95
132	75	4	1590.88	1590.93
132	100	4	1717.06	1717.12
132	101	4	1715.13	1715.11
133	75	4	1592.91	1593.34
133	76	4	1606.04	1605.87
133	99	4	1725.29	1725.24
133	100	4	1725.92	1725.81
134	76	4	1609.72	1609.68
134	77	4	1619.95	1620.02
134	101	4	1734.35	1734.6

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
134	102	4	1734.62	1734.69
135	77	4	1622.26	1622.66
135	78	4	1634.67	1634.53
135	99	4	1743.66	1743.46
135	102	4	1743.79	1743.58
136	78	4	1638.59	1638.58
136	79	4	1648.21	1648.24
136	101	4	1753.47	1753.5
136	102	4	1754.24	1754.07
137	79	4	1650.76	1651.11
137	80	4	1662.26	1662.27
137	101	4	1762.22	1762.01
137	104	4	1761.16	1760.92
138	79	4	1655.03	1654.91
138	80	4	1666.37	1666.53
138	101	4	1771.88	1771.78
138	104	4	1771.73	1771.56
139	79	4	1657.89	1657.67
139	80	4	1668.38	1669.17
139	99	4	1778.45	1778.09
139	102	4	1781.35	1781.12
140	79	4	1662.23	1661.6
140	80	4	1672.85	1673.74
140	101	4	1789.73	1789.42
140	102	4	1790.86	1790.94
141	80	4	1675.88	1676.75
141	81	4	1686.54	1686.79
141	101	4	1797.88	1797.32
141	102	4	1799.17	1798.9
142	79	4	1669.34	1668.69
142	80	4	1680.57	1681.16
142	101	4	1806.44	1806.4
142	104	4	1808.39	1808.93
143	81	4	1694.91	1694.26
143	82	4	1704.17	1703.97
143	102	4	1815.88	1816.
143	103	4	1816.46	1815.89
144	81	4	1698.51	1698.25
144	82	4	1708.32	1707.9
144	103	4	1824.99	1825.07
144	106	4	1825.45	1826.14
145	82	4	1710.76	1710.19

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
145	83	4	1719.83	1719.81
145	103	4	1832.8	1832.74
145	104	4	1834.04	1834.28
146	83	4	1723.59	1723.49
146	84	4	1734.78	1734.77
146	105	4	1842.8	1842.93
146	108	4	1841.75	1842.47
147	83	4	1727.13	1726.18
147	84	4	1737.59	1737.35
147	105	4	1850.7	1850.67
147	106	4	1851.44	1851.69
148	84	4	1741.83	1741.34
148	85	4	1750.63	1750.62
148	105	4	1859.39	1859.55
148	108	4	1860.07	1860.34
149	85	4	1754.09	1753.49
149	86	4	1764.63	1764.4
149	105	4	1867.13	1866.93
149	106	4	1868.16	1868.36
150	86	4	1768.87	1768.63
150	87	4	1777.72	1777.54
150	105	4	1875.36	1875.42
150	110	4	1875.95	1875.78
151	86	4	1771.81	1771.19
151	87	4	1781.14	1780.63
151	105	4	1882.28	1882.45
151	108	4	1884.62	1884.9
152	86	4	1776.12	1775.49
152	89	4	1804.33	1804.06
152	107	4	1892.39	1892.54
152	112	4	1892.47	1892.55
153	88	4	1798.73	1798.34
153	89	4	1807.77	1807.34
153	107	4	1899.35	1899.6
153	110	4	1901.43	1901.64
154	88	4	1803.21	1802.6
154	89	4	1811.54	1811.44
154	109	4	1909.51	1909.65
154	114	4	1907.83	1908.05
155	88	4	1805.92	1805.76
155	91	4	1833.69	1833.43
155	109	4	1917.12	1917.34

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
155	110	4	1918.19	1918.85
156	90	4	1829.88	1829.38
156	91	4	1837.81	1837.69
156	109	4	1926.03	1926.18
156	116	4	1922.52	1922.79
157	90	4	1832.94	1832.76
157	93	4	1858.86	1858.76
157	109	4	1933.8	1933.61
157	112	4	1935.53	1936.4
158	92	4	1855.89	1855.75
158	93	4	1863.41	1863.23
158	107	4	1938.09	1938.24
158	114	4	1944.09	1944.37
159	92	4	1859.42	1859.3
159	95	4	1883.42	1883.4
159	107	4	1945.18	1945.01
159	114	4	1951.35	1952.28
160	94	4	1881.67	1881.62
160	95	4	1888.63	1888.69
160	104	4	1943.3	1943.51
160	105	4	1946.26	1946.39
160	112	4	1962.06	1962.34
161	94	4	1885.47	1885.32
161	97	4	1908.19	1908.13
161	105	4	1952.61	1952.49
161	112	4	1968.68	1969.62
162	96	4	1906.82	1906.92
162	97	4	1913.47	1913.55
162	102	4	1946.2	1946.48
162	103	4	1950.52	1950.61
162	106	4	1964.26	1964.41
162	110	4	1975.2	1975.45
163	96	4	1910.93	1910.74
163	98	4	1925.95	1926.
163	99	4	1932.33	1932.24
163	102	4	1951.27	1951.48
163	103	4	1956.14	1956.03
163	110	4	1981.1	1982.03
164	98	4	1931.45	1931.56
164	99	4	1937.63	1937.77
164	100	4	1945.26	1945.55
164	101	4	1950.84	1950.92

continúa en la siguiente página

**Tabla 6.1 – continúa de la página anterior**

N	Z	iteración	BE(N,Z) en MeVs (IGKDZ)	BE(N,Z) en MeVs (DZ+CLEAN)
164	108	4	1984.32	1984.57
165	100	4	1949.81	1949.85
165	101	4	1955.77	1955.65
165	104	4	1972.83	1973.55
165	108	4	1989.51	1990.44
167	106	4	1993.92	1994.85





# Bibliografía

- [1] R. F. Casten, *Nuclear Structure from a Simple Perspective* Oxford University Press, Oxford, (1990).
- [2] The Ame2003 atomic mass evaluation (II), G. Audi, A.H. Wapstra and C.Thibault, Nuclear Physics A **729**, 337 (2003).
- [3] D. Lunney, J.M. Pearson, and C. Thibault, Rev. Mod. Phys. **75**, 1021 (2003).
- [4] George Wallerstein et al. Rev. Mod. Phys. **69**, 995 (1997).
- [5] E.Andersund, N. Grevesse, Geochim. Cosmochim. Acta **53**, 197 (1989).
- [6] Hendrik Schatz and Klaus Blaum, Europhysics News Vol. **37** No.5 16-21 (2006)
- [7] Klaus Blaum, Physics Reports **425**, 1 78, (2006)
- [8] S. Goriely, F. Tondeur, and J.M. Pearson, Atom. Data Nucl. Data Tables **77**, 311 (2001);
- [9] G. Audi and A. H. Wapstra, Nucl. Phys. A **595**, 409-480 (1995).
- [10] Savajols, H., Hyperfine Interact. **132**, 245 (2001).
- [11] Auger, G., W. Mittig, et al., Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. **350**, 235(1994).
- [12] Geissel, H., F. Attallah, et al. Nucl. Phys. A **685**, 115c (2001).
- [13] C.F.v. Weizsacker, Z. Phys. **96**, 431(1935).
- [14] H. A. Bethe and R. F. Bacher, Rev. Mod. Phys. **8**, 82 (1936).
- [15] S.R. Souza, P. Danielewicz, S. Das Gupta, R. Donangelo, W.A. Friedman, W.G. Lynch y W.P. Tan, Phys. Rev. C **67** (2003)
- [16] P.Danielewicz, Nucl. Phys. A **727** 233 (2003).
- [17] A.E.L. Dieperink, P. Van Isacker, Eur. Phys. J. A **32** 11 (2007).
- [18] P. Van Isacker, D.D. Warner y D.S. Brenner, Phys. Rev. Lett.**74**, 4607, (1995).
- [19] P. Van Isacker, in: 12th International Symposium, On Capture Gamma-Ray Spectroscopy and Related Topics, AIP Conf. Proc. **819**, 57, (2006);
- [20] A. Frank, J. C. López-Vieyra, I. Morales Agiss, J. Barea, J. G. Hirsch, V. Velzquez and P. van Isacker, Rev. Mex. Fis. **52 S4**, 17-22, (2006);
- [21] I. Morales, A. Frank, J. C. López-Vieyra, , J. Barea, J. G. Hirsch, V. Velzquez and P. van Isacker, Int. Jour. Mod. Phys. **E 15**, 1855 - 1867, (2006).
- [22] J. Mendoza-Temis, A. Frank, J. G. Hirsch, J. C. Lopez Vieyra, I. Morales, J. Barea, P. Van Isacker and V. Velazquez, Nucl. Phys. A **799**, 84 (2008).
- [23] P. Möller, J.R. Nix, W.D. Myers, W.J. Swiatecki, At. Data Nucl. Data Tables **59**, 185 (1995).
- [24] Myers, W. D., and W.J. Swiatecki, Ann. Phys. (N.Y.) **84**, 186, (1974).

- [25] Vautherin, D. and D. M. Brink, Phys. Rev. C **5**, 626, (1972); Chabanat, E., P. Bonche, P. Haensel, J. Meyer, and R. Schaeffer, Nucl. Phys. A **635**, 231, (1998).
- [26] S. Goriely et al. Nuclear Physics A **773**, 279-299 (2006). M.V. Stoitsov, J. Dobaczewski, W. Nazarewicz, S. Pittel, and D.J. Dean, Phys. Rev. C **68**, 054312 (2003).
- [27] J. Duflo, Nucl. Phys. A **576**, 29 (1994); J. Duflo and A. P. Zuker, Phys. Rev. C **52**, R23 (1995).
- [28] G. T. Garvey and I. Kelson, Phys. Rev. Lett. **16**, 197 (1966); G. T. Garvey, W. J. Gerace, R. L. Jaffe, I. Talmi, and I. Kelson, Rev. Mod. Phys. **41**, S1 (1969).
- [29] J. Barea, A. Frank, J.G. Hirsch, P. Van Isacker. Phys. Rev. Lett. **94** 102501 (2005).
- [30] J. Barea, A. Frank, J.G. Hirsch, P. Van Isacker, S. Pittel and V. Velazquez, Phys. Rev. C **77** 041304(R) (2008).
- [31] G. Audi, preprint at (<http://arxiv.org: nucl-ex/ 0302020>) (2003).
- [32] J. Mendoza-Temis, I. Morales, J. Barea, A. Frank, J.G. Hirsch, J.C. López- Vieyra, P. Van Isacker, V. Velázquez, Nucl. Phys. A **812** 28 - 43 (2008).
- [33] I. Morales, V. Velázquez, P. Van Isacker, J. Mendoza-Temis, J. Barea, J.C. López- Vieyra, J.G. Hirsch, A. Frank. Physical Review C, *En revision*.
- [34] Hogbom, J.A. “Aperture synthesis with a non-regular distribution of interferometric baselines”. Astron. Astrophys. Supp. **15**, 417 (1974).
- [35] R. Narayan and R. Nityananda, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **24**, 127 (1986).
- [36] A. A. Clark, B. T. Thomas, N. W. Campbell, and P. Greenway, in *British Machine Vision Conference*, (British Machine Vision Association) p. 193, (1999).
- [37] A. Kaup, K. Meisinger, and T. Aach, Int. J. Electron. Commun. (AEU) **59**, 147 (2005).
- [38] Irving O. Morales, J.C. López- Vieyra, J.G. Hirsch, A. Frank, Nucl. Phys. A, *Aceptado a publicarse*.
- [39] Möller, P., and J. R. Nix, At. Data Nucl. Data Tables **39**, 213 (1988).
- [40] G. Zao-Chun, C. Yong-Shou and M. Jie, Chin. Phys. Lett. **18**, 1186 (2001)
- [41] J.Jänecke and H. Behrens, Phys. Rev. C **9**, 4 1276 (1974).
- [42] R.B. Cakirli, D.S. Brenner, R.F. Casten, and E.A. Millman, Phys. Rev. Lett. **94**, 092501 (2005).
- [43] K.Vogt, T. Hartmann, A. Zilges, Physics Letters B **517**, 255-260 (2001).