Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

VARIEDADES DIFERENCIABLES Y GRUPOS DE LIE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

JESSICA ANGÉLICA JAUREZ ROSAS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. RAÚL QUIROGA BARRANCO

2009

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno Jaurez Rosas Jessica Angélica 55 54 79 30 58 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 302139808
2. Datos del tutor Dr. Raúl Quiroga Barranco
3. Datos de sinodal 1 Dr. Carlos Prieto de Castro
4. Datos de sinodal 2 Dr. Luis Hernández Lamoneda
5. Datos de sinodal 3 M. en C. Ana Irene Ramírez Galarza
6. Datos de sinodal 4 Dra. María del Carmen Gómez Laveaga
7. Datos del trabajo escrito Variedades diferenciables y grupos de Lie 306 2009

Agradecimientos

Aquellas personas que me conocen saben que podría llevarme una tesis más tan sólo en los agradecimientos. Precisamente pensando en esas personas y en mis sinodales es que trataré de ser breve.

Agradezco a mi familia por su apoyo incondicional y por su amor, sobre todo a mi mamá ya que ha compartido conmigo parte importante de su vida y además porque mucho de lo que soy como ser humano se lo debo a ella.

A todos mis amigos les agradezco la valiosa oportunidad que me han dado de conocerlos y por permitirme entrar en sus vidas en la misma forma en que ellos han entrado en la mía. Sin ellos muchas palabras carecerían de significado y un sinfín de momentos pasarían desapercibidos.

Gracias a las personas que me mostraron que las Matemáticas son una fuente inagotable de enseñanzas. Su pasión, entrega y dedicación me inspiran y han hecho que desee fervientemente continuar aprendiendo más al respecto. Entre estas personas se encuentra el Doctor Raúl Quiroga Barranco, quien aún antes de conocerme creyó en este proyecto. Durante todo este tiempo me brindó su apoyo y me enseñó muchas de las cosas que logré aprender en el desarrollo de este trabajo. Sin él nada de ésto hubiera sido posible.

A cada uno de mis sinodales agradezco sus aportaciones y comentarios, además del tiempo que me brindaron y el interés que mostraron por el trabajo.

Índice general

Agradecimientos I

Introducción V

1. Variedades diferenciables **1**
1.1. Preliminares . . . 1
1.2. Topología en variedades diferenciables . . . 7

2. Cálculo en variedades diferenciables **15**
2.1. Espacio tangente . . . 15
2.2. La diferencial . . . 20
2.3. Haces tangente y cotangente . . . 24
2.4. Inmersiones y subvariedades . . . 28
2.5. Teorema de la función inversa en variedades . . . 31
2.6. Efectos de la topología en subvariedades . . . 35
2.7. Teorema de la función implícita. Valores regulares . . . 39
2.8. Campos vectoriales . . . 44
2.9. Distribuciones . . . 59

3. Formas diferenciales. **73**
3.1. Producto tensorial y producto exterior . . . 73
3.2. Transformaciones lineales en $\Lambda(V)$ . . . 85
3.3. Campos tensoriales y formas diferenciales . . . 89
3.4. Teorema de Frobenius en formas diferenciales . . . 105
3.5. La Derivada de Lie . . . 111

4. Grupos de Lie **129**
4.1. Nociones básicas . . . 129
4.2. Álgebra de Lie de un grupo de Lie . . . 133

5. Construcciones con grupos de Lie **149**
5.1. Morfismos de grupos de Lie . . . 149
5.2. Subgrupos de Lie . . . 154
5.3. Cubrientes universales . . . 164

6. Mapeo exponencial **173**
6.1. Curvas integrales en grupos de Lie 173
6.2. Exponencial de matrices 181
6.3. El mapeo exponencial en $Gl(d, \mathbb{C})$ 187
6.4. Subgrupos de $Gl(d, \mathbb{C})$ 192

7. Topología y suavidad en grupos de Lie **197**
7.1. Morfismos continuos 197
7.2. Subgrupos cerrados 199

8. Linealización en grupos de Lie **207**
8.1. La representación adjunta 207
8.2. Derivaciones de operaciones y formas bilineales 216

9. Variedades homogéneas y acciones propias **225**
9.1. Generalidades sobre variedades homogéneas 225
9.2. Teoremas de isomorfismo en grupos de Lie 235
9.3. Ejemplos de variedades homogéneas 239
9.4. Topología de grupos de matrices 247
9.5. Acciones propias 250

A. Apéndice **263**
A.1. Cartan e ideales diferenciales en grupos de Lie 263
A.2. Espacios cubrientes 266
A.3. Polinomio de Taylor en espacios vectoriales 276
A.4. Operadores ortogonales y unitarios 278
A.5. Medida cero en variedades 287

Bibliografía **293**

Introducción

No cabe duda que hasta cierto punto la noción de *variedad diferenciable* (Capítulo 1, sección 1.1), fruto del trabajo de matemáticos brillantes como Riemann (1826-1866) y Poincaré (1854-1912), es de un valor incalculable para varias teorías. Un ejemplo de esto es justamente la *teoría de grupos de Lie*. Sin embargo, dicha Teoría no se presentó en un principio como consecuencia directa del desarrollo de la Teoría de variedades diferenciables, que es la forma en que se aborda en este trabajo. Curiosamente la Teoría de grupos de Lie se desarrollo a finales del siglo XIX en forma casi paralela a la Teoría de variedades y a la Teoría de grupos.

En 1860 la teoría de grupos de permutaciones fue descubierta y utilizada por varios matemáticos, entre ellos Camille Jordan quien en 1868 trabajó con subgrupos cerrados del grupo de movimientos del espacio euclidiano de dimensión 3. A pesar de que la teoría de invariantes ya era conocida por los matemáticos gracias al trabajo hecho mediante conjuntos infinitos de transformaciones geométricas cerrados bajo composición (como por ejemplo las transformaciones lineales y proyectivas), hasta ese momento nadie había conjugado ambas ideas. En 1869 el matemático noruego Sophus Lie (1842-1899) concibe la brillante idea de introducir nociones de invariantes en Análisis y Geometría diferencial. Él observó que el método clásico de integración por cuadraturas de ecuaciones diferenciales depende enteramente del hecho de que la ecuación es invariante bajo una *familia continua de transformaciones*. De esa forma, trabajando primero con Félix Klein (1849-1925) y posteriormente con Engel, estudia grupos de Transformaciones y conjuntos de sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)\,,$$

donde $a_1, \ldots, a_r$ son parámetros y satisfacen que el Jacobiano $(\frac{\partial f_i}{\partial a_j})$ es de rango r. Llamó a dicho conjunto *grupo continuo de transformaciones en n-variables, dependientes efectivamente de r parámetros.*

Sobre esto comenzó a escribir en 1874, exponiéndolo sistemáticamente en el tratado *Theorie der Transformationsgruppen* (1888-1893). En este trabajo asocia a cada grupo continuo de transformaciones un conjunto de operadores diferenciales a los que llama *transformaciones infinitesimales*, de tal manera que muchas de las propiedades de los grupos continuos podían interpretarse en propiedades del conjunto de sus transformaciones infinitesimales [1]. La concepción del conjunto de transformaciones infinitesimales asociadas a un grupo continuo de transformaciones es la base de lo que actualmente conocemos como el álgebra de Lie de un grupo de Lie [2](Capítulo 4, sección 4.2).

Este trabajo pretende mostrar los resultados básicos de la Teoría de grupos de Lie, que a su vez son considerados como un caso particular de variedad diferenciable. Es por ello que a lo largo del mismo se podrá apreciar la generalidad y fuerza de ambas Teorías.

Los primeros dos capítulos están enfocados a la Teoría de variedades diferenciables. El Capítulo 1 incluye, además de los conceptos y ejemplos básicos de variedades, algunos resultados topológicos, como es la paracompacidad (y en consecuencia la propiedad de normalidad) y la existencia de particiones de la unidad suaves.

En el Capítulo 2 se da la generalización del concepto de *diferencial* en variedades junto con sus principales propiedades (algunas de ellas obtenidas directamente de resultados de Cálculo Diferencial en espacios euclidianos, como el Teorema de la Función Inversa). Se contemplan algunas subestructuras de variedades diferenciables como son las inmersiones, sumersiones y subvariedades. Al final de este Capítulo se centra la atención en los campos vectoriales de una variedad diferenciable y en el concepto de *distribuciones*, que resultará primordial en el estudio de grupos de Lie. Con respecto a este último se presenta el *Teorema de Frobenius*, un conocido y fuerte resultado que será una herramienta fundamental en los capítulos posteriores.

En el Capítulo 3 se contemplan resultados básicos al respecto de formas diferenciales de una variedad diferenciable, como son la derivada exterior y la derivada de Lie para campos vectoriales y formas diferenciales. Además se incluye la interpretarción algebraica en términos de formas diferenciales del Teorema de Frobenius.

A partir del Capítulo 4 se estudian propiedades de los grupos de Lie. Justamente en éste, además de la definición y ejemplos, se analizan las nociones básicas para el estudio de grupos de Lie como el concepto abstracto de álgebra de Lie, junto con ejemplos, llegando mediante los campos vectoriales invariantes izquierdos a definir el caso particular del álgebra de Lie de un grupo de Lie. En esta parte también se analiza el concepto dual de campos invariantes izquierdos, que es el de formas invariantes izquierdas.

En el capítulo 5, como su nombre lo indica, se construyen grupos de Lie y álgebras de Lie a partir de las propiedades de un grupo de Lie dado. Se comienza en la sección 5.1 con la definición y el análisis de algunas propiedades de morfismos de grupos de Lie. La sección 5.2 incluye el concepto de subgrupo de Lie y subálgebra de Lie, estableciendo mediante un importante resultado una correspondencia biunívoca entre las subálgebras de un grupo de Lie y los subgrupos

[1]Bourbaki, Nicolas. *Lie Groups and Lie Algebras.* Addison-Wesley Publishing Company, 1975, pp. 410-429.

[2]El concepto de *álgebra de Lie* es introducido por Hermann Weyl (1885-1955) en 1934.

conexos del mismo (Teorema 5.2.4). Se presentan Corolarios tanto del resultado como de la demostración del mismo, entre ellos que un morfismo que sale de un grupo de Lie conexo queda completamente determinado por la imagen de su diferencial (Teorema 5.2.7). En esta parte también se incluyen condiciones suficientes para que un subrupo abstracto de un grupo de Lie tenga una estructura de subgrupo de Lie y se caracteriza a los subgrupos cerrados de un grupo de Lie como encajes del mismo (Teorema 5.2.10). En la última sección de este Capítulo se analiza el cubriente universal de un grupo de Lie (este concepto junto con el de espacio cubriente son tratados en el Apéndice, sección A.2), mostrándose primero que los espacios cubrientes conexos de una variedad diferenciable en general, reciben una estructura de variedad diferenciable con la cual el mapeo cubriente es suave. En el caso particular de grupos de Lie se observa que su cubriente universal recibe además una operación de grupo compatible con dicha estructura de variedad, de manera que resulta un grupo de Lie y la aplicación cubriente universal un morfismo de grupos de Lie (Teorema 5.3.4). Además de esto, se da una caracterización de los morfismos de grupos de Lie que a su vez resultan aplicaciones cubrientes, finalizando con un resultado que nos asegura que un morfismo de álgebras de Lie que va del álgebra de un grupo de Lie simplemente conexo a el álgebra de otro grupo de Lie, determina en forma única un morfismo entre estos de tal forma que la diferencial resulte el morfismo de grupos de Lie inicial (Teorema 5.3.6).

Aunque los resultados previos al Capítulo 6 nos dejan ver la estrecha relación que existe entre un grupo de Lie y su álgebra de Lie, no es sino a partir de éste que se establece explícitamente la estrecha relación entre ellos. El mapeo exponencial, que es el nombre de dicho Capítulo, es una función *suave* que va del álgebra de Lie de un grupo de Lie al grupo de Lie mismo y resulta un difeomorfismo local alrededor del cero del álgebra (Teorema 6.1.6). De ello se obtiene una condición suficiente para determinar cuando un subgrupo abstracto de un grupo de Lie es un subgrupo de Lie y cual es su álgebra de Lie (Teorema 6.1.9) — en la sección 6.4 este resultado es la herramienta principal para determinar las álgebras de algunos subgrupos de Lie del grupo lineal general de matrices con entradas en los complejos y en los reales —. La sección 6.3 está destinada a analizar el caso particular del mapeo exponencial en el grupo general lineal de matrices con entradas en los complejos y en los reales.

Otros ejemplos de las consecuencias del mapeo exponencial son contemplados en el Capítulo 7. En la sección 7.1 se ve que basta pedir que un morfismo de grupos entre dos grupos de Lie sea continuo para que resulte suave (Teorema 7.1.2). El hecho de que un subgrupo cerrado abstracto de un grupo de Lie tiene una única estructura de variedad diferencial que lo hace un subgrupo de Lie del grupo de Lie que lo contiene, es analizado en la sección 7.2.

El concepto de *representación*, que se incluye en la sección 5.1, es retomado en el Capítulo de *Linealización en grupos de Lie*. En esta parte se analizan las propiedades de cierta reprentación que va de un grupo de Lie en el grupo de automorfismos de su álgebra. Es llamada *representación adjunta* y su diferencial coincide con los corchetes de Lie (Proposición 8.1.6). Gracias a eso, entre otras cosas se dan condiciones necesarias y suficientes para que un grupo de Lie conexo sea abeliano (Teorema 8.1.9).

Finalmente, el Capítulo 9 se enfoca en analizar las propiedades de algunos conjuntos bien conocidos en la Teoría de grupos, llamados *grupos cociente.* En la sección 9.1 se concluye que el grupo cociente que se obtiene de un grupo de Lie a partir de un subgrupo cerrado recibe una estructura de variedad diferenciable (Teorema 9.1.2). A los grupos cociente con dicha estructura de variedad se les llama *variedades homogéneas.* Se muestra que salvo difeomorfismo, un grupo de Lie actúa transitivamente tan sólo sobre variedades homogéneas (ejemplo 9.1.7 y Teorema 9.1.8), obteniendo gracias a esto y a algunos resultados previos que una variedad homogénea obtenida a partir de un subgrupo normal de un grupo de Lie, es un grupo de Lie (Teorema 9.1.13). La parte siguiente analiza los tres Teorema de isomorfismo en grupos de Lie, haciendo uso del enunciado 9.1.10, que es una generalización del Teorema 9.1.8. La última parte de esta sección se enfoca a analizar ejemplos de variedades homogéneas obtenidas a partir de acciones transitivas de subgrupos del grupo lineal general de matrices con entradas en los complejos y los reales. En la sección 9.4 se dan algunos aspectos topológicos de subgrupos del grupo lineal general de matrices con entradas en los complejos y los reales. La última sección de este Capítulo se enfoca en la presentación y demostración de un resultado sobre acciones libres y propias de un grupo de Lie en una variedad, el cual dice que el conjunto de órbitas de una acción con esas características recibe una estructura de variedad diferenciable de tal forma que es un haz fibrado junto con la proyección canónica sobre la variedad, y su fibra es el grupo de Lie.

En la última parte de este trabajo aparece un Apéndice en donde se incluyen resultados y notas complementarias de temas que fueron empleados en el desarrollo del mismo, con el afán de que dentro de lo posible el texto sea autocontenido y que para ser consultado tan sólo sean necesarios conocimientos básicos de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Moderna y Topología General. Además se ofrecen recomendaciones bibliográficas para profundizar varios de los temas expuestos.

Capítulo 1

Variedades diferenciables

1.1. Preliminares

Definición 1.1.1. Sea M un *espacio topológico.* Diremos que M es una *variedad topológica de dimensión* d, si es Hausdorff, segundo numerable y cualquier $m \in M$ posee una vecindad abierta homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^d$. Llamaremos *mapeo coordenado* a cualquier homeomorfismo φ definido de un abierto conexo $U \subseteq M$ en un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^d$. Las funciones $x_i = r_i \circ \varphi$ serán llamadas *funciones coordenadas* (donde r_i es la *i-ésima proyección canónica de* $\mathbb{R}^d$) y *sistema coordenado* a el par $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_d))$. Diremos que (U, φ) es un *sistema coordenado cúbico* si $\varphi(U)$ es un cubo abierto alrededor del origen en $\mathbb{R}^d$ y si $m = \varphi^{-1}(0)$, que está *centrado en m.*

Diversos autores llaman a lo que hemos definido como *variedad topológica de dimensión d*, *espacio localmente Euclidiano de dimensión d*; algunos omiten la condición de *segundo numerable* en la definición. Nosotros la incluiremos ya que es necesaria para algunos de los resultados primordiales que presentaremos (por ejemplo, para la existencia de particiones de la unidad).

El ejemplo más sencillo de una *variedad topológica de dimensión d* es justamente $\mathbb{R}^d$. De este espacio podemos interesarnos no sólo por su particular estructura topológica, sino por una de las más importantes y conocidas propiedades que lo caracterizan: *la diferenciación de funciones.* Las siguientes definiciones nos ayudarán a formalizar el estudio de una generalización de esta propiedad para variedades topológicas.

Definición 1.1.2. Sea M una *variedad topológica.* Diremos que una familia de sistemas coordenados $\mathfrak{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ es una *estructura diferenciable de clase* C^k $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$ *en* M si satisface las siguientes propiedades:

1. $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una cubierta de M.

2. Dados $\alpha, \beta \in \Lambda$, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ definida en $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, es C^k.

3. $\mathfrak{F}$ es maximal con respecto a la propiedad 2, es decir, si (U, φ) es un sistema coordenado que satisface que para cualquier $\alpha \in \Lambda$, $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ y $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ son C^k, entonces $(U, \varphi) \in \mathfrak{F}$.

En tal caso diremos que $(M, \mathfrak{F})$ es una *variedad diferenciable d-dimensional de clase C^k*.

Cuando no haya lugar a confusiones, denotaremos $(M, \mathfrak{F})$ únicamente con M e indicaremos el hecho de que es d-dimensional con M^d.

Como nuestro estudio sólo se restringirá a las variedades diferenciables de clase C^∞, los términos *diferenciable* o *suave* deberán interpretarse como *diferenciable de clase C^∞*. Por esta misma razón desde ahora, cuando se hable de una *variedad* estaremos pensando que es una variedad diferenciable de clase C^∞.

Observación 1.1.3. Notemos que dada una variedad topológica M y una familia de sistemas coordenados $\mathfrak{F}_0$ que satisface las condiciones 1 y 2 de la definición anterior, existe una única estructura diferenciable $\mathfrak{F}$ que contiene a $\mathfrak{F}_0$, a saber

$$\mathfrak{F} = \left\{ (U, \varphi) \,:\, \varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} \text{ y } \varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} \text{ son } \mathcal{C}^k, \text{ para todo } (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathfrak{F}_0 \right\}.$$

La importancia de la condición de maximalidad de una estructura diferenciable resaltará en algunos de los resultados que abordaremos.

Definición 1.1.4. Un mapeo continuo $\Psi : M \longrightarrow N$ es *diferenciable de clase C^∞* (denotado como $\Psi \in C^\infty(M, N)$) si $\varphi \circ \Psi \circ \tau^{-1}$ es C^∞ para cualesquiera mapeos coordenados τ en M y φ en N. En el caso particular en que $N = \mathbb{R}$, la notación que utilizaremos será $\Psi \in C^\infty(M)$.

En esta definición hemos generalizado el concepto de suavidad de forma *natural.* Es importante mencionar que muchas de las propiedades que conocíamos con respecto a esta definición siguen preservándose, como por ejemplo que la composición de mapeos diferenciables es diferenciable y que $\Psi \in C^\infty(M, N)$ si y sólo si para cualquier abierto $U \subseteq M$, $\psi|_U \in C^\infty(U, N)$.

Ejemplo 1.1.5. El ejemplo básico y no por ello menos importante es $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{F})$, donde $\mathfrak{F}$ es la estructura diferenciable generada por el mapeo identidad $i : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ en el sentido de la observación 2.

Es necesario resaltar que existen otras estructuras diferenciables para $\mathbb{R}^d$ que no son iguales a $\mathfrak{F}$. Por ejemplo $\mathfrak{F}_0$, la estructura diferenciable generada por $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ para la cual $\varphi(x_1, \ldots, x_d) = (x_1^3, \ldots, x_d^3)$. Para verificarlo basta notar que $\varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_d) = (\sqrt[3]{x_1}, \cdots, \sqrt[3]{x_d})$, y por lo tanto $i \notin \mathfrak{F}_0$, ya que $i \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1}$ no es suave en el origen.

Al referirnos a $\mathbb{R}^d$ como variedad diferenciable pensaremos en $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{F})$.

Ejemplo 1.1.6. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita d. Sabemos que V es isomorfo a $\mathbb{R}^d$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y es posible que intuitivamente esto nos resulte suficiente para pensar que V posee una estructura de variedad diferenciable análoga a la expuesta en el ejemplo 1 para $\mathbb{R}^d$. Esto resulta cierto en el siguiente sentido:

Dados dos isomorfismos $l_1, l_2 : \mathbb{R}^d \longrightarrow V$, en particular son biyecciones. Por ello existen τ_1 y τ_2 topologías en V para las cuales l_1, l_2 son homeomorfismos. respectivamente. Más aún, (V, τ_1) y (V, τ_2) son variedades topológicas. Considerando las estructuras diferenciables $\mathfrak{F}_1$ y $\mathfrak{F}_2$ generadas por l_1 y l_2, respectivamente, nos podemos preguntar que relación existe entre $(V, \tau_1, \mathfrak{F}_1)$ y $(V, \tau_2, \mathfrak{F}_2)$.

Para contestar esa pregunta notemos que existe un isomorfismo $l : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^d \arrow[rr, "l"] \arrow[dr, "l_1"'] & & \mathbb{R}^d \arrow[dl, "l_2"] \\
& V &
\end{tikzcd}$$

A saber $l = l_2^{-1} \circ l_1$.

Como l es un isomorfismo, resulta ser un homeomorfismo al igual que l_1 y l_2. Por lo tanto $\mathbb{I}_V = l_2 \circ l \circ l_1^{-1}$ es un homeomorfismo. De ahí que $(V, \tau_1) = (V, \tau_2)$. Notemos que $l_2^{-1} \circ l_1 = l$ y $l_1^{-1} \circ l_2 = l^{-1}$ son isomorfismos, de modo que son $\mathcal{C}^\infty$. Por lo tanto $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$.

De todo lo anterior concluimos que $(V, \tau_1, \mathfrak{F}_1) = (V, \tau_2, \mathfrak{F}_2)$, que por el momento podemos interpretar como el hecho de que V tiene una estructura de variedad diferenciable d-dimensional generada por los isomorfismos entre V y $\mathbb{R}^d$.

En particular el espacio complejo $\mathbb{C}^n$ resulta ser una $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $2n$ y por lo anterior, una variedad de dimensión $2n$.

Ejemplo 1.1.7. Sea $(M^d, \mathfrak{F}_M)$ variedad diferenciable. A cualquier $U \subseteq M$ abierto podemos inducirle *naturalmente* una estructura de variedad diferenciable $\mathfrak{F}_U$, a saber la generada por el conjunto

$$\{\, (U_\alpha \cap U, \varphi_\alpha\,|_{U_\alpha \cap U}) \,:\, (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathfrak{F}_M \,\}.$$

Un ejemplo muy importante que tiene que ver con lo anterior es el *grupo lineal general de matrices complejas de* $d \times d$ $Gl(d, \mathbb{C})$, visto como subconjunto de las matrices complejas de $d \times d$, $\mathfrak{gl}(d, \mathbb{C})$. Dado que esta última resulta ser una variedad diferenciable al indentificarla con $\mathbb{R}^{2d^2}$ y $det : \mathfrak{gl}(d, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua,

$$Gl(d, \mathbb{C}) = \{\, A \in \mathfrak{gl}(d, \mathbb{C}) \,:\, \det(A) \neq 0 \,\}$$

es un subconjunto abierto de $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{C})$. Por lo tanto posee una estructura de variedad diferenciable como la descrita. Análogamente sucede con el conjunto de matrices reales de $d \times d$ $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})$, y $Gl(d,\mathbb{R}) \subseteq \mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})$, el *grupo lineal general de matrices reales de* $d \times d$.

Ejemplo 1.1.8. Consideremos $(M^d, \mathfrak{F}_M)$, $(N^c, \mathfrak{F}_N)$ variedades diferenciables, de modo que podemos inducir una estructura de variedad de dimensión $d+c$ en $M \times N$ considerando la estructura diferenciable que contiene al conjunto

$$\{\, (U \times V, \varphi \times \tau) \,:\, (U,\varphi) \in \mathfrak{F}_M \ \text{ y } \ (V,\tau) \in \mathfrak{F}_N \,\}\,.$$

Si $\Psi : M \longrightarrow N$ es una función suave, la gráfica de Ψ

$$\mathcal{G}_\Psi = \{\, (m, \varphi(m)) \subseteq M \times N \, : m \in M \,\},$$

recibe una estructura de d-variedad diferenciable heredada de M en el siguiente sentido: denotando $\pi_1 : M \times N \longrightarrow M$ la proyección canónica sobre M y $\lambda : M \longrightarrow \mathcal{G}_\Psi$, definida como $\lambda(m) = (m, \Psi(m))$ para cualquier $m \in M$, dado $(U,\varphi) \in \mathfrak{F}_M$, el par $(\mathcal{G}_\Psi \cap \pi_1^{-1}(U),\ \varphi \circ \pi_1|_{\mathcal{G}_\Psi})$ es un sistema coordenado para el cual la función inversa correspondiente al mapeo es $\lambda \circ \varphi^{-1}$. De este modo $\mathcal{G}_\Psi$ tendrá la estructura de variedad generada por el conjunto

$$\{\, (\mathcal{G}_\Psi \cap \pi_1^{-1}(U),\ \varphi \circ \pi_1|_{\mathcal{G}_\Psi}) \,:\, (U,\varphi) \in \mathfrak{F}_M \,\}.$$

Ejemplo 1.1.9. Sea $\mathbb{S}^d = \{\, x \in \mathbb{R}^{d+1} \ : \mid x \mid = 1 \,\}$ la *d-esfera unitaria.* Como subespacio de $\mathbb{R}^{d+1}$, es Hausdorff y segundo numerable. Tomemos $i \in \{\, 1, \cdots, d+1 \,\}$ y consideremos

$$U_i^+ = \{\, (x_1, \ldots, x_{d+1}) \in \mathbb{S}^d \,:\, x_i > 0 \,\}\,.$$

Análogamente definimos U_i^- como el subconjunto de $\mathbb{S}^d$ que tiene a los elementos cuya i-ésima coordenada es menor que cero. Notemos que U_i^+ y U_i^- son subconjuntos abiertos de $\mathbb{S}^d$.

Consideremos $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \longrightarrow \mathbb{R}^d$ como

$$\varphi_i^\pm(x_1, \ldots, x_{d+1}) \longmapsto (x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{d+1})\,.$$

Cada $\varphi_i^\pm$ es continua y biyectiva con respecto a su imagen $\varphi_i^\pm(U_i^\pm) = \mathring{\mathbb{B}}^d$. Más aún, es un homeomorfismo pues su inversa es continua y esta definida como

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(u_1, \ldots, u_d) = (u_1, \ldots, u_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \mid u \mid^2}, u_{i+1}, \ldots, u_d)\,.$$

De modo que como subespacio de $\mathbb{R}^{d+1}$, $\mathbb{S}^d$ es una variedad topológica de dimensión d. No sólo eso, para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, d+1\}$, $\varphi_i^{\pm} \circ (\varphi_j^{\pm})^{-1}$ es suave.

Considerando la estructura diferenciable generada por $\{\varphi_i^{\pm}\}$, concluimos que $\mathbb{S}^d$ es una variedad diferenciable de dimensión d.

Ejemplo 1.1.10. Hasta el momento hemos visto ejemplos que si bien no son el mismo $\mathbb{R}^d$, heredan "naturalmente" propiedades topológicas o diferenciables de esta variedad. Ahora consideraremos un espacio que ilustrará un poco más la generalidad de la definición de *variedad diferenciable.*

Sea $L = \mathbb{R}^{d+1} \smallsetminus \{0\}$ con la topología de relativa y $\sim \subseteq L \times L$ relación de equivalencia en la cual

$$a \sim b \quad \text{si y sólo si} \quad a = \lambda b, \text{ para alguna } \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Como se hace comúnmente, denotaremos $[x]$ a la clase de equivalencia de x. $L/\sim$ con la topología cociente será denotado como $\mathbb{RP}^d$ y llamado el *espacio proyectivo real de dimensión d.*

Es conveniente notar que la topología cociente es la más fina que hace continua a la función

$$\begin{aligned} L &\xrightarrow{\pi} \mathbb{RP}^d \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

es decir $U \subseteq \mathbb{RP}^d$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U) \subseteq L$ es abierto.

Dicha topología también es llamada *topología de identificación inducida por* π. Esta idea se generaliza en el siguiente sentido:

Sean X espacio topológico, Y conjunto y $f : X \longrightarrow Y$ una función. La topología más fina que hace continua a f es llamada *topología de identificación inducida por f.* Dicha topología esta definida como $\tau = \{U \subseteq Y : f^{-1}(U) \subseteq X \text{ es abierto}\}$. En este caso f recibe el nombre de *identificación.*

Generalmente se supone que f es suprayectiva ya que la topología en $Y \smallsetminus f(X)$ es discreta. Con esta idea enunciaremos un resultado que nos será útil y cuya demostración puede ser consultada en [Prieto].

***Teorema* 1.1.11.** *Sea $p : X \longrightarrow \widetilde{X}$ continua. Entonces p es una identificación si y sólo si dada $f : X \longrightarrow Y$ continua y compatible con p* (es decir, $f(x) = f(x')$ si $p(x) = p(x')$), existe una única $\widetilde{f} : \widetilde{X} \longrightarrow Y$ continua que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ \widetilde{X} \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

lo que significa que $\widetilde{f} \circ p = f$.

Notemos que de este teorema podemos concluir que una función $g : \widetilde{X} \longrightarrow Z$ es continua si y sólo si $g \circ p$ es continua.

Regresando a nuestro problema original, consideremos $i \in \{ 1, \ldots, d+1 \}$ y definamos

$$\widetilde{U_i} = \{ (x_1, \ldots, x_{d+1}) \in L \, : \, x_i \neq 0 \} \, .$$

subconjunto abierto de L. Se puede observar que $\widetilde{U_i}$ es *saturado*, lo que significa que $\pi^{-1}(\pi(\widetilde{U_i})) = \widetilde{U_i}$. De modo que si denotamos $\pi(\widetilde{U_i}) = U_i$, $\pi|_{\widetilde{U_i}} : \widetilde{U_i} \longrightarrow U_i$ resulta ser una identificación y por lo tanto U_i es abierto en $\mathbb{RP}^d$.

Consideremos $\widetilde{\varphi}_i : \widetilde{U_i} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ definida como

$$\widetilde{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_{d+1}) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{d+1}}{x_i} \right) \, ,$$

que es continua (de hecho suave) y es compatible con $\pi|_{\widetilde{U_i}}$. Así, por el teorema, existe una función continua $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^d$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{U_i} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}_i"] \arrow[d, "\pi|_{\widetilde{U_i}}"'] & \mathbb{R}^d \\
U_i \arrow[ur, dashed, "\varphi_i"']
\end{tikzcd}$$

Observemos que φ_i es un homeomorfismo, pues $\psi_i : \mathbb{R}^d \longrightarrow U_i$ definida como

$$\psi_i(u_1, \ldots, u_d) = [(u_1, \ldots, u_{i-1}, \, 1 \, , u_{1+1}, \ldots, u_d)] \, ,$$

es la función inversa de φ_i y es continua. Esto se puede concluir considerando $\widetilde{\psi}_i : \mathbb{R}^d \longrightarrow \widetilde{U_i}$, donde

$$\widetilde{\psi}_i(u_1, \ldots, u_d) = (u_1, \ldots, u_{i-1}, \, 1 \, , u_{1+1}, \ldots, u_d)$$

que no sólo es continua sino suave. De ahí que $\pi|_{\widetilde{U_i}} \circ \widetilde{\psi}_i = \psi_i$ sea continua.

Dado que $\Lambda = \{ U_i \, : \, i \in \{ 1, \ldots, d+1 \} \}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{RP}^d$ y que para cualesquiera $i, j \in \{ 1, \ldots, d+1 \}$ la función $\varphi_i \circ {\varphi_j}^{-1}$, definida en $\varphi_j(\widetilde{U_i} \cap \widetilde{U_j})$, es suave pues $\varphi_i \circ {\varphi_j}^{-1} = \varphi_i \circ \psi_j = \varphi_i \circ \pi|_{\widetilde{U_i} \cap \widetilde{U_j}} \circ \widetilde{\psi}_i = \widetilde{\varphi}_i \circ \widetilde{\psi}_j$. De manera que basta mostrar que $\mathbb{RP}^d$ es Hausdorff y segundo numerable para concluir que $(\mathbb{RP}^d, \mathfrak{F})$ es una *variedad diferenciable de dimensión* d, considerando a $\mathfrak{F}$ como la estructura diferenciable generada por el conjunto $\{ (U_i, \varphi_i) \, : \, i \in$

$\{1,\ldots,d+1\}\}$. Esto último se debe a que Λ es una cubierta abierta y finita de $\mathbb{RP}^d$ y cada uno de sus elementos es homeomorfo a $\mathbb{R}^d$.

Observemos que en este caso π es suave, pues para toda $i\in\{1,\ldots,d+1\}$

$$\varphi_i\circ\pi=\tilde{\varphi}_i$$

es suave.

Consideremos ahora $L=\mathbb{C}^{d+1}\setminus\{0\}$ con la topología de relativa y $\sim\subseteq L\times L$ relación de equivalencia en la cual

$$a\sim b \quad \text{si y sólo si} \quad a=\lambda b, \text{ para alguna } \lambda\in\mathbb{R}\,.$$

Denotaremos $[x]$ a la clase de equivalencia de x.

El conjunto de clases de equivalencia $L/\sim$, con la topología de identificación inducida por el mapeo canónico

$$\begin{aligned} L &\xrightarrow{\pi} L/\sim \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

será denotado como $\mathbb{CP}^d$ y llamado el *espacio proyectivo complejo de dimensión* $2d$.

Se muestra en forma totalmente análoga que este conjunto con dicha topología recibe una estructura de variedad diferenciable generada a partir de la familia de homeomorfismos

$$\{(U_i,\varphi_i)\;:\;i\in\{1,\ldots,d+1\}\}\,,$$

donde $\pi(\widetilde{U}_i)=U_i$ (siendo $\widetilde{U}_i=\{(x_1,\ldots,x_{d+1})\;:\;x_i\neq 0\}\subseteq L$ abierto y saturado), de forma que la función $\varphi_i:U_i\longrightarrow\mathbb{R}^d$ es definida como

$$\varphi([(x_1,\ldots,x_{d+1})])=\left(\frac{x_1}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_{d+1}}{x_i}\right).$$

Además se concluye que con dicha estructura π resulta suave.

1.2. Topología en variedades diferenciables

Hasta el momento no hemos profundizado en las definiciones, y si bien en las observaciones alertamos sobre la importancia de algunas condiciones de las mismas, lo que tenemos hasta ahora son sólo ejemplos básicos en los que apenas y logramos familiarizarnos con los conceptos.

Primeramente haremos hincapié en las propiedades topológicas de las variedades.

Definición 1.2.1. Sean X un espacio topológico y $\mathfrak{A} = \{ A_\lambda : \lambda \in \Lambda \}$ familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathfrak{A}$ es *localmente finita* si todo elemento de $x \in X$ tiene una vecindad $U \subseteq X$, la cual satisface que $U \cap A_\lambda = \emptyset$, para casi toda $\lambda \in \Lambda$, es decir, salvo por un número finito de elementos del conjunto Λ.

Observación 1.2.2. La propiedad anterior es equivalente a pedir que cualquier $x \in X$ posea una vecindad $U \subseteq X$ que satisfaga que $U \subseteq X \smallsetminus A_\lambda$, para casi toda $\lambda \in \Lambda$. De este modo es sencillo verificar que si $\mathfrak{A} = \{ A_\lambda : \lambda \in \Lambda \}$ es *localmente finita* entonces $\overline{\mathfrak{A}} = \{ \overline{A}_\lambda : \lambda \in \Lambda \}$ es *localmente finita*, pues dado $x \in X$ existe $U \subseteq X$ vecindad abierta de x tal que $U \subseteq X \smallsetminus A_\lambda$, para casi toda $\lambda \in \Lambda$; concluimos notando que en ese caso $U \subseteq (X \smallsetminus A_\lambda)^\circ = X \smallsetminus \overline{A}_\lambda$. Otra peculiaridad de esta definición es que cuando $\mathfrak{C} = \{ C_\gamma : \gamma \in \Gamma \}$ es una familia localmente finita de subconjuntos cerrados de X, $\bigcup \mathfrak{C}$ es un subconjunto cerrado de X pues para cualquier $x \in X \smallsetminus \bigcup \mathfrak{C}$ existe $U \subseteq X$ vecindad abierta de x que intersecta sólo a $C_{\gamma_1}, \ldots, C_{\gamma_n} \in \mathfrak{C}$. Así $V = U \cap (\cap_{i=1}^n (X \smallsetminus C_{\gamma_i}))$ es una vecindad abierta de x tal que $V \subseteq X \smallsetminus \bigcup \mathfrak{C}$.

Definición 1.2.3. Sean X espacio topológico y $\mathfrak{C} = \{ B_\lambda : \lambda \in \Lambda \}$ cubierta de X. Decimos que una cubierta $\mathfrak{C}' = \{ B'_\gamma : \gamma \in \Gamma \}$ es *refinamiento de* $\mathfrak{C}$ o es *más fina que* $\mathfrak{C}$ si dado $\gamma \in \Gamma$ existe $\lambda \in \Lambda$ para el cual $B'_\gamma \subseteq B_\lambda$. Decimos que $\mathfrak{C}'$ *es un refinamiento preciso de* $\mathfrak{C}$ si $\Lambda = \Gamma$ y $B'_\lambda \subseteq B_\lambda$.

Los espacios compactos poseen muchas propiedades que se derivan directamente de que cualquier cubierta abierta tiene una subcubierta finita, como por ejemplo que basta que sea Hausdorff para que resulte no sólo regular, sino normal. Es natural preguntarnos si es posible generalizar de alguna forma la noción de compacidad sin que se pierda esta propiedad; la respuesta es sí.

En lo sucesivo daremos la definición de *paracompacidad* y veremos que no sólo preserva la propiedad deseada, sino que las variedades diferenciables la poseen y en ellas resulta ser equivalente a la existencia de *particiones de la unidad suaves*, concepto que plantearemos más adelante y el cual resultará crucial.

Para hacer énfasis en como se obtiene la generalización, notemos que con la definición previa obtenemos la siguiente equivalencia:
X es compacto si y sólo si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto finito.

Definición 1.2.4. (Paracompacidad) Sea X espacio topológico. Diremos que X es *paracompacto* si cualquier cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.

Bourbaki incluye en la definición de paracompacidad, al igual que en la de compacidad, la condición de que el espacio sea Hausdorff. Nosotros la omitimos, pues como se aprecia en el siguiente resultado la idea de un *refinamiento abierto localmente finito* es por sí misma suficientemente fuerte.

***Proposición* 1.2.5.** Sean X paracompacto y $A, B \subseteq X$ cerrados ajenos. Si para todo $a \in A$ existen $U_a, V_a \subseteq X$ abiertos ajenos para los que $a \in U_a$ y

$B \subseteq V_a$, entonces existen $U, V \subseteq X$ abiertos ajenos que satisfacen $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Más aún, si X es Hausdorff y paracompacto entonces es normal.

Demostración. Consideremos $\{ U_a : a \in A \}$ cubierta abierta de A. De modo que existe $\{ L_\beta : \beta \in \Gamma \}$ refinamiento abierto localmente finito de $\{ U_a : a \in A \} \cup \{ X \smallsetminus A \}$. Eligiendo

$$\mathcal{J} = \{ L_\beta : \beta \in \Gamma \text{ y } L_\beta \subseteq U_a \text{ para alguna } a \in A \},$$

obtenemos una familia localmente finita de abiertos de X de tal manera que $A \subseteq \bigcup \mathcal{J}$, de modo que

$$\overline{\mathcal{J}} = \{ \overline{L}_\beta : L_\beta \in \mathcal{J} \}$$

es una familia localmente finita de cerrados de X (observación 1.2.2). Como $\overline{L}_\beta \subseteq \overline{U}_\alpha \subseteq X \smallsetminus V_a \subseteq X \smallsetminus B$, para alguna $a \in A$, concluimos que $\cup_{L_\beta \in \mathcal{J}} \overline{L}_\beta \subseteq X \smallsetminus B$ es un subconjunto cerrado de X (observación 1.2.2). Finalmente, considerando

$$U = \bigcup_{L_\beta \in \mathcal{J}} L_\beta \qquad \text{y}$$
$$V = X \smallsetminus \bigcup_{L_\beta \in \mathcal{J}} \overline{L}_\beta$$

obtenemos la primera parte del resultado que nos dice que basta que un espacio sea paracompacto y regular para ser normal . Consideremos que X es Hausdorff y paracompacto. Veamos que son condiciones suficientes para que sea regular, con lo cual concluiremos que X es normal. Sean $x \in X$ y $\widetilde{X} \subseteq X$ cerrado tal que $x \notin \widetilde{X}$. Dado que para todo $z \in \widetilde{X}$ existe $U_z, V_z \subseteq X$ abiertos ajenos para los cuales $z \in U_z$ y $x \in V_z$, por la proposición anterior existen $U_x, V_x \subseteq X$ abiertos ajenos para los cuales $\widetilde{X} \subseteq U_x$ y $x \in V_x$, lo cual se sigue del hecho de que los unitarios de los elementos en X son cerrados (condición equivalente a que el espacio sea T_1, que a su vez es más débil que Hausdorff). ■

Con el siguiente Lema se concluye una propiedad que satisfacen ciertos espacios topolgícos, en particular, las variedades diferenciables.

***Lema* 1.2.6.** Sea X un espacio topológico segundo numerable, Hausdorff y localmente compacto (es decir que cualquier $x \in X$ tiene una vecindad compacta) entonces existe $\{ \mathcal{G}_i : i \in \mathbb{N} \}$ una cubierta abierta de X que satisface que $\overline{\mathcal{G}_i}$ es compacto y $\overline{\mathcal{G}_i} \subseteq \mathcal{G}_{i+1}$ para toda $i \in \mathbb{N}$

Demostración. Consideremos $\{ V_i : i \in \mathbb{N} \}$ una base numerable de X que satisface que $\overline{V}_i$ es compacto para toda $i \in \mathbb{N}$. Podemos conseguir esta base considerando una base numerable $\{ L_i : i \in \mathbb{N} \}$ y eligiendo aquellos elementos cuya cerradura es compacta, que resulta ser una base ya que para toda $x \in$

X existe $U_x \subseteq X$ vecindad de X que es compacta. Así existe $L_i \subseteq U_x$ tal que $x \in L_i$; como X es Hausdorff, U_x es cerrado y por tanto $x \in \overline{L}_i \subseteq U_x$ resultando $\overline{L}_i$ compacto. Además, dados L_i, L_j cuya cerradura es compacta y para los cuales $x \in L_i \cap L_j$ existe L_k tal que $x \in L_k \subseteq L_i \cap L_j$. De modo que $\overline{L}_k \subseteq \overline{L_i \cap L_j} \subseteq \overline{L}_i \cap \overline{L}_j$ y de allí $\overline{L}_k$ es compacto. Definamos $\mathcal{G}_1 = V_1$ y suponiendo que

$$\mathcal{G}_k = \bigcup_{i=1}^{j_k} V_i, \quad \text{para algún} \quad j_k \in \mathbb{N},$$

consideremos $j_{k+1} \in \mathbb{N}$ el mínimo para el cual

$$\overline{\mathcal{G}_k} \subseteq \bigcup_{i=1}^{j_{k+1}} V_i .$$

Así la familia $\{ \mathcal{G}_i : i \in \mathbb{N} \}$ satisface las condiciones requeridas.

■

Empleando el Lema anterior, veremos que las variedades diferenciables resultan ser espacios paracompactos.

***Proposición* 1.2.7.** Sea X un espacio topológico segundo numerable, Hausdorff y localmente compacto entonces X es paracompacto. De hecho, cada cubierta abierta tiene un refinamiento numerable que consiste de abiertos relativamente compactos (es decir, cuyas cerraduras son compactas).

Demostración. Consideremos la familia $\{\mathcal{G}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ como en el Lema anterior. Es importante resaltar que $\overline{\mathcal{G}_i} \setminus \mathcal{G}_{i-1}$ es una compacto contenido en el abierto $\mathcal{G}_{i+1} \setminus \overline{\mathcal{G}_{i-2}}$, para cualquier $i \geqslant 3$.

Sea $\{ U_\alpha : \alpha \in \Lambda \}$ cubierta abierta de X. Si $i \geqslant 3$, $\{ U_\alpha \cap (\mathcal{G}_{i+1} \setminus \overline{\mathcal{G}_{i-2}}) : \alpha \in \Lambda \}$ es una familia de abiertos que cubre a $\overline{\mathcal{G}_i} \setminus \mathcal{G}_{i-1}$; llamemos $\mathcal{J}_i$ a un subconjunto finito que cubre a $\overline{\mathcal{G}_i} \setminus \mathcal{G}_{i-1}$ y observemos que $\bigcup \mathcal{J}_i \subseteq (\mathcal{G}_{i+1} \setminus \overline{\mathcal{G}_{i-2}}) \}$. Análogamente llamamos $\mathcal{J}_2$ a un subconjunto finito de $\{ U_\alpha \cap \mathcal{G}_3 : \alpha \in \Lambda \}$ que cubre a $\overline{\mathcal{G}_2}$. Considerando que

$$X = \overline{\mathcal{G}_2} \cup (\bigcup_{i\geqslant 3} \overline{\mathcal{G}_i} \setminus \mathcal{G}_{i-1}) ,$$

la familia $\cup_{i\geqslant 2}\mathcal{J}_i$ resulta ser un refinamiento de $\{ U_\alpha : \alpha \in \Lambda \}$. Más aún, es localmente finita pues

$$X = \mathcal{G}_3 \cup (\bigcup_{i\geqslant 3} \mathcal{G}_{i+1} \setminus \overline{\mathcal{G}_{i-2}}) ,$$

$$\mathcal{G}_3 \cap (\bigcup \mathcal{J}_i) = \emptyset \quad \text{si} \quad i \geqslant 3 \ \text{ y}$$

$$(\mathcal{G}_{j+1} \setminus \overline{\mathcal{G}_{i-2}}) \cap (\bigcup \mathcal{J}_i) = \emptyset \quad \text{si} \quad j \geqslant 3, \quad i \leqslant j-3 \quad \text{o} \quad i \geqslant j+3 .$$

■

Observación 1.2.8. Por la proposición anterior y haciendo uso del *Teorema de metrización de Urysohn* podemos concluir que cualquier variedad topológica es metrizable.

Ahora definiremos la propiedad en torno a la cual girarán los últimos resultados de esta parte. Para ello recordemos que si X es un espacio topológico y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, llamamos *soporte de* f al conjunto

$$\mathrm{sop} f = \overline{\{\, x \in X \,:\, f(x) \neq 0 \,\}}\,.$$

Definición 1.2.9. Sea M una variedad diferenciable. Decimos que $\{\, \Psi_\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R} \,:\, \alpha \in \Lambda \,\}$ es una *partición de la unidad suave* si satisface las siguientes condiciones:

1. Para cualquier $\alpha \in \Lambda$, Ψ_α es suave y $0 \leqslant \Psi_\alpha \leqslant 1$.
2. La familia $\{\, \mathrm{sop}\, \Psi_\alpha \,:\, \alpha \in \Lambda \,\}$ es localmente finita.
3. $\sum\limits_{\alpha \in \Lambda} \Psi_\alpha(x) = 1$ para todo $x \in M$.

Dada $\{\, U_\beta \,:\, \beta \in \Gamma \,\}$, una cubierta abierta de M, diremos que la partición de la unidad $\{\, \Psi_\alpha \,:\, \alpha \in \Lambda \,\}$ esta *subordinada* a ella si para toda $\alpha \in \Lambda$ existe $\beta \in \Gamma$ tal que $\mathrm{sop}\, \Psi_\alpha \subseteq U_\beta$.

Si en el concepto anterior tan sólo pedimos que M sea un espacio topológico y en el primer inciso que cada Ψ_α sea continua, obtendremos una generalización que es por sí misma bastante significativa. En este caso es sencillo notar que si para cualquier $\{\, U_\beta \,:\, \beta \in \Gamma \,\}$ cubierta abierta de X, existe una partición de la unidad $\{\, \Psi_\alpha \,:\, \alpha \in \Lambda \,\}$ subordinada a ella, entonces $\{\, (\mathrm{sop}\, \Psi_\alpha)^\circ \,:\, \alpha \in \Lambda \,\}$ es un refinamiento abierto localmente finito. Más aún, si pedimos adicionalmente que M sea Hausdorff se puede probar que la existencia de particiones de la unidad subordinadas a cubiertas abiertas es también una condición necesaria para que el espacio se paracompacto (la demostración de este resultado puede ser consultada en [Prieto]). Nosotros mostraremos este último resultado en el caso en el que M es una variedad diferenciable, obteniendo además particiones de la unidad suaves.

No es complicado ver que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

es suave. De modo que $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ para la cual

$$h(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}$$

es suave, pues $x \leqslant 0$ si y sólo si $1 - x \geqslant 1$ y $1 - x \leqslant 0$ si y sólo si $1 \leqslant x$, de modo que $f(x)+f(1-x)\neq 0$ para cualquier $x\in\mathbb{R}$; satisface además que $h(x)=1$ si $x\geqslant 1$ y $h(x)=0$ si $x\leqslant 0$.

De modo que la función $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida como

$$g(x)=h(x+2)h(2-x)$$

es suave, toma el valor de 1 en el intervalo $[-1,1]$ y cero en $\mathbb{R}\setminus(-2,2)$. Con esto podemos definir una función $\Psi:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ que tome valor 1 en $[-1,1]^d$ y 0 en $\mathbb{R}^d\setminus(-2,2)^d$, como sigue

$$\Psi=(g\circ r_1)\dots(g\circ r_d) \tag{1.2}$$

donde r_i representa la $i-$ésima proyección canónica. En la prueba del siguiente Teorema ocuparemos esta función.

Teorema 1.2.10. (Existencia de particiones de la unidad suaves) *Sea M^d variedad diferenciable y $\mathfrak{A}=\{\,U_\alpha\,:\,\alpha\in\Lambda\,\}$ cubierta abierta de M, entonces existe una partición de la unidad numerable subordinada a ella $\{\,\Psi_i\,:\,i\in\mathbb{N}\,\}$ tal que sop Ψ_i es compacto.*

Demostración. Consideremos la sucesión $\{\mathcal{G}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de M con las propiedades descritas en el Lema 1.2.6. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\mathcal{G}_0=\emptyset$.

Dado $p\in M$ denotemos como n_p a el mínimo entero que satisface que p es un elemento de $M\setminus\overline{\mathcal{G}}_{n_p}$. Sean $\alpha_p\in\Lambda$ tal que $p\in U_{\alpha_p}$ y (V,ρ) sistema coordenado centrado en p, para el cual $V\subseteq U_{\alpha_p}\cap(\mathcal{G}_{n_p+2}\setminus\overline{\mathcal{G}}_{n_p})$ y cuya imagen bajo ρ contiene a $[-2,2]^d$. De modo que la función $\Psi_p:M\longrightarrow\mathbb{R}$ definida como

$$\Psi_p(m)=\begin{cases}\Psi\circ\rho(m) & \text{si} \quad m\in V\\ 0 & \text{si} \quad m\notin V\end{cases}$$

(donde Ψ es la función definida en (1.2)) es suave y su soporte se queda contenido en V. Denotemos V_p a la vecindad de p donde Ψ_p es distinta de cero (es decir, el interior del soporte de Ψ_p). Observemos que dicho conjunto es relativamente compacto, ya que $\mathcal{G}_{n_p+2}$ lo es. Dado $i\geqslant 1$, consideremos un número finito de puntos p para los cuales los V_p forman una cubierta abierta de $\overline{\mathcal{G}}_i\setminus\mathcal{G}_{i-1}$. De esa manera conseguimos una cantidad numerable de funciones suaves cuyos soportes son compactos y forman un refinamiento localmente finito de $\mathfrak{A}$ (de hecho los interiores de sus soportes son un refinamiento abierto localmente finito de $\mathfrak{A}$). Denotemos a dicho conjunto de funciones como $\{\,\Psi_{p_i}\,\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Sea $\phi:M\longrightarrow\mathbb{R}$ igual a

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\Psi_{p_i}\,.$$

Dicha función esta bien definida y es suave porque el conjunto de soportes es localmente finito. Como $\phi(m) \neq 0$ para toda $m \in M$, dado $i \in \mathbb{N}$ la función ϕ_i definida como $\frac{\Psi_{p_i}}{\phi}$ es suave en M. De hecho $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una partición de la unidad subordinada a $\mathfrak{A}$, cuyos soportes son compactos.

■

***Corolario* 1.2.11.** Sea M variedad diferenciable, $C \subseteq M$ cerrado y $A \subseteq M$ abierto que contiene a C. Entonces existe $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ suave, para la cual

1. $0 \leqslant \varphi(m) \leqslant 1$ para todo $m \in M$.
2. $\operatorname{sop}\varphi \subseteq A$ y si $m \in C$, $\varphi(m) = 1$.

Demostración. Sea $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ partición de la unidad subordinada a la cubierta $\{A, M \setminus C\}$ para la cual $\operatorname{sop}\varphi_1 \subseteq A$ y $\operatorname{sop}\varphi_2 \subseteq M \setminus C$. Por el inciso 3 de la definición de partición de la unidad $\varphi_1(m) = 1$, para todo $m \in C$; así, considerando $\varphi = \varphi_1$ obtenemos el resultado. ■

Capítulo 2

Cálculo en variedades diferenciables

2.1. Espacio tangente

Al definir suavidad para una función $\Psi : M^d \longrightarrow N^c$, los sistemas coordenados de cada una de las variedades resultaron de vital importancia ya que gracias a ellos volvimos a la noción de suavidad para funciones definidas de subespacios abiertos de $\mathbb{R}^d$ a subespacios abiertos de $\mathbb{R}^c$. El problema ahora es decidir que será la diferencial de la función sin que este concepto dependa de dichos sistemas coordenados; un ejemplo de esto se mostrá a continuación.

Consideremos un punto $m \in M$, (U, φ) y (V, τ) sistemas coordenados con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_d$ y $y_1, \ldots, y_c$ respectivamente, para los que $m \in U$ y $\Psi(m) \in V$. Sabemos que $\tau \circ \Psi \circ \varphi^{-1}$ es suave y por ello podemos hablar de la matriz asociada a su derivada en el punto $\varphi(m)$

$$\left(\frac{\partial (y_i \circ \Psi \circ \varphi^{-1})}{\partial r_j} (\varphi(m)) \right)_{i,j}$$

Con esto se aprecia que no podremos definir directamente la diferencial de Ψ en m a través de las diferenciales de las composiciones de Ψ con los mapeos coordenados correspondientes, pues estas varían dependiendo de los sistemas elegidos; aunque por otro lado esperamos conservar propiedades como la regla de la cadena, que nos diría que al componer la diferencial de Ψ con las diferenciales de las funciones φ^{-1} y τ deberemos de obtener una transformación lineal cuya representación matricial con respecto a las "bases canónicas" sea la que se muestra arriba.

Aunque antes de comenzar a hablar de bases y representaciones de transformaciones lineales, quizá es lógico preguntarnos si será necesario elegir espacios vectoriales distintos a $\mathbb{R}^d$ y $\mathbb{R}^c$ para definir la diferencial de Ψ en m. Si es así, será necesario buscar para cada punto en una variedad un espacio vectorial cuyas bases esten íntimamente relacionadas con los mapeos de los sistemas coordenados, como lo estan las bases canónicas a las proyecciones canónicas en los espacios euclidianos usuales.

Con la notación previa podemos traducir las observaciones anteriores como la necesidad de que las funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_d$ describan *direcciones* así como lo hacen las proyecciones canónicas $r_1, \ldots, r_d$ en $\mathbb{R}^d$, por medio de las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial r_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial r_d}$.

Más formalmente podemos decir que dados $r \in \mathbb{R}^d$ y $j \in \{1, \ldots, d\}$, si denotamos $C_r^\infty(\mathbb{R}^d) := \{ f : U \longrightarrow \mathbb{R} : U \subseteq \mathbb{R}^d \text{ abierto, } r \in U \text{ y } f \in C^\infty(U) \}$, éste resulta ser un $\mathbb{R}$-álgebra con las operaciones usuales en la cual definimos el funcional lineal

$$\left.\frac{\partial}{\partial r_j}\right|_r : C_r^\infty(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial r_j}(r)$$

que si bien no es un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras, satisface la *regla de Leibnitz*, es decir, dados $f, g \in C_r^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\frac{\partial fg}{\partial r_j}(r) = g(r)\frac{\partial f}{\partial r_j}(r) + f(r)\frac{\partial g}{\partial r_j}(r)\,.$$

Además si $f, g \in C_r^\infty(\mathbb{R}^d)$ y f, g son iguales en una vecindad de r, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial r_j}(r) = \frac{\partial g}{\partial r_j}(r)\,.$$

En las siguientes definiciones se genereralizarán estas y otras ideas más.

Definición 2.1.1. Sea $(M, \mathfrak{F})$ variedad diferenciable, $m \in M$ y

$$C_m^\infty(M) := \{ f : U \longrightarrow \mathbb{R} : U \subseteq M \text{ abierto, } m \in U \text{ y } f \in C^\infty(U) \}\,,$$

espacio vectorial con las operaciones usuales de funciones.

Diremos que $\nu : C_m^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ es un *vector tangente* si ν es $\mathbb{R}$-lineal y resulta una *derivación*, es decir que para cualesquiera $f, g \in C_m^\infty(M)$,

$$\nu(fg) = f(m)\nu(g) + g(m)\nu(f).$$

Denotaremos el conjunto de vectores tangentes de M en m como $T_m M$. Dicho conjunto tiene una estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial generada a partir de la estructura lineal de $\mathbb{R}$, es decir, dados $\nu, \rho \in T_m M$

$$(\nu+\rho)(f)=\nu(f)+\rho(f)$$
$$(\lambda\nu)(f)=\lambda(\nu(f))$$

para cualesquiera $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in C_m^\infty(M)$.

Observación 2.1.2. Al igual que las derivadas parciales de los espacios euclidianos, existen propiedades que los vectores tangentes satisfacen. Una de ellas es que evaluados en funciones constantes dan 0. Para verificarlo consideremos M una variedad y $m \in M$. Sea $\nu \in T_mM$ y $\tilde{1}$ la función constante uno definida en todo M, entonces

$$\begin{aligned}\nu(\tilde{1}) &= \nu(\tilde{1}\cdot\tilde{1}) = 1\cdot\nu(\tilde{1}) + 1\cdot\nu(\tilde{1}) \\ &= \nu(\tilde{1}) + \nu(\tilde{1})\end{aligned}.$$

De modo que $\nu(\tilde{1}) = 0$. Como cualquier otra función constante se puede expresar como un escalar por $\tilde{1}$, de la linealidad de ν se obtiene el resultado.

Otra propiedad que satisfacen los vectores tangentes de una variedad es que sólo depende de los valores locales de las funciones. Dada M y $m \in M$, consideremos $f, g \in C_m^\infty(M)$. Sea $U \subseteq M$ vecindad de m para la cual $f|_U = g|_U$. Concluiremos que $\nu(f) = \nu(g)$, para toda $\nu \in T_mM$. Sea V una vecindad de m que satisface que $\overline{V} \subseteq U$. Por el Corolario 1.2.11 existe $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ suave y con imagen en el intervalo $[0,1]$ de tal forma que para cualquier $x \in M \setminus U$, $\phi(x) = 1$ y $\phi|_{\overline{V}} \equiv 0$. Dicha función se puede obtener considerando φ como en dicho Corolario y $\phi(x) = 1 - \varphi(x)$. De modo que $(f-g)\,\phi = f - g$. Si $\nu \in T_mM$

$$\nu(f-g) = \nu((f-g)\,\phi) = \phi(m)\nu(f-g) - (f(m)-g(m))\nu(\phi) = 0\,,$$

es decir $\nu(f) = \nu(g)$.

Ejemplo 2.1.3. Consideremos $(U,\varphi) \in \mathfrak{F}$ de modo que $m \in U$. Si $x_1,\ldots,x_d$ son las funciones coordenadas de φ, dado $i \in \{1,\ldots,d\}$ la función $\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_m$ definida como

$$\begin{aligned} C_m^\infty(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial r_i}(\varphi(m)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

resulta ser un vector tangente.

A continuación veremos que para cualquier $m \in M$, la dimensión de T_mM es la misma que la dimensión de M. De hecho daremos bases explícitas en términos de los sistemas coordenados.

***Teorema* 2.1.4.** *Sea M^d una variedad diferenciable, $m \in M$ y (U, φ) un sistema coordenado alrededor de m, con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_d$. Entonces los vectores tangentes $\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_m, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_d}\big|_m$ forman una base de $T_m M$, de modo que para todo $\nu \in T_m M$:*

$$\nu = \sum_{i=1}^{d} \nu(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_m .$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\varphi(m) = 0$ ya que para cualesquiera $c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{R}$, la función $(x_1 + c_1, \ldots, x_d + c_d)$ es un mapeo coordenado en U que satisface dicha condición y además para toda $m' \in U$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{m'} = \frac{\partial}{\partial (x_i + c_i)}\bigg|_{m'} \tag{2.2}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, d\}$, según la definición del ejemplo 2.1.3.

Sea g una función suave en $B_\epsilon(0) = \{ x \in \mathbb{R}^d : |x| < \epsilon \} \subseteq \varphi(U)$. Dado $i \in \{1, \ldots, d\}$ definimos en $B_\epsilon(0)$

$$g_i(q) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial r_i}(tq) dt ,$$

donde r_i denota la i-ésima proyección canónica de $\mathbb{R}^d$. Veamos que del Teorema Fundamental del Cálculo se sigue que en $B_\epsilon(0)$,

$$g = g(0) + \sum_{i=1}^{d} g_i r_i .$$

Sean $q = (q_1, \ldots, q_d) \in B_\epsilon(0)$ y $f^q : [0, 1] \longrightarrow B_\epsilon(0)$ que aplica $s \mapsto sq$. De manera que por regla de la cadena, para cualquier $s \in [0, 1]$,

$$\frac{d(g \circ f^q)}{dr}(s) = \sum_{i=1}^{d} q_i \frac{\partial g}{\partial r_i}(sq) .$$

De esa forma, por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{d} g_i r_i\right)(q) &= \sum_{i=1}^{d} q_i \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial r_i}(tq) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{d} q_i \frac{\partial g}{\partial r_i}(tq) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d(g \circ f^q)}{dr}(t) dt = (g \circ f^q)(1) - (g \circ f^q)(0) \\ &= g(q) - g(0), \end{aligned}$$

que es lo que deseabamos.

Considerando $f \in C^\infty_m(M)$ y $g = f \circ \varphi^{-1}$, de manera que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(0)$ esta contenido en su dominio. De esa forma, para todo $m' \in \varphi^{-1}(B_\epsilon(0))$

$$f(m') = f(m) + \sum_{i=1}^{d} f_i(m')x_i(m')$$

donde $f_i(m') = \frac{\partial}{\partial x_i}|_{m'}(f)$.

Considerando la observación 2.1.2, dado $\nu \in T_mM$

$$\nu(f) = 0 + \sum_{i=1}^{d} \nu(f_i)x_i(m) + \sum_{i=1}^{d} f_i(m)\nu(x_i)\,,$$

con lo cual se concluye que

$$\nu = \sum_{i=1}^{d} \nu(x_i)\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m$$

Resta ver que $\{\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_m, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d}\big|_m\}$ es linealmente independiente.

Si $\sum_{i=1}^{d} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\big|_{m'} = 0$ para algunos $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$, entonces para todo $j \in \{\, 1, \dots, d \,\}$

$$0 = \sum_{i=1}^{d} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m (x_j) = a_j$$

■

En la demostración anterior se empleo el hecho de que dado un sistema coordenado (U, φ) de M, con funciones coordenadas $x_1, \dots, x_d$, para cualesquiera $i, j \in \{\, 1, \dots, d \,\}$ y $m \in U$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m (x_j) = \delta_{ij}\,,$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. De ese modo, dado $\nu \in T_mM$,

$$\nu = \sum_{i=1}^{d} \nu(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m .$$

Considerando un sistema coordenado (V, τ) de M, con funciones coordenadas $y_1, \dots, y_d$, en particular se tiene que para toda $m \in U \cap V$

$$\left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_m = \sum_{i=1}^{d} \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_m (x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m .$$

Observación 2.1.5. Como se resalta en la igualdad 2.2 del Teorema anterior, la traslación de un mapeo coordenado genera la misma base para cada espacio tangente, de modo que los subespacios generados por subconjuntos de dichas bases coinciden. Retomando la notación de la demostración del Teorema 2.1.4 significa que para cada $m' \in U$

$$\left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\right|_{m'}, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right|_{m'} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial (x_{i_1} + c_{i_1})}\right|_{m'}, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial (x_{i_k} + c_{i_k})}\right|_{m'} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

para cualesquiera $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, d\}$.

2.2. La diferencial

Definición 2.2.1. Sean M y N variedades diferenciables, $m \in M$ y $\psi : M \longrightarrow N$ una función suave. La función $d\psi_m : T_mM \longrightarrow T_{\psi(m)}N$, para la cual dado $\nu \in T_mM$

$$\begin{aligned} C^\infty_{\psi(m)}(N) &\xrightarrow{d\psi_m(\nu)} \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \nu(g \circ \psi) \end{aligned}$$

es llamada *la diferencial de* ψ *en* m.

Directamente de la definición se obtiene que $d\psi_m$ es lineal. El mapeo dual de $d\psi$ será denotado como $\delta\psi_m : T^*_{\psi(m)}N \longrightarrow T^*_mM$, de tal forma que para cualesquiera $\omega \in T^*_{\psi(m)}N$ y $\nu \in T_mM$,

$$\delta\psi_m(\omega)(\nu) = \omega(d\psi_m(\nu)) .$$

Observación 2.2.2. Si $f \in C^\infty_m(M)$ entonces para todo $\nu \in T_mM$

$$df_m(\nu) = \nu(f) \left.\frac{d}{dr}\right|_{f(m)}$$

Usualmente, para todo $t \in \mathbb{R}$ identificaremos a $T_t\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}$ mediante el isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal que aplica $\left.\frac{d}{dr}\right|_t \mapsto 1$. De esa forma, para cualquier $f \in C^\infty_m(M)$, df_m será un elemento de T^*_mM para el cual, dado $\nu \in T_mM$

$$df_m(\nu) = \nu(f) .$$

De esa forma, al considerar un sistema coordenado $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_d))$ alrededor de m, el conjunto $\{\, dx_{i_m} \,\}$ es la base dual de $\{\, \frac{\partial}{\partial x_i}\big|_m \,\}$. Así, para todo $f \in C^\infty_m(M)$

$$df_m = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_m (f)\, dx_{i_m} \,.$$

Como mencionamos al comienzo de este capítulo, buscamos que la diferencial en variedades conserve propiedades importantes de la diferencial en los espacios euclidianos. Una de ellas es la representación matricial de la diferencial, como veremos a continuación.

Sean $\psi : M \longrightarrow N$ suave y $m \in M$. Si $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_d))$ es un sistema coordenado alrededor de m y $(V, \tau = (y_1, \ldots, y_c))$ es un sistema coordenado alrededor de $\psi(m)$, entonces para toda $j \in \{\, 1, \ldots, d \,\}$

$$\begin{aligned} d\psi_m\bigg(\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_m\bigg) &= \sum_{i=1}^{c} d\psi_m\bigg(\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_m\bigg)(y_i)\, \frac{\partial}{\partial y_i}\bigg|_{\psi(m)} \\ &= \sum_{i=1}^{c} \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_m (y_i \circ \psi)\, \frac{\partial}{\partial y_i}\bigg|_{\psi(m)} \end{aligned}$$

De esa forma el *Jacobiano de* ψ con respecto a las bases $\{\frac{\partial}{\partial x_j}\big|_m\}$ y $\{\frac{\partial}{\partial y_i}\big|_{\psi(m)}\}$ es

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_m (y_i \circ \psi)\Big)_{ij} = \Big(\frac{\partial (y_i \circ \psi \circ \varphi^{-1})}{\partial r_j}\,(\varphi(m))\Big)_{ij} \,.$$

Otra propiedad más que se conserva es la regla de la cadena. Sean $\psi : M \longrightarrow N$ y $\phi : N \longrightarrow P$ mapeos suaves. Dado $m \in M$, para cualesquiera $f \in C^\infty_{\phi \circ \psi(m)}$ y $\nu \in T_m M$

$$\begin{aligned} d(\phi \circ \psi)_m(\nu)(f) &= \nu(f \circ \phi \circ \psi) = d\psi_m(\nu)(f \circ \phi) \\ &= d\phi_{\psi(m)}(d\psi_m(\nu))(f)) = d\phi_{\psi(m)} \circ d\psi_m(\nu)(f) \,, \end{aligned}$$

es decir, $d(\phi \circ \psi)_m = d\phi_{\psi(m)} \circ d\psi_m$. Una consecuencia de esto es que al considerar $g \in C^\infty_{\psi(m)}(N)$, si $\omega \in T_m M$

$$\delta\psi_m(dg_{\psi(m)})(\omega) = dg_{\psi(m)}(d\psi_m(\omega)) = d(g \circ \psi)_m(\omega) \,,$$

por lo cual $\delta\psi_m(dg_{\psi(m)}) = d(g \circ \psi)_m$.

Ejemplo 2.2.3. Ahora presentaremos una sencilla pero útil aplicación de la diferencial de una función. Sean M^d y N^c variedades diferenciables. Sean $m \in M$ y $n \in N$. Por el ejemplo 1.1.8 existe una estructura de variedad diferenciable en $M \times N$ inducida por el producto de mapeos coordenados. Veremos que existe una identificación canónica entre $T_{(m,n)}(M \times N)$ y $T_m M \times T_n N$.

Denotando como π_1 y π_2 a las proyecciones canónicas de $M \times N$ sobre M y N respectivamente, mostraremos que la función lineal

$$\big(d(\pi_1)_{(m,n)}, d(\pi_2)_{(m,n)}\big) : T_{(m,n)}(M \times N) \longrightarrow T_m M \times T_n N$$

resulta un isomorfismo. Como las dimensiones de $T_{(m,n)}(M \times N)$ y $T_m M \times T_n N$ son iguales a $d \times c$, basta verificar que $\big(d(\pi_1)_{(m,n)}, d(\pi_2)_{(m,n)}\big)$ mapea una base en otra.

Sean $\big(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_d)\big)$ y $\big(V, \tau = (y_1, \ldots, y_c)\big)$ sistemas coordenados alrededor de m y n respectivamente, de modo que $(U \times V, \varphi \times \tau)$ es un sistema coordenado alrededor de (m, n). Consideremos la base de $T_{(m,n)}(M \times N)$

$$\beta = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_{(m,n)}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_d}\bigg|_{(m,n)}, \frac{\partial}{\partial y_1}\bigg|_{(m,n)}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_c}\bigg|_{(m,n)} \right\}.$$

Observemos que para todo $j \in \{1, \ldots, d\}$, si $e_j = \big(\delta_{ij}\big)_{i=1}^{d} \in \mathbb{R}^d$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, entonces dado $f \in C^\infty_m(M)$

$$\begin{aligned}
d(\pi_1)_{(m,n)}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_{(m,n)}\right)(f) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_{(m,n)} (f \circ \pi_1) \\
= \lim_{r \to 0} &\frac{f \circ \pi_1\big(\varphi^{-1}(\varphi(m) + re_j), n\big) - f \circ \pi_1(m, n)}{r} \\
= \lim_{r \to 0} &\frac{f \circ \varphi^{-1}\big(\varphi(m) + re_j\big) - f(m)}{r} = \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_{m} (f)
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $g \in C^\infty_n(N)$

$$\begin{aligned}
d(\pi_2)_{(m,n)}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_{(m,n)}\right)(g) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_{(m,n)} (g \circ \pi_2) \\
= \lim_{r \to 0} &\frac{g \circ \pi_2\big(\varphi^{-1}(\varphi(m) + re_j), n\big) - g \circ \pi_2(m, n)}{r} \\
= \lim_{r \to 0} &\frac{g(n) - g(n)}{r} = 0\,.
\end{aligned}$$

De esa forma,

$$\left(d(\pi_1)_{(m,n)}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_{(m,n)}\right), d(\pi_2)_{(m,n)}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_{(m,n)}\right) \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_{m}, 0 \right).$$

Análogamente se concluye que para todo $k \in \{1, \ldots, c\}$

$$\left(d(\pi_1)_{(m,n)} \Big(\frac{\partial}{\partial y_k}\Big|_{(m,n)} \Big), \, d(\pi_2)_{(m,n)} \Big(\frac{\partial}{\partial y_k}\Big|_{(m,n)} \Big) \right) = \left(0, \, \frac{\partial}{\partial y_k}\Big|_{n} \right).$$

Como el conjunto de imágenes de β bajo $\big(d(\pi_1)_{(m,n)}, d(\pi_2)_{(m,n)}\big)$ es una base, se concluye que es un isomorfismo.

Definición 2.2.4. Consideremos una *curva suave en una variedad* M, es decir, una función suave

$$\sigma : (a, b) \longrightarrow M .$$

Dado $t \in (a, b)$, $d\sigma_t : T_t(a, b) \longrightarrow T_{\sigma(t)}M$. Como $T_t(a, b)$ es generado por $\{ \frac{d}{dr}\big|_t \}$, el vector tangente

$$d\sigma_t \Big(\frac{d}{dr}\Big|_t \Big) \in T_{\sigma(t)}M$$

será llamado *vector tangente a* σ *en* t y lo denotaremos como $\dot{\sigma}(t)$.

En general, si $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_d))$ es un sistema coordenado alrededor de $\sigma(t_0) = m$

$$d\sigma_{t_0} \Big(\frac{d}{dr}\Big|_{t_0} \Big) = \sum_{i=1}^{d} \frac{d(x_i \circ \sigma)}{dr}(t_0) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_m .$$

En particular, si M es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^d$ y $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$ tenemos que

$$d\sigma_{t_0} \Big(\frac{d}{dr}\Big|_{t_0} \Big) \sum_{i=1}^{d} \frac{d\sigma_i}{dr}(t_0) \frac{\partial}{\partial r_i}\Big|_m ,$$

donde r_i denota la i-ésima proyección canónica de M sobre $\mathbb{R}$. Identificando a T_mM con $\mathbb{R}^d$ mendiante el isomorfismo que aplica $\frac{\partial}{\partial r_i}\big|_m \mapsto e_i$, donde $\{ e_i \}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^d$, obtenemos

$$\dot{\sigma}(t_0) = \Big(\frac{d\sigma_1}{dr}(t_0), \ldots, \frac{d\sigma_d}{dr}(t_0) \Big),$$

que es la definición usual de la derivada de σ en t_0.

Dos curvas suaves $\sigma, \tau : (a, b) \longrightarrow M$ para las cuales $\sigma(t_0) = \tau(t_0) = m$, tienen el mismo vector tangente en t_0 si y sólo si para toda $f \in C^\infty_m(M)$

$$\frac{d(f \circ \sigma)}{dr}(t_0) = \frac{d(f \circ \tau)}{dr}(t_0)\,.$$

Con el siguiente resultado, que también generaliza una propiedad de la diferencial de espacios euclidianos, se podrá concluir que en este caso $\sigma = \tau$.

***Teorema* 2.2.5.** *Sean M una variedad conexa y $\psi : M \longrightarrow N$ una función suave. Si $d\psi_m$ es la constante cero para toda $m \in M$, entonces ψ es constante.*

Demostración. Sean $m \in M$ y $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_d))$ sistema coordenado alrededor de m. Sea $(V, \tau = (y_1, \dots, y_c))$ un mapeo coordenado alrededor de $\psi(m)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\widetilde{U} = \psi^{-1}(V) \cap U$ es conexo. Para cualesquiera $z \in \widetilde{U}$ y $j \in \{1, \dots, d\}$

$$0 = d\psi_z\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_z\Big) = \sum_{i=1}^{c} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_z (y_i \circ \psi) \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{\psi(z)}\,,$$

lo cual implica que dado $i \in \{1, \dots, c\}$, $\frac{\partial(y_i \circ \psi \circ \varphi^{-1})}{\partial r_j}(\varphi(z)) = 0$ para todo $j \in \{1, \dots, d\}$. Esto significa que para toda $i \in \{1, \dots, c\}$, $y_i \circ \psi \circ \varphi^{-1}$ es un mapeo constante en $\widetilde{U}$. Ya que φ y τ son mapeos coordenado se sigue que ψ es constante en $\widetilde{U}$, siendo $\widetilde{U}$ un abierto que contiene a m.

De lo anterior podemos concluir que todo $m \in M$ tiene una vecindad abierta $\widetilde{U}$ para la cual $\psi|_{\widetilde{U}}$ es un mapeo constante. Por ello, dado $m_0 \in M$

$$\mathcal{L} = \{\, m \in M \,:\, \psi(m) = \psi(m_0) \,\}$$

resulta ser un subconjunto abierto y no vacío de M. De la misma forma

$$M \smallsetminus \mathcal{L} = \{\, m \in M \,: \psi(m) \neq \psi(m_0) \,\}$$

es un subconjunto abierto de M. Como M es conexo se sigue que $M = \mathcal{L}$, y por lo tanto ψ es constante.

■

2.3. Haces tangente y cotangente

En esta parte estudiaremos a dos conjuntos bastante significativos para una variedad diferenciable: los haces tangente y cotangente. Entre otras cosas ayudarán a considerar la diferencial de una función suave no sólo puntual sino globalmente, como lo hacíamos en los espacios euclidianos.

Definición 2.3.1. Sea M una variedad diferenciable. Llamaremos *haz tangente de M* a el conjunto

$$\bigcup_{m\in M} T_m M\,,$$

al cual denotaremos como TM. Análogamente, llamaremos *haz cotangente* al conjunto

$$\bigcup_{m\in M} T_m^* M\,,$$

que será denotado como T^*M.

Existen *proyecciones naturales* que relacionan a los haces tangente y cotagente de la variedad M consigo misma, a saber

$$\begin{array}{ll} \pi : TM \longrightarrow M & \pi(\nu) = m\,, \quad \text{si} \quad \nu \in T_m M \\ \pi^* : T^*M \longrightarrow M & \pi^*(\omega) = m\,, \quad \text{si} \quad \omega \in T_m M \end{array}$$

Veremos que mediante estas proyecciones es posible dar una estructura de variedad diferenciable a los haces.

Sea $\mathfrak{F}$ la estructura diferenciable de M. Dado $(U,\varphi)\in\mathfrak{F}$, con funciones coordenadas $x_1,\dots,x_d$, consideremos la funciones

$$\widetilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{2d} \quad \text{y} \quad \widetilde{\varphi}^* : (\pi^*)^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{2d}\,,$$

para las cuales, dados $\nu \in T_pM \subseteq \pi^{-1}(U)$ y $\omega \in T_q^*M \subseteq (\pi^*)^{-1}(U)$

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(\nu) &= (x_1(\pi(\nu)),\dots,x_d(\pi(\nu)),\, d(x_1)_p(\nu),\dots,\, d(x_d)_p(\nu)) \\ \widetilde{\varphi}^*(\omega) &= (x_1(\pi^*(\omega)),\dots,x_d(\pi^*(\omega)),\, \omega(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\big|_q),\dots,\, \omega(\tfrac{\partial}{\partial x_d}\big|_q)) \end{aligned}$$

Dado que $\nu = \sum_{i=1}^d dx_i(\nu)\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p$ y $\omega = \sum_{i=1}^d \omega(\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_q)dx_i$ (observación 2.2.2), se sigue que $\widetilde{\varphi}$ y $\widetilde{\varphi}^*$ son biyectivas y además

$$\widetilde{\varphi}(\pi^{-1}(U)) = \widetilde{\varphi}^*((\pi^*)^{-1}(U)) = \varphi(U)\times\mathbb{R}^d\,.$$

El siguiente resultado nos será de utilidad para mostrar que TM y T^*M poseen estructuras de variedad diferenciable de tal forma que las proyecciones canónicas resultan suaves. La demostración de esta Proposición puede ser consultada en [O'Neill].

***Proposición* 2.3.2.** Sea $\mathfrak{A}$ un conjunto y $\{\,(U_\alpha,\zeta_\alpha),\ :\ \alpha\in\Lambda\,\}$ una familia que satisface que para todo $\alpha\in\Lambda$, ζ_α es una función biyectiva definida en $U_\alpha\subseteq\mathfrak{A}$, para la cual $\zeta_\alpha(U_\alpha)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^d$, y además

I. $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = \mathfrak{A}$.

II. Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Lambda$ la función $\zeta_\alpha \circ \zeta_\beta^{-1}$ es suave en su dominio, que es el subconjunto abierto de $\mathbb{R}^d$, $\zeta_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.

III. Si $p, q \in \mathfrak{A}$ y son distintos, entonces p y q estan en el mismo U_α o existen $\alpha, \beta \in \Lambda$ tales que $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$, $p \in U_\alpha$ y $q \in U_\beta$.

Entonces existen una única topología localmente euclidiana, Hausdorff y una estructura que satisface las condiciones 1, 2 y 3 de la definición 1.1.2 de tal modo que para cualquier $\alpha \in \Lambda$, (U_α, ζ_α) pertenece a dicha estructura. Más aún, si una cantidad numerable de U_α cubren a $\mathfrak{A}$ el espacio topológico resultante es segundo numerable y por lo tanto $\mathfrak{A}$ es una variedad diferenciable con dicha estructura.

En la demostración de la Proposición se muestra que la única topología que satisface dichas condiciones es

$$\tau = \{\, W \subseteq \mathfrak{A} \,:\, \text{para toda } \alpha \in \Lambda,\ \zeta_\alpha(W \cap U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^d \text{ es abierto} \,\}\,.$$

Consideremos a la familia

$$\mathfrak{L} = \{\, (\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi}) \,:\, (U, \varphi) \in \mathfrak{F} \,\}\,.$$

Como M es segundo numerable existe una familia numerable de sistemas coordenados $\{\, (U_i, \varphi_i) \,\}_{i\in\mathbb{N}}$ que satisface que $\{\, U_i \,\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de M. De ese modo $\{\, \pi^{-1}(U_i) \,\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{\, (\pi^*)^{-1}(U_i) \,\}$ cubren a TM y T^*M, respectivamente.

Verificaremos que TM, junto con la familia $\mathfrak{L}$ satisfacen las condiciones II y III de la Proposición anterior, con lo cual obtendremos una estructura de variedad diferenciable que contenga a $\mathfrak{L}$, además de probar que π es suave con dicha estructura. La prueba de que T^*M satisface dichas condiciones es totalmente análoga.

Veamos la condición II. Sean (U, φ), $(V, \tau) \in \mathfrak{F}$, con funciones coordenadas $x_1, \dots, x_d$ y $y_1, \dots, y_d$, respectivamente. Sean $r_1, \dots, r_{2d}$ las proyecciones canónicas de $\mathbb{R}^{2d}$ sobre $\mathbb{R}$, de modo que basta mostrar que dada $i \in \{\, 1, \dots, 2d \,\}$ $r_i \circ \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\tau}^{-1}$ es suave, para concluir que $\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\tau}^{-1}$ es suave.

Sea $(z, y) \in \widetilde{\tau}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V))$, donde $z = (z_1, \dots, z_d)$ y $y = (y_1, \dots, y_d)$. Observemos que $\widetilde{\tau}^{-1}(z, y) = \sum_{i=1}^{d} r_{d+i}\,(z, y)\, \frac{\partial}{\partial y_i}\big|_{\tau^{-1}(z)}$, de modo que para todo $i \in \{\, 1, \dots, d \,\}$

$$\begin{aligned} r_i \circ \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\tau}^{-1}(z, y) &= x_i \circ \pi \circ \widetilde{\tau}^{-1}(z, y) \\ &= x_i \circ \tau^{-1}(z)\,, \end{aligned}$$

siendo $x_i \circ \tau^{-1}$ suave, ya que $\varphi \circ \tau^{-1}$ es suave. Además

$$\begin{aligned}
r_{d+i} \circ \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\tau}^{-1}(z,y) &= dx_i(\widetilde{\tau}^{-1}(z,y)) \\
&= \sum_{j=1}^{d} r_{d+j}(z,y) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{\tau^{-1}(z)} (x_i) \\
&= \sum_{j=1}^{d} r_{d+j}(z,y) \frac{\partial (x_i \circ \tau^{-1})}{\partial r_i}(z) \,,
\end{aligned}$$

la cual es suave en términos de (z,y) debido a que $\varphi \circ \tau^{-1}$ es suave.

Verifiquemos el inciso III. Sean $\nu, \nu' \in TM$ distintos. Sean $\pi(\nu) = m$ y $\pi(\nu') = m'$. Supongamos que $m \neq m'$, entonces existen (U,φ), $(V,\tau) \in \mathfrak{F}$ que satisfacen que $m \in U$, $m' \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. De modo que $\nu \in \pi^{-1}(U)$ y $\nu' \in \pi^{-1}(V)$, y $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) = \emptyset$. Si $m = m'$, entonces dado $(U,\varphi) \in \mathfrak{F}$ alrededor de m, $\nu, \nu' \in \pi^{-1}(U)$.

Finalmente observemos que para cualesquiera (U,φ), $(V,\tau) \in \mathfrak{F}$, dado $(z,y) \in \widetilde{\tau}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V))$, $\varphi \circ \pi \circ \widetilde{\tau}^{-1}(z,y) = \varphi \circ \tau^{-1}(z)$, por lo que π es suave.

Observación 2.3.3. Sea V $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita d. Consideremos la estructura de variedad diferenciable inducida por los isomorfismos lineales entre V y $\mathbb{R}^d$ (ejemplo 1.1.6), de modo que dadas una base $\beta = \{ b_1, \ldots, b_d \}$ y $\beta^* = \{ \phi_1, \ldots, \phi_d \}$ su base dual, sabemos que $(V, \phi = (\phi_1, \ldots, \phi_d))$ es un sistema coordenado.

Consideremos $\nu \in V$ y $\varphi^{\beta}_{\nu} : V \longrightarrow T_{\nu}V$ la única función lineal para la cual

$$\varphi^{\beta}_{\nu}(b_i) = \left.\frac{\partial}{\partial \phi_i}\right|_{\nu} \qquad i \in \{ 1, \ldots, d \}.$$

Por definición φ^{β}_{ν} es un isomorfismo.

Notemos que dada $\gamma = \{ a_1, \ldots, a_d \}$ otra base de V y $\gamma^* = \{ \psi_1, \ldots, \psi_d \}$ su base dual, para toda $i \in \{ 1, \ldots, d \}$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \phi_i}\right|_{\nu} = \sum_{j=1}^{d} \left.\frac{\partial}{\partial \phi_i}\right|_{\nu} (\psi_j) \left.\frac{\partial}{\partial \psi_j}\right|_{\nu} = \sum_{j=1}^{d} \psi_j(b_i) \left.\frac{\partial}{\partial \psi_j}\right|_{\nu} .$$

Por ello

$$\begin{aligned}
\varphi^{\gamma}_{\nu}(b_i) &= \varphi^{\gamma}_{\nu}\left(\sum_{j=1}^{d} \psi_j(b_i) a_j \right) = \sum_{j=1}^{d} \psi_j(b_i)\, \varphi^{\gamma}_{\nu}(a_j) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \psi_j(b_i) \left.\frac{\partial}{\partial \psi_j}\right|_{\nu} = \left.\frac{\partial}{\partial \phi_i}\right|_{\nu} \\
&= \varphi^{\beta}_{\nu}(b_i) \,,
\end{aligned}$$

concluyendo con esto que $\varphi_\nu^\beta = \varphi_\nu^\gamma$.

Así podemos identificar canónicamente cada uno de los espacios tangentes de V con V mismo.

Más aún, denotando $\pi : TV \longrightarrow V$ a la proyección usual, la función

$$\begin{aligned} TV &\xrightarrow{\quad\Psi\quad} V \\ \nu &\longmapsto \sum_{i=1}^{d} \nu(\phi_i) b_i \end{aligned}$$

es suave ya que $\phi \circ \Psi \circ (\phi \circ \pi, (d\phi_i)_{i=1}^d)^{-1}$ es la proyección de $\mathbb{R}^{2d}$ en $\mathbb{R}^d$ de las últimas d coordenadas. En el caso particular de una curva suave en V, gracias a la identificación dada por Ψ, podemos considerar $\dot{\sigma}$ como una curva suave en V que aplica

$$t_0 \longmapsto \sum_{i=1}^{d} \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} (\phi_i \circ \sigma) b_i \, .$$

Dado que la identificación no depende de la base elegida, entenderemos lo anterior como

$$\dot{\sigma}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{t - t_0} \tag{2.3}$$

2.4. Inmersiones y subvariedades

Como en Álgebra o en Topología, al estudiar un conjunto con una estructura algebraica o bien un propiedad topológica, es importante analizar la relación existente entre éste y los subconjuntos que preservan la estructura algebraica o bien conservan la propiedad topológica. De igual forma sucede con las variedades diferenciables.

Enseguida precisaremos las *subestructuras* de una variedad diferenciable que serán relevantes en el desarrollo de este trabajo.

Definición 2.4.1. Sea $\psi : M \longrightarrow N$ suave y $m \in M$.

1. Diremos que ψ es una *inmersión en* m si $d\psi_m$ es inyectiva. Si esta condición se satisface en todo punto de M simplemente se dirá que ψ es una *inmersión*. Del mismo modo, diremos que ψ es una *sumersión en* m si $d\psi_m$ es suprayectiva y simplemente que es una *sumersión* si esto se cumple para todo punto en M.

2. El par (M, ψ) será llamado *subvariedad de* N si ψ es una inmersión y es inyectiva.

3. Diremos que (M, ψ) es un *encaje* si es una subvariedad de N y ψ es un homeomorfismo sobre su imagen. Es decir, si ψ es un función abierta con respecto a $\psi(M)$ con la topología relativa.

4. Diremos que ψ es un difeomorfismo si es biyectiva y ψ, ψ^{-1} son suaves.

Si ψ es una sumersión en m diremos que m es un *punto regular*.

Teorema 2.4.2. Teorema de Inmersión local *Sean $m \in M^c$ y $\psi : M \longrightarrow N^d$ un mapeo suave que es una inmersión en m. Entonces existen (U, φ) y (V, τ) sistemas coordenados alrededor de m y $\psi(m)$, de tal forma que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\psi|_U"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \arrow[d, "\tau"] \\ \varphi(U) \arrow[r, "i|_{\varphi(U)}"'] & \tau(V) \end{tikzcd}$$

donde $i(x_1, \ldots, x_c) = (x_1, \ldots, x_c, 0, \ldots, 0)$.

Demostración. Consideremos $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ y $(\widetilde{V}, \widetilde{\tau})$ sistemas coordenados alrededor de m y $\psi(m)$ respectivamente, de tal forma que $\psi(\widetilde{U}) \subseteq \widetilde{V}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\widetilde{\varphi}(m) = \hat{0}$ y $\widetilde{\tau}(\psi(m)) = \hat{0}$. Observemos que

$$\begin{tikzcd} \widetilde{U} \arrow[r, "\psi|_{\widetilde{U}}"] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"'] & \widetilde{V} \arrow[d, "\widetilde{\tau}"] \\ \widetilde{\varphi}(U) \arrow[r, "\widetilde{\psi}"'] & \widetilde{\tau}(V) \end{tikzcd}$$

donde $\widetilde{\psi} = \widetilde{\tau} \circ \psi \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ es suave. Más aún, $d\widetilde{\psi}_{\hat{0}} = d\widetilde{\tau}_{\psi(m)} \circ d\psi_m \circ d\widetilde{\tau}_{\hat{0}}^{-1}$ es inyectiva (por ser composición de funciones inyectivas), de tal forma que existe $A : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ isomorfismo lineal tal que $A \circ d\widetilde{\psi}_{\hat{0}} = i$, donde i es la inclusión canónica de $\mathbb{R}^c$ en $\mathbb{R}^d$.

Consideremos a la función suave $A \circ \widetilde{\psi}$, la cual satisface

$$d(A \circ \widetilde{\psi})_{\hat{0}} = dA_{\hat{0}} \circ d\widetilde{\psi}_{\hat{0}} = A \circ d\widetilde{\psi}_{\hat{0}} = i\,.$$

Sea $G : \widetilde{\varphi}(\widetilde{U}) \times \mathbb{R}^{d-c} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ definida como $G(n, s) = A \circ \widetilde{\psi}(n) + (\hat{0}, s)$. Por lo tanto G es una función suave que satisface que $d\,G_{\hat{0}} = I$. Así, por el Teorema de la función inversa exiten $U_0 \times W_0 \subseteq \widetilde{\varphi}(\widetilde{U}) \times \mathbb{R}^{d-c}$ y $V_0 \subseteq \mathbb{R}^d$ vecindades abiertas de $\hat{0}$, las cuales satisfacen que $G|_{U_0 \times W_0}$ es un difeomorfismo sobre V_0. Sin pérdida de generalidad supongamos que $U_0 \times W_0$ es un cubo abierto centrado en $\hat{0}$ que esta contenido en $G^{-1} \circ A \circ \widetilde{\tau}(\widetilde{V})$, lo cual es posible porque cada una de estas funciones es un homeomorfismo.

De modo que, denotando como i_{U_0} a la inclusión canónica de U_0 en $U_0 \times W_0$,

$$G \circ i_{U_0} = A \circ \widetilde{\psi}|_{U_0} \,,$$

es decir,

$$i_{U_0} = G^{-1} \circ A \circ \widetilde{\psi}|_{U_0} = G^{-1} \circ A \circ \widetilde{\tau} \circ \psi \circ \widetilde{\varphi}^{-1}|_{U_0} \tag{2.4}$$

Sean

$$V = (G^{-1} \circ A \circ \widetilde{\tau})^{-1}(U_0 \times W_0)$$

y $U = \widetilde{\varphi}^{-1}(U_0)$. Por la igualdad (2.4) se sigue que $G^{-1} \circ A \circ \widetilde{\tau} \circ \psi(U) = U_0 \times \{\,\hat{0}\,\} \subseteq U_0 \times W_0$, de lo cual se sigue que $\psi(U) \subseteq V$. Considerando a $\varphi = \widetilde{\varphi}|_U$ y $\tau = (G^{-1} \circ A \circ \widetilde{\tau})|_V$, (U, φ) y (V, τ) son sistemas coordenados y además

$$\begin{aligned} i_{\varphi(U)} &= G^{-1} \circ A \circ \widetilde{\tau} \circ \psi \circ \widetilde{\varphi}^{-1}|_{U_0} \\ &= (G^{-1} \circ A \circ \widetilde{\tau})|_V \circ \psi \circ (\widetilde{\varphi}|_U)^{-1} \\ &= \tau \circ \psi \circ \varphi^{-1} \,, \end{aligned}$$

por lo que satisfacen las condiciones deseadas.

■

Existe una versión análoga del Teorema 2.4.2 para sumersiones que es analizada en la observación 2.5.6.

Aprovecharemos para introducir un concepto que será muy útil en los resultados siguientes y que por ahora nos ayudará a enunciar un Corolario del Teorema anterior.

Definición 2.4.3. Sea (U, φ) sistema coordenado de M con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_d$. Consideremos $0 \leqslant c \leqslant d$ y $a \in \varphi(U)$. Así el conjunto

$$S = \{\, m \in U \,:\, x_i(m) = r_i(a) \text{ para todo } i \in \{\, c+1, \ldots, d \,\}\,\}$$

con la topología relativa y junto con la función $\widetilde{\pi}_c \circ \varphi|_S$ (donde $\widetilde{\pi}_c$ es la proyección de las primeras c coordenadas de $\mathbb{R}^d$ sobre $\mathbb{R}^c$) forman una variedad diferenciable para S. Más aún, (S, i_S) es un encaje en M al que llamaremos *rebanada del sistema coordenado* (U, φ).

***Corolario* 2.4.4.** Sean $m \in M^c$ y $\psi : M \longrightarrow N^d$ un mapeo suave que es una inmersión en m. Entonces existen $U \subseteq M$ vecindad abierta de m y (V, τ) sistema coordenado alrededor de $\psi(m)$ para los cuales $\psi|_U$ es inyectiva y $\psi(U)$ es una rebanada de (V, φ).

Demostración. Consideremos (U, φ) y (V, τ) como en la demostración del Teorema de Inmersión local. Como se satisface que $\tau \circ \psi|_U = i_{\varphi(U)} \circ \varphi$, se sigue que $\psi|_U$ es inyectiva y que

$$\begin{aligned}\tau(\psi(U)) &= i_{\varphi(U)}(\varphi(U)) \\ &= \{ (x_1, \ldots, x_d) \in U_0 \times W_0 \,:\, x_i = 0,\ c+1 \leqslant i \leqslant d \}\end{aligned}$$

la cual es una rebanada de (V, τ).

■

2.5. Teorema de la función inversa en variedades

En esta parte se verá una generalización del Teorema de la función inversa para variedades, la cual se obtendrá directamente del Teorema de la función inversa para espacios euclidianos.

Teorema* 2.5.1. *(Teorema de la función inversa en variedades diferenciables) *Sea $\Psi : M \longrightarrow N$ suave y $m \in M$ para la cual $d(\Psi)_m : T_m M \longrightarrow T_{\Psi(m)} N$ es un isomorfismo. Entonces existen U vecindad abierta de m y V vecindad abierta de $\Psi(m)$ de tal forma que $\Psi|_U : U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Sabemos que $d = \dim M = \dim N$ gracias a que $T_m M$ y $T_{\psi(m)} N$ son isomorfos. Sean (U_1, φ) y (V_1, ϕ) sistemas coordenados alrededor de m y $\psi(m)$, respectivamente. Consideremos $\alpha : A = \varphi(U_1 \cap \psi^{-1}(V_1)) \longrightarrow \phi(V_1)$ definido como

$$\alpha = \phi \circ \psi \circ \varphi^{-1}|_A \,. \tag{2.5}$$

Por la regla de la cadena, la diferencial de α en $\varphi(m)$ es composición de isomorfismos, por lo que resulta un isomorfismo. Por el Teorema de la función inversa, existe $A_1 \subseteq \varphi(U_1 \cap \psi^{-1}(V_1))$ vecindad abierta de $\varphi(m)$ que satisface que $\alpha(A_1)$ es una vecindad abierta de $\alpha(\varphi(m))$ y $\alpha|_{A_1} : A_1 \longrightarrow \alpha(A_1)$ es un difeomorfismo.

Sean $U = \varphi^{-1}(A_1) \subseteq U_1 \cap \psi^{-1}(V_1)$ y $V = \phi^{-1}(\alpha(A_1))$, vecindades abierta de m y $\psi(m)$. De la igualdad 2.5 obtenemos que $\alpha(A_1) = (\phi \circ \psi)(U)$, es decir, $V = \phi^{-1}(\alpha(A_1)) = \psi(U)$. Además, $\psi|_U = \phi^{-1} \circ \alpha \circ \varphi|_U$, que es un difeomorfismo sobre V.

■

Definición 2.5.2. Un conjunto de funciones suaves $x_1, \ldots, x_k$ definidas de una vecindad abierta de $m \in M^d$ en $\mathbb{R}$, es un *conjunto independiente en m* si las diferenciales $dx_1, \ldots, dx_k$ forman un conjunto linealmente independiente en $T_m^* M$.

***Corolario* 2.5.3.** Si $\dim M = d$ y $x_1, \dots, x_d$ son funciones que forman un conjunto independiente de $m \in M$, entonces existe U vecindad abierta de m de tal modo que $(U, (x_1, \dots, x_d))$ es un sistema coordenado de M.

Demostración. Por el Teorema de la función inversa basta mostrar que la diferencial en m del mapeo suave $\varphi = (x_1, \dots, x_d)$, es un isomorfismo. Como $\dim M = \dim \mathbb{R}^d = d$, es suficiente verificar que $d\varphi_m$ es inyectiva.

Sea $\nu \in T_m M$ para la cual $d\varphi_m(\nu) = 0$, es decir

$$\begin{aligned} 0 = d\varphi_m(\nu) &= \sum_{i=1}^{d} d\varphi_m(\nu)(r_i) \frac{\partial}{\partial r_i}\Big|_{\varphi(m)} \\ &= \sum_{i=1}^{d} \nu(x_i) \frac{\partial}{\partial r_i}\Big|_{\varphi(m)}, \end{aligned}$$

por lo cual $d(x_i)_m(\nu) = \nu(x_i) = 0$ para toda $i \in \{1, \dots, d\}$. Como $\beta = \{ d(x_i)_m \}$ es una base de T^*M, existe $\{ \nu_i \}$ base de $T_m M$ para la cual β es su base dual. De ese modo

$$\nu = \sum_{i=1}^{d} d(x_i)(\nu)\nu_i = 0\,,$$

con lo cual concluimos el resultado.

■

Consideremos $x_1, \dots, x_k$ funciones suaves definidas de una vecindad abierta de m en $\mathbb{R}$ de tal forma que sus diferenciales generan a T_m^*M. Entonces es posible elegir un subconjunto de $x_1, \dots, x_k$ cuyas diferenciales sean una base de T_m^*M. Por el Corolario anterior éste formará un sistema coordenado alrededor de m.

***Corolario* 2.5.4.** Sea $\psi : M \longrightarrow N$ suave y $m \in M$ en el cual ψ es una inmersión, entonces dado cualquier sistema coordenado $(V, (y_1, \dots, y_c))$ alrededor de $\psi(m)$, un subconjunto de $y_1 \circ \psi, \dots, y_c \circ \psi$ forma un sistema coordenado alrededor de m.

Demostración. Por la observación previa basta mostrar que el conjunto

$$\gamma = \{ d(y_1 \circ \varphi)_m, \dots d(y_c \circ \varphi)_m \}$$

genera a T_m^*M. Ya que $d\psi_m$ es inyectiva, $\delta\psi_m : T^*_{\varphi(m)}N \longrightarrow T_m^*M$ es suprayectiva. Como $\tilde{\gamma} = \{ d(y_1)_{\varphi(m)}, \dots, d(y_c)_{\varphi(m)} \}$ es una base de $T^*_{\varphi(m)}N$, $\delta\psi_m(\tilde{\gamma}) = \gamma$ genera a T_m^*M. ■

***Corolario* 2.5.5.** Si $\dim M = d$ y $x_1, \ldots, x_k$ son funciones que forman un conjunto linealmente independiente de $m \in M$, entonces forman parte de un sistema coordenado de M alrededor de m.

Demostración. Consideremos (U, φ) sistema coordenado alrededor de m, con funciones coordenadas $z_1, \ldots, z_d$. Como $\{ d(z_1)_m, \ldots, d(z_d)_m \}$ es una base de $T_m^* M$ y $\{ d(x_1)_m, \ldots, d(x_k)_m \}$ es un subconjunto linealmente independiente, existen $j_1, \ldots, j_{d-k} \in \{ 1, \ldots, d \}$ tales que

$$\{ d(x_1)_m, \ldots, d(x_k)_m, d(z_{j_1}), \ldots, d(z_{d-k}) \}$$

es una base de $T_m^* M$. El resultado se sigue del Corolario 2.5.3 ■

Observación 2.5.6. Consideremos $\psi : M \longrightarrow N$ suave y $m \in M$ en el cual ψ es una sumersión, entonces dado cualquier sistema coordenado $(V, \tau = (y_1, \ldots, y_c))$ alrededor de $\psi(m)$, el conjunto $y_1 \circ \psi, \ldots, y_c \circ \psi$ es independiente en m, ya que $\delta\psi_m$ es inyectivo y por tanto manda conjuntos linealmente independientes en conjuntos linealmente independientes. Se sigue del Corolario anterior que forman parte de un sistema coordenado alrededor de m. De hecho una propiedad análoga a la que expresa el Teorema de inmersión local se puede mostrar a partir de esta particularidad de las sumersiones:
Sean $m \in M^d$ y $\psi : M \longrightarrow N^c$ un mapeo suave que es una sumersión en m. Entonces existen (U, φ) y (V, τ) sistemas coordenados alrededor de m y $\psi(m)$, de tal forma que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\psi|_U"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \arrow[d, "\tau"] \\ \varphi(U) \arrow[r, "\pi_c|_{\varphi(U)}"'] & \tau(V) \end{tikzcd}$$

donde $\pi_c(x_1, \ldots, x_d) = (x_1, \ldots, x_c)$.

En tal caso, considerando como un sistema coordenado cúbico (V, τ) alrededor de $\psi(m)$ con funciones coordenadas $y_1, \ldots, y_c$, sabemos que $y_1 \circ \psi, \ldots, y_c \circ \psi$ forma parte de un sistema coordenado alrededor de m. Denotemos $x_i = y_i \circ \psi$, donde $i \in \{ 1, \ldots, c \}$, de modo que $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_d))$ es dicho sistema coordenado. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\psi(U) \subseteq V$, así, para todo $p \in U$

$$\begin{aligned} \tau \circ \psi(p) &= (y_1 \circ \psi(p), \ldots, y_c \circ \psi(p)) \\ &= \pi_c(y_1 \circ \psi(p), \ldots, y_c \circ \psi(p), x_{c+1}(p), \ldots, x_d(p)) \\ &= \pi_c \circ \varphi(p) , \end{aligned}$$

concluyéndose así que el $\pi_c|_U \circ \varphi = \tau \circ \psi|_U$.

La siguiente Proposición es una aplicación de los resultados anteriores, y nos será de utilidad en la demostración de la Proposición 2.8.12.

***Proposición* 2.5.7.** Sean $m \in M$ y $\nu \in T_m M$ distinto de cero. Entonces existe (V, φ) sistema coordenado alrededor de m, con funciones coordenadas $y_1, \ldots, y_d$, que satisface que

$$\nu = \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_m$$

Demostración. Sea (W, ϕ) sistema coordenado alrededor de m con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_d$, de modo que

$$\nu = \sum_{i=1}^{d} d(x_i)_m(\nu) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_m \neq 0\,.$$

Como $T_m M$ es un espacio vectorial de dimensión finita d, entonces existe $\beta = \{\, \nu_1, \ldots, \nu_d \,\}$, una base para $T_m M$ en la cual $\nu_1 = \nu$. Sea $\beta^* = \{\, f_1, \ldots, f_d \,\}$ la base dual de β, de modo que para cualesquiera $i, j \in \{\, 1, \ldots, d \,\}$ existen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para las cuales

$$f_j = \sum_{i=1}^{d} a_{ij}\, d(x_i)_m\,,$$

Definamos para $j \in \{\, 1, \ldots, d \,\}$, $y_j = \sum_{i=1}^{d} a_{ij} x_i : W \longrightarrow \mathbb{R}$. Notemos que para todo $\tau \in T_m M$

$$\begin{aligned} d(y_j)_m(\tau) &= \tau\Big(\sum_{i=1}^{d} a_{ij}\, x_i\Big) = \sum_{i=1}^{d} a_{ij}\, \tau(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{d} a_{ij}\, d(x_i)_m(\tau) \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{d} a_{ij}\, d(x_i)_m\Big)(\tau)\,, \end{aligned}$$

es decir, $d(y_j)_m = \sum_{i=1}^{d} a_{ij}\, d(x_i)_m = f_j$, para toda $j \in \{\, 1, \ldots, d \,\}$. De ese modo $y_1, \ldots, y_d$ forman un conjunto independiente y como consecuencia existe $V \subseteq W$, una vecindad abierta de m para la cual $(V, \varphi = (y_1, \ldots, y_d))$ es un sistema coordenado (Corolario 2.5.3), de tal manera que

$$
\begin{aligned}
\nu &= \sum_{i=1}^{d} d(y_i)_m(\nu) \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_m \\
&= \sum_{i=1}^{d} f_i(\nu_1) \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_m \\
&= \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_m
\end{aligned}
$$

■

Observación 2.5.8. Veamos que dado $\nu \in T_m M$, existe una curva

$$\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M\,,$$

que satisface que $\sigma(0) = m$ y $\nu = \dot\sigma(0)$.

Si $\nu = 0$, basta considerar $\sigma \equiv m$. Supongamos que $\nu \neq 0$. Sea (V, φ) como en la Proposición. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\varphi(m) = \hat{0}$ (ya que podemos elegir a (W, ϕ) de tal forma que $\phi(m) = 0$). Sea $\epsilon > 0$ tal que $(t, 0, \ldots, 0) \in \varphi(V)$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Consideremos la curva σ definida en $(-\epsilon, \epsilon)$ como $\sigma(t) = \varphi^{-1}(t, 0, \ldots, 0)$. Dicha curva es suave y $\sigma(0) = m$. Por otro lado,

$$\dot\sigma(0) = \sum_{i=1}^{d} \frac{d}{dr}\Big|_0 (y_i \circ \sigma) \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_m\,,$$

de manera que para toda $i \in \{1, \ldots, d\}$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\Big|_0 (y_i \circ \sigma) &= \lim_{h \to 0} \frac{y_i \circ \varphi^{-1}(h, 0, \ldots, 0) - y_i(m)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{y_i \circ \varphi^{-1}(\varphi(m) + h e_1) - y_i(m)}{h} \\
&= \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_m (y_i) = \delta_{i1}\,,
\end{aligned}
$$

por lo cual $\dot\sigma(0) = \frac{\partial}{\partial y_1}\big|_m = \nu$.

2.6. Efectos de la topología en subvariedades

Considerando (N, φ) una subvariedad de M, podemos inducir una estructura de variedad diferenciable en $\varphi(N)$ de modo que φ resulte ser un difeomorfismo. De este modo, siendo $i_{\varphi(N)}$ la inclusión canónica de $\varphi(N)$ en M, $(\varphi(N), i_{\varphi(N)})$

resulta ser una subvariedad de M. Esto da una relación entre la clase de subvariedades de M y el conjunto $\mathcal{C} = \{(C, i_C) : (C, i_C) \text{ es una subvariedad de } M\}$; la pregunta ahora es cuando dos subvariedades (N_1, φ_1) y (N_2, φ_2) están relacionados a la misma subvariedad (C, i_C). Para empezar se debe tener que $\varphi(N_1) = \varphi(N_2) = C$; más aún, la composición $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ debe ser un difeomorfismo. Lo anterior es equivalente a que ambas subvariedades satisfagan la siguiente definición.

Definición 2.6.1. Sean (N_1, φ_1) y (N_2, φ_2) subvariedades de M. Diremos que dihas subvariedades son *equivalentes* si existe un difeomorfismo $\alpha : N_1 \longrightarrow N_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
N_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, dashed, "\alpha"'] & M \\
& N_2 \arrow[u, "\varphi_2"']
\end{tikzcd}$$

es decir $\varphi_2 \circ \alpha = \varphi_1$.

Asociando cualesquiera dos subvariedades de M que sean equivalentes, inducimos una *relación de equivalencia* en la clase de subvariedades de G que tiene la propiedad de que para cada clase existe un único representante del conjunto $\mathcal{C}$. De este modo cuando hablemos de la existencia de subvariedades de M que son únicas con respecto a alguna propiedad, entenderemos que existe una única clase de equivalencia cuyos elementos la satisfacen, o lo que es lo mismo, sólo hay un elemento del conjunto $\mathcal{C}$ con dicha propiedad.

Debemos tomar en cuenta que la expresión $(C,\ i_C)$ considera implícitamente la estructura de variedad diferenciable de C. Esto es muy importante pues en muchas ocasiones un mismo subconjunto de M puede recibir estructuras de variedad que con la inclusión canónica resultan subvariedades, pero que no son equivalentes entre sí. Un ejemplo se tiene considerando $(\mathbb{R}, \psi)$ y $(\mathbb{R}, \varphi)$ subvariedades de $\mathbb{R}^2$ que tienen la imagen que muestra el dibujo

y $\qquad$ y

x $\qquad$ x

$\varphi(\mathbb{R})$ $\qquad$ $\psi(\mathbb{R})$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $\psi(0) = \varphi(0) = (0, 0)$. De modo que existe una única función $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, dashed, "\alpha"'] & \mathbb{R}^2 \\ & \mathbb{R} \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Dicha α no puede ser suave ya que ni siquiera es continua, pues por un lado la sucesión $(\psi(\frac{1}{n}))_n$ converge a cero, implicando que $(\alpha(\frac{1}{n}))_n = (\varphi^{-1}(\psi(\frac{1}{n})))_n$ converge a ∞ o $-\infty$, y por otro $\alpha(0) = 0$. De este modo $\psi(\mathbb{R}) = \varphi(\mathbb{R})$, pero las estructuras diferenciables inducidas por ψ y φ no son equivalentes.

Cuando no haya lugar a confusión diremos que $C \subseteq M$ es subvariedad de M refiriendonos a que $(C, i_C) \in \mathcal{C}$.

Veremos que en el caso general, manteniendo fija la topología para un subconjunto C de M, existe a lo más una estructura de variedad diferenciable para C con esta topología de tal forma que $(C, i_C) \in \mathcal{C}$. Más aún, si existe una estructura de variedad diferenciable para C con la topología relativa de tal manera que $(C, i_C) \in \mathcal{C}$, tan sólo dicho elemento en $\mathcal{C}$ satisface que su conjunto base es C (Proposición 2.6.3). Antes de mostrar esto plantearemos un problema más general.

Sean (N, ψ) una subvariedad de M y una función suave $\phi : N' \longrightarrow M$ de tal forma que $\phi(N') \subseteq \psi(N)$. Como ψ es inyectiva existe una única función $\phi_0 : N' \longrightarrow N$ que satisface que $\psi \circ \phi_0 = \phi$, es decir, ϕ se factoriza a través de ψ. Entenderemos en ese caso que N' *se factoriza a través de la subvariedad* (N, ψ). Por ello el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} N' \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, dashed, "\phi_0"'] & M \\ & N \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Como lo muestra el ejemplo dado previamente, donde $(\mathbb{R}, \varphi)$ y $(\mathbb{R}, \psi)$ son consideradas subvariedades de $\mathbb{R}^2$, es posible que la función ϕ_0 no sea ni siquiera continua. En el Teorema siguiente se muestra que el hecho de que ϕ_0 sea continua es una razón suficiente para asegurar que también es suave.

Teorema 2.6.2. *Sean $\phi : N' \longrightarrow M^d$ una función suave y (N^c, ψ) subvariedad de M, de tal forma que ϕ factoriza a través de (N, ψ). Sea $\phi_0 : N' \longrightarrow N$ la función para la cual $\psi \circ \phi_0 = \phi$. Entonces se satisfacen las siguiente afirmaciones:*

I. *Si ϕ_0 es continua entonces es suave.*

II. *Si (N, ψ) es un encaje entonces ϕ_0 es continua.*

Demostración. Mostremos el inciso I. Ya que ϕ_0 es continua, es suficiente mostrar que existe un conjunto de mapeos coordenados (U, φ) que cubren a N, de tal forma que $\varphi \circ \phi_0$ es suave en $\phi_0^{-1}(U)$, el cual es abierto. Sean $n \in N$ y (V, τ) sistema coordenado alrededor de $\psi(n)$, con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_d$. Ya que ψ es una inmersión, por el Corolario 2.5.4 sabemos que existen $i_1, \ldots, i_c \in \{1, \ldots, d\}$ y $U \subseteq \psi^{-1}(V)$ vecindad abierta de n, que satisface que $(U, \beta \circ \psi)$ es un sistema coordenado, donde $\beta = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_c})$ es suave. De tal manera,

$$(\beta \circ \psi) \circ \phi_0 = \beta \circ (\psi \circ \phi_0) = \beta \circ \phi$$

es suave, de lo cual se concluye el inciso I.

El inciso II se sigue del inciso anterior y del hecho de que ψ es un homeomorfismo sobre su imagen, ya que ϕ se factoriza a través de ψ y por lo tanto $\phi_0 = \psi^{-1} \circ \phi$, que es continua.

■

El resultado anterior nos ayudará a mostrar la siguiente Proposición.

***Proposición* 2.6.3.** Sean M una variedad y $C \subseteq M$. Denotemos i_C la inclusión de C en M.

I. Dada una topología para C, existe a lo más una estructura de variedad diferenciable para C con dicha topología de tal modo que (C, i_C) es una subvariedad de M.

II. Si existe una estructura de variedad diferenciable para C con la topología relativa de tal manera que $(C, i_C) \in \mathcal{C}$, tan sólo dicho elemento en $\mathcal{C}$ satisface que su conjunto base es C.

Demostración. Analicemos el inciso I. Sea τ topología de C. Supongamos que existe una estructura de variedad diferenciable para C con dicha topología de tal forma que resulta una subvariedad de M. Denotaremos a dicha subvariedad como (C_1, i_{C_1}). Supongamos que existe otra estructura de variedad diferenciable para C cuya topología es τ, la cual es denotada por (C_2, i_{C_2}), de modo que $(C_2, i_{C_2}) \in \mathcal{C}$. Observemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "i_{C_1}"] \arrow[dr, dashed, "\mathrm{id}_C"'] & M \\
& C_2 \arrow[u, "i_{C_2}"']
\end{tikzcd}$$

Como ambas estructuras tiene la misma topología, id_C es un homeomorfismo. Del Teorema 2.6.2 inciso I se sigue que id_C es un difeomorfismo, con lo cual se concluye que $(C_1, i_{C_1}) = (C_2, i_{C_2})$.

Consideremos el inciso II. Retomando la notación previa, si τ es la topología relativa inducida por M, consideremos (C_1, i_{C_1}) como antes. Supongamos que existe otra estructura de variedad diferenciable para C que la hace una subvariedad de M (no necesariamente con la topología relativa). Denotemos a esta como (C_0, i_{C_0}). Obtenemos con ello el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "i_{C_0}"] \arrow[dr, dashed, "\phi_0"'] & M \\ & C_1 \arrow[u, "i_{C_1}"'] \end{tikzcd}$$

donde ϕ_0 es la identidad en C. Ya que (C_1, i_{C_1}) es un encaje, del Teorema 2.6.2 inciso II se sigue que ϕ_0 es suave. Como es biyectiva y además resulta una inmersión (pues para todo $m \in C$, $d(i_{C_1})_m \circ d(\phi_0)_m = d(i_{C_0})_m$ es inyectiva), del Corolario A.5.10 se sigue que ϕ_0 es un difeomorfismo, por lo cual $(C_1, i_{C_1}) = (C_0, i_{C_0})$.

■

2.7. Teorema de la función implícita. Valores regulares

Por el momento sabemos que cualquier subconjunto abierto de una variedad M hereda una estructura de variedad diferenciable de M (ejemplo 1.1.7), resultando ser un encaje con la inclusión y tener la misma dimensión que M, obteniendo de hecho que sus espacios tangentes también se indentifican canónicamente mediante la diferencial de la inclusión. El Teorema 2.7.3 nos dará un criterio para determinar cuando un subconjunto cerrado de una variedad tiene una estructura de variedad diferenciable con la cual resulta un encaje de la variedad que la contiene. Como se verá, dicho subconjunto se obtiene a través de una función suave como la imagen inversa de un punto, el cual satisface ciertas condiciones.

El primer acercamiento a un resultado de este estilo se obtiene a través del Teorema de la función implícita. Su demostración, al igual que las otras de esta sección, es consecuencia del Teorema de la función inversa y la incluimos con el fin de establecer el razonamiento con el que se tratarán los resultados siguientes.

***Teorema* 2.7.1.** *Sea $W \subseteq \mathbb{R}^{c-d} \times \mathbb{R}^d$ abierto y $f : W \longrightarrow \mathbb{R}^d$ una función suave. Denotemos $(r_1, \ldots, r_{c-d}, s_1, \ldots, s_d)$ el sistema coordenado canónico de $\mathbb{R}^{c-d} \times \mathbb{R}^d$ y $s_i \circ f = f_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, d\}$.*
Si $(r_0, s_0) \in W$ satisface que $f(r_0, s_0) = \hat{0}$ y que la matriz de $d \times d$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial s_j}\right)_{ij} \tag{2.6}$$

es invertible, entonces existen $U \subseteq \mathbb{R}^{c-d}$ y $V \subseteq \mathbb{R}^d$ vecindades abiertas de r_0 y s_0 respectivamente, de tal modo que $U \times V \subseteq W$, y una función suave

$g : U \longrightarrow V$ *que satisface que para todo* $(r,s) \in U \times V$*,* $f(r,s) = 0$ *si y sólo si* $g(r) = s$*.*

Demostración. Veamos que $r_1, \ldots, r_{c-d}, f_1, \ldots, f_d$ forman un conjunto independiente de funciones en W.

Sean $a_1, \ldots, a_{c-d}, b_1, \ldots, b_d \in \mathbb{R}$ de tal forma que

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^{c-d} a_j \, dr_j + \sum_{i=1}^{d} b_i \, df_i \\
&= \sum_{j=1}^{c-d} a_j \, dr_j + \sum_{i=1}^{d} \Big(\sum_{j=1}^{c-d} \frac{\partial f_i}{\partial r_j} \, dr_j + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f_i}{\partial s_j} \, ds_j \Big) \\
&= \sum_{j=1}^{c-d} \Big(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f_i}{\partial r_j} \, dr_j + a_j \Big) dr_j + \sum_{j=1}^{d} \Big(\sum_{i=1}^{d} b_i \frac{\partial f_i}{\partial s_j} \Big) \, ds_j \, ,
\end{aligned}$$

es decir,

$$\sum_{j=1}^{d} \Big(\sum_{i=1}^{d} b_i \frac{\partial f_i}{\partial s_j} \Big) \, ds_j = - \sum_{j=1}^{c-d} \Big(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f_i}{\partial r_j} \, dr_j + a_j \Big) dr_j = 0 \, . \tag{2.7}$$

Así, para toda $j \in \{ 1, \ldots, d \}$,

$$\sum_{i=1}^{d} b_i \frac{\partial f_i}{\partial s_j} = 0 \, .$$

Como la matriz expresada en 2.6 es invertible y

$$\Big(\frac{\partial f_i}{\partial s_j} \Big)_{ij}^{t} (b_1, \ldots, b_d)^t = 0 \, ,$$

concluimos que $b_i = 0$, para todo $i \in \{ 1, \ldots, d \}$. Por la igualdad 2.7 concluimos que para todo $j \in \{ 1, \ldots, c-d \}$, $a_j = 0$. Denotando φ a la función $(r_1, \ldots, r_{c-d}, f_1, \ldots, f_d)$, por el Corolario 2.5.3 existe $\widetilde{W} \subseteq W$ vecindad abierta de (r_0, s_0) para la cual $(\widetilde{W}, \varphi)$ es un sistema coordenado.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $\widetilde{W} = U \times V$, donde $U \subseteq \mathbb{R}^{c-d}$ y $V \subseteq \mathbb{R}^d$ vecindades abiertas de r_0 y s_0, respectivamente.

Sean $i_U : U \longrightarrow \varphi(U \times V)$ la inclusión canónica $i_U(r) = (r, \hat{0})$ y $\pi_d : U \times V \longrightarrow V$ la proyección canónica de las últimas d coordenadas. Sea $g = \pi_d \circ \varphi^{-1} \circ i_U$.

Sea $(r,s) \in U \times V$. Supongamos que $f(r,s) = 0$, entonces $\varphi(r,s) = (r, \hat{0})$ y por lo tanto $g(r) = \pi_d \circ \varphi^{-1} \circ \varphi(r,s) = s$. Supongamos ahora que $g(r) = s$, de tal modo que $\varphi^{-1}(r,\hat{0}) = (r,s)$ que es equivalente a que $(r,\hat{0}) = \varphi(r,s) = (r, f(r,s))$, con lo cual concluimos que g es la función buscada.

$\blacksquare$

A continuación definiremos un concepto que nos será de utilidad en los resultados siguientes.

Definición 2.7.2. Sea $\psi : M \longrightarrow N$ una función suave. Decimos que $n \in N$ es un *valor regular de* ψ si todo elemento en su preimagen es un punto regular. Es decir, si dado $m \in \psi^{-1}(n)$, $d\psi_m$ es suprayectiva.

Por vacuidad todo elemento en $N \setminus \psi(M)$ es un valor regular.

Un resultado importante para variedades diferenciables es el Teorema de Sard que afirma que si $\psi : M \longrightarrow N$ es una función suave entonces el conjunto

$$\{\, n \in N \,:\, n \text{ no es un valor regular de } \psi \,\}$$

es de medida cero en N. Como consecuencia se tiene que el conjunto de valores regulares de ψ en N es denso. La demostración de dicho Teorema puede ser consultada en [G-P]. En el apartado de medida cero para variedades se incluye una versión débil del Teorema de Sard.

***Teorema* 2.7.3.** *Sea $\psi : M^d \longrightarrow N^c$ una función suave. Supongamos que $n \in N$ es un valor regular y consideremos $P = \psi^{-1}(n)$. Entonces P tiene un única estructura de variedad diferenciable para la cual (P, i_P) resulta ser una subvariedad de M (más áun, es un encaje) y se satisface que $dim\, P = dim\, M - dim\, N = d - c$*

Demostración. Veremos que en la estructura de variedad diferenciable, P tiene la topología relativa, siguiéndose la unicidad de la Proposión 2.6.3 inciso II.

Sea $p \in P$. Si $(V, \phi = (y_1, \ldots, y_c))$ es un sistema coordenado cúbico centrado en n entonces $y_1 \circ \psi, \ldots, y_c \circ \psi$ forma parte de un sistema coordenado alrededor de p (observación 2.5.6). Denotemos como $x_i = y_i \circ \psi$, donde $i \in \{\,1, \ldots, c\,\}$, y consideremos $(U_p, \varphi_p = (x_1, \ldots, x_d))$ dicho sistema coordenado. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\varphi_p(U_p)$ es un cubo, de modo que $P \cap U_p$ resulta la rebanada de U_p que satisface que

$$x_i = y_i(n) \quad i \in \{\,1, \ldots, c\,\}\,.$$

Si π_c denota la proyección canónica de $\mathbb{R}^d$ sobre las últimas $d-c$ coordenadas, tenemos que $\pi_c \circ \varphi|_{P \cap U_p}$ es un difeomorfismo sobre su imagen abierta en $\mathbb{R}^{d-c}$.

De esa forma, P con la topología relativa y con la estructura diferencial generada por la familia $\{\,(P \cap U_p,\, \pi_c \circ \varphi_p|_{U_p \cap P})\,\}_{p \in P}$ es una variedad diferenciable de dimensión $d - c$.

$\blacksquare$

En general, el estudio de conjuntos de ceros de funciones es de un amplio interés matemático. Por ejemplo, la geometría algebraica clásica estudia los ceros de conjuntos de polinomios. En la demostración anterior vimos que localmente la imagen inversa de un valor regular es una rebanada de un sistema coordenado, es decir, localmente es el conjunto de puntos cuyos valores funcionales estan restringidos a una constante.

El Teorema 2.7.3 nos dice que cuando tenemos una función suave $\psi : M \longrightarrow N$ y $n \in N$, el conjunto solución de la ecuación $\psi(x) = n$, que es justamente $\psi^{-1}(n)$, es una variedad. En general podemos preguntarnos cuando el conjunto de puntos que satisfacen una condición suave arbitraria resultan una subvariedad, es decir, dada una subvariedad (O, φ) de N, ¿cuándo el conjunto de puntos de M que satisfacen que $\psi(m) \in \varphi(O)$ recibe una estructura de variedad diferenciable que lo hace subvariedad de M? En el siguiente Teorema se verá una condición suficiente para que dada una función suave $\psi : M \longrightarrow N$ no sólo la imagen inversa de un punto en N, sino la imagen inversa de una subvariedad de N sea una subvariedad de M.

Teorema 2.7.4. *Sea $\psi : M^d \longrightarrow N^c$ una función suave y (O^k, φ) una subvariedad de N. Supongamos que para cualquier $m \in \psi^{-1}(\varphi(O))$ se satisface*

$$T_{\psi(m)}N = d\psi_m(T_m M) + d\varphi_n(T_n O)\,, \tag{2.8}$$

donde $n = \varphi^{-1}(\psi(m))$. Si $P \neq \emptyset$ entonces existe una estructura de variedad diferenciable para P de tal forma que (P, i_P) es una subvariedad de M y

$$dim\, M - dim\, P = dim\, N - dim\, O\,.$$

En el caso de que (O, φ) es un encaje en N, (P, i_P) también resulta un encaje y en ese caso la estructura de variedad diferenciable para P es la única que satisface que (P, i_P) es una subvariedad de M.

Demostración. Sea $n \in O$. Como φ es una inmersión existe una vecindad abierta de n, $W_n \subseteq O$ y (V, τ) un sistema coordenado cúbico centrado en $\varphi(n)$ con funciones coordenas $y_1, \ldots, y_c$ de tal forma que $\varphi(W_n)$ es una rebanada de (V, τ) (Corolario 2.4.4), descrita como

$$y_i = 0 \quad i \in \{\,1, \ldots, k\,\}\,.$$

Sea π_k la proyección canónica de las últimas $c - k$ coordenadas de $\mathbb{R}^c$, y $\psi^{-1}(V_n) = U_n$. Consideremos

$$\psi_{U_n} = \pi_k \circ \tau \circ \psi|_{U_n}\,,$$

de modo que ${\psi_{U_n}}^{-1}(\hat{0}) = \psi^{-1}(\varphi(W_n))$. Veamos que $\hat{0}$ es un valor regular de ψ_{U_n}. Si $p \in \psi^{-1}(\varphi(W_n))$, entonces

$$T_{\psi(p)}N = d\psi_p(T_pM) + d\varphi_{n_0}(T_{n_0}O)\,,$$

donde $n_0 = \psi^{-1}(\varphi(p))$. Como $\pi_k \circ \tau \circ \varphi \equiv \hat{0}$ y $\pi_k \circ \tau$ es una sumersión, se tiene que

$$\begin{aligned} d(\pi_k \circ \tau)_{\psi(p)}(T_{\psi(p)}N) &= d(\pi_k \circ \tau)_{\psi(p)}(d\psi_p(T_pM) + d\varphi_{n_0}(T_{n_0}O)) \\ &= d(\pi_k \circ \tau)_{\psi(p)}(d\psi_p(T_pM)) \\ &= d(\pi_k \circ \tau \circ \psi)_p(T_pM)\,, \end{aligned}$$

con lo que se obtiene que $\hat{0}$ es valor regular de ψ_{U_n}.

Por el Teorema 2.7.3, $\psi^{-1}(\varphi(W_n))$ recibe una única estructura de variedad diferenciable que la hace una subvariedad de M con la inclusión. De hecho, con dicha estructura $\psi^{-1}(\varphi(W_n))$ tiene la topología relativa. Con respecto a esto, notemos que dado $A \subseteq W_n$ abierto en O, $\psi^{-1}(\varphi(A))$ resulta abierto en $\psi^{-1}(\varphi(W_n))$. Para verificarlo denotemos $\varphi_A : A \longrightarrow \varphi(W_n)$ a la función definida como $\varphi_A(a) = \varphi(a)$. Ya que $(\varphi(W_n), i_{\varphi(W_n)})$ es un encaje en N y (A, φ) se factoriza a través de este, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_A"'] & N \\ & \varphi(W_n) \arrow[u, "i_{\varphi(W_n)}"'] \end{tikzcd}$$

se concluye que ψ_A es suave (Teorema 2.6.2). Más aún, por la conmutatividad del diagrama y el hecho de que φ es una inmersión, φ_A también lo es. Por el Teorema de la función inversa, dado que $\dim A = \dim \varphi(W_n)$, φ_A es un difeomorfismo local y por lo tanto $\varphi_A(A) = \varphi(A)$ es abierto en $\varphi(W_n)$. Como $\varphi(W_n)$ tiene la topología relativa, existe $L \subseteq N$ abierto que satisface que $\varphi(A) = L \cap \varphi(W_n)$, se sigue que $\psi^{-1}(\varphi(A)) = \psi^{-1}(\varphi(W_n)) \cap \psi^{-1}(L)$, que es un abierto en $\psi^{-1}(\varphi(W_n))$ con la topología relativa inducida por M.

Consideremos $\{\, W_{n_i} \,\}_{i\in\mathbb{N}}$ cubierta abierta de O, donde $n_i \in O$ y W_{n_i} satisface las condiciones anteriores. De esa forma

$$P = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \psi^{-1}(\varphi(W_{n_i}))\,.$$

Por el comentario previo sobre los abiertos de los $\psi^{-1}(\varphi(W_{n_i}))$, tenemos que para cualesquiera $k, j \in \mathbb{N}$, $\psi^{-1}(\varphi(W_{n_k}))$ y $\psi^{-1}(\varphi(W_{n_j}))$ se intersectan en respectivos abiertos ya que

$$\psi^{-1}(\varphi(W_{n_k})) \cap \psi^{-1}(\varphi(W_{n_j})) = \psi^{-1}(\varphi(W_{n_k} \cap W_{n_j}))\,.$$

De esa manera la unión de las topologías de la familia $\{\, \psi^{-1}(\varphi(W_{n_i})) \,\}_{i\in\mathbb{N}}$ forma una base para una topología de P que resulta Hausdorff. También es segundo numerable pues es unión numerable de topologías, cada una de ellas segundo numerable. Ya que $\psi^{-1}(\varphi(W_{n_i}))$ intersecta en un abierto a $\psi^{-1}(\varphi(W_{n_j}))$, si la intersección es distinta del vacío recibe una única estructura de variedad diferenciable con la topología relativa (Proposición 2.6.3 inciso II) y por lo tanto las estructuras de variedad diferenciable de cada $\psi^{-1}(\varphi(W_{n_i}))$ resultan compatibles, de modo que hay una única estructura de variedad diferenciable para P que contiene a la unión de las estructuras de las $\psi^{-1}(\varphi(W_{n_i}))$ y con dicha estructura (P, i_P) es una subvariedad de M.

Resta verificar que si (O, φ) es un encaje, (P, i_P) también lo es. Para ello basta observar que para todo $i \in \mathbb{N}$, $\psi^{-1}(\varphi(W_i))$ es un abierto de P con la topología relativa. Si (O, φ) es un encaje entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $L_i \subseteq N$ abierto tal que $\varphi(W_{n_i}) = \varphi(O) \cap L_i$, de modo que

$$\psi^{-1}(\varphi(W_i)) = \psi^{-1}(\varphi(O)) \cap \psi^{-1}(L_i) = P \cap \psi^{-1}(L_i)$$

es un abierto de P con la topología relativa, ya que ψ es continua.

■

Observemos que el Teorema anterior es una generalización del Teorema 2.7.3 ya que tomando $O = \{\, n \,\}$ y $\varphi = i_n$ (el mapeo inclusión), (O, i_n) es un encaje en N de dimensión cero y además satisface que para cualquier $m \in P$, $d\psi_m$ es suprayectiva si y sólo si

$$T_{\psi(m)}N = d\psi_m(T_m M) = d\psi_m(T_m M) + d\varphi_n(T_n O)\,.$$

Si como en las hipótesis del Teorema 2.7.4, $\psi : M^c \longrightarrow N^d$ es una función suave y (O^k, φ) es una subvariedad de N de tal forma que para cualquier $m \in \psi^{-1}(\varphi(O))$ se satisface la ecuación descrita en (2.8), diremos que ψ *es transversal a la subvariedad* (O, φ).

2.8. Campos vectoriales

En esta parte analizaremos una noción que resultará bastante importante en lo sucesivo. Dicho concepto es el de *campo vectorial*. Esta parte se concentra en el análisis de sus propiedades básicas.

Definición 2.8.1. (Campos vectoriales) Sea M una variedad. Decimos que *X es un campo vectorial en un abierto U de M* si es un levantamiento de la inclusión de U en M, a través de la proyección canónica $\pi : M \longrightarrow TM$, por lo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & TM \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[ur, dashed, "X"] \arrow[r, "i_U"'] & M \end{tikzcd}$$

es decir, $i_U = \pi \circ X$. Adicionalmente diremos que es *suave o de clase* C^∞ si $X \in C^\infty(U, TM)$.

La definición anterior nos dice que $X : U \longrightarrow TM$ es un campo vectorial en U si y sólo si $X(m)$ (que usualmente escribiremos como X_m) es un elemento de T_mM.

Denotaremos el conjunto de campos vectoriales suaves en el abierto U de M como $\mathfrak{X}(U)$. Observemos que las estructuras de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de los espacios tangentes de elementos en M inducen canónicamente una estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial en $\mathfrak{X}(U)$ y de $C^\infty(U)$-módulo. A saber, si $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in C^\infty(U)$, para toda $m \in U$

$$\begin{aligned}(X+Y)_m &= X_m + Y_m\\ (\lambda X)_m &= \lambda X_m\\ (fX)_m &= f(m)X_m\end{aligned}$$

Dada una función $f \in C^\infty(U)$ y X un campo vectorial en U, definimos la función $X(f)$ de U en $\mathbb{R}$ como aquella que aplica $m \mapsto X_m(f)$.

A continuación veremos condiciones equivalentes al hecho de que un campo vectorial sea suave.

***Proposición* 2.8.2.** Sea X un campo vectorial en una variedad M. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

I. $X \in \mathfrak{X}(M)$.

II. Sea $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_d))$ un sistema coordenado en M. Si $a_1, \ldots, a_d$ es un conjunto de funciones definidas en U que satisfacen que

$$X|_V = \sum_{i=1}^{d} a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

entonces $a_i \in C^\infty(U)$, para toda $i \in \{1 \ldots, d\}$.

III. Dados V subconjunto abierto de M y $f \in C^\infty(V)$, $X(f) \in C^\infty(V)$.

Demostración. Dado un sistema coordenado (U, φ) con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_d$, consideremos el mapeo coordenado $(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi})$ en TM inducido por (U, φ) (seccion 2.3). De manera que para toda $m \in U$

$$\widetilde{\varphi} \circ X(m) = (\varphi(m), X_m(x_1), \ldots, X_m(x_d)) \tag{2.9}$$

Veamos que el inciso I implica II. Considerando el sistema coordenado (V, φ), con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_d$, se tiene que si $m \in U$ entonces $a_i(m) =$

$d(x_i)_m(X_m) = X_m(x_i)$. Como X es suave, $\widetilde{\varphi} \circ X$ también lo es. Esto último ocurre si y sólo si cada función coordenada de la igualdad (2.9) es suave, concluyéndose con ello que $a_i \in C^\infty(V)$.

Mostremos que el inciso II implica III. Sea $f \in C^\infty(V)$. Para mostrar que $X(f)$ es suave en V, basta ver que para cada elemento de V existe una vecindad abierta de dicho elemento contenida en V y en la cual $X(f)$ es suave. Sean $m \in V$ y (U, φ) sistema coordenado alrededor de m con funciones coordenadas $x_1, \dots, x_d$ de tal forma que $U \subseteq V$. Sean $a_1, \dots, a_d \in C^\infty(U)$ tales que

$$X|_V = \sum_{i=1}^{d} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

De manera que para toda $m' \in U$,

$$X(f)(m') = \sum_{i=1}^{d} a_i(m') \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{m'} (f) = \sum_{i=1}^{d} a_i(m') \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(m')),$$

resultando así que $X(f)$ es suave en U.

Por último veamos que el inciso III implica II. Sabemos que X es suave si y sólo si dado (W, τ) un sistema coordenado en M, $\widetilde{\tau} \circ X$ es suave. Considerando el sistema coordenado (U, φ), con funciones coordenadas $x_1, \dots, x_d$, ya que $X(x_i) \in C^\infty(U)$ para todo $i\{1, \dots, d\}$, de la igualdad (2.9) se sigue el resultado.

■

La siguiente definición es de suma importancia. Algunos comentarios al respecto se ofrecen después de la Proposición 2.8.4 ya que ahí se enumeran las propiedades básicas de la misma.

Definición 2.8.3. (Corchetes de Lie en campos vectoriales) Sean X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Definimos la función $[X, Y]$, llamado *el corchete de Lie de* X *y* Y, como

$$[X, Y]_m(f) = X_m(Y(f)) - Y_m(X(f)).$$

***Proposición* 2.8.4.** Sean X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

I. $[X, Y]$ es un campo vectorial suave en M.

II. $[X, Y] = -[Y, X]$ (anti-conmutatividad).

III. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidad de Jacobi).

IV. Para cualesquiera $f, g \in C^\infty(M)$, $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X(g))Y - g(Y(f))X$.

Demostración. Sean X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Verifiquemos el inciso I. De la definición se obtiene que para todo $m \in M$, $[X,Y]_m$ es una función $\mathbb{R}$-lineal, por lo que basta demostrar que es una derivación para concluir que $[X,Y]_m \in T_mM$ y con ello que es un campo vectorial. Sean f, $g \in C^\infty_m(M)$. De modo que para todo $p \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$,

$$X(fg)(p) = X_p(fg) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f) = (fX(g) + gX(f))(p)\,,$$

por lo cual $X(fg) = fX(g) + gX(f)$. Análogamente se tiene que $Y(fg) = fY(g) + gY(f)$. De ahí que

$$\begin{aligned}
X_m(Y(fg)) &= X_m(fY(g) + gY(f)) = X_m(fY(g)) + X_m(gY(f)) \\
&= f(m)X_m(Y(g)) + g(m)X_m(Y(f)) \\
&+ X_m(f)Y_m(g) + X_m(g)Y_m(f)\,.
\end{aligned}$$

Análogamente se concluye que

$$\begin{aligned}
Y_m(X(fg)) &= f(m)Y_m(X(g)) + g(m)Y_m(X(f)) \\
&+ Y_m(f)X_m(g) + Y_m(g)X_m(f)\,.
\end{aligned}$$

De esa forma se tiene que

$$\begin{aligned}
[X,Y]_m(fg) &= X_m(Y(fg)) - Y_m(X(fg)) \\
&= f(m)X_m(Y(g)) + g(m)X_m(Y(f)) \\
&- (f(m)Y_m(X(g)) + g(m)Y_m(X(f))) \\
&= f(m)(X_m(Y(g)) - Y_m(X(g))) \\
&+ g(m)(X_m(Y(f)) - Y_m(X(f))) \\
&= f(m)[X,Y]_m(g) + g(m)[X,Y]_(f)\,,
\end{aligned}$$

obteniendo así que $[X,Y]_m \in T_mM$, para toda $m \in M$.

Por la Proposición 2.8.2, basta mostrar que para cualesquiera $V \subseteq M$ abierto y $f \in C^\infty(V)$, $[X,Y](f) \in C^\infty(V)$ para concluir que $[X,Y]$ es suave.

Como $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f_1 = Y(f)$, $f_2 = X(f) \in C^\infty(V)$, y por consecuencia $X(f_1)$, $X(f_2) \in C^\infty(V)$. Ya que $[X,Y](f) = X(f_1) - X(f_2)$, se sigue que es suave en V.

Veamos los incisos II y III. Sean $m \in M$ y $f \in C^\infty_m(M)$. Por definición

$$\begin{aligned}
[X,Y]_m(f) &= X_m(Y(f)) - Y_m(X(f)) \\
&= -(Y_m(X(f)) - X_m(Y(f))) = -[Y,X]_m(f)\,.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}[[X,Y],Z]_m(f) &= [X,Y]_m(Z(f)) - Z_m([X,Y](f)) \\ &= X_m(Y(Z(f))) - Y_m(X(Z(f))) \\ &- Z_m(X(Y(f))) + Z_m(Y(X(f)))\,.\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}[[Y,Z],X]_m(f) &= Y_m(Z(X(f))) - Z_m(Y(X(f))) \\ &- X_m(Y(Z(f))) + X_m(Z(Y(f)))\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[[Z,X],Y]_m(f) &= Z_m(X(Y(f))) - X_m(Z(Y(f))) \\ &- Y_m(Z(X(f))) + Y_m(X(Z(f)))\,.\end{aligned}$$

De esa forma, considerando cada una de las igualdades anteriores se obtiene

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0\,.$$

Finalmente verifiquemos el inciso IV. Sean $f,\, g \in C^\infty M$. Sean $m \in M$ y $h \in C^\infty_m(M)$, entonces

$$\begin{aligned}[fX,gY]_m(h) &= f(m)X_m(gY(h)) - g(m)Y_m(fX(h)) \\ &= f(m)(X_m(g)Y_m(h) + g(m)X_m(Y(h))) \\ &- g(m)(Y_m(f)X_m(h) + f(m)Y_m(X(h))) \\ &= f(m)g(m)[X,Y]_m(h) + f(m)X_m(g)Y_m(h) - g(m)Y_m(f)X_m(h)\,.\end{aligned}$$

Como lo anterior se satisface para cualesquiera $m \in M$ y thi $h \in C^\infty_m(M)$, $[fX,gY] = fg[X,Y] + f(X(g))Y - g(Y(f))X$, que es lo que deseabamos.

■

Observación 2.8.5. Dado el inciso I, podemos escribir el corchete como una operación en $\mathfrak{X}(M)$, es decir $[\,,\,] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$. Gracias a la definición del corchete y a que los vectores tangentes son lineales se concluye que el corchete de Lie es una operación bilineal, al considerar la estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial en $\mathfrak{X}(M)$. Por otro lado, la propiedad IV indica que esta operación en general no respeta la estructura de $C^\infty(M)$-módulo.

Cuando un espacio vectorial tiene una operación bilineal que satisface las condiciones II y III se le llama *álgebra de Lie*, concepto que retomaremos en el capítulo de Grupos de Lie.

Ejemplo 2.8.6. Sean M^d y N^c variedades diferenciables. Para todo $(m,n) \in M \times N$ denotemos como $\lambda_{m,n}$ al isomorfismo canónico $\big(d(\pi_1)_{(m,n)}, d(\pi_2)_{(m,n)}\big)$ visto en el ejemplo 2.2.3. Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Consideremos a $\widetilde{X}, \widetilde{Y} : M \times N \longrightarrow T(M \times N)$, campos vectoriales definidos como

$$\begin{aligned}\widetilde{X}_{(m,n)} &= \lambda_{m,n}^{-1}(X_m, 0)\\ \widetilde{Y}_{(m,n)} &= \lambda_{m,n}^{-1}(0, Y_n)\,.\end{aligned}$$

Ya que para cualesquiera $\big(U, \varphi = (x_1, \dots, x_d)\big)$ y $\big(V, \tau = (y_1, \dots, y_c)\big)$ sistemas coordenados de M y N respectivamente, dados $m \in U$ y $n \in V$

$$\begin{aligned}\widetilde{X}_{(m,n)} &= \sum_{j=1}^{d} \big(X(x_j) \circ \pi_1\big)(m,n) \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_{(m,n)}\\ \widetilde{Y}_{(m,n)} &= \sum_{k=1}^{c} \big(Y(y_k) \circ \pi_2\big)(m,n) \frac{\partial}{\partial y_k}\bigg|_{(m,n)}\end{aligned}$$

se concluye que $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(M \times N)$. Más aún, $\big[\widetilde{X}, \widetilde{Y}\big] \equiv 0$ ya que para todo $f \in C^\infty_{(m,n)}(M \times N)$

$$\begin{aligned}\widetilde{X}_{(m,n)}(\widetilde{Y}(f)) &= \sum_{k=1}^{c}\sum_{j=1}^{d} X_m(x_j) Y_n(y_k) \,\frac{\partial^2\big(f \circ (\varphi^{-1} \times \tau^{-1})\big)}{\partial r_j \; \partial r_{d+k}}\big(\varphi(m), \tau(n)\big)\\ \widetilde{Y}_{(m,n)}(\widetilde{X}(f)) &= \sum_{k=1}^{c}\sum_{j=1}^{d} X_m(x_j) Y_n(y_k) \,\frac{\partial^2\big(f \circ (\varphi^{-1} \times \tau^{-1})\big)}{\partial r_{d+k} \; \partial r_j}\big(\varphi(m), \tau(n)\big)\end{aligned}$$

siguiéndose que $\widetilde{X}_{(m,n)}(\widetilde{Y}(f)) = \widetilde{Y}_{(m,n)}(\widetilde{X}(f))$ del hecho de que las derivadas parciales conmutan.

Definición 2.8.7. Diremos que una curva $\sigma : [a,b] \longrightarrow M$ es una *curva suave en M* si existe $\epsilon > 0$ y una extensión suave de σ a $(a-\epsilon, b+\epsilon)$. La llamaremos *suave a trozos* si existe una sucesión finita de elementos en $[a,b]$ de la forma $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$, para los cuales $\sigma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ es suave.

Obsérvese que una curva suave a trozos es continua ya que todo elemento en el intervalo de definición termina siendo elemento del dominio abierto de una curva suave en el sentido usual.

Además, el vector tangente de una curva suave $\sigma : [a,b] \longrightarrow M$

$$\dot{\sigma}(t_0) = d\sigma_{t_0}\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0}\right) \in T_{\sigma(t_0)}M$$

esta bien definido ya que no depende de la extensión de la curva.

Definición 2.8.8. (Curva integral) Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Diremos que una curva suave σ es una *curva integral de* X, si para todo t en su dominio

$$\dot{\sigma}(t) = X_{\sigma(t)}\,.$$

Dado un campo vectorial suave X en M, es válido preguntarnos si dado $m_0 \in M$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, existirá una curva suave σ definida en t_0 que sea curva integral de X y que además pase por m_0 en el tiempo t_0. Más aún, de existir, ¿dichas condiciones iniciales la harán única?

Supongamos que dicha curva existe y denotémosla como σ, de tal modo que $\sigma(t_0) = m_0$ y

$$d\sigma_t\left(\frac{d}{dr}\Big|_t\right) = \dot{\sigma}(t) = X_{\sigma(t)}$$

para todo t en el dominio de σ.

Consideremos $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_d))$ un sistema coordenado alrededor de m_0. Por ello, para todo $t \in \sigma^{-1}(U)$,

$$\dot{\sigma}(t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{d(x_i \circ \sigma)}{dr}(t) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\sigma(t)}$$

Por otro lado

$$X|_U = \sum_{i=1}^{d} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

donde $f_i \in C^\infty(U)$ para todo $i \in \{1, \ldots, d\}$, de manera que tenemos la siguiente igualdad

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{d(x_i \circ \sigma)}{dr}(t) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\sigma(t)} = \sum_{i=1}^{d} f_i(\sigma(t)) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\sigma(t)}$$

De lo cual se sigue que

$$\frac{d(x_i \circ \sigma)}{dr}(t) = f_i \circ \sigma(t)$$

para cualquier $i \in \{1, \ldots, d\}$. Denotando $\sigma_i = x_i \circ \sigma$, las igualdades anteriores quedan como

$$\frac{d\sigma_i}{dr}(t) = f_i \circ \varphi^{-1}(\sigma_1(t), \ldots, \sigma_d(t)) \tag{2.10}$$

para cualquier $i \in \{1, \ldots, d\}$. Por lo anterior podemos decir que σ es una curva integral de X si y sólo si para cualquier sistema coordenado $(U, \varphi =$

$(x_1, \ldots, x_d))$, el conjunto de funciones $\{ x_i \circ \sigma \}_{i=1}^{d}$ son una solución al sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden expresado en (2.10). En [Hurewicz] se encuentra la prueba detallada de los Teoremas de existencia y unicidad de las soluciones para dicho tipo de ecuaciones, que serán interpretados en términos curvas integrales de campos vectoriales suaves en el siguiente Teorema.

***Teorema* 2.8.9.** *Sea X un campo suave en una variedad diferenciable M. Para cada $m \in M$ existen $a_m, b_m \in \mathbb{R} \cup \{ \pm\infty \}$ y una curva suave*

$$\sigma_m : (a_m, b_m) \longrightarrow M$$

que satisface las siguiente condiciones:

I. $0 \in (a_m, b_m)$ *y* $\sigma_m(0) = m$.

II. σ_m *es una curva integral de* X.

III. *Si* $\gamma : (c, d) \longrightarrow M$ *es una curva suave que satisface las condiciones* I *y* II *entonces* $(c, d) \subseteq (a_m, b_m)$ *y* $\gamma = \sigma_m|_{(c,d)}$.

Para cada $t \in \mathbb{R}$, *definimos* X_t *con dominio*

$$\mathcal{D}_t = \{ m \in M \, : \, t \in (a_m, b_m) \} \, ,$$

para la cual

$$X_t(m) = \sigma_m(t)$$

IV. *Para cada* $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_t$ *es un subconjunto abierto de* M *y*

$$\bigcup_{t>0} \mathcal{D}_t = M$$

V. $X_t : \mathcal{D}_t \longrightarrow \mathcal{D}_{-t}$ *es un difeomorfismo con inversa* X_{-t}.

VI. *Dado* $m \in M$ *existe una vecindad abierta de* m *y* $\varepsilon_m > 0$ *de tal forma que la función*

$$\begin{aligned} V \times (-\varepsilon_m, \varepsilon_m) &\longrightarrow M \\ (m', t) &\longmapsto X_t(m') = \sigma_{m'}(t) \end{aligned} \tag{2.11}$$

es suave.

VII. *Si* $t, s \in \mathbb{R}$, *entonces el dominio de* $X_t \circ X_s$ *esta contenido en* $\mathcal{D}_{s+t}$ *(en el caso en el que* s *y* t *tengan el mismo signo entonces dichos conjuntos coinciden). Además, en el dominio de* $X_t \circ X_s$,

$$X_t \circ X_s = X_{s+t} \, .$$

Demostración. Mostremos primero los incisos I, II y III. Sea $m \in M$. Sabemos que existe $\sigma : (a,b) \longrightarrow M$ curva integral de X que satisface que $0 \in (a,b)$ y $\sigma(0) = m$ (Teorema 4 de [Hurewicz], página 28). Notemos que si $\sigma_1 : (a_1, b_1) \longrightarrow M$, $\sigma_2 : (a_2, b_2) \longrightarrow M$ son curvas integrales de X que satisfacen que $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = m$, entonces $0 \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ y por lo tanto dicha intersección es un conjunto conexo.

Consideremos $A = \{ t \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) : \sigma_1(t) = \sigma_2(t) \}$, de modo que $0 \in A$ y por continuidad es cerrado. Veamos que también es abierto, y con ello concluiremos que $A = (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$. Gracias a los Teoremas 3 y 4 de [Hurewicz] (página 28), para todo $t_0 \in A$ existe una vecindad abierta de t_0 en la que hay una única curva integral que pasa por $\sigma_1(t_0)$, es decir, existe una vecindad abierta de t_0 contenida en $(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ en la que σ_1 y σ_2 coinciden, de modo que A es abierto.

Denotemos como $\mathfrak{L}_m$ a la unión de intervalos en $\mathbb{R}$ que son dominios de curvas integrales de X que pasan por m en 0. Como 0 pertenece a cada uno de esos intervalos, $\mathfrak{L}_m$ resulta un abierto conexo, es decir, existen $a_m, b_m \in \mathbb{R} \cup \{ -\infty, \infty \}$, de tal manera que $\mathfrak{L}_m = (a_m, b_m)$.

Sea σ_m la curva definida en $\mathfrak{L}_m$ como

$$\sigma_m(t) = \sigma(t) \,,$$

donde σ es una curva integral de X que pasa por m en 0 y para la cual $t \in \operatorname{dom} \sigma$. Por la construcción de $\mathfrak{L}_m$ y el argumento previo, la curva σ_m esta bien definida y satisface la condición III. Además es suave y resulta ser una curva integral de X que pasa por m en 0, ya que localmente esta definida mediante curvas integrales con esa propiedad.

Del Teorema 4 de [Hurewicz] se sigue que $\bigcup_{t>0} \mathcal{D}_t = M$. En el inciso VI, la existencia de $\varepsilon > 0$ y la vecindad abierta alrededor de m en M, se sigue del Teorema 7 de [Hurewicz] (página 29). La suavidad del mapeo 2.11 se sigue del Teorema 9 de [Hurewicz] (página 29).

Mostremos el resultado enunciado en el inciso VII. Por definición

$$\operatorname{dom} X_s \circ X_t = \{ m \in M \,:\, t \in (a_m, b_m) \quad \text{y } s \in (a_{\sigma_m(t)},\, b_{\sigma_m(t)}) \} \,.$$

Afirmamos que

$$(a_{\sigma_m(t)}, b_{\sigma_m(t)}) = (a_m - t,\, b_m - t) \,.$$

Para verificarlo consideremos $\sigma : (a_m - t,\, b_m - t) \longrightarrow M$ curva que aplica $r \mapsto \sigma_m(r + t)$. Notemos que σ es suave y

$$\dot{\sigma}(r) = \dot{\sigma}_m(r + t) = X(\sigma_m(r + t)) = X(\sigma(r)) \,, \tag{2.12}$$

de modo que σ es una curva integral que satisface que $\sigma(0) = \sigma_m(t)$. Por el inciso III se tiene que

$$(a_m - t,\, b_m - t) \subseteq (a_{\sigma_m(t)},\, b_{\sigma_m(t)}) \text{ y } \quad \sigma_{\sigma_m(t)}|_{(a_m - t,\, b_m - t)} = \sigma\,. \tag{2.13}$$

Análogamente consideremos $\sigma_0 : (a_{\sigma_m(t)} + t,\, b_{\sigma_m(t)} + t) \longrightarrow M$ curva que aplica $r \mapsto \sigma_{\sigma_m(t)}(r - t)$. Como $-t \in (a_m - t,\, b_m - t) \subseteq (a_{\sigma_m(t)},\, b_{\sigma_m(t)})$, entonces $0 \in (a_{\sigma_m(t)} + t,\, b_{\sigma_m(t)} + t)$, de modo que

$$\sigma_0(0) = \sigma_{\sigma_m(t)}(-t) = \sigma(-t) = \sigma_m(0) = m\,.$$

Como en 2.12 se concluye que σ_0 es una curva integral de X que pasa por m en 0, se obtiene que $(a_{\sigma_m(t)} + t,\, b_{\sigma_m(t)} + t) \subseteq (a_m, b_m)$. De ahí, $(a_{\sigma_m(t)}, b_{\sigma_m(t)}) = (a_m - t,\, b_m - t)$ y de la igualdad 2.13 que para todo $r \in (a_{\sigma_m(t)}, b_{\sigma_m(t)})$, $\sigma_{\sigma_m(t)}(r) = \sigma(t + r)$.

De esa manera, $m \in \operatorname{dom}(X_s \circ X_t)$ si y sólo si $t,\, s + t \in (a_m, b_m)$, lo cual implica que $m \in \mathcal{D}_{s+t}$. De tal forma que $\operatorname{dom}(X_s \circ X_t) \subseteq \mathcal{D}_{s+t}$. Más aún,

$$\begin{aligned} X_s \circ X_t(m) &= X_s(\sigma_m(t)) = \sigma_{\sigma_m(t)}(s) \\ &= \sigma_m(s + t) = X_{s+t}(m) \end{aligned}\,.$$

Supongamos que s y t tienen el mismo signo. Si $m \in \mathcal{D}_{s+t}$, por definición $s + t \in (a_m, b_m)$. Si $0 \leqslant s, t$, entonces $0 \leqslant t \leqslant s + t$. Si $s, t \leqslant 0$, entonces $s + t \leqslant t \leqslant 0$, concluyéndose en ambos casos que $t \in (a_m, b_m)$. De esa forma se tiene que $t,\, s + t \in (a_m, b_m)$, que es equivalente a que $m \in \operatorname{dom}(X_s \circ X_t)$. De esa forma se tiene que $\operatorname{dom}(X_s \circ X_t) = \mathcal{D}_{s+t}$.

Veamos ahora que $\mathcal{D}_{t_0}$ es abierto para todo $t_0 \in \mathbb{R}$. Si $\mathcal{D}_{t_0} = \emptyset$ entonces resulta abierto. Supongamos que $\mathcal{D}_{t_0} \neq \emptyset$. Sea $m \in \mathcal{D}_{t_0}$, que por definición significa que $t_0 \in (a_m, b_m)$. Supongamos que $t_0 \geqslant 0$. Aseguramos que existe $\varepsilon > 0$ y $W \subseteq M$ abierto para el cual $\sigma_m([0, t_0]) \subseteq W$ y

$$\begin{aligned} W \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow M \\ (m', t) &\longmapsto X_t(m') = \sigma_{m'}(t) \end{aligned} \tag{2.14}$$

esta definida y es suave. Lo anterior se concluye del hecho de que $\sigma_m[0, t_0]$ es compacto ya que para toda $m' \in \sigma_m[0, t_0]$ existen $W_{m'} \subseteq M$ vecindad abierta de m' y $\varepsilon_{m'} > 0$ para los cuales la función definida en 2.14 es suave, de modo que $\{\, W_{m'} \,\}$ forma una cubierta abierta de $\sigma_m([0, t_0])$. Considerando la subcubierta finita $W_{m_1}, \ldots, W_{m_n}$, $W = \bigcup_{i=1}^n W_{m_i}$ y $\varepsilon = \min\{\, \varepsilon_{m_1}, \ldots, \varepsilon_{m_n} \,\}$ satisfacen las condiciones.

Ahora construiremos una vecindad abierta de m que se quede contenida en $\mathcal{D}_{t_0}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ que satisface que $\zeta = \frac{t_0}{n} < \varepsilon$. Por recursión definamos la siguiente familia de funciones y subconjuntos de M

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = X_\zeta|_W, \qquad W_1 = \alpha_1^{-1}(W)\,,\\
&\alpha_i = X_\zeta|_{W_{i-1}}, \quad W_i = \alpha_i^{-1}(W_{i-1}) \quad \text{si } 2 \leqslant i \leqslant n\,.
\end{aligned}$$

Notemos que satisfacen las siguientes condiciones:

Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, W_i *es una vecindad abierta de* m, α_i *es suave y* $W_i \subseteq W_{i-1}$. Procederemos por inducción para verificar dichas propiedades. Por un lado $W_1 = \alpha_1^{-1}(W) = W \cap X_\zeta^{-1}(W)$, de modo que W_1 es abierto (pues $\alpha_1 = X_\zeta|_W$ es suave) y esta contenido en W. Además $m \in W$ y thi $X_\zeta(W)(m) = \sigma_m(\zeta) \in W$. Sea $2 \leqslant l < k \leqslant n$. Supongamos que W_l es vecindad abierta de m contenida en W_{l-1}, que α_l es suave y que

$$X_\zeta^{-1}(W_l) = \bigcap_{j=1}^{l} (X_\zeta^j)^{-1}(W)\,,$$

donde X_ζ^j denota la composición de X_ζ j veces. Como $W_{k-1} \subseteq W$, α_k es suave. Además $W_k = \alpha_k^{-1}(W_{k-1}) = W_{k-1} \cap X_\zeta^{-1}(W_{k-1})$ es un subconjunto abierto de W_{k-1}, por lo que nos resta ver que es una vecindad de m. Para ello basta mostrar que $m \in X_\zeta^{-1}(W_{k-1})$, que se obtiene del hecho de que

$$\begin{aligned}
X_\zeta^{-1}(W_k) &= X_\zeta^{-1}(W_{k-1} \cap X_\zeta^{-1}(W_{k-1}))\\
&= \Big(\bigcap_{j=1}^{k-1} (X_\zeta^j)^{-1}(W)\Big) \bigcap X_\zeta^{-1}\Big(\bigcap_{j=1}^{k-1} (X_\zeta^j)^{-1}(W)\Big)\\
&= \Big(\bigcap_{j=1}^{k-1} (X_\zeta^j)^{-1}(W)\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{j=2}^{k} (X_\zeta^j)^{-1}(W)\Big)\\
&= \bigcap_{j=1}^{k} (X_\zeta^j)^{-1}(W)\,.
\end{aligned}$$

Por el inciso VII, $X_\zeta^j(m) = X_{j\zeta}(m) = \sigma_m(j\zeta) \in W$, para $j \in \{1, \dots, k\}$ ya que $k \leqslant n$.

Dado que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha_i(W_i) = \alpha_i(\alpha_i^{-1}(W_{i-1})) \subseteq W_{i-1}$, considerando

$$\begin{aligned}
h &= (\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \dots \circ \alpha_n)|_{W_n}\\
&= X_\zeta\text{_}W_1 \circ \dots \circ X_\zeta|_{W_n}\\
&= X_{n\zeta}|_{W_n} = X_{t_0}|_{W_n}\,,
\end{aligned}$$

se tiene que $h = X_{t_0}|_{W_n}$ es suave (por ser composición de suaves) y $h(W_n) \subseteq \alpha_1(W_1) = \alpha_1(\alpha_1^{-1}(W)) \subseteq W$, es decir $X_{t_0}(W_n) \subseteq W$. Por ello, $m \in W_n \subseteq \mathcal{D}_{t_0}$ y $X_{t_0}|_{W_n}$ es suave. Siguiendo un proceso análogo se obtienen que si $t_0 < 0$, para todo elemento de $\mathcal{D}_{t_0}$ existe una vecindad abierta totalmente contenida en dicho conjunto y en la cual X_{t_0} es suave.

Nos resta probar el inciso v. Notemos que $\mathcal{D}_0 = M$ y $X_0 = \mathrm{id}_M$ es un difeomorfismo. Al mostrar que para todo $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_t$ es abierto se obtuvo que para cualquier elemento de $\mathcal{D}_t$ existe una vecindad abierta en la que X_t es suave, de lo que se sigue que X_t es suave en $\mathcal{D}_t$.

Veamos que $X_t(\mathcal{D}_t) \subseteq \mathcal{D}_{-t}$. Para verificarlo basta recordar que para todo $m \in \mathcal{D}_t$, $-t \in (a_m - t, b_m - t) = (a_{\sigma_m(t)}, b_{\sigma_m(t)})$. De ahí se sigue que $X_t(m) = \sigma_m(t) \in \mathcal{D}_{-t}$. De esa forma la composición $X_{-t} \circ X_t : \mathcal{D}_t \longrightarrow \mathcal{D}_t$ esta bien definida y además, por el inciso VII, $X_{-t} \circ X_t(m) = X_0(m) = m$. Análogamente se tiene que $X_t \circ X_{-t} = \mathrm{id}_{\mathcal{D}_{-t}}$, de manera que $X_t : \mathcal{D}_t \longrightarrow \mathcal{D}_{-t}$ es un difeomorfismo con inversa X_{-t}.

■

Definición 2.8.10. Un campo vectorial suave X en M es *completo* si $\mathcal{D}_t = M$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (es decir, dada $m \in M$, σ_m tiene dominio $(-\infty, \infty)$). En ese caso el conjunto de transformaciones $\{ X_t \}$ forma un grupo con la composición (véase la definición 4.1.1), el cual es parametrizado por $\mathbb{R}$. Dicho grupo recibe el nombre de *grupo uniparamétrico de* X.

Si X no es completo, el conjunto de transformaciones $\{ X_t \}$ no forma un grupo con la composición en el sentido anterior, ya que el dominio de la composición de sus elementos depende de la elección de los correspondientes índices en $\mathbb{R}$ que los parametrizan. En ese caso nos referiremos a dicho conjunto como *el grupo local uniparamétrico de* X.

Observación 2.8.11. Si X es completo entonces la función

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \{ X_t \}_{t \in \mathbb{R}} \\ s &\longmapsto X_s \end{aligned}$$

es un morfismo de grupos, por el inciso VII del Teorema anterior.

En el caso de que una variedad sea compacta, cualquier campo vectorial es completo. Para verificarlo retomemos la notación del Teorema anterior y pensemos que M es una variedad compacta. Supongamos que existe $m \in M$ para el cual $(a_m, b_m) \neq (-\infty, \infty)$. Veamos lo que ocurre si $b_m < \infty$. Dados $0 < s < t$, $\mathcal{D}_t \subseteq \mathcal{D}_s$, por la conexidad de los intervalos en los que estan definidos las curvas integrales descritas. Gracias a la compacidad y al inciso IV, existe $t_0 > 0$ para el cual $\mathcal{D}_{t_0} = M$, es decir que para cualquier $m \in M$, $t_0 \in (a_m, b_m)$. Ya que para toda $s \in (a_m, b_m)$, si $\sigma_m(s) = m_s$, el dominio de la curva σ_{m_s} es $(a_m - s, b_m - s)$ y su regla de correspondencia $t \mapsto \sigma_m(t + s)$, basta elegir $s = b_m - \frac{t_0}{2}$ para contradecir el hecho de que t_0 esta en el dominio de la curva integral σ_{m_s}. En el caso de que $-\infty < a_m$, basta notar que por el Teorema anterior (en específico, la existencia de las curvas integrales con dominio en una vecindad del cero), se asegura que

$$\bigcup_{t<0} \mathcal{D}_t = M\,,$$

y ya que dados $s < t < 0$, $\mathcal{D}_s \subseteq \mathcal{D}_t$ por la conexidad de los intervalos en los que estan definidos las curvas integrales descritas, es posible encontrar $t_0 < 0$ que satisface que $\mathcal{D}_{t_0} = M$. Eligiendo $s = a_m - \frac{t_0}{2}$, nuevamente se contradice el hecho de que t_0 este en el dominio de la curva integral σ_{m_s}.

Un ejemplo de un campo vectorial que no es completo se obtiene al considerar el plano sin el origen y el campo $\frac{\partial}{\partial r_1}$. Si consideramos $a > 0$, el dominio de la curva integral descrita en el Teorema 2.8.9 que pasa por $(a, 0)$ es $(-a, \infty)$.

La siguiente Proposición nos será de utilidad en la demostración del Teorema de Frobenius que se trata en la siguiente sección.

***Proposición* 2.8.12.** Sea $m \in M^d$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$ que satisface que $X_m \neq 0$. Entonces existe un sistema coordenado $(U, \rho = (x_1, \ldots, x_d))$ alrededor de m de tal forma que

$$X|_U = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Demostración. Sea (V, φ) sistema coordenado alrededor de m, con funciones coordenadas $y_1, \ldots, y_d$, que satisface

$$X_m = \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_m$$

(Proposición 2.5.7). Sin pérdida de generalidad supongamos que $\varphi(m) = \hat{0}$. Consideremos $\varepsilon > 0$ y $W' \subseteq M$ vecindad abierta de m, de tal modo que

$$\begin{aligned} (-\varepsilon, \varepsilon) \times W' &\longrightarrow M \\ (t, w) &\longmapsto X_t(w) \end{aligned}$$

esta bien definida y es suave.

Notemos que $\hat{0} \in \varphi(W' \cap V) \subseteq \mathbb{R}^d$, y $\varphi(W' \cap V)$ es abierto. Denotando como π_0 a la proyección canónica de las últimas $d-1$ coordenadas de $\mathbb{R}^d$, consideremos el abierto $W = \pi_0(\varphi(W' \cap V))$ y definamos

$$\tau : (-\varepsilon, \varepsilon) \times W \longrightarrow M\,,$$

para el cual $\tau(t, a_2, \ldots, a_d) = X_t(\varphi^{-1}(0, a_2, \ldots, a_d)) = \sigma_{\varphi^{-1}(0,a_2,\ldots,a_d)}(t)$. Notemos que τ es suave.

Para todo $i \in \{1, \ldots, d\}$, si $j \geqslant 2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(y_i \circ \tau)}{\partial r_j}(\hat{0}) &= \lim_{h \to 0} \frac{y_i \circ \tau(\hat{0} + he_j) - y_i \circ \tau(\hat{0})}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{y_i \circ X_0 \circ \varphi^{-1}(\hat{0} + he_j) - y_i(m)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{y_i \circ \varphi^{-1}(\varphi(m) + he_i) - y_i(m)}{h} \\ &= \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_m (y_i) = \delta_{ij} \,. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Para todo $(t, a_2, \ldots, a_d) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times W$, denotando $m_0 = (0, a_2, \ldots, a_d)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(y_i \circ \tau)}{\partial r_1}(t, a_2, \ldots, a_d) &= \lim_{h \to 0} \frac{y_i \circ \tau(t + h, a_2, \ldots, a_d) - y_i \circ \tau(t, a_2, \ldots, a_d)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{y_i \circ \sigma_{\varphi^{-1}(m_0)}(t + h) - y_i \circ \sigma_{\varphi^{-1}(m_0)}(t)}{h} \\ &= \frac{d(y_i \circ \sigma_{\varphi^{-1}(m_0)})}{dr}(t) \,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

En particular $\frac{\partial(y_i \circ \tau)}{\partial r_1}(\hat{0}) = \frac{d(y_i \circ \sigma_{\varphi^{-1}(m)})}{dr}(0)$. De ese modo, para $j \geqslant 2$ y por las igualdades dadas en (2.15)

$$d\tau_{\hat{0}}\Big(\frac{\partial}{\partial r_j}\Big|_{\hat{0}}\Big) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial(y_i \circ \tau)}{\partial r_j}(\hat{0}) \, \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_m = \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_m .$$

Por la igualdades expresadas en (2.16)

$$\begin{aligned} d\tau_{\hat{0}}\Big(\frac{\partial}{\partial r_1}\Big|_{\hat{0}}\Big) &= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial(y_i \circ \tau)}{\partial r_1}(\hat{0}) \, \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_m \\ &= \sum_{i=1}^{d} \frac{d(y_i \circ \sigma_m)}{dr}(0) \, \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_m \\ &= d(\sigma_m)_0\Big(\frac{d}{dr}\Big|_0\Big) = \dot{\sigma}_m(0) = X_m \\ &= \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_m . \end{aligned}$$

Por el Teorema de la función inversa, τ es un difeomorfismo en $U' \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon) \times W$ vecindad abierta de $\hat{0}$. Por lo tanto $(\tau(U'), (\tau|_{U'})^{-1})$ es un sistema coordenado alrededor de m. Denotemos $\tau(U')$ como U y $(\tau|_{U'})^{-1}$ como ρ, siendo sus funciones coordenadas $x_1, \dots, x_d$.

Observemos que de las igualdades expresadas en (2.16) se obtiene que para todo $(t, a_2, \dots, a_d) \in U'$

$$\begin{aligned}
d\tau_{(t,a_2,\dots,a_d)}\Big(\frac{\partial}{\partial r_1}\Big|_{(t,a_2,\dots,a_d)}\Big) &= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial(y_i \circ \tau)}{\partial r_1}(t, a_2, \dots, a_d)\, \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{\tau(t,a_2,\dots,a_d)} \\
&= \sum_{i=1}^{d} \frac{d(y_i \circ \sigma_{\varphi^{-1}(m_0)})}{dr}(0)\, \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{\tau(t,a_2,\dots,a_d)} \\
&= d(\sigma_{\varphi^{-1}(m_0)})_t \Big(\frac{d}{dr}\Big|_t\Big) = \dot{\sigma}_{\varphi^{-1}(m_0)}(t) \\
&= X(\tau(t, a_2, \dots, a_d)) \,,
\end{aligned}$$

de tal forma que

$$X(\tau(t, a_2, \dots, a_d)) = d\tau_{(t,a_2,\dots,a_d)}\Big(\frac{\partial}{\partial r_1}\Big|_{(t,a_2,\dots,a_d)}\Big) = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\tau(t,a_2,\dots,a_d)} \,,$$

con lo cual concluimos que $X|_U = \frac{\partial}{\partial x_i}\big|_U$.

■

Observación 2.8.13. Veamos que la proposición anterior implica la existencia de curvas integrales en el siguiente sentido:
Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $m \in M$, si $X_m \neq 0$ entonces existe una vecindad abierta U de m y una curva suave $\sigma : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow U$ para la cual $0 \in J$, $\sigma(0) = m$ y $\dot{\sigma}(t) = X(\sigma(t))$ (es decir, σ es una curva integral).
La demostración de esto es análoga a la hecha en la Proposición 2.5.7. Consideremos (U, ρ) como en la demostración de la Proposición 2.8.12. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $(t, 0, \dots, 0) \in \rho(U)$, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Consideremos la curva σ definida en $(-\varepsilon, \varepsilon)$ como $\sigma(t) = \rho^{-1}(t, 0, \dots, 0)$. Dicha curva es suave y $\sigma(0) = m$. Por otro lado, para todo $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\dot{\sigma}(t_0) = \sum_{i=1}^{d} \frac{d}{dr}\Big|_{t_0} (x_i \circ \sigma)\, \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\sigma(t_0)} \,,$$

de manera que para toda $i \in \{1, \dots, d\}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\Big|_{t_0} (x_i \circ \sigma) &= \lim_{h \to 0} \frac{x_i \circ \rho^{-1}(t_0 + h, 0, \dots, 0) - x_i \circ \rho^{-1}(t_0, 0, \dots, 0)}{h} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\sigma(t_0)} (x_i) = \delta_{i1} \,,
\end{aligned}$$

por lo cual $\dot{\sigma}(t_0) = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\sigma(t_0)} = X_{\sigma(t_0)}$. Así concluimos que σ es una curva integral.

La siguiente definición analiza una relación interesante entre dos campos campos vectoriales de distintas variedades.

Definición 2.8.14. Sean $\psi : M \longrightarrow N$ suave, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Decimos que X y Y están *ψ-relacionados* si $d\psi \circ X = Y \circ \psi$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "X"'] & N \arrow[d, "Y"] \\ TM \arrow[r, "d\psi"'] & TN \end{tikzcd}$$

***Proposición* 2.8.15.** Sean $\psi : M \longrightarrow N$ suave, $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ y $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$, tales que X_i y Y_i son ψ-relacionados ($i \in \{1, 2\}$). Entonces $[X_1, X_2]$ y $[Y_1, Y_2]$ son ψ-relacionados.

Demostración. Observemos que dado $i \in \{1, 2\}$, para todo $m \in M$ y $f \in C^\infty_{\psi(m)}(N)$, la función $X_i(f \circ \psi)$ esta definida en $\psi^{-1}(\mathrm{dom}\,(f))$. De modo que para todo $p \in \psi^{-1}(\mathrm{dom}\,(f))$

$$\begin{aligned}(X_i)_p(f \circ \psi) &= d\psi_p(X_i)_p(f) = (d\psi \circ X_i)(p)(f) \\ &= (Y_i \circ \psi)(p)(f) = (Y_i(f) \circ \psi)(p)\,,\end{aligned}$$

es decir, $X_i(f \circ \psi) = Y_i(f) \circ \psi$. De esa forma

$$\begin{aligned}([Y_1, Y_2] \circ \psi)(m)(f) &= (Y_1)_{\psi(m)}(Y_2(f)) - (Y_2)_{\psi(m)}(Y_1(f)) \\ &= (d\psi \circ X_1)(m)(Y_2(f)) - (d\psi \circ X_2)(m)(Y_1(f)) \\ &= (X_1)_m(Y_2(f) \circ \psi) - (X_2)_m(Y_1(f) \circ \psi) \\ &= (X_1)_m(X_2(f \circ \psi)) - (X_2)_m(X_1(f \circ \psi)) \\ &= [X_1, X_2]_m(f \circ \psi) = d\psi_m([X_1, X_2]_m)(f) \\ &= (d\psi \circ [X_1, X_2])(m)(f)\ ,,\end{aligned}$$

con lo cual concluimos que $d\psi \circ [X_1, X_2] = [Y_1, Y_2] \circ \psi$, es decir, $[X_1, X_2]$ y $[Y_1, Y_2]$ son ψ-relacionados.

■

2.9. Distribuciones

Enseguida veremos el concepto de *distribución* que nos será de mucha utilidad en el capítulo 4. Esta noción generaliza la idea de los campos vectoriales, pensando que al asociarle a cada punto de una variedad un vector tangente mediante un campo vectorial, como consecuencia le asociamos el subespacio vectorial generado por dicho vector.

También se presentará el *Teorema de Frobenius* que es el ánalogo del Teorema de existencia y unicidad de curvas integrales.

Definición 2.9.1. (Distribución) Sea M^d una variedad diferenciable y $0 \leqslant c \leqslant d$. Diremos que $\mathfrak{D}$ es una *distribución de dimensión c en la variedad M* (o una *c-distribución en M*) si para cada punto m en M, $\mathfrak{D}$ elige un subespacio de T_mM de dimensión c. Diremos que la distribución $\mathfrak{D}$ es suave si para toda $m \in M$ existe una vecindad abierta U de m y un conjunto de c campos vectoriales suaves $\{ X_1, \ldots, X_c \}$ que generan en cada punto de U a $\mathfrak{D}$, es decir que para cada $m' \in U$, $\mathfrak{D}(m') = \langle X_1(m'), \ldots, X_c(m') \rangle_{\mathbb{R}}$.

Usualmente denotaremos $\mathfrak{D}(m)$ como $\mathfrak{D}_m$.

Ejemplo 2.9.2. Como mencionamos previamente, la definición de distribución es una generalización del concepto de campo vectorial. Para ser más precisos, si X es un campo vectorial en M que no se anula, podemos considerar $\mathfrak{D}_X$ que mapea $m \mapsto \langle X_m \rangle_{\mathbb{R}}$. Más aún, si $X \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $\mathfrak{D}_X$ es una distribución suave de dimensión 1.

Diremos que un campo vectorial X en M es una *sección de la distribución* $\mathfrak{D}$ si para todo $m \in M$, $X_m \in \mathfrak{D}_m$. Lo anterior se denotará como $X \in \mathfrak{D}$.

Las siguientes definiciones nos ayudarán a enunciar el mencionado Teorema de Frobenius.

Definición 2.9.3. (Distribución involutiva) Sea M variedad diferenciable. Diremos que una distribución suave $\mathfrak{D}$ es *involutiva (o completamente integrable)* si dados cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ secciones de $\mathfrak{D}$, $[X, Y]$ es una sección de $\mathfrak{D}$.

La definición anterior coloquialmente nos dice que una distribución es involutiva si sus secciones son cerradas bajo el corchete de Lie.

El siguiente concepto es una generalización de curva integral, como se muestra en el ejemplo 2.9.5.

Definición 2.9.4. (Variedades integrales) Sea $\mathfrak{D}$ en M, decimos que la subvariedad (N, ψ) de M es una *variedad integral de la distribución* $\mathfrak{D}$ si para todo $n \in N$

$$d\psi_n(T_nN) = \mathfrak{D}_{\psi(n)}$$

Ejemplo 2.9.5. Consideremos $X \in \mathfrak{X}(M)$ que no se anula en M y $\mathfrak{D}_X$ como en el ejemplo 2.9.2. Dada $m \in M$, por la observación 2.8.13 podemos encontrar una vecindad abierta $U \subseteq M$ de m y $\sigma : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow U$ una curva integral de X, que es inyectiva y pasa por m en 0. De modo que (J, σ) es una subvariedad de M y para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
d\sigma_{t_0}(T_{t_0}J) = d\sigma_{t_0}\left(\left\langle \frac{d}{dr}\Big|_{t_0}\right\rangle_{\mathbb{R}}\right) &= \left\langle d\sigma_{t_0}\left(\frac{d}{dr}\Big|_{t_0}\right)\right\rangle_{\mathbb{R}} \\
&= \langle X(\sigma(t_0))\rangle_{\mathbb{R}} = \mathfrak{D}(\sigma(t_0))
\end{aligned}
$$

concluyendo así que (J, σ) es una variedad integral de $\mathfrak{D}_X$.

Veremos que a diferencia del Teorema 2.8.9 que nos asegura que para todo campo suave existen curvas integrales, no cualquier distribución suave tendrá variedades integrales. De hecho veremos que una condición necesaria y suficiente para asegurar la existencia de variedades integrales es que la distribución sea involutiva.

***Proposición* 2.9.6.** Sea $\mathfrak{D}$ una distribución suave en M que satisface que para cualquier punto en M existe una variedad integral que pasa a través de él. Entonces $\mathfrak{D}$ es involutiva

Demostración. ■

Los siguientes lemas nos serán de utilidad en la demostración del *Teorema de Frobenius*, que es retomada del artículo de [Lundell]. Otra demostración interesante de dicho Teorema puede ser consultada en [Warner]. .

***Lema* 2.9.7.** Sea $\mathfrak{D}$ una c-distribución suave en M^d y $m \in M$. Entonces existen un sistema coordenado (V, ρ) alrededor de m, con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_d$, y $\{X_1, \ldots, X_c\} \subseteq \mathfrak{X}(U)$ una base local de $\mathfrak{D}$ que satisface que para toda $j \in \{1, \ldots, c\}$,

$$
X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=c+1}^{d} b_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\,,
$$

donde $b_{ij} \in C^\infty(V)$.

Demostración. Sean $(\widetilde{V}, \widetilde{\rho})$ sistema coordenado con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_d$ tal que $m \in \widetilde{V}$, y $\{Y_1, \ldots, Y_c\} \subseteq \mathfrak{X}(\widetilde{V})$ el cual genera a $\mathfrak{D}$ en $\widetilde{V}$. Como $\{(Y_1)_m, \ldots, (Y_c)_m\}$ es un conjunto linealmente independiente, se puede extender a una base agregando elementos de $\{\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_m, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_d}\big|_m\}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$
\left\{(Y_1)_m, \ldots, (Y_c)_m, \frac{\partial}{\partial x_{c+1}}\Big|_m, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_d}\Big|_m\right\}
$$

es una base de T_mM, ya que por el Teorema de la función inversa cualquier reordenamiento de $x_1, \ldots, x_d$ origina un sistema coordenado (Corolario 2.5.3).

Consideremos

$$Y_j = \sum_{i=1}^{d} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \,,$$

donde $a_{ij} \in C^\infty(\widetilde{V})$, $i \in \{1, \ldots, d\}$, $j \in \{1, \ldots, c\}$. Sea $A = (\alpha_{ij})$ la matriz de $d \times d$ definida como

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & 1 \leqslant i \leqslant d \,, \quad 1 \leqslant j \leqslant c \\ 0 & i \neq j \,, \quad j > c \\ 1 & i = j \,, \quad j > c \,. \end{cases}$$

Por la suavidad de las a_{ij}, existe $V \subseteq \widetilde{V}$ vecindad abierta de m para la cual la matriz A es invertible con inversa $A^{-1} = (\widetilde{\alpha}_{ij})$, donde $\widetilde{\alpha}_{ij} \in C^\infty(V)$ para $i, j \in \{1, \ldots, d\}$.

Dado $j \in \{1, \ldots, c\}$ definamos

$$X_j = \sum_{i=1}^{c} \widetilde{\alpha}_{ij} Y_i \,.$$

De tal manera que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} &= \sum_{i=1}^{c} \widetilde{\alpha}_{ij} Y_i + \sum_{i=c+1}^{d} \widetilde{\alpha}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= X_j + \sum_{i=c+1}^{d} \widetilde{\alpha}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \,. \end{aligned}$$

Tomando $b_{ij} = -\widetilde{\alpha}_{ij}$ para $j \in \{1, \ldots, c\}$, $i \in \{c+1, \ldots, d\}$ y $\rho = \rho|_V$ concluimos el resultado.

■

***Lema* 2.9.8.** Sea $\mathfrak{D}$ una c-distribución involutiva en M^d y $m \in M$, entonces existe $U \subseteq M$ vecindad abierta de m y $\{X_1, \ldots, X_c\} \subseteq \mathfrak{X}(U)$, base local de $\mathfrak{D}$, de tal forma que $[X_i, X_j] = 0$, $i, j \in \{1, \ldots, c\}$.

Demostración. Consideremos (V, ρ) y $\{X_1, \ldots, X_c\}$ como en el Lema anterior. Por la Proposición 2.8.4 inciso IV, para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, c\}$

$$\begin{aligned}
[X_i, X_j] &= \Big[\frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{l=c+1}^{d} b_{lj}\frac{\partial}{\partial x_l}\Big] + \Big[\sum_{l=c+1}^{d} b_{li}\frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big] \\
&= \sum_{l=c+1}^{d}\Big(\Big[\frac{\partial}{\partial x_i}, b_{lj}\frac{\partial}{\partial x_l}\Big] + \Big[b_{li}\frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big]\Big) \\
&= \sum_{l=c+1}^{d}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}(b_{lj}) - \frac{\partial}{\partial x_j}(b_{li})\Big)\frac{\partial}{\partial x_l}\,.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Como $\mathfrak{D}$ es involutiva, existen $a_1, \ldots, a_c \in C^\infty(V)$ tales que

$$\begin{aligned}
[X_i, X_j] &= \sum_{r=1}^{c} a_r X_r \\
&= \sum_{r=1}^{c} a_r \frac{\partial}{\partial x_r} + \sum_{r=1}^{c}\sum_{l=c+1}^{d} a_r b_{lr}\frac{\partial}{\partial x_l} \\
&\sum_{r=1}^{c} a_r \frac{\partial}{\partial x_r} + \sum_{l=c+1}^{d}\Big(\sum_{r=1}^{c} a_r b_{lr}\Big)\frac{\partial}{\partial x_l}\,.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

De las igualdades 2.17 y 2.18 se tiene que $a_1 = \ldots = a_c = 0$. Por lo tanto $[X_i, X_j] = 0$ para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, c\}$.

■

Teorema 2.9.9. (Teorema de Frobenius) *Sea $\mathfrak{D}$ una c-distribución suave en M^d. Si dicha distribución es involutiva entonces para cualquier $m \in M$ existe una variedad integral de $\mathfrak{D}$ que pasa por m. Más aún, existe un sistema coordenado cúbico $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_d))$ centrado en m cuyas rebanadas de la forma*

$$x_i = r_i(a) \qquad a \in \varphi(U), \quad i \in \{c+1, \ldots, d\}$$

son variedades integrales de $\mathfrak{D}$, que satisfacen que dada (N, ψ), variedad integral conexa de $\mathfrak{D}$ para la cual $\psi(N) \subseteq U$, existe una rebanada en la cual la imagen $\psi(N)$ se queda completamente contenida.

Demostración. Primero se analizará la existencia. Observemos que basta mostrar que existe un sistema coordenado cúbico centrado en m (U, φ) con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_d$ de tal forma que para todo $p \in U$,

$$\mathfrak{D}(p) = \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_c}\Big|_p \Big\rangle_{\mathbb{R}},$$

pues con ello toda rebanada S de U determinada como

$$x_i = r_i(a) \quad a \in \varphi(U),\, i \in \{\, c+1, \ldots, d \,\}$$

es un encaje de M, ya que $(x_1|_S, \ldots, x_c|_S)$ es un difeomorfismo de S sobre $\mathbb{R}^c$, el cual satisface que para todo $p \in S$

$$di_S\Big(\frac{\partial}{\partial x_j|_S}\Big|_p \Big) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p \qquad 1 \leqslant j \leqslant c$$

Por lo tanto

$$di_S(T_pS) = \mathfrak{D}(p) = \mathfrak{D}(i_S(p))\,.$$

Procederemos por inducción sobre c. Si $c = 1$, consideremos $X \in \mathfrak{X}(M)$ que genera a $\mathfrak{D}$ en V, una vecindad abierta de m. Como $X_m \neq 0$, la Proposición 2.8.12 asegura que existe (U, φ) sistema coordenado cúbico centrado en m, con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_d$ que satisface que $U \subseteq V$ y

$$X|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_U\,.$$

Supongamos que el resultado es válido para $1 \leqslant c-1$. Sea $\mathfrak{D}$ una c-distribución involutiva. Consideremos $U \subseteq M$ vecindad abierta de m y $\{\, X_1, \ldots, X_c \,\} \subseteq \mathfrak{X}(M)$ de tal forma que genera a $\mathfrak{D}$ en U_1 y satisface que para cualesquiera $i, j \in \{\, 1, \ldots, c \,\}$, $[X_i, X_j] = 0$ (Lema 2.9.8). Por la hipotesis existe un sistema coordenado cúbico centrado en m $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$, con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_d$, de tal manera que $\widetilde{U} \subseteq U_1$ y para todo $p \in \widetilde{U}$

$$\mathfrak{D}(p) = \langle (X_1)_p, \ldots, (X_{c-1})_p \rangle_{\mathbb{R}} = \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{c-1}}\Big|_p \Big\rangle_{\mathbb{R}}\,.$$

Ya que para toda $i \in \{\, 1, \ldots c-1 \,\}$, $\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{c-1} b_j X_j$, donde $b_j \in C^\infty(\widetilde{U})$, entonces de la Proposición 2.8.4 inciso IV se sigue que

$$\begin{aligned} \Big[\frac{\partial}{\partial x_i}, X_c\Big] &= \sum_{j=1}^{c-1} [b_j X_j, X_c] \\ &= \sum_{j=1}^{c-1} (b_j [X_j, X_c] - X_c(b_j) X_j) \\ &= -\sum_{j=1}^{c-1} X_c(b_j) X_j\,, \end{aligned}$$

de modo que $[\frac{\partial}{\partial x_i}, X_c]_p \in \langle (X_1)_p, \ldots, (X_{c-1})_p \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{c-1}}|_p \rangle_{\mathbb{R}}$ para todo $p \in \widetilde{U}$.

Considerando que $X_c = \sum_{l=1}^{d} a_l \frac{\partial}{\partial x_l}$, donde $a_l \in C^\infty(\widetilde{U})$, análogamente a como se obtuvo antes, se sigue que para toda $i \in \{1, \ldots, c-1\}$

$$\begin{aligned}
\Big[\frac{\partial}{\partial x_i}, X_c\Big] &= \sum_{l=1}^{d} \Big[\frac{\partial}{\partial x_i}, a_l \frac{\partial}{\partial x_l}\Big] \\
&= \sum_{l=1}^{d} \Big(a_l \Big[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_l}\Big] + \frac{\partial}{\partial x_i}(a_l) \frac{\partial}{\partial x_l} \Big) \\
&= \sum_{l=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_l) \frac{\partial}{\partial x_l} .
\end{aligned}$$

De modo que $\frac{\partial}{\partial x_i}(a_l) \equiv 0$ en $\widetilde{U}$ para $i \in \{1, \ldots, c-1\}$ y $l \in \{c, \ldots, d\}$, o lo que es lo mismo, $\frac{\partial (a_l \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \equiv 0$ en $\widetilde{\varphi}(\widetilde{U})$ para $i \in \{1, \ldots, c-1\}$ y $l \in \{c, \ldots, d\}$. Gracias a ello concluimos que $a_l \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ es independiente de las primeras $c-1$ entradas, es decir que para cualesquiera $x, x' \in \widetilde{\varphi}(\widetilde{U})$ que satisfacen que $\pi_c(x) = \pi_c(x')$, donde π_c es la proyección canónica de $\widetilde{\varphi}(\widetilde{U})$ sobre las últimas $c+1$ coordenadas, se tiene que

$$a_l \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(x) = a_l \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(x') \tag{2.19}$$

Consideremos $Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{U})$ definida como

$$Y = X_c - \sum_{i=1}^{c-1} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=c}^{d} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

De modo que para cualquier $p \in \widetilde{U}$

$$\mathfrak{D}(p) = \langle (X_1)_p, \ldots, (X_{c-1})_p, (X_c)_p \rangle_{\mathbb{R}} = \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{c-1}}\Big|_p, Y_p \Big\rangle_{\mathbb{R}} .$$

Veremos que es posible encontrar (U, φ) sistema coordenado cúbico centrado en m, con funciones coordenadas $z_1, \ldots, z_d$, que satisfaga que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{\partial}{\partial v_i} \qquad 1 \leqslant i \leqslant c-1 \\
&\frac{\partial}{\partial z_c} = Y
\end{aligned} \tag{2.20}$$

con lo cual habremos concluido la parte de la existencia.

Sea $\tilde{\pi}_c$ la proyección canónica de $\widetilde{\varphi}(\widetilde{U})$ sobre las primeras $c-1$ coordenadas. Denotemos como $\pi_c(\widetilde{\varphi}(\widetilde{U})) = S_0$ y $\tilde{\pi}_c(\widetilde{\varphi}(\widetilde{U})) = \widetilde{S}_0$, de modo que $\widetilde{S}_0 \times S_0 = \widetilde{\varphi}(\widetilde{U})$. Sea $\widetilde{Y}$ el campo vectorial definido como

$$\widetilde{Y} = \sum_{i=1}^{d-c+1} a_i \circ \widetilde{\varphi}^{-1} \circ i_{S_0} \frac{\partial}{\partial r_i}$$

donde $i_{S_0} : S_0 \longrightarrow \widetilde{\varphi}(\widetilde{U})$. Por la Proposición 2.8.12 existe un sistema coordenado cúbico $(V, \rho = (u_c, \ldots, u_d))$ en S_0 centrado en $\hat{0}$ de manera que

$$\widetilde{Y}|_V = \frac{\partial}{\partial u_c}$$

Consideremos

$$\mathrm{id} \times \rho : \widetilde{S}_0 \times V \longrightarrow \widetilde{S}_0 \times S_0\,,$$

el cual es un difeomorfismo. De ahí que la función

$$\varphi = (\mathrm{id} \times \rho) \circ \widetilde{\varphi} : \widetilde{\varphi}^{-1}(\widetilde{S_0 \times V}) \longrightarrow \widetilde{S}_0 \times S_0$$

es un mapeo coordenado. Denotando sus funciones coordenadas como $z_1, \ldots, z_d$, se tiene que para todo $p \in \widetilde{\varphi}^{-1}(\widetilde{S}_0 \times V) = U,\ f \in C_p^\infty(M)$

I. Si $i \in \{1, \ldots, c-1\}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_i}\Big|_p(f) &= \frac{\partial(f \circ \widetilde{\varphi}^{-1} \circ (\mathrm{id} \times \rho)^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(p)) \\ &= \frac{\partial(f \circ \widetilde{\varphi}^{-1})}{\partial r_i}(\widetilde{\varphi}(p)) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f)\end{aligned}$$

II. Por la igualdad 2.19

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_c}\Big|_p(f) &= \frac{\partial(f \circ \widetilde{\varphi}^{-1} \circ (\mathrm{id} \times \rho)^{-1})}{\partial r_c}(\varphi(p)) \\ &= \frac{\partial}{\partial u_c}\Big|_{\widetilde{\varphi}(p)}(f \circ \widetilde{\varphi}^{-1}) \\ &= \sum_{i=c}^{d} a_i \circ \widetilde{\varphi}^{-1} \circ i_{S_0}(\pi_c(\widetilde{\varphi}(p))) \frac{\partial}{\partial r_i}\Big|_{\widetilde{\varphi}(p)}(f \circ \varphi^{-1}) \\ &= \sum_{i=c}^{d} a_i(p) \frac{\partial}{\partial r_i}\Big|_{\widetilde{\varphi}(p)}(f \circ \varphi^{-1}) \\ &= \sum_{i=c}^{d} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f) \\ &= Y_p(f)\end{aligned}$$

Por lo tanto hemos concluido que el sistema coordenado cúbico $(U, \widetilde{\varphi})$ alrededor de m satisface las condiciones expresadas en 2.20.

Ahora veremos que para cualquier variedad integral conexa de $\mathfrak{D}$ contenida en U, hay una rebanada que la contiene.

Sea (N, ψ) una variedad integral conexa de D tal que $\psi(N) \subseteq U$. Si π es la proyección canónica de U sobre las últimas c coordenadas, se tiene que para toda $p \in U$, $d(\pi \circ \varphi)_p$ anula a $\mathfrak{D}(p)$, de esa forma dado $n \in N$, como $d\psi_n(T_n N) = \mathfrak{D}(\psi(n))$ entonces

$$d(\pi \circ \varphi \circ \psi)_n \equiv 0$$

Como N es conexo, se sigue del Teorema 2.2.5 que $\pi \circ \varphi \circ \psi$ es un mapeo constante, por lo cual $\psi(N)$ esta completamente contenido en una rebanada.

$\blacksquare$

En el siguiente Teorema se muestra como las variedades integrales de distribuciones involutivas tienen la propiedad de que todas las funciones suaves que se factorizan a través de ellas, lo hacen mediante funciones suaves (véase el comentario de la sección 2.6 previo al Teorema 2.6.2).

***Teorema* 2.9.10.** *Sea (P, ψ) variedad integral de una c-distribución involutiva $\mathfrak{D}$ en M^d y $\phi : N \longrightarrow M$ una función suave que se factoriza a través de (P, ψ), es decir, $\phi(N) \subseteq \psi(P)$. Entonces la única función $\phi_0 : N \longrightarrow P$ que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, dashed, "\phi_0"'] & M \\ & P \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

es continua (y por lo tanto suave, según el Teorema 2.6.2).

Demostración. Consideremos $p \in P$ y $n \in \phi_0^{-1}(p)$. Sea $V \subseteq P$ una vecindad abierta de p. Veamos que existe $U \subseteq N$ vecindad abierta de n que satisface que $\phi_0(U) \subseteq V$. Como P es una variedad integral de $\mathfrak{D}$, por el Teorema de Frobenius existe $(\widetilde{U}, \varphi)$ sistema coordenado cúbico centrado en $\psi(p)$, con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_d$, de tal forma que $\widetilde{V} = \psi^{-1}(\widetilde{U}) \cap V$ es una variedad integral de $\mathfrak{D}$ cuya imagen bajo ψ se queda completamente contenida en S, la rebanada de $(\widetilde{U}, \varphi)$ definida como

$$x_{c+1} = \ldots = x_d = 0$$

(observación 2.1.5). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\psi(\widetilde{V}) = S$, pues la dimensión de la rebanada de S es la misma que la dimensión de P, siguiéndose del Teorema de la función inversa que $\widetilde{\pi} \circ \varphi$ es una difeomorfismo local alrededor de p, donde $\widetilde{\pi}$ denota a la proyección de las primeras c coordenadas de $\widetilde{U}$. Por ello podemos elegir $W \subseteq \widetilde{U}$, de tal forma que $(W, \varphi|_W)$ es un sistema coordenado cúbico centrado en p y la imagen bajo ψ de la variedad integral $\psi^{-1}(W) \cap V$ es $S \cap W$.

Sea U la componente conexa de $\phi^{-1}(\widetilde{U})$ que contiene a n, de modo que U es abierto y $\phi(U)$ se queda completamente contenido en una componente conexa de $\psi(P) \cap \widetilde{U}$. Como $\psi \circ \phi_0 = \phi$ y $\psi(p) = \phi(n)$, basta mostrar que las componentes conexas de $\psi(P) \cap \widetilde{U}$ se quedan completamente contenidas en las rebanadas de $(\widetilde{U}, \varphi)$ para concluir que $\phi_0(U) \subseteq \widetilde{V}$.

Como P es segundo numerable, la cantidad de componentes conexas de $\psi^{-1}(\widetilde{U})$ es numerable, además de que cada una de ellas es una variedad integral de $\mathfrak{D}$ cuya imagen bajo ψ se queda contenida en $\widetilde{U}$. De ese modo $\psi(\psi^{-1}(U)) = \psi(P) \cap \widetilde{U}$ se queda completamente contenido en una cantidad numerable de rebanadas de $(\widetilde{U}, \varphi)$, de lo cual se sigue que cada componente conexa de $\psi(P) \cap \widetilde{U}$ se queda contenida en alguna rebanada de $(\widetilde{U}, \varphi)$.

■

Definición 2.9.11. Diremos que una variedad integral conexa (N, ψ) de una distribución $\mathfrak{D}$ en M es una *variedad integral maximal* si dada cualquier otra variedad integral conexa (N_0, ψ_0) de $\mathfrak{D}$ para la cual $\psi(N) \subseteq \psi_0(N_0)$, entonces $\psi(N) = \psi_0(N_0)$. Es decir, $\psi(N)$ no es subconjunto propio de la imagen de otra variedad integral conexa de $\mathfrak{D}$.

***Teorema* 2.9.12.** *Sea $\mathfrak{D}$ una c-distribución suave e involutiva en M^d. Entonces para cada $m \in M$ existe una única variedad integral maximal de $\mathfrak{D}$ que pasa por m. Además, la imagen de cualquier variedad integral conexa de $\mathfrak{D}$ que pasa por m está contenida en la imagen de dicha variedad.*

Demostración. Primero veremos la existencia de dicha variedad integral. Sea $m \in M$ y K el conjunto de elementos en M que satisfacen que existe una curva suave a trozos que los une a m y cuyos vectores tangentes se encuentran en $\mathfrak{D}$. Como K es conexo por trayectorias, resulta conexo. Afirmamos que K recibe una estructura de variedad diferenciable de tal forma que es la variedad integral de buscada.

Como M es segundo numerable, por el Teorema de Frobenius existe $\{ (U_i, \varphi_i = (x_1^i, \ldots, x_d^i)) \}_{i \in \mathbb{N}}$ familia de sistemas coordenados cúbicos de tal forma que $\{ U_i \}_{i \in \mathbb{N}}$ es una base de M y para toda $i \in \mathbb{N}$ la rebanada (U_i, φ_i) definida como

$$x_l^i = r_l(a) \qquad a \in \varphi_i(U_i), \quad c+1 \leqslant l \leqslant d \tag{2.21}$$

es una variedad integral conexa de $\mathfrak{D}$, de manera que existe un subconjunto de $\{ U_i \}_{i \in \mathbb{N}}$ que cubre a K. Sin pérdida de generalidad supongamos que $m \in U_0$.

Observemos que para todo $i \in \mathbb{N}$, las rebanadas de U_i descritas como en (2.21) tienen imagen convexa en $\mathbb{R}^d$ bajo φ_i. Así, para cualesquiera $x_1, x_2 \in M$ que pertenezcan a la misma rebanada de U_i, el segmento $\rho : [0,1] \longrightarrow \varphi_i(U_i)$ definido como $\rho(t) = t\varphi_i(x_2) + (1-t)\varphi(x_1)$ nos da una curva suave $\varphi_i^{-1} \circ \rho$ que va de x_1 a x_2 y que se factoriza a través de la respectiva rebanada que contiene a x_1 y x_2, de manera que sus vectores tangentes se encuentran en $\mathfrak{D}$. De esa forma, si $p \in K$ existe $i_p \in \mathbb{N}$ para el cual $p \in U_{i_p}$. Denotando S_{i_p} a la rebanada de U_{i_p} a la cual pertenece p, se tiene que $S_{i_p} \subseteq K$.

De esa forma la familia $\mathcal{L}$ formada por las rebanadas de los abiertos U_i que intersectan a K, es base para una topología en K. En particular la familia $\{\,(S_{i_p}, \varphi_{i_p}|_{S_{i_p}})\,\}_{p \in K}$ indica que dicha topología es localmente euclidiana y además induce una única estructura diferenciable (observación 1.1.4).

Con dicha topología K es Hausdorff ya que para todo $p \in K$, S_{i_p} tiene la topología relativa inducida por M, siguiéndose de ahí que para cualesquiera $p, q \in K$ distintos existe $V_p, V_q \subseteq M$ vecindades abiertas y ajenas de p y q respectivamente, de modo que $V_p \cap S_{i_p}$ y $V_q \cap S_{i_q}$ son vecindades abiertas y disjuntas de p y q en K.

Veamos que K es segundo numerable para concluir que es una variedad diferenciable. Para ello mostraremos que para todo $k \in \mathbb{N}$, U_k tiene a lo más una cantidad numerable de rebanadas contenidas en K, concluyendo de ello que la familia $\mathcal{L}$ es numerable. Para mostrarlo nos será de utilidad la siguiente afirmación:

Afirmación *Para cualesquiera $k, j \in \mathbb{N}$, una rebanada de U_i intersecta a lo más una cantidad numerable de rebanadas de U_j.* Sea S una rebanada de U_i, $S \cap U_j$ es un abierto de S con a lo más una cantidad numerable de componentes conexas (a causa de que S es segundo numerable), cada una de las cuales resulta ser una variedad integral de $\mathfrak{D}$ contenida en U_j y por lo tanto en una rebanada del mismo abierto. De esa forma S intersecta a lo más una cantidad numerable de rebanadas de U_j.

Sea $k \in \mathbb{N}$ y supongamos que $K \cap U_k \neq \emptyset$. Sea $m_0 \in K \cap U_k$ y $\rho : [a,b] \longrightarrow M$ una curva suave a trozos que une a m con m_0 y cuyos vectores tangentes estan en $\mathfrak{D}$. Como $\rho\,[a,b]$ es compacto, existe una sucesión finita

$$U_{i_0} = U_0,\, U_{i_1}, \ldots,\, U_{i_n} = U_k \tag{2.22}$$

que forma una cubierta para $\rho\,[a,b]$ y para la cual existe una sucesión $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1} = b$ de tal forma que $[a_l, a_{l+1}] \subseteq U_{i_l}$, $l \in \{\,0, 1, \ldots, n\,\}$. Como $\rho|_{[a_l, a_{l+1}]}$ satisface que para todo $a \in [a_l, a_{l+1}]$

$$\dot{\rho}|_{[a_l, a_{l+1}]}(a) = \dot{\rho}(a) \in \mathfrak{D}_a$$

entonces $d(\pi_c \circ \varphi_{i_l} \circ \rho|_{[a_l, a_{l+1}]}) \equiv 0$, donde π_c es la proyección canónica de las últimas c coordenadas de U_{i_l}. Por ello $\rho\,[a_l, a_{l+1}]$ se queda contenido en una rebanada de U_{i_l}. En particular, $\rho\,[a_0, a_1]$ se queda contenido en S_m, la rebanada de U_0 que contiene a m.

Ya que ρ es continua, dado $l \in \{0, \ldots, n\}$ las rebanadas que contienen a $\rho[a,b]$ en U_{i_l} y $U_{i_{l+1}}$, se intersectan.

De lo anterior se sigue que toda rebanada $\widetilde{S}$ de U_k contenida en K determina al menos una sucesión de abiertos como la expresada en (2.22), y que dada alguna sucesión con dichas propiedades, $\widetilde{S}$ intersecta al menos una rebanada del penúltimo abierto de la sucesión, que también esta contenida en K. Como hay a lo más una cantidad numerable de sucesiones como la expresada (2.22), las cuales satisfacen que existen curvas suaves a trozos pasando a través de ellas que comienzan con m y terminan en un punto de $U_k \cap K$ y cuyos vectores tangentes estan en $\mathfrak{D}$, y para cualesquiera $i, j \in \mathbb{N}$, una rebanada de U intersecta a lo más una cantidad numerable de rebanadas de U_j, se sigue que U_k tiene a lo más una cantidad numerable de rebanadas contenidas en K, y con ello K es segundo numerable.

Dado que $\{S_{i_p}\}_{p \in K}$ es una cubierta abierta de K y forma una familia de encajes con la inclusión, (K, i_K) es una subvariedad de M. Más aún, para todo $p \in K$,

$$di_K(T_pK) = di_{S_{i_p}}(T_pS_{i_p}) = \mathfrak{D}_p\,,$$

resultando una variedad integral de $\mathfrak{D}$.

Sea (N, Ψ) una variedad integral conexa de $\mathfrak{D}$ tal que $\Psi(n) = m$, para alguna $n \in N$. Sea $p \in \Psi(N)$. Como N es conexa y localmente euclidiana existe una curva suave a trozos $\gamma : [a,b] \longrightarrow N$ que va de n a $\Psi^{-1}(p)$. De esa forma $\Psi \circ \gamma$ es una curva suave a trozos que va de m a p y además para todo $c \in [a,b]$

$$d(\Psi \circ \gamma)_c\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=c}\right) = d\Psi_{\gamma(c)}(\dot{\gamma}(c)) \in \mathfrak{D}_{\Psi\circ\gamma(c)}\,,$$

de modo que $p \in K$ y por lo tanto $\Psi(N) \subseteq K$.

Resta tan sólo verificar la unicidad de dicha variedad integral. Sea (P, Φ) variedad integral maximal de $\mathfrak{D}$ que pasa por m. Por la propiedad de K mostrada previamente, $\Phi(P) \subseteq K$. Por la maximalidad de (P, Φ), $\Phi(N) = K$. De esa forma existe una función biyectiva $\Phi_0 : P \longrightarrow K$ la cual hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, dashed, "\Phi_0"'] & M \\ & K \arrow[u, "i_K"'] \end{tikzcd}$$

Por el Teorema 2.9.10, ya que (K, i_K) y (P, Φ) son variedades integrales de

$\mathfrak{D}$, Φ_0 y Φ_0^{-1} son suaves. Por lo tanto, (K, i_K) y (P, Φ) son equivalentes, concluyéndose con esto la unicidad.

■

Capítulo 3

Formas diferenciales.

3.1. Producto tensorial y producto exterior

En esta parte definiremos *produto tensorial* y *producto exterior* para el caso particular de espacios vectoriales, además de algunas propiedades que resultan útiles en el capítulo de formas diferenciales. La generalización de dichos conceptos puede ser consultada en [Rotman2].

En lo siguiente F será un campo y U, V y W denotarán F-espacios vectoriales.

Consideremos $F(V,W)$ el *F-espacio vectorial libre generado por* $V \times W$, el cual se obtiene al identificar $V \times W$ con la base canónica del F-espacio vectorial

$$\bigoplus_{l \in \alpha} F_l \,,$$

siendo α igual a la cardinalidad de $V \times W$. De esa forma resulta ser un F-espacio vectorial que tiene como base a $V \times W$ y por lo tanto es el conjunto de combinaciones lineales con coeficientes en F de elementos en $V \times W$. Gracias a esto, para todo F-espacio vectorial U y toda función $h : V \times W \longrightarrow U$ existe un única única transformación lineal $\tilde{h} : F(V,W) \longrightarrow U$ de tal forma que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "h"'] & & F(V,W) \arrow[dl, dashed, "\tilde{h}"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión de $V \times W$ en $F(V,W)$.

Definición 3.1.1. Sea J el subespacio vectorial de $F(V,W)$ generado por los elementos de la forma

$$\begin{aligned}(v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w)\\(v,w_1+w_2)-(v,w_1)-(v,w_2)\\r(v,w)-(rv,w)\\r(v,w)-(v,rw)\,,\end{aligned}$$

para $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ y $r \in F$. Llamaremos *producto tensorial de V y W* al F-espacio vectorial $F(V,W)\,/J$ y lo denotaremos como $V \otimes W$.

Dado un elemento $(v,w) \in V \times W \subseteq F(V,W)$, denotaremos a su clase en $V \otimes W$ como $v \otimes w$. De esa forma, para cualesquiera $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ y $r \in F$

$$\begin{aligned}(v_1+v_2)\otimes w &= v_1\otimes w + v_2 \otimes w\\ v\otimes(w_1+w_2) &= v\otimes w_1 + v\otimes w_2\\ r(v\otimes w) &= rv\otimes w = v \otimes rw\,.\end{aligned}$$

De la definición y de las igualdades anteriores se obtiene que $V \otimes W$ satisface la siguiente propiedad universal:
Dada una función bilineal $f : V \times W \longrightarrow U$ existe una única función lineal $\tilde{f} : V \otimes W \longrightarrow U$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[rr, "\varphi_2"] \arrow[dr, "f"'] & & V\otimes W \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

donde φ_2 es la función bilineal que aplica $(v,w) \mapsto v \otimes w$.

Del hecho de que el diagrama conmuta y de la linealidad de $\tilde{f}$ se sigue que para cualesquiera $v_i \in V$ y $w_i \in W$, $\tilde{f}(\sum_{i=1}^{d} a_i\, v_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^{d} a_i\, f(v_i, w_i)$.

Observación 3.1.2. Si $f_1 : V_1 \longrightarrow V_2$ y $g_1 : W_1 \longrightarrow W_2$ son funciones lineales, el mapeo bilineal de $V_1 \times W_1$ en $V_2 \otimes W_2$ que mapea $(v,w) \mapsto f_1(v) \otimes g_1(w)$ induce un único mapeo lineal $f_1 \otimes g_1$ que satisface la propiedad universal del producto tensorial y por ello para cualesquiera $v_i \in V$ y $w_i \in W$,

$$(f\otimes g)\Big(\sum_{i=1}^{d} v_i \otimes w_i\Big) = \sum_{i=1}^{d} f(v_i)\otimes g(w_i)\,.$$

Se sigue directamente que si $f_2 : V_2 \longrightarrow V_3$ y $g_2 : W_2 \longrightarrow W_3$ son funciones lineales,

$$(f_2 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes g_1) = f_2 \circ f_1 \otimes g_2 \circ g_1 \,.$$

De ese modo, en el caso de que f_1 y g_1 son isomorfismos $f_1 \otimes g_1$ también resulta un isomorfismo.

***Lema* 3.1.3.** Sean V y W F-espacios vectoriales dimensionalmente finitos. Entonces

$$\dim (V \otimes W) = (\dim V)(\dim W)\,. \tag{3.1}$$

Más aún, si $\beta = \{\, v_1, \ldots, v_n \,\}$ es una base de V y $\gamma = \{\, w_1, \ldots, w_m \,\}$ es una base de W, entonces $\lambda = \{\, v_l \otimes w_j \,:\, 1 \leqslant l \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant m \,\}$ es una base para $V \otimes W$.

Demostración. Sea $\alpha : V^* \times W \longrightarrow \operatorname{Hom}(V, W)$ la función bilineal para la cual, dado $v \in V$, $\alpha(f, w)(v) = f(v)\, w$. Por la propiedad universal, este mapeo bilineal induce una función lineal $\tilde{\alpha} : V^* \otimes W \longrightarrow \operatorname{Hom}(V, W)$ que satisface para cualesquiera $f_i \in V^*$ y $w_i \in W$, dado $v \in V$

$$\tilde{\alpha}\Big(\sum_{i=1}^{d} f_i \otimes w_i\Big)(v) = \sum_{i=1}^{d} f_i(v)\, w_i \,.$$

Afirmamos que $\tilde{\alpha}$ es un isomorfismo. Sean β y γ como en las hipótesis, y $\beta^* = \{\, f_1, \ldots, f_n \,\}$ y $\gamma^* = \{\, g_1, \ldots, g_m \,\}$ sus respectivas bases duales. Si $h \in \operatorname{Hom}(V, W)$, entonces $h(v) = \sum_{i=1}^{m} g_i \circ h(v)\, w_i$ para toda $v \in V$. De esa manera $\tilde{\alpha}(\sum_{i=1}^{m} (g_i \circ h) \otimes w_i) = h$, por lo que $\tilde{\alpha}$ es suprayectiva.

El conjunto $\tilde{\lambda} = \{\, f_l \otimes w_j \,:\, 1 \leqslant l \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m \,\}$ genera a $V^* \otimes W$, ya que para todo $\sum_{i=1}^{d} a_i (h_i \otimes z_i) \in V^* \otimes W$,

$$\sum_{i=1}^{d} a_i (h_i \otimes z_i) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{d} a_i h_i(v_l) g_j(z_i)\Big) f_l \otimes w_j \,.$$

Observemos que $\tilde{\alpha}(\tilde{\lambda})$ es una base de $\operatorname{Hom}(V, W)$ gracias a que la dimensión de $\operatorname{Hom}(V, W)$ es igual a $(\dim V)(\dim W)$ y para todo $h \in \operatorname{Hom}(V, W)$,

$$h = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (g_j \circ h(v_l)\, f_l\, w_j) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} g_j \circ h(v_l)\, \tilde{\alpha}(f_l \otimes w_j)\,.$$

Como un subconjunto de $\tilde{\lambda}$ es una base de $V^* \otimes W$ y $\tilde{\alpha}(\tilde{\lambda})$ es una base de $\operatorname{Hom}(V, W)$, se tiene que $\tilde{\alpha}$ es inyectiva. Por ello $\tilde{\lambda}$ es una base y

$$\dim (V^* \otimes W) = (\dim V^*)(\dim W)\,.$$

Considerando el isomorfismo $f : V \longrightarrow V^*$ que mapea $v_i \mapsto f_i$, obtenemos el isomorfismo $f \otimes \mathrm{id}_W$, que satisface que $(f \otimes \mathrm{id}_W)(\lambda) = \tilde{\lambda}$, de tal forma que λ es base de $V \otimes W$ y se satisface la igualdad (3.1). ■

De la propiedad universal del producto tensorial obtenemos que $V \otimes (W \otimes U)$ es isomorfo a $(V \otimes W) \otimes U$ mediante la aplicación canónica $v \otimes (w \otimes u) \mapsto (v \otimes w) \otimes u$. Así, por recursión, definimos el producto tensorial de n espacios vectoriales $\bigotimes_{i=1}^n V_i = V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$. Por inducción se muestra que $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ satisface la siguiente propiedad universal:
Dada una función multilineal $f : V_1 \times \ldots \times V_n \longrightarrow U$ existe una única función lineal $\tilde{f} : V \otimes \ldots \otimes V_n \longrightarrow U$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[rr, "\varphi_n"] \arrow[dr, "f"'] & & V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

donde φ_n es la función bilineal que aplica $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$.

Definición 3.1.4. Llamaremos *espacio tensorial de tipo (r, s) asociado al espacio vectorial V* a el producto tensorial $V_{r,s}$ definido como

$$\bigotimes_{i=1}^{r} V_i \otimes \bigotimes_{j=1}^{s} V_j^* ,$$

donde $V_i = V$ y $V_j^* = V^*$ para $i \in \{1, \ldots, r\}$ y $j \in \{1, \ldots, s\}$.

Considerando $V_{0,0} = F$, la suma directa

$$T(V) = \bigoplus_{r,s \in \mathbb{N}} V_{r,s}$$

es un espacio vectorial sobre F y recibe una estructura de F-álgebra graduada [1], no conmutativa y asociativa con respecto a la multiplicación $\otimes$ para la cual dados $\nu_1 = v_1 \otimes \ldots \otimes v_{r_1} \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_{s_1} \in V_{r_1,s_1}$ y $\nu_2 = u_1 \otimes \ldots \otimes u_{r_2} \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_{s_2} \in V_{r_2,s_2}$,

$$\nu_1 \otimes \nu_2 = v_1 \otimes \ldots \otimes v_{r_1} \otimes u_1 \otimes \ldots \otimes u_{r_2} \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_{s_1} \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_{s_2} ,$$

que es un elemento de $V_{r_1+r_2,s_1+s_2}$. Dicha F-álgebra graduada recibe el nombre de *álgebra tensorial de V* y sus elementos son llamados *tensores*. Si $\nu \in V_{r,s}$

[1] Si A es un F-álgebra, diremos que es un *F-álgebra graduada* si existe una familia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de F-espacios vectoriales que satisfacen que $A = \oplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $1 \in A_0$ y para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $(A_n)(A_m) \subseteq A_{n+m}$. La generalización de este concepto para R-módulos puede encontrarse en [Rotman2]

entonces es llamado *tensor homogéneo de grado* (r, s). Si dicho tensor homogéneo es de la forma

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_s\,,$$

es llamado *tensor homogéneo descomponible.*

Denotemos como $C(V)$ a $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_{n,0}$, la cual resulta una subálgebra graduada de $T(V)$.

Sea $I(V)$ el ideal bilateral de $C(V)$ generado por los elementos de la forma $v\otimes v$. Observemos que $I(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I_n(V)$, donde

$$I_n(V) = I(V) \cap V_{n,0}\,.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, denotaremos como $\Lambda_n(V)$ al espacio vectorial $V_{n,0}/I_n(V)$. Si $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in V_{n,0}$, denotaremos su clase de equivalencia en $\Lambda_n(V)$ como $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$. Ya que $I_0(V) = I_1(V) = \{\,0\,\}$, diremos que $\Lambda_0(V) = F$ y $\Lambda_1(V) = V$.

Observación 3.1.5. Sea $J(V)$ el ideal generado por los elementos de la forma $v\otimes w + w \otimes v$. Observemos que $J(V) \subseteq I(V)$.

Sean $v, w \in V$, entonces

$$v\otimes v + v\otimes w + w\otimes v + w\otimes w = (v + w)\otimes(v + w) \in I(V)\,,$$

de lo que se sigue que $v \otimes w + w \otimes v \in I(V)$ y por ello, $J(V) \subseteq I(V)$. Si la característica de F es distinta de 2, se obtiene la igualdad ya que $2(v \otimes v) \in J(V)$ y como 2 es unidad en F entonces $v\otimes v \in J(V)$, con lo que se concluye que $J(V) = I(V)$.

Por ello podemos concluir que para todo elemento $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \in \Lambda_n(V)$, si $j \in \{\,1, \ldots, n-1\,\}$

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_j \wedge v_{j+1} \wedge \ldots \wedge v_n = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{j+1} \wedge v_j \wedge \ldots \wedge v_n\,.$$

Más adelante veremos la relación que hay entre $\Lambda_n(V)$ y el álgebra exterior de V. Mientras tanto se analizan algunas de las propiedades básicas de $\Lambda_n(V)$ que nos serán de gran utilidad.

Al igual que el producto tensorial de V, $\Lambda_n(V)$ satisface una propiedad universal. Para enunciarla es necesario introducir un nuevo concepto.

Definición 3.1.6. (Mapeo multilineal alternante). Un mapeo multilineal

$$V_1 \times \ldots \times V_n \xrightarrow{h} W\,,$$

donde $V_i = V$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, es *alternante* si para cualesquiera $v_1, \ldots, v_n \in V$ y $\sigma \in S_n$ [2],

$$h(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = \operatorname{sig}(\sigma) h(v_1, \ldots, v_n). \tag{3.2}$$

Dado $F \in \mathbb{N}$ denotaremos como $A_k(V)$ a el conjunto de funciones alternantes $h : V_1 \times \ldots \times V_k \longrightarrow k$, donde $V_i = V$ para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por conveniencia consideraremos $A_0(V) = F$.

Ejemplo 3.1.7. Si $V_i = V$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, verifiquemos que la función $\tilde{\varphi}_n : V_1 \times \ldots \times V_n \longrightarrow \Lambda_n(V)$ que aplica $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$, es multilineal alternante.

Si σ es una transposición simultánea, es decir $\sigma = (\, i \quad i+1\,)$ [3] para $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, entonces dado $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \in \Lambda_n(V)$ por la multilinealidad del producto tensorial

$$\begin{aligned} 0 &= v_1 \wedge \ldots \wedge (v_i + v_{i+1}) \wedge (v_i + v_{i+1}) \wedge \ldots \wedge v_n \\ &= v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge v_i \wedge v_{i+1} \wedge v_{i+2} \wedge \ldots \wedge v_n \\ &+ v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge v_{i+1} \wedge v_i \wedge v_{i+2} \wedge \ldots \wedge v_n \,, \end{aligned}$$

es decir, $\tilde{\varphi}(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = v_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\sigma(n)} = -v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$.

En caso de que τ sea una transposición simultánea, si $w_i = v_{\sigma(i)}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_n(v_{\tau\sigma(1)}, \ldots, v_{\tau\sigma(n)}) &= \tilde{\varphi}_n(w_{\tau(1)}, \ldots, w_{\tau(n)}) \\ &= -w_1 \wedge \ldots \wedge w_n = -v_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\sigma(n)} \\ &= v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = \operatorname{sig}(\tau\sigma)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n). \end{aligned}$$

Se sigue por inducción sobre el número de transposiciones simultáneas que para todo $\gamma \in S_n$, producto de transposiciones simultáneas, $h(v_{\gamma(1)}, \ldots, v_{\gamma(n)}) = \operatorname{sig}(\gamma)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n)$.

Supongamos que $\sigma = (i\ j)$, donde $i < j$. Observemos que

$$\begin{aligned} \sigma =& (\, i \quad i-1\,)(\, i+1 \quad i+2\,) \ldots (\, j-1 \quad j-2\,) \\ & (\, j \quad j-1\,)(\, j-1 \quad j-2\,) \ldots (\, i+1 \quad i+2\,)(\, i \quad i-1\,)\,, \end{aligned}$$

de modo que es producto de $2(j-i)-1$ transposiciones simultáneas. Como toda permutación es producto de transposiciones, se sigue el resultado.

[2] Denotaremos al grupo de permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ como S_n y como sig al morfismo de grupos de S_n en $\mathbb{Z}^2$ que asocia a cada elemento de S_n su signo.

[3] En adelante $\rho = (i_m \quad i_{m-1} \ldots i_2 \quad i_1)$ denotará al elemento de S_n que satisface que $\rho(i_k) = i_{k+1}$ si $k \in \{1, \ldots, m-1\}$, $\rho(i_m) = i_1$ y es la identidad en cualquier otro elemento de $\{1, \ldots, n\}$.

La propiedad universal de $\Lambda_n(V)$ se obtiene a partir de la propiedad universal del producto tensorial y del hecho de que $I(V)$ esta contenido en el kernel de todo mapeo multilineal:
Dada una función multilineal alternante $f : V_1 \times \ldots \times V_n \longrightarrow U$, donde $V_i = V$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe una única función lineal $\tilde{f} : \Lambda_n(V) \longrightarrow U$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[rr, "\tilde{\varphi}_n"] \arrow[dr, "f"'] & & \Lambda_n(V) \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

donde $\tilde{\varphi}_n$ es la función multilineal alternante que aplica $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$.

Observación 3.1.8. Por la propiedad universal de $\Lambda_n(V)$, existe una correspodencia biunívoca $\tilde{\Psi}_n : (\Lambda_n(V))^* \longrightarrow A_n(V)$, a saber la que asigna $\tilde{f} \in (\Lambda_n(V))^*$ a $\tilde{f} \circ \tilde{\varphi}_n \in A_n(V)$. Dicha correspondencia es un isomorfismo.

***Lema* 3.1.9.** Si V es un F-espacio vectorial de dimensión finita d y $\beta = \{v_1, \ldots, v_d\}$ es una base de V y $n \geqslant 1$ entonces

$$\beta_n = \{ v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_n} \, : \, v_{i_k} \in \beta \text{ y } i_1 < \ldots < i_n \}$$

es una base de $\Lambda_n(V)$.

Demostración. Por el Lema 3.1.3 sabemos que el conjunto

$$\lambda_n = \{ v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_n} \, : \, v_{i_k} \in \beta \}$$

es una base para $V_{n,0}$.

Denotemos como J al conjunto que consta de $v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_n}$ que satisfacen que $v_{i_l} = v_{i_k}$ para $i_l \neq i_k$, o bien $v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_n} - \mathrm{sig}(\sigma)(v_{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes v_{i_{\sigma(n)}})$ si todos los v_{i_k} son distintos entre sí. Por el ejemplo 3.1.7 sabemos que para toda $\sigma \in S_n$, $v_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\sigma(n)} = \mathrm{sig}(\sigma)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n)$, de modo que $J \subseteq I_n(V)$. Más aún, el F-espacio vectorial generado por J se queda contenido en $I_n(V)$. Veamos que realmente ambos espacios vectoriales son iguales.

Sea $a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \in I_n(V)$ que satisface que $a_l = a_{l+1}$ para alguna $l \in \{1, \ldots, n-1\}$. Denotando $I = \{1, \ldots, d\}$ consideremos $a_k = \sum_{i_k \in I} r_{i_k} v_{i_k}$ para $k \in \{1, \ldots, n\}$. De esa forma

$$\begin{aligned} a_1 \otimes \ldots \otimes a_n = & \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_n \in I \\ i_l = i_{l+1}}} r_{i_1} \ldots r_{i_n} (v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_n}) \\ & + \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_n \in I \\ i_l < i_{l+1}}} r_{i_1} \ldots r_{i_n} (v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_n} \\ & + v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_{l+1}} \otimes v_{i_l} \otimes \ldots \otimes v_{i_n}) . \end{aligned}$$

Si $i_l = i_{l+1}$, entonces $v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_n} \in J$. Si $i_l \neq i_{l+1}$ y existen $1 \leqslant m, s \leqslant n$ distintos tales que $v_{i_m} = v_{i_s}$ entonces $v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_n} \in J$. Si $i_l \neq i_{l+1}$ y todos los v_{i_k} son distintos entonces

$$v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_n} + v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_{l+1}} \otimes v_{i_l} \otimes \ldots \otimes v_{i_n} \in J .$$

Como $I_n(V)$ es el conjunto de combinaciones lineales de elementos de la forma $a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$, con esto se concluye que el F-espacio vectorial generado por J es igual a $I_n(V)$.

Consideremos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{ v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_n} : v_{i_k} \in \beta \text{ y } i_1 < \ldots < i_n \} \\ B &= \{ v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_n} : v_{i_k} \in \beta \text{ y } v_{i_l} = v_{i_k}, \, l \neq k \} \\ C &= \{ v - \operatorname{sig}(\sigma)\, \sigma v : v \in A \text{ y } \sigma \in S_n \smallsetminus \{ \mathrm{id}_n \} \} , \end{aligned}$$

entendiendo que si $v = v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_n}$ entonces $\sigma v = v_{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes v_{i_{\sigma(n)}}$. Los conjuntos descritos son ajenos dos a dos y por lo tanto su unión tiene la misma cardinalidad que λ_n y genera a $V_{n,0}$, de modo que resulta una base. Observemos que $B \cup C \subseteq J$. Si $v_1 = v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_n} - \operatorname{sig}(\sigma)(v_{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes v_{i_{\sigma(n)}}) \in J$ entonces $v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_n} = \tau v$, donde $v \in A$ y $\tau \in S_n$, resultando que $v_1 = (v - (\sigma\tau)v) - (v - \tau\sigma)$ esta en el F-espacio vectorial generado por $B \cup C$, por lo que $B \cup C$ y J generan el mismo espacio vectorial. De esa forma se tiene que el F-espacio vectorial generado por $B \cup C$ coincide con $I_n(V)$.

Ya que $V_{n,0} = \langle A \rangle_F \bigoplus I_n(V)$, se sigue que la función

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_F &\longrightarrow \Lambda_n(V) \\ a &\longmapsto [a]_{I_n(V)} \end{aligned}$$

es un isomorfismo, concluyendo así que β_n es base de $\Lambda_n(V)$.

■

Con el Lema anterior concluimos que si $0 \leqslant n \leqslant d$, $\Lambda_n(V)$ tiene dimensión $\binom{d}{n}$ y si $n > d$ entonces $\Lambda_n(V) = \{ 0 \}$.

Definición 3.1.10. El álgebra

$$\Lambda(V) = C(V)/\, I(V)$$

es llamada *álgebra exterior de V*.

***Proposición* 3.1.11.** La función $\Psi : \Lambda(V) \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n(V)$ definida como

$$\Psi\Big[\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n\Big]_{I(V)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} [v_n]_{I_n(V)}\,,$$

es un isomorfismo de álgebras.

Demostración. Veamos que $\Lambda(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (V_{n,0} + I(V))/I(V)$. Sea $v_n \in V_{n,0}$. Denotemos $\overline{v}_n$ la clase de equivalencia de v_n en $(V_{n,0} + I(V))/I(V)$. Verifiquemos que $[v_n]_{I(V)} = \overline{v}_n$, para lo que basta mostrar que $[v_n]_{I(V)} \subseteq \overline{v}_n$. Sea $v' \in [v_n]_{I(V)}$, es decir, $v' = v_n + v''$ donde $v'' \in I(V)$, de manera que $v' \in V_{n,0} + I(V)$ y $v' - v_n \in I(V)$, concluyéndose así que $v' \in \overline{v}_n$.

Si $v = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \in C(V)$, entonces

$$[v]_{I(V)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} [v_n]_{I(V)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{v}_n = \overline{v}\,,$$

obteniéndose así que $\Lambda(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (V_{n,0} + I(V))/I(V)$.

Consideremos $n \in \mathbb{N}$ y

$$\begin{aligned} V_{n,0} + I(V) &\xrightarrow{\Psi_n} V_{n,0}/\, I_n(V) \\ v_n + v \quad &\longmapsto [v_n]_{I_n(V)}\,. \end{aligned}$$

Dicha función esta bien definida pues dados $v_n, v'_n \in V_{n,0}$ y $v, v' \in I(V)$ tales que $v_n + v = v'_n + v'$, se tiene que $v_n - v'_n = v' - v \in V_{n,0} \cap I(V)$, es decir $[v_n]_{I_n(V)} = [v'_n]_{I_n(V)}$. Por definición Ψ_n es lineal y suprayectiva. Además $\ker \Psi_n = I(V)$ ya que $v_n + v \in \ker \Psi_n$ si y sólo si $v_n \in I_n(V)$, que es equivalente a que $v_n + v \in I(V)$. De esa forma tenemos que $\tilde{\Psi}_n$ definida de $(V_{n,0} + I(V))/I(V)$ a $V_{n,0}/\, I_n(V)$ como $\tilde{\Psi}_n[v_n + v]_{I(V)} = [v_n]_{I_n(V)}$ es un isomorfismo lineal.

Como $\Psi = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\Psi}_n$, se obtiene el resultado.

■

Por la Proposición anterior, podemos identificar canónicamente a $\Lambda(V)$ con $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n(V)$, de manera que $\Lambda(V)$ resulta un álgebra exterior. La multiplicación en $\Lambda(V)$ es llamada *producto exterior* y usualmente se denota como $\wedge$. De esa forma se justifica que la clase de equivalencia de $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in C(V)$ en $\Lambda(V)$ sea denotada como $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$.

Gracias al Lema 3.1.9 podemos concluir que si $\beta = \{ v_1, \ldots, v_d \}$ es una base de V, el conjunto

$$\{ v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_n} \, : \, v_{i_k} \in \beta \text{ y } i_1 < \ldots < i_n, \; n \in \mathbb{N} \}$$

es una base de $\Lambda(V)$. Usualmente denotaremos a dicha base como $\{ v_\phi \}$, donde $\phi = \{ i_1, \ldots, i_n \}$ es un subconjunto de $\{ 1, \ldots, d \}$ ordenado en forma creciente, de modo que $v_\phi = v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_n}$. De lo anterior se obtiene que la dimensión de $\Lambda(V)$ es 2^d.

Enseguida veremos que los espacios duales de $V_{r,s}$, $\Lambda_k(V)$ y $\Lambda(V)$, en forma correspondiente resultan isomorfos a $(V_{r,s})^*$, $(\Lambda_k(V))^*$ y $(\Lambda(V))^*$.

Recordemos que un mapeo bilineal $\langle \, , \, \rangle : V \times W \longrightarrow F$ es *no degenerado* si el hecho de que $\langle v, w_0 \rangle = 0$ para todo $v \in V$, implica que $w_0 = 0$ y si $\langle v_0, w \rangle = 0$, para todo $w \in W$, implica que $v_0 = 0$.

Definición 3.1.12. Una *dualidad* es una terna $(V, W, \langle \, , \, \rangle)$, donde $\langle \, , \, \rangle$ es un mapeo bilineal no degenerado de $V \times W$ a F. En ese caso diremos que V y W estan en dualidad o bien que (V, W) son pareja en dualidad.

Si V y W son dimensionalmente finitos y estan en dualidad, las funciones lineales $\phi = V \longrightarrow W^*$ y $\tilde{\phi} = W \longrightarrow V^*$ definidas como

$$\phi(v)(w) = \langle v, w \rangle = \tilde{\phi}(w)(v) \, ,$$

resultan inyectivas, por lo cual $\dim V = \dim W$. Con esto se concluye que ϕ y $\tilde{\phi}$ son isomorfismos.

Enseguida veremos que $((V^*)_{r,s}, V_{r,s})$ y $(\Lambda_n(V^*), \Lambda_n(V))$ son parejas en dualidad y analizaremos los isomorfismos inducidos por los mapeos bilineales no degenerados (en estos casos V denota un F-espacio vectorial de dimensión d).

Sea $\langle \, , \, \rangle : (V^*)_{r,s} \times V_{r,s} \longrightarrow F$ el mapeo bilineal que satisface que si

$$\begin{aligned} v^* &= f_1 \otimes \ldots \otimes f_r \otimes v_{r+1} \otimes \ldots \otimes v_{r+s} \in (V^*)_{r,s} \\ u &= v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \otimes f_{r+1} \otimes \ldots \otimes f_{r+s} \in V_{r,s} \end{aligned}$$

entonces $\langle v^*, u \rangle = f_1(v_1) \ldots f_{r+s}(v_{r+s})$. Dicha función bilineal esta bien definida y es no degenerada. Por lo tanto induce el isomorfismo

$$\begin{aligned} (V^*)_{r,s} &\xrightarrow{\Psi} (V_{r,s})^* \\ v^* &\longmapsto \langle v^*, \cdot \rangle \end{aligned}$$

Por la propiedad universal del producto tensorial, denotando $M_{r,s}(V)$ el conjunto de mapeos multilineales de $V_1 \times \ldots \times V_r \times (V_{r+1})^* \times \ldots \times (V_{r+s})^*$ en F, donde $V_i = V$, se obtiene el siguiente isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} (V_{r,s})^* & \xrightarrow{\tilde{\Psi}} & M_{r,s}(V) \\ \tilde{f} & \longmapsto & \tilde{f} \circ \tilde{\varphi} \end{array}$$

donde $\tilde{\varphi}$ es el mapeo multilineal de $V_1 \times \ldots \times V_r \times (V_{r+1})^* \times \ldots \times (V_{r+s})^*$ en $V_{r,s}$ definida como

$$\tilde{\varphi}(v_1, \ldots, v_r, f_{r+1}, \ldots, f_{r+s}) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \otimes f_{r+1} \otimes \ldots \otimes f_{r+s}\,.$$

De esa forma la composición $\tilde{\Psi} \circ \Psi$ es un isomorfismo, de manera que

$$(V^*)_{r,s} \cong M_{r,s}(V)\,.$$

Análogamente, dado $n \in \mathbb{N}$ consideremos $\langle\ ,\ \rangle_n : \Lambda_n(V^*) \times \Lambda_n(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ el mapeo bilineal que satisface que si

$$\begin{aligned} v^* &= f_1 \wedge \ldots \wedge f_n \in \Lambda_n(V^*) \\ u &= v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \in \Lambda_n(V) \end{aligned}$$

entonces $\langle v^*, u\rangle_n = \det\left(f_i(v_j)\right)_{ij}$. Dicho mapeo bilineal esta bien definido y es no degenerado. Por lo tanto induce el isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_n(V^*) & \xrightarrow{\Psi_n} & (\Lambda_n(V))^* \\ v^* & \longmapsto & \langle v^*, \cdot\rangle_n\,. \end{array}$$

Por el isomorfismo $\tilde{\Psi}_n : (\Lambda_n(V))^* \longrightarrow A_n(V)$ dado en la observación 3.1.8, se tiene que $\tilde{\Psi}_n \circ \Psi_n$ es un isomorfismo, de modo que

$$\Lambda_n(V^*) \cong A_n(V)\,.$$

De lo anterior se sigue que para todo $n > d$, $A_n(V) = \{\,0\,\}$. Considerando $A(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n(V)$ veremos que

$$(\Lambda(V))^* \cong \Lambda(V^*) \cong A(V)\,.$$

En general, si $\{\,V_i\,\}_{i\in J}$ es una familia de F-espacios vectoriales y J es finito, la función lineal $\Gamma_0 : \bigoplus_{n\in J}(V_i)^* \longrightarrow (\bigoplus_{n\in J} V_i)^*$ definida como

$$\Gamma_0\Big(\sum_{n\in J} f_n\Big)\Big(\sum_{n\in J} s_n\Big) = \sum_{n\in J} f_n(s_n)\,,$$

es un isomorfismo con inversa $\widetilde{\Gamma}_0 : (\bigoplus_{n\in J} V_i)^* \longrightarrow \bigoplus_{n\in J}(V_i)^*$, para la cual

$$\widetilde{\Gamma}_0(\psi) = \sum_{n\in J} \psi \circ i_n \,,$$

donde i_n es la inclusión canónica de V_n en $\bigoplus_{n\in J} V_n$.

De esa forma se tiene un isomorfismo canónico

$$\Gamma : \Lambda(V^*) \longrightarrow (\Lambda(V))^* \tag{3.3}$$

que lleva $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n^* \in \Lambda(V^*)$ a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \Psi_n(v_n^*) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle v_n^*,\, \cdot\, \rangle_n$, el cual resulta de componer la siguiente serie de isomorfismos

$$\begin{aligned} \Lambda(V^*) &= \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n(V^*) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (\Lambda_n(V))^* = \bigoplus_{n=0}^{d} (\Lambda_n(V))^* \\ &\cong \Big(\bigoplus_{n=0}^{d} \Lambda_n(V)\Big)^* = \Big(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n(V)\Big)^* = (\Lambda(V))^* \,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Más aún,

$$(\Lambda(V))^* \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n(V^*) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n(V) = A(V)\,, \tag{3.5}$$

correspondiendo este isomorfismo a la función $(\sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\Psi}_n) \circ \Gamma^{-1}$.

Observación 3.1.13. Identifiquemos $\Lambda(V^*)$ con $(\Lambda(V))^*$ mediante el isomorfismo Γ. Sea $\beta = \{\, v_1, \ldots, v_d \,\}$ una base de V y $\beta^* = \{\, f_1, \ldots, f_d \,\}$ su base dual, entonces la base $\{\, f_\phi \,\}$ es dual a la base $\{\, v_\phi \,\}$. Para verificarlo consideremos $\phi = \{\, i_1, \ldots, i_r \,\}$ y $\phi' = \{\, j_1, \ldots, j_s \,\}$ subconjuntos de $\{\, 1, \ldots, d \,\}$, de tal forma que $i_1 < \ldots < i_r$ y $j_1 < \ldots < j_s$. Si las cardinalidades de ϕ y ϕ' no son iguales entonces $\Gamma(f_\phi)(v_{\phi'}) = 0$.

Supongamos que ϕ y ϕ' tienen la misma cardinalidad, pero son distintos. De ese modo

$$\Gamma(f_\phi)(v_{\phi'}) = \langle f_\phi,\, v_{\phi'} \rangle_r = \det\,(f_{i_m}(v_{j_n}))_{mn}\,.$$

Sea $l \in \{\, 1, \ldots, r \,\}$ tal que $i_l \neq j_l$ y $i_m = j_m$ para $m < l$. Si $i_l < j_l$, $(f_{i_m}(v_{j_n}))_{mn}$ tiene únicamente ceros en el renglón l. Si $i_l > j_l$ entonces $(f_{i_m}(v_{j_n}))_{mn}$ tiene únicamente ceros en la columna l. En ambos casos

$$\Gamma(f_\phi)(v_{\phi'}) = \det\,(f_{i_m}(v_{j_n}))_{mn} = 0\,.$$

Supongamos que $\phi = \phi'$. En ese caso $(f_{i_m}(v_{i_n}))_{mn} = I$, y por lo tanto $\Gamma(f_\phi)(v_{\phi'}) = \det\,(f_{i_m}(v_{i_n}))_{mn} = 1$.

3.2. Transformaciones lineales en $\Lambda(V)$

Denotemos como $\operatorname{End}(\Lambda(V))$ al conjunto endomorfismos de $\Lambda(V)$, que son transformaciones lineales de $\Lambda(V)$ en $\Lambda(V)$.

En esta sección consideraremos F-espacios vectoriales dimensionalmente finitos.

Observemos que al identificar $(\Lambda(V))^*$ con $\Lambda(V^*)$ mediante el isomorfismo Γ dado en (3.3), se induce una identificación entre los endomorfismos de $(\Lambda(V))^*$ y los endomorfismos de $\Lambda(V^*)$. De esa forma, dado $l \in \operatorname{End}(\Lambda(V^*))$ este se corresponde con $l^* \in \operatorname{End}(\Lambda(V))^*$ de tal manera que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\Lambda(V^*) \arrow[r, "l"] \arrow[d, "\Gamma"'] & \Lambda(V^*) \arrow[d, "\Gamma"] \\
(\Lambda(V))^* \arrow[r, "l^*"'] & (\Lambda(V))^*
\end{tikzcd}$$

En particular, dado $v \in \Lambda(V)$ definimos el endomorfismo

$$\begin{aligned}
\Lambda(V) &\xrightarrow{l_v} \Lambda(V) \\
\omega &\longmapsto v \wedge \omega
\end{aligned}$$

Sea $l_v^* : (\Lambda(V))^* \longrightarrow (\Lambda(V))^*$ el mapeo dual de l_v definido como $l_v^*(f) = f \circ l_v$. Dicho endomorfismo se identifica con $\tilde{l}_v$, de tal forma que $\tilde{l}_v = \Gamma^{-1} \circ l_v^* \circ \Gamma$. De esa manera, si $v^* = \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n^* \in \Lambda(V^*)$ y $\omega = \sum_{n \in \mathbb{N}} w_n \in \Lambda(V)$,

$$\begin{aligned}
(\Gamma \circ \tilde{l}_v(v^*))(\omega) &= (l_v^* \circ \Gamma(v^*))(\omega) = \Gamma(v^*) \circ l_v(\omega) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle v_n^*, \cdot \rangle_n \Big(\sum_{n \in \mathbb{N}} v \wedge w_n \Big).
\end{aligned}$$

Llamaremos *multiplicación interior por v* al endomorfismo $\tilde{l}_v$.

Notemos que si $v \in V$ y $v^* \in \Lambda_k(V^*)$, entonces $\Gamma \circ \tilde{l}_v(v^*) \in (\Lambda_{k-1}(V))^*$, de manera que $\tilde{l}_v(v^*) \in \Lambda_{k-1}(V^*)$, es decir, $\tilde{l}_v\big|_{\Lambda_k(V)} : \Lambda_k(V) \longrightarrow \Lambda_{k-1}(V^*)$.

Las siguientes definiciones se da en términos de álgebras graduadas ya que a pesar de que en esta sección nos remitimos al álgebra exterior de un espacio vectorial dimensionalmente finito, en la siguiente comenzaremos a analizar un álgebra graduada inducida por medio de las álgebras exteriores de los espacios tangentes de una variedad diferenciable y estas nociones serán de gran importancia.

Definición 3.2.1. Sea $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ un álgebra graduada sobre un campo F y $\mathfrak{J}$ un endomorfismo de A.

1. $\mathfrak{I}$ es una *derivación* si para cualesquiera $\omega, \upsilon \in A$

$$\mathfrak{I}(\omega \wedge \upsilon) = \mathfrak{I}(\omega) \wedge \upsilon + \omega \wedge \mathfrak{I}(\upsilon)\,.$$

2. $\mathfrak{I}$ es una *anti-derivación* si para cualesquiera $\omega \in A_j$ y $\upsilon \in A$,

$$\mathfrak{I}(\omega \wedge \upsilon) = \mathfrak{I}(\omega) \wedge \upsilon + (-1)^j \omega \wedge \mathfrak{I}(\upsilon)\,.$$

En caso de que $\mathfrak{I}\big|_{A_j} : A_j \longrightarrow A_{j+l}$ para toda $l \in \mathbb{Z}$ (donde $A_i = \{\,0\,\}$ si $i < 0$), diremos que $\mathfrak{I}$ es una *derivación (anti-derivación) de grado* l.

El siguiente Lema nos será de utilidad para mostrar que l_v^* definida como antes, es una anti-derivación de grado -1.

***Lema* 3.2.2.** Sea $l \in \operatorname{End}(\Lambda(V))$, entonces es una anti-derivación si y sólo si para todo elemento descomponible $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \in \Lambda(V)$

$$l(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} v_1 \wedge \ldots \wedge l(v_i) \wedge \ldots \wedge v_n\,. \tag{3.6}$$

Demostración. Supongamos que l es una anti-derivación. Sea $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \in \Lambda(V)$ elemento descomponible. Mostraremos por inducción sobre n que satisface la igualdad (3.6).

Si $n = 2$, se sigue de la definición que satisface dicha igualdad. Supongamos que si $j < n$,

$$l(v_1 \wedge \ldots \wedge v_j) = \sum_{i=1}^{j} (-1)^{i+1} v_1 \wedge \ldots \wedge l(v_i) \wedge \ldots \wedge v_j\,.$$

De esa forma

$$\begin{aligned}
l(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) &= l(v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}) \wedge v_n + (-1)^{n-1} v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \wedge l(v_n) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} v_1 \wedge \ldots \wedge l(v_i) \wedge \ldots \wedge v_{n-1}\Big) \wedge v_n \\
&+ (-1)^2 (-1)^{n-1} v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \wedge l(v_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} v_1 \wedge \ldots \wedge l(v_i) \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \wedge v_n \\
&+ (-1)^{n+1} v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \wedge l(v_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} v_1 \wedge \ldots \wedge l(v_i) \wedge \ldots \wedge v_n\,.
\end{aligned}$$

Supongamos que para todo elemento descomponible $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \in \Lambda(V)$ se satisface la igualdad (3.6). Observemos que si $\upsilon = \sum_{i=1}^{m} a_i\,(v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_n}) \in \Lambda_n(V)$ y $\omega = \sum_{j=1}^{t} b_j\,(v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_s}) \in \Lambda_s(V)$, entonces

$$
\begin{aligned}
l(\upsilon \wedge \omega) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{t} a_i\, b_j\, l(v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_n} \wedge v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_s}) \\
&= \sum_{i,k=1}^{m}\sum_{j=1}^{t} (-1)^{k+1} a_i\, b_j\, v_{i_1} \wedge \ldots \wedge l(v_{i_k}) \wedge \ldots \wedge v_{i_n} \wedge v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_s} \\
&+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j,k=1}^{t} (-1)^{n+k+1} a_i\, b_j\, v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_n} \wedge v_{j_1} \wedge \ldots \wedge l(v_{j_k}) \wedge \ldots \wedge v_{j_{n+s}} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{t} a_i\, b_j\, l(v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_n}) \wedge v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_s} \\
&+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{t} (-1)^{n} a_i\, b_j\, v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_n} \wedge l(v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_{n+s}}) \\
&= l(\upsilon) \wedge \omega + (-1)^n \upsilon \wedge l(\omega)\,.
\end{aligned}
$$

Por lo anterior, dado $\zeta = \sum_{m \in \mathbb{N}} w_m \in \Lambda(V)$ donde $w_m \in \Lambda_m(V)$ para toda $m \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
l(\upsilon \wedge \zeta) &= \sum_{m \in \mathbb{N}} l(\upsilon \wedge w_m) = \sum_{m \in \mathbb{N}} l(\upsilon) \wedge w_m + \sum_{m \in \mathbb{N}} (-1)^n \upsilon \wedge l(w_m) \\
&= l(\upsilon) \wedge \zeta + (-1)^n \upsilon \wedge l(\zeta)
\end{aligned}
$$

■

***Proposición* 3.2.3.** Sea $\upsilon \in V$, entonces l_υ^* es una anti-derivación de grado -1.

Demostración. Recordemos que por el isomorfismo Γ entre $\Lambda(V^*)$ y $(\Lambda(V))^*$ dado en (3.3), l_υ^* es considerado un endomorfismo de $\Lambda(V^*)$ al identificarlo con $\tilde{l}_\upsilon$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$
\begin{array}{ccc}
\Lambda(V^*) & \xrightarrow{\tilde{l}_\upsilon} & \Lambda(V^*) \\
\Gamma \downarrow & & \downarrow \Gamma \\
(\Lambda(V))^* & \xrightarrow[l_\upsilon^*]{} & (\Lambda(V))^*
\end{array}
$$

Por los comentarios previos a la definición 3.2.1, basta mostrar que l_υ^* es una anti-derivación. Por el Lema anterior es suficiente verificar que para todo elemento descomponible $v_1^* \wedge \ldots \wedge v_n^*$ en $\Lambda_n(V^*)$

$$\Gamma \circ \tilde{l}_v(v_1^* \wedge \ldots \wedge v_n^*) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+1} l_v^*(v_i^*) \, \langle v_1^* \wedge \ldots \wedge \widehat{v_i^*} \wedge \ldots \wedge v_n^*, \, \cdot \, \rangle_{n-1} \, . \quad (3.7)$$

Para ello analicemos algunas propiedades del grupo de permutaciones S_n. Sea $\sim \subseteq S_n \times S_n$, la relación de equivalencia para la cual $\sigma \sim \tau$ si y sólo si existe $i \in \{ 1, \ldots, n \}$ que satisface que $\sigma(i) = 1 = \tau(i)$. Denotemos como $[\rho]$ a la clase de equivalencia de ρ.

Observemos que dado $[\rho] \in S_n / \sim$ existe un único $\tau \in [\rho]$ que satisface que $\tau(i) = 1$ y $\tau(1) < \ldots < \tau(i-1) < \tau(i+1) < \ldots < \tau(n)$. De hecho

$$\tau = (i \quad i-1 \ldots 2 \quad 1) = (i \quad i-1) \ldots (i \quad 2)(i \quad 1) \, ,$$

por lo que $\operatorname{sig}(\tau) = (-1)^{i-1} = (-1)^{i+1}$. Denotemos como

$$\mathcal{J} = \{ (i \quad i-1 \ldots 2 \quad 1) \, : \, i \in \{ 1, \ldots, n \} \}$$

y como $\widetilde{S}$ al grupo de permutaciones de $\{ 2, \ldots, n \}$. Sea $\tau \in \mathcal{J}$. Observemos que si $\rho \in [\tau]$, existe un único $\sigma \in \widetilde{S}$ para el cual $\rho = \widetilde{\sigma} \circ \tau$, donde $\widetilde{\sigma}$ es un elemento en S_n cuya restricción a $\{ 2, \ldots, n \}$ coincide con σ y para el cual $\widetilde{\sigma}(1) = 1$, De ahí $\operatorname{sig}(\widetilde{\sigma}) = \operatorname{sig}(\sigma)$.

Observemos que para cualquier $w_2 \wedge \ldots \wedge w_n \in \Lambda_{n-1}(V)$, denotando $w_1 = v$ y $\tau_i = (i \quad i-1 \ldots 2 \quad 1)$ para toda $i \in \{ 1, \ldots, n \}$,

$$\begin{aligned}
&(\Gamma^{-1} \circ \tilde{l}_v \, (v_1^* \wedge \ldots \wedge v_n^*)) \, (w_2 \wedge \ldots \wedge w_n) \\
&= (l_v^* \circ \Gamma(v_1^* \wedge \ldots \wedge v_n^*))(w_2 \wedge \ldots \wedge w_n) = \det (v_i^*(w_j))_{ij} \\
&= \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sig}(\rho) \, v_1^*(w_{\rho(1)}) \cdots v_n^*(w_{\rho(n)}) \\
&= \sum_{\tau \in \mathcal{J}} \operatorname{sig}(\tau) \sum_{\sigma \in \widetilde{S}} \operatorname{sig}(\sigma) \, v_1^*(w_{\widetilde{\sigma} \circ \tau(1)}) \cdots v_n^*(w_{\widetilde{\sigma} \circ \tau(n)}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \, v_i^*(v) \sum_{\sigma \in \widetilde{S}} \operatorname{sig}(\sigma) \, v_1^*(w_{\sigma \circ \tau_i(1)}) \cdots \widehat{v_i^*(u)} \cdots v_n^*(w_{\sigma \circ \tau_i(n)}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \, v_i^*(v) \det (v_i^*(w_j))_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+1} l_v^*(v_i^*) \, \langle v_1^* \wedge \ldots \wedge \widehat{v_i^*} \wedge \ldots \wedge v_n^*, \; w_2 \wedge \ldots \wedge w_n \rangle_{n-1} \, ,
\end{aligned}$$

de manera que se satisface la igualdad (3.7).

■

Enseguida analizaremos algunas de las consecuencias de la propiedad universal de los sumandos del producto tensorial de un espacio vectorial en las funciones lineales.

Sea $l : V \longrightarrow W$ una función lineal. Esta función se extiende de forma única a un morfismo de k-álgebras $\hat{l} : \Lambda(V) \longrightarrow \Lambda(W)$, de tal forma que $\hat{l}(1) = 1$ y dado un elemento descomponible $\hat{l}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = l(v_1) \wedge \ldots \wedge l(v_n)$. La existencia y unicidad del morfismo $\hat{l}$ se debe a la propiedad universal del producto tensorial de los sumandos de $\Lambda(V)$ ya que dada $n \in \mathbb{N}$, si $V_i = V$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$, $l_n : V_1 \times \ldots \times V_n \longrightarrow \Lambda_n(W)$ definido como $l_n(v_1, \ldots, v_n) = l(v_1) \wedge \ldots \wedge l(v_n)$, es una función alternante (ejemplo 3.1.7) y por ello existe una única función lineal $\hat{l}_n$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[rr, "\tilde{\varphi}_n"] \arrow[dr, "l_n"'] & & \Lambda_n(V) \arrow[dl, dashed, "\hat{l}_n"] \\ & \Lambda_n(W) & \end{tikzcd}$$

donde $\tilde{\varphi}_n$ es la aplicación $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$. Por la conmutatividad del diagrama, $\hat{l}_n(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = l(v_1) \wedge \ldots \wedge l(v_n)$. De manera que $\hat{l} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{l}_n$ es un morfismo de F-álgebras graduadas que satisface las condiciones descritas.

Análogamente, al considerar $l^* : W^* \longrightarrow V^*$, el mapeo dual de l, existe un único morfismo de F-álgebras graduadas $\delta l : \Lambda(W^*) \longrightarrow \Lambda(V^*)$ que satisface que

$$\delta l(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = l^*(v_1) \wedge \ldots \wedge l^*(v_n) = \delta l(v_1) \wedge \ldots \wedge \delta l(v_n)\,.$$

Considerando los isomorfismos

$$\Gamma_V : \Lambda(V^*) \longrightarrow (\Lambda(V))^* \quad \text{y} \quad \Gamma_W : \Lambda(W^*) \longrightarrow (\Lambda(W))^*,$$

se verifica en forma sencilla que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \Lambda(W^*) \arrow[r, "\delta l"] \arrow[d, "\Gamma_W"'] & \Lambda(V^*) \arrow[d, "\Gamma_V"] \\ (\Lambda(W))^* \arrow[r, "\hat{l}^*"'] & (\Lambda(V))^* \end{tikzcd} \tag{3.8}$$

3.3. Campos tensoriales y formas diferenciales

En esta sección aplicaremos los resultados que hemos obtenido previamente para el caso de espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, a saber, los espacios tangentes de una variedad diferenciable y sus espacios duales.

Definición 3.3.1. Sea M una variedad diferenciable y $n \in \mathbb{N}$.

1. Llamaremos *haz tensorial de tipo* (r,s) *sobre* M al conjunto

$$T_{r,s}(M) = \bigcup_{m \in M} (T_m M)_{r,s} \,.$$

2. Llamaremos n*-ésimo haz exterior sobre* M al conjunto

$$\Lambda_n^*(M) = \bigcup_{m \in M} \Lambda_n(T_m^* M) \,.$$

3. Llamaremos *haz de álgebra exterior sobre* M al conjunto

$$\Lambda^*(M) = \bigcup_{m \in M} \Lambda(T_m^* M) \,.$$

Observemos que si $(r,s) = (0,0)$ y $n = 0$ entonces $T_{r,s}(M)$ y $\Lambda_n^*(M)$ son uniones disjuntas de $\mathbb{R}$ tantas veces como la cardinalidad de M.

Al igual que para el haz tangente y el haz contangente, existen proyecciones canónicas de estos conjuntos sobre M:

$$\begin{aligned} \pi_{r,s} : T_{r,s}(M) &\longrightarrow M \,, & \pi_{r,s}(\zeta) &= m & &\text{si } \zeta \in (T_m M)_{r,s} \,, \\ \pi_n : \Lambda_n^*(M) &\longrightarrow M \,, & \pi_n(\omega) &= m & &\text{si } \omega \in \Lambda_n(T_m^* M) \,, \\ \pi_\Lambda : \Lambda^*(M) &\longrightarrow M \,, & \pi_\Lambda(\upsilon) &= m & &\text{si } \upsilon \in \Lambda(T_m^* M) \,. \end{aligned}$$

Observemos que para toda $m \in M$, si (U, φ) es un sistema coordenado de M alrededor de m, con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_d$, entonces $\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\big|_m \}$ y $\{ d(x_i)_m \}$ son bases de $T_m M$ y $T_m^* M$ respectivamente, e inducen bases en $(T_m M)_{r,s}$, $\Lambda_k(T_m^* M)$, y $\Lambda(T_m^* M)$ (obtenidas mediante los Lemas 3.1.3 y 3.1.9). A saber,

$$\lambda_{r,s} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\bigg|_m \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\bigg|_m \otimes d(x_{j_1})_m \otimes \ldots \otimes d(x_{j_s})_m \,:\, 1 \leqslant i_k,\, j_l \leqslant d \right\}$$

es una base de $(T_m M)_{r,s}$ y

$$\beta_n = \left\{ d(x_{i_1})_m \wedge \ldots \wedge d(x_{i_n})_m \,:\, i_1 < \ldots < i_n \right\}$$

es una base de $\Lambda_n(T_m^* M)$ y por lo tanto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \beta_n$ es una base de $\Lambda(T_m^* M)$.

Las analogías con el haz vectorial y el haz tangente continuan ya que estos conjuntos también reciben estructuras de variedad diferenciable que hacen a dichas proyecciones mapeos suaves. Más aún, los mapeos coordenados de dichas estructuras son obtenidos a partir de sistemas coordenados de M y las bases inducidas por las funciones coordenadas, al igual que las de los haces tangente y cotangente. Enseguida mostraremos la existencia de dicha estructura para $\Lambda^*_n(M)$. La prueba para los otros dos casos son totalmente análogos.

***Proposición* 3.3.2.** Sea M^d una variedad, entonces para toda $n \in N$ $\Lambda^*_n(M)$ recibe una estructura de variedad diferenciable con la cual π_n resulta una función suave.

Demostración. Si $n < d$ entonces $\Lambda^*_n(M)$ es igual a $M \times \{ 0 \}$. Supongamos que $n \leqslant d$. Sea (U, φ) un sistema coordenado de M con funciones cordenadas $x_1, \ldots, x_d$. Sean $m \in U$ y

$$\beta_n = \left\{ d(x_{i_1})_m \wedge \ldots \wedge d(x_{i_n})_m \,:\, i_1 < \ldots < i_n \right\}$$

la base de $\Lambda_n(T^*_m M)$ con cardinalidad $\Gamma_n = \binom{d}{n}$, inducida por dicho sistema coordenado. Denotemos como $\mathcal{J}_n$ a la familia de subconjuntos de $\{ 1, \ldots, d \}$ que tienen cardinalidad n y con un orden parcial $\prec$. Consideremos la función biyectiva $\widetilde{\varphi}_n : \pi_n^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^{\Gamma_n}$ definida como

$$\widetilde{\varphi}_n(\omega) = \left(\varphi \circ \pi_n(\omega), \left(\omega\left(\tfrac{\partial}{\partial x_\phi} \right) \right)_{\phi \in \mathcal{J}_n} \right).$$

Denotemos como $\mathfrak{F}$ a la estructura diferenciable de M. Veamos que la familia

$$\mathfrak{J} = \left\{ \left(\pi_n^{-1}(U), \widetilde{\varphi}_n \right) \,:\, (U, \varphi) \in \mathfrak{F} \right\}$$

satisface las condiciones de la Proposición 2.3.2.

Sea $\big(V, \tau = (y_1, \ldots, y_d)\big) \in \mathfrak{F}$. Consideremos $\zeta = \{ i_1, \ldots, i_n \} \in \mathcal{J}_n$, donde $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant d$, de modo que la función $\gamma_\zeta : \tau(U \cap V) \times \mathbb{R}^{\Gamma_n} \longrightarrow \mathbb{R}^{\Gamma_n}$ definida como

$$\gamma_\zeta\big(s, (s_\phi)_{\phi \in \mathcal{J}_n}\big) = \sum_{\substack{\phi \in \mathcal{J}_n \\ \phi = \{ j_1 < \cdots < j_n \}}} s_\phi \det \left(\tfrac{\partial (y_{j_l} \circ \varphi^{-1})}{\partial r_{i_s}} (s) \right)_{ls}$$

es suave. Por ello el mapeo $\widetilde{\varphi}_n \circ \widetilde{\tau}_n^{-1} : \tau(U \cap V) \times \mathbb{R}^{\Gamma_n} \longrightarrow \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^{\Gamma_n}$ que satisface

$$\widetilde{\varphi}_n \circ \widetilde{\tau}_n^{-1}\big(s, (s_\phi)_{\phi \in \mathcal{J}_n}\big) = \Big(\varphi \circ \tau^{-1}(s), \, \big(\gamma_\zeta\big(s, (s_\phi)_{\phi \in \mathcal{J}_n}\big) \big)_{\zeta \in \mathcal{J}_n} \Big)$$

para todo $\big(s, (s_\phi)_{\phi \in \mathcal{J}_n}\big) \in \tau(U \cap V) \times \mathbb{R}^{\Gamma_n}$, es suave.

Sean $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^*_n(M)$ elementos distintos. Si $\pi_n(\omega_1) \neq \pi_n(\omega_2)$ entonces gracias a que M es Hausdorff existen (U_1, φ_1), $(U_2, \varphi_2) \in \mathfrak{F}$ para los cuales U_1 y U_2 son ajenos y $\pi_n(\omega_1) \in U_1$, $\pi_n(\omega_2) \in U_2$. De modo que $\omega_1 \in \pi_n^{-1}(U_1)$,

$\omega_2 \in \pi_n^{-1}(U_2)$ y $\pi_n^{-1}(U_1) \cap \pi_n^{-1}(U_2) = \emptyset$. Si $\pi_n(\omega_1) = \pi_n(\omega_2)$ entonces existe $(U, \varphi) \in \mathfrak{F}$ de tal modo que $\pi_n(\omega_1) \in U$, es decir $\omega_1, \omega_2 \in \pi_n^{-1}(U)$.

Finalmente, gracias a que la función π_n es suprayectiva y M es segundo numerable existe $\left\{ \left(\pi_n^{-1}(U_k), \widetilde{\varphi}_n^k\right) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ un subconjunto numerable de $\mathfrak{J}$ que satisface que $\left\{ \pi_n^{-1}(U_k) \right\}$ es una cubierta de $\Lambda_n^*(M)$. Por ello, $\Lambda_n^*(M)$ con la topología

$$\tau = \{ W \subseteq \Lambda_n^*(M) \,:\, \text{para todo } (U, \varphi) \in \mathfrak{F},\ \varphi(W \cap U) \subseteq \mathbb{R}^d \text{ es abierto} \}\,.$$

y la estructura diferenciable inducida por $\mathfrak{J}$, es una variedad diferenciable.

Para cualesquiera $(U, \varphi), (V, \tau) \in \mathfrak{F}$, si $\left(s, (s_\phi)_{\phi \in \mathcal{J}_n}\right) \in \tau(U \cap V) \times \mathbb{R}^{\Gamma_n}$ entonces

$$\varphi \circ \pi_n \circ \widetilde{\tau}_n^{-1}\big(s, (s_\phi)_{\phi \in \mathcal{J}_n}\big) = \varphi(s)\,,$$

es decir, $\varphi \circ \pi_n \circ \widetilde{\tau}_n^{-1}$ es una función suave. De esa forma se tiene que π_n es suave con la estructura de variedad diferenciable inducida por la familia $\mathcal{J}$.

■

Definición 3.3.3. Sea M una variedad diferenciable

1. Diremos que un mapeo suave $\psi : M \longrightarrow T_{r,s}(M)$ es un *campo tensorial de tipo* (r, s) *sobre* M si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & T_{r,s}(M) \arrow[d, "\pi_{r,s}"] \\ M \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "\mathrm{id}_M"'] & M \end{tikzcd}$$

   es decir, la composición de ψ con la proyección canónica $\pi_{r,s}$ es la identidad en M.

2. Diremos que un mapeo suave $\psi : M \longrightarrow \Lambda_n^*(M)$ es una *n-forma diferencial sobre* M si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & \Lambda_n^*(M) \arrow[d, "\pi_n"] \\ M \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "\mathrm{id}_M"'] & M \end{tikzcd}$$

   es decir, la composición de ψ con la proyección canónica π_n es la identidad en M.

3. Diremos que un mapeo suave $\psi : M \longrightarrow \Lambda^*(M)$ es una *forma diferencial sobre* M si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & \Lambda^*(M) \arrow[d, "\pi_\Lambda"] \\ M \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "\mathrm{id}_M"'] & M \end{tikzcd}$$

es decir, la composición de ψ con la proyección canónica π_Λ es la identidad en M.

Si ω es un campo tensorial sobre M, una n-forma diferencial sobre M o una forma diferencial sobre M, usualmente $\omega(m)$ será denotado como ω_m.

Observación 3.3.4. De la definición de las estructuras diferenciables para las haces se sigue directamente que:

I. Un levantamiento de id_M, $\psi : M \longrightarrow T_{r,s}(M)$, es un campo tensorial suave de tipo (r,s) si y sólo si para cualquier mapeo coordenado (U,φ) de M con funciones coordenadas $x_1,\ldots,x_d$,

$$\psi\big|_U = \sum_{1\leqslant i_k,\, j_l\leqslant d} a^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \otimes dx_{j_1} \otimes \ldots \otimes dx_{j_s},$$

donde $a^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} \in C^\infty(U)$, para cualesquiera $1 \leqslant i_k,\, j_l \leqslant d$.

II. Un levantamiento de id_M, $\psi_n : M \longrightarrow \Lambda^*_n(M)$, es una n-forma diferencial si y sólo si para cualquier mapeo coordenado (U,φ) de M con funciones coordenadas $x_1,\ldots,x_d$,

$$\psi_n\big|_U = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_n\leqslant d} b_{i_1,\ldots,i_n} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_n},$$

donde $b_{i_1,\ldots,i_n} \in C^\infty(U)$, para cualesquiera $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant d$.

Si $\psi : M \longrightarrow \Lambda^*(M)$ es un levantamiento de id_M, resulta una 1-forma si y sólo si $\psi = \sum_{n\in\mathbb{N}} \psi_n$, donde ψ_n es una n-forma para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto se sigue directamente de la estructura de variedad diferenciable de $\Lambda^*(M)$. Dicha suma es finita ya $\psi_n \equiv 0$, si $n > \dim M$.

Así como consideramos el conjunto de campos vectoriales suaves en una variedad, denotaremos como $E^n(M)$ al conjunto de n-formas diferenciales de M y como $E^*(M)$ al conjunto de formas diferenciales. Por la observación 3.3.4 inciso II, $E^*(M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E^n(M)$.

Observemos que podemos dotar a $E^n(M)$ y $E^*(M)$ de estructuras de espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. A saber, si $\omega, \upsilon \in E^n(M)$ (o $\omega, \upsilon \in E^*(M)$) y $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos $\omega + \upsilon$ y $\lambda\omega$ como

$$
\begin{aligned}
(\omega + \upsilon)_m &= \omega_m + \upsilon_m \\
(\lambda\omega)_m &= \lambda(\omega_m)\,,
\end{aligned}
$$

para todo $m \in M$. Más aún, $E^*(M)$ tiene una estructura de $\mathbb{R}$-álgebra graduada sobre $\mathbb{R}$ al considerar el producto exterior de formas diferenciales $\omega \wedge \upsilon$ definido como

$$
(\omega \wedge \upsilon)_m = \omega_m \wedge \upsilon_m\,,
$$

para todo $m \in M$. Veamos que además podemos darle una estructura de $C^\infty(M)$-módulo.

Podemos identificar canónicamente $E^0(M)$ con $C^\infty(M)$ al considerar $\Lambda_0^*(M)$ como $M \times \mathbb{R}$, pues de esa forma todo elemento de $E^0(M)$ es la gráfica de una función de M en $\mathbb{R}$. Así, considerando $\pi_2 : M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la función

$$
\begin{aligned}
E^0(M) &\xrightarrow{\Psi} C^\infty(M) \\
\omega \;&\longmapsto \pi_2 \circ \omega
\end{aligned}
$$

es biyectiva, con inversa

$$
\begin{aligned}
C^\infty(M) &\xrightarrow{\widetilde{\Psi}} E^0(M) \\
f \;&\longmapsto (\mathrm{id}_M, f)
\end{aligned}
$$

(de hecho es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales). De modo que

$$
\begin{aligned}
C^\infty(M) \times E^*(M) &\xrightarrow{\cdot} E^*(M) \\
(f, \omega) \;&\longmapsto \widetilde{\Psi}(f) \wedge \omega
\end{aligned}
$$

Usualmente identificaremos f con $\widetilde{\Psi}(f)$. Así abreviaremos como $f\,\omega$ a $f \wedge \omega$.

En lo siguiente se analizarán algunas de las relaciones que existen entre los campos vectoriales de una variedad y el conjunto de formas diferenciales de la misma.

Consideremos el isomorfismo entre $\Lambda_n(T_m^*M)$ y $A_n(T_m^*M)$ dado en la observación 3.1.8. Bajo esa identificación, para todo $\omega \in \Lambda_n(M)$ y $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega_m(X_1(m), \ldots, X_n(m)) \in \mathbb{R}$. De esa forma podemos considerar ω como el mapeo multilineal alternante

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\
(X_1, \ldots, X_n) \;&\longmapsto \omega(X_1, \ldots, X_n)
\end{aligned}
$$

Dadas las estructuras de $C^\infty(M)$-módulo de $\mathfrak{X}(M)$ y $C^\infty(M)$, dicho mapeo resulta ser $C^\infty(M)$-multilineal, es decir que para cualesquiera $f, g \in C^\infty(M)$ y $X_1, \ldots, X_{i-1}, X, Y, X_{i+1}, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} \omega(X_1, \ldots, X_{i-1}, f\,X + g\,Y, &X_{i+1}, \ldots, X_n) \\ &= f\,\omega(X_1, \ldots, X_{i-1}, X, X_{i+1}, \ldots, X_n) \\ &\qquad + g\,\omega(X_1, \ldots, X_{i-1}, Y, X_{i+1}, \ldots, X_n)\,. \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\Lambda_1^*(M) = \bigcup_{m\in M} \Lambda_1(T_m^*M) = \bigcup_{m\in M} T_m^*M = T^*M\,.$$

Si $f \in C^\infty(M)$, $df_m \in T_m^*M$ para cualquier $m \in M$. De ese modo podemos considerar a $df : M \longrightarrow \Lambda_1^*(M)$ como una 1-forma, gracias a que f es suave (observación 3.3.4 inciso II).

Definición 3.3.5. Sea $f \in C^\infty(M)$. La 1-forma $df : M \longrightarrow \Lambda_1^*(M)$ es llamada la *derivada exterior de la* 0*-forma* f.

Veremos que existe una *anti-derivación* de $E^*(M)$ que envía las 0-formas en sus derivadas, es decir, extiende a la diferencial de funciones. La llamaremos *derivada exterior.*

Teorema 3.3.6. (Derivada Exterior) *Existe una única anti-derivación $d : E^*(M) \longrightarrow E^*(M)$ de grado 1 que satisface:*

I. $d^2 = 0$.

II. *Para toda* 0*-forma* f, df *es la derivada de* f.

Demostración. Sea $p \in M$. Denotemos como $E^*(p)$ al conjunto de formas definidas en vecindades abiertas de p en M. Análogamente, $E^n(p)$ denotará al conjunto de n-formas definidas en vecindades abiertas de p en M. Sea (U, φ) un sistema coordenado alrededor de p, con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_d$. Entonces para todo $\omega \in E^*(p)$

$$\omega\big|_{\mathrm{dom}\,\omega\cap U} = \sum_{\phi\subseteq\{\,1,\ldots,d\,\}} a_\phi\, dx_\phi\,,$$

donde $a_\phi \in C^\infty(\mathrm{dom}\,\omega \cap U)$, $dx_\phi = 1$ si $\phi = \emptyset$, y $dx_\phi = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_n}$ si $\phi = \{\,i_1, \ldots, i_n\,\}$ y $i_1 < \ldots < i_n$.

Consideremos la función $d_p : E^*(p) \longrightarrow \Lambda(T_p^*M)$ definida como

$$d_p(\omega) = \sum_{\phi\subseteq\{\,1,\ldots,d\,\}} d(a_\phi)_p \wedge d(x_\phi)_p\,.$$

Al igual que $E^*(M)$, $E^*(p)$ es un $\mathbb{R}$-álgebra graduada y d_p es una función lineal. Enseguida se probarán una serie de afirmaciones que caracterizan a d_p y nos serán de utilidad al definir d.

I. *Para cualesquiera* $\omega \in E^r(p)$, $\upsilon \in E^*(p)$

$$d_p(\omega \wedge \upsilon) = d_p\omega \wedge \upsilon_p + (-1)^r \omega_p \wedge d_p\upsilon\,. \tag{3.9}$$

Dada la distribución del producto exterior, sin pérdida de generalidad supongamos que $\omega = f\,dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$ y $\upsilon = g\,dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s}$, donde $f \in C^\infty(\operatorname{dom}\omega \cap U)$ y $g \in C^\infty(\operatorname{dom}\upsilon \cap U)$. De esa forma $\omega \wedge \upsilon$ esta definida en $\operatorname{dom}\omega \cap \operatorname{dom}\upsilon$ y

$$(\omega \wedge \upsilon)\big|_{\operatorname{dom}(\omega\cap\upsilon)\cap U} = fg\,dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s}\,.$$

Si $\{\, i_1, \ldots, i_r \,\} \cap \{\, j_1, \ldots, j_s \,\} \neq \emptyset$ entonces $d_p(\omega \wedge \upsilon) = 0$ y

$$\begin{aligned} &d_p\omega \wedge \upsilon_p + (-1)^r \omega_p \wedge d_p\upsilon \\ &\qquad = g(p)\,df_p \wedge d(x_{i_1})_p \wedge \ldots \wedge d(x_{i_r})_p \wedge d(x_{j_1})_p \wedge \ldots \wedge d(x_{j_s})_p \\ &\qquad + f(p)\,d(x_{i_1})_p \wedge \ldots \wedge d(x_{i_r})_p \wedge dg_p \wedge d(x_{j_1})_p \wedge \ldots \wedge d(x_{j_s})_p \end{aligned}$$

es igual a cero (ejemplo 3.1.7).

Supongamos que $\{\, i_1, \ldots, i_r \,\} \cap \{\, j_1, \ldots, j_s \,\} = \emptyset$. Considerando

$$\{\, l_1, \ldots, l_{r+s} \,\} = \{\, i_1, \ldots, i_r \,\} \cup \{\, j_1, \ldots, j_s \,\}\,,$$

de tal forma que $1 \leqslant l_1 < \cdots < l_{r+s} \leqslant d$, y $\sigma \in S_d$ tal que

$$dx_{\sigma(l_1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\sigma(l_{r+s})} = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s}\,,$$

por el ejemplo 3.1.7,

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \upsilon)\big|_{\operatorname{dom}(\omega\cap\upsilon)\cap U} &= fg\,dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s} \\ &= \operatorname{sig}(\sigma)\,fg\,dx_{l_1} \wedge \ldots \wedge dx_{l_{r+s}}\,. \end{aligned}$$

De ese modo

$$\begin{aligned} d_p(\omega \wedge \upsilon) &= \operatorname{sig}(\sigma)\,(g(p)\,df_p + f(p)\,dg_p) \wedge d(x_{l_1})_p \wedge \ldots \wedge d(x_{l_{r+s}})_p \\ &= \operatorname{sig}(\sigma)\,g(p)\,df_p \wedge d(x_{l_1})_p \wedge \ldots \wedge d(x_{l_{r+s}})_p \\ &+ \operatorname{sig}(\sigma)\,f(p)dg_p \wedge d(x_{l_1})_p \wedge \ldots \wedge d(x_{l_{r+s}})_p \\ &= df_p \wedge d(x_{i_1})_p \wedge \ldots \wedge d(x_{i_r})_p \wedge dg(p)\,(x_{j_1})_p \wedge \ldots \wedge d(x_{j_s})_p \\ &+ (-1)^r f(p)\,d(x_{i_1})_p \wedge \ldots \wedge d(x_{i_r})_p \wedge dg_p \wedge d(x_{j_1})_p \wedge \ldots \wedge d(x_{j_s})_p \\ &= d_p\omega \wedge \upsilon_p + (-1)^r \omega_p \wedge d_p\upsilon\,. \end{aligned}$$

II. *Si $f \in C^\infty(V)$, donde V es una vecindad de p, entonces $d_p(df) = 0$.*

Sabemos que $df \in E^1(p)$, de modo que $df\big|_{V\cup U} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i$. Así, $d_p(df) = \sum_{i=1}^d d\big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big)_p \wedge d(x_i)_p$, donde $d\big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big)$ es un elemento de $E^1(p)$ definido en $V \cap U$ y por lo tanto es expresado como

$$d\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) = \sum_{l=1}^{d} d\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_l}\Big)dx_l = \sum_{l=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l\, \partial x_i}\, dx_l\,.$$

Por ello

$$d_p(df) = \sum_{i,l=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l\, \partial x_i}\Big|_p d(x_l)_p \wedge (dx_i)_p\,,$$

el cual es igual a cero por la anticonmutatividad del producto exterior (observación 3.1.5) y gracias a que las derivadas parciales conmutan.

III. *Si ω_1, $\omega_2 \in E^*(p)$ son iguales en una vecindad de p entonces $d_p\,\omega_1 = d_p\,\omega_2$.*

Esto se obtiene directamente del hecho de que la representación de ω_1 y ω_2 en términos de la base $\{\, dx_\phi \,\}$ es la misma en la vecindad en la que coinciden.

IV. *La definición de d_p no depende del sistema coordenado elegido.*

Sea (V, τ) sistema coordenado alrededor de p, con funciones coordenadas $y_1, \ldots, y_d$. Sea $d_p' : E^*(p) \longrightarrow \Lambda(T_p^* M)$ la función lineal definida como

$$d_p'\Big(\sum_{\phi\subseteq\{\,1,\ldots,d\,\}} a_\phi\, dy_\phi\Big) = \sum_{\phi\subseteq\{\,1,\ldots,d\,\}} d(a_\phi)_p \wedge d(y_\phi)_p\,.$$

Ya que para todo $m \in U \cap V$, si $i \in \{\,1, \ldots, d\,\}$,

$$d(x_i)_m = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\bigg|_m d(y_j)_m\,,$$

y para toda $j \in \{\,1, \ldots, d\,\}$, $d\big(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\big)_m = \sum_{l=1}^d \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_l \partial y_j}\big|_m d(y_l)_m$, se tiene que

$$d_p'\,(d(x_i)_m) = \sum_{j,l=1}^{d} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_l \partial y_j}\bigg|_m d(y_l)_m \wedge d(y_j)_m = 0\,. \tag{3.10}$$

Como d_p' satisface la propiedad I y la igualdad (3.10), si $\omega = \sum_{\phi\subseteq\{\,1,\ldots,d\,\}} b_\phi\, dx_\phi$,

$$\begin{aligned}
d'_p(\omega) &= \sum_{\phi\subseteq\{1,\ldots,d\}} d'_p(b_\phi)\wedge d(x_\phi)_p + \sum_{\phi\subseteq\{1,\ldots,d\}} b_\phi(p)d'_p(d(x_\phi)) \\
&= \sum_{\phi\subseteq\{1,\ldots,d\}} d'_p(b_\phi)\wedge d(x_\phi)_p \\
&+ \sum_{\substack{\phi\subseteq\{1,\ldots,d\} \\ \phi=\{i_1,\ldots,i_k\}}} \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l-1} b_\phi(p)\, d(x_{i_1})_p \wedge\cdots\wedge d'_p(d(x_{i_l}))\wedge\cdots\wedge d(x_{i_k}) \\
&= \sum_{\phi\subseteq\{1,\ldots,d\}} d(b_\phi)_p\wedge d(x_\phi)_p = d_p(\omega)\,.
\end{aligned}$$

De esto se concluye que $d'_p = d_p$.

Consideremos a la función $d : E^*(M) \longrightarrow E^*(M)$, definida como $d\omega(p) = d_p(\omega)$, para cualesquiera $\omega\in E^*(M)$ y $p\in M$ (d_p es la función lineal definida previamente, que no depende de la elección del sistema coordenado por el inciso IV). Denotaremos a $d\omega(p)$ como $d\omega_p$.

Por definición d es una anti-derivación de grado 1 que satisface el inciso II del Teorema. Veamos que satisface el inciso I. Sea $\omega\in E^*(M)$ y $p\in M$. Mostraremos que $(d^2\omega)(p)=0$. Sea (U,φ) un sistema coordenado alrededor de p, con funciones coordenadas $x_1,\ldots,x_d$. Entonces para todo $\omega\in E^*(p)$

$$d\omega\big|_U = \sum_{\phi\subseteq\{1,\ldots,d\}} da_\phi\wedge dx_\phi\,.$$

Por las propiedades I y II, $d_p(da_\phi)=0$ y $d_p(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})=0$, para todo $\phi=\{1,\ldots,k\}$ subconjunto de $\{1,\ldots,d\}$. Por la propiedad I,

$$\begin{aligned}
d(d\omega)(p) = d_p(d\omega) &= \sum_{\phi\subseteq\{1,\ldots,d\}} d_p(da_\phi\wedge dx_\phi) \\
&= \sum_{\phi\subseteq\{1,\ldots,d\}} d_p(da_\phi)\wedge d(x_\phi)_p \\
&- \sum_{\phi\subseteq\{1,\ldots,d\}} d(a_\phi)_p\wedge d_p(dx_\phi) = 0\,.
\end{aligned}$$

Con esto concluimos la existencia. Veamos ahora la unicidad, para lo que mostraremos que dada $\tilde{d}$, una anti-derivación que satisface las condiciones I y II del Teorema, esta puede ser tomada localmente, es decir, considerar a $\tilde{d}$ en $E^*(p)$, para toda p.

Consideremos $\omega\in E^*(M)$ que se anula en $V\subseteq M$ una vecindad abierta de p. Sea $V'\subseteq M$ vecindad abierta de p cuya cerradura se queda contenida en V, de forma que existe $\varphi\in C^\infty(M)$ que satisface que $0\leqslant\varphi\leqslant 1$,

$\varphi(p) = 0$ y $\varphi|_{M\setminus\overline{V'}} \equiv 1$ (véase la función dada en 1.2 de la sección 1.2). Por ello $\varphi\omega = \omega$, siguiéndose del hecho de que $\tilde{d}$ es una anti-derivación que

$$\tilde{d}\omega_p = \tilde{d}(\varphi\omega)_p = \tilde{d}\varphi_p \wedge \omega_p + \varphi(p)\tilde{d}\omega_p = 0\,.$$

En particular nos dice que las formas diferenciales que coinciden en una vecindad abierta de p tienen el mismo valor bajo $\tilde{d}$ en p.

Consideremos $\tilde{d}_p : E^*(p) \longrightarrow \Lambda(T_p^*M)$, que aplica $\upsilon \in E^*(p)$ en $\tilde{d}(\varphi_\upsilon \upsilon)(p)$, donde $\varphi_\upsilon \in C^\infty(M)$ es tal que $0 \leqslant \varphi_\upsilon \leqslant 1$, $\varphi_\upsilon|_{M\setminus\overline{U}} \equiv 0$ y $\varphi_\upsilon|_{U'} \equiv 1$, siendo U', U vecindades abiertas de p para las cuales $\overline{U'} \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \operatorname{dom}\upsilon$ (véase la función dada en (1.2) de la sección 1.2). Así $\varphi_\upsilon\upsilon \in E^*(M)$. Por la observación previa, la definición no depende de la extensión que tenga υ a una forma. Gracias a que $\tilde{d}$ es un anti-derivación, $\tilde{d}_p$ es una función lineal y si $\upsilon \in E^r(M)$, $\tilde{d}_p\upsilon \in \Lambda_{r+1}(T_p^*M)$.

Sean $\omega_1 \in E^r(M)$ y $\omega_2 \in E^*(p)$. Sea $\varphi \in C^\infty(M)$ que satisface que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi|_{M\setminus\overline{U}} \equiv 0$ y $\varphi|_{U'} \equiv 1$, siendo U', U vecindades abiertas de p para las cuales $\overline{U'} \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \operatorname{dom}\omega_1 \cap \operatorname{dom}\omega_2$ (véase la función dada en (1.2) de la sección 1.2). Así $\varphi\omega_1 \wedge \varphi\omega_2$ es una extensión de $\omega_1 \wedge \omega_2$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_p(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \tilde{d}(\omega_1 \wedge \omega_2)(p) = \tilde{d}(\varphi\omega_1 \wedge \varphi\omega_2)(p)\\
&= \tilde{d}(\varphi\omega_1)(p) \wedge \varphi(p)(\omega_2)_p + (-1)^{r-1}\varphi(p)(\omega_1)_p \wedge \tilde{d}(\varphi\omega_2)(p)\\
&= \tilde{d}(\omega_1)(p) \wedge (\omega_2)_p + (-1)^{r-1}(\omega_1)_p \wedge \tilde{d}(\omega_2)(p)\\
&= \tilde{d}_p\omega_1 \wedge (\omega_2)_p + (-1)^{r-1}(\omega_1)_p \wedge \tilde{d}_p\omega_2\,.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $f \in C^\infty(V)$, donde V es una vecindad abierta de p, y f_0 es una extensión de f,

$$\tilde{d}_p(df_0) = \tilde{d}(\tilde{d}f_0)(p) = \tilde{d}^2 f_0(p) = 0\,.$$

Veamos que $\tilde{d}_p = d_p$. Sean $\omega \in E^*(p)$ y (U, τ) sistema coordenado alrededor de p, con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_d$. Consideremos $\varphi \in C^\infty(M)$ que satisface que $\varphi|_{V'} \equiv 1$ y $\varphi|_{M\setminus\overline{V}} \equiv 0$, donde V, V' son vecindades abiertas de p, tales que $\overline{V'} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U \cap \operatorname{dom}\omega$. Si

$$\omega\big|_{\operatorname{dom}\omega\cap U} = \sum_{\phi\subseteq\{1,\ldots,d\}} a_\phi\, dx_\phi\,,$$

una extensión de ω a una forma en M es

$$\widetilde{\omega} = \sum_{\substack{\phi\subseteq\{1,\ldots,d\}\\ \phi=\{i_1,\ldots,i_k\}}} \varphi a_\phi\,(\varphi dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi dx_{i_k})\,.$$

De esa forma, como $\tilde{d}(\varphi x_i) = d(\varphi x_i) = dx_i$, se tiene que $\tilde{d}(\varphi dx_i) = \tilde{d}(d(\varphi x_i)) = \tilde{d}(\tilde{d}(\varphi x_i)) = 0$ y de ahí

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_p(\omega) = \tilde{d}(\omega)(p) = & \sum_{\substack{\phi\subseteq\{1,\ldots,d\} \\ \phi=\{i_1,\ldots,i_k\}}} \tilde{d}\big(\varphi a_\phi \left(\varphi dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi dx_{i_k}\right)\big)(p) \\
= & \sum_{\substack{\phi\subseteq\{1,\ldots,d\} \\ \phi=\{i_1,\ldots,i_k\}}} \tilde{d}(\varphi a_\phi)(p) \wedge \varphi(p)d(x_{i_1})_p \wedge \cdots \wedge \varphi(p)d(x_{i_k})_p \\
= & \sum_{\substack{\phi\subseteq\{1,\ldots,d\} \\ \phi=\{i_1,\ldots,i_k\}}} d(a_\phi)_p \wedge d(x_{i_1})_p \wedge \cdots \wedge d(x_{i_k})_p = d_p(\omega)\,.
\end{aligned}$$

De modo que si $\omega \in E^*(M)$, para todo $p \in M$

$$\tilde{d}\omega(p) = \tilde{d}_p(\omega) = d_p(\omega) = d\omega(p)\,.$$

Por ello se tiene que para toda $\omega \in E^*(M)$, $\tilde{d}\omega = d\omega$, concluyendo así la unicidad de la anti-derivación d.

■

Enseguida analizaremos endomorfismos de $E^*(M)$ relacionados con aquellos vistos en la sección 3.2, incluyendo la *multiplicación interior por campos vectoriales.*

Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in E^*(M)$. Consideremos $i(X)\omega : M \longrightarrow \Lambda^*(M)$, definida como $(i(X)\omega)(m) = \tilde{l}_{X_m}(\omega_m)$, donde $\tilde{l}_{X_m}$ es la *multiplicación interior por* X_m, definida en la sección 3.2, que resulta una anti-derivación de grado -1 (Proposición 3.2.3). Recordemos que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Lambda(T_m^*M) \arrow[r, "\tilde{l}_{X_m}"] \arrow[d, "\Gamma_m"'] & \Lambda(T_m^*M) \arrow[d, "\Gamma_m"] \\
(\Lambda(T_mM))^* \arrow[r, "l^*_{X_m}"'] & (\Lambda(T_mM))^*
\end{tikzcd}$$

donde $l^*_{X_m}$ es el endomorfismo dual de l_{X_m} que envía $\upsilon \in \Lambda(T_mM)$ en $X_m \wedge \upsilon$, y Γ_m es el isomorfismo cánonico entre $\Lambda(T_m^*M)$ y $(\Lambda(T_mM))^*$ definido en (3.3) de la sección 3.2. Afirmamos que $i(X)\omega \in E^*(M)$. Para mostrarlo basta ver que es un mapeo suave.

Sea (U,φ) sistema coordenado en M, con funciones coordenadas $x_1,\ldots,x_d$. Sabemos que

$$\omega|_U = \sum_{\phi \subseteq \{1,\ldots,d\}} a_\phi dx_\phi,$$

y $X|_U = \sum_{j=1}^d b_j \frac{\partial}{\partial x_i}$, donde $a_\phi, b_j \in C^\infty(U)$.

Consideremos $\phi = \{ i_1, \ldots, i_n \}$ subconjunto de $\{1, \ldots, d\}$ de tal forma que $i_1 < \cdots < i_n$. Sean $m \in U$, $\frac{\partial}{\partial x_\varphi}\big|_m = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\big|_m \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\big|_m$ y $h_{i_1,\ldots,i_n} = \Gamma_m(d(x_\varphi)_m)$. Por la observación 3.1.13, para todo $m \in M$ $\{ h_{i_1,\ldots,i_n} \}$ es base dual de $\{ \frac{\partial}{\partial x_\varphi}\big|_m \}$, de modo que

$$l^*_{X_m} \circ \Gamma_m(\omega_m) = \sum_{\substack{\phi \subseteq \{1,\ldots,d\} \\ \phi = \{ i_1,\ldots,i_k \}}} a_\phi(m)\, h_{i_1,\ldots,i_n} \circ l_{X_m},$$

donde $h_{i_1,\ldots,i_n} \circ l_{X_m} = \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} b_{i_l}(m) h_{i_1,\ldots,\widehat{i_l},\ldots,i_n}$. Por la conmutatividad del diagrama se tiene que

$$\Gamma_m \circ \tilde{l}_{X_m}(\omega_m) = \sum_{\substack{\phi \subseteq \{1,\ldots,d\} \\ \phi = \{ i_1,\ldots,i_k \}}} \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} a_\phi(m) b_{i_l}(m)\, h_{i_1,\ldots,\widehat{i_l},\ldots,i_n},$$

de ahí, dado que Γ_m es un isomorfismo se concluye que $\tilde{l}_{X_m}(\omega_m)$ es igual a

$$\sum_{\substack{\phi \subseteq \{1,\ldots,d\} \\ \phi = \{ i_1,\ldots,i_k \}}} \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} a_\phi(m) b_{i_l}(m)\, d(x_{i_1})_m \wedge \cdots \wedge \widehat{d(x_{i_l})}_m \wedge \cdots \wedge d(x_{i_n})_m \,.$$

Por la observación 3.3.4 inciso II se tiene que $i(X)\omega \in E^*(M)$. De esa forma $i(X) : E^*(M) \longrightarrow E^*(M)$ resulta una anti-derivación gracias a que $\tilde{l}_{X_m}$ es una anti-derivación para toda $m \in M$.

De lo anterior se obtiene el siguiente resultado.

***Proposición* 3.3.7.** Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in E^*(M)$. Si

$$i(X)\omega : M \longrightarrow \Lambda^*(M)$$

es el mapeo definido como $(i(X)\omega)(m) = \tilde{l}_{X_m}(\omega_m)$, donde $\tilde{l}_{X_m}$ es la multiplicación interior por X_m, entonces $i(X)(\omega) \in E^*(M)$. Más aún, el mapeo $i(X) : E^*(M) \longrightarrow E^*(M)$ resulta una anti-derivación.

Ahora consideremos $\psi : M \longrightarrow N$ mapeo suave y $m \in M$. Consideremos a $(d\psi_m)^* : T^*_{\psi(m)}N \longrightarrow T^*_m M$, el mapeo dual de $d\psi_m$. Por las observaciones hechas en la sección 3.2 sabemos que existe una extensión de $(d\psi_m)^*$ a un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras graduadas $\delta\psi_m : \Lambda(T^*_{\psi(m)}N) \longrightarrow \Lambda(T^*_m M)$ que satisface que para cualquier $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ elemento descomponible de $\Lambda(T^*_{\psi(m)}N)$,

$$\begin{aligned}\delta\psi_m(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n) &= (d\psi_m)^*(\omega_1) \wedge \cdots \wedge (d\psi_m)^*(\omega_n)\\ &= \omega_1 \circ d\psi_m \wedge \cdots \wedge \omega_n \circ d\psi_m\,.\end{aligned}$$

Consideremos $\omega \in E^*(N)$. Sea $\delta\psi(\omega) : M \longrightarrow \Lambda^*(M)$ definido como

$$\delta\psi(\omega)(m) = \delta\psi_m(\omega_{\psi(m)})\,.$$

Por definición dicho mapeo es un levantamiento de la identidad en M. Afirmamos que $\delta\psi(\omega) \in E^*(M)$.

Sean $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_d))$ y $(V, \tau = (y_1, \ldots, y_c))$ sistemas coordenados de M y N respectivamente, tales que $\psi(U) \subseteq V$. Por la observación 3.3.4 inciso II basta mostrar que si

$$d\psi(\omega)\big|_U = \sum_{\zeta \subseteq \{1,\ldots,d\}} b_\zeta dx_\zeta\,,$$

entonces $b_\zeta \in C^\infty(U)$ para todo $\zeta \subseteq \{1, \ldots, d\}$.

Sabemos que

$$\omega\big|_V = \sum_{\phi \subseteq \{1,\ldots,c\}} a_\phi dy_\phi\,,$$

donde $a_\phi \in C^\infty(V)$. Sea $m \in U$ y Γ_m el isomorfismo canónico entre $\Lambda(T^*_m M)$ y $(\Lambda(T_m M))^*$. Sean $\phi = \{i_1, \ldots, i_r\}$ subconjunto de $\{1, \ldots, c\}$ y $\zeta = \{j_1, \ldots, j_s\}$ subconjunto de $\{1, \ldots, d\}$, de tal forma que $i_1 < \cdots < i_r$ y $j_1 < \cdots < j_s$.

Denotando $\frac{\partial}{\partial x_\zeta}\big|_m = \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\big|_m \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{j_s}}\big|_m$, tenemos que si $r \neq s$,

$$\Gamma_m\big(\delta\psi_m(d(y_\phi)_{\psi(m)})\big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_\zeta}\Big|_m\Big) = 0\,.$$

Si $r = s$ se tiene que $\Gamma_m\big(\delta\psi_m(d(y_\phi)_{\psi(m)})\big)\big(\frac{\partial}{\partial x_\zeta}\big|_m\big)$ es igual a

$$\Gamma_m\big(d(y_{i_1} \circ \psi)_m \wedge \cdots \wedge d(y_{i_s} \circ \psi)_m\big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_\zeta}\Big|_m\Big) = \det\Big(\frac{\partial(y_{i_k} \circ \psi)}{\partial x_{j_l}}\Big|_m\Big)_{k\,l}.$$

De esa forma

$$\Gamma_m\big(\delta\psi_m(d(y_\phi)_{\psi(m)})\big) = \sum_{\zeta\subseteq\{1,\ldots,d\}} \det\left(\frac{\partial(y_{i_k}\circ\psi)}{\partial x_{j_l}}\Big|_m\right)_{k\,l}\Gamma_m\big(d(x_\zeta)_m\big)\,,$$

y por tanto $\delta\psi_m(d(y_\phi)_{\psi(m)}) = \sum_{\zeta\subseteq\{1,\ldots,d\}} \det\left(\frac{\partial(y_{i_k}\circ\psi)}{\partial x_{j_l}}\Big|_m\right)_{k\,l} d(x_\zeta)_m$.

$$\begin{aligned}
\delta\psi(\omega)(m) = \delta\psi_m(\omega_{\psi(m)}) &= \sum_{\substack{\phi\subseteq\{1,\ldots,c\}\\ \phi=\{i_1,\ldots,i_s\}}} a_\phi(m)\,\delta\psi_m\big(d(y_\phi)_{\psi(m)}\big)\\
&= \sum_{\substack{\phi\subseteq\{1,\ldots,c\}\\ \phi=\{i_1,\ldots,i_s\}}}\ \sum_{\substack{\zeta\subseteq\{1,\ldots,d\}\\ \zeta=\{j_1,\ldots,j_s\}}} \det\left(\frac{\partial(y_{i_k}\circ\psi)}{\partial x_{j_l}}\Big|_m\right)_{k\,l} a_\phi(m) d(x_\zeta)_m\\
&= \sum_{\substack{\zeta\subseteq\{1,\ldots,d\}\\ \zeta=\{j_1,\ldots,j_s\}}} \Bigg(\sum_{\substack{\phi\subseteq\{1,\ldots,c\}\\ \phi=\{i_1,\ldots,i_s\}}} \det\left(\frac{\partial(y_{i_k}\circ\psi)}{\partial x_{j_l}}\Big|_m\right)_{k\,l} a_\phi(m)\Bigg)\, d(x_\zeta)_m\,,
\end{aligned}$$

donde $b_\zeta = \sum_{\substack{\phi\subseteq\{1,\ldots,c\}\\ \phi=\{i_1,\ldots,i_s\}}} \det\left(\frac{\partial(y_{i_k}\circ\psi)}{\partial x_{j_l}}\right)_{k\,l} a_\phi$ es suave para todo $\zeta = \{j_1,\ldots,j_s\}$.

De lo anterior podemos concluir que $\delta\psi : E^*(M) \longrightarrow E^*(M)$ esta bien definida. Más aún, es un $\mathbb{R}$-morfismo de álgebras graduadas pues para toda $m\in M$, $\delta\psi_m$ lo es. Enseguida se enuncian estas y otras propiedades de $\delta\psi$.

***Proposición* 3.3.8.** Sea $\psi : M \longrightarrow N$ un mapeo suave. Entonces

I. $\delta\psi : E^*(M) \longrightarrow E^*(M)$ es un morfismo de álgebras.

II. Si $\omega\in E^k(N)$ y $X_1,\ldots,X_k$ son campos vectoriales en M, entonces

$$\delta\psi(\omega)(X_1,\ldots,X_k)(m) = \omega_{\psi(m)}(d\psi_m(X_1(m)),\ldots,d\psi_m(X_k(m)))\,.$$

III. δ conmuta con d, es decir, $d(\delta\psi(\omega)) = \delta\psi(d\omega)$, para todo $\omega\in E^*(N)$.

Demostración. Mostremos el inciso III. Sean $\omega\in E^*(N)$ y $m\in M$. Consideremos (V,τ) sistema coordenado alrededor de $\psi(m)$, con funciones coordenadas $y_1,\ldots,y_c$. Si

$$\omega\big|_V = \sum_{\phi\subseteq\{1,\ldots,c\}} a_\phi\,dy_\phi,$$

donde $a_\phi\in C^\infty(V)$ para todo $\phi\subseteq\{1,\ldots,c\}$. De esa forma

$$d\omega\big|_V = \sum_{\phi\subseteq\{1,\ldots,c\}} da_\phi\wedge dy_\phi$$

y gracias a que $\delta\psi$ es un morfismo de álgebras

$$\begin{aligned}
\delta\psi(d\omega)(m) &= \sum_{\phi\subseteq\{1,\ldots,c\}} \delta\psi_m\big(d(a_\phi)_{\psi(m)} \wedge d(y_\phi)_{\psi(m)}\big) \\
&= \sum_{\substack{\phi\subseteq\{1,\ldots,c\}\\ \phi=\{i_1,\ldots,i_n\}}} d(a_\phi\circ\psi)_m \wedge d(y_{i_1}\circ\psi)_m \wedge\cdots\wedge d(y_{i_n}\circ\psi)_m\,.
\end{aligned}$$

Notemos que para todo $p\in\psi^{-1}(V)$,

$$\delta\psi_p(\omega_{\psi(p)}) = \sum_{\substack{\phi\subseteq\{1,\ldots,c\}\\ \phi=\{i_1,\ldots,i_n\}}} a_\phi(\psi(p))\left(d(y_{i_1}\circ\psi)_p\wedge\cdots\wedge d(y_{i_n}\circ\psi)_p\right),$$

de modo que

$$\begin{aligned}
d(\delta\psi(\omega))_m &= \sum_{\substack{\phi\subseteq\{1,\ldots,c\}\\ \phi=\{i_1,\ldots,i_n\}}} d(a_\phi\circ\psi)_m \wedge d(y_{i_1}\circ\psi)_m \wedge\cdots\wedge d(y_{i_n}\circ\psi)_m \\
&+ \sum_{\substack{\phi\subseteq\{1,\ldots,c\}\\ \phi=\{i_1,\ldots,i_n\}}} \left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1} a_\phi\circ\psi(m)\, d(y_{i_1}\circ\psi)_m\wedge\cdots\right. \\
&\left.\wedge\, d^2(y_{i_1}\circ\psi)_m\wedge\cdots\wedge d(y_{i_n}\circ\psi)_m\right) \\
&= \sum_{\substack{\phi\subseteq\{1,\ldots,c\}\\ \phi=\{i_1,\ldots,i_n\}}} d(a_\phi\circ\psi)_m \wedge d(y_{i_1}\circ\psi)_m \wedge\cdots\wedge d(y_{i_n}\circ\psi)_m\,.
\end{aligned}$$

Con ello se concluye que $d(\delta\psi(\omega))=\delta\psi(d\omega)$, para todo $\omega\in E^*(M)$.

Ahora mostremos el inciso II. Sea $m\in M$. Consideremos el isomorfismo entre $\Lambda(T_m^*M)$ y $A(T_m^*M)$ expresado en (3.5) de la sección 3.1 y la conmutatividad del diagrama (3.8). De esa forma, denotando $\Gamma_m:\Lambda(T_m^*M)\longrightarrow(\Lambda(T_mM))^*$ y $\Gamma_{\psi(m)}:\Lambda(T^*_{\psi(m)}N)\longrightarrow(\Lambda(T_{\psi(m)}N))^*$ los isomorfismos canónicos y $d\psi_m$ la extensión de la diferencial a $\Lambda(T_mM)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\Gamma_m\big(\delta\psi_m(\omega_{\psi(m)})\big)((X_1)_m\wedge\cdots\wedge(X_k)_m) \\
&=\Gamma_{\psi(m)}(\omega_{\psi(m)})\circ d\psi_m((X_1)_m\wedge\cdots\wedge(X_k)_m) \\
&=\Gamma_{\psi(m)}(\omega_{\psi(m)})\left(d\psi_m(X_1)_m\wedge\cdots\wedge d\psi_m(X_k)_m\right),
\end{aligned}$$

siguiéndose el resultado al hacer las correspondientes identificaciones.

■

3.4. Teorema de Frobenius en formas diferenciales

Definición 3.4.1. Sea $\mathfrak{D}$ una c-distribución suave en M^d. Decimos que una *q-forma ω anula a $\mathfrak{D}$* si para cualquier $m \in M$ y $\nu_1, \ldots, \nu_q \in \mathfrak{D}_m$

$$\omega_m(\nu_1, \ldots, \nu_q) = 0$$

Decimos que una forma $\omega \in E^*(M)$ *anula a $\mathfrak{D}$* si cada una de sus partes homogéneas anula a $\mathfrak{D}$.

Con la definición anterior, dada una distribución suave $\mathfrak{D}$ en M, podemos considerar el conjunto

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{D}) = \{\, \omega \in E^*(M) \,:\, \omega \text{ anula a } \mathfrak{D} \,\}\,.$$

De la propiedad que describe a los elementos de dicho conjunto se obtiene directamente que forman un grupo bajo la suma y que el producto de cualquier forma por un elemento de $\mathfrak{I}(\mathfrak{D})$ pertenece nuevamente a dicho conjunto, con lo que se concluye que es un ideal de $E^*(M)$.

Esta observación junto con otra propiedad importante que tiene $\mathfrak{I}(\mathfrak{D})$, se enuncian en la siguiente Proposición. Antes de formularla veamos una definición que nos será de utilidad. Para ello recordemos que $\Lambda_1^*(M)$ es simplemente T^*M.

Definición 3.4.2. Diremos que $\{\, \omega_1, \ldots, \omega_k \,\}$ conjunto de 1-formas en M es *independiente* si $\{\, \omega_1(m), \ldots, \omega_k(m) \,\}$ forma un conjunto linealmente independiente en $T_m^*(M)$ para toda $m \in M$.

Un ideal $\mathfrak{I}$ de $E^*(M)$ es *localmente generado por k 1-formas* si existe una cubierta abierta de M $\{\, U_\alpha \,\}_{\alpha \in \Omega}$ y $\zeta_\alpha = \{\, \omega_1, \ldots, \omega_k \,\}$ un conjunto independiente de k 1-formas sobre U_α de tal forma que la familia $\{\, (U_\alpha, \zeta_\alpha) \,\}_{\alpha \in \Omega}$ satisface las siguientes condiciones:

I. Si $\omega \in \mathfrak{I}$, $\omega|_{U_\alpha}$ esta en el ideal de $E^*(U_\alpha)$ generado por ζ_α para todo $\alpha \in \Omega$.

II. Si $\omega \in E^*(M)$ es tal que $\omega|_{U_\alpha}$ esta en el ideal de $E^*(U_\alpha)$ generado por ζ_α para todo $\alpha \in \Omega$, entonces $\omega \in \mathfrak{I}$.

***Proposición* 3.4.3.** Sea $\mathfrak{D}$ una c-distribución suave en M^d.

I. $\mathfrak{I}(\mathfrak{D})$ es un ideal de $E^*(M)$ localmente generado por un conjunto independiente de $d - c$ 1-formas.

II. Si el ideal $\mathfrak{I}$ es localmente generado por $d - c$ 1-formas entonces existe $\mathfrak{D}$, única c-distribución suave en M que satisface que $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(\mathfrak{D})$.

Demostración. Mostremos el inciso I. Por los argumentos previos a la definición 3.4.2, $\mathfrak{I}(\mathfrak{D})$ es un ideal de $E^*(M)$. Mostremos que es localmente generado por un conjunto independiente de $d-c$ 1-formas.

Sea $m \in M$ y $U \subseteq M$ vecindad abierta de m para la cual existen $X_1, \ldots, X_c \in \mathfrak{X}(U)$ de tal modo que para todo $p \in U$

$$\mathfrak{D}(p) = \langle\, (X_1)_p, \ldots, (X_c)_p \,\rangle_{\mathbb{R}}\,,$$

es decir, $\mathfrak{D}(p)$ es generado por el conjunto $\{\,(X_1)_p, \ldots, (X_c)_p\,\}$. Entonces existen $U_m \subseteq U$ vecindad abierta de m y $X_{c+1}, \ldots, X_d \in \mathfrak{X}(U_m)$ de tal forma que $\{\,(X_1)_p, \ldots, (X_d)_p\,\}$ es una base de T_pM, para todo $p \in U_m$. Para encontrar a dichos campos basta considerar $(\widetilde{U}, \tau = (x_1, \ldots, x_d))$ sistema coordenado alrededor de m que satisface que $\widetilde{U} \subseteq U$. Denotemos $X_{c+j} = \frac{\partial}{\partial x_{i_j}}$, de tal modo que $\{\,(X_1)_m, \ldots, (X_d)_m\,\}$ es base de T_mM. Para todo $p \in \widetilde{U}$ consideremos $B_p = ((X_j)_p(x_i))_{ij} \in \mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})$. Como B_m es invertible y la función determinante es continua (de hecho es suave al considerar la estructura de variedad diferenciable de $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})$ dada en el ejemplo 1.1.7), existe $U_m \subseteq \widetilde{U}$ vecindad abierta de m de tal modo que B_p es invertible para todo $p \in U_m$ y por lo tanto $\{\,(X_1)_p, \ldots, (X_d)_p\,\}$ es una base de T_pM, para todo $p \in U_m$.

Dado $p \in U_m$, sea $\{\,f_1^p, \ldots, f_d^p\,\}$ la base dual de $\{\,(X_1)_p, \ldots, (X_d)_p\,\}$ (ambas consideradas como bases ordenadas). Para todo $l \in \{\,1, \ldots, d\,\}$ consideremos a $\omega_l : U_m \longrightarrow T^*U_m$ definido como $\omega_l(p) = f_l^p$. Veamos que dichas funciones son suaves, de lo que se concluirá que son 1-formas sobre U_m.

Sea $(V, \xi = (x_1, \ldots, x_d))$ sistema coordenado de M, de manera que

$$\omega_l\big|_{V\cap U_m} = \sum_{i=1}^{d} a_i^l\, dx_i\,.$$

Veamos que $a_i^l \in C^\infty(V \cap U_m)$. Notemos que para todo $i \in \{\,1, \ldots, d\,\}$, si $p \in V \cap U_m$ entonces $a_i^l(p) = f_l^p\big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p\big)$ y además

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p &= \sum_{l=1}^{d} f_l^p\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\Big)\,(X_l)_p \\
&= \sum_{j=1}^{d}\left(\sum_{l=1}^{d} a_i^l(p)\,(X_l)_p(x_j)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\,.
\end{aligned}$$

De esa manera $\sum_{l=1}^{d} a_i^l\, X_l(x_j) \in C^\infty(V \cap U_m)$, para todo $j \in \{\,1, \ldots, d\,\}$. Por tal motivo el mapeo $\Psi_i : V \cap U_m \longrightarrow \mathbb{R}^d$ definido como

$$\Psi_i(p) = \Big(\sum\nolimits_{l=1}^{d} a_i^l(p)\,(X_l)_p(x_1), \ldots, \sum\nolimits_{l=1}^{d} a_i^l(p)\,(X_l)_p(x_d)\Big)$$

es suave. Observemos que

$$\Psi_i(p) = \Big((X_l)_p(x_j)\Big)_{jl}\left(a_i^1(p), \dots, a_i^d(p)\right),$$

donde $\left((X_l)_p(x_j)\right)_{jl} \in Gl(d, \mathbb{R})$. Considerando la estructura usual de variedad diferenciable de $Gl(d, \mathbb{R})$ (ejemplo 1.1.7), la composición

$$\begin{array}{ccccc} V \cap U_m & \longrightarrow & Gl(d,\mathbb{R}) \quad \times \quad \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ p & \longmapsto & \left(\Big((X_l)_p(x_j)\Big)_{jl}^{-1}, \Psi_i(p)\right) & \longmapsto & \Big((X_l)_p(x_j)\Big)_{jl}^{-1}\Psi_i(p)\,, \end{array}$$

que aplica $p \mapsto \left(a_i^1(p), \dots, a_i^d(p)\right)$, resulta suave. Es decir, $a_i^l \in C^\infty(V \cap U_m)$ para $i, l \in \{1, \dots, d\}$. Como (V, ξ) es arbitrario, dada la estructura de variedad diferenciable de T^*U_m concluimos que ω_l es suave para todo $l \in \{1, \dots, d\}$. Consideremos $\zeta_m = \{\omega_{c+1}, \dots, \omega_d\}$.

Veamos que la familia $\{(U_m, \zeta_m)\}_{m \in M}$ satisface las condiciones I y II de la definición 3.4.2, con lo cual concluiremos que $\mathfrak{I}(\mathfrak{D})$ es un ideal localmente generado por $d - c$ 1-formas.

Sea $\omega \in \mathfrak{I}(\mathfrak{D})$. Consideremos $m \in M$ y (U_m, ζ_m) como antes. Veamos que $\omega\big|_{U_m}$ pertenece al ideal generado por ζ_m. Sean $X_1, \dots, X_d \in \mathfrak{X}(U_m)$ de tal forma que para toda $p \in U_m$, $\{(X_1)_p, \dots, (X_d)_p\}$ es una base de T_pM con base dual $\{\omega_1, \dots, \omega_d\}$, resultando que $\zeta_m = \{\omega_{c+1}, \dots, \omega_d\}$ y

$$\mathfrak{D}(p) = \langle (X_1)_p, \dots, (X_c)_p \rangle_{\mathbb{R}}\,.$$

Dado $\phi = \{i_1, \dots, i_n\}$ subconjunto de $\{1, \dots, d\}$ ordenado en forma creciente, denotemos $\omega_\phi = \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_n}$ y $X_\phi = X_{i_1} \wedge \cdots \wedge X_{i_n}$. Obsérvese que si $\phi \subseteq \{1, \dots, c\}$, $\omega(X_\phi) \equiv 0$. Denotemos como $\mathfrak{J}$ a la familia de subconjuntos de $\{1, \dots, d\}$ que intersectan a $\{c+1, \dots, d\}$.

Por el Lema 3.1.9 sabemos que $\{\omega_\phi\}$ es base de $E^*(U_m)$. De la observación 3.1.13 se obtiene que para todo $p \in U_m$, $\{\left(\omega_\phi\right)_p\}$ es base dual de $\{(X_\phi)_p\}$ al identificar $\Lambda(T_p^*M)$ con $(\Lambda(T_pM))^*$, de tal forma que

$$\omega\big|_{U_m} = \sum_{\phi \subseteq \{1, \dots, d\}} \omega(X_\phi)\,\omega_\phi = \sum_{\phi \in \mathfrak{J}} \omega(X_\phi)\,\omega_\phi\,,$$

concluyendo con ello que $\omega\big|_{U_m}$ pertenece al ideal generado por ζ_m.

Sea $\upsilon = \sum_{n \in \mathbb{N}} \upsilon_n \in E^*(M)$ que satisface que para todo $m \in M$, $\upsilon|_{U_m}$ pertenece al ideal generado por ζ_m. Esto último es equivalente a que cada una de las partes homogéneas de $\upsilon|_{U_m}$ pertenezca al ideal generado por ζ_m, de manera que si denotamos como $\mathcal{J}_n$ a la familia de subconjuntos de $\{1,\ldots,d\}$ que intersectan a $\{c+1,\ldots,d\}$ y que tienen cardinalidad n, tenemos que $\upsilon_n|_{U_m} = \sum_{\phi\subseteq\mathfrak{I}_n} \upsilon_n(X_\phi)\,\omega_\phi$. Ya que para todo $p\in U_m$, $\{\left(\omega_\phi\right)_p\}$ es base dual de $\{(X_\phi)_p\}$, se tiene que $\upsilon_n(X_\phi)\equiv 0$, para todo $\phi\subseteq\{1,\ldots,c\}$, siguiéndose de la distribución del producto exterior que para todo $p\in U_m$, si $\nu_1,\ldots,\nu_n\in \mathfrak{D}_p$ entonces $(\upsilon_n)_p(\nu_1,\ldots,\nu_n)=0$. De esa forma concluimos que $\upsilon\in\mathfrak{I}(\mathfrak{D})$.

Ahora verifiquemos el inciso II. Sea $\mathfrak{I}$ ideal de $E^*(M)$ localmente generado por $d-c$ 1-formas y $\{(U_\alpha,\zeta_\alpha)\}_{\alpha\in\Omega}$ la familia que satisface las condiciones I y II de la definición 3.4.2.

Observemos que para todo $(U_\alpha,\zeta_\alpha=\{\omega^\alpha_{c+1},\ldots,\omega^\alpha_d\})$, si $m\in U_\alpha$ entonces existen $U_m\subseteq U_\alpha$ vecindad abierta de m y $\omega^\alpha_1,\ldots,\omega^\alpha_c\in E^1(U_m)$ de tal modo que para todo $p\in U_m$ $\{(\omega^\alpha_1)_p,\ldots,(\omega^\alpha_d)_p\}$ es base de T^*_pM. De esa forma, sin pérdida de generalidad supongamos que $U_\alpha=U_m$, es decir que existen $\omega^\alpha_1,\ldots,\omega^\alpha_c\in E^1(U_\alpha)$ de tal modo que para todo $p\in U_\alpha$, $\{(\omega^\alpha_1)_p,\ldots,(\omega^\alpha_d)_p\}$ es base de T^*_pM.

Para todo $p\in U_\alpha$ consideremos $\{\nu^p_1,\ldots,\nu^p_d\}$ la base de T_pM para la cual $\{(\omega^\alpha_1)_p,\ldots,(\omega^\alpha_d)_p\}$ es base dual. Sean $X^\alpha_1,\ldots,X^\alpha_d$ los campos vectoriales definidos en U_α como $(X^\alpha_i)_p=\nu^p_i$. De manera análoga a como se verificó en el inciso anterior que las 1-formas definidas eran suaves, se concluye que dichos campos son suaves. Sea $\mathfrak{X}_\alpha=\{X^\alpha_1,\ldots,X^\alpha_c\}$.

Dado $\alpha\in\Omega$, denotemos como I_α al ideal de $E^*(U_\alpha)$ generado por $\zeta_\alpha=\{\omega^\alpha_{c+1},\ldots,\omega^\alpha_d\}$ y para todo $p\in U_\alpha$ como I^p_α al ideal de $\Lambda(T^*_pM)$ generado por $\{(\omega^\alpha_{c+1})_p,\ldots,(\omega^\alpha_d)_p\}$. De manera que para cualesquiera $\alpha,\beta\in\Omega$, si $m\in U_\alpha\cap U_\beta$ entonces $I^m_\alpha=I^m_\beta$.

Definimos la distribución $\mathfrak{D}$ como

$$\mathfrak{D}_m=\{\nu\in T_mM\,:\,\omega_m(\nu)=0 \text{ para todo } \omega\in I_\alpha\,,\ \text{si } m\in U_\alpha\}\,.$$

Nótese que si $m\in U_\alpha$ y $\omega_m(\nu)=0$ para todo $\omega\in I_\alpha$, entonces $\nu\in\mathfrak{D}_m$. Más aún, $\nu\in\mathfrak{D}_m$ si y sólo si $(\omega^\alpha_{c+i})_m(\nu)=0$ para todo $i\in\{1,\ldots,d-c\}$. De manera que para todo $\alpha\in\Omega$, si $p\in U_\alpha$

$$\mathfrak{D}_p=\langle\,(X^\alpha_1)_p,\ldots,(X^\alpha_c)_p\,\rangle_{\mathbb{R}}\,,$$

es decir, $\mathfrak{D}\big|_{U_\alpha}$ es generado puntualmente por el conjunto de campos suaves $\mathfrak{X}_\alpha=\{X^\alpha_1,\ldots,X^\alpha_c\}$, concluyendo con ello que $\mathfrak{D}$ es una c-distribución suave y por definición es la única que satisface que $\mathfrak{I}(\mathfrak{D})$ coincide con $\mathfrak{I}$. ■

Definición 3.4.4. (Ideal diferencial) Diremos que un ideal $\mathfrak{I}$ *de* $E^*(M)$ *es diferencial* si es cerrado bajo la diferenciación exterior d, es decir

$$d(\mathfrak{I})\subseteq\mathfrak{I}\,.$$

Enseguida veremos una condición necesaria y suficiente en términos de formas diferenciales de una variedad para que una distribución en dicha variedad sea involutiva.

***Proposición* 3.4.5.** Una c-distribución suave $\mathfrak{D}$ en M es involutiva si y sólo si el ideal $\mathfrak{I}(\mathfrak{D})$ es diferencial.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{D}$ es involutiva. Sea $\omega = \sum_{n\in\mathbb{N}} \omega_n \in \mathfrak{I}(\mathfrak{D})$, donde ω_n es la n-ésima componente homogénea de ω, por lo que $\omega_n \in \mathfrak{I}(\mathfrak{D})$. Veamos que $d\omega \in \mathfrak{I}(\mathfrak{D})$, que es equivalente a verificar que $(d\omega)_n \in \mathfrak{I}(\mathfrak{D})$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Obsérvese que para todo $n \in \mathbb{N}$ $(d\omega)_n = d\omega_{n-1}$, donde $\omega_{-1} \equiv 0$. Sean $m \in M$ y U vecindad abierta de m de tal forma que $X_1, \ldots, X_c \in \mathfrak{X}(U)$ satisfacen que para todo $p \in U$

$$\mathfrak{D}_p = \langle (X_1)_p, \ldots, (X_c)_p \rangle_{\mathbb{R}} \,.$$

Sea $\psi \in C^\infty(M)$ tal que $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, de modo que $\psi|_{\overline{V}} \equiv 1$ y $\psi|_{M \smallsetminus W} \equiv 0$, siendo V, W vecindades abiertas de m tales que $\overline{V} \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U$ (véase la función (1.2) de la sección 1.2). Ya que $\psi X_1, \ldots, \psi X_c \in \mathfrak{X}(M)$ son secciones de $\mathfrak{D}$ que generan puntualmente a $\mathfrak{D}$ en una vecindad de m (de hecho la genera en $\psi^{-1}\big((0,1]\big) \subseteq W$), se tiene que para cualesquiera $j, k \in \{1, \ldots, c\}$ $[\psi X_j, \psi X_k]$ es una sección de $\mathfrak{D}$, siguiéndose de la Proposición 3.5.2 inciso VI que para cualesquiera $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, c\}$

$$\begin{aligned}
&(d\omega)_n\big(\psi X_{i_1}, \ldots, \psi X_{i_n}\big) = d\omega_{n-1}\big(\psi X_{i_1}, \ldots, \psi X_{i_n}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \big(\psi X_{i_k}\big)\, \omega_{n-1}(\psi X_{i_1}, \ldots, \widehat{\psi X}_{i_k}, \ldots, \psi X_{i_n}) \\
&+ \sum_{j<k} (-1)^{k+j+1} \omega_{n-1}\big([\psi X_{i_j}, \psi X_{i_k}], \psi X_{i_1}, \ldots, \widehat{\psi X}_{i_j}, \ldots, \widehat{\psi X}_{i_k}, \ldots, \psi X_{i_n}\big)\,,
\end{aligned}$$

en particular al evaluar en m

$$\big((d\omega)_n\big)_m\big((X_{i_1})_m, \ldots, (X_{i_n})_m\big) = 0\,,$$

y por tanto $(d\omega)_n \in \mathfrak{I}(\mathfrak{D})$.

Supongamos que $\mathfrak{I}(\mathfrak{D})$ es diferencial. Sean X_1, $X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ secciones de $\mathfrak{D}$. Mostremos que $[X_1, X_2]_m \in \mathfrak{D}_m$ para todo $m \in M$.

Sea $m \in M$. Por la demostración del inciso I de la Proposición 3.4.3 sabemos que existen $U_m \subseteq M$ vecindad abierta de m y $\omega_{c+1}, \ldots, \omega_d$ 1-formas definidas en U_m que satisfacen que para todo $p \in U_m$

$$\langle (\omega_{c+1})_p, \ldots, (\omega_d)_p \rangle_{\mathbb{R}} = \{\, f \in T_p^* M \,:\, f(\nu) = 0 \text{ para todo } \nu \in \mathfrak{D}_p \,\}\,.$$

Consideremos $\psi \in C^\infty(M)$ tal que $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, de modo que $\psi|_{\overline{V}} \equiv 1$ y $\psi|_{M \smallsetminus W} \equiv 0$, donde V, W son vecindades abiertas de m que satisfacen que $\overline{V} \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U_m$ (véase la función (1.2) de la sección 1.2). Nótese que $\psi\,\omega_{c+i} \in \mathfrak{I}(\mathfrak{D})$ para todo $i \in \{1, \ldots, d-c\}$, que gracias a que $\mathfrak{I}(\mathfrak{D})$ es diferencial implica que $d(\psi\,\omega_{c+i}) \in \mathfrak{I}(\mathfrak{D})$. Por el inciso 3.5.2 inciso VI

$$\begin{aligned}
&\psi(m)(\omega_{c+i})_m[X_1, X_2]_m \\
&\qquad = -d(\psi\,\omega_{c+i})_m((X_1)_m, (X_2)_m) \\
&\qquad\qquad + \psi(m)(X_1)_m(\omega_{c+i})_m(X_2)_m \\
&\qquad\qquad\qquad - \psi(m)(X_2)_m(\omega_{c+i})_m(X_1)_m = 0\,,
\end{aligned}$$

Como $(\omega_{c+i})_m[X_1, X_2]_m = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, d-c\}$, $[X_1, X_2]_m$ anula a todos los elementos de T_m^*M que anulan a $\mathfrak{D}_m$. Por lo tanto $[X_1, X_2]_m \in \mathfrak{D}_m$, concluyendo así que $\mathfrak{D}$ es involutiva.

■

Por el Teorema de Frobenius, el hecho de que una distribución sea involutiva nos garantiza la existencia de variedades integrales de dicha distribución; más aún, la unicidad con respecto a la maximalidad en términos de conexidad de la variedad integral. Veremos que estos resultados se pueden interpretar en términos de formas diferenciales.

La siguiente definición nos habla de variedades integrales asociadas a los ideales de $E^*(M)$ y de hecho de variedades integrales maximales en términos de conexidad.

Definición 3.4.6. Sea $\mathfrak{I} \subseteq E^*(M)$ un ideal. Decimos que la subvariedad (N, Ψ) de M es una *variedad integral de* $\mathfrak{I}$, si para cualquier $\omega \in \mathfrak{I}$, $\delta\Psi(\omega) \equiv 0$. En caso de ser conexa diremos que es una *variedad integral maximal de* $\mathfrak{I}$ si $\Psi(N)$ no esta contenida propiamente en la imagen de otra variedad integral conexa de $\mathfrak{I}$.

Observación 3.4.7. Dada una distribución $\mathfrak{D}$ en M, si (N, Ψ) es variedad integral de $\mathfrak{D}$ entonces es una variedad integral de $\mathfrak{I}(\mathfrak{D})$.

Más aún, podemos concluir que si $\mathfrak{D}$ es una c-distribución suave en M^d, entonces (N, Ψ) es una variedad integral de $\mathfrak{I}(\mathfrak{D})$ si y sólo si para cualquier $n \in N$,

$$d\Psi_n(T_nN) \subseteq \mathfrak{D}_{\Psi(n)}\,.$$

Para verificarlo supongamos que (N, Ψ) es una variedad integral de $\mathfrak{I}(\mathfrak{D})$. Sea $n \in N$. Por la demostración del Teorema 3.4.3 existe $U \subseteq M$ una vecindad abierta de $\Psi(n)$ y $\omega_1, \ldots, \omega_{d-c} \in E^*(U)$ un conjunto independiente de 1-formas que satisface que para cualquier $m \in U$ y $\nu \in T_mM$, $\nu \in \mathfrak{D}_m$ si y sólo si

$$\omega_i(m)(\nu) = 0 \quad \text{para toda } i \in \{1, \ldots, d-c\}$$

De ese modo para cualquier $\upsilon \in T_nN$, dada $i \in \{1, \ldots, d-c\}$

$$0 = \delta\Psi(\omega_i)(\upsilon) = \omega_i(d\Psi(\upsilon))$$

de lo que se concluye que $d\Psi(\upsilon) \in \mathfrak{D}_{\Psi(n)}$. La otra implicación se obtiene directamente de las definiciones de variedad integral de un ideal y $\mathfrak{I}(\mathfrak{D})$.

Obtenemos el siguiente Teorema como consecuencia del Teorema 2.9.12 y de la observación 3.4.7.

***Teorema* 3.4.8.** *Sea $\mathfrak{I} \subseteq E^*(M)$ un ideal diferencial localmente generado por $d-c$ 1-formas independientes. De modo que para cualquier $m \in M$ existe una única variedad integral maximal (N, Ψ) de $\mathfrak{I}$ que tiene dimensión c y que pasa a través de m.*

3.5. La Derivada de Lie

En esta parte interpretaremos la idea de la derivada direccional de un campo vectorial y una forma diferencial de una variedad con respecto a otro campo vectorial, además de analizar algunas de sus propiedades básicas.

Como se vio en la sección 2.1, dados una variedad M y un elemento $m \in M$, un vector tangente $\upsilon \in T_mM$ es un operador que al actuar sobre una función $f \in C^\infty(M)$ da un número $\upsilon(f)$ que es interpretado como la *derivada direccional de f en la dirección υ*. Ahora buscamos generalizar la idea de la derivada direccional de un campo vectorial en M en una dirección υ.

En el caso particular del espacio euclidiano $\mathbb{R}^d$, un campo vectorial F es identificado canónicamente con una función suave de $\mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}^d$, de modo que para todo $p \in \mathbb{R}^d$ *la derivada direccional de F en el punto p con respecto a la dirección $\nu \in \mathbb{R}^d$* es

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 F(p + t\nu) = \lim_{t \to 0} \frac{F(p + t\nu) - F(p)}{t}\,. \tag{3.11}$$

Dicho límite existe ya que la curva $\gamma_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$, definida como $\gamma_p(t) = p + t\nu$, es suave y por lo tanto $F(p+t\nu)$ es una composición de funciones suaves. Más aún, la derivada direccional de F en p resulta nuevamente un vector en $\mathbb{R}^d$.

Ahora buscamos generalizar esta idea a variedades diferenciables. Sean M^d una variedad diferenciable y Y un campo vectorial en M. Consideremos $m \in M$ y $\upsilon \in T_mM$. Así como en el caso de $\mathbb{R}^d$ empleamos la curva γ_p que tiene como vector tangente en p a ν, buscamos elegir una curva γ que pase por m en el punto t_0 y cuyo vector tangente en t_0 sea υ. Además de la elección de dicha curva se nos presenta otra dificultad ya que el límite expresado en (3.11) no tiene sentido a causa de que $X_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}M$ para todo $t \in \operatorname{dom}\gamma$ y en general no es posible identificar canónicamente T_mM con $T_{\gamma(t)}M$ como lo hacemos en el caso de los espacios euclidianos. Este problema es resuelto al considerar un campo vectorial X que satisfaga que $X_m = \upsilon$ (el cual existe por la Proposición 2.5.7) y σ_m la curva integral de X que pasa por 0 en m. De manera que para todo $t \in \operatorname{dom}\sigma_m$, $d(X_{-t})_{X_t(m)}\big(Y_{X_t(m)}\big) \in T_mM$, pues X_t es un difeomorfismo con inversa X_{-t} y $X_t(m) = \sigma_m(t)$ (véase el Teorema 2.8.9). Con base en lo anterior y con un razonamiento análogo para formas diferenciales se tienen la siguientes nociones.

Definición 3.5.1. (Derivada de Lie) Sea M un variedad diferenciable y $m \in M$. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ llamamos *la derivada de Lie de Y con respecto a X en m* al vector tangente en m definido como

$$(L_X\, Y)_m = \lim_{t\to 0} \frac{d(X_{-t})_{X_t(m)}\big(Y_{X_t(m)}\big) - Y_m}{t} = \frac{d}{dt}\bigg|_0 \big(d(X_{-t})_{X_t(m)}\big(Y_{X_t(m)}\big)\big)\,. \tag{3.12}$$

Dado $\omega \in E^*(M)$ llamamos *la derivada de Lie de ω con respecto a X en m* al elemento en $\Lambda(T_m^*M)$ definido como

$$(L_X\, \omega)_m = \lim_{t\to 0} \frac{\delta(X_t)_{X_t(m)}(\omega_{X_t(m)}) - \omega_m}{t} = \frac{d}{dt}\bigg|_0 \big(d(X_t)_{X_t(m)}(\omega_{X_t(m)})\big)\,. \tag{3.13}$$

Enseguida veremos como es interpretado el límite expresado en (3.12) en términos de sistemas coordenados. Para ello verificaremos que existe un intervalo abierto alrededor del cero $I \subseteq \mathbb{R}$ de tal modo que la función $\Phi_m : I \longrightarrow T_mM$ que aplica $t \to d(X_{-t})_{X_t(m)}(Y_{X_t(m)})$ esta bien definida y es suave con respecto a la estructura de variedad inducida por los isomorfismos lineales de T_mM con el espacio euclidiano correspondiente (ejemplo 1.1.6).

El inciso VI del Teorema 2.8.9 es equivalente a que existen $\varepsilon > 0$ y $V \subseteq M$ vecindad abierta de m que satisfacen que la función

$$\begin{array}{ccc} (-\varepsilon,\varepsilon)\times V & \xrightarrow{\Psi} & M \\ (t,\,p) & \longmapsto & X_{-t}(p) \end{array}$$

esta bien definida y es suave. Por ello la función

$$\begin{array}{ccc} (-\varepsilon,\varepsilon)\times V & \xrightarrow{\Phi} & TM \\ (t,\,p) & \longmapsto & d(X_{-t})_p(Y_p) \end{array}$$

esta bien definida. Veamos que es suave.

Sean $(U,\tau=(y_1,\ldots,y_d))$ y $(W,\varphi=(x_1,\ldots,x_d))$ sistemas coordenados alrededor de m. Consideremos $\widetilde{\tau}:(-\varepsilon,\varepsilon)\times(V\cap U)\longrightarrow(-\varepsilon,\varepsilon)\times\tau(V\cap U)$ la función definida como $\widetilde{\tau}=\mathrm{id}\times\tau$, donde id denota el mapeo identidad en $(-\varepsilon,\varepsilon)$; por otro lado $\widetilde{\varphi}:\pi^{-1}(W)\longrightarrow\varphi(W)\times\mathbb{R}^d$ el mapeo definido como $\varphi\circ\pi\times\big(dx_i\big)_{i=1}^d$, siendo π la proyección canónica de TM. Ambos son mapeos coordenados de $(-\varepsilon,\varepsilon)\times V$ y TM respectivamente. Verifiquemos que la composición $\widetilde{\varphi}\circ\Phi\circ\widetilde{\tau}^{-1}$ definida en $(-\varepsilon,\varepsilon)\times\tau(V\cap U\cap W)$ es suave.

Sea $(l,p)\in(-\varepsilon,\varepsilon)\times\tau(V\cap U\cap W)$, de manera que

$$\widetilde{\varphi}\circ\Phi\circ\widetilde{\tau}^{-1}(l,p)=\Big(\varphi\circ\tau^{-1}(p),\ \big(Y_{\tau^{-1}(p)}(x_i\circ X_{-l})\big)_{i=1}^d\Big).$$

Basta verificar que $Y_{\tau^{-1}(p)}(x_i\circ X_{-l})$ es una función suave en (l,p) para todo $i\in\{1,\ldots,d\}$.

Para cualesquiera $i,j\in\{1,\ldots,d\}$ se sigue de la definición de las derivadas parciales y un breve cálculo que $\frac{\partial(x_i\circ X_{-l}\circ\varphi^{-1})}{\partial r_j}(\varphi\circ\tau^{-1}(p))$ es igual a

$$\frac{\partial\big(x_i\circ\Psi\circ(\mathrm{id}\times\varphi^{-1})\big)}{\partial r_{j+1}}\circ(\mathrm{id}\times\varphi\circ\tau^{-1})(l,p)$$

la cual es una composición de funciones suaves y por lo tanto resulta una función suave en términos de (l,p). Como $Y\big|_W=\sum_{j=1}^d Y(x_i)\frac{\partial}{\partial x_j}$, donde $Y(x_i)\in C^\infty(W)$,

$$\begin{aligned}Y_{\tau^{-1}(p)}(x_i\circ X_{-l})&=\sum_{j=1}^d Y(x_i)\circ\tau^{-1}(p)\,\frac{\partial(x_i\circ X_{-l})}{\partial x_j}\bigg|_{\tau^{-1}(p)}\\&=\sum_{j=1}^d Y(x_i)\circ\tau^{-1}(p)\,\frac{\partial(x_i\circ X_{-l}\circ\varphi^{-1})}{\partial r_j}\big(\varphi\circ\tau^{-1}(p)\big),\end{aligned}$$

que es suave en $(-\varepsilon,\varepsilon)\times\tau(V\cap U\cap W)$. De esto concluimos que Φ es suave.

Consideremos $I=(-\varepsilon,\varepsilon)\cap\sigma_m^{-1}(V)$, de modo que $0\in I$ y la composición

$$\begin{array}{ccccc}I&\longrightarrow&(-\varepsilon,\varepsilon)\times V&\xrightarrow{\ \Phi\ }&TM\\ t&\longmapsto&(t,\sigma_m(t))&\longmapsto&d(X_t)_{X_t(m)}(Y_{X_t(m)})\end{array}$$

es suave. Denotemos a dicha función como Φ_0. Ya que T_mM es un encaje con la inclusión y Φ_0 se factoriza a través de T_mM, se sigue que Φ_m es suave (Teorema 2.6.2).

Obsérvese que lo anterior realmente muestra que al considerar L_XY como un campo, este resulta suave.

Gracias a la estructura de variedad diferenciable de $\Lambda^*(M)$ se puede mostrar en forma totalmente análoga que para todo $\omega \in E^*(M)$, dado $m \in M$ existen $\varepsilon > 0$ y $V \subseteq M$ vecindad abierta de m que satisfacen que la función

$$\begin{aligned} (-\varepsilon, \varepsilon) \times V &\xrightarrow{\Psi} \Lambda^*(M) \\ \big(t,\, p\big) &\longmapsto \delta(X_t)_{X_t(p)}(\omega_{X_t(p)}) \end{aligned} \tag{3.14}$$

esta bien definida y es suave, consiguiendo con ello mostrar no sólo que el límite expresado en (3.13) existe sino que la forma $L_Y\,\omega$ es suave.

Con la notación previa, $(L_X Y)_m = \frac{d}{dt}\big|_0 \Phi_m(t)$. Veamos la expresión de la derivada de Lie en términos de los sistemas coordenados.

Sean $\big(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_d)\big)$ y $\big(V, \tau = (y_1, \ldots, y_d)\big)$ sistemas coordenados alrededor de m. Afirmamos

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{d\big(dx_i \circ \Phi_m(t)\big)}{dt}(0)\, \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_m = \sum_{i=1}^{d} \frac{d\big(dy_i \circ \Phi_m(t)\big)}{dt}(0)\, \frac{\partial}{\partial y_i}\bigg|_m .$$

Mostrarlo es equivalente a verificar que para todo $i \in \{\, 1, \ldots, d \,\}$

$$\frac{d\big(dx_i \circ \Phi_m(t)\big)}{dt}(0) = \sum_{j=1}^{d} \frac{d\big(dy_j \circ \Phi_m(t)\big)}{dt}(0)\, \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\bigg|_m .$$

Notemos que para todo $j \in \{\, 1, \ldots, d \,\}$

$$d(y_j)_m = \sum_{l=1}^{d} \frac{\partial y_j}{\partial x_l}\bigg|_m d(x_l)_m\,,$$

por lo cual

$$dy_j \circ \Phi_m = d(y_j)_m \circ \Phi_m = \sum_{l=1}^{d} \frac{\partial y_j}{\partial x_l}\bigg|_m dx_l \circ \Phi_m\,,$$

de lo que se sigue que

$$\frac{d\big(dy_j \circ \Phi_m(t)\big)}{dt}(0)\, \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\bigg|_m = \sum_{l=1}^{d} \frac{\partial y_j}{\partial x_l}\bigg|_m \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\bigg|_m \frac{d\big(dx_l \circ \Phi_m(t)\big)}{dt}(0)\,.$$

Como $\big(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\big|_m\big)_{ij} \big(\frac{\partial y_j}{\partial x_l}\big|_m\big)_{j\,l}$ es la matriz identidad se tiene que

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{d\big(dy_j \circ \Phi_m(t)\big)}{dt}(0)\, \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\bigg|_m = \sum_{l=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial y_j}{\partial x_l}\bigg|_m \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\bigg|_m \right) \frac{d\big(dx_l \circ \Phi_m(t)\big)}{dt}(0)$$
$$= \sum_{l=1}^{d} \delta_{i\,l} \frac{d\big(dx_l \circ \Phi_m(t)\big)}{dt}(0) = \frac{d\big(dx_i \circ \Phi_m(t)\big)}{dt}(0)\,,$$

que era lo que queríamos concluir.

De ese modo, dado $\big(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_d)\big)$ un sistema coordenado alrededor de m diremos que

$$(L_X Y)_m = \frac{d}{dt}\bigg|_0 \Phi_m(t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{d\big(dx_i \circ \Phi_m(t)\big)}{dt}(0)\, \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_m .$$

De esa forma, para todo $f \in C_m^\infty(M)$,

$$(L_X Y)_m(f) = \sum_{i=1}^{d} \frac{d\big(dx_i \circ \Phi_m(t)\big)}{dt}(0)\, \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_m (f)$$
$$= \frac{d}{dt}\bigg|_0 \left(\sum_{i=1}^{d} dx_i \circ \Phi_m(t)\, \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_m (f) \right) = \frac{d}{dt}\bigg|_0 \big(\Phi_m(t)(f)\big)$$

La siguiente Proposición tiene las propiedades principales de la derivada de Lie para campos vectoriales y formas diferenciales, relacionándolos con el corchete de Lie y la derivada exterior, respectivamente.

***Proposición* 3.5.2.** Sea X un campo vectorial en M. Entonces, dado $X \in \mathfrak{X}(M)$,

I. $L_X(f) = X(f)$ para toda $f \in C^\infty(M)$.

II. Para cualquier $Y \in \mathfrak{X}(M)$, $L_X Y = [X, Y]$.

III. $L_X : E^*(M) \longrightarrow E^*(M)$ es una anti-derivación que conmuta con d.

IV. En $E^*(M)$, $L_X = i(X) \circ d + d \circ i(X)$.

V. Sean $\omega \in E^p(M)$ y $Y_0, \ldots, Y_p \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces

$$L_{Y_0}\big(\omega(Y_1, \ldots, Y_p)\big) = (L_{Y_0}\omega)(Y_1, \ldots, Y_p) + \sum_{i=1}^{p} \omega(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, L_{Y_0}Y_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_p). \tag{3.15}$$

VI. Asumamos la notación de V. Entonces

$$\begin{aligned} d\omega(Y_0,\dots,Y_p) &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i Y_i\omega(Y_0,\dots,\widehat{Y_i},\dots,Y_p) \\ &\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([Y_i,Y_j],Y_0,\dots,Y_{i-1},\,\widehat{Y_i},\dots,\widehat{Y_j},\,Y_{j+1},\dots,Y_p). \end{aligned}$$

Demostración.
I. Sabemos que para todo $t\in\mathbb{R}$, si $p\in\mathcal{D}_t$ el morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras graduadas $\delta(X_t)_p:\Lambda(T^*_{X_t(p)}\mathcal{D}_{-t})\longrightarrow\Lambda(T^*_p\mathcal{D}_t)$ es la identidad en $\mathbb{R}$, por ello dado $m\in M$

$$\begin{aligned} (L_Xf)_m &= \lim_{t\to 0}\frac{\delta(X_t)_{\sigma_m(t)}(f(\sigma_m(t)))-f(m)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\sigma_m(t))-f(m)}{t} \\ &= \frac{d\big(f\circ\sigma_m(t)\big)}{dt} = \big(\dot\sigma_m(0)\big)(f) = X_m(f)\,, \end{aligned}$$

concluyéndose con ello que $L_Xf=X(f)$.

II. Veamos que para todo $m\in M$ y $f\in C^\infty_m(M)$, $(L_XY)_m(f)=[X,Y]_m(f)$. Por los comentarios previos

$$(L_XY)_(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \big(d(X_{-t})_{X_t(m)}\big(Y_{X_t(m)}\big)(f)\big) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \big(Y_{X_t(m)}(f\circ X_{-t})\big) \tag{3.16}$$

donde $Y_{X_t(m)}(f\circ X_{-t})=L_Y(f\circ X_{-t})_{X_t(m)}$, que a su vez es igual a

$$\lim_{r\to 0}\frac{f\circ X_{-t}\circ Y_r\circ X_t(m)-f(m)}{r} \tag{3.17}$$

Gracias al inciso VI del Teorema 2.8.9 existe $\varepsilon>0$ de tal modo que las funciones $H:(-\varepsilon,\varepsilon)^2\longrightarrow\mathbb{R}$ y $K:(-\varepsilon,\varepsilon)^3\longrightarrow\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} H(t,r) &= f\circ X_{-t}\circ Y_r\circ X_t(m) \\ K(t,r,s) &= f\circ X_s\circ Y_r\circ X_t(m) \end{aligned}$$

estan bien definidas y son suaves. Obsérvese que considerando el mapeo suave $g:(-\varepsilon,\varepsilon)^2\longrightarrow(-\varepsilon,\varepsilon)^3$ que aplica $(t,r)\longmapsto(t,r,-t)$ se tiene que $K\circ g=H$.

De las igualdades dadas en (3.16) se sigue que

$$Y_{X_t(m)}\big(f\circ X_{-t}\big) = \frac{\partial H(t,r)}{\partial r}\,(t,0)$$

y de la expresión (3.17) que

$$(L_X Y)_m(f) = \frac{\partial^2 H(t,r)}{\partial t\, \partial r}\,(0,0)\,,$$

Por la regla de la cadena se tiene que $\frac{\partial H(t,r)}{\partial r}(t,r) = \frac{\partial K(t,r,s)}{\partial r}(t,r,-t)$ y de esto que

$$\frac{\partial^2 H(t,r)}{\partial t\, \partial r}\,(0,0) = \frac{\partial^2 K(t,r,s)}{\partial t\, \partial r}\,(0,0,0) - \frac{\partial^2 K(t,r,s)}{\partial s\, \partial r}\,(0,0,0)\,. \tag{3.18}$$

Verificaremos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K(t,r,s)}{\partial t\, \partial r}\,(0,0,0) &= X_m(Y(f)), \\ \frac{\partial^2 K(t,r,s)}{\partial s\, \partial r}\,(0,0,0) &= Y_m(X(f))\,. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Denotando como γ a la curva integral de Y que pasa por $X_t(m)$ en 0, tenemos que

$$\begin{aligned} Y_{X_t(m)}(f) = \big(\dot\gamma(0)\big)(f) &= \frac{d(f\circ\gamma)(r)}{dr}\,(0) \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{f(Y_r(X_t(m))) - f(X_t(m))}{r} \\ &= \frac{\partial K(t,r,s)}{\partial r}\,(t,0,0)\,. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} X_m(Y(f)) = \big(\dot\sigma_m(0)\big)(Y(f)) &= \frac{d(Y(f)\circ\sigma_m(t))}{dt}\,(0) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{Y(f)\circ X_t(m) - Y(f)(m)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{Y_{X_t(m)}(f) - Y_m(f)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial K(t,r,s)}{\partial r}\,(t,0,0) - \frac{\partial K(t,r,s)}{\partial r}\,(0,0,0)}{t} \\ &= \frac{\partial^2 K(t,r,s)}{\partial t\, \partial r}\,(0,0,0)\,. \end{aligned}$$

Análogamente se concluye que $\frac{\partial^2 K(t,r,s)}{\partial s\, \partial r}\,(0,0,0) = Y_m(X(f))$. Dadas las igualdades (3.18) y (3.19) se obtiene el resultado.

III Considerando el comentario previo a la función (3.14), se sigue que $L_X : E^*(M) \longrightarrow E^*(M)$ esta bien definido. Verifiquemos que está es una derivación que conmuta con d.

Sean $\omega, \upsilon \in E^*(M)$. Por el inciso I de la Proposición 3.3.8 se sigue que L_X es un endomorfismo en $E^*(M)$ y además, para todo $m \in M$

$$\begin{aligned}
L_X(\omega \wedge \upsilon) &= \lim_{t\to 0} \frac{\delta X_t(\omega_{X_t(m)} \wedge \upsilon_{X_t(m)}) - \omega_m \wedge \upsilon_m}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\delta X_t(\omega_{X_t(m)}) \wedge \delta X_t(\upsilon_{X_t(m)}) - \omega_m \wedge \upsilon_m}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\delta X_t(\omega_{X_t(m)}) \wedge \delta X_t(\upsilon_{X_t(m)}) - \delta X_t(\omega_{X_t(m)}) \wedge \upsilon_m}{t} \\
&+ \lim_{t\to 0} \frac{\delta X_t(\omega_{X_t(m)}) \wedge \upsilon_m - \omega_m \wedge \upsilon_m}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \; \delta X_t(\omega_{X_t(m)}) \wedge \frac{\delta X_t(\upsilon_{X_t(m)}) - \upsilon_m}{t} \\
&+ \lim_{t\to 0} \frac{\delta X_t(\omega_{X_t(m)}) - \omega_m}{t} \wedge \upsilon_m \\
&= \omega_m \wedge \big(L_X\, \upsilon\big)_m + \big(L_X\, \omega\big)_m \wedge \upsilon_m \,,
\end{aligned}$$

obteniendo así que L_X es una derivación.

Nótese que si $\mathcal{D} : E^*(M) \longrightarrow E^*(M)$ es una derivación y $\omega_1, \omega_2 \in E^*(M)$ de tal modo que existe un abierto $U \subseteq M$ para el cual $\omega_1|_U = \omega_2|_U$, entonces $\mathcal{D}(\omega_1)_p = \mathcal{D}(\omega_2)_p$ para todo $p \in U$ (véase la observación 2.1.2). La siguiente afirmación nos será de utilidad para mostrar que L_X conmuta con d.

Afirmación. *Si $L_X(df) = d(L_X f)$ para todo $f \in C^\infty(M)$ entonces $L_X(d\omega) = d(L_X\omega)$ para todo $\omega \in E^*(M)$.*
Sea $\omega \in E^*(M)$. Consideremos $m \in M$ y (U, φ) un sistema coordenado alrededor de m con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_d$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\omega|_U = a_{i_1,\ldots,i_n}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$, donde $a_{i_1,\ldots,i_n} \in C^\infty(U)$. Consideremos $\psi \in C^\infty(M)$ tal que $\psi|_{V_m} \equiv 1$ y $\psi|_{M \smallsetminus \overline{U}_m} \equiv 0$, donde V_m, U_m son vecindades abiertas de m y satisfacen que $\overline{V}_m \subseteq U_m \subseteq \overline{U}_m \subseteq U$ (véase la función expresada en 1.2). Ya que $x_i|_{V_m} = \psi x_i|_{V_m}$, se tiene que $d(x_i)_p = d(\psi x_i)_p$ para todo $p \in V_m$ y por lo tanto

$$\omega|_{V_m} = \big(\psi a_{i_1,\ldots,i_n}\, d(\psi x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(\psi x_{i_n})\big)_{V_m} \,,$$

Ya que L_X es una derivación se obtienen las siguientes igualdades

$$
\begin{aligned}
&L_X\big(d\omega\big)_m = L_X\big(d(\psi a_{i_1,\dots,i_n})\big)_m \wedge d(\psi x_{i_1})_m \wedge \cdots \wedge d(\psi x_{i_n})_m \\
&+\sum_{k=1}^{n} d(\psi a_{i_1,\dots,i_n})_m \wedge d(\psi x_{i_1})_m \wedge \cdots \wedge L_X\big(d(\psi x_{i_k})\big)_m \wedge \cdots \wedge d(\psi x_{i_n})_m \\
&= d\big(L_X(\psi a_{i_1,\dots,i_n})\big)_m \wedge d(\psi x_{i_1})_m \wedge \cdots \wedge d(\psi x_{i_n})_m \\
&+\sum_{k=1}^{n} d(\psi a_{i_1,\dots,i_n})_m \wedge d(\psi x_{i_1})_m \wedge \cdots \wedge d\big(L_X(\psi x_{i_k})\big)_m \wedge \cdots \wedge d(\psi x_{i_n})_m \\
&= d\Bigg(L_X(\psi a_{i_1,\dots,i_n})\, d(\psi x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(\psi x_{i_n}) \\
&+\sum_{k=1}^{n} \psi a_{i_1,\dots,i_n}\, d(\psi x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge L_X(\psi x_{i_k}) \wedge \cdots \wedge d(\psi x_{i_n}) \Bigg)_m \\
&= d\big(L_X\big(\psi a_{i_1,\dots,i_n}\, d(\psi x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(\psi x_{i_n})\big)\big)_m = d\big(L_X(\omega)\big)_m ,
\end{aligned}
$$

concluyéndose con esto que $L_X(d\omega) = d(L_X\omega)$.

Por la afirmación anterior basta probar que $L_X(df) = d(L_X f)$ para todo $f \in C^\infty(M)$. Sea $m \in M$. Como $\big(L_X(df)\big)_m$, $d(L_X f)_m \in T_m^* M$ basta mostrar que para todo $Y_m \in T_m M$, $\big(L_X(df))_m(Y_m\big) = d(L_X f)_m(Y_m)$. Obsérvese que por un lado

$$
\begin{aligned}
\big(L_X(df))_m(Y_m) &= \left(\frac{d}{dt}\bigg|_0 \delta(X_t)_{X_t(m)}(df_{X_t(m)}) \right)(Y_m) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_0 \big(\delta(X_t)_{X_t(m)}(df_{X_t(m)})(Y_m)\big) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_0 Y_m(f \circ X_t)\,.
\end{aligned}
$$

Por otro lado

$$
d(L_X f)_m(Y_m) = Y_m(L_X f) = Y_m \left(\frac{d}{dt}\bigg|_0 (f \circ X_t) \right).
$$

Sea $Y \in \mathfrak{X}(M)$ una extensión de Y_m (véase la Proposición 2.5.7). Por el ejemplo 2.8.6, existen $\widetilde{Y} = \big(Y, 0\big)$ y $\widetilde{\frac{d}{dt}} = \big(0, \frac{d}{dt}\big)$ campos suaves definidos en $M \times \mathbb{R}$ que satisfacen que $\big[\widetilde{Y}, \widetilde{\frac{d}{dt}}\big] \equiv 0$. Por el inciso VI del Teorema 2.8.9 existen $\varepsilon > 0$ y V una vecindad de m de tal forma que la función $f \circ X_t$ esta bien definida en $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V$ y es suave, de modo que

$$
\begin{aligned}
Y_m\left(\frac{d}{dt}\bigg|_0 (f\circ X_t)\right) &= \widetilde{Y}_{(m,0)}\left(\widetilde{\frac{d}{dt}}\bigg|_{(m,0)} (f\circ X_t)\right)\\
= \widetilde{\frac{d}{dt}}\bigg|_{(m,0)} \big(\widetilde{Y}_{(m,0)}(f\circ X_t)\big) &= \frac{d}{dt}\bigg|_0 \big(Y_m(f\circ X_t)\big)\,,
\end{aligned}
$$

con lo cual se obtiene que $L_X(df) = d(L_X f)$.

IV. Mostraremos algunas afirmaciones que nos ayudarán a concluir en forma directa el resultado.

Afirmación. *Sean $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ un álgebra graduada y $\mathcal{J},\mathcal{K} : A \longrightarrow A$ anti-derivaciones de grado impar j y k respectivamente. Entonces $\mathcal{J}\circ\mathcal{K} + \mathcal{K}\circ\mathcal{J}$ es una derivación.*
Sean $\nu,\omega \in A$. Supongamos que $\nu \in A_m$ de modo que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}\circ\mathcal{K}(\nu\wedge\omega) &= \mathcal{J}\big(\mathcal{K}(\nu)\wedge\omega + (-1)^m \nu\wedge\mathcal{K}(\omega)\big)\\
&= \mathcal{J}\circ\mathcal{K}(\nu)\wedge\omega + (-1)^{m+k}\mathcal{K}(\nu)\wedge\mathcal{J}(\omega)\\
&\quad + (-1)^m\mathcal{J}(\nu)\wedge\mathcal{K}(\omega) + \nu\wedge\mathcal{J}\circ\mathcal{K}(\omega)
\end{aligned}
$$

y de forma análoga

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}\circ\mathcal{J}(\nu\wedge\omega) &= \mathcal{K}\circ\mathcal{J}(\nu)\wedge\omega + (-1)^{m+j}\mathcal{J}(\nu)\wedge\mathcal{K}(\omega)\\
&\quad + (-1)^m\mathcal{K}(\nu)\wedge\mathcal{J}(\omega) + \nu\wedge\mathcal{K}\circ\mathcal{J}(\omega)\,,
\end{aligned}
$$

obteniendo con ello que

$$
\begin{aligned}
&\big(\mathcal{J}\circ\mathcal{K} + \mathcal{K}\circ\mathcal{J}\big)(\nu\wedge\omega) = \mathcal{J}\circ\mathcal{K}(\nu)\wedge\omega + \mathcal{K}\circ\mathcal{J}(\nu)\wedge\omega\\
&+ (-1)^m\big(1+(-1)^k\big)\,\mathcal{K}(\nu)\wedge\mathcal{J}(\omega) + (-1)^m\big(1+(-1)^j\big)\,\mathcal{J}(\nu)\wedge\mathcal{K}(\omega)\\
&+ \nu\wedge\mathcal{J}\circ\mathcal{K}(\omega) + \nu\wedge\mathcal{K}\circ\mathcal{J}(\omega)\\
&= \big(\mathcal{J}\circ\mathcal{K} + \mathcal{K}\circ\mathcal{J}\big)(\nu)\wedge\omega + \nu\wedge\big(\mathcal{J}\circ\mathcal{K} + \mathcal{K}\circ\mathcal{J}\big)(\omega)\,.
\end{aligned}
$$

De la distribución del producto y del hecho de que $\mathcal{J}$, $\mathcal{K}$ son endomorfismos se sigue la afirmación.

Ya que $i(X)$ y d son anti-derivaciones de grados impares, de la afirmación anterior se sigue que $i(X)\circ d + d\circ i(X)$ es una derivación. Por definición conmuta con d. Más aún, ya que $i(X)(f) = 0$ para todo $f \in C^\infty(M)$, dado $m \in M$

$$\big(i(X)\circ d(f) + d\circ i(X)(f)\big)_m = i(X)_m(df) + d(i(X)(f))_m$$
$$= df_m(X_m) = X_m(f) = (L_X f)_m\,,$$

de tal forma que $\big(i(X)\circ d + d\circ i(X)\big)(f) = L_X f$. Dados el inciso anterior y la siguiente afirmación, concluimos que $\big(i(X)\circ d + d\circ i(X)\big)(\omega) = L_X\omega$ para todo $\omega \in E^*(M)$.

Afirmación. *Sean $\mathcal{J}, \mathcal{K} : E^*(M) \longrightarrow E^*(M)$ derivaciones que conmutan con d y satisfacen que para todo $f \in C^\infty(M)$*

$$\mathcal{J}(f) = \mathcal{K}(f)\,.$$

Entonces $\mathcal{J} = \mathcal{K}$.
Sean $\omega \in E^*(M)$, $m \in M$ y (U,φ) un sistema coordenado alrededor de m con funciones coordenadas $x_1,\dots,x_d$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\omega|_U = a_{i_1,\dots,i_n}\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_n}$, donde $a_{i_1,\dots,i_n} \in C^\infty(U)$. Consideremos $\psi \in C^\infty(M)$ como en la afirmación del inciso anterior. Ya que $x_i|_{V_m} = \psi x_i|_{V_m}$, se tiene que $d(x_i)_p = d(\psi x_i)_p$ para todo $p \in V_m$ y por tanto

$$\omega|_{V_m} = \big(\psi a_{i_1,\dots,i_n}\, d(\psi x_{i_1})\wedge\cdots\wedge d(\psi x_{i_n})\big)_{V_m}\,,$$

de manera que

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(\omega)_p = {} & \mathcal{J}\big(\psi a_{i_1,\dots,i_n}\big)\, d(\psi x_{i_1})_p\wedge\cdots\wedge d(\psi x_{i_n})_p \\
& + \sum_{k=1}^{d}\psi a_{i_1,\dots,i_n}(p)\, d(\psi x_{i_1})_p\wedge\cdots\wedge \mathcal{J}\big(d(\psi x_{i_k})\big)_p\wedge\cdots\wedge(\psi x_{i_n})_p \\
& = \mathcal{K}\big(\psi a_{i_1,\dots,i_n}\big)\, d(\psi x_{i_1})_p\wedge\cdots\wedge d(\psi x_{i_n})_p \\
& + \sum_{k=1}^{d}\psi a_{i_1,\dots,i_n}(p)\, d(\psi x_{i_1})_p\wedge\cdots\wedge d\big(\mathcal{J}(\psi x_{i_k})\big)_p\wedge\cdots\wedge(\psi x_{i_n})_p \\
& = \mathcal{K}\big(\psi a_{i_1,\dots,i_n}\big)\, d(\psi x_{i_1})_p\wedge\cdots\wedge d(\psi x_{i_n})_p \\
& + \sum_{k=1}^{d}\psi a_{i_1,\dots,i_n}(p)\, d(\psi x_{i_1})_p\wedge\cdots\wedge d\big(\mathcal{K}(\psi x_{i_k})\big)_p\wedge\cdots\wedge(\psi x_{i_n})_p \\
& = \mathcal{K}\big(\psi a_{i_1,\dots,i_n}\big)\, d(\psi x_{i_1})_p\wedge\cdots\wedge d(\psi x_{i_n})_p \\
& + \sum_{k=1}^{d}\psi a_{i_1,\dots,i_n}(p)\, d(\psi x_{i_1})_p\wedge\cdots\wedge \mathcal{K}\big(d(\psi x_{i_k})\big)_p\wedge\cdots\wedge(\psi x_{i_n})_p \\
& = \mathcal{K}(\omega)_p\,.
\end{aligned}$$

Dado que $\mathcal{J}$ y $\mathcal{K}$ son endomorfismos, se sigue que $\mathcal{J} = \mathcal{K}$.

v. Sea $m \in M$ y $\big(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_d)\big)$ un sistema coordenado alrededor de m. En lo siguiente $x_1, \ldots, x_d$ denotarán extensiones de las funciones coordenadas de $V \subseteq U$ una vecindad de m a M. Supongamos que para una vecindad de m, ω coincide con el elemento descomponible $f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p$, siendo f un elemento en $C^\infty(M)$. De esa forma

$$\begin{aligned} & L_{Y_0}\big(\omega(Y_1, \ldots, Y_p)\big)(m) = (Y_0)_m\Big(f \det \big(Y_i(x_j)\big)_{ij}\Big) \\ =& (Y_0)_m\Big(f \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sig}(\sigma)\, Y_1(x_{\sigma(1)}) \cdots Y_p(x_{\sigma(p)})\Big) \\ =& (Y_0)_m\big(f\big) \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sig}(\sigma)\, (Y_1)_m(x_{\sigma(1)}) \cdots (Y_p)_m(x_{\sigma(p)}) \\ &+ f(m) \sum_{\sigma \in S_p} \sum_{l=1}^{p} \operatorname{sig}(\sigma)\, (Y_1)_m(x_{\sigma(1)}) \cdots\cdots (Y_0)_m(Y_l(x_{\sigma(l)})) \cdots (Y_p)_m(\sigma(p)) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} i(Y_0)\omega =& \sum_{\substack{\phi \subseteq \{\,1,\ldots,d\,\} \\ \phi = \{\, i_1,\ldots,i_{p-1}\,\}}} \omega\left(Y_0 \wedge \frac{\partial}{\partial x_\phi}\right) dx_\phi \\ =& \sum_{\substack{j=1 \\ \phi \subseteq \{\,1,\ldots,d\,\} \\ \phi = \{\, i_1,\ldots,i_{p-1}\,\}}}^{d} Y_0(x_j)\, \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \wedge \frac{\partial}{\partial x_\phi}\right) dx_\phi \end{aligned} \tag{3.21}$$

donde

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \wedge \frac{\partial}{\partial x_\phi}\right) = \begin{cases} \operatorname{sig}(\sigma_j) & \text{si } \phi \cap \{\,j\,\} = \{\,1, \ldots, p\,\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo $\sigma_1 = \mathrm{id}$ y $\sigma_j = \begin{pmatrix} j & 1 & 2 \cdots & j-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots j-1 & j \end{pmatrix}$ si $2 \leqslant j \leqslant p$. De (3.21) se tiene la siguiente igualdad en una vecindad de m

$$i(Y_0)\omega = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} f\, Y_0(x_j)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_p\,.$$

Considerando que d es una antiderivación y que $d^2 \equiv 0$ se sigue que

$$
\begin{aligned}
d\circ i(Y_0)\omega = &\sum_{j=1}^{p} Y_0(x_j)\, dx_1\wedge\cdots\wedge df\wedge\cdots\wedge dx_p \\
&+\sum_{j=1}^{p} f\, dx_1\wedge\cdots\wedge d\big(Y_0(x_j)\big)\wedge\cdots\wedge dx_p\,.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Denotemos

$$
x_{i,j} = \begin{cases} x_i & \text{si } i\neq j \\ f & \text{si } i=j \end{cases}
$$

$$
\tilde{x}_{i,j} = \begin{cases} x_i & \text{si } i\neq j \\ Y_0(x_j) & \text{si } i=j \end{cases}
$$

$$
\hat{x}_j = \begin{cases} x_j & \text{si } j\neq 0 \\ f & \text{si } j=0 \end{cases}
$$

así, por la igualdad (3.22) se obtiene que $\big(d\circ i(Y_0)\omega\big)_m\big(Y_1,\dots,Y_p\big)$ es igual a

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{p}\sum_{\sigma\in S_p} \operatorname{sig}(\sigma)\,(Y_0)_m(x_j)\,(Y_1)_m(x_{\sigma(1),j})\cdots(Y_p)_m(x_{\sigma(p),j}) \\
+&\sum_{j=1}^{p}\sum_{\sigma\in S_p} \operatorname{sig}(\sigma)\, f(m)\,(Y_1)_m(\tilde{x}_{\sigma(1),j})\cdots(Y_p)_m(\tilde{x}_{\sigma(p),j})\,.
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

De manera que para todo $\sigma\in S_p$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{p} f(m)\,(Y_1)_m(\tilde{x}_{\sigma(1),j})\cdots(Y_p)_m(\tilde{x}_{\sigma(p),j}) \\
=&\sum_{j=1}^{p} f(m)\,(Y_1)_m(x_{\sigma(1)})\cdots(Y_j)_m\big(Y_0(x_{\sigma(j)})\big)\cdots(Y_p)_m(x_{\sigma(p)})\,,
\end{aligned}
$$

y por otro lado

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in S_p}\sum_{j=1}^{p} \operatorname{sig}(\sigma)\,(Y_0)_m(x_j)\,(Y_1)_m(x_{\sigma(1),j})\cdots(Y_p)_m(x_{\sigma(p),j}) \\
=&\sum_{\sigma\in S_p}\sum_{j=1}^{p} \operatorname{sig}(\sigma)\,(Y_0)_m(x_{\sigma(j)})\,(Y_1)_m(x_{\sigma(1)})\cdots(Y_j)_m\big(f\big)\cdots(Y_p)_m(x_{\sigma(p)})\,,
\end{aligned}
$$

obteniendo de la igualdad (3.23) que $\big(d\circ i(Y_0)\omega\big)_m\big(Y_1,\ldots,Y_p\big)$ es igual a

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma\in S_p}\sum_{j=1}^{p}\operatorname{sig}(\sigma)\,(Y_0)_m(x_{\sigma(j)})\,(Y_1)_m(x_{\sigma(1)})\cdots(Y_j)_m\big(f\big)\cdots(Y_p)_m(x_{\sigma(p)})\\ &+f(m)\sum_{\sigma\in S_p}\sum_{j=1}^{p}\operatorname{sig}(\sigma)\,(Y_1)_m(x_{\sigma(1)})\cdots(Y_j)_m\big(Y_0(x_{\sigma(j)})\big)\cdots(Y_p)_m(x_{\sigma(p)})\,.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Considerando que del inciso II se sigue que $L_{Y_0}Y_i=[Y_0,Y_i]$ para todo $i\in\{\,1,\ldots,p\,\}$, de las igualdades (3.20) y (3.24) se tiene que

$$\begin{aligned}&\big(d\circ i(Y_0)\,\omega\big)_m\big(Y_1,\ldots,Y_p\big)-L_{Y_0}\big(\omega(Y_1,\ldots,Y_p)\big)(m)\\ &+\sum_{i=1}^{p}\omega_m\big((Y_1)_m,\ldots,(Y_{i-1})_m,\,(L_{Y_0}Y_i)_m,\,(Y_{i+1})_m,\ldots,(Y_p)_m\big)\\ &=-\,(Y_0)_m\big(f\big)\sum_{\sigma\in S_p}\operatorname{sig}(\sigma)\,(Y_1)_m(x_{\sigma(1)})\cdots(Y_p)_m(x_{\sigma(p)})\\ &+\sum_{\sigma\in S_p}\sum_{j=1}^{p}\operatorname{sig}(\sigma)\,(Y_0)_m(x_{\sigma(j)})\,(Y_1)_m(x_{\sigma(1)})\cdots(Y_j)_m\big(f\big)\cdots(Y_p)_m(x_{\sigma(p)})\,.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Denotemos a dicho número α_m. Por el inciso IV, es suficiente mostrar que $-\alpha_m=\big(i(Y_0)\circ d(\omega)\big)_m\big(Y_1,\ldots,Y_p\big)$. Considerando $\widetilde{S}_{p+1}$ como el grupo de permutaciones del conjunto $\{\,0,1,\ldots,p\,\}$ se tiene que

$$\big(i(Y_0)\circ d(\omega)\big)_m\big(Y_1,\ldots,Y_p\big)=\sum_{\sigma\in\widetilde{S}_{p+1}}\operatorname{sig}(\sigma)\,(Y_0)_m(\hat{x}_{\sigma(0)})\cdots(Y_p)_m(\hat{x}_{\sigma(p)})\tag{3.26}$$

Sean $\mathcal{J}=\{\,\sigma\in S_{p+1}\,:\,\sigma(0)\neq 0\,\}$ y $\mathcal{J}_j=\{\,\sigma\in\widetilde{S}_{p+1}\,:\,\sigma(0)=j\,\}$, de modo que

$$\mathcal{J}=\bigcup_{j=1}^{p}\mathcal{J}_j\,.$$

Más aún, dado $j\in\{\,1,\ldots,p\,\}$

$$\begin{aligned}S_p&\xrightarrow{\ \Psi_j\ }\mathcal{J}_j\\ \sigma&\longmapsto\sigma\big(0\quad j\big)\end{aligned}$$

es una biyección. De esa forma

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in S_p} \operatorname{sig}(\sigma)\,(Y_0)_m(x_{\sigma(j)})\,(Y_1)_m(x_{\sigma(1)})\cdots(Y_j)_m\big(f\big)\cdots(Y_p)_m(x_{\sigma(p)})\\
&=\sum_{\sigma\in S_p} \operatorname{sig}(\sigma)\,(Y_0)_m\big(\hat{x}_{\Psi_j(\sigma)(0)}\big)\cdots(Y_j)_m\big(\hat{x}_{\Psi_j(\sigma)(j)}\big)\cdots(Y_p)_m\big(\hat{x}_{\Psi_j(\sigma)(p)}\big)\\
&=\sum_{\sigma\in S_p} -\operatorname{sig}(\Psi_j(\sigma))\,(Y_0)_m\big(\hat{x}_{\Psi_j(\sigma)(0)}\big)\cdots(Y_j)_m\big(\hat{x}_{\Psi_j(\sigma)(j)}\big)\cdots(Y_p)_m\big(\hat{x}_{\Psi_j(\sigma)(p)}\big)\\
&=-\sum_{\tau\in\mathcal{J}_j} \operatorname{sig}(\tau)\,(Y_0)_m\big(\hat{x}_{\tau(0)}\big)\cdots(Y_j)_m\big(\hat{x}_{\tau(j)}\big)\cdots(Y_p)_m\big(\hat{x}_{\tau(p)}\big)\,.
\end{aligned}
$$

De esto se sigue que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{p}\sum_{\sigma\in S_p} \operatorname{sig}(\sigma)\,(Y_0)_m(x_{\sigma(j)})\,(Y_1)_m(x_{\sigma(1)})\cdots(Y_j)_m\big(f\big)\cdots(Y_p)_m(x_{\sigma(p)})\\
&=-\sum_{j=1}^{p}\sum_{\tau\in\mathcal{J}_j} \operatorname{sig}(\tau)\,(Y_0)_m\big(\hat{x}_{\tau(0)}\big)\cdots(Y_j)_m\big(\hat{x}_{\tau(j)}\big)\cdots(Y_p)_m\big(\hat{x}_{\tau(p)}\big)\\
&=-\sum_{\tau\in\mathcal{J}} \operatorname{sig}(\tau)\,(Y_0)_m\big(\hat{x}_{\tau(0)}\big)\cdots(Y_p)_m\big(\hat{x}_{\tau(p)}\big)\,,
\end{aligned}
$$

con lo cual se concluye que $\big(i(Y_0)\circ d(\omega)\big)_m\big(Y_1,\ldots,Y_p\big)$ es igual a

$$
\begin{aligned}
&(Y_0)_m\big(f\big)\sum_{\sigma\in S_p} \operatorname{sig}(\sigma)\,(Y_1)_m(x_{\sigma(1)})\cdots(Y_p)_m(x_{\sigma(p)})\\
&-\sum_{j=1}^{p}\sum_{\sigma\in S_p} \operatorname{sig}(\sigma)\,(Y_0)_m(x_{\sigma(j)})(Y_1)_m(x_{\sigma(1)})\cdots(Y_j)_m\big(f\big)\cdots(Y_p)_m(x_{\sigma(p)})\,,
\end{aligned}
$$

que es igual a $-\alpha_m$.

VI. Retomemos la notación del inciso anterior al igual que la suposición de que ω coincide en una vecindad abierta de m con $f\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_p$. De esa forma, dado $i\in\{\,1,\ldots,d\,\}$ las siguientes igualdades se tienen en dicha vecindad

$$
\begin{aligned}
&Y_i\big(\omega(Y_0,\ldots,\widehat{Y_i},\ldots,Y_p)\big)\\
&= Y_i\left(\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sig}(\sigma)\, f\, Y_0(x_{\sigma(1)})\cdots Y_{i-1}(x_{\sigma(i)})\, Y_{i+1}(x_{\sigma(i+1)})\cdots Y_p(x_{\sigma(p)})\right)\\
&= Y_i(f)\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sig}(\sigma)\, Y_0(x_{\sigma(1)})\cdots Y_{i-1}(x_{\sigma(i)})\, Y_{i+1}(x_{\sigma(i+1)})\cdots Y_p(x_{\sigma(p)})\\
&+ \sum_{\sigma\in S_p}\sum_{j=0}^{i-1}\mathrm{sig}(\sigma)\, f\, Y_0(x_{\sigma(1)})\cdots Y_i\big(Y_j(x_{\sigma(j+1)})\big)\cdots Y_{i+1}(x_{\sigma(i+1)})\cdots Y_p(x_{\sigma(p)})\\
&+ \sum_{\sigma\in S_p}\sum_{j=i+1}^{p}\mathrm{sig}(\sigma)\, f\, Y_0(x_{\sigma(1)})\cdots Y_{i-1}(x_{\sigma(i)})\cdots Y_i\big(Y_j(x_{\sigma(j)})\big)\cdots Y_p(x_{\sigma(p)})\,.
\end{aligned}
$$

Consideremos

$$
\begin{aligned}
\Omega_i &= \sum_{\sigma\in S_p}\sum_{j=0}^{i-1}\mathrm{sig}(\sigma)\, f\, Y_0(x_{\sigma(1)})\cdots Y_i\big(Y_j(x_{\sigma(j+1)})\big)\cdots Y_{i+1}(x_{\sigma(i+1)})\cdots Y_p(x_{\sigma(p)})\\
&+ \sum_{\sigma\in S_p}\sum_{j=i+1}^{p}\mathrm{sig}(\sigma)\, f\, Y_0(x_{\sigma(1)})\cdots Y_{i-1}(x_{\sigma(i)})\cdots Y_i\big(Y_j(x_{\sigma(j)})\big)\cdots Y_p(x_{\sigma(p)})\,,
\end{aligned}
$$

de modo que

$$
\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\, Y_i\big(\omega(Y_0,\ldots,\widehat{Y_i},\ldots,Y_p)\big) = d\omega(Y_0,\ldots,Y_p) + \sum_{i=1}^{p}(-1)^i\,\Omega_i\,.
$$

Para concluir el resultado es suficiente verificar que $\sum_{i=0}^{p}(-1)^{i-1}\,\Omega_i$ es igual a

$$
\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([Y_i,Y_j],Y_0,\ldots,Y_{i-1},\,\widehat{Y_i},\ldots,\widehat{Y_j},\,Y_{j+1},\ldots,Y_p)\,.
$$

Por definición se obtiene que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([Y_i,Y_j],Y_0,\ldots,Y_{i-1},\,\widehat{Y_i},\ldots,\widehat{Y_j},\,Y_{j+1},\ldots,Y_p)\\
&= \sum_{\sigma\in S_p}\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=i+1}^{p}(-1)^{i-1}\mathrm{sig}(\sigma)\, f\, Y_0(x_{\sigma(1)})\cdots[X_i,X_j](x_{\sigma(j)})\cdots Y_p(x_{\sigma(p)})\\
&= \sum_{\sigma\in S_p}\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=i+1}^{p}(-1)^{i-1}\mathrm{sig}(\sigma)\, f\, Y_0(x_{\sigma(1)})\cdots Y_i\big(Y_j(x_{\sigma(j)})\big)\cdots Y_p(x_{\sigma(p)})\\
&- \sum_{\sigma\in S_p}\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=i+1}^{p}(-1)^{i-1}\mathrm{sig}(\sigma)\, f\, Y_0(x_{\sigma(1)})\cdots Y_j\big(Y_i(x_{\sigma(j)})\big)\cdots Y_p(x_{\sigma(p)})\,.
\end{aligned}
$$

Veamos que se tiene la siguiente igualdad

$$\sum_{\sigma\in S_p}\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=i+1}^{p}(-1)^i\mathrm{sig}(\sigma)\, f\, Y_0(x_{\sigma(1)})\cdots Y_j\big(Y_i(x_{\sigma(j)})\big)\cdots Y_p(x_{\sigma(p)})$$
$$=\sum_{\sigma\in S_p}\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-1}\mathrm{sig}(\sigma)\, f\, Y_0(x_{\sigma(1)})\cdots Y_i\big(Y_j(x_{\sigma(j+1)})\big)\cdots Y_p(x_{\sigma(p)})\,,$$

con lo cual habremos terminado.

Recordemos que al permutar renglones (o columnas) de $A\in\mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})$, el determinante de la matriz resultante es igual a $\det A$ por el signo de la permutación, de manera que considerando $j<i$, si intercambiamos el $j+1$-ésimo renglón y el i-ésimo renglón de una matriz en $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})$, la permutación correspondiente es $\big(i\cdots j+3 \quad j+2 \quad j+1\big)$ y su signo es igual a $i-j-1$. Gracias a esto se obtienen las siguientes igualdades

$$\sum_{\sigma\in S_p}\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=i+1}^{p}(-1)^i\mathrm{sig}(\sigma)\, f\, Y_0(x_{\sigma(1)})\cdots Y_j\big(Y_i(x_{\sigma(j)})\big)\cdots Y_p(x_{\sigma(p)})$$
$$=\sum_{\sigma\in S_p}\sum_{j=0}^{p}\sum_{i=j+1}^{p}(-1)^j\mathrm{sig}(\sigma)\, f\, Y_0(x_{\sigma(1)})\cdots Y_i\big(Y_j(x_{\sigma(i)})\big)\cdots Y_p(x_{\sigma(p)})$$
$$=\sum_{\sigma\in S_p}\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\mathrm{sig}(\sigma)\, f\, Y_0(x_{\sigma(1)})\cdots Y_i\big(Y_j(x_{\sigma(i)})\big)\cdots Y_p(x_{\sigma(p)})$$
$$=\sum_{\sigma\in S_p}\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j(-1)^{i-j-1}\,\mathrm{sig}(\sigma)\, f\, Y_0(x_{\sigma(1)})\cdots Y_i\big(Y_j(x_{\sigma(j+1)})\big)\cdots Y_p(x_{\sigma(p)})$$
$$=\sum_{\sigma\in S_p}\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-1}\,\mathrm{sig}(\sigma)\, f\, Y_0(x_{\sigma(1)})\cdots Y_i\big(Y_j(x_{\sigma(j+1)})\big)\cdots Y_p(x_{\sigma(p)})\,.$$

■

Capítulo 4

Grupos de Lie

4.1. Nociones básicas

Enseguida recordaremos la definición de grupo abstracto. Para profundizar al respecto de dicha Teoría se puede consultar [Rotman1].

Definición 4.1.1. Sea G un conjunto y $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ una operación binaria asociativa. Decimos que $(G, \cdot\,)$ es una *grupo* si

1. Existe un elemento $e \in G$ que satisface que para cualquier $\tau \in G$, $e \cdot \tau = \tau$.

2. Dado $\tau \in G$ existe $\tau' \in G$ de tal forma que $\tau' \cdot \tau = e$.

A menos de especificar lo contrario, en adelante abreviaremos $\tau \cdot \sigma$ como $\tau\sigma$, además de que para cualquier $\tau \in G$, denotaremos al elemento con la propiedad descrita en el inciso (2) como τ^{-1}.

Definición 4.1.2. Sea $(G, \cdot\,)$ un grupo. Diremos que $(G, \cdot\,)$ es un *grupo de Lie* si es una variedad diferenciable y la función $\Lambda : G \times G \longrightarrow G$ definida como $\Lambda(\tau, \sigma) = \tau\sigma^{-1}$, es suave.

En adelante, si no hay lugar a confusiones denotaremos $(G, \cdot\,)$ simplemente como G.

Observación 4.1.3. La definición anterior se puede generalizar a espacios topológicos en el siguiente sentido: diremos que un grupo $(G, \cdot\,)$ es un *grupo topológico* si G es un espacio topológico y la función $\Lambda : G \times G \longrightarrow G$ definida como $\Lambda(\tau, \sigma) = \tau\sigma^{-1}$, es continua.

Que Λ sea continua resulta equivalente a que la operación $\cdot$ y la función inversa que mapea $\tau \mapsto \tau^{-1}$ sean continuas. Análogamente, si G cuenta con una estructura de variedad diferenciable, G es un grupo de Lie si y sólo si la operación $\cdot$ y la función inversa son suaves.

Dado un grupo $(G,\cdot)$, donde G tiene una estructura de variedad diferenciable, se puede asegurar que el hecho de que la operación $\cdot$ sea suave, resulta una razón suficiente para que G sea un grupo de Lie. El siguiente Lema nos será de utilidad para mostrarlo.

***Lema* 4.1.4.** Sean M, N y R variedades diferenciables y $\varphi : M\times R \longrightarrow N$ una función suave para la cual, dado $r\in R$

$$\begin{array}{rcl} M & \xrightarrow{\varphi_r} & N \\ m & \longmapsto & \varphi(m,r) \end{array}$$

es un difeomorfismo, entonces la función $\psi : N\times R \longrightarrow M$ definida como $\psi(n,r)=\varphi_r^{-1}(n)$, es suave.

Demostración. Consideremos las funciones

$$\begin{array}{rcl} M\times R & \xrightarrow{\Phi} & N\times R \\ (m,r) & \longmapsto & (\varphi(m,r),r) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} N\times R & \xrightarrow{\Psi} & M\times R \\ (n,r) & \longmapsto & (\varphi_r^{-1}(n),r) \end{array}$$

Dado que $\Psi\circ\Phi=\mathrm{id}_{M\times R}$ y $\Phi\circ\Psi=\mathrm{id}_{N\times R}$, basta mostrar que Φ es un difeomorfismo local para concluir que es un difeomorfismo cuya función inversa es Ψ, de lo que se sigue la suavidad de ψ.

Como M y N tiene la misma dimensión, $M\times R$ y $N\times R$ también tienen la misma dimensión. De mostrar que para cualquier $(m,r)\in M\times R$, $d(\Phi)_{(m,r)}$ es inyectiva, como consecuencia se tendrá que esta última es un isomorfismo. Así, por el Teorema de la función inversa podremos concluir que Φ es un difeomorfismo local.

Sea $(m,r)\in M\times R$. Si π_1, π_2 son las proyecciones canónicas de $M\times N$ sobre M y R respectivamente, sabemos que $(d(\pi_1)_{(m,r)}, d(\pi_2)_{(m,r)})$ es un isomorfismo entre $T_{(m,r)}(M\times R)$ y $T_mM\times T_rR$. Análogamente se tiene un isomorfismo entre $T_{(\varphi(m,r),r)}(M\times R)$ y $T_{\varphi(m,r)}M\times T_rR$, de manera que mediante la identificación de los correspondientes espacios vectoriales se tiene que

$$\begin{array}{rcl} T_mM\times T_rR & \xrightarrow{d\Phi_{(m,r)}} & T_{\varphi(m,r)}M\times T_rR \\ (\nu,0) & \longmapsto & (d(\varphi_r)_m(\nu),0) \\ (0,\upsilon) & \longmapsto & (0,\upsilon) \end{array}$$

el cual es inyectivo.

■

***Proposición* 4.1.5.** Sea $(G, \cdot\,)$ un grupo, en el cual G posee una estructura de variedad diferenciable. Entonces una condición necesaria y suficiente para que la operación $\cdot$ sea suave es que la función $\Lambda : G \times G \longrightarrow G$ definida como $\Lambda(\tau, \sigma) = \tau\sigma^{-1}$, sea suave.

Demostración. Por la observación 4.1.3 basta verificar que si la operación $\cdot$ es suave, Λ también lo es.

Ya que para todo $\sigma \in G$, la función

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi_\sigma} & G \\ \tau & \longmapsto & \tau\sigma \end{array}$$

es un difeomorfismo con inversa $\varphi_{\sigma^{-1}}$, por el Lema anterior se concluye que

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (\tau, \sigma) & \longmapsto & \varphi_\sigma^{-1}(\tau) = \tau\sigma^{-1} \end{array}$$

es suave.

■

En lo sucesivo G denotará a un grupo de Lie.

Ejemplos 4.1.6. En algunos de los siguientes ejemplos que se plantean se dan las referencias donde se pueden encontrar sus respectivas estructuras de variedad diferenciable.

I. El espacio euclidiano $\mathbb{R}^d$ con la suma es un grupo de Lie . Análogamente lo es $\mathbb{C}^d$ con la suma (ejemplo 1.1.6).

II. El subconjunto abierto de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \smallsetminus \{\,0\,\}$ con la multiplicación es un grupo de Lie. Análogamente el subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \smallsetminus \{\,0\,\}$ con la multiplicación compleja (ejemplo 1.1.7).

III. La esfera unitaria de dimensión 1 $(\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^*)$ con la multiplicación compleja (ejemplo 1.1.9).

IV. Consideremos $\mathfrak{gl}(d, \mathbb{R})$ con la estructura de variedad diferenciable descrita en el ejemplo 1.1.6. Como la suma de matrices es suave, $\mathfrak{gl}(d, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie con dicha operación. Además $Gl(d, \mathbb{R})$ es un subconjunto abierto de $\mathfrak{gl}(d, \mathbb{R})$, y por lo tanto hereda su estructura de variedad diferenciable (ejemplo 1.1.7). Así, junto con la multiplicación usual de matrices, es un grupo de Lie.

   De manera análoga se tiene que $\mathfrak{gl}(d, \mathbb{C})$ y $Gl(d, \mathbb{C})$ son grupos de Lie con la suma y multiplicación usuales, respectivamente.

v. Dados G y H grupos de Lie, el producto $G \times H$ resulta un grupo de Lie con la operación que envía $(h_1, g_1)(h_2, g_2) \mapsto (h_1h_2, g_1g_2)$ (ejemplo 1.1.8).

Por inducción se sigue que si $\{ G_1, \dots, G_n \}$ es una familia de grupos de Lie entonces

$$\prod_{i=1}^{n} G_i$$

es un grupo de Lie con la operación que mapea

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_n)(\tau_1, \dots, \tau_n) \longmapsto (\sigma_1\tau_1, \dots, \sigma_n\tau_n)\,.$$

De esa manera, al considerar el n-toro T^n como producto de $\mathbb{S}^1$ n veces, resulta un grupo de Lie.

vi. Consideremos el producto $Gl(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$ y definamos la operación de grupo que mapea $(A_1, v_1)(A_2, v_2) \mapsto (A_1A_2, A_1v_2 + v_1)$, de modo que resulta suave. Dicho grupo de Lie es conocido como el *grupo de movimientos afines de* $\mathbb{R}^d$, ya que al identificar (A, v) con el movimiento afín de $\mathbb{R}^d$ que aplica $x \mapsto Ax + v$, la multiplicación coincide con la composición de movimientos afines.

vii. Sea $(G, \cdot\,)$ un grupo de Lie y H un subgrupo abierto de G, de tal forma que H es un encaje con la estructura de variedad diferenciable inducida a partir de G (ejemplo 1.1.7) y por tanto la operación vista en H es suave, pues es la única función que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[r, "\cdot|_H"] \arrow[dr, dashed] & G \\ & H \arrow[u, "i_H"'] \end{tikzcd}$$

(Teorema 2.6.2). Con el mismo argumento se sigue que cualquier subgrupo abstracto de G que cuente con alguna estructura de variedad diferenciable a partir de la topología relativa de G, resulta un grupo de Lie con la restricción de la operación de G (véase la observación 4.1.8).

Existen funciones importantes en un grupo de Lie que se obtienen a partir de su operación. Una de las propiedades que satisfacen es que para cualesquiera dos puntos en el grupo, existe una de dichas funciones que lleva un punto en el otro. Estas aplicaciones se definen a continuación.

Definición 4.1.7. Sea $\sigma \in G$. Llamaremos *traslación izquierda por* σ y *traslación derecha por* σ a las funciones $l_\sigma, r_\sigma : G \longrightarrow G$ definidas como

$$l_\sigma(g) = \sigma g$$
$$r_\sigma(g) = g\sigma$$

.

Gracias a la suavidad de $\cdot$, dichas funciones resultan ser difeomorfismos con inversas $l_{\sigma^{-1}}$ y $r_{\sigma^{-1}}$.

Si $L \subseteq G$, denotaremos σL a la imagen de L bajo l_σ, y $L\sigma$ bajo r_σ.

Observación 4.1.8. Dado un grupo de Lie G, denotemos $\mathfrak{C}_e$ a la componente conexa que tiene a e. Observemos que es un subgrupo de G. Sean $\sigma, \tau \in \mathfrak{C}_e$. Aprovechando el hecho de que $l_{\sigma^{-1}}$ es un difeomorfismo y por lo tanto manda componentes conexas en componentes conexas, además de que $l_{\sigma^{-1}}(\sigma) = e$, se sigue la igualdad $l_{\sigma^{-1}}(\mathfrak{C}_e) = \mathfrak{C}_e$ y por ello $l_{\sigma^{-1}}(e) = \sigma^{-1} \in \mathfrak{C}_e$. Análogamente, $l_\sigma(\mathfrak{C}_e) = \mathfrak{C}_e$ y de ahí $l_\sigma(\tau) = \sigma\tau \in \mathfrak{C}_e$. Por el ejemplo 4.1.6 inciso VII, dicho grupo resulta ser un grupo de Lie con la operación de G.

Como se vio antes, dadas dos componentes $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, si $\sigma_1 \in \mathfrak{C}_1$ y $\sigma_2 \in \mathfrak{C}_2$ entonces la traslación izquierda $l_{\sigma_2\sigma_1^{-1}}$ restringida a $\mathfrak{C}_1$ es un difeomorfismos sobre $\mathfrak{C}_2$. De manera que cualesquiera dos componentes conexas de G son difeomorfas.

4.2. Álgebra de Lie de un grupo de Lie

En esta parte será utilizada una noción que por sí misma es bastante interesante. Éste es el concepto de *álgebra de Lie*. Para profundizar el estudio de dicha estructura puede ser consultado [Jacobson].

Definición 4.2.1. (Álgebra de Lie) Sean F un campo y $\mathfrak{J}$ un espacio vectorial sobre F. Diremos que $(\mathfrak{J}, [\,,\,])$ es un álgebra de Lie si $[\,,\,] : \mathfrak{J} \times \mathfrak{J} \longrightarrow \mathfrak{J}$ es una función bilineal que satisface las siguientes propiedades

1. $[x, x] = 0$, para todo $x \in \mathfrak{J}$.

2. $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ (identidad de Jacobi).

Notemos que para cualesquiera $x, y \in \mathfrak{J}$, de la condición 1 de la definición se sigue que $[x + y, x + y] = 0$, y por la bilinealidad de $[\,,\,]$ que $[x, y] = -[y, x]$. A esta última propiedad se le conoce como *anticonmutatividad*. Si F tiene característica distinta de 2, esta última es equivalente a la condición 1 ya que $[x, x] = -[x, x]$ si y sólo si $2[x, x] = 0$.

Como comúnmente sucede con cualquier estructura algebraica, son de interés las funciones que preservan la estructura de álgebra de Lie, es decir, dadas $(\mathfrak{J}_1, [\,,\,]_1)$ y $(\mathfrak{J}_2, [\,,\,]_2)$ álgebras de Lie sobre F, diremos que una transformación lineal T es un *morfismo de álgebras de Lie* si para cualesquiera $x, y \in \mathfrak{J}_1$

$$T([x,y]_1) = [T(x), T(y)]_2\,.$$

Además, si $(\mathfrak{J}, [\ ,\ ])$ es un álgebra de Lie sobre F y $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{J}$ es un subespacio vectorial para el cual, dados $x, y \in \mathfrak{U}$ se tiene que $[x,y] \in \mathfrak{U}$, diremos que $\mathfrak{U}$ es una *subálgebra de Lie*.

Ejemplos 4.2.2.

I. Dado cualquier espacio vectorial V sobre F, la función bilineal trivial que aplica $(v,w) \mapsto 0$ le da una estructura de álgebra de Lie a V. Dicha álgebra de Lie es llamada *abeliana*. Una motivación de este nombre se verá en el Corolario 8.1.11 del Teorema 8.1.9.

II. Sea A un F-álgebra. Consideremos la función bilineal $[\ ,\ ] : A \times A \longrightarrow A$ definida como

$$[a,b] = ab - ba\,.$$

Veamos que con dicha operación bilineal, A es un álgebra de Lie. La primera condición se sigue directamente de la definición. Además, para cualesquiera a, b y c elementos de A

$$[[a,b],c] = [ab - ba, c] = abc - bac - cab + cba$$

De ahí

$$\begin{aligned}
[[a,b],c] + [[b,c],a] &= abc - bac - cab + cba + bca - cba - abc + acb \\
&= acb - cab + bca - bac = -(cab - acb - bca + bac) \\
&= -[[c,a],b]
\end{aligned}$$

Un caso particular es el espacio de matrices $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})$ (o bien $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{C})$). En ese caso la operación que le da estructura de álgebra de Lie es el conmutador de matrices.

III. El conjunto de campos vectoriales de una variedad diferenciable con el corchete de Lie (Proposición 2.8.4).

Invariancia en campos vectoriales

En adelante hablaremos de álgebras de Lie sobre $\mathbb{R}$. De hecho, ahora comenzaremos a establecer la relación entre grupos de Lie y álgebras de Lie.

Definición 4.2.3. Decimos que un campo vectorial X en G es un *un campo vectorial invariante con respecto a las traslaciones izquierdas* (o bien que es un *campo vectorial invariante izquierdo*) si para cada $\sigma \in G$, X es l_σ-relacionado consigo mismo, es decir

$$dl_\sigma \circ X = X \circ l_\sigma \,.$$

Denotaremos el conjunto de campos vectoriales invariantes izquierdos de un grupo de Lie G con la letra $\mathfrak{g}$.

Ejemplo 4.2.4. Sea V $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita d. Consideremos la estructura de variedad diferenciable inducida por los isomorfismos lineales entre V y $\mathbb{R}^d$ (ejemplo 1.1.6), de manera que V resulta un grupo de Lie con la suma.

Sean $\beta = \{ b_1, \ldots, b_d \}$ una base de V y $\beta^* = \{ \phi_1, \ldots, \phi_d \}$ su base dual, de modo que $(V, \phi = (\phi_1, \ldots, \phi_d))$ es un sistema coordenado de V. Nótese que $\frac{\partial}{\partial \phi_i} : V \longrightarrow TV$ es un campo invariante izquierdo para cualquier $i \in \{ 1, \ldots, d \}$, ya que dados $a \in V$ y $f \in C_a^\infty(V)$

$$\begin{aligned} d(l_a)_{\hat{0}} \left(\left. \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right|_{\hat{0}} \right)(f) &= \frac{\partial (f \circ l_a \circ \phi^{-1})}{\partial r_i}(\hat{0}) = \frac{\partial (f \circ \phi^{-1} \circ l_{\phi(a)})}{\partial r_i}(\hat{0}) \\ &= \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial r_i}(\phi(a)) = \left. \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right|_a (f) \end{aligned}$$

Enseguida analizaremos algunas de las propiedades del conjunto de campos vectoriales izquierdos de un grupo de Lie.

***Proposición* 4.2.5.** Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ el conjunto de campos vectoriales izquierdos de G. Entonces

I. $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial de dimensión finita. De hecho $\alpha_G : \mathfrak{g} \longrightarrow T_eG$ definida como $\alpha_G(X) = X_e$ resulta un isomorfismo lineal.

II. Los campos vectoriales invariantes izquierdos son suaves.

III. Si $X, Y \in \mathfrak{g}$, el corchete de Lie de X y Y es un elemento de $\mathfrak{g}$ (es decir, $\mathfrak{g}$ es cerrado bajo la operación corchete $[\,,\,]$). Por lo tanto, $\mathfrak{g}$ tiene una estructura de álgebra de Lie con la operación de corchete de Lie.

Demostración.
I. El hecho de que $\mathfrak{g}$ sea un espacio vectorial se obtiene directamente de que $d(l_\sigma)_\tau$ es lineal para todo $\tau \in G$. Por definición α_G resulta ser lineal. Además si $X, Y \in \mathfrak{g}$ satisfacen que $X_e = Y_e$, entonces para todo $\tau \in G$

$$X_\tau = d(l_\tau)_e(X_e) = d(l_\tau)_e(Y_e) = Y_\tau \,.$$

Más aún, si para cualquier $\nu \in T_eG$ consideramos $X_\nu : G \longrightarrow TG$ definida como $X_\nu(\tau) = d(l_\tau)_e(\nu)$ resulta ser un campo vectorial y satisface que para cualesquiera $\tau, \sigma \in G$

$$\begin{aligned}(X_\nu \circ l_\sigma)(\tau) &= X_\nu(\sigma\tau) = d(l_{\sigma\tau})_e(\nu)\\ &= d(l_\sigma \circ l_\tau)_e(\tau) = d(l_\sigma)_\tau(X_\nu(\tau))\\ &= (dl_\sigma \circ X_\nu)(\tau)\end{aligned}$$

es decir, es invariante izquierda; además satisface que $\alpha_G(X) = X_\nu(e) = \nu$. De modo que α_G resulta un isomorfismo.

II. Sea X un campo invariante izquierdo. Obsérvese que para concluir que X es suave, basta mostrar que para cualesquiera sistemas coordenados en G, $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_d))$, $(V, \lambda = (y_1, \ldots, y_d))$ y $s \in \varphi(U \cap V)$, dada $i \in \{1, \ldots, d\}$ la función

$$\begin{aligned}(dy_i \circ X \circ \varphi^{-1})(s) &= (dy_i \circ X \circ l_{\varphi^{-1}(s)})(e)\\ &= (dy_i \circ dl_{\varphi^{-1}(s)} \circ X)(e) = d(y_i \circ l_{\varphi^{-1}(s)})(X_e)\\ &= X_e(y_i \circ l_{\varphi^{-1}(s)})\end{aligned}$$

es suave en s.

Observemos que si $X_e = 0$ entonces X es el campo constante cero, el cual es suave. Supongamos que $X_e \neq 0$. Sabemos que existe un campo suave que toma el valor de X_e en e. Así, por la Proposición 2.8.12 hay un sistema coordenado $(W, \rho = (z_1, \ldots, z_d))$ para el cual $e \in W$ y $\frac{\partial}{\partial z_1}$ coincide con dicho campo en W, en particular

$$X_e = \left.\frac{\partial}{\partial z_1}\right|_e ,$$

de modo que basta verificar que dado $s \in \varphi(U \cap V)$, $\left.\frac{\partial}{\partial z_1}\right|_e (y_i \circ l_{\varphi^{-1}(s)})$ es suave.

Consideremos $\Psi : \varphi(U \cap V) \times G \longrightarrow G$ definida como

$$\Psi(s, m) = l_{\varphi^{-1}(s)}(m) = \varphi^{-1}(s)m ,$$

la cual es suave. De tal manera que la función $y_i \circ \Psi$ definida en $\Psi^{-1}(V)$, es suave. Notemos que para cualquier $s \in \varphi(U \cap V)$, $(s, e) \in \Psi^{-1}(V)$.

Considerando la estructura diferencial de $\varphi(U \cap V) \times G$ (ejemplo 1.1.8), $(\varphi(U \cap V) \times W, \widetilde{\rho} = \varphi \times \rho)$ es un sistema coordenado, de tal forma que

$$\left.\frac{\partial}{\partial z_1}\right|_{(s,e)} (y_i \circ \Psi) = \frac{\partial (y_i \circ \Psi \circ \widetilde{\rho}^{-1})}{\partial r_{d+1}} (\widetilde{\rho}(s, e))$$

es suave como función de s. Ya que además

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial z_1}\right|_{(s,e)}(y_i \circ \Psi) &= \frac{\partial(y_i \circ \Psi \circ \widetilde{\rho}^{-1})}{\partial r_{d+1}}(\widetilde{\rho}(s,e)) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{y_i \circ \Psi(s, \rho^{-1}(\rho(e)+te_1)) - y_i \circ \Psi(s,e)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{y_i \circ l_{\varphi^{-1}(s)}(\rho^{-1}(\rho(e)+te_1)) - y_i \circ l_{\varphi^{-1}(s)}(\rho^{-1}(\rho(e)))}{t} \\
&= \frac{\partial(y_i \circ l_{\varphi^{-1}(s)} \circ \rho^{-1})}{\partial r_1}(\rho(e)) \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial z_1}\right|_{e}(y_i \circ l_{\varphi^{-1}(s)}) \,,
\end{aligned}$$

se concluye que $\left.\frac{\partial}{\partial z_1}\right|_{e}(y_i \circ l_{\varphi^{-1}(s)})$ es suave.

III. Sean $X,\,Y \in \mathfrak{g}$, $m, \sigma \in G$ y $f \in C^\infty_{\sigma m}(G)$ de modo que

$$\begin{aligned}
(dl_\sigma \circ [X,Y])_m(f) &= [X,Y]_m(f \circ l_\sigma) \\
&= X_m(Y(f \circ l_\sigma)) - Y_m(X(f \circ l_\sigma)) \,.
\end{aligned}$$

Observemos que para cualquier $q \in l_\sigma^{-1}(\operatorname{dom} f)$

$$\begin{aligned}
Y(f) \circ l_\sigma(q) &= Y(f)(\sigma q) = Y_{\sigma q}(f) \\
&= (Y \circ l_\sigma)(q)(f) = (dl_\sigma \circ Y)(q)(f) \\
&= Y_q(f \circ l_\sigma) \,.
\end{aligned}$$

De ahí que $Y(f) \circ l_\sigma = Y(f \circ l_\sigma)$. Análogamente $X(f) \circ l_\sigma = X(f \circ l_\sigma)$. Por ello se tiene

$$\begin{aligned}
([X,Y] \circ l_\sigma)_m(f) &= [X,Y]_{\sigma m}(f) = X_{\sigma m}(Y(f)) - Y_{\sigma m}(X(f)) \\
&= (X \circ l_\sigma)(m)(Y(f)) - (Y \circ l_\sigma)(m)(X(f)) \\
&= (dl_\sigma \circ X)(m)(Y(f)) - (dl_\sigma \circ Y)(m)(X(f)) \\
&= X_m(Y(f) \circ l_\sigma) - Y_m(X(f) \circ l_\sigma) \\
&= X_m(Y(f \circ l_\sigma)) - Y_m(X(f \circ l_\sigma)) \\
&= (dl_\sigma \circ [X,Y])_m(f) \,.
\end{aligned}$$

Con lo cual se tiene que $dl_\sigma \circ [X,Y] = [X,Y] \circ l_\sigma$.

■

Enseguida veremos un concepto de suma importancia en la Teoría de Grupos de Lie, lo cual se podrá apreciar claramente en los resultados posteriores.

Definición 4.2.6. (Álgebra de Lie de un grupo de Lie) Decimos que el *álgebra de Lie de un grupo de Lie* G es el álgebra de campos invariantes izquierdos de G.

Por la Proposición 4.2.5 podemos identificar canónicamente el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie G con T_eG e inducir mediante α_G una estructura de álgebra de Lie en T_eG de tal manera que dicho isomorfismo lineal resulte un isomorfismo de álgebras de Lie. En algunas ocasiones haremos la identificación del álgebra de Lie de un grupo de Lie con su espacio tangente en la identidad, como se muestra en los ejemplos dados en 4.2.8. De hecho identificaremos las álgebras de Lie de los grupos clasicos con subespacios vectoriales del espacio de matrices correspondiente. La siguiente observación hace énfasis en dicha identificación para $\mathbb{R}$-espacios vectoriales en general.

Observación 4.2.7. Sea V $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita d. Consideremos la estructura de variedad diferenciable inducida por los isomorfismos lineales entre V y $\mathbb{R}^d$ (ejemplo 1.1.6), de modo que dadas una base $\beta = \{ b_1, \dots, b_d \}$ y $\beta^* = \{ \phi_1, \dots, \phi_d \}$ su base dual, sabemos que $(V, \phi = (\phi_1, \dots, \phi_d))$ es un sistema coordenado.

Por lo argumentado en la observación 2.3.3, al considerar a V como grupo de Lie es posible identificar canónicamente su álgebra de Lie, que denotaremos $\mathfrak{g}_V$, con V mismo mediante el isomorfismo

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow \mathfrak{g}_V \\ \sum_{i=1}^{d} \lambda_i\, b_i &\longmapsto \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \frac{\partial}{\partial \phi_i} \end{aligned}$$

que está bien definido (ejemplo 4.2.4) y es independiente de la base elegida (observación 2.3.3).

Ejemplos 4.2.8. (Grupos de Lie y sus álgebras de Lie)

I. La recta real $\mathbb{R}$ con la suma es un grupo de Lie. Por el ejemplo 4.2.4 y dado que la dimensión de su álgebra de Lie es 1, ésta resulta igual a $\{ \lambda \frac{d}{dt} : \lambda \in \mathbb{R} \}$.

II. Ya que $Gl(d, \mathbb{R})$ resulta un grupo de Lie con la multiplicación (ejemplo 4.1.6 inciso IV), denotemos $\mathfrak{g}$ a su álgebra de Lie. Dado que $Gl(d, \mathbb{R})$ es una subvariedad abierta de $\mathfrak{gl}(d, \mathbb{R})$, $T_I\, Gl(d, \mathbb{R})$ coincide con $T_I \mathfrak{gl}(d, \mathbb{R})$. Considerando $x_{ij} : \mathfrak{gl}(d, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ a la proyección de la entrada ij, según las identificaciones de la observación 4.2.7 y del Teorema 4.2.5, la función

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\xrightarrow{\beta} \mathfrak{gl}(d, \mathbb{R}) \\ X &\longmapsto (X_I(x_{ij}))_{ij} \end{aligned}$$

es un isomorfismo lineal que da una identificación canónica del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})$. Veamos que al considerar $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})$ con la operación definida en el ejemplo 4.2.2 inciso II, β también resulta un isomorfismo de grupos de Lie.

Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, se tiene que $\beta[X,Y] = (X_I(Y(x_{ij})))_{ij} - (Y_I(X(x_{ij})))_{ij}$. Por un lado

$$X_I = \sum_{i,j=1}^{d} X_I(x_{ij}) \frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_I .$$

Dados $i,j,l,s \in \{1,\ldots,d\}$ y e_{ij} la matriz cuya única entrada distinta de cero e igual a uno es la ij

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_I (Y(x_{ls})) &= \lim_{t\to 0} \frac{Y(x_{ls})(I+te_{ij}) - Y(x_{ls})(I)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{Y_I(x_{ls}\circ l_{(I+te_{ij})}) - Y_I(x_{ls}\circ l_I)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{Y_I(x_{ls}\circ (l_{(I+te_{ij})} - l_I))}{t}\end{aligned}$$

Ya que para cualquier $(B_{pq})_{pq} \in \mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})$,

$$(l_{(I+te_{ij})} - l_I)((B_{pq})_{pq}) = te_{ij}(B_{pq})_{pq} = (A_{pq})_{pq}$$

, donde

$$A_{pq} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq p \\ tB_{jq} & \text{si} \quad i = p \end{cases}$$

Ya que $x_{ls}\circ(l_{(I+te_{ij})} - l_I)((B_{pq})_{pq}) = A_{ls}$, según lo anterior

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_I (Y(x_{ls})) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq l \\ Y_I(Y(x_{js})) & \text{si} \quad i = l \end{cases}$$

De modo que

$$\begin{aligned}X_I(Y(x_{ls})) &= \sum_{j=1}^{d} X_I(x_{lj}) \frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_I (Y(x_{ls}))\\ &= \sum_{j=1}^{d} X_I(x_{lj}) Y_I(x_{js}) = \big[\beta(X)\beta(Y)\big]_{ls}\end{aligned}$$

Análogamente se obtiene que $Y_I(X(x_{ls})) = \big[\beta(Y)\beta(X)\big]_{ls}$. De ahí $\beta[X,Y] = \beta(X)\beta(Y) - \beta(Y)\beta(X) = [\beta(X), \beta(Y)]$.
En adelante consideraremos $(\mathfrak{gl}(d,\mathbb{R}), [\,,\,])$ como el álgebra de Lie de $Gl(d,\mathbb{R})$.

En forma totalmente análoga se muestra que al identificar el álgebra de Lie de $Gl(d,\mathbb{C})$ con $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{C})$, la cual es un $\mathbb{R}$-álgebra de Lie de dimensión $2d^2$ con respecto a la operación bilineal dada en el ejemplo 4.2.2 inciso II, nuevamente se tiene un isomorfismo de álgebras de Lie. Por ello también se considerará $(\mathfrak{gl}(d,\mathbb{C}), [\,,\,])$ como el álgebra de Lie de $Gl(d,\mathbb{C})$.

III. Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita d, por el ejemplo 1.1.6 recibe una estructura de variedad diferenciable inducida mediante los isomorfismos lineales con $\mathbb{R}^d$. De igual forma, denotando como $\mathrm{End}(V)$ a el conjunto de endomorfismos de V y como $\mathrm{Aut}(V)$ a el conjunto de isomorfismos de V en V, estos resultan espacios vectoriales y por tanto variedades diferenciales en el mismo sentido que V. Así, dada una base β ésta induce un difeomorfismo $\Lambda_\beta : \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(d,F)$, a saber el que asocia a $T \in \mathrm{End}(V)$ su representación matricial en la base β, $[T]_\beta$. De hecho, al considerar $\mathrm{End}(V)$ con la composición, resulta un $\mathbb{R}$-álgebra; por el ejemplo 4.2.2 inciso II, es posible asociarle una operación $[\,,\,]$ con la cual resulta un álgebra de Lie, de tal manera que dados l_1, $l_2 \in \mathrm{End}(V)$

$$[l_1, l_2] = l_1 \circ l_2 - l_2 \circ l_1 \,.$$

Así Λ_β es un isomorfismo de grupos de Lie para $\mathrm{End}(V)$ y $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})$ con las operaciones descritas.

Por otro lado, la restricción de Λ_β a $\mathrm{Aut}(V)$ es un isomorfismo de grupos de Lie sobre $Gl(d,F)$. Ya que $\mathrm{Aut}(V)$ resulta un subconjunto abierto de $\mathrm{End}(V)$, los espacios tangentes $T_l\,\mathrm{Aut}(V)$ y $T_l\,\mathrm{End}(V)$ son iguales para cualquier $l \in \mathrm{Aut}(V)$. Con las respectivas identificaciones es sencillo verificar que gracias a que Λ_β es lineal $d(\Lambda_\beta)_l : \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})$ coincide con Λ_β. Con las observaciones previas y el Teorema 5.1.2 se puede concluir que el isomorfismo lineal entre el álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}(V)$ y $\mathrm{End}(V)$ es realmente un isomorfismo de álgebras de Lie. Por lo cual diremos que el álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}(V)$ es $\mathrm{End}(V)$.

Siguiendo los mismos razonamientos podemos concluir que para cualquier $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita d, $\mathrm{End}(V)$ es el álgebra de Lie de $\mathrm{Aut}(V)$.

Invariancia en Formas diferenciales

En lo siguiente se generalizará lo anterior para formas diferenciales.

Definición 4.2.9. Sea ω una forma diferencial en G. Decimos que ω es una *forma invariante izquierda* si para cualquier $\sigma \in G$

$$\delta l_\sigma(\omega) = \omega$$

Con respecto a la definición anterior se tiene que para cualesquiera $m, \sigma \in G$,

$$\omega_m = \delta l_\sigma(\omega)_m = \omega_{\sigma m} \circ d(l_\sigma)_m \,.$$

Por ello $\omega_m = \omega_e \circ d(l_{m^{-1}})_m$.

Observemos que al igual que los campos invariantes izquierdos, las formas invariantes izquierdas son suaves.

Sean ω forma invariante izquierda y $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_d))$, $(V, \psi = (y_1, \ldots, y_d))$ sistemas coordenados de G, de modo que para cualquier $s \in \varphi(U \cap V)$

$$\begin{aligned}&\omega_{\varphi^{-1}(s)}\big(\tfrac{\partial}{\partial y_{i_1}}\big|_{\varphi^{-1}(s)} \wedge \ldots \wedge \tfrac{\partial}{\partial y_{i_k}}\big|_{\varphi^{-1}(s)}\big)\\ &= \omega_e\big(dl_{(\varphi^{-1}(s))^{-1}}\big(\tfrac{\partial}{\partial y_{i_1}}\big|_{\varphi^{-1}(s)}\big) \wedge \ldots \wedge dl_{(\varphi^{-1}(s))^{-1}}\big(\tfrac{\partial}{\partial y_{i_k}}\big|_{\varphi^{-1}(s)}\big)\big)\,,\end{aligned}$$

de modo que si $(W, \rho = (z_1, \ldots, z_d))$ es un sistema coordenado de G para el cual $e \in W$ entonces

$$\begin{aligned}&\omega_e\big(dl_{(\varphi^{-1}(s))^{-1}}\big(\tfrac{\partial}{\partial y_{i_1}}\big|_{\varphi^{-1}(s)}\big) \wedge \ldots \wedge dl_{(\varphi^{-1}(s))^{-1}}\big(\tfrac{\partial}{\partial y_{i_k}}\big|_{\varphi^{-1}(s)}\big)\big)\\ &= \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant d} \Big[\omega_e\big(\tfrac{\partial}{\partial z_{j_1}}\big|_e \wedge \ldots \wedge \tfrac{\partial}{\partial z_{j_k}}\big|_e\big)\\ &(dz_{j_1}|_e \wedge \ldots \wedge dz_{j_k}|_e)\big(dl_{(\varphi^{-1}(s))^{-1}}\big(\tfrac{\partial}{\partial y_{i_1}}\big|_{\varphi^{-1}(s)}\big) \wedge \ldots \wedge dl_{(\varphi^{-1}(s))^{-1}}\big(\tfrac{\partial}{\partial y_{i_k}}\big|_{\varphi^{-1}(s)}\big)\big)\Big]\\ &= \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant d} \Big[\omega_e\big(\tfrac{\partial}{\partial z_{j_1}}\big|_e \wedge \ldots \wedge \tfrac{\partial}{\partial z_{j_k}}\big|_e\big) \det\Big(\tfrac{\partial}{\partial y_{i_m}}\big|_{\varphi^{-1}(s)}(z_{j_l} \circ l_{(\varphi^{-1}(s))^{-1}})\Big)_{lm}\Big]\end{aligned}$$

Observemos que de mostrar que dados $l, m \in \{1, \ldots, d\}$, la función en términos de s

$$\left.\frac{\partial}{\partial y_{i_m}}\right|_{\varphi^{-1}(s)} (z_{j_l} \circ l_{(\varphi^{-1}(s))^{-1}}) = \frac{\partial (z_{j_l} \circ l_{(\varphi^{-1}(s))^{-1}} \circ \varphi^{-1})}{\partial r_{i_m}}(s)$$

es suave, habremos concluido.

Consideremos

$$\begin{aligned} G \times G &\xrightarrow{\tilde{\Psi}} G\\ (\sigma, m) &\longmapsto \sigma^{-1} m\end{aligned}$$

la cual es suave al igual que

$$\begin{array}{ccc} \varphi(U\cap V)\times\varphi(U\cap V) & \xrightarrow{\mathcal{J}} & G\times G \\ (s,s') & \longmapsto & (\varphi^{-1}(s),\varphi^{-1}(s')) \end{array}$$

Denotando $\widetilde{V}=\mathcal{J}^{-1}(\widetilde{\Psi}^{-1}(V))=(\widetilde{\Psi}\circ\mathcal{J})^{-1}(V)$ tenemos que

$$z_{j\,l}\circ\widetilde{\Psi}\circ\mathcal{J}:\widetilde{V}\longrightarrow\mathbb{R}$$

es suave y por lo tanto la siguiente función también lo es

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(z_{j\,l}\circ\widetilde{\Psi}\circ\mathcal{J})}{\partial r_{d+i_m}}(s,s) \\ &=\lim_{t\to 0}\frac{z_{j\,l}\circ\widetilde{\Psi}\circ\mathcal{J}(s,s+te_{i_m})-z_{j\,l}\circ\widetilde{\Psi}\circ\mathcal{J}(s,s)}{t} \\ &=\lim_{t\to 0}\frac{z_{j\,l}\circ l_{(\varphi^{-1}(s))^{-1}}\circ\varphi^{-1}(s,s+te_{i_m})-z_{j\,l}\circ l_{(\varphi^{-1}(s))^{-1}}\circ\varphi^{-1}(s,s)}{t} \\ &=\frac{\partial(z_{j\,l}\circ l_{(\varphi^{-1}(s))^{-1}}\circ\varphi^{-1})}{\partial r_{i_m}}(s)=\frac{\partial}{\partial y_{i_m}}\Big|_{\varphi^{-1}(s)}(z_{j\,l}\circ l_{(\varphi^{-1}(s))^{-1}}) \end{aligned}$$

Con base en los anterior y denotando como $E^p_{l\mathrm{inv}}(G)$ el conjunto de p-formas invariantes izquierdas, se tiene que $E^p_{l\mathrm{inv}}(G)\subseteq E^p(G)$.

Definimos

$$E^*_{l\mathrm{inv}}(G)=\sum_{p=0}^{\dim G}E^p_{l\mathrm{inv}}(G)$$

el cual resulta ser un subconjunto de $E^*(G)$. En particular los elementos de $E^1_{l\mathrm{inv}}(G)$ son conocidos como **las formas de Maurer - Cartan**.

A continuación veremos algunas propiedades de $E^*_{l\mathrm{inv}}(G)$ y con ellas, su estrecha relación con $\mathfrak{g}$.

***Proposición* 4.2.10.**

I. Si ω es una forma invariante izquierda entonces es suave.

II. $E^*_{l\mathrm{inv}}(G)$ es una subálgebra de $E^*(G)$. Más aún,

$$\begin{array}{ccc} E^*_{l\mathrm{inv}}(G) & \xrightarrow{\beta_G} & \Lambda(T^*_eG) \\ \omega & \longmapsto & \omega_e \end{array}$$

es un isomorfismo de álgebras. En particular su restricción a $E^1_{l\mathrm{inv}}$ da un isomorfismo de espacios vectoriales con T_e^*G. Este último, al ser identificado con $\mathfrak{g}^*$ mediante el mapeo dual del isomorfismo dado en el Teorema 4.2.5 inciso I, permite considerar a $E^1_{l\text{inv}}(G)$ como el espacio dual del álgebra de Lie G.

III. Si $\omega \in E^1_{l\text{inv}}(G)$ y $X \in \mathfrak{g}$ entonces $\omega(X)$ resulta una función constante cuyo valor es el mismo que si consideramos a ω como elemento de $\mathfrak{g}^*$ y lo evaluamos en X. Dependiendo del contexto, nos permitiremos emplear a $\omega(X)$ como una función constante o bien como el elemento en $\mathbb{R}$ que toma dicha función.

IV. Si $\omega \in E^1_{l\text{inv}}(G)$ y $X, Y \in \mathfrak{g}$ entonces

$$d\omega(X,Y) = -\omega[X,Y]$$

V. Sean $\{ X_1, \ldots, X_d \}$ base de $\mathcal{G}$ y $\{ \omega_1, \ldots, \omega_d \}$ su base dual en $E^1_{l\text{inv}}(G)$, de modo que existen constantes c_{ijk} las cuales satisfacen

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{d} c_{ijk} X_k \,,$$

y son llamadas **constantes estructurales de G con respecto a la base $\{ X_i \}$ de $\mathfrak{g}$**, que satisfacen

a. $c_{ijk} + c_{jik} = 0$.

b. $\sum_{l=1}^{d} [c_{ijl}c_{lkt} + c_{jkl}c_{lit} + c_{kil}c_{ljt}] = 0$.

Además para $i \in \{ 1, \ldots, d \}$, la derivada exterior de ω_i está dada por las **ecuaciones de Maurer-Cartan**

$$d\omega_i = \sum_{j<k} c_{jki}\, \omega_l \wedge \omega_j \,.$$

Demostración. Con lo que se hecho previamente muestra el inciso I.

II. El hecho de que $E^*_{l\text{inv}}(G)$ es una subálgebra se debe directamente a que δl_σ es un morfismo de álgebras (Proposición 3.3.8). Por definición, β_G resulta lineal. Más aún, para cualesquiera $\omega, \upsilon \in E^*_{l\text{inv}}(G)$

$$\beta_G(\omega \wedge \upsilon) = (\omega \wedge \upsilon)_e = \omega_e \wedge \upsilon_e$$

de modo que resulta ser un morfismo de álgebras. Además, si se satisface $\omega_e = \beta_G(\omega) = \beta_G(\upsilon) = \upsilon_e$, dada $\sigma \in G$

$$\omega_\sigma = \omega_e \circ d(l_{\sigma^{-1}})_\sigma = \upsilon_e \circ d(l_{\sigma^{-1}})_\sigma = \upsilon_\sigma$$

por lo que β_G es un monomorfismo.

Por otro lado, dado $\nu \in \Lambda(T_e^*G)$ consideremos la forma

$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{\widetilde{\nu}} \Lambda^*(G) \\ \sigma &\longmapsto \nu \circ d(l_{\sigma^{-1}})_\sigma \end{aligned}$$

Notemos que $\nu \in E^*_{\text{linv}}(G)$, pues dados $m, \sigma \in G$

$$\begin{aligned} \delta l_\sigma(\widetilde{\nu})_m &= \widetilde{\nu}_{\sigma m} \circ d(l_\sigma)_m = \nu \circ d(l_{(\sigma m)^{-1}})_{\sigma m} \circ d(l_\sigma)_m \\ &= \nu \circ d(l_{m^{-1}\sigma^{-1}} \circ l_\sigma)_m = \nu \circ d(l_{m^{-1}})_m = \widetilde{\nu}_m \,. \end{aligned}$$

De ese modo concluimos que β_G es un isomorfismo de álgebras.

Nótese que $\omega \in E^p_{\text{linv}}(G)$ si y sólo si $\beta_G(\omega) = \omega_e \in \Lambda^p(T_e^*G)$. De modo que

$$\beta_G\big|_{E^p_{\text{linv}}(G)} : E^p(G) \longrightarrow \Lambda^p(T_e^*G)$$

es un isomorfismo, en particular cuando $p = 1$.

III. Notemos que $\omega(X) : G \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface que para un elemento $\sigma \in G$

$$\begin{aligned} \omega(X)_\sigma &= \omega_\sigma(X_\sigma) \\ &= (\omega_e \circ d(l_{\sigma^{-1}})_\sigma)(d(l_\sigma)_e(X_e)) = \omega_e(X_e) \,. \end{aligned}$$

Por otro lado, considerando α_G como en la Proposición 4.2.5 inciso I,

$$(\alpha_G^* \circ \beta_G)(\omega)(X) = \beta_G(\omega) \circ \alpha_G(X) = \beta_G(\omega)(X_e) = \omega_e(X_e) \,.$$

En adelante identificaremos ω con $(\alpha_G^* \circ \beta_G)(\omega)$. Con ello obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\alpha_G"'] & \mathbb{R} \\ T_eG \arrow[ur, "\omega_e"'] & \end{tikzcd}$$

IV. Por la Proposición 3.5.2

$$d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega[X,Y]\,.$$

Como $\omega(X), \omega(Y)$ son funciones constantes, para cualquier $\sigma \in G$

$$(X\omega(Y))_\sigma = X_\sigma(\omega(Y)) = 0 = Y_\sigma(\omega(X)) = (Y\omega(X))_\sigma$$

de lo que se sigue el resultado.

Por la Proposición 3.5.2 es posible concluir que para cualquier $\omega \in E^*_{\mathrm{linv}}(G)$, $d\omega \in E^*_{\mathrm{linv}}(G)$ ya que dado $\sigma \in G$, d y δl_σ conmutan y de ahí

$$\delta l_\sigma(d\omega) = d(\delta l_\sigma(\omega)) = d\omega\,.$$

V. Sabemos que

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{d} \omega_k[X_i, X_j]\, X_k$$

donde $\omega_k[X_i, X_j] = (\omega_k)_e[X_i, X_j]_e = c_{ijk}$ es constante pues $\omega_k \in E^1_{\mathrm{linv}}(G)$ y $[X_i, X_j] \in \mathfrak{g}$, de ese modo

$$\begin{aligned} c_{ijk} + c_{jik} &= \omega_k[X_i, X_j] + \omega_k[X_j, X_i] \\ &= \omega_k[X_i, X_j] - \omega_k[X_i, X_j] = 0\,. \end{aligned}$$

Además por la identidad de Jacobi sabemos que para cualesquiera $i, j, k \in \{1, \ldots, d\}$

$$[[X_i, X_j], X_k] + [[X_j, X_k], X_i] + [[X_k, X_i], X_j] = 0\,.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} [[X_i, X_j], X_k] &= \left[\sum_{l=1}^{d} c_{ijl} X_l, X_k\right] \\ &= \sum_{l=1}^{d} c_{ijl}[X_l, X_k] = \sum_{l=1}^{d} c_{ijl} \sum_{t=1}^{d} c_{lkt} X_t \\ &= \sum_{t=1}^{d}\sum_{l=1}^{d} c_{ijl} c_{lkt} X_t \end{aligned}$$

De ese modo

$$\begin{aligned}
0 &= [[X_i, X_j], X_k] + [[X_j, X_k], X_i] + [[X_k, X_i], X_j] \\
&= \sum_{t=1}^{d} \left(\sum_{l=1}^{d} (c_{ijl} c_{lkt} + c_{jkl} c_{lit} + c_{ikl} c_{ljt}) \right) X_t
\end{aligned}$$

lo cual sucede si y sólo si $\sum_{l=1}^{d} (c_{ijl} c_{lkt} + c_{jkl} c_{lit} + c_{ikl} c_{ljt}) = 0$ para cualquier $t \in \{ 1, \ldots, d \}$.

Por lo dicho en el inciso anterior, $d\omega_i \in E^2_{l\mathrm{inv}}(G)$. Este último tiene por base $\{ \omega_j \wedge \omega_k \}_{j<k}$, de manera que

$$\begin{aligned}
d\omega_i &= \sum_{j<k} -\omega_i [X_j, X_k]\, \omega_j \wedge \omega_k \\
&= \sum_{j<k} c_{jki}\, \omega_k \wedge \omega_j
\end{aligned}$$

■

Observación 4.2.11. Identificando la función constante $d\omega(X, Y)$ con el valor real que toma, según la propiedad descrita en el inciso IV de la Proposición anterior, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \arrow[r, "d\omega"] \arrow[d, "{[\,,\,]}"'] & \mathbb{R} \\
T_e G \arrow[ur, "-\omega"'] &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 4.2.12. Veamos una aplicación de la Proposición 4.2.10 que nos será de utilidad en la sección 5.2.

Consideremos $\{ \omega_1, \ldots, \omega_{c-d} \}$ un conjunto linealmente independiente de 1-formas invariantes izquierdas en G^c. Veamos que una condición necesaria y suficiente para que el subespacio $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ anulado por dichas 1-formas resulte ser una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ (es decir, es cerrado bajo corchetes) es que el ideal $\mathfrak{I}$ generado por estas sea diferencial.

Ya que $\beta = \{ \omega_1, \ldots, \omega_{c-d} \}$ es un conjunto de 1-formas invariantes izquierdas

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h} &= \{ X \in \mathfrak{g} : \omega_i(X) \equiv 0 \text{ para todo } 1 \leqslant i \leqslant c-d \} \\
&= \{ X \in \mathfrak{g} : (\omega_i)_e (X)_e = 0 \text{ para todo } 1 \leqslant i \leqslant c-d \} .
\end{aligned}$$

Supongamos que $\mathfrak{h}$ es subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$.

Sean $\omega_{d-c+1}, \ldots, \omega_d \in E^1_{l\,\mathrm{inv}}(G)$ de tal modo que $\{ \omega_1, \ldots, \omega_d \}$ es una base de $E^1_{l\,\mathrm{inv}}(G)$. Consideremos $\{ Y_1, \ldots, Y_d \}$ una base de $\mathfrak{g}$ que satisface que

$\{Y_{d-c+1},\dots,Y_d\}$ es una base de $\mathfrak{h}$. Por la Proposición 4.2.10 inciso V para cualesquiera $i,j\in\{1,\dots,d\}$

$$[Y_i,\,Y_j]=\sum_{k=1}^{d}c_{ijk}Y_k\,.$$

Como $\mathfrak{h}$ es subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, si $i,j\in\{d-c+1,\dots,d\}$ entonces $c_{ijk}=0$ para toda $k\in\{1,\dots,d-c\}$. Por otro lado, si $l\in\{1,\dots,d\}$

$$d\omega_l=\sum_{j<k}c_{jkl}\omega_k\wedge\omega_j\,.$$

En particular, si $l\in\{1,\dots,d-c\}$ entonces $c_{jkl}=0$ para cualesquiera $j,k\in\{d-c+1,\dots,d\}$ de modo que

$$d\omega_l=\sum_{\substack{j<k\\ j\leqslant d-c}}c_{jkl}\omega_k\wedge\omega_j\,,$$

Es decir, $d\omega_l\in\mathfrak{I}$ para todo $l\in\{1,\dots,d-c\}$.

Sea $\omega=\sum_{n\in\mathbb{N}}\omega_n\in\mathfrak{I}$, que es equivalente a que cada componente homogénea ω_n está en el ideal $\mathfrak{I}$. Consideremos $\upsilon_1\wedge\ldots\wedge\upsilon_n$ donde $\upsilon_i\in E^1(M)$ y $\upsilon_k\in\beta$ para algún $k\in\{1,\dots,n\}$. Como d es una anti-derivación se tiene que

$$d\big(\upsilon_1\wedge\ldots\wedge\upsilon_n\big)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\left(\upsilon_1\wedge\ldots\wedge d\upsilon_j\wedge\ldots\wedge\upsilon_n\right),$$

obteniendo con ello que $\upsilon_1\wedge\ldots\wedge\upsilon_n\in\mathfrak{I}$. Como ω_n es una suma finita de elementos de la forma $\upsilon_1\wedge\ldots\wedge\upsilon_n$ concluimos que $d\omega\in\mathfrak{I}$.

Supongamos que $\mathfrak{I}$ es un ideal diferencial. Para concluir que $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ basta mostrar que $[Y_i,\,Y_j]\in\mathfrak{h}$ para cualesquiera $i,j\in\{d-c+1,\dots,d\}$. Por la Proposición 4.2.10 inciso IV para todo $k\in\{1,\dots,d-c\}$

$$\omega_k[Y_i,Y_j]=-d\omega_k(Y_i,Y_j)=0\,,$$

por lo cual $[Y_i,Y_j]\in\mathfrak{h}$.

Capítulo 5

Construcciones con grupos de Lie

5.1. Morfismos de grupos de Lie

Definición 5.1.1. (Morfismos de grupos y álgebras de Lie) Sean G y H grupos de Lie. Decimos que $\varphi : G \longrightarrow H$ es un *morfismo de grupos de Lie* si es un morfismo de grupos y además es suave. Diremos que es un *isomorfismo de grupos de Lie* si es un isomorfismo de grupos y es un difeomorfismo; en particular lo llamaremos *automorfismo* si $G = H$. Cuando $H = Aut(V)$ para algún espacio vectorial V, o bien es igual a $GL(n, \mathbb{C})$ o $GL(n, \mathbb{R})$, entonces el morfismo φ será llamado *representación* de un grupo de Lie G.

Análogamente si $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{g}$ son álgebras de Lie, diremos que $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un *morfismo de álgebras de Lie* si es $\mathbb{R}$-lineal y preserva corchetes (es decir que para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\psi[X, Y] = [\psi(X), \psi(Y)]$). Diremos que es un *isomorfismo* si además es biyectiva y en particular *automorfismo* si $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$. En el caso en el que $\mathfrak{h} = End(V)$ para algún espacio vectorial V, o bien es igual a $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ o $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, entonces el morfismo ψ es llamado *representación del álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$.

Consideremos G y H grupos de Lie; sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ sus respectivas álgebras. Si e y $\tilde{e}$ son los elementos neutros de G y H respectivamente, denotemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\xrightarrow{\alpha_G} T_eG \qquad & \mathfrak{h} &\xrightarrow{\alpha_H} T_{\tilde{e}}H\,. \\ X &\longmapsto X_e & Y &\longmapsto Y_{\tilde{e}} \end{aligned}$$

a sus isomorfismos. Sabemos que α_G (análogamente α_H) induce una estructura de álgebra en T_eG (en $T_{\tilde{e}}H$). A saber dados $\nu, \tau \in T_eG$

$$[\nu, \tau] = \alpha_G([\alpha_G^{-1}(\nu), \alpha_G^{-1}(\tau)]).$$

De modo que si $\varphi : G \longrightarrow H$ es un morfismo de grupos de Lie, $\varphi(e) = \tilde{e}$ y así $d\varphi_e : T_eG \longrightarrow T_{\tilde{e}}H$ induce una transformación lineal

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\alpha_G} & T_eG & \xrightarrow{d\varphi_e} & T_{\tilde{e}}H & \xrightarrow{\alpha_H^{-1}} & \mathfrak{h} \\ X & \longmapsto & X_e & \longmapsto & d\varphi_e(X_e) & \longmapsto & \alpha_H^{-1}(d\varphi_e(X_e)) \end{array}$$

Abusando de la notación llamaremos a dicha transformación $d\varphi$, de modo que $d\varphi(X)(\tilde{e}) = \alpha_H^{-1}(d\varphi_e(X_e))(\tilde{e}) = d\varphi_e(X_e)$ resultando ser $d\varphi(X)$ el único campo invariante izquierdo en H cuyo valor en $\tilde{e}$ es $d\varphi_e(X_e)$.

Sabemos que $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$ son φ- relacionados si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "X"'] & H \arrow[d, "Y"] \\ TG \arrow[r, "d\varphi"'] & TH \end{tikzcd}$$

es decir que para cualquier $\sigma \in G$, $Y_{\varphi(\sigma)} = Y \circ l_{\varphi(\sigma)}(\tilde{e}) = dl_{\varphi(\sigma)}(Y_{\tilde{e}})$ y

$$\begin{aligned}(d\varphi \circ X)(\sigma) &= d\varphi_\sigma(X_\sigma) = d\varphi_\sigma(dl_\sigma(X_e)) = d(\varphi \circ l_\sigma)_e(X_e) \\ &= d(l_{\varphi(\sigma)} \circ \varphi)_e(X_e) = dl_{\varphi(\sigma)\tilde{e}}(d\varphi_e(X_e)).\end{aligned}$$

Esto nos dice que X y Y son φ-relacionados si y sólo si $Y_{\tilde{e}} = d\varphi_e(X_e)$ si y sólo si $d\varphi(X) = Y$.

Una consecuencia de esta última propiedad se enuncia a continuación junto con el hecho de que la transformación $d\varphi$ resulta ser un morfismo de álgebras de Lie.

***Teorema* 5.1.2.** *Sean G y H grupos de Lie con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ respectivamente, y $\varphi : G \longrightarrow H$ morfismo. Entonces*

I. *X y $d\varphi(X)$ son φ-relacionados para cada $X \in \mathfrak{g}$.*

II. *$d\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un morfismo de álgebras de Lie.*

Demostración. Verifiquemos el inciso II. Sean $X, X' \in \mathfrak{g}$ de modo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "{[X,X']}"'] & H \arrow[d, "{d\varphi([X,X'])}"] \\ TG \arrow[r, "d\varphi"'] & TH \end{tikzcd}$$

es decir, $(de\varphi([X, X']))_{\tilde{e}} = d\varphi_e([X, X']_e)$. De modo que basta verificar que

$$[d\varphi(X), d\varphi(X')]_{\tilde{e}} = d\varphi_e([X, X']_e).$$

Sea $f \in C^\infty_{\tilde{e}}(H)$. Notemos que para cualquier $\sigma \in \mathrm{dom}(d\varphi(X')(f) \circ \varphi)$

$$(d\varphi(X')(f)\circ\varphi)(\sigma) = d\varphi(X')_{\varphi(\sigma)}(f) = d\varphi_\sigma(X'_\sigma)(f) = X'_\sigma(f\circ\varphi) = X'(f\circ\varphi)(\sigma)$$

Por lo que $d\varphi(X')(f)\circ\varphi = X'(f\circ\varphi)$; análogamente $d\varphi(X)(f)\circ\varphi = X(f\circ\varphi)$. De ese modo

$$\begin{aligned}
[d\varphi(X), d\varphi(X')]_{\tilde{e}}(f) &= d\varphi(X)_{\tilde{e}}(d\varphi(X')(f)) - d\varphi(X')_{\tilde{e}}(d\varphi(X)(f)) \\
&= d\varphi(X_e)(d\varphi(X')(f)) - d\varphi(X'_e)(d\varphi(X)(f)) \\
&= X_e(d\varphi(X')(f)\circ\varphi) - X'_e(d\varphi(X)(f)\circ\varphi) \\
&= X_e(X'(f\circ\varphi)) - X'_e(X(f\circ\varphi)) \\
&= [X, X']_e(f\circ\varphi) = d\varphi_e([X,X']_e)(f)
\end{aligned}$$

■

Hemos visto como el morfismo de grupos de Lie φ induce un morfismo de álgebras por medio de la derivada. Ahora veremos como actúa su mapeo dual $\delta\varphi$ en $E^*_{l\text{inv}}(H)$. Para ello observemos que $\delta\varphi$ lleva elementos de $E^*_{l\text{inv}}(H)$ en $E^*_{l\text{inv}}(G)$.

Sea $\omega \in E^*_{l\text{inv}}(H)$, de modo que para cualquier $\sigma \in G$

$$\begin{aligned}
\delta l_\sigma(\delta\varphi(\omega)) &= \delta(\varphi\circ l_\sigma)(\omega) = \delta(l_{\varphi(\sigma)}\circ\varphi)(\omega) \\
&= \delta\varphi(\delta l_{\varphi(\sigma)}(\omega)) = \delta\varphi(\omega).
\end{aligned}$$

Por la proposición 2.23 concluimos que $\delta\varphi$ es un morfismo entre álgebras; más aún, $\delta\varphi(E^*_{l\text{inv}}(H)) \subseteq E^*_{l\text{inv}}(G)$ y satisface que $\delta\varphi(E^k_{l\text{inv}}(H)) \subseteq E^k_{l\text{inv}}(G)$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$. De modo que podemos definir una función lineal

$$\delta\varphi : E^1_{l\text{inv}}(H) \longrightarrow E^1_{l\text{inv}}(H)$$

que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
E^1_{l\text{inv}}(H) \arrow[r, "\delta\varphi"] \arrow[d, "\beta_H"'] & E^1_{l\text{inv}}(G) \arrow[d, "\beta_G"] \\
\mathfrak{h}^* \arrow[r, "d\varphi^*"'] & \mathfrak{g}^*
\end{tikzcd} .$$

Es decir que para todo $\omega \in E^1_{l\text{inv}}(H)$, $\beta_G\circ\delta\varphi(\omega) = \delta\varphi^*\circ\beta_H(\omega)$, pues dado $X \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}
(\beta_G\circ\delta\varphi)(\omega)(X) &= \beta_G(\delta\varphi(\omega))(X) = (\delta\varphi(\omega))_e(X_e) = (\omega_{\tilde{e}}\circ d\varphi_e)(X_e) \\
&= \omega_{\tilde{e}}(d\varphi_e(X_e)) = \omega_{\tilde{e}}(d\varphi(X)_{\tilde{e}})
\end{aligned}$$

y por otro lado

$$(d\varphi^* \circ \beta_H(\omega))(X) = (\beta_H(\omega) \circ d\varphi)(X) = \omega_{\tilde{e}}(d\varphi(X)_{\tilde{e}}).$$

Identificando los espacios tangentes respectivos concluimos que $\delta\varphi(\omega)(X) = \omega(d\varphi(X))$.

Recordemos que dada un base $\{\, \omega_1, \ldots, \omega_d \,\}$ de $E^1_{l\mathrm{inv}}(H)$ existen constantes estructurales $\{c_{ijk}\}$ para las cuales

$$d\omega_i = \sum_{j<k} c_{ijk}\omega_k \wedge \omega_j.$$

Como d y δ conmutan obtenemos una expresión para la derivada de $\delta\omega_i$, a saber

$$d(\delta(\omega_i)) = \sum_{j<k} c_{ijk}\delta(\omega_k) \wedge \delta(\omega_j).$$

Enseguida se muestra un caso en donde esta expresión resulta útil.

Observación 5.1.3. Consideremos G^d y H^c grupos de Lie con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ respectivamente. Sea $\Psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un morfismo de álgebras de Lie. Denotemos como $\Psi^* : E^1_{l\,\mathrm{inv}}(H) \longrightarrow E^1_{l\,\mathrm{inv}}(G)$ el mapeo dual definido como

$$\Psi^*(\omega)(X) = \omega(\Psi(X)) \qquad \omega \in E^1_{l\,\mathrm{inv}}(H),\ X \in \mathfrak{g}\,.$$

Consideremos $\{\, \omega_i \,\}$ una base de $E^1_{l\,\mathrm{inv}}(H)$ y denotemos como $\mathfrak{I}$ al ideal de $E^*(G \times H)$ generado por el conjunto linealmente independiente de 1-formas

$$\{\, \mu_i = \delta\pi_1\big(\Psi^*(\omega_i)\big) - \delta\pi_2(\omega_i) \,\}_{i=1}^{c}\,,$$

donde π_1 y π_2 son las proyecciones canónicas de $G \times H$ sobre G y H respectivamente. Veamos que $\mathfrak{I}$ es un ideal diferencial, para lo que basta verificar que $d\mu_i \in \mathfrak{I}$.

Supongamos que hemos probado que para todo $i \in \{\, 1, \ldots, c \,\}$

$$d\big(\Psi^*(\omega_i)\big) = \sum_{j<k} c_{jki}\Psi^*(\omega_k) \wedge \Psi^*(\omega_j) \tag{5.1}$$

donde c_{jki} son las constantes estructurales de H con respecto a la base $\{\, \omega_i \,\}$. Por la Proposición 3.3.8 inciso III se tiene que δ y d conmutan de manera que para todo $i \in \{\, 1, \ldots, c \,\}$

$$
\begin{aligned}
d\big(\delta\pi_1\big(\Psi^*(\omega_i)\big) - \delta\pi_2(\omega_i)\big) &= \sum_{j<k} c_{jki}\, \delta\pi_1\big(\Psi^*(\omega_k)\big) \wedge \delta\pi_1\big(\Psi^*(\omega_j)\big) \\
&\quad + \sum_{j<k} c_{jki}\, \delta\pi_2(\omega_k) \wedge \delta\pi_2(\omega_j) \\
&= \sum_{j<k} c_{jki} \left(\delta\pi_1\big(\Psi^*(\omega_k)\big) - \delta\pi_2(\omega_k)\right) \wedge \delta\pi_1\big(\Psi^*(\omega_j)\big) \\
&\quad + \sum_{j<k} c_{jki}\, \delta\pi_2(\omega_k) \wedge \left(\delta\pi_1\big(\Psi^*(\omega_j)\big) - \delta\pi_2(\omega_j)\right),
\end{aligned}
$$

con lo cual se concluye que $\mathfrak{I}$ es diferencial. Mostremos que la ecuación (5.1) se satisface, para lo cual es suficiente probar que al aplicar campos arbitrarios $X, Y \in \mathfrak{g}$ a ambos miembros de la ecuación se satisface la igualdad.

Por la Proposición 4.2.10 incisos IV y V se tiene que

$$
\begin{aligned}
d\big(\Psi^*(\omega_i)\big)(X,Y) &= -\Psi^*(\omega_i)[X,Y] = -\omega_i[\Psi(X),\Psi(Y)] \\
&= d\omega_i\big(\Psi(X),\Psi(Y)\big) \\
&= \sum_{j<k} c_{jki}\omega_k \wedge \omega_j\big(\Psi(X),\Psi(Y)\big) \\
&= \sum_{j<k} c_{jki}\Psi^*(\omega_k) \wedge \Psi^*(\omega_j)(X,Y)\,.
\end{aligned}
$$

Finalmente verifiquemos que para todo $i \in \{1,\ldots,c\}$

$$
\mu_i = \delta\pi_1\big(\Psi^*(\omega_i)\big) - \delta\pi_2(\omega_i)
$$

es una forma invariante izquierda de $G \times H$. Sean $\sigma \in G$ y $\tau \in H$. Nótese que $\pi_1 \circ l_{(\sigma,\tau)} = l_\sigma \circ \pi_1$ y $\pi_2 \circ l_{(\sigma,\tau)} = l_\tau \circ \pi_2$ de modo que para cualesquiera $\sigma_1 \in G$ y $\tau_1 \in H$

$$
\begin{aligned}
\delta l_{(\sigma,\tau)}(\mu_i)(\sigma_1,\tau_1) &= \Psi^*(\omega_i)_{\sigma\,\sigma_1} \circ d\big(\pi_1 \circ l_{(\sigma,\tau)}\big) - (\omega_i)_{\tau\,\tau_1} \circ \delta\big(\pi_2 \circ l_{(\sigma,\tau)}\big) \\
&= \Psi^*(\omega_i)_{\sigma\,\sigma_1} \circ d\big(l_\sigma \circ \pi_1\big)_{(\sigma_1,\tau_1)} - (\omega_i)_{\tau\,\tau_1} \circ \delta\big(l_\tau \circ \pi_2\big)_{(\sigma_1,\tau_1)} \\
&= \Psi^*(\omega_i)_{\sigma_1} \circ d(\pi_1)_{(\sigma_1,\tau_1)} - (\omega_i)_{\tau_1} \circ d(\pi_2)_{(\sigma_1,\tau_1)} \\
&= \big(\delta\pi_1\big(\Psi^*(\omega_i)\big) - \delta\pi_2(\omega_i)\big)(\sigma_1,\tau_1) = \mu_i(\sigma_1,\tau_1)\,.
\end{aligned}
$$

En particular, si $\psi : G \longrightarrow H$ es un morfismo de grupos de Lie entonces se sigue del Teorema 5.1.2 que $d\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un morfismo de álgebras de Lie y por lo tanto lo anterior se aplica a $\delta\psi$.

5.2. Subgrupos de Lie

Definición 5.2.1. (Subgrupo de Lie) Decimos que (H, φ) es un *subgrupo de Lie de* G si dicho par es una subvariedad de G y además φ es un morfismo de grupos.

En este caso (H, φ) resultará un subgrupo cerrado de G si $\varphi(H) \subseteq G$ es cerrado.

Como lo hicimos en el capítulo 2 para subvariedades, podemos identificar la clase de subgrupos de Lie de un grupo G con el conjunto

$$\mathcal{A} = \{\, (A, i_A) \,:\, A \text{ es un subgrupo de G y } (A, i_A) \text{ es subvariedad} \,\},$$

de modo que dos subgrupos (H_1, φ_1) y (H_2, φ_2) están relacionados al mismo subgrupo (A, i_A) si y sólo si $\varphi(H_1) = \varphi(H_2) = C$ y la composición $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ es un isomorfismo. Lo anterior es equivalente a pedir que exista $\alpha : H_1 \longrightarrow H_2$ isomorfismo tal que $\varphi_2 \circ \alpha = \varphi_1$. Nuevamente resulta una *relación de equivalencia* en la clase de subgrupos de Lie de G. De este modo cuando hablemos de la existencia de subgrupos de Lie de G que son únicos con respecto a alguna propiedad, entenderemos que existe una única clase de equivalencia cuyos elementos la satisfacen.

Al igual que antes, cuando no haya lugar a confusión diremos que $A \subseteq G$ es subgrupo de G refiriéndonos a que $(A,\, i_A) \in \mathcal{A}$.

Definición 5.2.2. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Diremos que $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ es una *subálgebra de Lie de* $\mathfrak{g}$ si es un $\mathbb{R}$-subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$ y es cerrado bajo corchetes.

Si (A, i_A) es un subgrupo de G y $\mathfrak{a}$ su álgebra de Lie, usualmente identificaremos esta última con $di_A(\mathfrak{a})$, considerándola así una subálgebra de $\mathfrak{g}$ en el sentido de la definición anterior.

Ocuparemos el siguiente resultado de grupos topológicos para abordar un Teorema que nos ayudará a dar una correspondencia biunívoca entre las subálgebras de un grupo de Lie y sus subgrupos conexos.

***Lema* 5.2.3.** Sea G un grupo topológico conexo y U una vecindad de e. Entonces

$$G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^n$$

donde U^n denota el conjunto que tiene a productos de elementos en U con n factores.

Demostración. Consideremos $V = U \cap U^{-1}$ (donde $U^{-1} = \{\, \sigma^{-1} \,:\, \sigma \in U \,\}$), de manera que V es una vecindad abierta de e y además simétrica, es decir $V = V^{-1}$. Observemos que

$$H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V^n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^n \tag{5.2}$$

Afirmamos que H es un subgrupo de G. Sean $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k$, $\tau = \tau_1 \dots \tau_m \in H$, de modo que $\sigma^{-1} = \sigma_k^{-1} \dots \sigma_1^{-1} \in V^k \subseteq H$ y $\sigma\tau \in V^{k+m} \subseteq H$. Como además $e \in V \subseteq H$, se concluye lo deseado.

Ya que H es unión de abiertos, resulta un abierto. Por otro lado, para cualquier $\rho \in G$, ρH es abierto y por ello $G \smallsetminus H = \bigcup_{\rho \notin H} \rho H$ es abierto. De manera que H es abierto y cerrado y por tanto es igual a G. De la igualdad (5.2) se sigue el resultado.

■

Obsérvese que del argumento dado en el Lema anterior se sigue que cualquier grupo topológico conexo no tiene subgrupos propios que sean abiertos.

***Teorema* 5.2.4.** *Sea G grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Si $\widetilde{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie, entonces existe un único subgrupo de Lie conexo (H, φ) de G para el cual $d\varphi(\mathfrak{h}) = \widetilde{\mathfrak{h}}$.*

Demostración. Notemos que de ser (H, φ) un subgrupo de Lie que satisface $d\varphi(\mathfrak{h}) = \widetilde{\mathfrak{h}}$, que es equivalente a decir que

$$d\varphi(T_{\tilde{e}}H) = \{\, X_e \,:\, X \in \widetilde{\mathfrak{h}} \,\}.$$

Esto nos hace pensar en la distribución $\mathfrak{D}_{\widetilde{\mathfrak{h}}}$ definida como

$$\mathfrak{D}_{\widetilde{\mathfrak{h}}}(\sigma) = \{\, dl_\sigma(X_e) \,:\, X \in \widetilde{\mathfrak{h}} \,\} = \{\, X_\sigma \,:\, X \in \widetilde{\mathfrak{h}} \,\}$$

para cualquier $\sigma \in G$. Sabemos que es suave (pues generada por una base de $\widetilde{\mathfrak{h}}$) y además

$$\begin{aligned} d\varphi(T_h H) &= d\varphi(dl_h(T_{\tilde{e}}H)) = d(\varphi \circ l_h)(T_{\tilde{e}}H) \\ &= d(l_{\varphi(h)} \circ \varphi)(T_{\tilde{e}}H) = dl_{\varphi(h)}(\{\, X_e \,:\, X \in \widetilde{\mathfrak{h}} \,\}) \\ &= \{\, dl_{\varphi(h)}(X_e) \,:\, X \in \widetilde{\mathfrak{h}} \,\} = \mathfrak{D}_{\widetilde{\mathfrak{h}}}(\varphi(h)). \end{aligned}$$

es decir, (H, φ) resulta ser una variedad integral de $\mathfrak{D}_{\widetilde{\mathfrak{h}}}$. Por ello nos dedicaremos a estudiar la distribución $\mathfrak{D}_{\widetilde{\mathfrak{h}}}$ y sus variedades integrales.

Supongamos que $\dim \widetilde{\mathfrak{h}} = d$ y $\{\, X_1, \dots, X_d \,\}$ son los generadores de $\widetilde{\mathfrak{h}}$. De modo que si $X = \sum_{i=1}^{d} a_i X_i$, $Y = \sum_{j=1}^{d} b_j X_j \in \mathfrak{D}_{\widetilde{\mathfrak{h}}}$, donde a_i, $b_j \in C^\infty(G)$ para cualesquiera $i, j \in \{\, 1, \dots d \,\}$, se tiene

$$[X, Y] = \sum_{i,j} (a_i b_j [X_i, X_j] + a_i (X_i(b_j)) X_j - b_j (X_j(a_i)) X_i).$$

Así $[X, Y] \in \mathfrak{D}_{\widetilde{\mathfrak{h}}}$ por ser $\widetilde{\mathfrak{h}}$ álgebra de Lie. De modo que $\mathfrak{D}_{\widetilde{\mathfrak{h}}}$ es involutiva y por ello existe una variedad integral conexa maximal de $\mathfrak{D}_{\widetilde{\mathfrak{h}}}$ que pasa por e. Denotémosla como (H, φ).

Basta mostrar que H puede recibir una estructura de grupo compatible con su estructura de variedad, la cual haga que φ sea un morfismo de grupos de Lie, además de que cualquier otro grupo que satisfaga la propiedad sea equivalente a (H, φ).

Notemos que $e \in \varphi(H)$; además dado $\sigma \in \varphi(H)$, $(H, l_{\sigma^{-1}} \circ \varphi)$ es una variedad integral de $\mathfrak{D}_{\widetilde{\mathfrak{h}}}$ que pasa por e, de tal forma que $l_{\sigma^{-1}} \circ \varphi(H) \subseteq \varphi(H)$ y por tanto $\sigma^{-1} \in \varphi(H)$. Análogamente, dados $\sigma, \tau \in \varphi(H)$, $(H, l_{\sigma\tau} \circ \varphi)$ es una variedad integral de $\mathfrak{D}_{\widetilde{\mathfrak{h}}}$ que pasa por σ y por tanto $l_{\sigma\tau} \circ \varphi(H) \subseteq \varphi(H)$. De ahí $\sigma\tau \in \varphi(H)$, concluyendo con ello que $\varphi(H)$ es un subgrupo abstracto de G.

Por otro lado, si denotamos el producto de $G \times G$ como $\cdot$, obtendremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \varphi(H) \times \varphi(H) \arrow[rr, "\cdot"] \arrow[drr, dashed, "\cdot|_{\varphi(H)\times\varphi(H)}"'] & & G \\ & & \varphi(H) \arrow[u, "i_{\varphi(H)}"'] \end{tikzcd}$$

donde se considera $\varphi(H) \times \varphi(H)$ con la estructura de producto inducida por (H, φ). Como $(\varphi(H), i_{\varphi(H)})$ es variedad integral, obtenemos que $\cdot|_{\varphi(H)\times\varphi(H)}$ es suave (Teoremas 1.32 y 1.62). De este modo $(\varphi(H), i_{\varphi(H)})$ es un subgrupo de Lie de G.

Por otro lado sabemos que considerando a $\varphi(H)$ con la estructura diferencial inducida por H a través de φ, éste resulta un difeomorfismo. Consideremos

$$\begin{array}{rcl} H \times H & \xrightarrow{\tilde{\cdot}} & H \\ (h, h') & \longmapsto & \varphi^{-1}(\varphi(h) \cdot \varphi(h')) \end{array}$$

Ésta resulta ser una operación de grupo para H que hace a φ un isomorfismo de grupos abstractos. Como es suave, entonces (H, φ) con el producto $\tilde{\cdot}$ es un subgrupo de Lie de G.

Sea (H', φ') subgrupo conexo de Lie de G con álgebra de Lie $\mathfrak{h}'$ para el cual $d\varphi(\mathfrak{h}') = \widetilde{\mathfrak{h}}$. Sabemos que resulta ser una variedad integral de $\mathfrak{D}_{\widetilde{\mathfrak{h}}}$ que pasa por e; por tanto $\varphi'(H') \subseteq \varphi(H)$. Por lo tanto existe una única función $\alpha : H' \longrightarrow H$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} H' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[dr, dashed, "\alpha"'] & G \\ & H \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Como para cualesquiera $\sigma, \tau \in H'$, $\alpha(\sigma\tau)$ es el elemento en H que bajo φ va a $\varphi'(\sigma)\varphi'(\tau)$ y

$$\varphi(\alpha(\sigma)\alpha(\tau)) = \varphi(\alpha(\sigma))\varphi(\alpha(\tau)) = \varphi'(\sigma)\varphi'(\tau),$$

de ahí α es un morfismo de grupos.

Por los Teoremas 1.32 y 1.62, α es suave. Más aún, es inyectiva pues $\varphi' = \varphi \circ \alpha$; como consecuencia de esto mismo, es inmersión de H. Por otro lado α es difeomorfismo local en e' (Teorema de la función inversa). De modo que existe $U' \subseteq H'$ vecindad abierta de e' tal que $\alpha|_{U'}$ es difeomorfismo. Como $H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\varphi(U'))^n$ se tiene que α es biyectiva y de ahí $\varphi(H) = \varphi \circ \alpha(H') = \varphi'(H')$. Regresando a los Teoremas 1.32 y 1.62 concluimos que α^{-1} es suave.

■

En resumen hemos demostrado que (H, φ) es un subgrupo conexo de Lie de G tal que $d\varphi(\mathfrak{h}) = \widetilde{\mathfrak{h}}$ si y sólo si (H, φ) es una variedad integral conexa maximal del ideal generado por $\widetilde{\mathfrak{h}}$, $\mathfrak{D}_{\widetilde{\mathfrak{h}}}$.

Empleando un razonamiento análogo al que se desarrolló en la demostración anterior para exhibir que $\varphi(H)$ era un subgrupo abstracto de G, se puede mostrar que si $\mathcal{C}$ es la componente conexa de G que tiene a e, $\mathcal{C}$ es un subgrupo abstracto de G y no sólo eso, sino que resulta ser un subgrupo de Lie pues es un subconjunto abierto de G. De hecho este resultado es válido para grupos topológicos.

***Corolario* 5.2.5.** Dado un subgrupo de Lie (H, φ) de G, si $\widetilde{H}$ es una componente conexa de H entonces $(\widetilde{H}, \varphi|_{\widetilde{H}})$ es una variedad integral conexa maximal de la distribución generada por la subálgebra de $\mathfrak{g}$, $d\varphi(\mathfrak{h})$.

En el siguiente resultado interpretaremos el Teorema anterior en términos de formas diferenciables. Para ello tengamos en cuenta que dado un conjunto linealmente independientes de 1-formas invariantes izquierdas, una condición necesaria y suficiente para que el subespacio $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ anulado por dichas formas resulte ser una subálgebra de $\mathfrak{g}$ es que el ideal generado por las 1-formas sea diferencial. (ejemplo 4.2.12)

***Corolario* 5.2.6.** Sea $\{\omega_1, \ldots, \omega_{c-d}\}$ conjunto linealmente independiente de 1-formas invariantes izquierdas de G^c. Supongamos que el ideal generado por dicho conjunto $\mathfrak{I}$ es diferencial. Entonces la variedad integral maximal de la d-distribución asociada al ideal que pasa por e es un subgrupo de Lie de G.

Aunque el Teorema siguiente es una consecuencia del anterior, por sí mismo es bastante importante. Nos habla de una condición para determinar cuando dos morfismos que salen de un grupo de Lie conexo son iguales.

***Teorema* 5.2.7.** *Sean G grupo de Lie conexo y φ, $\rho : G^d \longrightarrow H^c$ morfismos de grupos de Lie que satisfacen que $d\varphi = d\rho$, subálgebra del álgebra de Lie de H, entonces $\varphi = \rho$.*

Demostración. Observemos que $G \times H$ tiene una estructura de grupo de Lie con la operación usual de producto, inducida a través de G y H (véase el ejemplo 4.1.6 inciso V). Consideremos $\mathcal{G}_\varphi, \mathcal{G}_\rho \subseteq G \times H$ gráficas de φ y ρ

respectivamente. De modo que resultan ser subgrupos de Lie conexos con sus correspondientes inclusiones i_φ, i_ρ en $G\times H$, pues la operación de este último restringida a la gráfica de algún morfismo de grupos de Lie es cerrada y suave (ver ejemplo 1.1.8).

Veremos que $di_\varphi(T_{(e,\tilde{e})}\mathcal{G}_\varphi) = di_\rho(T_{(e,\tilde{e})}\mathcal{G}_\rho)$; denotando $\mathfrak{g}_\varphi$ y $\mathfrak{g}_\rho$ a las subálgebras de Lie de $\mathcal{G}_\varphi$ y $\mathcal{G}_\rho$ respectivamente, es equivalente a que $di_\varphi(\mathfrak{g}_\varphi) = di_\rho(\mathfrak{g}_\rho) = \mathfrak{b}$, es decir que determinan la misma subálgebra de Lie en el álgebra de $G\times H$. Por el Teorema previo, sabemos que ambas son variedades integrales conexas maximales de la distribución generada por $\mathfrak{b}$ y pasan a través de $(e,\tilde{e})$, de modo que $\mathcal{G}_\varphi = \mathcal{G}_\rho$, obteniendo así que para cualquier $\sigma\in G$ $(\sigma,\varphi(\sigma)) = (\sigma,\rho(\sigma))$ y concluyendo con ello que $\varphi=\rho$.

Dadas π_1 y π_2 las proyecciones conónicas de $G\times H$ sobre G y H respectivamente, sabemos que $(d\pi_1,\, d\pi_2) : T_{(e,\tilde{e})}(G\times H) \longrightarrow T_eG\times T_{\tilde{e}}H$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Sea

$$T = \{\,(\nu, d\varphi(\nu))\,:\,\nu\in T_eG\,\}.$$

Observemos que

$$(d(\pi_1\circ i_\varphi), d(\pi_2\circ i_\varphi))(T_{(e,\tilde{e})}\mathcal{G}_\varphi)\subseteq T$$

Sea $\nu\in T_{(e,\tilde{e})}\mathcal{G}_\varphi$, de modo que si $(U,\tau=(x_1,\ldots,x_d))$ es un sistema coordenado de G, $(\mathcal{G}_\varphi\cap\pi_1^{-1}(U),\ \ \tau\circ\pi_1|_{\mathcal{G}_\varphi})$ es un sistema coordenado de $\mathcal{G}_\varphi$ (véase el ejemplo 1.1.8) y por ello

$$\nu = \sum_{i=1}^d a_i \left.\frac{\partial}{\partial(x_i\circ\pi_1)}\right|_{(e,\tilde{e})}$$

donde $a_i\in\mathbb{R}$ para cualquier $i\in\{\,1,\ldots,d\,\}$. Así dado $f\in C_e^\infty(G)$ y denotando λ el mapeo inverso de $\pi_1|_{\mathcal{G}_\varphi}$

$$\begin{aligned}\nu(f\circ\pi_1\circ i_\varphi) &= \sum_{i=1}^d a_i \left.\frac{\partial(f\circ\pi_1\circ i_\varphi)}{\partial(x_i\circ\pi_1)}\right|_{(e,\tilde{e})} = \sum_{i=1}^d a_i\frac{\partial(f\circ\pi_1|_{\mathcal{G}_\varphi}\circ\lambda\circ\tau^{-1})}{\partial r_i}(\tau(e))\\ &= \sum_{i=1}^d a_i\frac{\partial(f\circ\tau^{-1})}{\partial r_i}(\tau(e)) = \sum_{i=1}^d a_i\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_e(f).\end{aligned} \tag{5.3}$$

Si por otro lado $g\in C_{\tilde{e}}^\infty(H)$,

$$\begin{aligned}
\nu(g\circ\pi_2\circ i_\varphi) &= \sum_{i=1}^{d} a_i \frac{\partial(g\circ\pi_2\circ i_\varphi)}{\partial(x_i\circ\pi_1)}\bigg|_{(e,\tilde{e})} = \sum_{i=1}^{d} a_i \frac{\partial(g\circ\pi_2\circ\lambda\circ\tau^{-1})}{\partial r_i}(\tau(e)) \\
&= \sum_{i=1}^{d} a_i \frac{\partial(g\circ\varphi\circ\tau^{-1})}{\partial r_i}(\tau(e)) = \sum_{i=1}^{d} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_e (g\circ\varphi) \\
&= d\varphi\left(\sum_{i=1}^{d} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_e\right)(g).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

De las igualdades (5.3) y (5.4) concluimos que $(d(\pi_1\circ i_\varphi), d(\pi_2\circ i_\varphi))(\nu)\in T$.

Así $(d(\pi_1\circ i_\varphi), d(\pi_2\circ i_\varphi))(T_{(e,\tilde{e})}\mathcal{G}_\varphi)$ es un subespacio de dimensión d de $T_{(e,\tilde{e})}(G\times H)$ contenido en el subespacio T que tiene la misma dimensión, resultando por ello iguales. Análogamente podemos mostrar que

$$(d(\pi_1\circ i_\rho), d(\pi_2\circ i_\rho))(T_{(e,\tilde{e})}\mathcal{G}_\rho) = T\,.$$

Como $(d\pi_1, d\pi_2)\circ di_\varphi = (d\pi_1\circ di_\varphi, d\pi_2\circ di_\varphi) = (d(\pi_1\circ i_\varphi), d(\pi_2\circ i_\varphi)$,

$$(d\pi_1, d\pi_2)(di_\varphi(T_{(e,\tilde{e})}\mathcal{G}_\varphi)) = (d\pi_1, d\pi_2)(di_\rho(T_{(e,\tilde{e})}\mathcal{G}_\rho)),$$

y de ahí

$$di_\varphi(T_{(e,\tilde{e})}\mathcal{G}_\varphi) = di_\rho(T_{(e,\tilde{e})}\mathcal{G}_\rho)$$

que es lo que queríamos concluir.

■

Una demostración alternativa de este Teorema se presenta en la sección A.1 del Ápendice.

Ahora veremos que hay una correspondencia biunívoca entre subgrupos abstractos de G que poseen estructuras de variedades diferenciables que los convierten en subvariedades del mismo, y subgrupos de Lie de G (considerando que estos últimos son identificados si resultan equivalentes).

En la demostración de el siguiente resultado ocuparemos la versión débil del Teorema de Sard para variedades que nos dice que dada una función suave entre variedades $h : M^c \longrightarrow N^d$, donde $c<d$, el interior de la imagen de M bajo h es vacio en N. La demostración de dicho Teorema se incluye en el Apéndice.

***Teorema* 5.2.8.** *Sea A un subgrupo abstracto de un grupo de Lie G el cual tiene una estructura de variedad diferenciable que hace que (A, i_A) sea una subvariedad de G. Entonces esa es la única estructura de variedad diferenciable que A puede poseer de tal forma que tenga dicha propiedad. Más aún, (A, i_A) resulta ser un subgrupo de Lie de G.*

Demostración. Consideremos la distribución en G^d que traslada el espacio tangente de e en A, es decir que para cualquier $\sigma \in G$

$$\mathfrak{D}_\sigma = \{\, d(l_\sigma \circ i_A)(\nu) \,:\, \nu \in T_e A \,\}.$$

Notemos que esta distribución es la misma que definimos en el Teorema 5.2.4 a través de la subálgebra de $\mathfrak{g}$. De hecho, suponiendo que la dimensión de (A, i_A) es d obtenemos una d-distribución suave, lo cual se puede concluir observando que existen $X_1, \ldots, X_d \in \mathfrak{g}$ para las cuales $\{\, (X_1)_e, \ldots, (X_d)_e \,\}$ resulta una base para $di_A(T_e A)$; de ese modo, para toda $\sigma \in G$ el subespacio generado por $\{\, (X_1)_\sigma, \ldots, (X_d)_\sigma \,\}$ es $\mathfrak{D}_\sigma$.

Por el momento no podemos asegurar que (A, i_A) sea una subvariedad integral que pasa por e, pues no sabemos que para cualquier $\sigma \in A$, $l_\sigma|_A$ sea un difeomorfismo de (A, i_A) y por lo tanto el cálculo hecho al comienzo del Teorema 5.2.4 para mostrar que cualquier subgrupo de Lie que satisficiera $d\varphi(\mathfrak{h}) = \widetilde{\mathfrak{h}}$, sería una subvariedad integral de dicha distribución, no es válido ahora. Pero notemos que de ser posible mostrarlo, $\mathfrak{D}$ resultaría una distribución suave e involutiva, pues $(A, l_\sigma \circ i_A)$ sería una variedad integral que pasaría por σ, para toda $\sigma \in G$ (Proposición 2.9.6). No sólo eso, sino que el producto en A resultaría suave por un razonamiento análogo al utilizado en la demostración del Teorema 5.2.4 y con ello (A, i_A) sería un subgrupo de Lie de G.

Mostraremos que cualquier estructura de variedad que permita a A ser subvariedad de G con el mapeo inclusión, resulta ser subvariedad integral de una distribución (a saber, la que se defina como correspondientemente se hizo con $\mathfrak{D}$ por medio de (A, i_A) arriba). Con ello, si (A_1, i_1), (A_2, i_2) denotan estructuras de variedades diferenciables de G que tiene a A como conjunto base y i_1, i_2 son los mapeos inclusión, ambas resultan ser variedades integrales de $\mathfrak{D}$. De ese modo por los Teoremas 1.32 y 1.62, dado que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, dashed, "\mathrm{id}"'] & G \\ & A_2 \arrow[u, "i_2"'] \end{tikzcd}$$

id es un difeomorfismo; de modo que $(A_1, i_1) = (A_2, i_2)$.

Considerando la notación dada antes, veamos que (A^c, i_A) es una subvariedad integral de $\mathfrak{D}$. De suponer que esto no es cierto, existe $\sigma \in A$ para la cual $d(i_A)_\sigma(T_\sigma A)$ no es subconjunto de $\mathfrak{D}_\sigma$. Sean $\{\, \nu_1, \ldots, \nu_c \,\}$ base de $\mathfrak{D}_\sigma$ y $\nu_{c+1} \in d(i_A)_\sigma(T_\sigma A) \setminus \mathfrak{D}_\sigma$, de modo que $\{\, \nu_1, \ldots, \nu_c, \nu_{c+1} \,\}$ es un subconjunto linealmente independiente de $T_e G$.

Sean $\omega_1, \ldots, \omega_c \in T_e A$ y $\omega_{c+1} \in T_\sigma A$ que satisfacen

$$\begin{aligned} &d(l_\sigma \circ i_A)_e(\omega_i) = \nu_i \quad i \in \{\, 1, \ldots, c \,\} \\ &d(i_A)_\sigma(\omega_{c+1}) = \nu_{c+1}\,, \end{aligned}$$

y $\alpha_1,\ldots,\alpha_{c+1}$ curvas que satisfacen que $\dot{\alpha}_i(0)=\omega_i$, para $i\in\{1,\ldots,c+1\}$. Así, considerando $\gamma_i=i_A\circ\alpha_i$, si $i\in\{1,\ldots,c\}$ y $\gamma_{c+1}=l_{\sigma^{-1}}\circ i_A\circ\alpha_{c+1}$ tenemos $c+1$ curvas suaves con imagen en A que pasan por e en el cero y definen mediante su derivada $c+1$ vectores linealmente independientes en T_eG.

Consideremos

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\Psi} & G \\ (t_1,\ldots,t_{c+1}) & \longmapsto & \gamma_1(t_1)\ldots\gamma_{c+1}(t_{c+1}) \end{array}$$

donde $W\subseteq\mathbb{R}^{c+1}$ es un abierto y $\Psi(W)\subseteq A$. Notemos que Ψ es no singular en el origen pues $\{\,d\Psi_{\hat{0}}=\dot{\gamma}_i(0)\,:\,i\in\{1,\ldots,c+1\}\,\}$ es un subconjunto linealmente independiente de T_eG.

Por el Teorema de la inmersión existe $U\subseteq W$ vecindad abierta del origen y $(V,\tau=(x_1,\ldots,x_d))$ sistema coordenado cúbico de G para el cual $e\in V$, $\Psi|_U$ es inyectiva, no singular y $\Psi(U)$ es una rebanada de V, es decir

$$\Psi(U)=\{\,g\in V\,:\,x_i(g)=0,\ i\in\{c+2,\ldots,d\}\,\}\,.$$

Denotando $\tilde{\pi}$ la proyección de $\mathbb{R}^d$ a las primeras $c+1$ entradas,

$$\tau(V)=\tilde{\pi}\circ\tau\circ\Psi(U)\times\prod_{i=c+2}^{d}J_i$$

donde $J_i\subseteq\mathbb{R}$ es un intervalo abierto alrededor del cero para $i\in\{1,\ldots,c+1\}$. Obsérvese que $(U,\Psi|_U)$ resulta ser un encaje.

Extendamos Ψ a una vecindad abierta del origen en $\mathbb{R}^d$, considerando $\widetilde{\Psi}=\tau^{-1}\circ(\tau\circ\Psi\times id)$, por lo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} U\times\prod_{i=c+2}^{d}J_i \arrow[r, "\widetilde{\Psi}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}\circ\tau\circ\Psi\times id"'] & V \arrow[dl, "\tau"] \\ \widetilde{\pi}\circ\tau\circ\Psi(U)\times\prod_{i=c+2}^{d}J_i & \end{tikzcd}$$

De modo que $\widetilde{\Psi}$ es un difeomorfismo.

Sea $(\tilde{\pi}\circ\widetilde{\Psi}^{-1}\circ i_A)|_{A\cap V}:A\cap V\longrightarrow U$ donde $A\cap V$ es una variedad de dimensión c. Afirmamos que $(\tilde{\pi}\circ\widetilde{\Psi}^{-1}\circ i_A)|_{A\cap V}$ es suprayectiva pues dado $m\in U$, $\widetilde{\Psi}(m,\hat{0})=\Psi(m)\in A\cap V$, de modo que

$$(\tilde{\pi}\circ\widetilde{\Psi}^{-1}\circ i_A)|_{A\cap V}(\Psi(m))=\tilde{\pi}(m,\hat{0})=m\,.$$

Así $(\tilde{\pi} \circ \widetilde{\Psi}^{-1} \circ i_A)|_{A\cap V}(A \cap V) = U$, contradiciendo la versión débil del Teorema de Sard pues dim$A \cap V = c <$ dim$U = c + 1$.

■

El siguiente Lema será utilizado en la demostración del Teorema 5.2.10

***Lema* 5.2.9.** Sea G es un grupo topológico localmente compacto y primero numerable y $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en G que satisface que para cualquier vecindad V de e en G existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $n, m \geqslant N$, $\omega_n^{-1}\omega_m \in V$, entonces $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente.

Demostración. Sean $W \subseteq G$ vecindad de e la cual satisface que $\overline{W}$ es compacto y $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $n, m \geqslant N$ $\omega_n^{-1}\omega_m \in W$. En particular la sucesión $(\omega_N^{-1}\omega_m)_{m\geqslant N}$ está en $\overline{W}$ y por tanto tiene una subsucesión convergente $(\omega_N^{-1}\omega_{m_i})_{i\in\mathbb{N}}$ a $\alpha \in \overline{W}$.

De modo que para cualquier $U \subseteq G$ vecindad de e existe $I \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geqslant I$, $\omega_N^{-1}\omega_{m_i} \in \alpha U$ si y sólo si para cualquier $i \geqslant I$, $\omega_{m_i} \in \omega_N \alpha U$. Por lo tanto $(\omega_{m_i})_{i\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a $\omega_N\alpha$.

■

***Teorema* 5.2.10.** *Sea (H^d, φ) subgrupo de Lie de G^c. Entonces una condición necesaria y suficiente para que φ sea homeomorfismo es que (H, φ) sea un subgrupo cerrado de G.*

Demostración. Supongamos que φ es un homeomorfismo. Sea $\sigma \in \overline{\varphi(H)}$, de modo que existe una sucesión $(\sigma_k = \varphi(\omega_k))_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a σ.

Sea $V \subseteq H$ vecindad abierta de $\tilde{e}$, de modo que $\varphi(V) = \varphi(H) \cap W$, donde W es una vecindad abierta de e en G.

Consideremos $V \subseteq G$ vecindad abierta de e en G que satisface $V^{-1}V \subseteq W$ (para encontrar dicha vecindad basta tomar la función suave $\alpha : G \times G \longrightarrow G$ tal que $\alpha(\sigma, \tau) = \sigma^{-1}\tau$ y considerar un básico $V \times V \subseteq \alpha^{-1}(W)$ que tenga a (e, e)). Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \geqslant N$, $\sigma_n \in \sigma V$. De ahí que $\sigma_m^{-1}\sigma_n \in V^{-1}V \subseteq W$, para cualesquiera $m, n \geqslant N$. Más aún $\sigma_m^{-1}\sigma_n = \varphi(\omega_m)^{-1}\varphi(\omega_n) = \varphi(\omega_m^{-1}\omega_n) \in W \cap \varphi(H) = \varphi(V)$.

Como φ es inyectiva, $\omega_m^{-1}\omega_n \in V$ para cualesquiera $m, n \geqslant N$. De modo que existe $(\omega_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a ω.

Por lo tanto $(\varphi(\omega_{k_i}))_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $\varphi(\omega)$; concluimos que $\varphi(\omega) = \sigma$ ya que G es Hausdorff.

Consideremos ahora que (H, φ) es un subgrupo de Lie cerrado de G. Notemos que es suficiente mostrar que existe un abierto no vacío $V \subseteq H$ para el cual $\varphi|_V$ es un homeomorfismo, pues dado $\sigma \in V$ para cualquier $\tau \in H$, $l_{\tau\sigma^{-1}}(V)$ es una vecindad abierta de τ que satisface que para cualquier subconjunto abierto W, $\varphi|_{l_{\tau\sigma^{-1}}(V)}(W) = l_{\varphi(\tau)\varphi(\sigma)^{-1}} \circ \varphi|_V(\sigma\tau^{-1}W)$ es un abierto en $\varphi(H)$ y por lo tanto la restricción de φ a $l_{\tau\sigma^{-1}}(V)$ es un homeomorfismo.

Como dijimos en el corolario 5.2.5, cada componente conexa de H es una variedad integral maximal de la distribución generada por la subálgebra de Lie

$d\varphi(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{g}$, donde $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{g}$ son las álgebras de Lie de H y G respectivamente. Observemos que de suponer que existe una variedad integral conexa (L, ρ) que pase por $\varphi(\sigma)$ para alguna $\sigma \in H$, existe $\mathcal{C} \subseteq H$ componente conexa de H para la cual $\sigma \in \mathcal{C}$ y $\rho(L) \subseteq \varphi(\mathcal{C})$ (Teorema 1.64). De modo que la función $\alpha : L \longrightarrow \mathcal{C}$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, dashed, "\alpha"'] & G \\ & \mathcal{C} \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

es suave (Teoremas 1.32 y 1.62).

Más aún, $\varphi^{-1}(\rho(L))$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{C}$ que resulta ser una variedad integral difeomorfa a (L, ρ) pues de forma análoga a la anterior, como el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \varphi^{-1}(\rho(L)) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "\alpha^{-1}"'] & G \\ & L \arrow[u, "\rho"'] \end{tikzcd}$$

se puede concluir que α^{-1} es suave.

Veremos que existe una variedad integral conexa (L, ρ) para la cual $\varphi^{-1}(\rho(L))$ es abierto en H y tal que ρ es un homeomorfismo. Para ello utilizaremos el Teorema de Frobenius (Teorema 1.60) pues nos habla de la existencia de variedades integrales de una distribución suave e involutiva, que resultan ser encajes.

Como H tiene una cantidad contable de componentes conexas, determina a lo más una cantidad numerable de variedades integrales maximales distintas en G, que de hecho cubren a $\varphi(H)$.

Sea $(U, \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_c)$ sistema cúbico de G centrado en e y para el cual cada rebanada descrita como el conjunto de puntos σ en U tales que

$$\tau_i(\sigma) = a_i, \qquad a_i \in \mathbb{R},\ \ i \in \{\, d+1, \ldots, c \,\},$$

resulta ser una variedad integral. Por ahora supongamos que $\varphi(H) \cap U$ es la unión de una cantidad a lo más numerable de rebanadas de U. En este caso consideremos $\mathfrak{J}$ subconjunto cerrado de U cuya imagen bajo τ es un cubo cerrado centrado en el origen. Denotemos $\mathfrak{R}$ el conjunto de puntos σ en $\mathfrak{J}$ que satisface que

$$\tau_i(\sigma) = 0, \qquad\qquad i \in \{\, 1, \ldots, d \,\},$$

entonces $\tau(\mathfrak{R} \cap \varphi(H))$ es un subconjunto cerrado, no vacío y a lo más numerable de $\mathbb{R}^d$. De hecho cada elemento de éste es imagen bajo τ de un único punto que a su vez pertenece a una única rebanada. De modo que existe un elemento aislado de dicho conjunto pues $\mathbb{R}^d$ es completo y en general dado X métrico completo y $I \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\{x_n\}_{n\in I}$, éste no puede ser perfecto (es decir, no todos sus elementos pueden ser puntos de acumulación del conjunto mismo) pues en ese caso para cualquier $n \in I$, x_n no sería punto interior de $\{x_n\} = \overline{\{x_n\}}$ y por lo tanto $(\overline{\{x_n\}})^\circ = (\{x_n\})^\circ = \emptyset$, resultando que $\{x_n\}_{n\in I}$ es un espacio métrico completo y además una unión contable de densos en ninguna parte, contradiciendo el Teorema de Baire (la demostración de dicho Teorema puede ser consultada en [Simmons]).

De modo que la rebanada L asociada bajo τ a dicho punto aislado es abierta en $\varphi(H)$ y por tanto $\varphi^{-1}(L)$ es abierto en H.

Concluyamos mostrando que $\varphi(H) \cap U$ es la unión de a lo más una cantidad numerable de rebanadas de U. Para ello consideremos S una rebanada de U que intersecta a $\varphi(H)$, de modo que existe $\mathcal{C}$ componente conexa de H tal que $S \subseteq \varphi(\mathcal{C})$ por las observaciones previas.

Por un lado

$$\varphi(H) \cap U = \bigcup \{S \,:\, S \text{ es rebanada de } U \text{ y } S \cap \varphi(H) \neq \emptyset\}\,.$$

Consideremos $\widetilde{\mathcal{C}}$ componente conexa de $H \cap \varphi^{-1}(U)$, de modo que $(\widetilde{\mathcal{C}}, \varphi|_{\widetilde{\mathcal{C}}})$ resulta ser una variedad integral conexa y por tanto existe S rebanada de U tal que $\varphi(\widetilde{\mathcal{C}}) \subseteq S$ (Teorema 1.60), por lo cual

$$S = \bigcup \{\widetilde{\mathcal{C}} \,:\, \widetilde{\mathcal{C}} \text{ es una componente conexa de } H \cap \varphi^{-1}(U) \text{ tal que } \varphi(\widetilde{\mathcal{C}}) \subseteq S\}.$$

Como las rebanadas de U son ajenas dos a dos y $H \cap \varphi^{-1}(U)$ tiene una cantidad a lo más numerablede componentes conexas, $\varphi(H) \cap U$ es la unión de a lo más una cantidad numerable de rebanadas de U.

■

5.3. Cubrientes universales

En esta sección se utilizan algunos de los términos y resultados respecto a espacios cubrientes que son definidos y tratados en la sección A.2. En el siguiente Teorema se resumen algunas de las propiedades básicas que nos resultaran útiles (véanse A.2.7, A.2.14 y A.2.12).

***Teorema* 5.3.1.**

I. *Sean $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ aplicación cubriente y Y conexo y localmente conectable por trayectorias. Sean $f : Y \longrightarrow X$ continua, $x_0 \in X$, $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ y $y_0 \in Y$ de tal forma que $f(y_0) = x_0$ y $p(\widetilde{x}_0) = x_0$. Entonces $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ si y sólo si existe una única función continua $\widetilde{f} : Y \longrightarrow \widetilde{X}$*

para la cual $\widetilde{f}(\widetilde{y}_0) = (\widetilde{x}_0)$ *y además resulta un levantamiento de* f, *es decir el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

II. *Si* X *es suficientemente conexo entonces existe* $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ *aplicación cubriente universal.*

III. *Sea* X *conexo y localmente conectable por trayectorias. Si* $p : X \longrightarrow Y$ *es una aplicación cubriente y* Y *es simplemente conexo entonces* p *es un homeomorfismo.*

Sean M^d una variedad y $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ una aplicación cubriente donde $\widetilde{M}$ es un espacio topológico conexo (lo cual es suficiente para asegurar que es conexo por trayectorias, ya que es localmente conectable por trayectorias por ser localmente homeomorfo a M). Consideremos $\{ (U_i, \tau_i) \}_{i\in\mathbb{N}}$ un conjunto de sistemas coordenados de M tales que $\{ U_i \}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de M y cada U_i es un abierto cubierto parejamente (para encontrar dicho conjunto basta elegir un conjunto numerable de sistemas coordenados que cubran a M y una base numerable que conste de abiertos cubiertos parejamente, de modo que al intersectar los elementos de la base con los abiertos de los sistemas coordenados obtenemos el conjunto deseado, haciendo las restricciones de los mapeos coordenados en la forma correspondiente).

Dado que la multiplicidad de p es menor o igual a la cardinalidad de $\pi_1(M, x_0)$ para cualquier $x_0 \in M$ (comentarios en la sección de aplicaciones cubrientes), el conjunto

$$\mathcal{J}_i = \{ (\widetilde{U}, \widetilde{\tau}) : \widetilde{U} \quad \text{es una hoja de } U_i \text{ y} \quad \widetilde{\tau} = \tau_i \circ p|_{\widetilde{U}} \}$$

es numerable (véase A.2.18) y por lo tanto $\mathcal{J} = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{J}_i$ es una familia numerable que satisface

I. $\bigcup\{ \widetilde{V} : (\widetilde{V}, \widetilde{\tau}) \in \mathcal{J} \} = \widetilde{M}$.

II. Dados $(\widetilde{V}, \widetilde{\tau}), (\widetilde{U}, \widetilde{\rho}) \in \mathcal{J}$, donde $\widetilde{\tau} = \tau_i \circ p|_{\widetilde{V}}$ y $\widetilde{\rho} = \tau_j \circ p|_{\widetilde{U}}$ para algunos $i, j \in \mathbb{N}$, resultan ser homeomorfismos sobre sus imágenes (que son abiertos de $\mathbb{R}^d$) y más aún, la composición

$$\widetilde{\rho} \circ \widetilde{\tau} = \tau_j \circ p \circ p^{-1} \circ \tau_i^{-1}$$

definida en $\tau_i(U_i \cap U_j)$, es suave.

III. Si $\tilde{m}, \tilde{m}' \in \widetilde{M}$ y $\tilde{m} \neq \tilde{m}'$, entonces $p(\tilde{m}) = p(\tilde{m}')$ o $p(\tilde{m}) \neq p(\tilde{m}')$.

En el caso en el que $p(\tilde{m}) = p(\tilde{m}')$ existe U_i tal que $p(\tilde{m}) \in U_i$ y $(\widetilde{V}, \widetilde{\tau}), (\widetilde{U}, \widetilde{\rho}) \in \mathcal{J}_i$, para las cuales $\widetilde{V}$ y $\widetilde{U}$ son vecindades abiertas y ajenas de $\tilde{m}$ y $\tilde{m}'$.

Si $p(\tilde{m}) \neq p(\tilde{m}')$ entonces existen U_i y U_j que son vecindades abiertas y ajenas de $p(\tilde{m})$ y $p(\tilde{m}')$ (ya que M es Hausdorff y normal). De modo que existen $(\widetilde{V}, \widetilde{\tau}) \in \mathcal{J}_i$ y $(\widetilde{U}, \widetilde{\rho}) \in \mathcal{J}_j$ para las cuales $\widetilde{V}$ y $\widetilde{U}$ son vecindades abiertas (y por lo tanto ajenas) de $\tilde{m}$ y $\tilde{m}'$.

Por lo tanto se sigue de la Proposición 2.3.2 que existe una única topología Hausdorff, segundo numerable y una única estructura diferenciable para las cuales cada elemento de $\mathcal{J}$ resulta un sistema coordenado.

Dado que los mapeos coordenados de los elementos de $\mathcal{J}$ son homeomorfismos se verifica fácilmente que la topología obtenida no es otra sino la que $\widetilde{M}$ tenía originalmente.

Por otro lado observemos que si $\widetilde{M}$ recibe una estructura de variedad diferenciable que haga a p suave, entonces $\tau_i \circ p$ es suave para toda $i \in \mathbb{N}$ y por lo tanto esta estructura coincide con la que tiene a los elementos de $\mathcal{J}$ como sistemas coordenados. Por lo tanto hemos obtenido el siguiente resultado.

***Proposición* 5.3.2.** Sean M^d una variedad y $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ una aplicación cubriente donde $\widetilde{M}$ es conexo. Entonces $\widetilde{M}$ recibe una única estructura de variedad diferenciable con la cual p resulta un mapeo suave.

Observación 5.3.3. Consideremos M, $\widetilde{M}$ variedades diferenciables. Supongamos que $\widetilde{M}$ es conexo y que existe $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ una aplicación cubriente suave. Entonces dadas N variedad diferenciable y $f : N \longrightarrow M$, $\widetilde{f} : N \longrightarrow \widetilde{M}$ funciones continuas que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{M} \arrow[d, "p"] \\ N \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

se tiene que f es suave si y sólo si $\widetilde{f}$ es suave. Para verificarlo observemos que en el caso en el que f es suave, al considerar un sistema coordenado (U, τ) en M que además satisface que U es un abierto cubierto parejamente, por el Teorema anterior tenemos que para cada hoja $\widetilde{U} \subseteq \widetilde{M}$ de U, $(\widetilde{U}, \tau \circ p|_{\widetilde{U}})$ es un sistema coordenado de $\widetilde{M}$ para el cual $(\tau \circ p|_{\widetilde{U}}) \circ \widetilde{f} = \tau \circ f$ es suave. Dado que M puede ser cubierta por un conjunto numerable de sistemas coordenados con estas características, concluimos que $\widetilde{f}$ es suave.

Enseguida veremos el caso particular del cubriente universal de un grupo de Lie conexo, el cual tendrá no sólo una estructura de variedad diferenciable sino de un grupo de Lie.

***Teorema* 5.3.4.** *Dado G un grupo de Lie conexo, su cubriente universal $\widetilde{G}$ posee una estructura de grupo de Lie de modo que la aplicación cubriente universal resulta un morfismo de grupos de Lie.*

Demostración. Por el Teorema 5.3.1 inciso II sabemos que existe $p : \widetilde{G} \longrightarrow G$ la aplicación cubriente universal de G, y por la Proposición 5.3.2 que $\widetilde{G}$ tiene una única estructura de variedad diferenciable que hace a p suave. Veamos que con dicha estructura de variedad $\widetilde{G}$ recibe una operación de grupo que lo hace un grupo de Lie y para la cual p resulta ser un morfismo de grupos.

Suponiendo que tal producto existe, denotémoslo $\cdot : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \longrightarrow \widetilde{G}$. Si π es un morfismo de grupos entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{G} \arrow[d, "p"] \\
\widetilde{G} \times \widetilde{G} \arrow[ur, "\beta"] \arrow[r, "\alpha"'] & G
\end{tikzcd}$$

siendo $\beta(\sigma, \tau) = \sigma \cdot \tau^{-1}$ para cualesquiera $\sigma, \tau \in \widetilde{G}$, y por consecuencia $\alpha(\sigma, \tau) = p(\sigma)p(\tau)^{-1}$.

Notemos que α es suave y no depende de la operación en $\widetilde{G}$, de modo que podríamos decir que β es un levantamiento suave para α con respecto a la aplicación p. Veamos que dada dicha α podemos encontrar β con dicha propiedad.

Como $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$ es simplemente conexo, $\pi(\widetilde{G} \times \widetilde{G}, (\sigma, \tau)) = 0$ para cualesquiera $\sigma, \tau \in \widetilde{G}$; de ahí que si $\tilde{e} \in p^{-1}(e)$,

$$\alpha_*(\pi(\widetilde{G} \times \widetilde{G}, (\tilde{e}, \tilde{e}))) = p_*(\pi(\widetilde{G}, \tilde{e})) = 0$$

Así, por el Teorema 5.3.1 inciso (I) existe $\beta : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \longrightarrow \widetilde{G}$ único levantamiento de α que satisface que $\beta(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$. Como β es continua podemos concluir que es suave (Observación 5.3.3).

Ocupemos dicha función para definir la operación en $\widetilde{G}$ inspirados en el diagrama anterior. Sea

$$\begin{aligned}
\widetilde{G} \times \widetilde{G} &\xrightarrow{\quad\cdot\quad} \widetilde{G} \\
(\sigma, \tau) &\longmapsto \beta(\sigma, \beta(\tilde{e}, \tau))
\end{aligned}$$

Notemos que β es suave. Además si $\alpha_0 : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \longrightarrow \widetilde{G}$ para la cual dados $\sigma, \tau \in \widetilde{G}$, $\alpha_0(\sigma, \tau) = p(\sigma)p(\tau)$, se tiene que el único levantamiento de α_0 con respecto a p

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{G} \arrow[d, "p"] \\
\widetilde{G} \times \widetilde{G} \arrow[ur, "\cdot"] \arrow[r, "\alpha_0"'] & G
\end{tikzcd}$$

que satisface que $\tilde{e} \cdot \tilde{e} = \tilde{e}$. Por otro lado, dado

$$\begin{aligned} \widetilde{G} \times \widetilde{G} \times \widetilde{G} &\xrightarrow{\alpha_2} G \\ (\sigma, \tau, \rho) &\longmapsto p(\sigma)p(\tau)p(\rho) \end{aligned}$$

sabemos que existe un único levantamiento que manda $(\tilde{e}, \tilde{e}, \tilde{e})$ en $\tilde{e}$. Como las funciones $\cdot \circ (\mathrm{id}_{\widetilde{G}} \times \cdot)$ y $\cdot \circ (\cdot \times \mathrm{id}_{\widetilde{G}})$ son levantamientos que satisfacen dicha condición concluimos que para cualesquiera $\sigma,\ \tau,\ \rho \in \widetilde{G}$, $(\sigma \cdot \tau) \cdot \rho = \sigma \cdot (\tau \cdot \rho)$. Análogamente podemos concluir que para cualquier $\sigma \in \widetilde{G}$, $\tilde{e} \cdot \sigma = \sigma = \sigma \cdot \tilde{e}$, y que para todo $\rho \in \widetilde{G}$ existe $\rho' \in \widetilde{G}$ (a saber, $\rho' = \beta(\tilde{e}, \rho)$) tal que $\rho \cdot \rho' = \tilde{e} = \rho' \cdot \rho$. De modo que $(\widetilde{G}, \cdot)$ es un grupo de Lie.

■

***Proposición* 5.3.5.** Sean G, H grupos de Lie y $\varphi : G \longrightarrow H$ un morfismo. Si H es conexo, una condición necesaria y suficiente para que φ sea una aplicación cubriente es que $d\varphi_e$ sea un isomorfismo.

Demostración. Supongamos que $d\varphi_e$ es un isomorfismo. Por el Teorema de la función inversa existe una vecindad abierta de e que se mapea difeomorfamente en una vecindad abierta de $\tilde{e}$ bajo φ. Por el Lema 5.2.3, dado que H es conexo y tiene una vecindad abierta que es imagen de φ (el cual es un morfismo), concluimos que este último es suprayectivo.

Observemos que basta demostrar que $\tilde{e}$ tiene una vecindad cubierta parejamente. Supongamos que existe V una vecindad abierta de $\tilde{e}$ cubierta parejamente, entonces

$$\varphi^{-1}(V) = \bigsqcup_{\alpha \in \ker \varphi} V_\alpha$$

donde $V_\alpha \subseteq G$ es una vecindad abierta de α que resulta ser una hoja de V.

De esa forma para todo $\sigma \in H$, si $\rho \in \varphi^{-1}(\sigma)$ se satisface

$$\varphi^{-1}(\sigma V) = \bigsqcup_{\alpha \in \ker \varphi} \rho V_\alpha,$$

ya que si $\alpha, \beta \in \ker \varphi$ son distintas, $q \in \rho V_\alpha \cap \rho V_\beta$ si y sólo si $\rho^{-1} q \in V_\alpha \cap V_\beta$, de modo que $\rho V_\alpha \cap \rho V_\beta = \emptyset$.

Por otro lado $q \in \varphi^{-1}(\sigma V)$ si y sólo si $\sigma^{-1}\varphi(q) = \varphi(\rho^{-1} q) \in V$ si y sólo si existe $\alpha \in \ker \varphi$ para el cual $\rho^{-1} q \in V_\alpha$, que es equivalente a que $q \in \rho V_\alpha$ para algún $\alpha \in \ker \varphi$. Además $\varphi(\rho V_\alpha) = \sigma \varphi(V_\alpha) = \sigma V$, y para cualquier $q \in V_\alpha$

$$\varphi(\rho q) = \varphi \circ l_\rho(q) = l_\sigma \circ \varphi(q) = l_\sigma \circ \varphi \circ l_{\rho^{-1}}(\rho q),$$

concluyendo que $\varphi|_{\rho V_\alpha}$ es un homeomorfismo.

Consideremos $U \subseteq G$ vecindad abierta de e que es difeomorfa mediante φ a $\varphi(U)$, vecindad abierta de $\tilde{e}$. Sea $V \subseteq G$ vecindad abierta de e que satisface que $VV^{-1} \subseteq U$. Como $\varphi|_V$ es un difeomorfismo, para cualquier $\alpha \in \ker\varphi$ $\varphi|_{\alpha V}$ también lo es. Más aún, dados $\alpha, \beta \in \ker\varphi$, $q \in \alpha V \cap \beta V$ si y sólo si existen $a_1, a_2 \in V$ para las cuales $q = \alpha a_1 = \beta a_2$ y de ahí $\beta^{-1}\alpha = a_2 {a_1}^{-1} \in \ker\varphi \cap U$; dado que φ es inyectiva en V tenemos que $\beta^{-1}\alpha = a_2 {a_1}^{-1} = e$ y por lo tanto $\beta = \alpha$. De ese modo

$$\varphi^{-1}(\varphi(V)) = \bigsqcup_{\alpha \in \ker\varphi} \alpha V$$

ya que $q \in \varphi^{-1}(\varphi(V))$ si y sólo si existe $v \in V$ para la cual $\varphi(q) = \varphi(v)$ lo que es equivalente a que $qv^{-1} \in \ker\varphi$ para alguna $v \in V$, lo que significa que existen $\alpha \in \ker\varphi$ y $v \in V$ para los cuales $q = \alpha v$.

Supongamos ahora que φ es una aplicación cubriente. De no ser $d\varphi_e$ inyectiva, $\dim(\ker d\varphi_e) = c$ es mayor que 0. En ese caso consideremos la c-distribución definida como

$$\mathfrak{D}(q) = d(l_q)_e(\ker d\varphi_e).$$

Si se muestra que $\mathfrak{D}$ es suave e involutiva, por el Teorema de Frobenius existe una variedad integral conexa (N, ϕ) (la cual consta de más de un punto pues su dimensión es igual a c) que pasa por e, de modo que $d(\varphi \circ \phi)_e = 0$, concluyendo por el Teorema 2.2.5 que $\varphi \circ \phi$ es un mapeo constante, lo cual contradice el hecho de que φ es un homeomorfismo local. Veamos entonces que $\mathfrak{D}$ es suave e involutiva para concluir que $d\varphi_e$ es inyectiva.

Dada $\{X_1, \ldots, X_c\}$ base de $\ker d\varphi_e \subseteq \mathfrak{g}$, se obtiene una base de campos invariantes izquierdos que generan puntualmente a la distribución, de modo que $\mathfrak{D}$ es suave. Además, dados $i, j \in \{1, \ldots, c\}$ y $f \in C_e^\infty(G)$

$$\begin{aligned} d\varphi_e([X_i, X_j])(f) &= [X_i, X_j]_e(f \circ \varphi) \\ &= (X_i)_e(X_j(f \circ \varphi)) - (X_j)_e(X_i(f \circ \varphi)) \\ &= (X_i)_e(dX_j(f)) - (X_j)_e(dX_i(f)). \end{aligned}$$

Observemos que para cualquier $\sigma \in G$,

$$\begin{aligned} d\varphi_\sigma(X_j)_\sigma &= d\varphi_\sigma(X_j)_\sigma \\ &= d(\varphi \circ l_\sigma)_e(X_j)_e \\ &= d(l_{\varphi(\sigma)} \circ \varphi)_e(X_j)_e \\ &= d(l_{\varphi(\sigma)})_{\tilde{e}}(d\varphi_e(X_j)_e) = 0. \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene que $d\varphi_\sigma(X_i)_\sigma = 0$ y por lo tanto $d\varphi_e([X_i, X_j]) = 0$. De ese modo, dados $g, h \in C^\infty(G)$ se tiene que

$$[gX_i, hX_j] = g\,h[X_i, X_j] + g(X_i(h))X_j - h(X_j(g))X_i \in \mathfrak{D},$$

y de ahí que $\mathfrak{D}$ es involutiva.

Consideremos V vecindad abierta de $\tilde{e}$ cubierta parejamente, y sea $\widetilde{V}$ hoja de V que tiene a e. Observemos que dado $\sigma \in \widetilde{V}$, $\varphi = l_{\varphi(\sigma)} \circ \varphi \circ l_{\sigma^{-1}}$; de ahí que $d(\varphi)_\sigma = d(l_{\varphi(\sigma)})_{\tilde{e}} \circ d(\varphi)_e \circ d(l_{\sigma^{-1}})_\sigma$, resultando $\varphi|_{\widetilde{V}} : \widetilde{V} \longrightarrow V$ una inmersión. Por el Corolario A.5.10 podemos concluir que $\varphi|_{\widetilde{V}}$ es un difeomorfismo, y de ahí $d\varphi_e$ es un isomorfismo.

■

***Teorema* 5.3.6.** *Sean G^d y H^c grupos de Lie con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ respectivamente. Supongamos que G es simplemente conexo. Sea $\Psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ morfismo de álgebras de Lie. Entonces existe un único morfismo $\varphi : G \longrightarrow H$ para el cual $d\varphi = \Psi$.*

Demostración. Veamos la existencia ya que la unicidad fue probada en 5.2.7. Consideremos $\Psi^* : \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ mapeo dual de Ψ y $\{ w_1, \ldots, w_c \}$ base de $\mathfrak{h}^*$. Por la observación 5.1.3 sabemos que denotando π_1 y π_2 a las proyecciones canónicas de $G \times H$ sobre G y H respectivamente, el ideal generado por el conjunto linealmente indepediente de 1-formas

$$\{ \mu_i = \delta\pi_1(\Psi^*(w_i)) - \delta\pi_2(w_i) \}_{i=1}^{c}$$

es diferencial. De modo que la d-variedad integral maximal de la distribución generada por dicho ideal que pasa a través de (e, e), denotada por (I, ρ), es un subgrupo de Lie de $G \times H$ (Corolario 5.2.6). Además $d(\pi_1 \circ \rho)_q$ es inyectiva para toda $q \in I$, pues $\nu \in T_qI \cap \ker d(\pi_1 \circ \rho)_q$ si y sólo si $d(\pi_1 \circ \rho)_q(\nu) = 0$ y ya que

$$(\delta\pi_1(\Psi^*(w_i)) - \delta\pi_2(w_i)) \circ d\rho \equiv 0 \quad \text{para toda} \quad i \in \{ 1, \ldots, c \}$$

se tiene que $w_i(d(\pi_2 \circ \rho)(\nu)) = 0$ para toda $i \in \{ 1, \ldots, c \}$. Dado que $\{ (w_i)_q \}_{i=1}^{c}$ es una base de $T^*_{\pi_2 \circ \rho(q)}H$ se concluye que

$$d(\pi_1 \circ \rho)_q(\nu) = 0 = d(\pi_2 \circ \rho)_q(\nu),$$

es decir, $d\rho_q(\nu) = 0$, que implica que $\nu = 0$. Ya que $\dim I = d = \dim G$, $d(\pi_1 \circ \rho)_q$ es un isomorfismo.

Por la Proposición 5.3.5, $\pi_1 \circ \rho : I \longrightarrow G$ es una aplicación cubriente suave. Más aún, por ser G simplemente conexo $\pi_1 \circ \rho$ es un homeomorfismo (Teorema 5.3.1 inciso III). Por el Teorema de la función inversa $\pi_1 \circ \rho$ resulta un difeomorfismo local, concluyendo con ello que es un difeomorfismo (de hecho un isomorfismo de grupos de Lie pues es composición de morfismos de grupos).

Elijamos $\varphi = \pi_2 \circ \rho \circ (\pi_1 \circ \rho)^{-1} : G \longrightarrow H$ morfismo de grupos de Lie. Observemos que para toda $i \in \{1, \ldots, c\}$,

$$\begin{aligned}
\delta\varphi(w_i) &= \delta(\pi_2 \circ \rho \circ (\pi_1 \circ \rho)^{-1})(w_i) \\
&= \delta(\pi_1 \circ \rho)^{-1}(\delta\rho\,(\delta\pi_2\,(w_i))) \\
&= \delta(\pi_1 \circ \rho)^{-1}(\delta\rho\,(\delta\pi_1(\Psi^*\,(w_i)) - \mu_i)) \\
&= \delta(\pi_1 \circ \rho)^{-1}(\delta\rho\,(\delta\pi_1(\Psi^*\,(w_i)))) \\
&= \delta(\pi_1 \circ \rho)^{-1} \circ \delta(\pi_1 \circ \rho)(\Psi^*(w_i)) \\
&= \Psi^*(w_i)
\end{aligned}$$

por lo cual $\delta\varphi = \Psi^*$, lo cual es equivalente a que $d\varphi = \Psi$.

■

***Corolario* 5.3.7.** Si H y G son grupos de Lie simplemente conexos con álgebras de Lie isomorfas, entonces H y G son isomorfos.

Capítulo 6

Mapeo exponencial

6.1. Curvas integrales en grupos de Lie

En general vimos que dada una variedad M y $X \in \mathfrak{X}(M)$ podemos obtener información de X o bien de M a través de las curvas integrales de dicho campo. En esta parte ocuparemos algunas de las propiedades que se resumen en el Teorema 2.8.9 ya que buscamos una forma de intercambiar información entre los grupos de Lie y sus álgebras de Lie correspondientes.

Sean G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Consideremos $X \in \mathfrak{g}$ y γ_X la única curva integral maximal de X que pasa por e. Sabemos que para cualquier $t_0 \in \operatorname{dom} \gamma_X$,

$$\begin{aligned} d(\gamma_X)_{t_0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right) &= \dot{\gamma}_X(t_0) = X_{\gamma_X(t_0)} \\ &= d(l_{\gamma_X(t_0)})_e(X_e) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Supongamos que $\operatorname{dom} \gamma_X = \mathbb{R}$ y γ_X es un morfismo de grupos de Lie, pensando a $\mathbb{R}$ como grupo con la suma. En tal caso, de la igualdad (6.1) obtenemos

$$\begin{aligned} d(l_{\gamma_X(t_0)})_e\left(d(\gamma_X)_0\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0\right)\right) &= d(l_{\gamma_X(t_0)} \circ \gamma_X)_0\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0\right) \\ &= d(\gamma_X \circ l_{t_0})_0\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0\right) \\ &= d(\gamma_X)_{t_0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right) = d(l_{\gamma_X(t_0)})_e(X_e) \end{aligned} \tag{6.2}$$

De modo que

$$d(\gamma_X)_0\left(\frac{d}{dt}\bigg|_0\right) = X_e.$$

Observemos que denotando $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ el álgebra de Lie de $\mathbb{R}$, $\frac{d}{dt} \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ y lo genera como $\mathbb{R}$-espacio vectorial (observación 4.2.7). De hecho, γ_X resulta ser el único morfismo de grupos de Lie cuya derivada envía $\frac{d}{dt}$ a X (Teorema 5.3.6).

Observación 6.1.1. Una condición necesaria y suficiente para que un morfismo de grupos de Lie $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow G$ sea la curva integral maximal de $X \in \mathfrak{g}$ en e (Teorema 2.8.9), es que $d\gamma(\frac{d}{dt}) = X$. Esto se puede observar en las igualdades (6.1) y (6.2); por un lado, al sustituir γ_X por γ se muestra la necesidad. Además, al suponer

$$d\gamma\left(\frac{d}{dt}\right) = X$$

resulta equivalente a que para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$

$$d(l_{\gamma(t_0)})_e\left(d\gamma_0\left(\frac{d}{dt}\bigg|_0\right)\right) = d(l_{\gamma(t_0)})_e(X_e).$$

Así, reescribiendo la igualdad (6.2) tenemos

$$\begin{aligned} X_{\gamma(t_0)} &= d(l_{\gamma(t_0)})_e(X_e) = d(l_{\gamma(t_0)})_e\left(d\gamma_0\left(\frac{d}{dt}\bigg|_0\right)\right) \\ &= d(l_{\gamma(t_0)} \circ \gamma)_0\left(\frac{d}{dt}\bigg|_0\right) = d(\gamma \circ l_{t_0})_0\left(\frac{d}{dt}\bigg|_0\right) \\ &= d(\gamma)_{t_0}\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0}\right) \end{aligned}$$

mostrando así que también es una condición suficiente.

Esto nos motiva a considerar la única función lineal $\Psi_X : \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathfrak{g}$ para la cual $\Psi_X\big(\frac{d}{dt}\big) = X$. Como el corchete en $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ es trivial y para cualesquiera $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$

$$[\lambda\Psi_X(\tfrac{d}{dt}), \lambda'\Psi_X(\tfrac{d}{dt})] = \lambda\lambda'[X, X] = 0$$

Ψ_X resulta ser un morfismo de álgebras de Lie. Ya que $\mathbb{R}$ es simplemente conexo, por el Teorema 5.3.6 sabemos que existe un único morfismo de grupos de Lie cuya derivada coincide con Ψ_X. Denotemos a dicho morfismo

$$\exp_X : \mathbb{R} \longrightarrow G\,,$$

de modo que $d\exp_X\left(\frac{d}{dt}\right) = X$. Por la observación 6.1.1 podemos concluir que $\exp_X$ es la curva integral maximal de X y de ahí

$$\gamma_X = \exp_X.$$

Al preguntarnos por el resto de curvas integrales maximales en otros puntos de G, sabemos que ya no serán morfismos de grupos de Lie, pero nos gustaría no sólo que preservaran la propiedad de estar definidas en todo $\mathbb{R}$, sino que estuvieran íntimamente relacionadas con $\exp_X$. Observemos que para cualquier $\sigma \in G$ y $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} d(l_\sigma \circ \exp_X)_{t_0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right) &= d(l_\sigma)_{\exp_X(t_0)}(X_{\exp_X(t_0)}) = d(l_\sigma \circ l_{\exp_X(t_0)})_e(X_e) \\ &= d(l_{\sigma\exp_X(t_0)})_e(X_e) = X_{\sigma\exp_X(t_0)} \\ &= X_{l_\sigma \circ \exp_X(t_0)}\,, \end{aligned}$$

es decir, $l_\sigma \circ \exp_X : \mathbb{R} \longrightarrow G$ es la curva integral maximal de X que pasa por σ. Por otro lado, considerando $t_0 \in \mathbb{R}$ y

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{\alpha_{t_0}} \mathbb{R} \\ s &\longmapsto t_0 s \end{aligned}$$

la función suave $\gamma_X \circ \alpha_{t_0} : \mathbb{R} \longrightarrow G$ satisface que

$$d(\gamma_X \circ \alpha_{t_0})\left(\frac{d}{dt}\right) = t_0 d(\gamma_X)\left(\frac{d}{dt}\right) = t_0 X$$

Así, por la observación 6.1.1

$$\exp_{t_0 X} = \gamma_X \circ \alpha_{t_0} = \exp_X \circ \alpha_{t_0}.$$

En el siguiente Teorema se resume la información que hemos obtenido.

Teorema 6.1.2. *Sea G grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Si $X \in \mathfrak{g}$, la curva integral maximal de X que pasa a través de e está definida en todo $\mathbb{R}$ y es un morfismo de grupos de Lie.*

Denotando a dicha curva

$$exp_X : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

tenemos que

I. *Para cualquier* $\sigma \in G$, $l_\sigma \circ exp_X$ *es la curva integral maximal de* X *que pasa por* σ*. Por consecuencia los campos invariantes izquierdos son siempre completos.*

II. *Dado* $t_0 \in \mathbb{R}$

$$exp_{t_0 X} = exp_X \circ \alpha_{t_0}$$

donde $\alpha_{t_0} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es tal que para todo* $s \in \mathbb{R}$, $\alpha_{t_0}(s) = t_0 s$.

III. *Para todo* $t_0 \in \mathbb{R}$, $X_{t_0} : G \longrightarrow G$ *es igual a la traslación derecha por* $exp_X(t_0)$.

Demostración. Tan sólo verificaremos el último inciso.
Por I para cualquier $\sigma \in G$, $X_{t_0}(\sigma) = (l_\sigma \circ \exp_X)(t_0)$. Por otro lado

$$\begin{aligned} r_{\exp_X(t_0)}(\sigma) &= \sigma \exp_X(t_0) = l_\sigma(\exp_X(t_0)) \\ &= (l_\sigma \circ \exp_X)(t_0) \end{aligned}$$

Por lo tanto $X_{t_0} = r_{\exp_X(t_0)}$.

■

Hemos visto que cada campo en $\mathfrak{g}$ determina un único morfismo de grupos de Lie de $\mathbb{R}$ en G. En general llamaremos a un morfismo de grupos de Lie $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ *subgrupo uniparamétrico de* G.

En tal caso $d\varphi_0 : T_0\mathbb{R} \longrightarrow T_eG$ es inyectiva o bien es la función constante cero. Como φ es un morfismo de grupos, para cualquier $t \in \mathbb{R}$, $\varphi = l_{\varphi(t)} \circ \varphi \circ l_{-t}$; de ese modo $d\varphi_t = d(l_{\varphi(t)})_e \circ d\varphi_0 \circ d(l_{-t})_t$ y por lo tanto φ es la función constante con valor e o bien es inmersión local.

Veamos que sucede cuando $(\mathbb{R}, \varphi)$ no es subgrupo de G.

***Proposición* 6.1.3.** Sea G grupo de Lie y $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ subgrupo uniparamétrico de G. Si φ no es inyectiva entonces es periódica. Es decir, existe $h > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t + h) = \varphi(t).$$

Demostración. Sean $t_1 < t_2$ elementos de $\mathbb{R}$ para los cuales $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, que es equivalente a que $\varphi(t_2 - t_1) = \varphi(t_2)\varphi(t_1)^{-1} = e$ y por lo tanto $t_2 - t_1 \in \ker \varphi$. De modo que considerando $h = t_2 - t_1 > 0$, para cualquier $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t + h) = \varphi(t)\varphi(h) = \varphi(t)$$

■

Con las motivaciones anteriores podemos intuir que la siguiente definición satisfacerá el propósito planteado en un comienzo.

Definición 6.1.4. Considerando la notación previa definiremos *el mapeo exponencial de G*

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

como

$$\exp\ (X) = \exp_X(1)$$

Observación 6.1.5. Del inciso II del Teorema anterior y del hecho de que $\exp_X$ es morfismo de grupos de Lie podemos concluir las siguientes propiedades: para cualesquiera $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$

I. $\exp(t_0X) = \exp_X(t_0)$.

II. $\exp((t_0 + t_1)X) = \exp(t_0X)\exp(t_1X)$.

III. $\exp(-t_0) = (\exp(t_0X))^{-1}$.

En el siguiente Teorema consideramos a $\mathfrak{g}$ con la estructura de variedad diferenciable inducida por los isomorfismos lineales entre $\mathfrak{g}$ y $\mathbb{R}^d$, en el caso de que $\dim G = d$ (véase el ejemplo 1.1.6). Además de considerar la identificación del álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ con $\mathfrak{g}$ mismo (observación 4.2.7).

***Teorema* 6.1.6.** *Sea G^d grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y $X \in \mathfrak{g}$, entonces el mapeo exponencial $exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ es suave y $dexp : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es el mapeo identidad. De modo que exp da un difeomorfismo de una vecindad de cero en $\mathfrak{g}$ sobre una vecindad de e en G.*

Demostración. Verifiquemos que $\exp$ es suave. Para ello utilizaremos la notación del Teorema 2.8.9. Observemos que dado un producto de variedades $M \times N$, podemos identificar $T_{(m,n)}(M \times N)$ con $T_mM \times T_nN$ para cualesquiera $m \in M$ y $n \in N$ mediante el isomorfismo $(d\pi_{1m}, d\pi_{2n})$ (donde π_1 y π_2 son las proyecciones canónicas de $M \times N$ en M y N respectivamente).

Consideremos $G \times \mathfrak{g}$, de modo que definimos el campo $\widetilde{Y}$ como

$$\widetilde{Y}(\sigma, X) = (X_\sigma, 0) \in T_\sigma G \times \mathfrak{g}$$

Debido a las estructuras diferenciables de TG, $T\mathfrak{g}$ y a que X es suave, dicho campo es suave. Más aún, dado $(\sigma, X) \in G \times \mathfrak{g}$, una curva integral que pasa por dicho punto es

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow G \times \mathfrak{g} \\ t &\longmapsto (\sigma \exp_X(t), X) \end{aligned}$$

De tal forma que $\widetilde{Y}$ es completo, es decir que para todo $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_t^{\widetilde{Y}} = G \times \mathfrak{g}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} G \times \mathfrak{g} &\xrightarrow{\widetilde{Y}_t} G \times \mathfrak{g} \\ (\sigma, X) &\longmapsto (\sigma \exp_X(t), X) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo.

Denotando $i : \mathfrak{g} \longrightarrow G \times \mathfrak{g}$ a la inclusión definida como $i(X) = (e, X)$, el mapeo exponencial se expresa como la siguiente composición de mapeos suaves

$$\exp = \pi_1 \circ \widetilde{Y}_1 \circ i,$$

de tal manera que es suave.

Dada $\{ X_1, \ldots, X_d \}$ base de $\mathfrak{g}$ y su base dual $\{ \widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_d \}$, se tiene que $(\mathfrak{g}, \widetilde{X} = (\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_d))$ es un sistema coordenado.

Al considerar $d\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, se tiene que $d(\exp)(X_i)$ es el campo invariante izquierdo cuyo vector en e es $d\exp_0\big(\frac{\partial}{\partial \widetilde{X}_i}\big)$. Es decir que para cualquier $f \in C_e^\infty(M)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \widetilde{X}_i}\Big|_0 (f \circ \exp) &= \frac{\partial (f \circ \exp \circ \widetilde{X}^{-1})}{\partial r_i}(0) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f \circ \exp \circ \widetilde{X}^{-1}(te_i) - f \circ \exp \circ \widetilde{X}^{-1}(0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f \circ \exp(tX_i) - f \circ \exp(0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f \circ \exp_{X_i}(t) - f(e)}{t} \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 f \circ \exp_{X_i}(t) = d(\exp_{X_i})_0 \left(\frac{d}{dt}\Big|_0 \right)(f) \\ &= (X_i)_0(f). \end{aligned}$$

Concluimos con ello que $d\exp(X_i) = X_i$, es decir $d\exp = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$.

■

***Teorema* 6.1.7.** *Sea $\varphi : H \longrightarrow G$ un morfismo de grupos de Lie. Entonces el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{h} \arrow[r, "d\varphi"] \arrow[d, "exp"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "exp"] \\ H \arrow[r, "\varphi"'] & G \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $Y \in \mathfrak{h}$. Observemos que $\varphi \circ \exp_Y : \mathbb{R} \longrightarrow G$ es un morfismo de grupos de Lie que satisface que

$$d(\varphi \circ \exp_Y)\left(\frac{d}{dt}\right) = d\varphi(d\exp_Y)\left(\frac{d}{dt}\right) = d\varphi(Y).$$

Por la observación 6.1.1, $\varphi \circ \exp_Y = \exp_{d\varphi(Y)}$ y en particular

$$(\varphi \circ \exp)(Y) = (\varphi \circ \exp_Y)(1) = \exp_{d\varphi(Y)}(1) = \exp(d\varphi(Y)) = (\exp \circ d\varphi)(Y).$$

■

***Proposición* 6.1.8.** Sea (H, φ) un subgrupo de Lie de G y sea $X \in \mathfrak{g}$. Si $X \in d\varphi(\mathfrak{h})$, $\exp(tX) \in \varphi(H)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Inversamente, si existe I intervalo abierto de $\mathbb{R}$ para el cual todo elemento $t \in I$ satisface que $\exp(tX) \in \varphi(H)$, entonces $X \in d\varphi(h)$.

Demostración. Por el Teorema anterior, si $X \in d\varphi(\mathfrak{h})$ entonces existe $Y \in \mathfrak{h}$ tal que $d\varphi(Y) = X$. De modo que si $t \in \mathbb{R}$ entonces

$$d\varphi(tY) = td\varphi(Y) = tX.$$

De ahí que

$$\begin{aligned} \exp(tX) &= \exp_{tX}(1) = \exp_{d\varphi(tY)}(1) \\ &= (\varphi \circ \exp_{tY})(1) = \varphi(\exp_{tY}(1)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\exp(tX) \in \varphi(H)$.

Supongamos ahora que $\exp(tX) \in \varphi(H)$, para cualquier $t \in I$.

Como (H, φ) es una variedad integral de la distribución generada por su álgebra de Lie bajo $d\varphi$ (véase el Corolario 5.2.5), entonces la única función $\alpha : I \longrightarrow H$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\exp_X|_I"] \arrow[dr, dashed, "\alpha"'] & G \\ & H \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

es suave (Proposición 1.62). Observemos que para cualquier $t_0 \in I$

$$X_{\exp_X(t_0)} = d(\exp_X|_I)_{t_0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right) = d(\varphi \circ \alpha)_{t_0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right) = d\varphi_{\alpha(t_0)}\left(d\alpha_{t_0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right)\right).$$

Considerando $Y \in \mathfrak{h}$ para la cual

$$Y_{\tilde{e}} = d(l_{(\alpha(t_0))^{-1}})_{\alpha(t_0)}\left(d\alpha_{t_0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right)\right),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} d\varphi_{\tilde{e}}(Y_{\tilde{e}}) &= d(l_{(\varphi\circ\alpha(t_0))^{-1}} \circ \varphi)_{\alpha(t_0)}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right) \\ &= dl_{(\exp_X(t_0))^{-1}}(X_{\exp_X(t_0)}) \\ &= X_e \end{aligned}$$

es decir

$$d\varphi(Y) = X$$

y por lo tanto $X \in d\varphi(\mathfrak{h})$. ■

***Teorema* 6.1.9.** *Sea A un subgrupo abstracto de un grupo de Lie G^d y sea $\mathfrak{a}$ subespacio de $\mathfrak{g}$. Sea U vecindad de 0 en $\mathfrak{g}$ difeomorfa a una vecindad V de e bajo el mapeo exponencial. Supongamos que*

$$exp\,(U \cap \mathfrak{a}) = A \cap V.$$

Entonces A es un subgrupo de Lie de G con la topología relativa y $\mathfrak{a}$ es su álgebra de Lie.

Además dicha estructura de variedad es única para A de tal forma que (A, i_A) resulta ser una subvariedad de G (Teorema 5.2.8).

Demostración. Observemos que $\mathfrak{a}$ es un subgrupo de Lie de $\mathfrak{g}$ con la topología relativa y la misma dimensión que tiene como espacio vectorial. Sea T un isomorfismo de $\mathfrak{g}$ con $\mathbb{R}^d$, de modo que $(U \cap \mathfrak{a}, T|_{U\cap\mathfrak{a}})$ es un sistema coordenado de $\mathfrak{a}$. Ya que para cualquier $\sigma \in A$, $l_\sigma(V \cap A) \subseteq A$ es un abierto de A con la topología relativa y que hay un subconjunto numerable de la familia

$$\{\, (l_\sigma(V \cap A), T|_{V\cap A} \circ (\exp|_{U\cap\mathfrak{a}})^{-1} \circ l_\sigma^{-1}) \,:\, \sigma \in A \,\}$$

que satisface las condiciones de la Proposición 2.3.2, coincidiendo la topología relativa de A con la que asegura dicho resultado, A recibe una estructura de variedad diferenciable con la misma dimensión de $\mathfrak{a}$, de tal forma que (A, i_A) es un encaje. De ese modo, por el Teorema 5.2.8, (A, i_A) es un subgrupo de Lie de G.

Sea $\mathfrak{a}'$ el álgebra de Lie de A y $X \in \mathfrak{a}'$, existe $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo abierto para el cual, dado $t_0 \in I$, $t_0 X \in U \cap \mathfrak{a}$. Así $\exp(t_0 X) \in A \cap V \subseteq A = i_A(A)$; por la proposición anterior $X \in \mathfrak{a}'$. Como $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}'$ y tienen la misma dimensión como $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$. ■

6.2. Exponencial de matrices

En esta sección desarrollaremos algunas herramientas para encontrar explícitamente el mapeo exponencial en $Gl(d, \mathbb{C})$. Gracias a esto, podremos saber cual es el mapeo exponencial de $Gl(d, \mathbb{R})$ y el espacio de endomorfismos de un espacio vectorial dimensionalmente finito. En lo siguiente encontraremos la definición de una función del espacio $\mathfrak{gl}(d, F)$ a $Gl(d, F)$, donde F denotará a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, que satisface propiedades muy especiales. Ya que usualmente es llamada *exponencial de matrices*, usaremos dicho nombre. En la sección 6.3 verificaremos que dicha función coincide con el mapeo exponencial de $Gl(d, F)$.

Sabemos que $\mathfrak{gl}(d, F)$ es un espacio vectorial y que resulta ser difeomorfo a F^{d^2} mediante cualquier isomorfismo lineal (véase ejemplo 1.1.6). Consideremos en particular alguno que envíe la base canónica de $\mathfrak{gl}(d, F)$ a la base canónica de F^{d^2}; denotémoslo como $\Psi : \mathfrak{gl}(d, F) \longrightarrow F^{d^2}$.

Sabemos que la norma $||\,.\,||_1$ en F^{d^2}, para la cual dado $\hat{z} = (z_1, \ldots, z_{d^2})$,

$$||\hat{z}||_1 = \sum_{i=1}^{d} |z_i|$$

induce la topología usual en F^{d^2}, de modo que la norma $||\,.\,||$ en $\mathfrak{gl}(d, \mathbb{R})$ inducida mediante Ψ, definida como

$$||A|| = ||\Psi(A)||_1 = \sum_{i,j=1}^{d} |a_{ij}|\,,$$

siendo $A = (a_{ij})_{ij}$, genera la topología que posee originalmente $\mathfrak{gl}(d, F)$ como variedad diferenciable.

Observación 6.2.1. Al igual que F^{d^2} con respecto a $||\,.\,||_1$, $(\mathfrak{gl}(d, F), ||\,.\,||)$ es completo.

Sea $A = (a_{ij})_{ij}$ y $B = (b_{ij})_{ij}$ elementos de $\mathfrak{gl}(d, F)$, de modo que $AB = (\sum_{k=1}^{d} a_{ik} b_{kj})_{ij}$ y por ello

$$\begin{aligned}||AB|| &= \sum_{i,j=1}^{d} |\sum_{k=1}^{d} a_{ik}b_{kj}| \leqslant \sum_{i,j,k=1}^{d} |a_{ik}b_{kj}| \\ &= \sum_{i,k=1}^{d} a_{ik} \sum_{j=1}^{d} |b_{kj}| \leqslant \sum_{i,k=1}^{d} a_{ik}||B|| \\ &= ||A||\,||B||.\end{aligned}$$

En particular si $A = B$, se sigue que $||A^2|| = ||A||^2$ y por inducción se obtiene que para toda $n \in \mathbb{N}$, $||A^n|| = ||A||^n$.

Consideremos $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesión de elementos en $\mathfrak{gl}(d, F)$. Denotemos c_{ij}^k la entrada ij de la matriz C_k. Observemos que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ converge con respecto a la norma $||\,.\,||$ si y sólo si $\sum_{k=0}^{\infty} c_{ij}^k$ converge para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, d\}$.

Veamos una condición suficiente para que una serie converja.

***Teorema* 6.2.2.** *Sea $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesión de elementos en $\mathfrak{gl}(d, F)$. Si la serie $\sum_{k=0}^{\infty} ||C_k||$ converge entonces la serie de matrices $\sum_{k=0}^{\infty} C_k$ converge.*

Demostración. Observemos que para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ y $n \geqslant m$,

$$\Big| \sum_{k=m}^{n} C_{ij}^k \Big| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |C_{ij}^k| \leqslant \sum_{k=m}^{n} ||C_k||\,.$$

Dado que $\sum_{k=0}^{\infty} ||C_k||$ converge si y sólo si $(\sum_{k=0}^{n} ||C_k||)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, las desigualdades anteriores permiten concluir que $(\sum_{k=0}^{n} C_{ij}^k)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y por lo tanto converge, concluyendo con ello que $\sum_{k=m}^{n} C_k$ converge.

■

Consideremos $A \in \mathfrak{gl}(d, F)$ y la sucesión de matrices $(\frac{A^n}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$. Observemos que

$$\Big|\Big| \frac{A^n}{n!} \Big|\Big| \leqslant \frac{||A||^n}{n!}\,.$$

Dado que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{||A||^n}{n!}$ converge a $e^{||A||}$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} ||\frac{A^n}{n!}||$ converge. Así, por el Teorema 6.2.2, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ converge.

Con base en lo anterior daremos la siguiente definición.

Definición 6.2.3. (Exponencial de matrices) Sea $A \in \mathfrak{gl}(d, F)$. Diremos que la *exponencial de* A es el límite de la serie de matrices

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\,,$$

el cual denotaremos como e^A.

Notemos que con la definición anterior, $e^0 = I$. Además, por la continuidad del producto de matrices y la definición de la exponencial de matrices, para cualquier $A \in \mathfrak{gl}(d, F)$, $A\, e^A = e^A\, A$.

El siguiente resultado nos será de utilidad para observar algunas propiedades de la función exponencial.

***Teorema* 6.2.4.** *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos y R el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (es decir, $R \in [0,\infty]$ para el cual la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absoluta y uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{B}_R(0) = \{\, z \in \mathbb{C} : |z| < R \,\}$). Consideremos $f : \mathbb{B}_R(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ definido como $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, de modo que f es suave en $\mathbb{B}_R(0)$ y para toda $k \in \mathbb{N}$*

$$f^k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n z^{n-k}\,.$$

Sea $\sigma_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{gl}(d, F)$ la curva definida como $\sigma_A(t) = e^{tA}$. Veamos que dicha curva es suave. Para ello basta concluir que

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(d, F) \\ z &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} z^n \end{aligned}$$

es suave, pues $(\mathbb{R}, i_{\mathbb{R}})$, donde $i_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ es el mapeo inclusión, es una subvariedad de $\mathbb{C}$.

Denotemos como c_{ij}^k a la entrada ij de la matriz $\frac{A^n}{n!}$.

Por el Teorema 6.2.4 basta ver que para cualesquiera $i, j \in \{\, 1, \ldots, d \,\}$ la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_{ij}^k z^k$ converge absoluta y uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Observemos que dados dos naturales, $m \leqslant n$

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{k=m}^{n} c_{ij}^k z^k\Big| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |c_{ij}^k z^k| &\leqslant \sum_{k=m}^{n} \frac{||A||^k}{k!}|z|^k \\ &\leqslant \sum_{k=m}^{n} \frac{|\,||A||\, z|^k}{k!} \end{aligned} \tag{6.3}$$

Como la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\,||A||\,z|^k}{k!}$ converge a $e^{||A||\,|z|}$, entonces $\sum_{k=0}^{\infty} c_{ij}^k z^k$ es absolutamente convergente.

Ya que una sucesión de funciones $(f_n : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente si y sólo si es uniformemente de Cauchy, basta mostrar que $\sum_{k=0}^{\infty} c_{ij}^k z^k$ es uniformemente de Cauchy en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Dado que la función exponencial

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\xrightarrow{\ e\ } \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \end{aligned}$$

es holomorfa, su desarrollo en serie de potencias es uniformemente de Cauchy en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$. Considerando la función continua

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\xrightarrow{\ g\ } \mathbb{C} \\ z &\longmapsto ||A||\,|z| \end{aligned}$$

tenemos que el desarrollo en serie de potencias de $e \circ g$ es uniformemente de Cauchy en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ (pues para todo subconjunto compacto $K \subseteq \mathbb{C}$, $g(K)$ es compacto); por ello la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\,||A||\,z|^k}{k!}$ es uniformemente de Cauchy en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$. Por la desigualdad (6.3) se sigue que $\sum_{k=0}^{\infty} c_{ij}^k z^k$ es uniformemente de Cauchy en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Por el Teorema 6.2.4 hemos concluido que la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_{ij}^k z^k$ es suave y que su primera derivada es

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_{ij}^k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{ij}^{k+1} z^k .$$

De manera que la curva suave σ_A tiene como primera derivada

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_A(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{A^{k+1}}{k+1!} t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A\left(\frac{A^k}{k!} t^k\right) = \sigma_A(t) A \\ &= A\sigma_A(t) . \end{aligned}$$

Estos resultados se resumen en el siguiente Teorema.

***Teorema* 6.2.5.** *Sea $A \in \mathfrak{gl}(d, F)$, entonces la curva σ_A es suave y satisface la ecuación diferencial de matrices*

$$\dot{\sigma}_A(t) = A\sigma_A(t) = \sigma_A(t) A .$$

Ahora veremos que con respecto a un valor inicial dado, σ_A es la única curva que satisface dicha ecuación diferencial de matrices. El siguiente Lema nos será de utilidad para mostrarlo.

***Lema* 6.2.6.** Sea $A \in \mathfrak{gl}(d, F)$, de modo que

$$e^{-tA}\, e^{tA} = I\,.$$

Demostración. Consideremos la función suave

$$H(t) = e^{-tA}\, e^{tA}$$

la cual satisface que su primera derivada es igual a

$$\begin{aligned}\dot{H}(t) &= (e^{-tA})'\, e^{tA} + e^{-A}\,(e^{tA})' \\ &= -Ae^{-tA}\, e^{tA} + e^{-tA}\,(Ae^{tA}) \\ &= Ae^{-tA}\, e^{tA} - Ae^{-tA}\, e^{tA} = 0\,.\end{aligned}$$

Como $\mathbb{R}$ es conexo, entonces H es constante (Teorema 2.2.5). Dado que $H(0) = I$ se concluye que para cualquier $t \in \mathbb{R}$

$$H(t) = e^{-tA}\, e^{tA} = I\,.$$

■

***Teorema* 6.2.7.** *Sea* $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{gl}(d, F)$ *una función suave que satisface*

I. $H(0) = B$,

II. $\dot{H}(t) = H(t)A$.

Entonces $H(t) = Be^{tA}$

Demostración. Por el Teorema 6.2.5 la función $\widetilde{H}(t) = Be^{tA}$ satisface las condiciones I y II.

Consideremos la función suave

$$G(t) = H(t)e^{-tA}\,,$$

de modo que

$$\begin{aligned}\dot{G}(t) &= H(t)Ae^{-tA} - H(t)e^{-tA}A \\ &= H(t)e^{-tA}A - H(t)e^{-tA}A = 0\,.\end{aligned}$$

Como $\mathbb{R}$ es conexo, G es una función constante (Teorema 2.2.5) de modo que para todo $t \in \mathbb{R}$

$$G(t) = G(0) = B\,.$$

Por el Lema anterior para cualquier $t \in \mathbb{R}$

$$H(t) = Be^{tA}\,.$$

■

Análogamente se puede mostrar que si $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{gl}(d,F)$ es una función suave que satisface que $H(0) = B$ y $\dot{H}(t) = AH(t)$ entonces para todo $t \in \mathbb{R}$, $H(t) = e^{tA}B$.

Del Lema 6.2.6 se puede concluir que para cualquier $A \in \mathfrak{gl}(d,F)$, $e^A \in Gl(d,F)$. Dado que $Gl(d,F)$ es un subconjunto abierto de $\mathfrak{gl}(d,F)$ y que la función exponencial factoriza a través de $(Gl(d,F), i_{Gl(d,F)})$, gracias al Teorema 2.6.2 la correstricción de la función exponencial a $Gl(d,F)$ es suave.

Observación 6.2.8. Dados $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathfrak{gl}(d,F)$ y $B \in Gl(d,F)$, ya que $(BAB^{-1})^n = BA^nB^{-1}$, se sigue que para toda $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{(BAB^{-1})^n}{n!} = B\left(\sum_{n=0}^{m} \frac{A^n}{n!}\right)B^{-1}\,,$$

de modo que

$$e^{BAB^{-1}} = Be^AB^{-1} \tag{6.4}$$

Si A es una matriz diagonal entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, A^n es una matriz diagonal para la cual

$$(A^n)_{ii} = a_{ii}^n\,,$$

de modo que e^A es una matriz diagonal que en la cual

$$(e^A)_{ii} = e^{a_{ii}}\,.$$

Análogamente, si A es una matriz triangular superior, A^n es una matriz triangular superior que tiene valor a_{ii}^n en la entrada ii, de modo que e^A es una matriz triangular superior que tiene valor $e^{a_{ii}}$ en la entrada ii.

Por otro lado el Teorema de Schur (A.4.4) asegura que para cualquier $C \in \mathfrak{gl}(d,F)$ existe $B \in Gl(d,F)$ para la cual BCB^{-1} es triangular superior.

Dadas las observaciones previas podemos concluir que el determinante de $e^{BCB^{-1}}$ es la multiplicación de los elementos de la diagonal, por lo que resulta igual a $e^{\operatorname{tr}(BCB^{-1})}$.

Considerando que $\operatorname{tr}(BCB^{-1}) = \operatorname{tr} C$, tenemos que

$$\begin{aligned}\det(e^C) &= \det(Be^CB^{-1}) = \det(e^{BCB^{-1}})\\ &= e^{\operatorname{tr}(BCB^{-1})} = e^{\operatorname{tr}(C)}\end{aligned} \tag{6.5}$$

6.3. El mapeo exponencial en $Gl(d,\mathbb{C})$

Por la observación 4.2.7 sabemos que para cualquier $\mathbb{R}$-espacio vectorial dimensionalmente finito visto como variedad podemos identificar los espacios tangentes en cada punto con el espacio vectorial mismo. En el caso particular de $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{C})$, considerando $x_{ij} : \mathfrak{gl}(d,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ la función suave para la cual dado $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathfrak{gl}(d,\mathbb{C})$, $x_{ij}(A) = a_{ij}$ (véase el ejemplo 1.1.7), obtenemos el siguiente isomorfismo

$$\begin{aligned} T_A\mathfrak{gl}(d,\mathbb{C}) &\xrightarrow{\lambda_A} \mathfrak{gl}(d,\mathbb{C}) \\ \nu &\longmapsto (\nu(\mathrm{Re}x_{ij}) + i\nu(\mathrm{Im}x_{ij}))_{ij} \end{aligned} \tag{6.6}$$

donde $\mathrm{Re}x_{ij} = \mathrm{Re} \circ x_{ij}$ y $\mathrm{Im}x_{ij} = \mathrm{Im} \circ x_{ij}$, siendo $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones que asocian la parte real o imaginaria a un complejo, respectivamente.

Como $Gl(d,\mathbb{C})$ es un abierto de $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{C})$ dicho isomorfismo canónico se preserva para el espacio tangente de cada elemento en $Gl(d,\mathbb{C})$.

En lo siguiente denotaremos como I a la matriz identidad y como 0 a la matriz cero. Así, dado $A \in Gl(d,\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} T_I\,Gl(d,\mathbb{C}) &\xrightarrow{\lambda_A \circ d(l_A)_I} \mathfrak{gl}(d\mathbb{C}) \\ \nu &\longmapsto A\lambda_I(\nu) \end{aligned} \tag{6.7}$$

Dicha correspondencia se argumenta a continuación.

Dados $i,j,k,l \in \{1,\ldots,d\}$, denotaremos e_{ij} a la matriz cuya única entrada distinta de cero (e igual a uno) es la ij. De tal forma que

$$\begin{aligned} d(l_A)_I\left(\left.\frac{\partial}{\partial \mathrm{Re}x_{ij}}\right|_I\right)(\mathrm{Re}x_{kl}) &= \frac{\partial \mathrm{Re}x_{kl} \circ l_A}{\partial \mathrm{Re}x_{ij}}(I) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{Re}x_{kl}(A(I+te_{ij})) - \mathrm{Re}x_{kl}(AI)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{Re}x_{kl}(tAe_{ij})}{t} = \mathrm{Re}x_{kl}(Ae_{ij}) \\ &= \begin{cases} 0 & l \neq j \\ \mathrm{Re}x_{ki}(A) & l = j \ . \end{cases} \end{aligned}$$

Análogamente

$$d(l_A)_I\left(\left.\frac{\partial}{\partial \mathrm{Re}x_{ij}}\right|_I\right)(\mathrm{Im}x_{kl}) = \begin{cases} 0 & l \neq j \\ \mathrm{Im}x_{ki}(A) & l = j \ . \end{cases}$$

De modo que

$$
\begin{aligned}
&\lambda_A \circ d(l_A)_I \left(\left. \frac{\partial}{\partial \mathrm{Re} x_{ij}} \right|_I \right) \\
&= \lambda_A \left(\sum_{k,l} \left(d(\mathrm{Re} x_{kl} \circ l_A) \left(\left. \frac{\partial}{\partial \mathrm{Re} x_{ij}} \right|_I \right) \left. \frac{\partial}{\partial \mathrm{Re} x_{kl}} \right|_A \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + d(\mathrm{Im} x_{kl} \circ l_A) \left(\left. \frac{\partial}{\partial \mathrm{Re} x_{ij}} \right|_I \right) \left. \frac{\partial}{\partial \mathrm{Im} x_{kl}} \right|_A \right) \right) \\
&= \lambda_A \left(\sum_{k=1}^{d} \left(\mathrm{Re} x_{ki}(A) \left. \frac{\partial}{\partial \mathrm{Re} x_{kj}} \right|_A + \mathrm{Im} x_{ki}(A) \left. \frac{\partial}{\partial \mathrm{Im} x_{kj}} \right|_A \right) \right) \\
&= A e_{ij} \, .
\end{aligned}
$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
d(l_A)_I \left(\left. \frac{\partial}{\partial \mathrm{Im} x_{ij}} \right|_I \right) (\mathrm{Re} x_{kl}) &= \frac{\partial \mathrm{Re} x_{kl} \circ l_A}{\partial \mathrm{Im} x_{ij}} (I) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{Re} x_{kl}(A(I + ite_{ij})) - \mathrm{Re} x_{kl}(AI)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{Re} x_{kl}(itAe_{ij})}{t} = \mathrm{Re} x_{kl}(iAe_{ij}) = -\mathrm{Im} x_{kl}(Ae_{ij}) \\
&= \begin{cases} 0 & l \neq j \\ -\mathrm{Im} x_{ki}(A) & l = j \end{cases}
\end{aligned}
$$

y de forma análoga

$$
d(l_A)_I \left(\left. \frac{\partial}{\partial \mathrm{Im} x_{ij}} \right|_I \right) (\mathrm{Im} x_{kl}) = \mathrm{Re} x_{kl}(Ae_{ij}) = \begin{cases} 0 & l \neq j \\ \mathrm{Re} x_{ki}(A) & l = j \end{cases} ,
$$

De modo que

$$
\begin{aligned}
&\lambda_A \circ d(l_A)_I \left(\left. \frac{\partial}{\partial \mathrm{Re} x_{ij}} \right|_I \right) \\
&= \lambda_A \left(\sum_{k=1}^{d} \left(-\mathrm{Im} x_{ki}(A) \left. \frac{\partial}{\partial \mathrm{Re} x_{kj}} \right|_A + \mathrm{Re} x_{ki}(A) \left. \frac{\partial}{\partial \mathrm{Im} x_{kj}} \right|_A \right) \right) \\
&= iAe_{ij} \, .
\end{aligned}
$$

Por lo cual, dado $\nu \in T_I Gl(n, \mathbb{C})$

$$\nu = \sum_{i,\,j}^{d}\left(\nu(\mathrm{Re}x_{ij})\frac{\partial}{\partial \mathrm{Re}x_{ij}}\bigg|_I + \nu(\mathrm{Im}x_{ij})\frac{\partial}{\partial \mathrm{Im}x_{ij}}\Big|_I\right).$$

Gracias a los cálculos previos se tiene que

$$\begin{aligned}
\lambda_A \circ d(l_A)_I(\nu) &= \sum_{i,\,j}^{d}\Big(\nu(\mathrm{Re}x_{ij})A\,e_{ij} + i\nu(\mathrm{Im}x_{ij})A\,e_{ij}\Big)\\
&= A\bigg(\sum_{i,\,j}^{d}\Big(\nu(\mathrm{Re}x_{ij})e_{ij} + i\nu(\mathrm{Im}x_{ij})e_{ij}\Big)\bigg)\\
&= A\,\lambda_I(\nu)\,.
\end{aligned}$$

Podemos interpretar lo anterior en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
T_I\,Gl(d,\mathbb{C}) \arrow[r, "d(l_A)_I"] \arrow[d, "\lambda_I"'] & T_A\,Gl(d,\mathbb{C}) \arrow[d, "\lambda_A"] \\
\mathfrak{gl}(d,\mathbb{C}) \arrow[r, "\hat{l}_A"'] & \mathfrak{gl}(d,\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

donde $\hat{l}_A$ es la multiplicación izquierda por A en $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{C})$.

De la misma forma podemos concluir que dado $C \in Gl(d,\mathbb{C})$

$$\begin{tikzcd}
T_C\,Gl(d,\mathbb{C}) \arrow[r, "d(l_A)_C"] \arrow[d, "\lambda_C"'] & T_{AC}\,Gl(d,\mathbb{C}) \arrow[d, "\lambda_{AC}"] \\
\mathfrak{gl}(d,\mathbb{C}) \arrow[r, "\hat{l}_A"'] & \mathfrak{gl}(d,\mathbb{C})
\end{tikzcd} \tag{6.8}$$

donde $\hat{l}_A$ es la multiplicación izquierda por A en $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{C})$.

Sean $\widetilde{\mathfrak{g}}$ el álgebra de Lie de $Gl(d,\mathbb{C})$ y $X \in \widetilde{\mathfrak{g}}$. Denotaremos como γ_X al mapeo exponencial $\exp_X$, de manera que para todo $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\dot{\gamma}_X(t_0) = d(\gamma_X)_{t_0}\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0}\right) = d(l_{\gamma_X(t_0)})_I(X_I)\,.$$

Mediante el isomorfismo dado en (6.6) y la asignación expresada en (6.7) podemos concluir que $\dot{\gamma}_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{gl}(d,\mathbb{C})$ es una función suave para la cual, dado $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_X(t_0) &= \gamma_X(t_0)(X_I(\mathrm{Re}x_{ij}) + iX_I(\mathrm{Im}x_{ij}))_{ij}\\
&= \gamma_X(t_0)\lambda_I(X_I)\,.
\end{aligned}$$

De tal forma que la función $\gamma_X : \mathbb{R} \longrightarrow Gl(d,\mathbb{C})$ es suave y satisface

$$\begin{aligned} &\gamma_X(O) = I && \text{y} \\ &\dot{\gamma}_X(t_0) = \gamma_X(t_0)\lambda_I(X_I)\,. \end{aligned}$$

Por lo demostrado en la sección 6.2 acerca del mapeo exponencial en matrices, concluimos que

$$\gamma_X(t) = e^{t\lambda_I(X_I)}\,,$$

donde $e^A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ para cualquier $A \in \mathfrak{gl}(d,\mathbb{C})$.

Identificando canónicamente a $\mathfrak{g}$ con $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{C})$ mediante el isomorfismo (6.6) y por el Teorema 6.1.6, el mapeo

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{gl}(d,\mathbb{C}) & \xrightarrow{\exp} & Gl(d,\mathbb{C}) \\ A & \longmapsto & e^A \end{array}$$

es suave.

Por definición de la estructura de variedad diferenciable de $Gl(d,\mathbb{C})$ se tiene que $(Gl(d,\mathbb{R}),\, i_{Gl(d,\mathbb{R})})$ es un encaje y además $i_{Gl(d,\mathbb{R})}$ es un morfismo de grupos, por lo que resulta ser un subgrupo de Lie de $Gl(d,\mathbb{C})$. Como el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{gl}(d,\mathbb{R}) \arrow[r, "di_{Gl(d,\mathbb{R})}"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{gl}(d,\mathbb{C}) \arrow[d, "\exp"] \\ Gl(d,\mathbb{R}) \arrow[r, "i_{Gl(d,\mathbb{R})}"'] & Gl(d,\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

obtenemos que para cualquier $A \in Gl(d,\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \exp(A) &= i_{\mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})} \circ \exp(A) \\ &= \exp \circ\, di_{Gl(d,\mathbb{R})}(A) \\ &= \exp(A) = e^A\,. \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{gl}(d,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\exp} & Gl(d,\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & e^A \end{array}$$

Observación 6.3.1. Como hemos visto, si consideramos $\exp : \mathfrak{gl}(d,\mathbb{C}) \longrightarrow Gl(d,\mathbb{C})$, $\exp(\mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})) \subseteq Gl(d,\mathbb{R})$. Sin embargo $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{R}) \subsetneq \exp^{-1}(Gl(d,\mathbb{R}))$, ya que la matriz $A = 2\pi i I \notin \mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})$ y $e^A = e^{2\pi i} I = I$, pues $1 = e^{2\pi i}$ (véase observación 6.2.8, sección 6.2). Es decir, $A \in \exp^{-1}(Gl(d,\mathbb{R}))$ y $e^A = e^I = I$, por lo que también se observa que $\exp$ no es inyectiva.

Denotemos F a $\mathbb{R}$ o bien a $\mathbb{C}$. Sea V un F-espacio vectorial de dimensión finita d y $\beta = \{x_1, \ldots, x_d\}$ una base de V. Dado $l \in \mathrm{Aut}(V)$ y $[l]_\beta$ la representación matricial de l en base β, sabemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(V) &\xrightarrow{\Psi_\beta} Gl(d,F) \\ l &\longmapsto [l]_\beta \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos de Lie, de tal forma que

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(V) &\xrightarrow{d\Psi_\beta} \mathfrak{gl}(d,F) \\ T &\longmapsto [T]_\beta \end{aligned}$$

y por lo tanto se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{End}(V) \arrow[r, "d\Psi_\beta"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{gl}(d,F) \arrow[d, "\exp"] \\ \mathrm{Aut}(V) \arrow[r, "\Psi_\beta"'] & Gl(d,F) \end{tikzcd}$$

concluyendo que para $l \in \mathrm{End}(V)$

$$\exp(l) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l^n}{n!}, \tag{6.9}$$

donde l^n denota la composición de l n veces.

Sea $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ una representación y $X \in \mathfrak{g}$. Por el Teorema 6.1.7 y las observaciones previas se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi(\exp(X)) &= \exp(d\varphi(X)) \\ &= 1 + d\varphi(X) + \frac{(d\varphi(X))^2}{2!} + \frac{(d\varphi(X))^3}{3!} + \ldots \end{aligned} \tag{6.10}$$

Además, por la identificación expresada en 2.3 de la observación 4.2.7

$$\begin{aligned} d\varphi(X) = d\varphi_e(X_e) &= d\varphi_e\left(d\exp_0\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\right)\right) \\ &= d(\varphi\circ\exp)_0\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\right) \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(\exp_X(t)) - \mathrm{id}_V}{t} \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\varphi(\exp_X(t))) \end{aligned} \tag{6.11}$$

6.4. Subgrupos de $Gl(d,\mathbb{C})$

En esta parte veremos una útil aplicación del Teorema 6.1.9, calculando álgebras de Lie de subgrupos cerrados de $Gl(d,\mathbb{C})$, mediante el mapeo exponencial.

Recordemos que si $A = (a_{ij})_{ij} \in Gl(d,\mathbb{C})$, denotamos a la matriz transpuesta de A como $A^t = (a_{ji})_{ij}$ y como A^* a la matriz cuya entrada ij- ésima es $\overline{a_{ji}}$, es decir, A^* es la matriz en la que se conjugan las entradas de A^t.

De la continuidad de la función exponencial podemos concluir que

$$\begin{aligned} e^{A^t} &= (e^A)^t \quad \text{y} \\ e^{A^*} &= (e^A)^*\,. \end{aligned}$$

Consideremos $g^t,\, g^* : Gl(d,\mathbb{C}) \longrightarrow Gl(d,\mathbb{C})$ para las cuales dado $A = (a_{ij})_{ij} \in Gl(d,\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} g^t(A) = A^tA &= \left(\sum_{k=1}^{d} a_{ki}a_{kj}\right)_{ij} \quad \text{y} \\ g^*(A) = A^*A &= \left(\sum_{k=1}^{d} \overline{a_{ki}}a_{kj}\right)_{ij}. \end{aligned}$$

De modo que son suaves ya que cada entrada se expresa como sumas de productos de funciones suaves de $\mathbb{R}^{2d^2}$ a $\mathbb{R}$. Gracias a esto podemos concluir que los siguientes subgrupos de $Gl(d,\mathbb{C})$ son cerrados

a. $U(d) = \{\, A \in Gl(d,\mathbb{C}) \,:\, A^*A = I \,\} = (g^*)^{-1}(I)$ (*grupo unitario*).

b. $Sl(d,\mathbb{C}) = \{\, A \in Gl(d,\mathbb{C}) \,:\, \det A = 1 \,\} = \det{}^{-1}(1)$ (*grupo especial lineal*).

c. $O(d,\mathbb{C}) = \{\, A \in Gl(d,\mathbb{C}) \,:\, A^tA = I \,\} = (g^t)^{-1}(I)$ (*grupo ortogonal complejo*).

Verifiquemos que son subgrupos de Lie de $Gl(d,\mathbb{C})$ con la topología relativa y que respectivamente sus álgebras son:

a'. $\mathfrak{u}(d) = \{\, A \in \mathfrak{gl}(d,\mathbb{C}) \,:\, A = -A^* \,\}$ (*matrices hermitianas*).

b'. $\mathfrak{sl}(d,\mathbb{C}) = \{\, A \in \mathfrak{gl}(d,\mathbb{C}) \,:\, \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{d} a_{ii} = 0 \,\}$ (*matrices de traza cero*).

c'. $\mathfrak{o}(d,\mathbb{C}) = \{\, A \in \mathfrak{gl}(d,\mathbb{C}) \,:\, A = -A^t \,\}$ (*matrices simétricas*).

Cálculando las dimensiones de las álgebras de Lie anteriores se concluye que $\dim U(d) = d^2$, $\dim Sl(d,\mathbb{C}) = 2d^2 - 2$ y $\dim O(d,\mathbb{C}) = d(d-1)$.

El siguiente Lema nos será de útilidad para considerar algunos de dichos subgrupos intersectados con $Gl(d,\mathbb{R})$.

***Lema* 6.4.1.** Sea $\exp : \mathfrak{gl}(d,\mathbb{C}) \longrightarrow Gl(d,\mathbb{C})$ el mapeo exponencial, entonces existen $U \subseteq \mathfrak{gl}(d,\mathbb{C})$ vecindad abierta de 0 y $V \subseteq Gl(d,\mathbb{C})$ vecindad abierta de I para las cuales $\exp|_U : U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo y además

$$\exp(U \cap \mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})) = V \cap Gl(d,\mathbb{R})\,.$$

Demostración. Sean U_0, U_1 vecindades abiertas de 0 en $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{C})$ y V_0, V_1 vecindades abiertas de I en $Gl(d,\mathbb{C})$ que satisfacen que $\exp|_{U_0} : U_0 \longrightarrow V_0$ y $\exp|_{U_1\cap\mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})} : U_1 \cap \mathfrak{gl}(d,\mathbb{R}) \longrightarrow V_1 \cap Gl(d,\mathbb{R})$ son difeomorfismos.

Sean $\widetilde{V}, \widetilde{V}_1 \subseteq Gl(d,\mathbb{C})$ vecindades abiertas de I que satisfacen que $\exp(U_0 \cap U_1) = \widetilde{V}$ y

$$\exp((U_0 \cap U_1) \cap \mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})) = (V_1 \cap \widetilde{V}_1) \cap Gl(d,\mathbb{R}) \subseteq \widetilde{V} \cap Gl(d,\mathbb{R})\,,$$

de modo que

$$\exp(U_0 \cap U_1 \cap \mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})) = (V_1 \cap \widetilde{V}_1 \cap \widetilde{V}) \cap Gl(d,\mathbb{R})\,.$$

Denotemos $V = V_1 \cap \widetilde{V}_1 \cap \widetilde{V} \subseteq Gl(d,\mathbb{C})$ vecindad abierta de I y $U = \exp^{-1}(V) \cap U_0$. Observemos que $\exp|_U : U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo pues $U \subseteq U_0$ es una vecindad abierta de 0, $V \subseteq \widetilde{V} \subseteq V_0$ y $\exp|_{U_0}$ es un difeomorfismo sobre V_0.

Más aún,

$$\exp(U \cap \mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})) = V \cap Gl(d,\mathbb{R})$$

pues dado $A \in V \cap Gl(d,\mathbb{R})$ existe $A_0 \in U_0 \cap U_1 \cap \mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})$ tal que $\exp(A_0) = A$. Como $A_0 \in \exp^{-1}(V) \cap U_0 = U$ entonces $A_0 \in U \cap \mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})$.

■

Consideremos $U \subseteq \mathfrak{gl}(d,\mathbb{C})$ y $V \subseteq Gl(d,\mathbb{C})$ como en el Lema, y que además se satisfaga que para cualquier $A \in U$, $|\det(A)| < 2\pi$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que U es simétrica (es decir, $U = U^{-1}$).

Sabemos que las funciones $\bar{h}, h^t : \mathfrak{gl}(d,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(d,\mathbb{C})$ para las cuales dado $C = (c_{ij})_{ij}$, $\bar{h}(C) = \overline{C} = (\bar{c}_{ij})_{ij}$ y $h^t(C) = C^t$, son funciones lineales y por lo tanto suaves. De manera que

$$\widetilde{U} = U \cap (\bar{h}^{-1}(U)) \cap U^t \cap (\bar{h}^{-1}(U))^t \subseteq U$$

es una vecindad abierta de 0, de tal forma que $\widetilde{V} = \exp(\widetilde{U})$ es una vecindad abierta de I y $\exp|_{\widetilde{U}}$ es un difeomorfismo sobre $\widetilde{V}$ que satisface

$$\exp(\widetilde{U} \cap \mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})) = \widetilde{V} \cap Gl(d,\mathbb{R})\,.$$

Veamos que $\exp(\widetilde{U} \cap \mathfrak{u}(d)) = \widetilde{V} \cap U(d)$. Sea $A \in \widetilde{U} \cap \mathfrak{u}(d)$ de modo que $e^A \in \widetilde{V}$. Notemos que $e^{-A} = (e^A)^{-1}$, y ya que

$$e^{-A} = e^{A^*} = (e^A)^*\,,$$

se concluye que $e^A \in U(d)$.

Inversamente, si $A \in U(d) \cap \widetilde{V}$ entonces existe $B \in U$ tal que $e^B = A$ y además

$$e^{-B} = (e^B)^{-1} = A^{-1} = A^* = (e^B)^* = e^{B^*}\,.$$

Ya que $B \in \widetilde{U}$ entonces $-B, B^* \in \widetilde{U}$, de modo que $B^* = -B$.

En forma análoga tenemos que para cualquier $A \in \widetilde{U} \cap \mathfrak{o}(d,\mathbb{C})$, $e^A \in \widetilde{V}$ y

$$(e^A)^{-1} = e^{-A} = e^{A^t} = (e^A)^t\,,$$

lo cual significa que $e^A \in O(d,\mathbb{C})$.

Además, si $A \in \widetilde{V} \cap O(d,\mathbb{C})$ entonces existe un único $B \in \widetilde{U}$ para el cual $e^B = A$, por ello

$$e^{-B} = (e^B)^{-1} = (e^B)^t = e^{B^t}\,.$$

Dado que $-B, B^* \in \widetilde{U}$, ambos son iguales y de ahí que $B \in \mathfrak{o}(d,\mathbb{C})$. De tal manera que $\exp(\widetilde{U} \cap \mathfrak{o}(d,\mathbb{C})) = \widetilde{V} \cap O(d,\mathbb{C})$.

Resta ver que $\exp(\widetilde{U} \cap \mathfrak{sl}(d,\mathbb{C})) = \widetilde{V} \cap Sl(d,\mathbb{C})$. Consideremos $A \in \widetilde{U} \cap \mathfrak{sl}(d,\mathbb{C})$, de modo que

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{tr} A} = e^0 = I\,.$$

Por otro lado, si $A \in \widetilde{V} \cap Sl(d,\mathbb{C})$ existe un único $B \in \widetilde{U}$ para el cual $e^A = A$, de manera que

$$e^{\operatorname{tr} B} = \det e^B = \det A = 1\,,$$

lo cual sucede si y sólo si $\operatorname{tr} B = (2\pi i)n$, para algún $n \in \mathbb{Z}$. Como $B \in U$ se tiene que $n = 0$ y por tanto que $B \in \mathfrak{sl}(d,\mathbb{C})$, siguiéndose de ahí lo deseado.

Con los subgrupos anteriores describiremos otros subgrupos cerrados de $Gl(d,\mathbb{C})$ que gracias al Teorema 6.1.9 resultan ser nuevamente subgrupos de Lie de $Gl(d,\mathbb{C})$, a saber

(a) $SU(d) = U(d) \cap Sl(d,\mathbb{C})$ (*grupo especial unitario*).

(b) $Sl(d,\mathbb{R}) = Gl(d,\mathbb{R}) \cap Sl(d,\mathbb{C})$ (*grupo especial lineal real*).

(c) $O(d) = Gl(d,\mathbb{R}) \cap U(d)$ (*grupo ortogonal*).

(d) $SO(d) = O(d) \cap Sl(d,\mathbb{R})$ (*grupo especial ortogonal*).

Resultando que sus álgebras de Lie son respectivamente

(a') $\mathfrak{su}(d) = \mathfrak{u}(d) \cap \mathfrak{sl}(d,\mathbb{C})$.

(b') $\mathfrak{sl}(d,\mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(d,\mathbb{R}) \cap \mathfrak{sl}(d,\mathbb{C})$.

(c') $\mathfrak{o}(d) = \mathfrak{gl}(d,\mathbb{R}) \cap \mathfrak{u}(d) \subseteq \mathfrak{sl}(d,\mathbb{R})$.

(d') $\mathfrak{so}(d) = \mathfrak{o}(d) \cap \mathfrak{sl}(d,\mathbb{R}) = \mathfrak{o}(d)$

Para concluir lo anterior observemos que $\exp(\widetilde{U} \cap \mathfrak{su}(d)) = \widetilde{V} \cap SU(d)$, lo cual se sigue directamente de los argumentos expuestos en el caso de $Sl(d,\mathbb{C})$ y $U(d)$.

Veamos que $\exp(\widetilde{U} \cap \mathfrak{sl}(d,\mathbb{R})) = \widetilde{V} \cap Sl(d,\mathbb{R})$. Ya que la contención $\exp(\widetilde{U} \cap \mathfrak{sl}(d,\mathbb{R})) \subseteq \widetilde{V} \cap Sl(d,\mathbb{R})$ se tiene, consideremos $A \in \widetilde{V} \cap Sl(d,\mathbb{R})$ y $B \in \widetilde{U} \cap \mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})$ para el cual $e^B = A$, de modo que $1 = \det e^A = e^{\operatorname{tr} B}$, concluyendo con ello que $\operatorname{tr} B = 0$ y por lo tanto la otra igualdad. En forma análoga se muestra que $\exp(\widetilde{U} \cap \mathfrak{o}(d)) = \widetilde{V} \cap O(d)$ y $\exp(\widetilde{U} \cap \mathfrak{so}(d)) = \widetilde{V} \cap SO(d)$.

Dado que $(Gl(d,\mathbb{R}), i_{Gl(d,\mathbb{R})})$ es un subgrupo de Lie de $Gl(d,\mathbb{C})$ con la topología relativa y $O(d)$, $SO(d) \subseteq Gl(d,\mathbb{R})$, se sigue del Teorema 2.6.2 que $O(d)$ y $SO(d)$ son subgrupos de $Gl(d,\mathbb{R})$.

Calculando las dimensiones de las álgebras de Lie de los subgrupos de Lie anteriores, obtenemos que $\dim SU(d) = \dim Sl(d,\mathbb{R}) = d^2 - 1$ y $\dim O(d) = \dim SO(d) = \frac{d(d-1)}{2}$.

Capítulo 7

Topología y suavidad en grupos de Lie

7.1. Morfismos continuos

En esta parte veremos algunas repercusiones del hecho de que exista un morfismo continuo de grupos entre dos grupos de Lie.

***Teorema* 7.1.1.** *Sea G un grupo de Lie y $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ morfismo continuo. Entonces φ es suave.*

Demostración. Dado que φ es un morfismo, basta ver que φ es suave en $\widetilde{U}$ una vecindad abierta de 0 pues para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi|_{l_{t_0}(\widetilde{U})} = l_{\varphi(t_0)} \circ \varphi|_{\widetilde{U}} \circ l_{-t_0}|_{l_{t_0}(\widetilde{U})}$, resultando así ser suave en todo $\mathbb{R}$.

A grandes rasgos, la demostración busca exhibir que existe dicha vecindad $\widetilde{U}$ de modo que φ restringida a ésta factoriza a traves del mapeo exponencial, es decir que existe una función $\alpha : \widetilde{U} \longrightarrow \mathfrak{g}$ suave tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{U} \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathfrak{g} \arrow[r, "\exp"'] & G
\end{tikzcd}$$

Sean U vecindad abierta de 0 en $\mathfrak{g}$ y vecindad abierta de e en G para las que $\exp|_U : U \longrightarrow V$ es difeomorfismo. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que U tiene la propiedad de que para cualquier elemento $X \in U$, $tX \in U$ para todo $0 \leqslant t \leqslant 1$ ya que los homeomorfismos lineales preservan convexidad.

Sea

$$U' = \tfrac{1}{2}U = \{\, \tfrac{1}{2}X \,:\, X \in U \,\}$$

vecindad abierta de 0 en $\mathfrak{g}$ contenida en U. Elijamos $t_0 \geqslant 0$ para el cual $[-t_0, t_0] \subseteq \varphi^{-1}(\exp(U'))$. De modo que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen únicos $X, Y \in U'$ para los cuales $\exp(X) = \varphi(\frac{t_0}{n})$ y $\exp(t_0)$.

Observemos que de mostrar que $nX = Y$ tendríamos que para todo $m \in \mathbb{Z}$ para el cual $0 < |m| \leqslant n$:

1. Si $m > 0$, $\varphi(\frac{mt_0}{n}) = (\varphi(\frac{t_0}{n}))^m = (\exp(\frac{1}{n}Y))^m = \exp(\frac{m}{n}Y)$.

2. Si $m < 0$, $\varphi(\frac{mt_0}{n}) = (\varphi(\frac{-mt_0}{n}))^{-1} = (\exp(\frac{-m}{n}Y))^{-1} = \exp(\frac{m}{n}Y)$.

De modo que para cualquier $0 \leqslant |t| \leqslant t_0$, existe una sucesión $(\frac{m_i}{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ que converge a $\frac{t}{t_0}$, donde $n_i > 0$ y $0 < |m_i| \leqslant n_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. De modo que $(\frac{m_i t_0}{n_i})$ converge a t y por la continuidad de φ

$$\varphi(t) = \exp(\tfrac{t}{t_0}Y).$$

Considerando $\widetilde{U} = (-t_0, t_0)$ habremos concluido.

Observemos que $\exp(nX) = \varphi(t_0) = \exp(Y)$. Mostraremos que $nX \in U'$ y por lo tanto $nX = Y$, por ser $\exp|_{U'}$ inyectiva. Procederemos por inducción: observemos que $X \in U'$. Supongamos que para todo $0 \leqslant j < n$, $jX \in U'$. Como $(j+1)X \in U$ y $\exp((j+1)X) = \varphi(\frac{j+1}{n}t_0) \in \exp(U')$, por ser exp inyectiva en U obtenemos que $(j+1)X \in U'$. Así concluimos que $nX \in U'$. ■

***Teorema* 7.1.2.** *Sean H^c y G^d grupos de Lie y $\varphi : G \longrightarrow H$ morfismo continuo. Entonces φ es suave.*

Demostración. Como φ es morfismo de grupos, basta verificarlo en una vecindad de e. Sea $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie de G y $\mathfrak{J} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathfrak{g}$ isomorfismo lineal, de modo que resulta un difeomorfismo. Sean U vecindad del 0 en $\mathbb{R}$ y V vecindad de e en G para las cuales $\exp : U \longrightarrow V$ es difeomorfismo. Consideremos $q \in \{1, \ldots, d\}$ y

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{i_q} \mathbb{R}^d \\ t &\longmapsto (\delta_{lq} t)_{l=1}^d \end{aligned}$$

donde δ_{lq} es la delta de Kronecker.

Por el teorema anterior $\varphi_q = \varphi \circ \exp \circ i_q : \mathbb{R} \longrightarrow H$ es un morfismo suave, para todo $q \in \{1, \ldots, d\}$; de modo que la función $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^d \longrightarrow H$ definida como

$$(x_1, \ldots, x_d) \longmapsto \tilde{\varphi}_1(x_1) \ldots \tilde{\varphi}_d(x_d)$$

es suave, y más aún $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \exp \circ \mathfrak{J}$. Podemos concluir entonces que $\varphi|_V = \tilde{\varphi} \circ \mathfrak{J}^{-1} \circ (\exp|_U)^{-1}$ es suave. ■

***Corolario* 7.1.3.** Si G es un grupo topológico, segundo numerable y localmente euclidiano, existe a lo más una estructura diferenciable que lo hace grupo de Lie

Demostración. Sean $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ estructuras difenciables que hacen a G grupo de Lie, de modo que la identidad de $(G, \mathfrak{F})$ en $(G, \mathfrak{F}')$ es homeomorfismo y por lo tanto es isomorfismo de grupos de Lie. De ese modo $(G, \mathfrak{F}) = (G, \mathfrak{F}')$. ■

Gleason junto con Montgomery y Zippen resolvieron en 1952 el problema planteado por Hilbert al Congreso Internacional de Matemáticas en 1900, que era decidir si todo grupo topológico conexo, segundo numerable y localmente euclidiano tiene una estructura diferenciable que lo hace grupo de Lie, respondiendo que afirmativamente (véase [M-Z]).

Por otro lado es posible mostrar que toda estructura de variedad difenciable de un grupo de Lie contiene una estructura analítica, es decir, una colección de sistemas coordenados cuyos mapeos dan composiciones localmente representadas por series de potencias. Se obtiene además un teorema análogo al 7.1.2 que nos dice que todo morfismo continuo entre grupos de Lie es analítico, del cual se sigue que la estructura analítica contenida en la estructura diferenciable de un grupo de Lie es única.

7.2. Subgrupos cerrados

***Teorema* 7.2.1.** *Sea G un grupo de Lie y A un subgrupo cerrado abstracto de G. Entonces existe una única estructura de variedad para A que lo hace subgrupo de Lie de G (en dicha estructura A tiene la topología relativa).*

Demostración. A lo largo de la siguiente demostración incluimos la prueba de algunas afirmaciones que nos serán de utilidad.

Observemos que el hecho de que A sea cerrado y de que posea una estructura de variedad que lo haga subvariedad de G nos dice que debe ser un encaje (Teoremas 5.2.8 y 5.2.10).

Veremos que este resultado es una aplicación del Teorema 6.1.9, por lo que la demostración busca mostrar que se satisfacen las condiciones de dicho Teorema. Sea

$$\mathfrak{a} = \{ X \in \mathfrak{g} : \exp(tX) \in A, \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \}.$$

Observemos que $0 \in \mathfrak{a}$; por definición, si $X \in \mathfrak{a}$ entonces $tX \in \mathfrak{a}$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Si además $Y \in \mathfrak{a}$, en general

$$\lim_{n\to\infty} (\exp(\tfrac{t}{n}X)\exp(\tfrac{t}{n}Y))^n = \exp(t(X+Y)) \tag{7.1}$$

lo cual se demostrará en el Lema posterior a este Teorema. Considerando esto y dado que A es cerrado, podemos concluir que $X + Y \in \mathfrak{a}$. De ese modo $\mathfrak{a}$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$.

Ahora buscamos mostrar la existencia de $U \subseteq \mathfrak{g}$ y $V \subseteq G$ vecindades abiertas de 0 y e, respectivamente de tal forma que $\exp|_U : U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo y para las cuales

$$\exp(U \cap \mathfrak{a}) = V \cap A.$$

Supongamos que no existen vecindades abiertas con dichas propiedades.

Afirmación. *En caso de que dichas vecindades no existan, es posible encontrar $W \subseteq \mathfrak{g}$ vecindad abierta de 0 y una sucesión $(\sigma_i)_{i\in I}$ de elementos en A que converge a e y para la cual, dado $i \in \mathbb{N}$, $\sigma_i \notin exp(W \cap \mathfrak{a})$.*

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ base local de 0 con la propiedad de que $\exp|_{U_i}$ es un difeomorfismo sobre el abierto $\exp(U_i) \subseteq G$ y

$$\exp(U_i \cap \mathfrak{a}) \subset \exp(U_i) \cap A. \tag{7.2}$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $U_1 \supset U_2 \subset \dots$

Notemos que para cualquier $i \in \mathbb{N}$ existe $\sigma_i \in \exp(U_i) \cap A \setminus \exp(U_1 \cap \mathfrak{a})$ ya que de lo contrario existiría $i \in \mathbb{N}$ para el cual

$$\exp(U_i) \cap A \subseteq \exp(U_1 \cap \mathfrak{a})$$

y en ese caso para todo $x \in \exp(U_i) \cap A$ existen $X_i \in U_i$ tal que $\exp(X_i) = x$ y $X_i' \in U_1 \cap \mathfrak{a}$ para el cual $\exp(X_i') = x$.

Como $\exp|_{U_1}$ es inyectiva, $X_i' = X_i$ y por lo tanto

$$x \in \exp(U_i \cap \mathfrak{a}),$$

es decir, $\exp(U_i) \cap A \subseteq \exp(U_i \cap \mathfrak{a})$, que contradice la propiedad (7.2).

Observemos que $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos en A que converge a e, pues $\{\exp(U_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base local de e y además para toda $i \in \mathbb{N}$

$$\sigma_i \notin \exp(U_1 \cap \mathfrak{a}).$$

Elijiendo $W = U_1$ obtenemos el resultado. ∎

Sea $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$ subespacio tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Consideremos el mapeo suave

$$\alpha : \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \longrightarrow G$$

definido como $\alpha(X, Y) = \exp X \exp Y$.

Afirmación. *$d\alpha_{(0,0)}$ es un isomorfismo.*

Demostración. Consideremos $\{ X_1, \ldots, X_c \}$ una base de $\mathfrak{a}$ y $\{ X_{c+1}, \ldots, X_d \}$ una base de $\mathfrak{b}$. Sea la transformación lineal $\phi : \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ para la cual

$$\begin{aligned} (X_i, 0) &\longmapsto e_i, \quad i \in \{ 1, \ldots, c \} \\ (0, X_j) &\longmapsto e_j, \quad j \in \{ c+1, \ldots, d \} \end{aligned}$$

de modo que $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_d)$ es un mapeo coordenado de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$.

Observemos que para cualquier $f \in C_e^\infty(G)$ y $i \in \{ 1, \ldots, d \}$.

$$\begin{aligned} d\alpha_{(0,0)}\left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}\right)(f) &= \frac{\partial (f \circ \alpha)}{\partial \phi_i}(0,0) = \frac{\partial (f \circ \alpha \circ \phi^{-1})}{\partial r_i}(\hat{0}) \\ &= \frac{d(f \circ \exp(tX_i))}{dt}(0) = \frac{d(f \circ \exp_{X_i}(t))}{dt}(0) \\ &= d(\exp_{X_i})_0(f) = (X_i)_e(f) \end{aligned}$$

Por lo tanto $d\alpha_{(0,0)}(\frac{\partial}{\partial \phi_i}) = (X_i)_e$ para cualquier $i \in \{ 1, \ldots, d \}$, concluyendo así que $d\alpha_{(0,0)}$ es un isomorfismo.

■

Por el Teorema de la función inversa existen $W_\mathfrak{a} \subseteq W \cap \mathfrak{a}$ y $W_\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}$ vecindades abiertas de 0 en $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ respectivamente, de tal forma que $\alpha|_{W_\mathfrak{a} \times W_\mathfrak{b}}$ es un difeomorfismo sobre su imagen abierta en G.

Afirmación. *Existe $W_\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}$ vecindad abierta de 0 para la cual $\alpha|_{W_\mathfrak{a} \times W_\mathfrak{b}}$ es un difeomorfismo sobre su imagen que es abierta en G y además*

$$A \cap \exp(W_\mathfrak{b} \setminus 0) = \emptyset \tag{7.3}$$

Demostración. Supongamos que no es posible elegir tal $W_\mathfrak{b}$, de modo que existe una sucesión $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ con elementos en $W_\mathfrak{b} \setminus \{0\}$ y para la cual $\exp(X_i) \in A$. Consideremos una sucesión de elementos en $\mathbb{R}^+$ que converge a cero y para el cual una subsucesión de $(\frac{X_i}{t_i})_{i \in \mathbb{N}}$ converge a un elemento $X \neq 0$. Para conseguir dicha sucesión de reales positivos, consideremos un isomorfismo lineal de $\mathfrak{b}$ en $\mathbb{R}^m$, donde $m = \dim_\mathbb{R} \mathfrak{b}$, de modo que resulta un homeomorfismo. Induciendo la métrica de $\mathbb{R}^m$ en $\mathfrak{b}$ mediante este isomorfismo, podemos considerar $t_i = ||X_i||$, de tal modo que $(\frac{X_i}{t_i})_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión contenida en $C_1 = \{ X \in \mathfrak{b} : ||X|| = 1 \}$ que es compacto. Por lo tanto $\{ \frac{X_i}{t_i}_{i \in \mathbb{N}} \}$ tiene un punto de acumulación $X \in C_1$, el cual resulta límite de una subsucesión $(\frac{X_{i_k}}{t_{i_k}})_{k \in \mathbb{N}}$.

Sea $t \geqslant 0$. Denotemos $\mathfrak{n}_k(t)$ el mayor entero menor o igual a $\frac{t}{t_{i_k}}$ de modo que

$$\frac{t}{t_{i_k}} - 1 < \mathfrak{n}_k(t) \leqslant \frac{t}{t_{i_k}}$$

Así $(t_{i_k}\mathfrak{n}_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a t. Por la continuidad de la función exponencial

$$\exp(tX) = \exp(\lim_{k\to\infty} \mathfrak{n}_k(t)X_{i_k}) = \lim_{k\to\infty}(\exp X_{i_k})^{\mathfrak{n}(t)}$$

Como A es cerrado y $(\exp X_{i_k})^{\mathfrak{n}(t)} \in A$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $\exp(tX) \in A$.
Si $t < 0$ entonces $\exp(tX) = (\exp(-tX))^{-1} \in A$. De modo que $X \in \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} = \{0\}$, que es una contradicción ya que $X \neq 0$.
Por lo tanto existe $W_{\mathfrak{b}} \subseteq \mathfrak{b}$ vecindad abierta de 0 que satisface

$$A \cap \exp(W_{\mathfrak{b}} \setminus 0) = \emptyset.$$

■

Sea $k \in \mathbb{N}$ para la cual $\sigma_k \in \alpha(W_{\mathfrak{a}} \times W_{\mathfrak{b}})$ y $X_{\mathfrak{a}} \in W_{\mathfrak{a}}$, $X_{\mathfrak{b}} \in \mathfrak{b}$ tales que $\alpha(X_{\mathfrak{a}}, X_{\mathfrak{b}}) = \exp(X_{\mathfrak{a}})\exp(X_{\mathfrak{b}}) = \sigma_k$.
Como $\sigma_k \notin \exp(W\cap\mathfrak{a})$, $X_{\mathfrak{b}} \neq 0$ y $\exp(X_{\mathfrak{b}}) = (\exp(X_{\mathfrak{a}}))^{-1}\sigma_k \in A$ contradiciendo (7.3).

Así se satisface que existan $U \subseteq \mathfrak{g}$ y $V \subseteq G$ vecindades abiertas de 0 y e respectivamente, tales que $\exp|_U : U \longrightarrow V$ es difeomorfismo y

$$\exp(U \cap \mathfrak{a}) = V \cap A$$

y por tanto las condiciones del Teorema 6.1.9.

■

***Lema* 7.2.2.** Sea G^d grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Si $X, Y \in \mathfrak{g}$ entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para cualquier $t \in (-\epsilon, \epsilon)$

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp(t(X+Y) + h(t))$$

donde $h : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathfrak{g}$ es suave y además $h = O(t^2)$, es decir que dado ϕ un mapeo coordenado de $\mathfrak{g}$, $\frac{\phi\circ h(t)}{t^2}$ es acotado cuando $t \to 0$ (véase A.3).

Demostración. Sea $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow G$ curva suave definida como

$$\sigma(t) = \exp(tX)\exp(tY).$$

Dado que el mapeo exponencial es un difeomorfismo local alrededor de 0 existen $\epsilon > 0$ y una curva suave $\sigma_{\mathfrak{g}} : (\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathfrak{g}$ que satisface

$$\exp(\sigma_{\mathfrak{g}}) = \sigma(t) = \exp(tX)\exp(tY)$$

para toda $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Como $\dot{\sigma}(0) = X_e + Y_e$ (Lema 7.2.3), $\dot{\sigma}_{\mathfrak{g}}(0) = X + Y$ quedando así la expansión de Taylor de grado 1 para σ como

$$\sigma_{\mathfrak{g}}(t) = \sigma_{\mathfrak{g}}(0) + t(X+Y) + h(t)$$

donde $h(t) = R_{(1,0)}(t)$ es el residuo de grado 1 de la expansión de Taylor de $\sigma_{\mathfrak{g}}$.

Concluimos que

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp(\sigma_{\mathfrak{g}}(t)) = \exp(t(X+Y) + h(t))$$

donde $h(t) = O(t^2)$. ■

***Lema* 7.2.3.** Sean σ y τ curvas en un grupo de Lie G^d tales que $\sigma(0) = \tau(0) = e$ y sea α la multiplicación de estas dos, es decir $\alpha(t) = \sigma(t)\tau(t)$. Pruebe que

$$\dot{\alpha}(0) = \dot{\sigma}(0) + \dot{\tau}(0)$$

Demostración. Sea $\mu : G \times G \longrightarrow G$ la multiplicación en G, de modo que $\alpha = \mu \circ (\sigma, \tau)$, así

$$\dot{\alpha}(0) = d\mu_{(e,e)}(\dot{\sigma}(0), \dot{\tau}(0)).$$

Basta mostrar que dados $\nu,\, \omega \in T_eG$,

$$d\mu_{(e,e)}(\nu, \omega) = \nu + \omega$$

para concluir la prueba.

Sea $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_d))$ sistema coordenado de G tal que $e \in U$, de modo que $(U \times U, \varphi \times \varphi)$ es un sistema coordenado de $G \times G$ alrededor de (e, e). En la identificación canónica de $T_(e,e)(G \times G)$ con $T_e(G) \times T_eG$ mediante el isomorfismo $(d\pi_1, d\pi_2)$ (donde π_1 y π_2 denotan las proyecciones canónicas de $G \times G$ en G), tenemos la correspondencia

$$(\nu, 0) \longmapsto \sum_{i=1}^{d} \nu(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{(e,e)}$$

Así, para cualquier $f \in C_e^\infty(G)$

$$\begin{aligned}
d\mu_{(e,e)}(\nu,0)(f) &= \sum_{i=1}^{d} \nu(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{(e,e)} (f\circ\mu) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \nu(x_i) \frac{\partial(f\circ\mu\circ(\varphi^{-1}\times\varphi^{-1}))}{\partial r_i}(\varphi(e),\varphi(e)) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \nu(x_i) \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(e)) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{d} \nu(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{(e)}\right)(f) = \nu(f)
\end{aligned}$$

concluyendo con ello que $d\mu_{(e,e)}(\nu,0)=\nu$. Análogamente tenemos que $d\mu_{(e,e)}(0,\omega)=\omega$.

Así, por linealidad de $d\mu_{(e,e)}$ tenemos que

$$d\mu_{(e,e)}(\nu,\omega) = d\mu_{(e,e)}((\nu,0)+(0,\omega)) = \nu+\omega.$$

■

Gracias a este Lema podemos concluir la igualdad (7.1) del Teorema 7.2.1 , pues para cualquier $t\in\mathbb{R}$ existe $N\in\mathbb{N}$ para el cual todo $n\geqslant N$ satisface que $\frac{t}{n}\in(-\epsilon,\epsilon)$, de modo que por ser $h(s)=O(s^2)$,

$$\lim_{n\geqslant N} nh(\tfrac{t}{n}) = \lim_{n\geqslant N} \frac{t^2}{n}\left(\frac{h(\frac{t}{n})}{\frac{t^2}{n^2}}\right) = 0$$

De esa forma

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(\exp(\tfrac{t}{n}X)\exp(\tfrac{t}{n}Y))^n &= \lim_{n\to\infty}(\exp(\tfrac{t}{n}(X+Y)+h(\tfrac{t}{n})))^n \\
&= \lim_{n\geqslant N}\exp(t(X+Y)+nh(\tfrac{t}{n})) \\
&= \exp(t(X+Y)+\lim_{n\geqslant N} nh(\tfrac{t}{n})) \\
&= \exp(t(X+Y)).
\end{aligned}$$

***Teorema* 7.2.4.** *Sea $\Psi: G\longrightarrow K$ morfismo de grupos de Lie, entonces $A=\ker\Psi$ es un subgrupo de Lie cerrado de G con álgebra de Lie igual a $\ker d\Psi$.*

Demostración. Sabemos que $\ker\Psi$ es un subgrupo cerrado abstracto de G, de modo que es un subgrupo de Lie de G según el Teorema anterior. Denotemos $\mathfrak{a}$ al álgebra de Lie de A. Basta demostrar que coincide con $\ker\Psi$, es decir que $di_A(\mathfrak{a})=\ker\Psi,$ donde i_A denota el mapeo inclusión de A en G.

Por un lado, $\Psi \circ i_A = 0$, por lo que $d(\Psi \circ i_A) = 0$; de ese modo $di_A(\mathfrak{a}) \subseteq \ker \Psi$.

Sea $X \in \ker d\Psi$, entonces para cualquier $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\exp(tX) = \exp(td\Psi(X))) = e,$$

es decir, $\exp(tX) \in \ker\varphi$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Por la Proposición 6.1.8 aplicada a (A, i_A), $X \in di_A(\mathfrak{a})$, concluyendo con ello la igualdad. ■

Capítulo 8

Linealización en grupos de Lie

8.1. La representación adjunta

Definición 8.1.1. Sean G un grupo de Lie y M una variedad diferenciable. Diremos que un mapeo suave $\mu : G \times M \longrightarrow M$ es una *acción izquierda de G en M* si satisface

1. Para cualesquiera $\sigma,\ \tau \in G,\ m \in M$

$$\mu(\sigma\tau, m) = \mu(\sigma, \mu(\tau, m))$$

2. Si $m \in M$ entonces

$$\mu(e, m) = m.$$

Análogamente diremos que un mapeo suave $\tilde{\mu} : M \times G \longrightarrow M$ es una *acción derecha de G en M* si satisface

1'. Para cualesquiera $\sigma,\ \tau \in G,\ m \in M$

$$\tilde{\mu}(m, \sigma\tau) = \tilde{\mu}(\tilde{\mu}(m, \sigma), \tau)$$

2'. Si $m \in M$ entonces

$$\tilde{\mu}(m, e) = m.$$

Esta definición se generaliza para grupos topológicos; en ese caso, siendo G un grupo topológico y M un espacio topológico se dice que un mapeo continuo

$\mu : G \times M \longrightarrow M$ es una *acción izquierda de* G *en* M si satisface las condiciones 1 y 2 de la noción anterior. Análogamente se puede define una *acción derecha de* G *en* M. En lo siguiente nos restringiremos al caso de acciones como la especificada en la definición 8.1.1.

Observación 8.1.2. Si μ es una acción izquierda de G en M, dado $\sigma \in G$, $\mu_\sigma : M \longrightarrow M$ definido como $\mu_\sigma(m) = \mu(\sigma, m)$ es un difeomorfismo. De hecho, denotando como $\mathrm{Diff}(M)$ al grupo de difeomorfismos de M,

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{Diff}\ (\mathrm{M}) \\ \sigma & \longmapsto & \mu_\sigma \end{array}$$

es un morfismo de grupos y por el primer Teorema de isomorfismo

$$G/\ker\rho \cong \mathrm{Im}\,\rho = \{\, \mu_\sigma : M \longrightarrow M \ : \ \sigma \in G \,\}.$$

Cuando no haya lugar a confusión llamaremos a $\mathrm{Im}\,\rho$ *el grupo de difeomorfismos de* G *en* M.

Ejemplo 8.1.3. Dados un grupo de Lie G y $\mu : G \times G \longrightarrow G$ su multiplicación, es sencillo verificar que μ es una acción izquierda (derecha) de G en sí mismo.

Otra acción inducida por μ es

$$a : G \times G \longrightarrow G \quad \text{definida como}$$

$$a(g, \sigma) = g\sigma g^{-1}$$

donde $g\sigma$ denota a $\mu(g, \sigma)$.

Resulta suave pues $a = \mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_G) \circ \Psi$ donde

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\Psi} & G \times G \times G \\ (g, \sigma) & \longmapsto & (g, \sigma, g^{-1}) \end{array}$$

además satisface las condiciones 1 y 2 de la definición 8.1.1 pues para cualesquiera $\sigma, h, g \in G$,

1. $a(gh, \sigma) = (gh)\sigma(gh)^{-1} = gh\sigma h^{-1}g^{-1} = a(g, h\sigma h^{-1}) = a(g, a(h, \sigma))$.

2. $a(e, \sigma) = e\sigma e = \sigma$.

Esta acción resultará de suma importancia y será retomada en breve.

***Teorema* 8.1.4.** *Sea* $\mu : G \times M \longrightarrow M$ *una acción izquierda de* G *en* M^d*. Supongamos que existe un punto fijo* $m_0 \in M$*, es decir que para cualquier* $\sigma \in G$*,* $\mu_\sigma(m_0) = m_0$*. Entonces el mapeo*

$$\Psi : G \longrightarrow Aut(T_{m_0}M)$$

definido como

$$\Psi(\sigma) = d(\mu_\sigma)_{m_0}$$

es una respresentación de G*.*

Demostración. Dados $\sigma, \tau \in G$, $\mu_{\sigma\tau} = \mu_\sigma \circ \mu_\tau$ (véase la observación 8.1.2), de modo que

$$\begin{aligned}\Psi(\sigma\tau) &= d(\mu_{\sigma\tau})_{m_0} = d(\mu_\sigma \circ \mu_\tau)_{m_0}\\ &= d(\mu_\sigma)_{m_0} \circ d(\mu_\tau)_{m_0} = \Psi(\sigma)\Psi(\tau).\end{aligned}$$

De modo que es un morfismo de grupos. Veamos ahora que es suave.

Sea $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_d))$ sistema coordenado de M tal que $m_0 \in U$, de modo que $\beta = \{ \frac{\partial}{\partial x_i}|_{m_0}, \}$ es una base en $T_{m_0}M$ e induce un isomorfismo de grupos de Lie

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(T_mM) &\xrightarrow{\lambda} Gl(d, \mathbb{R})\\ T \quad &\longmapsto [T]_\beta\end{aligned}$$

de modo que basta mostrar que $\lambda \circ \Psi$ es suave para concluir que Ψ lo es.

Sabemos que dados $\sigma \in G$ y $j \in \{1, \ldots, d\}$

$$d(\mu_\sigma)_{m_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{m_0}\right) = \sum_{i=1}^{d} \left.\frac{\partial(x_j \circ \mu_\sigma)}{\partial x_i}\right|_{m_0} \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{m_0}.$$

De modo que

$$(\lambda \circ \Psi)_{ij} = \left.\frac{\partial(x_j \circ \mu_\sigma)}{\partial x_i}\right|_{m_0} = \left.\frac{\partial(x_j \circ \mu \circ (\mathrm{id}_G \times \varphi^{-1}))}{\partial r_i}\right|_{(\sigma, \varphi(m_0))}$$

Dado que $x_j \circ \mu \circ (\mathrm{id}_G \times \varphi^{-1})) : G \times \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ es suave, $\Psi_{ij} = \frac{\partial(x_j \circ \mu \circ (\mathrm{id}_G \times \varphi^{-1}))}{\partial r_i} : G \times \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ también lo es.

Si $i_0 : G \longrightarrow G \times \varphi(U)$ es tal que $i_0(g) = (g, \varphi(m_0))$ entonces $\Psi_{ij} \circ i_0 = (\lambda \circ \Psi)_{ij}$ y por lo tanto $\lambda \circ \Psi$ es suave.

■

Definición 8.1.5. Considerando la acción $a : G\times G \longrightarrow G$ definida en el ejemplo 8.1.3, e es un punto fijo de ésta. Por el Teorema anterior y el isomorfismo canónico entre T_eG y $\mathfrak{g}$, el álgebra de Lie de G, obtenemos la representación

$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \\ \sigma &\longmapsto da_\sigma \end{aligned}$$

donde $da_\sigma(X)$ es el campo en $\mathfrak{g}$ cuyo valor en e es $d(a_\sigma)_e(X_e)$, llamada la *representación adjunta*.

Denotemos $\mathrm{Ad}(\sigma)$ como Ad_σ. Gracias al Teorema 6.1.7 obtenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{Ad}_\sigma"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "a_\sigma"'] & G \end{tikzcd}$$

es decir que para toda $X \in \mathfrak{g}$ y $t \in \mathbb{R}$

$$\sigma\exp(tX)\sigma^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}_\sigma(tX)) = \exp(t\mathrm{ad}_\sigma(X)).$$

De forma análoga, denotando $d\,\mathrm{Ad}$ como ad, tenemos

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{ad}"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"'] & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \end{tikzcd}$$

En el caso particular en el que G = Aut (V), siendo V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita d, dados $T \in G$ y $\lambda \in \mathrm{End}(V)$, por la observación 6.11 y las propiedades (6.9) y (6.4)

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_T(\lambda) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (a_T \circ \exp(t\lambda)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (T \circ \exp(t\lambda) \circ T^{-1}) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp(t(T \circ \lambda \circ T^{-1}))) = T \circ \lambda \circ T^{-1}\,. \end{aligned}$$

En forma análoga, si G es $Gl(d,\mathbb{R})$ (o bien $Gl(d,\mathbb{C})$) obtenemos que dado $B \in Gl(d,\mathbb{R})$ y $C \in \mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})$

$$\mathrm{Ad}_B(C) = BCB^{-1}.$$

En lo sucesivo denotaremos $\mathrm{ad}(X)$ como ad_X.

Para la siguiente demostración es útil recordar que si V es un $\mathbb{R}$- espacio vectorial de dimensión finita d, dada $\beta = \{ v_1, \ldots, v_d \}$ base de V y $\beta^* = \{ \phi_1, \ldots, \phi_d \}$ su base dual, al definir para toda $i, j \in \{ 1, \ldots, d \}$ la transformación lineal $T_{ij} : V \longrightarrow V$ para la cual

$$T_{ij}(v_k) = \delta_{ik} v_j \,,$$

el conjunto $\gamma = \{ T_{ij} \}$ es una base para $\mathrm{End}(V)$. Más aún, para cualquier $T \in \mathrm{End}(V)$

$$T = \sum_{i,j=1}^{d} \phi_j(T(v_i)) T_{ij}. \tag{8.1}$$

***Proposición* 8.1.6.** Sea G^d un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$, entonces

$$\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y].$$

Demostración. Sea $\beta = \{ X_1, \ldots, X_d \}$ base de $\mathfrak{g}$ y $\beta^* = \{ \phi_1, \ldots, \phi_d \}$ su base dual. Observemos que basta mostrar que

$$\mathrm{ad}_{X_l}(X_s) = [X_l, X_s] \,,$$

para cualesquiera $l, s \in \{ 1, \ldots, d \}$, pues ad induce un mapeo bilineal en $\mathfrak{g}$.

Para $i, j \in \{ 1, \ldots, d \}$ definamos $T_{ij} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ la transformación lineal que satisface

$$T_{ij}(X_k) = \delta_{ik} X_j \,,$$

donde δ_{ik} es la delta de Kronecker. Así $\{ T_{ij} \}$ es un base de $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$, de modo que para cualquier $T \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$

$$T = \sum_{i,j=1}^{d} \phi_j(T(X_i)) T_{ij}$$

(Véase la igualdad (8.1)).

Haciendo las identificaciones correspondientes y tomando $\{ \tau_{ij} \}$ la base dual de $\{ T_{ij} \}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\xrightarrow{d\mathrm{Ad}} \mathrm{End}(g) \\ X &\longmapsto \sum_{i,j=1}^{d} X_e(\tau_{ij} \circ \mathrm{Ad}) T_{ij} \end{aligned}$$

Veamos que para cualesquiera $l, s \in \{1, \ldots, d\}$

$$\mathrm{ad}_{X_l}(X_s) = \sum_{i,j=1}^{d} (X_l)_e(\tau_{ij} \circ \mathrm{Ad}) T_{ij}(X_s) = [X_l, X_s]\,.$$

Por definicion

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{d} (X_l)_e(\tau_{ij} \circ \mathrm{Ad}) T_{ij}(X_s) &= \sum_{j=1}^{d} (X_l)_e(\tau_{sj} \circ \mathrm{Ad}) X_j \\
&= \sum_{j=1}^{d} d(\exp_{X_l})_0 \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \right) (\tau_{sj} \circ \mathrm{Ad}) X_j \\
&= \sum_{j=1}^{d} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} (\tau_{sj} \circ \mathrm{Ad} \circ \exp_{X_l}(t)) X_j \qquad (8.2) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} (\tau_{sj}(da_{\exp_{X_l}(t)})) X_j \\
&= \sum_{j=1}^{d} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} (\phi_j(da_{\exp_{X_l}(t)}(X_s))) X_j\,.
\end{aligned}$$

Observemos que $da_{\exp_{X_l}(t)} \in \mathfrak{g}$.

Si para $X \in \mathfrak{g}$ denotamos X_t al elemento del grupo uniparamétrico correspondiente a X, considerando $f \in C_e^{\infty}(G)$ se tiene

$$\begin{aligned}
(da_{\exp_{X_l}(t)}(X_s))_e(f) &= (X_s)_e(f \circ a_{\exp_{X_l}(t)}) \\
&= (X_s)_e(f \circ r_{\exp_{X_l}(-t)} \circ l_{\exp_{X_l}(t)}) = (X_s)_{\exp_{X_l}(t)}(f \circ r_{\exp_{X_l}(-t)}) \\
&= dr_{\exp_{X_l}(-t)}(X_s)_{(X_l)_t(e)}(f) = d(X_l)_{-t}(X_s)_{(X_l)_t(e)}(f).
\end{aligned}$$

Dado que X_s, $d(X_l)_{-t}(X_s) \in \mathfrak{g}$, observemos que para todo $\sigma \in G$

$$\begin{aligned}
dl_\sigma(d(X_l)_{-t}(X_s)_{(X_l)_t(e)}) &= dl_\sigma(dl_{(X_l)_t(e)}(d(X_l)_{-t}(X_s)_e)) \\
&= dl_{\sigma(X_l)_{-t}(e)}(d(X_l)_{-t}(X_s)_e) = dl_{\sigma \exp_{X_l}(t)}(d(X_l)_{-t}(X_s)_e) \\
&= dl_{(X_l)_t(\sigma)}(d(X_l)_{-t}(X_s)_e) = d(X_l)_{-t}(X_s)_{(X_l)_t(\sigma)}\,.
\end{aligned}$$

De modo que

$$da_{\exp_{X_l}(t)}(X_s) = d(X_l)_{-t}(X_s) \circ (X_l)_t \qquad (8.3)$$

Por el corolario 2.5.3 del Teorema de la Función inversa y la Proposición 2.8.12 sabemos que existe un sistema coordenado alrededor de e, (U, ϕ) con funciones coordenadas $x_1, \ldots, x_d$ de tal modo que

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_U = X_j, \qquad j \in \{1, \ldots, d\}.$$

De ese modo, si $X \in \mathfrak{g}$ entonces para todo $m \in M$

$$d(x_j)_m(X) = \phi_j(X),$$

es decir, $dx_j(X) = \phi_j(X)$ en U.

Así por las igualdades (8.2), (8.3) y por la proposición 3.5.2 inciso (ii)

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ad}_{X_l}(X_s))_e &= \sum_{j=1}^{d} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} (\phi_j(d(X_l)_{-t}(X_s) \circ (X_l)_t))(X_j)_e \\
&= \sum_{j=1}^{d} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} (dx_i(d(X_l)_{-t}(X_s) \circ (X_l)_t)) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_e \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} (d(X_l)_{-t}(X_s)_{(X_l)_t(e)}) = [X_l, X_s]_e\,.
\end{aligned}$$

Es decir

$$\mathrm{ad}_{X_l}(X_s) = [X_l, X_s].$$

■

Así como en anillos, podemos definir el concepto de ideal para álgebras de Lie. Diremos que $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ un subespacio vectorial del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, es un ideal de $\mathfrak{g}$ si para cualesquiera $a \in \mathfrak{h}$, $b \in \mathfrak{g}$, $[a, b] \in \mathfrak{h}$ (por lo que $[b, a] = -[a, b] \in \mathfrak{h}$).

***Teorema* 8.1.7.** *Sea A subgrupo de Lie conexo de un grupo de Lie conexo G. Entonces A es un subgrupo normal de G si y sólo si el álgebra de Lie $\mathfrak{a}$ de A es un ideal en $\mathfrak{g}$.*

Demostración. Observemos que bajo las hipótesis obtenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{a} \arrow[r, "di_A"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{Ad}_\sigma"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{ad}"] \arrow[d, "\exp"] & \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\exp"] \\
A \arrow[r, "i_A"'] & G \arrow[r, "a_\sigma"'] & G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"'] & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})
\end{tikzcd}$$

donde $\sigma = \exp(tX)$.

Identifiquemos $\mathfrak{a}$ con $di_A(\mathfrak{a})$. Dado $Y \in \mathfrak{a}$ y $s \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \exp(tX)\exp(sY)\exp(-tX) &= \exp(\mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(sY)) \\ &= \exp s\{(\exp \circ \mathrm{ad}_{tX})(Y)\} = \tilde{\sigma}\,. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Supongamos que A es normal, de manera que $\tilde{\sigma} \in A$. Por el Teorema 6.1.8, $(\exp \circ \mathrm{ad}_{tX})(Y) \in \mathfrak{a}$ y gracias a la igualdad (6.9) obtenemos

$$(\exp \circ \mathrm{ad}_{tX})(Y) = Y + t[X,Y] + \frac{t^2}{2!}[X,[X,Y]] + ...$$

Notemos que $(\exp \circ \mathrm{ad}_{tX})(Y)$ es una curva suave en $\mathfrak{a}$ cuya derivada en cero es $[X,Y]$, por lo que $[X,Y] \in \mathfrak{a}$.

Supongamos ahora que $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. Observemos que basta mostrar que existen vecindades abiertas $V \subseteq A$, $W \subseteq G$ de e en A y G respectivamente, de modo que $W = W^{-1}$ y tales que para cualesquiera $a \in V$ y $g \in W$ se satisfaga que $gag^{-1} \in A$, pues

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V^n \quad y \quad G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W^n\,,$$

y por lo tanto dado $a = v_1 \dots v_n \in A$, con $v_i \in V$, si $g \in W$ se tiene que $gag^{-1} = gv_1g^{-1}gv_2g^{-1}\dots gv_n\mathfrak{g}^{-1} \in A$. De modo que $WAW = A$. Tomando $g = w_1 \dots w_m \in G$, con $w_i \in W$, por inducción sobre m se sigue que $gAg^{-1} \subseteq A$.

Consideremos $U \subseteq \mathfrak{g}$ vecindad abierta de 0 y $W \subseteq G$ vecindad abierta de e para las cuales $\exp|_U : U \longrightarrow W$ es un difeomorfismo. Sin pérdida de generalidad supongamos que W es simétrico (es decir, $W = W^{-1}$).

Sea $V \subseteq A$ vecindad abierta de e en A, tal que $\exp|_{\exp^{-1}(V)}$ es un difeomorfismo y $V \subseteq W$.

Sea $Y \in \exp^{-1}(V)$. Así, por la igualdad 8.4, para cualquier $X \in \exp^{-1}(W)$

$$\exp X(\exp Y)\exp(-X) = \exp\{(\exp \circ \mathrm{ad}_X)(Y)\}\,,$$

de modo que

$$(\exp \circ \mathrm{ad}_X)(Y) = Y + [X,Y] + \frac{1}{2!}[X,[X,Y]] + ...$$

Como $\mathfrak{a}$ es un ideal y un subconjunto cerrado de $\mathfrak{g}$ entonces $(\exp\circ\mathrm{ad}_X)(Y) \in \mathfrak{a}$. Por el Teorema 6.1.8, $\exp\{(\exp \circ \mathrm{ad}_X)(Y)\} \in A$. Así por la suprayectividad del mapeo exponencial en V y W se sigue el resultado.

■

Definición 8.1.8. Sea G grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie.

Llamamos *el centro de* $\mathfrak{g}$ al conjunto

$$C_{\mathfrak{g}} = \{\, X \in \mathfrak{g} \,:\, [X,Y] = 0, \quad \text{para cualquier} \quad Y \in \mathfrak{g}\,\} = \ker \mathrm{ad}.$$

De igual forma que para grupos abstractos, llamamos el *centro de* G al conjunto

$$C_G = \{\, \sigma \in G \,:\, \tau\sigma = \sigma\tau, \quad \text{para cualquier} \quad \tau \in G\,\}.$$

***Teorema* 8.1.9.** *Sea G un grupo de Lie conexo, entonces C_G es el kernel de la representación adjunta.*

Demostración. Sea $\sigma \in C_G$, de modo que $a_\sigma = \mathrm{id}_G$ y por lo tanto $\mathrm{Ad}_\sigma = da_\sigma = \mathrm{id}_g$, de modo que $C_G \subseteq \ker\mathrm{Ad}$.

Sean $\tau \in \ker\mathrm{Ad}$, $U \subseteq \mathfrak{g}$ y $V \subseteq G$ vecindades abiertas de 0 y e respectivamente, tales que $\exp|_U : u \longrightarrow V$ es un difeomorfismo. Notemos que dado $X \in U$

$$\sigma\exp(X)\sigma^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}_\sigma(X)) = \exp X$$

De modo que todo elemento de V conmuta con σ. Como G es conexo entonces

$$G = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V^k;$$

así para cualquier $\tau \in G$ existe $v_1, \ldots, v_n \in V$ tales que $\tau = v_1 \ldots v_n$ y así

$$\begin{aligned} \sigma\tau\sigma^{-1} &= \sigma v_1\sigma^{-1}\sigma v_2\sigma^{-1} \ldots \sigma v_n \sigma v_n \\ &= v_1 v_2 \ldots v_n = \tau. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\ker\mathrm{Ad} \subseteq C_G$.

■

***Corolario* 8.1.10.** Sea G un grupo de Lie conexo, entonces C_G es un subgrupo cerrado de G con álgebra de Lie $C_{\mathfrak{g}} = \ker \mathrm{ad}$.

Demostración. Se sigue de los Teoremas 7.2.4 y 8.1.9. ■

***Corolario* 8.1.11.** Sea G grupo de Lie conexo. Entonces G es abeliano si y sólo si $C_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$.

En general, dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ si $C_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$ diremos que el álgebra de Lie es *abeliana*. Esta definición queda motivada por el corolario 8.1.11.

***Proposición* 8.1.12.** Sea G grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$ tales que $[X, Y] = 0$, entonces

$$\exp(X + Y) = \exp(X)\exp(Y)$$

Demostración. Sea $\mathfrak{a}$ el subespacio generado por X, Y. Observemos que resulta una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Sea (A, i_A) el subgrupo de Lie conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{a}$, de modo que A es abeliano.

De ese modo para toda $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp(tY)\exp(tX)$$

Así, por la igualdad (7.1) del Teorema 7.2.1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\exp(t(X + Y)) &= \lim_{n\to\infty} (\exp(\tfrac{t}{n}X)\exp(\tfrac{t}{n}Y))^n \\
&= \lim_{n\to\infty} (\exp(\tfrac{t}{n}X))^n(\exp(\tfrac{t}{n}Y))^n \\
&= \exp(tX)\exp(tY).
\end{aligned}$$

■

8.2. Derivaciones de operaciones y formas bilineales

En esta parte F denotará a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Consideremos V un espacio vectorial sobre F, dimensionalmente finito. Por la propiedad universal del producto tensorial existe una correspondencia biunívoca entre los mapeos bilineales de V y las funciones lineales de $V \otimes V$, pues para cualquier mapeo bilineal $\lambda : V \times V \longrightarrow W$ existe una única transformación lineal $\tilde{\lambda} : V \otimes V \longrightarrow W$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \times V \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & V \otimes V \arrow[dl, dashed, "\tilde{\lambda}"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

donde π es el mapeo bilineal proyección, es decir $\pi(a, b) = a \otimes b$ para cualesquiera $a, b \in V$.

Teniendo en mente dicha correspondencia diremos que una función lineal $\Psi : V \otimes V \longrightarrow V$ es una *operación bilineal*.

Consideremos

$$A_\Psi(V) = \{\, \alpha \in \mathrm{Aut}(V) \,:\, \alpha(\Psi(u \otimes v)) = \Psi(\alpha(u) \otimes \alpha(v)) \quad u, v \in V \,\}$$

el subconjunto de $\operatorname{Aut}(V)$ que preserva la operación bilineal Ψ.

Observemos que dado $\alpha \in \operatorname{Aut}(V)$ existe un único $\tilde{\alpha} : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$ tal que $\tilde{\alpha}(u \otimes v) = \alpha(u) \otimes \alpha(v)$, por la propiedad universal del producto tensorial

$$\begin{tikzcd}
(u,v) \arrow[d, mapsto] & V \times V \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr] & V \otimes V \arrow[d, dashed, "\tilde{\alpha}"] \\
\alpha(u) \otimes \alpha(v) & & V \otimes V
\end{tikzcd}.$$

De modo que $\alpha \in A_{\Psi}(V)$ si y sólo si $\alpha \circ \Psi = \Psi \circ \tilde{\alpha}$. Por otro lado

$$\mathfrak{d}_{\Psi} = \{\, l \in \operatorname{End}(V) \,:\, l(\Psi(u \otimes v)) = \Psi(l(u) \otimes v) + \Psi(u \otimes l(v)), \quad u, v \in V \,\}.$$

Llamaremos a los elementos de $\mathfrak{d}_{\Psi}$ *derivaciones de la operación bilineal* Ψ.

Veremos la relación que existe entre $A_{\Psi}(V)$ y $\mathfrak{d}_{\Psi}$. Para ello consideraremos un resultado que nos será de utilidad.

***Lema* 8.2.1.** Sean V y W espacios vectoriales sobre F, dimensionalmente finitos. Sean $\sigma, \rho : U \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow V$ curvas suaves y $\lambda : V \times V \longrightarrow W$ bilineal; entonces $\lambda \circ (\sigma, \rho) : U \longrightarrow W$ es una curva suave y para cualquier $t_0 \in U$

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} \lambda(\sigma(t), \rho(t)) = \lambda\bigg(\frac{d\sigma(t)}{dt}\bigg|_{t=t_0}, \rho(t_0)\bigg) + \lambda\bigg(\sigma(t_0), \frac{d\rho(t)}{dt}\bigg|_{t=t_0}\bigg).$$

Demostración. Considerando que basta verificar la suavidad para los mapeos coordenados lineales y que en $\mathbb{R}^d$ los mapeos bilineales son suaves, concluimos que λ también lo es.

Así por la identificación expresada en 2.3 de la observación 4.2.7,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} \lambda(\sigma(t), \rho(t)) &= \lim_{t \to t_0} \frac{\lambda(\sigma(t), \rho(t)) - \lambda(\sigma(t_0), \rho(t_0))}{t - t_0} \\
&= \lim_{t \to t_0} \frac{\lambda(\sigma(t) - \sigma(t_0), \rho(t))}{t - t_0} + \lim_{t \to t_0} \frac{\lambda(\sigma(t_0), \rho(t) - \rho(t_0))}{t - t_0} \\
&= \lim_{t \to t_0} \lambda\bigg(\frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{t - t_0}, \rho(t)\bigg) + \lim_{t \to t_0} \lambda\bigg(\sigma(t_0), \frac{\rho(t) - \rho(t_0)}{t - t_0}\bigg) \\
&= \lambda\bigg(\frac{d\sigma(t)}{dt}\bigg|_{t=t_0}, \rho(t_0)\bigg) + \lambda\bigg(\sigma(t_0), \frac{d\rho(t)}{dt}\bigg|_{t=t_0}\bigg).
\end{aligned}$$

■

Si σ, ρ son como en el Lema y $\tilde{\lambda} : V \otimes V \longrightarrow W$ es lineal, entonces $\tilde{\lambda}$ es suave y

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \tilde{\lambda}(\sigma(t) \otimes \rho(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \tilde{\lambda} \circ \pi(\sigma(t), \rho(t)) &= d\tilde{\lambda}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \pi(\sigma(t), \rho(t))\right) \\
&= \tilde{\lambda} \circ \pi\left(\left.\frac{d\sigma(t)}{dt}\right|_{t=t_0}, \rho(t_0)\right) + \tilde{\lambda} \circ \pi\left(\sigma(t_0), \left.\frac{d\rho(t)}{dt}\right|_{t=t_0}\right) \\
&= \tilde{\lambda}(\dot{\sigma}(t_0) \otimes \rho(t_0)) + \tilde{\lambda}(\sigma(t_0) \otimes \dot{\rho}(t_0)) .
\end{aligned}$$

***Teorema* 8.2.2.** *Sea $\Psi : V \otimes V \longrightarrow V$ operación bilineal. Entonces $A_\Psi(V)$ es un subgrupo cerrado de Lie de Aut(V) con álgebra de Lie $\mathfrak{d}_\Psi$.*

Demostración. Veamos que $A_\Psi(V)$ es un subgrupo cerrado.

Por un lado $\mathrm{id}_V \in A_\Psi(V)$. Sean $\alpha, \beta \in A_\Psi(V)$ de modo que para cualesquiera $u, v \in V$

$$\begin{aligned}
\alpha(\alpha^{-1}(\Psi(u \otimes v))) = \Psi(u \otimes v) &= \Psi(\alpha(\alpha^{-1}(u)) \otimes \alpha(\alpha^{-1}(v))) \\
&= \alpha(\Psi(\alpha^{-1}(u) \otimes \alpha^{-1}(v))) .
\end{aligned}$$

Aplicando α^{-1}

$$\alpha^{-1}(\Psi(u \otimes v)) = \Psi(\alpha^{-1}(u) \otimes \alpha^{-1}(v)) .$$

Además

$$\alpha \circ \beta(\Psi(u \otimes v)) = \alpha(\Psi(\beta(u) \otimes \beta(v))) = \Psi(\alpha \circ \beta(u) \otimes \alpha \circ \beta(v)) .$$

Así $\alpha \circ \beta$, $\alpha^{-1} \in \mathrm{Aut}(V)$ y por lo tanto es un subgrupo abstracto de $\mathrm{Aut}(V)$. Por otro lado, si $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $A_\Psi(V)$ que converge a $\alpha \in \mathrm{Aut}(V)$ entonces para cualesquiera $u, v \in V$

$$\begin{aligned}
\alpha(\Psi(u \otimes v)) &= \lim_{n \to \infty} \alpha_n(\Psi(u \otimes v)) = \lim_{n \to \infty} \Psi(\alpha_n(u) \otimes \alpha_n(v)) \\
&= \lim_{n \to \infty} \Psi \circ \pi(\alpha_n(u), \alpha_n(v)) = \Psi(\pi(\alpha(u), \alpha(v))) \\
&= \Psi(\alpha(u) \otimes \alpha(v)) .
\end{aligned}$$

De modo que $\alpha \in A_\Psi(V)$ y por lo tanto $A_\Psi(V)$ es cerrado.

Sea $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{End}(V)$ el álgebra de Lie de $A_\Psi(V)$. Denotemos $\Psi_0 = \Psi \circ \pi : V \times V \longrightarrow V$. Consideremos $l \in \mathrm{End}(V)$ y la curva suave $\sigma_l : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ definida como $\sigma_l(t) = \exp(tl)$.

Sean $u, v \in V$ y $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{R} \longrightarrow V$ tales que

$$\begin{aligned}\sigma_1(t) &= \Psi_0(\sigma_l(u), \sigma_l(v))\\ \sigma_2(t) &= \sigma_l(\Psi_0(u, v)).\end{aligned}$$

Observemos que dichas curvas son suaves pues

$$\sigma_1 = (\Psi_0 \circ \mathrm{ev}_{(u,v)}) \circ (\sigma_l, \sigma_l)\,,$$

donde $\mathrm{ev}_{(u,v)} : \mathrm{Aut}(V) \times \mathrm{Aut}(V) \longrightarrow V \times V$ es definida como $\mathrm{ev}_{(u,v)}(T_1, T_2) = (T_1(u), T_2(v))$ y por lo tanto $\Psi_0 \circ \mathrm{ev}_{(u,v)}$ es bilineal.

Análogamente $\sigma_2 = \mathrm{ev}_{\Psi_0(u,v)} \circ \sigma_l$, siendo $\mathrm{ev}_{\Psi_0(u,v)} : \mathrm{Aut}(V) \longrightarrow V$ el mapeo lineal definido como $\mathrm{ev}_{\Psi_0(u,v)}(T) = T(\Psi_0(u, v))$.

De ese modo, por el Lema 8.2.1

$$\begin{aligned}\dot{\sigma_1}(t_0) &= \tfrac{d}{dt}|_{t=t_0}(\Psi_0 \circ \mathrm{ev}_{(u,v)}) \circ (\sigma_l(t), \sigma_l(t))\\ &= \Psi_0 \circ \mathrm{ev}_{(u,v)}(\dot{\sigma_l}(t_0), \sigma_l(t_0)) + \Psi_0 \circ \mathrm{ev}_{(u,v)}(\sigma_l(t_0), \dot{\sigma_l}(t_0))\\ &= \Psi_0(\dot{\sigma_l}(t_0)(u), \sigma_l(t_0)(v)) + \Psi_0(\sigma_l(t_0)(u), \dot{\sigma_l}(t_0)(v))\end{aligned} \tag{8.5}$$

$$\dot{\sigma_2}(t_0) = \mathrm{ev}_{\Psi_0(u,v)}(\dot{\sigma_l}(t_0)) = \dot{\sigma_l}(t_0)(\Psi_0(u, v))\,. \tag{8.6}$$

En el caso de que $l \in \mathfrak{a}$, para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\sigma_1(t_0) &= \Psi_0(\exp(tl)(u), \exp(tl)(v)) = \Psi(\exp(tl)(u) \otimes \exp(tl)(v))\\ &= \exp(tl)(\Psi(u \otimes v)) = \exp(tl)(\Psi_0(u, v))\\ &= \sigma_2(t_0)\,.\end{aligned}$$

De modo que por las igualdades (8.5) y (8.6)

$$\begin{aligned}l(\Psi(u \otimes v)) = l(\Psi_0(u, v)) &= \dot{\sigma_1}(0) = \dot{\sigma_2}(0)\\ &= \Psi_0(l(u), v) + \Psi_0(u, l(v))\\ &= \Psi(l(u) \otimes v) + \Psi(u \otimes l(v))\,.\end{aligned}$$

Así $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{d}_\Psi$.

Si $l \in \mathfrak{d}_\Psi$, $\dot{\sigma_1}(0) = \dot{\sigma_2}(0)$. Veamos que es razón suficiente para que $\dot{\sigma_1}(t_0) = \dot{\sigma_2}(t_0)$, para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$.

Por las igualdades (8.5) y (8.6), considerando además el diagrama conmutativo 6.8 de la sección de mapeo exponencial en $Gl(d, \mathbb{C})$, basta mostrar que

$$
\begin{aligned}
&\Psi(\exp(t_0 l)\circ l(u)\otimes \exp(t_0 l)(v)) + \Psi(\exp(t_0 l)(u)\otimes \exp(t_0 l)\circ l(v))\\
&= \exp(t_0 l)\circ l(\Psi(u\otimes v))\,.
\end{aligned}
$$

Sabemos que

$$
l\circ\Psi = \Psi\circ(l\otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V\otimes l)\,.
$$

Supongamos que dado $n\in\mathbb{N}$

$$
l^n\circ\Psi = \Psi\circ(l\otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V\otimes l)^n\,,
$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
l^{n+1}\circ\Psi &= l^n\circ(l\circ\Psi)\\
&= l^n\circ(\Psi\circ(l\otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V\otimes l))\\
&= \Psi\circ(l\otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V\otimes l)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Así obtenemos

$$
\begin{aligned}
\exp(t_0 l)\circ l\circ\Psi &= l\circ\Psi + t_0 l^2\circ\Psi + \tfrac{t_0^2}{2!} l^3\circ\Psi + \tfrac{t_0^3}{3!} l^4\circ\Psi + \dots\\
&= \Psi\circ(l\otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V\otimes l) + t_0\Psi\circ(l\otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V\otimes l)^2\\
&+ \tfrac{t_0^2}{2!}\Psi\circ(l\otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V\otimes l)^3 + \tfrac{t_0^3}{3!}\Psi\circ(l\otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V\otimes l)^4 + \dots\\
&= \Psi\circ(l\otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V\otimes l)\circ\exp(t_0(l\otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V\otimes l))\,.
\end{aligned}
$$

Como $l\otimes \mathrm{id}_V$ y $\mathrm{id}_V\otimes l$ conmutan, al igual que $\exp(t_0 l)$ y l, además de que

$$
\begin{aligned}
\exp(t_0 l)\otimes \mathrm{id}_V &= \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \tfrac{t_0^k}{k!} l^k\right)\otimes \mathrm{id}_V = \sum_{k\in\mathbb{N}} \tfrac{t_0^k}{k!}(l^k\otimes \mathrm{id}_V)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \tfrac{t_0^k}{k!}(l\otimes \mathrm{id}_V)^k = \exp(t_0(l\otimes \mathrm{id}_V))\,,
\end{aligned}
$$

obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\exp(t_0 l)\circ l\circ\Psi &= \Psi\circ(l\otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V\otimes l)\circ(\exp(t_0(l\otimes \mathrm{id}_V))\circ\exp(t_0(\mathrm{id}_V\otimes l)))\\
&= \Psi\circ(l\otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V\otimes l)\circ(\exp(t_0 l)\otimes \mathrm{id}_V)\circ(\mathrm{id}_V\otimes\exp(t_0 l))\\
&= \Psi\circ(l\otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V\otimes l)\circ(\exp(t_0 l)\otimes\exp(t_0 l))\\
&= \Psi(\exp(t_0 l)\circ l\otimes\exp(t_0 l)) + \Psi(\exp(t_0 l)\otimes\exp(t_0 l)\circ l)\,.
\end{aligned}
$$

Gracias a esto concluimos que

$$\dot{\sigma_1}(t_0) = \dot{\sigma_2}(t_0) \quad \text{para todo } t_0 \in \mathbb{R}\,.$$

Por el Teorema 2.2.5, $\sigma_1 - \sigma_2$ es un mapeo constante. Como $\sigma_1(0) = \sigma_2(0)$ concluimos que $\sigma_1 = \sigma_2$, obteniendo así que $\exp(t_0 l) \in A_\Psi(V)$ para todo $t_0 \in \mathbb{R}$.

Por la Proposición 6.1.8, $l \in \mathfrak{a}$ y con ello $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}_\Psi$. ■

La siguiente definición tiene conceptos totalmente análogos a los anteriores.

Definición 8.2.3. Nuevamente consideremos V espacio vectorial sobre F dimensionalmente finito. Llamaremos a un mapeo lineal $B : V \otimes V \longrightarrow F$ *forma bilineal* y usaremos la notación $B(u \otimes v) = (u, v)$.

Consideremos el conjunto

$$A_B(V) = \{\, \alpha \in \mathrm{Aut}(V) \,:\, (u,v) = (\alpha(u), \alpha(v)), u, v \in V \,\}\,,$$

cuyos elementos son los automorfismo de V que preservan la forma bilineal B.

$$\mathfrak{d}_B = \{\, l \in \mathrm{End}(V) \,:\, (l(u), v) + (u, l(v)) = 0, u, v \in V \,\}\,.$$

Los elementos de $\mathfrak{d}_B$ son llamados *derivaciones de la forma bilineal B.*

El siguiente resultado es análogo al Teorema 8.2.2 al igual que su demostración. Es por ello que sólo se mencionan los razonamientos primordiales ya que los detalles son exactamente iguales.

***Teorema* 8.2.4.** *Sea $B : V \otimes V \longrightarrow F$ forma bilineal, de modo que $A_B(V)$ es un subgrupo de Lie de Aut(V) con álgebra de Lie $\mathfrak{d}_B$.*

Demostración. El hecho de que $A_B(V)$ es un subgrupo cerrado abstracto de $\mathrm{Aut}(V)$ se muestra en forma totalmente análoga a como se hizo con $A_\Psi(V)$ en el Teorema 8.2.2.

Sea $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{End}(V)$ el álgebra de Lie de $A_\Psi(V)$ y denotemos $B_0 = B \circ \pi : V \times V \longrightarrow F$. Consideremos $l \in \mathrm{End}(V)$ para la cual $\sigma_l(t) = \exp_l(t)$. Sean $u, v \in V$, $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{R} \longrightarrow F$ curvas suaves tales que

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= B_0(\exp(tl)(u), \exp(tl)(v)) = (B_0 \circ \mathrm{ev}_{(u,v)}) \circ (\sigma_l, \sigma_l) \\ \sigma_2(t) &= B_0(u,v)\,, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(V) \times \mathrm{Aut}(V) &\xrightarrow{\mathrm{ev}_{(u,v)}} V \times V \\ (T_1, T_2) &\longmapsto (T_1(u), T_2(v)) \end{aligned}$$

y por lo tanto $\Psi_0 \circ \mathrm{ev}_{(u,v)}$ es bilineal. De modo que $\dot{\sigma}_1(t_0) = B_0(\dot{\sigma}_l(t_0)(u), \sigma_l(t_0)(v)) + B_0(\sigma_l(t_0)(u), \dot{\sigma}_l(t_0)(v))$ y $\dot{\sigma}_2(t_0) = 0$.

Si $l \in \mathfrak{a}$ entonces $\sigma_1 = \sigma_2$, de modo que

$$0 = \dot{\sigma}_2(0) = \dot{\sigma}_1(0) = (l(u), v) + (u, l(v)).$$

Así $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{d}_B$.

Si $l \in \mathfrak{d}_B$ entonces $\dot{\sigma}_1(0) = \dot{\sigma}_2(0) = 0$. Veamos que dado $t \in \mathbb{R}$, $\dot{\sigma}_1(t) = 0$. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$0 = B \circ (l \otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V \otimes l)^n\,,$$

y por lo tanto para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 &= B \circ (l \otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V \otimes l) \circ (\exp(t_0(l \otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V \otimes l)) \\ &= B \circ (l \otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V \otimes l) \circ \exp(t_0(l \otimes \mathrm{id}_V)) \circ \exp(t_0(\mathrm{id}_V \otimes l)) \\ &= B \circ (l \otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V \otimes l) \circ (\exp(t_0 l) \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\mathrm{id}_V \otimes \exp(t_0 l)) \\ &= B \circ (l \otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V \otimes l) \circ (\exp(t_0 l) \otimes \exp(t_0 l)) \\ &= B(\exp(t_0 l) \circ l \otimes \exp(t_0 l)) + B(\exp(t_0 l) \otimes \exp(t_0 l) \circ l). \end{aligned}$$

Concluyendo así que $\dot{\sigma}_1(t_0) = 0$ para toda $t_0 \in \mathbb{R}$ y por lo tanto es un mapeo constante.

Como $\sigma_1(0) = B(u \otimes v)$, entonces $\sigma_1 = \sigma_2$. Por lo tanto $\exp(t_0 l) \in A_B(V)$ para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$, siguiéndose de la Proposición 6.1.8 que $l \in \mathfrak{a}$.

Con ello $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}_B$. ■

Consideremos V espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con producto interior B_0 y dimensión finita d. B_0 induce una única forma $B : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "B_0"'] & & V \otimes V \arrow[dl, dashed, "B"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Sabemos que el hecho de que $\alpha \in A_B(V)$ es equivalente a que α preserve la norma inducida por B_0 en V. Si $l \in \mathrm{End}(V)$, denotemos l^* el operador adjunto de l, de modo que dada una base ortogonal β de V se tiene que $[l^*]_\beta = [l]_\beta^t$. Así $\alpha \in A_B(V)$ si y sólo si $[\alpha]_\beta^t[\alpha]_\beta = I$ y $l \in \mathfrak{d}_B$ si y sólo si $l^* = -l$, que es equivalente a su vez a que $[l]_\beta^t + [l]_\beta = 0$.

Consideremos el difeomorfismo lineal inducido por β, $\Psi_\beta : \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(d, \mathbb{R})$ definido como $\Psi_\beta(l) = [l]_\beta$, de modo que $\Psi_\beta|_{\mathrm{Aut}(V)} : \mathrm{Aut}(V) \longrightarrow Gl(d, \mathbb{R})$ es un isomorfismo de grupos de Lie y $\exp \circ \Psi_\beta = \Psi_\beta|_{\mathrm{Aut}(V)} \circ \exp$, es decir $\Psi_\beta = d\Psi_\beta|_{\mathrm{Aut}(V)}$ (pues son dos transformaciones lineales que coinciden en una vecindad de 0, en la cual se encuentra una base de $\mathrm{End}(V)$).

Como $\Psi_\beta(A_B(V)) = O(d)$ y $d\Psi_B(\mathfrak{d}_B) = \mathfrak{o}(d)$, se podría seguir de aquí que $O(d)$ es un subgrupo cerrado de $Gl(d, \mathbb{R})$ con álgebra de Lie $\mathfrak{o}(d)$.

Observación 8.2.5. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Observemos que $[\,,]$ induce a través de la propiedad universal una operación bilineal.

Denotemos $A_{[\,,]}(\mathfrak{g})$ y $\mathfrak{d}_{[\,,]}$ simplemente como $A(\mathfrak{g})$ y $\mathfrak{d}$ respectivamente. Observemos que $A(\mathfrak{g})$ resulta ser el conjunto de automorfismo de álgebras de Lie de $\mathfrak{g}$; por el Teorema 8.2.2 es un subgrupo de Lie cerrado de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ con álgebra de Lie igual al conjunto de derivaciones de $[\,,]$.

Si G es un grupo de Lie con álgebra de Lie igual a $\mathfrak{g}$, observemos que $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{d}$, por la identidad de Jacobi, y $\mathrm{Ad}(G) \subseteq A(\mathfrak{g})$, pues a_σ es un automorfismo de grupos de Lie de G para cualquier $\sigma \in G$ y por lo tanto da_σ es automorfismo de álgebras de Lie de $\mathfrak{g}$.

Más aún, $\mathrm{Ad}' : G \longrightarrow A(\mathfrak{g})$, la correstricción de Ad a $A(\mathfrak{g})$, es suave pues $(A(\mathfrak{g}), i_{A(\mathfrak{g})})$ es un subgrupo de Lie cerrado de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ con la topología relativa (Véanse Teoremas 7.2.1 y 2.6.2). Así Ad factoriza a través de $A(\mathfrak{g})$, obteniendo con ello los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[rr, "\mathrm{ad}"] \arrow[dr, "\mathrm{ad}'"'] \arrow[dd, "\exp"'] & & \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \arrow[dd, "\exp"] \\
& \mathfrak{d} \arrow[ur, "i_{\mathfrak{d}}"'] \arrow[dd, "\exp"] & \\
G \arrow[rr, "\mathrm{Ad}"] \arrow[dr, "\mathrm{Ad}'"'] & & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \\
& A(\mathfrak{g}) \arrow[ur, "i_{A(\mathfrak{g})}"'] &
\end{tikzcd}$$

Cuando argumentamos que $\mathrm{Ad}(G) \subseteq A(\mathfrak{g})$, ocupamos el hecho de que cualquier automorfismo de grupos de Lie de G induce un automorfismo de álgebras de Lie de G mediante su derivada. Así, denotando $A(G)$ a el grupo de automorfismos de grupos de Lie de G

$$\begin{array}{rcl} A(G) & \xrightarrow{\mathfrak{I}} & A(\mathfrak{g}) \\ \Psi & \longmapsto & d\Psi \end{array}$$

está bien definida y por la regla de la cadena es un morfismo de grupos abstractos.

Si G es conexo dicha función es inyectiva (Teorema 5.2.7); si además es simplemente conexo también es suprayectiva (Teorema 5.3.6).

Suponiendo que G es simplemente conexo podemos inducir sobre $A(G)$ una estructura de variedad diferenciable mediante $\mathfrak{J}$ de modo que éste resulte ser un isomorfismo de grupos de Lie.

Por ello, denotando $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}^{-1} \circ \mathrm{Ad}'$

$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{\mathfrak{J}'} A(G) \\ \sigma &\longmapsto a_\sigma \end{aligned}$$

es un morfismo de grupos de Lie.

Si consideramos $\mathfrak{a}$ el álgebra de Lie de $A(G)$, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "d\mathfrak{J}'"] \arrow[d, "texp"'] & \mathfrak{a} \arrow[d, "texp"] \\ G \arrow[r, "\mathfrak{J}'"'] & A(G) \end{tikzcd}$$

Capítulo 9

Variedades homogéneas y acciones propias

9.1. Generalidades sobre variedades homogéneas

Cuando G es un subgrupo abstracto y H es un subgrupo de G, en general el conjunto de clases laterales G/H no recibe una estructura de grupo a menos de que H sea normal. Por ello gran parte de la Teoría de grupos se enfoca al estudio de subgrupos normales de grupos abstractos. En el caso de los grupos de Lie se cuenta con una estructura adicional que se desea *heredar* al conjunto de clases laterales. Dicha estructura es la de variedad diferenciable. A lo largo de esta sección veremos que dado un grupo de Lie es suficiente pedir que un subgrupo sea cerrado para que el conjunto de clases laterales reciba una estructura de variedad diferenciable.

Consideremos a G grupo de Lie y H un subgrupo cerrado de G, de modo que por el Teorema 7.2.1 recibe una única estructura de variedad diferenciable con la cual (H, i_H) resulta un subgrupo de Lie de G. Denotemos como $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ a las álgebras de Lie de G y H respectivamente.

Dado $\sigma \in G$, consideremos σH la clase lateral izquierda de σ con respecto a H. Veremos que $G/H = \{\sigma H : \sigma \in G\}$ recibe una estructura de variedad diferenciable que queda totalmente caracterizada al satisfacer algunas propiedades con respecto al mapeo canónico

$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{\pi} G/H \\ \sigma &\longmapsto \sigma H \end{aligned}$$

En adelante consideraremos a G/H con la topología de identificación inducida por π (véase el ejemplo 1.1.10). Observemos que con esta topología π es una función abierta pues dado $A \subseteq G$ abierto,

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{a\in A} \pi^{-1}(a) = \bigcup_{h\in H} Ah$$

es abierto en G que es equivalente a que $\pi(A)$ sea abierto en G/H.

El siguiente Lema nos será de utilidad para mostrar la existencia de la estructura de variedad de G/H.

***Lema* 9.1.1.** Sea $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{g}$ subespacio tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$, entonces existe U vecindad abierta de 0 en $\mathfrak{m}$ y $V \subseteq G/H$ vecindad abierta de eH para la cual $\pi \circ \exp|_U : U \longrightarrow V$ es un homeomorfismo (más aún, $\pi|_{\exp(U)}$ es un homeomorfismo).

Demostración. Sabemos que el mapeo

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{m} \times \mathfrak{h} & \xrightarrow{\alpha} & G \\ (X,Y) & \longmapsto & \exp(X)\exp(Y) \end{array}$$

es suave y $d\alpha_{(0,0)}$ es un isomorfismo (véanse las afirmaciones del Teorema 7.2.1). Sean $U_\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$ y $U_\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}$ vecindades abiertas de 0 en $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{h}$ respectivamente, de tal modo que $\alpha|_{U_\mathfrak{m}\times U_\mathfrak{h}}$ es un difeomorfismo sobre su imagen abierta en G.

Por la demostración del Teorema 7.2.1 existen $W \subseteq \mathfrak{g}$ vecindad abierta de 0 y $W' \subseteq G$ vecindad abierta de e que satisfacen que $\exp|_W : W \longrightarrow W'$ es un difeomorfismo y

$$\exp(W \cap \mathfrak{h}) = W' \cap H\,.$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $W \cap \mathfrak{h} = U_h$. Consideremos el mapeo suave

$$\begin{array}{ccc} U_\mathfrak{m} \times U_\mathfrak{m} & \xrightarrow{\beta} & G \\ (X,X') & \longmapsto & \exp(-X)\exp(X') \end{array}$$

y $U \subseteq U_\mathfrak{m}$ vecindad abierta de 0 en $\mathfrak{m}$ que satisface que $-U = U$ y $\beta(U\times U) \subseteq W'$.

Por un lado $\alpha|_{U\times\{0\}}$ es un homeomorfismo sobre su imagen. Más aún, si $X, X' \in U$ satisfacen que $\pi \circ \exp(X) = \pi \circ \exp(X')$, es equivalente a que $\exp(-X)\exp(X') \in H$. De modo que $\exp(-X)\exp(X') \in W' \cap H$, por lo que existe un único $Y \in \mathfrak{h} \cap W = U_\mathfrak{h}$ para el cual $\exp(-X)\exp(X') = \exp(Y)$, y así $\exp(X)\exp(Y) = \exp(X')$. Como $X', X \in U_\mathfrak{m}$ y $Y \in U_\mathfrak{h}$, $X' = X$ y $Y = 0$, concluyendo con ello que $\pi|_{\exp(U)}$ es inyectiva.

Como π es continua y abierta, $\pi|_{\exp(U)}$ es un homeomorfismo sobre su imagen.

Notemos que $\alpha(U \times U_\mathfrak{h}) \subseteq G$ es una vecindad abierta de de e que satisface

$$\pi \circ \alpha(U \times U_{\mathfrak{h}}) = \pi(\exp(U)\exp(U_{\mathfrak{h}})) = \pi(\exp(U)) \,.$$

De modo que $\pi \circ \exp$ es un homeomorfismo de U sobre $V = \pi(\exp(U))$, vecindad abierta de eH. ■

Con el mismo argumento que en la demostración del Lema podemos concluir que para cualquier $\sigma \in G$, la composición

$$U \xrightarrow{\exp} \exp(U) \xrightarrow{l_\sigma} \sigma\exp(U) \xrightarrow{\pi} \pi(\sigma\exp(U))$$

es un homeomorfismo y $\pi|_{\sigma\exp(U)}$ es inyectiva ya que para cualesquiera $X, X' \in U$, $\pi(\sigma\exp(X)) = \pi(\sigma\exp(X'))$ si y sólo si $(\sigma\exp(X))^{-1}\sigma\exp(X') \in H$, es decir, $(\exp(-X)\sigma^{-1})\sigma\exp(X') = \exp(-X)\exp(X') \in H$. Además $\pi(\sigma\exp(U)) = \pi \circ l_\sigma \circ \alpha(U \times U_{\mathfrak{h}})$ es abierto en G/H.

Dado $\sigma \in G$ denotemos $\varphi_\sigma = (\pi \circ l_\sigma \circ \exp|_U)^{-1} = (l_\sigma \circ \exp|_U)^{-1} \circ \pi^{-1}|_{\pi(\sigma\exp(U))}$.

Si $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{m} = c$, $X_1, \dots X_c$ es una base de $\mathfrak{m}$ y $\{\,\phi_1, \dots, \phi_c\,\}$ es su base dual entonces $(\mathfrak{m}, \phi = (\phi_1, \dots, \phi_c))$ es un sistema coordenado en $\mathfrak{m}$. Consideremos a la familia de homeomorfismos $\{\phi \circ \varphi_\sigma\}_{\sigma \in G}$. Veremos que la topología de identificación da a G/H una estructura de variedad topológica y más aún, que la familia de homeomorfismos genera una estructura diferenciable.

Observemos que la topología de identificación para G/H es segundo numerable, pues dada una base $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de G, $\{\pi(B_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de G/H, pues π es abierta y continua.

Denotemos el mapeo suave

$$\begin{aligned} G \times G &\xrightarrow{\Psi} G \\ (\rho, \lambda) &\longmapsto \rho^{-1}\lambda \end{aligned}$$

de modo que si $\sigma, \tau \in G$ son tales que $\pi(\sigma) \neq \pi(\tau)$, es equivalente a decir que $\Psi(\sigma, \tau) \notin H$. Como H es cerrado existen W_σ, $W_\tau \subseteq G$ vecindades abiertas de σ y τ respectivamente, que satisfacen

$$\Psi\big(W_\sigma \times W_\tau\big) \subseteq G \setminus \Psi^{-1}(H) \,.$$

Con ello obtenemos que $\pi(W_\sigma)$, $\pi(W_\tau)$ son vecindades abiertas de σ y τ respectivamente, tales que $\pi(W_\sigma) \cap \pi(W_\tau) = \emptyset$. Por ello G/H es Hausdorff.

Como $G = \bigcup\limits_{\sigma\in G} l_\sigma \circ \alpha(U \times U_{\mathfrak{h}}) = \bigcup\limits_{\sigma\in G} \sigma\exp(U)\exp(U_{\mathfrak{h}})$, tenemos

$$G/H = \bigcup_{\sigma\in G} \pi(\sigma\exp(U)) \,.$$

Es decir, G/H es una variedad topológica con la familia de sistemas coordenados $\{ (\pi(\sigma\exp(U)), \phi \circ \varphi_\sigma) \}_{\sigma \in G}$. Más aún, dados $\sigma, \tau \in G$,

$$\begin{aligned}
\varphi_\sigma \circ \varphi_\tau^{-1} &= (\pi \circ l_\sigma \circ \exp|_U)^{-1} \pi \circ l_\tau \circ \exp|_U \\
&= (l_\sigma \circ \exp|_U)^{-1} \circ l_\tau \circ \exp|_U = \exp|_U{}^{-1} \circ l_{\sigma^{-1}\tau} \circ \exp|_U \\
&= \exp|_{W'}{}^{-1} \circ l_{\sigma^{-1}\tau} \circ \exp|_U
\end{aligned}$$

es suave, de modo que

$$\phi \circ \varphi_\sigma \circ \varphi_\tau{}^{-1} \circ \phi^{-1}$$

es suave.

De ese modo existe una única estructura diferenciable generada por la familia de homeomorfismos $\{ \phi \circ \varphi_\sigma \}_{\sigma \in G}$ de tal modo que G/H con la topología de identificación resulta ser una variedad diferenciable.

En el siguiente resultado no sólo se resume lo que hemos visto, sino que se caracteriza a dicha estructura de variedad de G/H.

***Teorema* 9.1.2.** *Sea G un grupo de Lie y H subgrupo cerrado de G. Entonces G/H, el conjunto de clases laterales, tiene una única estructura de variedad de tal manera que*

I. *La proyección canónica $\pi : G \longrightarrow G/H$ es suave.*

II. *Existen secciones locales suaves de G/H en G, es decir, para todo $\sigma H \in G/H$ existe W una vecindad abierta de σH en G/H y $\tau : W \longrightarrow G$ suave para la cual $\pi \circ \tau = id_W$ (y como consecuencia π es una sumersión).*

Demostración. Veamos que la estructura de variedad que obtuvimos a partir de la topología de identificación y la familia $\{ \phi \circ \varphi_\sigma \}_{\sigma \in G}$ satisfacen los incisos I y II.

Observemos que para todo $\sigma \in G$

$$\phi \circ \varphi_\sigma \circ \pi : \pi^{-1}(\pi(\sigma\exp(U))) \longrightarrow \mathbb{R}^c\,,$$

donde $\pi^{-1}(\pi(\sigma\exp(U))) \subseteq G$ es abierto.

Como $G = \bigcap\limits_{\tau \in G} \tau\exp(U)\exp(U_\mathfrak{h})$ basta mostrar que $\phi \circ \varphi_\sigma \circ \pi$ es suave en $l_\tau \circ \alpha(U \times U_\mathfrak{h}) \cap \pi^{-1}(\pi(l_\sigma \circ \alpha(U \times U_\mathfrak{h})))$.

Ya que $l_\sigma \circ \alpha|_{U \times U_\mathfrak{h}}$ es un difeomorfismo sobre su imagen, es suficiente probar que $\phi \circ \varphi_\sigma \circ \pi \circ l_\tau \circ \alpha$ es suave, pero

$$\phi \circ \varphi_\sigma \circ \pi \circ l_\tau \circ \alpha = \phi \circ \varphi_\sigma \circ \varphi_\tau{}^{-1}\,,$$

que hemos mostrado que es suave en su dominio. De modo que π es suave.

Por otro lado, si dado $\sigma H \in G/H$, consideramos $W = \pi(\sigma \exp(U))$ y $\mathfrak{J} = l_\sigma \circ \exp \circ \varphi_\sigma : W \longrightarrow G$ suave, entonces $\pi \circ \mathfrak{J} = \varphi_\sigma^{-1} \circ \varphi_\sigma = \mathrm{id}_W$.

Veamos ahora la unicidad. Denotemos como $(G/H)_1$ a G/H con una estructura de variedad diferenciable que satisface las condiciones I y II. De modo que obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ G/H \arrow[rr, "\mathrm{id}_{G/H}"'] & & (G/H)_1 \end{tikzcd}$$

Dado $\sigma H \in G/H$, consideremos W vecindad abierta de σH y $\mathfrak{J}$ como en el inciso II del Teorema 9.1.2, entonces $\pi : G \longrightarrow (G/H)_1$ es suave y por lo tanto $\pi \circ \mathfrak{J} = \mathrm{id}_W$ es suave.

Así $\mathrm{id}_{G/H} : G/H \longrightarrow (G/H)_1$ es suave. Análogamente se muestra que su inversa es suave, concluyendo con ello que las topologías y las estructuras diferenciables son las mismas. ■

Observación 9.1.3. Notemos que $\dim G/H = \dim G - \dim H$.

Como $d\pi_e$ es suprayectiva entonces $\dim_{\mathbb{R}}(\ker d\pi_e) = \dim H$. Por otro lado $\pi \circ \exp|_{\mathfrak{h}} \equiv 0$. Como $d(\exp)_0 = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ tenemos que $d\pi_e = d(\pi \circ \exp)_0$. Así, por la identificación de $\mathfrak{h}$ con $T_0\mathfrak{h}$

$$d\pi_e|_{\mathfrak{h}} = d(\pi \circ \exp)_0|_{\mathfrak{h}} = d(\pi \circ \exp|_{\mathfrak{h}})_0 = 0\,,$$

de modo que $\mathfrak{h} \subseteq \ker d(\pi)_e$.

Como $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h} = \dim H$ concluimos que $\mathfrak{h} = \ker d\pi_e$.

Definición 9.1.4. Si G es un grupo de Lie y H es un subgrupo cerrado, por el Teorema 9.1.2 G/H recibe una única estructura de variedad difenciable que satisface I y II del Teorema 9.1.2. En este caso llamaremos a G/H *variedad homogénea.*

Observación 9.1.5. Consideremos G/H variedad homogénea. Una función f definida en G/H es suave si y sólo si $f \circ \pi$ es suave: por una lado si f es suave entonces $f \circ \pi$, y por otro para cada $\sigma H \in G/H$ existe $W \subseteq G/H$ vecindad abierta de σH y $\tau : W \longrightarrow G$ suave que satisface que $\pi \circ \tau = \mathrm{id}_W$, es decir $f|_W = f \circ \pi \circ \tau$ es suave.

Definición 9.1.6. Sea $\alpha : G \times M \longrightarrow M$ una acción izquierda de G en M (definición 8.1.1). Diremos que dicha acción es *efectiva* si dado $\sigma \in G$ que satisfaga que $\alpha_\sigma = \mathrm{id}_M$, se tiene que $\sigma = e$ (lo cual significa que e es el único elemento en G que fija a todos los elementos de M).

Por otro lado, si α satisface que para cualesquiera $m, n \in M$ existe $\sigma \in G$ para la cual $\alpha_\sigma(m) = \alpha(\sigma, m) = n$ llamaremos a α *transitiva* y al grupo de difeomorfismo $\{\, \alpha_\sigma \,\}_{\sigma \in G}$ *grupo transitivo de difeomorfismos.*

Dado $m \in M$ y

$$H = \{\, \sigma \in G \,:\, \alpha_\sigma(m) = \alpha(\sigma, m) = m \,\},$$

es un subgrupo cerrado de G llamado *el grupo de isotropía de m.*

Como H resulta ser un subgrupo de Lie con la topología de subespacio, $\alpha|_{H\times M}$ es una acción izquierda de H en M.

Por el Teorema 8.1.4

$$\begin{aligned} H &\xrightarrow{\alpha_H} \operatorname{Aut}(T_m M) \\ h &\longmapsto d(\alpha_h)_m \end{aligned}$$

es una representación, de modo que $\alpha_H(H) = \{\, d(\alpha_h)_m \,:\, h \in H \,\}$ es llamado el *grupo de isotropía lineal de m.*

Ejemplo 9.1.7. Definamos

$$\begin{aligned} G \times G/H &\xrightarrow{\beta} G/H \\ (\sigma, \tau H) &\longmapsto \sigma\tau H \end{aligned}$$

Dicha función está bien definida pues para cualesquiera $\tau_1, \tau_2 \in G$ tales que ${\tau_1}^{-1}\tau_2 \in H$, entonces

$$(\sigma\tau_1)^{-1}(\sigma\tau_2) = {\tau_1}^{-1}\sigma^{-1}\sigma\tau_2 = {\tau_1}^{-1}\tau_2 \in H\,.$$

Además, gracias al producto en G satisface las condiciones (1) y (2) de la definición 8.1.1.

De tal forma basta verificar que es suave para concluir que es una acción izquierda de G en G/H. Para ello observemos que si M y N son variedades diferenciables $\rho : M \times G/H \longrightarrow N$ es suave si y sólo si $\tilde{\rho} = \rho \circ (\mathrm{id}_M \times \pi)$ es suave, pues para cualquier $\sigma H \in G/H$ existe $W \subseteq G/H$ abierto y $\tau : W \longrightarrow G$ suave para las cuales $\pi \circ \tau = \mathrm{id}_W$, es decir

$$\rho \circ (\mathrm{id}_M \times \pi) \circ (\mathrm{id}_M \times \tau) = \rho \circ (\mathrm{id}_M \times \pi \circ \tau) = \rho|_{M\times W}$$

es suave. En este caso se satisface que $\beta \circ (\mathrm{id}_M \times \pi) = \pi \circ \mu$, donde μ es la multiplicación en G, con lo se sigue que β es suave.

Observemos que β es transitiva pues para cualesquiera $\sigma, \tau \in G$, $\beta(\sigma\tau^{-1}, \tau H) = \sigma H$.

Si $\tau H \in G/H$, entonces su grupo de isotropía es $\{\, \sigma \in G \,:\, \tau^{-1}\sigma\tau \in H \,\}$. En particular H es el grupo de isotropía de e.

***Teorema* 9.1.8.** *Sea G un grupo de Lie y $\alpha : G \times M \longrightarrow M$ una acción transitiva de G en M. Sea $p_0 \in M$ y H el subgrupo de G que deja fijo a p_0 bajo la acción (es decir, el grupo de isotropía de p_0). Entonces H es cerrado y si $\Psi : G/H \longrightarrow M$ denota el mapeo definido como*

$$\Psi(\sigma H) = \alpha(\sigma, p_0) = \alpha_\sigma(p_0)\,,$$

éste resulta ser un difeomorfismo. Si además M es conexo entonces la componente conexa de la identidad actúa transitivamente en M.

Demostración. Como α es suave entonces $\tilde{\alpha} : G \longrightarrow M$ definida como $\tilde{\alpha}(\sigma) = \alpha(\sigma, p_0)$, también es suave. Por ello $\tilde{\alpha}^{-1}(\{\, p_0 \,\}) = H$ es cerrado y como consecuencia es un subgrupo de Lie de G con el mapeo inclusión. Denotemos $\mathfrak{h}$ el grupo de Lie de H.

Observemos que dados $\sigma, \tau \in G$, $\sigma H = \tau H$ si y sólo si $\tau^{-1}\sigma \in H$ si y sólo si $p_0 = \alpha(\tau^{-1}\sigma, p_0)$, o equivalentemente $\alpha(\tau, p_0) = \alpha(\sigma, p_0)$. Con esto hemos visto que Ψ está bien definida y es inyectiva. Ψ es suprayectiva porque α es una acción transitiva. Además $\tilde{\alpha} = \Psi \circ \pi$ es suave, y como consecuencia Ψ también lo es.

Por el Corolario A.5.10 basta concluir que Ψ es no singular para mostrar que es un difeomorfismo. Como $d(\pi)_\sigma$ es suprayectiva para cualquier $\sigma \in G$, será suficiente mostrar que

$$\ker d\tilde{\alpha}_\sigma = \ker d\pi_\sigma\,.$$

Como $\tilde{\alpha} = \alpha_\sigma \circ \tilde{\alpha} \circ l_{\sigma^{-1}}$, entonces

$$\ker d\tilde{\alpha}_\sigma = \ker\,(d\tilde{\alpha} \circ dl_{\sigma^{-1}})_\sigma\,.$$

Así $\ker d\tilde{\alpha}_e = \ker d\pi_e = \mathfrak{h}$ es una condición necesaria y suficiente para que dada $\sigma \in G$

$$\begin{aligned}
\ker d\tilde{\alpha}_\sigma &= \ker d(\pi \circ l_{\sigma^{-1}})_\sigma \\
&= \ker d(\beta_\sigma \circ \pi \circ l_{\sigma^{-1}})_\sigma \\
&= \ker d\pi_\sigma
\end{aligned}$$

(donde $\beta_\sigma(\tau H) = \beta(\sigma, \tau H)$, siendo β la acción definida en el ejemplo 9.1.7). Como $\tilde{\alpha} = \Psi \circ \pi$, entonces $\ker d\pi_e \subseteq \ker d\tilde{\alpha}_e$. Sea $X \in d\tilde{\alpha}_e$; consideremos la curva suave $\rho(t) = \tilde{\alpha}(\exp_X(t))$, de modo que para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
r\dot{h}o(t_0) &= d\tilde{\alpha}_{\exp_X(t_0)}\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} \exp_X(t)\right) \\
&= d(\tilde{\alpha})_{\exp_X(t_0)}(X_{\exp_X(t_0)}) \\
&= d(\alpha_{\exp_X(t_0)})_{\tilde{\alpha}(e)} \circ d\tilde{\alpha}_e \circ d(l_{\exp_X(-t_0)})_{\exp_X(-t_0)}(X_{\exp_X(t_0)}) \\
&= d(\alpha_{\exp_X(t_0)})_{\tilde{\alpha}(e)} \circ d\tilde{\alpha}_e(X_e) = 0\,,
\end{aligned}
$$

de modo que ρ es una curva constante (Teorema 2.2.5). Como $\rho(0) = \tilde{\alpha}(e) = p_0$ entonces para $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tX) = \exp_t(X) \in H$. Por la Proposición 6.1.8 concluimos que $\ker d\tilde{\alpha}_e \subseteq \mathfrak{h} = \ker d\pi_e$. Concluimos con ello que

$$
\ker d\tilde{\alpha}_e = \ker d\pi_e\,,
$$

y por lo tanto que Ψ es un difeomorfismo.

Denotemos como G_0 la componente conexa de G que tiene a e y supongamos que M es conexo, de modo que G/H también lo es. Como π es abierto, $\pi(G_0)$ resulta abierto. Por otro lado

$$
\pi^{-1}(\pi(G_0)) = \bigcup_{g \in G_0} gH = \bigcup_{h \in H} G_0 h\,.
$$

Consideremos todas las componentes conexas de G distintas a G_0h, para toda $h \in H$ y elijamos $\{\,\sigma_i\,\}_{i \in I}$ un conjunto de representantes de cada una de dichas componentes, de modo que

$$
\begin{aligned}
\emptyset &= \left(\bigcup_{h \in H} G_0 h\right) \cap \left(\bigcup_{i \in I} G_0 \sigma_i\right) \\
G &= \left(\bigcup_{h \in H} G_0 h\right) \cup \left(\bigcup_{i \in I} G_0 \sigma_i\right).
\end{aligned}
$$

De ese modo

$$
\begin{aligned}
\pi^{-1}(G/H \setminus \pi(G_0)) &= \pi^{-1}(G/H) \setminus \pi^{-1}(\pi(G_0)) \\
&= G \setminus \bigcup_{h \in H} G_0 h \\
&= \bigcup_{i \in I} G_0 \sigma_i\,.
\end{aligned}
$$

Por lo cual

$$G/H \setminus \pi(G_0) = \pi\Big(\bigcup_{i\in I} G_0\sigma_i\Big)$$

es abierto.

Como $\pi(G_0)$ es abierto y cerrado, $\pi(G_0) = G/H$; es decir, $\tilde{\alpha}(G_0) = \Psi \circ \pi(G_0) = M$. Así la restricción de α a $G_0 \times M$ es una acción transitiva en M. ∎

Observación 9.1.9. Podemos interpretar el Teorema 9.1.8 como que salvo isomorfismo G actúa transitivamente únicamente en variedades homogéneas, es decir que dada la notación de dicho Teorema y la acción β expresada en el ejemplo 9.1.7 el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} G \times G/H \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G \times \Psi"'] & G/H \arrow[d, "\Psi"] \\ G \times M \arrow[r, "\alpha"'] & M \end{tikzcd}$$

También podemos concluir que si H_0 y H_1 son subgrupos de isotropía de p_0 y p_1 en M de la acción α entonces G/H_0 y G/H_1 son difeomorfos y que G actúa en la forma natural en cada uno básicamente en la misma manera, en el sentido de que obtenemos un diagrama conmutativo como el anterior.

En la prueba del Teorema 9.1.8 la demostración de que Ψ está bien definida, es inyectiva y no singular no depende del hecho de que α sea una acción transitiva. Gracias a ello podemos concluir el siguiente resultado.

***Corolario* 9.1.10.** Sea G un grupo de Lie y $\alpha : G \times M \longrightarrow M$ una acción de G en M. Sea $p_0 \in M$ y H su grupo de isotropía. Entonces H es cerrado y $\Psi : G/H \longrightarrow M$ para el cual

$$\Psi(\sigma H) = \alpha(\sigma, p_0) = \alpha_\sigma(p_0)\,,$$

está bien definido y es una inmersión, de modo que $(G/H,\, \Psi)$ es una subvariedad de M con imagen $\Psi(G/H) = G_{p_0} = \{\, \alpha(g, p_0) \;:\; g \in G\,\}$ la órbita de p_0 con respecto a la acción α.

Demostración. Por la prueba del Teorema 9.1.8 podemos concluir que H es un subgrupo cerrado y que $(G/H,\, \Psi)$ es una subvariedad de M.

Si consideramos $\tilde{\alpha} : G \longrightarrow M$ definida como $\tilde{\alpha}(\sigma) = \alpha(\sigma, p_0)$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, "\pi"'] & M \\ G/H \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

Dado que π es suaprayectiva $\Psi(G/H) = \tilde{\alpha}(G) = G_{p_0}$.

■

Observación 9.1.11. Por el Corolario anterior podemos concluir que G_{p_0} puede recibir una única estructura de variedad diferenciable de tal modo que Ψ resulta un difeomorfismo, concluyendo con ello que dado $p \in M$, $G_p = \{\, \alpha(\sigma, p) \,:\, \sigma \in G \,\}$ (la órbita de p con respecto a la acción α) recibe una estructura de variedad diferenciable de tal modo que (G_p, i_{G_p}) es una subvariedad de M difeomorfa a G/H_p, donde G/H_p es el grupo de isotropía de p.

Hemos visto que si consideremos a G/H como variedad homogénea, la función β dada en el ejemplo 9.1.7 es una acción. Veamos que es cierto el recíproco, es decir que si G/H posee una estructura de variedad diferenciable para la cual β resulta ser suave, entonces G/H es una variedad homogénea.

Suponiendo que G/H tiene una estructura de variedad de modo que β es suave, entonces resulta una acción transitiva. De ese modo, tomando $M = G/H$ y $p_0 = eH = H$, entonces H es el grupo de isotropía de p_0 y

$$\begin{aligned} G/H &\xrightarrow{\Psi} M \\ \sigma H &\longmapsto \beta_\sigma(eH) = \sigma H \end{aligned}$$

es un difeomorfismo. Es decir, la única estructura que puede recibir G/H de tal forma que β sea suave es la de variedad homogénea. Esto se enuncia a continuación.

***Corolario* 9.1.12.** Sea G un grupo de Lie y $H \subseteq G$ subgrupo cerrado de G. Entonces G/H tiene una estructura de variedad difenciable para la cual

$$\begin{aligned} G \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (\sigma, \tau H) &\longmapsto \sigma\tau H \end{aligned}$$

es suave si y sólo si G/H es una variedad homogénea (definición 9.1.4).

***Teorema* 9.1.13.** *Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo normal y cerrado de G. Entonces existe una estructura de variedad diferenciable para G/H de tal modo que con la operación natural resulta ser un grupo de Lie (dicha estructura es la de variedad homogénea).*

Demostración. Consideremos

$$\widetilde{\mu} : G/H \times G/H \longrightarrow G/H$$

definida como

$$\widetilde{\mu}(\sigma H, \tau H) = \sigma\tau H\,.$$

Como H es normal, $\widetilde{\mu}$ está bien definida y resulta ser una operación natural de grupo para G/H. Consideremos a G/H con la estructura de variedad homogénea. Basta verificar que $\widetilde{\mu}$ es suave con dicha estructura diferenciable para concluir que G/H es un grupo de Lie (véase 4.1.5). Sean $\sigma, \tau \in G$ y W_σ, $W_\tau \subseteq G/H$ vecindades abiertas de σH y τH respectivamente, y

$$\rho_\sigma : W_\sigma \longrightarrow G \quad \text{y} \quad \rho_\tau : W_\tau \longrightarrow G\,,$$

mapeos suaves que satisfacen que $\pi \circ \rho_\sigma = \mathrm{id}_{W_\sigma}$ y $\pi \circ \rho_\tau = \mathrm{id}_{W_\tau}$.

Así, si $\mu : G \times G \longrightarrow G$ es la multiplicación en G,

$$\widetilde{\mu} \circ (\pi \times \pi) = \pi \circ \mu\,,$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}|_{W_\sigma \times W_\tau} &= \widetilde{\mu} \circ (\pi \circ \rho_\sigma \times (\pi \circ \rho_\tau) \\ &= \pi \circ \mu \circ (\rho_\sigma \times \rho_\tau) \end{aligned}$$

es suave.

■

Si H satisface las condiciones del Teorema anterior, la estructura de variedad homogénea de G/H es la única con la cual resulta un grupo de Lie con $\widetilde{\mu}$ y que hace a la proyección canónica una función suave. Para verificarlo basta notar que con dichas condiciones $\widetilde{\mu} \circ (\pi \times \mathrm{id}_{G/H}) : G \times G/H \longrightarrow G/H$ es suave, siguiéndose el resultado del Corolario 9.1.12.

9.2. Teoremas de isomorfismo en grupos de Lie

Observemos que el primer Teorema de isomorfismo para grupos abstractos es válido para grupos de Lie.

***Proposición* 9.2.1.** Sean G, G' grupos de Lie y $\Psi : G \longrightarrow G'$ morfismo de grupos de Lie. Entonces $\operatorname{Im} \Psi = H'$ recibe una estructura de grupo de Lie de tal forma que $(H', i_{H'})$ es un subgrupo de Lie de G' isomorfo a $G/\ker \Psi$.

Demostración. Denotemos $H = \ker \Psi$. Sabemos que H es un subgrupo cerrado y normal de G, de modo que G/H es un grupo de Lie (de hecho una variedad homogénea) y además $\pi : G \longrightarrow G/H$ es un morfismo de grupos de Lie. Observemos que $\sigma H = \tau H$ si y sólo si $\sigma^{-1}\tau \in \ker \Psi = H$ que es equivalente a que $\Psi(\sigma) = \Psi(\tau)$. De modo que $\widetilde{\Psi} : G/H \longrightarrow G'$, para la cual $\widetilde{\Psi}(\sigma H) = \Psi(\sigma)$, está bien definida y es inyectiva. Además hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \\ G/H \arrow[ur, "\widetilde{\Psi}"'] & \end{tikzcd}$$

Por la observación 9.1.5 $\widetilde{\Psi}$ es suave.

Por definición $\widetilde{\Psi}$ es un morfismo de grupos de Lie, de modo que basta mostrar que $d\widetilde{\Psi}_{\pi(e)}$ es inyectiva para concluir que $(G/H, \widetilde{\Psi})$ es subgrupo de Lie de G'.

Como $d\pi_e$ es suprayectiva, $d\widetilde{\Psi}_{\tilde{e}} = \{ 0 \}$ si y sólo si $\ker d\pi_e = \ker d\Psi_e$. Por el Teorema 7.2.4 sabemos que el álgebra de Lie de H es $\ker d\Psi_e$ y por la observación 9.1.3 $\ker d\pi_e = \ker d\Psi_e$. Como $H' = \operatorname{Im}\Psi = \operatorname{Im}\widetilde{\Psi}$ (pues π es suprayectiva), mediante $\widetilde{\Psi}$ podemos inducir una estructura de variedad diferenciable a H', de modo que $\widetilde{\Psi}$ resulte un isomorfismo de grupos de Lie, de manera que $(H', i_{H'})$ es un subgrupo de Lie con dicha estructura. ■

Por el Teorema 5.2.10 una condición necesaria y suficiente para que $(G/H, \tilde{\Psi})$ sea un encaje es que $\operatorname{Im}\Psi$ sea un subconjunto cerrado de G'. En el caso particular en que Ψ es un epimorfismo, $\widetilde{\Psi}$ resulta un homeomorfismo; por el Teorema 7.1.2 es suficiente para que $\widetilde{\Psi}$ sea un difeomorfismo.

Veremos el análogo del segundo Teorema de isomorfismo. Para ello recordemos que si G es un grupo abstracto y $H, N \subseteq G$ son subgrupos, se define el producto de H y N como el conjunto

$$NH = \{ hn \,:\, h \in H, n \in N \}.$$

Si alguno de ellos es normal se tiene que $HN = NH = N \vee H$, donde $N \vee H = \{ a_1b_1a_2b_2 \dots a_nb_n \,:\, a_i \in N \text{ y } b_i \in H \}$ es el subgrupo más pequeño que contiene a N y H.

El siguiente Lema nos será de utilidad en la demostración del segundo Teorema de isomorfismo.

***Lema* 9.2.2.** Sean G un grupo topológico, $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de G y $g \in G$. Entonces $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a g si y sólo si para cualquier $V \subseteq G$ vecindad simétrica del elemento neutro e (es decir, $V = V^{-1}$) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \geqslant N$, $g^{-1}g_n \in V$ (o bien $g_ng^{-1} \in V$).

Demostración. Para concluir el resultado basta mostrar que

$$\beta = \{ V \subseteq G \,:\, e \in V \quad \text{y} \quad V = V^{-1} \}$$

es una base local de e ya que en este caso $\{ gV \,:\, V \in \beta \}$ y $\{ Vg \,:\, V \in \beta \}$ resultan ser bases locales de g.

Observemos que para toda $W \subseteq G$ vecindad abierta de e, $W \cap W^{-1}$ es una vecindad simétrica y $e \in W \cap W^{-1} \subseteq W$.

Por otro lado, dadas $V, W \in \beta$, $V \cap W \in \beta$, de modo que β es una base local de vecindades de e.

■

Observación 9.2.3. Con la notación de Lema anterior, si $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a g entonces $(g_k^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a g^{-1}, pues para toda $V \in \beta$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \geqslant N$, $g^{-1}g_k \in V$ si y sólo si $g_k^{-1}g \in V$.

***Proposición* 9.2.4.** Sea G un grupo de Lie y (N, i_N) subgrupo de Lie de G. Sea H subgrupo cerrado de G y $\pi : G \longrightarrow G/H$ la proyección canónica. Entonces $H \cap N$ es un subgrupo cerrado de N y satisface que

I. $\pi(N)$ es una subvariedad de G/H difeomorfa a $N/N \cap H$.

II. Si i_N es un encaje y H es compacto entonces $\pi(N)$ es un subconjunto cerrado de G/H.

Demostración. Observemos que $N \cap H = i_N^{-1}(H)$, de modo que es un subgrupo cerrado de N. Sea $\beta : G \times G/H \longrightarrow G/H$ la acción natural del ejemplo 9.1.7. De modo que $\beta_N = \beta \circ (i_N \times \mathrm{id}_{G/H}) : N \times G/H \longrightarrow G/H$ es una acción.

Observemos que el grupo de isometría de $\pi(e)$ con respecto a la acción β_N es $H \cap N$, pues dado $n \in N$, $n(eH) = eH = H$ si y sólo si $n \in H$.

Por el Corolario 9.1.10 sabemos que

$$\begin{aligned} N/N\cap H &\xrightarrow{\Psi} G/H \\ nN &\longmapsto \beta_N(n,e) = \pi(n) \end{aligned}$$

es suave y además $(N/N \cap H, \Psi)$ es una subvariedad de G/H.

Como $\Psi(N/N \cap H) = \pi(N)$ concluimos I.

Por otro lado sabemos que i_N es un encaje si y sólo si N es cerrado en G (Teorema 5.2.10), de modo que

$$\pi^{-1}(\pi(N)) = \bigcup_{n\in N} \pi^{-1}(\pi(n)) = \bigcup_{n\in N} nH = NH\,.$$

Así que basta concluir que NH es cerrado para concluir que $\pi(N)$ lo es.

Consideremos $(n_k h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesión de elementos en NH que converge a $\alpha \in G$. Veamos que $\alpha \in NH$.

Como H es compacto y G es primero numerable existe una subsucesión de $(h_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ que converge a $h \in H$. De modo que $(h_{k_i}^{-1})_{i\in\mathbb{N}}$ converge a h^{-1} (observación 9.2.3). Por la continuidad del producto en G,

$$(n_{k_i})_{i\in\mathbb{N}} = ((n_{k_i}h_{k_i})h_{k_i}^{-1})_{i\in\mathbb{N}}$$

converge a αh^{-1}. Como (n_{k_i}) es una sucesión de N y éste es cerrado, $\alpha h^{-1} \in N$. Así concluimos que $\alpha \in NH$. Por lo tanto NH es cerrado.

■

De considerar que H es normal en la Proposición anterior, G/H resulta un grupo de Lie y $\pi(N) = NH/H$. Por el segundo Teorema de Isomorfismo sabemos que Ψ es un morfismo de grupos y por lo tanto $(N/N \cap H, \Psi)$ es un subgrupo de Lie de G/H. El inciso II nos dice que basta que i_N sea encaje (es decir que N sea cerrado en G) para concluir que Ψ es un encaje.

Veamos el tercer Teorema de isomorfismo.

***Proposición* 9.2.5.** Sea G un grupo de Lie y K, $H \subseteq G$ subgrupos cerrados de G tales que $K \subseteq H$ y K es normal, entonces H/K es un subconjunto cerrado de G/K y además $(G/K)/(H/K)$ es difeomorfo a G/H.

Demostración. Consideremos la acción natural de G en G/H

$$\begin{aligned} G \times G/H &\xrightarrow{\beta_H} G/H \\ (g, \sigma H) &\longmapsto g\sigma H \end{aligned}$$

Consideremos $\tilde{\beta}_H : G/K \times G/H \longrightarrow G/H$ para la cual $\beta_H(\tau K, \sigma H) = \tau\sigma H = \beta_H(\tau, \sigma H)$. Veamos que está bien definida.

Para cualesquiera $\tau_1, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2 \in G$ que satisfacen que $\tau_1^{-1}\tau_2 \in K \subseteq H$ y $\sigma_1^{-1}\sigma_2 \in H$, dado que K es normal

$$\sigma_1^{-1}\tau_1^{-1}\tau_2\sigma_2 = (\sigma_1^{-1}\tau_1^{-1}\tau_2\sigma_1)(\sigma_1^{-1}\sigma_2) \in H\,.$$

Como $\tau_1\sigma_1 H = \tau_2\sigma_2 H$ si y sólo si $\sigma_1^{-1}\tau_1^{-1}\tau_2\sigma_2 \in H$, concluimos que β_H está bien definida.

Denotando $\pi_K : G \longrightarrow G/K$ a la proyección canónica se tiene que H/K es cerrado si y sólo si $\pi_K^{-1}(H/K)$ es cerrado; dado que $K \subseteq H$ dicho conjunto es igual a H el cual es cerrado, concluyendo así que H/K también lo es. Además obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \times G/H \arrow[r, "\beta_H"] \arrow[d, "\pi_K \times \mathrm{id}_{G/H}"'] & G/H \\ G/K \times G/H \arrow[ur, "\tilde{\beta}_H"'] & \end{tikzcd}$$

Por el inciso II del Teorema 9.1.2 podemos concluir que $\tilde{\beta}_H$ es suave. Más aún, por la conmutatividad del diagrama anterior y dado que π_K es suprayectivo, concluimos que $\tilde{\beta}_H$ es una acción transitiva de G/K en G/H.

Observemos que τK es un elemento del grupo de isotropía de eH si y sólo si $\tau H = H$, es decir, $\tau \in H$. De modo que el grupo de isotropía de eH es H/K. Por el Teorema 9.1.8 podemos concluir que la función

$$\begin{array}{rcl} (G/K)/(H/K) & \xrightarrow{\Psi} & G/H \\ (\sigma K)H/K & \longmapsto & \tilde{\beta}_H(\sigma K, eH) = \sigma H \end{array}$$

es un difeomorfismo.

■

Por el tercer Teorema de isomorfismo de grupos, si H es un subgrupo normal de G dicha Ψ es un isomorfismo de grupos. De modo que agregando a las hipótesis de la Proposición anterior que H sea normal obtenemos que Ψ es un isomorfismo de grupos de Lie.

9.3. Ejemplos de variedades homogéneas

En lo siguiente consideramos algunas variedades homogéneas, que se obtendrán al aplicar el Teorema 9.1.8.

***Proposición* 9.3.1.** El grupo de matrices $O(d)$ actúa transitivamente en la esfera $\mathbb{S}^{d-1}$, de tal forma que el grupo de isotropía de $e_1 = (1, \ldots, 0)$ es isomorfo a $O(d-1)$. Análogamente, si $d > 1$ $SO(d)$ actúa transitivamente en la esfera $\mathbb{S}^{d-1}$, resultando que el grupo de isotropía de e_1 es isomorfo a $SO(d-1)$.

Consideremos $\mathbb{R}^d$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\beta = \{\, e_i \,\}_{i=1}^d$ su base canónica (donde $e_i = (\delta_{1i}, \ldots, \delta_{di})$, siendo δ_{ij} la delta de Kronecker).

Sabemos que $O(d)$ es un subgrupo cerrado de Lie de $Gl(d, \mathbb{R})$ y bajo el isomorfismo inducido por β corresponde a los automorfismos ortogonales de $\mathbb{R}^d$ (véase A.4).

Identificando los elementos de $\mathbb{R}^d$ con las matrices de $d \times 1$, obtenemos la acción

$$\begin{array}{rcl} O(d) \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^d \\ (A, v) & \longmapsto & Av \end{array}$$

que satisface que $\alpha(O(d) \times \mathbb{S}^{d-1}) \subseteq \mathbb{S}^{d-1}$. Más aún, como $(\mathbb{S}^{d-1}, i_{\mathbb{S}^{d-1}})$ es un encaje en $\mathbb{R}^d$, la función

$$\tilde{\alpha} = \alpha|_{O(d) \times \mathbb{S}^{d-1}} : O(d) \times \mathbb{S}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{d-1}$$

es suave (Teorema 2.6.2). De modo que tenemos una acción de $O(d)$ en $\mathbb{S}^{d-1}$. Veamos que es transitiva.

Sea $v_1 \in \mathbb{S}^{d-1}$ y $\beta' = \{ v_1, \ldots, v_d \}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^d$. Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ para la cual $T(e_j) = \sum_{i=1}^d a_{ij} e_i = v_j$ de modo que T es ortogonal pues manda la base ortogonal β en la base ortogonal β' (véase A.4). De modo que $[T]_\beta = (a_{ij}) \in O(d)$ y

$$[T(e_1)]_\beta = (a_{ij})e_1 = v_1 \, .$$

Análogamente dado $w_1 \in \mathbb{S}^{d-1}$ existe $(b_{ij}) \in O(d)$ tal que $(b_{ij})e_1 = w_1$, por lo que $(b_{ij})^t w_1 = e_1$ y así $(a_{ij})(b_{ij})^t w_1 = v_1$. De esa forma podemos aplicar el Teorema 9.1.8.

Denotemos como H_1 a el grupo de isotropía de e_1. Observemos que si $\tilde{\tau} = (a_{ij}) \in H_1$ entonces $\tilde{\tau} e_1 = (a_{11}, \ldots, a_{d1}) = e_1$, es decir $a_{11} = 1$ y $a_{i1} = 0$ si $1 < i \leqslant d$. Como $\tilde{\tau} \in O(d)$ entonces el conjunto de vectores columna es una base ortonormal de $\mathbb{R}^d$, es decir que dado $j \neq 1$, $0 = \langle e_1, (a_{1j}, \ldots, a_{dj}) \rangle = a_{1j}$, es decir

$$\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \begin{pmatrix} & \\ & \tau & \\ & \end{pmatrix} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

donde $\tau \in \mathfrak{gl}(d-1, \mathbb{R})$. Es sencillo verificar que los vectores columna de τ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^{d-1}$, pues su producto interior coincide con el de los vectores conlumna distintos a e_1 en $\tilde{\tau}$, por lo cual $\tau \in O(d-1)$ (Véase A.4 Proposición A.4.11).

Inversamente, si $\sigma \in O(d-1)$ entonces

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \begin{pmatrix} & \\ & \sigma & \\ & \end{pmatrix} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

es un elemento de $O(d)$, pues sus vectores columna forman un conjunto ortonormal de $\mathbb{R}^d$ (Véase A.4 Proposición A.4.11).

Como la función

$$\begin{array}{ccc} Gl(d-1, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\alpha_d} & Gl(d, \mathbb{R}) \\ \sigma & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \begin{pmatrix} & \\ & \sigma & \\ & \end{pmatrix} & \\ 0 & & \end{pmatrix} \end{array}$$

es una inmersión, la restricción de α_d a $O(d-1)$ también lo es y factoriza a través de $O(d)$, que es un subgrupo cerrado de $\mathfrak{gl}(d,\mathbb{R})$, por lo que concluimos que $\alpha_d|_{O(d-1)} : O(d-1) \longrightarrow O(d)$ es una inmersión (Teorema 2.6.2). Más aún, es un morfismo inyectivo de grupos de Lie cuya imagen es cerrada en $O(d)$.

Consideremos $A \in \mathfrak{o}(d-1)$, y

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

el cual resulta ser un elemento de $\mathfrak{o}(d)$, ya que para cualquier $t \in \mathbb{R}$, $\exp tA \in O(d-1)$ y de ahí

$$\begin{aligned}
\exp t\tilde{A} &= I + t\tilde{A} + \frac{t^2}{2!}\tilde{A}^2 + \dots \\
&= I + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \begin{pmatrix} & tA & \end{pmatrix} & \\ 0 & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \begin{pmatrix} & \frac{t^2}{2!}A & \end{pmatrix} & \\ 0 & & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \begin{pmatrix} & \exp tA & \end{pmatrix} & \\ 0 & & \end{pmatrix} \\
&= \alpha_d \exp tA\,.
\end{aligned}$$

Por la Proposición 6.1.8, $\tilde{A} \in d\alpha_d(\mathfrak{o}(d-1))$. Dado que $\{\, \tilde{A} \,:\, A \in \mathfrak{o}(d-1) \,\}$ es subespacio vectorial de $\mathfrak{o}(d)$ de la misma dimensión que $\mathfrak{o}(d-1)$ y está contenido en $d\alpha_d(\mathfrak{o}(d-1))$ entonces

$$d\alpha_d(\mathfrak{o}(d-1)) = \{\, \tilde{A} \,:\, A \in \mathfrak{o}(d-1) \,\}\,,$$

es decir, $d\alpha_d$ es inyectiva.

Por lo tanto, identificando $\mathfrak{o}(d-1)$ con su imagen bajo α_d podemos decir que $O(d-1)$ es un subgrupo cerrado de $O(d)$ y además coincide con H_1. Por lo tanto

$$O(d)/O(d-1) \quad \text{es difeomorfo a} \quad \mathbb{S}^{d-1}\,.$$

Consideremos la restricción de la acción $\tilde{\alpha}$ a $SO(d) \times \mathbb{S}^{d-1}$, es decir

$$\begin{aligned} SO(d) \times \mathbb{S}^{d-1} &\longrightarrow \mathbb{S}^{d-1} \\ (A, v) &\longmapsto Av \end{aligned} \tag{9.1}$$

Como $SO(d)$ es un subgrupo cerrado de $Gl(d, \mathbb{R})$ dicha función resulta ser una acción.

Afirmación. *La acción expresada en (9.1) es transitiva si $d > 1$.*
Observemos que $SO(1) = \{ I \}$, de modo que no actúa transitivamente en $\mathbb{S}^0 = \{ 1, -1 \}$. Veamos que si $d > 1$ la acción de $SO(d)$ en $\mathbb{S}^{d-1}$ es transitiva.

Si $\beta = \{ e_i \}_{i=1}^d$ es la base canónica de $\mathbb{R}^d$ basta mostrar que dado $v_1 \in \mathbb{S}^{d-1}$ existe una matriz $A \in SO(d)$ que satisface que $Ae_1 = v_1$.

Sea $\beta' = \{ v_1, \ldots, v_d \}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^d$ y T el endomorfismo que satisface que

$$T(e_j) = v_j = \sum_{i=1}^{d} a_{ij} e_i \, .$$

De modo que $[T]_\beta = (a_{ij})$. Como T es ortogonal (Véase A.4), $\det T = \pm 1 = r$. Consideremos T_0 el endomorfismo que satisface que

$$\begin{aligned} T_0(e_j) &= v_j \qquad \text{si}\, 1 \leqslant j < d \\ T_0(e_d) &= r v_d \, . \end{aligned}$$

Como $\{ v_1, \ldots, v_{d-1}, r v_d \}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^d$ podemos concluir que es ortogonal y más aún, por la multilinealidad del determinante con respecto a los vectores columna de una matriz

$$\det [T_0]_\beta = r \det [T]_\beta = 1 \, .$$

De modo que $[T_0]_\beta \in SO(d)$ y como $T(e_1) = T_0(e_1) = v_1$, $[T_0]_\beta e_1 = v_1$. Con ello concluimos que la acción es transitiva para $d > 1$.

Ya que la restricción correspondiente de α_d a $SO(d-1)$ factoriza a través del mapeo inclusión de $SO(d)$, la función $\alpha_d|_{SO(d-1)} : SO(d-1) \longrightarrow SO(d)$ una inmersión. De tal forma podemos considerar el grupo de isotropía de e_1 como $SO(d-1)$. Así, por el Teorema 9.1.8 podemos concluir que si $d > 1$ entonces

$$SO(d)/SO(d-1) \quad \text{es difeomorfo a} \quad \mathbb{S}^{d-1} \, .$$

Obsérvese que en el caso en que $d = 2$ se concluye que $SO(2)$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

***Proposición* 9.3.2.** El grupo de matrices $U(d)$ actúa transitivamente en la esfera $\mathbb{S}^{2d-1}$, de manera que el grupo de isotropía de $e_1 = (1, \dots, 0)$ es isomorfo a $U(d-1)$. Análogamente, si $d > 1$, $SU(d)$ actúa transitivamente en la esfera $\mathbb{S}^{2d-1}$, resultando que el grupo de isotropía de e_1 es isomorfo a $SU(d-1)$.

Consideremos $\mathbb{C}^d$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial y el producto interior usual. Denotemos a su base canónica como $\beta = \{ e_i \}_{i=1}^d$ (donde $e_i = (\delta_{1i}, \dots, \delta_{di})$, siendo δ_{ij} la delta de Kronecker).

La restricción del isomorfismo inducido por β entre $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{C}^d)$ y $\mathfrak{gl}(d, \mathbb{C})$ a $U(d)$ tiene como imagen a el conjunto de operadores unitarios, de modo que por ser $U(d)$ cerrado en $\mathfrak{gl}(d, \mathbb{C})$ dichos subgrupos son isomorfos bajo la restricción (véase A.4).

En forma análoga a como lo hicimos en el inciso anterior, identificaremos los vectores en $\mathbb{C}^d$ con las matrices de $d \times 1$ con entradas en $\mathbb{C}$. Consideremos la siguiente acción

$$\begin{aligned} U(d) \times \mathbb{C}^d &\xrightarrow{\ \gamma\ } \mathbb{C}^d \\ (A, \xi) \quad &\longmapsto A\xi \end{aligned}$$

Observemos que $X = \{ \xi \in \mathbb{C}^d : ||\xi|| = 1 \}$ coincide con $\mathbb{S}^{2d-1}$ al identificar $\mathbb{C}^d$ con $\mathbb{R}^{2d}$ pues $(\xi_1, \dots, \xi_d) \in X$ si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{d} (\mathrm{Re}\,(\xi_i))^2 + \sum_{i=1}^{d} (\mathrm{Im}\,(\xi_i))^2 = 1\,,$$

donde $\mathrm{Re}\,(\xi_i)$ y $\mathrm{Im}\,(\xi_i)$ denotan la parte real e imaginaria de ξ_i respectivamente.

De modo que haciendo esa identificación y considerando A.4, tenemos que $\gamma(U(d) \times \mathbb{S}^{2d-1}) \subseteq \mathbb{S}^{2d-1}$.

De la misma forma en que se hizo en el inciso anterior podemos concluir que

$$\tilde{\gamma} = \gamma|_{U(d) \times \mathbb{S}^{2d-1}} : U(d) \times \mathbb{S}^{2d-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{2d-1}$$

es una acción transitiva (pues dada $v_1 \in \mathbb{S}^{2d-1}$ podemos extender dicho vector a una base ortonormal de $\mathbb{C}^d$ y considerar el operador T en $\mathbb{C}^d$ definido como en el inciso anterior de tal forma que es unitario y manda e_1 en v_1, lo cual es suficiente para mostrar que dicha acción es transitiva).

Dado $\sigma \in U(d-1)$

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \begin{pmatrix} & & \\ & \sigma & \\ & & \end{pmatrix} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

es un elemento de $U(d)$, de modo que el mapeo suave

$$\begin{aligned} U(d-1) &\longrightarrow U(d) \\ \sigma &\longmapsto \tilde{\sigma} \end{aligned}$$

hace a $U(d-1)$ un subgrupo de Lie cerrado de $U(d)$, cuya imagen coincide con el grupo de isotropía de e_1 con respecto a la acción $\tilde{\gamma}$, concluyendo con ello que

$$U(d)/U(d-1) \qquad \text{es difeomorfo a} \qquad \mathbb{S}^{2d-1}.$$

Observemos que por ser $SU(d)$ un subgrupo cerrado de $Gl(d,\mathbb{C})$, la restricción de la acción γ

$$\begin{aligned} SU(d)\times\mathbb{S}^{2d-1} &\longrightarrow \mathbb{S}^{2d-1} \\ (A,\xi) &\longmapsto A\xi \end{aligned} \tag{9.2}$$

resulta ser una acción.

Afirmación. *La acción expresada en (9.2) es transitiva si* $d>1$.
Observemos que $SU(1)=\{\,I\,\}$, de modo que no actúa transitivamente en $\mathbb{S}^1$. Veamos que si $d>1$ la acción de $SU(d)$ en $\mathbb{S}^{2d-1}$ es transitiva.

Si $\beta=\{\,e_i\,\}_{i=1}^d$ es la base canónica de $\mathbb{C}^d$ basta mostrar que dado $v_1\in\mathbb{S}^{2d-1}$ existe una matriz $A\in SU(d)$ que satisface que $Ae_1=v_1$.

Sea $\beta'=\{\,v_1,\ldots,v_d\,\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^d$ y T el endomorfismo de $\mathbb{C}^d$ que satisface que

$$T(e_j)=v_j\,,$$

de modo que $[T]_\beta$ es unitario (véase A.4) y por ello $\det T=z_0\in\mathbb{S}^1$. Consideremos T_0 el endomorfismo que satisface que

$$\begin{aligned} T_0(e_j)&=v_j \qquad \text{si}\,1\leqslant j<d \\ T_0(e_d)&=z_0^{-1}v_d\,. \end{aligned}$$

Como $\{\,v_1,\ldots,v_{d-1},z_0^{-1}v_d\,\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{C}^d$ podemos concluir que es unitario y más aún, por la multilinealidad del determinante con respecto a los vectores columna de una matriz

$$\det[T_0]_\beta=z_0^{-1}\det[T]_\beta=1\,.$$

De modo que $[T_0]_\beta\in SU(d)$ y como $T(e_1)=T_0(e_1)=v_1$ entonces $[T_0]_\beta e_1=v_1$. Con ello concluimos que la acción resulta transitiva si $d>1$.

Como antes se puede observar que el grupo de isotropía de e_1 es $SU(d-1)$, pensando a éste como subgrupo de Lie cerrado de $SU(d)$ con respecto al siguiente mapeo suave

$$\begin{array}{ccc} SU(d-1) & \longrightarrow & SU(d) \\ \sigma & \longmapsto & \tilde{\sigma} \end{array}$$

De modo que por el Teorema 9.1.8, si $d>1$,

$$SU(d)/SU(d-1) \qquad \text{es difeomorfo a} \qquad \mathbb{S}^{2d-1}.$$

***Proposición* 9.3.3.** El espacio proyectivo complejo de $\mathbb{CP}^{d-1}$ es isomorfo a una variedad homogénea. Análogamente, el espacio proyectivo real $\mathbb{RP}^{d-1}$ es isomorfo a una variedad homogénea.

Consideremos $\mathbb{CP}^{d-1}$, *el espacio proyectivo complejo de dimensión* $d-1$ definido en el ejemplo 1.1.10. Dicha variedad resulta ser el espacio de órbitas de la acción

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2d-1} & \longrightarrow & \mathbb{S}^{2d-1} \\ (z,\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_d)) & \longmapsto & z\xi=(z\xi_1,\ldots,z\xi_d) \end{array}$$

(véase la sección 9.5, observación 9.5.11).

Denotemos a la proyección canónica de $\mathbb{S}^{2d-1}$ en $\mathbb{CP}^{d-1}$ como $\tilde{\pi}$, y $\tilde{\pi}(\xi)$ como $[\xi]$ para todo $\xi\in\mathbb{S}^{2d-1}$.

Consideremos la acción dada en la Proposición 9.3.2

$$\begin{array}{ccc} SU(d)\times\mathbb{S}^{2d-1} & \xrightarrow{\gamma_0} & \mathbb{S}^{2d-1} \\ (A,\xi) & \longmapsto & A\xi \end{array}$$

que es transitiva.

Observemos que $[\xi]=[\xi']$ si y sólo si existe $z\in\mathbb{S}^1$ de tal forma que $\xi=z\xi'$, de modo que dada $A\in SU(d)$ se tiene que $A\xi=z(A\xi')$, es decir, $[A\xi]=[A\xi']$. Así la función

$$\begin{array}{ccc} SU(d)\times\mathbb{CP}^{d-1} & \xrightarrow{\tilde{\gamma}_0} & \mathbb{CP}^{d-1} \\ (A,[\xi]) & \longmapsto & [A\xi] \end{array}$$

está bien definida. Más aún, dado que $\tilde{\pi}$ es una fibración con fibra $\mathbb{S}^1$ y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} SU(d)\times\mathbb{S}^{2d-1} \arrow[r, "\tilde{\pi}\circ\gamma_0"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{SU(d)}\times\tilde{\pi}"'] & \mathbb{CP}^{d-1} \\ SU(d)\times\mathbb{CP}^{d-1} \arrow[ur, "\tilde{\gamma}_0"'] & \end{tikzcd}$$

$\tilde{\gamma}_0$ es suave ya que para todo $[\xi] \in \mathbb{CP}^{d-1}$ existe $U \subseteq \mathbb{CP}^{d-1}$ vecindad abierta de $[\xi]$ y $\Psi_U : U \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \tilde{\pi}^{-1}(U)$ difeomorfismo que satisface que $\pi_1 = \tilde{\pi} \circ \Psi_U$, donde π_1 es la proyección canónica de $U \times \mathbb{S}^1$ en U. Así, considerando la inclusión $i : U \longrightarrow U \times \mathbb{S}^1$ definida como $i([\xi]) = ([\xi], 1)$, tenemos que $\tilde{\pi} \circ \Psi_U \circ i = i_U$, la inclusión de U en $\mathbb{CP}^{d-1}$, y por ello

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_0|_{SU(d)\times U} &= \tilde{\gamma}_0 \circ (\mathrm{id}_{SU(d)} \times i_U) \\ &= \tilde{\gamma}_0 \circ (\mathrm{id}_{SU(d)} \times \tilde{\pi}) \circ (\mathrm{id}_{SU(d)} \times (\Psi_U \circ i)) \end{aligned}$$

es suave, y por lo tanto $\tilde{\gamma}_0$ lo es.

El hecho de que $\tilde{\gamma}_0 \circ \tilde{\pi} = \tilde{\pi} \circ \gamma_0$ y que $\tilde{\pi}$ se suprayectiva implica que $\tilde{\gamma}_0$ es transitiva, de modo que si denotamos como H_0 el grupo de isotropía de $[e_1]$, donde $e_1 = (1, \ldots, 0)$, entonces $\tilde{\sigma} \in H_0$ si y sólo si existe $\sigma \in U(d-1)$ tal que

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \det(\sigma)^{-1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \begin{pmatrix} & \\ & \sigma & \\ & \end{pmatrix} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Veamos que $U(d-1)$ es subgrupo de Lie con la función

$$\begin{aligned} U(d-1) &\xrightarrow{\lambda} SU(d) \\ \sigma &\longmapsto \tilde{\sigma} \end{aligned}$$

Por un lado

$$\begin{aligned} Gl(d-1, \mathbb{C}) &\xrightarrow{\tilde{\lambda}} Gl(d, \mathbb{C}) \\ \tau &\longmapsto \begin{pmatrix} \det(\tau)^{-1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \begin{pmatrix} & \\ & \tau & \\ & \end{pmatrix} \\ 0 & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es un morfismo de grupos de Lie. Más aún, la restricción de dicho morfismo a $U(d-1)$ es nuevamente un morfismo de grupos de Lie. Como dicha restricción factoriza a través del subgrupo cerrado $SU(d)$ y además λ hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} U(d-1) \arrow[r, "\tilde{\lambda}|_{U(d-1)}"] \arrow[dr, "\lambda"'] & Gl(d, \mathbb{C}) \\ & SU(d) \arrow[u, "i_{SU(d)}"'] \end{tikzcd}$$

λ es suave (Teorema 2.6.2), inyectivo y no singular, es decir, $(U(d-1), \lambda)$ es un subgrupo de $SU(d)$. De ese modo, identificando $H_0 = \lambda(U(d-1))$ con $U(d-1)$, por el Teorema 9.1.8

$$SU(d)/U(d-1) \qquad \text{es difeomorfo a} \qquad \mathbb{CP}^{d-1}\,.$$

En forma totalmente análoga podemos concluir que la acción de $SO(d)$ en $\mathbb{RP}^{d-1}$, el *espacio proyectivo real de dimensión* $d-1$, definida como

$$\begin{aligned} SO(d) \times \mathbb{RP}^{d-1} &\xrightarrow{\tilde{\gamma}_0} \mathbb{RP}^{d-1} \\ (A, [v]) &\longmapsto [Av] \end{aligned}$$

es transitiva y además es posible identificar el grupo de isotropía de $[e_1]$ con el grupo $O(d-1)$ gracias al mapeo

$$\begin{aligned} O(d-1) &\xrightarrow{\quad\tilde{\lambda}\quad} SO(d) \\ \tau &\longmapsto \begin{pmatrix} \det(\tau) & \dots & 0 \\ \vdots & \begin{pmatrix} & & \\ & \tau & \\ & & \end{pmatrix} & \\ 0 & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

concluyendo por el Teorema 9.1.8 que

$$SO(d)/O(d-1) \qquad \text{es difeomorfo a} \qquad \mathbb{RP}^{d-1}\,.$$

9.4. Topología de grupos de matrices

***Proposición* 9.4.1.** Sea H un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G. Si H y G/H son conexos, entonces G es conexo.

Demostración. Consideremos C la componente conexa de e en G. Como H es conexo, $H \subseteq C$. Supongamos que $C \neq G$, de modo que $C_0 = G \setminus C$ es un subconjunto abierto y cerrado de G, no vacío.

Como G/H es conexo y $\pi : G \longrightarrow G/H$ es un mapeo abierto, $\pi(C_0) \cap \pi(C) \neq \emptyset$. De modo que existen $y_0 \in C_0$ y $y \in C$ para las cuales $z = y^{-1}y_0 \in H$. Como $H \subseteq C$ y C es un grupo entonces $y_0 = yz \in C$, lo cual significa que $y_0 \in C_0 \cap C$, que es una contradicción.

Por lo tanto $C = G$, es decir, G es conexo. ■

***Teorema* 9.4.2.** *Consideremos $n \geqslant 1$, entonces los grupos de Lie $SO(n)$, $SU(n)$ y $U(n)$ son conexos y $O(n)$ tiene dos componentes conexas.*

Demostración. Observemos que $SO(1) = \{ I \} = SU(1)$ y $U(1) = \mathbb{S}^1$, de modo que son conexos. Procedamos por inducción y supongamos que $SO(n)$, $SU(n)$ y $U(n)$ son conexos para $n \geqslant 1$. Como $SU(n{+}1)/SU(n)$ y $U(n{+}1)/U(n)$ son difeomorfos a $\mathbb{S}^{2n+1}$ y $SO(n+1)/SO(n)$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^n$, por la Proposición anterior y las hipótesis de inducción concluimos que $SO(n{+}1)$, $SU(n{+}1)$ y $U(n+1)$ son conexos.

Por otro lado notemos que todos los elementos de $O(n)$ tienen determinante 1 o -1, de modo que

$$O(n) = SO(n) \cup \sigma SO(n)\,,$$

donde

$$\sigma = \begin{pmatrix} -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \begin{pmatrix} & I & \end{pmatrix} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

De modo que $O(n)$ es la unión de dos conexos ajenos, los cuales resultan ser sus componentes conexas. ■

***Teorema* 9.4.3.** *$Gl(d,\mathbb{R})$ tiene dos componentes conexas.*

Demostración. Consideremos $Gl(d,\mathbb{R})^+$ y $Gl(d,\mathbb{R})^-$ los conjuntos de matrices de determinantes positivos y negativos respectivamente. Dichos conjuntos son abiertos y disjuntos. Más aún, son difeomorfos pues la traslación izquierda por

$$\sigma = \begin{pmatrix} -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \begin{pmatrix} & I & \end{pmatrix} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

mapeo uno sobre otro.

De modo que basta mostrar que uno de ellos es conexo para concluir que $Gl(d,\mathbb{R})$ tiene dos componentes conexas. Para ello verificaremos que $Gl(d,\mathbb{R})^+$ es conexa por trayectorias. Para ello será suficiente observar que para cualquier $A \in Gl(d,\mathbb{R})^+$ existe una curva continua que comienza en A y termina en I.

Sean B matriz definida positiva y C ortogonal que satisfacen que

$$A = BC$$

(véase el Corolario A.4.17 de A.4). Dado que B es diagonalizable y todos sus eigenvalores son positivos se tiene que A, $B \in Gl(d,\mathbb{R})^+$. Como $\det A$ =det B $\det C$, concluimos que $C \in SO(n)$. Ya que $SO(n)$ es conexo y localmente conectable por trayectorias, también resulta ser conectable por trayectorias. Por ello basta exhibir una curva continua de A a C para concluir el resultado.

Consideremos $\sigma : [0,1] \longrightarrow Gl(d,\mathbb{R})^+$ definida como

$$\sigma(t) = tI + (1-t)B\,.$$

Observemos que es una curva suave y está bien definida pues $\sigma(t)$ es definida positiva para cualquier $t \in [0,1]$ (inciso III de la Proposición A.4.15).

Ya que $Gl(d,\mathbb{R})^+$ es un subgrupo abierto de $Gl(d,\mathbb{R})$, la curva $\tau : [0,1] \longrightarrow Gl(d,\mathbb{R})^+$ para la cual dada $t \in [0,1]$, $\tau(t) = \sigma(t)C$, es suave (en particular continua) y además satisface que $\tau(0) = A$ y $\tau(1) = C$.

■

La demostración del siguiente resultado es totalmente análoga a la demostración del Teorema anterior, por lo que omitimos los detalles en la prueba.

***Proposición* 9.4.4.** $Gl(d,\mathbb{C})$ es conexo.

Demostración. Mostraremos que $Gl(d,\mathbb{C})$ es conexo por trayectorias. Dado $A \in Gl(d,\mathbb{C})$ es suficiente exhibir una curva continua que conecte a dicha matriz con I. Sean B matriz definida positiva y C unitaria que satisfacen que

$$A = BC$$

(véase A.4.17 de A.4). Dado que B es diagonalizable y todos sus eigenvalores son positivos se tiene que $B \in Gl(d,\mathbb{C})$. Como $U(n)$ es conectable por trayectorias (pues es conexo y localmente conectable por trayectorias) basta mostrar que existe una curva continua que va de A a C.

Sea $\sigma : [0,1] \longrightarrow Gl(d,\mathbb{C})$ definida como

$$\sigma(t) = tI + (1-t)B\,.$$

Observemos que es una curva suave y está bien definida pues $\sigma(t)$ es definida positiva para cualquier $t \in [0,1]$ (inciso III de la Proposición A.4.15). Por la suavidad del producto la curva $\tau : [0,1] \longrightarrow Gl(d,\mathbb{C})$ para la cual dada $t \in [0,1]$, $\tau(t) = \sigma(t)C$, es suave (en particular continua) y además satisface que $\tau(0) = A$ y $\tau(1) = C$.

■

9.5. Acciones propias

En esta sección se presentará un resultado más acerca de acciones de grupos de Lie, enunciado en el Teorema 9.5.10. Los resultados y observaciones previas serán de utilidad en la demostración de dicho Teorema.

La siguiente definición al igual que la definición 9.1.6, menciona y nombra algunas propiedades de una acción que resultarán importantes en el desarrollo de esta sección.

Definición 9.5.1. Sea $\mu : G \times M \longrightarrow M$ una acción izquierda de G en M (definición 8.1.1). Diremos que μ es *libre* si para cualesquiera $m \in M$ y $g \in G$, si $g \neq e$ entonces $\mu(g,m) \neq m$.

Por otro lado diremos que dicha acción es *propia* (o que G actúa *propiamente* mediante μ) si dado cualquier compacto K en M, el conjunto

$$G_K = \{\, g \in G \,:\, gK \cap K \neq \emptyset \,\}$$

(donde $gK = \{\, \mu(g,k) \,:\, k \in K \,\}$), es relativamente compacto, es decir, tiene cerradura compacta.

Observación 9.5.2. Dada una acción izquierda $\mu : G \times M \longrightarrow M$, denotaremos como M/G a el conjunto de órbitas de la acción, es decir el conjunto de clases de equivalencia de la relación $\equiv \subseteq M \times M$ donde $x \equiv y$ si y sólo si existe un elemento $g \in G$ para el cual $x = \mu(g,y)$. Dado $m \in M$, denotaremos $G_m = \{\, \mu(g,m) \,:\, g \in G \,\}$ la órbita de m con respecto a μ.

Considerando el mapeo canónico $\pi : M \longrightarrow M/G$ que manda a los elementos de M en su respectiva clase de equivalencia, la topología de identificación en M/G inducida por π (Ejemplo 1.1.10), también llamada topología cociente, no sólo es la más fina que hace a π continua, sino que con ella π resulta abierta, ya que para cualquier abierto $A \subseteq M$,

$$\pi(\pi^{-1}(A)) = \bigcup_{a \in A} G_a = \bigcup_{g \in G} \mu_g(A)\,,$$

donde $\mu_g : M \longrightarrow M$ es el difeomorfismo definido como $\mu_g(m) = \mu(g,m)$ y por lo tanto dicho conjunto es abierto.

***Lema* 9.5.3.** Sea $\mu : G \times M \longrightarrow M$ acción izquierda de G sobre M. Si $A \subseteq M$ es abierto, para cualquier $L \subseteq G$ el conjunto $\mu(L \times A)$ es abierto en M.

Demostración. Observemos que

$$\mu(L \times A) = \bigcup_{g \in L} \mu_g(A),$$

donde $\mu_g : M \longrightarrow M$ es el difeomorfismo definido como $\mu_g(m) = \mu(g,m)$, por lo que $\mu_g(A)$ es abierto. ■

***Lema* 9.5.4.** Sea $\mu : G \times M \longrightarrow M$ acción propia. Entonces para cualquier $m \in M$ su órbita $G_m = \{\, \mu(g,m) \,:\, g \in G \,\}$ es cerrada en M.

Demostración. Dados $g \in G$ y $m \in M$ denotemos $\mu(g,m)$ como gm. Sea $m_0 \in M$ y consideremos $(g_i m_0)_{i\in\mathbb{N}}$ sucesión de elementos en G_{m_0}, que converge a m'. Sea $U \subseteq M$ vecindad de m' cuya cerradura es compacta. Sin pérdida de generalidad supongamos que $g_i m_0 \in U$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Sea $K = \overline{U} \cup \{\, m_0 \,\}$ compacto, de modo que

$$\{\, g_i \,\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq G_k = \{\, g \in G \,:\, gK \cap K \neq \emptyset \,\}\,.$$

Como μ es propia, $\overline{\{\, g_i \,\}_{i\in\mathbb{N}}}$ es compacto y en consecuencia es compacto por sucesiones. Sea $\{\, g_{i_k} \,\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{\, g_i \,\}_{i\in\mathbb{N}}$ que converge a $g_0 \in G$, de modo que por la continuidad de μ la subsucesión $(g_{i_k} m_0)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $g_0 m_0$. Como M es Hausdorff, $g_0 m_0 = m'$. Así concluimos que G_{m_0} es cerrado en M.

■

***Proposición* 9.5.5.** Sea $\mu : G\times M \longrightarrow M$ acción propia de G en M, entonces M/G con la topología cociente es Hausdorff.

Demostración. Denotaremos $\mu(g,m) = gm$. Sean $m_1, m_2 \in M$ tales que $\pi(m_1) \neq \pi(m_2)$ (véase la observación 9.5.2). Por el Lema 9.5.4 es equivalente a que G_{m_1} y G_{m_2}, las órbitas de m_1 y m_2 con respecto a la acción μ respectivamente, son dos cerrados ajenos. Como $\{\, m_1 \,\}$ y G_{m_2} también lo son, existe V vecindad abierta de m_1 relativamente compacta para la cual $\overline{V} \cap G_{m_2} = \emptyset$. Veamos que esto es suficiente para que $\overline{\mu(G \times \overline{V})} \cap G_{m_2} = \emptyset$. Para ello supongamos que no es así, es decir que existe una sucesión $(g_i v_i)_{i\in\mathbb{N}}$, donde $g_i \in G$ y $v_i \in \overline{V}$ para cualquier $i \in \mathbb{N}$, que converge a gm_2 para algún $g \in G$. Consideremos K vecindad compacta de gm_2 que contiene a $\{\, g_i v_i \,\}_{i\in\mathbb{N}}$, entonces

$$\{\, g_i \,\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq G_{\overline{V}\cup K} = \{\, g \in G \,:\, g(\overline{V} \cup K) \cap (\overline{V} \cap K) \neq \emptyset \,\}\,.$$

Como μ es propia, $G_{\overline{V}\cup K}$ es relativamente compacto de modo que $\overline{\{\, g_i v_i \,\}}_{i\in\mathbb{N}}$ es compacto. Así existe una subsucesión $(g_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a g_0. Como $\{\, v_{i_k} \,\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{V}$, existe una subsucesión que converge a $v_0 \in \overline{V}$. Con esta última obtenemos una subsucesión de $(g_i v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que converge a $g_0 v_0$. Como M es Hausdorff $g_0 v_0 = gm_2$, es decir $v_0 = g_0^{-1} gm_2 \in G_{m_2} \cap \overline{V}$, lo cual contradice la elección de V. De modo que

$$\overline{\mu(G \times \overline{V})} \cap G_{m_2} = \emptyset$$

.

Por el Lema 9.5.3 $U_1 = \mu(G\times V)$ es abierto y contiene a G_{m_1}. Observemos también que $G_{m_2} \subseteq U_2 = M \setminus \overline{\mu(G \times \overline{V})}$ y que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Como π es abierta entonces $\pi(U_1)$ y $\pi(U_2)$ son vecindades abiertas de $\pi(m_1)$ y $\pi(m_2)$ respectivamente.

Supongamos que existe $m \in M$ para la cual $\pi(m) \in \pi(U_1) \cap \pi(U_2)$ lo cual ocurre si y sólo si existen $h_1, h_2 \in G$, $v_1 \in U_1$ y $v_2 \in U_2$ tales que $m = h_1 v_1 = h_2 v_2$, es decir $v_2 = h_2^{-1} h_1 v_1 \in U_1 \cap U_2$, lo cual no es posible.

De modo que $\pi(U_1) \cap \pi(U_2) = \emptyset$, concluyendo con ello que con la topología cociente de M/G, $\pi(m_1)$ y $\pi(m_2)$ tienen vecindades abiertas y ajenas. Así M/G es Hausdorff.

■

Observación 9.5.6. Consideremos $\mu : G \times M \longrightarrow M$ una acción izquierda. Si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G y $X \in \mathfrak{g}$, $d\mu_m(X_e) \in T_m M$ para todo $m \in M$. Veamos que el campo $\widetilde{X} : M \longrightarrow TM$ definido como $\widetilde{X}_m = d\mu_m(X_e)$, es suave. Por un lado, si $X = 0$ entonces $\widetilde{X} = 0$; si $X \neq 0$, significa que $X_e \neq 0$. Por la Proposición 2.8.12 existe $(W, \phi = (z_1, \ldots, z_d))$ sistema coordenado alrededor de e que satisface que

$$\left.\frac{\partial}{\partial z_1}\right|_W = \left.X\right|_W .$$

De modo que si $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_c))$ es un sistema coordenado de M alrededor de m entonces $(W \times U, \phi \times \varphi)$ es un sistema coordenado de $G \times M$ alrededor de (e, m). Notemos que

$$\widetilde{X}_m = \sum_{i=1}^{c} \widetilde{X}_m(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m ,$$

donde

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_m(x_i) = X_e(x_i \circ \mu_m) &= \left.\frac{\partial}{\partial z_1}\right|_e (x_i \circ \mu_m) \\
&= \frac{\partial(x_i \circ \mu_m \circ \phi^{-1})}{\partial r_1}(\phi(e)) \\
&= \frac{\partial(x_i \circ \mu \circ \phi^{-1} \times \varphi^{-1})}{\partial r_1}(\phi \times \varphi(e, m)) \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial z_1}\right|_{(e,m)} (x_i \circ \mu)
\end{aligned}$$

es una función suave en m para toda $i \in \{1, \ldots, c\}$.

Por la Proposición 2.8.2 podemos concluir que en este caso $\widetilde{X}$ es suave.

A continuación presentamos una propiedad bastante ilustrativa con respecto a una acción libre, la cual nos será de utilidad. Se presenta la demostración detallada ya que por sí misma resulta interesante, aunque dicho resultado se sigue directamente del Corolario 9.1.10.

***Proposición* 9.5.7.** Sea $\mu : G\times M \longrightarrow M$ una acción izquierda libre, entonces para todo $m \in M$ la función suave $\mu_m : G \longrightarrow M$ definida como $\mu_m(g) = \mu(g, m)$ es una inmersión.

Demostración. Sea $m \in M$. Denotemos $\mu_m : G \longrightarrow M$ la función suave definida como $\mu_m(g) = \mu(g, m)$. Observemos que para todo $g \in G$

$$\mu_m = \phi_g \circ \mu_m \circ l_{g^{-1}} \,,$$

donde $\phi_g : M \longrightarrow M$ es el difeomorfismo definido como $\phi_g(m') = \mu(g, m')$ para toda $m' \in M$. De modo que $d(\mu_m)_g = d(\phi_g)_m \circ d(\mu_m)_e \circ d(l_{g^{-1}})_g$. Por ello basta demostrar que $d(\mu_m)_e$ es inyectiva.

Denotemos como $\mathfrak{g}$ al álgebra de Lie de G. Sea $X \in \mathfrak{g}$ tal que $X_e \in \ker d(\mu_m)_e$, de modo que

$$\begin{aligned} 0 = d(\mu_m)_e(X_e) &= d(\mu_m)_e\left(d(\exp_X)_0 \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \right)\right) \\ &= d(\mu_m \circ \exp_X)_0 \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \right) . \end{aligned}$$

Observemos que para todo $s \in \mathbb{R}$, si $\hat{l}_s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ denota la traslación izquierda por s (que es un automorfismo de $\mathbb{R}$ como grupo de Lie con la suma), entonces para cualquier $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mu_m \circ \exp_X \circ \hat{l}_s &= \mu_m(\exp_X(s + t)) = \mu_m(\exp_X(s) \exp_X(t)) \\ &= \exp_X(s) \exp_X(t)\, m = \phi_{\exp_X(s)}(\exp_X(t)\, m) \\ &= \phi_{\exp_X(s)} \circ \mu_m \circ \exp_X(t) \,, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} d(\mu_m \circ \exp_X)_s \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} \right) &= d(\mu_m \circ \exp_X)_s \left(d(\hat{l}_s)_0 \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \right)\right) \\ &= d(\mu_m \circ \exp_X \circ \hat{l}_s)_0 \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \right) \\ &= d(\phi_{\exp_X(s)})_m \circ d(\mu_m \circ \exp_X)_0 \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \right) = 0 \,. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{R}$ es conexo, por el Teorema 2.2.5 $\mu_m \circ \exp_X$ es una función constante. Ya que $\mu_m \circ \exp_X(0) = \mu_m(e) = m$, para toda $t \in \mathbb{R}$

$$m = \mu_m \circ \exp_X(t) = \exp_X(t)m\,,$$

y dado que μ es libre, $\exp_X(t) = e$ para toda $t \in \mathbb{R}$, es decir, $X = 0$.

Por lo tanto $d(\mu_m)_e$ es inyectiva, lo cual es suficiente para que μ sea inmersión.

■

Con las hipótesis de la Proposición anterior (G, μ_m) es una subvariedad de M.

Definición 9.5.8. Sean M, N y F variedades diferenciables y $\pi : M \longrightarrow N$ una función suave. Diremos que (π, M, N) es un *haz fibrado (o una fibración localmente trivial) con fibra F, espacio base N y espacio total* M si se satisface:

1. π es suprayectiva.

2. Dado cualquier $n \in N$ existe $U \subseteq N$ vecindad abierta de n y un difeomorfismo $\Psi_U : U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} U \times F \arrow[rr, "\Psi_U"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \pi^{-1}(U) \arrow[dl, "\pi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

donde π_1 es la proyección canónica de $U \times F$ en U.

El concepto de haz fibrado tiene su generalización topológica, en el siguiente sentido:
Sean X, Y y F espacios topológicos y $\pi : X \longrightarrow Y$ una función continua. Diremos que (π, X, Y) es un *haz fibrado (o una fibración localmente trivial) con fibra F, espacio base Y y espacio total* X si se satisface:

1'. π es suprayectiva.

2'. Dado cualquier $y \in Y$ existe $U \subseteq Y$ vecindad abierta de y y un homeomorfismo $\Psi_U : U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} U \times F \arrow[rr, "\Psi_U"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \pi^{-1}(U) \arrow[dl, "\pi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

donde π_1 es la proyección canónica de $U \times F$ en U.

A menos de especificar lo contrario en lo siguiente consideraremos la definición de haz fibrado dada en 9.5.8.

Observación 9.5.9. Observemos que dado un haz fibrado $\pi : M \longrightarrow N$ con fibra F, ésta resulta ser una sumersión ya que para toda $m \in M$ existe $U \subseteq N$ vecindad abierta de $\pi(m)$ y un difeomorfismo $\Psi_U : U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ que satisface que $\pi = \pi_1 \circ {\Psi_U}^{-1}$, donde π_1 denota la proyección canónica de $U \times F$ sobre U, concluyendo con ello que localmente π se puede expresar como composición de sumersiones.

***Teorema* 9.5.10.** *Sea M^c una variedad y G^d un grupo de Lie que actúa suavemente en M. Si la acción es libre y propia en M entonces M/G recibe una estructura de variedad para la cual la proyección canónica es un haz fibrado con fibra G (y como consecuencia una sumersión).*

Demostración. Sea $\mu : G \times M \longrightarrow M$ dicha acción. Para cualesquiera $m_0 \in M$ y $g \in G$ denotaremos $\mu(g, m_0) = gm_0$ y $\mu_{m_0} : G \longrightarrow M$ la función suave definida como $\mu_{m_0}(g) = \mu(g, m_0)$. De esa forma, por la Proposición 9.5.7 (G, μ_{m_0}) es una subvariedad de M.

Observemos que si $i_{m_0} : G \longrightarrow G \times M$ denota a la función que lleva $g \in G$ a (g, m_0), entonces $\mu_{m_0} = \mu \circ i_{m_0}$.

Así, dado el isomorfismo entre $T_eG \times T_{m_0}M$ y $T_{(e,m_0)}(G \times M)$ e identificando $\mathfrak{g}$, el álgebra de Lie de G, con T_eG, obtenemos que

$$d(i_{m_0})_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \times T_{m_0}M$$

envía X en $(X, 0)$.

Consideremos la distribución definida en M como

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(m) &= d(\mu_m)_e(\mathfrak{g}) = d(\mu)_{(e,m)} \circ d(i_{m_0})_e(\mathfrak{g}) \\ &= d\mu_{(e,m)}(\mathfrak{g} \times \{\, 0 \,\}) \,.\end{aligned}$$

Observemos que dicha distribución es suave y de dimensión d ya que está definida a través de las subvariedades (G, μ_m) y si $\{\, X_1, \ldots, X_d \,\}$ es una base de $\mathfrak{g}$, el conjunto de campos suaves $\{\, \widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_d \,\}$, donde $\widetilde{X}_i(m) = d\mu_m(X_i)$ para cualesquiera $m \in M$, $i \in \{\, 1, \ldots, d \,\}$ (observación 9.5.6), generan a la distribución . Además, para cualquier $m_0 \in M$, $\mu_{m_0} : G \longrightarrow M$ es una subvariedad integral de $\mathfrak{D}$ que pasa por m_0, pues para todo $g \in G$

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(\mu_{m_0}(g)) = \mathfrak{D}(gm_0) &= d(\mu_{gm_0})_e(\mathfrak{g}) \\ &= d(\mu_{m_0} \circ r_g)_e(\mathfrak{g}) = d(\mu_{m_0})_g \circ d(r_g)_e(\mathfrak{g}) \\ &= d(\mu_{m_0})_g(T_gG) \,.\end{aligned}$$

Como μ es libre entonces μ_{m_0} es inyectiva. Considerando que es una inmersión tenemos que (G, μ_{m_0}) es una subvariedad integral de $\mathfrak{D}$ que pasa por m_0. Por la Proposición 2.9.6 podemos concluir que $\mathfrak{D}$ es una d-variedad involutiva.

Sea $m_0 \in M$ y $(V, \varphi = (x_1, \ldots, x_c))$ sistema coordenado cúbico alrededor de m_0 que satisface que sus rebanadas

$$S = \bigcap_{i=d+1}^{c} x_i^{-1}(c_i), \quad c_i \in \mathbb{R}$$

son variedades integrales de $\mathfrak{D}$ (Teorema de Frobenius).

Consideremos el subconjunto de V,

$$\widetilde{V} = \bigcap_{i=1}^{d} x_i^{-1}(0)\,,$$

de modo que $m_0 \in \widetilde{V}$. Veremos que existe $\widetilde{V}_{m_0} \subseteq \widetilde{V}$ vecindad abierta de m_0 en $\widetilde{V}$ para la cual $\pi|_{\widetilde{V}_{m_0}}$ es inyectiva.

Como M es localmente compacto y primero numerable existe $\{\, V_i \,\}_{i\in\mathbb{N}}$ sistema de vecindades abiertas de m_0 que satisfacen que $V_{i+1} \subseteq V_i$ y V_1 es relativamente compacto. Consideremos $\{\, \widetilde{V}_i = \widetilde{V} \cap V_i \,\}_{i\in\mathbb{N}}$ sistema de vecindades abiertas de m_0 en $\widetilde{V}$.

Supongamos que para todo $i \in \mathbb{N}$ existe $m_i \in \widetilde{V}_i$ y $g_i \in G \smallsetminus \{\, e \,\}$ de tal modo que $g_i m_i \in \widetilde{V}_i$. Observemos que en este caso además se satisface que $g_i m_i \neq m_i$.

De esa forma, la sucesión $(g_i m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a m_0. Veamos que $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a e.

Como $G_{\overline{V}_1} = \{\, g \in G \,:\, g\overline{V}_1 \cap \overline{V}_1 \neq \emptyset \,\}$ es relativamente compacto y $\{\, g_i \,\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq G_{\overline{V}_1}$ entonces $\overline{\{\, g_i \,\}}_{i\in\mathbb{N}}$ es compacto. En particular resulta ser compacto por sucesiones (es decir, toda sucesión de elementos en $\overline{\{\, g_i \,\}}_{i\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente).

Supongamos que $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ no converge a e, entonces existe $U \subseteq G$ vecindad abierta de e para la cual, dado $N \in \mathbb{N}$ existe $n_N \geqslant N$ tal que $g_{n_N} \notin U$.

De ese modo podemos construir una subsucesión de $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(g_{n_i})_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\{\, g_i \,\}}_{i\in\mathbb{N}}$, de tal modo que $g_{n_i} \notin U$. A su vez ésta tiene una subsucesión convergente $(g_{(n_i)_k})_{k\in\mathbb{N}}$, digamos a $g_0 \in G$. Como $m_i \in \widetilde{V}_i$ entonces $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a m_0; así la sucesión $(g_{(n_i)_k} m_{(n_i)_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $g_0 m_0$ por la continuidad de μ, y por otro lado a m_0 por ser subsucesión de $(g_i m_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Como M es Hausdorff, $g_0 m_0 = m_0$, lo cual ocurre si y sólo si $g_0 = e$, pues μ es libre, contradiciendo la elección de $(g_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$. De ese modo concluimos que $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a e.

Sea $\mu^{-1}(V) \cap G \times V$ vecindad abierta de (e, m_0) en $G \times M$. Sean $V_G \subseteq G$ y $V_0 \subseteq V$ vecindades abiertas de e y m_0 respectivamente, de tal modo que

$V_G \times V_0 \subseteq \mu^{-1}(V) \cap G \times V$, es decir que para cualesquiera $g \in V_G$ y $m \in V_0 \subseteq V$, $\mu_m(g) = \mu(g, m) \in V$ (o equivalentemente, $\mu_m(V_G) \subseteq V$). Sin pérdida de generalidad supongamos que V_G es conexo.

Sea $N \in \mathbb{N}$ para el cual dado $n \geqslant N$, $m_n \in V_0$ y $g_n \in V_G$. Observemos que $(V_G, \mu_{m_N}|_{V_0})$ es una variedad integral conexa de $\mathfrak{D}$, para la cual $\mu_{m_N}(V_G) \subseteq V$. Por el Teorema 2.9.9 y dado que $\mu_{m_N}(e) = m_N$, $\mu_{m_N}(V_G)$ se queda contenido en la rebanada $\bigcap\limits_{i=d+1}^{c} x_i^{-1}(x_i(m_N))$. De tal forma que $\mu_{m_N}(g_N) = g_N m_N \in \bigcap\limits_{i=d+1}^{c} x_i^{-1}(x_i(m_N))$, es decir, $x_i(g_N m_N) = x_i(m_N)$, para todo $i \in \{d{+}1, \ldots, c\}$. Por otro lado $g_N m_N$, $m_N \in \widetilde{V}_N = V_N \cap \widetilde{V}$, por lo que $x_i(g_N m_N) = x_i(m_N) = 0$, para $i \in \{1, \ldots, c\}$. De esa forma, $\varphi(g_N m_N) = \varphi(m_N)$. Como φ es un mapeo coordenado, $g_N m_N = m_N$, lo cual es una contradicción.

Por ese motivo existe $i \in \mathbb{N}$ para el cual dado $m \in \widetilde{V}_i$ y $g \in G \setminus \{e\}$, $gm \notin \widetilde{V}_i$, (por lo que $\pi|_{\widetilde{V}_i}$ es inyectiva). Denotemos $\widetilde{V}_i = \widetilde{V}_{m_0}$.

Consideremos M/G el conjunto de órbitas de M bajo μ con la topología de identificación inducida por el mapeo canónico $\pi : M \longrightarrow M/G$ (Observación 9.5.2).

Así, dado $m_0 \in M$ y $\widetilde{V}_{m_0}$ como antes, observemos que dado $m \in V$, si denotamos

$$S_m = \bigcap_{i=d+1}^{c} x_i^{-1}(x_i(m))$$

a la rebanada de V que tiene a m, entonces

$$\bigcup_{m \in \widetilde{V}_{m_0}} S_m$$

es un subconjunto abierto de M. Más aún, para cualquier $m \in V$, $\pi|_{S_m}$ es la función constante $\pi(m)$ (es decir, $S_m \subseteq G_m$). Para mostrar esto consideremos $m \in V$ y $A = G_m \cap S_m$. Si $gm \in A$ entonces existe W una vecindad abierta y conexa de e que a su vez es subconjunto de $\mu_{gm}^{-1}(V)$. Como $gm \in S_m$ y $(W, \mu_{gm}^{-1}|_W)$ es una subvariedad integral conexa de $\mathfrak{D}$ entonces $\mu_{gm}(W) \subseteq S_m$.

De modo que la única función $\widetilde{\varphi}$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\mu_{gm}"] \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] & M \\ & S_m \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

es suave (Teorema 2.9.10), inyectiva y no singular (pues μ_{gm} es inyectiva y no singular). Dado que $\dim W = d = \dim S_m$ entonces $\widetilde{\varphi}$ es un difeomorfismo local, por lo que existe W' vecindad abierta de e contenida en W para la cual $\widetilde{\varphi}|_{W'} : W' \longrightarrow \widetilde{\varphi}(W')$ es un difeomorfismo y $\widetilde{\varphi}(W')$ es abierto en S_m y se queda contenido en A. De este modo concluimos que A es abierto. Con un razonamiento totalmente análogo podemos concluir que si $m' \in S_m \setminus A$ existe una vecindad abierta de m' en S_m contenida totalmente en $S_m \setminus A$, de modo que es abierto. Como S_m es conexo y $m_0 \in A$, entonces $A = S_m \subseteq G_m$.

De ese modo, como $S_m \cap S_{m'} = \emptyset$ para cualesquiera $m, m' \in \widetilde{V}_{m_0}$ distintos, obtenemos que

$$\pi\Bigg(\bigcup_{m \in \widetilde{V}_{m_0}} S_m \Bigg) = \pi(\widetilde{V}_{m_0})$$

es abierto en M/G. Denotemos $V_{m_0} = \pi(\widetilde{V}_{m_0})$. Como $\pi|_{\widetilde{V}_{m_0}}$ es inyectiva, continua y abierta, es un homeomorfismo sobre V_{m_0}.

Dado que $\widetilde{V}_{m_0}$ es una variedad difeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^{c-d}$ mediante la restricción de φ (que denotaremos como $\varphi_{V_{m_0}}$) y m_0 es arbitrario, obtenemos la siguiente familia de homeomorfismos

$$\mathcal{L} = \{\, \varphi_{m_0} = \varphi_{V_{m_0}} \circ (\pi|_{V_{m_0}})^{-1} : V_{m_0} \longrightarrow \varphi(\widetilde{V}_{m_0}) \,\}_{m_0 \in M} \, .$$

Veremos que con la topología cociente M/G no sólo es una variedad topológica de dimensión $c-d$, sino que la familia de homeomorfismos $\mathcal{L}$ genera una estructura diferenciable.

Observemos que M/G con la topología de identificación inducida por π es segundo numerable pues dada $\mathfrak{B} = \{\, B_i \,\}_{i \in \mathbb{N}}$ base en M, $\widetilde{\mathfrak{B}} = \{\, \pi(B_i) \,\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una base de M/G (ya que π es abierta y continua).

Así, dada la familia $\mathcal{L}$ y por la Proposición 9.5.5, M/G resulta una variedad topológica.

Observemos que para cualesquiera $m, m' \in M$, si $x \in \varphi_{V_{m'}}(\widetilde{V}_m \cap \widetilde{V}_{m'})$

$$\begin{aligned} \varphi_m \circ \varphi_{m'}^{-1}(x) &= \varphi_{V_m} \circ (\pi|_{V_m})^{-1} \circ (\varphi_{V'_m} \circ (\pi|_{V'_m})^{-1})^{-1}(x) \\ &= \varphi_{V_m} \circ \varphi_{V_{m'}}(x) \, . \end{aligned}$$

Por lo que $\varphi_m \circ \varphi_{m'}^{-1}$ es suave para cualesquiera $m, m' \in M$.

Considerando la estructura diferencial generada por $\{\, (V_{m_0}, \varphi_{m_0}) \,\}_{m_0 \in M}$ obtenemos una estrucutra de variedad difenciable en M/G con la topología cociente.

Observemos que π es suave pues para cualquier $m \in M$,

$$\varphi_m \circ \pi = \varphi_{V_m}$$

resulta una función suave.

Para concluir mostraremos que π es una fibración localmente trivial con fibra G.

Sea $m_0 \in M$, de tal forma que

$$\pi^{-1}(V_{m_0}) = \bigcup_{g\in G} \mu_g(\widetilde{V}_{m_0}),$$

donde $\mu_g : M \longrightarrow M$ es el difeomorfismo definido como $\mu_g(m) = \mu(g,m)$ para todo $g \in G$. De ese modo, denotando $\mu|_{G\times \widetilde{V}_{m_0}} = \tilde{\mu}$

$$G \times \widetilde{V}_{m_0} \xrightarrow{\tilde{\mu}} \pi^{-1}(V_{m_0})$$

es biyectiva y suave (pues $(\widetilde{V}_{m_0}, i)$ es un encaje en M).

Basta concluir que $\tilde{\mu}$ es una inmersión para que resulte un difeomorfismo ya que $\dim(G\times \widetilde{V}_{m_0}) = d + (c-d) = \dim(\pi^{-1}(V_{m_0}))$.

Observemos que dado $g \in G$, $\tilde{\mu} = \mu_g \circ \tilde{\mu} \circ (l_{g^{-1}} \times \mathrm{id}_{\widetilde{V}_{m_0}})$, de modo que

$$d\mu_{(g,m)} = d\mu_m \circ d\mu_{(e,m)} \circ d(l_g \times \mathrm{id}_{\widetilde{V}_{m_0}})_{(g,m)}\,.$$

Por ello es suficiente verificar que $d\mu_{(e,m)}$ es inyectiva para todo $m \in \widetilde{V}_{m_0}$.

Consideremos $(V, \varphi = (x_1, \ldots, x_c))$ sistema coordenado cúbico de M centrado en m_0 del cual fue tomado $\widetilde{V}_{m_0}$, de manera que

$$\pi^{-1}(V_{m_0}) \cap V = \bigcup_{q\in \widetilde{V}_{m_0}} S_q = \mathcal{J}\,.$$

Observemos que dado $m \in \widetilde{V}_{m_0}$ la función

$$\begin{aligned} \bigcup_{q\in \widetilde{V}_{m_0}} S_q &\xrightarrow{\Psi_m} S_m \times \widetilde{V}_{m_0} \\ y &\longmapsto (y_m, \tilde{y}) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} y_m &= \varphi^{-1}(x_1(y), \ldots, x_d(y), x_{d+1}(m), \ldots, x_c(m)) \\ \tilde{y} &= \varphi^{-1}(0, \ldots, 0, x_{d+1}(y), \ldots, x_c(y)) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo. De modo que basta ver que $\Psi_m \circ \tilde{\mu}|_{\tilde{\mu}^{-1}(\mathcal{J})}$ es no singular en (e,m) para concluir que $\tilde{\mu}$ también lo es. Identifiquemos canónicamente $T_eG \times T_m\widetilde{V}_{m_0}$ con $T_{(e,m)}(G\times \widetilde{V}_{m_0})$ y $T_{(m,m)}(S_m \times \widetilde{V}_{m_0})$ con $T_mS_m \times T_m\widetilde{V}_{m_0}$.

Notemos que

$$(\mu_m|_{\widetilde{V}_{m_0}}, c_m) = \Psi_m \circ \tilde{\mu} \circ (\mathrm{id}_G, c_m)\,,$$

donde $c_m : G \longrightarrow M$ es la función constante m. Además

$$\Psi_m \circ \tilde{\mu} \circ (c_e, \mathrm{id}_{\widetilde{V}_{m_0}}) = (c_m, \mathrm{id}_{\widetilde{V}_{m_0}})\,,$$

siendo $c_e : M \longrightarrow M$ la función constante e. De tal forma que para cualesquiera $X_e \in T_eG$ y $\nu \in T_m\widetilde{V}_{m_0}$

$$\begin{aligned} d(\Psi_m \circ \tilde{\mu})_{(e,m)}(X_e, 0) &= d(\Psi_m \circ \tilde{\mu})_{(e,m)} \circ d(\mathrm{id}_G, c_m)_e(X_e) \\ &= d(\mu_m|_{\widetilde{V}_{m_0}}, c_m)_e(X_e) \\ &= (d(\mu)_e(X_e), 0) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d(\Psi_m \circ \tilde{\mu})_{(e,m)}(0, \nu) &= d(\Psi_m \circ \tilde{\mu})_{(e,m)} \circ d(c_e, \mathrm{id}_{\widetilde{V}_{m_0}})_m(\nu) \\ &= d(c_m, \mathrm{id}_{\widetilde{V}_{m_0}})_m(\nu) = (0, \nu)\,. \end{aligned}$$

De tal forma que $(X_e, \nu) \in \ker d(\Psi_m \circ \tilde{\mu})_{(e,m)}$ y sólo si

$$\begin{aligned} (0,0) &= d(\Psi_m \circ \tilde{\mu})_{(e,m)}(X_e, \nu) \\ &= d(\Psi_m \circ \tilde{\mu})_{(e,m)}(X_e, 0) + d(\Psi_m \circ \tilde{\mu})_{(e,m)}(0, \nu) \\ &= (d\mu_e(X_e), \nu)\,, \end{aligned}$$

lo cual ocurre si y sólo si $X_e = 0$ y $\nu = 0$. Por ello concluimos que $d(\Psi_m \circ \tilde{\mu})_{(e,m)}$ es inyectiva, que implica que $\tilde{\mu}$ es un difeomorfismo.

Considerando que $(\pi|_{V_{m_0}})^{-1} : V_{m_0} \longrightarrow \widetilde{V}_{m_0}$ es un difeomorfismo y denotando $\Psi_{V_{m_0}} = \tilde{\mu} \circ (\pi|_{V_{m_0}})^{-1}$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \times V_{m_0} \arrow[rr, "\Psi_{V_{m_0}}"] \arrow[dr, "\pi_{V_{m_0}}"'] & & \pi^{-1}(V_{m_0}) \arrow[dl, "\pi"] \\ & V_{m_0} & \end{tikzcd}$$

donde $\pi_{V_{m_0}}$ es la proyección canónica de $G \times V_{m_0}$ sobre V_{m_0}.

Concluimos entonces que π es una fibración localmente trivial con fibra G y por la observación 9.5.9 π es sumersión.

■

Observación 9.5.11. Como se mostró en el ejemplo 1.1.10, *el espacio proyectivo complejo de dimensión* $d-1$, denotado como $\mathbb{CP}^{d-1}$, recibe una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2(d-1)$ con la topología de identificación inducida por el mapeo canónico

$$\begin{aligned} L &\xrightarrow{\pi} \mathbb{CP}^{d-1} \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

donde $L = \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$ y $[x]$ denota la clase de equivalencia de x.

Observemos que al considerar la acción del grupo de Lie $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^{2d-1} \subseteq \mathbb{C}^{2d}$

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2d-1} &\longrightarrow \mathbb{S}^{2d-1} \\ (z, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)) &\longmapsto z\xi = (z\xi_1, \ldots, z\xi_d) \end{aligned}$$

ésta resulta ser libre y propia. Por el Teorema 9.5.10 sabemos que el espacio de órbitas $\mathbb{S}^{2d-1}/\,\mathbb{S}^1$ recibe una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2(d-1)$ que hace al mapeo canónico $\tilde{\pi} : \mathbb{S}^{2d-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{2d-1}/\,\mathbb{S}^1$ un haz fibrado.

Denotando $\tilde{\pi}(\xi)$ como $\xi\,\mathbb{S}^1$, la función

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^{2d-1}/\,\mathbb{S}^1 &\xrightarrow{\Psi} \mathbb{CP}^{d-1} \\ \xi\,\mathbb{S}^1 &\longmapsto [\xi] \end{aligned}$$

está bien definida y es inyectiva pues $\xi\,\mathbb{S}^1 = \xi'\,\mathbb{S}^1$ si y sólo si existe $z \in \mathbb{S}^1$ para la cual $\xi' = z\xi$, que es equivalente a que $[\xi'] = [\xi]$. Más aún, dado $\eta \in L$, $\frac{\eta}{||\eta||} \in \mathbb{S}^{2d-1}$ y $\Psi\big(\frac{\eta}{||\eta||}\mathbb{S}^1\big) = \big[\frac{\eta}{||\eta||}\big] = \big[\eta\big]$, de modo que también es suprayectiva.

Veamos que es suave. Dado que $\mathbb{S}^{2d-1}$ es una subvariedad de L, la función $\pi|_{\mathbb{S}^{2d-1}}$ es suave. Dado que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^{2d-1} \arrow[r, "\pi|_{\mathbb{S}^{2d-1}}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & \mathbb{CP}^{d-1} \\ \mathbb{S}^{2d-1}/\,\mathbb{S}^1 \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

Ψ es suave a consecuencia de que para todo $\xi\,\mathbb{S}^1 \in \mathbb{S}^{2d-1}/\mathbb{S}^1$ existe $U \subseteq \mathbb{S}^{2d-1}/\mathbb{S}^1$ vecindad abierta de $\xi\,\mathbb{S}^1$ y $\Psi_U : U \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \tilde{\pi}^{-1}(U)$ difeomorfismo que satisface que $\tilde{\pi} \circ \Psi_U = \pi_1$, donde π_1 es la proyección canónica de $U \times \mathbb{S}^1$ en U, de modo que al considerar la inclusión $i : U \longrightarrow U \times \mathbb{S}^1$ que manda $\xi\,\mathbb{S}^1$ en $(\xi\,\mathbb{S}^1, 1)$, tenemos que $\tilde{\pi} \circ \Psi_U \circ i = i_U$, la inclusión de U en $\mathbb{S}^{2d-1}/\mathbb{S}^1$, de modo que

$$\begin{aligned} \Psi|_U = \Psi \circ i_U &= (\Psi \circ \tilde{\pi}) \circ (\Psi_u \circ i) \\ &= \pi|_{\mathbb{S}^{2d-1}} \circ \Psi_U \circ i \end{aligned}$$

es suave, resultando con ello que Ψ lo es.

Considerando los mapeos coordenados de $\mathbb{S}^{2d-1}$ y $\mathbb{CP}^{d-1}$ es posible concluir que $\pi|_{\mathbb{S}^{2d-1}}$ es sumersión. Así, ya que para cualquier $\xi \in \mathbb{S}^{2d-1}$, $d(\pi|_{\mathbb{S}^{2d-1}})_\xi = d\Psi_{\tilde{\pi}(\xi)} \circ d(\tilde{\pi})_\xi$ entonces $d\Psi_{\tilde{\pi}(\xi)}$ es suprayectiva. Como $\dim \mathbb{S}^{2d-1}/\mathbb{S}^1 = 2(d-1) = \dim \mathbb{CP}^{d-1}$, entonces $d\Psi_{\tilde{\pi}(\xi)}$ es isomorfismo para toda $\xi \in \mathbb{S}^{2d-1}$, de modo que Ψ es difeomorfismo.

Análogamente se tiene que al considerar $\mathbb{RP}^{d-1}$ *el espacio proyectivo real*, se puede mostrar que el grupo de Lie $\mathbb{Z}^2 = \{\,-1, 1\,\}$ (con la topología discreta) actúa libre y propiamente en $\mathbb{S}^{d-1}$ de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{S}^{d-1} & \longrightarrow & \mathbb{S}^{d-1} \\ (a, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)) & \longmapsto & a\xi = (a\xi_1, \ldots, a\xi_d) \end{array}$$

de modo que el conjunto de órbitas de dicha acción, denotado como $\mathbb{S}^{d-1}/\mathbb{Z}^2$, recibe una estructura de variedad diferenciable de dimensión $d-1$ que hace al mapeo canónico $\tilde{\pi} : \mathbb{S}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{d-1}/\mathbb{Z}^2$ una fibración localmente trivial. De forma que la función

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{d-1}/\mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{RP}^{d-1} \\ \xi\,\mathbb{Z}^2 & \longmapsto & [\xi] \end{array}$$

es un difeomorfismo.

Apéndice A

Apéndice

En esta parte recopilamos varios de los temas o notas adicionales que fueron usados en el desarrollo de la Teoría básica de Grupos de Lie y que si bien son importantes por sí mismos, tienen un sabor distinto a aquellos que se expusieron previamente.

A.1. Cartan e ideales diferenciales en grupos de Lie

Observemos que dado $f : M \longrightarrow N,$ la gráfica de dicha función $\mathcal{G}_f$ junto con la inclusión i_f es una subvariedad de $M \times N$ difeomeorfa a G mediante el mapeo $(\mathbf{id}, f)$ (ejemplo 1.1.8). Sean π_1, π_2 las proyecciones de $M \times N$ en M y N, respectivamente.

Análogamente a como se mostró en el Teorema 5.2.7, podemos verificar que

$$\big(d(\pi_1 \circ i_f),\, d(\pi_2 \circ i_f)\big)T_{(m,f(m))}\mathcal{G}_f = \{\, (\tilde{\nu}, df(\tilde{\nu})) \,:\, \tilde{\nu} \in T_m M \,\}$$

de modo que

$$\begin{aligned} di_f(T_{(m,\,f(m))}\mathcal{G}_f) &= \{\, \nu \in T_{(m,\,f(m))}(M \times N) \,:\, d\pi_2(\nu) = df(d\pi_1(\nu)) \,\} \\ &= \{\, \nu \in T_{(m,f(m))}(M \times N) \,:\, (d(f \circ \pi_1) - d\pi_2)(\nu) = 0 \,\}. \end{aligned}$$

Por ello podemos concluir que

$$\delta(f \circ \pi_1) - \delta\pi_2 : E^*(N) \longrightarrow E^*(M \times N)$$

es un morfismo de álgebras para el cual dados $\omega \in E^*(N)$ y $\nu \in di_f(T\mathcal{G}_f)$,

$$(\delta(f \circ \pi_1) - \delta\pi_2)(\omega)(\nu) = 0.$$

Denotando $\mu_\omega = (\delta(f \circ \pi_1) - \delta\pi_2)(\omega),$ lo anterior es equivalente a decir que para cualquier $\tilde{\nu} \in T\mathcal{G}_f$

$$\delta i_f(\mu_\omega)(\tilde{\nu}) = \mu_\omega(di_f(\tilde{\nu})) = 0.$$

De las observaciones anteriores podemos concluir el siguiente resultado:

***Proposición* A.1.1.** Sea $f : M^d \longrightarrow N^c$ suave y $\{\,\omega_i\,\}_{i\in I} \subseteq E^*(N)$. Si π_1, π_2 son las proyecciones de $M \times N$ en M y N, respectivamente y

$$\mu_{\omega_i} = (\delta(f \circ \pi) - \delta\pi_2)(\omega_i)\,,$$

entonces $(\mathcal{G}_f, i_f)$ es una variedad integral del ideal generado por $\{\,\mu_{\omega_i}\,\}_{i\in I}$.

Considerando la notación de la proposición anterior y $c \geqslant 2$, elijamos $\omega \in E^*(N)$. De modo que el ideal $\mathfrak{I} \subseteq E^*(M \times N)$ generado por $\{\,\mu_\omega\,\}$ induce una distribución suave $\mathfrak{D}$ en $M \times N$ de dimensión mayor o igual a $d+1$, que satisface $\mathfrak{I}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{I}$. Observemos que $(\mathcal{G}_f,\, i_f)$ es una variedad integral de $\mathfrak{I}$, más no de $\mathfrak{D}$. Con ello podemos concluir que el inverso de la observación 3.4.7 no es cierto en general.

En lo anterior, a partir de una función suave dedujimos formas en el producto de las variedades en las que estaba definida, de modo que la gráfica de la función resultara ser variedad integral del ideal generado por dichas formas.

Inspirados este hecho, consideremos M^d y N^c variedades, $\{\,\omega_1, \ldots, \omega_c\,\} \subseteq E^1(N)$ y $\{\,\alpha_1, \ldots, \alpha_c\,\} \subseteq E^1(M)$. De existir una función suave $f : M \longrightarrow N$ para la cual, dado $i \in \{\,1, \ldots, c\,\}$,

$$\delta f(\omega_i) = \alpha_i,$$

la gráfica de f es una variedad integral del ideal generado por las formas

$$\mu_i = \delta\pi_1(\alpha_i) - \delta\pi_2(\omega_i), \quad i \in \{\,1, \ldots, c\,\}$$

denotado como $\mathfrak{I}$.

Asumiremos condiciones suficientes para mostrar que para todo $(m_0, n_0) \in M \times N$ existe una función $f : V \longrightarrow N$ suave, donde V es una vecindad abierta de m_0 en M, para la cual

$$\delta f(\omega_i) = \alpha_i|_V.$$

Supongamos que $\{\omega_1, \ldots, \omega_c\}$ es una base local de $E^*(N)$ (es decir que que para cualquier $n \in N$, $\{\,\omega_1(n), \ldots, \omega_c(n)\,\}$ es base de T_n^*N) y que el ideal $\mathfrak{I}$ es diferencial. Como es generado por c 1-formas independientes, el Teorema de Frobenius nos asegura que para cualquier $(m_0, n_0) \in M \times N$ existe una única variedad integral conexa maximal $L \subseteq M \times N$ de dimensicón d que pasa por (m_0, n_0). Denotemos i_L la inclusión de L en $M \times N$. Observemos que la función $\pi_1 \circ i_L$ es una inmersión: sea $p \in L$ y $\nu \in T_pL$ para el cual $d(\pi_1 \circ i_L)(\nu) = 0$. Como $\mu_i \circ di_L(\nu) = 0$ para cualquier $i \in \{\,1, \ldots, c\,\}$, entonces $\omega_i(d\pi_2(di_L(\nu))) = 0$. Dado que $\{\,\omega_1, \ldots, \omega_c\,\}$ es una base de $E^*(N)$, concluimos que $d\pi_2(di_L(\nu)) = 0$; por tanto $di_L(\nu) = 0$ y así $\nu = 0$.

Como L y M tienen la misma dimensión, el Teorema de la función inversa garantiza que existen $U \subseteq L$, vecindad abierta de (m_0, n_0), y $V \subseteq M$, vecindad abierta de m_0, para las cuales $\pi_1 \circ i_L|_U : U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo.

Definamos $f : V \longrightarrow N$ como

$$f = \pi_2 \circ i_L \circ (\pi_1 \circ i_L|_U)^{-1}.$$

Observemos que f es suave y $f(m_0) = n_0$. Además para cualquier $i \in \{1, \ldots, c\}$,

$$\begin{aligned}
\delta f(\omega_i) &= \delta(\pi_2 \circ i_L \circ (\pi_1 \circ i_L|_U)^{-1})(\omega_i) = \delta(i_L \circ (\pi_1 \circ i_L|_U)^{-1})(\delta\pi_2(\omega_i)) \\
&= \delta(i_L \circ (\pi_1 \circ i_L|_U)^{-1})(-\mu_i(\omega_i) + \delta\pi_1(\alpha_i)) \\
&= \delta(\pi_1 \circ i_L|_U)^{-1}(\delta i_L(-\mu_i(\omega_i)) + \delta i_L(\delta\pi_1(\alpha_i))) \\
&= \delta(\pi_1 \circ i_L|_U)^{-1}(\delta i_L(\delta\pi_1(\alpha_i))) = \delta(\pi_1 \circ i_L|_U)^{-1}(\delta(\pi_1 \circ i_L)(\alpha_i)) \\
&= \alpha_i|_V
\end{aligned}$$

De ese modo podemos concluir que la gráfica de f es una variedad integral de $\mathfrak{I}$, para la cual $f(m_0) = n_0$ y satisface que $\delta f(\omega_i) = \alpha_i|_V$. Supongamos que V es conexo. Sabemos que la gráfica de cualquier mapeo suave $\widetilde{f} : V \longrightarrow M$ que satisfaga las condiciones anteriores, resulta ser también una variedad integral conexa de $\mathfrak{I}$. Si en ese caso denotamos $\mathcal{G}_f$ y $\mathcal{G}_{\widetilde{f}}$ a las gráficas de f y $\widetilde{f}$, el conjunto

$$\mathcal{G}_f \cap \mathcal{G}_{\widetilde{f}} = \{ (m, n) \in V \times N \,:\, n = f(m) = \widetilde{f}(m) \}$$

es cerrado, pues N es Hausdorff. Por otro lado, ya que $\mathcal{G}_f$ y $\mathcal{G}_{\widetilde{f}}$ son variedades integrales de $\mathfrak{I}$ para cualquier $(m, n) \in \mathcal{G}_f \cap \mathcal{G}_{\widetilde{f}}$ una vecindad abierta $W_{(m,n)}$ en $V \times N$ para la cual

$$W_{(m,n)} \cap \mathcal{G}_f = W_{(m,n)} \cap \mathcal{G}_{\widetilde{f}}$$

es decir, $W_{(m,n)} \cap \mathcal{G}_f \subseteq \mathcal{G}_f \cap \mathcal{G}_{\widetilde{f}}$.

De ese modo $\mathcal{G}_f \cap \mathcal{G}_{\widetilde{f}}$ es un subconjunto cerrado y abierto de $\mathcal{G}_f$. Como este último es conexo, concluimos que $\mathcal{G}_f \cap \mathcal{G}_{\widetilde{f}} = \mathcal{G}_f$. Por lo tanto $f = \widetilde{f}$.

Lo anterior se resume en el siguiente enunciado:

***Teorema* A.1.2.** *Sean M^d y N^c variedades diferenciables. Denotemos π_1, π_2 a las proyecciones de $M \times N$ en M y N, respectivamente. Supogamos que existe $\{\omega_1, \ldots, \omega_c\} \subseteq E^1(N)$ conjunto linealmente independiente (y por lo tanto base de T_n^*N, para cualquier $n \in N$) y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_c\} \subseteq E^1(M)$ y que el ideal de $E^*(M \times N)$ generado por*

$$\{ \delta\pi_1(\alpha_i) - \delta\pi_2(\omega_i) \,:\, i \in \{1, \ldots, c\} \}$$

es diferencial, entonces para cualquier $(m_0, n_0) \in M \times N$ existen V vecindad abierta de m_0 y $f : V \longrightarrow N$ suave que satisface que $f(m_0) = n_0$ y

$$\delta f(\omega_i) = \alpha_i \quad i \in \{1, \ldots, c\}.$$

Más aún, si V es conexo el mapeo f es el único que satisface las propiedades anteriores.

Pasemos ahora al caso de grupos de Lie. Sean G^d y H^c grupos de Lie y π_1, π_2 las proyecciones canónicas de $G \times H$ en G y H respectivamente. Considerando $\Psi : G \longrightarrow H$ un morfismo de grupos de Lie y $\{\, \omega_1, \dots, \omega_c \,\}$ una base de $E^*_{l\text{inv}}(H)$, el ideal $\mathfrak{I} \subseteq E^*(G \times H)$ generado por

$$\{\, \delta\pi_1(\delta\Psi(\omega_i)) - \delta\pi_2(\omega_i) \;:\; i \in \{\, 1, \dots, c \,\}\,\}$$

es diferencial (observación 5.1.3).

Si G es conexo y existe $\widetilde{\Psi} : G \longrightarrow H$ morfismo que satisface $d\Psi = d\widetilde{\Psi}$, se tiene que $\delta\Psi = \delta\widetilde{\Psi}$. Dado que ambos mapean el elemento neutro de G en el elemento neutro de H, por el Teorema anterior concluimos que $\Psi = \widetilde{\Psi}$.

A.2. Espacios cubrientes

En esta parte asumiremos ciertos resultados básicos a cerca teoría de homotopía y de el grupo fundamental de un espacio topológico punteado (X, x_0). Para profundizar más al respecto pueden ser consultados [Prieto] y [Spanier].

Sea un espacio topológico X y $x_0 \in X$. Denotaremos $\pi_1(X, x_0)$ al *grupo fundamental de X en el punto x_0*. Si $f : X \longrightarrow Y$ es un mapeo continuo y $f(x_0) = y_0$, denotaremos al morfismo de grupos inducido por f como f_* , el cual es definido como

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y_0) \\ [\sigma] &\longmapsto [f \circ \sigma] \end{aligned}$$

Dadas dos funciones continuas $f, g : X \longrightarrow Y$, denotaremos el hecho de que sean homotópicas como $f \backsimeq g$. Si además existe $A \subseteq X$ para el cual $f|_A = g|_A$ diremos que *f y g son homotópicas relativamente a A* de existir una homotopía $H : I \times X \longrightarrow Y$ para la cual $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ y $H(a, t) = f(a) = g(a)$ para toda $a \in A$ y $t \in I$. Esto será denotado como $f \backsimeq g \quad \mathrm{rel}\, A$.

Cuando σ sea una trayectoria en X, la cual comienza en x y termina en x', denotaremos como $\overline{\sigma}$ a la trayectoria que comienza en x' y termina en x definida como

$$\overline{\sigma}(t) = \sigma(1 - t) \quad \text{para toda} \quad t \in I.$$

Definición A.2.1. (Aplicación cubriente). Sea $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ mapeo continuo. Decimos que *p es una aplicación cubriente sobre X* si para cada $x \in X$ existe $U \subseteq X$ vecindad abierta de X que satisface

1. $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i\in I} \widetilde{U}_i$, donde $U_i \subseteq X$ es abierto para cualquier $i \in I$ (I es no vacío).

2. $p|_{U_i} : \widetilde{U}_i \longrightarrow U$ es un homeomorfismo para toda $i \in I$.

En ese caso X es llamado el espacio base y $\widetilde{X}$ el espacio cubriente o total. Diremos además que U está cubierta parejamente y $\widetilde{U}_i$ es una hoja sobre U.

El siguiente Teorema resume algunas propiedades básicas de las aplicaciones cubrientes que se siguen de la definición.

***Teorema* A.2.2.** *Sea $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ un aplicación cubriente, entonces*

I. *Para cada $x \in X$ la fibra $p^{-1}(x)$ es un espacio discreto.*

II. *Si $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{X}$ es conexo y existe una vecindad abierta cubierta parejamente $U \subseteq X$ para la cual $p(\widetilde{A}) \subseteq U$, entonces existe $\widetilde{U}$ hoja sobre U de tal forma que $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{U}$.*

III. *Si U es una vecindad abierta de x cubierta parejamente y $V \subseteq U$ es también una vecindad abierta de x, entonces V es una vecindad cubierta parejamente.*

IV. *El conjunto de vecindades cubiertas parejamente de X forman una base para X, así como el conjunto de hojas que yacen sobre de ellas forman una base para $\widetilde{X}$.*

V. *p es un homeomorfismo local. Si X es conexo, p es continua, abierta y suprayectiva y por lo tanto es una identificación.*

***Teorema* A.2.3.** *Sea $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ una aplicación cubriente tal que X es conexo. Si $x, y \in X$, las fibras $p^{-1}(x)$ y $p^{-1}(y)$ tienen la misma cardinalidad. A esta cardinalidad se le llama multiplicidad de la aplicación cubriente.*

A continuación veremos la noción de *levantamiento* cuyas implicaciones son sumamente interesantes e importantes.

Sea $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ aplicación cubriente y $f : Y \longrightarrow X$ continua. Decimos que $\widetilde{f}$ *es levantamiento de* f *a través de* p si $p \circ \widetilde{f} = f$, es decir que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Teorema* A.2.4. *(Unicidad de Levantamientos) *Sea $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ aplicación cubriente y $f : Y \longrightarrow X$ continua. Supongamos que Y es conexo y que existen $\widetilde{f}, \widetilde{g} : Y \longrightarrow \widetilde{X}$ levantamientos de f a través de p. Entonces $\widetilde{f} = \widetilde{g}$ si y sólo existe $y_0 \in Y$ tal que $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{g}(y_0)$.*

Demostración. Supongamos que existe $y_0 \in Y$ tal que $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{g}(y_0)$. Sea $A = \{\, y \in Y \;:\; \widetilde{f}(y) = \widetilde{g}(y)\,\}$, de modo que $y_0 \in A$. Sea $y \in A$ y $V \subseteq X$ vecindad abierta de $p(\widetilde{f}(y))$ cubierta parejamente y $\widetilde{V}$ la hoja para la cual $\widetilde{f}(y) \in \widetilde{V}$. Así para toda $z \in (\widetilde{f})^{-1}(\widetilde{V})$

$$\widetilde{f}(z) = p|_{\widetilde{V}}{}^{-1} \circ f(z) = \widetilde{g}(z)$$

Por lo tanto $(\widetilde{f})^{-1}(\widetilde{V}) \subseteq A$ y $y \in \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{V})$, de modo que A es abierto.

Sea $y \in Y \setminus A$, por lo que $\widetilde{f}(y) \neq \widetilde{g}(y)$. Como $f(y) = p \circ \widetilde{f}(y) = p \circ \widetilde{g}(y)$, existen dos hojas ajenas $\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2 \subseteq Y$ de V tal que $\widetilde{f}(y) \in \widetilde{V}_1$ y $\widetilde{g}(y) \in \widetilde{V}_2$.

Consideremos $\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{V}_1) \cap \widetilde{g}^{-1}(\widetilde{V}_2)$ vecindad abierta de y, que satisface que para todo $z \in \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{V}_1) \cap \widetilde{g}^{-1}(\widetilde{V}_2)$, $\widetilde{f}(z) \in \widetilde{V}_1$ y $\widetilde{g}(z) \in \widetilde{V}_2$ y de ahí $\widetilde{f}(z) \neq \widetilde{g}(z)$. Concluimos que $\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{V}_1) \cap \widetilde{g}^{-1}(\widetilde{V}_2) \subseteq Y \setminus A$, y por lo tanto $Y \setminus A$ es abierto. De ahí que A es abierto, cerrado y no vacío. Como Y es conexo, $Y = A$.

■

El siguiente resultado habla sobre la propiedad de levantamiento de trayectorias a través de aplicaciones culbrientes. Su demostración puede ser consultada en [Prieto].

***Teorema* A.2.5.** *Sea $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ una aplicación cubriente, entonces para toda trayectoria $w : I \longrightarrow X$ y $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(w(0))$ existe una única trayectoria $\widetilde{w} : I \longrightarrow \widetilde{X}$ que satisface que $\widetilde{w}(0) = \widetilde{x}_0$ y $p \circ \widetilde{w} = w$. Denotando $\widetilde{w} = L(w, \widetilde{x}_0)$, tenemos que dadas dos trayectorias w_1 y w_2, $w_1 \backsimeq w_2 \quad rel\partial I$ (es decir, las trayectorias son homotópicas relativamente a la frontera del intervalo) y $\widetilde{x} \in p^{-1}(w_1(0)) = p^{-1}(w_2(0))$, entonces*

$$L(w_1, \widetilde{x}) \backsimeq L(w_2, \widetilde{x}) \quad rel\partial I$$

en particular, $L(w_1, \widetilde{x})(1) = L(w_2, \widetilde{x})(1)$.

Observación A.2.6. Nótese que si w, τ son trayectorias enchufables (es decir tales que $w(1) = \tau(0)$), entonces podemos definir una trayectoria $w\tau : I \longrightarrow X$ de tal forma que

$$w\tau(t) \begin{cases} w(2t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \tau(2t-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

de modo que dado $\widetilde{x} \in p^{-1}(w(0))$,

$$L(w\tau, \widetilde{x}) = L(w, \widetilde{x})L(\tau, \widetilde{y}),$$

donde $\widetilde{y} = L(w, \widetilde{x})(1)$.

Supóngamos que $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ es aplicación cubriente y $f : Y \longrightarrow X$. Supongamos que existe $\widetilde{f} : Y \longrightarrow \widetilde{X}$ que satisface que $p \circ \widetilde{f} = f$ es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

De modo que dado $y_0 \in Y$, si $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{x}_0$ y $f(y_0) = x_0$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(Y, y_0) \arrow[ur, "\widetilde{f}_*"] \arrow[r, "f_*"'] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

concluyendo con ello que $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$. Veremos que bajo ciertas condiciones ésta no es sólo una condición necesaria sino suficiente para que exista el levantamiento de una función a traves de una aplicación cubriente.

***Teorema* A.2.7.** *Sean $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ aplicación cubriente, Y conexo y localmente conectable por trayectorias. Sean $f : Y \longrightarrow X$ continua, $x_0 \in X$, $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ y $y_0 \in Y$ de tal forma que $f(y_0) = x_0$ y $p(\widetilde{x}_0) = x$. Entonces $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ si y sólo si existe una única función continua $\widetilde{f} : Y \longrightarrow \widetilde{X}$ para la cual $\widetilde{f}(\widetilde{y}_0) = (\widetilde{x}_0)$ y además resulta un levantamiento de f, es decir el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Demostración. Supongamos que $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$.

Consideremos

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\widetilde{f}"] & \widetilde{X} \\ y \arrow[r, mapsto] & L(f \circ \sigma, \widetilde{x}_0)(1) \end{tikzcd}$$

donde σ es una trayectoria que va de y_0 a y.

Veamos primero que está bien definido. Sean σ_1, σ_2 trayectorias de y_0 en y, de modo que $\sigma_1\overline{\sigma}_2$ es un lazo en y_0 (y por ello $[\sigma_1\overline{\sigma}_2] \in \pi_1(Y, y_0)$). Sea τ lazo en $\widetilde{x}_0$ tal que

$$(f \circ \sigma_1)(f \circ \overline{\sigma}_2) = f \circ (\sigma_1 \overline{\sigma}_2) \backsimeq p \circ \tau \quad \text{rel} \quad \partial I$$

(el cual existe pues $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)))$, de modo que $f \circ \sigma_1 \backsimeq (p \circ \tau)(f \circ \sigma_2)$ rel ∂I. Así, por el Teorema A.2.5 y la observación A.2.6

$$\begin{aligned} L(f \circ \sigma_1, \widetilde{x}_0) &\backsimeq L((p \circ \tau)(f \circ \sigma_2), \widetilde{x}_0) \\ &= L(p \circ \tau, \widetilde{x}_0) L(f \circ \sigma_2, \widetilde{x}_0) \quad \text{rel} \quad \partial I. \end{aligned}$$

En particular,

$$L(f \circ \sigma_1, \widetilde{x}_0)(1) = L(f \circ \sigma_2, \widetilde{x}_0)(1)$$

Notemos que

$$\widetilde{f}(y_0) = L(c_{x_0}, \widetilde{x}_0)(1) = \widetilde{x}_0.$$

Ahora veamos que $\widetilde{f}$ es continua.

Sea $y \in Y$ y $U \subseteq X$ vecindad abierta de $f(y)$ cubierta parejamente y $\widetilde{U} \subseteq \widetilde{X}$ la hoja en la cual se encuentra $\widetilde{f}(y)$. Consideremos $V \subseteq Y$ vecindad abierta de y conexa por trayectorias que está contenida en $f^{-1}(U)$. Sea σ una trayectoria de y_0 a y. Sea $z \in V$ y σ_{yz} una trayectoria que va de y a z y que esté contenida en V, de modo que

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(z) &= L(f \circ (\sigma \sigma_{yz}), \widetilde{x}_0)(1) \\ &= L(f \circ \sigma_{yz}, \widetilde{f}(y))(1). \end{aligned}$$

Dado que $L(f \circ \sigma_{yz}, \widetilde{f}(y))[0,1] \subseteq p^{-1}(U)$ y $\widetilde{f}(y) \in \widetilde{U}$, entonces $L(f \circ \sigma_{yz}, \widetilde{f}(y))[0,1] \subseteq \widetilde{U}$. De ahí que $\widetilde{f}(z) \in \widetilde{U}$, y por lo tanto $\widetilde{f}(V) \subseteq \widetilde{U}$. Con ello y por el Teorema A.2.2 inciso (IV) se tiene que $\widetilde{f}$ es continua. Observemos que por definición, $p \circ \widetilde{f}(y) = f(y)$ para todo $y \in Y$ (es decir, $\widetilde{f}$ es un levantamiento de f).

La unicidad se concluye del Teorema A.2.4.

■

Definición A.2.8. Diremos que las aplicaciones cubrientes $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ y $p' : \widetilde{X}' \longrightarrow X$ son *equivalentes* si existe un homeomorfismo $\varphi : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}'$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & \widetilde{X}' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Notemos que gracias a la noción anterior es posible inducir una relación de equivalencia en la clase de aplicaciones cubrientes de un espacio X.

El siguiente Teorema nos da una condición necesaria y suficiente para que dos aplicaciones sean equivalentes.

***Teorema* A.2.9.** *Sean $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ y $p' : \widetilde{X}' \longrightarrow X$ aplicaciones cubrientes donde $\widetilde{X}$ y $\widetilde{X}'$ son conexos y localmente conectables por trayectorias. Entonces p y p' son equivalentes si y sólo si dado $x_0 \in X$, $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ y $\widetilde{x}'_0 \in {p'}^{-1}(x_0)$*

$$p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) = {p'}_*(\pi_1(\widetilde{X}', \widetilde{x}'_0)).$$

Demostración. Basta mostrar que $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) = {p'}_*(\pi_1(\widetilde{X}', \widetilde{x}'_0))$ es una condición suficiente para que p y p' sean equivalentes. En este caso, por el Teorema anterior existen mapeos únicos $\varphi : \widetilde{X}' \longrightarrow \widetilde{X}$ y $\varphi' : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}'$ para los cuales $p \circ \varphi = p'$ y $p' \circ \varphi' = p$, y además $\varphi(\widetilde{x}'_0) = \widetilde{x}_0$ y $\varphi'(\widetilde{x}_0) = \widetilde{x}'_0$.

Como

$$\begin{aligned} p' \circ \varphi' \circ \varphi &= p \circ \varphi = p' \quad \text{y} \\ p \circ \varphi \circ \varphi' &= p' \circ \varphi' = p\,, \end{aligned}$$

se tiene que $\varphi' \circ \varphi$ y $\varphi \circ \varphi'$ son levantamientos de p' y p respectivamente, los cuales satisfacen que $\varphi' \circ \varphi(\widetilde{x}'_0) = \widetilde{x}'_0$ y $\varphi \circ \varphi'(\widetilde{x}_0) = \widetilde{x}_0$. Por la unicidad de los levantamientos de una aplicación cubriente (Teorema A.2.4), $\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}_{\widetilde{X}'}$ y $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_{\widetilde{X}}$. De modo que p y p' son equivalentes.

■

Definición A.2.10. Decimos que X es *simplemente conexo*, si es conexo por trayectorias y $\pi_1(X, x_0) = 0$, para todo $x_0 \in X$.

Llamaremos a una aplicación cubriente *universal* si el espacio base es simplemente conexo.

Dado que en esta definición X es conexo por trayectorias es posible mostrar que para cualquier $x, x_0 \in X$, $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, x_0)$.

Observación A.2.11. El hecho de que X sea conexo y que $\pi_1(X, x) = 0$ para todo $x \in X$, en general no es equivalente a que X sea simplemente conexo. Esto se puede observar, tomando a X como el seno topológico. Dicho espacio es conexo y satisface que para todo punto $x \in X$, $\pi_1(X, x) = 0$. Lo anterior se puede de ver considerando que las componentes conexas por trayectorias de X son homeomorfas a intervalos conexos de $\mathbb{R}$ y por lo tanto son contraibles, lo cual es suficiente para concluir ya que en general si Y es un espacio topológico, $y_0 \in Y$ y $\mathfrak{C}_{y_0} \subseteq Y$ es la componente conexa por trayectorias de y_0, denotando $i : \mathfrak{C}_{y_0} \longrightarrow Y$ a la inclusión, tenemos que $i_* : \pi_1(\mathfrak{C}_{y_0}, y_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ es un isomorfismo.

Si $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ y $p' : \widetilde{X}' \longrightarrow X$ son aplicaciones cubrientes universales, por el Teorema A.2.9 basta asegurar que los espacios totales $\widetilde{X}$ y $\widetilde{X}'$ son localmente conectables por trayectorias para concluir que son equivalentes (ya que por definición son conectables por trayectorias, y por tanto conexos).

***Proposición* A.2.12.** Sea X conexo y localmente conectable por trayectorias. Si $p : X \longrightarrow Y$ es una aplicación cubriente y Y es simplemente conexo entonces p es un homeomorfismo.

Demostración. Ya que p es abierta, basta ver que es inyectiva para concluir el resultado. Sabemos que Y es conexo y localmente conectable por trayectorias (ya que p es un homeomorfismo local); además por ser simplemente conexo, para cualquier $x \in X$

$$p_*(\pi_1(X,x)) \subseteq \pi_1(Y, p(x)) = 0\,,$$

lo cual implica que $p_*(\pi_1(X,x)) = 0$.

Como ${\mathrm{id}_Y}_*(\pi_1(Y,y)) = 0$ para toda $y \in Y$, por el Teorema A.2.7 existe un único levantamiento de id_Y con respecto a p, al cual denotaremos $\widetilde{p}$, de modo hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\widetilde{p}"] \arrow[r, "\mathrm{id}_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

es decir, $p \circ \widetilde{p} = \mathrm{id}_Y$. Observemos que gracias a esto basta concluir que $\widetilde{p}$ es suprayectiva. Para ello veremos que $\widetilde{p}(Y)$ es un subconjunto abierto y cerrado de X, siguiéndose de la conexidad de X que $\widetilde{p}(Y) = X$.

Observemos que para todo $x \in \widetilde{p}(Y)$, $\widetilde{p}^{-1}(x) = \{\, p(x)\,\}$.

Sea $x_0 \in X$ y $U \subseteq Y$ vecindad abierta y conexa de $p(x_0)$ cubierta parejamente (la cual puede ser elegida en esa forma gracias a que Y es localmente conectable por trayectorias) y sea $U_0 \subseteq X$ hoja de U en la cual está x_0. Como

$$\widetilde{p}(U) \subseteq p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in \Lambda} U_i$$

y $\widetilde{p}(U)$ es un conexo que satisface que $\widetilde{p}(U) \cap U_0 \neq \emptyset$, entonces $\widetilde{p}(U) \subseteq U_0$. Sea $z_0 \in U_0$. Como $\widetilde{p}(p(z_0)) \in \widetilde{p}(U) \subseteq U_0$, de modo que $p(\widetilde{p}(p(z_0))) = p(z_0)$, se tiene que $\widetilde{p}(p(z_0)) = z_0$, por lo cual $U_0 \subseteq \widetilde{p}(U)$, concluyendo con ello la igualdad. De esa forma se tiene que $\widetilde{p}(Y)$ es un subconjunto abierto de X.

Por otro lado, si $w_0 \notin \widetilde{p}(Y)$, y $V \subseteq Y$ es una vecindad conexa de $p(w_0)$ cubierta parejamente, denotando como V_0 la hoja en la qu ese encuentra w_0, se tiene que $V_0 \cap \widetilde{p}(V) = \emptyset$.

Observemos que $V_0 \cap \widetilde{p}(Y) = V_0 \cap \widetilde{p}(V)$, ya que si $y = \widetilde{p}(x) \in V_0 \cap \widetilde{p}(Y)$, entonces $x = p \circ \widetilde{p}(x) = p(y) \in V$, y por lo tanto $y \in \widetilde{p}(V)$, de modo que $V_0 \cap \widetilde{p}(Y) = \emptyset$, concluyendo con ello que $\widetilde{p}(Y)$ es cerrado en X. ■

Definición A.2.13. (Espacio suficientemente conexo). Decimos que un espacio topológico es *semilocalmente simplemente conexo* si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad $U \subseteq X$ tal que cada lazo en U es nulhomotópico en X. Si además el espacio es conexo y localmente conectable por trayectorias diremos que X es *suficientemente conexo.*

A continuación enunciaremos el resultado que se ocupó principalmente en la sección de cubrientes universales. La demostración detallada de este hecho puede ser consultada en [Prieto].

***Teorema* A.2.14.** *Si X es suficientemente conexo entonces existe $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ aplicación cubriente universal*

Observación A.2.15. Observemos que en el caso de que M sea una variedad topológica conexa, ésta resulta ser suficientemente conexa (dado que para cada punto existen vecindades abiertas que son simplemente conexas), de modo que por el Teorema anterior podemos concluir la existencia de una aplicación cubriente universal para M. De hecho resulta única en el sentido de que cualesquiera dos aplicaciones cubrientes de M son equivalentes pues los espacios cubrientes son localmente homeomorfos a la variedad y por tanto resultan localmente conectables por trayectorias. En ese sentido hablaremos de *la aplicación cubriente universal de M.*

A continuación haremos algunos comentarios con respecto a la relación entre una aplicación cubriente y el grupo fundamental de su espacio base.

Sean $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$, $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ y $x_0 \in X$. Como hemos visto, el levantamiento de un lazo en x_0 no siempre resulta un lazo en $\widetilde{x}_0$, pero gracias al Teorema A.2.5 es posible concluir que

$$p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) = \{\, [\sigma] \in \pi_1(X, x_0) \;:\; L(\sigma, \widetilde{x}_0) \quad \text{es un lazo}\,\}.$$

Como este conjunto es imagen de $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ bajo un morfismo de grupos, entonces es un subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$. A dicho subgrupo le llamaremos *subgrupo característico de la aplicación cubriente $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$*. Dada la unicidad de los levantamientos salvo homotopía, podemos concluir que dados $[\lambda]$, $[\lambda'] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ tales que bajo p_* tienen la misma imagen, lo cual significa que

$$p \circ \lambda \simeq p \circ \lambda' \quad \text{rel} \quad \partial I$$

implica a su vez que

$$\lambda = L(p \circ \lambda, \widetilde{x}_0) \simeq L(p \circ \lambda', \widetilde{x}_0) = \lambda' \quad \text{rel} \quad \partial I$$

es decir, $[\lambda] = [\lambda']$. De ahí que p_* es un monomorfismo y por lo tanto $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ es isomorfo a $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$.

Como sabemos un resultado general en un espacio topológico X es que para cualesquiera dos puntos x y x' en X conectables mediante una trayectoria σ que va de x' a x, la función $\Psi_{x,x'} : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(X, x')$ para la cual

$$\Psi_{x,x'}([\lambda]) = [\sigma\lambda\overline{\sigma}]$$

está bien definida y es un isomorfismo de grupos. Este resultado nos ayudará a concluir el siguiente.

***Proposición* A.2.16.** Sean $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ aplicación cubriente y $x_0 \in X$, $\widetilde{x}_0, \widetilde{x}'_0 \in p^{-1}(x_0)$, entonces

I. Si σ es una trayectoria que va de $\widetilde{x}_0$ a $\widetilde{x}'_0$ y $\alpha = [p \circ \sigma] \in \pi_1(X, x_0)$,

$$p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) = \alpha p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}'_0))\alpha^{-1}$$

es decir, $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ y $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}'_0))$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x_0)$ mediante α. De tal modo que si $\widetilde{X}$ es conexo por trayectorias, cualesquiera dos subgrupos característicos correspondientes a x_0 son conjugados.

II. Sea $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$ subgrupos conjugado de $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$, entonces existe $\widetilde{x}'_0 \in p^{-1}(X_0)$ para el cual $H = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}'_0))$.

Demostración. Por las observaciones previas basta mostrar el segundo inciso. Sea $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ para el cual $\alpha H \alpha^{-1} = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ y $\rho \in \alpha$. Consideremos $L(\rho, \widetilde{x}_0)$ y sea $\widetilde{x}'_0 = L(\rho, \widetilde{x}_0)(1)$, de modo que

$$\begin{aligned} \alpha H \alpha^{-1} &= p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) \\ &= \alpha p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}'_0))\alpha^{-1}. \end{aligned}$$

De ahí que $H = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}'_0))$.

■

Basados en la Proposición anterior, si $\widetilde{X}$ es conexo por trayectorias definiremos *la clase de conjugacion característica de* $\pi_1(X, x_0)$ *de la aplicación cubriente* $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ como

$$\mathfrak{C}(p, x_0) = \{\, p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) \,:\, \widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0) \,\}.$$

Observemos que de seguir considerando $\widetilde{X}$ conexo por trayectorias y $p^{-1}(x_0) = \{\, \widetilde{x}_i \,\}_{i \in I}$, dada $\alpha \in I$ fija, para toda $i \in I$ existe una trayectoria w_i que va de $\widetilde{x}_\alpha$ a $\widetilde{x}_i$, de tal forma que todas las posibles clases laterales de $\pi_1(X,x_0)$ con respecto a $p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_\alpha))$ son $\{\,\pi_1(X,x_0)[p\circ w_i]\,\}_{i\in I}$, donde $\pi_1(X,x_0)[p\circ w_i] \neq \pi_1(X,x_0)[p\circ w_j]$ si $i\neq j$. Esto se puede concluir ya que de tomar $[\sigma]\in\pi_1(X,x_0)$, al considerar $L(\sigma,\widetilde{x}_\alpha)(1)=\widetilde{x}_j$ se tiene que $w_jL(\overline{\sigma},\widetilde{x}_j)$ es un lazo en $\widetilde{x}_\alpha$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} p_*([w_jL(\overline{\sigma},\widetilde{x}_j)]) &= [p\circ w_j][p\circ L(\overline{\sigma},\widetilde{x}_j)] \\ &= [p\circ w_j][\overline{\sigma}]\in p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_\alpha)) \end{aligned}$$

lo cual sucede si y sólo si

$$p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_\alpha))[p\circ w_j] = p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_\alpha))[\sigma].$$

Además, si $i\neq j$,

$$L((p\circ w_i)(p\circ\overline{w}_j),\widetilde{x}_\alpha) = w_iL((p\circ\overline{w}_j),\widetilde{x}_i).$$

Observemos que de concluir que $w_iL((p\circ\overline{w}_j),\widetilde{x}_i)$ no es un lazo, tendríamos que $(p\circ w_i)(p\circ\overline{w}_j)\notin p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_\alpha))$, lo cual es equivalente a que

$$p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_\alpha))[p\circ w_i] \neq p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_\alpha))[p\circ w_j]\,,$$

que es lo que nosotros deseamos. Veamos que dicho elemento en $\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_\alpha)$ no es un lazo. De lo contrario $L((p\circ\overline{w}_j),\widetilde{x}_i)(1)=\widetilde{x}_\alpha$, y por ello

$$L(p\circ\overline{w}_j,\widetilde{x}_i) = \overline{L(p\circ w_j,\widetilde{x}_\alpha)} = \overline{x}_j,$$

pero $L(p\circ\overline{w}_j,\widetilde{x}_i)(0)=\widetilde{x}_i\neq\widetilde{x}_j=\overline{w}_j(0)$, lo cual es una contradicción.

Por lo anterior podemos concluir que $|p^{-1}(x_0)|$ es igual al índice de $\pi_1(X,x_0)$ con respecto al subgrupo $p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_\alpha))$.

Observación A.2.17. Con lo anterior hemos concluido que si $p:\widetilde{X}\longrightarrow X$ es una aplicación cubriente y $\widetilde{X}$ es conexo por trayectorias entonces la fibra de un punto x en X tiene cardinalidad menor o igual a la cardinalidad del grupo fundamental $\pi_1(X,x)$. Más aún, si p es una aplicación cubriente entonces su subgrupo característico es el trivial y por lo tanto para todo $x\in X$, $|\pi_1(x,X)| = |p^{-1}(x)|$.

El siguiente resultado además de ser importante por sí mismo, es útil en la demostración de que un espacio conexo que es cubriente de una variedad, es Hausdorff (véase la Proposición 5.3.2).

***Proposición* A.2.18.** Sea M^d una variedad diferenciable conexa, entonces para todo $m\in M$ el grupo fundamental $\pi_1(M,m)$ es numerable.

A.3. Polinomio de Taylor en espacios vectoriales

Recordemos que dado un mapeo $f : U \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ donde $f = (f_1, \ldots, f_d)$ y $f_i \in C^{n+1}(U)$, dado $a \in U$ tenemos que para cualquier $t \in U$

$$f_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_i^k(a)}{k!}(t-a)^k + R_{(n,a)}(t)$$

donde $R_{(n,a)}(t) = O((t-a)^{n+1})$ cuando $t \to a$.

De modo que al considerar $\hat{a} = (a, \ldots, a) \in \mathbb{R}^d$ y

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{R_{(n,\hat{a})}} \mathbb{R}^d \\ t &\longmapsto (R_{(n,a)}(t), \ldots, R_{(n,a)}(t)) \end{aligned}$$

se tiene que

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!}(f^k(a)) + R_{(n,\hat{a})} \ ,$$

donde $\frac{R_{(n,\hat{a})}(t)}{(t-a)^{k+1}}$ es acotado cuando $t \to a$.

Llamaremos a $R_{(n,\hat{a})}$ *el residuo del polinomio de Taylor de grado* n *alrededor de* $\hat{a}$ *para la función* f.

Consideremos ahora V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita d con su estructura de variedad inducida a partir de los isomorfismo con $\mathbb{R}^d$. Veremos que es posible deducir un resultado análogo al expuesto previamente ahora para funciones de un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ en V.

Sean $\beta = \{ x_1, \ldots, x_d \}$ y $\beta^* = \{ \phi_1, \ldots, \phi_d \}$ su base dual.

Sea $h : U \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow V$ suave, de modo que $h' : U \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow V$ es tal que para toda $t_0 \in U$

$$h'(t_0) = \sum_{i=1}^{d} \left.\frac{d(\phi_i \circ h)}{dt}\right|_{t=t_0} x_i.$$

Como

$$h''(t_0) = \sum_{i=1}^{d} \left.\frac{d(\phi_i \circ h')}{dt}\right|_{t=t_0} x_i$$

y para toda $i \in \{ 1, \ldots, d \}$, $\phi_i \circ h'(t_0) = \frac{d(\phi \circ h)}{dt}|_{t=t_0}$, tenemos que

$$\left.\frac{d(\phi_i \circ h')}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{d^2(\phi_i \circ h)}{dt^2}\right|_{t=t_0},$$

de modo que por inducción podemos concluir que

$$h^{(k)}(t_0) = \sum_{i=1}^{d} \frac{d^k(\phi_i \circ h)}{dt^k}\bigg|_{t=t_0} x_i.$$

Consideremos

$$R_{(n,0)}(t) = h(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\bigg(\sum_{i=1}^{d} \frac{d^k(\phi_i \circ h)}{dt^k}\bigg|_{t=0} x_i\bigg).$$

Denotando $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_d)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\phi \circ R_{(n,0)}(t) &= \phi \circ h(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\bigg(\frac{d^k(\phi_1 \circ h)}{dt^k}\bigg|_{t=0}, \ldots, \frac{d^k(\phi_d \circ h)}{dt^k}\bigg|_{t=0}\bigg) \\
&= \phi \circ h(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(\phi \circ h)^k(0) \\
&= \phi \circ h(t) - T_n(t)
\end{aligned}$$

donde $T_n(t)$ es el polinomio de Taylor de grado n alrededor de 0 para la función $\phi \circ h$. Por lo tanto $\phi \circ R_{(n,0)}$ es el residuo correspondiente a dicho polinomio y de ahí que

$$\frac{\phi \circ R_{(n,0)}(t)}{t^{k+1}} \quad \text{es acotado cuando} \quad t \to 0.$$

Si ϕ' es otro mapeo coordenado de V se tiene que

$$\phi' \circ R_{(n,0)}(t) = (\phi' \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ R_{(n,0)})(t)$$

es acotado cuando $t \to 0$ pues $\phi' \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ es una función continua.

De ese modo concluimos que para cualquier $t \in U$

$$h(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\bigg(\sum_{i=1}^{d} \frac{d^k(\phi_i \circ h)}{dt^k}\bigg|_{t=0} x_i\bigg) + R_{(n,0)}(t)$$

donde

$$\frac{\phi \circ R_{(n,0)}(t)}{t^{k+1}} \quad \text{es acotado cuando} \quad t \to 0.$$

para cualquier mapeo coordenado ϕ de V.

A.4. Operadores ortogonales y unitarios

Consideremos F como $\mathbb{R}$ o bien como $\mathbb{C}$. Recordemos que si V es un espacio vectorial sobre F, de dimensión finita d y con producto interior $\langle\, ,\, \rangle$, dada una base ortonormal β ésta induce un difeomorfismo entre $\mathrm{End}(V)$ y $\mathfrak{gl}(d,F)$, a saber el que asocia a $T \in \mathrm{End}(V)$ su representación matricial en la base β, $[T]_\beta$. Más aún, la restricción de dicho difeomorfismo a $\mathrm{Aut}(V)$ es un isomorfismo de grupos de Lie sobre $Gl(d,F)$.

Dada $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(d,F)$ denotemos $A^* = (\bar{a}_{ij})$, donde la barra superior indica conjugación compleja. En el caso en el que $F = \mathbb{R}$ se tiene que $A = A^t$.

Recordemos también que por ser V dimensionalmente finito, para todo $T \in \mathrm{End}(V)$ existe un único $T^* \in \mathrm{End}(V)$ que satisface

$$\langle\, T(x), y\, \rangle = \langle\, x, T^*(y)\, \rangle$$

para cualesquiera $x, y \in V$.

A T^* le llamaremos el operador adjunto de T. La relación entre T y T^* se manifiesta también en las representaciones matriciales de ambos operadores con respecto a una base ortonormal β, a saber

$$[T^*]_\beta = [T]^*_\beta.$$

Si consideramos $c \in F$ y $U \in \mathrm{End}(V)$ se siguen de la definición de operador adjunto las siguientes propiedades

I. $(cT)^* = \bar{c}\,T^*$.

II. $(T^*)^* = T$.

III. $I^* = I$

IV. $(T \circ U)^* = U^* \circ T^*$.

Más aún, si $T \in \mathrm{Aut}(V)$ entonces $T^* \in \mathrm{Aut}(V)$ y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ pues dados $x, y \in V$

$$\begin{aligned}\langle\, T^* \circ (T^{-1})^*(x), y\, \rangle &= \langle\, (T^{-1})^*(x), T(y)\, \rangle \\ &= \langle\, x, T^{-1} \circ T(y)\, \rangle = \langle\, x, y\, \rangle\end{aligned}$$

es decir $T^* \circ (T^{-1})^* = I^* = I$. Analógamente se tiene que $(T^{-1})^* \circ T^* = I$.

Enseguida analizaremos algunas nociones y resultados importantes con respecto a los operadores de V y sus adjuntos. A menos de que se especifique lo contrario hablaremos de espacios vectoriales sobre F.

***Lema* A.4.1.** Sea V espacio vectorial dimensionalmente finito con producto interior. Si T tiene un eigenvector distinto de cero correspondiente al eigenvalor λ entonces T^* tiene un eigenvector distinto de cero correspondiente al eingenvalor $\bar{\lambda}$.

Demostración. Sea ν eigenvector de T cuyo eigenvalor es λ, entonces para toda $x \in V$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(\nu) - \lambda I(\nu), x\rangle = \langle \nu, (T - \lambda I)^*(x)\rangle \\ &= \langle \nu, T^* - \bar{\lambda} I(x)\rangle \end{aligned}$$

de modo que ν es un elemento del conjunto ortogonal de $\mathrm{Im}(T^* - \bar{\lambda}I)$, de ahí que $\mathrm{Im}(T^* - \bar{\lambda}I)$ es un subconjunto propio de V, lo cual es una condición necesaria y suficiente para que $T^* - \bar{\lambda}I$ no sea inyectiva; por ello existe $\tilde{\nu} \in V$ distinto de cero que se encuentra en el kernel de $T^* - \bar{\lambda}I$, que es equivalente a decir que es un eigenvector de T^* con valor propio $\bar{\lambda}$.

■

Definición A.4.2. Sea V espacio vectorial dimensionalmente finito con producto interior. Diremos que un operador T es *normal* si $T \circ T^* = T^* \circ T$. Análogamente diremos que $A \in \mathfrak{gl}(d, F)$ es *normal* si $AA^* = A^*A$.

Si T es un operador y β una base ortonormal entonces T es normal si y sólo si $[T]_\beta$ es normal.

***Proposición* A.4.3.** Sea V un espacio vectorial dimensionalmente finito con producto interior. Si $T \in \mathrm{End}(V)$ es normal entonces satisface los siguientes enunciados:

I. Si $x \in V$, $||T(x)|| = ||T^*(x)||$.

II. Para cualquier $c \in F$, $T - cI$ es normal.

III. Si $x \in V$ es un eigenvector de T, x es un eigenvector de T^*. Más aún, si $\lambda \in F$ satisface $T(x) = \lambda x$ entonces $T^*(x) = \bar{\lambda} x$.

Demostración. I. Sea $x \in V$, entonces

$$\begin{aligned} \langle T^*(x), T^*(x)\rangle &= \langle x, T \circ T^*\rangle = \langle X, T^* \circ T(x)\rangle \\ &= \langle T(x), T(x)\rangle. \end{aligned}$$

II. Observemos que

$$\begin{aligned} (T - cI) \circ (T - cI)^* &= (T - cI) \circ (T^* - \bar{c}I) \\ &= T \circ T^* - cT^* - \bar{c}T + |c|^2 I \\ &= T^* \circ T - cT^* - \bar{c}T + |c|^2 I \\ &= (T - cI)^* \circ (T - cI). \end{aligned}$$

III. Sea $x \in V$ un eigenvector de T con eigenvalor λ, entonces

$$\langle T^* - \bar{\lambda} I(x), T^* - \bar{\lambda} I(x) \rangle = \langle T - \lambda I(x), T^* - \lambda I(x) \rangle = 0$$

es decir, $T^* - \lambda I(x) = 0$.

■

***Teorema* A.4.4.** *(Schur) Sea V un espacio vectorial dimensionalmente finito con producto interior y $T \in End(V)$ cuyo polinomio característico se descompone, entonces existe una base ortonormal β para la cual $[T]_\beta$ es triangular superior.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre la dimensión de V. Si $\dim V = 1$ es inmediato.

Supongamos que la afirmación es cierta para operadores de un espacio vectorial de dimensión finita k cuyo polinomio característico se descompone. Sean V y T como en las hipótesis, y supongamos que $\dim V = k+1$. Sea λ el valor propio de T. Por el Lema A.4.1 existe $z \in V \setminus \{ 0 \}$ de norma 1 para el cual $T^*(z) = \bar{\lambda} z$. Sea W el subespacio generado por z. Denotemos como $\widetilde{W}$ el subespacio ortogonal de W y bservemos que $T(\widetilde{W}) \subseteq \widetilde{W}$ pues dado $x \in \widetilde{W}$

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \langle x, z \rangle = \langle x, \bar{\lambda} z \rangle \\ &= \langle x, T^*(z) \rangle = \langle T(x), z \rangle. \end{aligned}$$

Así $T|_{\widetilde{W}}$ es un operador de $\widetilde{W}$ cuyo polinomio característico se descompone (pues éste divide al polinomio caraterístico de T).

Sea $\beta = \{ v_1, \ldots, v_k \}$ base ortonormal de $\widetilde{W}$ para la cual $[T|_{\widetilde{W}}]$ es triangular superior. De modo que $\beta^* = \{ v_1, \ldots, v_k, z \}$ es una base ortonormal de V y $[T]_{\beta^*}$ es triangular superior.

■

Observemos que una condición suficiente para que T sea normal es que exista una base ortonormal de eigenvectores β, pues $[T^*]_\beta = [T]_\beta^*$ es diagonal al igual que $[T]_\beta$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} [T^* \circ T]_\beta &= [T^*]_\beta [T]_\beta = [T]_\beta [T^*]_\beta \\ &= [T \circ T^*]_\beta \end{aligned}$$

es decir, $T \circ T^* = T^* \circ T$.

Veamos que en el caso en el que $F = \mathbb{C}$ también es una condición necesaria.

***Teorema* A.4.5.** *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, dimensionalmente finito y con producto interior, entonces un operador T es normal si y sólo si existe una base ortonormal de eigenvectores de dicho operador.*

Demostración. Supongamos que T es normal. Como el polinomio caraterístico de T se descompone, por el Teorema de Schur existe $\beta\{ v_1, \ldots, v_n \}$ una base ortonormal de V para la cual $[T]_\beta$ es triangular superior. Observemos de dicha base realmente está formada por eigenvectores de V.

Procederemos por inducción sobre n.

Notemos que v_1 es un eigenvector de T. Supongamos que para $1 \leqslant j < n$, si $i < j$ entonces v_i es eigenvector de T correspondiente al eigenvalor λ_i, de modo que

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \langle T(v_j), v_i\rangle = \langle v_j, T^*(v_i)\rangle \\ &= \langle v_j, \bar{\lambda}_i v_i\rangle = \langle \lambda v_j, v_i\rangle = 0. \end{aligned}$$

De modo que v_j es eigenvector de T, concluyendo con ello que β es una base de eigenvectores de T. ■

Consideremos $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial con el producto usual. Sea $0 < \theta < \pi$, de modo que la matriz de rotación por el ángulo θ

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

es normal pero no tiene eigenvalores.

Esto nos dice que en el caso real es necesario considerar una condición más fuerte que la normalidad para asegurar la existencia de bases ortonormales de eigenvectores para los operadores.

Definición A.4.6. Sea V espacio vectorial dimensionalmente finito con producto interior. Diremos que un operador T de V es *autoadjunto* si $T = T^*$. Análogamente diremos que una matriz $A \in \mathfrak{gl}(d, F)$ es *autoadjunta* si $A = A^*$.

***Lema* A.4.7.** Sea V un espacio vectorial dimensionalmente finito con producto interior y T un operador autoadjunto, entonces todos sus eigenvalores son reales.

Demostración. Dado que T es autoadjunto, es normal. Así, para cualquier eigenvalor $\lambda \in F$ existe un eigenvector $x \in V \smallsetminus \{0\}$. Por el inciso (c) de la Proposición A.4.3, x también es vector propio de $\bar{\lambda}$, de modo que

$$\bar{\lambda}x = T^*(x) = T(x) = \lambda x.$$

Así $\lambda = \bar{\lambda}$ y por lo tanto es real.

■

***Teorema* A.4.8.** *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ dimensionalmente finito y con producto interior, de modo que un operador T es autoadjunto si y sólo si existe una base ortonormal de eigenvectores de T.*

Demostración. Sea β una base ortonormal de eigenvectores de T. Como todos los eigenvalores son reales $[T]^*_\beta = [T]_\beta$, es decir $T = T^*$.

Suponiendo que T es autoadjunto, por el Lema A.4.7 se tiene que todos los eigenvalores son reales, de modo que el polinomio caraterístico se descompone. Gracias al Teorema de Schur la demostración se sigue de igual modo que la del Teorema A.4.5. ■

***Corolario* A.4.9.** Sea V un espacio vectorial dimensionalmente finito y con producto interior. Entonces T es autoadjunto si y sólo si existe una base ortonormal de eigenvectores y todos los eigenvalores son reales.

Recordemos que $|| \ || : V \longrightarrow V$ definida como $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ es la norma inducida por $\langle \ , \ \rangle$ en V.

A continuación veremos algunas de las relaciones que hay entre un operador y su adjunto con respecto a la norma inducida por el producto interior de V.

Definición A.4.10. Decimos que para cualquier $T \in \mathrm{End}\,(V)$ que satisface que dado $x \in V$ $||T(x)|| = ||x||$, es *ortogonal* si $F = \mathbb{R}$ o *unitario* si $F = \mathbb{C}$.

***Proposición* A.4.11.** Sea V un F-espacio vectorial dimensionalmente finito con producto interior y $T \in \mathrm{End}\,(V)$. Entonces son equivalentes los siguientes enunciados

I. $T^* \circ T = T \circ T^* = I$.

II. $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ para cualesquiera x, $y \in V$.

III. Si β es ortonormal entonces $T(\beta)$ es ortonormal.

IV. Existe una base β ortonormal para la cual $T(\beta)$ es ortonormal.

V. $||T(x)|| = ||x||$ para toda $x \in V$.

Demostración. I. $\Rightarrow$ II. Sean x, $y \in V$, de modo que

$$\langle T(x), T(y)\rangle = \langle T^* \circ T(x), y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

II. $\Rightarrow$ III. Sea $\beta = \{ v_1, \dots, v_n \}$ base ortonormal entonces para cualesquiera $i, j \in \{ 1, \dots, n \}$

$$\langle T(v_i), T(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker.

III. $\Rightarrow$ IV. Se sigue directamente.

IV. $\Rightarrow$ V. Sea $\beta = \{ v_1, \dots, v_n \}$ base ortonormal para la cual $T(\beta)$ es ortonormal. Sea $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, v_i\rangle v_i$, lo cual implica que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, v_i\rangle T(v_i)$, entonces

$$
\begin{aligned}
||x||^2 &= \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i\rangle v_i, \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j\rangle v_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle x, v_i\rangle \overline{\langle x, v_j\rangle} \langle v_i, v_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} |\langle x, v_i\rangle|^2
\end{aligned}
$$

Análogamente

$$
\begin{aligned}
||T(x)|| &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle x, v_i\rangle \overline{\langle x, v_j\rangle} \langle T(v_i), T(v_j)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} |\langle x, v_i\rangle|^2
\end{aligned}
$$

Podemos concluir de esto que $||T(x)|| = ||x||$, para todo $x \in V$.

V. $\Rightarrow$ I. Observemos que de mostrar que (V) $\Rightarrow$ (II), se tiene que para cualesquiera $x, y \in V$

$$\langle x, y\rangle = \langle T(x), T(y)\rangle = \langle T^* \circ T(x), y\rangle$$

es decir $I = I^* = T^* \circ T$. Como T es inyectiva entonces es invertible y por tanto $T^* = T^{-1}$.

Verifiquemos que para cualesquiera $x, y \in V$, $\langle x, y\rangle = \langle T(x), T(y)\rangle$.

Sabemos que $\langle T(x+y), T(x+y)\rangle = \langle x+y, x+y\rangle$ lo cual ocurre si y sólo si

$$
\begin{aligned}
&\langle T(x), T(x)\rangle + \langle T(x), T(y)\rangle + \langle T(y), T(x)\rangle + \langle T(y), T(y)\rangle \\
&\qquad = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle
\end{aligned}
$$

lo cual implica que

$$\operatorname{Re}\langle x, y\rangle = \operatorname{Re}\langle T(x), T(y)\rangle.$$

En el caso de que $F = \mathbb{R}$ habremos concluido. Si $F = \mathbb{C}$ entonces en forma análoga obtenemos que $\langle T(x+iy), T(x+iy)\rangle = \langle x+iy, x+iy\rangle$, por lo cual

$$
\begin{aligned}
&i\langle T(y), T(x)\rangle - i\langle T(x), T(y)\rangle \\
&\qquad = i\langle y, x\rangle - i\langle x, y\rangle
\end{aligned}
$$

lo cual implica que $\operatorname{Im}\langle T(x), T(y)\rangle = \operatorname{Im}\langle x, y\rangle$.

■

Por la Proposición anterior y los Teoremas A.4.5 y A.4.8 concluimos los siguientes resultados

***Corolario* A.4.12.** Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, dimensionalmente finito y con producto interior, entonces un operador T es unitario si y sólo si existe una base ortonormal de eigenvectores de dicho operador cuyos eigenvalores tienen valores absolutos iguales a 1.

***Corolario* A.4.13.** Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ dimensionalmente finito y con producto interior, de modo que un operador T es autoadjunto y ortogonal si y sólo si existe una base ortonormal de eigenvectores de T cuyos eigenvalores tienen valores absolutos iguales a 1.

Veremos un concepto más que nos ayudará a describir algunas propiedades con respecto a los operadores unitarios y ortogonales.

Definición A.4.14. Sea V un espacio vectorial sobre F dimensionalmente finito y con producto interior. Diremos que un operador T es *definido positivo (semidefinido positivo)* si es autoadjunto y para toda $x \neq 0$ en V

$$\langle T(x), x\rangle > 0 \quad (\langle T(x), x\rangle \geqslant 0).$$

Una matriz $A \in \mathfrak{gl}(d, F)$ es *definida positiva (semidefinida positiva)* si L_A, el operador definido en F^d cuya respresentación matricial con respecto a la base canónica en F^d es A, es definido positivo (semidefinido positivo).

***Proposición* A.4.15.** Sean V un espacio vectorial sobre F dimensionalmente finito y con producto interior y T un operador autoadjunto en V. Sea β una base ortonormal de V y $A = (a_{ij}) = [T]_\beta$, entonces

I. T es definido positivo (semidefinido positivo) si y sólo si todos sus valores propios son positivos (no negativos).

II. T es definido positivo si y sólo si

$$\sum_{i,j=1}^{d} A_{ij} a_j \overline{a}_i > 0 \quad \text{para cualquier} \quad (a_1, \ldots, a_d) \neq \hat{0}.$$

Análogamente se tiene que T es semidefinido positivo si y sólo si

$$\sum_{i,j=1}^{d} A_{ij} a_j \overline{a}_i \geqslant 0 \quad \text{para cualquier} \quad (a_1, \ldots, a_d) \neq \hat{0}.$$

III. T es definido positivo (semidefinido positivo) si y sólo si A es definida positiva (semidefinida positiva).

Demostración.

I. Por el Lema A.4.7 T tiene únicamente eigenvalores reales. Supongamos que T es definido positivo (semidefinido positivo), de modo que para cualquier eigenvalor λ y x eigenvector, $0 < \langle T(x), x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$, concluyendo con ello que $0 < \lambda$ $(0 \leqslant \lambda)$.

Supongamos que todos lo eigenvalores de T son positivos (no negativos). Como T es autoadjunto, existe $\beta = \{ v_1, \ldots, v_d \}$ base ortonormal de eigenvetores con eigenvalores correspondientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$.

Sea $x = \sum\limits_{i=1}^{d} a_i v_i \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle T(x), x\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{d} a_i\lambda_i v_i, \sum_{j=1}^{d} a_j v_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} \lambda_i a_i \overline{a}_j \langle v_i, v_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{d} \lambda_i |a_i|^2 > 0
\end{aligned}$$

(o bien es mayor o igual a cero si los eigenvalores son no negativos).

II. Supongamos que

$$\sum_{i,j} A_{ij} a_j \overline{a}_i > 0 \quad \text{para cualquier} \quad (a_1, \ldots, a_n) \neq \hat{0}.$$

Consideremos β como en el inciso anterior, de modo que para cualquier $x = \sum\limits_{i=1}^{d} a_i v_i \neq 0$

$$\begin{aligned}
\langle T(x), x\rangle &= \sum_{i,j=1}^{d} a_i \overline{a}_j \langle T(v_i), v_j\rangle \\
&= \sum_{i,j,l=1}^{d} A_{li} a_i \overline{a}_j \langle v_l, v_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} A_{ij} a_j \overline{a}_i > 0.
\end{aligned}$$

Supongamos que T es definido positivo. Sea $(a_1, \ldots, a_d) \neq \hat{0}$, de modo que $x = \sum\limits_{i=1}^{d} a_i v_i \neq 0$. Por ello

$$\begin{aligned}
0 < \langle T(x), x\rangle &= \sum_{i,j=1}^{d} a_i \overline{a}_j \langle T(v_i), v_j\rangle \\
&= \sum_{i,j,l=1}^{d} a_i \overline{a}_j A_{li} \langle v_l, v_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} A_{ij} a_j \overline{a}_i .
\end{aligned}$$

III. Si consideramos L_A y β la base canónica de F^d entonces por el inciso anterior L_A es definido positivo si y sólo si

$$\sum_{i,j} A_{ij} a_j \overline{a}_i > 0 \quad \text{para cualquier} \quad (a_1, \dots, a_n) \neq \hat{0},$$

lo cual ocurre si y sólo si T es definido positivo.

De ese modo T es definido positivo si y sólo si L_A es definido positivo si y sólo si A es definida positiva.

■

***Proposición* A.4.16.** Sea V F-espacio vectorial de dimensión finita d con producto interior $\langle\, , \,\rangle$. Sea T automorfismo de V, entonces

$$T = L \circ K$$

donde L es un operador definido positivo y K es un operador unitario (ortogonal si $F = \mathbb{R}$).

Demostración. Observemos que $T \circ T^* = P_0$ es autoadjunto pues $(T \circ T^*)^* = (T^*)^* \circ T^* = T \circ T^*$, por lo que todos sus eigenvalores son reales (Lema A.4.7). Más aún, si λ es un eigenvalor de P_0 y $x \in V$ es un eigenvector entonces

$$\begin{aligned}
\lambda\langle x, x\rangle &= \langle P_0(x), x\rangle \\
&= \langle T \circ T^*(x), x\rangle = \langle T^*(x), T^*(x)\rangle
\end{aligned}$$

Como $x \neq 0$ y T^* es invertible (ya que T lo es), $T^*(x) \neq 0$ y por lo tanto $\lambda > 0$. De modo que P_0 es definido positivo (Proposición A.4.15 inciso (I)). Sabemos que existe una base ortonormal $\beta = \{ v_1, \dots, v_d \}$ de eigenvectores de P_0 (Teoremas A.4.5 y A.4.8). Denotemos como $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ a sus respectivos eigenvalores y definamos el operador P que satisface que $P(v_i) = \sqrt{\lambda_i}\, v_i$, para $i \in \{ 1, \dots, d \}$. De ese modo P es definido positivo pues tiene una base ortonormal de eigenvectores y todos sus valores propios son positivos (por el Corolario

A.4.9 y la Proposición A.4.15 inciso (i)). Observemos que $P^2 = P_0$. Definamos $K = P^{-1} \circ T$ que resulta ser un automorfismo de V. Más aún,

$$\begin{aligned} K \circ K^* &= (P^{-1} \circ T) \circ (P^{-1} \circ T)^* \\ &= P^{-1} \circ T \circ T^* \circ (P^{-1})^* \\ &= P^{-1} \circ P_0 \circ (P^*)^{-1} \\ &= P^{-1} \circ P_0 \circ P^{-1} \\ &= P^{-1} \circ P^2 \circ P^{-1} \\ &= I. \end{aligned}$$

De modo que $K^* = K^{-1}$ y por lo tanto K es unitario (ortogonal si $F = \mathbb{R}$), concluyendo así el resultado.

■

***Corolario* A.4.17.** Sea $A \in Gl(d, F)$. Entonces $A = BC$ donde B es una matriz definida positiva y C una matriz unitaria (ortogonal si $F = \mathbb{R}$).

Demostración. Denotemos $A = (a_{ij})$. Consideremos la base canónica de F^d y denotémosla $\beta = \{ e_i \}_{i=1}^{d}$. Sea L_A el operador que satisface que

$$L_A(e_j) = \sum_{i=1}^{d} a_{ij} e_i$$

de manera que $[L_A]_\beta = A$ y por lo tanto L_A es un automorfismo. Por la proposición anterior existen L operador definido positivo y K unitario (ortogonal si $F = \mathbb{R}$) tales que

$$L_A = L \circ K.$$

Considerando $[L]_\beta = B$ y $[K]_\beta = C$ concluimos el resultado.

■

A.5. Medida cero en variedades

En esta parte nos limitaremos a exhibir los resultados básicos que emplearemos al mostrar la versión débil del Teorema de Sard para variedades, que asegura que la imagen de una función suave, cuyo dominio es una variedad que tiene dimensión menor a la del codominio, tiene *medida cero* en este último (y como consecuencia es de interior vacío). El concepto de medida cero para variedades arbitrarias es definido a partir del de medida cero en espacios euclidianos, el cual será precisado a continuación.

Sean $a = (a_1, \ldots, a_d)$, $b = (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{R}^d$, tales que $a_i < b_i$, para toda $i \in \{ 1, \ldots, d \}$. Diremos que el *sólido rectangular formado por* a *y* b es el conjunto de puntos $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ denotado como $S(a,b)$, que satisface que $a_i < x_i < b_i$. Si $b_1 - a_1 = \ldots = b_d - a_d$, $S(a,b)$ será llamado *cubo*.

Además entenderemos como el *volumen del sólido* $S(a,b)$ el producto

$$\prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i)$$

y lo denotaremos como $\mathrm{vol}\,(S(a,b))$.

Definición A.5.1. (Medida cero). Decimos que $A \subseteq \mathbb{R}^d$ es un *conjunto de medida cero en* $\mathbb{R}^d$ si para cualquier $\epsilon > 0$ existe una sucesión de sólidos rectangulares $S_1, S_2, \ldots$ cuya unión cubre a A y $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(S_i) < \epsilon$.

Observaciones A.5.2. Enseguida se mencionan propiedades generales con respecto a las definiciones previas

I. La definición anterior es equivalente a que exista una sucesión de cubos $S_1, S_2, \ldots$ cuya unión cubre a A y $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(S_i) < \epsilon$.

II. Si $A \subseteq \mathbb{R}^d$ es un conjunto de medida cero en $\mathbb{R}^d$, cualquier subconjunto de A también lo es.

III. La unión numerable de suconjuntos de medida cero en $\mathbb{R}^d$ vuelve a ser de medida cero en $\mathbb{R}$.

IV. Considerando $\mathbb{R}^d$ como subconjunto de $\mathbb{R}^{d+1}$ de la forma usual, resulta ser de medida cero. Esto se puede ver en la siguiente forma: si K es un subconjunto compacto en $\mathbb{R}^d$ existe un cubo S contenido en $\mathbb{R}^d$ formado por intervalos de longitud D y el cual contiene a K. Por lo que dado $\epsilon > 0$, el cubo $\widetilde{S} = S \times (-\frac{\epsilon}{3D^d}, \frac{\epsilon}{3D^d})\,\mathbb{R}^{d+1}$ contiene a K como subconjunto de $\mathbb{R}^{d+1}$ y $\mathrm{vol}\,(\widetilde{S}) < \epsilon$, concluyendo así que K es de medida cero en $\mathbb{R}^{d+1}$. Ya que $\mathbb{R}^d$ es cubierto por una cantidad numerable de compactos se sigue que es de medida cero en $\mathbb{R}^{d+1}$.

   Por inducción se sigue que $\mathbb{R}^d$ es un subconjunto de medida cero en $\mathbb{R}^k$, cuando $d < k$.

V. Si U es un subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{R}^d$ entonces no resulta un conjunto de medida cero en $\mathbb{R}^d$. Para verificarlo supongamos que es de medida cero. Como no es vacío, existen $x_0 \in U$ y $\epsilon > 0$ de tal manera que un hay un cubo S formado por intervalos de longitud ϵ, cuya cerradura está contenida en U y que es una vecindad de x_0. Sea $S_1, S_2, \ldots$ sucesión de cubos cuya unión cubre a U y que satisfacen que $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}\,(S_i) < \epsilon^d$. Sean $S_{i_1}, \ldots, S_{in}$ cubos cuya unión cubre a $\overline{S}$ (que es compacto), de tal forma que

$$\epsilon^d = \mathrm{vol}\,(S) \leqslant \sum_{l=1}^{n} \mathrm{vol}\,(S_{i_l}) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}\,(S_i) < \epsilon^d$$

lo cual es una contradicción. De modo que U no tiene medida cero.

Como consecuencia de ello se concluye que $\mathbb{R}^d$ no es de medida cero en sí mismo, pero sí lo es en $\mathbb{R}^k$ si $d < k$. También que el complemento de cualquier conjunto de medida cero en $\mathbb{R}^k$ tiene interior vacío (o equivalentemente, es denso en $\mathbb{R}^k$).

Algunas consecuencias del siguiente resultado serán fuertemente utilizados en la prueba del Teorema de Sard que ya hemos comentado.

***Teorema* A.5.3.** *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un subconjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ una función suave. Si $A \subseteq U$ es de medida cero en $\mathbb{R}^d$ entonces $f(A)$ es de medida cero en $\mathbb{R}^d$.*

Demostración. Sea $K_1, K_2, \ldots$ una sucesión de compactos contenidos en U cuya unión es U mismo y que satisface que para cualquier $l \in \mathbb{N}$,

$$K_l \subseteq \overset{\circ}{K}_{l+1}\,.$$

Ya que para cualquier $l \in \mathbb{N}$, $K_l \cap A$ es un conjunto de medida cero, basta verificar que $f(K_l \cap A)$ es de medida cero en $\mathbb{R}^d$ pues con ello

$$f(A) = f\left(\bigcup_{l\in\mathbb{N}} K_l \cap A\right) = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} f(K_l \cap A)$$

sería una unión numerable de conjuntos de medida cero, con lo cual concluiríamos.

Sean $l \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$. Como f es suave (en particular de clase C^1), es de Lipschitz en compactos. Por ello existe $M_{l+1} > 0$ de tal modo que para cualesquiera $x, y \in K_{l+1}$, $|f(x) - f(y)| < M_{l+1}|x - y|$. Ya que $K_l \cap A$ es subconjunto del interior de K_{l+1}, existe una sucesión de cubos $S_1, S_2, \ldots$ contenidos en K_{l+1} cuya unión es $K_l \cap A$ y para la cual $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(S_i) < \frac{\epsilon}{M'_{l+1}}$, donde $M'_{l+1} = 2^d d^d M_{l+1}^d$.

Denotando la longitud de los intervalos que forman a S_i como $D(i)$, consideremos $s_i \in S_i$ y el cubo centrado en $f(s_i)$ formados por intervalos de longitud $2dM_{l+1}D(i)$, es decir, si $s_i = (c_1, \ldots, c_d))$ dicho cubo resulta ser el sólido rectangular generado por los puntos

$$\begin{aligned} a &= (c_1 - dM_{l+1}D(i), \ldots, c_d - dM_{l+1}D(i)) \quad \text{y} \\ b &= (c_1 + dM_{l+1}D(i), \ldots, c_d + dM_{l+1}D(i)\,)\,. \end{aligned}$$

Denotemos a dicho cubo como $S_i(f(s_i))$ y observemos que para cualquier $s \in S_i$, $|f(s_i) - f(s)| < M_{l+1}|s_i - s| \leqslant M_{l+1}\sqrt{dD(i)^2} \leqslant dM_{l+1}D(i)$; ya que la bola de radio $dM_{l+1}D(i)$ alrededor de $f(s_i)$ se queda contenida en $S_i(f(s_i))$, se tiene que $f(S_i) \subseteq S_i(f(s_i))$. De esa forma

$$f(K_l \cap A) \subseteq f\Bigg(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i\Bigg) \subseteq \bigcup_{l\in\mathbb{N}} S_i(f(s_i))\,.$$

Además

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(S_i(f(i))) = \sum_{i=1}^{\infty} M'_{l+1}\mathrm{vol}\,(S_i) < \epsilon\,.$$

De ahí que $f(K_l \cap A)$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^d$.

■

***Proposición* A.5.4.** Sea $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un subconjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ una función suave. Si $d < k$ entonces $f(U)$ es de medida cero en $\mathbb{R}^k$.

Demostración. Consideremos $U\times R^{k-d}$, subconjunto abierto de $\mathbb{R}^k$. Denotemos $\widetilde{U} = \{\,(x,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^k \,:\, x \in U\,\}$. Por las observaciones de A.5.2 incisos II y IV, $\widetilde{U}$ es un subconjunto de $U \times \mathbb{R}^{k-d}$ que tiene medida cero en $\mathbb{R}^k$.

Sea $F : U \times \mathbb{R}^{k-d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ la función suave definida como $F(x, y) = f(x)$. Por la Proposición anterior, $F(\widetilde{U}) = f(U)$ es de medida cero en $\mathbb{R}^k$.

■

Observación A.5.5. Un Corolario de la Proposición anterior es que dado $U \subseteq \mathbb{R}^d$ subconjunto abierto de $\mathbb{R}^d$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ una función suave, si $d < k$ entonces $f(U)$ tiene interior vacío, o equivalentemente que $\mathbb{R}^k \setminus f(U)$ es denso en $\mathbb{R}^k$ (observación A.5.2 inciso V).

Ahora definiremos la noción de medida cero en variedades diferenciales, que como consecuencia del Teorema A.5.3, es una generalización del concepto de medida cero en espacios euclidianos.

Definición A.5.6. (Medida cero en variedades). Consideremos M una variedad diferenciable de dimensión k. Diremos que $O \subseteq M$ es un *conjunto de medida cero en* M si dado cualquier sistema coordenado (U,φ) en M, el conjunto $\varphi(U \cap O)$ es de medida cero en $\mathbb{R}^k$.

Observaciones A.5.7. Si V es un subconjunto de medida cero en una variedad M^d, cualquier V' subconjunto de V es de medida cero en M ya que dado (U,φ) sistema coordenado de M, $\varphi(U \cap V') \subseteq \varphi(U \cap V)$.

Además, considerando $\{\,V_i\,\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de medida cero en M, su unión resulta ser de medida cero pues $\varphi(\cup_{i\in\mathbb{N}}V_i) \cap U) = \cup_{i\in\mathbb{N}}\,\varphi(V_i \cap U)$ es una unión numerable de conjuntos de medida cero en $\mathbb{R}^k$.

Teorema* A.5.8. *(versión débil del Teorema de Sard para variedades diferenciables) *Sean M^d y N^k variedades diferenciables y $f : M \longrightarrow N$ una función suave. Si $d < k$ entonces $f(M)$ es de medida cero en N.*

Demostración. Dado que M es segundo numerable existe un conjunto numerable de sistemas coordenados $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ de tal forma que cubren a M. Observemos que es suficiente mostrar que para cualquier $i\in\mathbb{N}$, $f(U_i)$ tiene medida cero en N, pues en tal caso

$$f(M)=f\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}U_i\right)=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}f(U_i)$$

sería la unión numerable de conjuntos de medida cero en M.

Sean $i\in\mathbb{N}$ y (V,ψ) un sistema coordenado de N. Como

$$\psi\circ f\circ\varphi_i^{-1}:\varphi_i(U_i\cap f^{-1}(V))\longrightarrow\mathbb{R}^k$$

es una función suave y $\varphi_i(U_i\cap f^{-1}(V))$ es un abierto en $\mathbb{R}^d$, se sigue de la Proposición A.5.4 que

$$\psi\circ f\circ\varphi_i^{-1}(\varphi_i(U_i\cap f^{-1}(V)))=\psi(f(U_i\cap f^{-1}(V)))=\psi(f(U_i)\cap V)$$

es de medida cero en $\mathbb{R}^k$, con lo cual se concluye que $f(U_i)$ es un subconjunto de medida cero en $\mathbb{R}^k$. ■

Observación A.5.9. Dadas una variedad M^d y O un subconjunto de medida cero de M, dicho conjunto tiene interior vacío. De lo contrario exitiría (U,φ) sistema coordenado de M que satisface que U es un subconjunto no vacío de O. Como $\varphi(U)$ es un subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{R}^d$, no es de medida cero y por consecuencia U no es de medida cero, contradiciendo el hecho de que está contenido en O, el cual es de medida cero. De esa forma, al igual que con la Proposición A.5.4, se tiene un Corolario del Teorema anterior: sean M^d y N^k variedades diferenciables y $f:M\longrightarrow N$ una función suave. Si $d<k$ entonces $f(M)$ tiene interior vacío (o equivalentemente, su complemento es denso en M).

***Corolario* A.5.10.** Sean M^d y N^k variedades diferenciables y $f:M\longrightarrow N$ una función biyectiva. Si f es una inmersión (es decir, es suave y para cada $m\in M$, df_m es inyectiva) entonces es un difeomorfismo.

Demostración. Por el Teorema de la función inversa basta mostrar que $d=k$, ya que de ese modo la función resultará un difeomorfismo local y por ser biyectiva su inversa será suave. De suponer que las dimensiones no son iguales, se tiene que $d<k$ pues f es una inmersión. Por el Teorema A.5.8, $f(M)=N$ es de medida cero en N, lo cual no es posible pues N es un subconjunto abierto de sí mismo (observación A.5.9). Por lo tanto las dimensiones son iguales. ■

Bibliografía

[G-P] Guillemin, Victor. Pollack, Alan. *Topología Diferencial*. Sociedad Matemática Mexicana. México, 2003.

[Hurewicz] Hurewicz, W. *Lectures on Ordinary Differential Equations*. John Wiley and Sons, Inc. New York, 1958.

[Jacobson] Jacobson, Nathan. *Lie Algebras*. Dover Publications, Inc. New York, 1962.

[Lundell] Lundell, Albert T. *A Short Proof of the Frobenius Theorem*. American Mathematical Society, Vol. 116, Núm.4. Diciembre, 1992, pp. 1131-1133.

[M-Z] Montgomery, D. y L. Zippin. *Topological Transformation Groups*. Intersciencie. New York, 1955.

[O'Neill] O'Neill, Barret. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press, Inc. New York, 1983, pp. 23.

[Prieto] Prieto, C. *Topología básica*. Fondo de Cultura Económica. México, 2003.

[Rotman2] Rotman, Joseph J. *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall, 2003.

[Rotman1] Rotman, Joseph J. *The Theory of Groups*. Allyn and Bacon, Inc. Boston, 1973.

[Simmons] Simmons, Georg F. *Introduction to Topology and Modern Analysis*. Robert E. Krieger Publishing Company, Inc. 1983.

[Spanier] Spanier, Edwin H. *Algebraic Topology*, Springer-Verlag. New York, 1966.

[Warner] Warner, Frank W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag. New York, 1983.