UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FRACCIONANDO FRACCIONES:
UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS OPERACIONES CON FRACCIONES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A :

MARITZA PESCADOR RIVERA

TUTORA

MAT. CONCEPCIÓN RUÍZ RUÍZ-FUNES

2009

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Hoja de Datos del Jurado

1.- Datos del alumno
Maritza
Pescador
Rivera
58 32 08 75
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
095543219

2.- Datos del Tutor
Mat
Concepción
Ruíz
Ruíz-Funes

3.- Datos del sinodal 1
Dra
María de la Paz
Álvarez
Scherer

4.- Datos del sinodal 2
Mat
Laura
Pastrana
Ramírez

5.- Datos del sinodal 3
Mat
Sara Alejandra
Pando
Figueroa

6.- Datos del sinodal 4
M en C
Leobardo
Fernández
Román

7.- Datos del trabajo escrito
Fraccionando fracciones:
una propuesta para la enseñanza de las operaciones con fracciones
111 p
2009

Dedicado:

A mis padres,
por haberme dado la vida, por sus cuidados y enseñanzas.

A mis hermanas,
que son parte importante de mi vida.

A mis sobrinos,
que han dado maravillosos momentos y grandiosos
aprendizajes a mi persona.

A Francisco,
por su compañía y por su valioso apoyo.

A mis amig@s,
por el tiempo que me han dedicado y
por los extraordinarios momentos compartidos.

Con mucho cariño
Maritza

Agradecimientos

Especialmente a Conchita,

por el tiempo que dedicó para que este trabajo se concluyera, por sus enseñanzas

y por ser una excelente persona.

A mis sinodales,

por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo.

A Jorge G. Hirsch,

por impulsarme a alcanzar este logro.

Infinitamente agradecida

Maritza

I N D I C E

INTRODUCCIÓN

He decidido escribir este trabajo, dirigido a profesores de educación básica, con el objetivo de proponer una visión alternativa de la enseñanza de los números racionales. La propuesta fundamental es que en la enseñanza de este tema se prepondere el desarrollo del pensamiento matemático sobre la ejecución de técnicas aritméticas.

Este planteamiento responde a un marco teórico generado por investigadores en países como España, Brasil, Inglaterra y Francia; su eje central es enfatizar la importancia de la enseñanza de las matemáticas en el desarrollo del pensamiento lógico y el pensamiento crítico en los niños.

El tema de la enseñanza de los números racionales es uno de los más controvertidos a nivel de educación básica debido a los retos que propone a los profesores y a las enormes dificultades que supone para los estudiantes.

Además del planteamiento teórico, el trabajo contiene una serie de actividades conceptualizadas, diseñadas y desarrolladas de acuerdo a los principios planteados en el marco teórico. Dichas actividades podrán ser aplicadas por los profesores en el aula.

Este trabajo está conformado por los siguientes capítulos:

En el primer capítulo se presenta un compendio de lo que ha sido la investigación del proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas. Se hace una revisión breve de las distintas facetas y los distintos elementos que lo componen, además de una reflexión acerca de cómo se lleva a cabo dicho proceso.

De acuerdo con la teoría psicogenética de Jean Piaget, el desarrollo del pensamiento en los niños transita por diferentes etapas. En cada una de ellas, diversos factores influyen de manera decisiva; todo lo anterior es presentado en el segundo capítulo.

En el tercer capítulo se presenta la definición de fracción y las diversas interpretaciones que se le pueden dar. Además, se sugieren actividades que favorecen los primeros contactos de los niños con el concepto de fracción, esto mediante la división en partes iguales de unidades de diferentes tipos. Dichas actividades retoman aspectos de la teoría de Jean Piaget descrita en el capítulo anterior.

Con base en la experiencia de los niños para partir o dividir unidades en partes iguales y tomar algunas de ellas para formar fracciones, en el cuarto capítulo se propone partir fracciones del mismo modo que se hizo con las unidades, para posteriormente tomar alguna fracción de esas fracciones.
La actividad de partir fracciones se propone como apoyo para la introducción de suma, resta y multiplicación de fracciones en general, así como para la introducción del concepto de fracciones equivalentes. Todo lo anterior se efectúa apoyándose en representaciones gráficas.

Capítulo 1. ALGUNAS CONSIDERACIONES EN TORNO A LA PROBLEMÁTICA EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

¿De qué depende que un estudiante disfrute las matemáticas y otro, en cambio, las odie?
¿De qué depende que existan adultos que sientan verdadero placer al hacer o estudiar matemáticas y que haya otros, tanto o más inteligentes, que las aborrezcan y quieran estar lo más alejados de ellas?
¿Qué carencias tienen los sistemas educativos del mundo, y en particular el de nuestro país, en el área de matemáticas que hace que aproximadamente 30 de cada 100 niños en a nivel primaria, secundaria y bachillerato reprueben matemáticas?
¿Por qué son las matemáticas la asignatura que más miedo, angustia, bloqueo y frustración provocan?

Obtener respuesta a éstas y a otras preguntas no es en absoluto sencillo. Sin embargo, aunque no existan respuestas precisas para todas estas interrogantes no pueden dejarse de lado. Considero que es importante detenerse un momento a analizar la problemática tan compleja que existe en el proceso de enseñanza–aprendizaje de las matemáticas, por lo que he desarrollado este primer capítulo.
A lo largo de los años, son muchos los pedagogos, psicólogos y matemáticos que han intentado y siguen intentando contestar a estas interrogantes, obteniendo diversos resultados. Aquí esbozaremos algunos de los factores que influyen de manera significativa en la problemática existente en el proceso de enseñanza–aprendizaje de las matemáticas a nivel primaria.

Ha sido común que el proceso de enseñanza de las matemáticas sea visto como trasmisión de conocimiento ya construido, en contraposición existe otra visión en la que se considera este mismo proceso como una herramienta que ayuda a la adquisición y construcción del conocimiento. La existencia de estas posturas ha generado una línea de investigación que intenta adoptar la perspectiva del que aprende, es decir, comprender y manejar las concepciones erradas que pueden preceder o ser el resultado del proceso de enseñanza; asimismo da una mayor atención a las diversas fuerzas al interior y al exterior del salón de clases en un intento por comprender por qué las matemáticas producen tanta aversión y fracaso escolar.

Con el desarrollo de los sistemas de educación, cada país se enfrenta al reto de modificar la currícula de matemáticas de tal forma que se ofrezcan oportunidades iguales para todos los estudiantes. La currícula de matemáticas se puede ver por lo menos desde tres perspectivas: la currícula propuesta por las autoridades escolares, la currícula implantada por el profesor, pues es real que de acuerdo a la experiencia con los alumnos el profesor dosifica los temas a tratar, y la currícula aprendida por los estudiantes. Las diferencias entre estos puntos de vista han dado mucho material de trabajo a la investigación sobre el proceso de enseñanza–aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, se ha dado gran atención a la visión que tiene el estudiante de lo que aprende, debido a la marcada necesidad de lograr un aprendizaje que sea más una construcción de significados que una recepción de información. A ese respecto, el rumbo que debe tomar la enseñanza de las matemáticas es un punto central de la investigación y de la teoría de la educación matemática; teniendo actualmente una propuesta concreta: desarrollar el proceso de enseñanza–aprendizaje de las matemáticas entendiéndolas como una forma de pensar y no de hacer, es decir, enfatizar el desarrollo del pensamiento lógico más que el desarrollo de una habilidad mecánica para la resolución de problemas.

En ese sentido, los investigadores del proceso de aprendizaje se preocupan cada vez menos por una atención exclusiva hacia las respuestas correctas o incorrectas y, en cambio, se interesan cada vez más por los procesos y estrategias para obtener esas respuestas.
En este aspecto, decidir qué tipo de conocimientos deben tener los profesores y cómo deben combinarlos con sus conocimientos pedagógicos es causa de intensos debates entre los investigadores, sin embargo, aunque éstos no pueden decidir sobre estos puntos, pueden profundizar en la comprensión de cómo los profesores manejan su conocimiento en la enseñanza.

Si bien en un principio la investigación sobre el proceso de enseñanza–aprendizaje de las matemáticas se centró en buscar estrategias para la enseñanza del álgebra, la geometría, la probabilidad y el cálculo, hoy en día un tema bastante atrayente para los investigadores lo constituyen las actitudes y las creencias de los estudiantes hacia las matemáticas.

La atención de los investigadores y de los diseñadores de tecnología computacional se ha enfocado también en el desarrollo de programas de computadora para la enseñanza de las matemáticas. En la actualidad son muchas las personas que se muestran entusiastas con la idea de llegar a transformar la enseñanza con la ayuda de la tecnología, sin duda esto puede ayudar a los estudiantes a investigar sobre temas tradicionales de maneras nuevas y a explorar nuevos temas; sin embargo, es necesaria la guía del profesor para adaptar estas herramientas a las condiciones del contexto en que se trabaja. Y aunque se ha diseñado software con la intención de lograr la mejora de la enseñanza, esto no ha sido posible por diversos factores, entre los que destacan están que el software no ha alcanzado el objetivo para el cual fue creado y que no ha sido posible introducir dicha tecnología en la mayoría de las instituciones de educación básica y media de nuestro país.

Uno de los cambios más sorprendentes en las investigaciones del proceso de enseñanza–aprendizaje de las matemáticas, ha sido el giro que éstas han tomado en el sentido de que el contexto social, en el cual tiene lugar la educación, se ha convertido en un parámetro indispensable para el entendimiento cabal de la problemática en torno a los procesos de enseñanza. Las matemáticas que se enseñan están determinadas socialmente, pues los profesores y los estudiantes son miembros de varios y diversos grupos sociales, lo que influye en el proceso de enseñanza–aprendizaje que a su vez es un proceso social.

Los profesionales interesados en entender el proceso del desarrollo del pensamiento han estudiado el tema de la construcción social del conocimiento durante la enseñanza de las matemáticas y este tema está comenzando a ser estudiado intensamente por parte de los educadores matemáticos. La investigación del proceso de enseñanza–aprendizaje de las matemáticas se ha convertido en los últimos años en una de las áreas más activas de los estudios en educación, en parte por el papel crucial que las matemáticas juegan en el proceso educativo como un tema esencial para el aprendizaje posterior y la vida adulta, pero que a la vez presenta grandes dificultades para los estudiantes. Un número creciente de investigadores, en un número también creciente de países, se encuentra estudiando el proceso de enseñanza–aprendizaje de las matemáticas con el propósito tanto de comprenderlo como de mejorarlo.

A lo largo de la historia, los seres humanos han tenido diversas necesidades como medir, agrupar o repartir, por mencionar algunas, y han tenido también que pensar en formas de resolverlas. Las matemáticas se desarrollan como solución a algunas de esas necesidades, sin embargo esas soluciones no son las mismas en todos lados; se puede encontrar que en distintas culturas se tienen diferentes formas de solucionar un mismo problema, pero a pesar de esto podemos hallar actividades universales dentro del desarrollo de las matemáticas, actividades que se dan en todas las culturas.

Algunos ejemplos de estas actividades son:

- Contar, actividad que está firmemente relacionada con las necesidades vinculadas con el entorno como la repartición de bienes, el comercio, la propiedad, etcétera.
- Dibujar, diseñar pueden considerarse también como una actividad universal, pues de diferentes culturas se tienen pruebas de que han utilizado esta actividad para representar, por ejemplo, la naturaleza o para abstraer una forma de su entorno.
- Medir, la medición que surgió para resolver la necesidad de tener escalas de comparación para solucionar problemas de distancias, extensión de superficies, volúmenes, etcétera.

Haciendo una investigación más profunda pueden encontrarse más ejemplos de similitudes matemáticas, pero sin importar cuántas de estas actividades podamos enlistar, lo cierto es que están fuertemente relacionadas con los valores sociales de cada grupo. Entonces al compartirlas, se está transmitiendo cultura, pues dichas actividades están determinadas socialmente, es entonces la enseñanza de las matemáticas una forma de cultura: enculturación matemática[I].

En los últimos años las matemáticas han adquirido una mayor importancia en la sociedad en general. Vivimos en un entorno tecnológico que está en un cambio constante y que depende cada vez más del conocimiento y la comprensión de las matemáticas. Este hecho es el que lleva a los padres de familia, los profesores y la sociedad en general a considerar las matemáticas una de las materias más importantes en la currícula escolar.

(I) Para profundizar en este tema ver: Bishop, Alan J. *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural* Ediciones Paidós Iberica, S.A. 1999.

En la actualidad, la metodología de enseñanza que ha sido la más difundida a nivel mundial es la llamada metodología tradicional. Esta metodología se centra en la transmisión de un conjunto de verdades aceptadas e inmutables, por parte del profesor, lo que lo convierte en un transmisor de la verdad y, por consiguiente, el papel del estudiante es ser un receptor de esta verdad, que debe lograr la adecuada reproducción de ésta. A pesar de ser ésta la metodología de enseñanza más difundida, también es la más criticada, pues representa el camino de menor esfuerzo para el profesor y también para el estudiante. Con respecto al profesor, de acuerdo con esta metodología, lo único que se le pide es que conozca su tema y sepa medianamente comunicarse. El profesor no tiene que preocuparse conscientemente de si el estudiante entiende lo que está escuchando.

Por su lado el estudiante se encuentra en una situación pasiva en la cual le basta con escuchar y memorizar. En muchas ocasiones la actitud del estudiante es aún más pasiva, pues su única preocupación es tomar notas, por lo tanto no tiene la oportunidad de reflexionar si está entendiendo o no lo que escucha. Pero además de lo que se ha hecho notar hasta ahora, la metodología de enseñanza tradicional presenta otras deficiencias, las cuales serán analizadas aquí desde la perspectiva de la enseñanza de las matemáticas.

La sociedad ha creado la necesidad de una “sólida” preparación matemática, teniendo por seguro que la persona que cuente con ella tendrá un futuro exitoso, y a pesar de haber creado esta necesidad no ha podido satisfacerla. Con el fin de alcanzar esa “sólida” preparación en matemáticas se ha diseñado una currícula dedicada al desarrollo de técnicas, en la que se procura que los alumnos aprendan métodos, procedimientos y técnicas que con la práctica continua los lleven a las respuestas correctas. Aunque dentro de una currícula así es necesario que el estudiante sepa pensar, es un pensamiento limitado relacionado con la adopción del procedimiento adecuado para la resolución de un problema particular, en consecuencia, si se le planteara otro problema que tenga una mínima diferencia con el anterior seguramente no sabría resolverlo, ya que en el proceso de pensamiento limitado que llevó a cabo anteriormente, difícilmente hubo alguna reflexión o un razonamiento. Esto trae como consecuencia que las matemáticas tengan la imagen de una materia en la que se efectúan pasos mecánicamente, cuando realmente es una materia en la que se construye una manera de conocer, deducir y razonar. Con una currícula de este tipo no se puede ayudar al estudiante a comprender, ni a desarrollar significados y menos capacitarlo para que adopte una postura crítica dentro y fuera de las matemáticas; a lo que se llega es a que el estudiante adquiera técnicas para hacer lo que ya hacen las computadoras. En conclusión, de esta manera no se está educando al alumno, sólo se le instruye y se le adiestra: se le convierte en una persona “matemáticamente eficiente”.

Existirán estudiantes a los que este método les funcione para pasar un examen u obtener una buena calificación en su tarea, pero para la mayoría de ellos la situación es diferente, para ellos este método, a la larga, se convierte en un medio de discriminación. Constantemente se sabe de individuos que rechazan las matemáticas, les temen, les desagradan y que si continúan estudiándolas recurren a métodos de memorización para abordar las exigencias que se les plantean y aunque no ponen en duda la importancia de las matemáticas, les es poco menos que imposible deshacerse de la idea de que son difíciles y que les causan sentimientos de temor, angustia, frustración y sufrimiento. El hecho de que los estudiantes tengan algún sentir con respecto a las matemáticas, debe procurarse que sea un sentimiento de intriga por encontrar la respuesta a la pregunta con la que se enfrenta y tener el ansia de emplear su intuición para generar una solución personal, los profesores son quienes deben guiar la discusión para que, a partir de esa materia prima, lleven al estudiante a encontrar una respuesta satisfactoria, después de todo la inteligencia no es algo con lo que se nace, ni que permanezca constante toda la vida, todo ser humano nace con una potencialidad para el desarrollo intelectual, es el medio el que limita o desarrolla esta potencialidad.

En este contexto, si la enseñanza de las matemáticas trata de ayudar a las personas a tener un mejor futuro y a relacionarse mejor con su entorno social, no cumple del todo con su objetivo.

Todo ciudadano, profesionista o no, incluye en su quehacer cotidiano elementos matemáticos, inmersos en la información que maneja. Ello hace de las matemáticas una segunda lengua, la más universal, mediante la cual se logran la comunicación y el entendimiento técnico y científico del acontecer mundial.

Ante estas condiciones, el aprendizaje de las matemáticas se ha convertido en uno de los objetivos principales de la docencia moderna, por lo que se requiere de una adecuada preparación por parte de los profesores para la construcción y selección de estrategias idóneas para la enseñanza de los contenidos, de acuerdo a las características de los alumnos y pensando en las necesidades científico–tecnológicas presentes y futuras de cada sociedad. Por lo anterior, es permitido pensar en la educación como una cuestión social, de enculturación matemática que articula la tarea del docente en el aula y en la institución educativa.
En este sentido del proceso de enseñanza–aprendizaje de las matemáticas se espera lo siguiente:

- En el ámbito social se exige que la educación desde las matemáticas, recupere las expectativas y necesidades que demanda la sociedad, proporcionado al estudiante las herramientas que le permitan adquirir una noción profunda del mundo físico y social, la capacidad de análisis y de crítica de su entorno y las herramientas necesarias para insertarse en el mundo laboral.

- En el ámbito institucional es necesario superar la visión de una matemática cerrada, inamovible, una disciplina para unos cuantos, mito que el sistema educativo utiliza como un medio de selección. Se debe lograr que el estudiante vea en las matemáticas un saber creado por el ser humano para el ser humano, una herramienta que le permitirá desenvolverse en todos los ámbitos de la vida cotidiana y científico–tecnológica.
- En el ámbito docente se requiere recuperar el carácter constructivo de las matemáticas y su dimensión histórica para reconocerle la importancia que ésta ha tenido y tiene en todos los aspectos de nuestra vida. Debe asegurarse que todos los alumnos tengan oportunidad de desarrollarse para cubrir sus necesidades matemáticas para desenvolverse en todos los ámbitos actuales y futuros.

La enseñanza basada en textos

La mayoría de los sistemas educativos en el mundo están regidos por libros de texto y la enseñanza de las matemáticas no es la excepción. Existe una gran cantidad de libros de texto de matemáticas de “apoyo” para profesores que son elaborados por personas dedicadas por completo a hacer matemáticas, personas que desde su nivel eligen lo que deben aprender los niños. Sin embargo, y sin ánimo de demeritar el trabajo de los profesionales, en un programa escolar basado en las expectativas de los expertos no siempre se cumplen los objetivos, pues tal vez ellos no tengan la experiencia de enseñar frente a grupo los contenidos sugeridos y por lo tanto no conozcan las dificultades que para los alumnos representan estos contenidos, que pueden ser causa de deserción escolar.

La responsabilidad de lo que aprendan o no los niños recae, la mayoría de las veces, directamente en los profesores, sin tomar en cuenta que éstos no son libres de construir la secuencia de sus clases, pues están limitados y presionados por un programa escolar y por los libros de texto que prácticamente les dictan lo que deben enseñar. Dada la responsabilidad que recae en los profesores, sería razonable que se les diera la libertad de usar e idear materiales que los auxiliaran en su labor de enseñanza.

Los libros de texto contienen ciertas pautas que los profesores se inclinan por seguir muy de cerca. El profesor tiende a reproducir el esquema propuesto en el libro de texto. Dentro de este esquema, el estudiante no es capaz de crear un espacio propio que le permita distinguir y relacionar los conceptos, los procesos, los resultados, los ejemplos y los ejercicios. Por lo tanto, le es imposible construir estructuras que le permitan comprender los temas y, dado que el proceso se centra alrededor de los contenidos, de la transmisión y reproducción de los mismos, el estudiante no se ve forzado a desarrollar un pensamiento lógico que le ayude a analizar la información que está recibiendo y contrastarla o complementarla con la que ya tenía.

La creación de los programas escolares y de los libros de texto, por parte del sistema educativo, se da en función de cubrir diferentes intereses sociales y educativos, y por este medio se logra producir individuos que satisfagan esos intereses. Aunque esto se realiza con la intención de hacer eficiente la educación, se cae en el control de la enseñanza y en la producción de usuarios de las técnicas matemáticas. Si partimos de la premisa de que la educación es un proceso social, entonces es evidente que la educación matemática también lo es.

De acuerdo con Alan Bishop[2] en este proceso de enculturación matemática destacan cinco niveles:

Nivel Cultural.- Las ideas, costumbres y sobre todo las necesidades que tenga cada sociedad influirán en el tipo y grado de desarrollo de la matemática que se enseñe a las nuevas generaciones y la manera en cómo esto se lleve a cabo. Un ejemplo sencillo de los diferentes grados de desarrollo de las matemáticas, dependiendo de las necesidades de cada sociedad, es cuando por diversas razones se necesita tener el conteo de objetos importantes. El desarrollo de la precisión en el conteo y las mediciones está determinado por las condiciones intrínsecas de ésta.

Nivel Social.- Este apartado se refiere a aspectos sociales de grupo; cada sociedad cuenta con sus propias instituciones educativas y las utiliza para dar forma a los programas escolares basándose en sus aspiraciones y metas sociales.

Nivel Institucional.- En este nivel se consideran las influencias intrainstitucionales que determinan aún más la educación matemática de los niños. Además de estas influencias, también son relevantes la estructura interna, la política de las instituciones y la importancia de las matemáticas en el programa escolar. Cada institución planea su programa escolar en función de los puntos débiles, puntos fuertes, limitaciones y recursos de su personal.

Nivel Pedagógico.- En este nivel las influencias sociales son conocidas y en consecuencia fáciles de identificar: el profesor y el resto del grupo. Con la realización de actividades y la interacción con el profesor y los demás alumnos, el estudiante va adquiriendo maneras de pensar, de comportarse, de sentir y de influir en el comportamiento de los demás. Y adquiere valores determinados por la sociedad y las instituciones educativas.

Nivel Individual.- En este nivel es importante destacar el papel que desempeña el estudiante en el proceso educativo. El estudiante no es un recipiente vacío en espera de que lo llene el profesor, éste puede transmitir el mismo mensaje o enseñanza a cientos de estudiantes; sin embargo, lo que perciban y conserven de este mensaje será diferente en cada uno de ellos. Tendrá un significado distinto para cada uno dependiendo de su entorno familiar, cultural, social, etcétera. Esto es, toda comunicación está influida por la personalidad de los participantes, se puede concluir entonces, que cada estudiante tiene una experiencia educativa matemática individual.

Aprendizaje generalizado y la relación profesor-estudiantes

Como ya se mencionó anteriormente, la metodología tradicional de enseñanza es la más utilizada actualmente, y su característica principal es que en las aulas las clases se imparten de manera unidireccional, es decir, la comunicación se da únicamente del profesor al alumno, sin tomar en cuenta las opiniones, interpretaciones personales e inquietudes de los alumnos. En un ambiente así, en raras ocasiones se puede conocer a la persona que está al frente y a los que componen al grupo, dando por sentado que todos los alumnos tienen las mismas necesidades y nunca se llega a saber lo que puede, cada uno, aportar al aprendizaje de la clase.

De la situación anterior se pueden desprender muchas consecuencias, entre ellas: desinterés por parte del alumno, creencias falsas sobre el don para entender las matemáticas y el papel de verdugo que muchas veces se le asigna al profesor de matemáticas.

A los profesores que tendrán su primer encuentro con un grupo, lo que les infunde más temor es saber si podrán mantener el control de los estudiantes en su clase. La creencia de la mayoría de los profesores es que en las primeras clases se define esta situación. Bajo esta tensión los profesores tienden a pensar que la mejor manera, y tal vez la única, de mantener el control del grupo es manifestando el poder que tienen sobre sus estudiantes, el poder de regañar, expulsar o reprobar a quien lo merezca de acuerdo a su criterio. Es cierto que bajo este poder, los estudiantes le tienen cierto respeto al profesor, pero este respeto es sólo por temor a las represalias que se puedan tomar en su contra y no porque el profesor se lo haya ganado legítimamente. Es verdad que debe haber respeto de los estudiantes al profesor, pero este debe ser acrecentado de una forma honesta para que perdure y sea válido. Por ejemplo, debe provenir del reconocimiento del profesor por el compromiso que éste tenga con su labor educativa, del excelente conocimiento que tenga de su materia o del reconocimiento por parte del estudiante de la actitud del profesor como partícipe de un problema común y no como el policía que vigila el cumplimiento de unas reglas. Pero además, debe existir también respeto del profesor al estudiante, un respeto e interés por lo que tenga que opinar el estudiante de lo que está intentando aprender en clase.

En las matemáticas se tienen verdades universales, sin embargo, la forma de enseñarlas no tiene por que ser universal, sería de gran importancia que los profesores, en la medida de sus posibilidades, se involucren con sus estudiantes para saber de qué manera éstos viven su aprendizaje y de qué forma pueden hacerlo significativo para su desarrollo personal, pues no todos aprenden del mismo modo. Es necesario que cada individuo le dé un significado personal a lo que aprende, para que tenga sentido en su vida.

Involucrarse con los estudiantes también puede ayudar a los profesores a erradicar la falsa creencia de que existen personas que nacieron para las matemáticas y personas que no. El que haya personas con un mayor desarrollo de sus capacidades para aprender matemáticas y otras con un desarrollo menor de éstas puede obedecer a varias razones que van desde el ámbito emocional, motivacional o social. Tal vez en varios de estos aspectos el profesor no puede hacer nada para cambiar la actitud de sus estudiantes, sin embargo, lo que si puede hacer es contagiar su entusiasmo y su gusto por el estudio de las matemáticas, teniendo una actitud amistosa y motivante hacia el estudiante, puede borrar la creencia de que existen estudiantes que nacieron para las matemáticas y otros que no tuvieron esa misma suerte. Por otra parte, también puede borrarse la imagen que el estudiante tiene de su profesor de matemáticas, la de que el profesor es la realización física del “martirio” que el estudiante tiene que “sufrir” dentro de su curso de matemáticas. El reto es generar el espacio dentro del cual el estudiante pueda descubrir por sí mismo que las cosas pueden ser diferentes, que vale la pena intentarlo pues es posible descubrir que el aprendizaje es un acto sumamente placentero y que, como en la mayoría de las actividades que realizamos, basta un poco de esfuerzo e interés para lograrlo.

La motivación que el estudiante reciba desde el primer día de clases definirá el éxito o fracaso al final del curso y el tipo de relación que habrá entre profesor y grupo. Esta motivación debe surgir como consecuencia de la conciencia del estudiante acerca de los beneficios que el curso puede tener para él.

Desmitificar a las matemáticas es, desde mi punto de vista, la motivación más importante y necesaria para los estudiantes. Los libros de texto y la tradición pedagógica tienden a presentar productos terminados que, en realidad, fueron el resultado de un largo proceso en el que se cometieron errores y se tomaron caminos equivocados. Mostrarle a los estudiantes este proceso puede ser una manera de presentar agradablemente el proceso de descubrimiento matemático, pero aún más que eso, puede ser una manera de mostrar que quienes descubrieron los conceptos, no lo hicieron por inspiración divina, lo que desembocará en deshacerse de la idea de que las matemáticas son sólo para algunos cuantos elegidos. Presentar la historia de cómo sucedieron los procesos de creación de conceptos matemáticos y de la vida cotidiana de los personajes con los que se trabaja a diario en clase es una buena herramienta para lograr motivar a los estudiantes, pues además de que les puede resultar interesante, se pueden ubicar los conceptos unos con otros y darles un sentido que va más allá de la aplicación actual y que permite ubicarlos dentro del desarrollo general del conocimiento humano.

El proceso para cambiar la imagen que las matemáticas tienen, ha dado comienzo. Las investigaciones realizadas, y que se siguen realizando, van encaminadas a hacer del proceso de enseñanza–aprendizaje de las matemáticas algo más agradable, útil y duradero para los estudiantes, sin embargo, todavía hay mucho por hacer. Difundir lo que se ha hecho hasta ahora y hacerlo llegar a más lugares para que sean más los beneficiados, es un esfuerzo que no debe realizarse sólo en las escuelas, se debe difundir más allá, con la población en general, para terminar con la idea de que “las matemáticas son muy difíciles”, frase que parece una tradición oral que pasa de generación en generación y que, considero, es el inicio del bloqueo que sufren los estudiantes para aprender matemáticas.

Capítulo 2. EL PROCESO DE APRENDIZAJE EN LOS NIÑOS. LA PROPUESTA DE PAIGET

El aprendizaje es un proceso permanente en el ser humano, gracias al cual, día a día, obtenemos un cúmulo de conocimientos que nos permiten adaptarnos, sobrevivir, disfrutar y buscar la forma de explicar y mejorar el medio que nos rodea, sin embargo, es importante tener en cuenta que este proceso no es igual en cada momento de la vida, ni en cada persona. El aprendizaje puede ser producto de una acción laboriosa o espontánea en el acontecer cotidiano, pero también puede resultar de una acción premeditada o planeada, ante el deseo o necesidad de adquirir el tipo de conocimiento que ha de ser útil para resolver, de una mejor manera, los problemas que la vida ofrece. Sin embargo, es importante revisar cómo se llegó a considerar esta situación a través del tiempo, ya que las definiciones de aprendizaje son muchas. Ardila[1], menciona las definiciones que dan diferentes autores respecto a este tema, concibiéndolo como:

- Una tendencia a mejorar una ejecución.
- Un proceso que se manifiesta por cambios adaptativos de la conducta individual como resultado de la experiencia.
- Un cambio en la ejecución que resulta de las condiciones de la práctica.
- Un cambio relativamente permanente en la potencialidad del comportamiento que ocurre como resultado de la práctica reforzada.
- Un proceso que tiene lugar dentro del individuo y se infiere por cambios específicos en el comportamiento, los cuales poseen ciertas características determinantes.

Ardila[1] por lo anterior concluye, dando una definición que para él es probablemente la más aceptada y en acuerdo con todas estas concepciones, que: el aprendizaje es un cambio relativamente permanente del comportamiento que ocurre como resultado de la práctica.

Como consecuencia de nuevas investigaciones, hoy en día se sostiene que el aprendizaje ocurre pasando de lo general a lo específico, que los niños perciben al principio toda nueva experiencia globalmente y luego van diferenciando poco a poco los detalles, al tener más vivencias. [4].

La forma en que este proceso se va desarrollando en el ser humano, ha sido tema de estudio de gran relevancia para muchos científicos, tal es el caso del psicólogo suizo Jean Piaget, quien dirigió su atención a analizar e interpretar las fases del desarrollo humano desde la infancia hasta la etapa adulta, más que nada para describir cambios cualitativos a través del tiempo.

Pero antes de continuar con el desarrollo de este capítulo, en el que se tomará como eje principal la teoría de Piaget acerca del desarrollo cognitivo del niño y su relación con el aprendizaje, conozcamos un poco más sobre este hombre.

Jean Piaget nació el 9 de agosto de 1896 en Neuchâtel, Suiza. Murió el 16 de septiembre de 1980 en Ginebra. Fue el hijo mayor de Arthur Piaget, profesor de literatura medieval, y de Rebeca Jackson. A la edad de 11 años, mientras era estudiante de la escuela secundaria de latín, escribió un ensayo corto sobre un gorrión albino. Este ensayo es generalmente considerado como el comienzo de una brillante carrera científica compuesta de 60 libros y varios cientos de artículos.

Después de su graduación en la escuela media superior, estudió Ciencias Naturales en la Universidad de Neuchâtel, donde obtuvo un doctorado en Filosofía. Durante este periodo, publicó dos escritos, los cuales consideró como “Trabajos de adolescencia” pero que fueron importantes para la orientación general de su pensamiento.

Después de un semestre en la Universidad de Zürich, donde comenzó a interesarse por el psicoanálisis, partió de Suiza a Francia. Pasó un año trabajando en la Ecole de la rue de la Grange – aux – Belles. En 1923 se casó con Valentine Châtenay con quien tuvo tres hijos: Jacqueline, Lucienne y Laurent en quienes inicialmente se basó para estudiar y proponer una teoría sobre el desarrollo intelectual en los niños. Sucesivamente o simultáneamente, Piaget ocupó varias presidencias en distintos lugares e instituciones: Psicología, Sociología e Historia de la Ciencia en Neuchâtel de 1925 a 1929; Historia del Pensamiento Científico en Ginebra de 1929 a 1939; la Agencia Internacional de Educación de 1929 a 1967; Psicología y Sociología en Lausanne de 1938 a 1951; Sociología en Ginebra de 1939 a 1952, luego Genética y Psicología experimental de 1940 a 1971. Él fue, según consta en los registros, el único suizo en ser invitado a Sorbonne de 1952 a 1963. En 1955 creó y dirigió, hasta su muerte, el Centro Internacional de Epistemología Genética.

La obra de Piaget es conocida en todo el mundo y es todavía una base muy sólida en campos de estudio como psicología, sociología, educación y epistemología. Fue galardonado con numerosos premios y grados honoríficos por todo el mundo.

Jean Piaget tuvo dos grandes intereses: la biología y la epistemología (rama de la filosofía que tiene por objeto definir el origen del conocimiento humano), gran parte de su vida la consagró al estudio de esto último, recurriendo a la psicología para llenar la brecha entre la biología y la filosofía. En sus primeros años de investigación, Piaget trabajó con pruebas de inteligencia. Mientras realizaba test con niños, los patrones que revelaban las respuestas incorrectas empezaron a interesarle más que las respuestas correctas. Estos patrones parecen dar una pista para penetrar en la forma en que los procesos del pensamiento se desarrollan en el niño. Supuso que las diferencias entre niños y adultos **no se limitan a cuánto conocen, sino a la forma en que conocen**. Para ilustrar su teoría, Piaget realizó una gran variedad de pruebas; entre ellas la siguiente: mostró a un grupo de niños de diferentes edades dos vasos idénticos; ambos contenían la misma cantidad de líquido. Después de que los niños aceptaron que la cantidad de líquido en ambos vasos era igual, Piaget vertió el líquido de uno de los vasos en otro vaso más alto y estrecho que los primeros; luego preguntó a los niños cuánto líquido contenía el vaso más alto: ¿había mayor o menor cantidad de líquido que en el primer vaso o había la misma cantidad?, la mayor parte de los niños, cuya edad era de 6 años o más, contestaron que la cantidad era la misma. Pero los niños menores de 6 años respondieron que el vaso más alto y estrecho contenía más líquido. Aún cuando veían que el mismo líquido era vaciado de uno a otro vaso, sostenían que el vaso estrecho contenía más líquido. Este experimento ha sido ensayado con niños de muchas culturas y nacionalidades, sin que los resultados se modifiquen considerablemente. Piaget razonó que antes de llegar a cierta edad los niños forman juicios basándose más en procesos perceptuales que lógicos. En otras palabras creen en lo que les dicen sus ojos. Para los niños de corta edad, el líquido alcanzaba un nivel más alto en el interior del vaso estrecho; por tanto éste contenía mayor cantidad. En cambio los niños de 6 años o mayores apenas si se fijaban en los vasos. Sabían que la cantidad de líquido no cambiaría, independientemente del tamaño o forma del vaso que lo contuviera; a esto Piaget lo llamó principio de *conservación*. No basaban sus juicios exclusivamente en la percepción; también aplicaban la lógica. Su conocimiento provenía del interior en la misma medida que lo obtenían de fuentes externas.

Los niños adquieren sus conocimientos de la comunicación con sus semejantes, de las pláticas que llegan a tener con sus mayores, de las costumbres que les inculcan de acuerdo a su cultura, etcétera (conocimiento social). Lo adquieren también de las interacciones con los objetos de su medio ambiente tales como: tocar, frotar, apretar, etcétera (conocimiento físico), pero no sólo de estas maneras se obtiene conocimiento; los niños derivan conocimiento mediante la coordinación de las actividades físicas al manipular objetos y de las actividades mentales (conocimiento lógico-matemático), dando así origen a las ideas lógicas, las cuales no pueden ser adquiridas de ninguna de las formas de conocimiento antes mencionadas, pues no pueden ser transmitidas de boca en boca, ni emanan de los objetos por sí mismos.

De sus investigaciones con niños de diferentes edades, y de las observaciones que hizo de ellas, Piaget distinguió cuatro periodos básicos de desarrollo: periodo *sensomotriz* que abarca desde el nacimiento hasta los 2 años, periodo *preoperacional* aproximadamente de los 2 a los 6 años, periodo de *operaciones* *concretas* que comienza alrededor de los 6 años y culmina a los 12 años, y por último el periodo *de operaciones formales* que va de los 12 años en adelante. Durante cada uno de estos periodos se desarrollan habilidades cognitivas críticas indicando claramente que el niño está procesando información de una manera que previamente le era imposible. Los límites antes mencionados son una manera aproximada de delimitar los periodos, ya que puede existir variación de un niño a otro y de una tarea a otra.

Cabe mencionar que el desarrollo de los próximos capítulos de este trabajo se centrará en los niños que se encuentran en los periodos de operaciones concretas (de los 6 a los 12 años) y operaciones formales (de los 12 años en adelante), ya que la presentación del tema central y las actividades sugeridas contenidas en esta tesis van dirigidas a la población de dichas edades.

Piaget en su teoría manejó diversos conceptos, como los de acomodación, conservación, asimilación, esquema y equilibrio. Las estructuras mentales que procesan la información, las percepciones y experiencias son los llamados *esquemas*; y éstos cambian cuando el individuo crece. La *conservación*, según la describe Piaget, es esencial para el periodo de las operaciones concretas. El niño es capaz de juzgar los cambios de cantidad basándose en el pensamiento lógico y en la experiencia y no en meras apariencias. El concepto de *asimilación* se refiere al proceso de integrar nueva información en los esquemas ya existentes. Al acto de cambiar los procesos mentales cuando un nuevo objeto o idea no encaja con los conceptos preestablecidos fue denominado en esta teoría como *acomodación*. El proceso de adaptación humana, en el que las personas buscan una adecuación, entre el ambiente y sus propias estructuras de pensamiento, fue denominado *equilibrio*. Con base en estos conceptos Piaget sustentó su teoría.

Conozcamos un poco más sobre los periodos de desarrollo cognitivo, propuestos por Piaget.

Periodo sensomotriz (0 meses a 2 años)

El primer periodo de desarrollo que señala Piaget es el que él mismo denominó sensomotriz, debido a que la inteligencia del niño es sensorial y además se basa en el movimiento corporal. Durante esta etapa, los cambios más fundamentales ocurren en la estructura cognitiva. El niño pasa de realizar movimientos reflejos inconexos al comportamiento coordinado, pero aún carece de la formación de ideas o de la capacidad para operar con símbolos. Esta es una etapa de comportamiento inteligente; durante ella, el niño formula esquemas que organizan la información obtenida a través de los sentidos y que desarrollan reacciones ante los estímulos del medio ambiente. Su comportamiento es adaptable ya que está en una constante modificación de los esquemas que ha formulado sobre lo que percibe del medio ambiente y, por lo tanto, es obviamente inteligente.

Piaget propone que el desarrollo sensomotriz puede explicarse de acuerdo a seis estadios sucesivos de organización:

- Uso de reflejos (0 meses a 1 mes).- Se caracteriza por la ejercitación de los reflejos, continuación de las actividades prenatales de desarrollo.
- Reacciones circulares primarias (1 a 4 meses).- Los movimientos voluntarios reemplazan lentamente a la conducta refleja. Una reacción circular primaria alude a la asimilación de una experiencia previa y al reconocimiento del estímulo que desencadena la reacción.
- Reacciones circulares secundarias (4 a 8 meses).- Esta etapa marca el comienzo de la acción intencional, es decir, el niño empieza a interesarse por los resultados de sus acciones. Siguen presentándose nuevos patrones de comportamiento en forma accidental durante los movimientos casuales, los aprende y los repite para ver qué resultados producen.

- Coordinación de los esquemas secundarios y su aplicación a situaciones nuevas (8 a 12 meses).- Es la primera etapa de la permanencia del objeto, una conciencia de que un objeto continúa existiendo aún cuando ya no se le pueda ver. Además, esta conducta es casi una evidencia de las nuevas habilidades de la memoria del niño, ahora en un periodo de rápido desarrollo, que le permiten recordar dónde vio por última vez un objeto antes de desaparecer.
- Reacciones circulares terciarias (12 a 18 meses).- Ésta es la última de las etapas cognoscitivas que no incluyen representaciones mentales de eventos externos, o lo que se considera pensamiento, y la primera que incluye el ensayar actividades nuevas.
- Invención de medios nuevos mediante combinaciones mentales (18 meses en adelante).- Los niños pueden resolver problemas por medios mentales, esto señala un desarrollo importante en extremo: el surgimiento del simbolismo. Para el final de esta etapa, los niños son capaces de hacer predicciones mentales acerca de los posibles efectos de sus acciones sin tener que llevarlas a cabo.

Periodo preoperacional (2 años a los 6 años)

En este periodo el niño está muy influenciado por las apariencias, no logra aún manejar dos características en un objeto al mismo tiempo (*centralización)*, lo que se manifiesta a la hora de clasificar y agrupar objetos. Por ejemplo, si tiene dos barras de plastilina, de las que concluye que tienen la misma cantidad de plastilina, al hacerle transformaciones de longitud dirá que la barra que se haya alargado más tiene mayor cantidad de plastilina, a pesar de haber visto que no se agregó más, al no poder regresar mentalmente a la forma original de la barra (*irreversibilidad)* sólo se centran en el producto final. Sin embargo, para finales de este periodo el niño llega a comprender que un objeto sigue siendo cualitativamente el mismo, a pesar de las alteraciones que pudieran hacérsele, en cuanto a forma, tamaño y apariencia general. En este periodo el niño muestra un fuerte egocentrismo en el que es incapaz de tomar en cuenta opiniones ajenas, cree que los demás comparten su punto de vista, habla en presencia de otros niños pero sin intercambiar información. Dado que lo que aprende está en función de su experiencia personal tiene la convicción de que lo que existe y sucede en su mundo no es por casualidad. Sus explicaciones tienen conexiones lógicas débiles, pues las fundamentan de acuerdo a lo que hasta el momento han aprendido de su medio ambiente. Espera que el mundo inanimado obedezca sus órdenes. El juego en este periodo ocupa la mayoría de las horas de vigilia del niño, pues le sirve para consolidar y ampliar sus conocimientos anteriores, el juego se convierte en el instrumento primario de adaptación.

El niño que se encuentra en este periodo tiende a comportarse de un modo similar al de sus mayores, como si supiera intuitivamente cual es la naturaleza de lo que lo rodea, se exhiben entonces los primeros indicios de cognición.

Periodo de operaciones concretas (6 años a 12 años)

Para este periodo el niño es capaz de actuar sobre los objetos y transformar mentalmente las situaciones, puede utilizar símbolos para realizar operaciones o actividades mentales, en contraste con las actividades físicas que eran la base de su pensamiento previo. Las operaciones matemáticas llamadas preoperaciones, que surgieron en forma rudimentaria durante el periodo anterior se consolidan durante esta etapa, por lo que el uso de representaciones mentales de las cosas y de los hechos le permiten adquirir bastante destreza en la clasificación y manejo de los números, en la selección y comprensión de los principios de conservación. Sin embargo, el pensamiento lógico sigue siendo concreto y se presenta ante situaciones concretas, no existiendo aún el pensamiento abstracto o teniéndolo muy rudimentario. En cuanto a la percepción de lo que le rodea, es capaz de tomar en cuenta todos los aspectos de una situación cuando se esté sacando una conclusión (*descentralización*), en lugar de estancarse en un aspecto como le sucedía en el periodo preoperacional. En cuanto a su egocentrismo, éste va en disminución y mejoran su capacidad de comunicarse y su capacidad de hacer juicios morales, los cuales se hacen más flexibles con la madurez y con las interacciones con otras personas. Su pensamiento se hace estable y lógico pero todavía no es capaz de manejar bien las ideas abstractas.

Piaget indica que el pensamiento de este periodo tiene las siguientes características:

- Realismo.- los niños confunden los eventos psicológicos con la realidad y ven los nombres, las imágenes, los pensamientos y los sentimientos como entidades reales. Es decir, son capaces de transformar escenas o personajes imaginarios en parte de su realidad; pueden convertir un lápiz en una espada.
- Animismo.- es la tendencia de los niños pequeños a dotar de vida a los objetos inanimados, así como de conciencia y voluntad. Esta tendencia va disminuyendo a medida que los niños van madurando, hasta llegar al punto en que sólo consideran como objetos vivientes en el universo a los humanos, los animales y las plantas.
- Artificialismo.- el niño considera que todo lo que le rodea se debe a la intervención humana. Transita en esta edad por un proceso de "egocentrismo", es decir, él es el centro del universo. Poco a poco es capaz de concebir que existen cosas a su alrededor en cuya creación no tuvo nada que ver el ser humano.

Periodo de operaciones formales (12 años en adelante)

En el periodo de operaciones formales se amplían enormemente las capacidades del adolescente, ya que no sólo es capaz de razonar sobre lo real, sobre lo que conoce o tiene presente, sino que puede hacerlo también sobre lo posible. Esto implica que lo real pasa a ser sólo una parte de lo posible. La forma característica del pensamiento formal consiste en, ante un problema nuevo, formular hipótesis para explicarlo basándose en los datos que se obtienen en ese momento y los que se han obtenido anteriormente. El adolescente no actúa entonces al azar sino que va dirigido, por lo que obtuvo anteriormente, sobre lo que va a suceder. Aunque el

adolescente se halle ante una situación experimental que le está proporcionando información, sus conclusiones las articulará no sólo en función de lo que ocurre en ese momento sino, también, en conocimientos anteriores y en general todo lo que sabe sobre el tema; además necesitará un procedimiento para combinar elementos que ante una situación dada, le permitirán producir todos los casos posibles. La utilización de un razonamiento sobre lo posible exige que el razonamiento sea puramente verbal. Mientras que hasta el periodo anterior el adolescente podía actuar sobre las cosas, ahora va a razonar sobre las cosas además de actuar sobre ellas. El lenguaje pasa a ocupar un lugar mucho más importante pues lo posible sólo puede formularse en términos verbales.
En el adolescente que se encuentra en este periodo se puede encontrar un mayor gusto y un manejo mucho más fácil de las abstracciones, incluso se podría decir: un gusto por razonar con independencia, un gusto por extraer las consecuencias de una posición que se adopta en un determinado momento. El adolescente se aventura mucho más con su pensamiento y juega con él como el niño jugaba con las cosas, manipulándolas y experimentando sus propiedades. El adolescente es más teórico, mientras que el niño del periodo anterior era mucho más concreto y apegado a las cosas.

En cuanto al aspecto social, la interacción con sus semejantes en este periodo es mayor que en el anterior, el adolescente está abierto a la opinión de los demás, sin embargo, esto no significa que crea toda la información que le llega. Ve ahora su posición como una de muchas posibles. En este periodo también se produce la inserción en el mundo adulto y esto constituye un aspecto de gran importancia. El adolescente empieza a mirar las cosas con sus propios ojos, no con los de los adultos que lo rodean y esto supone frecuentemente un conflicto. Se ve un desajuste profundo entre los valores que se inculcan en la escuela, y aquellos con los que se maneja cada día y la realidad social. Este hecho, y la necesidad de encontrar su propio lugar en la vida, producen un rechazo del mundo adulto, de sus valores, de sus creencias, de su forma de vida.

Finalmente en numerosas experiencias se ha encontrado que los adolescentes y adultos no emplean el pensamiento formal para resolver problemas que lo requerirían, esto se debe, por un lado, a que parece que no todos los individuos alcanzan el pensamiento formal en todos los terrenos de la misma forma; por otro lado, no siempre se actúa en el nivel formal, pues algunos de los problemas que se presentan pueden resolverse de forma concreta.

Los periodos de desarrollo intelectual descritos por Piaget son parte de un proceso continuo en el cual una característica del pensamiento infantil se cambia gradualmente en un tiempo determinado y se integra a mejores formas de pensamiento; cabe mencionar que el paso de un periodo a otro se da paulatinamente con la ayuda del tiempo, del entorno y de las nuevas experiencias que tenga el niño y puede darse el caso en que un niño posea ciertas características de pensamiento de un periodo y otras del siguiente periodo al mismo tiempo. El cambio de un periodo a otro no es algo que se dé automáticamente en cuanto el niño cumpla la edad indicada para cada periodo, obviamente un niño que tenga un mayor número de experiencias y un entorno rico en actividades y propuestas educativas, pasará de un periodo a otro con más facilidad y algunas veces con más rapidez.

Aunque estas etapas de aprendizaje son innatas en el ser humano, no es suficiente saber que existen, es necesario buscar de qué manera pueden ser mejor aprovechadas para propiciar un desarrollo intelectual superior en cada persona, lo que desembocará en un mejor desarrollo personal.

Tomando en cuenta lo anterior, se hace necesario preguntarse de qué forma, mediante la enseñanza, se pueden aprovechar al máximo estas etapas de aprendizaje en el niño. Desde la óptica de Piaget aquí se analizará qué errores se cometen, qué se puede aprender de ellos y cómo pueden corregirse en la enseñanza de las matemáticas, ya que: “no hay otro campo donde el pleno desarrollo de la personalidad humana y el dominio de la herramienta lógica y la razón aseguren una independencia intelectual completa”.[7]

La propuesta de Piaget y el sistema de enseñanza

En el sistema de enseñanza tradicional el papel que juega el profesor es de planeador–instructor. Todos los días en el salón de clases el profesor da instrucciones verbales o escritas, esperando de los niños determinadas respuestas que tal vez no lleguen; esto puede suceder debido a que podría no estarse tomando en cuenta la estructura mental del niño en ese momento, quien ajusta la información recién obtenida de acuerdo a los conocimientos con los que cuenta (su estructura interna o esquema mental). Esta falta de atención o retención a instrucciones habladas o escritas se debe a que el niño ve y oye lo que entiende.

Escuchar una palabra trae a la mente imágenes producto de una experiencia previa con el contexto socio–cultural. Dado que en cada persona estas experiencias son diferentes, el significado que cada cual le dé a una palabra puede variar ligeramente. Utilizar el habla como instrumento principal de enseñanza requiere del conocimiento previo, por parte del profesor, de las experiencias que han tenido sus alumnos, reconocer las que son mutuas y aprovecharlas para garantizar de cierto modo que lo que se hable en el salón de clases tenga el mismo significado para todos y que se pueda lograr una mejor comunicación. Piaget recomienda para este fin, que los profesores dediquen un tiempo considerable al estudio del pensamiento infantil, mediante entrevistas y actividades individuales, experiencia que es fundamental para la apreciación del problema que significa darse a entender a los niños y llegar a conocerlos a profundidad.

Tomando en cuenta que el desarrollo de las etapas de aprendizaje no se da igual en cada niño, cuando se intenta enseñarles algún término a niños de la misma edad, por ejemplo, comparación de longitud entre tres o más objetos, puede ser que algunos niños logren hacer la relación de longitud que se les pide, mientras que habrá otros que podrán hacerlo cuando se trate de dos objetos, pero en cuanto se les presente un objeto más, tal vez su lógica de pensamiento no logre encontrar la relación de longitud existente entre dichos objetos. Entonces el profesor, con las mejores intenciones del mundo, tratará mediante el lenguaje de explicar a esos niños lo que no han podido comprender con la ayuda de las experiencias que han tenido hasta ese momento, y podrá ser que después de varios intentos los niños digan la respuesta que el profesor quiera escuchar. Aunque eso no garantiza la verdadera comprensión del término, los adultos tienden a entusiasmarse cuando escuchan de la boca de los niños palabras complejas para su edad, de lo cual comenta Piaget, que no es conveniente tomar demasiado en serio el verbalismo infantil. El uso del lenguaje únicamente por parte del profesor no garantiza que se dé el proceso de creación de conocimiento por parte de los niños, sin embargo la motivación a verbalizar los procesos dentro del aula si da lugar a la creación de conocimientos.

Otro espacio en el que no se toman mucho en cuenta las etapas de desarrollo del pensamiento infantil descritas por Piaget, es en los libros de texto, en particular en los de Matemáticas en el que tres problemas se hacen evidentes: contenidos de nivel inadecuado, falta de material manipulativo lo que implica falta de experiencias físicas y exceso de confianza en los ejercicios gráficos y abstractos.

Quienes deciden el contenido de los libros parecen no tomar en cuenta las facultades y limitaciones de los niños dependiendo de la etapa en la que se encuentran, parece más bien que deciden, los contenidos esperando sorprender a otros adultos y se entusiasman con la idea de lo que van a aprender sus niños, quieren formar futuros genios y son incapaces de recordar sus propias vivencias con los libros de texto, además de no tener la experiencia frente a un grupo de enseñar lo que están proponiendo. Para saber qué contenido puede ser el adecuado se necesita investigar acerca de lo que a los niños les puede ser interesante o útil, ya que cuando mejor aprenden es cuando el atractivo del contenido es verdadero para su edad y etapa, cuando la habilidad que adquieren tiene algún valor observable. Los niños logran aprender matemáticas cuando las aplican a una situación real; los niños tienen una gran curiosidad sobre como funciona el mundo y cuando se satisface correctamente esta curiosidad elaboran modelos eficaces de explicación ante los fenómenos naturales. Algunos profesores se dan cuenta de que estas situaciones limitan a los niños, sin embargo siguen la guía temática de los libros corriendo el grave riesgo de que los niños memoricen por la incapacidad de comprender.

Pero no sólo los temas tienden a ser inadecuados, además son desarrollados basándose principalmente en el lenguaje y auxiliándose con dibujos, dejando de lado la experiencia física. Piaget cree que el niño elabora en forma activa sus conocimientos internamente mediante una constante interacción con lo que le rodea, en lugar de absorberlos pasivamente del ambiente. Si a un niño se le interroga sobre lo que cree que sucederá al realizar un experimento cualquiera, éste puede contestar lo que su lógica de pensamiento le permita, suponiendo que lo que contestó sea un error, sólo hacérselo notar no sería suficiente pues esa acción puede privar a los niños de la posibilidad de desarrollar autonomía intelectual; debe haber alguna experiencia física que haga notar al niño la contradicción de su pensamiento con la realidad (*desequilibrio*) y que haga surgir la creatividad del niño, para después con las estructuras mentales con las que cuenta, buscar la asimilación de la información recién adquirida (*equilibrio)*. Durante el desequilibrio los niños sienten contradicciones en su razonamiento, parece haber una ruptura en las estructuras intelectuales existentes, que eran estables hasta antes de obtener la nueva información contradictoria, se siguen reorganizaciones en los patrones del pensamiento hacia nuevas estructuras, el comportamiento de los niños en esos momentos es impredecible, habrá ocasiones en que los juicios que tengan serán lógicos y otras ilógicos, sin embargo este constante cambio de juicios parece aumentar la probabilidad de una mejor reorganización interna hasta lograr el equilibrio. Los profesores la mayoría de las veces creen que los juicios variables de un razonamiento a otro son errores que hay que erradicar. Piaget considera esos juicios desordenados e incompletos pero necesarios, pues son pasos intermedios hacia un nivel de conocimiento superior. El haber logrado un equilibrio estable se manifiesta en los niños en la confianza en defender sus juicios y en la expresión de su cara. El profesor que trata de fomentar la autonomía intelectual tiene cuidado de no destruir la confianza del niño para sus propias ideas o en su habilidad de razonar, cuando los niños son alentados a tener opiniones y sus ideas se respetan sean estas adecuadas o no, aprenden más (modificando sus propias ideas) que cuando se les hace recitar las respuestas correctas. Los niños a menudo se corrigen de manera autónoma, mientras tratan de explicar su razonamiento a otra persona. El niño que trata de explicar su razonamiento, tiene que descentralizarse para convencer al otro. Mientras trata de coordinar su punto de vista con el punto de vista del otro, el niño a menudo percibe su propio error, el niño que es corregido por otro, no tiene la posibilidad de corregir su propio proceso de razonamiento y a menudo comete el mismo error más adelante. Los niños no deben ser parte pasiva en la enseñanza, ni receptáculos en la espera de ser colmados con la sabiduría del profesor, deben desempeñar un papel importante en la dinámica educativa, ser parte activa en ésta.

La excesiva confianza en las representaciones gráficas y simbólicas, de algunos autores de los libros de texto de matemáticas, se refleja en el uso inmediato de estas representaciones en los ejercicios cuando se introduce un tema. Suponen erróneamente la existencia de una equivalencia entre los objetos y su representación gráfica, lo que permitiría a los niños una transferencia inmediata. Sin embargo, como ya se ha mencionado y, de acuerdo con la teoría de Piaget, se sabe que sólo con una rica variedad de experiencias con los objetos se llega a la construcción mental del objeto y de sus relaciones. Un ejemplo de lo anterior, y que sucede muy a menudo, es cuando a los niños se les enseña a sumar. Para introducir el tema se enseña a los niños la representación simbólica de los números, que tal vez para ellos no signifiquen nada, para inmediatamente comenzar con las sumas del tipo: 2 + 1 = 3. Anteriormente se señaló que los niños aprenden matemáticas cuando las aplican a una situación real, al sólo mostrarles estos símbolos aprenderán una representación numérica, pero no la relación existente en ella. Si se efectuaran las mismas sumas con objetos concretos, antes de introducir los símbolos, por ejemplo con canicas, podría trabajarse además de las sumas el concepto de número. Al tener objetos concretos se pueden realizar distintas combinaciones de objetos para llegar a un número mayor al juntarlas (suma), así como se pueden contar objetos de manera progresiva se pueden contar en forma regresiva e introducir la sustracción, contar de dos en dos, de tres en tres, etcétera. Para introducir la multiplicación o para introducir la división se invita a los niños a separar sus canicas en un número determinado de grupos, cada uno de estos con la misma cantidad de canicas. Los niños exploran las relaciones numéricas en forma natural, sin la imposición de los conceptos de los adultos o de símbolos, a un nivel de concepto intuitivo, respetando esta intuición y dándole la oportunidad de que florezca, ya que forma el cimiento de la comprensión adulta.

El aspecto lúdico en la enseñanza es importante y pocas veces recordado por la presión del tiempo y del cumplimiento de un programa. El juego en el desarrollo de los individuos desempeña un papel central, tengamos en cuenta que los niños dedican una gran cantidad de tiempo a esta actividad. El juego aparece también en muchas especies animales, por ejemplo, en los primates se han observado abundantes manifestaciones de juego que, al parecer, les sirven como ensayo de actividades que realizarán de adultos. En el hombre, el juego aparece desde las primeras etapas del periodo sensomotriz, pero no surge de golpe y experimenta una gran evolución que va dando lugar a distintos tipos de juego, que se prolongan hasta la edad adulta. Se cree que el juego permite resistir la frustración de no ser capaz de obtener un resultado y por tanto es un medio excelente para poder explorar, lo que es muy importante en el proceso de aprendizaje.

La importancia educativa del juego es enorme y puede decirse que un niño que no juega es un niño enfermo. El juego no debe considerarse una actividad superflua, ni contraria al trabajo serio de la escuela, a través del juego el niño puede aprender una gran cantidad de cosas, fuera o dentro de la escuela. El niño debe sentir que en la escuela está jugando y que a través de ese juego puede adquirir conocimientos que le serán útiles. Dado que el juego desempeña un papel necesario en el desarrollo de los individuos, la educación debe aprovecharlo y sacar de él el máximo partido.

El juego es importante como preparatorio en los procesos de adquisición de conceptos matemáticos, puede fomentar o desalentar el desarrollo de la autonomía, la espontaneidad y la iniciativa, en una situación donde el niño está naturalmente motivado por el juego.

He tenido la oportunidad de estar frente a grupos de escuelas primarias con la misión de enseñarles algunos conceptos matemáticos y la experiencia me dice que cuando llegamos con la explicación matemática por delante, se puede perder el interés de la mayoría de los niños. Pero si el tema se les presenta como un juego o un reto, poco a poco se podrá hacer que los niños asimilen la matemática del juego sin prejuicios y con todo el entusiasmo en su participación, después de todo, es un juego y los juegos para ellos son interesantes y divertidos.

A manera de resumen de lo que se ha tratado en este capítulo tengamos en cuenta lo siguiente:

Para Piaget[7] el conocimiento:

- No es absorbido pasivamente del ambiente.
- No es creado en la mente del niño ni brota cuando él madura, sino que es construido por el niño a través de la interacción de sus estructuras mentales con el ambiente.

Para Piaget[7] el desarrollo intelectual es un proceso de reestructuración del conocimiento:

i. El proceso comienza con una estructura o una forma de pensar propia de un nivel.
ii. Algún cambio externo o intrusiones en la forma ordinaria de pensar crean conflicto y desequilibrio.
iii. La persona compensa esa “confusión” y resuelve el conflicto mediante su propia actividad intelectual.
iv. De todo esto resulta una nueva forma de pensar y estructurar las cosas; una forma que da nueva comprensión y satisfacción al sujeto. En una palabra, un estado nuevo de Equilibrio.

En relación a la introducción de los niños a la instrucción formal en matemáticas, Piaget escribe:

> “Las Matemáticas se han enseñado como si fueran una cuestión de verdades únicamente comprensibles mediante un lenguaje abstracto; aún más, mediante aquel lenguaje especial que utilizan quienes trabajan en Matemáticas: Las Matemáticas son antes que nada, y fundamentalmente, una acción ejercida sobre las cosas…”[II]

El *Enseñar* no implica solamente transmitir los conocimientos con los que se cuenta y tener la mejor intención de compartirlos con alguien más, enseñar es más que hacerse escuchar con atención, es lograr que la información transmitida dure en el destinatario más de un día o una semana, es tratar de que quede como una experiencia en la existencia de esa persona, de la que difícilmente se pueda olvidar y que además ayude a la obtención de conocimientos más complejos y de mayor utilidad; el conocimiento de los procesos intelectuales y de las limitaciones naturales de las etapas de desarrollo del niño evita que el maestro enseñe conceptos que los niños no están preparados para aprender.

(II) Labinowicz Ed, *Introducción a Piaget. Pensamiento, aprendizaje, enseñanza.* Editorial Addison – Wesley Iberoamericana, 1987, pág. 166.

Capítulo 3. COMPRENDIENDO LOS SIGNIFICADOS DE LAS FRACCIONES. UNA PROPUESTA PARALA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES

En las escuelas el proceso de enseñanza–aprendizaje de conceptos matemáticos no es algo simple de llevar a cabo, existen varios factores que influyen en él determinando, la mayoría de las veces, el grado de asimilación de esos conceptos por parte de los alumnos. Agreguemos a esto que hay conceptos, que por su misma estructura y propiedades, les son más difíciles de comprender que otros, un ejemplo de esto es el concepto de fracción.

El aprendizaje de las fracciones es, en reiteradas ocasiones, confuso para el alumno, pues es muy alto el porcentaje de alumnos que van pasando de un grado a otro de primaria sin dominar el concepto de fracción o sin tener claras las diferencias entre las propiedades de los números naturales y los racionales. Por ejemplo en los números naturales les es fácil comprender que 4 es menor que 8, pero en fracciones, es posible que el alumno se confunda y caiga en el error de creer que la fracción que tenga en el denominador el número más grande, es la de mayor valor.

La asimilación del concepto de fracción, requiere que el estudiante tenga cierto grado de abstracción, el cual va adquiriendo por un lado conforme a su edad y por otro lado, y de manera muy significativa, con base en la interacción con sus semejantes y con su medio ambiente, esto de acuerdo con los periodos de desarrollo intelectual descritos por Piaget.

La edad es, en cierta manera, un factor importante en el aprendizaje de cada persona, pero no determinante, pues sin duda existen cosas que no se aprenden sólo por cumplir un año más de vida. Pero la interacción con el medio circundante es un factor que puede limitar o enriquecer el aprendizaje de forma importante. En este contexto es trascendental analizar las estrategias utilizadas para la enseñanza de conceptos, el de fracción en este caso, y de la utilidad que tenga para la vida diaria del alumno. Hoy se piensa que es muy importante que los contenidos curriculares sean significativos, relevantes y con posibilidades de ser relacionados por el alumno con lo aprendido anteriormente. La tarea es ayudar a convertir a la escuela en una faceta más de la realidad del niño.

En el presente capítulo, y en los que restan, el tema central será números racionales, su definición, propiedades e interpretaciones, proponiendo algunas actividades que puedan ayudar a los profesores para la introducción de este tema en tercer año de primaria y la continuación de su estudio en los restantes grados de la educación básica.

Las actividades que aquí se presentarán fueron elegidas con base en la teoría de Piaget presentada en el capítulo anterior, teniendo siempre en mente que lo elaborado es para los estudiantes de tercero a sexto grados de educación básica, que se encuentran en el periodo de operaciones concretas y en el periodo de operaciones formales.

En el concepto de fracción subyace la idea de relacionar entre sí dos números naturales. Esta idea tiene una lenta elaboración a través de milenios.

Pero… ¿Qué tanto hemos aprendido de estos números?
¿Cómo solemos utilizarlos?
Trabajemos un poco al respecto.

<u>Definición</u>

Una fracción es un par ordenado de números enteros *a* y *b,* donde *b* no puede ser cero, que usualmente se representa en la forma *a/b.* Al número *b* se le llama *denominador* e indica el número de partes iguales en las que se divide la unidad y al número *a* se le llama *numerador* e indica el número de partes que se toman de la unidad dividida. De esta manera, dos de las cinco partes iguales llamadas “quintos” están representadas por la fracción 2/5.

Para leer las fracciones, se enuncia primero el numerador y después el denominador, que es el que determina el nombre de cada una de las partes en las que fue dividida la unidad, si éste es 2 se lee medios, si es 3 se lee tercios, si es 4 se lee cuartos, si es 5 se lee quintos, si es 6 se lee sextos, si es 7 se lee séptimos, si es 8 se lee octavos, si es 9 se lee novenos, si es 10 se lee décimos. Si el denominador es mayor que 10, se añade al nombre del número la terminación *avos*.

Por ejemplo:

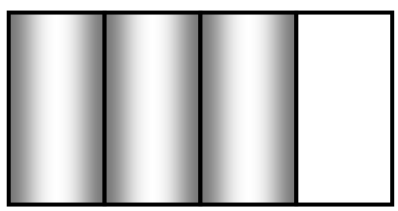
Si la fracción es:	**Se lee:**
1/2	un medio
4/7	cuatro séptimos
2/9	dos novenos
3/5	tres quintos
8/12	ocho doceavos
12/34	doce treinta y cuatroavos
15/56	quince cincuenta y seisavos

Una fracción cuyo numerador es menor que su denominador se llama *fracción propia*; y otra cuyo numerador es mayor que su denominador se llama *fracción impropia*. Cuando en una fracción el numerador es múltiplo del denominador la fracción representa un número entero, interpretando la fracción como un cociente, por ejemplo 3/3 = 1, 8/4 = 2, 9/3 = 3, etcétera. Las diferentes interpretaciones de las fracciones serán desarrolladas y analizadas una a una a continuación.

Las interpretaciones de las fracciones.

La riqueza de significados es un aspecto relevante de las fracciones, sin embargo, es esto mismo lo que más dificultades causa en el proceso de asimilación de este concepto, aún cuando todos estos significados tienen aplicación directa en la vida cotidiana. Revisemos entonces dichas interpretaciones.

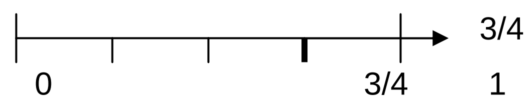
- **Relación del todo y sus partes:** esta relación se presenta cuando un todo se divide en partes iguales. La fracción indica la relación que existe entre el número total de partes en que se dividió el todo y un número determinado de partes que se resaltarán o tomarán del total, en donde el todo recibe el nombre de unidad. Por ejemplo si tenemos un rectángulo y lo dividimos en cuatro partes iguales, de las cuales tomamos o resaltamos tres, tenemos la siguiente gráfica:



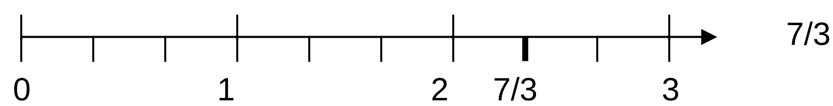
La relación parte–todo que guarda esta gráfica es que de cuatro partes iguales en que se dividió el todo se iluminan tres, es decir, se iluminan tres cuartas partes de la unidad.

Representar gráficamente las fracciones, como en el ejemplo anterior, es uno de los recursos más utilizados para enseñarlas y se considera dentro de los casos continuos. En matemáticas se dice que tenemos para fraccionar una unidad continua cuando ésta es un solo objeto. En nuestro caso a esa unidad o todo procederemos a hacerle las divisiones o particiones necesarias. Ejemplos de casos continuos son: una naranja, un pastel, una hoja de papel, un círculo, un pentágono, un cuadrado, un segmento de recta, etcétera. En todos ellos el todo o unidad se divide en partes iguales, equivalentes en longitud, superficie o volumen.

Otra forma de representar la interpretación parte–todo de las fracciones, es con la representación de éstas como puntos en la recta numérica. Para la representación de la fracción *a/b* como punto sobre la recta numérica, cada segmento unidad se divide en *b* partes iguales de las que se toman *a.*



o se divide el segmento en un número de partes múltiplo de *b* en el caso de fracciones impropias.



En este caso la fracción no se asocia a una parte de una figura o a un subconjunto de objetos, sino que se relaciona a un número, por ejemplo ¾ es un número entre el cero y el uno.

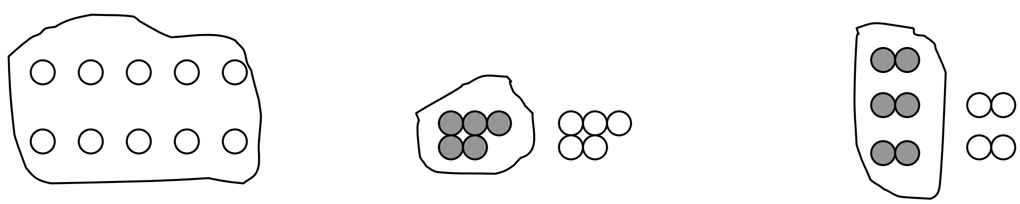
Algunas de las ventajas de enseñar las fracciones de esta manera consisten en que las fracciones impropias aparecen de forma más natural, se hace notar al estudiante que el conjunto de las fracciones forma una extensión del conjunto de los números naturales y tiene conexión con la idea de medida, interpretación de las fracciones que se mencionará más adelante.

Existe otra forma de enseñar las fracciones en la interpretación parte–todo, ésta es mediante aquellos casos en los que la unidad o el todo está compuesto por varios elementos, llamándosele a esta unidad conjunto.

En matemáticas a estos casos se les llama casos discretos. Por ejemplo, tomemos el conjunto de los números {0, 1, 2, 3}, al no tomar en cuenta los números que hay entre cada par de números del conjunto se pierde la continuidad del caso, convirtiéndolo en un caso discreto compuesto de varios elementos separados.

A diferencia de los casos continuos, los casos discretos son mucho menos utilizados para la enseñanza de las fracciones, tal vez esto suceda por la dificultad que puede representar para los estudiantes concebir a la unidad compuesta de varios elementos. En los casos discretos para representar la relación parte–todo, se divide al todo (conjunto) en partes iguales, es decir en subconjuntos que contienen cada uno la misma cantidad de “objetos”.

Ejemplo:



El todo o unidad es un conjunto de diez canicas.
1

Lo puedo dividir en dos conjuntos iguales y tomar uno de ellos.
½

Lo puedo dividir en cinco conjuntos iguales y tomar tres.
3/5

Ejemplos de casos con unidad o total discreto son: una bolsa con dulces, un kilo de jitomates, una bolsa con tres panes, un paquete de galletas, una bolsa con pelotas, etcétera.

Es importante hacer notar que si se utilizan casos discretos en la enseñanza de fracciones, se propicia que el estudiante amplíe su esquema de la relación parte–todo, ya que en dichos casos las partes o subconjuntos que resultan de la división del todo, en este caso un conjunto, están formados cada uno de ellos por varios objetos, en contraposición a los casos continuos en que las partes están formadas por trozos simples.

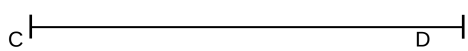
Interpretar las fracciones como la relación de un todo y sus partes depende directamente de la habilidad de dividir un objeto o conjunto en trozos o subconjuntos iguales, además de la perfecta identificación del todo o unidad.

- **Relación de medición:** en estas situaciones se tiene una unidad y se quiere determinar cuántas veces cabe ésta en la cantidad que se va a medir, lo que nos da la medida (longitud, área, volumen, kilos, litros, etcétera) de dicha cantidad respecto a la unidad dada de medida, dando mayor precisión a la actividad de medir, pues si se busca obtener mejores aproximaciones de la cantidad a medir, se hace necesario reconocer y nombrar partes cada vez más pequeñas de la unidad de medida. El caso más simple lo tenemos cuando la unidad cabe un número exacto de veces en dicha cantidad.

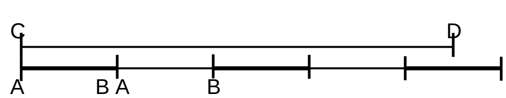
El concepto de medida está fundamentado en la interpretación de la relación del todo y sus partes, ya que la obtención de subunidades requiere de su relación con la unidad.

Para ilustrar con un ejemplo lo anterior, tomemos el segmento AB como unidad para saber cuántas veces cabe éste en el segmento CD.

unidad de medida



cantidad a medir



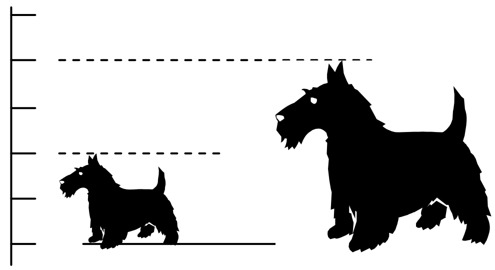
El segmento AB cabe 4 y media veces en el segmento CD. Suponiendo que el segmento AB fuese de un centímetro de longitud tendríamos que el segmento CD mide 4 y medio centímetros. Es importante destacar que, para obtener una mejor aproximación de la longitud del segmento a medir, se tuvo que dividir nuestra unidad de medida en dos partes iguales. Este fue un ejemplo sencillo, habrá ocasiones en que se tendrá la necesidad de dividir en más partes nuestra unidad de medida para obtener una mejor aproximación. Cabe hacer notar que situaciones como ésta se pueden presentar no sólo para longitudes sino también en otras unidades de medida, por ejemplo kilos, área, litros, etcétera.

- **Razón:** una razón es una comparación numérica entre dos cantidades; las fracciones se pueden usar como razones. En este caso no se tiene una única unidad de referencia para hacer las comparaciones como podría ocurrir en otros casos, pudiéndose hacer comparaciones bidireccionales, es decir, tomar como unidad a una u otra de las partes involucradas. Las comparaciones describen una relación conjunto a conjunto, todo a todo, aunque también aparecen como comparaciones parte–parte, y se simboliza con a:b.

Con el fin de aclarar esta interpretación de las fracciones tenemos los siguientes ejemplos:

a) En un salón de clases en donde hay 15 niños y 10 niñas, la relación entre estas cantidades es 2/3, que quiere decir que por cada tres niños en el grupo hay dos niñas, lo que se puede expresar también como 3/2 si hacemos una comparación bidireccional, es decir, por cada dos niñas en el grupo hay tres niños, ahora tomamos como referencia a las niñas para hacer la comparación.

b) Las escalas en los dibujos, mapas, planos, etcétera.



Escala 1:2

En el ejemplo 1:2 significa que el perro más grande tiene el doble de altura que el pequeño.

c) Supongamos que tenemos en una bolsa 10 fichas negras, 6 fichas blancas y 4 fichas azules, si sacamos una ficha al azar de la bolsa y queremos saber qué probabilidad hay de que esa ficha sea azul, debemos tener en cuenta que contamos únicamente con 4 fichas azules en la bolsa, a lo que llamaremos *casos favorables*, y también que contamos con un total de 20 fichas en la bolsa, a lo que llamaremos *casos totales.*

De acuerdo con la definición de probabilidad clásica o probabilidad teórica, al sacar una ficha al azar de la bolsa la probabilidad de que ésta sea azul es:

$$\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos totales}} = \frac{4}{20}$$

La fracción obtenida representa la comparación entre el conjunto de casos favorables y el conjunto de casos totales.

Entonces la fracción que representa la probabilidad de que la ficha extraída al azar de la bolsa sea azul es: 4/20.

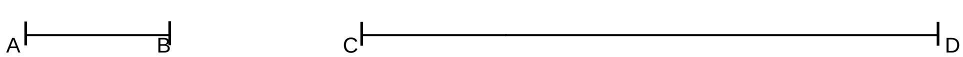
Así, la probabilidad de sacar al azar de la bolsa una ficha negra es 10/20, donde 10 es el número de casos favorables, pues se tienen 10 fichas negras y 20 representa el número de casos totales, se tienen 20 fichas en total. Por último, la probabilidad de sacar de la bolsa al azar una ficha blanca es 6/20, donde 6 es el número de casos favorables, se tienen 6 fichas de color blanco y 20 fichas en total, casos totales.

d) El porcentaje es una relación entre un número y el número 100, esta aplicación puede entenderse como el establecimiento de relaciones o razones entre conjuntos. Por ejemplo, cuando se tiene un descuento del 20% en algún producto cuyo precio es $ 400.00, se tiene primeramente la relación $20 de $100, que para la cantidad de $400 sería cuatro veces la relación anterior, lo que se puede representar de la siguiente manera:

$20 de $100
$20 de $100
$20 de $100
$20 de $100

Obteniendo la siguiente relación: 20 es a 100 (20/100) como 80 es a 400 (80/400). Así, concluimos por la relación anterior que el 20% de $400.00 es $80.00.

e) Dados dos segmentos AB y CD

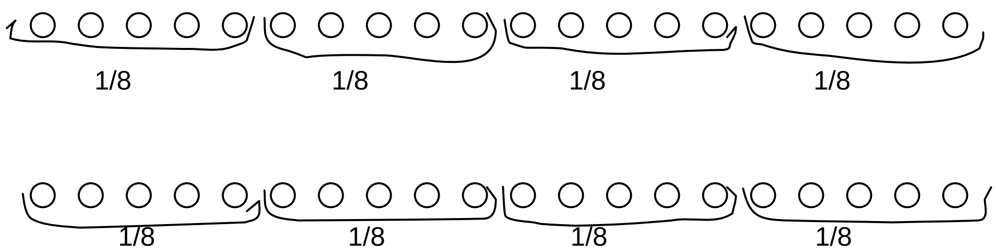


La longitud AB es ¼ de la longitud CD: (1:4)

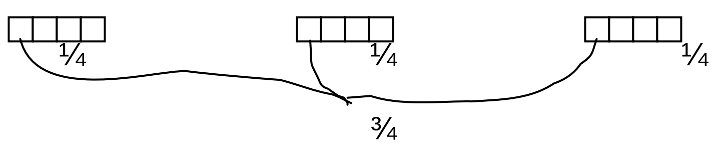
La longitud CD es 4 veces la longitud AB: (4:1)

La relación o razón existente entre estos dos segmentos está dada por AB es ¼ de CD, lo que se traduce en que si comparamos la longitud de AB con la longitud de CD tenemos que CD es cuatro veces más grande que AB o AB es cuatro veces menor que CD, es decir AB es una cuarta parte de CD.

- ❖ **Cociente:** en esta interpretación, un todo es subdividido en partes iguales, cuyo número está determinado por la cantidad de objetos a los que se le va a hacer la repartición. Con esta interpretación se asocia la fracción con la operación de dividir un número natural entre otro, teniendo siempre la idea de un reparto. Por ejemplo: tenemos una bolsa con 40 canicas y ocho niños a quienes repartírselas (40/8) ¿cuántas canicas le tocarán a cada uno?



En este ejemplo resulta sencillo llevar a cabo la repartición, pues la fracción 40/8 es impropia y no causa mayor conflicto, sin embargo se llegan a presentar casos en que la repartición, representada por una fracción propia, se torna complicada, pues se tienen más objetos o personas entre los cuales repartir, que objetos que repartir, por ejemplo, si se tienen tres barras de chocolate para repartir entre cuatro niños:



A cada niño le tocan 3/4 de la barra de chocolate.

La dificultad que representa para los estudiantes ver 3÷4 como 3/4 se puede deber a que están muy familiarizados a interpretar las fracciones como parte– todo, más en casos continuos que en casos discretos. No les resulta igual pensar en dividir una unidad en cuatro partes e iluminar tres a tener tres chocolates y repartirlos entre cuatro personas.

Como ejemplo de esta interpretación de las fracciones podemos pensar, de entre muchos, en los siguientes: repartir 20 dulces entre 5 niños, repartir 30 tortillas entre una familia de 5 personas, repartir un sueldo entre todos los gastos de una casa, repartir un pastel de cumpleaños entre todos los asistentes, etcétera.

Asimilar el concepto de fracción con todas sus interpretaciones requiere de un proceso de aprendizaje a largo plazo, así como de un adecuado planteamiento de las secuencias de enseñanza basadas en los conocimientos adquiridos por los estudiantes al paso por los diferentes niveles escolares, de tal forma que les proporcionen la adecuada experiencia con la mayoría de sus interpretaciones.

Los estudiantes deben construir significados propios de lo que aprenden, tarea que llevan a cabo al conectar nueva información y conceptos con lo que ya conocen. Los conceptos que no tienen vínculos con lo que un estudiante conoce y piensa del mundo es probable que no se recuerden o sean de utilidad para él.

Si se propone a los niños que miren en el entorno buscando números (en la calle, en los comercios, en los periódicos, en los boletos del autobús, en los envases, etcétera) y los registren, seguramente aparecerán muchos números naturales, decimales y algunas fracciones. Abordar el tema de fracciones a partir de fracciones empleadas socialmente parece adecuado, pues de este modo se le da al alumno un significado y utilidad real del tema.

Actividades propuestas.

Este primer bloque de actividades, pensado para la introducción de las fracciones en 3er grado de primaria, se centra en la obtención de información sobre lo que el niño sabe acerca de las fracciones, es importante recordar que el niño siempre tendrá un antecedente fuera de la escuela acerca de los contenidos que se le presenten dentro de ella.

Es de trascendente importancia que los niños inicien sus actividades con material concreto, ya que en este grado se encuentran en el periodo de operaciones concretas (6 a 12 años) y necesariamente deben apoyarse en algo concreto y manipulable para formar sus propios esquemas.

El juego es considerado en la infancia como el medio que posibilita que se ejercite la iniciativa y se desarrolle la inteligencia, en un medio donde los niños están naturalmente motivados por el juego. De acuerdo a la teoría psicogenética de Piaget, el juego es considerado como la expresión y condición para el desarrollo del niño. Teniendo en cuenta estas consideraciones es que en el presente trabajo se proponen algunas estrategias didácticas para la introducción del concepto de fracción, las cuales tienen bases lúdicas.

Actividad 1.1 Pedir a los niños que investiguen qué ingredientes se necesitan para la elaboración de un pastel y realizar las siguientes actividades:

- Registrar en el cuaderno los datos obtenidos.
- En el salón de clases, comentar sobre las cantidades de los ingredientes que se piden para elaborar el pastel. Preguntar a los niños en qué otros lugares o situaciones han escuchado esas cantidades, generalmente para qué se usan, si alguna vez ellos las han utilizado y en que situaciones.
- Escuchar los comentarios del grupo y hacer una conclusión de cuál es la noción que los niños tienen sobre las fracciones.

Es importante que los niños enlacen los temas que se les enseñan en la escuela con su vida diaria, que se den cuenta que no sólo en clase se escuchan ciertas palabras, en este caso la palabra fracción o el nombre de algunas de ellas. También es importante que los niños verbalicen sus descubrimientos y pensamientos y que los comenten con sus compañeros para que se den cuenta de los diferentes razonamientos que se pueden dar y posiblemente aprender de ellos. Intercambiar ideas entre compañeros no les resultará difícil dado que se encuentran en la etapa en que va desapareciendo su egocentrismo (capítulo 2, periodo de operaciones concretas).

Actividad 1.2 Pedir que los niños busquen en casa un cuarto de kilo de jitomates, medio kilo de harina, un octavo de papel cascarón, etcétera.

Indicar a los niños que cuando pidan este material en su casa, pregunten por qué se le da ese nombre a cada una de esas partes, para compartir la información obtenida con el grupo.

- Concluir con los niños que todo se expresa en unidades: kilos, litros, metros u objetos enteros como la fruta, el pan, la torta, etcétera y que todas las unidades son divisibles o repartibles en partes iguales, teniendo cuidado en que las unidades en que se propone dividir a la unidad sean comprensibles para los niños y acordes a los conocimientos con los que cuenten hasta ese momento, sobre todo cuando se les pida hacerlo con materiales concretos.
- Hacer notar que en ocasiones necesitaremos más de una unidad para representar una fracción, como en caso de tener una fracción impropia.

Representar gráficamente la fracción 12/5 usando rectángulos.

En este ejemplo se necesitaron tres unidades separadas para representar la fracción.

- Hacer notar también que la unidad se puede referir a un total formado por unidades separadas o varios objetos iguales (unidades discretas), y a esos totales los llamamos conjuntos, con los cuales también es posible hacer reparticiones en partes iguales, que habrá ocasiones en que las reparticiones sean exactas y otras en que sobrará uno o varios objetos del conjunto, todo esto dependiendo en cuántas partes se divida el conjunto.

Cuando se piense en ejemplos para explicar el concepto de fracción, se debe asignar tanta importancia a las actividades de partición de objetos como a las de partición de conjuntos; es común el caso de niños capaces de obtener o reconocer fracciones de objetos unitarios, como los pasteles o las figuras geométricas, pero que se muestran muy confundidos si se les pide que reconozcan, por ejemplo, un quinto de un conjunto de cinco lápices.

Con el propósito de hacer reflexionar a los niños sobre las reparticiones en partes iguales, se propone la siguiente actividad:

Actividad 1.3 Mostrar a los niños una barra de plastilina (procurar que la plastilina sea difícil de moldear, para conservar medidas y poder realizar mejor las comparaciones) y comentar que será partida en dos para darla a dos de ellos, dando una de esas partes a cada uno, mencionando que cada una de esas partes la llamarán mitad. Partir la barra de plastilina en dos partes desiguales y entregar una parte a cada niño, enseguida hacer preguntas como: ¿tiene cada uno la mitad de la barra de plastilina?, ¿por qué?, ¿qué significa mitad? De acuerdo con la discusión que se genere se podrán hacer otras preguntas, pero al final se debe concluir que las mitades deben ser iguales, procediéndose a corregir el corte desigual que se hizo inicialmente.

Es importante que después de la discusión anterior, cada niño tenga la oportunidad de dividir una barra de plastilina por la mitad y que los demás niños decidan si los trozos son iguales o no.

Cortar la plastilina desigualmente es una forma de reforzar la idea de que las mitades son partes iguales, pues al repartir la plastilina los niños querrán partes iguales y en seguida harán notar cualquier desigualdad, además de hacerles saber que en lo sucesivo las divisiones deben ser en partes iguales en la medida de lo posible.

Actividad 1.4 Organizar con los niños una actividad en la que se requieran dos equipos, por ejemplo, dos equipos que realizarán cada uno un paisaje en la cancha de la escuela. Si se tiene un número de alumnos impar, se puede incluir al profesor en un equipo, a fin de que los equipos contengan el mismo número de integrantes.

- Antes de empezar, preguntar de qué manera haremos para tener esos dos equipos y cómo llamaremos a cada una de las partes de acuerdo a la parte que son del grupo.
- Llevar un registro de las actividades que se vayan realizando, en este caso se registrará que se dividió al grupo en dos partes, dos mitades que formarán el grupo al unirlas.
- Se saldrá a la cancha, que se dividirá en dos partes iguales, en una mitad de la cancha una mitad del grupo realizará su paisaje, en la otra mitad de la cancha lo hará la mitad restante del grupo. Es importante que en caso de tener más de una cancha a la vista, designar en cuál se trabajará para evitar confusiones.
- Preguntar ¿cuántas canchas tenemos?, ¿en cuántas partes la dividimos?, ¿en cuántas partes dividimos al grupo?.

- Hacer que los niños se fijen en el tamaño de las partes de la cancha y digan si son iguales o desiguales. Identificar la cantidad de miembros que formaron cada una de los equipos, decir si son iguales o desiguales.
- En el registro quedarán asentadas las actividades de la siguiente manera:

  1^ra^ actividad.- un grupo se dividió en dos partes, en medios, realizando el siguiente proceso: ...

  2^da^ actividad-. Una cancha se dividió en dos partes, en medios, ambas partes son iguales, ...

Esta actividad sirve para hacer notar que es posible la partición de conjuntos (alumnos) tanto como la de objetos (cancha), además resaltar que los resultados obtenidos con la misma operación, en esta actividad la operación fue obtener mitades, tienen el mismo significado aunque se hayan realizado con diferentes unidades, niños en un caso y metros cuadrados o superficie en el caso de la cancha.

Actividad 1.5 Se requiere que los niños se preparen con anterioridad, indicándoles que realizarán un juego llamado "día de campo", por lo que se necesitará que lleven algunos alimentos como tortas, galletas, fruta, etcétera, por lo menos tres alimentos por niño.

- Teniendo ya el material necesario para la actividad, se pide a los niños que se integren en equipos, para que cada equipo reparta los alimentos equitativamente entre los miembros del mismo. Estos grupos deberán integrarse primeramente en grupos de dos niños, después en grupos de cuatro y por último en grupos de ocho niños.
- Después de haberse organizado en equipos de dos niños, se pedirá a estos que repartan cada uno en partes iguales, alguno de los alimentos con los que cuentan a su compañero de equipo, el profesor supervisará que la repartición sea equitativa.

- Una vez terminada la repartición en los equipos de dos niños, se procederá a repetir el procedimiento con los grupos de cuatro niños, cada uno de los integrantes del equipo partirá en cuatro partes iguales un alimento nuevo, es decir, que no haya sido ya partido antes, para compartirlo con sus compañeros, supervisando el profesor que la repartición sea equitativa.
- Por último se forman los equipos de ocho integrantes y se procederá a que cada uno de los integrantes del equipo reparta otro alimento entre sus compañeros y él mismo por supuesto, supervisados por el profesor para asegurar una repartición equitativa.
- En caso de que el profesor lo considere conveniente, se puede trabajar en equipos cuyo número de integrantes sea múltiplo de 3, para practicar también esas particiones.
- Al final se le pide a cada equipo que diga como hizo la repartición, induciéndoles a manejar en forma oral las fracciones.

El objetivo de solicitar por lo menos tres alimentos por niño, es que cada uno de ellos tenga la oportunidad de partirlos en dos, en cuatro y en ocho partes procurando que éstas sean iguales, pues no es lo mismo efectuar la operación que sólo observarla.

Actividad 1.6 Se pedirá a los niños que lleven a la escuela un dibujo en una hoja tamaño carta, el dibujo que más les guste, se iluminará en el salón de clases.

- Se pedirá a los niños que recorten el dibujo en cuadrados de la misma medida todos, obteniendo todos el mismo número de cuadrados, de tal modo que se llegue a la obtención de un rompecabezas. Las instrucciones y medidas para la elaboración del rompecabezas las dará el profesor de acuerdo a su criterio.
- Los niños deberán revolver las piezas de su respectivo rompecabezas, para después proceder a armarlo.

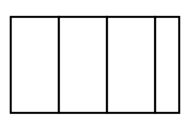
- Para inducir el manejo verbal de las fracciones se harán preguntas como: ¿qué parte del dibujo formamos si sólo juntamos dos piezas del rompecabezas?, ¿y si juntamos tres, cuatro, etcétera?, ¿y si juntamos todas?

Esta actividad está pensada para motivar en el niño la reflexión de la relación parte–todo, qué parte del todo son dos piezas del rompecabezas, tres piezas, cuatro piezas, etcétera y la noción de conservación del todo. La unidad (el todo) se puede dividir en la cantidad de partes iguales que queramos y siempre se puede volver a formar la unidad o el todo al juntar el total de esas partes, lo que no sucede si al menos nos falta una de esas partes.

Es importante no plantear a los niños la división de la unidad en partes demasiado pequeñas o que les cueste mucho trabajo realizar y manejar.

Actividad 1.7 Proporcionar a cada niño algunas hojas de papel, las necesarias, y un lápiz.

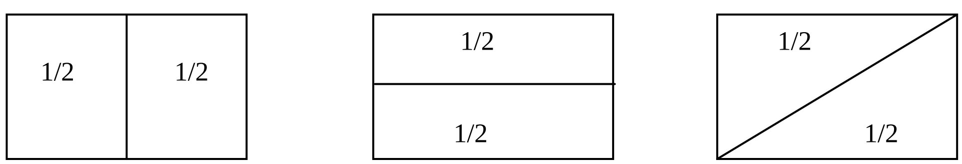
- Se explica a los niños que cada hoja que se les proporcione representará un pastel que ellos van a repartir entre el número de niños que el profesor les indique, las reparticiones se harán mediante marcas en las hojas. Es importante recordarles, cada vez que sea necesario, que las porciones de pastel que le toque a cada niño deben ser exactamente iguales. Así mismo, es necesario indicarles que al hacer las reparticiones no se permite que sobre pastel. Por ejemplo, si se pide a los niños que repartan el pastel entre tres personas se podría dar la situación de que en el intento por lograr que las partes en que dividen su hoja sean iguales, les quede un pequeño residuo:



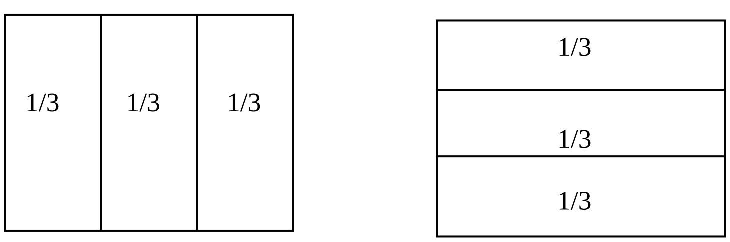
- Con una primera hoja se indica a los niños que realizarán la repartición del pastel entre dos niños, de manera que a cada niño le toque la misma cantidad de pastel y sin que sobre.
- A otra hoja nueva se le da el mismo tratamiento, sólo que en esta ocasión se repartirá entre tres niños, en otra hoja se repartirá entre cuatro, etcétera.
- Después de haber hecho varias reparticiones se pide a algunos niños que expliquen su forma de repartir, haciendo comparaciones entre unas y otras, haciendo pensar a los niños si las reparticiones fueron equitativas y si le tocaría la misma cantidad de pastel a un niño con una forma de repartición que con otra.
- Mencionar el nombre de las partes obtenidas al hacer las diferentes particiones, para familiarizar a los niños con esos términos.

Esta actividad tiene como propósito que los niños se den cuenta que las fracciones pueden obtenerse mediante distintas particiones, pues es probable que para repartir el pastel lo hagan de diferente manera, por ejemplo:

Para repartir entre dos.



Para repartir entre tres.

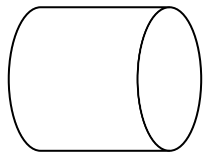


Introducir la notación de números fraccionarios desde los primeros contactos de los niños con estos no es muy recomendable, pues se corre el riesgo de que los niños los aprendan de memoria, sin tener la más mínima idea de lo que representan en realidad. Después de actividades como las anteriores, los niños pueden estar mejor preparados para entender la notación de las fracciones, pues experimentaron físicamente con fracciones de algunos objetos y tendrán entonces un significado más real de lo que representará una fracción cuando la vean escrita. Proporcionando a los niños actividades con material concreto, para posteriormente introducir la simbología se fomenta la creación del conocimiento lógico–matemático (capítulo 2).

Actividad 1.8 Llevar al salón de clases cosas que se puedan partir o repartir fácilmente como un trozo de tela, un kilo de frijol, un litro de agua, un chocolate, una naranja, una tortilla, etcétera; así como recipientes para repartir el agua o los frijoles por ejemplo.

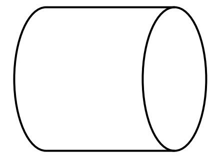
- Efectuar la partición de las cosas en mitades.
- Comentar con los niños sobre las características generales de los objetos llevados al salón, la característica que seguramente se mencionará será que todas están divididas por la mitad, no importando que sean líquidos, sólidos, litros, metros o kilos.
- Pedir a los niños que sugieran que nombre se le puede dar a cada parte y como la representarían numéricamente.
- Establecer la notación 1/2 mencionando la relación existente entre la parte y el todo: 1 es la parte que tomo de 2 partes iguales que tengo, si junto las dos partes iguales tengo un entero, el todo.
- Pedir a los niños que dibujen los objetos divididos por la mitad y con su respectivo nombre agregándoles la notación 1/2 y la expresión: una de dos partes iguales de...,

Por ejemplo:



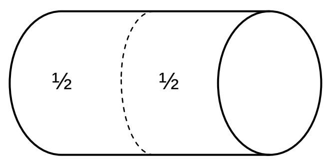
½

una de dos partes iguales que tengo de tubo



½

una de dos partes iguales que tengo de tubo



1

Al unir las dos partes obtengo un entero

- Con los objetos que sea posible, volver a unir para llevar acabo la misma actividad, pero ahora dividirlos en cuatro partes, elaborando el dibujo, el registro del nombre dado a cada parte en esta nueva partición junto con la notación 1/4 y la relación que tiene cada una de las partes con respecto al total.
- Se puede hacer la misma actividad para dividir las cosas en ocho partes iguales y llevar un registro de la actividad.

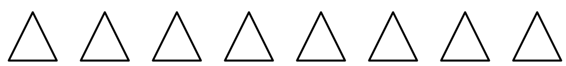
Es posible llevar a cabo esta actividad realizando la partición en un número de partes que no sea múltiplo de dos, algunos de los objetos ya utilizados se pueden volver a utilizar, por ejemplo el agua o los frijoles, en el caso de la naranja o el chocolate se tendrá que utilizar otros sin partir. Es importante no proponer demasiadas particiones pues se puede llegar a algo difícil de manejar para los niños.

Actividad 1.9 Pedir a los niños que lleven al salón de clases objetos fácilmente manipulables, no muy grandes, ni muy chicos como por ejemplo frijoles, piedras o popotes, etcétera.

Para decidir el número de objetos con los que se va a trabajar, decisión que se deja al criterio del profesor, debe tomarse en cuenta el número de particiones que sean adecuadas para ser realizadas por los niños.

El número de objetos a utilizar será de la forma 2^n, **n** es un número natural, y el número de particiones que se podrán realizar con esta cantidad de objetos será **n**, por ejemplo si $n = 3$ tendremos:

Si sustituimos $n = 3$ en 2^n tenemos que $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$, trabajaremos con 8 objetos y podremos llevar acabo tres particiones ($n = 3$):



conjunto o unidad de ocho elementos

1/2 1/2

primera partición

1/4 1/4 1/4 1/4

segunda partición

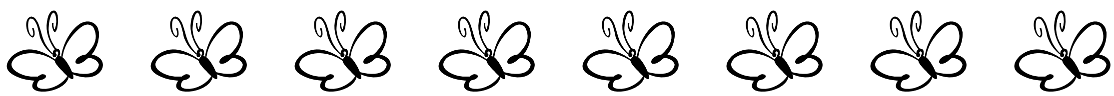
1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8

tercera partición

Habiendo decidido, y conseguido, el tipo y la cantidad de objetos para trabajar se comienzan la actividad, llevando un registro en el pizarrón de lo realizado como se ilustra:

- Se inicia, por ejemplo, con un conjunto de 8 objetos (2^n, con $n = 3$).

Este es un conjunto de ocho elementos



Pedir a los alumnos que dividan en dos partes iguales su conjunto de objetos.

Este es un conjunto de ocho elementos dividido
En dos partes iguales

1/2 1/2

- A una de esas mitades obtenidas pedir que la dividan por la mitad y la otra conservarla.

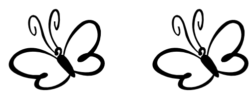
Esta es una mitad de un conjunto de ocho elementos

½

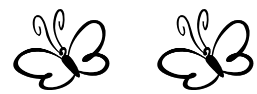
1 parte de 2 partes iguales que tengo

Esta es una mitad de un conjunto de ocho elementos

Dividida en dos partes iguales



1/4



1/4

- A una de esas partes pedir que la dividan en dos partes iguales y la otra conservarla.

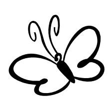
Esta es una cuarta parte de un conjunto de ocho elementos

1/4

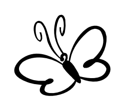
1 parte de 4 partes iguales que tengo

Esta es una cuarta parte de un conjunto de ocho elementos

Dividida en dos partes iguales

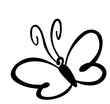


1/8



1/8

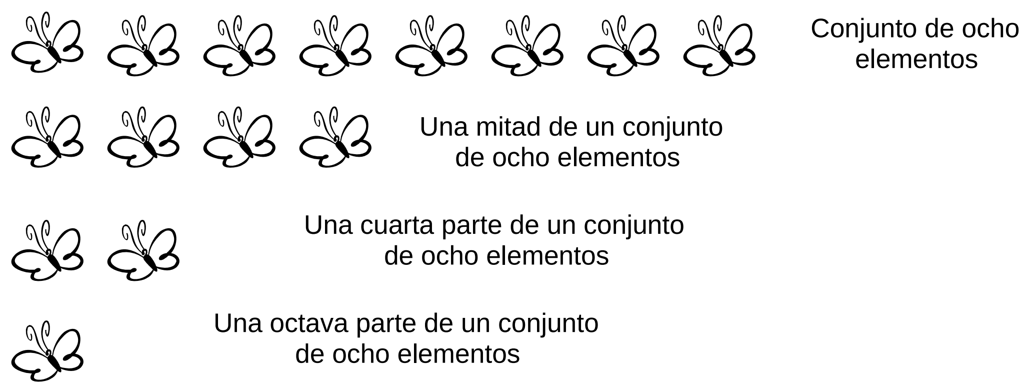
Esta es una octava parte de un conjunto de ocho elementos



1/8

1 parte de ocho iguales que tengo

- Conservar una de las partes obtenidas en cada partición servirá para comparar cada nuevo conjunto obtenido con el anterior. Al tiempo que se van haciendo las divisiones, el profesor debe buscar con ellos la relación existente entre los conjuntos que se formaron, hasta llegar a la conclusión de las relaciones entre medios, cuartos y octavos, tales como 1/4 es la mitad de 1/2, 1/8 es la mitad de 1/4, etcétera.



Actividad 1.10 Proporcionar a cada uno de los niños un popote cortado por la mitad, otro cortado en cuatro partes iguales y otro más cortado en ocho partes iguales.

- Pedir a los alumnos que agrupen los popotes en conjuntos de medios, cuartos y octavos, pidiendo que señalen cual de los conjuntos es el de los medios, cual el de los cuartos y cual el de los octavos.
- Propiciar en los niños la reflexión de cómo se obtienen los medios, los cuartos y los octavos, así como de cuántos medios, cuartos y octavos se forma un entero o unidad, de cuántos cuartos y octavos se forma un medio y de cuántos octavos se forma un cuarto.

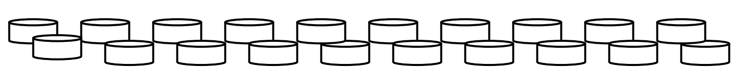
Con esta actividad se puede introducir de manera oral la suma de fracciones con común denominador y también las fracciones equivalentes.

Actividad 1.11 Pedir a los alumnos que cada uno lleve 20 fichas o corcholatas al salón de clases.

- Indicar a los niños que su conjunto de fichas o corcholatas es la unidad o el todo y que procederán a realizar algunas reparticiones en subconjuntos iguales.
- Antes de realizar las reparticiones físicamente, se puede hacer preguntas relacionadas con ésta, por ejemplo si repartimos en tres montones ¿cuántas fichas habrá en cada montón?, ¿sobrarán algunas?, procediendo a anotar las respuestas en el pizarrón, para después de haber realizado las reparticiones verificar las respuestas.
- Para comenzar las reparticiones se pedirá a los niños que lo hagan en dos montones, dando nombre a cada montón de acuerdo a la parte que sean del todo o unidad y llevando un registro en su cuaderno.
- Se juntan las fichas de nuevo en un montón para proceder a realizar otra repartición.
- Cada vez que se realice esta actividad se irán incrementando el número de montones en los que se repartirán las fichas, cada uno con menos fichas.

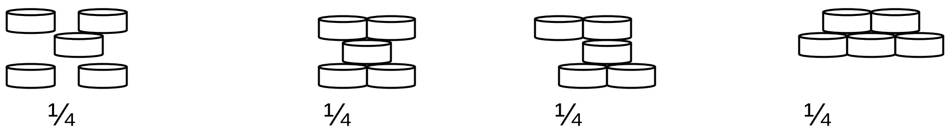
Habrá ocasiones en que al repartir las fichas en cierto número de montones, sobrará por lo menos una, sin embargo es importante no acostumbrar a los niños a que siempre llegarán a reparticiones exactas, pues al enfrentarlos a diferentes casos se ampliarán sus esquemas de conocimiento (capítulo 2, desequilibrio), lo que puede dar la pauta para la introducción de otros temas.

Las anotaciones en el cuaderno y en el pizarrón pueden ser de la siguiente manera:



El todo o unidad consta de 20 fichas

Si se reparten las fichas en cuatro montones, cada montón tendrá cinco fichas:

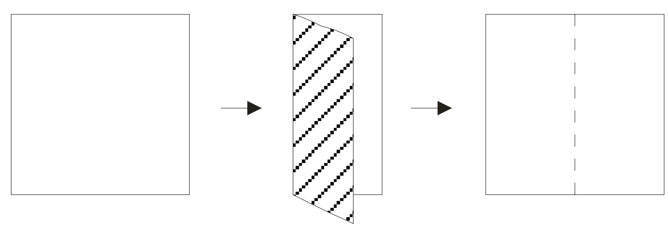


Esta actividad puede servir también para familiarizar a los niños con la interpretación de las fracciones como cociente, involucrando una repartición.

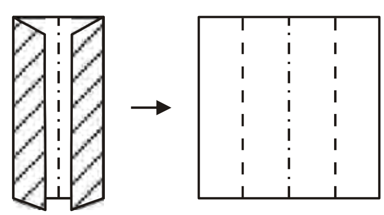
Actividad 1.12 En esta actividad descubriremos las fracciones presentes en la elaboración de un cubo con origami (doblado de papel). Desde el principio hasta el final de la elaboración del cubo los niños marcarán en el papel divisiones en partes iguales.

Para llevar a cabo la actividad necesitamos 6 hojas de papel cortadas como cuadrados de 10 cm por lado, cada hoja se doblará de la misma manera.

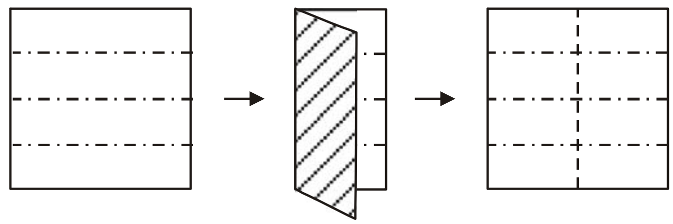
1) Doblemos la hoja de papel a la mitad, como se muestra en la figura, y marquemos bien el doblez.
   El cuadrado ha quedado dividido en dos partes iguales, a las que llamamos medios.



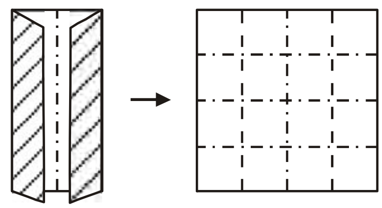
2) Ahora doblemos a la mitad cada una de los dos partes, medios, que tenemos.
   La unidad ha quedado dividida en 4 partes iguales, a las que llamamos cuartos.



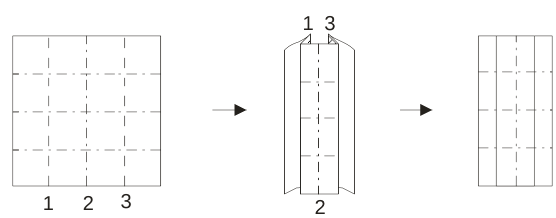
3) Ahora realicemos las mismas particiones a la unidad pero perpendicularmente a las primeras.
Primero doblemos a la mitad, es decir obtengamos octavos.



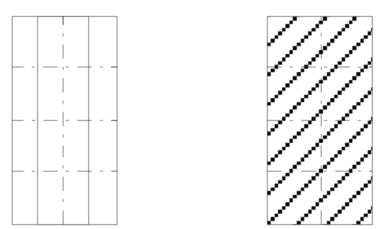
4) Obtengamos la mitad de cada uno de los octavos que tenemos, es decir obtengamos dieciseisavos.
Después de estas particiones la unidad ha quedado dividida en 16 partes iguales.



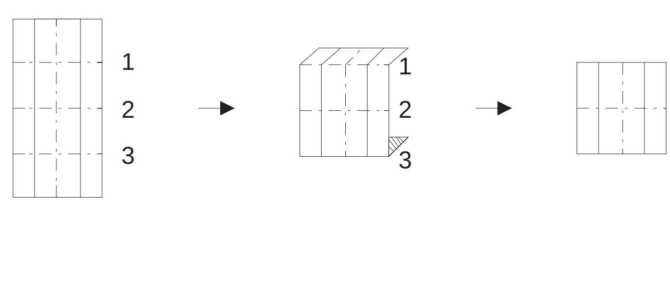
5) Numeremos los dobleces verticales de la hoja, como en la figura, llevemos el doblez 1 a unirse con el 2 por la parte de atrás, unamos de la misma manera el dobles 3 con el 2.



6) Despues de los dobleces del paso anterior, el aspecto de la hoja de papel doblada es como en la figura. La cara A es la que hemos trabajado de frente, la cara B es la parte de atrás.

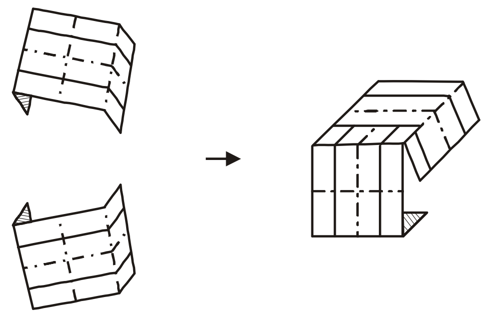

Cara A Cara B

7) Con la cara A a la vista, consideremos los dobleces horizontales para numerarlos como en la figura. Sobre el dobles con el número 1 doblemos hacia atrás, hagamos lo mismo con el doblez 3.

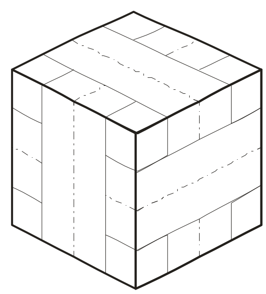


Ahora la hoja de papel ha quedado como un cuadrado con dos pestañas.
Debemos doblar seis piezas de la misma manera, una por cada cara del cubo.

8) Para armar el cubo, debemos insertar cada una de las pestañas de cada pieza en otra de forma perpendicular, como se muestra en la figura.
Debemos poner especial atención en que todas las pestañas queden ensambladas donde les corresponde, es decir, ninguna pestaña puede quedar en el interior del cubo.



Al ensamblar las 6 piezas que doblamos el resultado es un cubo como se muestra a continuación.



El aprendizaje de números fraccionarios supone un nivel muy importante de abstracción ya que no siempre es fácil realizar materialmente las operaciones que nos indican (medición, repartición, cociente, etcétera). Lograr que los estudiantes lo comprendan puede tardar un tiempo considerable, sin embargo es algo que tarde o temprano deben entender y es mejor que lo hagan antes de que se llenen de prejuicios que les hagan más difícil la asimilación de este concepto.

La participación del profesor en el proceso de aprendizaje es muy importante, requiere de una gran imaginación e inventiva direccionada a la producción de métodos que hagan menos difícil el proceso, además de la clara comprensión del tema; con el fin de ayudar a esa tarea se elaboró este capítulo.

Capítulo 4. FRACCIONANDO FRACCIONES. UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS OPERACIONES CON FRACCIONES

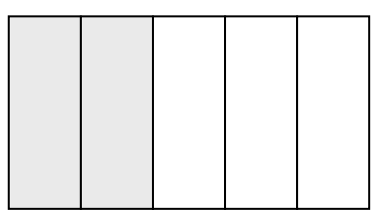
En el capítulo anterior aprendimos, mediante la partición o división, a tomar fracciones de unidades, las cuales eran representadas por un rectángulo, una galleta, una torta, un popote o por un conjunto de objetos como una bolsa con canicas, corcholatas o piedras.

En éste capítulo volveremos a poner en práctica la habilidad de partir o dividir, pero ahora no partiremos unidades sino fracciones, es decir, aprenderemos a tomar fracciones de fracciones. El proceso que se propondrá, tiene la finalidad de facilitar la visión geométrica de operar con fracciones, proponiéndose al final del capitulo algunas actividades que apoyen la labor de los profesores.

Fraccionando fracciones

Fraccionar fracciones suena un poco extraño, pero es posible y lo haremos de la siguiente manera:

- Utilizando un rectángulo para representar la unidad a dividir, consideremos la fracción 2/5.

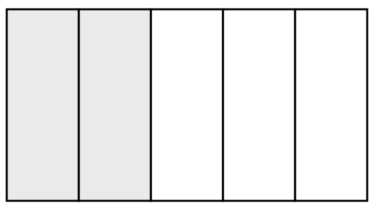


Ahora, supongamos que de esos 2/5 queremos tomar 3/4. ¿Qué tendríamos que hacer para lograrlo?

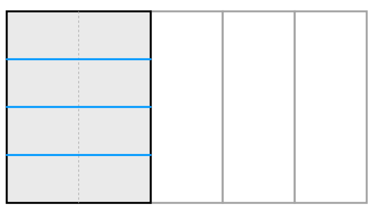
Primero, debemos considerar a la fracción 2/5 como un total y sin tomar en cuenta la división en quintos, procederemos a hacer una segunda división, esta vez dividiremos la fracción 2/5 en cuatro partes iguales, de las que tomaremos tres.

Es importante remarcar que para partir una fracción, en éste y en los ejemplos siguientes, consideraremos como un total a la fracción que queramos partir, olvidando por un momento la partición realizada para obtenerla, procediendo a realizar una segunda partición en sentido perpendicular a la primera para evitar confusiones.

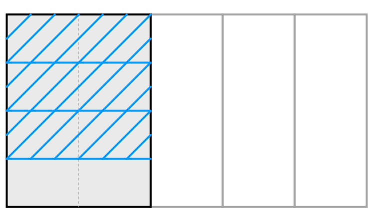
Realicemos el proceso:



Tomemos 2/5 de la unidad



2/5 dividido en 4 partes iguales

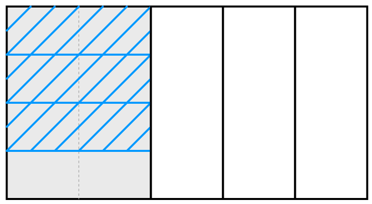


Tomemos ahora 3 de esas 4 partes iguales

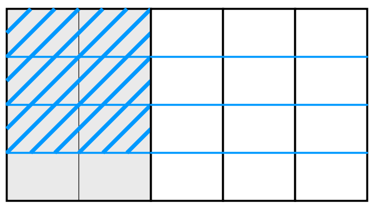
y de este modo hemos partido una fracción, hemos obtenido 3/4 de 2/5.

Pero ahora la pregunta es ¿qué relación tiene la fracción 3/4 de 2/5 con la unidad inicial? Veámoslo.

Ahora, veamos como una misma representación gráfica a la fracción 2/5 y a la fracción 3/4 de 2/5.



Hagamos extensiva a la unidad inicial la partición que hicimos en la fracción 2/5.



Notemos que la unidad inicial ha quedado dividida en 20 partes iguales de las que se han tomado 6 (sombreado y rayado), es decir, tenemos representada la fracción 6/20.

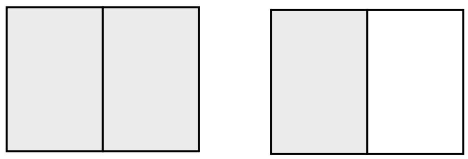
Así tomar 3/4 de 2/5 es exactamente lo mismo que tomar 6/20 de la unidad o lo que es lo mismo:

$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{2}{5} \text{ es } \frac{6}{20} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5}$$

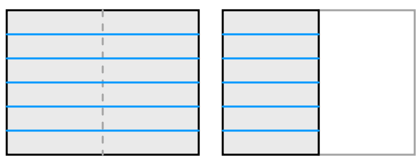
¿No es tan difícil verdad? Hagamos otro ejemplo.

- Consideremos la fracción 3/2, por ser una fracción impropia necesitamos para su representación gráfica tener dos veces a la unidad, pues una sería insuficiente, divididas cada una de ellas en dos partes iguales.

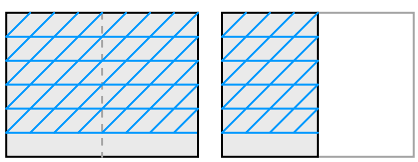
Tomemos entonces la fracción 3/2.



Ahora dividamos la gráfica de la fracción 3/2 en seis partes iguales, para tomar cinco de esas partes, es decir, obtengamos la fracción 5/6 de 3/2.

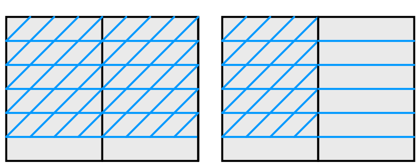


Dividamos a la fracción 3/2 en seis partes iguales.



Tomemos cinco de las seis partes iguales que tenemos, es decir, tomemos la fracción 5/6 de la fracción 3/2.

Ahora para saber qué parte de la unidad inicial es esta última fracción obtenida, extendamos a cada unidad la última partición realizada.



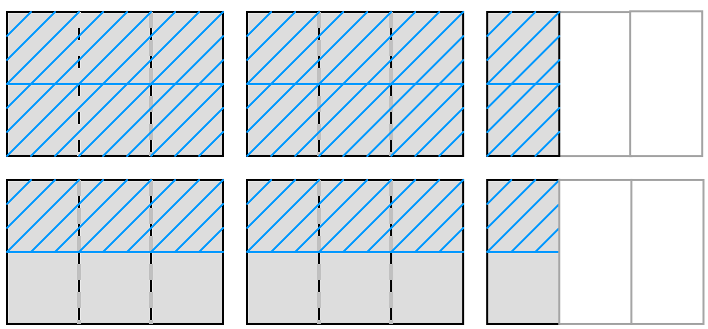
Ahora, cada unidad ha quedado dividida en doce partes iguales, de las que hemos tomado quince (sombreado y rayado). Así tomar 5/6 de 3/2 es lo mismo que tomar 15/12 de la unidad.

Hagamos un último ejemplo.

Pensemos en la fracción 7/3 y en su representación gráfica.

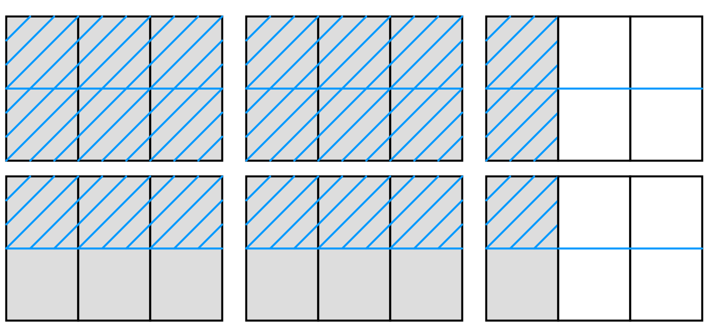
Dividamos ahora la fracción 7/3 en dos partes iguales para posteriormente tomar tres de esas partes, es decir, tomaremos la fracción 3/2 de 7/3.

Como la fracción 3/2 es impropia, para obtener 3/2 de 7/3 necesitamos dos veces la representación gráfica de 7/3, dando el trato de total o unidad a ambas representaciones.



Cada una de estas gráficas representa 7/3 de la unidad, las dividiremos en dos partes iguales cada una y tomaremos la fracción 3/2

Juntemos las representaciones gráficas de las fracciones 3/2 de 7/3 y 7/3 para observar la relación de 3/2 de 7/3 con la unidad inicial.



Finalmente, hemos obtenido la fracción 21/6, así tomar 3/2 de 7/3 es exactamente lo mismo que tomar 21/6 de la unidad.

Pero ¿para qué hacer todo esto?

La partición de fracciones, o lo que es lo mismo tomar fracciones de fracciones, nos puede ayudar, entre otras cosas, a visualizar la multiplicación de fracciones y en consecuencia a obtener el resultado de multiplicar dos fracciones, ¿cómo?, veámoslo.

Realizar una multiplicación de dos números, 5 x 3 por ejemplo, resulta algo muy fácil de efectuar, es algo que la mayoría de las personas hemos aprendido mecánicamente, sin detenernos a ver que detrás de una multiplicación está la suma, así 5 x 3 es lo mismo que sumar cinco veces el tres o sumar tres veces el cinco:

5 x 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15

5 x 3 = 5 + 5 + 5 =15

Cuando efectuamos la multiplicación de dos números racionales **a** y **b** tenemos la misma situación, llevamos acabo una serie de sumas:

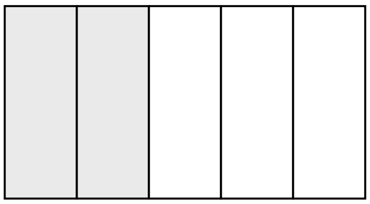
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \underbrace{\mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} + \dots + \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a}}_{\text{b - veces}} = \underbrace{\mathbf{b} + \mathbf{b} + \mathbf{b} + \dots + \mathbf{b} + \mathbf{b} + \mathbf{b}}_{\text{a - veces}}$$

En el primero de los ejemplos presentados, manejamos las fracciones 2/5 y 3/4.

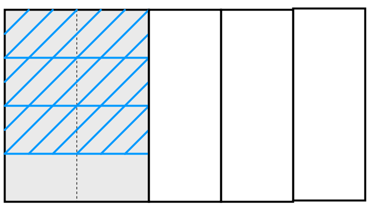
Si realizamos la multiplicación de estas dos fracciones, como comúnmente se realiza, tenemos que:

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4} = \frac{6}{20}$$

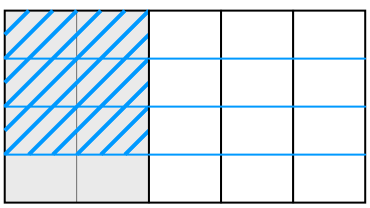
En términos de sumas, esta multiplicación es lo mismo que sumar tres veces una cuarta parte de 2/5 ó tener 3/4 veces 2/5, veamos cómo se puede obtener esto gráficamente, mediante la partición de fracciones.



En el ejemplo dividimos a la unidad en cinco partes iguales para tomar dos de ellas, es decir, tomar la fracción 2/5.



luego tomamos la fracción 3/4 de 2/5, es decir, tomamos 3 veces una cuarta parte de 2/5.



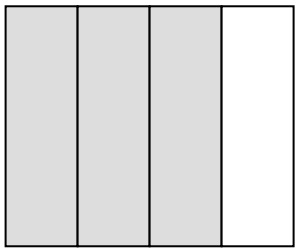
Posteriormente vimos que tomar 3/4 de 2/5, era lo mismo que tomar 6/20 de la unidad inicial, esto resulta de considerar al mismo tiempo las dos particiones realizadas a la unidad, la primera para obtener 2/5 y la segunda para obtener 3/4 de 2/5, después de las cuales la unidad quedó partida en veinte partes iguales, de las que quedaron resaltadas seis partes (sombreado y rayado), esto es 6/20.

Hemos obtenido el mismo resultado que con el procedimiento comúnmente usado al multiplicar fracciones.

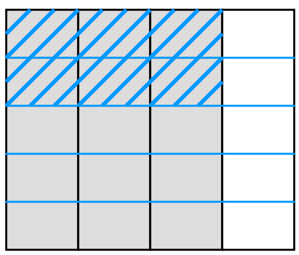
Pero ¿qué pasaría si cambiáramos de orden los factores de la multiplicación anterior?, ¿cambiaría el resultado si en lugar de calcular 3/4 de 2/5 calculáramos 2/5 de 3/4?. Averigüémoslo utilizando la partición de fracciones.

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$$

es tener 2/5 veces 3/4 ó sumar dos veces una quinta parte de 3/4.



Obtengamos primero 3/4 de la unidad



Obtengamos, como lo hemos venido haciendo, la fracción 2/5 de la fracción 3/4, extendiendo esta última partición a la unidad inicial.

El proceso realizado nos da como resultado que la unidad inicial queda dividida en veinte partes iguales, de las que resaltamos seis, es decir, obtuvimos la fracción 6/20.

Tenemos entonces que obtenemos el mismo resultado sin importar el orden en que efectuemos las particiones, en términos de multiplicaciones esto es:

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$$

En matemáticas esto es conocido como la propiedad conmutativa del producto, es decir: “El orden de los factores no altera el producto”.

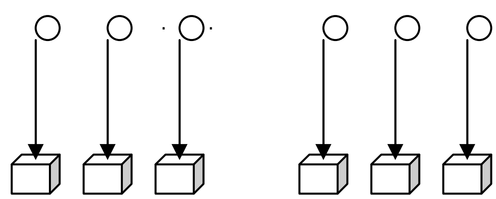
Veamos qué más podemos hacer con la ayuda de la partición de fracciones.

Continuemos realizando multiplicaciones de fracciones mediante la partición de éstas, ahora multiplicaremos fracciones por el número uno, esto es algo que podría parecer irrelevante, pero es todo lo contrario.

En el capítulo anterior definimos a las fracciones como pares ordenados de números enteros, de la forma *n/m*, con la única restricción de que *m* fuera diferente de cero. Hagámonos ahora la siguiente pregunta: ¿qué sucedería si *n* fuera igual a *m*, *n* = *m* ?, ¿cómo sería nuestra fracción?, ¿cuál sería su representación?

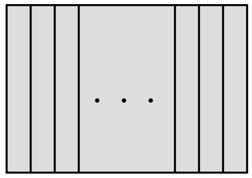
Si se diera el caso de tener *n* = *m*, la fracción tendría la siguiente forma *n*/*n ó m*/*m*. Pero ¿qué expresa una fracción como ésta?, ¿qué información nos proporciona?

Recordemos, del capítulo anterior, la interpretación como cociente de las fracciones. Supongamos que tenemos la fracción *n*/*n*, interpretándola como cociente, la fracción nos indica que si tenemos un número *n* de objetos, realizaremos la repartición de estos entre un número *n* de personas u objetos, por ejemplo, tenemos *n* cantidad de canicas y las queremos repartir en *n* cantidad de cajas, siendo la misma cantidad de canicas que de cajas, toca a cada caja exactamente una canica.



concluimos entonces que *n/n* = 1 para cualquier *n* diferente de cero.

Ahora para conocer la representación gráfica de la fracción *n/n*, hagamos uso de la interpretación de las fracciones que involucra al todo y sus partes. Tomemos la unidad, representada por un rectángulo, y dividámosla en *n* partes iguales y tomemos la misma cantidad de partes.

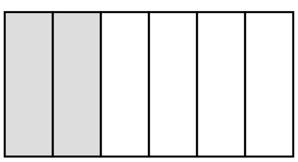


Dividir la unidad en *n* partes iguales y tomar *n* de esas partes, es tomar la unidad completa, lo que nos lleva otra vez a que *n/n* = 1 para cualquier *n* diferente de cero.

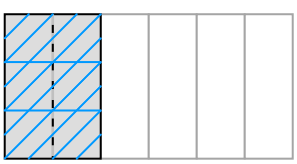
Podemos decir que cualquier fracción de la forma *n/n* , *n*≠ 0, es una manera de representar al número 1 como una fracción, por ejemplo 2/2, 4/4, 12/12, 7/7, etcétera.

Trabajemos con la fracción 2/6, multipliquemos esta fracción por 1, representándolo, por ejemplo, con la fracción 3/3.

Realicemos la multiplicación como recién hemos aprendido, partiendo fracciones, y obtengamos 3/3 de 2/6.



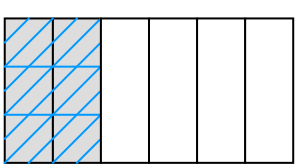
Tomemos 2/6 de la unidad.



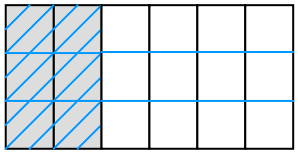
A continuación tomemos la fracción 3/3 de la fracción 2/6.

Veamos ahora qué relación tiene la fracción 3/3 de 2/6 con la unidad inicial.

Representemos nuevamente la fracción 2/6 y al mismo tiempo la fracción 3/3 de 2/6, todo esto en la misma unidad.



Extendamos a toda la unidad la partición en tercios realizada a la fracción 2/6.

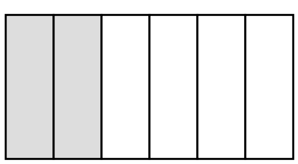


La unidad quedó dividida en 18 partes iguales y hemos tomado de ella la fracción 6/18. Así, tomar 3/3 de 2/6 es lo mismo que tomar 6/18 de la unidad, lo que en términos de multiplicaciones nos dice que 6/18 es el resultado de multiplicar los factores 2/6 y 3/3, recordemos que 3/3 es una manera de escribir al 1 en forma de fracción, es decir, 3/3 = 1 .

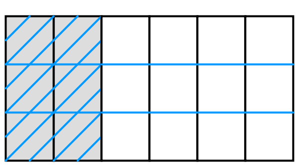
Sabemos que cualquier número multiplicado por 1 siempre queda igual y eso lo hemos constatado muchas veces.

Sabemos que 3/3 = 1, entonces (2/6) x 1 es lo mismo que (2/6) x (3/3) pero (2/6) x 1 = 2/6 y (2/6) x (3/3) = 6/18, esto no parece ser lo mismo ¿qué está sucediendo?, para averiguarlo hagamos lo siguiente:

Comparemos la representación gráfica de la fracción 2/6, o lo que es lo mismo (2/6) x 1, con la representación gráfica de 6/18, que es lo mismo que (2/6) x (3/3) y que 3/3 de 2/6.



Es importante representar ambas fracciones en unidades idénticas en forma y tamaño, para lograr una mejor y real comparación.



Las gráficas nos muestran que ambas fracciones, 2/6 y 6/18, representan la misma parte de la unidad.

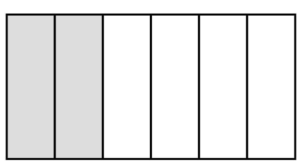
En matemáticas cuando dos o más fracciones representan la misma parte de la unidad, se dice que son equivalentes.

Dependiendo del contexto en el que se esté trabajando, las fracciones que sean equivalentes representarán la misma parte de una figura (área), la misma longitud de un segmento de recta, la misma cantidad de elementos, etcétera.

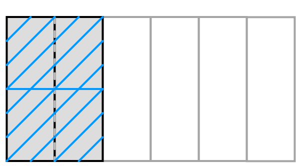
La palabra equivalentes se refiere a que dos o más cosas tienen el mismo valor (equi = igual, valente = valor), aplicándolo a la situación que nos ocupa, que 2/6 y 6/18 sean equivalentes quiere decir que valen o representan la misma parte de la unidad, de este modo hacer referencia a 2/6 ó 6/18 es representar la misma fracción de la unidad.
Por lo anterior, concluimos que (2/6) x 1 es igual que (2/6) x (3/3) que es 2/6.

¿Sucederá lo mismo si en lugar de usar 3/3 utilizamos cualquier otra representación del 1 como fracción? Averigüémoslo.

Multipliquemos nuevamente la fracción 2/6 por 1, sólo que en esta ocasión escribiremos al 1 como 2/2.

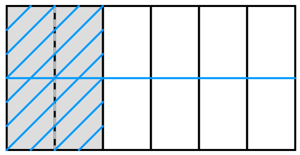


Primero consideremos la gráfica de la fracción 2/6.



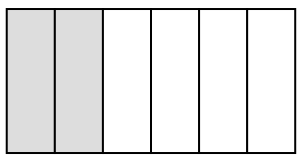
Obtengamos la fracción 2/2 de la fracción 2/6, o dicho de otro modo, multipliquemos las fracciones 2/6 y 2/2.

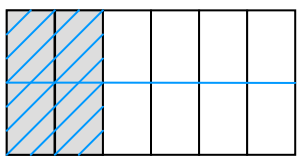
Veamos las gráficas de las fracciones 2/6 y 2/2 de 2/6 representadas en la unidad inicial.



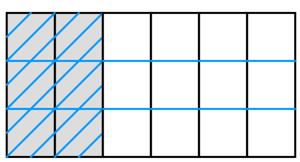
Extendemos a esta gráfica la partición en medios efectuada a la partición 2/6. Obtenemos así la representación de la fracción 4/12, lo que nos muestra que es lo mismo tomar 2/2 de 2/6 que tomar 4/12 de la unidad, donde 4/12 es el resultado de la multiplicación de 2/6 x 2/2.

Ya hemos multiplicado la fracción 2/6 por la fracción 3/3 y por la fracción 2/2, veamos que podemos concluir de esto.





Notemos, primeramente, que 2/6 y 4/12 representan la misma parte de la unidad, esto es, son equivalentes.



y comparando las gráficas anteriores con la gráfica de la fracción 6/18, vemos que todas representan la misma parte de la unidad, entonces son todas equivalentes.

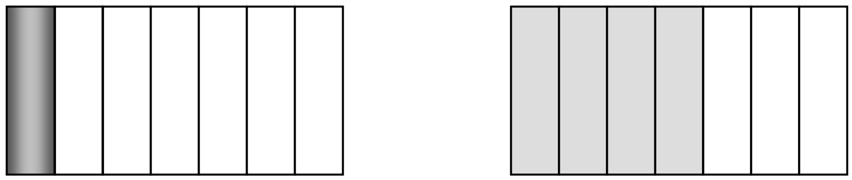
Si continuamos aplicando este proceso podríamos encontrar más fracciones equivalentes a la fracción 2/6, tantas como diferentes maneras haya de escribir al 1 como una fracción.

1 = 2/2, 3/3, 4/4, 5/5, 6/6, 7/7, 8/8,…

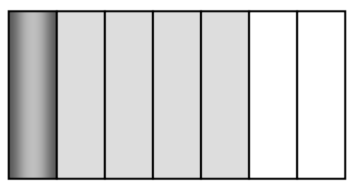
Mediante la partición de fracciones hemos podido, hasta el momento, multiplicar fracciones y encontrar fracciones equivalentes multiplicando por 1, escrito éste como una fracción, y con esto podemos hacer aún más operaciones, como por ejemplo sumar y restar.

Hagamos algunos ejemplos de cómo realizar sumas ayudándonos con la partición de fracciones.

Pensemos en las fracciones 1/7 y 4/7:



Tenemos dos representaciones gráficas iguales de la unidad divididas en el mismo número de partes iguales cada una, además las partes de una y de otra unidad son iguales también, por lo que es posible unir las fracciones de cada unidad y darle nombre a la nueva fracción que se forme.

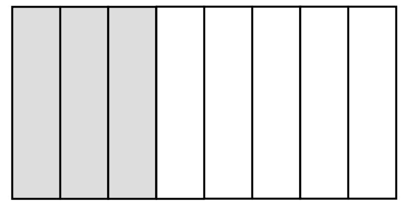


$$\frac{1}{7} + \frac{4}{7} = \frac{5}{7}$$

Este fue un ejemplo cuya solución se dio de manera directa y de igual manera se procede para sumar otras fracciones con común denominador, pero ¿cómo se hacen las adiciones de fracciones con diferentes denominadores?. Hagamos un ejemplo.

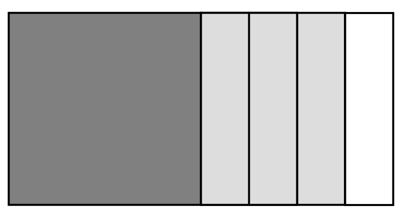
Consideremos las fracciones 1/2 y 3/8 para realizar su suma, representemos dos veces a la unidad, en una de ellas hagamos la partición en medios para obtener la fracción 1/2 y en la otra la partición en octavos para representar a la fracción 3/8.

1/2



3/8

Sumar estas fracciones es, gráficamente, unir en una misma unidad las partes que se han tomado de cada unidad para obtener una nueva fracción. Pero notemos que en este ejemplo dividimos de forma diferente cada unidad, si unimos estas partes, tendríamos una unidad dividida en partes de diferentes tamaños:



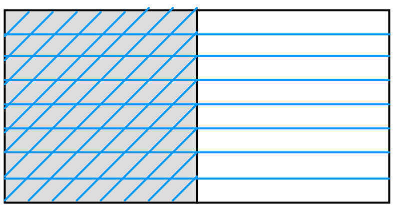
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$$

Pero ¿cómo llamamos a esta nueva fracción?, si de acuerdo a nuestra definición de fracción, la unidad es dividida en el número de partes iguales que indique el denominador y éste determina el nombre de cada una de esas partes.

En este ejemplo tenemos fracciones con denominador diferente y para poder sumarlas debemos buscar fracciones equivalentes a 1/2 y a 3/8, fracciones equivalentes que nos dividan a las dos unidades en el mismo número de partes iguales cada una.

Sabemos que para obtener una fracción equivalente a otra, debemos multiplicar a la fracción por 1, escrito como fracción, pero hay muchas maneras de hacer esto, ¿cómo saber cuál nos funcionará?.

Tenemos una unidad dividida en dos partes iguales, de la que hemos tomado 1/2, y otra unidad dividida en ocho partes iguales, de la que hemos tomado 3/8, para que ambas unidades, que son iguales en tamaño y forma, sean divididas en el mismo número de partes debemos efectuar en cada una de ellas las mismas particiones.

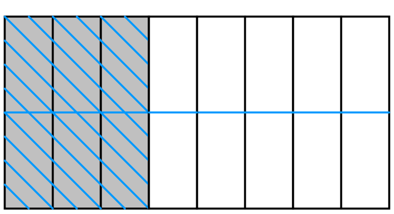


Multipliquemos la fracción 1/2 por 8/8 y extendamos esta partición en octavos a la unidad completa.

La unidad ha quedado dividida en 16 partes iguales de las que se han tomado 8, hemos obtenido la representación de la fracción 8/16, fracción que es equivalente a 1/2.

En este caso elegimos escribir al 1 como 8/8 pues de este modo se realiza la partición en ocho partes iguales de la unidad, que ya cuenta con la partición en dos partes iguales.

Para trabajar con la unidad dividida en ocho partes iguales elegiremos escribir al 1 como 2/2, y así realizar en esta unidad las dos particiones con las que estamos trabajando, en ocho y en dos.



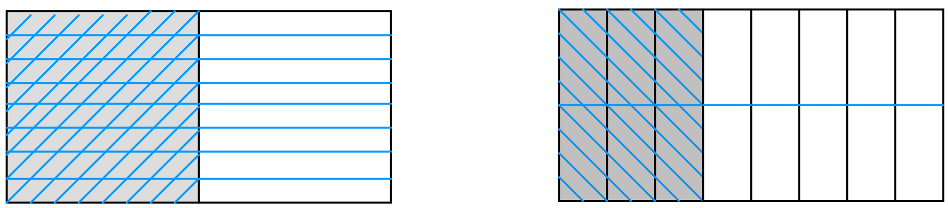
Multipliquemos la fracción 3/8 por 2/2 para obtener una fracción equivalente a la primera. Prolonguemos esa partición a la unidad completa.

Después de las dos particiones la unidad ha quedado dividida en 16 partes iguales, de las que tomamos 6, es decir 6/16, que es una fracción equivalente de 3/8.

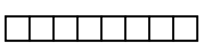
Ya tenemos las fracciones equivalentes a 1/2 y a 3/8, fracciones que tienen ambas el mismo denominador, además sabemos que las fracciones equivalentes tienen o representan el mismo valor por lo que es válido hacer la sustitución de 1/2 por 8/16 y de 3/8 por 6/16, tenemos entonces que:

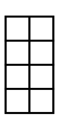
$$\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{8}{16}+\frac{6}{16}=\frac{14}{16}$$

y también tenemos a las dos unidades divididas en el mismo número de partes.

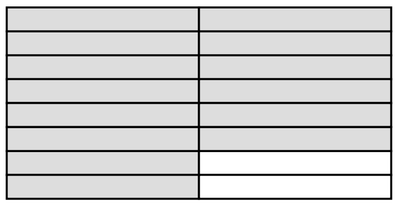


Aunque la forma de las partes en que se ha dividido una y otra unidad sean diferentes, estas son equivalentes en cuanto a la superficie que ocupan en la unidad. Comparémoslas, tomando como unidad de medida este cuadro . 

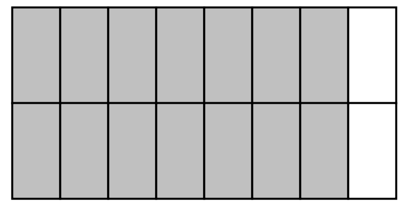
 En esta figura caben ocho unidades cuadradas de medida.

 En esta figura caben ocho unidades cuadradas de medida.

Por lo anterior podemos concluir que es lo mismo usar una u otra forma de partir a la unidad en 16 partes iguales para representar la suma de 8/16 y 6/16, pues se estaría representando la misma superficie de la unidad.

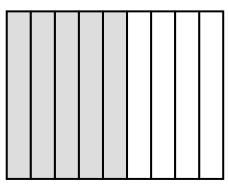


14/16



14/16

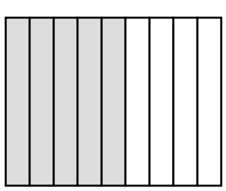
Revisemos ahora qué sucede con la resta de fracciones.
Consideremos las siguientes fracciones y sus representaciones gráficas:

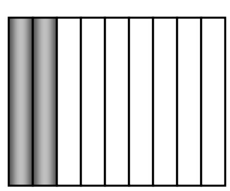


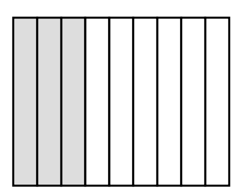
5/9

2/9

La resta de 2/9 a 5/9, nos indica que de 5 partes con las que contamos, donde cada una representa 1/9 de la unidad, dejemos de contar 2, lo que nos da como resultado una nueva fracción de la unidad. Realizar el proceso anterior es posible pues estamos trabajando con objetos similares, las partes que manejamos son del mismo tamaño, por lo que tenemos de donde tomar los 2/9 que se nos están pidiendo, sin que la partición con la que cuenta la unidad sea alterada. Gráficamente tenemos lo siguiente:





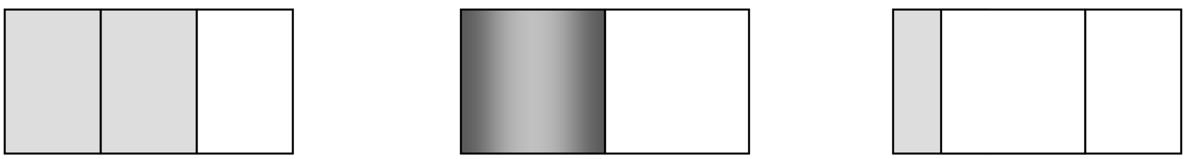


5/9 - 2/9 = 3/9

Veamos ahora como proceder cuando tenemos la resta de fracciones con diferente denominador. Pensemos en la siguiente resta de fracciones:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$$

Hagamos gráficamente esta resta para ver qué sucede si la hacemos directamente.

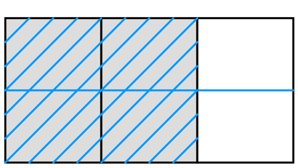


2/3 - 1/2 = ¿?

Realizar la resta directamente nos ha dado como resultado la parte sombreada en la unidad, que tal vez si vemos cuántas veces cabe en la unidad podamos darle un nombre, pero la unidad ha quedado dividida en partes desiguales, lo que contradice nuestra definición de fracción.

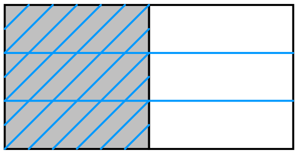
Debemos buscar entonces fracciones equivalentes a las dadas, que nos proporcionen unidades divididas en el mismo número de partes. Busquémoslas usando la partición de fracciones.

Las representaciones del 1 como fracción las elegiremos de acuerdo al criterio explicado en la parte de suma de fracciones, es decir, tenemos una unidad divida en medios, por lo que representaremos al 1 como 2/2; también tenemos otra unidad dividida en tercios, por lo que representaremos al 1 como 3/3.



Multipliquemos la fracción 2/3 por 2/2 y extendamos la partición que se genere con esta multiplicación a la unidad completa.

La unidad ha quedado dividida en seis partes iguales, de las que se han tomado cuatro, esto es tenemos representada la fracción 4/6 que es equivalente a 2/3.



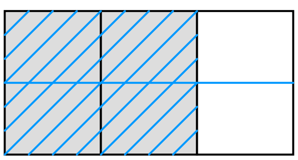
Multipliquemos la fracción 1/2 por 3/3, extendiendo también la partición generada a la unidad completa.

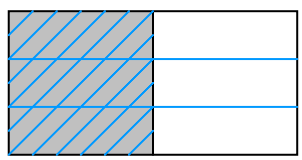
La unidad ha quedado dividida en seis partes iguales de las que hemos tomado 3, es decir, tenemos la fracción 3/6 que es equivalente a 1/2.

Tenemos ya fracciones con igual denominador, podemos entonces proceder a efectuar la resta de fracciones sustituyendo 2/3 por 4/6 y 1/2 por 3/6.

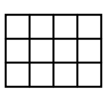
$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

Tenemos también unidades divididas en el mismo número de partes

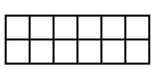




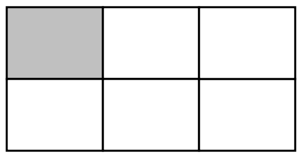
Aunque la forma de las partes de una y otra unidad no son iguales, la superficie que ocupa cada parte en su respectiva unidad es la misma, comprobémoslo:



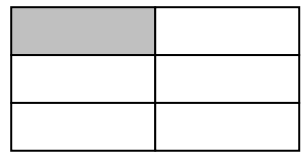
Ambas partes tienen la misma superficie 12 unidades cuadradas.



Por lo anterior podemos concluir que es lo mismo usar una u otra forma de dividir a la unidad para representar la resta de 4/6 y 3/6, pues se estaría representando la misma superficie de la unidad.



1/6



1/6

Bien, con base en la partición de fracciones y sus representaciones gráficas, se ha pretendido hacer un poco menos complicado el aprendizaje de algunos conceptos relacionados con las fracciones, tales como: suma, resta y multiplicación de fracciones, común denominador y equivalencia de fracciones, los cuales hemos trabajado con el planteamiento anterior.

Actividades Propuestas.

El siguiente bloque de actividades se propone como apoyo para reforzar la suma y resta de fracciones, así como el concepto de fracciones equivalentes; también propician la abstracción de las representaciones gráficas de fracciones. Están pensadas para alumnos de 4to a 6to grados, sin embargo se recomienda que de acuerdo al grado del grupo se decida con qué fracciones es más adecuado trabajar. Estas actividades pueden ser de interés para los alumnos pues tienen bases lúdicas.

Actividad 2.1 Usando materiales concretos de fácil manejo, cada niño debe formar un conjunto de 16 objetos. De ser posible que el profesor realice las operaciones que vaya indicando en el pizarrón.

- Pedir al niño que separe su conjunto de objetos en dos partes iguales.

½ ½

- En este momento es adecuado hacer reflexiones como: si junto estas dos partes tengo al conjunto inicial, al total y anotar en el cuaderno un medio más un medio es igual a dos medios y esto es igual a un entero y su simbolización ½ + ½= 2/2 = 1.
- Repetir el procedimiento dividiendo el conjunto inicial en cuartas partes iguales y en octavas partes iguales, realizando el mismo tipo de reflexiones y anotaciones.

Actividad 2.2 Para llevar acabo esta actividad, el grupo se organizará en equipos de cuatro niños. El material son juegos que constan de 20 tarjetas y requiriéndose un juego de 20 tarjetas para cada equipo.

La elaboración de las tarjetas es como sigue: cada tarjeta tendrá escrita una fracción en cada una de sus caras. En una cara de la tarjeta se escribirá una fracción cualquiera y en la otra cara, la fracción que falta para que al sumarlas o restarlas el resultado sea uno. Por ejemplo, si una tarjeta tiene en una cara 1/3, en la otra debe tener 2/3 pues 1/3 + 2/3 = 3/3 =1. Si en una cara la tarjeta tiene 9/5, en la otra cara debe tener 4/5 pues 9/5 – 4/5= 5/5 =1.

$$\boxed{\frac{1}{3}} \qquad \boxed{\frac{2}{3}} \qquad\qquad \boxed{\frac{1}{3}} \qquad \boxed{\frac{2}{3}} \qquad \boxed{\frac{3}{3}}$$

Cara uno cara dos

Para hacer diferencia entre una y otra cara de la tarjeta, se escribirá en una cara la fracción de rojo y en la otra de azul, esto servirá para indicar a los niños por qué cara de la tarjeta deben comenzar el juego, para evitar que caigan en situaciones como la siguiente: 4/7 – 11/7, operación que para los niños de primaria aún no tiene sentido.

- Se organiza el grupo en equipos de cuatro niños y se entrega a cada equipo un juego de 20 tarjetas, se pide que las revuelvan y las coloquen una sobre otra con el mismo color hacía arriba, color elegido para evitar situaciones como la mencionada en el párrafo anterior.
- Por turnos, cada integrante del equipo toma una tarjeta y lee la fracción que tiene a la vista, indicando si es una fracción propia o una fracción impropia para determinar si debe sumar o restar otra fracción para obtener a la unidad. En el caso de ser una fracción propia la operación a realizar es una suma, en el caso de una fracción impropia es una resta la operación a efectuar.

- Una vez establecida la operación a realizar, el niño dice qué fracción debe sumar o restar para que el resultado sea uno. Para verificar voltea la tarjeta. Si acertó se queda con la tarjeta, de lo contrario la coloca debajo de las demás. El juego termina cuando se acaban las tarjetas.

Esta actividad tiene el propósito de que los alumnos adquieran la habilidad para calcular mentalmente la fracción que sobra o falta para que el resultado sea uno. Es posible que para llegar a este punto sea necesario realizar constantemente actividades como las anteriores.

Actividad 2.3 El material para esta actividad consta de acetatos tamaño carta (el tamaño puede variar según las posibilidades) y marcadores de agua para acetato, de diferentes colores. La cantidad de acetatos dependerá de las partes en que el maestro quiera dividir el entero, por ejemplo, si quiere hacer divisiones hasta cuartos, necesitará 4 acetatos y también dependerá de los equipos que se formen para la realización de la actividad (ver Anexo 2, se sugieren unidades que deben imprimirse o fotocopiarse en acetatos, aunque pueden hacerse a mano).

- Uno de los acetatos se deja tal cual para que represente al entero. Otro de ellos se divide verticalmente en medios con un marcador, otro se divide en tercios verticalmente con un marcador de color distinto a los medios y el último se divide en cuartos verticalmente con un marcador de distinto color a los anteriores.
- Es conveniente que los niños participen en la elaboración de este material, el cual sirve para ver la representación gráfica de las fracciones y sus simbolizaciones correspondientes. Se pueden utilizar también para equivalencia y orden de fracciones.
- El juego consiste en solicitar a los niños que formen equipos, entregándole a cada uno de ellos un juego de acetatos, los que deberán manipular encimando unos con otros para propiciar el intercambio de opiniones al comparar las diferentes fracciones.

Actividad 2.4 El material para esta actividad consta de acetatos tamaño carta (el tamaño puede variar según las posibilidades) y marcadores de agua para acetato, de diferentes colores (se pueden utilizar los acetatos de la actividad 2.3). La cantidad de acetatos dependerá de las partes en que se quiera dividir al entero o unidad. Por ejemplo, si se quiere trabajar con fracciones hasta cuartos, se necesitarán 6 acetatos para cada participante o equipo que se forme (ver Anexo 2, se sugieren unidades que deben imprimirse o fotocopiarse en acetatos, aunque pueden hacerse a mano).

- Dos de los acetatos se dividen con un marcador en medios, una en forma vertical y el otro en forma horizontal. Otros dos se dividen en tercios, una de forma vertical y otro de forma horizontal, con un marcador de color diferente a los medios. Los últimos dos acetatos se dividen en cuartos, uno de forma vertical y el otro horizontal.

  Si se utilizan los acetatos de la actividad 2.3, sólo será necesario dividir 3 acetatos de manera horizontal.
- Es conveniente que los niños participen en la elaboración del material, ya que les sirve para practicar la partición de unidades para obtener fracciones.
- El juego consiste en llevar a cabo el proceso de partir fracciones expuesto en este capítulo, ayudados con los acetatos.

  Ejemplo:

  Pida a los niños la representación de la fracción ½ en el acetato dividido verticalmente. En otro acetato, dividido horizontalmente, pida a los niños que representen la fracción 1/3.

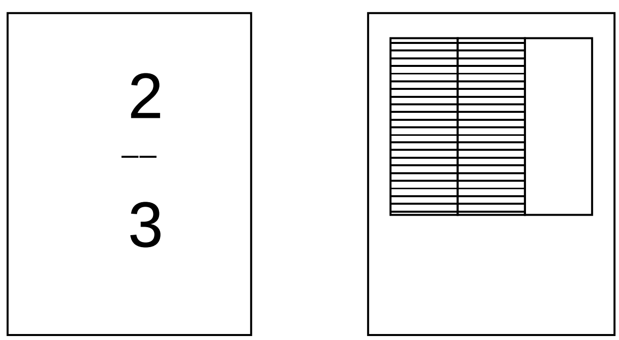
  Es importante representar cada fracción de color diferente para evitar confusiones.

  A continuación pida a los niños que sobrepongan los acetatos con la representación de dichas fracciones y que identifiquen qué nueva fracción ha quedado representada, es decir, la constituida por dos colores.

- Se debe hacer notar a los niños que la nueva fracción obtenida es el resultado de multiplicar las dos primeras fracciones.

Actividad 2.5 Para llevar a cabo esta actividad se elaborarán 66 tarjetas de cartoncillo de 5 cm. de ancho por 6 cm. de largo, el tamaño es sólo una sugerencia, puede adecuarse al gusto o a las necesidades de cada grupo o profesor.

En una cara de la tarjeta se escribirá la representación numérica de una fracción y por la otra cara de la tarjeta se representará la misma fracción en un rectángulo, procurando que éstos sean del mismo tamaño en todas las tarjetas para facilitar la comparación entre rectángulos de diferentes tarjetas. El diseño de las tarjetas es como en el siguiente ejemplo:



cara 1 cara 2

En cada tarjeta se pondrá una de las siguientes fracciones (ver Anexo 1):

½,
1/3, 2/3,
¼, 2/4, ¾,
1/5, 2/5, 3/5, 4/5,
1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6,
1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7,
1/8, 2/8, 3/8, 4/8, 5/8, 6/8, 7/8,
1/9, 2/9, 3/9, 4/9, 5/9, 6/9, 7/6, 8/9,
1/10, 2/10, 3/10, 4/10, 5/10, 6/10, 7/10, 8/10, 9/10,
1/11, 2/11, 3/11, 4/11, 5/11, 6/11, 7/11, 8/11, 9/11, 10/11,
1/12, 2/12, 3/12, 4/12, 5/12, 6/12, 7/12, 8/12, 9/12, 10/12, 11/12

Esta actividad tiene como objetivo favorecer en el estudiante, mediante la representación con gráficas, la comparación de fracciones para establecer el orden y las equivalencias de las mismas, así como facilitar la representación gráfica mentalmente de las fracciones mediante el manejo continuo de las tarjetas. Es posible que sustituyendo la representación de las fracciones mediante rectángulos por su representación en una recta sea mejor la asimilación del orden de fracciones y sería una buena oportunidad para hacer un poco menos dependientes a los estudiantes de la representación de fracciones usando círculos, cuadros, etc. La decisión se deja al criterio del profesor.

<u>Versión 1.</u>

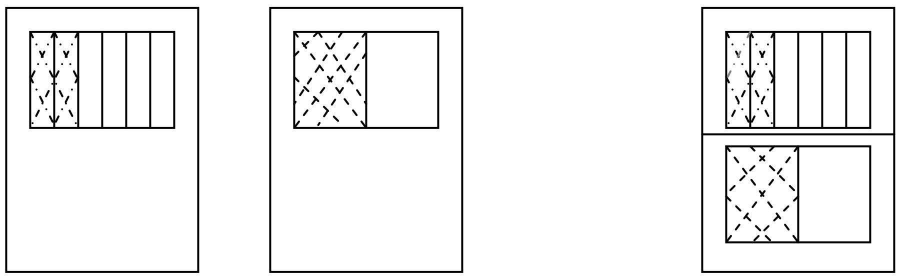
Para dar comienzo a la actividad, se organiza al grupo en equipos de tres estudiantes, cada equipo tendrá su juego de 66 tarjetas. Después de revolver las tarjetas se colocan una sobre otra con la cara que tiene escrita la fracción hacia arriba (cara 1) y se decide qué integrante del equipo iniciará el juego, éste tomará del montón de tarjetas dos de ellas, poniéndolas sobre la mesa sin voltearlas, es decir con la cara que tiene la fracción escrita hacia arriba, y dirá cuál de esas fracciones es mayor que la otra o si son iguales, después del juicio emitido por el estudiante se voltearán las tarjetas para comprobar con la ayuda de sus gráficas si está en lo correcto o no.

Ejemplo:

Supongamos que el estudiante sacó del montón de tarjetas las dos siguientes:

$\boxed{\frac{2}{6}}$ $\qquad\qquad$ $\boxed{\frac{1}{2}}$

Después de haber emitido su juicio comparará las gráficas y sabrá si acertó o no en su valoración y tendrá la oportunidad de corregir sus apreciaciones.



2/6 1/2 comparación

El estudiante que acierte en su juicio se quedará con las dos tarjetas, en caso de que no acierte en la comparación de las fracciones, colocará las dos tarjetas debajo de las que todavía quedan en el montón, ahora toca el turno a otro compañero del equipo quien también va a tomar dos tarjetas y deberá valorar cuál de las dos fracciones en sus tarjetas es mayor o si son iguales, comparará y se quedará con las tarjetas si su valoración fue acertada, sino regresará las tarjetas al montón y cederá el turno al tercer miembro del equipo que procederá a hacer lo mismo que sus compañeros. Este procedimiento continua hasta agotar el total de las tarjetas, de vez en cuando se deberán revolver las tarjetas para evitar lo más posible que salgan parejas de tarjetas ya conocidas por los estudiantes.

Versión 2.

Haciendo algunas variaciones a esta actividad se puede propiciar que los estudiantes identifiquen qué fracciones son iguales (equivalentes), mediante la comparación de sus gráficas.

En esta variante el maestro organiza al grupo de nuevo en equipos de tres estudiantes, pero ahora las tarjetas se colocan sin encimarlas, una al lado de la otra sobre la mesa con la fracción escrita hacia arriba. Se deciden turnos para jugar entre los integrantes de cada equipo y a continuación el estudiante que tenga el primer turno para jugar elegirá dos tarjetas cuyas fracciones él considere que son iguales (equivalentes), para saber si está en lo correcto respecto a su valoración volteará las tarjetas hacia la cara en que ésta tiene la gráfica de la fracción correspondiente y las comparará.

Cuando algún estudiante acierte en su apreciación se quedará con las tarjetas correspondientes, en caso contrario devolverá las tarjetas al lugar de donde las tomó. Habiendo acertado o no el primer jugador, cederá su turno al segundo jugador que realizará el mismo procedimiento de elegir dos tarjetas cuyas fracciones considere que son iguales, al finalizar éste su turno, cederá su turno al tercer jugador que repetirá el mismo procedimiento. La actividad termina cuando se agotan las tarjetas.

Versión 3.

En esta versión de la actividad se organizará el grupo en equipos de dos estudiantes, repartiendo el juego de 66 tarjetas entre los dos integrantes de cada equipo, es decir, a cada integrante del equipo le tocarán 33 tarjetas.

Es indispensable que antes de comenzar la actividad cada jugador tenga conciencia de las fracciones que tiene en cada una de sus tarjetas, de ser posible que las tenga a la vista.

Para iniciar la actividad, uno de los jugadores pone en el centro de la mesa una de sus tarjetas, cualquiera que él elija, con la fracción escrita a la vista, enseguida el otro jugador buscará entre sus tarjetas la que él crea que es mayor que la que puso su compañero en la mesa, y la pondrá con la fracción escrita a la vista, inmediatamente después voltearán las tarjetas para verificar si es que la segunda tarjeta que se puso en la mesa es mayor que la primera, mediante la comparación de las gráficas correspondientes.

Si el segundo jugador presenta una tarjeta cuya fracción es mayor que la del primer jugador, éste último pierde su tarjeta, quedándosela el segundo jugador, si por el contrario la fracción en la tarjeta del segundo jugador es menor que la del primer jugador, éste último se queda con la tarjeta de su compañero y ahora el segundo jugador pone la tarjeta de su elección sobre la mesa para que el primer jugador presente otra que cuya fracción sea mayor, realizándose el mismo proceso al comparar las gráficas de las fracciones. Las tarjetas que le gane un jugador a otro se apartan de las que tenían al principio del juego. La actividad termina cuando alguno de los jugadores se queda sin tarjetas.

CONCLUSIÓN

Compartir con los demás los conocimientos con los que se cuenta es algo muy grato, pero lograr que esas personas con las que se comparte el conocimiento, desde niños hasta adultos, realmente comprendan lo que se les enseña es aún más gratificante. Sin embargo, no es suficiente tener la buena intención de compartir lo que uno sabe, enseñar es más que presentarse frente a un grupo y hablar sobre un tema. Tener pleno dominio de lo que uno va a decir no es garantía de que se expondrá de forma que sea bien comprendido. En particular en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, el tema de las fracciones es de especial complejidad al trabajarlo con los estudiantes, se requiere una clara comprensión del tema por parte de los docentes y que brinden a sus estudiantes experiencias que les ayuden a enlazar lo que trabajan en la escuela con su vida cotidiana.

Para que un concepto sea mejor asimilado éste debe tener sentido y utilidad para quien lo está aprendiendo, pero el aprendizaje no se da al primer acercamiento que se tenga con ese concepto, es necesario tener varias oportunidades de comprender y construir mejor el conocimiento.

Por lo anterior, con la elaboración del presente trabajo, he intentado aportar propuestas novedosas, divertidas y útiles para la enseñanza de los números racionales, en las que se propicia el trabajo de los estudiantes con materiales concretos, en los primeros acercamientos con las fracciones, para después, ya que se tuvo diversas experiencias con el concepto, promover la abstracción de la representación de las fracciones. Realmente espero que puedan ser utilizadas por algunos docentes en el aula y que puedan cumplir la función para las que fueron diseñadas.

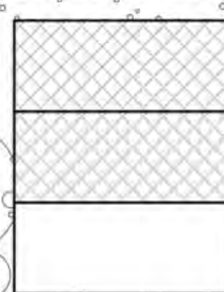
Haber hecho este trabajo significó para mí un gran aprendizaje, pues el buscar la manera de articular un texto accesible para todos me obligó a reflexionar a profundidad y desde diferentes puntos de vista sobre el tema presentado.

Es importante mencionar que parte de este trabajo ha sido presentado a un grupo reducido de docentes, sin embargo, sería interesante trabajarlo con niños de educación primaria, es un propósito que queda por realizar.

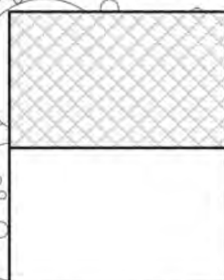
Anexo 1

$\frac{1}{3}$

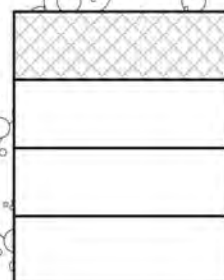
$\frac{2}{3}$



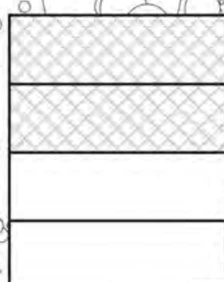
$\frac{1}{2}$



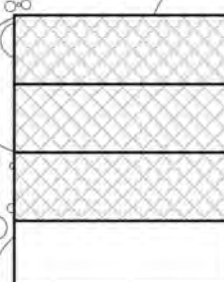
$\frac{1}{4}$



$\frac{2}{4}$

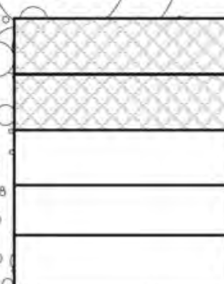


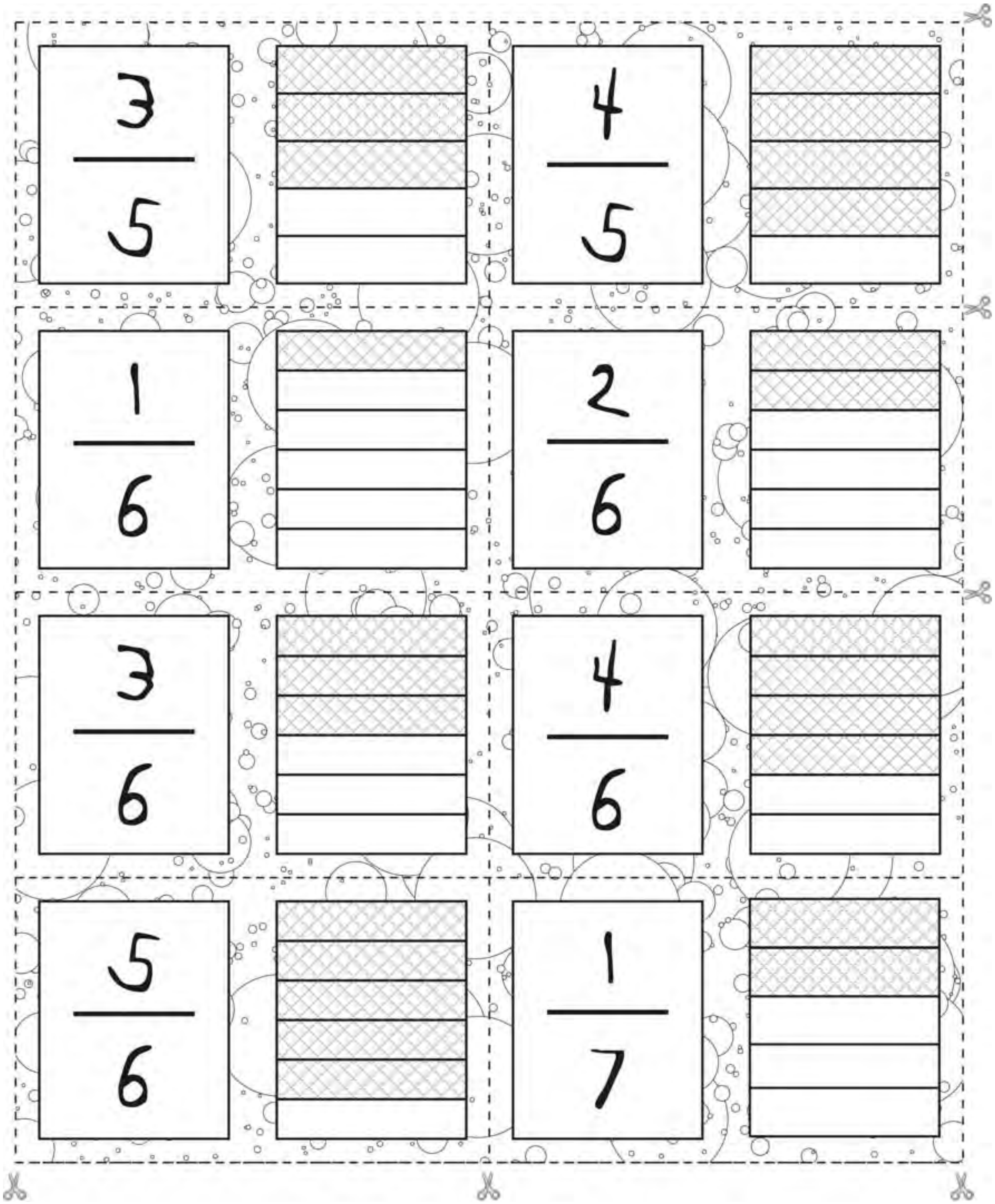
$\frac{3}{4}$



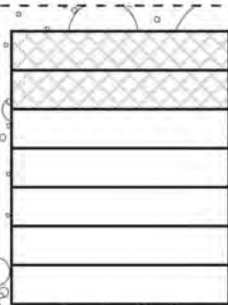
$\frac{1}{5}$

$\frac{2}{5}$

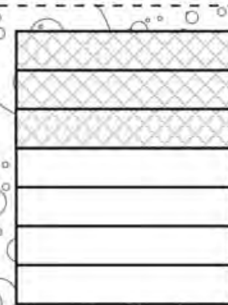



3/5
4/5
1/6
2/6
3/6
4/6
5/6
1/7

$\frac{2}{7}$

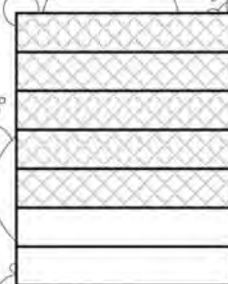


$\frac{3}{7}$



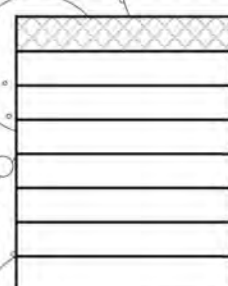
$\frac{4}{7}$

$\frac{5}{7}$

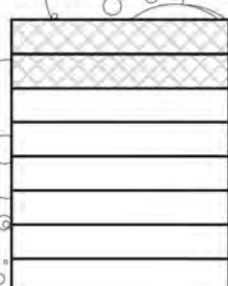


$\frac{6}{7}$

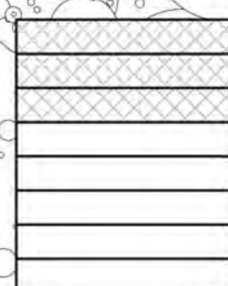
$\frac{1}{8}$

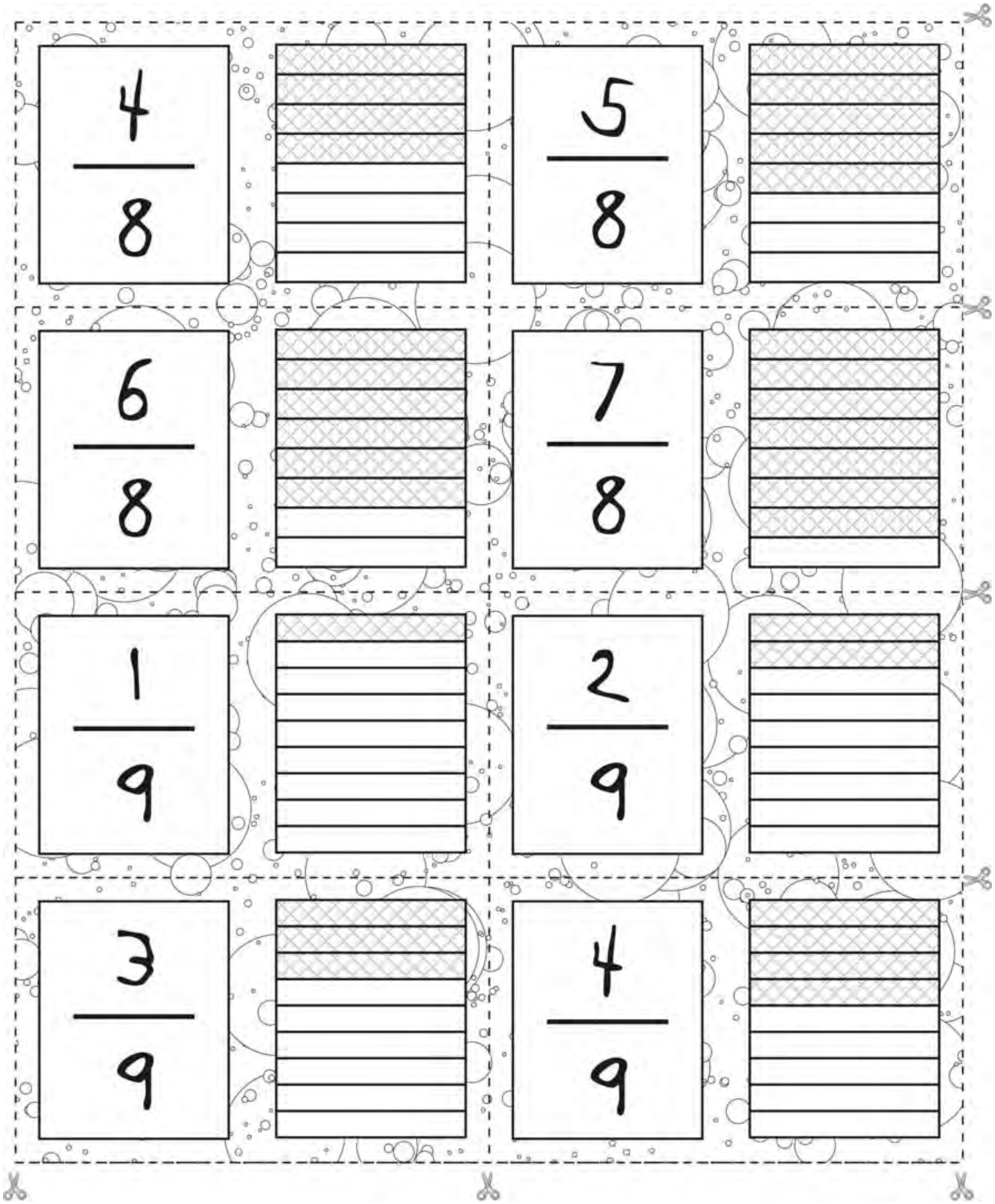


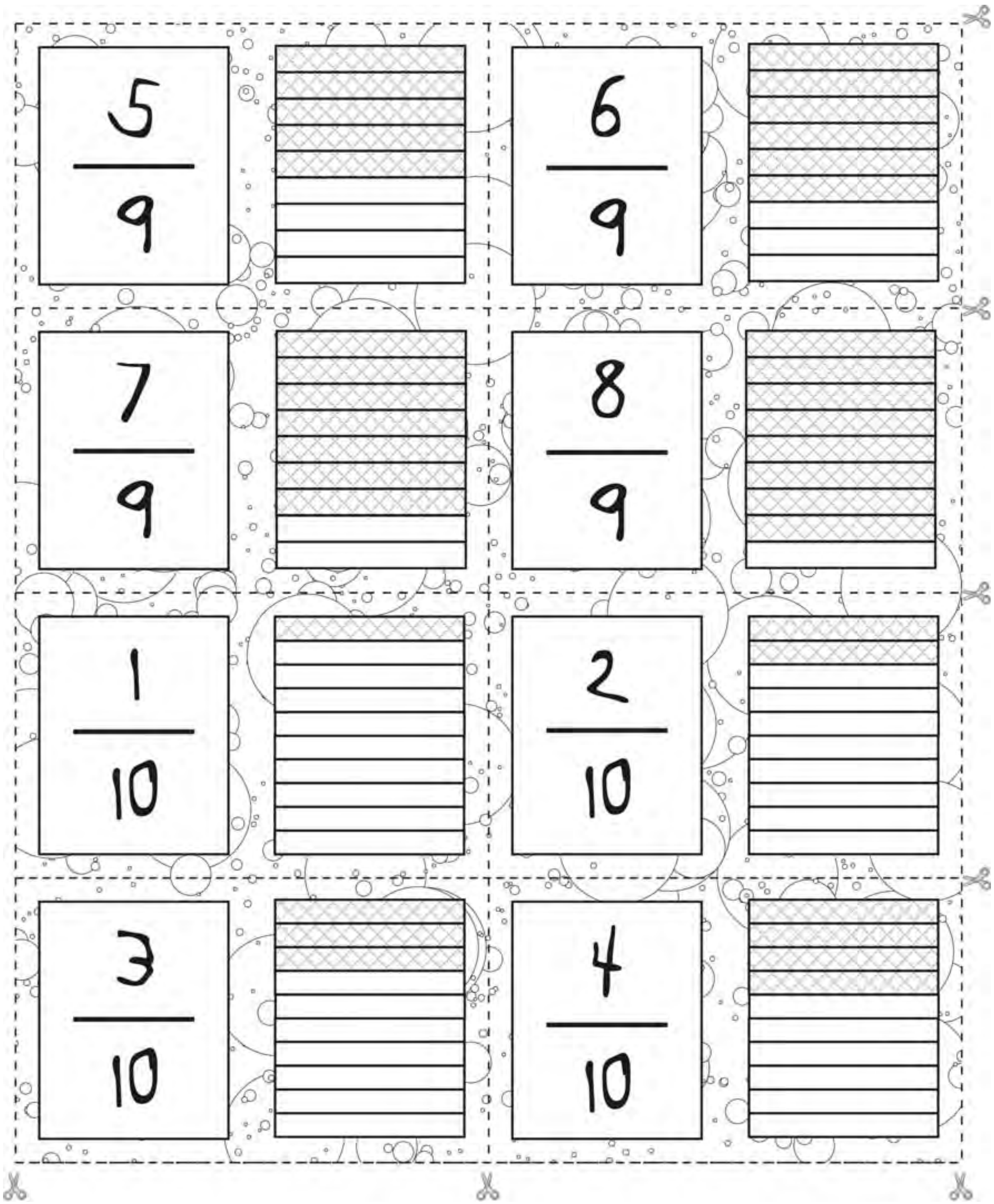
$\frac{2}{8}$

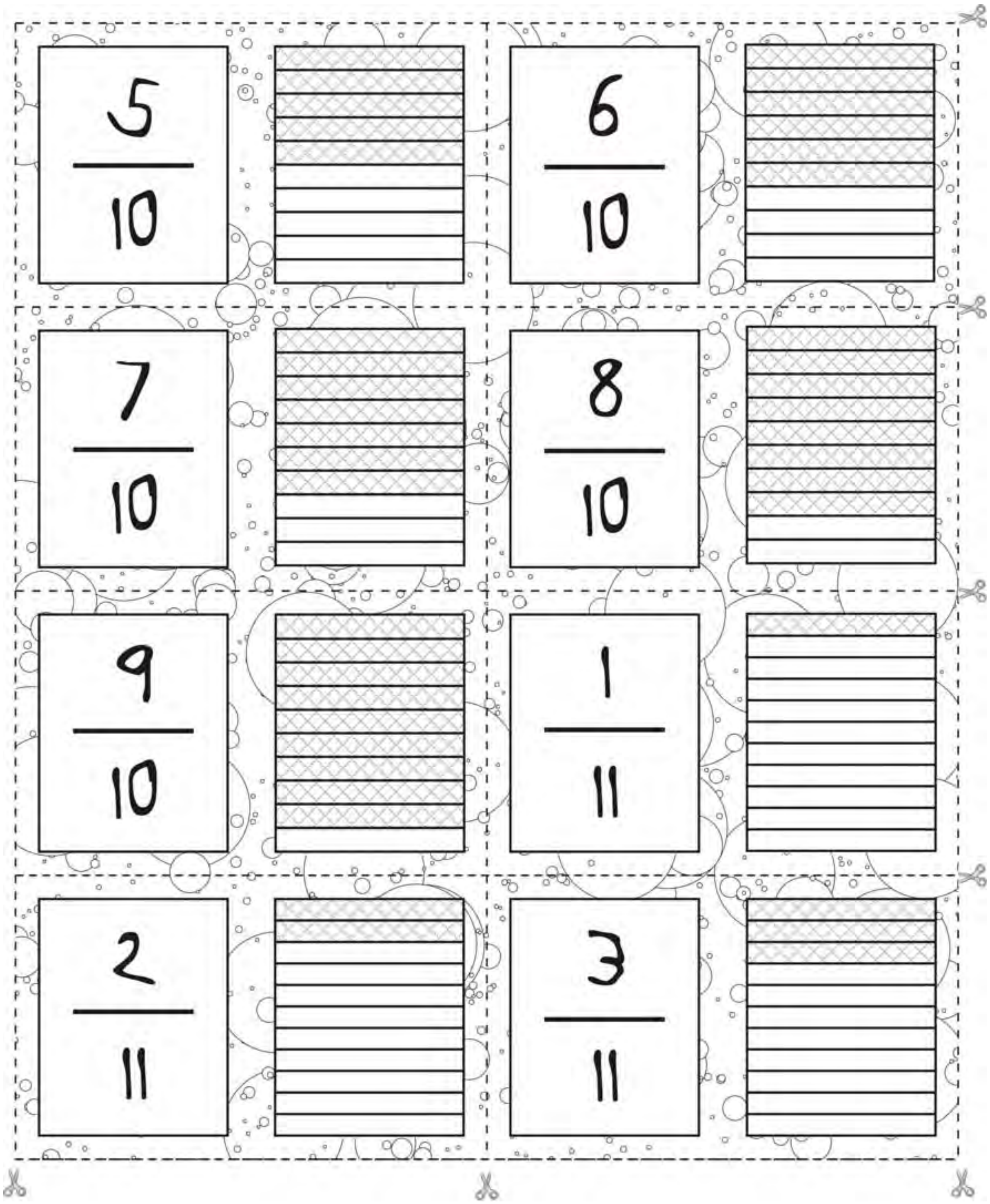


$\frac{3}{8}$

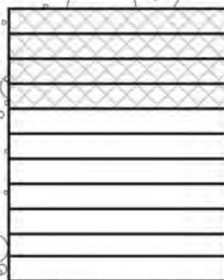



4/8
5/8
6/8
7/8
1/9
2/9
3/9
4/9

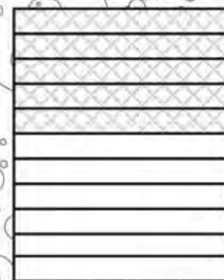

5/9
6/9
7/9
8/9
1/10
2/10
3/10
4/10


5/10
6/10
7/10
8/10
9/10
1/11
2/11
3/11

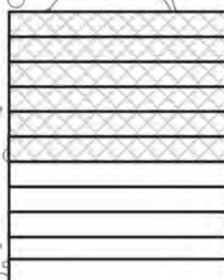
$\frac{4}{11}$



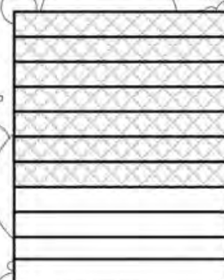
$\frac{5}{11}$



$\frac{6}{11}$

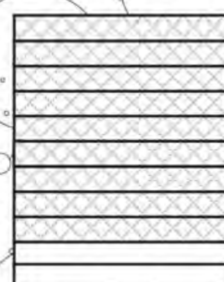


$\frac{7}{11}$



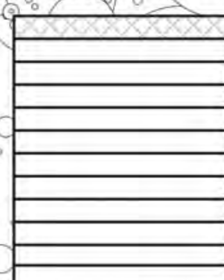
$\frac{8}{11}$

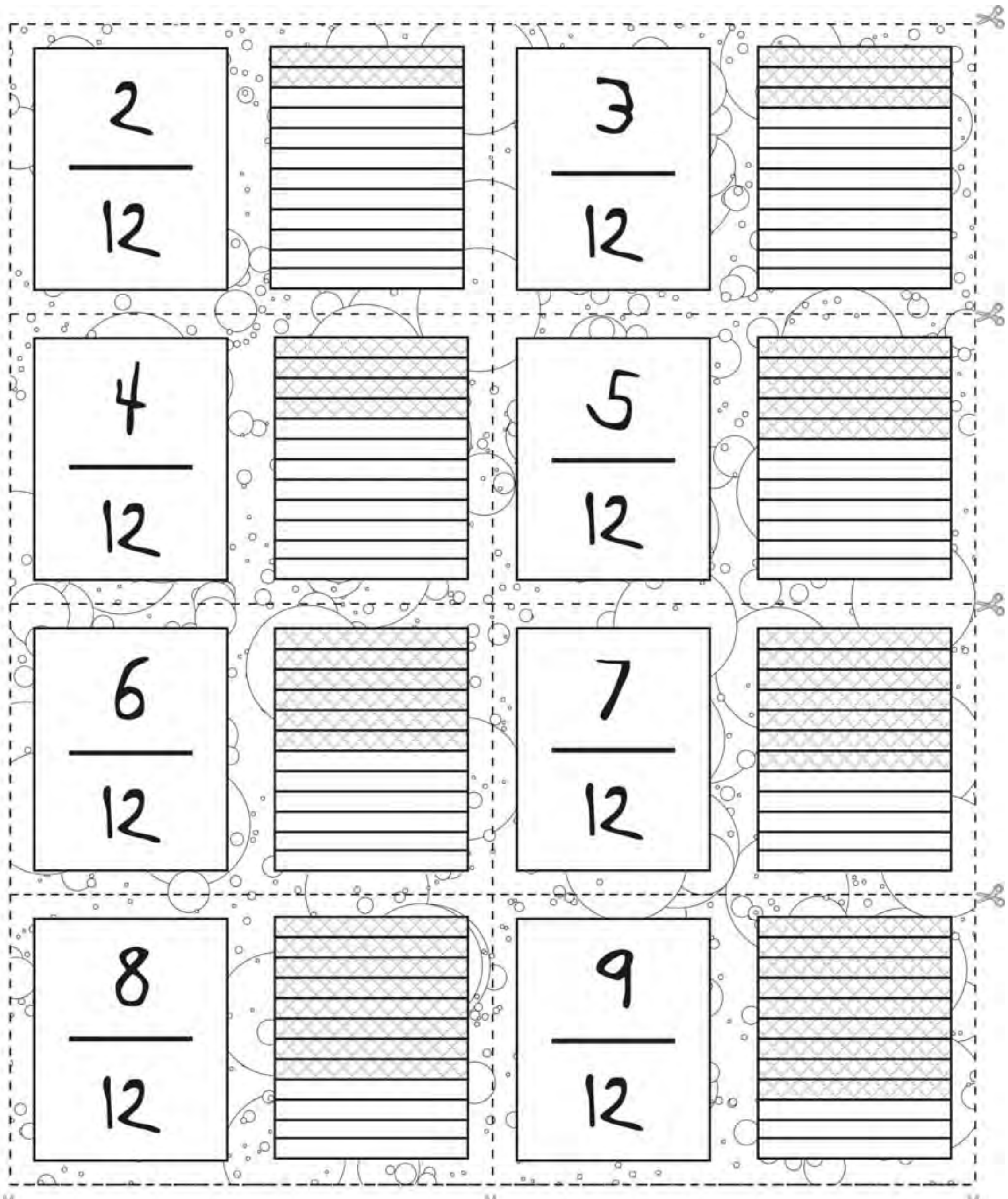
$\frac{9}{11}$

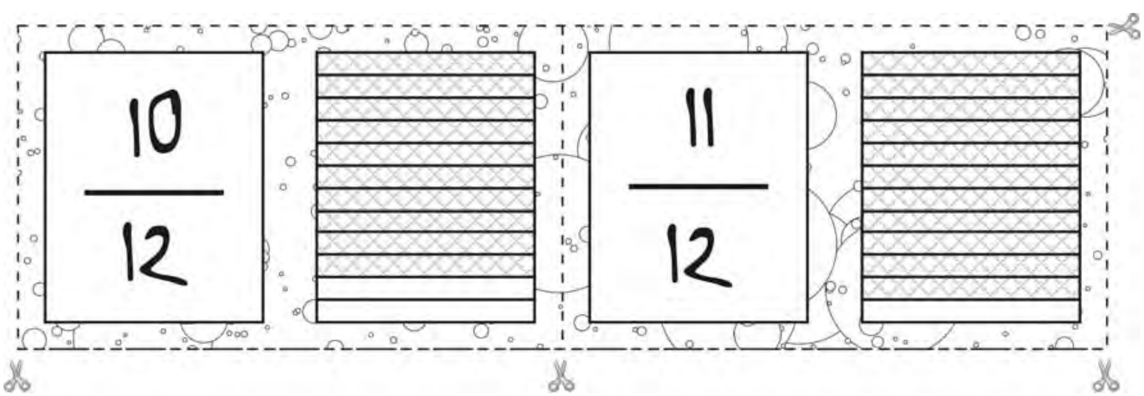


$\frac{10}{11}$

$\frac{1}{12}$




2/12
3/12
4/12
5/12
6/12
7/12
8/12
9/12


10/12
11/12

BIBLIOGRAFIA

- [1] Ardila, R. *Psicología del aprendizaje*. Editorial Siglo XXI, 1991.

- [2] Bishop, Alan J. *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural* Ediciones Paidós Iberica, S.A. 1999.

- [3] Castelnovo, Emma. *Didáctica de la matemática moderna*. Editorial Trillas, 1995.

- [4] Cohen, Dorothy H. *Cómo aprenden los niños.* Editorial Fondo de Cultura Económica, 1997.

- [5] Gómez, Pedro. *Profesor: no entiendo. Reflexión de una experiencia en docencia de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

- [6] Gómez Pedro, Kilpatrick Jeremy, Rico Luis. *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia.* Grupo editorial Iberoamérica, 1995.

- [7] Labinowicz Ed, *Introducción a Piaget. Pensamiento, aprendizaje, enseñanza.* Editorial Addison – Wesley Iberoamericana, 1987.

- [8] Ortiz Rodríguez Francisca. *Matemática. Estrategias de enseñanza y aprendizaje.* Editorial PAX, 2001.

- [9] Papalia *Psicología del desarrollo: De la infancia a la adolescencia.* Editorial McGraw Hill, 1988.