UNIVERSIDAD LOYOLA DE AMÉRICA

SISTEMA INCORPORADO-UNAM CLAVE 8911

ula

"IMPLEMENTACION DE UN CUADERNO DE TRABAJO PARA LAS ASIGNATURAS DE MATEMATICAS I Y II DE LAS PREPARATORIAS INCORPORADAS A LA UNIVERSIDAD AUTONOMA DEL ESTADO DE MORELOS"

T E S I S

QUE COMO REQUISITO
PARA OBTENER EL GRADO DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

P R E S E N T A:
SALOMÓN I HERNÁNDEZ TRIPP

DIRECTOR DE TESIS:
LORENZO ZAMBRANO SALGADO

CUERNAVACA MOR. **AGOSTO DE 2009**

IMPLEMENTACION DE UN CUADERNO DE TRABAJO PARA LAS ASIGNATURAS DE MATEMATICAS I Y II DE LAS PREPARATORIAS INCORPORADAS A LA UNIVERSIDAD AUTONOMA DEL ESTADO DE MORELOS

INDICE

INTRODUCCION

Las asignaturas relacionadas o que forman parte de las Ciencias Exactas, como lo son la Química, la Física y las Matemáticas, en cualquier nivel de estudios, pero principalmente en el nivel medio superior; presentan históricamente un problema de enseñanza-aprendizaje, es decir, el mensaje que transmite el profesor no llega o no lo capta (este trabajo no busca encontrar las fallas en uno u otro actor del proceso educativo) el educando.

Muchos son los factores que intervienen en la enseñanza de las Ciencias Exactas en el nivel medio superior de nuestro país y por ende de nuestro estado: la preparación del catedrático, las bases cognoscitivas del estudiante, el ambiente escolar, la infraestructura institucional, el ambiente familiar, los contenidos programáticos, la bibliografía de apoyo, entre otros.

De acuerdo a esto, podemos observar que el campo de análisis es muy basto y con muchas aristas.

Motivo por el cual, y de acuerdo a mi preparación académica, quiero aportar una propuesta de mejora en uno de estos factores y en un área de estas ciencias, y esto en el marco de los contenidos programáticos de las escuelas de nivel medio superior de mi estado (el estado de Morelos) incorporadas a la Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

En este trabajo de tesis propongo que las asignaturas de Matemáticas I y II del plan de estudios de las preparatorias incorporadas a la Universidad Autónoma del Estado de Morelos sean abarcadas con un solo libro de estudio cada una de ellas.

Sé que hay mucho por hacer y por reinventar en esta área del conocimiento (las matemáticas), pero estoy seguro que este cuaderno de trabajo es un muy buen inicio.

IMPLEMENTACION DE UN CUADERNO DE TRABAJO PARA LAS ASIGNATURAS DE MATEMATICAS I Y II DE LAS PREPARATORIAS INCORPORADAS A LA UNIVERSIDAD AUTONOMA DEL ESTADO DE MORELOS

JUSTIFICACION.

La bibliografía existente, la cual es amplísima, o no contempla todos los temas o es demasiado extensa y contiene temas que no se tocan en el curso presente y lo que es peor: no se verán, en la mayoría de los casos, en ninguna etapa posterior:

"Cada profesor deberá sugerir a sus alumnos la bibliografía básica y de consulta de acuerdo a las estrategias didácticas planeadas por él mismo debido a que no existen textos que concuerden con este nuevo programa"

Con el párrafo anterior la Academia Interescolar de Matemáticas de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos concluye, en su sección de Bibliografía, el Programa de Estudio de las Asignaturas de Matemáticas I y II.

Para reforzar la aseveración de esta Academia, transcribo los contenidos temáticos de las asignaturas de Matemáticas I y II:

Matemáticas I

UNIDAD 1. PREALGEBRA

TEMA	SUBTEMA
1. Teoría de números	Números Primos
	Descomposición de números en factores primos
	Mínimo Común Múltiplo
	Máximo Común Divisor

	Clases de equivalencias: - Entre fracciones comunes - Entre racionales decimales y fracciones comunes (decimales finitos y periódicos) - Redondeo de cifras decimales
2. Adición y sustracción de números racionales	Propiedades de la adición de números racionales
	Resolución de problemas en contexto cotidiano, geométrico, científico
3. Multiplicación y división de números racionales	Propiedades de la multiplicación de números racionales
	Conceptualización de la multiplicación de racionales fraccionarios
	Resolución de problemas en contexto cotidiano, geométrico, científico
4. Potenciación y radicación de números reales	Potencias de números enteros
	Potencias de fracciones comunes
	Potencias de fracciones decimales
	Leyes de los exponentes
	Cálculo de raíces por descomposición en factores primos
	Operaciones con números irracionales (radicales)
	Notación científica
	Resolución de problemas en contexto cotidiano, geométrico y científico
5. Variación proporcional	Series aritméticas
	Series geométricas
	Números racionales, razones y proporciones
	Variación proporcional directa
	Variación proporcional inversa
	Variación proporcional conjunta
	Notación de variable y de función (gráficas)
	Resolución de problemas en contexto cotidiano, geométrico y científico

	Semejanza de figuras geométricas (escalas)
	Teorema de Thales
6. Tanto por ciento	Equivalencias entre números racionales y tanto por ciento
	Resolución de problemas en contexto cotidiano y científico

UNIDAD 2. GEOMETRIA

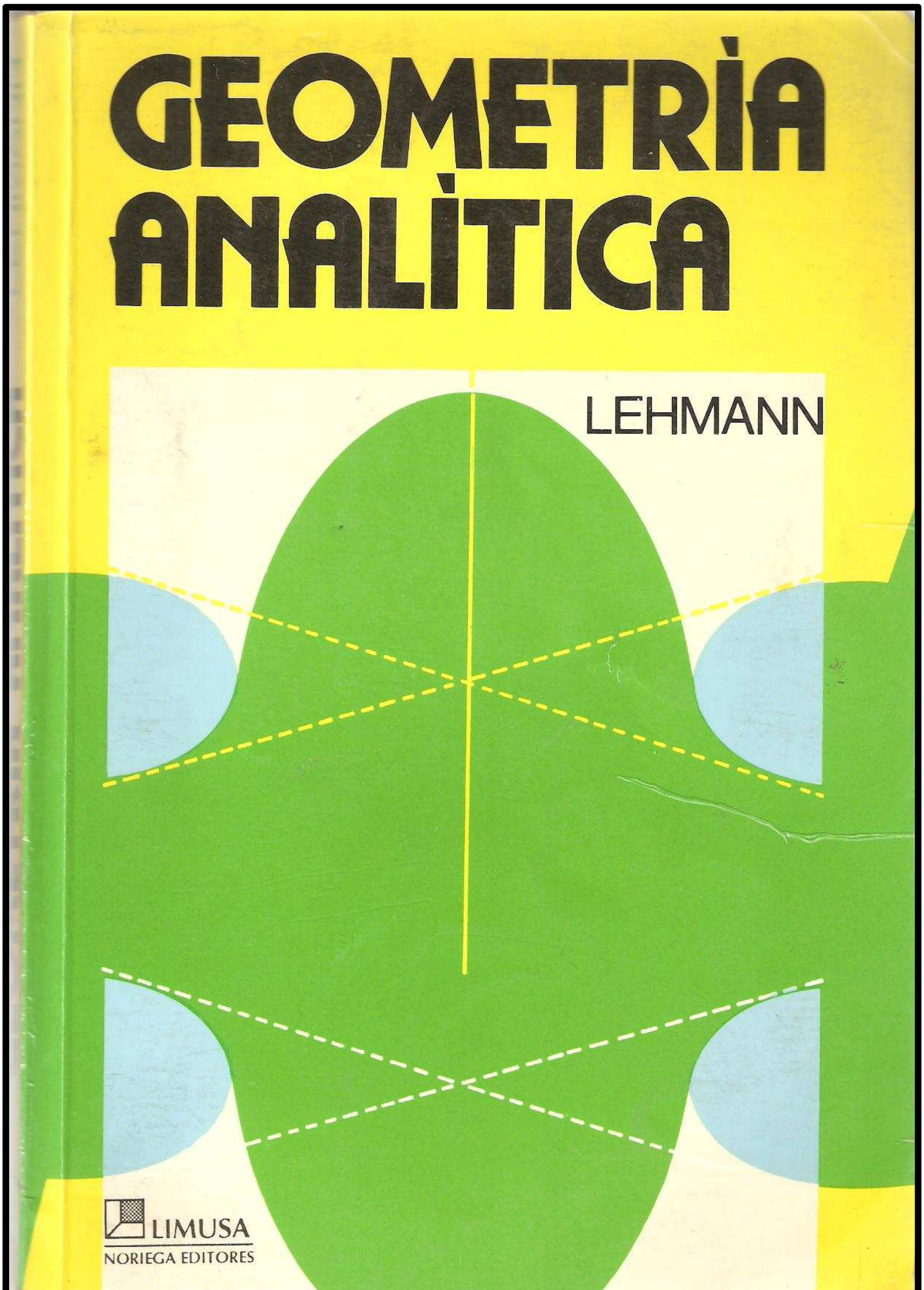
TEMA	SUBTEMA
1. Geometría en el plano	Términos indefinidos de la geometría (punto, línea, plano)
	Clasificación y trazo de líneas, ángulos y figuras geométricas
	Líneas, ángulos y regiones en el círculo
	Perímetros y áreas.- problemas
	Puntos y líneas en el triángulo
2. Geometría en el espacio	Clasificación de cuerpos geométricos (prismas, pirámides, cuerpos redondos, poliedros platónicos y arquimedianos)
	Construcción de cuerpos geométricos (prismas, pirámides, cuerpos redondos, poliedros platónicos)
	Áreas y volúmenes.-problemas
3. Transformaciones geométricas	Translación
	Simetría
	Rotación
	Homotecia

Matemáticas II

Unidad 1. Triángulos rectángulos
Teorema de Pitágoras
Funciones trigonométricas
Seno
Coseno
Tangente
Triángulos oblicuángulos
Ley de senos
Ley de cosenos
Ley de la tangente

Unidad 2. Función Lineal
Ecuación lineal: Definición
Variables y constantes: Definición
Ecuación lineal con una variable
Ecuación lineal con dos variables
Manejo de expresiones algebraicas (función)
Tabulación y graficación
Desigualdades
La recta
Ecuación de la recta dados dos puntos
Pendiente de una recta
Ecuación de la recta dados un punto y la pendiente
Forma general de la recta
Forma ordinaria de la recta
Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas
Métodos de solución
Igualación
Sustitución
Reducción
Determinantes de segundo orden
Gráfico
Ángulo entre dos rectas
Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas
Eliminación
Determinantes de tercer orden

Ahora se anexan los índices de algunos libros para compararlos con estos contenidos temáticos y corroborar su disparidad:



INDICE

GEOMETRIA ANALITICA PLANA

CAPITULO PRIMERO

SISTEMAS DE COORDENADAS

CAPITULO II

GRAFICA DE UNA ECUACION Y LUGARES GEOMETRICOS

CAPITULO III

LA LINEA RECTA

CAPITULO IV

ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA

CAPITULO V

TRANSFORMACION DE COORDENADAS

CAPITULO VI

LA PARABOLA

CAPITULO VII

LA ELIPSE

CAPITULO VIII

LA HIPERBOLA

CAPITULO IX

ECUACION GENERAL DE SEGUNDO GRADO

CAPITULO X

COORDENADAS POLARES

APENDICE I

RESUMEN DE FORMULAS, DEFINICIONES Y TEOREMAS

APENDICE II

TABLAS


Lehmann
álgebra
LIMUSA
NORIEGA EDITORES

Contenido


2
SEMESTRE
matemáticas
bachillerato
para preparatoria C.C.H.
y colegio de bachilleres
lizárraga gaudry
flores meyer
vázquez mora
EDITORIAL PROGRESO, S.A.

CONTENIDO

PRIMERA UNIDAD

EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES

SEGUNDA UNIDAD

ECUACIONES DE PRIMERO Y SEGUNDO GRADO

RCERA UNIDAD

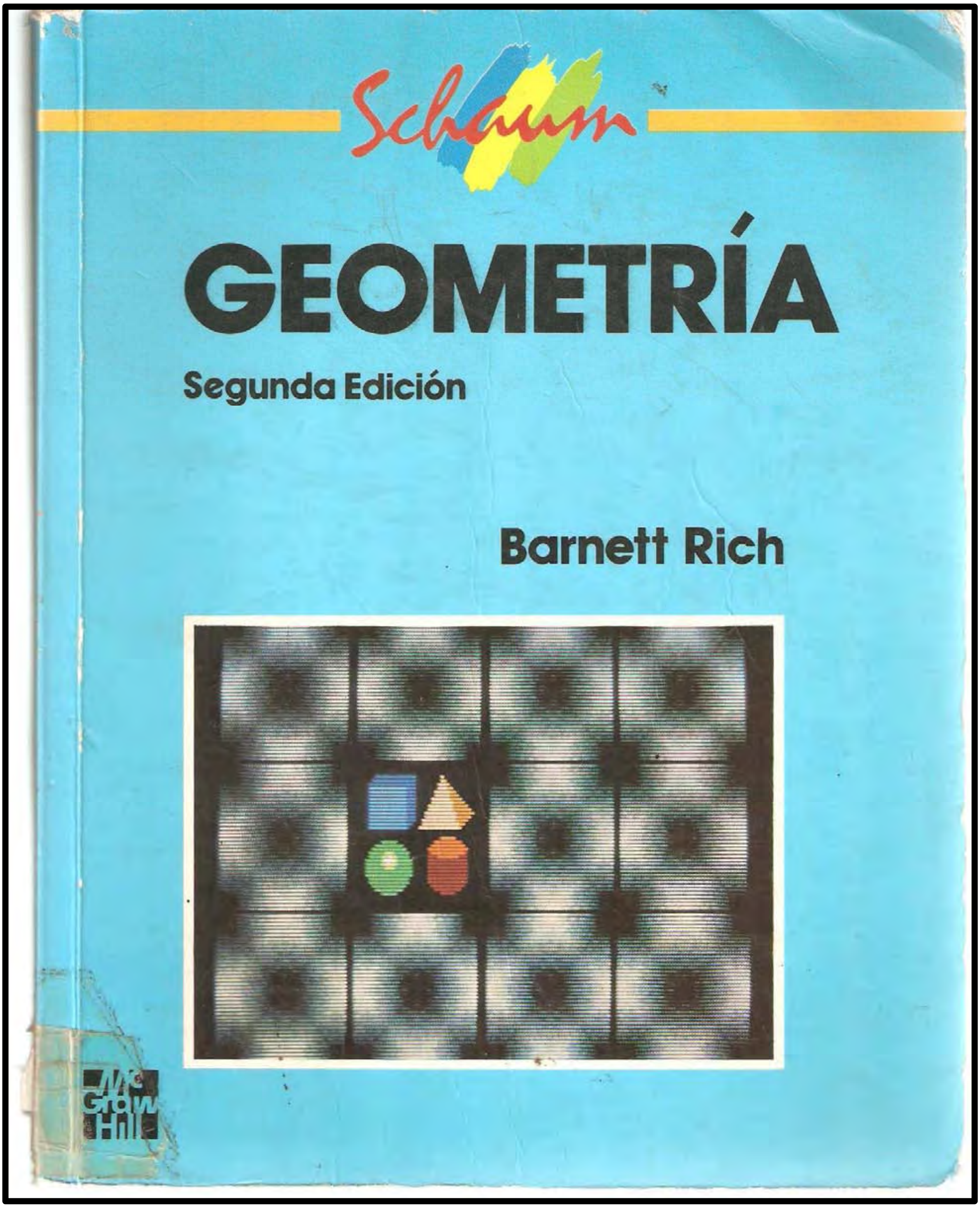
SISTEMAS DE ECUACIONES

CUARTA UNIDAD

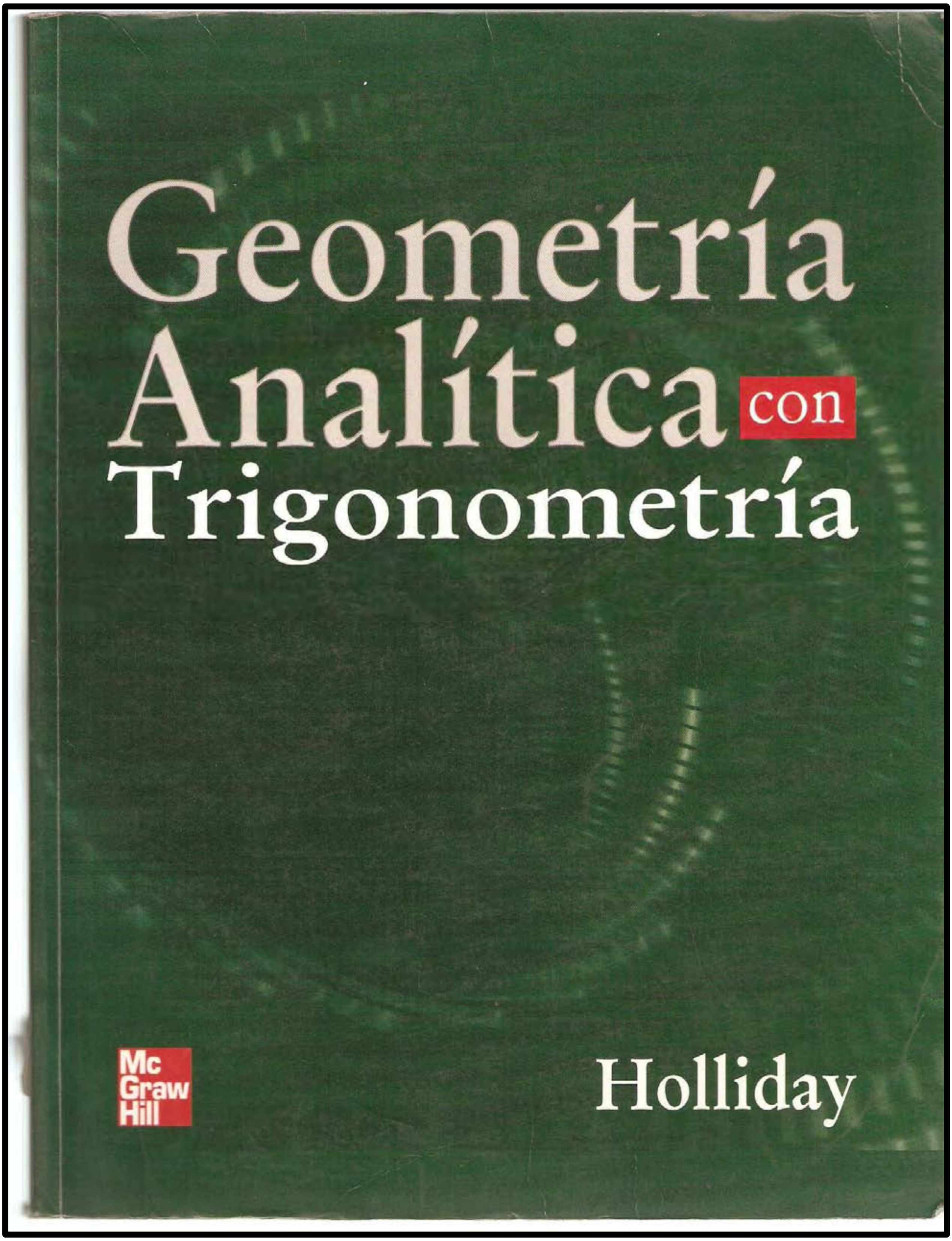
DESIGUALDADES DE PRIMERO Y SEGUNDO GRADO

QUINTA UNIDAD

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS


Schaum
GEOMETRÍA
Segunda Edición
Barnett Rich
Mc Graw Hill

Contenido


Geometría
Analítica con
Trigonometría
Mc
Graw
Hill
Holliday

CONTENIDO

Unidad 1 Relaciones, funciones y gráficas

Capítulo 1 Relaciones lineales y funciones 4

Capítulo 2 La naturaleza de las gráficas 62

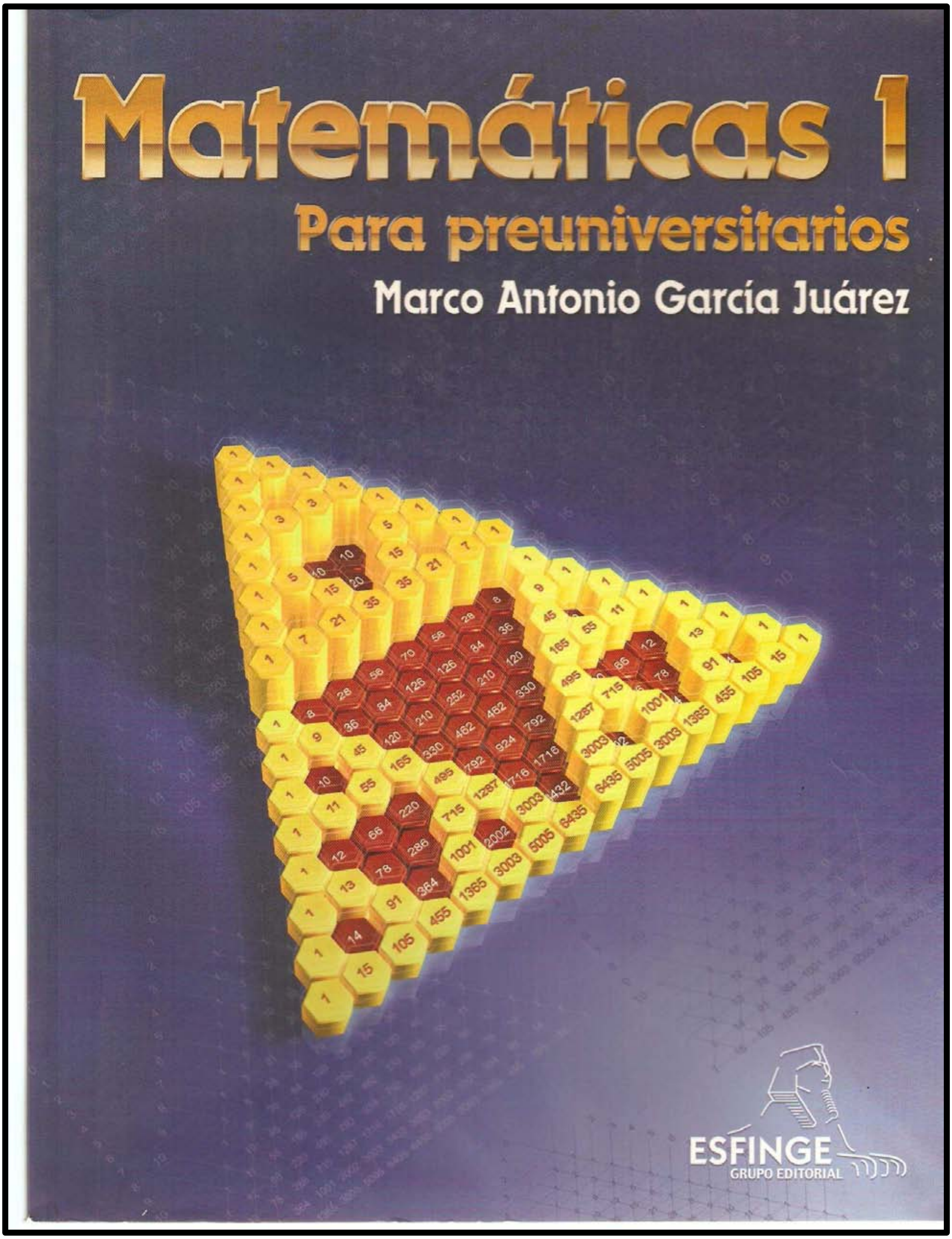
CONTENIDO

Unidad 2 Trigonometría

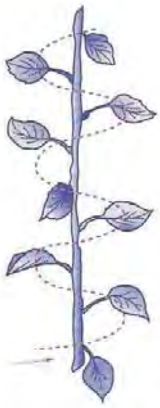
CONTENIDO

CONTENIDO

Libro del alumno

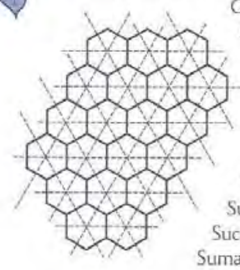

Matemáticas 1
Para preuniversitarios
Marco Antonio García Juárez
ESFINGE
GRUPO EDITORIAL

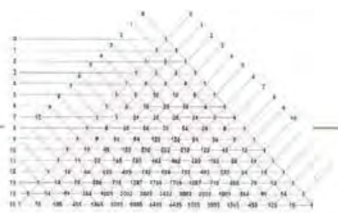
ÍNDICE DE CONTENIDO



Unidad 1

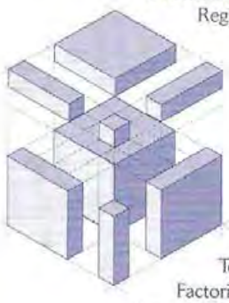
Introducción al álgebra

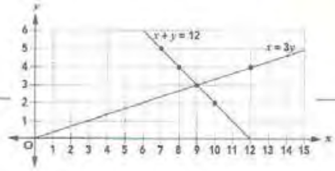




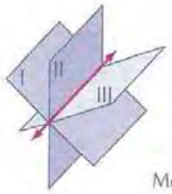
Unidad 2

Polinomios de una variable





Unidad 3
Ecuaciones de primer grado



Unidad 4
Ecuaciones de segundo grado

PROPUESTA.

El análisis comparativo anterior nos muestra la urgente necesidad de elaborar una carpeta de Matemáticas específica para estas dos asignaturas. En este trabajo se desarrolla la implementación de estos cuadernos de estudio.

MATEMATICAS I

INDICE

	Cálculo de raíces por descomposición en factores primos	
	Operaciones con números irracionales (radicales)	
	Notación científica	
	Operaciones con números expresados en notación científica	
	Serie aritmética	
	Serie geométrica	
	Razones y proporciones	
	Variación proporcional directa e inversa	
	Tanto por ciento	
IV	**Unidad 2. Geometría**	
	Geometría en el plano	
	Clasificación de líneas	
	Definición de ángulo	
	Sistema sexagesimal para la medición de ángulos	
	Sistema cíclico para la medición de ángulos	
	Clasificación de los ángulos por su magnitud	
	Clasificación de los ángulos por sus relaciones	
	Clasificación de los polígonos	
	El círculo, la circunferencia y sus principales componentes	
	El triángulo	
	Geometría en el espacio	
	Prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas	
	Tabla de perímetros, áreas y volúmenes	
	Transformaciones	
	Traslación, simetría, rotación y homotecia	

UNIVERSIDAD AUTONOMA DEL ESTADO DE MORELOS

SECRETARIA ACADEMICA

PROGRAMA DE ESTUDIO

ASIGNATURA: MATEMATICAS 1 CLAVE: 01MAT1B1

RELACION CON OTRAS ASIGNATURAS.

Siendo las Matemáticas un lenguaje indispensable para todas las Ciencias, esta asignatura tiene una estrecha relación con todas aquellas que en sus objetivos requieran del cálculo o análisis de datos.

DESCRIPCION DEL CURSO.

- Este curso tendrá un carácter formativo tomando a la matemática como un medio que propicie el desarrollo de habilidades del pensamiento lógico, relacional y numérico de los alumnos
- Este curso se circunscribirá al campo de los Números Reales
- Se hará énfasis en los Sistemas Semióticos de Representación buscando que los alumnos sean capaces de trasladarse entre los diferentes registros (gráfico, algebraico, tabular, etc.)
- Para el logro de la descripción anterior se sugiere utilizar la resolución de problemas en contexto (científico de preferencia)
- Se requiere de la aplicación de la creatividad del profesor responsable en la selección de los problemas contextuales acordes a las situaciones particulares de cada medio escolar y que conduzcan a la conceptualización de los Números Racionales

OBJETIVO GENERAL.

El alumno desarrollará habilidades básicas del conocimiento aritmético y algebraico para la solución de problemas.

CONTENIDO TEMATICO

UNIDAD 1. PREALGEBRA

TEMA	SUBTEMA
1. Teoría de números	Números Primos
	Descomposición de números en factores primos
	Mínimo Común Múltiplo
	Máximo Común Divisor
	Clases de equivalencias: - Entre fracciones comunes - Entre racionales decimales y fracciones comunes (decimales finitos y periódicos) - Redondeo de cifras decimales
2. Adición y sustracción de números racionales	Propiedades de la adición de números racionales
	Resolución de problemas en contexto cotidiano, geométrico, científico
3. Multiplicación y división de números racionales	Propiedades de la multiplicación de números racionales
	Conceptualización de la multiplicación de racionales fraccionarios
	Resolución de problemas en contexto cotidiano, geométrico, científico
4. Potenciación y radicación de números reales	Potencias de números enteros
	Potencias de fracciones comunes

	Potencias de fracciones decimales
	Leyes de los exponentes
	Cálculo de raíces por descomposición en factores primos
	Operaciones con números irracionales (radicales)
	Notación científica
	Resolución de problemas en contexto cotidiano, geométrico y científico
5. Variación proporcional	Series aritméticas
	Series geométricas
	Números racionales, razones y proporciones
	Variación proporcional directa
	Variación proporcional inversa
	Variación proporcional conjunta
	Notación de variable y de función (gráficas)
	Resolución de problemas en contexto cotidiano, geométrico y científico
	Semejanza de figuras geométricas (escalas)
	Teorema de Thales
6. Tanto por ciento	Equivalencias entre números racionales y tanto por ciento
	Resolución de problemas en contexto cotidiano y científico

UNIDAD 2. GEOMETRIA

TEMA	SUBTEMA
1. Geometría en el plano	Términos indefinidos de la geometría (punto, línea, plano)
	Clasificación y trazo de líneas, ángulos y figuras geométricas
	Líneas, ángulos y regiones en el círculo
	Perímetros y áreas.- problemas
	Puntos y líneas en el triángulo
2. Geometría en el espacio	Clasificación de cuerpos geométricos (prismas, pirámides, cuerpos redondos, poliedros platónicos y arquimedianos)
	Construcción de cuerpos geométricos (prismas, pirámides, cuerpos redondos, poliedros platónicos)
	Áreas y volúmenes.-problemas
3. Transformaciones geométricas	Translación
	Simetría
	Rotación
	Homotecia

UNIDAD 1. PREALGEBRA

Teoría de números.

Desde sus inicios el hombre ha tenido la necesidad de cuantificar sus pertenencias, así como los sucesos que le puedan ocurrir (de cualquier índole). Las circunstancias que rodearon a las diferentes culturas en cada etapa de la humanidad y en cada ubicación del planeta, son las principales detonantes del uso de símbolos para la representación de sus cantidades (los números). Esta historia nos lleva a la actualidad occidental en cuanto a la teoría de números, siendo el principal conjunto de ellos el de los Reales. Este conjunto de números abarca a una serie de subconjuntos:

1. Números enteros: son aquellos que no permiten la existencia de un nuevo número entre dos de ellos ya existentes y consecutivos:

   …, - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, 4, …

   Dentro de los números enteros tenemos a los Naturales o enteros positivos:

   1,2,3,4,5,…

   Y dentro de los Naturales nos encontramos a un conjunto muy especial, el de los Números Primos:

   Son todos los Naturales (excepto el 1) que solo son divisibles por ellos mismos:

   2, 3, 5, 7, 11, 13 , … , α

2. Números racionales: son aquellos que se pueden expresar como el cociente de dos enteros:

   m / n (para m y n que sean enteros y n ≠ 0)

   Es decir que un número es llamado racional cuando representa la razón de dos enteros

3. Números irracionales: de forma breve se puede decir que son los que no se pueden representar como la razón de dos enteros; los irracionales más conocidos son los radicales cuya raíz no es exacta.

Números Primos.

Algunos números primos son:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	313	317	331	337	347	349	353
359	367	373	379	383	389	397	401	403	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541

Para determinar si un número es primo es necesario probar si es divisible entre los primos conocidos que lo anteceden, si no es divisible entre ninguno entonces indica que si es primo.

Para el caso de un número que represente una cantidad alta, es necesario utilizar la siguiente tabla de los cuadrados de los números primos:

P = NUMERO PRIMO

P^2 = CUADRADO DEL NUMERO PRIMO

P	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
P^2	**4**	**9**	**25**	**49**	**121**	**169**	**289**	**361**	**529**	**841**
P	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
P^2	**961**	**1369**	**1681**	**1849**	**2209**	**2809**	**3481**	**3721**	**4489**	**5041**
P	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
P^2	**5329**	**6241**	**6889**	**7921**	**9409**	**10201**	**10609**	**11449**	**11881**	**12769**
P	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
P^2	**16129**	**17161**	**18769**	**19321**	**22201**	**22801**	**24649**	**26569**	**27889**	**29929**
P	179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
P^2	**32041**	**32761**	**36481**	**37249**	**38809**	**39601**	**44521**	**49729**	**51529**	**52441**
P	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
P^2	**54289**	**57121**	**58081**	**63001**	**66049**	**69169**	**72361**	**73441**	**76729**	**78961**
P	283	293	307	313	317	331	337	347	349	353
P^2	**80089**	**85849**	**94249**	**97969**	**100489**	**109561**	**113569**	**120409**	**121801**	**124609**

P	359	367	373	379	383	389	397	401	403	409
P²	128881	**134689**	**139129**	**143641**	**146689**	**151321**	**157609**	**160801**	**162409**	**167281**
P	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
P²	175561	177241	185761	187489	192721	196249	201601	208849	212521	214369
P	467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
P²	218089	229441	237169	241081	249001	253009	259081	271441	273529	292681

Con la ayuda de esta tabla no solo determinaremos si un número es primo sino que además podremos descomponer cualquier número en un producto de números primos cuyo resultado iguale al número original.

<u>Descomposición de números en factores primos.</u>

Cualquier número se puede representar como la multiplicación de dos o más números:

40 = 20 x 2

40 = 10 x 4

40 = 8 x 5

40 = 40 x 1

Pero como podemos observar alguno de los números que componen las multiplicaciones anteriores pueden a su vez descomponerse en otra multiplicación también:

Para 40 = 20 x 2

Tenemos que 20 = 10 x 2

Para 40 = 10 x 4

Tenemos que 10 = 5 x 2

Para 40 = 8 x 5

Tenemos que 8 = 4 x 2

Para 40 = 40 x 1

Tendríamos cualquiera de los casos anteriores

Y como era de esperarse, resulta que estas nuevas multiplicaciones se pueden simplificar aún más. Entonces cual es resultado correcto o esperado? Ninguno de estos (aunque todos son validos matemáticamente), ya que no habría una estandarización. Por lo tanto, se concluyó que si los factores obtenidos se podían descomponer se llegará hasta aquellos números que ya no tuvieran simplificación alguna, y esos números son precisamente los números PRIMOS.

En base a este acuerdo, el procedimiento para descomponer un número en factores primos es el siguiente:

1. Aplicando las leyes de divisibilidad para los primos pequeños (2,3,5,7) se comprueba si el número en cuestión es divisible entre alguno de estos números primos

   Ejemplo: 235788 (es divisible entre 2 ya que termina en número par)

2. Se efectúa la división

   Ejemplo: 235788 / 2 = 117894

3. Al cociente obtenido se le aplica el paso 1 y 2 anteriores

   Ejemplo: 117894 (es divisible entre 2 ya que termina en número par)

   117894 / 2 = 58947

4. Al nuevo cociente se le aplica el paso uno y 2 anteriores, y así sucesivamente hasta que no pueda dividirse el número entre 2,3,5 ó 7:

   Ejemplo: 58947 (es divisible entre 3 ya que la suma de los dígitos que lo componen da un múltiplo de 3: 5 + 8 + 9 + 4 + 7 = 33)

58947 / 3 = 19649

19649 (es divisible entre 7 ya que la diferencia del número formado por todos los dígitos excepto el último menos el doble del último dígito da un múltiplo de 7: 1964 – 18 = 1946; 194 – 12 = 182; 18 – 4 = 14)

19649 / 7 = 2807

2807 (es divisible entre 7 que la diferencia del número formado por todos los dígitos excepto el último menos el doble del último dígito da un múltiplo de 7: 280 – 14 = 266; 26 – 12 = 14)

2807 / 7 = 401

5. Si el último cociente obtenido no es divisible entre 2,3,5 ó 7, se prueba entre los siguientes números primos cuyo cuadrado sea menor que el número a descomponer (ver tabla de cuadrados de números primos):
   $19^2 = 361$

   Es decir que probaremos si el 401 es divisible entre 11, 13, 17 y 19 solamente:

   401 / 11 = 36.4545

   401 / 13 = 30.846153

   401 / 17 = 23.58823529411

   401 / 19 = 21.105263157894

6. De acuerdo a los resultados obtenidos podemos comprobar (como se ve en la tabla) que el 401 es un número primo, por lo que solo podrá dividirse entre el mismo:
   401 / 401 = 1

7. Cuando en el proceso de factorización se obtiene un cociente igual a 1, la descomposición a concluido y el número podrá expresarse como el producto de los números primos obtenidos:
   Ejemplo: primer número primo: 2

Segundo número primo: 2

Tercer número primo: 3

Cuarto número primo: 7

Quinto número primo: 7

Sexto número primo: 401

Es decir: 253788 = 2 x 2 x 3 x 7 x 7 x 401

8. Y para una mejor representación de la descomposición de un número en factores primos se expresa el resultado en potencias:

Ejemplo: $235788 = 2^2 \times 3 \times 7^2 \times 401$

EJEMPLOS Y EJERCICIOS SOBRE DESCOMPOSICION EN NUMEROS PRIMOS

1. Factoriza los siguientes números:
   1000;   32340;   2148336

1000	2		32340	2		2148336	2
500	2		16170	2		1074168	2
250	2		8085	3		537084	2
125	5		2695	5		268542	2
25	5		539	7		134271	3
5	5		77	7		44757	3
1			11	11		14919	3
			1			4973	

$1000 = 2^3 \times 5^3$

$32340 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7^2 \times 11$

$2148336 = 2^3 \times 2 \times 3^3 \times 4973$

2. Factoriza los siguientes números:
   2048; 372645; 1617000

<u>Mínimo Común Múltiplo (mcm) y Máximo Común Divisor (MCD).</u>

Para obtener los múltiplos de cualquier cantidad numérica, se multiplica esa cantidad por los números naturales (lo que en la primaria manejaste como las tablas de multiplicar). Entonces cualquier número tiene un sinfín de múltiplos; y para todos ellos existen concordancia de algunos de estos múltiplos. Si tenemos varios números, el Mínimo Común Múltiplo de ellos es aquel primer múltiplo que coincida para todos:

Ejemplo: Si tenemos al 4,20 y 15 sus múltiplos serían:

4: 4,8,12,16,20,24,28,32,36,40,44,48,52,**60**,64,68,72,…, 112,116,**120**,124,…

20: 20,40,**60**,80,100,**120**,140,160,**180**,200,220,**240**,260,280…

15: 15,30,45,**60**,75,90,105,**120**,135,150,165,**180**,195,210,225,**240**,255,…

Y como se puede ver, el mcm para el 4, el 20 y el 15 es el **60**

Para este ejemplo se pudo obtener de esta manera el mcm rápidamente, pero no es así siempre:

Ejemplo: si tenemos al 3, 7 y 26 sus múltiplos serían:

3: 3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,42,45,48,51,54,57,60,63,66,69,72,75,…

7: 7,14,21,28,35,42,49,56,63,70,77,84,91,98,105,112,119,126,133,140,147,…

26: 26,52,78,104,130,156,182,208,234,260,286,312,338,364,390,…

Hasta este momento no se ha podido ver al mcm de estos tres números, habría que seguir desarrollando las diferentes listas de múltiplos hasta encontrar al coincidente. Este tipo de operación no es operable; por lo que se emplea la descomposición en factores primos de cada número para de esta forma encontrar el mcm.

Una vez que se han obtenido los factores primos de cada número se escogen los de mayor potencia, y el producto de los seleccionados dará origen al mcm buscado.

Por otro lado, tenemos el caso de los divisores de un número cualquiera, no de sus múltiplos. Como ya sabemos, un número es divisor de otro si el cociente entre ambos da como residuo cero. Por lo cual el Máximo Común Divisor de dos o más números, será el divisor mayor común a todos. Para obtenerlo fácilmente se emplea también la descomposición en factores primos. El MCD será el resultado de multiplicar todos aquellos primos que coincidan en todas las factorizaciones. Si no hay ningún primo coincidente, el MCD será el número 1.

EJEMPLOS Y EJERCICIOS SOBRE MINIMO COMUN MULTIPLO Y MAXIMO COMUN DIVISOR

1. Encontrar el mcm para los siguientes casos:
   a. 28, 42 y 70

28	2		42	2		70	2
14	2		21	3		35	5
7	7		7	7		7	7
1			1			1	

$28 = 2^2 \times 7$; $42 = 2 \times 3 \times 7$; $70 = 2 \times 5 \times 7$

Por lo que el mcm (28,42,70) = $2^2 \times 3 \times 5 \times 7$ = **420**

   b. 125, 200, 32

125	5		200	2		32	2
25	5		100	2		16	2
5	5		50	2		8	2
1			25	5		4	2
			5	5		2	2
			1			1	

$125 = 5^3$; $200 = 2^3 \times 5^2$; $32 = 2^5$

Por lo que el mcm (125,200,32) = $2^5 \times 5^3$ = **4000**

2. Encontrar el MCD para los siguientes casos:
   a. 20, 30, 100

20	2		30	2		100	2
10	2		15	3		50	2
5	5		5	5		25	5
1			1			5	5
						1	

$20 = 2^2 \times 5$; $30 = 2 \times 3 \times 5$; $100 = 2^2 \times 5^2$

Por lo que el MCD (20, 30, 100) = 2 x 5 = **10**

   b. 86, 77, 19

86	2		77	7		19	19
43	43		11	11		1	
1			1				

$86 = 2 \times 43$; $77 = 7 \times 11$; $19 = 19$

Por lo que el MCD (86, 77, 19) = **1**

3. Encontrar el mcm y el MCD para los siguientes ejercicios:
   a. 16, 64, 400

16	2		64	2		400	2
8	2		32	2		200	2
4	2		16	2		100	2

2	2		8	2		50	2
1			4	2		25	5
			2	2		5	5
			1			1	

El mcm (16, 64, 400) = 2^6 x 5^2 = **1600**

El MCD (16, 64, 400) = 2^4 = **16**

b. 9, 27,54

9	3		27	3		54	2
3	3		9	3		27	3
1			3	3		9	3
			1			3	3
						1	

El mcm (9, 27, 54) = 2 x 3^3 = **54**

El MCD (9, 27, 54) = 3^2 = **9**

4. Encontrar el mcm y el MCD para los siguientes ejercicios:
   a. 85,76,20

b. 210,57,123

c. 20,60,120

d. 1000,2005,50

Clases de equivalencias.

A los números racionales (definidos anteriormente) también se les conoce como fracciones. Estas fracciones pueden ser mixtas, comunes o decimales. Las mixtas son las que se expresan como una combinación de números enteros y de cocientes. Las fracciones comunes son las que se expresan de la forma a/b; y las decimales son las que se expresan también de forma combinada entre enteros y el resultado de dividir dos números (a.bc, 7.17).

Con esto es fácil concluir que un número cualquiera puede expresarse de forma racional en el que sea de sus tipos: fracción común, fracción mixta o decimal. De allí que se trabajará con la equivalencia que más convenga al problema en que se sitúe el número a analizar.

Entre fracciones comunes.

Dos o más fracciones comunes son equivalentes si el resultado de dividir su numerador entre el denominador que los conforman dan el mismo resultado:

Ejemplo:

1 / 2 = 0.5

50 / 100 = 0.5

13 / 26 = 0.5

Es decir, estas tres fracciones son equivalentes.

La manera más empleada para determinar una equivalencia es: multiplicar el numerador de una fracción por el denominador de una segunda, y el denominador de la primera por el numerador de la segunda; si ambos resultados son iguales, las fracciones comunes son equivalentes:

a / b y c / d …………………dos fracciones comunes

a / b es equivalente a c / d……………si a x d = b x c

Ejemplo:

20 / 30 es equivalente a 8 / 12?

Comprobamos:

20 x 12 = 240

30 x 8 = 240

Por lo tanto: (20 / 30) = (8 / 12)

Entre fracción común y fracción decimal.

Si en una fracción común dividimos el numerador entre el denominador obtenemos su equivalencia decimal:

Ejemplos:

(132 / 48) = 132 ÷ 48 = 2.75

(1 / 6) = 1 ÷ 6 = 0.16666666…

(20 / 4) = 20 ÷ 4 = 5

Como podemos observar, el resultado de convertir una fracción común en decimal se puede dar de tres formas: un decimal finito, un decimal periódico (se repite un modelo numérico infinitamente) o un entero. Es decir que cualquier número decimal se puede expresar como fracción común.

De decimal finito a fracción común.

Un decimal finito es la combinación de un entero y partes de un entero finitas (en el ejemplo anterior, referente al caso, el dos es el entero y el .75 es parte de un entero, también llamado comúnmente decimales). Para expresar un decimal finito en fracción es necesario poner como numerador al número original, solo que con el punto decimal movido hasta la derecha: 2.75 da como numerador 275. El denominador será una potencia de 10 (10, 100, 1000,…) que tendrá tantos ceros como decimales tenía originalmente el decimal finito: .75 nos indica 2 decimales, lo que establece que el denominador de este número será el 100.

2.75 = (275 / 100)

Parece que no es la misma fracción común de donde obtuvimos el 2.75: (132 / 48), chequemos su equivalencia fraccionaria:

$$275 \times 48 = 13200$$

$$100 \times 132 = 13200$$

Lo que nos indica que (275 / 100) es equivalente a (132 / 48).

De decimal periódico a fracción común.

La forma más sencilla, a mi parecer, de entender la conversión de decimal periódico a fracción común, es mediante un ejemplo:

Decimal periódico: $n = 4.5454$

Multiplicamos n por 100: $100n = 454.5454$

Restamos:

$$\begin{array}{r} 100n = 454.5454 \\ \underline{-\quad n = \quad 4.5454} \\ 99n = 450 \end{array}$$

Despejamos a n: $n = (450 / 99)$

Redondeo de cifras decimales.

En la mayoría de casos no es necesario expresar una fracción común como un decimal periódico, es mejor REDONDEAR la parte de los decimales.

El criterio para esta operación es el siguiente:

- Se deciden la cantidad de decimales suficientes y necesarios
- Una vez hecho esto, se observa cual es el número a la derecha del último decimal de la parte elegida: si este número es mayor o igual a 5 el decimal anterior a él sube un dígito, de no ser así, el decimal se queda con el mismo valor.

Ejemplo:

0.166666666…

- Decidimos la cantidad de decimales: tres
- Los tres decimales son 166
- Después del tercer decimal esta un 6, lo que indica que el tercer decimal que es un 6 sube a 7
- Por lo tanto el decimal redondeado es: 0.167

EJEMPLOS Y EJERCICIOS SOBRE EQUIVALENCIAS Y REDONDEO DE CIFRAS DECIMALES

1. Simplifica las siguientes fracciones comunes:
   a. 415 / 90
      Tanto el numerador como el denominador tienen quinta (porque terminan en 0 ó 5)

      415 ÷ 5 = 83

      90 ÷ 5 = 18

      Por lo tanto (415 / 90) = (83 / 18)

      Y como el 83 es número primo la fracción ya no puede simplificarse más.

   b. 444 / 666
      444 ÷ 2 = 222

      666 ÷ 2 = 333

      (444 / 666) = (222 / 333)

222 ÷ 3 = 74

333 ÷ 3 = 111

(222 / 333) = (74 / 111)

74 ÷ 37 = 2

111 ÷ 37 = 3

(74 / 111) = (2 / 3)

c. 800 / 100

800 ÷ 2 = 400

100 ÷ 2 = 50

400 ÷ 2 = 200

50 ÷ 2 = 25

200 ÷ 5 = 40

25 ÷ 5 = 5

40 ÷ 5 = 8

5 ÷ 5 = 1

Por lo cual (800 / 100) = (8 / 1)

Con este resultado podemos recordar que antes de iniciar cualquier simplificación, primero verifiquemos si el numerador es divisible entre el numerador; lo que nos ahorrará muchos cálculos.

800 ÷ 100 = 8 (solo un paso y la fracción ya está simplificada)

2. Simplifica las siguientes fracciones comunes:
    a. 5400 / 2700

    b. 77 / 24

    c. 34215 / 63000

3. Convierte las siguientes fracciones decimales en comunes:
    a. 5.272727…
       5.27 x 100 = 527.2727…

       100n = 527.2727…

       - n = 5.2727…

       99n = 522

       n = 522 / 99

       n = 174 / 33

       n = 58 / 11

    b. 428.56
       42856 / 100

       21428 / 50

       10714 / 25

c. 0.68181818…
  0.681818 x 100

$100\ n = 68.1818\ldots$

$\underline{-\qquad n = \ \ 0.6818\ldots}$

$99\ n = 67.5$

$n = 67.5 / 99$

$n = 675 / 990$

$n = 135 / 198$

$n = 45 / 66$

$\mathbf{n = 15 / 22}$

4. Convierte las siguientes fracciones decimales en comunes:

a. 110.64

b. 0.83333…

c. 402.909090…

5. Redondea los siguientes números a dos y tres decimales
    a. 678.6666667
       678.67

       678.667

    b. 12.505050
       12.51

       12.505

    c. 0.9984
       1.00

       0.998

6. Redondea los siguientes números a dos y tres decimales
    a. 12345.5656

    b. 9.9954

    c. 44.0975

Operaciones aritméticas básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) de los números racionales.

Cualquiera de las operaciones con números racionales son cerradas (es decir, el resultado es un número racional), excepto la división entre cero.

Para efectuar cualquiera de ellas hay que seguir las leyes para operar signos:

- *Ley de los signos para adición y sustracción:*
  1. la suma de números con igual signo arrojan como resultado un racional con el signo en común
  2. la suma entre números con diferente signo se convierte en una resta de el resultado de sumar los números positivos (o negativos) menos el resultado de sumar los números negativos (o positivos) quedando el resultado como un número racional con el signo del resultado mayor entre positivos y negativos
  3. la diferencia de números con diferente signo se convierte en una suma, dando como resultado un racional con el signo del minuendo (número al que se le sustrae otro)
  4. si se restan dos números con igual signo, se presentan dos situaciones: a) cuando el minuendo tiene valor absoluto mayor el resultado tendrá el signo de este, en caso contrario el racional resultante tendrá el signo contrario del minuendo

- *Ley de los signos para multiplicación y división:*

+	(x) / (÷)	+	**+**
+	(x) / (÷)	-	**-**
-	(x) / (÷)	-	**+**
-	(x) / (÷)	+	**-**

- *Reglas básicas para operar racionales expresados en forma de fracción común:*
  - Multiplicación
    (a / b)(c / d) = (a x c) / (b x d)
  - División
    (a / b) ÷ (c / d) = (a x d) / (b x c)
  - Suma y resta
    Aplicar el concepto de común denominador (factorizando los denominadores de la operación)

EJERCICIOS OPERANDO ARITMÉTICAMENTE RACIONALES

(Serán propuestos por el grupo de estudio y el profesor)

Potenciación y radicación de números reales.

Cuando se presenta el caso de multiplicar n veces un cierto número por el mismo, decimos que tenemos ese número a la n potencia:

$$A \times A \times A \times \ldots \times An = A^n$$

Para el caso de que el número sea una fracción común tenemos:

$$(a/b)(a/b)(a/b)(a/b)(a/b)\ldots(a/b)n = (a/b)^n = a^n / b^n$$

Al número n de una potencia se le conoce como exponente. Para trabajar con exponentes es necesario establecer reglas que faciliten su manejo.

Leyes de los Exponentes:

1. $(a)^n \ x \ (a)^m = a^{n+m}$
2. $(a)^n \ x \ (b)^n = (a \ x \ b)^n$
3. $(a)^n \div (a)^m = a^{n-m}$
4. $(a)^n \div (b)^n = (a \div b)^n$
5. $(a^n)^m = a^{nxm}$
6. $\sqrt[n]{a^m} = a^{m \div n}$
7. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \ x \ m]{a} = a^{1 \div (n \ x \ m)}$
8. $a^n = 1 / (a^{-n})$

EJEMPLOS Y EJERCICIOS SOBRE LEYES DE LOS EXPONENTES

1. $5^3 \ x \ 5^2 = 5^{3+2} = 5^5$

2. $(1 / 6)^4 = 1^4 / 6^4 = 1 / 1296$

3. $\sqrt[2]{10^4} = 10^{4 \div 2} = 10^2 = 100$

4. $125^4 / 35^4 = 3.57^4$

5. Ejercicios: propuestos por el profesor acorde al grupo (dar paso a los radicales)

Leyes de los Radicales:

1. $\sqrt{(a / b)} = (\sqrt{a}) / (\sqrt{b})$

2. $(\sqrt{a})(\sqrt{b}) = \sqrt{(a \times b)}$

3. $\sqrt[n]{a^m} = a^{m / n}$

Con esta tercera ley podemos concluir que las leyes de los exponentes también funcionan para los radicales.

EJEMPLOS Y EJERCICIOS SOBRE LEYES DE LOS EXPONENTES

1. $(\sqrt{5})(\sqrt{20}) = \sqrt{(5 \times 20)} = \sqrt{100} = 10$

2. $(\sqrt{300}) / (\sqrt{75}) = \sqrt{(300 / 75)} = \sqrt{4} = 2$

3. $\sqrt{27} = \sqrt{(9 \times 3)} = (\sqrt{9})(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$

4. $(\sqrt{3}) / (\sqrt{12}) = (\sqrt{3}) / (\sqrt{3x4}) = (\sqrt{3} / 3)(1 / \sqrt{4}) = (1)(1 / 2) = 1 / 2$

5. Ejercicios: propuestos por el profesor y los alumnos.

Cálculo de raíces por descomposición en factores primos

Un radical se simplifica (y si es necesario se encuentra, en base a esta simplificación, una aproximación de su equivalente racional) factorizando el radicando en números primos, de tal suerte que aquellas ordenadas con igual cantidad de números que el índice del radical serán las raíces de dichos factores. Los primos sobrantes de tal operación dan origen al radical equivalente de mayor simplificación junto con el coeficiente que resulte de multiplicar las raíces obtenidas.

EJEMPLOS Y EJERCICIOS SOBRE DESCOMPOSICION DE RAICES EN FACTORES PRIMOS.

1. √ 200 :
   Primero factorizamos:

200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

Agrupamos las ordenadas de factores con la cantidad igual al índice del radical:

Índice del radical = 2

Ordenadas (pares) = (2x2) (5x5)

Números sobrantes = un 2

Solución:

√ 200 = (2x5)(√2) = **<u>10√2</u>**

2. √32 :
   Primero factorizamos:

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

Agrupamos las ordenadas de factores con la cantidad igual al índice del radical:

Índice del radical = 2

Ordenadas (pares) = (2x2) (2x2)

Números sobrantes = un 2

Solución:

$\sqrt{32} = (2x2)(\sqrt{2}) = \underline{\mathbf{4\sqrt{2}}}$

3. √400 :
   Primero factorizamos:

400	2
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

Agrupamos las ordenadas de factores con la cantidad igual al índice del radical:

Índice del radical = 2

Ordenadas (pares) = (2x2) (2x2)(5x5)

Números sobrantes = ninguno

Solución:

√ 400 = (2x2x5) = **<u>20</u>**

4. EJERCICIOS.

Operaciones con números irracionales (radicales).

Suma algebraica.

Como lo indica el algebra (solo términos semejantes se pueden operar): radicales semejantes se podrán sumar y/o restar.

- $3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + 8\sqrt{7} = 7\sqrt{7}$
- $-8\sqrt{3} - 12\sqrt{3} -5\sqrt{5} +2\sqrt{5} + 18\sqrt{3} = -2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$
- $32 - 16\sqrt{2} + 11 + 4\sqrt{2} + \sqrt{8} = 43 -12\sqrt{2} + \sqrt{8}$ (lluvia de ideas sobre este último ejemplo)

EJERCICIOS OPERANDO RACIONALES.

1. $17\sqrt{4} + 15 - 32\sqrt{9} + \sqrt{100} =$
2. $-3\sqrt{63} + 22\sqrt{7} + 52\sqrt{28} =$
3. $9\sqrt{180} + 11\sqrt{338} - \sqrt{6125} +7\sqrt{352}$
4. $-15\sqrt{3} - 21\sqrt{3675} + 2 \sqrt{(30 / 10)}$
5. $\sqrt{40} - 8\sqrt{90} + 7\sqrt{250} - 6\sqrt{100}$

Notación Científica.

Normalmente, es decir, en la vida cotidiana, las cantidades numéricas se expresan de forma ordinaria: con números reales (34.176, 0.521, 1725363788.00726524, 0.000000000000000000152). Como se puede observar por los ejemplos, en muchas ocasiones las cifras pueden prestarse a confusión en su lectura, por lo que es necesario expresarlas en un formato más sencillo para su interpretación. El más común es el de la notación científica, que consiste en expresar una cantidad numérica ordinaria como una multiplicación de 2 números, sin alterar su valor original. En dicha multiplicación uno de los factores siempre será el 10 elevado a la n potencia y el otro será el número real, obtenido de un algoritmo de solución, con la menor cantidad de cifras significativas.

Algoritmo para convertir una notación ordinaria en una notación científica.

1. Se corre el punto decimal hasta el lugar en el que a la izquierda de él solo haya una cifra significativa, ejemplos:
   3’245,825 . 19 → 3. 24582519

   0 . 0000005374994546 → 5 . 374994546

   0 . 000232 → 2 . 32

2. Se redondean los decimales tomando la cantidad menor de cifras sin afectar la precisión del número (para este curso manejaremos solo 2 decimales), ejemplos:
   3 . 24582519 → 3 . 25

   5 . 374994546 → 5 . 37

   2 . 32 → 2 . 32

3. Se expresa como multiplicación el resultado obtenido agregándole la base 10, ejemplos:

    3 . 25 x 10

    5 . 37 x 10

    2 . 32 x 10

4. Se le agrega a la base 10 su exponente; que se obtiene al contar la cantidad de cifras que se movió el punto decimal de su posición original a su posición final, ejemplos:

    3’245,825 . 19 → 3. 24582519 → 3 **.** 245825 **.** 19

    3 . 25 Exp 6 (x 10 = Exp)

0 . 0000005374994546 → 5 . 374994546 → 0 **.** 0000005 **.** 374994546

    5 . 37 Exp 7

    0 . 000232 → 2 . 32 → 0 **.** 0002 **.** 32

    2 . 32 Exp 4

5. Por último se debe colocar el signo del exponente, que será positivo si el punto decimal se movió a la izquierda y negativo si se movió a la derecha de su posición original, ejemplos:

    3 **.** 245825 **.** 19 → 3 . 25 Exp 6 (punto verde en posición original)

    0 **.** 0000005 **.** 374994546 → 5 . 37 Exp – 7

    0 **.** 0002 **.** 32 → 2 . 32 Exp – 4

NOTA: UN NUMERO ENTERO TIENE EL PUNTO DECIMAL EN LA PARTE DERECHA DEL MISMO.

EJEMPLOS Y EJERCICIOS SOBRE NOTACION CIENTIFICA

1. 5 , 679 = 5 . 68 Exp 2
2. 0 . 0007446 = 7 . 45 Exp – 4
3. 111 , 111 . 08 = 1 . 11 Exp 5
4. 0 . 000000009 = 9 Exp – 9
5. 46788 . 389 =
6. 96,563’486,363 =
7. 0.05437 =
8. 0.00002300 =
9. 18.999 =
10. 8.337 =

OPERACIONES CON NUMEROS EXPRESADOS EN NOTACION CIENTIFICA.

Para sumar algebraicamente (sumar o restar) términos en notación científica es necesario que estos tengan el mismo exponente para su base 10, lo que da lugar a términos semejantes. Una vez que en una expresión se tienen puros términos semejantes se aplican los criterios aritméticos de suma y/o resta para encontrar el resultado final:

4 Exp 7 – 3 Exp 6 + 18 Exp 6 = (40 Exp 6) – (3 Exp 6) + (18 Exp 6) =

(40 – 3 + 18) Exp 6 = 55 Exp 6 = **5 . 5 Exp 7**

Para multiplicar o dividir números en notación científica se emplean dos criterios: para la parte real de la notación científica se utilizan los criterios aritméticos de multiplicación y/o división y para la base 10 se aplican las leyes de los exponentes:

$$\frac{125 \text{ Exp } 12}{25 \text{ Exp } 8} = \left(\frac{125}{25}\right) \text{ Exp } (12 - 8) = \mathbf{5 \text{ Exp } 4}$$

EJEMPLOS Y EJERCICIOS DE OPERACIONES EN NOTACION CIENTIFICA

1. (6.25 Exp 9) + (1.35 Exp 11) + (2 Exp 10) – (8.15 Exp 12) =
   (0.0625 Exp 11) + (1.35 Exp 11) + (0.2 Exp 11) – (81.5 Exp 11) =

   (0.0625 + 1.35 + 0.2 – 81.5) Exp 11 =

   - 79.8875 Exp 11 =

   - 7.99 Exp 12

2. (– 1.85 Exp – 4) – (2.17 Exp -5) + (7.64 Exp – 4) + (0.49 Exp – 6) =
   (– 1.85 Exp – 4) - (0.217 Exp -4) + (7.64 Exp – 4) + (0.0049 Exp – 4)

   = 5. 57349 Exp - 4 =
   5.57 Exp – 4

3. $$\frac{472.18 \text{ Exp } - 8}{623.19 \text{ Exp } 6} =$$

   $$\frac{(472.18)}{623.19} \text{ Exp } (- 8 - 6) =$$

   0.76 Exp – 14 =

   7.6 Exp – 15

4. (- 500 Exp 10) (12.8 Exp – 4) =
   (-500 x 12.8) Exp (10 – 4)=

   - 6400 Exp 6 =

   - 6.4 Exp 9

5. (9.2 Exp 7) + (3.15 Exp 3) – (1.22 Exp 5) + (4.58 Exp 6) =
6. (0.09 Exp 10) – (456305 Exp – 2) + (1.96 Exp5) =
7. (4. 32 Exp 3) + (5.78 Exp 2) + (0.12 Exp 1) – (38) =
8. (96 Exp – 6) / (180 Exp – 9) =
9. (√ (100 Exp 4)) (2.71 Exp 1) =

Variación Proporcional.

Serie Aritmética.

Es la sucesión ascendente o descendente de números racionales, en la que un término se obtiene de sumarle a su anterior una cantidad constante:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

El número 2 se obtuvo al sumarle a su anterior (el 1) la constante =1

El número 3 se obtuvo al sumarle a su anterior (el 2) la constante =1

El número 4 se obtuvo al sumarle a su anterior (el 3) la constante =1

El número 5 se obtuvo al sumarle a su anterior (el 4) la constante =1

El número 6 se obtuvo al sumarle a su anterior (el 5) la constante =1

El número 7 se obtuvo al sumarle a su anterior (el 6) la constante =1

18,14,10,6,2

El número 14 se obtuvo al sumarle a su anterior (el 18) la cte = - 4

El número 10 se obtuvo al sumarle a su anterior (el 14) la cte = - 4

El número 6 se obtuvo al sumarle a su anterior (el 10) la cte = - 4

El número 2 se obtuvo al sumarle a su anterior (el 6) la cte = - 4

Para obtener cualquier término de una serie no es necesario desarrollar toda la serie (que además sería muy complicado en series largas), solo se necesitan conocer la constante de cambio, la posición y el valor de un término de la serie, la posición del término buscado y una ecuación o fórmula que relacione dichos elementos:

c = constante de cambio
k = posición del término conocido
a_k = valor del término conocido
n = posición del término buscado
a_n = valor del término buscado

$$\mathbf{a_n = a_k + (n - k)(c)}$$

Ejemplos:

Obtener el doceavo término de una serie cuya constante de cambio es 5, si se sabe que su cuarto término vale 36.

$c = 5$

$k = 4$

$a_k = 36$

$n = 12$

$a_{12} = ?$

$a_{12} = 36 + (12 - 4)(5)$

$a_{12} = 36 + 40$

$a_{12} = 76$

Obtener el tercer término de una serie cuya constante de cambio es 9 y su elemento 40 es 400.

$c = 9$

$k = 40$

$a_k = 400$

$n = 3$

$a_3 = ?$

$a_3 = 300 + (3 – 40)(9)$

$a_3 = 400 - 333$

$a_3 = 67$

Serie geométrica.

Es la sucesión ascendente o descendente de números racionales, en la que un término se obtiene de multiplicar a su anterior por una cantidad constante:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024

El número 4 se obtuvo al multiplicar a su anterior (el 2) por la razón =2

El número 8 se obtuvo al multiplicar a su anterior (el 4) por la razón =2

El número 16 se obtuvo al multiplicar a su anterior (el 8) por la razón =2

El número 32 se obtuvo al multiplicar a su anterior por la razón =2

El número 64 se obtuvo al multiplicar a su anterior por la razón =2

El número 128 se obtuvo al multiplicar a su anterior por la razón =2

El número 256 se obtuvo al multiplicar a su anterior por la razón =2

El número 512 se obtuvo al multiplicar a su anterior por la razón =2

El número 1024 se obtuvo al multiplicar a su anterior por la razón =2

Para obtener cualquier término de una serie no es necesario desarrollar toda la serie (que además sería muy complicado en series largas), solo se necesitan conocer la razón de cambio, la posición y el valor de un término de la serie, la posición del término buscado y una ecuación o fórmula que relacione dichos elementos:

r = razón de cambio

k = posición del término conocido

a_k = valor del término conocido

n = posición del término buscado

a_n = valor del término buscado

$$\mathbf{a_n = (a_k)\ [(r)^{(n-k)}]}$$

Ejemplos:

Obtener el último término de una serie geométrica de 10 elementos si se sabe que el primer término vale 6 y que la razón de cambio es 5.

r = 5

k = 1

a_k = 6

n = 10

a_{10} = ?

$$\mathbf{a_{10} = (6)\ [(5)^{(10-1)}]}$$

$$\mathbf{a_{10} = 11'718{,}750}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS POR EL GRUPO Y EL PROFESOR.

Razones y proporciones.

Al cociente de dos números se le conoce como razón (números racionales: a / b). A la igualdad entre 2 razones se le conoce como proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

en esta relación el factor de cambio entre numeradores y denominadores es el mismo (fracciones equivalentes: el cociente en ambas razones es el mismo):

$$\frac{10}{20} = \frac{50}{100}$$

50 ÷ 10 = 5

100 ÷ 20 = 5

Como se observa el factor de cambio es 5

10 ÷ 20 = 0.5

50 ÷ 100 = 0.5

Y el cociente de ambas razones es el mismo: 0.5

Con lo anterior podemos ver que 10 a 50 guarda la misma proporción que 20 a 100 ó 10 a 20 guarda la misma proporción que 50 a 100.

En la vida cotidiana normalmente se presenta una proporción incompleta: 3 valores conocidos y una incógnita. Para encontrar el valor de la incógnita es necesario determinar la relación entre dos de las variables y aplicar el mismo criterio para el término faltante (determinar el valor de la incógnita podrá hacerse por lógica ó por despeje algebraico):

$$\frac{30}{6} = \frac{?}{15}$$

Aquí podemos observar que el 6 cabe 5 veces en el 30, con esto ya sabemos la proporción: el 15 también debe caber 5 veces en el número que falta, por lo que concluimos que el 75 es este número (15 x 5 = 75).

Otra forma de obtener el resultado es estableciendo una ecuación algebraica (despeje):

Determinemos, ya conociendo el resultado (75), las operaciones entre el 30, el 6 y el 15 para llegar a dicho resultado (esta relación obtenida será la fórmula general para resolver este tipo de ejercicios).

Con todo lo anterior, resumido en la fórmula, podemos concluir que para determinar el valor de la incógnita en una proporción es necesario calcular el cociente de la razón conocida y multiplicarlo por el término conocido de la otra razón:

$a / b = m$

$y = mx$ (y: incógnita, x: valor)

A esta última relación se le conoce como **VARIACION PROPORCIONAL DIRECTA**: si el valor de x aumenta el valor de "y" también aumenta y si el valor de x disminuye el valor de "y" también disminuye.

Otro tipo de variación es la **VARIACION PROPORCIONAL INVERSA**:

Es la igualdad entre dos productos:

$(a)(b) = (c)(d)$

Si uno de los factores aumenta su valor en uno de los productos, el otro factor del mismo producto disminuirá su valor conservando el resultado igual al del otro producto y viceversa.

Con cierta frecuencia se presentan casos en los que intervienen los dos tipos de variación proporcional dando origen a la **VARIACION PROPORCIONAL CONJUNTA**. En estos casos se fija una de las variables y se resuelve parcialmente de acuerdo a una de las variaciones y así sucesivamente hasta concluir con la solución del problema:

Ejemplo de Variación Proporcional Conjunta:

Cuatro jardineros podan un área de 20 m² en 5 horas. En cuánto tiempo podarán 7 jardineros 40 m²?

Solución:

Observación:

Si 4 jardineros podan 20 m² (en 5 horas) 7 jardineros podarán más área en las mismas 5 horas: variación directa.

Si 4 jardineros tardan 5 horas (en 20 m²) 7 jardineros tardarán menos tiempo en la misma área: variación inversa.

Desarrollo:

Se deja fija la variable jardineros y se establece la proporción entre horas y m²

20 m² en 5 hrs

40 m² en ?

? = 10 horas

Se deja fija la variable m² y se establece la proporción entre jardineros y tiempo

4 jardineros tardan 10 horas

7 jardineros tardan ?

? = 5.71 horas

EJERCICIOS SOBRE RAZONES, PROPORCIONES Y VARIACION.

1. Determina el valor de la incógnita:
   a) 5 / 48 = 12 / ?
   b) ? / 100 = 400 / 20
   c) 1 / ? = 60 / 15
   d) 26 / 13 = ? / 81
2. Determina el valor de la incógnita:
   a) (18)(?) = (30)(6)
   b) (?)(200) = (45)(40)
   c) (6)(6) = (?)(4)
   d) (10)(15) = (17)(?)
3. José Luis recorre una distancia en 30 min a una velocidad de 20 km / hra, su novia recorre la misma distancia en 20 min. Qué velocidad llevaba su novia?
4. Seis manzanas, 8 papayas, 10 pepinos se emplean para alimentar a 2 pericos, que cantidad de fruta se necesitará para alimentar a 11 pericos?
5. Cinco ductos llenan un tanque de gasolina de 100 m³ en 2 horas, con 4 ductos en 5 horas cuántos metros cúbicos se llenarían?

Trabajar con números racionales (razones) es trabajar con la relación entre dos valores, que por convenio es el numerador en función del denominador:

4 de 10

27 de 200

15 de 50

8 de 8

10 de 100

La última relación (denominador 100) se utiliza para estandarizar las parcialidades de un universo establecido (es la relación que contesta la pregunta: cuánto se tiene del total de posibilidades?) y se denomina **TANTO POR CIENTO**.

Por lo cual, siendo el tanto por ciento un racional, se puede representar como fracción común y fracción decimal, además y principalmente como enteros menores o iguales a una centena:

20 / 100 = 0.20 = 20 %

Para determinar el porciento de cualquier razón se emplea la proporción directa, analizada con anterioridad.

Ejercicios de tanto por ciento.

1. En el grupo de ___________ hay ___________ alumnos, de los cuales ___________ son mujeres y ______________ son hombres. ____________ nacieron en Morelos y __________ nacieron fuera de Morelos. De los nacidos en Morelos _________ usan lentes, _________ tienen el cabello largo, _____________ son mujeres.

Determina los porcentajes de cada conjunto con respecto al grupo, el porcentaje de cada subconjunto con respecto a cada conjunto y el porcentaje de cada subconjunto con respecto al grupo.

2. 3000 elementos son el 38 % de un total de?
3. Calcula el 68 % de 4’530’010
4. Lluvia de ideas.

UNIDAD 2. GEOMETRIA

Geometría en el plano.

La geometría es la parte de las matemáticas que estudia las mediciones y propiedades de las figuras tanto en el plano como en el espacio.

El plano es el cuerpo espacial que solo posee 2 dimensiones y sobre el cual se localizan un sinfín de puntos, líneas, ángulos y figuras.

El punto es un lugar geométrico indefinido por si mismo, pero que adquiere significancia como generador de líneas, es decir, una línea es una sucesión de puntos. A su vez las líneas son fundamento de ángulos y figuras. El acomodo (cambio de trayectoria) de los puntos propicia líneas con características diferentes, así como el acomodo de las líneas genera una clasificación de ángulos y figuras.

Clasificación de líneas.

Línea recta.

Es la sucesión de puntos que conserva una misma dirección

Línea quebrada.

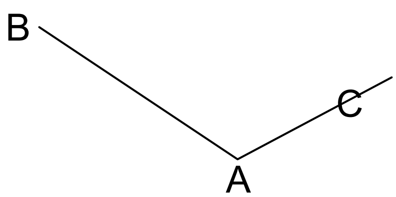
Es la sucesión de líneas rectas, en las que las líneas consecutivas tienen diferente dirección  .

Línea curva.

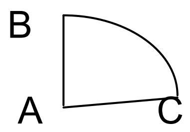
Se genera por el movimiento de un punto sin mantener una dirección constante 

Definición de ángulo.

Lugar geométrico que resulta de la intersección (cruce) de dos segmentos de líneas rectas. A las rectas que forman el ángulo se les llama lados y al punto de intersección de las rectas se le denomina vértice. Para cuantificar la medida de un ángulo se emplean curvas que unan (conservando la misma distancia recta desde el vértice) los extremos no intersectados de los lados de dicho ángulo. Si nombramos a los extremos de los lados con letras mayúsculas, tendremos una para indicar el vértice y una para cada extremo de los lados:



Para obtener la medida del ángulo es necesario saber que segmento de curva se seguiría hipotéticamente para cerrar los lados:

Para medir los ángulos se utilizan principalmente dos sistemas: el sexagesimal y el cíclico.

Sistema sexagesimal.

Se considera (como se reafirmará más adelante) que los segmentos de curva que conforman un ángulo son una circunferencia. La circunferencia en este sistema es dividida en 360 partes iguales conocidas como grados (que a su vez se subdividen en minutos y estos a su vez en segundos). El aparato más común empleado para obtener estas mediciones es el transportador, aunque en la geometría pura no se utilizaban herramientas graduadas sino el compás, una regla y escuadras.

Sistema cíclico.

La circunferencia se divide en 180 / π partes iguales que reciben el nombre de radianes. Un radián es por definición el ángulo cuyos segmentos de recta (lados) y segmento de curva (arco) miden lo mismo.

Nomenclatura:

Grados = °

Minutos = ’

Segundos = ’’

Radianes = rad

Equivalencia:

1 rad = 180° / π

EJEMPLOS Y EJERCICIOS SOBRE EL TRAZO Y LA MEDICIÓN DE ANGULOS.

1. Traza un ángulo utilizando, el transportador, cuya medida sea:
   a. 30°
   b. 178°
   c. 210°
   d. 45°
   e. 360°
2. Traza los ángulos que se te piden a continuación utilizando sólo el compás y las escuadras (Explicación y aplicación del teorema de Tales y del Teorema de Salomón):
   a. 18°
   b. 90°
   c. 210°
   d. 30°
   e. 125°
3. Convierte de grados a radianes los siguientes valores:
   a. 76°
      Se establece la proporción:
      1 rad = 180° / π
      ? = 76°
      ? = (76°)(π) / 180°
      $? = \frac{19\ \pi}{45}$ rad

   b. 270°
      Solución:
      = 270 π / 180
      $= \frac{3\ \pi}{2}$ rad
   c. 15°
   d. 520°
   e. 172°
   f. 200°
   g. 62°
   h. – 12°
   i. 300°
   j. 98°

4. Convierte de radianes a grados los siguientes ángulos:
   a. π rad
      Se establece la proporción
      1 rad = 180° / π
      π rad = ?
      $? = \left\{ \frac{(180°)(\pi)}{\pi} \right\} / 1$
      $? = \frac{180}{1} = 180°$

   b. $\frac{3\pi}{4}$ rad

      Solución:

      $= \frac{180}{3/4}$

      $= \frac{(180)(4)}{3} = 240°$

   c. $\frac{\pi}{2}$ rad
   d. $\frac{3}{8}\pi$ rad
   e. 5π rad
   f. $\frac{8}{24}\pi$ rad
   g. $\frac{10}{4}\pi$ rad
   h. $\frac{9}{6}\pi$ rad
   i. 15π rad

Clasificación de los ángulos.

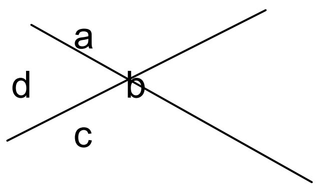
Nos basaremos principalmente en dos criterios para clasificar a los ángulos: de acuerdo a su magnitud y de acuerdo a la relación al formar parte de una misma figura.

Por su magnitud los ángulos se dividen en:

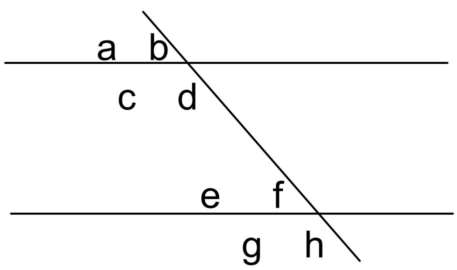
- Agudos = miden menos de 90°
- Rectos = miden exactamente 90°
- Obtusos = miden más de 90° y menos de 180°
- Llanos = miden exactamente 180°
- Entrantes = miden más de 180° y menos de 360°

Por sus relaciones se dividen en:

- ❖ Los que suman 90° (complementarios)
- ❖ Los que suman 180° (suplementarios)
- ❖ En un par de rectas que se cruzan:
    - Adyacentes = ángulos consecutivos que sumados dan un ángulo llano (a los ángulos que sumados dan 180° se les conoce como suplementarios)(a y b, a y d, b y c, c y d)
    - Opuestos por el vértice = par de ángulos de igual magnitud y que no son consecutivos (a y c, b y d)



- ❖ En un par de rectas paralelas que son cruzadas por otra recta



- Internos = ángulos entre las dos paralelas
- Externos = ángulos fuera de las dos paralelas
- Alternos internos = par de ángulos internos en diferente lado de la recta que corta a las paralelas y que se ubican cada uno en diferente paralela. Son iguales.
- Alternos externos = par de ángulos externos en diferente lado de la recta que corta a las paralelas y que se ubican cada uno en diferente paralela. Son iguales
- Colaterales = par de ángulos internos en el mismo lado de la recta que corta a las paralelas y que se ubican cada uno en diferente paralela. Son suplementarios.
- Correspondientes = par de ángulos que situados en el mismo lado de la recta que corta a las paralelas y en diferente paralela, son uno interno y el otro externo. Son iguales.

Nota: si las rectas paralelas cruzadas por otra recta generan 8 ángulos iguales, se dice que las paralelas son perpendiculares a la recta que las cruza. Por lo que, generalizando, si dos rectas se cruzan formando 4 ángulos iguales, son perpendiculares entre si.

Las líneas, además de ángulos, también forman espacios limitados (cerrados). Dentro de estos espacios generados hay una división importante: el círculo y los demás polígonos (figuras cerradas). El primero es un lugar geométrico obtenido de una curva cerrada y los segundos son espacios planos delimitados por rectas.

Los polígonos se subdividen a su vez dependiendo del número de rectas que los generan:

- Triángulos = tienen 3 lados (A su vez los triángulos también tienen una clasificación, que veremos cómo tópico aparte).
- Cuadriláteros = tienen 4 lados. En esta división tenemos tres tipos:
    - Paralelogramos = los lados que no comparten un vértice son paralelos entre ellos: cuadrado, rectángulo, rombo y romboide
    - Trapecios = solo un par de lados son paralelos: trapecio regular, trapecio rectángulo y trapecio isósceles
    - Trapezoide = no presenta paralelismo entre ninguno de sus lados

Como todas estas figuras forman parte del plano, y en el plano tenemos puntos, líneas y ángulos, dentro de cada figura tenemos casos particulares de estos elementos.

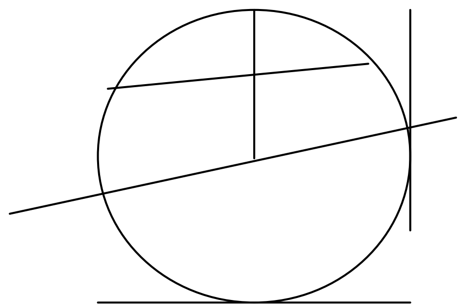
El círculo, la circunferencia y sus principales componentes.

La curva cerrada en un plano que tiene la particularidad de que los puntos que la conforman guarden igual distancia a un mismo punto dentro del espacio generado por la circunferencia (círculo) llamado centro, recibe el nombre de circunferencia.

Ligados a la circunferencia existen líneas, ángulos, regiones y relaciones con características específicas:

Líneas.

- Radio = segmento de línea recta comprendido entre el centro y un punto de la circunferencia
- Diámetro = segmento de línea recta que une dos puntos de la circunferencia pasando por e centro de ella.
- Cuerda = segmento de línea recta que une dos puntos de la circunferencia (un caso particular de cuerda es el diámetro).
- Secante = línea recta que cruza dos puntos de la circunferencia.
- Tangente = línea recta que sólo toca un punto de la circunferencia (está línea jamás podrá compartir un punto con el círculo) y que es perpendicular al radio de ella.
- Arco = segmento de línea curva de una parte de la circunferencia.



Ángulos.

- Central = Dos radios forman este ángulo.
- Excéntrico = Su vértice no coincide con el centro, pero está dentro de la circunferencia y ninguno de sus lados es una tangente.
- Semi-inscrito = Su vértice está sobre la circunferencia, uno de sus lados es una tangente y el otro lado es una cuerda.

- ❖ Inscrito = Su vértice está sobre la circunferencia y sus lados son cuerdas.
- ❖ Exterior = el vértice está fuera tanto de la circunferencia como del círculo y sus lados son dos rectas de una circunferencia (una tangente y una secante, dos secantes o dos tangentes).

Regiones.

- ❖ Semicircunferencia = arco cuya longitud es igual a la mitad de la longitud de a circunferencia.
- ❖ Semicírculo = superficie delimitada por un diámetro y una semicircunferencia.
- ❖ Anillo = espacio delimitado por dos circunferencias que de diferente tamaño comparten el mismo centro (diferencia de dos círculos concéntricos).

Relaciones.

- ❖ El ángulo central mide el doble del ángulo inscrito que comparta el mismo arco.
- ❖ El ángulo exterior mide la mitad de la diferencia de los arcos comprendidos por sus lados.
- ❖ El ángulo semi-inscrito mide la mitad del arco subtendido de la cuerda que conforma el ángulo.
- ❖ El ángulo excéntrico mide la semisuma de los arcos comprendidos por sus lados y la continuación de ellos.
- ❖ Si ángulos inscritos comparten arco o sus arcos son iguales, estos son iguales.
- ❖ El ángulo inscrito cuyo arco es una semicircunferencia es recto.
- ❖ Cuerdas paralelas comprenden arcos iguales.
- ❖ Toda cuerda que es cruzada por un diámetro es dividida en dos partes iguales.
- ❖ Si dos cuerdas son iguales su distancia al centro es la misma (la distancia se mide perpendicularmente).
- ❖ Las tangentes trazadas desde un punto exterior a la circunferencia miden lo mismo.

El triángulo.

Como ya se mencionó con anterioridad, el triángulo es una figura plana cerrada de tres lados (rectas) y por lo tanto de tres ángulos internos.

De acuerdo a esta definición, podemos notar que existen dos criterios para clasificar a los triángulos: por sus lados o por sus ángulos.

Clasificación por la relación de sus lados.

- ✓ Tres lados diferentes = escaleno
- ✓ Tres lados iguales = equilátero
- ✓ Dos lados iguales = isósceles

Clasificación por el tamaño de sus ángulos.

- ✓ Tres ángulos agudos = acutángulo
- ✓ Un ángulo obtuso = obtusángulo
- ✓ Un ángulo recto = rectángulo

Ligados al triángulo existen puntos, líneas y relaciones con características específicas:

Líneas.

- ❖ Altura = recta perpendicular que une un vértice con el lado (o la prolongación de él) que no lo conforma.
- ❖ Mediana = recta que une un vértice con el punto medio del lado que no incluye a dicho vértice.
- ❖ Mediatriz = recta perpendicular que pasa por el punto medio de un lado.
- ❖ Bisectriz = recta que divide en 2 partes iguales a un ángulo.

Puntos.

- ❖ Ortocentro = cruce de las alturas.
- ❖ Baricentro = cruce de las medianas.
- ❖ Circuncentro = cruce de las mediatrices.
- ❖ Incentro = cruce de las bisectrices.

Relaciones.

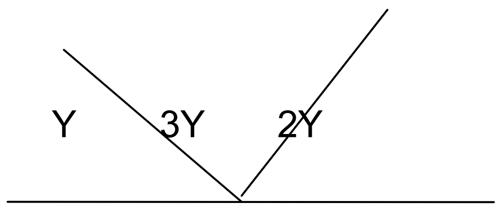
- ❖ La suma de los ángulos internos es siempre 180°.
- ❖ El ángulo suplementario de un ángulo interno es igual a la suma de los otros dos ángulos internos.
- ❖ Un lado siempre será mayor que la diferencia de los otros dos y menor que su suma.
- ❖ El mayor lado será el que no conforme el mayor ángulo.
- ❖ Dos triángulos son congruentes si los lados y ángulos de uno son iguales a los lados y ángulos del otro.
- ❖ Dos triángulos son semejantes si los ángulos de uno son iguales a los ángulos del otro y los lados de uno y otro son proporcionales.

EJEMPLOS Y EJERCICIOS SOBRE ANGULOS, TRIÁNGULOS Y CIRCULOS.

1. Dame los ángulos complementarios y suplementarios de los siguientes casos:
    a. 52°
       Complementario = 90° - 52° = 38°
       Suplementario = 180° - 52° = 128°
    b. 75°
       Complementario = 90° - 75° = 15°

       Suplementario = 180° - 75° = 105°
    c. 90°
       Complementario = 90° - 90° = 0°
       Suplementario = 180° - 90° = 90°
    d. 10°
       Complementario = 90° - 10° = 80°
       Suplementario = 180° - 10° = 170°
    e. 136°
       Complementario = 90° - 136° = - 46°
       Suplementario = 180° - 136° = 44°

2. Determinar el valor de la incógnitas:
    a.



Solución:

Como se aprecia en la figura, el ángulo Y, el ángulo 3Y y el ángulo 2Y son suplementarios (suman 180°), lo que nos da la siguiente ecuación:

$$Y + 3Y + 2Y = 180°$$

Y con los conocimientos adquiridos en secundaria (reforzados en Loyola) notamos que es una ecuación de primer grado con una incógnita:

Sumamos los términos semejantes:

$6Y = 180°$

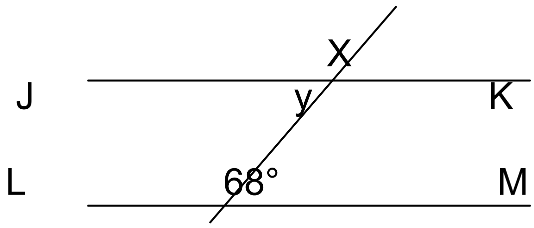
Buscamos un número que cumpla la igualdad:

Será aquel que multiplicado por 6 nos de 180

O lo que es lo mismo:

$Y = 180° / 6 = 30°$

b.



Solución:

Las rectas JK y LM son paralelas.

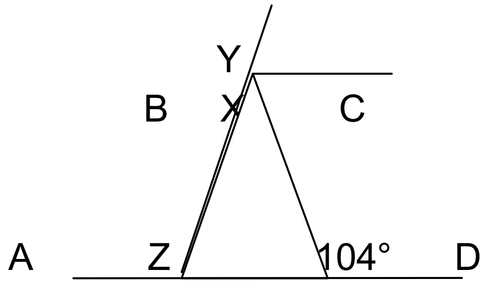
Por lo tanto el ángulo Y y el ángulo 68° son suplementarios por ser colaterales:

$$Y = 180° - 68° = 112°$$

Los ángulos X y Y son opuestos por el vértice por lo que son iguales:

$$X = Y = 112°$$

c.



Condición:

Z = 104°

Solución:

La condición Z = 104° nos indica que el triángulo es isósceles y que sus ángulos iguales medirán lo mismo que el suplemento de 104°:

Ángulo suplementario = 180° - 104° = 76°

Como la suma interna de los ángulos de un triángulo es igual a 180° el ángulo interno faltante vale:

180° - 76° - 76° = 28°

Por otro lado, las rectas BC y AD son paralelas, haciendo que los ángulos X y 104° sean suplementarios por ser colaterales:

X = 180° - 104° = 76°

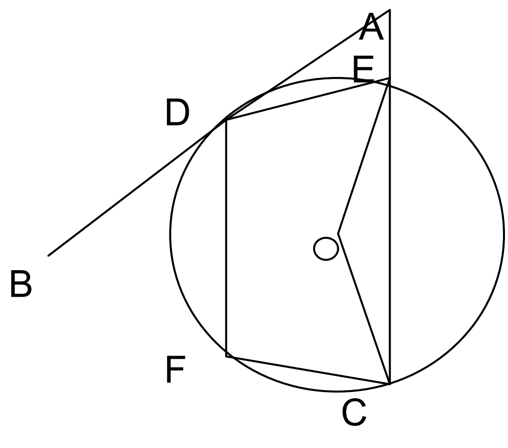
Ya con estas consideraciones podemos determinar también el valor de Y:

Y + X + ángulo interno diferente = 180°

Y = 180° - (76 + 28°)

Y = 76°

d.



Datos:

Arco DE = 64°
Ángulo EOC = 150°
Rectas DF y EC son paralelas

Incógnitas:

Ángulo BDF = ?
Ángulo BAC= ?

Solución:

Como los arcos DE y FC están comprendidos por paralelas (DF y EC) son iguales:

Arco DE = arco FC = 64°

Si sabemos que los arcos DE, EC, FC y DF deben sumar 360° y conocemos el valor de tres de ellos, podemos calcular el valor del arco DF:

Arco DF = 360 – (64° + 150° + 64°)
Arco DF = 82°

Como el ángulo BDF es semi-inscrito, su valor es el de la mitad del arco DF:

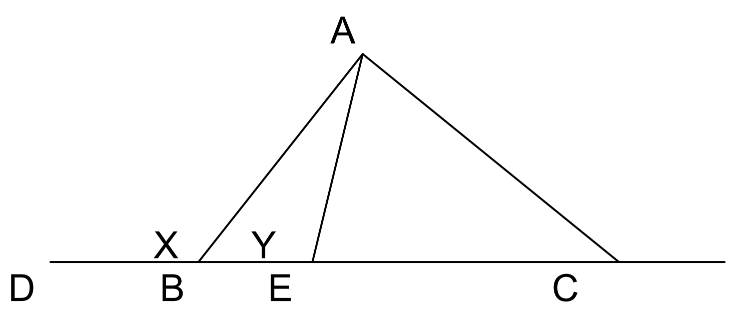
Ángulo BDF = 82° / 2 = 41°

Como el ángulo BAC es exterior, su medida equivale a la mitad de la diferencia de sus arcos comprendidos:

Ángulo BAC = (105 – 64) / 2 = 41°

Observación: nótese que los ángulos BDF y BAC son correspondientes y por lo tanto deben ser iguales.

e.



Datos:

Ángulo EAB = 29°
Ángulo EAC = 60°

Ángulo ECA = 52°

Incógnitas:

Ángulo X = ?

Ángulo Y = ?

Solución:

Los ángulos internos de un triángulo suman 180°:

Triángulo AEC:

Ángulo EAC + ángulo AEC + ángulo ECA = 180°

Los ángulos suplementarios suman 180°:

Ángulo AEC + ángulo Y = 180°

Igualamos las 2 ecuaciones:

Ángulo EAC + ángulo AEC + ángulo ECA = Ángulo AEC + ángulo Y

Sustituimos valores y encontramos el valor del ángulo Y:

Ángulo Y = 60° + ángulo AEC – ángulo AEC + 52

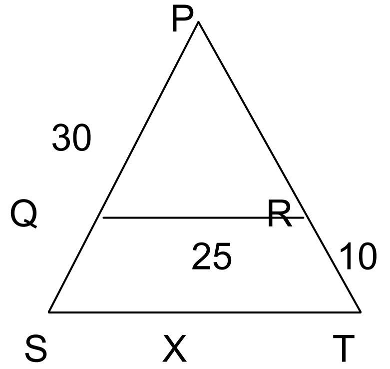
Ángulo Y = 112°

Aplicando los criterios anteriores tenemos que:

Ángulo X = Ángulo EAB + Ángulo Y

Ángulo X = 29° + 112° = 141°

f.



Solución:

Los triángulos PQR y PST son semejantes, por lo que sus lados son proporcionales, de allí establecemos la regla:

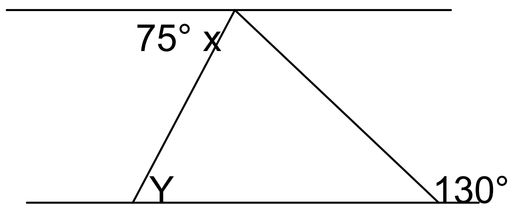
$$\frac{25}{30} = \frac{X}{40}$$

$$X = (25)(40) / 30$$

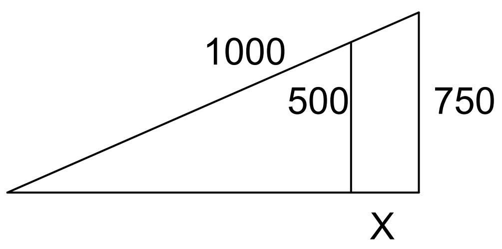
$$X = 100 / 3$$

3. Dame los ángulos complementarios y suplementarios de los siguientes casos:
   a. 80°
   b. 0°
   c. 200°
   d. 45°
   e. 89°

4. Determinar el valor de las incógnitas:
   a.



   b.



Geometría en el espacio.

La geometría es la parte de las matemáticas que estudia las mediciones y propiedades de las figuras tanto en el plano como en el espacio.

El espacio es el lugar que posee 3 dimensiones y sobre el cual se localizan un sinfín de puntos, líneas, ángulos, planos y figuras.

Los puntos, las líneas, los ángulos y las figuras planas ya han sido descritas y analizadas en el tema anterior, enfoquémonos ahora en los entes con tres dimensiones.

A las figuras espaciales se les conoce como sólidos, y se les clasifica de acuerdo a las superficies que los conforman de la siguiente manera:

Prismas.

Son los sólidos geométricos conformados por dos polígonos iguales y paralelos unidos por rectas entre los vértices de los lados que los componen. Así, tenemos una división de los prismas de acuerdo a la figura que da forma a sus caras iguales y paralelas:

- Triangular
- Cuadrangular (los paralelepípedos son un caso particular y dentro de ellos tenemos el cubo)
- Y así sucesivamente, dependiendo del número de lados

Pirámides.

Son los sólidos geométricos conformados por triángulos que comparten un mismo vértice, unidos por dos de sus lados y delimitados por un polígono formado por el lado de cada triángulo que no forma parte del vértice común.

Cilindros.

Son los sólidos geométricos conformados por dos círculos iguales y paralelos unidos por una superficie curva que une todos los puntos de las dos circunferencias.

Conos.

Son los sólidos geométricos conformados por un círculo y un punto, llamado vértice, en diferentes planos, en los que se mantiene la perpendicularidad del diámetro del círculo con la recta que une el vértice y el centro del círculo, unidos por un infinito de rectas que van del vértice a cada uno de los puntos de la circunferencia.

Esferas.

Son los sólidos geométricos conformados por una superficie curva en la que los puntos que la conforman mantienen la misma distancia a un punto en el interior del espacio que genera.

En cuanto a los figuras planas podemos cuantificar el valor de la longitud total de la línea o las líneas que le dan forma, nombrándolo *perímetro*. A la superficie comprendida por el contorno o perímetro se le denomina *área*.

A los sólidos se les puede calcular el área de la o las caras que lo conforman. Al espacio comprendido por las caras o superficies se le denomina *volumen*.

Para calcular perímetros, áreas y volúmenes existen fórmulas específicas de acuerdo a la figura. En la siguiente tabla se sintetizan algunas de estas fórmulas:

	Figuras planas	**Perímetro**	**Área**
1	*Triángulo*	P = a+ b+ c	A=(bxh) /2
2	*Cuadrado Rectángulo*	P=2a + 2b	A= b x h
3	*Rombo*	P=2a + 2b	A=(Dxd) /2
4	*Trapecio*	P=B+b+c+d	$A=\frac{(B+b)(h)}{2}$
5	*Polígono regular*	P = na	$A=\frac{(P)(ap)}{2}$
6	*Polígono irregular*	P= a+b+…+n	Se triangula la figura y se suman las áreas de todos los triángulos
7	*Círculo*	P = πd	A= πr²

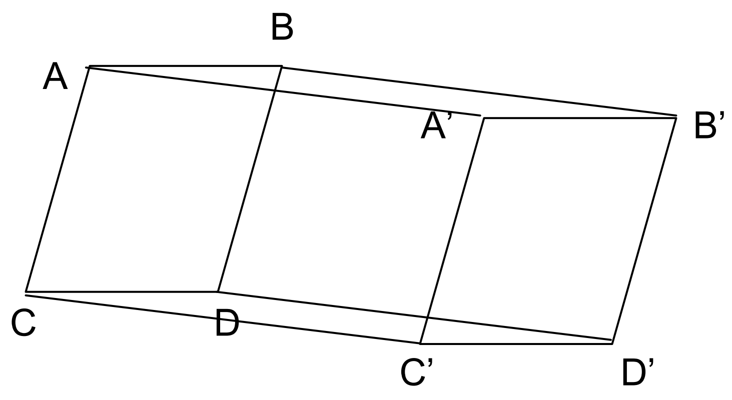
	Figuras espaciales	Área	Área total	Volumen
1	*Prisma*	Bases: área de la figura plana Laterales: A = b x h	AT = 2Abase + Alaterales	V=(Abase)(h)
2	*Pirámide*	Base: Área de la figura plana Laterales: A=(bxh) /2	AT = Abase + Alaterales	$V=\frac{(Abase)(ap)}{3}$
3	*Cilindro*	Bases: $A= \pi r^2$ Lateral: A=Pbase x h	AT = $2\pi r\ (r+h)$	$V = \pi r^2 h$
4	*Cono*		AT = $\pi r\ (r+g)$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
5	*Esfera*			$V = \frac{4\pi r^3}{3}$

Transformaciones geométricas.

Estas son cambios de posición, sentido o tamaño de un lugar geométrico, conservando las mismas características del cuerpo en los dos primeros casos y aplicando la proporcionalidad en el tercer caso.

Traslación.

Cambio de posición de un lugar geométrico, haciendo corresponder cada punto de partida con cada punto final.



Simetría.

Simetría Axial.

Cambio de posición de un lugar geométrico, en la que los puntos de la figura original y los puntos de la figura final guardan con sus correspondientes una misma distancia perpendicular a una línea imaginaria entre ellos llamada eje.

Simetría Central.

Cambio de posición de un lugar geométrico, en la que los puntos de la figura original y los puntos de la figura final guardan con sus correspondientes una misma distancia a un punto imaginario entre ellos llamado centro.

Rotación.

Cambio de sentido de un lugar geométrico, en el que los puntos de la figura guardan siempre la misma distancia (radio) a un punto imaginario llamado centro.

Homotecia.

Cambio de tamaño de un lugar geométrico conservando las mismas proporciones, es decir, la figura original y la figura final son semejantes.

MATEMATICAS II

INDICE

Unidad 2. Función Lineal

Ecuación.

Definición: Una ecuación es una proposición de igualdad entre dos expresiones llamadas miembros.

Conviene aclarar que está igualdad sólo se cumple, cuando se manejan variables, para ciertos valores; mientras que se manejen sólo constantes la igualdad no estará condicionada.

De acuerdo a la anterior aclaración, podemos observar que una ecuación se compone de constantes o de variables y constantes. Definamos entonces ambos conceptos:

Constante: Símbolo de cantidad que nunca cambia de valor (lo que comúnmente conocemos como números: 0, 1, 2, 3,…).

Variable: Símbolo de cantidad que adquirirá el valor del caso particular que se esté tratando de una ecuación general (para su nomenclatura se emplean regularmente letras: x,y,z,v,w,etc).

Cuando en una ecuación aparece más de una variable, se genera un factor de dependencia entre las variables. Esto propicia dos tipos de variables: independientes (se le dan valores arbitrarios) y dependientes (dependen del valor asignado a la variable independiente).

Ejemplos de ecuaciones:

- $3x - 7 = 2x + 6$
- $y = 4x - 12$
- $4+8-5 = 1+1-4+9$

Ecuación lineal.

Caso particular de ecuación, en el que la o las variables que la componen están elevadas a la primera potencia.

Ecuación lineal con una variable.

Como su nombre lo indica, son ecuaciones lineales que sólo tienen un valor desconocido, representado por una literal, y que al ser analizadas tendrán una solución posible: el valor para el cual la incógnita cumple la igualdad:

$$x + 8 = 2x + 5$$

Sólo cuando $x = 3$ se cumple esta igualdad:

$$3 + 8 = 2(3) + 5$$

$$11 = 6 + 5$$

$$11 = 11$$

Para encontrar el valor único de la incógnita en una ecuación es necesario despejar la variable (dejarla sola en un miembro de la igualdad), respetando el criterio de la operación inversa:

"Todo elemento que cambie de un miembro a otro en una igualdad, cambiará la operación original por una operación contraria":

Operaciones contrarias básicas:

- Multiplicar con dividir
- Sumar con restar

Para una mejor comprensión en la resolución de ecuaciones se muestran los siguientes ejemplos:

1. $– 4 + 8x – 3 + 10x = 3x + 12 - x -3$
    a. Primero juntamos los términos semejantes en ambos miembros de la ecuación
    $-4 – 3 + 8x + 10x = 3x – x + 12 – 3$

    $-7 + 18x = 2x + 9$

b. Ponemos en un miembro de la igualdad a los términos que tengan a la variable “x” y en el otro miembro a todas las constantes
   El 2x está sumando lo cambio restando y el 7 está restando lo paso sumando:
   $18x – 2x = 9 + 7$

c. Repetimos el primer paso
   $16x = 16$

d. Dejamos sola a la “x”, pasando al 16 (que está multiplicándola) dividiendo al 16 del otro miembro
   $x = 16 / 16 = 1$

e. Por último, comprobamos si este valor de “x” satisface la ecuación
   $-4 + 8(1) – 3 + 10(1) = 3(1) + 12 – 1 – 3$
   $-4 + 8 -3 + 10 = 3 + 12 – 1 – 3$
   $-4 – 3 + 8 + 10 = 15 – 4$
   $- 7 +18 = 11$
   $11 = 11$

2. $5(12x – 4) + 8 – 10x = 3(6 – x) – 2 + 25$

Solución:
$60x – 20 + 8 – 10x = 18 - 3x – 2 + 25$
$60x – 10x – 20 + 8 = - 3x + 18 – 2 + 25$
$50x – 12 = - 3x + 41$
$50x + 3x = 41 + 12$
$53x = 53$
$x = 53 / 53 = 1$

Comprobación:
$5(12(1) – 4) + 8 – 10(1) = 3(6-1) – 2 + 25$
$5(12 – 4) + 8 – 10 = 3(5) – 2 + 25$
$5(8) + 8 – 10 = 15 – 2 + 25$
$40 + 8 – 10 = 38$
$38 = 38$

3. $\frac{9x + 1}{2} = \frac{22x + 4}{5}$

Solución:

$5(9x + 1) = 2(22x + 4)$

$45x + 5 = 44x + 8$

$45x – 44x = 8 – 5$

$x = 3$

Comprobación:

$\frac{9(3) + 1}{2} = \frac{22(3) + 4}{5}$

$\frac{27 + 1}{2} = \frac{66 + 4}{5}$

$\frac{28}{2} = \frac{70}{5}$

$14 = 14$

4. $\frac{2x}{3} – 10 – x = \frac{x}{6} + 5 + \frac{x}{3}$

Solución:

$\frac{2x}{3} – 10 – \frac{3x}{3} = \frac{x}{6} + 5 + \frac{2x}{6}$

$\frac{-x}{3} – 10 = \frac{3x}{6} + 5$

$\frac{-x}{3} – \frac{3x}{6} = 10 + 5$

$\frac{-2x}{6} – \frac{3x}{6} = 15$

$$\frac{-5x}{6} = 15$$

$-5x = 6(15)$

$-5x = 90$

$x = 90 / -5 = -18$

Comprobación:

$$\frac{2(-18)}{3} - 10 - (-18) = \frac{-18}{6} + 5 + \left(\frac{-18}{3}\right)$$

$-12 - 10 + 18 = -3 + 5 - 6$

$-4 = -4$

EJERCICIOS DE ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA.

5. $-7x + 6 - 2x = 5x - 12x - 2$
6. $15x + 8 = 9x - 16$
7. $6 - 40 + 7 = 15x + 12x - 4x$
8. $8(2x + 3) - 5x = 9 - 12(x - 2x) + 13$
9. $\frac{-7x + 8}{2} = \frac{236 - 30x}{4}$
10. $7 + 4m = 3m + 19$
11. $4z - 38 = 18$
12. $6x + 2 = \frac{2x - 2}{3}$
13. $d = v / t$
    Donde: $d = 30$ y $v = 120$
14. $\frac{8 + 6}{x} = 23 - 16$
15. $-x = 1 + 2 + 3$

Ecuación lineal con dos variables.

Es el caso más sencillo de una función (relación de dependencia entre variables), siendo esta la representación algebraica de la Recta.

En este tipo de ecuación se presenta la variable independiente, que por común acuerdo, que será la “x” y la variable dependiente “y”, que como consecuencia del acuerdo, tomará valores dependiendo del valor asignado a “x”:

- $3x - 12y = 8$
- $-6x + y = -4$
- $x + y = 0$

Este tipo de ecuaciones se representa de forma general como:

$Ax + By = C$

y de forma ordinaria:

$y = mx + b$

Donde:

$m = A/B$ y $b = C/B$

además m y b son constantes.

En la representación ordinaria se puede ver claramente que “y” es función de “x”.

Para encontrar la solución de este tipo de ecuaciones, es necesario tabular (tabla de valores) y posteriormente graficar (Recta). A continuación sugiero un modelo de solución:

- Una vez dada la ecuación, verificar que este en su forma ordinaria, de no ser así, ponerla en esa forma despejando a la variable “y”

- Ya con la ecuación en la forma ordinaria, elaboramos la tabla de valores, asignando a la variable “x” cantidades arbitrarias (para una mejor representación gráfica emplear por lo menos 5 valores)

- Una vez obtenidos los pares ordenados, localizarlos en el plano cartesiano y trazar la línea que los una.

Ejemplos:

1. Graficar la ecuación:

$$-3x + y = 2$$

Primero ponemos la ecuación en su forma ordinaria:

$$y = 3x + 2$$

Ahora le asignamos valores a “x”

X = -2	Y = 3(-2) + 2	Y = -4	(-2,-4)
X = -1	Y = 3(-1) + 2	Y = -1	(-1,-1)
X = 0	Y = 3(0) + 2	Y = 2	(0,2)
X = 1	Y = 3(1) + 2	Y = 5	(1,5)
X = 2	Y = 3(2) + 2	Y = 8	(2,8)

Por último localizamos los puntos en el sistema cartesiano y obtenemos la recta $y = 3x + 2$

2. Graficar la ecuación:

$$4x - 2y = 12$$

Primero ponemos la ecuación en su forma ordinaria:

$$4x – 12 = 2y$$

$$(4x – 12) / 2 = y$$

$$(4x / 2) – (12 / 2) = y$$

$$2x – 6 = y$$

$$y = 2x - 6$$

Ahora le asignamos valores a “x”

X = 0	Y = 2(0) – 6	Y = -6	(0,-6)
X = 1	Y = 2(1) - 6	Y = -4	(1,-4)
X = 2	Y = 2(2) - 6	Y = -2	(2,-2)
X = 3	Y = 2(3) - 6	Y = 0	(3,0)
X = 4	Y = 2(4) - 6	Y = 2	(4,2)

Por último localizamos los puntos en el sistema cartesiano y obtenemos la recta $y = 2x – 6$

3. Graficar la ecuación:

$$15x + 3y + 9 = 0$$

Primero ponemos la ecuación en su forma ordinaria:

$$15x + 3y = -9$$

$$3y = -15x - 9$$

$$y = (-15x - 9) / 3$$

$$y = -5x - 3$$

Ahora le asignamos valores a "x"

X = -6	Y = -5(-6) – 3	Y = 27	(-6,27)
X = -4	Y = -5(-4) – 3	Y = 17	(-4,17)
X = -2	Y = -5(-2) – 3	Y = 7	(-2,7)
X = 0	Y = -5(0) – 3	Y = -3	(0,-3)
X = 2	Y = -5(2) – 3	Y = -13	(2,-13)

Por último localizamos los puntos en el sistema cartesiano y obtenemos la recta $y = -5x – 3$

Nota: El alumno ayudará en la graficación de los ejercicios 1 al 3.

EJERCICIOS SOBRE GRAFICACION DE LA RECTA.

4. $x + y = 1$
5. $-8x - 2y = -4$
6. $y + 5 = - 7x$
7. $2x - 2y = 6$
8. $8x + 4y - 12 = 8$
9. $y = -3x + 9$
10. $y - x = -1$

Desigualdades.

Una desigualdad es un enunciado matemático que afirma que una cantidad es mayor o menor que otra y en algunos casos sólo un valor de la variable permitirá una igualdad particular.

Al igual que las ecuaciones, las desigualdades tienen una representación gráfica; que para el caso de desigualdades lineales con dos incógnitas es la zona delimitada por la recta que se obtiene al cambiar el signo de desigualdad por uno de igualdad, y que cumple la inecuación.

Para determinar la solución de una desigualdad se sugiere la siguiente metodología:

- Una vez dada la inecuación, verificar que esté en su forma ordinaria, de no ser así, ponerla en esa forma despejando a la variable “y”. En el caso de que una constante negativa cambie de multiplicar a dividir o viceversa, el sentido de la desigualdad cambiará.

- Ya con la inecuación en la forma ordinaria, la transformamos en una igualdad y elaboramos la tabla de valores, asignando a la variable “x” cantidades arbitrarias (para una mejor representación gráfica emplear por lo menos 5 valores)

- Una vez obtenidos los pares ordenados, localizarlos en el plano cartesiano y trazar la línea que los una.

- Seleccionar un punto de prueba y verificar en que zona se cumple la desigualdad

Veamos unos ejemplos:

1. Graficar la desigualdad:
   $4x + y < 2$

   Despejamos a “y”:

   $y < -4x +2$

La convertimos en igualdad:

$y = -4x + 2$

Tabulamos:

Para:

$x = 1,\ y = -2$

$x = 2,\ y = .6$

$x = 3,\ y = -10$

$x = 4,\ y = -14$

$x = 5,\ y = -18$

Graficamos y localizamos un punto de prueba A:

A (8,-4)

Sustituimos el punto A en la inecuación:

$$4x + y < 2$$

$4(8) + (-4) < 2$

$32 - 4 < 2$

$28 < 2$

Como vemos, la desigualdad no se cumple para ese punto, por lo que concluimos que la zona menor que, está del lado izquierdo de la recta.

2. Grafica la siguiente desigualdad:

$$10x - 5y < 5$$

$-5y < -10x + 5$

$y > (-10x / -5) + (5 / -5)$

$y > 2x - 1$

$y = 2x - 1$

Para:

$x = -1,\ y = -3$

$x = 0,\ y = -1$

$x = 1,\ y = 1$

$x = 2,\ y = 3$

$x = 3,\ y = 5$

$10(5) - 5(3) < 5$

$50 - 15 < 5$

$35 < 5$

Como vemos, la desigualdad no se cumple para ese punto, por lo que concluimos que la zona menor que, está del lado izquierdo de la recta.

EJERCICIOS SOBRE DESIGUALDADES

3. $x + y > 8$
4. $-6x - 3y < 6$
5. $y > x + 9$
6. $-x + y < 0$
7. $2x + 2y > 16$
8. $120x + 60y < 180$
9. $-y > -7x + 6$
10. $y < x$

La Recta.

Como ya mencionamos anteriormente, una ecuación lineal con dos variables es la representación algebraica de una recta, por lo que su ubicación será en un plano cartesiano, ya sea mediante un par de puntos (coordenadas) o un punto y el ángulo de inclinación de dicha recta (pendiente).

Ecuación de la recta dados dos puntos.

Si lo que se tiene de datos de una recta son: un par de coordenadas, la fórmula para obtener su ecuación es:

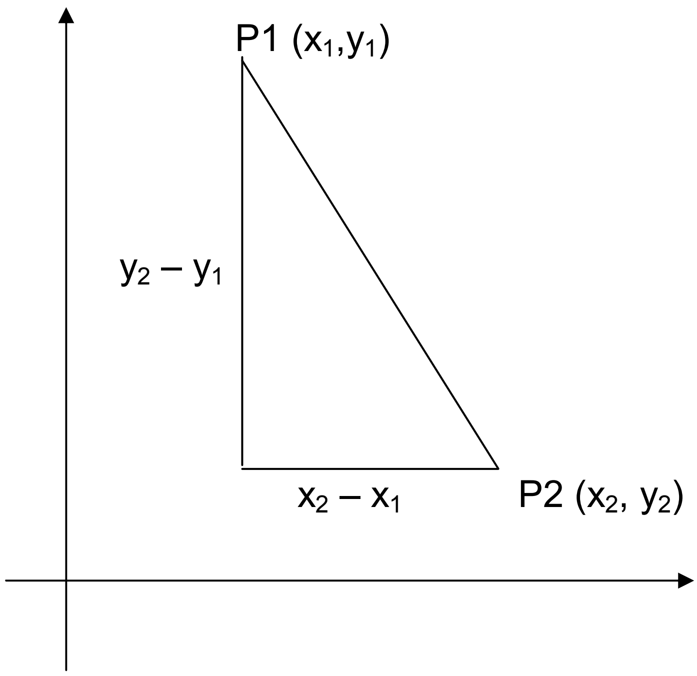
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Donde:

$P_1\ (x_1, y_1)$
$P_2\ (x_2, y_2)$

Pendiente de una recta (m).

Es la inclinación de una recta con respecto al horizonte. En otras palabras es la relación de la diferencia de alturas entre dos coordenadas con respecto a la diferencia de las posiciones en "x" de las mismas coordenadas:



Esta relación se expresa:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Se presentan cuatro casos para la pendiente de una recta:

- Cuando el ángulo de inclinación de la recta es agudo, la pendiente es positiva
- Cuando el ángulo de inclinación de la recta es obtuso, la pendiente es negativa
- Cuando el ángulo de inclinación de la recta vale cero, la pendiente vale cero
- Cuando el ángulo de inclinación de la recta vale 90°, le pendiente estará indeterminada

Ecuación de la recta dados un punto y la pendiente.

Si lo que se tiene de datos de una recta son: una coordenada y la pendiente, la fórmula para obtener su ecuación es:

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

Donde:

$P_1 (x_1, y_1)$

m = pendiente

Una vez obtenida la ecuación de una recta, existen principalmente dos maneras de presentar dicha ecuación:

- **Forma general:**

$$Ax + By = C$$

- **Forma ordinaria:**

$$y = mx + b$$

Y de estas dos maneras de representación, se recomienda la ordinaria para realizar la graficación de la recta (como se mencionó en el apartado de ecuación lineal con dos variables).

Ejemplos:

1. Dados:
   M (4, 7)
   N (0, -6)
   Obtener la ecuación de la recta y presentarla en su forma ordinaria

   Solución:

$$y - 7 = \frac{-6 - 7}{0 - 4} (x - 4)$$

$$y - 7 = \frac{- 13}{-4} (x - 4)$$

$$-4 (y - 7) = -13 (x - 4)$$

$$-4y + 28 = -13x + 52$$

$$-4y = -13x + 52 - 28$$

$$-4y = -13x + 24$$

$$y = (-13x + 24) / -4$$

$$y = (13x - 24) / 4$$

2. Dados:
   J (-8, -10)
   m = - 5
   Obtener la ecuación de la recta y representarla en su forma general

   Solución:

$$y - (-10) = -5 (x - (-8))$$

$$y + 10 = -5 (x + 8)$$

$y + 10 = -5x - 40$

$5x + y = -40 - 10$

$5x + y = -50$

3. Dados:
   A (130, -12)
   B (130, 2)
   Obtener la ecuación de la recta y presentarla en su forma ordinaria

   Solución:

$$y - (-12) = \frac{2 - (-7)}{130 - 130} (x - 130)$$

$$y + 12 = \frac{9}{0} (x - 130)$$

$0 (y + 12) = 9 (x - 130)$

$0 = 9x + 1170$

(Cuando no existe la variable “y”, en la ecuación obtenida, se obtiene una recta vertical que pasa por un cierto valor de “x”: $x = -1170 / 9 = -130$)

4. Dados:
   P (15, 3)
   m = 0
   Obtener la ecuación de la recta y presentarla en su forma general

   Solución:

$y - 3 = 0 (x - 15)$

$y - 3 = 0$

$y = 3$

(Cuando no existe la variable “x”, en la ecuación obtenida, se obtiene una recta horizontal que pasa por un cierto valor de “y”: $y = 3$).

5. Calcular la pendiente de una recta que pasa por las siguientes coordenadas:
   H (-3, -4)
   I (5, - 20)

   Solución:

m = (-20 – (-4)) / (5 – (-3))

m = -16 / 8

m = -2

EJERCICIOS SOBRE LA ECUACION Y LA PENDIENTE DE LA RECTA:

6. Dados:
   A (0, 18)
   B (-18, 0)
   Obtener la ecuación de la recta y presentarla en su forma general

7. Dados:
   m = -2
   B (30, -24)
   Obtener la ecuación de la recta y presentarla en su forma ordinaria

8. Dados:
   A (-9, 6)
   B (-9, 12)
   Obtener la ecuación de la recta y presentarla en su forma ordinaria

9. Dados:
   A (7, 5)
   B(-7,5)
   Obtener la ecuación de la recta y presentarla en su forma general

10. Dados:
   A (5.7, 2.3)
   B (-2.8, 19.3)
   Calcular la pendiente de la recta

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

En muchos de los casos las rectas no se encuentran solas, sino más bien interactuando con otras rectas, ya sea: cruzando entre ellas, manteniendo paralelismo o encimándose totalmente.

Cuando se presentan un par de rectas interactuando entre ellas, se dice que forman un sistema. Encontrar la solución de dicho sistema, es determinar si: se intersectan, son paralelas o son la misma recta.

Para encontrar la solución para un sistema de dos rectas se emplean dos tipos de métodos: algebraicos o gráfico. Ambos se describirán a continuación, mediante su aplicación en casos particulares, para su mayor entendimiento.

Métodos algebraicos.

En este curso veremos cuatro métodos de este tipo:

- Igualación
- Sustitución
- Reducción
- Determinantes de segundo orden

Igualación.

1. Determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:
   a. $x - 2y = -3$
   b. $5x + y = 18$

Solución:

Despejamos en ambas ecuaciones la misma literal:

a. $x - 2y = -3$

$-2y = -3 - x$

$y = \frac{-3 - x}{-2}$

$y = \frac{3 + x}{2}$

c. $5x + y = 18$
$y = -5x + 18$

Igualamos las ecuaciones obtenidas

$$y = \frac{3 + x}{2}$$
$$y = -5x + 18$$

$$\frac{3 + x}{2} = -5x + 18$$

Esta última ecuación es lineal y con una incógnita, y su forma de solución fue vista en un apartado anterior de este cuaderno de trabajo:

$$\frac{3 + x}{2} = -5x + 18$$

$3 + x = 2(-5x + 18)$

$3 + x = -10x + 36$

$x + 10x = 36 – 3$

$11x = 33$

$x = 33 / 11$

$x = 3$

Una vez obtenido el valor de “x”, lo sustituimos en cualquiera de las ecuaciones, ya sean las originales o las despejadas, y obtenemos así el valor de “y”:

$y = -5x + 18$

$y = -5(3) + 18$

$y = -15 + 18$

$y = 3$

Hemos encontrado las coordenadas del punto donde estas dos rectas se cruzan:

$x = 3$

$y = 3$

I (3,3)

Comprobamos sustituyendo este par ordenado en las dos ecuaciones originales:

a. $x - 2y = -3$
   $3 - 2(3) = -3$
   $3 - 6 = -3$
   $-3 = -3$

b. $5x + y = 18$
   $5(3) + 3 = 18$
   $15 + 3 = 18$
   $18 = 18$

Sustitución.

2. Determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:
   a. $-4x + y = 6$
   b. $x + y = 1$

Solución:

Despejamos una variable de alguna de las ecuaciones:

$$x + y = 1$$

$$y = -x + 1$$

Sustituimos el valor de “y” en la otra ecuación:

$$-4x + y = 6$$

$$-4x + (-x + 1) = 6$$

Esta última ecuación es lineal y con una incógnita, y su forma de solución fue vista en un apartado anterior de este cuaderno de trabajo:

$$-4x + (-x + 1) = 6$$

$$-4x - x + 1 = 6$$

$$-5x + 1 = 6$$

$$-5x = 6 - 1$$

$$x = 5 / -5$$
$$x = -1$$

Una vez obtenido el valor de "x", lo sustituimos en cualquiera de las ecuaciones, ya sean las originales o la despejada, y obtenemos así el valor de "y":

$$y = -x + 1$$

$$y = -(-1) + 1$$

$$y = 2$$

Hemos encontrado las coordenadas del punto donde estas dos rectas se cruzan:

$x = -1$

$y = 2$

I (-1,2)

Comprobamos sustituyendo este par ordenado en las dos ecuaciones originales:

a. $-4x + y = 6$
   $-4(-1) + 2 = 6$
   $4 + 2 = 6$
   $6 = 6$

b. $x + y = 1$
   $-1 + 2 = 1$
   $1 = 1$

Reducción.

3. Determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:
   a. $5x - y = -4$
   b. $-x - 2y = -8$

Solución:

Se selecciona la variable (que para este ejercicio será la “y”) a reducir y se igualan sus coeficientes (multiplicando una o ambas ecuaciones):

Multiplicamos la ecuación a. por 2:

$$2(5x - y = -4)$$

$$10x - 2y = -8$$

A la nueva ecuación le restamos (se sumará cuando tengan los coeficientes de variable seleccionada signos diferentes) la ecuación b:

$$\begin{array}{rl} & 10x - 2y = -8 \\ - & \\ & \underline{-x \;-\; 2y \;=\; -8} \\ & 11x \qquad\quad = 0 \end{array}$$

$$x = 0 / 11$$

$$x = 0$$

Una vez obtenido el valor de “x”, lo sustituimos en cualquiera de las ecuaciones originales y obtenemos así el valor de “y”:

$$5x - y = -4$$
$$5(0) - y = -4$$

$$-y = -4$$
$$y = 4$$

Hemos encontrado las coordenadas del punto donde estas dos rectas se cruzan:

$x = 0$

$y = 4$

I (0,4)

Comprobamos sustituyendo este par ordenado en las dos ecuaciones originales:

a. $5(0) - 4 = -4$
   $0 - 4 = -4$
   $-4 = -4$

b. $-x - 2y = -8$
   $-0 - 2(4) = -8$
   $-8 = -8$

Determinantes de segundo orden

4. Determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:
   a. $6x + y = 7$
   b. $8x - y = 7$

Solución:

Elaboramos la tabla de los coeficientes

x	y	i
6	1	7
8	-1	7

Encontramos el determinante “d”, conformado por los coeficientes de “x” y de “y”:

$$d = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = (6 \times -1) - (8 \times 1) = -6 - (8) = -6 - 8 = -14$$

Encontramos ahora el valor de "x":

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}}{d} = \frac{(7 \times -1) - (7 \times 1)}{-14} = \frac{-7 - 7}{-14} = \frac{-14}{-14}$$

x = 1

Encontramos por último el valor de "y":

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}}{d} = \frac{(6 \times 7) - (8 \times 7)}{-14} = \frac{42 - 56}{-14} = \frac{-14}{-14}$$

y = 1

Hemos encontrado las coordenadas del punto donde estas dos rectas se cruzan:

x = 1

y = 1

I (1,1)

Comprobamos sustituyendo este par ordenado en las dos ecuaciones originales:

a. $6(1) + 1 = 7$
   $6 + 1 = 7$
   $7 = 7$

b. $8(1) - 1 = 7$
   $8 – 1 = 7$
   $7 = 7$

Método gráfico.

Como su nombre lo indica, obtenemos las gráficas de las rectas que conforman el sistema de ecuaciones, de tal manera que podamos observar su relación (intersección, paralelismo o igualdad de m y b). Esta solución es aproximada, ya que depende de la precisión del sistema cartesiano.

EJERCICIOS QUE IMPLIQUEN SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS.

Determinar la solución de los siguientes sistemas y graficar:

5. Las rectas obtenidas en los ejercicios 6 y 7 de la página 19 de esta carpeta

6. Las rectas obtenidas en los ejercicios 8 y 9 de la página 19 de esta carpeta

7. Las rectas de los ejercicios 4 y 10 de la página 10 de esta carpeta

8. $–x + 3y = -2$ $\qquad$ $2x – 5y = 4$

9. $5x = 25$ $\qquad$ $-6x + 5y = 10$

10. $y = -10x + 4$ $\qquad$ $y = x + 37$

Angulo entre dos rectas.

(Trabajo de investigación y exposición por un equipo conformado por los alumnos que tengan menos firmas)

Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas.

Cuando se presentan tres rectas interactuando entre ellas, se dice que forman un sistema. Encontrar la solución de dicho sistema, es determinar si: se intersectan, son paralelas o son la misma recta.

Para encontrar la solución de un sistema de tres rectas se emplean, en este curso, dos tipos de métodos: eliminación (igualación, sustitución, reducción) y determinantes de tercer orden. Ambos se describirán a continuación, mediante su aplicación en casos particulares, para su mayor entendimiento.

Eliminación.

1. Determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:
   a. $x + y + z = 6$
   b. $-x + 2y + 4z = 12$
   c. $2x – y – z = 0$

Solución:

Reducción.

Elimino "x" de las ecuaciones a. y b. y de las ecuaciones b. y c., generando con esto un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas, y resuelvo este:

$$\begin{array}{rl} & x + y + z = 6 \\ + & \\ & \underline{-x + 2y + 4z = 12} \\ & 3y + 5z = 18 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 2(-x + 2y + 4z = 12) \\ + & \\ & \underline{2x - y - z = 0} \\ & 3y + 7z = 24 \end{array}$$

$y = \frac{18 - 5z}{3}$ $y = \frac{24 - 7z}{3}$

$\frac{18 - 5z}{3} = \frac{24 - 7z}{3}$

$18 - 5z = 24 - 7z$

$7z - 5z = 24 - 18$

$2z = 6$

$z = 6 / 2 = 3$

Este valor de “ z” lo sustituimos en una de las ecuaciones despejadas de “y”

$y = \frac{18 - 5z}{3}$

$y = \frac{18 - 5(3)}{3}$

$y = \frac{18 - 15}{3}$

$y = \frac{3}{3}$

$y = 1$

Ya con los valores de “z” y “y” obtengo el de “x”

$x + y + z = 6$

$x = 6 - y - z$

$x = 6 – 1 – 3$

$x = 2$

Hemos encontrado las coordenadas del punto donde estas tres rectas se cruzan:

$x = 2$

$y = 1$

$z = 3$

I (2,1,3)

Comprobamos sustituyendo esta coordenada en las tres ecuaciones originales:

a. $x + y + z = 6$
   $2 + 1 + 3 = 6$
   $6 = 6$

b. $-x + 2y + 4z = 12$
   $-2 + 2(1) + 4(3) = 12$
   $-2 + 2 + 12 = 12$
   $12 = 12$

c. $2x – y – z = 0$
   $2(2) – 1 – 3 = 0$
   $4 – 1 – 3 = 0$
   $0 = 0$

Determinantes de tercer orden.

2. Determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:
   a. $x + y + z = 6$
   b. $-x + 2y + 4z = 12$
   c. $2x – y – z = 0$

Solución:

Elaboramos la tabla de los coeficientes

x	y	z	i
1	1	1	6
-1	2	4	12
2	-1	-1	0

Encontramos el determinante “d”, conformado por los coeficientes de “x”, de “y” y de “z” :

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (1x2x -1)+(-1x-1x1)+(2x1x4)–(2x2x1)–(1x -1x4)–(-1x1x -1)$$

$d = -2 + 1 + 8 – 4 + 4 – 1 = 6$

Encontramos ahora el valor de “x”:

$$x= \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 12 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 12 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{d} = \frac{(6x2x-1)+(12x-1x1)+(0x1x4)-(0x2x1)-(6x-1x4)-(12x1x-1)}{6}$$

x = (-12 – 12 + 24 + 12) / 6 = 12 / 6 = 2

Encontramos ahora el valor de “z”:

$$z= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 12 \end{vmatrix}}{d} = \frac{(1x2x0)+(-1x-1x6)+(2x1x12)-(2x2x6)-(1x-1x12)-(-1x1x0)}{6}$$

z = (6 + 24 - 24 + 12) / 6 = 18 / 6 = 3

Sustituimos los valores de “x” y “z” en la ecuación a. y encontramos el valor de “y”:

a. x + y + z = 6
   2 + y + 3 = 6
   y + 5 = 6
   y = 6 – 5 = 1

Hemos encontrado las coordenadas del punto donde estas tres rectas se cruzan:

x = 2

y = 1

z = 3

I (2,1,3)

Comprobamos sustituyendo esta coordenada en las tres ecuaciones originales:

a. x + y + z = 6
   2 + 1 + 3 = 6
   6 = 6
b. -x + 2y + 4z = 12
   -2 + 2(1) + 4(3) = 12
   -2 + 2 + 12 = 12
   12 = 12
c. 2x – y – z = 0
   2(2) – 1 – 3 = 0
   4 – 1 – 3 = 0
   0 = 0

EJERCICIOS QUE IMPLIQUEN SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS.

3. Determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:
   a. -2x + y - z = 0
   b. x - y + z = -1
   c. 2x – y – z = -4

4. Determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:
   a. 5x + 10y + 2z = 17
   b. -3x - 2y - z = -6
   c. x + 4y – 2z = 3

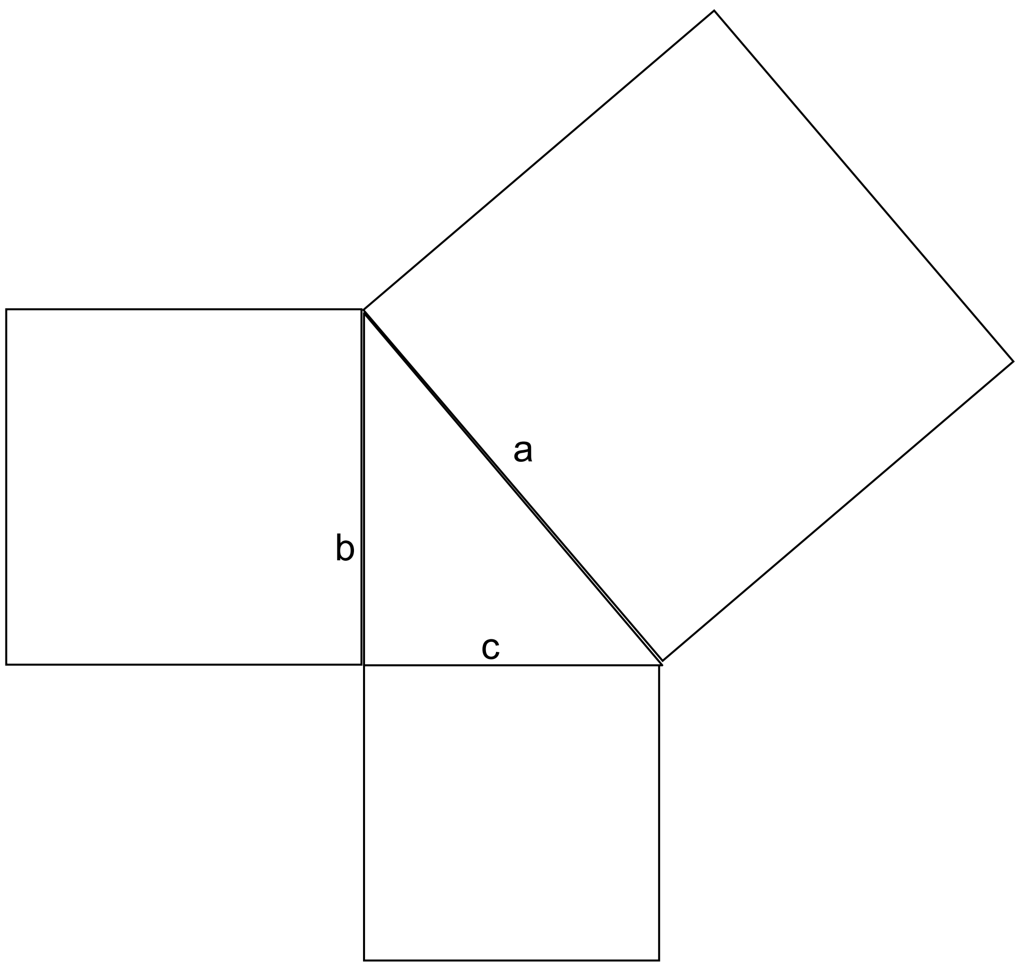
5. Determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:
   a. 8x - 7y + 3z = 22
   b. -6x + 5y - z = -10
   c. 4x + 4y + 4z = 16

Unidad 1. Triángulos rectángulos

Un caso especial de triángulos en geometría son los triángulos rectángulos. Dichos triángulos tienen la característica de contar con un ángulo recto y dos ángulos agudos (interiores). Esta característica propicia una serie de relaciones especiales que veremos a continuación.

Teorema de Pitágoras.

En un triángulo rectángulo, el área del cuadrado que se forma con el lado mayor es igual a la suma de las áreas de los cuadrados formados por los otros 2 lados:



Dicho de manera tradicional:

"La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa".

Donde los catetos son los lados que forman el ángulo recto y la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto. Esto se expresa matemáticamente:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

El anterior teorema relaciona sólo los lados del triángulo rectángulo, pero también existen relaciones entre los lados y los ángulos agudos. Dichas relaciones se conocen como funciones trigonométricas.

Funciones trigonométricas.

Una vez seleccionado uno de los dos ángulos se establecen las siguientes funciones:

- Seno. Es la relación entre el cateto opuesto al ángulo seleccionado y la hipotenusa:

$$\sin B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

- Coseno. Es la relación entre el cateto adyacente al ángulo seleccionado y la hipotenusa:

$$\cos B = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

- Tangente. Es la relación entre el cateto opuesto al ángulo seleccionado y el cateto adyacente a dicho ángulo:

$$\tan B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Nota: una vez seleccionado el ángulo, el cateto opuesto tendrá la misma letra que ese ángulo, pero en minúscula.

Con estas cuatro relaciones (T. Pitágoras, seno, coseno y tangente) y un proceso algebraico se pueden establecer relaciones para triángulos que no sean rectángulos.

A los triángulos no rectángulos se les conoce como triángulos oblicuángulos.

A continuación expongo tres leyes que ayudan en la resolución de triángulos oblicuángulos, recordando que resolver un triángulo (rectángulo u oblicuángulo) es determinar el valor de las incógnitas cuando se tienen los datos necesarios (lados y ángulos o solamente lados).

Dado el triángulo oblicuángulo de ángulos A, B y C y de lados opuestos (a los respectivos ángulos) a, b y c.

Ley de senos:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Ley de cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - [2bc(\cos A)]$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - [2ac(\cos B)]$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - [2ab(\cos C)]$$

Ley de la tangente:

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\tan [1/2(A - B)]}{\tan [1/2(A + B)]}$$

$$\frac{c - a}{c + a} = \frac{\tan [1/2(C - A)]}{\tan [1/2(C + A)]}$$

$$\frac{b - c}{b + c} = \frac{\tan [1/2(B - C)]}{\tan [1/2(B + C)]}$$

Ejemplos:

1. Encuentra el valor del lado desconocido en los siguientes triángulos rectángulos:
   a = hipotenusa, b = cateto, c = cateto

   i. $a = 200$
      $b = 100$
      $c = ?$

      de $a^2 = b^2 + c^2$

      despejamos a c

$c = \sqrt{(a^2 - b^2)}$

sustituimos los datos y resolvemos
$c = \sqrt{(200^2 - 100^2)}$

$c = \sqrt{(40\ 000 - 10\ 000)}$

$c = \sqrt{30\ 000}$

$c = 173.205$

ii. $a = 48$
$b = ?$
$c = 40$

de $a^2 = b^2 + c^2$

despejamos a b
$b = \sqrt{(a^2 - c^2)}$

sustituimos los datos y resolvemos
$b = \sqrt{(48^2 - 40^2)}$

$b = \sqrt{(2\ 304 - 1\ 600)}$

$b = \sqrt{704}$

$b = 26.53$

iii. $a = ?$
$b = 3$
$c = 4$

de $a^2 = b^2 + c^2$

despejamos a “a”
$a = \sqrt{(b^2 + c^2)}$

sustituimos los datos y resolvemos
$a = \sqrt{(3^2 + 4^2)}$

$a = \sqrt{(16 + 9)}$

$a = \sqrt{25}$

$a = 5$

2. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:
   El ángulo de análisis es B y la hipotenusa es “a”.

   i. $a = 30$
   $b = 15$
   $c = ¿?$
   $B = ¿?$
   $C = ¿?$

   $c = \sqrt{(a^2 - b^2)}$

   $c = \sqrt{(30^2 - 15^2)}$

   $c = \sqrt{(900 - 225)}$

   $c = \sqrt{675}$

   $c = 25.98$

   de $\sin B = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

   $B = \sin^{-1}\left(\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}\right)$

   $B = \sin^{-1}\left(\dfrac{15}{30}\right)$

   $B = \sin^{-1}(0.5)$

   $B = 30°$

Y como sabemos que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° y que en estos triángulos un ángulo es constante de 90°, el ángulo B más el ángulo C suman 90°:

$$C = 90° - 30°$$
$$C = 60°$$

ii. $a = ¿?$
$b = ¿?$
$c = 600$
$B = 45°$
$C = ¿?$

de $\cos B = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

$$a = \frac{c}{\cos B}$$

$$a = \frac{600}{\cos 45°}$$

$$a = \frac{600}{0.7071}$$

$$a = 848.54$$

de $\tan B = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

$$b = (c)(\tan B)$$

$$b = (600)(\tan 45°)$$

$$b = (600)(1)$$

$$b = 600$$

$$C = 90° - 45°$$

$$C = 45°$$

iii. $a = ¿?$
$b = 4\ 500$
$c = ¿?$
$B = ¿?$
$C = 10°$

$B = 90° - 10°$

$B = 80°$

$$a = \frac{b}{\sin B}$$

$$a = \frac{4\ 500}{\sin 80°}$$

$$a = \frac{4\ 500}{0.9848}$$

$a = 4569.46$

iv. $a = 3b$
$b = 50$
$c = ¿?$
$B = ¿?$
$C = ¿?$

Como $b = 50$ y $a = 3b$, entonces

$a = 3(50)$

$a = 150$

$c = \sqrt{(150^2 – 50^2)}$

$c = \sqrt{(22\ 500 – 2\ 500)}$

$c = \sqrt{20\ 000}$

$c = 141.42$

$B = \sin^{-1} (50 / 150)$

$B = \sin^{-1}(0.3333)$

$B = 19.47°$

$C = 90° - 19.47°$
$C = 70.53°$

3. Resuelve los siguientes triángulos oblicuángulos

   i. a = 20
      b = 60
      c = ¿?
      A = ¿?
      B = ¿?
      C = 60°

Calculamos "c" con la ley de los cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 – [2ab(\cos C)]$$

$$c^2 = 20^2 + 60^2 – [2(20)(60)(\cos 60°)]$$

$$c^2 = 400 + 3\ 600 – [2\ 400(0.5)]$$

$$c^2 = 400 + 3\ 600 – 1\ 200$$

$$c^2 = 2\ 800$$

$$c = \sqrt{2\ 800}$$

$$c = 52.92$$

Calculamos A con la ley de los senos

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{20}{\sin A} = \frac{52.92}{\sin 60°}$$

$$\frac{20}{\sin A} = \frac{52.92}{0.8660}$$

sin A = (20 x 0.8660) / 52.92

sin A = 0.3273

A = $\sin^{-1}$ (0.3273)

A = 19.10°

B = 180° - (60° + 19.10°)

B = 100.90°

ii. a = ¿?
b = ¿?
c = 12
A = 25°
B = 65°
C = ¿?

C = 180° - (25° + 65°)

C = 90°

Calculamos “a” y “b” con la ley de los senos

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin 25°} = \frac{12}{\sin 90°}$$

$$\frac{a}{0.4226} = \frac{12}{1}$$

a = (0.4226 x 12) / 1

a = 5.07

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{b}{\sin 65°} = \frac{12}{\sin 90°}$$

$$\frac{b}{0.9063} = \frac{12}{1}$$

b = (0.9063 x 12) / 1

b = 10.88

iii. a = ¿?
b = 4
c = 5
A = 120°
B = ¿?
C = ¿?

$a^2 = b^2 + c^2 – [2bc(\cos A)]$

$a^2 = 4^2 + 5^2 – [2(4)(5)(\cos 120°)]$

$a^2 = 16 + 25 – [40(-0.5)]$

$a^2 = 16 + 25 + 20$

$a^2 = 61$

$a = \sqrt{61}$

a = 7.81

EJERCICIOS PROPUESTOS POR LOS ALUMNOS Y EL PROFESOR.

BIBLIOGRAFIA

Enciclopedia Audiovisual-Educativa de Matemáticas. Barcelona: Océano Multimedia, 1997.

Gran Diccionario Enciclopédico Ilustrado. Barcelona: Grijalbo, 1998.

LEHMANN, Charles H. **Algebra.** Traducción de Tomás de Hoyos. México: LIMUSA, 2001.

LEHMANN, Charles H. **Geometría Analítica.** Traducción de Rafael García Díaz. México: LIMUSA, 2002.

LIZARRAGA Gaudry, Ignacio M.; FLORES Meyer, Marco A.; VAZQUEZ Mora, Salvador. **Matemáticas bachillerato semestre 2.** México: PROGRESO S.A., 1975.

BARNETT, Rich. **Geometría.** Traducción de Rafael Morones E. México: McGraw Hill, 1994.

Geometría Analítica con Trigonometría. México: McGraw Hill, 2002.

GARCIA Juárez, Marco Antonio. **Matemáticas 1 para preuniversitarios.** México: ESFINGE, 2005.