



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

GENERACIÓN DE PAREJAS DE FOTONES CON  
PROPIEDADES ESPECTRALES OPTIMIZADAS  
MEDIANTE CONVERSIÓN PARAMÉTRICA  
DESCENDENTE (PDC) EN CAVIDADES NO LINEALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

SAÚL RODRÍGUEZ BENAVIDES



DIRECTOR DE TESIS:

DOCTOR ALFRED BARRY U'REN CORTES



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **Hoja de Datos del Jurado**

### **1. Datos del Alumno**

Rodríguez  
Benavides  
Saúl  
56 55 25 21  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
404031770

### **2. Datos del Tutor**

Dr  
Alfred Barry  
U'Ren  
Cortes

### **3. Datos del Sinodal 1**

Dr  
Rocío  
Jáuregui  
Renaud

### **4. Datos del Sinodal 2**

Dr  
Eduardo  
Nahmad  
Achar

### **5. Datos del Sinodal 3**

Dr  
Víctor Manuel  
Velázquez  
Aguilar

### **6. Datos del Sinodal 4**

Dr  
Ramón  
López  
Peña

### **7. Datos del Trabajo Escrito**

Generación de parejas de fotones con propiedades espectrales optimizadas mediante Conversión Paramétrica Descendente (PDC) en cavidades ópticas no lineales  
65 p  
2009

*A mis padres, Saúl y Mayela.*

# Agradecimientos

Quiero empezar agradeciendo a Dios que siempre ha estado en cada paso conmigo, que me ha guiado a través de mi vida y de esta licenciatura.

A mi familia por supuesto, a mis padres y a mis hermanas, que siempre han sido un apoyo incondicional en los tiempos difíciles; que a través de sus sabios consejos han permanecido siempre a mi lado.

A mi tutor, el Dr. Alfred U'Ren, que con paciencia me condujo a través de este trabajo de tesis; aportando sus conocimientos y habilidades para lograr un trabajo del cual estoy completamente satisfecho. A Yasser, que aunque no tenía ninguna responsabilidad en apoyarme en este trabajo, siempre estuvo dispuesto a ayudarme y brindarme sus consejos sin ningún reparo.

A mis amigos de la facultad, que siempre estuvieron presentes para salir adelante y que han sido una de las grandes aportaciones que me deja esta licenciatura: amigos verdaderos. En especial a Emi y Ro, que estuvieron a mi lado toda la carrera aguantándome y apoyándome; así como Benjas y Daniel que aunque no estudiaron conmigo la carrera siempre fueron un escape de ésta.

No me queda mas que agradecer a todos los que han sido parte de esta etapa de mi vida, que sin lugar a dudas ha sido la mejor y gracias desde el fondo de mi corazón por esta oportunidad.

# Índice General

Índice General	vii
Índice de Figuras	ix
Introducción	1
<b>1 Conversión Paramétrica Descendente (PDC)</b>	<b>5</b>
1.1 Derivación del estado cuántico del PDC	6
1.1.1 Empatamiento de fases para PDC en cristales no lineales	12
<b>2 PDC en Cavidades con Resonancia Sencilla: Análisis Espectral</b>	<b>15</b>
2.1 Consideraciones para la Cavidad con Resonancia Sencilla	16
2.2 Desarrollo Teórico	16
2.2.1 Comportamiento del Estado Cuántico	20
2.2.2 El límite $n \rightarrow \infty$	23
2.3 Intensidad Espectral Conjunta (JSI) de la Cavidad con Resonancia Sencilla	25
2.4 Análisis Numérico de la JSI	28
2.5 Caracterización de la Cavidad Óptica en función de $L$ y de $R$	30
2.5.1 Rango Espectral Libre (seperación espectral entre modos)	30
2.5.2 Ancho del Modo Espectral	31
2.6 Optimizando las propiedades espectrales	34
<b>3 PDC en Cavidades con Resonancia Sencilla: Análisis Temporal</b>	<b>37</b>
3.1 Función de Intensidad Temporal Conjunta (JTI)	37
3.1.1 Análisis Numérico de la JTI	39
3.1.2 Dependencia en $L$ y $R$ de la JTI	40
3.1.3 Dependencia del ancho del modo temporal respecto al ancho de banda del haz de bombeo.	45
3.2 Variables “Rotadas”: $t_+$ y $t_-$	46
3.2.1 Distribución Marginal Temporal	46
3.2.2 Tiempo de Correlación	53
<b>4 Aplicaciones de PDC en Cavidades con Resonancia Sencilla</b>	<b>57</b>
Conclusiones	63
Bibliografía	65

# Índice de Figuras

1.1	Esquema que muestra el proceso de conversión paramétrica descendente, donde un haz de bombeo ( $\mathbf{k}_p, \omega_p$ ) incide en un cristal no lineal $\chi^{(2)}$ produciendo una pareja de fotones, que llamamos fotón señal ( $\mathbf{k}_s, \omega_s$ ) y fotón acompañante ( $\mathbf{k}_i, \omega_i$ )	9
2.1	Arreglo de la Cavity Óptica . . . . .	17
2.2	Cavity Óptica desdoblada . . . . .	18
2.3	Gráficas de las probabilidades de encontrar a los fotones señal y acompañante dentro o fuera de la cavity en función del número de iteraciones ( $n$ ), a una longitud del cristal de $10 \mu m$ . (a)R=0.1 (b)R=0.3 (c)R=0.5 (d)R=0.7 (e)R=0.8 (f)R=0.9 . . . . .	24
2.4	Gráficas de la función de Airy para diferentes reflectividades del espejo 2. (a)R=0.01, (b)R=0.2, (c)R=0.4, (d)R=0.6, (e)R=0.8, (f)R=0.99 . . . . .	27
2.5	(a) Condición de resonancia para el fotón señal, (b) Condición de resonancia para el fotón acompañante, (c) Modos de la cavity óptica. . . . .	29
2.6	(a) $ f(\omega_s, \omega_i) ^2$ , (b) $I_s(\omega_s) \times I_i(\omega_i)$ , (c) $S(\omega_s, \omega_i)$ . . . . .	29
2.7	La pareja de fotones entrelazados es generada fuera de la cavity óptica, para posteriormente ingresar a ésta. . . . .	30
2.8	Rango espectral ( $\Delta\omega$ ) como función de la longitud del cristal ( $L$ ) para una reflectancia constante $R = 0.7$ . La curva desplazada hacia arriba corresponde a la expresión analítica. . . . .	32
2.9	Ancho del Modo Espectral ( $\delta\omega$ ) como función de la longitud del cristal ( $L$ ) a una reflectancia constante de $R = 0.7$ . La curva desplazada hacia arriba corresponde a la expresión analítica. . . . .	34
2.10	Ancho del Modo Espectral ( $\delta\omega$ ) como función de la reflectividad ( $R$ ) a $L = 10\mu m$ . La curva desplazada hacia arriba corresponde a la expresión analítica. . . . .	35
3.1	(a) JTI para una longitud de cristal y de la cavity de $20 \mu m$ y una reflectividad de $R=0.7$ , (b) Acercamiento del primer modo temporal (en $t_s = t_i = 0$ ) de la JTI.	39
3.2	Corte de la intensidad temporal conjunta (JTI) al tiempo $t_i = 0$ y $R=0.7$ y $L=20 \mu m$ . . . . .	41
3.3	Distancia entre modos temporales, como función de la longitud del cristal ( $L$ ) a $R=0.7$ fija. . . . .	42
3.4	Secuencia de cortes de la intensidad temporal conjunta (JTI) al tiempo $t_i = 0$ y $R=0.7$ para diferentes longitudes del cristal. a) $L=5\mu m$ , b) $L=10\mu m$ , c) $L=15\mu m$ , d) $L=20\mu m$ , e) $L=25\mu m$ , e) $L=30\mu m$ . . . . .	43

3.5	Gráfica de $T_\mu$ en función de $L$ (línea recta sin defectos). Sobrepuesta podemos observar la gráfica de la figura 3.3, mostrando que la distancia entre modos temporales corresponde al tiempo que le lleva a un fotón recorrer la cavidad no lineal dos veces. . . . .	44
3.6	Ancho del modo temporal ( $\delta t$ ) en función del ancho de banda del haz de bombeo ( $L = 10\mu m$ y $R = 0.7$ ) . . . . .	45
3.7	Intensidad temporal conjunta en el espacio $\{t_+, t_-\}$ ( $ \tilde{\mathcal{F}}(t_+, t_-) ^2$ ) para $R=0.7$ y $L=10\mu m$ . . . . .	47
3.8	Marginal Temporal para $t_-$ para $R=0.7$ y $L=10\mu m$ . . . . .	48
3.9	Ancho del modo central temporal de la función Marginal Temporal $g(t_-)$ como función de la longitud del cristal ( $L$ ) a una reflectividad fija de $R = 0.7$ . . . . .	49
3.10	Distancia entre modos temporales de la función Marginal Temporal $g(t_-)$ como función de la longitud del cristal ( $L$ ) a una reflectividad fija de $R = 0.7$ . . . . .	50
3.11	Modelo que ilustra el comportamiento de la distribución de los modos temporales en función de la variable $h$ . (a) $h = 1/4$ , (b) $h = 2/3$ , (c) $h = 1$ , (d) $h = 2$ . . . . .	51
3.12	Función Marginal Temporal con dependencia en $t_-$ para $R=0.7$ fija con (a) $L=4\mu m$ , (b) $L=5\mu m$ , (c) $L=6\mu m$ , (d) $L=7\mu m$ , (e) $L=8\mu m$ , (f) $L=9\mu m$ . . . . .	52
3.13	Ancho de la función envolvente de la marginal temporal como función de $R$ , a una longitud del cristal fija de $L = 10\mu m$ . Encimada (en un color más oscuro) se encuentra el ancho de banda espectral como función de $R$ . . . . .	54
3.14	Ancho de la función envolvente de la marginal temporal como función de $L$ , a una reflectividad fija de $R = 0.7$ . . . . .	55
4.1	Rango espectral libre de la pareja de fotones en función de la longitud del cristal ( $L$ ). La curva desplazada hacia arriba corresponde a la expresión analítica y la de abajo al resultado obtenido calculando directamente la separación espectral entre modos. La longitud del cristal, definida para la cota en el ancho de banda de los filtros utilizados, corresponde a alrededor $65\mu m$ . . . . .	59
4.2	Ancho de banda del fotón señal en función de la reflectividad del espejo 2. Se observa que para que el ancho de banda del fotón señal sea de $\sim 22$ MHz entonces $R = 0.9999$ . . . . .	60
4.3	Modos emitidos por la cavidad a una longitud de $L = 65\mu m$ . . . . .	61



# Introducción

El proceso de creación de parejas de fotones entrelazadas mediante Conversión Paramétrica Descendente (PDC por sus siglas en inglés) constituye un método efectivo y práctico para la generación de luz no clásica. La generación de parejas de fotones es de importancia particular en el contexto de avances recientes en el área de procesamiento de información cuántica [1], y que han conducido a nuevos conceptos tales como computación cuántica, criptografía cuántica, teleportación cuántica y redes cuánticas[2] [3] [4]. La implementación práctica de protocolos de procesamiento cuántico requiere de una manipulación coherente de un gran número de sistemas cuánticos acoplados lo cual es una tarea en extremo difícil. Un reto en particular para la implementación de estas ideas involucran el transporte físico o la comunicación de estados cuánticos con diferentes nodos de las redes cuánticas [5]. Los sistemas fotónicos cuánticos son atractivos para la implementación práctica de este tipo de esquemas. Por un lado los fotones son portadores ideales de información cuántica, mostrando esencialmente nula decoherencia. Por otro lado los átomos representan unidades de almacenamiento y procesamiento confiables y con una larga vida. Entonces, el reto es desarrollar técnicas que permitan la eficaz transferencia de información cuántica que portan los fotones a los átomos, o viceversa [12].

El método más establecido para la generación de parejas de fotones entrelazadas es el PDC en cristales no lineales. Estas fuentes típicamente producen fotones con un ancho de banda espectral del orden de terahertz o más; para muchas aplicaciones esto es conveniente, dado que los fotones sólo interactúan con los detectores que no son energéticamente selectivos en estas escalas. En los últimos años nuevas fuentes de PDC se han desarrollado para aplicaciones que requieren anchos de banda angostos [6] [7], las cuales, en su mayoría, apuntan a acoplar

sistemas fotónicos y atómicos [8] [9]. Sin embargo, los anchos de banda reportados de los fotones generados siguen siendo considerablemente grandes (del orden de 100 GHz) comparado con el ancho de banda de las transiciones atómicas.

Recientemente se han desarrollado algunas técnicas que permiten el acondicionamiento de la correlación espectral entre dos fotones generados por PDC, evitando la necesidad de recurrir a una filtración directa espectral y/o espacial, que implica una reducción prohibitiva en la tasa de detección de fotones; además de que limita el ancho de banda de los fotones. Una técnica que permite acondicionar las correlaciones en una fuente de parejas de fotones es insertar la fuente de PDC dentro de una cavidad óptica (cavidad no lineal) [10]. Una cavidad no lineal puede usarse para reducir de forma muy considerable el ancho de banda de emisión de la pareja de fotones. Considerando inicialmente el caso donde un pulso de bombeo transita por la cavidad una sola vez (donde los espejos son completamente transmisivos para el bombeo), nuestro trabajo teórico sugiere que ocurre un efecto interesante donde la luz emitida se concentra en los modos longitudinales de la cavidad, sin sufrir pérdidas. Es decir, debido a la interferencia entre las amplitudes correspondientes a múltiples reflexiones dentro de la cavidad, la interferencia constructiva y destructiva resulta en una redistribución del espectro conjunto hacia los modos de la cavidad obteniendo así una filtración efectiva, sin una reducción en la tasa de generación con respecto a una fuente equivalente sin cavidad, a diferencia de una filtración directa. Al incrementar la finesa de la cavidad, lo cual se consigue al elevar la reflectividad de los espejos, se reduce el ancho espectral de los modos, mientras que la separación entre modos es controlada por la longitud de la cavidad. La combinación de una cavidad corta, de modo que un solo modo de la cavidad exista en la región espectral de interés, junto con una finesa alta, resulta en parejas de fotones factorizables y con ancho de banda de emisión pequeño. Sin embargo, como estudiamos en esta tesis en detalle, esto ocurre al costo de pérdida en el grado de simultaneidad con la que se emiten los fotones señal y acompañante.

Este es el punto de partida y motivación para el presente proyecto, el cual busca lograr la emisión de parejas de fotones con un ancho de banda del orden de MHz a través de la utilización de micro-cavidades ópticas no lineales. Para lograr la absorción eficiente de fotones individuales por átomos, además de igualar la frecuencia óptica a la de la transición electrónica, es necesario

asegurarse que el ancho de banda del fotón sea comparable con el ancho de banda de la transición electrónica, comúnmente del orden de MHz. Sin embargo, una fuente típica de PDC tiene un ancho de banda del orden de 6 a 7 órdenes de magnitud mayor debido a que en el proceso de PDC no existe un nivel energético intermedio que fije la razón en la cual se divide la energía de los fotones de bombeo, y que el rango de razones de división está constreñida únicamente por conservación de momento, la luz generada por PDC tiende a presentar un ancho de banda considerable.

El fenómeno de PDC se basa en un proceso de mezclado de tres ondas electromagnéticas en un material no lineal de segundo orden ( $\chi^{(2)}$ ), donde un haz de bombeo con vector de onda  $\mathbf{k}_p$  y frecuencias  $\omega_p$  incide sobre un cristal no lineal; fotones individuales del haz de bombeo decaen espontáneamente en parejas de fotones entrelazadas que son llamados fotón señal con vector de onda  $\mathbf{k}_s$  y frecuencia  $\omega_s$ , y un fotón acompañante con vector de onda  $\mathbf{k}_i$  y frecuencia  $\omega_i$  [13]. En esta tesis se estudiarán las propiedades físicas de una cavidad óptica no lineal, para el diseño e implementación de una fuente de parejas de fotones con el fin de generar estados con ancho de banda reducido.

# Capítulo 1

## Conversión Paramétrica Descendente (PDC)

En el proceso de generación de suma de frecuencias, dos ondas incidentes en un medio no lineal de segundo orden generan una tercera onda con la suma de las frecuencias incidentes. Este es un proceso clásico que no requiere de la mecánica cuántica para su descripción. El proceso inverso, en el que una onda incidente genera dos ondas de forma que la suma de frecuencias generadas es igual a la frecuencia incidente también es posible; sin embargo este es un proceso que requiere de la mecánica cuántica para su descripción. Tal proceso se conoce como Conversión Paramétrica Descendente (PDC por sus siglas en inglés).

En este proceso, tras la aniquilación de un fotón con frecuencia  $\omega_p$  de un haz de bombeo incidente con un ancho de banda angosto se crean simultáneamente dos fotones con frecuencias  $\omega_s$  y  $\omega_i$ . Los dos fotones emitidos son llamados fotón señal (*signal* en inglés) y acompañante (*idler* en inglés) respectivamente [14].

El PDC representa una de las técnicas más utilizadas para generar luz no-clásica, que se basa en la mezcla de tres ondas electromagnéticas en un material no lineal de segundo orden en donde se tiene un haz con frecuencia  $\omega_p$  y vector de onda  $\mathbf{k}_p$  el cual incide sobre un cristal óptico no lineal (figura 1.1), y en el cual se generan parejas de fotones descritas por una frecuencia  $\omega_s$  y  $\omega_i$ , y por vectores de onda  $\mathbf{k}_s$  y  $\mathbf{k}_i$ .

Al atravesar el haz al cristal no lineal se crean parejas de fotones, donde el fotón señal está caracterizado por la frecuencia  $\omega_s$  y vector de onda  $\mathbf{k}_s$ , y el fotón acompañante está caracterizado por la frecuencia  $\omega_i$  y vector de onda  $\mathbf{k}_i$ . El proceso de PDC queda sujeto a las restricciones de conservación de energía y de momento, es decir

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i. \quad (1.2)$$

## 1.1 Derivación del estado cuántico del PDC

El siguiente análisis corresponde a la derivación del estado cuántico que exhiben las parejas de fotones generadas por PDC. Este cálculo es similar al de otros autores que ya han trabajado en este tema. Aunque el trabajo correspondiente a la presente tesis parte del estado cuántico del PDC, aquí presentamos el análisis de la obtención de dicho estado [16] [17].

En la óptica no lineal en el caso clásico consideramos como punto de partida los términos tanto lineales como no lineales en la serie de potencias de la polarización del medio en función de la amplitud del campo eléctrico

$$P = \epsilon_0 \chi E + \epsilon_0 \chi^{(2)} E^2 + \epsilon_0 \chi^{(3)} E^3 + \dots \quad (1.3)$$

En el caso cuántico el operador de momento dipolar por unidad de volumen  $\hat{P}_i(\mathbf{r}, t)$  se puede expresar como una serie de potencias del operador de campo eléctrico, de forma análoga a la Ec. (1.3). Para este trabajo consideraremos un cristal no centro-simétrico cuya respuesta dominante corresponde al segundo término de la serie; este término del momento dipolar por unidad de volumen se puede escribir como

$$\hat{P}_i(\mathbf{r}, t) = \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)} \hat{E}_j(\mathbf{r}, t) \hat{E}_k(\mathbf{r}, t), \quad (1.4)$$

donde los subíndices  $i, j, k$  denotan las componentes cartesianas de los operadores de campo eléctrico y de polarización, mientras que  $\chi_{ijk}^{(2)}$  es la constante de proporcionalidad llamada

susceptibilidad no lineal de segundo orden que relaciona la polarización no lineal con el producto de las amplitudes del campo eléctrico y que da lugar a la emisión de parejas de fotones (o al proceso de suma de frecuencias en el caso de la óptica no lineal clásica).

Considerando sólo un elemento en particular del tensor  $\chi^{(2)}$ , podemos escribir una versión escalar para la polarización introducida por la presencia de dos campos eléctricos (a los cuales nos referiremos como señal y acompañante,  $s$  e  $i$ , como

$$\hat{P}(\mathbf{r}, t) = d(\mathbf{r})\hat{E}_s(\mathbf{r}, t)\hat{E}_i(\mathbf{r}, t), \quad (1.5)$$

donde  $d(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\chi_{ijk}^{(2)}$  para valores fijos de  $i, j$  y  $k$  determinados por el estado de polarización de cada una de las tres ondas involucradas.

Usando el vector de desplazamiento  $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$  y la Ec. (1.5) se puede obtener el término asociado con la energía de polarización del medio, la cual queda dada por la expresión para la densidad de energía del campo electromagnético  $U = \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$  y que puede ser escrita

$$U = d(\mathbf{r})E_p(\mathbf{r}, t)E_s(\mathbf{r}, t)E_i(\mathbf{r}, t), \quad (1.6)$$

donde  $E_p(\mathbf{r}, t)$  es el operador del campo eléctrico del haz de bombeo.

De esta manera, por analogía, es posible obtener una expresión para el Hamiltoniano efectivo, el cual será responsable de describir el proceso cuántico; por lo tanto tenemos que para esta interacción el Hamiltoniano tiene la forma

$$\hat{H}(t) = \int_V dV \int d(\mathbf{r})\hat{E}_p^{(-)}(\mathbf{r}, t)\hat{E}_s^{(+)}(\mathbf{r}, t)\hat{E}_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \text{H.C.}, \quad (1.7)$$

donde H.C. denota el conjugado hermítico. Cada uno de los operadores de campo eléctrico ( $\mu = p, s, i$ ) se puede expresar como la suma de las partes de frecuencia positiva y frecuencia negativa.

$$\hat{E}_\mu = \hat{E}_\mu^{(+)} + \hat{E}_\mu^{(-)}. \quad (1.8)$$

La integral es sobre todo el volumen de interacción  $V$  (es decir, el volumen iluminado por el

haz de bombeo del cristal no lineal).

Se puede utilizar ahora el operador unitario de evolución temporal para determinar el estado cuántico a un tiempo  $t$  dado el estado inicial  $|\Psi_0\rangle$ . Tenemos entonces

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left[\frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \hat{H}(t')\right] |\Psi_0\rangle, \quad (1.9)$$

donde  $\hat{H}(t')$  es el Hamiltoniano dependiente del tiempo que está dado por la Ec. (1.7).

Para tiempos de interacción pequeños comparados con el tiempo entre interacciones paramétricas sucesivas, lo cual significa una probabilidad pequeña de que un pulso de bombeo determinado genere una pareja de fotones, podemos entonces expandir la función exponencial de la ecuación anterior y aproximarla como

$$|\Psi(t)\rangle \approx \left[1 + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \hat{H}(t')\right] |\text{vac}\rangle, \quad (1.10)$$

donde se ha hecho la consideración de que el estado inicial es el vacío, es decir  $|\Psi_0\rangle = |\text{vac}\rangle$ , y hemos considerado a primer orden la aproximación de la exponencial. Como se podrá ver más adelante, de esta aproximación resulta un estado cuántico dado por la suma coherente del vacío con la contribución de parejas de fotones.

Los experimentos de conversión paramétrica descendente espontáneo operan en un régimen de baja ganancia paramétrica, donde la probabilidad de emisión de múltiples parejas a un mismo tiempo es despreciable. A lo largo de la presente tesis se supone que los términos de orden mayor del operador unitario pueden ser despreciados.

Para simplificar el análisis se supone que los campos eléctricos de las tres ondas involucradas pueden ser adecuadamente descritos por ondas planas. El campo eléctrico correspondiente al haz de bombeo será descrito por un pulso ultra-corto con polarización lineal, frecuencia central  $\omega_p$  y que se propaga según el vector de onda  $\mathbf{k}_p$ , el cual incide en el cristal no lineal como lo muestra la figura 1.1. Dado que el haz de bombeo muestra una intensidad mucho mayor a la de los fotones individuales, podemos tratarlo clásicamente (*i.e.* el operador de campo eléctrico

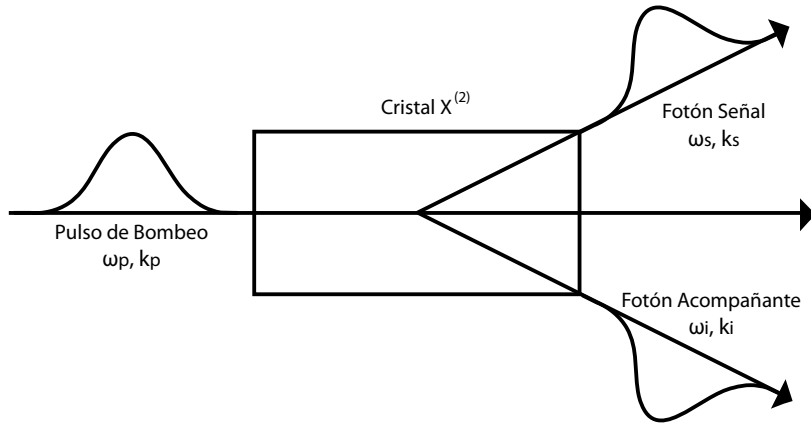


Figura 1.1: Esquema que muestra el proceso de conversión paramétrica descendente, donde un haz de bombeo ( $\mathbf{k}_p, \omega_p$ ) incide en un cristal no lineal  $\chi^{(2)}$  produciendo una pareja de fotones, que llamamos fotón señal ( $\mathbf{k}_s, \omega_s$ ) y fotón acompañante ( $\mathbf{k}_i, \omega_i$ )

es reemplazado por una función compleja):

$$\hat{E}_p(\mathbf{r}, t) \rightarrow A_p \int d\omega_p \alpha(\omega_p) \exp[i(\mathbf{k}_p(\omega_p) \cdot \mathbf{r} - \omega_p t)] + \text{C.C.}, \quad (1.11)$$

donde C.C. indica el complejo conjugado y  $A_p \alpha(\omega_p)$  representa la amplitud espectral del haz de bombeo.

Ahora bien, el operador escalar de campo eléctrico correspondiente a los modos señal y acompañante está dado de la siguiente forma (con  $\mu = s, i$ ) [14]

$$\hat{E}_\mu(\mathbf{r}, t) \rightarrow i \int d\omega_\mu A(\omega_\mu) \hat{a}_\mu(\omega_\mu) \exp[i(\mathbf{k}_\mu(\omega_\mu) \cdot \mathbf{r} - \omega_\mu t)] + \text{C.C.}, \quad (1.12)$$

donde,

$$A(\omega_\mu) = \sqrt{\frac{\hbar \omega_\mu}{4\pi \epsilon_0 n^2(\omega_\mu)}}, \quad (1.13)$$

representa la amplitud del campo eléctrico correspondiente a un sólo fotón,  $\hat{a}_\mu(\omega_\mu)$  el operador de aniquilación evaluado en la frecuencia  $\omega_\mu$  y  $\mathbf{k}_\mu = \hat{k} n(\omega_\mu) \omega_\mu / c$  es el vector de onda y  $n(\omega_\mu)$  el índice de refracción a dicha frecuencia.

Sustituyendo entonces las expresiones de los campos eléctricos (Ec. 1.11 y Ec. 1.12) en la



expresión del hamiltoniano efectivo (Ec. 1.7), se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) &= A_p \int d\omega_p \int d\omega_s \int d\omega_i A(\omega_s) A(\omega_i) \alpha(\omega_p) \exp[-i(\omega_p - \omega_s - \omega_i)t] \hat{a}_s^\dagger(\omega_s) \hat{a}_i^\dagger(\omega_i) \\ &\times \int_V dV d(\mathbf{r}) \exp[i\{\mathbf{k}_p(\omega_p) - \mathbf{k}_s(\omega_s) - \mathbf{k}_i(\omega_i)\} \cdot \mathbf{r}]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Usando ahora el operador unitario de evolución temporal (Ec. 1.10) para nuestro Hamiltoniano (Ec. 1.14), se puede escribir el estado cuántico resultante al tiempo  $t = t_p$  como

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |\text{vac}\rangle + \frac{t_p A_p V}{i\hbar} \int d\omega_p \int d\omega_s \int d\omega_i \left\{ \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} dt' e^{-i\Delta\omega t'} \right\} A(\omega_s) A(\omega_i) \alpha(\omega_p) \\ &\times \left\{ \frac{1}{V} \int_V d(\mathbf{r}) e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right\} \hat{a}_s^\dagger(\omega_s) \hat{a}_i^\dagger(\omega_i) |\text{vac}\rangle, \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde  $\Delta\mathbf{k}$  representa el desempatamiento de fases

$$\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i \quad (1.16)$$

y  $\Delta\omega$  representa el desempatamiento de frecuencias

$$\Delta\omega = \omega_p - \omega_s - \omega_i. \quad (1.17)$$

En la Ec. (1.15),  $t_p$  corresponde a un intervalo de tiempo del orden de la duración del pulso de bombeo, mayor al tiempo característico de la interacción del haz de bombeo y está dado por la duración temporal de los fotones producidos.

La integral del primer término que se encuentra entre llaves, al despreciar un factor de fase, puede ser expresada como

$$\mathcal{N} \text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega t_p}{2}\right), \quad (1.18)$$

donde hemos definido  $\text{sinc}(x) \equiv \sin(x)/x$  y  $\mathcal{N}$  es un factor de normalización introducido tal que se siga cumpliendo que la integral de la función sinc sea la unidad, como en la integral original.

De esta forma, el estado cuántico puede ser descrito cómo

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle &= |\text{vac}\rangle + \frac{t_p A_p V}{i\hbar} \int d\omega_p \int d\omega_s \int d\omega_i A(\omega_s) A(\omega_i) \alpha(\omega_p) \text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega t_p}{2}\right) \\
 &\times \left\{ \frac{1}{V} \int_V d(\mathbf{r}) e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right\} \hat{a}_s^\dagger(\omega_s) \hat{a}_i^\dagger(\omega_i) |\text{vac}\rangle.
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Considerando que el tiempo de interacción es mucho más corto que el tiempo promedio entre eventos PDC, la función sinc puede ser aproximada en el límite cuando  $t_p \rightarrow \infty$  como  $\delta(\Delta\omega) = \delta(\omega_p - \omega_s - \omega_i)$  (donde  $\delta(x)$  representa la función delta de Dirac); tal aproximación es válida debido al factor de normalización  $\mathcal{N}$  de la función sinc. La amplitud del campo eléctrico de un sólo fotón (Ec. 1.12) es una función lenta de la frecuencia, por lo tanto, su valor puede ser aproximado como una constante al evaluar en la frecuencia central de conversión paramétrica descendente. Usando la propiedad  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$  en la variable de integración  $\omega_p$ , se obtiene la siguiente expresión

$$|\Psi\rangle = |\text{vac}\rangle + \frac{t_p A_p V}{i\hbar} \int d\omega_s \int d\omega_i A(\omega_s) A(\omega_i) \alpha(\omega_s + \omega_i) \phi(\omega_s, \omega_i) \hat{a}_s^\dagger(\omega_s) \hat{a}_i^\dagger(\omega_i) |\text{vac}\rangle, \tag{1.20}$$

que puede ser simplificado como

$$|\Psi\rangle = |\text{vac}\rangle + \lambda \int_0^\infty d\omega_s \int_0^\infty d\omega_i f(\omega_s, \omega_i) |\omega_s\rangle |\omega_i\rangle, \tag{1.21}$$

donde el parámetro de ganancia paramétrica  $\lambda$  es proporcional al cuadrado de la no linealidad, a la potencia del haz de bombeo y al volumen del cristal.  $\lambda$  absorbe todas las constantes en la Ec. (1.15). En la Ec. (1.21) hemos utilizado las siguientes definiciones  $|\omega_s\rangle = \hat{a}_s^\dagger(\omega_s) |\text{vac}\rangle$  y  $|\omega_i\rangle = \hat{a}_i^\dagger(\omega_i) |\text{vac}\rangle$ .

La función

$$f(\omega_s, \omega_i) = \alpha(\omega_s + \omega_i) \phi(\omega_s, \omega_i), \tag{1.22}$$

representa la amplitud espectral conjunta de las parejas de fotones emitidas por la fuente.

En particular, la función  $\alpha(\omega_s + \omega_i)$  se refiere a la función envolvente espectral del haz de

bombeo que será modelada por una función gaussiana con ancho  $\sigma$ , dada por:

$$\alpha(\omega_s + \omega_i) = \exp \left[ -\frac{(\omega_s - \omega_{s0} + \omega_i - \omega_{i0})^2}{\sigma^2} \right], \quad (1.23)$$

donde  $\omega_{s0}$  y  $\omega_{i0}$  son las frecuencias centrales del fotón señal y acompañante respectivamente.

Mientras que la función  $\phi(\omega_i, \omega_s)$ , que está definida por

$$\phi(\omega_s, \omega_i) = \frac{1}{V} \int_V dV d(\mathbf{r}) e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (1.24)$$

y es llamada función de empatamiento de fases y contiene las propiedades dispersivas del cristal no lineal; esta función determinará la forma en que se distribuye la energía del fotón del haz de bombeo entre los fotones señal y acompañante.

### 1.1.1 Empatamiento de fases para PDC en cristales no lineales

Consideremos por simplicidad que el haz de bombeo y los fotones generados se propagan en un régimen colineal, es decir donde los vectores  $\mathbf{k}$  son paralelos uno respecto a los otros. Adicionalmente permitimos que la magnitud del coeficiente no lineal varíe sólo en una dirección (que será la dirección de propagación) mientras que permanece constante en el plano transversal a la propagación. En este caso, la función de empatamiento de fases dada por la Ec. (1.24) se simplifica del siguiente modo:

$$\phi(\Delta k) \propto \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\Delta k x} g(x), \quad (1.25)$$

donde  $g(x)$  es una función que describe la variación del coeficiente no lineal a través de la dirección de propagación.

La Ec. (1.25) lleva a que el empatamiento de fases pueda ser expresado como una transformada de Fourier de la función  $g(x)$ , donde la posición longitudinal  $x$  y el desempatamiento de fases  $\Delta k$  constituyen variables conjugadas. Ahora podemos escribir este resultado para un

crystal no lineal de longitud  $l$ , donde la función  $g(x)$  queda dada como

$$g(x) = \text{rect}\left(\frac{x - l/2}{l}\right). \quad (1.26)$$

La función  $\text{rect}$ , con el argumento dado, se anula fuera del rango  $x = 0$  a  $x = l$  y vale uno dentro de este rango. Substituyendo la Ec. (1.26) en la Ec. (1.25) y resolviendo la integral, encontramos que

$$\phi(\Delta k) = e^{i\frac{\Delta k l}{2}} \text{sinc}\left(\frac{\Delta k l}{2}\right), \quad (1.27)$$

que representa la función de empataimiento de fases que juega un papel importante en interacciones no lineales de segundo orden.

## Capítulo 2

# PDC en Cavidades con Resonancia Sencilla: Análisis Espectral

En el presente capítulo se discutirán los efectos de insertar una fuente PDC dentro de una cavidad óptica, lo cual será llamado una cavidad óptica no lineal (nos referiremos a ella, subsecuentemente, como cavidad). A lo largo de esta tesis le llamaremos también cavidad con resonancia sencilla debido a que no resonará a la frecuencia del haz de bombeo, es decir, se considera que el haz de bombeo experimenta una reflectividad nula en los espejos que conforma la cavidad.

A continuación estudiamos cómo el producto de kets  $|\omega_s\rangle|\omega_i\rangle$  se ve modificado por la resonancia de las frecuencias  $\omega_s$  y  $\omega_i$  en la cavidad. Es el estudio de estos estados el que nos interesa para entender el efecto de la cavidad óptica en el espacio conformado por las frecuencias o por los tiempos de emisión para los fotones señal y acompañante. Como estudiamos en el Capítulo 1, la ecuación que describe el estado cuántico de la Conversión Paramétrica Descendente (PDC) es (despreciando la contribución del vacío),

$$|\Psi\rangle = \int d\omega_s \int d\omega_i f(\omega_s, \omega_i) |\omega_s\rangle |\omega_i\rangle. \quad (2.1)$$

Por lo tanto, el propósito de este capítulo es analizar la nueva forma que adquiere este estado cuántico por la presencia de la cavidad.

## 2.1 Consideraciones para la Cavity con Resonancia Sencilla

El arreglo considerado para la cavity óptica no lineal consiste en dos espejos planos que forman la cavity óptica y un cristal  $\chi^{(2)}$  situado entre los espejos (figura 2.1). Para la producción de los fotones entrelazados, se hace incidir de manera perpendicular respecto a los espejos un haz de luz, llamado de bombeo, tal que al atravesar el cristal crea parejas de fotones.

Las siguientes consideraciones fueron hechas para la cavity óptica con resonancia sencilla:

- Ambos espejos son 100% transmitivos para el haz de bombeo.
- Un espejo, que denotaremos por espejo 1, es 100% reflejante para la frecuencia PDC. El otro espejo (espejo 2) tiene una reflectividad no unitaria para la frecuencia PDC, cuyo valor es un parámetro en nuestra descripción.
- El haz de bombeo transita una sola vez por la cavity, ya que la reflectividad para la frecuencia de bombeo en los espejos de la cavity se supone nula.
- Por simplicidad, suponemos los espejos planos.
- Consideramos un haz de bombeo pulsado en el régimen espontáneo.
- Consideramos que el proceso PDC opera en el régimen espontáneo, donde cada pulso de bombeo genera a lo más una única pareja de fotones.

## 2.2 Desarrollo Teórico

La figura 2.1 describe esquemáticamente el sistema físico estudiado, donde observamos el cristal  $\chi^{(2)}$  situado dentro de la cavity óptica; un haz de bombeo centrado a una longitud de onda de 400 nm y los dos fotones generados centrados en una longitud de onda de 800 nm, que denotaremos como señal ( $s$ ) y acompañante ( $i$ ).

Es conveniente analizar el problema en base al plantamiento de la figura 2.2 el cual es equivalente al de la figura 2.1. Se observa que se “desdoblan” las iteraciones como si fuera una secuencia infinita de espejos y cristales, tal que un fotón (señal o acompañante) al encontrarse con un espejo 1 en vez de considerarse que tiene la probabilidad de ser reflejado y cambiar de

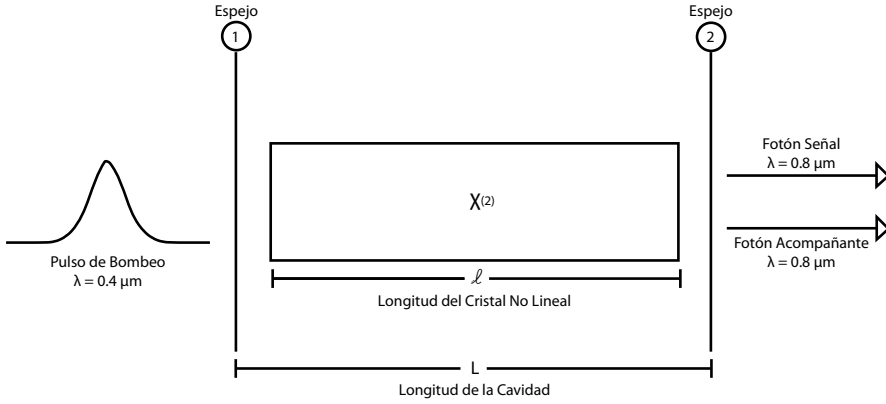


Figura 2.1: Arreglo de la Cavidad Óptica

dirección en  $180^\circ$  se considera que tiene la probabilidad de permanecer dentro de la cavidad con la misma dirección tal que se encontrará con el “siguiente” cristal y posteriormente el siguiente espejo 2. Por lo tanto, en este análisis se omite el espejo 1 pues no afecta en absoluto a la pareja de fotones por tener una reflectividad del 100% para la frecuencia de estos.

Tanto el fotón señal como el acompañante tienen una probabilidad de emerger o permanecer dentro de la cavidad al pasar por cada espejo 2. Tal como se muestra en la figura 2.2, en cada iteración  $n$ , en el espejo 2 el estado de nuestro fotón se divide en dos amplitudes de acuerdo a la relación

$$\hat{a}_n^\dagger(\omega) |0\rangle \rightarrow \left( t\hat{b}_{n+1}^\dagger(\omega) + r\hat{a}_{n+1}^\dagger(\omega) \right) |0\rangle, \quad (2.2)$$

donde  $r$  es la amplitud de reflexión y  $t$  es la amplitud de transmisión; por conservación de energía se cumple que  $tt^* + rr^* = 1$ , es decir, no hay absorción en los espejos. El estado cuántico  $\hat{b}_{n+1}^\dagger |0\rangle$  describe la amplitud correspondiente al modo extra-cavidad (emerge de la cavidad), y el estado  $\hat{a}_{n+1}^\dagger |0\rangle$  al modo intra-cavidad (se mantiene dentro de la cavidad).

Etiquetaremos cada iteración de acuerdo al número de reflexiones ocurridas en el espejo 2. En la primera iteración el estado que describe al fotón señal, será de la forma:

$$|\omega_s\rangle^{(1)} = e^{i\gamma} \left( t\hat{b}_s^\dagger(\omega_s) + r\hat{a}_s^\dagger(\omega_s) \right) |0\rangle_s, \quad (2.3)$$

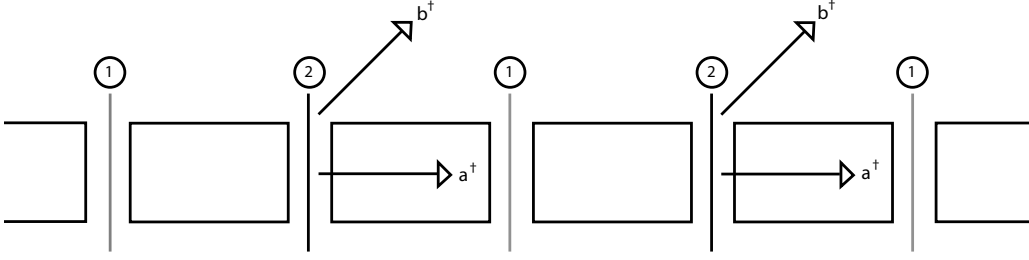


Figura 2.2: Cavidad Óptica desdoblada

donde la fase  $\gamma$  es adquirida por el fotón al recorrer el espacio libre entre el cristal y el espejo 2 que suponemos es vacío.

$$\gamma = k_{fs} \frac{(L - l)}{2}. \quad (2.4)$$

Siguiendo la misma lógica, en la siguiente iteración el estado que describe al fotón señal será de la forma

$$|\omega_s\rangle^{(2)} = e^{i\gamma} \left[ te^{i\delta} \hat{b}_s^\dagger(\omega_s), + re^{i\theta} \left( t\hat{b}_s^\dagger(\omega_s), + r\hat{a}_s^\dagger(\omega_s), \right) \right] |0\rangle_s, \quad (2.5)$$

donde  $\delta$  es la fase adquirida por la amplitud transmitida por el espejo 2 anterior al recorrer una distancia  $h$  fuera de la cavidad; y  $\theta$  es la fase adquirida por la amplitud que permanece dentro de la cavidad al recorrer la distancia de un espejo 2 al siguiente espejo 2, como ya habíamos mencionado.

$$\delta = k_{fs} h, \quad (2.6)$$

$$\theta = 2k_{fs}(L - l) + 2lk. \quad (2.7)$$

Observamos que en este paso también el valor absoluto al cuadrado de los coeficientes de cada término de la Ec. (2.5) suma uno. Podemos observar esto multiplicando cada término por



su conjugado, encontramos la siguiente suma:

$$\begin{aligned}
{}^{(2)}\langle\omega_s|\omega_s\rangle^{(2)} &= tt^* + rr^*tt^* + (rr^*)^2 \\
&= tt^* + rr^*(tt^* + rr^*) \\
&= tt^* + rr^* \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Llevando a cabo este análisis para una iteración arbitraria, es fácil ver que la suma sigue siendo 1. Físicamente, esta es una manifestación de que la probabilidad total de encontrar al fotón señal dentro o fuera de la cavidad se conserva.

Continuando las iteraciones hasta el n-ésimo término, se encuentra que

$$\begin{aligned}
|\omega_s\rangle^{(n)} &= e^{i\gamma} \left\{ r^n e^{i(n-1)\theta} \hat{a}_s^\dagger(\omega_s) \right. \\
&\quad \left. + t \left[ e^{i\delta} \left( 1 + re^{i\theta} + (re^{i\theta})^2 + \dots + (re^{i\theta})^{n-2} \right) + (re^{i\theta})^{n-1} \right] \hat{b}_s^\dagger(\omega_s) \right\} |0\rangle_s.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Se observa claramente la aparición de una suma geométrica que nos permite simplificar la expresión. Por lo tanto tenemos que para el fotón señal,

$$|\omega_s\rangle^{(n)} = e^{i\gamma_s} \left\{ r^n e^{i(n-1)\theta_s} \hat{a}_s^\dagger(\omega_s) + t \left[ e^{i\delta_s} \frac{1 - (re^{i\theta_s})^{n-1}}{1 - re^{i\theta_s}} + (re^{i\theta_s})^{n-1} \right] \hat{b}_s^\dagger(\omega_s) \right\} |0\rangle_s. \tag{2.10}$$

El cálculo para el fotón acompañante es el mismo. Encontrando que

$$|\omega_i\rangle^{(n)} = e^{i\gamma_i} \left\{ r^n e^{i(n-1)\theta_i} \hat{a}_i^\dagger(\omega_i) + t \left[ e^{i\delta_i} \frac{1 - (re^{i\theta_i})^{n-1}}{1 - re^{i\theta_i}} + (re^{i\theta_i})^{n-1} \right] \hat{b}_i^\dagger(\omega_i) \right\} |0\rangle_i. \tag{2.11}$$

Por lo tanto, la nueva forma que adquiere este estado cuántico por la presencia de la cavidad será el producto de las expresiones correspondientes para cada uno de los fotones. Tenemos

entonces que al cabo de  $n$  iteraciones,  $|\omega_s\rangle |\omega_i\rangle$  se transforma en

$$\begin{aligned}
|\omega_s\rangle^{(n)} |\omega_i\rangle^{(n)} &= e^{i\gamma_s} e^{i\gamma_i} \left\{ r^{2n} e^{i(n-1)\theta_s} e^{i(n-1)\theta_i} \hat{a}_s^\dagger(\omega_s) \hat{a}_i^\dagger(\omega_i) \right. \\
&+ t^2 \left[ e^{i\delta_s} \frac{1 - (re^{i\theta_s})^{n-1}}{1 - re^{i\theta_s}} + (re^{i\theta_s})^{n-1} \right] \left[ e^{i\delta_i} \frac{1 - (re^{i\theta_i})^{n-1}}{1 - re^{i\theta_i}} + (re^{i\theta_i})^{n-1} \right] \hat{b}_s^\dagger(\omega_s) \hat{b}_i^\dagger(\omega_i) \\
&+ tr^n e^{i(n-1)\theta_s} \left[ e^{i\delta_i} \frac{1 - (re^{i\theta_i})^{n-1}}{1 - re^{i\theta_i}} + (re^{i\theta_i})^{n-1} \right] \hat{a}_s^\dagger(\omega_s) \hat{b}_i^\dagger(\omega_i) \\
&\left. + tr^n e^{i(n-1)\theta_i} \left[ e^{i\delta_s} \frac{1 - (re^{i\theta_s})^{n-1}}{1 - re^{i\theta_s}} + (re^{i\theta_s})^{n-1} \right] \hat{b}_s^\dagger(\omega_s) \hat{a}_i^\dagger(\omega_i) \right\} |0\rangle_s |0\rangle_i. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Por simplicidad podemos reescribir la transformación de los estados al cabo de  $n$  iteraciones renombrando los términos que acompañan a los estados de encontrar dentro o fuera de la cavidad a la pareja de fotones, obteniendo

$$\begin{aligned}
|\omega_s\rangle^{(n)} |\omega_i\rangle^{(n)} &= \tag{2.13} \\
&= \left\{ A_{ii} \hat{a}_s^\dagger(\omega_s) \hat{a}_i^\dagger(\omega_i) + A_{io} \hat{a}_s^\dagger(\omega_s) \hat{b}_i^\dagger(\omega_i) + A_{oi} \hat{b}_s^\dagger(\omega_s) \hat{a}_i^\dagger(\omega_i) + A_{oo} \hat{b}_s^\dagger(\omega_s) \hat{b}_i^\dagger(\omega_i) \right\} |0\rangle_s |0\rangle_i.
\end{aligned}$$

Donde la amplitud  $A_{ii} \hat{a}_s^\dagger(\omega_s) |0\rangle_s \hat{a}_i^\dagger(\omega_i) |0\rangle_i$  corresponde a los dos fotones dentro de la cavidad,  $A_{oo} \hat{b}_s^\dagger(\omega_s) |0\rangle_s \hat{b}_i^\dagger(\omega_i) |0\rangle_i$  corresponde a la amplitud de los dos fotones fuera; y las amplitudes  $A_{io} \hat{a}_s^\dagger(\omega_s) |0\rangle_s \hat{b}_i^\dagger(\omega_i) |0\rangle_i$  y  $A_{oi} \hat{b}_s^\dagger(\omega_s) |0\rangle_s \hat{a}_i^\dagger(\omega_i) |0\rangle_i$  a un fotón dentro y otro fuera.

### 2.2.1 Comportamiento del Estado Cuántico

Hemos obtenido una expresión para el nuevo estado cuántico de nuestros fotones creados mediante PDC en presencia de la cavidad óptica. Por lo tanto la nueva ecuación que describe dicho estado queda dada por

$$|\Psi\rangle^{(n)} = \int d\omega_s \int d\omega_i f(\omega_s, \omega_i) |\omega_s\rangle^{(n)} |\omega_i\rangle^{(n)}. \tag{2.14}$$

Dado que ya conocemos la forma explícita de  $|\omega_s\rangle^{(n)} |\omega_i\rangle^{(n)}$ , podemos reescribir la ecuación

anterior de la siguiente forma

$$|\Psi\rangle^{(n)} = N(R, n) \left\{ \int d\omega_s \int d\omega_i f_{ii}(\omega_s, \omega_i) \hat{a}^\dagger(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i) + \int d\omega_s \int d\omega_i f_{io}(\omega_s, \omega_i) \hat{a}^\dagger(\omega_s) \hat{b}^\dagger(\omega_i) \right. \\ \left. + \int d\omega_s \int d\omega_i f_{oi}(\omega_s, \omega_i) \hat{b}^\dagger(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i) + \int d\omega_s \int d\omega_i f_{oo}(\omega_s, \omega_i) \hat{b}^\dagger(\omega_s) \hat{b}^\dagger(\omega_i) \right\} |0\rangle_s |0\rangle_i, \quad (2.15)$$

donde en particular  $f_{oo}(\omega_s, \omega_i) = f(\omega_s, \omega_i) \times A_{oo}$  (lo mismo para el resto) y  $N(R, n)$  es una constante de normalización, y está en función de la reflectividad ( $R$ ) del espejo 2 y del número de iteración  $n$ , de forma que el estado se encuentra debidamente normalizado,

$${}^{(n)}\langle\Psi|\Psi\rangle^{(n)} = 1, \quad (2.16)$$

donde  ${}^{(n)}\langle\Psi|$  esta dado por la siguiente expresión:

$${}^{(n)}\langle\Psi| = N(R, n) \left\{ \int d\tilde{\omega}_s \int d\tilde{\omega}_i f_{ii}^*(\tilde{\omega}_s, \tilde{\omega}_i) \hat{a}(\tilde{\omega}_s) \hat{a}(\tilde{\omega}_i) + \int d\tilde{\omega}_s \int d\tilde{\omega}_i f_{io}^*(\tilde{\omega}_s, \tilde{\omega}_i) \hat{a}(\tilde{\omega}_s) \hat{b}(\tilde{\omega}_i) \right. \\ \left. + \int d\tilde{\omega}_s \int d\tilde{\omega}_i f_{oi}^*(\tilde{\omega}_s, \tilde{\omega}_i) \hat{b}(\tilde{\omega}_s) \hat{a}(\tilde{\omega}_i) + \int d\tilde{\omega}_s \int d\tilde{\omega}_i f_{oo}^*(\tilde{\omega}_s, \tilde{\omega}_i) \hat{b}(\tilde{\omega}_s) \hat{b}(\tilde{\omega}_i) \right\} \langle 0|_s \langle 0|_i. \quad (2.17)$$

De tal forma, que al hacer el producto  ${}^{(n)}\langle\Psi|\Psi\rangle^{(n)}$ , se tiene que

$${}^{(n)}\langle\Psi|\Psi\rangle^{(n)} = N^2(R, n) \int d\omega_s \int d\omega_i \int d\tilde{\omega}_s \int d\tilde{\omega}_i \left\{ \right. \\ f_{ii}^*(\tilde{\omega}_s, \tilde{\omega}_i) f_{ii}(\omega_s, \omega_i) (\delta(\omega_s - \tilde{\omega}_s) \delta(\omega_i - \tilde{\omega}_i) - \delta(\omega_s - \tilde{\omega}_i) \delta(\omega_i - \tilde{\omega}_s)) \\ \left. + f_{io}^*(\tilde{\omega}_s, \tilde{\omega}_i) \left[ f_{oi}(\omega_s, \omega_i) (\delta(\omega_s - \tilde{\omega}_i) \delta(\omega_i - \tilde{\omega}_s)) + f_{io}(\omega_s, \omega_i) (\delta(\omega_s - \tilde{\omega}_s) \delta(\omega_i - \tilde{\omega}_i)) \right] \right. \\ \left. + f_{oi}^*(\tilde{\omega}_s, \tilde{\omega}_i) \left[ f_{oi}(\omega_s, \omega_i) (\delta(\omega_s - \tilde{\omega}_s) \delta(\omega_i - \tilde{\omega}_i)) + f_{io}(\omega_s, \omega_i) (\delta(\omega_s - \tilde{\omega}_i) \delta(\omega_i - \tilde{\omega}_s)) \right] \right. \\ \left. + f_{oo}^*(\tilde{\omega}_s, \tilde{\omega}_i) f_{oo}(\omega_s, \omega_i) (\delta(\omega_s - \tilde{\omega}_s) \delta(\omega_i - \tilde{\omega}_i) - \delta(\omega_s - \tilde{\omega}_i) \delta(\omega_i - \tilde{\omega}_s)) \right\}. \quad (2.18)$$

donde se consideró las siguientes propiedades de conmutación:

$$\left[ \hat{a}(\tilde{\omega}_\mu), \hat{a}^\dagger(\omega_\nu) \right] = \delta(\omega_\nu - \tilde{\omega}_\nu) \delta_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

$$\left[ \hat{b}(\tilde{\omega}_\mu), \hat{b}^\dagger(\omega_\nu) \right] = \delta(\omega_\nu - \tilde{\omega}_\nu) \delta_{\mu\nu}, \quad (2.20)$$

(el resto de las combinaciones entre los operadores conmutan entre sí).

Suponiendo que las funciones  $f_{ii}$  y  $f_{oo}$  son simétricas ante el intercambio de  $\omega_s$  por  $\omega_i$  (o viceversa) y ante este mismo intercambio  $f_{io}$  se transforma en  $f_{oi}$  o viceversa, podemos integrar entonces usando las propiedades de las  $\delta$ 's. Encontramos así que

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \Psi \rangle^{(n)} &= & (2.21) \\ &= 2N^2(R, n) \int d\omega_s \int d\omega_i (|f_{oo}(\omega_s, \omega_i)|^2 + |f_{oi}(\omega_s, \omega_i)|^2 + |f_{io}(\omega_s, \omega_i)|^2 + |f_{ii}(\omega_s, \omega_i)|^2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

De aquí, que la integral

$$2N^2(R, n) \int d\omega_s \int d\omega_i |f_{oo}(\omega_s, \omega_i)|^2, \quad (2.22)$$

represente la probabilidad de encontrar al fotón señal y al fotón acompañante fuera de la cavidad óptica. Por ende, la integral con el término  $|f_{ii}(\omega_s, \omega_i)|^2$  representa la probabilidad de encontrar a los dos fotones dentro de la cavidad y las integrales que involucran los términos  $|f_{oi}(\omega_s, \omega_i)|^2$  y  $|f_{io}(\omega_s, \omega_i)|^2$  representan la probabilidad de encontrar al fotón señal fuera de la cavidad, pero al fotón acompañante dentro de ésta en el primer caso o viceversa en el segundo; en algunos casos de interés estas dos últimas integrales tendrán la misma forma por la simetría del estado.

Haciendo un análisis numérico, es posible observar el comportamiento de estas cuatro integrales en dependencia del número de iteración para diferentes valores de la reflectividad del espejo 2 (figura 2.3). Los parámetros experimentales que se consideraron fueron una longitud del cristal de  $10 \mu m$  al igual que el de la cavidad, y valores de  $R$  entre 0.1 y 0.9 para el espejo 2.

Podemos observar tres curvas en cada gráfica; la curva que empieza con probabilidad 0 y crece hasta alcanzar un valor unitario, muestra la probabilidad de encontrar ambos fotones fuera de la cavidad para cierta  $n$ , lo cual corresponde perfectamente con la intuición física que tenemos del problema: a pocas iteraciones de los fotones por la cavidad la probabilidad de encontrar nuestra pareja de fotones fuera de la cavidad es baja, sin embargo para iteraciones

de mayor orden será más probable encontrar nuestra pareja fuera de la cavidad. Esta probabilidad depende de la reflectividad del espejo 2; a mayor reflectividad los fotones tendrán mayor probabilidad de permanecer dentro de la cavidad y se necesitarán más iteraciones para que la probabilidad de encontrarlos fuera de la cavidad se aproxime a 1.

La probabilidad de encontrar a la pareja de fotones dentro de la cavidad es inicialmente la unidad y decrece progresivamente. El comportamiento al aumentar la reflectividad es el inverso para la curva que nos muestra la probabilidad de encontrar la pareja de fotones fuera de la cavidad; pues a reflectividades bajas los fotones tendrán mayor probabilidad de ser transmitidos y a reflectividades grandes la probabilidad de ser transmitidos disminuye teniendo más oportunidad de permanecer dentro de la cavidad pero eventualmente saldrán de ésta.

Por último la gráfica que empieza con probabilidad 0, alcanza un máximo pero vuelve a decrecer hasta tener de nuevo probabilidad 0, muestra la probabilidad de encontrar alguno de los fotones dentro de la cavidad y el otro fuera de ésta (ya sea el señal dentro y el acompañante fuera, o viceversa). La curva es la misma en los dos casos pues las expresiones son simétricas en  $\omega_s$  y  $\omega_i$ .

### 2.2.2 El límite $n \rightarrow \infty$

Estamos interesados en el estado de dos fotones en el límite de una iteración caracterizada por un valor grande de  $n$ , para ésto consideraremos el límite cuando  $n$  tiende a infinito. En este caso, para ambos fotones la probabilidad de permanecer dentro de la cavidad es nula.

Considerando este límite se puede simplificar el estado de los fotones creados en la siguiente expresión:

$$|\omega_s\rangle^\infty |\omega_i\rangle^\infty = \left\{ e^{i\gamma_s} e^{i\gamma_i} t^2 \left[ e^{i\delta_s} \frac{1}{1 - r e^{i\theta_s}} \right] \left[ e^{i\delta_i} \frac{1}{1 - r e^{i\theta_i}} \right] \hat{b}_s^\dagger(\omega_s) \hat{b}_i^\dagger(\omega_i) \right\} |0\rangle_s |0\rangle_i. \quad (2.23)$$

Como se mostrará en el siguiente capítulo se preferirán reflectividades altas tal que los fotones emitidos por la cavidad sean los más monocromáticos posibles, por lo tanto en lo sucesivo consideraremos únicamente el caso  $n \rightarrow \infty$ , puesto que representa el estado de interés desde un punto de vista experimental.

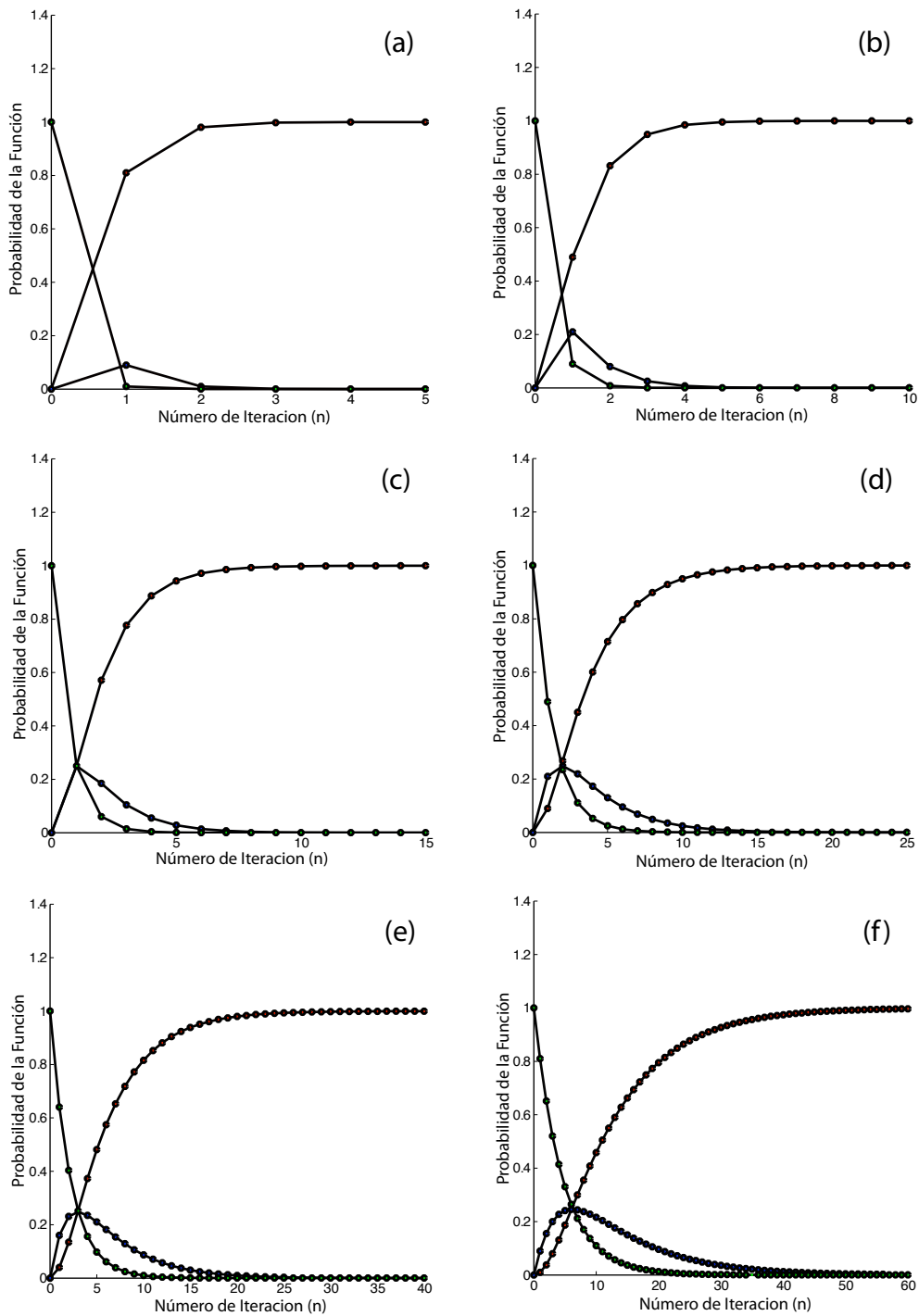


Figura 2.3: Gráficas de las probabilidades de encontrar a los fotones señal y acompañante dentro o fuera de la cavidad en función del número de iteraciones ( $n$ ), a una longitud del cristal de  $10 \mu m$ . (a) $R=0.1$  (b) $R=0.3$  (c) $R=0.5$  (d) $R=0.7$  (e) $R=0.8$  (f) $R=0.9$

## 2.3 Intensidad Espectral Conjunta (JSI) de la Cavidad con Resonancia Sencilla

El estado cuántico de la cavidad óptica, quedará descrito por

$$|\Psi\rangle^\infty = \int d\omega_s \int d\omega_i f(\omega_s, \omega_i) |\omega_s\rangle^\infty |\omega_i\rangle^\infty, \quad (2.24)$$

donde  $|\omega_s\rangle^\infty |\omega_i\rangle^\infty$  representa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\omega_s\rangle^n |\omega_i\rangle^n$$

y  $f(\omega_s, \omega_i)$  es la función de amplitud conjunta (Ec. 1.22).

Podemos reescribir este estado del siguiente modo

$$|\Psi\rangle^\infty = \int d\omega_s \int d\omega_i \mathcal{F}(\omega_s, \omega_i) |\omega_s\rangle |\omega_i\rangle, \quad (2.25)$$

donde ahora  $\mathcal{F}(\omega_s, \omega_i)$  es la Amplitud Espectral Conjunta (JSA, por sus siglas en inglés) de la cavidad no lineal

$$\mathcal{F}(\omega_s, \omega_i) = f(\omega_s, \omega_i) \times \left[ \frac{e^{i(\delta_s + \gamma_s)} t}{1 - r e^{i\Theta_s}} \right] \left[ \frac{e^{i(\delta_i + \gamma_i)} t}{1 - r e^{i\Theta_i}} \right]. \quad (2.26)$$

La Intensidad Espectral Conjunta (JSI, por sus siglas en inglés) representa la distribución de emisión de dos fotones con frecuencias  $\omega_s$  y  $\omega_i$ , y se encuentra definida del siguiente modo

$$S(\omega_s, \omega_i) = \langle \Psi | \hat{a}^\dagger(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i) \hat{a}(\omega_i) \hat{a}(\omega_s) | \Psi \rangle. \quad (2.27)$$

Por lo tanto, la JSI en términos de nuestro estado  $|\Psi\rangle^\infty$  es

$$S(\omega_s, \omega_i) = |f(\omega_s, \omega_i)|^2 \times \left| \left[ \frac{t}{1 - r e^{i\theta_s}} \right] \left[ \frac{t}{1 - r e^{i\theta_i}} \right] \right|^2.$$

## 26 2.3 Intensidad Espectral Conjunta (JSI) de la Cavity con Resonancia Sencilla

Analicemos con mayor detalle el término

$$I_s = \left| \frac{t}{1 - re^{i\theta_s}} \right|^2 = \frac{tt^*}{|1 - re^{i\theta_s}|^2}, \quad (2.28)$$

donde nombraremos  $T = tt^*$  y  $R = rr^*$ .

Cada reflexión en los espejos 2 puede contribuir con una fase y en general la reflectividad  $r$  es compleja, se tiene que

$$r = \sqrt{R}e^{i\theta_{rs}}. \quad (2.29)$$

donde  $\theta_{rs}$  es la fase asociada a la reflexión en el espejo 2. Dicha fase, que es impresa por el espejo 2, resultará de suma importancia en el capítulo 4.

Definiendo la fase

$$\Theta_s = \theta_s + \theta_{rs} \quad (2.30)$$

para la fase total, la Ec. (2.28) la podemos expresar como

$$I_s = \frac{T}{|1 - \sqrt{R}e^{i\Theta_s}|^2}. \quad (2.31)$$

Ahora bien, el denominador de la ecuación anterior lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} |1 - \sqrt{R}e^{i\Theta_s}|^2 &= (1 - \sqrt{R}e^{i\Theta_s})(1 - \sqrt{R}e^{-i\Theta_s}) \\ &= 1 - 2\sqrt{R}\cos\Theta_s + R \\ &= (1 - \sqrt{R})^2 \left( 1 + \frac{4\sqrt{R}}{(1 - \sqrt{R})^2} \sin^2\left(\frac{\Theta_s}{2}\right) \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

La cantidad,

$$F = \frac{4\sqrt{R}}{(1 - \sqrt{R})^2}, \quad (2.33)$$

será el coeficiente de finesa para la cavity y lo denotaremos por  $F$ . El término

$$\mathcal{A}(\Theta_s) = \frac{1}{1 + F \sin^2\left(\frac{\Theta_s}{2}\right)}, \quad (2.34)$$



representa la ya conocida función de Airy. La figura 2.4, muestra el comportamiento de esta función para diferentes valores de  $R$ . Es importante notar que para valores grandes del coeficiente de reflexión (lo cual implica una finesa elevada), los picos se hacen progresivamente más angostos.

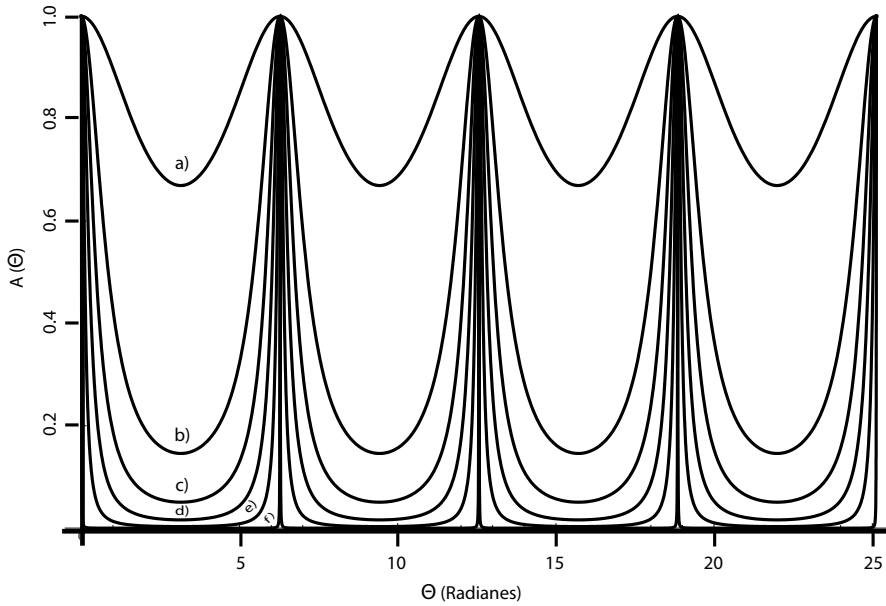


Figura 2.4: Gráficas de la función de Airy para diferentes reflectividades del espejo 2. (a) $R=0.01$ , (b) $R=0.2$ , (c) $R=0.4$ , (d) $R=0.6$ , (e) $R=0.8$ , (f) $R=0.99$ .

De esta forma,

$$I_s = \frac{T}{4\sqrt{R}} F \frac{1}{1 + F \sin^2\left(\frac{\Theta_s}{2}\right)}, \tag{2.35}$$

representa una función de resonancia de la cavidad para el fotón  $s$ .

Haciendo un procedimiento análogo para  $I_i$ , encontramos que la ecuación para la Intensidad Espectral Conjunta (JSI) puede ser expresada como

$$S(w_s, w_i) = |f(w_s, \omega_i)|^2 \times \frac{T^2}{16R} F^2 \frac{1}{1 + F \sin^2\left(\frac{\Theta_s}{2}\right)} \frac{1}{1 + F \sin^2\left(\frac{\Theta_i}{2}\right)}, \tag{2.36}$$

donde el primer término corresponde a la intensidad de PDC sin la cavidad, y el segundo término es la aportación de la cavidad.

## 2.4 Análisis Numérico de la JSI

En particular para esta tesis (excepto en el Capítulo 4) presentaremos los resultados para una cristal no lineal BBO (o  $\beta - BaB_2O_4$ ) con empatamiento de fases tipo I, esto es, el haz incidente tiene una polarización extraordinaria y los fotones creados una polarización ordinaria, como fuente de nuestra pareja de fotones; el ángulo de corte del cristal al cual se logra un empatamiento de fases optimizado es  $29.1781^\circ$ . El cristal será excitado por una fuente de luz pulsada con longitud de onda centrada en  $\lambda_p = 0.4\mu m$  y con un ancho de banda de  $\sigma = 0.005\mu m$ . Suponemos que el proceso de generación de parejas de fotones es degenerado en frecuencias ( $\omega_s = \omega_i$ ), donde los fotones generados están centrados en una longitud de onda de  $\lambda_{s,i} = 0.8\mu m$ . Así mismo se considera propagación colineal dentro de la cavidad óptica ( $\mathbf{k}_p \parallel \mathbf{k}_s \parallel \mathbf{k}_i$ ).

En esta sección se evaluará numéricamente la JSI buscando un entendimiento de su comportamiento en función de los parámetros experimentales. Consideraremos que la longitud de la cavidad es de  $10\mu m$ , y que la cavidad y el cristal son de la misma longitud. La reflectividad del espejo 2 será de  $R = 0.7$ . Respecto al cristal no lineal consideraremos un cristal  $\beta$ -borato de bario (BBO) con empatamiento de fases Tipo I (donde los fotones generados son co-polarizados).

La figura 2.5(a) muestra el comportamiento de la contribución de la cavidad a la intensidad conjunta para el fotón señal. La figura 2.5(b) muestra el comportamiento de la contribución de la cavidad a la intensidad conjunta para el fotón acompañante. La figura 2.5(c) muestra el producto de las dos funciones anteriores y representa la contribución de la cavidad a la intensidad espectral conjunta. Se observa que la cavidad implica la existencia de modos espectrales bien definidos. Como ya hemos comentado, y estudiaremos con más detalle, los modos se vuelven más angostos al incrementar la finesa de la cavidad.

El comportamiento de los modos espectrales se debe al hecho de tener el cristal no lineal situado dentro de una cavidad óptica, donde debido a los modos de resonancia de la cavidad, las frecuencias de las parejas de fotones generadas se redistribuyen concentrándose en pequeños modos espectrales (de modo análogo que para la transmitividad de una cavidad de Fabry-Perot), lo cual resulta en un filtro “ideal” pues no se presentan pérdidas de energía. Es decir,

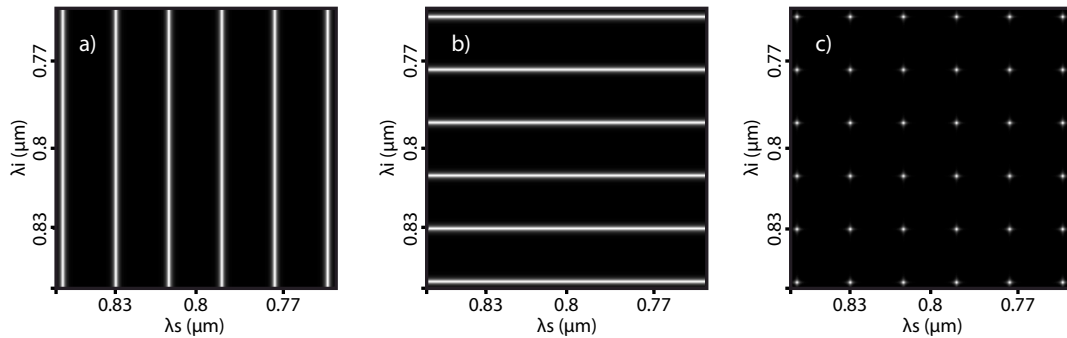


Figura 2.5: (a) Condición de resonancia para el fotón señal, (b) Condición de resonancia para el fotón acompañante, (c) Modos de la cavida óptica.

al cabo del tránsito del pulso de bombeo por la cavidad, se genera un continuo de frecuencias con cierto ancho de banda. La amplitud del estado cuántico se redistribuye a los modos de la cavidad sin esto repercutir en una pérdida en la tasa de emisión de la fuente.

La figura 2.6, muestra en el panel (c) la intensidad espectral conjunta de toda la cavidad no lineal la cual resulta en modos bien definidos a lo largo de una diagonal, como resultado de la multiplicación de la intensidad espectral (sin cavidad) por la contribución de la cavidad.

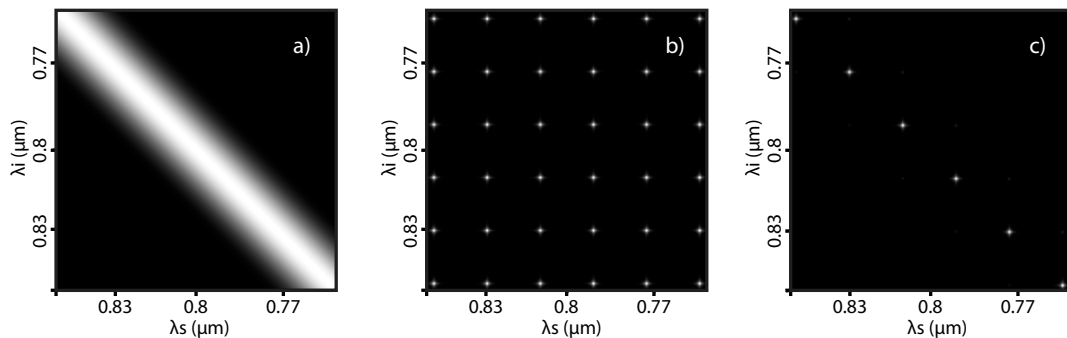


Figura 2.6: (a)  $|f(\omega_s, \omega_i)|^2$ , (b)  $I_s(\omega_s) \times I_i(\omega_i)$ , (c)  $S(w_s, w_i)$ .

Como se analizará en el resto del capítulo, el insertar un cristal no lineal como fuente de fotones entrelazados dentro de una cavidad óptica nos permite reducir el ancho de banda espectral de los modos generados. Esta reducción del ancho de banda de los modos resultantes se podría limitar exitosamente al utilizar un cristal no lineal seguido de una cavidad de Fabry-

Perot (tal como lo muestra la figura 2.7), se presentaría una intensidad conjunta esencialmente idéntica. Sin embargo, en este caso la cavidad Fabry-Perot tendrá el efecto de transmitir sólo la porción del estado dentro de los modos espectrales bien definidos de la cavidad. Esto significará que se obtendría el ancho de banda deseado al costo de una reducción prohibitiva en la tasa de emisión, especialmente para finesas altas. En el límite de finesas altas la proporción de la amplitud de probabilidad que sobrevive el tránsito por la cavidad tiende a cero.

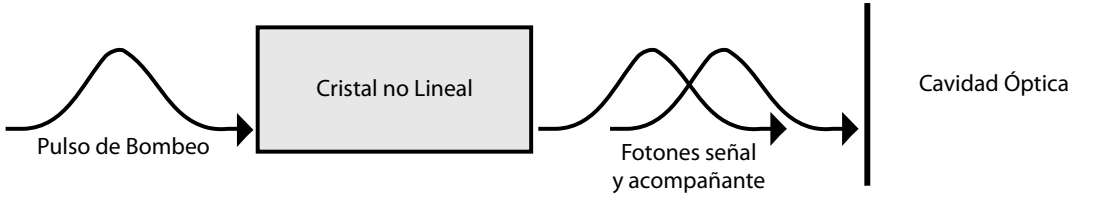


Figura 2.7: La pareja de fotones entrelazados es generada fuera de la cavidad óptica, para posteriormente ingresar a ésta.

## 2.5 Caracterización de la Cavity Óptica en función de $L$ y de $R$

### 2.5.1 Rango Espectral Libre (seperación espectral entre modos)

Consideremos la función de Airy (Ec. 2.34) la cual es máxima cuando  $\Theta/2$  es un múltiplo entero de  $\pi$ . Usando la expresión dada para  $\Theta$  tenemos entonces que

$$\Theta_N = 2N\pi = 2(L-l)\frac{\omega_N}{c} + 2\ln(\omega_N)\frac{\omega_N}{c} + \theta_r, \quad N = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.37)$$

donde  $n(\omega)$  es el índice de refracción del cristal y depende de la frecuencia de los fotones generados.

El rango espectral libre está definido como la separación entre dos máximos adyacentes

$$\Theta_{N+1} - \Theta_N = \frac{2(L-l)}{c}(\omega_{N+1} - \omega_N) + \frac{2l}{c}(n(\omega_{N+1})\omega_{N+1} - n(\omega_N)\omega_N) = 2\pi. \quad (2.38)$$

De aquí, que para poder encontrar la forma analítica de  $\Delta\omega = \omega_{N+1} - \omega_N$ , es necesario suponer

que el índice de refracción se puede considerar constante en el intervalo  $\omega_N < \omega < \omega_{N+1}$ , dado por  $n_c = n(\omega_c)$  donde  $\omega_c$  corresponde a  $\lambda = 800$  nm.

De esta forma, tenemos que el rango espectral libre queda dado por la siguiente expresión:

$$\Delta\omega = \frac{\pi c}{ln_c + (L - l)}. \quad (2.39)$$

Podemos observar de la Ec. (2.39) que la distancia espectral entre modos de la figura 2.6 (b) y (c) depende sólo de la longitud del cristal y de la cavidad, es decir, no de la reflectividad ( $R$ ) del espejo 2 que es el otro parámetro que nos interesa. Sí consideramos que la longitud del cristal y de la cavidad son iguales, dicha distancia espectral sólo dependerá inversamente de la longitud del cristal. Esto es, al aumentar la longitud de cristal la separación espectral entre los modos de la cavidad disminuirá. Pensando en términos del experimento, resulta más conveniente contar con una distancia espectral considerable pues se buscará trabajar con un solo modo espectral bien definido. Notese que para una distancia espectral considerable entre modos podemos aislar a un solo modo mediante filtración espectral débil.

Resulta interesante mostrar que al calcular la distancia entre los modos espectrales para diferentes longitudes del cristal y compararla con la expresión analítica, éstas resultan ser prácticamente idénticas como podemos observar en la figura 2.8, donde se nota una disminución en la separación entre modos espectrales al incrementar la longitud del cristal ( $l$ ). El pequeño desfase entre las curvas se debe a que para obtener la expresión analítica del rango espectral libre se consideró el índice de refracción constante lo cual no es estrictamente válido.

### 2.5.2 Ancho del Modo Espectral

El ancho del modo espectral lo definiremos como el ancho a la mitad del máximo (FWHM, por sus siglas en inglés), es decir, consideremos el punto donde la intensidad de la JSI disminuye a la mitad. Tenemos entonces

$$I = I_0 \left( 1 + F \sin^2 \left( \frac{\Theta + \delta\Theta/2}{2} \right) \right)^{-1} = \frac{1}{2} I_0, \quad (2.40)$$

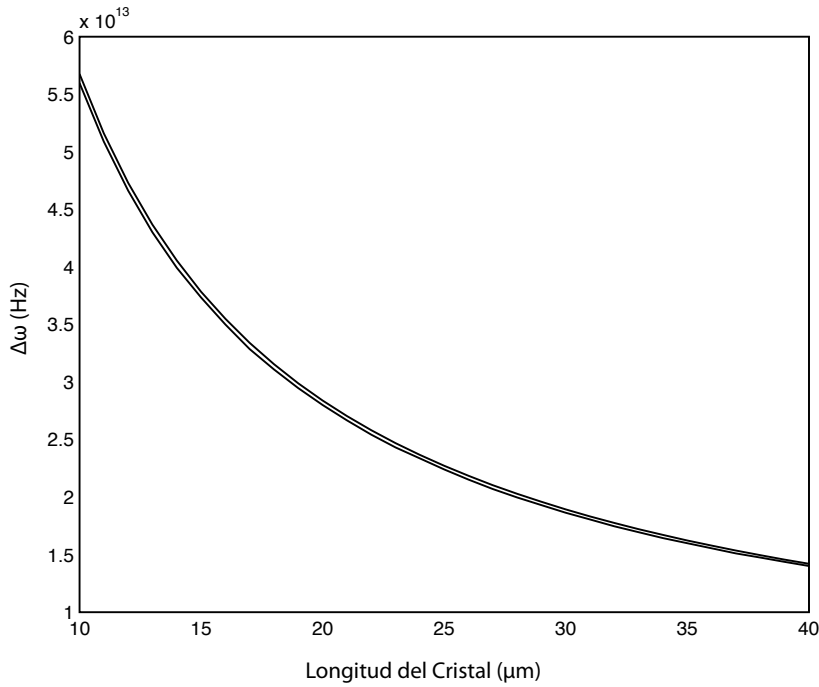


Figura 2.8: Rango espectral ( $\Delta\omega$ ) como función de la longitud del cristal ( $L$ ) para una reflectancia constante  $R = 0.7$ . La curva desplazada hacia arriba corresponde a la expresión analítica.

donde  $\delta\Theta$  es el ancho del modo espectral. De la Ec. (2.40) se sigue que

$$F^{-1} = \sin^2 \left( \frac{\Theta + \delta\Theta/2}{2} \right). \quad (2.41)$$

Ahora bien,  $\Theta$  es la frecuencia a la cual se hace máximo la función de Airy ( $\mathcal{A}(\Theta)$ ), por lo tanto se tiene que esto sucede si

$$\Theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots \quad (2.42)$$

De aquí, la Ec. (2.41) la podemos reescribir como

$$F^{-1} = \sin^2 \left( \frac{\delta\Theta}{4} \right), \quad (2.43)$$

por lo tanto, considerando que la cantidad  $\delta\Theta$  es pequeña, tal que el término con el seno pueda

ser reemplazado por su argumento, obtenemos

$$\delta\Theta \simeq 4F^{-1/2}. \quad (2.44)$$

Para poder escribir  $\delta\Theta$  en términos de  $\delta\omega$  es necesario considerar la siguiente relación (vista en el capítulo 1)

$$\Theta = 2(L - l)\frac{\omega}{c} + 2\ln(\omega)\frac{\omega}{c} + \theta_r, \quad (2.45)$$

así como elegir una frecuencia central de la cual dependa el índice de refracción, que en nuestro caso la situaremos en la correspondiente a la longitud de onda de los fotones creados que es 800nm. De esta forma obtenemos en términos de la frecuencia angular,

$$\frac{2(L - l)}{c}\delta\omega + \frac{2l}{c}n_c\delta\omega = 4F^{-1/2}. \quad (2.46)$$

Por lo tanto, el ancho del modo espectral en términos de la frecuencia angular queda dado por

$$\begin{aligned} \delta\omega &= \frac{2c}{\ln_c + (L - l)}F^{-1/2}, \\ &= \frac{c}{\ln_c + (L - l)}\frac{(1 - \sqrt{R})}{\sqrt[4]{R}}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Se tiene que el ancho de cada modo espectral de la figura 2.6 b), que definimos como la distancia de la intensidad máxima al punto donde ésta decae a la mitad, depende tanto de la longitud del cristal, de la longitud de la cavidad óptica, así como de la reflectividad del espejo 2. Suponiendo además que  $L = l$ , notamos una clara dependencia que va como  $1/l$  (figura 2.9) respecto a la longitud del cristal.

De igual forma, respecto a la reflectividad ( $R$ ) notamos que al aumentar ésta, el ancho de cada modo espectral disminuirá (figura 2.10); puesto que la finesa  $F$  aumenta conforme se aumenta la reflectividad, entonces la raíz inversa de ésta disminuirá conforme se aumente la reflectividad.

De las figuras 2.9 y 2.10, podemos observar que el cálculo analítico (curva desplazada hacia arriba en los dos casos) corresponde casi perfectamente al cálculo numérico.

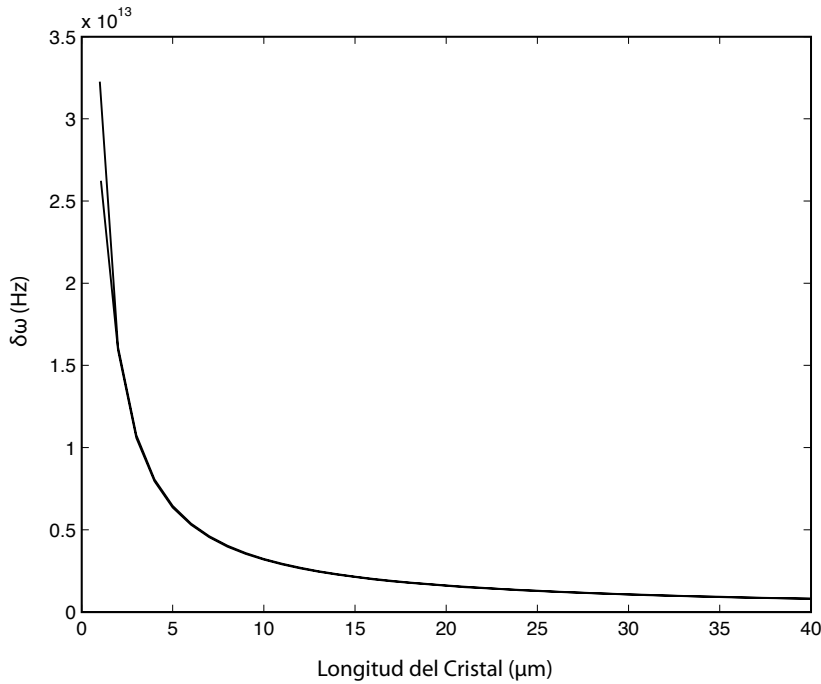


Figura 2.9: Ancho del Modo Espectral ( $\delta\omega$ ) como función de la longitud del cristal ( $L$ ) a una reflectancia constante de  $R = 0.7$ . La curva desplazada hacia arriba corresponde a la expresión analítica.

## 2.6 Optimizando las propiedades espectrales

Considerando que buscamos tener fotones lo más monocromáticos posible, conviene entonces que nuestra cavidad óptica tenga una reflectividad alta donde la longitud del cristal no comprometa el ancho de banda libre ni el ancho del modo espectral. Es decir, se encontró que

$$\Delta\omega \propto \frac{1}{L}, \quad (2.48)$$

$$\delta\omega \propto \frac{1}{L\sqrt{F}}, \quad (2.49)$$

por lo tanto para escoger los parámetros de la cavidad no lineal ( $L$  y  $R$ ) tales que las propiedades espectrales de los fotones sean óptimas en nuestro caso se tiene que primeramente la separación espectral entre modos define  $L$ , tal que los modos pueden ser filtrados individualmente; una vez fija  $L$  el ancho del modo espectral definirá la finesa requerida de la cavidad, es decir, la



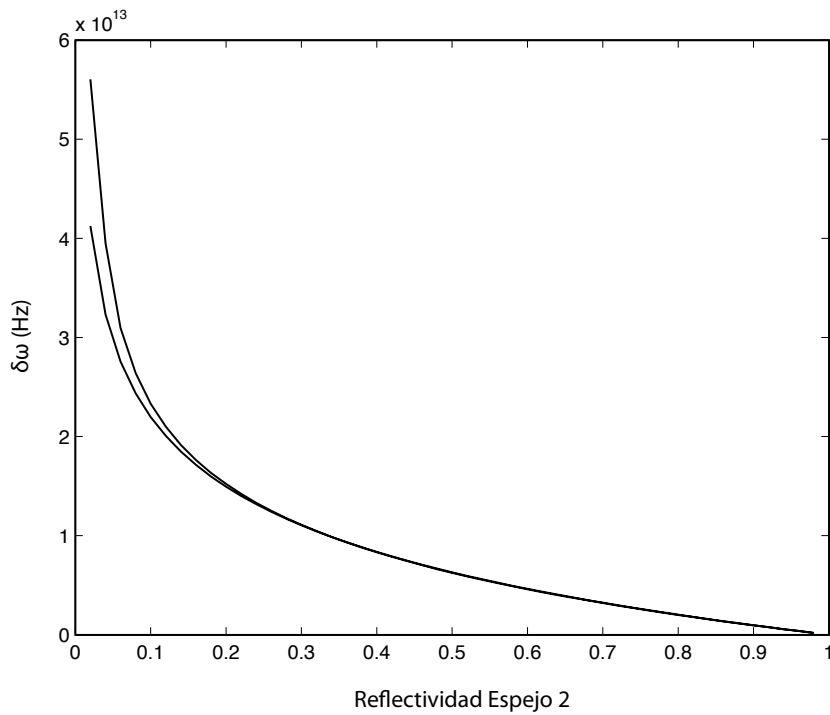


Figura 2.10: Ancho del Modo Espectral ( $\delta\omega$ ) como función de la reflectividad ( $R$ ) a  $L = 10\mu m$ . La curva desplazada hacia arriba corresponde a la expresión analítica.

reflectividad  $R$ .

De esta forma es posible obtener parejas de fotones acondicionadas espectralmente tal que sean óptimas para interactuar con sistemas atómicos.

## Capítulo 3

# PDC en Cavidades con Resonancia Sencilla: Análisis Temporal

### 3.1 Función de Intensidad Temporal Conjunta (JTI)

Es conveniente estudiar a las parejas de fotones emitidas en el dominio temporal además del estudio del dominio espectral ya presentado en el capítulo anterior. En el dominio temporal, el estado cuántico se encuentra definido por la Amplitud Temporal Conjunta (JTA, por sus siglas en inglés)  $\tilde{\mathcal{F}}(t_s, t_i)$ , como

$$|\Psi\rangle = |\text{vac}\rangle + \int dt_s \int dt_i \tilde{\mathcal{F}}(t_s, t_i) |t_s\rangle |t_i\rangle, \quad (3.1)$$

donde  $|t_\mu\rangle = \tilde{a}_\mu^\dagger(t_\mu)|0\rangle_\mu$ , definido en términos del operador de creación en el dominio temporal

$$\tilde{a}_\mu^\dagger(t_\mu) = \int d\omega_\mu \hat{a}_\mu^\dagger(\omega_\mu) e^{-i\omega_\mu t_\mu}. \quad (3.2)$$

Por lo tanto, para poder hacer un análisis en el espacio temporal es necesario obtener la JTA la cual se encuentra definida por la transformada de Fourier de la amplitud espectral conjunta

(JSA) de toda la cavidad, es decir

$$\tilde{\mathcal{F}}(t_s, t_i) = \int d\omega_s \int d\omega_i e^{i\omega_i t_i} e^{i\omega_s t_s} \mathcal{F}(\omega_s, \omega_i), \quad (3.3)$$

donde la JSA de la cavidad sencilla  $\mathcal{F}(\omega_s, \omega_i)$  es la función de amplitud conjunta de la cavidad no lineal como ya se vió,

$$\mathcal{F}(\omega_s, \omega_i) = f(\omega_s, \omega_i) \times \left[ e^{i(\delta_s + \gamma_s)} \frac{t}{1 - r e^{i\Theta_s}} \right] \left[ e^{i(\delta_i + \gamma_i)} \frac{t}{1 - r e^{i\Theta_i}} \right]. \quad (3.4)$$

Sin embargo, debido a que la función  $\mathcal{F}(\omega_s, \omega_i)$  está definida en todo el espacio de frecuencias, consideramos la acción de un filtro espectral  $G(\omega_s, \omega_i)$  que acota las frecuencias emitidas a la región espectral de interés

$$\mathcal{F}'(\omega_s, \omega_i) = G(\omega_s, \omega_i) \times \mathcal{F}(\omega_s, \omega_i), \quad (3.5)$$

donde  $G(\omega_s, \omega_i) = \text{rect}(\omega_{s,c} - \delta\omega/2, \omega_{s,c} + \delta\omega/2; \omega_s) \times \text{rect}(\omega_{i,c} - \delta\omega/2, \omega_{i,c} + \delta\omega/2; \omega_i)$ . Aquí hemos definido  $\text{rect}(x_1, x_2; x)$  como una función sombrero dada por

$$\text{rect}(x_1, x_2; x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ 1, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0, & x > x_2. \end{cases}$$

De aquí, la nueva Intensidad Temporal Conjunta (JTI por sus siglas en inglés) que es por definición  $\langle \Psi | \hat{a}^\dagger(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i) \hat{a}(\omega_i) \hat{a}(\omega_s) | \Psi \rangle$ , queda dada por el cuadrado de la JTA, es decir,  $|\mathcal{F}'(t_s, t_i)|^2$ . Donde

$$\tilde{\mathcal{F}}'(t_s, t_i) = \int d\omega_s \int d\omega_i e^{i\omega_i t_i} e^{i\omega_s t_s} \mathcal{F}'(\omega_s, \omega_i). \quad (3.6)$$

En las siguientes secciones analizaremos el comportamiento numérico de la JTI, donde para los cálculos numéricos utilizamos un filtro espectral con ancho de  $\lambda_{cota} = 50nm$  centrada en la longitud de onda central de los fotones señal y acompañante de  $\lambda_{s,c} = \lambda_{i,c} = 800nm$ . Y obtendremos la amplitud temporal conjunta como la transformada de Fourier de la amplitud

conjunta espectral filtrada  $\mathcal{F}'(\omega_s, \omega_i)$ .

### 3.1.1 Análisis Numérico de la JTI

Para calcular la JTI es necesario recurrir a métodos numéricos pues no es posible realizar la transformada de Fourier requerida analíticamente.

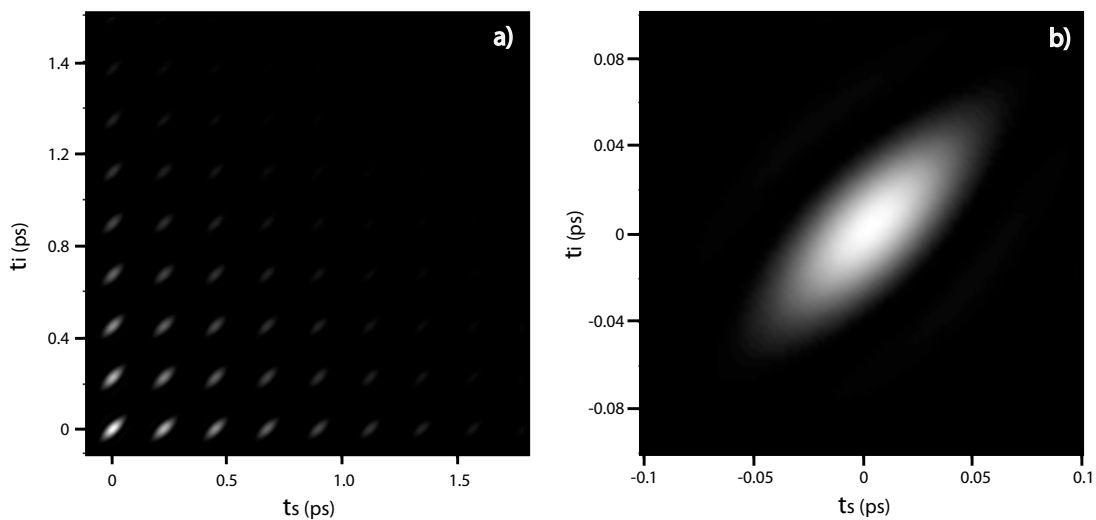


Figura 3.1: (a) JTI para una longitud de cristal y de la cavidad de  $20 \mu m$  y una reflectividad de  $R=0.7$ , (b) Acercamiento del primer modo temporal (en  $t_s = t_i = 0$ ) de la JTI.

Como se puede apreciar en la figura 3.1(a), la JTI muestra un comportamiento similar al de los modos espectrales bien definidos que muestra la intensidad espectral conjunta (JSI) (figura 2.6(b)): aparecen modos temporales bien definidos. En este caso se nota que no todos los modos tienen la misma intensidad; el modo con mayor intensidad ocurre en  $t_i = t_s = 0$ , con un decaimiento en la envolvente que describe la intensidad del modo para  $t_s$  y  $t_i$  positivos. Es importante aclarar que  $t_s = 0$  (o  $t_i = 0$ ) corresponde al tiempo en que el pulso de bombeo emerge de la cavidad no lineal, es decir, los tiempos se miden con respecto al tiempo en que el pulso de bombeo emerge de la cavidad.

La distancia temporal entre modos representa físicamente el tiempo que tarda un fotón, ya sea señal o acompañante (correspondiendo a los ejes horizontal y vertical en la figura) en recorrer

la cavidad completa una vez; es decir, ir de un espejo 2 al siguiente espejo 2 donde puede ser transmitido con cierta probabilidad. El tiempo transcurrido del primer modo temporal, que se encuentra en el origen, al último modo, sobre cualquiera de los dos ejes, representa el tiempo en el que la amplitud cuántica intra-cavidad se extingue. Considerando que las expresiones son simétricas ante el intercambio del subíndice  $s$  por el  $i$ , el tiempo que permanecen dentro de la cavidad los fotones señal y acompañante es el mismo.

En la figura 3.1(a) para los valores señalados, se obtiene numéricamente que el tiempo que le toma a un fotón recorrer la cavidad una vez es  $0.22ps$  y el tiempo que permanece dentro de la cavidad se considera una vez que todos los modos temporales se han extinguido, dicho tiempo es en esta caso de  $2.2 ps$ . En la figura 3.1(b) observamos un acercamiento del modo temporal que se encuentra en el origen; físicamente el ancho de un modo temporal representa la incertidumbre en el tiempo al cual los fotones emergen de la cavidad.

### 3.1.2 Dependencia en $L$ y $R$ de la JTI

Es importante analizar cómo se comporta el ancho del modo temporal así como la distancia entre estos al variar tanto la longitud del cristal ( $L$ ) como la reflectividad del espejo 2 ( $R$ ). Para esto, basta tomar un corte de la JTI para un tiempo  $t_i$  fijo, que lo consideraremos cuando  $t_i = 0$  ( $|\tilde{\mathcal{F}}'(t_s, t_i = 0)|^2$ ) pues en este punto el corte de los modos temporales en  $t_s$  tienen una mayor intensidad (figura 3.1(a)). El resultado numérico de este corte lo podemos observar en la figura 3.2 donde tenemos el ancho de cada modo temporal bien definido (dado por el tiempo que le toma decaer del máximo de la intensidad a la mitad de su valor) así como la distancia entre modos temporales queda bien definida como la distancia de un máximo al siguiente máximo de interés.

En la figura 3.2 podemos observar que, en primera aproximación, la distancia entre el modo  $N$  y el modo  $N + 1$  así como el ancho temporal del modo  $N$  es independiente de  $N$ . Por lo tanto sólo analizaremos el ancho del primer modo temporal que es el de mayor intensidad y la distancia entre el primer y segundo modos.

Un cálculo numérico del ancho temporal de las modos ( $\delta t$ ) en dependencia de la longitud del cristal y de la reflectividad, muestra que este ancho es constante para los dos casos, en

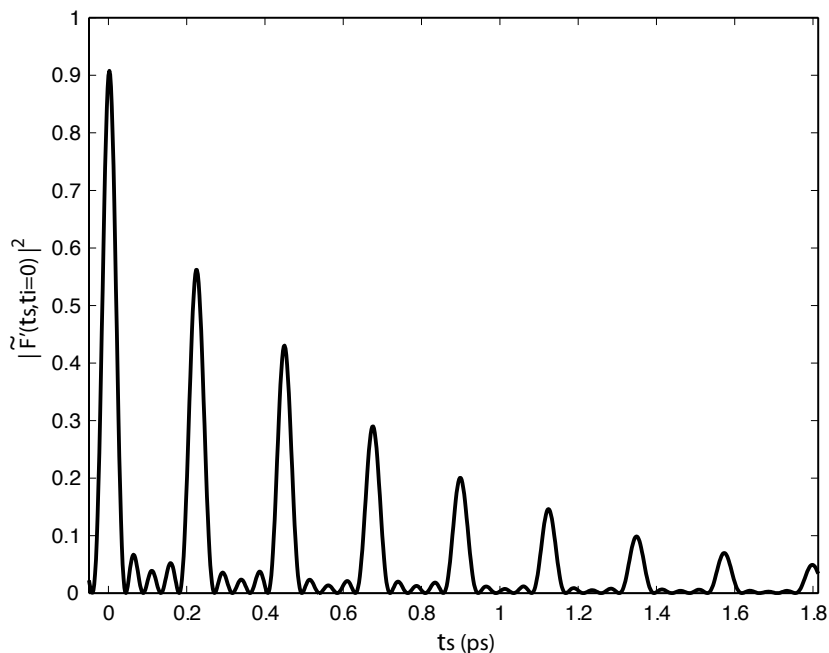


Figura 3.2: Corte de la intensidad temporal conjunta (JTI) al tiempo  $t_i = 0$  y  $R=0.7$  y  $L=20 \mu m$ .

este caso en particular con un valor de  $0.04 ps$ . El mismo comportamiento se encuentra en la dependencia para la distancia temporal entre los modos respecto a la reflectividad, para una longitud de cristal de  $L = 20 \mu m$  se tiene que la distancia temporal entre modos se mantiene constante en aproximadamente  $0.22 ps$  al variar  $R$ .

Sin embargo, tras un análisis numérico la distancia temporal entre modos sí se ve afectada al variar la longitud del cristal tal como lo muestra la figura 3.3, donde al aumentar la longitud del cristal, la distancia entre los modos temporales va aumentando en forma lineal. Este comportamiento lineal, resulta en concordancia con el hecho de haber identificado que la distancia entre modos temporales corresponde al tiempo de recorrido de la cavidad de cada uno de los fotones generados.

El hecho de que a longitudes pequeñas del cristal se observe un mayor error numérico en el comportamiento lineal se debe a que a estas longitudes los modos temporales se acercan de tal forma que van perdiendo definición, tal como lo muestra la figura 3.4 donde se observa claramente que al disminuir la longitud del cristal la distancia temporal entre modos disminuye;

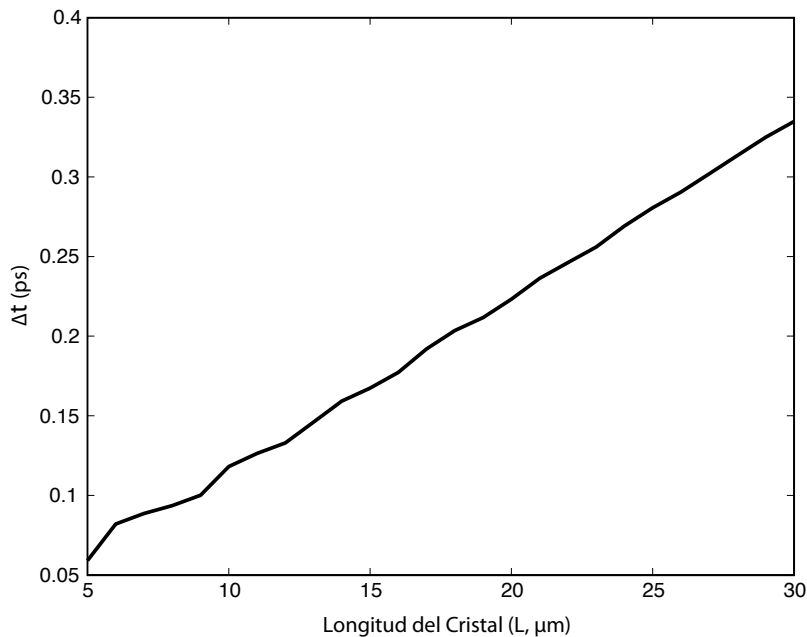


Figura 3.3: Distancia entre modos temporales, como función de la longitud del cristal ( $L$ ) a  $R=0.7$  fija.

sin embargo el ancho de cada modo se mantiene constante.

La expresión analítica del tiempo que le lleva recorrer a un fotón la cavidad de un espejo al siguiente espejo 2, está dada por

$$T_{\mu} = \frac{2}{c}(L - l) + 2lk'_{\mu}, \quad (3.7)$$

donde  $k'_{\mu}$  representa la primera derivada del vector de onda respecto a la frecuencia y está definida como:

$$k'_{\mu} = \frac{dk_{\mu}}{d\omega_{\mu}}. \quad (3.8)$$

Podemos compararla con los resultados obtenidos de la figura 3.3. Para esto recordemos que  $k(\omega_{\mu}) = \omega_{\mu}n(\omega_{\mu})/c$ , donde la función  $n(\omega)$  está determinada por la expansión de Sellmeier correspondiente, y como ya se mencionó en el capítulo anterior es necesario considerarla constante a la frecuencia correspondiente a una longitud de onda de  $800nm$  que para nuestro cristal el

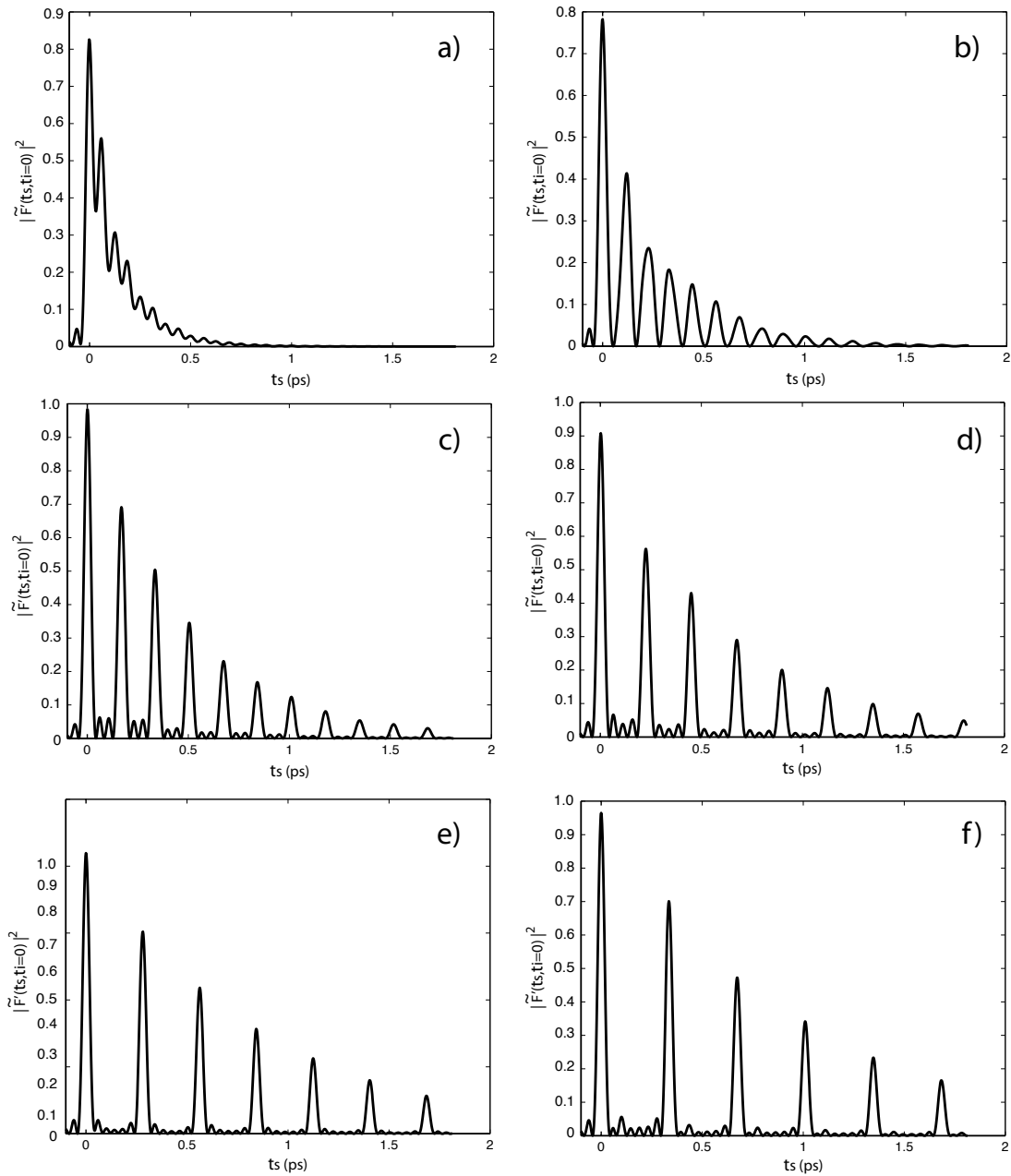


Figura 3.4: Secuencia de cortes de la intensidad temporal conjunta (JTI) al tiempo  $t_i = 0$  y  $R=0.7$  para diferentes longitudes del cristal. a)  $L=5\mu m$ , b)  $L=10\mu m$ , c)  $L=15\mu m$ , d)  $L=20\mu m$ , e)  $L=25\mu m$ , e)  $L=30\mu m$



índice de refracción es de 1.66055.

De esta forma podemos evaluar  $k'_\mu$  para poder encontrar el tiempo que le lleva a un fotón recorrer la cavidad óptica. Haciendo el cálculo analítico, considerando que  $L = l$  (la longitud de la cavidad y del cristal es la misma) y graficando en función de  $L$  obtenemos la figura 3.5, donde sobrepuesto se observa la gráfica obtenida numéricamente para la distancias entre modos como función de  $L$ .

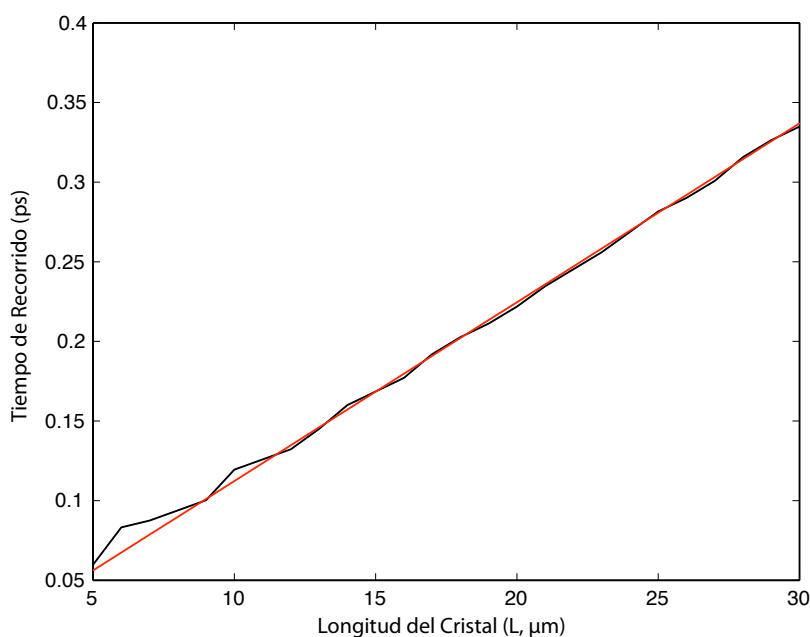


Figura 3.5: Gráfica de  $T_\mu$  en función de  $L$  (línea recta sin defectos). Sobrepuesta podemos observar la gráfica de la figura 3.3, mostrando que la distancia entre modos temporales corresponde al tiempo que le lleva a un fotón recorrer la cavidad no lineal dos veces.

Podemos observar en la figura 3.5 que la línea recta representa el comportamiento lineal de  $T_\mu$  (es el mismo comportamiento tanto para el fotón señal como el acompañante) respecto a  $L$ , este comportamiento era de esperarse de la Ec. (3.7); sin embargo para corroborar si la distancia entre modos temporales calculada numéricamente corresponde al tiempo que le lleva a un fotón recorrer la cavidad dos veces sobreponemos a esta gráfica la figura 3.3. Se puede observar que las dos curvas muestran excelente concordancia excepto a longitudes del cristal pequeñas donde el error numérico afecta esta concordancia.

### 3.1.3 Dependencia del ancho del modo temporal respecto al ancho de banda del haz de bombeo.

Como ya se mencionó en la sección anterior, el ancho del modo temporal no se ve modificado al variar la longitud del cristal o la reflectividad del espejo 2. Sin embargo, mediante un análisis numérico se muestra que dicho ancho sí depende del ancho de banda del haz de bombeo; es decir, midiendo numéricamente el ancho del modo temporal como función del ancho de banda espectral del haz de bombeo se encuentra la figura 3.6. En dicha figura se observa que al aumentar el ancho de banda del haz de bombeo el ancho del modo temporal disminuye, este comportamiento indica que esencialmente el ancho del modo temporal está determinado por la duración temporal de los pulsos de bombeo.

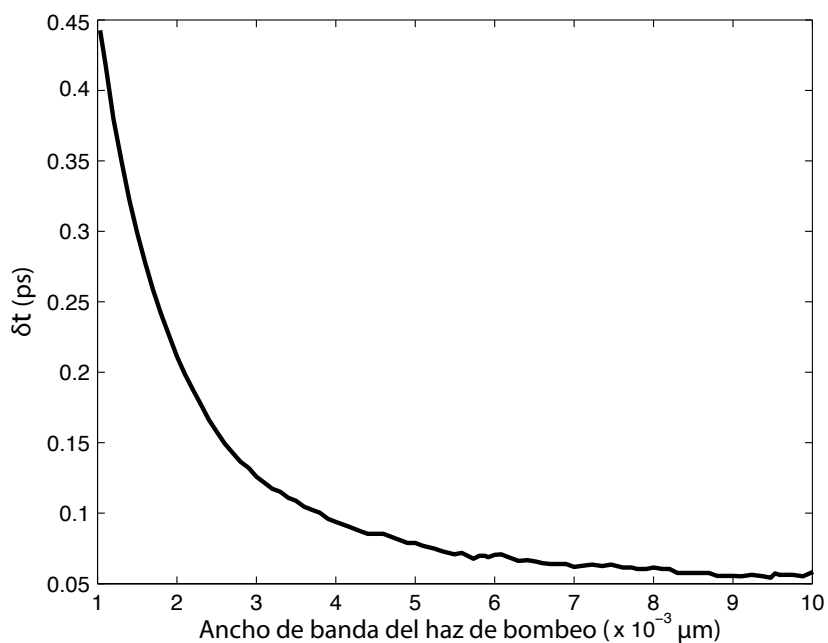


Figura 3.6: Ancho del modo temporal ( $\delta t$ ) en función del ancho de banda del haz de bombeo ( $L = 10 \mu\text{m}$  y  $R = 0.7$ )

## 3.2 Variables “Rotadas”: $t_+$ y $t_-$

Para poder llevar a cabo un análisis más detallado del comportamiento en el espacio temporal de la JTI es conveniente hacer un cambio de variables, donde introducimos  $t_- = t_s - t_i$ . La nueva variable  $t_-$  corresponde a la diferencia de tiempos de emergencia entre los fotones señal y acompañante de la cavidad. Esta variable representa un nuevo eje coordenado de un sistema definido por los ejes  $\{t_+, t_-\}$  con  $t_+ = t_s + t_i$  que da lugar a un nuevo sistema cartesiano que se encuentra girado  $45^\circ$  con respecto a los ejes  $t_s$  y  $t_i$ , además de que sufre una dilatación de un factor de  $\sqrt{2}$ .

Para estudiar el comportamiento de la JTI en función de las variables  $t_+$  y  $t_-$  es necesario primero definir la JSI en las variables espectrales rotadas  $\omega_+ = \omega_s + \omega_i$  y  $\omega_- = \omega_s - \omega_i$ , tal que

$$\mathcal{F}_R(\omega_+, \omega_-) = \mathcal{F}\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2}, \frac{\omega_+ - \omega_-}{2}\right). \quad (3.9)$$

Por lo tanto, la JTI en variables temporales rotadas queda dada por la función  $|\tilde{\mathcal{F}}_R(t_+, t_-)|^2$  que corresponde al módulo cuadrado de la transformada de Fourier (evaluado numéricamente) de la función  $\mathcal{F}_R(\omega_s, \omega_i)$ . La figura 3.7 muestra una gráfica de JTI rotada.

### 3.2.1 Distribución Marginal Temporal

La importancia de introducir las variables rotadas es el significado físico que nos provee la variable  $t_- = t_s - t_i$  que ya se mencionó. Sin embargo, es posible lograr un mayor entendimiento de la cavidad óptica no lineal si calculamos la distribución Marginal Temporal en función de  $t_-$ , que está definida como

$$g(t_-) = \int dt_+ |\tilde{\mathcal{F}}_R(t_+, t_-)|^2, \quad (3.10)$$

es decir, la distribución de dos variables  $|\tilde{\mathcal{F}}_R(t_+, t_-)|^2$  sobre  $t_+$ . Esta función representa la distribución de diferencias de tiempos de emisión entre los fotones señal y acompañante.

Calculando numéricamente la función Marginal Temporal  $g(t_-)$  obtenemos un comportamiento como lo muestra la figura 3.8. La estructura resultante de picos significa que salvo la incertidumbre asociada con el ancho de cada pico, los fotones señal y acompañante emergen

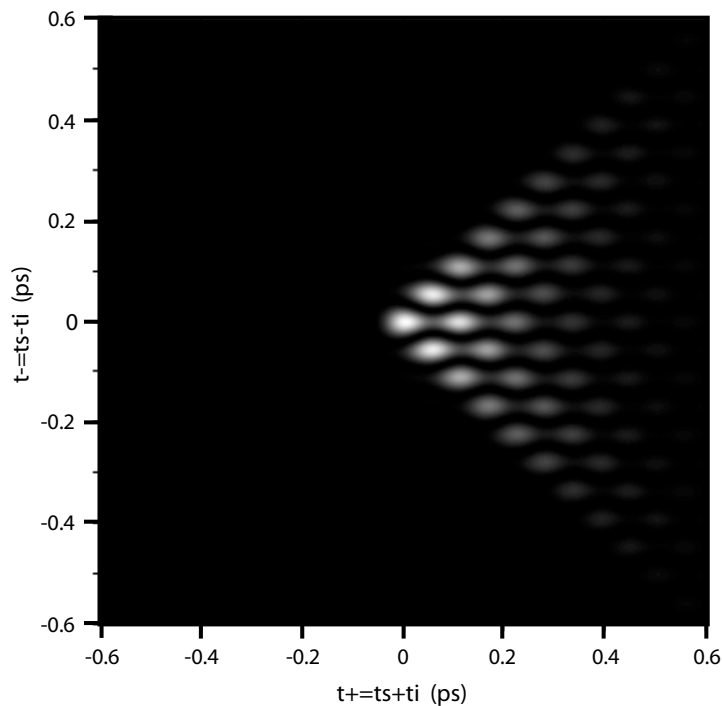


Figura 3.7: Intensidad temporal conjunta en el espacio  $\{t_+, t_-\}$  ( $|\tilde{\mathcal{F}}(t_+, t_-)|^2$ ) para  $R=0.7$  y  $L=10 \mu m$ .

de la cavidad con una diferencia de tiempos que es un múltiplo entero del tiempo de recorrido de la cavidad. Así, el pico  $n$  (ver etiqueta de cada pico) significa que el fotón señal emerge de la cavidad  $n$  tiempos de recorrido de la cavidad después del fotón acompañante. Este comportamiento es compatible con nuestra intuición: cada vez que los fotones arriban a un espejo 2, muestran una probabilidad de ser transmitidos, lo cual resulta en un pico en la distribución de diferencias de tiempos de emisión. Por lo tanto, en el caso del pico “0” es la probabilidad de que la pareja de fotones salga simultáneamente; el ancho de dicho pico es la incertidumbre asociada.

Además, la envolvente que define las alturas de los picos arroja información sobre el tiempo de vida de los fotones en la cavidad. Como se verá en las siguientes secciones, a mayor finesa, el ancho de tal envolvente es mayor indicando que los fotones permanecen un mayor tiempo en la cavidad. Resulta entonces de interés caracterizar el comportamiento de la distribución de diferencias de tiempos de emisión como función de la reflectividad del espejo 2 y de la longitud

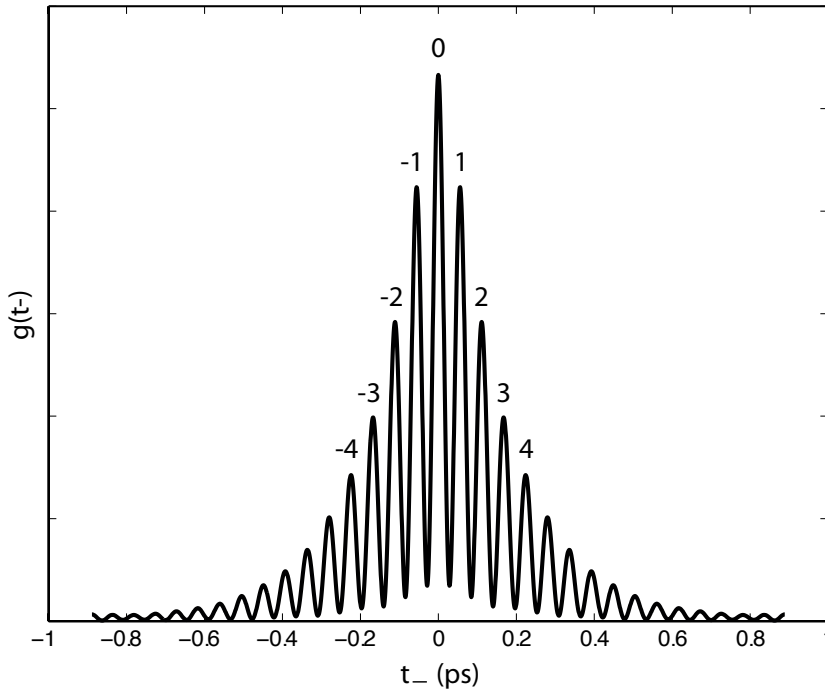


Figura 3.8: Marginal Temporal para  $t_-$  para  $R=0.7$  y  $L=10 \mu m$ .

del cristal. Para esto, se realizó un análisis numérico que presentamos a continuación.

En función de la reflectividad del espejo 2, se encuentra que el ancho del modo temporal (definido como el ancho completo a la mitad de la altura) como la separación entre modos temporales adyacentes es constante; para una longitud del cristal fija de  $10 \mu m$  y un ancho de banda del haz de bombeo de  $5 nm$  el ancho del modo temporal tiene un valor constante de  $0.036 ps$ ; y la distancia entre modos temporales queda constante en un valor de  $0.056 ps$ . Sin embargo, como se mostró numéricamente en la sección 3.1.3, el ancho del modo temporal en términos de  $t_s$  y  $t_i$  variaba al cambiar el ancho de banda del haz de bombeo, por lo tanto, se espera un comportamiento similar para el ancho temporal del modo y la distancia temporal entre modos de la función marginal.

Para la dependencia en  $L$ , es necesario observar las gráficas 3.9 y 3.10, que fueron obtenidas mediante un análisis numérico, para poder entender mejor cómo se comporta la función marginal. El ancho de los modos temporales de la función marginal se mantiene constante conforme aumentamos  $L$  a partir aproximadamente de  $10 \mu m$  (figura 3.9(b)); sin embargo para algunos

valores de la longitud del cristal menores de  $10\mu m$  se observa que el ancho de la isla temporal aumenta considerablemente (figura 3.9(a)). Un comportamiento similar se puede observar en la figura 3.10, la distancia entre modos temporales aumenta linealmente conforme la longitud del cristal aumenta para longitudes mayores de  $10\mu m$  (figura 3.10(b)); este comportamiento era de esperarse, pues al aumentar la longitud del cristal mayor tiempo le tomará a un fotón recorrer la cavidad y por ende aumentará la diferencia en los tiempos de emisión de la pareja de fotones. Sin embargo, para ciertos intervalos de longitud de cristal (menores a  $\sim 10\mu m$ ) la distancia temporal entre modos se vuelve indefinida ya que como veremos dentro de este intervalo el comportamiento cambia apreciablemente.

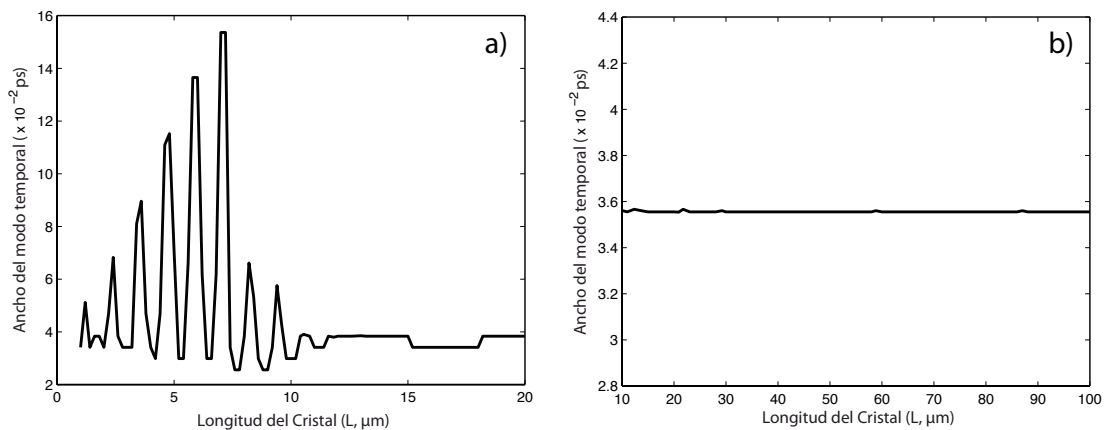


Figura 3.9: Ancho del modo central temporal de la función Marginal Temporal  $g(t_-)$  como función de la longitud del cristal ( $L$ ) a una reflectividad fija de  $R = 0.7$

Para obtener mejor entendimiento físico respecto a qué sucede cuando las longitudes del cristal son menores que  $10\mu m$  y sobre el significado físico de este valor umbral, recurriremos a un modelo muy simple donde se modela la amplitud del paquete de ondas fotónico (para cada uno de los dos fotones) con un perfil rectangular con un ancho espacial  $\delta x$  que incide en una cavidad de longitud  $\Delta x$ . La cavidad significa que salvo una atenuación progresiva, la salida de la cavidad quedará constituida por un tren de paquetes de onda, cada uno con ancho  $\delta x$ , separados entre sí por una distancia  $\Delta x$ . De este forma es posible modelar la distribución en las diferencias de los tiempos de emisión de nuestra pareja de fotones al comparar  $\delta_x$  y  $\Delta_x$ .

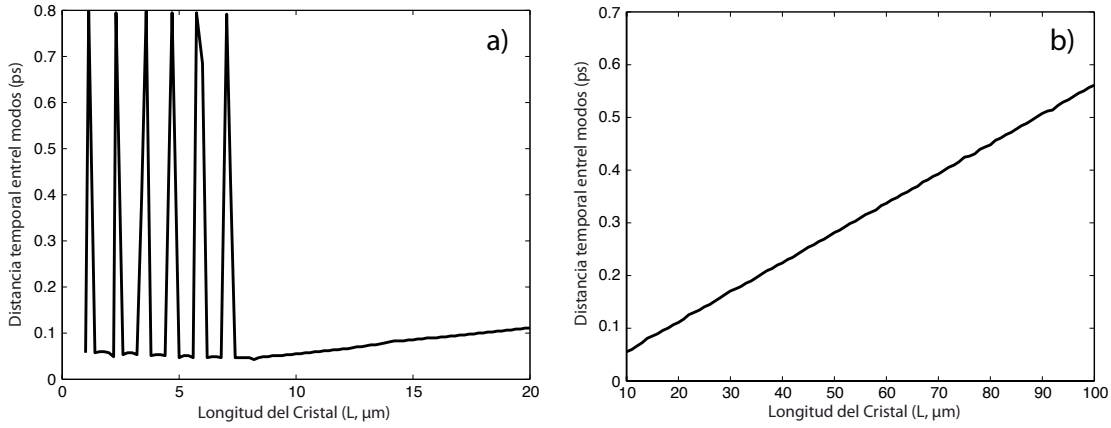


Figura 3.10: Distancia entre modos temporales de la función Marginal Temporal  $g(t_-)$  como función de la longitud del cristal ( $L$ ) a una reflectividad fija de  $R = 0.7$

Consideremos entonces la variable  $h$ , que definiremos como

$$h = \frac{\Delta x}{\delta x}, \quad (3.11)$$

es decir,  $h$  compara el ancho de banda del paquete de ondas con la longitud de la cavidad; si  $h > 1$  se tiene que ancho de cada paquete de ondas es mayor que la longitud del cristal y si  $h < 1$ , lo converso; cuando  $h = 1$  tanto el ancho de banda y la longitud de la cavidad son iguales. Las gráficas en la figura 3.11 muestran cómo es la distribución de las diferencias de tiempos de emisión para diferentes valores de  $h$  utilizando como base este modelo sencillo. Podemos observar que cuando  $h > 1$  se tiene una distribución que presenta modos bien definidos; sin embargo, cuando  $h = 1$  los modos se desvanecen convirtiéndose en un solo modo. En términos físicos, cuando  $h = 1$  cada paquete de ondas tiene la misma longitud que la cavidad, por ende, al ser transmitidos se eliminará el carácter pulsado de la amplitud de emisión resultante. Es decir, las amplitudes correspondientes a cada transmisión se juntarán en un continuo. Si la longitud de la cavidad es mayor que la longitud del paquete de ondas se forman “huecos” entre cada región de emisión, resultando en una distribución con modos bien definidos.

Se observa en la figura que las distribuciones carentes de modos bien definidos no sólo ocurren cuando  $h = 1$ , sino también cuando  $h$  es de la forma  $h = 1/n$  donde  $n$  es un número

entero; si  $h$  es menor que 1 pero no tiene esta forma la distribución de modos bien definidos se vuelve a hacer presente, lo cual coincide nuevamente con nuestra intuición física. Nótese que esto significa que a partir de una medición de la respuesta temporal de la cavidad podemos inferir la duración (o la longitud física de los paquetes de onda) unifotónicos en las parejas de fotones.

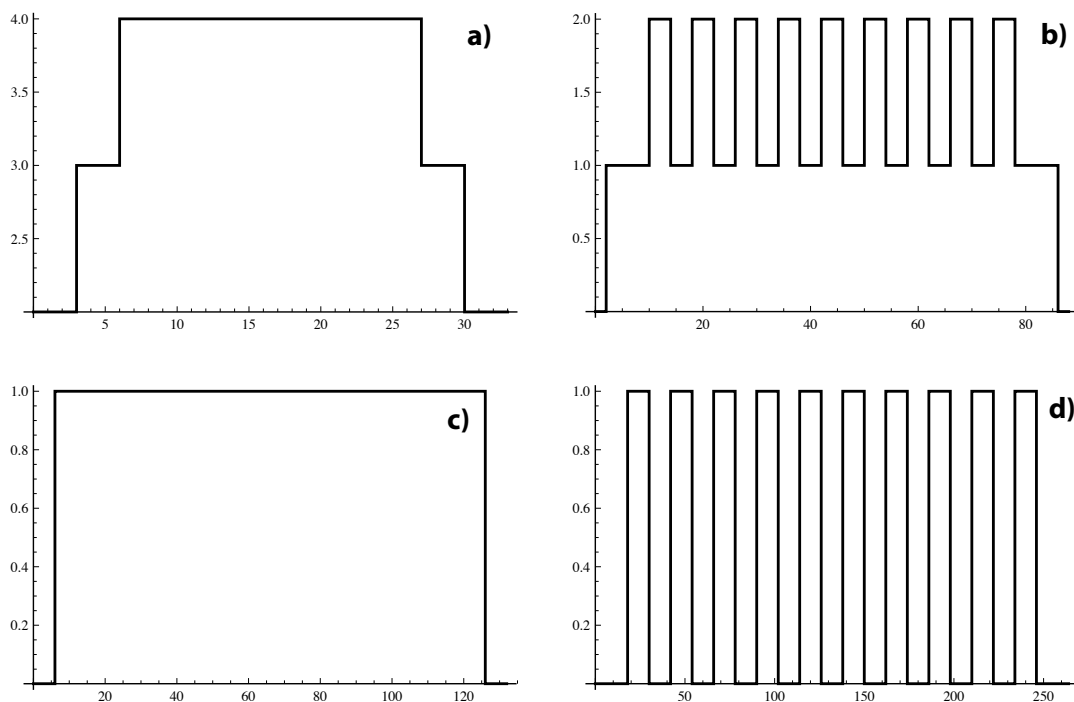


Figura 3.11: Modelo que ilustra el comportamiento de la distribución de los modos temporales en función de la variable  $h$ . (a)  $h = 1/4$ , (b)  $h = 2/3$ , (c)  $h = 1$ , (d)  $h = 2$ .

Por lo tanto, en base a este modelo simple es posible entender de forma similar qué sucede con la distribución marginal temporal si la longitud del cristal disminuye más de  $12\mu m$ . Calculando numéricamente el ancho de banda espacial del haz de bombeo se encuentra que es aproximadamente de  $12\mu m$ ; por lo tanto, si nuestra cavidad tiene una longitud de  $6\mu m$  como los fotones generados tienen que recorrerla dos veces para poder ser transmitidos la longitud efectiva es del doble, es decir,  $12\mu m$ , razón por la cual la figuras 3.9 y 3.10 presentan un pico a  $6\mu m$  pues la distribución pierde su caracter pulsado el ancho del modo temporal central



aumenta considerablemente, y dado que no aparecen más modos, la distancia entre modos se dispara a infinito (numéricamente queda acotado). Como ejemplo a este comportamiento se presenta la figura 3.12, donde se observa que para ciertas longitudes del cristal la distribución en forma de modos bien definidos se desvanece en un solo modo.

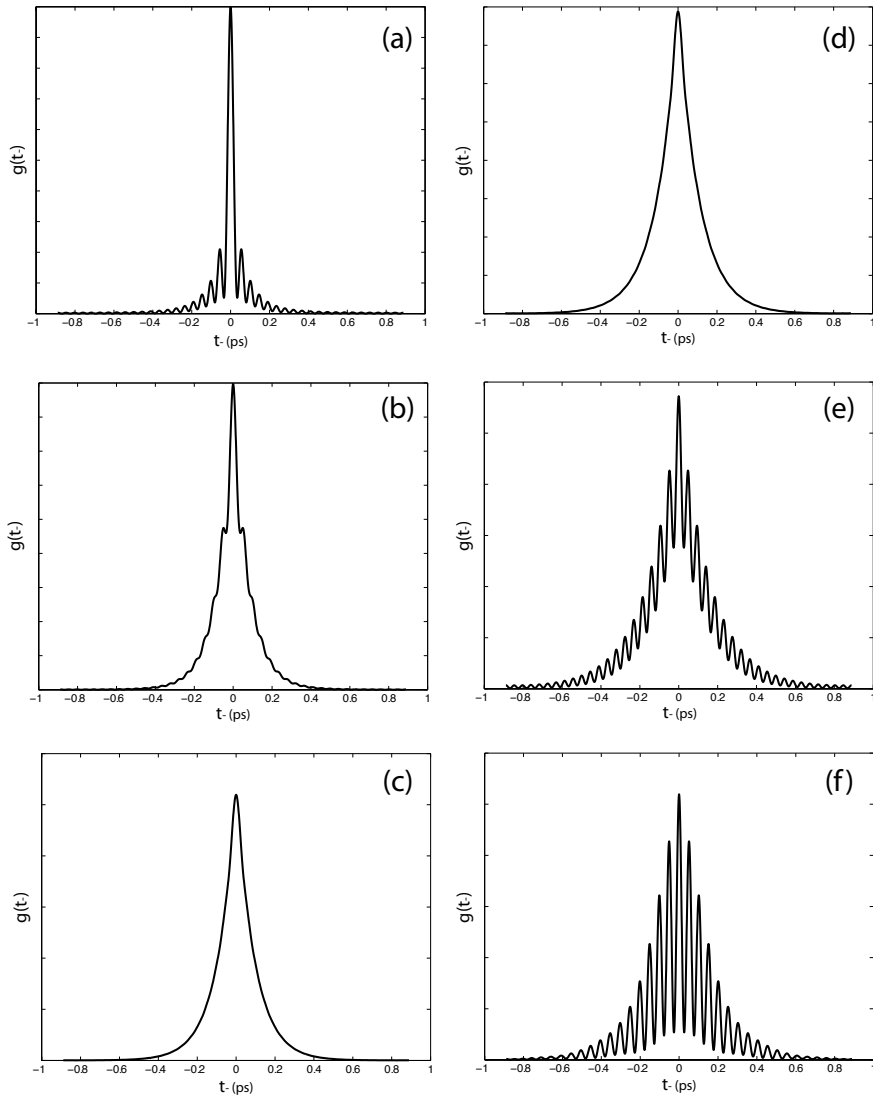


Figura 3.12: Función Marginal Temporal con dependencia en  $t_-$  para  $R=0.7$  fija con (a)  $L=4\mu m$ , (b)  $L=5\mu m$ , (c)  $L=6\mu m$ , (d)  $L=7\mu m$ , (e)  $L=8\mu m$ , (f)  $L=9\mu m$

### 3.2.2 Tiempo de Correlación

La función marginal queda descrita por una función envolvente, la cual define las alturas de los picos. El ancho de la función envolvente arroja información sobre el grado de simultaneidad de la pareja de fotones. Mientras menor sea el ancho, mayor es el grado de simultaneidad.

Como hemos visto, al incrementar la finesa de la cavidad (es decir, al aumentar la reflectividad del los espejos), se puede reducir de forma importante el ancho de banda de emisión para las parejas de fotones. Sin embargo, como veremos, el costo de la reducción del ancho de banda es una reducción importante en el grado de simultaneidad.

De igual forma que en las secciones anteriores, se puede calcular de forma numérica la dependencia del ancho de la envolvente como función de  $L$  y de  $R$ .

La figura 3.13 nos muestra la dependencia del ancho de la envolvente (tiempo de correlación) como función de  $R$ , el cual crece al aumentar  $R$ ; sin embargo, al variar la reflectividad para el caso particular considerado aquí, el ancho temporal de los modos y la distancia temporal entre modos se mantiene constante esencialmente, lo que supondría que el ancho de la envolvente se mantuviera constante de igual forma. La razón por la cual aumenta el tiempo de correlación se debe al hecho de que los modos que forman la marginal temporal van creciendo en intensidad al aumentar  $R$ , provocando así un ensanchamiento del ancho de la envolvente, que es decir, un aumento en el tiempo de correlación.

En esta misma figura, se muestra la curva del ancho de banda espectral ( $\delta\omega$ ) contra  $R$ ; se puede observar que si queremos obtener parejas de fotones con un ancho de banda pequeño (lo cual requiere aumentar  $R$ ) conlleva a aumentar el tiempo de correlación. Podemos considerar este aumento en el tiempo de correlación con un precio que pagamos por reducir el ancho de banda de bombeo. Podemos decir que en el caso límite de emisión monocromática se pierde el carácter de parejas de fotones, pues el tiempo de correlación, el cual define el grado de simultaneidad, diverge.

El tiempo de correlación aumenta también si la longitud del cristal crece, sólo que ahora lo hace linealmente (figura 3.14) para valores mayores a  $\sim 10\mu m$ . Sin embargo el tiempo de correlación se ve afectado a ciertas longitudes menores de  $10\mu m$ , donde se observa de nueva

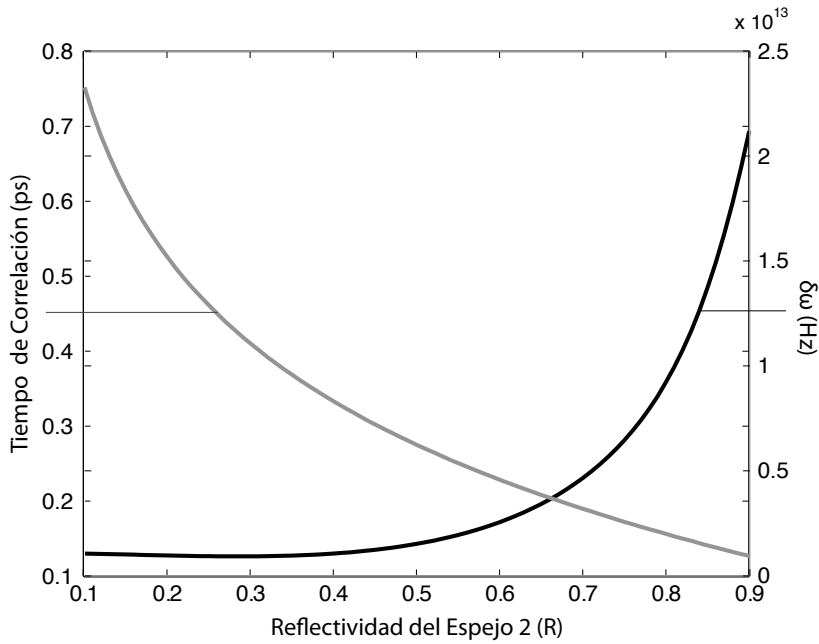


Figura 3.13: Ancho de la función envolvente de la marginal temporal como función de  $R$ , a una longitud del cristal fija de  $L = 10 \mu m$ . Encimada (en un color más oscuro) se encuentra el ancho de banda espectral como función de  $R$ .

cuenta que el tiempo de correlación aumenta considerablemente. Esto se debe por la misma razón que se vió en la sección anterior, donde a ciertas longitudes la distribución se desvanece en un solo modo, por lo que de la forma como se calculó numéricamente el ancho de la función envolvente éste aumenta al tener sólo un modo y no una serie de modos bien definidos.

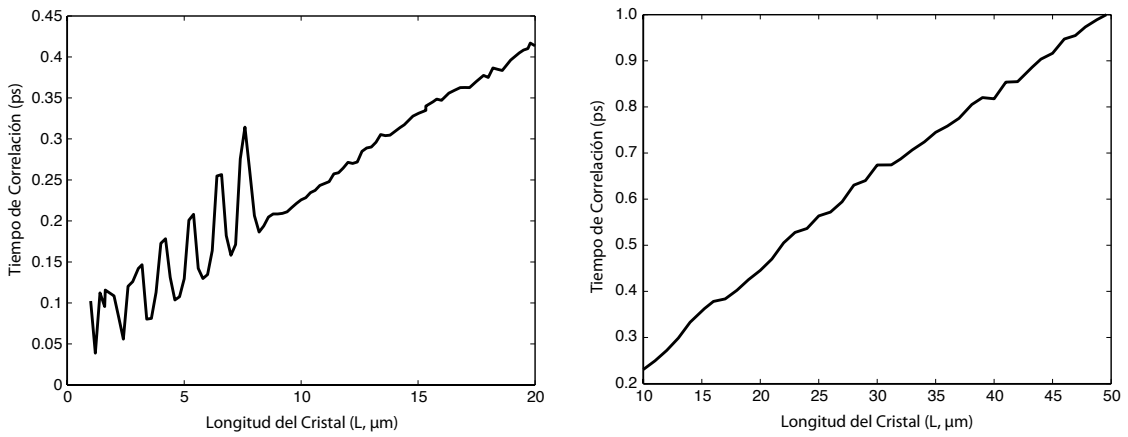


Figura 3.14: Ancho de la función envolvente de la marginal temporal como función de  $L$ , a una reflectividad fija de  $R = 0.7$

## Capítulo 4

# Aplicaciones de PDC en Cavidades con Resonancia Sencilla

En los capítulos anteriores se ha explicado la física detrás de la generación de parejas de fotones correlacionadas mediante PDC en una cavidad óptica con resonancia sencilla; así mismo se presentó un estudio en los dominios espectral y temporal del efecto de la cavidad sobre las características de emisión de las parejas de fotones. En este capítulo se ilustrará brevemente las ventajas de la utilización de una cavidad óptica no lineal para aplicaciones de interfases átomos-fotones.

Consideremos como ejemplo particular las transiciones ópticas en el  $^{40}\text{Ca}$ ,  $D_{3/2} - P_{3/2}$  y  $D_{5/2} - P_{3/2}$ , que están centradas a 894.8 y 852.2 nm respectivamente y que tienen un ancho de banda de 22 MHz. [15] Para poder obtener un acoplamiento eficiente entre los fotones y el átomo, es necesario conseguir que alguno de los dos fotones (señal o acompañante) tenga la longitud de onda de la transición.

En los estudios numéricos que presentamos como ejemplo, ambos fotones son emitidos a una longitud de onda central de 800 nm, sin embargo podemos ajustar los parámetros experimentales para obtener emisión a una cierta frecuencia deseada específica. Al estar la fuente PDC dentro de una cavidad óptica, como se discutió en el Capítulo 2, la presencia de la cavidad óptica redistribuye las frecuencias emitidas en diversos modos de salida lo cual permite acondicionar a

que alguno (o los dos fotones) tenga la frecuencia deseada correspondiente a la longitud de onda de la transición óptica del  $^{40}\text{Ca}$ , esto mediante la fase  $\theta_r$  (Ec. 2.29) que se puede imprimir a los fotones. Notemos que al usar espejos dieléctricos constituidos por múltiples capas delgadas, es posible especificar la fase resultante al diseñar los espesores de las capas. Es decir, la función de Airy (Ec. 2.34) alcanza su máximo cuando la fase total  $\Theta_r$  dada por la Ec. (2.30) se hace cero o un múltiplo entero de  $2\pi$ , de tal forma que la curva de la función de Airy se puede trasladar de forma que su máximo ocurra en otra frecuencia al hacer variar la fase  $\theta_r$ .

Como receta de diseño, se sugirió en el capítulo 2:

1. Elegir  $L$  a través de la separación espectral entre modos deseada (Ec. 2.39). Hemos utilizado como criterio de diseño que la separación entre modos espectrales no sea menor que cierto umbral, considerando aquí como el límite de lo factible a un nivel experimental.
2. Elegir  $R$  y por lo tanto la finesa de la cavidad, de acuerdo al ancho de banda o grado de monocromaticidad, deseada.

Para diseñar la fuente utilizamos los siguientes pasos:

1. Se elige la frecuencia central del fotón señal para que coincida con la frecuencia de la transición atómica deseada,  $\omega_{s0} = \omega_c$ , en este caso esta frecuencia corresponde a  $\lambda_c = 852.2 \text{ nm}$ .
2. Se elige la frecuencia central del bombeo  $\omega_p$ , en este caso se toma  $\omega_p$  correspondiente a  $\lambda_p = 400\text{nm}$ .
3. Se elige la frecuencia central del fotón acompañante de acuerdo a la conservación de energía,  $\omega_i = \omega_p - \omega_s$
4. Una vez contando con las tres frecuencias centrales, se calcula el ángulo de corte del cristal no lineal de modo que  $\Delta k = k_p(\omega_{p0}) - k_s(\omega_{s0}) - k_i(\omega_{i0}) = 0$ . En este caso el ángulo de corte es de  $\theta_c = 29.1278^\circ$  (en contraste, para el caso de emisión centrada en 800 nm, este ángulo es de  $\theta_c = 29.1781^\circ$ ).

5. Se elige la longitud de la cavidad, y por lo tanto del cristal, al especificar que la separación espectral entre modos sea mayor al umbral considerado, en este caso 3 nm (Ec. 2.39). En nuestro caso la longitud obtenida es  $65 \mu\text{m}$  (figura 4.1).

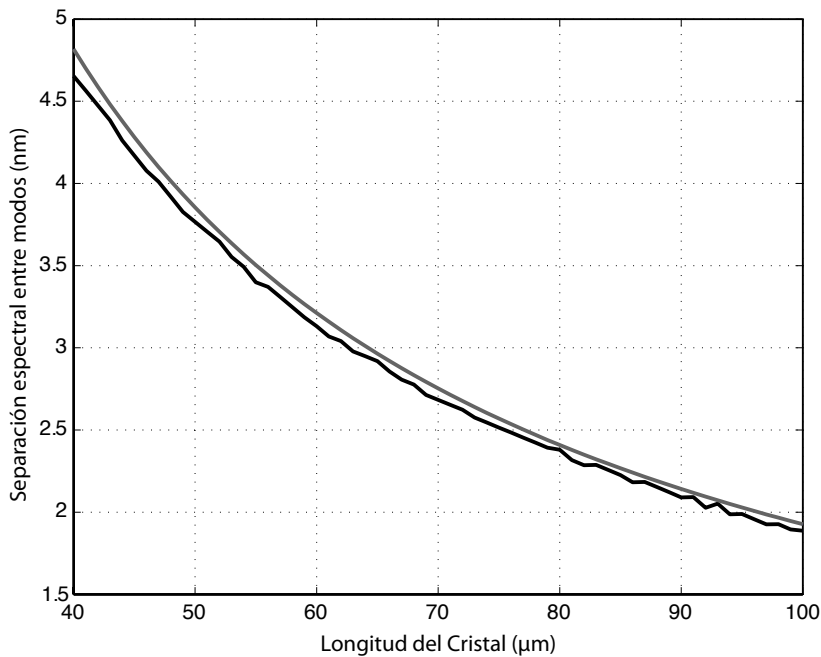


Figura 4.1: Rango espectral libre de la pareja de fotones en función de la longitud del cristal ( $L$ ). La curva desplazada hacia arriba corresponde a la expresión analítica y la de abajo al resultado obtenido calculando directamente la separación espectral entre modos. La longitud del cristal, definida para la cota en el ancho de banda de los filtros utilizados, corresponde a alrededor  $65 \mu\text{m}$ .

6. Se especifica la reflectividad del cristal (y por lo tanto la finesa) al requerir un ancho de banda de emisión (de cada modo) deseado. En nuestro caso, este ancho de banda deseado es de  $\sim 22 \text{ MHz}$ , lo cual implica  $R = 0.9999$  y  $F = 1.6 \times 10^9$  (figura 4.2). Como lo muestran trabajos recientes de Z. Y. Ou [20] y de M. Mitchell [21] es posible fabricar espejos que alcanzan reflectividades de este nivel.

La figura 4.3, muestra cómo queda el estado final de la pareja de fotones una vez hechas todas estas consideraciones, donde se puede observar que un modo espectral del fotón señal se iguala con la longitud de onda de la transición atómica en el  $^{40}\text{Ca}$  de  $0.8522 \mu\text{m}$ , lo cual

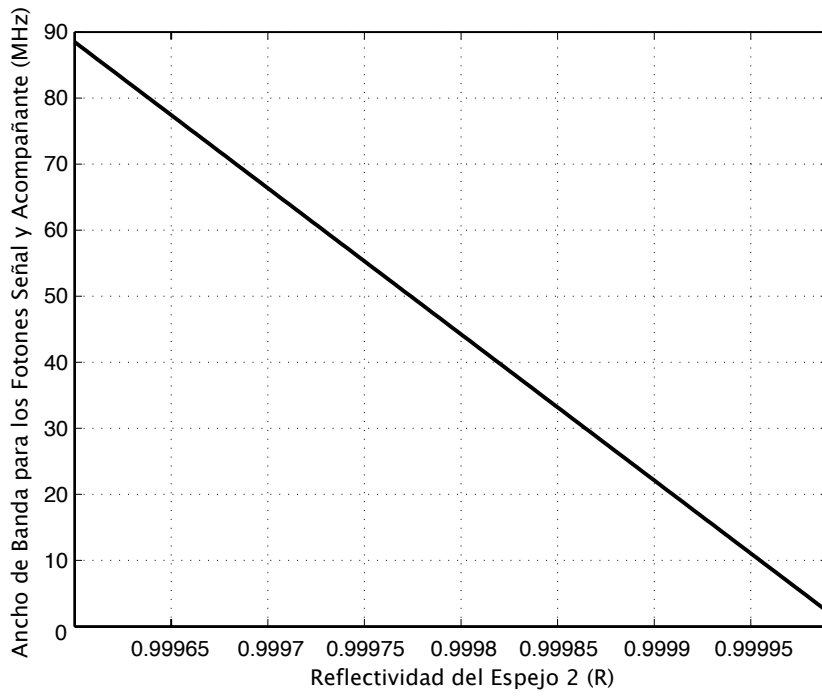


Figura 4.2: Ancho de banda del fotón señal en función de la reflectividad del espejo 2. Se observa que para que el ancho de banda del fotón señal sea de  $\sim 22$  MHz entonces  $R = 0.9999$ .

permitirá crear una interfaz entre fotones y átomos.



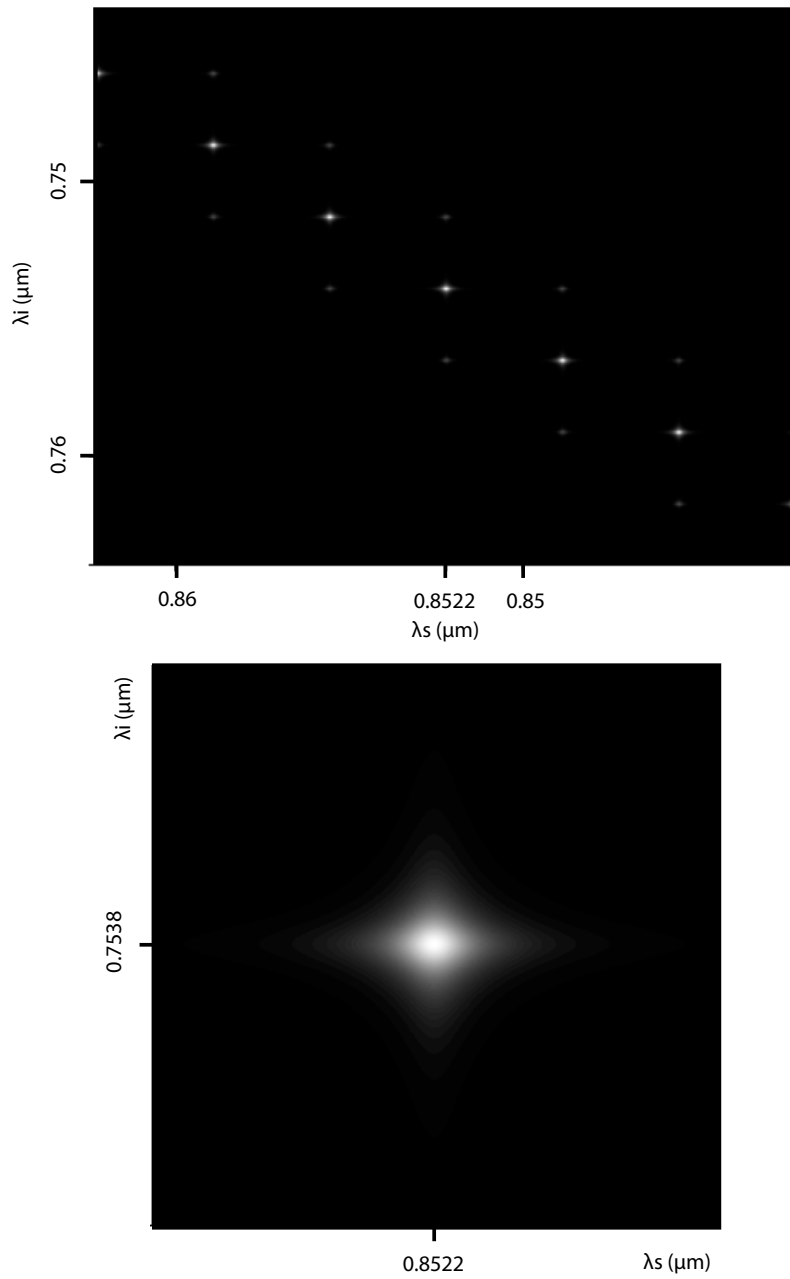


Figura 4.3: Modos emitidos por la cavidad a una longitud de  $L = 65 \mu\text{m}$ .

# Conclusiones

En el presente trabajo de tesis se estudió la creación de fotones entrelazados mediante conversión paramétrica descendente, para el caso particular de un cristal no lineal que se sitúa dentro de una cavidad óptica. Consideramos que la cavidad no es resonante para la frecuencia del haz de bombeo, es decir, éste sólo interactuará una vez con el cristal; a tal arreglo lo llamamos cavidad sencilla. Durante el desarrollo de esta tesis se estudió este sistema óptico logrando un entendimiento de las propiedades físicas de dicho sistema; en particular se optimizaron las propiedades espectrales de la pareja de fotones, obteniendo tanto para el fotón señal como para el fotón acompañante anchos de banda muy reducidos que, permiten una interacción eficaz con sistemas atómicos para lograr un interfaz entre fotones individuales y átomos individuales.

Considerar finesas altas para la cavidad óptica con el fin de mejorar las propiedades espectrales de la pareja de fotones conlleva repercusiones en las propiedades temporales. La repercusión más significativa es la reducción de simultaneidad en la emisión de la pareja de fotones; donde el tiempo de correlación crece al aumentar tanto la finesa de la cavidad como la longitud del cristal. Dependerá entonces del tipo de experimento que se realice si es que repercutirá el hecho de que la pareja de fotones no sea emitida simultáneamente.

A través de esta tesis se logró una caracterización de las propiedades espectrales y temporales de la pareja de fotones creados dentro de una cavidad óptica con resonancia sencilla. Sin embargo, al tener un solo paso del pulso de bombeo por una cavidad particularmente corta repercute en la disminución de la tasa de emisión. Para hacer frente a esta dificultad, nuestro enfoque contempla, por un lado, la utilización de un material altamente no lineal, sin embargo la eficiencia de producción de parejas de fotones es proporcional a la no linealidad y a la longitud

del cristal. Esto sugiere que al utilizar una cavidad doblemente resonante, es decir, donde se tiene una finesa considerable tanto para el bombeo como para la pareja de fotones, con un número de pasos considerables en la cavidad para el haz de bombeo, se podría recuperar la tasa de emisión de una fuente típica basada en un cristal sin cavidad, empero con un ancho de banda que puede ser órdenes de magnitud menor como ya se estudió.

Como se menciona en el título del presente trabajo de tesis, se busca optimizar las propiedades espectrales de la pareja de fotones con el fin de lograr la interacción entre sistemas fotónicos con sistemas atómicos. En el capítulo 4 se muestra cómo es posible optimizar dichas propiedades espectrales de la pareja de fotones mediante el uso de la cavidad óptica; es decir, generar fotones con la frecuencia de la transición atómica empatando al mismo tiempo el ancho de banda del fotón y de la transición; aumentando así la eficiencia en la interacción entre ambos sistemas.

# Bibliografía

- [1] J. I. Cirac and P. Zoller, *Quantum Computations with Cold Trapped Ions*, Phys. Rev. Lett. **74**, 4091 (1995)
- [2] A. K. Ekert, *Quantum Cryptography based on Bell's Theorem*, Phys. Rev. Lett. **67**, 661 (1991)
- [3] D. Boschi et al., *Experimental Realization of Teleporting an Unknown Pure Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolski-Rosen Channels* Phys. Rev. Lett. **80**, 1121 (1998)
- [4] A. Furusawa et al., *Unconditional Quantum Teleportation*, Science **282**, 706 (1998)
- [5] M. D. Lukin, M. Fleischhauer, M. O. Scully y V. L. Velichansky, *Quantum Memory for photons: Dark state polaritons*, Opt. Lett. **73**, 295 (1998)
- [6] F. König, E. J. Mason, F. N. C. Wong y M. A. Alberta, *Efficient and spectrally bright source of polarization-entangled photons*, Phys. Rev. A **71**, 033805 (2005)
- [7] A. Fedrizzi, T. Herbst, A. Poppe, T. Jennewein y A. Zeilinger, *A wavelength-tunable fiber-coupled source of narrowband entangled photons*, Opt. Express **15**, 15377 (2007)
- [8] A. D. Boozer, A. Boca, R. Miller, T. E. Northup y H. J. Kimble, *Design of a mode converter for efficient light-atom coupling in free space*, Phys. Rev. Lett. **98**, 193601 (2007)
- [9] B. Kraus and J. I. Cirac, *Discrete Entanglement Distribution with Squeezed Light*, Phys. Rev. Lett. **92**, 013602 (2004)
- [10] P. Hariharan y B. C. Sanders, *Cavity-enhanced parametric down-conversion as a source of correlated photons*, J. Mod. Opt. **47**, 1739–1744 (2000)

- 
- [11] J. S. Neergaard-Nielsen, B. M. Nielsen, H. Takahashi, A. I. Vistnes y E. S. Polzik, *High purity bright single photon source*, Opt. Express **15**, 7940-7949 (2007)
- [12] C. Monroe, *Quantum information processing with atoms and photons*, Nature **416**, 238-246 (2002)
- [13] A.B. U'Ren, C. Silberhorn, K. Banaszek y I. Walmsley, *Generation of pure single photon wavepackets by conditional preparation based on spontaneous parametric down conversion*, Phys. Lett. A. **15**, 1 (2004).
- [14] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Oxford Science Publications, 3<sup>a</sup> Edición, 393-404 (2006)
- [15] A. Haase, N. Piro, J. Eschner y M. W. Mitchell, *Tunable narrowband entangled photon pair source for resonant single-photon single-atom interaction* Opt. Lett. **34**, 55-57 (2009)
- [16] P.W. Milonni, H. Fearn y A. Zeilinger, *Theory of two-photon down-conversion in the presence of mirrors*, Phys. Rev. A **53**, 4556 (1996)
- [17] Y. Shih, *Entangled biphoton source – property and preparation*, Rep. Prog. Phys. **66**, 1009-1044 (2003)
- [18] N. Boeuf, D. Branning, I. Chaperot, E. Dauler, S. Guerin, G. Jaeger, A. Muller y A. Migdall, *Calculating Characteristics of Non-collinear Phase-matching in Uniaxial and Biaxial Crystals*, Opt. Eng. **39**, 1016 (2000)
- [19] G. Fowles, *Introduction to Modern Optics*, Dover Publications, 2<sup>a</sup> Edición, 86-95 (1989)
- [20] Z. Y. Ou, Y. J. Lu, *Cavity Enhanced Spontaneous Parametric Down-Conversion for the Prolongation of Correlation Time between Conjugate Photons*, Phys. Rev. Lett. **83**, 13 (1999).
- [21] F. Wolfgramm, X. Xing, A. Cere, A. Predojevic, A. Steinberg y M. Mitchell, *Bright filter-free source of indistinguishable photon pairs*, Opt. Express **16**, 18145-18151 (2008)