



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Modelo del Oscilador Salino

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
FÍSICA

PRESENTA:
Aline Hubard Escalera

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Carlos Málaga Iguñiz

2009





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del Jurado

1. Datos del alumno

Hubard

Escalera

Aline

55750446

Universidad Nacional Autonoma de México

Facultad de Ciencias Física

301697079

2. Datos del Tutor

Dr.

Carlos

Málaga

Iguñiz

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Ramón

Peralta

y Fabi

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Eduardo

Ramos

Mora

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Jorge Humberto

Arce

Rincón

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Arturo

Olvera

Chávez

7. Datos del trabajo escrito

Modelo del oscilador salino

123 p

2009

a mis padres y a mis hermanos.

Agradecimientos

Empezaré por darle las gracias a Carlos, por su tiempo y dedicación a este trabajo así como por ser un gran mentor e introducirme al mundo de la mecánica de fluidos. A Ramón le quiero agradecer no sólo por su revisión, comentarios y aportaciones a esta Tesis, como las que se encuentran en el Apéndice C si no sobre todo por ser un excelente guía y maestro a lo largo de mi camino por la física. A Humberto y a Hortensia por presentarnos el oscilador salino y compartirnos su entusiasmo por él, así como por el apoyo que me dieron en el arduo trabajo de esta tesis. A Arturo por su interés y el análisis de estabilidad dado en el Apéndice D y a Eduardo por sus comentarios sobre la Tesis y el futuro.

Muchísimas gracias a mis queridos padres por su amor y su apoyo incondicional. A Isabel por quererme y consentirme tanto, así como por regañarme por mi redacción y ayudarme a mejorarla. A Alfredo por ser como es y siempre estar dispuesto a escucharme y sacarme una sonrisa.

Al Paez por ayudarme a aclarar ideas, enseñarme a pensar y tener su puerta abierta. A la UNAM y la Facultad de Ciencias. Al Shanit y a Logos por todo lo que viví y aprendí.

A Adri, Iné, Tania, Pau y Luz por ser las mejores amigas que pudiera imaginar, a Daniel por tan buena amistad y compartirme su amor por la ciencia. A Juan y a Christo. A Dani, Aurora, Jime y Andrea por tantos años. A los de la fac Cheque, mi carnalito Charmilion,

Memito, Ale, Emi, Emilio, Pedro, Saul, Carlitos, Rodrigo, Sebastián y Daniela por recorrer este camino conmigo. A Mariana, Sara y a Julio por ser parte de mi familia. A Ale Mora por haber sido uno mismo y por ser habernos recuperado.

A Andrés por más que un primo ser un hermano, a los Escalera, a los Hubard y a los Vecinos.

*...estaba de malhumor,
pobre chorruto,
tenía calor.*

Índice general

1. Antecedentes	15
1.1. Primera descripción del oscilador	17
1.2. El trabajo de Yoshikawa	19
1.3. Perturbaciones del oscilador mediante pulsos	24
1.4. Otros trabajos sobre el oscilador salino	25
2. Marco Teórico	31
2.1. Leyes de conservación	32
2.1.1. Conservación de masa	32
2.1.2. La ecuación de movimiento	35
2.1.3. Conservación de energía	38
2.2. Ecuación y Balance de Entropía	40
2.2.1. Segunda Ley de la Termodinámica	40
2.2.2. Ecuación de Balance de Entropía	43
2.3. Ecuación de Gibbs-Duhem.	45
2.4. Relaciones Fenomenológicas	47
2.5. Ecuaciones de Navier-Stokes y de difusión	49
2.5.1. Ecuaciones de Navier-Stokes	49
2.5.2. La ecuación de difusión	50

3. Planteamiento del problema	53
3.1. Ecuación de bajada	56
3.2. Ecuación de subida	58
3.3. El término inercial	60
3.4. La presión en el chorro	64
3.5. El término viscoso	67
4. Resultados Numéricos	71
4.1. Adimensionalización	71
4.2. Primeros resultados.	73
4.3. Perturbación del sistema con un solo pulso y curva de reinicio de fases	81
4.4. Perturbación con un tren de pulsos	87
5. Conclusiones	95
A. Flujo potencial [8]	99
B. Difusión	109
C. Primera integral	117
D. Estabilidad de los puntos de equilibrio	119

Resumen

En esta tesis estudiaremos el oscilador salino, descrito por Martin en los años 70 [14]. El oscilador salino consta esencialmente de dos recipientes, el más pequeño con un orificio en su base, contiene agua y sal y está suspendido dentro del más grande que a su vez contiene agua destilada. Inicialmente el agua está al mismo nivel en los dos recipientes, debido a la diferencia de densidades el agua salada del recipiente más pequeño pasa al recipiente con agua dulce, formando un chorro. Después de cierto tiempo, el flujo se suspende y se origina un flujo ascendente de agua dulce que pasa al recipiente con agua salada, seguido a su vez de otro chorro de agua salada que baja hacia el agua dulce, y así sucesivamente. El periodo de estas oscilaciones casi no cambia durante horas, días o incluso semanas dependiendo de los parámetros experimentales, hasta que el sistema llega al equilibrio cuando las densidades del agua se igualan.

El oscilador salino es más que una curiosidad hidrodinámica, como lo bautizó Martin en un principio, dado que al ser un oscilador experimental no lineal lejos del equilibrio, nos ayuda a la comprensión de estos sistemas, pues es fácilmente reproducible y presenta muchos fenómenos característicos como un ciclo límite, bifurcación, cuasiperiodicidad, multiplicación del periodo y acoplamiento[3, 15, 16, 22, 25].

La motivación del estudio del oscilador salino se debe también a que es un buen imitador de sistemas biológicos y fisiológicos, como el del sentido del gusto, ritmos circadianos, sincroni-

zación de excitación neuronal y latidos de células cardiacas [18, 9, 24, 26].

Esta tesis se basa en resultados y observaciones experimentales reportados en la literatura y en los resultados de los experimentos realizados en los laboratorios de Biofísica de sistemas excitables y de Hidrodinámica de la Facultad de Ciencias de la UNAM, así como en el laboratorio de Reología del IIM , en la UNAM. En esta tesis intentamos hacer un modelo teórico del sistema para poder predecir los resultados del oscilador y comprender un poco más este oscilador no lineal.

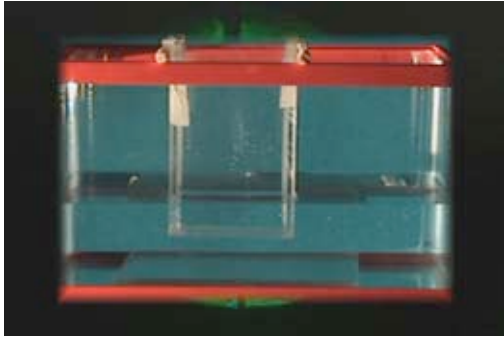
En los antecedentes de esta tesis hacemos una revisión bibliográfica de lo que se ha hecho y se sabe del oscilador. En el capítulo dos se da un repaso de la teoría que describe este sistema hidrodinámico. En el capítulo tres planteamos un modelo para el oscilador salino. En el modelo trabajamos con la ecuación de Navier-Stokes sobre dos líneas de corriente, a partir de lo cual llegamos a dos ecuaciones de tipo Bernoulli, una que utilizamos para modelar la dinámica del chorro de “subida” y la otra para modelar el chorro de “bajada”. En los capítulos cuatro y cinco, resolvemos las ecuaciones numéricamente, comparamos con los resultados experimentales y reportados en la bibliografía y concluimos la validez y relevancia de nuestro modelo.

Capítulo 1

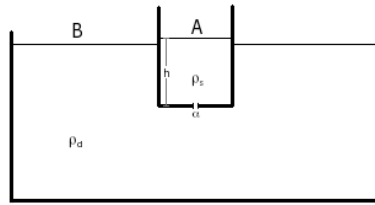
Antecedentes

El oscilador salino consiste en un sistema hidrodinámico que oscila debido a diferencias de densidades. El sistema a estudiar está compuesto por dos vasos o recipientes cilíndricos de vidrio, el interno de radio r , lleno de agua con sal con densidad ρ_s , sostenido dentro de otro recipiente cilíndrico de mayor profundidad de radio $R > r$, lleno de agua destilada con densidad ρ_d .

Inicialmente el nivel superior en los dos recipientes es el mismo, h_0 (figura 1.1). El recipiente interno con agua salada tiene un pequeño orificio en su base. Cuando se destapa el orificio, la evolución del sistema provoca un cambio $h(t)$ en los niveles. La diferencia de densidades, y por tanto de pesos, provoca que el agua salada empiece a bajar por el orificio dentro del agua dulce. Debido a la diferencia entre los índices de refracción del agua salada y la destilada, se observa un chorro que baja dentro del agua destilada (figura 1.2(a)). El tiempo de duración del primer chorro varía de minutos a horas dependiendo de las características de cada oscilador, como el tamaño de los recipientes, el área del orificio, la concentración de la sal y el nivel o altura inicial del agua salada. Después de cierto tiempo, el proceso se invierte y se observa ahora un chorro de agua destilada que sube hacia el agua salada (figura 1.2(b)), seguido de otro de agua salada que baja al agua destilada, y así sucesivamente. Es decir que el sistema oscila entre puntos de equilibrio mediante chorros de agua que suben y bajan. Una



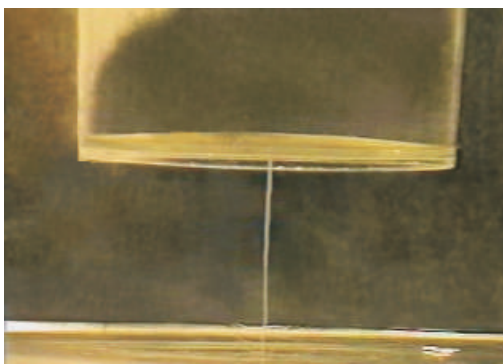
(a) Foto del oscilador salino del Laboratorio de Hidrodinámica de la Facultad de Ciencias de la UNAM.



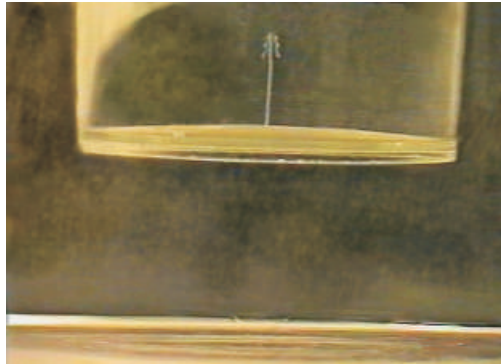
(b) Diagrama del oscilador.

Figura 1.1: Foto y esquema del oscilador salino.

vez que el oscilador está en marcha y estable, el periodo de las oscilaciones, que puede ser de algunos segundos o minutos, casi no cambia a lo largo de horas o días. La duración de cada oscilador depende de las dimensiones del sistema, pues el oscilador se detiene conforme las densidades del agua dentro de los recipientes se igualan.



(a) chorro de bajada.



(b) chorro de subida.

Figura 1.2: Fotos del oscilador del Laboratorio de Biofísica de sistemas excitables de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

1.1. Primera descripción del oscilador

En este capítulo hacemos una revisión de lo reportado por diversos autores sobre el oscilador, centrandó más la atención en los trabajos de Martin [14], Yoshikawa [24] y González et al. [3]. Martin fue el divulgador del fenómeno y el primero en trabajar con él. Yoshikawa es quien más ha trabajado en el oscilador y mejores resultados ha obtenido. Además, utilizaremos sus resultados y parámetros experimentales para evaluar y comparar nuestro modelo. González et al. describieron el comportamiento del oscilador ante perturbaciones, sus resultados nos servirán para poner a prueba nuestro modelo. Mencionaremos también trabajos de otros autores para facilitar la comprensión de todo el fenómeno, así como la motivación de este trabajo.

En 1970 Martin describe el oscilador salino como un oscilador auto excitado, desencadenado por una inestabilidad de Rayleigh-Taylor [14]. El equilibrio de un sistema donde el fluido de menor densidad se encuentra debajo del de mayor densidad es inestable, pues ante cualquier perturbación las fuerzas boyantes vencen a la tensión superficial. La inestabilidad de la interface entre los dos fluidos es la inestabilidad de Rayleigh-Taylor [7, 10].

Martin experimentó con una variedad de recipientes con agua salada, como jeringas, vasos con pipetas, latas con agujeros, etcétera, que al sumergirlos parcialmente en un recipiente con agua dulce presentan una serie de oscilaciones de amplitud finita. Estas oscilaciones están dadas primero por un chorro de agua salada que baja dentro del agua dulce, seguido de un chorro de agua dulce que sube dentro del agua salada.

Según Martin, el sistema oscila entre dos posiciones de equilibrio hidrostático. En la primera, la aguja de la jeringa, o pipeta, está llena de agua salada, y en la segunda, de agua sin sal. Sin embargo ambos equilibrios son inestables, pues cualquier intrusión de agua dulce o salada,

provoca un desplazamiento que crece inicialmente de manera exponencial hacia arriba o hacia abajo, hasta llegar al otro punto de equilibrio.

De acuerdo a lo que indica Martin en su artículo, el brinco entre estas dos posiciones de equilibrio se da debido a la inestabilidad convectiva de Rayleigh-Taylor. Utiliza un resultado de Taylor, que dice que un tubo vertical que contiene una solución salina cuya densidad aumenta con la altura es convectivamente inestable si el número de Rayleigh salino es mayor a 67.94. En sus experimentos Martin encontró que para el oscilador salino el número de Rayleigh era del orden de 10^5 . De esta forma, el sistema es altamente inestable desde el punto de vista convectivo. Argumenta que esta inestabilidad es la que saca al sistema de equilibrio, provocando las oscilaciones. Sin embargo, conforme avanza el tiempo pasan más ciclos u oscilaciones, con lo que la diferencia de densidades va disminuyendo hasta dejar de dominar la inestabilidad de Rayleigh. Así pasa de un número de Rayleigh supercrítico a uno crítico, originando la formación de dos chorros simultáneos en la aguja, uno que sube y otro que baja. Después de un mayor tiempo el número de Rayleigh se vuelve subcrítico, la convección se detiene y el sistema llega a un equilibrio estable.

Para analizar el flujo en el oscilador, lo divide en dos partes. Primero el caso en el que sólo hay un flujo hacia arriba o uno hacia abajo, de modo semejante al que procederemos en este trabajo. Y luego, en el que existen los dos flujos a la vez, el cual no estudiaremos en esta tesis.

Debido a que las longitudes de las agujas son mucho mayores que los radios de estas, utiliza el perfil de velocidades de un flujo de Hagen-Poiseuille que depende del tiempo para encontrar las ecuaciones que gobiernan los flujos. El flujo de Hagen-Poiseuille es el flujo en un tubo largo con sección transversal circular constante, provocado por la acción de una diferencia de presiones impuesta en los extremos del tubo (que en este caso depende del tiempo). De for-

ma que se supone que tanto el flujo como las condiciones a la frontera tienen simetría axial [4].

A partir de argumentos de balance de momento e incluyendo correcciones debido a la inercia y la viscosidad, Martin encuentra dos ecuaciones adimensionales que gobiernan las oscilaciones. Una de bajada y otra de subida. Además considera la diferencia de presiones entre los extremos de la aguja, la cual incluye como la diferencia de las presiones hidrostáticas menos una presión dinámica. Esta presión dinámica es equivalente a la energía que se disipa en el cambio abrupto de meter y sacar el agua de los extremos de la aguja, y está dada por el cambio de presión necesario para sacar el fluido de un tubo hacia un reservorio infinito, más la diferencia de presión necesaria para meter el fluido al tubo desde un reservorio infinito. Al resolver las ecuaciones de gobierno para el caso del amortiguamiento viscoso, encuentra una ecuación para el periodo de las oscilaciones, independiente de la diferencia de densidades. Los experimentos confirman que el periodo no depende de la diferencia de densidades, pero muestran que los resultados dados por la ecuación sólo coinciden de forma cualitativa con los experimentos. Para el caso del amortiguamiento no-lineal tampoco hace buenas predicciones sobre el periodo, pero de nuevo, cualitativamente sus resultados están de acuerdo con los experimentos.

1.2. El trabajo de Yoshikawa

Yoshikawa parece ser el autor que más trabajos tiene publicados sobre el oscilador salino [23, 25, 22, 24]. En 1989 se interesó en el oscilador salino como una herramienta pedagógica para que los estudiantes conocieran y entendieran conceptos de dinámica no-lineal lejos del equilibrio [23]. Presenta dichos fenómenos en un experimento que se puede reproducir con facilidad. En este mismo artículo menciona que el fenómeno se puede seguir o monitorear con un par de electrodos de plata Ag/AgCl. Las oscilaciones del agua van acompañadas de

una diferencia de potencial que cambia a la par con el cambio de dirección del chorro.

En sus siguientes trabajos cambió ligeramente el dispositivo experimental. En lugar de utilizar jeringas con agujas utilizó un recipiente con un pequeño orificio en su base. Dos años después escribe del oscilador y su importancia experimental en dinámica no lineal [25]. Afirma que la naturaleza de las oscilaciones es gravitacional, debida a la diferencia de densidades y la fuerza boyante, no a la presión osmótica. Lo cual comprueba al colocar aceites de diferentes densidades y observar el fenómeno. También observó que al aumentar el tamaño del orificio se daba una bifurcación, al llegar a un punto en el que el chorro de bajada y subida ocurren al mismo tiempo. Este fenómeno ya había sido observado por Martin cuando la diferencia de densidades disminuía en su dispositivo [14].

Al igual que Martin, Yoshikawa modela al oscilador utilizando un flujo de Poiseuille para medir el cambio de presiones en el chorro. Mantiene constantes las densidades de los fluidos y llega a dos ecuaciones no lineales de segundo grado, una para el chorro de subida y otra para el de bajada. Ambas ecuaciones incluyen una función de la velocidad del nivel del agua salada. De acuerdo a Yoshikawa, dicha función es la fuerza necesaria para acelerar el fluido alrededor del orificio, la cual es esencial para inducir el fenómeno oscilatorio. Sin embargo, al ser difícil de evaluar o estimar cualitativamente su efecto, supone que la fuerza de aceleración es proporcional a la velocidad del nivel de agua salada y lo resuelve numéricamente. Encuentran así resultados que cualitativamente son satisfactorios [25].

Más tarde acoplaron dos osciladores salinos (utilizaron dos vasitos rellenos de solución salina con agujeros, dentro de un solo recipiente con agua destilada), y encontraron que el modo de las oscilaciones depende del área de la superficie libre de agua dulce [22]. Acoplando dos ecuaciones de Rayleigh y, resolviendo numéricamente, encontraron comportamientos simila-

res al experimental.

En su trabajo más importante y completo sobre el oscilador salino [24], Yoshikawa et al. realizaron una serie de experimentos y una simulación numérica en un flujo tridimensional.

En los experimentos observaron las oscilaciones esperadas. Primero un flujo de agua salada hacia abajo, que después de aproximadamente un minuto, se detuvo. Pronto empezó un flujo de agua dulce hacia arriba, el cual se detuvo varios segundos después para volver a dar inicio al flujo hacia abajo y así sucesivamente durante docenas de veces. El periodo de la oscilación,

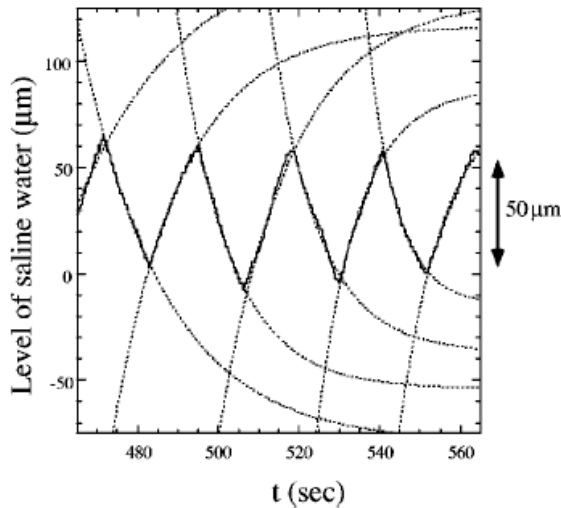


Figura 1.3: Imagen tomada de [24]. Resultados experimentales en el cambio rítmico del nivel del agua salada en el recipiente interno. Las líneas punteadas representan ajustes exponenciales individuales, durante el flujo de subida y el de bajada $x(t) \propto e^{kt} + const$

de 24 segundos, se mantuvo prácticamente constante a lo largo de todo el experimento. La duración del periodo aumenta menos del 10% después de dejar el sistema oscilando durante varias horas. El cambio en el tiempo del nivel del agua salada en el vaso interior se midió con un medidor láser. Se observó que dichos cambios eran de alrededor de $50\mu\text{m}$ y se ajustó cada medio ciclo con una exponencial.

La simulación numérica que realizaron es obtenida resolviendo la ecuación de Navier-Stokes, la de difusión y la de conservación de masa, en donde ya no consideran que las densidades sean constantes en el tiempo. Trabajaron en coordenadas cilíndricas y utilizando la aproximación de Boussinesq, despreciando las diferencias de densidad en todos los términos que no incluyen a la gravedad. Resolvieron el sistema dado por las ecuaciones de Navier-Stokes, la de continuidad, y la de conservación de masa, utilizando un software de dinámica de fluidos basado en diferencias finitas.

En la simulación numérica utilizaron coeficientes y valores iniciales similares a los de sus experimentos para poder comparar los resultados. Además, observaron las oscilaciones esperadas, pero con un periodo de oscilación de 41 segundos. Basándose en los cambios del nivel de agua encontraron que en cada ciclo sale el 0.16% del agua salada, mientras que en los experimentos salía el 0.12%. En su simulación también encontraron que el nivel del agua salada oscilaba con una amplitud aproximada de $50\mu m$.

La mayor discordancia que encontraron entre el experimento y los resultados de su simulación fue la diferencia entre los periodos de oscilación, siendo el primero de 24 segundos y el segundo de 41. Yoshikawa argumenta que esto puede deberse al hecho de que en el experimento el orificio por el que pasa el agua tiene irregularidades que afectan el flujo laminar y como consecuencia el periodo cambia. Además, menciona que algunos factores de la simulación numérica como el tamaño y forma del arreglo, así como las condiciones a la frontera, afectan la duración del periodo.

A partir de la velocidad promedio en el orificio que encontraron en sus simulaciones, estiman que el número de Reynolds del oscilador es menor que 20, por lo que la turbulencia no tiene

efectos considerables en el fenómeno.

En el análisis y descripción de los cambios en el flujo, consideran que el balance de momentos sobre todo elemento de fluido tiene cuatro componentes: La convección, los gradientes de presión, la viscosidad y la gravedad. A partir de estos se pueden describir los efectos de la aceleración. Los términos debidos a la convección y a la viscosidad frenan la oscilación, mientras que los de presión y gravedad aceleran al flujo. De los resultados numéricos encuentran que los cuatro términos son proporcionales a la velocidad del flujo, excepto en el momento en el que el flujo cambia de dirección. A partir de lo cual proponen que la aceleración es proporcional a la velocidad, de donde se justifica el comportamiento exponencial mencionado anteriormente.

En el artículo discuten el mecanismo del cambio de dirección del flujo [24]. A partir de sus resultados numéricos, estiman la forma de la fuerza viscosa, de presión y de gravedad. Llegando así a una ecuación diferencial para la diferencia entre el nivel del agua salada y su posición de equilibrio, la cual corresponde a la ecuación de Rayleigh:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = A \frac{dX}{dt} - B \frac{dX^3}{dt} - \omega_0^2 X, \quad (1.1)$$

donde $X(t)$ es la altura del agua dentro del recipiente de agua salada, A , B y ω_0 son constantes positivas, pero A y B son parámetros libres para cada experimento y ω_0 depende de otros parámetros del oscilador, como el cociente entre las densidades.

En la ecuación de Rayleigh, el término a la izquierda junto con el último término del lado derecho de la ecuación corresponden a un oscilador, mientras que el término de en medio corresponde a las fricciones “negativa” y positiva, pues dependen de la velocidad a la que se mueve el nivel del agua.

Así, Yoshikawa concluye que el oscilador salino puede ser descrito por la ecuación de Rayleigh, que las oscilaciones se originan debido a la inestabilidad gravitacional causada por que el agua salada está arriba de la dulce, y que la disipación de energía del sistema se debe al efecto de la viscosidad.

1.3. Perturbaciones del oscilador mediante pulsos

González, Arce y Guevara perturbaron al sistema experimental con pulsos de agua [3]. Dichos pulsos consisten en inyectar un 0.1 % del volumen total de agua en el fondo del recipiente externo, para después retirar exactamente el mismo volumen, de forma que la cantidad de agua no cambie después de cada pulso . El tiempo de duración de un pulso es de 1.3 segundos, mientras que el periodo natural de su oscilador T_0 es de alrededor de 35 segundos. Los periodos los miden con electrodos que registran la diferencia de potencial debida a los chorros.

Perturbaron el oscilador tanto con pulsos individuales, como con trenes de pulsos. Al aplicar trenes de pulsos con diferentes tiempos T_p entre los pulsos, encontraron que después de un transitorio el oscilador se acopla al tren de pulsos. Estableciéndose así un ritmo entre ambos, que llaman *phase locking* o bloqueo de fase, de la forma $N:M$, donde los valores de N y M dependen de la relación T_p/T_0 (Figura1.4). N se refiere al número de pulsos o perturbaciones y M a los ciclos que da el oscilador en respuesta los pulsos.

Los pulsos individuales los aplicaron en diferentes momentos de la oscilación, es decir en diferentes tiempos T_c medidos desde el inicio de un ciclo, a lo largo de un periodo T_0 y luego dejaron al sistema regresar a su estado natural. Estos pulsos provocan un reinicio o corrimiento de fase. Se define la fase original de la oscilación como $\Phi = T_c/T_0$ y la nueva fase $\Phi^* = 1 - T_1/T_0 + T_c/T_0$, donde la longitud del ciclo perturbado T_1 es el tiempo entre el marca-

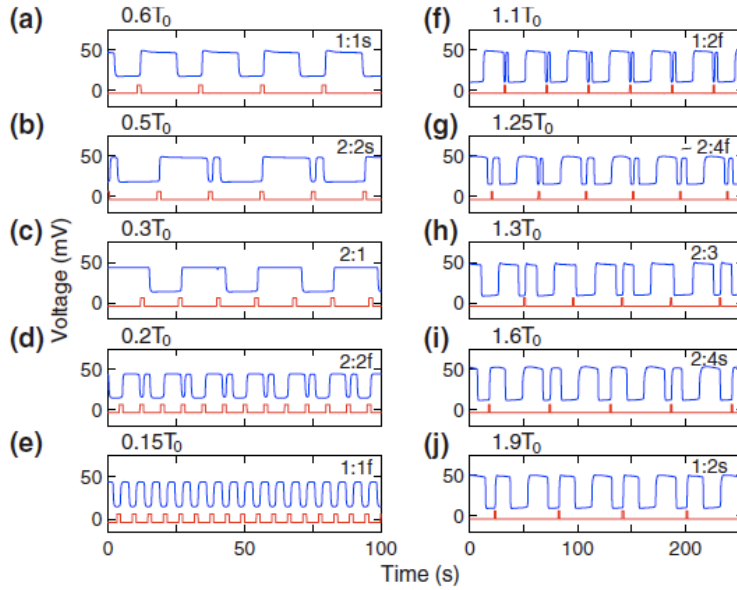


Figura 1.4: Imagen tomada de [3]. Bloqueos de fase para diferentes tiempos T_p . Muestra el cambio del potencial (azul) respecto a los pulsos(rojo) para diferentes tiempos T_p entre los pulsos.

donde de inicio de una oscilación inmediatamente anterior al pulso al marcador inmediatamente posterior al pulso. Encontraron experimentalmente la gráfica de inicio de fase (Φ vs. Φ') a partir de lo cual hicieron un ajuste (Figura 1.5).

Los resultados presentados por González et al. nos servirán para poner a prueba nuestro modelo, al perturbarlo de forma análoga.

1.4. Otros trabajos sobre el oscilador salino

Alfredsson y Largerstedt usaron un arreglo experimental similar al de Yoshikawa y analizaron el periodo de las oscilaciones y su dependencia con distintos parámetros adimensionales [1]. Encontraron que cuando el área del orificio es muy pequeña en comparación con las áreas de los recipientes, la viscosidad juega un papel importante. Y que cuando los recipientes son lo

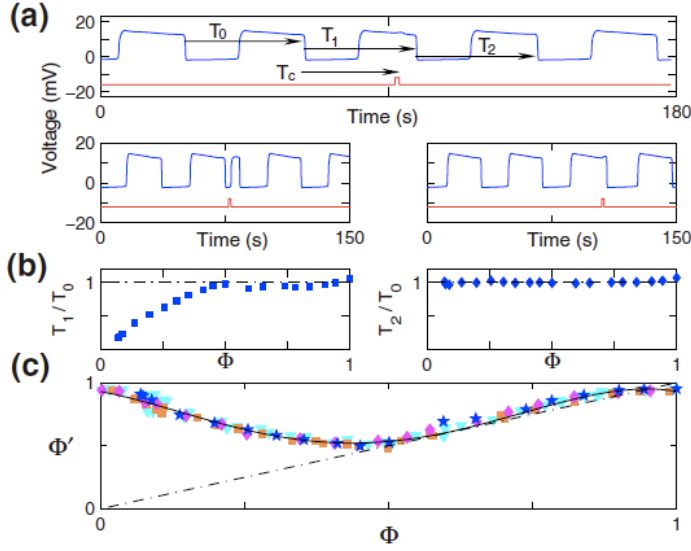


Figura 1.5: Imagen tomada de [3]. (a) Reinicio de fase a tres valores diferentes del intervalo de acoplamiento T_c (arriba, 29.6 s; abajo izquierda, 3.4 s; abajo derecha, 37.1 s). (b) Gráficas de T_1/T_0 vs. la fase vieja $\Phi = T_c/T_0$ (izquierda) y T_2/T_0 vs. Φ (derecha). (c) Gráfica de la nueva fase Φ^* vs. Φ . La curva es la curva de transición.

suficientemente grandes la tensión superficial es irrelevante.

Experimentalmente encontraron que el periodo o tiempo de cada ciclo está dado por

$$T' = C_1 \Pi_1^{n_3} \Pi_2^{n_1} + C_2 \Pi_2^{n_2} \Pi_4^{n_2},$$

donde T' esta escalado como $T' = T(\frac{g}{\Phi})^{1/2}$ y $\Pi_1 = \frac{\Delta\rho}{\rho}$, $\Pi_2 = \frac{\Phi^2}{A_{ir}}$, $\Pi_4 = \frac{g\Phi^3}{\nu^2}$.

Donde $\Delta\rho$ es la diferencia de densidades, ρ la densidad del fluido en el recipiente externo (agua destilada), Φ el diámetro del orificio por donde pasa el agua, A_{ir} el área reducida de los recipientes dada por

$$A_{ir} = A_i(1 - A_i/A_0),$$

donde A_i es el área del recipiente interno, A_0 el área del recipiente externo, g la aceleración de la gravedad y $\nu = \mu/\rho$ la viscosidad cinemática del agua destilada. Los valores que en-

contraron para las constantes son $C'_1 = 6.10$, $C_2 = 6 \times 10^3$, $n_1 = -0.385$, $n_2 = -0.78$ y $n_3 = -0.16$.

Sin embargo, aclaran que esta ecuación no ajusta tan bien como quisieran, por lo que debe de haber un tercer término de corrección, que no les fue posible encontrar a partir de los datos experimentales que obtuvieron. Se observa la necesidad de este tercer término ya que la ecuación no describe el flujo cuando la viscosidad tiende a cero, ni cuando la amplitud del chorro es grande en comparación al diámetro del orificio Φ . El primer término gobierna el chorro cuando las amplitudes son del mismo orden de magnitud que el diámetro del orificio Φ , y el segundo término incorpora los efectos de la viscosidad.

Steinbock, Lange, y Rehberg utilizaron el arreglo experimental de Martin para flujos lentos, donde las oscilaciones son de minutos y no de segundos, de forma que la viscosidad y capilaridad juegan un papel más importante que en los flujos rápidos del oscilador de Yoshikawa. Observaron que la diferencia de alturas o puntos de equilibrio se desplaza un poco hacia arriba [20]. Este desplazamiento se debe a que a lo largo del experimento se da una recombinación entre el agua dulce y la salada, pues para compensar el cambio de presión debido a la salida de agua salada del recipiente, entra una cantidad mayor de agua dulce al recipiente. Esta recombinación afecta el criterio del equilibrio de presiones, desplazando hacia arriba los puntos de equilibrio inestables.

Justifican las oscilaciones con la inestabilidad de Rayleigh y resuelven un sistema en coordenadas rectangulares en dos dimensiones para no tener que trabajar en tres dimensiones en cilíndricas. A partir de las ecuaciones de Navier-Stokes y de difusión de la sal, llegan a una expresión $h_c - h_1 = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_s}\right) L$, que relaciona la amplitud de las oscilaciones (distancia entre el punto de equilibrio inestable y el nivel crítico en el cual el flujo se invierte), con el

cociente de densidades y el largo del tubo o jeringa L entre el reservorio de agua salada y el de agua dulce.

Miyakawa y Yamada trabajaron de forma numérica y experimental con osciladores acoplados [15, 16]. En el primer trabajo colocaron dos sistemas (osciladores) iguales que se conectan mediante una ventana entre los recipientes de agua salada. Para el tratamiento numérico acoplaron dos ecuaciones de Rayleigh. Agrandando la ventana, encontraron los acoplamientos cuasi-periódico, en fase, biestable y fuera de fase. En el segundo usaron 36 osciladores acoplados, colocando 36 recipientes pequeños con agua salada y uno de agua dulce, cuya área es el parámetro de acoplamiento. Cuando el área del recipiente de agua dulce era muy grande respecto a los recipientes de agua salada, el acoplamiento era muy débil por lo que no observaron una sincronización de fase. Para valores menores del área del recipiente de agua dulce respecto a los de agua salada encontraron que coexistían el estado de antifase y varios estados de grupos o *clusters* asimétricos.

Aoki hace un tratamiento matemático del oscilador utilizando métodos de teoría de singularidad y teoría de bifurcación para estudiarlo [2].

Cervellata y Soldá utilizaron dos osciladores acoplados para construir una pila de voltaje alterno con un voltaje de $55mV$ y un periodo de treinta segundos [6].

Upadhyay et al. proponen que la diferencia de potencial eléctrico se debe a potenciales que fluyen o *streaming potentials*, producto de una doble capa eléctrica [21]. Esta consiste de dos capas paralelas de iones. La primera capa es la de superficie, que coincide con la superficie del capilar. La segunda capa es la difusa, que está dentro del agua y funciona como pantalla eléctrica de la primera. La capa difusa se forma de los iones libres que se encuentran en el

fluido por atracción eléctrica y ruido térmico. La doble capa se forma sobre el capilar, de modo que cuando los líquidos fluyen hacia arriba y hacia abajo, arrastrando con ellos la fase móvil de la doble capa, se genera una separación de carga. La dirección de la separación de carga es distinta cuando el chorro sube que cuando el chorro baja, de manera que la diferencia de potencial oscila junto con el chorro .

Al igual que Yoshikawa et al. [23], Morón-Villarreyes et al. utilizaron el oscilador salino como una herramienta educativa o pedagógica para estudiantes de ingeniería química, dado que introduce de manera sencilla la dinámica no lineal y algunas herramientas de esta en el estudio de la teoría del caos [17]. Además, proponen que los estudiantes realicen mejoras tecnológicas en el dispositivo experimental.

Roy et al. utilizaron el oscilador salino para caracterizar y cuantificar el gusto [18]. Sugieren que el oscilador salino imita el mecanismo de percibir los cuatro sabores básicos, dulce, ácido, amargo y salado. Muestran que las amplitudes del potencial eléctrico en el oscilador se correlacionan bien con los logaritmos de los índices relativos de sabor, como la concentración de las sustancias de cada categoría de sabor.

Rincon y Fajardo variaron la concentración molar de la sal entre uno y cinco moles. Como resultado de esta variación encontraron que para el oscilador con capilar, el periodo no depende de la concentración [11]. Esto lo justifican teóricamente utilizando un flujo de Hagen-Poiseuille y argumentando que los cambios en las densidades, que se dan como resultado de los cambios de concentración, se compensan con los provocados por la viscosidad, de forma que al modificar la concentración de la sal en el agua, los tiempos de las oscilaciones prácticamente no se ven afectados.

Los trabajos mencionados en este capítulo nos muestran la relevancia del oscilador salino, y la información que se ha recabado acerca de su dinámica. En el siguiente capítulo revisaremos la teoría o marco teórico necesario para más adelante poder plantear nuestro propio modelo del oscilador y comparar nuestros resultados con los presentados aquí.

Capítulo 2

Marco Teórico

El oscilador salino es un sistema físico fuera de equilibrio, donde hay dos especies químicas diferentes, el agua y la sal. Así que vamos a estudiar un sistema no homogéneo, por lo que es importante la presencia de procesos difusivos en las ecuaciones de hidrodinámica que utilizemos. En el marco teórico trataremos de presentar y justificar el uso de la teoría y de las ecuaciones que utilizaremos más adelante que incluyan el ya mencionado proceso difusivo.

Al igual que la termodinámica está basada en la ley de conservación de energía y en la ley de la entropía, la descripción de los procesos fuera de equilibrio también debe de ser construida sobre estas dos leyes. Sin embargo es necesario formular dichas leyes de forma adecuada, así como también las ecuaciones fenomenológicas. Las ecuaciones fenomenológicas relacionan los flujos termodinámicos con las fuerzas termodinámicas, y en combinación con las ecuaciones de balance nos llevarán a las ecuaciones de la hidrodinámica que nos competen. Para esta derivación nos basaremos en los primeros capítulos del libro de de Groot y Mazur [12], en el caso simplificado en que no hay reacciones químicas.

2.1. Leyes de conservación

Como la teoría a utilizar se va a aplicar a sistemas macroscópicos con propiedades descritas por funciones continuas en el espacio y el tiempo, las leyes de conservación deben de estar formuladas localmente dado que tanto la masa como el momento pueden cambiar localmente y en el tiempo.

2.1.1. Conservación de masa

Vamos a encontrar la ecuación de balance de masa para un sistema con varias especies enumeradas por k , la cual nos da la relación que existe entre el cambio de masa dentro de un volumen a partir de los flujos de masa a través de dicho volumen y las posibles fuentes o sumideros que puedan existir de cada especie.

Para un sistema con n componentes, el cambio de masa de la k -ésima componente en el tiempo, dentro de un volumen V , está dado por:

$$\frac{d}{dt} \int^V \rho_k dV = \int^V \frac{\partial \rho_k}{\partial t} dV, \quad (2.1)$$

donde ρ_k es la densidad de la k -ésima componente.

Esta cantidad en el lado derecho, equivale a la suma del flujo de la especie k en el volumen V a través de su superficie Ω y por la producción de k en las reacciones químicas que ocurren dentro del volumen V . Debido a que en el oscilador salino no existen dichas reacciones químicas, no las tomaremos en cuenta. De modo que la evolución de la masa de la k -ésima especie está dada por

$$\int^V \frac{\partial \rho_k}{\partial t} dV = - \int^{\Omega} \rho_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{d}\Omega, \quad (2.2)$$

donde $\mathbf{d}\Omega$ es un vector de magnitud $d\Omega$ normal a la superficie y que apunta hacia afuera de V y \mathbf{v}_k es la velocidad de la k -ésima componente. El signo menos se debe a que dado que

$d\Omega$ apunta hacia afuera del volumen, que la velocidad vaya en la misma dirección que $d\Omega$ implica una salida de flujo del volumen V y por lo tanto una pérdida.

Aplicando el teorema de Gauss a la integral de superficie obtenemos

$$\int^V \frac{\partial \rho_k}{\partial t} dV = - \int^V \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) dV. \quad (2.3)$$

Dado que la relación (2.3) se cumple sin importar el volumen sobre el cual se haga la integral, entonces la relación diferencial también es válida y nos da la siguiente ecuación de balance,

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k). \quad (2.4)$$

Sumando sobre las n sustancias k se obtiene la *Ecuación de Continuidad*.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}), \quad (2.5)$$

donde ρ es la densidad total dada por la suma de las densidades sobre todas las componentes

$$\rho = \sum_{k=1}^n \rho_k, \quad (2.6)$$

y \mathbf{v} la velocidad baricéntrica o del centro de masa que es un *promedio* de las velocidades de cada componente

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \frac{\rho_k \mathbf{v}_k}{\rho}. \quad (2.7)$$

La ecuación (2.5) expresa el hecho de que la masa total se conserva, es decir, que la masa total de un elemento de volumen del sistema sólo puede cambiar si existe un flujo de masa a través de la superficie del elemento de volumen.

Para escribir la ecuación de conservación de masa, en términos de los flujos de masa, definimos la derivada material (también derivada sustancial, total o lagrangiana).

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (2.8)$$

La derivada material tiene dos partes, la derivada parcial en el tiempo, que representa la tasa de cambio en cualquier punto fijo, y una parte que nos da los cambios debidos a que el baricentro se mueve con velocidad \mathbf{v} dentro del fluido.

También es necesario definir el flujo de difusión de una sustancia k respecto a su movimiento baricéntrico:

$$\mathbf{J}_k = \rho_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}). \quad (2.9)$$

Lo que nos permite escribir las ecuaciones de balance de masa (2.4) de una forma alternativa:

$$\frac{d\rho_k}{dt} = -\rho_k \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{J}_k, \quad (2.10)$$

mientras que la ecuación de continuidad (2.5) queda

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (2.11)$$

Si además utilizamos fracciones de masa c_k dadas por:

$$c_k = \frac{\rho_k}{\rho}, \quad \text{donde} \quad \sum_{k=1}^n c_k = 1, \quad (2.12)$$

y utilizando la ecuación de continuidad (2.11), observamos que la ecuación de balance de masa (2.10) toma la forma

$$\rho \frac{dc_k}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.13)$$

Que nos dice que el cambio de la fracción de masa o concentración de la k -ésima componente se debe al balance del flujo difusivo \mathbf{J}_k de dicha componente. Es decir que, si en un elemento de volumen el flujo difusivo de la componente k -ésima que entra es igual al que sale, entonces la concentración c_k de dicha componente se mantiene constante en el tiempo.

Utilizando la definición para el volumen específico $v = \frac{1}{\rho}$, la ecuación (2.11) puede ser escrita como

$$\rho \frac{dv}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (2.14)$$

Además, sustituyendo la velocidad baricéntrica (2.7) en el flujo difusivo (2.9) y sumando sobre todas las componentes, se tiene que:

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{J}_k = \sum_{k=1}^n \rho_k \mathbf{v}_k - \mathbf{v} \sum_{k=1}^n \rho_k = 0 \quad (2.15)$$

La ecuación (2.15) nos dice que sólo $n - 1$ de los n flujos de difusión son independientes. De igual forma, únicamente $n - 1$ de las ecuaciones (2.13) son independientes, y la n -ésima ecuación independiente describiendo el cambio de densidad de masa del sistema es la ecuación (2.14) o (2.11).

Finalmente, como consecuencia de la ecuación de continuidad (2.5) y utilizando la definición de derivada material (2.8), tenemos que para cualquier propiedad local a del sistema, ya sea una cantidad escalar, una componente vectorial o tensorial, se cumple la siguiente relación

$$\rho \frac{da}{dt} = \frac{\partial a \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (a \rho \mathbf{v}). \quad (2.16)$$

Esta relación (2.16) nos será de mucha utilidad más adelante.

2.1.2. La ecuación de movimiento

La ecuación de movimiento es aquella que relaciona el cambio temporal de momento de una porción del fluido con la suma de las fuerzas actuando sobre dicha porción. Es decir,

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \cdot \mathcal{P} + \sum_k \rho_k \mathbf{F}_k, \quad (2.17)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad baricéntrica, $d\mathbf{v}/dt$ es la aceleración del centro de gravedad, \mathcal{P} es el tensor de presión o menos el tensor de esfuerzos. El tensor de presión \mathcal{P} resulta de las interacciones cercanas de las partículas que dan origen a las fuerzas superficiales macroscópicas (Como se suele hacer en hidrodinámica, supondremos que \mathcal{P} es simétrico como consecuencia del balance de momento angular [4]). \mathbf{F}_k es la fuerza de cuerpo, por unidad de masa, ejercida sobre la especie k .

Si se considera que las fuerzas de cuerpo son conservativas, derivables de un potencial ϕ_k independiente del tiempo, como en el sistema en estudio, entonces:

$$\vec{F}_k = -\nabla \phi_k, \quad \frac{\partial \phi_k}{\partial t} = 0. \quad (2.18)$$

Utilizando el resultado de la ecuación (2.16) reescribimos la ecuación de movimiento (2.17),

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathcal{P}) + \sum_k \rho_k \mathbf{F}_k. \quad (2.19)$$

La cual tiene la forma de una ecuación de balance de densidad de momento $\rho \mathbf{v}$. La cantidad $\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathcal{P}$ se puede interpretar como el flujo del momento, donde $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$ es la parte convectiva, y a la suma de las fuerzas $\sum_k \rho_k \mathbf{F}_k$ como la fuente del momento.

Proyectando la ecuación de movimiento (2.17) con la velocidad baricéntrica, es posible derivar una ecuación de balance para la energía cinética del centro de masa.

$$\rho \frac{d\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{dt} = -\nabla \cdot (\mathcal{P} \cdot \mathbf{v}) + \mathcal{P} : \nabla \mathbf{v} + \sum_k \rho_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}, \quad (2.20)$$

donde el producto bilineal está definido por

$$\mathcal{P} : \nabla \mathbf{v} = \sum_{\alpha, \beta} P_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = \sum_{\alpha, \beta} P_{\beta\alpha} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (2.21)$$

Y otra vez con ayuda de la relación (2.16), la ecuación (2.20), que nos dice como cambia o evoluciona la energía cinética, toma la forma

$$\frac{\partial \frac{1}{2} v^2 \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} v^2 \rho \mathbf{v} + \mathcal{P} \cdot \mathbf{v} \right) + \mathbf{P} : \nabla \mathbf{v} + \sum_k \rho_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}. \quad (2.22)$$

Ahora es necesario establecer una ecuación para el cambio en el tiempo de la densidad de la energía potencial dada por la suma de las densidades de las energías potenciales de cada componente: $\rho\phi \equiv \sum_k \rho_k \phi_k$. Esta se obtiene de la ecuación de balance de masa de cada componente (2.4), la definición del flujo de masa (2.9) y del hecho de que las fuerzas sean conservativas, ecuación (2.18), pues:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} = - \sum_k \phi_k \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k).$$

Por definición $\rho_k \mathbf{v}_k = \mathbf{J}_k + \rho_k \mathbf{v}$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} &= \sum_k [-\nabla \cdot (\mathbf{J}_k \phi_k + \rho_k \phi_k \mathbf{v}_k) + \mathbf{J}_k \cdot \nabla \phi_k + \rho_k \mathbf{v} \cdot \nabla \phi_k] \\ &= -\nabla \cdot \left(\sum_k \mathbf{J}_k \phi_k \right) - \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{v}) - \sum_k \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{F}_k - \sum_k \rho_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

De forma que la ecuación para el cambio de la energía potencial queda

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\rho \phi \mathbf{v} + \sum_k \mathbf{J}_k \phi_k \right) - \sum_k \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{F}_k - \sum_k \rho_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}. \quad (2.23)$$

Que nos dice que el cambio de la densidad de energía potencial depende de la pérdida debida al trabajo ejercido por la fuerza de cuerpo \mathbf{F}_k , sobre el fluido y los flujos por las fronteras.

Ya se tienen las ecuaciones tanto para la energía cinética (2.22) como para la energía potencial (2.23), de forma que para encontrar la ecuación de balance de energía se suman:

$$\frac{\partial \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \phi \right)}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \phi \right) \mathbf{v} + \mathcal{P} \cdot \mathbf{v} + \sum_k \phi_k \mathbf{J}_k \right] + \mathcal{P} : \nabla \mathbf{v} - \sum_k \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{F}_k. \quad (2.24)$$

Esta última ecuación nos dice que la suma de la energía cinética más la potencial no se conservan, dado que tiene términos fuente. Y como es una Ley universal de la física que la energía se conserva, nos falta considerar otro tipo de energía en el balance de energía.

2.1.3. Conservación de energía

Por el principio de conservación de energía, la energía dentro de un volumen V sólo puede cambiar si hay un flujo de energía a través de la frontera Ω de V . De forma que el cambio en el tiempo de la energía está dado por

$$\frac{d}{dt} \int^V \rho e dV = \int^V \frac{\partial \rho e}{\partial t} dV = - \int^{\Omega} \mathbf{J}_e \cdot d\mathbf{\Omega}, \quad (2.25)$$

donde e es la energía total por unidad de masa y \vec{J}_e el flujo total de energía.

Utilizando el teorema de Gauss, se obtiene la ecuación de conservación en su forma diferencial,

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_e, \quad (2.26)$$

donde la energía total e está dada por la suma de la energía cinética $\frac{1}{2}v^2$, potencial ϕ e interna u , la cual desde un punto de vista microscópico representa la energía debida a vibraciones térmicas y a las interacciones de corto alcance entre las partículas dentro de un elemento de fluido.

$$e = \frac{1}{2}v^2 + \phi + u. \quad (2.27)$$

Desde el punto de vista macroscópico la relación (2.27) es simplemente la definición de la energía interna u , extendida al caso fuera de equilibrio.

Por otro lado, el flujo total de energía \vec{J}_e , se debe a una parte convectiva $\rho e \mathbf{v}$, a la potencia debida los elementos de fluido vecinos $\mathcal{P} \cdot \mathbf{v}$, a un flujo de energía potencial debido a la difusión $\sum_k \phi_k \mathbf{J}_k$ y a un flujo de calor \mathbf{J}_q

$$\mathbf{J}_e = \rho e \mathbf{v} + \mathcal{P} \cdot \mathbf{v} + \sum_k \phi_k \mathbf{J}_k + \mathbf{J}_q. \quad (2.28)$$

Utilizando las ecuaciones de balance de energía cinética y potencial (2.24), conservación de energía (2.26), energía total (2.27) y flujo de energía (2.28), se llega a la ecuación de balance para la energía interna u

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho u \mathbf{v} + \mathbf{J}_q) - \mathcal{P} : \nabla \mathbf{v} + \sum_k \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{F}_k. \quad (2.29)$$

Para escribir la ecuación de balance de energía (2.29) de otra forma que nos será útil más adelante, se divide el tensor de presiones en una parte hidrostática escalar p y un tensor $\mathbf{\Pi}$.

$$\mathcal{P} = p\mathcal{I} + \mathbf{\Pi}, \quad (2.30)$$

donde \mathcal{I} es la matriz identidad.

Sustituyendo en la ecuación de balance de energía (2.29)

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho u \mathbf{v} + \mathbf{J}_q) - p \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{\Pi} : \nabla \mathbf{v} + \sum_k \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{F}_k.$$

Utilizando la ecuación (2.16) y

$$\rho \frac{dq}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q, \quad (2.31)$$

que define a dq como el *calor* agregado por unidad de masa. Se tiene

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho \frac{dq}{dt} - p \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{\Pi} : \nabla \mathbf{v} + \sum_k \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{F}_k. \quad (2.32)$$

Sustituyendo la ecuación de balance de masa en su forma (2.14) y dividiendo entre la densidad ρ se obtiene la *Primera Ley de la Termodinámica*

$$\frac{du}{dt} = \frac{dq}{dt} - p \frac{dv}{dt} - v \mathbf{\Pi} : \nabla \mathbf{v} + v \sum_k \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{F}_k. \quad (2.33)$$

(Recordando que $v \equiv \frac{1}{\rho}$ es el volumen específico.)

Esta ley nos dice que, el cambio de la energía interna se debe al cambio o intercambio de calor dq y al trabajo ejercido tanto por las fuerzas externas, como por los elemento de fluido de sus alrededores.

Ya establecimos algunos de los principios básicos de la mecánica, como son conservación de masa y momento, así como también la conservación de la energía, pieza clave de la termodinámica, pero aún nos falta introducir el concepto de entropía, lo cual haremos en la siguiente sección.

2.2. Ecuación y Balance de Entropía

En esta sección introduciremos a la entropía y su ecuación de balance, dado que la producción de entropía está asociada a las relaciones fenomenológicas. Como ya habíamos mencionado antes, las relaciones fenomenológicas establecen una correspondencia entre las fuerzas y los flujos termodinámicos, y junto con las ecuaciones de balance, nos permiten determinar la evolución de todas las variables termodinámicas locales, por ejemplo la evolución de la densidad.

2.2.1. Segunda Ley de la Termodinámica

De acuerdo a los principios de la Termodinámica, para cualquier sistema macroscópico en equilibrio, se puede introducir una función de estado S , llamada entropía con las siguientes propiedades.

El cambio de la entropía dS de un sistema está dado por la entropía proveniente de sus alrededores $d_e S$, más la producida dentro del sistema $d_i S$:

$$dS = d_e S + d_i S. \quad (2.34)$$

La Segunda Ley de la Termodinámica dice que en equilibrio o para procesos reversibles $d_i S$ debe de ser cero y positivo para procesos fuera del equilibrio o irreversibles, de forma que,

$$d_i S \geq 0. \quad (2.35)$$

En cambio, dependiendo de la interacción con sus alrededores $d_e S$ puede ser negativa, positiva o cero. Sin embargo, para un sistema adiabático (un sistema aislado, en el que no hay intercambios de calor con sus alrededores) $d_e S = 0$ de forma que

$$dS \geq 0. \quad (2.36)$$

Para un sistema cerrado, en el cual sólo es posible un intercambio de calor con sus alrededores, de acuerdo al teorema de Carnot-Claussius:

$$d_e S = \frac{dQ}{T}, \quad (2.37)$$

donde dQ es el calor proveído al sistema por sus alrededores y T es la temperatura absoluta.

De forma que de las ecuaciones (2.34) y (2.35) se sigue que para un sistema cerrado

$$dS \geq \frac{dQ}{T}. \quad (2.38)$$

Para sistemas en donde también puede haber intercambio de materia con los alrededores, el cambio de entropía debido a sus alrededores $d_e S$ contiene también un término relacionado con el transporte de materia, sin embargo el teorema de Carnot -Clausius no se aplica a dichos sistemas (pues no son cerrados), pero las afirmaciones dadas por (2.34) y (2.35) por sí sólo son válidas.

En la termodinámica de los procesos irreversibles uno de los principales objetivos es relacionar la producción de entropía $d_i S$, con los diversos fenómenos irreversibles que pueden ocurrir dentro del sistema. Para lo cual primero escribimos las ecuaciones de entropía de forma que las cantidades extensivas del sistema sean funciones continuas de las coordenadas espaciales.

$$\begin{aligned}
S &= \int^V \rho s dV, \\
\frac{d_i S}{dt} &= - \int^{\Omega} \mathbf{J}_{s,tot} \cdot d\boldsymbol{\Omega}, \\
\frac{d_i S}{dt} &= \int^V \sigma dV.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Donde s es la entropía por unidad de masa, $\mathbf{J}_{s,tot}$ es el flujo total de entropía por unidad de área y unidad de tiempo, y σ es la producción de entropía por unidad de volumen y tiempo.

Utilizando (2.39) reescribimos (2.34) y (2.35) en sus formas locales, para lo cual suponemos que (2.34) y (2.35) se cumplen también para partes infinitesimales del sistema. Es decir que las leyes que son validas para los sistemas macroscópicos en equilibrio, son válidas para partes infinitesimalmente pequeñas de dicho sistema, pues suponemos que estas pequeñas partes están en equilibrio local.

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_{s,tot} + \sigma, \tag{2.40}$$

$$\sigma \geq 0. \tag{2.41}$$

Por simplicidad reescribimos (2.40) de la forma

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_s + \sigma, \tag{2.42}$$

donde el flujo de entropía \mathbf{J}_s es la diferencia entre el flujo total de entropía $\mathbf{J}_{s,tot}$ y un término convectivo $\rho s \mathbf{v}$

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_{s,tot} - \rho s \mathbf{v}. \tag{2.43}$$

Para encontrar expresiones explícitas del flujo \mathbf{J}_s y la fuente σ de la entropía necesitamos relacionar el cambio de entropía con las variaciones de las propiedades del sistema.

2.2.2. Ecuación de Balance de Entropía

Para sistemas en equilibrio sabemos que la entropía está bien definida a partir de las variables extensivas que definen al sistema macrocópico completamente. Para los sistemas que consideramos anteriormente dichas variables son la energía interna u , el volumen específico v , y las fracciones de masa c_k :

$$s = s(u, v, c_k) \quad (2.44)$$

En equilibrio además se cumple la ecuación de Gibbs:

$$Tds = du + pdv - \sum_{k=1}^n \mu_k dc_k, \quad (2.45)$$

con p la presión en equilibrio, y μ_k el potencial químico del componente k .

Ahora suponemos que, aunque el total del sistema no esté en equilibrio, dentro de él existen pequeños elementos de masa que están en equilibrio local, para los cuales, si se siguen a lo largo de su centro de gravedad, se cumple

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{du}{dt} + p \frac{dv}{dt} - \sum_{k=1}^n \mu_k \frac{dc_k}{dt}. \quad (2.46)$$

Sustituyendo du/dt de la primera ley (2.33) y de la ecuación de calor (2.31) y dc_k/dt del balance de masa en su forma (2.13) en la ecuación de Gibbs (2.46) obtenemos

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_q}{T} - \frac{1}{T} \Pi : \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^n \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{F}_k + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^n \mu_k \nabla \cdot \mathbf{J}_k \quad (2.47)$$

La cual podemos escribir en la forma de una ecuación de balance agrupando los términos de forma que una parte de la ecuación sea una divergencia.

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_q - \sum_k \mu_k \mathbf{J}_k}{T} \right) - \frac{1}{T^2} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T - \frac{1}{T} \sum_{k=1}^n \mathbf{J}_k \cdot \left(T \nabla \frac{\mu_k}{T} - \mathbf{F}_k \right) - \frac{1}{T} \Pi : \nabla \mathbf{v}. \quad (2.48)$$

Al comparar con la ecuación de balance de entropía (2.42) encontramos que el flujo de entropía, y la producción de entropía están dados por:

$$\mathbf{J}_s = \frac{1}{T} \left(\mathbf{J}_q - \sum_{k=1}^n \mu_k \mathbf{J}_k \right), \quad (2.49)$$

y

$$\sigma = -\frac{1}{T^2} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T - \frac{1}{T} \sum_{k=1}^n \mathbf{J}_k \cdot \left(T \nabla \frac{\mu_k}{T} - \mathbf{F}_k \right) - \frac{1}{T} \Pi : \nabla \mathbf{v} \geq 0. \quad (2.50)$$

En principio la separación de (2.47) en la divergencia de un flujo y una fuente parece un poco arbitraria. Sin embargo se deben de cumplir una serie de requerimientos que hacen única esta separación, como es el hecho de que la producción de entropía debe de ser cero para un sistema en equilibrio e invariante bajo transformaciones de Galileo.

La ecuación (2.49) muestra que para sistemas abiertos, el flujo de entropía \mathbf{J}_s , está compuesto de dos partes; el flujo de calor *reducido* \mathbf{J}_q/T , y una parte relacionada con el flujo de difusión de masa \mathbf{J}_k . En la producción de entropía (2.50) reconocemos tres contribuciones diferentes, el primer término relacionado con la conducción de calor, el segundo con la difusión y el tercero está conectado con los gradientes de velocidad del flujo que dan lugar a un flujo viscoso.

La estructura de la ecuación para la fuente de producción de entropía σ es la de una forma bilinear, la cual consiste en la suma de productos de dos factores. Uno de estos factores es un flujo, ya sea de calor, de difusión, de momento o el tensor de presión que provoca un flujo viscoso. El otro factor en cada término está relacionado con el gradiente de una variable de estado intensiva; al gradiente de temperatura, de potencial químico y de velocidad, y puede contener una fuerza de cuerpo \mathbf{F}_k . A estas cantidades, que van multiplicando a los flujos en la expresión de la producción de entropía (2.50) se les llama *fuerzas termodinámicas* o *afinidades* a las cuales denotaremos de manera general como X .

La producción de la entropía (2.50) se puede escribir de maneras alternativas, las cuales serán útiles cuando introduzcamos las relaciones fenomenológicas. La fuerza termodinámica X_k que multiplica al flujo de difusión \mathbf{J}_k se puede reescribir al desarrollar la expresión $\nabla(\mu_k/T)$

$$T\nabla\left(\frac{\mu_k}{T}\right) = \nabla\mu_k - \left(\frac{\mu_k}{T}\right)\nabla T, \quad (2.51)$$

si además utilizamos el hecho de que \mathbf{F}_k es conservativa (2.18) podemos introducir la cantidad

$$\tilde{\mu}_k = \mu_k - \Phi_k, \quad (2.52)$$

y utilizando la primera definición para el flujo de la entropía (2.49) podemos escribir la producción de la entropía en la forma:

$$\begin{aligned} T\sigma &= -\mathbf{J}_s \cdot \nabla T - \sum_{k=1}^n \mathbf{J}_k \cdot (\nabla\tilde{\mu}_k - \Pi : \nabla\mathbf{v}) \\ &= \sum \mathbf{J}\mathbf{X}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

En esta forma \mathbf{X}_k la fuerza conjugada al flujo de difusión \mathbf{J}_k es únicamente un gradiente del potencial $\tilde{\mu}_k$.

2.3. Ecuación de Gibbs-Duhem.

El hecho de que existan gradientes de concentración y potencial químico nos provoca gradientes de presión, la ecuación de Gibbs-Duhem nos dice como es la relación entre dichos gradientes.

Tenemos que la función de la energía libre de Gibbs específica está definida por:

$$g = u + pv - Ts, \quad (2.54)$$

y utilizando la ecuación de Euler, que nos dice

$$u = Ts - pv + \sum_{k=1}^n \mu_k c_k,$$

obtenemos que la función específica de Gibbs está dada por la suma sobre las especies de la

pareja de variables termodinámicas potencial químico-concentración,

$$\begin{aligned}
 g &= \sum_{k=1}^n \mu_k c_k, \\
 \Rightarrow \delta g &= \sum_{k=1}^n (\mu_k \delta c_k + c_k \delta \mu_k).
 \end{aligned}
 \tag{2.55}$$

Por otro lado, diferenciando la función de Gibbs (2.54) obtenemos

$$\delta g = \delta u + p \delta v + v \delta p - T \delta s - s \delta T,$$

sustituyendo en la ecuación de Gibbs (2.45) tenemos

$$\delta g = -s \delta T + v \delta p + \sum_{k=1}^n \mu_k \delta c_k, \tag{2.56}$$

que nos dice cómo es el cambio de la función específica de Gibbs respecto a los cambios de las variables termodinámicas intensivas.

Igualando las relaciones que habíamos obtenido para la función de Gibbs (2.55) y (2.56), se obtiene la ecuación de Gibbs-Duhem

$$\sum_k \rho_k \delta \mu_k = -\rho s \delta T + \delta p, \tag{2.57}$$

o, si la temperatura es constante,

$$\sum_k \rho_k (\nabla \mu_k)_T = (\nabla p)_T. \tag{2.58}$$

La ecuación de Gibbs-Duhem es una relación termodinámica que nos será útil para, a partir de las relaciones fenomenológicas que veremos en la siguiente sección (sección 2.4), encontrar la ecuación de difusión, así como para relacionar los gradientes de densidad con los gradientes de presión, pues básicamente nos dice qué diferencias o gradientes de potencial químico provocan diferencias o gradientes de presión.

2.4. Relaciones Fenomenológicas

Dado que cuando el sistema está en equilibrio termodinámico, todas las fuerzas termodinámicas independientes son cero, la producción de la entropía σ desaparece. Si nos fijamos en la ecuación (2.50), se requiere que los flujos de σ desaparezcan simultáneamente con las fuerzas termodinámicas.

En muchos fenómenos irreversibles y bajo diversas condiciones se ha encontrado empíricamente que los flujos irreversibles son funciones lineales de las fuerzas termodinámicas. Así, que si nos restringimos a la región lineal, la cual cerca del equilibrio incluso describe a aquellos fenómenos que no se encuentran dentro de este régimen, podemos considerar de manera general la siguiente ecuación fenomenológica:

$$J_i = \sum_k L_{ik} X_k. \quad (2.59)$$

Donde J_i y X_k son las componentes de los flujos y las fuerzas termodinámicas y a L_{ik} se le llaman los coeficientes fenomenológicos. Las relaciones expresadas en (2.59) son las ecuaciones fenomenológicas, que junto con las ecuaciones de balance nos permiten en principio determinar la evolución en el tiempo de todas las variables de estado termodinámicas locales del sistema.

Aunque en principio todas las componentes de los flujos termodinámicos pueden ser combinaciones lineales de todas las componentes de las fuerzas, no todos los flujos y fuerzas tienen el mismo carácter tensorial, es decir que no todas se comportan igual ante transformaciones lineales como rotaciones y reflexiones, por lo cual la simetría espacial del sistema material tiene como consecuencia que las componentes de los flujos no dependan de todas las componentes de las fuerzas. A este hecho se le llama el principio de simetría de Curie y para sistemas isotrópicos se tienen las siguientes ecuaciones fenomenológicas que describen conducción de

calor, difusión y sus efectos cruzados (Recordando que sólo $n - 1$ de los flujos de difusión son independientes $\mathbf{J}_n = -\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{J}_k$):

$$J_{q'} = -L_{qq} \frac{\nabla T}{T^2} - \sum_{k=1}^{n-1} L_{qk} [\nabla(\mu_k - \mu_n)_T - (\mathbf{F}_k - \mathbf{F}_n)]/T, \quad (2.60)$$

$$J_i = -L_{iq} \frac{\nabla T}{T^2} - \sum_{k=1}^{n-1} L_{ik} [\nabla(\mu_k - \mu_n)_T - (\mathbf{F}_k - \mathbf{F}_n)]/T, \quad (2.61)$$

o utilizando (2.52)

$$J_{q'} = -L_{qq} \frac{\nabla T}{T^2} - \sum_{k=1}^{n-1} L_{qk} [\nabla(\tilde{\mu}_k - \tilde{\mu}_n)_T]/T, \quad J_i = -L_{iq} \frac{\nabla T}{T^2} - \sum_{k=1}^{n-1} L_{ik} [\nabla(\tilde{\mu}_k - \tilde{\mu}_n)_T]/T. \quad (2.62)$$

Para encontrar las ecuaciones fenomenológicas que nos faltan es necesario dividir al tensor simétrico de presión viscosa en una tensor diagonal y uno con traza igual a cero,

$$\mathbf{\Pi} = \square \mathcal{I} + \mathring{\mathbf{\Pi}}, \quad (2.63)$$

donde el escalar \square es un tercio de la traza del tensor de presión $\mathbf{\Pi}$ y el tensor $\mathring{\mathbf{\Pi}}$ tiene traza cero. A partir de esta división obtenemos una ecuación fenomenológica que relaciona las componentes del tensor de presión (con traza igual a cero) $\mathring{\mathbf{\Pi}}$ con las del tensor simétrico del gradiente de la velocidad $(\mathring{\nabla} \mathbf{v})^s$,

$$\mathring{\Pi}_{\alpha\beta} = -\frac{L}{T} (\mathring{\nabla} \mathbf{v})_{\alpha\beta}^s = -\frac{L}{2T} \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} \frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma} \right), \quad (2.64)$$

y otra ecuación fenomenológica que describe los procesos de la viscosidad

$$\square = -l_{vv} \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{T}, \quad (2.65)$$

L y l_{vv} son los coeficientes fenomenológicos respectivos.

A partir de la simetría espacial, el principio de Curie establece qué tipo de efectos cruzados pueden haber en las relaciones fenomenológicas. Es decir, nos dice de cuáles fuerzas termodinámicas pueden depender cada uno de los flujos.

De forma análoga a como la simetría espacial nos dio, mediante el principio de Curie, ciertas relaciones que simplifican las ecuaciones fenomenológicas, la simetría temporal nos ofrece las relaciones reciprocas de Onsager, las cuales establecen conexiones entre los coeficientes fenomenológicos.

2.5. Ecuaciones de Navier-Stokes y de difusión

A partir de las ecuaciones de balance y las relaciones fenomenológicas vistas en las secciones anteriores vamos a derivar la ecuación de difusión y la de Navier-Stokes, ya que describen la hidrodinámica del oscilador salino.

2.5.1. Ecuaciones de Navier-Stokes

Para encontrar la ecuación de Navier-Stokes reescribimos la ecuación de movimiento (2.17), cambiando al tensor de presión por sus componentes hidrostática, viscosa escalar y viscosa vectorial, $\mathcal{P} = p\mathcal{I} + \square\mathcal{I} + \mathring{\mathbf{\Pi}}$:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - \nabla \square - \nabla \cdot \mathring{\mathbf{\Pi}} + \rho \mathbf{g}, \quad (2.66)$$

donde la fuerza de cuerpo es la gravedad \mathbf{g} y es la misma para ambas especies (sal y agua). Sustituyendo las relaciones fenomenológicas para la presión (2.64) y (2.65) en la ecuación (2.66), llegamos a la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\frac{1}{3} \eta + \eta_\nu \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (2.67)$$

donde $\eta = L/2T$ y $\eta_\nu = l_{\nu\nu}/T$ son los coeficientes viscosos. La ecuación de Navier-Stokes, representa el balance de momento y relaciona los campos de velocidades y de presión con las fuerzas de cuerpo sobre el sistema. En el caso de un flujo incompresible el último término se anula, pues al mantenerse constante la densidad a lo largo de todo el flujo, el volumen de todos los elementos del fluido permanece inalterado a lo largo de su movimiento. Esto implica que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

Esta ecuación es el pilar de la hidrodinámica y vamos a partir de ella para modelar el oscilador salino en el capítulo tres. Sin embargo, nos falta incluir la ecuación de difusión.

2.5.2. La ecuación de difusión

En el oscilador salino tenemos temperatura constante y únicamente dos especies, sal y agua, así que las relaciones fenomenológicas se simplifican y sólo uno de los flujos difusivos es independiente. A partir de la ecuación (2.61) tenemos que la relación fenomenológica para el flujo difusivo de la sal está dado por

$$\mathbf{J}_{\text{sal}} = -L_{ss} \frac{\nabla(\mu_{\text{sal}} - \mu_{\text{agua}})}{T}, \quad (2.68)$$

pues $\mathbf{F}_{\text{sal}} = \mathbf{g} = \mathbf{F}_{\text{agua}}$.

Utilizando la ecuación de Gibbs-Duheim (2.57) para dos especies a temperatura T y presión p constantes podemos escribir el gradiente de la diferencia entre los potenciales químicos en términos de la concentración

$$\nabla(\mu_{\text{sal}} - \mu_{\text{agua}}) = \frac{\partial \mu_{\text{sal}}}{\partial c_{\text{sal}}} \nabla c_{\text{sal}}, \quad (2.69)$$

pues como estamos en un sistema diluido $c_{\text{agua}} \approx 1$; sustituyendo esta ecuación en la relación fenomenológica del flujo difusivo de la sal (2.68), llegamos a la *Ley de Fick* que nos dice que

el flujo difusivo está dado por el gradiente de la concentración

$$\mathbf{J}_{\text{sal}} = -D\nabla c_{\text{sal}}, \quad (2.70)$$

donde $D = \frac{L_{ss}}{T} \frac{\partial \mu_{\text{sal}}}{\partial c_{\text{sal}}}$.

De forma que al sustituir la ley de Fick (2.70) en la ecuación de balance de masa (2.13) llegamos a la ecuación de difusión

$$\rho \frac{dc_{\text{sal}}}{dt} = D\nabla^2 c_{\text{sal}}, \quad (2.71)$$

esta ecuación nos indica que la variación en el tiempo de la concentración de la sal c_{sal} va como su laplaciano.

Para derivar la ecuación de difusión utilizamos que los gradientes de presión son cero, sin embargo en el oscilador la presión varía, por lo que es necesario justificar la validez de la ecuación de difusión mediante otros argumentos, utilizando condiciones que se den o aproximen a las del oscilador salino. En las zonas donde vamos a estudiar el problema difusivo, podemos aproximar el flujo por un flujo unidireccional y a la densidad como $\rho = \rho(r)$.

Para un flujo unidireccional con simetría axial $\mathbf{v} = v_z \hat{e}_z$, por incompresibilidad ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), se cumple que $v_z = v_z(r)$, entonces de la ecuación de Navier-Stokes (2.67) tenemos

$$\nabla p = -\rho \left[\frac{\partial v_z(r)}{\partial t} + g \right] \hat{e}_z + \eta \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] \hat{e}_z, \quad (2.72)$$

debido a que la parte a la derecha sólo tiene componente en la dirección z , $\nabla p = \frac{\partial p}{\partial z} \hat{e}_z$, lo cual implica que $p = p(z)$. Si además estamos en un caso en el que $\rho = \rho(r)$, entonces, dado que todos los términos a la derecha dependen únicamente de r , y $p = p(z)$, tenemos que la relación (2.72) se cumple si cada lado es igual a una constante, es decir $\nabla p = \mathbf{cte}$.

Dado que la presión no es constante, de la ecuación de Gibbs-Duheim tenemos

$$\nabla(\mu_{sal} - \mu_{agua}) = \frac{1}{c_{agua}} \left[\frac{\partial \mu_{sal}}{\partial c_{sal}} \nabla c_{sal} - \nabla P \right], \quad (2.73)$$

que al sustituir en la relación fenomenológica (2.68) encontramos que el flujo difusivo de la sal está dado por (recordando que estamos es un sistema diluido, $c_{agua} \approx 1$)

$$\mathbf{J}_{sal} = -\frac{L_{ss}}{T} \left[\frac{\partial \mu_{sal}}{\partial c_{sal}} \nabla c_{sal} - \nabla P \right]. \quad (2.74)$$

Como $\nabla P = cte$, su Laplaciano es cero $\nabla^2 P = 0$, así que al meter el flujo difusivo (2.74) en la ecuación de balance de masa (2.13), recuperamos la ecuación de difusión (2.71).

Agregando la ecuación de difusión a la de Navier-Stokes y la de Gibbs-Duhem ya planteamos las ecuaciones que utilizaremos para el desarrollo de nuestro modelo del oscilador salino, el cual se da en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Planteamiento del problema

Como ya habíamos mencionado en la introducción, el oscilador salino con el que vamos a trabajar es como el de Yoshikawa [24] y el de González y Arce [3]. Un esquema se puede ver en la figura 3.1 donde A es el área de la superficie libre de agua salada, B la del agua destilada, α la del orificio por el que se da el intercambio entre los dos recipientes, h la altura del agua salada, ρ_s es la densidad del agua salada, ρ_d la del agua destilada, las cuales no dependerán de cuantas oscilaciones hayan pasado debido a que el intercambio de sal en una oscilación es muy pequeño y sólo nos interesa analizar el problema cuando está oscilando con periodo constante.

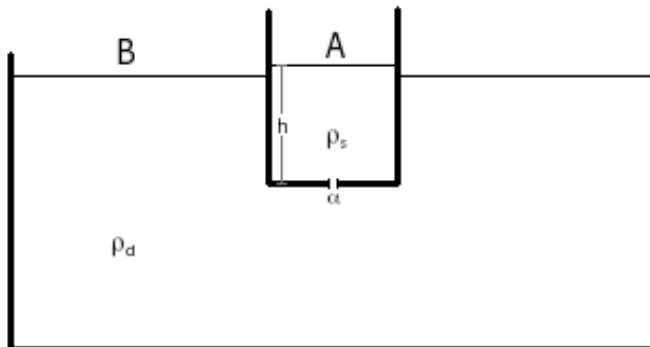


Figura 3.1: Diagrama del oscilador

Vamos a atacar el problema dividiéndolo en dos partes, primero nos fijamos en el chorro que baja, y luego en el que sube. Ambos problemas los vamos a atacar integrando las ecuaciones de Navier-Stokes sobre líneas de corriente.

La idea de trabajar sobre líneas de corriente y utilizar la ecuación de Bernoulli, viene de la solución que utilizan en varios libros de texto (véase [4] Capítulo 6, sección 6.3) para el vaciado de un tanque por un orificio lateral. Tanto para el chorro de subida, como para el de bajada, nosotros utilizaremos la línea de corriente que pasa por el centro del chorro y así poder aprovechar la geometría axial del sistema.

Partimos de la ecuación de Navier-Stokes (2.67), la cual reescribimos:

$$\rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}, \quad (3.1)$$

donde ρ , la densidad del fluido, es ρ_s o ρ_d dependiendo si estamos en el caso en el que el chorro baja o sube, $\frac{d}{dt}$ es la derivada material dada por (2.16), \mathbf{v} es la velocidad del flujo, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos y \mathbf{f} la suma de las fuerzas de cuerpo, en este caso sólo la gravedad. Consideramos que el flujo es incompresible, pues suponemos que el volumen de todas las porciones del fluido no cambia a lo largo de su movimiento dado que dentro del chorro la densidad del fluido es constante.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.2)$$

En este caso los fluidos son Newtonianos y el tensor de esfuerzos está dado por la presión y el gradiente de velocidades,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]. \quad (3.3)$$

Como ya habíamos mencionado la fuerza de cuerpo es la gravedad, la cual se puede expresar

como menos el gradiente de la función potencial $\Phi = \rho gz$, (tomamos a $z = 0$ en la base del recipiente de agua salada).

Entonces, la ecuación de Navier-Stokes (3.1) queda

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (3.4)$$

El segundo término del lado izquierdo lo podemos cambiar utilizando la propiedad vectorial

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla (\mathbf{v}^2/2) - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (3.5)$$

donde $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ es la vorticidad del flujo.

Ahora, dado que las líneas de corriente cumplen con ser paralelas al vector velocidad, si proyectamos e integramos la ecuación (3.4) sobre una línea de corriente S , donde la tangente de la línea de corriente está dada por $\hat{S} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, tenemos entonces que, como $\hat{S} \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) = 0$, la integral se reduce a:

$$\int \hat{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dS + \int \hat{S} \cdot \nabla \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) dS = - \int \hat{S} \cdot \nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) dS + \int \nu \hat{S} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} dS. \quad (3.6)$$

A partir de esta ecuación encontraremos una ecuación para cuando el chorro va de bajada y otra para cuando va de subida. Debido a la simetría axial del oscilador tenemos $\mathbf{v} = v_r \hat{e}_r + v_z \hat{e}_z$, además el eje axial Z es una línea de corriente. De forma que si tomamos al eje axial como la línea de corriente S sobre la cual vamos a integrar la ecuación de Navier-Stokes, la integral (3.6) se simplifica. Entre otras cosas la proyección del laplaciano de la velocidad sobre el eje, presente en el término viscoso, expresado en coordenadas cilíndricas se reduce a:

$$\begin{aligned} \hat{e}_z \cdot \nabla^2 \mathbf{v} &= \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \Big|_{r=0} + \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \\ &= \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \right]_{r=0}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ahora queda hacer la integral dada por la ecuación (3.6) sobre la línea de corriente para encontrar las ecuaciones que modelen la evolución de la altura h .

3.1. Ecuación de bajada

Vamos a encontrar una ecuación para el chorro de agua salada que baja dentro del recipiente de agua dulce, fijándonos en la dinámica del agua salada, es decir la ecuación de bajada.

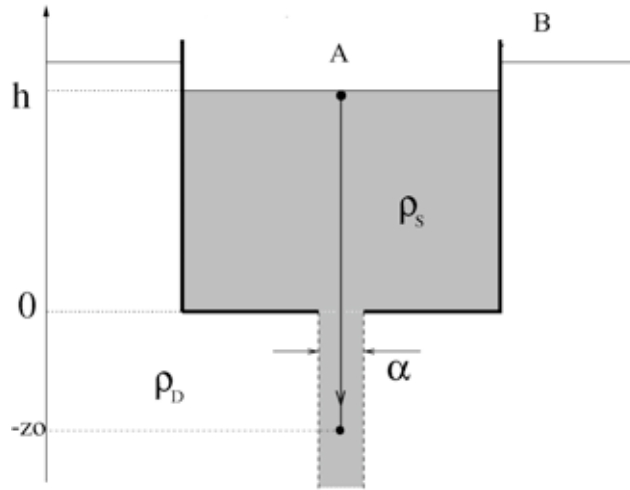


Figura 3.2: Esquema para el chorro de bajada con la línea de corriente que va de h a $-z_0$, sobre la que integramos la ecuación de Navier-Stokes.

Como mencionamos anteriormente, si hay simetría axial, el eje axial Z es una línea de corriente dentro del chorro de agua salada, que tomamos desde abajo de la base del recipiente $z = -z_0$ hasta la altura, o nivel del agua $z = h$ en el recipiente interno (figura 3.2). De forma que en este caso, la densidad del fluido en la línea de corriente va a ser la salada ρ_s y $dS = dz$, $\hat{S} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial z}$ y $\hat{S} \cdot \mathbf{v} = v_z$. Sustituyendo lo anterior en la integral de línea de la ecuación de Navier-Stokes (3.6) se obtiene:

$$\int_{-z_0}^h \frac{\partial v_z}{\partial t} dz + \int_{-z_0}^h \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_z^2}{2} \right) dz = - \int_{-z_0}^h \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho_s} + gz \right) dz + \int_{-z_0}^h \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \right] dz. \quad (3.8)$$

Como podemos observar, algunos de los términos de la igualdad son directamente integrables, de forma que los términos que nos causan problemas son el primero, que nos indica que el flujo no es estacionario, al tener una derivada respecto al tiempo, y la segunda parte del lado derecho que nos da una contribución de la viscosidad, de forma que la ecuación (3.8) queda:

$$\int_{-z_0}^h \frac{\partial v_z}{\partial t} dz + \frac{1}{2}h'^2 + \frac{p_{atm}}{\rho_s} + gh - \left(\frac{1}{2}v(-z_0)^2 + \frac{p(-z_0)}{\rho_s} - gz_0 \right) - \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial v_z(h)}{\partial z} - \frac{\partial v_z(-z_0)}{\partial z} \right) - 2\frac{\mu}{\rho} \int_{-z_0}^h \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} dz = 0, \quad (3.9)$$

donde h' es la velocidad de los elementos de fluido en h (la prima indica derivada en el tiempo y $h = h(t)$), es decir la velocidad con la que baja el nivel del agua en el recipiente de agua salada, p_{atm} es la presión en la superficie del agua salada, que corresponde con la presión atmosférica, $p(-z_0)$ es la presión en $z = -z_0$, es decir la presión del chorro a una distancia z_0 debajo del orificio, y $v_z(-z_0)$ es la magnitud de la velocidad en este mismo punto. La velocidad $v_z(-z_0)$ la podemos estimar utilizando un argumento de conservación de masa. Tenemos que la pérdida de agua en el recipiente (dada por el área del recipiente A , y la velocidad a la que disminuye el nivel de agua h'), es la cantidad de agua que pasa por el orificio de área α , es decir $h'A = \int v_z dA$, de donde estimamos que la velocidad media del agua a la salida del orificio está relacionada con la velocidad a la que baja el nivel de agua del recipiente por medio de las áreas $v_0 \approx h' \frac{A}{\alpha}$, y considerando que el mismo gasto se da en cualquier sección transversal del chorro para una zona que abarca la salida del orificio y $-z_0$, el punto hasta el cual integramos, entonces:

$$v_z(-z_0) \approx h' \frac{A}{\alpha}, \quad (3.10)$$

De esta forma, los únicos términos que nos faltan por estimar en la ecuación (3.9) son el inercial dado por

$$\int_{-z_0}^h \frac{\partial v_z}{\partial t} dz, \quad (3.11)$$

la presión debajo del orificio, $p(-z_0)$ y el viscoso dado por:

$$\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial v_z(h)}{\partial z} - \frac{\partial v_z(-z_0)}{\partial z} \right) + 2\frac{\mu}{\rho} \int_{-z_0}^h \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} dz. \quad (3.12)$$

Los cuales estimaremos en las siguientes secciones, utilizando ideas de flujo potencial, la ecuación de Gibbs-Duheim y analizando la forma de la velocidad cuando $r \rightarrow 0$, para evaluar la aportación del término viscoso.

3.2. Ecuación de subida

Ahora vamos a encontrar la ecuación para el chorro de agua dulce que sube dentro del recipiente de agua salada, fijándonos en la dinámica del agua dulce, es decir, encontraremos la ecuación de subida.

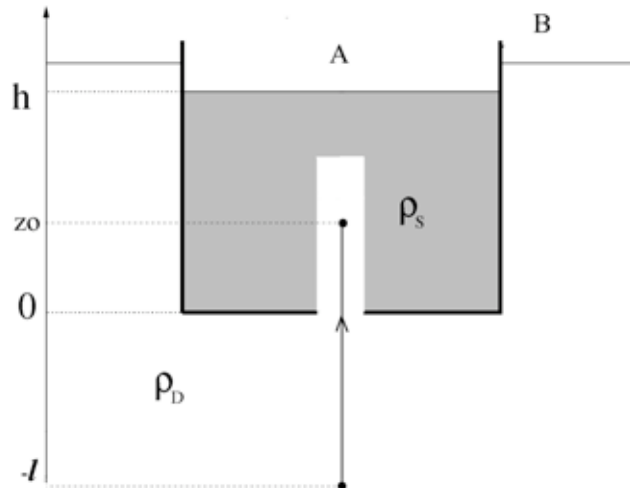


Figura 3.3: Esquema para el chorro de subida con la línea de corriente que va de $-l$ a z_0 , sobre la que integramos la ecuación de Navier-Stokes.

En la subida, la línea de corriente \hat{S} también va a ir a lo largo del eje Z ($\hat{S} = \hat{e}_z$), pero ahora dentro del agua dulce, desde una profundidad $-l$ donde el agua está en reposo, hasta una

distancia z_0 , por arriba del orificio (figura 3.3). De forma que para esta línea de corriente también se cumple que $dS = dz$, $\hat{S} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial S}$, $\hat{S} \cdot \mathbf{v} = v_z$, pero ahora la densidad es ρ_d , de manera que, en este caso la integral de línea de la ecuación de Navier-Stokes (3.6) queda:

$$\int_{-l}^{z_0} \frac{\partial v_z}{\partial t} dz + \int_{-l}^{z_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_z^2}{2} \right) dz = - \int_{-l}^{z_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho_d} + gz \right) dz + \int_{-l}^{z_0} \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \right] dz. \quad (3.13)$$

Integrando las partes que están completas directamente, y utilizando que $v(-l) = 0$:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^{z_0} \frac{\partial v_z}{\partial t} dz + \frac{1}{2} v(z_0)^2 + \frac{p(z_0)}{\rho_d} - \frac{p(-l)}{\rho_d} + g(z_0 + l) \\ - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial v(z_0)}{\partial z} - 2 \frac{\mu}{\rho} \int_{-l}^{z_0} \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} dz = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde $p(-l)$ es la presión en el recipiente de agua dulce a una profundidad $-l$ donde el agua está en reposo y la presión es hidrostática, dada por la atmosférica y el peso del agua dulce por encima de dicho punto, es decir

$$p(-l) = p_{atm} + g\rho_d(h_{ext} + l), \quad (3.15)$$

donde h_{ext} es la altura o nivel de agua del recipiente de agua dulce, y por conservación de volumen total V , está relacionado con el nivel del recipiente de agua salada h mediante:

$$\begin{aligned} V &= Bh_{ext} + Ah, \\ \Rightarrow h_{ext} &= \frac{V - Ah}{B}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Sustituyendo la presión en $-l$ en la ecuación (3.15,) y la altura externa dada por la ecuación (3.16), en la ecuación de subida (3.14)

$$\begin{aligned} \int_{-l}^{z_0} \frac{\partial v_z}{\partial t} dz + \frac{1}{2} v(z_0)^2 + \frac{p(z_0)}{\rho_d} - \frac{p_{atm}}{\rho_d} + g \left(z_0 - \frac{V - Ah}{B} \right) \\ - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial v(z_0)}{\partial z} - 2 \frac{\mu}{\rho} \int_{-l}^{z_0} \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} dz = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Donde, al igual que en la ecuación (3.10), por conservación de masa $v(z_0) \approx h' \frac{A}{\alpha}$ y los términos que nos falta estimar, son el inercial:

$$\int_{-l}^{z_0} \frac{\partial v_z}{\partial t} dz, \quad (3.18)$$

la presión arriba del orificio, $p(z_0)$ y el viscoso:

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial v_z(z_0)}{\partial z} + 2\frac{\mu}{\rho} \int_{-l}^{z_0} \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} dz. \quad (3.19)$$

Términos que son muy similares a los que nos falta estimar en la ecuación de bajada, por lo que en las siguientes secciones utilizaremos los mismos métodos y argumentos parecidos para estimarlos, que los que utilizaremos para estimar los términos que nos faltan en la ecuación de bajada.

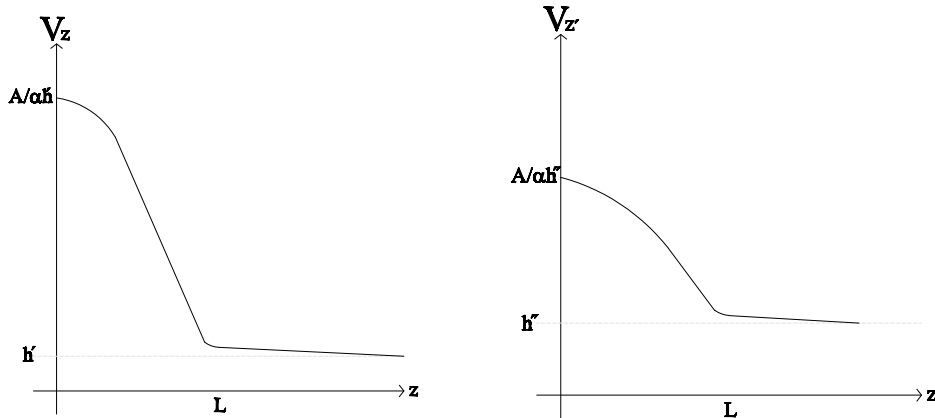
3.3. El término inercial

El término inercial está dado por el área bajo la curva del cambio temporal de la velocidad del chorro a lo largo del eje de simetría. De los experimentos se observa que, lejos del orificio, la velocidad es uniforme, es decir, lejos del orificio el fluido se mueve aproximadamente como un cuerpo rígido con velocidad h' y aceleración h'' , comportamiento que no se da cerca del orificio, donde el flujo convergente es mucho más rápido y la velocidad debe llegar a ser del orden de $\frac{A}{\alpha}h'$. Utilizando el mismo argumento de conservación de masa que en la sección 3.1 podemos aproximar la aceleración cerca del orificio por $\frac{A}{\alpha}h''$, de manera que es razonable pensar que las curvas de velocidad v_z y aceleración $\frac{\partial v_z}{\partial t}$ cualitativamente se ven como en la figura (3.4).

De manera que una buena aproximación del área bajo la curva, tanto entre h y $-z_0$ como entre z_0 y $-l$, está dada por la suma del área del triángulo de altura $\frac{A}{\alpha}h''$ y base L más el área de un rectángulo de altura $\frac{A}{\alpha}h''$ y base z_0 .

$$\int \frac{\partial v_z}{\partial t} dz \approx \frac{A}{\alpha} h'' \left(\frac{L}{2} + z_0 \right). \quad (3.20)$$

Donde el área del triángulo es el equivalente a la integral de línea de h a cero o cero a $-l$ y el rectángulo de cero a $-z_0$ o de cero a z_0 dependiendo si estamos en la bajada o en la subida.



(a) Forma de la velocidad sobre el eje axial. (b) Forma de la aceleración sobre el eje axial.

Figura 3.4: Gráficas cualitativas de la velocidad y la aceleración en el eje Z .

Sin embargo, nos falta saber cómo es que escala L en relación al tamaño del orificio. Para lo cual vamos a utilizar el conocido problema del tanque vaciándose y del flujo potencial a través de una apertura [8]. En el problema del tanque vaciándose, se observa que el chorro se contrae poco después de salir del agujero, este efecto llamado la “vena contracta” se predice adecuadamente usando flujo potencial, es decir que el flujo potencial rescata las escalas y dimensiones del problema real a pesar de despreciar viscosidad y asumir un flujo irrotacional bidimensional.

Se encuentra (Apéndice A), que el potencial complejo $F(z)$ para el flujo potencial a través de una apertura (figura 3.5) está dado por:

$$F(z) = -\frac{2C_c l U}{\pi} \log \left[\cosh \left[\log \left(U \frac{dz}{dF} \right) - i\pi \right] \right] + iC_c l U. \quad (3.21)$$

Pero lo que nos interesa en este caso es la velocidad compleja para darnos una idea de cómo

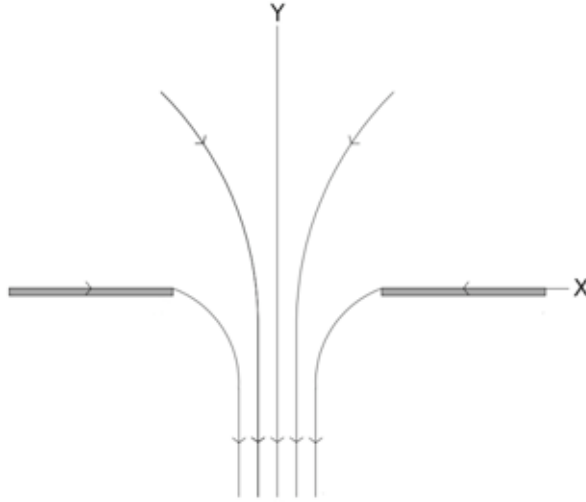


Figura 3.5: Flujo potencial a través de una apertura en dos dimensiones.

es el perfil de velocidades de nuestro chorro. La velocidad compleja está dada por $W = \frac{dF}{dz}$, de manera que derivamos respecto a z el potencial (ecuación (3.21)) y reconocemos que $\frac{dz}{dF} = 1/W$,

$$W(z) = \frac{dF}{dz} = \frac{2C_c l}{\pi} \left[\frac{U^2 - W^2}{U^2 + W^2} \right] \frac{U}{W^2} \frac{dW}{dz}. \quad (3.22)$$

Adimensionalizamos con el radio del agujero l , y la velocidad del chorro lejos del agujero U , de manera que la ecuación (3.22) queda

$$\frac{d\Omega}{dZ} = \frac{\Omega^2}{A} \left[\frac{1 + \Omega^2}{1 - \Omega^2} \right], \quad (3.23)$$

donde $W = \Omega U$, $z = Zl$ y $A = \frac{2C_c}{\pi}$.

Pasando la ecuación a su forma integral y resolviendo por fracciones parciales obtenemos:

$$Z = A \left[-\frac{1}{\Omega} + i \log \left(\frac{1 + i\Omega}{1 - i\Omega} \right) \right] + C, \quad (3.24)$$

donde C es una constante de integración.

Recordando que $Z = X + iY$ y $\Omega = u - iv$, observamos que $X = 0$ es una línea de corriente, de forma que, $\Omega = -iv$, $Z = iY$ y:

$$Y = A \left[-\frac{1}{v} + \log \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \right] + C. \quad (3.25)$$

Graficando esta ecuación obtuvimos un perfil de velocidades para el chorro en su eje axial (Figura 3.6).

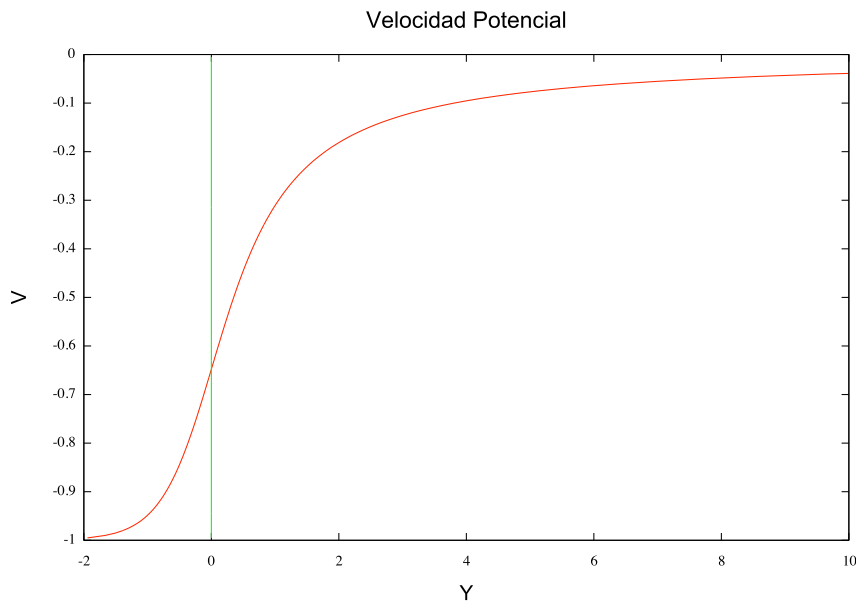


Figura 3.6: Componente vertical de la velocidad sobre el eje Z para el flujo potencial, a través de un orificio.

En la gráfica 3.6 podemos observar que el perfil de velocidades coincide cualitativamente con el supuesto en la figura 3.4 y que la distancia característica en la que se da el cambio abrupto de velocidad va de $Y = -2$ a $Y = 2$ de forma que es de cuatro veces el radio del orificio $l = \sqrt{\alpha/\pi}$, lo cual nos da el valor estimado de L en la ecuación (3.20), la cual queda:

$$\int \frac{\partial v_z}{\partial t} dz \approx 2h'' \frac{A}{\sqrt{\pi\alpha}} + h'' \frac{A}{\alpha} z_0. \quad (3.26)$$

Estos resultados respaldan la suposición razonable que considera que los cambios sensibles del estado de movimiento de los elementos de fluido al aproximarse al orificio se dan en distancias escaladas con el radio del orificio.

3.4. La presión en el chorro

Ya estimamos el término inercial, pero aun nos falta estimar cómo va la presión $P(-z_0)$ y $P(z_0)$ en el chorro en nuestras ecuaciones de movimiento (3.9) y (3.14).

La ecuación de Gibbs-Duhem (2.58), nos dice que los gradientes de potencial químico producen gradientes de presión. De forma que los gradientes de presión son proporcionales a los gradientes en la concentración de sal; utilizando que la concentración y la densidad están relacionadas vía la ecuación (2.12) llegamos a:

$$\nabla P \propto \nabla \rho. \quad (3.27)$$

Esta ecuación nos dice que la diferencia de presiones entre dos puntos muy cercanos, que pueden estar, uno inmediatamente dentro del chorro (en la frontera interna del chorro), y el otro inmediatamente fuera del él (en la frontera externa del chorro), es proporcional a la diferencia de densidades entre estos mismos puntos. Es decir que para puntos muy cercanos el cambio en la presión es proporcional al cambio en la densidad

$$\Delta P \simeq K_{\rho\rho} \Delta \rho. \quad (3.28)$$

Donde (veáse Apéndice B) $\Delta \rho = \rho_d - \rho_s$ cuando el chorro va hacia abajo, $\Delta \rho = \rho_s - \rho_d$ cuando va hacia arriba, y la constante de proporcionalidad $K_{\rho\rho}$ es negativa, pues el salto en la densidad se compensa con el salto en la presión.

Por otro lado sabemos que un flujo de densidad constante, unidireccional, incompresible y con simetría axial, sólo depende de la coordenada radial, es decir $\mathbf{v} = v_z(r)\hat{e}_z$, algo que apa-

rentemente sucede dentro de los chorros. La ecuación de Navier-Stokes (3.1) nos dice que para este tipo de flujos, la presión sólo depende de la componente z , es decir que al movernos radialmente de un punto a otro la presión no cambia mientras la densidad se mantiene constante. En el oscilador esto implica que si a una distancia z_0 del orificio el flujo es unidireccional dentro y fuera del chorro (figura 3.7), entonces todos los puntos fuera del chorro a está misma altura, tendrán la misma presión. Además, todos los puntos dentro del chorro a esta altura, tendrán una presión $P_{int} = P(z_0)$ que difiera de la presión externa P_{ext} , debido únicamente al gradiente de densidades que existe en la frontera del chorro (ecuación 3.28). Esto nos lleva a estimar la presión en z_0 de la forma:

$$\begin{aligned}
 P(z_0) &= P_{int} = P_{ext} - \Delta P \\
 &\simeq P_{ext} - K_{\rho\rho}\Delta\rho.
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

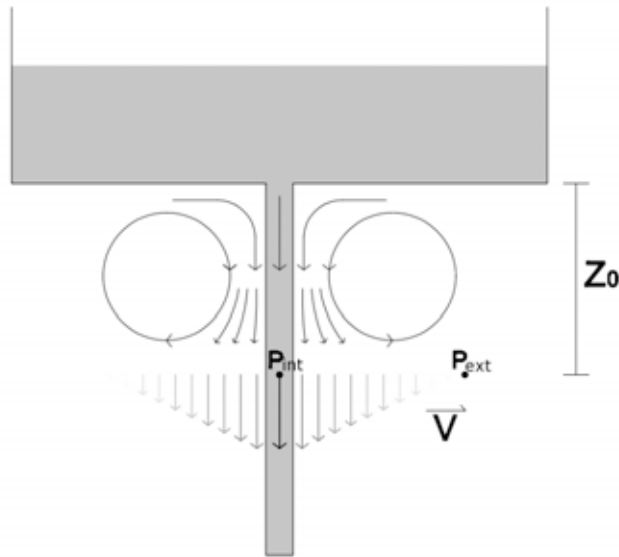


Figura 3.7: Esquema del flujo. Pasando la zona donde se crean vórtices, el flujo es unidireccional.

Observaciones experimentales muestran que cerca del orificio se forman vórtices alrededor del chorro (figura 3.8). Elegimos una distancia z_0 del orificio que supere estos vórtices, tal

que podamos aproximar (con sustento en observaciones experimentales) al flujo en z_0 por un flujo unidireccional (figura 3.7).

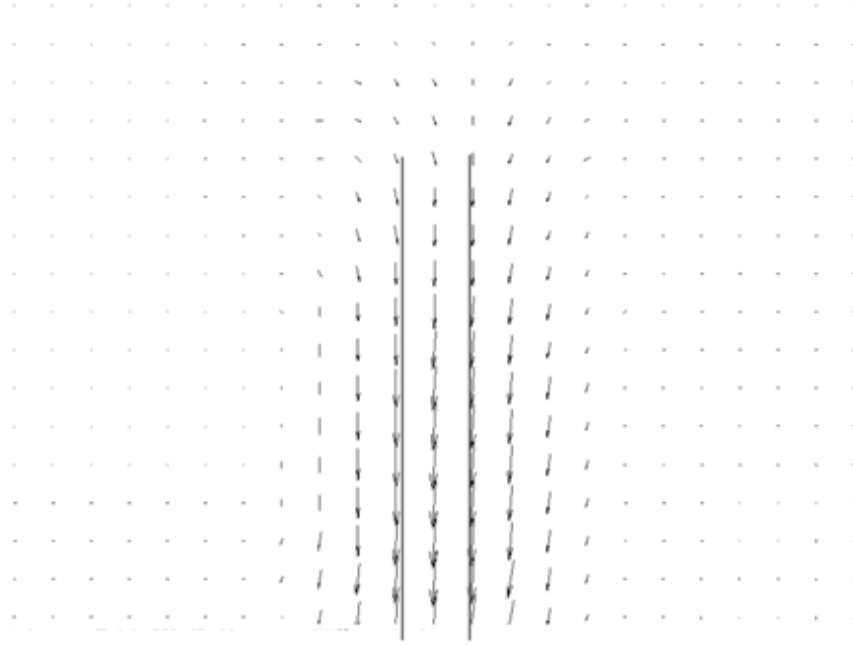


Figura 3.8: PIV de los vórtices que se forman alrededor del chorro a la salida del orificio. Las líneas paralelas indican el ancho del chorro. Realizado por Martha Yadira Salazar Romero en el Laboratorio de Reología del IIM de la UNAM.

Así tenemos que, a una distancia z_0 de la base del recipiente pequeño, la presión en el eje Z es igual a la presión en la frontera interna del chorro. Y la presión en la frontera externa del chorro es la misma que lejos del chorro. Lejos del chorro, consideremos que el agua está en reposo y la presión es la estática dada por la suma de la presión atmosférica más la hidrostática. Es decir la presión externa en $-z_0$ está dada por:

$$P_{ext}(-z_0) = P_{atm} + g\rho_d(h_{ext} + z_0), \quad (3.30)$$

y en z_0 por:

$$P_{ext}(z_0) = P_{atm} + g\rho_s(h - z_0). \quad (3.31)$$

De manera que de acuerdo a (3.29) y (3.30) la presión en el chorro en la ecuación de bajada queda estimada por:

$$P(-z_0) = P_{atm} + g\rho_d(h_{ext} + z_0) - K_{\rho\rho}(\rho_d - \rho_s),$$

y usando (3.16)

$$P(-z_0) = P_{atm} + g\rho_d \left(\frac{V - Ah}{B} + z_0 \right) + K_{\rho\rho}(\rho_s - \rho_d), \quad (3.32)$$

y en la ecuación de subida como

$$P(z_0) = P_{atm} + g\rho_s(h - z_0) - K_{\rho\rho}(\rho_s - \rho_d). \quad (3.33)$$

Una vez que ya tenemos una estimación para la presión en el chorro, tanto en la ecuación de bajada $P(-z_0)$ como en la de subida $P(z_0)$, sólo nos queda tratar con el término viscoso.

3.5. El término viscoso

En principio, queremos desechar la viscosidad, dado que su efecto es frenar o amortiguar al sistema y únicamente buscamos modelar su comportamiento mientras la diferencia de densidades y el periodo de las oscilaciones se mantengan constantes.

La primera parte de los términos viscosos (ecuaciones (3.12) y (3.19)) está dada por el cambio a lo largo del eje Z de la velocidad. En la sección 3.4 mencionamos que dentro de los chorros, en la vecindad de z_0 , el campo de velocidades es aproximadamente de la forma, $\mathbf{v} = v_z \hat{e}_z$, y por incompresibilidad $v_z = v_z(r)$, de modo que $\frac{\partial v_z(-z_0)}{\partial z} \approx 0 \approx \frac{\partial v_z(z_0)}{\partial z}$, por lo menos lejos de donde el chorro impacta, mientras que en la sección 3.3 mencionamos que para la ecuación de bajada, cerca de la superficie el agua, se mueve como un cuerpo rígido. Lo cual pudimos observar, para flujo potencial en la figura 3.6, pues lejos del orificio la pendiente de la gráfica

es muy cercana a cero, lo cual significa que $\frac{\partial v_z(h)}{\partial z} \approx 0$. Así que el término viscoso se reduce a

$$2\frac{\mu}{\rho} \int_{-z_0}^h \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} dz, \quad (3.34)$$

en la ecuación de bajada y,

$$2\frac{\mu}{\rho} \int_{-l}^{z_0} \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} dz, \quad (3.35)$$

en la de subida.

Como ya habíamos mencionado antes, la velocidad es máxima en $r = 0$, de forma que $\frac{\partial v_z}{\partial r}(r = 0) = 0$ para toda z , además, las observaciones muestran que lejos del orificio el chorro es uniforme, supondremos que el perfil de la velocidad cerca del eje es lo suficientemente chato (figura 3.9) como para que $\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}|_{r=0} = 0$ lejos del agujero. La única aportación de la viscosidad sería cerca del orificio, donde los elementos de fluido sufren una deformación considerable. Sin embargo vamos a suponer que incluso cerca del orificio el perfil de velocidades es lo suficientemente plano como para anular los términos viscosos (3.34 y 3.35), pues no queremos que se amortigüen las oscilaciones, además de que no tenemos una mejor aproximación para el término.

Una vez despreciado el término viscoso, y sustituyendo en la ecuación de bajada (3.9) y en la de subida (3.14), las ecuaciones para la presión en $-z_0$, ecuación (3.32) y z_0 , ecuación (3.33) respectivamente, así como la velocidad en estos mismos puntos, ecuación (3.10), y el término inercial, ecuación (3.26), llegamos a las siguientes ecuaciones diferenciales en h , la altura del nivel del agua del recipiente de agua salada:

$$\begin{aligned} h'' \frac{A}{\alpha} \left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} + z_0 \right) + \frac{h^2}{2} \left[1 - \left(\frac{A}{\alpha} \right)^2 \right] + hg \left(\frac{\rho_d A}{\rho_s B} + 1 \right) \\ + gz_0 \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_s} \right) - g \frac{\rho_d V}{\rho_s B} - K_{\rho p} \frac{\rho_s - \rho_d}{\rho_s} = 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

para la bajada, y

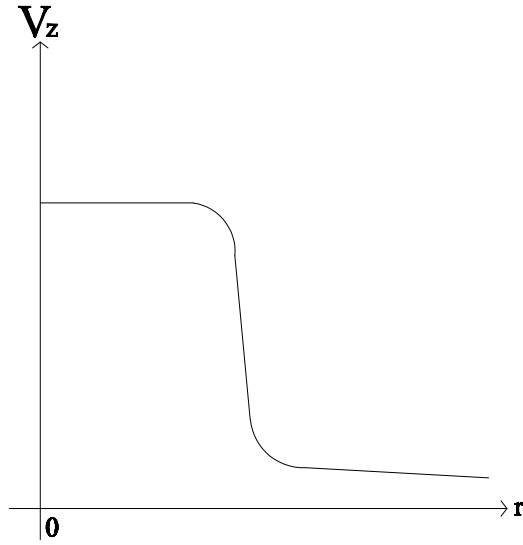


Figura 3.9: Forma en la que v_z depende del radio alrededor del eje axial lejos del orificio.

$$\begin{aligned}
 & h'' \frac{A}{\alpha} \left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} + z_0 \right) + \frac{h'^2}{2} \left(\frac{A}{\alpha} \right)^2 + hg \left(\frac{\rho_s}{\rho_d} + \frac{A}{B} \right) \\
 & + gz_0 \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_d} \right) - g \frac{V}{B} - K_{\rho\rho} \frac{\rho_s - \rho_d}{\rho_d} = 0,
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

para la subida.

De forma que ya encontramos un par de ecuaciones que modelan el sistema. Ahora, para ver que tan bien lo hacen, resolveremos el sistema (3.36, 3.37) numéricamente y compararemos con los resultados experimentales disponibles.

Capítulo 4

Resultados Numéricos

En el capítulo anterior encontramos dos ecuaciones diferenciales que modelan la evolución de nuestro sistema, una para la subida y otra para la bajada del chorro de agua. En este capítulo primero resolveremos numéricamente al sistema de ecuaciones (3.36), (3.37), para encontrar la dinámica de las oscilaciones dada por nuestro modelo y comparar estos resultados con los resultados tanto numéricos como experimentales de Yoshikawa [24]. Una vez resuelto el sistema lo perturbaremos de forma análoga a lo hecho por González y Arce [3] y analizaremos la información que nos dé nuestro modelo respecto a la observación experimental. Para resolver las ecuaciones, primero necesitamos simplificar la manipulación del sistema, lo que lograremos adimensionalizando las ecuaciones.

4.1. Adimensionalización

Las ecuaciones de bajada (3.36), y subida (3.37), en su forma adimensional, están dadas por:

$$L\ddot{H} = dc - H(1 + bd) - Q(1 - d) + \epsilon(d - 1) - \frac{1}{2}\dot{H}^2(1 - a^2), \quad (4.1)$$

y

$$L\ddot{H} = c - H \left(b + \frac{1}{d} \right) - Q \left(\frac{1}{d} - 1 \right) + \epsilon \left(\frac{1}{d} - 1 \right) - \frac{1}{2} \dot{H}^2 a^2, \quad (4.2)$$

Las variables adimensionales están dadas por:

$$\tau = t \sqrt{\frac{g}{h_0}}, \quad H = \frac{h}{h_0}, \quad (4.3)$$

$$\dot{H} = \frac{dH}{d\tau}, \quad \ddot{H} = \frac{d^2H}{d\tau^2},$$

y las constantes están definidas por:

$$a = \frac{A}{\alpha}, \quad b = \frac{A}{B},$$

$$c = \frac{V}{Bh_0}, \quad d = \frac{\rho_d}{\rho_s}, \quad (4.4)$$

$$\epsilon = \frac{z_0}{h_0}, \quad Q = -\frac{K_{pp}}{gh_0},$$

$$L = \frac{A}{h_0} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi\alpha}} + \frac{z_0}{\alpha} \right).$$

Las ecuaciones tienen una primera integral que se puede resolver analíticamente, dicha solución se encuentra en el Apéndice C.

Cada ecuación tiene un punto de equilibrio, que se da para un valor constante de H ; para la bajada:

$$H_{beq} = \frac{cd - Q(1-d) - \epsilon(1-d)}{1+bd}, \quad (4.5)$$

y para la subida por

$$H_{seq} = \frac{cd - Q(1-d) + \epsilon(1-d)}{1+bd}. \quad (4.6)$$

El análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio está en el Apéndice D.

En nuestro modelo las oscilaciones se dan por que cada ecuación tiene un punto de equilibrio diferente, de forma que nos va a arrojar oscilaciones alrededor de estos dos puntos. Esperamos que debido al término inercial la amplitud de las oscilaciones sea un poco mayor que la distancia entre los puntos de equilibrio, pues cada solución se pasa un poco de su punto de equilibrio. La distancia entre los puntos de equilibrio está dada por,

$$\Delta H_{eq} = H_{seq} - H_{beq} = 2 \frac{\epsilon(1-d)}{bd+1}. \quad (4.7)$$

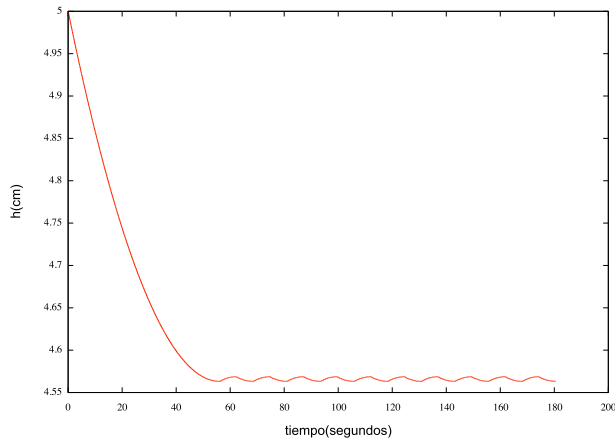
Así que la amplitud de las oscilaciones aproximada por ΔH_{eq} depende tanto de los cocientes entre las densidades y entre las áreas de los recipientes como de la distancia característica ϵ necesaria para superar los vórtices.

4.2. Primeros resultados.

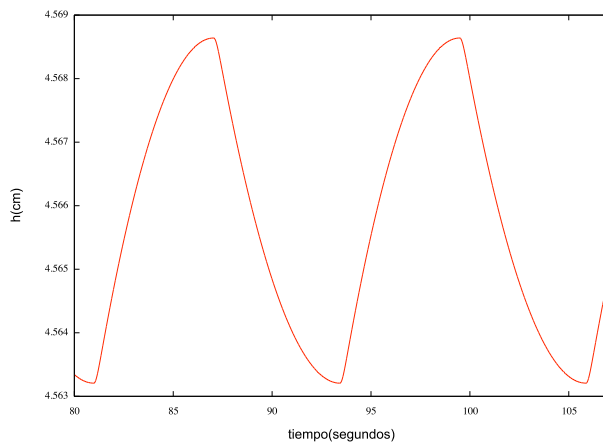
Resolvimos numéricamente las ecuaciones (4.1) y (4.2) sin perturbar utilizando los mismo parámetros experimentales que Yoshikawa [24]. Es decir en la figura (3.1) $A = 15.9cm^2$, $B = 62.63cm^2$, $\alpha = 7.85 \times 10^{-3}cm^2$, $\rho_s = 1.11 \frac{g}{cm^3}$, $\rho_d = 1.0 \frac{g}{cm^2}$, $h_0 = 5.0cm$ y utilizando la ecuación (4.7) ajustamos $\epsilon = 0.6 \frac{\sqrt{\alpha}}{h_0 \sqrt{\pi}} = 6 \times 10^{-3}$ para que la amplitud de las oscilaciones $\approx \Delta h_{eq}$ estuviera alrededor de los $50\mu m$ observados experimentalmente.

Para los cálculos numéricos utilizamos Runge-Kutta de orden cuatro, con la condición de que cuando la velocidad \dot{H} es negativa el programa resuelva la ecuación de bajada, y cuando es positiva resuelve la de subida.

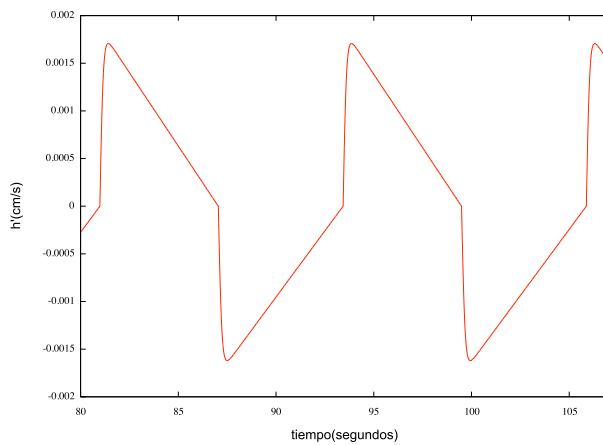
Los resultados de dichos cálculos numéricos se observan en la figura 4.1, donde podemos ob-



(a) Primera descarga y oscilaciones subsecuentes



(b) Acercamiento a un par de ciclos.



(c) Variación de la velocidad del chorro.

Figura 4.1: Soluciones numéricas para los siguientes valores de los parámetros adimensionales: $a = 2025$, $b \approx 0.18$, $c \approx 1.18$, $d \approx 0.9$, $\epsilon = 0.006$, $Q = 0.17$, $L = 52.65$ que corresponden a los parámetros del dispositivo experimental de Yoshikawa et al. [24].

servar que las oscilaciones no son simétricas y tienen la misma forma que la de los resultados experimentales reportados por Yoshikawa (Figura 1.3) [24] y Martin [14].

Encontramos que el valor de la constante de proporcionalidad entre el gradiente de presiones y densidades Q únicamente sube y baja los puntos de equilibrio, pero la amplitud, forma y periodo de las oscilaciones se mantienen constantes para todo valor positivo de Q tal que los puntos de equilibrio de H estén entre 0 y 1.

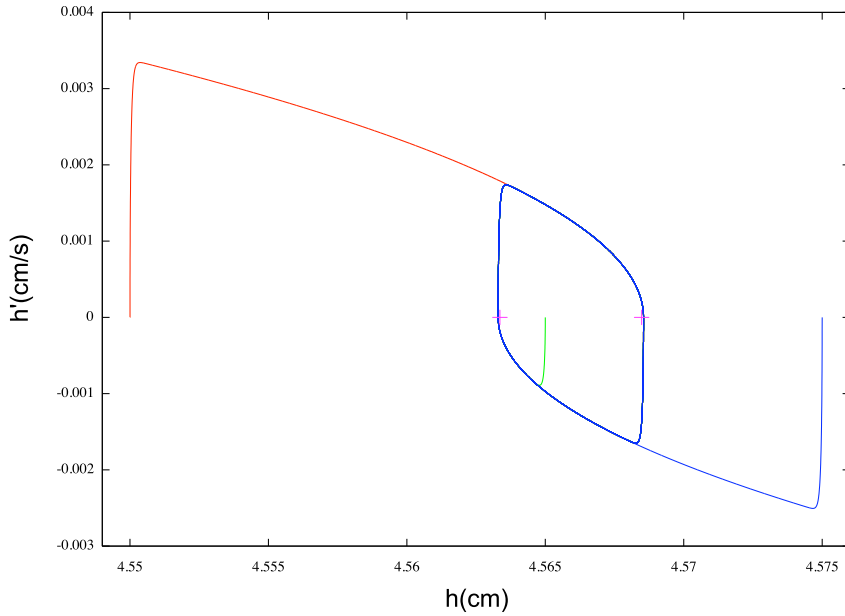


Figura 4.2: Plano Fase: Ciclos límite para tres alturas iniciales diferentes. Los puntos indican los puntos fijos o de equilibrio de cada ecuación. La gráfica corresponde a los parámetros adimensionales en la ecuaciones (4.1) y (4.2) $a = 2025$, $b \approx 0.18$, $c \approx 1.18$, $d \approx 0.9$, $\epsilon = 0.006$, $Q = 0.17$, $L = 52.65$ que corresponden al dispositivo experimental de Yoshikawa et. al [24].

En la figura (4.2) graficamos el plano fase para tres alturas iniciales del nivel de agua salada. El plano fase nos muestra los tres tipos diferentes de condiciones iniciales. Cuando la condición inicial está por encima de los puntos de equilibrio provoca un chorro hacia abajo hasta llegar a los niveles de oscilación. La altura h disminuye llegando a su ciclo límite desde abajo a la derecha. Cuando la condición inicial está entre los dos puntos de equilibrio, podría

pasar cualquiera de las dos situaciones, que el chorro subiera hacia la condición de equilibrio de subida o bajara hacia la de bajada. Sin embargo, el código está programado para que pruebe primero si las condiciones son aptas para que se de una caída, de esta forma en el plano fase se observa que va desde adentro del ciclo límite hacia el primer punto de equilibrio disminuyendo su velocidad. La tercera condición inicial posible es que el nivel del agua salada esté por debajo de su posición de equilibrio, de forma que primero se da un chorro que sube hacia el ciclo límite donde se dan las oscilaciones, es decir, que llega a su ciclo límite desde arriba a la izquierda.

En el plano fase (figura 4.2) notamos que para las condiciones y parámetros usados la inercia no tiene un papel muy importante, pues las trayectorias se van directo al ciclo límite sin ningún rodeo. Repetimos nuestra simulación cambiando el valor de a y L y manteniendo constantes los demás parámetros adimensionales, lo cual en el experimento equivale a aumentar α , el área del orificio. En el plano fase de esta simulación (figura 4.3) observamos que las trayectorias dan un pequeño rodeo antes de llegar al ciclo límite del oscilador. Lo cual nos dice que la inercia es más relevante para orificios de mayor tamaño.

Recuperando las dimensiones, tenemos que la amplitud de las oscilaciones es de $52.5\mu m$ y el periodo de 12.1 segundos, que es la mitad del encontrado experimentalmente por Yoshikawa (24 segundos). Observamos que en cada oscilación, el tiempo de subida es de 5.9 segundos y el de bajada de 6.2 segundos, es decir que el tiempo de bajada es mayor que el de subida. Esta asimetría también la encontró Yoshikawa en sus resultados numéricos, sin embargo en sus resultados experimentales y en los experimentos realizados en el laboratorio de Biofísica de la Facultad de Ciencias de la UNAM la asimetría encontrada es la contraria. Sin embargo en los resultados experimentales realizados en el laboratorio de hidrodinámica de la facultad de ciencias de la UNAM la asimetría encontrada en los tiempos es la misma que la que nos

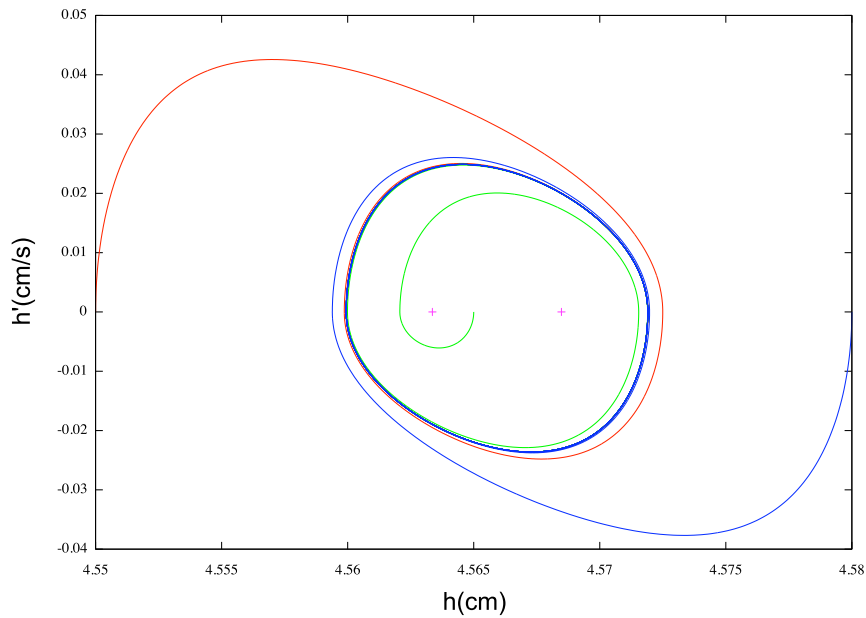


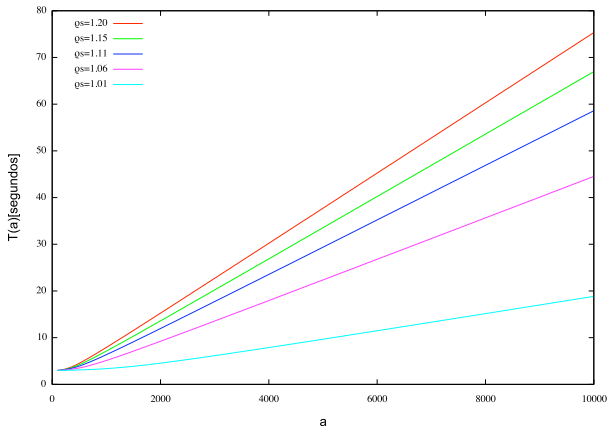
Figura 4.3: Plano Fase: Ciclos límite para tres alturas iniciales diferentes. Los puntos indican los puntos fijos o de equilibrio. La gráfica corresponde a los parámetros adimensionales en la ecuaciones (4.1) y (4.2) $a \approx 126.6$, $b \approx 0.18$, $c \approx 1.18$, $d \approx 0.9$, $\epsilon = 0.006$, $Q = 0.17$, $L \approx 13.2$ que corresponden al dispositivo experimental de Yoshikawa et. al [24] con un orificio de área 0.126cm^2 .

dan nuestros resultados numéricos. Así que los resultados experimentales que nos dicen como es la asimetría no son concluyentes.

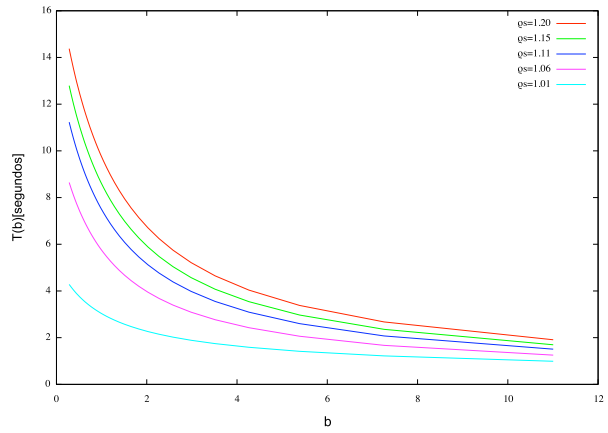
De forma que los resultados del modelo tienen los mismos pros y contras que las simulaciones completas de Yoshikawa. Aunque de manera general describen la forma de las oscilaciones, tienen un error del 50 % en el periodo, nosotros por debajo del experimental y Yoshikawa por encima. Además, ninguno de los resultados explica y refleja de manera correcta la asimetría en los tiempos de subida y de bajada.

Para probar nuestro modelo más allá de lo ya mencionado, encontramos numéricamente cómo dependen los periodos de los parámetros adimensionales a , b y d en la ecuación (4.4), para lo cual, variando uno de estos parámetros y dejando fijos los demás, encontramos el valor del periodo y graficamos (figura 4.4).

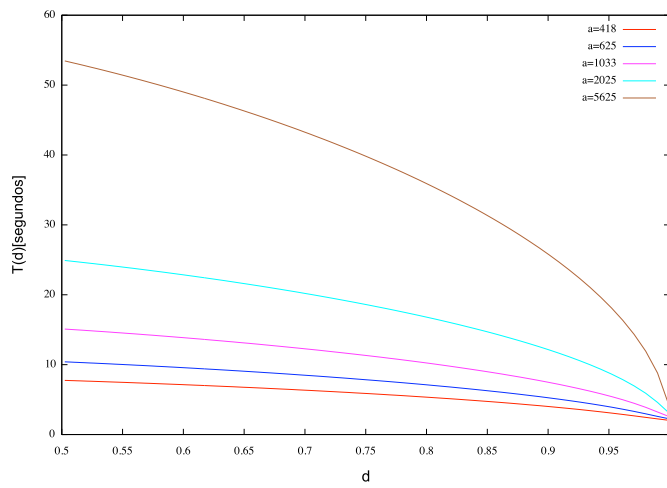
En 4.4(a) observamos como varía el valor del periodo dependiendo del valor de a , para diferentes densidades del agua salada. Variar el valor de a equivale a variar el cociente o relación entre el área del vaso de agua salada y valor del área del orificio α , conforme aumenta el valor de α disminuye el de a . Dado que $\alpha < A$ la gráfica no tiene ningún sentido físico para valores iguales o menores a uno, en realidad sólo esperamos que sea válida para $a \gg 1$. (Pues cuando el orificio es muy grande ya no se observa un chorro que oscila, sino dos chorros simultáneos, uno que baja y otro que sube, que es un fenómeno que no estamos intentando modelar.) Experimentalmente se ha observado que entre menor sea α el periodo dura más, lo cual coincide con el comportamiento creciente de $T(a)$ que nos da los cálculos numéricos de nuestro modelo. Como podemos observar, el modelo predice un comportamiento lineal para $500 < a$.



(a) $a = A/\alpha$.



(b) $b = A/B$.



(c) $d = \rho_d/\rho_s$.

Figura 4.4: Gráficas de la dependencia del periodo de los parámetros adimensionales, a , b y d . Considerando $\rho_d = 1$.

La figura 4.4(b) nos dice cómo cambia el periodo de acuerdo al cociente de las áreas libres de agua dulce y agua salada. De acuerdo a nuestro modelo, si mantenemos constante el tamaño del recipiente de agua salada y aumentamos el tamaño del recipiente exterior, el periodo aumenta, ahora, si reducimos el tamaño del recipiente externo hasta que sea del mismo tamaño que el interno, el periodo se reduce y se va acercando asintóticamente a cero.

Por último en 4.4(c) tenemos cómo varía el periodo con el cociente de densidades. La gráfica sólo tiene sentido físico para $0.83 < d$, debido al punto de saturación de la sal en el agua, $\rho_s < 1.2g/cm^3$ de forma que $0.83 < d$. 4.4(c) nos indica que para dichos valores el periodo aumenta conforme d disminuye o ρ_s aumenta. Para valores de d mayores que 0.83, en la bibliografía encontramos resultados experimentales para el experimento con jeringas, es decir para un oscilador tipo Martin. Dichos resultados están dados por Rincon et al. e indican que no se observa un cambio considerable en el periodo [11], sin embargo en su dispositivo experimental la viscosidad tiene un efecto mucho mayor que en el nuestro, por lo que no podemos basarnos en estos resultados experimentales. Sin embargo, sabemos que en $d = 1$ no debe haber oscilaciones por lo que el periodo se debe ir a cero o a infinito. En la figura 4.4(c) en efecto observamos que en el extremo se va a cero.

Para tratar de verificar nuestros resultados hicimos una serie de experimentos sencillos en diferentes osciladores para tratar de encontrar el comportamiento del periodo. Utilizamos agua salada de cinco densidades diferentes y realizamos una serie de experimentos en los cuales no observamos el comportamiento predicho por nuestro modelo, y tampoco encontramos un comportamiento o tendencia clara en dichos experimentos. Entre los problemas que encontramos en los experimentos fue que al no ser lo suficientemente grandes ninguno de los dos recipientes, los efectos del fondo y superficie afectaban directamente al chorro. El comportamiento de los chorros cerca de la superficie o en el fondo no es considerado en

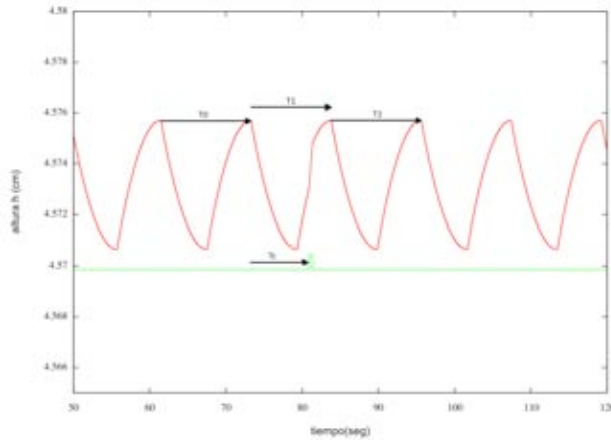
nuestro modelo. Para refutar experimentalmente un comportamiento similar al predicho por 4.4(c), sería necesario hacer una serie de experimentos con un mayor control de la densidad del agua y con recipientes suficientemente grandes para que los bordes y la difusión no afecten el experimento.

La única comparación que podemos hacer de los resultados dados por la figura 4.4, es con lo obtenido por Lagerstedt et. al [1], en donde se reporta que para a y b el periodo es creciente, como se observa en 4.4(a) y 4.4(b). Sin embargo, Lagerstedt encontró que para d el periodo es decreciente, al contrario de lo que encontramos en 4.4(c).

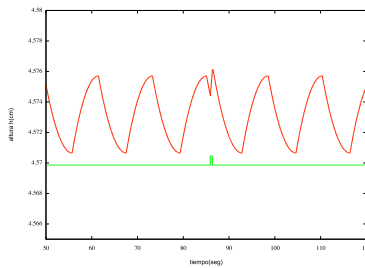
El siguiente paso es perturbar al sistema para ver si responde como los experimentos reportados por Arce, González y Guevara [3]. Para lo cual primero lo perturbaremos con un único pulso y después con un tren de pulsos equidistantes en el tiempo.

4.3. Perturbación del sistema con un solo pulso y curva de reinicio de fases

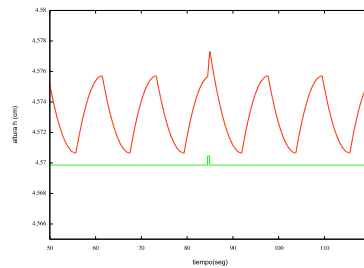
Perturbamos al modelo del oscilador salino con un único pulso que físicamente consiste en inyectarle un volumen de agua al recipiente externo y un tiempo Δt después sacárselo [3]. De forma que después de la perturbación creada por el pulso, el volumen total de agua sea el mismo que el del sistema sin perturbar y que los pulsos no causen un efecto acumulativo en el volumen de agua. Numéricamente, la perturbación consiste en cambiar el valor de c (4.4); el parámetro adimensional que contiene al volumen del sistema en las ecuaciones de bajada (4.1) y de subida (4.2), durante un número de pasos equivalentes al lapso de tiempo en el experimento. Para comparar con los resultados experimentales el pulso durará el 3.7% del tiempo que encontramos que dura periodo natural del oscilador ($T_0 = 12.1$ segundos). El volumen del pulso será del 0.11% del volumen de agua que contiene el sistema. Al igual que



(a) $T_c \approx 0.6T_0$.



(b) $T_c \approx 0.1T_0$.



(c) $T_c \approx T_0$.

Figura 4.5: Efecto de los pulsos a tres intervalos diferentes de acoplamiento T_c .

en el trabajo de González et al., metimos el pulso en diferentes etapas de la oscilación.

Al meter el pulso en el principio de la oscilación (figura 4.5(b)), cuando el chorro va hacia abajo, este provoca que se invierta momentáneamente la dirección del chorro. En cambio al introducir el pulso cuando el chorro va subiendo el sentido del chorro no se ve afectado, pero si su duración, debido a que al meter el pulso la velocidad del chorro aumenta y llega a su estado de equilibrio en un tiempo menor que el que le toma de forma natural al oscilador. Cuando el sistema es perturbado al final de la oscilación (figura 4.5(c)), cuando el chorro va subiendo y esta a punto de invertir su sentido, la perturbación provoca que el punto de equilibrio suba, y por lo tanto la duración del chorro aumente un poco. Al tiempo T_c , desde el inicio del ciclo en el que se mete el pulso se le llama intervalo de acoplamiento. El tamaño de

este intervalo provoca que el tiempo de la siguiente oscilación T_1 se vea afectada de diferentes formas. Para ver dicha reacción se crea la curva llamada de reinicio de fases y se compara con la observación experimental dada por González et al.

La curva de reinicio de fases nos dice cómo responde el sistema a un único pulso a diferentes intervalos de acoplamiento T_c . La fase vieja está dada por el cociente del intervalo de acoplamiento y el periodo natural del oscilador sin perturbar T_0 , es decir $\Phi = T_c/T_0$. La fase nueva nos da la reacción ante la perturbación y está definida por $\Phi' = 1 - T_1/T_0 + T_c/T_0$.

Con nuestros resultados numéricos creamos la curva de reinicio de fases. Así como las gráficas que nos dicen como cambia directamente las duraciones T_1 y T_2 de la primera y la segunda oscilación después del pulso (figura 4.6).

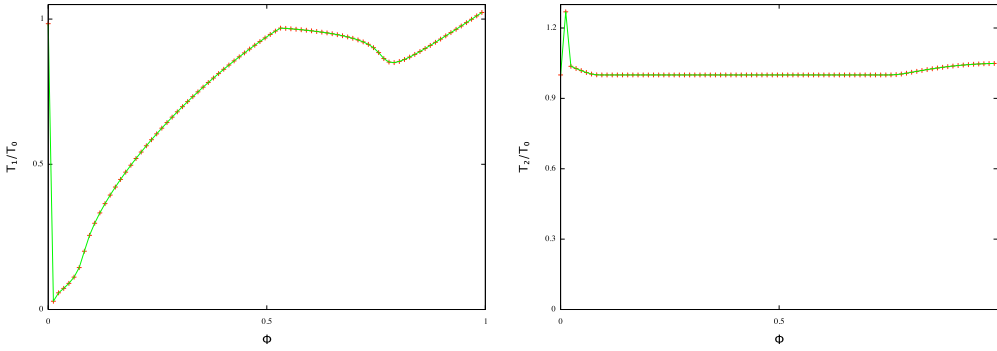
Del comportamiento del modelo observamos que el valor de Q afecta a la curva de reinicio de fases, desplazándola un poco horizontalmente y cambiando radicalmente los valores cerca de los extremos. Para valores de la fase vieja cerca de cero o de uno, el valor de la Q puede cambiar la fase vieja de valores cercanos a cero a valores cercanos a uno. Así, que ajustamos a la $Q = 0.017$ de acuerdo a los resultados experimentales que muestran que para valores de la fase vieja Φ , cercanos a 0 o 1, la fase nueva Φ' , esta alrededor de 1.

La comparación de nuestros resultados numéricos con los experimentales muestra que la forma cualitativa de las gráficas coincide. Sin embargo nuestras gráficas muestran cambios más abruptos, que las dadas por los resultados experimentales (figura 1.5), que son mucho más suaves. Aunque se rescata el comportamiento general de la curva de reinicio de fases, nos damos cuenta que en nuestros resultados para $\Phi \approx 0$ se da un salto o discontinuidad que no se observa en los resultados experimentales, las razones de dicha discordancia pueden ser,

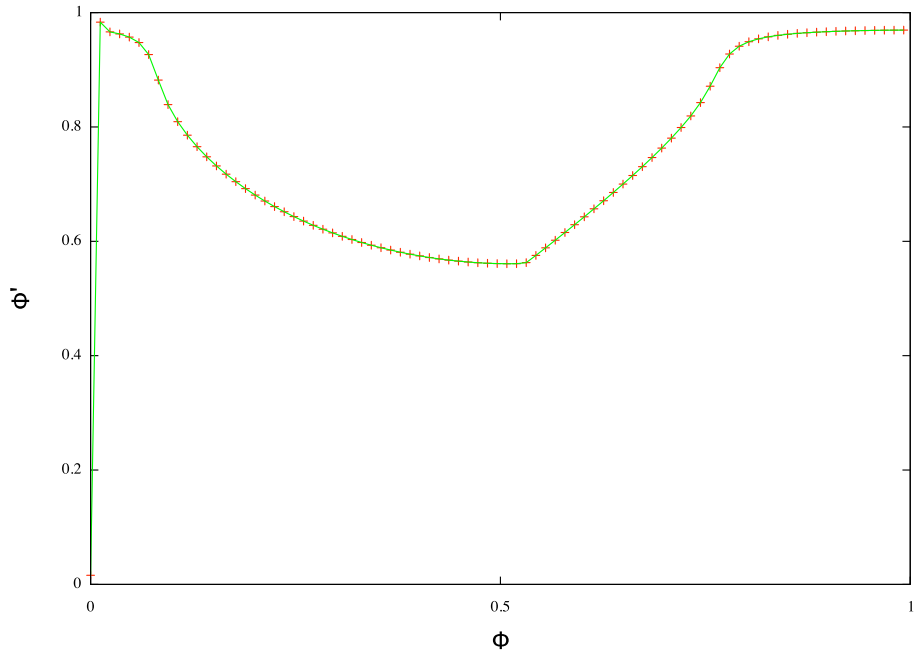
primero que en los resultados experimentales (figura 1.5) en las gráficas equivalentes a las figuras 4.6(a) y 4.6(b) no se observan puntos tan cercanos al cero, y segundo que estamos perturbando nuestro sistema justo cuando el programa está cambiando entre la ecuación de bajada y subida. Este cambio es artificial e instantáneo en el modelo, por lo que no se pretende reflejar el comportamiento del chorro durante el cambio de dirección. La duración del cambio de dirección del chorro es del orden de nuestras perturbaciones, de forma que en $\Phi = 0$ empezamos a meter el pulso mientras utilizamos la ecuación de bajada y lo sacamos mientras utilizamos la de subida. Así que no consideraremos este punto en la comparación de resultados.

La figura 4.6(a) nos muestra que de acuerdo a nuestros cálculos numéricos el efecto general de los pulsos sobre el oscilador es reducir el tiempo T_1 de la oscilación que ocurre durante el pulso. Sin embargo T_1 aumenta cuando el pulso cae muy cerca del final de la oscilación, es decir para $\Phi > 0.98$. El aumento de T_1 respecto a T_0 cuando el sistema es perturbado hacia el final de la oscilación se debe a que el pulso se inyecta cuando el chorro va de subida y el nivel de agua salada h está llegando a su máximo. Al incrementar el volumen de agua en el recipiente externo, aumenta la presión abajo y el punto de equilibrio sube, de forma que el chorro sigue subiendo durante otro pequeño intervalo de tiempo. Dicha situación corresponde a la figura 4.5(c).

En la figura 4.6(b) observamos cómo al perturbar el sistema al principio ($\Phi < 0.12$) y al final ($\Phi > 0.72$) de la oscilación, al sistema de ecuaciones le toma más tiempo recuperarse que cuando las perturbaciones se dan a la mitad del periodo ($0.12 < \Phi < 0.72$), donde el sistema regresa a su estado natural tan solo una oscilación después del pulso. Esto muestra que el ciclo que sigue el sistema es un atractor bastante fuerte.



(a) Cambio de la primera oscilación T_1/T_0 contra la fase vieja $\Phi = T_c/T_0$.
 (b) Cambio de la segunda oscilación T_2/T_0 contra la fase vieja Φ .



(c) Curva de reseteo de fases, fase vieja $\Phi = T_c/T_0$ contra la fase nueva $\Phi' = 1 - T_1/T_0 + T_c/T_0$.

Figura 4.6: Reseteo de fases.

Al igual que en los resultados de González et al. dados en la figura 1.5, la curva de reseteo de fases nos indica los tres comportamientos básicos que dio el oscilador (figura 4.6(c)). Para $0 \leq \Phi < 0.5$, Φ' es mucho mayor que Φ y corresponde a un comportamiento del tipo mostrado en la figura 4.5(b), donde la duración de T_1 es claramente menor que la de T_0 . Para $0.5 < \Phi \leq 0.98$, Φ' es sólo un poco mayor que Φ y, corresponde a un comportamiento como el de la figura 4.5(a), donde el tiempo T_1 se reduce un poco respecto a T_0 . El último tipo de comportamiento se da para $0.98 < \Phi \leq 1$, que corresponde a un comportamiento del tipo de el de la figura 4.5(c), en el cual T_1 es un poco mayor a T_0 . A diferencia de los experimentos, el intervalo de la fase vieja Φ donde se da este último comportamiento es más reducido.

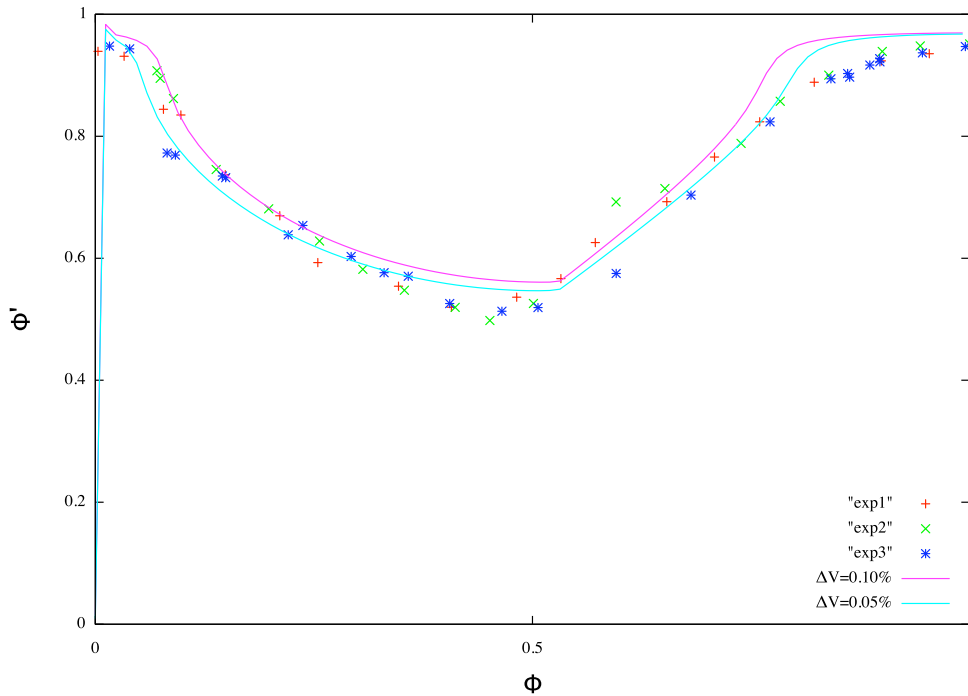


Figura 4.7: Comparación de la curva reseteo de fases entre los resultados experimentales exp1, exp2, exp3, que son los conjuntos de datos de tres realizaciones diferentes del mismo protocolo experimental realizado por González et. al [3] y los resultados del modelo para pulsos del 0.1 % y 0.05 % del volumen total de agua.

Buscando una mejor coincidencia con los resultados experimentales variamos el volumen de los pulsos y comparamos nuestros resultados con los experimentales. La mejor coincidencia la encontramos para pulsos del 0.05 % del volumen del agua. En la figura 4.7 comparamos

nuestros resultados con tres series de resultados experimentales obtenidos por González et. al.

Encontramos que los pulsos del 0.05 % del volumen total de agua son los que mejor se ajustan a los resultados experimentales, ya que al inyectar pulsos de porcentajes mayores, el comportamiento para $\Phi > 0.5$ queda por encima de los resultados experimentales, tal como sucede en la figura 4.7 para pulsos del 0.1 % del volumen. Mientras que para pulsos de volúmenes menores al 0.05 %, se forman picos al principio de la curva y los resultados para $\Phi < 0.5$ quedan por debajo de los resultados experimentales. Esto se debe a que el pulso no es lo suficientemente grande para cambiar el sentido del chorro, sólo disminuye un poco el tiempo de subida o de bajada, lo cual provoca que el valor de la fase nueva sea pequeño.

En la comparación de resultados (figura 4.7) observamos que para $0.50 < \Phi < 0.55$ en los resultados numéricos se forma un pequeño pico, del cual no hay evidencia en los resultados experimentales. Este pico lo atribuimos a que las perturbaciones se dan cuando estamos cambiando artificialmente entre la ecuación de bajada y subida, y como habíamos mencionado antes, nuestras ecuaciones no pretenden reflejar el comportamiento del oscilador en tiempo cercanos al cambio de dirección del chorro.

Ya que vimos que de forma general la curva de reinicio de fases calculada con nuestro modelo se aproxima bastante bien con la encontrada de forma experimental, ahora veremos cómo reacciona nuestro sistema de ecuaciones ante trenes de pulsos.

4.4. Perturbación con un tren de pulsos

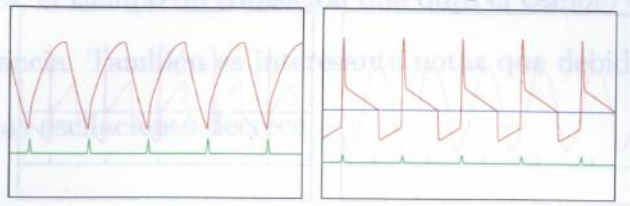
Para ver cómo funciona nuestro modelo ante perturbaciones, en comparación con los resultados experimentales, modificamos el programa para simular una serie de pulsos equivalentes a los dados por González et. al., donde también se investigó la respuesta del oscilador ante

un tren de pulsos.

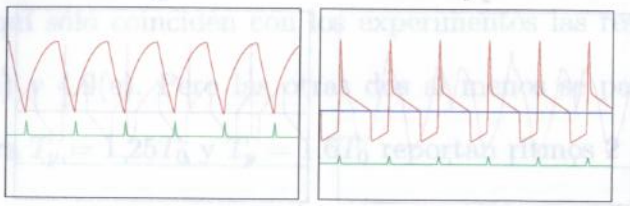
De nuevo, cada pulso consiste en aumentar el 0.1% el volumen del agua destilada durante un lapso del 3.7% del periodo natural del oscilador ($T_0 = 12.1$ segundos) dado por nuestro modelo. Al periodo del tren de pulsos o tiempo entre pulso y pulso le llamamos T_p .

Vimos la respuesta de nuestro modelo ante diferentes tiempos T_p , utilizando los mismos periodos T_p que utilizaron González et al. para comparar con las de la figura 1.4. En las figuras 4.8 y 4.9 se observa la respuesta periódica del oscilador ante los trenes de pulsos después del transitorio, que se da al inicio de los trenes. La duración del transitorio varía dependiendo de T_p y el momento en el que se aplica el primer pulso.

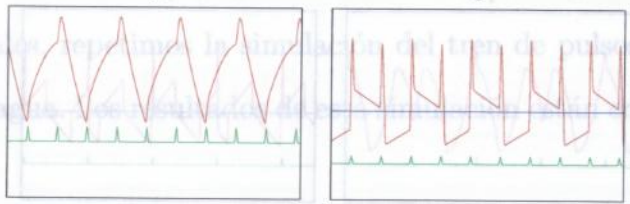
En la primera figura 4.8, se muestran las respuestas para trenes de pulsos con $T_p < T_0$. Para $T_p = 0.6T_0$ (figura 4.8(a)), y $T_p = 0.5T_0$ (figura 4.8(b)) observamos un ritmo 1:1. Decimos que es un ritmo 1:1 cuando ante un pulso el oscilador reacciona con sólo un pico o cresta. Vamos a contar los ritmos utilizando las gráficas de velocidad (gráficas a la derecha), pues en los experimentos midieron los ritmos de acuerdo al cambio en el voltaje. El cambio en el voltaje equivale a un cambio en la dirección de la velocidad, que en las gráficas equivale a cruzar el cero. Cuando $T_p = 0.3T_0$ (figura 4.8(c)) observamos un ritmo 2:1, es decir, un pico por cada dos pulsos, que coincide con los resultados experimentales, al igual que el ritmo 2:2 que se da cuando $T_p = 0.2T_0$ (figura 4.8(d)). Por último para $T_p = 0.15T_0$, donde el tiempo entre pulsos es menor a dos segundos, no encontramos ningún ritmo claro. Al comparar con los resultados experimentales, encontramos que sólo los resultados de las figuras 4.8(a), 4.8(c) y 4.8(d) coinciden. Reconocemos que para $T_p = 0.15T_0$ nuestros resultados no están nada cercanos a los experimentos, donde encontraron un 1:1. Creemos que esto se debe a que nuestro sistema no modela adecuadamente el cambio de dirección del chorro, y cuando los



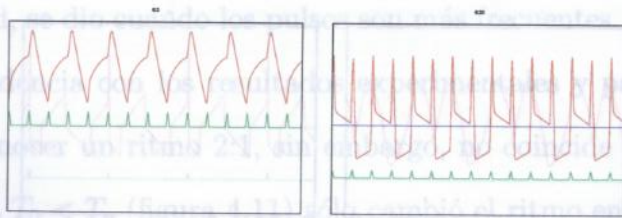
(a) 1:1 $T_p/T_0 = 0.6$.



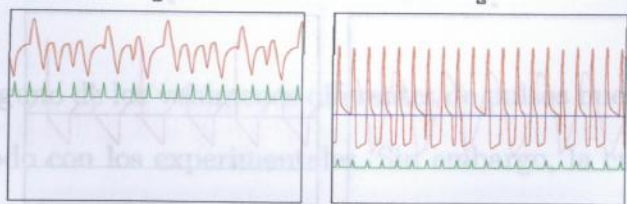
(b) 1:1 $T_p/T_0 = 0.5$.



(c) 2:1 $T_p/T_0 = 0.3$.

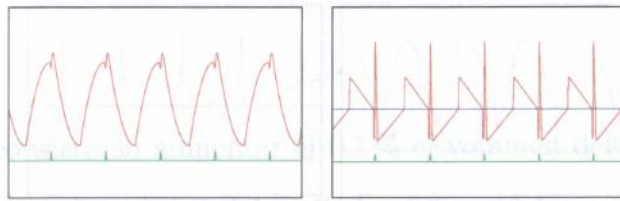


(d) 2:2 $T_p/T_0 = 0.2$.

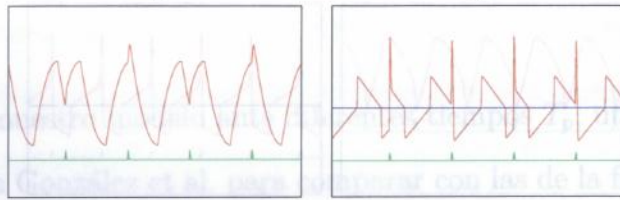


(e) $T_p/T_0 = 0.15$.

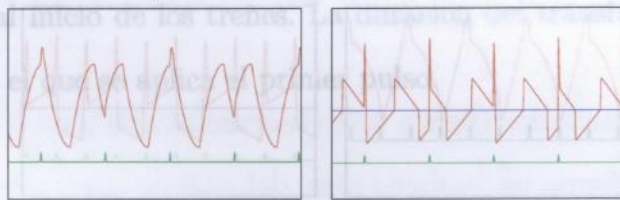
Figura 4.8: Respuesta del oscilador ante trenes de pulsos del 0.1% del volumen del agua a diferentes frecuencias $T_p < T_0$. A la izquierda la variación de la altura del nivel del agua salada y a la derecha la velocidad con la que cambia dicha altura. La línea horizontal equivale a velocidad cero y la verde a los pulsos.



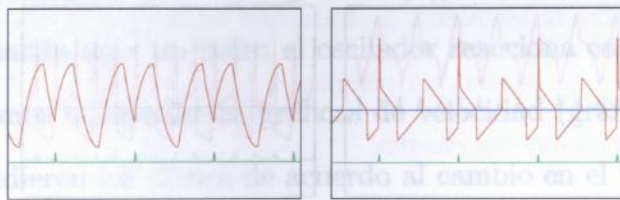
(a) 1:2 $T_p/T_0 = 1.1$.



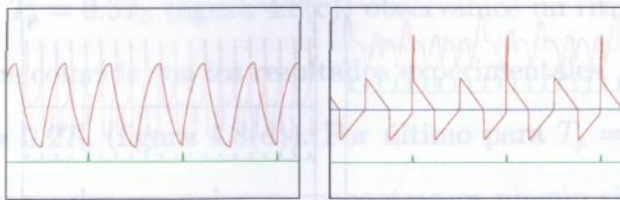
(b) 2:3 $T_p/T_0 = 1.25$.



(c) 2:3 $T_p/T_0 = 1.3$.



(d) 1:2 $T_p/T_0 = 1.6$.



(e) 1:2 $T_p/T_0 = 1.9$.

Figura 4.9: Respuesta del oscilador antes trenes de pulsos de diferentes frecuencias $T_p > T_0$. A la izquierda la variación de la altura del nivel del agua salada y a la derecha la velocidad con la que cambia dicha altura. La línea horizontal equivale a velocidad cero y la verde a los pulsos. Las escalas no son las mismas que en 4.8.

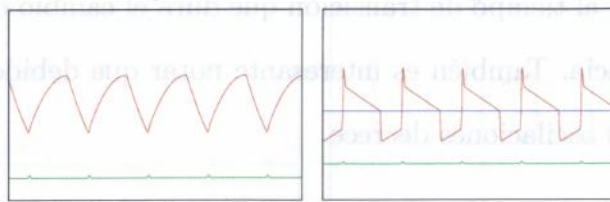
pulsos son tan frecuentes, el tiempo de transición que dura el cambio de dirección del chorro adquiere mayor importancia. También es interesante notar que debido a lo frecuente de los pulsos, la amplitud de las oscilaciones decrece.

En la figura 4.9 vemos la respuestas a trenes de pulsos con $T_p > T_0$ y el tipo de ritmos que se dan en este caso. Aquí sólo coinciden con los experimentos las respuestas mostradas en las figuras 4.9(a), 4.9(c) y 4.9(e). Pero las otras dos al menos se parecen a los resultados experimentales, que para $T_p = 1.25T_0$ y $T_p = 1.6T_0$ reportan ritmos 2 : 4.

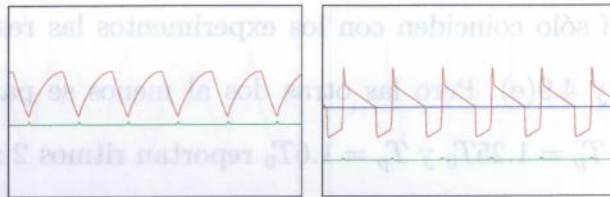
Debido a que el aplicar un pulso más pequeño nos dio resultados que se ajustaron mejor a los resultados experimentales, repetimos la simulación del tren de pulsos, ahora con pulsos del 0.05 % del volumen de agua. Los resultados de esta simulación están en las figuras 4.10 y 4.11.

Para $T_p < T_0$ (figura 4.10) el único cambio importante que observamos, al reducir el tamaño de los pulsos a la mitad, se dio cuando los pulsos son más frecuentes. Para $T_p = 0.2T_0$ (figura 4.10(d)) no hay coincidencia con los resultados experimentales y para $T_p = 0.15T_0$ (figura 4.10(e)) podemos reconocer un ritmo 2:1, sin embargo, no coincide con el 1:1 observado en los experimentos. Para $T_0 < T_p$ (figura 4.11) sólo cambió el ritmo en la figura 4.11(a) donde al reducir el volumen a la mitad pasó de ser un 1:2 a un 2:3.

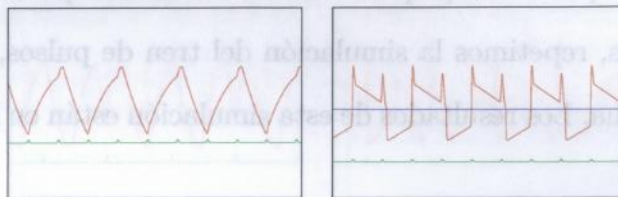
De forma que para ninguno de los volúmenes diferentes de pulsos nuestros resultados numéricos coincidieron del todo con los experimentales. Sin embargo, la curva de reinicio de fases que obtuvimos de forma numérica se ajusta bastante bien con la dada de forma experimental.



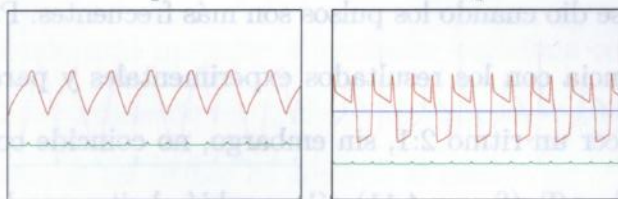
(a) 1:1 $T_p/T_0 = 0.6$.



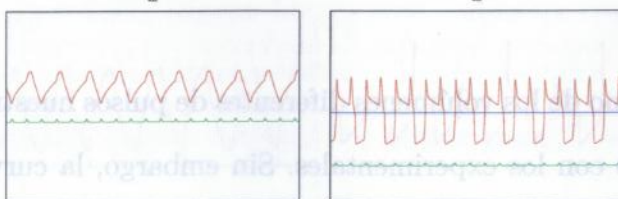
(b) 1:1 $T_p/T_0 = 0.5$.



(c) 2:1 $T_p/T_0 = 0.3$.

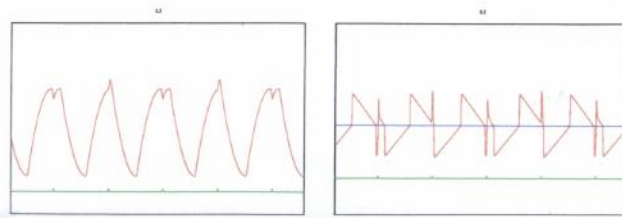


(d) 2:1 $T_p/T_0 = 0.2$.

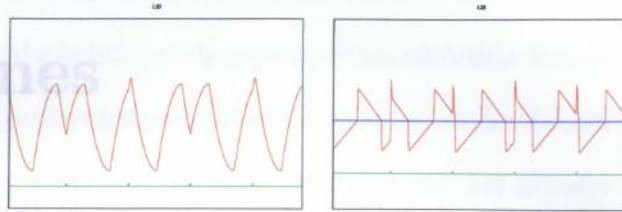


(e) 2:1 $T_p/T_0 = 0.15$.

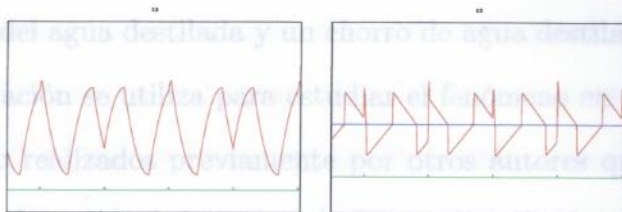
Figura 4.10: Respuesta del oscilador antes trenes de pulsos del 0.05 % del volumen a diferentes frecuencias $T_p < T_0$. A la izquierda la variación de la altura del agua salada y a la derecha la velocidad con la que cambia dicha altura. La línea horizontal equivale a velocidad cero y la verde a los pulsos.



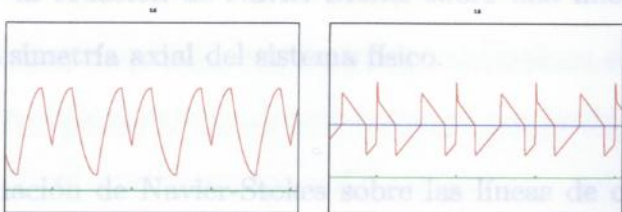
(a) $2:3 T_p/T_0 = 1.1$.



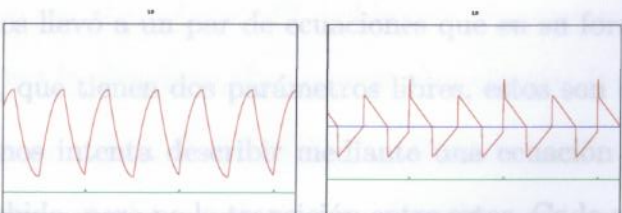
(b) $2:3 T_p/T_0 = 1.25$.



(c) $2:3 T_p/T_0 = 1.3$.



(d) $1:2 T_p/T_0 = 1.6$.



(e) $1:2 T_p/T_0 = 1.9$.

Figura 4.11: Respuesta del oscilador antes trenes de pulsos del 0.05 % del volumen a diferentes frecuencias $T_p > T_0$. A la izquierda la variación de la altura del nivel del agua salada y a la derecha la velocidad con la que cambia dicha altura. La línea horizontal equivale a velocidad cero y la verde a los pulsos (La escala del tiempo es diferente que la de la figura 4.10).

Capítulo 5

Conclusiones

Para modelar el oscilador salino, dividimos a cada oscilación en dos partes. Un chorro de agua salada que baja dentro del agua destilada y un chorro de agua destilada que sube dentro del agua salada. Esta separación se utiliza para estudiar el fenómeno en muchos de los trabajos sobre el oscilador salino realizados previamente por otros autores que se encuentran en la bibliografía de esta tesis. Lo original de este trabajo es que utilizamos la idea de la ecuación de Bernoulli al integrar la ecuación de Navier-Stokes sobre una línea de corriente, de esta forma, aprovechamos la simetría axial del sistema físico.

En la integral de la ecuación de Navier-Stokes sobre las líneas de corriente, despreciamos el término viscoso y aproximamos los términos de la integral con base en flujos ideales y unidireccionales. Esto nos llevó a un par de ecuaciones que en su forma adimensional están dadas por (4.1), y (4.2), que tienen dos parámetros libres, estos son ϵ y Q (ecuación (4.4)). El modelo que planteamos intenta describir mediante una ecuación el chorro de bajada y mediante la otra el de subida, pero no la transición entre estos. Cada una de estas ecuaciones tiene un punto de equilibrio distinto, sin embargo ninguno de estos dos puntos de equilibrio son puntos de equilibrio del sistema físico, donde únicamente hay un punto de equilibrio estático, que se da cuando no existe ningún chorro y las presiones alrededor del orificio en el agua salada y en el agua destilada, se igualan. Este punto de equilibrio no es estable, y es debido

a la inestabilidad de Rayleigh-Taylor que el sistema no permanece en equilibrio estático, y entra en una situación dinámica que intenta llevar al sistema de regreso hacia su equilibrio estático. Es decir que mientras que en la situación estática la inestabilidad de Rayleigh saca al sistema de su equilibrio, en la dinámica busca regresar a este equilibrio estático.

A partir de las dos ecuaciones con diferentes puntos de equilibrio, nos fue posible modelar las oscilaciones del fenómeno, y encontramos que la forma cualitativa de estas oscilaciones es igual a la reportada por Martin [14] y por Yoshikawa [24].

La amplitud y periodo de nuestras oscilaciones están dados por uno de los límites de la integral de línea. El límite de la integral lo ajustamos de forma que quedara en una zona donde el flujo alcance su máxima intensidad y sea aproximadamente unidireccional. Sin embargo, este límite acabó siendo muy relevante. De manera que, aunque debe de estar dentro de un intervalo dado por los parámetros del experimento, es un parámetro libre que ajustamos para obtener una amplitud de oscilación correspondiente a la experimental. A cambio de obtener una amplitud que coincidiera con la experimental, nuestro modelo nos dio un periodo de la mitad del observado en los experimentos. Creemos que esta reducción del periodo se debe a que, al hacer la integral sobre el eje del chorro, no consideramos lo que pasa en la frontera de este y por lo tanto despreciamos la viscosidad. El trabajo de la viscosidad es frenar o alentar al chorro, de forma que al tomarle más tiempo cada oscilación el periodo aumenta.

Otro efecto que acabamos despreciando en nuestro modelo fue el de la difusión de la sal del chorro. Pues al tratar de incluirlo acabamos concluyendo que los tiempos característicos del fenómeno difusivo eran mucho mayores que los tiempos de cada oscilación. Por lo que acabó siendo irrelevante en nuestras ecuaciones, donde consideramos que las densidades se mantenían constantes durante todo el experimento. Debido a que la sal que baja en el

chorro se deposita al fondo del recipiente, la densidad se mantiene constante cerca del orificio.

Utilizando los parámetros experimentales de Yoshikawa [24] encontramos que el sistema llega directamente a un estado de oscilaciones uniformes después de la primera bajada (figura 4.2) y que la amplitud de las oscilaciones es prácticamente la misma que la distancia entre los puntos de equilibrio, por lo que la inercia que estimamos utilizando flujo potencial no fue muy importante, sin embargo al aumentar únicamente el tamaño del orificio, la inercia tomó un papel más importante, y al sistema le tomó un poco más de tiempo llegar a su ciclo límite.

Con el modelo exploramos cómo depende el periodo de oscilación de los parámetros adimensionales a , b y d (ecuación (4.4)), que representan dos razones de áreas y una de densidad respectivamente. Numéricamente encontramos que el periodo es creciente respecto a a y decreciente respecto a b y d . Nos falta evidencia experimental para comprobar estas predicciones.

Para evaluar nuestro modelo y ver cómo respondía ante perturbaciones, simulamos la inyección de pulsos y trenes de pulsos tratando de imitar el trabajo experimental de González et al. [3]. La gráfica de reinicio de fases que encontramos numéricamente es muy similar a la experimental, salvo por algunos detalles. Fue utilizando esta gráfica que ajustamos al parámetro libre Q , este parámetro libre salió de considerar la diferencia de presiones debida a la diferencia de densidades. Después observamos que disminuir a la mitad el volumen de los pulsos o perturbaciones mejora el ajuste de la gráfica de reinicio de fases. Al tratar de reproducir la respuesta del sistema ante los trenes de pulsos, obtuvimos un acuerdo parcial con los resultados experimentales. Esto lo atribuimos a la importancia que toma el cambio de dirección del chorro ante los trenes, que en nuestro modelo está incluido de forma muy artificial y no describe el proceso de desaparición de un chorro y aparición del otro, lo que toma tiempos similares a la duración de los pulsos.

Resumiendo, podemos concluir que nuestro modelo da la dinámica general del oscilador salino, la gráfica de reinicio de fases, y predice un comportamiento del periodo en términos de áreas y densidades, cuyo alcance desconocemos por la falta de evidencia experimental.

Apéndice A

Flujo potencial [8]

Los flujos potenciales en dos dimensiones, son flujos ideales, incompresibles e irrotacionales ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$), de forma que se puede ver a la velocidad del flujo como la derivada de una función potencial de velocidad Φ

$$\nabla\Phi = \mathbf{v}. \tag{A.1}$$

Además, se introduce la función de corriente Ψ , tal que:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \\ v_y &= -\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \end{aligned} \tag{A.2}$$

de forma que se satisface la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ inmediatamente. De manera que ambas funciones, la potencial y la de corriente cumplen con la ecuación de Laplace, $\nabla^2\Phi = 0$, $\nabla^2\Psi = 0$. Combinando las dos se define el potencial complejo:

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y), \tag{A.3}$$

donde $z = x + iy$. $F(z)$ es una función analítica ya que Φ y Ψ cumplen con las condiciones de Cauchy-Riemann.

La derivada de este potencial es la velocidad compleja W ,

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{dF}{dz} \\
 &= \frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi}{\partial x} \\
 &= \frac{\partial\Psi}{\partial y} - i\frac{\partial\Phi}{\partial y} \\
 &= v_x - iv_y,
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

la cual nos da el perfil de velocidades del flujo, ya que su parte real equivale a la componente x de la velocidad y menos la parte imaginaria corresponde a la componente y de la velocidad.

Para encontrar el potencial complejo del flujo a la salida de un orificio, se hacen una serie de mapeos a diferentes planos que lleven a las líneas de corriente a formas más sencillas donde sea más fácil encontrar el potencial. Primero haremos un mapeo al plano hodógrafo, dado justamente por el recíproco de la velocidad compleja, luego haremos una transformación logarítmica, seguida de la transformación de Schwarz-Christoffel.

La transformación de Schwarz-Christoffel mapéa de manera conforme la parte superior del plano complejo ξ a un polígono en z . La función de mapéo que le corresponde es la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dz}{d\xi} = K(\xi - a)^{(\alpha/\pi)-1}(\xi - b)^{(\beta/\pi)-1}(\xi - c)^{(\gamma/\pi)-1} \dots \tag{A.5}$$

Donde K es una constante, a , b , c , etcetera, son los puntos en el plano ξ que corresponden a los vértices de un polígono en el plano z , y α , β , γ , etcetera son los ángulos que subtienden.

Una vez realizados estos tres mapeos, encontramos el potencial complejo de forma implícita, y al derivarlo para encontrar la velocidad compleja llegamos a una ecuación diferencial para W que nos es posible resolver analíticamente y de esta forma encontramos tanto el perfil de

velocidades del flujo como el factor de contracción.

Comencemos por el plano hodógrafo o diagrama de velocidad. Donde la presión se mantiene constante a lo largo de las líneas de corriente que corresponden con superficies libres.

El mapeo al plano hodógrafo ζ está dado por:

$$\zeta = U \frac{dZ}{dF} = \frac{U}{W} = \frac{U}{\sqrt{u^2 + v^2}} e^{i\theta}. \quad (\text{A.6})$$

El plano ζ esta dado por el recíproco de la velocidad compleja $W = u - iv = e^{-i\theta} \sqrt{u^2 + v^2}$ adimensionalizado con U la magnitud de la velocidad constante del chorro fuera y lejos de la apertura.

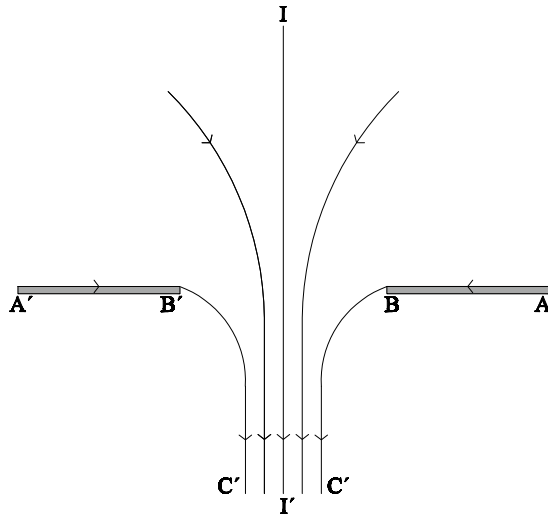


Figura A.1: Plano Z.

Esta transformación mapea las líneas de corriente libres en el plano z $B'C'$ y BC (Figura A.1) a un círculo unitario en el plano ζ (Figura A.2) . Sobre dichas líneas de corriente la

presión es constante, de forma que de acuerdo a la ecuación de Bernoulli la magnitud de la velocidad $u^2 + v^2$ es constante. Dado que lejos de la apertura la magnitud de la velocidad del chorro es U , entonces sobre las líneas de corriente libres $u^2 + v^2$ vale U^2 , de forma que sobre estas líneas $\zeta = e^{i\theta}$, que es justamente la ecuación del círculo unitario. Ahora, para ver a que parte de dicho círculo van las líneas de corriente nos fijamos en los ángulos que tienen los vectores de velocidad en el plano z .

Sobre la línea de corriente $A'B'$ el flujo va hacia la derecha, de forma que el ángulo del vector de velocidad es $\theta_{A'B'} = 0, 2\pi$, y AB va hacia la izquierda, entonces el ángulo es $\theta_{AB} = \pi$ y tanto II' , como $B'C'$ y BC van hacia abajo, de forma que el ángulo del vector es $\theta_{II'} = \theta_{B'C'} = \theta_{BC} = 3\pi/2$. De aquí podemos observar que las líneas de corriente libres van a la parte inferior del círculo, pues BC va de π a $3\pi/2$ y $B'C'$ de 2π a $3\pi/2$.

A partir de los ángulos notamos también que las líneas de corriente $A'B'$ y AB están sobre el eje real en el plano ζ y que dado que A' y A en z están muy lejos de la abertura la velocidad $u^2 + v^2$ en dichos puntos es cero, de manera que en ζ valen ∞ y $-\infty$ respectivamente, donde el signo está dado por $e^{i\theta_{A'B'}}$ y $e^{i\theta_{AB}}$ respectivamente.

Ya sólo falta ver a donde va la línea de corriente II' , ya sabemos que va a estar sobre el eje imaginario pues $e^{i\theta_{II'}} = -i$. Dado que I esta muy lejos del chorro, la velocidad en dicho punto vale cero, de forma que en I $\zeta = -i\infty$, y en I' el chorro es uniforme y con velocidad constante U de forma que en I' $\zeta = -i$.

Observamos que en $\zeta = -i$ identificado por I' , C y C' hay un sumidero y que las principales líneas de corriente fueron mapeadas en líneas radiales o el círculo unitario, de manera que el flujo puede ser mapeado a una configuración plana mediante una transformación logarítmica:

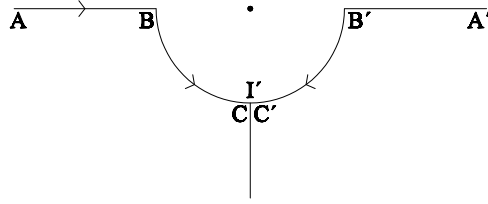


Figura A.2: Plano ζ .

$$\zeta' = \log \zeta = \log R + i\theta. \tag{A.7}$$

Donde $R = U/\sqrt{u^2 + v^2}$ de forma que $\zeta = Re^{i\theta}$

Esta transformación mapea las líneas radiales en ζ (Figura A.2) a líneas horizontales en ζ' (Figura A.3) dadas por $\zeta' = \log R + i\theta_R$ y al medio círculo a una línea vertical dada por $\zeta' = i\theta$.

Esta configuración corresponde al flujo en un canal semi-infinito debido a un sumidero en el centro del final del canal en el punto C' , C , I' .

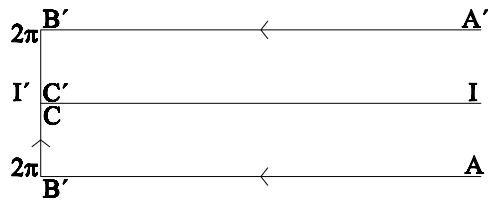


Figura A.3: Plano ζ' .

Para resolver dicha configuración aplicamos la transformación de Schwarz-Christoffel, pero primero la trasladamos al origen, para en lugar de tener un canal semi-infinito que en el eje y

vaya de $i\pi$ a $2i\pi$, lo haga de 0 a $i\pi$. Por lo que en la transformación de Schwarz-Christoffel en lugar de usar la variable ζ' utilizamos $\tilde{\zeta} = \zeta' - i\pi$. Ahora para llevar el rectángulo $ABCC'B'A'$ en el plano $\tilde{\zeta}$ al eje x en el plano ζ'' con el punto B en 1 y B' en -1 los valores de la ecuación (A.5) toman los valores $a = 1$, $b = -1$, $\alpha = \pi/2$ y $\beta = \pi/2$ de forma que la transformación queda.

$$\frac{d\tilde{\zeta}}{d\zeta''} = K(\tilde{\zeta} - 1)^{-1/2}(\tilde{\zeta} + 1)^{-1/2} = \frac{K}{\sqrt{\tilde{\zeta} - 1}}. \quad (\text{A.8})$$

Integrando

$$\tilde{\zeta} = K \cosh^{-1} \zeta'' + D. \quad (\text{A.9})$$

Con D una constante de integración. Para encontrar los valores de K y D sustituimos en (A.9) los valores correspondientes en B

$$\tilde{\zeta} = 0, \quad \zeta'' = 1,$$

de donde obtenemos que $D = 0$ y en B'

$$\tilde{\zeta} = i\pi, \quad \zeta'' = -1,$$

de donde obtenemos que $K = 1$. De esta forma, invirtiendo la ecuación y sustituyendo $\tilde{\zeta} = \zeta' - i\pi$ llegamos a

$$\zeta'' = \cosh(\zeta' - i\pi) = -\cosh \zeta'. \quad (\text{A.10})$$

La configuración que resulta en el plano ζ'' (Figura A.4) es la de un sumidero en $\zeta'' = 0$ para la cual su potencial complejo está dado por

$$F(\zeta'') = -\frac{m}{2\pi} \log \zeta'' + k. \quad (\text{A.11})$$

Agregamos la constante k para poder escoger a II' como la línea de corriente $\Psi = 0$ y la equipotencial que pasa por BB' como $\Phi = 0$.

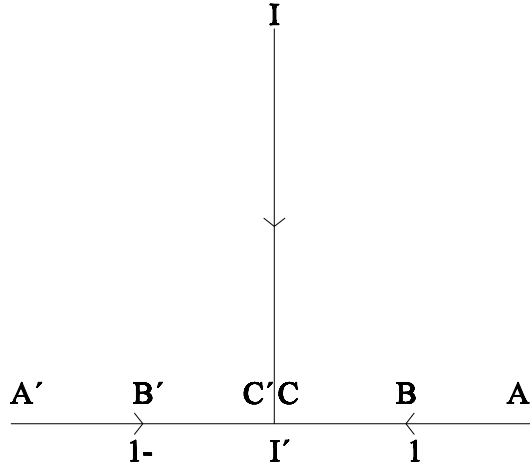


Figura A.4: Plano ζ'' .

Para encontrar el valor de las líneas de corriente utilizamos la propiedad que dice que el volumen del fluido que pasa entre dos líneas de corriente es igual a la diferencia de los valores de dichas líneas de corriente. Dicho volumen, para las líneas de corriente $A'B'C'$ y II' (Figura A.5) está dado por $C_c lU$ donde C_c es el factor de contracción del chorro y l el radio del agujero entonces tenemos que

$$0 - \Psi_{A'B'C'} = C_c lU.$$

Y para el flujo entre II' y ABC

$$\Psi_{ABC} - 0 = C_c lU,$$

de donde

$$\Psi_{A'B'C'} = -C_c lU,$$

$$\Psi_{ABC} = C_c lU.$$

Entonces en B : $\Phi = 0$, $\Psi = C_c lU$, $\zeta'' = 1$ y como $F(\zeta'') = \Phi + i\Psi$ entonces de la ecuación

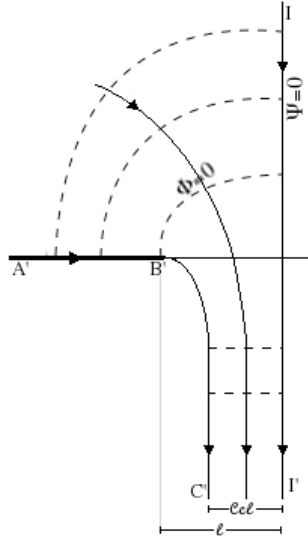


Figura A.5: Geometría de las líneas de corriente libres.

(A.11) tenemos

$$\begin{aligned} iC_c lU &= -\frac{m}{2\pi} \log(1) + k, \\ \Rightarrow k &= iC_c lU. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Y en B' : $\Phi = 0$, $\Psi = -C_c lU$, $\zeta'' = -1$, entonces

$$\begin{aligned} -iC_c lU &= -\frac{m}{2\pi} \log(-1) + k, \\ \Rightarrow -iC_c lU &= -\frac{im}{2} + k. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

De (A.12) y (A.13) encontramos los valores de $k = iC_c lU$ y $m = 4C_c lU$. Sustituyendo además $\zeta''(z) = -\cosh\left[\log\left(U\frac{dz}{dF}\right)\right]$ en el potencial (A.11)

$$F(z) = -\frac{2C_c lU}{\pi} \log \left[\cosh \left[\log \left(U \frac{dz}{dF} \right) - i\pi \right] \right] + iC_c lU. \quad (\text{A.14})$$

Así, tenemos el potencial complejo para el flujo a través de un orificio, y a partir de aquí se

encuentra que el coeficiente de contracción C_c es $\frac{\pi}{\pi+2}$, que se aproxima muy bien a las observaciones experimentales, en donde se encuentra una contracción de 0.611 [8].

Apéndice B

Difusión

Debido a que nuestro sistema tiene dos especies, la sal y el agua, se da el proceso de difusión de la sal en el agua destilada, de forma que es importante analizar los efectos provocados por dicho fenómeno en cada oscilación. En especial nos interesa ver como cambia el perfil de densidades de los chorros en el tiempo que dura cada oscilación, pues el perfil de densidades nos va a dar información de cómo es la presión durante las oscilaciones.

Cuando el chorro va de subida el agua dulce se deposita en la superficie y no hay difusión cerca del orificio, pues el chorro de agua destilada arrastra hacia la superficie todas las partículas de sal que “intentan entrar” al chorro. Durante la bajada tenemos un chorro de agua salada dentro del agua destilada, que en principio, no podemos analizar el fenómeno con la ecuación tradicional de difusión, dado que las partículas de sal están dentro de un flujo hidrodinámico. De acuerdo a Santamaría-Holek et al. [19] la difusión de partículas brownianas en un flujo está dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho \mathbf{v} + \nabla \cdot (\vec{D} \cdot \nabla \rho) + \nabla \cdot (\rho \nabla \cdot \vec{D}), \quad (\text{B.1})$$

donde ρ es la densidad, \mathbf{v}_0 la velocidad del flujo y \vec{D} el tensor de difusión definido como:

$$\vec{D} = D_0 \left[\vec{I} - \frac{\left\{ (1 + \epsilon) \vec{I} \cdot \nabla \mathbf{v} \right\}^0}{\beta} \right]. \quad (\text{B.2})$$

Con D_0 el coeficiente de difusión de la sal cuando está en agua en reposo, ϵ depende de las relaciones fenomenológicas, en especial del coeficiente de Onsager que relaciona el flujo difusivo en el subespacio de la velocidad en el espacio fase con la velocidad de las partículas dentro del flujo, β es el coeficiente de fricción y el cero arriba indica que es la parte simétrica y sin traza del tensor.

Nos interesa el proceso difusivo para estimar la evolución de la presión en la vecindad del chorro. Observaciones muestran que en la región de interés el flujo de agua salada sólo tiene velocidad vertical y por simetría e incompresibilidad está velocidad sólo depende de la componente r , entonces $\mathbf{v} = v_z(r)\hat{e}_z$ y la ecuación de difusión (B.1) se reduce a:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D_0 \left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial r \partial z} \frac{(1 + \epsilon)}{\beta} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right]. \quad (\text{B.3})$$

Si suponemos que localmente el perfil de la densidad es igual a lo largo del eje z , entonces $\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = 0$ y $\frac{\partial^2 \rho}{\partial r \partial z} = 0$ entonces la ecuación se reduce a la ecuación de difusión en reposo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D_0 \left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right]. \quad (\text{B.4})$$

Así que en este caso, la ecuación (B.1) que involucra la velocidad del flujo en el proceso difusivo, no nos dijo nada nuevo. Debido a la geometría del problema, utilizando la aproximación más simple en la que $\mathbf{v} = v_z(r)\hat{e}_z$ y $\rho = \rho(r)$ la ecuación de difusión “dinámica” (B.1) se reduce a la ecuación de difusión en reposo (B.4), la cual resolveremos para estimar los tiempos característicos del proceso difusivo.

El problema que queremos resolver es el de la difusión de la sal del chorro en el agua destilada, de forma que consideramos que en el chorro, la densidad se mantiene constante y es ρ_s . El dominio donde vamos a resolver la ecuación de difusión (B.4) va del radio del chorro ($r = r_0$), al radio del recipiente externo o de agua destilada ($r = r_1$). Inicialmente (en $t = 0$) la densidad es la de agua destilada ρ_d . Para las condiciones de frontera, sabemos que en

la frontera del chorro $r = r_0$, la densidad es (para todo tiempo), la salada $\rho(r_0) = \rho_s$, sin embargo, en $r = r_1$ la condición a la frontera no es tan clara, por lo que vamos a plantear el problema difusivo para dos condiciones diferentes en la pared del recipiente $r = r_1$. La primera posible condición a la frontera es que debido a la estratificación, lejos del orificio no llega la sal, de forma que en $r = r_1$ se mantiene la densidad del agua destilada $\rho(r_1) = \rho_d$. La segunda es que el cambio de la densidad en la pared es muy suave de forma que en $\frac{\partial \rho}{\partial r}|_{r_1} = 0$.

Así que tenemos que tenemos dos fenómenos difusivos a resolver: (a) La ecuación de difusión (B.4). Condición inicial $\rho(r) = \rho_d$ en $t = 0$. Condiciones a la frontera $\rho(r_0) = \rho_s$ y $\rho(r_1) = \rho_d$ para $0 < t$. (b) La ecuación de difusión (B.4). Condición inicial $\rho(r) = \rho_d$ en $t = 0$. Condiciones a la frontera $\rho(r_0) = \rho_s$ y $\frac{\partial \rho}{\partial r}|_{r_1} = 0$ para $0 < t$.

La solución analítica para (a) se puede encontrar en el libro de Carslaw y Jaeger [5] y está dada por:

$$\rho(r, t) = \frac{\rho_s \ln(r_1/r) + \rho_d \ln(r/r_0)}{\ln(r_1/r_0)} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (\rho_s - \rho_d) \frac{J_0(r_1 \alpha_n) J_0(r_0 \alpha_n) U_0(r \alpha_n)}{J_0^2(r_0 \alpha_n) - J_0^2(r_1 \alpha_n)} e^{-D_0 \alpha_n^2 t}, \quad (\text{B.5})$$

donde las α_n son las raíces de $U_0(r \alpha) = J_0(\alpha r) Y_0(\alpha r_1) - J_0(\alpha r_1) Y_0(\alpha r)$, con J_0 y Y_0 las funciones de Bessel de orden cero.

El primer término de la solución representa el límite al que tiende la distribución de la densidad si dejáramos al sistema llegar a su estado estacionario. El segundo término nos dice cómo llega la solución a su estado estacionario, este término va decayendo como una suma de exponenciales.

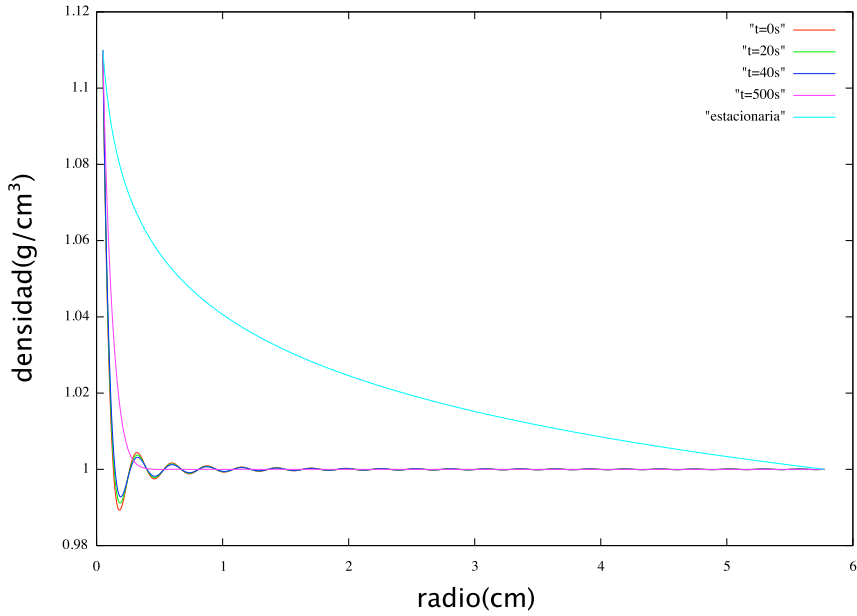


Figura B.1: Perfil de densidad para diferentes tiempos tomando los primeros 41 términos de la suma de la solución dada por (B.5). El radio del chorro es 0.05cm y el radio del recipiente o distancia a la frontera es 5.78cm .

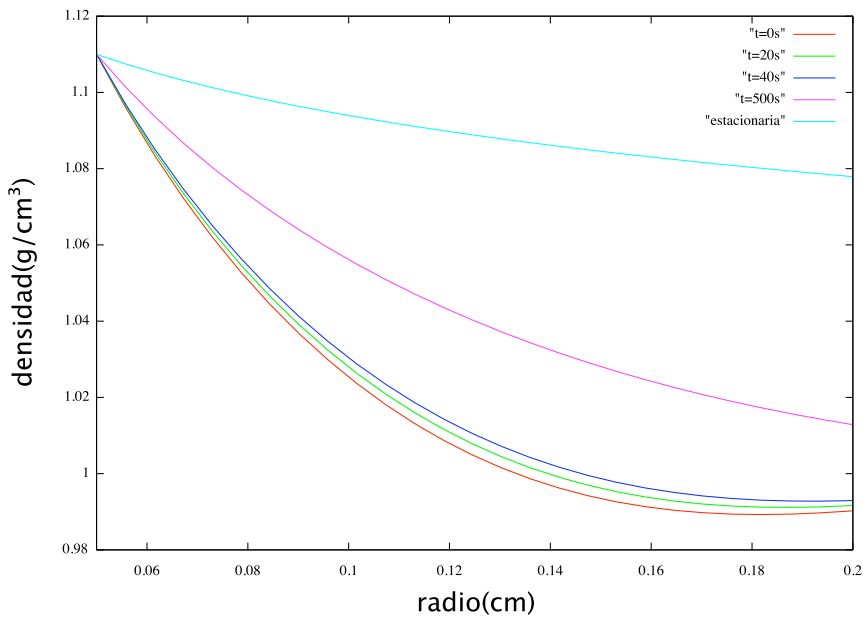


Figura B.2: Acercamiento cerca del chorro de radio 0.05cm de la figura (B.1).

Para ver cómo cambia en el tiempo el perfil de densidades tomamos los primeros 41 términos y graficamos para diferentes tiempos, utilizando la constante de difusión para la sal en agua $D_0 = 1.484 \times 10^{-5} \text{cm}^2/\text{s}$. Observamos que debido a que la solución está dada por una serie infinita de funciones de Bessel e inicialmente la solución es un escalón, al tomar un número finito de términos encontramos que no podemos representar el salto en el perfil de densidades debido a la presencia del chorro. En las figuras B.1 y B.2 observamos también la solución estacionaria, que es hacia donde tiende el sistema. Además, podemos ver cómo la gráfica dada por los primeros términos de la solución analítica para tiempos mayores, en este caso 500 segundos, ya no oscila y es suave, siendo más cercana a la gráfica de la solución estacionaria, que las gráficas obtenidas para tiempos menores.

Al ser resultado de una serie infinita, la solución analítica tiene mucho “ruido” cerca de r_0 , que es la zona que nos interesa, dado que queremos saber como es el cambio de la densidad cerca del chorro durante la duración de cada chorro. De forma que resolvimos la condición (a) utilizando diferencias finitas centradas para la parte radial y Euler para la evolución temporal. Validamos nuestro código con los resultados de la solución analítica para un tiempo de 500 segundos.

Cambiamos el código para ahora resolver la condición (b) y graficamos el perfil de densidades para diferentes tiempos (figura B.3) y el cambio de la densidad al doble de la distancia al chorro (figura B.4). En la figura B.3 podemos observar que para distancia mayores al doble del tamaño del orificio en los tiempos que dura la oscilación (menos de un minuto) el aumento en la densidad es muy pequeño.

La figura B.4 se enfoca únicamente en el aumento de la densidad a una distancia r_0 del chorro, la primera nos dice como aumenta durante la primera media hora, y la segunda en el primer

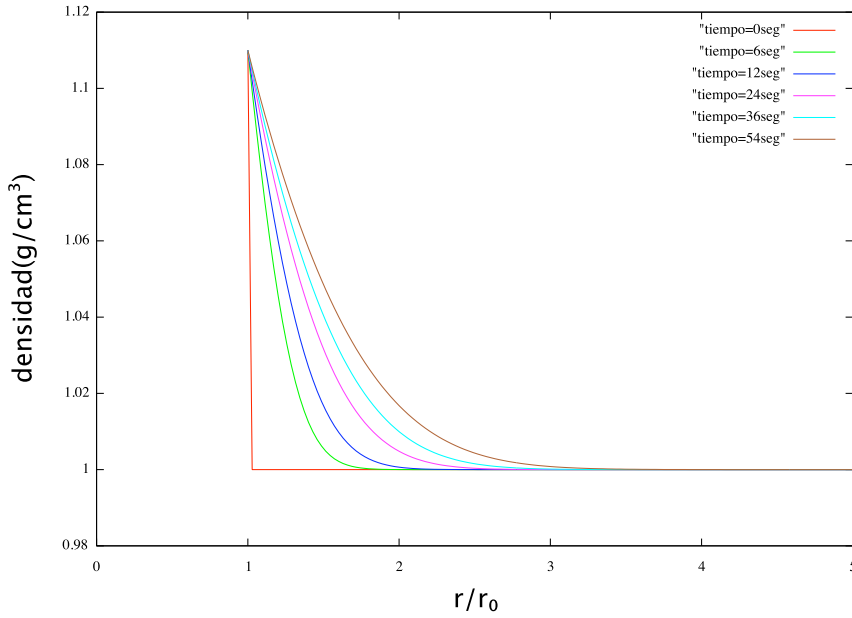
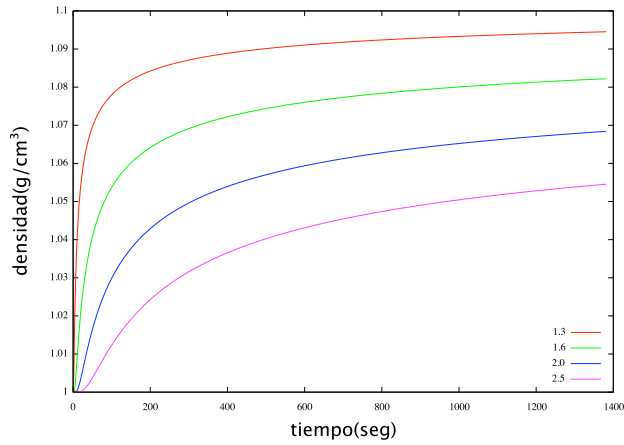
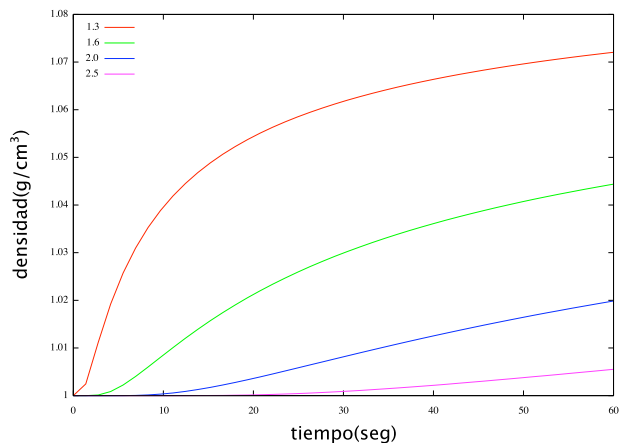


Figura B.3: Perfil de densidad para diferentes tiempos, la distancia representada en el eje x, está adimensionalizada con el tamaño del orificio.

minuto. Dado que esperamos que el chorro dure menos de treinta segundos, es importante observar que a una distancia r_0 (es decir $r = 2r_0$) en los primeros treinta segundos la densidad no llega ni al 10% de su máximo. Utilizamos este resultado en la sección 3.4, donde para estimar la presión consideramos que la densidad fuera del chorro se mantiene prácticamente constante. Es decir, despreciamos a los pequeñísimos cambios de densidad, esto implica que la diferencia entre la densidad fuera y dentro del chorro $\Delta \rho = \rho_{ext} - \rho_{int}$ es constante durante los tiempos característicos de nuestras oscilaciones. Las observaciones muestran una interface que delimita al chorro con claridad y que no se mueve sensiblemente mientras no se de el cambio de dirección, lo que parece confirmar que el proceso difusivo es relativamente lento.



(a) Variación de la densidad en el tiempo.



(b) Primer minuto del cambio de la densidad en puntos alrededor del chorro.

Figura B.4: Perfil de densidades para los radios $1.3r_0$, $1.6r_0$, $2r_0$ y $2.5r_0$.

Apéndice C

Primera integral

Las ecuaciones de movimiento de nuestro modelo (3.36) y (3.37), se pueden integrar una vez analíticamente. En este apéndice haremos dicha integración.

Las ecuaciones (4.1) y (4.2) son de la forma

$$\ddot{\mathcal{H}} = -\beta\dot{\mathcal{H}}^2 - \gamma\mathcal{H}. \quad (\text{C.1})$$

Donde, en la ecuación de bajada (4.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= H - \frac{dc + (Q + \epsilon)(d - 1)}{1 + bd}, \\ \gamma &= \frac{1 + bd}{L}, \quad \beta = \frac{1 - a^2}{2L}, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

y en la ecuación de subida (4.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= H - \frac{dc + (Q - \epsilon)(d - 1)}{1 + bd}, \\ \gamma &= \frac{b + 1/d}{L}, \quad \beta = \frac{a^2}{2L}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Ahora definimos la función $U(\mathcal{H})$ tal que, $U(\mathcal{H}) = \dot{\mathcal{H}}(\tau)$, de forma que,

$$\ddot{\mathcal{H}} = \frac{d\dot{\mathcal{H}}}{d\tau} = \frac{dU(\mathcal{H})}{d\mathcal{H}} \frac{d\mathcal{H}}{d\tau} = U'U. \quad (\text{C.4})$$

Sustituyendo el resultado dado por la ecuación (C.4) en la ecuación (C.1) y definiendo $w = U^2$ llegamos a la siguiente ecuación diferencial lineal

$$\frac{dw}{d\mathcal{H}} = -2\gamma\mathcal{H} - 2\beta w, \quad (\text{C.5})$$

la cual podemos resolver analíticamente, para así llegar a la siguiente ecuación diferencial de primer orden para \mathcal{H}

$$\left(\frac{d\mathcal{H}}{d\tau}\right)^2 = Ke^{-2\beta\mathcal{H}} - \frac{\gamma}{\beta}\left(\mathcal{H} - \frac{1}{2\beta}\right). \quad (\text{C.6})$$

Donde K es una constante de integración que depende de las condiciones iniciales.

Apéndice D

Estabilidad de los puntos de equilibrio

En el capítulo 4 encontramos un punto de equilibrio (4.5) para la ecuación de bajada y un punto de equilibrio (4.6) para la ecuación de subida, de los cuales analizaremos su estabilidad.

Para analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio utilizaremos la forma (C.1) de las ecuaciones, de manera que podemos ver ambas ecuaciones (la de subida y la de bajada), como el siguiente sistema de primer orden:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathcal{H}} \\ \dot{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{H} \\ V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta V^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.1})$$

donde el punto de equilibrio del sistema de ecuaciones es el origen

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H} \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

Aproximamos el sistema no lineal cerca del punto equilibrio por un sistema lineal dado por la matriz

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.3})$$

encontramos los valores propios de la matriz,

$$r_1 = -i\sqrt{\gamma} \quad yr_2 = i\sqrt{\gamma}. \quad (\text{D.4})$$

Dado que tanto en la ecuación de bajada (C.2) como en la de subida (C.3) $\gamma > 0$, ambos valores propios de la matriz son imaginarios, de forma que los puntos de equilibrio de la linealización de ambas ecuaciones son centros o puntos silla, por lo que mediante el análisis de la parte lineal de la ecuación no podemos determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio. De manera que el comportamiento atractor de los puntos de equilibrio es debido a la parte no lineal de la ecuación.

Bibliografía

- [1] Alfredsson, P.H. y T. Lagerstedt.: *The behavior of the density oscillator*. Physics of Fluids, 24(1):10–14, 1981.
- [2] Aoki, K.: *Mathematical model of a saline oscillator*. Physica D, 147:187–203, 2000.
- [3] Arce, H., H. González y M.R. Guevara: *Phase resetting, phase locking, and bistability in the periodically driven saline oscillator: Experiment and model*. Physical Review E, 78(3 Pt 2):036217, 2008.
- [4] Batchelor, G.K.: *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- [5] Carslaw, S.H. y J.C. Jaeger: *Conduction of Heat in Solids*. Oxford University Press, 1959.
- [6] Cervellati, R. y R. Soldà: *An alternating voltage battery with two salt-water oscillators*. American Journal of Physics, 69(5):543–545, 2001.
- [7] Chandrasekhar, S.: *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford University Press, 1961.
- [8] Currie, I. G.: *Fundamental mechanics of fluids*. CRC Press, 2003.
- [9] Das, A.K. y A. Rao: *Hydrodynamic Oscillator-A Simple Non-Linear Dynamical System*. En *In the National Conference on nonlinear systems and dynamics*, págs. 185–188. Indian Institute of Technology, 2003.

- [10] Drazin, P. G. y W. H. Reid: *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, 2004.
- [11] Fajardo, F. y N. E. Rincon: *Estudio de un oscilador de densidad mediante medidas de potencial eléctrico*. Revista Brasileira de Ensino de Física, 24(1):67–76, 2006.
- [12] Groot, S. R. y P. Mazur: *Non-equilibrium thermodynamics*. Courier Dover Publications, 1984.
- [13] Kjelstrup, S. y D. Bedeaux: *Non-Equilibrium Thermodynamics of Heterogeneous Systems*. World Scientific Publishing, 2008.
- [14] Martin, S.: *A Hydrodynamic Curiosity: the Salt Oscillator*. Geophysical Fluid Dynamics, 1:143–160, 1970.
- [15] Miyakawa, K. y K. Yamada: *Entrainment in coupled salt-water oscillators*. Physica D, 122:177–186, 1999.
- [16] Miyakawa, K. y K. Yamada: *Synchronization and clustering in globally coupled salt-water oscillators*. Physica D, 151:217–227, 2001.
- [17] Morón-Villarreyes, J. A., H. J. B. da Costa, F. Kokubun, L. C. Schmitz y J. A. Castro: *Some applications of salt-water oscillator in Chemical Engineering teaching and process equipment design*. Computers and Chemical Engineering, 24:1753–1757, 2000.
- [18] Roy, U., S. K. Saha, C. R. K. Priya, V. Jayashree y R. C. Srivastava: *Quantifying Taste Using a Hydrodynamic Oscillator*. Instrumentation Science and Technology, 31(4):425–437, 2003.
- [19] Santamaría-Holek, I., D. Reguera y J. M. Rubí: *Diffusion in a stationary flow from mesoscopic nonequilibrium thermodynamics*. Physical Review E, 63(5):051106s, 2001.
- [20] Steinbock, O., A. Lange y I. Rehberg: *Density Oscillator: Analysis of Flow Dynamics and Stability*. Physical Review Letters, 81(4):798–801, 1998.

- [21] Upadhyay, S., A. K. Das, V. Agarwala y R. C. Srivastava: *Oscillations of Electrical Potential Differences in the Salt-Water Oscillator*. *Langumir*, 8(10):2567–2571, 1992.
- [22] Yoshikawa, K., S. Nakata, T. Miyata y N. Ojima: *Self-synchronization in coupled salt-water oscillators*. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 115(3-4):313–320, 1997.
- [23] Yoshikawa, K., S. Nakata, M. Yamanaka y T. Waki: *Amusement with a Salt-Water Oscillator*. *Journal of Chemical Education*, 66(3):205–207, 1989.
- [24] Yoshikawa, K. y M. Okamura: *Rhythm in a saline oscillator*. *Physical Review E*, 61(3):2445–2452, 2000.
- [25] Yoshikawa, K., N. Oyama, M. Shoji y S. Nakata: *Use of a saline oscillator as a simple nonlinear dynamical system: Rhythms, bifurcation, and entrainment*. *American Journal of Physics*, 59(2):137–141, 1991.
- [26] Yoshikawa, K., T. Yoshinga, H. Kawakami y S. Nakata: *New strategy of informational processing: utilization of nonlinear dynamics to chemical sensing*. *Physica A*, 188:243–250, 1992.