UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Temas introductorios al curso de Cálculo Diferencial e Integral I. Notas de clase.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA :

JANNINA OVALLE RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE TESIS:

M. en C. AGUSTÍN ONTIVEROS PINEDA

2009

A mi madre, con gratitud y cariño

A mis hermanas, con regocijo

“¿Es mejor no saber las cosas malas? ¿A qué intereses sirve la ignorancia? Si los humanos tenemos, digamos, propensión hereditaria a la xenofobia, ¿no es el único antídoto el conocimiento de nosotros mismos? Si queremos creer que las estrellas salen y se ponen para nosotros, que somos la razón de que exista un universo, ¿nos sirve mal la ciencia si desinfla nuestras pretensiones? Para mí, es mejor captar el universo como es que persistir en la engañosa ilusión, por más gratificante y aseguradora que sea. ¿Qué actitud es mejor para nuestra supervivencia a largo plazo? Y si nuestra ingenua autoconfianza resulta un poco socavada en el proceso, ¿es una gran pérdida? ¿No es más bien causa de regocijo como experiencia de maduración y de formación de carácter?

Carl Sagan: *El mundo y sus demonios*

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El presente trabajo de tesis está enfocado a ayudar a resolver un problema en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo. Acotaré el problema hacia la materia de Cálculo Diferencial e Integral I (a la cual, en adelante me referiré como Cálculo I) impartida a los alumnos de primer ingreso de la Facultad de Ciencias. Esto con el fin de evaluar el impacto del trabajo en los alumnos que apenas comienzan su formación matemática formal de nivel superior.

Los cursos de Cálculo Diferencial e Integral son parte fundamental del plan de estudios de las carreras de Actuaría, Ciencias de la Computación, Física y Matemáticas. La materia de Cálculo I es el inicio de cuatro cursos de Cálculo que son parte de la formación profesional de los alumnos durante los primeros dos años de la licenciatura. De ahí la importancia de que sea bien enseñado por los profesores y bien aprendido por los alumnos.

Los conceptos del Cálculo son complicados y el alumno se enfrenta a diversas dificultades en su aprendizaje. Entre las dificultades más comunes podemos citar la falta de las siguientes habilidades en el estudiante: el manejo aritmético, el manejo simbólico, el desarrollo de un pensamiento lógico, la comprensión del idioma inglés, entre otras. Esta última la menciono ya que al no poder consultar la mayor parte de la bibliografía que está en inglés, los alumnos se encuentran limitados en sus fuentes de aprendizaje.

El objetivo de la materia de Cálculo I es, como su nombre lo indica, que el alumno aprenda a calcular. Para ello es importante que el alumno desarrolle destrezas matemáticas, es decir, un buen manejo de la aritmética del Cálculo así como también un buen manejo de cómo entender un problema, cómo resolver un problema, cómo saber qué herramientas usar para ello y dónde buscarlas, así como saber interpretar la solución a ese problema. Sin embargo, la mayoría de los alumnos de primer ingreso no conocen cuál es el pensamiento formal que se debe seguir para resolver problemas. No saben estructurar su pensamiento para desarrollar una resolución en forma lógica ni tienen la destreza aritmética ni la capacidad de indagación para ello. Lo anterior ocasiona que carezcan de una visión completa de los problemas del Cálculo cuando se enfrentan a ellos.

Mi tesis es que si se enseñan temas introductorios al curso de Cálculo I a los alumnos de primer ingreso, entonces podrán abordar el Cálculo con mayor comprensión y destreza. Teniendo un mejor entendimiento de lo que es el Cálculo y por ende un mejor desempeño en el curso. Esto es, que el alumno va a aprender a leer matemáticas (definiciones, axiomas, tablas de propiedades, símbolos), va a aprender a escribir matemáticas con palabras que ya conoce y símbolos (de la lógica matemática), va a aprender a pensar de forma lógica y lo más importante va a aprender a demostrar.

La consigna para poder probar la teoría citada fue elaborar un material didáctico y conseguir un grupo de alumnos para aquellos fines. Para abordar el primer punto, elaboré conjuntamente con el profr. Agustín Ontiveros un cuaderno de notas de clase que es el cuerpo principal de esta tesis. Y para el segundo, trabajé como ayudante del mismo profesor quien impartió el Curso de Cálculo Diferencial e Integral I. El tiempo en el que trabajamos en este proyecto fue durante el semestre 2009-1. El curso tuvo una duración normal de 16 semanas que corrieron del 11 de agosto al 28 de noviembre con un período de exámenes finales del 1 al 11 de diciembre del año 2008. Nuestro equipo de trabajo estuvo además conformado por Martha Reyes (primera ayudante) y Lilia Guadalupe Sánchez Terán (tercera ayudante).

La mecánica del trabajo en clase durante las tres primeras semanas del curso fue la siguiente: El profesor Agustín enseñó los temas introductorios al curso de Cálculo I. Martha Reyes Martínez y una servidora terminamos de cubrir los temas y resolvimos las dudas sobre ellos. Lilia Sánchez calificó las tareas e impartió un tema sobre Ecuaciones Diferenciales. A continuación resumo los capítulos de esta tesis.

En el Capítulo 1 se dá una introducción al lenguaje simbólico y lógico que se va a utilizar a lo largo del curso. También se presentan problemas de varias ramas de las matemáticas que sirvieron para enseñar a los alumnos métodos de resolución. En el Capítulo 2 se presenta una introducción a la teoría de conjuntos y las funciones. Finalmente en el Capítulo 3, presentamos una introducción a los números reales y naturales. En este último abordamos los conceptos de supremo e ínfimo que son unos de los conceptos básicos del Cálculo I.

En principio, esta tesis está dirigida a alumnos y profesores del curso de Cálculo Diferencial e Integral I. Esto para incluirlo como material del temario y de este modo hacer más eficiente el rendimiento académico de los alumnos de primer ingreso.

Capítulo 2

Breve introducción al Cálculo

2.1. El Lenguaje de las Matemáticas

En la vida cotidiana, para interactuar con sus semejantes, el ser humano necesita dominar un lenguaje común. Así mismo, para comprender los elementos del Cálculo y usarlos como instrumentos, el estudiante debe conocer y dominar el lenguaje de las matemáticas. Dicho lenguaje está compuesto en sus bases por la Lógica Matemática. En este capítulo, estudiaremos los puntos más importantes de la lógica. Así como sus aplicaciones a la resolución de problemas.

En matemáticas, cuando se desea probar un argumento se utiliza el sistema de la Lógica. La Lógica Matemática se aplica para decidir cuando una situación sigue de otra o es una consecuencia lógica (valga la redundancia) de una o más situaciones. Veamos las definiciones siguientes:

Definición. Proposición:

Oración que declara una situación o estado de cosas particular que puede ser calificada como verdadera o falsa (pero no ambas). Se denota por letras como p, q, r, etc.

Ejemplo: (Estas proposiciones también son llamadas oraciones primitivas)

1. Está lloviendo.
2. n es par.
3. Existe un entero k tal que $n = 4k + 2$.
4. Si 2 divide a 3, entonces 10 es primo.
5. Si 2 divide a n, entonces $n^2 + 1$ es primo.
6. Para todo entero n, $n^2 - n$ es par.
7. Para todo entero $n \geq 0$, $n^2 + n + 41$ es primo.
8. Existe un entero n tal que $n^2 + n + 41$ no es primo.
9. Para todo número x, $x^2 \geq 0$.
10. No existen enteros positivos x, y, z, n con $n > 2$ tales que $z^n = x^n + y^n$.

Definición. Símbolos Lógicos:

Son representaciones gráficas que se utilizan para hacer operaciones entre proposiciones. También llamados conectivos lógicos. Los más importantes se representan en la tabla siguiente por jerarquía de operaciones:

equivalencia	$\Longleftrightarrow$	"(es) equivalente (a)", "si y sólo si"
implicación	$\Longrightarrow$	"implica", "si...entonces..."
conjunción	$\wedge$	"y"
disyunción	$\vee$	"o", "...ó...ó ambos", "y/o"
negación	$\sim$	"no"

Definición.

En la siguiente tabla se muestran las definiciones más significativas de proposiciones obtenidas a partir de las proposiciones p y q.

Significado	Proposición
condicional o implicación de p y q	$p \Rightarrow q$
disyunción de p y q	$p \vee q$
conjunción de p y q	$p \wedge q$
negación de p	$\sim p$
bicondicional o condicional doble de p y q	$p \Leftrightarrow q$
conversa o recíproca de $p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
negativa de $p \Rightarrow q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$
contrapositiva de $p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$

<u>El uso de los paréntesis</u>

En el lenguaje de las matemáticas, los paréntesis forman parte de la notación cuando se utilizan símbolos lógicos. Los paréntesis son utilizados con un carácter asociativo, es decir de aislamiento del significado de lo que llevan dentro. Esto para darle un significado temporal a cada símbolo y de esta manera lograr comunicar las proposiciones de forma que no haya malos entendidos.

Utilizar paréntesis es recomendable para tener claridad en la escritura, sin embargo esto puede omitirse si se sigue la jerarquía de operaciones de los símbolos lógicos en la interpretación de las proposiciones.

La jerarquía de operaciones tiene, por tanto, una función asociativa. De separar por partes a las proposiciones para su aplicación.

<u>Ejemplo:</u>

Al leer la proposición $\sim p \vee q$ debe entenderse $(\sim p) \vee q$ y no $\sim (p \vee q)$. La razón de lo anterior es que la disyunción ($\vee$) tiene una mayor jerarquía que la negación ($\sim$) por lo tanto la negación no se aplica a toda la proposición $p \vee q$. Únicamente se aplica a p.

Nota:

Es recomendable usar los paréntesis hasta que se esté bien familiarizado con la jerarquía de operaciones. Por ejemplo, preferir escribir $(\sim p) \vee q$ a $\sim p \vee q$.

Ejemplo: Usando la notación de paréntesis decir qué se debe entender de las siguientes proposiciones. Justificar.

a) $p \vee q \Rightarrow r$

b) $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$

c) $p \Rightarrow q \Rightarrow r$

Solución:

a) Se debe entender $(p \vee q) \Rightarrow r$ y no $p \vee (q \Rightarrow r)$. Esto debido a que $\Rightarrow$ tiene una mayor jerarquía que $\vee$.

b) Se debe entender $p \Rightarrow q \wedge (q \Rightarrow p)$ y por esto se entiende $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Esto debido a que $\Rightarrow$ tiene una mayor jerarquía que $\wedge$.

c) Se debe entender $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$. Esto es porque $\Rightarrow$ divide temporalmente los significados. Primero se tiene que $p \Rightarrow q$ y luego se tiene que $q \Rightarrow r$.

Nota:
La proposición $p \Rightarrow q$ se lee de las formas siguientes:
p implica q
q se sigue de p
q es consecuencia de p
q es una condición necesaria para p
p es una condición suficiente para q
p es la hipótesis o antecedente y q es la tesis o consecuente

Ejemplo: Sean p, q y r tres proposiciones (primitivas). Mediante operaciones con los conectivos lógicos podemos obtener nuevas proposiciones (compuestas), veamos:

$p \Rightarrow q$	significa que siempre que p sea verdadera, entonces se sigue que q debe ser verdadera.
$p \Leftrightarrow q$	significa que p y q son verdaderas o que p y q son falsas.
$p \wedge q$	significa que p es verdadero y que q es verdadero.
$p \vee q$	es verdadero cuando al menos uno es verdadero ó cuando p y q son verdaderos.
$\sim p$	significa la negación de p. $\sim p$ es verdadero $\Leftrightarrow$ p es falso.
$(p \vee r) \Longrightarrow q$	significa que si p ó r es verdadero entonces q es verdadero.

Ejemplo: Sean p, q y r las oraciones primitivas siguientes:

p : Pedro realiza una caminata.

q : Hay luna llena.

r : Está lloviendo.

Las siguientes oraciones compuestas pueden traducirse de la siguiente manera:

i) $(q \wedge \sim r) \Rightarrow p$: si hay luna llena y no está lloviendo, entonces Pedro realiza una caminata.

ii) $q \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim p)$: si hay luna llena entonces, si no está lloviendo Pedro realiza una camina.

iii) $\sim (p \Leftrightarrow (r \vee q))$: no es el caso de que Pedro realice una caminata sí,y solamente sí, está lloviendo o hay luna llena.

Definición.
Existen otros símbolos lógicos que presentamos en la tabla siguiente:

Símbolo	Significado
$\forall$	para todo, para cada, para cualquier
$\exists$	existe, hay, para algún
$\mid$	tal que
!	único, factorial, contradicción
$\equiv$	equivalente

Nota: En la tabla anterior, los significados adjudicados al símbolo $\forall$ son equivalentes. Lo mismo sucede con los significados del símbolo $\exists$. Sin embargo, los tres significados del símbolo ! son diferentes.

Ejemplo:
a) $(\forall a \in A)(\ \exists! b \in B)(f\,(a) = b)$ se traduce como:

Para todo elemento de A existe un único elemento de B que es el resultado de aplicar la función f a dicho elemento de A.

b) $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$ es la definición de n factorial.

Ejemplo: Proposiciones con el cuantificador existencial.

1. Existe x tal que $x^2 = 1$ o bien $\exists\ x \mid x^2 = 1$
2. Existe x tal que $|x| \geq 0$ o bien $\exists\ x \mid |x| \geq 0$
3. Existe x tal que $|x| = -1$ o bien $\exists\ x \mid |x| = -1$
4. Existe x tal que $|x| = x$ o bien $\exists\ x \mid |x| = x$
5. Existe x tal que $|x| = -x$ o bien $\exists\ x \mid |x| = -x$

Ejemplo: Proposiciones con el cuantificador universal.

1. Para todo x, $x^2 = 1$ o bien $\forall\ x,\ x^2 = 1$
2. Para todo x, $|x| \geq 0$ o bien $\forall\ x,\ |x| \geq 0$
3. Para todo x, $|x| = -1$ o bien $\forall\ x,\ |x| = -1$
4. Para todo x, $|x| = x$ o bien $\forall\ x,\ |x| = x$
5. Para todo x, $|x| = -x$ o bien $\forall\ x,\ |x| = -x$

Ejemplo: Proposiciones con ambos cuantificadores.

1. Para toda x existe y tal que $x + y = 0$ o bien $(\forall x)\,(\exists y)\,(x + y = 0)$
2. Existe x tal que para toda y, $x + y = 0$ o bien $(\exists x)\,(\forall y)\,(x + y = 0)$

Tablas de verdad

Dada una selección previa de proposiciones simples y compuestas, una tabla de verdad es un arreglo rectangular en donde se representan los valores de verdad correspondientes a dichas proposiciones. Estos valores pueden ser de dos tipos: falso (representado comunmente por una F) o verdadero (representado comunmente por una V).

A continuación veremos las tablas de verdad de algunas operaciones básicas en Lógica Matemática.

- **La negación de una proposición**

p	$\sim p$
F	V
V	F

- **Principio de la doble negación:**

p	$\sim p$	$\sim (\sim p)$
V	F	V
F	V	F

- **La conjunción de dos proposiciones :**

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Nótese que $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

Ejemplo: $2 < \sqrt{2}$ y $\sqrt{2} < 3 : F$

- **La disyunción de dos proposiciones :**

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Nótese que $p \vee q \equiv q \vee p$.

Ejemplo: $2 < \sqrt{2}$ ó $\sqrt{2} < 3 : V$

■ **Las Leyes de De Morgan:**

$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q, \quad \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$	$(p \vee q)$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V	F	V	V

$\sim (p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q, \quad p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge \sim q)$	$\sim p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
V	V	F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V

■ **La implicación:**

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplo: Diga cuáles son las proposiciones que componen a la oración "Si llueve entonces María trae su paraguas" y determine cuándo es falsa $p \Rightarrow q$.

Solución:

p : llueve.

q : María trae su paraguas.

La proposición $p \Rightarrow q$ es falsa cuando no sucede que: si llueve María trae su paraguas. Es decir, podría pasar que llueva pero María no traiga su paraguas. En este caso, una cosa no implicaría a la otra y la proposición sería falsa.

Ejemplo: Diga cuáles son las proposiciones que componen a la oración "Si me saco la lotería le compro un coche a mi hermana" y determine cuándo es falsa $p \Rightarrow q$.

Solución:

p : me saco la lotería.

q : compro un coche a mi hermana.

La proposición $p \Rightarrow q$ es falsa cuando no sucede que: si me saco la lotería le compro un coche a mi hermana. Es decir, podría pasar que me saque la lotería pero no le compre un coche a mi hermana. En este caso yo habría mentido y la proposición sería falsa.

■ **La doble implicación:**

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Nota:
La proposición $p \Leftrightarrow q$ se lee de las formas siguientes:
p si, y sólo si, q
p es condición necesaria y suficiente para q
p se cumple cuando q se cumple y solo entonces
p es equivalente a q

Ejemplo: Identifique las proposiciones simples de las cuales está formada $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x = 1) \vee (x = 2)$. Interprete la proposición de acuerdo al significado de la doble implicación.
Solución:
$p : x^2 - 3x + 2 = 0, \; q : x = 1, \; r : x = 2$
p se cumple o tiene solución cuando q y r se cumplen y solo entonces. En otras palabras, las únicas soluciones del polinomio cuadrático $x^2 - 3x + 2 = 0$ son $x = 1$ y $x = 2$.

Definición. Tautología:
Una tautología es una combinación de proposiciones que siempre es verdadera.

Ejemplo:

a) Soy amiga de Pedro o no soy amiga de Pedro ($p \vee \sim p$).

b) Si manejo muy rápido entonces manejo muy rápido ($p \Rightarrow p$).

c) No es cierto que no es cierto que estoy enojada ($\sim (\sim q)) \Leftrightarrow q$.

d) Si como, se me quita el hambre o me da más.

Definición. Contradicción:
Una contradicción es una combinación de proposiciones que siempre es falsa. Además su negación es una tautología.

Ejemplo:

a) Soy mexicana pero no soy mexicana ($p \wedge \sim p$).

b) Te odio y te quiero.

c) Está vivo pero está muerto.

Definición. Proposiciones equivalentes:

Dos proposiciones son equivalentes cuando se obtiene una tautología como resultado de poner el conectivo lógico $\Leftrightarrow$ entre ellas.

■ **La equivalencia:**

Dos proposiciones equivalentes se denotan por $p \equiv q$.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

La tabla de verdad de $p \Leftrightarrow q$ es la misma que la de $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$:

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

■ **Algunas Tautologías importantes:**

$p \vee q \Leftrightarrow \sim [(\sim p) \wedge (\sim q)]$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim [(\sim p) \wedge (\sim q)]$	$p \vee q$	$(p \vee q) \Leftrightarrow \sim [(\sim p) \wedge (\sim q)]$
V	V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	F	F	V

Ley del Tercero excluído: $p \vee \sim p$

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
V	V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

$(\sim q \Rightarrow \sim p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
V	V
V	V
V	V
V	V

Nota: La proposición $\sim q \Rightarrow \sim p$ es llamada la contrapositiva de $p \Rightarrow q$.

Ahora, veamos con más detalle la tabla de verdad siguiente. En ella examinamos la proposición compuesta "Mary W. Shelley es la autora de 'Frankenstein', y si $5 + 4 \neq 9$, entonces El curso de Cálculo I es obligatorio para matemáticos". En notación simbólica se escribe: $q \wedge (\neg r \Rightarrow p)$, donde p, q y r representan las oraciones primitivas siguientes:

p : El curso de Cálculo I es obligatorio para matemáticos.

q : Mary W. Shelley es la autora de "Frankenstein".

r : $5 + 4 = 9$.

La última columna contiene los valores del resultado buscado. Para obtenerlo utilizamos el hecho de que la conjunción de proposiciones es verdadera si, y solo si, ambas son verdaderas. Obsérvese que las cuatro primeras columnas representan proposiciones simples (para la cuarta columna, la negación de una proposición es una proposición simple), mientras que las dos últimas columnas son de proposiciones compuestas.

p	q	r	$\sim r$	$\sim r \Rightarrow p$	$q \wedge (\sim r \Rightarrow p)$
F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F
V	F	V	F	V	F
V	V	F	V	V	V
V	V	V	F	V	V

En la tabla de verdad siguiente examinaremos las proposiciones compuestas (que también hemos llamado fórmulas) $p \vee (q \wedge r)$ y $(p \vee q) \wedge r$. Veremos que sus valores no siempre son iguales.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
F	F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F
V	F	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	V	F
V	V	V	V	V	V	V

Veamos tres proposiciones relacionadas con "p implica q":

a) $q \Rightarrow p$ (recíproca de $p \Rightarrow q$)
b) $p \wedge \sim q$ (negación de $p \Rightarrow q$)
c) $\sim q \Rightarrow \sim p$ (contrapositiva de $p \Rightarrow q$)

Ejemplo: Exprese la recíproca, la negativa y la contrapositiva de:

a) Cada vez que el teléfono suena, voy a contestarlo (Si el teléfono suena, entonces voy a contestarlo).

b) Es necesario que comas espinacas para que estés sano (Si comes espinacas, entonces estarás sano).

Solución:

a)

-Recíproca: Si corro a contestar el teléfono, entonces el teléfono suena.

-Negación: El teléfono suena y no corro a contestarlo.

-Contrapositiva: Si no coro a contestar el teléfono, entonces el teléfono no suena.

b)

-Recíproca: Si estás sano, entonces comes espinacas.

-Negación: Comes espinacas y no estás sano.

-Contrapositiva: Si no estás sano, entonces no comes espinacas.

Ejemplo: Sean p y q las proposiciones "n es un entero tal que n^2 es par" y "n es par" respectivamente. Exprese la proposición recíproca, la negativa y la contrapositiva de "si p, entonces q".

Solución:

$\sim p$:	n es un entero tal que n^2 es impar.
$\sim q$:	n es impar.
$p \Rightarrow q$:	Si n es un entero tal que n^2 es par, entonces n es par.
$q \Rightarrow p$:	Si n es par, entonces n^2 es par.
$\sim p \Rightarrow \sim q$:	Si n es un entero tal que n^2 no es par, entonces n es impar.
$\sim q \Rightarrow \sim p$:	Si n es un entero impar, entonces n^2 es impar.

Ejemplo: Sean p : el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo con un ángulo recto y Q : el cuadrilátero $ABCD$ es un rectángulo, dos proposiciones. Exprese la proposición recíproca, negativa y la contrapositiva de: si p, entonces q.

Solución:

$\sim p$: el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo con todos sus ángulos diferentes a $90°$.

$\sim q$: el cuadrilátero $ABCD$ no es rectángulo.

$p \Rightarrow q$: Si el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo con un ángulo recto, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es un rectángulo.

$q \Rightarrow p$: Si el cuadrilátero $ABCD$ es un rectángulo, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo con un ángulo recto.

$\sim p \Rightarrow \sim q$: Si el cuadrilátero $ABCD$ no es un paralelogramo con un ángulo recto, el cuadrilátero $ABCD$ no es un rectángulo.

$\sim q \Rightarrow \sim p$: Si el cuadrilátero $ABCD$ no es un rectángulo, entonces el cuadrilátero $ABCD$ no es un paralelogramo con un ángulo recto.

Ejemplo: Demuéstrese que las siguientes relaciones son verdaderas:

a) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$

b) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

c) $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

Solución: Observemos las siguientes tablas de verdad. Bastará ver que las columnas de los valores correspondientes a cada lado de la doble implicación son idénticas.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \vee q$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	F	V	F	V	V	F
V	F	F	V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	F	V	V	F

$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$	$\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$
V	V	V
V	V	V
V	V	V
V	V	V

Ejemplo: Demuestre que la relación $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ es verdadera.

Solución: Veamos las siguientes tablas de verdad.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim (p \wedge q) \Rightarrow \sim p \vee \sim q$	$\sim p \vee \sim q \Rightarrow \sim (p \vee q)$
V	V	F	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V

$(\sim (p \wedge q) \Rightarrow \sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \Rightarrow \sim (p \wedge q)$
V
V
V
V

El Método Formal

Las Matemáticas son todo un universo lleno de mundos simbólicos en constante construcción. El propósito permanente de las Matemáticas es la generación de conocimiento verdadero. Para ello, las Matemáticas se apoyan en una facultad del pensamiento humano: la deducción. El trabajo sistemático de la consrtucción de conocimiento es una labor que se hace de manera rigurosa apoyada en varias herramientas lógicas. El método que utiliza la Matemática para estos fines se llama "Método Formal". Para entender qué es el método formal veamos las siguientes definiciones.

Definición. Definición:
Una definición es una explicación clara y exacta del significado de una palabra o concepto.

Definición. Reglas de inferencia:
Una regla de inferencia es un criterio que nos permite deducir si un elemento compuesto de nuestro lenguaje es a su vez consecuencia de otros elementos del lenguaje.

Definición. Enunciado:
Un enunciado es una exposición o formulación del lenguaje. En el caso de las matemáticas, los enunciados se clasifican en definiciones, proposiciones, axiomas, teoremas, lemas y corolarios.

Definición. Axioma:
Es una proposición cuyo significado se acepta como verdadero por un convenio o acuerdo explícito.

<u>Ejemplo:</u> Axiomas de la Geometría Euclidiana

1) Por cualesquiera dos puntos es posible trazar una recta que contenga a ambos.

2) Todo segmento de recta se puede prolongar indefinidamente.

3) Dados cualquier punto y cualquier distancia, es posible construir un círculo.

4) Todos los ángulos rectos son iguales.

5) Si dos líneas rectas son cortadas por una tercera y los ángulos internos que forma con ellas (de un mismo lado) suman menos que dos rectos, entonces las rectas (las dos rectas primeras) se cortarán en algún punto si las prolongamos de ese lado indefinidamente.

<u>Ejemplo:</u> Ver los axiomas para la suma y el producto de $\mathbb{R}$ en la sección "$\mathbb{R}$ y su estructura Algebráica de Campo" del capítulo "Números".

Definición. Teorema:
Es una proposición cuya veracidad o falsedad se puede demostrar mediante un proceso lógico, apoyándose para ello en un conjunto de axiomas aceptados previamente.

<u>Ejemplo:</u> Teorema de Pitágoras

"En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa"

Definición. Lema:
Teorema que se usa muy frecuentemente para demostrar la validez de otros teoremas.

Definición. Corolario:

Teorema cuya validez ya no es necesario demostrar porque es resultado de la validez de otro teorema.

Definición. Teoría:
Llamamos teoría a un conjunto de reglas y leyes organizadas sistemáticamente que sirven de base a una ciencia y explican cierto orden de hechos. En Matemáticas, la teoría está compuesta por los enunciados.

Un sistema de conocimientos deductivo tiene un inicio, es decir, se apoya en proposiciones, axiomas o postulados. Estos, junto con las llamadas reglas de inferencia constituyen un método. El Método Formal es un procedimiento racional y deductivo que consta de las definiciones anteriores y sirve para:

1) Crear teorías consistentes para explicar fenómenos.
2) Ordenar y sistematizar el conocimiento adquirido.
3) Es una forma de aprender.
4) Incorporar nuevos resultados a los ya conocidos.
5) Hacer análisis de lo obtenido y establecer límites de este método.
6) Fomentar otros métodos y analizarlos.

Formas de Demostración

Debido a que el Método Formal consta de Teoremas, para trabajar en Matemáticas es de suma importancia saber cómo demostrar una proposición. Por ello, estudiaremos tres formas básicas de proceder: directa, por contrapositiva y por contradicción.

a) **Demostración directa**: Suponga que p es verdadera y demuestre que q es verdadera.

1) Escribir claramente lo que se quiere demostrar (Por demostrar ó p.d. q)
2) Suponer que se cumple p.
3) Mediante pasos lógicos llegar a que se cumple q.

b) **Demostración por contrapositiva**: Suponga que q es falsa y pruebe que p es falsa.

1) Escribir claramente lo que se quiere demostrar (Por demostrar ó p.d. $\sim p$)
2) Suponer que se cumple $\sim q$.
3) Mediante pasos lógicos llegar a la demostración de que $\sim q \Rightarrow \sim p$.
4) Concluir q (ya que son equivalentes $p \Rightarrow q$ y $\sim q \Rightarrow \sim p$).

c) **Demostración por contradicción**: Suponga que p es verdadera y que q es falsa. Demuestre entonces que esto conduce a una contradicción.

Nota: Una cuarta forma de demostración se estudiará en la sección de Tópicos de Álgebra. La llamamos: demostración por Inducción Matemática y se aplica cuando la proposición a demostrar tiene que ver con los números naturales.

Para saber más sobre las formas de demostración se recomienda al lector llevar un curso del Lógica Matemática o estudiar las referencias de Lógica que vienen en la bibliografía.

Sabemos como probar la veracidad de la proposición $p \Rightarrow q$. Si lo que se busca es la veracidad de q entoces lo que se debe tener es la veracidad de p y la veracidad de $p \Rightarrow q$. Esto se llama "modus ponens".

Para probar una doble implicación $p \Leftrightarrow q$. Se supone p verdadera y se prueba que q es verdadera y viceversa.

<u>Ejemplo:</u> Demuestre que:

1) Si $x = 2$, entonces $x^2 - 4 = 0$ $\left(x = 2 \Rightarrow x^2 - 4 = 0\right)$.

2) Si $x^2 - 4 = 0$, entonces $x = 2$ $(x^2 - 4 = 0, \Rightarrow x = 2)$.

3) Si $x = 2$ ó $x = -2$ entonces $x^2 - 4 = 0$ $\left[(x = 2 \text{ ó } x = -2) \Rightarrow x^2 - 4 = 0\right]$

4) Si $x^2 - 4 = 0$, entonces $x = 2$ ó $x = -2$ $(x^2 - 4 = 0, \Rightarrow x = 2 \text{ ó } x = -2)$

5) $x = 2$ ó $x = -2$ si, y solo si,$x^2 - 4 = 0$ $\left(x = 2 \text{ ó } x = -2 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0\right)$

6) $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

7) $\varepsilon > 0,\ \ |a_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$

<u>Solucion:</u>

1) Se demuestra de forma directa $(p \Rightarrow q)$, siendo $p : x = 2$ y $q : x^2 - 4 = 0$.

$$\begin{array}{lll} x = 2 & \Rightarrow \quad x^2 = 4 & \textit{elevando al cuadrado la igualdad} \\ & \Rightarrow \quad x^2 - 4 = 4 - 4 & \textit{restando 4 a la igualdad} \\ & \Rightarrow \quad x^2 - 4 = 0 & \textit{existencia del inverso aditivo} \end{array}$$

2) La proposición es falsa ya que si $x = -2$ se cumple $x^2 = 4 = 0$ y eso no implica que $x = 2$

3) $x = 2 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$ se demostró en el inciso 1.

Si $x = -2$ se demuestra análogamente que $x^2 - 4 = 0$

4) Se demuestra directamente siendo $p : x^2 - 4 = 0$ y $q : x^2 = 2 \ \vee x^2 = -2$.

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$

5) La implicación $\Rightarrow$ se demostró en el inciso 3. La implicación $\Leftarrow$ se demostró en 4).

Nota: Se acostumbra llamar a las implicaciones $\Rightarrow$ y $\Leftarrow$ "la ida" y "el regreso" respectivamente.

6) La expresión $|x| < 1$ quiere decir que, en la recta real, la distancia que hay de x al 0 es menor que una unidad. Esto implica que $x \in (-1, 1)$ i.e. $-1 < x < 1$.

Si $-1 < x < 1$ entonces la distancia que hay de x al 0 es menor que 1. Por lo tanto $|x| < 1$.

7) La expresión $|a_n - L| < \varepsilon$ quiere decir que cualquier punto a_n (que es un punto de una sucesión) se encuentra a una distancia menor que ε del punto L. Eso implica que $-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$ y por consiguiente $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$.

Si $-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$ y sumamos L a la desigualdad. $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ entonces $a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ lo cual quiere decir que los puntos a_n distan de L en menos que ε, i.e. $|a_n - L| < \varepsilon$.

Nota: La expresión $|x|$ se lee: valor absoluto de x. La definición del valor absoluto de un número está dada en la sección "$\mathbb{R}$ y su estructura algebráica de Campo"del capítulo "Números".

Ejemplo: Demuéstrese la falsedad de la proposición: si $|x| > 0$ entonces $x > 0$

Solución: -5 es tal que $|-5| > 0$ (por definición de valor absoluto). Sin embargo $-5 \not> 0$. Por lo tanto, la proposición es falsa.

Ejemplo: Demuéstrese la veracidad o falsedad de las proposiciones siguientes.

a) $2 > 7 \Rightarrow 1 > 3$

b) $2 < 7 \Rightarrow 1 < 3$

c) $x = 3 \Rightarrow 1 < 2$

d) $x = 3 \Rightarrow 1 > 2$

Solución:

a) Se demuestra por contradicción siendo $p : 2 < 7$ y $\sim q : 1 \not< 3$ y suponiendo que $p \wedge \sim q$ con lo que se llega a una contradicción.

$2 > 7 \Rightarrow 1 > 6$, como $6 > 3$ por lo que $1 > 3$. La proposición es verdadera.

b) Sea $2 < 7$ y supongamos que $1 \not< 3$. Veamos los casos siguientes:

-Caso 1: $1 = 3 \Leftrightarrow 2 = 6 \Leftrightarrow 4 = 12$, entonces $2 < 7 \Rightarrow 2 + 12 < 7 + 4 \Rightarrow 14 < 11!$

-Caso 2: Si $1 > 3 \Rightarrow 3 > 9$ entonces $2 < 7 \Rightarrow 11 < 10!$

Por lo tanto $1 < 3$. La proposición es verdadera.

c) Probaremos por contradicción (como en el inciso anterior) suponiendo que $x = 3$ y que no sucede que $1 < 2$.

-Caso1. Sea $x = 3$ y $1 = 2$. Como $3 = 1 + 2$, si $1 = 2 \Rightarrow 3 = 1 + 1 = 2!$

-Caso2. Sea $x = 3$ y $1 > 2$. Como $2 < 3$ entonces $4 < 4!$

Por lo tanto, la proposición es verdadera.

d) La proposición puede ser verdadera o falsa. Se deja al lector su demostración.

Con el ejemplo anterior hemos visto que una proposición falsa puede implicar cualquier cosa. Asímismo, una proposición verdadera puede implicar cualquier cosa.

Ejemplo: Probar lo siguiente.

1) $n > 2 \Rightarrow n^2 + n > 4$

2) $n > 2 \not\Leftarrow n^2 + n > 4$

3) $n > 2 \not\Rightarrow n^2 + n > 16$

Solución:

1) $n > 2 \Rightarrow n^2 > 4 \Rightarrow n^2 + n > 4 + 2 = 6 > 4$.

2) Si $n = 2,\ n^2 + n > 4$ y $n \not> 2$.

3) Si $n = 3,\ n > 2$ pero $n^2 + n \leq 16$.

Ejemplo: Demuéstrese que si $x \in \varnothing$, entonces x es un león ojiverde. (Ver la definición de $\varnothing$ en el capítulo "Conjuntos, Funciones y Lógica").

Solución: Como $x \in \varnothing$ es falso, x puede ser cualquier cosa y la proposición es verdadera. La solución se puede ver directamente en la tabla de verdad de La implicación:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

En este caso, la proposición $p : x \in \varnothing$ es falsa. Su valor corresponde a cualquiera de las dos últimas filas de la tabla de verdad. Luego, no importando el valor de la proposición q :"x es un león ojiverde", la implicación $p \Rightarrow q$ es verdadera para cualquier valor de q.

Ejemplo: Demuéstrese que para $a \geq 0$ si $a < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.

Solución: Si $a > 0$ cuando a juega el papel de ε tenemos $a < \varepsilon = a$ o sea $a < a$ lo cual es un absurdo. Por lo tanto $a = 0$.

Nota: La conclusión del ejemplo anterior se obtiene revisando los axiomas de orden de $\mathbb{R}$. Estos axiomas están en la sección 4.1 del capítulo 4.

Ejemplo: Demuéstrese que si π^2 es irracional entonces π es irracional.

Solución: (Por contrapositiva) Sea p :"π^2 es irracionalz q :"π es irracional", probaremos que $\sim q \Rightarrow \sim p$: π es racional $\Rightarrow \pi^2$ es racional.

Ejemplo: Demuéstrese lo siguiente.

1) Si $4 = 5$ entonces $2 < 5$

2) Si $4 = 5$ entonces $5 = 6$

3) Si $|x - p| < \text{mín}\left(1, \frac{\varepsilon}{2|p|+1}\right)$, entonces $\left|x^2 - p^2\right| < \varepsilon$

Solución:

1) Demostración directa: Como $2 < 4$ y $4 = 5$, tenemos $2 < 5$.

También podemos resolverlo directamente de la tabla de verdad de La implicación. En este caso, ubicamos las proposiciones $p : 4 = 5$ y $q : 2 < 5$ en sus valores respectivos y vemos que,independientemente de esto, la proposición $p \Rightarrow q$ tendrá un valor verdadero.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
$(4 = 5)\ F$	$(2 < 5)\ V$	V
$(4 = 5)\ F$	F	V

2) $5 = 4 + 1$ y como $4 = 5$, entonces $5 = 4 + 1 = 5 + 1 = 6$. Por otro lado vemos en la tabla de verdad que la implicación de dos proposiciones falsas es verdadera.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
$(4 = 5)\ F$	$(5 = 6)\ F$	V

3) $\left|x^2 - p^2\right| = |x - p|\,|x + p| \leq |x - p|\,(|x| + |p|)$. Como $|x - p| < 1$ y $|x| - |p| \leq |x - p|$ se tiene $|x| \leq |p| + 1$. Entonces $\left|x^2 - p^2\right| \leq |x - p|\,(1 + 2\,|p|)$. También como $|x - p| < \frac{\varepsilon}{2|p|+1}$ se tendrá $\left|x^2 - p^2\right| \leq |x - p|\,(1 + 2\,|p|) < \frac{\varepsilon}{2|p|+1}\,(2\,|p| + 1) = \varepsilon$

Ejemplo: Sea $\triangle XYZ$ un triángulo rectángulo con su ángulo recto en Z. Demuéstrese que si el triángulo tiene área $A = \frac{z^2}{4}$, entonces es isósceles.

Solución: (Fig.2.1)

a) Tomando como base x y como altura y tenemos $Area\,(\triangle XYZ) = \frac{xy}{2}$. Luego, por hipótesis $\frac{z^2}{4} = \frac{xy}{2} \Leftrightarrow z^2 = 2xy$. Por pitágoras $z^2 = x^2 + y^2$. Luego $x^2 + y^2 = 2xy \Leftrightarrow (x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$. Por lo tanto el triángulo $\triangle XYZ$ es isósceles.

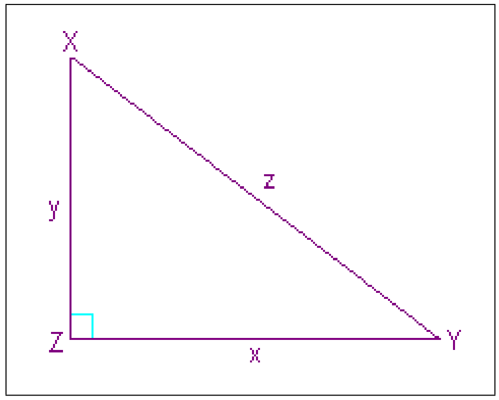


Figura 2.1: Triángulo $\triangle XYZ$

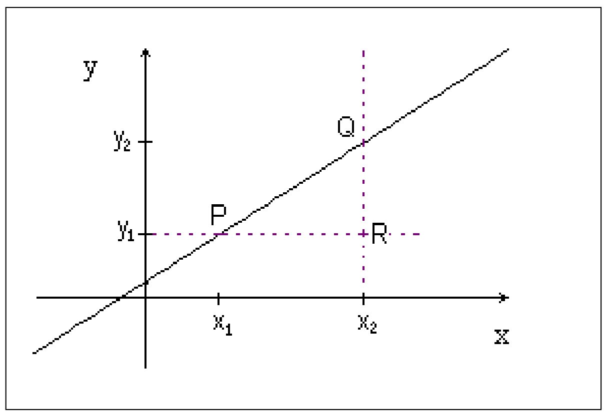


Figura 2.2: Distancia entre dos puntos

2.2. Tópicos de Geometría Analítica

Dados dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ en el plano Cartesiano. La distancia entre ellos es $\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. La demostración de lo anterior es sencilla. La haremos a continuación aplicando el teorema de Pitágoras.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ están en el primer cuadrante (Fig. 2.2) y que $x_1 < x_2,\ y_1 < y_2$. Siendo $R(x_2, y_1)$, notamos que se forma el triángulo rectángulo $\triangle PQR$. Luego, la distancia que hay de P a Q es la magnitud de su hipotenusa que denotamos como $\overline{PQ}$. Y aplicando teorema de Pitágoras tenemos $\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Ejemplo: Calcular las coordenadas del punto Q el cual es el simétrico de (a, b) con respecto a $y = x$.

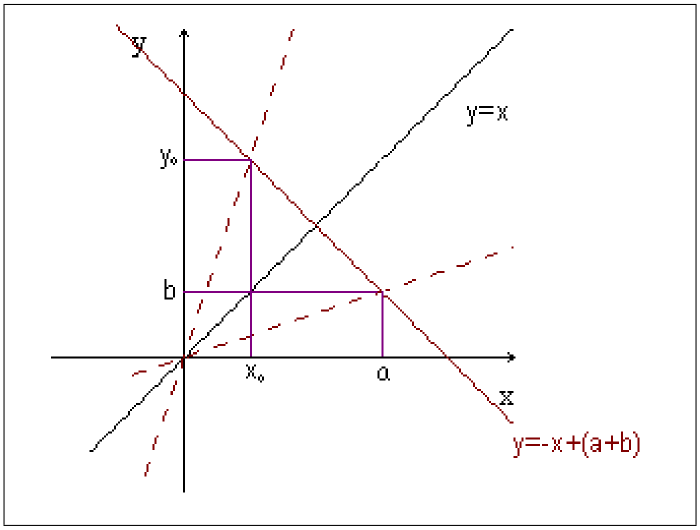


Figura 2.3: Coordenadas del punto Q

Solución: Sea $Q = (x_0, y_0)$, por hipótesis tenemos que Q se encuentra sobre la recta que pasa por (a, b) y es ortogonal a la recta $y = x$. Usando la forma punto pendiente $Q \in \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x + (a + b)\right\}$. Además Q y (a, b) son equidistantes al cero. Luego, por la fórmula de distancia entre dos puntos tenemos $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow$ $x_0^2 + (-x_0 + a + b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2x_0^2 - x_0\,(2a + 2b) + 2ab = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0\,(a + b) + ab = 0$

$\Leftrightarrow (x_0 - a)\,(x_0 - b) = 0$

Donde las soluciones son: $i)$ $x_0 = a \Rightarrow y_0 = b$; $ii)$ $x_0 = b \Rightarrow y_0 = a$

Para tener una mayor idea visual, supongamos sin pérdida de generalidad que (a, b) está en el primer cuadrante del plano Cartesiano (Fig. 2.3).

Ejemplo: Demostrar que las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente. Un rombo es un cuadrilátero de lados iguales.

Solución: Sean $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2$ dos vectores no colineales tal que $|\overline{u}| = |\overline{v}|$. Por la regla del paralelogramo podemos construir el rombo de lado $|\overline{u}|$ y tenemos que $\overline{u} + \overline{v}$ y $\overline{v} - \overline{u}$ son las diagonales de éste. Luego, aplicando el producto punto:

$(\overline{u} + \overline{v}) \cdot (\overline{v} - \overline{u}) = (\overline{u} + \overline{v}) \cdot \overline{v} - (\overline{u} + \overline{v}) \cdot \overline{u} = \overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{v}^2 - \left(\overline{u}^2 - \overline{v} \cdot \overline{u}\right) = 0$

Concluimos que ambas diagonales se cortan perpendicularmente.

Ejemplo: Encontrar la ecuación del lugar geométrico de los puntos (x, y) cuyo producto de distancias r_1 y r_2 a los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ es 1.

Solución: Tenemos que las coordenadas rectangulares de los focos son, $x = a,\ y = 0$ y $x = -a,\ y = 0$ (en este caso $a = 1$). Las distancias de cualquier punto (x, y) a los focos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ son $r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ y $r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$ respectivamente. Además el producto $r_1 r_2$ tiene el valor constante a^2. Luego, mediante un cálculo sencillo que consiste en sustituir los valores de r_1 y r_2 en la ecuación $r_1 r_2 = a^2$ obtenemos la ecuación $\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2a^2\left(x^2 - y^2\right) = 0$. Introduciendo coordenadas polares (ver la sección de coordenadas polares) tenemos que $r^4 - 2a^2 r^2 \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = 0$. Como $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ y dividiendo la igualdad entre r^2 obtenemos $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ la ecuación de la Lemniscata. (Fig. 2.4)

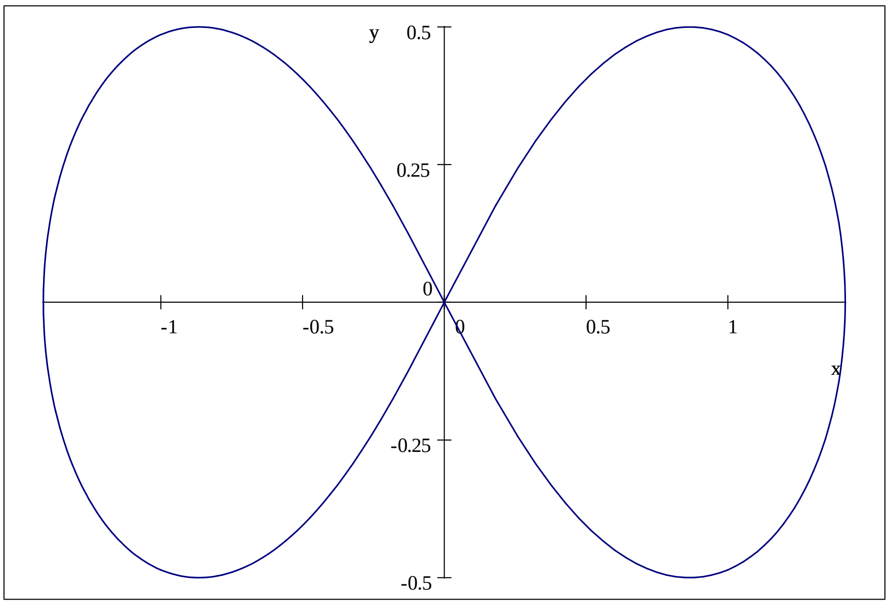


Figura 2.4: Lemniscata

Ejemplo: El círculo $x^2 + y^2 = 2a^2$ y la parábola $y = \frac{x^2}{a}$ se cortan en el punto P. Cuando varía el punto P este describe una curva. Hallar la ecuación de tal curva.

Solución: La ecuación rectangular de la intersección es $x^2 + \left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = 2a^2$ De ahí que $x^2 + \frac{x^4}{a^2} = 2a^2 \Leftrightarrow x^4 + a^2x^2 = 2a^4$, completando cuadrados:$\left(x^2 + \frac{a^2}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}a^4$, introduciendo coordenadas polares: $\left(r^2\cos^2\theta + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{9a^4}{4} \Leftrightarrow r^2\cos^2\theta + \frac{a^2}{2} = \frac{3}{2}a^2$. De ahí obtenemos $r^2 = \frac{a^2}{\cos^2\theta}$.

Ejemplo: Considerando la figura 2.5, muéstrese que las medianas de un triángulo concurren. Así como las alturas y las mediatrices. Además muéstrese que los 3 puntos de concurrencia están alineados.

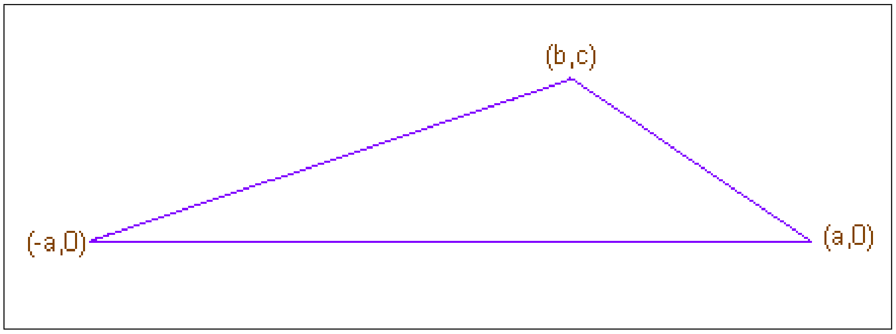


Figura 2.5:

Solución: Se revisan las definiciones y se deja la demostración al lector.

Denomínense **medianas** de un triángulo a las tres rectas que unen los vértices con los puntos medios de los lados opuestos. Llámese **altura** a la longitud de la perpendicular bajada a la base desde el vértice opuesto. Llámese **mediatríz** a cada recta perpendicular que pasa por el punto medio de cada lado del triángulo.

2.3. Funciones y sus Gráficas

Las funciones son sumamente importantes en el Cálculo. Hablamos de funciones cuando una cantidad depende de otra o varía con ella. Podemos representarlas gráficamente en el plano Cartesiano. De esta manera se ve con mayor claridad el comportamiento de las variables. Por ejemplo podemos graficar la presión en función de la temperatura de un objeto o la velocidad de un corredor en función del tiempo.

Las funciones básicas del Cálculo que estudiaremos son las funciones lineales, polinomiales, las del tipo $f(x) = x^a$, funciones raciconales, algebraicas, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y trascendentes.

Funciones Lineales

Son aquellas cuya gráfica es una recta. Para graficarlas, recordemos la fórmula $y = mx + b$ donde m es la pendiente y b la ordenada al orígen de la recta.

Ejemplo: Graficar la función lineal $y = x - 2$. (Fig. 2.6)

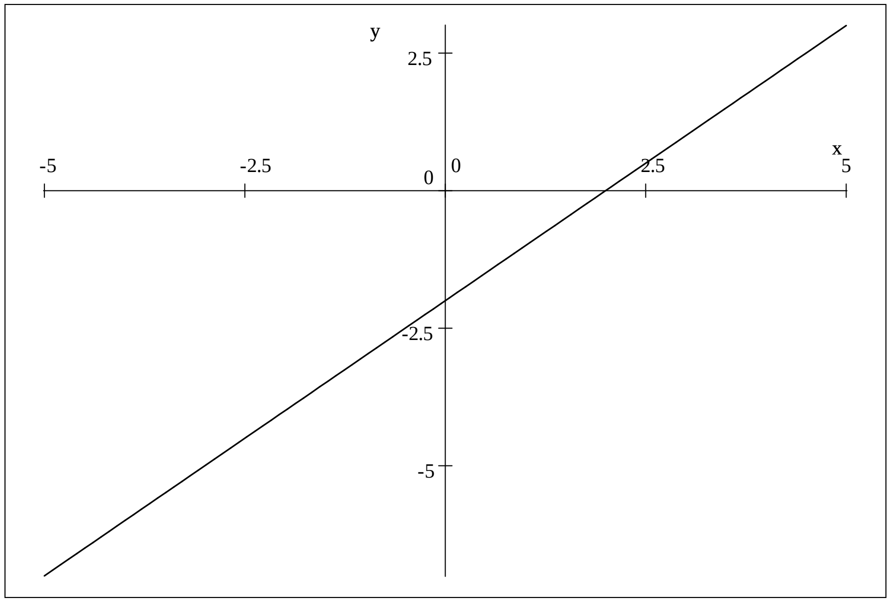


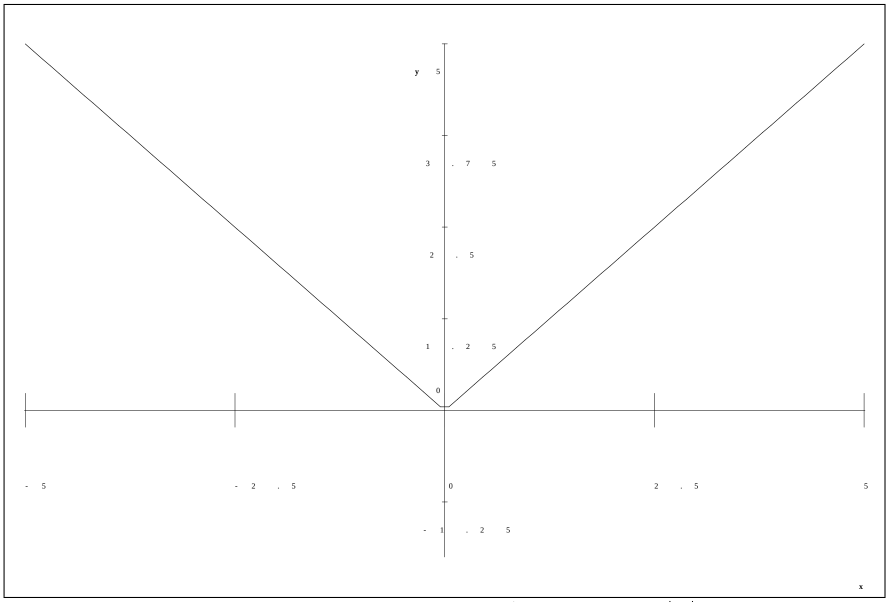
Figura 2.6: Gráfica de la función $y = x - 2$.

Funciones Lineales Definidas por intervalos

Como su nombre lo indica, estas funciones toman sus dominios de intervalos diferentes y a cada intervalo le corresponde una función diferente. Hay algunas que son discontínuas.

Ejemplo: Una función muy popular en el Cálculo es la función Valor Absoluto $y = |x|$ que está definida de la forma siguiente: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Veamos su gráfica en la figura2.3.

$|x|$

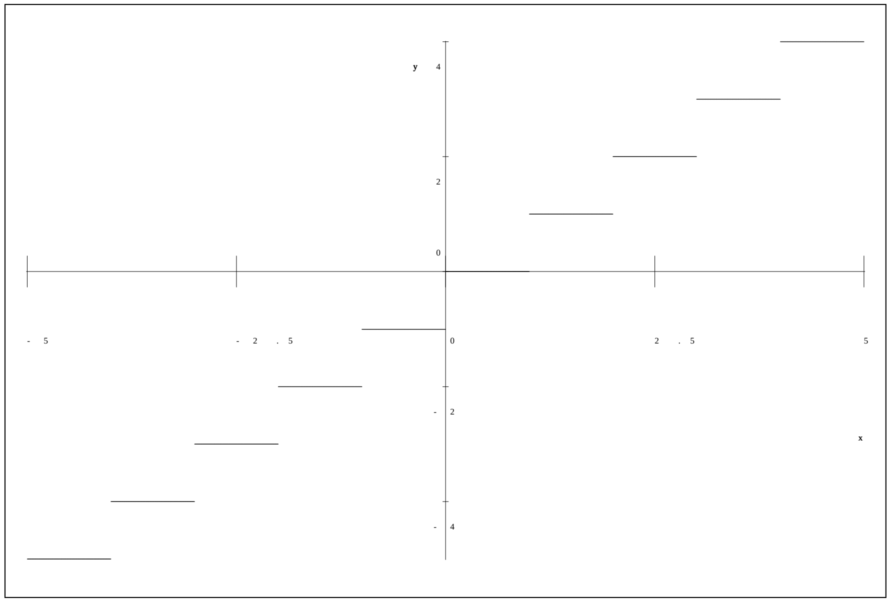


Gráfica de la función Valor Absoluto $y = |x|$.

Elemplo: Otra función definida por intervalos es la función Máximo Entero, que representa al mayor entero menor o igual que x. También es conocida como la "función piso". Se define de la forma siguiente (La gráfica se representa en la figura 2.3).

$$f(x) = \begin{cases} \vdots \\ 0 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ si } 1 \leq x < 2 \\ 2 \text{ si } 2 \leq x < 3 \\ \vdots \end{cases} = \{ n \text{ si } n \leq x < n+1 \leq \text{ donde } n \in \mathbb{Z}$$

$\lfloor x \rfloor$



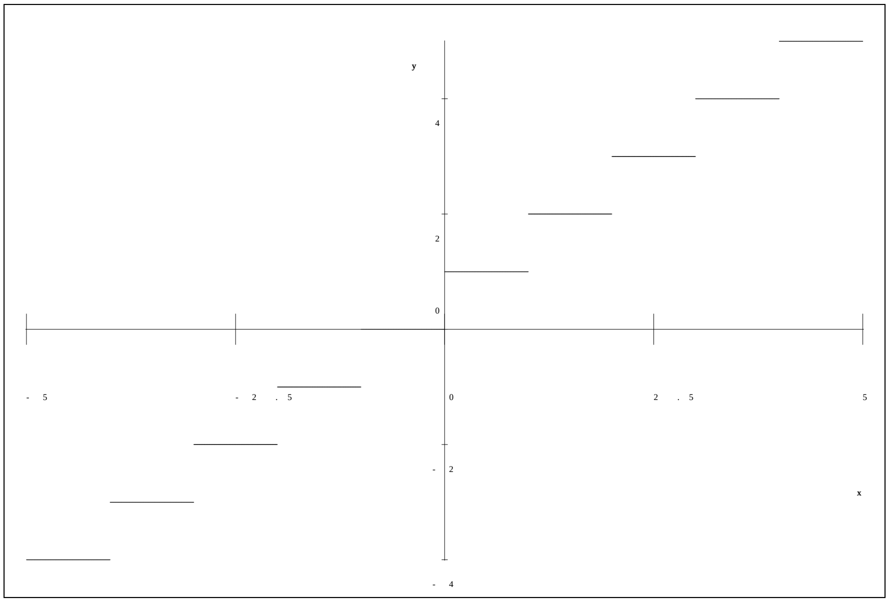
Función Máximo entero.

Ejemplo: La función mínimo entero, representa al menor entero mayor o igual que x.

También es conocida como la "función techo". Ver su gráfica en la figura 2.3.

$$f(x) = \begin{cases} \vdots \\ 1 \text{ si } 0 < x \leq 1 \\ 2 \text{ si } 1 < x \leq 2 \\ 3 \text{ si } 2 < x \leq 3 \\ \vdots \end{cases} = \{ n \text{ si } n - 1 < x \leq n \text{ donde } n \in \mathbb{Z}$$

$\lceil x \rceil$

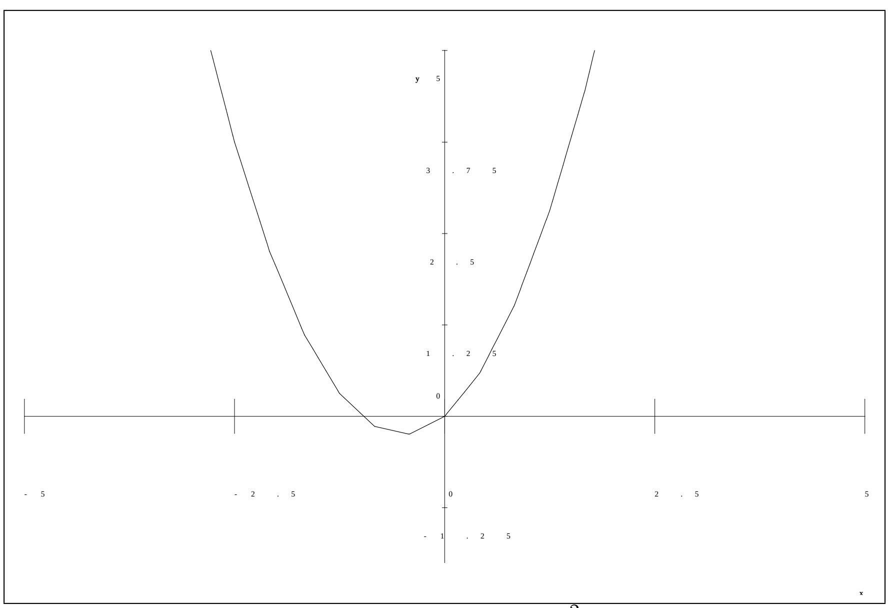


Función Mínimo Entero

Funciones Polinomiales

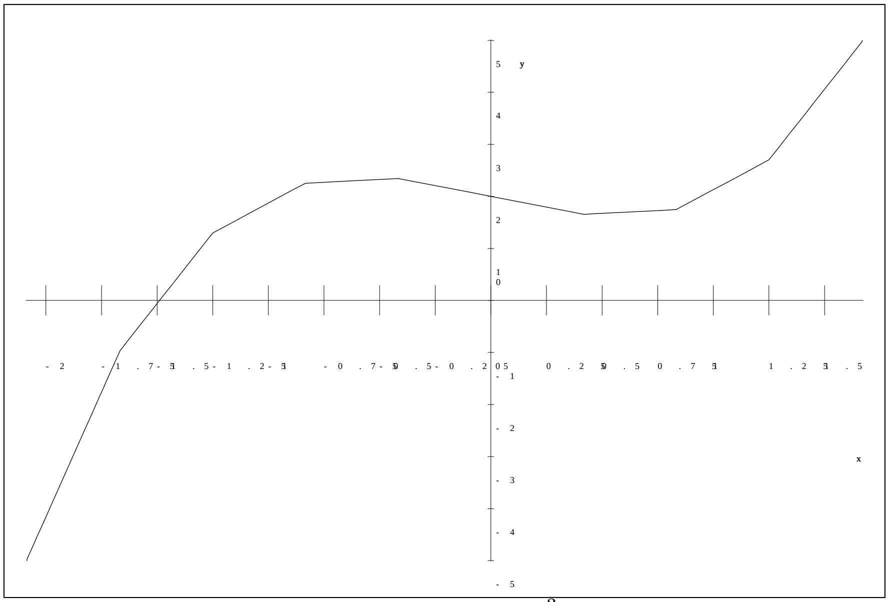
Son los polinomios de grado n $(n \in \mathbb{Z}^+)$ con coeficientes en $\mathbb{R}$. Se escriben $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. A los polinomios de grado 2 los conocemos comunmente como funciones cuadráticas (Fig. 2.3) y a los polinomios de grado 3 como funciones cubicas (Fig. 2.3).

$y = x^2 + x$



Gráfica de la función $y = x^2 + x$.

$y = x^3 - x + 2$



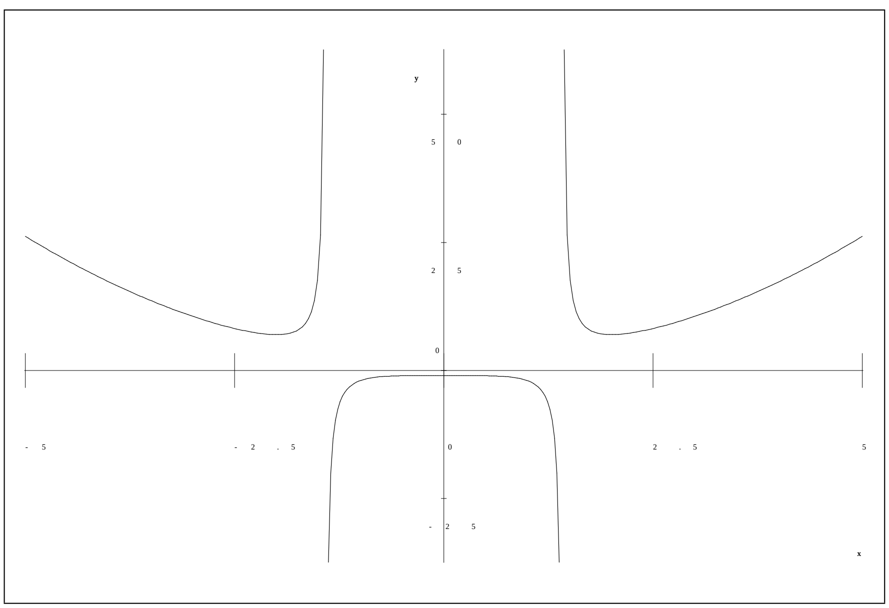
Gráfica de la función $y = x^3 - x + 2$.

Funciones Racionales

Surgen del cociente de dos polinomios: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Ejemplo: En la figura 2.3 podemos apreciar la gráfica del cociente de las funciones $P(x) = x^4 - x^2 + 2$ y $Q(x) = x^2 - 2$.

$\frac{x^4 - x^2 + 2}{x^2 - 2}$



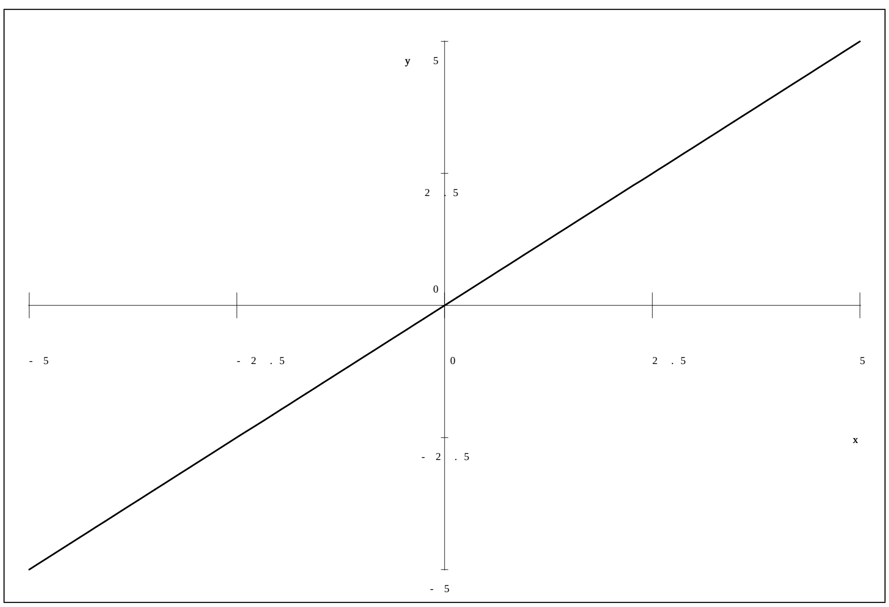
Gráfica de la función $\frac{x^4-x^2+2}{x^2-2}$.

Funciones de la forma $f(x) = x^a$ donde a es una constante

■ Cuando $a \in \mathbb{Z}^+$ tenemos un subconjunto de las funciones lineales y polinomiales.

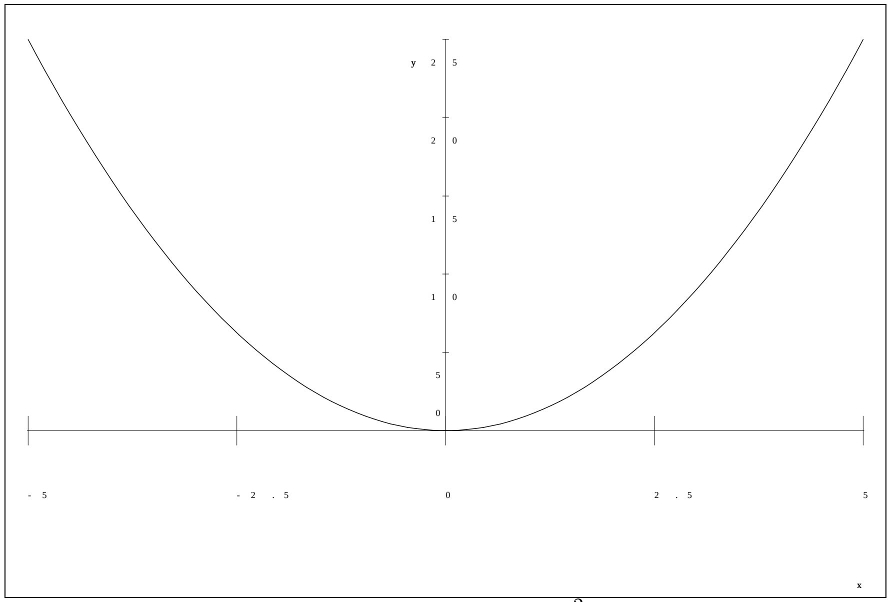
Ejemplo: Graficar $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$

x^1



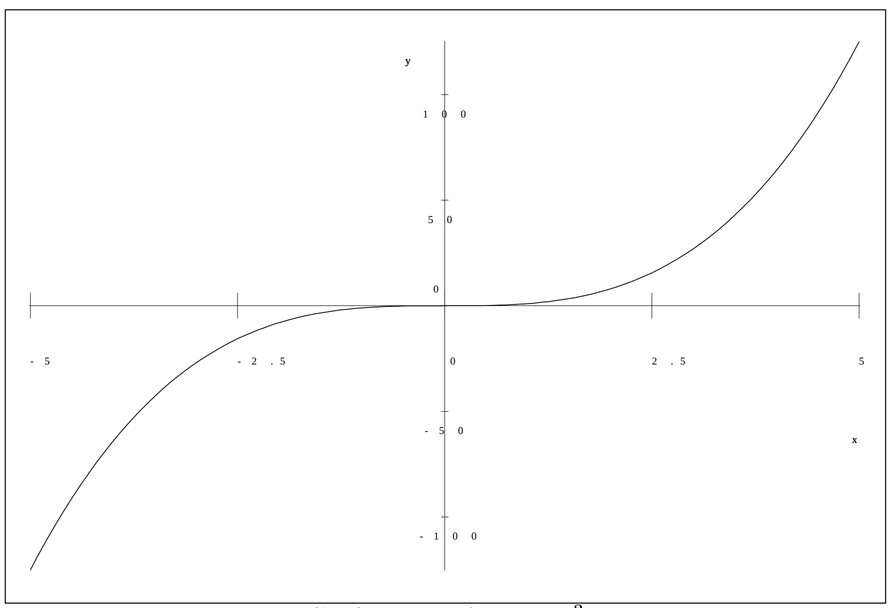
Gráfica de la función x^n

x^2



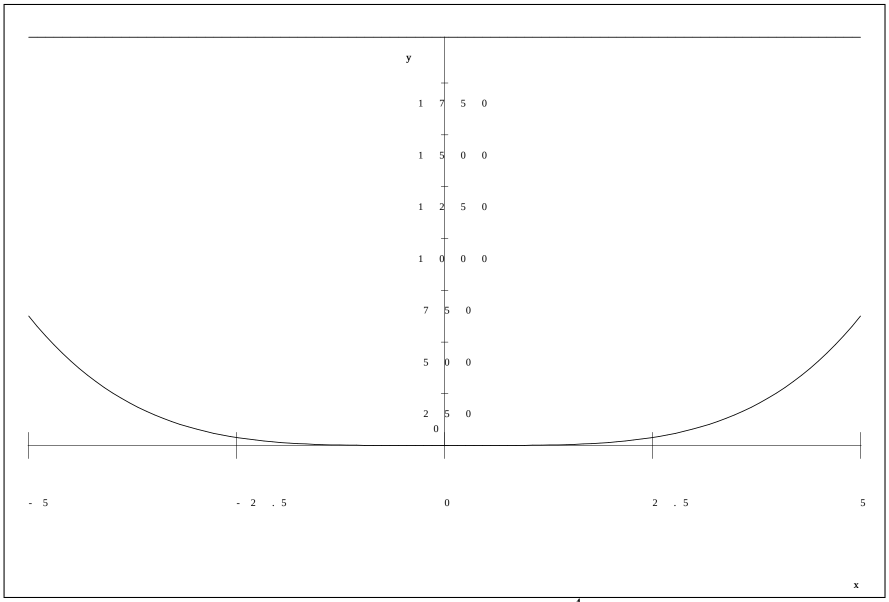
Gráfica de la función x^2

x^3



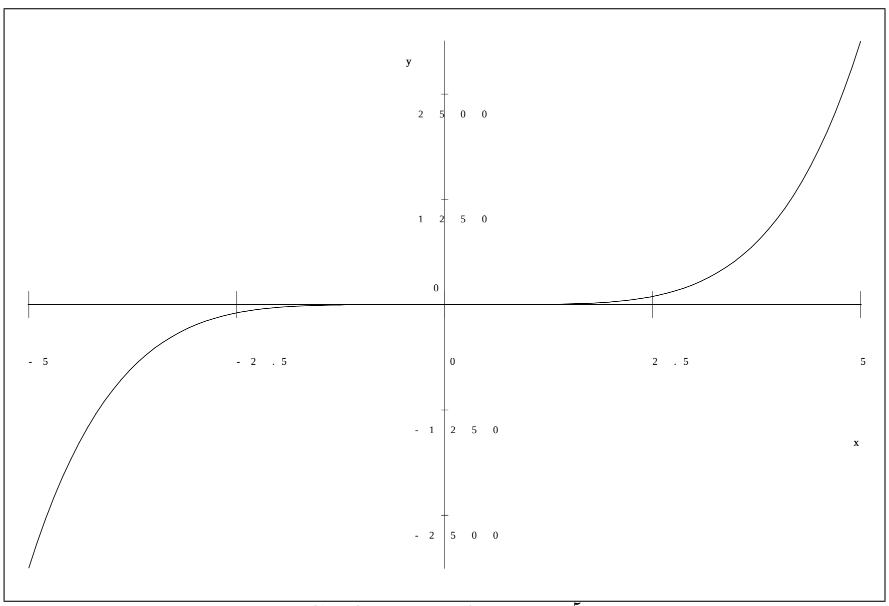
Gráfica de la función x^3

x^4



Gráfica de la función x^4

x^5



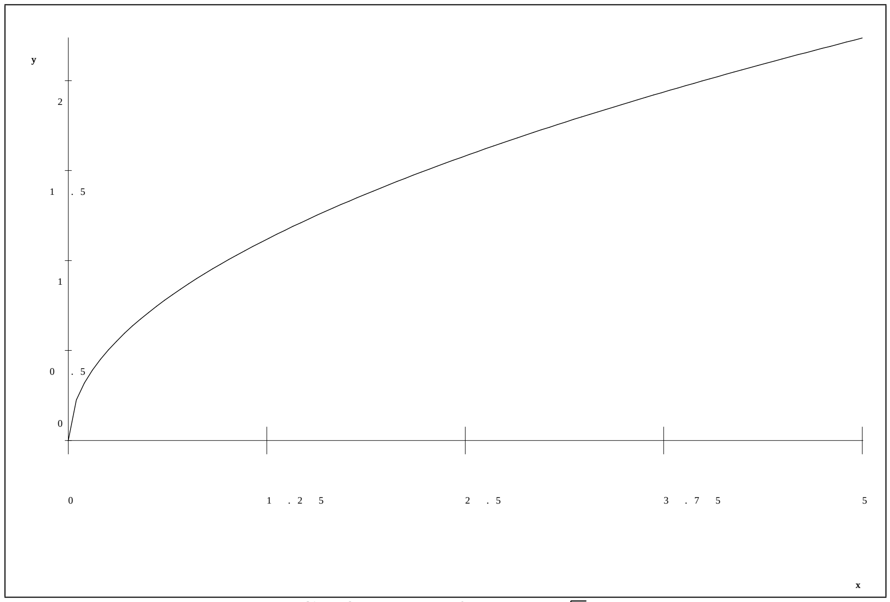
Gráfica de la función x^5

De las figuras 8 a 12 vemos que, a excepción de cuando $n = 1$, la gráfica de x^n cuando n es par es similar a la de la parábola y cuando n es impar, a la de la función cúbica.

■ Cuando $a = \frac{1}{n}$ $n \in \mathbb{Z}^+$, la función $f(x) = x^a$ representa la raíz n-ésima de x.

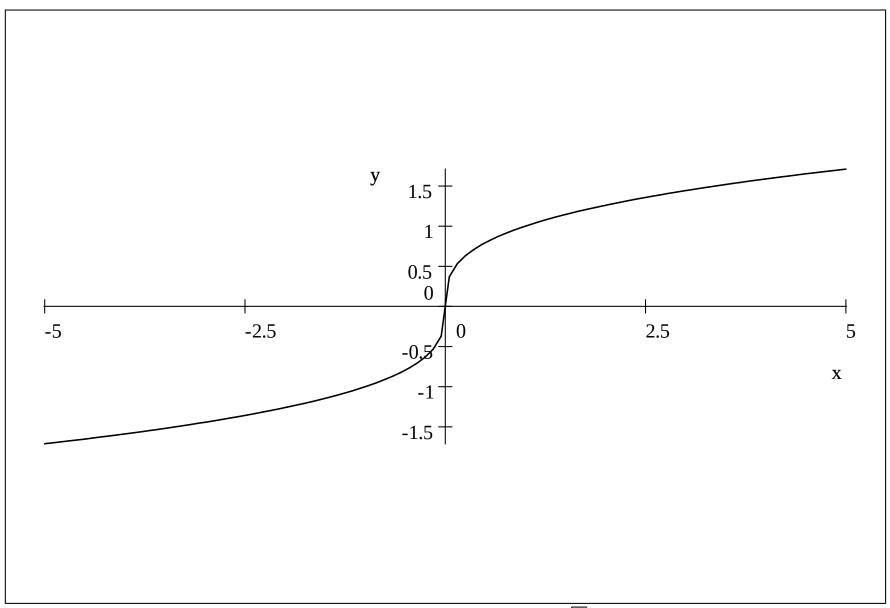
Ejemplo: Graficar $f(x) = \sqrt{x}$ y $\sqrt[3]{x}$.

$\sqrt{x}$



Gráfica de la función $\sqrt{x}$.

$\sqrt[3]{x}$

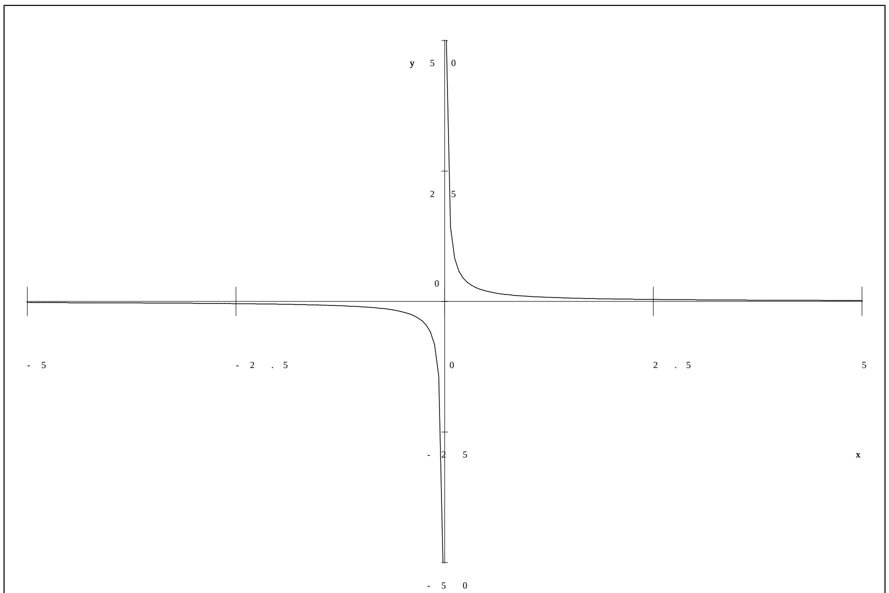


Gráfica de la función $\sqrt[3]{x}$.

■ Cuando $a = -1$, $f(x) = x^{-1}$ representa la función recíproca de x. Es una hipérbola cuyas asíntotas son los ejes coordenados.

Ejemplo: Graficar $y = \frac{1}{x}$.

$\frac{1}{x}$



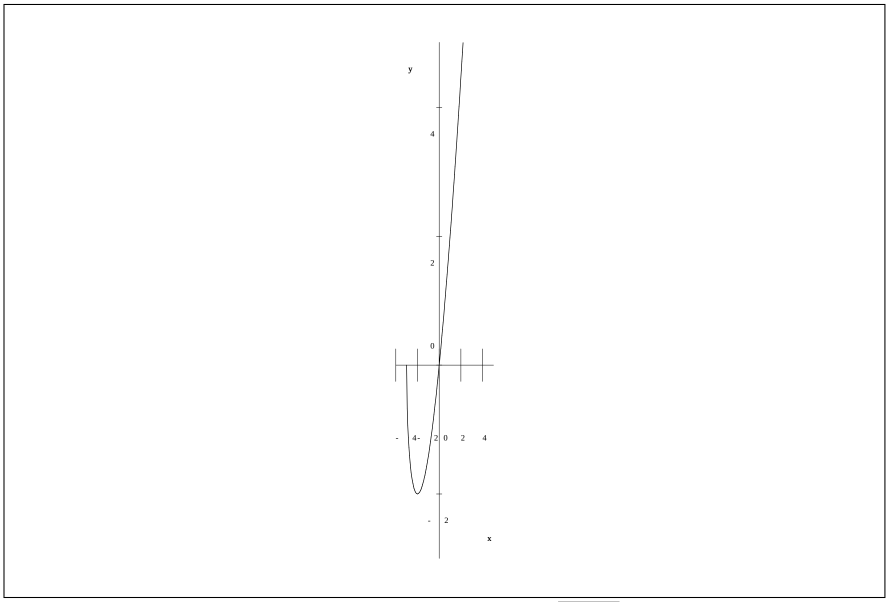
Gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$.

Funciones Algebráicas

Son aquellas construidas mediante operaciones algebráicas de $+, -, \times, \div, \sqrt{\ }$ aplicadas a polinomios.

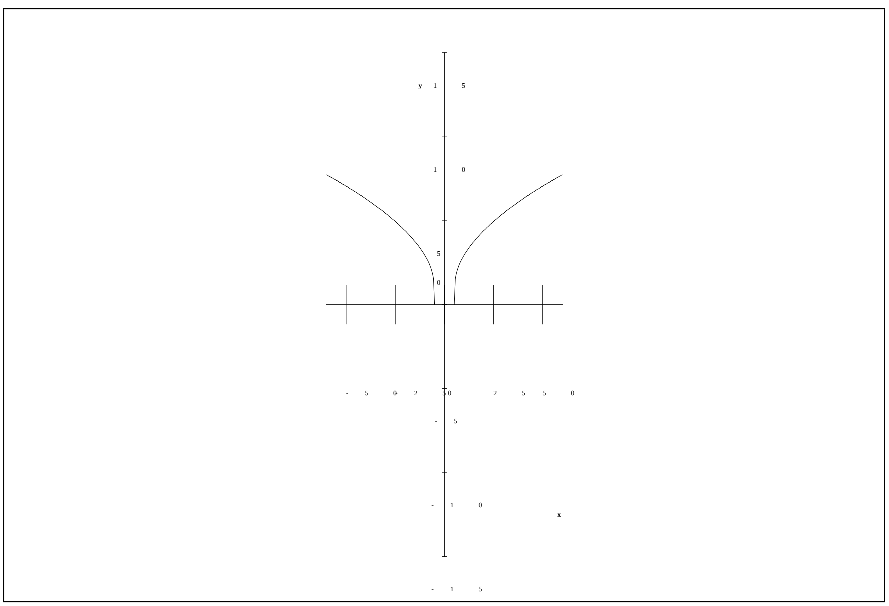
Ejemplo: Veamos las gráficas de $f\left(x\right) = x\sqrt{x+3},\ g\left(x\right) = \sqrt[4]{x^2 - 25},\ h\left(x\right) = x^{\frac{2}{3}}\left(x-2\right)^2.$

$x\sqrt{x+3}$



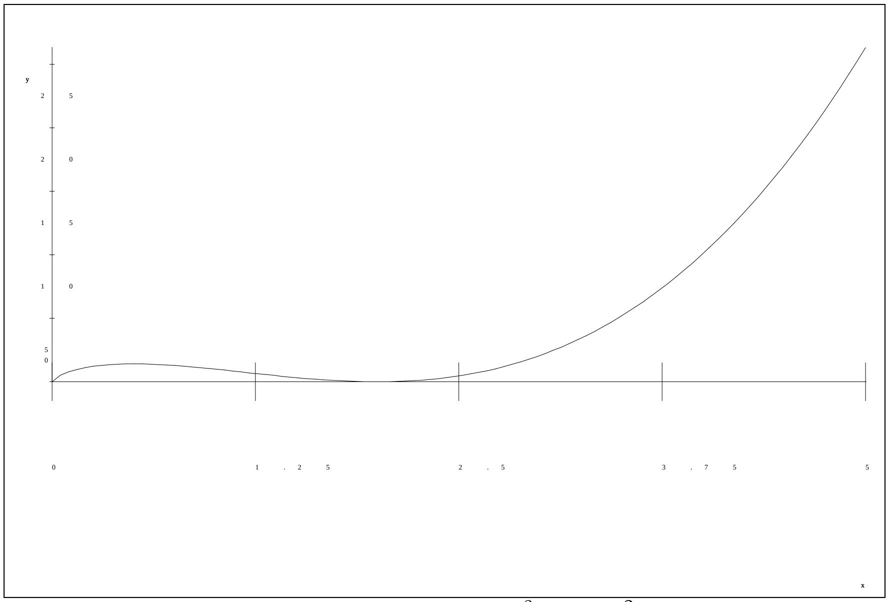
Gráfica de la función $x\sqrt{x+3}$

$\sqrt[4]{x^2-25}$



Gráfica de la función $\sqrt[4]{x^2-25}$.

$x^{\frac{2}{3}}\,(x-2)^2$



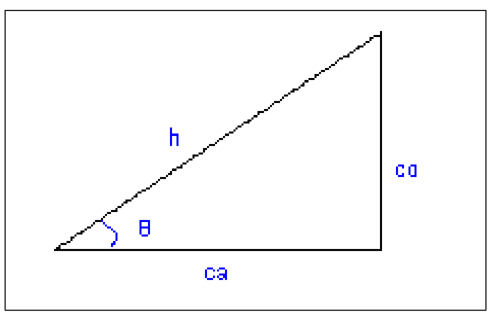
Gráfica de la función $x^{\frac{2}{3}}(x-2)^2$

<u>Funciones Trigonométricas</u>

Para explicar las funciones trigonométricas utilizaremos la siguiente equivalencia entre radianes y ángulos que será explicada en la sección "Tópicos de trigonometría": $2\pi rad = 360°$.

Para un ángulo agudo θ las 6 funciones trigonométricas se definen como las razones entre las magnitudes de los lados de un triángulo rectángulo como sigue:

$\sin\theta = \frac{co}{h}$ $\quad\csc\theta = \frac{h}{co}$
$\cos\theta = \frac{ca}{h}$ $\quad\sec\theta = \frac{h}{ca}$
$\tan\theta = \frac{co}{ca}$ $\quad\cot\theta = \frac{ca}{co}$

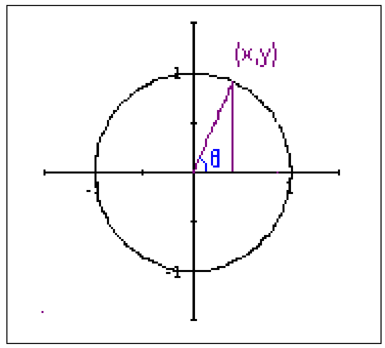


Triángulo rectángulo

En la figura 2.3, h, ca y co representan a la hipotenusa, cateto adyacente y cateto opuesto respectivamente del triángulo rectángulo.

En general dado un ángulo central θ definido por un punto $P(x,y)$ en el círculo unitario (donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$) las funciones trigonométricas son:

$$\begin{array}{ll} \sin\theta = y & \csc\theta = \frac{x}{y} \\ \cos\theta = x & \sec\theta = \frac{1}{x} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} & \cot\theta = \frac{1}{y} \end{array}$$



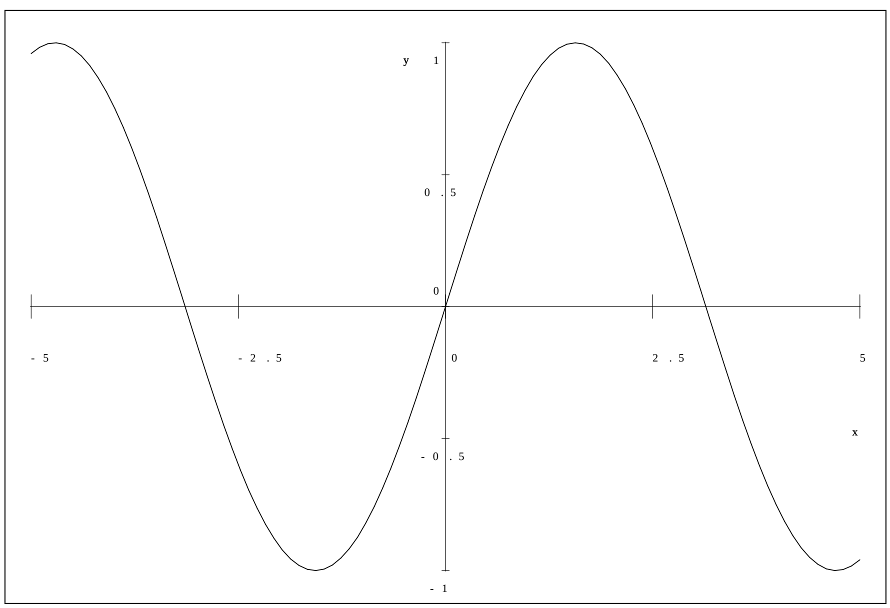
El círculo unitario

Nótese que las funciones $\sec\theta$, $\csc\theta$ y $\cot\theta$ son funciones recíprocas de $\sin\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$ respectivamente. Además, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sec\theta$ y $\csc\theta$ son funciones periódicas de período 2π. Mientras que $\tan\theta$ y $\cot\theta$ son periódicas de período π. Veamos la siguiente definición.

Definición. Función Periódica:

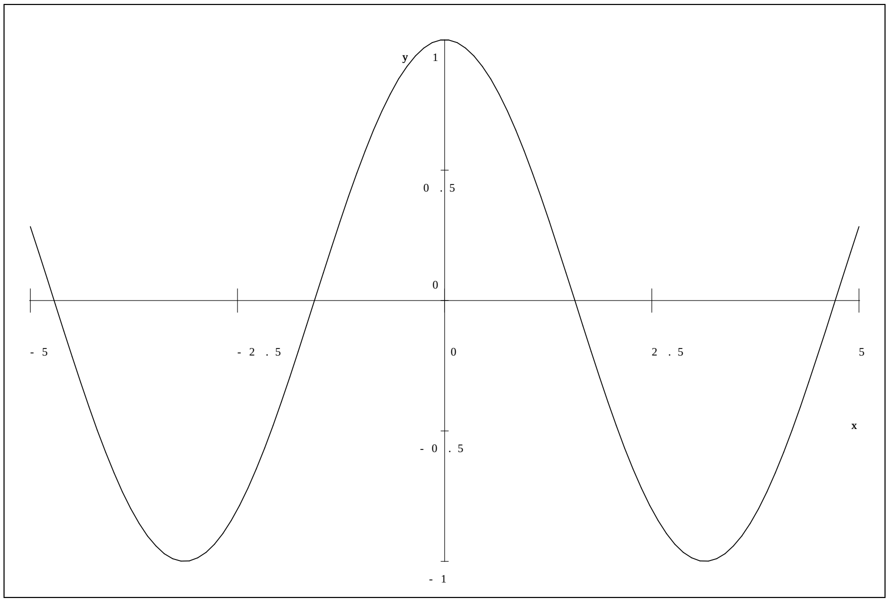
Una función es llamada periódica de período T si $f(x) = f(x+T)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\sin x$



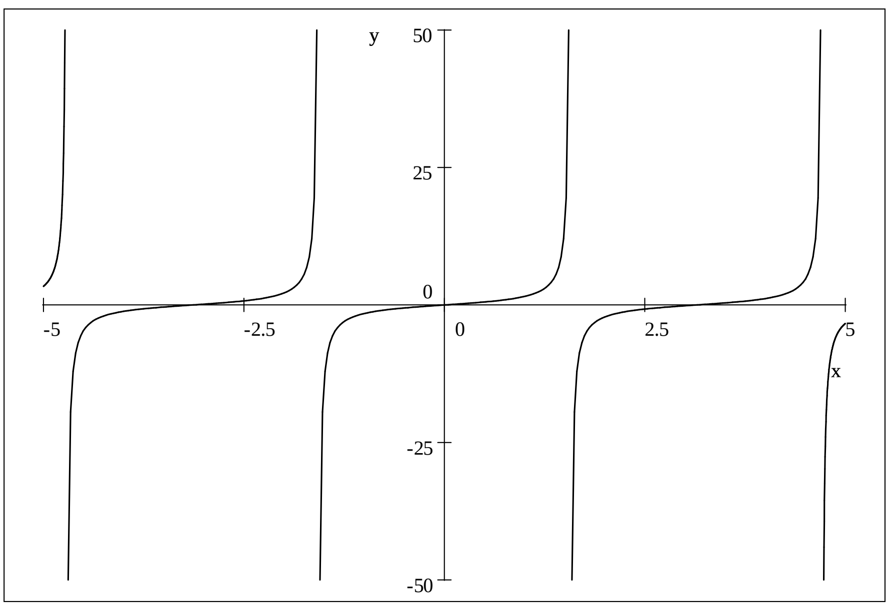
Gráfica de la función $\sin x$

$\cos x$



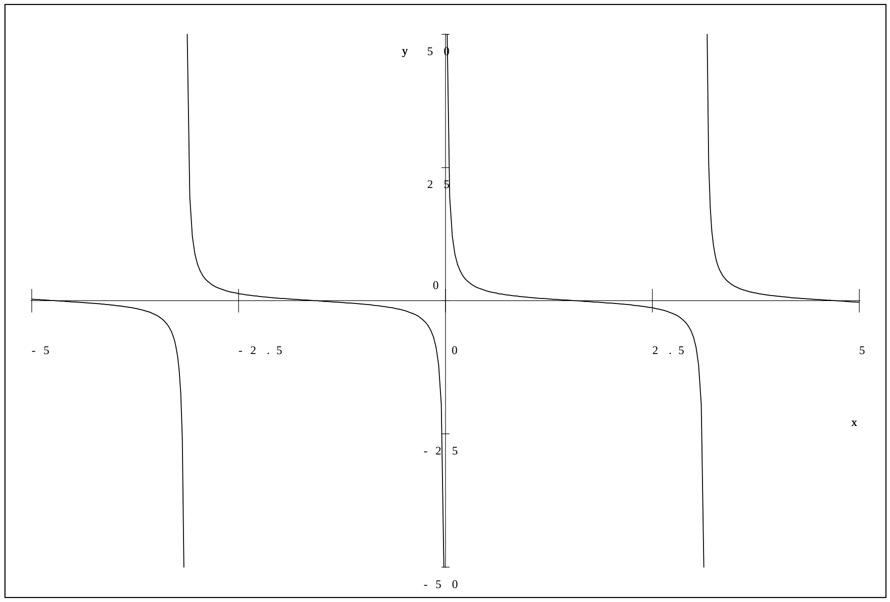
$\cos x$

$\tan x$



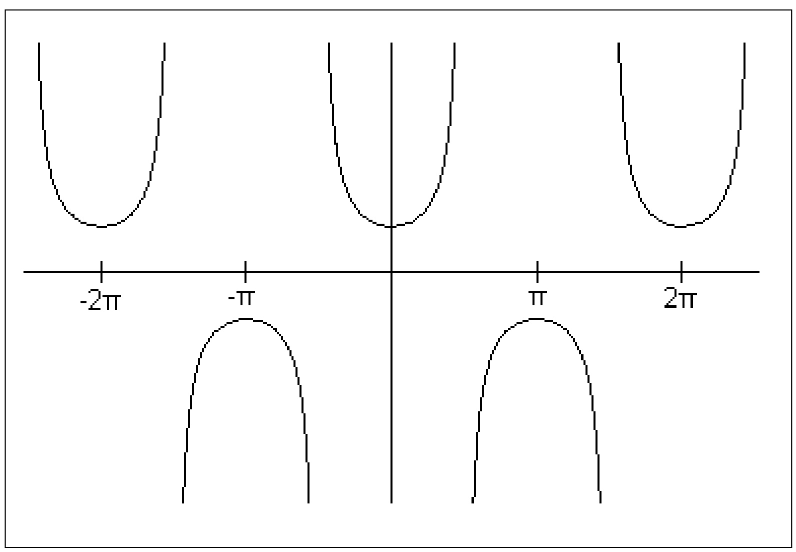
$\tan x$

$\cot x$



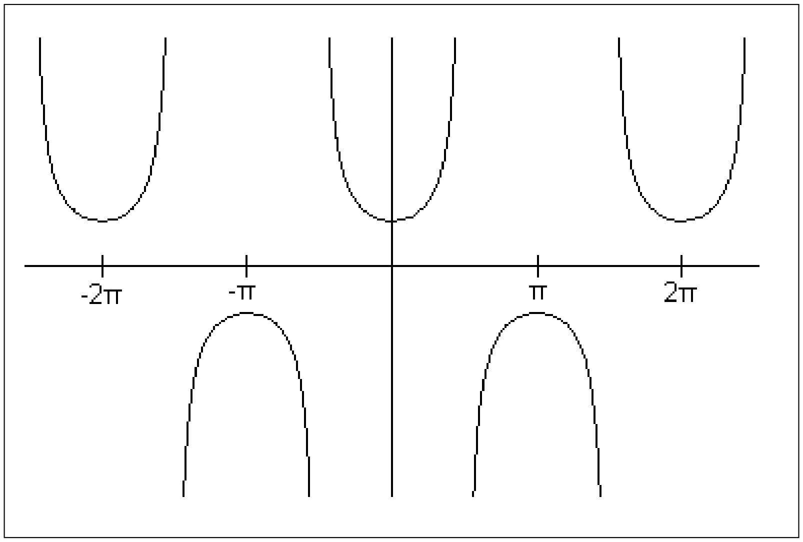
$\cot x$

$y = \sec x$



Gráfica de la $\sec x$.

$y = \csc x$



Gráfica de la $\csc x$

2.4. Tópicos de Geometría

Nota: El Principio de Inducción Matemática está explicado en la sección “Tópicos de Álgebra”.

Ejemplo: Muestre por inducción matemática que la suma de los ángulos internos de un polígono convexo de n lados es $(n-1)\pi$.

Solución: (veámosla en los tres puntos siguientes)

1) Si $n=3$, $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 2\pi$.

2) Supongamos que si $n=k$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = (k-1)\pi$

3) Consideremos un polígono de $k+1$ lados. Reescribiendo el número de lados como: $(k-1)$ lados $+2$ lados, vemos que hay que sumar los ángulos internos de un polígono de $(k-1)$ lados más los ángulos internos de un triángulo. Por lo tanto tenemos $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = (k-2)\pi + 2\pi = k\pi$.

Ejemplo: Calcular la suma de los ángulos externos de un polígono convexo de n lados.

Solución:consideremos la figura siguiente

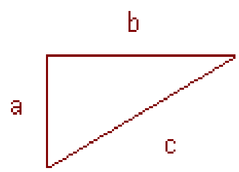
Ya que la suma de un ángulo interno con el ángulo exterior (adyacente a él) es π, entonces, $\alpha_1 + \beta_1 = \pi, \alpha_2 + \beta_2 = \pi, ..., \alpha_n + \beta_n = \pi, ie$ se tiene: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i = n\pi$ pero como $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = (n-1)\pi$ (demostración anterior) se tendrá $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pi$

Teorema de Pitágoras

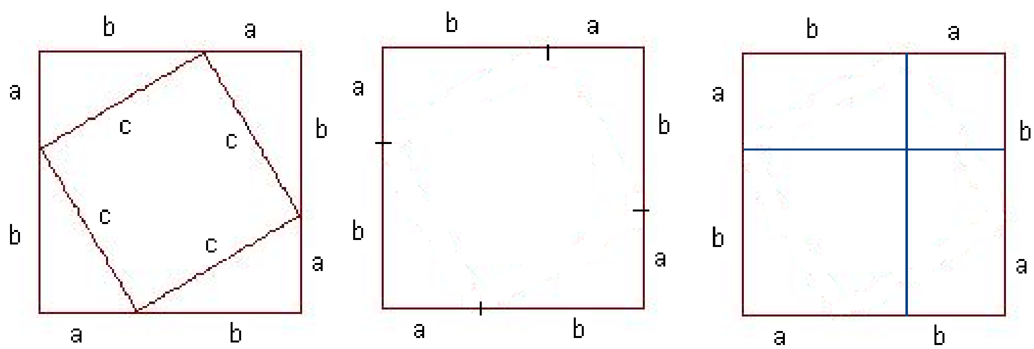
En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Demostración

Considere el triángulo rectángulo



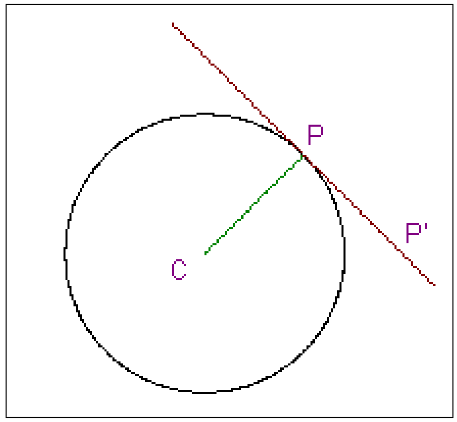
Con tal triángulo constrúyase el cuadrado siguiente:



Así: $4\left(\frac{ab}{2}\right) + c^2 = 2(ab) + a^2 + b^2$ es decir, $c^2 = a^2 + b^2 . QED$

Ejemplo: Construir la tangente a un círculo en un punto dado.

Solución: Se une el punto dado P con el centro C del círculo y se traza la perpendicular T a $\overline{PC}$ que pasa por P.(Fig. 2.4)

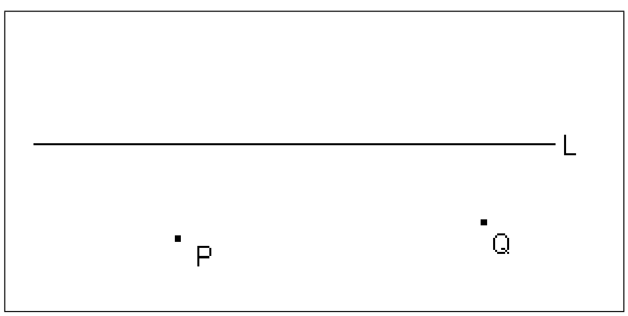


Tangente a un círculo

Para $P^{'}$ sobre T distinto de P se tiene: $\overline{PP'} > 0$ y $(\overline{PC})^2 + (\overline{PP'})^2 = (\overline{CP'})^2$ por Pitágoras, por lo que $(\overline{PC})^2 < (\overline{CP'})^2$ y entonces $\overline{PC} < \overline{CP'}$.

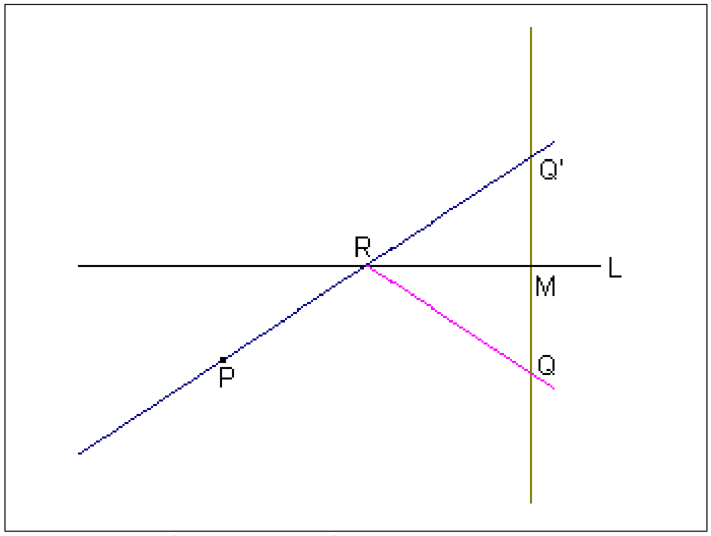
Ejemplo: Problema del incendio (Principio de Fermat)

En la figura 2.4, la recta L representa un río, el punto Q una casa que está incendiándose y el punto P el dueño de la casa. Encontrar sobre L el punto R tal que $\overline{PR} + \overline{RQ}$ sea mínimo.



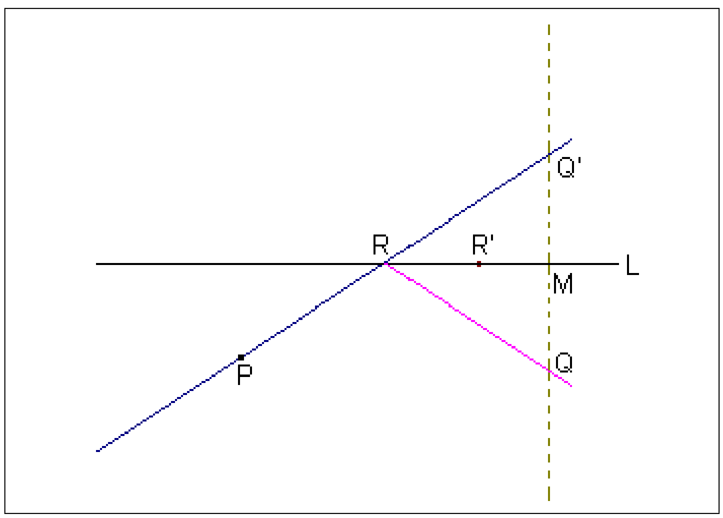
Principio de Fermat

Solución: Se construye $Q^{'}$ como el simétrico de Q con respecto a L. Se traza $PQ^{'}$ y se considera la intersección R con L. R es el punto buscado. (Fig. 2.4)



Simétrico de Q con respecto a L

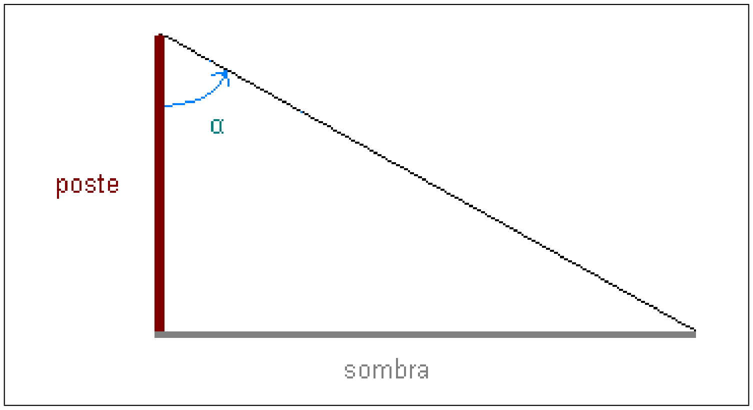
Sea $R^{'}$ cualquier otro punto sobre L, mostremos que $PR + RQ < PR^{'} + R^{'}Q$. Ya que $RQ = RQ^{'}$; $R^{'}Q = R^{'}Q^{'}$; $PQ^{'} < PR^{'} + R^{'}Q$ se tiene $PR + RQ = PR + RQ^{'} = PQ^{'} < PR^{'} + R^{'}Q^{'} = PR^{'} + R^{'}Q$. (Fig. 2.4)



R' sobre L

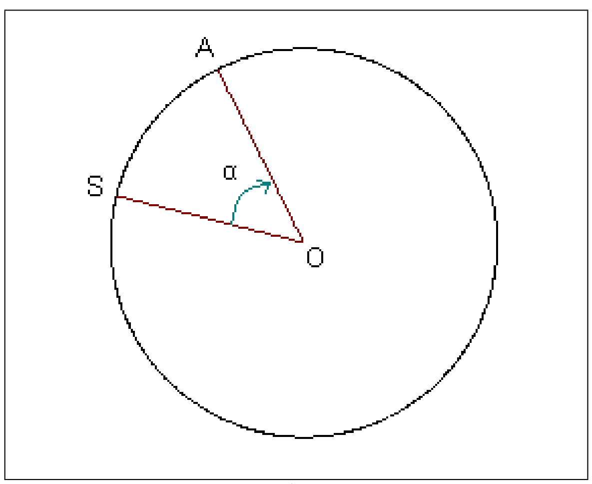
Ejemplo: Eratóstenes y la circunferencia terrestre

Eratóstenes (284 -192 A. C.), director de la biblioteca de Alejandría, estimó la circunferencia de la tierra basándose en la observación de que en la ciudad de Syene un cierto día del año y a una cierta hora un poste no producía ninguna sombra. En ese mismo día y a la misma hora en la ciudad de Alejandría un poste semejante producía una sombra cuyo tamaño podìa medir. Con las longitudes de la sombra y del poste pudo estimar el ángulo α (Fig. 2.4):



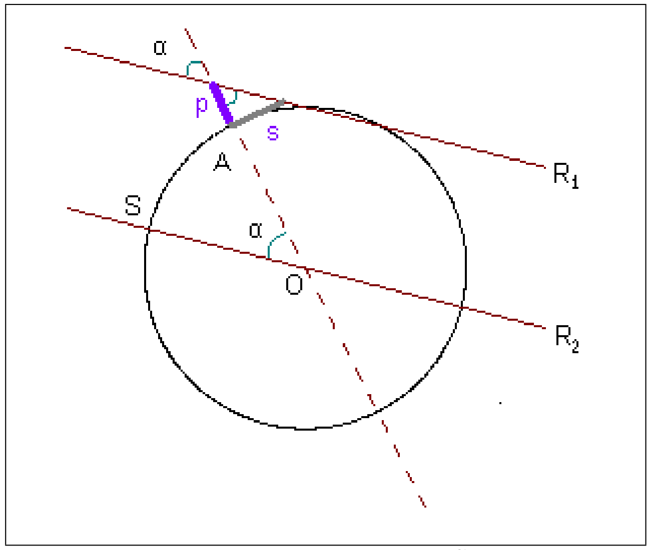
Sombra proyectada por el poste

El ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ resultó ser la quinquagésima parte de la vuelta total: $\alpha = \frac{360°}{50}$. Pero el ángulo α es también igual al ángulo entre SO y AO donde S indica la posición sobre la Tierra de Syene, A la posición sobre la Tierra de Alejandría y O el centro de la Tierra (Fig. 2.4):



Siene y Alejandría

Esto se sigue de considerar la Figura 2.4:



Rayos paralelos desde el Sol

Donde R_1 y R_2 son rayos paralelos desde el sol. De esta manera siendo α la quinquagésima parte de la vuelta completa, la distancia entre Alejandría y Syene es la quinquagésima parte de la circunferencia terrestre ya que ambas ciudades se encuentran sobre el mismo meridiano.

La distancia entre Alejandría y Syene le era conocida a Eratóstenes: las caravanas la recorrían en 50 días y sabía que por día recorrían 100 estadíos (1 estadío = 600 pies). Con estos datos estimó la circunferencia terrestre en algo muy cercano a los 60,000 kms.

Ejemplo: Fórmula de Herón

Demuestre que el área A de un triángulo con lados a, b y c puede calcularse con $A = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)(s-c)}$ donde $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Solución: (Fig. 2.4)

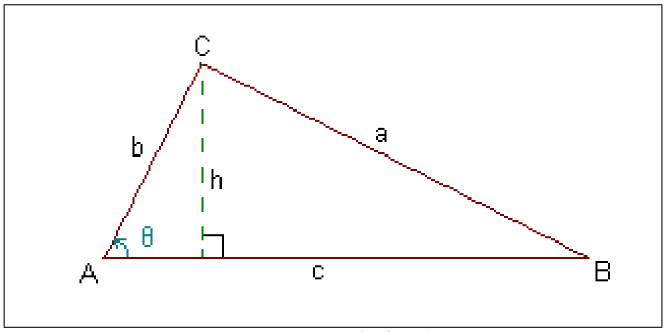
Como $h = b\sin\theta$, $A = \frac{cb\sin\theta}{2}$, entonces:

$$\begin{aligned} A^2 &= \tfrac{c^2b^2\sin^2\theta}{4} \\ &= \tfrac{b^2c^2}{4}\left(1-\cos^2\theta\right) \\ &= \tfrac{b^2c^2}{4} - \tfrac{b^2c^2}{4}\cos^2\theta \end{aligned}$$

La ley de los cosenos nos da $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$ de donde $\frac{b^2+c^2-a^2}{2} = bc\cos\theta$ y así $\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4} = b^2c^2\cos^2\theta$. Sustituyendo tenemos:

$$\begin{aligned} A^2 &= \tfrac{b^2c^2}{4} - \tfrac{\left(b^2+c^2-a^2\right)}{16} \\ &= \tfrac{4b^2c^2-\left[b^4+2b^2c^2+c^4-2a^2\left(b^2+c^2\right)+a^4\right]}{16} \\ &= \tfrac{2b^2c^2-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2-a^4}{16} \\ &= \tfrac{[(b+c)+a][(b+c)-a][(a+c-b)][a-c+b]}{16} \\ &= \tfrac{a+b+c}{2}\cdot\tfrac{a+b+c-2a}{2}\cdot\tfrac{a+b+c-2b}{2}\cdot\tfrac{a+b+c-2c}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto: $A = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)(s-c)}.QED$



Triángulo $\triangle ABC$

Ejemplo: Demuestre que, en general, el área de cualquier cuadrilátero cíclico C con lados a, b, c y d puede calcularse con $A = \sqrt{(s-a)\,(s-b)(s-c)\,(s-d)}$ donde $s = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Solución: Se deja la demostración al lector.

2.5. Las Cónicas y el trazado de sus tangentes

Las secciones cónicas son una familia de curvas planas muy importantes en el Cálculo. Estas curvas son el circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola. Su nombre se debe a que son el resultado de intersecar un cono circular recto con planos.

Definición. Circunferencia:

Una circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro. Para trazar una circunferencia basta conocer su centro y su radio. (Fig. 2.7)

$$\text{Distancia }\ (CP) = r$$

Definición. Eipse:

Es el lugar geométrico $\mathfrak{E}$ de los puntos que equidistan de dos puntos fijos F_1 y F_2 llamados focos. (Fig.2.8)

$$\text{Distancia }\ (PF_1) + \text{distancia }\ (PF_2) = \text{constante}$$

Definición. Parábola:

Es el lugar geométrico $\mathfrak{P}$ de los puntos que equidistan a un punto fijo F (llamado foco) y a una recta D llamada directríz. (Fig. 2.9)

$$\text{Distancia }\ (PF) = \text{Distancia }\ (PD)$$

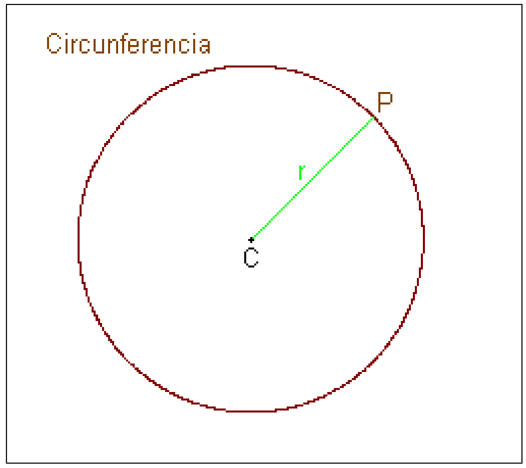


Figura 2.7: Circunferencia

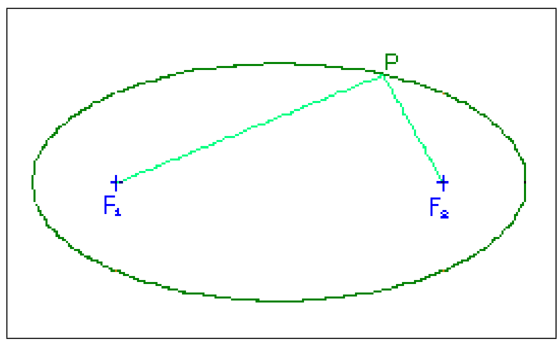


Figura 2.8: Elipse

La directriz D es perpendicular a la recta que contiene al foco F y que divide en dos partes simétricas a la parábola. Esta última es llamada el eje e de la parábola. El vértice V de la parábola es un punto que se encuentra sobre e y a la mitad de la distancia entre F y D.

Definición. Hipérbola:

Es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos ,llamados focos, es una constante positiva. (Fig. 2.10)

$$\text{Distancia } (PF_1) - \text{distancia } (PF_2) = \text{constante}$$

|

A continuación veremos el trazado de las tangentes a las cónicas.

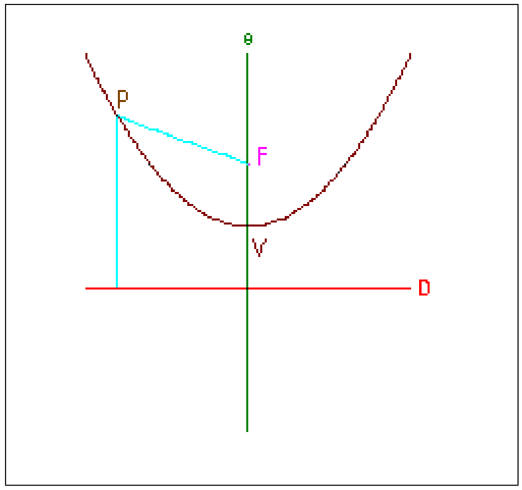


Figura 2.9: Parábola

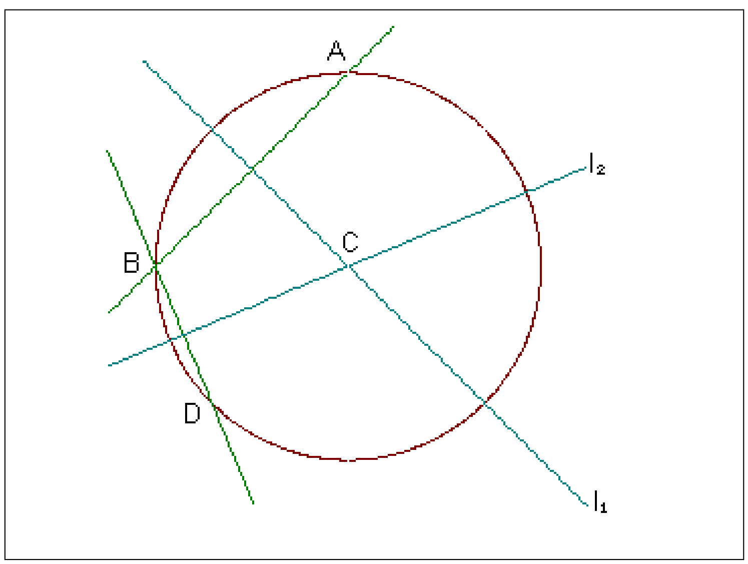
Tangente a un círculo

Sea $\mathfrak{C}$ una circunferencia. Sea T un punto en ella. Localizamos el centro de la circunferencia y tomamos tres puntos A, B y D sobre $\mathfrak{C}$:

1) Trazar la recta AB.

2) Trazar la recta BD.

3) Trazar las perpendiculares l_1 y l_2 en los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$, respetivamente. El centro C de $\mathfrak{C}$ será: $C = l_1 \cap l_2$ (Fig. 2.5)



$C = l_1 \cap l_2$

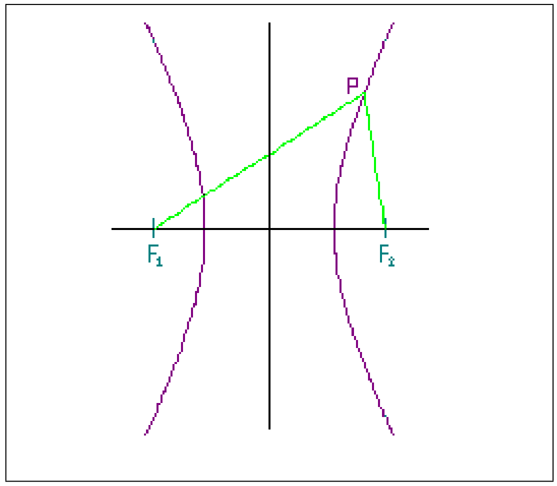
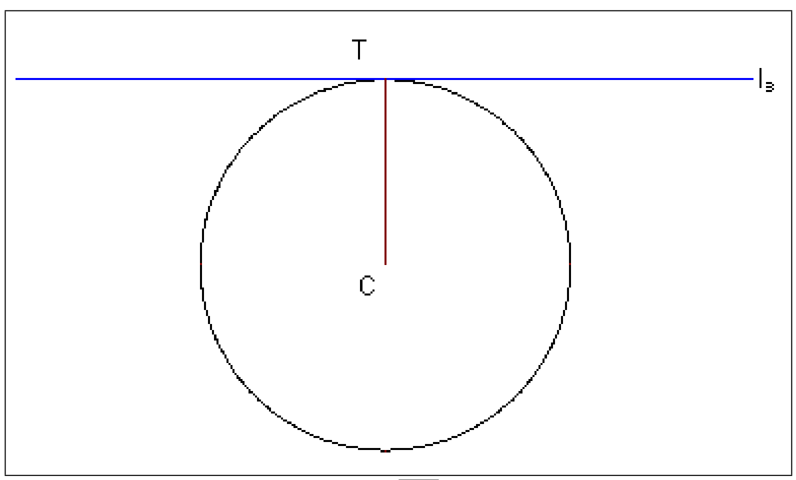


Figura 2.10: Hipérbola

Nota: Veamos cómo trazar la perpendicular en el punto medio de un segmento de recta con regla y compás. Sea $\overline{AB}$ un segmento de recta. Trazar una circunferencia con centro en B y radio AB. Hacer lo mismo con centro en A. La recta que pasa por la intersección de esas circunferencias es perpendicular a $\overline{AB}$. Más aún, su intersección con $\overline{AB}$ es el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

Luego, trazamos la recta l_3 perpendicular a $\overline{CT}$ y que pase por T. (Fig. 2.5)



$l_3 \perp \overline{CT}$

Afirmación: l_3 es tangente a $\mathfrak{C}$ en el punto T.
Demostración

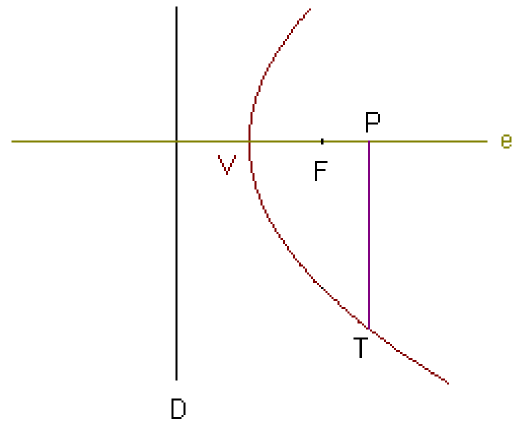


Figura 2.11: Segmento $\overline{PT}$

Sea $S \in l_3 \ni S \neq T$ entonces C, S y T son los vértices de un triángulo rectángulo donde $\overline{CS}$ es la hipotenusa.

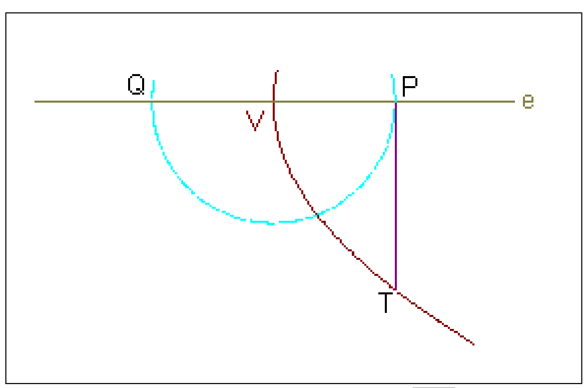
Luego, sabemos que en cualquier triángulo la hipotenusa es mayor a cualquiera de los catetos y como CT es el radio de $\mathfrak{C}$, entonces $S \notin \mathfrak{C} \therefore T$ es el único punto en donde l_3 interseca a $\mathfrak{C}$ i.e. $l_3 \cap \mathfrak{C} = \{T\}$.

Tangente a una Parábola (Método Griego)

Para trazar la recta tangente a una parábola $\mathfrak{P}$, seguimos los tres pasos siguientes:

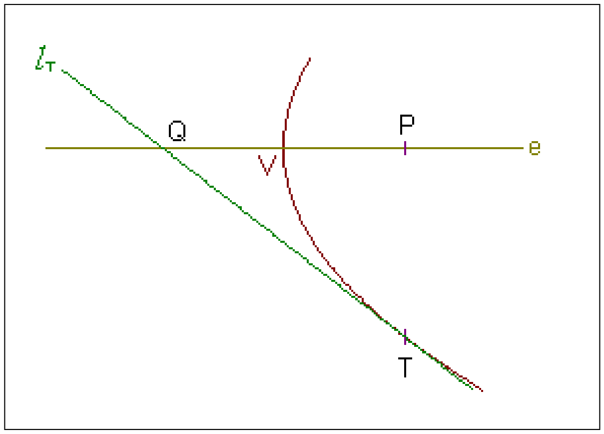
1) Sea T cualquier punto sobre $\mathfrak{P}$ por el cual queremos trazar la tangente. Trazar el segmento $\overline{PT}$ tal que $\overline{PT} \perp e$ y $P \in e$. (Fig. 2.11)

2) Trazar la circunferencia $\mathfrak{C}$ con centro en V y radio $\overline{VP}$. (Fig. 2.5)



Circunferencia de radio $\overline{VP}$

3) Sea $e \cap \mathfrak{C} = \{P, Q\}$Trazar la recta que pasa por Q y T. Llamémosla l_T. (Fig. 2.5)



Recta l_t

Afirmación (Fig. 2.5)

La recta l_T es tangente a la parábola en el punto T.

Demostración (por contradicción)

Sea $S \in l_T$ tal que $S \neq T$. Trazar los segmentos perpendiculares a D desde T y S tal que $\overline{BT} \parallel \overline{AS}$, $\overline{BT} \perp D$ y $B, A \in D$.

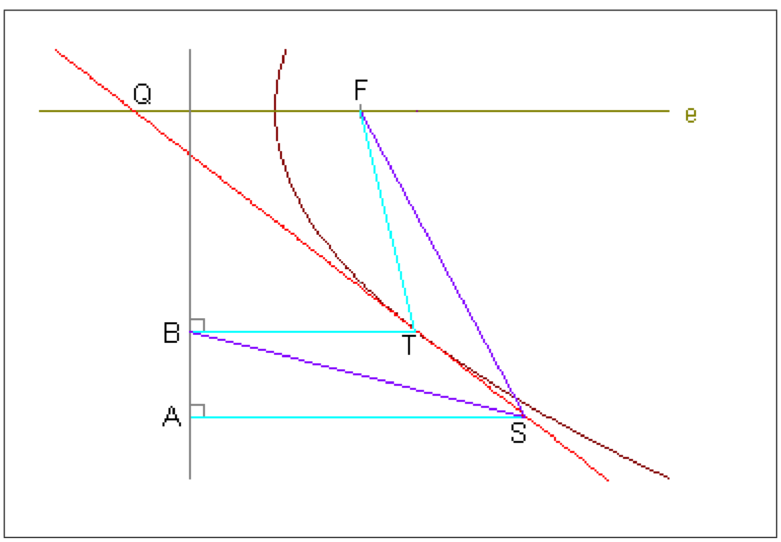
Sea $C = \{e \cap D\}$ entonces:

$\overline{CV} = \overline{VF}$ (por definición de la parábola)

$\overline{QV} = \overline{VP}$ (construcción de C)

De donde $\overline{CV} + \overline{VP} = \overline{CP} = \overline{QF} = \overline{QV} + \overline{VF}$ y como $\overline{BT} = \overline{CP}$ por construcción, entonces $\overline{QF} = \overline{BT}$. Luego $\overline{TF} = \overline{BT}$,pues $T \in \mathfrak{P}$.

Eso implica que $QFTB$ es un rombo por lo que $\overline{BF} \perp \overline{QT}$ y se bisecan mutuamente $\therefore$ $\overline{SF} = \overline{SB} > \overline{SA}$ y $S \notin \mathfrak{P}$.QED

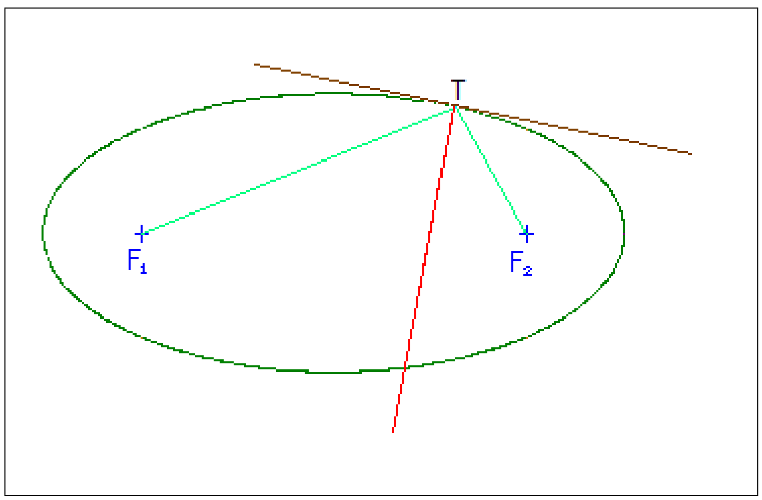


l_t es tangente a $\mathfrak{P}$ en T

Tangente a una Elipse

Construyamos la recta tangente a una elipse $\mathcal{E}$ en un punto T.

Sea $T \in \mathcal{E}$ y F_1 y F_2 sus focos. Trazar la bisectríz del ángulo $\measuredangle F_1TF_2$. Trazar la recta l_T perpendicular a la bisectríz que pase por T. (Fig. 2.5)



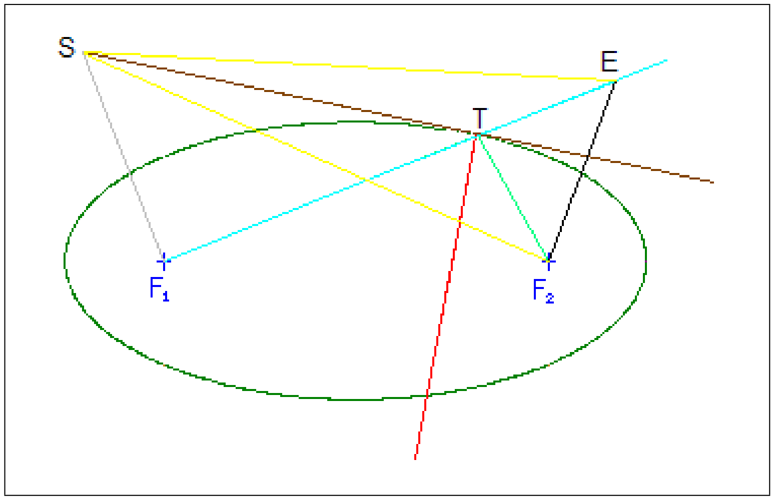
Tangente a e en T

Afirmación (Fig. 2.5)

l_T es la recta tangente a la elipse $\mathcal{E}$ en el punto T.

Demostración (por contradicción)

Sea $S \in l_T$ tal que $S \neq T$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que F_2 es el foco más cercano a T. Trazar la circunferencia $\mathfrak{C}$ con centro en T y radio $\overline{TF_2}$. Trazar la recta l_1 que pasa por T y F_1. Sea E tal que $E = \mathfrak{C} \cap l_1$ y $E \notin \mathcal{E}$. Tenemos que $\triangle ETF_2$ es un triángulo isosceles cuyo ángulo $\measuredangle ETF_2$ es bisecado por la recta ST ya que ST es perpendicular a la bisectríz del ángulo exterior $\measuredangle F_2TF_1$. De ahí que $\overline{SE} = \overline{SF_2}$ y $\overline{F_1T} + \overline{TF_2} = \overline{F_1T} + \overline{TE} = \overline{F_1E}$. Además en el triángulo $\triangle SF_1E$ se tiene $\overline{F_1E} < \overline{F_1S} + \overline{SE} = \overline{F_1S} + \overline{SF_2}$. De lo anterior $\overline{F_1T} + \overline{TF_2} < \overline{F_1S} + \overline{SF_2} \therefore S \notin \mathcal{E}$. QED



Demostración de la construcción de la tangente

2.6. Topicos de Teoría de Conjuntos y Combinatoria

Principio de Inducción Matemática

Imaginemos que tenemos una fila infinita y ordenada de fichas de dominó. Cada una colocada sobre una de sus caras de área menor y conservando el mismo espacio entre ficha y ficha. Las fichas estarán dispuestas de tal manera que, si empujamos una de las fichas hacia la ficha que está a su derecha, la primera caerá sobre la que le sigue (a la derecha). Ésta última caerá ,a su vez, sobre la que le sigue y así sucesivamente.

Para explicar el principio de inducción matemática, primero necesitamos conocer el principio del buen orden.Supongamos que queremos expresar a los $\mathbb{Z}^+$ usando los símbolos $>$ y $\geq$. Entonces tendríamos:
$\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 1\}$

Sin embargo, esto no es posible con $\mathbb{Q}^+$ ó $\mathbb{R}^+$. El éxito con $\mathbb{Z}^+$ se deriva de que posee la siguiente propiedad:

El Principio del Buen Orden
Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}^+$ contiene un primer elemento (también se dice que $\mathbb{Z}^+$está bien ordenado.

El principio del buen orden es la base de una técnica de demostración conocida como “Inducción Matemática”. Esta técnica nos ayuda a demostrar afirmaciones en las que se involucren enteros positivos y se vislumbre un comportamiento general.

Teorema Principio de Inducción Matemática o Principio de Inducción Finita

Sea $P(n)$ una propiedad o un conjunto de propiedades que involucra una o más ocurrencias de la variable n, la cual representa a n entero positivo, entonces:

a) Si $P(1)$ se cumple y

b) Cada vez que $P(k)$ se cumple (para un valor arbitrario de $k \in \mathbb{Z}^+$), entonces $P(k+1)$ se cumple.

La condición del inciso a) es conocida como la *base de la inducción.* La condición $P(k)$ es conocida como la *hipótesis de inducción* y la condición del inciso b) es el *paso inductivo.*

Demostración

Sea $P(n)$ una propiedad que satisface las condiciones a) y b) y sea $F = \{t \in \mathbb{Z}^+ \mid P(t) \text{ es falsa}\}$. Queremos probar que $F = \varnothing$.

Supongamos que $F \neq \varnothing$. Luego, por el principio del buen orden, F tiene un primer elemento s. Como $P(1)$ es verdadera, se sigue que $s \neq 1$, entonces $s > 1$ y consecuentemente $s-1 \in \mathbb{Z}^+$ y $s-1 \notin F$ así que $P(s-1)$ se cumple.

De la condición b) se sigue que $P((s-1)+1) = P(s)$ es verdadera, contradiciendo que $s \in F$. La contradicción vino de suponer que $F \neq \varnothing$ $\therefore F = \varnothing$. QED

Ejemplo: Demuestre por inducción matemática que $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Solución:

1) Base de la inducción:

Si $n = 1$ entonces $1+2+...+n = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

2) Hipótesis de inducción *(hip. de ind.)*:

$1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

3) Paso inductivo:

Si $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ entonces $1+2+...+n+(n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$.

4) Demostración:

$$\begin{aligned} 1+2+...+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \textit{por hip. de ind.} \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)[n+2]}{2} \\ &= \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} \qquad QED \end{aligned}$$

Ejemplo: Demuestre por inducción matemática que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

Solución:

1) Base de la inducción:

Si $n = 1$ entonces $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^1}$.

2) Hipótesis de inducción:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

3) Paso inductivo:

Si $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ entonces $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$.

4) Demostración:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2^2}+...+\tfrac{1}{2^n}+\tfrac{1}{2^{n+1}} &= 1-\tfrac{1}{2^n}+\tfrac{1}{2^{n+1}} && \textit{por hip. de ind.}\\ &= 1+\tfrac{1-2}{2^{n+1}}\\ &= 1-\tfrac{1}{2^{n+1}} && QED \end{aligned}$$

Ejemplo: Demuestre por inducción matemática $1+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)}{3}$.

Solución:

1) Base de la inducción:

Si $n=1$ entonces $1+2^2+3^2+...+n^2=1=\frac{1\left(\frac{3}{2}\right)(2)}{3}=\frac{1\left(1+\frac{1}{2}\right)(1+1)}{3}$.

2) Hipótesis de inducción:

$1+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)}{3}$.

3) Paso inductivo:

Si $1+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)}{3}$ entonces

$1+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\left[(n+1)+\frac{1}{2}\right][(n+1)+1]}{3}$.

4) Demostración:

$$\begin{aligned} 1+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2 &= \tfrac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)}{3}+(n+1)^2 && \textit{por hip. de ind.}\\ &= \tfrac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)+3(n+1)^2}{3}\\ &= \tfrac{\left(n^2+\frac{1}{2}n\right)(n+1)+3\left(n^2+2n+1\right)}{3}\\ &= \tfrac{n^3+\frac{9}{2}n^2+\frac{13}{2}n+3}{3} \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \tfrac{(n+1)\left[(n+1)+\frac{1}{2}\right][(n+1)+1]}{3} &= \tfrac{\left[(n+1)^2+\frac{1}{2}(n+1)\right](n+2)}{3}\\ &= \tfrac{\left(n^2+2n+1\right)(n+2)+\frac{1}{2}\left(n^2+3n+2\right)}{3}\\ &= \tfrac{n^3+\frac{9}{2}n^2+\frac{13}{2}n+3}{3} && QED \end{aligned}$$

Principios del Conteo

La regla de la suma

Si una primera tarea puede realizarse de m formas, una segunda tarea puede realizarse de n formas y ambas tareas no pueden realizarse simultáneamente, entonces las actividades pueden realizarse de cualquiera de $m+n$ formas.

Ejemplo: Una biblioteca cuanta con 40 libros de Cálculo y 50 libros de Álgebra. Por la regla de la suma, un estudiante puede seleccionar de entre 90 libros para aprender más de una u otra materia.

La regla del producto

También llamada principio de elección. Establece que si un procedimiento se puede desarrollar en una primera y segunda etapas y si hay m posibles resultados para la primera etapa y para cada uno de éstos hay n posibles resultados en la segunda etapa entonces el procedimiento puede realizarse de mn formas en el orden establecido.

Ejemplo: Una fábrica que manufactura placas de automóvil para el Distrito Federal tiene las siguientes opciones (las placas contienen 3 dígitos seguidos de 3 letras):

a) Si se permiten repeticiones tanto de números como de letras, pueden fabricarse $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 27 = 19,683,000$ placas.

b) Si ningún número ni letra pueden repetirse entonces se puede fabricar $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = 12,636,000$ placas.

c) En el primer caso pueden fabricarse $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15,625$ placas que sólo contengan dígitos pares y vocales.

Permutaciones

Definición. Permutaciones:

Dícese de los arreglos lineales (ordenados) de elementos distintos en donde se aplica la regla del producto.

Ejemplo: En una clase de 12 estudiantes se escojerá a 6 de ellos para tomarles una fotografía. ¿Cuántos arreglos lineales son posibles?

solución: Consideremos las 6 posiciones y el número posible de estudiantes que pueden ser elegidos para llenar cada posición.

$$\underset{\text{posición 1}}{12} \cdot \underset{\text{posición 2}}{11} \cdot \underset{\text{posición 3}}{10} \cdot \underset{\text{posición 4}}{9} \cdot \underset{\text{posición 5}}{8} \cdot \underset{\text{posición 6}}{7}$$

Cualquiera de los 12 estudiantes puede ocupar la primera posición en la fila. Como un mismo estudiante no puede ocupar más de un lugar a la vez en la fila entonces no puede haber repeticiones. Así que para la segunda posición podemos elegir de los 11 restantes y así sucesivamente. Por lo tanto, existen $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ arreglos posibles.

En general, si tenemos n objetos distintos, denotados $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ y r es un entero, tal que $1 \leq r \leq n$, entonces por la regla del producto, el número de permutaciones de tamaño r de n objetos $(P(n,r))$ es:

$$\begin{aligned} n(n-1)(n-2)...(n-r+1) &= [n(n-1)(n-2)...(n-r+1)]\tfrac{(n-r)!}{(n-r)!} \\ &= [n(n-1)(n-2)...(n-r+1)]\left(\tfrac{(n-r)(n-r-1)..,3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)..,3\cdot 2\cdot 1}\right) \\ &= \tfrac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

Ejemplo: El número de permutaciones de las letras de la palabra *centro* es 6!. Si sólo se usan 4 de las letras, entonces $P(6,4) = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$.

Ejemplo: El número de permutaciones de las letras en la palabra $facultad$ es $\frac{8!}{2} = 20160$. Esto es debido a que contamos con 6 letras distintas. Si pudiéramos distinguir las letras a, tendríamos 8 símbolos distintos: $f, a_1, c, u, l, t, a_2, d$. En este caso, por cada arreglo en donde las letras a son distinguibles corresponde un par de permutaciones con distintas letras a. Por lo tanto:

$\#\text{permutaciones de } fa_1culta_2d = 2\left(\#\text{arreglos de las letras de } facultad\right).$

En general, si tenemos n objetos tal que $n = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_r$ y cada n_i es de un tipo diferente entonces existen $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_r!}$ arreglos lineales de los n objetos.

Ejemplo: ¿Cuántos arreglos hay en la palabra *ciencias*?

Solución: Existen $\frac{8!}{2!2!} = 10080$.

Combinaciones

Ejemplo: ¿De cuántas formas distintas se pueden elegir o combinar r objetos de un conjunto de n (donde $0 \leq r \leq n$)?

Solución: Esto corresponde a $r!$ permutaciones de tamaño r de n objetos. Entonces tenemos que:

$r!C(n,r) = P(n,r) \Leftrightarrow C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ donde $0 \leq r \leq n$

Nota: $C(n,r) = \binom{n}{r}$ quiere decir: combinaciones de n objetos tomados de r en r.

Ejemplo: ¿De cuántas formas puedo llenar mi charola de pan con cinco piezas de pan de dulce si en la panadería venden 11 tipos de este pan?

Solución: De $C(11,5) = \binom{11}{5} = \frac{11!}{5!(11-5)!} = 462$

Teorema del Binomio
Sean a y b variables y $m \in \mathbb{Z}^+$, entonces:
$(a+b)^m = \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$

Demostración
Al expandir el producto $(a+b)^m$ tenemos:

$$(a+b)^m = \underset{1^{\text{er}}\text{ factor}}{(a+b)} \quad \underset{2^{\text{do}}\text{ factor}}{(a+b)} \quad \underset{3^{\text{er}}\text{ factor}}{(a+b)} \quad \cdots \quad \underset{\text{m}^{\text{o}}\text{ factor}}{(a+b)}$$

El coeficiente de $a^k b^{m-k}$, donde $0 \leq k \leq m$, es el número de formas distintas en que podemos seleccionar k letras a (y consecuentemente $m-k$ letras b) de los m factores que tenemos. El número total de estas selecciones de tamaño k de una colección de tamaño m es $C(m,k) = \binom{m}{k}$. De ahí se sigue que

$(a+b)^m = \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$. *QED.*

A continuación exhibiremos otra demostración del Teorema de Binomio. Ésta prueba está hecha con inducción matemática, pero antes veamos que se cumple el siguiente resultado:

Afirmación

$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

Demostración

Sabemos que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{[n-(k-1)]!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{n!}{(n-k+1)(n-k)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k(k-1)!} \\
&= \frac{n!k + n!(n-k+1)}{(n-k+1)(n-k)!(k-1)!k} \\
&= \frac{n!(k+n-k+1)}{(n-k+1)(n-k)!(k-1)!k} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(n-k+1)!k!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} \\
&= \binom{n+1}{k} \qquad\qquad QED
\end{aligned}$$

Demostración del Teorema del Binomio (Por inducción matemática)

1) Base de la inducción:

Si $m = 1$ entonces $(a+b)^m = a + b = \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b$.

2) Hipótesis de inducción:

$(a+b)^m = \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$.

3) Paso inductivo:

Si $(a+b)^m = \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$ entonces $(a+b)^{m+1} = \sum\limits_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{m+1-k} b^k$.

4) Demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}a^{m+1-k}b^k &= a^{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}a^{m+1-k}b^k+b^{m+1} \\
&= a^{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\left[\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}\right]a^{m+1-k}b^k+b^{m+1} \\
&= a^{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}a^{m+1-k}b^k+\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k-1}a^{m+1-k}b^k+b^{m+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m+1-k}b^k+\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m}{k-1}a^{m+1-k}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m+1-k}b^k+\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m}{k-1}a^{m-(k-1)}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k+1}b^k+\sum_{i=0}^{m}\underset{i=k-1}{\binom{m}{i}}a^{m-i}b^{i+1} && \textit{donde } i=k-1 \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}ab^k+\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}a^{m-i}b^ib \\
&= a\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k+b\sum_{i=0}^{m}\underset{i=k-1}{\binom{m}{i}}a^{m-i}b^i \\
&= a\,(a+b)^m+b\,(a+b)^m \\
&= (a+b)\,(a+b)^m \\
&= (a+b)^{m+1} && QED
\end{aligned}$$

Ejemplo: Diga cuál es el coeficiente de a^5b^2 en la expansión de $(2a-3b)^7$

Solución: Por el Teorema del Binomio y siendo $x=2a$ y $y=-3b$ tenemos que el coeficiente buscado es $\binom{7}{5}(2)^5(-3)^2$.

2.7. Tópicos de Álgebra

Teorema

Un polinomio $p(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ real de grado n tiene una raíz ξ si, y sólo si, $p(x)=(x-\xi)\,q(x)$ donde $q(x)$ es un polinomio de grado $(n-1)$.

Demostración

$\Leftarrow$ (se demuestra el regreso)

Si $p(x)=(x-\xi)\,q(x)$ entonces $p(\xi)=(0)\,q(\xi)=0$ implica que ξ es una raíz. Si ξ es raíz entonces:

$$p(\xi)=a_0+a_1\xi+...+a_n\xi^n$$

y así:

$$\begin{aligned}
p(x) &= p(x)-p(\xi) \\
&= (a_0+a_1x+...+a_nx^n)-(a_0+a_1\xi+...+a_n\xi^n) \\
&= (a_0-a_0)+a_1(x-\xi)+a_2\left(x^2-\xi^2\right)+...+a_n(x^n-\xi^n)
\end{aligned}$$

Pero $x^k-\xi^k=(x-\xi)\left(x^{k-1}+x^{k-2}\xi+...+x\xi^{k-2}+\xi^{k-1}\right)$ es válido para todo x y $k\geq 1$ es decir:

$$x^k - \xi^k = (x - \xi)\, q_{k-1}(x)$$

para q_{k-2} poliniomio de grado $k-1$. Entonces $p(x) = (x-\xi)\left(q_1(x) + ... + q_{k-2}(x)\right).$

La demostración de $\Rightarrow$ (la ida) se deja al lector.

Teorema (de las raíces racionales)

Sea $r = \frac{p}{q}$ un racional en su mínima expresión, raíz de la ecuación con coeficientes enteros $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = 0$ entonces $p \mid a_0$ y $q \mid a_n$.

Demostración
Por ser $r = \frac{p}{q}$ raíz tenemos:

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + ... + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Entonces:

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} a_0 q^n = &\quad -a_n p^n - a_{n-1}p^{n-1}q - ... - a_1 p q^{n-1} \\ &= p\left[-a_n p^{n-1} - a_{n-1}p^{n-2}q - ... - a_1 q^{n-1}\right] \end{aligned}$$

y así $p \mid a_0 q^n$ pero entonces $p \mid a_0$.

Análogamente:

$$\begin{aligned} a_n p^n = &\quad -a_{n-1}p^{n-1}q - ... - a_1 p q^{n-1} - a_0 q^n \\ &= q\left[-a_{n-1}p^{n-1} - ... - a_1 p q^{n-2} - a_0 q^{n-1}\right] \end{aligned}$$

de donde $q \mid a_n p^n$ y así $q \mid a_n$. QED

Ejemplo: Demuestre que $\sqrt{2}$ es irracional.

Solución: Supóngase que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ con m y n enteros sin factores comunes. Entonces $2 = \frac{m^2}{n^2}$ y así $2n^2 = m^2$. Por lo tanto al ser m^2 par, m también deberá ser par, $m = 2m'$. Pero entonces $2n^2 = m^2 = 4\left(m'\right)^2,\ n^2 = 2\left(m'\right)^2$, lo que nos indica que n^2 es par y por lo tanto que n es par. Esto contradice la hipótesis de que m y n no tienen factores comunes.

Ejemplo: Demuestre que $\sqrt{3}$ es irracional.

Solución: (por contradicción)

Supongamos que $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ con $a, b \in \mathbb{Z}^+$ y sin factores comunes. Entonces $3 = \frac{p^2}{q^2}$ y $3q^2 = p^2$ ahora $p^2 = 3q^2$ implica que p es múltiplo de 3 ya que:

$p = 3k + r,\ r \in \{0, 1, 2\}$

$p^2 = (3k + r)^2 = 9k^2 + 6kr + r^2 = 3\left(3k^2 + 2kr\right) + r^2$

Si p^2 es múltiplo de 3 entonces $r = 0$.

Si $p = 3k$ entonces $3q^2 = p^2 = 9k^2$ y así $q^2 = 3k^2$ por lo que también q es múltiplo de 3 y esto constituye junto con lo anterior una contradicción.

Ejemplo:$\sqrt{3 + \sqrt{2}}$ es irracional.

Solución:

$x = \sqrt{3 + \sqrt{2}} \iff x^2 = 3 + \sqrt{2} \iff \left(x^2 - 3\right)^2 = 2 \iff x^4 - 6x^2 + 7 = 0$. Pero $x^4 - 6x^2 + 7 = 0$ tiene como candidato a soluciones racionales $\pm 1, \pm 7$.

Caso $a_n = 1$: Las raíces de f son enteras o irracionales. Sea $a \in \mathbb{Z}, a > 0$. Si a no tiene una raíz entera n-ésima entonces $\sqrt[n]{a}$ es irracional: considerar $x^n - a = 0$.

Ejemplo: demostrar que $\sqrt{10}$ y $\sqrt{15}$ son irracionales (Generalizar para la demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional para $\sqrt{k}$ donde k no es un cuadrado perfecto).

Solución:

Supongamos que $\sqrt{10} = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}^+$ y sin divisores comunes. Ahora $10 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 10q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ es múltiplo de $10 \Rightarrow p$ es múltiplo de 10 ya que $p = 10k + r,\ r \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Luego $p^2 = (10k + r)^2 = 100k^2 + 20kr + r^2 = 10\left(10k^2 + 2kr\right) + r^2$. Si p^2 es múltiplo de 10 entonces $r = 0$. Si $p = 10k$ entonces $10q^2 = p^2 = 100k^2$ y así $q^2 = 10k^2$. Por lo que también q es múltiplo de 10 y esto constituye junto con lo anterior una contradicción.

Supongamos que $\sqrt{15} = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}^+$ y sin divisores comunes. Ahora $15 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 15q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ es múltiplo de $15 \Rightarrow p$ es múltiplo de 15 ya que $p = 15k + r,\ r \in \{0, 1, \ldots, 14\}$. Luego $p^2 = (15k + r)^2 = 225k^2 + 30kr + r^2 = 15\left(15k^2 + 2kr\right) + r^2$. Si p^2 es múltiplo de 15 entonces $r = 0$. Si $p = 15k$ entonces $15q^2 = p^2 = 100k^2$ y así $q^2 = 15k^2$. Por lo que también q es múltiplo de 15 y esto constituye junto con lo anterior una contradicción.

Ejemplo: demostrar si $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n}$ es un entero o un irracional.

Solución: Si $n \in \mathbb{N}$,tal que $n = 1$ entonces $\sqrt{1} = 1 \in \mathbb{Z}$. Luego, si $n \geq 2 \Rightarrow n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_n^{s_n}$ donde p_i es primo y $s_i \in \mathbb{Z}^+$ (Teo. Fundamental de la Aritmética). Si $s_i = 2\ \forall i$, $\sqrt{n} = p_1 p_2 \cdots p_n$ que pertenece a los enteros. El resto de la demostración de deja al lector.

Notación $\sum$

La notación sigma es una simbología que se utiliza para denotar sumas finitas e infinitas en las que, en cada sumando interviene un índice contador.

Ejemplo: demostrar que para $x \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Solución: $s = 1 + x + x^2 + ... + x^n \Leftrightarrow xs = x + x^2 + ... + x^{n+1} \Leftrightarrow -xs + s = 1 - x^{n+1} \Leftrightarrow s = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Ejemplo: expresar en notación $\sum$:

a) $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4$

b) $a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a^4$

c) $a^5 - a^4 b + a^3 b^2 - a^2 b^3 + ab^4 - b^5$

d) $a^5 - a^4 b + a^3 b^2 + a^2 b^3 + ab^4 + b^5$

e) $f\left(x_1^x\right) \triangle x_1 + f\left(x_2^x\right) \triangle x_2 + ... + f\left(x_n^x\right) \triangle x_n$

Solución:

a) $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 = \sum\limits_{k=1}^{5} (-1)^{k+1} kx^{k-1}$

b) $a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a^4 = \sum\limits_{k=0}^{4} a_k x^{4-k}$

c) $a^5 - a^4 b + a^3 b^2 - a^2 b^3 + ab^4 - b^5 = \sum\limits_{k=0}^{5} a^{5-k} b^k (-1)^{k+2}$

d) $a^5 - a^4 b + a^3 b^2 + a^2 b^3 + ab^4 + b^5 = \sum\limits_{k=0}^{5} a^{5-k} b^k$

e) $f\left(x_1^x\right) \triangle x_1 + f\left(x_2^x\right) \triangle x_2 + ... + f\left(x_n^x\right) \triangle x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(x_i^x\right) \triangle x_i$

Ejemplo: Calcular $\sum\limits_{k=2}^{5} \frac{1}{k!}$

Solución: $\sum\limits_{k=2}^{5} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{43}{60}$

Ejemplo: Calcular $\sum\limits_{k=1}^{4} \frac{1}{2^k}$

Solución: $\sum\limits_{k=1}^{4} \frac{1}{2^k} = \sum\limits_{k=0}^{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \sum\limits_{k=0}^{3} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = \frac{15}{16}$

Cambio de indices de notación

$$\sum_{k=j}^{n} a_k = \sum_{k=j-j=0}^{n-j} a_{k+j}$$

Dominar el cambio de índices de notación le será muy útil al estudiante al enfrentarse a problemas de inducción matemática o de series; temas que se abordan en el curso de Cálculo Diferencial e Integral I.

Ejemplo: Calcular $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{1+i}{n}\right)^2$ cuando $n = 30$ y cuando $n \to \infty$.

Solución:

$\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{1+i}{n}\right)^2 = \frac{2}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(1+2i+i^2\right) = \frac{2}{n^3}\left[n + \frac{2n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{13}{3n^2} + \frac{3}{n} + \frac{2}{3}$

Cuando $n = 30$; $\sum\limits_{i=1}^{30} \left(\frac{2}{30}\right)\left(\frac{1+i}{30}\right)^2 = \frac{2083}{2700}$. Cuando $n \to \infty$; $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\infty}\right)\left(\frac{1+i}{\infty}\right)^2 = \frac{2}{3}$

Ejemplo: Decir si las expresiones siguientes son iguales y por qué.

a) $\sum\limits_{i=1}^{n} i, \sum\limits_{i=0}^{n-1} (1+i)$

b) $\sum\limits_{i=1}^{n} i, 1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} i$

c) $\sum\limits_{j=0}^{n} \left(j^2 - j\right), \sum\limits_{j=1}^{n-1} \left(j^2 - j\right)$

Solución:

a) Sí, ya que: $\sum\limits_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n$ y $\sum\limits_{i=0}^{n-1} (1+i) = (1+0)+(1+1)+(1+2)+\cdots+ (1+n-1) = 1+2+3+\cdots+n$.

b) No, ya que: sea $n = 2 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{2} i = 1+2 = 3 \neq 2 = 1+1 = 1+1+\sum\limits_{i=1}^{2-1} i$.

c) No, ya que: sea $n = 2 \Rightarrow \sum\limits_{j=0}^{2} \left(j^2 - j\right) = 0+1-1+4-2 = 2 \neq 0 = 1-1 = \sum\limits_{j=0}^{2} \left(j^2 - j\right)$.

Definición.
Para una colección de n medidas $x_1, x_2, ..., x_n$ se define:
$\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$ como el **promedio** y $s = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$ como la **desviación típica** o estándar.

Ejemplo: Demostrar que $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = 0$ y que $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}$.
Solución: Tenemos que $\overline{x} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + ... + \frac{x_n}{n}$, luego:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) &= (x_1 - \overline{x}) + (x_2 - \overline{x}) + ... + (x_n - \overline{x}) \\
&= \left[x_1 - \left(\tfrac{x_1}{n} + \tfrac{x_2}{n} + ... + \tfrac{x_n}{n}\right)\right] + ... + \left[x_n - \left(\tfrac{x_1}{n} + \tfrac{x_2}{n} + ... + \tfrac{x_n}{n}\right)\right] \\
&= x_1 + x_2 + ... + x_n - n\tfrac{x_1}{n} - n\tfrac{x_2}{n} - ... - n\tfrac{x_n}{n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 &= \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{x}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\overline{x}^2 + n\overline{x}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}
\end{aligned}$$

Los resultados que se han usado a lo largo de los ejercicios, son los siguientes. Se deja al lector verificar su veracidad. Utilice la inducción matemática.

$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$
$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n\,(n+1)\,(2n+1)$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$

2.8. Tópicos de Trigonometría

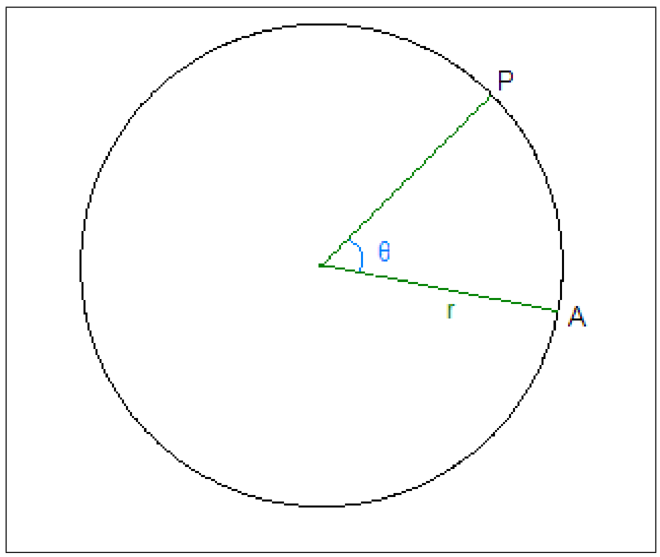
Definición. Ángulo:
Llámese *ángulo* a la abertura de dos rectas que se encuentran.

Definición. Ángulo Central:
Es aquel que está dentro de una circunferencia y su vértice está en el centro de la curva.

Definición. Radián:

Un *radián* es la medida del ángulo central de una circunferencia subtendido por un arco de longitud igual al radio de dicha curva.

La medición de ángulos en grados se emplea en campos como topografía, navegación y diseño de equipo mecánico. En aplicaciones científicas que requieren del Cálculo, se acostumbra usar la medida en radianes (rad). Para definir un ángulo cuya medida en radianes sea 1, considérese una circunferencia de radio r. Si θ es el ángulo central que se muestra en la Figura 2.8, se dice que el arco $\widehat{AP}$ subtiende a θ, o que θ está subtendido por $\widehat{AP}$, o que el ángulo θ determina al arco $\widehat{AP}$. Si la longitud de $\widehat{AP}$ es igual al radio r de la circunferencia, entonces θ tiene la medida de un radián.



Construcción de un radián

Consideremos entonces que en una circunferencia, un ángulo θ se considera como la razón entre el arco s al cual subyace y el radio r de la circunferencia: $\theta = \frac{s}{r}$

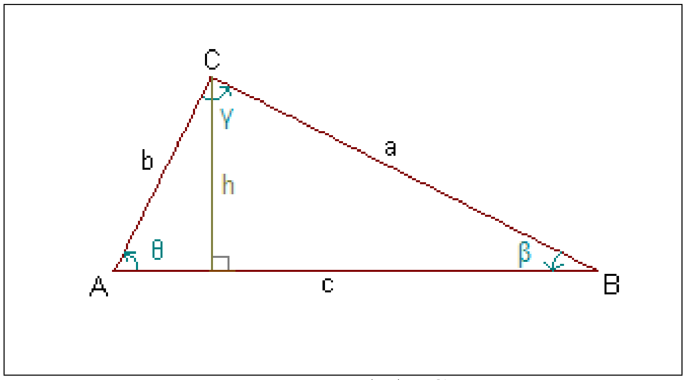
También tenemos que πr es la longitud de la mitad del perímetro de un círculo de radio r.

Proposición: El perímetro c de un círculo de radio r es $c = 2\pi r$ ya que por lo anterior tenemos: $\frac{\frac{c}{2}}{r} = \pi \Rightarrow c = 2\pi r$

Por lo tanto $2\pi R = 360°;\ R = \frac{360°}{2\pi};\ 1° = \frac{2\pi}{360} R\ (R = radianes)$.

Ejemplo: (Ley de los senos) demuestre que en todo triángulo se cumple: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Solución: Tomando en cuenta la altura h del triángulo (Fig. 2.8) tenemos:|

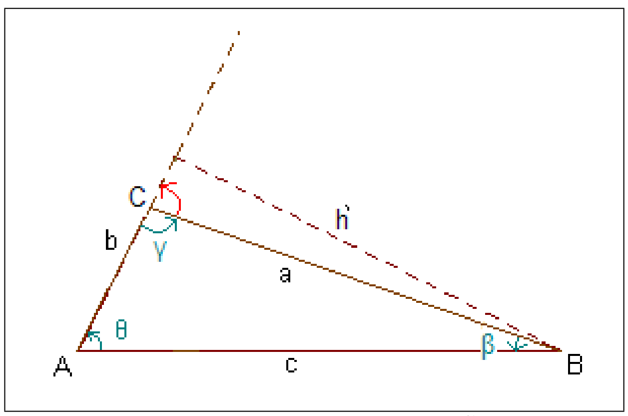


Triángulo $\triangle ABC$

$\sin\alpha = \frac{h}{b}; h = \frac{b}{\alpha}$

$\sin\beta = \frac{h}{a}; h = a\sin\beta$

Entonces $b\sin\alpha = a\sin\beta$ y así $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. (Fig. 2.8)



Demostración de la Ley de los Senos

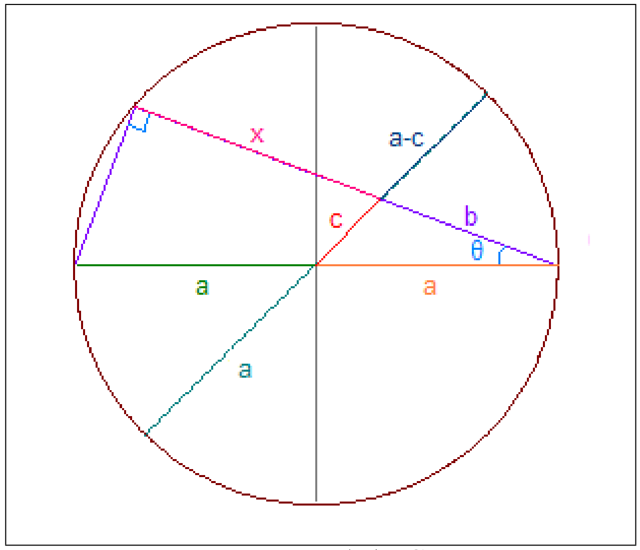
$\sin\gamma' = \sin(\pi - \gamma) = \sin\gamma = \frac{h'}{a}$

$\sin\alpha = \frac{h'}{c}; \ h' = a\sin\gamma = c\sin\alpha$

Entonces $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Por lo tanto $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

<u>Ejemplo:</u> (Ley de los cosenos) Para cualquier triángulo se cumple $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$.

<u>Solución:</u> Consideremos la Figura 2.8.

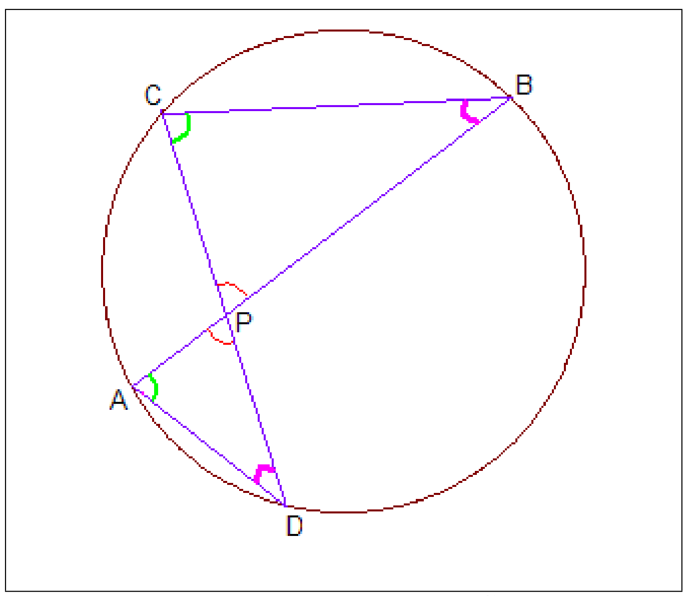


Triángulo $\triangle ABC$

Tenemos que $\cos\theta = \frac{b+x}{2a}$ y así $x = 2a\cos\theta - b$. Entonces $(2a\cos\theta - b)\, b = (a+c)\,(a-c)\,$, ó bien

$2ab\cos\theta - b^2 = a^2 - c^2, c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$

Para este resultado, se consideró la propiedad siguiente: $AP \cdot PB = CP \cdot PD$ Lo cual se cumple en vista de que los triángulos APD y CPB son semejantes. (Fig. 2.8)



Demostración de la Ley de los Cosenos

Capítulo 3

Conjuntos, Funciones y Lógica

El concepto de conjunto
De acuerdo a la idea intuitiva enunciada por Georg Cantor (1845-1918), un conjunto S es cualquier colección de objetos definidos y distinguibles por nuestra intuición o intelecto de modo que lo concebimos como un todo. Los objetos son llamados elementos o miembros de S.

La noción de pertenencia es una relación entre objetos y conjuntos. Para ello se utiliza el símbolo $\in$.

Ejemplo: $x \in A$ significa "x es elemento del conjunto A" mientras que $x \notin A$ significa "x no es elemento del conjunto A".

Si bien la definición de conjunto es bastante general hay que tomar ciertas precauciones al definir un conjunto como muestra la siguiente paradoja:

Ejemplo: Paradoja de Russell (Bertrand Russell 1872-1969)

Sea S el conjunto de todos los conjuntos. Sea R el conjunto cuyos elementos son todos aquellos conjuntos que no son elementos de sí mismos, es decir: $R = \{x \in S :\sim (x \in x)\}$. Muestre que el conjunto R lleva a una contradicción.

Solución: El conjunto R en no vacío ya que, por ejemplo, $\mathbb{R} \notin \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ no es un número). Ahora bien: si $R \in R$ entonces $R \notin R$ y también si $R \notin R$ entonces $R \in R$: contradicción.

Definición. Conjunto Universo:
Se acostumbra llamar así al lugar en donde están todos los conjuntos posibles. Generalmente se denota por la letra U. El conjunto Universo es, en sí mismo, un conjunto.

Definición. Conjunto Complemento:
Sea A un conjunto, decimos que el conjunto complemento de A, denotado por A^c es:
$A^c = \{x \in U \text{ tal que } x \notin A\}$

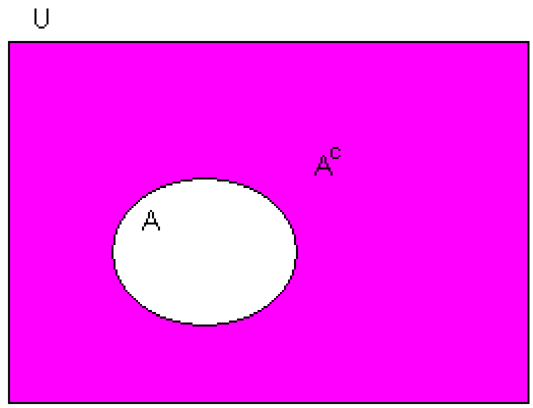


Figura 3.1: Complemento del conjunto A

Definición. Conjunto Vacío:
Llamamos conjunto vacío a aquel que no tiene elementos y lo denotamos por $\varnothing$.

Diagramas de Venn
Las relaciones entre conjuntos se logran ilustrar de manera sencilla e instructiva mediante los diagramas de Venn. En ellos se representan conjuntos con un área plana y cerrada, por lo general delimitada por un círculo.

Operaciones con conjuntos
Para A y B conjuntos, se define lo siguiente:
Definición. Unión de Conjuntos:
$A \cup B = \{x \in U$ tal que $x \in A$ ó $x \in B\}$
Es decir, los elementos x del conjunto Universo que pertenecen a A o bien, pertenecen a B.

Existen varios casos de unión de conjuntos que pueden ser representados por diagramas de Venn:
Definición. Intersección de Conjuntos:
$A \cap B = \{x \in U$ tal que $x \in A$ y $x \in B\}$
Es decir, los elementos x del conjunto Universo que pertenecen a A y al mismo tiempo pertenecen a B.

> Nota: Los elementos de cualquier conjunto son, a su vez, elementos del conjunto Universo. Debido a ello, al definir a un conjunto cualquiera se puede especificar o no que los elementos x pertenecen al conjuto Universo.

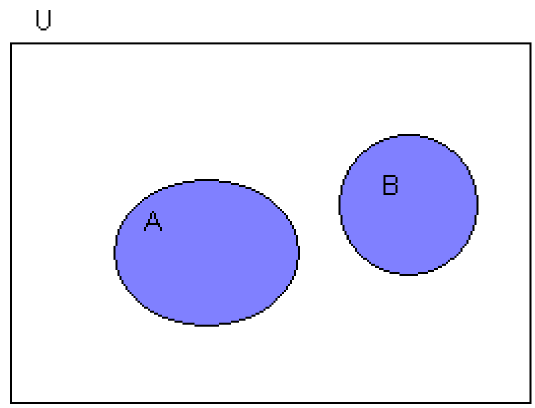


Figura 3.2: $A \cup B$ cuando A y B no tienen elementos en común.

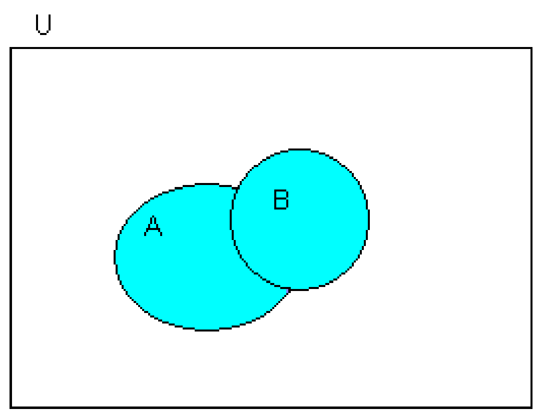


Figura 3.3: $A \cup B$ cuando A y B tienen elementos en común.

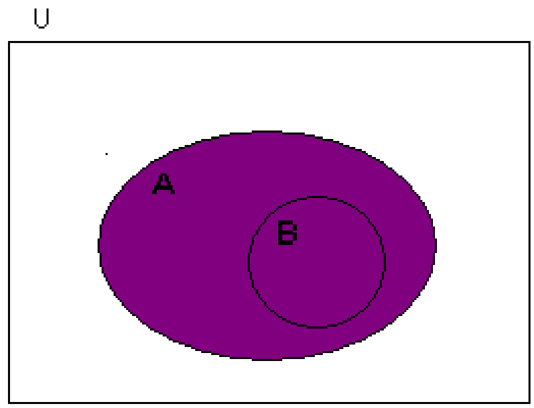


Figura 3.4: $A \cup B$ cuando A contiene a B.

Ejemplo: Es equivalente escribir $A \cap B = \{x \in U \text{ tal que } x \in A \text{ y } x \in B\}$ que escribir $A \cap B = \{x \text{ tal que } x \in A \text{ y } x \in B\}$

Al igual que en el caso de la unión de conjuntos, la intersección de conjuntos puede ser representa por diagramas de Venn:

De las definiciones anteriores podemos ver claramente que: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$.

Ejemplo: Sean A y B conjuntos entonces,

a) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

b) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

Solución:

a) $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ ó $x \in B$.Si $x \in A$ entonces, como $A \subset B$, $x \in B$.Por lo tanto $A \cup B \subset B$.Como $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$, tenemos $B \subset A \cup B$. Juntado lo anterior $A \cup B = B$.

b) $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ y $x \in B$.Es decir $x \in A$. Así $A \cap B \subset A$. Sea $x \in A$, como $A \subset B$, $x \in B$ y por lo tanto $A \subset A \cap B$. Juntando lo anterior tenemos $A \cap B = A$.

Definición.
Para $\mathfrak{F} = \{E_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia indicada de conjuntos se define
a) la **unión** de los E_α como: $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha = \{x : x \in E_\alpha \text{ para algún } \alpha \in A\}$

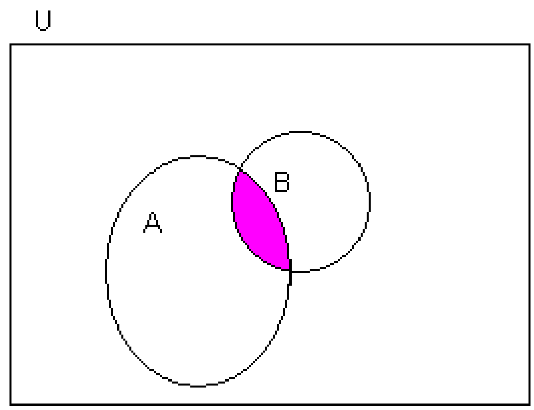


Figura 3.5: $A \cap B$ cuando A y B tienen elementos en común

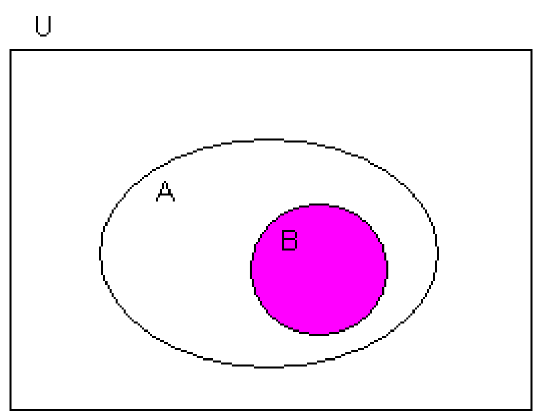


Figura 3.6: $A \cap B$ cuando B está contenido en A

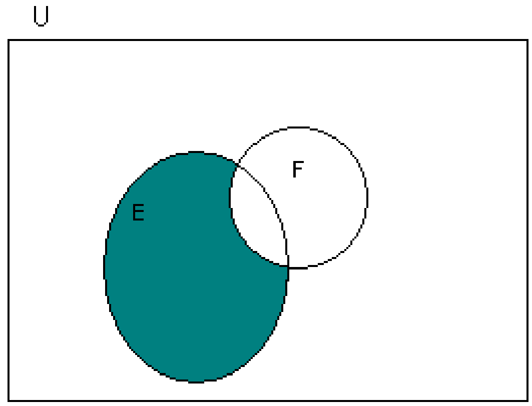


Figura 3.7: $E - F$ cuando E y F tienen elementos en común.

b) la **intersección** de los E_α como: $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha = \{x : x \in E_\alpha \text{ para todo } \alpha \in A\}$

Definición. Diferencia de Conjuntos:
Para E y F conjuntos se define la diferencia: $E - F = \{x : x \in E \text{ y } x \notin F\}$

Definición. Diferencia Simétrica de Conjuntos:
$E \triangle F = (E - F) \cup (F - E) = (E \cup F) - (E \cap F)$
Para hacer más clara la definición anterior, la explicaremos en un diagrama de Venn:

Ejemplo: muestre que $A - (A - B) = A \cap B$
Solución: $A - (A - B) = A \cap (A - B)^c = A \cap (A \cap B^c)^c = A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B) = A \cap B$

Ejemplo: Muestre que $(E \cup F) - (E \cap F) = (E - F) \cup (F - E)$
Solución:

$$\begin{aligned}
(E \cup F) - (E \cap F) &= (E \cup F) \cap (E \cap F)^c \\
&= (E \cup F) \cap (E^c \cup F^c) \\
&= [(E \cup F) \cap E^c] \cup [(E \cup F) \cap F^c] \\
&= [(E \cap E^c) \cup (F \cap E^c)] \cup [(E \cap F^c) \cup (F \cap F^c)] \\
&= (F \cap E^c) \cup (E \cap F^c) \\
&= (E - F) \cup (F - E)
\end{aligned}$$

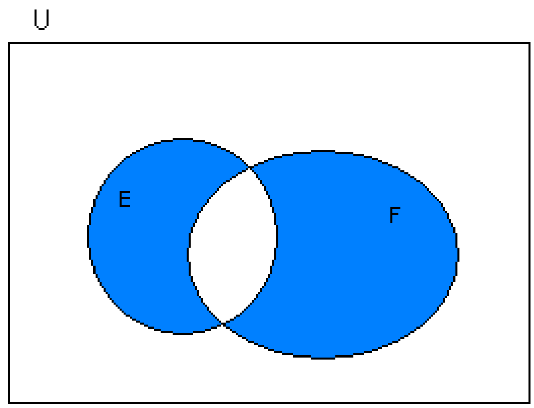


Figura 3.8: $(E - F) \cup (F - E)$ cuando E y F tienen elementos en común.

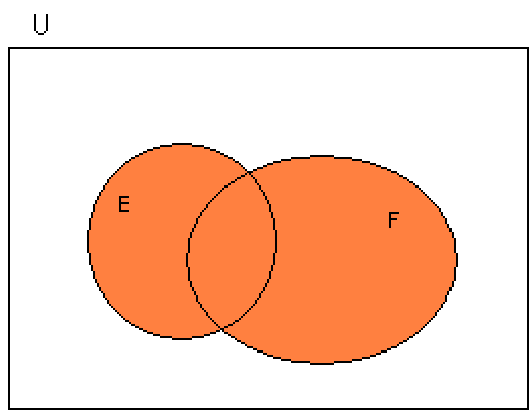


Figura 3.9: $E \cup F$ cuando E y F tienen elementos en común.

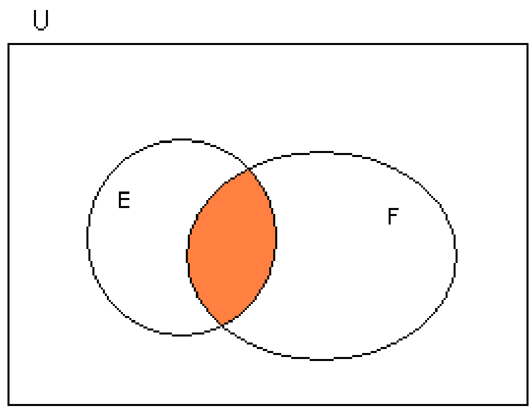


Figura 3.10: $E \cap F$

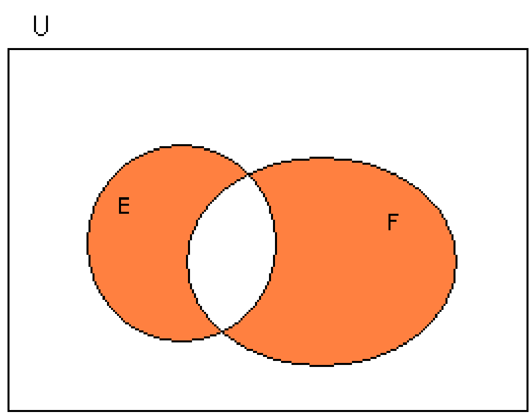


Figura 3.11: $(E \cup F) - (E \cap F)$

Leyes de DeMorgan
Sea $\mathcal{X}$ un conjunto. Sea $\mathfrak{F} = \{E_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de subconjuntos $\mathcal{X}$. Entonces se cumplen:
a) $\left(\bigcup\limits_{\alpha\in A} E_\alpha\right)^c = \bigcap\limits_{\alpha\in A} E_\alpha^c$
b) $\left(\bigcap\limits_{\alpha\in A} E_\alpha\right)^c = \bigcup\limits_{\alpha\in A} E_\alpha^c$

Demostración
a) $x \in \left(\bigcup\limits_{\alpha\in A} E_\alpha\right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcup\limits_{\alpha\in A} E_\alpha \Leftrightarrow x \notin E_\alpha \ , \ \alpha \in A \Leftrightarrow x \in E_\alpha^c \ , \ \alpha \in A \Leftrightarrow x \in \bigcap\limits_{\alpha\in A} E_\alpha^c$
b) $x \in \left(\bigcap\limits_{\alpha\in A} E_\alpha\right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcap\limits_{\alpha\in A} E_\alpha \Leftrightarrow x \notin E_\alpha \ p.a. \ \alpha \in A \Leftrightarrow x \in E_\alpha^c \ p.a. \ \alpha \in A \Leftrightarrow x \in \bigcup\limits_{\alpha\in A} E_\alpha^c$
QED

Definición. Conjunto Potencia:
Para A un conjunto, $\mathcal{P}(A)$ denota el conjunto de los subconjuntos de A, y se llama "el conjunto potencia de A".

Ejemplo: Encuentre $\mathcal{P}(A)$ para

a) $A = \{1, 2\}$

b) $A = \varnothing$

Solución:

a) Para $A = \{1, 2\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1, 2\}, \{1\}, \{2\}\}$

b) Para $A = \varnothing$, $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$

Ejemplo: Encuentre $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$

Solución: $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$; $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) = \mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))) = \mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$

Ejemplo: Verifique que $A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$

Solución: $x \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow x \subset A$. Si $A \subset B$ entonces $x \subset B$ y así $x \in \mathcal{P}(B)$

Ejemplo: Verifique que para $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}^n(\varnothing) \subset \mathcal{P}^{n-1}(\varnothing)$.

Solución: Se deja al lector.

Ejemplo: Muestre que el número de elementos de $\mathcal{P}^n(\varnothing)\,(n \in \mathbb{N})$ es 2^{n-1}.

Solución: Se deja al lector.

Ejemplo: Existe una biyección entre $\mathcal{P}(X)$ y el conjunto de funciones $f : X \to \{0,1\}$. Utilizando este hecho contar los subconjuntos de $\{1,2,...,n\}$.

Solución: Por hipótesis tenemos que $\mathcal{P}(X)$ y el conjunto de funciones $f : X \to \{0,1\}$ tienen el mismo número de elementos. Por lo tanto bastará con contar los elementos del conjunto $f : X \to \{0,1\}$. Mediante la función f, a cada elemento de x le es asociado un valor, ya sea el cero ó el uno. Y siendo n elementos en el conjunto X, tenemos que 2^n es el número de elementos de $\mathcal{P}(X)$.

Ejercicios: Sean X y Y conjuntos. Muestre que:
1) $X = \varnothing \Leftrightarrow Y = X \triangle Y$
2) $X \triangle (Y \triangle Z) = (X \triangle Y) \triangle Z$
3) $X \cap (Y \triangle Z) = (X \cap Y) \triangle (X \cap Z)$
4) $X \triangle X = \varnothing$
5) $\varnothing \triangle X = X$

Solución
1) $X = \varnothing \Rightarrow Y = \varnothing \triangle Y = (\varnothing \cup Y) - (\varnothing \cap Y) = Y \cup \varnothing = Y$. Se deja al lector demostrar $Y = X \triangle Y \Rightarrow X = \varnothing$.
2) Resolveremos el lado izquierdo de $X \triangle (Y \triangle Z) = (X \triangle Y) \triangle Z$:

$$\begin{aligned}
X \triangle (Y \triangle Z) &= [X \cup (Y \triangle Z)] - [X \cap (Y \triangle Z)] \\
&= \{X \cup [(Y \cup Z) - (Y \cap Z)]\} - \{X \cap [(Y \cup Z) - (Y \cap Z)]\} \\
&= \{X \cup [(Y \cup Z) \cap (Y \cap Z)^c]\} - \{X \cap [(Y \cup Z) \cap (Y \cap Z)^c]\} \\
&= [(X \cup Y \cup Z) \cap (X \cup Y^c \cup Z^c)] - [X \cap (Y \cup Z) \cap (Y^c \cup Z^c)] \\
&= [(X \cup Y \cup Z) \cap (X \cup Y^c \cup Z^c)] - \{[(X \cap Y) \cup (X \cap Z)] \cap (Y^c \cup Z^c)\} \\
&= [(X \cup Y \cup Z) \cap (X \cup Y^c \cup Z^c)] - \{[(X \cap Y) \cap (Y^c \cup Z^c)] \cup [(X \cap Z) \cap (Y^c \cup Z^c)]\} \\
&= [(X \cup Y \cup Z) \cap (X \cup Y^c \cup Z^c)] - [(Y \cap X \cap Z^c) \cup (X \cap Z \cap Y^c)] \\
&= [(X \cup Y \cup Z) \cap (X \cup Y^c \cup Z^c)] \cap [(Y \cap X \cap Z^c) \cup (X \cap Z \cap Y^c)]^c \\
&= (X \cup Y \cup Z) \cap (X \cup Y^c \cup Z^c) \cap (Y^c \cup X^c \cup Z) \cap (X^c \cup Z^c \cup Y)
\end{aligned}$$

Y resolviendo el lado derecho:

$$\begin{aligned}
(X \triangle Y) \triangle Z &= [(X \triangle Y) \cup Z] - [(X \triangle Y) \cap Z] \\
&= \{[(X \cup Y) - (X \cap Y)] \cup Z\} - \{[(X \cup Y) - (X \cap Y)] \cap Z\} \\
&= \{[(X \cup Y) \cap (X \cap Y)^c] \cup Z\} - \{[(X \cup Y) \cap (X \cap Y)^c] \cap Z\} \\
&= \{[(X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)] \cup Z\} - \{[(X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)] \cap Z\} \\
&= \{[(X \cup Y) \cup Z] \cap [(X^c \cup Y^c) \cup Z]\} - [(X \cup Y) \cap Z \cap (X^c \cup Y^c)] \\
&= [(X \cup Y \cup Z) \cap (X^c \cup Y^c \cup Z)] - \{[(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)] \cap (X^c \cup Y^c)\} \\
&= [(X \cup Y \cup Z) \cap (X^c \cup Y^c \cup Z)] - \{[(X \cap Z) \cap (X^c \cup Y^c)] \cup [(Y \cap Z) \cap (X^c \cup Y^c)]\} \\
&= [(X \cup Y \cup Z) \cap (X^c \cup Y^c \cup Z)] - [(X \cap Z \cap Y^c) \cup (Y \cap Z \cap X^c)] \\
&= [(X \cup Y \cup Z) \cap (X^c \cup Y^c \cup Z)] \cap [(X \cap Z \cap Y^c) \cup (Y \cap Z \cap X^c)]^c \\
&= (X \cup Y \cup Z) \cap (X^c \cup Y^c \cup Z) \cap (X^c \cup Z^c \cup Y) \cap (Y^c \cup Z^c \cup X)
\end{aligned}$$

Por lo tanto queda demostrado $X \triangle (Y \triangle Z) = (X \triangle Y) \triangle Z$.
3)Resolvemos el lado izquierdo de $X \cap (Y \triangle Z) = (X \cap Y) \triangle (X \cap Z)$:

$$\begin{aligned}
X \cap (Y \triangle Z) &= X \cap [(Y \cup Z) - (Y \cap Z)] \\
&= X \cap [(Y \cup Z) \cap (Y \cap Z)^c] \\
&= X \cap [(Y \cup Z) \cap (Y^c \cup Z^c)] \\
&= X \cap \{[(Y \cup Z) \cap Y^c] \cup [(Y \cup Z) \cap Z^c]\} \\
&= \{X \cap [(Y \cup Z) \cap Y^c]\} \cup \{X \cap [(Y \cup Z) \cap Z^c]\} \\
&= \{X \cap [(Y \cap Y^c) \cup (Z \cap Y^c)]\} \cup \{X \cap [(Y \cap Z^c) \cup (Z \cap Z^c)]\} \\
&= (X \cap Z \cap Y^c) \cup (X \cap Y \cap Z^c)
\end{aligned}$$

Ahora, resolvemos el lado derecho de $X \cap (Y \triangle Z) = (X \cap Y) \triangle (X \cap Z)$:

$$\begin{aligned}
(X \cap Y) \triangle (X \cap Z) &= [(X \cap Y) \cup (X \cap Z)] - [(X \cap Y) \cap (X \cap Z)] \\
&= [(X \cap Y) \cup (X \cap Z)] \cap [(X \cap Y) \cap (X \cap Z)]^c \\
&= [(X \cap Y) \cup (X \cap Z)] \cap [(X \cap Y)^c \cup (X \cap Z)^c] \\
&= [(X \cap Y) \cup (X \cap Z)] \cap [X^c \cup Y^c \cup Z^c] \\
&= \{[(X \cap Y) \cup (X \cap Z)] \cap X^c\} \\
&\quad \cup \{[(X \cap Y) \cup (X \cap Z)] \cap Y^c\} \cup \{[(X \cap Y) \cup (X \cap Z)] \cap Z^c\} \\
&= (X \cap Z \cap Y^c) \cup (X \cap Y \cap Z^c)
\end{aligned}$$

Por lo tanto queda demostrado $X \cap (Y \triangle Z) = (X \cap Y) \triangle (X \cap Z)$.

4) $X \triangle X = (X - X) \cup (X - X) = (X \cap X^c) \cup (X \cap X^c) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

5) $\varnothing \triangle X = X$. El resultado se tiene por 1)

<u>Relaciones</u>

Definición. Producto Cartesiano:

Dados dos conjuntos A y B, definimos el producto cartesiano de A y B como el conjunto de todas las parejas ordenadas que tienen el primer elemento en A y el segundo en B. Se denota $A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$.

Definición. Relación:

Una relaciòn de elementos de un conjunto A con elementos de un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$

Definición. Relación Binaria:

Sea X un conjunto. Una relación binaria en X es cualquier subconjunto $R \subset X \times X$. Para $(a,b) \in R$ se escribe aRb.

Algunas propiedades posibles de una relación binaria R en un conjunto X son:

1) reflexividad: $\forall a \in X \ (aRa)$
2) simetría: $\forall a,b \in X \ (aRb \Rightarrow bRa)$
3) transitividad: $\forall a,b,c \in X \ (aRb, bRc \Rightarrow aRc)$
4) antisimetría: $\forall a,b \in X \ (aRb, bRa \Rightarrow a = b)$
5) totalidad: $\forall a,b \in X \ (aRb \text{ ó } bRa)$
6) irreflexividad: $\forall a \in X \ (\sim (aRa))$
7) asimetría: $\forall a,b \in X \ (aRb \ \Rightarrow \sim (bRa))$

Definición. Orden Parcial:

Sea X un conjunto no vacío. Un orden parcial es una relación $\prec$ subconjunto de $X \times X$ tal que para cualesquiera $x, y, z \in X$ se cumple:

1)	$x \prec x$	*(reflexividad)*
2)	$x \prec y,\ y \prec x\ \Rightarrow x = y$	*(antisimetría)*
3)	$x \prec y,\ y \prec z\ \Rightarrow x \prec z$	*(transitividad)*

El orden parcial se llama **total** si además se cumple:

4) $x, y \in X \Rightarrow x \prec y$ *ó* $y \prec x$ *(tricotomía)*

Definición.
Sea $(X, \prec)$ un conjunto con un orden parcial, tenemos:

1) Dos conjuntos parcialmente ordenados X y Y se llaman **isomorfos** si existe una biyección $f : X \to Y$ tal que $x_1 \leq x_2$ si, y solo si, $f(x_1) \leq f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in X$.

Nota: La definición de función biyectiva se encuentra en la sección 3.1 sobre Funciones.

2) Un subconjunto de $(X, \prec)$ que tiene orden total se llama **cadena**.
3) Sea $A \subset X$. Un elemento $x \in X$ se llama **cota superior** de A si $a \prec x,\ a \in A$.
4) Una cota superior y de A se llama el **supremo** de A si $y \prec x$ para toda cota superior x de A. Se denota por $\sup A$.
5) Un elemento $a \in X$ se llama **cota inferior** de A si $\alpha \prec a$, $a \in A$.
6) Una cota inferior β de A se llama el **ínfimo** de A si $\alpha \prec \beta$ para toda cota inferior α de A. Se denota por $\inf A$.

Ejemplo: Sea E un conjunto. Muestre que el conjunto $\mathcal{P}(E)$ es un conjunto parcialmente ordenado con la inclusión: $A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \subset B$.

Solución:

1)	$A \subset A$	*(reflexiva)*
2)	$A \subset B$ y $B \subset A \Rightarrow A = B$	*(antisimétrica)*
3)	$A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$	*(transitiva)*

Ejemplo: Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Entonces $aRb \Leftrightarrow a \mid b$ es un orden parcial en $\mathbb{N}$.

Solución:

1) $aRa \Leftrightarrow a \mid a$

2) $a \mid b$ y $b \mid a \Rightarrow a = b$

3) $a \mid b, b \mid c \Rightarrow a \mid c$

Definición. Relación de Equivalencia:
Sea X un conjunto no vacío. Una relación R en X se llama relación de equivalencia si:

a)	$aRa, a \in A$	*(reflexividad)*
b)	$aRb \Rightarrow bRa$	*(simetría)*
c)	$aRb, bRc \Rightarrow aRc$	*(transitividad)*

Ejemplo: En $\mathbb{Z}-\{0\}$ se define $(a,b)\,R\,(c,d) \Leftrightarrow ad = bc$. Entonces R es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

a) $(a,b)\,R\,(a,b) \Leftrightarrow ab = ba$

b) $(a,b)\,R\,(c,d) \Leftrightarrow ad = bc \Rightarrow (c,d)\,R\,(a,b)$

c) $ad = bc, cf = de \Rightarrow adf = bcf; bcf = bdc \Rightarrow af = be$

Definición. Función:

Dados dos conjuntos A y B, llamados dominio y contradominio respectivamente, una función f de A en B es una relgla de correspondencia que asigna a cada elemento de A un y sólo un elemento de B. Se escribe $f : A \to B$ donde el único elemento de B que f le asocia a A se denota por $f\,(a)$. Dos funciones son iguales si cuentan con el mismo dominio, codominio y regla de correspondencia.

3.1. Funciones

Definición.

Una función $f : A \to B$ se llama **inyectiva** cuando se cumple: $f\,(a) = f\,(b) \Rightarrow a = b$. f se llama **suprayectiva** cuando para cada $b \in B$ existe $a \in A$ con $f\,(a) = f\,(b)$. f se llama **biyectiva** si f es inyectiva y suprayectiva.

Sea $f : A \to B$ una función biyectiva. Entonces la función $\varphi : B \to A$ definida por $\varphi\,(b) = a$ se llama la **función inversa** de f y se denota f^{-1} (a es el único elemento de A tal que $f\,(a) = b)$. La función f^{-1} es también biyectiva.

Sea A un conjunto. La función $f : A \to A$ definida por $f\,(a) = a,\ a \in A$, se llama la **función identidad** en A y se denota I_A.

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones. Se define la función $h : A \to C$ haciendo:

Para $a \in A, h\,(a) = g\,(f\,(b))$. La función h se llama la **composición** de f con g y se denota $g \circ f$.

Ejemplo: Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{\mathtt{NA}, \mathtt{S}, \mathtt{B}, \mathtt{MB}\}$, $C = \{\mathtt{n}, \mathtt{T}\}$ .Sean f y g las funciones siguientes:

$$f\,(A) = \begin{cases} a_1 & \mapsto & \mathtt{NA} \\ a_2 & \mapsto & \mathtt{S} \\ a_3 & \mapsto & \mathtt{NA} \end{cases} \qquad g\,(B) = \begin{cases} \mathtt{NA} & \mapsto & \mathtt{n} \\ \mathtt{S} & \mapsto & \mathtt{T} \\ \mathtt{B} & \mapsto & \mathtt{T} \\ \mathtt{MB} & \mapsto & \mathtt{T} \end{cases}$$

Constrúyase la función $g \circ f$.

Solución: A es el dominio de la función $g \circ f$. En la tabla siguiente vemos el orden de asignación que da la función $g \circ f$ a cada valor de este dominio.

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ a_1 & \mapsto & \mathtt{NA} & \mapsto & \mathtt{n} \\ a_2 & \mapsto & \mathtt{S} & \mapsto & \mathtt{T} \\ a_3 & \mapsto & \mathtt{NA} & \mapsto & \mathtt{n} \end{array}$$

Ejemplo: Sean $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ las funciones $f(x) = 2x - 3,\ g(x) = x^2$. Constrúyanse las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$.

Solución:

$$\begin{array}{lll} \mathbb{R} \xrightarrow{g \circ f} \mathbb{R},\ (g \circ f)(x) & = g(f(x)) & = g(2x-3) = (2x-3)^2 \\ \mathbb{R} \xrightarrow{f \circ g} \mathbb{R},\ (f \circ g)(x) & = f(g(x)) & = f\left(x^2\right) = 2x^2 - 3 \end{array}$$

Ejemplo: Muéstrese que la composición de funciones inyectivas es inyectiva.

Solución: Sean $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ funciones inyectivas. Sean $a, b \in A$. Supóngase $g(f(a)) = g(f(b))$. Entonces la inyectividad de g nos da $f(a) = f(b)$ y la inyectividad de f nos da $a = b$.

Ejemplo: Sea $f : A \to B$ una función biyectiva. Entonces $f^{-1} \circ f = I_A$ y $f \circ f^{-1} = I_B$.

Solución: $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x = I_A(x)$; $f \circ f^{-1}(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x = I_B(x)$.

Definición. Función Invertible:
Una función $f : A \to B$ se llama invertible si existe $g : A \to B$ tal que $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$.

Ejemplo: Muestre que si $f : A \to B$ es invertible entonces f es biyectiva.

Solución: f es inyectiva: Sean $a, b \in A$ tales que $f(a) = f(b)$. Entonces $g(f(a)) = g(f(b))$ y así como $g \circ f = I_A$, se tendrá $a = b$. f es suprayectiva: Sea $b \in B$. Consideremos $g(b) \in A$. Como $f(g(b)) = f \circ g(b) = I_B(b) = b$, se tiene la suprayectividad. $\therefore f$ es biyectiva.

Ejemplo: Muestre que si f es biyectiva entonces $f : A \to B$ es invertible.

Solución: Sea $b \in B$. Consideremos $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Definimos $g : B \to A$ por $g(h) = a$. Entonces $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a$, es decir $g \circ f = I_A$. Luego Sea $b \in B$ $g(b) = a$ y $f(g(b)) = f(a) = b = I_B(b)$ i.e. $f \circ g = I_B$.

Ejemplo: Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ funciones tales que $g \circ f = I_A$. Pruébese entonces que:

1) f es inyectiva

2) g es suprayectiva

Solución:

1) Sean $x, y \in A$ con $f(x) = f(y)$. Entonces como $g(f(x)) = g(f(y))$ y $g \circ f = I_A$, se tendrá $x = y$.

2) Sea $y \in A$. Considérese $x = f(y) \in B$. Entonces $g(x) = g(f(y)) = (g \circ f)(y) = I_A(y) = y$ y así g es suprayectiva.

Teorema (Axioma de Selección)
Sea $f : X \to Y$ una función. Entonces f es inyectiva si, y sólo si, existe $g : Y \to X$ función tal que $g \circ f = I_X$.

Demostración
Supongamos que existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = I_X$. Sean $x, y \in X$ con $f(x) = f(y)$. Entonces $g(f(x)) = g(f(y)) = I_X(x) = I_Y(y) = x = y$. $\therefore f$ es inyectiva.
Supongamos ahora que, $f : X \to Y$ sea inyectiva. Sea $y \in Y$. Entonces $y \in f(X)$ ó $y \notin f(X)$. Sea $g : Y \to X$ tal que $g(y) = \{ {}^{x,\ \text{donde } f(x)=y}_{x_0,\ y \notin f(X)}$ donde $x_0 \in X \neq \varnothing$. Ahora: $g(f(x)) = x,\ x \in X$. QED

Teorema
Sea $f : X \to Y$ una función. Entonces f es suprayectiva si, y solo si, existe una función $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = I_Y$.
Demostración
Supongamos que existe una función $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = I_Y$. Sea $y \in Y$. Consideremos $g(y) \in X$. Como $f(g(y)) = I_Y(y) = y$, se tendrá que f es suprayectiva.
Supongamos que $f : X \to Y$ sea una función suprayectiva. Definamos $g : Y \to X$ para $y \in Y$, como $f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$, dejemos $x \in f^{-1}(\{y\})$ (Axioma de selección) y definamos $g(y) = x$. Claramente $f \circ g = I_Y$. QED

Teorema
Sea $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ dos funciones entre los conjuntos A, B y C. Demostrar:
a) $g \circ f$ es inyectiva $\Rightarrow f$ es inyectiva
b) $g \circ f$ es suprayectiva $\Rightarrow g$ es suprayectiva
Demostración
a) Sean $x, y \in A$ con $f(x) = f(y)$. Entonces $g(f(x)) = g(f(y))$. Es decir $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Por ser $g \circ f$ inyectiva se tiene que $z = y$. Así f es inyectiva.
b) Sea $y \in C$. Existe $x \in A$ tal que $g \circ f(x) = y$. Es decir $g(f(x)) = y$, lo que significa que g es suprayectiva. QED

3.2. Cardinalidad

Definición.conjuntos equivalentes Dos conjuntos A y B se llaman equivalentes (Notación: $A \sim B$) si existe una función biyectiva f entre A y B.

Teorema
Sean A, B y C conjuntos. Entonces se cumple:

1)	$A \sim A$	*(reflexividad)*
2)	$A \sim B \Rightarrow B \sim A$	*(simetría)*
3)	$A \sim B$, $B \sim C \Rightarrow A \sim C$	*(transitividad)*

Demostración
1) Sea $f = I_A$ entonces $f : A \to A$ es inyectiva ya que si $a, b \in A$ entonces $I_A(a) = I_A(b) \Rightarrow a = b$. También es suprayectiva: $\forall\ b \in A\ \ \exists\ a \in A\ \ \ni f(a) = b$, a saber $a = b$ pues $I_A(b) = b$. Por lo tanto f es biyectiva.
2) Por hipótesis tenemos que $\exists\ f : A \to B$ biyectiva. Sea $g(x) = f^{-1}(x)$ tal que $g : B \to A$ entonces g es inyectiva ya que si $a, b \in B$ entonces $f^{-1}(a) = f^{-1}(b) \Rightarrow (f \circ f^{-1)}(a) = (f \circ f^{-1})(b) \Rightarrow a = b$. Además g es suprayectiva: $\forall\ c \in A\ \exists\ b \in B\ \ \ni f^{-1}(b) = c$ a saber $b = f(c)$ pues $f^{-1}(f(c)) = c$. Por lo tanto g es biyectiva.
3) Por hipótesis tenemos que $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones biyectivas. Luego $h = g \circ f$, $h : A \to C$ es inyectiva ya que si $a, b \in A$ entonces $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b) \Rightarrow g(f(a)) = g(f(b)) \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$. Luego sea $c \in C\ \ \exists\ b \in B\ \ni g(b) = c$ y además $\exists\ a \in A\ \ni f(a) = b$. Así $g \circ f$ es también suprayectiva y por lo tanto biyectiva. QED

Definición.
Sean A y B conjuntos se dirá que $A \precsim B$ cuando existe $f : A \to B$ inyectiva. En este caso también se dice que $|A| \leq |B|$.

Teorema
Sean A, B y C conjuntos. Entonces se cumple:
1) $A \precsim A$
2) $A \precsim B, B \precsim C \Rightarrow A \precsim C$
3) $A \precsim B$ y $B \precsim A \Rightarrow A \precsim B$

Demostración
1) Sea $f : A \to A$ tal que $f = I_A$. Entonces f es inyectiva ya que sea $a, b \in A, I_A(a) = I_A(b) \Rightarrow a = b$.
2) Por hipótesis existen funciones inyectivas f y g tal que $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Sea $h = g \circ f$ entonces h es inyectiva ya que sean $a, b \in A$, $h(a) = h(b) \Rightarrow (g \circ f)(a) = (g \circ f)(b) \Rightarrow g(f(a)) = g(f(b)) \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$,3)
3) Esta afirmación es el Teorema de Shröder-Bernstein. No se incluye su demostración.

QED

Definición.

Un subconjunto de $\mathbb{N}$ de la forma $\{1, 2, ..., n\}$ se llama un **segmento de** $\mathbb{N}$ y se dice que n es el número de elementos del segmento.

Un conjunto equivalente a un segmento de $\mathbb{N}$ se llama **conjunto finito.** Un conjunto que no es finito se llama **infinito**.

Un conjunto A equivalente a $\mathbb{N}$ se llama numerable.

Teorema

Todo conjunto infinito contiene un subconjunto numerable.

Demostración

Sea A un conjunto infinito tal que $A \neq \varnothing$. Tomemos $a_1 \in A$ y consideremos $A - \{a_1\} = A_1,\ A_1 \neq \varnothing$ ya que de lo contrario A sería finito. Ahora tomamos $a_2 \in A - \{a_1\} = A_2$. Así sucesivamente, se obtiene un conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ numerable y contenido en A.

Teorema

La unión numerable de conjuntos numerables es numerable. (solo si los conjuntos son ajenos)

Demostración

Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos numerables:

$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, ...\}$

$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, ...\}$

$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, ...\}$

Entonces $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, ...\}$ es numerable. QED

Ejemplo: Para $A = \{1, 2\}$, construir una función $\phi : A \to \mathcal{P}(A)$.

Solución: $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1, 2\}, \{1\}, \{2\}\}$.

Una posible función ϕ podría ser: $\phi : \substack{1 \to \{1,2\} \\ 2 \to \varnothing}$

Otra posible función podría ser: $\Psi : \substack{1 \to \phi \\ 2 \to \{1\}}$

Observamos: $\phi(1) = \{1, 2\},\ \phi(2) = \varnothing,\ 1 \in \phi(1),\ 2 \notin \phi(2)$. y $\Psi(1) = \varnothing,\ \Psi(2) = \{1\},\ 1 \notin \Psi(1),\ 2 \notin \Psi(2)$. Además $B_1 = \{a \in A : a \notin \phi(a)\} = \{2\},\ B_2 = \{a \in A : a \notin \Psi(a)\} = \{1, 2\}$ y las funciones ϕ y Ψ son inyectivas.

Teorema

Sea A un conjunto. Entonces existe una función inyectiva de A en $\mathcal{P}(A)$ que no es suprayectiva. En símbolos: $A \lesssim \mathcal{P}(A),\ A \ncong \mathcal{P}(A)$.

Demostración

Si $A = \varnothing$, el resultado es claro. Si $A \neq \varnothing$, entonces sea $f : A \to \mathcal{P}(A)$ definida por $f(x) = \{x\}$. Esta función es inyectiva y no es suprayectiva porque $\forall x \in A,\ f(x) \neq \varnothing$. QED

Teorema (Cantor)

Sea A un conjunto. Entonces ninguna función de A en $\mathcal{P}(A)$ es suprayectiva.

Demostración

Sea $\phi : A \to \mathcal{P}(A)$ una función. Sea $B = \{a \in A \mid a \notin \phi(a)\}$. Mostraremos que $B \neq \phi(a)\ \ \forall a \in A$. Si $B = \phi(a_0)$ para algún $a_0 \in A$ entonces como $a_0 \in B$ ó $a_0 \notin B$ se tendría:

$a_0 \in B = \phi(a_0) \Rightarrow a_0 \notin \phi(a_0) = B \Rightarrow a_0 \notin B$ (contradicción)

$a_0 \notin B = \phi(a_0) \Rightarrow a_0 \notin \phi(a_0) \Rightarrow a_0 \in B$ (contradicción) QED

A continuación mostramos una breve notación sobre cardinalidad.

a) $card(A) = |A|$

b) $A,\ \ \mathcal{P}(A) = \{0,1\}^{|A|} = 2^{|A|}$

c) $\mathbb{N},\ \ card(\mathbb{N}) = \aleph_0\ ; \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0} = \tau$

d) $\mathbb{R},\ \ card(\mathbb{R}) = \tau\ ; \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\tau} = 2^{2^{\aleph_0}}$

e) $A \approx B \Leftrightarrow card(A) = card(B) \Leftrightarrow |A| = |B|$

f) $card(A) = |A|,\ \ \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| = |\{0,1\}|^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0} = \tau$

g) $1 < 2 < 3 < \cdots < \aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \cdots$

Ejercicios: probar que

1) $A \vartriangle B \subset (A \vartriangle C) \cup (B \vartriangle C)$

2) $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in A} f^{-1}(E_\alpha)$

3) $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(E_\alpha)$

4) $f^{-1}(E - F) = f^{-1}(E) - f^{-1}(F)$

5) $f\left(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} f(E_\alpha)$

Solución:

1) Se deja al lector.

2) $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha = \{x \mid x \in E_\alpha \forall \alpha \in A\};\quad f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha\right) = \left\{f^{-1}(x) \mid x \in E_\alpha \forall \alpha \in A\right\} = \bigcap_{\alpha \in A} f^{-1}(E_\alpha)$

3) $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha = \{x \mid x \in E_\alpha\ p.a.\ \alpha \in A\};\ f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha\right) = \left\{f^{-1}(x) \mid x \in E_\alpha\ p.a.\ \alpha \in A\right\} = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(E_\alpha)$

4) $E - F = \{x \mid x \in E \wedge x \notin F\} = \{x \mid x \in E \cap F^c\};\ f^{-1}(E - F) = f^{-1}(x)$

5) $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha = \{x \mid x \in E_\alpha\ p.a.\ \alpha \in A\};\ f\left(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha\right) = \{f(x) \mid x \in E_\alpha\ p.a.\ \alpha \in A\} = \bigcup_{\alpha \in A} f(E_\alpha)$

Ejemplo: Sea $f : E \to F$. Demostrar que $f\left(f^{-1}(B)\right) = B,\ \forall B \subset F \Leftrightarrow f$ es suprayectiva. También que $f^{-1}(f(A)) = A,\ \forall A \subset E \Leftrightarrow f$ es inyectiva.

Solución: Sea $b \in B$, entonces $b \in F$. Como f es sobre (suprayectiva), $\exists x \in E \mid f(x) = b \Rightarrow x = f^{-1}(b) \Rightarrow b = f(x) = f\left(f^{-1}(b)\right) \Rightarrow b \in f\left(f^{-1}(B)\right)$. Luego, sea $y \in f\left(f^{-1}(B)\right),\ y = f\left(f^{-1}(b)\right),\quad b \in B$ como f es sobre, $\exists x \in E \mid f(x) = y = f\left(f^{-1}(b)\right) \Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(b) \Rightarrow f(y) = f(b) \Rightarrow y = b$, entonces $y \in B$.

Ejemplo: Sea $f : E \to F$. Demostrar que $f^{-1}(f(A)) = A,\ \forall A \subset E \Leftrightarrow f$ es inyectiva.

Solución: Se deja al lector.

Ejemplo: Sea $f : A \to B,\ E, F \subset A$ Demostrar que $i)\ f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$ y que $ii)\ f(E \cap F) \subset f(E) \cap f(F)$

Solución: $i)\quad f(E \cup F) = \{f(x) \in B \mid x \in E \cup F\} = \{f(x) \in B \mid x \in E \text{ ó } x \in F\}$

$= \{f(x) \in B \mid x \in E\} \cup \{f(x) \in B \mid x \in F\} = f(E) \cup f(F)$

$ii)$ sea $y \in f(E \cap F) = \{f(x) \in B \mid x \in E \cap F\} = \{f(x) \in B \mid x \in E \text{ y } x \in F\} \Rightarrow y \in f(E) \cap f(F)$

Ejemplo: Dada una función $f : A \to B$ demostrar que

a) $f(X - Y) \supset f(X) - f(Y);\ X, Y \subset A$

b) f inyectiva $\Rightarrow f(X - Y) = f(X) - f(Y);\ X, Y \subset A$

Solución:

a) Sea $b \in f(X) - f(Y) \Rightarrow b \in \{f(x) \in B \mid x \in X\} \wedge b \notin \{f(x) \in B \mid x \in Y\}$

$\Rightarrow b \in \{f(x) \in B \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$

$\Rightarrow b \in \{f(x) \in B \mid x \in X - Y\} \Rightarrow b \in f(X - Y)$

b) Sabemos que si $f : A \to B$ entonces $f(X - Y) \supset f(X) - f(Y)$. Sea $b \in f(X - Y) \Rightarrow b \in \{f(a) \in B \mid a \in X - Y\} \Rightarrow b \in \{f(a) \in B \mid a \in X \wedge a \notin Y\}$. Como f es inyectiva, entonces $b \in f(X) - f(Y)$.

Sucesiones de Conjuntos

Dada una sucesión de conjuntos $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ describamos el conjunto $\underline{A}$ cuyos elementos pertencen a “casi todos” los conjuntos de la sucesión, es decir, a todos los conjuntos con la excepción posible de un número finito de ellos. Identifiquemos, también, al conjunto $\overline{A}$ cuyos elementos pertenecen a una infinidad de conjuntos de la sucesión.

Definición.

$\underline{A}$ se llama el **límite inferior de** (A_n) y también se denota $\underline{A} = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \inf A_n$.

$\overline{A}$ se llama el **límite superior de** (A_n) y también se denota $\overline{A} = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sup A_n$.

Claramente $\underline{A} \subset \overline{A}$. Si $\underline{A} = \overline{A}$ se usa también la notación $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$ y en este caso A se llama el **conjunto límite** de la sucesión.

Teorema
$\underline{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right)$ y $\overline{A} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right)$
Demostración
$x \in \underline{A} \Longleftrightarrow x \in A_n$ para "casi todo" $n \Leftrightarrow \exists\, n$ tal que $x \in A_k$ para $k \geq n \Leftrightarrow x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right)$.
$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow x \in A_n$ para una infinidad de n's $\Leftrightarrow \forall\, n,\ x \in A_k$ para alguna $k \geq n \Leftrightarrow x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right)$. *QED*

Sea (A_n) $n \in \mathbb{N}$ una sucesión de conjuntos. Podemos construir, a partir de esta sucesión otra sucesión $(\underline{A}_n)$ $n \in \mathbb{N}$ creciente de conjuntos de la siguiente manera:
$\underline{A}_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k, \quad n \in \mathbb{N}$
Tenemos entonces $\underline{A}_1 \subset \underline{A}_2 \subset \underline{A}_3 \subset \ldots$ y además $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \underline{A}_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \underline{A} = \text{lím inf}\, A_n$.
También podemos construir otra sucesión decreciente de conjuntos de la siguiente manera:
$\overline{A}_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k, \quad n \in \mathbb{N}$
Tenemos entonces $\overline{A}_1 \supset \overline{A}_2 \supset \overline{A}_3 \supset \ldots$ También $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \overline{A} = \text{lím sup}\, A_n$.

Ejemplo: Determinar $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$ y $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$ para la sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ donde $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$

Solución: Como $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right)$, se tiene en este caso $\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, por lo que $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

Como $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right)$, se tiene en este caso $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$ por lo que $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Ejemplo: Demuéstrese que $(\text{lím sup}\, A_n)^c = \text{lím inf}\, A_n^c$

Solución: como $\text{lím sup}\, A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right)$ se tiene que $(\text{lím sup}\, A_n)^c = \left[\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right)\right]^c = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = \text{lím inf}\, A_n^c$

Ejemplo: Dé una sucesión de conjuntos $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ donde $\underline{A} \neq \overline{A}$.

Solución: Sea $B \neq \varnothing$. Considérese la sucesión $B, \varnothing, B, \varnothing, \ldots$ Entonces $\underline{A} = \varnothing$ y $\overline{A} = B$.

Teorema

Dada una sucesión de conjuntos $(A_k)^{\infty}$, se puede expresar $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ como $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ con los conjuntos B_k ajenos dos a dos y con $B_k \subset A_k$ $(1 \leq k < \infty)$.

Demostración

Sea $B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 - A_1,\ B_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2), \ldots, B_k = A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$. Entonces claramente $B_k \subset A_k$, por lo que $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Sea ahora $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Entonces $x \in A_k$ para alguna k. Sea n_0 el mínimo entero natural con $x \in A_{n_0}$. Entonces $x \in A_{n_0} - \bigcup_{i=1}^{n_0-1} A_i = B_{n_0} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. $\quad x \in B_n \cap B_m$ $(n < m) \Rightarrow x \in A_n,\ x \notin A_1, \ldots, A_{n-1}, \quad x \in A_m,\ x \notin A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n, \ldots, A_{m-1}$ contradicción $(x \in A_n,\ x \notin A_n)$. *QED*

Ejemplo: Obtener $\underline{A}$ y $\overline{A}$ para la sucesión de conjuntos en $\mathbb{R}$ definida por $A_1 = [0,1],\ A_3 = \left[0, \frac{1}{3}\right],\ A_5 = \left[0, \frac{1}{5}\right], \ldots$ y $A_2 = [0,2],\ A_4 = [0,4],\ A_6 = [0,6], \ldots$

Solución:

$$\begin{aligned}
\underline{A} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_n \ p.a.\ n \in \mathbb{N}\} = \{0\} \\
\overline{A} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_n \text{ para una infinidad de } n \in \mathbb{N}\} = [0, \infty)
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Números

4.1. $\mathbb{R}$ y su estructura algebráica de Campo

Se dice que los números reales son un campo ya que con respecto a las operaciones de $+$ y $\cdot$ se satisfacen para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ los axiomas siguientes:

Axiomas para la suma

(i)	Para toda x,$y \in \mathbb{R}$, $x + y = y + x$	*(conmutatividad)*
(ii)	Para toda $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x + (y + z) = (x + y) + z$	*(asociatividad)*
(iii)	Existe un número 0 talque para toda $x \in \mathbb{R}$, $x + 0 = x$	*(existencia del* 0*)*
(iv)	Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un número $w \in \mathbb{R}$ denotado $-x$ tal que $x + w = 0$	*(existencia del inverso aditivo)*

Axiomas para el producto

(i)	Para toda $x, y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y = y \cdot x$	*(conmutatividad)*
(ii)	Para toda $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	*(asociatividad)*
(iii)	Existe un número $1 \neq 0$ tal que $1 \cdot x = x$	*(existencia del* 1*)*
(iv)	Para cada $x \neq 0$ existe un número $v \in \mathbb{R}$ denotado $v = x^{-1}$ tal que $x \cdot v = 1$	*(existencia del recíproco)* *Notación:* $v = x^{-1},\ yx^{-1} = \frac{y}{x}$
(v)	Para toda $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \cdot (y + z) = xy + xz$	*(distributividad)*

Además de los anteriores, los axiomas siguientes son válidos en $\mathbb{R}$. Con ésto decimos que $\mathbb{R}$ es un campo ordenado.

Existe un orden o relación $\leq$ tal que:

(i)	Para cualesquiera x, y, z, $x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$	*(transitividad)*
(ii)	Para cualesquiera x, y, z, $(x \leq y,\ y \leq x) \Leftrightarrow y = x$	*(reflexividad)*
(iii)	Para cualesquiera x, y o bien $x \leq y$ ó $y \leq x$	*(tricotomía)*
(iv)	Para cualesquiera x, y, z, $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$	*(sumar un mismo número a la desigualdad)*
(v)	$0 \leq x,\ 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$	*(producto de dos números positivos)*

La afirmación siguiente, se deja demostrar al lector: Sean L y U subconjuntos no-vacíos de $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R} = L \cup U$ y tales que para cada $l \in L$ y cada $u \in U$, se tiene $l < u$. Entonces o bien L tiene un elemento máximo o bien U tiene un elemento mínimo.

El principio de continuidad

Definición. Sea $S \subset \mathbb{R}$

Un número b es una **cota superior** de S si para todo $x \in S$ se cumple $x \leq b$.

Un número b es **supremo** de S (se denota $\sup S$) si $(i)\, \forall x \in S\ x \leq b$ y (ii) Si existe $u \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq u\ \forall x \in S$, entonces $b \leq u$. Se denota $\sup(S)$ o $\sup S$.

Un número c es una **cota inferior** de S si para todo $x \in S$ se cumple $c \leq x$.

Un número c es **ínfimo** de S (se denota $\inf S$) si $(i)\, \forall x \in S\ c \leq x$ y (ii) Si existe $v \in \mathbb{R}$ tal que $v \leq x\ \forall x \in S$, entonces $v \leq c$. Se denota $\inf(S)$ o $\inf S$.

Si $S \subset \mathbb{R}$ no está acotado superiormente o es vacío, decimos que no tiene supremo.Análogamente, si $S \subset \mathbb{R}$ no está acotado inferiormente o es vacío, decimos que no tiene infimo.

Ejemplos: Para los siguientes conjuntos Determinar el $\sup(A)$ e $\inf(A)$.

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9 > 0\right\}$

b) $A = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

c) $A = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Soluciones:

a) $x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 9 \Leftrightarrow |x| > 3 \Leftrightarrow x > 3$ ó $x < -3$. Por lo tanto no tiene ínf ni sup.

b)

$$\begin{aligned} A &= \left\{1 - \tfrac{(-1)}{1}, 1 - \tfrac{1}{2}, 1 - \tfrac{(-1)}{3}, 1 - \tfrac{1}{4}, ...\right\} \\ &= \left\{1 + \tfrac{1}{1}, 1 - \tfrac{1}{2}, 1 + \tfrac{1}{3}, 1 - \tfrac{1}{4}, 1 + \tfrac{1}{5}, 1 - \tfrac{1}{6}, 1 + \tfrac{1}{7}, ...\right\} \\ &= \left\{2, \tfrac{1}{2}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{6}{5}, \tfrac{5}{6}, \tfrac{8}{7}, \tfrac{7}{8}, ...\right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\inf A = 1$, $\sup A = 2$.

c) $\inf A = 0$, no tiene sup

Ejemplo: Sea b una cota superior de A.Pruébese que $b = \sup(A)$ si, y solo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a > b - \varepsilon$.

Solución: Sea $b = \sup A$ y $\varepsilon > 0$. Supongamos que $\forall\ a \in A\ b \geq a + \varepsilon \Leftrightarrow b - \varepsilon \geq a$. Por lo tanto $b - \varepsilon$ sería una cota superior menor que b!. Recíprocamente, supongamos que b

satisface la condición dada. Sea d una cota superior de A y supongamos que $b > d$. Sea $\varepsilon = b - d \Rightarrow d = b - \varepsilon$, luego $d = b - \varepsilon \geq a \ \forall a \in A \Rightarrow b > a + \varepsilon$!

Ejemplo: Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $A \subset B$ y tales que ambos sean acotados superiromente. Pruébese que $\sup A \leq \sup B$.

Solución: Sea $a \in A \Rightarrow a \in B$ por hipótesis. Luego, $a \leq \sup B$ por definición de supremo. Asímismo $a \leq \sup A \leq \sup B$.

Ejemplo: Sea $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Determinar $\sup A$ e $\inf A$.

Solución: $\sup A$ no existe. $\inf A = 2$ y $2 \in A$.

Ejemplo: Suponga que se tienen A y B subconjuntos no-vacíos de $\mathbb{R}$. Ambos acotados superiormente y tales que $A \subset B$. Demuestre que, entonces, $\sup A \leq \sup B$.

Solución: Sea $\alpha = \sup A$ y $\beta = \sup B$. Como β es cota superior de B y $A \subset B$, β es también cota superior de A. Como α es el supremo de A, $\alpha \leq \beta$.

Ejemplo: Sean A y B subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$. Muestre que $A \cup B$ es acotado y que $\sup (A \cup B) = \max \{\sup A, \sup B\}$.

Solución:

a) $A \cup B$ es acotado: Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq c$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Sea $d \in \mathbb{R}$ tal que $b \leq d$, para todo $b \in B$. Consideremos $e = \max \{c, d\}$. Si $x \in A \cup B$, entonces $x \in A$ ó $x \in B$. Si $x \in A$, $x \leq c \leq e$. Si $x \in B$, $x \leq d \leq e$. Así e es cota superior de $A \cup B$.

b) Sea $\alpha = \sup (A \cup B)$, $\beta = \max \{\sup A, \sup B\}$, $\gamma = \sup A$ y $\delta = \sup B$. Tenemos que $\alpha \geq x$, $\forall x \in A \cup B$. Entonces $\alpha \geq x \ \forall x \in A$ y por lo tanto $\alpha \geq \sup A$. También $\alpha \geq y$ para todo $y \in B$ y así $\alpha \geq \sup B$. Por lo tanto $\alpha \geq \beta$.

Por otra parte $\beta \geq \sup A$ y $\beta \geq \sup B$. Por lo tanto $\beta \geq a \ \forall a \in A$ y $\beta \geq b \ \forall b \in B$. Es decir $\beta \geq x \ \forall x \in A \cup B$ y por lo tanto $\beta \geq \sup (A \cup B) = \alpha$. Entonces $\alpha = \beta$.

Ejemplo: Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente. Definiendo $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, pruébese que $\sup (A + B) = \sup A + \sup B$.

Solución: Se deja al lector.

Ejemplo: Demuestre que existe un único real positivo x tal que $x^2 = 2$

Solución: Sea $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \text{ y } x^2 < 2\}$ Entonces $S \neq \varnothing$ ya que $0, 1 \in S$.

S está acotado superiormente, por ejemplo, por 2, pues $s \leq 2$ $\forall s \in S$ ya que si $2 < s_0$ para algún $s_0 \in S \Rightarrow 4 < s_0^2 \Rightarrow s_0 \notin S$.

Sea $b = \sup S$, veamos que $b^2 = 2$ descartando los casos siguientes:

a) $b^2 < 2$

Sea entonces $n_0 \in \mathbb{N} \mid \frac{2b+1}{2-b^2} < n_0$. Como $\left(b + \frac{1}{n_0}\right)^2 = b^2 + \frac{2b}{n_0} + \frac{1}{n_0^2} < b^2 + \frac{2b}{n_0} + \frac{1}{n_0} = b^2 + \frac{2b+1}{n_0} \overset{hip}{<} b^2 + \left(2 - b^2\right) = 2$, se tendría $b + \frac{1}{n_0} \in S$, lo que es una contradicción ya que $b < b + \frac{1}{n_0}$ y $b = \sup S$.

b) $b^2 > 2$

Tómese $n_1 \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{n_1} < \frac{b^2-2}{2b}$. Entonces $\left(b - \frac{1}{n_1}\right)^2 = b^2 - \frac{2b}{n_1} + \frac{1}{n_1^2} > b^2 - \frac{2b}{n_1} \overset{hip}{>} b^2 + 2 - b^2 = 2$. Esto implica $s \leq b - \frac{1}{n}$ $\forall s \in S$, i.e., $s \in S \Rightarrow s^2 < 2 < \left(b - \frac{1}{n_1}\right)^2 \Rightarrow s < b - \frac{1}{n_1}$. Así que $b - \frac{1}{n}$ es cota superior de S, lo cual contradice que b es la más chica de las cotas superiores.

Teorema
Sean $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe un único $x > 0$ tal que $x^n = a$. (Notación: $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$).
Demostración
a) Existencia: Sea $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ y } x^n < a\}$. Como $t_0 = \frac{a}{a+1}$ cumple con $0 < t_0 < 1$ y consecuentemente con $t_0^n < t_0 < a$, tenemos que $t_0 \in S$ y así $S \neq \varnothing$.

S está acotado superiormente por $a + 1$ ya que de lo contrario si $t > a + 1$ para algún $t \in S$ se tendría $t^n \geq t > a$ y así $t \notin S$.

Sea $x = \sup S$. Demostremos que $x^n = a$, descartando $x^n < a$ y $x^n > a$. Supongamos $x^n < a$. Sea h con $0 < h < 1$ y $h < \frac{a-x^n}{(1+x)^n - x^n}$. Entonces $(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k \leq x^n + h\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + ... + \binom{n}{n}\right] = x^n + h\left[(1+x)^n - x^n\right] < x^n + (a - x^n) = a$.

Así $x + h \in S$ con $x + h > x$, contradiciendo la definición de x. Supongamos $x^n > a$. Sea k con $0 < k < 1$ y $k < \frac{x^n - a}{(1+x)^n - x^n}$. Veamos que esto conduce a que $x - k < x$ es cota superior de S lo cual contradice que x es la más chica de las cotas superiores.

Sea $t \geq x - k$. Entonces $t^n \geq (x-k)^n = x^n - \binom{n}{1}x^{n-1}k + \binom{n}{2}x^{n-2}k^2 - \ldots (-1)^n \binom{n}{n}k^n = x^n - k\left[(1+x)^n - x^n\right] > x^n - (x^n - a) = a$. Así $t \notin S$. Entonces $t < x - k$, para toda $t \in S$, es decir $x - k$ es cota superior de S. Entonces, finalmente, $x^n = a$.

b) Unicidad: $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < x_1^n < x_2^n \Rightarrow a < a$. QED

Corolario $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$. Ya que $\left(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$, se tiene que $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.

Proposición (Principio Arquimediano)
Para $x_0 \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 < n$.
Demostración (A)

Sea $A = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq x_0\}$. Si $A = \varnothing$ entonces cualquier entero positivo demuestra el principio. Si $A \neq \varnothing$, entonces A siendo un conjunto acotado superiormente tiene supremo $a, \sup A = a$. Como $a - 1 < a$, podemos decir que existe $k \in A$ con $a - 1 < k$. Pero entonces $a < k + 1$ y así $k + 1 \notin A$ es decir $k + 1 > x_0$. Definimos $n = k + 1$. QED

Demostración (B)

Supongamos, por el contrrio, que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $n \leq x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea entonces u el supremo de $\mathbb{N}$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $u - 1 < n$ y así $u < n + 1$. Como $n + 1 \in \mathbb{N},\ u$ no sería cota superior de $\mathbb{N}$ lo cual es una contradicción. QED

Proposición

Sean $y > 0,\ z > 0$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z < ny$.

Demostración

Considerando $x = \frac{z}{y} > 0$, tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{z}{y} < n$. Entonces $z < ny$. QED

Proposición

Sea $y > 0$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < y$.

Demostración

Considerando $x = \frac{1}{y} > 0$, tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{y} < n$. Entonces $\frac{1}{n} < y$. QED

Proposición

Sean $y > 0$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 < y < n$.

Demostración

El subconjunto $A = \{m \in \mathbb{N} \mid y < m\}$ es no vacío por proposición anterior. Considérese a n el elemento mínimo de A. Entonces $y < n$ y como $n - 1$ no pertenece a A también se tendrá $n - 1 \leq y \leq n$. QED

Teorema

Sea $E \neq \varnothing,\ E \subset \mathbb{R}$. Entonces $s = \sup E \Leftrightarrow i)\ x \leq s,\ x \in E,\ ii)\ \forall \varepsilon > 0, \exists\ x \in E$ tal que $x > s - \varepsilon$.

Demostración

Sea $s = \sup E$ y $\varepsilon > 0$. Supongamos que $\forall\ x \in E\ s \geq x + \varepsilon \Leftrightarrow s - \varepsilon \geq x$. Por lo tanto $s - \varepsilon$ sería una cota superior menor que s!. Recíprocamente, supongamos que s satisface la condición dada. Sea d una cota superior de E y supongamos que $s > d$. Sea $\varepsilon = s - d \Rightarrow d = s - \varepsilon$, luego $d = s - \varepsilon \geq x$ $\forall x \in E \Rightarrow s > x + \varepsilon$! QED

Teorema

Todo conjunto no vacío F de reales acotado inferiormente tiene un ínfimo en $\mathbb{R}$.

Demostración

Sea F tal conjunto. Sea E el conjunto de las cotas inferiores de F. $E \neq \varnothing$ ya que por definición $\exists\ x \in \mathbb{R} \mid x \leq y\ \forall\ y \in F$. Entonces $x \in E \neq \varnothing$. Consecuentemente, cada $y \in F$ es una cota superior para E. Sea $s = \sup E$. Se afirma que $s = \inf F$:

$i)$ s es cota inferior de F. De lo contrario, existe $y \in F \mid y < s$ y y no es cota superior de $E \Rightarrow \exists x \in E \mid y < x$!

$ii)$ $a \leq s\ \forall a$ cota inferior de F i.e. $x \leq s\ \forall x \in E$. QED

<u>Valor absoluto. Ecuaciones e inecuaciones.</u>

Definición.Valor Absoluto:

Sea x un número real. Se define el valor absoluto de x como el número $|x|$ determinado como sigue:

$$|x| = \begin{cases} x, & si \quad x > 0 \\ 0, & si \quad x = 0 \\ -x, & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Así por ejemplo $\left|-\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5}$, $|6| = 6$, $|0| = 0$. En la proposición siguiente se expresan algunas propiedades del valor absoluto cuya demostración es directa de la definición y se deja al lector.

Teorema (No se incluye su demostración)

(1) $|x| \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(2) $|x| = |-x|$ para $x \in \mathbb{R}$.
(3) $|xy| = |x|\,|y|$, para $x, y \in \mathbb{R}$.
(4) $|x| = \text{máx}\{x, -x\} = \sqrt{x^2}$
(5) $-|x| \leq x \leq |x|$, $x \in \mathbb{R}$.
(6) Para $y \geq 0$, $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$
(7) Para $y \geq 0$, $|x| > y \Leftrightarrow x > y$ ó $x < -y$
(8) Para $x \neq 0$, $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$.
(9) Para $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Teorema Se cumplen las siguientes relaciones (No se incluye su demostración):

a) $|x - y| \geq |x| - |y|$
b) $|x^n| = |x|^n$
c) $|x - y| = |y - x|$
d) $|x_1 x_2 \cdots x_n| = |x_1|\,|x_2| \cdots |x_n|$
e) $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots |x_n|$

Teorema (Desigualdad del Triángulo)

Para $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Demostración

caso 1)

Supongamos $x \geq 0$, $y \leq 0$, $x + y \geq 0$, entonces $|x + y| = x + y \leq x + y - y = x = |x| \leq |x| + |y|$.

caso 2)

Supongamos $x \geq 0$, $y \leq 0$, $x + y \leq 0$, entonces $|x + y| = -x - y \leq -x - y + x = -y = |y| \leq |x| + |y|$.

caso 3)

Supongamos $x, y \geq 0 \Rightarrow x + y \geq 0$, entonces es análogo al caso 1)

caso 4)

Supongamos $x \leq 0$, $y \leq 0 \Rightarrow x + y \leq 0$, entonces es análogo al caso 2) QED

Corolario

Para $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple $|x \pm y| \leq |x| + |y|$

Demostración

$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y| \quad QED$

Ejemplo: Verifíquese que $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

Solución: Como $|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$, tenemos $|x| - |y| \leq |x-y|$.

Como $|y| = |y-x+x| \leq |y-x| + |x|$, tenemos $|y| - |x| = -(|x|-|y|) \leq |y-x| = |x-y|$. Entonces $||x|-|y|| \leq |x-y|$

Definición.
Para $x \in \mathbb{R}, x^+ \doteq \text{máx}\{x, 0\}$, $x^- \doteq \text{máx}\{-x, 0\}$ (parte positiva, negativa)
Para $x, y \in \mathbb{R}$, $x \vee y \doteq \text{máx}\{x, y\}$, $x \wedge y \doteq \text{mín}\{x, y\}$ (mayor y menor)
Para $x \in \mathbb{R}$, $|x| \doteq \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ (valor absoluto de x)
Para $x \in \mathbb{R}$, $\llcorner x \lrcorner \doteq$ el mayor entero menor o igual a x. (piso de x)
Para $x \in \mathbb{R}$, $\ulcorner x \urcorner \doteq$ el menor entero mayor o igual a x. (techo de x)
Para $x, y, z \in \mathbb{R}$, moda$\{x, y, z\} = \wedge\{x \vee y,\ y \vee z,\ x \vee z\}$.
Para $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $\bigvee_{i=1}^{n} x_i \doteq \text{máx}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \doteq \text{mín}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Teorema (No se incluye su demostración)
a) $x^+ \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$
b) $x^- \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$
c) $x = x^+ - x^-,\ x \in \mathbb{R}$
d) $|x| = x^+ + x^-$
e) $|x| = \text{máx}\{x, -x\}$
f) $x \vee y = \frac{1}{2}(|x-y| + x + y)$
g) $x \wedge y = \frac{1}{2}(-|x-y| + x + y)$
h) $(x \wedge y) + (x \vee y) = x + y$
i) $(-x) \wedge (-y) = -(x \vee y)$
j) $(x \vee y) + z = (x+z) \vee (y+z)$
k) $c(x \vee y) = (cx) \vee (cy) \Leftrightarrow c \geq 0$
l) $\text{máx}\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$
m) $\text{mín}\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$

Ejemplo: Se deja al lector resolver $|x| = 1, |x| < 1, |x| > 1, |x| = -1, |x| < -1, |x| > -1$

Ejemplo: Demuéstrese lo siguiente. (Ver la definición de valor absoluto en el apartado "Funciones Lineales Definidas por intervalos" de la sección "Funciones y sus gráficas" del capítulo "Breve introducción al Cálculo").

1) $x > 0 \Rightarrow |x| > 0$

2) $|x-1| < 1 \Rightarrow |x+1| < 3$

3) $0 < |x| < 1 \Rightarrow x^2 < |x|$

Solución:

1) $x > 0 \Rightarrow |x| = x$. Entonces $|x| > 0$.

2) $|x-1|<1 \Leftrightarrow -1<x-1<1 \Leftrightarrow 1<x+1<3 \Rightarrow -3<x+1<3 \Leftrightarrow |x+1|<3.$

3) $a)$ caso $0<x<1$

$0<x<1 \Rightarrow x^2<x$. Como $x=|x|$, tenemos $x^2<|x|$.

$b)$ caso $-1<x<0$

$-1<x<0 \Rightarrow -x>x^2$. Como $|x|=-x$, tenemos $x^2<|x|$.

Ejemplo: Resolver la ecuación $|x-2|+|x+1|=3$

Solución: Como $|x+1| = \begin{cases} -(x+1) & si \;\; x<-1 \\ x+1 & si \;\; x\geq 1 \end{cases}$ y $|x-z| = \begin{cases} -(x-2) & si \;\; x<2 \\ x-2 & si \;\; x\geq 2 \end{cases}$
busquemos primeramente soluciones dentro del semieje $\{x \mid x<-1\}$. Si hubiera aquí una solución x se tendría:

$|x-2|+|x+1| = -(x-2)-(x+1) = 3$

y así $-2x=2$ ó $x=-1$ lo cual no es posible pues $x<-1$. Así en $\{x \mid x<-1\}$ no hay soluciones.

Localizamos ahora soluciones en el intervalo $[-1,2)=\{x \mid -1\leq x<2\}$. Como para $x\in[-1,2)$ se tiene $|x-2|+|x+1| = -(x-2)-(x+1)=3$, toda $x\in[-1,2)$ es solución.

Finalmente si en $\{x \mid x\geq 2\}$ hubiera una solución x entonces $|x-2|+|x+1| = x-2+x+1=2x-1=3$, de donde $x=2$. Como $x=2$ es solución, ésta es la única en $\{x \mid x\geq 2\}$.

Resumiendo, el conjunto solución buscado es $\{x \mid -1\leq x\leq 2\}$.

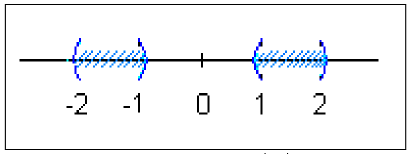
Ejemplo: Resolver la inecuación $1<|x|<2$.

Solución: Se trata de determinar todas las $x\in\mathbb{R}$ cuyo valor absoluto $|x|$ satisface $1<|x|<2$.

Busquemos primeramente soluciones sólo dentro del semieje positivo, es decir, solo dentro de las x tales que $x>0$. Una solución x aquí, debe entonces necesariamente satisfacer $1<|x|=x<2$. Es decir, dentro del semieje positivo solo puede haber soluciones en el intervalo $(1,2)$, y como claramente cualquier $x\in(1,2)$ satisface la desigualdad original podemos afirmar que de todas las $x>0$ solo las del intervalo $(1,2)$ son soluciones.

Busquemos ahora soluciones dentro del semieje negativo, es decir, dentro de las x tales que $x<0$. Una solución x aquí, debe necesariamente satisfacer $1<|x|=-x<2$ es decir $-1>x>-2$. Eso nos muestra que, dentro del semieje negativo, solo puede haber soluciones en el intervalo $(-2,-1)$. Pero como cualquier $x\in(-2,-1)$ es solución $(x\in(-2,-1) \Rightarrow -2<x<-1 \Rightarrow 2>-x>1 \Rightarrow 2>|x|>1)$ tenemos que dentro del semieje negativo las {unicas soluciones que hay son las x que pertenecen al intervalo abierto $(-2,-1)$.

Finalmente como $x=0$ no es solución, la respuesta final es que el conjunto solución es $(-2,-1)\cup(1,2)$ .Graficamente (Fig.4.1):



Solución de $1 < |x| < 2$

Ejemplo: Resolver la ecuación $|x-1| + |x+1| = 1$

Solución: Busquemos primeramente soluciones en el semieje $\{x \mid x \geq 1\}$. Si hubiera una solución x aquí, se tendría $|x-1| + |x+1| = x - 1 + x + 1 = 1$ por lo que $x = \frac{1}{2}$. Así que en el mencionado semieje no puede haber soluciones.

Busquemos ahora soluciones en el intervalo $\{x \mid -1 < x < 1\}$. Si hubiera una solución x aquí, se tendría $|x-1| + |x+1| = -x + 1 + x + 1 = 1$ de donde $2 = 1$ lo cual es falso. Así en $(-1, 1)$ tampoco hay soluciones.

Finalmente, si en el semieje $\{x \mid x < -1\}$ hubiera una solución x, se tendría $|x-1| + |x+1| = -x + 1 - x - 1 = 1$, de donde $x = -\frac{1}{2}$ lo cual no es posible pues $x < -1$. Lo anterior muestra que el conjunto solución de la ecuación dada es el conjunto vacío.

Ejemplo: Resolver la inecuación $|x-1| < |x+1|$.

Solución:

Vemos que $x = 1$ es solución. También tenemos que $x = -1$ no es solución.

Sea $A = \{x > 1\}$. Si $x \in A$ y x es solución entonces la desigualdad es $x - 1 < x + 1$ cuyas soluciones son toda $x > 1$.

Sea x con $-1 < x < 1$. Entonces si x es solución se tiene $-(x-1) < x + 1 \Leftrightarrow x > 0$. Es decir en $(-1, 1)$ los únicos candidatos a solución son $(0, 1)$.

Sea x con $x < -1$ y x solución entonces: $x - 1 < -2$, $x + 1 < 0$ por lo que $-x + 1 < -x - 1$ lo cual no es posible. Así que no hay solución en $(-\infty, -1)$.

Ejemplo: Resolver la inecuación $\left|\frac{3-2x}{2+x}\right| \leq 4$.

Solución: $\left|\frac{3-2x}{2+x}\right| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq \frac{3-2x}{2+x} \leq 4$. Sea $A = \{x > -2\}$. Si $x \in A$ y x es solución entonces $-4(2+x) \leq 3 - 2x \leq 4(2+x)$. Así $x \geq -\frac{11}{2}$ y $x \geq -\frac{5}{6}$. Entonces $x \geq -\frac{3}{6} \Rightarrow x \geq -\frac{11}{2}$ y $x \geq -\frac{5}{6} \Leftrightarrow -4 \leq \frac{3+2x}{2+x} \leq 4$. Análogamente $x \leq -\frac{11}{2}$ es conjunto solución.

Ejemplo: Resolver la inecuación $\left|x^2-3\right|<1$.

Solución:

$$\begin{aligned}\left|x^2-3\right|<1 &\Leftrightarrow -1<x^2-3<1\\ &\Leftrightarrow 2<x^2<4\\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}<|x|<2\\ &\Leftrightarrow x\in\left(-2,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},2\right)\end{aligned}$$

Ejemplo: Resolver la inecuación $\left|x^2-9\right|>2$.

Solución: $x^2-9>2$ ó $x^2-9<-2$

$x^2-9>2 \Leftrightarrow x^2>11 \Leftrightarrow |x|>\sqrt{11} \Leftrightarrow x>\sqrt{11}$ ó $x<-\sqrt{11}$

$x^2-9<-2 \Leftrightarrow x^2<7 \Leftrightarrow |x|<\sqrt{7} \Leftrightarrow -\sqrt{7}<x<\sqrt{7}$

$x\in\left(-\infty,-\sqrt{11}\right)\cup\left(-\sqrt{7},\sqrt{7}\right)\cup\left(\sqrt{11},\infty\right)$

Ejemplo: Resolver la inecuación $\left|\frac{2x-5}{x-6}\right|<3$.

Solución: $\left|\frac{2x-5}{x-6}\right|<3 \Leftrightarrow -3<\frac{2x-5}{x-6}<3\ldots\spadesuit$

Sea $A=\{x\mid x>6\}$. Si $x\in A$ y x es solución de $\spadesuit$ entonces $-3(x-6)<2x-5<3(x-6) \Leftrightarrow -3x+18<2x-5$ y $2x-5<3(x-6) \Leftrightarrow x>\frac{23}{5}$ y $x>13$.

Es decir, en A los únicos candidatos a solución son las x con $x>13$. Pero $x>13 \Rightarrow x>\frac{23}{5}$ y $x>13 \Leftrightarrow -3<\frac{2x-5}{x-6}<3$.

Sea $B=\{x\mid x<6\}$. $-3<\frac{2x-5}{x-6}<3 \Leftrightarrow -3(x-6)>2x-5>3(x-6) \Leftrightarrow x<\frac{23}{5}$ y $x<13$. Es decir es B los únicos candidatos a solcuión son las x son $x<\frac{23}{5}$. Pero $x<\frac{23}{5} \Rightarrow x<\frac{23}{5}, x<13$ y $x<6 \Rightarrow -3<\frac{2x-5}{x-6}<3$.

Así el conjunto solución de la desigualdad es $\left(-\infty,\frac{23}{5}\right)\cup(13,\infty)$.

Ejemplo:

a) $|2x+7|\geq 3$

b) $|x-1|+|x+1|=0$

c) $|x-1|\,|x+2|=3$

d) $|x+1|\,|x+2|=-(x+1)(x-2)$

Solución:

a) $|2x+7|\geq 3 \Leftrightarrow 2x+7<-3$ ó $3<2x+7 \Leftrightarrow x<-5$ ó $-2<x$.

Por lo tanto, el conjunto solución es $(-\infty,-5)\cup(-2,\infty)$.

b) $|x-1|+|x+1|=0$

Caso 1) $x-1>0 \Leftrightarrow x>1 \Leftrightarrow x+1>2>0 \Rightarrow |x-1|+|x+1| = x-1+x+1 = 2x$
Luego $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0!$. No hay solución en este caso.

Caso 2) $x-1<0 \Leftrightarrow x<1 \Leftrightarrow x+1<2$

Subcaso 1) $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$.
Entonces $|x-1|+|x+1| = 0 \Rightarrow 1-x+x+1 = 0 \Rightarrow 2 = 0!$.
No hay solución en este caso.

Subcaso 2) $x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$.
Entonces $|x-1|+|x+1| = 0 \Rightarrow 1-x-x-1 = 0 \Rightarrow x = 0!$.
No hay solución en este caso.

c) $|x-1| \ \ |x+2| = 3$

Caso 1) $x-1>0 \Leftrightarrow x>1 \Leftrightarrow x+2>3>0$. Eso implica:

$$\begin{aligned} |x-1| \ \ |x+2| &= (x-1)(x+2) \\ &= x^2+2x-x-2 \\ &= x^2+x-2 \\ &= 3 \\ &\Rightarrow x^2+x-5 = 0 \end{aligned}$$

Y las soluciones son $x_1 = -3, \ x_2 = 2$.

Caso 2) $x-1<0 \Leftrightarrow x<1 \Leftrightarrow x+2<3$

Subcaso 1) $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$. Por lo tanto $x \in (-2,1)$

Subcaso 2) $x+2<0 \Leftrightarrow x<-2$

Por lo tanto la solución es: $(-\infty,-2) \cup (-2,1) \cup \{2,-3\}$

d) $|x+1|\,|x+2| = -(x+1)(x-2)$

Caso 1) $x+1>0 \Rightarrow x+2>x+1>0$.
Entonces $(x+1)(x+2) = -(x+1)(x-2) \Rightarrow x^2+3x+2 = -x^2+x+2 \Rightarrow 2x(x+1) = 0$.
Y las soluciones son $x_1 = 0, \ x_2 = -1$.

Caso 2) $x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$

Subcaso 1) $x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$ y $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$. Solución: $x \in (-2,-1)$.

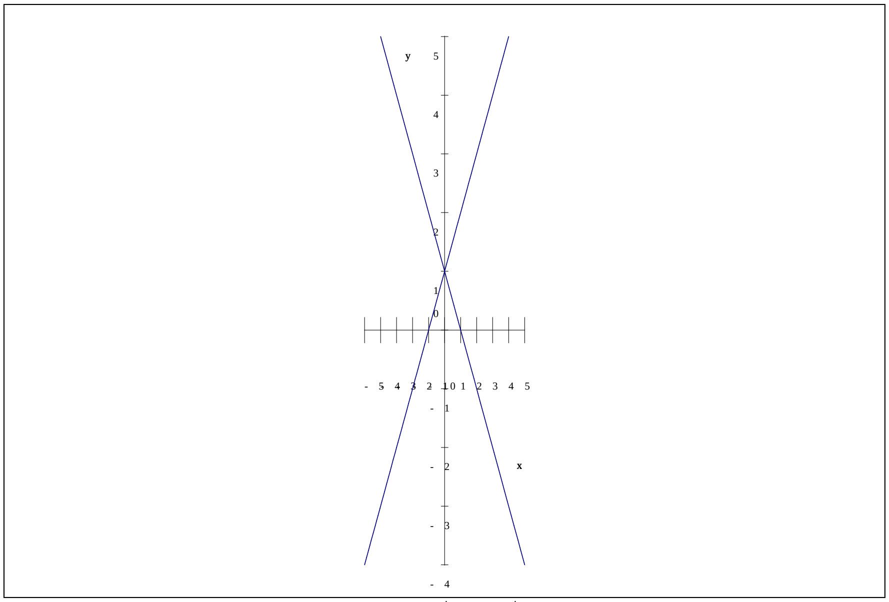
Subcaso 2) $x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$ y $x+2<0 \Leftrightarrow x<-2$. Solución: $x \in (-\infty,-2)$.

Por lo tanto, la solución es: $(-\infty,-2) \cup (-2,-1) \cup \{-1,0\}$.

Ejemplo: Dibujar la gráfica de $|x+y| = 1$.

Solución: Sea (x,y) con $|x+y| = 1$. Entonces $x+y = 1$ ó $x+y = -1$. Entonces $y = 1-x$ ó $y = -1+x$. Recíprocamente si $y = 1-x$ ó $y = -1+x$ se tiene $x+y = 1$ ó $x+y = -1$ por lo que $|x+y| = 1$.(Fig. 4.1)

$x+y = 1$



Gráfica de $|x+y|=1$.

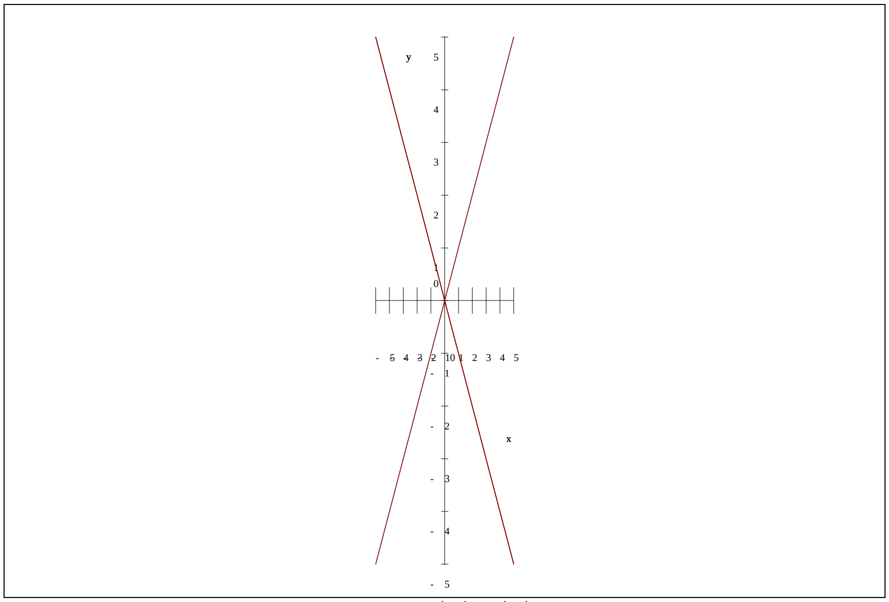
Ejemplo: Dibujar la gráfica de $|x|-|y|=0$.

Solución: $|y|=|x|$.

Sea (x,y) con $x \geq 0,\ y \geq 0$ y tal que $|y|=|x|$. Entonces $x=y$. Recíprocamente si $x \geq 0,\ y \geq 0$ y $x=y$ se tiene $|x|=|y|$.

Sea (x,y) con $x<0,\ y>0$ y $|x|=|y|$. Entonces de $|x|=|y|$ se sigue $-x=y$. (Fig. 4.1)

$y=x$



Gráfica de $|x| - |y| = 0$

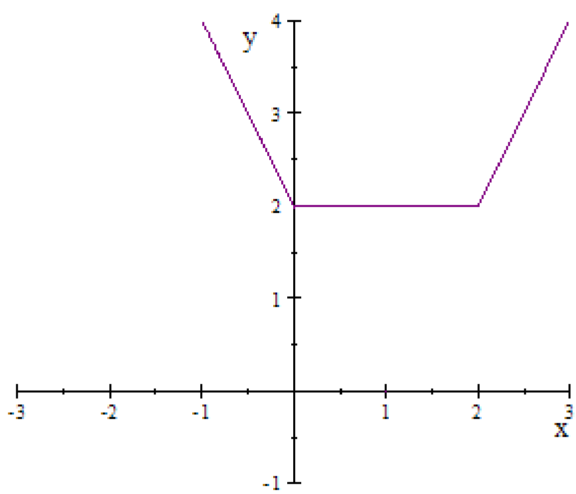
Ejemplo: Graficar $y = |x| + |x - z|$.

Solución: (Fig. 4.1)

Para $x \geq 2,\ |x-2| = x-2,\ |x| = x$ y así $y = x + x - 2 = 2x - 2$.

Para $x \geq 0,\ x < 2,\ |x| = x,\ |x-2| = -x+2$ y así $y = x - x + 2 = 2$.

Para $x < 0,\ |x| = -x,\ |x-2| = -(x-2) = -x+2$ y así $y = -x - x + 2 = -2x + 2$.



Gráfica de $y = |x| + |x - z|$.

Ejemplo: Graficar $|x| - |y| \leq 1, \; |y| \leq 1$.

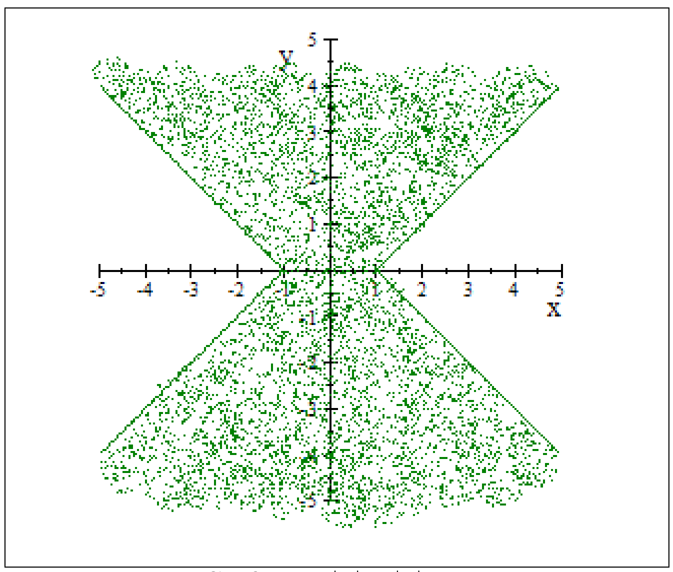
Solución A: (Fig. 4.1)

Caso 1) Para el primer cuadrante: $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x; \; y \geq 0 \Rightarrow |y| = y$ y la desigualdad se resuelve como sigue $x - y \leq 1 \Leftrightarrow x - 1 \leq y$.

Caso 2) Para el segundo cuadrante: $x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x; \; y \geq 0 \Rightarrow |y| = y$ y la desigualdad se resueve como sigue $-x - y \leq 1 \Leftrightarrow -x - 1 \leq y$.

Caso 3) Para el tercer cuadrante: $x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x; \; y \leq 0 \Rightarrow |y| = -y$ y tenemos $-x - (-y) \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 1 + x$.

Caso 4) Para el cuarto cuadrante: $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x; \; y \leq 0 \Rightarrow |y| = -y$ y tenemos $x - (-y) \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 1 - x$.

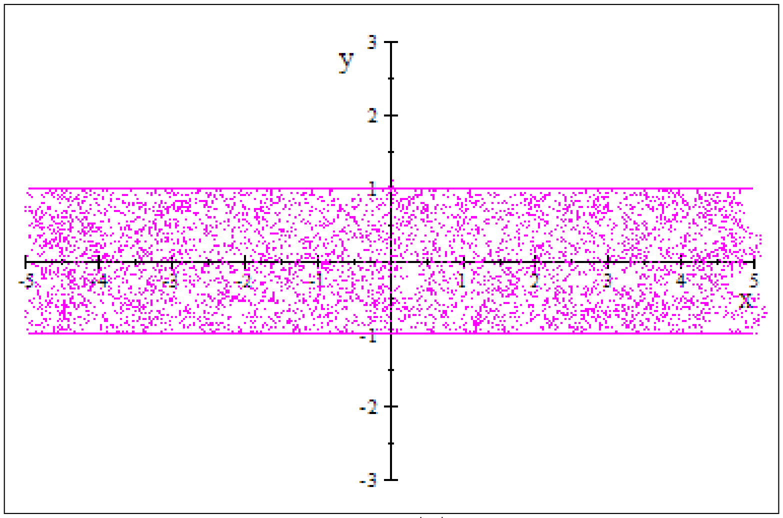


Gráfica de $|x| - |y| \leq 1$

Solución B: (Fig. 4.1)

1) Para el primer y segundo cuadrantes: $y \geq 0 \Rightarrow |y| = y$ y tenemos $y \leq 1$.

2) Para el tercer y cuarto cuadrantes: $y \leq 0 \Rightarrow |y| = -y$ y tenemos $-y \leq 1 \Leftrightarrow y \geq -1$.



Gráfica de $|y| \leq 1$

Teorema Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Entonces:
(1) $0 \leq a < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0 \Rightarrow a = 0$.
(2) $a = b \Leftrightarrow |a - b| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$.
(3) $a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -\frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
(4) $a < b + \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0 \Rightarrow a \leq b$.
(5) $a < c$ para todo $c > b \Rightarrow a \leq b$.
(6) $|a - b| < \varepsilon \Rightarrow |b| - \varepsilon < |a| < |b| + \varepsilon$.
(7) $|a - b| < \varepsilon \Rightarrow a < |b| + \varepsilon$.
Demostración Se demostrarán los incisos 1, 2, 6, y 7. Los demás se dejan al lector.
(1) Si $a > 0$, tomando $\varepsilon = a$, se tendrá $a < a$ lo cual es falso. Por lo tanto $a = 0$.
(2) Si $a = b$, entonces $|a - b| = 0 < \varepsilon$, si $\varepsilon > 0$. Por (1), si $|a - b| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, $|a - b| = 0$ y así $a = b$.
(6) Como $||a| - |b|| \leq |a - b| < \varepsilon$ se tendrá $|a| - |b| < \varepsilon$ y $|b| - |a| < \varepsilon$ de donde la doble desigualdad.
(7) Como $|a| - |b| < |a - b| < \varepsilon$ y $a \leq |a|$ se tendrá $a \leq \varepsilon + |b|$. *QED*

4.2. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales

Teorema (Fundamental de la Aritmética)
Todo natural n $(n \geq 2)$ puede escribirse de manera única como un producto de potencias positivas de primos: $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_n^{s_n}$.
Demostración (Por indución matemática)
Sea $P(n)$ la proposición: El natural n se puede expresar como producto de números primos.
Claramente $P(2)$ es verdadera. Supongamos $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ verdadera y demostremos $P(k+1)$ verdadera $(k \in \mathbb{N}, k \neq 1)$. Si $k+1$ es primo, $P(k+1)$ es verdadera. Si $k+1$ no es primo

entonces $k+1=st$ donde s y t son mayores que 1 y $s,t\in\mathbb{N}$. Claramente $s,t<k+1$ y así $s,t\leq k$. Por hipótesis de inducción s y t pueden expresarse como producto de primos y por lo tanto también $st=k+1$. Entonces la proposición $P(n)$ es verdadera para todo $n\in\mathbb{N}$. QED

Teorema (Euclides)
Hay una infinidad de números primos
Demostración
Supóngase que hay solo un número finito de primos $p_1,p_2,\ldots,p_n$. Entonces el número $N=p_1p_2\cdots p_n+1$, al ser mayor que todo p_i $(1\leq i\leq n)$ no es primo. Por lo tanto existe $p=p_j$ $(1\leq j\leq n)$ primo divisor de N. Es decir $p_j \mid p_1p_2\cdots p_n+1$. Como también $p_j\mid p_1p_2\cdots p_n$ se tendrá que $p_j\mid (p_1p_2\cdots p_n+1)-(p_1p_2\cdots p_n)=1$, lo cual es una contradicción. QED

Ejemplo: Proposiciones que dependen de n $(n\in\mathbb{N})$

1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{n}$. Para n a partir de 2.

2) $n^3+2n=3n^2$ $\quad n=0, n=1, n=2$ pero para ningún otro n. Recordemos $\left(n(n-1)(n-2)=n^3-3n^2+2n\right)$.

3) $(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-500)=0$ $\quad n=1,2,\ldots,500$ y no para otro valor de n.

4) $n=n+8$ $\quad$ no es válida ni para 0 ni para otro $n\in\mathbb{N},\ n>0$.

5) $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},\ n\in\mathbb{N}$.

6) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\ n\in\mathbb{N}$.

7) $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,\ n\in\mathbb{N}$.

Teorema (Desigualdad de Bernoulli)
Si $x>-1$, entonces $(1+x)^n\geq 1+nx,\ n\in\mathbb{N}$.
Demostración
Para $n=1$, la desigualdad es clara. Supóngamosla válida para $n=k$ y consideremos el caso $n=k+1$. Entonces:
$(1+x)^k\geq 1+kx$ y como $1+x>0$ se tendrá $(1+x)^{k+1}\geq(1+kx)(1+x)=1+x+kx+kx^2=1+(k+1)x+kx^2\geq 1+(k+1)x$. QED

Ejemplo: Demostrar por inducción matemática que $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},\ n\in\mathbb{N}$.

Solución: Para $n=1,\ 1=\frac{1{,}2}{2}$.

Supongamos que se cumple $1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ y verifiquemos que se cumple $1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$:

$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=(k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right)$.

Ejemplo: Demostrar por inducción matemática que si $y_k > 0 \ (k = 1, 2, \ldots, n)$ satisfacen $y_1 y_2 \cdots y_n = 1$, entonces $y_1 + y_2 + \cdots + y_n \geq n$.

Solución: Para $n = 1$ se cumple. Supongammos válido el resultado para $n = k$ y demostremos la validéz para $n = k{+}1$. Sean $y_1, y_2, \ldots, y_k, y_{k+1}$ tales que $y_1 y_2 \cdots y_k y_{k+1} = 1$. Por demostrar $y_1 + y_2 + \cdots + y_k + y_{k+1} \geq k + 1$.

Notemos que si todos los números son menores que 1 entonces el producto es menor que 1 y si todos los números son mayores que 1, entonces el producto es mayor que 1.

Podemos suponer $y_k < 1$ y $y_{k+1} > 1$. Entonces para los k-números $y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k y_{k+1}$ vale $y_1 + y_2 + \cdots + y_{k-1} + y_k y_{k+1} \geq k$ entonces $(y_1 + y_2 + \cdots + y_{k-1} + y_k y_{k+1}) + (y_k + y_{k+1}) \geq k + (y_k + y_{k+1}) + (1 - 1)$

$y_1 + y_2 + \cdots + y_k + y_{k+1} \geq (k+1) + y_k + y_{k+1} - 1 - y_k y_{k+1} = (k+1) + y_k (1 - y_{k+1}) - (1 - y_{k+1})$

$= (k+1) + (1 - y_{k+1})(y_k - 1) \geq k + 1$

Ejemplo: Demostrar por inducción matemática que $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)| \ n \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}$.

Solución: Si $n = 1, \ |\sin(x)| \leq |\sin(x)|$. Si $n = k, \ |\sin(kx)| \leq k|\sin(x)|$.

Luego, $|\sin(k+1)(x)| = |\sin(kx + x)| \leq |\sin(kx)\cos(x)| + |\cos(kx)\sin(x)| \leq k|\sin(x)||\cos(x)| + |\sin(x)||\cos(kx)| \leq k|\sin(x)| + |\sin(x)|$

$= (k+1)|\sin(x)|$.

Ejemplo: Demostrar por inducción matemática.

a) $a_i \geq 0 \ (i \geq 1), \ (1 + a_1) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots a_n$

b) $0 \leq a_i \leq 1 \ (i \geq 1), \ (1 - a_1) \cdots (1 - a_n) \geq 1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_n$

Demostración:

a) $(1 + a_1) \geq (1 + a_1)$. Supongamos ahora que $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_k) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots a_k$ para $k \in \mathbb{N}$. Entonces $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_k)(1 + a_{k+1}) \geq (1 + a_1 + a_2 + \cdots a_k)(1 + a_{k+1}) =$

$= 1 + a_{k+1} + a_1(1 + a_{k+1}) + a_2(1 + a_{k+1}) + \cdots + a_k(1 + a_{k+1})$

$= 1 + a_{k+1} + a_1 + a_1 a_{k+1} + a_2 + a_2 a_{k+1} + \cdots + a_k + a_k a_{k+1} \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}$.
El inciso b se demuestra de manera análoga.

Ejemplo: Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números positivos o cero. Entonces $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

Solución: Como los números $\frac{x_k}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ son tales que $\prod_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}} = 1$, por el ejemplo anterior se tendrá: $\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}} + \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}} \geq n$ de donde la desigualdad buscada.

Ejemplo: Demostrar que $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, utilizando la desigualdad entre el promedio geométrico y aritmético (desigualdad GA).

Solución: Considerando los números $1, 2, 3, \ldots, n$, la desigualdad GA nos permite escribir: $\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdots n} \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}$. Entonces $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Ejemplo: Demostrar por inducción matemática $\cos(\alpha)\cos(2\alpha)\cos\left(2^2\alpha\right)\cdots\cos(2^n\alpha) = \frac{\sin\left(2^{n+1}\alpha\right)}{2^{n+1}\sin(\alpha)}$.

Solución:

a) Caso $n = 0$: $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.

b) Supóngase la fórmula válida para $n = k$ y consideremos el caso $n = k + 1$:

$$\cos(\alpha)\cos(2\alpha)\cdots\cos\left(2^k\alpha\right)\cos\left(2^{k+1}\alpha\right) = \frac{\sin\left(2^{k+1}\alpha\right)}{2^{k+1}\sin(\alpha)}\cos\left(2^{k+1}\alpha\right) = \frac{\frac{1}{2}\sin\left(2\cdot 2^{k+1}\alpha\right)}{2^{k+1}\sin(\alpha)} = \frac{\sin\left(2^{k+2}\alpha\right)}{2^{k+2}\sin(\alpha)}.$$

Ejemplo: Demuestre por inducción matemática que $x^{n+1} - 1 = (x-1)\left(x^n + x^{n-1} + \cdots x + 1\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Solución: $n = 1 : x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Supongamos la proposición válida para $n = k$: $\left(x^{k+1} - 1\right) = (x-1)\left(x^k + x^{k-1} + \cdots + x + 1\right)$. Entonces $\left(x^{k+2} - 1\right) = x\left(x^{k+1} - 1\right) + x - 1 = x\left[(x-1)\left(x^k + x^{k-1} + \cdots + x + 1\right)\right] + (x-1)$

$= (x-1)\left[x\left(x^k + x^{k-1} + \cdots + x + 1\right)\right] + (x-1) = (x-1)\left[x^{k+1} + x^k + \cdots + x^2 + x + 1\right]$.

Ejemplo: Demuestre por inducción matemática que

$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Solución: $n = 1 : a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Supongamos $n = k : a^{k+1} - b^{k+1} = (a-b)\left(a^k + a^{k-1}b + \cdots + b^k\right)$.

Entonces:

$$\begin{aligned} a^{k+2} - b^{k+2} &= a\left(a^{k+1} - b^{k+1}\right) + ab^{k+1} - b^{k+2} \\ &= a\left[(a-b)\left(a^k + a^{k-1}b + a^{k-2}b^2 + \cdots + b^k\right)\right] + b^{k+1}(a-b) \\ &= (a-b)\left(a^{k+1} + a^k b + a^{k-1}b^2 + \cdots + ab^k + b^{k+1}\right) \end{aligned}$$

Teorema

Para a y b números complejos y $n \in \mathbb{N}$ se cumple $a^n - b^n = (a-b)\sum\limits_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1}$

Demostración

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} a^{n-(k-1)}b^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k} \\
&\overset{(k-1=i)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i}b^{i} - \sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i}b^{i} - \sum_{i=1}^{n} a^{n-i}b^{i} \\
&= a^{n} + \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i}b^{i} - \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i}b^{i} - b^{n} \\
&= a^{n} - b^{n} \quad QED
\end{aligned}$$

Ejemplo: Muestre por inducción matemática los siguientes.

a) $n < 2^{n},\ n \in \mathbb{N}$

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2),\ n \in \mathbb{N}$

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1),\ n \in \mathbb{N}$

d) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{2} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\ n \in \mathbb{N}$

d) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{3} = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^{2},\ n \in \mathbb{N}$

Solución:

a) Sea $n = 1,\ 1 < 2^{1} = 2$. Supongamos que se cumple la desigualdad para $n \in \mathbb{N}$. Y demostremos que se cumple para $n+1$: Como $n < 2^{n}$ entonces $n+1 < 2^{n}+1 < 2^{n}+2 = 2^{n+1}$.

b) Sea $n = 1$ entonces $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1) = 1(1+1) = 1(2) = 2 = \frac{1}{3}(2)(3) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.
Supongamos válida la ecuación para $n \in \mathbb{N}$. Demostremos que se cumple para $n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) \\
&= \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) \\
&= (n+1)(n+2)\left(\tfrac{1}{3}n+1\right) \\
&= \tfrac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)
\end{aligned}$$

c) Sea $n = 1$ entonces $\sum\limits_{k=1}^{n} k = k = 1 = \frac{1}{2}(2) = \frac{1}{2}n(n+1)$. Supongamos que la fórmula es válida para $n \in \mathbb{N}$. Demostremos que se cumple para $n+1$: $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k = \sum\limits_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = (n+1)\left(\frac{1}{2}n+1\right) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

d) Sea $n = 1$ entonces $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{2} = 1^{2} = 1 = \frac{1}{6}(1)(2)(3)$. Supongamos que la fórmula es válida para $n \in \mathbb{N}$. Demostremos que se cumple para $n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \tfrac{1}{6} n (n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\
&= \tfrac{1}{6} \left(n^2+n\right)(2n+1) + n^2 + 2n + 1 \\
&= \tfrac{1}{6} \left(2n^3 + n^2 + 2n^2 + n\right) + n^2 + 2n + 1 \\
&= \tfrac{2}{6} n^3 + \tfrac{9}{6} n^2 + \tfrac{13}{6} n + 1 \\
&= \tfrac{1}{6} \left(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6\right) \\
&= \tfrac{1}{6} \left(n^2 + 3n + 2\right)(2n+3) \\
&= \tfrac{1}{6} (n+1)(n+2)\left[2(n+1)+1\right]
\end{aligned}$$

e) Sea $n=1$ entonces $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 = 1 = \left[\frac{1}{2}(2)\right]^2$. Supongamos que la fórmula es válida para $n \in \mathbb{N}$. Demostremos que se cumple para $n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
&= \left[\tfrac{1}{2} n (n+1)\right]^2 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
&= \tfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
&= \tfrac{1}{4} n^2 \left(n^2 + 2n + 1\right) + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
&= \tfrac{1}{4} n^4 + \tfrac{2}{4} n^3 + \tfrac{1}{4} n^2 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
&= \tfrac{1}{4} n^4 + \tfrac{6}{4} n^3 + \tfrac{13}{4} n^2 + 3n + 1 \\
&= \tfrac{1}{4} \left[n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4\right] \\
&= \tfrac{1}{4} n^4 + \tfrac{6}{4} n^3 + \tfrac{13}{4} n^2 + \tfrac{12}{4} n + 1 \\
&= \tfrac{1}{4} \left[n^4 + 4n^3 + 4n^2 + 2n^3 + 8n^2 + 8n + n^2 + 4n + 4\right] \\
&= \tfrac{1}{4} \left(n^2 + 2n + 1\right)\left(n^2 + 4n + 4\right) \\
&= \tfrac{1}{4} (n+1)^2 (n+2)^2 \\
&= \left[\tfrac{1}{2} (n+1)(n+2)\right]^2
\end{aligned}$$

Ejemplo: Demostrar que $|a+b|^2 \leq |a| + |b|, \; a, b \in \mathbb{R}$.

Solución: Puesto que: $|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a|+|b|)^2$, se tiene: $|a+b| \leq |a| + |b$.

Ejemplo: Demostrar, usando inducción matemática, que $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$.

Solución: Sea $n=1$, $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| = |a_1| \leq |a_1|$. Supongamos válida la fórmula para n y demostremos que es válida para $n+1$:

$$\begin{aligned}
|a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}|^2 &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1})^2 \\
&= \left[(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_{n+1}\right]^2 \\
&= (a_1 + \cdots + a_n)^2 + 2(a_1 + \cdots + a_n)\, a_{n+1} + a_{n+1}^2 \\
&\leq (|a_1| + \cdots + |a_n|)^2 + 2(|a_1| + \cdots + |a_n|)\,|a_{n+1}| + |a_{n+1}|^2 \\
&\leq (|a_1| + \cdots + |a_n| + |a_{n+1}|)^2
\end{aligned}$$

$\therefore \; |a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + |a_{n+1}|$.

Ejemplo: Muestre que para cualesquiera $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ se cumple: $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right)$.

Solución: $\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 = a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_1a_2b_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geq 0$.

Teorema (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)
Sean $x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_n$ dos colecciones de n números reales cada una. Entonces:
$\left|\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i\right| \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Demostración

$$\begin{aligned}
2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)^2 \quad &= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^2y_j^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i^2y_j^2 + x_j^2y_i^2\right) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 2x_iy_ix_jy_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i^2y_j^2 - 2x_iy_jx_jy_i + x_j^2y_i^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_iy_j - x_jy_i\right)^2 \\
&\geq 0 \quad QED
\end{aligned}$$

Teorema (Desigualdad de Cauchy)
Sean $x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_n$ dos colecciones de n números reales cada una. Entonces:
$\left|\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i\right| \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Demostración

Se puede suponer algún x_i diferente de cero. Sea $f(\lambda) = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \lambda x_i)^2$. Entonces $f(\lambda) = A\lambda^2 - 2B\lambda + C$, donde $A = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2,\ B = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i$ y $C = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2$. Como $f(\lambda) \geq 0$ y $A > 0$ se tendrá $4B^2 - 4AC \leq 0$, es decir $B^2 \leq AC$ y por lo tanto $|B| \leq A^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}}$ que es la desigualdad de Cauchy. QED

Ejemplo: (Desigualdad del Triángulo)

Sean $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ números reales. Entonces $\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}y_i^2\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{i=1}^{n}y_i^2 && \textit{(desigualdad de Cauchy)}\\
&= \left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left[\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\\
&= \left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2
\end{aligned}$$

Tomando raíz cuadrada se obtiene la desigualdad triangular.

Ejemplo: Verifique, utilizando la desigualdad de Cauchy, que si $x_1,\ldots,x_n$ son n números positivos, entonces $n^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)$

Solución: Consideremos las colecciones $\sqrt{x_1},\sqrt{x_2},\ldots,\sqrt{x_n},\frac{1}{\sqrt{x_1}},\frac{1}{\sqrt{x_2}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{x_n}}$. Entonces por la desigualdad de Cauchy: $\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2\leq\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i}\right)^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2\right]$ y por lo tanto $n^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)$.

Teorema (No se incluye su demostración)

Para $x,y\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{N}$ se cumplen:

a) $|x^n-y^n|\leq nM^{n-1}|x-y|,\ M=\text{máx}\{|a|,|b|\}$.

b) $|x^{\frac{1}{n}}-y^{\frac{1}{n}}|\leq|x-y|^{\frac{1}{n}},\ x,y\geq 0$.

Teorema

Para $n\in\mathbb{N}$ y $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$ con $1+x_i\geq 0\quad(i=1,\ldots,n)$ y tales que todos los x_i tienen el mismo signo, entonces $(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geq 1+(x_1+\cdots+x_n)$

Demostración

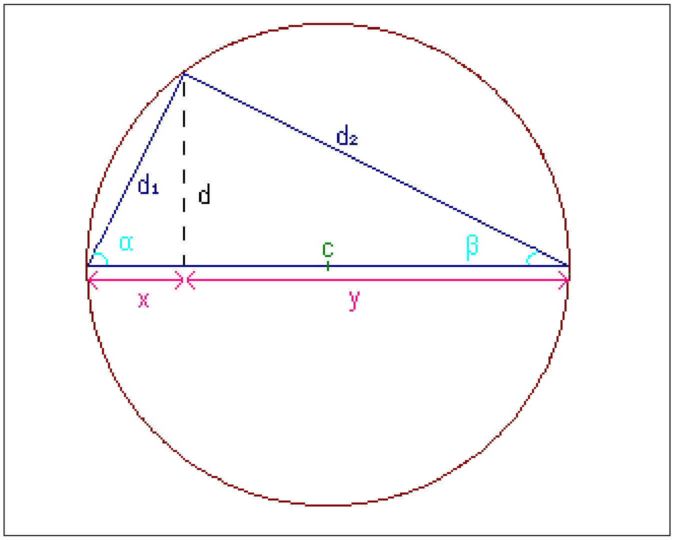
Sea $i=1\Rightarrow(1+x_1)\geq 1+(x_1)$. Supongamos válida la fórmula para $i=n$. Demostrar que es válida para $i=n+1$:

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geq 1+(x_1+\cdots+x_n)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1}) &\geq[1+(x_1+\cdots+x_n)](1+x_{n+1})\\
&\geq(1+x_{n+1})+(x_1+\cdots+x_n)(1+x_{n+1})\\
&=1+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}+x_1x_{n+1}+\cdots+x_nx_{n+1}\\
&\geq 1+(x_1+\cdots+x_n+x_{n+1})\quad QED
\end{aligned}$$

Ejemplo: Sean x,y dos números positivos. Entonces $\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$.

Solución: Sabemos que cualquier triángulo inscrito en una circunferencia cuya base sea igual al diámetro de ésta, es un triángulo rectángulo.



Triángulo rectángulo inscrito

a) De la Fig. 4.2, sea c el punto medio del segmento con longitud $x+y$. Entonces $d_1^2 = x^2 + d^2$; $d_2^2 = d^2 + y^2 \Rightarrow d_1^2 + d_2^2 = (x+y)^2$. También $\left(x^2+d^2\right) + \left(d^2+y^2\right) = x^2 + 2xy + y^2$. De donde se obtiene $d = \sqrt{xy}$ que, por construcción, está acotada por el radio de la circunferencia. Esta demostración da una manera de construir, por ejemplo, segmentos de longitud $\sqrt{2}, \sqrt{7}$, etc.

b) Como $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$, tenemos: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

c) Se deduce de la figura que $\tan\alpha = \frac{d}{x}$; $\tan\beta = \frac{d}{y}$; $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\pi}{2}$. Eso implica $\frac{d}{x} = \frac{y}{d}$ de ahí que $xy = d^2$,1

Ejemplo: Para $x, y, z \geq 0$ tales que $x \leq y + z$ verifique que $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z}$.

solución:

$$\begin{aligned} x(1+y)(1+z) &= x + xy + xz + xyz \\ &\leq (y+z) + (xy + xz + xyz) \\ &\leq (y + xy + xz + xyz + z) + (yz + xyz + zy) \\ &= y + xy + yz + xyz + z + xz + zy + xyz \\ &= (y+xy)(1+z) + (z+xz)(1+y) \\ &= y(1+x)(1+z) + z(1+x)(1+y) \end{aligned}$$

Al dividir por $(1+x)(1+y)(1+z)$ se obtiene la desigualdad.

Teorema

Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$; $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tres colecciones de n números reales entonces:

$$\sqrt{(x_1-z_1)^2 + \cdots + (x_n-z_n)^2} \leq \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2} + \sqrt{(y_1-z_1)^2 + \cdots + (y_n-z_n)^2}$$

Demostración

Se consideran las colecciones $x_1 - y_1,\ x_2 - y_2, \ldots, y_n - z_n$ y se aplica la desigualdad del triángulo.

Teorema (Desigualdad de Cauchy)
Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_n$ dos colecciones de n números reales cada una entonces:
$\left|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$
Demostración
En vista de: $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2$ y $\sum\limits_{1\leq i<j\leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq$
0 se tiene $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right)$ y por lo tanto $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ QED

Resúmen

Desigualdad de las medidas aritmética y geométrica	$\frac{\lvert a_1\rvert+\lvert a_2\rvert+\cdots+\lvert a_n\rvert}{n} \geq \lvert a_1 \cdots a_n\rvert^{\frac{1}{n}}$
Desigualdad de Cauchy-Schwartz	$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots b_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$
Desigualdad de Hölder	$(\lvert a_1\rvert^p + \cdots + \lvert a_n\rvert^p)^{\frac{1}{p}} (\lvert b_1\rvert^q + \cdots + \lvert b_n\rvert^q)^{\frac{1}{q}} \geq a_1 b_1 + \cdots a_n b_n$ $\left(p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$
Desigualdad Triangular	$\left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(b_1^2 + \cdots + b_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left[(a_1 + b_1)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}$
Desigualdad de Minkowski	$(\lvert a_1\rvert^p + \cdots + \lvert a_n\rvert^p)^{\frac{1}{p}} + (\lvert b_1\rvert^p + \cdots + \lvert b_n\rvert^p)^{\frac{1}{p}}$ $\geq [\lvert a_1 + b_1\rvert^p + \cdots + \lvert a_n + b_n\rvert^p]^{\frac{1}{p}}$ $(p \geq 1)$

4.3. Numerabilidad

Ejemplo:El conjunto de los impares $\mathbb{N}_1 = \{1, 3, 5, \ldots\}$ y el conjunto de los pares $\mathbb{N}_2 = \{2, 4, 6, \ldots\}$ son equivalentes.

Solución: Sea $f : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ definido como $f(m) = m + 1$ entonces f es una biyección. Se deja al lector demostrar que efectivamente lo es.

Ejemplo: El conjunto $\mathbb{N}$ es equivalente a $\mathbb{N}_2$.

Solución: Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_2$ definida como $g(n) = 2n$. Entonces f es una biyección.

Ejemplo: El conjunto $\mathbb{Z}$ es equivalente al conjunto $\mathbb{N}$.

Solución: Sea $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definida como

$$h(m) = \begin{cases} 2m & si \quad m > 0 \\ -2m+1 & si \quad m \leq 0 \end{cases}$$

entonces h es una biyección.

Ejemplo:Muestre que los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ constituyen un conjunto numerable.

Solución: Denótese con $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ a la clase de los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ y denótese con $P_n(\mathbb{N})$ a la clase de los subconjutnos de $\mathbb{N}$ de cardinalidad n, $n \in \mathbb{N}$. Ya que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N} = \mathbb{N}^n$ es numerable y $P_n(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}^n$ se sigue que $P_n(\mathbb{N})$ lo es y como $F(\mathbb{N}) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n(\mathbb{N})$, éste también lo será el ser unión numerable de conjuntos numerables. Sin embargo a $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ no es numerable al ser equivalente a $\mathbb{R}$.

Proposición
El intervalo $[0,1]$ no es numerable.
Demostración (Cantor)
Supongamos que $[0,1]$ fuera numerable. Entonces tendríamos una lista de $[0,1] = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Sea $I_1 \subset [0,1]$ tal que $x_1 \notin I_1$. Sea $I_2 \subset I_1$ tal que $x_2 \notin I_2$. Continuando de esta manera tenemos una sucesión (I_n) de intervalos anidados que por el teorema de los intervalos anidados cumple con $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing$. Sea $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. Entonces $n \neq x_n$ para todo n y como $x \in [0,1]$, la lista $\{x_1, x_2, \ldots\}$ no contiene a todo punto de $[0,1]$. $x \in [0,1]$. $x \in [0,1]$. $x \neq x_n$ para todo $n : x \in I_n \forall n,\ x_n \notin I_n$. QED

Corolario $\mathbb{R}$ no es numerable.
Demostración
Si $\mathbb{R}$ fuera numerable entonces $[0,1]$ sería numerable. QED

Proposición $\mathbb{Q}^+$ es numerable. $\mathbb{Q}$ es numerable.
Demostración
Sabemos que $\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N} \right\}$ de esta manera, podemos enlistar los elementos de $\mathbb{Q}^+$ comenzando con el 1 y siguiendo el órden de las flechas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & \to & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \to & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & \\
\frac{4}{1} & \cdots & & & & & & &
\end{array}$$

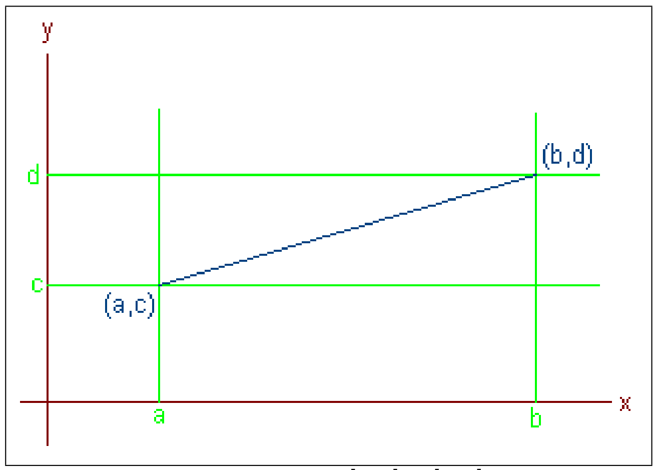
De esta forma es claro que

$\mathbb{Q}^+ = \left\{1, \frac{1}{2}, 2, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \ldots\right\}$.
Simétricamente,
$\mathbb{Q}^- = \left\{-1, -\frac{1}{2}, -2, -3, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, -4, \ldots\right\}$.
Por lo tanto $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$ es numerable.

Ejemplo: Dé una biyección entre $[a, b]$ y $[c, d]$.

Solución: (Fig. 4.3)

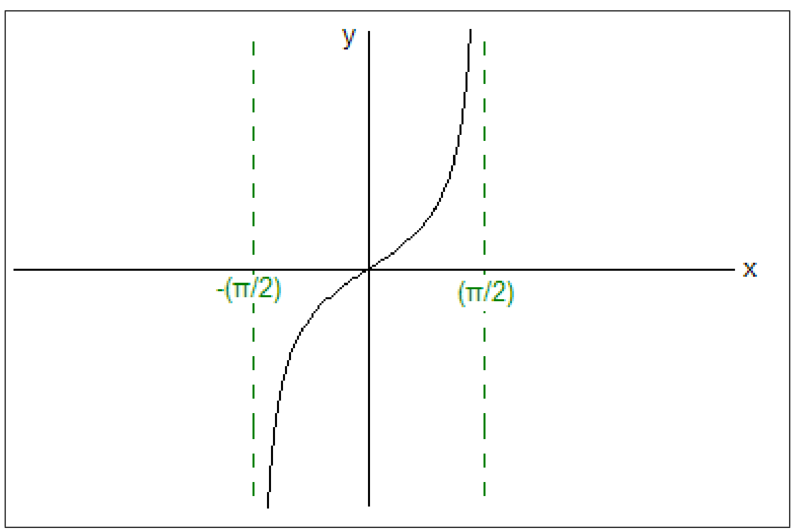
$$y - c = \frac{d-c}{b-a}(x-a) \quad \Leftrightarrow y = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)$$
$$y - d = \frac{d-c}{b-a}(x-b) \quad \Leftrightarrow y = d + \frac{d-c}{b-a}(x-b)$$



Biyección entre $[a, b]$ y $[c, d]$.

Ejemplo: Dé una biyección entre $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\mathbb{R}$.

Solución: Tomemos la función $y = \tan x$ en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. (Fig. 4.3)



Biyección entre $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ y $\mathbb{R}$.

Ejemplo: Dar una biyección entre $(0,1]$ y $(0,1)$. De esta forma ilustramos que los intervalos $(0,1]$ y $(0,1)$ son equivalentes aunque distintos.

Solución: Dado que $(0,1]=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right]$ y $(0,1)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ podemos realizar la biyección por subintervalos de la forma siguiente: $\left(\frac{1}{2},1\right]\to\left[\frac{1}{2},1\right)$; $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]\to\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ etc. Así, la función que buscamos se construye como:

$$h(m)=\begin{cases}\frac{3}{2}-x, & \frac{1}{2}<x\leq 1\\ \frac{3}{4}-x, & \frac{1}{4}<x\leq\frac{1}{2}\\ \frac{3}{8}-x, & \frac{1}{8}<x\leq\frac{1}{4}\\ & \vdots\\ \frac{3}{2^n}-x, & \frac{1}{2^n}<x\leq\frac{1}{2^{n-1}}\\ & \vdots\end{cases}$$

4.4. ℝ como campo ordenado

Finalizamos las notas del curso con una breve mención del conjunto $\mathbb{R}$ y sus propiedades. Trabajaremos con este conjunto a lo largo de todo el curso de Cálculo I.

Podemos preguntarnos qué tantos números conocemos o más bien, qué tantos tipos de números conocemos. Por ejemplo, sabemos que hay números negativos y positivos. A los números con los que aprendimos a contar les llamamos números naturales ($\mathbb{N}$). Si agregamos al conjunto anterior los números "naturales negativos" y el cero, tendremos el conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$). A los números que son el resultado de una división de números enteros (cuyo divisor nunca es cero) los llamamos números racionales ($\mathbb{Q}$). A aquellos cuya parte decimal es infinita y no periódica los llamamos números irracionales. Por ejemplo, veamos la siguiente lista:

$1,\ -108,\ \frac{10}{9},\ \frac{10}{7},\ \pi=3{,}1416...,\ \sqrt{2}$

En este caso, 1 es un número tanto natural como entero. El -108 es un número entero. El $\frac{10}{9}$ es un número racional ya que es el cociente de dos números enteros. También se puede ver que el resultado de la división entre 10 y 9 resulta ser $1.\overline{1}$ donde la cifra decimal es periódica e infinita. Esto quiere decir, que después del punto decimal se repite el 1 infinitas veces. Lo mismo sucede con $\frac{10}{7}$ cuyo resultado es $1.\overline{42857}$ donde la parte decimal está conformada por el período 42857 que se repite infinitas veces. En cambio, el número π no poseé un periodo que se repita infinitas veces. Para representarlo completo no podríamos utilizar la misma notación que usamos con los números racionales. En cambio, jamás terminaríamos de escribir todas sus cifras. También $\sqrt{2}$ corre con esta suerte.

Todos estos tipos de números conforman a los números reales ($\mathbb{R}$). La descripción simbólica de los conjuntos que forman es la siguiente:

Números Naturales	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$
Números Enteros	$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
Números Racionales	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ \ni a \in \mathbb{Z}, \quad b \in \mathbb{N} \right\}$
Números Irracionales	$I = \{x \ \ni x \in \mathbb{R}, \quad x \notin \mathbb{Q}\}$

Además, se cumplen las siguientes contenciones: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$. Podemos ver también la relación entre los conjuntos en el siguiente diagrama:

Construcción de $\mathbb{R}$

Consideremos a los números de la forma siguiente: $A.a_1a_2a_3\ldots$, donde A es un entero y $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}\, \forall i \in \mathbb{N}$. De estos números tomemos a los que cumplen con $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_i \neq 9$ para todos los índices $i \geq n$ (i.e. los que no tienen colas de nueves). Hemos construido al conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$).

Construcción de $\mathbb{R}^+$

Consideremos a los números de la forma siguiente: $A.a_1a_2a_3\ldots$, donde A es un entero no negativo y $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}\, \forall i \in \mathbb{N}$. De estos números tomemos a los que cumplen con $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_i \neq 9$ para todos los índices $i \geq n$ (i.e. los que no tienen colas de nueves). Además quitemos al $0{,}000\ldots$Hemos construido al conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}^+$.

Los números del conjunto $\mathbb{R}^+$ forman un campo
Sean $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y,\ xy \in \mathbb{R}^+$.
Para cada $x \in \mathbb{R}$ solo una de las siguientes tres condiciones se cumple:
a) $x = 0$
b) $x \in \mathbb{R}^+$
c) $-x \in \mathbb{R}^+$
En caso de que $-x \in \mathbb{R},\ x$ se llama *número negativo*. También $x < y \Longleftrightarrow y - x \in \mathbb{R}^+$.

Teorema (No se incluye su demostración)
a) $x < y,\ z \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + z < y + z$
b) $x < y,\ z \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow xz < yz$
c) $x < y,\ -z \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow xz > yz$
d) $x < y < z \Rightarrow x < z$
e) $0 < x < y \Rightarrow x^2 < z^2$
f) $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}^+ \Rightarrow x_0 + \cdots + x_n \in \mathbb{R}^+$ (inducción matemática)

Capítulo 5

Análisis

La inscripción al curso de Cálculo Diferencial e Integral I fue de 109 alumnos en total. De los cuales 60 fueron de primer ingreso y el resto constó de recursadores y alumnos que se inscribieron en la modalidad de "extraordinario largo".

Evaluación de los recursos

Lograr el aprendizaje en un alumno depende de varios factores. Algunos de ellos son: interacción con el medio ambiente, acceso a recursos bibliográficos y acceso a recursos de orientación (en dudas específicas sobre la materia). Es por ello que durante este proyecto se evaluaron los siguientes factores de aprendizaje:

Recursos físicos: salón de clases, pupítres, pizarrón.

Recursos bibliográficos: libros de la bibliografía que se encuentran en la biblioteca.

El salón que nos fue asignado fue el 008 del edificio Tlahuizcalpan, un salón muy amplio con cabida para 98 personas aproximadamente. El salón 008 presentó inconvenientes para la impartición de la clase por lo siguiente: el techo está situado como a 6 metros del piso, cosa que hace que la voz del profesor no se escuche bien hasta los lugares de atrás; las ventanas se encuentran situadas al nivel del techo, estaban cerradas y para abrirlas se necesitaba una escalera. Como no nos organizamos para lo anterior, las ventanas permanecieron cerradas y esto ocasionaba que el aire dentro del salón se viciara. También hacen falta desniveles en el piso (como en los salones del edificio O) para que los alumnos puedan ver el pizarrón sin estorbarse unos a otros.

Antes de abordar la forma de evaluación debo mencionar que el principal objetivo de esta tesis fue compilar un material didáctico para la enseñanza de los temas introductorios del curso de Cálculo I. No pretende ser un estudio estadístico del aprendizaje en un salón de clases. La estructura del curso de Cálculo Diferencial e Integral I consistió en:

- Objetivo
    - A la par de los objetivos lineados por el Departamento de Matemáticas (que son: que el alumno obtenga conocimientos sólidos en Cálculo), nos enfocamos en los siguientes puntos:

- Que desarrollen habilidades matemáticas y de pensamiento lógico.
- Que sean capaces de abordar un problema mediante la formalización y el método progresivo-regresivo.
- Que obtengan los conocimientos necesarios para cursar la materia de Cálculo Diferencial e Integral II.

▪ Temario

- Curso de temas introductorios al curso de Cálculo I
- Sucesiones y Series Numéricas
- Límites de Funciones y Continuidad
- Funciones Reales de variable Real
- La Derivada
- Aplicaciones de la Derivada

▪ Criterios de evaluación

- Para evaluar el cumplimiento de los objetivos del curso se aplicaron:
- Cuatro exámenes parciales escritos
- Cinco tareas
  (Que se promediarán y constituirán una sola calificación de tareas).
- Un examen final escrito
  (Se promediarán 5 calificaciones: una de cada examen parcial y la calificación única de tareas). Quedarán exentos del examen final escrito quienes tengan un promedio final entre 9 y 10.

▪ Bibliografía

- Apostol, T. *Calculus.* (Vol. I.). México: Reverté S. A., 2001.
- Arismendi, Hugo et al. *Cálculo, Primer Curso.* Addison Wesley Iberoamericana.
- Banch, S.. *Cálculo Diferencial e Integral.* México: UTEHA, 1961.
- Courant, R., John, F. *Introducción al Cálculo y al Análisis.* México: Editorial Limusa, 1974.
- Kuratowski, K. *Introducción al Cálculo.* México: Limusa-Wiley, 1970.
- Lang. S. *Cálculo I.* México: Grupo editorial Iberoamericana, 1989.
- Finney, R., Thomas, G. *Cálculo en una variable.* (9^a Edición). México: Addison Wesley, 1998.
- Spivak, Michael. *Cálculo Infinitesimal.* México: Reverté, S. A., 1988.
- Stein, Sherman K. *Cálculo con Geometría Analítica.* México: Mc. Graw Hill, 1984.
- Stewart. *Calculus, single variable.*

La estructura del Curso de Temas introductorios al curso de Cálculo I consistió en lo siguiente:

- Objetivo
  - Que el alumno desarrolle:
    - Interés por el Cálculo.
    - Habilidades en el manejo aritmético de un problema matemático.
    - Habilidades en manejo simbólico de un problema matemático.
    - Habilidades de pensamiento lógico y capacidad de abstración.
    - Su capacidad de indagación.

- Temario
  - **Breve introducción al cálculo**
    - El lenguaje de las matemáticas
    - Tópicos de geometría analítica
    - Funciones y sus gráficas
    - Tópicos de geometría
    - Trazado de las Cónicas
    - Tópicos de álgebra
    - Tópicos de trigonometría
  - **Conjuntos, Funciones y Lógica**
    - Funciones
    - Cardinalidad
  - **Números**
    - $\mathbb{R}$ y su estructura algebráica de campo
    - El conjunto $\mathbb{N}$ de los Números Naturales
    - Numerabilidad
    - $\mathbb{R}$ como campo ordenado

Cabe mencionar que este temario se cubrió durante el primer capítulo del Curso de Cálculo I hasta el tema de Conjuntos, Funciones y Lógica. El capítulo referente a Números se abarcó después de haber abordado el tema de Series y Sucesiones Numéricas de Cálculo I.

Para evaluar el impacto del curso de Temas introductorios al curso de Cálculo I, tomé una muestra de 10 alumnos de primer ingreso (grupo selecto) a quienes monitoreé a lo largo del semestre observando los siguientes:

- Criterios de evaluación:

- Asistencia al 80 % de las clases.
- Participación en clase.
- Cuatro exámenes parciales escritos (mismos del curso de Cálculo I).
- Un examen final escrito (mismo del curso de Cálculo I).

A continuación muestro la lista de los alumnos que formaron parte del grupo selecto:

Nombre del Alumno	**Carrera**	**Escuela de procedencia**
Martínez Meza Luis Alberto	Actuaría	ENP, Plantel no. 9
López Pacheco Moisés Abraham	Física	CBTIS 2, Oaxaca
Arenas Rojas Samara	Física	Preparatoria Ricardo Flores Magón, Xalapa, Ver.
Vera Bernal Elizabeth	Física	Bachilleres 2, Jiutepec, Morelos
Medina Mendoza Ilce Anahí	Actuaría	CCH Oriente
Vega Acevedo Jorge Enrique	Matemáticas	ENP, Plantel no. 8
Bolaños Zumaya Daniel Giovani	Actuaría	ENP, Plantel no. 8
Rivas González Juan Carlos	Física	CCH Sur
Alvarado López Pamela	Física	CCH Sur
Rodríguez García Wendy Noemí	Actuaría	CCH Naucalpan

Todos estos alumnos tuvieron el 80 % de asistencia salvo Juan Carlos quien desertó a mitad del curso por iniciar una actividad laboral. En su participación la mayoría se mostraba retraído excepto Samara, Jorge e Ilce quienes mostraban un interés especial por aprender.

A continuación presento el análisis de resultados de los cuatro exámenes parciales presentados por el grupo selecto. Cabe mencionar que a todos los alumnos inscritos les proporcionamos guías de estudio para los tres primeros exámenes parciales. La mecánica de la ayudantía que dimos Martha Reyes y yo fue resolver sus dudas sobre las tareas y las guías. La redacción de los exámenes aplicados se encuentra en el apéndice.

Análisis general del primer examen parcial

El 70 % de ellos aprobó. El promedio de calificaciones fue de 5.2 (donde 10 es la máxima calificación). El 90 % hizo los casos completos para la demostración de proposiciones mediante tabla de verdad y acertó. La mayoría comprendió y demostró bien el Teorema de Pitágoras salvo detalles de memorización en su enunciación (tres de ellos no mencionaron que el teorema se cumple para todo triángulo rectángulo). Solamente hubo un caso en el que una alumna mezcló conceptos de trigonometría en la enunciación del teorema. La mayoría mostró una buena comprensión de cómo abordar la pregunta 3). Sin embargo, el 60 % tuvo problemas en la demostración debido a que no probaron alguna de las siguientes: la ida, el regreso, alguna de las contenciones o no ubicaron cuál era la hipótesis y qué era lo que había que demostrar.

El 80 % mostró una buen entendimiento del significado de los cuantificadores lógicos en los enunciados de la pregunta 4). Sólo hubo un caso en que una alumna asoció al símbolo $\exists$ la unicidad.

El 70 % abordó los tres pasos básicos de la demostración por inducción matemática. Sin embargo un 40 % de ellos tuvieron dificultades en el manejo algebráico de la demostración y no pudieron concluirla. Solo un alumno tuvo problemas en el manejo de la aritmética para dar las ecuaciones de la recta. En general todos resolvieron muy bien el problema 6).

Un 20 % tuvo una exelente memorización y comprensión de las definiciones de la pregunta 7). El resto presentó problemas por alguna de las siguientes razones: confundir el concepto de función con el de función inyectiva; no comprender bien el concepto de función suprayectiva; tratar de manera equivalente los conceptos de número real, elemento, intervalo y conjunto así como el axioma del supremo (ínfimo) y la definición de supremo (ínfimo).

Análisis general del segundo examen parcial

La mayoría tuvo una buena comprensión y memorización de la definición de límite de una sucesión. Sin embargo, al usarla para demostrar los límites de la primera pregunta, algunos tuvieron dificultades en el manejo de las propiedades del valor absoluto y de las desigualdades.

La mitad de ellos enunció y demostró bien el Teorema de la Compresión. Al resto, le faltó formalidad en la enunciación y la exhibición de conclusiones de la demostración. La mayoría tuvo una buena comprensión de la negación de una proposición. Aunque, cabe mencionar que para negar la igualdad (del inciso b) de la pregunta 3) no utilizaron los símbolos de la tricotomía ($<, >$) sino $\neq$.

En este examen comienzan a mostrar un buen entendimiento del desgloce de las partes de una demostración, en particular del orden a seguir en la demostración de una doble implicación. Todos utilizaron la técnica de la demostración directa.

Con respecto a las definiciones algunos tuvieron confusión entre los conceptos de una sucesión convergente y divergente. Finalmente sólo dos alumnas enunciaron y discutieron correctamente la paradoja de Aquiles y la tortuga.

Análisis general del tercer examen parcial

El 40 % del grupo selecto dió correctamente los significados formales de límite. Un 20 % solo tuvo la siguiente confusión: asoció la positividad de la ε del primer inciso a todos los demás números reales involucrados en los otros incisos. El resto del grupo no comprendió bien.

El 90 % del grupo demostró sin dificultad, directamente de la definición el límite de la pregunta 2. El 80 % del grupo comprendió y enunció bien los teoremas del Valor Intermedio, del Acotamiento y de los Valores Extremos. Algunos mostraron confusión en el cálculo de la composición de funciones con límite. El motivo fue que no tomaron en cuenta las gráficas de éstas.

Análisis general del cuarto examen parcial

La mitad de los alumnos tuvieron problemas de índole algebraica con el cálculo del polinomio de Taylor. La mayoría calculó bien las derivadas de la pregunta 2). El 80 % aplicó correctamente el método de Newton para la pregunta 3). La mayoría tuvo problemas de precisión en la enunciación de los teoremas de la pregunta 4). Aún presentaron confusión sobre la relación entre continuidad y derivabilidad. La mayoría resolvió bien los últimos dos problemas.

Análisis general del examen final

El 50 % de ellos aprobó. El promedio fue de 5.9. La calificación más baja fue de 0.4 y la más alta de 9.8. La mitad de ellos mostró una buena comprensión de los axiomas de supremo e ínfimo y dió definiciones acertadas de la pregunta 2). El resto tuvo confusiones sobre las definiciones y los axiomas. El 40 % demostró que la suma de dos suceciones acotadas es acotada. El 30 % hizo las demostraciones directas del límite y enunció y demostró el Teorema de la Compresión parra sucesiones y funciones. La mayoría calculó bien la tercera derivada de la pregunta 6) salvo por errores de álgebra. Solo el 30 % enunció con presición los teoremas del extremo interior y de los valores extremos.

Capítulo 6

Conclusiones

Como conclusión de este trabajo notamos que, efectivamente, el curso de Temas introductorios al curso de Cálculo I fue una gran ayuda para quienes lo aprovecharon. La mitad de los alumnos (me referiré en adelante a los alumnos del grupo selecto) aprobó la materia y, en general, mostró una buena comprensión de los temas claves del Curso de Cálculo I.

Con respecto a la resolución de problemas, la mayoría de los alumnos comprendió y aplicó la técnica "divide y vencerás". Dicha técnica fue enseñada por el profesor y consiste en visualizar un problema parte por parte antes de intentar resolverlo. Luego buscar soluciones a cada parte y finalmente llegar a una solución total del problema.

Con respecto al aprendizaje de escritura y asociación de símbolos, concluímos de los resultados del segundo examen parcial lo siguiente: La mayoría tuvo una buena comprensión y memorización de la definición de límite de una sucesión gracias a que, en clase, el profesor la escribía de esta manera:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$$

De esta forma se enfatizaban los símbolos de la lógica matemática que se estudió al principio del curso. Así mismo se separaba la proposición con paréntesis como una técnica de asociación. Debido a que la definición es larga, esta técnica fue muy buena para que los alumos recordaran la definición completa.

En el tercer examen parcial, también les ayudó esta técnica para la sintáxis de los significados formales de límite, sin embargo, como los conceptos eran más complicados y variados, al 40 % no les ayudó semánticamente.

En general, el grupo no contaba con conocimientos sólidos de temas introductorios al Cálculo. Sin embargo, quienes aprovecharon el material introductorio que dimos en clase, crearon su propia base para esta materia. El curso de Temas introductorios que se aborda en este trabajo de Apoyo a la Docencia sirvió a los alumnos para tener un primer acercamiento con el Cálculo, familiarizarlos con la simbología y con el uso de la lógica matemática como herramienta para ordenar las ideas y resolver problemas. De igual manera fue de mucha utilidad para comenzar a introducirlos en un lenguaje formal con el que habrán de trabajar a lo largo de toda su carrera en la Facultad de Ciencias.

Como último punto de las conclusiones trataré sobre el tema de el aprovechamiento del material de la Biblioteca de la Facultad de Ciencias: Amoxcalli. Esto es importante ya que es uno de los factores de aprendizaje.

El libro principal en el que se basó el curso de Cálculo Diferencial e Integral I fue el Stewart. De este libro existen títulos en la biblioteca editados en Inglés. Sin embargo, la mayoría de los alumnos del grupo selecto no lo consultaban por la dificultad que tienen con el idioma. Esto es una gran desventaja para los alumnos ya que gran parte del material científico está escrito en el idioma inglés y muchas de las nuevas publicaciones se adquieren en este idioma.

Naturalmente, dentro de un curso de Cálculo para alumnos de primer ingreso no podemos incluir un curso del idioma inglés. Así que recomendé a los alumnos que consideraran (quienes tuvieran problemas para entenderlo) aprender el idioma a la brevedad inscribiéndose en el Centro de Lenguas extranjeras de la UNAM.

Apéndice

1er Examen parcial

Semestre 2009-I	06/09/08
Profesor:	Agustín Ontiveros Pineda
Materia:	Cálculo Diferencial e Integral I

1.Demostrar que las proposiciones son verdaderas:
$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
2.Enuncie y dé una demostración del teorema de Pitágoras.
3.Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto. Demostrar:
a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
b) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$
4.¿Cuáles de las siguientes proposiciones son V o F?
a) $(\exists x)\,(\exists y)\,\left(x^2 + y - xy = 0\right)$
b) $(\exists x)\,(\forall y)\,\left(x^2 + y - xy = 0\right)$
5.Demostrar por inducción:
$(\forall n)\left[1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n\,(n+1)\,(2n+1)\right]$
6.Encuentre la ecuación de los lados de un triángulo con vértices P(1,0), Q(3,4), R(-1,6).
7. a) Defina los conceptos de: Función, Función inyectiva, Suprayectiva y Biyectiva.
b) Enuncie el axioma del Supremo y del Ínfimo.

2do Examen Parcial

Semestre 2009-I	04/10/08
Profesor:	Agustín Ontiveros Pineda
Materia:	Cálculo Diferencial e Integral I

1.Enuncie la definición de límite y usándola demuestre que:
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-9}{5n+1} = \frac{4}{5}$
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+4}{5n^2-11} = 0$
2.Enuncie y demuestre el teorema de la compresión para sucesiones.
3.Escriba las negaciones de las siguientes proposiciones:
a) Para toda $n \in \mathbb{N}, n^2 - n$ es un número par.
b) Existe $r \in (-\infty, \infty)$ tal que $71 = 3r + 2$.
c) Para toda $i \in \{1, 2, 3, ..., 10\}$ $2^i \geq 0{,}0005$.

4.Sean a y b números no-negativos, no ambos cero y diferentes entre si. Demuestre entonces que:
a) $\frac{a}{a+b} \in [0,1]$
b) $\frac{a}{a+b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$
c) $\frac{a}{a+b} = 1 \Leftrightarrow b = 0$
5.Dar la definición de:
a) Sucesión acotada inferiormente.
b) Sucesión acotada superiormente.
c) Sucesión convergente.
d) Sucesión creciente.
e) Sucesión decreciente.
f) Sucesión monótona.
g) Sucesión divergente.
6.Enuncie y discuta la paradoja de Aquiles y la tortuga.

3er Examen Parcial

Semestre 2009-I	31/10/08
Profesor:	Agustín Ontiveros Pineda
Materia:	Cálculo Diferencial e Integral I

1.Dé los significados formales de:
a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$
b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
c) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$
d) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$
2.Demuestre directamente de la definición que $\lim\limits_{x\to x_0} (ax+b) = ax_0 + b$.
3.Enuncie los teoremas del valor intermedio, del acotamiento y de los valores extremos.

Teorema del valor intermedio: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función contínua y sea N cualquier valor entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = N$.

Teorema del acotamiento: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función contínua entonces existe $M > 0,\ M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| < M$ para toda $x \in [a,b]$.

Teorema de los valores extremos:

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función contínua entonces,

Existe $x_m \in [a,b]$ tal que $f(x_m) \leq f(x)$ para toda $x \in [a,b]$ y existe $x_M \in [a,b]$ tal que $f(x_M) \geq f(x)$ para toda $x \in [a,b]$.

4.Sean f y g las funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x = 1 \\ 2, & x \neq 0,1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1 + |x|, & x \neq 0 \end{cases}$$

Calcule $f(g(0))$, $f\left(\lim\limits_{x\to 0} g(x)\right)$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))$.
5.Supóngase que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 3$ y que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 2$. Calcule:
a) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{3f(x) + 8g(x)}$
b) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)\,g(x) + 10}$

c) $\lim_{x\to x_0} f^2(x)\sqrt{g(x)}$
:
6.¿Es la función $f(x)=\left|x^2-1\right|$ contínua en -1 y 1?

4to Examen Parcial

Semestre 2009-I	28/11/08
Profesor:	Agustín Ontiveros Pineda
Materia:	Cálculo Diferencial e Integral I

1.Calcule el polinomio de Taylor de $f(x)=7+x-3x^2+5x^3$ con $n=2$ alrededor de $a=1$.
2.Obtenga la derivada de:
a) $y=(2x-5)^4\left(8x^2-5\right)^{-3}$.
b) $y=x^2\ln\left(1-x^2\right)$.

3.Calcule aproximadamente la $\sqrt[10]{100}$ mediante el método de Newton.
4.Enuncie los teoremas de Fermat, Rolle, Lagrange y Cauchy.
5.Enuncie y demuestre la relación entre continuidad y derivabilidad.
6.Si una bola de nieve se licúa de tal manera que su área superficial disminuye con una tasa de $1\frac{cm^2}{\text{mín}}$. ¿Con qué velocidad disminuye el diámetro en el momento en que mide $10cm$?
7.Grafique la función $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$ describiendo intervalos de crecimiento y decrecimiento así como los puntos extremos y de inflexión.

Examen Final

Semestre 2009-I	08/12/08
Profesor:	Agustín Ontiveros Pineda
Materia:	Cálculo Diferencial e Integral I

1.Exprese el axioma del supremo y del ínfimo.
2.Exprese significado de (dar la definición de):
a) f es una función inyectiva.
b) f es una función suprayectiva.
c) f es una función par.
d) f es una función impar.
e) f es una función estrictamente creciente.
f) f es una función acotada.
Sea $x_0\in\mathbb{R}$. Exprese el significado de:
a) f es continua en x_0.
b) f derivable en x_0.
c) $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L\ \ (L\in\mathbb{R})$.
d) $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$.
3. Demuestre, que si las sucesiones (a_n) y (b_n) son acotadas, entonces la sucesión (a_n+b_n) es también acotada.
4.Demuestre que la sucesión (a_n) es creciente y acotada, donde $a_n=\frac{n-2}{n+2}$.
5.Demuestre directamente de la definición, que $\lim_{x\to 7}\frac{8}{x-3}=2$.
6.Calcule $y\acute{}$ para $y=\frac{1-x}{1+x}$.
7.Enuncie y demuestre el teorema de la compresión para sucesiones y funciones.
8.Enuncie los teoremas del extremo interior y de los valores extremos.

Bibliografía

(1) Cruse, Allan B., Granberg Millianne. 1971. *Lectures on freshman Calculus*, Addison Wesley

(2) Kudriávtsev, L. D. 1983. *Curso de Análisis Matemático.* Vol. (1). Mir. Moscú .

(3) Courant, Richard, John, Fritz 2001. *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático.* Vol(1). México: Limusa .

(4) Grimaldi, Ralph P. 1994. *Discrete and Combinatorial Mathematics*, Addison Wesley

(5) Swokowski, Earl W., Cole, Jeffery A. 1996 *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* México: Grupo Editorial Iberoamérica

(6) Wolf, Robert S. 1998. *Proof, Logic, and Conjecture: The Mathematician's toolbox.* New York: W. H. Freeman and Company.

(7) Fregoso, Arturo. 1989. *Los elementos del lenguaje de la matemática: Lógica y teoría de conjuntos.* México: Trillas.