



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Problemas Anti-Ramsey

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Montserrat Reyna Miranda

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Juan José Montellano Ballesteros



2009



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## Hoja de Datos del Jurado

### 1. Datos del alumno

Montserrat

Reyna

Miranda

(722) 2325192

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

405024135

### 2. Datos del Tutor

Dr

Juan José

Montellano

Ballesteros

### 3. Datos del sinodal 1

Dra

Hortensia

Galena

Sánchez

### 4. Datos del sinodal 2

M en C

César

Hernández

Cruz

### 5. Datos del sinodal 3

Dra

Martha Gabriela

Araujo

Pardo

### 6. Datos del sinodal 4

Dr

Ricardo

Gómez  
Aíza

7. Datos del trabajo escrito  
Problemas Anti-Ramsey  
114p  
2009

Quiero empezar agradeciendo a mis padres porque creyeron en mi, por su ejemplo, por su amor. A mi hermano Rubén, por ser un excelente compañero de aventuras. Ustedes me enseñaron que ningún sueño es inalcanzable, éste es mi sueño, se los dedico.

A Luis, por su incondicional cariño y amistad, gracias porque siempre estuviste a mi lado.

A mi enorme familia, mis abuelos, mis tíos, mis primos. Gracias por su compañía, su cariño, sus consejos, y por los bellos recuerdos que me han dejado. Cada uno ha puesto un granito de arena para formarme como ser humano.

A Juancho por su apoyo, su guía y su paciencia. A mis sinodales por sus atentas observaciones y su dedicación a la revisión de mi Tesis.

A todos mis profesores, que a lo largo de la carrera me enseñaron y me inspiraron.

A la maestra Evelia, que fue la primera en enseñarme lo divertidas que son las Matemáticas.

# Índice general

Introducción	VII
<b>1. Definiciones Básicas</b>	<b>1</b>
1.1. Gráficas . . . . .	1
1.2. Hipergráficas . . . . .	12
1.3. Órdenes $o(n)$ , $O(n)$ . Límite Superior e Inferior . . . . .	20
<b>2. Resultados Previos</b>	<b>25</b>
<b>3. Los Teoremas de Gráficas</b>	<b>43</b>
<b>4. El Teorema de Hipergráficas</b>	<b>63</b>
A. Teorema de Turán	85
B. Teorema de Ramsey	93
Bibliografía	103

# Introducción

*El color es el complemento de la forma  
y la manifestación más clara de la vida.*

Antoni Gaudi (1852-1926).

En el año de 1973 aparecen las primeras publicaciones sobre lo que será denominado problemas anti- Ramsey [?], [?], [?], rama de las matemáticas discretas que sigue dando frutos hasta la fecha.

En uno de estos trabajos, realizado por Paul Erdős, Miklos Simonovits y Vera Sós [6], se introduce el siguiente problema (véase el Capítulo de Definiciones Básicas):

Dado un entero  $n$  y una gráfica  $G$ , cuál es el mínimo número entero  $k$  tal que con toda coloración de las aristas de la gráfica completa de  $n$  vértices con  $k$  colores, aparece una copia de la gráfica  $G$  en la cual todas sus aristas son de distinto color.

En otras palabras, dada una estructura, en cuántos pedazos debo romperla para estar seguro de que una subestructura preestablecida será partida en sus elementos básicos.



En dicho trabajo se presentan tres resultados que son parte fundamental de esta rama del conocimiento, a saber:

**Teorema 1.** *Sea*

$$d + 1 = \min\{\chi(H - e) : e \in E(H)\}.$$

*Entonces*

$$\frac{f(n, H)}{\binom{n}{2}} \rightarrow \left(1 - \frac{1}{d}\right) \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

**Teorema 2.** *Sea  $p \geq 4$ . Existe un entero positivo  $n_p$  tal que si  $n > n_p$ , entonces*

$$f(n, K^p) = \text{ext}(n, K^{p-1}) + 1.$$

*Más aún, si  $K^n$  es coloreada con  $f(n, K^p)$  colores y no contiene un TMC  $K^p$ , entonces la coloración está únicamente determinada: se pueden dividir los vértices de  $K^n$  en  $p - 2$  clases  $A_1, \dots, A_{p-2}$  de forma que cada arista uniendo vértices en  $A_i$ 's distintos tiene su propio color (i.e., un color que sólo se usa una vez) y cada arista de la forma  $(x, y)$  donde  $x$  y  $y$  pertenecen al mismo  $A_i$  tienen el mismo color, independientemente de  $x$ ,  $y$  e  $i$ .*

**Teorema 3.** *Sea  $H$  una hipergráfica  $r$ -uniforme y sea*

$$\mathcal{H} = \{H - e : e \text{ es una } r\text{-upla de } H\}.$$

*Entonces*

$$f(n, H) - \text{ext}(n, \mathcal{H}) = o(n^r),$$

*en otras palabras,  $\frac{f(n, H)}{\binom{n}{r}}$  y  $\frac{\text{ext}(n, \mathcal{H})}{\binom{n}{r}}$  convergen al mismo límite.*

El propósito de esta Tesis es presentar estos resultados. Para esto, en el Capítulo 1 se introducen las definiciones básicas necesarias para entender y demostrar los teoremas. En el Capítulo 2 se presentan diversos resultados que facilitan las pruebas de dichos teoremas. En el Capítulo 3 se realiza la demostración del Teorema 1 y el Teorema 2. Finalmente en el Capítulo 4 se presenta la demostración del Teorema 3.

Es importante mencionar que los problemas anti-Ramsey no están realmente muy relacionados con la Teoría de Ramsey, sin embargo tienen una relación muy estrecha con la Teoría de Gráficas Extremal y los problemas tipo Turán. En los apéndices A y B se encuentran una demostración del Teorema de Turán y resultados básicos de la Teoría de Ramsey.

# Capítulo 1

## Definiciones Básicas

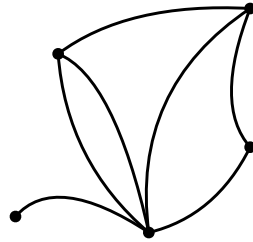
### 1.1. Gráficas

Dado un conjunto  $A$ , denotaremos su cardinalidad por  $|A|$ .

Dado un conjunto  $A$ ,  $[A]^k$  denotará el conjunto de subconjuntos de  $k$  elementos distintos de  $A$ , es decir,

$$[A]^k = \{\{a_1, \dots, a_k\} \mid a_1, \dots, a_k \in A, a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j\}.$$

Una *gráfica simple*  $G$  es un par ordenado  $(V(G), E(G))$  tal que  $E(G) \subseteq [V(G)]^2$ , de modo que los elementos de  $E(G)$  son subconjuntos de dos elementos de  $V(G)$ . Asumiremos en general que  $V(G) \cap E(G) = \emptyset$ . El conjunto  $E(G)$  es el conjunto de *aristas* de  $G$  y el conjunto  $V(G)$  es el conjunto de *vértices* de  $G$  (Figura 1.1). En el presente trabajo, al mencionar gráficas nos estaremos refiriendo a gráficas simples (Figura 1.2).

Figura 1.1: Gráfica  $G$ .

Si  $e$  es una arista y  $u$  y  $v$  son vértices tales que  $e = (u, v)$ , entonces se dice que  $e$  *une* a  $u$  y  $v$ , y que  $u$  y  $v$  son los *extremos* de la arista  $e$ . Por simplicidad escribiremos  $e = uv$ .

Se dice que los extremos de un arista son *incidentes* en ella y que la arista es *incidente* en sus extremos. Dos vértices son *adyacentes* si son incidentes en la misma arista. Dos aristas son *adyacentes* si son incidentes en el mismo vértice.

Diremos que  $e(G) = |E(G)|$  es el *tamaño* de la gráfica  $G$ .

Diremos que  $v(G) = |V(G)|$  es el *orden* de la gráfica  $G$ .

Denotaremos como  $G(n, m)$  a la familia de gráficas con  $n$  vértices y  $m$  aristas.

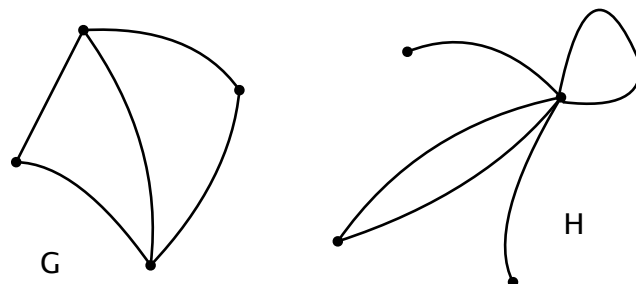


Figura 1.2:  $G$  es una gráfica simple,  $H$  no lo es.

Dado  $v \in V(G)$  decimos que  $u \in V(G)$  es *vecino* de  $v$  si  $v$  es adyacente a  $u$ .

Se define la *vecindad* de  $v$ ,  $N(v)$ , como

$$N(v) = \{u \in V(G) \text{ tales que } u \text{ es vecino de } v\}.$$

(Figura 1.3).

El *grado* de un vértice  $v \in V(G)$  es  $d(v) = |N(v)|$ .

El número  $\delta(G) = \min\{d(v) | v \in V(G)\}$  es el *grado mínimo* de  $G$ .

El número  $\Delta(G) = \max\{d(v) | v \in V(G)\}$  es el *grado máximo* de  $G$ .

Decimos que dos gráficas  $G$  y  $H$  son *isomorfas* (escrito  $G \cong H$ ) cuando existe una biyección  $\psi: V(G) \rightarrow V(H)$  de modo que

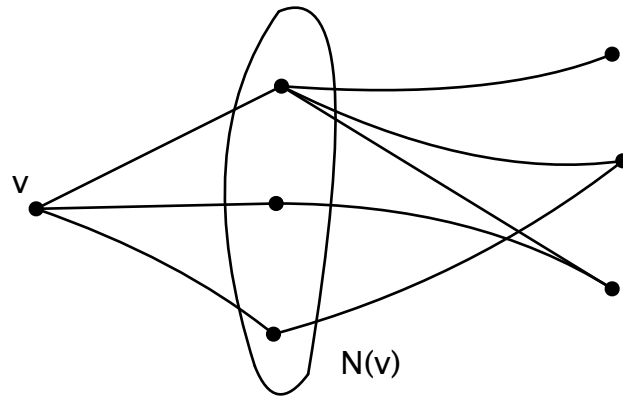


Figura 1.3: Vecindad del vértice  $v$ .

$$uv \in E(G) \Leftrightarrow \psi(u)\psi(v) \in E(H).$$

Dicha función es llamada *isomorfismo*. Cuando  $G = H$  entonces se llama *automorfismo* (Figura 1.4).

Si  $G$  y  $H$  son gráficas,  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ , entonces decimos que  $H$  es una *subgráfica* de  $G$ , y se denota  $H \subseteq G$  (Figura 1.5).

Si  $H \subseteq G$  y  $H$  contiene todas las aristas  $uv \in E(G)$  con  $u, v \in V(H)$ , entonces decimos que  $H$  es una *subgráfica inducida* de  $G$  (Figura 1.6), y decimos que  $V(H)$  *induce* o *genera*  $H$  en  $G$  y escribimos  $H = G[V(H)]$ . De modo que si  $U \subseteq V(G)$  es un conjunto cualquiera de vértices,  $G[U]$  denota la gráfica cuyo conjunto de vértices es  $U$  y cuyas aristas son precisamente aquellas aristas de  $G$  que tienen sus dos extremos en  $U$ .

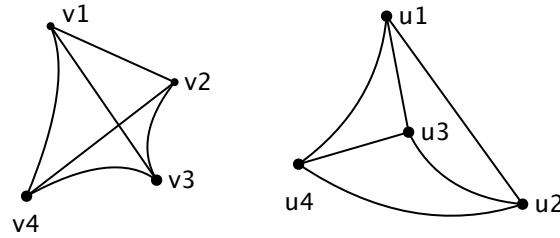


Figura 1.4: Las gráficas son isomorfas.

Si  $H \subseteq G$ , decimos que  $H$  es una *subgráfica generadora* de  $G$  si  $V(G) = V(H)$  (Figura 1.7).

Si  $U \subseteq V(G)$  entonces denotamos a  $G[V(G) \setminus U]$  por  $G \setminus U$ , es decir,  $G \setminus U$  es obtenida de borrar todos los vértices que están en  $U$  y las aristas que inciden en algún vértice de  $U$ . Cuando  $U = \{v\}$  escribimos  $G \setminus U$  como  $G \setminus v$ . Cuando  $H$  es una subgráfica de  $G$ , en lugar de  $G \setminus V(H)$  se escribe  $G \setminus H$ .

Si  $F \subseteq [V(G)]^2$ , entonces escribimos

$$G \setminus F := (V(G), E(G) \setminus F) \text{ y } G + F := (V(G), E(G) \cup F);$$

$G + \{e\}$  y  $G \setminus \{e\}$  se abrevian como  $G + e$  y  $G \setminus e$  respectivamente.

Una *gráfica completa* es una gráfica en la cual cada par de vértices distintos están unidos por una arista. A la gráfica completa con  $n$  vértices se le denota como  $K^n$  (Figura 1.8). Obsérvese que  $K^n$  tiene  $\binom{n}{2}$  aristas.

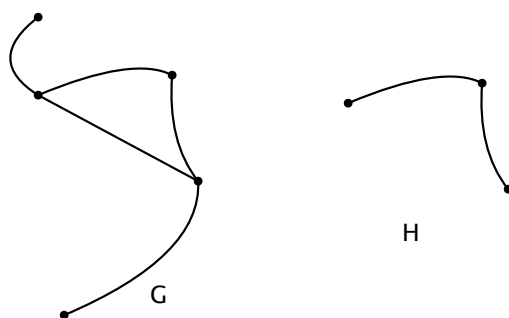


Figura 1.5: H es subgráfica de G.

El *complemento*  $\bar{G}$  de  $G$  es una gráfica con conjunto de vértices  $V(\bar{G}) = V(G)$  y conjunto de aristas  $E(\bar{G}) = [V(G)]^2 \setminus E(G)$  (Figura 1.9).

Si  $U \subseteq V(G)$ , decimos que  $U$  es *independiente* si cualesquiera dos vértices de  $U$  no están unidos por una arista (Figura 1.10).

La gráfica  $G$  es *r-partita* si se puede dar una partición de  $V(G)$  en  $r$  conjuntos independientes  $V_1, \dots, V_r$  (Figura 1.11). A un elemento de la partición de  $V(G)$  se le llama *clase*,  $V_i$  es la *i-ésima clase*.

Diremos que  $G$  es una *gráfica r-partita completa* si  $G$  es *r-partita* y cada par de vértices que se encuentren en elementos distintos de la partición de  $V(G)$  están unidos por una arista, es decir, para cada pareja  $u, v \in V(G)$  tales que  $u \in V_i, v \in V_j$  con  $i \neq j$ ,  $uv \in E(G)$  (Figura 1.12).

A la gráfica *r-partita completa* con  $n_i$  vértices en  $V_i$  se le denota  $K_r(n_1, \dots, n_r)$ . A la gráfica *r-partita completa* con  $t$  vértices en cada clase se le denota  $K_r(t)$ .



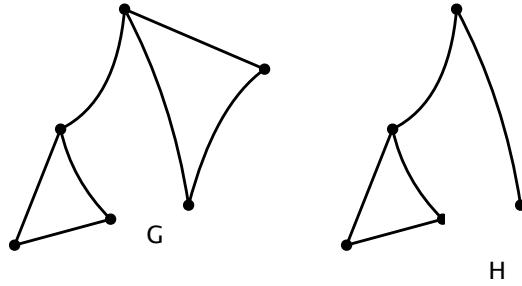


Figura 1.6: H es subgráfica inducida de G.

Definimos la función *piso* como  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$  dada por

$$f(r) = \lfloor r \rfloor = \text{máx}\{n \in \mathbb{Z} | n \leq r\}.$$

Definimos la función *techo* como  $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$  dada por

$$g(r) = \lceil r \rceil = \text{mín}\{n \in \mathbb{Z} | n \geq r\}.$$

Denotaremos por  $T_q(n)$  a la gráfica  $q$ -partita completa con  $n$  vértices, cuyas clases contienen

$$\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \quad \text{ó} \quad \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$$

vértices respectivamente. El número  $t_q(n)$  de aristas de  $T_q(n)$ , es

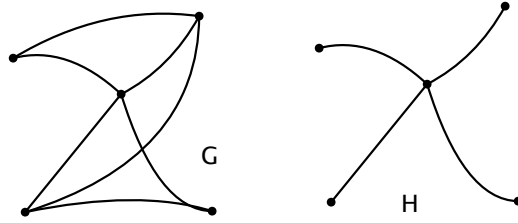


Figura 1.7: H es una subgráfica generadora de G.

$$t_q(n) = \binom{n}{2} - \sum_{i=1}^q \binom{n_i}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right) n^2 + O(n) \quad (1.1)$$

En el apéndice A se puede encontrar el valor exacto de  $t_q(n)$ .

Una *trayectoria* es una gráfica  $P = (V(P), E(P))$  no vacía de la forma

$$V(P) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\},$$

$$E(P) = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n\},$$

donde todos los vértices son distintos. Decimos que  $|E(P)|$  es la *longitud* de la trayectoria. A la trayectoria de longitud  $k$  se le denota  $P^k$  (Figura 1.13).

Un *ciclo* es una gráfica  $C = (V(C), E(C))$  no vacía de la forma

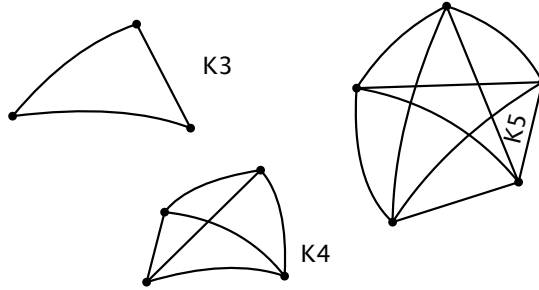


Figura 1.8:  $K^3, K^4, K^5$ .

$$V(C) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\},$$

$$E(C) = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_0\},$$

donde todos los vértices son distintos. Decimos que  $|E(C)|=|V(C)|$  es la *longitud* del ciclo. Al ciclo de longitud  $k$  se le denota  $C^k$  (Figura 1.14).

Una *coloración por vértices* de una gráfica  $G$  es una función  $c: V(G) \rightarrow S$ , donde  $S$  es el conjunto de *colores*. Una *buena coloración por vértices* de  $G$  es una función  $c: V(G) \rightarrow S$  tal que  $c(u) \neq c(v)$  si  $u$  y  $v$  son adyacentes. Decimos que  $c: V(G) \rightarrow S$  es una *s-coloración* si  $|S| = s$ .

El *número cromático* de una gráfica  $G$  es el mínimo entero  $k$  tal que existe una buena  $k$ -coloración de  $G$ ; y se denota por  $\chi(G)$ . Decimos que  $G$  es *k coloreable* si  $\chi(G) \leq k$ .

Observe que una buena coloración de  $G$  con  $k$  colores induce una partición de los vértices de  $G$  en  $k$  conjuntos independientes (llamados

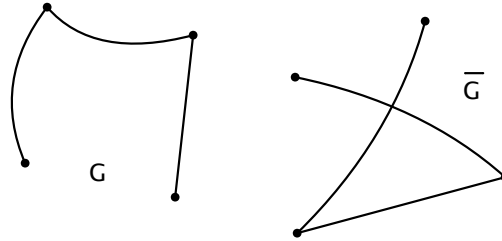


Figura 1.9: Gráfica y su complemento.

*clases cromáticas*), de modo que si  $G$  es  $k$ -coloreable entonces es  $k$ -partita.

Una *coloración por aristas* de una gráfica  $G$  es una función  $c: E(G) \rightarrow S$ , donde  $S$  es un conjunto de colores. Una *buena coloración por aristas* de  $G$  es una función  $c: E(G) \rightarrow S$  tal que  $c(e) \neq c(f)$  para todo par de aristas  $e, f$  adyacentes. Decimos que  $c: E(G) \rightarrow S$  es una  $s$ -coloración si  $|S| = s$ .

El *índice cromático* o *número cromático lineal* de la gráfica  $G$  es el mínimo entero  $k$  tal que existe una buena  $k$ -coloración por aristas de  $G$  y se denota por  $\chi'(G)$ .

Dada una coloración por aristas de  $K^n$  y una subgráfica  $H$  de  $G$ , si  $H$  no tiene dos aristas del mismo color, decimos que  $H$  está *totalmente multicoloreada*, y la denotamos por TMC  $H$  (Figura 1.15).

Dada una  $s$ -coloración de  $K^n$ , decimos que una subgráfica  $G$  de  $K^n$  es una *representación* de la coloración si  $G$  tiene  $s$  aristas y cada una de ellas tiene un color que no se repite en  $G$ . (Figura 1.16).

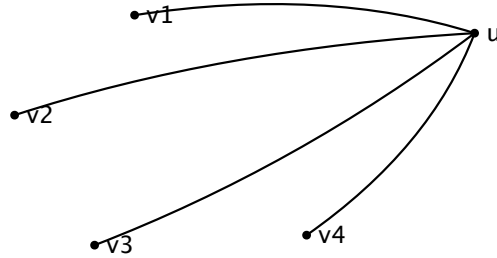


Figura 1.10:  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  es independiente.

Al máximo número de colores con los que se pueden colorear las aristas de  $K^n$  sin que contenga una TMC  $H$  se le denota por  $f(n, H)$ .

Si  $\mathcal{H}$  es una familia de gráficas finitas, definimos el *extremal* de  $\mathcal{H}$  como

$$\text{ext}(n, \mathcal{H}) := \max\{e(G) : |V(G)| = n \text{ y } H \not\subseteq G \ \forall H \in \mathcal{H}\}.$$

Si  $\mathcal{H} = \{H\}$ , entonces en lugar de  $\text{ext}(n, \{H\})$  simplemente se escribe  $\text{ext}(n, H)$ .

Dada  $\mathcal{L}$  una familia de gráficas, definimos la familia  $\mathcal{L}^-$  como el conjunto de las gráficas que resultan de quitarle una arista a la vez a cada una de las gráficas de  $\mathcal{L}$ , para todas las aristas, es decir,

$$\mathcal{L}^- = \{H - e : H \in \mathcal{L} \text{ y } e \in E(H)\}.$$

Diremos que una gráfica  $G$  está en la familia  $\mathcal{L}^+$  si, cada vez que coloreamos las aristas de  $G$  con  $e(G)$  colores distintos y  $\bar{G}$  de forma

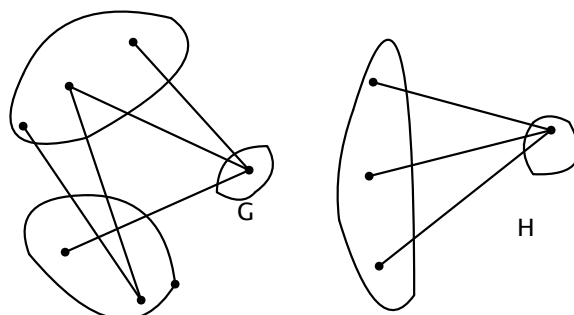


Figura 1.11:  $G$  es 3-partita,  $H$  es bipartita.

arbitraria, la coloración resultante de  $K^{v(G)}$  tiene una TMC  $H$  para alguna  $H \in \mathcal{L}$ .

## 1.2. Hipergráficas

Sea  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un conjunto finito, y sea  $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_m\}$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Se dice que el par  $H = (X, \mathcal{D})$  es una *hipergráfica* con conjunto de *vértices*  $X$ , también denotado por  $V(H)$ , y conjunto de *aristas*  $\mathcal{D}$ , también denotado por  $E(H)$  (Figura 1.17).

Los elementos de  $X$  son los *vértices* de  $H$  y los elementos de  $\mathcal{D}$  son las *aristas* (o *hiperaristas*) de  $H$ .

El número  $|X|$  es llamado el *orden* de la hipergráfica, también escrito como  $n = n(H)$ .

Una hipergráfica con conjunto de vértices y conjunto de aristas vacíos es llamada *hipergráfica vacía*. Algunas aristas también pueden ser conjuntos vacíos; o subconjuntos no triviales de algunas otras, en este caso

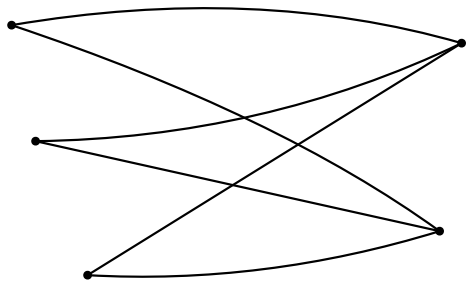


Figura 1.12: Gráfica bipartita completa.

se llaman *aristas incluidas*. Si las aristas coinciden se llaman *aristas múltiples* (Figura 1.18).

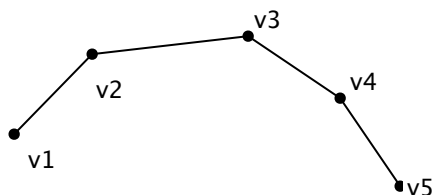
Si un vértice  $v \in V(H)$  pertenece a una arista  $D \in E(H)$ , decimos que  $v$  *incide* en  $D$  y que  $D$  *incide* en  $v$ .

Se dice que dos hipergráficas  $H = (X, \mathcal{D})$  y  $H' = (X', \mathcal{D}')$  son *isomorfas*, escrito  $H \cong H'$ , si existe una biyección  $\psi: X \rightarrow X'$  y una biyección  $\varphi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$  tal que para cada vértice  $x \in X$  y cada arista  $D \in \mathcal{D}$ , se tiene que  $x \in D$  si y sólo si  $\psi(x) \in \varphi(D)$ .

En una hipergráfica  $H$ , dos vértices  $u, v \in V(H)$  son *adyacentes* si existe una arista  $D \in E(H)$  que contiene a ambos vértices. Si  $u \in V(H)$  se define la *vecindad* de  $u$  como el conjunto de vértices  $v \in V(H)$  tales que  $u$  es adyacente a  $v$ , y se denota por

$$N(u) = \{v \in V(H) \mid v \text{ es adyacente a } u\}.$$

Se dice que dos aristas son *adyacentes* si su intersección es no vacía (Figura 1.19).

Figura 1.13:  $P^5$ .

Si  $u \in V(H)$ , el conjunto de las aristas que contiene a  $v$  se denota como

$$D(v) = \{D \in \mathcal{D} \mid v \in D\}.$$

El número  $|D(v)|$  es llamado el *grado* de  $v$ , el número  $|D|$  (con  $D \in \mathcal{D}$ ) es llamado el *tamaño* de la arista  $D$ . Una arista de tamaño 1 se llama *lazo* y un vértice de grado 1 se llama *vértice pendiente*.

Si  $H$  es una hipergráfica, un conjunto  $S \subseteq V(H)$  es *independiente* si cualesquiera dos vértices de  $S$  no son adyacentes.

Si una hipergráfica  $H$  es tal que se puede encontrar una partición de  $V(H)$  en  $k$  conjuntos independientes  $V_1, \dots, V_k$ , entonces decimos que  $H$  es *k-partita*. Los conjuntos  $V_1, \dots, V_k$  se llaman *clases* (compárese con la definición en la página 6).

Una hipergráfica  $H$  tal que no tiene aristas múltiples y todas sus aristas tienen tamaño  $r$  es llamada *hipergráfica r-uniforme*, o *r-gráfica*



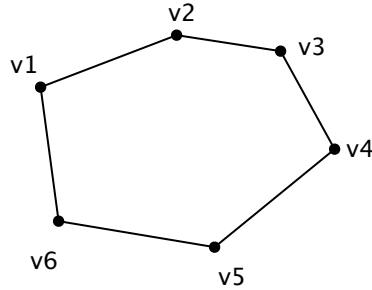


Figura 1.14:  $C^7$ .

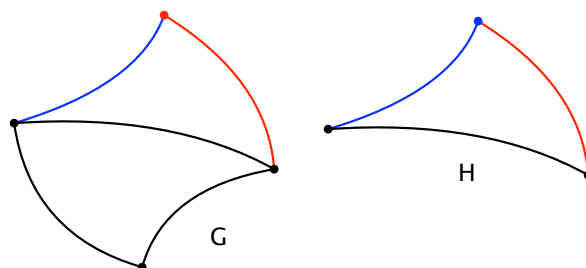
(Figura 1.20). A las aristas de una hipergráfica  $r$ -uniforme también se les llama las  $r$ -uplas de la hipergráfica (o  $r$ -aristas). Obsérvese que una 2-gráfica es una gráfica simple.

Dada una  $r$ -gráfica  $H$ , su *complemento*  $\bar{H}$  es una  $r$ -gráfica con conjunto de vértices  $V(\bar{H}) = V(H)$  y tal que

$$E(\bar{H}) = [H]^r \setminus E(H)$$

Decimos que una  $r$ -gráfica  $H$  con  $n$  vértices es *completa* si tiene todas las  $r$ -uplas posibles, es decir  $E(H) = [H]^r$  y la denotamos por  $K_{(r)}^n$ . En caso de que se sobreentienda que estamos hablando de  $r$ -gráficas, simplemente la denotaremos por  $K^n$ .

Una hipergráfica  $H$   $r$ -uniforme es  *$k$ -partita completa* si existe una partición de  $V(H)$  en  $k$  conjuntos independientes  $V_1, \dots, V_k$  y cada vez que  $\{x_1, \dots, x_r\} \subseteq V(H)$  cumpla que  $\{x_1, \dots, x_r\} \not\subseteq V_i$  para toda  $i \in \{1, \dots, k\}$  se tiene que  $\{x_1, \dots, x_r\} \in E(H)$ . La hipergráfica  $r$ -uniforme,  $k$ -partita completa con  $t$  vértices en cada clase se denota

Figura 1.15: TMC  $H \subset G$ .

como  $K_k^{(r)}(t)$ . En caso de que se sobreentienda que estamos hablando de  $r$ -gráficas, simplemente la denotaremos por  $K_k(t)$ .

Denotaremos al conjunto de  $r$ -gráficas con  $n$  vértices y  $m$   $r$ -uplas, como

$$H^{(r)}(n; m).$$

En caso de que se sobreentienda que estamos hablando de  $r$ -gráficas, simplemente la denotaremos por  $H(n; m)$ .

Una *coloración por aristas* de una hipergráfica  $H$  es una función  $c: E(H) \rightarrow S$ , donde  $S$  es un conjunto de colores.

Una *buena coloración por aristas* de  $H$  es una función  $c: E(H) \rightarrow S$  tal que  $c(e) \neq c(f)$  para todo par de aristas  $e, f \in E(H)$  adyacentes. Decimos que  $c: E(H) \rightarrow S$  es una  *$s$ -coloración* si  $|S| = s$ .

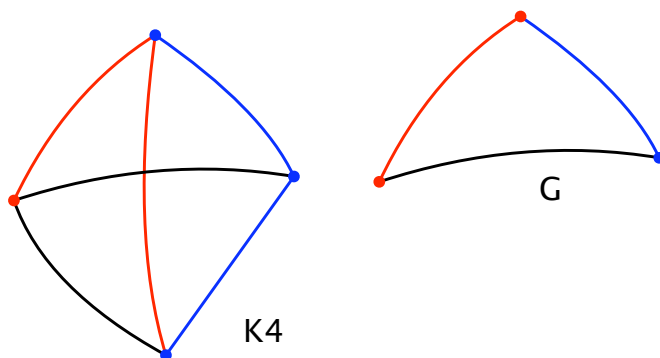


Figura 1.16:  $G$  es una representación de la coloración de  $K^4$ .

Si coloreamos las aristas de  $K^n$  y una subgráfica  $H$  de  $K^n$  no tiene dos aristas del mismo color, decimos que  $H$  está *totalmente multicolorada*, y lo denotamos por TMC  $H$ .

Si  $H$  es una  $r$ -gráfica, denotamos como  $f(n, H)$  al máximo número de colores con los cuales la  $r$ -gráfica completa con  $n$  vértices  $K_{(r)}^n$  puede ser coloreada sin contener una TMC  $H$ .

Si  $\mathcal{L}$  es una familia de  $r$ -gráficas denotamos por  $ext(n, \mathcal{L})$  al máximo número de  $r$ -úplas que una  $r$ -gráfica con  $n$  vértices puede tener sin contener una hipergráfica de  $\mathcal{L}$ . Si  $\mathcal{L} = \{H\}$  en lugar de  $ext(n, \{H\})$  simplemente escribimos  $ext(n, H)$ .

Dada una  $r$ -gráfica  $H$ , definimos  $ext^*(n, H)$  como el mínimo entero tal que toda  $r$ -gráfica  $G$  con  $ext^*(n, H)$   $r$ -úplas contiene a  $H$ .

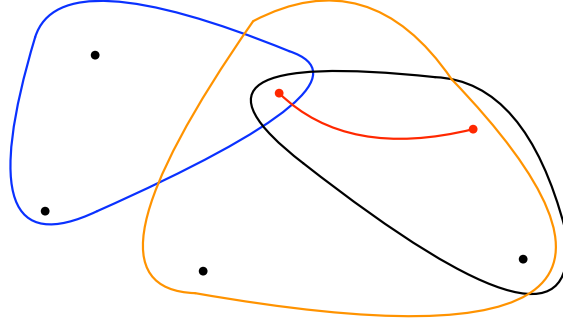


Figura 1.17: Hipergráfica.

Dada una familia de  $r$ -gráficas  $\mathcal{L}$ , definimos  $ext^*(n, \mathcal{L})$  como el mínimo entero tal que toda  $r$ -gráfica  $G$  con  $ext^*(n, \mathcal{L})$   $r$ -uplas contiene a alguna hipergráfica de  $\mathcal{L}$ .

Notemos que

$$ext(n, H) + 1 = ext^*(n, H)$$

y que

$$ext(n, \mathcal{L}) + 1 = ext^*(n, \mathcal{L}).$$

Dada  $\mathcal{L}$  una familia de hipergráficas  $r$ -uniformes definimos las siguientes familias de hipergráficas:

$$\mathcal{L}^- = \{H - e : H \in \mathcal{L} \text{ y } e \in E(H)\}.$$

Notemos que si  $G \in \mathcal{L}^-$ ,  $G$  es una hipergráfica  $r$ -uniforme.

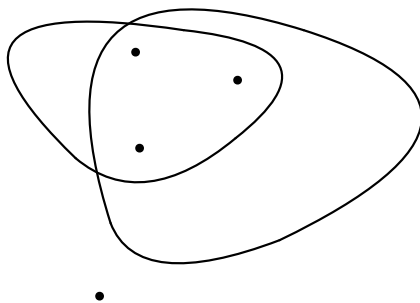


Figura 1.18: Aristas múltiples.

Decimos que la hipergráfica  $r$ -uniforme  $G$  está en la familia  $\mathcal{L}^+$  si al colorear  $G$  con  $e(G)$  colores y  $\bar{G}$  de forma arbitraria tengo una TMC  $H$  de  $\mathcal{L}$ .

Si  $t$  es un número natural y  $H$  es una  $r$ -gráfica con

$$V(H) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\},$$

construimos la  $r$ -gráfica  $H(t)$  como sigue: por cada vértice  $x_i$  de  $H$  ponemos  $t$  vértices  $x_{i1}, \dots, x_{it}$  en  $H(t)$ , de modo que

$$V(H(t)) = \{x_{11}, \dots, x_{1t}, x_{21}, \dots, x_{2t}, \dots, x_{k1}, \dots, x_{kt}\};$$

$(x_{i_1 j_1}, x_{i_2 j_2}, \dots, x_{i_r j_r})$  es una  $r$ -upla de  $H(t)$  si y sólo si los  $j_k$ 's son distintos y  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$  es una  $r$ -upla de  $H$  (Figura 1.21).

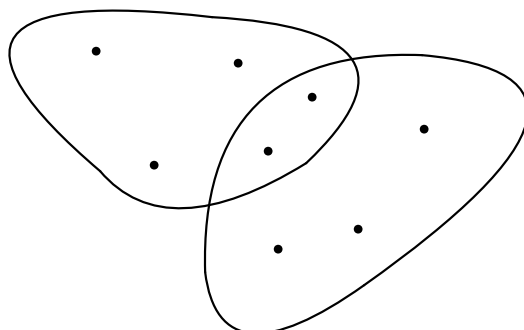


Figura 1.19: Aristas adyacentes.

### 1.3. Órdenes $o(n)$ , $O(n)$ . Límite Superior e Inferior

Introduciremos las notaciones (de Landau) de  $o(n)$  y  $O(n)$  y los conceptos de límite superior y límite inferior de una sucesión.

Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones definidas en algún subconjunto de  $\mathbb{R}$ , entonces se dice que  $f(x) \in O(g(x))$  cuando  $x \rightarrow \infty$  si existen  $M, x_0 \in \mathbb{R}$  tales que para cada  $x > x_0$ ,  $|f(x)| < M|g(x)|$ .

Y se dice que  $f(x) \in O(g(x))$  cuando  $x \rightarrow a$ , si existen dos números positivos  $M$  y  $\delta$  tales que  $|f(x)| < M|g(x)|$  cuando  $|x-a| < \delta$ . Cuando  $g(x)$  es distinto de cero suficientemente cerca de  $a$ , ésto equivale a que  $\limsup_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$ .

Frecuentemente se escribe  $f(x) = O(g(x))$  en lugar de  $f(x) \in O(g(x))$ .

Las propiedades de esta notación son:

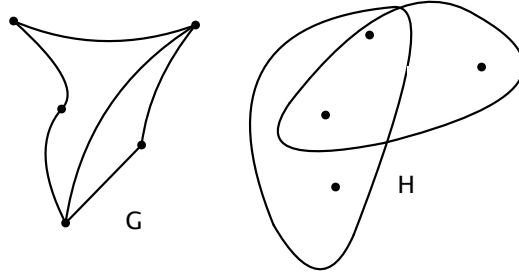


Figura 1.20:  $G$  es una 2-gráfica,  $H$  es una 3-gráfica

- 1)  $f_1 \in O(g_1)$  y  $f_2 \in O(g_2)$ , entonces  $f_1 + f_2 \in O(g_1 + g_2)$ .
- 2)  $f_1 \in O(g_1)$  y  $f_2 \in O(g_2)$ , entonces  $f_1 f_2 \in O(g_1 g_2)$ .
- 3) si  $h \in O(g)$ , entonces  $fh \in O(fg)$ .
- 4) si  $h \in O(g)$ , entonces  $f + h \in O(f + g)$ .
- 5) si  $f \in O(g + g)$ , entonces  $f \in O(g)$ , ( $O(g + g) \subseteq O(g)$ ).
- 6) sea  $k \in \mathbb{R}$ , entonces  $O(k.g) = O(g)$ .

Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones definidas en algún subconjunto de  $\mathbb{R}$ , entonces se dice que  $f(x) \in o(g(x))$  cuando  $x \rightarrow \infty$  si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ . Frecuentemente se abusa de la notación y se dice que  $f(x) = o(g(x))$ .

Las propiedades de esta notación son:

- 1)  $o(f) + o(f) \subseteq o(f)$ , (es decir, si  $h, g \in o(f)$ , entonces  $h + g \in o(f)$ ).
- 2)  $o(f)o(g) \subseteq o(fg)$ .
- 3)  $o(o(f)) \subseteq o(f)$  (es decir, si  $h \in o(f)$  y  $g \in o(h)$ , entonces  $g \in o(f)$ ).

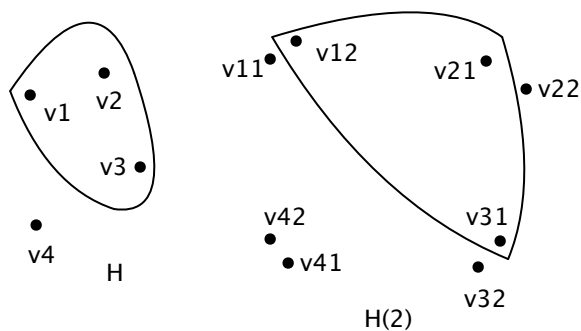


Figura 1.21: Construcción de la gráfica  $H(2)$

4)  $o(f) \subseteq O(f)$ .

Dada una sucesión de números reales  $\{x_n\}$  se define el *límite inferior* de la sucesión como

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \geq 0} \inf_{m \geq n} x_m = \sup\{\inf\{x_m : m \geq n\} : n \geq 0\},$$

y se define el *límite superior* de la sucesión como

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \geq 0} \sup_{m \geq n} x_m = \inf\{\sup\{x_m : m \geq n\} : n \geq 0\}.$$
<sup>1</sup>

En caso de que suceda que

---

<sup>1</sup>Más generalmente, podemos definir estos límites en un conjunto parcialmente ordenado donde el ínfimo y el supremo existan, sin embargo para los propósitos de este trabajo basta hacerlo en  $\mathbb{R}$ , (aquí siempre existen dichos límites).



$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

decimos que la sucesión  $x_n$  tiene *límite* y

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

# Capítulo 2

## Resultados Previos

En este capítulo revisaremos algunos resultados que nos ayudarán a demostrar los teoremas principales de éste trabajo en el Capítulo 3 y 4. El lector notará que algunos no tienen demostración, lo cual se debe a la extensión o tecnicismo de las mismas.

Se conoce el siguiente resultado ([2]).

**Teorema 1.** *Existe una constante  $\alpha > 0$  tal que si  $0 < \varepsilon < \frac{1}{r}$  y*

$$m > \left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) \frac{n^2}{2}, \quad (2.1)$$

entonces cada elemento de  $G(n, m)$  contiene a  $K_{r+1}(t)$ , donde

$$t = \left\lfloor \frac{\alpha \log n}{r \log 1/\varepsilon} \right\rfloor. \quad (2.2)$$

**Teorema 2.** *Dada una familia de gráficas  $\{F_1, \dots, F_s\}$ , sucede que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{ext}(n, \{F_1, \dots, F_s\})n^{-2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right)$$

donde

$$d + 1 = \min\{\chi(F_i) | i = 1, \dots, s\}.$$

**Demostración:**

Podemos suponer que  $d + 1 = \min\{\chi(F_i) | i = 1, \dots, s\} = \chi(F_1)$ . Por definición tenemos entonces que  $F_i$  no es  $d$ -coloreable para  $i = 1, \dots, s$ .

Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Supongamos que existe  $F \in \{F_1, \dots, F_s\}$  tal que  $F$  es subgráfica de  $T_d(n)$ . Entonces, si  $V_1, \dots, V_d$  es la partición de los vértices de  $T_d(n)$  en conjuntos independientes,  $V(F) \cap V_i$  es independiente para cada  $i = 1, \dots, d$ . Luego entonces  $F$  tiene una buena  $d$ -coloración, lo cual contradice la elección de  $d$ . De modo que  $F_i \not\subseteq T_d(n)$  para toda  $i \in \{1, \dots, s\}$ .

Entonces, por (1.1)

$$\text{ext}(n, \{F_1, \dots, F_s\}) \geq e(T_d(n)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right) n^2 + O(n).$$

De modo que

$$\liminf \text{ext}(n, \{F_1, \dots, F_s\})n^{-2} \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.3)$$

Lo que haremos a continuación es acotar  $ext(n, \{F_1, \dots, F_s\})n^{-2}$  superiormente. Para ésto, usando el Teorema 4, se demostrará que si  $n$  es suficientemente grande, entonces cada elemento de  $G(n, m)$  contiene a  $F_1$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ .

Notemos que, si  $t$  es el máximo orden de los elementos de  $\{F_1, \dots, F_s\}$ ,  $m \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d} + \varepsilon\right) n^2$  y  $n$  es suficientemente grande, entonces

$$t \leq \left\lfloor \frac{\alpha \log n}{r \log 1/\varepsilon} \right\rfloor = t_0,$$

(pues  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha \log n}{r \log 1/\varepsilon} = \infty$  y  $t$  está acotado), luego por el Teorema 4, cada elemento de  $G(n, m)$  contiene una  $K_{d+1}(t_0)$ . Como  $K_{d+1}(t) \subseteq K_{d+1}(t_0)$ , entonces cada elemento de  $G(n, m)$  contiene una  $K_{d+1}(t)$ .

Como  $K_{d+1}(t)$  contiene a  $F_1$  pues  $F_1$  es  $d+1$  cromática, entonces  $F_1 \subseteq G$  para cada  $G \in G(n, m)$ , de modo que

$$ext(n, \{F_1, \dots, F_s\})n^{-2} \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces

$$\limsup ext(n, \{F_1, \dots, F_s\})n^{-2} \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.4)$$

Así, de (2.3) y (2.4) tenemos que para cada  $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \limsup ext(n, \{F_1, \dots, F_s\})n^{-2} \geq$$

$$\begin{aligned} \liminf ext(n, \{F_1, \dots, F_s\})n^{-2} &\geq \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right). &\end{aligned} \quad (2.5)$$

De modo que

$$\begin{aligned} |\limsup ext(n, \{F_1, \dots, F_s\})n^{-2} - \liminf ext(n, \{F_1, \dots, F_s\})n^{-2}| &\leq \\ \left| \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right) + \frac{\varepsilon}{2} - \left( \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right) - O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right| & \\ = \frac{\varepsilon}{2} - O\left(\frac{1}{n}\right) &< \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Por tanto, el límite de  $ext(n, \{F_1, \dots, F_s\})$  existe, y

$$\begin{aligned} \limsup ext(n, \{F_1, \dots, F_s\})n^{-2} &= \liminf ext(n, \{F_1, \dots, F_s\})n^{-2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext(n, \{F_1, \dots, F_s\})}{n^2}. \end{aligned}$$

Luego por (2.5)

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext(n, \{F_1, \dots, F_s\})}{n^2} \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right) - \frac{\varepsilon}{2},$$

así que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext(n, \{F_1, \dots, F_s\})}{n^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right). \quad (2.7)$$

Q.E.D.

El Teorema 5 nos dice qué pasa si la familia de gráficas es finita, pero nos gustaría no estar limitados a este caso y poder usar familias arbitrarias de gráficas. Para eso demostraremos el siguiente teorema, en cuya demostración usamos el resultado anterior.

**Teorema 3.** *Si  $\mathcal{F}$  es una familia de gráficas, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ext(n, \{\mathcal{F}\})n^{-2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right)$$

donde  $d + 1 = \min\{\chi(F) | F \in \mathcal{F}\}$ .

**Demostración:**

Sea  $n \in \mathbb{N}$ , y sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $d + 1 = \min\{\chi(F) | F \in \mathcal{F}\}$ , entonces  $F$  no es  $d$  coloreable si  $F \in \mathcal{F}$ , de modo que  $F \notin T_d(n)$  para  $F$  en  $\mathcal{F}$ . Entonces,

$$ext(n, \mathcal{F}) \geq e(T_d(n)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right) n^2 + O(n),$$

de modo que

$$\liminf(n, \mathcal{F})n^{-2} \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.8)$$

Sea  $F_1 \in \mathcal{F}$  tal que  $\chi(F_1) = d + 1$ . Por el Teorema 5,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \text{ext}(n, \{F_1\}) \right) n^{-2} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \text{ext}(n, \{F_1\}) \right) n^{-2}.$$

Como  $\{F_1\} \subseteq \mathcal{F}$ , vemos que para toda  $F \in \mathcal{F}$ , si  $F \not\subseteq G$ , en particular sucede que  $F_1 \not\subseteq G$ . Por lo que

$$\{G|F \not\subseteq G \quad \forall F \in \mathcal{F}\} \subseteq \{G|F_1 \not\subseteq G\}$$

de modo que

$$\max\{e(G)|F \not\subseteq G \quad \forall F \in \mathcal{F}\} \leq \max\{e(G)|F_1 \in G\},$$

así que

$$\text{ext}(n, \mathcal{F}) \leq \text{ext}(n, \{F_1\}).$$

Por tanto

$$\limsup(\text{ext}(n, \mathcal{F})) \leq \limsup(\text{ext}(n, \{F_1\})),$$

y así

$$\limsup(ext(n, \mathcal{F}))n^{-2} \leq \limsup(ext(n, \{F_1\}))n^{-2}. \quad (2.9)$$

Entonces, por la cota superior en (2.5) (prueba del teorema anterior), (2.8) y (2.9)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right) + \frac{\varepsilon}{2} &\geq \limsup(ext(n, \{F_1\}))n^{-2} \geq \limsup(ext(n, \mathcal{F}))n^{-2} \\ &\geq \liminf(ext(n, \mathcal{F}))n^{-2} \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned} \limsup(ext(n, \mathcal{F}))n^{-2} &= \liminf(ext(n, \mathcal{F}))n^{-2} \\ &= \lim ext(n, \mathcal{F})n^{-2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right). \end{aligned}$$

Q.E.D.

**Teorema 4.** *Si  $\mathcal{F}$  es una familia de gráficas, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext(n, \mathcal{F})}{\binom{n}{2}} = \left(1 - \frac{1}{d}\right). \quad (2.10)$$



**Demostración:**

Notemos que

$$\frac{\text{ext}(n, \mathcal{F})}{\binom{n}{2}} = \frac{\frac{\text{ext}(n, \{\mathcal{F}\})}{n^2}}{\frac{\binom{n}{2}}{n^2}},$$

y entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ext}(n, \mathcal{F})}{\binom{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\text{ext}(n, \{\mathcal{F}\})}{n^2}}{\frac{\binom{n}{2}}{n^2}}.$$

Y gracias al Teorema 6, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\text{ext}(n, \mathcal{F})}{n^2}}{\frac{\binom{n}{2}}{n^2}} = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{2}}{n^2}}.$$

Por otro lado

$$\frac{\binom{n}{2}}{n^2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2!}}{n^2} = \frac{n^2 - n}{2n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}.$$

Y así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}.$$

De modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext(n, \mathcal{F})}{\binom{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{ext(n, \mathcal{F})}{n^2}}{\frac{\binom{n}{2}}{n^2}} = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right)}{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{d}\right).$$

Q.E.D.

El siguiente es un lema muy útil a la hora de demostrar los teoremas que andamos persiguiendo.

En lo que sigue, sea  $H$  una gráfica y sea  $\mathcal{L} = \{H\}$ .

**Lema 1.** *Si  $\mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{L}^+$ , entonces*

$$1 + ext(n, \mathcal{L}^-) \leq f(n, H) \leq ext(n, \mathcal{L}^*). \quad (2.11)$$

**Demostración:**

Sea  $G$  una gráfica extremal para  $\mathcal{L}^-$  con  $n$  vértices (recuerde que  $\mathcal{L} = \{H\}$ ), ésto es,  $G$  no contiene gráficas de la familia  $\mathcal{L}^-$  y  $e(G) = m = ext(n, \mathcal{L}^-)$ .

Primero veamos que si coloreamos  $G$  con  $e(G)$  colores distintos “1”, “2”, ..., “ $m$ ”, y coloreamos a  $\bar{G}$  con otro color “0”, la coloración obtenida de  $K^n = K^{v(G)}$  no tiene TMC  $H$ . Supongamos que sí, es decir, en la coloración que obtuvimos de  $K^n$  existe una TMC  $H$ . Puesto que las aristas de  $\bar{G}$  son todas de un mismo color, entonces dicha TMC  $H$  tiene a lo mas una arista de  $\bar{G}$ , digamos  $e_1$ , por lo que  $H - e_1 \subseteq G$ , pero  $H - e_1 \in \mathcal{L}^-$ , luego  $G$  no puede ser una gráfica extremal

para  $\mathcal{L}^-$ , lo cual es una contradicción, de forma que la coloración no tiene una TMC  $H$ .

Por lo tanto

$$1 + \text{ext}(n, \mathcal{L}^-) \leq f(n, H).$$

Para la demostración del lado derecho de la desigualdad coloreemos  $K^n$  con  $\text{ext}(n, \mathcal{L}^*) + 1$  colores, y consideremos una representación  $G$  de dicha coloración con  $n$  vértices (una subgráfica de  $K^n$  que tiene una arista de cada color). Entonces  $G$  tiene  $\text{ext}(n, \mathcal{L}^*) + 1$  aristas, luego (por definición) existe una  $J \in \mathcal{L}^*$  tal que  $J \subseteq G$ . Notemos que como  $J \subseteq G$  entonces  $K^{v(J)} \subseteq K^{v(G)} = K^n$ . Además como  $G$  es una representación de la coloración y  $J \subseteq G$  entonces cada arista de  $J$  tiene un color distinto, ésto es,  $J$  está coloreada con  $e(J)$  colores distintos, (y  $\bar{J}$  está coloreado de alguna forma, pues  $K^{v(J)} \subseteq K^n$ ), entonces, dado que  $J \in \mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{L}^+$ , ésta coloración debe tener una TMC  $H \subseteq K^{v(J)} \subseteq K^n$ .

Por tanto

$$\text{ext}(n, \mathcal{L}^*) + 1 > f(n, H).$$

De modo que

$$\text{ext}(n, \mathcal{L}^*) \geq f(n, H).$$

Q.E.D.

Notemos que en esta demostración nunca usamos el hecho de que las aristas de  $G$  fueran conjuntos de dos elementos, por lo que la prueba también es válida para hipergráficas.

Antes de continuar necesitamos observar un par de cosas más, planteadas en los lemas siguientes. El resultado del siguiente lema es muy simpático, aunque en realidad no nos servirá para demostrar los Teoremas, puesto que, debido a que la familia de gráficas  $\mathcal{L}^+$  es generalmente muy difícil de describir, es más simple utilizar el lema anterior.

**Lema 2.**  $f(n, H) = ext(n, \mathcal{L}^+)$ .

**Demostración:**

Por el Lema 1, si hacemos  $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}^+ \subseteq \mathcal{L}^+$ , entonces tenemos que

$$f(n, H) \leq ext(n, \mathcal{L}^+).$$

Falta demostrar que  $ext(n, \mathcal{L}^+) \leq f(n, H)$ . Para ésto basta ver que existe una coloración de  $K^n$  con  $ext(n, \mathcal{L}^+)$  colores que no tiene una TMC  $H$ .

Sea  $J$  una gráfica extremal para  $\mathcal{L}^+$  con  $n$  vértices, i.e.  $e(J) = m = ext(n, \mathcal{L}^+)$ . Notemos lo siguiente:

(a)  $H \in \mathcal{L}^+$

(b)  $J \notin \mathcal{L}^+$ , pues  $J \subseteq J$  y  $G \not\subseteq J$  para toda  $G \in \mathcal{L}^+$ , pues  $J$  es gráfica extremal para  $\mathcal{L}^+$ .

Ahora coloreemos  $J$  con  $e(J)$  colores “1”, “2”, ..., “ $m$ ”. Como  $J \notin \mathcal{L}^+$  (observación (b)) existe una forma de colorear  $\bar{J}$  de manera que la

coloración resultante de  $K^n$  no tenga una TMC  $H$ , . En esta coloración usamos al menos  $m$  colores, luego

$$e(J) = \text{ext}(n, \mathcal{L}^+) \leq f(n, H).$$

De modo que

$$\text{ext}(n, \mathcal{L}^+) \leq f(n, H),$$

y entonces

$$f(n, H) \leq \text{ext}(n, \mathcal{L}^+) \leq f(n, H).$$

Así que

$$f(n, H) = \text{ext}(n, \mathcal{L}^+). \quad (2.12)$$

Q.E.D.

Observemos que en esta demostración tampoco usamos el hecho de que las aristas son conjuntos de tamaño 2 (es decir, no usamos el hecho de que estamos trabajando con 2-gráficas), por lo que el resultado también es cierto para hipergráficas.

**Lema 3.** Sean  $G_1, G_2 \in \mathcal{L}^+$ . Si borramos una arista  $(x, x')$  de  $G_1$  y una arista  $(y, y')$  de  $G_2$  e identificamos  $x$  con  $y$  y  $x'$  con  $y'$ , entonces la gráfica obtenida  $G_3$  está en  $\mathcal{L}^+$ .

**Demostración:**

Vamos a colorear la gráfica  $G_3$  con  $e(G_3)$  colores distintos y el complemento de forma arbitraria. Digamos que a la arista  $(x, x')$  (que está en  $\bar{G}_3$ ) la coloreamos con el color  $k$ .

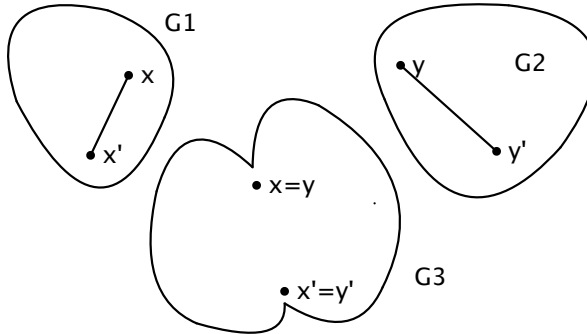


Figura 2.1:  $G^3 \in \mathcal{L}^+$

Supongamos que ni  $G_1$  ni  $G_2$  están totalmente multicoloreadas con esta coloración de  $K^{v(G_3)}$  ( $G_1, G_2 \subseteq G_3 + (x, x') \subseteq K^{v(G_3)}$ ). Como  $G_3$  está totalmente multicoloreada y la única arista de  $G_1$  que no está en  $G_3$  es  $(x, x')$ , entonces lo único que puede pasar es que el color que se repite es  $k$ , i.e. existe  $e_1 \in E(G_1) \cap E(G_3)$  que es de color  $k$ . Análogamente existe  $e_2 \in E(G_2) \cap E(G_3)$  que es de color  $k$ .

Notemos además que  $(E(G_1) \cap E(G_3)) \cap (E(G_2) \cap E(G_3))$  es vacío por la forma en que construimos  $G_3$ , de modo que  $e_1 \neq e_2$ , luego en  $G_3$  hay dos aristas coloreadas con el mismo color, lo cual es una contradicción, pues habíamos coloreado  $G_3$  con  $e(G_3)$  colores distintos. Por lo tanto,  $G_1$  está totalmente multicoloreada, o  $G_2$  está totalmente multicoloreada.

Podemos suponer que  $G_1$  es TMC. Como  $G_1 \subseteq K^{v(G_3)}$  entonces  $K^{v(G_1)} \subseteq K^{v(G_3)}$ . Como  $G_1 \in \mathcal{L}^+$ , entonces  $K^{v(G_1)}$  tiene una TMC  $H$ , por lo que  $K^{v(G_3)}$  tiene una TMC  $H$ , así que  $G_3 \in \mathcal{L}^+$ .

Q.E.D.

El siguiente lema es la generalización del resultado anterior para hipergráficas.

**Lema 4** (generalización). *Sean  $G_1$  y  $G_2$  hipergráficas de la familia  $\mathcal{L}^+$ . Si borramos una  $r$ -upla  $(x_1, \dots, x_r)$  de  $G_1$  y una  $r$ -upla  $(y_1, \dots, y_r)$  de  $G_2$  e identificamos  $x_i$  con  $y_i$ , entonces la hipergráfica obtenida  $G_3$  está en  $\mathcal{L}^+$ .*

En los lemas que quedan en este capítulo consideraremos sólo el caso de 3-gráficas, debido a la complejidad de la notación. La demostración para los casos en  $r$ -gráficas se realiza de manera análoga.

Sean  $G$  una hipergráfica 3-uniforme,  $V(G) = \{x_1, \dots, x_m\}$  el conjunto de sus vértices, y  $T(G)$  el conjunto de sus tripletas.

**Lema 5.** *Si  $G$  es una hipergráfica 3-uniforme dada, sea  $e \in T(G)$ , digamos que  $e = (x, y, z)$ , sea  $G' = G - e$ . En  $G'(t)$  existen  $G'_1, \dots, G'_t$  hipergráficas isomorfas a  $G'$ , y tres vértices  $x', y', z'$  de modo que  $G'_i + (x', y', z') = G_i$  es isomorfa a  $G$ , para cada  $i \in \{1, \dots, t\}$ .*

**Demostración:**

Sea  $V(G) = \{x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, \dots, x_m\} = V(G - e) = V(G')$ .

Entonces  $G'(t)$  tiene  $tm$  vértices, a saber

$$V(G'(t)) = \{x_{1,1}, \dots, x_{1,t}, x_{2,1}, \dots, x_{2,t}, \dots, x_{m,t}\}.$$

Notemos que, en  $G'(t)$ ,

$$\{x_{1,j_1}, x_{2,j_2}, \dots, x_{m,j_m}\}$$

(con  $j_k \in \{1, \dots, t\}$  para cada  $k \in \{1, \dots, m\}$ ) con las adyacencias correspondientes es isomorfo a  $G'$  (i.e.  $G'' = [x_{1,j_1}, x_{2,j_2}, \dots, x_{m,j_m}] \cong G'$ ).

Sean  $\varphi : V(G') \rightarrow V(G'')$  y  $\psi : E(G') \rightarrow E(G'')$  dadas por

$$\varphi(x_s) = x_{s,j_s}$$

$$\psi((x_s, x_l, x_k)) = (\varphi(x_s), \varphi(x_l), \varphi(x_k)) = (x_{s,j_s}, x_{l,j_l}, x_{k,j_k}).$$

Veamos que  $\varphi$  es biyectiva. Supongamos que existen  $x_s, x_k \in V(G')$  tales que  $\varphi(x_s) = \varphi(x_k)$ , entonces  $x_{s,j_s} = x_{k,j_k}$ , entonces  $s = k$ , por lo que  $\varphi$  es inyectiva. Sea  $v \in V(G'')$ , entonces  $v = x_{s,j_s}$  para alguna  $s \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j_s \in \{1, \dots, t\}$ , entonces  $v = \varphi(x_s)$ , por lo que  $\varphi$  es suprayectiva.

Veamos que  $\psi$  es biyectiva. Supongamos que existen  $e_1 = (x_{s_1}, x_{l_1}, x_{k_1})$  y  $e_2 = (x_{s_2}, x_{l_2}, x_{k_2}) \in E(G')$  tales que  $\psi(e_1) = \psi(e_2)$ , entonces

$$(\varphi(x_{s_1}), \varphi(x_{l_1}), \varphi(x_{k_1})) = (\varphi(x_{s_2}), \varphi(x_{l_2}), \varphi(x_{k_2}))$$

asi que

$$(x_{s_1,j_{s_1}}, x_{l_1,j_{l_1}}, x_{k_1,j_{k_1}}) = (x_{s_2,j_{s_2}}, x_{l_2,j_{l_2}}, x_{k_2,j_{k_2}}),$$



luego  $x_{s_1, j_{s_1}} = x_{s_2, j_{s_2}}$ ,  $x_{l_1, j_{l_1}} = x_{l_2, j_{l_2}}$  y  $x_{k_1, j_{k_1}} = x_{k_2, j_{k_2}}$ , de modo que  $s_1 = s_2$ ,  $l_1 = l_2$ ,  $k_1 = k_2$ , por lo que  $\psi(e_1) = \psi(e_2)$ , así que  $\psi$  es inyectiva.

Sea  $e \in E(G'')$ , entonces  $e = (x_{s, j_s}, x_{l, j_l}, x_{k, j_k})$  para algunas

$$s, l, k \in \{1, \dots, m\}, j_s, j_l, j_k \in \{1, \dots, t\},$$

entonces  $e = (\varphi(x_s), \varphi(x_l), \varphi(x_k)) = \psi(x_s, x_l, x_k)$ ; ahora

$$(x_s, x_l, x_k) \in E(G'),$$

pues  $e \in E(G'') \subseteq E(G(t))$  sí y sólo si  $s, l$  y  $k$  son distintos y  $(x_s, x_l, x_k) \in E(G')$  de modo que  $\psi$  es suprayectiva.

Entonces  $\varphi$  y  $\psi$  son biyectivas, de modo que  $(\varphi, \psi)$  es un isomorfismo entre  $G''$  y  $G'$ , de modo que  $G'' \cong G'$ .

En particular  $G'_1 = [x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, x_{4,1}, \dots, x_{m,1}]$  es isomorfo a  $G'$ .

Sean  $x' = x_{1,1}$ ,  $y' = x_{2,1}$  y  $z = x_{3,1}$ . Sean

$$G'_2 = [x_{1,1} = x', x_{2,1} = y', x_{3,1} = z', x_{4,2}, \dots, x_{m,2}],$$

$$G'_3 = [x', y', z', x_{4,3}, \dots, x_{m,3}]$$

.

.

.

$$G'_t = [x', y', z', x_{4,t}, \dots, x_{m,t}].$$

Así, tenemos que por lo observado anteriormente  $G'_1, G'_2, \dots, G'_t$  son isomorfos a  $G'$ , y  $G'_i + (x', y', z') = G_i$  es isomorfa a  $G$  para cada  $i \in \{1, \dots, t\}$ . Notemos que los  $G'_t$  no tienen vértices en común más que  $x', y', z'$ .

Q.E.D

**Lema 6.** *Si  $G$  es una 3-gráfica dada,  $\mathcal{L} = \{G\}$  y  $\mathcal{G} = \mathcal{L}^-$ , entonces  $\mathcal{G}(2) \subseteq \mathcal{L}^+$ .*

**Demostración:**

Sea  $U(2) \in \mathcal{G}(2)$ . Lo que debemos demostrar es que  $U(2) \in \mathcal{L}^+$ .

Como  $U \in \mathcal{G}$  entonces existe  $e \in T(G)$  tal que  $U = G - e$ . Digamos que  $e = (x, y, z)$ ; entonces  $U + (x, y, z) = G$ . Por la observación anterior  $U(2)$  contiene tres vértices  $x', y', z'$  y dos subgráficas  $U_1$  y  $U_2$  isomorfas a  $U$  y que cumplen que  $U_i + (x', y', z') = G_i$  es isomorfo a  $G$  para cada  $i \in \{1, 2\}$  y  $G_1$  y  $G_2$  no tienen más vértices en común que  $x', y'$  y  $z'$ .

Coloreemos  $U(2)$  con  $e(U(2))$  colores y  $\bar{U}(2)$  de forma arbitraria. Observemos que  $(x', y', z')$  nos quedó coloreado de algún color  $C$ ; como los únicos vértices que tienen en común  $G_1$  y  $G_2$  son  $x', y'$  y  $z'$ , entonces  $U_1$  y  $U_2$  no tienen tripletas en común, de forma que si el color  $C$  ocurre en  $U_1$  no puede ocurrir en  $U_2$  y viceversa.

Luego, podemos asumir que el color  $C$  no ocurre en  $U_2$ , de modo que

$$U_2 + (x', y', z') = G_2$$

está totalmente multicoloreada, y como  $G_2 \cong G$ , entonces esta coloración de  $K^{v(U(2))}$  tiene una TMC  $G$ , por lo que  $U(2) \in \mathcal{L}^+$ .

Q.E.D.

# Capítulo 3

## Los Teoremas de Gráficas

La meta en este capítulo es demostrar el Teorema 1 y el Teorema 2 (véase la introducción).

**Teorema 1** *Sea*

$$d + 1 = \min\{\chi(H - e) : e \in E(H)\}.$$

*Entonces*

$$\frac{f(n, H)}{\binom{n}{2}} \rightarrow \left(1 - \frac{1}{d}\right) \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

**Demostración:**

Sea  $e = (x, x')$  una arista de  $H$  tal que

$$\chi(H - e) = d + 1 = \min\{\chi(H - e) : e \in E(H)\}.$$

Tomemos  $G_1$  y  $G_2$  copias de  $H$ . Si omitimos la arista correspondiente a  $e$  en cada copia e identificamos los vértices correspondientes a  $x$  y los correspondientes a  $x'$  obtenemos una gráfica  $G_3$ . Por el Lema 3  $G_3 \in \mathcal{L}^+$ .

Afirmación:  $\chi(G_3) = \chi(H - e) = d + 1$ .

Notemos que  $H - e \subseteq G_3$ , por lo que  $\chi(G_3) \geq \chi(H - e) = d + 1$ . Teniendo una buena coloración de  $H - e$  con  $d + 1$  colores, coloreemos las dos copias de  $H - e$  que forman  $G_3$  con esta coloración, de forma que coincidan los colores de  $x$  y  $x'$ . Como la intersección de estas dos gráficas es exclusivamente  $\{x, x'\}$ , colorear así resulta una buena coloración de  $G_3$ , por lo que  $\chi(G_3) = d + 1$ . ■

Si  $\mathcal{L}^* = \{G_3\}$ , tenemos que  $\mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{L}^+$ , luego, por el Lema 1 tenemos que

$$f(n, H) \leq \text{ext}(n, G_3). \quad (3.1)$$

Por otro lado, si en el Teorema 7 hacemos  $\mathcal{F} = \mathcal{L}^*$ , como

$$\min\{\chi(G) : G \in \mathcal{F}\} = \chi(G_3) = d + 1,$$

tenemos que

$$\frac{\text{ext}(n, \mathcal{L}^*)}{\binom{n}{2}} \longrightarrow \left(1 - \frac{1}{d}\right) \quad \text{si } n \longrightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Esto es, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces

$$\left| \frac{\text{ext}(n, G_3)}{\binom{n}{2}} - \left(1 - \frac{1}{d}\right) \right| < \varepsilon.$$

Así tenemos que

$$-\varepsilon < \frac{\text{ext}(n, G_3)}{\binom{n}{2}} - \left(1 - \frac{1}{d}\right) < \varepsilon,$$

y luego

$$\frac{\text{ext}(n, G_3)}{\binom{n}{2}} < \varepsilon + \left(1 - \frac{1}{d}\right).$$

Así que

$$\text{ext}(n, G_3) < \binom{n}{2} \left( \varepsilon + \left(1 - \frac{1}{d}\right) \right).$$

Como  $\varepsilon \in o(1)$ , entonces

$$\text{ext}(n, G_3) \leq \binom{n}{2} \left( 1 - \frac{1}{d} + o(1) \right),$$

luego, por (3.1)

$$f(n, H) \leq \text{ext}(n, G_3) \leq \binom{n}{2} \left( 1 - \frac{1}{d} + o(1) \right). \quad (3.3)$$

Nótese que si  $L \in \mathcal{L}^-$ , entonces existe  $e \in E(H)$  tal que  $L = H - e$ .  
De modo que

$$\min\{\chi(L) : L \in \mathcal{L}^-\} = \min\{\chi(H - e) : e \in E(H)\} = d + 1.$$

Como  $\mathcal{L}^* = \{G_3\}$ , entonces  $\mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{L}^+$ , luego por el Lema 1

$$f(n, H) \geq 1 + \text{ext}(n, \mathcal{L}^-) \geq \text{ext}(n, \mathcal{L}^-).$$

Ahora, si en el Teorma 7 hacemos  $\mathcal{F} = \mathcal{L}^-$ , tenemos que

$$\frac{\text{ext}(n, \mathcal{L}^-)}{\binom{n}{2}} \longrightarrow \left(1 - \frac{1}{d}\right) \quad \text{si } n \longrightarrow \infty.$$

Esto es, para todo  $\varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_1$  entonces

$$\left| \frac{\text{ext}(n, \mathcal{L}^-)}{\binom{n}{2}} - \left(1 - \frac{1}{d}\right) \right| < \varepsilon.$$

De modo que

$$1 - \frac{1}{d} - \frac{\text{ext}(n, \mathcal{L}^-)}{\binom{n}{2}} < \varepsilon;$$

luego entonces

$$\left(1 - \frac{1}{d}\right) - \varepsilon < \frac{\text{ext}(n, \mathcal{L}^-)}{\binom{n}{2}}.$$

Así que

$$\left(1 - \frac{1}{d}\right) + o(1) < \frac{\text{ext}(n, \mathcal{L}^-)}{\binom{n}{2}}.$$

Por tanto

$$\binom{n}{2} \left(1 - \frac{1}{d} + o(1)\right) < \text{ext}(n, \mathcal{L}^-);$$

y entonces

$$f(n, H) \geq \text{ext}(n, \mathcal{L}^-) \geq \binom{n}{2} \left(1 - \frac{1}{d} + o(1)\right). \quad (3.4)$$

Ahora, si  $n \geq n_0, n_1$ , por (3.3) y (3.4) tenemos que

$$\left(1 - \frac{1}{d} + o(1)\right) \binom{n}{2} \leq f(n, H) \leq \left(1 - \frac{1}{d} + o(1)\right) \binom{n}{2},$$

por lo que

$$f(n, H) = \left(1 - \frac{1}{d} + o(1)\right) \binom{n}{2}.$$

Luego

$$\frac{f(n, H)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{d} + o(1),$$

y así

$$\frac{f(n, H)}{\binom{n}{2}} - \left(1 - \frac{1}{d}\right) = o(1).$$

Por tanto



$$\left( \frac{f(n,H) - (1 - \frac{1}{d})}{\binom{n}{2}} \right) \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \rightarrow \infty;$$

de modo que

$$\frac{f(n,H)}{\binom{n}{2}} \rightarrow \left(1 - \frac{1}{d}\right) \quad \text{si} \quad n \rightarrow \infty$$

Q.E.D.

Antes de pasar a la demostración del Teorema 2, necesitaremos unos cuantos resultados previos mas, para algunos de los cuales omitimos la demostración.

**Teorema 1** (Paul Erdős). *Sean  $r$ ,  $d$ , y  $k \leq r/2$  enteros positivos. Sea  $\mathcal{T}$  la clase de gráficas que se obtiene de  $K_d(r, \dots, r)$  al agregarle  $k$  aristas. Entonces*

$$ext(n, \mathcal{T}) = ext(n, K^{d+1}) + k - 1 \quad \text{si} \quad n \geq n_0(r, d, k). \quad (3.5)$$

Más aún,  $S^n$  es una gráfica extremal para  $\mathcal{T}$  si y sólo si se puede obtener al agregarle  $k$  aristas a  $K_d(n_1, \dots, n_d)$ , donde las  $n_i$ 's están definidas por

$$\sum n_i = n \quad \text{y} \quad \left| n_i - \frac{n}{d} \right| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, d. \quad (3.6)$$

**Lema 1.** Sea  $p \geq 4$ . Sea  $\mathcal{L} = \{K^p\}$ . Sean  $k = 2$ ,  $r \geq 5$  y  $d = p - 2$  como en el Teorema 8.

Entonces  $\mathcal{T}$  contiene 3 gráficas no isomorfas y todas ellas pertenecen a  $\mathcal{L}^+$ , i.e.  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}^+$ .

**Demostración:**

Analizaremos sólo el caso  $r = 5$ , la demostración en otros casos es análoga, pues sólo usamos el hecho de que hay suficientes vértices en cada elemento de la partición.

Tenemos que  $\mathcal{T}$  consta de las gráficas que se obtienen de  $K_{p-2}(5, \dots, 5)$  al agregarle 2 aristas.

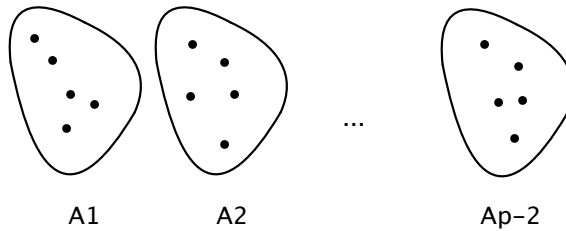


Figura 3.1:  $K_{p-2}(5, \dots, 5)$

Sea  $G \in \mathcal{T}$ . Sean  $e_1 = (x_1, y_1)$  y  $e_2 = (x_2, y_2)$  las aristas que agregamos a  $K_{p-2}(5, \dots, 5)$  para obtener  $G$ . Coloreamos  $G$  con  $e(G)$  colores y el complemento de forma arbitraria. Para ver que  $G \in \mathcal{L}^+$ , debemos mostrar que con ésta coloración  $K^{v(G)}$  tiene una TMC  $K^p$ .

Sean  $A_1, \dots, A_{p-2}$  los elementos de la partición de  $V(K_{p-2}(5, \dots, 5))$ . Notemos que dado que cada elemento de la partición es del mismo tamaño entonces los  $A_i$ 's son idénticos, de modo que sólo tenemos los siguientes casos:

Caso 1: Agregar las aristas en distintos  $A_i$ 's (Figura 3.2).

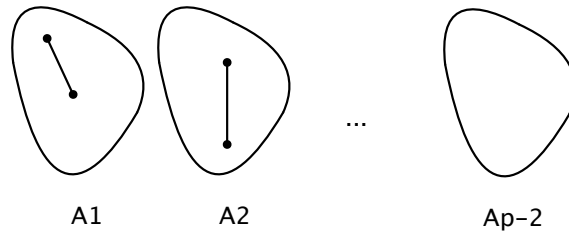


Figura 3.2: Caso1

Caso 2: Agregar las aristas en el mismo  $A_i$  de forma que no sean adyacentes (Figura 3.3).

Caso 3: Agregar las aristas  $e_1$  y  $e_2$  en el mismo  $A_i$  de forma que sean adyacentes (Figura 3.4).

Si  $G$  es del Caso 1. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que agregamos las aristas en los dos primeros elementos de la partición de  $V(K_{p-2}(5, \dots, 5))$ , es decir  $e_1 \in A_1$  y  $e_2 \in A_2$ . Para cada  $i$  con  $3 \leq i \leq p-2$  escojamos un vértice  $v_i \in A_i$ . Observemos que la gráfica inducida por  $\{x_1, x_2, y_1, y_2, v_3, \dots, v_{p-2}\}$ ,

$$G[x_1, x_2, y_1, y_2, v_3, \dots, v_{p-2}]$$

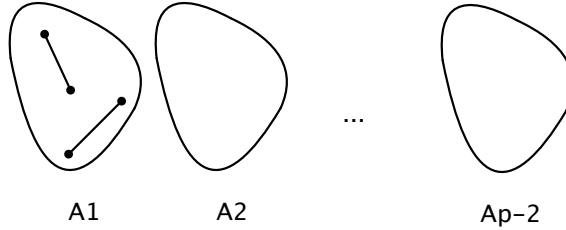


Figura 3.3: Caso2

tiene  $p$  vértices y todas las aristas posibles, luego es  $K^p$ ; es decir  $K^p \subseteq G$ .

Luego al colorear  $G$  con  $e(G)$  colores distintos,  $K^p$  queda totalmente multicoloreada, por lo que no importa como se haya coloreado  $\bar{G}$ , la coloración de  $K^{v(G)}$  tiene una  $K^p$  TMC, de modo que  $G \in \mathcal{L}^+$ .

Si  $G$  es del Caso 2. Podemos suponer que  $e_1, e_2 \in A_1$ . Para cada  $i$  con  $2 \leq i \leq p-2$  escogemos un vértice  $v_i \in A_i$ . Ahora sea  $u \in A_2$  distinto de  $v_2$  ( $u \neq v_2$ ), sea  $e_3 = (u, v_2)$  (Figura 3.5). Nótese que  $e_3 \in \bar{G}$ .

Como  $G$  está coloreada con  $e(G)$  colores, en la coloración arbitraria de  $\bar{G}$ ,  $e_3$  tiene el color de a lo más una arista de  $G$ , así  $e_3$  tiene el color de a lo más una arista de la gráfica  $G_1 = G[x_1, y_1, v_2, u, v_3, \dots, v_{p-2}]$ . Nótese que  $G_1 + e_3 = K^p$ , de modo que, si  $e_3$  no tiene el mismo color que una arista en  $G_1$ , tenemos una  $K^p$  TMC. Entonces supongamos que  $e_3$  tiene el color de una arista de  $G_1$ .

Hay dos posibilidades. La primera (Caso 2.1) es que  $e_3$  tenga el color de una arista  $(v_j, v_k)$  con  $v_j \in A_j, v_k \in A_k, j < k$  y  $k \neq 2$ . En éste

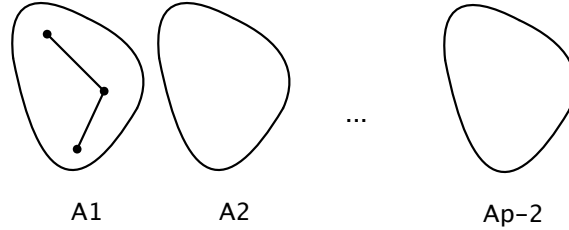


Figura 3.4: Caso 3

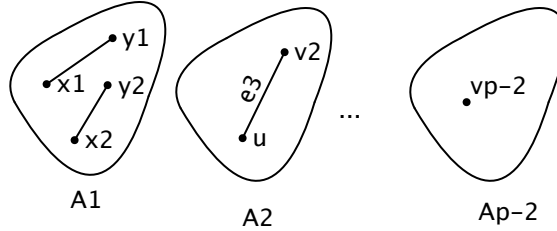
caso escogemos un vértice  $u_k$  de  $A_k$  distinto de  $v_k$  (Figura 3.6), y nos fijamos en la gráfica

$$G_2 = G[x_1, y_1, v_2, u, v_3, \dots, v_j, \dots, u_k, \dots, v_{p-2}] + \{e_3\}.$$

Notemos que es completa y tiene  $p$  vértices (pues sólo cambiamos  $v_k$  por  $u_k$ ), además es TMC, pues  $G$  está coloreada con  $e(G)$  colores, de modo que en la coloración de  $K^{v(G)}$  tenemos una  $K^p$  TMC. Por tanto  $G \in \mathcal{L}^+$ .

La segunda posibilidad (Caso 2.2) es que  $e_3$  tenga el color de  $e_1$  o de alguna arista que vaya de  $G_1 \cap A_1$  a  $G_1 \cap A_2$ , es decir, de  $(x_1, v_2)$ ,  $(y_1, v_2)$ ,  $(x_1, u)$ ,  $(y_1, u)$ . Como  $G$  está coloreada con  $e(G)$  colores y todas estas aristas están en  $G$ ,  $e_3$  no puede tener el color de ninguna de las siguientes aristas (que también están en  $G$ ):  $e_2$ ,  $(x_2, v_2)$ ,  $(y_2, v_2)$ ,  $(x_2, u)$ ,  $(y_2, u)$ . De modo que la gráfica (Figura 3.7)

$$G_2 = G[x_2, y_2, v_2, u, v_3, \dots, v_{p-2}] + \{e_3\}$$

Figura 3.5:  $u \neq v_2$ 

tiene  $p$  vértices, es completa y está totalmente multicoloreada; así que  $G \in \mathcal{L}^+$ .

Si  $G$  es del Caso 3. Podemos suponer que  $e_1, e_2 \in A_1$ . Como son adyacentes, podemos también suponer que  $e_1 = (x_1, y_1)$  y  $e_2 = (y_1, y_2)$ . Como en el caso anterior, para cada  $i$  con  $2 \leq i \leq p-2$  escogemos un vértice  $v_i \in A_i$  (Figura 3.8). Ahora sea  $u \in A_2$  distinto de  $v_2$  ( $u \neq v_2$ ), sea  $e_3 = (u, v_2)$ . Nótese que  $e_3 \in E(\bar{G})$ .

Como  $G$  es totalmente multicoloreada, entonces  $e_3$  tiene el color de a lo más una arista de  $G$ . Si el color de  $e_3$  no se repite en  $G$ , entonces la gráfica

$$G_3 = G[x_1, y_1, v_2, u, v_3, \dots, v_j, \dots, u_k, \dots, v_{p-2}] = G - e_2 + e_3$$

(como subgráfica de  $K^{v(G)}$ ) tiene  $p$  vértices, está totalmente multicoloreada y es completa, es decir, es  $K^p$ . Si  $e_3$  tiene el color de una arista de  $G$ , entonces, tenemos varias posibilidades:

La primera (Caso 3.1) es que  $e_3$  tenga el color de una arista  $(v_j, v_k)$

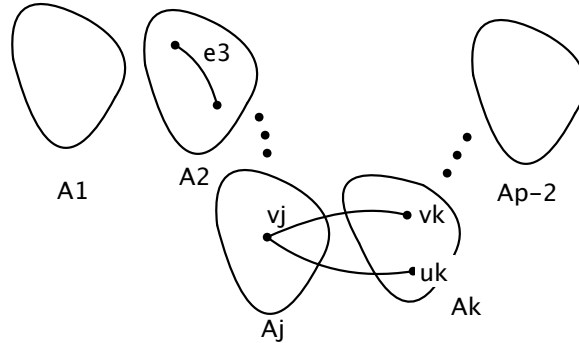


Figura 3.6: Se escoje  $u_k$  en lugar de  $v_k$

con  $v_j \in A_j$ ,  $v_k \in A_k$ ,  $j < k$  y  $k \neq 2$ . En éste caso escojemos un vértice  $u_k$  de  $A_k$  distinto de  $v_k$ , y nos fijamos en la gráfica

$$G_2 = G[x_1, y_1, v_2, u, v_3, \dots, v_j, \dots, u_k, \dots, v_{p-2}] + \{e_3\}.$$

Notemos que  $G_2$  es completa y tiene  $p$  vértices (pues sólo cambiamos  $v_k$  por  $u_k$ ). Además es TMC, pues  $G$  está coloreada con  $e(G)$  colores, de modo que en la coloración de  $K^{v(G)}$  tenemos una  $K^p$  TMC. Por tanto  $G \in \mathcal{L}^+$ .

La segunda (Caso 3.2) es que  $e_3$  tenga el color de una de las siguientes aristas:  $(x_1, v_2)$ ,  $(x_1, u)$ ,  $(y_2, v_2)$ ,  $(y_2, u)$ ,  $(y_1, v_2)$ ,  $(y_1, u)$ .

Si  $e_3$  tiene el color de una de las primeras dos, entonces la gráfica

$$G[y_1, y_2, v_2, u, v_3, \dots, v_{p-2}] + \{e_3\}$$

es completa y está totalmente multicoloreada. Si  $e_3$  tiene el color de  $(y_2, v_2)$  ó  $(y_2, u)$ , entonces

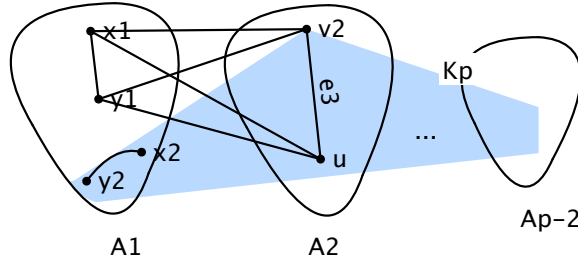


Figura 3.7: Usamos la arista  $(x_2, y_2)$

$$G[x_1, y_1, v_2, u, v_3, \dots, v_{p-2}] + \{e_3\}$$

es completa y está totalmente multicolorada. Entonces sólo nos queda ver el caso en el que  $e_3$  tenga el color de  $(y_1, v_2)$  ó  $(y_1, u)$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $e_3$  es del color de  $(y_1, u)$ .

Consideremos la arista  $f = x_1 y_2 \in \bar{G}$ . Puede suceder una de dos cosas,  $f$  tiene el color de  $e_3$  ó  $f$  no tiene el color de  $e_3$ .

Si  $f$  tiene el color de  $e_3$  (Caso 3.2.1) entonces, dado que  $G$  es TMC y la única arista en  $G$  del color de  $e_3$  es  $(y_1, u)$ , el triángulo  $[x_1, y_1, y_2]$  es TMC, de modo que la gráfica

$$G[x_1, y_1, y_2, v_2, v_3, \dots, v_{p-2}] + \{f\}$$

es una gráfica con  $p$  vértices, completa y totalmente multicolorada, que es lo que buscamos. Ahora veamos qué pasa si  $f$  y  $e_3$  no tienen el mismo color (Caso 3.2.2); notemos que entonces una de las siguientes afirmaciones es cierta (o las dos), debido a que cada arista de  $G$  está coloreada con un color distinto al de las demás:



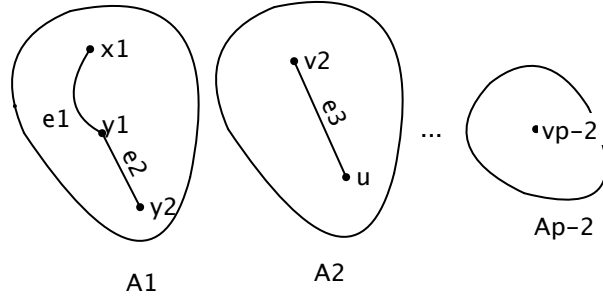


Figura 3.8: Escogemos  $v_i \in A_i$

1) el triángulo  $[x_1, y_1, y_2]$  es totalmente multicoloreado.

2) la gráfica  $K^4$  inducida por los vértices  $x_1, y_2, v_2, u$  es totalmente multicoloreada.

Si sucede 1), o bien  $G[x_1, y_1, y_2, v_2, v_3, \dots, v_{p-2}] + \{f\}$  es totalmente multicoloreada, tiene  $p$  vértices y es completa; o bien  $f$  tiene el color de una arista  $(v_j, z)$  con  $j \geq 2$  y  $z \in \{x_1, y_1, y_2, v_i : i < j\}$ . En este caso escogemos un vértice  $u_j \in A_j$  distinto de  $v_j$  y nos fijamos en la gráfica

$$G[x_1, y_1, y_2, v_2, \dots, u_j, \dots, v_{p-2}] + \{f\},$$

la cual es completa, tiene  $p$  vértices y es TMC.

Si sucede 2) y no sucede 1), el color de  $f$  es el color de la arista  $e_1$  o  $e_2$ , y así  $G[x_1, y_2, v_2, u, v_3, \dots, v_{p-2}] + \{f\}$  es totalmente multicoloreada, tiene  $p$  vértices y es completa. En cualquier caso tenemos lo que queríamos, una TMC  $K^p$ .

Por tanto tenemos que  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}^+$ .

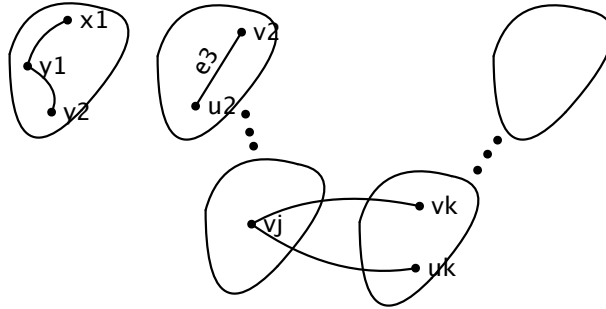


Figura 3.9: Escogemos  $u_k \neq v_k$

Q.E.D.

Ahora si estamos listos para demostrar el Teorema 2.

**Teorema 2** Sea  $p \geq 4$ . Existe una  $n_p \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > n_p$ , entonces

$$f(n, K^p) = \text{ext}(n, K^{p-1}) + 1.$$

Más aún, si  $K^n$  es coloreada con  $f(n, K^p)$  colores y no contiene un TMC  $K^p$ , entonces la coloración está únicamente determinada: se pueden dividir los vértices de  $K^n$  en  $p - 2$  clases  $A_1, \dots, A_{p-2}$  de forma que cada arista uniendo vértices en  $A_i$ 's distintos tiene su propio color (i.e., un color que sólo se usa una vez) y cada arista de la forma  $(x, y)$  donde  $x$  y  $y$  pertenecen al mismo  $A_i$  tiene el mismo color, independientemente de  $x$ ,  $y$  e  $i$ .

**Demostración:**

Sea  $p \geq 4$ . Sea  $\mathcal{L} = \{K^p\}$ . Sean  $k = 2, r \geq 5, d = p-2$  y  $n \geq n_0(r, d, k)$  como en el Teorema 8.

Observemos que  $\mathcal{L}^- = \{K^p - e\}$ , y que  $K^{p-1} \subseteq K^p - e$ . Entonces tenemos que si para alguna gráfica  $H$

$$K^{p-1} \not\subseteq H,$$

entonces

$$K^p - e \not\subseteq H,$$

por lo que

$$\{H : K^{p-1} \not\subseteq H\} \subseteq \{H : K^p - e \not\subseteq H\},$$

de donde se sigue que

$$\max\{e(H) : K^{p-1} \not\subseteq H\} \leq \max\{e(H) : K^p - e \not\subseteq H\}.$$

Esto es

$$ext(n, K^{p-1}) \leq ext(n, K^p - e). \quad (3.7)$$

Como  $T \subseteq \mathcal{L}^+$ , por el Lema 1 tenemos que

$$1 + ext(n, K^p - e) \leq f(n, K^p) \leq ext(n, T). \quad (3.8)$$

De (3.7) y (3.8) tenemos que

$$1 + \text{ext}(n, K^{p-1}) \leq f(n, K^p) \leq \text{ext}(n, \mathcal{T}). \quad (3.9)$$

Por el Teorema 8 vemos que, si  $n$  es suficientemente grande

$$\text{ext}(n, \mathcal{T}) = \text{ext}(n, K^{p-1}) + k - 1 = \text{ext}(K^{p-1}) + 1. \quad (3.10)$$

De (3.9) y (3.10) se sigue que

$$1 + \text{ext}(n, K^{p-1}) \leq f(n, K^p) \leq \text{ext}(n, \mathcal{T}) = \text{ext}(K^{p-1}) + 1. \quad (3.11)$$

Por tanto

$$f(n, K^p) = \text{ext}(K^{p-1}) + 1,$$

lo cual es la primera parte del Teorema 2.

Ahora nos gustaría describir la coloración extremal.

Consideremos una coloración extremal arbitraria de  $K^n$ . Sea  $G$  una representación de dicha coloración. Como de (3.11) concluimos que  $f(n, K^p) \leq \text{ext}(n, \mathcal{T})$ , por la forma en que probamos la cota superior del Lema 1,  $G$  debe ser una gráfica extremal para  $\mathcal{T}$ . Luego por el Teorema 8,  $G$  se obtiene de una gráfica  $K_{p-2}(n_1, \dots, n_{p-2})$ , que satisfaga (3.6) agregándole un arista. Lo que debemos demostrar es que si  $e$  es la arista de  $G$  para la cual  $G = \overline{K_{p-2}(n_1, \dots, n_{p-2})} + e$  y  $f$  es una arista arbitraria de  $\overline{K_{p-2}(n_1, \dots, n_{p-2})}$ , entonces  $e$  y  $f$  tienen el mismo color.

Dado que  $G$  es una representación de la coloración extremal de  $K^n$ , existe exactamente una arista  $f^*$  en  $G$  que tiene el mismo color que  $f$  (nos gustaría demostrar que  $e = f^*$ ). Observemos que entonces

$$G' = G - f^* + f$$

es de nuevo una representación de esta coloración. De modo que existe  $e^*$  para la cual  $G' = K_{p-2}(n_1, \dots, n_{p-2}) + e^*$ .

Sea  $\{A_1, \dots, A_d\}$  la partición de los vértices de  $K_{p-2}(n_1, \dots, n_{p-2})$  en  $G$ , y sea  $\{A'_1, \dots, A'_{p-2}\}$  la partición de los vértices de  $K_{p-2}(n_1, \dots, n_{p-2})$  en  $G'$ .

Supongamos que  $e \neq f^*$ . Luego existen  $i, j \in \{1, \dots, p-2\}$  y existen  $x \in A_i$  y  $y \in A_j$  tales que  $xy = f^*$  (Figura 3.10). Notemos que, en  $G'$ ,  $x$  y  $y$  no son adyacentes, por tanto deben estar en el mismo conjunto independiente  $A'_i$ .

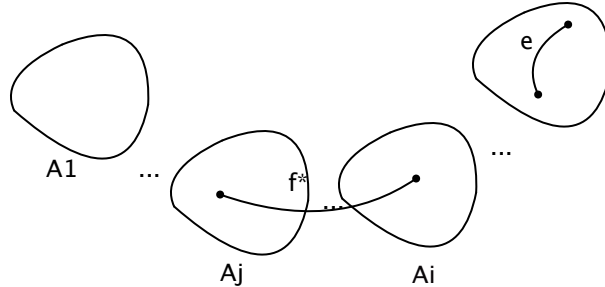


Figura 3.10:

Dado que  $n_i \geq 5$ , existen  $u, v \in A_j$  tales que  $u \neq y \neq v, u \neq v$ , pues  $y$  es adyacente a lo más a dos vértices en  $A_j$  (en caso de que sea

extremo de  $f$  y de  $e$ ). Observemos que, tanto en  $G$  como en  $G'$ ,  $u$  y  $v$  son vecinos de  $x$ . Como  $y$  no es vecino de  $v$  ni de  $u$ , en  $G'$ , los vértices  $y, u, v$  y  $x$  están en el mismo conjunto independiente  $A'_i$ .

Pero esto no es posible, ya que  $G'$  es  $K_{p-2}(n_1, \dots, n_{p-2})$  más una arista, es decir, en  $A'_i$  hay a lo más una arista de  $G'$ . De modo que  $f^* = e$  y por tanto  $f$  tiene el mismo color que  $e$ .

# Capítulo 4

## El Teorema de Hipergráficas

Nuestra meta en este Capítulo es demostrar el Teorema 3 , para lo cual probaremos el siguiente resultado:

*Si  $\mathcal{L}$  es una familia de  $r$ -gráficas, entonces*

$$\text{ext}(n, L(t)) - \text{ext}(n, L) = o(n^r).$$

Éste es clave para la demostración del Teorema 3.

Empezaremos con el siguiente Lema.

**Lema 1.** *Sea  $G$  una  $r$ -gráfica. La sucesión  $\frac{\text{ext}^*(n, G)}{\binom{n}{r}}$  , con  $n \in \mathbb{N}$  es no creciente.*

**Demostración:**

Supongamos que la sucesión no es no creciente, es decir, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{ext^*(n,G)}{\binom{n}{r}} < \frac{ext^*(n+1,G)}{\binom{n+1}{r}}.$$

Entonces

$$\binom{n+1}{r} ext^*(n,G) < \binom{n}{r} ext^*(n+1,G). \quad (4.1)$$

Consideremos  $H$  una  $r$ -gráfica con  $n+1$  vértices y  $ext^*(n+1,G) - 1$  aristas tal que  $G \not\subseteq H$ . Entonces para cada  $v \in V(H)$ ,  $G \not\subseteq H - \{v\}$ . De modo que

$$e(H - \{v\}) \leq ext^*(n,G) - 1 \quad \forall v \in V(H);$$

así que

$$\sum_{v \in V(H)} e(H - \{v\}) \leq (n+1)(ext^*(n,G) - 1).$$

Ahora notemos que cada  $r$ -upla  $e$  la contamos cada vez que quitamos un vértice  $v$ , a menos que  $v \in e$  (i.e.,  $v$  es uno de sus  $r$  vértices). Por lo que cada  $r$ -upla está contada  $n+1-r$  veces, por lo tanto

$$\sum_{v \in V(H)} e(H - \{v\}) = (n+1-r)e(H),$$

por tanto

$$(n+1-r)e(H) \leq (n+1)(ext^*(n,G) - 1). \quad (4.2)$$

Por otro lado



$$\binom{n+1}{r} = \frac{(n+1)!}{r!((n+1)-r)!} \quad y \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

luego entonces

$$\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{n+1-r} > 1. \quad (4.3)$$

De (4.2) y (4.3)

$$e(H) \leq \frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} (ext^*(n, G) - 1), \quad (4.4)$$

de modo que

$$e(H) \leq \frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} ext^*(n, G) - \frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}}. \quad (4.5)$$

Entonces,

$$ext^*(n+1, G) - 1 = e(H) < ext^*(n+1, G) - \frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}},$$

luego

$$ext^*(n+1, G) < ext^*(n+1, G) - \frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} + 1,$$

así que

$$ext^*(n+1, G) - ext^*(n, G) < 1 - \frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}};$$

por lo que tenemos que

$$\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} < 1.$$

lo cual es una contradicción con (4.3).

Q.E.D.

**Lema 2.** *Dada una familia  $\mathcal{L}$  de  $r$ -gráficas, la sucesión  $\frac{ext^*(n, \mathcal{L})}{\binom{n}{r}}$  es no creciente.*

**Demostración:**

Observemos que en la demostración del Lema 8 no utilizamos sustancialmente el hecho de que estuvieramos trabajando con una sola hipergráfica, por lo que la demostración se puede adaptar fácilmente al caso en el que tenemos una familia  $\mathcal{L}$  de  $r$ -gráficas.

Para ésto, simplemente hay que elegir una  $r$ -gráfica  $H$  con  $n+1$  vértices y  $ext^*(n, \mathcal{L}) - 1$  aristas, tal que para toda  $U \in \mathcal{L}$ ,  $U \not\subseteq H$  (la cual existe por la definición de  $ext^*(n, \mathcal{L})$ ).

Entonces, para toda  $v \in V(H)$  y toda  $U \in \mathcal{L}$  sucede que  $U \not\subseteq H - \{v\}$ .  
El resto de la demostración es análogo a la anterior.

Q.E.D

De los lemas anteriores se siguen facilmente los siguientes.

**Lema 3.** *Dada una  $r$ -gráfica  $G$ , existe una constante  $c_G$  tal que,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext^*(n, G)}{\binom{n}{r}} = c_G.$$

*Es decir, el límite existe.*

**Demostración:**

Por el Lema 8 la sucesión  $\frac{ext^*(n, G)}{\binom{n}{r}}$  es no creciente. Además  $0 \leq \frac{ext^*(n, G)}{\binom{n}{r}}$  para toda  $r$ -gráfica  $G$ . Por tanto existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext^*(n, G)}{\binom{n}{r}} = c_G.$$

Q.E.D.

**Lema 4.** *Dada una familia  $\mathcal{L}$  de  $r$ -gráficas, existe una constante  $c_{\mathcal{L}}$  tal que,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext^*(n, \mathcal{L})}{\binom{n}{r}} = c_{\mathcal{L}}.$$

*Es decir, el límite existe.*

**Demostración:**

Es análoga a la demostración anterior usando el Lema 9.

Q.E.D.

Demostremos también el siguiente Lema.

**Lema 5.** *Para cada  $\varepsilon > 0$ , cada*

$$H \in H(n; \lfloor (c_G + \varepsilon) \binom{n}{r} \rfloor),$$

*y cada  $m \geq r$  existe  $\eta(\varepsilon) > 0$  tal que para al menos  $\eta \binom{n}{m}$   $m$ -uplas  $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ ,*

$$e(H[x_1, \dots, x_m]) > (c_G + \frac{\varepsilon}{2}) \binom{m}{r}.$$

**Demostración:**

Sea  $H \in H(n; \lfloor (c_G + \varepsilon) \binom{n}{r} \rfloor)$ . Primero vemos que

$$\sum e(H[x_1, \dots, x_m]) = \binom{n-r}{m-r} e(H) = \binom{n-r}{m-r} \binom{n}{r} (c_G + \varepsilon), \quad (4.6)$$

donde la suma se extiende sobre las  $\binom{n}{m}$   $m$ -uplas  $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$  de  $V(H)$ . Esto porque en una  $m$ -upla, cuento cada arista de  $H$  tantas veces como aparece. Lo podemos ver de la siguiente manera: par completar una

$r$ -upla fija a una  $m$ -upla escojo  $m - r$  vértices de los  $n - r$  que sobran, y esto se puede hacer de  $\binom{n-r}{m-r}$  formas distintas.

Sea  $\varepsilon > 0$  y supongamos que el lema no es cierto.

Entonces existen una  $r$ -gráfica  $H \in H(n; \lfloor (c_G + \varepsilon) \binom{n}{r} \rfloor)$  y un entero  $m \geq r$  tal que para toda  $\eta > 0$  hay a lo más  $\eta \binom{n}{m} - 1$   $m$ -uplas  $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ , tales que

$$e(H[x_1, \dots, x_m]) > (c_G + \frac{\varepsilon}{2}) \binom{m}{r}.$$

Veamos qué sucede en particular para  $\eta = \varepsilon/4$ . Existen a lo más  $\eta \binom{n}{m} - 1$   $m$ -uplas  $x_1, \dots, x_m$  tales que

$$\left(c_G + \frac{\varepsilon}{2}\right) \binom{m}{r} < e(H[x_1, \dots, x_m]) \leq \binom{m}{r}$$

y para las  $\binom{n}{m} - \eta \binom{n}{m} + 1$   $m$ -uplas restantes tenemos que

$$e(H[x_1, \dots, x_m]) \leq \left(c_G + \frac{\varepsilon}{2}\right) \binom{m}{r}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \sum e(H[x_1, \dots, x_m]) &\leq \left( \binom{n}{m} - \varepsilon/4 \binom{n}{m} + 1 \right) \left( c_G + \frac{\varepsilon}{2} \right) \binom{m}{r} \\ &\quad + \left( \frac{\varepsilon}{4} \binom{n}{m} - 1 \right) \binom{m}{r} \end{aligned}$$

$$= \binom{n}{m} \binom{m}{r} \left( c_G + \frac{3\varepsilon}{4} \right) \\ + \left[ (-\varepsilon/4 \binom{n}{m} + 1) \left( c_G + \frac{\varepsilon}{2} \right) \binom{m}{r} - \binom{m}{r} \right].$$

Ahora veremos que

$$\left[ (-\varepsilon/4 \binom{n}{m} + 1) \left( c_G + \frac{\varepsilon}{2} \right) \binom{m}{r} - \binom{m}{r} \right] \leq 0$$

Observemos que

$$\binom{m}{r} \geq (-\varepsilon/4 \binom{n}{m} + 1) \left( c_G + \frac{\varepsilon}{2} \right) \binom{m}{r}$$

sucede si y sólo si

$$1 \geq (-\varepsilon/4 \binom{n}{m} + 1) \left( c_G + \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Como  $0 \leq (c_G + \frac{\varepsilon}{2}) \leq 1$  (pues no tiene sentido que la gráfica tenga más aristas que todas las que se pueden) y  $1 - \varepsilon/4 \binom{n}{m} \leq 1$ , entonces

$$\left( -\varepsilon/4 \binom{n}{m} + 1 \right) \left( c_G + \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq 1,$$

por lo que

$$\left[ \left( -\varepsilon/4 \binom{n}{m} + 1 \right) \left( c_G + \frac{\varepsilon}{2} \right) \binom{m}{r} - \binom{m}{r} \right] \leq 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \binom{n}{m} \binom{m}{r} \left( c_G + \frac{3\varepsilon}{4} \right) + \left[ \left( -\varepsilon/4 \binom{n}{m} + 1 \right) \left( c_G + \frac{\varepsilon}{2} \right) \binom{m}{r} - \binom{m}{r} \right] \\ \leq \binom{n}{m} \binom{m}{r} \left( c_G + \frac{3\varepsilon}{4} \right). \end{aligned}$$

Y por tanto

$$\sum e(H[x_1, \dots, x_m]) \leq \binom{n}{m} \binom{m}{r} \left( c_G + \frac{3\varepsilon}{4} \right).$$

Como  $\binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n-r}{m-r} \binom{n}{r}$ , entonces

$$\sum e(H[x_1, \dots, x_m]) \leq \binom{n-r}{m-r} \binom{n}{r} \left( c_G + \frac{3\varepsilon}{4} \right) < \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r} (c_G + \varepsilon).$$

lo cual es una contradicción por (4.6), por lo que el lema es cierto.

Q.E.D.

Se conoce el siguiente resultado, demostrado por Paul Erdős

**Lema 6.** Para cada  $r \geq 2$  y cada  $t \geq 1$ ,

$$ext^*(n, K_r^{(r)}(t)) < c_1 n^{r-\varepsilon_{r,t}}. \quad (4.7)$$

Para  $r = 2$ , éste es un resultado de Kövari y los Turán, quienes demostraron que  $\varepsilon_{2,t} \leq 1/t$ . Parece probable que  $\varepsilon_{2,t} = 1/t$ , pero esto sólo se sabe para  $t = 2$  y  $t = 3$ .

Ahora usaremos el resultado anterior para demostrar el siguiente Teorema.

**Teorema 1.** Sea  $G$  una  $r$ -gráfica con  $l$  vértices. Para cada  $r \geq 2$  y cada  $t \geq 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext^*(n, G(t))}{\binom{n}{r}} = c_G.$$

**Demostración:**

Sea  $\mathcal{L} = \{G\}$ .

Sabemos que  $G \subseteq G(t)$ , entonces

$$\frac{ext^*(n, G)}{\binom{n}{r}} \leq \frac{ext^*(n, G(t))}{\binom{n}{r}},$$

por lo que, por el Lema 11

$$c_G \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext^*(n, G(t))}{\binom{n}{r}}.$$



Por tanto, basta probar que para todo  $\varepsilon < 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces

$$G(t) \subseteq H,$$

para cada  $H \in H^{(r)}\left(n; \left((c_G + \varepsilon)\binom{n}{r}\right)\right)$ .

Diremos que  $G'$  una subgráfica inducida de  $H$  es *buena* si contiene a  $G$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ .

Sea  $H \in H^{(r)}\left(n; \left((c_G + \varepsilon)\binom{n}{r}\right)\right)$ . Por el lema 12, para cada  $m \geq r$  existe  $\eta(\varepsilon) > 0$  tal que para al menos  $\eta\binom{n}{m}$   $m$ -uplas  $x_1, \dots, x_m$  sucede que

$$e(H[x_1, \dots, x_m]) > (c_G + 1/2\varepsilon)\binom{m}{r} > c_G\binom{m}{r}.$$

De modo que si  $x_1, \dots, x_m$  es una de estas  $m$ -uplas, como

$$c_G = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext^*(n, G)}{\binom{n}{r}},$$

entonces existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $m > m_0$  sucede que

$$H[x_1, \dots, x_m] \supseteq G,$$

pues  $e(H[x_1, \dots, x_m]) > c_G\binom{m}{r}$ , es decir,  $H[x_1, \dots, x_m]$  es una  $r$ -gráfica *buena*. Luego,  $H[x_1, \dots, x_m]$  contiene a  $G$ , de modo que existe

$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_l}\}$  un subconjunto de  $\{x_1, \dots, x_m\}$  (una  $l$ -upla) tal que  $H[x_{i_1}, \dots, x_{i_l}]$  es isomorfo a  $G$ .

Entonces hay al menos  $\eta \binom{n}{m}$   $l$ -uplas isomorfas a  $G$ . Notemos que una  $l$ -upla ocurre cada vez que sus  $l$  vértices están en la  $m$ -upla que define a la gráfica correspondiente; ésto es, dada una  $l$ -upla, ocurre cada que completamos una  $m$ -upla, para lo cual tenemos que escoger  $m-l$  de los  $n-l$  vértices que quedan. De modo que cada  $l$ -upla ocurre a lo más  $\binom{n-l}{m-l}$  veces.

Así que si  $m > m_0$ , nuestra gráfica  $H$  contiene al menos  $\frac{\eta \binom{n}{m}}{\binom{n-l}{m-l}}$  copias de  $G$  distintas.

Ahora veamos,

$$\begin{aligned} \frac{\binom{n}{m}}{\binom{n-l}{m-l}} &= \frac{\frac{n!}{m!(n-m)!}}{\frac{(n-l)!}{(m-l)!(n-l-m+l)!}} \\ &= \frac{n!(m-l)!(n-m)!}{(n-l)!m!(n-m)!} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-l+1)}{m(m-1)\dots(m-l+1)} \\ &= \left(\frac{n}{m}\right) \left(\frac{n-1}{m-1}\right) \dots \left(\frac{n-l+1}{m-l+1}\right). \end{aligned}$$

Veamos que cada uno de éstos términos es mayor que  $\frac{n}{m}$ .

Sea  $s \in \{1, \dots, l-1\}$ , luego

$$\frac{n-s}{m-s} > \frac{n}{m}$$

si y sólo si

$$m(n-s) > n(m-s),$$

lo cual es cierto si y sólo si

$$mn - sm > nm - sn.$$

Nótese que lo anterior pasa sólo en el caso de que

$$ns - sm > 0,$$

y ésto sucede sólo cuando

$$s(n-m) > 0.$$

Dado que  $n > m$ , entonces  $n-m > 0$ , por lo que la última desigualdad es cierta, de modo que,

$$\frac{\binom{n}{m}}{\binom{n-l}{m-l}} > \left(\frac{n}{m}\right)^l,$$

luego entonces

$$\eta \frac{\binom{n}{m}}{\binom{n-l}{m-l}} > \eta \left(\frac{n}{m}\right)^l.$$

Por lo que la gráfica  $H$  contiene al menos  $\eta\left(\frac{n}{m}\right)^l$  copias de  $G$  distintas.

Por otro lado sucede que, si

$$n > \left(\frac{c_1 m^l}{\eta}\right)^{1/(l-r+\varepsilon_{l,t})}$$

donde  $c_1 n^{l-\varepsilon_{l,t}}$  es como en el Lema 13, entonces

$$n^{l-r+\varepsilon_{l,t}} > \frac{c_1 m^l}{\eta},$$

y luego

$$\frac{n^l}{n^{r-\varepsilon_{l,t}}} > \frac{c_1 m^l}{\eta},$$

así que

$$\eta\left(\frac{n}{m}\right)^l > c_1 n^{r-\varepsilon_{l,t}}.$$

De modo que si  $n_0 = \left\lceil \left(\frac{c_1 m^l}{\eta}\right)^{1/(l-r+\varepsilon_{l,t})} \right\rceil$  y  $n > n_0$ , entonces

$$\eta\left(\frac{n}{m}\right)^l > c_1 n^{r-\varepsilon_{l,t}}. \quad (4.8)$$

Si consideramos la  $l$ -gráfica  $H'$  donde  $V(H') = V(H)$  y un subconjunto  $\{x_1, \dots, x_l\}$  de  $V(H)$  es una hiperarista de  $H'$  si y sólo si

$$H[x_1, \dots, x_l] \cong G,$$

por (4.8), sucede que

$$e(H') \geq c_1 n^{r-\varepsilon_{l,t}}$$

Así, por el Lema 13 concluimos que  $K_l^{(l)}(t) \subseteq H'$ . De modo que todas las  $l$ -uplas de  $K_l^{(l)}(t)$  son isomorfas a  $G$ .

Recordemos que  $(x_{i_1, s_1}, \dots, x_{i_r, s_r})$  es una  $r$ -upla en  $G(t)$  si y sólo si  $i_1, \dots, i_r$  son distintos y  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$  es una  $r$ -upla de  $G$ .

Digamos que los  $l$  conjuntos independientes de vértices de  $K_l^{(l)}(t)$  son  $V_1, \dots, V_l$ . Nombremos los vértices de  $K_l^{(l)}(t)$  como sigue: sean  $x_{i_1}, \dots, x_{i_t}$  los vértices de  $V_i$ .

Luego si  $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, l\}$  son distintos y  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$  es una  $r$ -upla de  $G$ , entonces  $(x_{i_1, s_1}, x_{i_2, s_2}, \dots, x_{i_r, s_r})$  es una  $r$ -upla de  $K_l^{(l)}(t)$ . De modo que

$$G(t) \subseteq H$$

Que es lo que queríamos demostrar.

Q.E.D.

Con base en la demostración de el Teorema 9, podemos probar la versión generalizada a familias de  $r$ -gráficas.

**Teorema 2.** *Si  $\mathcal{L}$  es una familia de hipergráficas, entonces para cada  $r \geq 2$  y cada  $t \geq 1$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext^*(n, \mathcal{L}(t))}{\binom{n}{r}} = c_{\mathcal{L}}.$$

**Demostración:**

Observemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext^*(n, \mathcal{L})}{\binom{n}{r}} = c_{\mathcal{L}}$ , si y sólo si para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $U \in \mathcal{L}$  tal que existe una  $r$ -gráfica  $G$  con  $n$  vértices y  $(c_{\mathcal{L}} + \varepsilon)\binom{n}{r}$  aristas tal que  $U \subseteq G$ .

Y que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext^*(n, \mathcal{L}(t))}{\binom{n}{r}} = c_{\mathcal{L}}$ , si y sólo si para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $U(t) \in \mathcal{L}(t)$  tal que existe  $r$ -gráfica  $G$  con  $n$  vértices y  $(c_{\mathcal{L}} + \varepsilon)\binom{n}{r}$  aristas tal que  $U(t) \subseteq G$ .

Sea  $\varepsilon > 0$

Entonces, por la observación anterior, existe  $U_{\varepsilon} \in \mathcal{L}$  y  $G_{\varepsilon}$  una  $r$ -gráfica con  $n$  vértices y  $(c_{\mathcal{L}} + \varepsilon)\binom{n}{r}$  aristas tales que

$$U_{\varepsilon} \subseteq G_{\varepsilon}.$$

Por la demostración del Teorema 9, tenemos que

$$U_{\varepsilon}(t) \subseteq G_{\varepsilon},$$

que es lo que queríamos demostrar, por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext^*(n, \mathcal{L})}{\binom{n}{r}} = c_{\mathcal{L}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext^*(n, \mathcal{L}(t))}{\binom{n}{r}}.$$

Q.E.D.

Ahora si estamos listos para probar el resultado que nos interesa, de hecho teniendo lo anterior es muy fácil, ya sólo hay que hacer un par de cuentas.

**Teorema 3.** *Si  $\mathcal{L}$  es una familia de  $r$ -gráficas, entonces*

$$ext(n, \mathcal{L}(t)) - ext(n, \mathcal{L}) = o(n^r).$$

**Demostración:**

Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\binom{n}{r}}{n^r} &= \frac{n(n-1)\dots(n-r)}{r!n^r} \\ &= \frac{1}{r!} \left(\frac{n}{n}\right) \left(\frac{n-1}{n}\right) \dots \left(\frac{n-r+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{r!} (1) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{r}}{n^r} = \frac{1}{r!},$$

así que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^r}{\binom{n}{r}} = r!.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext(n, \mathcal{L}(t))}{n^r} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{ext(n, \mathcal{L}(t))}{\binom{n}{r}}}{\frac{n^r}{\binom{n}{r}}} \\ &= \frac{1}{r!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext(n, \mathcal{L}(t))}{\binom{n}{r}} = \frac{1}{r!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext^*(n, \mathcal{L}(t)) - 1}{\binom{n}{r}} \\ &= \frac{1}{r!} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext^*(n, \mathcal{L}(t))}{\binom{n}{r}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\binom{n}{r}} \right] = \frac{1}{r!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext^*(n, \mathcal{L}(t))}{\binom{n}{r}}. \end{aligned}$$

De forma análoga se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext(n, \mathcal{L})}{n^r} = \frac{1}{r!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext^*(n, \mathcal{L})}{\binom{n}{r}}.$$

Luego, por el teorema anterior se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext(n, \mathcal{L}(t))}{n^r} = \frac{1}{r!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext^*(n, \mathcal{L}(t))}{\binom{n}{r}} = \frac{1}{r!} c_{\mathcal{L}}$$



$$= \frac{1}{r!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext^*(n, \mathcal{L})}{\binom{n}{r}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext(n, \mathcal{L})}{n^r}.$$

De modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext(n, \mathcal{L}(t))}{n^r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext(n, \mathcal{L})}{n^r}.$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext(n, \mathcal{L}(t))}{n^r} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ext(n, \mathcal{L})}{n^r} = 0,$$

lo cual implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{ext(n, \mathcal{L}(t)) - ext(n, \mathcal{L})}{n^r} \right] = 0.$$

Así que  $ext(n, \mathcal{L}(t)) - ext(n, \mathcal{L}) = o(n^r)$ , que es lo que queríamos demostrar.

Q.E.D.

Finalmente podemos demostrar el Teorema 3.

**Teorema 3** *Sea  $H$  una hipergráfica  $r$ -uniforme y sea*

$$\mathcal{H} = \{H - e : e \text{ es una } r\text{-upla de } H\}.$$

Entonces

$$f(n, H) - ext(n, \mathcal{H}) = o(n^r)$$

(En otras palabras,  $f(n, H)/\binom{n}{r}$  y  $ext(n, \mathcal{H})/\binom{n}{r}$  convergen al mismo límite)

**Demostración:**

Sea  $\mathcal{L} = \{H\}$ , entonces  $\mathcal{L}^- = \mathcal{H}$  y, por el Lema 6,  $\mathcal{H}(2) \subseteq \mathcal{L}^+$ . Luego, por el Lema 1 (recuerde que también es válido para hipergráficas), tenemos que

$$ext(n, \mathcal{H}) \leq f(n, H) \leq ext(n, \mathcal{H}(2)).$$

Y por el Teorema 11 se sigue que

$$ext(n, \mathcal{H}(2)) \leq ext(n, \mathcal{H}) + o(n^r),$$

por lo que

$$ext(n, \mathcal{H}) \leq f(n, H) \leq ext(n, \mathcal{H}(2)) \leq ext(n, \mathcal{H}) + o(n^r),$$

entonces

$$ext(n, \mathcal{H}) - ext(n, \mathcal{H}) \leq f(n, H) - ext(n, \mathcal{H}) \leq o(n^r),$$

de modo que

$$0 \leq f(n, H) - ext(n, \mathcal{H}) \leq o(n^r).$$

Ahora, para cualquier función  $h(n)$  tal que  $h(n) \in o(n^r)$ , sucede que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(n)}{n^r} = 0$ , por lo que

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n, H) - ext(n, \mathcal{H})}{n^r} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(n)}{n^r} = 0,$$

por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n, H) - ext(n, \mathcal{H})}{n^r} = 0,$$

lo que quiere decir que

$$f(n, H) - ext(n, \mathcal{H}) = o(n^r).$$

Q.E.D.

# Apéndice A

## Teorema de Turán

En esta sección presento el Teorema de Turán.

Para un entero positivo  $r$  y  $n \geq r - 1$ , decimos que la única gráfica completa  $(r - 1)$ -partita con  $n$  vértices, cuyos elementos de la partición difieren en tamaño a lo más en 1, es una *Gráfica de Turán*, la denotamos por  $T_{r-1}(n)$ , y decimos que tiene  $t_{r-1}(n)$  aristas.

Para  $n < r - 1$  también usaremos esta definición, permitiendo que los elementos de la partición sean vacíos, entonces claramente

$$T_{r-1}(n) = K^n$$

para cada  $n \leq r - 1$ .

Observemos que la gráfica  $T_q(n)$ , introducida en el Capítulo 1, es una Gráfica de Turán. Primero contaremos sus aristas.

Dado que el tamaño de los elementos de la partición de  $T_q(n)$  difiere a lo más en 1, podemos ver la gráfica de la siguiente forma:

Sea  $r = r(n, q)$  el residuo de dividir  $n$  por  $q$ , i.e.  $n = mq + r$  para algún entero  $m$  y  $0 \leq r \leq q$ . Sea  $n' = n - r$ . Sea  $\{V_1, \dots, V_q\}$  la partición de  $V(T_q(n))$ .

Entonces  $T_q(n)$  es la gráfica  $q$ -partita completa que tiene  $\frac{n'}{q} + 1$  vértices en los primeros  $r$  elementos de la partición  $(V_1, \dots, V_r)$  y  $\frac{n'}{q}$  vértices en el resto de los elementos de la partición  $(V_{r+1}, \dots, V_q)$ .

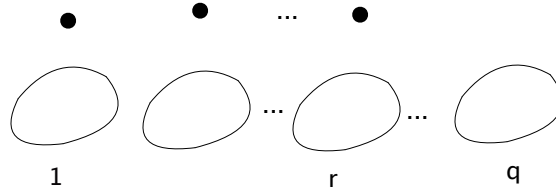


Figura A.1:

Para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$  escojamos un vértice  $x_i \in V_i$ . Observemos que  $V_i - x_i$  tiene  $\frac{n'}{q}$  vértices; de modo que

$$[V_1 - x_1 \cup \dots \cup V_r - x_r \cup V_{r+1} \cup \dots \cup V_q] = G$$

es una gráfica  $q$ -partita completa con  $n'$  vértices y  $\frac{n'}{q}$  vértices en cada elemento de la partición (Figura A.1).

Para contar las aristas de  $T_q(n)$  contaremos las aristas de  $G$  y después las aristas con las que los vértices  $x_1, \dots, x_r$  contribuyen.

Notemos que cada vértice de  $G$  está unido con todos los vértices menos los que se encuentran en el mismo elemento de la partición, i.e. cada vértice de  $G$  tiene  $n' - \frac{n'}{q}$  vecinos, de modo que aquí tenemos

$$\frac{n'(n' - \frac{n'}{q})}{2}$$

aristas.

Por otro lado, como cada  $x_i$  está en un elemento de la partición distinto,

$$[\{x_1, \dots, x_r\}]$$

es una gráfica completa, por lo que aquí contamos  $\binom{r}{2}$  aristas más.

Ahora contemos las aristas que van de  $\{x_1, \dots, x_r\}$  a  $G$ . Cada  $x_i$  es vecino de todos los vértices de  $G$  excepto los vértices de  $V_i$ , ésto es, cada  $x_i$  tiene  $n' - \frac{n'}{q}$  vecinos. Así que aquí tenemos

$$r(n' - \frac{n'}{q})$$

aristas.

Así tenemos la siguiente igualdad.

$$\begin{aligned} e(T_q(n)) &= \frac{n'(n' - \frac{n'}{q})}{2} + r(n' - \frac{n'}{q}) + \binom{r}{2} \\ &= \frac{n'}{2} \left( \frac{n'q - n'}{q} \right) + 2r \left( \frac{n'q - n'}{2q} \right) + \binom{r}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(n - \frac{n' - \frac{n'}{q}}{2}\right)(n' + 2r) + \binom{r}{2} \\
&= n' \left(\frac{q-1}{2q}\right)(n' + 2r) + \binom{r}{2}
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Sustituyendo  $n'$  en (A.1), tenemos que

$$e(T_q(n)) = (n-r) \left(\frac{q-1}{2q}\right)(n-r+2r) + \binom{r}{2},$$

de modo que

$$e(T_q(n)) = \left(\frac{q-1}{2q}\right)(n^2 - r^2) + \binom{r}{2}. \tag{A.2}$$

De este resultado vemos que,

$$e(T_q(n)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right) n^2 - \left(\frac{q-1}{2q} r^2 + \binom{r}{2}\right)$$

y dado que  $r \leq q$ ,  $\frac{q-1}{2q} r^2 + \binom{r}{2} \in O(n)$

$$e(T_q(n)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right) n^2 + O(n),$$

■

Ahora si, veamos el Teorema de Turán

**Teorema 1.** (Turán, 1941) Para cada pareja de enteros  $r, n$  con  $r > 1$ , cada gráfica  $G$  con  $n$  vértices y  $ext(n, K^r)$  aristas, tal que  $K_r \not\subseteq G$ , es  $T_{r-1}(n)$ .

**Demostración:**

Se hará por inducción sobre  $n$ .

Para  $n \leq r - 1$  tenemos que  $G = K^n = T_{r-1}(n)$ , pues claramente  $K^r \not\subseteq K^n$ .

Hipótesis de inducción. Para cada  $l$  tal que  $n > l \geq r$ , toda gráfica  $G$  con  $l$  vértices y  $ext(l, K^r)$  aristas tal que  $K^r \not\subseteq G$  es  $T_{r-1}(l)$ .

Para el paso de inducción, sea  $G$  una gráfica con  $n$  vértices,  $ext(n, K^r)$  aristas y tal que  $K^r \not\subseteq G$ .

Como  $G$  es maximal en aristas con la propiedad de que no tiene a  $K^r$  como subgráfica, entonces  $G$  tiene como subgráfica a  $K = K^{r-1}$ . Observemos que  $K^r \not\subseteq G - K$ , pues  $K^r \not\subseteq G$ ; de modo que, por hipótesis de inducción,  $G - K$  tiene a lo más  $t_{r-1}(n - r + 1)$  aristas, y cada vértice de  $G - K$  tiene a lo más  $r - 2$  vecinos en  $K$  (si existe  $v \in V(G - K)$  tal que  $v$  tiene  $r - 1$  vecinos en  $K$  entonces  $K + v = K^r$  en  $G$ , lo cual contradice la elección de  $G$ ). Luego

$$|E(G)| \leq t_{r-1}(n - r + 1) + (n - r + 1)(r - 2) + \binom{r - 1}{2}. \quad (\text{A.3})$$

Ahora veremos que

$$t_{r-1}(n - r + 1) + (n - r + 1)(r - 2) + \binom{r - 1}{2} = t_{r-1}(n) \quad (\text{A.4})$$



Para probar la igualdad observemos la gráfica de Turán  $T_{r-1}(n)$  (Figura A.2). Notemos que  $T_{r-1}(n) - T_{r-1}(n-r+1) = K^{r-1}(T_{r-1}(n-r+1))$  está sombreado en la figura), la cuál tiene  $\binom{r-1}{2}$  aristas; y que cada uno de los  $n-r+1$  vértices de  $T_{r-1}(n-r+1)$  están unidos a  $r-2$  vértices de  $K^{r-1}$ , pues la gráfica es  $r-1$ -partita completa. De modo que la igualdad es cierta.

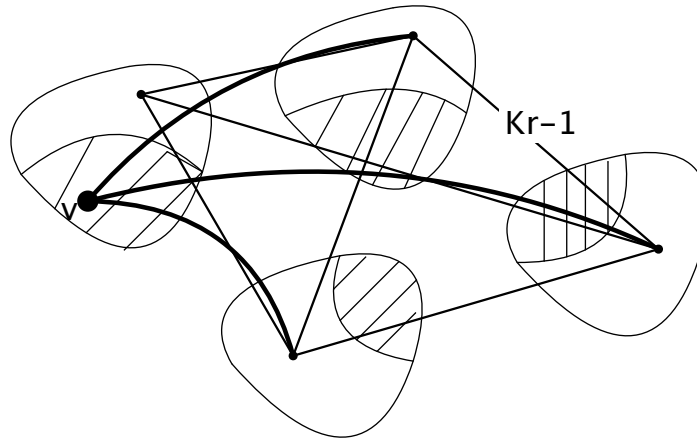


Figura A.2:  $T^4(n)$

Puesto que  $G$  es extremal para  $K^r$  y  $K^r \not\subseteq T_{r-1}(n)$ , entonces  $e(T_{r-1}(n)) \leq e(G)$ , de modo que, por A.3 y A.4,

$$|E(G)| = t_{r-1}(n). \quad (\text{A.5})$$

Por tanto, cada vértice de  $G - K$  tiene exactamente  $r-2$  vecinos en  $K$ , tal como los vértices  $x_1, \dots, x_{r-1}$  de  $K$ .

Para  $i = 1, \dots, r - 1$  sea  $V_i := \{v \in V(G) | vx_i \notin E(G)\}$  el conjunto de todos los vértices de  $G$  cuyos  $r - 2$  vecinos en  $K$  son precisamente todos menos  $x_i$ . Veamos que  $\{V_i\}$  es una partición de  $V(G)$ .

(1) Sea  $v \in V(G)$ , entonces existe  $i \in \{1, \dots, r - 1\}$  tal que  $vx_i \notin E(G)$ , pues cada vértice de  $G$  tiene  $r - 2$  vecinos en  $K$ ; así  $\cup V_i = V(G)$ .

(2) Sea  $v \in V_j \cap V_k$ , luego  $vx_j, vx_k \in E(G)$ , y como  $v$  tiene  $r - 2$  vecinos en  $K$  sucede que  $j = k$ .

(3) Para cada  $i \in \{1, \dots, r - 1\}$ ,  $x_i x_i \notin E(G)$ , así que  $V_i \neq \phi$ .

Ahora veamos que cada  $V_i$  es un conjunto independiente. Supongamos que existe  $i \in \{1, \dots, r - 1\}$  tal que  $V_i$  no es independiente, i.e. existen  $u, v \in V_i$  tales que  $uv \in E(G)$ , y entonces

$$[\{x_1, \dots, x_{i-1}, u, v, x_{i+1}, \dots, x_{r-1}\}]$$

es completa y tiene  $r$  vértices, luego  $K_r \subseteq G$ ; pero ésto es una contradicción, por tanto cada  $V_i$  es independiente.

Así, tenemos que  $G$  es  $r - 1$ -partita. Se puede ver que  $T_{r-1}(n)$  es la única gráfica  $r - 1$ -partita con  $n$  vértices y el máximo número de aristas. Así afirmamos que  $G = T_{r-1}(n)$ , lo cual se sigue de la extremalidad asumida para  $G$ .

Q.E.D.



# Apéndice B

## Teorema de Ramsey

La Teoría de Ramsey es realmente extensa, básicamente la idea que presenta es la de que en todo sistema suficientemente grande existe siempre cierta regularidad. Dado que el tema da para libros y libros al respecto, me restrinjo a presentar algunos de los resultados básicos referentes a la Teoría de Gráficas.

**Teorema 2.** *En toda colección de seis personas sucede que tres de ellas se conocen mutuamente o tres de ellas no se conocen mutuamente.*

Este simpático resultado equivale a que en una gráfica  $K^6$  2-coloreada siempre encontraremos un triángulo monocromático (Figura B.1). En su versión más simple, el Teorema de Ramsey dice que para  $n$  un entero, cada gráfica  $G$  suficientemente grande contiene a  $K^n$  o a  $\bar{K}^n$ . Aquí demostraremos una versión un poco más general.

Primero veamos unas definiciones.

Diremos que  $n \rightarrow (l)$  si dada cualquier 2-coloración por aristas de  $K^n$  existe un conjunto  $T \subseteq V(K^n)$  de cardinalidad  $l$  tal que  $[T]$  (que

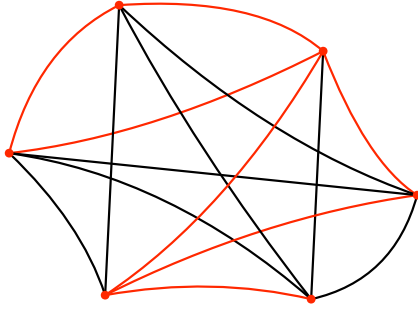


Figura B.1:

es un  $K^l$ ) es monocromático, en cuyo caso diremos que  $T$  es un  $K^l$  *monocromático* (Figura B.2). Luego el teorema anterior equivale a la afirmación  $6 \rightarrow (3)$ .

Diremos que  $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$  si, para cada  $r$ -coloración por aristas de  $K^n$  existe  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , y  $T \subseteq V(K^n)$  de cardinalidad  $l_i$  tal que  $[T]$  está coloreada de color  $i$  (i.e. todas las aristas entre los vértices de  $T$  tienen el color  $i$ ).

Observemos lo siguiente:

1) Si  $l'_i \leq l_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , y  $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$ , entonces  $n \rightarrow (l'_1, \dots, l'_r)$ . Puesto que  $K^{l'_i} \subseteq K^{l_i}$ , de modo que si  $K^n$  contiene un  $K^{l_i}$  de color  $i$ , también contiene un  $K^{l'_i}$  de color  $i$  (Figura B.3).

2) Si  $m \geq n$  y  $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$ , entonces  $m \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$ .

Puesto que  $K^n \subseteq K^m$ , una  $r$ -coloración de  $K^m$  induce una  $r$ -coloración de  $K^n$ , para esta última existe  $i$  tal que existe  $K^{l_i}$  coloreada de color  $i$ , y  $K^{l_i} \subseteq K^n \subseteq K^m$  (Figura B.4).

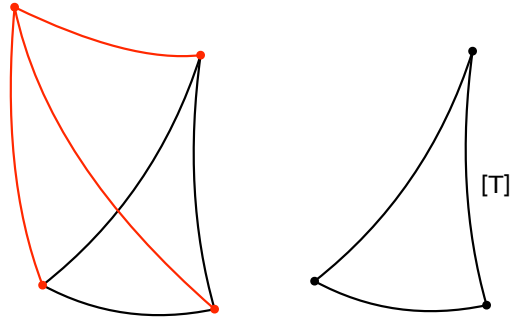


Figura B.2: en la coloración de  $K^4 [T]$  es un  $K^3$  monocromático

3) Sea  $\sigma$  una permutación del conjunto  $\{1, \dots, r\}$ . Entonces  $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$  si y sólo si  $n \rightarrow (l_{\sigma(1)}, \dots, l_{\sigma(r)})$ .

4)  $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$  si y sólo si  $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r, 2)$ .

En particular  $l_1 \rightarrow (l_1, 2)$ .

Demostremos ésto:

Supongamos  $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$ . Hay que demostrar  $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r, 2)$ .

Consideremos una  $r + 1$ -coloración de  $K^n$ . Si tenemos una arista  $e$  de color  $r + 1$  entonces se cumple que hay un conjunto  $T$  de dos vértices tal que  $[T]$  es de color  $r + 1$  (a saber, los extremos de  $e$ ); si no hay aristas coloreadas con  $r + 1$ , entonces  $K^n$  está coloreada con  $r$  colores, es decir, tenemos una  $r$ -coloración de  $K^n$ , luego, por hipótesis, existe  $i$  tal que  $1 \leq i \leq r$  tal que  $K^{l_i}$  está coloreada de color  $i$ . En cualquier caso tenemos que existe  $j$  tal que  $1 \leq j \leq r + 1$  tal que existe  $K^j$  coloreada de color  $j$ , por lo que  $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r, 2)$ .

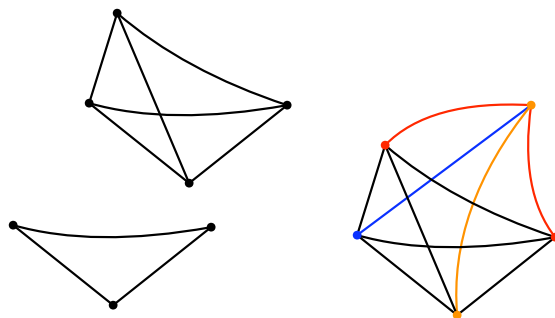


Figura B.3: Observación 1

Ahora supongamos que  $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r, 2)$ . Hay que demostrar que  $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$ .

Consideremos una  $r$ -coloración de  $K^n$ . En particular es una  $r + 1$ -coloración de  $K^n$  (donde ninguna arista está pintada de  $r + 1$ ) de modo que existe  $j$ ,  $1 \leq j \leq r + 1$ , tal que existe una  $K^{l_j}$  coloreada de color  $j$ , puesto que no hay aristas de color  $r + 1$ , entonces  $1 \leq j \leq r$ , por lo que  $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$ .

Definimos la *Función de Ramsey*  $R(l_1, \dots, l_r)$  como el mínimo  $n$  tal que  $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$ .

Por las observaciones 1) a 4), tenemos que  $R$  es monótona en cada variable y totalmente simétrica.

**Teorema 3.** (Ramsey) *La función  $R$  está bien definida, ésto es, para cada  $l_1, \dots, l_r$  existe  $n$  tal que*

$$n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$$

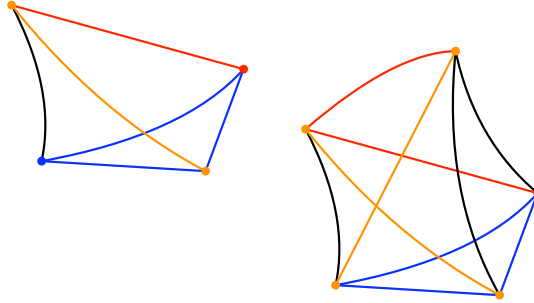


Figura B.4: Observación 2

**Demostración:**

Primero haremos la prueba para el caso  $r = 2$ . Una vez teniendo ésta es sencillo hacerla para el caso general, de hecho podríamos hacerlo desde el principio, pero me parece que haciendo primero este caso quedan las cosas más claras.

Realizaremos inducción simultanea en  $l_1$  y  $l_2$ .

BASE DE INDUCCIÓN. Por 4)  $l \rightarrow (l, 2)$  y por tanto para toda  $l \geq 2$ ,  $R(l, 2)$  existe. Del mismo modo  $R(2, l)$  existe.

HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN. Existen  $R(l_1, l_2 - 1)$  y  $R(l_1 - 1, l_2)$ .

PASO INDUCTIVO.

Demostremos que  $R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, -2) \rightarrow (l_1, l_2)$ .

Sea  $n = R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, -2)$ .



Sea  $\chi$  una 2-coloración de  $K^n$ . Fijemos  $v \in V(K^n)$  y definamos los siguientes conjuntos:

$$A_{1v} = \{y \in V(K^n) \mid \chi(vy) = 1\};$$

$$A_{2v} = \{y \in V(K^n) \mid \chi(vy) = 2\} = V(K^n) - A_{1v} - \{v\}.$$

Entonces sucede que  $|A_{1v}| + |A_{2v}| = n - 1$ , de modo que

$$(a) \quad |A_{1v}| \geq R(l_1 - 1, -2)$$

o bien

$$(b) \quad |A_{2v}| \geq R(l_1, l_2 - 1).$$

Esto es cierto pues si ambos son falsos se tiene que

$$n - 1 = |A_{1v}| + |A_{2v}| \leq R(l_1, l_2 - 1) - 1 + R(l_1 - 1, -2) - 1 = n - 2,$$

lo cual es una contradicción.

Supongamos que (a) es cierto. Luego, por la definición de  $R$ , existe  $T \subseteq A_{1v}$  tal que  $|T| = l_2$  y  $[T]$  es una  $K^{l_2}$  coloreada de color 2 ó existe  $S \subseteq A_{1v}$  tal que  $|S| = l_1 - 1$  y  $[S]$  es una  $K^{l_1 - 1}$  coloreada con color 1.

Si sucede lo primero ya tenemos lo que queríamos; si sucede lo segundo, sea  $S^* = S \cup \{v\}$ . Notemos que, dado que  $S \subseteq A_{1v}$ , entonces para cada  $s \in S$ ,  $xs$  es de color 1, por lo que  $S^*$  es una gráfica completa

con  $l_1 - 1 + 1 = l_1$  vértices coloreada con color 1 en  $K^n$ , que es lo que queríamos.

El argumento cuando (b) es cierto es totalmente análogo. Por lo tanto  $R(l_1, l_2 - 1) + R(l_1 - 1, -2) \rightarrow (l_1, l_2)$ . De modo que el Teorema es cierto para  $r = 2$ .

Ahora lo demostraremos para cualquier  $r$ .

BASE DE INDUCCIÓN. Por 4) existen

$$R(1, 2, \dots, 2) = R(2, 1, \dots, 2) = \dots = R(2, \dots, 2, l) = l.$$

HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN. Existen

$$R(l_1 - 1, \dots, l_r), \dots, R(l_1, \dots, l_{r-1}, l_r - 1).$$

PASO INDUCTIVO.

Demostraremos que  $2 + \sum_{i=1}^r [R(l_1, \dots, l_i - 1, \dots, l_r) - 1] \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$

Sea  $n = 2 + \sum_{i=1}^r [R(l_1, \dots, l_i - 1, \dots, l_r) - 1]$ . Sea  $\mathcal{C}$  una  $r$ -coloración de las aristas de  $K^n$ . Fijemos  $v \in V(K^n)$ , y para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , definamos:

$$A_{iv} = \{y \in V(K^n) \mid \chi(vy) = i\}.$$

Observemos que  $\{A_{iv}\}$  es una partición de  $V(K^n) - \{v\}$ , luego

$$\sum_{i=1}^r |A_{iv}| = n - 1;$$

y entonces, sucede una de las siguientes desigualdades,

$$\begin{aligned} (a_1) \quad & |A_{1v}| \geq R(l_1 - 1, \dots, l_r); \\ (a_2) \quad & |A_{2v}| \geq R(l_1, l_2 - 1, \dots, l_r); \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ (a_r) \quad & |A_{rv}| \geq R(l_1, \dots, l_r - 1). \end{aligned}$$

Esto último es cierto pues de lo contrario

$$n-1 = \sum_{i=1}^r |A_{iv}| \leq [R(l_1-1, \dots, l_r)-1 + \dots + R(l_1, \dots, l_r-1)-1] = n-2,$$

lo cual es una contradicción.

Supongamos que  $(a_1)$  es cierto. Por la definición de  $R$  existe  $T_1 \subseteq A_{1v}$  tal que  $|T_1| = l_1 - 1$  y  $[T_1]$  es una  $K^{l_1-1}$  coloreada con color 1, o existe  $j$  con  $2 \leq j \leq r$  tal que existe  $T_j \subseteq A_{1v}$  tal que  $|T_j| = l_j$  y  $[T_j]$  es una  $K^{l_j}$  coloreada de color  $j$ .

Si sucede lo segundo ya tenemos lo que queríamos; si sucede lo primero, notemos que para cada  $y \in A_{1v}$ ,  $vy$  es de color 1, luego, dado que  $T_1 \subseteq A_{1v}$ , para cada  $y \in T_1$ ,  $vy$  es de color 1, tenemos que  $T_1 \cup \{v\}$  tiene  $l_1$  vértices y está coloreado de color 1, que es lo que queríamos.

Si  $(a_i)$  es cierto para  $i \neq 1$ , el argumento es análogo. Por tanto

$$2 + \sum_{i=1}^r [R(l_1, \dots, l_i - 1, \dots, l_r) - 1] \rightarrow (l_1, \dots, l_r),$$

lo cual demuestra el Teorema.

Q.E.D.

# Bibliografía

- [1] Berge, C.: Hypergraphs: Combinatorics of finite sets. Amsterdam, North- holland, 1989.
- [2] Bollobás. B.: Extremal Graph Theory. Dover Publications, 2004.
- [3] Bondy, J.A., Murty, U.S.R.: Graph Theory with Applications. American Isevier, Pub. Co., 1976.
- [4] Chartrand, G.: Introductory Graph Theory. Dover, 1985, U.S.
- [5] Diestel, R.: Graph Theory. Graduate Texts in Mathematics 173. Springer, 1997, U.S.
- [6] P. Erdős, M. Simonovits, V. T. Sós. “Anti-Ramsey theorems”. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, **10**. Infinite and finite sets, Kesetszhely (Hungary), 1973, 633-643.
- [7] P. Erdős. “On some extremal problems on  $r$ -graphs”. *Discrete Mathematics*, Volume 1. No. 1 (1971), 1-6.
- [8] Graham, R. L.; Rothschild, B. L.; Spense, J. H.: Ramsey Theory. Wiley-Interscience, 1980.
- [9] Nathanson, M. B.: Additive Number Theory The Classical Bases. Graduate Texts in Mathematics 164. Springer, 1996.

- 
- [10] R. Rado, “Anti-Ramsey theorems”. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, **10**. Infinite and finite sets, Keszethely (Hungary), 1973, 1159-1168.
- [11] F. Sterboul, “A new combinatorial parameter”. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, **10**. Infinite and finite sets, Keszethely (Hungary), 1973, 1387-1404.
- [12] Voloshin, V. I.: *Coloring Mixed Hypergraphs: Theory, Algorithms and Applications*. The Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, Field Institute Monographs, 2002.