UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ASPECTOS TOPOLÓGICOS Y DIFERENCIABLES DE LAS VARIEDADES HOMOGÉNEAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

VÍCTOR ISIDORO BRAVO REYNA

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. FRANCISCO MANUEL BARRIOS PANIAGUA

2009

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ASPECTOS TOPOLÓGICOS Y DIFERENCIABLES DE LAS VARIEDADES HOMOGÉNEAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

NOMBRE DEL ALUMNO
VICTOR ISIDORO BRAVO REYNA

TUTOR
M. EN C. FRANCISCO MANUEL BARRIOS PANIAGUA

2009

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del Alumno Bravo Reyna Victor Isidoro 56 55 65 07 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 300044157
2. Datos del Tutor M. en C. Francisco Manuel Barrios Paniagua
3. Datos del sinodal 1 Dr. Federico Sánchez Bringas
4. Datos del sinodal 2 Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco
5. Datos del sinodal 3 Dra. Adriana Ortiz Rodríguez
6. Datos del sinodal 4 Dr. José Seade Kuri
7. Datos del trabajo escrito. Aspectos topológicos y diferenciables de las variedades homogéneas. 86 p. 2009

VNIVERSDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
Secretaría General
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Aspectos Topológicos y Diferenciables de Las Variedades Homogéneas

realizado por **Bravo Reyna Victor Isidoro** con número de cuenta **3-0004415-7** quien ha decidido titularse mediante la opción de **tesis** en la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario	Dr. Federico Sánchez Bringas	
Propietario	Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco	
Propietario Tutor	M. en C. Francisco Manuel Barrios Paniagua	
Suplente	Dra. Adriana Ortíz Rodríguez	Adriana
Suplente	Dr. José Seade Kuri	

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D. F., a 30 de junio de 2009
EL COORDINADOR DEL COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

M. EN C. FRANCISCO DE JESÚS STRUCK CHÁVEZ

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.
'nlm.

Tu nombre debía estar aquí...

Índice general

Índice general I

1 Conceptos básicos **5**
1.1. Grupos . . . 5
1.2. Variedades diferenciables . . . 7
1.3. Vectores tangentes y la diferencial . . . 8
1.4. Campos vectoriales . . . 10
1.5. Formas diferenciales . . . 12

2 Grupos de Lie **15**
2.1. Grupos de Lie . . . 15
2.2. Homomorfismos . . . 24
2.3. Subgrupos de Lie . . . 25
2.4. El mapeo exponencial . . . 26
2.5. Subgrupos Cerrados . . . 32
2.6. La representación adjunta . . . 35
2.7. Edificando una variedad homogénea . . . 39

3 Variedades homogéneas **47**
3.1. Variedades de Stiefel . . . 48
3.2. Variedades de Grassmann . . . 53
3.3. Entre el espacio cubriente y el grupo fundamental . . . 55
3.4. Grupos de homotopía . . . 63
3.5. Homotopía de variedades de Stiefel y grupos clásicos . . . 64

4 Divertimento en el haz tangente **71**
4.1. La sutileza del haz tangente . . . 73

Bibliografía **81**

Tabla de Notación **85**

Introducción

Cada tema matemático siempre es fascinante y tanto más cuando se conjuntan varias ramas matemáticas para abordarlo. Aquí se hará evidente cómo el álgebra y la geometría juegan de manera sincronizada para dar vida a la noción de grupo de Lie, idea de la cual se parte para dar un acercamiento preciso al concepto de variedad homogénea, que es el tema medular de este trabajo.

Uno de los objetivos que se buscó es dar un acercamiento cuidadoso, sencillo de leer y entender, de los conceptos de grupos de Lie y álgebras de Lie, por lo cual en el primer capítulo se introducen los nociones básicas en que se asientan y los fundamentos relacionados con estos temas (grupos, homomorfismos, variedades diferenciales, espacio tangente, formas diferenciales, etc.), las cuales suelen de manera habitual formar parte de los cursos básicos de álgebra moderna y geometría diferencial; además se exhiben algunos ejemplos de grupos y álgebras de Lie, así como los resultados e ideas necesarias para construir el concepto de variedad homogénea. Para este fin se trató de ser puntual y claro en las definiciones de traslaciones izquierdas, campos invariante por la izquierda, mapeo exponencial, acción, grupo de isotropía, representación adjunta y subgrupo cerrado, debido a ser de vital importancia al ser utilizados con bastante frecuencia en la prueba de los resultados que se exhiben y para los cuales se buscó dar demostraciones detalladas y claras.

Por otra parte se prueba formalmente (lo cual no suele aparecer en la literatura) como las variedades de Grassmann, las variedades de Stiefel, los grupos clásicos, $\mathbb{S}^n$, así como los espacios proyectivos son variedades homogéneas; además de dar algunas de sus características geométricas y topológicas (a través de la teoria de homotopía).

Para finalizar, en el último capítulo se introducir un resultado de verdadera importancia el cual no es mencionado en la literatura relacionada con variedades homogéneas; así el propósito a seguir fue describir y dar una demostración constructiva, clara y concisa de que el haz tangente de una variedad homogénea de igual manera es una variedad homogénea.

En cuanto al trabajo total, se trató de que estuviese autocontenido por lo cual se encontrarán referencias cruzadas y en los casos donde sólo se postulan teoremas o proposiciones se dan citas para su consulta.

Capítulo 1

Instrucciones para armar

No te he dicho nada,
para que lo encuentres
por ti solo.

“Vísteme de infinito el corazón...”
Juan Luis Guerra.

Antes que nada debemos introducir los fundamentos necesarios para desarrollar las nociónes de grupo de Lie, álgebra de Lie y variedad homogénea, los cuales son los temas principales que se abordan en este trabajo. Así para bien entender los conceptos anteriores se requiere de las nociones primarias en teoria de grupos y geometría diferencial, para lo cual comenzaremos de forma breve y concisa con los conceptos de grupo, homomorfismos de grupos, variedades diferenciales, la diferencial de una función, el espacio tangente y haz tangente, difeomorfismo y formas diferenciales, entre otras; conjuntamente daremos varias ideas relacionadas a estos temas que nos serán de gran utilidad a lo largo del trabajo para construir y abordar las variedades homogéneas, las cuales son nuestro objetivo principal.

1.1. Grupos

Definición 1.1. Por una *operación binaria* sobre un conjunto no vacío G, entenderemos una función:

$$\mu : G \times G \to G$$
$$(a, b) \mapsto \mu(a, b),$$

diremos que μ es *asociativa* si:

$$\mu(\mu(a, b), c) = \mu(a, \mu(b, c)) \qquad \text{para cualesquiera } a, b, c \in G.$$

Tendremos por un *grupo* a una pareja (G,μ) de un conjunto no vacio y una operación binaria asociativa, donde G contiene un elemento *neutro o identidad*, $e \in G$, para el cual se satiface lo siguiente:

i.- $\mu(e,a) = a = \mu(a,e)$ para cada $a \in G$.

ii.- Para todo $a \in G$ existe un único elemento, $\widetilde{a} \in G$ tal que

$$\mu(a,\widetilde{a}) = e = \mu(\widetilde{a},a)$$

a tal elemento lo llamaremos el *inverso* de a y será denotado por $\widetilde{a} := a^{-1}$.

Una pareja $(a,b) \in G$ se dice que *conmuta* si

$$\mu(a,b) = \mu(b,a),$$

así, si toda pareja en el grupo (G,μ) conmuta, G será llamado un *grupo abeliano.*

Definición 1.2. Sean (G,μ) y $(\widetilde{G},\widetilde{\mu})$ dos grupos. Una función $\varphi : G \to \widetilde{G}$ es un *homomorfismo* si para cualesquiera $a,b \in G$:

$$\varphi(\mu(a,b)) = \widetilde{\mu}(\varphi(a),\varphi(b)),$$

que interpretamos diciendo que la función φ es compatible con las operaciones de los grupos. Si φ es un homomorfismo inyectivo es nombrado un *monomorfismo*, si φ es un homomorfismo suprayectivo diremos que es un *epimorfismo*; mientras tanto, si φ es un homomorfismo biyectivo es nombrado un *isomorfismo* y en este caso acordaremos que G y $\widetilde{G}$ son grupos isomorfos y lo denotaremos por $G \simeq \widetilde{G}$.

Teorema 1.1. *Sea* $\varphi : (G,\mu) \to (\widetilde{G},\widetilde{\mu})$ *un homomorfismo.*

(i).- $\varphi(e) = \widetilde{e}$ *donde* $\widetilde{e}$ *es el elemento neutro en* $\widetilde{G}$.

(ii).- *Para todo* $a \in G$ *se cumple con* $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

(iii).- *Si* $a \in G$ *y* $n \in \mathbb{Z}$ *entonces* $\varphi(a^n) = \varphi(a)^n$.

■

Para una prueba de este teorema verificar [Ro]

Definición 1.3. Un *subgrupo* (H,μ) de un grupo (G,μ), es un subconjunto no vacío de G que satisface:

(i).- Para cualquier $h \in H$ necesariamente $h^{-1} \in H$.

(ii).- Para cualesquiera $g,h \in H$ implica que $\mu(g,h) \in H$.

En adelante quedará entendido, al hacer referencia a un grupo, que éste implícitamente lleva asociado una operación, por lo cual la omitiremos y sólo nos limitaremos a denotar a todo grupo por medio del conjunto G que lo define.

1.2. Variedades diferenciables

Definición 1.4. Un *espacio localmente euclidiano M de dimensión n* es un espacio topológico M que en cada punto posee una vecindad homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $\varphi : U \subset M \to \mathbb{R}^n$, es un homeomorfismo, con U abierto, φ es llamado una transformación coordenada y el par (U, φ) es llamado un sistema coordenado.

Definición 1.5. Una *estructura diferenciable* $\mathscr{F}$ de clase C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ sobre un espacio localmente euclidiano M es una colección de sistemas coordenados $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ que satisfacen las siguientes propiedades:

(a) $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = M$

(b) $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ es C^k para todo $\alpha, \beta \in \Lambda$.

(c) La colección $\mathscr{F}$ es máxima con respecto a **(a)** y **(b)**; esto es, si (U, φ) es otro sistema coordenado tal que $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ y $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ son C^k para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces $(U, \varphi) \in \mathscr{F}$.

Definición 1.6. Una *variedad diferenciable* de dimensión n de clase C^k es una pareja $(M, \mathscr{F})$ que consiste de un espacio localmente euclidiano de dimensión n y segundo numerable (i.e., un espacio cuya topología tiene una base numerable), equipado con una estructura diferenciable $\mathscr{F}$ de clase C^k.

Nos limitaremos en lo sucesivo a denotar a una variedad diferenciable sencillamente por M e implícitamente la asumiremos de clase C^∞.

Definición 1.7. Sea $U \subset M$ abierto. Decimos que $f : U \to \mathbb{R}$ es una función C^∞ sobre U y escribimos $(f \in C^\infty(U))$ si $f \circ \varphi^{-1}$ es C^∞ para cada función coordenada φ sobre M; Una función $\psi : M \to N$ es llamada *diferenciable de clase* C^∞ si $g \circ \psi$ es una función C^∞ sobre ψ^{-1} para toda función $g \in C^\infty$ definida sobre conjuntos abiertos de N. De manera equivalente, la función continua ψ es C^∞ si y solo si $\varphi \circ \psi \circ \tau^{-1}$ es C^∞ para cada función coordenada τ sobre M y φ sobre N.

A excepción que se indique lo contrario, en adelante M y N denotarán variedades diferenciables. Por otra parte, se puede probar que la composición de dos funciones diferenciables es de nuevo diferenciable; y recordemos que $\psi : M \to N$ es C^∞ si y sólo si para cada $m \in M$ existe una vecindad U de m para la cual $\varphi|_U$ es C^∞.
Además supondremos que nuestra variedades son normales, metrizables y paracompactas; con esto último aseguramos la existencia de particiones de la unidad sobre nuestras variedades.

1.3. Vectores tangentes y la diferencial

Para poder definir un vector tangente en un punto a una variedad, primero veamos a un vector v con componentes $(v_1, \ldots v_d)$ en un punto $p \in \mathbb{R}^d$ como un operador sobre funciones diferenciables. De manera más precisa, si f es diferenciable en una vecindad de p, asignamos a f el número real $v(f)$ que es la derivada direccional de f en la dirección v en p. Esto es:

$$v(f) = v_1 \frac{\partial f}{\partial r_1}\bigg|_p + \ \ldots \ + v_d \frac{\partial f}{\partial r_d}\bigg|_p ,$$

donde cada r_i es una función coordenada. Esta operación del vector v sobre funciones diferenciables satisface dos propiedades importantes que la hacen ser una *derivación lineal* sobre funciones:

$$v(f + \lambda g) = v(f) + \lambda v(g) \qquad \text{(aditividad)},$$

$$v(f \cdot g) = f(p)v(g) + g(p)v(f) \qquad \text{(regla de Leibniz)},$$

siempre y cuando f y g sean funciones diferenciables alrededor de p. Para ser más preciso, estamos tomando derivadas direccionales del punto p en vecindades arbitrariamente pequeñas.

Definición 1.8. Sea (U, φ) un sistema coordenado con funciones coordenadas $\{x_1, \ldots, x_d\}$, y $m \in U$. Para cada $i \in \{1, \ldots, d\}$, definimos un vector tangente $(\partial/\partial x_i)|_m \in T_m M$ por

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_m\right)(f) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}\bigg|_{\varphi(m)}$$

para cada función $f \in C^\infty$ sobre una vecindad de m. $T_m M$ denota el conjunto de todos los vectores tangentes a M en m y es llamado el *espacio tangente* a M en el punto m. La ecuación anterior se interpreta como la derivada direccional de f en m en la dirección coordenada x_i, con lo que si $v \in T_m M$ tenemos

$$v = \sum_{i=1}^{d} v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_m ,$$

puesto que $\{\partial/\partial x_i\}|_m$ es una base del espacio $T_m M$; y así entonces existe una colección de números reales $a_1, \ldots, a_d$, que depende de φ, tales que

$$v(f) = \sum_{i=1}^{d} a_i \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}\bigg|_{\varphi(m)} .$$

Luego el espacio tangente $T_m M$ es de dimensión finita y además $dim\, T_m M = dim\, M$.

Definición 1.9. Por una *curva* γ entenderemos una parametrización y no solamente un conjunto de puntos en una variedad M. Así una curva γ es una función:

$$\gamma : [0, 1] \subset \mathbb{R} \to M : t \mapsto \gamma(t);$$

una curva es C^∞ si γ es una función C^∞.
Supondremos de ahora en adelante que toda curva es infinitamente diferenciable, y que para cada $t \in [0, 1]$ existe un único vector tangente a $\gamma(t)$ a quien se hará referencia por

$$\dot{\gamma}(t), \quad \gamma'(t) \quad \text{o} \quad \left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_t .$$

La Diferencial Sea $\psi : M \to N$ de clase C^∞ y $m \in M$. La *diferencial de ψ en m* es una función lineal:

$$d\psi : T_m M \to T_{\psi(m)} N$$

definida de la siguiente forma: si tomamos $v \in T_m M$, tenemos que $d\psi(v)$ será simplemente un vector tangente en $\psi(m)$; explícitamente lo que hacemos es tomar el vector tangente $v(p)$ a una curva diferenciable α en el punto $p \in M$ y asociarle el vector tangente $v(\psi(p))$ de la curva $\psi(\alpha)$. También podemos ver como opera sobre funciones. Sea $g \in C^\infty(U)$, donde U es vecindad de $\psi(m)$. Definimos $d\psi(v)(g)$ por

$$d\psi(v)(g) = v(g \circ \psi).$$

Por otra parte se define la *transformación dual*

$$\delta\psi : T^*_{\psi(m)} N \to T^*_m M$$

de manera usual como

$$\delta\psi(\omega)(v) = \omega(d\psi(v))$$

donde $\omega \in T^*_{\psi(m)} N$ y $v \in T_m M$.

Definición 1.10. ***(Difeomorfismo)*** Sean M y N variedades diferenciables. Una función $\varphi : M \to N$ es un *difeomorfismo* si ésta es biyectiva, diferenciable y con inversa biyectiva y diferenciable (por supuesto C^∞). φ es un *difeomorfismo local* en $m \in M$ si existen vecindades, U de M y V de $\varphi(m)$, para las cuales $\varphi : U \to V$ es un difeomorfismo.

Teorema 1.2. *Sea $\varphi : M \to N$ una función diferenciable y $m \in M$ tal que $d\varphi|_m : T_m M \to T_{\varphi(m)} N$ es un isomorfismo. Entonces φ es un difeomorfismo local en m.* ■

Para verificar la prueba del teorema (1.2) se puede consultar [Wa].

Definición 1.11. Sea M y N variedades diferenciables y $\varphi : M \to N$ es una función suave.

(i).- φ es una *inmersión* si la diferencial $d\varphi|_m : T_m M \to T_{\varphi(m)} N$ es una transformación no singular en cada punto $m \in M$.

(ii).- La pareja (M, φ) es una *subvariedad* de N si φ es una inmersión inyectiva.

(iii).- En suma al inciso anterior, si φ es un homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, decimos que φ es un *encaje*.

Haz tangente Sea M de clase C^∞ con estructura diferencial $\mathscr{F}$. Definimos

$$\tau(M) := \bigsqcup_{m\in M} T_m M$$

donde $\sqcup$ denota la unión disjunta; además se tiene la proyección natural siguiente:

$$\pi : \tau(M) \to M, \qquad \pi(v) = m \;\; si \;\; v \in T_m M, \tag{1.1}$$

Sea $(U, \varphi) \in \mathscr{F}$ con funciones coordenadas $\{x_1, \ldots, x_d\}$. Se define $\widetilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2d}$ por

$$\widetilde{\varphi}(v) = (x_1(\pi(v)), \ldots, x_d(\pi(v)), dx_1(v), \ldots, dx_d(v))$$

para todo $v \in \pi^{-1}(U)$. Se probará en el capítulo cuarto que mediante estas funciones y abiertos se tiene una estructura diferenciable y de este modo $\tau(M)$ con la estructura diferenciable descrita por las funciones $\widetilde{\varphi}$, es llamado el *haz tangente* de la variedad M. Si $\psi : M \to N$ es una función C^∞, entonces *la diferencial* de ψ define una función de clase C^∞ entre los haces tangentes

$$d\psi : \tau(M) \to \tau(N),$$

donde $d\psi(m, v) = d\psi_m(v)$ para todo $v \in M$.

1.4. Campos vectoriales

Definición 1.12. Un *campo vectorial X a lo largo de una curva $\alpha : [a, b] \to M$* es una función $X : [a, b] \to \tau(M)$ que levanta α, esto es, $\pi \circ X = \alpha$, donde π es la proyección canónica descrita en la ecuación (1.1). Un campo vectorial es suave (diferenciable de clase C^∞) a lo largo de α, si la aplicación $X : [a, b] \to \tau(M)$ es C^∞. Un campo vectorial X sobre un conjunto abierto U en M es un levantamiento de U sobre $\tau(M)$, esto es, una función $X : U \to \tau(M)$ tal que $\pi \circ X$ es la identidad en U. De manera más sencilla, un campo vectorial en una variedad asocia a cada punto $p \in M$ un vector $X(p) \in T_p M \subset \tau(M)$. Otra alternativa es pensar a los campos vectoriales como una función $X : \mathcal{D} \to \mathcal{F}$ de el conjunto $\mathcal{D}$ de funciones diferenciables en M al conjunto $\mathcal{F}$ de funciones en M, que definimos de la siguiente manera

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \qquad\qquad \text{para todo } \; f \in \mathcal{D}.$$

Así un campo vectorial X es diferenciable (C^∞) si $X \in C^\infty(U, T(M))$. El conjunto de campos vectoriales suaves forma un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$; si X es un campo vectorial sobre U y $m \in U$, entoces $X_m := X(m)$ es un elemento de $T_m M$, por lo que si $f \in C^\infty(U)$, entonces $X(f)$ es una función en U cuyo valor en m es justa y precisamente $X_m(f)$.

Proposición 1.1. Si X es un campo vectorial sobre M entonces lo siguiente es equivalente:

(a) X es C^∞.

(b) Si $(U, x_1, \ldots, X_d)$ es un sistema coordenado de M y si $\{a_i\}$ es una colección de funciones en U definida por

$$X|U = \sum_{i=1}^{d} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right),$$

entonces $a_i \in C^\infty(U)$.

(c) Si V es abierto en M y $f \in C^\infty(V)$, entonces $X(f) \in C^\infty(V)$. ■

Uno puede encontar en [Wa] la demostración de la proposición (1.1).

Teorema 1.3. *Existe una correspondencia uno a uno entre campos vectoriales sobre una variedad diferencial M y el conjunto de derivaciones. Especificamente si D es una derivación entonces existe un único campo vectorial X sobre M tal que $Df = Xf$ para toda función $f \in C^\infty$.* ■

La demostración del teorema previo se encuentra en [Ga].

El corchete de Lie Si X y Y son campos vectoriales suaves sobre M, definimos el campo vectorial $[X, Y]$, llamado el *corchete de Lie*, por

$$[X, Y]_m(f) = X_m(Yf) - Y_m(Xf).$$

Proposición 1.2. *Sean X, Y campos vectoriales suaves sobre una variedad diferenciable M:*

1. $[X, Y]$ *es de nuevo un campo vectorial suave* $C^\infty(M)$.
2. *Si* $f, g \in C^\infty(M)$, *entonces* $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$.
3. $[X, Y] = -[Y, X]$ *(antisimétrica).*
4. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ *para cualesquiera campos vectoriales* X, Y, Z *en* M. ■

Una prueba bastante precisa se encuentra en [Do02].

Definición 1.13. Sea X un campo vectorial suave sobre M. Una curva suave α en M es una *curva integral de X* si

$$\dot{\alpha}(t) := X(\alpha(t))$$

para toda t en el dominio de α.

Definición 1.14. Sea $\gamma : M \to N$ de clase C^∞. Los campos vectoriales suaves, X definido sobre la variedad M y Y en la variedad N son llamados γ-*relativos* si $d\gamma \circ X = Y \circ \gamma$.

Definición 1.15. ***(La derivada de Lie)*** Sean X y Y campos vectoriales sobre una variedad M denotemos por X_t el grupo *a un parámetro* de transformaciones asociadas a X (i. e., $X_t : \mathbb{R} \to G$ tal que $dX_t \subset X$ y X_t es un homomorfismo), la *derivada de Lie* del campo Y con respecto a X en el punto $m \in M$ se define mediante:

$$(L_X Y)_m = \lim_{t\to 0} \frac{dX_{-t}\left(Y_{X_t(m)}\right) - Y_m}{t} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(dX_{-t}\left(Y_{X_t(m)}\right)\right) ,$$

Proposición 1.3. Si X es un campo vectorial suave sobre una variedad M, entonces $L_X Y = [X, Y]$ para cada campo vectorial suave Y sobre M. ■

Consultar [Wa] para una prueba.

1.5. Formas diferenciales

Las formas diferenciales vienen relacionadas directamente con el concepto de trabajo de un campo a lo largo de una trayectoria o el flujo de un fluido sobre una superficie. En lo que nos concierne, no podriamos bien trabajar y entender los grupos de Lie sin la noción de formas diferenciales. Los conceptos que nos son necesarios sobre formas diferenciales son los de multiplicación exterior y diferenciación exterior.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n, denotemos por ξ, μ a dos vectores en V; en lo sucesivo tendremos por λ_i a un elemento en $\mathbb{R}$.

Definición 1.16. Una *forma exterior de grado p*, o sencillamente una *p-forma*, es una función de p vectores que es p-lineal y antisimétrica:

$$\omega : V^p \to \mathbb{R}$$

$$\omega(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\widetilde{\xi}_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) = \lambda_1\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) + \lambda_2\omega(\widetilde{\xi}_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$$

$$\omega(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{1_p}) = (-1)^v \omega(\xi_1, \ldots, \xi_p),$$

donde:

$$v = \begin{cases} 0 & \textit{si la permutacion } (i_1, \ldots,\ i_p) \textit{ es par;} \\ 1 & \textit{si la permutacion } (i_1, \ldots,\ i_p) \textit{ es impar.} \end{cases}$$

Una p-forma la denoraremos por ω^p.

El conjunto de todas las p-formas en $\mathbb{R}^n$ forman un espacio vectorial real si se introducen las operaciones de suma

$$(\omega_1 + \omega_2)(\xi) := \omega_1(\xi) + \omega_2(\xi), \qquad \xi = \xi_1, \ldots, \xi_p,\ \ \xi_j \in \mathbb{R}^n,$$

y multiplicación por escalares

$$(\lambda\omega)(\xi) = \lambda\omega(\xi), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ahora introduciremos la operación de producto exterior o multiplicación exterior para formas. Si ω^p es una p-forma y ω^q es una q-forma, entonces nuestro producto exterior $\omega^p \wedge \omega^q$ será una (p+q)-forma. Nuestra operación de multiplicación cumplirá con :

1. $\omega^p \wedge \omega^q = (-1)^{pq}\omega^q \wedge \omega^p$ (*anticonmutatividad*);
2. $(\lambda_1\omega_1^p + \lambda_2\omega_2^q) \wedge \omega^r = \lambda_1\omega_1^p \wedge \omega^r + \lambda_2\omega^p \wedge \omega^q$ (*distributividad*);
3. $(\omega^p \wedge \omega^q) \wedge \omega^r = \omega^p \wedge (\omega^q \wedge \omega^r)$ (*asociatividad*).

Definición 1.17. El producto exterior $\omega^p \wedge \omega^q$ de una p-forma con una q-forma ω^q, ambas tomadas en $\mathbb{R}^n$, es la $(p+q)$-forma, que evaluada en los vectores $\xi_i, \dots, \xi_p$, $\xi_{p+1}, \dots, \xi_{p+q} \in \mathbb{R}^n$ es igual a

$$(\omega^p \wedge \omega^q)(\xi_1, \dots, \xi_{p+q}) = \sum (-1)^v \omega^p(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_p})\omega^q(\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_q}),$$

donde $i_1 < \dots < i_p$ y $j_1 < \dots < j_q$;$(i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q)$ es una permutación de los números $(1, 2, \dots, p+q)$; y

$$v = \begin{cases} 0 & \textit{si la permutación } (i_1, \dots,\ i_p, j_1, \dots,\ j_q) \textit{ es par;} \\ 1 & \textit{si la permutación } (i_1, \dots,\ i_p, j_1, \dots,\ j_q) \textit{ es impar.} \end{cases}$$

Veamos ahora a T_mM como un espacio vectorial real y recordemos que las componentes $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ del vector tangente $\xi \in T_xM$ son los valores de las diferenciales $\{dx_i\}_{i=1}^n$ sobre el vector ξ.

Definición 1.18. Una *p-forma diferencial* $\omega^{\mathrm{p}}|_{\mathrm{x}}$ en un punto x $\in M$ es una p-forma exterior en el espacio tangente T_xM.

Así pues una p-forma diferencial es una función suave de la variedad M al dual T_m^*M del espacio tangente a M en m. Además el conjunto de p-formas diferenciales sobre una variedad constituyen un espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita). Ahora tomemos ω una p-forma diferencial. En cada punto x puede ser expresado de manera única en términos de una base.

Teorema 1.4. *Cada p-forma diferencial sobre el espacio $\mathbb{R}^n$, con un sistema coordenado $\{x_i\}_{i=1}^n$, puede ser escrito de manera única en la forma*

$$\omega^p = \sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1,\dots,i_p}(\mathrm{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$

donde los coeficientes $a_{i_1,\dots,i_p}$ son funciones suaves en $\mathbb{R}^n$.

La prueba de este último teorema puede ser consultada en [Ar].

Capítulo 2

Grupos de Lie
El fin: variedades homogéneas

"...la historia no dice quién fue el malvado.
No sé aún quién asesinó el corazón de..."
Konstantino Kavafis.

Los grupos de Lie son importantes y útiles, además de bellos; pues se asientan en dos de las ramas matemáticas más grandes: el álgebra y la geometría. En esta sección nos enfocaremos al desarrollo primario de los grupos de Lie, que es una de las clases más importantes de las variedades diferenciables los cuales además admiten una estructura de grupo (desde el punto de vista del álgebra) cuya operación de grupo es diferenciable. Se tratará también la estrecha relación que existe entre álgebras de Lie y grupos de Lie, además de encaminarnos para construir una variedad homogénea, en base a la teoria de los grupos de Lie.

2.1. Grupos de Lie

Definición 2.1. Un *grupo de Lie* G es una variedad diferenciable provista con una estructura de grupo, para la cual la transformación

$$\varphi : G \times G \to G$$
$$(\sigma, \tau) \mapsto \varphi(\sigma, \tau) := \sigma\tau^{-1} \qquad \text{para todo} \quad \sigma, \tau \in G,$$

es C^∞.

Afirmación 2.1. La condición de diferenciabilidad sobre $\varphi : G \times G \to G : (\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau^{-1}$ es equivalente a pedir que las funciones de multiplicación e inversión en G

$$\gamma : G \times G \to G : (\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau \qquad \text{y} \qquad \varsigma : G \to G : \sigma \mapsto \sigma^{-1}$$

sean diferenciables.

Demostración: Supongamos que $\varphi \in C^\infty$, entonces ς es sólo la restricción

$$\varphi|_{\{e\}\times G} : (e,\sigma) \mapsto \sigma^{-1} \qquad \text{para todo } \sigma \in G,$$

y donde $e \in G$ es el elemento neutro; mientras tanto $\gamma(\sigma,\tau) = \varphi(\sigma,\varsigma(\tau^{-1}))$; así tanto ς como γ son C^∞. Por otra parte, si ς y γ son C^∞, entonces $\varphi = \gamma(\sigma,\varsigma(\tau))$ es composición de funciones diferenciables y por tanto $\varphi \in C^\infty$. ∎

Notación Denotaremos por $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ a la variedad formada por todas las matrices de $n{\times}n$ con coeficientes en el campo $\mathbb{F}$; con la estructura diferenciable dada por la biyección natural con $\mathbb{R}^{(\dim\ \mathbb{F})n^2}$ donde se entenderá a $\dim\mathbb{F}$ por la dimensión del campo $\mathbb{F}$ sobre $\mathbb{R}$, $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{F}$.

Ejemplos 2.1.1. **(a)** **El grupo general lineal** Sea $\mathbb{F}$ un campo conmutaivo y V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Un *isomorfismo lineal o transformación lineal e invertible* de un espacio vectorial V en sí mismo es una función

$$\varphi : V \to V \quad \textit{tal que} \quad \varphi(v+\beta v_1) = \varphi(v) + \beta\varphi(v_1); \quad \beta \in \mathbb{F};$$

el conjunto de todas las transformaciones lineales operadas mediante la composición forman el grupo

$$\mathbf{GL}(V) = Aut(V) = \{\varphi : V \to V|\ \varphi \ \text{ es lineal e invertible}\}$$

(Aut(V) representa el conjunto de automorfismos) conocido como el grupo de *grupo general lineal*. Expresamos por

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}) = \{(a_{ij}); i,\ j = \{1,\dots,n\} \mid\ a_{ij} \in \mathbb{F}\}$$

al conjunto de matrices de orden n, con entradas en el campo $\mathbb{F}$; que con respecto a la suma y multiplicación de matrices forman un anillo. Al elegir una base $\mathcal{B} = \{b_i\}$ de $\mathbf{GL}(V)$ y asociar la función inyectiva $\psi_\beta : \mathbf{GL}(V) \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ dado por

$$\psi_\beta(\varphi) = (a_{ij}) \qquad \varphi(b_i) = \sum_i a_{ij} b_i,$$

la cual respeta el producto u operación, además su imagen coincide con el grupo de matrices invertibles denotado por $\mathbf{GL}(n,\mathbb{F})$, luego entonces obtenemos un isomorfismo y haciendo uso de la función determinante

$$det : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$$

para caracterizar a $\mathbf{Gl}(n,\mathbb{F})$ se tiene

$$\mathbf{GL}(V) \cong \mathbf{GL}(n,\mathbb{F}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}) \mid det\, A \neq 0\},$$

así toda transformación lineal está representada por una matriz invertible. En particular si se restringe al subconjunto formado por aquellas A para las cuales el $\det A = 1$, tenemos el subgrupo cerrado

$$\mathbf{SL}(n,\mathbb{F}) = \{A \in \mathbf{Gl}(n,\mathbb{F}) \mid det\ A = 1\}$$

conocido como el *grupo especial lineal*

Por otra parte si en el espacio vectorial V se asocia una función

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$$

tal que

(a) $\langle u, v\rangle \geq 0\ \ y\ \ \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0;$

(b) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle \qquad y \qquad si\ \ \mathbb{F} = \mathbb{C}\ \ \langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle};$

(c) $\langle \alpha u + v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{F}$

diremos que es un espacio con producto interior sobre $\mathbb{F}$, en el caso complejo es conocido como producto *hermitiano*.

Si consideramos una transformación lineal $\varphi \in \mathbf{GL}(V)$, donde V es un espacio vectorial que admite un producto interior, y φ preserva el producto interior (i.e., $\langle\varphi(u), \varphi(v)\rangle = \langle u, v\rangle$) diremos que es una *transformación unitaria* y el conjunto de todas ellas lo denotamos por

$$\mathbf{U}(n) = \{\varphi \in \mathbf{GL}(V) \mid \langle\varphi(u), \varphi(v)\rangle = \langle u, v\rangle \quad \text{para cualesquiera}\ \ u,\ v \in V\},$$

que en términos de matrices lo expresamos por

$$\mathbf{U}(n,\mathbb{F}) = \{A \in \mathbf{Gl}(n,\mathbb{F}) \mid A^{-1} = \overline{A^t}\},$$

en caso que $\mathbb{F} = \{\mathbb{R},\ \mathbb{C}\}$ denotamos por $\mathbf{U}(n,\mathbb{C}) := \mathbf{U}(n)$ y $\mathbf{U}(n,\ \mathbb{R}) := \mathbf{O}(n)$ al grupo unitario complejo y al grupo ortogonal real, ambos de orden n, respectivamente. Ahora bien otro subgrupo que obtenemos si hacemos simplemente

$$\mathbf{U}(n,\mathbb{F}) \cap \mathbf{SL}(n,\mathbb{F}) = \mathbf{SU}(n,\mathbb{F})$$

es el llamado *grupo especial unitario*.

Así a $\mathbf{GL}(n,\mathbb{F})$ podemos asociarle de manera natural una estructura diferenciable y bajo las operaciones de multiplicación de matrices (para este caso sea g_{ij} la función coordenada global que a cada $\sigma \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F})$ asigna la ij-ésima entrada, por lo que para $\sigma,\ \tau \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{F})$ la entrada $g_{ij}(\sigma\tau^{-1})$ es una función racional en términos de $g_{kl}(\sigma)$ y $g_{kl}(\tau)$ que en ningún punto es singular y se sigue $(\sigma,\tau) \mapsto \sigma\tau^{-1}$ es C^∞, una prueba más precisa se halla en [Ga] y [Wa]), obtenemos el primer grupo de Lie por excelencia. Por consiguiente $\mathbf{GL}(n,\mathbb{R})$ y $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, los grupos general lineal real y complejo respectivamente, serán nuestros primeros grupos de Lie, vistos como variedades con dominio en $\mathbb{R}^{n^2}$ y $\mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$. Al tomarnos las restricciones de la función anterior sobre $\mathbf{SL}(n, \mathbb{F})$, $\mathbf{U}(n, \mathbb{F})$ y $\mathbf{SU}(n, \mathbb{F})$ también resulta diferenciable, y por consiguiente también resultan grupos de Lie.

(b) Si tomamos dos grupos de Lie G y H, el producto $G \times H$ es también un grupo de Lie; en primera instancia $G \times H$ resulta una variedad con la estructura respectiva de variedad producto (para una descripción detallada consultar [Do01]) y si asociamos la operación del producto directo

$$\rho : (G \times H) \times (G \times H) \to G \times H$$

$$\rho\left((\varsigma, \vartheta), (\varsigma_1, \vartheta_1)\right) \mapsto (\varsigma\varsigma_1, \vartheta\vartheta_1)$$

para cada $\varsigma,\ \vartheta \in G$ y $\varsigma_1,\ \vartheta_1 \in H$, la función

$$\mu : (G \times H) \times (G \times H) \to G \times H$$

$$\mu\left((\varsigma, \vartheta), (\varsigma_1, \vartheta_1)\right) \mapsto (\varsigma\varsigma_1^{-1}, \vartheta\vartheta_1^{-1})$$

es C^∞ para cada $\varsigma,\ \vartheta \in G$ y cada $\varsigma_1,\ \vartheta_1 \in H$.

El conjunto $\mathbb{C} - \{0\}$, con la operación compatible de multiplicación, resulta un grupo de Lie. Con lo que si nos fijamos en $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\} \subset \mathbb{C}$ con la multiplicación inducida, obtenemos un grupo de Lie, por lo que con lo anterior $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1}_{n-veces}$ es otro grupo de Lie bajo la operación compatible del producto directo, el cual es conocido como el n-ésimo toro plano.

(c) El campo de los cuaterniones o números de Hamilton, es un campo no conmutativo y consiste de un espacio vectorial real de dimensión cuatro con una base $(1, i, j, k)$, cuyos elementos son de la forma

$$\mathrm{a} + \mathrm{b}i + \mathrm{c}j + \mathrm{d}k \qquad \text{con} \quad \mathrm{a, b, c, d} \in \mathbb{R};$$

los cuales se suman entrada a entrada y su producto (visto como polinomio) satisface:

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \\ ij &= -ji = k \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \end{aligned}$$

Al conjunto de elementos descritos anteriormente con las operaciones respectivas lo denotamos por $\mathbb{H}$. El conjunto $\mathbb{H}$ por ser un espacio vectorial, admite una estructura de variedad diferenciable, dada por la biyección natural

$$\chi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{H} : (\mathrm{a,b,c,d}) \mapsto \mathrm{a} + \mathrm{b}i + \mathrm{c}j + \mathrm{d}k.$$

Y $\mathbb{H}$ admite una estructura de grupo con la suma y $\mathbb{H}^* := \mathbb{H} - \{0\}$ es un grupo con el producto anteriormente descrito; en ambos casos la función $\varphi((\sigma, \tau)) = \sigma\tau^{-1}$ es C^∞, para $(\sigma, \tau) \in (\mathbb{H}, +)$ y $(\sigma, \tau) \in (\mathbb{H}^*, \cdot)$. Y así $(\mathbb{H}, +)$ y $(\mathbb{H}^*, \cdot)$ son grupos de Lie.

(d) La variedad $\mathbb{R}^2$ con la estructura de grupo dada por la operación

$$\mu : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : ((a, b), (c, d)) \mapsto (a + \exp(b)c, b + d)$$

es un grupo de Lie. Sólo es necesario verificar que la función

$$\widetilde{\mu} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : ((a, b), (c, d)) \mapsto ((a, b), (c, d)^{-1})$$

es C^∞ y donde $(c, d)^{-1}$ denota al elemento inverso con respecto a la operación μ. Es sensato el mencionar que bajo la operación μ el elemento neutro es $(0, 0)$ y los inversos están dados por $\left(\frac{-a}{\exp(b)}, -b\right)$ para cada $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. En seguida para $\widetilde{\mu}$ se tiene

$$\widetilde{\mu}((a, b), (c, d)) = \left(a + \exp(b) \cdot \frac{-c}{\exp(d)}, b - d\right)$$

que es una función de clase C^∞, pues es composición de funciones suaves puesto $\exp(b) \neq 0$ para todo $b \in \mathbb{R}$.

Definición 2.2. Un *álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$ (o sobre $\mathbb{C}$) es un espacio vectorial real (o complejo) junto con un operador bilineal

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \qquad \text{(llamado el } \textit{corchete de Lie}\text{)}$$

tal que para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ se cumple con:

(a) $[X, Y] = -[Y, X]$ (*anticonmutatividad*)

(b) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$ (*identidad de Jacobi*)

Definición 2.3. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *abeliana* si $[X, Y] = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$

La importancia principal del álgebra de Lie radica en el hecho de que por cada grupo de Lie se asocia de manera natural un álgebra de Lie, de igual dimensión , que distingue muchas de las propiedades del grupo de Lie.

Ejemplos 2.1.2.

(a) De la definición previa, tenemos que todo espacio vectorial, al que se le asocia un corchete de Lie tal que $[X, Y] = 0$ para cualesquiera elementos en este espacio, será un álgebra de Lie (abeliana).

(b) El espacio vectorial de $\mathbf{Gl}(n, \mathbb{F})$ dotado con el corchete $[A, B] = AB - BA$ forma un álgebra de Lie.

(c) El espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$ dotado con los siguientes corchetes de Lie:

$$(\ i.-) \qquad [(x,y,z).(x_1,y_1,z_1)] = (yz_1 - zy_1, zx_1 - xz_1, xy_1 - yx_1)$$
$$(ii.-) \qquad [(x,y,z).(x_1,y_1,z_1)] = (yz_1 - zy_1, 2(zx_1 - xz_1), 2(xy_1 - yx_1))$$

son ejemplos de álgebras de Lie.

Definición 2.4. Una función lineal $\mathcal{D} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ de un álgebra no asociativa $\mathfrak{g}$ sobre sí misma, es llamada una *derivación lineal* de $\mathfrak{g}$ si

$$\mathcal{D}(xy) = (\mathcal{D}x)y + x(\mathcal{D}y) \qquad \text{para cada} \quad x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

(d) El conjunto de todas las derivaciones de un álgebra $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie bajo la operación de suma, multiplicación por escalares y por el corchete definido por

$$[D_1, D_2] = D_1 \cdot D_2 - D_2 \cdot D_1,$$

donde D_1 y D_2 son derivaciones en $\mathfrak{g}$ y $(\cdot)$ denota la composición entre ellas.

Definición 2.5. Sea G un grupo de Lie y $\sigma \in G$. Una *traslación izquierda por* σ y una *traslación derecha por* σ son respectivamente las funciones l_σ y r_σ de G definidos por:

$$l_\sigma : G \to G : \rho \mapsto \sigma\rho,$$

$$r_\sigma : G \to G : \rho \mapsto \rho\sigma$$

para todo $\rho \in G$.

Puesto que l_σ y r_σ son funciones diferenciables y sus inversas resulta ser traslaciones izquierdas y derechas respectivamente, dadas de manera explícita por $l_{\sigma^{-1}}$ y $r_{\sigma^{-1}}$, entonces l_σ y r_σ resultan ser difeomorfismos.

Definición 2.6. Un campo vectorial X sobre G es llamado *invariante por la izquierda* si para cada $\rho \in G$, X es l_ρ*-relativo* (ver definición (1.14)); inmediatamente se sigue el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} T_eG \arrow[r, "dl_\rho"] & T_\rho G \\ G \arrow[u, "X"] \arrow[r, "l_\rho"'] & G \arrow[u, "X"'] \end{tikzcd}$$

Al conjunto de campos vectoriales invariantes por la izquierda sobre un grupo de Lie G será denotado en adelante por la expresión $\mathfrak{g}$.

Proposición 2.1. Sea G un grupo de Lie y tomemos el conjunto de todos los campos invariantes por la izquierda $\mathfrak{g}$. Entonces se satisface:

(a) $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial real, y la función

$$\alpha : \mathfrak{g} \to T_eG : X \mapsto X(e)$$

es un isomorfismo de $\mathfrak{g}$ con T_eG; y por consecuencia $dim\ \mathfrak{g} = dim\ T_eG = dim\ G$.

(b) Los campos vectoriales invariantes por la izquierda son suaves.

(c) El corchete de Lie de dos campos vectoriales invariantes por la izquierda es de igual manera invariante por la izquierda.

(d) $\mathfrak{g}$ forma un álgebra de Lie bajo el corchete de Lie sobre campos vectoriales.

■

La demostración de la proposición anterior puede hallarse en [Wa].

Definición 2.7. Se define el *álgebra de Lie de un grupo de Lie G* como el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de campos invariantes por la izquierda sobre G. De manera alternativa se puede tomar a el álgebra de Lie de G como el espacio tangente T_eG con la estructura de álgebra de Lie inducida por el isomorfismo dado por la proposición (2.1 (a)) de $\mathfrak{g}$ sobre T_eG, visto como un isomorfismo de álgebras de Lie; o más sencillamente se tomará el álgebra de Lie de un grupo de Lie G como el espacio tangente en e, T_eG, provisto con el corchete de Lie como producto.

Definición 2.8. Una forma ω sobre un grupo de Lie G es llamada *invariante por la izquierda* si satisface

$$\delta l_\rho \omega = \omega$$

para cada $\rho \in G$ y donde δ es la transformación dual descrita en la definición (1.3). Denotaremos al espacio vectorial de p-formas invariantes por la izquierda sobre G mediante la expresión

$$E^p_{l\ inv}(G)$$

y definiremos

$$E^*_{l\ inv}(G) := \sum_{p=0}^{dim\ G} E^p_{l\ inv}(G)$$

Las 1-formas invariantes por la izquierda son también conocidas como formas de *Maurer-Cartan*.

Observación: Una forma ω sobre un grupo de lie G puede ser vista como una función descrita de la siguiente manera:

$$\omega : \tau(G) \to \mathfrak{g}$$

$$v \mapsto dl_\sigma(v) \qquad \text{con} \quad v \in T_\sigma G,$$

lo cual implica que $dl_\rho(v) \in T_{\rho\sigma}G$, y se tiene que

$$\begin{aligned}
\delta l_\rho(\omega)(v) &= \omega\left(dl_\rho(v)\right) \\
&= dl_{(\rho\sigma)^{-1}}\left(dl_\rho(v)\right) \\
&= dl_{\sigma^{-1}}(v) \\
&= \omega(v)
\end{aligned}$$

donde $\omega(v) \in \mathfrak{g}$. Así efectivamente el efecto de ω es invariante bajo traslaciones izquierdas y este prefijo está bien definido.

Proposición 2.2. Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie.

(a) *Las formas invariantes por la izquierda son suaves.*

(b) *$E^*_{l\ inv}(G)$ es una subálgebra del álgebra de $E^*(G)$ de todas las formas suaves sobre G, y la transformación $\omega \underset{\alpha}{\rightarrow} \omega(e)$ es un isomorfismo de álgebras entre $E^*_{l\ inv}(G)$ y $\Delta(G^*_e)$ (el álgebra exterior, para una descripción más detallada ver [Wa]). En particular, dicha transformación da un isomorfismo natural de $E^1_{linv}(G)$ con G^*_e y por consiguiente con $\mathfrak{g}^*$. De esta forma consideraremos $E^1_{l\ inv}(G)$ como el espacio dual del álgebra de Lie de G.*

(c) *Si ω es una 1-forma invariante por la izquierda de X de un campo vectorial invariante por la izquierda, entonces $\omega(X)$ es una función constante sobre G, y esta constante es precisamente el efecto que ω tiene sobre X cuando ω es considerado como un elemento del espacio dual de $\mathfrak{g}$ como en el inciso anterior.*

(d) *Si $\omega \in E^1_{l\ inv}(G)$ y $X,\ Y \in \mathfrak{g}$, entonces tenemos que*

$$d\omega(X, Y) = -\omega[X, Y].$$

(e) *Sea $X_1, \ldots, X_d$ una base de $\mathfrak{g}$ con base dual $\omega_1, \ldots, \omega_d$ para $E^1_{l\ inv}(G)$. Entonces existen constantes c_{ijk} tales que*

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{d} c_{ijk} X_k.$$

(Las c_{ijk}, son llamadas constantes estructurales de G con respecto a la base X_i de $\mathfrak{g}$.) Éstas satisfacen

$$c_{ijk} + c_{jik} = 0, \tag{2.1}$$

$$\sum_r (c_{ijr}c_{rks} + c_{jkr}c_{ris} + c_{kir}c_{rjs}) = 0. \tag{2.2}$$

Las derivadas exteriores de las ω_i están dadas por las ecuaciones de Maurer-Cartan

$$d\omega_i = \sum_{j<k} c_{jki}\omega_i \wedge \omega_j.$$

Demostración: Sea $\omega \in E^{*}_{l\ inv}$ y $\tau,\ \sigma \in G$, entonces se tiene:

$$\omega|_{\tau} = \delta l_{\sigma}(\omega)_{\tau} = \omega_{\tau}(dl_{\sigma}).$$

Por otra parte definamos las funciones:

(2.2)

$$\theta : \tau(G) \times \tau(G) \to \tau(G)$$

$$((\sigma,\mu),(\tau,\nu)) \mapsto (\sigma\tau, dr_{\tau}(\mu) + dl_{\sigma}(\nu))$$

con $\sigma,\tau \in G,\ \mu \in T_{\sigma}G$ y $\nu \in T_{\tau}H$, y donde $dr_{\tau}(\mu),\ dl_{\sigma}(\nu)$ denotan las diferenciales de las traslaciones derecha e izquierda respectivamente. Observemos que $dr_{\tau}(\mu),\ dl_{\sigma}(\nu) \in T_{\sigma\tau}$, por lo que θ es una función bien definida, además haciendo uso de la afirmación (2.1) la primera entrada resulta una función diferenciable y por tanto tambíen la función θ.

(2.3)

$$\pi \times id : \tau(G) \to G \times \tau(G)$$

$$(\sigma,\mu) \mapsto (\sigma,(\sigma,\mu))$$

(2.4)

$$\gamma : G \times \tau(G) \to \tau(G) \times \tau(G)$$

$$(\sigma,(\rho,\nu)) \mapsto \left((\sigma^{-1},0),(\rho,\nu)\right)$$

Las funciones $\pi \times id$ y γ por construcción son diferenciables (para γ utilizamos nuevamente la afirmación (2.1)). Ahora podemos ver a una forma ω que es invariante por la izquierda como composición de aplicaciones C^{∞}:

$$\omega\left(dl_{\rho}(\nu)\right) = \theta \circ \gamma \circ (\pi \times id)(\rho,\nu)\ ,$$

y se ha demostrado el inciso **(a)**.

Para **(b)**, se tiene que α es lineal, además como dl_{σ} es un difeomorfismo tenemos que para cualesquiera $\omega,\ \widetilde{\omega} \in E^{*}_{l\ inv}(G)$

$$\omega \wedge \widetilde{\omega}(e) = \delta l_{\sigma}(\omega \wedge \widetilde{\omega})(e) = \delta l_{\sigma}\omega(e) \wedge \delta l_{\sigma}\widetilde{\omega}(e) = \omega(e) \wedge \widetilde{\omega}(e)$$

por lo que se obtiene un homomorfismo de álgebras.
α es inyectiva:
si $\omega(e) = \widetilde{\omega}(e)$, entonces para cada $\sigma \in G$, por la observación previa

$$\omega(\sigma) = \omega(e) = \widetilde{\omega}(e) = \widetilde{\omega}(\sigma)$$

así $\omega = \widetilde{\omega}$ y tenemos un isomorfismo de álgebras. En particular

$$\alpha|_{E^{1}_{l\ inv}(G)} = \Delta_{1}(T^{*}_{e}G) \cong T^{*}_{e}G$$

que por definición es el espacio dual del álgebra de Lie.
Ahora para **(c)** y **(d)**, sean $X,\ Y \in \mathfrak{g}$, $\sigma \in G$ y $\omega \in E^1_{l\ inv}(G)$ entonces

$$\omega(X(\sigma)) = \omega(X \circ l_\sigma(e)) = \omega(dl_\sigma\ X(e)) = \delta l_\sigma(\omega)(X(e)) = \omega(X(e))$$

luego $\omega(X)$ es constante en G. Por otro lado se tiene que

$$d\omega(X, Y) = -\omega[X, Y] - Y(\omega(X)) + X(\omega(Y)),$$

donde los dos últimos términos se anulan por ser $\omega(X)$ y $\omega(Y)$ constantes y esto demuestra el inciso **(d)**. Puesto que $[X_i, X_j] \in \mathfrak{g}$, podemos expresar el corchete como combinación de la base $\{X_i\}$, por lo tanto

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{d} c_{ijk} X_k,$$

donde las constantes c_{ijk} se relacionan de forma directa con los campos elegidos; las ecuaciones (2.1) y (2.2) se siguen de aplicar la caracterización de la anticonmutatividad de el corchete de Lie y la identidad de Jacobi, respectivamente. Por último si se toman cualesquiera dos básicos en el álgebra de Lie y aplicamos **(d)** se sigue que

$$\begin{aligned} d\omega_i(X_k, X_j) &= -\omega_i[X_k, X_j] \\ &= -\omega_i \sum_i c_{kji} X_i \\ &= \sum_i c_{kji} \omega_i(X_i) \\ &= \sum_{j<k} c_{kji} \omega_k \wedge \omega_j(X_k, X_j), \end{aligned}$$

que expresa la derivada exterior en relación con las ecuaciones de Maurer-Cartan. ■

2.2. Homomorfismos

Definición 2.9. Una función $\varphi : G \to H$ es un *homomorfismo de grupos de Lie* si φ es una función C^∞ y un homomorfismo de grupos. Llamaremos a φ un *isomorfismo* si además φ es un difeomorfismo. Un isomorfismo $\varphi : G \to G$ es llamado un *automorfismo*. Si $H = Aut(V)$ para algún espacio vectorial V, o si $H = Gl(n, \mathbb{C})$ o $Gl(n, \mathbb{R})$, entonces un homomorfismo $\varphi : G \to H$ es llamado una *representación del grupo de Lie G*. Si además φ es una transformación inyectiva, diremos que la representación es *fiel*.

Definición 2.10. Si $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son álgebras de Lie, una aplicación $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es un *homomorfismo de álgebras de Lie* si es lineal y preserva el corchete de Lie, es decir:

$$\psi[X, Y] = [\psi(X), \psi(Y)] \qquad \text{para todo } X,\ Y \in \mathfrak{g}.$$

Además si ψ es biyectiva diremos que es un *isomorfismo* y un isomorfismo de $\mathfrak{g}$ en sí mismo será llamado un *automorfismo*.

Sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo. Dado que φ manda al neutro de G en el neutro de H, la diferencial $d\varphi$ es una transformación lineal entre los respectivos espacios tangentes; y además, por medio de las identificaciones naturales de dichos espacios en los neutros con sus álgebras de Lie, la transformación $d\varphi : T_eG \to T_eH$ induce una transformación lineal en sus respectivas álgebras

$$d\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h},$$

donde si $X \in \mathfrak{g}$, entonces $d\varphi(X)$ es el único campo vectorial invariante por la izquierda sobre H tal que

$$d\varphi(X)(e) = d\varphi(X(e)).$$

2.3. Subgrupos de Lie

Definición 2.11. (H, ς) es un *subgrupo de Lie* de un grupo de Lie G si

(a) H es un grupo de Lie,

(b) (H, ς) es una subvariedad de G,

(c) $\varsigma : H \to G$ es un homomorfismo de grupos de Lie.

(H, ς) es llamado un *subgrupo cerrado* de G, si además, $\varsigma(H)$ es un subconjunto cerrado de G. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Un subespacio $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es una *subálgebra* si $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ para todo X, $Y \in \mathfrak{h}$. Una subálgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ claramente forma un álgebra de Lie bajo el corchete inducido por $\mathfrak{g}$.

Proposición 2.3. Sea G un grupo de Lie conexo y U una vecindad de e. Entonces

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$$

donde U^n consiste de todos los $n-$ *productos* de elementos de U. (Decimos que U genera a G). ■

La proposición (2.3) la podemos reinterpretar de la siguiente manera:

Lema 2.1. *Si U_e es cualquier vecindad de e de un grupo de Lie G conexo, entonces cada elemento $\sigma \in G$ puede ser representado de la forma $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ y donde $\sigma_1, \ldots \sigma_n \in U_n$.*

Demostración: Sea U_e una vecindad de e y tomemos el conjunto $U_e^{-1} = \{\tau \in G |\ \tau = \sigma^{-1} \quad \text{con} \quad \sigma \in U_e\}$ que está formado por todos los inversos de U_e. Ahora tomemos la vecindad simétrica $\widetilde{U_e} := U_e \cap U_e^{-1}$ y $\mathcal{P} \subseteq G$ el conjunto de todos los productos finitos $\sigma_1 \cdots \sigma_n$ donde por supuesto ahora estamos tomando $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \widetilde{U_e}$. $\mathcal{P}$ es un conjunto abierto debido a que para cada $\tau \in \mathcal{P}$ se tiene una vecindad abierta dada por $\tau\widetilde{U_e} \subset \mathcal{P}$.

Sea τ un elemento en la cerradura de $\mathcal{P}$ y sea $\sigma \in \mathcal{P} \cap \tau\widetilde{U_e}$ (ya que τ pertenece a la cerradura de $\mathcal{P}$ cualquier vecindad abierta de τ intersecta a $\mathcal{P}$, en particular si se toma $\tau\widetilde{U_e}$, y se asegura que efectivamente $\mathcal{P} \cap \tau\widetilde{U_e}$ es un conjunto no vacío). Puesto que $\widetilde{U_e}$ es simétrica tenemos que $\sigma^{-1}\tau \in \widetilde{U_e} \subset \mathcal{P}$ y entonces $\tau \in \mathcal{P}$; luego entonces $\mathcal{P}$ es también un conjunto cerrado, y por lo tanto $\mathcal{P} = G$. ■

Y este último argumento es suficiente para probar la proposición (2.3).

Teorema 2.1. *Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, y sea $\widetilde{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g}$ una subálgebra. Entonces existe un único subgrupo de Lie conexo(H, ς) de G tal que $d\varsigma(\mathfrak{h}) = \widetilde{\mathfrak{h}}$.* ■

Teorema 2.2. *Si un subgrupo abstracto de A de un grupo de Lie G tiene una estructura de variedad que hace a (A, i) una subvariedad de G con la inclusión (i), entonces existe una única estructura de variedad, donde A es un grupo de Lie y en consecuencia (A, i) es un subgrupo de Lie de G.* ■

Se puede consultar el libro [Wa] para encontrar una prueba de los teoremas (2.1) y (2.2).

2.4. El mapeo exponencial

El objetivo primordial de la siguiente discusión es definir una función del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ asociada con grupo de Lie G sobre este último. Dicha función es llamada el mapeo exponencial y la imagen para cada $X \in \mathfrak{g}$ bajo éste, es denotado por $\exp(X)$; la importacia primordial del mapeo exponencial radica en que por cada subálgebra de un álgebra de Lie, éste asociará de manera única un subgrupo de Lie a través del mapeo exponencial.

Definición 2.12. Tómese a $\mathbb{R}$ como grupo aditivo y G un grupo de Lie. Un homomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \to G$ es llamado un *subgrupo a un parámetro* de G

Teorema 2.3. *Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su respectiva álgebra de Lie. Para cada $X \in \mathfrak{g}$, existe un único homomorfismo*

$$h := h_X : \mathbb{R} \to G$$

que es diferenciable en $t = 0$ y satisface

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_0 = X(e).$$

■

Para una prueba del teorema (2.3) se puede consultar [Du].

Observación: h define una curva sobre G, por lo que el espíritu del teorema (2.3) es dar una curva solución para el campo vectorial X donde el vector tangente en 0 sea $X(e)$.

Definición 2.13. Si G es un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su respectiva álgebra de Lie, para cada $X \in \mathfrak{g}$, se define el elemento $\exp(X) \in G$ como:

$$\exp(X) := h_X(1),$$

donde $h_X : \mathbb{R} \to G$ es un homomorfismo de grupos de Lie tal que $\frac{dh_X}{dt}\big|_0 = X(e)$ (que por el teorema (2.3) es único). Por ello se define el *mapeo exponencial* del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre el grupo de Lie G mediante la aplicación descrita por

$$\exp : \mathfrak{g} \to G$$

$$X \mapsto \exp(X).$$

Denotemos ahora a $\exp_X(t) := h_x(t)$ el subgrupo a un parámetro del grupo de Lie G. Si se define el homomorfismo del álgebra de Lie de $\mathbb{R}$ y $\mathfrak{g}$ mediante:

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathfrak{g}$$

$$\lambda \frac{d}{dr} \mapsto \lambda X(e),$$

se tiene que

$$d \exp_X \left(\lambda \frac{d}{dr} \right) = \lambda X(e),$$

para lo cual inmediatamente resulta el siguiente teorema:

Teorema 2.4. *Sea $X \in \mathfrak{g}$ del grupo de Lie G. Entonces*

(a) $\exp(tX) = \exp_{\mathrm{X}}(t)$ *para cada $t \in \mathbb{R}$.*

(b) $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *es C^∞ y $d \exp : \mathfrak{g}_0 \to T_eG$ es la identidad (con las identificaciones usuales), además* exp *da un difeomorfismo de una vecindad de* 0 *en $\mathfrak{g}$ con una vecindad de e en G.*

(c) $l_\sigma \circ \exp_{\mathrm{X}}$ *es la única curva integral de X que toma el valor σ en* 0*. Como una consecuencia particular se tiene que todo campo vectorial invariante por la izquierda siempre es completo.*

(d) *Tomemos un homomorfismo de grupos de Lie*

$$\varphi : G \to H\,,$$

entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] & H \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "d\varphi"'] & \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

Demostración: Comenzaremos por **(c)**. En un inicio se afirmó que $d\,\mathrm{exp_X}\left(\lambda\frac{d}{dr}\right) = \lambda X$, por lo cual $\mathrm{exp_X}$ es una curva integral de X que en particular $\mathrm{exp_X}(0) = e$, por lo que $\mathrm{exp_X}$ es la única curva integral de X para la cual el $\mathrm{exp_X}(0) = e$ y $d\mathrm{exp_X}(0) = X(e)$; es también claro, pues $X \in \mathfrak{g}$,

$$d(l_\sigma \circ \exp_X) = dl_\sigma(\exp_X) \circ d(\exp_X) = dl_\sigma(\exp_X) \circ X = X \circ l_\sigma(\exp_X)$$

y $l_\sigma \circ \exp_X$ es también una curva integral de X y obviamente $l_\sigma \mathrm{exp_X}(0) = \sigma$.

En otra instancia tomemos los subgrupos a un parámetro de G, definidos por

$$\varphi(t) = \exp_{sX}(t) \quad y \quad \psi(t) = \exp_X(st) \qquad s, t \in \mathbb{R},$$

φ cumple con ser la única curva integral de sX tal que $\varphi(0) = e$, mientras tanto

$$\psi\left(\frac{d}{dr}|_t\right) = d\,\mathrm{exp_X}\left(s\frac{d}{dr}\right) = sX|_{\,\mathrm{exp_X}(st)},$$

entonces ψ es curva integral de sX talque $\psi(0) = e$, entonces por unicidad $\varphi = \psi$. Si hacemos t=1

$$\exp(sX) = \mathrm{exp_{sX}}(1) = \mathrm{exp_X}(s) \qquad \textit{para cualquier } s \in \mathbb{R}.$$

Para demostrar **(b)** definamos el siguiente campo vectorial suave

$$V_{(\sigma,X)} = (X(\sigma), 0) \;\in T_\sigma G \oplus \mathfrak{g}$$

y asociamos el grupo a un parámetro de transformaciones a dicho campo, dado por:

$$V^{\,t}_{(\sigma,X)} = (l_\sigma \circ \mathrm{exp_X}(t), X) \qquad t \in \mathbb{R},$$

que se caracteriza que para cada $\sigma \in G$ se tienen curvas integrales que pasan por (σ, X) y para cualquier $t \in \mathbb{R}$ es suave. Ahora sea $\pi : G \times \mathfrak{g} \to G$ la proyección canónica, entonces si $t = 1$ y nos fijamos en el campo (e, X), entonces

$$\pi \circ V^{\,1}_{(e,X)} = \exp\,(X)$$

y la suavidad del mapeo exponencial se sigue de que lo exhibimos como composición de transformaciones C^∞. Para ver que $d\exp = id$ basta ver que $d\exp_0 : T_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ y como $d\exp$ no se anula en 0, y por el teorema de la función inversa aseguramos que exp es un difeomorfismo local. Por último, para el subgrupo a un parámetro de H (es composición de homomorfismos) $t \mapsto \varphi \circ \exp\,(\mathrm{tX})$ define una curva suave con vector tangente en 0 dado por

$$d\varphi \circ \exp\,(\mathrm{tX})|_0 = d\varphi(\,d\exp\,(\mathrm{tX})|_0) = d\varphi(X(e)).$$

Por otra parte como $d\varphi(X) \in \mathfrak{h}$;

$$t \mapsto \exp\, t(d\varphi(X))$$

es un subgrupo a un parámetro dado por una curva integral de $d\varphi(X)$ que cumple con $\exp_{d\varphi(X)}(0) = (d\varphi(X))(e)$ y por unicidad se tiene

$$\varphi(\exp(tX)) = \exp(t(d\varphi(X))).$$

∎

Observación: Como consecuencia de teorema 2.4(a) y dado que $\exp_X$ es un homomorfismo, se tiene las siguientes igualdades:

(a) $\exp(t_1 + t_2)(X) = (\exp\ t_1X)(\exp\ t_2X)$ para todo $t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}$.

(b) $\exp(-tX) = (\exp\ tX)^{-1}$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Esto último teorema nos da una herramienta para caracterizar a cualquier subgrupo de un grupo de Lie a través del mapeo exponencial, en particular aquí se tendrá gran interés en los subgrupos cerrados.

Teorema 2.5. *Sea $\mathcal{A}$ cualquier subgrupo de G y $\mathfrak{a}$ un subespacio de $\mathfrak{g}$. Si U es una vecindad de $0 \in \mathfrak{g}$ difeomorfa bajo el mapeo exponencial con una vecindad V de e y se supone que*

$$\exp(U \cap \mathfrak{a}) = \mathcal{A} \cap V,$$

entonces $\mathcal{A}$ con la topología relativa es un subgrupo de Lie de G y $\mathfrak{a}$ su correspondiente álgebra de Lie.

Demostración: El subgrupo $\mathcal{A}$ tendrá una estructura diferenciable tal que $(\mathcal{A}, i)$ es una subvariedad de G, donde i es la inclusión de $\mathcal{A}$ en G. Con esta estructura de variedad sobre $\mathcal{A}$ y dado que es un subgrupo, $\mathcal{A}$ resulta un subgrupo de Lie de G. Ahora, pues la inclusión es una función diferenciable, se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "i"] & G \\ \mathfrak{a} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "di"'] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

por lo que si se toma la transformación

$$\varphi := \exp|_{(U\cap\mathfrak{g})} : U \cap \mathfrak{g} \to V \cap \mathcal{A}$$

resulta un difeomorfismo y por tanto $\mathfrak{a}$ vendrá a ser el álgebra de Lie de $\mathcal{A}$. En extra se tiene que

$$\mathcal{F} := \{(\mathcal{A} \cap \sigma V, \varphi^{-1} \circ l_\sigma) |\ \sigma \in \mathcal{A}\}$$

es una estructura diferenciable para el subgrupo $\mathcal{A}$.

∎

El mapeo exponencial sobre $\mathbf{Gl(n,\mathbb{C})}$, $\mathbf{Gl(n,\mathbb{R})}$ El mapeo exponencial para los grupos de matrices $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ y $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ está dado explícitamente por la serie de potencias descrita por:

$$\exp(tA) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \tag{2.3}$$

Lo anterior realmente tiene sentido pues la serie converge de manera uniforme, para cada $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ en una región acotada de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ (i.e., para cada A tal que $|x_{ij}(A)| \leq \mu$, con lo que la serie $\sum_k \frac{x_{ij}(A)^k}{k!}$ converge).

Sean $B \in \mathbf{Gl}(n,\mathbb{C})$ y la función continua

$$\varphi_B : C \mapsto BC : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$$

(es sólo una traslación izquierda), y se denota la k-ésima suma parcial de la serie en la ecuación (2.3) por

$$S_k(A) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(A)^n}{n!},$$

y es claro

$$\lim_{k\to\infty} S_k(A) = \exp(A) := e^A,$$

ahora si $B \in Gl(n,\mathbb{C})$, por lo anterior se sigue

$$Be^AB^{-1} = B\left(\lim_{k\to\infty} S_k(A)\right)B^{-1} = \lim_{k\to\infty}\left(BS_k(A)B^{-1}\right) = e^{BAB^{-1}}.$$

Además dado que toda matriz es equivalente a una matriz triangular superior (i.e. $a_{ij} = 0$ si $i > j$), o de igual manera, para cada matrix cuadrada A, podemos exhibir $B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ para la cual se cumple que BAB^{-1} es triangular superior y por ello también $e^{BAB^{-1}}$ es una matriz triangular superior, entonces los elementos de la diagonal se describen por $\{e^{\lambda_i}\}_{i=1}^n$, con λ_i las componentes diagonales de BAB^{-1}. Y al aplicar la función $det : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ resulta

$$det\left(e^{BAB^{-1}}\right) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = Traza\left(e^{BAB^{-1}}\right),$$

por último si A, $B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ conmutan entonces:

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Ya con todas las propiedades anteriores, para cada $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ se define la función

$$\varphi_A : \mathbb{R} \to Gl(n,\mathbb{C})$$

$$t \mapsto e^{tA}$$

la cual es diferenciable y:

$$\frac{d\varphi_A}{dt}(t) = A(\varphi_A(t)) = dl_{\varphi_A} \circ A$$

y satisface que $\varphi_A(0) = I$ con vector tangente en 0 igual a A. φ_A define un homomorfismo,

$$\varphi_A(s+t) = e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA} = \varphi_A(s)\varphi_A(t)$$

por lo que resulta un subgrupo a un parámetro de $Gl(n,\mathbb{C})$. En consecuencia el mapeo exponencial para el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ sobre $Gl(n,\mathbb{C})$ está dado por la exponenciación de matrices:

$$\exp(A) := e^A \qquad \textit{para } A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}).$$

Si se restringe a representaciones de grupos de Lie, es decir si elegimos un homomorfismo $\varphi : G \to Gl(n,\mathbb{C})$ y $X \in \mathfrak{g}$, entonces por el teorema (2.4 (d))

$$\varphi \circ \exp(X) = \exp d\varphi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\varphi(X)^n}{n!};$$

con todo sentido, pues $d\varphi(X) \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.
Ahora bien, ya que se describió de aplicar el mapeo exponencial sobre matrices, podemos aplicarlo explícitamente sobre los grupos clásicos, en particular los subgrupos de $Gl(n,\mathbb{C})$ (de manera conjunta los subgrupos de $Gl(n,\mathbb{R})$). Empecemos por dar algo de denotación, sea $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ se denota la matriz transpuesta de A como A^t y la matriz conjugada de A por $\overline{A}$. En primera instancia $Gl(n,\mathbb{R}) \subset Gl(n,\mathbb{C})$ y respectivamente para las álgebras de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Aplicando el teorema (2.4(b)), se escoge U vecindad de 0 en $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ difeomorfa bajo el mapeo exponencial a V, vecindad de $I \in Gl(n,\mathbb{C})$, con U lo suficiente pequeña tal que para cualquier $A \in U$ también se verifica que A^t, $\overline{A}$ y $-A$ se encuentran en U, así tomemos pues $\widetilde{U} := U^t \cap \overline{U} \cap (-U) \cap U$. Entonces obtenemos el subgrupo de Lie $Gl(n,\mathbb{R})$ con su respectiva álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, mediante $\exp(\widetilde{U} \cap \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})) = Gl(n,\mathbb{R}) \cap V$.
Se caracteriza ahora las siguientes subálgebras y subgrupos de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ y $Gl(n,\mathbb{C})$ respectivamente:

(A) *Las matrices antihermitianas* $\mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid \overline{A}+A^t = 0\}$.

(B) *Matrices de traza* 0 $\mathfrak{sl}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid \text{traza } A = 0\}$.

(C) *Matrices antisimétricas* $\mathfrak{o}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid A + A^t = 0\}$.

(a) *El grupo unitario* $U(n) = \{A \in Gl(n,\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A^t}\}$.

(b) *El grupo lineal especial* $Sl(n) = \{A \in Gl(n,\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$.

(c) *El grupo ortogonal complejo* $O(n) = \{A \in Gl(n,\mathbb{C}) \mid A^{-1} = A^t\}$.

Comencemos por exponenciar las subálgebras descritas; si $A \in \mathfrak{u}(n)$ y nos enfocamos en las matrices cercanas a Id, es decir $A \in \left(\mathfrak{u}(n) \cap \widetilde{U}\right)$, entonces bajo $\exp(A)$ resolvemos que

$$\overline{\left(e^{A}\right)^{t}} = \overline{\left(\sum_{n=o}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\right)^{t}} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\overline{A^t}}{n!} = e^{\overline{A^t}}$$

y en suma, pues $\overline{A^t} = -A$, concluimos

$$\overline{\left(e^{A}\right)^{t}} = \left(e^{A}\right)^{-1} ,$$

además

$$\overline{\left(e^{A}\right)^{t}} e^{A} = e^{-A} e^{A} = e^{0} = I$$

que deriva en $e^A \in (U(n) \cap V)$; por otro lado si $B = e^A \in (U(n) \cap V)$ y $A \in \widetilde{U}$, por construcción de $\widetilde{U}$ se tiene que $-A = \overline{A^t}$, debido ha que

$$e^{-A} = B^{-1} = \overline{B^t} = e^{\overline{A^t}}$$

que implica $A \in \left(\mathfrak{u}(n) \cap \widetilde{U}\right)$. Se concluye entonces que

$$\exp\left(\widetilde{U} \cap \mathfrak{u}(n)\right) = U(n) \cap V ,$$

así $U(n)$ es un subgrupo de Lie cerrado de $Gl(n, \mathbb{C})$ cuya álgebra de Lie está descrita por $\mathfrak{u}(n)$. Para la subálgebra **(C)** si de igual manera $A \in \mathfrak{o}(n) \cap \widetilde{U}$, entonces resulta

$$\left(e^{A}\right)^{t} = e^{A^t} = e^{-A} = \left(e^{A}\right)^{-1} ,$$

y se sigue que

$$\exp\left(A \in \mathfrak{o}(n) \cap \widetilde{U}\right) = O(n) \cap V.$$

Entonces el grupo ortogonal lineal resulta un subgrupo de Lie, donde su álgebra de Lie está descrita por el grupo de matrices antisimétricas. Para finalizar, del hecho que $det(e^A) = e^{trazaA}$, para $A \in \left(\mathfrak{sl}(n) \cap \widetilde{U}\right)$ se tiene

$$det\left(e^{A}\right) = 1$$

con lo cual confirmamos que las matrices con traza igual a cero forman el álgebra de Lie del grupo especial lineal $Sl(n)$.

2.5. Subgrupos Cerrados

Dado cualquier subgrupo a un parámetro $\varphi : \mathbb{R} \to G$ de un grupo de Lie G, éste resulta C^∞ si sólo pedimos la continuidad de φ (basta mostrarlo en una vecindad de 0 haciendo uso del mapeo exponencial, una prueba de esta afirmación puede hallarse en [Wa]) y en un intento por generalizar lo anterior a dimensiones mayores (*i.e.,* $\varphi : \mathbb{R}^n \to G$) aseguramos la diferenciabilidad de cualquier homomorfismo continuo entre grupos de Lie.

Teorema 2.6. *Si $\varphi : G \to H$ es un homomorfismo continuo entre grupos de Lie, entonces $\varphi \in C^\infty$.*

Demostración: Sea G un grupo de Lie de dimensión n y tomando una base $\{X_i\}_{i=1}^n$ de $\mathfrak{g}$ se define la función

$$\alpha : \mathbb{R}^n \to G$$
$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} \exp(t_i X_i)$$

que es C^∞ por construcción. Por el teorema (2.4 (b)) α es un difeomorfismo en una vecindad V de 0 y una componente U de $e \in G$, además es un homomorfismo por

$$\begin{aligned}
\alpha\Big((t_1, \ldots, t_n) + (\widetilde{t_1}, \ldots, \widetilde{t_n})\Big) &= \prod_{i=1}^{n} \Big(\exp(t_i + \widetilde{t_i} X_i)\Big) \\
&= \prod_{i=1}^{n} (\exp(t_i X_i)) \Big(\exp(\widetilde{t_i} X_i)\Big) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} \exp(t_i X_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{n} \exp(\widetilde{t_i} X_i)\right).
\end{aligned}$$

Ahora observemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
U \subset G \arrow[r, "\varphi"] & H \\
V \subset \mathbb{R}^n \arrow[u, "\exp"] \arrow[ur, dotted, "\varphi\circ\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo anterior $\varphi \circ \alpha$ es C^∞ y podemos ver a $\varphi := (\varphi \circ \alpha) \circ \alpha^{-1}$ como composición de funciones suaves en U. Se concluye utilizando traslaciones izquierdas, tanto en G como H, la suavidad de φ mediante

$$\varphi|_{\sigma U} := l_{\varphi(\sigma)} \circ \varphi \circ l_{\sigma^{-1}}|_U,$$

así $\varphi \in C^\infty$ en todo G. ■

Es importante hacer la aclaración que todo grupo de Lie del que hacemos uso es localmente euclidiano y segundo numerable.

Pues ya hemos visto que todo homomorfismo de grupos de Lie se comporta de manera natural con respecto a cada campo vectorial invariante por la izquierda (Si $\varphi : G \to H$ y $X \in \mathfrak{g}$ entonces $d\varphi(X) \in \mathfrak{h}$) y además identifica las formas invariantes de los grupos en cuestión ($d\varphi|_{E^1_{l\ inv}(G)} = E^1_{l\ inv}(H)$), y con ello también las constantes estructurales y las ecuaciones de Maurer-Cartan.

Así cualquier subgrupo abstracto de un grupo de Lie se le asocia una estructura de variedad que naturalmente lo convertirá en un grupo de Lie; por ello el siguiente teorema:

Teorema 2.7. *Un subgrupo cerrado $\mathcal{A}$ de un grupo de Lie G es así mismo un grupo de Lie con una única estructura diferenciable de subvariedad de G (i.e., una pareja $(\mathcal{A}, \varphi)$ tal que $\varphi : \mathcal{A} \to G$ es C^∞ e inyectiva, y $d\varphi$ es no singular para cada $\sigma \in G$) y $T_e\mathcal{A} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp(tX) \in \mathcal{A}$ para todo $t \in \mathbb{R}\}$.*

Demostración: Sea U vecindad de e en G. Al tomar las traslaciones izquierdas de U podemos generar a G, por consecuencia del teorema (2.3). Así $\bigcup_{\sigma\in G} l_\sigma(U) = G$ y como $l_\sigma \circ \exp$ es C^∞, obtenemos un atlas para G descrito por $\{l_\sigma(U), l_\sigma \circ \exp\}_{\sigma\in G}$; por otra parte, si se define $\widetilde{\mathfrak{a}} = \{X \in \mathfrak{g} | \exp(tX) \in \mathcal{A}\}$ y observamos una vecindad V de $0 \in \mathfrak{g}$, y del hecho que $\exp : V \to U$ es un difeomorfismo, entonces $V \cap \widetilde{\mathfrak{a}}$ es una vecindad de 0 con respecto a la topología de $\mathcal{A}$, por lo cual, al tomar traslaciones izquierdas y restringiéndonos a los elementos de $\mathcal{A}$, es fácil ver que

$$\bigcup_{\rho\in\mathcal{A}} l_\rho \circ \exp\ (V \cap \widetilde{\mathfrak{a}}) = \mathcal{A},$$

y con ello tenemos un atlas para $\mathcal{A}$, $(\{l_\rho \circ \exp\ (V \cap \widetilde{\mathfrak{a}}), l_\rho \circ \exp\}_{\rho\in\mathcal{A}})$, que hereda la diferenciabilidad de la operación de grupo de G $\left((\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}) \mapsto \widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}^{-1} \in C^\infty \textit{ con } \widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau} \in \mathcal{A}\right)$, por lo tanto $\mathcal{A}$ es también un grupo de Lie y por construcción $T_e\mathcal{A} = \widetilde{\mathfrak{a}}$ que es el álgebra de Lie de $\mathcal{A}$. ∎

El teorema (2.7) nos dice que todo grupo clásico que es un subgrupo cerrado de $\mathbf{Gl}(n, \mathbb{F})$ es un grupo de Lie. La importancia de caracterizar a los subgrupos cerrados radica en que a partir de estos se construyen los espacios homogéneos, motivación del presente trabajo.

Proposición 2.4. *Sea (H, φ) un subgrupo de Lie de G, y sea $X \in \mathfrak{g}$. $X \in d\varphi(\mathfrak{h})$ si y sólo si* $\exp\ tX \in \varphi(H)$ *para todo t.* ∎

Consultar [Wa] para una prueba de la afirmación anterior.

Teorema 2.8. *Sea $\psi : G \to K$ un homomorfismo de grupos de Lie. Si $\mathcal{A} = \ker(\psi)$ y $\mathfrak{a} = \ker(d\psi)$, entonces $\mathcal{A}$ es un subgrupo de Lie cerrado de G con álgebra de Lie $\mathfrak{a}$.*

Demostración: Puesto que $\mathcal{A} \subseteq G$ es un subgrupo cerrado y además como

$$T_{\mathcal{A}}G = \{X \in \mathfrak{g} : \exp(tX) \in \mathcal{A} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$$

entonces

$$\psi(\exp(tX)) = e_K = \exp(td\psi(X)) \qquad \text{para cualquier } t \in \mathbb{R},$$

y donde e_K denota el neutro del grupo K. Por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \subseteq G \arrow[r, "\psi"] & K \\ T_{\mathcal{A}}G \subseteq \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "d\psi"'] & \mathfrak{K} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

que ocurre si y sólo si $d\psi(X) = 0$ y por lo tanto $X \in \mathfrak{a}$. En consecuencia $\mathcal{A}$ es un grupo de Lie cerrado y $\mathfrak{a}$ es su respectiva álgebra de Lie . ■

2.6. La representación adjunta

Definición 2.14. Sea M una variedad y G un grupo de Lie .

(a) Una función $\mu : G \times M \to M$ de clase C^∞ que cumple con:

$$\mu(\sigma\tau, m) = \mu(\sigma, \mu(\tau m)), \quad \text{y} \quad \mu(e, m) = m \qquad \text{para todo } \sigma, \tau \in G \text{ y } m \in M,$$

se llama una *acción izquierda* de G sobre M. Para la acción anterior y un elemento $\sigma \in G$,

$$\widetilde{\mu_\sigma} : M \to M$$

$$m \to \mu(\sigma, m)$$

es un difeomorfismo de M. Además se dice que $m_0 \in M$ es un *punto fijo* de la acción μ, si

$$\widetilde{\mu_\sigma}(m_0) = m_0 \qquad \text{para cada } \sigma \in G.$$

(b) Sea $\eta : G \to M$ y $\widetilde{\eta_\sigma}(m) = \eta(\sigma, m)$, una acción izquierda. Dicha acción es llamada *efectiva* si $e \in G$ es el único elemento para el cual $\widetilde{\eta_e} = id_M$, y es una acción *transitiva*, si para cada m *y* $n \in G$ siempre existe un $\sigma \in G$ tal que $\widetilde{\eta_\sigma}(m) = n$.

(c) Sea $m_0 \in M$ y

$$H_{m_0} = \{\sigma \in G | \widetilde{\eta_\sigma}(m_0) = m_0\},$$

H_{m_0} es un subgrupo de Lie cerrado de G conocido como el *grupo de isotropía en* m_0.

El teorema que a continuación se postula es pilar fundamental del trabajo, pues en base a este resultado se construye la representación adjunta que será más que recurrida de aquí en adelante en la demostración de varios resutados; una prueba a esto puede ser consultada en [Ga] y [Wa].

Teorema 2.9. *Sea $\mu : G \to M$ una acción izquierda con punto fijo $m_0 \in M$. Entonces la función definida mediante*

$$\varphi : G \to Aut(T_{m_0}M) : \sigma \mapsto (d\widetilde{\mu_\sigma})\Big|_{T_{m_0}M},$$

es una representación de G. ■

Definición 2.15. ***(Grupo Pepe Isotropicasas)*** Sea $\eta : G \times M \to M$ una acción izquierda y H_{m_0} el grupo de isotropía de m_0; la acción $\eta|_{H_{m_0}}$ es una acción de H_{m_0} sobre M con punto fijo m_0 y:

$$\alpha : H_{m_0} \to Aut(T_{m_0} M) \quad \text{donde} \quad \alpha(\sigma) = d\eta_\sigma|_{T_{m_0} M} \,,$$

es una representación. Así, al grupo $\alpha(H_{m_0})$ de transformaciones lineales de $T_{m_0} M$ en sí mismo lo llamamos el *grupo isotropicasas lineal* o mejor conocido como grupo de isotropía lineal en m_0.

Definición 2.16. ***(La representación adjunta)*** Además de las acciónes izquierda y derecha de G sobre sí mismo, existe la acción por conjugación. Así un grupo de Lie G actúa sobre sí mismo de la siguiente manera:

$$a_\sigma : \{\sigma\} \times G \subset G \times G \to G$$

$$(\sigma, \tau) \to \sigma\tau\sigma^{-1}.$$

Distinto a las acciones izquierda y derecha, la acción por conjugación preserva puntos, es decir, $a_\sigma(\tau) = \tau$; el neutro es un punto fijo de la acción $a_\sigma(\tau)$.
Así la siguiente aplicación:

$$\mathbf{Ad} : G \to Aut(\mathfrak{g}) : \sigma \mapsto da_\sigma|_{(T_eG \cong \mathfrak{g})}$$

es una representación de G sobre $Aut(\mathfrak{g})$, llamada la *representación adjunta* de G. Se denota a la diferencial de la representación adjunta mediante:

$$d(\mathbf{Ad}) := \mathbf{ad} : \mathfrak{g} \to \mathbb{E}nd(\mathfrak{g}),$$

donde $\mathbb{E}nd(\mathfrak{g})$ es el conjunto de endomorfismos o funciones lineales de $\mathfrak{g}$ en sí mismo.

En lo sucesivo se denotará por $\mathbf{Ad}(\sigma) := \mathbf{Ad}_\sigma$ y $\mathbf{ad}(X) := \mathbf{ad}_X$.

Inmediatamente se tienen los siguientes diagramas conmutativos derivados del teorema (2.4):

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\mathbf{Ad}"] & Aut(\mathfrak{g}) \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\mathbf{ad}"'] & \mathbb{E}nd(\mathfrak{g}) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "a_\sigma"] & G \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\mathbf{Ad}_\sigma"'] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

Para $\mathbf{Ad}$ y a_σ se tienen las siguiente propiedades:

$$a_\sigma(\rho\tau) = a_\sigma(\rho)a_\sigma(\tau),$$

$$a_{\sigma\tau}(\rho) = a_\sigma \circ a_\tau(\rho),$$

para esta última igualdad al diferenciarla se optiene

$$\mathbf{Ad}_{\sigma\tau}(\rho) = \mathbf{Ad}_\sigma \circ \mathbf{Ad}_\tau(\rho),$$

en consecuencia **Ad** y a_σ son homomorfismos; mientras tanto del segundo diagrama, al elegir $X \in \mathfrak{g}$, resulta

$$\exp\ (t\mathbf{Ad}_\sigma(X)) = a_\sigma \circ (\exp\ (tX)) = \sigma \exp\ (tX)\sigma^{-1}.$$

Proposición 2.5. Sean G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su respectiva álgebra de Lie y $X, Y \in \mathfrak{g}$. Entonces

$$\mathbf{ad}_X(Y) = [X, Y].$$

Demostración: Sólo necesitamos mostrarlo en $e \in G$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{ad}_X(Y)_e &= \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathbf{Ad}(\exp\ tX)\right) Y_e \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathbf{Ad}_{\exp\ tX}(Y(e)) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\left(a_{\exp\ tX}\right)(Y(e)) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\left(r_{\exp\ (-tX)}\right)\left(d\left(l_{\exp\ tX}(Y(e))\right)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\left(r_{\exp\ (-tX)}\right)\left(Y \circ l_{\exp\ tX}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\,(X_{-t})\left(Y_{X_t(e)}\right) && \text{y por la definición (1.15)} \\
&= (L_X Y)\,(e) && \text{aplicando la proposición (1.3) se sigue que} \\
&= [X, Y]_e,
\end{aligned}$$

y donde X_t denota el grupo a un parámetro de difeomorfismos asociados con X. ■

Con lo anterior asociamos $\mathbf{ad}_X Y$ con la derivada de Lie de dos campos vectoriales y por lo tanto al corchete de Lie.

Definición 2.17. Sea G un grupo de Lie , $\mathfrak{g}$ su respectiva álgebra de Lie y $\mathcal{A}$ un subgrupo de G:

(a) $\mathcal{A}$ es un subgrupo normal si $\sigma\mathcal{A}\sigma^{-1} = \mathcal{A}$ para cualquier $\sigma \in G$.

(b) Se denota el centro de G por:

$$\mathbb{Z}_G := \{\sigma \in G : \sigma\tau = \tau\sigma \text{ para todo } \tau \in G\}$$

(c) Y al centro de $\mathfrak{g}$ mediante:

$$\mathbb{Z}_{\mathfrak{g}} := \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0 \text{ para todo } Y \in G\}$$

En virtud de lo anterior tenemos lo siguiente:

Teorema 2.10. *Sea G un grupo de Lie conexo:*

(a) $\mathbb{Z}_G = \ker(\boldsymbol{Ad})$.

(b) $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_G$ *es un subgrupo de Lie cerrado y su respectiva álgebra de Lie es* $\mathfrak{a} = \mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$.

(c) *G es un grupo abeliano si y sólo si $\mathfrak{g}$ lo es.*

Demostración: Sea $\sigma \in \mathbb{Z}_G$ y $X \in \mathfrak{g}$. Entonces

$$\exp(tX) = \sigma(\exp(tX))\sigma^{-1} = \exp(t\mathbf{Ad}_\sigma(X)), \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Y al diferenciar esto último se sigue que $X = \mathbf{Ad}_\sigma(X)$ y también $\sigma \in \ker(\mathbf{Ad})$, de modo que $\mathbb{Z}_G \subseteq \ker(\mathbf{Ad})$. Ahora bien si $\sigma \in \ker(\mathbf{Ad})$ se asegura de nuevo la igualdad anterior, y al tomarnos una vecindad lo suficiente pequeña de $e \in G$, σ conmuta ahí y puesto que G es conexo, podemos extenderlo mediante traslaciones izquierdas y entonces σ conmuta con todo elemento de G. Por lo tanto $\sigma \in \mathbb{Z}_G$ y $\mathbb{Z}_G = \ker(\mathbf{Ad})$.

Para **(b)** es inmediato ver que $\mathbb{Z}_G$ es un subgrupo cerrado y su álgebra de Lie $\mathfrak{a}$ está dada por $\ker(\mathbf{ad})$ que coincide con $\mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$. El inciso **(c)** se sigue si $\mathbb{Z}_G = G$. ∎

Proposición 2.6. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$. Sí $[X, Y] = 0$ entonces $\exp(X + Y) = \exp(X)\exp(Y)$.

Demostración: La subálgebra $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ generada por $\{X, Y\}$ es abeliana, y por consiguiente también el subgrupo de Lie conexo $\exp(\mathfrak{g}) \subseteq G$. Sea

$$\alpha : \mathbb{R} \to G$$
$$t \mapsto (\exp\ tX)(\exp\ tY),$$

que resulta de clase C^∞ y además:

$$\begin{aligned}
\alpha(t+s) &= (\exp(t+s)X)(\exp(t+s)Y)\\
&= (\exp\ tX)(\exp\ sX)(\exp\ tY)(\exp\ sY)\\
&= \alpha(t)\alpha(s)
\end{aligned}$$

Por otra parte, sea

$$\gamma : G \times G \to G$$
$$(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau,$$

y como

$$d\gamma(X, Y) = d\gamma((X, 0) + (0, Y)) = X + Y,$$

entonces

$$d\alpha(t) = d\gamma|_{((\exp\ tX)(\exp\ tY))}(X, Y) = t(X + Y)$$

y exponenciando resulta $\alpha(t) = \exp\ t(X + Y)$. ∎

Proposición 2.7. *Sea $\widetilde{\mathfrak{g}}$ un álgebra de Lie con centro trivial, entonces $\widetilde{\mathfrak{g}}$ es el álgebra de Lie de algún grupo de Lie G.*

Demostración: Comencemos definiendo la función

$$\mathbf{ad}_X : \widetilde{\mathfrak{g}} \to \mathbb{E}nd(\widetilde{\mathfrak{g}}) : \mathbf{ad}_X(Y) \mapsto [X, Y], \qquad \text{para cualesquiera} \quad X, Y \in \widetilde{\mathfrak{g}},$$

para la cual observamos

$$\mathbf{ad}_X(Y + Z) = [X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z] = \mathbf{ad}_X(Y) + \mathbf{ad}_X(Z) \quad \text{para todo } X, Y, Z \in \widetilde{\mathfrak{g}},$$

así **ad** es un homomorfismo que por poseer centro trivial es evidentemente inyectivo; entonces tenemos que **ad** es una representación fiel de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ en $\mathbb{E}nd(\widetilde{\mathfrak{g}})$. Ahora bien, haciendo uso del mapeo exponencial obtenemos

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{A}ut(\widetilde{\mathfrak{g}}) \\ \widetilde{\mathfrak{g}} \arrow[r, "\mathbf{ad}"'] & \mathbb{E}nd(\widetilde{\mathfrak{g}}) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

y recordando que $\mathbb{A}ut(\widetilde{\mathfrak{g}}) \cong Gl(n, \mathbb{R})$ para algún $n \in \mathbb{N}$, y del hecho que existe un grupo de Lie G para el cual tenemos una representación fiel

$$\mathbf{Ad} : G \to \mathbb{A}ut(\widetilde{\mathfrak{g}}) \qquad \text{para el cual} \qquad d\mathbf{Ad} = \mathbf{ad};$$

resulta el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\mathbf{Ad}"] & \mathbb{A}ut(\widetilde{\mathfrak{g}}) \\ \widetilde{\mathfrak{g}} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\mathbf{ad}"'] & \mathbb{E}nd(\widetilde{\mathfrak{g}}) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

■

2.7. Edificando una variedad homogénea

Es tiempo de entrar en materia, y para ver como construir y definir una variedad homogénea es necesario introducir los conceptos de rebanada, distribución y variedad integral, además de postular el Teorema de Frobenius sobre distribuciones el cual nos será de gran utilidad para la construcción de una variedad homogénea.

Definición 2.18. Sea M una variedad de dimensión $d \geq 1$ y $c \in \{1, \ldots, d\}$:

(a) Sea (U, φ) un sistema coordenado en M, con funciones coordenadas $\{x_i\}_{i=1}^{d}$, y $a \in \varphi(U)$. Si definimos el conjunto

$$\mathcal{S} = \{q \in U | x_i(q) = r_i(a) \ \ con \ \ i \in \{c+1, \ldots, d\}\},$$

entonces el subespacio $\mathcal{S} \subset M$ junto con el sistema coordenado

$$\{x_k|_{\mathcal{S}} : k = 1, \ldots, c\}$$

forman una subvariedad de M llamada *rebanada* del sistema coordenado (U, φ).

(b) Una distribución $\mathscr{D}$ de dimensión c, en la variedad M, es la elección de un subespacio de dimensión c, denotado por $\mathscr{D}(m) \subseteq T_m M$ para cada $m \in M$. Una distribución $\mathscr{D}$ es *suave* si para cada $m \in M$ existe una vecindad U de m y campos vectoriales $\{X_t\}_{t=1}^{c}$ de clase C^∞ sobre U que generan a $\mathscr{D}$ en cada punto de U. Sea X un campo vectorial sobre M, se dice que X pertenece a la distribución $\mathscr{D}$ ($X \in \mathscr{D}$) si $X_m \in \mathscr{D}(m)$ para cualquier $m \in M$.

(c) Sea $\mathscr{D}$ una distribución suave y $X, Y \in \mathscr{D}$ campos vectoriales suaves. Sí $[X, Y] \in \mathscr{D}$ entonces $\mathscr{D}$ se dice una distribución *involutiva o completamente integrable.*

(d) Una subvariedad $(N, \varphi) \subseteq M$ es una *variedad integral* de una distribución $\mathscr{D}$ si

$$d\varphi(T_n N) = \mathscr{D}(\varphi(n)) \qquad \text{para cada } n \in N.$$

Teorema 2.11. (Frobenius) *Sea $\mathscr{D}$ una distribución C^∞, involutiva de dimensión c sobre la variedad M^d y $m \in M$. Entonces existe una variedad integral de $\mathscr{D}$ que pasa por m. De hecho, existe un sistema coordenado rectangular (U, φ) con centro en m (i. e., $\varphi(U)$ resulta un abierto rectangular de $\mathbb{R}^d$), y con funciones coordenadas $\{x_i\}_{i=1}^{d}$ tales que las rebanadas*

$$x_i = constante \qquad para\ todo\ i \in \{c+1, \ldots, d\}$$

son variedades integrales de $\mathscr{D}$. Y si (N, ψ) es una variedad integral conexa de $\mathfrak{D}$ tal que $\psi(N) \subset U$, entonces $\psi(N)$ está contenida en una de las rebanadas ya mencionadas.

La demostación del teorema de Frobenius se puede consultar en [Wa].

Teorema 2.12. *Sea H un subgrupo de Lie cerrado del grupo de Lie G y sea*

$$G/H := \{\sigma H : \sigma \in G\} \qquad \text{el conjunto de clases laterales modulo } H.$$

Y sea

$$\pi : G \to G/H : \sigma \mapsto \sigma H.$$

la proyección natural sobre el espacio cociente. Entonces G/H tiene una única estructura de variedad diferenciable tal que:

(a) *π es C^∞.*

(b) *Existen secciones suaves locales de G/H en G; es decir, si $\sigma H \in G/H$ entonces existe un vecindad W de σH y una función de clase C^∞, $\kappa : W \to G$, para la cual se tiene el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] & G/H \\ W \arrow[u, "\kappa"] \arrow[ur, "id"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración: Si $dim\, G = d$ y $dim\, H = k$, se tiene que $dim\, G/H = d - k$.

($\mathfrak{A}$) En primera instancia dotamos a G/H con la topología para la cual un conjunto W es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(W)$ es un conjunto abierto en G. Así π es una función abierta (i.e., si W es abierto entonces $\pi(W)$ también) puesto que:

$$\pi^{-1}(\pi(W)) = \bigcup_{h\in H} Wh,$$

y entonces $\pi(W)$ es abierto en G/H.

G/H también hereda las propiedades de ser un espacio Hausdorff y segundo numerable (consultar [Ka] y [Wa]).

($\mathfrak{B}$) G/H es un espacio localmente euclidiano: Sea $\mathcal{D}$ una distribución en G determinada por $\mathfrak{h}$, el álgebra de Lie de H; puesto que $\mathcal{D} = \mathfrak{h}$, entonces $\mathcal{D}$ es involutiva e inmediatamente, por el teorema de Frobenius, existe un sistema coordenado rectangular (V, ϱ) alrededor de $e \in G$, en donde se cumple que si (N, φ) es una variedad integral de $\mathcal{D}$ en (V, ϱ), ésta resulta una rebanada alrededor de $e \in G$, es decir, si $\{x_i\}_{i=1}^{d}$ son las funciones coordenadas de (V, ϱ) entonces (N, φ) tiene funciones coordenadas $\{x_i|_N : i = 1, \ldots, d-k\}$. Dado que H es un subgrupo de Lie cerrado, con la topología relativa, podemos elegir a la vecindad V lo suficientemente pequeña para la cual se cumpla con:

$$V \cap H = N.$$

Ahora escogemos vecindades de e. U y V_1, con respecto al sistema coordenado (V, ϱ) tales que

$$V_1 V^{-1} \subset V \qquad \text{y} \qquad U^{-1} U \subset V_1,$$

y suponemos que $\sigma, \tau \in U$ están en la misma clase lateral módulo H ($\sigma \in \tau H$). Entonces

$$\tau^{-1}\sigma \in (V_1 \cap H) = (V_1 \cap N).$$

Y así $\sigma \in \tau(V_1 \cap N)$, además esta última es una variedad integral conexa de $\mathcal{D}$ que está contenida en V. Por lo tanto $\tau(V_1 \cap N)$ vive en una única rebanada de V y en ella también encontramos a σ y τ; por lo que cada clase lateral de G/H tendrá su propio sistema coordenado, y (U, ϱ) es el sistema que necesitamos para σH.

Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$ la rebanada de $\varphi(U)$ donde las funciones coordenadas $\{x_j = 0\}_{j=d-k+1}^{d}$ y definamos la siguiente función (continua):

$$\widetilde{\varrho}^{-1} : \mathcal{S} \to \pi(U)$$
$$\sigma \mapsto \pi \circ \varrho^{-1}(\sigma).$$

$\widetilde{\varrho}^{-1}$ el cual es un homeomorfismo pues es composición de homeomorfismos, y denotamos a su inversa simplemente por

$$\widetilde{\varrho} : \pi(U) \to \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{d-k}.$$

Con lo que $(\pi(U), \widetilde{\varrho})$ es de hecho un sistema coordenado alrededor de la clase H en G/H; para extender dicho sistema utilizamos traslaciones por la izquierda pero ahora sobre G/H, de la siguiente manera:

$$\widetilde{l_\sigma} : G/H \to G/H$$
$$\rho H \mapsto \sigma\rho H, \quad \text{para todo } \sigma \in G.$$

donde $\widetilde{l_\sigma}$ es un homeomorfismo en G/H inducido por l_σ; en suma, para cada clase laterales $\sigma H \in G/H$ se describe la siguiente aplicación:

$$\widetilde{\varrho}_{\sigma H} : G/H \to \mathbb{R}^{d-k},$$
$$\widetilde{\varrho}_{\sigma H} = \left(\widetilde{\varrho} \circ \widetilde{l}_{\sigma^{-1}}\right)\Big|_{\widetilde{l_\sigma}(\pi(U))}.$$

Así $\left(\widetilde{l_\sigma}(\pi(U)), \widetilde{\varrho}_{\sigma H}\right)$ es un sistema coordenado alrededor de σH.

($\mathfrak{C}$) Ahora basta verificar que los cambios de coordenadas de los sistemas coordenados sobre las clases laterales de G/H, que se traslapan en G, son diferenciables. Por lo que tomamos dos sistemas coordenados

$$\left(\widetilde{l_\sigma}(\pi(U)), \widetilde{\varrho}_{\sigma H}\right) \quad \text{y} \quad \left(\widetilde{l_\tau}(\pi(U)), \widetilde{\varrho}_{\tau H}\right) \quad \text{para cualesquiera} \quad \sigma, \tau \in G,$$

y una vecindad

$$\mathcal{V} = \widetilde{\varrho}_{\sigma H}\left(\widetilde{l_\sigma}(\pi(U)) \cap \widetilde{l_\tau}(\pi(U))\right)$$

donde se traslapan. Sea $h \in \mathcal{V}$, entonces

$$\widetilde{l}_{\tau^{-1}} \circ \widetilde{l_\sigma} \circ \widetilde{\varrho}_{\sigma H}^{-1}(h) \in \pi(U),$$

y en suma, podemos exhibir $g \in H$ tal que

$$\tau^{-1}\sigma\varrho^{-1}(t)g \in U$$

y con ello, existe una vecindad $\mathcal{W}$ de $h \in \mathcal{V}$, lo suficiente pequeña, donde todos sus elementos cumplen con la propiedad anterior, es decir,

$$\tau^{-1}\sigma\varrho^{-1}(\mathcal{W})g \subset U,$$

por ello, es suficiente comprobar que los cambios de coordenadas son suaves en $\mathcal{W}$. Pero mostrar que $\left(\widetilde{\varrho}_{\tau H}\circ\widetilde{\varrho}_{\sigma H}^{-1}\right)\big|_{\mathcal{W}}$ es de clase C^∞ se reduce a verificar que en sí, es composición de funciones de clase C^∞:

$$\left(\widetilde{\varrho}_{\tau H}\circ\widetilde{\varrho}_{\sigma H}^{-1}\right)\Big|_{\mathcal{W}}=\left(\pi_0\circ\varrho\circ r_g\circ l_{\tau^{-1}\sigma}\varrho^{-1}\right)\Big|_{\mathcal{W}},$$

donde π_0 es la proyección canónica de $\varrho(U)$ sobre el factor S, que claramente es C^∞. Por lo tanto se sigue el resultado sobre $\mathcal{V}$ y

$$\left(\widetilde{\varrho}_{\tau H}\circ\widetilde{\varrho}_{\sigma H}^{-1}\right)\big|_{\mathcal{V}}\quad\text{es de clase } C^\infty.$$

Finalmente, la familia

$$\left\{\left(\widetilde{l_\sigma}(\pi(U)),\widetilde{\varrho}_{\sigma H}\right)\right\}_{\sigma\in G}$$

da una estructura de variedad diferenciable sobre G/H.

$(\mathfrak{D})$ Dando esta estructura a G/H, la proyección $\pi : G\to G/H$ es C^∞, ya que $\pi|_{l_\sigma(U)}$ es simplemente

$$\pi\Big|_{l_\sigma(U)}=\left(\widetilde{\varrho}_{\sigma H}^{-1}\circ\varrho\circ l_{\sigma^{-1}}\right)\Big|_{l_\sigma(U)},$$

que es composición de funciones de clase C^∞. Mientras que si

$$\kappa := l_\sigma\circ\varrho^{-1}\circ\widetilde{\varrho}_{\sigma H},$$

ésta define una sección suave local de G/H en G para la vecindad $W:=\widetilde{l_\sigma}(\pi(U))$ de $\sigma H\in G/H$, es decir, $\pi\circ\kappa(W)=id|_W$.

$(\mathfrak{E})$ Por último, como ya es costumbre, sea G/H con la estructura anterior que la convierte en variedad y $(G/H)_\upsilon$ con otra estructura diferenciable que satisface las propiedades **(a)** y **(b)**. Entonces se puede construir el diagrama a continuación:

$$\begin{tikzcd}
G/H & G \arrow[l, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
& W \arrow[ul, "id"] \arrow[u, "\kappa"] \arrow[r, "id"'] & (G/H)_\upsilon
\end{tikzcd}$$

puesto que *id* es un difeomorfismo, y puede expresarse localmente como composición de secciones suaves locales en G seguidas de π, y por tanto $(G/H)_\upsilon = G/H$; es decir, la estructura es única.

■

Definición 2.19. Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo de Lie cerrado de G. Si la variedad G/H tiene una única estructura de variedad, que satisface la propiedades **(a)** y **(b)** del teorema anterior, es llamada una *variedad homogénea o espacio homogéneo*.

Definición 2.20. Una función es diferenciable en G/H si y sólo si $f \circ \pi$ es una función C^∞ sobre G.

Teorema 2.13. *Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo de Lie cerrado y normal de G. Entonces la variedad homogénea G/H con su estructura natural de grupo es un grupo de Lie .*

Demostración: Puesto a G/H se le asocia una estructura única de variedad, sólo es necesario probar que la estructura de grupo cociente satisface que la función:

$$\vartheta : G/H \times G/H \to G/H$$

$$(\sigma H, \tau H) \mapsto (\sigma H)(\tau H)^{-1} = \sigma\tau^{-1}H,$$

para cualesquiera clases laterales $\sigma H, \tau H \in G/H$, es de clase C^∞. Que desde un punto de vista un tanto intuitivo, la diferenciabilidad se hereda a la variedad homogénea por la conmutatividad de H. De entrada tenemos que la función:

$$\varrho : G \times G \to G$$

$$(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau^{-1}$$

es C^∞. Por otro lado, sean $\mathcal{W}_\sigma$ y $\mathcal{W}_\tau$ vecindades de σH y τH respectivamente y definamos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{W}_\sigma \arrow[r, "\vartheta_\sigma"] \arrow[d, "id"'] & G \arrow[dl, "\pi"'] \\ G/H & \end{tikzcd} \qquad y \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{W}_\tau \arrow[r, "\vartheta_\tau"] \arrow[d, "id"'] & G \arrow[dl, "\pi"'] \\ G/H & \end{tikzcd}$$

secciones locales de G/H en G (π es la proyección natural), que son funciones C^∞. Entonces podemos expresar a ϑ como:

$$\vartheta = \pi \circ \varrho \circ (\vartheta_\sigma \times \vartheta_\tau)$$

composición de funciones C^∞. Por lo tanto G/H es un grupo de Lie. ■

Teorema 2.14. *Sea $\chi : G \times M \to M$ una acción izquierda y transitiva de un grupo de Lie sobre una variedad M. Si $m_0 \in M$ y H es su grupo de isotropía, entonces la función:*

$$\zeta : G/H \to M : \sigma H \mapsto \chi_\sigma(m_0), \qquad \textit{para cada } \sigma H \in G/H.$$

es un difeomorfismo.

Demostración: En primera instancia observemos que ζ es una función bien definida

$$\chi_{\sigma h}(m_0) = \chi_\sigma(\chi_h(m_0)) = \chi_\sigma(m_0) \qquad \text{para cualquier } h \in H.$$

ζ es biyectiva:

(a) Si $\zeta(\sigma H) = \zeta(\tau H)$ entonces:

$$\begin{aligned} \chi_\sigma(m_0) = \chi_\tau(m_0) &\Leftrightarrow \chi_{\tau^{-1}}\chi_\sigma(m_0) = (m_0) \\ &\Leftrightarrow \chi_{\tau^{-1}\sigma}(m_0) = (m_0) \\ &\Leftrightarrow \tau^{-1}\sigma \in H \\ &\Leftrightarrow \tau^{-1}\sigma H = H \\ &\Leftrightarrow \tau^{-1}H = \sigma H \end{aligned}$$

y por tanto ζ es inyectiva.

(b) Dado que χ es una acción transitiva se sigue que ζ es sobre.

Por lo que resta ver que $\zeta \in C^\infty$ y por supuesto $d\zeta$ es no singular en cada clase lateral σH. Pero que $\zeta \in C^\infty$ equivale a probar que $\zeta \circ \pi \in C^\infty$, donde por supuesto $\pi : G \to G/H$ es la proyección natural. Para este fin utilicemos la inclusión

$$\begin{aligned} i_{m_0} &: G \to G \times \{m_0\} \\ \sigma &\mapsto (\sigma, m_0) \end{aligned}$$

que claramente es un difeomorfismo y entonces se tiene

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, bend left, "i_{m_0} \circ \chi"] \arrow[d, "\pi"'] & M \\ G/H \arrow[ur, "\zeta"'] & \end{tikzcd}$$

donde

$$\zeta \circ \pi(\sigma) = \zeta(\sigma H) = \chi_\sigma(m_0) = \chi \circ i_{m_0}(\sigma)$$

lo que nos dice que $\zeta \circ \pi$ es composición de funciones C^∞ y por ende $\zeta \in C^\infty$. Ahora, en virtud del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} H \subseteq G \arrow[r, "\pi"] & G/H \arrow[r, "\zeta"] & M \\ \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"'] \arrow[r, "d\pi"'] & T_H G/H \arrow[u, "\exp"'] \arrow[r, "d\zeta"'] & T_{m_0} M \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

observamos

(*) $\ker d\pi|_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h}$ donde, por supuesto, $\mathfrak{h}$ es el álgebra de Lie de H. (Para esto último: Sea $X \in \mathfrak{h}$, para el cual

$$\exp(tX) \in H{:}\pi \circ \exp tX = H \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

por lo cual $\pi|_H = H$ es constante en G/H y entonces $d\pi|_{\mathfrak{h}} \equiv 0$. En suma, utilizando traslaciones izquierdas, se extiende lo anterior para cada $\sigma \in G$ y resulta $\ker d\pi|_{T_\sigma G} = \sigma H$.)

Así, para probar que $\zeta \circ \pi$ es no singular, basta verificar que $\ker d(\zeta \circ \pi)|_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h}$, y después extenderlo en todo G bajo traslaciones izquierdas; pero para verificar lo anterior que $\mathfrak{h} \subset \ker d(\zeta \circ \pi)|_{\mathfrak{g}}$ es inmediato, pues al igual con π, $(\zeta \circ \pi)|_H = m_0$ es constante y en consecuencia $d(\zeta \circ \pi)|_{\mathfrak{h}} \equiv 0$. Por otra parte si nos fijamos en $v \in \ker d(\zeta \circ \pi)|_{\mathfrak{g}}$ y $X \in \mathfrak{g}$ para el cual $v = \text{lím}_{t \to 0} \exp(tX)$, entonces

$$\zeta \circ \pi(\exp(tX)) = m_0 \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Además la curva definida por $t \to \exp(tX)$ bajo la aplicación ζ es constante, luego:

$$d(\zeta \circ \pi)(X)(exp(tX)) \equiv 0 \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

y se concluye que $d\zeta$ es no singular en todo G/H y ζ es un difeomorfismo. ■

Capítulo 3

Variedades homogéneas

"Hasta en mi contra, estoy de parte tuya:
soy tu aliado mejor cuando me hieres."
Rubén Bonifaz Nuño

Con toda la rigurosidad que es requerida, después de describir como se constituye y construye una variedad homogénea, es momento de ocuparnos de exhibir varios ejemplos importantes y precisos de variedades homogéneas; y haciendo alusión al título de este capítulo la finalidad es hablar en primera instancia sobre algunas variedades, para a continuación mencionar y caracterizar algunas de sus propiedades topológicas que las distinguen.

En lo sucesivo se denotará por $\mathbb{F}$ a cualquiera de los campos conmutativos o no $\{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Así para cada $n \in \mathbb{N}$ se puede, de manera habitual, asociarle una estructura diferencial al espacio vectorial $\mathbb{F}^n$, e identificar $\mathbb{F}^n$ como una subvariedad de $\mathbb{F}^{n+1}$ bajo la inclusión correspondiente:

$$\mathbb{F}^{n-1} \xrightarrow{i} \mathbb{F}^n \xrightarrow{i} \mathbb{F}^{n+1}$$

Dotemos a $\mathbb{F}^n$ con el producto interior usual (en sus respectivos casos), que en adelante se denotará por $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{F}}$.

En un caso un tanto más general definamos el grupo unitario (en el ejemplo (2.1.1) hay una primera identificación) a través de

$$\mathbf{U}(n, \mathbb{F}) := \left\{ \sigma \in \mathbf{Gl}(n, \mathbb{F}) |\ \sigma\overline{\sigma^t} = \mathrm{Id} \right\}. \tag{3.1}$$

De este modo, y recordando que:

$$\langle \sigma(v), w \rangle_{\mathbb{F}} = \langle v, \overline{\sigma^t}(w) \rangle_{\mathbb{F}} \qquad \text{para} \quad \sigma \in \mathbf{Gl}(n, \mathbb{F}),$$

se observa los elementos $\sigma \in \mathbf{U}(n, \mathbb{F})$ preservan la longitud de los vectores, así como los ángulos entre ellos:

$$\langle \sigma(v), \sigma(w) \rangle_{\mathbb{F}} = \langle v, \overline{\sigma^t}\sigma(w) \rangle_{\mathbb{F}} = \langle v, w \rangle_{\mathbb{F}} \qquad \text{para cualesquiera } \sigma \in \mathbf{U}(n, \mathbb{F}),\ y\ v, w \in \mathbb{F}$$

(a) Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, la ecuación (3.1) hace referencia al grupo ortogonal real, al que se denotará mediante $\mathbf{O}(n)$.

(b) Para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, en la ecuación (3.1) se identifica precisamente al grupo unitario complejo $\mathbf{U}(n)$.

(c) Mientras tanto si $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, la ecuación (3.1) define el grupo simpléctico, que se denota por $\mathbf{Sp}(n)$.

Por lo que no es de extrañar considerar las siguientes inclusiones que se utilizarán en la siguiente sección para ser identificadas con algunas variedades y caracterizar varias de sus propiedades:

$$\mathbf{U}(n, \mathbb{F}) \xrightarrow{i} \mathbf{U}(n+1, \mathbb{F}) \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

a través de

$$\mathbf{U}(n, \mathbb{F}) \xrightarrow{i} \begin{pmatrix} \mathbf{U}(n, \mathbb{F}) & \vdots \\ \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3.1. Variedades de Stiefel

Definición 3.1. Se denota por $\mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n)$ al subespacio vectorial de $\mathbb{F}^{nk}$ que consta de k-adas $(v_i, \ldots, v_k)$ de vectores $v_i \in \mathbb{F}^n$, que son ortogonales entre sí, es decir,

$$\langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{F}} = \delta_{ij} \qquad \text{para } i, j \in \{1, \ldots, k\},$$

donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j, \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

es la *delta de Kronecker*; a estos espacios se les da el nombre de *variedades de Stiefel*.

$$\mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n) := \{(v_1, \ldots, v_k) | v_i \in \mathbb{F}^n \;\; y \;\; \langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{F}} = \delta_{ij}\}$$

Una forma de ver como está constituida una variedad de Stiefel, es desde un punto de vista geométrico.

Tomemos un ejemplo sencillo: para el caso $k = 1$ sencillamente nos percatamos que sólo se describe a $\mathbb{S}^{cn-1}$, donde c es la dimensión del campo $\mathbb{F}$ sobre $\mathbb{R}$ (en lo sucesivo se tomará esta convención con respecto a la dimensión de cualquier campo para el que se haga referencia), y se tienen las identificaciones correspondientes

$$\mathcal{V}_1(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{S}^{n-1}, \qquad \mathcal{V}_1(\mathbb{C}^n) \cong \mathbb{S}^{2n-1}, \qquad \mathcal{V}_1(\mathbb{H}^n) \cong \mathbb{S}^{4n-1}.$$

Para el caso de la segunda variedad de Stiefel, se toma además todos los vectores ortonormales a $\mathbb{S}^{cn-1}$, que se obtienen al intersectar $\mathbb{S}^{cn-1}$ con el hiperplano $\mathbb{F}^{n-1}$ los cuales son precisamente aquellos que pertenecen a $\mathbb{S}^{c(n-1)-1}$, lo cual describe la siguiente relación:

$$\mathcal{V}_2(\mathbb{F}^n) \cong \mathbb{S}^{cn-1} \times \mathbb{S}^{c(n-1)-1},$$

con esta misma lógica se puede ver geométricamente a una variedad de Stiefel como el sencillo producto de esferas de las dimensiones adecuadas y así se describe las relaciones:

(a) $\mathcal{V}_k(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{(n-1)-1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{(n-(k-1))-1}$,

(b) $\mathcal{V}_k(\mathbb{C}^n) \cong \mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{S}^{2(n-1)-1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{2(n-(k-1))-1}$,

(a) $\mathcal{V}_k(\mathbb{H}^n) \cong \mathbb{S}^{4n-1} \times \mathbb{S}^{4(n-1)-1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{4(n-(k-1))-1}$.

Esto da pauta para calcular la dimensión de $\mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n)$ la cual es

$$\dim \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n) = \sum_{i=0}^{k-1} (c(n-i)-1) = ck\left(n - \frac{(k+1)}{2}\right),$$

además se cumple que una variedad de Stiefel es suave por ser producto de variedades diferenciables; por ello la siguiente afirmación:

Proposición 3.1. Para $1 \leq k \leq n$ y todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n)$ admite una estructura de varidedad diferenciable. ■

Para k fijo se tienen de manera inmediata las identificaciones:

$$\mathcal{V}_k(\mathbb{F}^k) \xrightarrow{i} \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^{k+1}) \xrightarrow{i} \cdots \xrightarrow{i} \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n) \xrightarrow{i} \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^{n+1}) \xrightarrow{i} \cdots,$$

donde porsupuesto i denota las inclusiones respectivas.

La intención de las observaciones previas es demostrar que toda variedad de Stiefel es una variedad homogénea y como extra se identificarán éstas en el proceso con algunos grupos clásicos.

Para este fin definamos la siguiente función:

$$\vartheta_k^n : \mathbf{U}(n, \mathbb{F}) \to \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n)$$

$$\sigma \mapsto (\sigma(e_1), \ldots, \sigma(e_k))$$

ϑ_k^n así definida, es una función lineal y puesto que $\dim \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n) \leq \dim \mathbf{U}(n, \mathbb{F})$, resulta una función continua y suprayectiva. Inmediatamente se obtiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{U}(n, \mathbb{F}) \arrow[r, "\vartheta_k^n"] \arrow[d, "i_u"'] & \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n) \arrow[d, "i_v"] \\
\mathbf{U}(n+1, \mathbb{F}) \arrow[r, "\vartheta_k^{n+1}"'] & \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^{n+1})
\end{tikzcd}$$

donde i_u y i_v son las inclusiones, de modo que el diagrama es conmutativo. La función ϑ_k^n aplica a cada matriz unitaria sobre la base ortogonal que consta de la imagen de ésta sobre los primeros k vectores canónicos de $\mathbb{F}^n$.

Proposición 3.2. Sean $\sigma, \tau \in \mathbf{U}(n, \mathbb{F})$, entonces:
$\vartheta_k^n(\sigma) = \vartheta_k^n(\tau)$ si y sólo si $\sigma = w \cdot \tau$ donde $w \in \mathrm{Id}_k \times \mathbf{U}(n-k, \mathbb{F})$

Demostración: $\vartheta_k^n(\sigma) = \vartheta_k^n(\tau) \Leftrightarrow \sigma(e_i) = \tau(e_i)$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$; que es equivalente a pedir que $\tau^{-1} \cdot \sigma(e_i) = e_i$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$, pero como ϑ_k^n no es inyectiva, entonces debemos encontrar todas las matrices unitarias que dejan invariantes los primeros k vectores canónicos de $\mathbb{F}^n$, pero éstas son precisamente las de la forma

$$\mathrm{Id}_k \times \mathbf{U}(n-k, \mathbb{F}) := \begin{pmatrix} Id_{k\times k} & \vdots \\ \cdots & \mathbf{U}(n-k, \mathbb{F}) \end{pmatrix},$$

lo que nos dice que dos matrices son equivalentes si y sólo si coinciden en las primeras k columnas, entonces todas las matrices w de la forma $\mathrm{Id}_k \times \mathbf{U}(n-k, \mathbb{F})$, describen exactamente la acción anterior y para ellas tenemos $\sigma = w \cdot \tau$. ∎

Lo anterior define una relación de equivalencia, y las clases laterales son precisamente de la forma $\sigma\,(\mathbf{U}(n-k, \mathbb{F}))$ para $\sigma \in \mathbf{U}(n, \mathbb{F})$ y las describen exactamente $(\vartheta_k^n)^{-1} \cdot \vartheta_k^n(\sigma)$. En este punto, ya se describió cómo está actuando $\mathbf{U}(n-k, \mathbb{F})$ sobre $\mathbf{U}(n, \mathbb{F})$, y además $\mathbf{U}(n-k, \mathbb{F}) \cong \mathrm{Id}_k \times \mathbf{U}(n-k, \mathbb{F})$ es un subgrupo cerrado (y por ello un grupo de Lie por el teorema (2.7)); entonces $\mathbf{U}(n, \mathbb{F})/\mathbf{U}(n-k, \mathbb{F})$ es una variedad homogénea. Además se tiene que $\dim \mathbf{U}(n, \mathbb{F})/\mathbf{U}(n-k, \mathbb{F}) = \dim \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n)$ por ello la prueba del siguiente teorema es inmediata bajo estos argumentos y haciendo uso del teorema (2.14).

Teorema 3.1.

$$\vartheta_k^n : \mathbf{U}(n, \mathbb{F})/\mathbf{U}(n-k, \mathbb{F}) \to \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n)$$
$$\sigma\,(\mathbf{U}(n-k, \mathbb{F})) \mapsto (\sigma(e_1), \ldots, \sigma(e_k))$$

es un difeomorfismo.∎

Asimismo se tienen las identificaciones siguientes derivadas del resultado preliminar:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{U}(n, \mathbb{F})/\mathbf{U}(n-k, \mathbb{F}) \arrow[r, "\vartheta_k^n"] \arrow[d, "i_u"'] & \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n) \arrow[d, "i_v"] \\ \mathbf{U}(n+1, \mathbb{F})/\mathbf{U}(n+1-k, \mathbb{F}) \arrow[r, "\vartheta_k^{n+1}"'] & \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^{n+1}) \end{tikzcd}$$

Todo lo anterior, dice exactamente que toda variedad de Stiefel es una variedad homogénea y es justo escribir:

Proposición 3.3. *Sea $\mathbb{F}$ un campo. Si $1 \leq k \leq n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n)$ es una variedad homogénea.* ∎

La acción de $\mathbf{O}(n)$ sobre $\mathbb{S}^{n-1}$

De entrada, veamos cómo $\mathbf{Gl}(n, \mathbb{F})$ actúa por la izquierda, mediante multiplicación de matrices, sobre $\mathbb{F}^n$. Esto se detalla a través de:

$$\eta : \mathbf{Gl}(n, \mathbb{F}) \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$$

$$(\sigma, v) \mapsto \sigma(v) = \sigma \cdot v$$

y η es una acción diferenciable.

Antes de proseguir recordemos el siguiente teorema que se puede consultar en [Wa]:

Teorema 3.2. *Sean M y N variedades difenciables. Supongamos que $\varphi : N \to M$ es C^∞, que (X, ψ) es una subvariedad de M y que φ se factoriza a través de (X, ψ), es decir, $\varphi(N) \subset \psi(X)$. De que ψ es inyectiva, existe una única función $\varphi_0 : N \to X$ tal que $\psi \circ \varphi_0 = \varphi$. Además si φ_0 es continua, entoces es también C^∞ y φ_0 es continua si ψ es un encaje.*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & M \\ & X \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

■

Entonces al tomarnos la acción η restringida sobre el espacio $\mathbf{O}(n) \times \mathbb{S}^{n-1}$ y la inclusión $i : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, hace ver que η se factorizará a través de $\mathbb{S}^{n-1}$ y por ello el diagrama a continuación es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{O}(n) \times \mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathbb{R}^n \\ & \mathbb{S}^{n-1} \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Además por el teorema (3.2), φ es C^∞ y define una acción diferenciable

$$\varphi : \mathbf{O}(n) \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}.$$

Observación: Se tiene que φ es una acción transitiva: sea $\rho \in \mathbb{S}^{n-1}$, y $\beta := \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal del espacio $\mathbb{R}^n$, donde el primer elemento de esta base es precisamente $v_1 = \rho$. Para la base β tomemos la matriz $\alpha \in \mathbf{O}(n)$ tal que $\alpha(e_i) = v_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así para cualesquiera dos elementos $\rho, \varrho \in \mathbb{S}^{n-1}$ podemos tomar $\alpha_\rho, \alpha_\varrho \in \mathbf{O}(n)$ con la propiedad antes descrita. Dado que las matrices son invertibles, tenemos

$$\rho = \alpha_\rho \cdot \alpha_\varrho^{-1}(\varrho).$$

En suma, sí σ es de la forma $\mathrm{Id} \times \mathbf{O}(n-1)$, $\sigma(e_1) = e_1$, se sigue cumpliendo

$$\rho = \alpha_\rho \cdot \sigma \cdot \alpha_\varrho^{-1}(\varrho).$$

En este momento nuestro interés es ver cómo actúa el grupo ortogonal $\mathbf{O}(n)$ sobre $\mathbb{S}^{n-1}$, por lo que el último comentario nos da una primera aproximación del grupo de isotropía de cada elemento en la esfera; además el grupo de isotropía vendrá a ser el mismo para cada $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ (por transitividad), por lo que basta calcularlo para algún elemento de $\mathbb{S}^{n-1}$ (en particular para e_1).

Para calcular el grupo de isotropía de e_1, basta con encontrar las matrices de la forma $\mathrm{Id} \times \mathbf{O}(n-1)$. Si por otra parte $\sigma(e_1) = e_1$ entonces las entradas $\sigma_{i1} = 0$ para $1 < i$ y $\sigma_{11} = 1$, pero como σ es ortogonal, esto implica que $\sum_i \sigma_{1i}^2 = 1$ por lo que $\sigma_{1i} = 0$ y por tanto $\sigma \in \mathrm{Id}\times\mathbf{O}(n-1)$. En primera instancia, se hizo mención de que $\mathbf{O}(n-1)$ resultaba de manera natural y sencilla un subgrupo cerrado de $\mathbf{O}(n)$, de esta forma podemos construir la variedad homogénea $\mathbf{O}(n)/\mathbf{O}(n-1)$ y así, bajo la acción φ, la función descrita por:

$$\varphi : \mathbf{O}(n)/\mathbf{O}(n-1) \to \mathbb{S}^{n-1}$$

$$\sigma(\mathbf{O}(n-1)) \mapsto \sigma(e_1)$$

es un difeomorfismo, asimismo concluimos que toda esfera es una variedad homogénea. Lo cual no es de sorprender puesto que $\mathbb{S}^{n-1}$ está descrita por la variedad de Stiefel $\mathcal{V}_1(\mathbb{R}^n)$.

Cabe mencionar que también podemos distinguir a $\mathbb{S}^{n-1}$ a través de otro cociente, dado en torno al grupo especial unitario que denotamos y definimos a continuación

$$\mathbf{SU}(n, \mathbb{F}) := \{\sigma \in \mathbf{U}(n, \mathbb{F}) | \det \sigma = 1\}.$$

De igual manera, si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ denotamos por $\mathbf{SO}(n)$ y $\mathbf{SU}(n)$ a los grupos especial ortogonal real y al especial unitario complejo respectivamente.

Proposición 3.4. Para $\mathbb{F} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, las variedades homogéneas

$$\mathbf{SU}(n, \mathbb{F})/\mathbf{SU}(n-k, \mathbb{F}) \quad y \quad \mathbf{U}(n, \mathbb{F})/\mathbf{U}(n-k, \mathbb{F}) \qquad \text{para } k < n,$$

son variedades difeomorfas.

Demostración: La restricción de la aplicación

$$\vartheta_k^n : \mathbf{SU}(n, \mathbb{F})/\mathbf{SU}(n-k, \mathbb{F}) \to \mathbf{U}(n, \mathbb{F})/\mathbf{U}(n-k, \mathbb{F})$$

resulta un difeomorfismo. ■

Con ello tenemos las siguientes identificaciones de las variedades homogéneas:

(a) Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{V}_k(\mathbb{R}^n) = \mathbf{O}(n)/\mathbf{O}(n-k) = \mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-k)$$

$$\mathbb{S}^{n-1} = \mathcal{V}_1(\mathbb{R}^n) = \mathbf{O}(n)/\mathbf{O}(n-1) = \mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-1)$$

$$\mathbf{SO}(n) = \mathcal{V}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$$

(b) Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$\mathcal{V}_k(\mathbb{C}^n) = \mathbf{U}(n)/\mathbf{U}(n-k) = \mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-k)$$

$$\mathbb{S}^{2n-1} = \mathcal{V}_1(\mathbb{C}^n) = \mathbf{U}(n)/\mathbf{U}(n-1) = \mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-1)$$

$$\mathbf{SU}(n, \mathbb{F}) = \mathcal{V}_{n-1}(\mathbb{C}^n)$$

(c) Si $\mathbb{F} = \mathbb{H}$,

$$\mathcal{V}_k(\mathbb{H}^n) = \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n-k)$$

$$\mathbb{S}^{4n-1} = \mathcal{V}_1(\mathbb{H}^n) = \mathbf{Sp}(n)/\mathbf{Sp}(n-1)$$

3.2. Variedades de Grassmann

Otro ejemplo de gran relevancia entre los espacios homogéneos está dado por las variedades de Grassman o variedades grassmannianas y el fin de esta sección es demostrar como ellas son espacios homogéneos y también identificarlas con los espacios proyectivos.

Definición 3.2. Para cada $(v_1, \ldots, v_k) \in \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n)$ denotemos por $P_{\{v_1,\ldots,v_k\}}$ el subespacio de dimensión k en $\mathbb{F}^n$ generado por la base relativa $\{v_1, \ldots, v_k\}$. Se define la *$k-$variedad de Grassmann* denotada por:

$$\mathcal{G}_k(\mathbb{F}^n) := \{P_{(v_1,\ldots,v_k)} \subseteq \mathbb{F}^n | (v_1, \ldots, v_k) \in \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n)\},$$

como el conjunto de todos los hiperplanos de dimensión k en $\mathbb{F}^n$; al que proveemos de la máxima topología para la cual la proyección

$$\pi : \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n) \to \mathcal{G}_k(\mathbb{F}^n)$$

$$(v_1, \ldots, v_k) \mapsto P_{\{v_1,\ldots,v_k\}}$$

es una función continua y suprayectiva.

Haciendo uso de dicha proyección analicemos el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{U}(n,\mathbb{F})/\mathbf{U}(n-k,\mathbb{F}) \arrow[r, "\vartheta_k^n"] \arrow[dr, "\psi_k^n"'] & \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n) \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathcal{G}_k(\mathbb{F}^n) \end{tikzcd}$$

donde $\psi_k^n := \pi \circ \vartheta_k^n$ es suprayectiva, propiedad derivada del hecho que ϑ_k^n es un difeomorfismo (ver teorema (3.1)).

Proposición 3.5. Para las clases laterales $\sigma\,(\mathbf{U}(n-k, \mathbb{F}))$ y $\alpha\,(\mathbf{U}(n-k, \mathbb{F}))$ se tiene la siguiente relación de equivalencia:

$$\psi_k^n(\sigma) = \psi_k^n(\alpha) \Leftrightarrow \sigma = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \alpha$$

donde

$$\tau_2 \in \mathrm{Id}_k \times \mathbf{U}(n-k, \mathbb{F}) \quad \text{y} \quad \tau_1 \in \mathbf{U}(k, \mathbb{F}) \times \mathrm{Id}_{n-k}\,.$$

Demostración: Sean $\vartheta_k^n(\sigma) = (\sigma(e_1), \ldots, \sigma(e_k))$, $\vartheta_k^n(\alpha) = (\alpha(e_1), \ldots, \alpha(e_k)) \in \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n)$; entonces se tiene

$$P_{\{\sigma(e_1),\ldots,\sigma(e_k)\}} = P_{\{\alpha(e_1),\ldots,\alpha(e_k)\}} \Leftrightarrow \sigma = \tau_2 \alpha \quad y \quad \sigma(e_i) = \tau_2 \alpha(e_i) \quad \text{para } i \in \{1, \ldots, k\},$$

donde τ_2 es de la forma $\mathrm{Id}_k \times \mathbf{U}(n-k, \mathbb{F})$. Además sabemos que una transformación ortogonal deja invariante a cualquier plano, pues manda una base ortogonal en otra, que sigue generando el mismo subespacio; así obtenemos al tomar $\tau_1 \in \mathbf{U}(k, \mathbb{F}) \times \mathrm{Id}_{n-k}$ que σ y $\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \alpha$ generan el mismo subespacio de dimensión k, es decir

$$\psi_k^n(\sigma) = \psi_k^n(\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \alpha).$$

$\blacksquare$

Como consecuencia de la relación anterior tenemos que

$$\mathbf{U}(n, \mathbb{F}) / (\mathbf{U}(k, \mathbb{F}) \times \mathbf{U}(n-k, \mathbb{F})) \xrightarrow{\psi_k^n} \mathcal{G}_k(\mathbb{F}^n)$$

es una biyección continua y puesto que los espacios anteriores son compactos (se puede verificarse en [Br] y [Hu]), se cumple el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *La función*

$$\psi_k^n : \mathbf{U}(n, \mathbb{F}) / (\mathbf{U}(k, \mathbb{F}) \times \mathbf{U}(n-k, \mathbb{F})) \to \mathcal{G}_k(\mathbb{F}^n)$$

descrita por la relación

$$\sigma\, (\mathbf{U}(k, \mathbb{F}) \times \mathbf{U}(n-k, \mathbb{F})) \mapsto P_{\{\sigma(e_1),\ldots,\sigma(e_k)\}}$$

define un difeomorfismo. $\blacksquare$

Es necesario hacer la observación que $(\mathbf{U}(k, \mathbb{F}) \times \mathbf{U}(n-k, \mathbb{F}))$ resulta un subgrupo cerrado del grupo de Lie $\mathbf{U}(n, \mathbb{F})$, lo que implica que las k-variedades de Grassmann son variedades homogéneas. Además se derivan los siguientes diagramas conmutativos del resultado ulterior:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{U}(n, \mathbb{F})/\mathbf{U}(n-k, \mathbb{F}) \arrow[r, "\vartheta_k^n"] \arrow[d, "i_u"'] & \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n) \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbf{U}(n, \mathbb{F}) / (\mathbf{U}(k, \mathbb{F}) \times \mathbf{U}(n-k, \mathbb{F})) \arrow[r, "\psi_k^n"'] & \mathcal{G}_k(\mathbb{F}^n)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{U}(n, \mathbb{F}) / (\mathbf{U}(k, \mathbb{F}) \times \mathbf{U}(n-k, \mathbb{F})) \arrow[r, "\psi_k^n"] \arrow[d, "i_{\widetilde{u}}"'] & \mathcal{G}_k(\mathbb{F}^n) \arrow[d, "i_g"] \\
\mathbf{U}(n+1, \mathbb{F}) / (\mathbf{U}(k, \mathbb{F}) \times \mathbf{U}(n+1-k, \mathbb{F})) \arrow[r, "\psi_k^{n+1}"'] & \mathcal{G}_k(\mathbb{F}^{n+1})
\end{tikzcd}$$

donde las funciones i_u e $i_{\widetilde{u}}$ son inclusiones en los respectivos espacios. No es (muy) complicado el darse cuenta que para $k = 1$, $\mathcal{G}_k(\mathbb{F}^n)$ define a el espacio proyectivo $\mathbb{FP}^{n-1}$, pues nos tomamos de esta manera el conjunto de todas las direcciones de $\mathbb{F}^n$ que equivale a la relación: $v, w \in \mathbb{F}^n$ están relacionados si y sólo si $v = \lambda w$ para algún $\lambda \in \mathbb{F} - \{0\}$, y las clases laterales son precisamente el conjunto de recta ó 1-planos en $\mathbb{F}^n$ que pasan por el origen. Así hemos demostrado también que:

Proposición 3.6. *Para $\mathcal{G}_k(\mathbb{F}^n)$ con $k = 1$ se tiene las identificaciones:*

(a) $\mathcal{G}_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{RP}^{n-1}$ *el $(n-1)$-espacio proyectivo real.*

(b) $\mathcal{G}_1(\mathbb{C}^n) = \mathbb{CP}^{n-1}$ *el $(n-1)$-espacio proyectivo complejo.*

(c) $\mathcal{G}_1(\mathbb{H}^n) = \mathbb{HP}^{n-1}$ *el $(n-1)$-espacio proyectivo quaterniónico.*

que son variedades homogéneas. ■

3.3. Entre el espacio cubriente y el grupo fundamental

Comenzaremos esta sección con algunas definiciones de gran relevancia para entender el concepto de grupo fundamental. Tal concepto asocia a cada espacio topológico un grupo, no necesariamente abeliano, que nos hablará de la estructura del mismo y que además resultará un invariante útil para catalogar a los espacios topológicos y por ello a las variedades homogéneas que son de nuestro interés.

Para abrir pauta, empecemos por introducir la noción de espacios topológicos punteados, que forman una categoría donde los objetos consisten de parejas (X, x_0) donde X es un espacio topológico y $x_0 \in X$ es llamado el punto base. Un morfismo en esta categoría es una función continua $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ que preserva los puntos base, es decir, $\varphi(x_0) = y_0$. Si M es un espacio topológico Hausdorff, definimos una *trayectoria*, como una función continua $\alpha : [0, 1] \to M$; se dirá que una trayectoria $\alpha : [0, 1] \to M$ es cerrada si el punto inicial y el punto final coinciden, es decir, $\alpha(0) = \alpha(1)$, en cuyo caso nos referimos a las trayectorias cerradas como *lazos*.

Definición 3.3. Si M y N son espacios topológicos y $\varphi, \psi : M \to N$ son funciones continuas, definimos una *homotopía* $h : \varphi \rightsquigarrow \psi$ como alguna función continua

$$h : M \times [0, 1] \to N \quad \text{tal que} \quad h(x, 0) = \varphi(x) \text{ y } h(x, 1) = \psi(x),$$

por lo cual diremos que dos funciones φ y ψ son homotópicas si existe una homotopía $h : \varphi \rightsquigarrow \psi$ entre ellas.

En particular, si $\alpha : [0, 1] \to M$ y $\beta : [0, 1] \to M$ son trayectorias homotópicas, pediremos que la homotopía $h : \alpha \rightsquigarrow \beta$ deje invariantes los extremos:

$$h(0, t) = \alpha(0) = \beta(0) \ \text{ y } \ h(1, t) = \alpha(1) = \beta(1).$$

Es sencillo ver que la relación de ser homotópicas es de equivalencia.

Definición 3.4. Entenderemos por una función *trivial* a toda aquella función sobre un espacio topológico M que sea constante. Diremos que un espacio topológico M es *contraíble* si la función identidad $id : M \to M$ es homotópica a una función trivial.

Definición 3.5. Un espacio topológico M es *conexo por trayectorias* si para cualesquiera dos puntos $x, y \in M$ podemos exhibir una trayectoria $\alpha : [0, 1] \to M$ que cumple con $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. M es *simplemente conexo* si cumple con ser conexo por trayectorias y además dada cualquier curva cerrada (lazo) $\alpha : [0, 1] \to M$, existe una homotopía $h : \alpha \rightsquigarrow x_0$, donde x_0 denota la función trivial $f(x) \equiv x_{-0}$.

Desde un punto de vista intuitivo, un espacio que es simplemente conexo es aquél en donde todo lazo allí definido, lo podemos contraer continuamente a un punto.

Proposición 3.7. Sea M un espacio conexo por trayectorias. Las siguientes propiedades son equivalentes:

(i) Todo lazo en M es homotópico a un lazo trivial.

(ii) Si $\varphi : \mathbb{S}^1 \to M$ es una función continua, entonces es homotópica a una función trivial. ■

Se puede consultar [Sp] para encontar una prueba.

Definición 3.6. Sean M y N espacios topológicos, y $\pi : N \to M$ una función continua y suprayectiva:
Decimos que π es una *aplicación cubriente* si N es un espacio simplemente conexo y localmente conexa por trayectorias y se satisfacen los siguiente requerimientos:

(i) Para $m \in M$ y $\mathcal{U}_m$ vecindad de m, $\pi^{-1}(\mathcal{U}_m)$ es la unión disjunta de conjuntos abiertos $\mathcal{U}_i$, no vacíos, en N

$$\pi^{-1}(\mathcal{U}_m) = \bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{U}_i \qquad \text{donde } \mathcal{I} \text{ es algún conjunto de índices no vacío.}$$

(ii) Las restricciones $\pi : \mathcal{U}_i \to \mathcal{U}_m$ son homeomorfismos para toda $i \in \mathcal{I}$.

(iii) $\pi^{-1}(m)$ es un conjunto discreto para cada $m \in M$.

Si $\pi : N \to M$ es una aplicación cubriente, entonces diremos que M es el *espacio base* de la aplicación cubriente y N se designa como *cubierta o espacio cubriente*; en tanto que $\pi^{-1}(m)$ es denominada *la fibra* sobre el punto m. Decimos que la cubierta N es trivial si $N \cong (M \times F)$ donde F es un espacio discreto. En el caso de estar tomando cualquiera de las restricciones $\pi : \mathcal{U}_i \to \mathcal{U}_m$ hacemos referencia a que la función cubriente es *locamente trivial.*

Proposición 3.8. Para $\pi : N \to M$ una aplicación cubriente se cumple:

(a) Si $\alpha : [0,1] \to M$ es una trayectoria, y si $p \in \pi^{-1}(\alpha(0))$, entonces existe una única trayectoria $\widetilde{\alpha} : [0,1] \to N$ tal que $\pi \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$ y $\widetilde{\alpha}(0) = p$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "\pi"] & & M \\ & {[0,1]} \arrow[ul, "\widetilde{\alpha}"] \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

(b) Si $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} : [0,1] \to N$ son trayectorias para las cuales $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\beta}(0)$ y si las trayectorias proyectadas $\pi \circ \widetilde{\alpha}$ y $\pi \circ \widetilde{\beta}$ son homotópicas, entonces $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ también son homotópicas.

Demostración: Si podemos identificar a $N \cong (M \times F)$ donde F es un conjunto discreto entonces la trayectoria que buscamos está dada por $\widetilde{\alpha}(t) : [0,1] \to (M \times F), t \mapsto (\alpha(t), c)$ con c una constante en F. En otro caso, observamos que la trayectoria $\alpha([0,1])$ es compacta y como la transformación cubriente es locamente trivial, entonces existe un número finito de conjuntos abiertos en M que cubren a la curva $\alpha([0,1])$, denotemos por $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^n$ a dicha cubierta y además tomemos una partición $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ de $[0,1]$ tal que $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset \mathcal{U}_i$. Por otra parte tenemos que la fibra $\pi^{-1}(m)$ es discreta lo que implica que la restricción de π sobre cada $\mathcal{U}_i$ es una aplicación cubriente trivial la cual $\pi^{-1}(\mathcal{U}_i)$ levanta una porción de la curva α, es decir, $\pi^{-1}([t_{i-1}, t_i]) \subset \pi^{-1}(\mathcal{U}_i)$; por ello mismo, nos tomamos la curva formada por la unión de estas porciones en N y optenemos la curva $\widetilde{\alpha}$ deseada.

Para (b) se toma la función $\gamma : [0,1] \times [0,1] \to M$ tal que $\gamma(t,0) = \alpha(t)$ y $\gamma(t,1) = \beta(t)$ donde $\alpha = \pi \circ \widetilde{\alpha}$ y $\beta = \pi \circ \widetilde{\beta}$, entonces por **(a)**, $\pi^{-1}(\gamma)$ define una homotopía para $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$. ■

Proposición 3.9. Si M es un espacio simplemete conexo, N es conexo por trayectorias y $\pi : N \to M$ es una aplicación cubriente, entonces π es un homeomorfismo.

Demostración: La proyección π es suprayectiva; sólo resta comprobar que π es inyectiva. Sea $m \in M$ y supongamos que $n, \widetilde{n} \in \pi^{-1}(m)$, puesto N es conexo por trayectorias existe $\widetilde{\alpha} : [0,1] \to N$ tal que $\widetilde{\alpha}(0) = n$ y $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{n}$ y como M es simplemente es conexo y $\pi(\widetilde{\alpha}(0)) = \pi(\widetilde{\alpha}(1)) = m$ entonces $\pi \circ \widetilde{\alpha}$ es homotópica a un punto. Así pues $\widetilde{\alpha}$ es una trayectoria cerrada y $n = \widetilde{n}$. Por lo tanto tenemos un homeomorfismo. ■

Teorema 3.4. *Sea (M, m_0) un espacio topológico punteado y conexo por trayectorias, para el cual podemos exhibir para cada punto una vecindad contraíble. Entonces existe un único espacio N, con la propiedad de ser simplemente conexo y una aplicación cubriente $\pi : N \to M$.* ■

Para el teorema anterior consultar [Sp] para una demostración detallada.

Recordemos algunas ideas y resultados con respecto a variedades diferenciables y cubrientes, que se derivarán a los grupos de Lie, por su estructura inherente de variedad diferenciable.

Teorema 3.5. *Todo grupo de Lie conexo posee un espacio cubriente simplemente conexo, que también resulta un grupo de Lie y la aplicación cubriente es un homomorfismo.* ∎

Proposición 3.10. Tomemos dos grupos de Lie conexo, G y H, y un homomorfismo φ entre ellos. Entonces φ es una aplicación cubriente si y sólo si $d\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es un isomorfismo. ∎

Teorema 3.6. *Sean G y H grupos de Lie con $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ sus respectivas álgebras de Lie, y G simplemente conexo. Tomemos $\vartheta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un homomorfismo. Entonces existe un único homomorfismo $\theta : G \to H$ para el cual $d\vartheta = \theta$.* ∎

Las demostraciones de las últimas tres afirmaciones pueden ser consultadas en [Wa].

Definición 3.7. *El grupo fundamental o primer grupo de homotopía* de un espacio topológico M (que de ahora en adelante se denotará por $\pi_1(M)$) consiste de las clases de homotopía de todos los lazos en M. En el caso en que M es un grupo de Lie, tomamos los lazos que parten de la identidad.

Teorema 3.7. *Sean G y H grupos de Lie, con G simplemente conexo. Sea G_e una vecindad de $e \in G$. Si $\varphi : G_e \to H$ es un homomorfismo local entonces se puede extender a un homomorfismo global $\varphi : G \to H$.* ∎

La demostración del teorema previo se sigue del hecho de que el grupo de Lie G es generado por G_e (ver teorema (2.3)).

Teorema 3.8. *Supongamos que M es un grupo de Lie conexo por trayectorias y que cada $\sigma \in G$ se tiene una vecindad contraíble. Entonces el cubriente universal $\widetilde{G}$ admite una estructura de grupo para la cual la inclusión natural $\pi_1(G) \hookrightarrow \widetilde{G}$ y la proyección $\widetilde{\pi} : \widetilde{G} \to G$ son homomorfismos. Además* $\ker \widetilde{\pi} = \pi_1(G)$

Demostración: Sean $\alpha, \beta : [0,1] \to G$ trayectorias alrededor de la identidad, es decir, $\alpha(0) = \beta(0) = e$, y definamos la trayectoria multiplicativa

$$\gamma : [0,1] \to G$$

$$t \mapsto \alpha \cdot \beta(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t)$$

la cual cumple con que $\gamma(0) = e$. Sí $\alpha, \beta, \widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ son trayectorias en G que son homotópicas por parejas, es decir, existen $h : \alpha \rightsquigarrow \widetilde{\alpha}$ y $j : \beta \rightsquigarrow \widetilde{\beta}$ homotopías entre ellas, entonces $\alpha \cdot \beta$ y $\widetilde{\alpha} \cdot \widetilde{\beta}$ serán trayectorias homotópicas y la función de homotopía estará dada por

$$\widetilde{h} := h(t) j(t).$$

Dotemos a $\widetilde{G}$ con una operación que lo transforma en un grupo (podemos tomarla diferenciable, así $\widetilde{G}$ será un grupo de Lie). Para ver que π es un homomorfismo, sea G_e una vecindad de e. Al elegir cualesquiera dos trayectorias $\alpha, \beta : [0,1] \to G_e$, las fibras $\pi^{-1}(\alpha)$ y $\pi^{-1}(\beta)$ definen trayectorias en $\pi^{-1}(G_e)$ pues suponemos a $\widetilde{G}$ simplemente conexo; se obtiene así que al proyectar la curva definida por $\pi^{-1}(\alpha)\cdot\pi^{-1}(\beta)$ sobre G resulta $\alpha(t)\cdot\beta(t)$, que siendo estrictos escribimos como:

$$\pi\left(\pi^{-1}(\alpha)\cdot\pi^{-1}(\beta)\right)=\pi\left(\pi^{-1}(\alpha)\right)\cdot\pi\left(\pi^{-1}(\beta)\right),$$

y ello verifica que la proyección es un homomorfismo.

Para ver que $\pi_1(G)$ coincide con la fibra en G_e y la inclusión es un homomorfismo, sean p y q lazos en e ($p, q : [0,1] \to G, p(0) = q(0) = p(1) = q(1) = e$), y

$$\mathbf{h} : [0,1]\times[0,1] \to G$$

$$(s,t) \mapsto p(s)q(t)$$

que en particular si $s = t$ se tiene que $\mathbf{h}(t,t) = p(t)\cdot q(t)$ es un lazo que resulta homotópico a cualquier trayectoria que une a $\mathbf{h}(0,0)$ y $\mathbf{h}(1,1)$, en específico a la dada por

$$\gamma := p \circledcirc q : [0,1] \to G : t \mapsto \begin{cases} \mathbf{h}(2s,0) = p(2s) & s \in [0,\frac{1}{2}]; \\ \mathbf{h}(1,2t-1) = q(2t) & t \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

donde $\circledcirc$ denota la concatenación de trayectorias. Se sigue así $p(t)q(t) = \gamma(t) = p(t)\circledcirc q(t)$, y se observa que la operación en el grupo fundamental $\pi_1(G)$ es compatible con la operación en G y que la inclusión es también un homomorfismo. Es de gran importancia el evidenciar fuertemente que el núcleo $\ker\pi$ es precisamente $\pi_1(G)$. ■

Con la información ya a la mano, calculemos algunos grupos fundamentales para las variedades de nuestro interés.

Proposición 3.11. Sea $\mathbb{S}^n$ la esfera de dimensión n. Entonces, para $n \geq 2$, $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexo y $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$

$$\pi_1(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} Id & \text{si} \quad n \geq 2, \\ \mathbb{Z} & \text{si} \quad n = 1. \end{cases}$$

Demostración: Identifiquemos a $\mathbb{S}^1$ como subgrupo de $\mathbb{C}$ visto éste último como un grupo de Lie, entonces

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \exp(2\pi i t)$$

es una aplicación cubriente (ver [Pr]). Puesto que $\mathbb{R}$ es simplemente conexo y contraíble, $\mathbb{R}$ es el cubriente universal de $\mathbb{S}^1$. También $\mathbb{S}^1$ es un grupo de Lie, con la estructura inducida por $\mathbb{C} - \{0\}$. Así φ vendrá a ser un homomorfismo de grupos de Lie y entonces el $\ker\varphi = \pi_1(\mathbb{S}^1)$ resulta $\mathbb{Z}$. Para ver que $\mathbb{S}^n$, con $n \geqq 2$, es simplemente conexo nos tomamos una trayectoria $\alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^n$ y la función $\varphi_p : \mathbb{S}^n - \{p\} \to \mathbb{R}^n$ descrita por la proyección estereográfica tomada desde el punto p, que pediremos no esté en la imagen $\alpha([0,1])$; φ_p es un difeomorfismo y tenemos que $\varphi_p \circ \alpha$ resulta una trayectoria, además por ser de manera más que natural $\mathbb{R}^n$ un espacio simplemente conexo, $\varphi_p \circ \alpha$ vendrá a ser homotópica a un punto. Asi queda demostrada la primera afirmación. ■

Definición 3.8. Denótese por $\mathcal{H}(n,\mathbb{F}) := \{\sigma \in \mathbf{Gl}(n,\mathbb{F}) \,|\sigma = \overline{\sigma}^t\}$ al conjunto de matrices Hermitianas de orden n.

Proposición 3.12.

(a) El grupo $\mathbf{SU}(2)$ es simplemente conexo.

(b) El grupo $\mathbf{SO}(3)$ no es simplemente conexo y tenemos $\pi_1\,(\mathbf{SO}(3)) \cong \mathbb{Z}_2$.

Demostración: Si describimos a

$$\mathbf{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \middle| \quad a, b \in \mathbb{C} \ \text{ t. q. } \ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

lo podemos identificar con $\mathbb{S}^3$ mediante el homeomorfismo:

$$\varphi : \mathbf{SU}(2) \to \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mapsto (a, b),$$

entonces $\mathbf{SU}(2)$ es simplemente conexo. Para el segundo inciso, $\mathbf{SU}(2)$ actúa sobre el espacio de dimensión 3 de matrices Hermitianas

$$\mathcal{H}^0(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y + iz \\ y - iz & -x \end{pmatrix} \in \mathcal{H}(2,\mathbb{C}), x, y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

de traza cero, mediante

$$\gamma : \mathbf{SU}(2) \times \mathcal{H}^0(2,\mathbb{C}) \to \mathcal{H}^0(2,\mathbb{C})$$

$$(\sigma, h) \mapsto \sigma h \sigma^{-1},$$

y para la función

$$\gamma_\sigma : \mathcal{H}^0(2,\mathbb{C}) \to \mathcal{H}^0(2,\mathbb{C})$$

$$h \mapsto \sigma h \sigma^{-1},$$

aunado a que $\det \sigma = \det \sigma^{-1} = 1$, γ_σ preserva en $\mathcal{H}^0(2,\mathbb{C})$ la forma cuadrática definida positiva:

$$q : \mathcal{H}^0(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^+$$

$$h \mapsto -\det h = x^2 + y^2 + z^2;$$

entonces γ_σ es una transformación ortogonal real de $\mathcal{H}^0(2,\mathbb{C})$ y así se tiene un homomorfismo $\gamma : \mathbf{SU}(2) \to \mathbf{S0}(3)$. Puesto que las dimensiones de estos espacios son iguales, γ es un homeomorfismo local, además $\ker(\gamma) = \{+Id, -Id\}$, y también γ cumple con ser una aplicación cubriente. Luego se sigue por **(a)** que $\mathbf{SU}(2)$ es el cubriente universal de $\mathbf{S0}(3)$ y por tanto $\ker(\gamma) = \pi_1(\mathbf{S0}(3)) = \mathbb{Z}_2$ ■

Teorema 3.9. *Sea $\mathcal{H}^+(n,\mathbb{F})$ el espacio de matrices Hermitianas definidas positivas de orden n. Si $\sigma \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{F})$, entonces podemos representar a σ de manera única como $\tau\cdot\mu$, donde $\mu \in \mathbf{U}(n,\mathbb{F})$ y $\tau \in \mathcal{H}^+(n,\mathbb{F})$. Además $f : \mathcal{H}^+(n,\mathbb{F}) \times \mathbf{U}(n,\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbf{GL}(n,\mathbb{F})$ es un homeomorfismo.*

Demostración: Iniciemos haciendo mención de que una matriz es *definida positiva* si todos sus valores propios son reales positivos. Sea $\sigma \in \mathbf{Gl}(n,\mathbb{F})$, se tiene que $\sigma\overline{\sigma}^t \in \mathcal{H}^+(n,\mathbb{F})$ y haciendo uso del teorema espectral (ver [Fr]) podemos descomponer la matriz anterior como

$$\sigma\overline{\sigma}^t = \kappa\tau\kappa^{-1}, \qquad \text{donde } \kappa \in \mathbf{U}(n,\mathbb{F}) \text{ y } \tau \text{ es diagonal real.}$$

τ es la matriz en cuya diagonal están contenidos los valores propios de $\sigma\bar{\sigma}^t$.

Observemos que $\kappa^{-1} = \overline{\kappa}^t$, lo cual permite reescribir la descomposición como sigue

$$\sigma\overline{\sigma}^t = \kappa\gamma\kappa^{-1}\kappa\gamma\kappa^{-1} = \left(\kappa\gamma\kappa^{-1}\right)\left(\overline{\kappa\gamma\kappa^{-1}}\right)^t, \qquad \text{donde } \gamma^2 = \tau,$$

y γ sigue siendo una matriz diagonal positiva. De esta manera si $\tau = \kappa\gamma\kappa^{-1}$ se sigue

$$\sigma\overline{\sigma}^t = \tau\overline{\tau}^t \Leftrightarrow \tau^{-1}\sigma = \overline{\tau}^t\left(\overline{\sigma}^t\right)^{-1} \Leftrightarrow \left(\tau\sigma^{-1}\right)^{-1} = \left(\overline{\tau\sigma^{-1}}\right)^t$$

entonces $\mu = \tau^{-1}\sigma \in \mathbf{U}(n,\mathbb{F})$ y tenemos la descomposición que buscábamos (la cual se conoce como la *descomposición de Cartan*).

Ahora demostremos la unicidad: como no es de extrañar supongamos que no es única, entonces se tiene $\tau\mu = \tilde{\tau}\tilde{\mu}$ con $\tau,\tilde{\tau} \in \mathcal{H}^+(n,\mathbb{F})$ y $\mu,\tilde{\mu} \in \mathbf{U}(n,\mathbb{F})$; haciendo los cálculos respectivos se tiene

$$\tau\mu\tilde{\mu}^{-1} = \tilde{\tau} \Leftrightarrow \tau\kappa = \overline{\tau}^t\left(\overline{\kappa}^t\right)^{-1} = \left(\overline{\kappa^{-1}\tau}\right)^t = \kappa^{-1}\tau, \qquad \text{donde } \mu\tilde{\mu}^{-1} = \kappa \in \mathbf{U}(n,\mathbb{F}),$$

entonces

$$\tilde{\tau}^2 = \tau\kappa\kappa^{-1}\tau = \tau^2 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\tau} = \tau \text{ y } \tilde{\tau},\tau \in \mathcal{H}^+(n,\mathbb{F}).$$

Y concluimos así que la descomposición es única. Puesto que la multiplicación de matrices es continua, se tiene que f es un homomorfismo. Además $f \in C^\infty$. ■

Teorema 3.10. *Se tiene para $\mathbb{F} = \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$:*

$$\pi_1\left(\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})\right) = \pi_1\left(\mathbf{U}(n)\right) \quad y,$$

$$\pi_1\left(\mathbf{SL}(n,\mathbb{F})\right) = \pi_1\left(\mathbf{SU}(n,\mathbb{F})\right).$$

Antes de empezar con la demostración, es importante decir que el espíritu del teorema es hacer ver que el grupo fundamental de un grupo de Lie conexo G es igual al grupo fundamental del máximo subgrupo compacto de G.

Demostración: Puesto que $f : \mathcal{H}^+(n,\mathbb{C}) \times \mathbf{U}(n) \longrightarrow \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ es un difeomorfismo, tenemos que $\pi_1(\mathcal{H}^+(n,\mathbb{C}) \times \mathbf{U}(n)) = \pi_1(\mathbf{GL}(n,\mathbb{C}))$, así encontrar el grupo fundamental de $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ se reduce a calcular $\pi_1(\mathcal{H}^+(n,\mathbb{C}) \times \mathbf{U}(n))$ y como el primer grupo de homotopía de un producto cartesiano de dos espacios topológicos es el producto de los respectivos grupos de homotopía (consultar [Sp]) y además tenemos que $\mathcal{H}^+(n,\mathbb{C})$ es simplemente conexo, ello implica

$$\pi_1(\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})) = \pi_1(\mathcal{H}^+(n,\mathbb{C}) \times \mathbf{U}(n)) = \pi_1(\mathbf{U}(n)).$$

de igual manera si tomamos la restricción

$$f : \mathcal{H}^+(n,\mathbb{F}) \times \mathbf{SU}(n,\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbf{SL}(n,\mathbb{F})$$

se demuestra la segunda parte. ■

Proposición 3.13. Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo de Lie cerrado. Si la variedad homogénea G/H es difeomorfa a una esfera $\mathbb{S}^n$ para $n \geq 3$, entonces $\pi_1(G) \cong \pi_1(H)$.

Demostración: La proyección natural $\pi : G \to G/H$ descrita por $\sigma \mapsto \sigma H$ es un mapeo fibrado; por lo que tenemos la siguiente sucesión exacta (para verificar la existencia de tal sucesión ver [Sp]):

$$\pi_2(G/H) \longrightarrow \pi_1(H) \longrightarrow \pi_1(G) \longrightarrow \pi_1(G/H)$$

y dado que $G/H \cong \mathbb{S}^n$, el primero y segundo grupo de homotopía son triviales y por tanto $\pi_1(G) \cong \pi_1(H)$. ■

Teorema 3.11. *Los grupos* $\mathbf{SU}(n)$ *son simplemente conexos para toda* $n \in \mathbb{N}$*; por otra parte*

$$\pi_1(\mathbf{SO}(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & si\ n = 2; \\ \mathbb{Z}_2 & si\ n > 2. \end{cases}$$

Demostración: De manera natural $\mathbf{SO}(2) \cong \mathbb{S}^1$ y como ya probamos $\pi_1\left(\mathbb{S}^1\right) \cong \mathbb{Z}$, así como, $\mathbf{SO}(3) \cong \mathbb{Z}_2$. Ahora bien dado que $\mathbf{SO}(n)$ actúa transitivamente sobre $\mathcal{V}_1(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{S}^{n-1}$, bajo la acción ϑ_1^n, donde el grupo de isotropía es $\mathbf{SO}(n-1)$, probamos que $\mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-1) \cong \mathbb{S}^{n-1}$; por lo que se sigue inductivamente que $\pi_1(\mathbf{SO}(n)) \cong \pi_1(\mathbf{SO}(n-1)) \cong \mathbb{Z}_2$. Por otro lado se tiene que $\mathbf{SU}(n,\mathbb{F})/\mathbf{SU}(n-1) \cong \mathbb{S}^{2n-1}$ y puesto que $\mathbf{SU}(2)$ es simplemente conexo, hacemos la distinción $\pi_1(\mathbf{SU}(n,\mathbb{F})) \cong \pi_1(\mathbf{SU}(n-1)) \cong 1$ y en consecuencia todo $\mathbf{SU}(n,\mathbb{F})$ es simplemente conexo para toda n. ■

3.4. Niveles de homotopía

Definición 3.9. Sea $\varphi : X \longrightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos. Denotemos por $[\varphi]_Y^X$ a la clase de homotopía de la función φ. Definimos el *n-ésimo grupo de homotopía* ($n \geq 1$) del espacio topológico X, y que denotaremos en lo posterior mediante $\pi_n(X)$, como el grupo formado por $[\varphi]_X^{\mathbb{S}^n}$, es decir, las clases de homotopía de todas las funciones continuas de la n-esfera sobre el espacio X. Para $n = 1$ la definición coincide con la de grupo fundamental ver definición (3.7).

Proposición 3.14. Sea $\mathbb{F} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ los grupos $\mathbf{Sl}(n, \mathbb{F})$, $\mathbf{Gl}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{Gl}(n, \mathbb{R})^+$, $\mathbf{Sp}(n)$, $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{U}(n)$ y $\mathbf{SU}(n)$ son conexos.

En el estudio referente a grupos de Lie, es frecuente utilizar una sucesión de homotopía aplicada a un haz $(G, \pi, G/H)$ (para una descripción detalla de un haz ver [Hu]) mediante el siguiente teorema.

Teorema 3.12. *Sea $p : \mathbb{E} \longrightarrow B$ un mapeo fibrado, y $x_0 \in p^{-1}(b_0) = F$ la fibra de p sobre $b_0 \in B$. Entonces existe un homomorfismo natural entre los grupos de homotopía descrito por*

$$\delta : \pi_n(B, b_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, x_0),$$

tal que la siguiente sucesión de homotopía es exacta:

$$\pi_n(\mathbb{E}, x_0) \longrightarrow \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(F, x_0) \xrightarrow{i} \pi_{n-1}(\mathbb{E}, x_0)\ .$$

■

Tanto en [Hu] como [Sp] se encuentra una prueba para el teorema (3.12).

Haciendo uso del teorema (3.12) se sigue inmediatamente los siguientes resultados:

Proposición 3.15. Sea G un grupo de Lie conexo y un subgrupo de Lie H. Entonces existe la siguiente sucesión exacta de grupos

$$\pi_2(G/H) \to \pi_1(H) \to \pi_1(G) \to \pi_1(G/H).$$

■

Proposición 3.16. Si $\pi_1(G/H) = \pi_2(G/H) = Id$ entonces $\pi_1(G) = \pi_1(H)$. ■

Un caso particular para la última afirmación es la proposición (3.13). Por ello mismo el cálculo del grupo fundamental de los siguientes grupos clásicos es bastante sencillo.

Proposición 3.17. **(a)** $\pi_1(\mathbf{Sl}(n, \mathbb{C})) \cong \pi_1(\mathbf{SU}(n)) \cong \pi_1(\mathbf{Sp}(n)) \cong Id$;

(b) $\pi_1(\mathbf{Gl}(n, \mathbb{C})) \cong \pi_1(\mathbf{U}(n)) \cong \pi_1(\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}$;

Demostración: Consideremos el cociente $\mathbf{Gl}(n,\mathbb{C})/\mathbf{Gl}(1,\mathbb{C})$ para $n \in \mathbb{N}$, éste resulta homeomorfo a $\mathbb{C}^n - \{0\}$ y de igual manera las variedades homogéneas $\mathbf{Sl}(n,\mathbb{C})/\mathbf{Sl}(1,\mathbb{C})$ y $\mathbf{Sp}(n,\mathbb{C})/\mathbf{Sp}(1,\mathbb{C})$. Así $\pi_1(\mathbb{C}^n - \{0\}) \cong \pi_2(\mathbb{C}^n - \{0\}) \cong Id$ para $n \geq 2$ y por tanto:

$$\pi_1(\mathbf{Gl}(n,\mathbb{C})) \cong \pi_1(\mathbf{Gl}(1,\mathbb{C})) \cong \pi_1(\mathbb{C}^n - \{0\}) \cong \mathbb{Z},$$

$$\pi_1(\mathbf{Sl}(n,\mathbb{C})) \cong \pi_1(\mathbf{Sl}(1,\mathbb{C})) \cong \pi_1(\{e\}) \cong Id,$$

$$\pi_1(\mathbf{Sp}(n,\mathbb{C})) \cong \pi_1(\mathbf{Sp}(1,\mathbb{C})) \cong \pi_1(\{e\}) \cong Id,$$

en el último caso n lo tomamos par. Por otra parte si consideramos el hecho

$$\mathbf{SU}(n,\mathbb{F})/\mathbf{SU}(n-k,\mathbb{F}) \cong \mathbf{U}(n,\mathbb{F})/\mathbf{U}(n-k,\mathbb{F}) \qquad \text{para } k < n,$$

entonces $\mathbf{U}(n)/\mathbf{U}(n-1) \cong \mathbb{S}^{2n-1}$, y así el primer y segundo grupo de homotopía son triviales lo cual deriva en

$$\pi_1(\mathbf{U}(n)) \cong \pi_1(\mathbf{U}(1)) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Además observemos que

$$\pi_1(\mathbf{Gl}(n,\mathbb{R})^+) = \pi_1(\mathbf{SO}(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 2; \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } n > 2. \end{cases}$$

Más aún, podemos escribir a $\mathbf{Gl}(n,\mathbb{R})^+$ como $\mathbf{Sl}(n,\mathbb{R}) \times \{\lambda \mathbf{Id}_n : \lambda > 0\}$, por ello tenemos

$$\pi_1(\mathbf{Gl}(n,\mathbb{R})^+) \cong \pi_1(\mathbf{Sl}(n,\mathbb{R}) \times \{\lambda \mathbf{Id}_n\}) \cong \pi_1(\mathbf{Sl}(n,\mathbb{R}))$$

■

3.5. Grupos de homotopía de variedades de Stiefel y grupos clásicos

Con frecuencia se hace uso de las inclusiones naturales

$$\mathbf{U}(n,\mathbb{F}) \xrightarrow{i} \mathbf{U}(n+1,\mathbb{F}) \quad \text{y} \quad \mathbf{SU}(n,\mathbb{F}) \xrightarrow{i} \mathbf{SU}(n+1,\mathbb{F})$$

y la proyección natural entre variedades de Stiefel

$$p_{1,\ldots,k} : \mathcal{V}_{k+1}(\mathbb{F}^{n+1}) \to \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^{n+1})$$

$$(v_1,\ldots,v_{k+1}) \mapsto (v_1,\ldots,v_k)$$

que de forma bastante natural esta última función resulta un mapeo fibrado, y de aquí partimos para construir los mapeos fibrados posteriores donde aparece explícitamente la fibra

$$\mathbf{U}(n,\mathbb{F}) \xrightarrow{i} \mathbf{U}(n+1,\mathbb{F}) \cong \mathcal{V}_{n+1}(\mathbb{F}^{n+1}) \xrightarrow{p_1} \mathcal{V}_1(\mathbb{F}^{n+1}) \cong \mathbb{S}^{c(n+1)-1}$$

y para $\mathbb{F} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$$\mathbf{SU}(n, \mathbb{F}) \xrightarrow{i} \mathbf{SU}(n+1, \mathbb{F}) \cong \mathcal{V}_{n+1}(\mathbb{F}^{n+1}) \xrightarrow{p_1} \mathcal{V}_1(\mathbb{F}^{n+1}) \cong \mathbb{S}^{c(n+1)-1},$$

donde c es la dimensión sobre $\mathbb{R}$ del campo $\mathbb{F}$ requerido y p_1 es la proyección canónica en la primera entrada, la cual es composición de mapeos fibrados $\mathcal{V}_{k+1}(\mathbb{F}^{n+1}) \to \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^{n+1})$. Así mismo utilizando estos mapeos fibrados y las inclusiones naturales de $\mathbf{U}(n)$ y $\mathbf{SU}(n, \mathbb{F})$ en sus subsecuentes espacios respectivos y aplicando el teorema de sucesiones de homotopía (teorema (3.12)) se sigue:

Teorema 3.13. *Las inclusiones naturales para $q \in \mathbb{N}$*

$$\mathbf{U}(n, \mathbb{F}) \xrightarrow{i} \mathbf{U}(n+q, \mathbb{F})$$

$$\mathbf{SU}(n, \mathbb{F}) \xrightarrow{i} \mathbf{SU}(n+q, \mathbb{F}),$$

para $q \in \mathbb{N}$, inducen homomorfismos entre los grupos de homotopía

$$\pi_i(\mathbf{U}(n, \mathbb{F})) \longrightarrow \pi_i(\mathbf{U}(n+q, \mathbb{F}))$$

$$\pi_i(\mathbf{SU}(n, \mathbb{F})) \longrightarrow \pi_i(\mathbf{SU}(n+q, \mathbb{F})),$$

los cuales son epimorfismos para $i \leq (n+1)k-2$ y resultan isomorfismos si $i \leq (n+1)k-3$.

Demostración: Comencemos la prueba para $q = 1$. Por la afirmación previa al teorema, los siguientes son mapeos fibrados

$$\mathbf{U}(n+1, \mathbb{F}) \xrightarrow{p_1} \mathbb{S}^{c(n+1)-1}$$

$$\mathbf{SU}(n+1, \mathbb{F}) \xrightarrow{p_1} \mathbb{S}^{c(n+1)-1}$$

donde la fibra está dada por $\mathbf{U}(n, \mathbb{F})$ y $\mathbf{SU}(n, \mathbb{F})$ de forma respectiva; por ello al tomar la sucesión de homotopía sobres estos mapeos fibrados se cumple con:

$$\pi_{i+1}\left(\mathbb{S}^{(n+1)k-1}\right) \longrightarrow \pi_i\left(\mathbf{U}(n, \mathbb{F})\right) \longrightarrow \pi_i\left(\mathbf{U}(n+1, \mathbb{F})\right) \longrightarrow \pi_i\left(\mathbb{S}^{(n+1)k-1}\right)$$

$$\pi_{i+1}\left(\mathbb{S}^{(n+1)k-1}\right) \longrightarrow \pi_i\left(\mathbf{SU}(n, \mathbb{F})\right) \longrightarrow \pi_i\left(\mathbf{SU}(n+1, \mathbb{F})\right) \longrightarrow \pi_i\left(\mathbb{S}^{(n+1)k-1}\right).$$

Para ver si se tienen epimorfismos basta con observar que $\pi_i\left(\mathbb{S}^{(n+1)k+1}\right) \cong Id$ si $i < k(n+1)-1$, e isomorfismos si observamos $\pi_{i+1}\left(\mathbb{S}^{(n+1)k+1}\right) \cong Id$ si $i+1 < k(n+1)-1$, que interpretaremos como que el i-ésimo grupo de homotopía de $\mathbf{U}(n, \mathbb{F})$, $\mathbf{SU}(n, \mathbb{F})$ resulta trivial. Para probar los casos restantes sobre q se toman ahora las factorizaciones

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{U}(n, \mathbb{F}) \arrow[r, "i"] \arrow[drrrr, dotted] & \mathbf{U}(n+1, \mathbb{F}) \arrow[r, "i"] & \cdots \arrow[r, "i"] & \mathbf{U}(n+q, \mathbb{F}) = \mathcal{V}_{n+q}(\mathbb{F}^{n+q}) \arrow[d, "p_1"] \\
& & & \mathcal{V}_1(\mathbb{F}^{n+q}) \cong \mathbb{S}^{(n+q)k-1}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{SU}(n,\mathbb{F}) \arrow[r, "i"] \arrow[drrrr, dotted] & \mathbf{SU}(n+1,\mathbb{F}) \arrow[r, "i"] & \cdots \arrow[r, "i"] & \mathbf{SU}(n+q,\mathbb{F}) = \mathcal{V}_{n+q-1}\left(\mathbb{F}^{n+q}\right) \arrow[d, "p_1"] \\
& & & \mathcal{V}_1\left(\mathbb{F}^{n+q}\right) \cong \mathbb{S}^{(n+q)k-1}
\end{tikzcd}$$

que de igual manera son mapeos fibrados y obtenemos las sucesiones:

$$\pi_{i+1}\left(\mathbb{S}^{(n+q)k-1}\right) \longrightarrow \pi_i\left(\mathbf{U}(n,\mathbb{F})\right) \longrightarrow \pi_i\left(\mathbf{U}(n+q,\mathbb{F})\right) \longrightarrow \pi_i\left(\mathbb{S}^{(n+q)k-1}\right)$$

$$\pi_{i+1}\left(\mathbb{S}^{(n+q)k-1}\right) \longrightarrow \pi_i\left(\mathbf{SU}(n,\mathbb{F})\right) \longrightarrow \pi_i\left(\mathbf{SU}(n+q,\mathbb{F})\right) \longrightarrow \pi_i\left(\mathbb{S}^{(n+q)k-1}\right).$$

■

Aplicando directamente la sucesión de homotopía al mapeo fibrado descrito por

$$\mathbf{U}(n,\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbf{U}(n+q) \cong \mathcal{V}_{n+q}\left(\mathbb{F}^{n+q}\right) \longrightarrow \mathcal{V}_q\left(\mathbb{F}^{n+q}\right),$$

en donde la última aplicación que se toma es la proyección canónica en los primeras q entradas, se concluye el teorema a continuación.

Teorema 3.14. $\pi_i\left(\mathcal{V}_q\left(\mathbb{F}^{n+q}\right)\right) \cong Id$ *para* $i \leq c(n+1) - 2$.

Demostración: Dándonos cuenta de que la fibra descrita por la proyección está dada por $\mathbf{U}(n,\mathbb{F})$ y aplicando la sucesión de homotopía se obtiene

$$\pi_{i+1}(\mathbb{S}^t) \longrightarrow \pi_i(\mathbf{U}(n,\mathbb{F})) \xrightarrow{\alpha} \pi_i(\mathbf{U}(n+q,\mathbb{F})) \longrightarrow \pi_i(\mathcal{V}_q(\mathbb{F}^{n+q})) \longrightarrow \pi_{i-1}(\mathbf{U}(n,\mathbb{F})) \xrightarrow{\beta} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\beta} \pi_{i-1}(\mathbf{U}(n+q,\mathbb{F})) \longrightarrow \pi_{i-1}(\mathbb{S}^t),$$

donde $t = c(n+q) - 1$.

En virtud del teorema (3.13) si $i \leq c(n+1) - 2$ la aplicación α es un homomorfismo sobre y β resulta en un isomorfismo, por ello $\pi_{i-1}(\mathbf{U}(n,\mathbb{F}))$ y $\pi_i(\mathbf{U}(n,\mathbb{F}))$ son triviales y en consecuencia $\pi_i(\mathcal{V}_q(\mathbb{F}^{n+q})) \cong Id$. ■

Ahora analicemos la inclusión de la variedad $\mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n)$ sobre $\mathcal{V}_{k+1}(\mathbb{F}^{n+1})$ por medio de la función

$$\varphi : \mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n) \to \mathcal{V}_{k+1}(\mathbb{F}^{n+1})$$

$$(v_1, \ldots, v_k) \mapsto (v_1, \ldots, v_k, e_{n+1})$$

donde e_{k+1} es por supuesto el $k+i$-ésimo vector canónico de $\mathbb{F}^{n+1}$; además tomemos la proyección natural sobre el último factor de $\mathcal{V}_{k+1}(\mathbb{F}^{n+1})$

$$\varrho_{k+1} : \mathcal{V}_{k+1}(\mathbb{F}^{n+1}) \to \mathcal{V}_1(\mathbb{F}^{n+1})$$

$$(v_1, \ldots, v_k) \mapsto (v_{k+1}).$$

ϱ_{k+1} es un mapeo fibrado, donde la fibra para cada elemento v_{k+1} está determinada por $\mathcal{V}_k(\mathbb{F}^{n+1})$, en particular si se toma la composición $\varrho_{k+1} \circ \varphi$:

$$\mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{V}_{k+1}(\mathbb{F}^{n+1}) \xrightarrow{\varrho_{k+1}} \mathcal{V}_1(\mathbb{F}^{n+1}) \cong \mathbb{S}^{c(n+1)-1}$$

donde c es la dimesión de $\mathbb{F}$ sobre $\mathbb{R}$. Por esto último, la fibra para e_{k+1} está descrita precisamente por $\mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n)$; por consiguiente, como ϱ_{k+1} es un mapeo fibrado, bien se puede aplicar el teorema (3.12) y optener la sucesión de homotopía:

$$\pi_{i+1}(\mathbb{S}^{c(n+1)-1}) \cong \pi_{i+1}(\mathcal{V}_1(\mathbb{F}^{k+1})) \longrightarrow \pi_i(\mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n)) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_i(\mathcal{V}_{k+1}(\mathbb{F}^{n+1})) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(\mathcal{V}_1(\mathbb{F}^{n+1})) \cong \pi_i(\mathbb{S}^{c(n+1)-1})$$

en donde por el comentario previo el punto base es exactamente e_{k+1}.

La virtud de esta sucesión de homotopía es que detrás se encuentra justo el cálculo de las homotopías de esferas, que es bastante sencillo, así es fácil observar que si $i < c(n+1) - 2$ el grupo de homotopía $\pi_{i+1}(\mathbb{S}^{c(n+1)-1}) \cong \pi_{i+1}(\mathcal{V}_1(\mathbb{F}^{k+1}))$ es trivial. Más aún se puede obtener los grupos de homotopía de las variedades de Stiefel debido al hecho que

$$\pi_i(\mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n)) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_i(\mathcal{V}_{k+1}(\mathbb{F}^{n+1}))$$

resulta por el teorema (3.13) un isomorfismo para los índices $i < c(n+1) - 2$; así haciendo alusión a todas las consideraciones mencionadas se demuestra el siguiente teorema:

Teorema 3.15. *El homomorfismo*

$$\pi_i(\mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n)) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_i(\mathcal{V}_{k+1}(\mathbb{F}^{n+1}))$$

es un isomorfismo para $i \leq c(n+1) - 3$. ∎

Otra vez se observa, para los índices indicados, que los grupos de homotopía $\pi_i(\mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n))$ son triviales. Pero no todos los grupos de homotopía de las variedades de Stiefel son triviales, he aquí un ejemplo bastante amplio derivado de la afirmación escrita a continuación:

Proposición 3.18. Para los siguientes grupos de homotopía se cumple:

(a) $\pi_{(n-k)}(\mathcal{V}_k(\mathbb{R}^n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 1 \text{ ó } (n-k) \text{ es par;} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } k \geq 2 \text{ y } (n-k) \text{ es impar.} \end{cases}$

(b) $\pi_{2(n-k)+1}(\mathcal{V}_k(\mathbb{C}^n)) = \mathbb{Z}$,

(c) $\pi_{4(n-k)+3}(\mathcal{V}_k(\mathbb{H}^n)) = \mathbb{Z}$.

Demostración: Para **(b)**, calcular los grupos de homotopía no triviales de $\mathcal{V}_k(\mathbb{C}^n)$ es una implicación directa del teorema (3.15), pues se cumple con:

$$2(n-k)+1 \leq 2n-1 \qquad \text{para } k \geq 1,$$

así

$$\pi_{2(n-k)+1}(\mathcal{V}_k(\mathbb{C}^n)) \longrightarrow \pi_{2(n-k)+1}(\mathcal{V}_{k+1}(\mathbb{C}^{n+1}))$$

es un isomorfismo, por ello, para $k = 1$ y para toda $n \in \mathbb{N}$:

$$\pi_{2n-1}(\mathcal{V}_1(\mathbb{C}^n)) \cong \pi_{2n-1}(\mathbb{S}^{2n-1}) \cong \pi_{2n-1}(\mathcal{V}_2(\mathbb{C}^{n+1})) \cong \mathbb{Z},$$

además se tiene para $k = 2$ el isomorfismo

$$\pi_{2n-3}(\mathcal{V}_2(\mathbb{C}^n)) \longrightarrow \pi_{2n-3}(\mathcal{V}_3(\mathbb{C}^{n+1}))$$

y al tomarnos $m = n-1$

$$\pi_{2m-1}(\mathcal{V}_2(\mathbb{C}^{m+1})) \cong \pi_{2n-3}(\mathcal{V}_2(\mathbb{C}^n)) \cong \mathbb{Z},$$

por lo que al repetir este razonamiento se observa que para calcular $\pi_{2(n-k)+1}(\mathcal{V}_k(\mathbb{C}^n))$ solo era necesario calcularlo para el caso $k = 1$; de esta manera se cumple

$$\pi_{2(n-k)+1}(\mathcal{V}_k(\mathbb{C}^n)) = \mathbb{Z}.$$

Para **(c)**, se observa que

$$\pi_i(\mathcal{V}_k(\mathbb{H}^n)) = Id \quad \text{si } i \leq 4(n-k)+2,$$

por el teorema (3.14). Puesto que $\mathbb{H}$ es de dimensión real 4, aplicando el teorema (3.15), se obtiene la desigualdad $i \leq 4n+1$, lo cual se satisface para todo $k < n$ en la expresión

$$4(n-k)+4 \leq 4n+1,$$

y se obtienen los isomorfismos

$$\pi_{4(n-k)+3}(\mathcal{V}_k(\mathbb{H}^n)) \longrightarrow \pi_{4(n-k)+3}(\mathcal{V}_{k+1}(\mathbb{H}^{n+1})) .$$

Por esto último y en un razonamiento totalmente análogo al caso $(\mathcal{V}_k(\mathbb{C}^n))$, calcular el grupo de homotopía $\pi_{4(n-k)+3}(\mathcal{V}_k(\mathbb{H}^n))$ se reduce al caso en que $k = 1$, y se sigue que:

$$\pi_{4(n-k)+3}(\mathcal{V}_k(\mathbb{H}^n)) \cong \pi_{4n-1}(\mathcal{V}_1(\mathbb{H}^n)) \cong \pi_{4n-1}(\mathbb{S}^{4n-1}) \cong \mathbb{Z}.$$

Comentario: En la versión real, los primeros grupos de homotopía no triviales son $\pi_{n-k}(\mathcal{V}_k(\mathbb{R}^n))$ con $1 \leq k \leq n$. En el caso $k = 1$

$$\pi_{n-1}(\mathcal{V}_1(\mathbb{R}^n)) \cong \pi_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z},$$

en los demás casos, es suficiente con mostrarlo para $k = 2$, como consecuencia del teorema (3.15), pues $n - k \leq n - 2$ para $k \geq 2$ y se tiene los isomorfismos

$$\pi_{n-k}(\mathcal{V}_k(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow \pi_{n-k}(\mathcal{V}_{k+1}(\mathbb{R}^{n+1})),$$

aunque no sucede lo mismo que en los casos anteriores, aquí son necesarias algunas herramientas un tanto más sofisticadas para esta tarea, pues no es posible desgajar como es el pegado topológico de $\mathcal{V}_k(\mathbb{R}^n)$ y ello depende de la paridad de k y $n - k$; por esto mismo sólo hacemos aquí el comentario. Para una verificación del resultado, el resto de la prueba se encuentra en [Hu].

■

Capítulo 4

Divertimento en el haz tangente

"Till my ghastly tale is told,
this heart within me burns."
Coleridge

La finalidad que ahora nos motiva es demostrar, con el mayor rigor posible, un resultado muy útil e importante (desde mi opinión), debido a que añade una cantidad considerable de variedades homogéneas a las ya citadas en el capítulo que antecede a éste. El resultado involucra el hecho de que la variedad dada por el haz tangente de una variedad homogénea es de igual manera homogénea. Para ello se comenzará demostrando que el haz tangente de una variedad suave admite una estructura diferenciable, para después construir un grupo de Lie muy particular y especial, $\mathfrak{g} \times G$, que actuará de manera natural y transitiva sobre el haz tangente.

Sea M^n una variedad diferenciable. Anteriormente en el capítulo se habia definido el conjunto:

$$\tau(M) = \{(p, v) : p \in M \text{ y } v \in T_pM\}$$

como el haz tangente de una variedad M. Ahora mostraremos que $\tau(M)$ admite una estructura diferenciable.

Teorema 4.1. *El haz tangente de cualquier variedad diferenciable es nuevamente una variedad diferenciable.*

Demostración: Sea M^n una variedad (no vacía) de dimensión n y $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ la estructura diferenciable de M. Denotemos por $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ las coordenadas locales para cada punto $p \in U_\alpha$ y por $\left\{\frac{d}{dx_\alpha^i}\right\}_{i=1}^n$ la base asociada al espacio tangente de $\varphi_\alpha(U\alpha)$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Definamos la función

$$\phi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to \tau(M)$$

$$(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n, y_1, \ldots, y_n) \mapsto \left(\varphi_\alpha(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n), \sum_{i=1}^n y_i \left\{\frac{d}{dx_\alpha^i}\right\}\right);$$

la primera entrada es de antemano un difeomorfismo y la segunda es solo la diferencial $d\varphi_\alpha(y)$. Además el conjunto $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ es abierto en $\mathbb{R}^{2n}$ por lo cual obtenemos cartas locales para $\tau(M)$ descritas por $(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \phi_\alpha)$ para cada $\alpha \in \Lambda$.

Ahora veremos que efectivamente $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ define una estructura diferenciable para $\tau(M)$. En primera instancia, se sigue del hecho de que

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \varphi_\alpha(U_\alpha) = M \quad \text{y} \quad d\varphi_\alpha|_{p_\alpha}\mathbb{R}^n = T_{\varphi(p_\alpha)M} \qquad \text{con } \ p_\alpha \in U_\alpha$$

que

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \phi_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = \tau(M),$$

por ello solo resta verificar que el cambio de coordenadas resulta ser un difeomorfismo, para lo cual tomamos

$$(p, v) \in \phi_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap \phi_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n);$$

así podemos escribir al elemento (p, v) desde dos puntos de vista, dependiendo de la carta que tomemos,

$$(p, v) = (\varphi_\alpha(x_\alpha), d\varphi_\alpha(y_\alpha)) = (\varphi_\beta(x_\beta), d\varphi_\beta(y_\beta))$$

donde x_α son las coordenadas locales con respecto a U_α y x_β lo son con respecto a U_β, y $y_\alpha, y_\beta \in \mathbb{R}^n$. Por ende se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & \tau(M) \arrow[dl, "(\varphi_\alpha, d\varphi_\alpha)"'] \arrow[dr, "(\varphi_\beta, d\varphi_\beta)"] & \\ \mathbb{R}^{2n} \arrow[rr, "\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}"'] & & \mathbb{R}^{2n} \end{tikzcd}$$

y explícitamente:

$$\begin{aligned} \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} &= \phi_\beta\left(\varphi_\alpha^{-1}, d\varphi_\alpha^{-1}\right) \\ &= \left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}, d\varphi_\beta \circ d\varphi_\alpha^{-1}\right) \\ &= \left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}, d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}).\right) \end{aligned}$$

Puesto que $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) \in C^\infty$ también lo es $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$, y en consecuencia $\tau(M)$ es una variedad diferenciable; en añadidura por construcción de $\tau(M)$ se observa que $\dim(\tau(M)) = 2n$. ∎

Definición 4.1. Sea G un grupo de Lie y M una variedad diferenciable, si la función $\varphi : G\times M \to M$ es una acción, diremos que G *actúa diferenciablemente* sobre M si φ es una función diferenciable. Para cada $m \in M$ el conjunto:

$$G(m) = \{\varphi(\sigma, m) \in M | \sigma \in G\}$$

denotará la órbita de m bajo la acción de G.

Definición 4.2. Si $\mu : G \times M \to M$ es una acción izquierda de un grupo de Lie G sobre una variedad diferenciable M de dimensión n, decimos que G *actúa con rango máximo* sobre M si

$$d\mu|_\sigma (T_\sigma G) = T_{\sigma m}M \qquad \text{para cada } \sigma \in G, \text{ y } m \in M,$$

es decir, la acción de G sobre M genera un espacio de dimensión n.

Teorema 4.2. *Sean G un grupo de Lie y M una variedad conexa y diferenciable de dimensión d. Si $\mu : G\times M \to M$ es una acción transitiva sobre M, entonces la componente conexa G_e de la identidad también actúa transitivamente sobre M*

Demostración: Ante todo observemos que para cada $m \in M$ el rango de μ_m es de igual dimensión que la variedad M, por ser μ transitiva. Mientras tanto se demostró en el lema (2.1) que para cada $\sigma \in M$, $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ con $\sigma_i \in G_e$ y alguna $k \in \mathbb{N}$; luego , dado que para cualesquiera $m, n \in M$

$$\mu_\sigma(m) = n \quad \text{para alguna} \quad \sigma \in G \qquad \text{entonces} \qquad \mu_{\sigma_1\cdots\sigma_k}(m) = n$$

Puesto que G_e es conexa y abierta (podemos suponer que G_e es simétrica cómo en la demostración del lema (2.1)) se sique que $\mu_{G_e}(m)$ es una vecindad conexa de n y dado que M es una variedad conexa y la acción μ es transitiva, solo tenemos una órbita y además

$$\mu_{G_e}(m) = M \qquad \text{para cada} \quad m \in M,$$

por lo cual podemos afirmar que existe $\widetilde{\sigma} \in G_e$ tal que

$$\mu_{\widetilde{\sigma}}(m) = n \qquad \text{para cualesquiera} \quad m, n \in M.$$

■

4.1. El haz tangente de una variedad homogénea es una variedad homogénea

El grupo de Lie ($\mathfrak{g} \times G$) Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su respectiva álgebra de Lie. Definimos el producto semidirecto de los elementos anteriores, que en lo sucesivo denotaremos por $\mathcal{G} := \mathfrak{g} \times G$, provisto con la operación binaria dada por:

$$\rho : \mathcal{G}\times\mathcal{G} \to \mathcal{G} : ((X, \sigma), (Y, \tau)) \mapsto (X + \mathbf{Ad}_\sigma(Y), \sigma\tau) \qquad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{g}, \ y \ \sigma, \tau \in G.$$

Afirmación 4.1. *$\mathcal{G}$ es un grupo de Lie con dicha operación.*

Demostración:Debido a que $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial, sencillamente podemos dotarla de una estructura de variedad diferenciable; así $\mathcal{G}$ tendrá de manera natural la estructura de variedad producto. Mientras que la operación ρ define una estructura de grupo:

> El neutro claramente está dado por $(0, e)$ y para cada $(X, \sigma) \in \mathcal{G}$, los inversos estan dados por $(X, \sigma)^{-1} := (-X, \sigma^{-1})$ (en la segunda entrada, se deriva de que G es grupo, en tanto, en la primera hacemos uso del hecho que **Ad** es un homomorfismo).

Para continuar, debemos ver que la operación

$$\widetilde{\rho} : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

$$((X, \sigma), (Y, \tau)) \mapsto \left(X + \mathbf{Ad}_{\sigma}(-Y), \sigma\tau^{-1}\right) \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{g}, \;\; y \;\; \sigma, \tau \in G,$$

es diferenciable, lo cual se sigue si demostramos que

$$\nu_{\sigma} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : (X, Y) \mapsto (X + \mathbf{Ad}_{\sigma}(-Y)) \quad \text{para cada } \sigma \in G \text{ y cualesquiera } X, Y \in \mathfrak{g},$$

es una función suave. En la segunda entrada el carácter de suavidad sobre

$$\mu : G \times G \to G : (\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau^{-1}$$

es claro. Así, la diferenciailidad de ν_{σ}, es consecuencia de que $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial y ν_{σ} define un campo vectorial de clase C^{∞} para cada $\sigma \in G$. En conclusión $\widetilde{\rho}$ es C^{∞} y por lo tanto $\mathcal{G}$ es un grupo de Lie. ■

Teorema 4.3. *Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie . Si G actúa transitivamente y con rango máximo sobre una variedad diferenciable M, entonces $\mathcal{G}$ actúa transitivamente y con rango máximo sobre el haz tangente de M.*

Demostración:Sean

$$\mu : G \times M \to M$$

$$(\sigma, m) \mapsto \sigma m \qquad \text{para } \sigma \in G, \text{ y } m \in M$$

una acción izquierda de G sobre M, y

$$\theta_m : G \to M$$

$$\sigma \to \sigma m \qquad \text{para cada } m \in M,$$

las correspondientes restricciones para cada punto $m \in M$. En particular al aplicar la acción θ_m en $e \in G$ se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\theta_m"] & M \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "d\theta_m"'] & T_m M \arrow[u, "\widehat{\exp}"'] \end{tikzcd}$$

donde $\widehat{\exp}$ denota el mapeo exponencial definido sobre una variedad diferenciable (consultar [Do01]).

Se denota además, para cada $X \in \mathfrak{g}$ la expresión $\widetilde{X}(m) := d\theta_m(X)$, que define un campo vectorial suave sobre M; en lo sucesivo $\tau(M)$ hará referencia al haz tangente de la variedad M. Así pues, definamos en el espacio $\tau(M)$ una acción izquieda de $\mathcal{G}$, descrita mediante

$$\eta : \mathcal{G} \times \tau(M) \to \tau(M)$$

$$((X, \sigma), v) \to (d\varphi_\sigma(v)) + (\widetilde{X})(\sigma\pi(v)) \qquad \text{para cada } v \in \tau(M),$$

en donde π denota la proyección canónica de $\tau(M)$ sobre M, es decir

$$\pi : \tau(M) \to M$$

$$\pi(v) = m \Leftrightarrow v \in T_m M,$$

y

$$\varphi_\sigma : M \to M$$

$$m \mapsto \sigma m, \text{ para cada } \sigma \in G;$$

con ello resultan los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi_\sigma"] & M \\ T_m M \arrow[u, "\widehat{\exp}"] \arrow[r, "d\varphi_\sigma"'] & T_{\sigma m} M \arrow[u, "\widehat{\exp}"'] \end{tikzcd} \qquad y \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\theta_m"] & M \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "d\theta_m"'] & T_{\sigma m} M \arrow[u, "\widehat{\exp}"'] \end{tikzcd}$$

donde se hace evidente que tanto $d\varphi_\sigma(v)$ como $\widetilde{X}(\sigma\pi(v))$ pertenecen a $T_{\sigma\pi(v)}M$ y damos cuenta de que la función η está bien definida y es diferenciable.

Afirmación 4.2. η es una acción izquierda.

Demostración:

($\mathfrak{a}$) $\eta((0, e), v) = v \qquad$ para todo $v \in \tau(M)$.

($\mathfrak{b}$) Para cada $v \in \tau(M)$ tal que $v \in T_m M$

$$\begin{aligned}
\eta((X,\sigma)\cdot(Y,\tau),v) &:= ((X,\sigma).(Y,\tau),v) \\
&= ((X+\mathbf{Ad}_\sigma(Y),\sigma\tau),v) \\
&= d\varphi_{\sigma\tau}(v) + (\widetilde{X} + \widetilde{\mathbf{Ad}}_\sigma(Y))(\sigma\tau\pi(v)) \\
&= d\varphi_\sigma d\varphi_\tau(v) + d\theta_{\sigma\tau\pi(v)}(X + \mathbf{Ad}_\sigma(Y)) \\
&= d\varphi_\sigma d\varphi_\tau(v) + d\theta_{\sigma\tau\pi(v)}(X) + d\theta_{\sigma\tau\pi(v)}(\mathbf{Ad}_\sigma(Y)) \\
&= d\varphi_\sigma d\varphi_\tau(v) + d\theta_{\sigma\tau\pi(v)}(X) + d\varphi_\sigma d\theta_{\tau\pi(v)}(Y) \\
&= d\varphi_\sigma\left(d\varphi_\tau(v) + d\theta_{\tau\pi(v)}(Y)\right) + \widetilde{X}(\sigma\tau\pi(v)) \\
&= d\varphi_\sigma\left(d\varphi_\tau(v) + d\theta_{\tau\pi(v)}(Y)\right) + \widetilde{X}(\sigma\,\underbrace{\pi(d\varphi_\tau(v) + d\theta_{\tau\pi(v)}(Y))}_{\tau\pi(v)}) \\
&= \eta\left((X,\sigma),\left(d\varphi_\tau(v) + d\theta_{\tau\pi(v)}(Y)\right)\right) \\
&= \eta\left((X,\sigma),\eta\left((Y,\tau),v\right)\right)
\end{aligned}$$

■

Con esto mostramos que $\mathcal{G}$ actúa diferenciablemente sobre $\tau(M)$.

Supongamos en este momento que G actúa transitivamente, entonces para cualesquiera $v, w \in \tau(M)$ tales que $\pi(v) = m$ y $\pi(w) = n$, existe un $\sigma \in G$ para el cual $\sigma\pi(v) = \pi(w)$; y añadiendo que G actúa con rango mmáximo, entonces existe $X \in \mathfrak{g}$ con la propiedad

$$d\theta_{\pi(w)}(X) = w - d\varphi_\sigma(v),$$

y al despejar:

$$w = d\varphi_\sigma(v) + d\theta_{\pi(w)}(X) = d\varphi_\sigma(v) + d\theta_{\sigma\pi(v)}(X) = \eta((X,\sigma),v),$$

vemos que $\mathcal{G}$ actúa transitivamente sobre $\tau(M)$.

Para ver que $\mathcal{G}$ actúa con rango máximo, sea U_e una componente abierta conexa de $e \in G$. Puesto que $G = \cup_{n\in\mathbb{N}} U_e^n$ entonces U_e actúa con rango máximo sobre M. Sea $U_e(m)$ la órbita del punto m bajo la acción de U_e; $U_e(m)$ es una subvariedad abierta de M y además afirmamos que U_e actúa transitivamente y con rango máximo sobre $U_e(m)$ para cada $m \in M$. Por otra parte, denotemos por $\mathcal{G}_0$ a una componente conexa de $(0,e) \in \mathcal{G}$; de igual manera la acción de $\mathcal{G}_0$ es transitiva sobre cada $\tau(U_e(m))$ y por la conexidad de $\mathcal{G}_0$, esta actúa con rango máximo en cada $\tau(U_e(m))$. Ahora, de manera natural, podemos ver a $\tau(M)$ como la unión

$$\tau(M) = \bigcup_{m\in M} \tau(U_e(m)),$$

en donde a cada $\tau(U_e(m))$ es posible asociarle una estuctura de subvariedad de $\tau(M)$. Así podemos asegurar que para cada $m \in M$, $\tau(U_e(m))$ actúa con rango máximo sobre $\tau(M)$; lo que implica que también $\mathcal{G}$ actúa con rango máximo en $\tau(M)$. ■

Un comentario pertinente, derivado de la definición de la acción η, es que para cada $v \in T_m M \subset \tau(M)$ el grupo de isotropía de v, está dado precisamente por $\mathcal{H}_v := \mathfrak{h} \times H_m$ donde H_m es el grupo de isotropía de $m \in M$ bajo la acción de G y $\mathfrak{h}$ es el álgebra de Lie correspondiente.

Sean $m \in M$, H_m su grupo de isotropía y para cada $v \in \tau(M)$ tal que $v \in T_m M$ si $\sigma \in H_m$ y $X \in \mathfrak{h}$ entonces:

$$\eta((X, \sigma), v) = id(v) + \underbrace{d\theta_m(X)}_{0} = v$$

($d\theta_m(X) \equiv 0$ puesto que $\theta_{\sigma\pi(v)}$ es una función constante en todo H_m).

Teorema 4.4. *Sean G un grupo de Lie y H un subgrupo de Lie cerrado, con $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ las álgebras de Lie respectivas. Si G/H está dotado con la estructura diferenciable que la convierte en una variedad homogénea (ver definición (2.19)), entonces de igual modo $\tau(G/H)$ es una variedad homogénea.*

Demostración: Dado que H es un grupo de Lie, podemos construir como antes, el grupo de Lie $\mathcal{H} := \mathfrak{h} \times H$ con la operación ρ antes descrita. Entonces $\mathcal{H}$ será de forma natural un subgrupo cerrado de $\mathcal{G}$. Luego, podemos proveer al cociente $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ con una estructura de variedad homogénea descrita en el teorema (2.12). Con ello al asociar la acción μ, descrita en el teorema anterior, sobre G/H, resulta que $\eta : \mathcal{G} \times \tau(G/H) \to \tau(G/H)$ es una acción transitiva y por el comentario previo, al tomarnos para $v_0 \in \tau(M)$ el grupo de isotropía $\mathcal{H}_{v_0} := \mathfrak{h} \times H_m$, concluimos que

$$\mathcal{G}/\mathcal{H}_{v_0} \cong \tau(G/H).$$

∎

Bibliografía

[Ar] Arnold Vladimir I., Mathematical Methods of Classical Mechanics, Seguda Edición. Springer. 1989. Estados Unidos.

[Br] Bröcker Theodor y Drek Tammo Tom, Representation of Compact Lie Gruops. Springer-Verlag. 1985. Estados Unidos.

[BS] Brockett R. W. y Sussmann Hector, *Tangent Bundles of Homogeneous Spaces are Homogeneous Spaces*, American Mathematical Society, Volumen 35, No. 2, Octubre 1972.

[Ca] Cartan Henri, Formas Diferenciales Aplicaciones al Cálculo de Variaciones y a la Teoría de Curvas y Superficies. Omega Barcelona Colección Métodos. 1972. España.

[Che] Chevalley Claude, Theory of Lie Groups. Princeton University Press. 1996. Estados Unidos.

[DeN] De Neymet U. Sylvia, Introducción a los Grupos de Transformaciones. Sociedad Matemátematica Mexicana. 2005. México.

[Do01] Do Carmo Manfredo Perdigao, Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, Inc.. 1976. Estados Unidos.

[Do02] Do Carmo Manfredo Perdigao, Riemannian Geometry. Birkhäuser. 1992. Estados Unidos.

[Du] Duistermaath J.J. y Kolk J. A. C.,Lie Gruops, Springer-Verlag. 1999. Alemania.

[Fr] Friedberg Stephen H., Insel Arnold I., Spance Lawrence E., Linear Álgebra Cuarta Edición. Prentice Hall. 2003. Estados Unidos.

[Ga] Gaal Steve A., Linear Analysis and Representation Theory. Springer-Verlag. 1973. Alemania.

[Go] Gorbatsevich V. V., Onishchik A. L. y Vinberg E. B., Foundations of Lie Groups and Lie Transformation Groups. Springer. 1997. Alemania.

[Hu] Husemoller Dale. Fiber Bundles, Tercera Edición. Springer. 1994. Estados Unidos.

[Ka] Kawakubo Katsuo, The Theory of Transformation Groups. Oxford University Press. 1991. Estados Unidos.

[On] Onishchik A. L. y Vinberg E. B., Lie Groups and Algebraic Groups. Springer-Verlang. 1990. Estados Unidos.

[Pr] Prieto Carlos, Topología Básica. Fondo de Cultura Económica. 2004. México.

[Ro] Rotman Joseph J., An Introduction to the Theory of Groups, Cuarta Edición. Springer. 1985. Estados Unidos.

[Sp] Spanier E., Algebraic Topology. McGraw-Hill Book Company. 1966. Estados Unidos.

[Wa] Warner Frank W., Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. Springer. 1983. Estados Unidos.

Tabla de Notación

Abreviación	Descripción	Definición
$\mathbb{N}$	conjunto de números naturales $\{0, 1, 2, \ldots\}$	
$\mathbb{Z}$	conjunto de números enteros $\{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	
$\mathbb{S}^n$	la n-ésima esfera o vectores de dimensión n de norma unitaria	
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$	conjunto de números reales y el espacio euclidiano n dimensional	
$\mathbb{C}^n$	espacio complejo de dimensión n	
e	el elemento neutro o identidad de un grupo	page 6
C^∞	conjunto de funciones infinitamente diferenciables	page 7
M, N	por lo general denotan variedades diferenciables	page 7
$\frac{d}{dx_i}$	la i-ésima derivada	page 8
$T_m M$	espacio tangente a la variedad M en el punto m	page 8
$\{dx_i\}$	base del espacio tangente	page 8
$\tau(M)$	el haz tangente de la variedad M	page 10
X, Y, Z	denotan campos vectoriales sobre variedades o campos invariantes por la izquierda	
$[\ ,\ ], [X, Y]$	el corchete de Lie de dos campos vectoriales	page 11
$(L_x Y)_m$	la derivada de Lie del campo Y con respecto al campo X en el punto m	page 12
ω^p	forma diferencial de orden p	page 12
G, H	el grupo de Lie G y el subgrupo de Lie H	page 15
$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$	el conjunto de todas las matrices con entradas en $\mathbb{F}$	page 16
$GL(V)$	el grupo de transformaciones lineales de un espacio vectorial V en sí mismo	page 16
$\mathbb{A}ut(V)$	conjunto de automorfismos de un espacio vectorial	page 16
$\mathbf{Gl}(n, \mathbb{F})$	el grupo general lineal sobre el campo $\mathbb{F}$ o conjunto de todas las matrices invertibles con entradas en $\mathbb{F}$	page 16
$\mathbf{Sl}(n, \mathbb{F})$	grupo singular lineal, o conjunto de matrices en $\mathbf{Gl}(n, \mathbb{F})$ cuyo determinante es 1	page 17
$\mathbf{U}(n, \mathbb{F})$	grupo unitario,o espacio de todas las matrices o transformaciones unitarias	page 17
$\mathbb{H}^n$	campo de números hamiltonianos n dimensional	page 18

Abreviación	Descripción	Definición
$\mathfrak{g}$	álgebra de Lie de un grupo de Lie	page 19
$D : \widetilde{\mathfrak{g}} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$	derivación lineal sobre el algebra $\widetilde{\mathfrak{g}}$	page 20
$l_\sigma,\ r_\sigma$	traslaciones izquierda y derecha respectivamente, sobre un grupo de Lie	page 20
T_eG	espacio tangente en la identidad de un grupo de Lie	page 21
$\mathbb{E}^p_{l\ inv}(G)$	el espacio de p-formas invariante por la izquierda sobre un grupo de Lie	page 21
c_{ijk}	constantes estructurales	page 22
$U_e,\ G_e$	componente o vecindad conexa de $e \in G$	page 25
$\exp_X,\ \exp(X)$	mapeo exponencial sobre un campo vectorial X	page 27
π	la proyección canónica	
Ad	representación adjunta	page 36
ad	la diferencial de la representación adjunta	page 36
$\mathbb{Z}_G$	el centro algebraico de un grupo de Lie	page 37
$\mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}$	el centro algebraico de un álgebra de Lie	page 37
G/H	una variedad o espacio homogéneo	page 43
σH	clase lateral de σ módulo H en una variedad homogénea	page 44
$\mathcal{V}_k(\mathbb{F}^n)$	la k-ésima variedad de Stiefel sobre el espacio $\mathbb{F}^n$	page 48
$\mathcal{G}_k(\mathbb{F}^n)$	la k-ésima variedad de Grassman sobre el espacio $\mathbb{F}^n$	page 53
(X, x_0)	espacio topológico punteado	page 55
π_n	el n-ésimo grupo de homotopía	page 63
$\mathcal{G}$	el grupo producto de $\mathfrak{g}$ y G	page 73