UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

TRANSFORMACIONES QUE PRESERVAN LA MEDIDA EN LA CONSTRUCCIÓN DE PROCESOS ESTACIONARIOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

KAROL ALBERTO ROSEN ESQUIVEL

DIRECTOR DE TESIS: DR. JUAN GONZÁLEZ HERNÁNDEZ

MÉXICO, D.F. JUNIO, 2009

Transformaciones que Preservan la Medida en la Construcción de Procesos estacionarios

Karol Alberto Rosen Esquivel

Tesis presentada para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

Asesor:
Dr. Juan González Hernández

DEPARTAMENTO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN
MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

México, Junio 2009

Dedicada a

Mis padres Patricio e Imelda.

Mis hermanos Omar, Patricio y Abril.

Mis amigos.

Agradecimientos

A mi asesor: Dr. Juan González por ayudarme a terminar y sus consejos. A todos mis profesores de la maestr´a. A la UNAM, al IIMAS y al Posgrado en Ciencias Matemáticas porque tuve la oportunidad de hacer algo que me gusta: estudiar, aprender, construir, imaginar y demostrar cosas en la más bella y útil creación de la mente humana: las matemáticas.

Prólogo

Este trabajo, que presento como tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas surgió en primera instancia durante el curso de Series de Tiempo que tomé en 2006 con el Dr. Ramsés Mena, ésto aunado con el conocimiento de un teorema que caracteriza los procesos estocásticos *estacionarios* en términos de *transformaciones que preservan la medida* me hizo elegir finalmente el tema de tesis.

De esta forma me dediqué a trabajar en mi tesis buscando construir procesos estacionarios por medio de transformaciones que preservan la medida. La primera sorpresa que tuve fue que no hay (o no está divulgado hasta este momento) un método para construir esas transformaciones que preservan una medida dada. En la literatura, cuando se habla de ésto, sólo se hace referencia a algunos pocos ejemplos (como las traslaciones y rotaciones que preservan la medida de Lebesgue, la transformación de Gauss que preserva la medida de Gauss y la transformación logística que preserva la distribución logística y los endomorfismos continuos de grupos compactos que preservan la medida de Haar) y en el mejor de los casos teoremas de existencia. Con esto en mente puede decirse que el aporte principal de este trabajo es que expone la manera de *construir transformaciones que preservan una medida de probabilidad* a través de su *función de distribución*. La ayuda del Dr. Juan González fue muy importante en este resultado porque con las pláticas que tuvimos pude plantearlo con toda claridad y además identificar que ese mismo resultado permite construir transformaciones que preservan la medida de Lebesgue en $[0, 1]$. La única condición que se debe cumplir para construir una transformación que preseve una medida finita dada es que la función de distribución de la medida asociada sea *invertible* [1], condición que cumplen, por ejemplo, TODAS las medidas de probabilidad absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue. Este es el material del cap´tulo 3. Esta situación es importante porque es otra forma de construir procesos estacionarios con distribuciones marginales arbitrarias (dentro del conjunto de medidas absolutamente continuas respecto de la medida de Lebesgue). Previamente, en el cap´tulo 2 y en el apéndice B, se muestran las relaciones que hay entre procesos estocásticos y transformaciones que preservan la medida.

En el cap´tulo 4 se dan algunos ejemplos de transformaciones que preservan la medida de Lebesgue en $[0, 1]$ el intervalo cerrado cero uno. Estas transformaciones son importantes porque junto con las funciones de distribución invertibles permiten construir transformaciones que preservan una medida de probabilidad dada. El cap´tulo 5 contiene una generalización estacionaria de los famosos procesos ARMA. En cuanto a los procesos ARMA existen much´simas referencias, por ejemplo. La segunda parte del cap´tulo se relaciona con la construcción de procesos estacionarios tipo GARCH por medio de transformaciones que preservan la medida.

Los cap´tulos nales tratan de lo siguiente: el cap´tulo 6 acerca de otras formas de invarianza (contractividad, intercambiabilidad y rotabilidad) en términos de transformaciones que preservan la medida. Finalmente, en el cap´tulo 7 se muestran las conclusiones del trabajo.

[1] En general, se requiere calcular la inversa de una función de distribución numéricamente. También en ciertos casos pueden calcularse como soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias.

Lista de S´mbolos

$a \wedge b$ conjunción de a y b

$\ni$ tal que

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ diferencia simétrica entre $A \wedge B$

$\mathbb{N}$ conjunto de números naturales

$\mathbb{Z}$ conjunto de números enteros

$\mathbb{R}$ conjunto de números reales

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ o intervalo abierto

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ o intervalo cerrado

λ medida de Lebesgue

μ medida de probabilidad con soporte en $X \subset \mathbb{R}$

c.s. casi seguramente o casi en todas partes

$f \circ g$ la composición de las funciones f y g en los dominios adecuados

T^n composición de la función T con ella misma n veces

$T^0 := I$ la función identidad

$\mathbb{E}$ operador esperanza

$cov\,(X_t, X_s)$ covarianza entre X_t y X_s

$\{X_t\}$ *iid* sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas

B es el operador de retraso tal que $B^j X_t := X_{t-j}$

F función de distribución de una medida de probabilidad

F^{-1} inversa de la función de distribución F

G transformación que preserva la medida de Lebesgue en $[0, 1]$

T transformación que preserva una medida de probabilidad μ

$\stackrel{d}{=}$ igualdad en distribución

$\mathcal{B}(X)$ σ-álgebra de Borel del conjunto X

$\sigma(X)$ σ-álgebra generada por el conjunto X

$\varnothing$ conjunto vac´o

$\lfloor x \rfloor$ función mayor entero menor o igual que x

$x \bmod 1 \; = x - \lfloor x \rfloor$

$\ln(x)$ función logaritmo natural de x

$\operatorname{sgn}(x)$ función signo de x. Toma los valores $-1, 0$ y 1 cuando x es un número negativo, el cero ó un número positivo, respectivamente

$\exp(x)$ función exponencial de x

$\cos(x)$ función coseno de x

$\tan(x)$ función tangente de x

$\cot(x)$ función cotangente de x

$\arcsin(x)$ función arco seno de x

$\operatorname{arc}\cos(x)$ función arco coseno de x

$\arctan(x)$ función arco tangente de x

$\mathcal{T}$ conjunto de ´ndices o tiempos

θ operador de traslación (*shift*) tal que $\theta(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$

$\theta_t = \underbrace{\theta(\theta(\cdots)\theta)}_{t \text{ veces}}$ operador de traslación con tiempo jo t

$\mathcal{F}_t$ ltración de σ-álgebras

τ tiempo opcional o de paro

θ_τ operador de traslación con tiempo opcional τ

A matriz

A' transpuesta de la matriz A

A^{-1} inversa de la matriz A cuando aplica

$N(0, 1)$ la distribución (o medida) normal estándar con media cero y varianza uno

$Ga(\alpha, \beta)$ la distribución (o medida) gama con parámetros α, β

$\Phi(x)$ función de distribución acumulada de la medida $N(0, 1)$

$GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$ la distribución (o medida) hiperbólica generalizada

K_ν función de Bessel modi cada de tercer tipo con ´ndice ν

$\xi \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \gamma)$ denota que la distribución de la variable aleatoria ξ es estable con parámetros α, σ, β y γ

$\langle u, a\rangle = \sum_{k=1}^{d} u_k a_k$ es el producto interno en $\mathbb{R}^d$, con $u, a \in \mathbb{R}^d$

Σ matriz de covarianzas positiva de nida

$R_\xi(s, t)$ función de covarianza de un proceso gaussiano $\{\xi_n\}$

$a \equiv b$ quiere decir que a y b son idénticos

$\mathbb{1}_A(x)$ función indicadora del conjunto A. Toma el valor 1 si $x \in A$ y el valor 0 si $x \notin A$.

Índice general

Índice de guras

Cap´tulo 1

Introducción

Este cap´tulo es un resumen de las principales referencias que están relacionadas con el tema de este trabajo que es la construcción de transformaciones que preservan la medida. Se dice que la transformación T preserva la medida μ en el espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, si $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$ para todo conjunto $B \in \mathcal{A}$. La referencia completa de todos los trabajos aqu´ citados aparece en la bibliograf´a, al nal del documento sólo antes del ápendice.

Re riéndose a las transformaciones que preservan la medida se distinguen tres situaciones:

1. Transformaciones que preservan medidas de probabilidad;
2. Transformaciones que preservan medidas σ- nitas y
3. Transformaciones que preservan medidas in nitas.

El tema de esta tesis trata con medidas de probabilidad por lo que entra en el punto 1. La mayor´a de la literatura existente tiene que ver con medidas de probabilidad. En [10] hay ejemplos de transformaciones, relacionadas principalmente con fracciones continuadas, que preservan medidas de probabilidad. Algunas de las transfromaciones mencionadas son la log´stica, de Gauss, transformaciones β, del panadero (baker s transformation), traslaciones, re exiones y rotaciones que preservan la medida de Lebesgue. Más ejemplos de transformaciones que preservan la medida relacionadas con fracciones continuadas y con teor´a de números pueden encontrarse en [12] y en [9] donde se identi can las medidas invariantes para las fracciones de Rosen (fracciones continuadas particulares). El problema con todo esto es que la medida que preservan esas transformaciones ya está dada, y si se requiere trabajar con otra medida, entonces tales transformaciones ya no sirven. Además no se indica una manera para construirlas. En contraste, este trabajo s´ menciona una forma de construir ese tipo de transformaciones. Otro ejemplo clásico es el de endomor smos continuos de grupos compactos que preservan la medida de Haar. Este tema puede encontrarse a detalle en [16,37,42]. Se sabe que si se tiene la estructura de grupo siempre existe la medida de Haar. El problema con ésto es que en las aplicaciones pocas veces se trabaja con esta medida por lo que no se recurre a estos resultados. Algunos otros resultados aparecen en [35], donde se dan ejemplos transformaciones que preservan la distribución uniforme (funciones lineales a pedazos) y condiciones para su existencia.

En cuanto a la existencia de transformaciones que preservan la medida existen varios resultados, por ejemplo, si se tiene un espacio métrico compacto $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y una transformación continua $T : X \to X$, el Teorema de Krylov-Bogolioubov (ver [19,42]) garantiza que existe (a través de un l´mite) una medida que es preservada por esa transformación. Estos resultados se basan en que los espacios $C(X)^\bigstar$ y $\mathcal{J}$, el dual del espacio de funciones continuas con valores reales de nidas en X y el espacio de funcionales lineales positivos, respectivamente, son isométricamente isomorfos, ver [2,11,37,42]. Uno de esos teoremas es el siguiente y puede encontrarse en [11,42]:

Teorema 1.0.1. *Sean $(X, \mathcal{B}(X))$ con X un espacio compacto metrizable, $\mathcal{B}(X)$ la σ-álgebra de Borel de X y $M(X)$ el conjunto de medidas de probabilidad definidas en $\mathcal{B}(X)$.*

Si $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de medidas de probabilidad que pertenecen a $M(X)$ y $T : X \to X$ una transformación continua, entonces cualquier punto límite de la sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ (con $\mu_n(B) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(T^{-k}(B))\ \ B \in \mathcal{B}(X)$), en términos de la topología débil estrella de $C(X)^\bigstar$, es una medida preservada por T. Por ejemplo, si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un subconjunto denso de $C(X)$ entonces $\rho(\mu, \nu) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\int f_n d\nu - \int f_n d\mu|}{2^n \|f_n\|}$ es una métrica para la topología débil estrella de $M(X)$. El conjunto de puntos límite de la sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es no vacío por el

Teorema de Krylov-Bogolioubov.

Partiendo de este resultado trabajé junto con el Dr. Juan González en tratar de encontrar algún punto l´mite de la sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$. El problema es que no se pudo encontrar nada, excepto cuando T es la función identidad, pero esa transformación no tiene muchas aplicaciones. Además, hay que mencionar que en [2] se muestra un contexto más general, el de *sistemas dinámicos aleatorios* en el que la teor´a ergódica es un caso particular.

El siguiente Teorema puede encontrarse en [33] junto con muchos resultados que relacionan la teor´a de la medida con propiedades topológicas que tienen que ver con las categor´as de Baire.

Teorema 1.0.2. *Dado un espacio de probabilidad (o de medida finita) completo*[1] $(X, \mathcal{F}, \mu)$, *existe una función* $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ *tal que* $\forall A, B \in \mathcal{F}$ *se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\mu(\phi(A)\Delta A) = 0$;
2. $\mu(A\Delta B) = 0 \Rightarrow \phi(A) = \phi(B)$;
3. $\phi(\emptyset) = \emptyset \wedge \phi(X) = X$;
4. $\phi(A \cap B) = \phi(A)\phi(B)$;
5. $A \subset B \Rightarrow \phi(A) \subset \phi(B)$.

A una función ϕ con esas caracter´sticas se le llama *lower density*. Cuando se trabaja con λ, la medida de Lebesgue en un intervalo nito de números reales, una *lower density* es la *Lebesgue lower density* de nida del siguiente modo:

$$\phi(E) = \left\{x \in \mathbb{R} : lim_{h\to 0} \tfrac{\lambda(E\cap[x-h,x+h])}{2h} = 1\right\}, \text{ con } E \subset \mathbb{R} \text{ Lebesgue medible.}$$

La propiedad 1 implica que $\phi(A) = A$, excepto por un conjunto de medida cero, por lo que la función ϕ preserva la medida μ siempre que ϕ sea *sobreyectiva*.

[1] En el sentido de que la σ-álgebra $\mathcal{F}$ contiene a los conjuntos nulos.

Aqu´ el problema es que la *Lebesgue lower density* no es necesariamente sobre[2] ni propicia para manipularse.

Para otros resultados que involucran transformaciones que preservan la medida puede consultarse [41], donde dado un espacio de probabilidad y una transformación que preserva dicha medida (que además cumple otras condiciones), se obtienen resultados de convergencia para el operador Perron-Frobenius. En cuanto a resultados menos generales, por ejemplo, en [25] se dan condiciones sobre las transformaciones para la existencia de medidas invariantes absolutamente continuas, en [7] se demuestra la unicidad para las funciones lineales a pedazos. En [17] se muestra que las familias de funciones: 1)$f_\alpha(x) = \alpha x(1-x)$ para $0 \leq \alpha \leq 4$ y 2)$f_\alpha(x) = \alpha f(x) \bmod 1$ con $f(x)$ de clase C^3, $f(0) = f(1) = 0$ preservan medidas absolutamente continuas respecto de la medida de Lebesgue de nidas en $[0,1]$. En este sentido, en [26] se muestra que las transformaciones de nidas en intervalos nitos, continuas a pedazos, de clase C^1 a pedazos y con un número nito n de discontinuidades tienen a los más n medidas invariantes. También en [28] se demuestra que dadas dos medidas de probabilidad μ y ν de nidas en $\mathcal{B}(R^d)$ con $d \in \mathbb{N}$ nito y con μ anulándose en conjuntos de Borel con dimensión de Haussdorff $d-1$, entonces existe una función convexa h cuyo gradiente preserva la medida entre μ y ν, *i.e.* $\mu((\nabla h)^{-1}(B)) = \mu(B)$.

Para el caso de las transformaciones que preservan medidas in nitas o σ- nitas puede consultarse [4, 14]. En estos espacios de medida no necesariamente se cumple el Teorema de recurrencia de Poincaré, que en el caso de espacios de medida nita es verdadero. En [4] se muestra la existencia de transformaciones que preservan la medida a través *transformaciones inducidas*. Mientras que en [14] se prueba que no existe una medida invariante nita para toda transformación no conservativa, es decir, que tenga conjuntos *wandering*. [3]

[2]La propiedad 1 implica que $\phi(A) = A$, lo que a su vez implica que $\mu(\phi(A)) = \mu(A)$ lo que implica que $\mu(\phi^{-1}(A)) = \mu(A)$ sólo si ϕ es sobre.

[3]Un conjunto A se llama *wandering* para la transformación T si la sucesión $\{T^{-n}(A)\}_{n=0}^{\infty}$ es disjunta.

Existe una equivalencia entre las transformaciones que preservan la medida y los procesos estocásticos estrictamente estacionarios que puede consultarse por ejemplo, en [19]. Se habla mucho de procesos estrictamente estacionarios en series de tiempo, aunque se recurre más al concepto de proceso débilmente estacionario. Algunas de las referencias más conocidas son [8,23] donde aparecen los modelos clásicos, la mayor´a variantes de los procesos ARMA y los principales resultados. Todo esto está ligado con el problema de cómo construir procesos con distribuciones marginales dadas. A este respecto uno cuenta con la teor´a de cópulas, los resultados fundamentales pueden consultarse en [32]; asimismo están las siguientes referencias acerca de **medidas doblemente estocásticas** (son medidas de nidas en el cuadrado unitario con marginales uniformes), en donde un problema importante se presenta: ¿qué funciones pueden ser el soporte de medidas doblemente estocásticas?. Una solución parcial aparece en [39] y se menciona a continuación.

Proposición 1.0.1. *Un hairpin*[4] $g \cup g^{-1}$ *es el soporte de una medida doblemente estocástica si y sólo si* $g^{-1}(x) = f^{-1}(x - f(x))$ *para alguna función* f *tal que:*

1. $f(x), x - f(x) : [0,1] \to [0, \frac{1}{2}]$ *son homeomorfismos crecientes*[5] *y funciones suprayectivas;*

2. $f(x) < \frac{x}{2}$ *para todo* $x \in (0,1)$.

La única función f no negativa que satisafce las condiciones de la proposición anterior es de la forma $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}g^n(x)$, donde $g^1 = g$ y $g^{n+1} = g \circ g^n$ y la unión de las grá cas de g y g^{-1} forma un *hairpin*.

En [21] se dan condiciones para la unicidad de medidas doblemente estocásticas con soporte en un conjunto ligeramente más general que un *hairpin*. Si ese conjunto soporta una medida doblemente estocástica, ésta es extrema, es decir,

[4] La unión de las grá cas de g y g^{-1}, denotado $g \cup g^{-1}$ se llama *hairpin* si y sólo si $g : [0,1] \to [0,1]$ es un homomor smo creciente suprayectivo tal que $g(x) < x$ cuando $x \in (0,1)$.

[5] Una función $f : X \to Y$ se llama homeomor smo si la función f tiene inversa continua. Se llama homeomor smo creciente si la función es un homeomor smo y además es creciente.

es una medida que no puede formarse a partir de combinaciones convexas de medidas doblemente estocásticas.

Mediante transformaciones que preservan la medida de Lebesgue en $[0, \frac{1}{2}]$ se pueden construir medidas doblemente estocásticas con soporte en una región dada como se indica en [27]. Una aplicación interesante es que se es posible construir cópulas a partir de transformaciones que preservan la medida del siguiente modo. Primero se construye una medida doblemente estocástica μ según el método descrito en [27]; y segundo, se de ne la cópula C mediante

$$C(x, y) := \mu\left([0, x] \times [0, y]\right) \forall x, y \in [0, 1].$$

Con la topolog´a adecuada, la ecuación anterior de ne un homeomor smo entre cópulas y medidas doblemente estocásticas.

En [34] se construyen procesos con distribuciones marginales dadas por medio de variables latentes con un método estilo *Gibbs sampler*; el resultado anterior permite construir procesos estacionarios más generales a través de mezclas de distribuciones de transición (*MTD*) como puede consultarse en [5,31]. Otra referencia menos conocida es [22] donde se estudian las series de tiempo desde el punto de vista de procesos dinámicos y no con tanto énfasis en el punto de vista estad´stico. Finalmente, algunos resultados y aplicaciones de los procesos GARCH están en [6] donde aparecen distintos procesos destinados a modelar datos nancieros y en [30] se trata con el modelo GARCH hiperbólico generalizado y se encuentran condiciones para que el proceso sea estrictamente estacionario.

Para terminar la introducción falta mencionar otro tipo de simetr´as de procesos estocásticos aparte de la de estacionariedad, que ha sido la más estudiada. Se habla de reversibilidad, contractividad, intercambiabilidad y rotabilidad. Los procesos intercambiables son muy importantes porque existen muchos resultados poderosos que se basan en este hecho, como el famoso Teorema de De Finetti (ver [20]). En [20] están muchos de los resultados que tienen que ver con todas estas simetr´as y las relaciones que guardan entre s´. En [1, 3] se caracterizaron por vez primera los procesos rotables y en [15, 43] se trabaja con el concepto de reversibilidad para algunos modelos espec´ cos de series de tiempo. Algo importante, es que estás otras simetr´as implican la estacionariedad. En este trabajo se muestran además algunas condiciones para que ocurra la implicación opuesta, es decir, que un proceso estacionario más *algunas condiciones* implican estás simetr´as (reversibilidad, contractividad, intercambiabilidad y rotabilidad).

Ya para nalizar, en [18] se de nen transformaciones que preservan la medida para procesos $\{\xi_n\}$ Volterra Gaussianos. Además presentan transformaciones que preservan la medida cuando $\{\xi_n\}$ es una martingala (ver [19]). Los procesos gaussianos tienen mucho que ver con los procesos α-estables de los que se habla en el cap´tulo 7.

Cap´tulo 2

Transformaciones que preservan la medida y Procesos estocásticos

Este cap´tulo tiene como nalidad presentar algunas propidades de los procesos estocásticos generados o construidos a partir de transformaciones que preservan la medida.

2.1. Equivalencia entre Procesos estacionarios y transformaciones que preservan la medida

El Teorema 2.1.1 muestra la equivalencia que existe entre los procesos estacionarios y las transformaciones que preservan la medida. Este resultado es muy importante para esta tesis porque garantiza la construcción de procesos estacionarios a partir de transformaciones que preservan la medida. Se recuerda que lo más importante de la tesis es que propone una manera de construir transformaciones que preservan una medida nita dada. La demostración del teorema está tomada ´ntegramente de la referencia [19].

Antes de enunciar y demostrar el teorema hay que presentar unas de niciones.

De nición 2.1.1. *(Preservación de la medida). Dados los espacios de medida* $(X, \mathcal{S}, \mu)$, $(Y, \mathcal{U}, \sigma)$ *y* $T : X \to Y$ *una función medible, se dice que* T ***preserva la medida*** *entre*

$(X, \mathcal{S}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{U}, \sigma)$ si $\sigma(B) = \mu(T^{-1}(B))$ $\forall B \in \mathcal{U}$. Si $X = Y$ y $\mu = \sigma$ a la función T se le llama una ***transformación que preserva la medida*** *[10, 19, 42].*

Si ξ es una variable aleatoria con distribución μ y T esta de nida en el espacio (medible) de estados de ξ, entonces T preserva la medida μ si y sólo si $T \circ \xi \stackrel{d}{=} \xi$. El s´mbolo $\stackrel{d}{=}$ representa igualdad en distribución.

De nición 2.1.2. *(Procesos estacionarios). Sea $\xi = (\xi_0, \xi_1, \cdots)$ un proceso estocástico en un espacio medible $(S, \mathcal{S})$ y θ el operador traslación. El proceso ξ es* ***estrictamente estacionario*** *si $\theta(\xi) \stackrel{d}{=} \xi$.*

El operador traslación o shift θ definido en S^∞ está dado por $\theta(x_0, x_1, \cdots) = (x_1, x_2, \cdots)$.

La de nición anterior es equivalente a pedir la invarianza ante traslaciones de las distribuciones nito dimensionales, ver De nición A.1.1.

Teorema 2.1.1. *Sean $(S, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de probabilidad, ξ una variable aleatoria que toma valores en S con distribución μ y $T : S \to S$ una función medible. T* ***preserva la medida*** *$\mu \Leftrightarrow$ el proceso estocástico $\{T^n \circ \xi\}$ es* ***estrictamente estacionario****. Además $\{f(T^n \circ \xi)\}$ es estrictamente estacionario para cualquier función medible $f : S \to S$.*

Demostración. Asumiendo que T preserva la medida μ se tiene que $T(\xi) \stackrel{d}{=} \xi$, y entonces

$$\begin{aligned} \theta\left(f \circ T^n(\xi)\right) &= \left(f \circ T^{n+1}(\xi)\right) \\ &= \left(f \circ T^n(T(\xi))\right) \\ &\stackrel{d}{=} \left(f \circ T^n(\xi)\right). \end{aligned}$$

por lo que el proceso $\{f \circ T^n(\xi)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es estrictamente estacionario.

Ahora, asumiendo que el proceso $\eta = (\eta_0, \eta_1, \cdots)$ es estrictamente estacionario, entonces $\eta_n = \pi_0(\theta^n(\eta))$, donde $\pi_0(x_0, x_1, \cdots) = x_0$, y como el proceso η es estacionario, $\theta(\eta) \stackrel{d}{=} \eta$. $\square$

En particular, si $\xi = (\xi_0, \xi_1, \cdots)$ es un proceso estrictamente estacionario en un espacio medible S y si $f : S^\infty \to S'$, donde S' es otro espacio medible, entonces el proceso de nido por

$$\nu_n = f(\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots), \ \ n \in \mathbb{N},$$

también es estrictamente estacionario.

De acuerdo al Teorema 2.1.1, si ξ es una variable aleatoria con valores en un espacio medible S, con distribución μ y $T : S \to S$, entonces el proceso $\{T^n(\xi)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente estacionario. As´, si se tiene una manera de construir transformaciones que preservan la medida μ, entonces es muy fácil construir procesos estocásticos estacionarios cuyas distribuciones marginales unidimensionales sean iguales a μ.

Igualmente, si la medida μ es n-variada y se cuenta con una transformación que preserva a la medida μ, pueden construirse procesos estocásticos estacionarios cuyas distribuciones marginales n-dimensionales sean iguales a μ. En este caso además, están determinadas (mediante integración) las transiciones y las distribuciones k-dimensionales, con $k = 1, 2, \cdots, n$.

Por otro lado, si se tiene un proceso estacionario $\xi = (\xi_0, \xi_1, \cdots)$ con valores en el espacio de medida $(S, \mathcal{S}, \mu)$, entonces se puede construir el espacio de probabilidad $(S^\infty, \otimes\mathcal{S}, \tilde{\mu})$, un proceso $\tilde{\xi}$ y una transformación T que preserva la medida $\tilde{\mu}$, tal que $\tilde{\xi} \stackrel{d}{=} \xi$.

La de nición de los s´mbolos anteriores es la siguiente:

- $\otimes\mathcal{S}$ es la σ-álgebra producto de S^∞.
- $T(x_0, x_1, \cdots) = \theta(x_0, x_1, \cdots) = (x_1, x_2, \cdots)$, es el operador traslación o *shift* en S^∞.
- $f(x_0, x_1, \cdots) = \pi_0(x_0, x_1, \cdots) = x_0$ es la proyección de S^∞ en S.
- $\tilde{\mu}(B) = \mu(s \in S : \xi(s) \in B)$, $B \in \otimes\mathcal{S}$, recordar que $\xi = (\xi_0, \xi_1, \cdots)$.
- $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_1, \cdots)$ donde $\tilde{\xi}_n = f(T^n(\xi)) = f(T^n((\xi_0, \xi_1, \cdots)))$.

2.2. Procesos doblemente estacionarios y transformaciones que preservan la medida

Otro tipo de procesos estocásticos de nidos recientemente (en 1987, ver [13]), son los procesos doblemente estacionarios. Los procesos doblemente estacionarios se de nen como aquellos procesos estables, que tienen una representación espectral que es también estacionaria. La de nición precisa es la De nición 2.2.2. Todo el material de esta sección pude consultarse en [13, 38]. Algunos resultados en una versión general pueden encontrarse también en [37].

De nición 2.2.1. *Un proceso estocástico $\{\xi_n\}_{n\in\mathcal{T}}$ se llama* ***simétrico α-estable*** *(**$S\alpha S$**) si toda combinación lineal finita $\sum_{k=1}^{d} a_k \xi_{n_k}$ $n_k \in \mathcal{T}$ es una variable aleatoria $S\alpha S$.*

De nición 2.2.2. *Una familia de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathcal{T}} \subset L^\alpha(X, \mathcal{A}, \mu)$, donde $(X, \mathcal{A})$ es un espacio de Borel estándar (i.e. es un espacio medible e isomórfo a un subconjunto de Borel de $\mathbb{R}$) y μ es una medida σ-finita, se dice que es una* ***representación espectral*** *del proceso $\{\xi_n\}_{n\in\mathcal{T}}$ $S\alpha S$ si*

$$\{\xi_n\}_{n\in\mathcal{T}} \stackrel{d}{=} \left\{ \int_X f_n(x) M(dx) \right\}_{n\in\mathcal{T}} \tag{2.1}$$

donde M es una medida aleatoria simétrica α-estable en $\mathcal{A}$, tal que

$$\mathbb{E}(\exp(iuM(A))) = \exp\left(-|u|^\alpha \mu(A)\right), \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty, u \in \mathcal{R}.$$

En las siguientes l´neas se da la de nición de medida aleatoria α-estable. Si la medida aleatoria α-estable es además simétrica, se llama medida aleatoria simétrica α-estable ($S\alpha S$).

De nición 2.2.3. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad, y sean*

- *$g_{\mathbb{R}}(X) = \{g : X \to \mathbb{R} : g$ es medible $\}$, es decir, $g_{\mathbb{R}}(X)$ es el conjunto de variables aleatorias con valores en $\mathbb{R}$ definidas en $(X, \mathcal{A}, \mu)$.*
- *$(E, \mathcal{E}, m)$ un espacio de medida.*
- *$\beta : E \to [-1, 1]$, una función medible.*

- $\mathcal{E}_0 = \{A \in \mathcal{E} : m(A) < \infty\}$.

*Se llama **medida aleatoria α-estable con medida de control** m **e intensidad** β a una función independientemente disjunta, σ-aditiva $M : \mathcal{E}_0 \to g_{\mathbb{R}}(X)$ tal que para cada $A \in \mathcal{E}_0$,*

$$M(A) \sim S_\alpha\left([m(A)]^{\frac{1}{\alpha}}, \frac{\int_A \beta(x)m(dx)}{m(A)}, 0\right).$$

La notación $M(A) \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \gamma)$ proviene de la ecuación 2.3 y quiere decir que la variable aleatoria $M(A)$ tiene una distribución α-estable caracterizada por los parámetros α, σ, β y γ (ver De nición 2.2.9). La frase independientemente disjunta signi ca que si $A_1, A_2, \cdots, A_k \in \mathcal{E}_0$ son disjuntos, entonces las variables aleatorias $M(A_1), M(A_2), \cdots, M(A_k)$ son independientes. Finalmente, σ-aditiva quiere decir que si $A_1, A_2, \cdots$ pertenecen a $\mathcal{E}_0$, son disjuntos y $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{E}_0$, entonces, $M\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} M(A_k)$ *c.s.*

Por otro lado, todo proceso $S\alpha S$, separable en probabilidad admite una representación espectral donde $X = [0,1]$ y $\mu = \lambda$ es la medida de Lebesgue. Además, si un proceso $\{\xi_n\}_{n \in \mathcal{T}}$ tiene una representación espectral de nida en un espacio de Lebesgue estándar, entonces es separable en probabilidad ([36]).

De nición 2.2.4. *Un proceso estocástico $\{\xi_n\}_{n\in\mathcal{T}}$ es **separable en probabilidad** si existe un subconjunto numerable $T_0 \subset \mathcal{T}$ tal que el conjunto $\{\xi_n\}_{n\in T_0}$ es un subconjunto denso de $\{\xi_n\}_{n\in\mathcal{T}}$ con respecto a la topología de convergencia en probabilidad.*

Se sabe ([36]) que para todo proceso $S\alpha S$ estacionario $\{\xi_n\}_{n\in\mathcal{T}}$ existe ([13]) un subespacio lineal M de algún $L^\alpha(X, \mathcal{A}, \mu)$, una función f en M y un grupo de isometr´as (respecto de la métrica inducida por la norma de L^p, como en un espacio de Banach) $U = (U^{n_k})$ de nidas en M tal que para cualquier combinación lineal nita $\sum_{k=1}^{d} a_k \xi_{n_k}$,

$$\mathbb{E}\exp\left(i\sum_{k=1}^{d} a_k \xi_{n_k}\right) = \exp\left(-\left\|\sum_{k=1}^{d} a_k U^{n_k}(f)\right\|^\alpha\right),$$

donde $\|f\|^p = \int |f|^p \, d\mu$, $p \in (0, \infty)$ es la norma de $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

En [13] se de ne al par (U, f) como la representación espectral del proceso $\{\xi_n\}_{n\in\mathcal{T}}$ estacionario $S\alpha S$.

De nición 2.2.5. *Un proceso estocástico $\{\xi_n\}_{n\in\mathcal{T}}$ estacionario $S\alpha S$ es **doblemente estacionario** si tiene una representación espectral (U, f) tal que $\{U^n(f)\}$ es estacionario.*

Como la de nición de los procesos doblemente estacionarios está dada en términos de procesos $S\alpha S$, hay que revisarlos con más detalle. Ahora se presentan las de niciones de procesos y variables aleatorias alfa estables.

De nición 2.2.6. *Una variable aleatoria ξ es $S\alpha S$ si es simétrica, i.e.$\xi \overset{d}{=} -\xi$ y además alfa estable (αS).*

Existen varias de niciones equivalentes de una variable aleatoria αS. Aqu´ se presentan dos de ellas [38]. En lo que sigue, primero se de ne una variable aleatoria estable, y después se de ne una variable aleatoria αS.

De nición 2.2.7. *Una variable aleatoria ξ es **estable** si para cualquier pareja de números positivos A, B existe un número positivo C y un número real D tal que*

$$A\xi_1 + B\xi_2 \overset{d}{=} C\xi + D \tag{2.2}$$

donde ξ_1, ξ_2 son copias independientes de ξ.

Si $D = 0$, la variable aleatoria ξ se llama estrictamente estable. La demostración del siguiente teorema puede consultarse en [38].

Teorema 2.2.1. *Si ξ es una variable aleatoria estable, existe un $\alpha \in (0, 2]$ tal que el número C en la ecuación 2.2 satisface la siguiente relación,*

$$C^\alpha = A^\alpha + B^\alpha$$

Al número α se le conoce como ´ndice de estabilidad o exponente caracter´stico. As´ nalmente, se llega a la de nición de una variable aleatoria alfa estable.

De nición 2.2.8. *Una variable aleatoria estable ξ con índce α se le conoce como alfa estable (αS).*

Una de nición equivalente (ver [38]) de una variable aleatoria estable se da en términos de funciones caracter´sticas.

De nición 2.2.9. *Una variable aleatoria ξ es **estable** si existen parámetros $\alpha \in (0,2], \sigma \geq 0, \beta \in [-1,1]$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que su función característica tenga la siguiente forma:*

$$\mathbb{E}(\exp(iu\xi)) = \begin{cases} \exp\left(-\sigma^{\alpha}|u|^{\alpha}\left[1 - i\beta \operatorname{sgn}(u)\tan\left[\frac{\pi\alpha}{2}\right]\right] + iu\gamma\right) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \exp\left(-\sigma|u|\left[1 + \frac{2i\beta}{\pi}\operatorname{sgn}(u)\ln|u|\right] + iu\gamma\right) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Los parámetros α, β y γ son únicos, pero β es irrelevante cuando $\alpha = 2$, es decir cuando la variable aleatoria es α-estable gaussiana.

En virtud de la ecuación 2.3 se acostumbra denotar la distribución estable de una variable aleatoria ξ por $S_{\alpha}(\sigma, \beta, \gamma)$ y escribir $\xi \sim S_{\alpha}(\sigma, \beta, \gamma)$.

La de nición de una variable aleatoria estable en términos de la función carac-ter´stica es muy importante porque permite identi car algunas propiedades que se enuncian ahora.

Proposición 2.2.1. *Si ξ_1, ξ_2 son variables aleatorias independientes con $\xi_i \sim S_{\alpha}(\sigma_i, \beta_i, \gamma_i)$. Entonces, $(\xi_1 + \xi_2) \sim S_{\alpha}(\sigma, \beta, \gamma)$,*
donde $\sigma = (\sigma_1^{\alpha} + \sigma_2^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}, \beta = \frac{\beta_1\sigma_1^{\alpha} + \beta_2\sigma_2^{\alpha}}{\sigma_1^{\alpha} + \sigma_2^{\alpha}}, \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

Demostración. Si $\alpha \neq 1$ (cuando $\alpha = 1$ la demostración es similar). Por independencia se tiene que,

$$\begin{aligned} \ln\left(\mathbb{E}(\exp(iu(\xi_1 + \xi_2)))\right) &= \ln\left(\mathbb{E}(\exp(iu\xi))\right) + \ln\left(\mathbb{E}(\exp(iu\xi))\right) \\ &= -(\sigma_1^{\alpha} + \sigma_2^{\alpha})|u|^{\alpha}\left[1 - i\frac{\beta_1\sigma_1^{\alpha} + \beta_2\sigma_2^{\alpha}}{\sigma_1^{\alpha} + \sigma_2^{\alpha}}\operatorname{sgn}(u)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right] \\ &+ iu(\gamma_1 + \gamma_2). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.2.2. *Sea $\xi \sim S_{\alpha}(\sigma, \beta, \gamma)$ y $a \in \mathbb{R}$. Entonces, $(\xi + a) \sim S_{\alpha}(\sigma, \beta, \gamma + a)$.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de la siguiente propiedad de las funciones caracter´sticas, aplicada en este caso particular a la ecuación 2.3. Si $\varphi_\xi(u)$ es la función caracter´stica de la variable aleatoria ξ que toma valores en $\mathbb{R}^n$, entonces $\varphi_{a+A\xi}(u) = \exp(i\langle u, a\rangle)\varphi_\xi(A'u)$ es la función caracter´stica de la variable aleatoria $a + A\xi$, con $a \in \mathbb{R}^m$, $\langle u, a\rangle = \sum_{k=1}^m u_k a_k$ es el producto interno en $\mathbb{R}^m$, A es una matriz de tamaño mxn y A' es la transpuesta de A. □

Proposición 2.2.3. *La variable aleatoria $\xi \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \gamma)$ es simétrica, si y sólo si $\beta = 0 = \gamma$. Es simétrica respecto a γ si y sólo si $\beta = 0$.*

Demostración. ξ es simétrica si y sólo si su función caracter´stica es real. De la ecuación 2.3 pasa eso si y sólo si $\beta = 0 = \gamma$. La simetr´a respecto de γ es consecuencia de la Proposición 2.2.2. □

De acuerdo a la Proposición 2.2.3, una variable aleatoria es $S\alpha S$ si su distribución estable tiene parámetros $\beta = 0 = \gamma$. Entonces, de la ecuación 2.3 se sigue claramente que la función caracter´stica de una variable aleatoria ξ, $S\alpha S$ está dada por sencilla expresión:

$$\mathbb{E}(\exp(iu\xi)) = \exp\left(-\sigma^\alpha |u|^\alpha\right) \tag{2.4}$$

En este caso, además se acostumbra escribir $\xi \sim S\alpha S$. Un punto importante a mencionar, es que todas las distribuciones αS tienen densidad y además esta densidad es continua ([38]). Algunos ejemplos son:

- *La distribución gaussiana* $S_2(\sigma, 0, \gamma) = N(\gamma, 2\sigma^2)$, con densidad $f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\gamma)^2}{4\sigma^2}\right)$.
- *La distribución de Cauchy* $S_1(\sigma, 0, \gamma)$, con densidad $f(x) = \frac{\sigma}{\pi((x-\gamma)^2+\sigma^2)}$.
- *La distribución de Lévy* $S_{\frac{1}{2}}(\sigma, 1, \gamma)$, con función de densidad concentrada en (γ, ∞) dada por $f(x) = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x-\gamma)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\sigma}{2(x-\gamma)}\right)$.
- *Cualquier distribución degenerada* $S_\alpha(0, 0, \gamma)$, con $\alpha \in (0, 2]$.

El siguiente resultado caracteriza a los procesos doblemente estacionarios en términos de transformaciones que preservan la medida. La demostración puede consultarse en [13].

Teorema 2.2.2. *Una condición necesaria y suficiente para que un proceso estocástico $S\alpha S$ estacionario, separable en probabilidad sea doblemente estacionario, es que tenga una representación espectral $(\mathcal{U}, f)$, tal que,*

$$\mathcal{U}^n f = (T^n(f)), n \in \mathcal{T}$$

donde las transformaciones $T^n : L^\alpha(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^\alpha(X, \mathcal{A}, \mu)$ (ver definiciones 2.2.2-2.2.4) verifican las siguientes condiciones:

- *para cada $n \in \mathcal{T}$ y para todo $A, A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$,*
  - $T^n(A^c) = (T^n(A))^c$,
  - $T^n\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) = \bigcup_{k=1}^\infty T^n(A_k)$,
  - $T^n\left(\bigcap_{k=1}^\infty A_k\right) = \bigcap_{k=1}^\infty T^n(A_k)$.
- *T^n es no singular repsecto a μ para cada $n \in \mathcal{T}$, i.e. $\mu(T^n) << \mu$.*
- *T preserva la medida μ, i.e. $\mu(T(A)) = \mu(A)\ \forall A \in \mathcal{A}$.*[1]

Para cerrar esta sección, se presenta otra resultado que garantiza que un proceso $S\alpha S$ estacionario sea doblemente estacionario. Al igual que el teorema 2.2.2, la demostración puede encontrarse en [13].

Teorema 2.2.3. *Sea $\{\xi_n\}_{n\in\mathcal{T}}$ un proceso estacionario $S\alpha S$, separable en probabilidad, $\alpha \in (0, 2)$, con representación espectral $(\mathcal{U}, f)$ en algún espacio $L^\alpha(E, \mathcal{E}, \mu)$ donde μ es una*

---

[1] Existen dos de niciones de preservación de medida en $(X, \mathcal{A}, \mu)$ en la literatura:

1. $T : X \to X$ medible, preserva la medida si $\mu(T(A)) = \mu(A)\ \forall A \in \mathcal{A}$.
2. $T : X \to X$ medible, preserva la medida si $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)\ \forall A \in \mathcal{A}$.

(2) $\Rightarrow$ (1), y si T es sobreyectiva ocurre también que (1) $\Rightarrow$ (2). En este trabajo, preservar la medida se re ere a la de nición (2) salvo que se diga otra cosa, como en este caso.

medida σ-finita. Supóngase que las isometrías $U : L^{\alpha}(E, \mathcal{E}, \mu) \to L^{\alpha}(E, \mathcal{E}, \mu)$ están dadas por $U(g) = (T(g)) \cdot h$ con $h \in L^{0}(E, \mathcal{E}, \mu)$. Si T admite una medida σ-finita invariante equivalente a μ, entonces el proceso $\{\xi_n\}_{n \in \mathcal{T}}$ es doblemente estacionario.

En el apéndice B se presentan otras caracter´sticas y ejemplos de los procesos αS.

2.3. Transformaciones que preservan la medida generalizadas

La idea de transformaciones que preservan la medida generalizadas fue introducida en 1988 por Ulrich Krengel, en un art´culo llamado *Generalized measure preserving transformations*, ver [24]. A diferencia de las transformaciones que preservan la medida, que tienen una equivalencia con los procesos estacionarios como se ha descrito en la primera sección de este cap´tulo, las transformaciones que preservan la medida generalizadas, no tienen hasta el momento, una caracterización en términos de procesos estocásticos. Es decir, ¿qué clase de procesos corresponden con la clase de transformaciones que preservan la medida generalizadas?

En [24], se dan condiciones necesarias, y muestran que son su cientes para procesos que toman dos posibles valores con conjunto nito de cuatro ´ndices. En lo que sigue se presenta la de nición de transformaciones que preservan la medida generalizadas, algunas propiedades, as´ como las condiciones necesarias que cumplen los procesos que pueden representarse por estas transformaciones que preservan la medida generalizadas, ver [24].

De nición 2.3.1. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad. Una* ***transformación que preserva la medida generalizada*** *ó transformación-gmp, es una función $\phi : X \to X$ que satisface las siguientes condiciones para todo $A, B \in \mathcal{A}$:*

- *$A \subset B \Rightarrow \phi(A) \subset \phi(B)$, ϕ preserva el orden respecto a la contención de conjuntos.*

- $\mu(\phi(A)) = \mu(A)$, *ϕ preserva la medida μ, ver nota al pie del Teorema 2.2.2.*

Toda transformación $T : X \to X$ que preserva la medida en un espacio de probabilidad $(X, \mathcal{A}, \mu)$ induce una transformación que preserva la medida generalizada ϕ_T, al de nir $\phi_T(A) := T^{-1}(A)$. Como T preserva la medida[2], $\mu(\phi_T(A)) = \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$. La otra condición también se veri ca fácilmente, ya que si $A \subset B \Rightarrow \phi_T(A) = T^{-1}(A) = \{x \in X : T(x) \in A\} \subset \{x \in X : T(x) \in B\} = T^{-1}(B) = \phi_T(B)$. En general, una transfromación-*gmp* no conmuta necesariamente con uniones e intesecciones. Sólo se tiene que,

$$\phi(A \cap B) \subset \phi(A) \cap \phi(B), \quad A, B \in \mathcal{A} \tag{2.5}$$

$$\phi(A \cup B) \supset \phi(A) \cup \phi(B), \quad A, B \in \mathcal{A} \tag{2.6}$$

Dada una transformación que preserva la medida generalizada ϕ en un espacio de probabilidad $(X, \mathcal{A}, \mu)$, se de ne al operador $T_\phi(f(x))$ por la expresión:

$$T_\phi(f(x)) = sup\left\{t \in \mathbb{R} : x \in \phi(\{f > t\})\right\}.$$

donde $f : X \to \mathbb{R}$ es medible.

El operador T_ϕ es no lineal en general, y satisface $\left\{T_\phi(f) \geq t\right\} = \phi\left(\{f \geq t\}\right)$. Si $\phi = \phi_T$, donde T es una transformación que preserva la medida, entonces $T_\phi(f) = f \circ T$, esto es, el operador T_ϕ toma la forma de los operadores que generan procesos estacionarios a través de transformaciones que preservan la medida.

Se dice que un proceso estocástico $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ puede representarse por una transformación que preserva la medida generalizada si existe una transformación-*gmp* ϕ en un espacio de probabilidad adecuado $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y una función medible f tal que $\left\{T_\phi^n(f)\right\} \stackrel{d}{=} \{\xi_n\}$ para toda $n = 0, 1, \cdots$. Recordar que T_ϕ^n representa la composición de T_ϕ con ella misma n veces.

[2] $T : X \to X$ medible, preserva la medida si $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)\ \forall A \in \mathcal{A}$.

Ahora, la pregunta es: ¿cuáles son los procesos que pueden representarse por transformaciones *gmp*?

Hasta el momento la pregunta anterior no está contestada, lo más que se tiene son dos condiciones necesarias que se enuncian a continuación.

$(M_\cap)$ condición de monoton´a para intersecciones: Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $t_0, t_1, \cdots, t_{n-1} \in \mathbb{R}$,

$$\nu\left(\bigcap_{k=0}^{n-1}\{\xi_k \geq t_k\}\right) \leq \nu\left(\bigcap_{k=0}^{n-1}\{\xi_{k+1} \geq t_k\}\right)$$

$(M_\cup)$ condición de monoton´a para uniones: Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $t_0, t_1, \cdots, t_{n-1} \in \mathbb{R}$,

$$\nu\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}\{\xi_k \geq t_k\}\right) \leq \nu\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}\{\xi_{k+1} \geq t_k\}\right)$$

donde el proceso $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de nido en el espacio de probabilidad $(X, \mathcal{A}, \nu)$ toma valores en $\mathbb{R}$.

Se desconoce si todos los procesos que satisfacen las condiciones $(M_\cap)$ y $(M_\cup)$ pueden representarse por una transformación-*gmp*.

Teorema 2.3.1. *La condiciones $(M_\cap)$ y $(M_\cup)$ son necesarias para que un proceso $\{\xi_n\}$ definido en el espacio de probabilidad $(X, \mathcal{A}, \nu)$ admita una representación por medio de una transformación-gmp.*

Demostración. Sea $\{\xi_n\}$ un proceso que admite una representación por medio de una transformación-*gmp* ϕ en $(E, \mathcal{E}, \mu)$, por lo tanto $\left\{T_\phi^n(f)\right\} \stackrel{d}{=} \{\xi_n\}$ para toda $n = 0, 1, \cdots$. Como $\left\{T_\phi^k(f) \geq t\right\} = \phi^k\left(\{f \geq t\}\right), k = 0, 1, \cdots$ y junto con la propiedad de la expresión 2.5 se tiene,

$$\begin{aligned}
\nu\left(\xi_0 \geq t_0, \xi_1 \geq t_1, \cdots, \xi_{n-1} \geq t_{n-1}\right) &= \mu\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \phi^k\left(\{f \geq t\}\right)\right) \\
&= \mu\left(\phi\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \phi^k\left(\{f \geq t\}\right)\right)\right) \\
&\leq \mu\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \phi^{k+1}\left(\{f \geq t\}\right)\right) \\
&= \nu\left(\xi_1 \geq t_0, \xi_2 \geq t_1, \cdots, \xi_n \geq t_{n-1}\right).
\end{aligned}$$

□

Todav´a no se sabe si las condiciones $(M_\cap)$ y $(M_\cup)$ son su cientes para que exista la representación de procesos estocásticos mediante transformaciones-*gmp*.

Cap´tulo 3

Transformaciones que Preservan la Medida en $X \subset \mathbb{R}$

En este cap´tulo se muestra una manera de construir una familia de transformaciones que preservan una medida de probabilidad con soporte en $\mathbb{R}$ a partir de su función de distribución F o de $(1 - F)$ (con F invertible) y de transformaciones G que preserven la medida de Lebesgue en $[0, 1]$.

3.1. Notación y de niciones básicas

Dados los espacios de medida $(X, \mathcal{S}, \mu)$, $(Y, \mathcal{U}, \sigma)$ y $T : X \to Y$ una función medible, se dice que T **preserva la medida** entre $(X, \mathcal{S}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{U}, \sigma)$ si $\sigma(B) = \mu(T^{-1}(B))$ $\forall B \in \mathcal{U}$. Si $X = Y$ y $\mu = \sigma$ a la función T se le llama una **transformación que preserva la medida**.

Los espacios de medida donde se va a trabajar son $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ y $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$, donde $\mathcal{B}(D)$ representa a la σ-álgebra de Borel del conjunto D, λ a la medida de Lebesgue y μ es una medida de probabilidad (o nita).

3.2. Transformaciones que Preservan la Medida

Lema 3.2.1. *Sea F la función de distribución de la medida de probabilidad μ (invertible c.s. respecto a μ) con soporte en un compacto $X \subset \mathbb{R}$, entonces para todo $B \subset \mathcal{B}([0, 1])$ se* *tiene que* $\lambda(B) = \mu(F^{-1}(B))$.

Demostración. Sea $[a, b]$ contenido en el rango de F,

$$\begin{aligned} \therefore \mu(F^{-1}([a,b])) &= \mu(\{x \in \mathbb{R} : F(x) \in [a,b]\}) \\ &= \mu(\{x \in \mathbb{R} : \mu((-\infty, x]) \in [a,b]\}) \\ &= F(v) - F(w) \\ &= b - a \\ &= \lambda([a,b]). \end{aligned}$$

donde $v = sup\{x \in \mathbb{R} : \mu((-\infty, x]) \in [a,b]\}$ y $w = inf\{x \in \mathbb{R} : \mu((-\infty, x]) \in [a,b]\}$.

La intersección de dos intervalos cerrados es un intervalo cerrado, un número real $\{a\} = [a, a]$ ó el conjunto vac´o $\emptyset = [a, b]$ con $a > b$. Por lo tanto el conjunto de intervalos cerrados $\mathcal{I}$ es un π-sistema[1] que veri ca la propiedad $\lambda(B) = \mu(F^{-1}(B))$. Además $\exists c, d \in \mathbb{R}$ tal que $X \subset [c, d]$ porque X es un compacto de números reales.

Sea $\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \lambda(B) = \mu(F^{-1}(B))\}$. Para terminar sólo hay que mostrar que $\mathcal{D}$ es un λ-sistema[2] que contiene a X ya que como acaba de verse $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}$.

Sean $A, B \in \mathcal{D}$ con $B \subset A$,

$$\begin{aligned} \therefore \mu(F^{-1}(A)) &= \mu(F^{-1}(B \cup (A - B))) \\ &= \mu(F^{-1}(B)) + \mu(F^{-1}(A - B)). \\ \therefore \mu(F^{-1}(A - B)) &= \lambda(A) - \lambda(B) \\ &= \lambda(A - B). \end{aligned}$$

Las últimas dos igualdades son ciertas porque $\mu(F^{-1}(A)) < \infty$ y $B \subset A$. Por lo tanto $(A - B) \in \mathcal{D}$.

Sean $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ con $A_n \subset A_{n+1}$. Se de ne $B_n = A_n - A_{n-1}$ para $n = 2, 3, \ldots$ y

[1]Un π-sistema es una clase C de subconjuntos de un conjunto X, que es cerrada bajo intersecciones nitas, *i.e.*, si $A_1, A_2, \cdots, A_n \in C$ entonces $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in C$ con n nita.

[2]Un λ-sistema es una clase $\mathcal{D}$ de subconjuntos de un conjunto X, que es cerrada bajo l´mites crecientes, *i.e.*, si $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ es una sucesión de conjuntos en $\mathcal{D}$ entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}$, y que es cerrada bajo diferencias propias, *i.e.*, si $A, B \in \mathcal{D}$ con $A \subset B$ entonces $B - A \in \mathcal{D}$.

$B_1 = A_1$,

$$\begin{aligned} \therefore \mu\left(F^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) &= \mu\left(F^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F^{-1}(B_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) \\ &= \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\ &= \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right). \end{aligned}$$

La segunda igualdad se sigue del hecho de que si $\{B_n\}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos entonces $\left\{F^{-1}(B_n)\right\}$ tambien lo es.[3] La tercera igualdad se sigue del hecho de que $\mathcal{D}$ es cerrado bajo diferencias propias como acaba de verse.

$\therefore \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$. Claramente $X \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{D}$. Entonces $\mathcal{D}$ es un λ-sistema. En el ápendice puede consultarse el Lema de clases monótonas. ☐

Ahora se va a mostrar el Lema 3.2.1 pero para la función $(1-F)$ donde F es la función de distribución de la medida de probabilidad μ.

Lema 3.2.2. *Sea F la función de distribución de la medida de probabilidad μ con soporte en un compacto $X \subset \mathbb{R}$, entonces para todo $B \subset \mathcal{B}([0,1])$ se tiene que $\lambda(B) = \mu((1-F)^{-1}(B))$.*

Demostración. Sea $[a,b]$ contenido en el rango de F,

$$\begin{aligned} \therefore \mu((1-F)^{-1}([a,b])) &= \mu(\{x \in \mathbb{R} : (1-F)(x) \in [a,b]\}) \\ &= \mu(\{x \in \mathbb{R} : 1 - \mu((-\infty, x]) \in [a,b]\}) \\ &= 1 - F(w) - (1 - F(v)) \\ &= b - a \\ &= \lambda([a,b]). \end{aligned}$$

[3]Sea $\{B_n\}$ una sucesión de conjuntos disjuntos que pertenecen al dominio de g y donde g es una función *inyectiva*. Entonces $\{g(B_n)\}$ es también una sucesión de conjuntos disjuntos. Si no es as´ $\exists\, B_i, B_j, y$ tales que $y \in g(B_i) \cap g(B_j)$. Por lo tanto $\exists\, x \in B_i \ni y = g(x)$ y también $\exists\, x' \in B_j \ni y = g(x')$. Como g es inyectiva $g(x) = g(x') \Rightarrow x = x' \Rightarrow x \in B_i \cap B_j$ lo que contradice que B_i y B_j sean disjuntos.

donde $v = sup\{x \in \mathbb{R} : 1 - \mu((-\infty, x]) \in [a, b]\}$ y $w = inf\{x \in \mathbb{R} : 1 - \mu((-\infty, x]) \in [a, b]\}$. La demostración continúa de manera análoga a lo hecho en el Lema 3.2.1.

□

El siguiente resultado sirve para extender el Lema 3.2.1 para medidas de probabilidad μ con soporte en $X \subset \mathbb{R}$ donde X ya no tiene que ser necesariamente compacto.

Corolario 3.2.1. *Sea F la función de distribución* (invertible *c.s. respecto a* μ*) de la medida de probabilidad* μ *con soporte en* $X \subset \mathbb{R}$*, entonces para todo conjunto* $B \subset \mathcal{B}([0,1])$ *se tiene que* $\lambda(B) = \mu(F^{-1}(B))$.

Demostración. Sea $I_n = [n, n+1]$ entonces $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$. Además se de nen $F(n) = r_n \in [0,1]$ y $J_n = [r_n, r_{n+1}]$, de donde $[0,1] = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} J_n$.

Sea $B \in \mathcal{B}([0,1])$,

$$
\begin{aligned}
\therefore \lambda(B) &= \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(B\cap J_n)\right)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(B\cap J_n)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(F^{-1}(B\cap J_n))\\
&= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F^{-1}(B\cap J_n)\right)\\
&= \mu\left(F^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(B\cap J_n)\right)\right)\\
&= \mu\left(F^{-1}\left(B\cap\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} J_n\right)\right)\right)\\
&= \mu(F^{-1}(B\cap[0,1]))\\
&= \mu(F^{-1}(B)).
\end{aligned}
$$

La primera, segunda y séptima igualdades se siguen del hecho de que $[0,1] = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} J_n$ y $\mu(F^{-1}(r_{n+1})) = 0$ porque F es invertible. La tercera igualdad del Lema 3.2.1. La quinta y sexta por propiedades de F^{-1} y por la propiedad distributiva entre uniones e intersecciones respectivamente. La octava porque $B \subset [0,1]$. El caso de la cuarta igualdad se sigue del hecho de que si $\{B_n\}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos entonces $\left\{F^{-1}(B_n)\right\}$ tambien lo es.[4] En este caso la función de distribución F es inyectiva por hipótesis ya que F se pide invertible. *El resultado también es cierto si se cambia F por* $(1-F)$ *como se puede ver fácilmente gracias al Lema* 3.2.2. □

De esta forma el Lema 3.2.1 se extiende para medidas cuyo soporte no es necesariamente compacto, por ejemplo la medida normal que está de nida en todo $\mathbb{R}$.

Antes de establecer el Teorema principal de este cap´tulo hay dos corolarios interesantes.

Corolario 3.2.2. *Sea F la función de distribución de la medida de probabilidad* μ *con soporte en* $X \subset \mathbb{R}$ *e* invertible, *entonces para todo* $A \subset \mathcal{B}(X)$ *se tiene que* $\lambda(F(A)) = \mu(A)$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{B}(X)$ y $B = F(A)$ en el Corolario 3.2.1, entonces $\mu(A) = \mu(F^{-1}(F(A))) = \lambda(F(A))$. □

Corolario 3.2.3. *Sea F la función de distribución de la medida de probabilidad* μ *con soporte en* $X \subset \mathbb{R}$ *e* invertible, *entonces para todo* $A \subset \mathcal{B}(X)$ *se tiene que* $\lambda((1-F)(A)) = \mu(A)$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{B}(X)$ y $B = (1-F)(A)$ en el Corolario 3.2.1 (ver la última frase), entonces $\mu(A) = \mu((1-F)^{-1}(1-F)(A)) = \lambda((1-F)(A))$. La función $(1-F)$ es invertible porque F lo es. □

En este momento ya se establecieron los resultados su cientes para demostrar el siguiente Teorema que indica una manera de construir transformaciones que preserven la medida.

Teorema 3.2.1. *Sea* μ *una medida de probabilidad con soporte en* $X \subset \mathbb{R}$, *F su función de distribución y además* invertible. *Entonces la transformación* $T(B) := F^{-1}(G(F(B)))\ \forall B \subset \mathcal{B}(X)$ *preserva la medida* μ *en* X *si y sólo si* $G : [0,1] \to [0,1]$ *preserva la medida de Lebesgue en* $[0,1]$.

[4]Ver nota al pie en el Lema 3.2.1.

Demostración. $\Leftarrow$ Sea $B \subset \mathcal{B}(X)$,

$$\begin{aligned} \therefore \mu(T^{-1}(B)) &= \mu(F^{-1}(G^{-1}(F(B)))) \\ &= \lambda(G^{-1}(F(B))) \\ &= \lambda(F(B)) \\ &= \mu(F^{-1}(F(B))) \\ &= \mu(B). \end{aligned}$$

La primera igualdad se sigue de la de nición de T. La segunda y la cuarta por el Corolario 3.2.1. La tercera porque por hipótesis G preserva la medida de Lebesgue en $[0,1]$. La quinta igualdad es cierta porque por hipótesis F es invertible.

Claramente puede sustituirse F por $(1-F)$ (Corolario 3.2.3) y el resultado sigue siendo válido.

$\Rightarrow$ Sea $A \subset \mathcal{B}([0,1])$ y $G(A) := F(T(F^{-1}(A)))$,

$$\begin{aligned} \therefore \lambda(G^{-1}(A)) &= \lambda(F(T^{-1}(F^{-1}(A)))) \\ &= \mu(T^{-1}(F^{-1}(A))) \\ &= \mu(F^{-1}(A)) \\ &= \lambda(F(F^{-1}(A))) \\ &= \lambda(A). \end{aligned}$$

La primera igualdad se sigue de la de nición de G. La segunda y la cuarta por el Corolario 3.2.2. La tercera porque T preserva la medida μ. La quinta igualdad es cierta porque F es invertible.

También aqu´ puede sustituirse F por $(1-F)$ (Corolario 3.2.3) y el resultado sigue siendo válido. $\square$

Más aún, la construcción de la transformación T del Teorema 3.2.1 mantiene o hereda la ergodicidad[5] como se muestra en el siguiente Teorema.

[5] Una transformación T que preserva la medida en el espacio de probabilidad $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es **ergódica** si para todo $A \in \mathcal{A}$ tal que $T^{-1}(A) = A$ se veri ca que $\mu(A) = 0$ ó $\mu(A) = 1$. i.e. $\{\emptyset, X\} = \left\{A \in \mathcal{A} : T^{-1}(A) = A\right\}$.

Teorema 3.2.2. *Sea μ una medida de probabilidad con soporte en $X \subset \mathbb{R}$, F su función de distribución y además* invertible. *Entonces la transformación $T(B) := F^{-1}(G(F(B)))\ \forall B \subset \mathcal{B}(X)$ es ergódica (ver Definición A.1.5) respecto de la medida μ si y sólo si la transformación $G : [0,1] \to [0,1]$ es ergódica respecto de la medida de Lebesgue en* $[0,1]$.

Demostración. $\Leftarrow$ Sea $B \subset \mathcal{B}(X)$,

$$\begin{aligned} \therefore T^{-1}(B) &= F^{-1}(G^{-1}(F(B))) \\ &= B \text{ si } G^{-1}(F(B)) = F(B). \end{aligned}$$

La primera igualdad se sigue de la de nición de T. La segunda porque F es invertible y G ergódica. Por el Corolario 3.2.2, $\lambda(F(B)) = \mu(B)$, además como G es ergódica, $G^{-1}(F(B)) = F(B) \Leftrightarrow \lambda(F(B))$ es 0 ó 1. De aqu´ se sigue que $\mu(B)$ es igual a 0 ó 1 por lo cual la transformación T es ergódica respecto de la medida μ.

También puede sustituirse F por $(1 - F)$ (Corolario 3.2.3) y el resultado sigue siendo válido.

$\Rightarrow$ Sea $A \subset \mathcal{B}([0,1])$ y $G(A) := F(T(F^{-1}(A)))$,

$$\begin{aligned} \therefore G^{-1}(A) &= F(T^{-1}(F^{-1}(A))) \\ &= A \text{ si } T^{-1}(F^{-1}(A)) = F^{-1}(A). \end{aligned}$$

La primera igualdad se sigue de la de nición de G. La segunda porque F es invertible y T ergódica. Por el Corolario 3.2.1, $\lambda(A) = \mu(F^{-1}(A))$, además como T es ergódica, $T^{-1}(F^{-1}(A)) = F^{-1}(A) \Leftrightarrow \mu(F^{-1}(A))$ es 0 ó 1. De aqu´ se sigue que la transformación G es ergódica respecto de la medida de Lebesgue λ.

De igual forma puede sustituirse F por $(1 - F)$ (Corolario 3.2.3) y el resultado sigue siendo válido. □

Como acaba de verse en el Teorema 3.2.1 pueden construirse transformaciones T que preserven la medida (de probabilidad o nita) μ arbitraria con soporte en $X \subset \mathbb{R}$. Para cada transformación $G : [0,1] \to [0,1]$ que preserva la medida de Lebesgue en $[0,1]$ se tienen dos transformaciones $T : X \to X$ que preservan la medida μ en X que se obtienen a partir F y de $(1 - F)$.

Por otro lado, para F ó $(1 - F)$ hay tantas transformaciones T construidas según el Teorema 3.2.1 que preservan la medida μ, como transformaciones G que preservan la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Además si G es ergódica respecto de la medida de Lebesgue en $[0,1]$, la transformación T también es ergódica respecto de la medida μ.

De igual forma, si $T : X \to X$ preserva la medida μ puede construirse una transformación $G : [0,1] \to [0,1]$ que preserva la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Si T es ergódica, la transformación G construida también lo es.

Antes de pasar con los ejemplos se enuncia un resultado para construir funciones invariantes[6]

Teorema 3.2.3. *Sea μ una medida de probabilidad con soporte en $X \subset \mathbb{R}$, F su función de distribución y además* invertible*. Sean G una transformación que preserva la medida de Lebesgue en $[0,1]$ y f una función invariante bajo G. Se define la función $g(x) := F^{-1}(f(F(x)))$. Entonces la función g es invariante bajo la transformación T, donde $T(B) := F^{-1}(G(F(B)))\ \forall B \subset \mathcal{B}(X)$. Por el Teorema 3.2.1, T preserva además la medida μ.*

Demostración. Sea f invariante bajo G, entonces $f(G(x)) = f(x)$ *c.s.* respecto a μ, por lo tanto, $g(x) := F^{-1}(f(F(x)))$, y entonces

$$
\begin{aligned}
g(T(x)) &= g(F^{-1}(G(F(x)))) \\
&= F^{-1}(f(F((F^{-1}(G(F(x))))))) \\
&= F^{-1}(f(G(F(x)))) \ \ \text{(porque } F \text{ es invertible)} \\
&= F^{-1}(f(F(x))) \ \ \text{(c.s. respecto a } \mu \text{ porque } f \text{ es invariante bajo } G) \\
&= g(x) \ \ \text{c.s. respecto a } \mu.
\end{aligned}
$$

de esta forma la función $g(x) := F^{-1}(f(F(x)))$ es invariante bajo la transformación T. ◻

[6]Una función $f : X \to X$ tal que $f(T(x)) = f(x)$ *c.s.* respecto a μ se llama **función invariante** bajo T. Donde T es una transformación que preserva la medida en el espacio $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

3.3. Ejemplos

A continuación se presentan algunos ejemplos de transformaciones que preservan las medidas de probabilidad uniforme, exponencial, de Laplace (o doble exponencial), de Cauchy y la normal. Se recurre a las transformaciones que preservan la medida de Lebesgue en $[0,1]$ tratadas en el cap´tulo 4.

Ejemplo 3.3.1. *Sea la distribución uniforme con función de densidad dada por* $f(x) = \frac{1}{b-a}, x \in [a,b]\ \ a,b \in \mathbb{R}$.

De acuerdo al Teorema 3.2.1 la transformación $T(x) := F^{-1}(G(F(x)))$ preserva la medida. En este caso, F, F^{-1} y G tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^b \frac{dx}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}, \quad x \in [a,b]; \\ F^{-1}(x) &= (b-a)x + a, \quad x \in [0,1]; \\ G(x) &= \frac{1}{\pi} \arccos\left(\cos\left(2\,\pi\,x\right)\right), \quad x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $a = -1, b = 2$, la transformación

$$T(x) = \frac{1}{\pi}\left[3\arccos\left(\cos\left[\frac{2\pi}{3}(x+1)\right]\right) - \pi\right] \tag{3.1}$$

preserva la medida de la distribución uniforme en $[-1,2]$.

Ejemplo 3.3.2. *Sea la distribución exponencial con función de densidad dada por* $f(x) = \lambda\exp(-\lambda x), x \in (0,\infty), \lambda > 0$.

Igual que en el Ejemplo 3.3.1, la transformación $T(x) := F^{-1}(G(F(x)))$ preserva la medida. En este caso, F, F^{-1} y G tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \lambda\exp(-\lambda z)dz = 1 - \exp(-\lambda x), \quad x \in (0,\infty); \\ F^{-1}(x) &= \frac{-1}{\lambda}\ln(1-x), \quad x \in [0,1); \\ G(x) &= \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\left[\frac{1}{2^x-1} \mod 1\right] + 1\right), \quad x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\lambda = 1$, la transformación

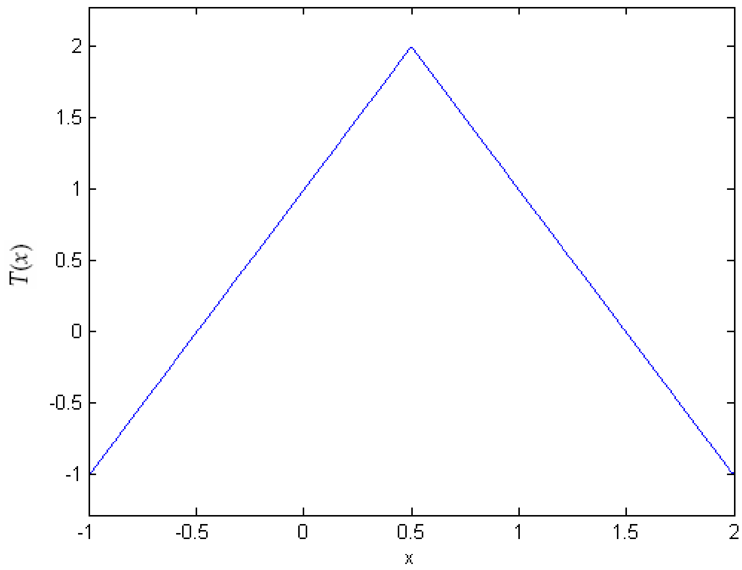

Figura 3.1: Grá ca de la ecuación 3.1. Transformación que preserva la medida de la distribución uniforme en $[-1, 2]$.

$$T(x) = -\ln\left(1 - \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\left[\frac{1}{2^{1-\exp(-x)}} \mod 1\right] + 1\right)\right) \tag{3.2}$$

preserva la medida de la distribución exponencial con $\lambda = 1$ en $(0, \infty)$.

Ejemplo 3.3.3. *Sea la distribución de Laplace o doble exponencial con función de densidad dada por* $f(x) = \frac{1}{2\beta}\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\beta}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ *y* $\mu \in \mathbb{R}, \beta > 0$.

La transformación $T(x) := F^{-1}(G(F(x)))$ preserva la medida. En este caso, F, F^{-1} y G tienen la siguiente forma:

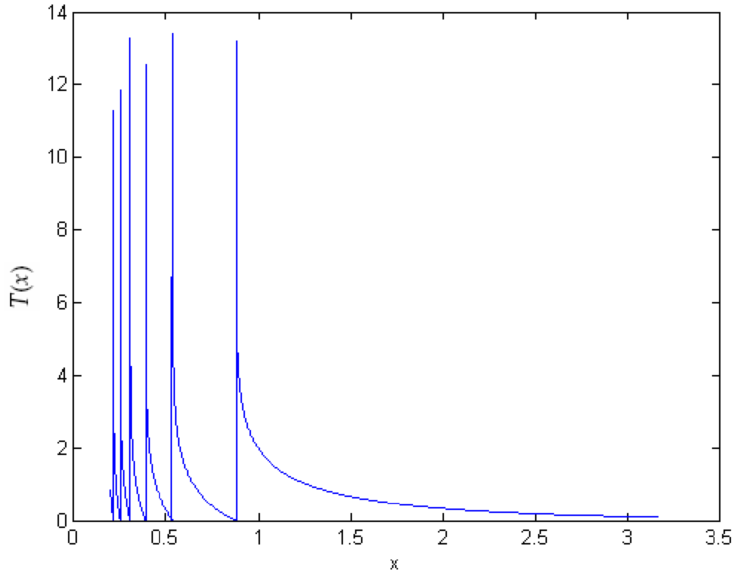

Figura 3.2: Grá ca de la ecuación 2.2. Transformación que preserva la medida de la distribución exponencial con $\lambda = 1$.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|z-\mu|}{\beta}\right) dz \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\mu - x}{\beta}\right) & \text{si } x < \mu, \\ 1 - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x-\mu}{\beta}\right) & \text{si } x \geq \mu \end{cases} \\
&= \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{sgn}(x-\mu)\left(1 - \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\beta}\right)\right)\right], \quad x \in \mathbb{R}; \\
F^{-1}(x) &= \mu - \beta \operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - 2\left|x - \frac{1}{2}\right|\right), \quad x \in [0,1]; \\
G(x) &= \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\left[\frac{1}{2^x - 1} \mod 1\right] + 1\right), \quad x \in [0,1].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, si $\mu = 0, \beta = 1$, la transformación

$$
\begin{aligned}
T(x) = -\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\ln 2}\ln\left(\left[\frac{1}{2^{\frac{1}{2}\left[1+\operatorname{sgn}(x)(1-\exp(-|x|))\right]} - 1} \mod 1\right] + 1\right)\right) \\
\ln\left(1 - 2\left|\frac{1}{\ln 2}\ln\left(\left[\frac{1}{2^{\frac{1}{2}\left[1+\operatorname{sgn}(x)(1-\exp(-|x|))\right]} - 1} \mod 1\right] + 1\right) - \frac{1}{2}\right|\right)
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

preserva la medida de la distribución de Laplace con $\mu = 0, \beta = 1$ en $\mathbb{R}$.

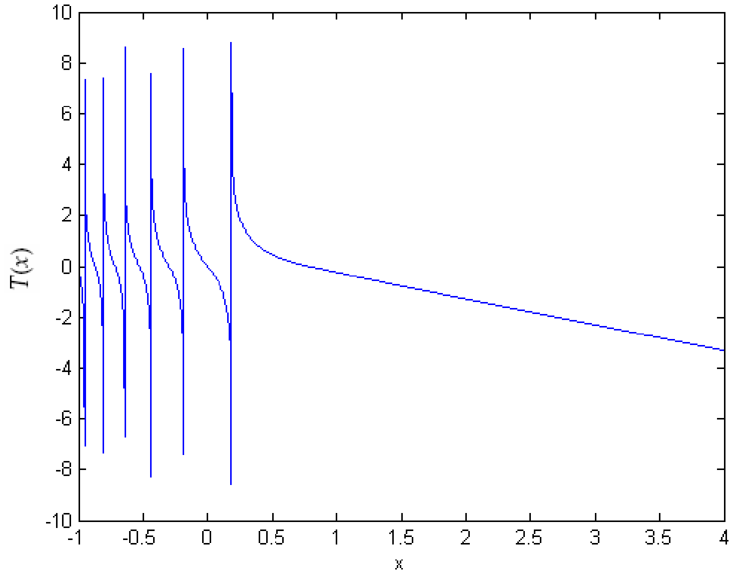

Figura 3.3: Grá ca de la ecuación 3.3. Transformación que preserva la medida de la distribución de Laplace con $\mu = 0, \beta = 1$.

Ejemplo 3.3.4. *Sea la distribución de Cauchy con función de densidad dada por* $f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\gamma}{(x-x_0)^2+\gamma^2}\right], x \in \mathbb{R}$ *y* $\gamma > 0, x_0 \in \mathbb{R}$.

$T(x) := F^{-1}(G(F(x)))$ preserva la medida. En este caso, F, F^{-1} y G tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi}\left[\frac{\gamma}{(z-x_0)^2+\gamma^2}\right] dz = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R};\\
F^{-1}(x) &= x_0 + \gamma \tan\left[\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right], \quad x \in [0,1];\\
G(x) &= \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{2}\left[\tan\left(\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) - \cot\left(\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right]\right) + \frac{1}{2}, \quad x \in [0,1].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $x_0 = 0, \gamma = 1$, la transformación

$$T(x) = \frac{1}{2}\tan\left[\arctan(x) - \cot\left(\arctan(x)\right)\right] \tag{3.4}$$

preserva la medida de la distribución de Cauchy con $x_0 = 0, \gamma = 1$ en $\mathbb{R}$.

La transformación T de la Figura 3.4 tiene much´simas oscilaciones cerca del cero. Por eso, dicha grá ca en una vecindad del cero, es sólo una referencia

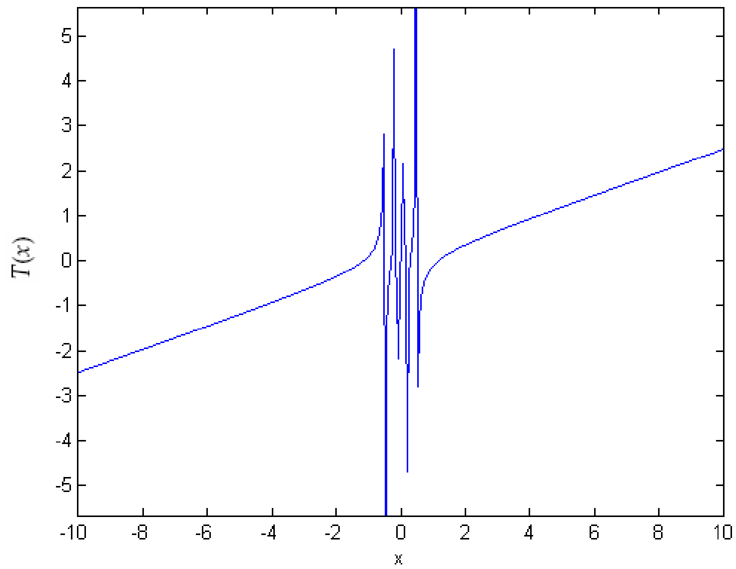

Figura 3.4: Grá ca de la ecuación 3.4. Transformación que preserva la medida de la distribución de Cauchy con $x_0 = 0, \gamma = 1$.

acerca del comportamiento de T en esa vecindad y no como el comportamiento verdadero de la transformación.

Ejemplo 3.3.5. *Sea la distribución normal con función de densidad dada por* $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], x \in \mathbb{R}$ *y* $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.

$T(x) := F^{-1}(G(F(x)))$ preserva la medida. En este caso, F y F^{-1} *tienen que calcularse de manera numérica* porque se trata de funciones trascendentes; para G se propone la siguiente transformación:

$$G(x) \quad = \quad \frac{1}{\pi} \arccos\left(\cos\left(2\,\pi\,x\right)\right), \quad x \in [0,1].$$

Por lo tanto, si $\mu = 0, \sigma = 1$, la transformación $T(x) := F^{-1}(G(F(x)))$ preserva la medida de la distribución normal $N(0,1)$ en $\mathbb{R}$. La grá ca de T puede verse en las Figuras 3.5 y 3.6.

En general, el cálculo de F^{-1} no puede hacerse de manera anal´tica como en los Ejemplos 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3 y 3.3.4, por lo que tiene que hacerse de manera numéri-

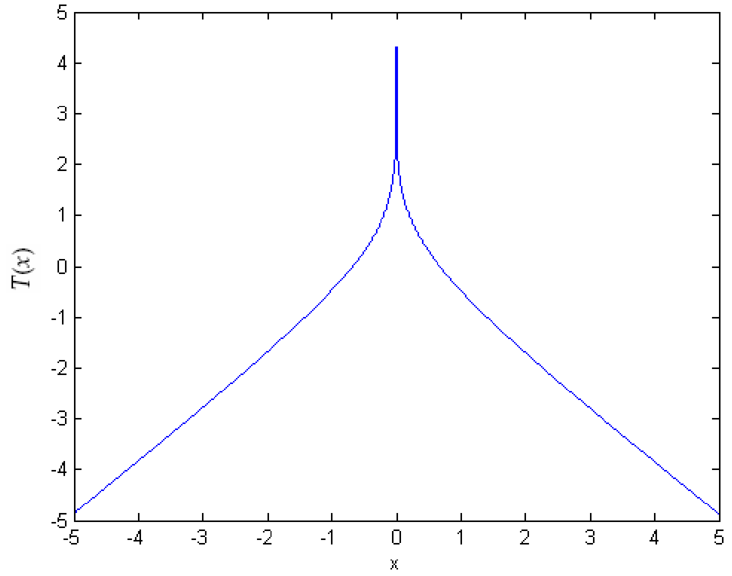

Figura 3.5: Transformación que preserva la medida de la distribución normal $N(0, 1)$. Ejemplo 3.3.5.

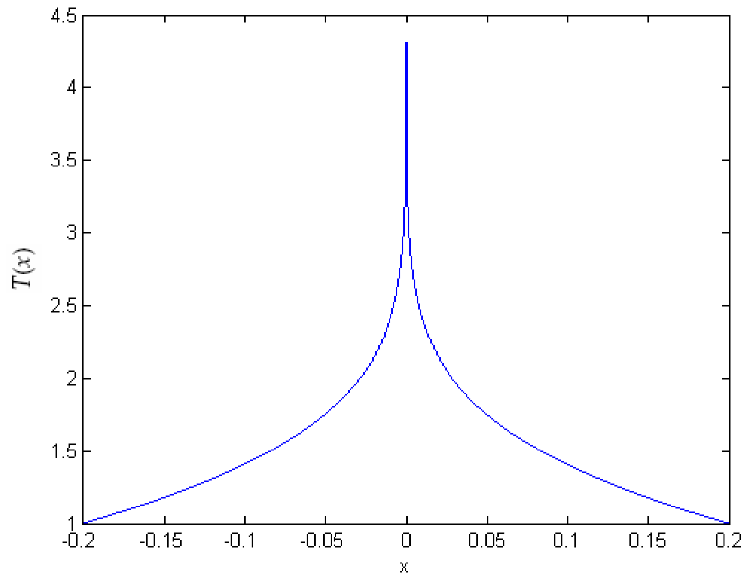

Figura 3.6: Transformación que preserva la medida de la distribución normal $N(0, 1)$. Ejemplo 3.3.5. Acercamiento.

ca, como en el Ejemplo 3.3.5. En [40] se calculan las inversas de las funciones de distribución para algunas medidas (normal, beta, student t y algunas otras) como solución en serie de potencias de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias. Es otro camino para el cálculo numérico de las inversas de estas funciones de distribución, y en algunos casos puede ser conveniente. Otra observación importante es que en los ejemplos mencionados en este cap´tulo (y en cualquier otro ejemplo) puede recurrirse a cualesquiera otras transformaciones G que preserven la medida de Lebesgue en $[0, 1]$, por ejemplo, todas las mencionadas en el cap´tulo 3. Es importante notar que, de acuerdo a los ejemplos descritos, la grá ca de la transformación $T(x) := F^{-1}(G(F(x)))$ depende casi totalmente de la grá ca de la transformación G, como puede verse claramente al comparar las Figuras 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6 de este cap´tulo y las Figuras 4.3, 4.5 y 4.7 del siguiente cap´tulo.

Con esto en mente queda claro que es muy importante estudiar las transformaciones G que preservan la medida de Lebesgue en $[0, 1]$. A esto está dedicado el próximo cap´tulo.

Cap´tulo 4

Transformaciones que Preservan la Medida de Lebesgue en $[0, 1]$

En este cap´tulo se dan ejemplos de transformaciones que preservan la medida de Lebesgue en $[0, 1]$. Estas transformaciones son muy importantes para poder hacer la construcción propuesta en el Teorema 3.2.1 del cap´tulo anterior. De acuerdo a ese mismo teorema, esas transformaciones que preservan la medida de Lebesgue en $[0, 1]$ *no tienen que ser necesariamente invertibles*.

4.1. Traslaciones módulo 1, multiplicaciones por k módulo 1 ($k \in \mathbb{N}$) y funciones lineales por pedazos del mismo tipo

Ejemplo 4.1.1. *Traslaciones* mod 1. [1]

Sea $G(x) = x + \alpha \mod 1 \;\; \forall x \in [0, 1]$, *con* $\alpha \in (0, 1)$.

Esta transformación también puede escribirse de la siguiente manera,

[1] La operación mod 1 se de ne para $x \in \mathbb{R}$ como sigue:

$$x \bmod 1 = x - \lfloor x \rfloor$$

donde $\lfloor x \rfloor$ representa la función mayor entero menor o igual que x.

$$G(x) = \begin{cases} x + \alpha & \text{si } x \in [0, 1-\alpha), \\ x - (1-\alpha) & \text{si } x \in [1-\alpha, 1]. \end{cases} \tag{4.1}$$

G preserva la medida de Lebesgue en $[0,1]$, porque por construcción ésta es invariante ante traslaciones.

Si $\alpha = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$, la función $f(x) = \exp(2q\pi i x)$ es una función invariante (ver De nición A.1.6) respecto de G como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} f(G(x)) &= \exp\left(2q\pi i\left(x + \frac{p}{q}\right)\right) \\ &= \exp(2q\pi i x + 2p\pi i) \\ &= \exp(2q\pi i x)\exp(2p\pi i) \\ &= \exp(2q\pi i x) \text{ ya que } \exp(2p\pi i) = 1 \text{ si } p \in \mathbb{N} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

por lo tanto $f(x) = \exp(2q\pi i x)$ es una función invariante respecto a G.

Si α es irracional, entonces G es ergódica respecto de λ porque si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(2\pi i n x)$ es la serie de Fourier de una función invariante f entonces,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x+\alpha) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(2\pi i n(x+\alpha)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(2\pi i n x + 2\pi i n \alpha) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(2\pi i n \alpha)\exp(2\pi i n x) \end{aligned}$$

al ser f invariante bajo G se tiene que $c_n = c_n \exp(2\pi i n \alpha)$ para toda n. Si $c_n \neq 0$ para alguna n, entonces $1 = \exp(2\pi i n \alpha)$, pero esta última igualdad no es cierta porque $n\alpha$ es irracional. De aqu´ que $c_n = 0$ para todo $n \neq 0$ y $f(x) = c_0$ es una función invariante constante, de donde se sigue que G es una transformación ergódica respecto de la medida de Lebesgue en $[0,1]$. La conclusión de que G es ergódica se sigue del siguiente Teorema que se enuncia sin demostración pero puede consultarse en [10].

Teorema 4.1.1. *Sea un espacio de probabilidad $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y T una transformación que preserva la medida μ. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- *T es ergódica.*
- *si $\mu(A) > 0$ entonces $\cup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A) = X$.*
- *si $\mu(A) > 0$ y $\mu(B) > 0$, entonces $\mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0$ para alguna $n \geq 1$.*
- *si una función medible f es tal que $f(T(x)) = f(x)$ c.s. respecto a μ, entonces f es constante c.s. respecto a μ.*

Ejemplo 4.1.2. *Multiplicación por $k = 2 \bmod 1$. Sea $G(x) = 2x \bmod 1$ $\forall x \in [0, 1]$.*

También puede escribirse de la siguiente manera,

$$G(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ 2x - 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{4.2}$$

Sea (a, b) contenido en $[0, 1]$,

$$\begin{aligned} \therefore \lambda(G^{-1}((a,b))) &= \lambda(\{x \in [0,1] : G(x) \in (a,b)\}) \\ &= \lambda\left(\left\{x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) : 2x \in (a,b)\right\}\right) + \lambda\left(\left\{x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] : 2x - 1 \in (a,b)\right\}\right) \\ &= \lambda\left(\left\{x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) : x \in \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)\right\}\right) + \lambda\left(\left\{x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] : x \in \left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right)\right\}\right) \\ &= \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right) + \left(\frac{b+1}{2} - \frac{a+1}{2}\right) \\ &= b - a. \end{aligned}$$

Por el Lema de Clases Monótonas se extiende el resultado para todo $B \in \mathcal{B}([0, 1])$.

Además G es ergódica respecto de λ porque si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(2\pi i n x)$ es la serie de Fourier de una función invariante f entonces,

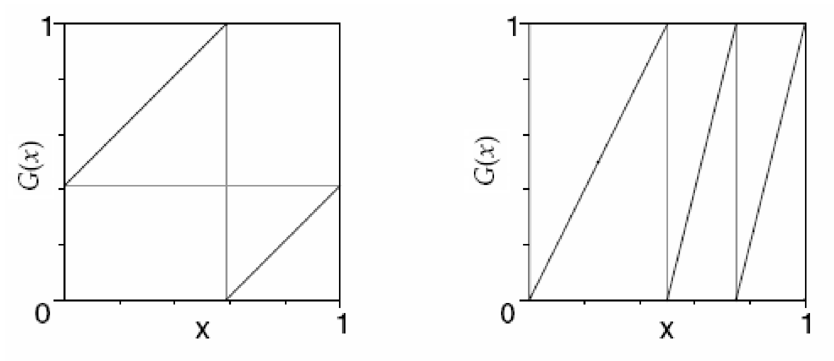

Figura 4.1: Traslación para $\alpha = \sqrt{2}-1$ (izquierda) y para la función lineal a pedazos del ejemplo 4.1.4 (derecha).

$$\begin{aligned} f(x) &= f(G(x)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(2\pi i n(2x)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(2\pi i 2nx) \end{aligned}$$

al ser f invariante bajo G y comparando los coeficientes de $f(x)$ y $f(G(x))$ se tiene que $c_n = 0$ si n es par. Comparando los coeficientes de $f(x)$ y $f(G^2(x))$ se tiene que $c_n = 0$ si n no es múltiplo de 4. Continuando de esta manera se concluye que $c_n = 0$ para todo $n \neq 0$ y $f(x) = c_0$ es una función invariante constante, y como en el Ejemplo **??** se sigue que G es una transformación ergódica respecto de la medida de Lebesgue en $[0,1]$[2].

Ejemplo 4.1.3. *Multiplicación por $k = n$* mod 1.

Sea

[2] Ver la segunda nota al pie del Ejemplo 4.1.1.

$$G(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}), \\ nx - 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), \\ \vdots & \\ nx - (n-1) & \text{si } x \in [\frac{n-1}{n}, 1]. \end{cases} \tag{4.3}$$

De igual forma que en el ejemplo anterior, la imagen inversa bajo G de $(a, b) \subset [0, 1]$ está dada por n intervalos de longitud $\frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} \therefore \lambda(G^{-1}((a,b))) &= \lambda\left(\{x \in [0,1] : G(x) \in (a,b)\}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda\left(\left\{x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) : nx - (k-1) \in (a,b)\right\}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda\left(\left\{x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) : x \in \left[\frac{a+(k-1)}{n}, \frac{b+(k-1)}{n}\right)\right\}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b+(k-1)}{n} - \frac{a+(k-1)}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b}{n} - \frac{a}{n}\right) \\ &= b - a. \end{aligned}$$

Por el Lema de Clases Monótonas se tiene que para todo $B \in \mathcal{B}([0,1])$ G preserva la medida de Lebesgue en $[0, 1]$.

Ejemplo 4.1.4. *Función lineal a pedazos* mod 1.

Sea

$$G(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ 4x - 2 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), \\ 4x - 3 & \text{si } x \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases} \tag{4.4}$$

De igual manera que en los dos ejemplos anteriores puede demostrarse fácilmente que esta transformación preserva la medida de Lebesgue en $[0, 1]$.

Pueden construirse muchas funciones que preservan la medida de Lebesgue en $[0, 1]$ de niendo funciones lineales a pedazos (mod 1) de esta forma.

4.2. Transformaciones G inducidas a partir de transformaciones T que preservan $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ con $X \subset \mathbb{R}$

Ejemplo 4.2.1. *La Transformación logística. Sea* $X = [0,1]$, $\mu((a,b)) = \int_a^b \frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ $a, b \in [0,1]$ *y* $T(x) = 4x(1-x)$ $\forall x \in [0,1]$. *A la transformación* T *se le conoce como la* transformación log´stica *[10].*

Primero se va a ver que T preserva μ y después se construye una transformación $G : [0,1] \to [0,1]$ que preserva la medida de Lebesgue en $[0,1]$ siguiendo el procedimiento del Teorema 3.2.1 del cap´tulo anterior.

Sea $(0,a) \subset [0,1]$. La imagen inversa del intervalo $(0,a)$ bajo T está dada por lo siguiente (ver Figura 4.2),

$$T^{-1}((0,a)) = \left(0, \tfrac{1-\sqrt{1-a}}{2}\right) \bigcup \left(\tfrac{1+\sqrt{1-a}}{2}, 1\right).$$

La ecuación anterior se obtiene a partir de la solución de la ecuación cuadrática:

$$-4x^2 + 4x - a = 0.$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \mu(T^{-1}((0,a))) &= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{1-\sqrt{1-a}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + \int_{\frac{1+\sqrt{1-a}}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\arcsin(-\sqrt{1-a}) + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sqrt{1-a})\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\pi - 2\arcsin(\sqrt{1-a})\right].
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mu((0,a)) &= \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\arcsin(2a-1) + \frac{\pi}{2}\right].
\end{aligned}$$

Por medio de identidades trigonométricas se verá que T preserva la medida. Partiendo de la conocida identidad $\sin(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$ se tiene que

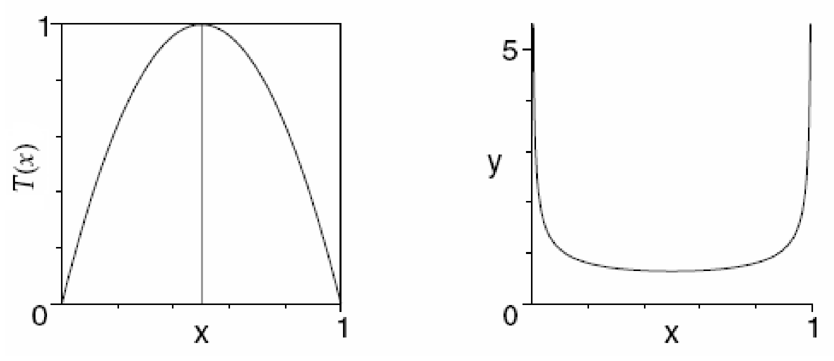

Figura 4.2: $T(x) = 4x(1-x)$ (izquierda) y la densidad de la medida que preserva (derecha).

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} &= \arcsin\left(\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}\right) \\ &= \arcsin\left(\sqrt{1-\frac{\cos(\alpha)+1}{2}}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \text{si } z = & \ \frac{\cos(\alpha)+1}{2} \\ \Rightarrow \alpha = & \ \arccos(2z-1) \\ \Rightarrow \tfrac{\alpha}{2} = & \ \arcsin(\sqrt{1-z}) = \frac{\arccos(2z-1)}{2}. \end{aligned}$$

Ahora, con ayuda de la identidad $\arcsin(\sqrt{1-z}) = \frac{\arccos(2z-1)}{2}$ y haciendo $\mu((0,a)) = \mu(T^{-1}(0,a))$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\left[\arcsin(2a-1)+\frac{\pi}{2}\right] &= \frac{1}{\pi}\left[\pi - 2\arcsin(\sqrt{1-a})\right] \\ \Leftrightarrow \arcsin(2a-1)+\frac{\pi}{2} &= \pi - 2\arcsin\left(\sqrt{1-a}\right) \\ \Leftrightarrow \arcsin(2a-1) + 2\arcsin\left(\sqrt{1-a}\right) &= \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \arcsin(2a-1) + \arccos(2a-1) &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

La última igualdad es una identidad bien conocida, por lo tanto, con base en el Lema de Clases Monótonas T preserva μ.

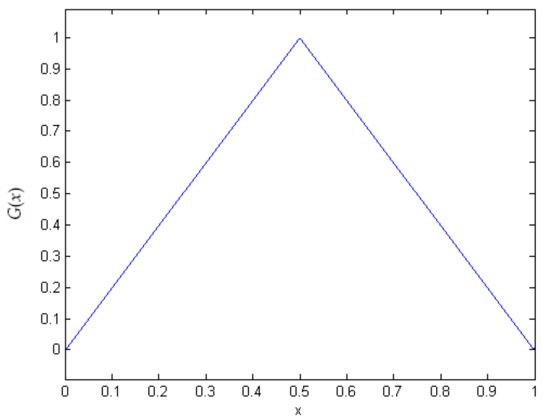

Figura 4.3: $G(x) = \frac{1}{\pi} \arccos(\cos(2\,\pi\,x))$ preserva la medida de Lebesgue en $[0, 1]$.

El Teorema 3.2.1 dice que la transformación $G : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por

$$G(x) = F(T(F^{-1}(x))) = \frac{1}{\pi} \arccos(\cos(2\,\pi\,x)\,,) \tag{4.5}$$

donde

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\pi} \arcsin(2x - 1) + \frac{1}{2}, \\ T(x) &= 4x(1 - x), \\ F^{-1}(x) &= \frac{1 + \sin\left((x - \frac{1}{2})\pi\right)}{2}. \end{aligned}$$

preserva la medida de Lebesgue en $[0, 1]$. F y F^{-1} son la función de distribución de μ y su inversa respectivamente.

Ejemplo 4.2.2. *La Transformación de Gauss. Sea* $X = [0, 1)$, $\mu((a, b)) = \frac{1}{\ln 2} \int_a^b \frac{dx}{x+1}$ *y*

$$T(x) = \tfrac{1}{x} \bmod 1 \;\; \forall x \in (0, 1) \;\; y \;\; T(0) = 0$$

A la transformación T se le conoce como la transformación de Gauss *y es también una de las llamadas fracciones continuadas.*

Tal como en el ejemplo anterior primero, se muestra que la transformación T preserva a μ, y después se construye una transformación G para preservar la medida de Lebesgue en $[0, 1]$ siguiendo el procedimiento del Teorema 3.2.1.

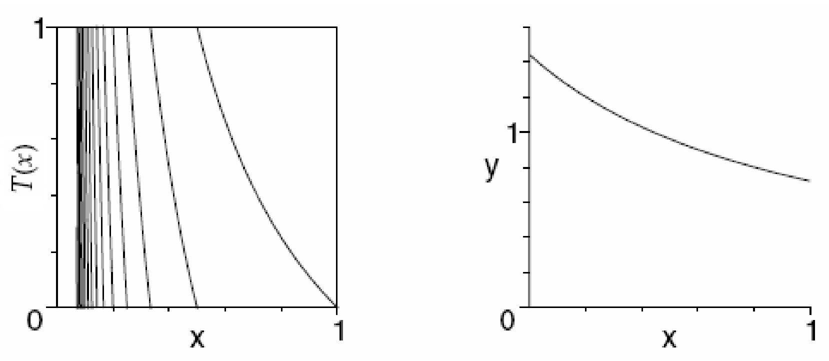

Figura 4.4: $T(x) = \frac{1}{x} \bmod 1$ (izquierda) y la densidad de la medida que preserva (derecha).

Para ver que T preserva μ basta con probar que $\mu(T^{-1}((0,a))) = \mu((0,a))\quad a \in (0,1)$.

La imagen inversa del intervalo abierto $(0,a) \subset [0,1)$ está dada por

$$T^{-1}((0,a)) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{n+a}, \tfrac{1}{n}\right) \text{ (ver Figura 4.4).}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \mu(T^{-1}((0,a))) &= \frac{1}{\ln 2}\int_{T^{-1}((0,a))}\frac{dx}{x+1}\\
&= \frac{1}{\ln 2}\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+a},\frac{1}{n})}\frac{dx}{x+1}\\
&= \frac{1}{\ln 2}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_{\frac{1}{n+a}}^{\frac{1}{n}}\frac{dx}{x+1}\\
&= \frac{1}{\ln 2}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-\ln\left(\frac{n+1+a}{n+a}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\ln 2}\lim_{N\to\infty}(\ln(N+1)-\ln(N+1+a)+\ln(1+a))\\
&= \frac{1}{\ln 2}\left[\ln(1+a)-\lim_{N\to\infty}\ln\left(1+\frac{a}{N+1}\right)\right]\\
&= \frac{1}{\ln 2}\ln(1+a)\\
&= \frac{1}{\ln 2}\int_0^a\frac{dx}{x+1}\\
&= \mu((0,a)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Lema de Clases Monótonas T preserva la medida μ.

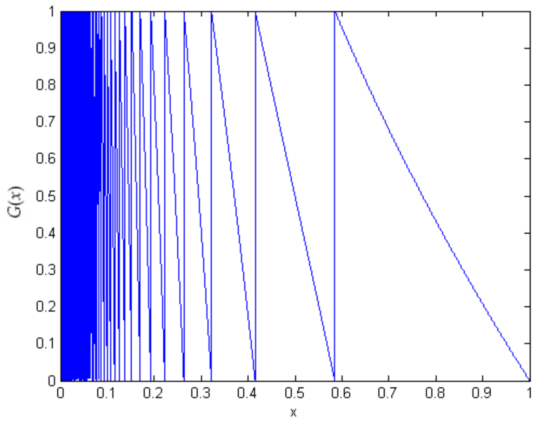

Figura 4.5: $G(x) = \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\left[\frac{1}{2^x - 1} \mod 1\right] + 1\right)$ preserva la medida de Lebesgue en $[0, 1]$.

Al igual que en el ejemplo anterior, la transformación $G : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por

$$G(x) = F(T(F^{-1}(x))) = \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\left[\frac{1}{2^x - 1} \mod 1\right] + 1\right) \tag{4.6}$$

donde

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\ln 2} \ln(x + 1), \\ T(x) &= \frac{1}{x} \mod 1 \\ F^{-1}(x) &= 2^x - 1. \end{aligned}$$

preserva la medida de Lebesgue en $[0, 1]$. F y F^{-1} son la función de distribución de μ y su inversa respectivamente.

Nota sobre las Fracciones continuadas: Cada $x \in \mathbb{R}$ tiene una representación en *fracciones continuadas* dada por

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

donde $a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{N} \quad i = 1, 2, \ldots$. La transformación de Gauss es una de estas fracciones continuadas. Pueden consultarse muchas fracciones continuadas en [12].

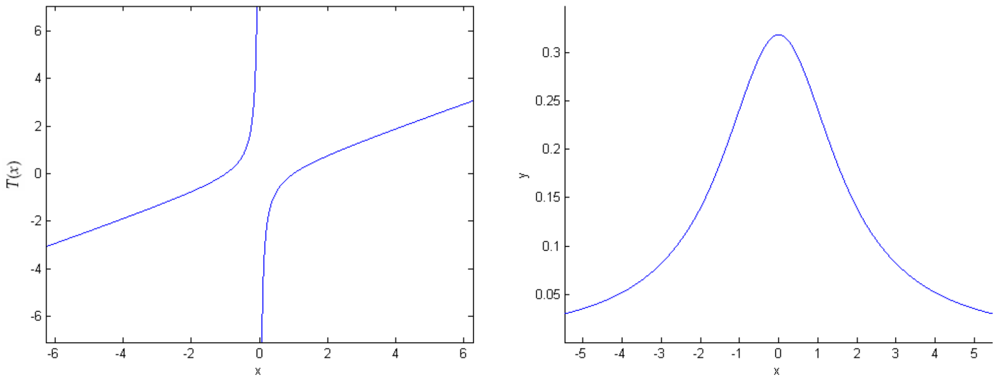

Figura 4.6: $T(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ (izquierda) y la densidad de la medida que preserva (derecha).

Ejemplo 4.2.3. *Este ejemplo fue expuesto primeramente por Douglas Lind [10]. Sea* $X = \mathbb{R}$, $\mu(a,b) = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}$ $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $T(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Sea (a,b) con $a, b \in \mathbb{R}$. La imagen inversa del intervalo (a,b) bajo T está dada por lo siguiente (ver Figura 4.6),

$$T^{-1}((a,b)) = \left(a - \sqrt{a^2+1}, b - \sqrt{b^2+1}\right) \bigcup \left(a + \sqrt{a^2+1}, b + \sqrt{b^2+1}\right).$$

La ecuación anterior se obtiene a partir de la solución de las ecuaciones cuadráticas:

$$x^2 - 2ax - 1 = 0$$

y

$$x^2 - 2bx - 1 = 0$$

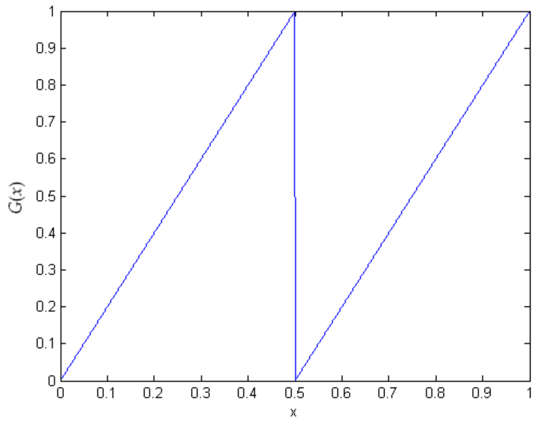

Figura 4.7: $G(x) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{2}\left[\tan\left(\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) - \cot\left(\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right]\right) + \frac{1}{2}$ preserva la medida de Lebesgue en $[0,1]$.

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \mu(T^{-1}((a,b))) &= \frac{1}{\pi}\int_{T^{-1}((a,b))} \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{a-\sqrt{a^2+1}}^{b-\sqrt{b^2+1}} \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{\pi}\int_{a+\sqrt{a^2+1}}^{b+\sqrt{b^2+1}} \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(b-\sqrt{b^2+1}\right) - \arctan\left(a-\sqrt{a^2+1}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(b+\sqrt{b^2+1}\right) - \arctan\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(b-\sqrt{b^2+1}\right) + \arctan\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)\right] \\
&- \frac{1}{\pi}\left[\left(\arctan\left(a-\sqrt{a^2+1}\right) + \arctan\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}[\arctan(b) - \arctan(a)] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \mu((a,b)).
\end{aligned}
$$

donde la quinta igualdad se sigue de la identidad trigonométrica

$$\arctan\left(x-\sqrt{x^2+1}\right) + \arctan\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \arctan(x).$$

Por el Lema de Clases Monótonas, T preserva μ.

Del Teorema 3.2.1 se sigue que la transformación $G : [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$G(x) = F(T(F^{-1}(x))) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{2}\left[\tan\left(\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) - \cot\left(\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right]\right) + \frac{1}{2} \tag{4.7}$$

donde

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}, \\ T(x) &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) \\ F^{-1}(x) &= \tan\left[\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

preserva la medida de Lebesgue en $[0,1]$. F y F^{-1} son las funciones de distribución de μ y su inversa respectivamente.

Con esto se acaba de ver que existen muchas transformaciones que preservan la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Cualquiera de éstas puede usarse en el Teorema 3.2.1 para construir transformaciones que preserven medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$.

Cap´tulo 5

Procesos tipo ARMA y tipo GARCH

En este cap´tulo se obtienen generalizaciones estacionarias de los modelos ARMA. Estos modelos se construyen a partir de una medida de probabilidad μ, una transformación T que la preserva y una función medible g. También se presenta una forma para la construcción de procesos estacionarios tipo GARCH por medio de transformaciones que preservan la medida.

5.1. Procesos tipo ARMA

A partir de un proceso estacionario construido por medio de transformaciones que preservan la medida se construye otro proceso estacionario gracias a una función medible. Esta construcción permite hacer más amplia la familia de procesos con los que se puede trabajar. En lo que sigue, primero se muestra cúal es la construcción de que se habla y por qué es estacionaria. Finalmente como se va a ver, esta construcción incluye, entre otros, a los procesos ARMA. Existen cuestiones interesantes como la siguiente: un proceso estocástico construido a partir de la transformación T del Ejemplo 3.3.4 y de la distribución de Cauchy, es estrictamente estacionario pero *no es débilmente estacionario* porque la distribución de Cauchy no tiene momentos.

Proposición 5.1.1. *Sean* $h : \mathbb{R}^{k+m+2} \to \mathbb{R}$ *una función medible y* $k, m \in \mathbb{N}$, $\{X_t\}_{t=1,2,\ldots} = f(T^t(X_0))$ *donde* T *preserva la medida de probabilidad de la variable aleatoria* X_0 *y* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *medible. Además, sea* $\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ *una sucesión iid y* θ *el operador de traslación* *(shift). Entonces, el proceso definido por $Y_t := h(X_t, \ldots X_{t+k}, \xi_t, \ldots \xi_{t+m})$ es estrictamente estacionario.*

Demostración. Se de ne $Y_t := h(X_t, \ldots X_{t+k}, \xi_t, \ldots \xi_{t+m})$,

$$
\begin{aligned}
\therefore \theta(Y_1, Y_2, \ldots) &= (Y_2, Y_3, \ldots) \\
&= (h(X_2, \ldots, X_{2+k}, \xi_2, \ldots, \xi_{2+m}), h(X_3, \ldots, X_{3+k}, \xi_3, \ldots, \xi_{3+m}), \ldots) \\
&\overset{d}{=} (h(X_1, \ldots, X_{1+k}, \xi_1, \ldots, \xi_{1+m}), h(X_2, \ldots, X_{2+k}, \xi_2, \ldots, \xi_{2+m}), \ldots) \\
&= (Y_1, Y_2, \ldots).
\end{aligned}
$$

La penúltima igualdad se debe al hecho de que $\{X_t\}_{t=1,2,\ldots}$ es estacionario (Teorema A.2.1) y $\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ es *iid*. As´, $\theta(Y_1, Y_2, \ldots) \overset{d}{=} (Y_1, Y_2, \ldots)$ implica que el proceso $\{Y_t\}_{t=1,2,\ldots}$ es (estrictamente) estacionario (De nición A.1.1). □

A continuación se rcuerda la de nición de ruido blanco que es mencionada en el siguiente ejemplo.

De nición 5.1.1. *Un proceso estocástico $\{\xi_t\}$ se llama* ***ruido blanco (white noise)*** *con media cero y varianza $\sigma^2 \Leftrightarrow \mathbb{E}(\xi_t) = 0 \;\; \forall t \in \mathbb{N} \;\; \wedge cov\,(\xi_h, \xi_0) = \begin{cases} \sigma^2 & si\ h = 0, \\ 0 & si\ h \neq 0. \end{cases}$ [29].*

Ejemplo 5.1.1. *Procesos ARMA(p,q). El proceso ARMA(p,q) $\{X_t\}$ está definido por la ecuación $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + \xi_t + \vartheta_1 \xi_{t-1} + \ldots + \vartheta_q \xi_{t-q}$ donde $\{\xi_t\}$ es un ruido blanco y $\phi_{t=1,\ldots,p}$, $\vartheta_{t=1,\ldots,q}$ son constantes.*

Si en la Proposición 5.1.1 se escoge a h como una función lineal, (claramente $\{\xi_t\}$ *iid* es un ruido blanco (De nición A.1.3)), entonces se obtiene el proceso ARMA, con la gran ventaja de que en este caso es un proceso *estrictamente estacionario*. Este es un punto muy importante porque en el estudio tradicional de los procesos ARMA se piden condiciones (De nición A.1.7) a las ra´ces de los polinomios $\phi(z)$ y $\vartheta(z)$ para asegurar que el proceso sea sólo *débilmente estacionario* (De nición A.1.2).

Otro punto importante a mencionar en esta construcción es que la distribución (o medida) de ξ_t puede o no, ser la misma que la distribución de X_t, cuya medida es preservada por la transformación T. As´ se acaba de ver que esta construcción a partir de transformaciones que preservan la medida generaliza (porque pueden elegirse otras relaciones funcionales para h distintas de la lineal) los procesos ARMA, siendo además estrictamente estacionarios sin imponer restricciones externas, por ejemplo sobre los parámetros del modelo ARMA clásico.

5.2. Ejemplos

En los siguientes ejemplos el proceso que se construye es de la forma

$$Y_t = f(T^t(X_0)) + \xi_t \tag{5.1}$$

que por la Proposición 5.1.1 es un proceso estrictamente estacionario.

Ejemplo 5.2.1. *Sean $f(x) = x$, X_0 una variable aleatoria con distribución normal $N(5, 16)$ y $\{\xi_t\}_{t=1,2,...}$ un proceso iid con distribución normal $N(-8, 25)$. Sea $G(x) = \frac{1}{\pi}\arccos(\cos(2\pi x))$, en el capítulo 3 se vio que preserva la medida de Lebesgue en $[0, 1]$. Fácilmente se ve que Y_t se distribuye $N(-3, 41)$. Por el Teorema 3.2.1 $T(B) := F^{-1}(G(F(B)))$ preserva la medida normal $N(5, 16)$ si F y F^{-1} son la función de distribución de la normal $N(5, 16)$ y su inversa respectivamente. En este caso, claramente la distribución de Y_1 dado X_0 es normal $N(-3, 25)$.*

Ejemplo 5.2.2. *Sean $f(x) = x$, X_0 una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro $\lambda = 12$ y $\{\xi_t\}_{t=1,2,...}$ un proceso iid con distribución exponencial con parámetro $\lambda = 12$. Sea $G(x) = \frac{1}{\pi}\arccos(\cos(2\pi x))$, que preserva la medida de Lebesgue en $[0, 1]$. Fácilmente se ve que Y_t se distribuye $Ga(2, 12)$. Por el Teorema 3.2.1 $T(B) := F^{-1}(G(F(B)))$ preserva la medida exponencial con parámetro $\lambda = 12$ si F y F^{-1} son la función de distribución de la exponencial con parámetro $\lambda = 12$ y su inversa respectivamente. En este caso, después de un sencillo cálculo, la densidad de Y_1 dado X_0 es $\exp(12T(X_0))12\exp(-12x)$ que es la densidad de una exponencial con parámetro $\lambda = 12$ multiplicada por una constante.*

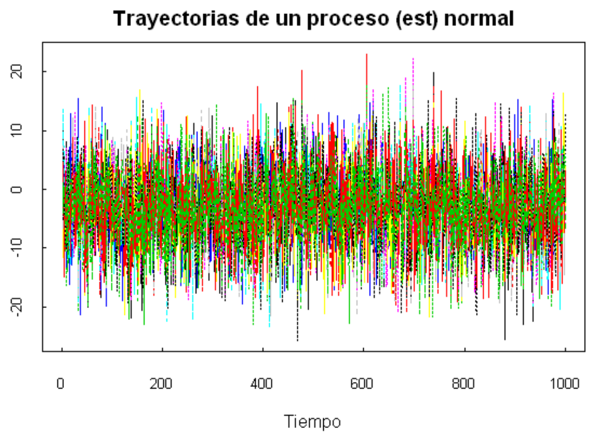

Figura 5.1: Once trayectorias de tamaño 1000 para el Ejemplo 5.2.1.

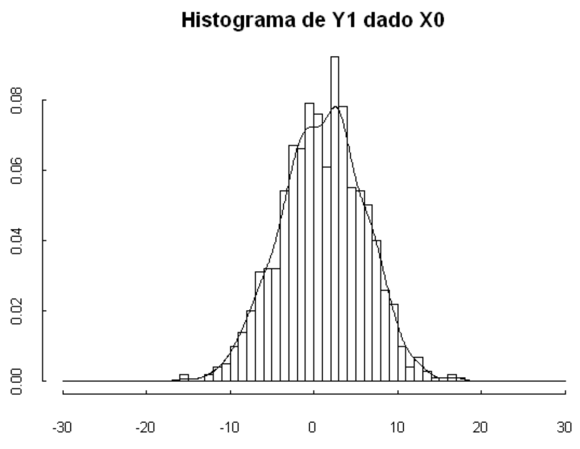

Figura 5.2: Histograma de la distribución de Y_1 dado X_0 construido con 1000 trayectorias de tamaño 1000 para el Ejemplo 5.2.1.

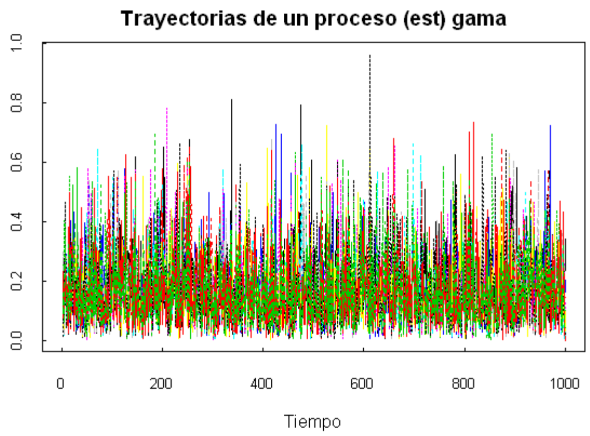

Figura 5.3: Once trayectorias de tamaño 1000 para el Ejemplo 5.2.2.

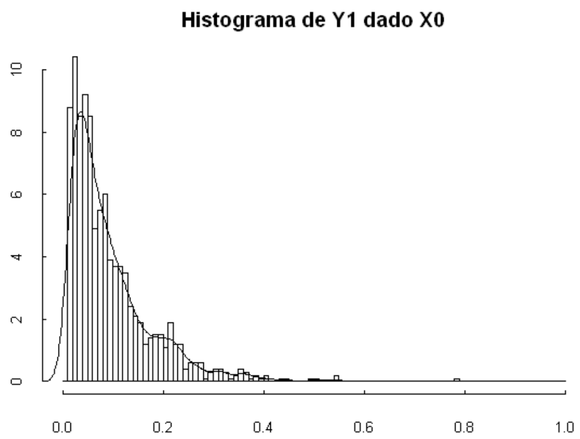

Figura 5.4: Histograma de la distribución de Y_1 dado X_0 construido con 1000 trayectorias de tamaño 1000 para el Ejemplo 5.2.2.

5.3. Procesos tipo GARCH

Los procesos tipo GARCH se re eren a distintas variantes de los procesos ARCH y GARCH (AutoRegresivos Condicionalmente Heteroscedásticos, la varianza condicional del proceso no es constante), y pueden describirse de la siguiente forma.

De nición 5.3.1. *Un proceso estocástico definido por la siguiente expresión se conoce como* tipo GARCH.

$$X_t = g(X_1, \ldots, X_p, \xi_1, \ldots, \xi_q, h_t; \vartheta)\xi_t \quad p, q < t \tag{5.2}$$

donde $\{\xi_t\}$ *y* $\{h_t\}$ *son procesos estocásticos con valores reales iid e independientes entre sí,* $g : \mathbb{R}^{p+q+1} \to \mathbb{R}$ *y* ϑ *es un vector de parámetros. Los nombres de estos procesos dependen de la elección de la función* g *y de la distribución de* ξ_t*.*

Ejemplo 5.3.1. *Están los siguientes procesos:*

- *ARCH(p): AutoRegresivo Condicionalmente Heteroscedástico [8, 23, 29–31, 34].*

  $X_t = \left[\sqrt{\alpha_0 + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k X_{t-k}^2}\right] \xi_t$ *y* $\xi_t \sim N(0, 1)$.

  Parámetros (vector ϑ*):* $\alpha_0 > 0, \alpha_k \geq 0$.

- *GARCH(p,q): ARCH Generalizado [8, 23, 29, 31].*

  $X_t = \left[\sqrt{h_t}\right] \xi_t$ *y* $\xi_t \sim N(0, 1)$.

  donde $h_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k X_{t-k}^2 + \sum_{k=1}^{q} \beta_k h_{t-k}^2$.

  Parámetros (vector ϑ*):* $\alpha_0 > 0, \alpha_k, \beta_k \geq 0$.

- *SV: Volatilidad Estocástica [6].*

  $$X_t = \exp\left(\tfrac{1}{2}h_t\right)\xi_t \text{ con } h_t = (\alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \nu_t) \text{ y } \nu_t, \xi_t \sim N(0,1).$$

  Parámetros (vector ϑ): $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0$.

- *GH-ARCH(p): ARCH Hiperbólico Generalizado [30].*

  $$X_t = \mu + \left[\sqrt{\delta^2 + \sum_{k=1}^{p}(X_{t-k} - \mu)^2}\right]\xi_t \text{ y } \xi_t \sim GH\left(\lambda - \tfrac{p}{2}, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \beta, 1, 0\right).$$

  Parámetros (vector ϑ): $\lambda, \alpha, \beta, \mu, \delta$ (Definición A.1.14).

Una pregunta importante con respecto a los procesos anteriores (en general con respecto a cualquier proceso) es bajo qué condiciones se tiene un proceso estrictamente estacionario. Ver, por ejemplo [30] donde se obtienen condiciones para que el proceso GH-ARCH(p) sea estrictamente estacionario. Es común que no sea fácil determinar esas condiciones para los distintos procesos.

Como se vio en la sección anterior, se pueden construir fácilmente procesos estrictamente estacionarios a través de transformaciones que preservan la medida. Estas construcciones no sólo abarcan a los procesos ARMA sino también a los procesos tipo GARCH. La ventaja de esta construcción es que no hay que pedir ninguna condición a los parámetros del proceso para que sea estrictamente estacionario. Lo único que se pide es que se pueda construir una transformación que preserve la medida y una función medible como se ve a continuación.

Corolario 5.3.1. *Bajo las mismas hipótesis de la Proposición 5.1.1, los procesos (X_t) tipo GARCH (Definición 5.3.1) son estrictamente estacionarios siempre que la función g sea medible.*

Demostración. Como la función g es medible, y el producto de funciones medibles también lo es, se sigue que el proceso de nido por $X_t = g(X_1, \ldots, X_p, \xi_1, \ldots, \xi_q, h_t; \vartheta)\xi_t$ es estrictamente estacionario de acuerdo a la Proposición 5.1.1. □

Por el Corolario 5.3.1 todos los procesos del Ejemplo 5.3.1 son estrictamente estacionarios. Para el caso del GH-ARCH(p) el proceso $\{X_t - \mu\}$ cae en la cons–trucción por lo que es estrictamente estacionario, por lo tanto $\{X_t\}$ también lo es. Obviamente pueden construirse muchos más procesos tipo GARCH estrictamente estacionarios además de los ya mencionados.

Capítulo 6

Otras formas de invarianza

Aquí se van a definir otras formas de invarianza (*contractividad, intercambiabilidad, reversibilidad y rotabilidad*) y algunas relaciones que guardan con procesos estacionarios construidos a partir de transformaciones que preservan la medida.

6.1. Intercambiabilidad

Todas estas simetrías son más fuertes que la propiedad de que un proceso sea estrictamente estacionario. De hecho la relación de implicaciones que guardan entre sí estos conceptos es como sigue:

rotabilidad $\Rightarrow$ *intercambiabilidad* $\Leftrightarrow$ *contractividad* $\Rightarrow$ *estacionaridad* [20].

además *intercambiabilidad* $\Rightarrow$ *reversibilidad* [20].

Antes de avanzar con los resultados hay que recordar dos definiciones importantes.

Definición 6.1.1. *(Filtración). Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. A la familia de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ se le llama* ***filtración*** *si $\{\mathcal{F}_t\}$ es no decreciente $\wedge$ $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ para toda t [19].*

Definición 6.1.2. *(tiempo opcional o de paro). Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ una filtración asociada y $(\mathcal{T}, \mathcal{H})$ un espacio medible. Se llama* ***tiempo opcional o de paro*** *a la función medible $\tau : \Omega \to \mathcal{T}$ si para toda t, $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ [19].*

Ya con este recordatorio, ahora s´ se puede seguir avanzando sin mayor problema.

De nición 6.1.3. *Un proceso estocástico* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ *es* intercambiable *si su distribución es invariante ante permutaciones del conjunto de índices, i.e.*

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots) \stackrel{d}{=} (X_1, X_2, \ldots) \text{ para toda permutación } t_k \in \mathbb{N}.$$

La de nición anterior puede escribirse de manera más general en términos de traslaciones con tiempo opcional como sigue:

De nición 6.1.4. *Sean* τ *un tiempo opcional (o de paro) (Definición A.1.9) asociado a la filtración* $\mathcal{F}_t$ *(Definición A.1.8),* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ *un proceso estocástico y* θ_t *el operador de traslación (shift). Si* $\theta_\tau(X_1, X_2, \ldots) \stackrel{d}{=} (X_1, X_2, \ldots)$*, se dice que* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ *es* $\mathcal{F}_t$*-estacionario.*

En el caso en que $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$, las de niciones 6.1.3 y 6.1.4 son equivalentes [20].

El siguiente resultado asegura que un proceso estacionario, construido por medio de transformaciones que preservan la medida sea intercambiable (y por tanto contractivo y reversible).

Proposición 6.1.1. *Sea* $Y_t := f(T^t(X_0))$ *donde* T *preserva la medida de probabilidad de la variable aleatoria* X_0*,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *medible y* τ *un tiempo opcional para la filtración* $\mathcal{F}_t$*. Entonces, el proceso* $\{Y_t\}$ *es intercambiable si la función* f *es invariante bajo* T *(Definición A.1.6).*

Demostración. La demostración se hace viendo que el proceso $\{Y_t\}$ es $\mathcal{F}_t$-estacionario, es decir tiene su distribución invariante ante traslaciones con tiempo opcional θ_τ.

Sea f una función invariante bajo T, es decir $f(T(x)) = f(x)$ *c.s.* respecto de la medida de probabilidad de la variable aleatoria X_0,

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \theta_\tau(Y_0, Y_1, \ldots) &= (Y_\tau, Y_{\tau+1}, \ldots) \\
&= \left(\sum_{t=0}^{\infty} Y_t \mathbb{1}_{\{\tau=t\}}, \sum_{t=0}^{\infty} Y_{t+1} \mathbb{1}_{\{\tau=t\}}, \ldots\right) \\
&= \left(\sum_{t=0}^{\infty} f(T^t(X_0))\mathbb{1}_{\{\tau=t\}}, \sum_{t=0}^{\infty} f(T^{t+1}(X_0))\mathbb{1}_{\{\tau=t\}}, \ldots\right) \\
&= (f(X_0), f(T(X_0)), \ldots) \\
&= (Y_0, Y_1, \ldots) \ \textit{c.s.} \text{ y en } L^p, \text{ por tanto en distribución} \\
&\Leftrightarrow f \text{ es una función invariante bajo la transformación } T.
\end{aligned}
$$

□

Aunque f no sea invariante, la existencia de una función invariante f^* queda garantizada por el Teorema ergódico (A.2.2) siempre que $f \in L^p, 1 \le p < \infty$.

6.2. Contractividad, Reversibilidad y Rotabilidad

En lo que sigue se enuncian las de niciones de contractividad y reversibilidad, junto con algunos comentarios.

De nición 6.2.1. *Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ es* contractivo *si toda subsucesión tiene la misma distribución, i.e.*

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots) \overset{d}{=} (X_1, X_2, \ldots) \text{ para todos los enteros positivos } t_1 < t_2 < \ldots$$

[20].

De nición 6.2.2. *Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ es* reversible *si para toda k y todo conjunto de índices $t_1, \ldots, t_k$ se cumple que*

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}) \overset{d}{=} (X_{t_k}, X_{t_{k-1}}, \ldots, X_{t_1})$$

[15, 29, 43].

Como se indica al inicio de la sección anterior, los conceptos de contractividad y reversibilidad son implicados por el de intercambiabilidad. Por esta razón, si se satisfacen las hipótesis de la Proposición 6.1.1 se tienen estas propiedades.

De nición 6.2.3. *Un proceso estocástico con valores reales* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ *es* rotable o con simetr´a esférica *si para toda n su distribución es invariante ante transformaciones ortogonales, i.e.*

$$A\,(X_1, X_2, \ldots, X_n)' \overset{d}{=} (X_1, X_2, \ldots, X_n)' \text{ donde } A \text{ es una matriz ortogonal } (A' = A^{-1})$$

[1, 3, 20].

El siguiente resultado caracteriza los procesos rotables en términos de procesos gaussianos independientes.

Teorema 6.2.1. *Un proceso estocástico* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ *es* rotable *si y sólo si* $X_t = \rho\eta_t$ *c.s.* $t \in \mathbb{N}$, *para alguna sucesión* $\{\eta_t\}$ *iid con distribución* $N(0, 1)$ *y una variable aleatoria (única c.s.)* $\rho \geq 0$ *independiente de* $\{\eta_t\}$ *[20].*

Fácilmente puede construirse un proceso estacionario que sea rotable de la siguiente manera.

Corolario 6.2.1. *Bajo las condiciones del Teorema anterior. Si la variable aleatoria* ρ *tiene densidad, existe una transformación* T *que preserva la medida del producto* $\rho\eta_0$. *Por el Teorema 6.2.1 el proceso estrictamente estacionario* $X_n = T^n(\rho\eta_0)$ *es rotable.*

Demostración. Sean $f_{\eta_0}(\eta_0) \wedge f_\rho(\rho)$ las densidades de las variables aleatorias $\eta_0 \wedge \rho$ respectivamente. La distribución del producto $Z := \rho\eta_0$, dada la independecia entre $\rho \geq 0 \wedge \eta_0$ se calcula fácilmente:

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= P\left(\eta_0 \leq \frac{z}{\rho}\right) \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\frac{z}{\rho}} f_{(\eta_0,\rho)}(\eta_0, \rho)\, d\eta_0\, d\rho \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\frac{z}{\rho}} f_{\eta_0}(\eta_0) f_\rho(\rho)\, d\eta_0\, d\rho \\ &= \int_0^\infty \Phi\left(\frac{z}{\rho}\right) f_\rho(\rho)\, d\rho. \end{aligned}$$

donde $\Phi(x)$ es la función de distribución acumulada de una medida $N(0, 1)$. Claramente esta distribución tiene densidad (simplemente hay que derivar respecto a z) por lo que es invertible y por el Teorema 6.2.1 existe una transformación T que la preserva. □

Cap´tulo 7

Conclusiones

Lo primero que se puede decir es que en este trabajo se muestra una manera para construir transformaciones que preservan medidas de probabilidad a través de la función de distribución asociada a dicha medida siempre que sea invertible y de transformaciones que preserven la medida de Lebesgue en el intervalo $[0, 1]$. El resultado más importante del trabajo es el Teorema 3.2.1. El resultado anterior no sólo permite construir transformaciones que preservan medidas de probabilidad sino que también permite construir transformaciones que preserven la medida de Lebesgue en el intervalo $[0, 1]$. Estas dos cosas son muy interesantes porque no existen muchas formas de lograrlo. Además, es importante notar, que el comportamiento (la grá ca) de la transformación $T(x) := F^{-1}(G(F(x)))$ depende casi totalmente del comportamiento (la grá ca) de la transformación G como se indica en el cap´tulo 3.

Aunado a lo anterior, también hay que mencionar que si la transformación G es ergódica respecto a la medida de Lebesgue en $[0, 1]$, la transformación T construida según el Teorema 3.2.1 es ergódica. Para terminar con este punto, se recuerda del cap´tulo 2 que si una función f es invariante bajo G entonces la función $g(x) := F^{-1}(f(F(x)))$ es invariante bajo la medida μ cuya función de distribución es F. Asimismo, si T es ergódica respecto a una medida de probabilidad μ, la transformación $G(x) := F(T(F^{-1}(x)))$ es ergódica respecto de la medida de Lebesgue en $[0, 1]$ y si g es una función invariante bajo T, entonces la función $f(x) :=$

$F(g(F^{-1}(x)))$ es una función invariante bajo G.

Como consecuencia de ello pueden construirse diferentes varinates de procesos estrictamente estacionarios, entre ellos muchos de los procesos que se usan en series de tiempo como los ARMA y tipo GARCH. Claramente es posible construir muchos otros procesos estrictamente estacionarios como se indica en el cap´tulo 5. Por otro lado es posible construir procesos no sólo estrictamente estacionarios sino que veri can simetr´as más fuertes como las mencionadas en el cap´tulo 6, (contractividad, intercambiabilidad, reversibilidad y rotabilidad) imponiendo claro algunas condiciones adicionales.

Algo interesante que puede hacerse y que no toca este trabajo se re ere a la estimación y asignación de alguno de los posibles modelos a un conjunto de datos. Esto es interesante porque aunque la medida estacionaria sea la misma para cada posible proceso, la manera como se genera cada uno de ellos es distinta. Esa manera depende fundamentalmente de la forma funcional de la función g descrita en el cap´tulo 5.

Asimismo, hay que mencionar que en este trabajo no se explora el problema estad´stico asociado con estos procesos estrictamente estacionarios. Es decir, para complementar todo esto de una manera más sólida falta mostrar que clase de datos pueden modelarse adecuadamente con los modelos aqu´ descritos, cómo hacer las estimaciones correspondientes, etc. Finalmente hay que mencionar que el problema de cómo construir transformaciones que preservan la medida para medidas in nitas, o para medidas cuya función de distribución no es invertible sigue presente. Desde mi punto de vista estos dos problemas son muy importantes e interesantes. Espero que pueda realziar algo de esto en trabajos futuros.

En el caso de los procesos gaussianos y de los procesos α-estables existe una representación integral que permite trabajarlos y estudiarlos por otros medios (martingalas, medidas espectrales, medidas α-estables, etc.). Aún as´, hay una relación estrecha entre los procesos $S\alpha S$ estacionarios y las transformaciones que preservan la medida, como se indica en el cap´tulo 2 y el apéndice B.

Apéndice A

Definiciones y Resultados auxiliares

A.1. Definiciones

Definición A.1.1. *Un proceso estocástico* $\{\xi_t : t \in \mathcal{T}\}$ *que toma valores en un espacio medible es* ***estrictamente estacionario*** *si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes ante traslaciones i.e.* $\{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_n}\} \overset{d}{=} \{\xi_{t_{1+h}}, \xi_{t_{2+h}}, \ldots, \xi_{t_{n+h}}\}$ *para todo conjunto de índices* $h, t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$. *Lo anterior es equivalente (cuando* $\mathcal{T} = \mathbb{N}$*) a que se verifique la condición* $\theta(\xi_0, \xi_1, \ldots) \overset{d}{=} (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ *[19, 29].*

Definición A.1.2. *Un proceso estocástico* $\{\xi_t : t \in \mathcal{T}\}$ *que toma valores en un espacio medible es* ***débilmente estacionario***[1] *si se verifican las dos condiciones siguientes:*

- $\mathbb{E}(\xi_t) = k < \infty$ *para todo* t,
- $cov\,(\xi_{t+h}, \xi_t)$ *no depende de* t *para cada* h *[8, 29].*

Definición A.1.3. *Un proceso estocástico* $\{\xi_t\}$ *se llama* ***ruido blanco (white noise)*** *con media cero y varianza* $\sigma^2 \Leftrightarrow \mathbb{E}(\xi_t) = 0 \;\; \forall t \in \mathbb{N} \;\; \wedge cov\,(\xi_h, \xi_0) = \begin{cases} \sigma^2 & si\ h = 0, \\ 0 & si\ h \neq 0. \end{cases}$ *[29].*

Definición A.1.4. *(Preservación de la medida). Dados los espacios de medida* $(X, \mathcal{S}, \mu)$, $(Y, \mathcal{U}, \sigma)$ *y* $T : X \to Y$ *una función medible, se dice que* T ***preserva la medida*** *entre*

[1]Un proceso estrictamente estacionario $\{\xi_t\}$ es también débilmente estacionario si $\mathbb{E}(\xi_t^2) < \infty$ para todo t. La implicación en el sentido inverso es cierta si $\{\xi_t\}$ es gaussiano.

*$(X, \mathcal{S}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{U}, \sigma)$ si $\sigma(B) = \mu(T^{-1}(B))$ $\forall B \in \mathcal{U}$. Si $X = Y$ y $\mu = \sigma$ a la función T se le llama una **transformación que preserva la medida** [10,19,42].*

Definición A.1.5. *(Ergodicidad). Una transformación T que preserva la medida en el espacio de probabilidad $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es **ergódica** si para todo $A \in \mathcal{A}$ tal que $T^{-1}(A) = A$ se verifica que $\mu(A) = 0$ ó $\mu(A) = 1$. i.e. $\{\emptyset, X\} = \left\{A \in \mathcal{A} : T^{-1}(A) = A\right\}$ [10,19,42].*

Definición A.1.6. *(función invariante). Una función $f : X \to X$ tal que $f(T(x)) = f(x)$ c.s. se llama **función invariante** bajo T. Donde T es una transformación que preserva la medida en el espacio $(X, \mathcal{A}, \mu)$ [42].*

Definición A.1.7. *(ARMA(p,q)). Un proceso $\{X_t\}$ **autoregresivo de promedios móviles** está definido por la ecuación $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + \xi_t + \vartheta_1 \xi_{t-1} + \ldots + \vartheta_q \xi_{t-q}$ donde $\{\xi_t\}$ es un ruido blanco y $\phi_{t=1,\ldots,p}$, $\vartheta_{t=1,\ldots,q}$ son constantes. El proceso $\{X_t\}$ tiene las siguientes características[2] dependiendo de los polinomios $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p \;\wedge\; \vartheta(B) = 1 + \vartheta_1 B + \ldots + \vartheta_q B^q$ que se suponen sin raíces comunes (B es el operador de retraso, $B^j X_t := X_{t-j}$):*

- *$\{X_t\}$ es el **único proceso débilmente estacionario** si $\phi(z) \neq 0$ con $|z| = 1$,*
- *$\{X_t\}$ es **causal** si $\phi(z) \neq 0$ con $|z| \leq 1$,*
- *$\{X_t\}$ es **invertible** si $\vartheta(z) \neq 0$ con $|z| \leq 1$ [8,23,29].*

Definición A.1.8. *(Filtración). Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. A la familia de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ se le llama **filtración** si $\{\mathcal{F}_t\}$ es no decreciente y $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ para toda t [19].*

Definición A.1.9. *(tiempo opcional o de paro). Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ una filtración asociada y $(\mathcal{T}, \mathcal{H})$ un espacio medible. Se llama **tiempo opcional o de paro** a la función medible $\tau : \Omega \to \mathcal{T}$ si para toda t, $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ [19].*

Definición A.1.10. *Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ es **contractivo** si toda subsucesión tiene la misma distribución, i.e.*

[2] Para detalles acerca de las propiedades de causalidad e invertibilidad en procesos ARMA ver [8,29].

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots) \stackrel{d}{=} (X_1, X_2, \ldots) \text{ para todos los enteros positivos } t_1 < t_2 < \ldots$$

[20].

Definición A.1.11. *Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ es **intercambiable** si su distribución es invariante ante permutaciones del conjunto de índices, i.e.*

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots) \stackrel{d}{=} (X_1, X_2, \ldots) \text{ para toda permutación } t_k \in \mathbb{N}.$$

*Una definición más general en términos de filtraciones y tiempos opcionales. Si $\theta_\tau(X_1, X_2, \ldots) \stackrel{d}{=} (X_1, X_2, \ldots)$, se dice que $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{F}_t$-**estacionario**. En el caso en que $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \le t)$, $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ las dos definiciones son equivalentes [20].*

Definición A.1.12. *Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ es **reversible** si para toda k y todo conjunto de índices $t_1, \ldots, t_k$ se cumple que*

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}) \stackrel{d}{=} (X_{t_k}, X_{t_{k-1}}, \ldots, X_{t_1})$$

[15, 29, 43].

Definición A.1.13. *Un proceso estocástico con valores reales $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ es **rotable o con simetría esférica** si para toda n su distribución es invariante ante transformaciones ortogonales, i.e.*

$$A\,(X_1, X_2, \ldots, X_n)' \stackrel{d}{=} (X_1, X_2, \ldots, X_n)' \text{ donde } A \text{ es una matriz ortogonal } (A' = A^{-1})$$

[1, 3, 20].

Definición A.1.14. *(Distribución Hiperbólica Generalizada GH). La variable aleatoria X tiene **distribución hiperbólica generalizada GH** si su densidad está dada por*

$$GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = a(\lambda, \alpha, \beta, \delta)\,\{\delta^2 + (x-\mu)^2\}^{\lambda - \frac{1}{2}}\, K_{\lambda - \frac{1}{2}}\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}\right) exp(\beta(x-\mu))$$

con

$$a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{2\pi}\alpha^{\lambda - \frac{1}{2}}\delta^\lambda K_\lambda\left(\delta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)}$$

$x \in \mathbb{R}$ y K_ν la función de Bessel modificada de tercer tipo con índice ν.

Parámetros:

- $\alpha > 0$ *forma,*
- β *con* $0 \leq |\beta| < \alpha$ *determina el sesgo,*
- $\mu \in \mathbb{R}$ *localización,*
- $\delta > 0$ *factor de escala,*
- $\lambda \in \mathbb{R}$ *se relaciona con la densidad en las colas de la distribución.*

Esta densidad es muy interesante porque contiene a muchas otras densidades como la normal, t-student, gaussiana inversa normal, entre otras [30].

Definición A.1.15. *Un proceso $\{X_t\}_{t\in\mathcal{T}}$, $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ se llama **continuo en probabilidad** si $X_s \xrightarrow{prob} X_t$, para todo $s, t \in \mathcal{T}$ tal que $s \to t$ [19].*

Definición A.1.16. *Sean $\xi, \xi_1, \xi_2, \cdots$ variables aleatorias definidas en el espacio de probabilidad $(X, \mathcal{A}, \mu)$, que toman valores en un espacio métrico (S, ρ). Se dice que ξ_n **converge en probabilidad** a ξ ($\xi_n \xrightarrow{prob} \xi$) si,*

$$lim_{n\to\infty}\mu\left(x \in X : \rho\left(\xi_n(x), \xi(x)\right) > \epsilon\right) = 0, \quad \forall\epsilon > 0.$$

[19].

A.2. Resultados

Lema A.2.1. *Si $\mathcal{A}$ es un π-sistema y $\mathcal{B}$ es un λ-sistema que contiene a $\mathcal{A}$, entonces $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$. (Lema de Clases Monótonas) [19].*

Teorema A.2.1. *Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de probabilidad, ξ una variable aleatoria que toma valores en X con distribución μ y $T : X \to X$ una función medible. T **preserva la medida** $\mu \Leftrightarrow$ el proceso estocástico $\{T^n \circ \xi\}$ es **estrictamente estacionario**. Además $\{f(T^n \circ \xi)\}$ es estrictamente estacionario para cualquier función medible $f : X \to X$ [19].*

Teorema A.2.2. *(Teorema ergódico, Birkhoff (puntual), von Neumann($L^p, 1 \leq p < \infty$)). Sea T una transformación que preserva la medida en el espacio de probabilidad* $(X, \mathcal{A}, \mu) \wedge$ $f \in L^p$. *Entonces,*

- ***Birkhoff, con*** $p = 1$ ***y*** μ ***medida*** σ***-finita***: $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) \longrightarrow f^* \in L^1$ *c.s y* f^* *es una función invariante bajo T. Si* μ *es finita, además* $\int f^* d\mu = \int f d\mu$. *Si T es ergódica,* $f^* = cte$ *c.s. y* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) = \int f d\mu$ *c.s.*

- ***von Neumann***: $\exists f^* \in L^p$ *invariante bajo T tal que* $\left\| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) - f^* \right\|_p \rightarrow 0$

[42].

Teorema A.2.3. *Un proceso estocástico* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ *es* ***rotable*** *si y sólo si* $X_t = \beta\eta_t$ *c.s.* $t \in \mathbb{N}$, *para alguna sucesión* η_t *iid con distribución* $N(0,1)$ *y una variable aleatoria (única c.s.)* $\beta \geq 0$ *independiente de* $\{\eta_t\}$ *[20].*

Apéndice B

Procesos gaussianos y procesos α-estables

En este anexo se presenta un pequeño resúmen de los procesos gaussianos. Esto incluye la definición, sus propiedades principales y algunos ejemplos muy conocidos. Asimismo, en la segunda sección se presenta la definición, propiedades y ejemplos de procesos α-estables. Es importante mencionar que los procesos α-estables incuyen a los gaussianos, pero además tienen otras características que los procesos gaussianos no tienen, por ejemplo, tienen colas más pesadas y varianza infinita. Además los procesos α-estables se relacionan estrechamente con los procesos doblemente estacionarios mencionados en el capítulo 2.

B.1. Procesos gaussianos

Se recuerda que en Teorema 6.2.1 caracteriza los procesos rotables en términos de procesos gaussianos independientes y además puede construirse un proceso gaussiano estacionario que es rotable, por el método que se presenta en este trabajo y está descrito en el capítulo 3.

B.1.1. De nición y Propiedades

De nición B.1.1. *Una variable aleatoria ξ con valores reales es una **variable aleatoria gaussiana** si su función característica está dada por la expresión,*

$$\mathbb{E}\left(\exp(iu\xi)\right) = \exp\left(iu\gamma - \frac{\sigma^2 u^2}{2}\right), \quad \gamma, \sigma \in \mathbb{R}.$$

Gracias a las propiedades de las funciones caracter´sticas se ve fácilmente que $\mathbb{E}(\xi) = \gamma$ y $var(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2 = \sigma^2$ siempre que la variable aleatoria ξ sea gaussiana y determinan su distribución.

De nición B.1.2. *Un proceso $\{\xi_n\}_{n\in\mathcal{T}}$ con valores en $\mathbb{R}$ es un **proceso gaussiano** si la variable aleatoria $\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_{t_k}$ es una variable aleatoria gaussiana para todo $n \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathcal{T}$, y $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$.*

Una caracter´stica de los procesos gaussianos es que su distribución queda determinada por sus dos primeros momentos: la media y la covarianza, como se indica en la siguiente proposición. Por esta razón si un proceso gaussiano es débilmente estacionario, es también estrictamente estacionario (ver De niciones A.1.1,A.1.2).

Proposición B.1.1. *La distribución de un proceso gaussiano $\{\xi_n\}_{n\in\mathcal{T}}$, está determinada por las funciones $\mathbb{E}(\xi_n)$ y $\Sigma(s,t) = cov(\xi_s, \xi_t)$, $s, t \in \mathcal{T}$.*

Demostración. Sean $\{\xi_n\}_{n\in\mathcal{T}}$ y $\{\zeta_n\}_{n\in\mathcal{T}}$ dos procesos gaussianos con las misma media y las mismas covarianzas. Entonces, las variables aleatorias $\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_{t_k}$ y $\sum_{k=1}^{n} a_k \zeta_{t_k}$ tienen la misma media y varianza para todo $n \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathcal{T}$, y $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, y como las dos variables son gaussianas su distribución es la misma. Como $\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_{t_k} \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k \zeta_{t_k}$, se sigue del Teorema de Crámer-Wold que $(\xi_{t_1}, \cdots, \xi_{t_n}) \stackrel{d}{=} (\zeta_{t_1}, \cdots, \zeta_{t_n})$ par todo $n \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathcal{T}$, por lo cual $\{\xi_n\}_{n\in\mathcal{T}} \stackrel{d}{=} \{\zeta_n\}_{n\in\mathcal{T}}$. □

Teorema B.1.1. *Teorema de Crámer-Wold. Sean $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots$ variables aleatorias con valores en $\mathbb{R}^d$. Entonces, ξ_n converge en distribución a ξ_0 si y sólo si $\sum_{k=1}^{d} u_k \xi_{n,k}$ converge en distribución a $\sum_{k=1}^{d} u_k \xi_{0,k}$ para todo $u = (u_1, u_2, \cdots, u_d) \in \mathbb{R}^d$.*

Demostración. Por el teorema de continuidad de Lévy (ver [19]), $\sum_{k=1}^{d} u_k \xi_{n,k}$ converge en distribución a $\sum_{k=1}^{d} u_k \xi_{0,k}$, si y sólo si sus funciones caracter´sticas son tales que

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(i\left\langle u,\xi_n\right\rangle\right)\right)=\mathbb{E}\left(\exp\left(i\sum_{k=1}^{d}u_k\xi_{n,k}\right)\right)\rightarrow\mathbb{E}\left(\exp\left(i\sum_{k=1}^{d}u_k\xi_{0,k}\right)\right)=\mathbb{E}\left(\exp\left(i\left\langle u,\xi_0\right\rangle\right)\right),$$

lo que ocurre si y sólo si ξ_n converge en distribución a ξ_0. El s´mbolo $\langle u, a\rangle = \sum_{k=1}^{d} u_k a_k$ es el producto interno en $\mathbb{R}^d$. □

Además los procesos gaussianos tienen la propiedad de ser procesos independientes si su función de covarianza $\Sigma(s,t)$ es cero [19]. Además, la función de covarianza $\Sigma(s,t)$ es positiva de nida. La de nición se escribe a continuación.

Una matriz A de tamaño nxn cuyos componentes son números reales, es positiva de nida si para todo $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ocurre que $aAa' \geq 0$, y estrictamente positiva de nida si $aAa' = 0$ implica que $a = 0$ en $\mathbb{R}^n$. Una función $\Sigma(t,s) : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ donde $\mathcal{T}$ es un conjunto arbitrario de ´ndices, se llama función positiva de nida si para todo $n \in \mathbb{N}, t_1, \cdots, t_n \in \mathcal{T}$, la matriz Σ de tamaño nxn, de nida por $\Sigma_{j,k} = \Sigma(t_j, t_k)$ es una matriz positiva de nida. De igual forma, una función $\{R(t), t \in \mathcal{T}\}$ es positiva de nida si la función $\Sigma_{s,t} := R(s-t)$ es positiva de nida.

Las últimas propiedades de los procesos gaussianos que se van presentar aqu´, tienen que ver con la forma de la función de covarianza de procesos gaussianos estacionarios y de procesos gaussianos de Markov.

De nición B.1.3. *Se dice que un proceso $\{\xi_n\}_{n\in\mathcal{T}}$ donde $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$, definido en el espacio de probabilidad $(X, \mathcal{A}, \mu)$, que toma valores en $(E, \mathcal{E})$ es un* ***proceso de Markov o markoviano*** *respecto a la filtración $\mathcal{F}_n$ (ver Definición A.1.8) si,*

- *ξ_n es medible respecto a $\mathcal{F}_n$, para cada $n \in \mathcal{T}$.*
- *El proceso cumple la propiedad de Markov: para cada $s < t, A \in \mathcal{E}$*

$$\mu\left(\xi_t \in A|\mathcal{F}_s\right) = \mu\left(\xi_t \in A|\xi_s\right).$$

Ya con la de nición de procesos markovianos, se puede mencionar una propiedad que describe los procesos markovianos en el caso gaussiano, en términos de la forma de las covarianzas del proceso. Esa propiedad es condición necesaria y su- ciente para que ese proceso sea markoviano. La demostración puede consultarse en [19].

Teorema B.1.2. *Un proceso gaussiano $\{\xi_n\}_{n\in\mathcal{T}}$ donde $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ es markoviano si y sólo si su función de covarianza $R_\xi(s,t) := cov(\xi_t, \xi_s)$ tiene la siguente forma,*

$$R_\xi(s,u) = \frac{R_\xi(s,t)R_\xi(t,u)}{R_\xi(t,t)}, \quad s \le t \le u \in \mathcal{T},$$

y se define $\frac{0}{0} = 0$. Si $\{\xi_n\}_{n\in\mathcal{T}}$ es estacionario y toma valores en $\mathbb{R}$, entonces,

$$R_\xi(s,t) = C\exp\left(-\beta\,|t-s|\right), \quad C, \beta \ge 0.$$

Sea $\{\xi_n\}_{n\in\mathcal{T}}$ un proceso gaussiano estacionario con valores en $\mathbb{R}$ y con función de covarianzas $R_\xi(s,t)$, $s,t \in \mathcal{T}$. Se sabe que $R_\xi(s,s+t)$ es una función positiva de nida, y que es continua si el proceso $\{\xi_n\}$ es continuo en probabilidad (ver De nición A.1.15). Si $R_\xi(s,s+t)$ es continua, el teorema de Bochner (ver [19]) permite representar a la función de covarianzas por medio de la expresión:

$$R_\xi(s,s+t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx)\mu(dx), \quad t \in \mathbb{R},$$

donde μ se conoce como **medida espectral** y es una medida nita y simétrica en $\mathbb{R}$.

B.1.2. Ejemplos

Ejemplo B.1.1. *Movimiento Browniano estándar. Un proceso $\{W_n\}_{n\ge 0}$ con media igual a cero se llama movimeinto Browniano estándar o proceso de Wiener si satisface,*

1. $W_0 = 0$.

2. *$\{W_n\}_{n\geq 0}$ tiene trayectorias continuas.*

3. *La función de covarianza del proceso está dada por $R_W(s,t) = min(s,t)$, para todo $s,t \geq 0$.*

Otras caracter´sticas de $\{W_n\}_{n\geq 0}$ es que tiene incrementos estacionarios e independientes, para cada $n > 0, W(n)$ tiene distribución $N(0,n)$. La más famosa integral estocástica se de ne con respecto al movimiento Browniano, para funciones cuadrado integrables (ver [19]).

Ejemplo B.1.2. *El proceso Ornstein-Uhlenbeck. Un proceso continuo $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ con media igual a cero se llama proceso Ornstein-Uhlenbeck estacionario de parámetros $C, \beta \geq 0$, si su función de covarianza $R_\xi(s,t)$ es de la forma,*

$$R_\xi(s,t) = C\exp\left(-\beta\,|t-s|\right), \forall s,t \geq 0.$$

Del Teorema B.1.2 se sigue que el proceso Ornstein-Uhlenbeck es el único proceso gaussiano markoviano que es estrictamente estacionario. Si $\{W_n\}_{n\geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar y $\lambda > 0$, el proceso $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ de nido por

$$\xi_n = \exp(-n\lambda)W_{\exp(2n\lambda)}$$

es un proceso Ornstein-Uhlenbeck.

Ejemplo B.1.3. *Puente Browniano. Sea $\{W_n\}_{n\geq 0}$ un movimiento Browniano estándar. El proceso $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ definido por*

$$Z_n = W_n - nW_1, \ \ \forall n \in [0,1],$$

se llama puente Browniano y su función de covarianza está dada por

$$R_Z(s,t) = \begin{cases} s(1-t) & si\ 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ t(1-s) & si\ 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Ejemplo B.1.4. *Movimiento Browniano fraccionario. Sea $H \in (0,1)$ y $\mathcal{T} = [0,a], \mathcal{T} = [0,\infty)$ ó $\mathcal{T} = \mathbb{R}$. Un proceso gaussiano, continuo y con media cero $\{B_n\}_{n\in\mathcal{T}}$, se llama movimiento Browniano fraccionario de parámetro de Hurst ó índice H, si su función de covarianzas está dada por,*

$$R_B(s,t) = \frac{1}{2}\left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H}\right), \ \ s,t \in \mathcal{T}.$$

B.2. Procesos α-estables

Aqu´ se presentan algunos ejemplos de procesos α-estables, as´ como su de nición y algunas propiedades. Estos procesos contienen a los gaussianos (si $\alpha = 2$) y presentan algunas similitudes con ellos, pero también varias diferencias. Por ejemplo, los procesos α-estables ($\alpha < 2$) tienen varianza in nita y si $\alpha < 1$ tienen media in nita cosa que no pasa con los gaussianos [38]. Los procesos estacionarios, simétricos α-estables están estrechamente relacionados con los procesos doblemente estacionarios mencionados en el cap´tulo 2.

B.2.1. De nición y Propiedades

De nición B.2.1. *Un proceso estocástico $\{\xi_n\}_{n\in\mathcal{T}}$ se llama α-**estable** (αS) si toda combinación lineal finita $\sum_{k=1}^{d} a_k \xi_{n_k}$ $n_k \in \mathcal{T}$ es una variable aleatoria α-estable αS.*

Por supesto ahora hay que dar la de nición de variable aleatoria αS.

De nición B.2.2. *Una variable aleatoria ξ es **estable** si para cualquier pareja de números positivos A, B existe un número positivo C y un número real D tal que*

$$A\xi_1 + B\xi_2 \overset{d}{=} C\xi + D \tag{B.2.1}$$

donde ξ_1, ξ_2 son copias independientes de ξ.

Si $D = 0$, la variable aleatoria ξ se llama estrictamente estable. Si ξ es una variable aleatoria estable, existe un $\alpha \in (0,2]$ tal que el número C en la ecuación B.2.1 satisface la siguiente relación, ver [38],

$$C^\alpha = A^\alpha + B^\alpha$$

Al número α se le conoce como índice de estabilidad o exponente característico. Así finalmente, se llega a la definición de una variable aleatoria alfa estable. De esta manera, una variable aleatoria estable ξ con índice α se le conoce como alfa estable (αS) y se acostumbra escribir $\xi \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \gamma)$, ver también Definición 2.2.9.

Si $\alpha = 2$, $S_2(\sigma, 0, \gamma) = N(\gamma, 2\sigma^2)$, ver Definición 2.2.9. Es posible construir procesos α-estables definidos a través de integrales respecto de medidas α-estables. En lo que sigue, primero se da la definición de medida α-estable y luego se define la integral mencionando algunas de sus propiedades.

Definición B.2.3. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad, y sean*

- $g_{\mathbb{R}}(X) = \{g : X \to \mathbb{R} : g$ *es medible* $\}$, *es decir,* $g_{\mathbb{R}}(X)$ *es el conjunto de variables aleatorias con valores en* $\mathbb{R}$ *definidas en* $(X, \mathcal{A}, \mu)$.
- $(E, \mathcal{E}, m)$ *un espacio de medida.*
- $\beta : E \to [-1, 1]$, *una función medible.*
- $\mathcal{E}_0 = \{A \in \mathcal{E} : m(A) < \infty\}$.

Se llama ***medida aleatoria α-estable (**$\alpha \in (0, 2]$**) con medida de control*** *m* ***e intensidad*** *β a una función independientemente disjunta, σ-aditiva $M : \mathcal{E}_0 \to g_{\mathbb{R}}(X)$ tal que para cada $A \in \mathcal{E}_0$,*

$$M(A) \sim S_\alpha\left([m(A)]^{\frac{1}{\alpha}}, \frac{\int_A \beta(x) m(dx)}{m(A)}, 0\right).$$

La frase independientemente disjunta significa que si $A_1, A_2, \cdots, A_k \in \mathcal{E}_0$ son disjuntos, entonces las variables aleatorias $M(A_1), M(A_2), \cdots, M(A_k)$ son independientes. Finalmente, σ-aditiva quiere decir que si $A_1, A_2, \cdots$ pertenecen a $\mathcal{E}_0$, son disjuntos y $\bigcup_{k=1}^\infty A_k \in \mathcal{E}_0$, entonces, $M\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) = \sum_{k=1}^\infty M(A_k)$ *c.s.*

Sea M una medida α-estable en $(E, \mathcal{E})$ con medida de control m e intensidad β (ver Definición B.2.3). Sea $\mathcal{E}, = \{A \in \mathcal{E} : m(A) < \infty\}$. Se quiere definir la siguiente integral,

$$I(f) = \int_E f(x)M(dx)$$

para todas las funciones medibles $f : E \to \mathbb{R}$ que pertenecen al siguiente conjunto (recordar que $\alpha \in (0, 2]$):

$$F = \left\{ f : E \to \mathbb{R} : \begin{cases} \int_E \left|f(x)\right|^{\alpha} m(dx) < \infty & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \int_E \left|f(x) \ln \left|f(x)\right| \beta(x)\right| m(dx) < \infty & \text{si } \alpha = 1. \end{cases} \right\} \tag{B.2.2}$$

Hay que notar que el conjunto F es un espacio lineal. Para la de nición de $I(f)$ se va a proceder como es común en estos casos, primero se de ne la integral para funciones simples, y después se generaliza para las demás funciones que pertenecen al conjunto F por medio del hecho de que $\{I(f), f \in F\}$ es un proceso continuo en probabilidad, ver De nición A.1.15.

Antes de de nir la integral se presentan dos propiedades importantes de las variables aleatorias α-estables. Su demostración se sigue fácilmente de la De nición 2.2.9.

Proposición B.2.1. *Si ξ_1, ξ_2 son variables aleatorias independientes con $\xi_i \sim S_\alpha(\sigma_i, \beta_i, \gamma_i)$. Entonces, $(\xi_1 + \xi_2) \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \gamma)$, donde $\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta = \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.*

Proposición B.2.2. *Si $\xi \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \gamma)$. Entonces, para todo $a \in \mathbb{R}$ distinto de cero,*

$$a\xi \sim \begin{cases} S_\alpha\left(|a|\,\sigma, \beta \,\text{sgn}(a), a\gamma\right) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ S_1\left(|a|\,\sigma, \beta \,\text{sgn}(a), a\gamma - \frac{2a}{\pi}\ln(|a|)\sigma\beta\right) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Para una función simple $f(x) = \sum_{k=1}^n c_k M(A_k)$, donde los conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{E}$, y son disjuntos se de ne,

$$I(f) = \int_E f(x)M(dx) = \sum_{k=1}^{n} c_k M(A_k). \tag{B.2.3}$$

$I(f)$ es lineal para funciones simples. Como M es una medida α-estable, las variables aleatorias $M(A_1), \cdots, M(A_n)$ son independientes (ver De nición B.2.3). De las proposiciones B.2.1, B.2.2 se sigue que para funciones simples $f \in F$,

$$I(f) \sim S_\alpha(\sigma_f, \beta_f, \gamma_f)$$

donde,

$$\begin{cases} \sigma_f = \left(\int_E \left|f(x)\right|^\alpha m(dx)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ \beta_f = \frac{\int_E \left|f(x)\right|^\alpha sgn(f(x))\beta(x)m(dx)}{\int_E \left|f(x)\right|^\alpha m(dx)} \\ \gamma_f = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \frac{-2}{\pi} \int_E f(x)\beta(x) \ln\left|f(x)\right| m(dx) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases} \end{cases} \tag{B.2.4}$$

Ahora, para cualquier $f \in F$, se puede elegir una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples que pertenecen a F que cumplen las siguientes condiciones,

$$\begin{cases} f_n(x) \to f(x), & c.s. \text{ respecto a } \mu. \\ \left|f_n(x)\right| \leq h(x), & \text{para toda } n, x \text{ y alguna } h \in F. \end{cases} \tag{B.2.5}$$

Por ejemplo, la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{n} & \text{si } \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}, k = 0, 1, \cdots, n^2 - 1, \\ \frac{-k}{n} & \text{si } \frac{-(k+1)}{n} < f(x) \leq \frac{-k}{n}, k = 0, 1, \cdots, n^2 - 1, \\ 0 & \text{si } \left|f(x)\right| \geq n. \end{cases}$$

cumple las condiciones mencionadas y donde $h(x) = \left|f(x)\right|$. As´, la sucesión $\{I(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, converge en probabilidad para toda sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples que pertenecen a F y cumplen la condiciones dadas en B.2.5, ver [38]. Ahora se de ne la integral $I(f)$ para toda $f \in F$ como sigue (recordar que μ es la medida del espacio de probabilidad subyacente):

$$I(f) := I \tag{B.2.6}$$

donde $I(f_n) \xrightarrow{prob} I$, y f_n cumple las condiciones dadas en B.2.5.

La demostración de la proposiciones B.2.3, B.2.4, B.2.5, B.2.6 y B.2.7 puede consultarse en [38].

Proposición B.2.3. *La integral $I(f)$ es lineal y además $I(f) \sim S_\alpha(\sigma_f, \beta_f, \gamma_f)$ para toda $f \in F$, donde σ_f, β_f y γ_f están dados por las ecuaciones B.2.4.*

Proposición B.2.4. *Sea $\xi_k = \int_E f_k(x)M(dx), k = 1, 2, \cdots$ y $\xi = \int_E f(x)M(dx)$, donde M es una medida α-estable con medida de control m e intensidad β. Entonces,*

$$\xi_k \xrightarrow{prob} \xi$$

si y sólo si,

$$lim_{k\to\infty} \int_E \left| f_k(x) - f(x) \right|^\alpha m(dx) = 0$$

y cuando $\alpha = 1$, si

$$lim_{k\to\infty} \int_E (f_k(x) - f(x)) \ln \left| f_k(x) - f(x) \right| \beta(x) m(dx) = 0$$

Proposición B.2.5. *Sean $\xi_1 = \int_E f_1(x)M(dx)$ y $\xi_2 = \int_E f_2(x)M(dx)$, donde M es una medida α-estable con medida de control m, intensidad β y $\alpha \in (0, 2)$. Entonces ξ_1 y ξ_2 son independientes si y sólo si*

$$f_1(x) f_2(x) \equiv 0 \;\; c.s. \text{ respecto a } m \text{ en } E.$$

Proposición B.2.6. *Toda variable aleatoria $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ con valores en $\mathbb{R}^n$ α-estable tiene una representación de la siguiente forma,*

$$\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \stackrel{d}{=} \left(\int_E f_1 M(dx), \cdots, \int_E f_n M(dx) \right) + \eta$$

donde

- *$(E, \mathcal{B}(E))$ es un espacio medible apropiado*[1].
- *M tiene medida de control m e intensidad $\beta(x) = 1$.*
- *$f_k : E \to \mathbb{R}$, $k = 1, \cdots, n$.*

[1]Básicamente E es la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$ para una norma arbitraria $\|\cdot\|$ de nida en $\mathbb{R}^n$, y $\mathcal{B}(E)$ es su σ-álgebra de Borel. Ver [38].

- $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Proposición B.2.7. *Sea $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ una variable aleatoria α-estable de dimensión n. Entonces,*

$$\mathbb{E}\left(|\xi_1|^{p_1} \cdots |\xi_1|^{p_n}\right) < \infty$$

si y sólo si

$$p_{k_1} + \cdots + p_{k_n} < \alpha \text{ para todo } \{k_1, \cdots, k_n\} \subset \{1, \cdots, n\}$$

tales que

$$m\left(x \in E : f_{k_1}(x) \cdots f_{k_n}(x) \neq 0\right) > 0, \text{ y}$$

$$m\left(x \in E : f_{k_1}(x) \cdots f_{k_n}(x), f_i(x) \neq 0\right) = 0 \text{ para cualquier } i \notin \{k_1, \cdots, k_n\},$$

donde m es la medida de control asociada al proceso α-estable ξ, ver Proposición B.2.6.

La proposición B.2.6 asegura que si $\alpha < 2$, toda variable aleatoria α-estable tiene varianza in nita, y si $\alpha < 1$, toda variable aleatoria α-estable también tiene media in nita.

B.2.2. Ejemplos

Para nalizar este cap´tulo se presentan algunos ejemplos de procesos simétricos α-estables ($S\alpha S$) y tienen mucho parecido con algunos procesos gaussianos conocidos.

Ejemplo B.2.1. *Movimiento de Lévy $S\alpha S$. Sea*

$$X_t = \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{x \leq t\}}(x) M(dx) = \int_0^t M(dx), t \geq 0.$$

donde M es una medida $S\alpha S$ en $[0, \infty)$ con medida de control $m(dx) = dx$ (m es la medida de Lebesgue en $[0, \infty)$). Además, $X(0) = 0$ c.s. (respecto a la medida del espacio de probabilidad subyacente),

$$X_t - X_s = \int_s^t M(dx) = M([s,t]) \sim S_\alpha(|t-s|^{\frac{1}{\alpha}}, 0, 0).$$

Este proceso inicia en cero, tiene incrementos estacionarios e indpendientes y sus distribuciones finito dimensionales son SαS.

Ejemplo B.2.2. *Promedios móviles SαS. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right|^\alpha dx < \infty$ con $\alpha \in (0,2]$. Se define,*

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)M(dx), t \in \mathbb{R},$$

donde M es una medida SαS en $\mathbb{R}$ con medida de control $m(dx) = dx$ (m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$). Al proceso X_t se le llama proceso de promedios móviles SαS, y es estacionario.

Ejemplo B.2.3. *Proceso Ornstein-Uhlenbeck. Sea $\lambda > 0$ y M una medida SαS en $\mathbb{R}$ con medida de control $m(dx) = dx$ y $\alpha \in (0,2]$. Se define,*

$$X_t = \int_{-\infty}^{t} \exp(-\lambda(t-x))M(dx), t \in \mathbb{R},$$

Al proceso X_t se le llama proceso de Ornstein-Uhlenbeck y es un proceso de promedios móviles donde $f(x) = \exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{[0,\infty)}, x \in \mathbb{R}$ y por esa razón es estacionario. Para todo $s < t$,

$$X_t - \exp(-\lambda(t-s))X_s = \int_s^t \exp(-\lambda(t-x)M(dx))$$

es una variable aleatoria SαS. En el caso gaussiano $\alpha = 2$, el proceso Ornstein-Uhlenbeck es el único proceso gaussiano continuo y markoviano que es estacionario. Cuando $0 < \alpha < 2$ existe al menos otro proceso markoviano estacionario SαS y aparece en el ejemplo B.2.4.

Ejemplo B.2.4. *Proceso Ornstein-Uhlenbeck revertido. Sea $\lambda > 0$ y M una medida SαS en $\mathbb{R}$ con medida de control $m(dx) = dx$ y $\alpha \in (0,2]$. Se define,*

$$X_t = \int_t^{\infty} \exp(-\lambda(x-t))M(dx), t \in \mathbb{R},$$

Al proceso X_t se le llama proceso revertido de Ornstein-Uhlenbeck y es un proceso de promedios móviles donde $f(x) = \exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{[0,\infty)}, x \in \mathbb{R}$ y por esa razón es estacionario. Para todo $s < t$,

$$X_t - \exp(-\lambda(s-t))X_s = \int_t^s \exp(-\lambda(x-t)M(dx)).$$

El proceso revertido de Ornstein-Uhlenbeck es markoviano, y en el caso gaussiano ($\alpha = 2$) coincide con el proceso Ornstein-Uhlenbeck, pero cuando $0 < \alpha < 2$, el proceso Ornstein-Uhlenbeck y el proceso Ornstein-Uhlenbeck revertido son distintos, ver [38].

Ejemplo B.2.5. *Movimiento lineal estable bien balanceado fraccionario . Sea $\lambda > 0$ y M una medida $S\alpha S$ en $\mathbb{R}$ con medida de control $m(dx) = dx$ y $\alpha \in (0, 2]$. Se define,*

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} \left(|t-x|^{H-\frac{1}{\alpha}} - |x|^{H-\frac{1}{\alpha}} \right), t \in \mathbb{R},$$

donde $0 < H < 1, H \neq \frac{1}{\alpha}$. El proceso X_t se le llama movimiento lineal estable bien balanceado fraccionario . Este proceso tiene incrementos estacionarios y es autosimilar con parámtero H, i.e., para cualquier $c > 0, t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R}$,

$$(X_{ct_1}, \cdots, X_{ct_n}) \stackrel{d}{=} \left(c^H X_{t_1}, \cdots, c^H X_{t_n} \right).$$

En el caso gaussiano, este proceso se conoce como movimiento Browniano fraccionario.

Ejemplo B.2.6. *Movimiento estable log-fraccionario. Sea M una medida $S\alpha S$ en $\mathbb{R}$ con medida de control $m(dx) = dx$ y $\alpha \in (0, 2)$. Se define,*

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} (\ln|t-x| - \ln|x|)\, M(dx), t \in \mathbb{R},$$

El proceso X_t se le llama movimiento estable log-fraccionario. Este proceso tiene incrementos estacionarios y es autosimilar con parámtero $H = \frac{1}{\alpha}$. Si $\alpha = 2$ (caso gaussiano), el movimiento lineal estable bien balanceado fraccionario y movimiento estable log-fraccionario son el mismo proceso.

Ejemplo B.2.7. *Procesos reales armonizables estacionarios SαS. Sea M una medida SαS que toma valores complejos cuya medida circular de control*[2], *$\mathcal{T}$ un conjunto de índices y $\alpha \in (0, 2]$. Se define*

$$H_t = Re\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx)M(dx)\right), t \in \mathcal{T},$$

donde $Re(a)$ representa a la parte real del número complejo a.

[2] Ver [38].

Bibliograf´a

[1] Mir M. Ali. Characterization of the normal distribution among the continous symmetric spherical class. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 42(2):162–164, 1980.

[2] L. Arnold, C. Jones, K. Mischaikow, and G. Raugel. *Dynamical Systems Lectures given at the 2nd session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.)*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1995.

[3] Steven F. Arnold and James Lynch. On ali s characterization of the spherical normal distribution. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Metho–dological)*, 44(1):49–51, 1982.

[4] Jon Aronson. *An Introduction to Infinte Ergodic Theory*. American Mathematical Societey. Mathematical Surveys and Monographs, New York, 1997.

[5] André Berchtold and Adrian E. Raftery. The mixture transition distribution model of high-order markov chains and non-gaussian time series. *Statistical Science*, 17:328–356, 2002.

[6] T. Bollerslev, R.C. Chou, and K.F. Kroner. Arch modelling in nance: a review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics*, 52:5–56, 1992.

[7] Abraham Boyarsky and Manny Scarowsky. On a class of transformations which have unique absolutely continuous invariant measures. *Transactions of the American Mathematical Society*, 255:243–262, 1979.

[8] Peter J. Brockwell and Richard A. Davis. *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 2002.

[9] Robert M. Burton, Cornelis Kraaikamp, and Thomas A. Schmidt. Natural extensions for the rosen fractions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 352:1277–1298, 2000.

[10] Geon Ho Choe. *Computational Ergodic Theory*. Springer-Verlag, Leipzig, 2005.

[11] Giuseppe Da Prato. *An Introduction to Infinte Dimensional Analysis*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.

[12] Karma Dajani and Cor Kraaikamp. *Ergodic Theory of Numbers*. Mathematical Association of America. Carus Mathematical Monographs, 29, Washington, 2002.

[13] A. Gross and A. Weron. On measure-preserving transformations and doubly stationary symmetric stable processes. *Studia Mathematica*, 114(3):275–287, 1995.

[14] Arshag Hajani and Yuji Ito. Transformations that do no accept a nite invariant measure. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 84:417–427, 1978.

[15] Marc Hallin, Claude Lefevre, and Madan L. Puri. On time-reversibility and the uniqueness of moving average representations for non-gaussian stationary time series. *Biometrika*, 75(1):170–171, 1988.

[16] Paul R. Halmos. *Measure Theory*. Springer-Verlag, New York, 1974.

[17] M.V. Jakobson. Absolutely continuous invariant measures for one parameter families of one dimensional maps. *Communications in Mathematical Physics*, 81:39–88, 1981.

[18] C. Jost. Measure-preserving transformations of volterra gaussian processes and related bridges. *Cornell Univesity Library*, pages 1–21, 2007. http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0701/0701888v2.pdf.

[19] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Springer-Verlag, New York, 1997.

[20] Olav Kallenberg. *Probabilistic Symmetries and Invariance Principles*. Springer, New York, 2005.

[21] A. Kaminsky, H. Sherwood, and M.D. Taylor. Doubly stochastic measures with mass on the graphs of two functions. *Real Analysis Exchange*, 13:253–257, 1987-88.

[22] Holger Kantz and Thomas Schreiber. *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 2004.

[23] Gebhard Kirchgässner and Jürgen Wolters. *Introduction to Modern Time Series Analysis*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2007.

[24] U. Krengel, Richter K., and Warstat V. *Ergodic Theory and Related Topics III*. Springer, Berlin/Heidelberg, 1992.

[25] A. Lasota and James A. Yorke. On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 186:481–488, 1973.

[26] Tien-Yien Li and James A. Yorke. Ergodic transformations from an interval into itself. *Transactions of the American Mathematical Society*, 235:183–182, 1978.

[27] V. Losert. Counter-examples to some conjectures about doubly stochastic measures. *Pacific Journal of Mathematics*, 99:387–397, 1982.

[28] Robert J. McCann. Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps. *Duke Mathematical Journal*, 80:309–323, 1995.

[29] Ramsés H. Mena. Notas del curso de series de tiempo, 2006.

[30] Ramsés H. Mena and Stephen Walker. On the stationary version of the generalized hyperbolic arch model. *Annals of The Institute of Satistical Mathematics*, 59(59):325–348, 2007.

[31] Ramsés H. Mena and Stephen Walker. Stationary mixture transition distribution (mtd) models via predictive distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137:3103–3112, 2007.

[32] Roger B. Nelsen. *An Introduction to Copulas*. Springer, New York, 2nd edition, 2006.

[33] John C. Oxtoby. *Measure and Category*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1980.

[34] Michael K. Pitt, Chris Chat eld, and Stephen Walker. Constructing rst order autorregressive models via latent processes. *Scandinavian Journal of Statistics*, 29:657–663, 2002.

[35] S. Porubsky, T. Salat, and O. Strauch. Transformations that preserve uniform distribution. *Acta Arithmetica*, 49:449–458, 1988.

[36] J. Rosinski. On the structure of stationary stable processes. *The Annals of Probability*, 23(3):1163–1187, 1995.

[37] H. L. Royden. *Real Analysis*. McMillian Publishing Company, New York, 3rd edition, 1988.

[38] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu. *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton, 1994.

[39] H. Sherwood and M.D. Taylor. Doubly stochastic measures with hairpin support. *Probability Theory and Related Fields*, 78:617–626, 1988.

[40] György Steinbrecher and William T. Shaw. Quantile mechanics. *European Journal of Applied Mathematics*, 19(2):87–112, 2008.

[41] Maximilian Thaler. In nite ergodic theory notes, 2001.

[42] Peter Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[43] Gideon Weiss. Time-reversibility of linear stochastic processes. *Journal of Applied Probability*, 12(4):831–836, 1975.