



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**SIMETRÍAS Y VISUALIZACIONES  
DEL GRAFICAEDRO**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**M A T E M Á T I C A  
P R E S E N T A:**

**MARÍA DEL RÍO FRANCOS**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DRA. DÉBORAH OLIVEROS BRANIFF  
2009**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del Jurado

<p>1. Datos del alumno del Río Francos María 56 44 14 60 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 403098200</p>
<p>2. Datos del tutor Dra. Déborah Oliveros Braniff</p>
<p>3. Datos del sinodal 1 Dra. Martha Gabriela Araujo Pardo</p>
<p>4. Datos del sinodal 2 Dr. Rodolfo San Agustín Chi</p>
<p>5. Datos del sinodal 3 Dra. Isabel Alicia Hubard Escalera</p>
<p>6. Datos del sinodal 4 Dr. Javier Bracho Carpizo</p>
<p>7. Datos del trabajo escrito Simetrías y visualizaciones del Graficaedro 104 p. 2009</p>

*A mi familia: Papás y hermanos*

*A los nuevos integrantes: Ximena y Lucía*

*A Deborah*



# Agradecimientos

---

Primero que nada, quiero agradecer a la **Universidad Nacional Autónoma de México**, en donde además de educarme como Matemática, gracias a su diversidad, aprendí distintos puntos de vista de como apreciar la vida desarrollandome como persona y como científica.

Además agradezco al gran equipo de trabajo con quienes descubrí el Graficaedro, de las que agradezco fuertemente la dirección de **Déborah y Gaby**, ya que sin ellas y su creatividad este trabajo no se habría desarrollado y a **Mariana**, mi compañera durante academia hasta el último trabajo de ésta, quien además es una de mis mejores amigas.

Por otro lado, quiero agradecer a **Egon**, por su contribución de ideas y su constante interés en el trabajo; a **Isabel**, por su dedicación en las correcciones. Así mismo, agradezco a **Rodolfo y Roli** por sus pertinentes sugerencias en el trabajo. A **Luis**, por su apoyo.

Agradezco a **mis papás**, quienes siempre me han dado su apoyo y me enseñaron a saber tomar decisiones y pelear con dedicación para conseguir por mi cuenta los objetivos que me plantee; a **mis hermanos: Cristina, Luis, Nacho y Miguel**, quienes han sido siempre un gran apoyo para mi y los mejores consejeros.

También quiero agradecer a:

**Mónica, Serena, César, Paty, Toño, Eduardo e Irene**, con quienes se que siempre contaré, gracias por mantenerse a mi lado y escucharme sin

importar cuan larga sea mi historia; simplemente por darme su amistad.

**Regina, Felicia, Anabel y Aline**, por crecer junto conmigo perteneciendo al mundo externo de la ciencia y enseñarme tantos puntos de vista diferentes durante nuestra amistad.

**Los vagos**, por recibirme desde la primera vez que fui a casa de Quiela y presentarme otro estilo de vida.

**Ramón, Pedro, Victor, Abraham, Manuel, Emiliano Mora, Emiliano Cruz, Hiroki, Ken, León, Gori, Japo y Juan Ma**, por su constante apoyo, consejos y más. Siempre estaré agradecida de haberlos conocido y de que me adoptaran como su amiga.

Los de Logos + la Cris, por su cariño. Y a todos aquellos con los que también compartí clases y tardes en el Prometeo.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. Teoría de grupos . . . . .	5
1.1.1. Permutaciones . . . . .	6
1.1.2. Subgrupos y generadores . . . . .	15
1.1.3. Clases laterales . . . . .	16
1.1.4. Grupo de homomorfismos . . . . .	19
1.1.5. Productos directo y semidirecto . . . . .	21
1.2. Teoría de Gráficas . . . . .	24
1.2.1. Definiciones . . . . .	25
1.2.2. Grupo de Automorfismos de la gráfica . . . . .	28
<b>2. Gráficas de Cayley</b>	<b>31</b>
2.1. Definición . . . . .	31
2.2. Automorfismos de la gráfica de Cayley . . . . .	41
<b>3. Politopos abstractos</b>	<b>45</b>
3.1. Definiciones . . . . .	45
3.2. Grupo de automorfismos de los politopos . . . . .	49
3.3. Politopos regulares . . . . .	51



<b>4. El Graficaedro</b>	<b>53</b>
4.1. Definición . . . . .	53
<b>5. Ejemplos y visualizaciones del Graficaedro</b>	<b>65</b>
5.1. Graficaedros de rango 3. . . . .	66
5.2. Graficaedros de rango 4. . . . .	77
<b>6. Simetrías del Graficaedro</b>	<b>93</b>
6.1. Subgrupos del grupo de automorfismos del graficaedro . . . . .	93
6.2. El grupo de simetrías del Graficaedro . . . . .	96

# Introducción

Dentro de la geometría Euclideana plana hemos estado familiarizados con los polígonos, como el triángulo, el cuadrado y el hexágono, por mencionar algunos ejemplos, y dentro de la geometría tridimensional conocemos los poliedros, como el tetraedro, el cubo, los prismas, etcétera. El concepto que generaliza a estos objetos geométricos, para toda dimensión, es el de *politopo*: su raíz etimológica viene de las palabras griegas *πολύς* (muchas) y *τόπος* (regiones). La palabra politopo parece haber sido inventada por Hoppe en 1882 e introducida por la inglesa Mrs. Stott veinte años después. Pero fue Schläfli quien en 1852 completó este concepto. Los fundamentos de los politopos datan de hace más de dos mil años con los griegos. Pero, la mayor parte de la teoría alrededor de ellos se desarrolló en los últimos cien años.

Uno de los temas más estudiados sobre politopos ha sido el de sus simetrías, por ejemplo, por medio de éstas se puede determinar si un politopo es regular.

Para los griegos, un poliedro regular era aquel que tenía alrededor de cada vértice el mismo número de polígonos isomorfos como caras. Euclides en sus “Elementos” probó que solo hay cinco sólidos de este tipo: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro; y no es, hasta dos milenios después, que Kepler ampliando el concepto de poliedro, halló dos nuevos poliedros cuyas caras eran estrelladas (no convexas). Más tarde, a principios de los 1800, Poinson encontró otros dos poliedros no convexas (pero con caras convexas) y Cauchy demostró que estos cuatro eran los únicos poliedros estrellados en el espacio Euclideano de tres dimensiones. A principios de 1920, Petrie, ampliando aún más el concepto de poliedro, descubrió dos poliedros regulares con un número infinito de caras y Coxeter encontró un tercero, completando con ésto la lista.

En 1978, Grünbaum propuso el estudio de una clase más general de politopos y finalmente, a principios de los ochentas Danzer y Schulte extendieron esta clase a objetos del tipo combinatorio, a los que ahora conocemos como *politopos abstractos*.

Uno de los politopos que ha sido objeto de estudio para varios investigadores es *el permutaedro*,  $\Pi_n$ , politopo convexo  $n$ -dimensional estudiado inicialmente por Schoute en 1911. El permutaedro se define como el casco convexo de  $(n + 1)!$  puntos en el espacio  $\mathbb{R}^{n+1}$  que se obtienen al permutar las entradas del vector  $(1, 2, \dots, n + 1)$ . En particular, sus vértices pueden identificarse con las permutaciones de  $S_n$  (a saber, se asocia al vector  $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  con la permutación que manda a  $x_i \mapsto i$ ) y dos vértices estarán conectados por una arista si y sólo si las permutaciones correspondientes difieren por una transposición de dos números adyacentes.

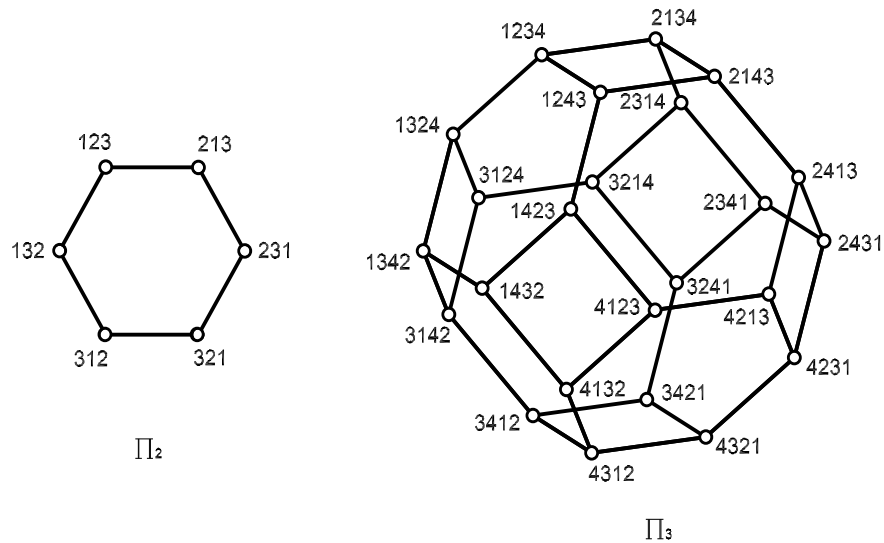


Figura 1: Permutaedros  $\Pi_2$  y  $\Pi_3$ .

Inspirados en el permutaedro, encontramos una construcción de un politopo abstracto que lo generaliza utilizando ideas de geometría y teoría de graficas, en particular, las gráficas de Cayley. El trabajo de investigación fue realizado

de manera conjunta por las doctoras Martha Gabriela Araujo Pardo, Déborah Oliveros Braniff, la matemática Mariana López Dudet, el doctor Egon Schulte y yo. El trabajo que se condensa en el artículo “The Graphicahedron” [1] dió lugar a esta tesis y a la de Mariana [12] (tesis presentada en octubre de 2008). En la tesis de Mariana se desarrolla la construcción, de manera combinatoria, del Graficaedro; en esta tesis se extiende el trabajo, geométricamente, determinando las simetrías del politopo en estudio.

En la primer parte de la tesis, el capítulo 1, incluimos todos los preliminares necesarios para desarrollar este trabajo, como son: la noción del grupo de permutaciones, el grupo de automorfismos de un grupo y los productos directo y semidirecto. Más aun, se introduce la teoría básica de Teoría de gráficas.

En la segunda parte, capítulos 2 y 3, se estudian las gráficas coloreadas de Cayley y a los politopos abstractos. Proporcionando la esencia de la construcción y propiedades del Graficaedro.

En el capítulo 4, definimos el graficaedro y probamos que éste es un politopo abstracto y que en efecto generaliza al permutaedro. Después, en el capítulo 5, estudiamos con cuidado los graficaedros de rango 3 y 4, así como planteamos algunas conjeturas para estudios futuros. Finalmente, en el capítulo 6, concluimos con el estudio de las simetrías o automorfismos del graficaedro y determinamos cuales de ellos son regulares.



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se ven definiciones y resultados básicos de Teoría de Grupos, particularmente discutiremos los grupos de permutaciones de  $n$  elementos ( $S_n$ ) y el grupo de automorfismos; por medio de ellos describiremos propiedades del graficaedro. También estudiaremos terminología básica de Teoría de Gráficas, dado que éstas serán la herramienta primaria para nuestra construcción.

### 1.1. Teoría de grupos

Para describir geoméricamente un objeto es importante fijarnos en sus simetrías (como son, las reflexiones o rotaciones en éste), operaciones a las que les asociaremos una estructura algebraica relacionada con la del grupo de permutaciones de un conjunto finito. Un ejemplo sencillo es el de las simetrías de un cuadrado.

**Ejemplo 1.1.** Las simetrías del cuadrado están dadas como se ilustra en la figura 1.1. El conjunto de éstas se denota por  $D_4$ , al que llamaremos *el grupo diédrico* de orden 8. Cuyas ocho simetrías son: la identidad  $id$ , las reflexiones  $a$  y  $b$  sobre los ejes que atraviesan a las aristas en su punto medio, las reflexiones  $c$  y  $d$  sobre los ejes que pasan por los vértices del cuadrado y las rotaciones  $r$  de  $\pi/2$ ,  $r^2$  de  $\pi$ , y  $r^3$  de  $3\pi/2$  cuyo centro de rotación es el centro del cuadrado.

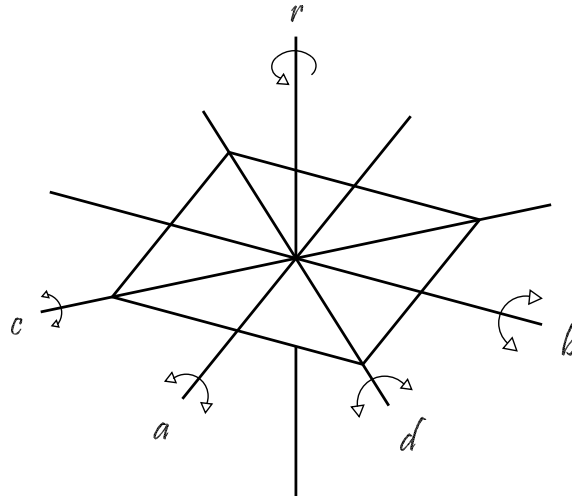


Figura 1.1: Simetrías del cuadrado

### 1.1.1. Permutaciones

En general, una *permutación* de un conjunto  $X$  es una función biyectiva del tipo  $\pi : X \rightarrow X$ , que mueve a un objeto que este en la posición  $i$  a la  $j$ .

**Ejemplo 1.2.** Consideremos la permutación  $\pi : X \rightarrow X$  donde  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  que puede escribirse de la forma:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Supongamos que  $n = 7$  y

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix};$$

de manera que,

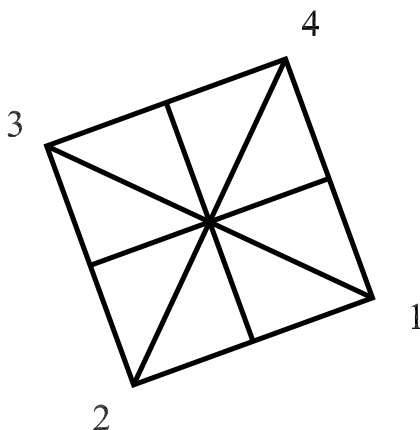
$$\pi(1) = 4, \pi(2) = 3, \pi(3) = 1, \pi(4) = 2, \pi(5) = 6, \pi(6) = 5, \pi(7) = 7,$$

donde  $\pi$  denota una función biyectiva que actúa sobre  $\{1, 2, \dots, 7\}$  mandando el 1 al 4, el 2 al 3, el 3 al 1, el 4 al 2, el 5 al 6, el 6 al 5 y el 7 al 7.

Una manera alternativa de leer a ésta última permutación es la siguiente:  $\pi$  manda el 1 al 4, el 4 al 2, el 2 al 3, el 3 de vuelta al 1, luego el 5 al 6, el 6 al 5 quedando fijo 7. Esto último puede escribirse como  $\pi = (1\ 4\ 2\ 3)(5\ 6)(7)$ , y se le conoce como la notación cíclica de la permutación.

**Nota:** Cuando una permutación contiene un elemento fijo ( $i$ ) (que consta de un solo elemento), se omite del ciclo que la representa dentro de la notación cíclica. Por ejemplo,  $\pi = (1\ 4\ 2\ 3)(5\ 6)(7) = (1\ 4\ 2\ 3)(5\ 6)$ .

**Ejemplo 1.3.** Regresando a las simetrías del cuadrado, notemos que éstas se pueden ver también como permutaciones. Si etiquetamos las esquinas del cuadrado como en la siguiente figura.



Tomemos en cuenta los elementos descritos en el ejemplo 1.1, con notación cíclica definiremos tales permutaciones como sigue:

Las reflexiones del cuadrado quedan asociadas a:

$$a = (1\ 4)(2\ 3), \quad b = (1\ 2)(3\ 4), \quad c = (2\ 4), \quad d = (1\ 3);$$

así mismo, las rotaciones cuyo centro de rotación es el centro del cuadrado son:

$$r = (1\ 4\ 3\ 2), \quad r^2 = (1\ 3)(2\ 4) \quad \text{y} \quad r^3 = (1\ 2\ 3\ 4).$$

Finalmente, la identidad  $id$  queda denotada por  $id = (1)$ .



Dado un conjunto  $X$ , al conjunto de todas las permutaciones de  $X$  lo denotaremos por  $S_X$ , en caso de que  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ , éste se escribirá como  $S_n$  en lugar de  $S_X$ . No es difícil ver que su cardinalidad es  $|S_n| = n!$ , ya que para elegir el valor de  $\pi(1)$  en la permutación tenemos  $n$  posibilidades, una vez determinado éste, entonces para determinar a  $\pi(2)$  existen  $n - 1$  formas (ya que  $\pi$  es una función uno a uno, por lo que  $\pi(1) \neq \pi(2)$ ). De igual manera, determinados éstos, se tienen exactamente  $n - 2$  maneras de elegir a  $\pi(3)$ . Siguiendo así, se llega a que entonces el número de permutaciones de  $n$  elementos es  $n!$ .

Dados dos elementos  $\alpha$  y  $\beta$  de  $S_X$ , la operación entre éstos está definida como una composición,  $\alpha \circ \beta$  de los elementos de  $X$  en los de  $X$ , resultando otra permutación. Esta composición será denotada como el *producto de dos permutaciones*  $\alpha\beta$ , donde leeremos la acción de derecha a izquierda: se aplica primero  $\beta$  y luego  $\alpha$ .

**Nota:** El producto de dos permutaciones  $\alpha\beta$  también puede leerse como la acción de izquierda a derecha: se aplica primero  $\alpha$  y luego  $\beta$ . En el trabajo se usarán los dos tipos de acción: esto dependerá de la operación que se defina, por lo que deberemos tener cuidado al aplicarlas.

Esta operación es asociativa, es decir  $(\tau\alpha)\beta = \tau(\alpha\beta)$ . En particular, si  $\sigma$  es un elemento de  $S_X$ , denotaremos al producto  $\sigma\sigma$  como  $\sigma^2$ , así como también  $\sigma^2\sigma = \sigma^3$  por lo que en general tendremos que  $\sigma^{n-1}\sigma = \sigma^n$ , la  $n$ -ésima potencia de  $\sigma$ . (Las *potencias* de todo  $\sigma \in X$ , quedan definidas como  $\sigma^n$  para cualquier  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\sigma^0 = e$  o bien  $\sigma^{-n} = (\sigma^{-1})^n$ ).

**Ejemplo 1.4.** Consideremos las permutaciones  $(1\ 3)(4\ 7\ 6\ 5)$  y  $(1\ 4\ 2\ 3)(5\ 6)$ . Para calcular el producto de ellas,

$$[(1\ 3)(4\ 7\ 6\ 5)][(1\ 4\ 2\ 3)(5\ 6)],$$

recordemos que debe leerse de derecha a izquierda. Entonces, leeremos así: en la permutación derecha el 1 va a dar al 4, pero en la izquierda el 4 va al 7; resultando que el producto manda el 1 al 7. A continuación, vease que la permutación derecha no da información sobre el 7, es decir, el 7 queda fijo

en ésta. Sin embargo, en la de la permutación izquierda el 7 se manda al 6, deteniéndose en éste. De igual manera partiendo con el 6 seguimos con el resto de los números, obteniendo que

$$[(1\ 3)(4\ 7\ 6\ 5)][(1\ 4\ 2\ 3)(5\ 6)] = (1\ 7\ 6\ 4\ 2).$$

## El grupo de permutaciones

**Definición 1.1.** Un conjunto no vacío  $G$  con una operación binaria asociativa  $*$ , es un *grupo*  $(G, *)$  si existe un único elemento  $e \in G$  que denote a la identidad, es decir que  $e * a = a = a * e$  para todo  $a \in G$ , y que para cada  $a \in G$ , existe un elemento  $b \in G$  tal que  $a * b = e = b * a$ , es decir, que actúe como el inverso de  $a$ , que por lo general denotaremos como  $b = a^{-1}$ .

El conjunto de permutaciones de un conjunto no vacío  $X$ ,  $S_X$ , es un grupo bajo el producto de permutaciones, es decir,

- i) como se vió antes el producto de dos permutaciones es nuevamente una permutación de los elementos de  $X$ ;
- ii) existe un elemento  $e \in S_X$  tal que al operarlo con cualquier elemento  $\sigma \in S_X$ ,  $\sigma e = e = e\sigma$ . A saber, la función identidad  $e : X \rightarrow X$  que para cualquier  $a \in X$   $e(a) = a$ ;
- iii) dado que las permutaciones son biyectivas, para cada elemento  $\sigma \in S_X$  existe un único elemento  $\sigma' \in S_X$  tal que  $\sigma\sigma' = e = \sigma'\sigma$ . A saber,  $\sigma' = \sigma^{-1}$ , la función inversa de  $\sigma$ .

A éste se le conoce como el grupo simétrico.

En el caso de  $S_n$  (cuando  $X = \{1, \dots, n\}$ ) la identidad,  $e$ , se denotará simplemente por  $(1)$ .

**Ejemplo 1.5.** El grupo simétrico del conjunto  $\{1, 2, 3\}$ , es:

$$S_3 = \{(1), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.$$

En éste, podemos ver contenido al elemento identidad (1), y dado cualquier elemento del conjunto su inverso también está en él; esto es: (1 2 3) es el inverso de (1 3 2) y viceversa, así como toda transposición de la forma  $(i j)$  es su propia inversa.

Por otro lado, así como se analizó en el ejemplo 1.3, pero apoyándonos ahora en la figura 1.2, notamos que  $S_3$  también puede verse como el grupo de simetrías del triángulo equilátero.

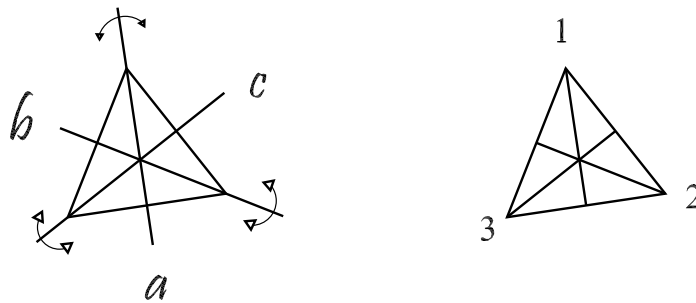


Figura 1.2: Simetrías del triángulo

## Clases de equivalencia

Cada permutación  $\sigma$  de un conjunto  $X$  induce una partición de éste en clases de equivalencia de la siguiente manera. Diremos que  $a \sim b$ , si y sólomente si  $b = \sigma^n(a)$  para algún  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Observación 1.1.** Para cada  $\sigma \in S_X$ ,  $\sim$  asociada a  $\sigma$  es una relación de equivalencia.

*Demostración.*

(i)  $\sim$  es **Reflexiva** ( $a \sim a$ )

Sea  $a \in X$  y  $\sigma \in S_X$ . Sabemos que  $\sigma^0 = e$ , de manera que  $a = e(a) = \sigma^0(a)$ . Por lo tanto,  $a \sim a$ .

(ii)  $\sim$  es **Simétrica** ( $a \sim b$  entonces  $b \sim a$ )

Sean  $a, b \in X$ , sabemos que  $a \sim b$  si y sólo si  $b = \sigma^n(a)$  para algún  $n \in \mathbb{Z}$ . Considerando al inverso de  $\sigma^n$ , es decir  $\sigma^{-n}$ , se tiene que  $\sigma^{-n}(b) = a$  para alguna  $n \in \mathbb{Z}$ .

(iii)  $\sim$  es **Transitiva** ( $a \sim b$  y  $b \sim c$  entonces  $a \sim c$ )

Sean  $a, b, c \in X$  tales que  $a \sim b$  y  $b \sim c$ . Entonces  $a = \sigma^n(b)$  y  $b = \sigma^m(c)$ , para algunas  $n, m \in \mathbb{Z}$ , de donde se tiene que  $a = \sigma^n \sigma^m(c) = \sigma^{(n+m)}(c)$  con  $(n+m) \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto  $a \sim c$ .

□

A las clases de equivalencia en  $X$  determinadas por ésta relación se les llama las *órbitas* de  $\sigma$ . Para cada elemento  $a \in X$  el conjunto

$$o(a) = \{x \in X \mid x = \sigma^m(a) \text{ para algún } m \in \mathbb{Z}\},$$

es la órbita de  $\sigma$  que contiene a  $a$  y se escribe mediante una notación cíclica, de la siguiente forma:

$$o(a) = ( a \ \sigma(a) \ \sigma^2(a) \ \dots \ \sigma^{t-1}(a) ),$$

donde  $\sigma^t(a) = a$ . Nótese, que cada órbita es por sí misma una permutación de  $X$  y que, al ser una clase de equivalencia, la intersección con cualquier otra es vacía, por lo que la permutación  $\sigma$  puede escribirse como el producto de sus órbitas.

**Ejemplo 1.6.** Retomemos,  $\pi \in S_7$  del ejemplo 1.2, cuya estructura cíclica es  $\pi = (1 \ 4 \ 2 \ 3)(5 \ 6)$ . Hemos visto que está definida mediante la regla de correspondencia:

$$\pi(1) = 4, \ \pi(2) = 3, \ \pi(3) = 1, \ \pi(4) = 2, \ \pi(5) = 6, \ \pi(6) = 5, \ \pi(7) = 7.$$

Por lo que  $\pi$  tiene tres órbitas:

$$o(1) = (1 \ 4 \ 2 \ 3) = o(2) = o(3) = o(4);$$

$$o(5) = (5 \ 6) = o(6);$$

$$o(7) = (7).$$

La única permutación de  $X$  cuyas órbitas constan todas de un solo elemento es la identidad y por lo general se escribe  $e = (1)$ . Si una órbita o ciclo consta de  $r$  elementos de  $X$ , se dice que éste es un  $r$ -ciclo. Observemos que todo 1-ciclo fija a todo elemento de  $X$ , entonces por convención, todos los 1-ciclos corresponderán a la permutación identidad.

**Definición 1.2.** Sea  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  y  $\sigma \in S_n$ . Definimos el *soporte* de  $\sigma$  como el conjunto de todos los elementos de  $X$  que son movidos por  $\sigma$ . Es decir,

$$\text{sop}(\sigma) = \{a \in X \mid \sigma(a) \neq a\}.$$

Dos permutaciones  $\sigma, \tau \in S_X$  son *disjuntas* si  $\text{sop}(\sigma) \cap \text{sop}(\tau) = \emptyset$ . Una familia de permutaciones  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$  es disjunta si cada par de ellas lo es.

Cuando una permutación  $\tau$  mueve únicamente dos elementos, dejando fijos a los demás, decimos que  $\tau$  es una *transposición*. Nótese que en este caso no existe otra posibilidad para los elementos que se mueven más que ser uno la imagen del otro bajo la permutación.

Diremos que, dos elementos  $i, j \in A = \{1, 2, \dots, p\}$  son adyacentes si dada una permutación  $\sigma$  del conjunto  $A$ , sus preimágenes bajo  $\sigma \in S_p$  son elementos consecutivos de  $A$ , es decir, si existe  $k \in A$  tal que  $\sigma(k) = i$  y  $\sigma(k+1) = j$ .

**Teorema 1.1.** *Toda permutación es un producto de transposiciones.*

*Demostración.* Consideremos un  $r$ -ciclo  $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r) \in S_X$ , y veamos que éste se puede descomponer como

$$(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r) = (x_1 \ x_r) (x_1 \ x_{r-1}) \ \dots \ (x_1 \ x_2),$$

un producto de transposiciones. □

El siguiente teorema es de gran importancia para la teoría de grupos, éste no será probado en esta tesis. Sin embargo, su demostración puede ser encontrada en la literatura: por ejemplo, en [19].

**Teorema 1.2.** *(de Cayley) Todo grupo es isomorfo a un grupo de permutaciones.*

Diremos que dos permutaciones  $\alpha, \beta \in S_p$  tienen la *misma estructura cíclica* si su factorización en ciclos disjuntos tienen el mismo número de  $r$ -ciclos para cada  $r$ .

**Definición 1.3.** Sean  $x$  y  $g$  elementos de un grupo  $G$ . Se define al *conjugado* de  $x$  por  $g$  como el elemento  $gxg^{-1} \in G$ . Dos elementos  $x, y \in G$  son conjugados si existe  $g \in G$  tal que  $y = gxg^{-1}$ .

**Lema 1.1.** Sea  $\sigma = (a_1 \cdots a_k) \in S_n$  un  $k$ -ciclo. Entonces, para toda  $\gamma \in S_n$  el elemento  $\gamma\sigma\gamma^{-1}$  es un  $k$ -ciclo y se tiene que

$$\gamma\sigma\gamma^{-1} = (\gamma(a_1) \cdots \gamma(a_k)).$$

*Demostración.* Sea  $\sigma = (a_1 \cdots a_k) \in S_n$  un  $k$ -ciclo y sea  $\alpha = (\gamma(a_1) \cdots \gamma(a_k)) \in S_n$ . Recordemos que

$$\text{sop}(\alpha) = \{\gamma(a_i) \in X \mid \gamma(a_i) \neq (a_i)\}.$$

Entonces si  $b \in \text{sop}(\alpha)$  se sigue que  $b = \gamma(a_i)$  con  $1 \leq i \leq k$ , donde

$$\alpha b = (\gamma(a_1) \cdots \gamma(a_k))\gamma(a_i) = \begin{cases} \gamma(a_{i+1}), & \text{si } i < k; \\ \gamma(a_1), & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Pero si  $b \notin \text{sop}(\alpha)$ , entonces  $\alpha b = b$ .

Notemos que si  $b \in \text{sop}(\alpha)$ ,  $b = \gamma(a_i)$ , y le aplicamos  $\gamma(a_1 \cdots a_k)\gamma^{-1}$ , se tiene que

$$(\gamma(a_1 \cdots a_k)\gamma^{-1})\gamma(a_i) = \gamma(a_1 \cdots a_k)(a_i) = \begin{cases} \gamma(a_{i+1}), & \text{si } i < k; \\ \gamma(a_1), & \text{si } i = k, \end{cases}$$

al igual que  $\alpha b$ .

Si suponemos que  $b \notin \text{sop}(\alpha)$ ,  $b \neq \gamma(a_i)$  con  $1 \leq i \leq k$ , entonces  $\gamma^{-1}(b) \neq a_i$  con  $1 \leq i \leq k$ . Por consiguiente, el ciclo  $\sigma$  lo deja fijo, es decir,  $\sigma\gamma^{-1}(b) = \gamma^{-1}(b)$ . Entonces,

$$(\gamma(a_1 \cdots a_k)\gamma^{-1})(b) = \gamma\gamma^{-1}(b) = b,$$

como vimos que sucede para  $\alpha b$ .

Por lo tanto,  $\gamma\sigma\gamma^{-1} = (\gamma(a_1) \cdots \gamma(a_k))$ . Con lo que probamos que para cualquier  $\gamma \in S_n$ , el conjugado de un  $k$ -ciclo en  $S_n$  es un  $k$ -ciclo. □

Nos apoyaremos en el lema anterior para probar el siguiente teorema, que será de utilidad en el último capítulo donde discutiremos las simetrías del graficaedro.

**Teorema 1.3.** *Dos permutaciones  $\alpha, \beta \in S_p$  son conjugadas si y sólo si tienen la misma estructura cíclica.*

*Demostración.* Veamos que dos permutaciones conjugadas tienen la misma estructura cíclica. Por el lema anterior tenemos que para cualquier  $\gamma \in S_n$ , el conjugado de un  $k$ -ciclo en  $S_n$  es un  $k$ -ciclo.

Consideremos ahora a  $\sigma \in S_n$ , cualquier permutación. Digamos que su factorización en ciclos disjuntos es

$$\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_s.$$

Entonces

$$\tau = \gamma\sigma\gamma^{-1} = (\gamma\sigma_1\gamma^{-1}) \cdots (\gamma\sigma_s\gamma^{-1}),$$

tiene la misma estructura cíclica que  $\sigma$ .

Por otro lado, supongamos que  $\sigma, \tau \in S_n$  tienen la misma estructura cíclica, donde

$$\begin{aligned}\sigma &= (a_1 \cdots a_k) \cdots (z_1 \cdots z_t), \\ \tau &= (a'_1 \cdots a'_k) \cdots (z'_1 \cdots z'_t);\end{aligned}$$

y queremos encontrar un  $\gamma \in S_n$  tal que  $\gamma\sigma\gamma^{-1} = \tau$ , pero

$$\gamma\sigma\gamma^{-1} = (\gamma(a_1) \cdots \gamma(a_k)) \cdots (\gamma(z_1) \cdots \gamma(z_t)),$$

por el lema anterior. Entonces, queremos hallar  $\gamma \in S_n$  tal que

$$(\gamma(a_1) \cdots \gamma(a_k)) \cdots (\gamma(z_1) \cdots \gamma(z_t)) = (a'_1 \cdots a'_k) \cdots (z'_1 \cdots z'_t).$$

Así, basta probar que existe  $\gamma \in S_n$  tal que  $\gamma(a_i) = (a'_i)$  y  $\gamma(z_i) = (z'_i)$ .

Notemos que los ciclos de  $\sigma$  son disjuntos, al igual que los de  $\tau$ . Por lo que el número de elementos que  $\sigma$  deja fijos es igual al número de elementos que  $\tau$  deja fijos. Entonces, definimos  $\gamma : X \rightarrow X$  de tal manera que  $\gamma(x_i) = x'_i$  para cada  $x_i \in X$  que aparece en algún ciclo de  $\sigma$  donde  $x'_i$  es un elemento en algún ciclo de  $\tau$ , y como  $\gamma(x) = x'$  para cada  $x \in X$  que no aparece en  $\sigma$  con  $x'$  cualquier elemento que no aparece en  $\tau$ .

□

### 1.1.2. Subgrupos y generadores

Si  $G$  es un grupo, un subconjunto  $H$  de  $G$  es un *subgrupo* ( $H \leq G$ ) de  $G$  si  $H$  por sí mismo un grupo, heredando la operación de  $G$ . Si  $X$  es un subconjunto de un grupo  $G$ , entonces el subgrupo más pequeño que contiene a  $X$ , denotado por  $\langle X \rangle$ , es llamado el *subgrupo generado por  $X$* . También se puede decir que  $X$  *genera a  $\langle X \rangle$* .

**Ejemplo 1.7.** Consideremos el grupo diédrico  $D_4$  de orden 8, el grupo de simetrías del cuadrado descrito en el ejemplo 1.1. Sabemos además por el ejemplo 1.3 que las ocho simetrías se pueden expresar como elementos de  $S_4$ . De hecho,  $D_4$  es un subgrupo de  $S_4$ , visto como

$$D_4 = \{(1), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2)(3\ 4), (2\ 4), (1\ 3), (1\ 4\ 3\ 2), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 2\ 3\ 4)\},$$

donde todos los elementos, a excepción de  $(1\ 4\ 3\ 2)$  y  $(1\ 2\ 3\ 4)$ , son sus propios inversos debido a su estructura cíclica, sin embargo  $(1\ 4\ 3\ 2)$  es el inverso de  $(1\ 2\ 3\ 4)$  y viceversa.

Más aún, notemos que el conjunto  $A = \{(1\ 3), (2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2)(3\ 4)\}$  genera al grupo  $D_4$ . Al multiplicar a cada uno de ellos consigo mismo resulta la identidad,  $(1)$ ; y las siguientes composiciones generan los elementos faltantes de  $D_4$ .

$$\begin{aligned} (1\ 4)(2\ 3)(1\ 3) &= (1\ 2\ 3\ 4), & (1\ 2)(3\ 4)(1\ 3) &= (1\ 4\ 3\ 2), \\ (1\ 2)(3\ 4)(2\ 4) &= (1\ 2\ 3\ 4), & (1\ 4)(2\ 3)(2\ 4) &= (1\ 4\ 3\ 2) \\ (2\ 4)(1\ 3) &= (1\ 3)(2\ 4). \end{aligned}$$

Resultando así,  $\langle A \rangle = D_4$ .

Si  $X$  consiste de un solo elemento  $a$ , entonces  $\langle X \rangle = \langle a \rangle$ , es el subgrupo cíclico generado por  $a$ . Si es un conjunto finito,  $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , entonces se escribe  $\langle X \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  en lugar de  $\langle X \rangle = \langle \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \rangle$ . Los elementos de  $\langle X \rangle$  se definen por medio de todos los productos de la forma

$$x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_m^{e_m},$$

donde  $x_i \in X$ ,  $e_i = \pm 1$  y  $m \geq 1$ , a éstos se les conoce con el nombre de *palabras* en  $\langle X \rangle$ . Para concertar este concepto, se da el siguiente teorema.



**Teorema 1.4.** *Sea  $X$  un subconjunto de un grupo  $G$ . Si  $X = \emptyset$ , entonces  $\langle X \rangle = e$ ; si  $X$  no es vacío, entonces  $\langle X \rangle$  es el conjunto de todas las palabras en  $X$ .*

*Demostración.* Si  $X = \emptyset$ , entonces el subgrupo  $e = \{e\}$  contiene a  $X$ , deduciendo que entonces  $\langle X \rangle = e$ . Si  $X$  no es vacío, consideremos a

$$W = \{x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_r^{e_r} \mid r \geq 1, x_i \in X, e_i = \pm 1\},$$

el subgrupo de todas las palabras en  $X$ . Entonces,  $W$  es un subgrupo de  $G$  que contiene a  $X$  y cumple que  $e = x_1^{-1} x_1 \in W$ ; lo que significa que el inverso de un  $x \in W$  es una palabra en  $W$  y a su vez para  $x, y \in W$  el producto  $xy \in W$  es una palabra.

Como  $\langle X \rangle$  es el menor subgrupo que contiene a  $X$ , entonces se tiene que  $\langle X \rangle \subset W$ .

Por otro lado, todo subgrupo  $H$  que contenga a  $X$  debe contener a todas las palabras de  $X$ . Por lo tanto,  $W \leq H$ , lo cual induce que  $W$  es el menor subgrupo que contiene a  $X$ .

□

### 1.1.3. Clases laterales

Dado un subgrupo  $H$  de  $G$  y un elemento  $g \in G$ , una *clase lateral derecha* de  $H$  en  $G$  es el subconjunto de  $G$

$$Hg = \{hg \mid h \in H\}$$

(una *clase lateral izquierda* es  $gH = \{gh \mid h \in H\}$ ). Al elemento  $g$  se le conoce como el representante de  $Hg$  (al igual que de  $gH$ ).

**Ejemplo 1.8.** Sea  $G = S_3$  y sea  $H = \langle (1\ 2) \rangle = \{(1), (1\ 2)\}$ . Las clases laterales derechas de  $H$  en  $G$  son:

$$H = \{(1), (1\ 2)\};$$

$$H(1\ 2\ 3) = \{(1\ 2\ 3), (2\ 3)\};$$

$$H(1\ 3\ 2) = \{(1\ 3\ 2), (1\ 3)\}$$

Las clases laterales izquierdas son:

$$H = \{(1), (1\ 2)\};$$

$$(1\ 2\ 3)H = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3)\};$$

$$(1\ 3\ 2)H = \{(1\ 3\ 2), (2\ 3)\}$$

Nótese que las clases laterales son ajenas y que además, las clases izquierdas y las derechas pueden ser distintas; por ejemplo  $H(1\ 2\ 3) \neq (1\ 2\ 3)H$ .

Una clase lateral  $Hg$  tiene muchos representantes; todo elemento de la forma  $hg$  para  $h \in H$  es un representante de  $Hg$ .

**Lema 1.2.** *Sea  $G$  un grupo. Si  $K \subseteq G$  y  $g \in G$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes para todo elemento  $h \in G$ :*

$$i) \ h \in \langle K \rangle g$$

$$ii) \ \langle K \rangle h = \langle K \rangle g$$

*Demostración.* Que  $ii)$  implica  $i)$  es inmediato, ya que por ser  $\langle K \rangle$  grupo, tiene un elemento neutro  $e$  y por tanto,  $h = eh \in \langle K \rangle h = \langle K \rangle g$ .

Por otro lado, si  $h \in \langle K \rangle g$  entonces  $h$  es de la forma  $h = k_0g$  para algún elemento  $k_0 \in \langle K \rangle$ , por lo que

$$\langle K \rangle h = \langle K \rangle k_0g = \langle Kk_0 \rangle g = \langle K \rangle g$$

debido a que  $\langle K \rangle$  es un grupo. Por lo tanto,  $i)$  implica  $ii)$ . □

**Definición 1.4.** Si  $H \leq G$ , entonces el *índice* de  $H$  en  $G$  es el número de clases laterales derechas de  $H$  en  $G$ .

**Definición 1.5.** Un subgrupo  $N$  de un grupo  $G$  se dice que es *normal* en  $G$ , denotado por  $N \trianglelefteq G$ , si para toda  $g \in G$ ,  $gNg^{-1} = N$ . Donde  $gNg^{-1} = \{gng^{-1} | n \in N\}$ .

**Ejemplo 1.9.** Consideremos nuevamente a  $D_4$ , el grupo de simetrías del cuadrado, donde en expresión cíclica éste es:

$$D_4 = \{(1), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2)(3\ 4), (2\ 4), (1\ 3), (1\ 4\ 3\ 2), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 2\ 3\ 4)\},$$

y sea

$$N = \{(1), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)\},$$

el subgrupo de  $D_4$  compuesto por la identidad, las dos reflexiones sobre los ejes que atraviesan a las aristas en su punto medio y la rotación de  $\pi$ .

Verifiquemos que es un subgrupo normal de  $D_4$ . Es decir, debemos ver que para cualquier  $\gamma \in D_4$ ,  $N = \gamma N \gamma^{-1}$ .

Por un lado, para todo  $\eta \in N$ ,  $\eta = \eta^{-1}$ . Recordemos que además éstos mismos son elementos de  $D_4$ . Así, se tiene que  $\eta \eta \eta^{-1} = \eta \in N$ .

Entonces, solo resta calcular que los productos  $(2\ 4)\eta(2\ 4)$ ,  $(1\ 3)\eta(1\ 3)$ ,  $(1\ 4\ 3\ 2)\eta(1\ 2\ 3\ 4)$  y  $(1\ 2\ 3\ 4)\eta(1\ 4\ 3\ 2)$  representen elementos de  $N$  para toda  $\eta \in N$ . Nótemos que para toda  $\gamma \in D_4$ ,

$$\gamma^{-1}[(1\ 4)(2\ 3)]\gamma = (1\ 2)(3\ 4);$$

$$\gamma^{-1}[(1\ 2)(3\ 4)]\gamma = (1\ 4)(2\ 3);$$

$$\gamma^{-1}[(1\ 3)(2\ 4)]\gamma = (1\ 3)(2\ 4).$$

Si  $N$  es un subgrupo normal de un grupo  $G$  entonces la familia de todas las clases derechas de  $N$  en  $G$  forman un grupo denotado por  $G/N = \{Nx|x \in G\}$ . Para  $Nx, Ny \in G/N$  se define su producto como  $(Nx)(Ny) = N(xy) \in G/N$ , el inverso de cada  $Nx \in G/N$  es  $Nx^{-1}$  con  $x^{-1} \in G$ , por lo que su identidad es el mismo subgrupo  $N$  de  $G$ .

Es más, si  $H \leq G$  y el índice de  $H$  en  $G$  es 2 (es decir,  $H$  tiene dos clases derechas en  $G$ ), entonces  $H \trianglelefteq G$ .

### 1.1.4. Grupo de homomorfismos

Un *homomorfismo* es una función entre dos grupos  $(G, *)$  y  $(H, \circ)$ , del tipo  $\varphi : G \rightarrow H$ , si para todas  $a, b \in G$ ,

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b).$$

Es decir, un homomorfismo es una función entre dos grupos que preserva el producto de los grupos. Por lo general no es necesario que  $\varphi$  sea inyectivo o suprayectivo.

**Ejemplo 1.10.** Fijámonos en los ejemplos 1.1, 1.3 y 1.7, consideremos la inclusión  $\varphi$  del grupo de simetrías del cuadrado en  $S_4$ , tal que  $\varphi(r) = (1\ 4\ 3\ 2)$ ,  $\varphi(a) = (1\ 4)(2\ 3)$ , y  $\varphi(c) = (2\ 4)$ , éstos satisfacen que

$$\varphi(a)\varphi(r) = (1\ 4)(2\ 3)(1\ 4\ 3\ 2) = (2\ 4) = \varphi(c) = \varphi(ar).$$

Es decir,  $\varphi$  es un homomorfismo del grupo de simetrías del cuadrado en  $S_4$ .

Algunas propiedades del comportamiento de los homomorfismos, se muestran a continuación.

**Proposición 1.1.** Sean  $\varphi : G \rightarrow H$  y  $\psi : H \rightarrow K$  homomorfismos de grupos. Entonces

- (i) la composición  $\psi \circ \varphi : G \rightarrow K$  es también un homomorfismo,
- (ii)  $\varphi(e_G) = e_H$ , y para cada  $g \in G$ ,  $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$ ,
- (iii) para cada subgrupo  $A \subseteq G$ ,  $\varphi(A)$  es un subgrupo de  $H$ , así como para cada subgrupo  $B \subseteq H$ ,

$$\varphi^{-1}(B) = \{g \in G \mid \varphi(g) \in B\}$$

es un subgrupo de  $G$ .

*Demostración.*

- (i) Consideremos  $a, b \in G$ . Entonces  $\varphi(a b) = \varphi(a) \varphi(b)$ , y  $\varphi(a), \varphi(b) \in H$ . Como  $\psi$  es también un homomorfismo, entonces  $\psi[\varphi(a) \varphi(b)] = \psi[\varphi(a)] \psi[\varphi(b)]$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\psi \circ \varphi(a b) &= \psi[\varphi(a b)] \\ &= \psi[\varphi(a) \varphi(b)] \\ &= [\psi \circ \varphi(a)][\psi \circ \varphi(b)].\end{aligned}$$

- (ii) Es evidente que para cualquier elemento  $g \in G$ ,

$$\varphi(e_G)\varphi(g) = \varphi(e_G g) = \varphi(g).$$

Dado que el elemento identidad de un grupo es único, se sigue que  $\varphi(e_G) = e_H$ . Del mismo modo, para cualquier  $g \in G$ ,

$$\varphi(g^{-1})\varphi(g) = \varphi(g^{-1}g) = \varphi(e_G) = e_H.$$

- (iii) Sea  $A \subset G$ , veamos que  $\varphi(A)$  es cerrado bajo el producto e inversos. Por definición, para cada  $h \in \varphi(A)$ , hay una  $a \in A$  tal que  $\varphi(a) = h$ . Por el inciso (ii) tenemos que  $h^{-1} = (\varphi(a))^{-1} = \varphi(a^{-1}) \in \varphi(A)$ .

Consideremos  $h_1, h_2 \in \varphi(A)$  tales que  $h_i = \varphi(a_i)$  para  $i = 1, 2$ . Entonces

$$h_1 h_2^{-1} = \varphi(a_1)\varphi(a_2^{-1}) = \varphi(a_1 a_2^{-1}) \in \varphi(A),$$

ya que  $a_1 a_2^{-1} \in A$ . Por lo tanto,  $\varphi(A)$  es subgrupo de  $H$ .

La prueba de que para cada subgrupo  $B \subseteq H$ ,

$$\varphi^{-1}(B) = \{g \in G \mid \varphi(g) \in B\}$$

es un subgrupo de  $G$ , es un procedimiento análogo.

□

Un homomorfismo biyectivo es llamado *isomorfismo*. Se dice que  $G$  y  $H$  son isomorfos, denotado por  $G \cong H$ , si existe un isomorfismo entre ellos.

**Definición 1.6.** Si en un grupo  $G$  se define un isomorfismo de  $G$  en sí mismo, entonces a éste se le conoce como un *automorfismo* del grupo  $G$ . El conjunto de todos los automorfismos de un grupo  $G$  es denotado por  $Aut(G)$  y a su vez un grupo.

### 1.1.5. Productos directo y semidirecto

Dados dos grupos  $A$  y  $B$  es posible crear un grupo a partir de ellos. La forma más simple es mediante una iteración definida por el producto cartesiano de éstos. Al grupo resultante se le conoce como el *producto directo* de dos grupos.

Como conjunto, el producto cartesiano de dos grupos  $A$  y  $B$  es el producto

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

La operación entre dos elementos de este conjunto se define como

$$(a, b)(a', b') = (aa', bb').$$

El elemento identidad de éste queda representado bajo  $e = (e_A, e_B)$ , y el inverso del elemento  $(a, b)$  es  $(a^{-1}, b^{-1})$ .

**Ejemplo 1.11.** Supongamos que  $A$  y  $B$  son los grupos de permutaciones de  $n$  y  $p$  elementos, con  $n \neq p$ . Es decir,  $A = S_n$  y  $B = S_p$ , con  $n \neq p$ .

Consideremos las parejas de permutaciones del tipo  $(\sigma, \tau)$ , donde  $\sigma \in A$  y  $\tau \in B$ . Dos parejas  $(\sigma, \tau)$  y  $(\sigma', \tau')$  se componen por separado componiendo los  $a \in A$  y los  $b \in B$ :  $(\sigma', \tau')(\sigma, \tau) = (\sigma'\sigma, \tau'\tau)$ . Por tanto, el grupo de permutaciones creado por estas parejas es el producto directo  $A \times B = S_n \times S_p$ .

Sin embargo, para que el producto directo de dos grupos resulte un grupo éstos deberán cumplir la siguiente proposición. (Su demostración se puede ser revisada en libros de teoría de grupos como [19].)

**Proposición 1.2.** *Sea  $G$  un grupo con  $M$  y  $N$  subgrupos normales de  $G$ . Si  $M \cap N = \{e\}$  y  $MN = G$ . Entonces  $G \cong M \times N$ .*

Para generalizar la proposición anterior, supongamos que el grupo  $G$  tiene un subgrupo  $H$  y un subgrupo normal  $N$  ( $H \leq G$ ,  $N \trianglelefteq G$ ), tales que como en la proposición anterior  $G = NH$  y  $N \cap H = \{e\}$ .

Para  $x, y \in G$ ,  $x = n_1h_1$  y  $y = n_2h_2$ , el producto  $xy \in G$  lo podemos reescribir de la manera siguiente

$$xy = n_1h_1n_2h_2 = n_1h_1n_2h_1^{-1} \cdot h_1h_2$$

donde  $n_1 h_1 n_2 h_1^{-1} = n' \in N$  ya que  $N \trianglelefteq G$  y  $h_1 h_2 = h' \in H$ .

Para cualquier  $h \in H$ , como  $N$  es un subgrupo normal en  $G$ , la conjugación por  $h$  manda a  $N$  en sí mismo, induciéndose así un automorfismo  $\varphi^h : N \rightarrow N$  que actúa en los elementos de  $N$  como  $\varphi^h(n) = hnh^{-1}$ . Así, se define el automorfismo  $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ , donde  $\varphi(h) = \varphi^h$ .

Definamos la siguiente operación binaria de  $N \times H$  como

$$\begin{aligned} (n_1, h_1)(n_2, h_2) &= (n', h') \\ &= (n_1 h_1 n_2 h_1^{-1}, h_1 h_2) \\ &= (n_1 \varphi^{h_1}(n_2), h_1 h_2), \end{aligned}$$

que le dará una estructura de grupo, donde la identidad es el elemento  $e = (e_H, e_H)$  y el inverso de cualquier elemento  $(n, h)$  es de la forma  $(n, h)^{-1} = (\varphi^{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})$ . Este grupo recibe el nombre de producto semidirecto de  $H$  por  $N$  correspondiente al homomorfismo de conjugación  $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$  y queda denotado por

$$G = N \rtimes_{\varphi} H.$$

Concluyendo entonces, el siguiente resultado.

**Teorema 1.5.** *Sea  $G$  un grupo. Si  $N$  y  $H$  son subgrupos de  $G$  con  $N \trianglelefteq G$ , tales que  $G = NH$  y  $H \cap N = \{e\}$ . Entonces hay un homomorfismo  $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ , tal que  $G$  es isomorfo al producto semidirecto  $N \rtimes_{\varphi} H$ .*

*Demostración.* Nótese que si  $G = NH$  y  $H \cap N = \{e\}$ , entonces toda  $g \in G$  se puede escribir de manera única como  $g = nh$  para alguna  $n \in N$  y  $h \in H$ .

Consideremos el homomorfismo  $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$  donde  $\varphi$  es como antes, es decir, manda a cada  $h \in H$  a un automorfismo de  $N$  definido por:  $\varphi^h(n) = hnh^{-1}$  para toda  $n \in N$ . Entonces, para  $n_1, n_2 \in N$  y  $h_1, h_2 \in H$  el producto de dos elementos en  $N \rtimes_{\varphi} H$  se define como

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1(n_2)\varphi^{h_1}(n_2), h_1 h_2).$$

Ahora, definamos la función  $\phi : N \rtimes_{\varphi} H \rightarrow G$  como

$$(n, h) \xrightarrow{\phi} nh.$$

De tal manera que

$$\begin{aligned}\phi[(n_1, h_1)(n_2, h_2)] &= \phi(n_1\varphi^{h_1}(n_2), h_1h_2) = [n_1\varphi^{h_1}(n_2)][h_1h_2] \\ &= n_1h_1n_2(h_1^{-1}h_1)h_2 \\ &= (n_1h_1)(n_2h_2) = \phi(n_1, h_1)\phi(n_2, h_2),\end{aligned}$$

es un homomorfismo suprayectivo bien definido.

Para ver que  $\phi$  es inyectivo, veamos que

$$\phi(e_N, e_H) = e_N e_H = e_G,$$

siendo ésta la única manera de expresar a  $e \in G$ , ya que en  $G$  hay un único elemento identidad.

Por lo tanto,  $\phi$  es un isomorfismo entre  $N \rtimes_{\varphi} H$  y  $G$ .

□

**Ejemplo 1.12.** Consideremos el grupo diédrico  $D_n$  de orden  $2n$ . El subgrupo formado por todas rotaciones con centro de rotación en el centro del  $n$ -ágono forman un grupo  $N$  de índice 2 en  $D_n$ , éste es un subgrupo cíclico y de orden  $n$  generado por la rotación  $r = 2\pi/n$ . Sea  $H$  el subgrupo de  $D_n$  de orden 2 generado por una reflexión  $j$  del grupo.

Es posible ver que se cumplen las hipótesis del teorema 1.5, es decir,  $D_n = NH$  y que  $N \cap H = \{e\}$  con  $H$  un subgrupo no normal en  $D_n$ . Ya que el elemento  $j$  de  $H$  no conmuta con  $N$  y sólo se da la relación  $jr = r^{-1}j$ , que se puede ver como  $jrj^{-1} = r^{-1}$ , que define al homomorfismo  $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$  como  $\varphi(j) = \varphi^j$  y por ende,  $D_n \cong N \rtimes_{\varphi} H$ .

Obsérvese que  $\varphi^h(n) = hnh^{-1}$  deja fijo a toda  $n \in N$  sólo si  $\varphi$  es el homomorfismo identidad. En tal caso, correspondería decir que  $H$  también es normal en  $G$ . Reduciéndose así al producto directo como un caso particular del producto semidirecto.

**Definición 1.7.** Sean  $G$  un grupo y  $X$  un conjunto. Diremos que la acción de  $G$  en el conjunto  $X$  es de la forma  $G \times X \rightarrow X$ , donde la imagen de  $(g, x)$  la denotaremos por  $gx$  y tal acción cumple que



- (i)  $ex = x$  para todo  $x \in X$ ,
- (ii)  $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$  para todas  $g_1, g_2 \in G$  y  $x \in X$ .

Dado  $G$  un grupo y  $X$  un conjunto, para cada  $x \in X$ , se define al conjunto

$$G_x = \{g \in G \mid xg = x\} \leq G,$$

como el *estabilizador* de  $x$  en  $G$ . El estabilizador de un conjunto  $X$  en un grupo  $G$  es el conjunto de todos los elementos de  $G$  que dejan invariantes a los elementos de  $X$ .

Sea  $H$  un subgrupo del grupo  $G$ , diremos que  $G$  actúa sobre  $H$  por medio de conjugación si la acción  $G \times H \rightarrow H$  manda a  $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$ , para toda  $g \in G$  y  $h \in H$ .

**Definición 1.8.** Si la acción de un grupo  $G$  sobre sus subgrupos es por medio de la conjugación. Entonces, para cada  $H \leq G$ , al estabilizador de  $H$  en  $G$  (es decir, aquel que deja a los elementos de  $H$  invariantes bajo conjugación), se le conoce como el *normalizador* de  $H$  en  $G$ . Descrito por

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

Entonces  $N_G(H) \leq G$  y  $H \trianglelefteq N_G(H)$ .

En particular, si  $N_G(H) = G$ , entonces  $H \trianglelefteq G$ .

## 1.2. Teoría de Gráficas

En esta sección se introducirá terminología básica de teoría de gráficas que será usada tanto en el siguiente capítulo como en el resto del texto. En particular definiremos los grupos de automorfismos de un gráfica, concepto importante para el capítulo 6.

### 1.2.1. Definiciones

Una *gráfica*  $G$  consiste de un conjunto y no vacío  $V(G)$  de *vértices* junto con un conjunto  $E(G)$  de parejas no ordenadas de vértices llamadas *aristas* de  $G$ . Si  $\{u v\} = e$  es una arista en  $E(G)$ , para  $u, v \in V(G)$ , diremos que  $u$  y  $v$  son vértices *adyacentes*, y que  $u$  y  $v$  son incidentes en  $e$ . (En caso de que  $V(G) = \emptyset$  y por tanto  $E(G)$  también, entonces se dice que  $G$  es una *gráfica vacía*).

También diremos que dos aristas del tipo  $\{v u\}$  y  $\{v w\}$ ,  $u \neq w$ , son *adyacentes* si comparten uno de sus vértices,  $v$ . El *grado*,  $\delta(v)$ , de un vértice  $v$  es el número de aristas con las cuales  $v$  es incidente. Equivalentemente,  $\delta(v)$  es el número de vértices con los cuales  $v$  es adyacente, es decir,

$$\delta(v) = |\{u \in V(G) | \{u v\} \in E(G)\}|.$$

Decimos que  $G$  es *regular de grado  $r$*  o  *$r$ -regular* si para cada vértice  $v$  de  $G$  se tiene que  $\delta(v) = r$ . A los vértices de  $G$  que son adyacentes a  $u \in V(G)$ , se les conoce como los *vecinos* de  $u$ . Éstos describen al conjunto  $N(u) = \{v \in V(G) | \{u v\} \in E(G)\}$ , que recibe el nombre de *vecindad de  $u$*

Si los vértices de  $G$  están etiquetados, se dice que  $G$  es un *gráfica etiquetada*.

En esta tesis trabajaremos solamente con gráficas sin aristas múltiples (conjuntos de dos o más aristas que conectan al mismo par de vértices), ni lazos (aristas que conectan a un vértice con el mismo). A este tipo de gráficas se les conoce con el nombre de *gráficas simples*.

**Ejemplo 1.13.** Sea  $G$  una gráfica definida por:

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E(G) = \{\{v_1 v_2\}, \{v_2 v_3\}, \{v_3 v_1\}, \{v_1 v_4\}\}$$

Entonces  $G$  podrá ser representada por cualquiera de los dibujos en la Figura 1.3.

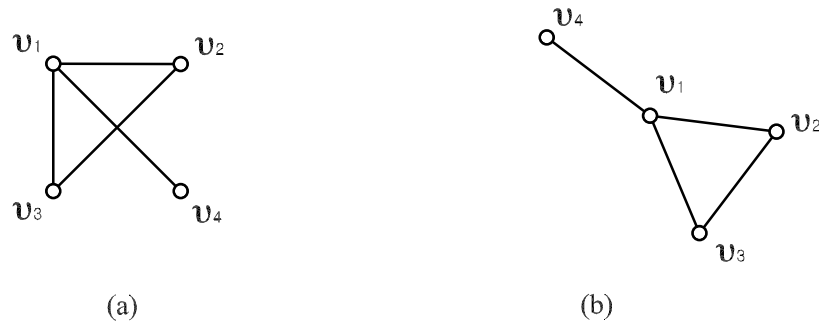


Figura 1.3: Representaciones de la gráfica  $G$

Las cardinalidades  $|V(G)|$  y  $|E(G)|$  denotarán el orden y el tamaño de la gráfica respectivamente y por lo general si  $|V(G)| = p$  y  $|E(G)| = q$ , diremos que  $G$  es una  $(p, q)$ -gráfica.

Una gráfica  $H$  es una *subgráfica* de  $G$  si  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ . Si  $V(G) = V(H)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ , entonces  $H$  es una *subgráfica generadora* de  $G$ . Para cualquier  $\emptyset \neq S \subseteq V(G)$ , la subgráfica con todas las aristas de  $E(G)$  que hacen adyacentes a los vértices en  $S$  es llamada *subgráfica inducida* de  $G$ .

Para  $v \in V(G)$  y  $|V(G)| \geq 2$ ,  $G - v$  denota a la subgráfica cuyo conjunto de vértices es  $V(G) - \{v\}$  y cuyas aristas son todas las de  $G$  que no inciden en  $v$ . Para  $e \in E(G)$ ,  $V(G - e) = V(G)$  y  $E(G - e) = E(G) - e$ .

Si  $G$  y  $K$  son dos gráficas, la *unión* de  $G$  y  $K$ , denotada por  $G \cup K$ , es la gráfica con conjunto de vértices  $V(G) \cup V(K)$  y conjunto de aristas  $E(G) \cup E(K)$ .

**Nota:** Para esta tesis, trabajaremos con gráficas  $G$  y  $K$ , cuyos vértices estarán etiquetados de tal manera que  $V(G) = V(K)$  pero  $E(G)$  podrá ser distinto de  $E(K)$ . La unión  $G \cup K$  se definirá identificando los elementos correspondientes de  $V(G)$  y  $V(K)$  combinando las adyacencias determinadas por  $E(G)$  y  $E(K)$ .

Diremos que  $F \subseteq E(G)$  es *independiente* si para cualesquiera  $f_1, f_2 \in F$ ,  $f_1$  no es adyacente a  $f_2$ . (El conjunto formado por una única arista es independiente.) Un *apareamiento*  $M$  es un conjunto independiente de aristas.

Un *camino* en una gráfica  $G$  es una sucesión de vértices  $(v_0, v_1, \dots, v_n) = C$  donde  $v_i \in V(G), i \in \{0, 1, \dots, n\}$  y  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G), i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ;  $n$  representa la *longitud* del camino. Si  $v_0 = v_n$ , se dice que el camino es *cerrado*. Si en el camino no se repiten vértices, entonces a este camino se le conoce como *trayectoria* y la denotaremos por  $T_n$ . Un *ciclo* es un camino cerrado tal que sólo  $v_0 = v_n$ , con  $n \geq 3$  vértices diferentes, denotado por  $C_n$ .

Si  $G$  es una gráfica tal que para cualesquiera  $u, v \in V(G)$  se tiene que  $\{u, v\} \in E(G)$  entonces llamaremos a  $G$  una gráfica *completa* y se denotará como  $K_p$  donde  $p$  es el orden de  $G$ .  $K_1$  representa a la gráfica conocida como *gráfica trivial*.

Una gráfica  $G$  *bipartita* es aquella cuyo conjunto de vértices es partido en dos conjuntos  $X$  y  $Y$  ajenos, de tal manera que cada arista de  $G$  tiene uno de sus extremos en  $X$  y el otro en  $Y$ . Si todos los vértices de  $X$  son adyacentes a todos los de  $Y$  y si  $|X| = m$  y  $|Y| = n$ , entonces diremos que  $G$  es una gráfica *bipartita completa* y la denotaremos por  $K_{m,n}$ . Un caso particular de esta última, es la  $K_{1,n}$  la gráfica estrellada con  $(n+1)$  vértices y  $n$  aristas (figura 1.7).

Una gráfica  $G$  es *conexa* si para cualquier pareja  $u, v \in V(G)$  existe una trayectoria en  $G$  que conecta a  $u$  con  $v$ . Una *componente* de  $G$  es una subgráfica conexa máxima (por contención) de  $G$ .

Dadas dos gráficas  $G_1$  y  $G_2$  se dice que son *iguales* si  $V(G_1) = V(G_2)$  y  $E(G_1) = E(G_2)$ . Así mismo, diremos que son *isomorfas* ( $G_1 \cong G_2$ ) si existe una función  $\varphi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  biyectiva, tal que  $\varphi$  preserva la adyacencia. Esto es,  $\{u, v\} \in E(G_1)$  si y sólo si  $\{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E(G_2)$ ; tal función es un *isomorfismo de gráficas*.

Sea  $K$  un conjunto de aristas de la gráfica  $G$ . Al aplicar un isomorfismo  $\varphi$  sobre la gráfica, el conjunto  $K$  se ve modificado de la siguiente manera

$$\varphi(K) = \{\{\varphi(i), \varphi(j)\} | \{i, j\} \in K\}.$$

### 1.2.2. Grupo de Automorfismos de la gráfica

Cada gráfica tiene asociado un grupo, conocido como el grupo de automorfismos o de simetrías de la gráfica.

Un *automorfismo* de una gráfica  $G$  es un isomorfismo de la gráfica en si misma, es decir, a cada vértice  $v \in V(G)$  lo manda a un vértice  $w \in V(G)$ , preservando su adyacencia. El conjunto de todos los automorfismos de  $G$  forman un subgrupo del grupo de permutaciones en  $S_{V(G)}$ ,  $\Gamma(G)$ , que corresponden a las permutaciones del conjunto  $V(G)$ ; a éste, se le conoce como el *grupo de automorfismos* de  $G$ .

Obsérvese que un automorfismo de  $G$ , además de ser una permutación de  $V(G)$ , también induce una permutación de  $E(G)$  de una manera simple.

**Ejemplo 1.14.** Sea  $G$  la gráfica de la figura 1.4 y  $\Gamma(G)$  su grupo de automorfismos.

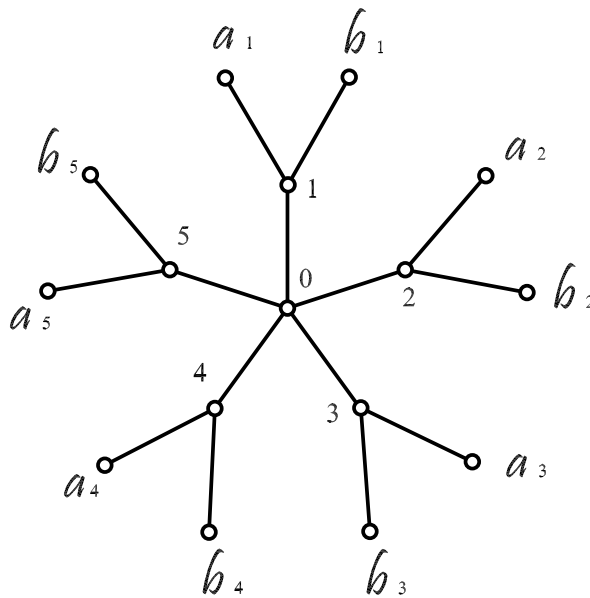


Figura 1.4: Gráfica  $G$

Los elementos de  $\Gamma(G)$  son:

- $\varphi_0(0) = 0$ , ya que cualquier vértice  $v \neq 0$  en  $V(G)$ ,  $\delta_G(v) \neq \delta_G(0) = 5$ .
- $\varphi_*$  que permuta al conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , ya que estos vértices son los únicos en  $V(G)$  que tienen grado tres y son vecinos de uno de grado cinco. Es decir, para cada  $1 \leq i \leq 5$   $\varphi_*(a_i) = a_j$  y  $\varphi_*(b_i) = b_j$ , o bien  $\varphi_*(a_i) = b_j$  y  $\varphi_*(b_i) = a_j$  para toda  $j \neq i$ .

A la gráfica  $G$  cuyo único automorfismo es la permutación identidad sobre  $V(G)$ , es decir el trivial, se le conoce como una *gráfica idéntica*. Un ejemplo de este tipo de gráfica es el siguiente (figura 1.5)

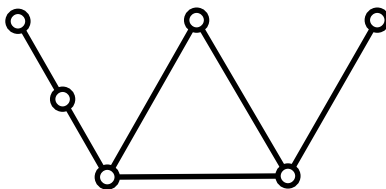


Figura 1.5: Ejemplo de gráfica idéntica.

Otros ejemplos del grupo de automorfismos de gráficas, que de hecho servirán de herramienta para la solución de uno de los teoremas principales de ésta tesis, son los siguientes.

**Ejemplo 1.15.** Sea  $G = T_n$  la trayectoria de longitud  $n$  (con  $n$  aristas y  $n + 1$  vértices). Por definición de trayectoria, todos los vértices, excepto los

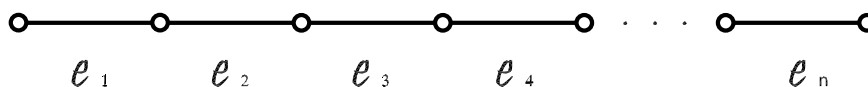


Figura 1.6: Trayectoria  $T_n$  de longitud  $n$ .

extremos (o vértices terminales), de la gráfica tienen grado 2. De tal manera que el único automorfismo  $\varphi \in \Gamma(T_n)$ , distinto de la identidad, que tiene esta

gráfica es el automorfismo que intercambia a cada arista con la que está en posición simétrica (respecto al centro) con ella.

En caso de que  $n$  sea impar [*par*], entonces tendremos una arista  $e \in E(G)$  [un vértice  $v \in V(G)$ ] central, tal que  $\varphi(e) = e$  [ $\varphi(e_i) = e_j$  donde  $e_j$  es la arista en posición simétrica con  $e_i$ ]. Por lo que podemos concluir que  $\Gamma(T_n) \cong \mathbb{Z}_2$ .

Por último,

**Ejemplo 1.16.** Sea  $G = K_{1,n}$  la gráfica estrellada de  $n$  aristas, todas incidentes en un mismo vértice (todas comparten un vértice).

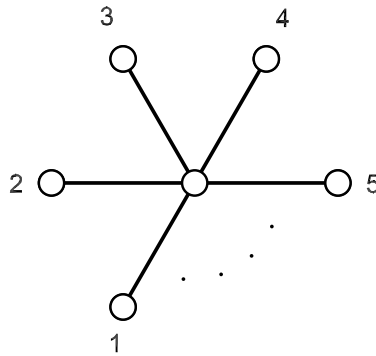


Figura 1.7: Gráfica estrella  $K_{1,n}$  con  $n$  aristas.

En este caso, dado que todas las aristas tienen grado 1 en uno de sus extremos y  $n$  en el otro, el grupo de automorfismos de esta gráfica estará definido mediante cualquier permutación de las  $n$  aristas. Siendo así,  $\Gamma(K_{1,n}) \cong S_n$ .

# Capítulo 2

## Gráficas de Cayley

En este capítulo estudiaremos una familia de gráficas conocida como gráficas coloreadas de Cayley asociada a los grupos simétricos, herramienta primordial para definir al graficaedro. Además de dar su definición, también veremos sus grupos de automorfismos y ejemplos relevantes para la comprensión de la construcción del graficaedro.

### 2.1. Definición

Sea  $G$  un grupo y  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subseteq G$  un conjunto de  $G$ , que no incluye a la identidad  $e$  pero es tal que para cada  $x \in X$ , tenemos que  $x^{-1} \in X$ . Describiremos a la *gráfica coloreada de Cayley* de  $G$ , denotada por  $\mathcal{G}(G, X)$  como aquella gráfica cuyos vértices son los elementos de  $G$  y dos vértices  $v$  y  $w$  en  $\mathcal{G}(G, X)$  determinan una arista de  $\mathcal{G}(G, X)$  si y sólo si  $w = x_i v$  con  $x_i \in X$ . Es decir, por cada elemento  $x_i \in X$  asignaremos un color, digamos el color  $i$ , a la arista  $\{v w\}$ .

En particular, en este trabajo el conjunto  $X$  es tal que para cualquier  $x \in X$  se tiene que  $x^2 = e$ .

A continuación, se construirán en específico unas gráficas de Cayley, que serán utilizadas a lo largo de la tesis, a las que nos referiremos simplemente por gráficas de Cayley.



Sea  $G$  una  $(p, q)$ -gráfica simple con  $V(G) := \{1, \dots, p\}$  su conjunto de vértices y  $E(G) := \{e_1, \dots, e_q\}$  el de aristas, donde  $p \geq 1$  y  $q \geq 0$  (si  $q = 0$ , entonces  $E(G) = \emptyset$ ).

Para cada  $e = \{i j\}$  arista de  $G$ , definamos  $\tau_e := (i j) \in S_{V(G)}$ . Es decir,  $\tau_e$  es el elemento del grupo de permutaciones de los vértices de  $G$  que mueve exactamente a los vértices de la arista  $e$ . Nótese que en general  $\tau_e$  no va a ser un automorfismo de  $G$ . El conjunto de las transposiciones determinadas por todas las aristas de  $G$  se denotará por

$$\mathcal{T}_G := \{\tau_{e_1}, \dots, \tau_{e_q}\}.$$

Equivalentemente, dado  $K \subseteq E(G)$  definiremos a  $\mathcal{T}_K := \{\tau_e | e \in K\}$ .

Nótese que si  $K \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{T}_K$  es un subconjunto del grupo de permutaciones de los vértices de  $G$ , al cual no pertenece la identidad pero si es cerrado bajo inversa, ya que el inverso de una trasposición es ella misma.

Si  $G$  es una gráfica no vacía, ( $|V(G)| = p$ ) entonces definimos la gráfica de Cayley asociada a  $G$ ,  $\mathcal{G}(S_p, \mathcal{T}_G)$ , como la gráfica cuyos vértices son las permutaciones de los vértices de  $G$ , en la cual, dos permutaciones  $\sigma$  y  $\gamma$  son adyacentes si y sólo si  $\sigma = \tau_{e_i} \gamma$  para algún  $e_i \in E(G)$ .

Si  $K = \emptyset$  definimos a  $\mathcal{G}(S_p, \mathcal{T}_K)$  como la gráfica vacía cuyos vértices son los elementos del conjunto de permutaciones de los vértices de  $G$ .

**Ejemplo 2.1.** Sea  $G$  la trayectoria de longitud dos, definida por

$$V(G) = \{1, 2, 3\} \text{ y } E(G) = \{\{1 2\}, \{2 3\}\} = \{e_1, e_2\}$$

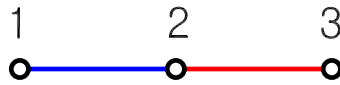


Figura 2.1: Trayectoria  $T_2$  de longitud 2.

Así,  $\mathcal{T}_G = \{\tau_{e_1}, \tau_{e_2}\} = \{(1 2), (2 3)\}$  (subconjunto de  $S_3$ ). Los vértices de  $\mathcal{G}(S_3, \mathcal{T}_G)$  son precisamente  $(1)$ ,  $(1 2)$ ,  $(1 3)$ ,  $(2 3)$ ,  $(1 2 3)$ ,  $(1 3 2)$  (los elementos

de  $S_3$ ) y

(1) adyacente a (2 3) ya que  $(2\ 3)(1) = (2\ 3)$ ,

(2 3) adyacente a (1 2 3) ya que  $(1\ 2)(2\ 3) = (1\ 2\ 3)$ ; siguiendo con la sucesión,

(1 2 3) adyacente a (1 3) ya que  $(2\ 3)(1\ 2\ 3) = (1\ 3)$ , y

$(1\ 2)(1\ 3) = (1\ 3\ 2)$ ,  $(1\ 3)(1\ 3\ 2) = (1\ 2)$  y  $(1\ 2)(1\ 2) = (1)$ .

Note que las subgráficas generadoras de  $G$ ,  $G_{e_1}$  y  $G_{e_2}$ , que tienen sólo a la arista  $e_1$  y a la arista  $e_2$ , respectivamente, inducen conjuntos ajenos en  $\mathcal{G}(S_3, \mathcal{T}_G)$ . Es decir, si pintamos a  $e_1$  de color azul, asignando el color azul a  $\tau_{e_1} = (1\ 2)$  entonces, la operación  $\sigma = \tau_{e_1}\gamma$  induciría la subgráfica pintada de azul de  $G$ , es decir, la formada por las aristas  $\{(2\ 3)(1\ 2\ 3)\}, \{(1\ 3)(1\ 3\ 2)\}, \{(1\ 2)(1)\}$ . De manera análoga, si pintamos a la arista  $e_2$  de color rojo, asignando el color rojo a  $\tau_{e_2} = (2\ 3)$  entonces, la operación  $\sigma = \tau_{e_2}\gamma$  induciría la subgráfica roja de  $G$ , es decir, la formada por las aristas  $\{(1)(2\ 3)\}, \{(1\ 2\ 3)(1\ 3)\}, \{(1\ 3\ 2)(1\ 2)\}$ , donde  $\sigma, \gamma \in S_3$ .

Resultando la gráfica:

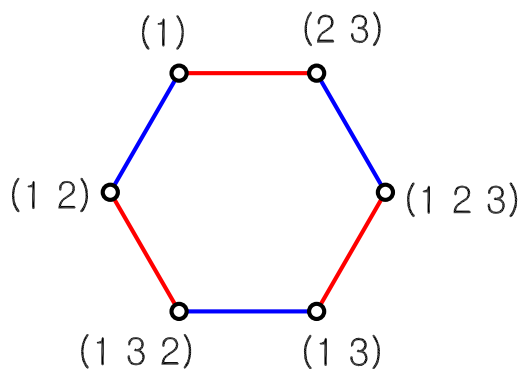


Figura 2.2: Gráfica de Cayley  $\mathcal{G}(S_3, \mathcal{T}_G)$ .

Dado que  $\mathcal{G}(S_p, \mathcal{T}_K)$  queda determinada en forma única por la estructura de la gráfica (base)  $G$ , en adelante denotaremos a  $\mathcal{G}(S_p, \mathcal{T}_K)$  simplemente por  $\mathcal{G}(G)$ .

Los siguientes resultados tienen como objetivo describir algunas propiedades de  $\mathcal{G}(G)$

**Lema 2.1.** *Sea  $G$  una  $(p, q)$ -gráfica.  $G$  es conexa si y sólo si  $\mathcal{T}_G$  genera a  $S_p$ .*

*Demostración.* Sabemos que toda permutación es producto de transposiciones (teorema 1.1) y que  $\mathcal{T}_G$  se define por las transposiciones determinadas por las aristas de  $G$  (no necesariamente contiene a todas las transposiciones en  $S_p$ ). Entonces, supongamos que  $G$  es una gráfica conexa y veamos que  $\mathcal{T}_G$  genera a  $S_p$ ; es decir, basta probar que cualquier transposición en  $S_p$  puede expresarse como producto de transposiciones de vértices adyacentes.

Sea  $\tau \in S_p$  una transposición de la forma  $\tau = (i j)$ . Supongamos que  $\{i j\}$  no es un elemento en  $E(G)$  (ya que de otra forma, si  $\{i j\} \in E(G)$  entonces se conculiría la demostración). Recordemos que  $G$  es una gráfica conexa si y sólo si para todos  $u, v \in V(G)$ , existe una trayectoria en  $G$  que conecte a  $u$  con  $v$ ; con esta idea, consideremos una trayectoria en  $G$  que comience en el vértice  $i$  y termine en el  $j$  definida, digamos, por la sucesión de vértices adyacentes:  $i = v_1, v_2, \dots, v_s = j$ .

De tal manera que  $\tau$  se puede representar como

$$(i j) = (v_1 v_s) = (v_1 v_2)(v_2 v_3) \cdots (v_{s-1} v_s)(v_{s-1} v_{s-2}) \cdots (v_3 v_2)(v_2 v_1),$$

un producto de transposiciones definidas por vértices adyacentes. Así, hemos probado que  $\mathcal{T}_G$  genera a  $S_p$ .

Ahora, supongamos que  $\mathcal{T}_G$  genera a  $S_p$ . Para probar que  $G$  es una gráfica conexa, basta encontrar que para cualesquiera  $u, v \in V(G)$  podemos encontrar una  $(u, v)$ -trayectoria en  $G$ .

Sea  $\sigma \in S_p$ , recordemos que si  $\sigma$  es un  $r$ -ciclo, entonces por el teorema 1.1

$$\sigma = (x_1 x_2 \dots x_r) = (x_1 x_r)(x_1 x_{r-1}) \dots (x_1 x_2).$$

Por otro lado, como  $\mathcal{T}_G$  genera a  $S_p$ , toda permutación en  $S_p$  se puede representar como producto de transposiciones de  $\mathcal{T}_G$ . En particular, para cada  $(x_1 x_n)$  con  $1 \leq n \leq r$

$$(x_1 x_n) = (v_1 v_2)(v_2 v_3) \cdots (v_{s-1} v_s)(v_{s-1} v_{s-2}) \cdots (v_3 v_2)(v_2 v_1)$$

donde  $v_1, v_2, \dots, v_s$  es una sucesión de vértices adyacentes en  $G$ ; por lo que  $(x_1 x_n)$  define una  $(v_1, v_s)$ -trayectoria de  $G$ . Luego,

$$(x_1 x_{n+1}) = (w_1 w_2)(w_2 w_3) \cdots (w_{k-1} w_k)(w_{k-1} w_{k-2}) \cdots (w_3 w_2)(w_2 w_1),$$

nótese que si  $v_1 = w_i$ , para algún  $1 \leq i \leq k$ , entonces se tiene que  $\{v_1 w_{i-1}\} \in E(G)$  y ésta es adyacente a  $\{v_1 v_2\} \in E(G)$ , generando así una  $(w_i, v_r)$ trayectoria en  $G$ . Sin embargo, veamos que si  $v_1 \neq w_i$  para toda  $1 \leq i \leq k$ , se sigue que  $v_1 = u_j$  donde  $u_j \in V(G)$  pertenece a una sucesión de vértices adyacentes en  $G$  definida por  $(x_1 x_{n-m})$  con  $1 \leq m \leq s - m$  definiéndose  $\{v_1 u_j\} \in E(G)$  y por consiguiente una  $(u_j, v_r)$ -trayectoria en  $G$ .

Así, el producto  $(x_1 x_r) (x_1 x_{r-1}) \dots (x_1 x_2)$ , desarrollado como producto de transposiciones de  $\mathcal{T}_G$ , define una unión de trayectorias en  $G$  tal que cada dos comparten al menos un vértice de  $G$ . Creando de esta manera, una trayectoria entre cualesquiera dos vértices  $u, v \in V(G)$  de  $G$ , razón necesaria y suficiente para ver que  $G$  es un gráfica conexa. □

**Nota:** Del lema anterior se sigue que la gráfica  $G$  es conexa si y sólo si  $\mathcal{G}(G)$  es conexa.

Denotaremos por

$$T_G := \langle \tau_{e_1}, \dots, \tau_{e_q} \rangle$$

al subgrupo de  $S_p$  generado por  $\mathcal{T}_G$ . Entonces, por el lema anterior cuando  $G$  es conexa  $T_G = S_p$ .

Con los lemas que se presentan a continuación, se enunciarán propiedades básicas de las gráficas de Cayley  $\mathcal{G}(H)$  asociadas a las subgráficas generadoras  $H$  de  $G$ .

**Lema 2.2.** *Sea  $G$  una  $(p, q)$ gráfica conexa y sea  $H$  una subgráfica de  $G$ . Entonces  $H$  es una subgráfica generadora de  $G$  si y sólo si  $\mathcal{G}(H)$  es subgráfica generadora de  $\mathcal{G}(G)$ .*

*Demostración.* Sea  $H$  una subgráfica generadora de  $G$ . Entonces se tiene que  $V(H) = V(G)$  y además  $E(H) \subseteq E(G)$ . De la primera se sigue que  $V(\mathcal{G}(H)) = S_p = V(\mathcal{G}(G))$ .

Ahora, sean  $\sigma$  y  $\gamma$  dos permutaciones adyacentes en  $\mathcal{G}(H)$ . Es decir, existe  $\tau = (i j) \in S_p$  tal que  $\sigma = \tau\gamma$ , con  $i$  y  $j$  son dos vértices adyacentes en  $H$ . Como  $H$  es subgráfica generadora de  $G$ , entonces  $i$  y  $j$  son también vértices

adyacentes en  $G$ , lo cual implica que  $\sigma$  y  $\gamma$  son adyacentes en  $\mathcal{G}(G)$ . Así,  $E(\mathcal{G}(H)) \subseteq E(\mathcal{G}(G))$  y como además  $V(\mathcal{G}(H)) = V(\mathcal{G}(G))$ . Podemos concluir que  $\mathcal{G}(H)$  es subgráfica generadora de  $\mathcal{G}(G)$ .

Por otro lado, supongamos que  $\mathcal{G}(H)$  es subgráfica generadora de  $\mathcal{G}(G)$ . Entonces,  $V(\mathcal{G}(H)) = V(\mathcal{G}(G))$  y  $E(\mathcal{G}(H)) \subseteq E(\mathcal{G}(G))$ . Tanto  $V(\mathcal{G}(H))$  como  $V(\mathcal{G}(G))$ , corresponden al conjunto de permutaciones de los vértices de  $H$  y  $G$  respectivamente. Entonces  $|V(G)| = |V(H)|$  y por lo tanto  $V(H) = V(G)$ .

Ahora bien, para concluir, falta ver que  $E(H) \subseteq E(G)$ . Para ésto consideremos dos vértices adyacentes  $i$  y  $j$  en  $H$ , éstos determinan que cualesquiera dos vértices  $\sigma$  y  $\gamma$  de  $\mathcal{G}(H)$  son adyacentes, de  $\sigma = (i j)\gamma$ . Pero la contención  $E(\mathcal{G}(H)) \subseteq E(\mathcal{G}(G))$ , implica que  $i$  y  $j$  también son adyacentes en  $G$ . Por lo tanto,  $E(H) \subseteq E(G)$ . □

En general, conforme a la definición de la unión de gráficas dada en la sección anterior, dadas dos gráficas  $G$  y  $H$ ,  $\mathcal{G}(G) \cup \mathcal{G}(H)$  es la gráfica cuyo conjunto de vértices es  $V(\mathcal{G}(G) \cup \mathcal{G}(H)) = V(\mathcal{G}(G)) \cup V(\mathcal{G}(H)) = S_{V(G)} \cup S_{V(H)}$  y cuyo conjunto de aristas es  $E(\mathcal{G}(G) \cup \mathcal{G}(H)) = E(\mathcal{G}(G)) \cup E(\mathcal{G}(H))$ . Observemos que si  $V(G) = V(H)$ , entonces  $S_{V(G)} = S_{V(H)}$  (es decir, en la unión se están identificando vértices iguales). De igual forma, si una misma arista pertenece tanto a  $\mathcal{G}(G)$  como a  $\mathcal{G}(H)$ , en la unión dicha arista aparece una sola vez.

**Ejemplo 2.2.** Consideremos a  $G = T_2$  la trayectoria descrita en el ejemplo 2.1, y a  $H = G_{e_1}$  la subgráfica generadora tal que  $E(H) = \{e_1\}$ . Así,  $\mathcal{G}(G)$  correspondería a un hexágono y  $\mathcal{G}(H)$  sería una gráfica descrita por el apareamiento de las aristas azules del hexágono.

**Lema 2.3.** Si  $G$  es una  $(p, q)$ -gráfica con  $q \geq 2$  entonces  $\mathcal{G}(G) = \cup \mathcal{G}(G_K)$  con  $G_K$  subgráfica generadora propia de  $G$ .

*Demostración.* Por el lema 2.2, para toda  $G_K$  subgráfica generadora propia de  $G$ , su gráfica de Cayley  $\mathcal{G}(G_K)$  es una subgráfica generadora de  $\mathcal{G}(G)$ . Lo que implica que toda gráfica  $\mathcal{G}(G_K)$  está contenida en  $\mathcal{G}(G)$  y por ende la unión de ellas también. Es decir  $\cup \mathcal{G}(G_K) \subseteq \mathcal{G}(G)$ .

Para probar la otra contención, recordemos que por ser  $\mathcal{G}(G_K)$  subgráfica generadora de  $\mathcal{G}(G)$ , entonces  $V(\mathcal{G}(G)) = V(\mathcal{G}(G_K)) = V(\cup\mathcal{G}(G_K))$ . Así que sólo falta ver que cualquier arista de  $\mathcal{G}(G)$  es arista de  $\cup\mathcal{G}(G_K)$ .

Consideremos ahora a  $\sigma, \gamma \in V(\mathcal{G}(G))$  adyacentes, de tal forma que  $\sigma = \tau_e \gamma$  para alguna  $e \in E(G)$ . En particular como  $q \geq 2$ , a  $G_{\{e\}}$  es una subgráfica generadora propia de  $G$ , tal que  $\sigma$  y  $\gamma$  son adyacentes en  $\mathcal{G}(G_{\{e\}})$ . Por lo tanto,  $\sigma$  y  $\gamma$  son adyacentes en  $\cup\mathcal{G}(G_K)$ . Concluyendo así que  $\mathcal{G}(G) \subseteq \cup\mathcal{G}(G_K)$ . □

Nóte que en el lema anterior, fue necesario pedir que  $q \geq 2$  dado que este resultado es falso si  $G$  tiene tamaño 1 o 0, debido a que en esos casos, las subgráficas generadoras propias de  $G$  son vacías o inexistentes.

**Ejemplo 2.3.** Consideremos nuevamente la trayectoria de longitud dos en la figura 2.1, y las subgráficas generadoras propias  $G_{e_1}$  y  $G_{e_2}$  de ésta:



Figura 2.3: Subgráficas generadoras propias  $G_{e_1}$  y  $G_{e_2}$  de  $T_2$ .

Por la proposición anterior, se tiene que  $\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(G_{e_1}) \cup \mathcal{G}(G_{e_2})$ , como se puede ver a continuación:

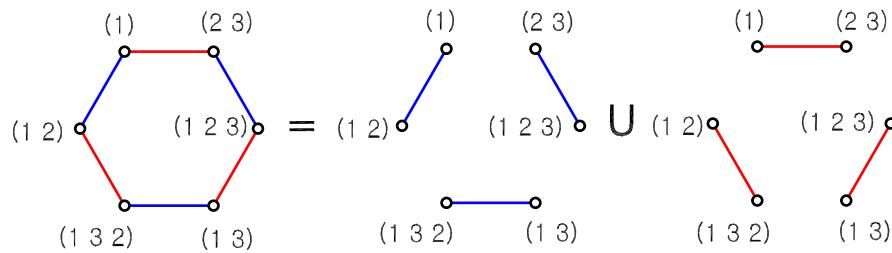


Figura 2.4:  $\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(G_{e_1}) \cup \mathcal{G}(G_{e_2})$ .

Veamos ahora que dadas dos gráficas isomorfas, sus correspondientes gráficas de Cayley son isomorfas. Es decir,

**Lema 2.4.** *Si  $G$  y  $H$  son dos  $(p, q)$ -gráficas isomorfas entonces  $\mathcal{G}(G)$  y  $\mathcal{G}(H)$  son gráficas isomorfas.*

*Demostración.* Sean  $G$  y  $H$  dos  $(p, q)$ -gráficas isomorfas, entonces existe un isomorfismo  $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$  de manera tal que si  $\{u v\}$  es una arista de  $G$ ,  $\{\phi(u) \phi(v)\}$  es una arista en  $H$ .

Sea  $\Phi : V(\mathcal{G}(G)) \rightarrow V(\mathcal{G}(H))$ , dado por  $\Phi(\sigma) = \phi\sigma\phi^{-1}$  para cada  $\sigma \in S_p = V(\mathcal{G}(G))$ .

Es fácil ver que  $\Phi$  está bien definida. Si tenemos que  $\sigma = \gamma \in S_p$ , como  $\phi, \sigma$  y  $\gamma$  son funciones biyectivas, entonces

$$\Phi(\sigma) = \phi\sigma\phi^{-1} = \phi\gamma\phi^{-1} = \Phi(\gamma).$$

Resultando que  $\Phi(\sigma)$  y  $\Phi(\gamma)$  son elementos de  $S_p$ .

Para mostrar que  $\Phi$  es inyectiva. Consideremos  $\sigma \neq \gamma$ , permutaciones de los vértices de  $G$ , entonces existe un  $v \in V(G)$  tal que  $\sigma(v) \neq \gamma(v)$ . Lo que implica que  $\phi(\sigma(v)) \neq \phi(\gamma(v))$ . Pero

$$\phi(\sigma(v)) = \phi\sigma\phi^{-1}(\phi(v)) \quad \text{y} \quad \phi(\gamma(v)) = \phi\gamma\phi^{-1}(\phi(v)).$$

Por lo tanto, existe un elemento  $\phi(v)$  tal que su imagen bajo  $\Phi(\sigma)$  y  $\Phi(\gamma)$  es diferente. Concluyendo así que  $\Phi(\sigma) \neq \Phi(\gamma)$  con lo que hemos probado la inyectividad.

Por otro lado, para la suprayectividad. Sea  $\sigma' \in V(\mathcal{G}(H))$  y definamos  $\sigma := \phi^{-1}\sigma'\phi \in S_p$ , entonces

$$\Phi(\sigma) = \Phi(\phi^{-1}\sigma'\phi) = \phi(\phi^{-1}\sigma'\phi)\phi^{-1} = \sigma'.$$

Por último, falta ver que en efecto preserva adyacencias. Sean  $\sigma$  y  $\gamma$  dos permutaciones adyacentes en  $\mathcal{G}(G)$ , por definición existe  $\tau = (i j)$  tal que  $\sigma = \tau\gamma$ , con  $i$  y  $j$  vértices adyacentes en  $G$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma) &= \Phi(\tau\gamma) = \phi(\tau\gamma)\phi^{-1} \\ &= (\phi\tau\phi^{-1})(\phi\gamma\phi^{-1}) \\ &= \Phi(\tau)\Phi(\gamma) \end{aligned}$$

Obteniendo que  $\Phi(\sigma) = \Phi(\tau)\Phi(\gamma)$ . Donde  $\Phi(\tau)$  es simplemente la transposición conjugada a  $\tau$  bajo el isomorfismo  $\phi$ , definida por la arista  $\{\phi(i) \phi(j)\} \in E(H)$ . Es decir,  $\Phi(\sigma)$  y  $\Phi(\gamma)$  son dos permutaciones adyacentes en  $\mathcal{G}(H)$ . Por lo tanto,  $\Phi$  define un isomorfismo entre las gráficas  $\mathcal{G}(G)$  y  $\mathcal{G}(H)$ . □

Consideremos el siguiente ejemplo importante.

**Ejemplo 2.4.** Sea  $G$  la trayectoria de longitud tres definida por  $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$  y las aristas  $e_1 = \{1, 2\}$ ,  $e_2 = \{2, 3\}$ ,  $e_3 = \{3, 4\} \in E(G)$ . Consideremos las subgráficas generadoras:  $G_\emptyset, G_{e_1}, G_{e_2}, G_{e_1, e_3}$ .

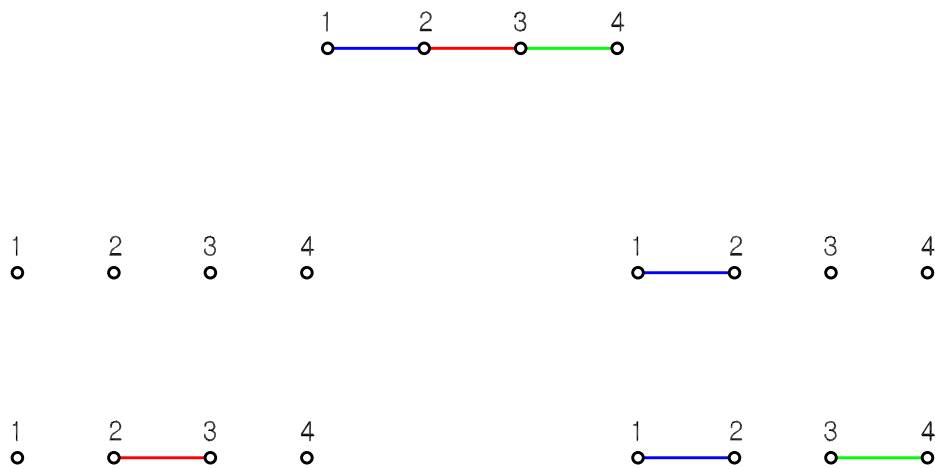


Figura 2.5: Arriba:  $T_3$ . Abajo:  $G_\emptyset, G_{e_1}, G_{e_2}, G_{e_1, e_3}$ .

Las gráficas de Cayley para cada una son:



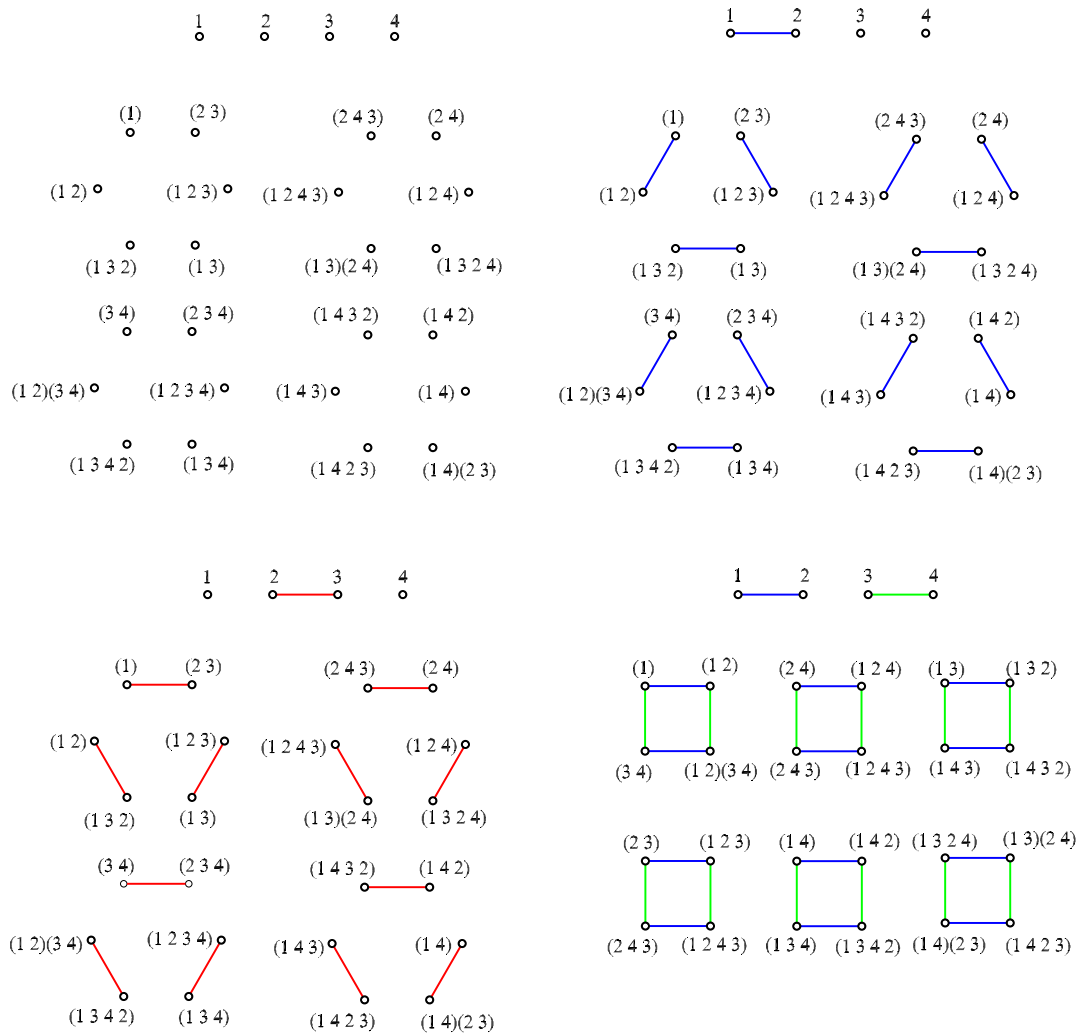


Figura 2.6: Gráficas de Cayley de las subgráficas  $G_\emptyset$ ,  $G_{e_1}$ ,  $G_{e_2}$  respectivamente.

Obsérvese que en general, cada vértice de  $\mathcal{G}(G)$  es adyacente a tantos vértices como aristas tenga  $G$ , por lo que si  $G$  es una gráfica de tamaño  $q$ ,  $\mathcal{G}(G)$  es un gráfica  $q$ -regular.

## 2.2. Automorfismos de la gráfica de Cayley

En esta sección estudiaremos el grupo de automorfismos  $\Gamma(\mathcal{G}(G))$  de cada gráfica de Cayley  $\mathcal{G}(G)$ . Demostrando el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.** *Los grupos  $S_p$  y  $\Gamma(G)$  actúan como automorfismos de la gráfica  $\mathcal{G}(G)$ .*

*Demostración.* Recuerde que un automorfismo de una gráfica  $G$  es un isomorfismo de la gráfica en sí misma, que preserva adyacencia.

Sea  $\alpha \in S_p$  y a partir de ella definamos el homomorfismo  $\psi_\alpha : \mathcal{G}(G) \rightarrow \mathcal{G}(G)$  de tal manera que para cada  $\sigma \in V(\mathcal{G}(G))$

$$\psi_\alpha(\sigma) = \sigma\alpha,$$

a lo que se le conoce como acción “multiplicación por la derecha”. Notemos primero que  $\psi_\alpha$  está bien definido;  $\sigma, \gamma \in V(\mathcal{G}(G))$  son adyacentes en  $\mathcal{G}(G)$  si y sólo si  $\sigma = \tau_{e_i}\gamma$  para algún  $e_i \in E(G)$ . Entonces,

$$\psi_\alpha(\sigma) = \sigma\alpha = (\tau_{e_i}\gamma)\alpha = \tau_{e_i}(\gamma\alpha) = \tau_{e_i}\psi_\alpha(\gamma)$$

lo que indica que  $\psi_\alpha$  preserva la adyacencia entre las imágenes de dos vértices adyacentes. Además, vease que  $\psi_\alpha$  es biyectivo, ya que estas es una acción de  $\alpha$  en  $S_p$ .

Demostrando que cada elemento de  $S_p$  define un único automorfismo de la gráfica  $\mathcal{G}(G)$ , que intercambia componentes de  $\mathcal{G}(G)$  definidas por el mismo conjunto de aristas en la gráfica  $G$ ; modificando las etiquetas de dos vértices adyacentes  $\sigma$  y  $\gamma$ , por sus respectivas imágenes  $\sigma\alpha$  y  $\gamma\alpha$ , vértices adyacentes en otra componente definida por un mismo conjunto de aristas de  $G$ .

Sea  $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in S_p}$  el conjunto de todos los automorfismos definidos de ésta manera. Note que las siguientes afirmaciones son ciertas para cada  $\sigma \in V(\mathcal{G}(G))$ .

(i)  $\psi_{(1)}(\sigma) = \sigma,$

(ii)  $\psi_\alpha \circ \psi_\beta(\sigma) = \psi_\alpha(\psi_\beta(\sigma)) = \psi_\alpha(\sigma\beta) = \sigma\beta\alpha = \psi_{\beta\alpha}(\sigma),$

$$(iii) \psi_\alpha \circ \psi_{\alpha^{-1}}(\sigma) = \psi_\alpha(\psi_{\alpha^{-1}}(\sigma)) = \psi_\alpha(\sigma\alpha^{-1}) = \sigma\alpha^{-1}\alpha = \sigma = \psi_{(1)}(\sigma).$$

Lo que se conoce como acción del grupo  $S_p$  en la gráfica de Cayley  $\mathcal{G}(G)$ .

Lo que implica que  $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in S_p}$  forma un grupo. Más aun, la función  $\eta : S_p \rightarrow \{\psi_\alpha\}_{\alpha \in S_p}$ , que asocia a cada  $\sigma \in S_p$  con su correspondiente función  $\psi_\sigma$ , es un isomorfismo de grupos. Es decir,  $S_p \cong \{\psi_\alpha\}_{\alpha \in S_p}$ . En otras palabras

$$S_p \leq \Gamma(\mathcal{G}(G)).$$

Por otro lado, dado un automorfismo  $\varphi \in \Gamma(G)$  de la gráfica  $G$ , definimos al homomorfismo  $\psi_\varphi : \mathcal{G}(G) \rightarrow \mathcal{G}(G)$  de tal manera que actúa en cada  $\sigma \in V(\mathcal{G}(G))$  como:

$$\psi_\varphi(\sigma) = \varphi\sigma.$$

la acción “multiplicación por la izquierda”.

A su vez, si  $\sigma = \tau_{e_i}\gamma$ , entonces

$$\begin{aligned} \psi_\varphi(\sigma) &= \varphi\sigma = \varphi\tau_{e_i}\gamma = \varphi\tau_{e_i}(\varphi^{-1}\varphi)\gamma \\ &= (\varphi\tau_{e_i}\varphi^{-1})\varphi\gamma \\ &= \tau_{e_j}\varphi\gamma = \tau_{e_j}\varphi(\gamma), \end{aligned}$$

con  $\tau_{e_j} = \varphi\tau_{e_i}\varphi^{-1}$ , donde  $e_j \in E(G)$  es la imagen bajo  $\varphi$  de  $e_i \in E(G)$ . Probando así, que  $\psi_\varphi$  queda bien definido, preservando la adyacencia de las imágenes  $\psi_\varphi(\sigma)$  y  $\psi_\varphi(\gamma)$  por medio de la transposición conjugada a  $\tau_{e_i}$ .

**Nota:** Dado que  $\Gamma(G)$  es subgrupo de  $S_p$  entonces, la acción de sus elementos sobre los de  $\mathcal{G}(G)$  queda definida correctamente de manera biyectiva.

De manera análoga al caso de  $\alpha \in S_p$ , el conjunto  $\{\psi_\varphi\}_{\varphi \in \Gamma(G)}$  resulta ser un grupo. Así mismo, la función  $\theta : \Gamma(G) \rightarrow \{\psi_\varphi\}_{\varphi \in \Gamma(G)}$  que asocia a cada  $\rho \in \Gamma(G)$  con su correspondiente función  $\psi_\rho$  es un isomorfismo de grupos. Es decir,  $\Gamma(G) \cong \{\psi_\varphi\}_{\varphi \in \Gamma(G)}$ . Por tanto

$$\Gamma(G) \leq \Gamma(\mathcal{G}(G)).$$

□

Por medio de esto, dado un conjunto de aristas  $K$  de la gráfica  $G$  y un automorfismo  $\varphi$  de  $G$  se define al conjunto  $\mathcal{T}_{\varphi(K)}$  como:

$$\mathcal{T}_{\varphi(K)} := \begin{cases} \emptyset & K = \emptyset \\ \{\varphi\tau e_1\varphi^{-1}, \dots, \varphi\tau e_k\varphi^{-1}\} & K = \{e_1, \dots, e_k\} \end{cases}$$

**Ejemplo 2.5.** Sea  $C_3$ , el ciclo de longitud 3 (izquierda de la figura 2.7), cuyas aristas son

$$e_1 = \{1\ 2\}, e_2 = \{2\ 3\}, e_3 = \{3\ 1\}$$

Entonces, su gráfica de Cayley queda representada como la figura de la derecha, donde sus vértices son los elementos de  $S_3$  y

$$\tau_{e_1} = (1\ 2), \tau_{e_2} = (2\ 3), \tau_{e_3} = (3\ 1) = (1\ 3)$$

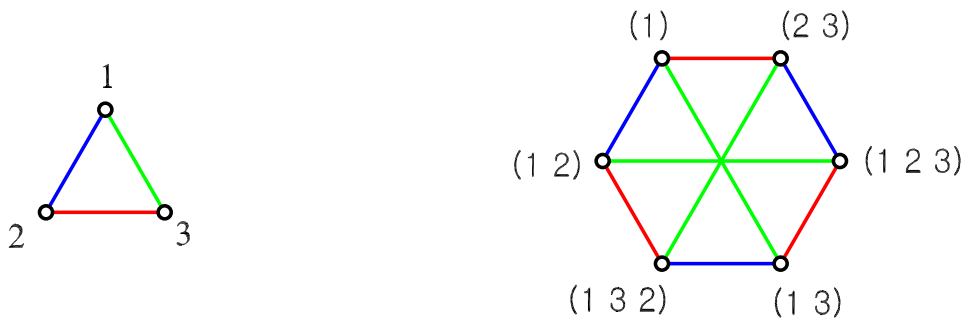


Figura 2.7: Ciclo  $C_3$ , de longitud 3 y  $\mathcal{G}(C_3)$ .

Si pintamos las aristas  $e_1, e_2, e_3$  de colores azul, rojo y verde respectivamente. Asignando el color azul a  $\tau_{e_1} = (1\ 2)$ , el rojo a  $\tau_{e_2} = (2\ 3)$  y el verde a  $\tau_{e_3} = (1\ 3)$  entonces, la operación  $\sigma = \tau_{e_i}\gamma$  con  $1 \leq i \leq 3$  y  $\sigma, \gamma \in S_3$ , induciría trazar de azul las aristas  $\{(2\ 3)\ (1\ 2\ 3)\}, \{(1\ 3)\ (1\ 3\ 2)\}, \{(1\ 2)\ (1)\}$ , de rojo las aristas  $\{(1)\ (2\ 3)\}, \{(1\ 2\ 3)\ (1\ 3)\}, \{(1\ 3\ 2)\ (1\ 2)\}$  y de verde las aristas  $\{(1\ 3)\ (1)\}, \{(2\ 3)\ (1\ 3\ 2)\}, \{(1\ 2\ 3)\ (1\ 2)\}$ .

Consideremos el automorfismo  $\varphi \in \Gamma(C_3)$  de la gráfica  $C_3$ , que modifica a la gráfica permutando a los vértices bajo la función  $(1\ 2\ 3) = \varphi$  como en la figura 2.8.



Figura 2.8:  $C_3$  (izquierda)  $\varphi(C_3)$  (derecha).

Éste induce al automorfismo  $\psi_\varphi$  de manera tal que para toda  $\sigma \in S_3$ ,

$$\psi_{(1\ 2\ 3)}(\sigma) = (1\ 2\ 3)\sigma,$$

y también,

$$\varphi\tau_{e_1}\varphi^{-1} = (1\ 2\ 3)(1\ 2)(1\ 3\ 2) = (2\ 3) = \tau_{e_2},$$

$$\varphi\tau_{e_2}\varphi^{-1} = (1\ 2\ 3)(2\ 3)(1\ 3\ 2) = (1\ 3) = \tau_{e_3},$$

$$\varphi\tau_{e_3}\varphi^{-1} = (1\ 2\ 3)(1\ 3)(1\ 3\ 2) = (1\ 2) = \tau_{e_1},$$

resultando la gráfica:

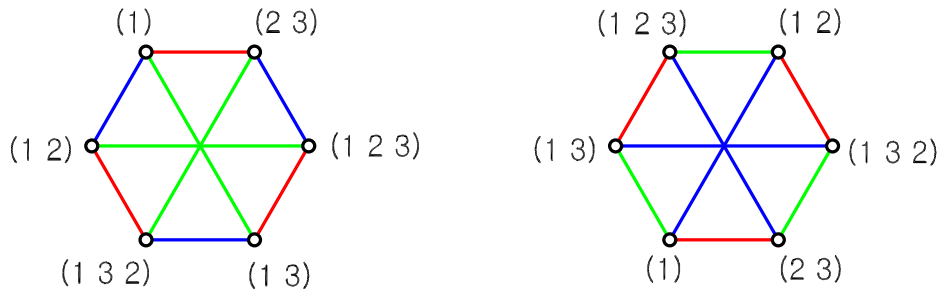


Figura 2.9:  $\mathcal{G}(C_3)$  (izquierda)  $\psi_\varphi(\mathcal{G}(C_3))$  (derecha).

En adelante se hará abuso de notación y en lugar de tomar a la función  $\psi$  se considerará simplemente a los elementos  $\alpha \in S_p$  y  $\varphi \in \Gamma(G)$ .

# Capítulo 3

## Politopos abstractos

Dado que el objetivo de la tesis es estudiar una generalización del permutaedro  $\Pi_n$ , politopo  $n$  dimensional, en este capítulo se definirán las propiedades que debe cumplir todo politopo abstracto así como su grupo de automorfismos o simetrías, con la finalidad de obtener suficiente herramienta para caracterizar al graficaedro. (Parte de la información estudiada en este capítulo se puede hallar en [15] y en [10].)

### 3.1. Definiciones

Dado un conjunto  $A$ , una relación  $\leq$  en  $A$  determina un *orden parcial* si  $\leq$  es *reflexiva* ( $a \leq a$ ), *antisimétrica* (si  $a \leq b$  y  $b \leq a$ , entonces  $a = b$ ) y *transitiva* (si  $a \leq b$  y  $b \leq c$ , entonces  $a \leq c$ ). Dada ésta relación en  $A$ , se dirá que la pareja ordenada  $(A, \leq)$  es un *conjunto parcialmente ordenado* (copo). Si  $A$ , además de ser copo, cumple que dados cualesquiera dos elementos  $a, b \in A$  son comparables en el orden  $\leq$ , es decir, se cumple que  $a \leq b$  o bien  $b \leq a$  (dicotomía), entonces diremos que  $A$  es un *conjunto totalmente ordenado* (coto).

Un *politopo abstracto* de rango  $q$ , o simplemente un  $q$ -*politopo*, es un copo  $\mathcal{P}$  dotado de una función monótona estricta de rango  $\{-1, 0, \dots, q\}$ . Los elementos del copo se llamarán caras de  $\mathcal{P}$ , o bien,  $j$ -caras si su rango es  $j$ , por lo general una  $j$ -cara es denotada por  $F_j$ . Las caras de rango 0, 1 y  $q - 1$  usualmente son llamadas vértices, aristas y facetas del politopo  $\mathcal{P}$ , respectivamente.

Se dice que dos caras  $F$  y  $G$  de  $\mathcal{P}$  son *incidentes* si  $F \leq G$  o  $G \leq F$ .

Además un  $q$ -politopo abstracto debe satisfacer las siguientes cuatro propiedades:

- (P1)  $\mathcal{P}$  consta de una cara mínima (de rango  $-1$ ) y una cara máxima (de rango  $q$ ), denotadas por  $F_{-1}$  y  $F_q$ , respectivamente (llamadas caras *impropias* de  $\mathcal{P}$ ).
- (P2) Se define una *bandera* como una cadena (es decir, un subconjunto de  $\mathcal{P}$  totalmente ordenado) maximal que debe tener exactamente  $q + 2$  elementos. Incluyendo las caras  $F_{-1}$  y  $F_q$ .

(Nótese que por definición  $\emptyset$  es una cadena (de longitud  $-1$ )). Denotaremos por  $\mathcal{B}(\mathcal{P})$  al conjunto de todas las banderas de  $\mathcal{P}$ . Dos banderas son adyacentes si difieren en exactamente una cara; son  $j$ -adyacentes si tal cara tiene rango  $j$ .

- (P3) Cualesquiera dos banderas  $\Phi$  y  $\Psi$  en  $\mathcal{P}$ , son conectables por medio de una sucesión de banderas  $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_k = \Psi$ , tales que cada dos banderas sucesivas  $\Phi_{i-1}$  y  $\Phi_i$  son adyacentes y  $\Phi \cap \Psi \subseteq \Phi_i$  para toda  $i$ . Siendo ésto así, se dice que  $\mathcal{P}$  cumple con la propiedad de ser *fuertemente conexo por banderas*.
- (P4) Finalmente, se pedirá que  $\mathcal{P}$  cumpla una condición de homogeneidad (frecuentemente llamada *propiedad diamante*), que establece que si  $F$  y  $G$  son caras incidentes ( $F \leq G$ ) de  $\mathcal{P}$ , con  $\text{ran}(F) = j - 1$  y  $\text{ran}(G) = j + 1$ , entonces existen exactamente dos caras  $H$  con rango  $j$  tales que  $F \leq H \leq G$ .

**Ejemplo 3.1.** El siguiente diagrama (figura 3.1) representa gráficamente los conceptos anteriores, reflejando al tetraedro como un copo.

Para cualesquiera dos caras  $F$  y  $G$  de un politopo  $\mathcal{P}$  tales que  $F \leq G$ , el conjunto de caras

$$G/F = \{H \in \mathcal{P} / F \leq H \leq G\},$$

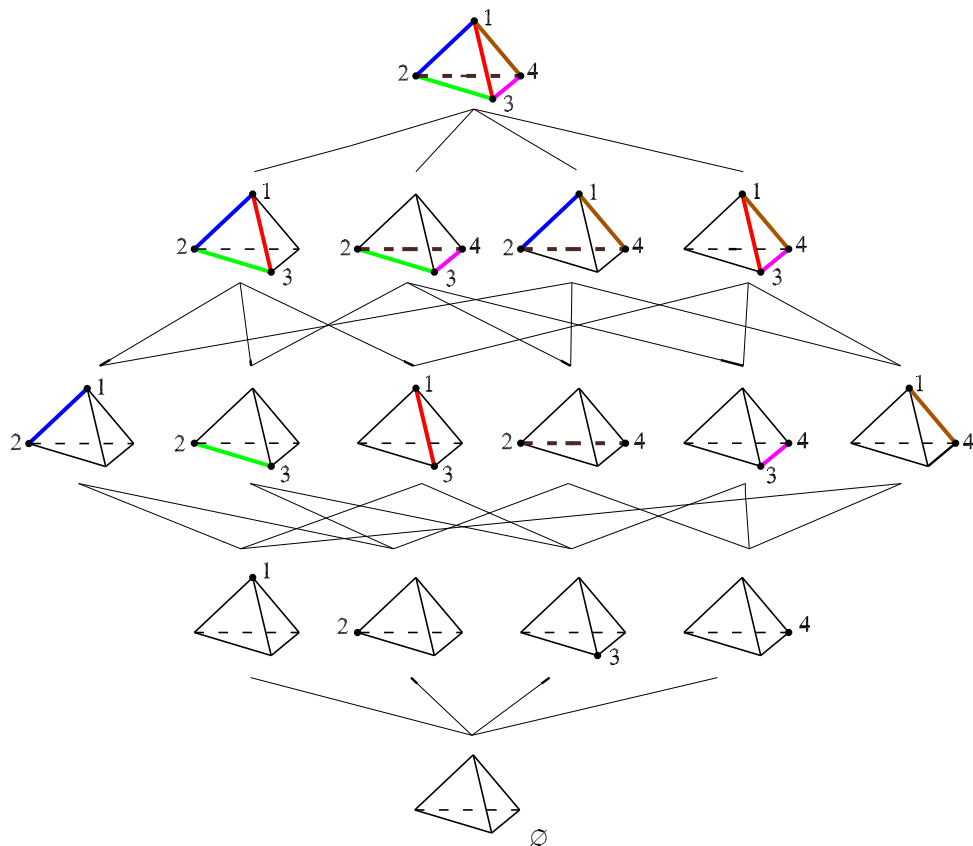


Figura 3.1: Latiz de caras del tetraedro.

es llamado una *sección* de  $\mathcal{P}$ . Dado  $F_0$ , un vértice, entonces la sección  $F_q/F_0$  representa a la *figura de vértice* de  $F_0$ , donde  $F_q$  es la cara máxima de  $\mathcal{P}$ . Nótese que toda la sección  $G/F$  de un politopo  $\mathcal{P}$  es a su vez un politopo y tiene rango  $\text{ran}(G/F) = \text{ran}(G) - \text{ran}(F) - 1$ .

Sea  $\mathcal{P}$  un  $q$ -politopo y sea  $\Phi$  una bandera de  $\mathcal{P}$ . La propiedad diamante nos dice que para  $i \in \{0, \dots, q - 1\}$  existe exactamente una bandera que difiere de  $\Phi$  en la  $i$ -cara. Tal bandera es llamada la bandera  $i$ -adyacente a  $\Phi$  y se denota por  $\Phi^i$ . Más aún, se define  $\Phi^{i,j} = (\Phi^i)^j$  y extendemos la notación por inducción, es decir  $\Phi^{i_0, i_1, \dots, i_k} = (\Phi^{i_0, i_1, \dots, i_{k-1}})^{i_k}$ .



Nótese que para

$$\begin{aligned} i, j \in \{0, 1, \dots, q-1\} \quad (\Phi^i)^i &= \Phi, \\ \text{y si } |i-j| > 1 \quad \Phi^{i,j} &= \Phi^{j,i}. \end{aligned}$$

Denotamos por  $(\Phi)_i$  a la  $i$ -cara de la bandera  $\Phi$ . Nótese que  $(\Phi)_i = (\Phi^j)_i$  si y sólo si  $i \neq j$ . Por conveniencia, omitiremos las caras impropias cuando describamos una bandera (dado que todas las contienen), por lo que una bandera  $\Phi$  puede ser denotada por  $\{(\Phi)_0, (\Phi)_1, \dots, (\Phi)_{q-1}\}$ . Dos  $i$ -caras de  $\mathcal{P}$ ,  $F$  y  $F'$ , son *adyacentes* si existe una bandera  $\Phi$  tal que  $(\Phi)_i = F$  y  $(\Phi^i)_i = F'$ .

Para un  $q$ -politopo  $\mathcal{P}$ , y  $0 \leq k \leq q-1$ , se define el  $k$ -esqueleto de  $\mathcal{P}$  como un copo que consta de todas las caras propias de  $\mathcal{P}$  de rango a lo más  $k$  (junto con el orden parcial inducido). Por ejemplo, el 1-esqueleto de  $\mathcal{P}$  queda representado por medio de la gráfica de aristas de éste; la cual contiene a todas las 0-caras de  $\mathcal{P}$  y dos de ellas son adyacentes si inciden en una misma 1-cara  $\mathcal{P}$ .

Si todos los vértices de un  $q$ -politopo  $P$  son incidentes a exactamente  $q$  aristas, entonces se dice que  $P$  es un *politopo simple*.

Dos politopos  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  son *combinatoriamente equivalentes* ( $\mathcal{P} \cong \mathcal{Q}$ ) si hay un biyección entre sus caras que preserve la incidencia de éstas.

El tipo de politopo al que estamos más familiarizados es el de *politopo convexo*. Un subconjunto  $K$  del espacio euclideo  $n$ -dimensional  $\mathbb{E}^n$  se llama *convexo* si para cualesquiera dos puntos en  $K$ , el segmento que los une está totalmente contenido en  $K$ . Definiremos como  $\text{conv}S$ , el *casco convexo* de un conjunto  $S \subseteq \mathbb{E}^n$ , como el convexo más pequeño que contiene a  $S$ . De esta manera el casco convexo de un conjunto finito de puntos da a lugar a la definición clásica de politopo convexo.

Por ejemplo, los polígonos ( $n$ -ágonos) son los politopos convexos dos dimensionales. Los poliedros, como son: el cubo, el tetraedro, el icosaedro, los prismas, las pirámides, etcétera, son politopos convexos tres dimensionales. En general, las 0-caras o vértices de un politopo convexo se definen como puntos, las 1-caras o aristas se definen como segmentos de línea; de manera que todos los politopos convexos son en particular politopos abstractos como los definimos en esta sección.

Los politopos convexos constituyen una clase muy importante de conjuntos convexos con un enorme número de aplicaciones y conecciones. Existen varias conecciones entre estos politopos y las gráficas, una de éstas es el siguiente teorema de gran importancia y que nos será de gran utilidad en ésta tesis.

**Teorema 3.1.** *Dos politopos simples convexos son combinatoriamente equivalentes si y sólo si sus gráficas (1-esqueletos) son isomorfos. [25]*

## 3.2. Grupo de automorfismos de los politopos

Un *automorfismo* o simetría  $\varphi$  de un politopo abstracto  $\mathcal{P}$  es una biyección de  $\mathcal{P}$  sobre si mismo que manda vértices en vértices, aristas en aristas,  $j$ -caras en  $j$ -caras, preservando incidencia. Ésto es, si  $F \leq G$  en  $\mathcal{P}$  entonces,  $F\varphi \leq G\varphi$  en  $\mathcal{P}$ . Por tanto,  $\varphi$  manda banderas en banderas. Note que el conjunto de todos los automorfismos de un politopo  $\mathcal{P}$  forma un grupo, el *grupo de automorfismos* de  $\mathcal{P}$ , denotado por  $\Gamma(\mathcal{P})$ .

**Proposición 3.1.** *Dado  $\mathcal{P}$  un  $q$ -politopo. Consideremos  $\varphi \in \Gamma(\mathcal{P})$  y  $\Phi \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ . Entonces, para toda  $i = 0, 1, \dots, q - 1$ ,*

$$(\Phi^i)\varphi = (\Phi\varphi)^i \quad \text{y} \quad (\Phi)_i\varphi = (\Phi\varphi)_i. \quad (3.1)$$

*Es decir, los automorfismos de  $\mathcal{P}$  preservan adyacencia de banderas y las  $i$ -caras de cada bandera van a dar a  $i$ -caras bajo  $\varphi$ .*

*Demostración.* Consideremos a  $\Phi$  y  $\Phi^j$ , dos banderas  $j$ -adyacentes, es decir, banderas que difieren únicamente en su  $j$ -cara. Como lo hicimos notar anteriormente,

$$(\Phi)_i = (\Phi^j)_i \quad \text{si y sólo si} \quad i \neq j, \quad \text{con} \quad i, j \in \{0, 1, \dots, q - 1\}.$$

Dado que  $\varphi \in \Gamma(\mathcal{P})$ , un automorfismo del politopo  $\mathcal{P}$  manda  $j$ -caras en  $j$ -caras y preserva la incidencia. Entonces,

$$(\Phi)_i\varphi = (\Phi^j)_i\varphi \quad \text{si y sólo si} \quad i \neq j.$$

Obteniendo que las  $i$ -caras con  $i \neq j$  de  $\Phi\varphi$  y  $\Phi^j\varphi$  son las mismas. Es decir,

$$(\Phi)_i\varphi = (\Phi\varphi)_i = (\Phi^j\varphi)_i = (\Phi^j)_i\varphi \quad \text{si} \quad i \neq j$$

Por otro lado, cuando  $i = j$  la imagen de las caras  $(\Phi)_j$  y  $(\Phi^j)_j$  bajo  $\varphi$  son diferentes, ya que el automorfismo al ser inyectivo, no puede mandar caras diferentes en la misma.

Resultando así que,  $\Phi\varphi$  y  $\Phi^j\varphi$  únicamente difieren en la  $j$ -cara, y por tanto  $(\Phi^j)\varphi = (\Phi\varphi)^j$ .

□

**Lema 3.1.** *Para cada politopo  $\mathcal{P}$ , el grupo  $\Gamma(\mathcal{P})$  actúa libremente sobre  $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ . Es decir, cualquier automorfismo que deje fija alguna bandera tiene que ser la identidad.*

*Demostración.* Sean  $\varphi \in \Gamma(\mathcal{P})$  y  $\Phi \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$  tales que

$$\Phi\varphi = \Phi.$$

Por la proposición anterior podemos decir que

$$\Phi^i\varphi = (\Phi\varphi)^i = \Phi^i$$

para toda  $i \in I$ , esto es,  $\varphi$  deja fija a cualquier bandera adyacente a  $\Phi$ . Por la propiedad (P3) de los politopos, sabemos que para cualesquiera  $\Phi$  y  $\Psi \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$  existe una sucesión de banderas

$$\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_k = \Psi$$

tales que  $\Phi_{j-1}$  y  $\Phi_j$  son adyacentes y  $\Phi \cap \Psi \subseteq \Phi_i$ . Entonces,  $\Phi_0\varphi = \Phi\varphi = \Phi = \Phi_0$ . Como  $\varphi$  deja fija a cualquier bandera adyacente a  $\Phi$ , se sigue que  $\Phi_1\varphi = \Phi_1$ . Siguiendo por inducción la demostración se llega a que  $\varphi$  deja fija también a  $\Psi$ . Por lo tanto,  $\varphi$  deja fija a cualquier bandera de  $\mathcal{P}$  de manera que  $\varphi$  es la identidad.

□

**Corolario 3.1.** *Dos automorfismos que manden una bandera a lo mismo tienen que ser iguales.*

*Demostración.* Sean  $\varphi$  y  $\psi \in \Gamma(\mathcal{P})$ , tales que para alguna  $\Phi \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ ,  $\Phi\varphi = \Phi\psi$ . Entonces  $\Phi\varphi\psi^{-1} = \Phi$ , por la proposición anterior se tiene que  $\varphi\psi^{-1}$  es la identidad. Por lo tanto,  $\varphi = \psi$ .

□

### 3.3. Politopos regulares

Un  $n$ -politopo abstracto  $\mathcal{P}$  es *regular* si su grupo de automorfismos  $\Gamma(\mathcal{P})$  es transitivo en el conjunto de banderas  $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ . Es decir, para cualesquiera dos banderas existe un automorfismo que mande una en la otra.

En general, probar que el grupo de automorfismos es transitivo puede ser complicado. Por lo que los siguientes resultados facilitan el estudio de los politopos regulares.

**Proposición 3.2.** *Sea  $\mathcal{P}$  un politopo finito, entonces  $|\Gamma(\mathcal{P})| \leq |\mathcal{B}(\mathcal{P})|$ ; más aún  $|\Gamma(\mathcal{P})|$  divide a  $|\mathcal{B}(\mathcal{P})|$ .*

*Demostración.* Sea  $\Phi \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ , como  $\Gamma(\mathcal{P})$  actúa libremente en  $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ . por el corolario 3.1, si  $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma(\mathcal{P})$  tales que  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ , entonces  $\Phi\varphi_1 \neq \Phi\varphi_2$ . De manera que cada órbita de  $\Gamma(\mathcal{P})$  en  $\mathcal{B}(\mathcal{P})$  (o bien, la acción de los elementos de  $\Gamma(\mathcal{P})$  sobre cada bandera de  $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ ) tiene exactamente  $|\Gamma(\mathcal{P})|$  elementos. Por lo que  $|\Gamma(\mathcal{P})| \leq |\mathcal{B}(\mathcal{P})|$ ; ahora, como la unión ajena de todas las órbitas de  $\Gamma(\mathcal{P})$  en  $\mathcal{B}(\mathcal{P})$  es justamente  $\mathcal{B}(\mathcal{P})$  y toda órbita tiene el mismo tamaño  $|\Gamma(\mathcal{P})|$ , entonces  $|\Gamma(\mathcal{P})|$  divide a  $|\mathcal{B}(\mathcal{P})|$ . □

Siendo así, la regularidad de un politopo queda descrita por medio de la siguiente proposición.

**Proposición 3.3.** *Sea  $\mathcal{P}$  un politopo finito. Diremos que es regular si y sólo si  $|\Gamma(\mathcal{P})| = |\mathcal{B}(\mathcal{P})|$ .*

*Demostración.* Por definición  $\mathcal{P}$  es regular si y sólo si  $\Gamma(\mathcal{P})$  es transitivo en banderas, es decir,  $\Gamma(\mathcal{P})$  tiene una única órbita en  $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ . A su vez, cada órbita de  $\Gamma(\mathcal{P})$  en  $\mathcal{B}(\mathcal{P})$  tiene tamaño exactamente  $|\Gamma(\mathcal{P})|$ , entonces  $\Gamma(\mathcal{P})$  tiene una única órbita en  $\mathcal{B}(\mathcal{P})$  si y sólo si  $|\Gamma(\mathcal{P})| = |\mathcal{B}(\mathcal{P})|$ . Por lo tanto  $\mathcal{P}$  es regular si y sólo si  $|\Gamma(\mathcal{P})| = |\mathcal{B}(\mathcal{P})|$ . □



# Capítulo 4

## El Graficaedro

En este capítulo se definirá un conjunto parcialmente ordenado  $\mathcal{P}_G$  y se probará que  $\mathcal{P}_G$  es un politopo abstracto de rango  $q$ , al que llamaremos Graficaedro. Este politopo estará descrito a partir de una gráfica conexa  $G$  de tamaño  $q$  y que a su vez, la gráfica de Cayley  $\mathcal{G}(G)$  representa a su 1-esqueleto. (La mayor parte del contenido de este capítulo es estudiado también en la tesis de licenciatura [12])

Recordemos del capítulo 2, dada  $G$  una  $(p, q)$ -gráfica simple con  $V(G) := \{1, \dots, p\}$  su conjunto de vértices y  $E(G) := \{e_1, \dots, e_q\}$  el de sus aristas, se define al conjunto  $\mathcal{T}_G := \{\tau_{e_1}, \dots, \tau_{e_q}\}$  de las transposiciones determinadas por las aristas de  $G$ . Definimos también el subgrupo  $T_G := \langle \tau_{e_1}, \dots, \tau_{e_q} \rangle$  de  $S_p$ , el generado por los elementos de  $\mathcal{T}_G$ , y usando estos definimos una gráfica de Cayley  $\mathcal{G}(G)$ .

### 4.1. Definición

Suponiendo que la gráfica de Cayley  $\mathcal{G}(G)$  es en efecto el 1-esqueleto de  $\mathcal{P}_G$ , es válido afirmar que las  $i$ -caras de  $\mathcal{P}_G$  están dadas por componentes conexas de la gráfica de Cayley de  $\mathcal{G}(K)$ , donde  $K$  es una subgráfica generadora de  $G$  de tamaño  $i$ , y a partir de esta subgráfica definiremos las  $i$ -caras de  $\mathcal{P}_G$ .

Por comodidad en la notación, al definir el graficaedro prescindiremos momentaneamente de la cara de rango -1 y trabajaremos con las caras de rango  $0, 1, \dots, q$ . Al final del capítulo agregaremos a la cara faltante de rango -1.

Sea  $I = \{0, 1, \dots, q\}$ , y para cada  $i \in I$  definamos el conjunto

$$C_i := \{(K_i, a) \mid K_i \subseteq E(G), |K_i| = i, a \in S_p\}.$$

Consideremos ahora a la unión de estos conjuntos,  $\bigcup_{i \in I} C_i$  y definamos en ella una relación de equivalencia de la siguiente manera.

**Definición 4.1.** Diremos que dos elementos  $(K_i, a), (L_i, b) \in \bigcup_{i \in I} C_i$  son equivalentes,  $(K_i, a) \sim (L_i, b)$ , si y sólo si  $K_i = L_i$  y  $T_{K_i}a = T_{L_i}b$  (igualdad definida para las clases derechas en  $S_p$ ). Donde  $T_{K_i} = \langle \{\tau_e \mid e \in K_i\} \rangle$  y  $T_{L_i} = \langle \{\tau_e \mid e \in L_i\} \rangle$ .

Nótese que  $\sim$  es una relación de equivalencia.

**Definición 4.2.** Denotaremos por  $\mathcal{P}_G := (\bigcup_{i \in I} C_i) / \sim$  al conjunto de todas las parejas  $(K_i, a)$  con  $a \in S_p$  y  $K_i \subseteq E(G)$  donde  $|K_i| = i$ , bajo la relación de equivalencia  $\sim$ . De ahora en adelante llamaremos a este conjunto el Graficaedro.

Abusando un poco de la notación usaremos el mismo símbolo tanto para un elemento de  $\bigcup_{i \in I} C_i$  como para la clase de equivalencia de este bajo  $\sim$ . Es decir, la clase  $[(K_i, a)]$  bajo  $\sim$  será denotada únicamente por  $(K_i, a)$ . Como mencionamos con anterioridad, nuestro objetivo es probar que este conjunto  $\mathcal{P}_G$  o graficaedro, es en efecto un politopo y por el momento, permítanos llamar a cada clase o elemento de  $\mathcal{P}_G$  una cara de  $\mathcal{P}_G$ .

**Definición 4.3.** Dadas  $(K_i, a), (L_j, b) \in \mathcal{P}_G$ , definimos que  $(K_i, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (L_j, b)$  si y sólo si  $K_i \subseteq L_j$  y  $T_{K_i}a \subseteq T_{L_j}b$ .

**Proposición 4.1.**  $\leq_{\mathcal{P}_G}$  ordena parcialmente a  $\mathcal{P}_G$  (es decir,  $\leq_{\mathcal{P}_G}$  es una relación relexiva, antisimétrica y transitiva).

*Demostración.*

i)  $\leq_{\mathcal{P}_G}$  es **Reflexiva**.

ii)  $\leq_{\mathcal{P}_G}$  es **Antisimétrica**.

Sean  $(K_i, a), (L_j, b) \in \mathcal{P}_G$  tales que

$$(K_i, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (L_j, b) \text{ y } (L_j, b) \leq_{\mathcal{P}_G} (K_i, a).$$

Por un lado, esto implica que  $K_i \subseteq L_j$  y  $L_j \subseteq K_i$  respectivamente. Por lo que  $K_i = L_j$ .

Por otro lado, también se tiene que  $T_{K_i}a \subseteq T_{L_j}b$  y  $T_{L_j}b \subseteq T_{K_i}a$  respectivamente, deduciendo así que  $T_{K_i}a = T_{L_j}b$ .

Por lo tanto,  $(K_i, a) \sim (L_j, b)$ .

iii)  $\leq_{\mathcal{P}_G}$  es **Transitiva**.

Sean  $(K_i, a), (L_j, b), (J_k, c) \in \mathcal{P}_G$  tales que

$$(K_i, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (L_j, b) \text{ y } (L_j, b) \leq_{\mathcal{P}_G} (J_k, c).$$

Entonces se tiene que  $K_i \subseteq L_j$  y  $L_j \subseteq J_k$  y se sigue que  $K_i \subseteq J_k$ .

Además, sabemos que  $T_{K_i}a \subseteq T_{L_j}b$  y  $T_{L_j}b \subseteq T_{J_k}c$ , implicando que  $T_{K_i}a \subseteq T_{J_k}c$ .

Concluyendo que  $(K_i, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (J_k, c)$ .

□

La proposición anterior nos lleva así a definir a  $\mathcal{P}_G$  como un conjunto parcialmente ordenado. Nótese que este conjunto está dotado de una función de rango dada por

$$\text{ran}(K_i, a) := |K_i| = i,$$

donde  $i \in \{0, 1, \dots, q\}$ .

Observemos que esta función es monótona y estricta creciente, ya que si  $(K_i, a)$  y  $(L_j, b)$  son dos caras de  $\mathcal{P}_G$  tales que  $(K_i, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (L_j, b)$  entonces  $K_i \subseteq L_j$ ; con  $|K_i| = i$  y  $|L_j| = j$ . Siendo así, obtenemos que  $\text{ran}(K_i, a) = i < j = \text{ran}(L_j, b)$ .

**Nota:** En caso de que el rango de la cara no sea relevante, entonces denotaremos a dicha cara de  $\mathcal{P}_G$  simplemente como  $(K, a)$ , donde  $K \subseteq E(G)$ .



Una vez descritos los elementos de  $\mathcal{P}_G$ , el siguiente paso es ver que este copo cumple con ser en efecto un politopo. Para ésto, describiremos las banderas de  $\mathcal{P}_G$ .

**Observación 4.1.** *Toda cara  $(L, b)$  de  $\mathcal{P}_G$  puede ser representada por cualquier  $a \in T_L b$ . Es decir,  $(L, b) = (L, a)$  para toda  $a = \delta b$  con  $\delta \in T_L$ .*

*Demostración.* Por la definición 4.1, sabemos que dos caras  $(K, a)$  y  $(L, b)$  de  $\mathcal{P}_G$  son equivalentes si y sólo si  $K = L$  y  $T_K a = T_L b$ .

Sean  $(K, a)$  y  $(L, b)$  dos caras de  $\mathcal{P}_G$  tales que  $(K, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (L, b)$ . Veamos que  $(L, b) = (L, a)$  (es decir,  $(L, b)$  puede ser representada por  $b \in S_p$ , o bien, por  $a \in S_p$  en su segunda entrada), para esto basta probar que  $T_L a = T_L b$ .

Pero por definición de  $(K, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (L, b)$ , se sigue que  $T_K a \subseteq T_L b$  en  $S_p$ , y por le lema 1.2 tenemos la igualdad  $T_L b = T_L a$ . Por lo tanto,  $(L, a) = (L, b)$ . Es decir que toda cara de  $\mathcal{P}_G$  puede estar representada por cualquier  $a$  o bien,  $b$  elemento de  $S_p$  incidente en ella. □

Es más, si  $(K, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (L, b)$ , como  $T_L a = T_L b$ , se sigue que cualquier cadena de caras mutuamente incidentes en  $\mathcal{P}_G$  puede ser representada por cualquier elemento de  $S_p$  que esté contenido en cualquiera de las caras incidentes cara. Por lo que a la segunda entrada de todas las caras la podemos nombrar bajo el mismo elemento. Por comodidad y congruencia, usaremos siempre al representante de la cara más pequeña de la cadena.

Siendo así, una cadena maximal (o bandera)  $\Phi$  contiene exactamente  $q + 1$  caras, incluyendo a la cara máxima de rango  $q$ ,  $(K_q, a) = \mathcal{P}_G$ . (Recuérdese que aún estamos ignorando a la cara mínima de rango -1).

Con ayuda del siguiente lema estableceremos la conexidad fuerte por banderas de  $\mathcal{P}_G$ , correspondiente a la propiedad (P3) de politopos, en la proposición 4.2.

**Lema 4.1.** Sean  $\mathcal{K} = \{K_0, K_1, \dots, K_q\}$  y  $\mathcal{F} = \{F_0, F_1, \dots, F_q\}$  dos familias maximales de subconjuntos anidados de  $E(G)$ . Entonces existe una sucesión  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{s-1}, \mathcal{K}_s = \mathcal{F}$  de familias maximales de subconjuntos anidados de  $E(G)$  tales que

(a)  $\mathcal{K}_j$  difiere de  $\mathcal{K}_{j+1}$  en exactamente un elemento, para toda  $j = 0, 1, \dots, s-1$

(b)  $\mathcal{K} \cap \mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}_j$ , para toda  $j = 0, \dots, s$ .

*Demostración.* Sean  $\mathcal{K} = \{K_0, K_1, \dots, K_q\}$  y  $\mathcal{F} = \{F_0, F_1, \dots, F_q\}$  como en el lema.

Supongamos que  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{F}$  difieren en  $d$  elementos. Como  $|E(G)| = q$ , se sigue que  $K_q = F_q = E(G)$ . Entonces, existe una  $i \in \{0, \dots, q-1\}$  tal que  $K_i \neq F_i$  y que  $K_j = F_j$  para toda  $j > i$ . Por ende, existen  $e$  y  $f$  dos elementos únicos en  $E(G)$  tales que  $e \in K_i$  pero  $e \notin F_i$  y  $f \in F_i$  pero  $f \notin K_i$ .

Por otro lado, consideremos a  $K_{i-l}$  el elemento más pequeño de  $\mathcal{K}$  que contiene a  $e$ , con  $0 \leq l \leq i-1$ . A partir de éste, construimos a la familia

$$\mathcal{K}_e^1 := \{K_0, \dots, K_{i-l-1}, (K_{i-l})'_e, K_{i-l+1}, \dots, K_q\}$$

donde  $(K_{i-l})'_e = K_{i-l} - e + e_1$  y  $e_1$  es el único elemento de  $K_{i-l+1}$  tal que  $e_1 \notin K_{i-l}$ .

Siguiendo de manera recursiva con la construcción, definimos para todo  $1 \leq m \leq l+1$  al conjunto

$$\mathcal{K}_e^m := \{K_0, \dots, K_{i-l-1}, (K_{i-l})'_e, (K_{i-l+1})'_e, \dots, (K_{i-l+m-1})'_e, K_{i-l+m}, \dots, K_q\}$$

donde  $(K_{i-l+m-1})'_e = K_{i-l+m-1} - e + e_m$  y  $e_m$  es el único elemento en  $K_{i-l+m}$  tal que  $e_m \notin K_{i-l+m-1}$ . (Nótese que cuando  $m = l+1$ , se tiene  $(K_i)'_e = K_i - e + f = F_i$ ).

Esto establece la sucesión  $\mathcal{K}, \mathcal{K}_e^1, \dots, \mathcal{K}_e^{l+1}$  de familias maximales de subconjuntos anidados de  $E(G)$ . De tal manera que ésta satisface que cada pareja de elementos consecutivos difiere en exactamente un elemento.

Obsérvese que cuando  $\mathcal{K}_e^s \in \mathcal{K} \cap \mathcal{F}$ , tenemos que  $K_r = F_r$ , por lo que  $e \notin K_r$ . Como en el proceso anterior sólo se modifican aquellos elementos de

$\mathcal{K}$  que contienen a  $e$ , entonces  $\mathcal{K}_e^s$  se mantiene igual dentro de la construcción, es decir,  $K_r \in \mathcal{K}_e^s$  para toda  $s \in \{0, 1, \dots, l+1\}$ . Por lo tanto se tiene que  $\mathcal{K} \cap \mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}_e^s$  para toda  $s \in \{0, \dots, l+1\}$ .

Ahora, como  $(K_i)'_e = F_i$ , entonces

$$\mathcal{K}_e^{l+1} := \{K_0, \dots, K_{i-l-1}, (K_{i-l})'_e, (K_{i-l+1})'_e, \dots, (K_i)'_e, K_{i+1}, \dots, K_q\}$$

difiere en a lo más  $d-1$  elementos con  $\mathcal{F}$ .

Renombramos a  $\mathcal{K}, \mathcal{K}_e^1, \dots, \mathcal{K}_e^{l+1}$  simplemente como  $\mathcal{K}, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{l+1}$ . Al repetir el argumento anterior para los subconjuntos  $\mathcal{K}_{l+1}$  y  $\mathcal{F}$  obtenemos otra sucesión tal que satisface las hipótesis del lema, donde el último elemento de la sucesión difiere de  $\mathcal{F}$  en a lo más  $d-2$  elementos.

Continuando con este proceso, obtendremos finalmente la sucesión requerida. □

**Definición 4.4.** Una bandera  $\Phi$  de  $\mathcal{P}_G$  será descrita únicamente por dos parametros: *una familia maximal de subconjuntos anidados de  $E(G)$* , denotada por  $\mathcal{K}_\Phi := \mathcal{K} := \{K_0, K_1, \dots, K_q\}$ , y *un elemento  $a \in S_p$* . Es decir,

$$\Phi = (\mathcal{K}, a) := \{(K_0, a), (K_1, a), \dots, (K_q, a)\}.$$

Nótese que  $K_i$  contiene exactamente  $i$  aristas, por lo que en particular,  $K_0 = \emptyset$  y  $K_q = E(G)$ .

**Proposición 4.2.** *El copo  $\mathcal{P}_G$  es fuertemente conexo por banderas. Dicho de otra forma, si  $\Phi$  y  $\Psi$  son dos banderas de  $\mathcal{P}_G$ , entonces existe una sucesión de banderas adyacentes  $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{s-1}, \Phi_s = \Psi$  de  $\mathcal{P}_G$  tal que  $\Phi \cap \Psi \subseteq \Phi_i$  para toda  $i = 0, \dots, s$ .*

*Demostración.* Sean

$$\Phi = \{(K_0, a), (K_1, a), \dots, (K_q, a)\} \text{ y } \Psi = \{(F_0, b), (F_1, b), \dots, (F_q, b)\}$$

dos banderas de  $\mathcal{P}_G$  con  $\mathcal{K} = \{K_0, K_1, \dots, K_q\}$  y  $\mathcal{F} = \{F_0, F_1, \dots, F_q\}$  dos familias maximales de subconjuntos anidados de  $E(G)$  y  $a, b \in S_p$  respectivamente. Esto es  $\Phi := \{\mathcal{K}, a\}$  y  $\Psi := \{\mathcal{F}, b\}$ .

**Caso 1.** Supongamos que las banderas  $\Phi$  y  $\Psi$  comparten su 0-cara, es decir,  $(K_0, a) = (F_0, b)$ . Entonces  $a \in T_{F_0}b = T_\emptyset b = \{(1)\}b = \{b\}$ , lo que implica que  $a = b$ . Siendo así, por el lema 4.1, existe una sucesión  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_s = \mathcal{F}$ , de familias maximales de subconjuntos anidados de  $E(G)$  tal que  $\mathcal{K}_i$  difiere de  $\mathcal{K}_{i+1}$  en exactamente un elemento y  $\mathcal{K} \cap \mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}_i$  para toda  $i \in \{0, \dots, s\}$ .

Nombremos  $\Phi_i$  a la bandera  $\{\mathcal{K}_i, a\}$ , de esta forma la sucesión  $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{s-1}, \Phi_s = \Psi$  cumple que  $\Phi_i$  es adyacente a  $\Phi_{i+1}$  y  $\Phi \cap \Psi \subseteq \Phi_i$  para toda  $i \in \{0, \dots, s\}$ .

**Caso 2.** Supongamos ahora que las banderas  $\Phi$  y  $\Psi$  tienen 0-caras diferentes, es decir  $a \neq b$ .

Consideremos una bandera  $\Phi_{r_1}$  tal que  $\Phi \cap \Psi \subseteq \Phi_{r_1}$  y su 0-cara es  $(K_0, a) = (\emptyset, a)$ , y su 1-cara es  $(\{e_1\}, a)$ . Donde  $e_1$  es la arista de  $G$  tal que  $\{e_1\} = F_1 \in \mathcal{F}$ . Observemos que  $(\{e_1\}, a) \sim (\{e_1\}, \tau_{e_1}a)$ .

Como en el caso 1; podemos definir una sucesión de banderas adyacentes  $\Phi = \Phi_0, \dots, \Phi_{r_1}$  de tal forma que cada elemento de la sucesión continene a  $\Phi \cap \Psi$

Consideremos la bandera que contiene a todas las  $i$ -caras de  $\Phi_{r_1}$  donde  $i \neq 0$ , y con 0-cara a  $(\emptyset, \tau_{e_1}a)$ . Notemos que por ser una transposición  $\tau_{e_1} \neq (1)$  y por lo tanto, esta nueva bandera es una bandera 0-adyacente a  $\Phi_{r_1}$ , a la cual llamaremos  $\Phi_{r_1}^0$ .

Por el teorema 1.1 y el lema 2.1, sabemos que existe una sucesión de transposiciones  $\{\tau_{e_1}, \dots, \tau_{e_k}\}$  en  $\mathcal{T}_G$  tal que  $b = \tau_{e_k} \cdots \tau_{e_2} \tau_{e_1} a$  (donde las transposiciones se pueden repetir).

Si  $k = 1$ , entonces se tiene que  $\Phi_{r_1}^0$  y  $\Psi$  son banderas que comparten la 0-cara. Entonces, por el caso 1, sabemos que existe una sucesión  $\Phi_{r_1}^0 = \Phi_{r_1+1}, \Phi_{r_1+2}, \dots, \Phi_{r_1+t} = \Psi$  de tal forma que  $\Phi_i$  es adyacente a  $\Phi_{i+1}$  y  $\Phi_{r_1}^0 \cap \Psi \subseteq \Phi_i$  para toda  $i \in \{r_1 + 1, \dots, r_1 + t\}$ . Por lo tanto, la sucesión

$$\Phi = \Phi_0, \dots, \Phi_{r_1}, \Phi_{r_1+1}, \Phi_{r_1+2}, \dots, \Phi_{r_1+t} = \Psi$$

satisface con lo que queríamos.

Pero, si  $k \neq 1$ , definimos a la bandera  $\Phi_{r(i+1)}$  como aquella cuya 0-cara es  $(\emptyset, \tau_{e_i} \cdots \tau_{e_2} \tau_{e_1} a)$ , misma que la 0-cara de la bandera  $\Phi_{r_i}$  y cuya 1-cara es  $(\{e_{i+1}, \tau_{e_i} \cdots \tau_{e_2} \tau_{e_1} a\})$ .

Si consideramos la bandera con todas las  $j$ -caras de  $\Phi_{r(i+1)}$ , donde  $j \neq 0$  y con 0-cara  $(\emptyset, \tau_{e_{i+1}}, \tau_{e_i} \cdots \tau_{e_2} \tau_{e_1} a)$  como la bandera 0-adyacente a  $\Phi_{r(i+1)}$ , denotada por  $\Phi_{r(i+1)}^0$ . Entonces como en el caso 1, obtenemos la sucesión de banderas

$$\Phi_{r(i+1)}^0 = \Phi_{r_i+1}, \dots, \Phi_{r_i+k} = \Phi_{r_{i+1}},$$

de tal forma que  $\Phi_j$  es adyacente a  $\Phi_{j+1}$  y  $\Phi_{r(i+1)}^0 \cap \Phi_{r_{i+1}} \subseteq \Phi_j$  para toda  $j \in \{r_i + 1, \dots, r_i + k\}$ . Así, obtenemos la sucesión de banderas adyacentes

$$\Phi = \Phi_0, \dots, \Phi_{r_1}, \dots, \Phi_{r_2}, \dots, \Phi_{r_s}, \dots, \Phi_{r_s+k} = \Psi;$$

y es tal que  $\Phi_i$  es adyacente a  $\Phi_{(i+1)}$  y  $\Phi \cap \Psi \subseteq \Phi_i$  para toda  $i \in \{0, \dots, r_s + k\}$ , satisfaciendo las condiciones de la proposición.  $\square$

Ahora, en la siguiente proposición demostraremos que  $\mathcal{P}_G$  satisface la propiedad diamante (P4) de politopos.

**Proposición 4.3.** *Dadas dos caras  $(K, a)$  y  $(L, b)$  de  $\mathcal{P}_G$  tales que  $(K, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (L, b)$ , con  $\text{ran}(K, a) = i - 1$  y  $\text{ran}(L, b) = i + 1$ ,  $1 \leq i \leq q - 1$ , existen exactamente dos  $i$ -caras  $(J, c)$  de  $\mathcal{P}_G$  tales que  $(K, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (J, c) \leq_{\mathcal{P}_G} (L, b)$ . Más aún, dada una 1-cara  $(L, b)$  de  $\mathcal{P}_G$ , existen exactamente dos 0-caras  $(J, c)$  de  $\mathcal{P}_G$  tales que  $(J, c) \leq_{\mathcal{P}_G} (L, b)$ .*

*Demostración.* Sean  $(K, a), (L, b) \in \mathcal{P}_G$  tales que  $(K, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (L, b)$ , con  $\text{ran}(K, a) = i - 1$  y  $\text{ran}(L, b) = i + 1$ ,  $1 \leq i \leq q - 1$ .

Por la relación de incidencia, se tiene que  $K \subseteq L$  donde  $|K| = |L| - 2$ , por lo que existen exactamente dos elementos  $e_1, e_2 \in L$  tales que  $e_1, e_2 \notin K$ .

Consideremos entonces a los conjuntos  $J_i = K \cup \{e_i\}$  para  $i = 1, 2$ , que definen a las caras  $(J_1, a)$  y  $(J_2, a)$  en  $\mathcal{P}_G$  y cumplen con que

$$(K, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (J_i, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (L, b),$$

ya que  $J_i \cap L = \{e_i\}$  con  $i = 1, 2$ .

Por como se describió arriba,  $J_1$  y  $J_2$  son los únicos subconjuntos de  $E(G)$  que satisfacen ésta condición. De no ser así, tendríamos que dado cualquier otro elemento  $(J, c) \in \mathcal{P}_G$  tal que

$$(K, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (J, c) \leq_{\mathcal{P}_G} (L, b),$$

entonces,  $K \subseteq J \subseteq L$  y esto sólo sucede si  $J = J_i$  para  $i = 1, 2$ . Además se tiene que  $T_K a \subseteq T_J c \subseteq T_L b$  y por consecuente  $a \in T_J c$ . Recordemos que  $T_J c = T_J a = T_{J_i} a$ . Por lo que podemos concluir que  $(J_i, a) \sim (J, c)$  para algun  $i = 1, 2$ ; es decir,  $(J_i, a)$  para  $i = 1, 2$ , son las únicas dos caras en  $\mathcal{P}_G$  que satisfacen la primer condición de la proposición.

Para la segunda parte, sea  $(L, b)$  una 1-cara de  $\mathcal{P}_G$  y consideremos a  $(J, c) \in \mathcal{P}_G$  tal que  $J = \emptyset$ . Supongamos que  $L = \{e\}$ , entonces  $c \in T_L b = \langle \tau_e \rangle b = \{b, \tau_e b\}$  necesariamente. Lo que nos lleva a que  $c$  tiene dos opciones, ser  $b$  o bien  $\tau_e b$ . A la inversa, si  $c = b$  o  $c = \tau_e b$  éstas definen una 0-cara del tipo  $(J, c)$  tal que  $(J, c) \leq_{\mathcal{P}_G} (L, b)$ . □

Finalmente, asignamos a la pareja  $(\emptyset, \emptyset)$  como la (-1)-cara, la cara mínima de  $\mathcal{P}_G$ ; la cual será denotada simplemente por  $\emptyset$ . Y diremos que  $(\emptyset, \emptyset) \leq_{\mathcal{P}_G} (K, a)$  para toda  $K \in E(G)$  y  $a \in S_p$ .

Como se vió antes, dada una 1-cara  $(\{e\}, b)$ , las dos 0-caras adyacentes a ella son de la forma  $(\emptyset, c)$  donde  $c \in \langle \tau_e \rangle b = \{b, \tau_e b\}$  necesariamente. Se puede percibir que la cara  $\emptyset = (\emptyset, \emptyset)$  es incidente a  $(\emptyset, c)$ . Concretando así la prueba de que  $\mathcal{P}_G$  cumple con la propiedad diamante (P4).

Además, una vez definida  $\emptyset$ , la cara de rango -1 en  $\mathcal{P}_G$  podemos afirmar que  $\mathcal{P}_G$  también cumple con la propiedad (P1) de que un  $q$ -politopo tiene una única cara mínima de rango -1 y una única máxima de rango  $q$ . A su vez, concluimos que toda bandera de  $\mathcal{P}_G$  continene exactamente  $q + 2$  caras, incluyendo a las caras impropias del mismo; estableciendo la propiedad (P2) de politopos.

Dados los resultados anteriores, hemos visto que  $\mathcal{P}_G$  cumple con las propiedades (P1)-(P4) de los politopos. Resultando así el siguiente teorema.

**Teorema 4.1.** *Dada una  $(p, q)$ -gráfica simple y conexa  $G$ . El conjunto parcialmente ordenado  $\mathcal{P}_G$ , es un politopo abstracto de rango  $q$ .*

Recordemos que  $\mathcal{P}_G$  es un 0-politopo si  $G$  es una gráfica trivial (gráfica con un solo vértice y ninguna arista), es un 1-politopo si  $G$  es una sólo arista (y dos vértices), y si  $G$  tiene exactamente dos aristas entonces,  $\mathcal{P}_G$  es un hexágono

(ver ejemplo 2.1).

Al politopo  $\mathcal{P}_G$  lo llamaremos el *graficaedro asociado a  $G$* , o simplemente el  *$G$ -graficaedro*. El siguiente teorema determina la base primordial de nuestra construcción, la cual da razón del término “graficaedro”.

**Teorema 4.2.** *Sea  $G$  una gráfica simple y conexa. Entonces el 1-esqueleto de  $\mathcal{P}_G$  es isomorfo a la gráfica de Cayley  $\mathcal{G}(G)$  asociada a  $G$ .*

*Demostración.* Para empezar, los vértices de  $\mathcal{P}_G$  se identifican con los de  $S_p$  como:  $(\emptyset, a) \rightarrow a$ .

Además, en  $\mathcal{P}_G$ , dos vértices  $(\emptyset, a)$  y  $(\emptyset, b)$  son incidentes en una 1-cara  $(\{e\}, c)$  si y sólo si  $\langle \tau_e \rangle c = \{a, b\}$  que es lo mismo que pensarlo como que  $b = \tau_e a$ . Por lo tanto, la adyacencia en el 1-esqueleto de  $\mathcal{P}_G$  corresponde precisamente a la adyacencia en la gráfica de Cayley  $\mathcal{G}(G)$ . □

En el siguiente capítulo veremos varios ejemplos de  $\mathcal{P}_G$ ; en particular discutiremos todos aquellos de rango 3 y 4.

**Teorema 4.3.** *Sea  $G$  una  $(p, q)$ -gráfica simple y conexa. Entonces  $\mathcal{P}_G$   $p!q!$  banderas.*

*Demostración.* Sea  $G$  una  $(p, q)$ -gráfica simple y conexa. Consideremos a  $(K, a)$  una  $(q - 1)$ -cara de  $\mathcal{P}_G$  que contiene al vértice  $(\emptyset, a)$ . Como  $|K| = q - 1$ ,  $K$  es obtenido de  $E(G)$  al quitar una arista de éste. Ésto implica que hay exactamente  $q$  opciones para elegir a  $K$  y por consiguiente hay  $q$  facetas que continen al vértice  $(\emptyset, a)$ .

De igual manera, para cada faceta que contenga al vértice  $(\emptyset, a)$  (generada por una subgráfica generadora de  $G$  de tamaño  $(q - 1)$ ) hay  $(q - 1)$  opciones para quitar una arista de la subgráfica generadora asociada a la faceta. Por ende, hay  $q - 1$ -caras de rango  $(q - 2)$  que contienen al vértice  $(\emptyset, a)$  que están contenidas en la misma faceta. Y cada una de éstas caras de rango  $(q - 2)$ , tiene a su vez  $(q - 2)$  facetas (caras de rango  $(q - 3)$  de  $\mathcal{P}_G$ ) que también continen al vértice  $(\emptyset, a)$ .

Siguiendo de ésta manera, podemos ver que en cada vértice de  $\mathcal{P}_G$  se describen  $q!$  banderas de  $\mathcal{P}_G$  que contienen a ese vértice. Además, dado que  $\mathcal{P}_G$  tiene  $p!$  vértices, en total  $\mathcal{P}_G$  tiene  $p!q!$  banderas.

□





## Capítulo 5

# Ejemplos y visualizaciones del Graficaedro

En este capítulo veremos varios ejemplos de graficaedros y sus visualizaciones. En particular veremos algunos ejemplos gráficos de la estructura geométrica y topológica del graficaedro  $\mathcal{P}_G$  asociado a todas las  $(p, 3)$ -gráficas y una aproximación a los asociados a las  $(p, 4)$ -gráficas, apelando a la intuición y sin ser muy formales. Así como conjeturar posibles generalizaciones. Más aún probaremos que el graficaedro asociado a una trayectoria  $T_n$  es el permutaedro clásico para toda  $n$ , como queríamos.

Recordemos que el 1-esqueleto de  $\mathcal{P}_G$  es isomorfo a la gráfica de Cayley  $\mathcal{G}(G)$  asociada a una gráfica simple y conexa  $G$  de tamaño  $q$  (teorema 4.2). De esta forma, describiremos el graficaedro  $\mathcal{P}_G$  asociado a una  $(p, q)$ -gráfica  $G$ , a partir de la gráfica de Cayley  $\mathcal{G}(G)$  de  $G$ .

Para toda  $(p, q)$ -gráfica  $G$ , existe una relación entre las caras de  $\mathcal{P}_G$  y las componentes conexas de las gráficas de Cayley de las subgráficas generadoras de  $G$ .

Dicho de otra forma, para cada cara  $(K_i, a)$  de rango  $i$  en  $\mathcal{P}_G$ , consideremos a  $K$  la subgráfica generadora de  $G$  cuyo conjunto de aristas es exactamente  $K_i$ . Entonces la gráfica de Cayley  $\mathcal{G}(K)$  asociada a  $K$  (que puede tener más de una componente conexa), tiene una componente conexa que contiene al vértice  $a$ , denotada por  $\mathcal{G}(K)_a$ . De esta manera, a cada cara  $(K_i, a)$  de  $\mathcal{P}_G$ , la relacionamos con la componente conexa  $\mathcal{G}(K)_a$  de la gráfica de Cayley asociada

al conjunto  $K_i$ .

## 5.1. Graficaedros de rango 3.

Sea  $G$  una  $(p, 3)$ -gráfica simple y conexa, note que  $G$  debe ser alguna de estas tres opciones:

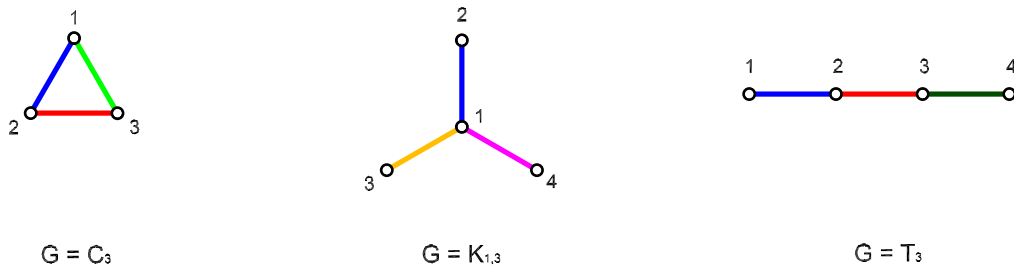


Figura 5.1:  $(p,3)$ -gráficas simples y conexas.

En los siguientes ejemplos veremos la estructura de cada  $\mathcal{P}_G$  asociada a cada una de las gráficas de arriba. Recuerde del capítulo anterior que las 2-caras de  $\mathcal{P}_G$  son parejas  $(K_2, a)$  donde  $K_2$  es un subconjunto de 2 aristas de  $G$  y  $a \in S_p$ ; nótese que cada  $G \in \{K_3, K_{1,3}, T_3\}$  tiene 3 subgráficas generadoras de tamaño 2 y por tanto habrá tres gráficas de Cayley asignadas en cada ejemplo.

Más aun, como consideraremos subgráficas generadoras de tamaño 2 de  $G$ , cada  $a \in S_p$  estará en cada una de las gráficas de Cayley de las subgráficas generadoras de  $G$ , por lo que asociaremos en cada ejemplo, sus respectivas subgráficas de Cayley con las caras del politopo  $\mathcal{P}_G$ .

**Ejemplo 5.1.** Sea  $G = C_3$ .

En el ejemplo 2.5, del capítulo 2, se ve que la gráfica de Cayley  $\mathcal{G}(C_3)$  es

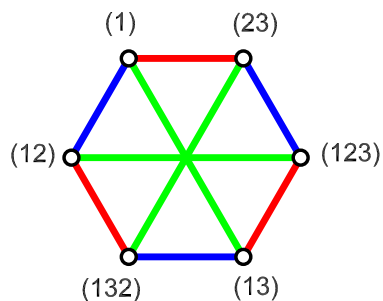


Figura 5.2:  $\mathcal{G}(C_3)$ .

Donde las 2-caras de  $\mathcal{P}_{C_3}$  son parejas  $(K_2, a)$  con  $K_2$  un subconjunto de dos aristas de  $G$  y  $a \in S_3$ . Las tres subgráficas generadoras de tamaño 2 en  $C_3$  son las de la izquierda en la figura 5.3 y a cada una de éstas le asociamos su subgráfica de Cayley (al lado derecho); éstas representa las caras de  $\mathcal{P}_{C_3}$ .

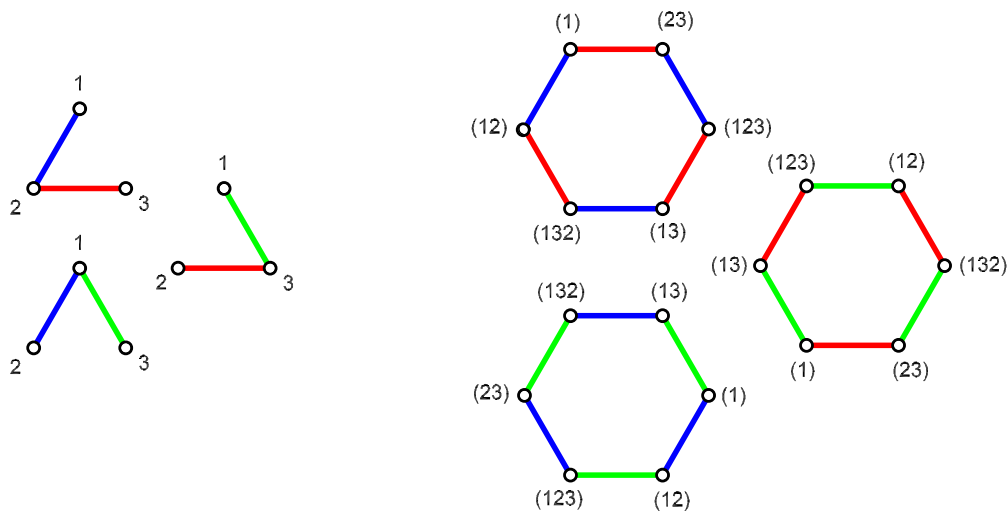


Figura 5.3: Sugráficas generadoras de  $C_3$  (*izquierda*) y sus correspondientes gráficas de Cayley (*derecha*).

Como toda  $a \in S_3$  está en cada gráfica de Cayley, entonces al identificar los vértices obtenemos una representación del politopo que topológicamente es un toro. Éste tipo de politopos se le llama politopo toroidal.

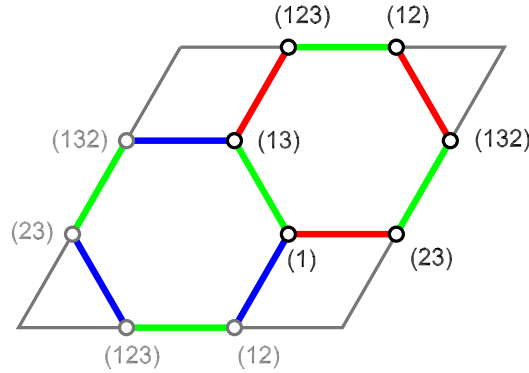


Figura 5.4:  $\mathcal{P}_{C_3} \cong \{6, 3\}_{(1,1)}$

Resultando así que el graficaedro  $\mathcal{P}_{C_3}$  asociado a la gráfica  $C_3$ ; es un politopo con 6 vértices, 9 aristas y 3 caras hexagonales. A este politopo se le conoce en la literatura como el  $\{6, 3\}_{(1,1)}$ .

Nótese que cada vértice pertenece a 3 aristas y que cada arista está en exactamente 2 caras. Como  $\mathcal{P}_{C_3}$  tiene 6 vértices, entonces el número de banderas de éste politopo es

$$|\mathcal{B}(\mathcal{P}_{C_3})| = 6 \cdot 3 \cdot 2 = 36.$$

Por otro lado, en cuanto a las simetrías, en este politopo se definen:

- La identidad.
- 5 rotaciones de  $2k\pi/6$  donde  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ; por cada cara.
- 2 rotaciones de  $2k\pi/3$  donde  $k = 1, 2$ ; por cada vértice.
- 1 rotación de  $\pi$  sobre cada arista.

Donde algunas de éstas se repiten resultando 18 simetrías sin contar la identidad. Pero además hay

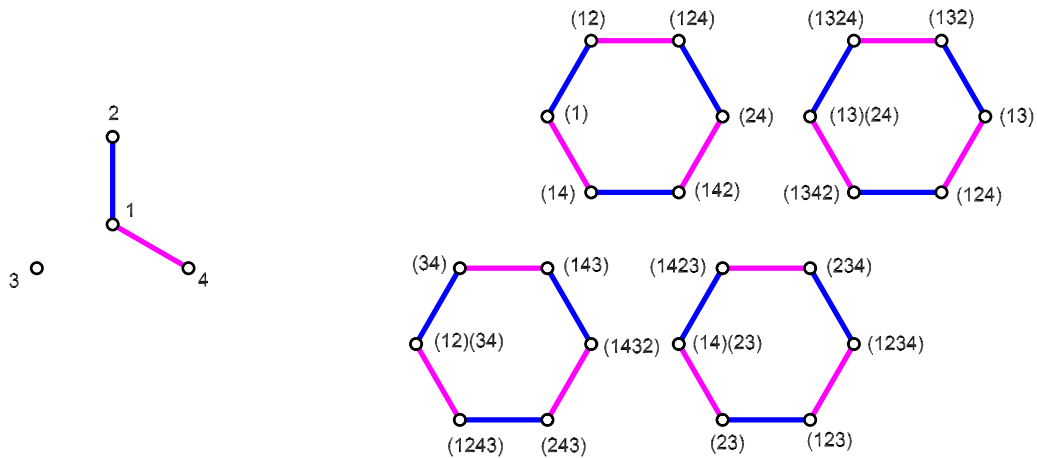
- 2 reflexiones, una que pasa por dos vértices opuestos en cada cara y otra que pasa por el punto medio de dos aristas opuestas en cada cara.

Completándose de ésta forma otras 18 simetrías, resultando un total de 36 simetrías, mismas que número de banderas. Por medio de esto, aseguramos que  $\{6, 3\}_{(1,1)}$  es un politopo regular.

Dado que de las tres gráficas,  $G = C_3$  es la de menor orden. Ésta define al politopo más pequeño de rango tres,  $\mathcal{P}_{C_3}$ . Veamos ahora aquellos politopos con  $4!$  vértices.

**Ejemplo 5.2.** Sea  $G = K_{1,3}$ .

Al igual que en el ejemplo anterior, apoyándonos en las subgráficas generadoras de tamaño dos de la gráfica  $K_{1,3}$  y las gráficas de Cayley asociadas a éstas, definiremos las 2-caras de la forma  $(K_2, a)$  de  $\mathcal{P}_{K_{1,3}}$ . Donde  $K_2$  es nuevamente un conjunto de dos aristas de  $E(K_{1,3})$  y  $a \in S_4$ .



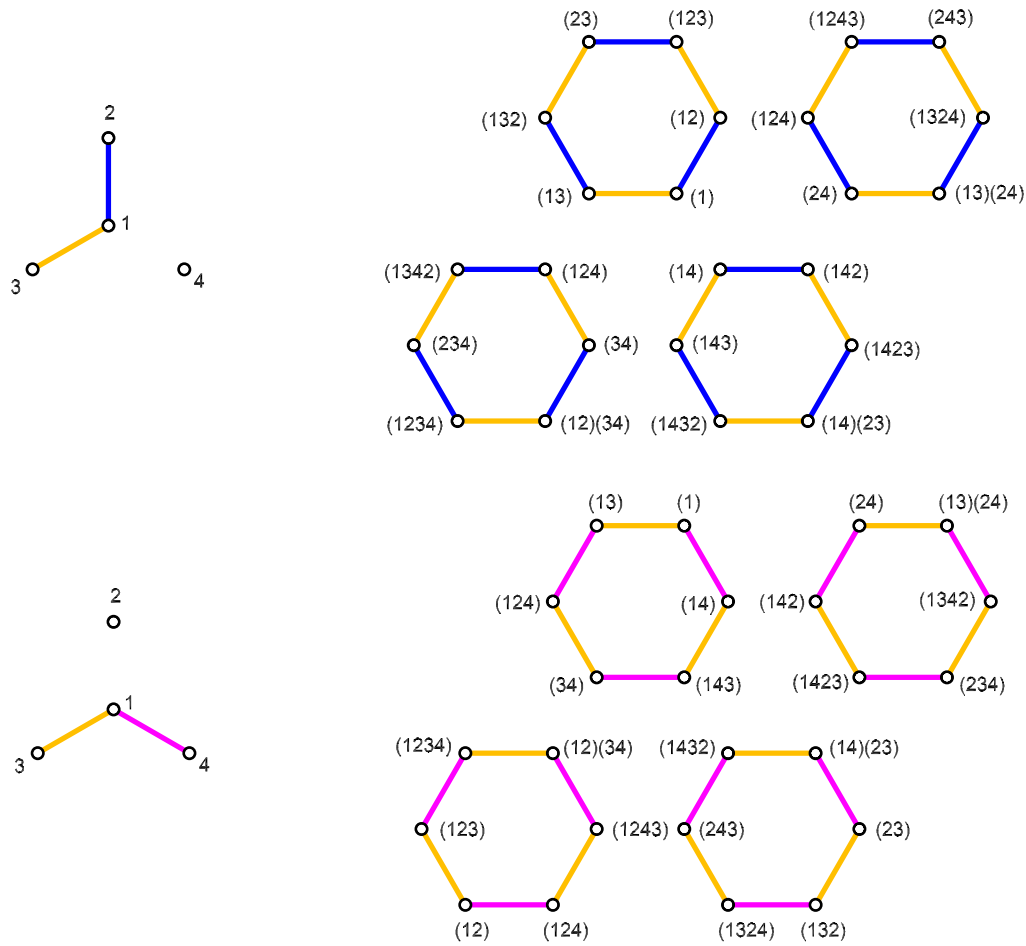


Figura 5.5: Sugráficas generadoras de  $K_{1,3}$  (*izquierda*) y sus correspondientes gráficas de Cayley (*derecha*).

Veamos que al identificar los vértices y aristas de las gráficas de Cayley de estas subgráficas, resulta nuevamente un politopo toroidal regular conocido en la literatura por  $\{6, 3\}_{(2,2)}$  [15].

Ésto es, el graficaedro  $\mathcal{P}_{K_{1,3}}$  asociado a la gráfica  $K_{1,3}$  se ve como

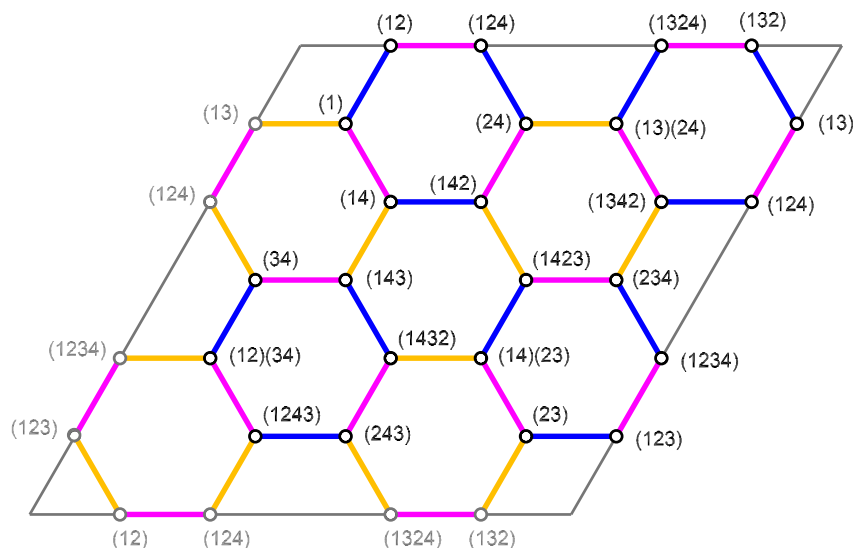


Figura 5.6:  $\mathcal{P}_{K_{1,3}} \cong \{6, 3\}_{(2,2)}$

Un politopo regular con 24 vértices, 36 aristas y 12 caras hexagonales.

Analizaremos de igual manera que para  $\{6, 3\}_{(1,1)}$ , las simetrías de éste politopo. Es decir,  $\{6, 3\}_{(2,2)}$  tiene como simetrías a:

- La identidad.
- 5 rotaciones de  $2k\pi/6$  donde  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ; por cada cara.
- 2 rotaciones de  $2k\pi/3$  donde  $k = 1, 2$ ; por cada vértice.
- 1 rotación de  $\pi$  sobre cada arista.

Donde en este caso, también se repiten algunas de éstas. Resultando 72 simetrías sin contar la identidad. Pero como en el anterior,  $\{6, 3\}_{(2,2)}$  también tiene:

- 2 reflexiones, una que pasa por dos vértices opuestos en cada cara y otra que pasa por el punto medio de dos aristas opuestas en cada cara.

Completándose de ésta forma otras 72 simetrías, resultando un total de 144 simetrías.

Con respecto al número de banderas de  $\mathcal{P}_{K_{1,3}}$  tenemos que cada uno de los



24 vértices pertenece a 3 aristas y además cada arista pertenece a dos caras. Es decir,

$$|\mathcal{B}(\mathcal{P}_{K_{1,3}})| = 24 \cdot 3 \cdot 2 = 144.$$

Mismo número que simetrías. Por lo tanto,  $\mathcal{P}_{K_{1,3}}$  también es un politopo regular.

A pesar de que los dos ejemplos anteriores resultaron ser politopos regulares, no todos los graficaedros  $\mathcal{P}_G$  asociados a alguna gráfica  $G$  lo serán. El siguiente es un ejemplo de esto.

**Ejemplo 5.3.** Sea a  $G = T_3$ .

Algunos de los elementos del graficaedro  $\mathcal{P}_{T_3}$  se describen previamente en el ejemplo 2.4 del capítulo 2, así como son: *el conjunto de sus vértices, algunas de sus 1-caras y el conjunto de caras cuadradas de éste.*

De manera análoga se puede describir el conjunto de todas las 2-caras de  $\mathcal{P}_{T_3}$  por las tres subgráficas generadoras de tamaño dos de  $T_3$ :

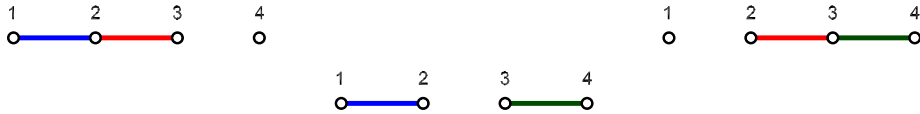


Figura 5.7: Subgráficas generadoras de tamaño 2 de  $T_3$ .

Les asociamos como antes, sus gráficas de Cayley que corresponden a dos conjuntos diferentes de cuatro hexágonos cada uno y un conjunto de seis cuadrados

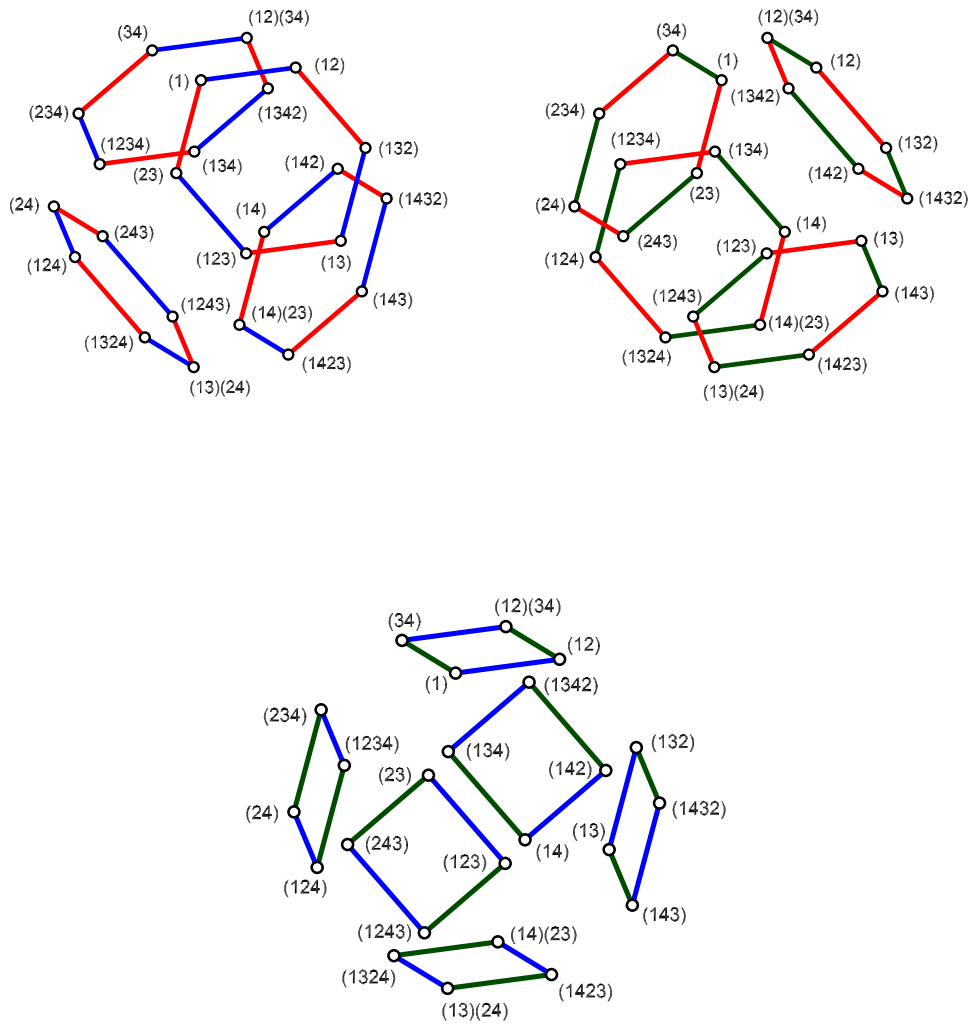


Figura 5.8: Caras de  $\mathcal{P}_{T_3}$ .

Resultando que el graficaedro  $\mathcal{P}_{T_3}$  asociado a la gráfica  $T_3$  es una representación de un politopo isomorfo al permutaedro  $\Pi_3$  (figura 5.9).

El cual consta de 24 vértices, 36 aristas y 12 caras hexagonales y 6 cuadradas.

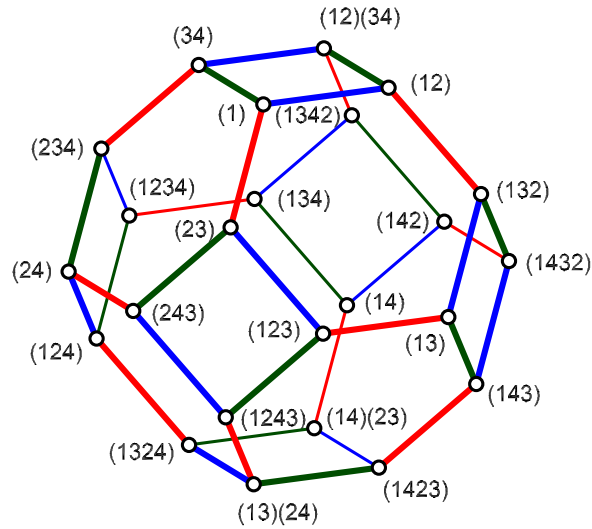


Figura 5.9:  $\mathcal{P}_{T_3} \cong \Pi_3$ .

Observemos que las 2-caras del graficaedro  $\mathcal{P}_G$  asociado a cualquier  $(p, q)$ -gráfica simple y conexa  $G$ , tendrán estructura únicamente de hexágonos o bien de cuadrados; como resulta en el ejemplo (5.3). De igual manera, algunas de las 3-caras (o caras de rango 3) de todo graficaedro  $\mathcal{P}_G$  serán isomorfas a cualquiera de los graficaedros  $\mathcal{P}_{C_3}$ ,  $\mathcal{P}_{K_{1,3}}$ ,  $\mathcal{P}_{T_3}$ .

### Generalización.

De los ejemplos 2.1 y 5.3. Podemos observar que los graficaedros  $\mathcal{P}_{T_2}$  y  $\mathcal{P}_{T_3}$  son isomorfos a los permutaedros  $\Pi_2$  y  $\Pi_3$ , respectivamente. El siguiente lema nos ayudará a probar que este hecho se generaliza.

**Lema 5.1.** *Sea  $T_n$  la trayectoria de longitud  $n$ . Entonces la gráfica de Cayley  $\mathcal{G}(T_n)$  de  $T_n$  y el 1-esqueleto del permutaedro  $\Pi_n$  son isomorfos.*

*Demostración.* Recordemos que otra manera de definir la adyacencia entre los  $(n + 1)!$  vértices del permutaedro  $\Pi_n$  es aquella que relaciona a dos permutaciones de  $S_{n+1}$  si se puede ir de una a otra mediante una transposición

adyacente de los lugares que ocupan cada uno de los  $n + 1$  elementos que son permutados. Es decir, las permutaciones  $\sigma, \gamma \in S_{n+1}$  son adyacentes en  $\Pi_n$  si y sólo si

$$\sigma = \alpha\gamma, \quad \text{con } \alpha = (\gamma(k) \ \gamma(k+1)),$$

para alguna  $k \in \{1, \dots, n+1\}$ .

Sea  $T_n$  la trayectoria de longitud  $n$ , ésta consta de  $n$  aristas y  $n + 1$  vértices. Etiquetemos a los vértices y las aristas de  $T_n$  como  $1, 2, \dots, n + 1$  y  $e_1, e_2, \dots, e_n$  respectivamente, de tal manera que los vértices  $s$  y  $s + 1$  son adyacentes por la arista  $e_s$  para toda  $s \in \{1, \dots, n\}$ . Entonces, el conjunto  $\{\tau_{e_1}, \dots, \tau_{e_n}\}$  definido por las aristas de  $T_n$ , es un conjunto de transposiciones adyacentes de la posición asignada a los vértices de la gráfica  $T_n$ , es decir

$$\{\tau_{e_1}, \tau_{e_2}, \dots, \tau_{e_n}\} = \{(1 \ 2), (2 \ 3), \dots, (n \ (n+1))\}.$$

Ahora, la gráfica de Cayley  $\mathcal{G}(T_n)$  de  $T_n$ , corresponde a una representación del 1-esqueleto de un  $n$ -politopo simple con  $(n+1)!$  vértices, correspondientes a las permutaciones de los  $n+1$  vértices de  $T_n$ . Donde las permutaciones  $\sigma, \gamma \in S_{n+1}$  son adyacentes en  $\mathcal{G}(T_n)$  si y sólo si

$$\sigma = \tau_e\gamma, \quad \text{con } \tau_e \in \{\tau_{e_1}, \tau_{e_2}, \dots, \tau_{e_n}\}.$$

Definimos el isomorfismo  $f : \Pi_n \rightarrow \mathcal{G}(T_n)$  tal que a cada permutación asociada a cada vértice de la gráfica de Cayley  $\mathcal{G}(T_n)$ , lo manda a su inversa. Es decir

$$\sigma \rightarrow \sigma^{-1} \quad \text{para toda } \sigma \in S_n.$$

Veamos que  $f$  está bien definida ya que para cualesquiera  $\sigma, \sigma' \in S_{n+1}$ , si  $f(\sigma) \neq f(\sigma')$  se sigue que  $\sigma \neq (\sigma')^{-1}$  y por tanto,

$$\sigma = (\sigma^{-1})^{-1} \neq ((\sigma')^{-1})^{-1} = \sigma',$$

por ser  $\sigma, \sigma'$  funciones biyectivas.

Más aun, si  $\sigma \neq \sigma'$  entonces  $\sigma^{-1} = f(\sigma)$  es distinto de  $(\sigma')^{-1} = f(\sigma')$ . De lo contrario, si  $\sigma^{-1} = (\sigma')^{-1}$  entonces

$$\sigma = (\sigma^{-1})^{-1} = ((\sigma')^{-1})^{-1} = \sigma';$$

contradiciendo el supuesto  $\sigma \neq \sigma'$ . Por lo tanto  $f$  es inyectiva.

Ahora, dada  $\sigma \in S_{n+1}$ , existe  $\sigma' \in S_{n+1}$  tal que  $f(\sigma') = \sigma$ , a saber  $\sigma' = \sigma^{-1}$ . Por tanto  $f$  es suprayectiva.

Por último, veamos que  $f$  es isomorfismo de gráficas. Es decir, veamos que  $f$  preserva adyacencia en los vértices de  $\mathcal{G}(T_n)$  y de  $\Pi_n$ .

Sean  $\sigma, \gamma \in S_{n+1}$ . Como dijimos antes, estos son adyacentes en  $\Pi_n$  si y sólo si

$$\sigma = \alpha\gamma, \quad \text{con} \quad \alpha = (\gamma(k) \ \gamma(k+1)),$$

para alguna  $k \in \{1, \dots, n+1\}$ . Para ver que  $f(\sigma)$  y  $f(\gamma)$  son permutaciones adyacentes en  $\mathcal{G}(T_n)$ , basta hallar un  $\tau_e \in S_{n+1}$  tal que

$$f(\sigma) = \tau_e f(\gamma) = \tau_e \gamma^{-1}, \quad \text{con} \quad \tau_e \in \{\tau_{e_1}, \tau_{e_2}, \dots, \tau_{e_n}\}.$$

Como  $\sigma = \alpha\gamma$  donde  $\alpha = (\gamma(k) \ \gamma(k+1))$ , entonces  $f(\sigma) = f(\alpha\gamma) = (\alpha\gamma)^{-1} = \gamma^{-1}\alpha$ , ya que  $\alpha$  es una transposición.

Reduciendo la prueba a que

$$\gamma^{-1}\alpha = \tau_e \gamma^{-1},$$

para alguna  $\tau_e \in \{\tau_{e_1}, \tau_{e_2}, \dots, \tau_{e_n}\}$ .

Consideremos  $\tau_e = \gamma^{-1}\alpha\gamma = \gamma^{-1}(\gamma(k) \ \gamma(k+1))\gamma$ . Observemos que

$$(\gamma^{-1}\alpha\gamma)(k) = \gamma^{-1}\alpha(\gamma(k)) = \gamma^{-1}\gamma(k+1) = k+1,$$

$$(\gamma^{-1}\alpha\gamma)(k+1) = \gamma^{-1}\alpha(\gamma(k+1)) = \gamma^{-1}\gamma(k) = k, \quad \text{y}$$

$$(\gamma^{-1}\alpha\gamma)(a) = a \quad \text{si} \ a \notin \{k, k+1\}.$$

De donde se sigue que  $\tau_e = (k \ (k+1))$ , por como definimos a los vértices de  $T_n$ , se sigue que  $k$  y  $k+1$  son adyacentes en  $T_n$  y por lo tanto,

$$f(\sigma) = \tau_e f(\gamma).$$

□

Apoyándonos en el lema anterior y el teorema de politopos que define cuando dos de éstos pueden ser combinatoriamente isomorfos, nos fue posible conjeturar sobre el primer objetivo de la investigación del graficaedro:

La generalización del permutaedro  $\Pi_n$  de rango  $n$  con respecto al graficaedro  $\mathcal{P}_G$  asociado a la gráfica  $G$ .

**Teorema 5.1.** *El graficaedro  $\mathcal{P}_{T_n}$  asociado a la trayectoria  $T_n$  de longitud  $n$  es isomorfo al permutaedro  $\Pi_n$  de rango  $n$ .*

En el artículo “The Graphicahedron” [1] se da la prueba de este teorema, para la cual, se requiere de más teoría que no fue estudiada para la tesis.

## 5.2. Graficaedros de rango 4.

Nótese que las únicas  $(p, 4)$ -gráficas simples y conexas que hay son:  $T_4, C_4, K_{1,4}, G$  y  $H$ ; mostradas en la figura 5.10.

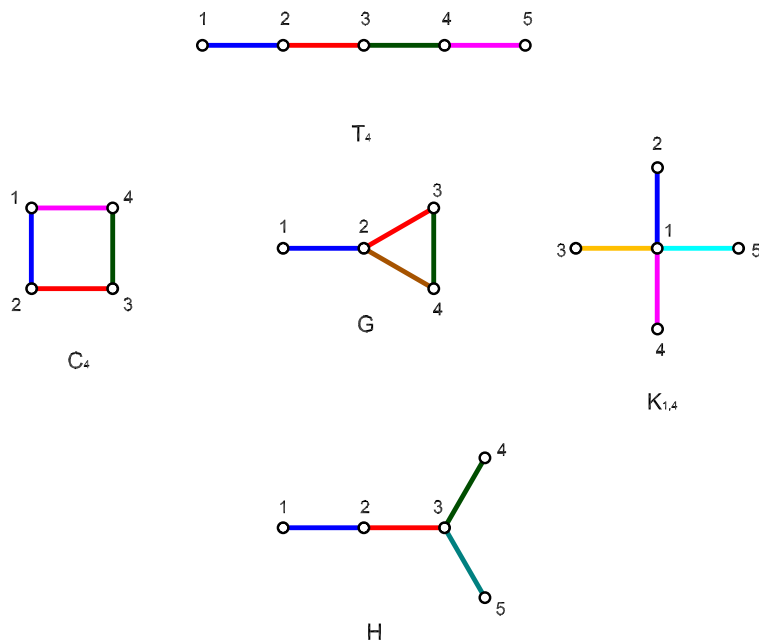


Figura 5.10:  $(p, 4)$ -gráficas simples y conexas.

Para describir la estructura de los graficaedros de rango 4 asociados a cada una de las gráficas de la figura 5.10, nos apoyaremos en sus subgráficas generadoras de rango menor que 4. Comenzaremos por estudiar las 3-caras determinadas por las parejas  $(L_3, a)$  donde  $L_3$  es un subconjunto de 3 aristas de la gráfica y  $a \in S_p$ . Nótese que cada  $(p, 4)$ -gráfica tiene exactamente 4 subgráficas generadoras de tamaño 3; de las cuales, algunas contienen subgráficas isomorfas a las estudiadas en la sección anterior.

Observemos que para cada  $(p, 4)$ -gráfica, dos subgráficas generadoras  $L$  y  $L'$  de tamaño 3, con  $L_3$  y  $L'_3$  sus respectivos conjuntos de aristas, comparten únicamente dos aristas. Es decir,  $L_3 \cap L'_3 = K_2$  donde  $K_2$  es un conjunto de dos aristas de la gráfica tal que la pareja  $(K_2, a)$  con  $a \in S_p$ , es la 2-cara del graficaedro asociado a la  $(p, 4)$ -gráfica incidente tanto en  $(L_3, a)$  como en  $(L'_3, a)$ . Como ésto es válido para cualesquiera dos subgráficas generadoras de tamaño 3, entonces las figuras de vértice en cada graficaedro de rango 4 serán isomorfas entre sí.

**Ejemplo 5.4.** En el caso de  $T_4$ , por el teorema 5.1 el graficaedro  $\mathcal{P}_{T_4}$  asociado a la trayectoria  $T_4$  de longitud 4 es isomorfo al permutaedro  $\Pi_4$  de rango 4.

Notemos que cada dos de sus subgráficas generadoras de tamaño 3 (figura 5.11), comparten exactamente dos aristas.

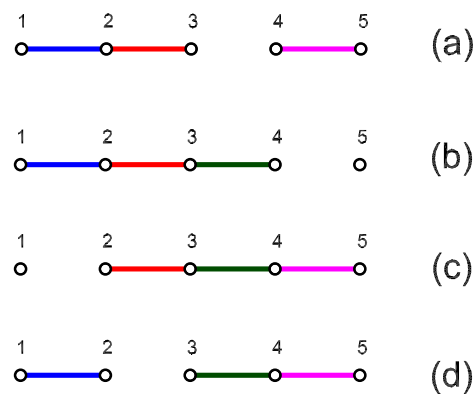


Figura 5.11: Subgráficas generadoras de  $T_4$ , de tamaño 3.

Es decir:

- 1) Las gráficas (a) y (b) comparten las aristas  $\{1\ 2\}$  y  $\{2\ 3\}$ .
- 2) Las gráficas (b) y (c) comparten las aristas  $\{2\ 3\}$  y  $\{3\ 4\}$ .
- 3) Las gráficas (c) y (d) comparten las aristas  $\{3\ 4\}$  y  $\{4\ 5\}$ .
- 4) Las gráficas (a) y (c) comparten las aristas  $\{2\ 3\}$  y  $\{4\ 5\}$ .
- 5) Las gráficas (b) y (d) comparten las aristas  $\{1\ 2\}$  y  $\{3\ 4\}$ .
- 6) Las gráficas (a) y (d) comparten las aristas  $\{1\ 2\}$  y  $\{4\ 5\}$ .

Observemos que de 1), 2) y 3) podemos inferir la incidencia de las caras hexagonales entre las facetas de rango 3 de  $\mathcal{P}_{T_4}$ . De igual manera, de 4), 5) y 6) podemos inferir la incidencia de las caras cuadradas.

Donde las gráficas de Cayley asociadas a (b) y (c), corresponden a 5 graficaedros isomorfos a  $\mathcal{P}_{T_3}$  cada una, y las asociadas a (a) y (d), corresponden a 10 prismas hexagonales respecto a cada gráfica, debido a la estructura de dichas gráficas.

Por lo tanto, el graficaedro  $\mathcal{P}_{T_4}$ , isomorfo al politopo  $\Pi_4$ , consta de  $5! = 120$  vértices, 60 hexágonos, 90 cuadrados y sus 3-caras son 10 permutaedros  $\Pi_3$  de rango 3 y 20 prismas hexagonales; al igual que el permutaedro  $\Pi_4$ , y queda representado como en la figura 5.12.



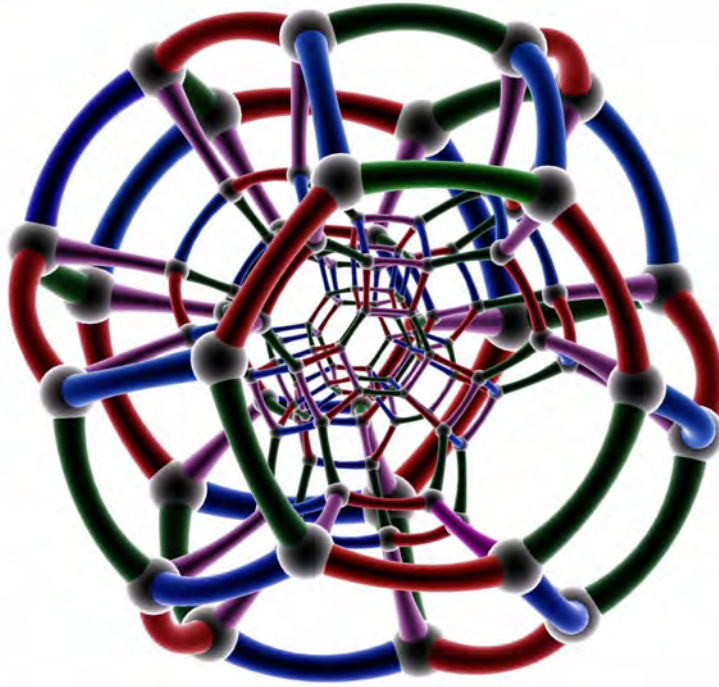
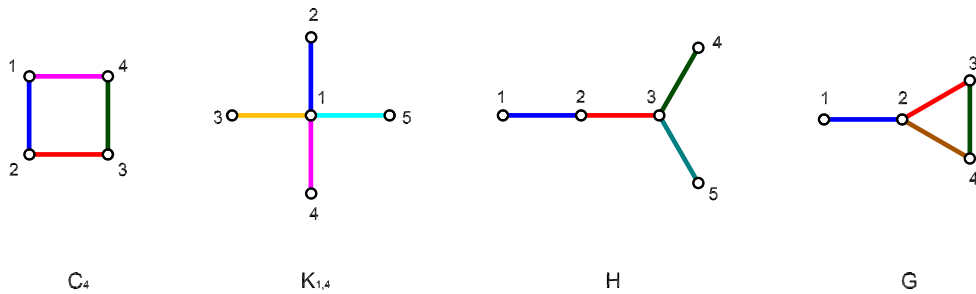


Figura 5.12:  $\mathcal{P}_{T_n} \cong \mathcal{G}(T_n)$ . [26]

Por otro lado, las gráficas  $C_4$ ,  $K_{1,4}$ ,  $G$  y  $H$ . Las otras  $(p, 4)$ –gráficas simples y conexas son:



**Ejemplo 5.5.** Consideremos primero a  $C_4$  el ciclo de longitud 4. Nótese que sus cuatro subgráficas generadoras de tamaño 3 son todas isomorfas a  $T_3$ .

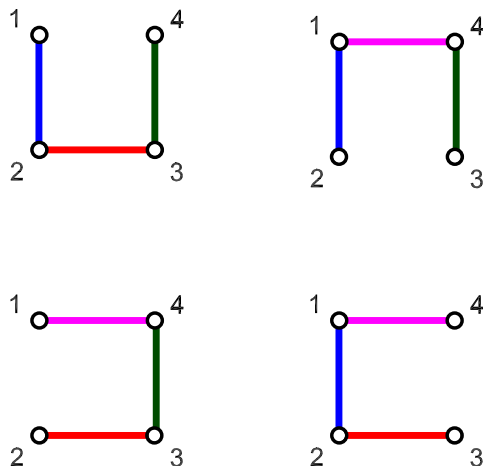
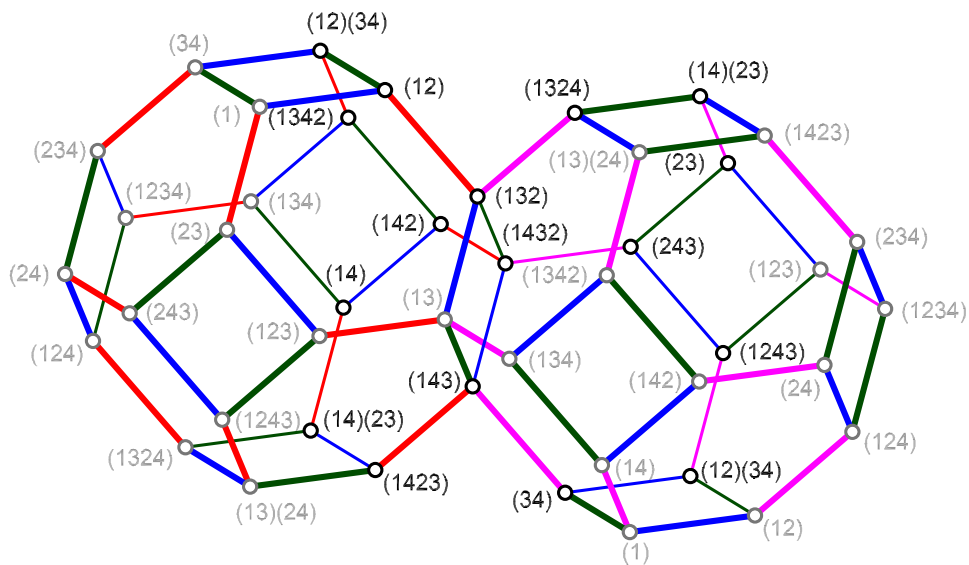


Figura 5.13: Subgráficas generadoras de  $C_4$  de tamaño 3.

Entonces, cada faceta de  $\mathcal{P}_{C_4}$  es isomorfa a  $\mathcal{P}_{T_3}$ . De manera que  $\mathcal{P}_{C_4}$  tiene 4 facetas isomorfas a  $\mathcal{P}_{T_3}$  y sólo  $4!$  vértices en total, de manera que hay que identificar varios de ellos.



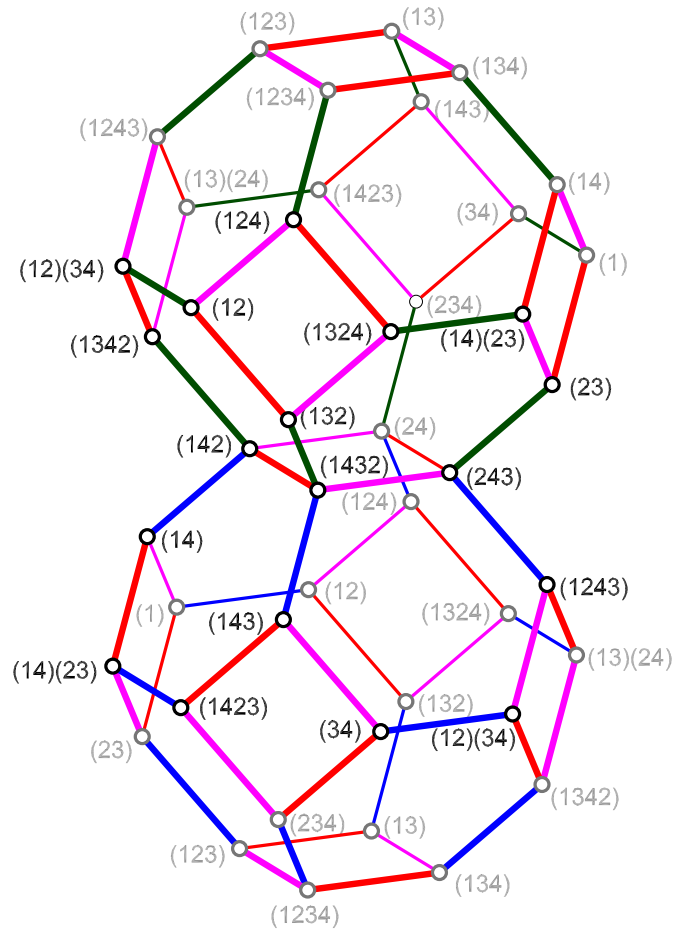
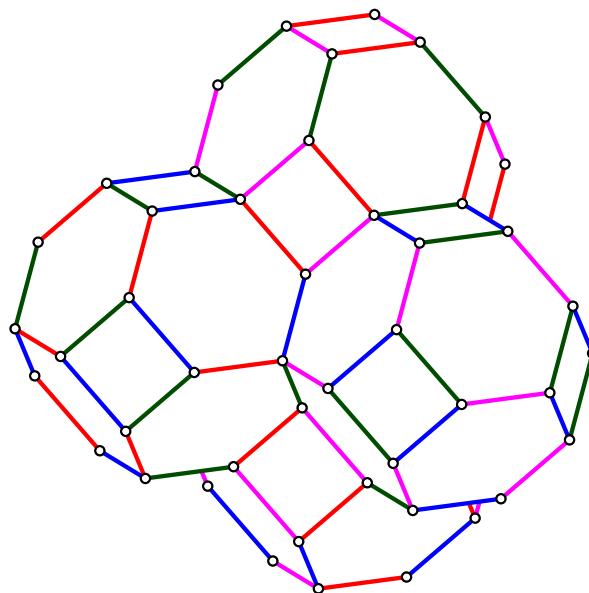


Figura 5.14: Facetas de  $\mathcal{P}_{C_4}$ .

Es sabido que  $\Pi_3$  es un politopo que tesela el espacio (lo llena sin dejar huecos) [15]. Al identificar los vértices señalados en negro de la figura de arriba, podemos empezar a construir a  $\mathcal{P}_{C_4}$ . Viéndola inicialmente como una teselación de cuatro de éstas piezas. Ésto es:



Sin embargo, aún hay varios vértices repetidos que debemos emparar en la figura. Al hacer esto, tomamos otra sección de la teselación de  $\Pi_3$ . Afiliada a la anterior, pero más cómoda para llegar a nuestra solución.

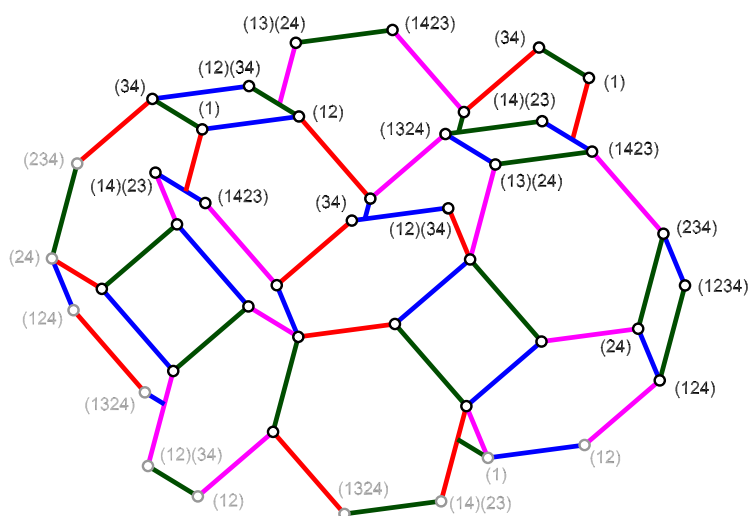


Figura 5.15: Teselación asociada a las 3-caras de  $\mathcal{P}_{C_4}$ .

Obsérvese que en ésta (figura 5.15), los vértices señalados con negro tanto arriba como a la derecha de la figura están repetidos en gris abajo y a la izquierda de la figura respectivamente, pero de una manera “torcida” como se muestra abajo. Para identificar estos, encajonaremos a la figura en un doble cubo

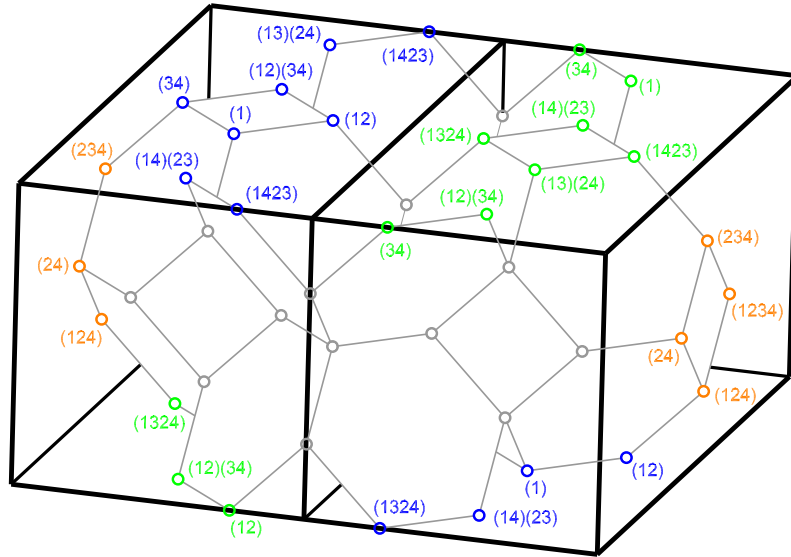


Figura 5.16: Figura 5.15 encajonada.

por medio del cual solucionaremos la adyacencia total de las caras de  $\mathcal{P}_{C_4}$ . Modificando este cubo excrito al 1-esqueleto de  $\mathcal{P}_{C_4}$ . Para esto, tomaremos dos copias de los cubos de la figura 5.16 y las pegaremos por los laterales con vértices coloreados de naranja como en la figura 5.17.

Por comodidad, consideramos únicamente los cubos y coloreamos sus caras con respecto al color de los vértices en ellas. Finalmente, modificamos a estos cubos identificando los vértices sobrantes, y obtenemos el paralelepípedo de la figura 5.18.



Si consideramos a  $C_n$  el ciclo de longitud  $n \geq 3$ , éste es tal que  $p = q = n$ . Podemos concluir de lo estudiado en los ejemplos (5.1) y (5.5) varias afirmaciones.

Para empezar, el graficaedro  $\mathcal{P}_{C_n}$  tiene  $n! = |S_n|$  vértices, y observemos que todas las subgráficas generadoras de  $C_n$  con  $n - 1$  aristas son trayectorias de longitud  $n - 1$  (conexas), por lo que el graficaedro de cada una de éstas es isomorfa con al permutaedro  $\Pi_{n-1} \cong \mathcal{P}_{T_{n-1}}$ , el cual tesela el espacio Euclideo  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Resultando que  $\mathcal{P}_{C_n}$  es una teselación con exactamente  $n$  copias del permutaedro  $\Pi_{n-1}$  alrededor de cada vértice. Así, cada vértice es incidente con exactamente  $n$  facetas.

En el caso de  $n = 3, 4$  hemos verificado que  $\mathcal{P}_{C_n}$  es una teselación vértice transitiva del 2-toro  $\{6, 3\}_{(1,1)}$ , y de un 3-toro, respectivamente. Lo que nos lleva a la siguiente conjetura.

**Conjetura 5.1.** *El graficaedro  $\mathcal{P}_{C_n}$  es una teselación vértice transitiva de un  $(n - 1)$ -toro.*

Éste es un problema que aún no se ha sido estudiado.

Veamos ahora el ejemplo del graficaedro  $\mathcal{P}_{K_{1,4}}$  asociado a la gráfica  $K_{1,4}$ . Para después dar conclusiones sobre el graficaedro  $\mathcal{P}_{K_{1,n}}$  asociado a la gráfica estrellada de  $n$  aristas incidentes en un vértice,  $K_{1,n}$ .

**Ejemplo 5.6.** Sea  $K_{1,4}$  la gráfica estrellada con 4 aristas incidentes en un vértice. El orden de  $K_{1,4}$  es cinco, por lo que  $\mathcal{P}_{K_{1,4}}$  será un politopo con  $5! = 120$  vértices.

Nótese que todas las subgráficas generadoras de tamaño  $k$  en esta gráfica son isomorfas entre si para toda  $k = 0, 1, 2, 3$ . En el ejemplo 5.2 de la sección anterior describimos el graficaedro de  $K_{1,3}$ , subgráfica de las gráficas generadoras de tamaño 3 de  $K_{1,4}$ , y en la visualización del politopo  $\mathcal{P}_{K_{1,4}}$  éstas corresponderán a las facetas del politopo  $\mathcal{P}_{K_{1,4}}$ .

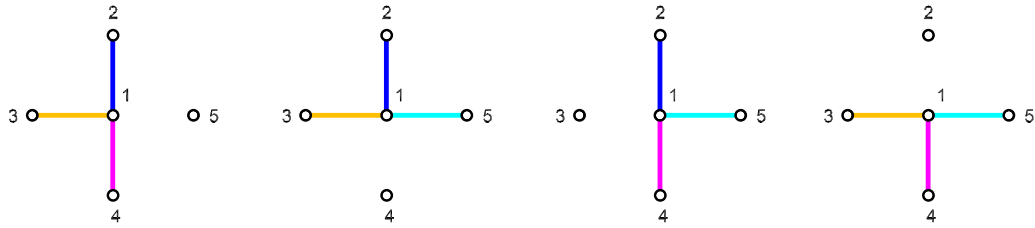
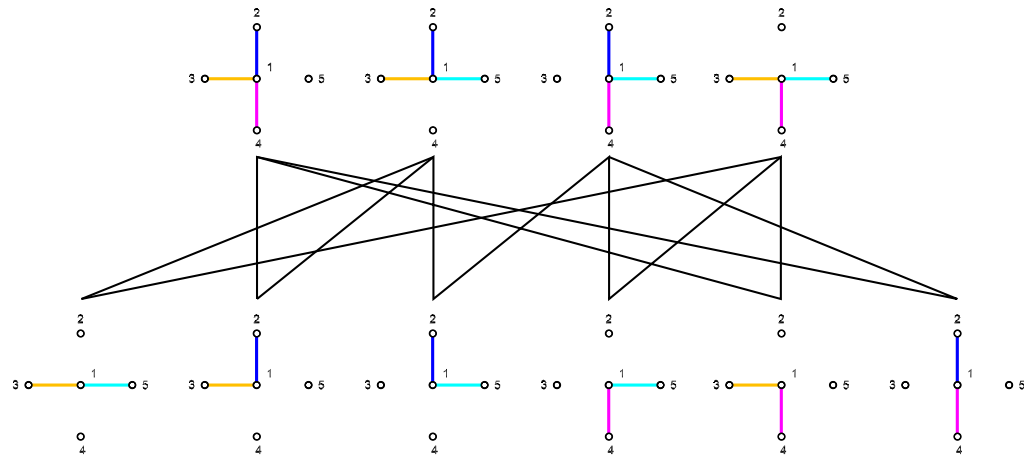


Figura 5.19: Subgráficas generadoras de  $K_{1,4}$  de tamaño tres.

Por cada subgráfica de éstas, 5 polítopos toroidales del tipo  $\{6, 3\}_{(2,2)}$ : En cada subgráfica generadora hay un sólo vértice que no es adyacente a los demás, entonces el representante  $v_i$  de este vértice con  $v_i = 2, 3, 4, 5$ , queda fijo en 5 conjuntos distintos de los vértices de  $\mathcal{P}_{K_{1,4}}$  (tal representante tiene 5 lugares posibles por tomar en las permutaciones de  $S_5$ ). Con la siguiente figura podemos ver que estos conjuntos comparten dos a dos una de sus caras hexagonales descritas por las subgráficas generadoras de tamaño 2 de  $K_{1,4}$ .



Además cada vértice de  $\mathcal{P}_{K_{1,4}}$  pertenece a 4 aristas (cada una asignada por las transposiciones  $(1\ 2)$ ,  $(1\ 3)$ ,  $(1\ 4)$  y  $(1\ 5)$ ). Entonces, podemos intuir que alrededor de cada vértice debe haber cuatro facetes toroidales de rango 3. Éstas, únicamente pueden ser un elemento de cada conjunto definido por cada gráfica en la figura 5.19.



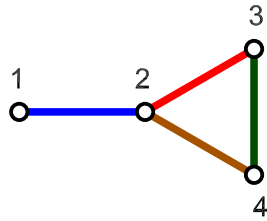
Dicho de otra forma, alrededor de cada vértice hay 4 toros distintos entre ellos, isomorfos a  $\{6, 3\}_{(2,2)}$ .

Resultando así, que  $\mathcal{P}_{K_{1,4}}$  es un politopo simple con 120 vértices, 240 aristas, 120 hexágonos y 20 facetas isomorfas a  $\{6, 3\}_{(2,2)}$ . Un politopo con éstas características es el politopo universal de rango cuatro que en la literatura se denota como  $\{\{6, 3\}_{(2,2)}, \{3, 3\}\}$  [15].

Dado que la gráfica  $K_{1,n}$  es un árbol con  $n$  aristas y  $(n + 1)$  vértices, el graficaedro  $\mathcal{P}_{K_{1,n}}$  asociado a la gráfica estrellada  $K_{1,n}$ , es un politopo con  $(n + 1)! = |S_{n+1}|$  vértices y facetas isomorfas al graficaedro  $\mathcal{P}_{K_{1,(n-1)}}$ . Estudiaremos un poco más este politopo en el siguiente capítulo, en particular demostraremos que  $\mathcal{P}_{K_{1,n}}$  siempre es regular.

Por otro lado, los ejemplos de los graficaedros asociados a las gráficas que denotamos por  $G$  y  $H$ , aun no podemos generalizarlos. Sin embargo, son casos interesantes y con ellos completaremos el estudio de todos los graficaedros de rango 4 posibles.

**Ejemplo 5.7.** Veamos primero el caso de la gráfica  $G$ .



De la cual, sus subgráficas generadoras que definirán a las facetas de rango tres de  $\mathcal{P}_G$  son:

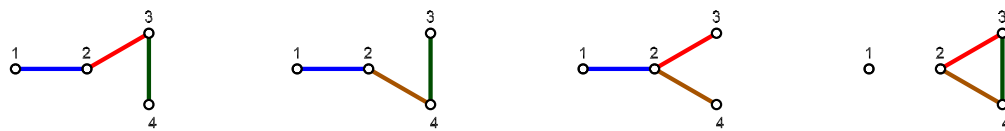


Figura 5.20: Subgráficas generadoras de tamaño 3 de la gráfica  $G$ .

Nótese el graficaedro  $\mathcal{P}_G$  tiene como facetas a los graficaedros  $\mathcal{P}_{T_3}$ ,  $\mathcal{P}_{K_{1,3}}$  y  $\mathcal{P}_{C_3}$ . Los tres casos vistos en la sección anterior.

Las dos facetas asociadas a las primeras dos subgráficas (conexas) de la figura 5.20 son del tipo de  $\mathcal{P}_{T_3}$ . Como cada subgráfica de estas consta de todos los vértices de  $G$ , entonces las dos facetas asociadas a éstas constan de los 24 vértices de  $\mathcal{P}_G$ :

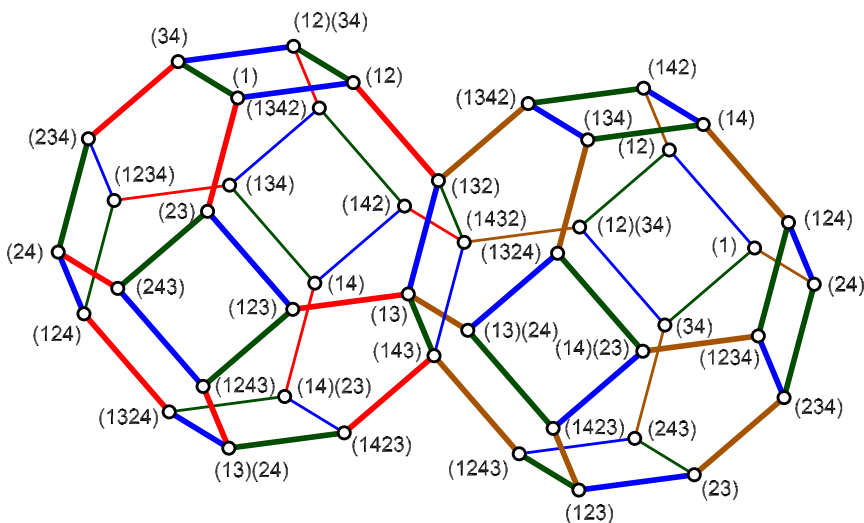


Figura 5.21: Facetas asociadas a las trayectorias de longitud 3 en la gráfica  $G$ .

Sin embargo, una representación que nos proporciona una mejor intuición de la estructura de  $\mathcal{P}_G$  es la figura toroidal en la figura 5.22.

Nótese que las 2-caras cuadradas del  $\mathcal{P}_G$  politopo son los ejes verde-azul en la figura 5.22. Por medio de ésto podemos intuir como se debe torcer la figura

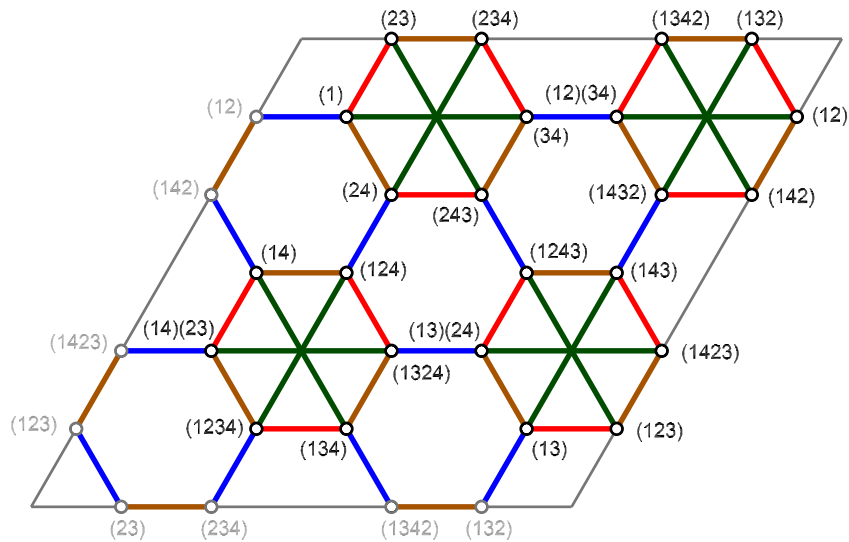


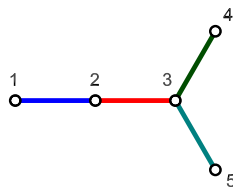
Figura 5.22: Estructura del graficaedro  $\mathcal{P}_G$  asociado a la gráfica  $G$ .

5.21 para identificar sus vértices; forzando de esta manera la visualización de las facetas isomorfas a  $\mathcal{P}_{C_3}$ . Así, podemos ver que  $\mathcal{P}_G$  es el 3-toro representado en la figura 5.22.

Resultando así que el graficaedro  $\mathcal{P}_G$  asociado a la gráfica  $G$  que consta de: 24 vértices, 48 aristas, 20 hexágonos, 6 cuadrados, dos 3-caras isomorfas a  $\mathcal{P}_{T_3}$ , cuatro 3-caras isomorfas a  $\mathcal{P}_{C_3}$  y una 3-cara isomorfa a  $\mathcal{P}_{K_{1,3}}$ .

Por último,

**Ejemplo 5.8.** Sea  $H$

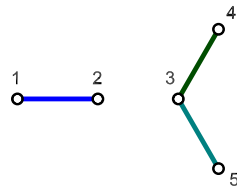


Este es es graficaedro de rango 4 más complicado de visualizar. Al fijarnos en sus subgráficas generadoras de tamaño 3, vemos que

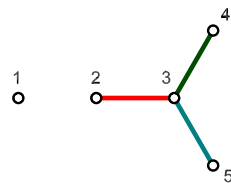


están asociadas cada una a un conjunto de 5 facetas isomorfas a  $\mathcal{P}_{T_3}$  (ya que cada una tiene un vértice aislado).

Además, se tienen 10 prismas hexagonales asociados a la subgráfica



(así como los calculamos para  $\mathcal{P}_{T_4}$ ) y 5 toros isomorfos a  $\mathcal{P}_{K_{1,3}}$  asociados a la gráfica



(así como los calculamos para  $\mathcal{P}_{K_{1,4}}$ ).

Por la complejidad de este politopo, no hemos podido dar una construcción aproximada a su visualización.



# Capítulo 6

## Simetrías del Graficaedro

En este capítulo se estudiarán las simetrías del politopo  $\mathcal{P}_G$  asociado a una  $(p, q)$ -gráfica  $G$ . Más aún, estudiaremos como los grupos  $S_p$  y  $\Gamma(G)$  se relacionan con el grupo de automorfismos de  $\mathcal{P}_G$ .

### 6.1. Subgrupos del grupo de automorfismos del graficaedro

Dada una  $(p, q)$ -gráfica simple y conexa  $G$ , sea  $\mathcal{P}_G$  el  $q$ -politopo asociado a la gráfica de Cayley  $\mathcal{G}(G)$ .

Es claro que cada  $\alpha \in S_p$  define una permutación de los vértices de  $\mathcal{P}_G$ , ya que los vértices de  $\mathcal{P}_G$  son elementos mismos del grupo  $S_p$  y en  $\mathcal{G}(G)$   $\alpha$  intercambia elementos de una clase lateral dentro de la misma clase, (por medio también, de una permutación entre los vértices de cada componente). De manera que para cada  $i$ -cara  $C_i$  de  $\mathcal{P}_G$  de la forma  $(K, a)$ , podemos definir un homomorfismo sobre los elementos de  $\mathcal{P}_G$ , de la siguiente manera,

$$(K, a) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} (K, a\alpha), \quad \text{con} \quad K \subseteq E(G), \quad a \in S_p.$$

Por otro lado, toda  $\varphi \in \Gamma(G)$  actúa como una permutación de los vértices y aristas de la gráfica  $G$  preservando su incidencia de aristas. Note que al intercambiar ciertas aristas en  $G$ , en  $\mathcal{G}(G)$  manda a cada transposición  $\tau_{e_i}$ , con  $e_i \in E(G)$ , a su conjugada. De tal manera que definiremos en  $\mathcal{P}_G$  el

siguiente homomorfismo  $\tilde{\varphi}$  que actua sobre sus caras de la siguiente forma:

$$(K, a) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} (\varphi(K), a^\varphi), \quad \text{con } K \subseteq E(G), a \in S_p.$$

donde  $a^\varphi = \varphi a \varphi^{-1}$ .

Veamos que  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\varphi}$  estan bien definidos. Consideremos  $\alpha, \beta \in S_p$ ,

- i) Si  $\alpha = (1) \in S_p$ ,  $(K, a)(\tilde{1}) = (K, a(1)) = (K, a)$ ,
- ii)  $[(K, a)\tilde{\alpha}]\tilde{\beta} = (K, a\alpha)\tilde{\beta} = (K, a(\alpha\beta)) = (K, a)\tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ ,
- iii)  $[(K, a)\tilde{\alpha}]\tilde{\alpha}^{-1} = (K, a\alpha)\tilde{\alpha}^{-1} = (K, a(\alpha\alpha^{-1})) = (K, a)\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}^{-1} = (K, a)(\tilde{1})$ .

Por otro lado, si consideramos  $\varphi, \psi \in \Gamma(G)$ ,

- i) Sea  $\varphi_0 \in \Gamma(G)$  el automorfismo identidad de la gráfica  $G$ . Entonces  $(K, a)\tilde{\varphi}_0 = (\varphi_0(K), a^{\varphi_0}) = (K, a)$ ,
- ii)  $[(K, a)\tilde{\varphi}]\tilde{\psi} = (\varphi(K), a^\varphi)\tilde{\psi} = (\psi(\varphi(K)), (\varphi a \varphi^{-1})^\psi) = (\psi\varphi(K), (\psi\varphi)a(\psi\varphi)^{-1}) = (\psi\varphi(K), a^{\psi\varphi}) = (K, a)\tilde{\psi}\tilde{\varphi}$ ,
- iii)  $[(K, a)\tilde{\varphi}]\tilde{\varphi}^{-1} = (\varphi(K), a^\varphi)\tilde{\varphi}^{-1} = (\varphi^{-1}(\varphi(K)), (\varphi a \varphi^{-1})^{\varphi^{-1}}) = (\varphi_0(K), (\varphi^{-1}\varphi)a(\varphi^{-1}\varphi)^{-1}) = (K, a^{\varphi_0}) = (K, a)\tilde{\varphi}_0$ .

Dicho esto, en la siguiente proposición se mostrará que tanto  $\tilde{\alpha}$  como  $\tilde{\varphi}$  son elementos del grupo de automorfismos del politopo  $\mathcal{P}_G$ .

**Proposición 6.1.** *Cualquier elemento de  $S_p$  o de  $\Gamma(G)$  induce un automorfismo de  $\mathcal{P}_G$  que preserva adyacencias de caras. Es decir, dado  $\alpha \in S_p$  y  $\varphi \in \Gamma(G)$  los correspondientes homomorfismos  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\varphi}$  son elementos de  $\Gamma(\mathcal{P}_G)$ .*

*Demostración.* Sean  $(K, a)$  y  $(L, b)$  dos caras incidentes en  $\mathcal{P}_G$ . Es decir,  $(K, a) \leq_{\mathcal{P}_G} (L, b)$  si y sólo si  $K \subseteq L$  y  $T_K a \subseteq T_L b$ . Veamos que  $(K, a)\tilde{\alpha}$  y  $(K, a)\tilde{\varphi}$  están en  $\Gamma(\mathcal{P}_G)$  y que sus imágenes preservan la incidencia.

Sabemos que la imagen de estas caras bajo  $\tilde{\alpha}$  es:

$$(K, a) \rightarrow (K, a\alpha) \quad \text{y} \quad (L, b) \rightarrow (L, b\alpha)$$

Para ver si estas imágenes preservan la incidencia únicamente necesitamos ver si

$$(T_K a)\alpha \subseteq (T_L b)\alpha.$$

Entonces, consideremos a  $(\gamma a)\alpha \in (T_K a)\alpha$  tal que  $\gamma a \in T_K a \subseteq T_L b$  lo que implica que entonces  $(\gamma a)\alpha \in (T_L b)\alpha$ . Concluyendo así, que todo  $\alpha \in S_p$  induce un automorfismo  $\tilde{\alpha}$  en  $\mathcal{P}_G$  que preserve la incidencia de sus elementos.

Por otro lado, dado  $\varphi \in \Gamma(G)$  un automorfismo de la gráfica  $G$ , éste define a  $\tilde{\varphi}$  como en ???. Nótese que para cada  $\tau_e$  definida por una arista  $e \in E(G)$ ,  $\tau_{\varphi(e)}$  queda definida de manera natural por

$$\tau_{\varphi(e)} = \varphi \tau_e \varphi^{-1}.$$

Es decir, los elementos  $\varphi \in \Gamma(G)$  actúan bajo conjugación sobre las transposiciones definidas por las aristas. Esto surge de tomar un elemento (arista) en la imagen del automorfismo y aplicarle  $\varphi^{-1}$  (la inversa, para regresar a la gráfica inicial  $G$ ), luego identificar la transposición correspondiente  $\tau_e$  y finalmente aplicar  $\varphi$  para así poder ver a que transposición  $\tau_{\varphi(e)}$  corresponde la imagen de la arista  $e$ . Resultando a su vez el conjunto

$$\mathcal{T}_{\varphi(K)} := \begin{cases} \emptyset & K = \emptyset, \\ \{\varphi \tau_{e_1} \varphi^{-1}, \dots, \varphi \tau_{e_k} \varphi^{-1}\} & K = \{e_1, \dots, e_k\}. \end{cases}$$

De donde,

$$T_{\varphi(K)} = \langle \tau_{\varphi(e)} | e \in E(G) \rangle = \varphi \langle \tau_e | e \in E(G) \rangle \varphi^{-1} = \varphi T_K \varphi^{-1}. \quad (6.1)$$

Ahora bien, la imagen de los elementos  $(K, a)$  y  $(L, b)$  en  $\mathcal{P}_G$  bajo  $\varphi \in \Gamma(G)$  son

$$(K, a) \rightarrow (\varphi(K), a^\varphi) \quad \text{y} \quad (L, b) \rightarrow (\varphi(L), b^\varphi),$$

respectivamente, donde  $a^\varphi = \varphi a \varphi^{-1}$  y  $b^\varphi = \varphi b \varphi^{-1}$ .

Para verificar si éstas caras son incidentes, veamos que cumplan con:

$$(1) \quad \varphi(K) \subseteq \varphi(L).$$

Sea  $\varphi(e) \in \varphi(K)$  con  $e \in K \subseteq L$  lo que implica que  $\varphi(e) \in \varphi(L)$ .



$$(2) T_{\varphi(K)}a^\varphi \subseteq T_{\varphi(L)}b^\varphi.$$

Notemos que en  $S_p$  se tiene que

$$T_{\varphi(K)}a^\varphi = \varphi T_K \varphi^{-1} \varphi a \varphi^{-1} = \varphi(T_K a) \varphi^{-1}.$$

(Esta igualdad esta definida por las ecuaciones ?? y 6.1).

Así que si consideramos a  $\gamma \in T_{\varphi(K)}a^\varphi$  tal que  $\gamma = \varphi \lambda \varphi^{-1}$ , con  $\lambda \in T_K a \subseteq T_L b$ . Entonces

$$\gamma = \varphi \lambda \varphi^{-1} \in \varphi T_L b \varphi^{-1} = \varphi T_L \varphi^{-1} \varphi b \varphi^{-1} = T_{\varphi(L)}b^\varphi.$$

Y por lo tanto,  $(\varphi(K), a^\varphi) \leq_{\mathcal{P}_G} (\varphi(L), b^\varphi)$ . Es decir, toda  $\varphi \in \Gamma(G)$  preserva incidencia de caras en  $\mathcal{P}_G$ .

Finalmente, en el caso de la cara mínima de  $\mathcal{P}_G$ ; toda  $\alpha \in S_p$  y  $\varphi \in \Gamma(G)$  actúan sobre ésta como:  $\alpha(\emptyset) = \emptyset$  y  $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ . Dejándola como la cara mínima de la imagen del politopo bajo el automorfismo.  $\square$

De ahora en adelante, por conveniencia, denotaremos a  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\varphi}$  simplemente por  $\alpha$  y  $\varphi$  respectivamente.

## 6.2. El grupo de simetrías del Graficaedro

En la sección anterior se demostró que para el  $q$ -politopo  $\mathcal{P}_G$  asociado a la  $(p, q)$ -gráfica  $G$ , los grupos  $S_p$  y  $\Gamma(G)$  son subgrupos del grupo de automorfismos  $\Gamma(\mathcal{P}_G)$  del politopo  $\mathcal{P}_G$ . Pero aún así quisieramos ver si con ellos basta para definir a todos los elementos de  $\Gamma(\mathcal{P}_G)$ .

**Teorema 6.1.** *Sea  $G$  una  $(p, q)$ -gráfica simple y conexa, tal que  $q \neq 1$ . Entonces,  $\Gamma(\mathcal{P}_G) \cong S_p \times \Gamma(G)$ .*

*Demostración.* Recordemos que toda  $\alpha \in S_p$  y  $\varphi \in \Gamma(G)$  actúan como automorfismos del politopo sobre sus elementos de manera tal que

$$(K, a) \rightarrow (K, a\alpha) \quad \text{y} \quad (K, a) \rightarrow (\varphi(K), a^\varphi),$$

respectivamente. Resultando así que  $S_p$  y  $\Gamma(G)$  son subgrupos de  $\Gamma(\mathcal{P}_G)$ .

Supongamos que  $S_p \cap \Gamma(G) \neq \emptyset$  en  $\Gamma(\mathcal{P}_G)$ , es decir, existe un elemento de  $\Gamma(\mathcal{P}_G)$  es inducido tanto por  $\alpha \in S_p$  como por un  $\varphi \in \Gamma(G)$  y veamos que éstos sólo pueden ser la identidad. Esto es, para toda  $(K, a) \in \mathcal{P}_G$ ,

$$(K, a\alpha) = (\varphi(K), a^\varphi).$$

Entonces, por la definición 4.1, se sigue que

$$K = \varphi(K) \quad \text{y} \quad T_K a \alpha = T_K a^\varphi.$$

Es decir, el automorfismo  $\varphi$  deja fijo al conjunto de aristas  $K$  y por el lema 1.2 tenemos que

$$T_K a \alpha = T_K a = T_K a^\varphi,$$

de donde se sigue que  $a\alpha = a = a^\varphi = \varphi a \varphi^{-1}$ . Pero,  $a\alpha = a$  implica que  $(1) = \alpha \in S_p$ . Por otro lado,  $a = \varphi a \varphi^{-1}$  siempre y cuando  $a\varphi = \varphi a$ , pero como  $\Gamma(G)$  no es abeliano, resulta que  $\varphi$  es el automorfismo identidad de la gráfica  $G$ . Por lo tanto, el único elemento en  $S_p \cap \Gamma(G)$  es la identidad.

Ahora bien,  $S_p$  es un conjunto invariante bajo conjugación en  $\Gamma(\mathcal{P}_G)$  por medio de los automorfismos de  $\mathcal{P}_G$  dados por  $\Gamma(G)$ . Esto es, para cada  $\alpha \in S_p$  y todo  $\varphi \in \Gamma(G)$ , donde  $S_p$  y  $\Gamma(G)$  son subgrupos de  $\Gamma(\mathcal{P}_G)$ . Dada  $(K, a) \in \mathcal{P}_G$ ,

$$\begin{aligned} (K, a)\varphi\alpha\varphi^{-1} &= (\varphi(K), a^\varphi)\alpha\varphi^{-1}, \\ &= (\varphi(K), (\varphi a \varphi^{-1})\alpha)\varphi^{-1}, \\ &= (\varphi^{-1}(\varphi(K)), (\varphi a \varphi^{-1}\alpha)^{\varphi^{-1}}), \\ &= (K, \varphi^{-1}\varphi a \varphi^{-1}\alpha\varphi), \\ &= (K, a\varphi^{-1}\alpha\varphi). \end{aligned}$$

Es decir,

$$\varphi\alpha\varphi^{-1} \in S_p.$$

En otras palabras,  $\Gamma(G)$  normaliza a  $S_p$  en  $\Gamma(\mathcal{P}_G)$  (ver definición 1.8).

Quisieramos poder definir el producto semidirecto entre  $S_p$  y  $\Gamma(G)$ . Entonces, por el teorema 1.5, para terminar con las propiedades necesitamos ver que se cumplan las igualdades

$$\Gamma(\mathcal{P}_G) = S_p \cdot \Gamma(G) = \Gamma(G) \cdot S_p.$$

Es decir, debemos mostrar que todo automorfismo de  $\mathcal{P}_G$  permanece en el producto de  $S_p$  con  $\Gamma(G)$ . Para esto, tomemos un elemento  $\rho \in \Gamma(\mathcal{P}_G)$ . Por ser éste un automorfismo del politopo,  $\rho$  cumple que manda vértices de  $\mathcal{P}_G$  en vértices del mismo.

Suponamos que  $\rho$  manda al vértice  $(\emptyset, (1))$  en el vértice  $(\emptyset, \sigma)$  para algún  $\sigma \in S_p$ . Como  $S_p \leq \Gamma(\mathcal{P}_G)$ , es válido considerar a  $\sigma^{-1} \in \Gamma(\mathcal{P}_G)$  tal que éste manda al vértice  $(\emptyset, \sigma)$  de vuelta al vértice  $(\emptyset, (1))$ . Definiéndose de ésta manera, un automorfismo  $\varphi = \sigma^{-1}\rho$  de  $\mathcal{P}_G$ , como:

$$(\emptyset, (1)) \xrightarrow{\rho} (\emptyset, \sigma) \xrightarrow{\sigma^{-1}} (\emptyset, (1)).$$

El siguiente objetivo será ver que  $\varphi$  es un elemento de  $\Gamma(G)$ , con la idea de escribir a

$$\rho = \sigma\varphi \in S_p \cdot \Gamma(G).$$

De tal manera que en el siguiente párrafo demostraremos que  $\varphi \in \Gamma(G)$ .

Sabemos que un automorfismo de un politopo está completamente determinado por su acción sobre una bandera. Sea entonces  $\Phi = (\mathcal{K}, (1))$  una bandera de  $\mathcal{P}_G$ , donde  $\mathcal{K} = \{\emptyset, K_1, \dots, K_q\}$  es una familia maximal de conjuntos de aristas anidados. Nótese que el vértice  $(\emptyset, (1))$  es un elemento de  $\Phi$ . Supongamos que la imagen de la bandera  $\Phi$  bajo  $\varphi$  es la bandera  $\Lambda = (\mathcal{L}, a)$ , donde  $\mathcal{L} = \{\emptyset, L_1, \dots, L_q\}$  es nuevamente una familia maximal de conjuntos de aristas anidados y  $a \in S_p$ . Por un lado sabemos que  $\varphi$  deja fijo al vértice  $(\emptyset, (1))$ . Pero además  $\varphi$  manda al vértice de  $\Phi$  al vértice de  $\Lambda$ , es decir  $(\emptyset, a) = (\emptyset, (1))$ . Por la observación 4.1, podemos escribir a  $\Lambda$  como  $\Lambda = (\mathcal{L}, (1))$ . De manera que  $\varphi$  manda a la cara  $(K_j, (1))$  en la cara  $(L_j, (1))$  para cada  $j = 1, \dots, q$ .

Etiquetamos a las aristas de la gráfica  $G$  como  $f_1, \dots, f_q$  y  $g_1, \dots, g_q$  de tal manera que  $K_j = \{f_1, \dots, f_j\}$  y  $L_j = \{g_1, \dots, g_j\}$ , para cada  $j$ . Definimos una permutación  $\varphi'$  de aristas de  $G$  tal que actúe como  $\varphi'(f_j) = g_j$  para cada  $j$ . Entonces tenemos que  $\varphi'(K_j) = L_j$  para cada  $j$ , de modo que  $\varphi$  manda a  $(K_j, (1))$  en  $(\varphi'(K_j), (1))$ , para cada  $j$ .

Suponiendo que  $\varphi'$  es la permutación de las aristas de  $G$  determinada por un automorfismo de la gráfica, se tiene que entonces  $\varphi'$  actúa sobre las caras de  $\mathcal{P}_G$  como:

$$(\varphi'(K_j), (1)^{\varphi'}) = (\varphi'(K_j), (1)) = (L_j, (1)),$$

para cada  $j$ , y por tanto manda a  $\Phi$  en  $\Lambda$ . De tal manera que manda a la cara  $(K_j, (1))$  en la  $(L_j, (1))$ ; además sabemos que si dos automorfismos mandan una bandera a lo mismo, entonces deben ser el mismo, con lo que resultará que  $\varphi \in \Gamma(G)$ .

Así que debemos probar que  $\varphi'$  es un automorfismo de  $G$ . Intuitivamente, dado que la estructura de  $\mathcal{P}_G$  está completamente determinada por la estructura de  $G$ , la idea es observar que dado un conjunto de aristas  $K_j$  (y un representante de cada cara), se determina una cara de rango  $j$  en el politopo, la cual bajo el automorfismo  $\varphi$  en  $\mathcal{P}_G$  debe mandarse a otra cara similar de rango  $j$ , y ésta última debe estar descrita forzosamente por un conjunto de aristas del mismo tipo que el descrito por  $K_j$  (digamos  $L_j$ ) y un representante (el cual en este caso es  $(1)$ ). Si  $\varphi'$  es un automorfismo de aristas de  $G$ , entonces éste determina a  $\varphi''$  un automorfismo de los vértices de  $G$ .

Ahora bien, recuerde que un automorfismo en una gráfica está determinado por su efecto sobre los vértices con al menos 2 vecinos, así que nos olvidaremos de los vértices que tengan grado uno en lo que resta de la demostración.

Consideraremos a  $v \in V(G)$  un vértice de grado al menos 2 y a  $E(v)$  el conjunto de todas las aristas de  $G$  incidentes en  $v$ . Por medio de éstos, probaremos que dado cualquier  $v \in V(G)$ , la imagen de  $E(v)$  bajo  $\varphi'$  está contenido en un conjunto  $E(w)$ , para algun  $w \in V(G)$  (que deberá tener grado al menos 2). Así, podremos definir una permutación  $\varphi''$  de los vértices de  $G$ , de tal manera que  $\varphi''(v) = w$  para cualquier  $v \in V(G)$  con grado al menos 2, y así podremos concluir la prueba.

Sabemos que la estructura de las caras del politopo  $\mathcal{P}_G$  está totalmente determinada por la estructura de  $G$ . Entonces, analicemos los siguientes casos:

**Caso 1.** Sea  $v \in V(G)$  un vértice de grado exactamente dos.

Supongamos que  $e$  y  $f$  son las dos aristas que incidentes en el vértice  $v$  (es decir,  $\{e, f\} = E(v)$ ). Entonces  $(K_2, (1)) = (\{e, f\}, (1))$  determina un 2-cara hexagonal del politopo; nótese que en este caso

$$T_{\{e, f\}} = \langle \tau_e, \tau_f \rangle = S_3.$$

Por otro lado, todo automorfismo de  $\mathcal{P}_G$  debe mandar a  $(K_2, (1))$  en una 2-cara que también sea hexagonal, de la forma  $(L_2, \sigma) = (\{\varphi'(e), \varphi'(f)\}, (1))$  es tal que  $\varphi'(e)$  y  $\varphi'(f)$  deben compartir un vértice  $w \in V(G)$  (para poder describir

un hexágono); es decir,  $\{\varphi'(e), \varphi'(f)\} \subseteq E(w)$ . De otra forma definiría un cuadrado (ver ejemplo (2.4)) y en particular:

$$T_{\{\varphi'(e), \varphi'(f)\}} \cong T_{\{e, f\}}.$$

Así,  $\varphi'(E(v)) = E(w)$ .

**Caso 2.** Supongamos que  $v \in V(G)$  es un vértice de grado  $m > 2$  y sea  $E(v)$ , con  $|E(v)| = j$ , el conjunto de aristas incidentes en  $v$  que determina a la  $j$ -cara  $(K_j, (1))$ . Queremos demostrar que  $\varphi'$  determina un automorfismo de la gráfica  $G$  inducido por el automorfismo  $\varphi$  de  $\mathcal{P}_G$ . Para esto, enfoquémonos ahora en las 3-caras de  $\mathcal{P}_G$ . Sean  $e, f, g$  cualesquiera tres aristas incidentes en  $v$ , entonces debería suceder que

$$T_{\{e, f, g\}} = \langle \tau_e, \tau_f, \tau_g \rangle = S_4;$$

si suponemos que  $r, s, t$  son los vértices terminales de  $e, f, g$  distintos de  $v$ , respectivamente, entonces

$$\tau_e = (v r), \tau_f = (v s), \tau_g = (v t),$$

y éstas transposiciones generan a todas las permutaciones de  $v, r, s, t$ . En particular, la 3-cara  $(K_3, (1)) = (\{e, f, g\}, (1))$  en  $\mathcal{P}_G$  debe tener 24 vértices, como también su imagen bajo  $\varphi$ ,

$$(L_3, (1)) = (\{\varphi'(e), \varphi'(f), \varphi'(g)\}, (1)).$$

Igualmente, el orden de  $T_{\{\varphi'(e), \varphi'(f), \varphi'(g)\}} = \langle \tau_{\varphi'(e)}, \tau_{\varphi'(f)}, \tau_{\varphi'(g)} \rangle$  debe ser 24.

Por como se desarrolló en el caso anterior, cualesquiera dos de las aristas  $\varphi'(e), \varphi'(f), \varphi'(g)$  deben compartir un vértice  $w \in V(G)$ , obligando así a las tres a tener al mismo vértice en común (de otra forma obtendríamos únicamente un subgrupo  $S_3$ ). Siguiéndose de esta manera que  $\varphi'$  manda a cualesquiera tres aristas  $e, f, g$  que son incidentes en el vértice  $v \in V(G)$  en otras tres incidentes en su imagen  $w \in V(G)$ . Siendo así, si cualesquiera  $m \leq j$  aristas en  $K_j$  son incidentes en un vértice  $v \in V(G)$ , como cada tres de ellas son mandadas bajo  $\varphi'$  a tres aristas incidentes en el vértice  $w$ , entonces podemos suponer que las  $m$  aristas bajo  $\varphi'$  van a dar a  $m$  aristas incidentes en  $w$ . Concluyendo esta parte.

Ahora bien, para verificar que  $\Gamma(\mathcal{P}_G) = \Gamma(G) \cdot S_p$ , retomemos al automorfismo de  $\mathcal{P}_G$  que se definió como:  $\rho = \sigma\varphi \in S_p \cdot \Gamma(G)$ .

Como se dijo al inicio de la demostración,  $S_p$  es un subgrupo normal en  $\Gamma(\mathcal{P}_G)$ , al ser invariante bajo conjugación de cualquier  $\varphi \in \Gamma(G)$ . Es decir,  $\varphi S_p \varphi^{-1} = S_p$ ; por lo que podemos considerar que para alguna  $\gamma \in S_p$

$$\sigma = \varphi \gamma \varphi^{-1},$$

y sustituyendo a ésta en el automorfismo  $\rho \in \Gamma(\mathcal{P}_G)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \rho &= \sigma \varphi = (\varphi \alpha \varphi^{-1}) \varphi, \\ &= \varphi \alpha \in \Gamma(G) \cdot S_p. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\Gamma(\mathcal{P}_G) = S_p \cdot \Gamma(G) = \Gamma(G) \cdot S_p$  y por el corolario 1.5, tenemos que  $\Gamma(\mathcal{P}_G) \cong S_p \times \Gamma(G)$ . □

Observese que en el caso de que  $q = 1$  el teorema no es cierto. Ya que esto implica que  $G = K_2$  y  $\mathcal{P}_G$  resulta ser una 1-cara (una arista) isomorfa a  $G$ , por lo que tanto  $\Gamma(G)$  como  $\Gamma(\mathcal{P}_G)$  son de orden 2.

**Ejemplo 6.1.** Sea  $G$  la trayectoria de longitud 2, por lo que  $\mathcal{P}_G$  resulta ser un hexágono. Su grupo de automorfismos corresponde al grupo diédrico de orden 6,  $D_6 = \{\epsilon, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5, \tau_0, \tau_1, \tau_2, \eta_0, \eta_1, \eta_2\}$ .

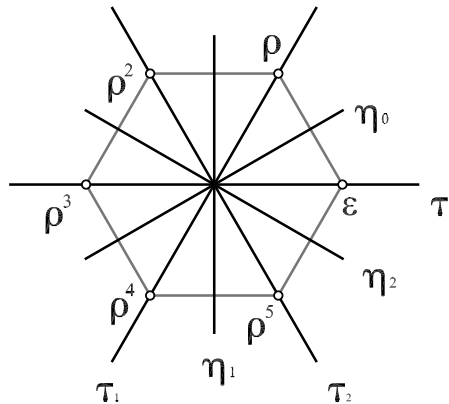


Figura 6.1: Simetrías del hexágono.

Donde  $\rho$  representa a la rotación de  $2\pi/6$ , cada  $\tau_i$  y  $\eta_j$  denotan a las reflexiones con los ejes sobre los vértices opuestos y sobre los puntos medios de los lados opuestos, respectivamente como se indican en la figura.

A su vez, el teorema anterior asegura que  $\Gamma(\mathcal{P}_G) \cong S_3 \times \Gamma(G) = S_3 \times \mathbb{Z}_2$ , por ser ambos normales, tenemos que  $\Gamma(\mathcal{P}_G) \cong S_3 \times \mathbb{Z}_2$ . Pero

$$D_6 \cong S_3 \times \mathbb{Z}_2.$$

El isomorfismo  $\varphi : D_6 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times S_3$  queda definido de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} \varepsilon \rightarrow (\varepsilon, 0) & \eta_0 \rightarrow (\varepsilon, 1) = (\rho^0, 1) \\ \tau_0 \rightarrow (\tau_0, 0) & \eta_1 \rightarrow (\rho^2, 1) \\ \tau_1 \rightarrow (\tau_1, 0) & \eta_2 \rightarrow (\rho^4, 1) \\ \tau_2 \rightarrow (\tau_2, 0) & \rho \rightarrow (\tau_1, 1) \\ \rho^2 \rightarrow (\rho^2, 0) & \rho^3 \rightarrow (\tau_2, 1) \\ \rho^4 \rightarrow (\rho^4, 0) & \rho^5 \rightarrow (\tau_0, 1) \end{array}$$

De tal manera que  $\Gamma(\mathcal{P}_{T_2}) \cong S_3 \times \mathbb{Z}_2 = D_6$ .

El siguiente teorema caracteriza a aquellos  $\mathcal{P}_G$  que son regulares. Recuerdese que como  $\mathcal{P}_G$  es finito, es regular si y sólo si  $|\Gamma(\mathcal{P}_G)| = |\mathcal{B}(\mathcal{P}_G)|$  y que en general  $|\mathcal{B}(\mathcal{P}_G)| = p!q!$  cuando  $G$  es una  $(p, q)$ -gráfica.

Recordemos que  $T_n$  y  $C_n$  denotan a la trayectoria y el ciclo de longitud  $n$  respectivamente, y que  $K_{1,n}$  denota a la gráfica estrella con  $n$  aristas con un vértice común. Nótese que  $K_{1,n} = T_n$  si  $n = 0, 1, 2$ , por lo que en particular  $K_{1,0}$  corresponde a la gráfica de un solo vértice.

**Teorema 6.2.** *Sea  $G$  una  $(p, q)$ -gráfica simple y conexa. Entonces  $\mathcal{P}_G$  es regular si y sólo si  $G = C_3$  o bien  $G = K_{1,q}$  con  $q \geq 0$ .*

*Demostración.* Observese primero que por el teorema anterior  $\Gamma(\mathcal{P}_G) \cong S_p \times \Gamma(G)$ , y por el teorema 4.3,  $|\mathcal{B}(\mathcal{P}_G)| = p!q!$ , más aún, sabemos que  $|S_p| = p!$  de

modo que basta de mostrar que  $\Gamma(G) \cong S_q$  si y solo si  $G = C_3$  o bien  $G = K_{1,q}$  con  $q \geq 0$ .

Para ver que se cumple la necesidad del teorema. Por los ejemplos 1.5 y 1.16, que  $\Gamma(C_3) = S_3$  y que  $\Gamma(K_{1,q}) = S_q$ . De manera que en ambos casos  $|\Gamma(G)| = q!$ , como se quiere.

Ahora, para la suficiencia. Dado que  $\mathcal{P}_G$  es regular, podemos suponer que  $\Gamma(G) \cong S_q$ . Así que la demostración se reduce a identificar que tipo de gráficas  $G$  de tamaño  $q$  (con  $q$  aristas) cumplen con ésta característica. Para ésto, quisieramos probar primero que si  $G \neq C_3$ , entonces  $G$  no tiene ciclos; es decir, es un árbol.

Supongamos que  $G$  tiene un ciclo  $C$  de longitud mínima  $k$ . Sean  $f_1, f_2, \dots, f_k$  las aristas de  $C$  etiquetadas en orden cíclico. Si  $f$  es una arista cualquiera de  $G$ , como  $\Gamma(G) = S_q$ , entonces existe la permutación  $\varphi \in \Gamma(G)$  tal que manda a  $f_1$  en  $f$  dejando fijas al resto de las aristas  $f_j$  de  $C$  para  $j \geq 2$ . Entonces el conjunto  $\{f, f_2, \dots, f_k\}$  define a un ciclo  $C_f$ , el cual podríamos decir que es la imagen de  $C$  bajo el automorfismo  $\varphi$  de la gráfica  $G$ . Como  $G$  es una gráfica simple (sin aristas múltiples) y tanto  $C$  como  $C_f$  comparten todas sus aristas menos  $f_1$  y  $f$  respectivamente, entonces ésto implica que  $C = C_f$  y por tanto  $f_1 = f$ . Como se eligió una arista  $f$  cualquiera de  $G$ , consecuentemente podemos afirmar que  $G$  está compuesto por todas las aristas del ciclo  $C$ . Por consiguiente,  $G$  es un ciclo de longitud  $k = q$ .

El grupo de automorfismos de cualquier ciclo de longitud  $q$  corresponde al grupo diédrico de orden  $2q$ . Pero el único de éstos que cumple con ser isomorfo a  $S_q$  es en el caso de que  $q = 3$ . Dejando a  $C_3$  como la única posibilidad, pero  $G \neq C_3$ . Por tanto  $G$  es un árbol.

Si todos los vértices de  $G$  (menos los extremos) tienen grado a lo más 2, entonces  $G$  es una trayectoria. Pero por el ejemplo 1.15 el grupo de automorfismos de toda trayectoria es de orden 2, obligando a que entonces  $q = 2$ , lo que implica que  $G = T_2 = K_{1,2}$ .

Ahora, si suponemos que  $G$  tiene un vértice  $v$  de grado al menos 3, digamos que  $e, f, g$  son 3 aristas que contienen a  $v$ . Entonces, al tomarnos cualquier otra arista  $e'$  en  $G$  sabemos que existe  $\varphi \in \Gamma(G) \cong S_q$  una permutación que mande a  $e$  en  $e'$  y deje fijas a  $f$  y  $g$ , implicando que el automorfismo deja fijo a  $v$  y que  $e'$  forzosamente debe contener al vértice  $v$ . Entonces cualquier automorfismo



de  $G$  fija a  $v$ , y  $\Gamma(G) \cong S_q$  implica que  $\Gamma(G)$  es transitivo en las aristas de  $G$ , provocando así que toda arista de  $G$  debe contener al vértice  $v \in V(G)$ . Siguiéndose que  $G = K_{1,q}$  como se quería.

□

# Bibliografía

- [1] G. Araujo-Pardo, M. del Río-Francos, M. López-Dudet, D. Oliveros, E. Schulte: The Graphicalahedron, *Preprint*, December 2008.
- [2] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White and G. Ziegler: Oriented Matroids, Second Edition, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* **46**, Cambridge University Press, 1999.
- [3] R. Blind and P. Mani: On puzzles and polytope isomorphism, *Aequationes Math.* **34**, 287-297, 1987.
- [4] Chartrand, Gary, Linda Lesniak: *Graphs & Digraphs*. Londres, Reino Unido: Chapman & Hall, 1996.
- [5] H.S.M. Coxeter: *Regular Polytopes, Third Edition*, Dover, New York, 1973.
- [6] H.S.M. Coxeter and W.O.J. Moser: *Generators and Relations for Discrete Groups, Fourth Edition*, Springer, New York, 1980.
- [7] Goodman, Frederick M.: *Algebra Abstract and Concrete Stressing Symmetry*. E.U.A.: Prentice Hall c2003.
- [8] B. Grünbau: Regularity of graphs, complexes and designs, *Problèmes combinatoires et théorie des graphes, Coll. Int. C.N.R.S* **260**, Orsey, 191-197, 1977.
- [9] G. Kalai: A simple way to tell a simple polytope from its graph, *J. Combinatorial Theory, Ser. A*, **49**, 381-383, 1988.
- [10] Hubard, Isabel: *Poliedros coloreados con ordenes cíclicos*. Tesis de licenciatura, 2001.

- 
- [11] Hubard, Isabel: *From geometry to groups and back: the study of highly symmetric polytopes*. Tesis doctoral, 2007.
- [12] López Dudet, Mariana: *El Graficaedro*. Tesis de licenciatura, 2008.
- [13] P. McMullen: Space-tiling zonotopes, *Mathematika* **22**, 202-211, 1975.
- [14] P. McMullen and E. Schulte: Hermitian forms and locally toroidal regular polytopes, *Advances in Math.* **82**, 88-125, 1990.
- [15] McMullen, Peter, Egon Schulte: *Abstract Regular Polytopes*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University, 2002.
- [16] B.R. Monson and A.I. Weiss: Eisenstein integers and related C-groups, *Geom. Dedicata* **66**, 99-117, 1997.
- [17] B.R. Monson and A.I. Weiss: Cayley Graphs and Symmetric 4-polytopes, *Preprint*, 2008.
- [18] D. Pellicer: CPR graphs and regular polytopes, *European Journal of Combinatorics* **29**, 59-71, 2008.
- [19] Rotman, Joseph J.: *An Introduction to the Theory of Groups*. Nueva York, E.U.A.: Springer, 1995.
- [20] P.H. Schoute: Analytic treatment of the polytopes regularly derived from the regular polytopes, *Verhandelingen der Koninklijke Academie van Wetenschappen te Amsterdam* **11**, No. 3, Johannes Müller, Amsterdam, 1911, 87 páginas.
- [21] E. Schulte: Regular incidence-polytopes with euclidean or toroidal faces and vertex-figures, *J. Combin. Theory, Ser. A*, **40**, 305-330, 1985.
- [22] G.C. Shephard: Combinatorial properties of the associated zonotope, *Canadian J. Math* **26**, 302-421, 1974.
- [23] N. White: *Combinatorial Geometries*, Cambridge University Press, 1987.
- [24] White, Arthur T.: *Graphs of Groups on Surfaces Interactions and Models*. Nueva York, E.U.A.: Elsevier, 2001.

- 
- [25] Ziegler, Gunter M: *Lectures on Polytopes*. Nueva York, E.U.A.: Springer, c1995.
- [26] <http://www.math.cmu.edu/~fho/jenn/polytopes/index.html>

