UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA: LA SIMULACIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL EN "LA LEY DE LA VIDA" Y EL DECAIMIENTO RADIOACTIVO.

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA: MARÍA ANGÉLICA PADILLA SOSA

ASESOR: GUSTAVO MARQUINA ROJO

NAUCALPAN EDO. MÉXICO 2009

Contenido

prefacio

Este trabajo está preparado para el tema de función exponencial de Matemáticas IV del Colegio de Ciencias y Humanidades.
El programa de Matemáticas IV es muy bonito porque es un curso de funciones, tales como: funciones polinomiales, funciones racionales, funciones con radicales, funciones trigonométricas, función exponencial y logaritmo. El curso permite integrar el álgebra, la geometría analítica y la trigonometría pero también observar fenómenos" como tiro parabólico, la forma en que viaja un sonido, la caída libre de un objeto, etc. Como el tema de función exponencial corresponde al final del curso, permite hacer una "evaluación cualitativa" de los fenómenos en el sentido de que ya se especificaron para cada tema varios ejemplos reales del comportamiento de dichos fenómenos.

Se incluye en el trabajo, un tema muy importante que debe tomar en cuenta el maestro: la motivación. ¿Qué necesita hacer el maestro?, exponer, ejemplificar, demostrar, trazar, graficar o como diría Polya: "el maestro no sólo debe exponer, el maestro debe actuar." Si, pero además tomar en cuenta que el alumno es una persona y como tal, esta persona tiene metas y tiene pleno derecho a la autonomía en cada momento. Entonces ¿Cómo influye el maestro para que el estudiante haga suyo el interés por el conocimiento o por las matemáticas?, ¿Cómo lograr que el alumno intrínsecamente este preocupado por aprender? El alumno es una persona con historia propia y necesita que se le tome más en cuenta. El joven debe comprobar que estamos enterados de que tiene intereses propios y metas, y que no actuamos automáticamente porque sólo nos interesa cumplir con nuestro horario y con unos contenidos mínimos. Pero si el estudiante no tiene claros sus intereses y metas, es necesario provocar y despertar ese interés que todo humano tiene.

Hemos entrado ya a un mundo deshumanizado y por ello mucha gente actúa de manera autómata, pero, ¿Dónde queda cada persona?, acaso es cierto lo que se dice: "no veamos al alumno como una caja que hay que llenar". En consecuencia, ¿Cuáles son las motivaciones del alumno?, ¿Cómo nos damos cuenta de esto? y ¿Qué hacemos al respecto?, algunas sugerencias principalmente del maestro Alonso Tapia están escritas en la parte de motivación en la introducción.

En la introducción también se habla sobre: ¿qué es un modelo?, ¿para qué sirve un modelo?, ¿qué tipos de modelos hay? y ¿qué es una simulación?, porque todo esto tiene que ver con el material que propongo. En el primer capítulo se explica el número "*e*" y la definición de función exponencial y en los dos siguientes las simulaciones; la primera corresponde al "crecimiento de una población" y la segunda al "decaimiento radioactivo" mediante el uso de dados.

Este trabajo toma como base las ideas expuestas por el constructivismo que afirman que el aprendizaje es el proceso por el cual, la nueva información y experiencias son colocadas en la estructura cognoscitiva del estudiante y el establecimiento de este aprendizaje es producto de una reestructuración de ese esquema cognoscitivo. En este sentido, Piaget subraya la importancia de la interacción humana y la manipulación física en la adquisición del conocimiento por lo que supone que los estudiantes deben manipular los objetos para así hacer sus propias conexiones matemáticas.

Por lo anterior, se propone que los maestros debemos proporcionar experiencias concretas para vincular conocimientos, habilidades y pruebas. La teoría constructivista declara que debe darse a los estudiantes la oportunidad de construir su propia representación de los conceptos matemáticos, reglas y relaciones, ya que los maestros no podemos transferir conceptos matemáticos y relaciones a las mentes de los estudiantes, diciéndoles lo que nosotros sabemos.

Los enfoques constructivistas dicen que nos volvamos facilitadores del aprendizaje. Los estudiantes categorizan y recategorizan el conocimiento según los requerimientos que ellos ven. Los estudiantes pueden construir reglas no enseñadas basadas en similitudes o diferencias.

En la perspectiva del constructivismo, el aprendizaje puede ser involucrado activamente. La construcción de los conocimientos no necesariamente se recibirá en forma pasiva.

Es responsabilidad del profesor arreglas las situaciones y el contexto dentro de los cuales el estudiante construya conocimientos propios.

El constructivismo también es congruente con las teoría cognoscitiva de la resolución de problemas porque involucra la exploración del pensamiento matemático.

Espero que este material contribuya como una práctica para la introducción del tema de la función exponencial en el salón de clases y que se cumpla el objetivo anotado en estas prácticas: El alumno comprobará que manipulando un objeto (un número de dados) puede obtener una función.

También, quisiera resaltar lo que dos maestras Annie Berté y Emma Castelnuovo, han logrado y/o propuesto. “Annie Berté tiene la preocupación constante de hacer vivir las matemáticas, de hacer funcionar la teoría de problemas y contribuye a la integración de la teoría con la práctica”.[1] Estas maestras han hecho trabajos importantes la primera en Francia y la segunda en Italia, sus trabajos proporcionan material y cuestionamientos que personalmente encienden una chispa de inquietud, preocupación y son una provocación para el maestro: busque, investigue y, despierte y sorprenda al alumno con dinámicas, materiales, preguntas, de modo que los jóvenes con sus propias manos “vivan y viajen con las matemáticas”.

[1] Jean Pierre Goborieau, Director de IUFM de Bretagne.

introducción

Motivación

Debido a que la motivación es un factor de primordial importancia en el proceso de aprendizaje, los maestros necesitamos saber reconocer cuando existe en el alumno interés por aprender, pero, ¿De qué depende que esté presente el interés?, y, ¿En qué situaciones o momentos, el interés no existe?

Entre los factores que determinan el interés, se encuentran los tipos de metas del alumno. Desde las expectativas que tiene de conseguir sus metas y también de lo que piensa y siente al afrontar las tareas académicas con sus correspondientes resultados.

Los maestros necesitamos conocer de qué manera el profesor con su actuación o con sus mensajes puede influir en el interés por el aprendizaje. ¿El interés por el aprendizaje se despierta al afirmar que lo que está en juego son unas metas y no otras?, o ¿enseñando a pensar de forma constructiva frente a los fracasos?

También se necesita encontrar principios que se pueden obtener a partir de analizar lo anterior para diseñar la instrucción y el proceso de enseñanza aprendizaje de modo que el interés de los alumnos por el aprender resulte lo mejor posible.

¿Los alumnos no aprenden porque la falta de motivación les impide pensar adecuadamente? o, ¿No están motivados porque su forma de pensar al enfrentarse con las tareas escolares les impide aprender?, por lo que se verá, ambas respuestas son afirmativas. Entonces no se consigue enseñar a pensar adecuadamente sin cambiar la motivación y si no se está motivado no se consigue aprender.

Por tanto ¿De qué depende la motivación y qué se puede hacer para mejorarla?

Los alumnos aprenden poco cuando están desmotivados. Ocurre que si el maestro percibe que los alumnos no están motivados entonces: elogia o castiga, (zanahorias o garrotes), pero también sucede que trata de hacer participar al alumno en clase de forma individual o por equipo y, en ocasiones utiliza materiales audiovisuales para apoyar la enseñanza, entre otras cosas. Sin embargo no necesariamente indaga que pasa en el "interior" del alumno y en su medio ambiente; es decir; ¿Cuál es su contexto?, ¿Cuál es el significado del trabajo escolar para el alumno?

¿Porqué resultan las tareas académicas motivadoras para algunos y porque no lo son para otros? ¿Cómo influyen las variables que definen el contexto de la actividad escolar del alumno? ¿Cómo los contenidos, el modo en que son presentados, las tareas a realizar, el modo en que se plantean, la forma de organizar la actividad, el tipo y la forma de interacción con los compañeros, los recursos, los mensajes que da el profesor, los resultados que obtiene el alumno, la evaluación, la forma de hacerla, la persona que la hace, etc.?, ¿Porqué algunas veces motivan y otras veces no?

Todas las variables anotadas proporcionan al alumno elementos e información que influye de uno u otro modo. Influyen en las ideas sobre las metas que se pretende que consiga, en lo que tienen de atractivo o no para él, en las posibilidades que tiene para conseguirlas, en el costo de intentar alcanzarlas, en qué otras metas puede haber.

Lo anterior repercute en la motivación, para que acepte o rechace las actividades académicas. Por tanto el alumno pondrá su interés, su esfuerzo: en las metas que son las que pueden interesarle y que son de distintos tipos dependiendo de su edad, de su ambiente sociocultural. A continuación se señalan algunas metas y después se ve de qué modo se puede actuar sobre ellas para modificar o mejorar el contexto de la actividad escolar. En la siguiente tabla Alonso (1991)[2] organiza las ideas a exponer

Metas relacionadas con la tarea. - Incrementar la propia competencia (motivación de competencia). - Actuar con autonomía y no obligado (motivación de control). - Experimentarse absorbido por la naturaleza de la tarea (motivación intrínseca).
Metas relacionadas con la autovaloración (el "yo") - Experimentar el orgullo que sigue al éxito (motivo de logro). - Evitar la experiencia de vergüenza o humillación que acompaña al fracaso (miedo al fracaso).
Metas relacionadas con la valoración social. - Experimentar la valoración de los adultos y evitar su rechazo. - Experimentar la aprobación de los iguales y evitar su rechazo.
Metas relacionadas con la consecución de recompensas externas. - Conseguir todo lo que signifique premios y recompensas (ganar dinero, etc.) - Evitar todo lo que signifique castigo o pérdida de situaciones, objetos o diversiones.

[2] Alonso, T. J; Motivación y aprendizaje en el aula: Como enseñar a pensar.

Metas que persiguen los alumnos.

Cuando el alumno esta pendiente de sí mismo: Se nota cuando el alumno tiene interés y quiere demostrar lo que sabe. Como dice Atkinson (1964), “experimentar el orgullo y la satisfacción que sigue al éxito”, recibiendo una valoración positiva, esto refleja una elevada motivación de logro.

Por otro lado se observan los alumnos especialmente sensibles a la posibilidad de fallar, que tienen miedo al fracaso; el alumno siente que no vale, se siente incompetente.

Cuando la atención se centra en la tarea: Si se observa atentamente a los alumnos en clase se pueden encontrar qué tipo de metas persiguen. Cuando empiezan una tarea se preguntan: ¿Cómo hacerla?, o, al resolver por ejemplo un problema que no coincide con la solución del pizarrón, se preguntan: ¿Por qué a mí no me resulta igual?

Cuando terminan una tarea la revisan, repasan el proceso, cómo lo han hecho; para poder aplicar lo mismo en otra ocasión. Cuando estos comportamientos son espontáneos en los alumnos aunque con ello no consigan nada, como premios o elogios se puede asegurar que su interés principal, su meta, es aprender. Por tanto su meta se centra en la tarea en incrementar sus conocimientos entonces como dicen las psicólogas Devenk y Elliot (1983), lo que se busca es incrementar la propia competencia.

En ocasiones la novedad o la naturaleza de la información o del tema sobre algún aspecto de la realidad o sobre sí mismo, atrae tanto al alumno como dice Csikszentntmihalyi (1975), “mas allá del aburrimiento y la ansiedad”. Por ejemplo cuando en la clase de artes plásticas, un alumno se abstrae del ambiente, explora el efecto de composiciones, de líneas, de colores, etc. Entonces el alumno incrementa su conocimiento y su destreza, pero no es tanto el interés por alcanzar destreza sino es la propia actividad en la que se siente a gusto y cuyo fin está en sí mismo. Esta sería la motivación intrínseca.

Conforme el alumno es mayor, cuando el maestro propone una tarea no basta con que esta tarea proporcione la oportunidad de aprender, el alumno se siente obligado. Para evitar la sensación de que el alumno se sienta obligado, el profesor puede ofrecer alguna posibilidad de opción entre distintas alternativas para que veamos que se incrementa el interés. Los alumnos necesitan sentir cierta autonomía, es lo que se conoce como motivación de control, es una meta que condiciona su mayor dedicación al trabajo. Por lo que las consecuencias si se siente con autonomía son buenas para el aprendizaje y el rendimiento.

<u>Cuando el alumno esta preocupado o al pendiente de lo que piensan y digan otros.</u> Cuando se ponen una serie de ejercicios hay algunos alumnos que consultan: maestro, ¿está bien? Esto es un pretexto para llamar la atención del profesor para tener aceptación. El alumno quiere comprobar que es aceptado socialmente y quiere evitar ser rechazado. El alumno esta atento a lo que piensan los compañeros y el maestro.

Con los compañeros lo que sucede es que hay la posibilidad de que los compañeros le etiqueten como "nerd" y que otros lo rechacen, esto puede provocar que el alumno evite hacer la tarea aunque sepa como hacerla, o, sabe que no domina totalmente el tema y si responde mal se reirán de él.

<u>Cuando lo único que cuenta es la utilidad.</u> Es frecuente que los alumnos digan: ¿Para que me sirve estudiar matemáticas?, "mucho estudiar para luego no conseguir trabajo e ir al desempleo", ¿Para qué me sirve saber, que es un conjunto vacío?, "de eso no voy a comer". Son comentarios que hablan de la preocupación por la utilidad de una tarea, una preocupación por su valor práctico, "instrumental", más que por lo que en sí mismo puede aportar. Estás metas, ganar dinero, conseguir premios, evitar castigo, etc.

Determinan el esfuerzo que el alumno pone en algunas materias para conseguir logros académicos.

Cuando existe más de una meta. Las metas anotadas no son excluyentes. El alumno al afrontar una tarea puede trabajar teniendo varias metas al mismo tiempo depende de su personalidad, de su carácter de la propia actividad académica, de cómo, de cuándo y en que contexto esté. ¿El predominio de algunas metas puede ser perjudicial para el aprendizaje?, entonces, ¿cómo actuar en clase?

Hay varias preguntas por resolver, como son:

¿Cómo influyen las metas en el interés?, ¿Qué factores determinan que los alumnos quieran unas metas y otras no?, ¿Qué hacer para motivar a nuestros alumnos para que consigan el máximo aprendizaje escolar?

En seguida se anotan las posibles respuestas en relación con los tipos de metas.

Alcanzar el éxito, evitar el fracaso o conseguir aprender.

El éxito o al fracaso es algo a lo que se tiene que enfrentar el alumno, es inevitable y cotidiano porque necesariamente se tienen que dar las evaluaciones. Es el éxito o el fracaso, se han logrado o no los objetivos de la asignatura. ¿Esto cómo se experimenta?, el impacto de estos resultados influye sobre el interés sobre la motivación y poco o mucho no es el mismo siempre.

La importancia de creer que se vale o no se vale.

Por principio los que han estudiado la motivación, afirmaron que está, partía de esa experimentación: de éxito o fracaso (Atkinson y Feather, 1966). Las diferencias individuales actúan con las expectativas de éxito, con el incentivo que supone alcanzar el éxito y evitar el fracaso en la tarea académica. Por tanto surge el interés que provoca el reto, pero también esta la dificultad en contraparte con el éxito.

En el caso de las mujeres esta explicación no es valida ya que las mujeres consideran que no es sólo el desafío, la dificultad, sino otros factores como: hay que hacer la tarea, tratar de cumplir, sola o en grupo lo que puede presentarse o no y, también algunas mujeres consideran que es muy importante relacionarse con más personas.

Por esta teoría se han confundido dos metas que son separables aunque pueden presentarse relacionadas: la primera el deseo de experimentar que se sabe o se es competente y la segunda el deseo de incrementar, la propia competencia o el deseo de aprender. Esto afecta de manera diferente el sentir éxito o fracaso y por tanto a la motivación.

Como dice Alonso: "De hecho en muchas ocasiones el deseo de conseguir el éxito y el evitar el fracaso van unidos, dos caras de una misma moneda".[3]

Y bien, ¿Cómo influyen las dos metas anteriores en el sentir éxito o fracaso? y ¿Cómo influyen en la forma de afrontar la tarea y de valorar el contexto que se tiene?

La importancia de experimentar que se aprende.

Sí se tienen los siguientes casos Dweck y Elliot, (1983)

Caso 1) Alumnos que hacen una tarea con el objetivo de aprender (motivación aprender (MA))

---

[3] Ibid., id.

Caso 2) Alumnos que les preocupa conseguir quedar bien o no hacer el ridículo (motivación ejecución (ME))

Por ejemplo el profesor de 3° de secundaria ha puesto un ejercicio de cinco problemas de matemáticas.

Caso 1) Juan (pensando).

–Vaya, parecen interesantes. A ver si los resuelvo todos.

- Veamos me piden que…Puedo escribir los datos. ¿Cómo puedo resolverlo?, podría resolverlo con… (El proceso sigue hasta que da por terminados los problemas y los presenta al profesor)

Prof: El resultado del primer problema esta mal.

Juan: ¿Por qué? ¿Qué he hecho mal? He considerado todos los datos e hice todos los pasos.

Prof: Si pero se te olvido…

Juan: ¡A sí claro! Ahí está el error. Gracias. Ya no se me olvida.

Caso 2) Pedro (pensando)

- Vaya lata. Como me salgan mal, uf, el sermón…

- Veamos, me piden que… no mejor veo los datos, no y cuanto tiempo tengo…Vaya lío. A mi esto no me sale, no se me da. El proceso sigue hasta que casi termina y presenta los resultados al profesor.

Prof. El resultado del primer problema esta mal.

Pedro: (pensando)…me lo temía. Esto no se me da. Estos problemas están muy difíciles. La otra maestra era mejor. Por lo menos que pase con seis.

Por tanto las expectativas de los sujetos (MA) se basan en el esfuerzo que están dispuestos a realizar, evalúan sus resultados con criterios personales, flexibles; y por último estos sujetos al conseguir sus metas tienen un carácter de refuerzo o recompensa.

En cambio los sujetos (ME) preocupados por el resultado se basan en la percepción de su competencia actual, con criterios rígidos. Si hay éxito, ¡A, es que soy listo! Si no hay éxito y se esforzó la conclusión es destructiva. Esto es, se tiene éxito o fracaso se es listo o no, entonces se juzga y hace su propia valoración.

Este enfoque que se acaba de describir es muy útil para modificar la motivación de los alumnos por dos razones: Pone de manifiesto la relevancia de la motivación de lo que el sujeto cree y valora. Y las creencias y valores es algo que se aprende y que por tanto, se puede enseñar y modificar.

La otra razón describe lo que los sujetos persiguen: las metas, lo que piensan y lo que hacen antes, durante y después de la tarea. Y los pensamientos y acciones es algo que también se aprende y que se puede modificar. Pero antes de mostrar como se puede actuar, se examinará la forma en que influyen otras metas.

Metas externas y metas internas.

Se pueden implementar recompensas y sanciones, pero esto implica ventajas y desventajas. Cuando se habla del rendimiento del aprendizaje y se le pregunta al alumno: ¿Por qué no estudias con más interés? responde: ¿Y qué voy a conseguir con eso?, ¿Me van a pagar más?, ¿De qué sirve estudiar si no se encuentra trabajo? Se ve el estudio como un instrumento para… Es decir, su valor radica o es relevante, en cuanto se consiguen metas que tienen que ver con valores distintos del logro o del aprendizaje. Por tanto la motivación de los que responden de esta manera es en general externa con implicaciones negativas. En el caso de alumnos pequeños también observamos que cuando tienen metas externas esperan una recompensa por la tarea. Si se usan bien las recompensas o sanciones pueden resultar efectivas, si su aplicación es intermitente si se consigue evitar que el sujeto perciba, la recompensa o la sanción como una forma de querer controlar su conducta.

El uso de recompensa-sanción es una motivación externa con la que rápidamente desaparece su efecto y a veces tienen efectos contrarios a los esperados (Beeper y Greene, 1978). Produce un detrimento en la ejecución de la tarea, aunque atractiva para el sujeto en aquellos casos en que no sólo hay que aplicar reglas ya conocidas sino en las que la tarea implica deducir nuevas reglas e implican un reto. Lo que se ha observado es que en ausencia de recompensas con solo decidirse a afrontar la tarea los sujetos tienden a resolver problemas más difíciles, se implican personalmente se concentran en el aprendizaje y desarrollo de las habilidades se orientan al modo de resolver el problema, al hecho de conseguir la solución.

¿Será posible influir para que el alumno actúe motivado internamente por la tarea?

En ocasiones también se oye decir a algún alumno aunque a veces no es del trabajo escolar: “Esto me gusta”, “me pasaría las horas haciendo esto”, “lo hago porque me gusta y punto”. O también como se señaló anteriormente hemos observado alumnos absortos en su tarea; esto es consecuencia de su conducta “intrínsecamente motivada” ya que responde a la experiencia gratificante que la realización misma de la actividad les produce. Se trata de que el sujeto se perciba competente en esta tarea y en la elección de la misma y la realiza utilizando de manera óptima sus habilidades. Las situaciones que hacen posible esta experiencia son aquellas que proporcionan al sujeto un grado de desafío óptimo, por no ser muy difícil de acuerdo a su sentir personal y en la cual, percibe su competencia. Si una situación permite al alumno aplicar lo que sabe de forma eficaz entonces tiene un sentimiento motivador.

"Por ejemplo cuando entiende claramente lo que esta leyendo y esto le descubre un aspecto de la realidad nuevo y al mismo tiempo, cercano a su experiencia, se dedica con más intensidad a la tarea, de modo que el aprendizaje se producirá de modo espontáneo, debido al interés y atención puestos en ella".[4]

Pero entonces, ¿que hacer para que el alumno actúe intrínsecamente motivado? Por lo general las materias escolares y los temas no les son atractivos a los alumnos, entonces ¿cuál es el proceso mediante el cual se desarrolla la motivación intrínseca?.

Primero: que en la realización de la tarea consiga percibir que es competente de tal manera que permita ejercitar las propias habilidades y conocimientos sin aburrimiento ni ansiedad; cumpliendo con "los mensajes que recibe especialmente orientados a estimular la motivación hacia el aprendizaje, evitando los mensajes que implican una critica y que subrayan la incompetencia del sujeto", Dwek y Elliot.

Segunda: es necesario que se dé la experiencia de autonomía ya que si el alumno hace algo porque el maestro lo quiere no actuará espontáneamente y su motivación intrínseca se verá afectada. "En las personas existe la necesidad de ejercer control tanto sobre su entorno como sobre su propia conducta", Deci y Ryan (1985). Esta experiencia es satisfecha cuando el

[4] Ibid.,id.

sujeto “controla” la dirección de su conducta. En muchos casos la imposición de programas, temas, tareas de la escuela y del maestro, el alumno llega a sentirlas como suyas a través de mensajes y elogios, de sentimientos de aprobación y desaprobación, llegando el alumno a sentirlos personalmente valiosos. Pero otros muchos estudiantes no logran realizar este proceso de interiorización de los valores que contiene la actividad escolar.

Autonomía y control de la propia conducta. El maestro representa la autoridad que vela por el cumplimiento de los objetivos de aprendizaje en la escuela, lo cual se opone a la autonomía, pero también la escuela ofrece la posibilidad de desarrollarse personalmente, por tanto el maestro representa una ayuda que puede facilitar el incremento de la propia autonomía. Entonces, ¿Qué hace que el alumno acepte trabajar en una tarea y no la sienta como obligación?, ¿Cómo se le dice que es la segunda opción y no la primera la que importa?, ¿Cuáles son las condiciones necesarias para que el alumno piense ésto?, se anotan algunas sugerencias:

Que la condición de opción y el número de alternativas en la tarea que se ofrezcan al alumno en clase sea tan numerosa como sea posible.

Que el estudiante tome conciencia de:

- Su propia situación y su realidad
- Sus propias motivaciones.
- Que debe ser sensible al derecho y necesidad de los demás a ser autónomos.
- Lo que significa aprender (satisfacción interna para el individuo).
- Lo que significa ser autónomo con conocimientos y habilidades, frente a ser dependiente de los demás.
- Cómo puede incrementar su autonomía marcándose metas realistas y trabajando en su consecución.

Es decir, de Charms considera que se pueden cambiar los problemas de motivación actuando al mismo tiempo sobre el entorno, modificando las condiciones de trabajo y las posibilidades de opción que se dan en el salón de clases y sobre el alumno, ayudándole a tomar conciencia de la realidad. Esto es que el alumno sepa lo que quiere, que vea que no se trata de obligarle sino de ayudarle a conseguir lo que él desea; que comprenda que el aprendizaje le puede ayudar a conseguir su autonomía, a autorregular su aprendizaje marcándose metas realistas y siendo responsable de él mismo. Además ayudándole a comprender que lograr metas sólo es posible en la medida en que se consiga un respeto mutuo que propicie mas comunicación, cooperación y menos obstáculos.

Sin embargo no basta con que los alumnos tomen conciencia de la situación y de los procesos. Si el entrenamiento en la forma de afrontar las tareas no consigue logros efectivos el interés del alumno por la actividad escolar disminuye, por lo tanto es preciso que se pueda comprobar su eficacia y que vaya viendo resultados aprobatorios.

Cuando no se esta motivado porque se piensa de forma inadecuada.

Al estar el alumno al pendiente de lograr metas esto influye en el esfuerzo y determinación con que realiza sus actividades.

Entonces, ¿Qué debería de pensar el alumno?

- Lo que debe interesar al alumno es aprender, entonces el tener éxito o fracaso esta en segundo nivel de importancia.

- Debe quedarle claro que la inteligencia no es estable, es modificable mediante el esfuerzo.

- Que debe tener atención y concentración al ejercicio de lo que se aprende y a la aplicación de nuevos problemas más no en las posibles recompensas externas.

- Que haga más fácil la autonomía y control con organización de la actividad escolar.

- Que considere que la relevancia de las tareas que se tienen que realizar es con los fines de conseguir empleo, independencia o de seguir preparándose a un nivel más alto.

¿Pero qué hacer para conseguir que el alumno piense y actúe con estos objetivos? ¿Qué hay que señalar y seguir para lograr esto?

Motivación y autorregulación. Dweck y Benpechat (1987) han señalado que según se persiga aprender o quedar bien, éstas metas determinan diferentes formas de pensar y actuar cuando se resuelve una tarea y especialmente ante el fracaso. Los que quieren aprender resuelven, repasan, buscan información adicional y los otros piensan que es muy difícil y abandonan. Por tanto la creencia de que la inteligencia es modificable en el primer caso y que es estable en el segundo caso implica una preferencia por un tipo de meta que a su vez implica diferentes procesos observados, entonces los factores de motivación estarían determinando el grado de aprendizaje.

Kuhl (1987) sugiere otra explicación de que ante el fracaso de una tarea nueva lo que se da inicialmente no es una disminución del esfuerzo, sino un incremento del mismo y sólo la experiencia repetida del fracaso lleva al abandono. Pero no todos los estudiantes con repetido fracaso abandonan al mismo tiempo entonces esto no coincide con la explicación de Kuhl. Pero Kuhl añade, entre la decisión de intentar conseguir una meta y la ejecución de las actividades necesarias para cumplirla, hay una serie de procesos cognitivos y metacognitivos, relacionados con el control de tales actividades que facilitan o impiden su seguimiento y terminación entonces señala la importancia de lo siguiente:

a) De la atención del sujeto, que después del fracaso puede centrarse de forma selectiva en la información relacionada con las acciones necesarias para conseguir la meta: "¿en qué me he equivocado?", "¿por qué está mal?", "¿de qué otra forma puedo hacerlo?" etc. O en la experiencia negativa que supone el fracaso: "¡ya lo sabía, está mal!", "¡no doy una! ", "¡no me sale, con nada!", etc.

b) Del conocimiento que el sujeto tiene sobre la efectividad potencial de diferentes formas de actuación aplicables para conseguir el objetivo.

c) Y sobre todo del conocimiento relativo a la forma de utilizar los conocimientos anteriores para resolver el problema (metaconocimiento). Si el sujeto no sabe que ante un fracaso, sería mejor que se preguntara: ¿Cómo puedo resolverlo?, ¿qué estrategias puedo utilizar?, ¿que acciones emprendo para evitar el fracaso?, ¿Qué información necesito?, es decir orientando su comportamiento cognitivo a las acciones que le lleven a la solución y no centrarse en el estado emotivo creado por la experiencia del fracaso.

Según esta teoría, sería un déficit cognitivo el responsable de la desmotivación del sujeto. Es decir, no tiene los prerrequisitos necesarios para afrontar la tarea. Por tanto las aportaciones de Kuhl son importantes para motivar a los alumnos. Si no hay motivación no se debe a tener de metas inadecuadas, sino a no saber aplicar los medios para conseguir las adecuadas, lo que se necesita es, orientar al alumno a la consecución de éstas, mejorar sus posibilidades de éxito mediante la enseñanza de estrategias cognitivas y de solución de problemas; mediante una revisión de los objetivos de conocimiento a adquirir. O sea lo que se ha subrayado: enseñar a pensar para mejorar la motivación y con ello el aprendizaje.

Atribuciones y motivación. ¿A qué atribuye el alumno los resultados que ha obtenido en el trabajo escolar? Según el tipo de metas que persigan los alumnos el recibimiento de los resultados éxito o fracaso puede variar. Hay autores que piensan por el contrario, que dicho impacto es distinto no por causa de las metas diversas que se persiguen, sino debido a la forma en que se ha aprendido a interpretar los resultados

Weiner (1986) ha formulado una teoría de la motivación en la que las explicaciones que el sujeto se da a sí mismo de sus éxitos y fracasos es muy importante. De acuerdo con esta teoría, la conducta se considera como un continuo de episodios dependientes unos de otros.

-El éxito y el fracaso dan lugar a respuestas positivas y negativas, respectivamente.

Pero cuando las personas obtienen resultados inesperados, negativos o de gran importancia para ellos, se tiende a preguntar por las causas y a buscar respuestas. El alumno que espera aprobar y reprueba, se pregunta donde estuvo el error para no cometerlo nuevamente. Pero con frecuencia sólo busca un responsable: "era un examen muy difícil", "esto no se me da", "¡que mala suerte! Lo mismo ocurre con el maestro que esperaba que el alumno obtuviera mejor nota. En ambos casos, las respuestas pueden ser muchas.

- Las atribuciones o explicaciones de porque el alumno obtuvo estos resultados sin embargo, no parecen influir determinantemente en la motivación, sino ciertas situaciones causales. Así las situaciones o causas pueden ser internas, situadas en el sujeto, como la habilidad, el esfuerzo, la fatiga o pueden ser externas situadas fuera del sujeto, como la suerte o el profesor. El problema radica en que pueden ser percibidas como estables o variables, como controlables o no y afectar a la conducta de manera global o específica.

- Cada una de estas situaciones tiene repercusiones diferentes sobre la conducta. Lo interno y lo externo influye en las respuestas emocionales del sujeto ante el éxito o el fracaso (orgullo, autoestima malestar o humillación). La mayor o menor estabilidad del alumno influye en las expectativas, en el sentimiento de esperanza y el control influye en las emociones (vergüenza, culpabilidad, cólera o gratitud). A su vez emociones y expectativas influyen en el mayor o menor esfuerzo que pone el alumno en lograr sus objetivos.

El alumno que presenta el patrón cuyos efectos resultan muy perjudiciales es el que se define como "indefensión": los éxitos se atribuyen a causas externas, variables y no controlables ("he tenido suerte", "el examen estaba fácil") y los fracasos a causas internas, percibidas como estables y no controlables ("esto no se me da").

Por tanto lo que se debe hacer para mejorar la motivación de los alumnos según Weiner, es enseñarles a atribuir tanto éxitos y fracasos, al esfuerzo. Causa interna, que por supuesto es variable y controlable. Pero en algunos trabajos se ha manifestado la insuficiencia de los resultados de Weiner.

En primer lugar, no son los resultados ya obtenidos sino las causas que el sujeto considera que van a influir en su esfuerzo y en los resultados que conseguirá. Es decir, no son las atribuciones sino las expectativas de control, que implican una explicación del resultado el factor relevante.

En segundo lugar los resultados contradicen a Weiner porque explica que los sujetos con alta motivación de logro atribuyen el fracaso a la falta de esfuerzo, causa normalmente percibida como variable y controlable, y no a la habilidad, causa en general percibida como estable. Pero este hecho se explica porque aquí se han separado dos variables que estaban confundidas en los trabajos de

Weiner: el deseo de tener éxito y el deseo de aprender. Los sujetos que persiguen la meta de aprender se esfuerzan y no parece que les importe el fracaso, resultado que consideran como una ocasión para aprender. Por tanto lo acertado no parece ser: decirle al alumno que su fracaso se debe a la falta de esfuerzo, ya que hay casos en que el alumno después del esfuerzo no consigue el éxito. Esto es, la actitud del maestro de subrayar la falta de esfuerzo le lleva al alumno a atribuir el resultado de fracaso a su falta de capacidad.

Entonces lo señalado implica que la diferencia entre el sujeto motivado y el que no lo esta es: que el motivado al presentarse el fracaso esta decidido a resolver el problema que tiene adelante más que hacer explicaciones o atribuciones.

Principios para la organización de la instrucción tomando en cuenta la motivación.

La actuación de los profesores debería orientarse a desarrollar formas de motivar a los alumnos con dos metas fundamentales: el incremento de la propia competencia y la experiencia de autonomía y responsabilidad personal. Ya que los señalamientos anotados demuestran que el desarrollo de estos patrones provoca una mejor adaptación escolar y personal de los alumnos. Entonces se establecen los siguientes principios aplicables a la organización de las actividades de aprendizaje.

<u>En relación con la forma de presentar y estructurar la tarea</u>.

<u>Primer principio</u>. Activar la curiosidad y el interés del alumno por el contenido del tema a tratar o de la tarea a realizar.

Como el alumno pretende aprender se trata de que se de cuenta que el tema propuesto le proporcionará lo necesario para su avance por tanto es preciso llamar la atención y curiosidad con distintas estrategias como:

Presentación de información nueva, sorprendente, incongruente con los conocimientos previos del alumno.

Plantear o despertar en el alumno problemas que se tengan por resolver.

Variar los elementos de la tarea para mantener la atención.

<u>Segundo principio</u>. Mostrar la relevancia del contenido o la tarea para el alumno. Se ha señalado la importancia que tiene hacer énfasis en que el alumno valore todo lo que suponga incrementar su competencia y sus habilidades, pero no todos los aprendizajes tienen el mismo valor: un teorema no tiene el mismo valor que un ejercicio y a veces no se puede aplicar ese conocimiento para ver su uso. Entonces en muchos momentos es más difícil mostrar la importancia de los conocimientos que adquirirán que llamar su atención. Por tanto cuáles serían algunas sugerencias:

Relacionando el contenido de la instrucción con lenguaje y ejemplos familiares para el alumno, con sus experiencias, con sus conocimientos previos y con sus valores.

Mostrar la meta para lo que puede ser importante lo que se presenta como contenido del aprendizaje, proporcionando varios ejemplos si es posible.

<u>En relación con la forma de organizar la actividad en el contexto de la clase.</u>

<u>Tercer principio</u>. En la medida en que lo permitan las características de la tarea, organizar las actividades en equipos cooperativos, haciendo depender la evaluación o un porcentaje de la evaluación de cada alumno de los resultados del equipo o del grupito formado.

Como se sabe se pueden trabajar u organizar las actividades en el salón de clase en forma individual, por equipos competitivos o por equipos cooperativos, lo ha demostrado Alonso Tapia (1991) que el equipo cooperativo es el que tiene efectos más positivos desde el punto de vista de la motivación ya que cada uno de los alumnos se siente comprometido a poner trabajo de su parte y los puntos de vista distintos proporcionan más ideas para avanzar y buscar información.

<u>Cuarto principio</u>. En la medida en que lo permita la naturaleza de la tarea y los objetivos de aprendizaje que se quieren conseguir, se pueden dar muchas opciones posibles de actuación para facilitar que el alumno se sienta con autonomía.

<u>En relación con los mensajes que el profesor da a los alumnos.</u> Cuando el maestro actúa en el salón de clase se tiene que tomar en cuenta los mensajes que esta dando a los alumnos ya que constituyen uno de los elementos más importantes de la instrucción y de la motivación.

<u>Quinto principio</u>. Antes, durante y después de la tarea, orientar la atención de los alumnos.

Antes: Orientar hacia el proceso de solución más que hacia el resultado.

Durante: Orientar hacia la búsqueda y comprobación de medios para superar las dificultades, dividiendo la tarea en pasos, de tal manera que eviten pensar que no pueden superarlos.

Después: Informar sobre lo correcto o incorrecto del resultado pero centrando la atención del alumno en: el proceso seguido, en lo que se ha aprendido y en que el alumno es una persona con capacidad por lo que siempre merece confianza.

<u>Sexto principio</u>. Promover explícitamente la adquisición de los siguientes aprendizajes:

La concepción de la inteligencia como algo modificable.

La orientación a atribuir los resultados a causas internas, modificables y controlables.

La toma de conciencia de los factores que los hacen estar motivados.

Los mensajes dirigidos en general pueden ayudar. Ejemplos:

"El único que no es inteligente es el que cree que no puede mejorar"

"No hay tontos, sino personas que no quieren aprender"

<u>En relación con el modelo que el profesor propone para afrontar las tareas y valorar los resultados</u>.

<u>Séptimo principio</u>. Ejemplificar los mismos comportamientos y valores que se tratan de trasmitir, con los mensajes que se dan en clase y que se señalan en los principios quinto y sexto.

Profesor: Yo también aprendo con ustedes.

Profesor: "Gracias, todos los humanos cometemos errores pero podemos corregirlos y aprender más" (Cuando un alumno se da cuenta que el profesor se equivoco y se lo señala.)

<u>En relación con la evaluación</u>.

<u>Octavo principio</u>. Dado que las evaluaciones son inevitables y necesarias se pueden optimizar dichas evaluaciones a lo largo del curso de forma que:

Los alumnos las consideren como una ocasión para aprender.

Se evite en la medida de lo posible la comparación de unos con otros y se subraye la comparación con uno mismo de forma que se haga el señalamiento particular del avance. Para esto pueden considerarse las siguientes propuestas:

a) Diseñar las evaluaciones de tal manera que nos permita saber no sólo si el alumno sabe o no algo, sino en caso negativo por qué.

b) En la medida de lo posible, evitar dar notas (información cuantitativa) y dar en su lugar información cualitativa que mencione lo que el alumno necesita corregir o aprender.

c) En la medida de lo posible, acompañar la comunicación de los resultados con los mensajes pertinentes para mejorar la confianza del alumno en sus posibilidades.

d) En cualquier caso, no dar públicamente la información sobre la evaluación.

Por supuesto, que la naturaleza de la tarea y los objetivos que se tengan son los que determinan el momento y el modo en que se pueden aplicar y pese a todo si el alumno no percibe resultados positivos acabará sin motivación, de ahí la importancia de garantizar que avance, pero ello no depende sólo de que tratemos de cumplir con las sugerencias anotadas sino de que también, el mismo alumno conozca y este interesado en estrategias adecuadas para enfrentarse a los problemas de aprendizaje.

Todo lo anotado anteriormente podría resultar muy provechoso pero se tendría que especificar que para el caso de México en las asignaturas de matemáticas los alumnos presentan un déficit de madures matemática. Por ejemplo un estudiante de 1° de bachillerato debiera tener por cada curso anterior 60 horas de trabajo lógico-matemático por tanto serían 540 horas en que ha madurado conceptos aritméticos, geométricos y algebraicos principalmente. Con los diagnósticos que se hacen sabemos que no es así que la gran mayoría de nuestros estudiantes tienen rezago e inmadures. ¿Cómo se trata de remediar? En algunas preparatorias con cursos propedéuticos pero tampoco se tienen los resultados deseados.

Sobre señalarle al alumno que los resultados van siempre a determinarse por el esfuerzo invertido, en el caso de nuestros estudiantes tampoco se puede aplicar del todo porque muchos están acostumbrados al paternalismo y al sistema educativo que tenemos. Han recibido a lo largo de años una evaluación que no siempre ha correspondido al esfuerzo propio. Han recibido una calificación que corresponde a una política de credencialización y certificación, y no de enseñanza-aprendizaje.

Problemas, modelos y simulación.

La vida actual se presenta muy compleja; con muchos problemas que podemos entender, tratar de resolver y en consecuencia disfrutar si tenemos a la ciencia y en particular a las matemáticas a nuestro alcance. Sabemos que muchos de los problemas cotidianos, técnicos, tecnológicos, artísticos, científicos, sociales se pueden “resolver” si se abordan de manera científica. La matemática respalda mucho en este sentido porque sigue desarrollando muchas herramientas tan importantes como el cálculo, la investigación de operaciones, la programación lineal, el análisis de redes, etc.; que contribuyen en este sentido.

Es necesario que los jóvenes tengan los conocimientos necesarios y desarrollen sus habilidades con las que entiendan y disfruten de la resolución de problemas haciendo uso de las matemáticas de tal manera que les permita hacer cambios en situaciones que ya no responden a la situación actual; que se comprometan a transformar o crear cosas nuevas.

En las matemáticas una dificultad básica es la abstracción. Para muchos de los alumnos es incomprensible que en lugar de números se utilicen letras, números, símbolos, puntos. Y aún más, símbolos que están relacionados en: fórmulas, ecuaciones, inecuaciones, funciones etc. Es decir cosas abstractas, que no tienen nada que ver con la realidad, símbolos que a la mayoría de las personas no les significa nada, pero sabemos que en la vida cotidiana o en cualquier trabajo y más aún en una licenciatura se verán obligados a entender y hacer uso de alguna rama de las matemáticas que resuelva problemas de esa profesión específica; por tanto que mejor que desde el bachillerato aprendan que no es tan difícil y si es muy importante que acepten a las matemáticas como un apoyo.

En muchas profesiones se presentan situaciones que relacionan conocimientos de diversas áreas, de diferentes ciencias y también de las humanidades en la práctica por ejemplo de un jurista: esté debe entender las causas químicas, biológicas o medicas de la muerte de una persona, así como también debe entender las causas de contaminación química que esta provocando una minera en una región del país para poder decidir si procede una investigación criminalista en el primer problema o un cierre de la minera en el segundo problema, en los problemas actuales observamos que varias ramas del conocimiento se encuentran estrechamente relacionadas, si se tuvieran equipos de profesionistas se resolverían mejor los problemas.

Ahora y siempre las personas han resuelto problemas; por tanto estamos "convencidos" de que es necesario resolver problemas, pero y ¿por dónde empezamos? Empecemos platicando sobre, ¿qué es un modelo?

A partir de un problema, ¿cómo empezar a atacar el problema?, ¿qué es un modelo?, ¿qué es un modelo matemático?, ¿cómo se construye un modelo matemático?

Desde los años setentas el maestro López de Medrano platicó el problema del "Viejo y el río" [5] , que es tan famoso en el bachillerato y que dice:

"A orillas del río Usumacinta se encuentra un viejo cuyas únicas pertenencias son un perro, una gallina y una bolsa con 4 kilos de maíz. El viejo quiere cruzar el río junto con todas sus pertenencias, pero lo único que tiene es una pequeñísima barca. En esta barca sólo cabe él, que tiene que ir remando, y alguna de sus pertenencias, así que tiene que llevarlas a la otra orilla una por una. Pero si en algún momento deja sólo al perro

[5] López de Medrano, Modelos Matemáticos.

con la gallina, el perro se la come. Y si deja sola a la gallina con la bolsa, la gallina rompería la bolsa, regando todo el maíz y se comería una buena parte. ¿Cómo puede el viejo llevar sus tres pertenencias a la otra orilla del río Usumacinta sin que les pase nada?”

Con este problema el maestro López de Medrano nos va describiendo como formular un modelo, es decir como hacer una representación y simplificación de un problema real. Primero nos dice que puede hacer dibujos: el viejo, el perro, la barca, la gallina, etc. Y representar con rayas el río, y con flechas cuando el viejo cruza el río. Después simplifica más el modelo y utiliza símbolos o letras: viejo utiliza una v, perro utiliza una p, barca utiliza una b, gallina con g, bolsa de maíz con m; el río ahora lo simboliza con una sola raya vertical y el cruce del río con una flecha etc. En seguida hace otra simplificación más sustituyendo las iniciales de cada cosa: v, p, b, g, m por las primeras letras del alfabeto a, b, c, d, f y con esto señala algo muy importante; que podemos obtener generalidad, esto es, se vale para este problema pero también para cualquier otro similar.

En la simplificación observa como ha ido desechando algunas características del problema: el “río Usumacinta” puede ser cualquier río, las orillas del río están pobladas o no, esto es despreciable porque no interviene en el problema, entonces no se toma en cuenta, también hace notar que si se lleva la bolsa de maíz o al perro no hay diferencia, se puede resolver el problema. Así también hace notar que se puede complicar un poco éste problema agregándole otro elemento; un lobo que le gusta comer perro pero no le gusta comer gallina, y entonces se debe ajustar el modelo agregando este nuevo elemento.

Por tanto, ¿cómo podría pasar sus cuatro pertenencias el viejo? El método directo sería trasladarnos hasta donde esta el río Usumacinta…esto sería indiscutible ya que sabemos que es muy tardado y costoso. Mejor se propone una simulación.

Simulación: este método consistiría en conseguir un viejo, un perro, etc., y trasladarnos a algún río cercano y resolverlo ahí con todos los elementos. Pero también se puede hacer otra simulación: consiguiendo actores que guarden las mismas características de los elementos que participan en el problema; es decir el perro no puede remar etc. Entonces simulación sería repetir la situación del problema sustituyendo cada uno de los elementos, es decir; hacer un ensayo y repetir las veces que sea necesario hasta conseguir una solución.

Se puede seguir en la búsqueda de un modelo de tal manera que sea lo más simplificado posible, cada vez más se consigue economizar tiempo y dinero. Se consigue algo muy sencillo: dibujar con papel y lápiz, el viejo, el perro, etc. Luego simplificando aún más sin invertir en dibujos mejor se sustituye por sus letras iniciales perro (p), gallina (g), etc., y después por fin se llega al modelo general, con a, b, c, d, f; que cumplan, previo acuerdo, con las condiciones.

En resumen, se han mencionado distintos modelos utilizando dibujos, letras iniciales flechas etc., estos son modelos simbólicos.

Se puede hacer otra simulación del problema del “viejo y el río” con plastilina: el perro de plastilina, la gallina, etc. Después se hace la simulación pasar el viejo de plastilina con la gallina de plastilina y etc., aunque también lleva un poco de tiempo, de esta manera se concluye nuevamente que el modelo simbólico es el más económico: lápiz, papel y la sustitución por letras. En si todos estos serían modelos, son imágenes mentales de una situación con algo por resolver.

Conforme se va simplificando la situación los elementos y las condiciones del problema el modelo que se obtiene se hace más abstracto y menos real. En este proceso al final se tiene un modelo general que se puede aplicar a muchos problemas parecidos; para esto se requiere una concentración mental mucho mayor, para entenderlo y para aplicarlo. Es aquí donde los alumnos necesitan ser guiados de manera cuidadosa, un entrenamiento, que se vayan familiarizando con la forma de atacar un problema. Con ejemplos pertinentes al tema y al grado de dificultad, el alumno verá el poder de las matemáticas, la resolución de muchos problemas desde los cotidianos hasta más complicados y otros que se relacionen con la física, la biología, la química, etc. Si se les conduce paulatinamente en la construcción de modelos los alumnos se sentirán ubicados porque logran entender y así les resulta significativo dicho aprendizaje.

Por tanto, la construcción de un modelo implica ir simplificando un problema y desechando situaciones particulares que no son determinantes para la solución. En cada uno de los modelos se sustituye cada elemento involucrado en la situación real por otro que lo representa. Cada uno de los diferentes modelos se parece menos a la situación original y cada vez más se han olvidado los detalles. Los modelos cada vez son más abstractos y menos reales. Se ha conseguido un modelo cada vez más simplificado. De esta manera los modelos necesitan una concentración y esfuerzo mental mucho mayor para construirlos, para manipularlos y también para aplicar la solución obtenida al problema original.

Volviendo al problema original. ¿Esta solución le sirve al viejo? Por supuesto que si. La solución siempre servirá porque tiene que ver con lo más esencial del problema. Sí, le sirve al viejo, pero tal vez quiera resolverlo por el mismo aunque no le resulte. ¿Pero esta solución es útil?

Sí, se esta ahora satisfecho y preparado para resolver otros problemas similares o tal vez distintos y por tanto:

"Hay placer y satisfacción que se ven enormemente aumentados si la solución obtenida representa un adelanto que beneficia a la humanidad. La relación entre belleza y utilidad es algo muy sutil que aún no comprendemos. Aún ahora, y en un plano meramente contemplativo podemos apreciar la belleza de una solución encontrada hace miles de años. Con mucha mayor razón cuando se trata de un proceso vivo en el cual nosotros participamos" [6]

En cuanto al costo ya se vio qué; conforme va aumentando el grado de abstracción del modelo el costo va disminuyendo y sólo se invertirá en tiempo, en lápiz y papel.

También se ve que la dificultad teórica va en aumento; los modelos abstractos, por estar alejados de la experiencia directa de los hombres, requieren de un entrenamiento especial de la persona que primero los debe hacer y luego los debe probar y aplicar. Esta es la dificultad con la que se encuentra generalmente el alumno de matemáticas, para él no es directo ni simple el paso de un enunciado de un problema, un modelo para resolverlo y luego la comprobación.

En problemas complejos obtener un modelo es muy difícil porque intervienen muchos factores esenciales con relaciones entre todos estos factores que a veces no son cuantitativos. Cuando ya se tiene un modelo y se trata de una cantidad de operaciones enorme se cuenta con la computadora, pero si no se cuenta con ese modelo resulta complicado plantear un modelo para un problema. En ingeniería o aeronáutica se

[6] Ibid, id.

puede recurrir a un modelo material a escala, y someterlo a pruebas de resistencia, pruebas de turbulencias, de oxidación etc. En este caso esto resulta más barato y eficiente, recurrir a un modelo material pequeño, en lugar de un modelo simbólico que en este caso sería absurdo.

En los problemas complejos como un problema biológico, ambiental, político, social o urbano se recurre a la teoría general de sistemas. Aquí se define bien el sistema que presenta el problema se señalan los recursos, el medio ambiente, las tareas, las medidas de actuación y sobre todo el objetivo del sistema, para que sirve ese sistema. ¿Qué es lo que se quiere corregir, modificar o cambiar en el sistema para solucionar el problema que se tiene? Esta forma de atacar un problema es otro modelo donde se señalan los elementos del conjunto llamado sistema y sus relaciones. De esta manera se van buscando y anotando las posibles soluciones u opciones para conseguir que el objetivo del sistema se cumpla. En estos casos la solución es un proyecto o un conjunto de recursos, tareas, etc., que resuelva la situación problema.

Por tanto hay distintos modelos; este mismo problema del “viejo y el río” el maestro Medrano lo modela con una red o una gráfica.

Hay problemas que no se sabe como se puedan resolver que se tendrán que enfrentar directamente con toda su situación real, tal vez se podrán ver por partes y simplificar de algún modo, en este tipo de problemas la solución no será exacta pero una solución aproximada ayudará en la resolución, se podrá utilizar con alguna medida de eficiencia aunque también con un error que en la práctica se puede ir minimizando. Por tanto depende del problema.

Por ejemplo en el método de Simulación en la Investigación de Operaciones una rama muy importante de las matemáticas que permite la toma de decisiones y la optimización, hay problemas que se enfrentan con programas de computadora, por ejemplo: programas que generan números aleatorios, etc. Suponga que usted vende pastelitos; ¿Cuántos pastelitos preparará para mañana? Si hoy le compraron 220, suponga que prepara para mañana 300 y vende 90, entonces se tendrá una pérdida. En esta situación, se puede utilizar el método de Montecarlo u otras herramientas de la Simulación, en el que se obtiene un “promedio”, que servirá para calcular cuántos pastelitos se deben producir y de esta manera se consigue disminuir los costos. En este nivel, en bachillerato no tendremos que utilizar estas herramientas.

Los modelos “geométricos” se utilizarán con frecuencia en diversas áreas: los mapas, los planos, las maquetas, las tablas o gráficas que aparecen en periódicos, revistas o libros.

“Los modelos geométricos tienen la ventaja de estar menos alejados de la experiencia diaria del hombre que los simbólicos estos son más manejables y más precisos”.[7]

Un modelo no tiene por que ser una copia fiel de la realidad, el modelo puede tener elementos que no representan a ningún elemento real. Si un modelo refleja adecuadamente las características de la situación real entonces sirve para obtener una solución.

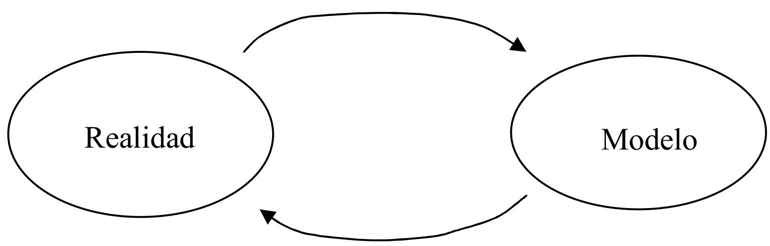
Hay ejemplos de modelos que todos hemos utilizado en las asignaturas: los modelos atómicos y la tabla periódica en química, los vectores en física, tablas de la herencia en biología, la representación del sistema solar, etc. Estos modelos aparecieron como elementos teóricos que se utilizan para comprender los enlaces químicos, las fuerzas en física, los

[7] Ibid, id

fenómenos de Mendel de la herencia y así respectivamente. Una vez el maestro López de Medrano platicaba del modelo del borrachito que puede ir para cualquier lado sobre una banqueta y que puede caer en cualquier momento, este modelo simula muy bien el comportamiento de una partícula que puede escapar de un recipiente en un cierto instante. De esta manera podemos concluir que los modelos son muy útiles y despiertan la creatividad y sobre todo son útiles en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Se ha platicado que se construye un modelo para resolver un problema real, que se trabaja con el modelo, se comprueba que describa y que corresponda con la situación planteada, que se utiliza la solución abstracta que se obtiene con el modelo para resolver el problema real; o por lo menos se consigue una aproximación para resolverlo. Este proceso se le llama prueba del modelo, verificación del modelo. Todo este proceso también se puede modelar con un esquema:

Abstracción



Aplicación

Como ya se menciono en las diferentes ciencias se utilizan diversos modelos en la física se utilizan “gráficas” para los circuitos eléctricos, en la química las cadenas de hidrocarburos, la tabla periódica, etc., en otra asignatura matemática como el Análisis de Redes con una “grafica”, se resuelven problemas de flujo: un gasoducto por ejemplo o un proyecto de construcción o económico con todas sus tareas señaladas y las actividades criticas, las tareas que no se pueden retrazar, etc. De esta manera se simplifica la realidad y se plantea una posible solución.

“Las ciencias y en particular las matemáticas tienen una serie de modelos, teorías, modelos de teorías y teorías de teorías…”[8]

“Estudiar también la simetría de un modelo, la simetría de una estructura es muy interesante. El estudio de la estructura de los modelos y de las simetrías de las estructuras es una parte sumamente importante de todas las teorías matemáticas y científicas en general”.[9]

Ahora se verán tres representaciones matemáticas que son las más importantes porque son las que más se utilizan.

[8] Ibid, id.
[9] Ibid, id.

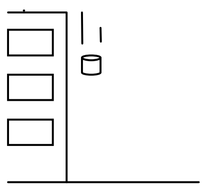
Representaciones matemáticas.

El objetivo de modelación matemática es generar una representación matemática útil de una situación real. Por tanto se tiene a disposición tres tipos principales de representaciones: Representación numérica, representación geométrica y representación simbólica o algebraica. Por ejemplo se tienen las siguientes situaciones: a) El pago a un trabajador, b) la caída libre de un objeto, c) el área de un rectángulo de perímetro fijo y su máximo de área.

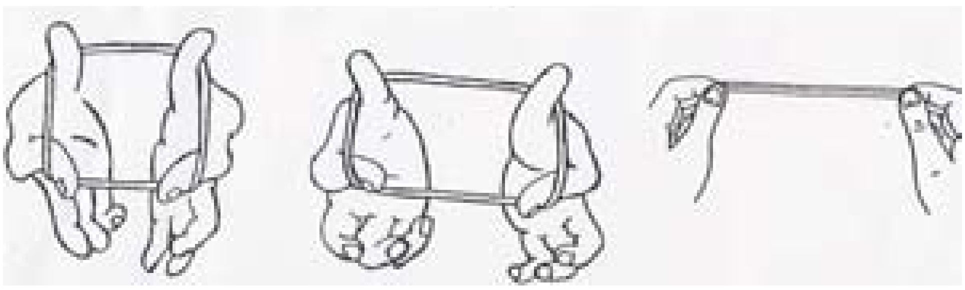
a) Trabajo – pago:

Salario por hora $7.50.

b) Caída libre:



c) Área rectángulo de perímetro fijo: 40 cm.



Análisis numérico y representación numérica: No es necesario conocer una expresión matemática de la situación para poder representar su comportamiento. Se puede generar una tabla de valores relacionando las variables del problema; de tal manera que se le dan valores a la primera cantidad y se calcula la correspondiente. De esta forma se determinan los valores numéricos para cada problema: a) Trabajo – pago

Hora	1	2	3	4
Salario	7.50	15	22.50	30

b) Caída libre

Tiempo	0	1	2	3
Distancia	0	5	20	45

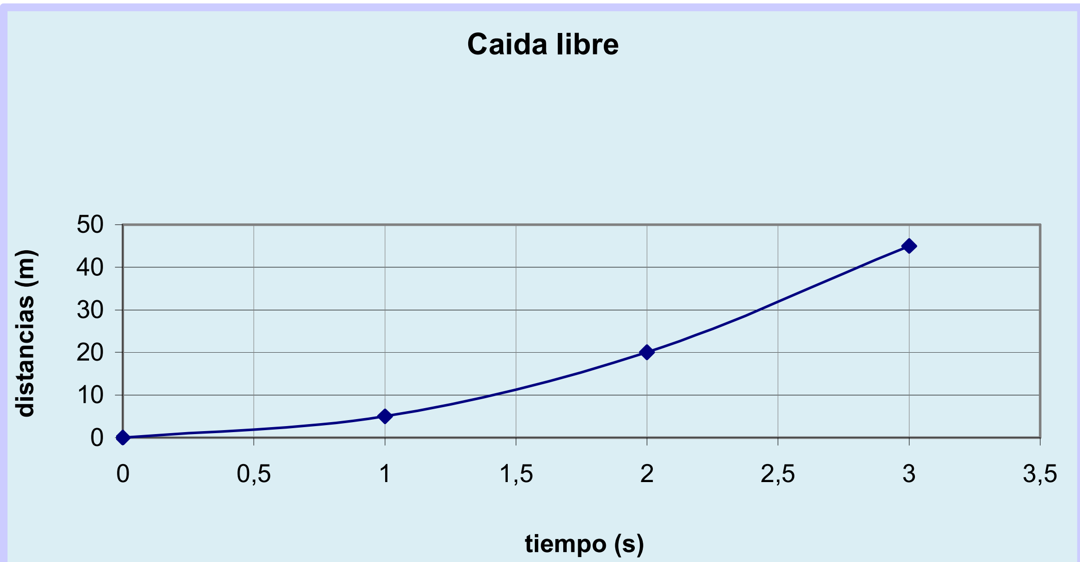
c) Rectángulo de perímetro fijo: P= 40

Dimensión	0	1	7	10	13	15	18	20
área	0	19	51	100	91	75	36	0

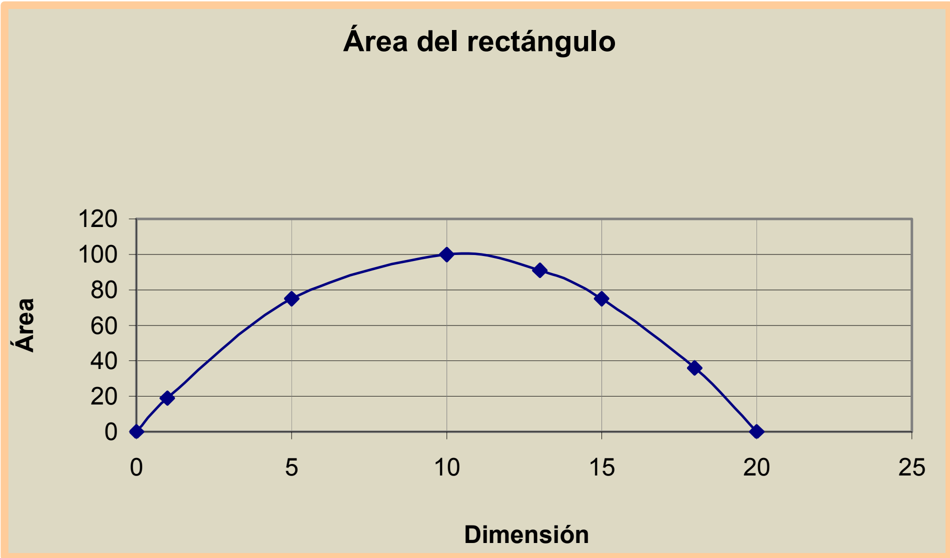
Análisis gráfico y representación gráfica: Se puede usar una gráfica para describir el comportamiento de la situación real. En los tres casos como se ilustran:

a)

b)



c)



Esta representación en matemáticas resulta por lo general como consecuencia de una representación numérica, pero hay instancias en las que esta representación se obtiene directamente. Muchos aparatos generan gráficas como salida para ser analizadas e interpretadas. Este es el caso de un osciloscopio o el trazo de un electrocardiograma.

> “Debido al uso creciente de calculadoras y computadoras, hoy en día aparecen con frecuencia este tipo de representaciones gráficas. Por lo tanto una actividad importante en el aula sería la de interpretar gráficas de situaciones reales, o la de trazar la forma de la gráfica que esperaríamos en una situación real determinada. Por ejemplo, ¿Cuál sería la gráfica de la temperatura de un recipiente a temperatura ambiente que se introduce en

un refrigerador? o ¿cuál sería la gráfica de la altura de una pelota como función del tiempo que se lanza hacia arriba?”[10]

En el primer caso se obtendría una función exponencial decreciente y para el segundo fenómeno se tendría una parábola de concavidad negativa.

Análisis algebraico y representación algebraica o simbólica: Esta es la más conocida y usada. Donde a las constantes las denotamos con las primeras letras del alfabeto y a las variables con las últimas letras del alfabeto, los símbolos de las operaciones y los símbolos para relacionar estas cantidades como: =, <, >, etc. Por tanto consta de un conjunto de ecuaciones, desigualdades, funciones que relacionan las variables del fenómeno. En los ejemplos se tienen:

a) Si $k =$ cantidad de horas y $p =$ Pago entonces:

$$p = 7.50k$$

b) Si $t =$ tiempo en segundos y $d =$ distancia en metros entonces:

$$d = 5t^2$$

c) Si una de las dimensiones del rectángulo es x, (dimensión $= x$) y la otra dimensión es $(20 - x)$ entonces el área es la multiplicación de las dos dimensiones del rectángulo, por tanto se tiene:

$$A(x) = x(20 - x)$$

[10] Mochón, Simón; Modelos matemáticos para todos los niveles.

$$A(x) = 20x - x^2$$

"Por lo general en matemáticas se ha dado preferencia a la representación simbólica, es decir, a fórmulas y a ecuaciones, dejando a un lado las otras dos representaciones. Sin embargo las nuevas tecnologías han mostrado que las matemáticas deben de abordarse con un punto de vista más amplio, dando importancia tanto a representaciones numéricas como gráficas."[11]

A las representaciones anteriores: representación numérica, gráfica y algebraica también se les conoce como: registros. Algunos maestros promueven más el registro algebraico, pero, utilizar los tres registros consigue que el alumno adquiera un conocimiento integral. La mayoría de los alumnos se clasifican como visuales; es decir, por la visión adquieren el conocimiento más que por el oído con una explicación por amplia que se le exponga no consiguen comprender. Para la mayoría "un dibujo vale más que mil palabras". Si ven representado en una gráfica el fenómeno en estudio esta visualización les permite entender dicho fenómeno, por tanto al alumno visual se le facilita la representación gráfica.

En seguida se anotan modelos que tienen que ver con los fenómenos que nos ocupan: función exponencial creciente y decreciente.

[11] Ibid, id.

Modelos Exponenciales. Análisis numérico y Análisis gráfico.

Aquí se verá como los fenómenos de crecimiento de poblaciones, el decaimiento radioactivo o transacciones económicas tienen un comportamiento exponencial. Por tanto se exponen algunos fenómenos que se comportan de esta forma:

Depreciación del valor de una posesión

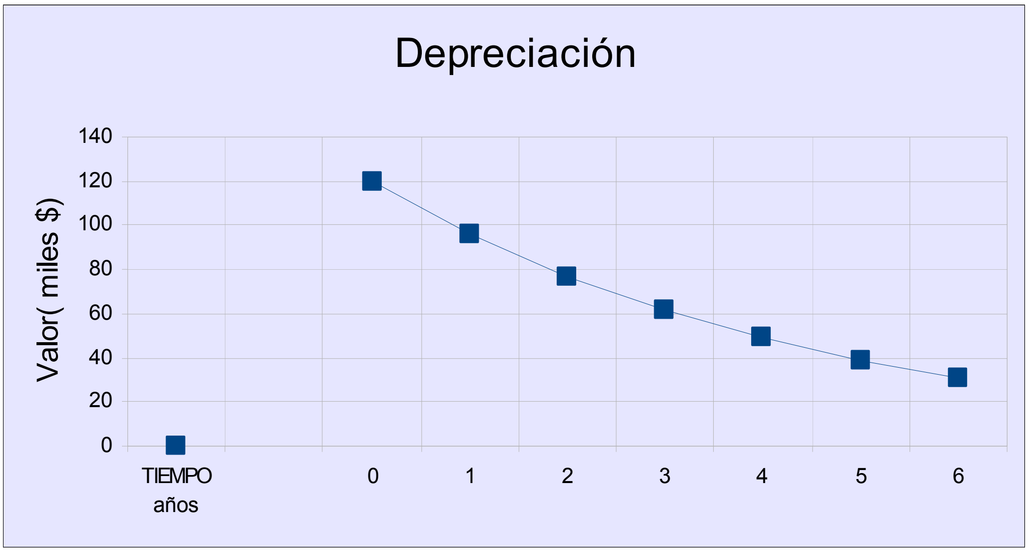
Supóngase que el valor de un lote de computadoras para un café Internet es de $120,000 y que este pierde el 20% de su valor presente cada año. Lo que se quiere es predecir su valor después de 6 años.

En el primer año el lote de computadoras perderá $24,000 (20% de $120,000), así que su valor al finalizar el primer año será de $96,000. En el segundo año, perderá 20% de $96,000, es decir, $19,200, con lo cual su valor será de $76,800.

De esta forma se puede hacer una tabla de los valores del lote para cada año. Se observa que el valor en un año es el 80% del valor en el año anterior (este 80% puede calcularse multiplicando por 0.8 la cantidad anterior).

Tiempo	0	1	2	3	4	5	6
Valor	120	96	76.8	61.4	49	39	31

Ahora se muestra la gráfica de los datos que permite observar los resultados de una manera global y se extienden los datos hasta el décimo año, también se puede ver como al cabo de 3 años; el valor del lote de computadoras se reduce a la mitad. La misma gráfica ayuda a predecir: ¿Cuál será el valor del lote al cabo de 10 años?



Decaimiento radioactivo

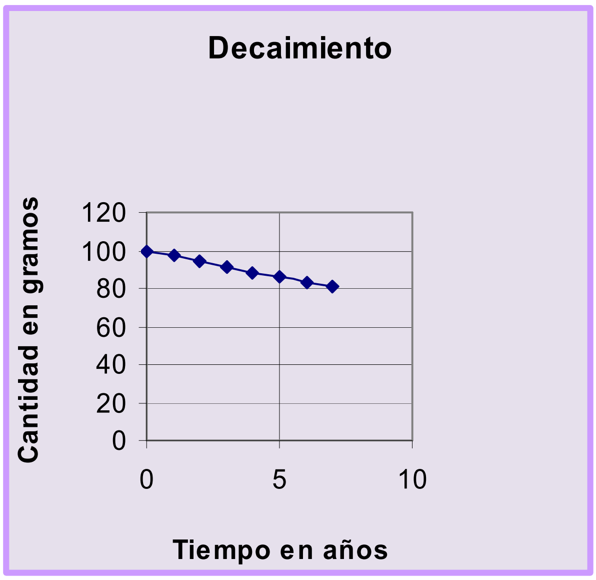
En un reactor se tienen 100 gramos de un elemento radioactivo que decae el 3% anualmente. ¿Cuántos años deberán pasar para que los cien gramos de este elemento se reduzcan un 20%, o sea a 80 gramos? y ¿Un 50%, o sea a 50 gramos?

En el primer año, perderá el elemento 3 gramos, por lo que quedarán 97 gramos. Para hacer los cálculos de manera más eficiente, se observa que en cada año queda el 97% de la cantidad anterior del elemento, por tanto si se multiplica por 0.97 la cantidad inicial y luego 0.97 por la cantidad que queda y así sucesivamente cada cantidad para obtener la siguiente.

Entonces se tiene la tabla donde se observa cuantos años pasan para perder el 20% y el 50% o la mitad. La misma gráfica podrá predecir: ¿Cuál será el resultado al cabo de 13 años?, ¿En que tiempo el elemento desaparecerá por completo?

Tiempo(años)	Cantidad(g)
0	100
1	97
2	94.09
3	91.26
4	88.56
5	85.87
6	83.29
7	80.79

Haciendo la grafica de la tabla numérica anterior se tiene:



Crecimiento de la población mexicana.

Por la red de Internet se pueden obtener las siguientes cifras que serían las más recientes: en el año 2005 la población mexicana fue de 103.2 millones de mexicanos.

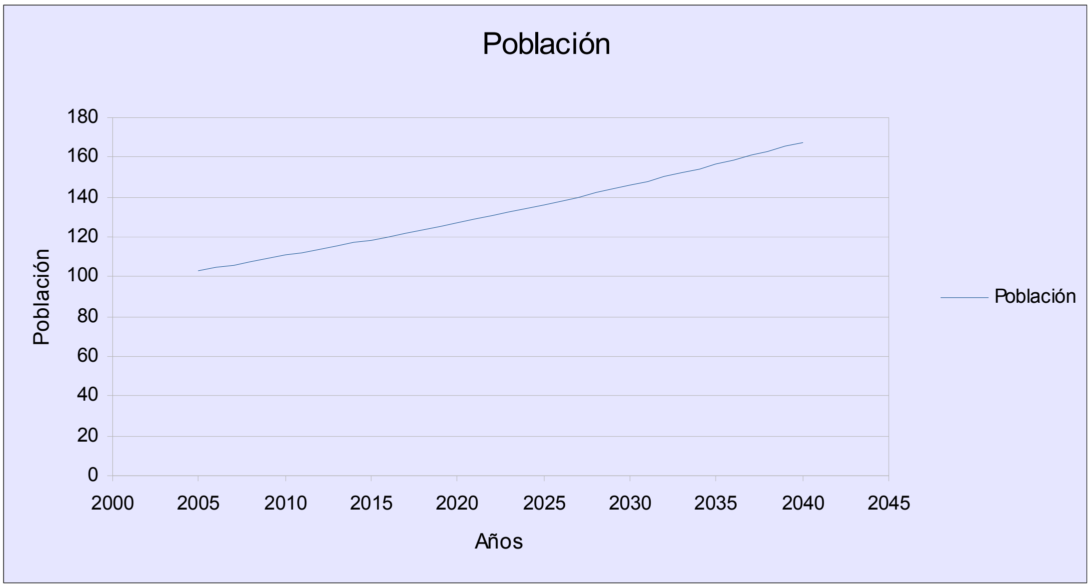
En los años alrededor de 1990 el incremento neto anual era de 1.8%. En los años recientes se afirma que se ha mejorado porque descendió este incremento en 1.6%, 1.5%, tal vez hasta 1.4%.

Se puede probar con una hoja de calculo con estos incrementos que se proporcionan 1.6, 1.5, 1.4 para observar cuáles se acercan más a la realidad. En la hoja electrónica de cálculo las constantes se pueden modificar y automáticamente también se modifican los resultados para todos los años calculados.

Siendo optimistas podemos “aceptar” que estamos creciendo anualmente al 1.4%. Por tanto por el momento usando la calculadora y partiendo de que en 2005 éramos 103.2 millones de mexicanos, esta cantidad la multiplicamos por 1.014 y obtenemos la cantidad correspondiente a 2006 que es 104.6, esta cantidad se multiplica nuevamente por 1.014 y se obtiene para el año 2007 la población que resulta ser de 106.1 y así sucesivamente se obtienen los siguientes resultados:

Año	Población
2005	103.2
2006	104.6
2007	106.1
2008	107.5
2009	109.1
2010	110.6
2011	112.1
2012	113.7
2013	115.3
2014	116.9
2015	118.5

Entonces en diez años aumentamos alrededor de 15.5 millones y por consiguiente, ¿En treinta años aumentaremos alrededor de unos 50 millones? ¿Como se visualizan los datos anteriores en la siguiente gráfica?


Población
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
2000
2005
2010
2015
2020
2025
2030
2035
2040
2045
Años
Población
Población

función exponencial

Exponentes y número “e”.

¿Se puede calcular cualquier potencia? Leonhard Euler fue el primer matemático en concebir cualquier número real como un exponente. Las leyes de los exponentes racionales son válidas si los exponentes son cualesquier número real.

Teorema: si a y b son cualesquiera números positivos, y x, y son cualesquiera números reales, entonces:
$a^x a^y = a^{x+y}$
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
$(a^x)^y = a^{xy}$
$(ab)^x = a^x b^x$
$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

¿Para qué sirve poder calcular cualquier potencia con exponente real? Hay muchas aplicaciones veamos una aplicación muy usual. Los exponentes se pueden usar en el cálculo del interés que se obtiene en una inversión. Esta aplicación nos conduce a la definición del número e que figura en muchas más aplicaciones o fenómenos de varios campos del conocimiento, como son: la biología, la física, la economía, etc.

Por ejemplo: Si se solicita un préstamo de dinero a una tasa de interés de 0.15 (es decir a 15%) anual entonces lo que debe el solicitante al final de un año es $\$1.15$ por cada $\$1$ prestado. En general, si la tasa de interés es r (esto, es $100r\%$) anual, entonces por cada peso prestado el pago que debe hacerse al finalizar un año es de $\$(1+r)$. Si se le prestan $\$P$ entonces la cantidad que se debe al cabo de un año es $\$P(1+r)$.

¿De cuántas maneras se puede invertir o pedir crédito? Hay dos tipos de interés. Se considera en principio el interés simple. Esté es el interés que se percibe sólo por la cantidad original prestada. En este caso no se paga ninguna cantidad por el interés acumulado. Por ejemplo, suponga que la tasa de interés simple sobre $\$3000$ es de 10% anual. Por tanto, el prestamista recibirá $\$300$ al final de cada año.

Ahora, suponiendo que se invierten $\$P$ a una tasa de interés simple $100r\%$, entonces el interés al cabo de un año es de $\$Pr$. Si no se efectúan retiros durante n años, entonces el interés total es $\$Pnr$, y si $\$A$ es el monto total del depósito al finalizar n años, se tiene entonces:

$$A = P + Pnr \quad \text{y factorizando } P \text{ se tiene}$$
$$= P(1+nr)$$

¿Cuándo se utiliza el interés simple? Este interés se utiliza casi siempre en inversiones o prestamos de corto plazo, en periodos de $30, 60, 90$ días. Para simplificar los cálculos se considera que un año tiene 360 días, y cada mes 30 días. Por tanto 30 días sería la doceava parte de un año.

Se puede resolver el siguiente ejemplo para ver la aplicación del interés simple:
El señor Delgadillo pide un préstamo de $\$5000$ por un periodo de 90 días a una tasa de interés simple de 16% anual. ¿Cuál será la cantidad a pagar por el Sr. Delgadillo al final de los 90 días?

Solución: Se tienen los siguientes datos: $P = 5000$, $r = 0.16$ y $n = \frac{90}{360}$, es decir, $n = \frac{1}{4}$. Por tanto, si la cantidad a pagar es $\$A$ entonces:

$$\begin{aligned} A &= P(1+nr) \\ &= 5000\left(1+\frac{1}{4}(0.16)\right) \\ &= 5200 \end{aligned}$$

Conclusión la cantidad a pagar es: $\$5200$.

Lo más frecuente es que en los bancos y en las hipotecarias las tasas de interés se fijan como tasas anuales, pero casi siempre el interés se calcula varias veces en un año. Cuándo el interés para cada periodo se suma al capital y, a su vez, esta suma genera interés a este último se le llama interés compuesto. A este tipo de interés se le dice sólo, interés, (quitándole la palabra compuesto). Si el interés se calcula m veces al año, entonces la tasa anual debe dividirse entre m para determinar el interés para cada periodo. Por ejemplo si se depositan $\$200$ en una cuenta de ahorro que paga 9%

compuesto cada tres meses, entonces el monto de la cuenta al final del primer trimestre será:

$$200\left(1+\frac{0.09}{4}\right)$$
$$=200\left(1+0.0225\right)$$
$$=200(1.0225)$$

para el segundo periodo trimestral se considera el capital como $200(1.0225)$, entonces el monto de la cuenta al cabo del segundo periodo será:

$$(200(1.0225))(1.0225)$$
$$=200(1.0225)^2$$

Al finalizar el tercer periodo el monto de la cuenta será de:

$$(200(1.0225)^2)(1.0225)$$
$$=200(1.0225)^3$$

y así sucesivamente.

Al final del periodo trimestral n-ésimo el monto de la cuenta será:

$$200(1.0225)^n$$

Teorema. Si $\$P$ se invierten a una tasa de interés anual de $100r\%$ compuesto m veces al año, y si A_n es el monto de la inversión al final de n periodos de interés, entonces

$$A_n = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^n$$

Por tanto; si t es el número de años a que se invierten $\$P$ a una tasa de interés de $100r\%$ compuesto m veces al año, entonces al número de periodos de interés n es mt. Si $\$A$ es el monto total a los t años, entonces la fórmula del teorema se puede escribir de la forma:

$$A = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} \qquad (1)$$

Se verá el siguiente ejemplo de interés compuesto o interés.

Supóngase que se depositan $\$800$ en una cuenta de ahorro que paga un interés de 6% anual compuesto semestralmente (dos veces al año). Si no se efectúan retiros ni depósitos, determine el monto al cabo de cinco años.

Solución: El interés se calcula dos veces al año; entonces $m=2$. Como el tiempo es de 5 años, $t=5$. Además, $P=800$ y $r=0.06$. Por tanto, si $\$A$ es el monto del depósito al final de los cinco años, se tiene:

$$A = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = 800\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{2(5)} = 800(1.03)^{10} = 1075.1331$$

Conclusión: El monto del depósito al cabo de los cinco años es de $\$1075.1331$

La fórmula (1) es el resultado del monto después de t años si $\$P$ se invierten a una tasa de interés de $100r\%$ compuesto m veces por año. Cuando se supone que el interés se compone continuamente, es decir, que en la fórmula (1) el número de periodos de interés por año crece sin límite. Entonces el comportamiento de A cuando $m \to \infty$. Como $mt = \frac{m}{r}(rt)$, la fórmula (1) puede escribirse como:

$$A = P\left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{rt}$$

En esta ecuación si se substituye $\frac{m}{r}$ por x, entonces se tiene

$$A = P\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{rt}$$

Como "$m \to +\infty$" es equivalente a "$x \to +\infty$", se observa que

$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$ tiende a infinito cuando $x \to +\infty$

y utilizando la calculadora se obtienen algunos de estos valores como se muestra en la siguiente tabla:

x	10	100	1000	10000	100000
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.5937	2.7048	2.7169	2.7181	2.7183

Estos resultados conducen a que $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ probablemente se aproxime a un número finito cuando x crece sin límite. En efecto, así ocurre el número es e. Esta letra fue elegida por Leonhard Euler. El número e, por tanto, es un número irracional.

Función Exponencial

Se define la función exponencial $y = a^x$ si $a > 0$ y x es un número racional; entonces se puede tener $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 2^{-x}$, etc. ¿Cómo resulta alguna de estas funciones?

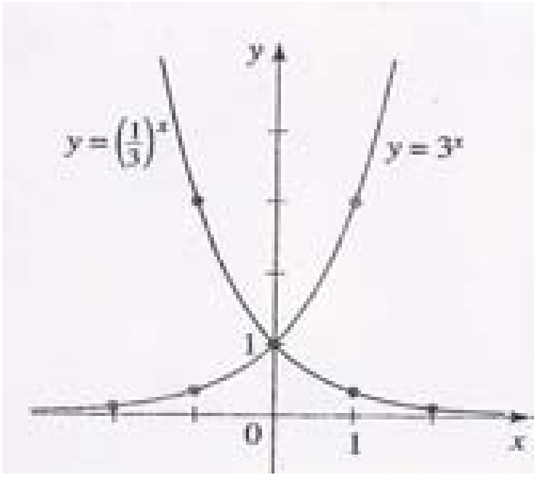
Se puede hacer la gráfica calculando puntos y trazándolos en el plano cartesiano. Calculando los puntos de las siguientes funciones:

$$f(x) = 3^x \qquad\qquad g(x) = 3^{-x}$$

Se obtienen los siguientes valores de $f(x)$ y $g(x)$:

x	$f(x) = 3^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	$\frac{1}{27}$	27
-2	$\frac{1}{9}$	9
-1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$

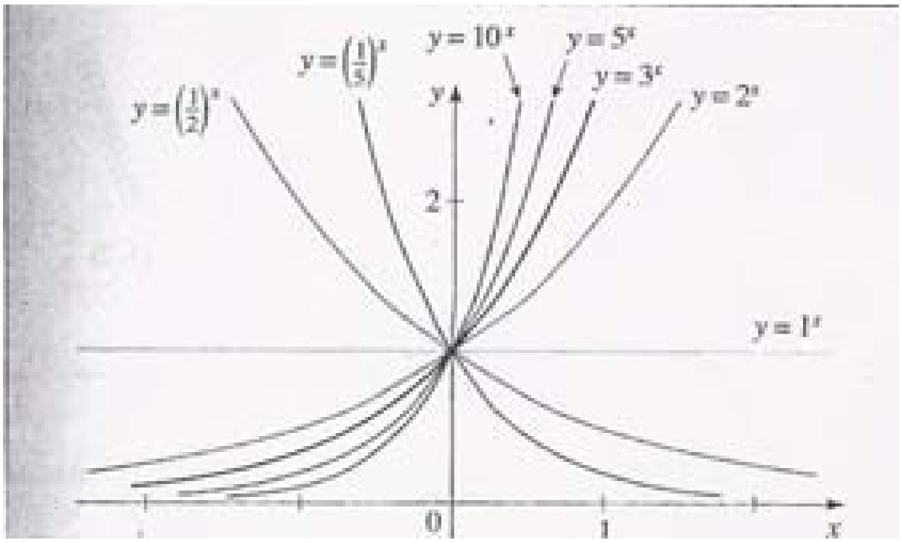
Haciendo las gráficas correspondientes se observan así:



Observe que: $g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x = \dfrac{1}{3^x} = 3^{-x} = f(-x)$

Por tanto se puede obtener la gráfica de $g(x)$ a partir de la de $f(x)$ reflejándola sobre el eje y.

De la misma forma se pueden calcular otras funciones exponenciales $y = a^x$ y la gráfica correspondiente pasará por $(0,1)$ porque $a^0 = 1$ para $x = 0$. Entonces se tienen tres tipos de función exponencial $y = a^x$ si $0 < a < 1$ la función decrece; si $a = 1$, $f(x)$ es constante y si $a > 1$ la función es creciente como se muestra en la siguiente figura.



$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
$y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$
$y = 10^x$
$y = 5^x$
$y = 3^x$
$y = 2^x$
$y = 1^x$
y
x
2
0
1

simulación 1

¿Cómo crecemos?

En estos momentos la situación es muy difícil, se tiene un calentamiento global por la contaminación, se tiene una crisis económica mundial del capitalismo y también una crisis de alimentos porque muchos países padecen de hambre. ¿Qué se puede hacer? En principio se necesita conocer las condiciones, para planificar la economía, para decidir las políticas a seguir, para predecir el futuro y tratar de remediar la situación grave que se tiene. Una pregunta fundamental: ¿cuántos seremos dentro de veinte años?, ¿cuántos dentro de treinta años?, ¿cómo se mejoraría la producción de los alimentos y los recursos para la población que crece día con día? Ya en estos momentos no alcanzan los alimentos entonces, ¿qué se hará al respecto? Se podrían calcular y medir por principio algunas de las situaciones que se tienen para empezar a estudiar el problema. Con los avances de las ciencias las personas tienen una esperanza de vida mayor, ¿el crecimiento de los capitales alcanzará para pensionar a los adultos jubilados? Será que crecemos como decía Maltus, "Los alimentos no alcanzan porque la producción de alimentos crece aritméticamente y la población crece geométricamente". En la producción de alimentos tal vez haya un poco de razón pero en la población ahora se sabe que no crece geométricamente sino exponencialmente.

¿Cómo se comportan algunos fenómenos? Cuando se pregunta, ¿cómo ha crecido el salario mínimo en el Distrito Federal? Actualmente, en el año 2009, el salario mínimo diario es de $54.00 lo que se sabe es que año con año este salario ha ido aumentando en un promedio de 4%. Por tanto todo el año pasado el salario mínimo diario era de $51.84 y el año antepasado el salario mínimo diario era de $49.77, que es una verdadera vergüenza porque con este ingreso diario una sola persona no tiene lo suficiente para vivir en ninguna parte de la república. Ahora haciendo la gráfica de los últimos tres años se tiene una función como se muestra en seguida:

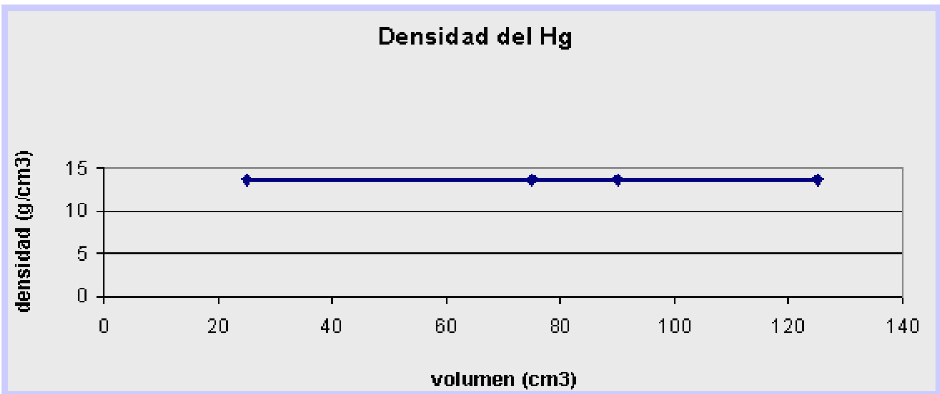
Año	2007	2008	2009
Salario mínimo	49.77	51.84	54.00

Haciendo una grafica de la anterior tabla resultaría la siguiente:

Ahora se va a observar como crece la densidad del mercurio conforme se hace crecer su masa. Supóngase que se tienen las siguientes cantidades: 340 g de mercurio que ocupan un volumen de 25 cm^3, 1020 g de mercurio que ocupan un volumen de 75 cm^3, 1224 g de mercurio que ocupan un volumen de 90 cm^3, y para 1700 g de mercurio se tiene que caben en 125 cm^3. Haciendo el cálculo de la densidad se divide masa sobre volumen, es decir se divide 340 entre 25 y se obtiene 13.6, se divide 1020 entre 75 y se obtiene 13.6, por tanto se obtienen para los cuatro casos los siguientes resultados, etc., que se muestran en la siguiente tabla:

V	25	75	90	125
d	13.6	13.6	13.6	13.6

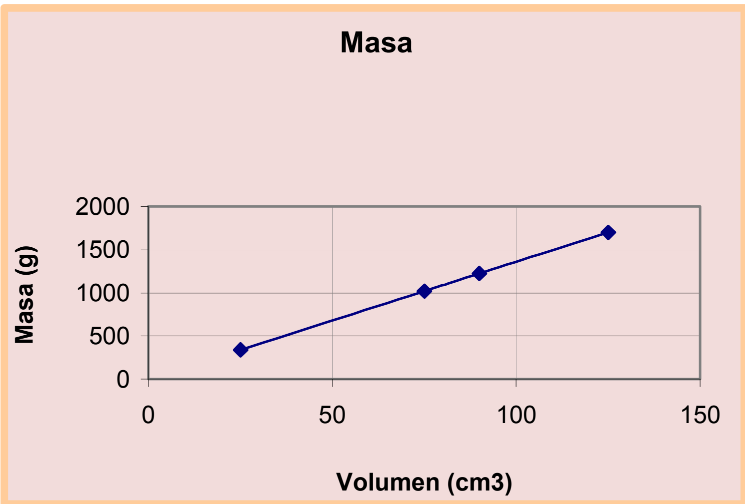
Se puede seguir asignando valores a la variable independiente volumen y la variable dependiente densidad resulta 13.6. Haciendo una gráfica del experimento anterior lo que comprobamos es que la densidad no aumenta ni disminuye sino que permanece constante como se observa en seguida:



Si se cambia el experimento y en lugar de hacer volumen contra densidad se hace volumen contra masa. Es decir, como va creciendo la masa conforme se va aumentando el volumen, entonces se tiene m= dv donde ya sabemos que la densidad es un número constante, en este caso 13.6. Haciendo la función correspondiente la registramos en la siguiente tabulación:

v	25	75	90	125
m	340	1020	1224	1700

Representando esta tabulación en una gráfica se comprueba que si se duplica el volumen se duplica la masa, si se tríplica el volumen se tríplica la masa ya que el volumen y la masa son directamente proporcionales. Obsérvese la siguiente gráfica:

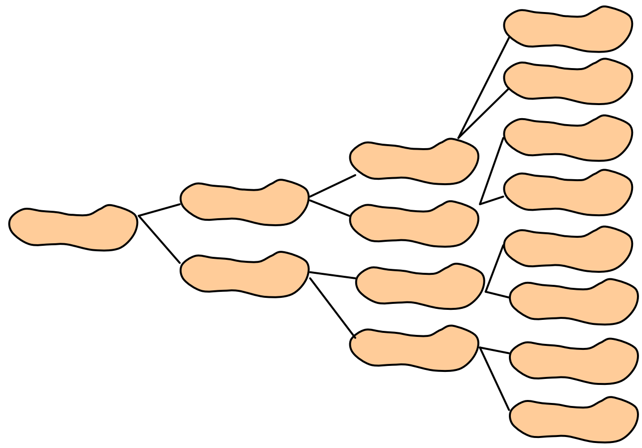


Observando los experimentos anteriores se puede decir que una población no va aumentando cada lustro o cada década un porcentaje y así se mantiene hasta el siguiente periodo por lo que no se comportaría como la primera gráfica, crecimiento del salario mínimo, como una función escalonada. Tampoco una población crece como la segunda grafica, densidad del mercurio, como una función constante; ni como la tercera gráfica, crecimiento de la masa cuando crece el volumen, como una función lineal; puesto que en la segunda la población se quedaría constante y en la tercera la población crecería directamente proporcional al volumen. Entonces como proceder, en seguida se presenta el caso sencillo de crecimiento de bacterias:

¿Cómo crece una población de bacterias?

Algunas bacterias son perjudiciales para la salud en cuanto se siente el malestar entonces se debe procurar combatir dichas bacterias. Es el caso por ejemplo del cólera, tifoidea, etc. Se sabe que nuestro organismo puede responder y defenderse por los glóbulos blancos o por los anticuerpos que se han producido después de una vacuna pero; es suficiente. Hay enfermedades muy graves si no se suministra rápidamente un antibiótico el mal puede ser fatal.

Se conoce que las bacterias son unicelulares cuando se observa un milímetro se calcula que hay unas mil bacterias en esa minúscula área. La bacteria se reproduce de la siguiente manera: se va alargando, se estrecha en la parte media y se divide en dos bacterias exactamente como la bacteria original. Por tanto de una bacteria resultan dos, después de cada una de ellas resultan dos y así sucesivamente como se muestra en el dibujo:

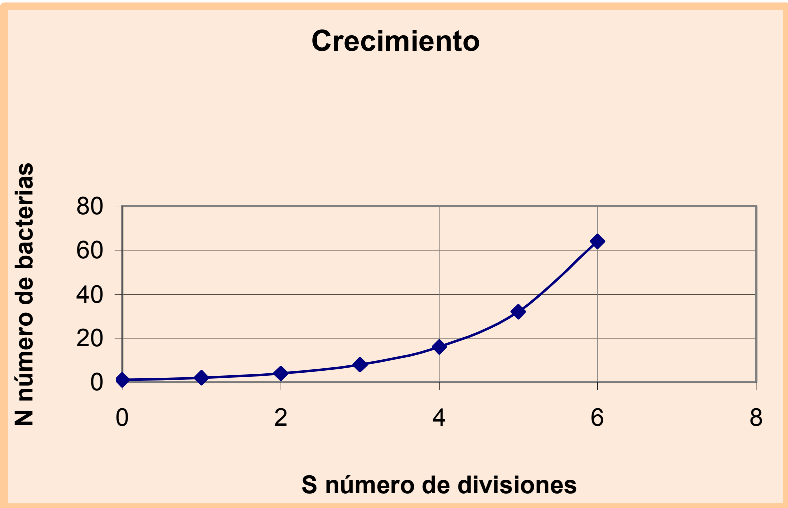


La velocidad de reproducción de las bacterias es muy rápida, puede ser cada treinta minutos a diferencia de los seres pluricelulares. En pocas horas se tiene una población de bacterias muy grande en el organismo invadido. Pero qué tan grande; si se cuentan las divisiones y el número de bacterias se tiene:

#divisiones(s)	0	1	2	3	…	s
#bacterias(N)	1	2	$4=2^2$	$8=2^3$	…	2^S

Donde cada periodo de reproducción estaría señalado por los números enteros hasta llegar a uno muy grande (s) si no se detiene el crecimiento de la población, es decir si no se combate.

La ley por tanto resulta: El número N de bacterias se obtiene elevando el 2 al número s de divisiones que se han efectuado que se puede escribir de forma algebraica como; $N = 2^S$. Esta ley o fórmula es una función y recibe el nombre de exponencial porque el valor N depende del exponente de la base 2. Haciendo una gráfica de la función que se obtiene resulta:



La gráfica consiste en un conjunto de puntos, porque para el tiempo ½ no ha ocurrido la división o para 5/4 de tiempo todavía no se ha dado la segunda división celular por tanto el número de divisiones siempre debe estar expresado por un número entero.

Al crecer el número de bacterias naturalmente que el enfermo se encuentra grave. Pero en tanto hagan efecto los medicamentos la infección se detiene y si no se termina el tratamiento nuevamente las bacterias empiezan a reproducirse.

Simulación 1

"Ley de la vida"[12]

Función Exponencial Creciente.

"En las primeras manifestaciones del pensamiento crítico ya asomaban concepciones de índole infinitesimal: son las reflexiones provocadas por el cambio y el movimiento, es el permanente fluir de las cosas denunciado por la observación del mundo natural, que encerrarán gérmenes de nociones matemáticas, que pronto se presentarán a rostro descubierto como problemas del pensamiento matemático abstracto"[13]

¿Para qué?

Objetivos que se quieren conseguir con la simulación:

El alumno:

2. Conocerá la función exponencial y su comportamiento.
3. Construirá la función exponencial creciente que representa el crecimiento de una población.
4. Comprobará que manipulando un objeto (100 dados) puede obtener una función, una ecuación dinámica.
5. Identificará que la "población", n (t_i) va cambiando, cuando cambia el tiempo: t_i.
6. Identificará que la "población" crece: Si $t_i < t_{i+1}$ entonces $n(t_i) < n(t_{i+1})$.
7. Reconocerá que se trata de una función exponencial al compararla con las clases previas, o con investigación previa.
8. Describirá las características de la curva: función creciente, dominio, contradominio, ¿tiene asíntotas?, intersecciones con los ejes, etc.

---

[12] Emma Castelnuovo llama de esta forma a la función exponencial creciente en "De viaje con la matemática"
[13] Babini, José;El calculo Infinitesimal...

¿Qué?

Simulación del fenómeno de crecimiento de una población con 100 dados.

Introducción:

El crecimiento de una población.

Las poblaciones naturales, ¿cómo se multiplican en relación al tiempo? Una población pequeña aumentará al principio muy lentamente, sin embargo, una vez que se "aclimata", su densidad aumentará con mayor rapidez siempre y cuando existan fuentes de alimento adecuadas, relativamente pocos depredadores y condiciones de vida favorables.

En general el nivel de población de una especie en cualquier ecosistema esta regulado por los elementos esenciales para la vida que se hayan en condiciones mínimas.

"Una especie tiene que multiplicarse mucho más para reemplazar a los que se mueran" Darwin (El origen de las especies)

La ley de la reproducción es entonces la ley exponencial expresada por la fórmula $n(t)=e^t$. La ley exponencial es: "La ley de la vida"; donde:

$n(t)$: número de natalidad en función del tiempo

e : 2.71828 (base de los logaritmos naturales)

t : número de periodo de tiempo

¿Cómo se hace?

Antes de empezar se escoge un número: 1, 2, 3, 4, 5 ó 6. Por ejemplo: 1, (Se espera que la cara del dado muestre el número uno).

Se empieza la simulación: Se tiene un tiempo inicial t=0, con un número correspondiente de 20 dados que representan 20 individuos de la población (individuos sanos, jóvenes, de preferencia no consanguíneos, que son machos y hembras), (0,20) es el primer par ordenado.

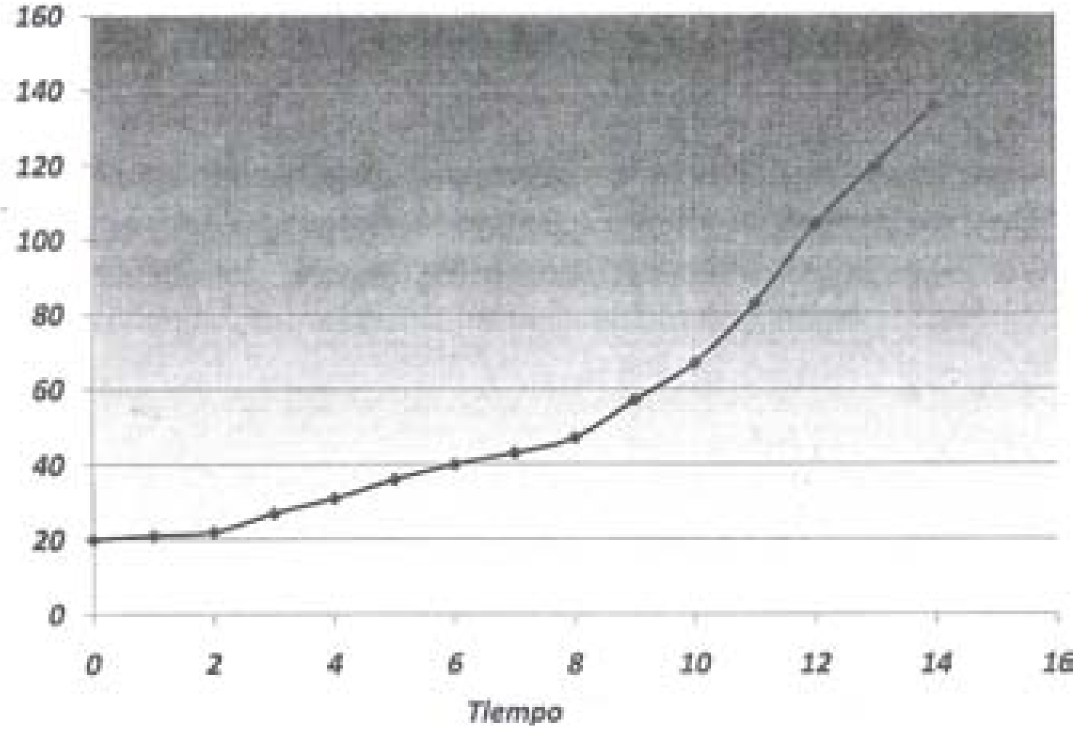
Para t=1 se lanzan los 20 dados y los que resulten con "cara uno" se cuentan: salieron dos, entonces la población se incrementa en dos individuos y por tanto se agregan dos dados, (1,22) es el segundo par ordenado.; para tiempo t=2 se lanzan los 22 dados, al obtener nuevamente dos dados con "cara uno", se aumentan otros dos dados y con ello la población se incrementó a 24, el siguiente par ordenado es (2, 24). En seguida se pasa al tiempo t=3, se lanzan los 24 dados y al resultar cuatro con "cara uno", significa que la población aumentó en cuatro individuos y, por tanto, se agregan cuatro dados más obteniendo 28 individuos, anotamos el par: (3,28). Con más tiradas, se generan más datos, que se pueden organizar en una tabla como la siguiente: Comprobar que los primeros pares ordenados son los anotados.

¿Qué ocurrió?

En la siguiente tabla, se anotan los resultados que se obtienen en el experimento:

t	***n(t)***
0	20
1	22
2	24
3	28
4	31
5	36
6	41
7	47
8	56
9	64
10	74
11	84
12	96
13	115
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

En seguida se hace la gráfica de los pares ordenados obtenidos


160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
Tiempo

simulación 2

¿Cómo se comportan las sustancias radioactivas?

Se sabe que la energía nuclear es muy poderosa y peligrosa pero también se sabe que el petróleo pronto se terminará y es necesario buscar otras fuentes de energía. Es importante saber como se comportan las sustancias radioactivas. Algunos minerales emiten radiaciones de manera espontánea y se transforman en otra sustancia. Por ejemplo el uranio, a través de una serie de desintegraciones radioactivas; es decir, de disparar partículas se logra transformar en plomo.

Pero como ocurre esta emisión de partículas, como se va desintegrando un elemento. Supóngase que se tiene carbono radioactivo, C_{14} ya que el átomo del carbono contiene 14 partículas; entonces al pasar seis mil años la mitad de la cantidad de masa del C_{14} ha presentado desintegración radioactiva y la otra mitad se encuentra como en su estado inicial. Después de otros seis mil años la mitad radioactiva se reducirá a su vez a la mitad y así sucesivamente.

En el carbono radioactivo este periodo de seis mil años recibe el nombre de vida media. Este tiempo es variable dependiendo del elemento radioactivo de que se trate: cesio, uranio, radio, etc. En el polonio que se obtiene a partir del uranio la vida media es de ciento treinta y ocho días, o sea que en 20 gramos de uranio al cabo de ciento treinta y ocho días se ha transformado la mitad, se ha transformado en 10 gramos y así sucesivamente.

Como se describiría el proceso si se tiene 1 Kg de C_{14} y se toma el tiempo en base a la vida media; tiempo inicial (0), seis mil años después (1), seis mil años después (2) etc. Se muestra en la siguiente tabla el proceso:

t (vida media)	m (masa)
0	1
1	½
2	¼ = $(½)^2$
3	1/8 = $(½)^3$
4	1/16 = $(½)^4$
. . .	. . .
T	$(½)^t$

Haciendo la gráfica de este fenómeno se tiene:

También se puede regresar en el tiempo y calcular cuánto había en el pasado y entonces se tiene; tiempo inicial (0), hace seis mil años (-1), hace doce mil años (-2) y así sucesivamente, como se observa en la siguiente tabla:

t (vida media)	m (masa)
. . .	. . .
-3	$8 = (½)^{-3}$
-2	$4 = (½)^{-2}$
-1	$2 = (½)^{-1}$
0	$1 = (½)^{0}$
1	$½ = (½)^{1}$
2	$¼ = (½)^{2}$

Simulación 2

Decaimiento radioactivo.

Función exponencial decreciente.

"La naturaleza como fuente de utilidad y de poder y la ciencia como instrumento para explicar esa fuente, reemplazan las antiguas concepciones de la naturaleza y la ciencia, pronto se advierte que en este sentido la matemática es el resorte científico más eficaz"[14]

¿Para qué?

Objetivos que se quieren conseguir con la simulación:

- Entender la función exponencial decreciente y su comportamiento.
- El alumno construirá la función exponencial decreciente que representa el decaimiento radioactivo.
- El alumno comprobará que manipulando un objeto (un número de dados) puede obtener una función, una ecuación dinámica.
- El alumno observará que la "sustancia radioactiva", $a(t_i)$ va cambiando, cuando cambia el tiempo: t_i.
- El alumno observará que la "sustancia" decrece:

  Si $t_i < t_{i+1}$ entonces $a(t_i) > a(t_{i+1})$.
- El alumno comprobará que se trata de una función exponencial al compararla con las clases previas, o con la investigación señalada.
- El alumno señalará las características de esta curva: decreciente, dominio, contradominio, ¿tiene asíntotas?, intersecciones con los ejes, ¿es simétrica?, extensión, etc.

[14] Ibid.,id.

¿Qué?

Simulación del fenómeno de decaimiento radioactivo con un número de dados.

Introducción:

Fisión Atómica y el decaimiento radioactivo.

La fisión atómica es la división del núcleo del átomo en varias partes; en las sustancias donde más se presenta este fenómeno son las llamadas sustancias radioactivas tales como U_{235} (el isótopo del uranio de peso atómico 235).

¿Cómo sucede? Cuando un núcleo de un átomo es alcanzado por un neutrón (una partícula subatómica sin carga), el núcleo se divide emitiendo a su vez más partículas subatómicas, entonces en ella siempre hay neutrones libres, algunos golpean núcleos atómicos, produciendo fisión y por lo tanto nuevos neutrones; y a su vez algunos de los neutrones nuevamente producidos causan fisión de otros átomos. Es decir hay una reacción en cadena.

La cantidad de energía liberada durante la fisión es proporcional al número de neutrones producidos. Si este número aumenta muy rápidamente son liberadas enormes cantidades de energía en un tiempo muy corto. Este fenómeno describe una función exponencial de la forma $a(t)=e^{-t}$, es una función exponencial decreciente, donde:

a (t) : cantidad de sustancia (número de átomos), en función del tiempo

e : 2.71828 (base de los logaritmos naturales)

t : número de periodo de tiempo

¿Cómo se hace?

Antes de empezar la simulación se escoge un número: 1, 2, 3, 4, 5 ó 6. Por ejemplo: 1, (la cara que muestra uno).

Por tanto, el tiempo inicial t_0 (tiempo cero) tiene el correspondiente valor de 100, (los cien dados). Por tanto el primer par ordenado es: $(t_0, a(t_0))=(0,100)$.

Para el primer lanzamiento de los dados señalamos tiempo 1, t_1; se lanzan los dados y todos los dados que muestren ("cara con uno") se retiran. Los dados que mostraron ("cara con uno") resultaron 13 por tanto se retiran y se tiene: $(t_1, a(t_1))=(1,87)$ que es el segundo par ordenado, ochenta y siete se obtiene de la resta de cien menos trece.

Para el segundo lanzamiento de los dados señalamos tiempo 2, t_2 y todos los dados que muestren ("cara con uno") se retiran. Los dados que mostraron ("cara con uno") resultaron doce por tanto se retiran y se tiene $(t_2, a(t_2))=(2, 75)$. Tiempo 2 coma setenta y cinco, (de la resta de ochenta y siete menos doce).

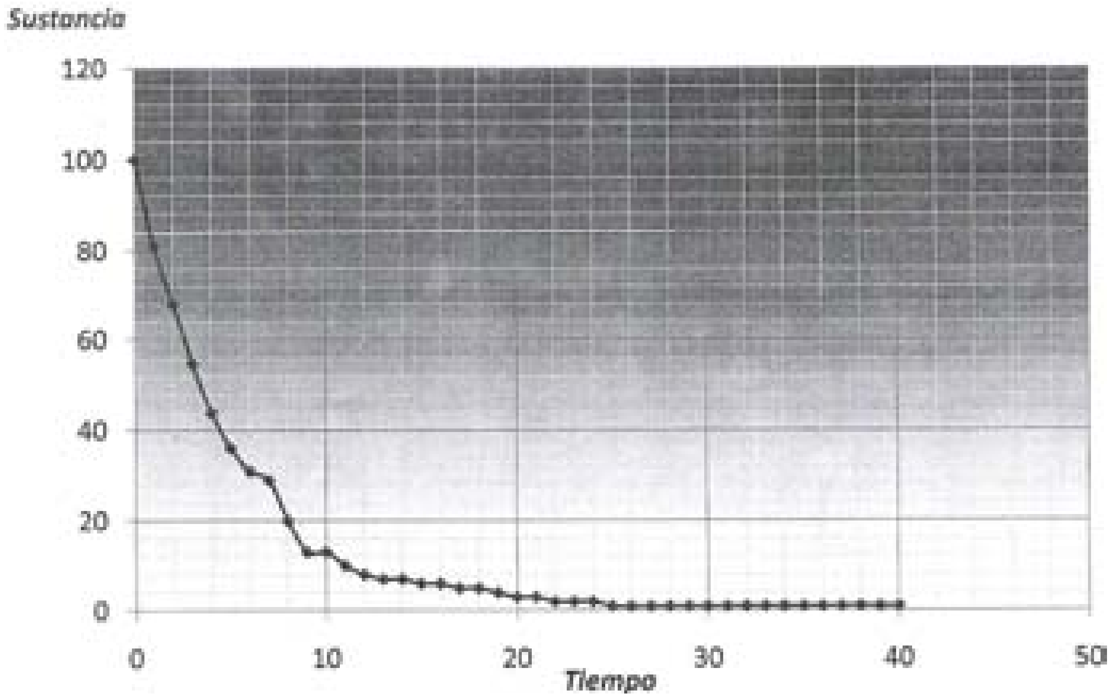
De esta manera se obtienen los pares ordenados de la forma: $(t_i, a(t_i))$, tiempo de tirada o número de periodo de tiempo t_i, y del número de dados $a(t_i)$, número de átomos en función del tiempo que nos van quedando y que se pueden mostrar en una tabla.

¿Qué ocurrió?

En la siguiente tabla coloca los resultados que se van obteniendo del experimento:

t	***a(t)***
0	100
1	87
2	75
3	59
4	51
5	46
6	39
7	36
8	32
9	27
10	24
11	19
12	18
13	15
14	15
15	13
16	12
17	11
18	10
19	9
20	8
21	7
22	6
23	4
24	4
25	2
26	2

En seguida se puede hacer la gráfica de los pares ordenados obtenidos:


Sustancia
120
100
80
60
40
20
0
0
10
20
30
40
50
Tiempo

conclusiones

Desarrollo de las simulaciones en el salón de clases.

Para realizarlas se formaron equipos de cuatro o cinco alumnos. A cada equipo, se le proporcionó un paquete de 100 dados. Se desarrollaron las dos simulaciones previa explicación a los estudiantes. Material: Dados, lápiz y papel.

Al terminar la primera simulación que correspondió a la Función exponencial creciente, “La ley de la vida”; se pidió hacer la gráfica con los datos obtenidos (los pares ordenados correspondientes a tiempo contra número de población) en el papel milimétrico (Anexo1), después se discutió con todo el grupo a fin de obtener algunas conclusiones.

En la segunda simulación, la Función exponencial decreciente, Decaimiento radioactivo; se procedió de forma similar. Los equipos trabajaron, registraron los datos (tiempo contra número de sustancia radioactiva) posteriormente trazaron las gráficas en papel milimétrico a “mano alzada” (Anexo 2). Al final la discusión.

Después de realizadas las simulaciones en el salón de clases y de la elaboración individual de las gráficas, se dejó de tarea ingresar los datos obtenidos de cada simulación (función exponencial creciente y decreciente), es decir, anotar en un paquete de computo (Matlab, Excel u otro para hacer gráficas) los datos para obtener la nube de puntos y posteriormente hacer un ajuste de curva a ese conjunto de puntos. (Ambas gráficas se muestran en el Anexo 3, evidencias de las simulaciones por computadora). Al final, la discusión. Es importante mencionar que antes de realizar las simulaciones, los estudiantes investigaron y discutieron como se obtiene la función exponencial para que contaran con antecedentes que les permitiera la comprensión al hacer las prácticas de simulación, con su definición algebraica y cambiando los parámetros.

De la discusión posterior al trabajo con las simulaciones y de las opiniones vertidas, pude deducir que se cumplió de forma general con los objetivos propuestos para cada una de las simulaciones. No obstante, al hacer una revisión puntual de cada uno de los objetivos propuestos, considero que:

El primer objetivo se cumplió ampliamente porque entendieron que ciertos fenómenos naturales se comportan del mismo modo que la función exponencial.

El segundo objetivo se cumplió totalmente porque todos los estudiantes comprobaron, como una población va creciendo con respecto al tiempo y se va obteniendo una "función exponencial creciente" simulada y como en el caso del decaimiento, la masa decrece y se obtiene una función exponencial decreciente.

Considero que el tercer objetivo se cumplió totalmente porque todos los estudiantes entregaron sus gráficas en papel milimétrico y en computadora.

El cuarto objetivo se alcanzó porque los estudiantes observaron que la población cambió al transcurrir el tiempo y en el decaimiento la masa disminuyo paulatinamente.

Con respecto al quinto objetivo, la mayoría de los estudiantes pudieron comprobar que cuando varía el tiempo, los resultados correspondientes también cambian. Es decir para la población: $t_i < t_{i+1}$, entonces $n(t_i) < n(t_{i+1})$, por tanto la función es creciente y para el caso del decaimiento radioactivo, $t_i < t_{i+1}$, entonces $n(t_i) > n(t_{i+1})$ *y*, por lo tanto, la función es decreciente.

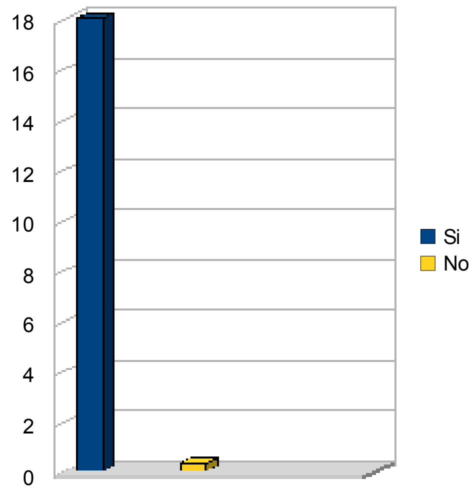
Considero que el sexto objetivo se cumplió porque las tareas se discutieron y de ellas se concluyó que se comportan como la función exponencial estudiada previamente, ya que estas prácticas son una simulación y no una demostración.

Con respecto al séptimo objetivo planteado, considero que se cumplió parcialmente porque los estudiantes mostraron cierta confusión en sus explicaciones con respecto a las propiedades de la función exponencial creciente, decreciente, asíntotas e intersecciones con los ejes y, mayor confusión con respecto a: dominio y rango.

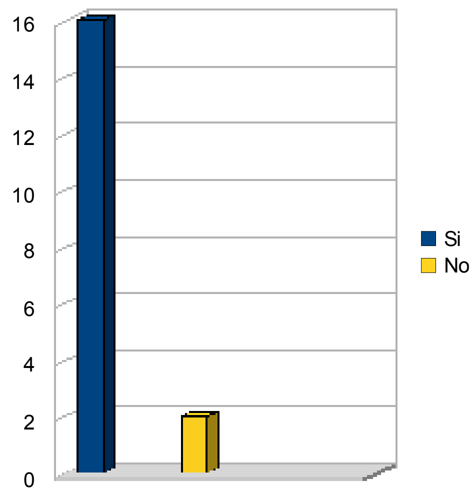
A continuación se presentan las gráficas de las respuestas del cuestionario formulado por el grupo para evaluar el trabajo realizado y, que se aplicó a todos los alumnos al finalizar las simulaciones (Anexo 4).

Gráficas de las preguntas del cuestionario:

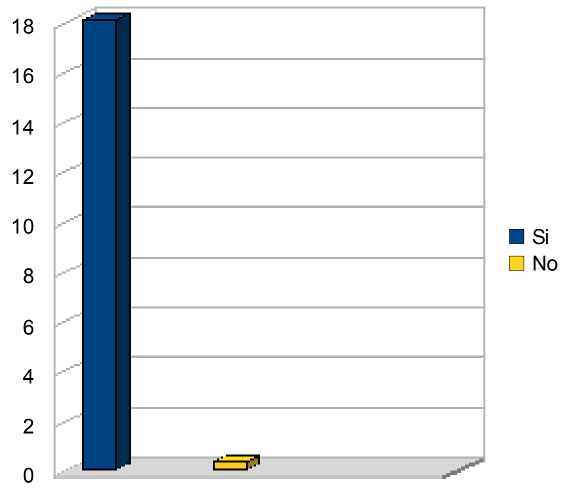
1. ¿Consideras que este experimento con los dados simula o modela correctamente el fenómeno del crecimiento de una población? ¿Porqué?



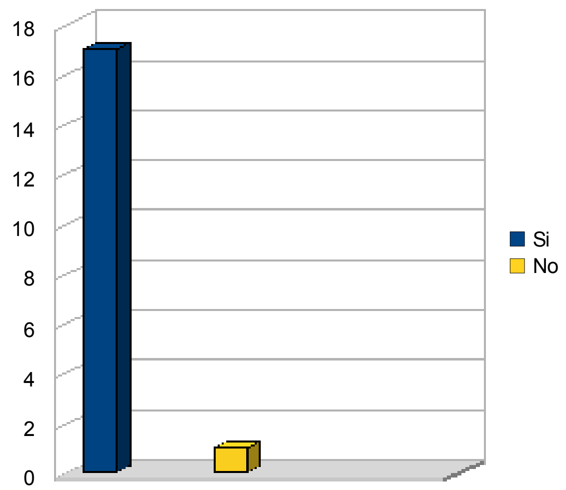
2. ¿Qué te parece, que tú mismo manipulando un objeto (los cien dados) puedes obtener una función?



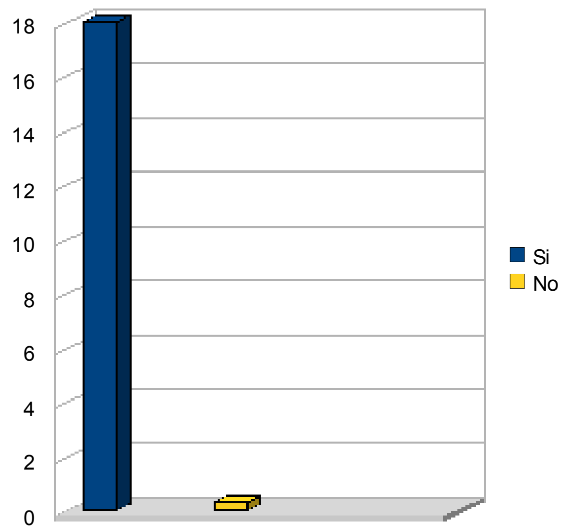
3) ¿Aprendiste con estas prácticas? ¿Qué?



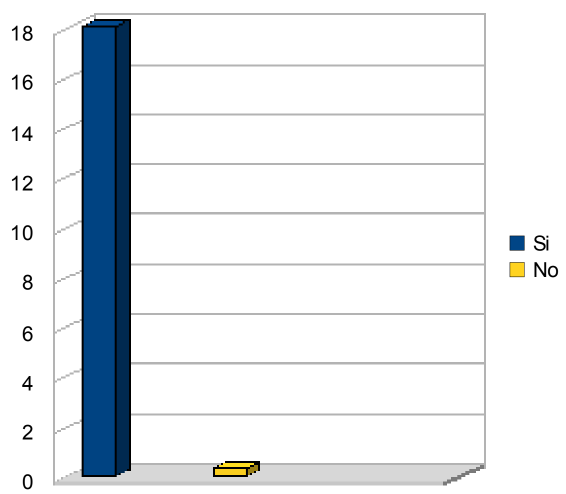
4) ¿Te gusto hacer estas prácticas? Si o no. ¿Porqué?



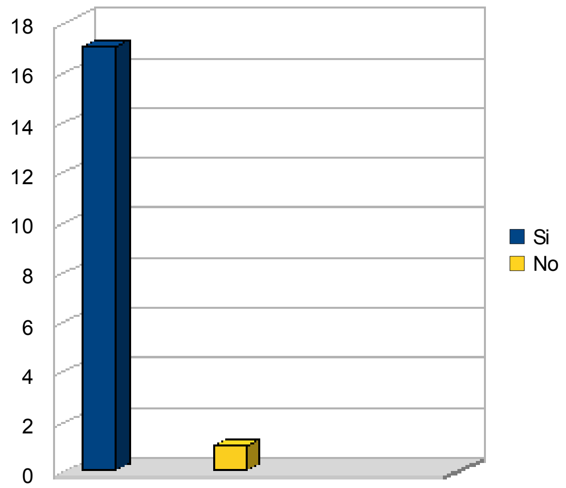
5) ¿Entendiste mejor los fenómenos? Si o no. ¿Porqué?



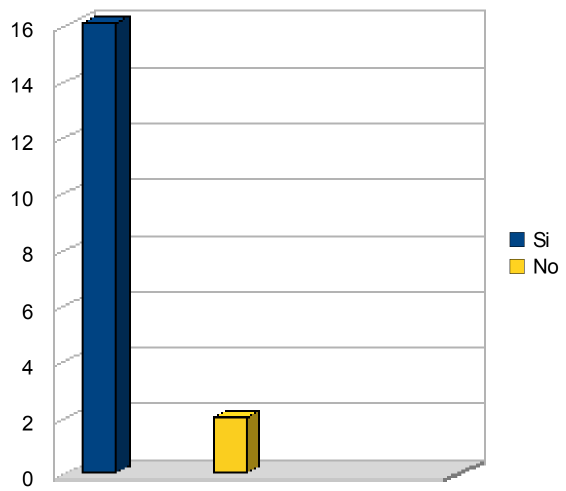
6) ¿Te sirvió hacer estos experimentos? ¿Para qué?



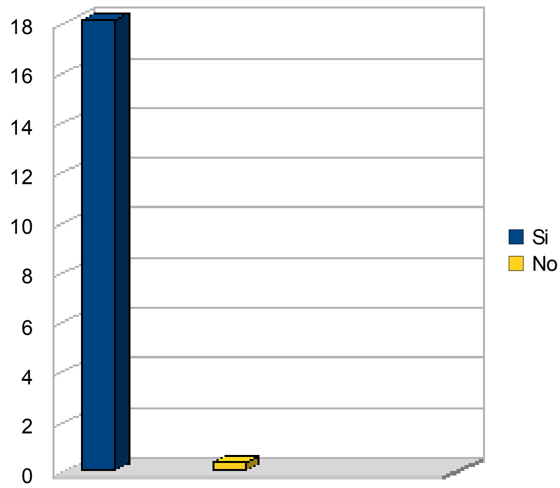
7) ¿Te parecieron interesantes estas prácticas? ¿Por qué?



8) ¿Consideras que estas prácticas son comunes en las clases de matemáticas o son un poquito innovadoras en esta materia? Si o no. ¿Porqué?



9) ¿Recomendarías más prácticas como estás en las clases de matemáticas? ¿Porqué?



Con respecto a las preguntas 1) y 2) del cuestionario, estas se plantearon para comprobar sí los objetivos señalados en las simulaciones se cumplieron y que dicen:

- El alumno con un objeto en movimiento, cien dados, consigue obtener una función.
- El alumno entenderá y verificara el comportamiento, así como las características de la función exponencial creciente y decreciente.

Observando las primeras dos gráficas: 1) y 2) los resultados señalan que 100%, 18 de 18 alumnos contestaron en la pregunta 1) afirmativamente y en un 88%, 16 de los 18 alumnos en la pregunta 2) están contestando afirmativamente. Por lo que se concluye que se esta cumpliendo con los objetivos más importantes anotados en las simulaciones. En las preguntas 1) y 2). Además se pregunta: ¿por qué? En la pregunta 1) la mayoría de los alumnos señalan que consiguen obtener una función por los pares ordenados obtenidos y porque consiguen hacer la gráfica de una función con el papel milimétrico y con la computadora directamente de la simulación. Por lo que se puede afirmar que los objetivos señalados se están cumpliendo.

Con respecto a las preguntas 4), 7), 8) y 9) después de aplicado el cuestionario me doy cuenta de que estas preguntas son subjetivas porque se refieren a la percepción y creencia del alumno, pero no deja de ser importante esta opinión. Se puede decir que estas preguntas sirven para saber la aceptación del alumno, de manejar este material y también sirven para observar que los alumnos lo tratan como un "juego" que a veces resulta romper con la rutina y ser provechoso.

¿Cómo resultan las respuestas? En la pregunta 4): Te gusto hacer estas prácticas. 17 de los 18 alumnos responden que: si. Esto representa 94% lo que dice que se motivaron en cuanto al material y sólo un alumno que representa el 6%, no le satisfizo esta actividad. En cuanto al complemento de la pregunta: ¿Por qué? A los alumnos les pareció: padre, juego, mas fácil, entretenido, relajado, no me rompo la cabeza, sale de lo común, bueno porque es trabajo en equipo. Son algunas de las respuestas de los alumnos y por tanto la conclusión resulta favorable sobre las simulaciones.

Para la pregunta 7) Te parecieron interesantes. ¿por qué? Los resultados también señalan que se sintieron motivados porque 17 de 18 alumnos contestan afirmativamente, por lo que se tiene 94%. En cuanto al, ¿por qué? , algunos no contestaron y otros sus respuestas son: porque entendí mejor, es innovador, son didácticas, son divertidas, no es común. Fueron algunos de los calificativos que usaron.

Para la pregunta 8): Consideras que las simulaciones son comunes en las clases de matemáticas o son innovadoras. ¿Por qué? 16 de los 18 alumnos contestaron en forma positiva. Es decir, el 88% contesto: si. Y el ¿por qué? Lo anoto en algunos casos: poco comunes, son didácticas, nunca las habíamos hecho, son otra perspectiva. Estas respuestas también resultan positivas para la evaluación.

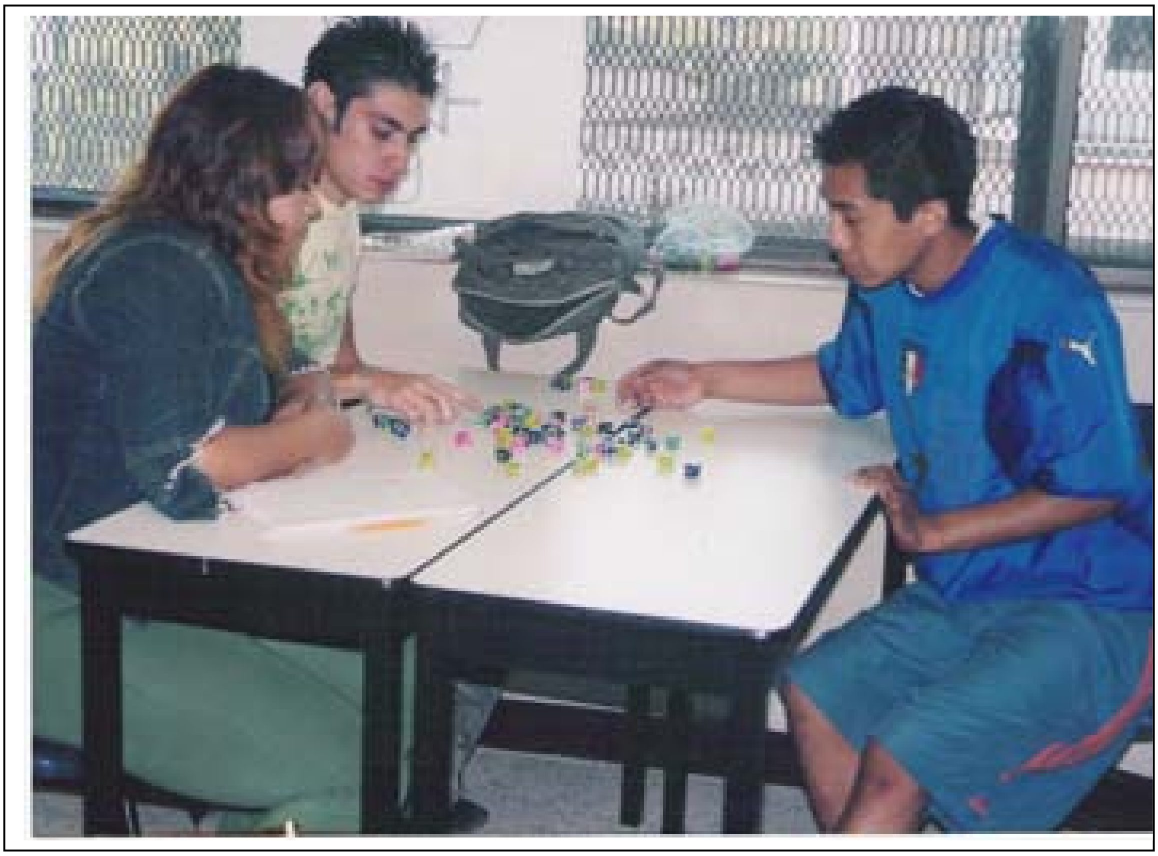
En la pregunta 9): Recomendarías más prácticas como estas en las clases de matemáticas. ¿Por qué? Los 18 alumnos es decir el 100% responden que si; y sobre el: ¿por qué? Lo que contestan es: es mejor, es divertido y al mismo tiempo aprendes, convivimos más, trabajamos mejor, si me gusto hacerlas, si porque es otra forma de aprender, se entienden mejor, no son tediosas, son interesantes, son fáciles.

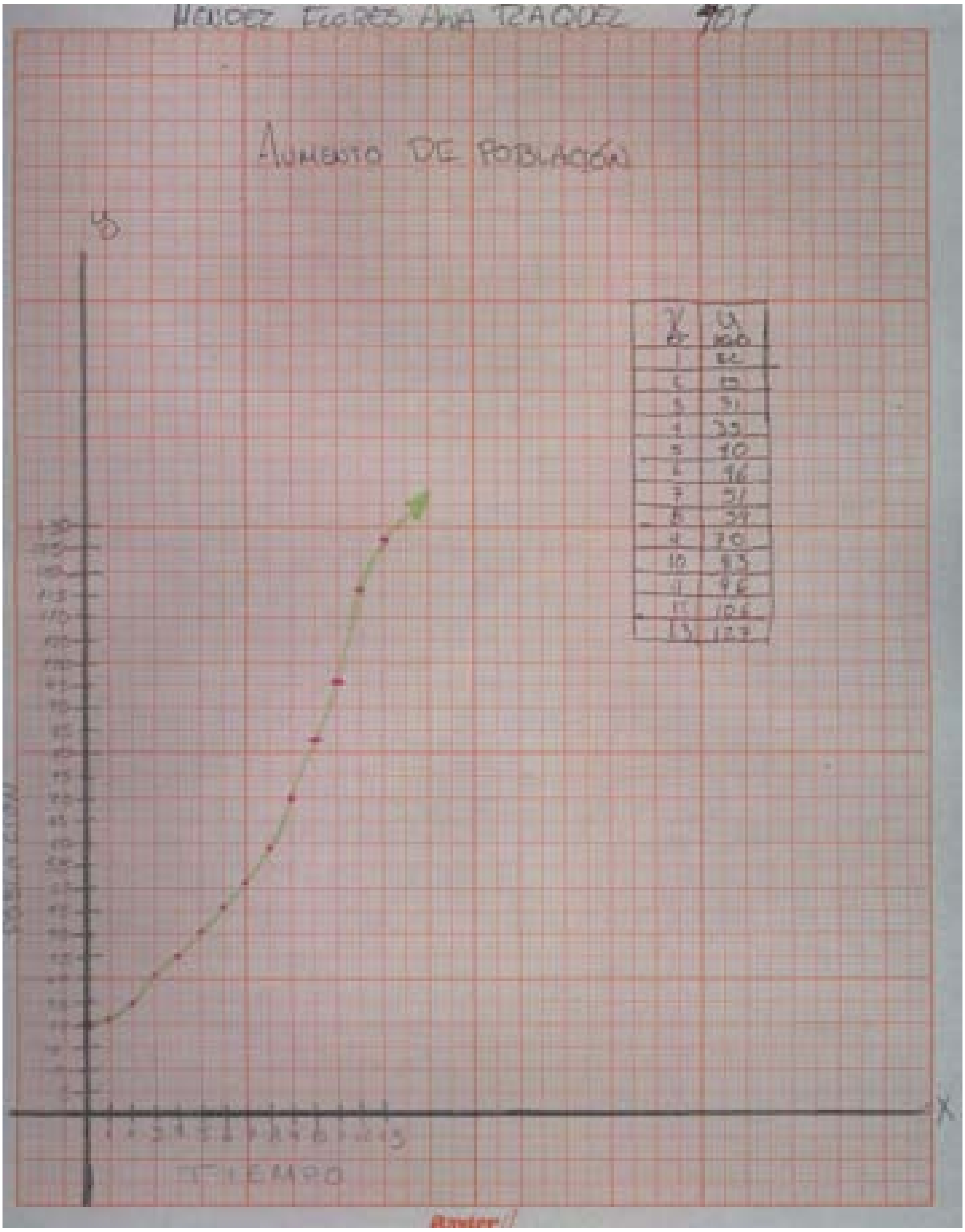
En cuanto a las preguntas: 3), 5) y 6) se plantearon para que el grupo responda cómo fue su aprendizaje, su entendimiento de este tema con las simulaciones.

En los anexos se muestran:

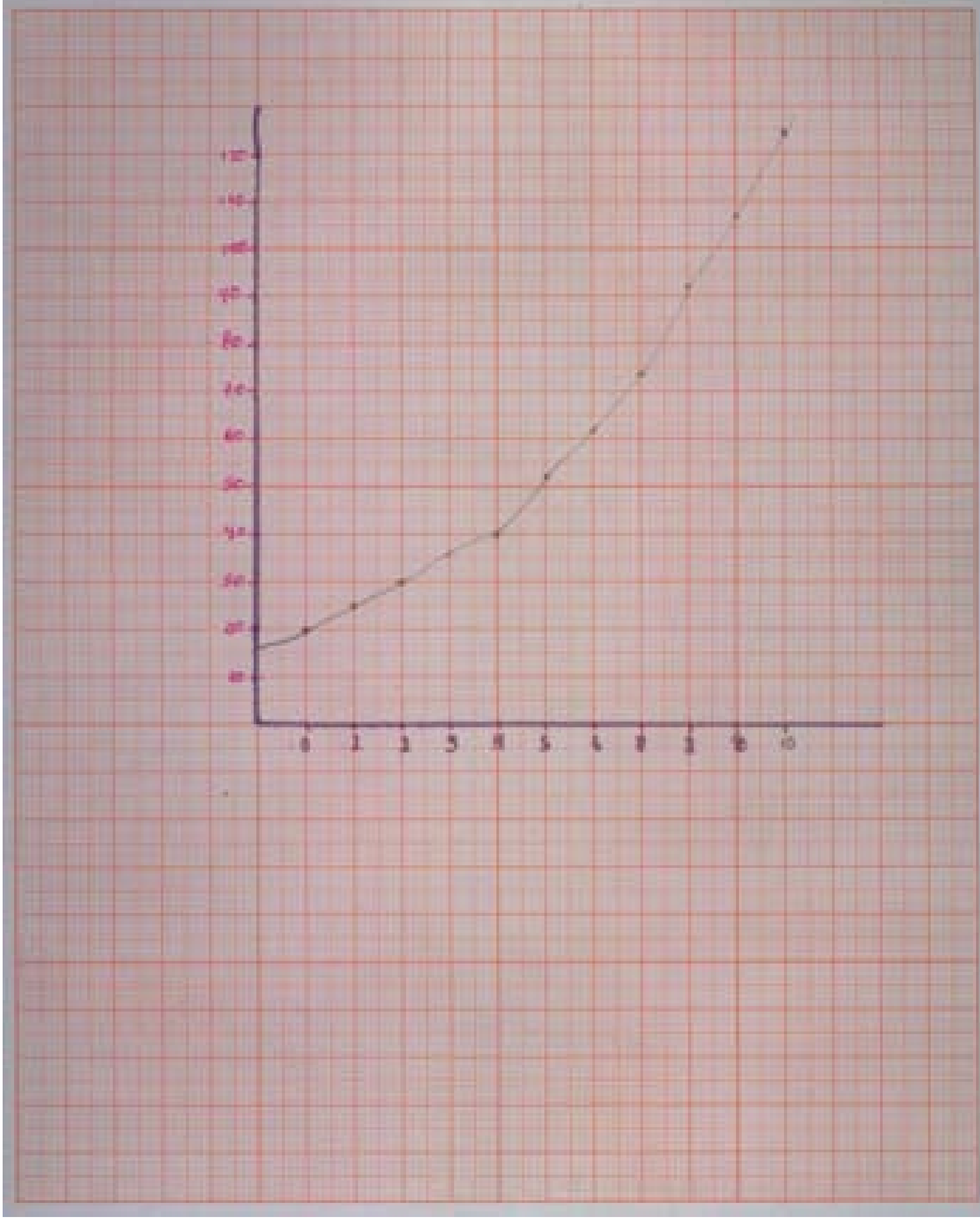
1. Imágenes de los alumnos realizando las simulaciones
2. Tareas en papel milimétrico de crecimiento
3. Tareas en papel milimétrico de decaimiento
4. Tareas en computadora de las simulaciones
5. Cuestionarios aplicados a los alumnos

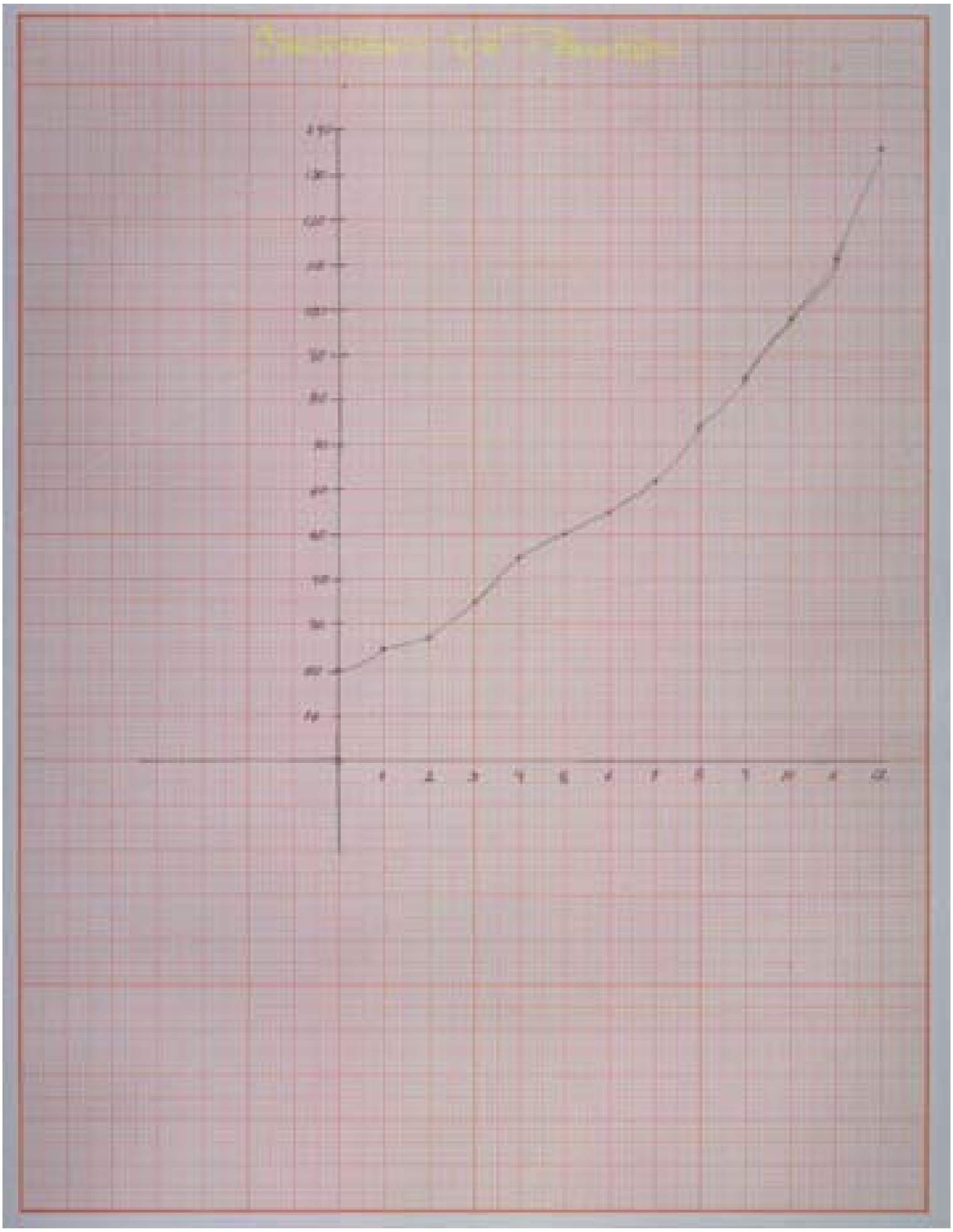
Anexos

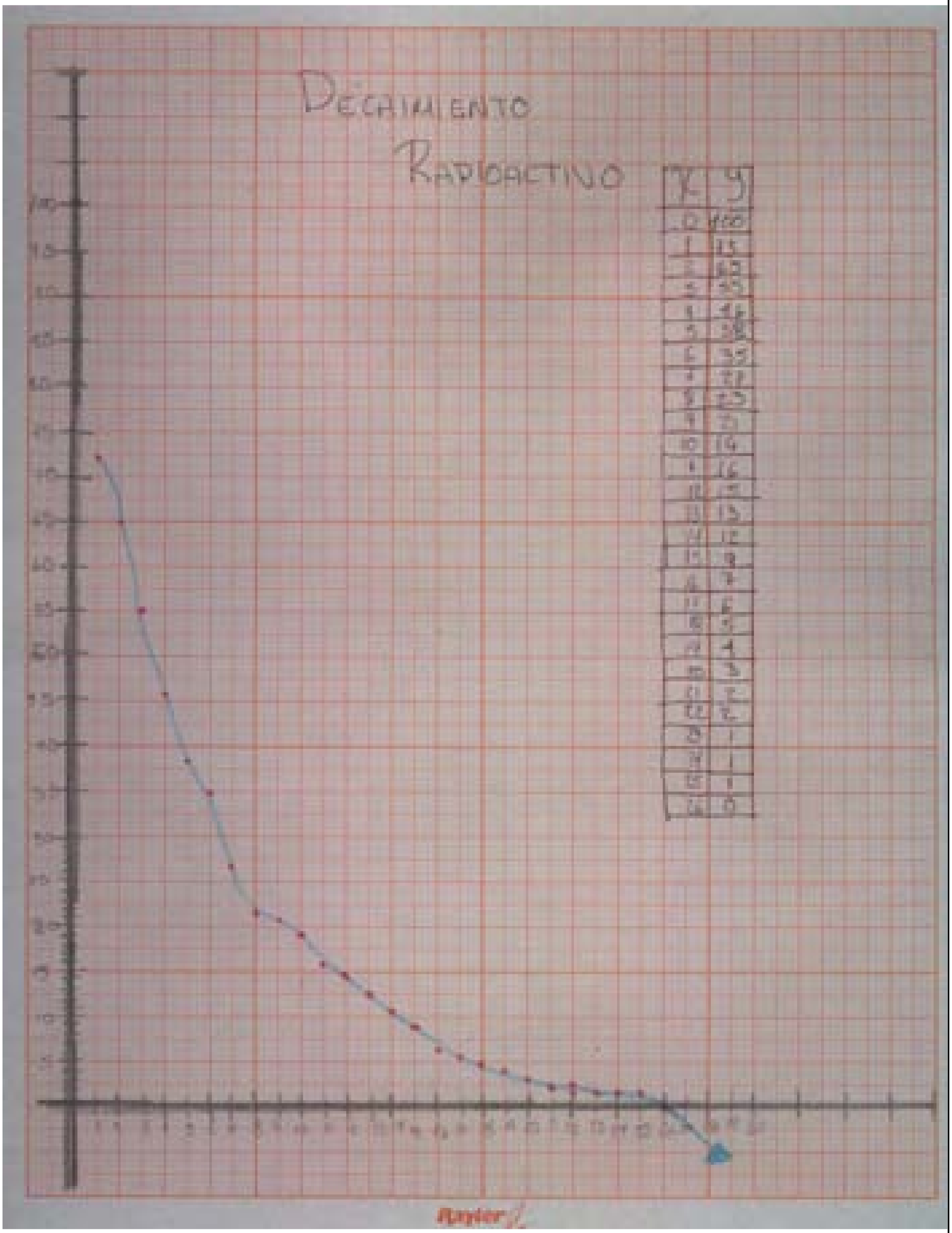



AUMENTO DE POBLACIÓN
TIEMPO

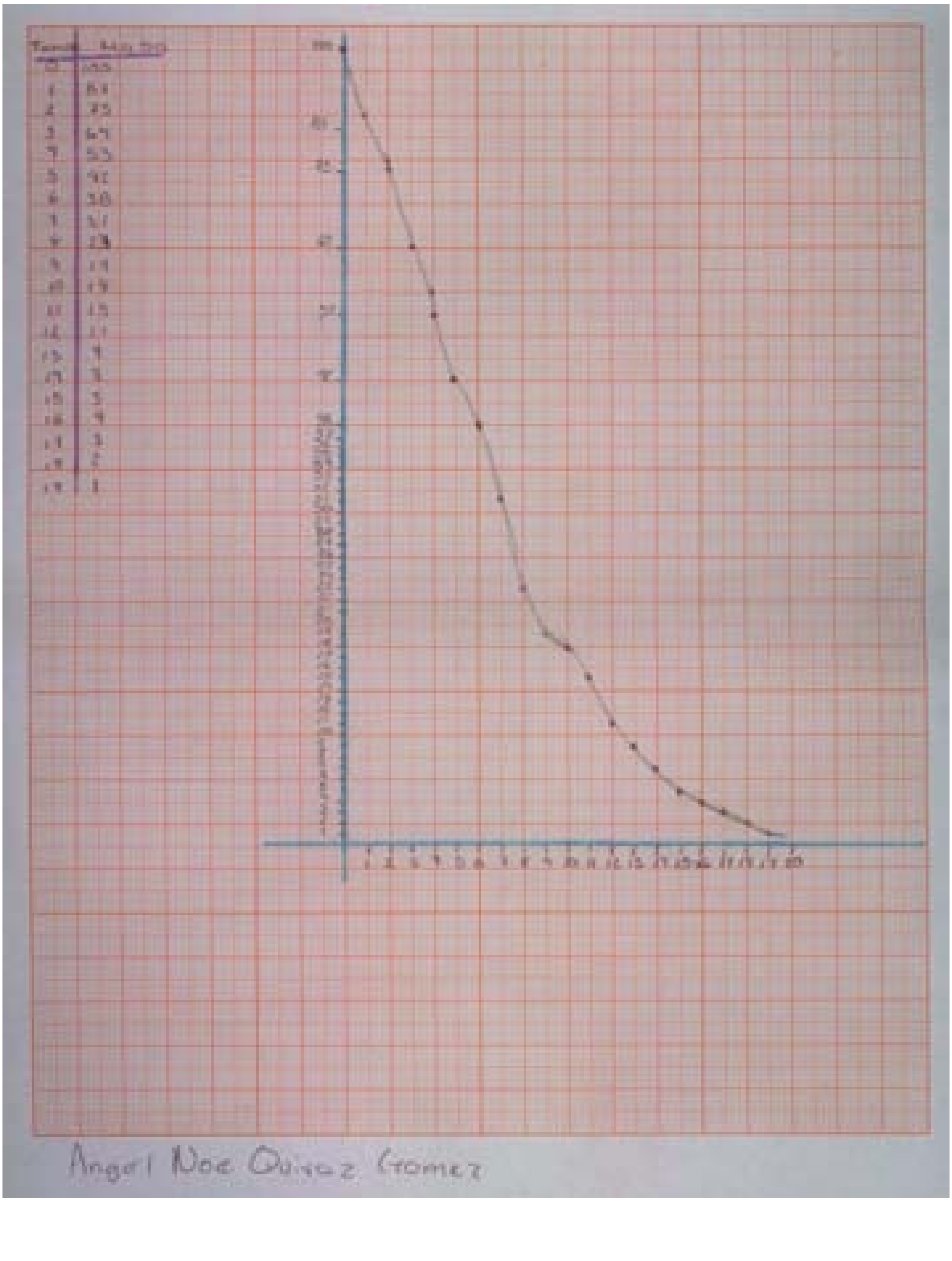
Elizabeth Calleja Sandoval

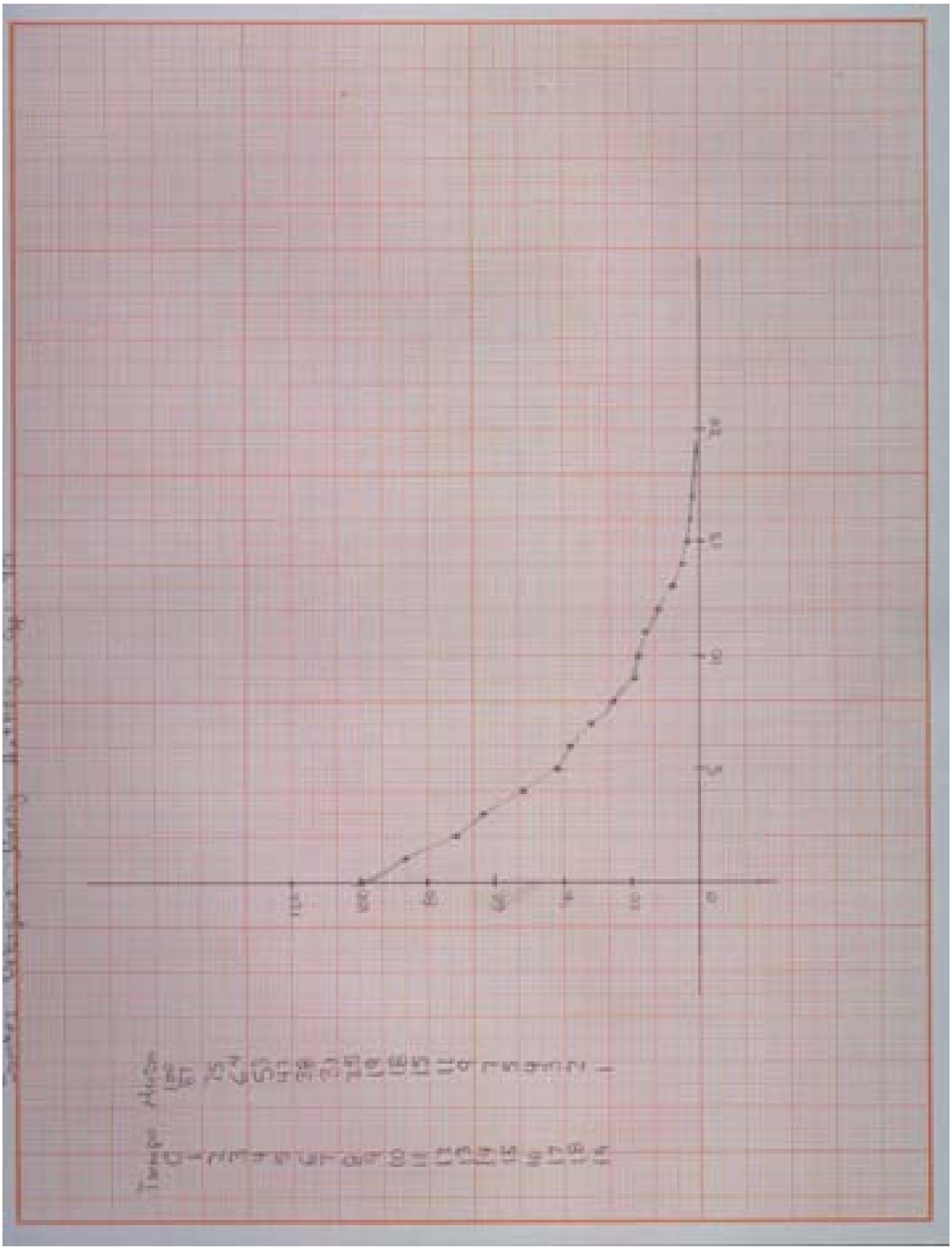






DECAIMIENTO
RADIOACTIVO
x
y


Angel Noe Quiroz Gomez

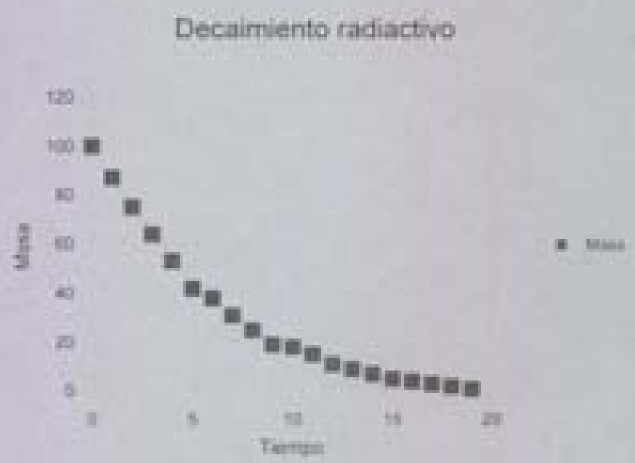


Sanchez Velazquez Danny Anthony Gpo. 401

Hoja1

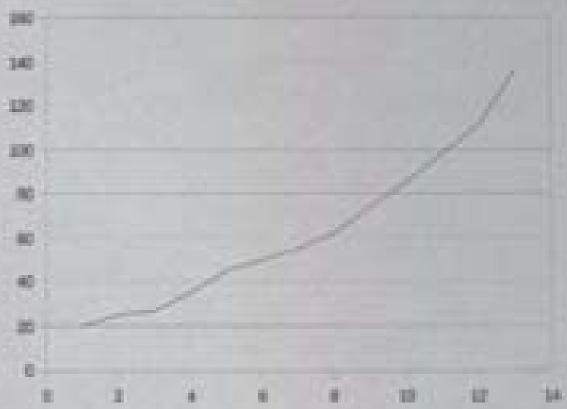
Tiempo	Conejos
0	20
1	25
2	27
3	35
4	45
5	50
6	55
7	62
8	74
9	85
10	98
11	111
12	135

Tiempo	Masa
0	100
1	87
2	75
3	64
4	53
5	42
6	38
7	31
8	25
9	19
10	18
11	15
12	11
13	9
14	7
15	5
16	4
17	3
18	2
19	1

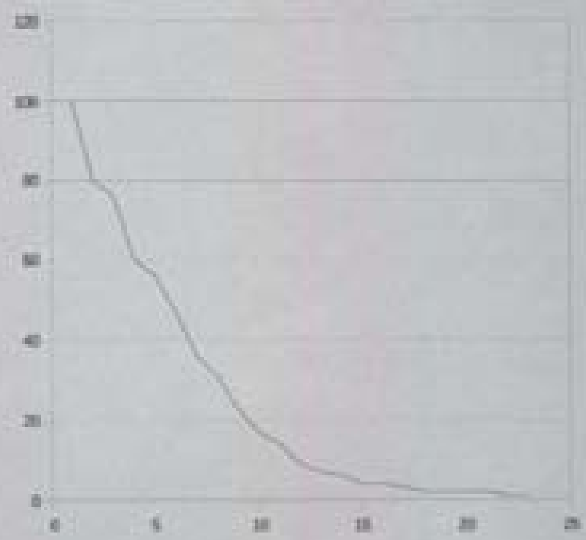


Ferrer Rendon José Ignacio

tiempo	valor
0	20
1	25
2	27
3	35
4	45
5	50
6	55
7	62
8	74
9	85
10	98
11	111
12	136



tiempo	valor
0	100
1	80
2	75
3	60
4	56
5	47
6	36
7	31
8	23
9	17
10	14
11	9
12	7
13	6
14	4
15	4
16	3
17	2
18	2
19	2
20	2
21	1
22	1

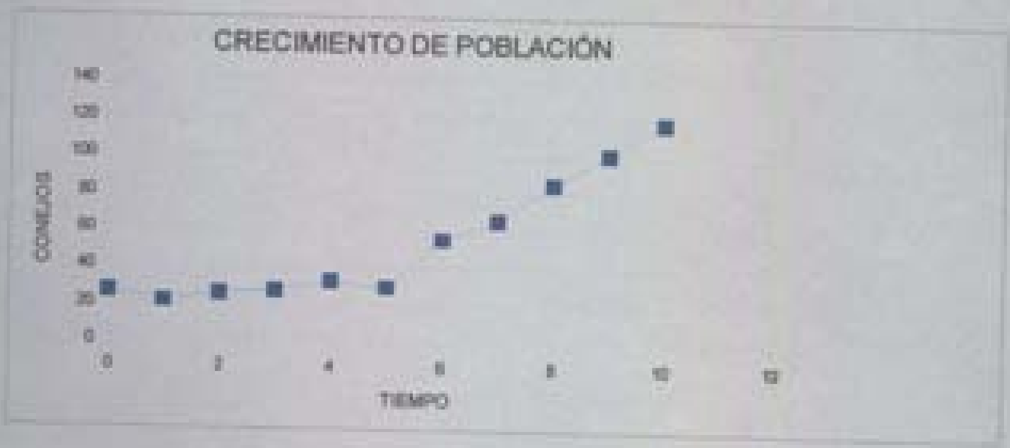


Laura Ortega Damaris Grupo: 401

TIEMPO	MASA
0	100
1	77
2	62
3	43
4	35
5	27
6	17
7	11
8	6
9	2
10	1

LOVERA ORTEGA DAMARIS GRUPO:401

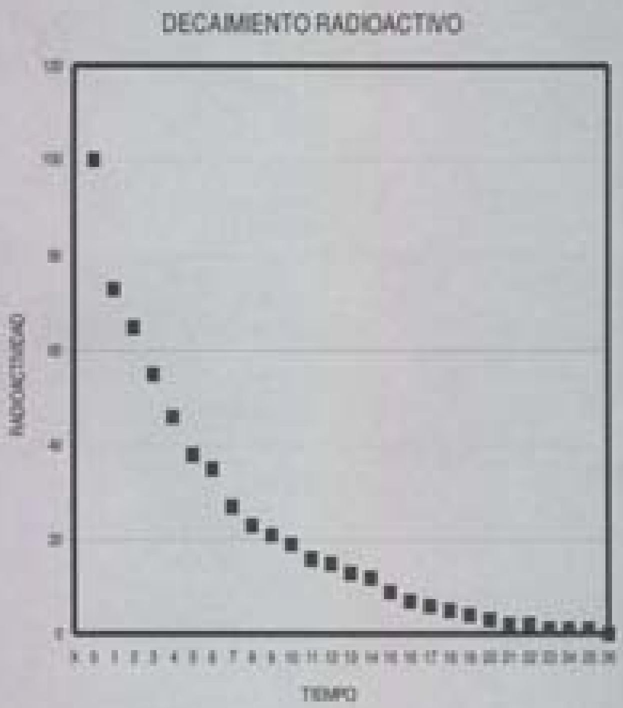
TIEMPO	CONEJOS
0	26
1	21
2	25
3	27
4	32
5	29
6	55
7	65
8	85
9	101
10	118



LOVERA ORTEGA DAMARIS GRUPO: 401

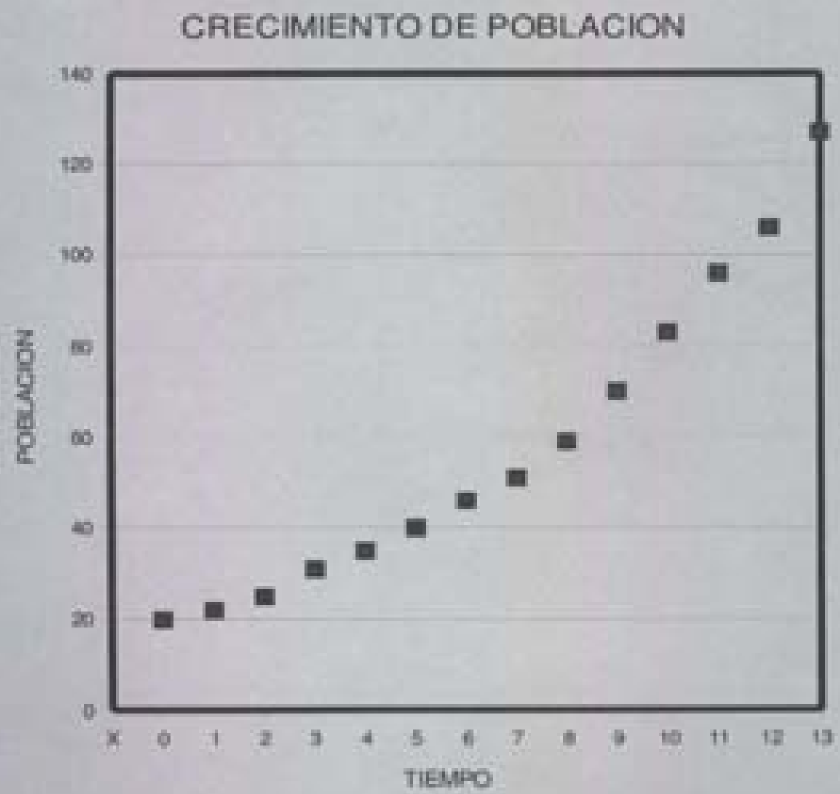
MENDEZ FLORES ANA RAQUEL

x	y
0	100
1	73
2	65
3	55
4	46
5	38
6	35
7	27
8	23
9	21
10	19
11	16
12	15
13	12
14	12
15	9
16	7
17	6
18	5
19	4
20	3
21	2
22	2
23	1
24	1
25	1
26	0



MENDEZ FLORES ANA RAQUEL

X	Y
0	20
1	22
2	25
3	31
4	35
5	40
6	46
7	51
8	59
9	70
10	83
11	96
12	106
13	127



Isidro Hernandez francisco J

450-B

Cuestionario sobre las practicas.

¿Consideras que este experimento con los dados simula o modela correctamente el fenómeno del crecimiento de una población? ¿Porqué? si por que siempre va en aumento

¿Qué te parece que tú mismo manipulando un objeto (los cien dados) puedes obtener una función? Pues nada son cosas que siempre pasan pero no nos damos cuenta i que las graficamos

¿Aprendiste con estas prácticas? ¿Qué? si aprendi a graficar la funcion exponecial

¿Te gusto hacer estás prácticas? Sí o no. ¿Porqué? si por que nos da una idea de que puede pasar

¿Entendiste mejor los fenómenos? Sí o no. ¿Porqué? si biendo la grafica se da una mayor cuenta

¿Te sirvio hacer estós experimentos? ¿Para qué? para saber ~~que~~ como se comporta la funcion o la poblacion

¿Estubierón interesantes estas prácticas? ¿Porqué? si por que no es la clase aburrida como algunas veces

¿Consideras que estás practicas son comunes en las clases de matemáticas o son un poquito inovadoras en esta materia? Sí o no. ¿Porqué? si por que las matematicas aveces son aburridas

¿Recomendarias más prácticas como estás en las clases de matemáticas? ¿Porqué? si para que no se nos haga aburrida la clase

Lorena Badillo Sánchez 4S0

Cuestionario sobre las practicas.

¿Consideras que este experimento con los dados simula o modela correctamente el fenómeno del crecimiento de una población? ¿Porqué? modela de una forma muy nada sencilla porque no señala el crecimiento o la disminución muy apegada a la de la población.

¿Qué te parece que tú mismo manipulando un objeto (los cien dados) puedes obtener una función? Pues muy interesante, creo que nunca lo había pensado, pero al igual que los dados me despierta curiosidad para hacerlo con otras cosas.

¿Aprendiste con estas prácticas? ¿Qué? Sí existe una forma en la que podemos apoyarnos para aplicarlas en la vida diaria.

¿Te gusto hacer estás prácticas? Sí o no. ¿Porqué? Claro que sí, me gustó más, porque es menos recreativo y no es aburrida.

¿Entendiste mejor los fenómenos? Sí o no. ¿Porqué? Sí, porque me llama más la atención y no me aburre.

¿Te sirvio hacer estós experimentos? ¿Para qué? Para poder aplicarlas en otros fenómenos de una manera más fácil.

¿Estubierón interesantes estas prácticas? ¿Porqué? Sí, porque gracias a ellos nos podemos dar cuenta del crecimiento o disminución de un fenómeno rápidamente.

¿Consideras que estás practicas son comunes en las clases de matemáticas o son un poquito inovadoras en esta materia? Sí o no. ¿Porqué? no son comunes pero sí muy innovadoras, se deberían realizar más.

¿Recomendarías más prácticas como estás en las clases de matemáticas? ¿Porqué? Por supuesto que sí, nos motivan y hacen que nos interese más la clase.

Camacho Verano Viridiana

Cuestionario sobre las practicas.

¿Consideras que este experimento con los dados simula o modela correctamente el fenómeno del crecimiento de una población? ¿Porqué? Si, porque la curva va en aumento conforme al tiempo.

¿Qué te parece que tú mismo manipulando un objeto (los cien dados) puedes obtener una función? Es bueno y facil de comprender, rapido de manipular y los calculos no son dificiles

¿Aprendiste con estas prácticas? ¿Qué? Si, la forma en que crecen y decrecen las funciones y lo hizo facil de comprender

¿Te gusto hacer estás prácticas? Sí o no. ¿Porqué? Si, fueron didacticas, no me aburri y lo entendi

¿Entendiste mejor los fenómenos? Sí o no. ¿Porqué? Si, porque vi como se comporta el fenomeno.

¿Te sirvio hacer estós experimentos? ¿Para qué? Si, valore lo que hacen los que estudian estos fenomenos.

¿Estubierón interesantes estas prácticas? ¿Porqué? Si, porque veo como se hacen los fenomenos y seria mas interesante si fuera mas grande la "poblacion".

¿Consideras que estás practicas són comunes en las clases de matemáticas o son un poquito inovadoras en esta materia? Sí o no. ¿Porqué? Son inovadoras ya que no me lo habian enseñado así

¿Recomendarías más prácticas como estás en las clases de matemáticas? ¿Porqué? Claro, no seria tediosa la clase y es mas rapido de comprender, como se hacen o en que se utilizan.

Juarez Zamorano Luis Alfredo

950

Cuestionario sobre las practicas.

¿Consideras que este experimento con los dados simula o modela correctamente el fenómeno del crecimiento de una población? ¿Porqué? Si porque una poblacion me parece que se comporta como la practica que realizamos de los dados.

¿Qué te parece que tú mismo manipulando un objeto (los cien dados) puedes obtener una función? me parece bien porque asi me doy cuenta de que en verdad se puede ver que si se comportan los fenomenos tales como la poblacion

¿Aprendiste con estas prácticas? ¿Qué? Que la funcion exponencial es muy importante y nos sirve para analisar una cifra o algun fenomeno.

¿Te gusto hacer estás prácticas? Sí o no. ¿Porqué? Si porque me di cuenta que es importante aprender este tipo de funciones.

¿Entendiste mejor los fenómenos? Sí o no. ¿Porqué? Si por ejemplo las poblaciones, los decaimientos radioactivos porque son cosas que no comprendia porque pasaban y como se [illegible]

¿Te sirvio hacer estós experimentos? ¿Para qué? Si para darme cuenta de que la funcion exponencial en los dados y al ver resultados graficos se ve como el fenomeno de la poblacion

¿Estubieron interesantes estas prácticas? ¿Porqué? Si porque eran cosas que aun no aprendia ni comprendia.

¿Consideras que estás practicas son comunes en las clases de matemáticas o son un poquito inovadoras en esta materia? Sí o no. ¿Porqué? Son inovadoras porque no a menudo se enseña ese tipo de problemas

¿Recomendarias más prácticas como estás en las clases de matemáticas? ¿Porqué? Si para que los demas que aun no saben este tipo de peblemas.

bibliografía

Bibliografía

Berté, Annie; *Mathématique Dynamique*, París. Editorial Nathan, 1993.

Berté, Annie; *Mathématique Du Collége au Lycée*, París. Editorial Nathan, 1996.

Babini , José; *El cálculo infinitesimal*. Leibniz/Newton. Editorial Eudeba.

Castelnuovo, Emma, *Didáctica de la matemática Moderna*. Trillas, México

Castelnuovo, Emma, *De viaje con la matemática. Imaginación y razonamiento matemático*. Editorial Trillas, 2001. México

¿Como ves? # 99, Juan Carlos Martinez; *Los modelos matemáticos, De la realidad a los modelos*; UNAM.

Hernández R. G., Díaz Barriga, A.F.; *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo una interpretación constructivista*. Editorial Mc Graw Hill. 2002, México.

Martinez, Juan Carlos; Los modelos matemáticos, De la realidad a los modelos; *¿Cómo ves?,* No.99, Revista de divulgación de la ciencia de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Mochón, Simón; *Modelos matemáticos para todos los niveles; Cuadernos Didácticos* Volumen 9. Editorial Iberoamericana.

Leithold, Louis; *Cálculo con geometría analítica*. Editorial. Oup-Harla, 1994.

Leithold, Louis; *Cálculo para ciencias Administrativas, Biología y Sociales*. Editorial Harla.

Leithold, Louis*; Matemáticas previas al Cálculo*. Edit. Oup-Harla, 1994.

Oteyza, Hernández, Lam; *Temas selectos de matemáticas*. Editorial Prentice Hall.

Pimienta Prieto, Julio Herminio; *Constructivismo Estrategias para aprender a aprender*. Instituto Superior Pedagógico, La Habana, Cuba. Editorial Pearson.

Swokouski, Earl; *Cálculo con geometría Analítica*. Editorial Iberoamericana.

Tapia, Alonso J.; *Motivación y Aprendizaje en el Aula*: *Como enseñar a Pensar*. Editorial Santillana, Madrid. 1991

Tijonov A., Kostomárov D.*; Conferencias de matemáticas aplicadas*. Editorial Mir Moscu.

Valdés, Cervantes, Cataño. *Química I* Universidad Tecnológica de México 1998.

Wilson y Wagner, *Research Ideas for the Classroom High School Mathematics*. Mc Millan Publisshing Company.