



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLÁN

APLICACIÓN DE LA DINÁMICA NO LINEAL PARA CARACTERIZAR LA
FUNCIÓN DE LA PRESIÓN ARTERIAL Y PRESIÓN VENTRICULAR EN
RATA WISTAR.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

QUIMICA FARMACEUTICA BIOLOGA

P R E S E N T A:

NORMA CEDILLO URBAN

ASESORES: M. en C. SOLEDAD CARRETO GARCÍA

Dra. LUISA MARTÍNEZ AGUILAR



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN
UNIDAD DE LA ADMINISTRACION ESCOLAR
DEPARTAMENTO DE EXAMENES PROFESIONALES

ASUNTO: VOTOS APROBATORIOS

DRA. SUEMI RODRIGUEZ ROMO
DIRECTOR DE LA FES CUAUTITLAN
P R E S E N T E

ATN: L. A. ARACELI HERRERA HERNANDEZ
Jefe del Departamento de Exámenes
Profesionales de la FES Cuautitlán

Con base en el art. 28 del Reglamento General de Exámenes, nos permitimos comunicar a usted que revisamos la Tesis :

"Aplicación de la dinámica no lineal para
caracterizar la función de la presión arterial
y presión ventricular en Rata Wistar".
que presenta la pasante: Norma Cedillo Urbán
con número de cuenta: 40109454-3 para obtener el título de :
Química Farmacéutica Bióloga

Considerando que dicho trabajo reúne los requisitos necesarios para ser discutido en el EXAMEN PROFESIONAL correspondiente, otorgamos nuestro VOTO APROBATORIO.

ATENTAMENTE

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"

Cuautitlán Izcalli, Méx. a 01 de Abril de 2008

PRESIDENTE	MC. Soledad Carreto García	
VOCAL	MC. Gilberto Atilano Amaya Ventura	
SECRETARIO	QFB. Héctor Coss Garduño	
PRIMER SUPLENTE	MC. Guillermo A. Vázquez Coutiño	
SEGUNDO SUPLENTE	MFC. Beatriz de Jesús Maya Monroy	

AGRADECIMIENTOS

A la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán por haberme brindado la oportunidad de realizar mis estudios profesionales.

M. en C. Soledad Carreto García, por su valiosa ayuda, experiencia, entusiasmo e infinita paciencia. Además por su trato amable, comprensión, con admiración y profundo agradecimiento en la dirección del presente trabajo; pero sobre todo por la amistad brindada.

A Dra. Luisa Martínez Aguilar, por la confianza, apoyo que me ofreció y en especial por el asesoramiento para la realización de este.

A los Integrantes del jurado, por su tiempo, correcciones y sugerencias realizadas al presente trabajo.

A cada uno de mis maestros, que participaron en mi desarrollo profesional durante mi carrera, sin su ayuda y conocimientos no estaría en donde me encuentro ahora.

DEDICATORIAS

A DIOS

Quien me ha permitido vivir, me ha dado la dicha de conocer la sabiduría para descubrir lo correcto, la voluntad para elegirlo y la fuerza para hacer que perdure. Gracias por enseñarme el camino para hacer realidad una ilusión que parecía difícil de lograr. Por eso y muchas cosas más “GRACIAS”.

A MI MADRE

A quien me ha heredado el tesoro más valioso que puede dársele a un hijo: “amor”. Porque gracias a tu cariño, guía y apoyo he llegado a realizar uno de mis anhelos más grandes de mi vida, fruto del inmenso amor, confianza que en mi se depositó, con los cuales he logrado terminar mis estudios profesionales que constituyen uno de los legados más grandes que pudiera recibir y por lo cual viviré eternamente agradecida.

A MI PADRE[†]

A la memoria de mi padre, como una muestra de mi más profundo agradecimiento y sincero reconocimiento por su cariño, por enseñarme que en la vida se logra lo que se quiere sin importar las limitaciones que se tengan, ese es el gran legado que me dejaste, nunca olvidare tus consejos y tu fortaleza. Gracias por cuidar de mí en donde quiera que te encuentres.

A MIS HERMANAS

Sabiendo que no existirá una forma de agradecer una vida de sacrificio y esfuerzo, quiero que sientan que el objetivo logrado también es de ustedes y que la fuerza que me ayudo a conseguirlo fue su apoyo moral y estímulos brindados con infinito amor, admiración y confianza.

A MIS AMIGOS

Por su amistad, apoyo y motivación, lo cual ha contribuido de alguna manera para seguir adelante y no abandonar el sueño. Cada uno de mis amigos es especial, cada uno de ellos ha compartido una parte de mi vida, cada uno sabe cuánto lo quiero, porque he aprendido a decírselo, no con palabras si no con acciones, con actitudes y con detalles. Sería injusto mencionar sus nombres, ya que son demasiados; por tal motivo únicamente quedarán en mi mente y en mi corazón

A TI

En quien he encontrado confianza, seguridad pero sobre todo palabras de aliento cuando más las he necesitado. Gracias por pasar algún tiempo conmigo, escuchando mis pensamientos, dándome valor y entendimiento, pero sobre todo por hacerme comprender que debo expresar lo que necesito, después de todo ¿qué es lo peor que puede pasar?

APORTACIONES DE ESTA TESIS:

- Generación de atractores en forma espacio-fase convencional para la arritmia extrasístole ventricular a partir de datos experimentales de electrocardiograma. XLVII Congreso Nacional de Física. Hermosillo Sonora, 25-29 de Octubre del 2003.
- Reconocimiento de arritmias a través de atractores extraños visuales. XLVII Congreso Nacional de Física. Hermosillo Sonora, 25-29 2003.
- Simulación de datos experimentales del Ritmo Cardíaco por métodos computacionales. XLVII Congreso Nacional de Física. Hermosillo Sonora, 25-29 2003.
- ¿Por qué es la segunda causa de muerte? ¿Por qué debemos de cuidar nuestra masa corporal? XLVII Congreso Nacional de Física. Hermosillo Sonora, 25-29 de Octubre del 2003.
- Efectos del Tabaquismo en la Sociedad. XLVII Congreso Nacional de Física. Hermosillo Sonora, 25-29 de Octubre del 2003.
- Characterization of the Cardiac Beat in Young Men and Women. 3^o International Workshop Graphs-Operads-Logic. Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM. February 5 to 13, 2004.
- Study of Arrhythmias in Rats through Nonlinear System Dynamics Analysis Techniques. 3^o International Workshop Graphs-Operads-Logic. Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM. February 5 to 13, 2004.
- The Effect of Human Overweight on Physiological Time Series. 1ST International Conference on Nonlinear, Fractional and Stochastic Dynamics and 1st International Workshop on Complex Systems, Applied Category Theory, Fractals, Fractional, Calculus and Chaos. Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM. January 24 to 28, 2005
- On the Behavior of Cardiac Rhythm Time Series of Smokers. . 1ST International Conference on Nonlinear, Fractional and Stochastic Dynamics and 1st International Workshop on Complex Systems, Applied Category Theory, Fractals,

Fractional, Calculus and Chaos. Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM. January 24 to 28, 2005.

- Detection Cardiac Rhythm Behavior by Strange Attractors. 1st ISSCultArt Meeting on the Classification, Characterization, Analysis Modeling, Simulation and Optimizaton of Complex Systems and 1st ISSCultArt Workshop on Recurrence Analysis, Time Series Analysis, Nonlinear Phenomena and Applications. School of Sciences, University City, UNAM, México. January 24-27 of 2006.
- Nueva Herramienta para visualizar la función del corazón, una alternativa más para el médico. XX Congreso Interamericano de Cardiología y XXIV Congreso Nacional de Cardiología. Cancún, Quintana Roo del 28 de enero al 1 de Febrero del 2006
- Aplicación de la Dinámica no Lineal para caracterizar la Presión arterial en Rata Wistar. Second International Conference on No-Linear, Fractional and Stochastic Dynamics and Second International Work Shop on Complex System, Applied Category Theory, Fractals, Fractional, Calculus and Chaos, Mérida Yucatán México. 15 al 19 de Mayo del 2006.
- Desarrollo de atractores extraños visuales de arritmia ventricular. Second International Conference on No Linear, Fractional and Stochastic Dynamics and Second International Work Shop on Complex System, Applied Category Theory, Fractals, Fractional, Calculus and Chaos, Mérida Yucatán México. 15 al 19 de Mayo del 2006.
- Análisis de recurrencia visual para caracterizar la función de la presión diastólica ventricular en Rata Wistar. Second International Conference on No Linear, Fractional and Stochastic Dynamics and Second International Work Shop on Complex System, Applied Category Theory, Fractals, Fractional, Calculus and Chaos, Mérida Yucatán México. 15 al 19 de Mayo del 2006.
- Caracterización de la presión arterial en Rata Wistar a través de la Dinámica No-Lineal. Primera Semana de Ingeniería y Tecnología XXX de la Carrera de Ingeniería en Alimentos. Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán Campo-1, del 20-23 de Noviembre del 2007.
- Caracterizar las Funciones Fisiológicas de la Presión Arterial del Ventrículo Izquierdo a través de la Dinámica No-lineal. XXV Congreso Nacional de Cardiología y XII Congreso de la Sociedad Latina de Cardiología y Cirugía Cardiovascular Pediátrica. Veracruz México, del 24 al 28 de Noviembre del 2007.

El presente trabajo se realizo GRACIAS al apoyo de DGAPA – UNAM mediante los proyectos:

➤ CATEDRA DE DOCENCIA

No. De Cátedra QN-0018 “Optimización de la enseñanza en la Fisicoquímica”.
Responsable de la Cátedra M. en C. Carreto García Soledad.

➤ CATEDRA DE INVESTIGACION

No. De Cátedra IN1-29 “Dinámica No Lineal y sus Aplicaciones en Ciencias de la Salud del Área de las Ciencias Biológicas y de la Salud”. Responsable de la Cátedra M. en C. Carreto García Soledad.

➤ PROYECTO PAPIIME

No. de Proyecto EN201004 “Aplicación del Análisis de las Series de Tiempo en Sistemas Electrofisiológicos”. Responsable del proyecto Dra. Martínez Aguilar Luisa.

➤ PROYECTO PAPIIT

No. De Proyecto IN207705 Responsable del proyecto Dra. Martínez Aguilar Luisa.

La parte experimental se realizo en:

- Laboratorio de Farmacología del Miocardio ubicado en la Unidad de Posgrado de la FES Cuautitlán. Dra. Martínez Aguilar Luisa.
- Laboratorio de Dinámica no Lineal de Análisis de Series Electrofisiológicos, ubicado en la Planta baja del L-5, (anexo), FES Cuautitlán, responsable M. en C. Carreto García Soledad.

ÍNDICE

	Pág.
RESUMEN	1
INTRODUCCIÓN	4
OBJETIVOS E HIPÓTESIS	7
 1. INTRODUCCIÓN AL CAOS.	
 1.1 Definición del caos.	8
1.2 Antecedentes Históricos.	10
1.3 Perspectivas.	24
 2. EXPLORANDO LA TEORÍA DEL CAOS.	
 2.1 Conceptos generales.	28
2.2 Sistemas Dinámicos.	29
2.2.1 Sistemas Dinámicos De Tiempos Discreto.	30
2.2.2 Sistema Dinámicos De Tiempo Continuo.	32
2.3 Mapeos.	33
2.4 Fractales.	43
2.5 Dimensión Fractal.	46
2.6 Espacio Fase.	47
2.7 Sensibilidad a las Condiciones Iniciales.	49
2.8 Atractores.	50

3. ANALISIS DE SISTEMAS DINAMICOS.

3.1 Importancia del Análisis de Sistemas Dinámicos.	63
3.2 Series de Tiempo.	66
3.3 Análisis Tradicional de Series de Tiempo.	68
3.4 Análisis de la Dinámica no Lineal para Series de Tiempo.	73
3.4.1 Distribución de Probabilidad.	74
3.4.2 Diagramas de Espacio de Fases.	76
3.4.3 Mapeos ó Secciones de Poincaré.	82
3.4.4 Exponente de Lyapunov.	84
3.4.5 Espectro de potencia.	87
3.4.6 Frecuencia dominante.	92
3.4.7 Función de autocorrelación.	94
3.4.8 Exponente de Hurst.	97
3.4.9 Entropía de Kolmogorov.	99
3.4.10 Dimensión de capacidad.	101
3.4.11 Dimensión de correlación.	102
3.4.12 Gráficos de Recurrencia ó Mapeos recurrentes.	104

4. SISTEMA CARDIOVASCULAR.

4.1 Generalidades.	111
4.2 Ciclo Cardíaco.	120
4.3 Presión Arterial.	127
4.3.1 Conceptos Generales.	127
4.3.2 Factores que Afectan la Presión Arterial.	129
4.4 Física del Sistema Cardiovascular.	131
4.5 Caos y Sistema Cardiovascular.	135

5. PARTE EXPERIMENTAL.

5.1 Objetivo General.	141
5.1.1 I Objetivos Particulares.	141
5.2 Material y Equipo.	141
5.2.1 Material Biológico.	141
5.2.2 Sustancias.	142
5.2.3 Material.	142
5.2.4 Equipo y Software.	142
5.3 Método.	142
5.3.1 Obtención de Datos.	142
5.3.2 Obtención de Series de Tiempo.	143

6. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

6.1 Resultados.	149
6.1.1 Gráficas de las Series de Tiempo Experimentales.	152
6.1.2 Análisis de las Series de Tiempo Experimentales.	156
6.2 Discusión.	167

CONCLUSIONES.	172
REFERENCIAS	174
APÉNDICE	180

RESUMEN

La teoría del caos consiste, de manera muy general, en el estudio de los sistemas complejos siempre variables, irregulares y aparentemente no periódicas, que están basados en procedimientos de recurrencia y sofisticados algoritmos matemáticos que se ejecutan a través de un conjunto de ecuaciones diferenciales, que sirven como modelo para un sistema físico.

Esta teoría es interdisciplinaria y multidisciplinaria. Las aplicaciones de las matemáticas del Caos son en extremo diversas, e incluyen el estudio del flujo turbulento de fluidos, dinámica de fluidos, física del estado sólido, física de plasmas, movimiento de cúmulos de estrellas, irregularidades en el ritmo cardíaco, control de arritmias en los marcapasos, la compresión de imágenes y sonido, dinámica de poblaciones, reacciones químicas, comportamiento de algunos contaminantes en el medio ambiente. La complejidad, lo impredecible y el desorden aparecen por todos lados, en todas las ciencias y en nuestra propia vida como lo es el clima, huracanes, terremotos, tornados, enfermedades, epidemias, accidentes, tráfico, un infarto, la bolsa de valores, el comportamiento humano.

La importancia de la caracterización de las series de tiempo radica en que nos podemos anticipar un paso, es decir, podemos encontrar la explicación de por qué algunas series son más predecibles que otras, y cuáles son imposibles de predecir, aún con las mejores técnicas modernas de predicción que son muy poderosas como las llamadas técnicas neurocomputacionales y otras relacionadas. En este campo se encuentran las redes neuronales artificiales, y la literatura ha mostrado que actualmente son las mejores en cuanto a predicción del fenómeno en estudio por series de tiempo, debido a que su importancia radica en que puede tratar con series que son muy complejas, no-lineales y que además no es necesario contar con las ecuaciones matemáticas que gobiernan o describan tales fenómenos.

Es así que surge la inquietud por elaborar una tesis de tipo experimental haciendo una investigación descriptiva y correlacional para justificar la implementación del análisis de series de tiempo a través de técnicas de la dinámica no lineal con la intención de mejorar la interpretación de los resultados en la presión arterial y presión ventricular para observar el funcionamiento del aparato cardiovascular.

El trabajo se divide en seis capítulos. En el primero se destaca la evolución del concepto de Caos en el que se reconocen las ideas dominantes en diferentes escenarios históricos, los hechos que prevalecían y las inquietudes que perseguían por lograr una unificación de ideas y técnicas que fueran universales para esta ciencia.

Además, se conceptualiza la teoría del caos, destacando su importancia como medio para obtener información sobre un sistema. Por último, se reconoce la influencia de dicha teoría en la fisiología.

En el segundo capítulo se analizan los antecedentes de la teoría del caos para definir consecuentemente las características, propiedades y términos utilizados para poder comprenderla y resaltar las ventajas y desventajas que tiene.

En el tercer capítulo se rescatan algunos datos históricos sobre el surgimiento de la dinámica no lineal, así como describir un sistema no lineal, una serie de tiempo, analizar y clasificar cada una de las técnicas de análisis para las series de tiempo; así como su importancia e interpretación.

En el cuarto capítulo se destacan las funciones del sistema cardiovascular, así como su anatomía; se enfatiza la importancia del ciclo cardíaco, el papel de la presión arterial y la actividad hemodinámica, que forman la parte fisiológica de ésta tesis.

En el capítulo cinco se desarrolla la metodología, para la obtención de series experimentales de la presión arterial y la presión ventricular, así como los pasos que se deben de seguir para la obtención de las series de tiempo para su posterior análisis.

En el ultimo capitulo se pueden observar los resultados obtenidos a partir de las series de tiempo, se ilustran los diagramas de fase (atractores), los gráficos de recurrencia visual, así como la distribución de probabilidades que son los parámetros que nos permiten hacer una caracterización del tipo de comportamiento que presentan la presión sistólica, la presión diastólica y la frecuencia cardiaca. Así como una pequeña interpretación de dichos parámetros.

En el Apéndice se hace una recapitulación de todos los resultados obtenidos en las series, ya que en resultados solo se presentan los más representativos de cada serie para una mejor presentación.

INTRODUCCIÓN

Para el determinismo clásico, todo sistema natural o artificial, debería presentar trayectorias de evolución totalmente predecibles para cualquier tiempo futuro. El planteamiento actual, surgido a raíz de los trabajos en sistemas dinámicos no lineales, es diferente. Actualmente se cree que la mayoría de los sistemas no lineales presentan pautas de evolución intrínsecamente indeterminadas; incluso con la ayuda del computador ha sido posible simular trayectorias de evolución para muchos sistemas y se ha observado que sólo son predecibles los muy simples y bajo condiciones ideales. Los sistemas reales presentan trayectorias que tarde o temprano, dependiendo de la complejidad del sistema, se hacen indeterminadas; incluso sistemas regidos por leyes totalmente deterministas, cuando despliegan su evolución, se hacen impredecibles al cabo de un tiempo mayor o menor. Usualmente se obtiene la información a través de series temporales, o sea por medio de registros del cambio de alguna de las variables del sistema durante un tiempo determinado. En medicina son muy comunes estos registros, el ECG, el EEG, una curva de glicemia, etc., son ejemplos de series temporales. Estos registros pueden ser analizados de muy diversas formas, tratando de inferir a partir de ellos cuales son las características del sistema que los originó.

Puede establecerse, por ejemplo, cuál es la gama de amplitudes de la serie por medio de una técnica llamada análisis de Fourier; o pueden graficarse en un sistema especial de coordenadas llamado espacio fase que permite dibujar la trayectoria del sistema durante un tiempo dado.

Las series temporales obtenidas a partir de sistemas naturales muestran varias características comunes:

1. Son muy irregulares y presentan un espectro de Fourier con una rica variedad de amplitudes, exhibiendo lo que se llama un amplio espectro de bandas.

2. A pesar de que durante su recorrido se mueven dentro de un intervalo determinado, "ensayan" todas las posibilidades dentro del mismo; por eso se dice de estos sistemas que poseen estabilidad global (por moverse dentro de un intervalo determinado), con inestabilidad local (por ensayar todas las posibilidades dentro del intervalo).

3. Cuando estas series se grafican en un espacio-fase, despliegan figuras geométricas complejas que reciben el nombre de atractores extraños o caóticos. El análisis de estos atractores se ha convertido en una herramienta promisorio para estudiar sistemas biológicos.

Uno de los sistemas más extensamente estudiado es el corazón.

Aunque la frecuencia cardíaca normal parece regular, haciendo un análisis más profundo se demuestra que presenta gran irregularidad; se observan variaciones de segundo a segundo con una pauta caótica. Comparando ECG de individuos sanos con los obtenidos de pacientes con alteraciones cardíacas se ha observado que los corazones sanos y jóvenes son más caóticos que los enfermos ⁴⁵.

Por ejemplo, la transición de un ritmo sinusal a una fibrilación ventricular está marcada por un cambio de espectro: el amplio espectro normal es reemplazado por uno estrecho notándose que, al contrario de lo esperado, el trazado correspondiente a la fibrilación es más regular que el trazado normal.

Por estudios retrospectivos de ECG de pacientes ambulatorios que luego han sufrido infarto de miocardio, se ha observado una disminución de la variabilidad del ritmo cardíaco en los períodos previos al ataque, disminución observable incluso meses antes de la crisis.

Estos análisis matemáticos han mostrado la variabilidad del corazón sano, indicando que en condiciones de normalidad la frecuencia cardíaca fluctúa considerablemente aun en ausencia de cualquier estímulo externo fluctuante y que el mecanismo de control del ritmo cardíaco es intrínsecamente caótico y nunca alcanza el

estado estacionario sugerido por el concepto de homeostasis. Incluso se ha utilizado la teoría del caos para revertir arritmias. Administrando estímulos eléctricos, a tiempos irregulares, a un corazón arrítmico es posible revertirlo al ritmo sinusal ⁵⁸.

Las investigaciones actuales sugieren que además de su importancia en el corazón y cerebro el caos puede jugar un papel considerable en otros sistemas fisiológicos. En algunos pacientes con leucemia, por ejemplo, el número de glóbulos blancos oscila dramáticamente de semana a semana. Se cree que esta fluctuación periódica es una manifestación de la pérdida del comportamiento caótico normal: las personas sanas tienen oscilaciones caóticas en sus niveles de células blancas sanguíneas; en cambio la oscilación en la leucemia es periódica.

Se ha sugerido ⁵⁸ que el caos evita un comportamiento estrictamente periódico que sería muy perjudicial para el organismo. El caos quizás constituya la principal propiedad de los sistemas reguladores a nivel fisiológico, dotando al organismo de una flexibilidad que le da robustez y posibilidades de respuesta novedosa ante un ambiente permanentemente cambiante.

Por décadas se ha interpretado el funcionamiento normal de los sistemas fisiológicos como orientado hacia la disminución de la variabilidad y el mantenimiento de un estado estacionario homeostático. El descubrimiento de la ubicuidad del caos en el organismo puede producir cambios radicales en nuestra manera de concebir el orden, la regularidad y la constancia en situaciones de salud y enfermedad.

OBJETIVOS E HIPÓTESIS

OBJETIVO GENERAL

A partir de los registros del monitoreo de frecuencia cardiaca, presión arterial, presión sistólica, presión diastólica en ventrículo izquierdo de rata Wistar obtener y analizar las series de tiempo, se tendrá la probabilidad de distinguir el tipo de comportamiento que presenta cada uno de los parámetros antes mencionados.

OBJETIVOS PARTICULARES

Describir la Variabilidad de la presión arterial mediante el Análisis de las Series de tiempo para poder comparar con la Variabilidad de la presión sistólica, presión diastólica en ventrículo izquierdo, y obtener diferencias y semejanzas entre sí.

Precisar el tipo de comportamiento que presentan las series de tiempo de la presión arterial, presión sistólica, presión diastólica en ventrículo izquierdo en rata Wistar, para ver si es posible su predicción.

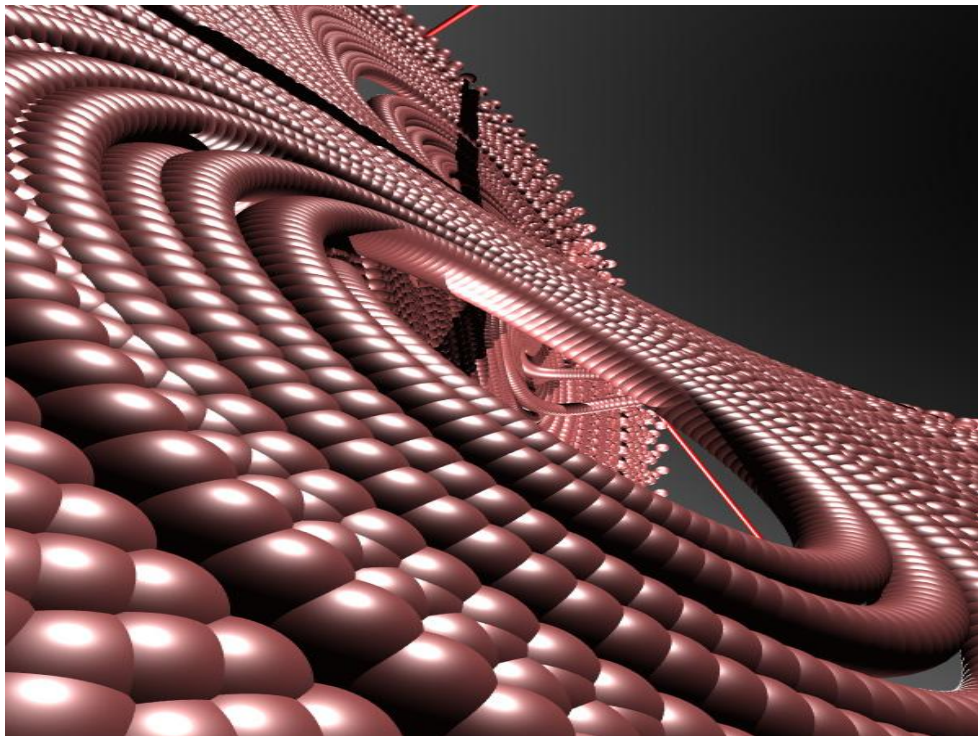
Enfatizar la importancia que tiene en la actualidad el uso de la Dinámica no Lineal en la investigación e identificación de procesos fisiológicos, así como la predicción del sistema, para poder advertir ciertas alteraciones en dichos procesos y alcanzar así una medicina preventiva.

HIPÓTESIS

El comportamiento de las series de tiempo de presión arterial y presión ventricular en Rata Wistar, utilizando técnicas de predicción basadas en la Dinámica No Lineal, se pueden caracterizar de acuerdo a su grado de complejidad, en constantes, periódicas, cuasiperiódicas, caóticas y aleatorias, a saber que a menor grado de complejidad de la serie ésta se predice con menor grado de error, a mayor grado de complejidad de la serie el error en la predicción aumenta y que si la serie es caracterizada como aleatoria la predicción se vuelve imposible.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN AL CAOS



“Cuando puedes medir aquello de lo que hablas, y expresarlo con números, sabes algo acerca de ello; pero cuando no lo puedes medir, cuando no lo puedes expresar con números, tu conocimiento es pobre e insatisfactorio, puede ser el principio del conocimiento, pero apenas has avanzado en tus pensamientos a la etapa de ciencia”.
[William Thomson Kelvin]

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN AL CAOS

1.1 DEFINICIÓN DE CAOS

Definir el término caos resulta muy complejo y difícil, debido al origen mismo de la palabra ésta proviene del griego **Khaos** que significa “abismo”, o bien, “abismo abierto”. Esta descripción metafórica tiene mucho sentido en la Física Moderna. A continuación se presentan diferentes definiciones de las ideas relacionadas con el análisis de la palabra caos.

CAOS: (del griego Khaos, abismo) Según muchas tradiciones poéticas y religiosas, es la indeterminada confusión y mezcla de los elementos eternos, antecedente de la configuración del mundo ordenado en un universo o cosmos. Confusión o desorden: Sin alguien que mande...reina el caos.¹

CAOS: La palabra significa abismo abierto. El estado de completo desorden anterior a la formación del mundo a partir del cual según los mitólogos, se inicia la formación. Hesiodo dice: “Antes de todos los seres estaba el Caos, luego la Tierra de ancho seno”. Aristóteles combatió esta noción ya que admitía la eternidad del mundo. Kant se sirvió de ésta para indicar el estado originario de la materia, del que más tarde se originaron los mundos.²

CAOS: En Mecánica y Matemáticas, es el comportamiento de sistemas dinámicos gobernados por leyes deterministas, el cual es aparentemente azaroso o impredecible. Un término más preciso “Caos Determinístico”, sugiere una paradoja debido a que conecta dos nociones que son familiares y que comúnmente se

consideran incompatibles. La primera es el azar, o impredecibilidad, como el caso de la trayectoria de una molécula en un gas o en la elección de un individuo de una población. En el análisis convencional, el azar fue considerado más aparente que real, surgiendo de la ignorancia de muchas causas del trabajo. En otras palabras se creía que el mundo era impredecible porque a su vez es complicado. La segunda noción es la de movimiento determinístico, como el de un péndulo o un planeta, que ha sido aceptada desde el tiempo de Sir Isaac Newton como ejemplo del éxito predictivo de la ciencia, sobre aquello que inicialmente es complejo.³

CAOS: En Mecánica Clásica es el comportamiento de un sistema dinámico que puede describirse geoméricamente como el movimiento sobre un “atractor”.⁴

De las definiciones anteriores de Caos se puede observar, que definir este término, al menos matemáticamente, es más complejo de lo que parece. En 1986, en una prestigiosa conferencia Internacional sobre Caos celebrada en la real Sociedad de Londres se dio una definición más concreta del término:

CAOS: Comportamiento estocástico que ocurre en un sistema determinístico. Estocástico significa aleatorio y determinístico es un término introducido por Pierre Laplace, que en dinámica se refiere a las leyes inmutables y precisas que sigue un sistema dinámico, es decir su ecuación.³

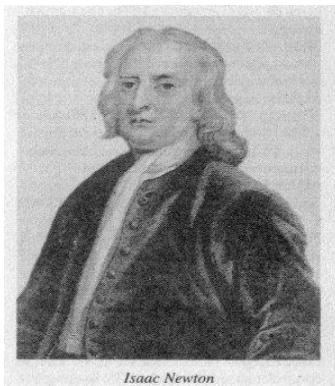
La teoría del caos se asocia con el estudio de los sistemas dinámicos no lineales y complejos.⁵

Por lo tanto, la teoría del caos consiste, de manera muy general, en el estudio de los sistemas complejos siempre variables irregulares y aparentemente aperiódicos, que están basados en la recursión y sofisticados algoritmos matemáticos que se ejecutan a través de un conjunto de ecuaciones diferenciales sirviendo como modelo a un sistema físico.

1.2 ANTECEDENTES HISTÓRICOS

Antes de comenzar a relatar la historia de la Teoría del Caos, es conveniente dar una breve explicación de lo que se trata. La teoría del Caos, que es conocida por algunos como Teoría de la Complejidad, es una ciencia interdisciplinaria. Su hipótesis, fundamentada matemáticamente, es que la mayoría de los fenómenos naturales son complejos no tanto por la presencia de múltiples factores que interactúan, sino por una propiedad intrínseca de los mismos, propiedad que es característica aún de los sistemas más sencillos: la no linealidad. En otras palabras, la complejidad aparece aun cuando nos encontremos en un sistema sencillo, por ejemplo un péndulo. Y cuando aparece la complejidad, el caos se presenta; cuando no es posible hacer predicciones a largo plazo porque el sistema no se repite periódicamente, puesto que una pequeña alteración se amplifica rápidamente como una avalancha. Pero el Caos guarda un orden oculto. Aunque parezca sólo desorden (de ahí la palabra caos), no lo es, el desorden total es al azar, cualquier cosa es posible; en el Caos, no todo comportamiento es posible. El Caos está gobernado por matemáticas inflexibles, aunque no conozcamos la trayectoria, conocemos los caminos por los que debe transitar tarde o temprano. Estos caminos son los Fractales. ¡Lo simple puede generar complejidad, impredecibilidad, aparente desorden! ¡Y lo ordenado puede emerger de lo complejo, a su vez! esas fueron las lecciones del Caos.

La ciencia, desde Galileo, fue adquiriendo una confianza en sí misma que para muchos parecía ser ilimitada. Esta confianza se afianzó en gran medida debido al éxito de la mecánica de **Newton**.



Newton, Isaac

Nació el 4 de enero de 1643 en Woolsthorpe, Inglaterra.

Murió el 31 de marzo de 1727 en Londres, Inglaterra.

Su constante búsqueda por reducir el complejo comportamiento de la naturaleza y el universo a meras ecuaciones hace resaltar como uno de los reduccionistas más importantes de todos los tiempos que ha influenciado de manera muy importante a casi todos los científicos posteriores. Con la ayuda de Hooke, llegó a desarrollar toda una teoría sobre la mecánica celeste que era capaz de explicar un amplio intervalo de fenómenos, desde los eclipses hasta los cometas, con la misma predecibilidad que si se tratara de un simple mecanismo de relojería aunque de dimensiones gigantescas.^{7,8}

Tanto que, **Laplace**, en el siglo XVIII se permitió decir: “El estado presente del sistema de la naturaleza es evidentemente una consecuencia de lo que fue en el momento precedente, y si concebimos una inteligencia tal que a un instante dado conociera todas las fuerzas que animan la Naturaleza y las posiciones de los seres que las forman, podría condensar en una única fórmula el movimiento de los objetos más grandes del universo y de los átomos más ligeros: nada sería incierto para dicho ser; y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos. Determinismo científico”.⁶

Pero, a finales del siglo XIX, los científicos se toparon con obstáculos graves al tratar de seguir el objetivo de predecir todo.

James Clerck Maxwell podría ser considerado como el precursor de la Teoría del Caos. En 1873, en una conferencia en la Universidad de Cambridge, expresó lo siguiente: “Cuando la situación es tal que una variación infinitamente pequeña del estado actual alterará sólo en una cantidad infinitamente pequeña el estado en algún tiempo futuro, se dice que la condición del sistema, sea en reposo o movimiento, es estable. Por el contrario, cuando una variación infinitamente pequeña en el estado presente puede conducir a una diferencia finita en el estado del sistema en un tiempo finito, se dice que la condición del sistema es inestable.



Laplace, Pierre Simon

Nació el 28 de-marzo de 1749 en Beaumont, Francia

Murió el 5 de marzo de 1827 en Paris, Francia.

Sus logros en el campo de la mecánica celeste lo hicieron concebir la idea de que algún día se encontraría una fórmula capaz de determinar con toda exactitud tanto el pasado como el futuro de cualquier sistema dinámico sin importar qué tan pequeño o grande fuera. Esta postura, tanto mecanicista como reduccionista de la naturaleza, fue bien aceptada por la comunidad científica de su época y todavía en la actualidad, se continúa considerando válida aunque de manera menos dogmática y totalitaria, como queda evidenciado por la búsqueda por encontrar la Gran Teoría Unificada que realiza la física actual.^{7,8}

Es claro que la existencia de condiciones inestables hace imposible la predicción de eventos futuros si nuestro conocimiento del estado presente es sólo aproximado y no exacto...⁹ Hay cierta clase de fenómenos, como ya dije, en los cuales un pequeño error

en los datos sólo introduce un pequeño error en el resultado. Tales son, entre otros, los fenómenos a gran escala del Sistema Solar, y aquellos donde las leyes más elementales de la Dinámica contribuyen en la mayor parte al resultado. El curso de los eventos en estos casos es estable. Hay otra clase de fenómenos que son más complicados, y en los cuales, pueden ocurrir casos de inestabilidad; el número de tales casos se incrementa, de manera excesivamente rápida, a medida que el número de variables se incrementa". En su conferencia, Maxwell concluyó alentando a sus colegas científicos a estudiar los fenómenos que presentaban inestabilidades, más que los estables, como se acostumbraba en esa época.

En el siglo XIX, pese a la confianza en que la Física estaba por concluirse, se reconocía que existían problemas no resueltos. Dos de ellos, aparentemente muy simples. Las leyes de Newton permitían calcular simplemente la trayectoria de dos cuerpos que colisionaran entre ellos. No así para el caso de tres cuerpos. Si tres bolas de billar chocan al mismo tiempo... ¿se pierde la certidumbre!

Un problema semejante existía para los cielos: era fácil determinar trayectorias de dos cuerpos en el espacio, bajo el efecto único de la atracción gravitacional, como la Tierra y el Sol solos: sólo podrían ser elipse (como en este caso), parábolas o hipérbolas (como la de algunos cometas que se acercan al Sol y después se alejan para jamás regresar). Pero en el caso de tres cuerpos, como la Tierra, el Sol y la Luna, no existía una solución exacta. Y el problema es que no existen sólo dos cuerpos en los cielos, sino una gran multitud, por lo que los cálculos con las ecuaciones de Newton son sólo aproximaciones, en realidad.



James Clerk Maxwell (1831-1879)

Nació en Edimburgo en el seno de una familia escocesa. Desde joven, Maxwell mostró grandes dotes para las matemáticas. Inventó un trompo para mezclar el color y el oftalmoscopio (aparato que permite ver en el interior de un ojo), que todavía usan los doctores; estudió la mezcla de los colores de la luz, y sus principios fundamentales. Su primera gran aportación a la ciencia fue la descripción de la naturaleza de los anillos de Saturno. Maxwell propuso la naturaleza fragmentaria de estos, como luego comprobaría la nave Voyager. También estudió el calor y el movimiento de los gases, para formular la teoría cinética de los gases de Maxwell-Boltzmann, que muestra la relación entre temperatura, calor y movimiento molecular.^{10, 11, 12}

Un sistema de dos cuerpos en el espacio es estable, es decir, si las trayectorias son elipses, permanecerán así por siempre; por ejemplo, la Tierra siempre girando alrededor del Sol en una órbita elíptica. Pero, ¿realmente es así?, el Sol y la Tierra no están solos, el sistema solar está constituido por muchos cuerpos: ¿no será en realidad un sistema inestable a largo plazo y los planetas acabarán separándose eventualmente del Sol? Para conocer la respuesta, debía resolverse, antes que nada, el problema de los tres cuerpos. En 1887, el rey Óscar II de Suecia convocó un concurso para matemáticos. El problema a resolver era: ¿es estable el Sistema Solar?⁶

Un francés, **Henri Poincaré**, uno de los que aceptaron el reto, atacó el problema desde la raíz más simple, desde los tres cuerpos, pero con algunas restricciones (por ejemplo, uno de los cuerpos se suponía de masa prácticamente nula, por lo que no ejercía efecto gravitacional sobre los otros dos), el llamado modelo reducido de Hill. Poincaré ganó el premio, pero no por haber resuelto el problema, sino por haber demostrado que no se podía resolver por los métodos usualmente empleado entonces. Más aún, encontró algo que lo horrorizó: la existencia de los enredos homocíclicos. Dichos enredos implicaban que problemas tan simples como el del modelo reducido de Hill podrían generar comportamientos tan complicados que implicaban la imposibilidad de hacer predicciones. Poincaré acababa de ver la Sombra del Caos. Poincaré, a partir de esto, siguió estudiando y fundó la topología, que es la teoría matemática de la continuidad, base importante de la Teoría del Caos, e introdujo algunas de las técnicas matemáticas empleadas en la Teoría del Caos, como el llamado mapa o sección de Poincaré.

En 1903 escribió: “una pequeña causa que ni siquiera alcanzamos a percibir determina un efecto considerable que sí vemos claramente, y entonces decimos que el efecto es debido al azar. Si conocemos exactamente las leyes de la naturaleza y la situación del universo en el momento inicial, podríamos predecir exactamente la situación del mismo universo en cualquier momento posterior. Pero aun si fuera el caso que las leyes de la naturaleza no nos guardasen ningún secreto, todavía nosotros conoceríamos la situación inicial sólo aproximadamente. Si esto nos permitiera predecir la situación posterior con la misma aproximación, que es todo lo que necesitamos,

podríamos afirmar que el fenómeno ha sido predicho, que es gobernado por leyes conocidas. Pero esto no es siempre así; puede pasar que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan grandes diferencias en el fenómeno final. Un pequeño error al principio produce un error enorme al final. La predicción se vuelve imposible, y tenemos un fenómeno fortuito"... Otra vez la inestabilidad de la que hablaba Maxwell.^{13, 14,20}



Jules Henri Poincaré (1854-1912)

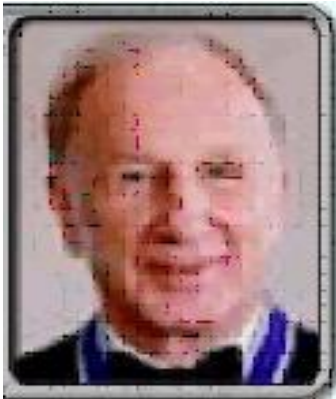
Matemático francés nacido en la ciudad de Nancy en 1854, y fallecido en París, en el año de 1912. Poincaré demostró, entre otras cosas; que muchos sistemas sencillos pueden tener un comportamiento muy complicado (por ejemplo, tan sólo el Sol, la Tierra y la Luna, considerados como masas puntuales sujetas a su atracción mutua gravitatoria). Hasta ese momento se asociaba en Física al desorden con sistemas muy complejos, con problemas que necesitan de muchas variables para ser descritos. Demostró también, cómo sistemas con muy pocos grados de libertad pueden también tener un comportamiento tan complicado que es prácticamente imposible predecir su futuro.^{14, 15, 16,20}

Estamos ante las primeras luces de la era de la Teoría del Caos. Durante el siglo XIX, las matemáticas se enfocaron, en cuanto a las ecuaciones diferenciales que modelan los procesos naturales, a estudiar los llamados sistemas lineales, aquellos que tenían soluciones periódicas (el movimiento de un péndulo) o asintóticas (como el movimiento de una canica cuando se deja caer en un cuenco, finalmente se detiene en el fondo del mismo, no importando donde comenzó su movimiento. El estudio de los sistemas lineales fue exitoso, se encontraron muchas formas de entenderlos, resolverlos aunque fuera aproximadamente; por su linealidad eran característicamente predecibles. Tal vez debido a la educación recibida en las escuelas o el entrenamiento en los laboratorios, pocos científicos se preocupaban de los sistemas no lineales, que son la inmensa mayoría. Los procesos naturales eran simplificados para ajustarlos a sistemas lineales y poder así ser estudiados; pero con frecuencia se encontraban con aberraciones debido a esas simplificaciones: "agua seca", péndulos sin fricción imposibles, etc. Tal vez algo importante se perdía en la simplificación...^{3, 13,17} Pero los sistemas no lineales eran duros de atacar, para la mayoría no existían soluciones analíticas al estilo de los sistemas lineales, sólo se podía tener soluciones aproximadas. En general, las soluciones aproximadas son en forma de series (difícil y no aplicable en

general) o de soluciones numéricas (aplicable en general). El problema con las soluciones aproximadas es que se necesitan muchas operaciones matemáticas repetitivas para encontrar una solución. Hacer un cálculo del clima, por ejemplo, podría tardar meses, cuando el resultado ya no tuviera mucha utilidad práctica. La llegada de las computadoras electrónicas vino a cambiar este panorama.

Edward N. Lorenz, en 1961, en el Instituto Tecnológico de Massachussets, ya usaba una computadora para simular el clima. Aquella era la época de las computadoras de válvulas de vacío, de gran tamaño y muy lentas en comparación con las computadoras de escritorio actuales. Él usaba una Royal McBee. Lorenz modeló el clima de un mundo ideal, sin nubes, el terreno suave como un cristal, sin montañas, nunca llegaba la noche, sin lluvia y sin cambio de estaciones. Era necesario hacer estas simplificaciones para tener un modelo matemático lo bastante sencillo para poder manejarse. De hecho, el modelo constaba de 12 ecuaciones. Lorenz introducía las condiciones iniciales en la computadora y ésta hacía el cálculo numérico, arrojando resultados del clima a través del tiempo. Los datos que imprimía eran presiones, direcciones y velocidades del viento. Trataba de encontrar alguna periodicidad en los cambios. Las corridas tomaban mucho tiempo, por lo que, en una ocasión, para no tener que comenzar desde el principio, de un listado ya impreso, tomó los valores de la mitad de la corrida y los introdujo como valores iniciales en la computadora. Y se fue a tomar un café. Cuando regresó, encontró que la lista impresa anteriormente ya no coincidía con lo que estaba arrojando la computadora. Después de una revisión exhaustiva de la máquina hasta que encontró la respuesta: la computadora manejaba internamente seis decimales para sus cálculos, pero imprimía solamente tres. Lorenz había tomado estos números con tres decimales para alimentar la computadora. Las diferencias de diezmilésimos que existían entre las cifras se fueron incrementado rápidamente: se había topado con la esencia del Caos. Lorenz fue capaz de reducir el sistema de doce ecuaciones a uno de tres que presentaba esa misma característica: las pequeñas diferencias en las condiciones iniciales se propagaban exponencialmente. Y la solución no era periódica. La propagación exponencial, llamada ahora sensibilidad a las condiciones iniciales, es conocida comúnmente, gracias a Lorenz, como efecto mariposa. Este nombre lo recibió de una conferencia que dio Lorenz en Washington en

1972: "Predictibilidad: ¿El aleteo de una mariposa en Brasil provoca un tornado en Texas?" Esto se refiere a la sensibilidad a las condiciones iniciales del clima: una causa que parece insignificante (el aleteo de la mariposa) se propaga exponencialmente hasta producir un efecto considerable.^{3,18} Si el clima realmente se comporta de esa manera, ¿cómo es posible predecirlo, ya que no podría medirse las condiciones iniciales con exactitud, sin dejar descuidado ni el vuelo de la mariposa? Esa conferencia fue en 1972, pero regresemos a los sesentas: en 1963 Lorenz publicó un artículo que estudiaba sus descubrimientos con las tres ecuaciones diferenciales que presentaban el efecto mariposa "*Deterministic Nonperiodic Flow*". Lo publicó en una revista de meteorología. Y sus resultados permanecieron casi completamente ignorados por años.^{8, 19}



Edward Norton Lorenz (1917-)

Al desatarse la Segunda Guerra Mundial, empezó a trabajar prediciendo el clima para la armada aérea. Después de la guerra, Lorenz decidió permanecer investigando en el estudio meteorológico, en el Massachusetts Institute of Technology. Él creó 12 ecuaciones que según él le ayudarían a predecir el clima, con la ayuda de una computadora Royal McBee. Ideó la forma de que su computadora señalara cada minuto el paso de un día imprimiendo una hilera de números. Fue el primero en describir el fenómeno conocido como "Caos Determinístico" en el clima, en su publicación "Deterministic nonperiodic flow" (1963) y fue el creador del término del "Efecto Mariposa" que básicamente habla sobre la sensibilidad a las condiciones iniciales.⁷

Robert May es un físico teórico transformado en biólogo. Se interesó en cuestiones ecológicas vistas desde un punto de vista matemático. La ecología tenía desde hace tiempo en uso ecuaciones diferenciales y mapeos para modelar el crecimiento de poblaciones. Una de ellas es el mapeo logístico, un mapeo no lineal muy simple:

$$f(x)=ax(1-x)$$

x nos representa la fracción de la población que puede albergar un medio (1 es el total posible), a es la tasa de crecimiento. El modelo quiere decir que la población actual es proporcional a la población de la temporada previa y la diferencia entre esta población y el límite máximo. Este último factor frena el crecimiento. Se sabía que con ciertos

valores del parámetro a , este modelo se comportaba cómodamente: la población inicial evolucionaba hasta un valor fijo, un estado estacionario, el cual dependía del parámetro a . Con otros valores, un poco mayores, de a , la población tendía a oscilar entre dos números; aumentando a , esta oscilación se duplicaba a 4 valores. Valores cada vez más cercanos de a iban provocando nuevas duplicaciones de periodo, hasta llegar al punto de acumulación donde se supone que la duplicación llega al infinito.²³ May se interesó no solo por el fenómeno de las duplicaciones de periodo, sino también por lo que ocurría por arriba del punto de acumulación. La mayoría de los biólogos (como los físicos en general) preferían no seguir más allá porque el mapeo se comportaba de una manera errática, extraña, no parecía tener sentido. Los matemáticos habían estudiado la duplicación de periodo, y muy recientemente, habían encontrado un resultado sorprendente respecto a las órbitas periódicas (del que hablaremos después), pero las matemáticas teóricas estaban muy dissociadas de las ciencias experimentales, y no se le había dado la importancia debida. May las revisó como biólogo. Encontró que más allá del punto de acumulación existen comportamientos poblacionales no periódicos, pero predecibles. May también vio que un poco más adelante (en el valor de a) aparecen nuevamente órbitas periódicas (por ejemplo de periodo 5) que, al aumentar más a , sufren duplicaciones de periodo hasta llegar a nuevos puntos de acumulación donde desaparece la periodicidad. Finalmente hay secciones no periódicas que tampoco son predecibles: presentan sensibilidad a las condiciones iniciales. Parecen comportarse aleatoriamente. May publicó en **Nature**, en 1976, un artículo mostrando estas y otras “curiosidades”. Su objetivo era demostrar que aún modelos matemáticos muy sencillos exhibían comportamientos muy complejos. Y que esta podía ser la llave para el entendimiento de la complejidad en la naturaleza. May estudio modelos más complejos, por ejemplo, de epidemias. Se ha visto que éstas se comportan más o menos cíclicamente. Hizo un modelo de las mismas y predijo que una perturbación del sistema podría producir oscilaciones mayores antes de llegar al cambio deseado. Este fenómeno fue observado realmente en campañas de vacunación de rubeola en Gran Bretaña: parecía que la campaña producía un incremento en la morbilidad al principio.²³

May fue uno de los principales promotores del cambio en la fijación de los científicos por los modelos lineales, al mostrarles que en las propias matemáticas, aún

sencillas, podrían encontrar la misma complejidad que parecía ser el sello de la naturaleza. Si antes se pensaba que esta complejidad era fruto de la conjunción de muchos factores externos, ¿no cabría la posibilidad, en realidad, que tuviera su origen en el propio sistema, por simple que fuera?

La geometría propia de la Teoría del Caos es la Geometría Fractal. Y a pesar de ello, tuvieron un origen por separado. Nacieron como dos ríos, en fuentes distantes, pero acabaron confluyendo en su camino. La geometría fractal surgió como una teoría matemática descriptiva de la naturaleza; la teoría del Caos trató de ser explicativa, con una visión también matemática, pero dinámica, originada en las ecuaciones diferenciales.



Sir Robert May (1936-)

Sir Robert May nació el 8 de Enero de 1936 en Australia.

Graduado en la Universidad de Sydney en 1956, obtuvo su doctorado en Física Teórica en la Universidad de Sydney, en 1959. Fue investigador de la Universidad de Harvard de 1959 a 1961 estudiando principalmente poblaciones en Biología, en 1988 partió al Reino Unido donde solidificó su posición como líder del mundo en la Biología Matemática. De 1995 a 2000 fue el principal Consejero Científico del Reino Unido y actualmente es el Presidente de la Sociedad Real de Londres.^{8, 21, 22,32}

Fractal es una palabra inventada por la misma persona que escribió un tratado exhaustivo sobre esta geometría. El mismo que la cimentó y la divulgó: **Benoit B. Mandelbrot**. En 1975 publicó un libro clave: *Les objets fractals, form, hasard et dimension* (la edición actual, en inglés, es *Fractal Geometry of Nature*). Este libro era la recopilación de sus ideas, desarrolladas entre los 60s y 70s. Mandelbrot era un matemático de origen polaco que trabajaba para la IBM. Incursionó en distintos campos de la investigación, entre ellos los mercados financieros, la transmisión de información a través de líneas telefónicas, distribución del tamaño de las ciudades, hidrología, turbulencia, etc. De todos estos campos tan dispares fue elaborando sus ideas. Uno de sus más famosos trabajos previos es : *How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension*. En este trabajo se presentan algunas de las ideas básicas de la geometría fractal. En números previos de esta revista se habló del problema de la medición de una costa, con el cual se llegó a la

idea de la dimensión fractal. Utilizó ideas matemáticas relativamente antiguas (y consideradas como matemáticas puras) como herramientas de su creación, fundiéndolas con sus ideas nuevas. Mandelbrot encontró que la geometría fractal podría aplicarse a una gran diversidad de temáticas, como lo presenta en su libro *Fractal Geometry of Nature*. Desde el movimiento browniano hasta la distribución de estrellas y galaxias en el universo, desde la geometría de los árboles, los pulmones y las texturas, hasta la geometría de conjuntos puramente matemáticos de extraordinaria complejidad. La idea principal de su libro la presenta el mismo con estas palabras:

“¿Por qué la geometría es descrita a menudo como ‘fría’ y ‘seca’? Una razón es su incapacidad para describir la forma de una nube, una montaña, una línea costera o un árbol. Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las líneas costeras no son círculos, la corteza no es suave ni el relámpago viaja en línea recta”. ²⁴

Es por eso que desarrolló la geometría fractal. Cuando estudiaba la variación de algunos precios a través de los años, observó que presentaban irregularidades (ascensos y descensos al parecer aleatorios, los picos que todos hemos visto en gráficas como la de la bolsa de valores) y que esas irregularidades se parecían ya sea que graficara por día, semana, mes o año. Es decir, la configuración geométrica no dependía de la escala. Más consideraciones lo llevaron a ver que lo mismo sucedía en la línea costera, y después en muchos otros fenómenos, como puede verse en su libro. Aunque la geometría fractal creció independientemente de la teoría del caos, no tardaron mucho tiempo en encontrarse. Y la Teoría del Caos encontró su geometría propia. ^{24, 25, 26}



Benoit B. Mandelbrot (1924-)

Nació el 20 de noviembre de 1924 en Warsaw Polonia. Después de realizar sus estudios en la Universidad de Lyon ingresó a la “École Polytechnique”, a temprana edad, en 1944 bajo la dirección de Paul Lévy. Se doctoró en matemáticas por la Universidad de París en el año 1952. Principal creador de la Geometría Fractal. La geometría fractal se distingue por una aproximación más abstracta a la dimensión de la que caracteriza a la geometría convencional. Desde 1958 trabajó en IBM en el Centro de Investigaciones Thomas B. Watson en Nueva York. ^{27, 28, 29}

En los inicios de los años setenta, pocas personas tenían acceso a una computadora. Lorenz, como vimos, fue uno de los afortunados. En cambio, **Feigenbaum**, sólo contaba con una calculadora HP programable. Si las computadoras de aquella época eran lentas, ¿qué podría decirse de las calculadoras? Sin embargo, para los espíritus preparados, una herramienta sencilla puede ser mucho más útil que poderosas máquinas para el resto. Feigenbaum se interesó por el mapeo logístico de May. En aquella época, como físico se sentía frustrado de lo poco que los libros le habían enseñado acerca de las ecuaciones diferenciales no lineales. Las ecuaciones diferenciales lineales, las más simples de todas, tenían toda una historia de cerca de 300 años de estudio. Y los científicos habían tenido éxito en su aplicación a la modelación de muchos fenómenos, como movimientos oscilatorios, reacciones químicas de pocas etapas, ondas en el espacio, etc. Pero se había hecho a costa de simplificar el fenómeno: líquidos sin fricción, ausencia de reacciones autocatalíticas, péndulos de amplitud pequeña. Al considerar más realismo en el fenómeno, aparecían las no linealidades, que hacían mucho más difícil, la mayoría de las veces imposible, la resolución. Los libros de texto estaban fuertemente orientados a las ecuaciones lineales, sólo llegaban a dar algunas técnicas para la solución de ciertos problemas no lineales sencillos muy conocidos (como el del movimiento de un cuerpo sometido a la atracción gravitacional de otro cuerpo mayor). Feigenbaum decidió tratar con la no linealidad en algún caso sencillo, pero que fuese representativo. El mapeo logístico era una buena opción. Sencillo, pero con un comportamiento muy complejo. Con ayuda de su calculadora y de algo de álgebra, se embarcó a buscar los valores del parámetro a donde ocurriesen las duplicaciones de periodo, para calcular la razón de convergencia de la cascada de duplicación de periodo. El número que representa esta convergencia es conocido ahora como delta de Feigenbaum. Lo extraordinario fue que pudo encontrarlo en muchos mapeos muy distintos. De hecho aparece también en sistemas dinámicos representados por sistemas de ecuaciones diferenciales complicadas. Feigenbaum explica este fenómeno con ayuda de un método de renormalización. Lo importante de la delta de Feigenbaum es que es un valor medible experimentalmente. La duplicación de periodo es una ruta para llegar al caos, ¿existe sólo como curiosidad matemática o también se presenta en la naturaleza? Esta pregunta animó a muchos experimentalistas a buscar la delta de Feigenbaum en fenómenos naturales. Y la

encontraron. En rutas a la turbulencia de líquidos calentados, en reacciones químicas, en láser, transistores y hasta la caída de gotas de un grifo.^{4,23}



Mitchell Jay Feigenbaum (1944-)

En febrero de 1960, Feigenbaum ingresó a la Universidad de la ciudad de Nueva York donde estudió ingeniería eléctrica graduándose en 1964. Sus estudios doctorales estuvieron supervisados por Francis Low y le fue concedido el doctorado en 1970 con el tema de "*Dissertation on dispersion relations*". En 1976 realizó su primera publicación la cual aportaba información a la teoría del caos. Su publicación era titulada *The Hammond Atlas*. Feigenbaum es considerado tanto físico como matemático. Sigue brindándonos aportaciones en la rama del caos siendo uno de los pioneros creadores y estudiantes de esta teoría.^{30,31}

Aparecían las primeras pruebas de la Teoría del Caos.

A finales de la década de 1950, un químico ruso, **Boris Belousov** trató de publicar los resultados de un fenómeno intrigante que había observado al tratar de oxidar ácido cítrico con un bromato catalizando la reacción con una sal de cerio (IV). El cerio (IV) es de color amarillo pálido, al reducirse a cerio (III) se vuelve incoloro, por lo que también sirve como indicador. Si el bromato se deja como reactivo limitante, entonces se consume antes de que se agote el ácido cítrico, por lo que, a continuación, este reactivo reduciría todo el cerio (IV) existente, con lo que la solución amarilla se decoloraría al terminar la reacción de oxidación. O al menos eso es lo que esperaba Belousov.

Pero lo que observó fue algo distinto: la solución se decoloró, sí, mas para volver a recobrar su color amarillo a los pocos minutos. Y después volvió a decolorarse... y a recuperar el color. Y así estuvo por un tiempo. Es decir, la reacción tenía oscilaciones (en otras palabras, órbitas periódicas). Las revistas rechazaron sistemáticamente el artículo que enviaba Belousov. No fue aceptado el trabajo porque argumentaban que según la segunda ley de la termodinámica las reacciones químicas deberían ir directamente al estado de equilibrio, no podían avanzar y retroceder porque el retroceso implicaba que la reacción se alejaba del equilibrio espontáneamente. Entonces, la

conclusión era que Belousov tenía errores en su experimentación. Y fue el fin de su carrera.^{4, 19}

Pero no fue el fin de su descubrimiento. **Anatol Zhabotinsky**, otro químico ruso se interesó en la reacción de Belousov y la estudió más sistemáticamente, incluso variando los reactivos (ácido malónico en lugar de cítrico y ferroín en lugar de la sal de cerio). Llegó a observar incluso ondas químicas (bandas de color que avanzan como las ondas en un estanque cuando se le arroja una piedra). Y él sí logró publicar su trabajo en 1964, no podían refutarlo.¹⁹ Por esa época, en la Universidad Libre de Bruselas, el grupo de **Ilya Prigogine** estudiaba la termodinámica lejos del equilibrio y propuso un modelo teórico de reacciones químicas acopladas que mostraba oscilaciones periódicas (hoy conocido como el modelo Bruselador).

La Química entraba sin remedio a la era de la complejidad.

La Escuela de Bruselas de Termodinámica es un grupo de investigación que inició en la Universidad Libre de Bruselas, bajo la dirección de **Théophile De Donder**, quien pensaba, contra la opinión de la mayoría de sus colegas, que la termodinámica no debería estar limitada al Equilibrio. De Donder hizo algunos avances en este sentido, creando las bases de un nuevo formalismo termodinámico, enfocado a las situaciones lejos del equilibrio. Pero estaba aislado. Aquella época, la comunidad científica de la primera mitad del siglo XX, no estaba preparada aún. Recordemos el rechazo del trabajo de Belousov. De Donder murió en 1957, sin embargo, ya había formado escuela, y sus estudiantes continuaron el trabajo con entusiasmo. Uno de ellos, el químico Ilya Prigogine se transformó en el nuevo líder. Cuando era joven, en 1946, organizó el primer encuentro de Statistical Mechanics and Thermodynamics reuniendo a no menos de cuarenta personas. Él mismo presentó un informe sobre la termodinámica irreversible. Cuenta él que, al terminar su exposición, el mayor experto en la materia se levantó e hizo el comentario: “Me asombra que este joven esté tan interesado en la física de no equilibrio. Los procesos irreversibles son transitorios. ¿Por qué no esperar y estudiar el equilibrio, como todo el mundo”. Prigogine dice: “Quedé tan sorprendido que no tuve la presencia de ánimo para contestarle: 'Pero nosotros también somos seres

transitorios. ¿No es natural interesarse en nuestra humana condición común? "Prigogine y su escuela han aportado a la ciencia las ideas de que lejos del equilibrio termodinámico, un sistema puede caer en estados estacionarios (equilibrio aparente), ordenados en el tiempo (por ejemplo con oscilaciones periódicas) o en el espacio (dando patrones geométricos) o en ambos, que consumen energía para mantenerse en ese orden. Pueden existir, dadas unas condiciones iniciales, más de un estado estacionario posible, hacia el cual se encaminará el sistema, no es posible predecirlo (sensibilidad a las condiciones iniciales). Estos patrones espaciales o temporales (o ambas cosas) son llamados estructuras disipativas porque necesitan energía externa para sostenerse, pues continuamente pierden energía hacia el entorno. No pueden existir aisladas del entorno, porque se destruirían y el sistema se encaminaría al equilibrio termodinámico. Un ejemplo es un ser vivo que necesita alimento, aire, agua del exterior. Si pierde contacto con su entorno, la muerte no tarda en llegar (o sea su equilibrio termodinámico). Otro ejemplo es una ciudad. Para subsistir debe tener intercambios con el entorno. No todos aceptan las ideas de la Escuela de Bruselas, aún en la actualidad, especialmente por el aspecto de que rechazan la idea de los físicos de que el tiempo es sólo la cuarta dimensión de los cuerpos y que el avance del tiempo, por lo tanto, es una ilusión. Para la Escuela de Bruselas, el avance del tiempo, el cambio y la evolución en el mundo no son meras ilusiones, sino la esencia misma de la realidad.^{33, 34,35}



Ilya Prigogine (1917-2003)

Químico belga de origen soviético que nació el 25 de enero de 1917 en Moscú. Contribuyó significativamente a la comprensión de los procesos irreversibles. En 1967 fundó el Centro para los Estudiantes de Mecánica-Estadística. En 1977 fue Premio Nobel de Química por su descubrimiento de las estructuras disipativas. Prigogine recibió concesiones y premios nacionales numerosos, incluyendo la medalla de oro de la Swante Arrhenius, Academia Sueca; Medalla de oro de la Rumford, Sociedad Real de Londres; la medalla de Descartes, París; Comandante de la Legión de Honor, Francia; Orden Imperial del Sol naciente (oro y medallas de plata), Japón; D'Or de Medaille, Francia; Falleció el 28 de mayo de 2003 en un hospital de Bruselas.^{36, 37}

Así, de este modo llegamos a la conclusión de que la naturaleza posee muchas regularidades que pueden ser registradas, analizadas, y tal vez, predichas y controladas. Todo en la naturaleza parecía estar regido por leyes muy precisas y exactas que explicaban el Desarrollo del Universo. Ahora sabemos que sistemas que obedecen leyes inmutables y precisas no siempre actúan de manera predecible y regular. Leyes deterministas pueden producir comportamientos que parecen aleatorios.⁴

Los conceptos de predicción o de repetibilidad de un experimento adquieren nuevos aspectos cuando se analizan desde la óptica del Caos, se descubrió que con reglas muy bien establecidas y con el conocimiento total de las condiciones iniciales que rigen un sistema en evolución, éste puede tomar caminos muy diferentes y no poder tener control del sistema en evolución. Es por ello que la importancia en el estudio de fenómenos que son totalmente deterministas y que producen comportamientos tan inesperados, nos lleva a tener diversas técnicas de caracterización de series de tiempo así como también técnicas modernas de predicción.¹⁹

1.3 PERSPECTIVAS

La teoría del caos no hace énfasis en el desorden del sistema bajo estudio sino precisamente en el orden en que exhibe o el comportamiento universal de sistemas similares. Establece que los sistemas dinámicos no lineales y complejos son inherentemente impredecibles, pero al mismo tiempo, garantiza que, a menudo la manera de expresar dicho sistema no radica en las ecuaciones exactas que lo controlan sino en las representaciones gráficas de su conducta mediante atractores extraños o curvas Fractales.

La teoría del caos se encuentra entre las más jóvenes que se ha convertido en uno de los campos de investigación más fascinantes que existen en la actualidad. Esta teoría, como se mencionó anteriormente es interdisciplinaria. Las aplicaciones de las matemáticas del Caos son en extremo diversas, e incluyen el estudio del flujo

turbulento de fluidos, dinámica de fluidos, física del estado sólido, física de plasmas, movimiento de cúmulos de estrellas, irregularidades en el ritmo cardíaco, control de arritmias en los marcapasos, la compresión de imágenes y sonido, dinámica de poblaciones, reacciones químicas, comportamiento de algunos contaminantes en el medio ambiente. La complejidad, lo impredecible y el desorden aparecen por todos lados, en todas las ciencias y en nuestra propia vida como lo es el clima, huracanes, terremotos, tornados, enfermedades, epidemias, accidentes, tráfico, un infarto, la bolsa de valores, el comportamiento humano, el amasado de una pasta, la sociedad, una llave que gotea sin orden, un ataque de epilepsia, la creatividad...³ todo esto y más es susceptible de estudiarse con las herramientas que aporta la Teoría del Caos. Lo excitante de dicha teoría es que podría explicar todos aquellos fenómenos que, por su complejidad, resultan ser extremadamente interesantes tanto para la ciencia como para la tecnología.^[1] El error más común consiste en suponer que su área de estudio es el desorden, cuando en realidad el caos es la misma esencia del orden³⁸, si bien establece que cambios diminutos pueden causar fluctuaciones gigantescas; uno de los conceptos más importantes de esta ciencia es que aunque los conceptos más importantes de esta ciencia es que aunque resulte imposible predecir exactamente el estado futuro de un sistema es algo casi trivial modelar su conducta global.³

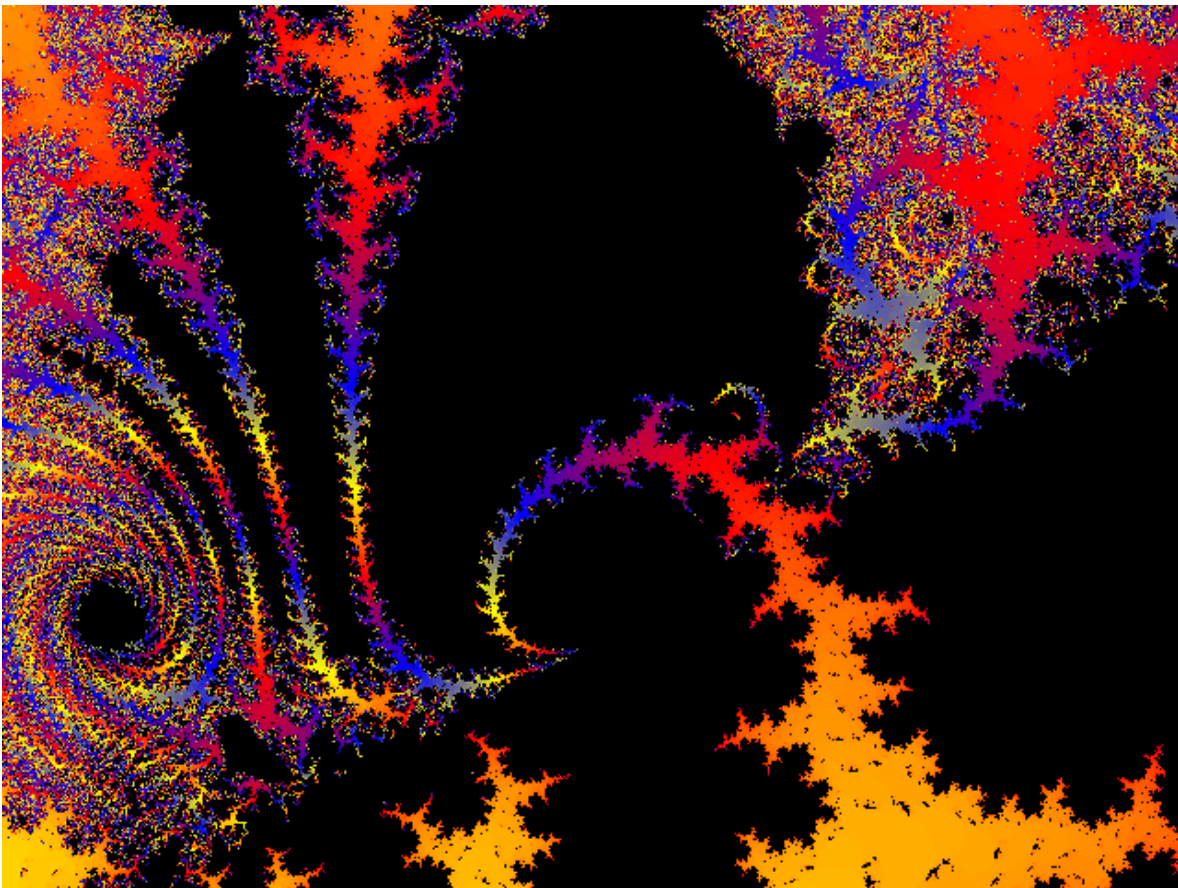
A raíz de esto nos surge la pregunta ¿Qué diferencia hay entre la Teoría del Caos y el resto de la ciencia? Simplemente, una forma de pensar y de ver las cosas.

La importancia de la caracterización de las series de tiempo radica en que nos podemos anticipar un paso, es decir, podemos encontrar la explicación de por qué algunas series son más predecibles que otras, y cuáles son imposibles de predecir, aún con las mejores técnicas modernas de predicción que son muy poderosas como las llamadas técnicas neurocomputacionales y otras relacionadas. En este campo se encuentran las redes neuronales artificiales, y la literatura ha mostrado que actualmente son las mejores en cuanto a predicción del fenómeno en estudio por series de tiempo, debido a que su importancia radica en que pueden tratar con series que son muy complejas, no-lineales y que además no es necesario contar con las ecuaciones matemáticas que gobiernan o describan tales fenómenos.

La perspectiva más ampliamente aceptada en la actualidad es que el caos y el orden no son más que diferentes facetas de una misma realidad, pero lo que ya no resulta tan intuitivo es que el mismo universo no sea un ámbito de orden en donde el caos se encuentra oculto sino todo lo contrario: un sitio caótico donde hay contadas zonas aisladas que son extremadamente pequeñas y raras. Esta perspectiva ha permitido demostrar que las leyes del caos pueden explicar muchos, si no es que todos, de los fenómenos que llaman la atención tanto por su regularidad como por su irregularidad mejor que las leyes del orden. Ello ha obligado a que los especialistas en muchas áreas deban adoptar una perspectiva holística o globalizadora de lo que es la ciencia y así, por ejemplo, los matemáticos estudian biología para desarrollar modelos de la vida, los físicos estudian neurofisiología para descubrir los mecanismos de la memoria y los neurofisiólogos estudian matemáticas para crear una teoría que explique la cognición.

CAPÍTULO II

EXPLORANDO LA TEORÍA DEL CAOS



*“El azar es el seudónimo que Dios utiliza cuando no quiere firmar.
La ergodicidad es el argumento que el hombre esgrime para ser Dios”
[Guillo Gómez]*

CAPÍTULO II

EXPLORANDO LA TEORÍA DEL CAOS

El caos es la conducta efectivamente impredecible a largo plazo, que surge de un sistema dinámico determinista. Aunque este tipo de sistemas son siempre perfectamente predecibles a corto plazo dado un conocimiento perfecto de las condiciones iniciales, la clave para la impredecibilidad a largo plazo radica en una propiedad que se conoce como sensibilidad a las condiciones iniciales, que se explicará más adelante.

Para que un sistema dinámico sea caótico debe tener un gran conjunto de condiciones iniciales que sean altamente inestables, de modo que sin importar con qué precisión se midan, la predicción de su futuro se volverá radicalmente errónea luego de poco tiempo. Como consecuencia de la impredecibilidad a largo plazo, las series de tiempo de un sistema caótico pueden parecer irregulares y desordenadas, pero el caos definitivamente no es un desorden completo sino un desorden dentro de un sistema dinámico determinista, el que siempre es predecible a corto plazo.⁴

2.1 CONCEPTOS GENERALES

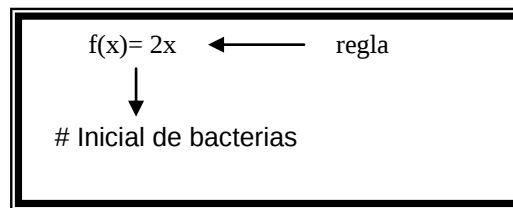
La Teoría del Caos se ubica dentro de lo que conocemos en matemáticas como Sistemas Dinámicos, que se aplican como modelos para los fenómenos de cambios, como un péndulo, una reacción química, el crecimiento de una población, o incluso una guerra, pero esta teoría se define formalmente como el estudio de los sistemas dinámicos no lineales y complejos pero se requiere de una explicación más amplia para comprender el significado de esta definición:

- ☆ *SISTEMA* es una combinación de varias entidades, físicas y/o lógicas, integradas entre sí para ejecutar una función concreta.

- ☆ *UN SISTEMA NO LINEAL* es aquel que exhibe una desviación de toda correspondencia funcional de proporcionalidad directa es decir, aquel en que las respuestas no son directamente proporcionales a una variable dada o cuando las interrelaciones entre las cantidades aplicadas se expresan mediante ecuaciones, algunas de las cuales no son lineales.
- ☆ *SISTEMA COMPLEJO* está compuesto por muchas partes y, de hecho, el campo de las matemáticas que se conoce como teoría de la complejidad, está integrado por una gran cantidad de temas complementarios traslapados entre sí; se podría decir que es un sistema con muchos grados de libertad no equivalentes entre sí y, a diferencia del caos que es el estudio de cómo los sistemas simples pueden generar conductas complicadas, la complejidad es el estudio de cómo los sistemas complejos pueden generar conductas sencillas, lo que quedaría ejemplificado por la sincronización de los sistemas biológicos desde las luciérnagas hasta las neuronas.
- ☆ *SISTEMA DINÁMICO* implica un cambio de estado en el sistema causado por la influencia de fuerzas generalmente ajenas al mismo; esto es, consiste de un espacio de fase abstracto o espacio de estados, cuyas coordenadas describen su estado dinámico en cualquier instante, junto con una regla dinámica que especifica las tendencias al futuro inmediato de todas las variables de estado considerando únicamente los valores actuales de las mismas y, matemáticamente, se describe como un problema de valores iniciales.^{39,40,41}

2.2 SISTEMAS DINÁMICOS

En matemáticas, un sistema dinámico es el conjunto de los posibles estados junto con una regla que determina el estado presente a partir de los estados pasados. Por ejemplo, supóngase una población de bacterias en un medio muy pequeño, que alberga como máximo 200 bacterias (y como mínimo, cero, lógicamente). Cada 30 minutos, esas bacterias se duplican, hasta alcanzar su tope máximo. La función matemática es:



Ec.2.2.1

Entonces, aquí el sistema dinámico está constituido por los números posibles de bacterias en cualquier momento, o sea todo entero entre 0 y 200 (conjunto de posibles estados), ese número, mientras no sea 200 o mayor, se duplicará cada 30 minutos (esta es, la regla que determina el estado presente a partir de los estados pasados).

Un sistema dinámico es determinista, es decir, el estado presente queda determinado de manera única por los estados pasados. Siguiendo el ejemplo anterior, si hay 6 bacterias en este momento, es porque 30 minutos antes hubo 3. Si hubiesen sido 4 en el pasado, en el presente no serían 6, sino 8. Si no se sigue una regla determinista, no se tiene un sistema dinámico sino un proceso estocástico o aleatorio. Ahora hay 6 bacterias, en el pasado pudieron ser 4, 10, ó 1.³⁹

Los sistemas dinámicos se clasifican en dos tipos según si el tiempo es una variable discreta o continua en ellos. Por variable discreta se entiende que sólo toma ciertos valores enteros; por variable continua se entiende que puede tomar cualquier valor real. Por ejemplo, el crecimiento de las bacterias que se usó de ejemplo es un sistema dinámico de tiempo discreto, porque la regla nos da el estado presente a partir del estado pasado 30 minutos atrás: de 30 en 30 minutos; no nos dice cuántas bacterias hay a los 15 minutos.

Un sistema dinámico de tiempo continuo podría ser una función que nos represente la caída de una piedra; podemos escoger cualquier tiempo que deseemos y nos dará la correspondiente altura a la que se encuentra la piedra.

2.2.1 SISTEMAS DINAMICOS DE TIEMPO DISCRETO

Una configuración física se reduce a menudo a un conjunto de mediciones, por ejemplo, de temperatura, presión, índices de contaminación, etc. En sistemas discretos,

damos estas medidas como una secuencia de tiempos específicos. Esperamos que dadas las mediciones al tiempo n se tenga una regla para determinar las medidas en el tiempo $n+1$. Si x_n representa las medidas en el tiempo n , se tiene que: (ecuación. 2.2.1)

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Ec. 2.2.1

Donde $f(x)$ es una función dada, fija todo el tiempo. La evolución del sistema se obtiene iterando la siguiente función (ecuación 2.2.2)

$$x_n = f(f(\dots f(x_0)\dots))$$

n veces

Ec. 2.2.2

Un ejemplo clásico estudiado en los años setentas es el de las funciones de la ecuación cuadrática $f(x) = cx(1-x)$ donde c es un numero real fijo. El gráfico de está función es una parábola que pasa por el eje x en: $x=0$, $x=1$.

El valor máximo es $c/4$ que ocurre en $x= 0.5$. Un ejemplo se muestra en la figura 2.2.1.1.

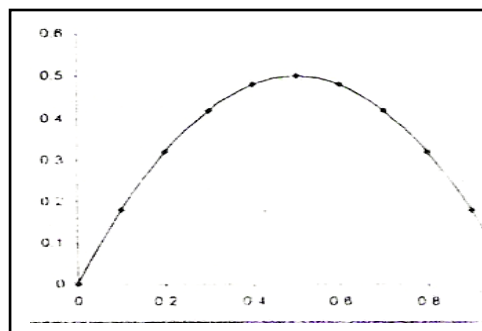


Fig.2.2.1.1Gráfica de la función $f(x) = 2x(1-x)$ ¹⁹

Si restringimos c para ser no negativa y menor o igual a 4, la función $f(x)$ tiene la característica que traza todos los puntos en el intervalo de unidad $[0,1]$ para los valores en $[0,1]$. Se denomina a tal mapeo un intervalo de auto-mapeo.

2.2.2 SISTEMAS DINAMICOS DE TIEMPO CONTINUO

Muchos sistemas se modelan con el tiempo t , como una variable continua. Entonces, las mediciones del estado forman una función del tiempo $x(t)$. Las reglas de transformación no son descritas tan ampliamente en términos del movimiento de un instante t al siguiente, en su lugar se da una regla para el cambio de $x(t)$. Esto conduce a una ecuación diferencial, su forma más simple se presenta en la ecuación 2.2.3

$$x'(t) = f(t, x)$$

Ec.2.2.3

Para una función dada f del tiempo y estado; junto con el estado inicial $x(0) = x_0$, se conoce como problema del valor inicial. En la actualidad, la teoría de los sistemas dinámicos incorpora en gran parte para su estudio la teoría de ecuaciones diferenciales, pero cabe enfatizar que los conceptos básicos de sistemas dinámicos tienen igual importancia en cualquiera de las áreas de dinámica de tiempo discreto y problemas del valor inicial.

De lo anterior podemos decir que un sistema dinámico consiste de dos componentes: Una regla o “dinámica” la cual especifica cómo un sistema se desarrolla y una condición inicial o “estado” del cual el sistema parte.

La teoría de los sistemas dinámicos y la dinámica no lineal se desarrollaron fuera del estudio de las ecuaciones diferenciales, las cuales se iniciaron como un intento para la descripción de fenómenos naturales, para entender y predecir el movimiento que nos rodea: la ondulación de la superficie de un lago, la órbita de los planetas, etc.

Un sistema dinámico consiste en un espacio fase abstracto o espacio de estados cuyas coordenadas describen el estado dinámico en cualquier instante; y una regla dinámica que especifica la tendencia futura inmediata de todas las variables de estado,

dados los valores presentes de esas mismas variables de estado. Matemáticamente, un sistema dinámico es descrito por un problema de valor inicial.^{4, 38}

2.3 MAPEOS

Un mapeo o aplicación, simplemente es una función f , en el espacio fase que da el próximo estado, $f(z)$ (la imagen), del sistema dando su actual estado, z_0 . Una función debe tener un solo valor por cada estado, pero podría haber varios estados diferentes que dan lugar a la misma imagen.

Los mapeos que permiten cada estado en el espacio fase a ser accedido (hacia) y tienen una preimagen precisamente para cada estado (uno-a-uno) son invertibles. Si además el mapeo y su inversa son continuos (con respecto a la coordenada de espacio fase z), entonces se llama un homeomorfismo. Un homeomorfismo, que tiene por lo menos una derivada continua (con respecto al tiempo, z) y una inversa continuamente diferenciable, es un difeomorfismo.

La iteración de un mapeo significa aplicar repetidamente el mapeo a las consecuencias de la aplicación anterior. Así se obtiene una sucesión (Ec.2.2.4).

$$z = f(z_{n-1}) = f(z_{n-2}) \dots = f^n(z_0)$$

Ec. 2.2.4

Esta sucesión es la órbita o trayectoria del sistema dinámico con condiciones iniciales z_0 . Se debe poner énfasis en que un sistema dinámico determinista es absolutamente predecible en el término corto.

La clave para la no predictibilidad a largo plazo, es una propiedad conocida como sensibilidad a las condiciones iniciales o dependencia sensible a las condiciones iniciales. [52]

Existen diferentes mapeos de acuerdo a las variables que lo conforman:

- ☆ Mapeos unidimensionales: son aquellos que solo tienen una variable (x),
- ☆ Mapeos bidimensionales: donde se encuentran dos variables (x, y),
- ☆ Mapeos tridimensionales: se requieren *tres* valores ordenados, por ejemplo (x, y, z), que puede localizarse en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$.

Pero para poder analizar estos mapeos necesitamos definir algunos conceptos:

- ☆ **Órbita** es el conjunto de puntos resultantes de las iteraciones. Para un mapeo unidimensional, la órbita es el conjunto $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$.
- ☆ **Condición inicial** o **valor inicial** es el punto de inicio de una órbita (en el caso anterior, es x). Cualquier punto de la órbita puede ser, a su vez condición inicial para la órbita representada por este punto y sus iteraciones sucesivas.
- ☆ **Punto fijo** de un mapeo es un punto tal que, en el caso de mapeos unidimensionales: $f(p) = p$, donde p es el punto fijo

Un **mapeo** es una función cuyo dominio y cuyo rango son los mismos. Esto es, como en el crecimiento bacteriano anterior. Si se inicia con 10 bacterias, en 30 minutos se tendrán 20, en otros 30, serán 40, y así sucesivamente, 80, 160...

Un mapeo es una función iterativa. Veamos el ejemplo más claramente. Sea $f(x) = 2x$ la función que expresa el mapa. Sea $x_0 = 3$ el primer valor. El segundo valor será x_1 , o sea $f(x_0)$, es decir $2 \times 3 = 6$. Más adelante, se quiere obtener el siguiente valor en el tiempo, x_2 , se aplica la función sobre x_1 , o sea $2 \times 6 = 12$. Y así, se puede obtenerse- la tabla 2.3.1

Otra simbología diferente para las x_i es utilizar la $f(x)$; en lugar de x_1 , sea $f(x_0)$; en vez de x_2 , $f_2(x_0)$, y así sucesivamente, x_n es sustituido por $f_n(x_0)$. Si el mapeo se aplica indefinidamente y no se tienen restricciones en cuanto al mayor número posible, entonces encontramos que la población bacteriana, en este caso, crece sin límite.

x_i	valor
x_0	3
x_1	6
x_2	12
x_3	24
x_4	48
x_5	96

Tabla 2.3.1 Valores para la función $f(x) = 2x^{19}$

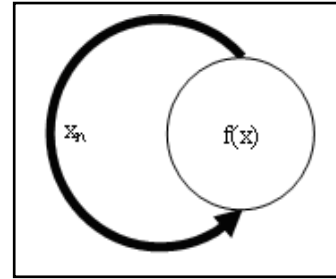


Fig.2.3.1 Efecto del mapeo en las iteraciones¹⁹

Los mapeos unidimensionales son aquellos definidos por una sola variable. En el caso del mapeo logístico, la única variable es x . Por esto se dice que el mapeo está definido en el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$). Cualquier punto del dominio (o del rango) del mapeo puede localizarse en una línea recta (unidimensional).

Un ejemplo de mapeo bidimensional es el de Hénon, expresada de este modo:

$$f(x,y) = (a - x^2 + by, x)$$

Ec. 2.2.5

Aquí a y b son parámetros; son dos en este caso, pero pudieron haber sido menos o más o ninguno: su número es independiente de la dimensionalidad del mapeo. Se tienen dos variables: x y y , por lo tanto el mapa es bidimensional. La simbología empleada es importante. Para aplicar el mapeo se necesita una pareja de valores iniciales x y y . Y como resultado se obtiene otra pareja de valores x , y . Cada pareja de valores puede graficarse en un plano como un solo punto, el punto (x, y) , donde x , y son las coordenadas. La pareja ordenada (x, y) puede considerarse como un único valor. Y el espacio bidimensional (el plano cartesiano) donde se puede localizar cada punto es denominado $\mathbb{R}^2$

Para poder graficar el sistema de Hénon, solo se necesita ir variando el parámetro de no linealidad. El período crece hasta formar un “atractor extraño”, forma

geométrica y límite del Caos, impredecible y de estructura fractal, que se aprecia en la Figura 2.3.2.

En un mapeo tridimensional se requieren *tres* valores ordenados, por ejemplo (x , y , z), que pueden localizarse en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$. Y así sucesivamente.

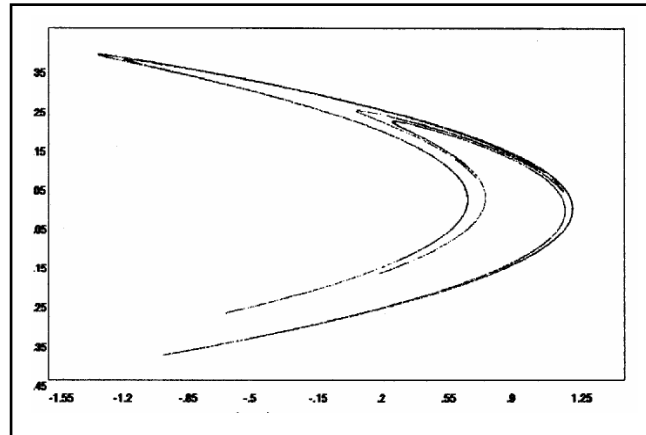


Fig.2.3.2. Atractor extraño de Hénon.¹⁹

En la Teoría del Caos encontramos mapeos más complejos. Entre ellos está el famoso mapa logístico, expresado de este modo:

$$f(x) = ax(1-x)$$

Ec.2.2.6

El mapeo logístico se ha empleado como un modelo simple de crecimiento poblacional, más realista que el modelo bacteriano que empleamos anteriormente. Una novedad aquí es el parámetro a , que toma el lugar del 2 en el mapeo anterior. El parámetro a puede variar, pero si varía, en realidad no se está hablando estrictamente del mismo mapeo. Así que, en realidad, lo que llamamos mapeo logístico es una familia de mapeo, que se diferencian únicamente por el valor que toma el parámetro a .

La otra novedad es el factor $1-x$, que significa que la población (representada por x), cuando es grande, inhibe el crecimiento mismo.

Este mapeo está normalizado, lo que quiere decir que x representa población pero no en unidades individuales, sino en fracción de la capacidad poblacional permitida por el medio. Por ejemplo, si en un estanque sólo hay capacidad para 15,000 peces, pero la población existente en un determinado momento es de 3000 peces, se representará ésta como $x = 0.2$. Este tipo de representación simplifica el formato del mapa logístico. Nótese que sólo podemos tomar valores entre 0 y 1 para la x . Sea $a = 2$ el parámetro. Supongamos que estamos en el caso de los peces del estanque y que son 3000 peces, por lo que $x_0 = 0.2$, ¿qué pasará después de varias temporadas si la población sigue este mapeo logístico?

Puede verse tanto en la tabla 2.3.2 como en la gráfica (Fig.2.3.3) que la población se estabiliza en 0.5 (o sea 7500 peces) y ya no cambia temporada tras temporada. Casi cualquier población inicial conducirá a la misma población final al cabo de un tiempo.

n	$f^n(x)$
0	0.2
1	0.32
2	0.4352
3	0.49160192
4	0.49985894
5	0.49999996
6	0.5
7	0.5

Tabla 2.3.2 Valores para la función $f(x) = 2x(1-x)$

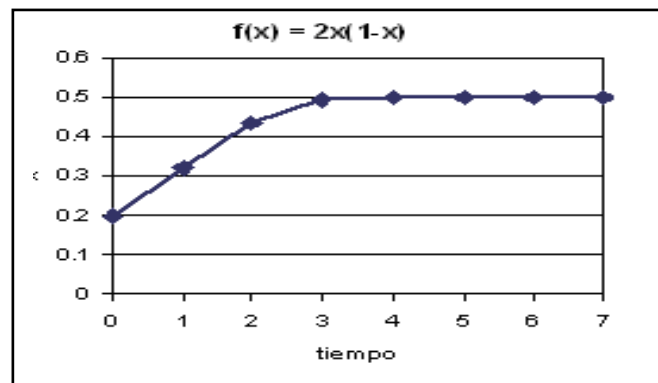


Fig.2.3.3 Gráfica de la función $f(x) = 2x(1-x)$

Pero que sucede si se cambia el parámetro, por ejemplo $a = 2.5$, la población final resulta ser $x = 0.6$, y se necesitan más iteraciones para alcanzarla. A medida que hacemos crecer el parámetro, es más lenta la **convergencia** (que alcance un valor determinado). Cuando el parámetro es $a = 2.95$, puede verse en la siguiente gráfica (Fig. 2.3.4) la lentitud de la convergencia. Aunque la gráfica no lo muestra, con 150

iteraciones (temporadas), todavía no se llega a un valor final. Al llegar a 3, la lentitud es mucho mayor. Cuando el parámetro a sobre-pasa el valor de 3, digamos que sea 3.2, observamos un comportamiento diferente.

Hay una oscilación entre dos valores diferentes en las iteraciones. En una temporada, la población será alta y en la siguiente, baja. A esto se le llama periodo 2. Al incrementar el parámetro a un poco más, a 3.5, el comportamiento vuelve a cambiar, como se muestra en las gráficas (Fig. 2.3.5 y 2.3.6).

La población oscila entre cuatro valores diferentes (periodo 4).

Este comportamiento del mapeo a medida que cambia el parámetro se llama **bifurcación**.¹⁹

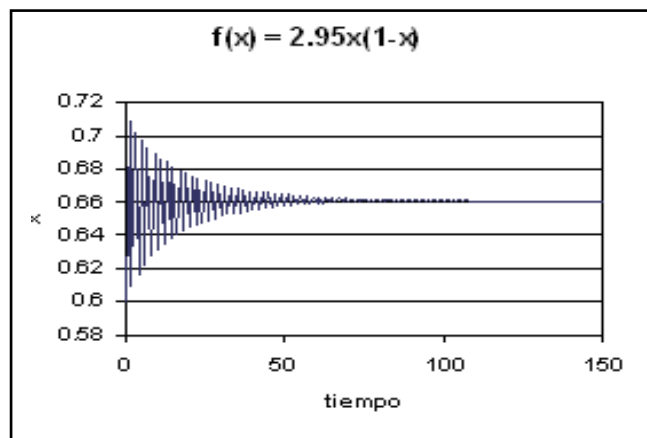


Fig.2.3.4 Gráfica de la función $f(x) = 2.95x(1-x)$ ¹⁹

n	$f^n(x)$
0	0.2
1	0.512
2	0.7995392
3	0.51288406
4	0.7994688
5	0.51301899
6	0.79945762
7	0.51304043
8	0.79945583

n	$f^n(x)$
9	0.51304386
10	0.79945554
11	0.51304441
12	0.7994555
13	0.51304449
14	0.79945549
15	0.51304451
16	0.79945549
17	0.51304451

Tabla 2.3.3 Valores para la función $f(x) = 3.2x(1-x)$

Supongamos que el cuidador del estanque tiene que contar los peces para usar el mapeo logístico para predecir cuántos peces habrá 14 temporadas más adelante. La cuenta le sale en 3000 ($x_0 = 0.2$), pero en realidad son 3001 peces ($x_0 = 0.20006667$). Si somos realistas, exageramos en la exactitud del cuidador; equivocarse sólo por un pez en ese estanque está más allá de lo práctico. Pero ¿Qué pasa si comparamos el cálculo hecho por el cuidador con el resultado exacto del modelo con 3000 peces (o sea $x = 0.2$)?

En la temporada 14, (ver tabla 2.3.4) la cuenta del cuidador le arroja $x = 0.00098$ (unos 15 peces), mientras que el cálculo con el número exacto de peces nos da $x = 0.96997$ (14550 peces). Los resultados son diametralmente opuestos a pesar de que los datos iniciales sólo difieren en 0.0006667 (un 0.3 % ó un solo pez de 3000) ¿Qué esperanzas le quedan al cuidador de hacer una predicción confiable a largo plazo? Obsérvese que al principio, los valores son semejantes, pero rápidamente comienzan a separarse; en la séptima iteración ya es de un 6 %. Como vemos en la iteración 14 son muy diferentes. Las órbitas ya no parecen guardar relación una con la otra.

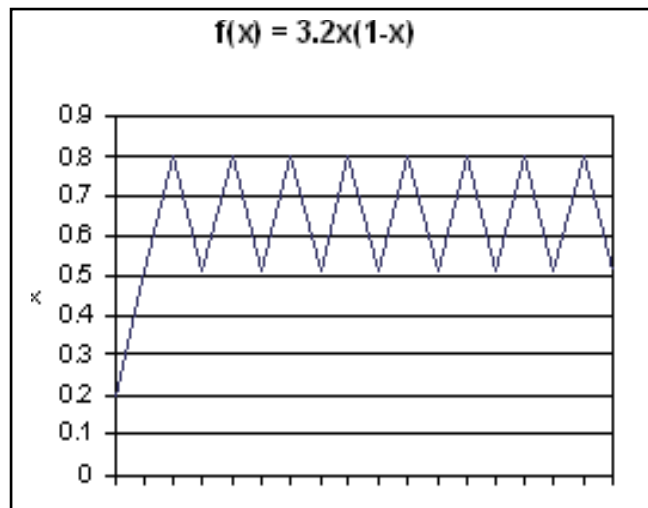


Fig.2.3.5 Gráfica de la función $f(x) = 3.2x(1-x)$ ¹⁹

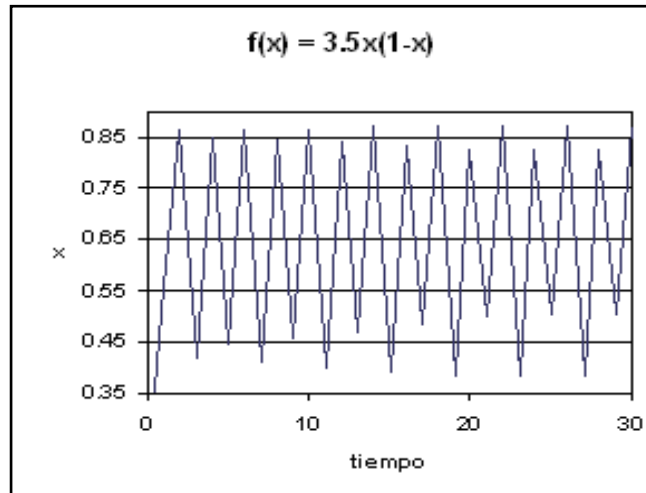


Fig.2.3.6 Gráfica de la función $f(x) = 3.5x(1-x)$ ¹⁹

Este fenómeno se llama sensibilidad a las condiciones iniciales. Y cuando se presenta aunado a la ausencia aparente de periodicidad (como en este caso, donde no se repiten valores o secuencias de valores), nos encontramos ante lo que se llama técnicamente como CAOS.^{4, 19}

n	$f^n(x)$ cuenta	$f^n(x)$ exacto
0	0.2	0.20006667
1	0.64	0.64015998
2	0.9216	0.92142072
3	0.28901376	0.28961832
4	0.82193923	0.82295819
5	0.58542054	0.58279204
6	0.97081333	0.97258191
7	0.11333925	0.10666534
8	0.40197385	0.38115138
9	0.9615635	0.94350002
10	0.14783656	0.21323094
11	0.50392365	0.67105401
12	0.99993842	0.8829621
13	0.0002463	0.41336013
14	0.00098498	0.96997413
15	0.00393603	0.11649727
16	0.01568213	0.41170262

Tabla 2.3.4 Comparación de los valores de la función $f(x) = 4x(1-x)$ con valores aproximados y valores exactos en donde $x_0=0.2$ ¹⁹

Retomemos el término bifurcación y necesariamente surge la pregunta ¿Hasta donde pueden llegar las bifurcaciones?; para contestar esta pregunta es obvio que se tienen que seguir realizando los cálculos para los valores 3.55 ó 3.56 del parámetro. En efecto, vemos un periodo 8. Un poco más adelante se encuentra el periodo 16 (por ejemplo, con 3.566). Y así, vemos que la bifurcación va ocurriendo con incrementos cada vez más pequeños del parámetro. Lógicamente, pronto llegamos a un periodo infinito, alrededor de 3.57. Aquí ya no encontramos que se repita ningún número, como se demuestra en el siguiente ejemplo, Sea $a = 4$ en el mapa se puede observar que no se repite ningún valor; sin embargo, se presenta un comportamiento un tanto extraño.

Examinaremos ahora solamente los valores de a desde 0 hasta 4 (que es donde no hay “escapes al infinito” de la órbita si el valor inicial de x se conserva entre 0 y 1).

Los puntos fijos del mapeo logístico son:

$$X_0 = 0 \quad y \quad X_1 = \frac{a-1}{a}$$

Ec.2.2.7

La derivada de este mapeo es $f'(x) = a(1 - 2x)$. Podemos observar que $x = 0$ es estable si $a < 1$, porque la derivada $f'(0) = a < 1$. Cuando $a = 1$ (donde no podemos sacar conclusiones usando la derivada) ocurre un cambio cualitativo, porque teniendo $a > 1$ sucede que $f'(0) > 1$ y entonces $x = 0$ es inestable. Este punto fijo pasó de la estabilidad a la inestabilidad bruscamente, de sumidero a fuente. A este tipo de cambios se le llama bifurcación. En cuanto al punto $x = 0$, ya no ocurre ningún cambio cualitativo más cuando aumenta el valor de a . Para ver lo que pasa con el otro punto, x_1 , debemos sustituirlo en $f'(x)$. Lo cual nos da $f'(x_1) = 2 - a$. Esto significa que si $a < 1$, entonces $f'(x_1) > 1$ (y por lo tanto $|f'(x_1)| > 1$), lo cual quiere decir que mientras x_0 es un sumidero, x_1 es una fuente. Pero cuando $1 < a < 3$, entonces $|f'(x_1)| < 1$, lo que implica que x_1 es un sumidero (y ya sabíamos que x_0 era una fuente en este intervalo de a). Sin embargo, cuando $a > 3$ (cuando $a = 3$, $|f'(x_1)| = 1$ y no podemos obtener de aquí ninguna conclusión),

x_1 se comporta como una fuente. Ocurrió una bifurcación en $a=3$). ¿Qué pasa con la dinámica de $f(x)$ cuando $a>3$ y sus únicos puntos fijos (x_0 y x_1) son fuentes o repulsores? Aparece un periodo 2 estable. Este periodo 2 permanece estable hasta que $a \approx 3.449$, donde ocurre otra bifurcación y se vuelve un repulsor. Pero a su vez aparece un periodo 4 atractor, que a su vez pierde estabilidad cuando $a \approx 3.544$. Este a su vez se bifurca en $a \approx 3.564...$ y así sucesivamente, cada vez más próximos, con órbitas periódicas estables cada vez mayores, hasta que se llega a un punto de acumulación ($a \approx 3.570$) donde existe una órbita no periódica. Y si a continúa creciendo, ocurren cosas aún más extrañas: de pronto reaparecen las órbitas periódicas (algunas de ellas, nuevas, como la 3 que es impar) que se bifurcan generando órbitas estables duplicadas como la descrita arriba, hasta que nuevamente se llega a una órbita no periódica.^{4,19,39}

La siguiente gráfica (Fig.2.3.7) se elaboró iterando cientos de veces un valor inicial cualquiera de x en cada a . Las líneas delgadas representan puntos fijos u órbitas periódicas, las áreas oscuras, órbitas no periódicas.

Este tipo de gráfica es conocido como diagrama de bifurcaciones. Este comportamiento es característico de las funciones no lineales.⁴²

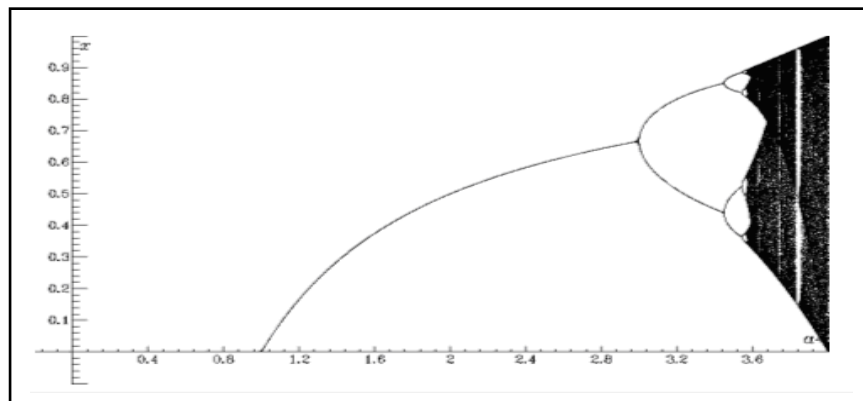


Fig.2.3.7 Gráfica de la función $f(x) = ax(1-x)$. Donde a toma valores de 0 hasta 4.¹⁹

2.4 FRACTALES

Así como la física clásica y, en general, las demás ciencias se apoyan en la geometría euclidiana (rectas, circunferencias, esferas, planos, etc.) para su manejo matemático, la Teoría del Caos, además, se apoya en una nueva geometría: los Fractales. Este es el lenguaje del caos.

Esta nueva geometría fue estructurada por Benoit B. Mandelbrot en el último cuarto del siglo XX. Al inicio de su libro, *The Fractal Geometry of Nature*, nos dice estas palabras:

“¿Por qué a la geometría se le describe a menudo como “fría” y “árida”? Una razón es su incapacidad de describir la forma de una nube, una montaña, una línea costera o un árbol. Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las líneas costeras no son círculos, la corteza de un árbol no es suave ni el rayo viaja en línea recta.”²⁴

La geometría “árida” de la que hablaba Mandelbrot es la Geometría Euclidiana, aquella que nos enseñan en la primaria y secundaria: rectas, circunferencias, triángulos, polígonos, poliedros, etc. Si pretendemos hacer un dibujo de un paisaje utilizando las figuras euclidianas, el resultado se vería demasiado artificial, a menos que fuese un número muy grande de polígonos pequeños. Pero aún en este caso, si mirásemos el paisaje con una lente de aumento, perdería su naturalidad, ¿por qué?, porque la naturaleza mirada a diferentes escalas presenta igual cantidad de detalles.

Si vemos una fotografía de la Tierra tomada desde un satélite, podremos ver países enteros. Si ampliamos esa fotografía, veremos lagos, ríos y más detalles. Si continuamos la ampliación, podríamos llegar a ver ciudades, cordilleras, etc. Más aumentos, nos revelarán más detalles, siempre más detalles... En cambio, si tenemos un círculo y le hacemos un aumento, ¿qué tenemos?... acabamos perdiendo detalles, y nos quedamos con algo que parece una recta. (Ver Fig.2.4.1)

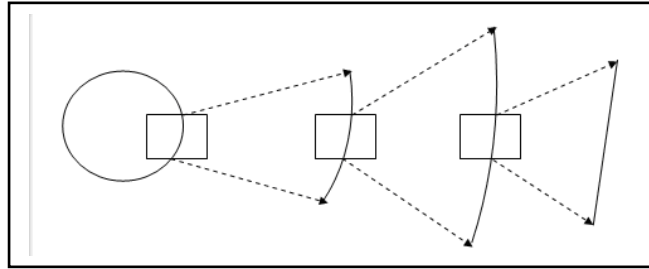


Fig.2.4.1 Aumento que nos muestra en detalle una parte de una circunferencia¹⁹

Un fractal es capaz de emular a la naturaleza en la presencia de detalles en múltiples escalas, como vemos en la siguiente imagen (Fig. 2.4.2). Los sistemas caóticos exhiben a menudo estructuras fractales. Los fractales son los sistemas que aparentan tener una estructura compleja, no importando la escala que se utilice para examinarlas. Los fractales verdaderos son sistemas infinitos y presentan auto-semejanza a través de todas las escalas, considerando la misma calidad de la estructura mientras que se enfoca adentro de ellas.^{24,27}

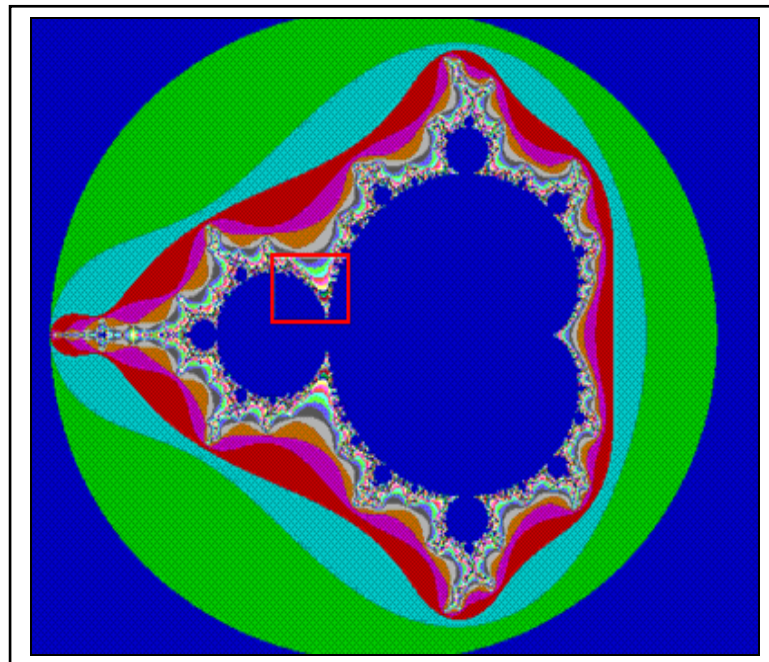


Fig.2.4.2 Conjunto de Mandelbrot, un fractal típico, con gran riqueza de detalles. Lo que se ve en cada recuadro es un aumento de una sección del recuadro que le precede.²⁷

El desarrollo de la geometría fractal ha sido uno de los sucesos matemáticos más fascinantes, y el darnos cuenta de que los sistemas no lineales producen fractales resulta muy fascinante. La mayor parte de la naturaleza y las series de tiempo son descritas mejor con fractales. La naturaleza es no lineal y los fractales son la geometría del caos.

Existen figuras sin dimensión, como un punto, unidimensionales como una línea recta; de dos dimensiones como un círculo; de tres dimensiones como un cubo o una esfera. ¿Es posible encontrar figuras que tengan dimensiones fraccionarias, como 1.3? Una meta inicial de la nueva geometría fractal es la de descubrir, desde fuera, la forma de diversos objetos, para posteriormente estudiar una de las características principales de cualquier objeto fractal, su dimensión, que no será más que un índice del grado de irregularidad e interrupción que posee. Así, al contrario de las dimensiones habituales (enteras) a las que nos tiene sometidos la Geometría Euclidiana, la dimensión de un objeto puede ser muy bien una fracción simple como $1/2$ o $5/3$ e incluso un número irracional. No obstante, existen objetos fractales, irregulares o interrumpidos, que satisfacen dimensiones enteras 1, 2 y sin embargo no se parecen en nada ni a rectas ni a planos. El término "fractal" nace del adjetivo latino "fractus", que significa interrumpido o irregular.

Un fractal se puede generar de distintas formas. El conjunto fractal más sencillo quizá es el conjunto de Cantor. Tal vez sea también el más antiguamente conocido.

Se construye de este modo iterativo:

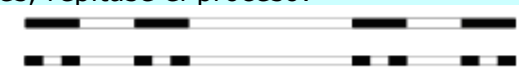
Téngase un segmento de recta:



Este segmento divídase en tres partes iguales y elimínese la de en medio:



Con los segmentos restantes, repítase el proceso:



Y así sucesivamente:

El límite de este proceso es un conjunto de puntos llamado conjunto o polvo de Cantor.

La geometría elemental no enseña que un punto aislado o un número finito de puntos, constituyen una figura de dimensión 0: que una recta, así como cualquier curva estándar, constituyen figuras de dimensión 1; que un plano o cualquier superficie ordinaria, son figuras de dimensión 2; que un cubo, o una esfera, posee dimensión 3. En la nueva geometría fractal, existen curvas planas muy irregulares para las que su dimensión se encontrará entre 1 y 2, podrá hablarse también en esta geometría de ciertas superficies muy hojaldradas de dimensión intermedia entre 2 y 3, o podremos definir polvos sobre la recta que generan objetos de dimensión comprendida entre 0 y 1.^{24,46}

2.5 DIMENSION FRACTAL

Todos tenemos un concepto intuitivo de dimensión. De un punto decimos que no tiene dimensiones; de un segmento, que tiene una dimensión; una figura plana, dos dimensiones y un poliedro, tres. Pensar en un objeto que tenga, por ejemplo, más de dos dimensiones pero menos de tres, es algo que escapa a la intuición sensible. Fue éste, precisamente, el abstracto pensamiento de Hausdorff, cuyos planteamientos teóricos fueron posteriormente desarrollados por Besicovitch. Así nació, en un plano meramente teórico, el concepto de dimensión fractal. La pregunta subsiguiente fue si objetos que poseen esta dimensión podrían darse en la realidad, al menos de un modo aproximado.

Los trabajos posteriores de varios matemáticos, entre ellos Mandelbrot, demostraron que no sólo pueden darse estos objetos, sino que la geometría de la naturaleza es eminentemente fractal.⁴⁰

Como hemos dicho, la dimensión fractal de un objeto es la medida de su grado de irregularidad, considerada a todas las escalas, y puede ser algo mayor que la dimensión geométrica euclidiana de un objeto. La dimensión fractal se relaciona con lo rápido con lo que la medición estimada del objeto aumenta según disminuye el tamaño del instrumento de medida. Una dimensión fractal mayor quiere decir que el fractal es más irregular y que la medición estimada aumenta con mayor rapidez. Para objetos de

la Geometría Euclidiana (líneas, curvas,...) la dimensión del objeto y su dimensión fractal coinciden.

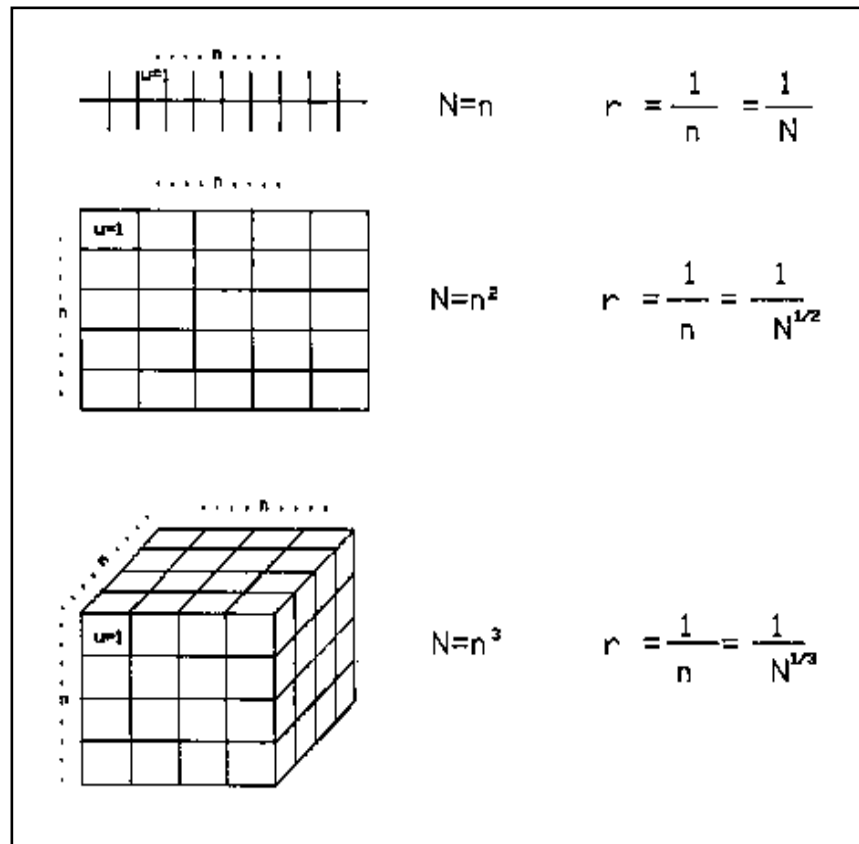


Fig. 2.5.1 El concepto de dimensión fractal admite múltiples definiciones. Todas ellas son parecidas, y constituyen generalizaciones del concepto clásico de dimensión entera, al cual engloban. Quizás la mas intuitiva y sencilla de entender sea la dimensión de homotecia, que se define como el inverso del exponente al que hay que elevar el cardinal N , de una partición homotética, para que se cumpla la igualdad $r=N^{-1/D}$. Para los ejemplos triviales de la figura las dimensiones son 1, 2 y 3, pero para otros objetos mas complicados, la dimensión de homotecia resulta ser un numero fraccionario.¹⁹

2.6 ESPACIO FASE

El espacio de fase nace como una herramienta en la Física actual, considerado como un espacio hipotético que posee tantas dimensiones como el número de variables necesarias para especificar un estado de un sistema dinámico dado. Las coordenadas de un punto en el espacio de fase son un conjunto de valores simultáneos de las variables. De esta manera, cualquier estado del sistema detenido durante un instante vendrá representado como un punto en el espacio de fase. Cuando el sistema cambia,

el punto se moverá a otra posición del espacio de fase, y si el sistema se modifica sin tregua de tiempo (con continuidad), el punto determinará una trayectoria a la que denominamos órbita. Un ejemplo sencillo para ilustrar este concepto de espacio de fase, lo constituye un péndulo que oscila sin fricción. Una variable sería la posición y otra la velocidad; las dos cambian continuamente; podemos considerar como espacio de fase un sistema cartesiano en el que cada eje representa a cada una de las variables. La gráfica que obtendríamos será de una curva más o menos cerrada, la cual se repite una y otra vez siempre.

Para el caso de que el péndulo esté expuesto a fricción, no son necesarias las ecuaciones del movimiento para conocer el resultado final: el péndulo perderá constantemente energía a causa de la fricción, y las trayectorias (órbitas) que describen los puntos del espacio de fase decrecerán en espiral hacia un punto interior, que representa el estado estable, en este caso, el de la inmovilidad absoluta. (Observar Fig. 2.6.1)

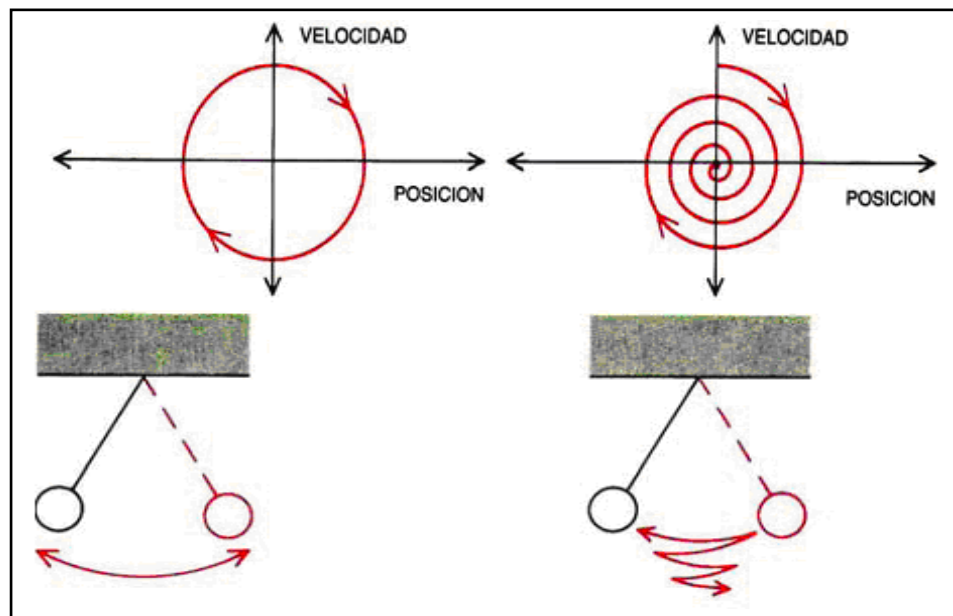


Fig.2.6.1 El espacio de fase es un espacio abstracto cuyas coordenadas son los grados de libertad del movimiento de un sistema, por ejemplo, el movimiento de un péndulo (esquemas inferiores) está completamente determinado por su posición y su velocidad iniciales. Por ello su configuración se define por un punto en un plano cuyas coordenadas son la posición y la velocidad (esquemas superiores). Mientras el péndulo oscila de un lado al otro, sigue una “trayectoria” o caminos a través del espacio fases. En el caso de un péndulo ideal no sometido a rozamiento, la trayectoria es una curva cerrada (arriba a la izquierda); pero si hubiera rozamiento, la trayectoria describió una espiral que se acercaría a un punto (arriba ala derecha).⁴⁷

Entonces podemos decir que el espacio fase es la colección de posibles estados de un sistema dinámico. Un espacio fase puede ser finito (Ej. La tirada ideal de la moneda, se tienen dos estados: Águila y Sol), enumerable infinitamente (Ej. las variables de estado son enteros), o innumerable (Ej. las variables de estado son números reales). Queda implícito en la noción de que un estado particular en el espacio fase especifica al sistema completamente, que el estado es todo lo que necesita saber sobre el sistema para tener conocimiento completo del futuro inmediato. El camino, en el espacio fase, trazado por una solución de un problema de valor inicial se llama una órbita o trayectoria del sistema dinámico. Si las variables de estado toman valores reales en un continuo, la órbita de un sistema del tiempo- continuo es una curva, mientras la órbita de un sistema del tiempo-discreto es una sucesión de puntos.^{4, 42}

2.7 SENSIBILIDAD A LAS CONDICIONES INICIALES

Un Sistema Dinámico podemos considerarlo como una colección de partes que interactúan entre sí y se modifican unas a otras a través del tiempo. El movimiento regular de los objetos, planetas en órbita, péndulos, resortes, bolas que ruedan..., son fenómenos que se sitúan en lo que llamamos una dinámica lineal, sus comportamientos se describen mediante ecuaciones lineales y las Matemáticas resuelven este tipo de ecuaciones fácilmente. En un Sistema Dinámico lineal, pequeños cambios en las condiciones iniciales del sistema no originan grandes cambios en el proceso ni en el resultado final del mismo. Cuando, por el contrario, la dependencia interactiva entre las partes que configuran el sistema es muy sensible --pequeñas variaciones en las condiciones iniciales provocan cambios substanciales en el resultado final (efecto mariposa)-- decimos que la dinámica no lineal que rige el sistema está sujeto a una dinámica caótica.

Una consecuencia inmediata de la dependencia sensible en cualquier sistema es la imposibilidad de realizar predicciones perfectas, ni siquiera mediocres. Es esta dependencia sensible otra característica que incorporar en la descripción de los fenómenos caóticos; así, podemos decir que un fenómeno es caótico cuando,

pareciendo comportarse como un fenómeno de azar, no lo es, las partes que los conforman sufren dependencia sensible o son sensiblemente dependientes.

La dependencia sensible es la conducta equivalente para cada condición inicial, cada punto en el espacio-fase se coloca eficazmente en la posición inicial de cualquier experimento. La dependencia sensible no requiere crecimiento exponencial de perturbaciones, pero esto es típico para los sistemas caóticos. Tampoco se requiere definitivamente que todos los puntos iniciales cercanos diverjan, algunos puntos cercanos pueden converger. Finalmente, las palabras “condiciones iniciales” son una perturbación pequeña típica introducida que en cualquier momento crecerá en forma similar. Pensemos en “inicial” como significando “un tiempo cuando una perturbación o el error se introduce”, no necesariamente en el tiempo cero.^{19, 26}

2.8 ATRACTORES

La evolución temporal de un sistema dinámico puede desarrollarse de manera continua o discreta en el tiempo. En el primer caso, se habla de un flujo; en el segundo, de una aplicación o mapeo. Un péndulo se mueve continuamente de un estado a otro describiéndose así por un flujo continuo en el tiempo. El número de insectos que nacen cada año en una cierta región y el intervalo temporal entre gotas sucesivas de un grifo que gotea, se explican de modo más natural mediante una aplicación discreta en el tiempo.

Para saber cómo evoluciona un sistema con un estado inicial dado, se puede recurrir a la dinámica (las ecuaciones del movimiento), que explica el movimiento por incrementos a lo largo de la trayectoria. Para determinar el comportamiento de un sistema con este método, se necesita un trabajo de cálculo que es proporcional al tiempo durante el que se desea seguir la trayectoria. En el caso de sistemas simples, como un péndulo sin rozamiento, puede ocurrir que las ecuaciones admitan una solución explícita, es decir, una fórmula que exprese cualquier estado futuro en función del inicial. Una solución explícita proporciona un atajo, un algoritmo simple que precisa sólo del estado inicial y el tiempo final para predecir el futuro, sin pasar por los estados

intermedios. Con tal solución, el trabajo de cálculo necesario para seguir el movimiento es más o menos independiente del tiempo deseado. A modo de ejemplo, dadas las ecuaciones del movimiento planetario y lunar, y las posiciones y velocidades de la Tierra y la Luna, los eclipses pueden predecirse con años de antelación.

Los éxitos en la obtención de soluciones explícitas en el caso de muchos sistemas simples, durante los primeros desarrollos de la Física, suscitaron la esperanza de que tales soluciones existieran para cualquier sistema mecánico. Desgraciadamente hoy en día sabemos que esto en general no es así. El comportamiento impredecible de los sistemas dinámicos caóticos no puede expresarse mediante una solución explícita. Consecuentemente, no hay atajos para predecir su comportamiento. No obstante, el espacio de fases proporciona una herramienta poderosa para describir el comportamiento de los sistemas caóticos. La utilidad de la imagen que así se obtiene, reside en la posibilidad de representar el comportamiento de los sistemas de manera geométrica. Por ejemplo, un péndulo con rozamiento termina por detenerse, lo que significa que la trayectoria se aproxima a un punto en el espacio de fases. Este punto no se mueve: está fijo; por atraer a las trayectorias próximas, recibe el nombre de “*atractor*”. Si se da un pequeño empujón al péndulo, vuelve al mismo punto fijo atractor.^{47, 48, 49}

Existen controversias acerca de una definición apropiada de un atractor, aquí proporcionamos algunas de las más aceptadas.

Definición de Cramer: El atractor conduce al péndulo a ubicarse encima de él en su búsqueda del punto de descanso...⁵⁰

Definición de Heylighen: Un atractor es una región del espacio de estados de un sistema dinámico al cual dicho sistema puede ingresar pero no salir. Esa región no contiene otra región más pequeña con esa propiedad. Ejemplo la búsqueda de un estado de máxima entropía típica de la segunda ley de la termodinámica es sencilla de reinterpretar a la manera de un atractor.³

Definición de Russell: Conjunto en el espacio fase que tiene un vecino en el que cada punto se queda cercano y se aproxima al atractor cuando el tiempo va al infinito.⁴⁸

Definición e Moon: Conjunto de puntos o un subespacio en el espacio de estados hacia el cual una “historia de tiempo” se aproxima asintóticamente.⁵¹

Se entiende en general que el atractor es un producto de fantasía que se halla en seis dimensiones. Además de las tres coordenadas espaciales que describen su ubicación en el espacio, tiene aún otras tres que caracterizan a la velocidad de desplazamiento del punto de descanso. Informalmente un atractor es simplemente un estado en el que un sistema se atrae. Así, en un tiempo largo, un sistema dinámico disipativo puede establecerse en un atractor.

Cualquier sistema, que con el paso del tiempo tiende al reposo, puede caracterizarse por un punto fijo en el espacio de fases. Este es el caso de un fenómeno muy general por el que las pérdidas debidas al rozamiento o a la viscosidad, por ejemplo, provocan que las trayectorias sean atraídas hacia una región menor del espacio de fases con menos dimensiones. Se dice que una región así constituye un atractor. A *grosso modo*, un atractor es a lo que tiende, o a lo que es atraído, el comportamiento de un sistema. Algunos sistemas no tienden al reposo a largo plazo, sino que recorren periódicamente una sucesión de estados.

Fijémonos en un reloj de péndulo, en él la energía perdida por rozamiento se repone con la almacenada en un muelle o un peso. El péndulo repite su movimiento una y otra vez. En el espacio de fases, tal movimiento corresponde a un ciclo, a una trayectoria periódica. Independientemente de cómo empiece a balancearse el péndulo, el ciclo al que se aproxima a largo plazo es siempre el mismo. Tales atractores son llamados “ciclos límite o periódicos”. Otro sistema familiar con un atractor periódico es la onda de la función *seno* o *coseno*.⁴⁷

Hay otros tipos de atractores los cuales explicaremos utilizando un sistema con dos grados de libertad, es decir, uno en el que podemos dibujar las figuras en el plano. De hecho, este sistema no corresponderá a ningún modelo físico particular. Se tratará

de una construcción puramente matemática, pensada para ilustrar el comportamiento típico que presentaría un sistema con dos grados de libertad. Dada una ecuación diferencial, podemos visualizar el movimiento de todos los puntos iniciales posibles si pensamos en un fluido imaginario que corre a lo largo de las trayectorias de la ecuación. Si escogemos un punto de partida, es decir, un conjunto de condiciones iniciales para la ecuación, entonces las coordenadas de su movimiento subsecuente son las soluciones de la ecuación diferencial para dicha condición inicial. En la figura 2.8.1 podemos ver la imagen de cómo se ajustan estas líneas de flujo de la ecuación en el espacio de fases. El flujo se indica con líneas curvas, que corresponden a la evolución temporal de las coordenadas de varios puntos iniciales. Las flechas indican la dirección del movimiento a medida que transcurre el tiempo. Podemos notar cómo el flujo encaja en su conjunto: las flechas en las curvas más próximas se hallan alineadas muy juntas.

Esto significa que el fluido imaginario, cuyo flujo está representado por las líneas, no se separa: el movimiento es continuo. Existen cuatro características de este flujo particular las cuales me gustaría resaltar:

Primero, en la parte izquierda hay un punto hacia el cual confluyen en espiral todas las líneas de flujo próximas. Se le conoce como *sumidero*. Es bastante similar a un tubo de desagüe por el cual hace «glu-glú» el fluido. Enfrente, en la parte derecha, hay un tubo de desagüe al revés, un punto a partir del cual el fluido se desparrama en espiral. Se le llama *fuelle*.

Piénsese en un fluido saliendo a borbotones por un manantial. En la parte de en medio existe un lugar donde las líneas de flujo parecen entrecruzarse. Se le conoce como *silla de montar*. De hecho, las líneas no se cruzan. Si dos chorros de un fluido real chocan uno con el otro, se ven estas sillas de montar. Finalmente, rodeando la fuente, a la derecha, hay un bucle que se cierra una sola vez. Este es un *ciclo límite*. Se parece a un remolino, donde el fluido gira y gira. Un torbellino.⁴

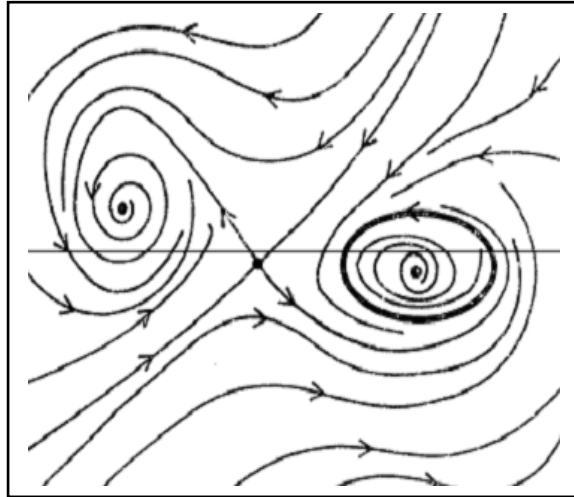


Figura 2.8.1. Espacio de fases de un flujo en un plano que muestra (de izquierda a derecha) un sumidero, una silla de montar, un ciclo límite y una fuente. ⁴

A continuación veamos estos atractores más a detalle:

1. Sumideros.-Un sumidero es un lugar en donde una línea de flujo se degenera para convertirse en un único punto, hacia el cual confluyen todos los puntos vecinos. Si el sistema inicia su movimiento en el punto central de un sumidero no sucede nada. Simplemente se queda ahí. Así pues, el sumidero representa un estado estacionario del sistema. Mientras tanto, si el sistema comienza su movimiento por un punto próximo al sumidero, se moverá hacia él. Esto significará que el estado estacionario en un sumidero es *estable*. Si tomamos el punto que representa el estado de un sistema y lo alejamos un poco del sumidero, entonces dicho punto gira en espiral dirigiéndose de nuevo hacia el punto de donde partió. Los sumideros entonces son estados estacionarios estables. Ver figura 2.8.2

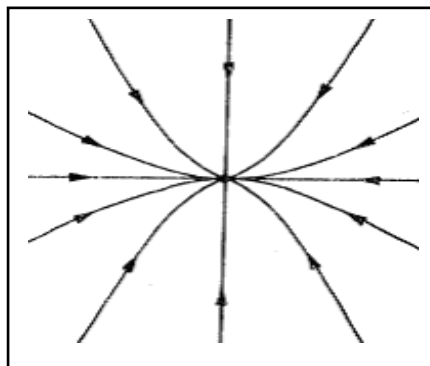


Figura 2.8.2. En la que se muestra un sumidero. ⁴

2. Fuentes.-Las fuentes son también estados estacionarios. Pero, ahora, los puntos vecinos se alejan. Ver figura 2.8.3.

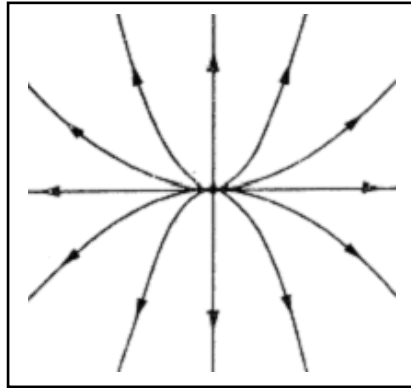


Figura 2.8.3. En la que se muestra una fuente. ⁴

3. Sillas de Montar.-Estos atractores son más interesantes. En cierto sentido, son estados estacionarios que son estables en algunas direcciones e inestables en otras. Imaginemos un jinete con poca experiencia montado en un caballo, sobre una silla que ha sido engrasada. Si el jinete se mueve hacia adelante o hacia atrás en la silla, simplemente se deslizará retrocediendo a la posición central. Pero si empieza a resbalar hacia los lados, volcará. Su posición es estable con respecto a los desplazamientos hacia delante y hacia atrás, pero inestable con respecto a los desplazamientos laterales. Debido a este tipo de analogía, a tales puntos se les da el nombre de “sillas de montar”. Ver la figura 2.8.4.

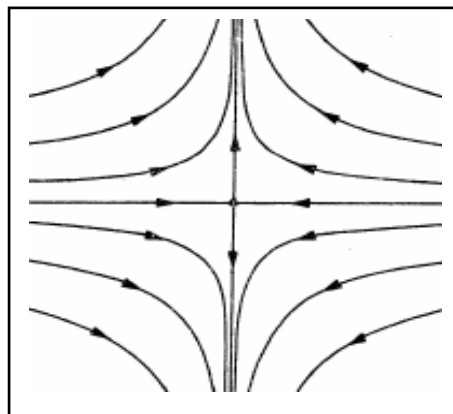


Figura 2.8.4. En la que se muestra una silla de montar: las líneas que se cruzan en el centro son sus separatrices. ⁴

El punto de en medio de la “cruz”, el punto de silla propiamente dicho es igual que todas las trayectorias que se reducen a puntos únicos un estado estacionario. Dos líneas de flujo se denominan las *separatrices* de la silla. Se designan de esta forma porque separan el modo en que fluyen puntos próximos. Imaginémonos recorriendo una separatriz desde la izquierda de la figura 2.8.4, si empezamos justo por encima de ella, daremos un giro brusco hacia la izquierda a medida que nos aproximemos al punto de silla, si empezamos por abajo, efectuaremos un giro brusco hacia la derecha.

4. Ciclos Límite.-Los ciclos límite son realmente interesantes. Si empezamos uno siempre estamos dando vueltas, repitiendo constantemente el mismo movimiento. El movimiento es “periódico”. Hay dos tipos básicos de ciclos límite. El que se muestra en la figura 2.8.5 es un ciclo límite estable: los puntos próximos se mueven hacia él. También existe un ciclo límite inestable: los puntos próximos se alejan de él. (Para dibujarlo, basta con invertir todas las flechas de la figura 2.8.5).⁴

5. Toroidal.-La forma de atractor que sigue en complejidad es el “cuasiperiódico” que topológicamente es un toro, una figura semejante a la superficie de una rosquilla o dona (ver la figura 2.8.6). Aquí se combinan juntos varios movimientos periódicos diferentes, cuyas frecuencias son independientes (la *frecuencia* de un movimiento periódico es el número de períodos por segundo).

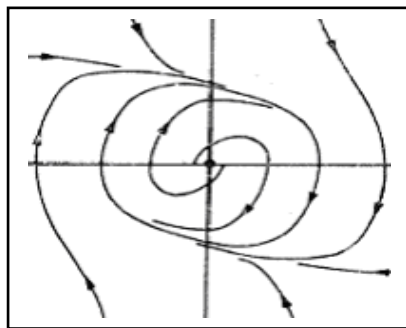


Figura 2.8.5 En la que se muestra un ciclo límite estable que es un bucle cerrado hacia el cual convergen las trayectorias vecinas. [6]

De modo que períodos largos corresponden a frecuencias bajas y períodos cortos a frecuencias altas). La trayectoria se enrolla rodeando el toro en el espacio de fases, de modo que una frecuencia queda determinada por la rapidez con que la trayectoria rodea el toro por el camino más corto y la otra por la rapidez con que lo hace alrededor del camino más largo. En este tipo de atractores los toros pueden ser de dos o más dimensiones, lo que representa la combinación de más de dos oscilaciones.⁴⁷

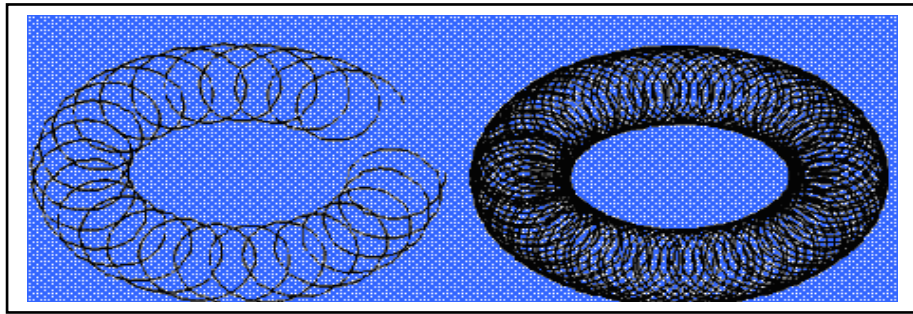


Figura 2.8.6. Topológicamente en un toro tienen lugar movimientos cuasiperiódicos:(izquierda) combinación de movimientos en los círculos grande y pequeño; (derecha) el toro resultante.⁴

6.- Extraño: El término atractor extraño fue introducido por Ruelle y Takens en 1971 en su discusión sobre la presencia de la turbulencia en el flujo de fluidos. Notaron que, cuando el movimiento periódico es inestable (con tres o más modos), el resultado típico será un objeto geométricamente extraño. Desgraciadamente, el término atractor extraño se usa a menudo para cualquier atractor extraño, sin embargo, el término debe reservarse para atractores que sean “geométricamente extraños”. Un *atractor extraño* es una imagen o gráfico en el espacio de fases de algún concreto sistema caótico. Viene a representar el comportamiento a largo plazo de dicho sistema.

El primer atractor extraño fue el ahora famoso atractor de Lorenz, llamado así en honor de su descubridor. (Ver Fig.2.8.7)

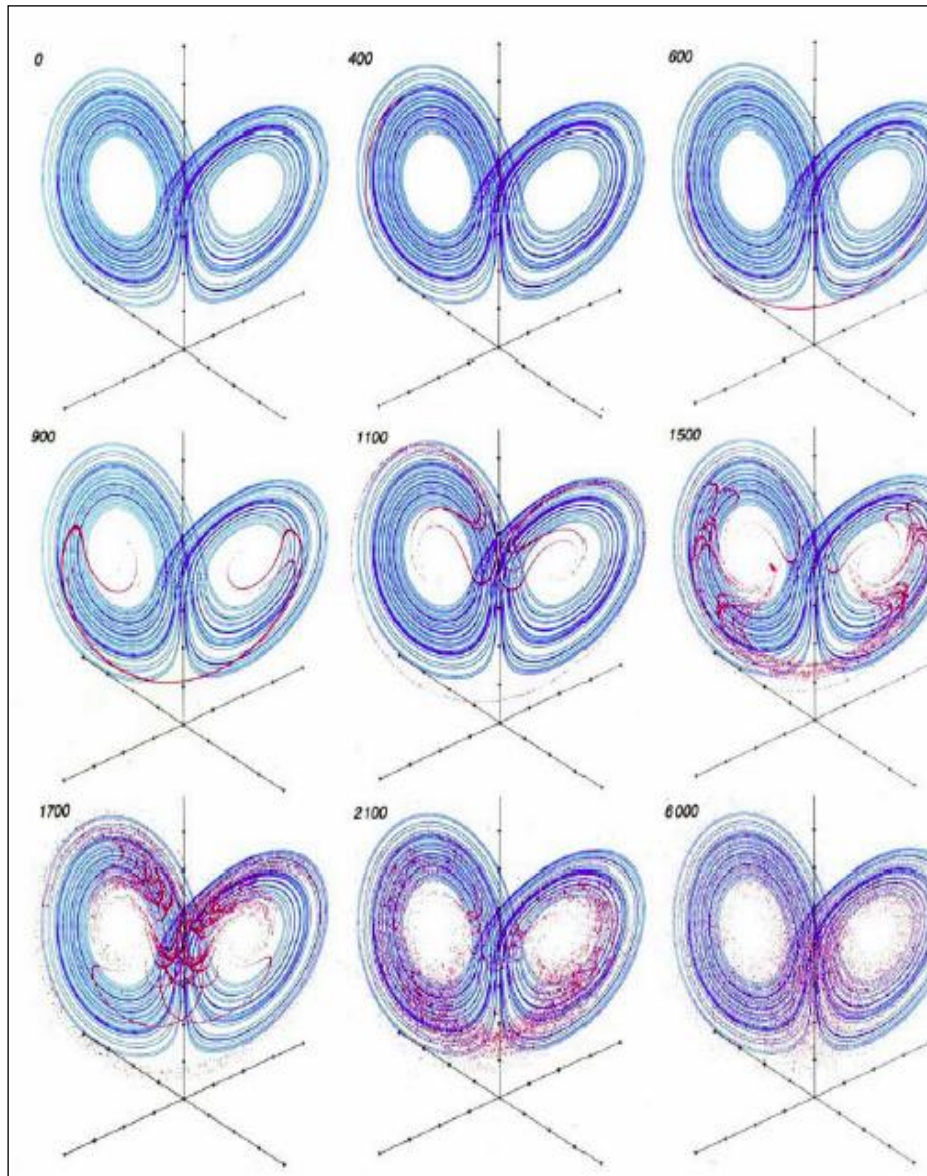


Figura 2.8.7. Un atractor caótico desarrolla una estructura mucho más complicada que la que presenta un atractor predecible (un punto, un ciclo límite o un toro). La divergencia de las trayectorias próximas constituye la razón última por la que el caos lleva a la impredecibilidad. Una medición perfecta correspondería a un punto en el espacio de fases, pero cualquier medición real resulta imperfecta y genera un entorno de incertidumbre. El verdadero estado podría hallarse en cualquier parte del entorno. Lo que se muestra aquí en el atractor de Lorenz, con la incertidumbre en la medida inicial representada por 10,000 puntos rojos, tan juntos entre sí en un comienzo que son indistinguibles. Al moverse cada punto bajo la acción de las ecuaciones, la nube se estira hasta convertirse en un hilo largo y fino, que se pliega después sobre sí mismo muchas veces, hasta que sus puntos se extienden por todo el atractor. La predicción se torna entonces imposible: el estado final puede encontrarse en cualquier parte del atractor. En el caso de un atractor predecible, por el contrario, todos los estados finales permanecen próximos. Los números que hay escritos sobre los esquemas indican el tiempo en unidades de ducentésima de segundo.⁴⁷

Allá por el año 1963 E. Lorenz investigaba la razón profunda de que el tiempo meteorológico fuese imposible de predecir a largo plazo. Planteó un modelo matemático para la simulación por ordenador del tiempo meteorológico^{18, 23}. El modelo en cuestión estaba basado en la convección de los fluidos; Lorenz lo simplificó casi abusivamente para adaptarlo a su ordenador, pero conservando, eso sí, su verdadera esencia: la no linealidad. Fue así como descubrió una de las más singulares propiedades de los sistemas caóticos, denominada "dependencia sensitiva de las condiciones iniciales".^{4, 18,41}

En el modelo climático de Lorenz, éste comprobó que ínfimas variaciones de entrada, comparables a una pequeña borrasca local, se convertían, en breve tiempo, en enormes variaciones de salida de su ordenador. Esto es lo que, se conoce por "efecto mariposa", a saber, el hecho de que si hoy agita, con sus alas, el aire de Pekín una mariposa puede modificar el clima de Nueva York del mes que viene.¹³

Si la impracticabilidad de pronósticos a largo plazo fuese lo único que se pudiese inferir de la dinámica caótica, carecerían de interés práctico los atractores extraños. No obstante, ello no es así. Siguiendo nuestro paralelismo con la Mecánica Cuántica, la sensibilidad a las condiciones iniciales supone una limitación *fundamental*, sólo comparable al Principio de Indeterminación (o de incertidumbre) de Heisenberg. De igual modo ya no tiene sentido hablar de órbita del electrón, sino de orbital, también en Caos carece de sentido hablar de la trayectoria u órbita del sistema dinámico en el espacio de fases, sino más bien cabría pensar en un orbital, y éste sería, precisamente, el atractor que gobierna la dinámica del sistema.⁵⁰

Básicamente existen cuatro tipos de atractores:

- ✧ El atractor de punto fijo, que representa un estado estable,
- ✧ El atractor de ciclo límite representativo de un régimen periódico,
- ✧ El atractor Toroidal, que representa un régimen cuasi periódico y
- ✧ Los atractores extraños, que son atractores a los cuales se les puede asociar una dimensión fractal.

Existen atractores extraños caóticos y no caóticos, por lo que no debemos usar como sinónimo la palabra caótico y atractor extraño, ya que la palabra caótico se refiere al comportamiento de las trayectorias sobre el atractor, mientras que el término atractor extraño se refiere a la estructura ó forma geométrica del atractor; un atractor es caótico si las órbitas cercanas al mismo divergen con el tiempo. (Ver Fig.2.8.8)

Podemos concluir que la caracterización de los sistemas o fenómenos caóticos, como aquellos que, aparentando ser fenómenos de azar, no lo son, presentan una dinámica no lineal (dependencia sensible) y su comportamiento llevado al espacio de fases se caracteriza por la existencia de atractores extraños, atractores de dimensión fractal.^{45, 47}

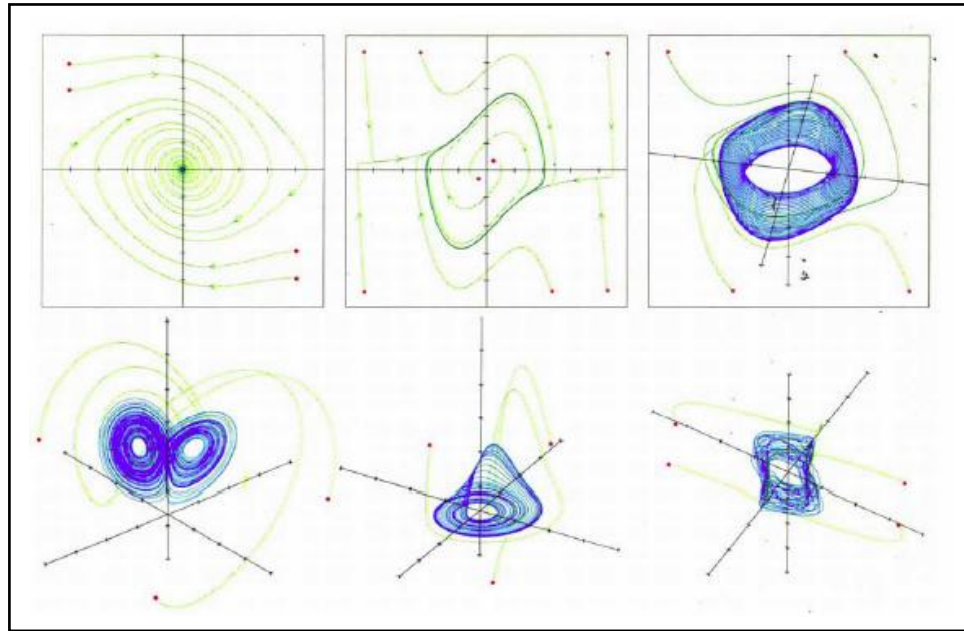
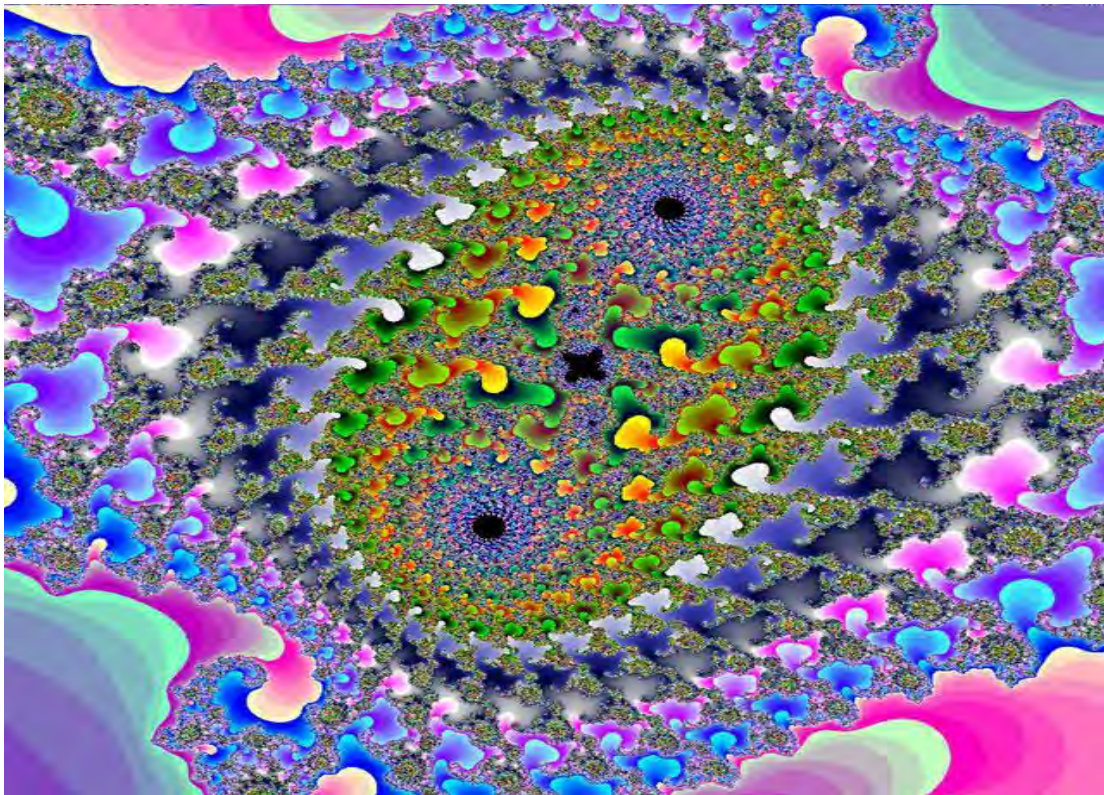


Figura 2.8.8. Los atractores son formas geométricas que caracterizan el comportamiento a largo plazo en el espacio de fases. A grandes rasgos, un atractor es a lo que tiende, o a lo que es atraído, el comportamiento de un sistema. Se muestran aquí los atractores en azul y los estados iniciales en rojo. Las trayectorias (verde) acaban acercándose a los atractores desde los estados iniciales. El tipo más simple de atractor es un punto fijo (arriba, izquierda). Tal atractor corresponde a un péndulo con rozamiento; el péndulo llega siempre a la misma posición de reposo, independientemente del modo en que empezó a oscilar (véase la mitad derecha de la figura 2.6.1). El que le sigue en complejidad es el ciclo límite (arriba, centro) que forma un ciclo cerrado en el espacio de fases. Un ciclo límite describe oscilaciones estables, como el movimiento de un reloj de péndulo y la onda de la función seno o coseno. Las oscilaciones compuestas o comportamiento cuasiperiódico, corresponden a un toro atractor (arriba, derecha). Estos tres atractores son predecibles: su comportamiento puede predecirse con exactitud. Los atractores caóticos, en cambio, corresponden a movimientos impredecibles y adquieren una forma geométrica más complicada. En la parte de abajo se muestran tres ejemplos de atractores caóticos; de izquierda a derecha, se ofrecen los descubiertos por Edward N. Lorenz, Otto E. Rössler y Robert S. Shaw, respectivamente.⁴⁷

Por lo tanto, la teoría del caos consiste, de manera muy general, en el estudio de los sistemas complejos siempre cambiantes, irregulares y aparentemente aperiódicos, que están basados en la recursión y sofisticados algoritmos matemáticos que se ejecutan a través de un conjunto de ecuaciones diferenciales sirviendo como modelo a un sistema físico.

CAPÍTULO III

ANÁLISIS DE SISTEMAS DINÁMICOS



“La ciencia son hechos; de la misma manera que las casas están hechas de piedras, la ciencia está hecha de hechos; pero un montón de piedras no es una casa y una colección de hechos no es necesariamente ciencia.

[Henri Poincaré]

CAPÍTULO III

ANÁLISIS DE SISTEMAS DINÁMICOS

3.1 IMPORTANCIA DEL ANÁLISIS DE SISTEMAS DINÁMICOS

Como hemos visto, el comportamiento caótico genera una especie de aperiodicidad parecida a la aleatoriedad y pérdida de información debido a las condiciones iniciales que pueden explicar el comportamiento complejo (o al menos algún comportamiento complejo) en sistemas reales. Sería muy interesante tener alguna forma cuantitativa definitiva para reconocer el caos y sacar el “verdadero” caos del sólo comportamiento ruidoso o comportamiento irregular debido a la complejidad (por un gran número de grados de libertad) del sistema.

Una importante razón para cuantificar el comportamiento caótico es que se podrían anticipar rasgos universales análogos del comportamiento regular y del caótico, tanto cualitativos como cuantitativos, que describan el comportamiento de un sistema y los cambios de su comportamiento de su régimen caótico debido a variaciones en los parámetros del sistema. Veremos que algunos de esos rasgos universales han sido descubiertos y que parecen describir exactamente el comportamiento de sistemas actuales. Finalmente (aunque hoy es raramente posible), podríamos esperar que podemos ser capaces de correlacionar cambios en la cuantificación del comportamiento caótico, con cambios en el comportamiento físico de un sistema. Por ejemplo, ¿Hay alguna cuantificación o valor cuyos cambios están ligados a los ataques de fibrilación en los latidos del corazón, o en los comienzos de turbulencia en un fluido, o comportamiento ruidoso en un circuito semiconductor?

Además de calcular valores para cuantificar sistemas caóticos, necesitamos ser capaces de estimar incertidumbres asociadas con esa cuantificación. Sin esas incertidumbres, es imposible hacer comparaciones significativas entre valores calculados teóricamente y medidos experimentalmente, o comparar resultados de diferentes experimentos.

Para resumir, aquí hay algunas razones para cuantificar el comportamiento caótico:

- ✧ Puede ayudar a distinguir el comportamiento caótico del comportamiento ruidoso.
- ✧ Favorece a la determinación de cuantas variables se necesitan para modelar la dinámica del sistema.
- ✧ Auxilia a clasificar sistemas dentro de clases universales.
- ✧ Cambios en los valores de la cuantificación pueden estar ligados a importantes cambios en el comportamiento dinámico del sistema.⁵²

La técnica más importante para hacer inferencias sobre el futuro con base en lo ocurrido en el pasado, es el *análisis de series de tiempo*.

La figura 3.1.1, que fue muy importante para obtener una forma de meta-análisis de caracterizar los fenómenos en diferentes grados de complejidad, muestra tres distintos sistemas caóticos. ¿Cuál es más caótico?

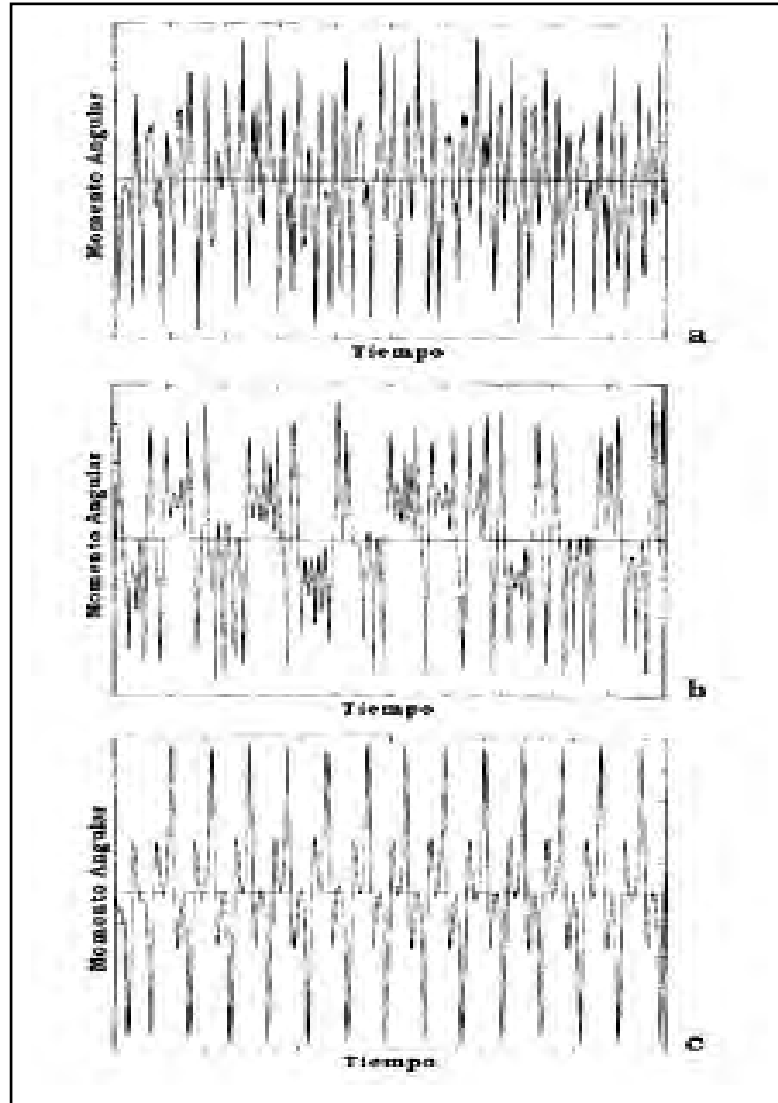


Figura 3.1.1. ¿Algún Caos es más caótico que otro Caos? Se ilustran tres ejemplos del momento angular del péndulo contra tiempo, obtenido numéricamente, para diferentes frecuencias y resistencia al movimiento impulsor. Los tres son regímenes caóticos, pero son muy diferentes. El Caos es aparente en a y b; c parece un sistema periódico de periodicidad 5, pero cada pico tiene una altura ligeramente diferente, y esas variaciones tienen todas las características del Caos: nunca se repiten, es sensible a las condiciones iniciales, etc.¹³

Una serie de tiempo refleja las variaciones de una variable en el tiempo. Como todas las clases de conducta social; los movimientos de series de tiempo son generados por fuerzas sistemáticas de la sociedad. Se denominan Series de Tiempo a un conjunto de mediciones de cierto fenómeno o experimento registrado secuencialmente en el tiempo. Las series de tiempo son secuencias de datos, medidos habitualmente a lo largo del tiempo a intervalos uniformes.

El análisis de las series de tiempo comprende métodos orientados a evaluar el comportamiento de este tipo de datos. Para la predicción a partir de series de tiempo se utilizan métodos cuantitativos (numéricos) basados en los datos pasados de la serie. Existe una variedad infinita de modelos destinados al análisis y proyección de series temporales.

Uno de los problemas que intentan resolver las series de tiempo es el de la predicción. Esto es, dada una serie $\{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$, describir el comportamiento de la serie; investigar el mecanismo generador de la serie temporal, buscar posibles patrones temporales que permitan sobrepasar la incertidumbre del futuro.

3.2 SERIES DE TIEMPO

En muchas áreas del conocimiento las observaciones de interés son obtenidas en instantes sucesivos del tiempo, por ejemplo, a cada hora, durante 24 horas, mensuales, trimestrales, semestrales o bien registradas por algún equipo en forma continua.

Se define una *serie de tiempo* como un conjunto de magnitudes pertenecientes a diferentes períodos de tiempo, de cierta variable o conjunto de variables,

El conjunto de mediciones de cierto fenómeno o experimento registradas secuencialmente en el tiempo están denotadas por:

$$\{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)\} = \{x(t) : t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$$

Ec. 3.2.1

Con $x(t_i)$ el valor de la variable x en el instante t_i . Si $T = Z$ se dice que la serie de tiempo es discreta y si $T = R$ se dice que la serie de tiempo es continua. Cuando $t_{i+1} - t_i = k$ para todo $i = 1, \dots, n-1$, se dice que la serie es equiespaciada, en caso contrario será no equiespaciada.⁵⁴

Dicho de otra manera los tipos de datos de las series de tiempo pueden ser:

a) Continuos o discretos:

Continuos: Observaciones hechas continuamente en el tiempo.

Discretos: observaciones hechas sólo en intervalos de tiempo con un espaciamiento bien definido y preferentemente equidistante.

b) Estacionarios o no estacionarios

Estacionarios: datos que fluctúan alrededor de un valor constante, con tendencia horizontal.

No estacionarios: datos con una tendencia ascendente o descendente.

c) Determinísticos o estocásticos

Determinísticos: son datos que pueden ser predecidos exactamente.

Estocásticos: Datos que son solo parcialmente determinados por valores pasados, tienden a ser descritos con una distribución de probabilidad.⁴³

Son innumerables las aplicaciones que se pueden citar, en distintas áreas del conocimiento, tales como, en economía, física, geofísica, química, electricidad, en demografía, en marketing, en telecomunicaciones, en transporte, etc. Las variables de interés pueden ser macroeconómicas (índice de precios al consumo, demanda de electricidad, series de exportaciones o importaciones, etc.), microeconomía (ventas de una empresa, existencias en un almacén, gastos en publicidad de un sector), física (velocidad del viento en una central eólica, temperatura en un proceso, caudal de un río, concentración en la atmósfera de un agente contaminante), o social (número de nacimientos, matrimonios, defunciones, o votos a un partido político) por mencionar algunos ejemplos. (Ver tabla 3.1.1)

<i>Series De Tiempo</i>	<i>Ejemplos</i>
1. Series económicas:	- Precios de un artículo - Tasas de desempleo - Tasa de inflación - Índice de precios, etc.
2. Series Físicas:	- Meteorología - Cantidad de agua caída - Temperatura máxima diaria - Velocidad del viento (energía eólica) - Energía solar, etc.
3. Geofísica:	- Series sismológicas
4. Series demográficas:	- Tasas de crecimiento de la población - Tasa de natalidad, mortalidad - Resultados de censos poblacionales
5. Series de marketing:	- Series de demanda, gastos, ofertas
6. Series de telecomunicación:	- Análisis de señales
7. Series de transporte:	- Series de tráfico
8. Series biológicas y biomédicas:	-Oscilaciones de calcio -Oscilaciones de glucosa en sangre -Arritmias -Ritmo cardiaco -Presión arterial -ECG -ECG -EMG
9. Series químicas	-Series de concentración químicas y bioquímicas -Ruido electroquímico: útiles en corrosión y electrodeósitos de metales.

Tabla 3.1.1 Ejemplos de series de tiempo en diferentes áreas

3.3 ANALISIS TRADICIONAL DE SERIES DE TIEMPO

El primer paso en el análisis de series de tiempo, consiste en graficar la serie. Esto nos permite detectar las componentes esenciales de la serie.

El gráfico de la serie permitirá:

a) Detectar el “Outlier”: Se refiere a puntos de la serie que se escapan de lo normal. Un outlier es una observación de la serie que corresponde a un

comportamiento anormal del fenómeno (sin incidencias futuras) o a un error de medición también conocido como “error craso”

Se debe determinar desde fuera si un punto dado es un error craso o no. Si se concluye que lo es, se debe omitir o reemplazar por otro valor antes de analizar la serie.

Por ejemplo, en un estudio de la producción diaria en una fábrica se presentó la siguiente situación (ver figura 3.3.1)

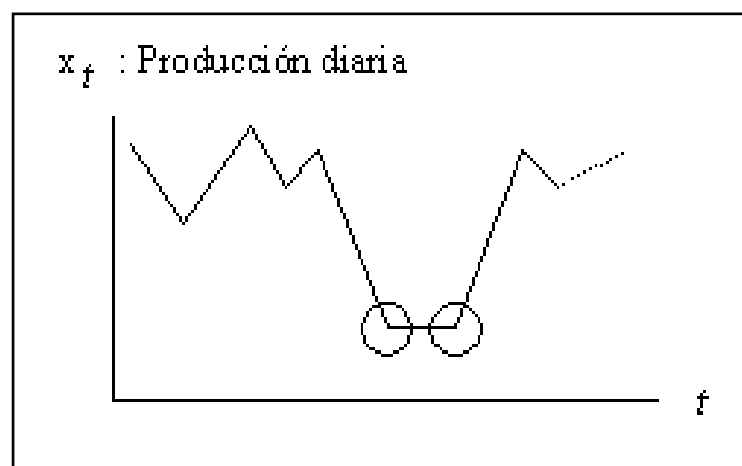


Figura 3.3.1 Serie de tiempo que pertenece a la producción diaria donde podemos observar comportamiento fuera de lo normal. Se presentan el “error craso”.⁵⁴

Los dos puntos enmarcados en un círculo parecen corresponder a un comportamiento anormal de la serie. Al investigar estos dos puntos se vio que correspondían a dos días de paro, lo que naturalmente afectó la producción en esos días. El problema fue solucionado eliminando las observaciones e interpolando.

b) Permite detectar tendencia: Representa el comportamiento predominante de la serie. Esta puede ser definida vagamente como el cambio de la media a lo largo de un periodo (ver figura 3.3.2).

c) Variación estacional: Esta representa un movimiento periódico de la serie de tiempo. La duración de la unidad del periodo es generalmente menor que un año. Puede ser un trimestre, un mes o un día, etc. (ver figura 3.3.3).

Matemáticamente, podemos decir que la serie representa variación estacional si existe un número s tal que $x(t) = x(t + k \cdot s)$.

Las principales fuerzas que causan una variación estacional son las condiciones del tiempo, como por ejemplo:

- 1) en invierno las ventas de helado
- 2) en verano la venta de lana
- 3) exportación de fruta en marzo.

Todos estos fenómenos presentan un comportamiento estacional (anual, semanal, etc.)

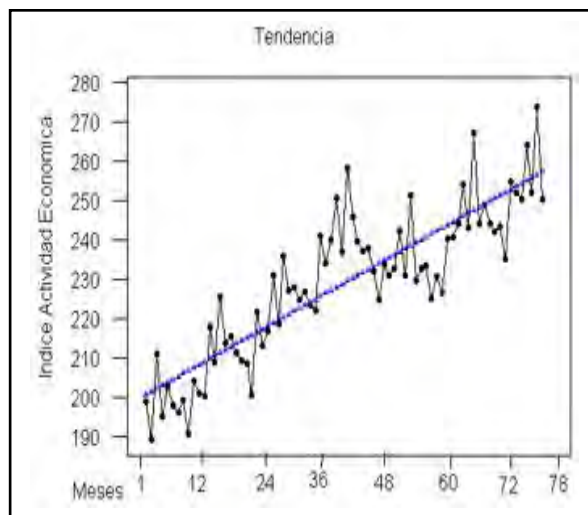


Figura 3.3.2 Serie de tiempo perteneciente al muestreo del Índice de Actividad Económica durante 78 meses.⁵⁴

d) Variaciones irregulares (componente aleatoria): Los movimientos irregulares (al azar) representan todos los tipos de movimientos de una serie de tiempo que no sea tendencia, variaciones estacionales y fluctuaciones cíclicas.^{4, 54}

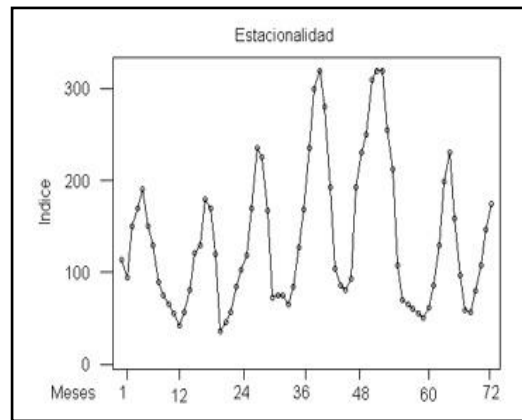


Figura 3.3.3 Serie de tiempo que muestra la estacionalidad en un periodo de 72 meses.⁵⁴

El análisis de las gráficas generadas por las series de tiempo es de gran importancia ya que mediante un simple examen visual permite catalogarlos como deterministas o estocásticos. En el primer caso, el estado futuro del sistema depende de su estado puntual, así como de la suma acumulativa de todos sus estados pasados, mientras que en el segundo, no existe ninguna correlación entre el pasado del sistema y su presente, por lo que tampoco influirá éste en su futuro.

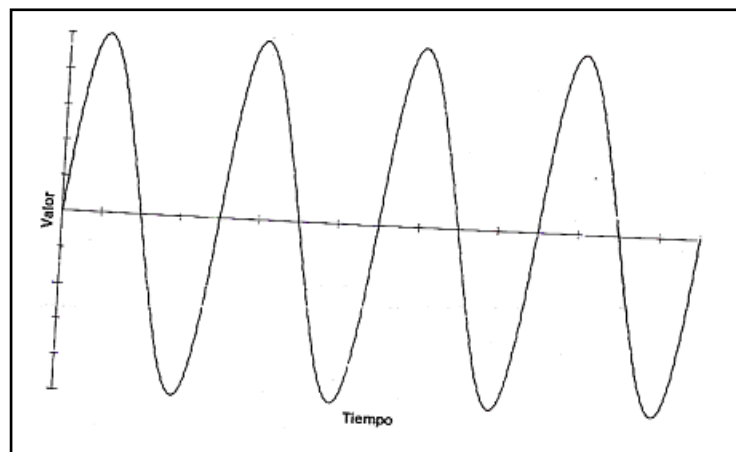


Fig. 3.3.4 Serie de tiempo de un sistema determinista típico.¹⁹

La figura 3.3.4 ilustra la gráfica que produce un sistema totalmente determinista, debido a que las condiciones del sistema vuelven a ser iguales a las iniciales con cada período, el sistema exhibe una órbita cerrada y de ello se desprende que cada uno de

los puntos en los que es posible descomponer la trayectoria observada, no solo contiene todo el pasado del sistema sino también su futuro.

En el caso de un sistema estocástico, por el contrario, no existe ninguna correlación entre cualesquiera dos instantes seleccionados y su serie de tiempo debería ser totalmente aleatoria, como se representa en la Fig. 3.3.5.

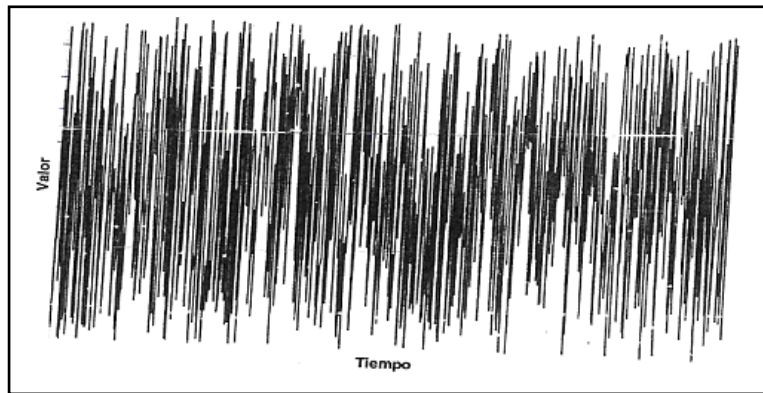


Fig. 3.3.5 Serie de tiempo de un sistema estocástico típico. ¹⁹

La falta de correlación entre los puntos de la trayectoria implica que aun cuando volvieran a aparecer las condiciones iniciales, la probabilidad de que el sistema siguiera la misma trayectoria que en el período anterior, disminuiría rápidamente con cada instante de tiempo transcurrido.¹⁹

El segundo paso es analizar estadísticamente los datos calculando la media, moda, mediana, la varianza, los histogramas, etc., para tratar de construir un modelo que explique la estructura y la evolución de una variable a lo largo del tiempo.

El tercer paso es el cálculo de índices o propiedades métricas así como la aplicación de procedimientos gráficos que nos permitan determinar si una serie de tiempo aparentemente aleatoria puede corresponder a comportamiento caótico a partir del análisis de un sistema determinista no lineal. Estas herramientas nos permiten estudiar el sistema que originó la serie de tiempo y su posible evolución. ⁴³

El método clásico (paso 1 y 2) tiene la desventaja que se acoplan a través del tiempo, lo que implica que el proceso de estimación debe volver a iniciarse frente al conocimiento de un nuevo dato. Este tipo de análisis es de naturaleza descriptiva, por lo que el juicio y el conocimiento del fenómeno juegan un rol importante en los resultados obtenidos; por lo que actualmente, se analizan los datos aplicando la teoría del caos y la geometría fractal para evaluar la complejidad del sistema (paso 3).

La liga más directa entre la teoría del caos y el mundo real es el análisis de series de tiempo de sistemas reales en términos de la dinámica no lineal. El marco de la teoría del caos constituye una nueva aproximación al análisis de series de tiempo irregulares. Tradicionalmente, las señales no periódicas han sido modeladas por procesos estocásticos lineales. Pero incluso los sistemas dinámicos más simples pueden exhibir evolución temporal fuertemente irregular sin entradas aleatorias. La teoría del caos ofrece nuevos conceptos y algoritmos para las series de tiempo que puede llevar a un mejor entendimiento de las señales, por ejemplo los exponentes de Lyapunov, reducción del ruido, predicción no lineal, dimensiones y entropías así como pruebas estadísticas para la no linealidad, control del caos, el análisis de wavelets u ondeletas y la dinámica de patrones. De tal manera que todos los conceptos pueden ilustrarse usando datos experimentales reales en medicina, biología, geofísica, ciencias sociales, etc.

3.4 ANALISIS DE LA DINAMICA NO LINEAL PARA SERIES DE TIEMPO

Según el tipo de comportamiento que presenten las series de tiempo pueden ser caracterizadas para esto, se utilizan dos tipos de descripción diferentes pero relacionados,. El primer tipo enfatiza la *dinámica* (dependencia de tiempo) del comportamiento caótico. El exponente de Lyapunov es un ejemplo de este tipo de descriptor, además de algún tipo de “entropía”, que juega un papel principal. Estos valores en la caracterización nos dicen cómo el sistema evoluciona a través del tiempo y qué pasa con trayectorias cercanas que fluyen con el tiempo. El segundo tipo enfatiza la naturaleza *geométrica* de las trayectorias en el espacio de fases.

Las siguientes figuras muestran diferentes series de tiempo que han sido caracterizadas en la literatura como series constantes ($f(x)=(x*0)+1$), periódicas (función seno o coseno), cuasiperiódicas (función doble seno), caóticas (ecuación de Lorenz) y aleatorias (ruido blanco).⁵⁵

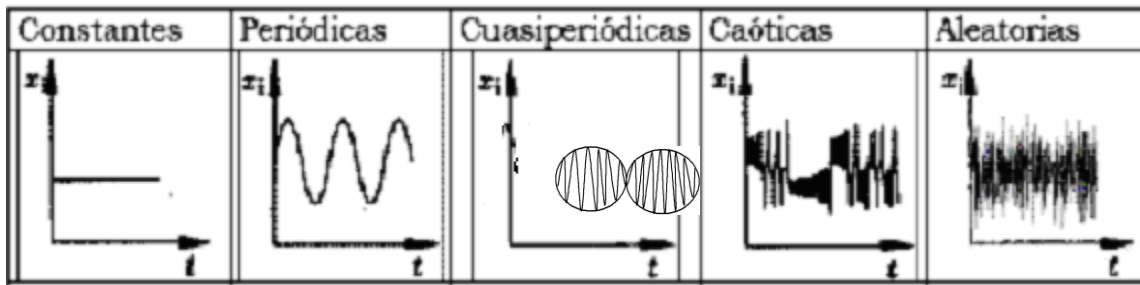


Fig.3.4.1 Series de tiempo caracterizadas para los diferentes tipos de comportamiento.⁴²

3.4.1 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

En estadística la distribución de probabilidad $F(x)$ es una función de la probabilidad que representa los resultados que se van obteniendo en un experimento aleatorio.³⁹

Para un número dado x , la probabilidad es (Ec.3.4.1.1):

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Ec.3.4.1.1

En donde $F(x)$ se le denomina función de distribución de probabilidad de la variable X y representa la probabilidad de que la variable tome el valor desde $-\infty$ hasta x .

Por lo tanto una vez conocida la función de distribución $F(x)$ para todos los valores de la variable aleatoria x conoceremos completamente la distribución de probabilidad de la variable.

Como la probabilidad es siempre un número positivo, la función de distribución será una función no decreciente que cumple lo siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

Ec. 3.4.1.2

Es decir la probabilidad de todo el espacio muestral es 1 tal y como establece la teoría de la probabilidad y por otra parte:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

Ec. 3.4.1.3

Es decir la probabilidad del suceso nulo es cero.³⁹

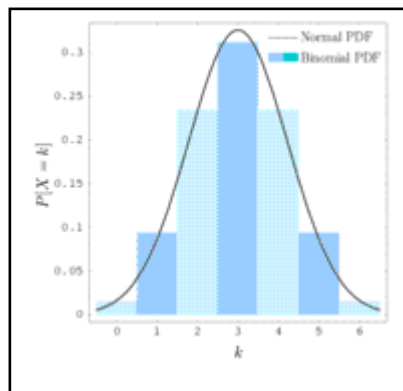


Fig. 3.4.1.1 Gráfica de una distribución normal.⁵⁴

☆ Clasificación de la Distribución de Probabilidades

Este tipo de análisis proporciona un histograma de los valores de los datos y realiza varias pruebas estáticas sobre éstos. Además muestra la probabilidad de ocurrencia de ciertos valores de datos.

Datos puramente aleatorios (como el ruido blanco) darán un incremento a la distribución Maxwelliana, donde podría mostrarse como una curva simple en todas las vistas si los datos son lo suficientemente válidos. Éste además podría ser el caso para datos caóticos, pero no lo es en general, más bien la distribución es parecida a un fractal. Los datos periódicos seguro darán un simple histograma con puntas filosas.⁵⁵

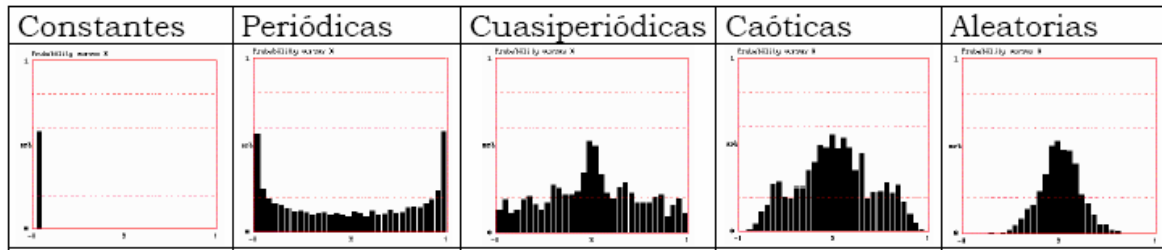


Fig. 3.4.1.2 Formas de los histogramas de distribución de probabilidad.⁴²

3.4.2 DIAGRAMAS DE ESPACIO DE FASES

En los sistemas dinámicos no lineales del mundo real se desconocen todas las variables que determinan al sistema ni las ecuaciones que gobiernan su comportamiento. Por lo regular, lo único que se percibe es el desarrollo combinado de todas las variables y las ecuaciones; esto es, una sola variable que evoluciona en el tiempo. Pese a ello, es posible deducir la dinámica del sistema aunque la tarea definitivamente no es trivial.

La evolución en el tiempo de un sistema se presenta con una trayectoria en el espacio fase. Existen varias técnicas para desarrollarlas:

- ☆ Una de ellas se logra graficando las diferentes variables del sistema en un gráfico de coordenadas,
- ☆ Otra es relacionando una función contra la derivada de dicha función,
- ☆ La tercera consiste en representar una función contra si misma introduciendo un desfase.⁴³

Aquí explicaremos como se introduce un desfaseamiento; la variable observada depende de la suma acumulativa de los grados de libertad o dimensiones que posee el sistema, por lo que la primera tarea consistiría en reconstruir la dimensionalidad original, que es desconocida, a partir de un solo grado de libertad, por ejemplo, la siguiente serie de tiempo que ilustra la evolución temporal de una variable: (tabla 3.4.2.1)

Tiempo	Serie
0	0
0.5236	0.5
1.0472	0.866
1.5708	1
2.09444	0.866
2.618	0.5
3.1416	0
3.6652	-0.5
4.1888	-0.866
4.7124	-1
5.236	-0.866
5.7596	-0.5
6.2832	0

Tabla 3.4.2.1 Serie de tiempo de la única variable observable en un sistema dinámico no lineal.¹⁹

La función que genera a esta serie de tiempo debe tener una dimensionalidad mayor a la de la variable observada aunque en este momento es desconocida. Existen varios esquemas para aumentar la dimensionalidad de un sistema, pero la más común consiste en desfasar los valores originales que representarían al eje x y convertirlos en los del eje y, los del eje y para convertirlos en los del eje z y así sucesivamente como lo ilustra la tabla 3.4.2.2.

Tiempo	x	y	Z
0	0	0.5	0.866
0.5236	0.5	0.866	1
1.0472	0.866	1	0.866
1.5708	1	0.866	0.5
2.09444	0.866	0.5	0
2.618	0.5	0	-0.5
3.1416	0	-0.5	-0.866
3.6652	-0.5	-0.866	-1
4.1888	-0.866	-1	-0.866
4.7124	-1	-0.866	-0.5
5.236	-0.866	-0.5	0
5.7596	-0.5	0	
6.2832	0		

Tabla 3.4.2.2 Serie de tiempo de la única variable desfasada para que ocupe un espacio tridimensional.¹⁹

Mediante esta tabla se ha creado una serie de tiempo que contiene únicamente a la variable observada mientras que el desfase en cada uno de los ejes después de x, establece una relación estrictamente determinista entre el presente representado

por el valor actual del eje x y el futuro representado por el valor correspondiente en el eje y, el presente del eje y y el futuro del eje z, etc. ¹⁹

Ahora bien, dada una serie de tiempo $x(t)$, ¿cómo podemos calcular su derivada, es decir dx/dt ? Los datos de los fenómenos que nos interesan son colectados periódicamente a través de la observación en campo o a través de dispositivos electrónicos vinculados a equipos de cómputo, de tal forma que las mediciones $x(t)$ en realidad consisten de una secuencia de observaciones realizadas a intervalos discretos de tiempo $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$

Existen varios métodos para obtener aproximaciones a la derivada de una función a partir de una serie de valores, las características de estos métodos son una aproximación polinomial, deducción de fórmulas y calcular la longitud de paso que minimice los errores.

Utilizando una de las definiciones posibles de la derivada de una función x en un punto t observamos lo siguiente (Ec. 3.4.2.1)

$$\frac{dx_t}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_{t+h} - x_t}{h}$$

Ec. 3.4.2.1

La definición anterior se puede extender para el cálculo de la derivada de la serie de tiempo observada

$$\frac{dx_t}{dt} = \frac{x_{t+h} - x_t}{h}$$

Ec. 3.4.2.2

La aproximación anterior llamada de diferencias hacia delante es la expresión común dada en cálculo para la derivada, una mejor aproximación es la de diferencias centradas en la cual se combinan ciertas series de Taylor con las que podemos obtener:

$$\frac{dx_t}{dt} = \frac{x_{t+h} - x_{t-h}}{2h}$$

Ec. 3.4.2.3

Y reconstruir en el espacio fase toda la información revelante acerca de la dinámica del fenómeno en estudio con una serie de tiempo, ya que si contamos con una medición $x(t)$ y calculamos su derivada con respecto al tiempo es decir $dx(t)/dt$ tendremos tanto una medición directa de x como un valor calculado de $f(x,y)$.⁴³

☆ Reconstrucción del Espacio de Fases

El análisis de series de tiempo dadas como matrices de datos se analizan de la siguiente forma, se asume que la serie de tiempo resulta de un sistema dinámico estrictamente no-lineal. Las columnas de la matriz de datos son tomadas como aproximaciones discretas de trayectorias continuas del sistema. La meta en la investigación de una serie de tiempo es caracterizar el sistema dinámico de donde se deriva. La reconstrucción del espacio de fases es un proceso donde columnas adicionales son derivadas desde una columna medida, dada en la matriz de datos. La figura 3.4.2.1 muestra un ejemplo donde una columna individual es usada para producir tres nuevas columnas. Las nuevas columnas generadas son básicamente copias cambiadas de la columna inicial donde el tamaño del cambio es denotado por el llamado tiempo de retraso d .

La longitud de las nuevas columnas es un poco más pequeña que la longitud de la columna inicial. La cantidad de reducción en el número de muestras depende del tiempo de retraso d y de la dimensión del espacio de reconstrucción (tres en el ejemplo de la Figura 3.4.2.1). Si los datos originales consisten de no sólo una, sino muchas columnas de datos, la construcción de columnas adicionales es llamada reconstrucción multicolumna. Tomando la derivada calculada numéricamente de una columna es otra posibilidad para generar columnas adicionales.

En la reconstrucción del espacio de fases se tienen que decidir dos parámetros importantes. Primero se tiene que determinar un tiempo de retraso d apropiado y segundo se debe especificar la dimensión del espacio de reconstrucción. La elección del tiempo de retraso d influye decisivamente en la apariencia visual del espacio de reconstrucción. En la figura 3.4.2.2 se muestra la reconstrucción del espacio de fases de los datos de un electrocardiograma con un tiempo de retraso de $d=2$ y $d=25$.^{42, 46}

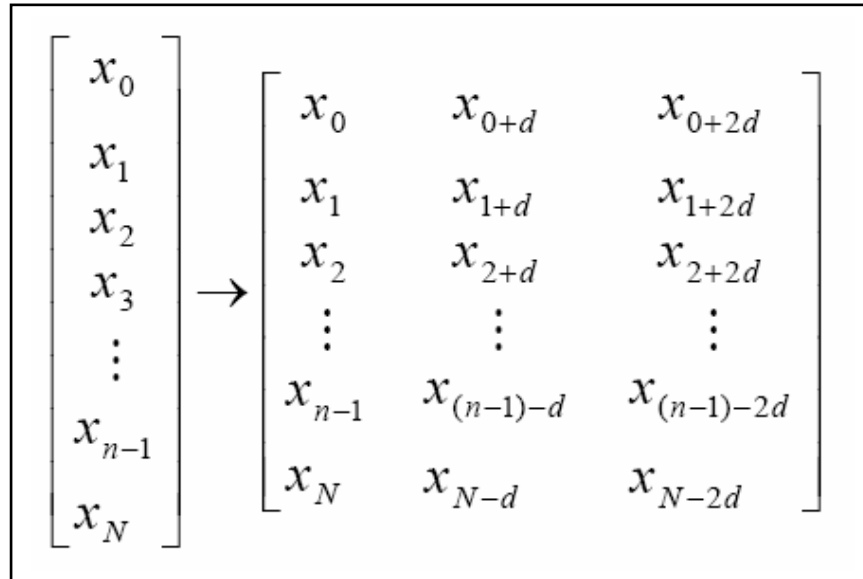


Figura 3.4.2.1. Reconstrucción del Espacio de Fases, generando un espacio de reconstrucción en 3D de una columna individual.⁴²

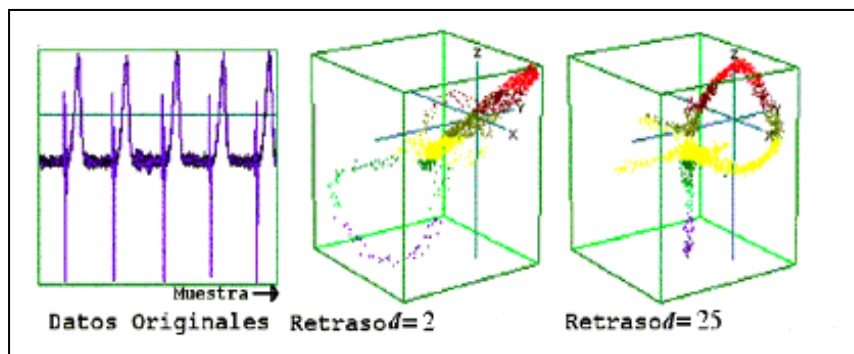


Figura 3.4.2.2. Reconstrucción del espacio de fases de datos de un ECG con diferentes tiempos de retraso d .⁴²

La utilidad de la reconstrucción del espacio de fases se debe a resultados teóricos cuyo estado es el siguiente: si la dimensión del sistema dinámico marcado no es más grande que n , entonces, tomando la dimensión del espacio de reconstrucción a como $2n+1$, es suficiente para aproximar el comportamiento cualitativo del sistema marcado en el espacio de reconstrucción. Por ejemplo, si el sistema original contiene un atractor entonces el espacio de reconstrucción también contendrá una versión distorsionada del mismo atractor.

De este modo con la reconstrucción del espacio de fases, el comportamiento de un sistema dinámico complejo posiblemente con una dimensión más alta, puede ser analizado sólo procesando una sola serie de tiempo discreto. Como la dimensión del sistema dinámico marcado no es conocida frecuentemente, este avance de la dimensión del espacio de reconstrucción tiene que ser estimada. Una aproximación comienza con una cota superior garantizadamente grande sobre la dimensión del espacio de fases y emplea la descomposición de valores individuales para reducir este número tanto como sea posible.^{6,55}

☆ Clasificación de los Diagramas de Fases

Esta clasificación se basa en que varias derivadas de los datos pueden ser graficados contra los valores de los datos para obtener una gráfica de espacio de fases que revela la topología y evolución de la solución, otra forma de construirla es usando la serie original y retrasos en tiempo de ésta.

Curva cerrada: oscilación periódica o subarmónica.

Toroide: Cuasiperiódica, dos frecuencias inconmensurables presentes.

Figura Discernible: Atractor extraño, existen alejamientos y acercamientos de trayectorias. Sistema caótico.

Colección borrosa de trayectorias: Sistema dinámico con mucha aleatoriedad o ruido de entrada, obteniéndose patrones no discernibles aún, la literatura muestra que todavía no se ha encontrado algún patrón para la aleatoriedad.⁵⁵

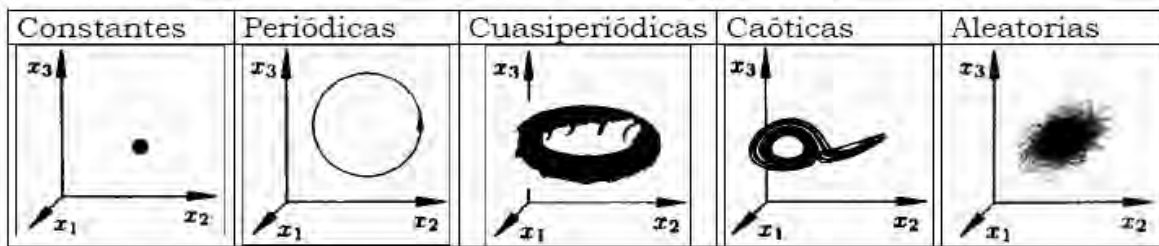


Fig. 3.4.2.3 Clasificación de las series de tiempo según su diagrama de espacio fase.⁴²

3.4.3 MAPEOS O SECCIONES DE POINCARÉ

Una gráfica de espacio de fases generalmente no distinguirá entre datos caóticos y aleatorios. Para este propósito es útil tomar alguna sección cruzada del plano de fases para reducir su dimensión a 1. Después de esa operación, los datos caóticos aparecerán frecuentemente en la forma de un atractor extraño teniendo una estructura fractal con dimensión fraccional.⁴ Ver figura 4.3-4.

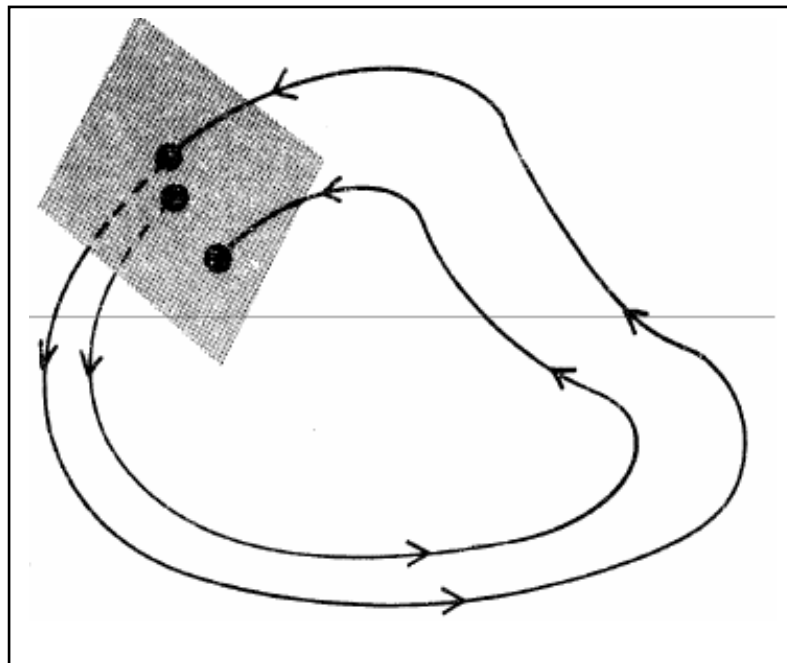


Figura 3.4.3.1. En la que se muestra cómo se construye el Mapa de Poincaré cruzando una Sección del Espacio de Fases.⁴

☆ Reconstrucción de los Mapeos de Poincaré

En el estudio matemático de sistemas dinámicos, un mapeo se refiere a una serie de tiempo de datos $\{x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_{n-1}), \dots, x(t_N)\}$ con la notación $x_0 \equiv x(t_{n-1})$. Un mapa determinístico simple es aquél en el que el valor de x_{n+1} puede determinarse de los valores de x_n . Éste se escribe frecuentemente de la forma

$$x_{(n+1)} = f(x_n) \quad \text{Ec.3.4.3.1}$$

Ésta puede ser reconocida como una *ecuación de diferencias*. La idea de un mapeo puede estar generalizada a más de una variable. Además, x_n podría representar un vector con M componentes $x_n = (Y1_n, Y2_n, \dots, YM_n)$ y la ecuación 3.4.3.1 podría representar un sistema de M ecuaciones.

Por ejemplo, supóngase que consideramos el movimiento de una partícula que se despliega en el espacio de fases ($\Delta x(t)$). Aprendimos con anterioridad que cuando el movimiento es caótico la trayectoria tiende a llenar una porción del espacio de fases. Sin embargo, si en lugar de encontrar al movimiento continuamente, nosotros sólo lo encontramos en la dinámica de tiempos discretos, entonces el movimiento aparecerá como una serie de puntos o marcas en el espacio de fases. Si $x_n \equiv x(t_n)$ y $y_n \equiv \dot{x}(t_n)$, esta serie de puntos en el espacio de fases representa un mapa *bidimensional*.

$$x_{(n+1)} = f(x_n, y_n) \quad \text{Ec.3.4.3.2}$$

$$y_{(n+1)} = g(x_n, y_n) \quad \text{Ec.3.4.3.3}$$

Cuando los tiempos de muestreo t_n se escogen acorde a ciertas reglas, este mapa es llamado *Mapeo de Poincaré*.^{51,55}

☆ Clasificación de Mapas de Poincaré

El valor de los datos de cada máximo o mínimo es graficado contra su valor del máximo o mínimo previo para así revelar una estructura en los datos que de otro modo podría estar oculta; es un método de desfaseamiento.

Número finito de puntos: Oscilación periódica o subarmónica.

Curva cerrada: Cuasiperiódica, dos frecuencias inconmensurables presentes.

Curva abierta: Modelamiento sugerido como un mapeo unidimensional; trata de graficar $x(t)$ contra $x(t+d)$.

Colección fractal de puntos: atractor extraño en tres dimensiones del espacio de fases.

Colección borrosa de puntos: (1) sistema dinámico con mucha aleatoriedad o ruido de entrada; (2) atractor extraño, pero con un sistema que tiene una disipación muy pequeña –se debe usar la técnica del exponente de Lyapunov; (3) atractor extraño en espacio de fases con más de tres dimensiones –se debe tratar con múltiplos del mapeo de Poincaré; (4) movimiento cuasiperiódico con tres o más frecuencias dominantes inconmensurables; observar fig. 3.4.3.2. [51, 55]

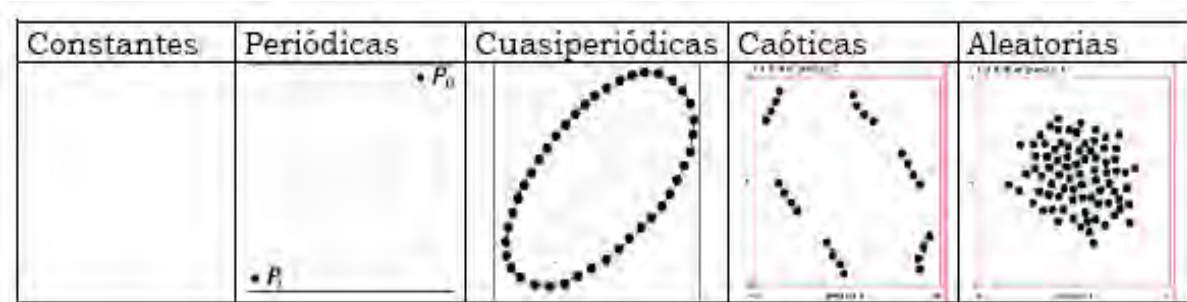


Fig. 3.4.3.2 Clasificación de las series de tiempo según el mapa de Poincaré que generan.⁴²

3.4.4 EXPONENTE DE LYAPUNOV

Un sistema es estable, si cuando se le produce una perturbación, su trayectoria a través del espacio de estados cambia solo un poco. El matemático ruso A. M. Lyapunov encontró que se puede usar un simple número para representar el cambio causado por

una perturbación. Dividió el tamaño de la perturbación en un instante dado por su tamaño en un momento anterior. Entonces, realizó la misma operación a varios intervalos y promedió los resultados; esta cantidad se conoce con el nombre de exponente de Lyapunov, el cual describe cuanto cambiará, en promedio, una perturbación.³³

El Exponente Lyapunov o Exponente característico Lyapunov de un sistema dinámico es una cantidad que caracteriza el radio de separación de dos trayectorias infinitesimalmente cercanas. Cuantitativamente, dos trayectorias en el espacio-fase con separación inicial δZ_0 divergen según la ecuación 3.4.4.1

$$|\delta Z(t)| \approx e^{\lambda t} |\delta Z_0|$$

Ec 3.4.4.1

El radio de separación puede ser diferente para diferentes orientaciones del vector de separación inicial. Aunque, hay un espectro completo del exponente Lyapunov; el número de ellos es igual al número de dimensiones del espacio-fase. Es común referirse sólo a la más grande, porque determina la predictibilidad de un sistema.

Para un sistema dinámico que evoluciona según la ecuación f en un espacio de n -dimensiones, el espectro del exponente Lyapunov en general depende del punto de inicio x_0 .

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\},$$

Ec 3.4.4.2

El exponente Lyapunov describe el comportamiento de los vectores en el espacio tangente al espacio-fase y son definidos por la matriz Jacobiana:

$$J^t(x_0) = \left. \frac{df^t(x)}{dx} \right|_{x_0}$$

Ec 3.4.4.3

La matriz J^t describe cómo un pequeño cambio en el punto x_0 se propaga hasta el punto final $f^t(x_0)$. El límite define a una matriz $L(x_0)$ (las condiciones para la existencia del límite son dadas por el teorema de Oseledec. ec 3.4.4.4

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (J^t \cdot \text{Transpose}(J^t))^{1/2t}$$

Ec 3.4.4.4

Si $\lambda_i(x_0)$ son los valores dados de $L(x_0)$, entonces el exponente Lyapunov λ_i está definido por la siguiente ecuación:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{df_n}{df_0}$$

Ec 3.4.4.5

Generalmente, el cálculo de los exponentes Lyapunov, como se define arriba, no puede ser llevado a cabo analíticamente, y en la mayoría de los casos uno debe recurrir a técnicas numéricas. Los procedimientos numéricos comúnmente usados estiman la matriz L basándose en un intervalo finito de aproximaciones de tiempo del límite definiendo L .

En la práctica, tomamos la Ec. 3.4.4.5 como la definición del exponente de Lyapunov λ . Si λ es positiva, el comportamiento es caótico. Si el sistema es conservativo (no existe disipación), la suma de todos los exponentes Lyapunov debe ser cero. Si el sistema es disipativo, la suma será negativa. Si el sistema es un flujo, un exponente será siempre cero. En este método de encontrar λ , esencialmente estamos localizando dos puntos de trayectorias cercanas en el espacio de fases y entonces seguimos las diferencias entre las dos trayectorias que siguen cada uno de esos puntos “iniciales”.^{33,41}

El espectro de Lyapunov puede ser usado para estimar la tasa de producción de entropía de un sistema dinámico. El inverso del mayor exponente Lyapunov es llamado

a veces en la literatura el momento de Lyapunov. Para órbitas caóticas, el momento de Lyapunov será finito, aunque para órbitas regulares será infinito.²⁶

☆ Clasificación de Exponente de Lyapunov

El exponente de Lyapunov más grande es estimado siguiendo aproximadamente la evolución de pares escogidos de puntos de datos. El exponente de Lyapunov es una medida de la tasa con la cual las trayectorias pasan cerca una de la otra en el espacio de fases en la que divergen.

Las trayectorias caóticas tienen al menos un exponente de Lyapunov positivo. Para las trayectorias periódicas, todos los exponentes son negativos. El exponente de Lyapunov es cero cuando se está cerca de una bifurcación. En general hay tantos exponentes de Lyapunov como ecuaciones dinámicas.^{17,55}

Constantes	Periódicas	Cuasiperiódicas	Caóticas	Aleatorias
	Exponente: (-) (-)	Exponente: (+) (-)	Exponente: (+) (+)	Exponente: (+) (+) Valores muy grandes

Fig. 3.4.4.1 Clasificación de las series de tiempo de acuerdo al exponente de Lyapunov.⁴²

3.4.5 ESPECTRO DE POTENCIA

El teorema de Fourier, permite demostrar que toda función periódica continua, con un número finito de máximos y mínimos en cualquier periodo, puede desarrollarse en una única serie trigonométrica uniformemente convergente y dicha función es llamada serie de Fourier.

Si se tiene una serie de tiempo complicada que sea una mezcla de ondas de diferentes frecuencias, es posible analizar la señal matemáticamente y obtener las componentes individuales. También podemos encontrar la intensidad de cada componente, es decir, cuánto contribuye cada componente al total. El método es

básicamente el análisis de Fourier: representar una curva como una suma de *senos* y *cosenos*.

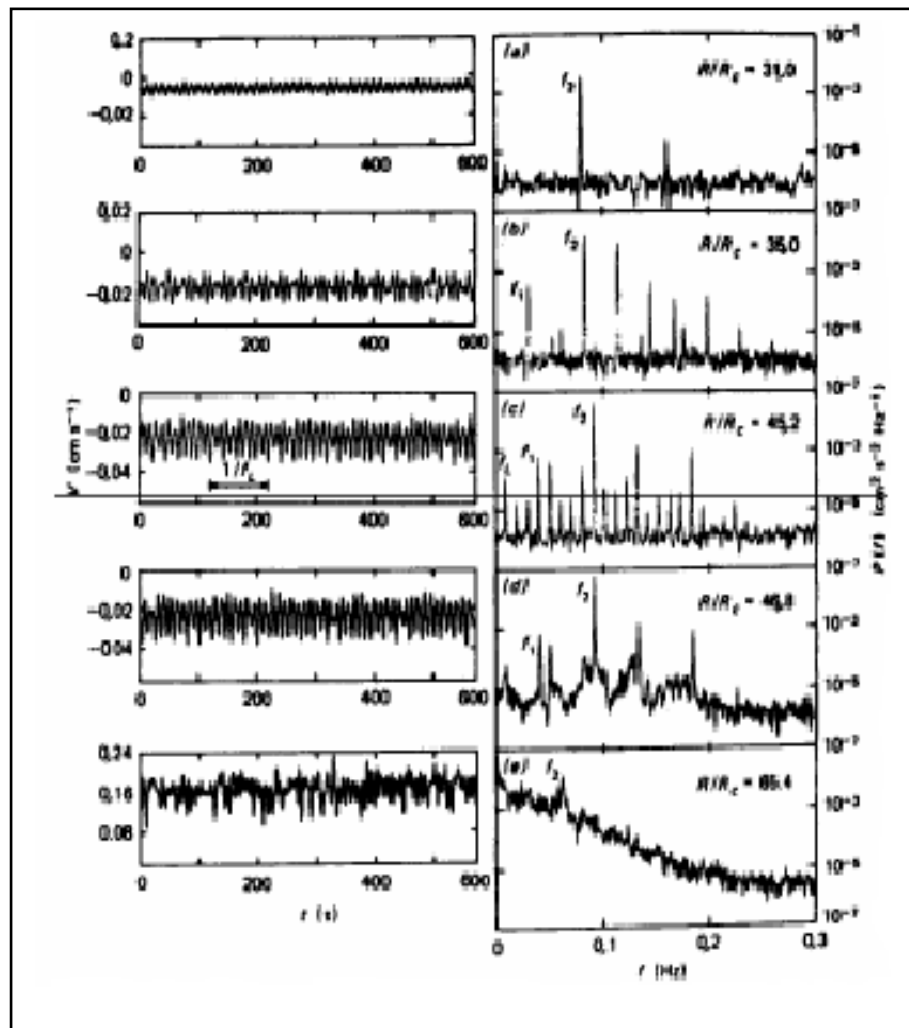


Figura 3.4.5.1 Series de tiempo de observaciones en un experimento de convección, y la correspondiente secuencia de los espectros de potencia, que muestran cómo cambia la intensidad de las componentes de frecuencia. Los picos indican frecuencias bien definidas en un movimiento periódico o cuasiperiódico; las bandas anchas indican la existencia del Caos.⁴

El resultado de este análisis puede resumirse en un *espectro de potencia*, una gráfica que muestra la intensidad de cada componente de frecuencia, ver figura 3.4.5.1. Ésta muestra cinco series de tiempo (la gráfica de la izquierda) junto con sus espectros de potencia (a la derecha). La escala de tiempo para las observaciones (en segundos, s) y la escala de frecuencias (en Hertz: 1 Hz= 1 oscilación por segundo) están abajo.⁴

Por ejemplo, el dibujo superior izquierdo muestra un ritmo muy regular con una oscilación por segundo aproximadamente. Esto se refleja en el espectro de potencia correspondiente de la derecha con un único pico, marcado con f_2 , cerca de 0.1 Hz.

La segunda serie de tiempo es mucho menos regular, y su espectro de potencia tiene varios picos. Un ojo entrenado puede ver que todas se construyen sumando entre sí múltiplos de dos frecuencias básicas, f_1 y f_2 , alrededor de 0.03 y 0.1 Hz. Estos picos en el espectro de potencia corresponden a componentes de frecuencia claramente definidas, que son mucho más intensas que cualquier frecuencia cercana. Una serie de tiempo cuasiperiódica tiene un espectro de potencia que consiste principalmente de picos agudos, como los tres dibujos superiores de la figura 3.4.5.1 Una serie de tiempo ruidosa, señal “aleatoria”, tiene un espectro de banda ancha, cuyas componentes de frecuencia están esparcidas, como en la figura inferior. Es posible también una mezcla de las dos, como en la cuarta figura.⁴

El espectro de potencia es algo así como las “huellas dactilares de la frecuencia” de una serie de tiempo, y puede ser utilizado para detectar la presencia de ciertos tipos de comportamiento. Si aparece gradualmente una banda ancha de frecuencias (ver la figura 3.4.5.2) lo que se encuentra es que la serie de tiempo se hace caótica.⁴

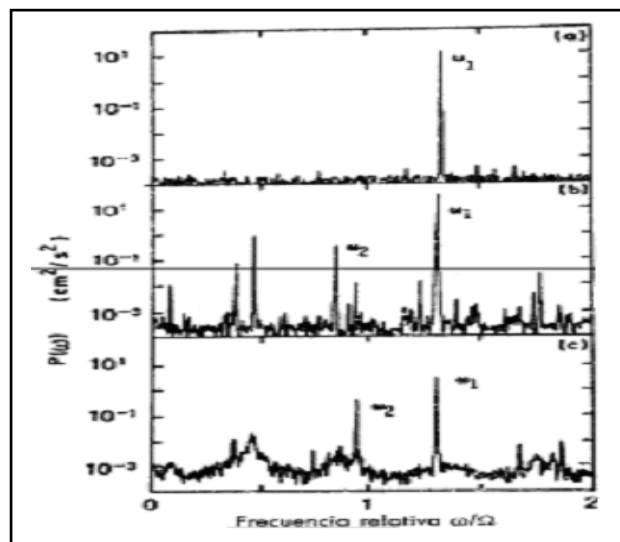


Figura 3.4.5.2. Espectros de potencia del sistema Taylor-Couette. Inicialmente se observa una sola frecuencia ω_1 (oscilación periódica). Luego aparece una segunda frecuencia ω_2 (junto con otros picos que representan combinaciones de ω_1 y ω_2). Finalmente se ve una banda ancha de Caos.⁴

☆ Transformada Rápida de Fourier

Ésta es hasta el momento la medición más popular, principalmente porque la idea de descomposición de una serie de tiempo no-periódica en una serie de señales sinusoidales o armónicas es ampliamente conocida entre científicos e ingenieros. La presuposición hecha en este método es que la serie de tiempo periódica o no-periódica puede ser representada como una síntesis de señales de *seno* o *coseno*:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Ec 3.4.5.1

donde $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$

Debido a que $F(\omega)$ frecuentemente es compleja, el valor absoluto de $|F(\omega)|$ es usado en despliegues gráficos. En la práctica, se utiliza un componente electrónico o una computadora para calcular $|F(\omega)|$ de datos de entrada del experimento, algunos parámetros varían dependiendo del experimento que se trate. Cuando el movimiento es periódico o cuasiperiódico, $|F(\omega)|$ muestra una serie de espigas delgadas o líneas indicando que la serie de tiempo puede ser representada por una serie discreta de funciones armónicas $\{e^{\pm i\omega_k t}\}$, donde $k=1, 2, \dots$ ¹⁷

Como hemos visto, el análisis de Fourier nos deja determinar el contenido de la frecuencia de alguna serie de tiempo. Si ésta es periódica o cuasiperiódica, entonces el espectro de potencia de Fourier consistirá de una secuencia de “espigas” de las frecuencias fundamentales, sus armónicos, y las frecuencias que son las sumas y diferencias de las distintas frecuencias. El punto crucial es que el espectro consistirá de una serie *discreta* de frecuencias. Sin embargo, si la serie de tiempo es no periódica (por ejemplo caótica), entonces el espectro de potencia de Fourier será continuo. De este modo, la repentina aparición de un espectro de potencia es continua desde un espectro discreto; como algún parámetro del sistema es cambiado, es vista como un

indicador del comienzo de comportamiento caótico. Sin embargo, puede observarse un espectro de potencia de Fourier continuo si el ruido externo está presente. Además, si muchos grados de libertad están activos, entonces pueden haber tantas frecuencias fundamentales y armónicos presentes, que el espectro de potencia de Fourier *aparece* continuo para una resolución experimental dada, aun cuando las distintas frecuencias podrían ser resueltas con una resolución más alta. De este modo, la presencia de un espectro de potencia continuo no puede ser tomado necesariamente como una evidencia concluyente para la existencia de Caos (de dimensión baja), sin que se pueda mostrar ese ruido externo que está ausente y la resolución experimental es suficiente para ver todas las frecuencias que podrían estar presentes para el número esperado de grados de libertad.^{4,53}

El análisis espectral es insensible al ruido pero, su aplicación está limitada a determinar la presencia o ausencia de señales periódicas. El análisis espectral, por si solo, no puede distinguir un proceso caótico de uno aleatorio. Pero si permite distinguir entre señales con comportamiento periódico y señales no periódicas.⁴²

☆ **Clasificación del Espectro de Potencia**

Por lo regular, la transformada rápida de Fourier es usada para graficar el espectro sobre escalas lineales, escalas logarítmicas lineales o escalas logarítmicas-logarítmicas de los datos y despliega la potencia (amplitud media cuadrada) como una función de la frecuencia.

Datos aleatorios y caóticos dan un incremento al ampliar el espectro. Los datos periódicos y cuasiperiódicos producirán algunos picos dominantes en el espectro. La potencia espectral que siempre sigue líneas sobre una escala logarítmica lineal están pensadas para ser buenos candidatos para el Caos, de este modo el ruido tiende a tener un espectro de potencia bajo.⁵⁵

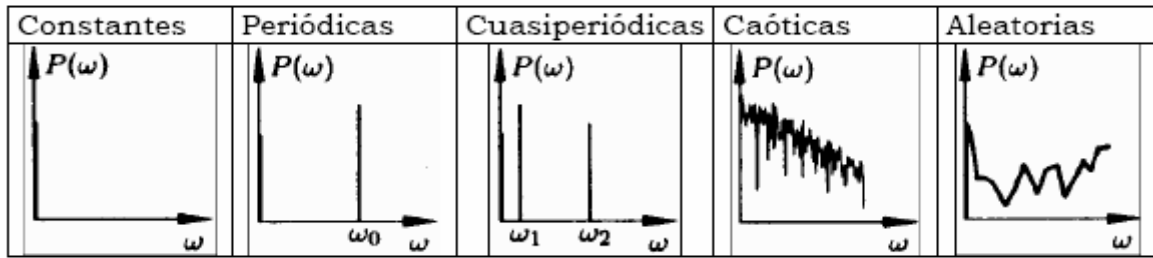


Fig. 3.4.5.3 Espectro de potencia característico de cada tipo de comportamiento.⁴²

3.4.6 FRECUENCIA DOMINANTE

Esta técnica es similar a la técnica del Espectro de Potencia. La frecuencia está en unidades de la frecuencia crítica de Nyquist (el recíproco de dos veces el intervalo entre los puntos de datos). Sin embargo, más que usar un método de transformada rápida de Fourier, esta técnica utiliza el método de máxima entropía (o todos los polos).

El método de máxima entropía representa los datos en términos de un número finito (N) de polos complejos de frecuencia discreta. Por el contrario, la transformada rápida de Fourier esencialmente adecua el espectro de potencia.

La entropía métrica es una noción asociada a la evolución caótica de un sistema que proporciona una medida de su grado desorden. En efecto, la “magnitud” del desorden no viene dada por la dimensión fractal, que puede ser pequeña, pese a estar ligada a una tasa elevada de desorden cuando el sistema es fuertemente disipativo.

Consideremos ante todo el ejemplo de un comportamiento periódico: se trata de un sistema predecible, es decir, que si hemos efectuado previamente un gran número de medidas, podremos predecir el valor que hallaremos al término de otra nueva. No hay sorpresa, no hay nueva información proporcionada por la evolución del sistema (su entropía métrica es nula). Para un régimen caótico, en cambio, el conocimiento de la evolución pasada no permite llevar a cabo una predicción segura, sólo estimar la probabilidad de encontrar tal o cual valor. Así pues, cada nueva medida aporta una información suplementaria. La entropía métrica proporciona entonces una medida de la cantidad de nuevas informaciones engendrada permanentemente por la evolución del

sistema. El método práctico de evaluación de la entropía métrica permite comprender el vínculo de esta magnitud con el parecido de un sistema consigo mismo a lo largo de la evolución.

Consideremos la porción de una trayectoria del sistema entre los instantes t_0 y t_1 y determinemos el número de otras porciones de trayectorias que durante el mismo intervalo de tiempo se mantienen a una distancia inferior a r de la primera. Cuando se aumenta la longitud de la porción de la trayectoria central, es decir el número de porciones vecinas, situadas a una distancia inferior a r , disminuye a causa de la divergencia de las trayectorias próximas. La tasa de salida de las trayectorias próximas fuera del tubo de radio r , promediada sobre el atractor, proporciona una cota inferior de la entropía métrica. Si la serie de tiempo es muy parecida a sí misma, la divergencia de las trayectorias será lenta, y la tasa de salida y la entropía serán pequeñas.

Cabe definir de un modo más preciso la entropía métrica a partir de los llamados exponentes de Lyapunov. En todo punto de una sección de Poincaré cabe distinguir dos direcciones: la dirección dilatante (o de estirado), tal que la distancia entre dos puntos vecinos aumenta en promedio como $\exp(\lambda_1 t)$ siendo λ_1 positivo, y la dirección contractante, localmente perpendicular a las láminas. En esta última dirección, la distancia entre dos puntos vecinos disminuye en promedio como $\exp(\lambda_3 t)$ con λ_3 negativo, λ_3 y λ_1 son dos exponentes de Lyapunov: caracterizan el atractor tomado en su conjunto y en cierto modo caracterizan su topología. En este ejemplo, el atractor se despliega en un espacio de tres dimensiones. En la dirección estrictamente perpendicular a la sección de Poincaré, dos puntos vecinos pertenecerán, por definición, a la misma trayectoria: con el tiempo, su distancia media no sufrirá cambios. Así pues, el exponente λ_2 asociado a esta dirección será nula. Más generalmente, para cada sistema caracterizado por n grados de libertad hay n exponentes de Lyapunov. Se ha visto que la sensibilidad a las condiciones iniciales permite asegurar que el caos determinista corresponde a la existencia de por lo menos un exponente de Lyapunov positivo. Volviendo a la entropía, vemos que el escape de las trayectorias fuera del tubo, que traduce esta sensibilidad a las condiciones iniciales, es debido al efecto de todas

las direcciones dilatantes. Ello permite establecer que la entropía métrica es menor o igual a la suma de los exponentes de Lyapunov positivos. ^{42,46}

☆ Clasificación de la Frecuencia Dominante

El método de máxima entropía es usado para calcular el espectro de potencia donde se hace una predicción de los siguientes 18 valores de las series de tiempo. En este caso, los últimos puntos N en la serie y los polos N son usados para predecir los siguientes 18 valores.

Datos aleatorios y caóticos dan un incremento al ampliar el espectro. Los datos periódicos y cuasiperiódicos producirán algunos picos dominantes en el espectro. ⁵⁵



Fig. 3.4.6.1 Frecuencias dominantes características de cada tipo de comportamiento. ⁴²

3.4.7 FUNCION DE AUTOCORRELACION

La autocorrelación es una herramienta matemática utilizada frecuentemente en el procesamiento de señales. La función de autocorrelación se define como la correlación cruzada de la señal consigo misma. La función de autocorrelación resulta de gran utilidad para encontrar patrones repetitivos dentro de una señal como por ejemplo encontrar la periodicidad de una señal enmascarada bajo el ruido o para identificar la frecuencia fundamental de una señal que no contiene dicha componente pero aparecen numerosas frecuencias armónicas de ésta. ^{46,55}

En estadística, la autocorrelación de una serie temporal discreta de un proceso x_t es simplemente la correlación de dicho proceso con una versión desplazada en el tiempo de la propia serie temporal.³³

Si x_t representa un proceso estacionario de segundo orden con un valor principal de μ entonces se define:

$$R(k) = \frac{E[(X_i - \mu)(X_{i+k} - \mu)]}{\sigma^2}$$

Ec.3.4.7.1

Donde E es el valor esperado y k el desplazamiento temporal considerado (normalmente denominado desfase). Esta función varía dentro del intervalo $[-1, 1]$ donde 1 indica una correlación perfecta (la señal se superpone perfectamente tras un desplazamiento temporal de k) y -1 indicando una anticorrelación perfecta.

En el procesamiento de señales, dada una señal temporal $f(t)$, la autocorrelación continua $R_f(\tau)$ es la correlación continua cruzada de $f(t)$ consigo mismo tras un desfase τ , y se define como:

$$R_f(\tau) = f^*(-\tau) \circ f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)f^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t-\tau) dt$$

Ec.3.4.7.2

Donde f^* representa el conjugado complejo y el círculo representa una convolución. Para una función real, $f^* = f$.

Formalmente, la autocorrelación discreta R con un desfase j para una señal x_n es:

$$R(j) = \sum_n (x_n - m)(x_{n-j} - m)$$

Ec.3.4.7.3

Donde m es el valor medio o valor esperado de x_n .

Puntualizaremos las propiedades de la autocorrelación unidimensional. La mayoría de sus propiedades son fácilmente extensibles a los casos multidimensionales.

- *Simetría:* $R(i) = R(-i)$,
- La función de autocorrelación alcanza un valor máximo en el origen, donde alcanza un valor real. El mismo resultado puede encontrarse en el caso discreto.
- Como la autocorrelación es un tipo específico de correlación mantiene todas las propiedades de la correlación.
- La autocorrelación de una señal de ruido blanco tendrá un fuerte pico en $\tau = 0$ y tendrá valores cercanos a 0 para cualquier otro τ . Esto muestra que el ruido blanco carece de periodicidad.
- El teorema de Wiener-Khinchin relaciona la función de autocorrelación con la densidad espectral a través de la transformada de Fourier.^{19,33}

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Ec.3.4.7.4

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau.$$

Ec.3.4.7.5

Para las vibraciones caóticas de un haz que se dobla. El espectro de Fourier muestra una banda ancha de frecuencias, mientras que la función de correlación tiene un pico en el origen $\tau=0$ y desciende rápidamente con el tiempo.⁵¹ (Ver Fig. 3.4.7.1)

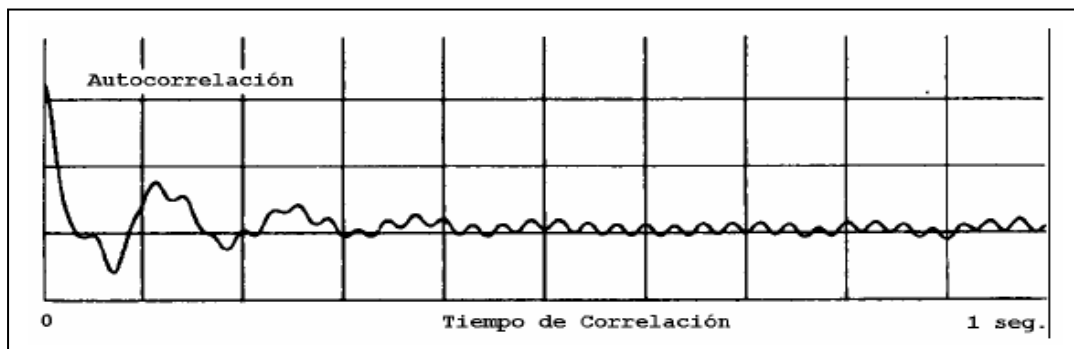


Figura 3.4.7.1 En la que se muestra la Función de Autocorrelación de una serie de tiempo caótica.⁵¹

☆ Clasificación de la Función de Autocorrelación

La función de autocorrelación provee una medida de la dependencia de los puntos de datos sobre sus vecinos. La función de autocorrelación se obtiene multiplicando cada $X(t)$ por $X(t - \tau)$ y sumando el resultado de todos los puntos de datos. La suma entonces se grafica como una función de τ . Esto da una medida de cómo dependen de sus vecinos los puntos de datos. El valor de τ en donde la función de autocorrelación permanece pequeña es el tiempo de correlación.

Datos aleatorios muy grandes no tendrán correlación y para esos datos la función de autocorrelación caerá abruptamente a cero, implicando una correlación de tiempo pequeña. Datos correlacionados muy grandes –como la salida de un generador de ondas *seno*- tendrán una función de autocorrelación que varía con t pero tendrá una amplitud que sólo disminuirá lentamente. Datos caóticos de ecuaciones de diferencias tienden a mostrar poca correlación, pero los datos caóticos de ecuaciones diferenciales pueden tener una enorme correlación si la prueba de tiempo es pequeña, entonces por lo tanto los puntos de datos adyacentes tienen valores similares.⁵⁵

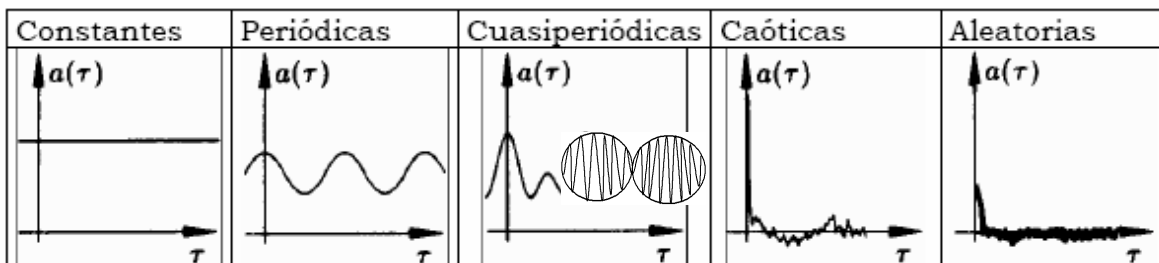


Fig. 3.4.7.2 Función de autocorrelación características de cada tipo de comportamiento.⁴²

3.4.8 EXPONENTE DE HURST

Para conocer la persistencia de un sistema, esto es, la autosemejanza de una serie consigo misma al evolucionar en el tiempo, se debe de calcular el exponente de Hurst; el cuál cuantifica la dinámica caótica de las series temporales a analizar; tiene una gran cantidad de aplicaciones a toda serie de tiempo pues es altamente robusto. Puede distinguir una serie aleatoria de una que no lo es, inclusive, si la serie no tiene la

distribución gaussiana. Hurst encontró que la mayoría de los sistemas naturales no siguen un camino aleatorio, gaussiano sino de otra índole.

Los pasos para obtener el exponente de Hurst son los siguientes:

- ✧ Descomponer la serie en un conjunto de intervalos de una amplitud temporal determinada, τ_H .
- ✧ Calcular la media para cada intervalo y las desviaciones acumuladas de esta media.
- ✧ Determinar la amplitud normalizada (R/S)
- ✧ A cada valor de τ_H se asigna el valor promedio de R/S sobre todos los subintervalos que determina.
- ✧ Se elige otro τ_H y se procede de modo que se obtiene un conjunto de valores τ_H y sus R/S asociados.

El cálculo práctico puede hacerse graficando $\log (R/S) \tau_H$ vs $\log (\tau_H)$ donde la pendiente de la recta obtenida es el exponente de Hurst.^{43,44}

✧ Clasificación del Exponente Hurst

Es un número que indica el grado de influencia del presente sobre el futuro (grado de similitud del fenómeno con el "Movimiento Browniano" o "Caminante Aleatorio"). Podemos decir que el exponente de Hurst es una medida de la complejidad del sistema y de la información que conserva al cabo de cierto tiempo.^{19, 33}

- $H > 0.5$: sistema persistente (correlación positiva). Ej. Si $H = 0.7$, entonces existe una probabilidad de 70% de que el siguiente miembro de la serie exhiba la misma tendencia que la del miembro actual.
- $H = 0.5$: sistema aleatorio (correlación nula o "ruido blanco")
- $H < 0.5$: sistema antipersistente (correlación negativa)

3.4.9 ENTROPIA DE KOLMOGOROV

El concepto de *entropía* apareció en la Física introducido por Clausius durante el siglo XIX. Corresponde, según sabemos a una medida del “desorden” que presentan las moléculas de un gas y ha permitido dar cuenta de los equilibrios termodinámicos.

Kolmogorov, dedicó su vida entera a la construcción de diferentes modelos matemáticos del azar. Concretamente estableció la definición de entropía en el interior de un conjunto.⁴³ Dado un conjunto, es necesario utilizar cierta cantidad de información para delimitar sin ambigüedad cualquiera de sus subconjuntos propios. Kolmogorov entendió que aquí era donde podía entrar el concepto de entropía. Definió la entropía de un subconjunto en función del hecho anterior, y lo llamó e-entropía.

Si C es un conjunto finito, podemos expresar por enumeración la lista de sus subconjuntos. A cada subconjunto le corresponderá simplemente su número de orden en la lista. El tamaño de la lista es de 2 elevado a N subconjuntos. Lo que expresado en sistema binario nos ocupa precisamente N bits. (Otra forma de verlo es teniendo en cuenta que podemos hacer corresponder un bit a cada posible elemento de los N en C , y para un subconjunto concreto, el j-ésimo bit vale 1 si está presente en el subconjunto, y 0 en caso contrario).

Kolmogorov definió la entropía de un subconjunto como

$$H(C) = \log(N)$$

Ec.3.4.9.1

donde el logaritmo está en base 2.

Para conjuntos no numerables su táctica fue el uso de ε -recubrimientos de radio ε (épsilon) arbitrario. La epsilon-entropía del subconjunto era al igual que en el caso numerable, el logaritmo en base 2 del número de elementos del ε -recubrimiento mínimo para cubrir totalmente al conjunto. Un ε -recubrimiento del conjunto C es un recubrimiento por conjuntos de diámetro menor o igual a 2ε . En el caso se un segmento

de recta, el número de elementos de un ε -recubrimiento es precisamente $(L/2\varepsilon)$, de donde su e-entropía será:

$$H(C) = \log(L/2\varepsilon)$$

Ec.3.4.9.2

Considérese un sistema dinámico con F grados de libertad. Se supone que el espacio fase F -dimensional se divide en cajas de tamaño ε^F y que existe un atractor cuya trayectoria $x(t)$ se encuentra en la cuenca de atracción; si se hacen mediciones en el sistema a intervalos regulares de tiempo τ , entonces la probabilidad de que $x(t = \tau)$, visite la caja i_1 , $x(t = 2\tau)$, visite la caja $i_2, \dots$, y $x(t = d\tau)$, visite la caja i_d es $p(i_1, \dots, i_d)$. la entropía de Kolmogorov, se define como (ecuación 3.4.9.3)

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{d\tau} \sum_{i_1, \dots, i_d} p(i_1, \dots, i_d) \ln p(i_1, \dots, i_d)$$

Ec.3.4.9.3

En sistemas deterministas no hay pérdida de información, en consecuencia la entropía de Kolmogorov es nula. En sistemas absolutamente aleatorios se pierde toda la información, la entropía de Kolmogorov tiende a infinito. En sistemas caóticos toma valores altos pero finitos.^{43, 44}

☆ Clasificación de la Entropía de Kolmogorov

El criterio es el siguiente:

- Si $K=0$, se tiene un sistema regular (posiblemente periódico o multiperiodico).
- Si K tiene un valor finito el sistema es caótico.
- Si K tiende a infinito el sistema es aleatorio.

También es usual calcular la llamada entropía espacio-temporal porcentual, que se denota por $K\%$, aquí los criterios para detectar caos son los siguientes:

- Si $\%K = 0$ el sistema es periódico,
- Si el $\%K$ es mayor que 0% y menor que 100% el sistema es caótico, y
- Si $\%K$ es del 100% el sistema es aleatorio.

En síntesis, la entropía de Kolmogorov mide el promedio de información sobre el estado de un sistema dinámico que se pierde con el tiempo. En sistemas unidimensionales es igual al exponente de Lyapunov, mientras que en sistemas de dimensión mayor es la suma de los exponentes de Lyapunov positivos. En todo caso, es inversamente proporcional al tiempo en el cual el estado de un sistema caótico se puede predecir. ⁴⁴

3.4.10 DIMENSION DE CAPACIDAD

La dimensión de capacidad es una dimensión fraccional introducida por Kolmogorov, parecida a la dimensión de Hausdorff en cuanto a la idea del recubrimiento.

Para encontrar la dimensión de capacidad de un sistema, asumimos que el número de elementos que cubren un conjunto de datos es inversamente proporcional a ϵ^D , donde ϵ es la escala de los elementos de la cubierta y D es una constante. Por ejemplo, si tenemos un segmento de línea e intentamos cubrir el segmento con cuadrados de cierto tamaño, y encontramos que necesitamos tres cuadrados. Si entonces intentamos ver cuántos cuadrados de la mitad del tamaño original fueron requeridos para cubrir el segmento, podríamos esperar tener seis cuadrados para cubrir el segmento, que es dos veces el número de los cuadrados necesitados cuando los cuadrados estaban a su tamaño original. Así el número de cuadrados requeridos para cubrir el segmento es inversamente proporcional al tamaño de los cuadrados. ⁴⁴

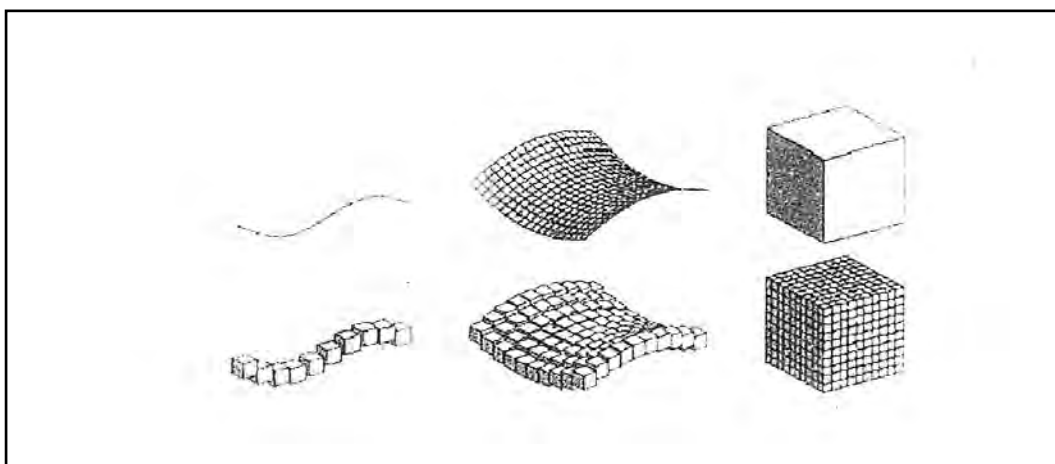


Fig. 3.4.10.1 Cubriendo una curva, un plano y un cubo sólido con cubos de lado $\epsilon = 1/2^n$. ⁴⁴

Así, para los objetos unidimensionales, vemos que

$$N(\varepsilon) \approx \frac{k}{\varepsilon}$$

Ec.3.4.10.1

Donde ε es el lado del cuadrado, $N(\varepsilon)$ es el número de cuadrados de ese tamaño requerido para cubrir el sistema, y k es una constante. Entonces tenemos que para sistemas más arbitrarios tendríamos la ecuación de la siguiente forma:

$$N(\varepsilon) \approx \frac{k}{\varepsilon^D}$$

Ec.3.4.10.2

Donde D es la dimensión del sistema. Es decir, podemos esperar medir cuánto del espacio de dos dimensiones de algún subconjunto de este se acerca para examinar cómo el sistema se pueda cubrir eficientemente por células de diverso tamaño.

Para encontrar D de $N(\varepsilon) \approx \frac{k}{\varepsilon^D}$, podemos solucionar la ecuación para D tomando el limite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Esto es, la capacidad del método para estimar D , si asumimos que el sistema es escalado para que se ajuste en un cuadrado con lado 1, entonces tenemos $N(1)=k=1$. Esto da la ecuación,

$$D_{cap} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log(1/\varepsilon)}$$

Ec.3.4.10.3

Donde $N(\varepsilon)$ es el número de cubos de lado ε , o de esferas p -dimensionales de radio ε requeridas para cubrir el atractor.⁴⁴

3.4.11 DIMENSION DE CORRELACION

La dimensión de correlación es el limite bajo sobre la dimensión de capacidad, pero en la mayoría de los casos, es una aproximación cercana a la dimensión de capacidad, la cual depende del refinado del recubrimiento con $N(\varepsilon)$ elementos de

volumen (esferas, cubos, etc.) de diámetro r , sobre la figura (señal, curva, etc.) que describe el comportamiento de un sistema, y es igual a:

$$d_c = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln C(r)}{\ln r}$$

Ec.3.4.11.1

Donde $C(r)$ es la correlación dada por:

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} H(\varepsilon_{i,j})$$

Ec.3.4.11.2

Como una función de la distancia entre dos puntos del espacio representado por la función de Heaviside que esta dada por:

$$H(\xi_{i,j}) = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow \left| r - \left\| \bar{x}_i - \bar{x}_j \right\| \right| \leq \varepsilon \\ 1 \Leftrightarrow \left| r - \left\| \bar{x}_i - \bar{x}_j \right\| \right| > \varepsilon \end{cases}$$

Donde $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}$

Para sistemas no lineales la dimensión de correlación no necesariamente es un valor entero. Con series de tiempo, la dimensión de correlación se calcula como la pendiente de la región más lineal de $\ln C(r)$ vs $\ln(r)$, debido a que el hecho de tener una cantidad finita de datos distorsiona el cálculo de d_c para valores extremos de r .⁴⁴

Con la dimensión de correlación, lo que se hace es establecer, que tanta correlación existe entre un punto del atractor con sus vecinos. Un sistema de baja complejidad, exhibirá comportamientos bastante regulares, por lo cual los cambios en sus variables mostrarán gran correlación entre un dato con los anteriores o los siguientes. Por el contrario, en un sistema totalmente aleatorio un dato, no tiene ninguna correlación con sus vecinos. En los sistemas dinámicos no lineales, también

llamados sistemas complejos, la dimensión de correlación varía según su grado de complejidad.

Se puede decir que la dimensión de correlación mide la complejidad global del sistema (Hoyer D. et al. 1997), y tiene la gran virtud de que, permite establecer el número de variables independientes que determinan el comportamiento del sistema.^{43,44}

3.4.12 GRÁFICOS DE RECURRENCIA O MAPEOS RECURRENTES

Los mapeos recurrentes (MRs) fueron descritos primero por J. P. Eckmann, S. Oliffson Kamphorst y D. Ruelle.⁵⁹ El gráfico de recurrencia es un procedimiento cualitativo para diferenciar variabilidad caótica de estocástica o para detectar cambios de estado en la evolución de un sistema. Para cuantificar la cantidad de recurrencia presente en el gráfico. Zbilut y Webber en 1992 proponen el RQA (Recurrence Quantification Analysis) .Los MRs son una herramienta gráfica relativamente nueva para el análisis cualitativo de series de tiempo. Con los MRs, se pueden detectar gráficamente patrones escondidos y cambios estructurales en los datos o ver similitudes en patrones a través de las series de tiempo bajo estudio.⁶⁰

Los MRs son además una excelente herramienta para la visualización de la dinámica multidimensional. Se tiene una función $y=f(x)$ y se desea examinar su comportamiento. Así, se grafica Y vs. X sobre una gráfica regular. Pero, ¿qué pasa si la función es más compleja, tal como $y=f(x, w, z, r)$? No hay forma de graficar todas las variables al mismo tiempo. Aquí es donde los mapas recurrentes se vuelven muy útiles. Con los MRs, se puede graficar y visualizar la dinámica del sistema en cualquier número de dimensiones.⁶⁰

☆ Reconstrucción de un Mapeo Recurrente ó Gráfico de Recurrencia

Antes de que un MR se construya, una serie de tiempo unidimensional puede analizarse en un espacio dimensional más complejo, en donde la dinámica del mecanismo generador toma lugar. Esto se hace usando una técnica llamada Coordenadas Inmersas con Retraso, que recrea un retrato del espacio de fases del

sistema dinámico bajo estudio de una serie de tiempo individual; esto es, se puede recrear una fotografía topológicamente equivalente del comportamiento del sistema multidimensional, usando las series de tiempo de una sola variable observada. Por ejemplo, la bolsa de valores es un sistema altamente complejo con un gran número de variables y factores, que influyen su dinámica. Usando las coordenadas inmersas con retraso, se puede recrear la dinámica de ese sistema multidimensional de una sola variable observada y predecirlo. La idea es que el efecto de todas las otras variables (desconocidas) están ya reflejadas en el sistema de salida.

Para expandir una serie de tiempo unidimensional en un espacio de fases M-dimensional, se sustituye cada observación en la serie de tiempo original $X(t)$ con el vector:

$$y(i) = (x(i), x(i+d), x(i+2d), \dots, x(i+(m-1)d)) \quad \text{Ec.3.4.12.1}$$

Donde: i es el índice de tiempo, m es la dimensión inmersa, d es el tiempo de retraso.

Como resultado, se tienen series de vectores:

$$Y = (y(1), y(3), \dots, y(N-(m-1)d)) \quad \text{Ec.3.4.12.2}$$

Donde: N es la longitud de las series de tiempo originales.

Una vez que la reconstrucción se ha completado, el MR puede usarse para mostrar qué vectores en el espacio reconstruido están más cerca y lejos los unos de los otros. Específicamente, se calculan las distancias (Euclidianas) entre todos los pares de vectores y se codifican en colores. Esencialmente, un MR es una matriz codificada en colores, donde cada entrada de $[i][j]$ -ésimos es calculada como la distancia entre vectores $y(i)$ & $y(j)$ en las series reconstruidas.⁶⁰

☆ **Construcción de un Mapa Recurrente ó Gráfico de Recurrencia**

En la fig. 3.4.12.1 se muestra detalladamente como se realiza la construcción de un mapa recurrente. Para hacer a un MR más significativo, el mapeado de color debe ser significativo también. Por ejemplo, colores “cálidos” (amarillo, rojo y naranja) pueden estar asociados a pequeñas distancias entre los vectores, mientras que los colores “fríos” (azul, negro) podrían ser usados para mostrar grandes distancias. De esta forma se puede visualizar y estudiar el movimiento de las trayectorias del sistema e inferir algunas características del sistema dinámico que se ha generado de las series de tiempo. Para series de tiempo aleatorias, la distribución uniforme de colores sobre todo el MR es esperada. La serie de tiempo más determinista tendrá el MR más estructurado.

60

☆ **Dimensión de Inmersión**

Los valores de la dimensión de inmersión (M) y el tiempo de retraso son usados para la reconstrucción en el espacio de fases del sistema dinámico bajo estudio, usando las coordenadas inmersas con retraso. Idealmente, M podría ser lo suficientemente grande para revelar las trayectorias del sistema de traslapes mismos, pero no muy largos, por el otro lado el ruido lo amplificará. La regla es obtener M en $M \leq 2N+1$, donde N es el número de variables operativas, o grados de libertad en el sistema dinámico bajo estudio. En la mayoría de los casos N es desconocido y puede ser solamente estimado. ⁶⁰

☆ **Tiempo de Retraso**

El tiempo de retraso, como la dimensión inmersa, es usado para la reconstrucción del espacio de fases. Escoger el tiempo de retraso óptimo puede ser problemático. Si el tiempo de retraso es muy pequeño, las coordenadas usadas para cada vector reconstruido no serán lo suficientemente independientes para llevar cualquier nueva información acerca de las trayectorias del sistema en el espacio de fases. Si el tiempo de retraso es muy grande, las coordenadas podrían convertirse en aleatorias con respecto una de la otra. El método más comúnmente utilizado para estimar el tiempo de retraso es computar la función de información mutua. ⁶⁰

☆ % Recurrencia

Porcentaje de puntos recurrentes (%REC): es una medida global de recurrencia. Dado que el gráfico de recurrencia es simétrico con respecto a la bisectriz del cuadrado $M \times M$, el %REC es:

$$\%REC = \frac{NRECURS}{\frac{M(M-1)}{2}} \times 100 \quad (1)$$

Donde, NRECURS es el número total de puntos recurrentes en el triángulo superior del gráfico sin contar los puntos de la bisectriz. El denominador de (1) es el total de puntos en el triángulo superior del gráfico eliminados los de la bisectriz.

☆ % Determinismo

Porcentaje de determinismo (%DET) viene dado por

$$\%DET = \frac{DRECURS}{NRECURS} \times 100 \quad (2)$$

Donde, DRECURS es el número de puntos que forman parte de segmentos de línea paralelos a la bisectriz del cuadrado. Un segmento de línea se define como dos o más puntos adyacentes.

☆ Información Mutua

La función de Información Mutua puede utilizarse para determinar el valor “óptimo” del tiempo de retraso para la reconstrucción en el espacio de fases, la idea es que una buena elección para el tiempo de retraso d , dado el estado del sistema $x(t)$, provee la máxima información nueva con medición en $x(t+d)$.⁶⁰

☆ Entropía Espacio-Temporal

La entropía espacio-temporal es un estimador de la „cantidad de estructura’ de una imagen tanto en el dominio del tiempo como en el dominio del espacio. Esencialmente, esta medida compara la distribución global de los colores sobre todo el gráfico de recurrencia con la distribución de colores sobre cada línea diagonal de este mismo gráfico. En términos físicos, esta cantidad compara la distribución de las distancias entre todos los pares de vectores en el espacio de fases reconstruido con la

distribución de las distancias entre diferentes órbitas que evolucionan en el tiempo. El resultado es normalizado y presentado como porcentaje de „máxima’ entropía.

Que es, 100% de entropía significa la ausencia de cualquier estructura (distribución uniforme de colores, aleatoriedad pura), mientras que el 0% de entropía implica una “perfecta” estructura (patrones de distinto color, “estructuras” perfectas y predictibilidad).⁶⁰

Serie de tiempo	Entropía Espacio-Temporal
Periódicas	Cerca del 0%
Cuasiperiódicas	Entre 20% y 60%
Caóticas	Entre 40% y 80%
Aleatorias	Cerca del 100%

Tabla. 3.4.12.1 Rango de entropía temporoespacial para diferentes series.⁴²

☆ Clasificación de Mapeos Recurrentes

Figuras estructuradas repetitivas iguales: Series periódicas y cuasiperiódicas.

Figuras estructuradas y patrones discernibles: Series caóticas.

Distribución uniforme de colores: Series aleatorias.⁶⁰

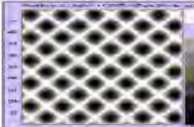
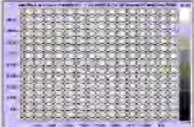
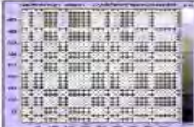
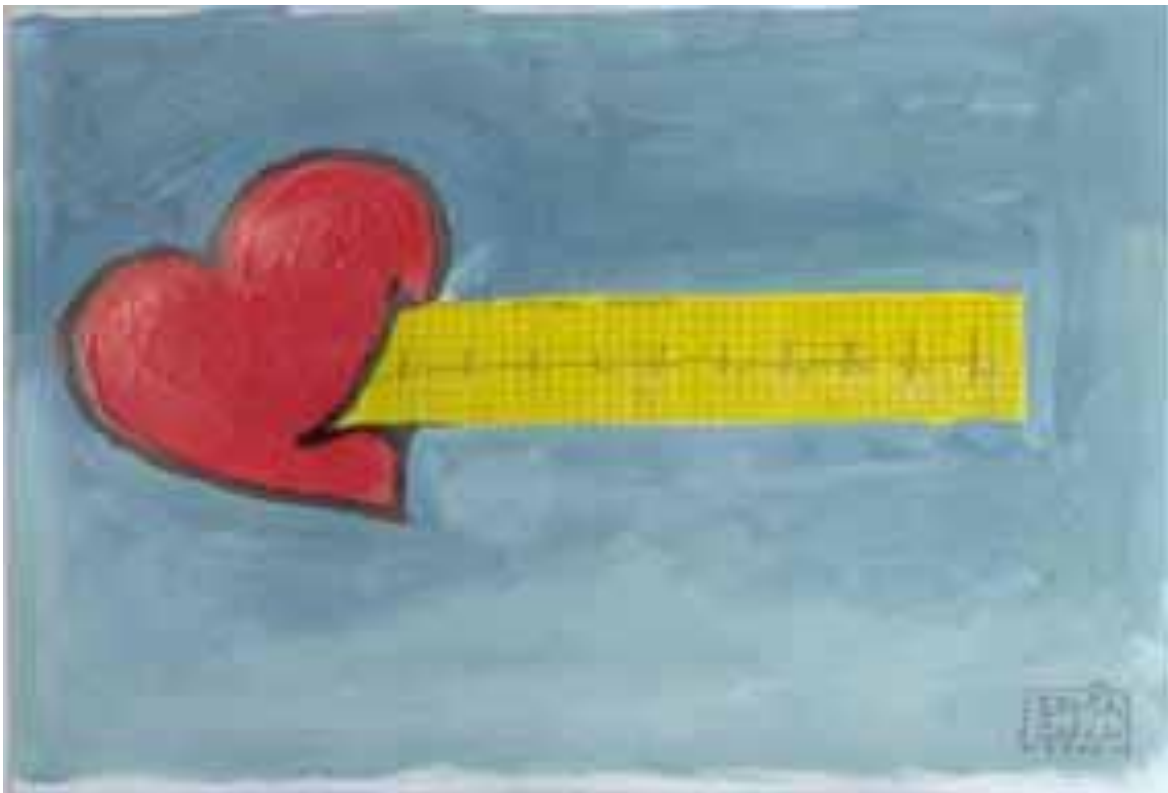
Constantes	Periódicas	Cuasiperiódicas	Caóticas	Aleatorias
				
Entropía Temporoespacial: %	Entropía Temporoespacial: 15%	Entropía Temporoespacial: 52%	Entropía Temporoespacial: 72%	Entropía Temporoespacial: 89%
Recurrencia: %	Recurrencia: 19.005%	Recurrencia: 21.425%	Recurrencia: 24.238%	Recurrencia: 35.837%
Determinismo: %	Determinismo: 52.597%	Determinismo: 10.887%	Determinismo: 29.317%	Determinismo: 0.078%

Fig. 3.4.11.1 Mapeos recurrentes y características de cada tipo de comportamiento⁴²

CAPÍTULO IV

SISTEMA CARDIOVASCULAR



“El olvido de las Matemáticas perjudica a todo el conocimiento, ya que el que las ignora no puede conocer las otras ciencias ni las cosas de este mundo”.

[Roger Bacon]

CAPÍTULO IV

SISTEMA CARDIOVASCULAR

4.1 GENERALIDADES

El Sistema Cardiovascular tiene como función principal el aporte y eliminación de gases, nutrientes, hormonas, etc. de los diferentes órganos y tejidos del cuerpo, lo que se cumple mediante el funcionamiento integrado del corazón, los vasos sanguíneos y la sangre.

Pero a su vez, cada "región" o sector del organismo tiene diferentes necesidades en un momento dado. Por ejemplo, si estamos andando en bicicleta, serán nuestros miembros inferiores quienes requerirán un mayor aporte de Oxígeno y nutrientes, mucho mas que nuestros brazos y manos que solo sostienen el manubrio, si en cambio acabamos de cenar y estamos sentados en nuestro sillón, escuchando música, el principal trabajo orgánico se centrará en el Aparato digestivo y la circulación abdominal.

El "producto final" de estas variables, es el gasto o débito cardíaco, que corresponde a la suma de los diferentes flujos sanguíneos regionales.

En condiciones normales estos flujos se regulan por diferentes mecanismos de carácter local o general: pH sanguíneo, PO_2 , tono simpático, hormonas, etc. que mantienen un flujo sanguíneo acorde a las características de funcionamiento de cada órgano o tejidos en particular.

Considerando lo anterior podemos decir que la función fundamental del corazón es la de responder a los cambios de demanda de los flujos regionales y del retorno venoso. Durante este proceso, regula la temperatura del cuerpo. ⁶¹

El sistema cardiovascular está conformado por el corazón y los vasos sanguíneos, incluyendo las arterias, las venas y los capilares. Como se ilustra en la Fig. 4.1.1.

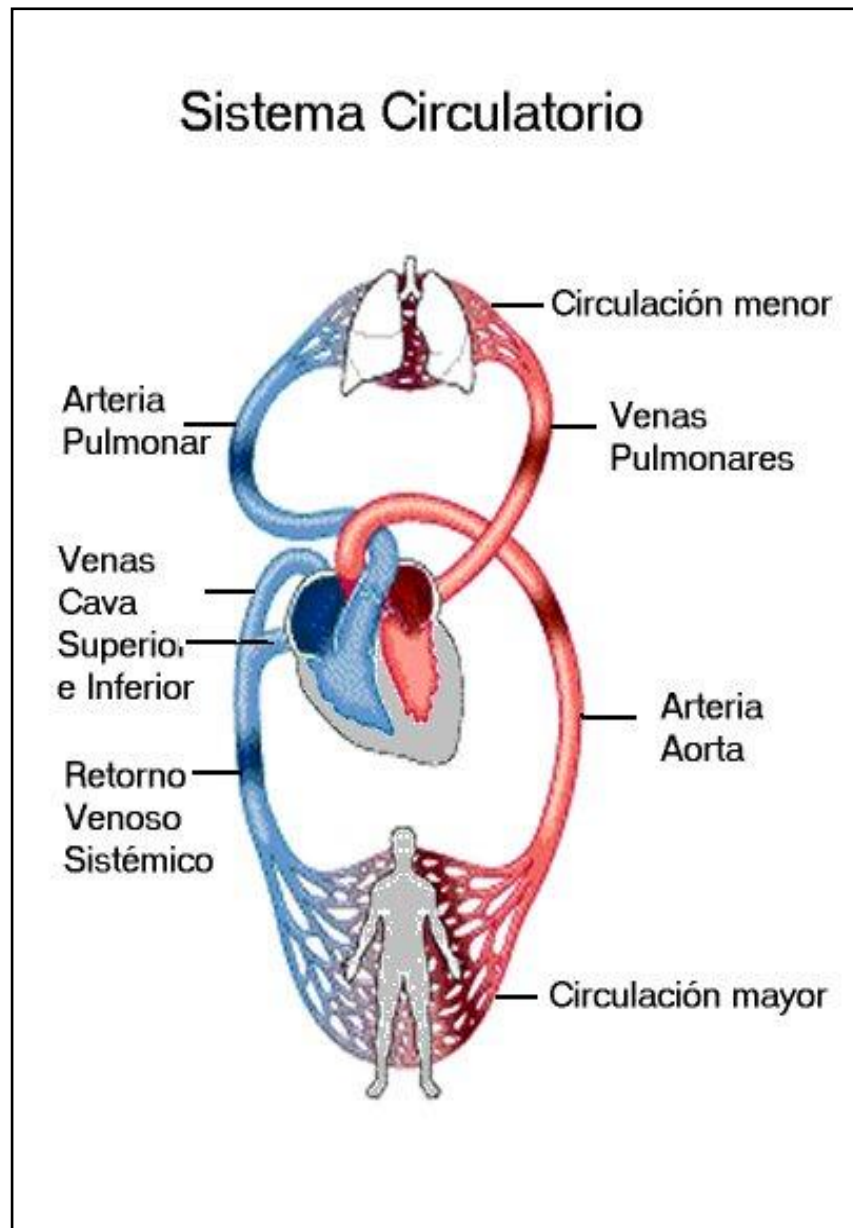


Fig. 4.1.1 Esquema del sistema circulatorio.⁶¹

☆ Corazón

Ubicado en la cavidad torácica, este órgano muscular hueco recibe sangre de las venas y la impulsa hacia las arterias. El corazón humano tiene el tamaño aproximado

de un puño, es de forma más o menos cónica y se localiza por detrás de la parte inferior del esternón, desplazado hacia el lado izquierdo. El corazón se mantiene en esta posición gracias a su unión a las grandes venas y arterias.

Las paredes de tejido muscular son reforzadas por bandas de tejido conectivo, y todo el órgano está recubierto por tejido conectivo llamado pericardio, saco de pared doble con una capa que envuelve, además, al esternón, el diafragma, y las membranas del tórax. Tanto el corazón como todos los vasos están revestidos por una capa de células aplanadas llamada endotelio que evita que la sangre se coagule.⁶²

Morfología externa del Corazón

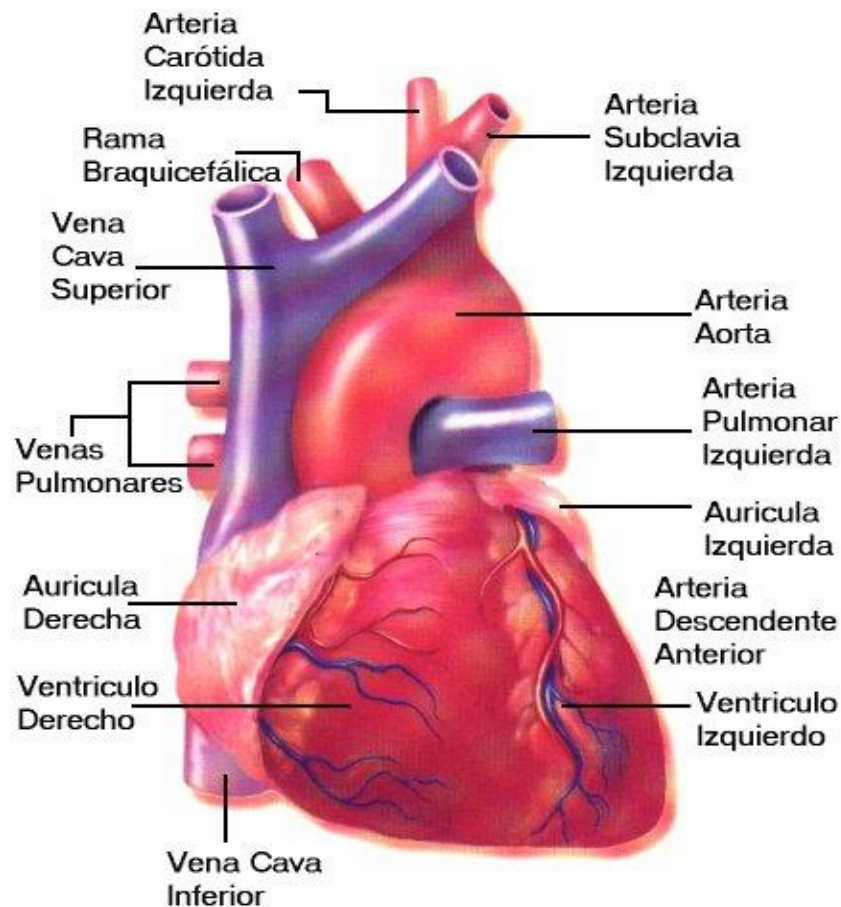


Fig. 4.1.2 Anatomía del Corazón.⁶¹

Está dividido en cuatro cámaras, dos ventrículos y dos aurículas. La sangre pasa de la aurícula al ventrículo (Fig.4.1.2). Por su función de bombeo el corazón está provisto de válvulas (en la conexión aurícula - ventrículo) que al cerrar herméticamente evitan el retroceso de la sangre. La válvula tricúspide se encuentra entre la aurícula y el ventrículo derecho, mientras que la válvula bicúspide o mitral se ubica entre la aurícula y ventrículo izquierdo. Podemos encontrar a las válvulas semilunares en el origen de las arterias aorta y pulmonar que parten de los ventrículos. (Fig.4.1.3)⁶¹

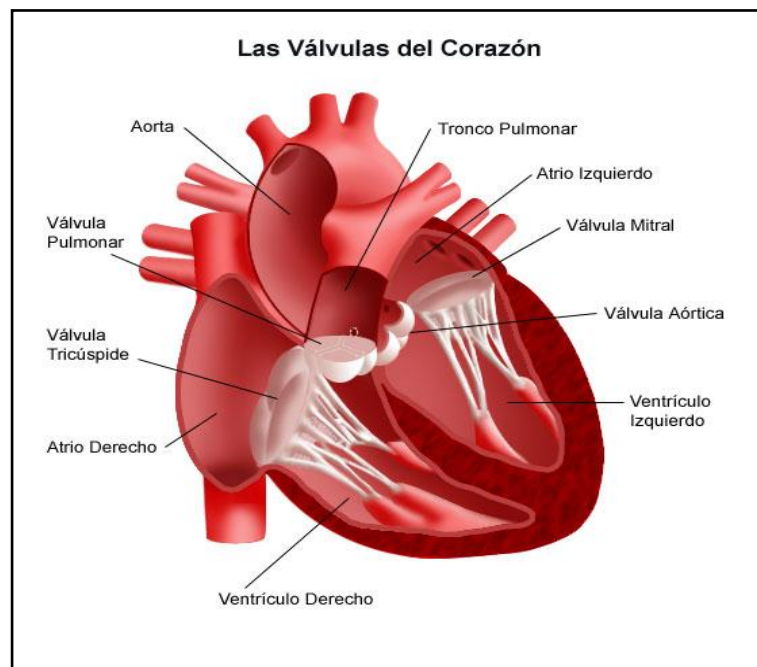


Fig. 4.1.3 Válvulas del Corazón.⁶¹

Sistema de Conducción del Corazón

El latido cardíaco se origina en un Sistema de conducción cardíaco especializado y se extiende a través de este sistema a todas las partes del miocardio. Las estructuras que forman el sistema de conducción (Fig.4.1.4) son el nodo sinoauricular (nodo SA), las vías aurículas internodales, el nodo auriculoventricular (nodo AV), el haz de his y sus ramas y el sistema de Purkinje. Las diversas partes del sistema de conducción y algunas partes del miocardio son capaces de descargar en forma espontánea, presentándose las descargas de estas últimas sólo en condiciones anormales.

Sin embargo, el nodo SA generalmente descarga con mayor rapidez, la despolarización se extiende a otras regiones antes de que éstas descarguen en forma espontánea. Por lo tanto, el nodo SA es el marcapasos cardiaco normal, su frecuencia de descarga determina la velocidad a la que latirá el corazón. Los impulsos generados en el nodo SA pasan a través de las vías auriculares al nodo AV, y de éste al haz de His y a través de las ramas de dicho haz al sistema purkinje hasta el músculo ventricular.⁶¹

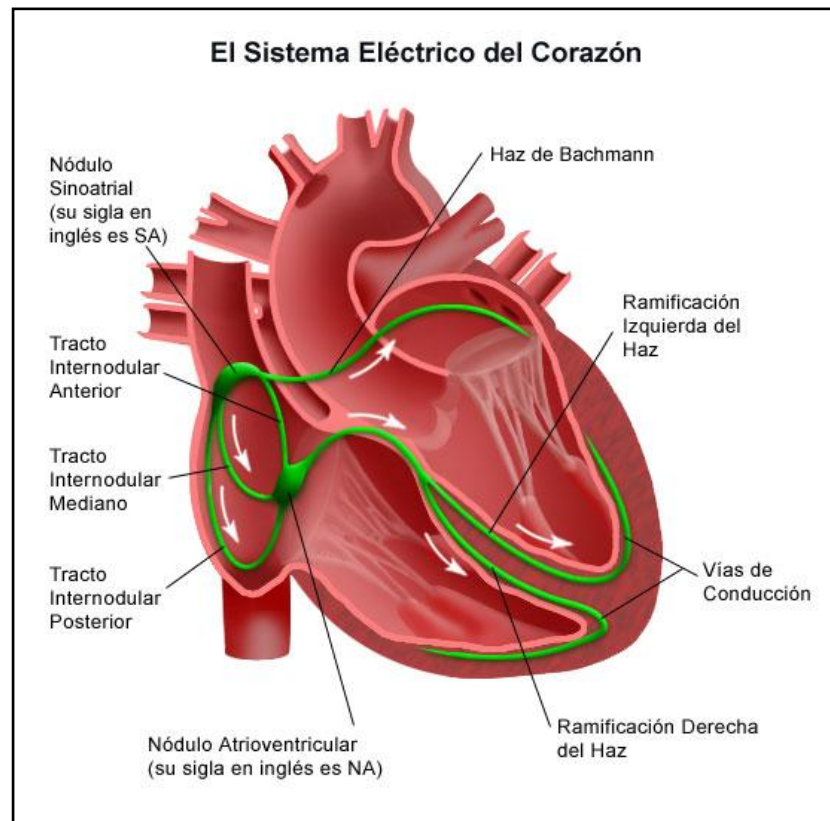


Fig. 4.1.3 Sistema Eléctrico del Corazón.⁶¹

Dinámica de la Circulación

El latido del corazón es iniciado y regulado por el nódulo sinusal que se encuentra en la parte superior de la aurícula derecha y del nacimiento automático de este nódulo pasa el estímulo hacia el resto del corazón por el tejido de Purkinje. Cuando el nódulo sinusal por cualquier enfermedad no produce el latido automático las otras zonas que constituyen la red o el tejido de Purkinje pueden latir con ritmos de frecuencia inferiores.

La aurícula derecha recibe la sangre de todo el cuerpo (excepto los pulmones) por vía de dos grandes venas: la vena cava superior (sangre de la cabeza, brazos y parte superior del cuerpo) y la vena cava inferior (sangre de miembros inferiores y parte inferior del cuerpo). La aurícula derecha se contrae abriendo la válvula tricúspide (que es la que separa la aurícula del ventrículo derecho) que permite el avance de la sangre al ventrículo derecho. La contracción del ventrículo derecho cierra la válvula tricúspide y abre la válvula pulmonar semilunar de ese lado impulsando a la sangre por la arteria pulmonar hacia los pulmones. Desde los pulmones la sangre regresa a la aurícula izquierda por las venas pulmonares. Éste es el único caso donde una vena lleva sangre oxigenada ya que normalmente la sangre oxigenada va por todo el sistema arterial y la sangre con desechos y menor contenido de oxígeno va por la red venosa. Sin embargo, en este caso, existe una excepción donde la arteria pulmonar, que sale del ventrículo derecho, lleva sangre no oxigenada o de desecho hacia los pulmones y de los pulmones vuelven las venas pulmonares con la sangre oxigenada para la parte del corazón izquierdo, la aurícula izquierda se contrae abriendo la válvula mitral (que es la que separa la aurícula del ventrículo izquierdo) que permite el paso de la sangre al ventrículo izquierdo. La contracción del ventrículo izquierdo cierra esta válvula, abre la válvula aorta semilunar y envía la sangre a través de la aorta a todo el sistema menos los pulmones. Toda porción de sangre que entre en la aurícula derecha debe dirigirse a la circulación pulmonar antes de alcanzar el ventrículo izquierdo y de ahí ser enviada a los tejidos. El tejido nodal regula el latido cardíaco que consta de una contracción o sístole, seguida de relajación o diástole.

Nuestro cuerpo, tiene dos tipos de circulación: la circulación pulmonar es un circuito breve que va del corazón a los pulmones y de regreso al corazón, y la circulación sistémica envía sangre desde el corazón a todas las partes de nuestro cuerpo y después vuelve a traerla al corazón.⁶²

Circulación Sistémica

La sangre se traslada desde el ventrículo izquierdo a la aorta y hacia todos los órganos y tejidos del cuerpo y después regresa a la aurícula derecha. Las arterias, los capilares y las venas del aparato circulatorio sistémico son canales a través de los

cuales tiene lugar este largo viaje. Una vez en las arterias, la sangre fluye hacia las arteriolas y después hacia los capilares. Mientras se encuentra en los capilares, el flujo sanguíneo proporciona oxígeno y nutrientes a las células del cuerpo y recoge los materiales de desecho. Después la sangre regresa a través de los capilares hacia las vénulas, y más tarde a venas más grandes, hasta llegar a la vena cava. La sangre de la cabeza y los brazos regresa al corazón a través de la vena cava superior, y la sangre de las partes inferiores del cuerpo regresa a través de la vena cava inferior. Ambas venas cavas llevan esta sangre sin oxígeno a la aurícula derecha. Desde aquí, la sangre pasa a llenar el ventrículo derecho, lista para ser bombeada a la circulación pulmonar en busca de más oxígeno. (Ver Fig. 4.1.1).⁶²

Circulación Pulmonar

Se bombea sangre con bajo contenido de oxígeno pero alto contenido de dióxido de carbono del ventrículo derecho a la arteria pulmonar, que se ramifica en dos direcciones. La ramificación derecha va hacia el pulmón derecho, y viceversa. En los pulmones, estas ramificaciones se subdividen en capilares. La sangre fluye más lentamente a través de estos pequeños vasos, dando tiempo al intercambio de gases entre las paredes capilares y los millones de alvéolos, los diminutos sacos de aire de los pulmones. Durante este proceso, denominado "oxigenación", el flujo sanguíneo obtiene oxígeno. El oxígeno se une a una molécula de los glóbulos rojos, denominada "hemoglobina". La sangre recién oxigenada abandona los pulmones a través de las venas pulmonares y se dirige nuevamente al corazón. Ingresa en el corazón por la aurícula izquierda, después llena el ventrículo izquierdo para ser bombeada a la circulación sistémica. (Ver Fig. 4.1.1).⁴²

☆ **Arterias**

Los vasos sanguíneos que transportan la sangre hacia el exterior del corazón se denominan arterias. Son los vasos sanguíneos más gruesos, con paredes musculares que se contraen para transportar la sangre desde el corazón y a través del cuerpo. En la circulación sistémica, se bombea sangre rica en oxígeno desde el corazón hacia el interior de la aorta. Esta enorme arteria se curva hacia arriba y hacia atrás desde el

ventrículo izquierdo, luego se dirige por delante de la columna hacia el interior del abdomen. En la parte inicial de la aorta, se separan dos arterias coronarias que se dividen en una red de arterias más pequeñas que proporcionan oxígeno y nutrientes a los músculos del corazón.

A diferencia de la aorta, la otra arteria principal del cuerpo, la arteria pulmonar, transporta sangre con bajo contenido de oxígeno. Desde el ventrículo derecho, la arteria pulmonar se divide en ramificaciones derechas e izquierdas, en dirección a los pulmones, donde la sangre toma oxígeno.

Las paredes de las arterias tienen tres membranas:

- El endotelio o túnica íntima se encuentra en la parte interna y proporciona un recubrimiento suave para que la sangre fluya a medida que se desplaza por la arteria;
- La túnica media es la parte media de la arteria, conformada por una capa de músculos y tejido elástico;
- La túnica adventicia es la cubierta resistente que protege la parte externa de la arteria.

A medida que se alejan del corazón, las arterias se ramifican en arteriolas, que son más pequeñas y menos elásticas.⁶³

☆ Venas

Los vasos sanguíneos que transportan la sangre de regreso al corazón se denominan venas. No son tan musculares como las arterias, pero contienen válvulas que evitan que la sangre fluya en dirección inversa. Las venas cuentan con las mismas tres membranas que las arterias, pero son más delgadas y menos flexibles. Las dos venas más largas son la vena cava superior e inferior. Los términos superior e inferior no significan que una vena es mejor que la otra, sino que están ubicadas por encima y por debajo del corazón.⁶³

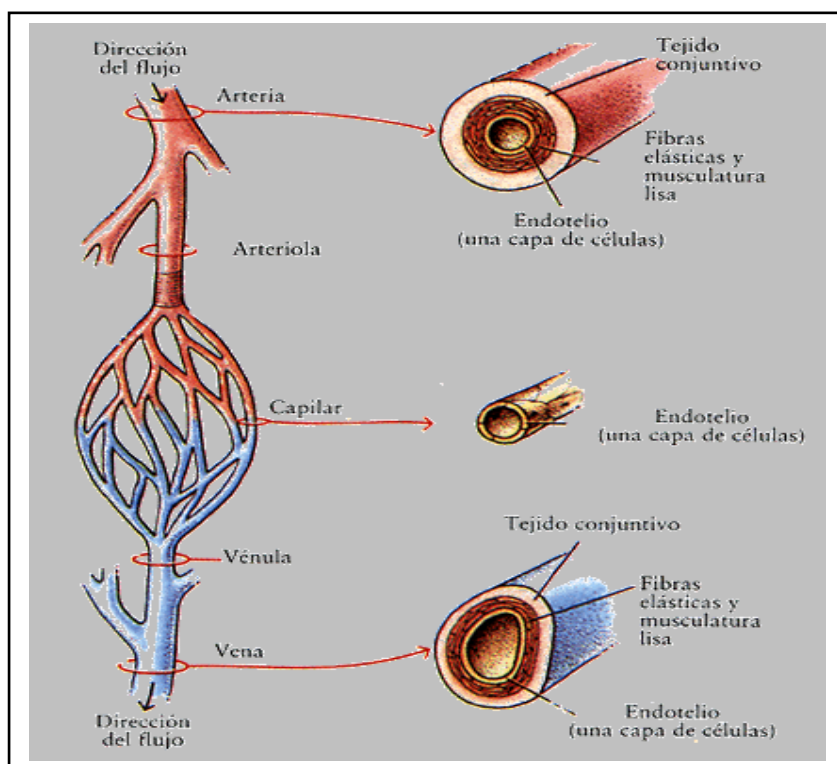


Fig. 4.1.3 La estructura anatómica de los vasos sanguíneos varía dependiendo del tipo de vaso sanguíneo y su ubicación en el sistema circulatorio. Las 'arterias' poseen una prominente capa de fibras musculares y elásticas que le confieren las propiedades mecánicas propias de sus funciones. Las 'arteriolas' también son similares en estructura a las arterias pero de diámetro menor. El lumen de los vasos está recubierto por una monocapa celular que es el endotelio. Las 'venas' en cambio son de mayor diámetro pero presentan una menor cantidad de musculatura lisa en su pared.⁶¹

☆ Capilares

Son vasos microscópicos situados en los tejidos, que sirven de conexión entre las venas y arterias; su función más importante es el intercambio de materiales nutritivos, gases y desechos entre la sangre y los tejidos. Sus paredes se componen de una sola capa celular, el endotelio, que se continúa con el mismo tejido de las venas y arterias en sus extremos. La sangre no se pone en contacto directo con las células del organismo, sino que éstas son rodeadas por un líquido intersticial que las baña; las sustancias se difunden desde la sangre por la pared de un capilar por medio de poros que éstos tienen y atraviesan el espacio ocupado por líquido intersticial para llegar a las células. Las arterias antes de transformarse en capilares son un poco más pequeñas y se llaman *arteriolas* y cuando el capilar pasa a ser vena nuevamente hay un paso intermedio en el que son venas más pequeñas llamadas *venuelas*.⁶³

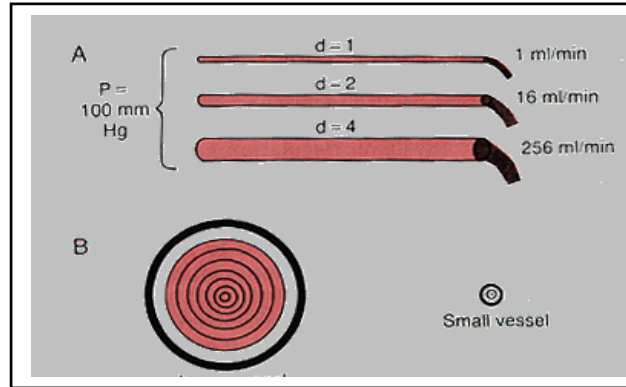


Fig. 4.1.3 El diámetro de los vasos sanguíneos es un factor determinante en el flujo sanguíneo como se ilustra en el esquema. Para una misma presión en el punto de entrada el flujo alcanzado en cada caso depende del diámetro del vaso elevado a la cuarta potencia. Esta propiedad es determinante en la regulación del flujo sanguíneo de las distintas zonas del cuerpo por variaciones en el diámetro arteriolar.⁶¹

4.2 CICLO CARDIACO

Es la secuencia de fenómenos eléctricos y mecánicos que se producen en el corazón durante un latido y los cambios resultantes en la presión, el flujo y el volumen en las distintas cavidades cardíacas.

La sucesión cíclica de fases, a partir de la sístole auricular, son las siguientes:

a) Sístole auricular: la onda de contracción se propaga a lo largo de ambas aurículas estimuladas por el nódulo sinusal. El corazón tiene el manejo automático-eléctrico pero por otro lado las válvulas y las cámaras se abren y cierran de acuerdo a la diferencia de presiones que la sangre tenga en cada una de ellas. El ventrículo tiene sangre en su interior proveniente de la diferencia de presiones en cuanto a que hay mucha sangre en las aurículas y poca en los ventrículos y eso hace que las válvulas se abran y pase la sangre de las aurículas a los ventrículos, luego al final para ayudar a la poca sangre que queda en las aurículas a que pasen al ventrículo se produce la llamada sístole auricular.

b) Sístole ventricular: comienza a contraerse el ventrículo, con aumento rápido de su presión. En ese momento se cierran las válvulas tricúspide y mitral para

que la sangre no refluya hacia las aurículas y el aumento de presiones que sobreviene hace que se abran las válvulas semilunares aórtica y pulmonar y que pase la sangre hacia la aorta y hacia la arteria pulmonar produciéndose el primer tono de los ruidos cardíacos.

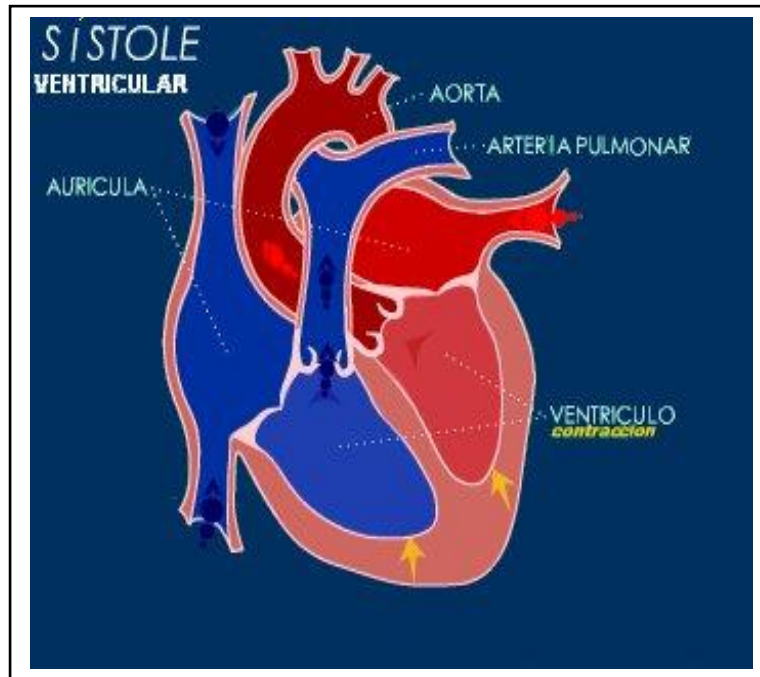


Fig. 4.2.1 La sístole ventricular comienza cuando los ventrículos están llenos de sangre y las válvulas Mitral y Tricúspide herméticamente cerradas. Las señales eléctricas generadas por el nódulo SA se propagan por la vía de conducción específica a los ventrículos, provocando su contracción.⁶¹

c) Aumento de la presión en los ventrículos; las válvulas semilunares se mantienen cerradas hasta que la presión de los ventrículos se equilibre con la de las arterias.

d) Cuando la presión intraventricular sobrepasa a la de las arterias, se abren las válvulas semilunares y la sangre se dirige por las arterias aorta y pulmonar.

e) Diástole ventricular: los ventrículos entran en relajación activa, su presión interna es inferior a la arterial por lo que las válvulas semilunares se cierran produciendo el segundo ruido cardíaco.

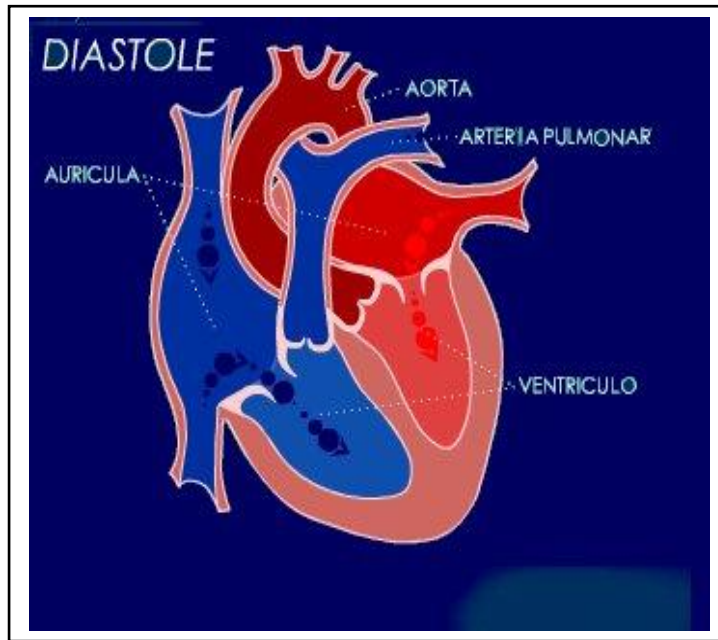


Fig. 4.2.2 Al mismo tiempo que ingresa sangre en las cavidades superiores (Aurículas derecha e izquierda), el generador eléctrico del corazón (Nódulo Sinusal) envía una señal que estimula a las aurículas, produciendo su contracción. Esta contracción impulsa sangre a través de las válvulas Tricúspide y Mitral hacia las cavidades inferiores que se encuentran en reposo (Ventrículos derecho e izquierdo). Esta fase de la acción de bombeo (de mayor duración) se denomina Diástole.⁶¹

f) Descenso de la presión con relajación de las paredes ventriculares, las válvulas tricúspide y mitral siguen cerradas (la presión ventricular es mayor que la auricular) por lo que no sale ni entra sangre en los ventrículos; aunque sí penetra sangre en las aurículas al mismo tiempo.

g) La presión intraventricular es inferior a la auricular porque la aurícula se va llenando de sangre lo que produce una diferencia de presiones con lo cual se abren nuevamente las válvulas tricúspide y mitral y se reinicia el ciclo.

Las aurículas y ventrículos no se contraen simultáneamente; la sístole auricular aparece primero, con duración aproximada de 0,15', seguida de la sístole ventricular, con duración aproximada de 0,30'. Durante la fracción restante de 0,40', todas las cavidades se encuentran en un estado de relajación isovolumétrica (situación donde no hay cambio de volúmenes en ninguna de las cuatro cámaras del corazón).

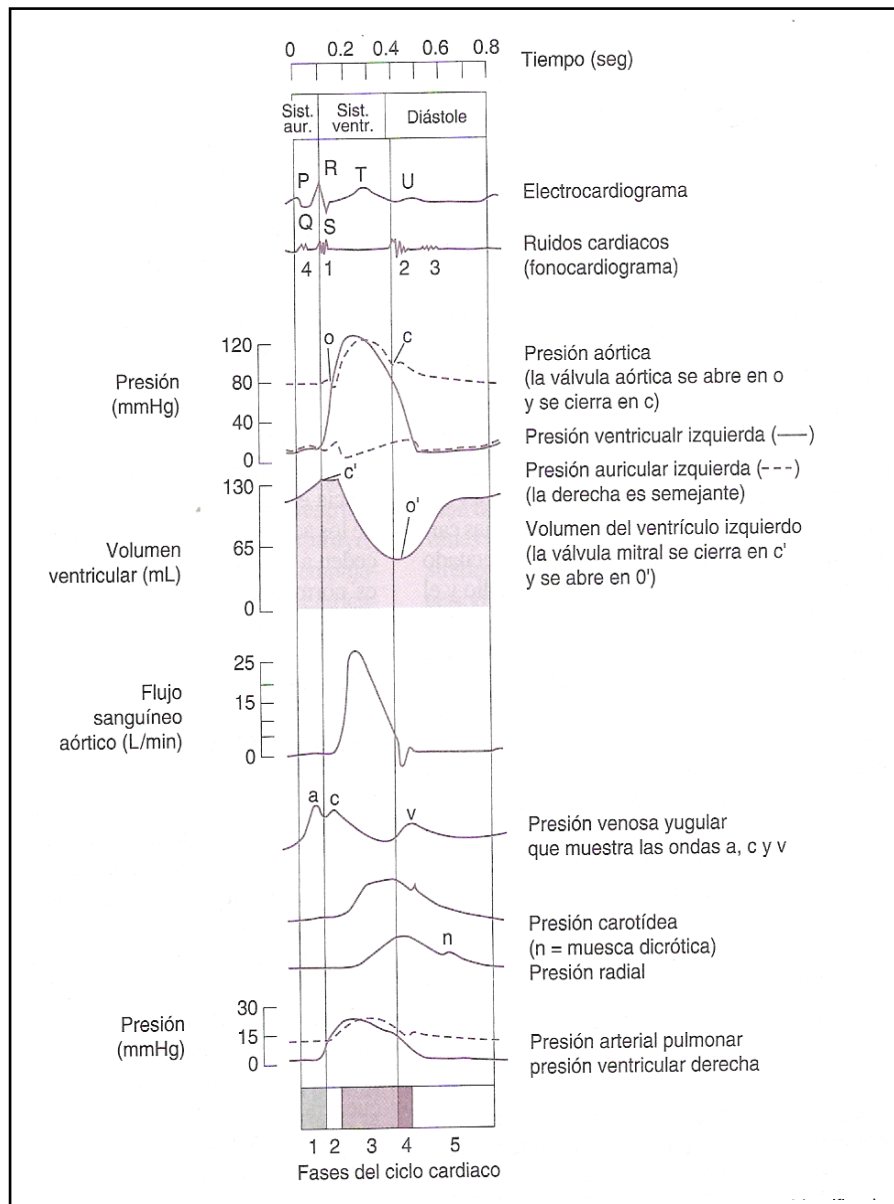


Fig. 4.2.3 Acontecimientos del ciclo cardiaco a una frecuencia de 75 latidos /minuto. Las fases del ciclo cardiaco identificadas por los números en la parte inferior son: 1, sístole auricular; 2, contracción ventricular isovolumetrica; 3, expulsión ventricular; 4, relajación ventricular isovolumetrica; 5, llenado ventricular. Nótese que al final de la sístole, la presión aórtica de hecho excede a la del ventrículo izquierdo. Sin embargo, la presión de la sangre se mantiene al salir del ventrículo durante un periodo corto. Las relaciones de presión entre el ventrículo derecho y la arteria pulmonar, son similares.⁶³

En la figura 4.2.3 se muestran las diversas fases del ciclo cardiaco se puede observar que, simultáneamente con la iniciación del sístole, aumenta abrupta e intensamente la presión de la sangre en el ventrículo. La sangre, sin embargo, no puede ser expulsada hacia la aorta mientras la presión intraaórtica sea superior a la intraventricular. Durante la fase inicial del sístole, por lo tanto, el miocardio ventricular

se contrae sin poder acortarse (fase de contracción isométrica). En el momento en que la presión intraventricular supera a la presión aórtica, se abren las válvulas aórticas y la sangre pasa del ventrículo a la aorta (fase de expulsión). El volumen de sangre que pasa del ventrículo izquierdo a la aorta durante la expulsión es mayor que la cantidad que pasa en el mismo tiempo de la aorta hacia la periferia. Se produce, por lo tanto, un aumento de la presión intraaórtica y de la resistencia ofrecida al flujo de sangre desde el ventrículo hacia la aorta. Durante el diástole, como la sangre continúa pasando de la aorta hacia la periferia, la presión intraaórtica desciende gradualmente. La cantidad de sangre expulsada por cada sístole se denomina volumen sistólico. La velocidad del flujo de sangre en la aorta es directamente proporcional a la diferencia entre las presiones ventricular y aórtica. La presión intraventricular aumenta hasta llegar a un máximo de aproximadamente 120 mm de Hg durante la primera mitad y decrece gradualmente hasta el final del sístole. Con la iniciación de la diástole disminuye bruscamente la presión intraventricular y cuando ésta se hace inferior a la intraaórtica, cesa la expulsión de sangre y se cierran las válvulas aórticas.

En resumen, la sístole ventricular se compone de dos fases: en la primera fase (contracción isométrica o preexpulsiva) aumenta la presión de la sangre en el ventrículo, pero esta presión es inicialmente insuficiente para abrir las válvulas aórticas. En la segunda fase (expulsión) la presión intraventricular sobrepasa la presión intraaórtica, se abren las válvulas aórticas, la sangre es expulsada a la aorta y aumenta la presión.

Cuando se cierran las válvulas aórticas, como las válvulas aurículo-ventriculares están todavía cerradas y el miocardio ventricular continúa relajándose, la presión intraventricular disminuye muy rápidamente, hasta llegar a 0. Durante la parte inicial de la relajación, todas las válvulas del corazón están cerradas y las fibras miocárdicas ventriculares conservan tanto su longitud como tensión (fase de relajación isométrica). A continuación, por la caída de la presión intraventricular por debajo de la intraauricular, se abren las válvulas aurículo-ventriculares, la sangre pasa de las aurículas a los ventrículos (fase de »relajación isotónica«) y se produce el llenado ventricular. En un primer período (llenado rápido), que en el hombre tiene una duración de 100 mseg, la sangre penetra a gran velocidad a los ventrículos que reciben así alrededor de las dos

terceras partes del llenado total. En un segundo período (llenado lento), disminuye gradualmente la entrada de sangre hasta hacerse mínima en el período final del llenado, denominado diastasis. La duración de la diastasis es aproximadamente de 200 mseg. Al final de la diastasis se produce el sístole auricular, que sólo agrega un 20% de sangre al llenado ventricular. El llenado ventricular es, por consiguiente, en su mayor parte pasivo: la sangre simplemente penetra a los ventrículos que se encuentran relajados, a causa de la mayor presión en las aurículas. Esto significa, a su vez, que el transporte de la sangre es efectuado prácticamente en su totalidad por la actividad de los ventrículos. Es por esto que el ciclo cardíaco se divide en sístole y diástole *ventricular* (Fig. 4.2.3), englobando en el diástole al sístole auricular. Terminada la sístole auricular, evento que marca el final de la diástole, se inicia, a continuación de un brevísimo intervalo, un nuevo ciclo cardíaco. Es importante reiterar que la abertura y cierre de las válvulas son totalmente pasivos y causados exclusivamente por las diferencias de presiones entre ambos lados de la válvula. Los músculos papilares no intervienen en este proceso. Su función se limita a impedir la eversión de los velos valvulares, ya que durante la sístole ventricular se contraen y ponen tensas sus cuerdas tendíneas.

El ciclo cardíaco (sístole y diástole) se repite en el hombre adulto normal alrededor de 70 a 80 veces por minuto, que es la frecuencia cardíaca normal. El ciclo cardíaco tiene, en consecuencia, una duración promedio de aproximadamente 0.8 seg., de los cuales 0.3 seg. corresponden al sístole y 0.5 al diástole.

Se entiende por taquicardia el aumento de la frecuencia cardíaca y por bradicardia su disminución. En caso de taquicardia se acorta considerablemente la diástole y muy levemente la sístole. La taquicardia se realiza, por lo tanto, esencialmente a expensas de la diástole, especialmente de la fase de diastasis, por lo cual, mientras no sobrepasa cierto límite, afecta sólo muy ligeramente el llenado ventricular. Por lo tanto, mientras la taquicardia no comprometa significativamente el llenado ventricular, aumenta el volumen-minuto. Pero cuando el número de contracciones cardíacas sobrepasa 140-150 por minuto, la diástole acortada comprometerá el período de llenado rápido. En este caso el volumen sistólico puede

hacerse inferior a 30 ml (normal 80 ml), produciéndose una insuficiencia cardiaca, debida a que el volumen-minuto cae por debajo de 5 litros.

En la circulación menor o pulmonar, la resistencia friccional que tiene que vencer la sangre, es menor que en la circulación mayor. El ventrículo derecho necesita desarrollar, por lo tanto, menos esfuerzo para mantener un flujo adecuado. Por la misma razón, la presión en el ventrículo derecho durante el sístole no es superior a los 25 mm de Hg. Esta presión es más que suficiente para vencer la presión existente en la arteria pulmonar (7-8 mm de Hg) al final del diástole. El ventrículo izquierdo, dado que la presión aórtica es de 120 mm de Hg, desarrolla un trabajo varias veces mayor que el ventrículo derecho, lo que explica el mayor grosor del miocardio ventricular izquierdo. La masa de la musculatura en general y del miocardio en especial, gracias a mecanismos específicos de adaptación, está en relación directa con la magnitud del trabajo que debe realizar.^{61, 62, 63,64}

☆ **Ruidos Cardiacos**

- Sístole ventricular eléctrica: Periodo entre QRS y el final de la onda T.
- Sístole ventricular mecánica: Periodo entre el cierre de la válvula mitral hasta el siguiente cierre de la válvula aórtica.
- La diástole ventricular comprende el resto del ciclo.

1^{er} Ruido: Señala el comienzo de la sístole mecánica que cierra las válvulas auriculoventriculares. Hay vibración de las válvulas y de las paredes del corazón por la interrupción brusca de sangre.

2^{do} Ruido (agudo): Señala el final de la sístole mecánica que cierra la válvula aórtica y pulmonar.

3^{er} Ruido: Son vibraciones durante la 1^{ra} Fase de la diástole ventricular.

4^{to} Ruido: Se produce por el movimiento de la sangre debido a la contracción auricular.⁶²

☆ **Latido Cardíaco**

El corazón de una persona en reposo impulsa aproximadamente 5000 ml de sangre por minuto que equivalen a 75 ml por latido. Esto significa que en cada minuto pasa por el corazón un volumen de sangre equivalente a toda la que contiene el organismo humano. Durante un ejercicio físico intenso el gasto cardíaco (volumen de sangre impulsado por el corazón), puede llegar hasta 30 litros por minuto (30000 ml/min.).⁶²

4.3 PRESION ARTERIAL

4.3.1 CONCEPTOS GENERALES

La función celular se realiza en forma constante, por lo cual es necesario un continuo aporte de nutrientes y un constante drenaje de metabolitos celulares. Para que esto sea posible se necesita un flujo sanguíneo que asegure una adecuada perfusión tisular.

Para poder manejar este fluido sanguíneo se requiere de una fuerza capaz de vencer la resistencia a la circulación. Dicha fuerza es producto de la actividad cíclica del corazón, que determina una presión denominada **presión arterial**.⁶¹

Entonces, se entiende por presión arterial a la fuerza que ejerce la sangre sobre la superficie interna de las arterias, lo que determina a su vez una tensión en la pared respectiva.

La presión arterial ejerce una fuerza de distensión que empuja la pared del vaso hacia fuera, y es contrarrestada por una fuerza de contención que corresponde, precisamente, a la tensión de la pared del vaso. Cuando dichas fuerzas, distensión y contención, se equilibran, el radio del vaso considerado permanece constante.⁶⁵

La presión arterial, la tensión y el radio, se relacionan entre sí en la ecuación de Laplace:

$$P = \frac{T}{R}$$

Ec. 4.3.1

Es decir, que la tensión a un valor determinado de presión es directamente proporcional al radio.

Se habló de la diferencia entre tensión y presión arterial basándose en la ley de Laplace. Se verá ahora cuales son los factores determinantes de la presión arterial, para ello se citará la ley de Poiseuille.

La misma explica que la diferencia de presión inicial y final en un sistema canalicular está en relación directa con el caudal circulante. Además, habla de la importancia de otros dos parámetros, como son la viscosidad y el radio.

En la ecuación de Poiseuille se considera que el término:

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$$

Ec. 4.3.2

Es la expresión matemática de la resistencia (R), que se opone a la circulación donde se observa la estrecha vinculación entre la viscosidad (η), el radio (r) y la longitud del sistema (L). Reemplazando entonces la expresión antedicha tenemos:

$$P' - P'' = VM * R$$

Ec. 4.3.3

Donde la P' es la presión de la aorta, y P'' es presión en aurícula derecha, que se considera igual a cero. En definitiva:

$$PA = VM * RP$$

Ec. 4.3.4

Es decir que la presión arterial (PA), se determina por el volumen minuto (VM) y la resistencia periférica (RP). Cada uno de estos dos factores tiene sus propios mecanismos de regulación que, en su conjunto, determinan la presión arterial.

Como se dijo anteriormente, la presión sanguínea es el resultado de la actividad cíclica del miocardio. Es por eso que podemos hablar de una presión máxima o sistólica y de una presión mínima o diastólica.

La presión sistólica se puede registrar durante la fase de expulsión máxima del ciclo cardíaco, y su valor es de aproximadamente 120 mmHg, mientras que la presión diastólica se observa al finalizar la fase de contracción isométrica sistólica, justamente en el momento en que procede a la apertura de la válvula aórtica, y su valor es de 80 mmHg.

La diferencia entre valor de ambas presiones se denomina presión diferencial y determina la amplitud del pulso.

Otro concepto fundamental es el de presión arterial media, que es la presión de valor constante, que asegura igual rendimiento hemodinámico que las presiones fluctuantes del ciclo cardíaco. Este valor se puede determinar en un paciente sumando a la presión diastólica un tercio de la presión diferencial.^{63, 65}

4.3.2 FACTORES QUE AFECTAN LA PRESIÓN ARTERIAL

Para hablar de presión arterial es necesario tener en cuenta los diversos factores que afectan a la misma.

Los cambios en la presión arterial se deben a los cambios en el gasto cardíaco y la resistencia periférica.

Se llama gasto cardíaco al volumen de sangre expulsada por el ventrículo izquierdo o el derecho en la aorta o tronco pulmonar por minuto. El mismo está regulado por el volumen sistólico y la frecuencia cardiaca.

El volumen sistólico, o sea la cantidad de sangre expulsada con cada latido, está regulado por tres factores. A saber: Precarga (Ley de Frank Starling), contractilidad y la poscarga. Estos tres mecanismos dependen a su vez del retorno venoso.

Para hablar de resistencia periférica, o sea la dificultad al avance del flujo sanguíneo que presenta la totalidad del circuito sistémico, es necesario tener en cuenta tres factores. Estos son: viscosidad de la sangre, longitud y radio del vaso.

Cuando existe un aumento de la viscosidad de la sangre, la resistencia periférica se aumenta.

Ante una amplificación de la longitud del vaso, la resistencia periférica se incrementa.

Al experimentar un aumento del radio del vaso, la resistencia periférica disminuye.

Teniendo en cuenta todo lo anterior se puede concluir que:

- Cuando se tiene un incremento del retorno venoso el volumen sistólico se eleva, aumentando también el gasto cardíaco.
- Los impulsos simpáticos aumentan la frecuencia cardiaca y los parasimpáticos la disminuyen.
- Un ascenso de la frecuencia cardiaca incrementa el gasto cardíaco.
- Finalmente, un aumento del gasto cardíaco aumenta la presión arterial, siempre que la resistencia se mantenga sin ninguna alteración.

De forma contraria, una disminución del gasto cardíaco, provoca una disminución de la presión arterial.

Ante un aumento de la resistencia periférica, la presión arterial se eleva. De forma contraria, si la resistencia periférica disminuye, también lo hace la presión arterial.

Por lo cual se puede afirmar que, tanto el gasto cardíaco como la resistencia periférica, son directamente proporcionales a la presión arterial.^{62, 63}

4.4 FISICA DEL SISTEMA CARDIOVASCULAR

El sistema cardiovascular está formado por el corazón, la sangre y los vasos sanguíneos; cada uno desarrolla una función vital en el cuerpo humano. Aquí hablaremos sólo de una parte de la física involucrada en su funcionamiento.

El *corazón* es prácticamente una doble bomba que suministra la fuerza necesaria para que la sangre circule a través de los dos sistemas circulatorios más importantes: la circulación pulmonar en los pulmones y la circulación sistemática en el resto del cuerpo. La sangre primero circula por los pulmones y posteriormente por el resto del cuerpo.

Las presiones de las dos bombas del corazón no son iguales: la presión máxima del ventrículo derecho llamada *sístole* es del orden de 25 mm de Hg, los vasos sanguíneos de los pulmones presentan poca resistencia al paso de la sangre. La presión que genera el ventrículo izquierdo es del orden de 120 mm de Hg, mucho mayor que la anterior, ya que la sangre debe viajar a todo el cuerpo. Durante la fase de recuperación del ciclo cardíaco o *diástole*, la presión típica es del orden de 80 mm de Hg. La gráfica de presión se muestra en la figura 4.3.1.

Durante una cirugía o en terapia intensiva, es frecuente que la presión venosa central de la sangre se mida en forma directa, para lo cual se introduce un catéter (tubo flexible delgado) por una de las venas del brazo hasta llegar a la aurícula, este catéter

está además conectado a una botella de suero y a un tubo capilar graduado en centímetros, que colocado verticalmente a la altura del corazón mide la presión venosa. El suero sube por el capilar hasta alcanzar una altura entre 20 y 25 cm. en caso de un adulto.

Un método para medir la presión arterial sistólica y diastólica es usar el esfigmomanómetro, que consiste en un manguito inflable de aproximadamente 13 cm. de ancho, que se coloca alrededor del brazo, conectado a un manómetro (medidor de presión) de mercurio, tubo que tiene un depósito de mercurio en su parte inferior y está graduado en milímetros. La presión de aire en el manguito se eleva hasta sobrepasar la presión sistólica, logrando así colapsar la arteria humeral e impidiendo el flujo de sangre por ella. Si se deja salir lentamente el aire del manguito, cuando la presión sobre la arteria alcance el valor de la presión sistólica la sangre comenzará a fluir a través de la arteria, lo cual se puede detectar por medio del sonido que produce. La sangre fluirá en forma intermitente hasta alcanzar la presión diastólica, lo cual se detecta porque el sonido desaparece.

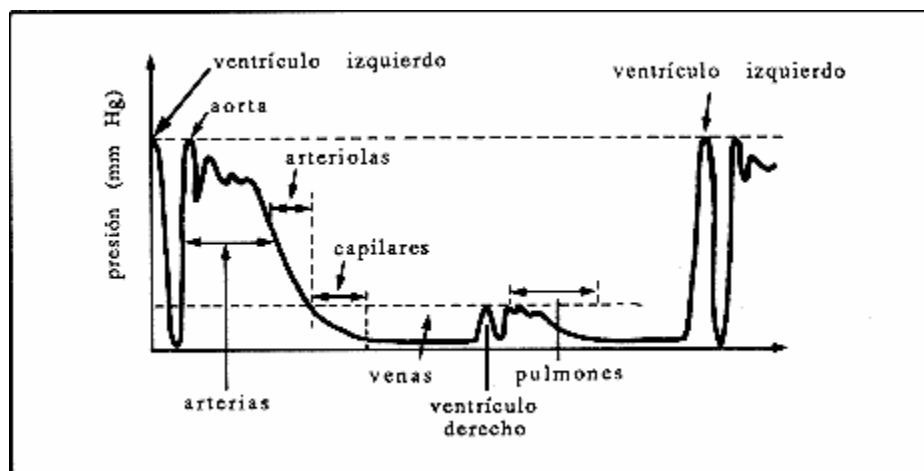


Figura 4.3.1. Gráfica que muestra cómo varía la presión en el sistema circulatorio. Nótese que la presión venosa es muy pequeña. ⁶⁵

La sangre tiene una densidad de 1.04 g/cm^3 , muy cercana a la del agua que es de 1.00 g/cm^3 , por lo que podemos hablar del sistema circulatorio como un sistema hidráulico donde las venas y las arterias son similares a mangueras. Como sucede con

cualquier circuito hidráulico, la presión en el sistema circulatorio varía a través del cuerpo, la acción de la gravedad es muy notoria en las arterias donde la presión varía de un punto a otro.⁶²

Sabemos de la física, que los líquidos en reposo transmiten íntegramente y en todas direcciones las presiones que se les aplican, lo que no sucede así cuando éstos se hallan en movimiento a través de un tubo. Este último es el caso cuando consideramos el sistema circulatorio: el fluido es la sangre y las arterias y venas los tubos del circuito. Si el líquido fluye por un tubo recto en forma rítmica, el flujo es laminar, es decir que puede imaginarse como un conjunto de láminas concéntricas que se deslizan una sobre otra, la central será la de mayor velocidad mientras que la que está tocando al tubo tendrá la mínima velocidad. Si consideramos las velocidades de las diferentes capas de líquidos en un tubo tendremos que el fluido que está en contacto con la pared del tubo que lo contiene prácticamente no se mueve, las moléculas del fluido que se mueven a mayor velocidad son las que se encuentran en el centro del tubo.

La energía necesaria para que el líquido viaje por el tubo debe vencer la fricción interna de una capa sobre otra. Si el líquido tiene una viscosidad η el flujo sigue siendo laminar, siempre y cuando el valor de la velocidad del fluido V por el diámetro del tubo d dividido entre el valor η no exceda de un valor crítico conocido como número de Reynolds si Re es mayor que 2 000, la corriente laminar se rompe y se convierte en turbulenta, es decir, forma remolinos, chorros y vórtices.

$$\left(Re = \frac{Vd}{\eta} \right)$$

La energía requerida para mantener una corriente turbulenta es mucho mayor que la necesaria para mantener una corriente laminar. La presión lateral ejercida sobre el tubo aumenta. Aparecen vibraciones que pueden ser detectadas como sonido. En la circulación humana normal el flujo es laminar, rara vez es turbulenta, con excepción de la aorta y bajo condiciones de ejercicio intenso.

Los glóbulos rojos de la sangre en una arteria no están uniformemente distribuidos, hay más en el centro que en los lados, lo cual produce dos efectos: uno, cuando la sangre entra a un conducto pequeño a un lado del conducto principal, el porcentaje de glóbulos rojos que pasan será ligeramente menor que en la sangre que se encuentra en el conducto principal; el segundo efecto es más importante, debido a que el plasma sanguíneo se mueve más lentamente a lo largo de las paredes de los vasos que los glóbulos rojos, la sangre en las extremidades tiene un porcentaje mayor de glóbulos rojos que cuando deja el corazón, el cual es aproximadamente del orden de un 10%.

En el estudio del movimiento de los líquidos, el gasto o caudal es una cantidad importante. El gasto Q es el volumen de líquido V que fluye por el conducto estudiado dividido entre el tiempo t que tarda en fluir:

$$Q = \frac{V}{t}$$

Para un tubo rígido dado, de radio r y longitud l , el volumen del líquido de viscosidad η está relacionado con el gradiente de presión de un extremo a otro del tubo ($P_1 - P_2$). El matemático francés Poiseuille encontró que el gasto está relacionado con estos parámetros así:

$$Q = \frac{\pi r^4 (P_1 - P_2)}{8\eta l}$$

Como la resistencia R al paso del líquido es el gradiente de presión entre el gasto, la ecuación puede expresarse como:

$$R = \frac{8\eta l}{\pi r^4}$$

Donde $P_1 - P_2$ está en N/m^2 , y R está en m .

$$\eta, \text{ en } \frac{NS}{m^2}$$

Esta ecuación nos dice que si duplicamos el radio del tubo dejando iguales los otros parámetros, el gasto aumenta 16 veces; esto es muy importante aun cuando es sólo una aproximación en el caso del flujo sanguíneo, ya que la ecuación es válida para el caso de tubos rígidos y las arterias tienen paredes elásticas las cuales se expanden

ligeramente con cada pulso cardíaco, además, la viscosidad de la sangre cambia ligeramente con la velocidad del flujo.

Como se indica en la figura 4.3.1, la caída de presión más alta en el sistema cardiovascular ocurre en la región de las arteriolas y capilares. Los capilares tienen paredes muy delgadas ($\sim 1\mu\text{m}$) que permiten la difusión del oxígeno y del dióxido de carbono de manera fácil. Para entender por qué no revientan, debemos ver cómo se relaciona la presión dentro del tubo P , con el radio del tubo R y la tensión que siente debido al fluido T en sus paredes. La presión es la misma en las paredes, de modo que la fuerza por unidad de longitud que empuja hacia fuera es $R P$. Por otro lado, existe una fuerza de tensión T por unidad de longitud que mantiene unido al tubo. Debido a que el sistema (pared-fluido) está en equilibrio se debe cumplir: $T = RP$ así si el radio del tubo es muy pequeño, la tensión también lo es.

Las enfermedades del corazón son una de las mayores causas de mortandad en el mundo. Muchas de ellas incrementan la carga de trabajo del corazón o reducen su habilidad para trabajar a la velocidad normal.

El trabajo hecho por el corazón es aproximadamente la presión promedio por el volumen de sangre bombeado. Aquello que incrementa la presión o el volumen de sangre bombeado incrementará el trabajo hecho por el corazón; por ejemplo, una alta presión sanguínea (hipertensión) causa que la tensión muscular se incremente en proporción a la presión, o bien una rápida actuación del corazón (taquicardia) también incrementa la carga de trabajo.^{58, 61, 62,65}

4.5 CAOS Y SISTEMA CARDIOVASCULAR

La física y las matemáticas han sido utilizadas por el hombre para explicar los fenómenos naturales que observa. La teoría del caos y los fractales son términos cada vez más encontrados en diversos ámbitos sin que la medicina sea una excepción.

En el cuerpo humano existen muchas estructuras con geometría fractal, como son la red vascular, el árbol bronquial, la red de neuronas, la mucosa intestinal, la disposición de las glándulas, etc. La forma acostumbrada de estudiar este tipo de fenómenos ha sido investigar el órgano biológico que lo produce y estudiar con todo detalle su comportamiento biológico, químico y físico. Así se han obtenido los conocimientos que han permitido el gran avance de la medicina. Sin embargo, esta forma de proceder no ha sido suficiente. A partir de los años ochenta se ha dado un nuevo enfoque en la investigación de los fenómenos biológicos, a saber, dirigir el estudio a las propiedades globales de los sistemas considerándolos no lineales.⁶⁶

La importancia de la geometría fractal en el organismo es que permite optimizar la función de los sistemas ya que tienen una gran superficie sin ser órganos demasiado voluminosos. Los pulmones, por ejemplo, tienen un área de intercambio de aproximadamente 100 metros cuadrados (una cancha de basketball), mientras que el volumen total es de unos 7 a 8 litros.

Así como existen estructuras con geometría fractal, existen fenómenos con características fractales, ya que poseen patrones de comportamiento que se repiten en diferentes escalas de tiempo. Estos fenómenos pueden ser caracterizados con el uso de las herramientas matemáticas de la geometría fractal. La teoría fractal es por lo tanto, una herramienta válida y útil para el estudio de fenómenos dinámicos en el cuerpo humano, y permite una aproximación más acorde con la complejidad y la no linealidad de dichos procesos.⁵⁹

Durante las últimas dos décadas la Variabilidad del Ritmo Cardíaco (HRV) ha despertado un creciente interés como método de diagnóstico no invasivo de distintas patologías cardiovasculares. Las primeras observaciones de dinámica no lineal y comportamiento caótico en los sistemas fisiológicos se realizaron a finales de la década de los setenta y principio de los ochenta.^{73,74}

A finales de los ochenta y principio de los noventa, se desarrolla una hipótesis sobre la naturaleza y aparente comportamiento caótico de la variabilidad del ritmo

cardíaco. [61,66] La aplicación de nuevos métodos de diagnóstico cardiológico en los últimos años ha permitido estudiar mejor a los pacientes cardiopatas, y a la vez, comenzar a explorar otras formas de caracterizar estas enfermedades.⁶⁷

El corazón es un músculo cuya función es semejante a la de un motor; su contracción (sístole) alterna con periodos de reposo (diástole) este movimiento está gobernado por un sistema de "arranque" que asegura el funcionamiento automático de este sistema mecánico. Los datos electroquímicos asociados con el latido del corazón se registran mediante el electrocardiograma, inventado en 1903 por el fisiólogo holandés W. Einthoven, ganador del premio Nóbel de medicina y fisiología en 1924. El principio es sencillo: la actividad de las células responsables del automatismo cardíaco se acompaña por fenómenos eléctricos característicos que se registran con la ayuda de electrodos dispuestos en la superficie del corazón. La contracción de las aurículas, que precede a la de los ventrículos es provocada por la activación automática y regular de un grupo de células anatómicamente diferentes de las células contráctiles situadas en la parte alta de la aurícula derecha. De ahí parte una corriente eléctrica que provoca la activación de las células vecinas de las dos aurículas, pero que es transmitida a los ventrículos al poco tiempo mediante otro grupo de células especializadas que forman una red que se disemina en los ventrículos, algo así como el "cable eléctrico" que permite la conexión entre las células especializadas en la conducción y las células cardíacas puramente contráctiles. La contracción está precedida por cambios eléctricos llamados despolarizaciones, que se registran mediante los electrodos. En el electrocardiograma se aprecia una primera onda que corresponde a la de polarización de las aurículas, seguida de una segunda provocada por la contracción de los ventrículos, y por último otra que proviene de la repolarización de los ventrículos.^{57, 58,68}

L.Glass y colaboradores llevaron a cabo en Canadá un estudio experimental que ha revelado datos muy interesantes sobre el comportamiento de las células cardíacas. Los investigadores aislaron un grupo de este tipo de células en embriones de pollo, las cuales transferidas a un medio de cultivo apropiado, laten espontáneamente con un ritmo regular que se registra con la ayuda de diminutos electrodos. Estos últimos sirven también para enviar a las células pulsos de corriente en las diversas fases del ciclo

espontáneo de latidos. Si se asume que la dinámica del movimiento del corazón puede ser representada por una ecuación diferencial que describe la evolución en el tiempo, la representación del oscilador cardiaco en un diagrama de fases describirá un atractor de ciclo límite. Un estímulo eléctrico desplazará el oscilador hacia un nuevo punto en el espacio de fases, distancia que puede ser medida experimentalmente.⁶⁹

Glass y colaboradores observaron que al aplicarse un campo eléctrico fuerte, el latido siguiente ocurre más pronto o después de lo normal. Si se aplican impulsos periódicos el agregado celular se encuentra solicitado por dos fuerzas de periodos diferentes: uno con el ritmo intrínseco de las células cardiacas y el otro con el ritmo provocado por la corriente eléctrica aplicada externamente. El latido cardiaco que se produce dependerá de la relación existente entre los dos periodos. En ciertos casos las células laten una, dos o tres veces seguidas por cada dos impulsos externos, pero en otras circunstancias la contracción es aparentemente azarosa, produciendo formas irregulares, caóticas. Estas experiencias son interesantes porque muestran que se puede inducir caos en un sistema artificial que simula los procesos cardíacos. Además, cuando se comparan las dinámicas observadas en el experimento con las que detecta el electrocardiograma de pacientes cardiacos, existe una notable similitud. Glass ha llegado a la conclusión de que muchos problemas patológicos de los humanos son producto de lo que él ha dado en llamar enfermedades dinámicas. Este tipo de enfermedades, que es el caso de las cardiacas, resultan de cambios en las variables fisiológicas que normalmente se responsabilizan de los procesos rítmicos, las cuales de repente fluctúan de manera caótica. En el hombre adulto, el ritmo cardiaco normal es de 60 a 100 latidos por minuto. Hay dos grandes categorías de problemas rítmicos: por una parte está la aceleración de la frecuencia cardiaca, taquicardia, y por la otra la desaceleración del ritmo a menos de 60 latidos, que se conoce como bradicardia. Los síntomas de cualquiera de los dos tipos de enfermedades van desde la fatiga al esfuerzo, hasta la muerte súbita.^{70, 71,72}

Hay quien afirma, como es el caso de A. Goldberger de la Escuela de Medicina de Harvard, que el caos procura al cuerpo humano una flexibilidad que le permite responder a diferentes tipos de estímulos; para el caso específico del ritmo cardiaco

afirma que en una persona normal éstos son caóticos. Su afirmación se basa en el análisis del espectro de frecuencia del electrocardiograma de personas sanas y pacientes cardiacos. Para el caso de los primeros, dice Goldberger, se presentan irregularidades que van desde algunos segundos hasta días, mientras que en los enfermos los espectros son más constantes. Como es común en las ciencias, hay quien discute las observaciones del autor y afirma que no necesariamente existe el caos, ya que las irregularidades pueden ser señales que se reciben accidentalmente en el organismo en el momento en que se hacen los registros.^{45,57,68}

Por otro lado, la hipertensión arterial es el proceso que hoy por hoy demanda más consultas en la práctica médica del médico general, y en un porcentaje muy elevado de los especialistas en cardiología. Su complejidad, a la luz de los últimos estudios, convierten lo que aparentemente es sólo una subida anormal de unos valores hemodinámicas, es una enfermedad de muy difícil manejo en determinadas circunstancias, máximo cuando de acuerdo a recientes estadísticas, la hipertensión arterial es la primera causa etiopatogénica para inducir dos procesos de curso clínico muy grave; la cardiopatía isquémica y la insuficiencia cardiaca congestiva, sin olvidar otras severas complicaciones como la enfermedad cerebro vascular, la arteriosclerosis de grandes arterias y la nefroangiosclerosis conducente a la insuficiencia renal crónica, progresiva e irreversible.

Por lo que es importante tener otras alternativas para el diagnostico de la hipertensión arterial, una de estas es el análisis de sus series de tiempo que permitan caracterizarlo a través de un atractor extraño y sus parámetros dinámicos, y así establecer el tipo de comportamiento que presenta.

CAPÍTULO V

PARTE EXPERIMENTAL



“Las ciencias no tratan de explicar, incluso apenas tratan de interpretar, construyen modelos principalmente. Por modelo, se entiende una construcción matemática que, con la adición de ciertas interpretaciones verbales, describe los fenómenos observados. La justificación de tal construcción matemática es sólo y precisamente que se espera que funcione.”

[John von Neumann]

CAPÍTULO V

PARTE EXPERIMENTAL

5.1 OBJETIVO GENERAL

A partir de los registros del monitoreo de frecuencia cardiaca, presión arterial, presión sistólica, presión diastólica en ventrículo izquierdo de rata Wistar obtener y analizar las series de tiempo, se tendrá la probabilidad de distinguir el tipo de comportamiento que presenta cada uno de los parámetros antes mencionados.

5.1.1 OBJETIVOS PARTICULARES

Describir la Variabilidad de la presión arterial mediante el Análisis de las Series de tiempo para poder comparar con la Variabilidad de la presión sistólica, presión diastólica en ventrículo izquierdo, y obtener diferencias y semejanzas entre sí.

Precisar el tipo de comportamiento que presentan las series de tiempo de la presión arterial, presión sistólica, presión diastólica en ventrículo izquierdo en rata Wistar, para ver si es posible su predicción.

Enfatizar la importancia que tiene en la actualidad el uso de la Dinámica no Lineal en la investigación e identificación de procesos fisiológicos, así como la predicción del sistema, para poder adelantarnos a ciertas alteraciones en dichos procesos y alcanzar así una medicina preventiva.

5.2 MATERIAL Y EQUIPO

5.2.1 MATERIAL BIOLÓGICO

- ☆ Ratas Wistar machos de 8 a 10 semanas de edad, con un peso de 250-300 gramos.

5.2.2 SUSTANCIAS

- ✧ Pentobarbital 63 mg/ml
- ✧ Solución Salina Fisiológica

5.2.3 MATERIAL

- ✧ Estuche de disección
- ✧ Suturas
- ✧ Hilo cáñamo
- ✧ Catéter
- ✧ Jeringas de 1 ml
- ✧ Algodón
- ✧ Vaso de precipitados de 25,50,100 ml
- ✧ Matraz Erlenmeyer de 500 ml

5.2.4 EQUIPO Y SOFTWARE

- ✧ Equipo de Cómputo
- ✧ Sistema integrador 200/1, DMSI-200/1
- ✧ Excel
- ✧ CDA (Chaos Data Analyzer)
- ✧ VRA (Visual Recurrence Analysis)

5.3 MÉTODO

5.3.1 OBTENCIÓN DE DATOS

✧ Presión arterial

- ✧ Pesar la rata.
- ✧ Administración del anestésico a una dosis de 50 mg/Kg. I.P.
- ✧ Dejar unos minutos actuar al fármaco para llegar al estado de anestesia.
- ✧ Colocar la rata en la tabla de disección, sujetar por las extremidades y sacar la lengua para que no obstruya la respiración.
- ✧ Realizar inmediatamente una traqueotomía.
- ✧ Efectuar la canulación de la arteria carótida, con un catéter acoplado a un transductor.
- ✧ Esperar a que se estabilice la presión.
- ✧ Monitorear la presión durante 15 minutos

☆ **Presión sistólica y diastólica del ventrículo izquierdo**

- ☆ Pesar la rata
- ☆ Administración del anestésico a una dosis de 50 mg/Kg. I.P.
- ☆ Dejar unos minutos actuar para que se produzca un estado de anestesia.
- ☆ Colocar la rata en la tabla de disección, sujeta por las extremidades y sacar la lengua para que no obstruya la respiración.
- ☆ Realizar inmediatamente una traqueotomía.
- ☆ Efectuar la canulación de la arteria carótida, con un catéter acoplado a un transductor.
- ☆ Esperar a que se estabilice la presión.
- ☆ Introducir el catéter hasta el ventrículo izquierdo.
- ☆ Monitorear la presión durante 15 minutos

5.3.2 OBTENCIÓN DE SERIES DE TIEMPO

Se monitorearon 7 ratas wistar macho para analizar la presión arterial mediante el modelo de rata anestesiada, asimismo se realizaron 7 experimentos para monitorear la actividad hemodinámica (presión sistólica y diastólica en el ventrículo izquierdo).

Cada registro individual tiene una duración de 15 minutos, los datos son tomados a razón de 2 datos por segundo, teniendo así 1800 datos para cada experimento, obteniéndose un archivo (Fig.5.3.2.1) con seis columnas, (tiempo, presión media, presión sistólica, presión diastólica, frecuencia cardiaca, pulso) por cada registro individual.

Day,"Time","Speed",	"Mean",	"Syst",	"Diast",	"HR",	"Pulse",
,"",""	mmHg",	mmHg",	mmHg",	bpm",	mmHg"
0," 10:30:04.5"," Fast",	+00060,8,	+00077,3,	+00048,5,	+00368,6,	+00028,8,"", "", "", ""
0," 10:30:05.0"," Fast",	+00060,7,	+00077,3,	+00048,4,	+00368,8,	+00028,9,"", "", "", ""
0," 10:30:05.5"," Fast",	+00060,8,	+00077,4,	+00048,4,	+00368,9,	+00029,0,"", "", "", ""
0," 10:30:06.0"," Fast",	+00060,7,	+00077,3,	+00048,4,	+00369,3,	+00028,9,"", "", "", ""
0," 10:30:06.5"," Fast",	+00060,7,	+00077,4,	+00048,3,	+00369,5,	+00029,1,"", "", "", ""
0," 10:30:07.0"," Fast",	+00060,7,	+00077,5,	+00048,4,	+00369,6,	+00029,1,"", "", "", ""
0," 10:30:07.5"," Fast",	+00061,0,	+00077,7,	+00048,5,	+00369,9,	+00029,2,"", "", "", ""
0," 10:30:08.0"," Fast",	+00060,9,	+00077,7,	+00048,5,	+00370,1,	+00029,2,"", "", "", ""
0," 10:30:08.5"," Fast",	+00061,1,	+00077,8,	+00048,5,	+00370,1,	+00029,3,"", "", "", ""
0," 10:30:09.0"," Fast",	+00061,0,	+00077,9,	+00048,6,	+00370,2,	+00029,3,"", "", "", ""
0," 10:30:09.5"," Fast",	+00061,1,	+00077,9,	+00048,6,	+00370,1,	+00029,3,"", "", "", ""
0," 10:30:10.0"," Fast",	+00061,2,	+00078,1,	+00048,6,	+00370,2,	+00029,5,"", "", "", ""
0," 10:30:10.5"," Fast",	+00061,2,	+00078,1,	+00048,6,	+00370,3,	+00029,5,"", "", "", ""
0," 10:30:11.0"," Fast",	+00061,2,	+00078,1,	+00048,6,	+00370,1,	+00029,5,"", "", "", ""
0," 10:30:11.5"," Fast",	+00061,2,	+00078,3,	+00048,6,	+00370,1,	+00029,7,"", "", "", ""
0," 10:30:12.0"," Fast",	+00061,0,	+00078,2,	+00048,5,	+00370,0,	+00029,7,"", "", "", ""
0," 10:30:12.5"," Fast",	+00061,0,	+00078,2,	+00048,4,	+00369,8,	+00029,8,"", "", "", ""
0," 10:30:13.0"," Fast",	+00061,0,	+00078,2,	+00048,4,	+00369,7,	+00029,8,"", "", "", ""
0," 10:30:13.5"," Fast",	+00061,0,	+00078,2,	+00048,4,	+00369,7,	+00029,8,"", "", "", ""

Fig. 5.3.2.1 Ejemplo del archivo que se obtiene para cada experimento, de aquí se separan cada una de las columnas, para su posterior análisis.

Para obtener las Series de Tiempo que se describen como un conjunto de mediciones de cierto fenómeno o experimento registrado secuencialmente en el tiempo, o dicho de otra forma son secuencias de datos, medidas habitualmente a lo largo del tiempo a intervalos uniformes; partiendo de esta definición es necesario realizar un tratamiento de los datos obtenidos del monitoreo de la presión arterial para poder trabajar con series de tiempo, ya que el CDA y VRA, solo trabajan con archivos de extensión .DAT, así como no reconoce caracteres extraños como son: ";", - +*-, @,/[]+*+,letras., los cuales están presentes en el archivo original, es por eso que se sigue el siguiente tratamiento:

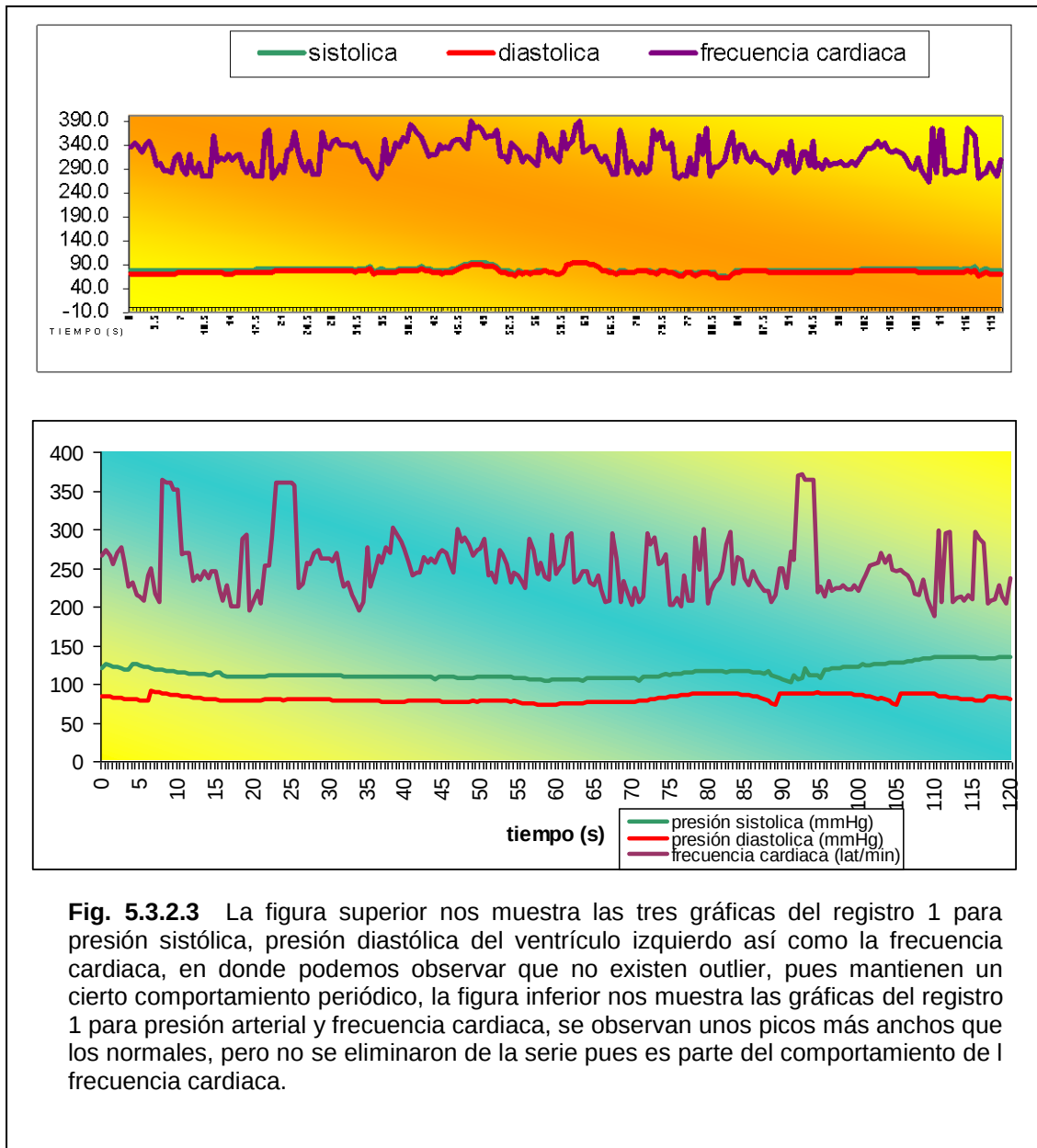
Partiendo de los registros originales estos se transfieren al software Excel para separarlos en varias columnas individuales, (Fig. 5.3.2.2) los datos utilizados para este trabajo son la presión sistólica, presión diastólica y frecuencia cardiaca.

TIEMPO (s)	PRESIÓN SISTOLICA	PRESIÓN DIASTÓLICA	FRECUENCIA CARDIACA	PULSO
11:26:02.5", "	79,3	77,1	265,4	2,2
11:26:03.0", "	79,4	77,3	272,3	2,1
11:26:03.5", "	79,5	77,4	265,7	2,1
11:26:04.0", "	79,5	77,4	254,2	2,1
11:26:04.5", "	79,6	77,6	268,9	2,0
11:26:05.0", "	79,7	77,7	275,6	2,0
11:26:05.5", "	79,8	77,8	258,4	2,0
11:26:06.0", "	79,9	78,0	225,9	1,9
11:26:06.5", "	80,0	78,1	230,8	1,9
11:26:07.0", "	80,1	78,2	215,4	1,9
11:26:07.5", "	80,1	78,3	212,1	1,8
11:26:08.0", "	80,2	78,4	207,7	1,8
11:26:08.5", "	80,2	78,4	239,4	1,8
11:26:09.0", "	80,2	78,5	248,8	1,7
11:26:09.5", "	80,3	78,6	216,1	1,7
11:26:10.0", "	80,5	78,7	205,7	1,8
11:26:10.5", "	80,5	78,7	363,6	1,8
11:26:11.0", "	80,5	78,7	359,3	1,8

Fig. 5.3.2.2 A partir de este archivo se obtienen archivos de una sola columna y se convierten a archivos con la extensión .DAT para que se puedan analizar con el CDA y VRA respectivamente.

De este archivo separado en columnas, se obtiene un archivo individual para cada uno de los parámetros, los cuales se guardan con la extensión .DAT antes de ser transferidos deben eliminarse los caracteres extraños para evitar problemas cuando sean analizados, de la misma manera es necesario graficar la serie, esto nos permite detectar las componentes esenciales de la serie, uno de los más importantes es detectar errores crasos que se refiere a puntos de la serie que se escapan de lo normal. Un error craso es una observación de la serie que corresponde a un comportamiento anormal del fenómeno (sin incidencias futuras) o a un error de medición. (Fig. 5.3.2.3)

Se debe determinar desde fuera si un punto dado es error craso o no. Si se concluye que lo es, se debe omitir o reemplazar por otro valor antes de analizar la serie.



Estos archivos de una sola columna son las series de tiempo. Se obtuvo un total 42 series de tiempo, 21 para presión arterial (7 presión sistólica, 7 presión diastolica, 7 frecuencia cardiaca), 21 para evaluar la actividad hemodinámica (7 presión sistólica de ventrículo izquierdo, 7 presión diastólica de ventrículo izquierdo y 7 frecuencia cardiaca), las cuales ya están listas para ser analizadas con el software CDA, VRA con la finalidad de caracterizar el comportamiento de cada uno de estos parámetros, así como

observar alguna característica o factor que sea representativo para cada tipo de estas series de tiempo (Fig. 5.3.2.4).

260.4
260.4
260.6
260.4
260.5
260.3
260.2
260.1
259.9
260.0
260.0
259.9
260.9
260.9
260.5
260.0

Fig. 5.3.2.4 Ejemplo de un archivo de frecuencia cardiaca, en donde se han eliminado los errores crasos, así como caracteres extraños, esta es una serie de tiempo lista para ser analizada con el CDA y VRA respectivamente.

CAPÍTULO VI

RESULTADOS Y DISCUSIÓN



“La filosofía está escrita en ese grandísimo libro abierto ante los ojos; quiero decir, el universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto”.

[Galileo Galilei.]

CAPÍTULO VI

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

6.1 RESULTADOS

Cuando se aplican técnicas de caracterización a las series de tiempo, el resultado es una clasificación objetiva de éstas para obtener información muy importante de los fenómenos en estudio como lo es la posibilidad de su predicción. La técnica más importante para hacer inferencias sobre el futuro con base en lo ocurrido en el pasado, es el *análisis de series de tiempo*.

Una serie de tiempo refleja las variaciones de una variable en el tiempo. Las series de tiempo son secuencias de datos, medidos habitualmente a lo largo del tiempo a intervalos uniformes, en nuestro caso las series de tiempo se obtienen del monitoreo de la presión arterial, frecuencia cardiaca así como de la presión sistólica y diastólica del ventrículo izquierdo de rata Wistar macho.

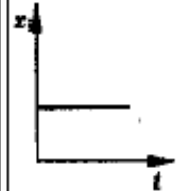
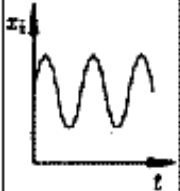
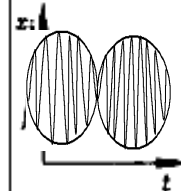
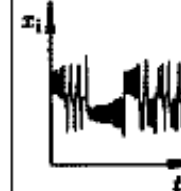
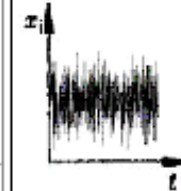
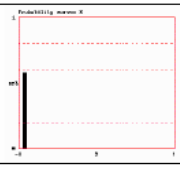
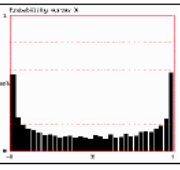
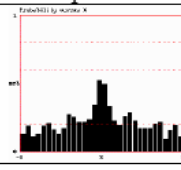
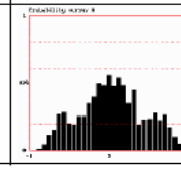
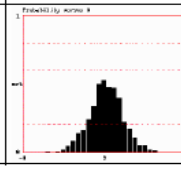
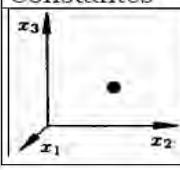
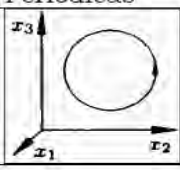
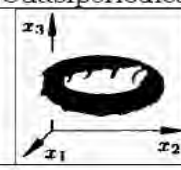
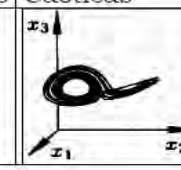
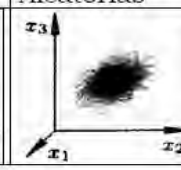
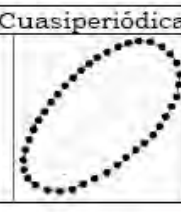
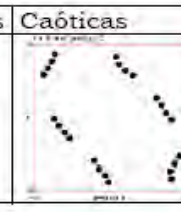
El análisis de las gráficas generadas por las series de tiempo es de gran importancia ya que mediante un simple examen visual permite catalogarlos como deterministas o estocásticos. Para caracterizar series de tiempo según el comportamiento que presenten, se utilizan dos diferentes, pero relacionados, tipos de descripción. El primer tipo enfatiza la *dinámica* (dependencia de tiempo) del comportamiento caótico. El exponente de Lyapunov es un ejemplo de este tipo de descriptor, además de algún tipo de “entropía”, que juega un papel principal. Estos valores en la caracterización nos dicen cómo el sistema evoluciona en tiempo y qué pasa con trayectorias cercanas que fluyen con el tiempo. El segundo tipo enfatiza en la naturaleza *geométrica* de las trayectorias en el espacio de fases.

En la tabla 6.1 se presenta un esquema general de los pasos a seguir en la caracterización de las series de tiempo: primero se obtienen las series de tiempo de los sistemas dinámicos a estudiar, representados aquí en forma matricial. En segundo lugar a todas las series de tiempo se les aplican las distintas técnicas de análisis de la dinámica no lineal y dependiendo de qué tan compleja o desordenada es la serie, ésta se caracteriza haciendo una comparación de los resultados con las series que técnicamente están definidas como Constantes, Periódicas (Función Seno o Coseno), Cuasiperiódicas (Función Doble seno), Caóticas (Ecuación de Lorenz) y Aleatorias (Ruido Blanco).⁴²

Para el análisis de las 42 series de tiempo obtenidas a partir del registro de la presión arterial, frecuencia cardiaca, presión sistólica y diastólica del ventrículo izquierdo, primero se graficaron observándose el comportamiento que estas tenían así como la tendencia y variación que presentaban.

Posteriormente se analizaron con técnicas de dinámica no lineal para obtener sus parámetros como son frecuencia dominante, espectro de potencia, exponente de Lyapunov, exponente de Hurst, dimensión de correlación y dimensión de capacidad así como el atractor y mapas recurrentes.

Con las definiciones y conceptos vistos en los capítulos III y IV, se tienen las bases para poder entender con mayor claridad los diferentes análisis a los que se someterán las señales de la presión arterial y presión del ventrículo izquierdo. En la siguiente tabla se muestra un resumen de la metodología para el análisis de series de tiempo.

SERIE DE TIEMPO $X_n(t)$ Forma matricial	$ \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_N \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_0 & x_{0+d} & x_{0+2d} \\ x_1 & x_{1+d} & x_{1+2d} \\ x_2 & x_{2+d} & x_{2+2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{(n-1)-d} & x_{(n-1)-2d} \\ x_N & x_{N-d} & x_{N-2d} \end{bmatrix} $				
TECNICA	TIPO DE COMPORTAMIENTO				
GRAFICAS DE TIEMPO	Constantes 	Periódicas 	Cuasiperiódicas 	Caóticas 	Aleatorias 
DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES	Constantes 	Periódicas 	Cuasiperiódicas 	Caóticas 	Aleatorias 
DIAGRAMAS DE ESPACIO DE FASE	Constantes 	Periódicas 	Cuasiperiódicas 	Caóticas 	Aleatorias 
MAPAS DE POINCARÉ	Constantes 	Periódicas 	Cuasiperiódicas 	Caóticas 	Aleatorias 
EXPONENTE DE LYAPUNOV	Constantes	Periódicas Exponente: (-) (-)	Cuasiperiódicas Exponente: (+) (-)	Caóticas Exponente: (+) (+)	Aleatorias Exponente: (+) (+) Valores muy grandes

ESPECTRO DE POTENCIA	Constantes	Periódicas	Cuasiperiódicas	Caóticas	Aleatorias
FRECUENCIA DOMINANTE	Constantes	Periódicas	Cuasiperiódicas	Caóticas	Aleatorias
FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN	Constantes	Periódicas	Cuasiperiódicas	Caóticas	Aleatorias
MAPAS RECURRENTES	Constantes	Periódicas	Cuasiperiódicas	Caóticas	Aleatorias
	Entropía Temporoespacial: % Recurrencia: % Determinismo: %	Entropía Temporoespacial: 15% Recurrencia: 19.005% Determinismo: 52.597%	Entropía Temporoespacial: 52% Recurrencia: 21.425% Determinismo: 10.887%	Entropía Temporoespacial: 72% Recurrencia: 24.238% Determinismo: 29.317%	Entropía Temporoespacial: 89% Recurrencia: 35.837% Determinismo: 0.078%

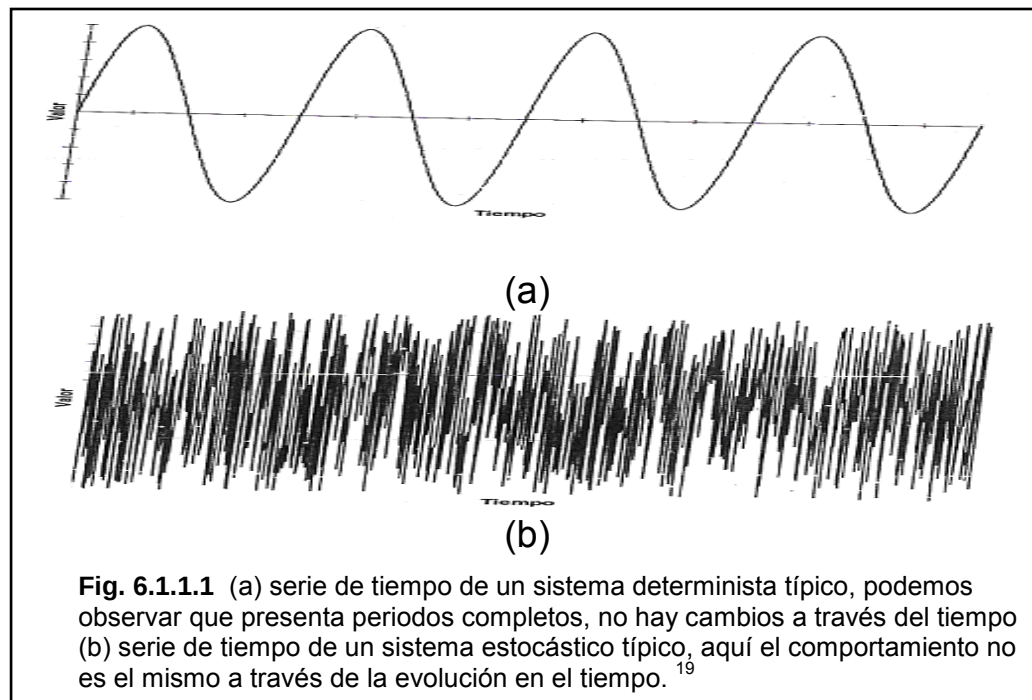
TABLA 6.1 Metodología de análisis. Esta tabla resume las principales técnicas del análisis de las series de tiempo que son válidos para caracterizar el tipo de comportamiento que presenta una serie, cotejándola con las series que han sido caracterizadas para cada tipo de comportamiento.

6.1.1 GRÁFICAS DE LAS SERIES DE TIEMPO EXPERIMENTALES

El análisis de las gráficas generadas por las series de tiempo es de gran importancia ya que mediante un simple examen visual permite catalogarlos como deterministas o estocásticos. En el primer caso, el estado futuro del sistema depende de su estado puntual, así como de la suma acumulativa de todos sus estados pasados, mientras que en el segundo, no existe ninguna correlación entre el pasado del sistema y su presente, por lo que tampoco influirá éste en su futuro.

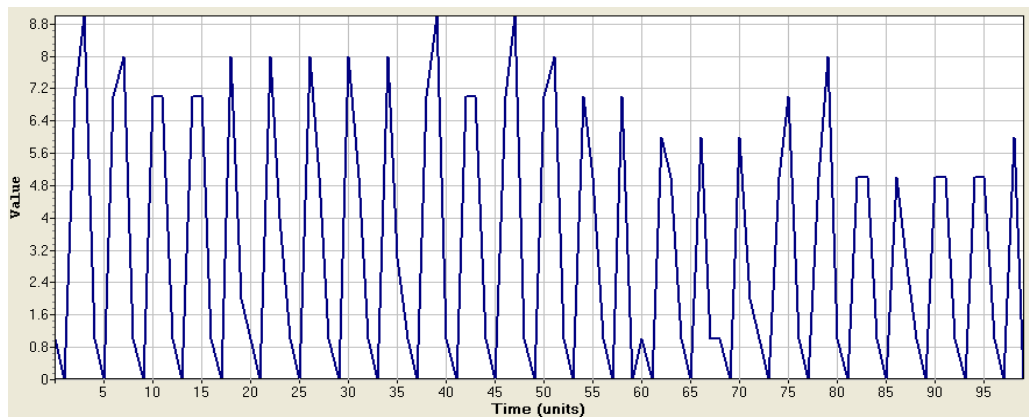
La figura 6.1.1.1 ilustra las gráficas que producen ambos sistemas, para un sistema totalmente determinista, debido a que las condiciones del sistema vuelven a ser iguales a las iniciales con cada período, el sistema exhibe una órbita cerrada y de ello

se desprende que cada uno de los puntos en los que es posible descomponer la trayectoria observada, no solo contiene todo el pasado del sistema sino también su futuro. En el caso de un sistema estocástico, por el contrario, no existe ninguna correlación entre cualesquiera dos instantes seleccionados y su serie de tiempo debería ser totalmente aleatoria. La falta de correlación entre los puntos de la trayectoria implica que aun cuando volvieran a aparecer las condiciones iniciales, la probabilidad de que el sistema alcanzara la misma trayectoria que en el período anterior, disminuiría. En el caso de un sistema estocástico, por el contrario, no existe ninguna correlación entre cualesquiera dos instantes seleccionados y su serie de tiempo debería ser totalmente aleatoria ¹⁹.

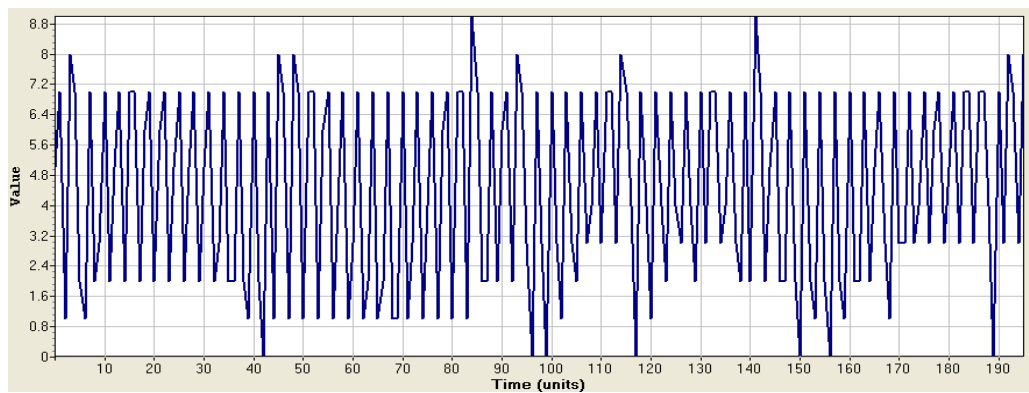


Las figuras 6.1.1.2 y 6.1.1.3 muestran los resultados de las gráficas representativas de cada uno de los parámetros de presión arterial (presión sistólica, presión diastólica, frecuencia cardíaca), presión sistólica y diastólica del ventrículo izquierdo. En donde podemos observar que no presentan ningún tipo de comportamiento típico ya sea determinista o totalmente aleatorio, pero lo que si observamos es un comportamiento híbrido determinista con variables de tipo estocástico, debido a que se presentan

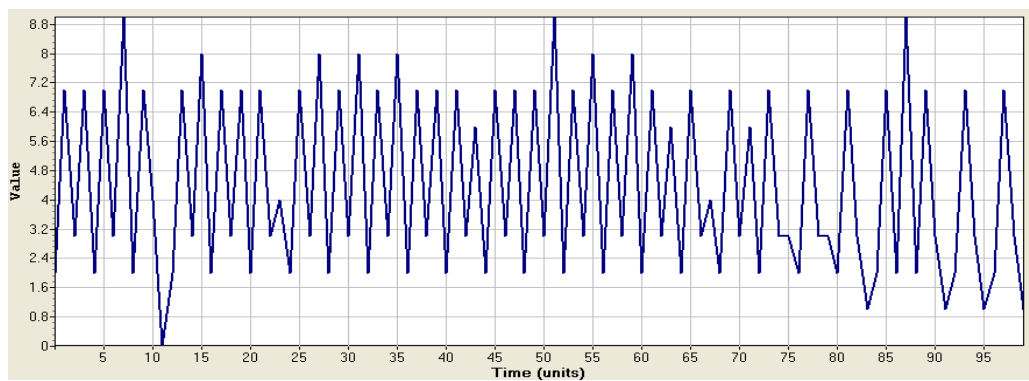
pequeñas variaciones en cada ciclo esto nos indica que tanto la presión arterial como la frecuencia cardiaca no son totalmente periódicas.



(a)

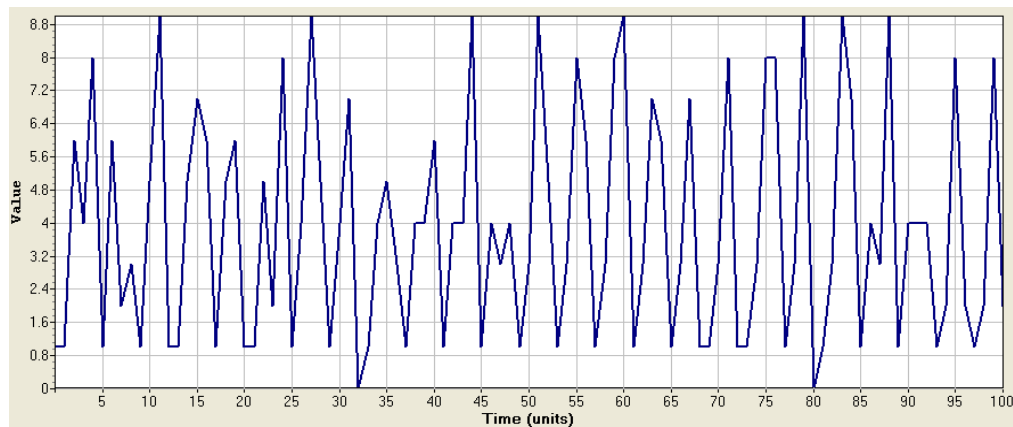


(b)

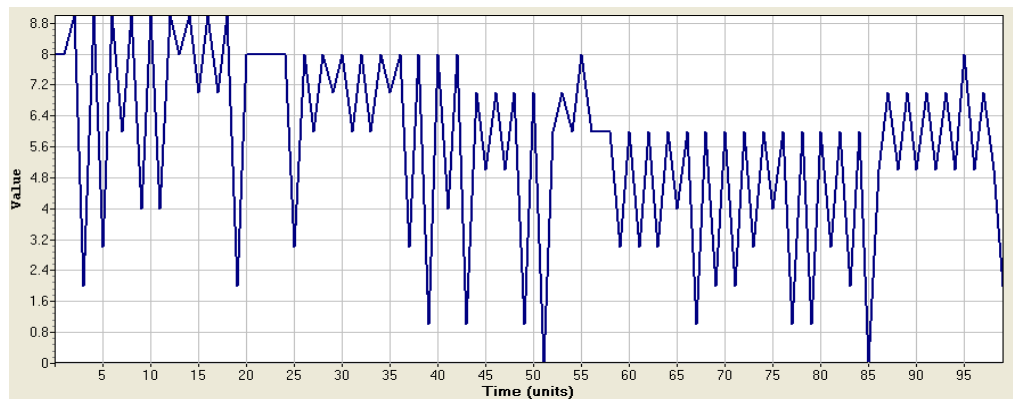


(c)

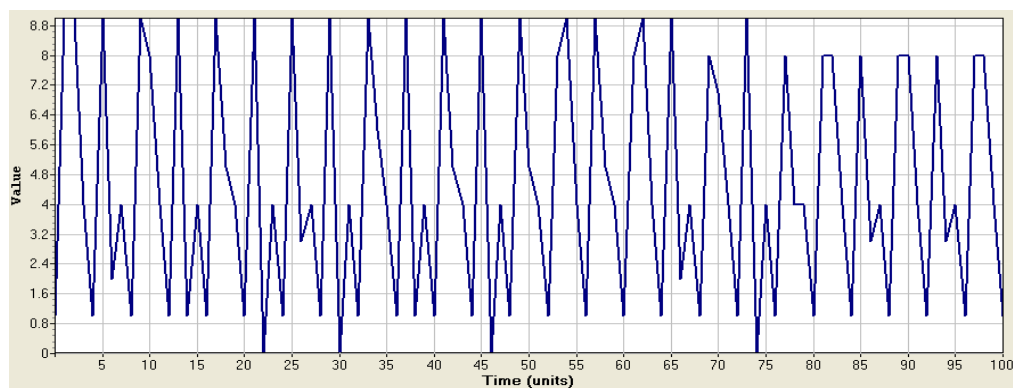
Fig.6.1.1.2 Gráficas de las series de tiempo de la presión arterial. (a) presión sistólica, (b) presión diastólica, (c) frecuencia cardiaca; podemos observar que son series de tiempo deterministas, con variables de tipo estocástico, ya que presentan ciertas irregularidades, y por lo tanto no son totalmente periódicas, además presentan un comportamiento relativamente comparable entre cada una de las series.



(a)



(b)



(c)

Fig.6.1.1.3 Gráficas de las series de tiempo. (a) presión sistólica del ventrículo izquierdo, (b) presión diastólica del ventrículo izquierdo, (c) frecuencia cardiaca; podemos observar que son series de tiempo deterministas, con variables de tipo estocástico, ya que presentan ciertas irregularidades, y por lo tanto no son totalmente periódicas, además presentan un comportamiento relativamente comparable entre cada una de las series.

Al comparar las series de tiempo obtenidas de la presión sistólica (Fig. 6.1.1.2 (a)) y presión sistólica del ventrículo izquierdo (Fig. 6.1.1.3 (a)), visualizamos que existe una similitud entre las dos ya que los picos superiores e inferiores están determinados, los ciclos se repiten aproximadamente cada 5 seg. para ambos casos, pero en la presión sistólica del ventrículo izquierdo presenta variaciones irregulares durante el monitoreo, comparado con la presión sistólica que tiene mayor periodicidad a través del tiempo.

Si contraponemos las series de tiempo obtenidas de la presión diastólica (Fig. 6.1.1.2 (b)) y presión diastólica del ventrículo izquierdo (Fig. 6.1.1.3 (b)), alcanzamos a observar claramente que se trata de dos comportamientos diferentes, la presión diastólica ventricular presenta mayores irregularidades a través del tiempo, un ciclo se presenta cada 50 seg., nos referimos a un ciclo cuando se vuelve a presentar el mismo comportamiento, mientras que en la presión diastólica, no se puede visualizar el mismo comportamiento a través de toda la serie.

La frecuencia cardiaca no tendría que tener variaciones, ya que es la misma durante todo el ciclo cardíaco; sin embargo en la Fig. 6.1.1.2 (c) y 6.1.2.3(c) podemos observar que muestran un comportamiento totalmente diferente, lo cual indica que si se ve afectada la frecuencia cardiaca por el cateterismo que se realiza para el monitoreo de la actividad hemodinámica, ya que el método es invasivo la frecuencia cardiaca sufre una alteración en su estado normal y esto se manifiesta claramente en las gráficas.

Este tipo de análisis visual no nos proporciona información suficiente para poder caracterizar las series de acuerdo al tipo de comportamiento que presentan por lo que es necesario realizar el análisis de series de tiempo de utilizando técnicas de la dinámica no lineal.

6.1.2 ANÁLISIS DE LAS SERIES DE TIEMPO EXPERIMENTALES

Las series de tiempo analizadas son presión sistólica, presión diastólica, frecuencia cardiaca, que se obtienen al introducir un catéter en la arteria carótida de la

rata, teniendo los siguientes parámetros de referencia para la presión sistólica 120 mmHg, presión diastólica 60 mmHg; así como los obtenidos al evaluar la actividad hemodinámica del corazón esto se logra introduciendo el catéter al ventrículo izquierdo y se tiene la presión sistólica ventricular que comienza con aumento rápido de su presión, hasta alcanzar el equilibrio con la de las arterias y su valor es de aproximadamente 120 mmHg, mientras que la presión diastólica ventricular se observa al entrar en relajación activa los ventrículos por lo que no sale ni entra sangre en los ventrículos, y su valor es de -10 mmHg. La frecuencia cardiaca tiene un valor de referencia de 70 a 80 latidos por minuto.

En las siguientes figuras se muestran los resultados del análisis de las series de tiempo experimentales que se presentan en una forma esquemática para su fácil comparación entre la presión arterial y la presión ventricular, asimismo la frecuencia cardiaca obtenida para ambos casos.

La distribución de probabilidad, el diagrama de espacio fase, así como los valores del exponente de Lyapunov, exponente de Hurst, función de correlación, dimensión de correlación y entropía de Kolmogorov, fueron obtenidos del programa CDA, obteniendo la serie de tiempo y aplicando la primera derivada; los atractores que se muestran son graficas en tres dimensiones en donde uno de los ejes es la segunda derivada, el otro la primera derivada y por ultimo la serie de tiempo original en el último eje ($X''(t)$ vs $X'(t)$ vs $X(t)$),

El gráfico de recurrencia, así como los índices cuantitativos como son: a) Porcentaje de puntos recurrentes (%REC) b) Porcentaje de determinismo (%DET) c) La Entropía espacio-temporal, y el atractor de recurrencia se obtienen del software VRA. Estos mapas fueron reconstruidos con un tiempo de retraso de 2 y una dimensión de inmersión de 8, ya que fueron los óptimos para todas las series de tiempo.

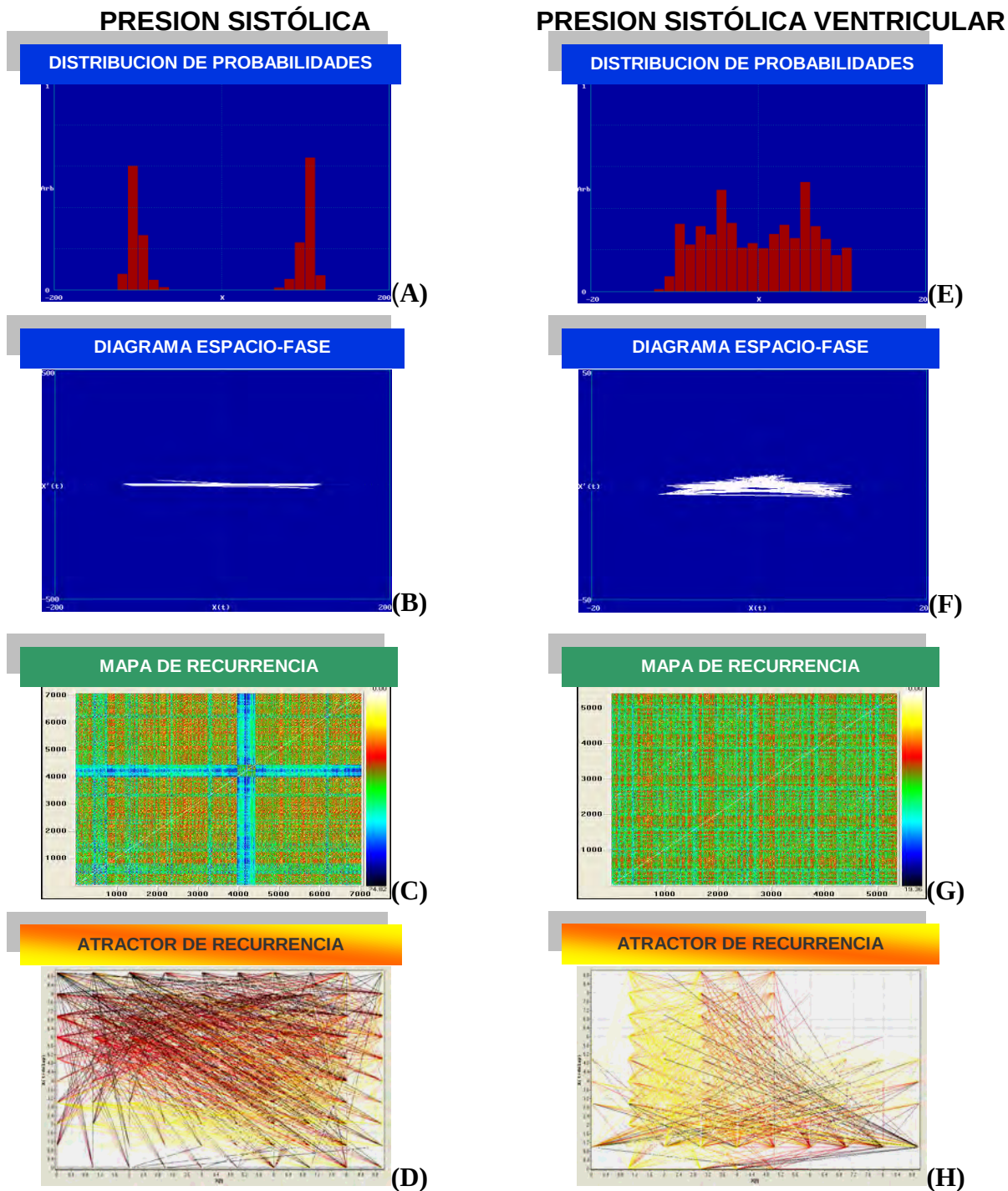


Fig. 6.1.2.1 Parámetros visuales de la presión sistólica y presión sistólica del ventrículo izquierdo. La distribución de probabilidades en la fig (A) nos proporciona un histograma en donde se observan dos campanas en los extremos del histograma mientras que la fig (E) nos muestra una distribución en donde no se observa una imagen definida por lo que se dice que es parecida a un fractal, esto es característico de un comportamiento caótico. Al comparar las fig (B y F) observamos que los atractores espacio-fase son diferentes mientras que en B se tiene un atractor casi en línea recta las trayectorias no divergen del centro y es menos denso que en la F este es diferente ya que las trayectorias divergen del centro y tienden a formar un triángulo en el centro estos dos tipos de atractores al no tener una figura definida son llamados atractores extraños. En la fig C y G observamos los gráficos de recurrencia en donde se pueden observar que en su mayoría predominan los colores verde y naranja que están asociados a pequeñas distancias entre las trayectorias, mientras que el color negro muestra grandes distancias entre las trayectorias, para poder visualizar las trayectorias nos apoyamos en los atractores de recurrencia (Fig. D y H).

TABLA 6.1.2.1 PARÁMETROS PARA LOS REGISTROS DE PRESIÓN SISTÓLICA OBTENIDOS DEL CDA

NOMBRE DE LA SERIE	EXP DE LYAPUNOV	EXP DE HURST	FUNCIÓN DE CORRELACIÓN	DIMENSIÓN DE CORRELACION	ENTROPÍA DE KOLMOGOROV
REGISTRO 1	0.163	-0.2889107	0.3167725	0.311	0.467
REGISTRO 2	0.100	-0.8120024	0.3161465	2.934	0.421
REGISTRO 3	0.129	-0.8280801	0.3161714	2.694	0.164
REGISTRO 4	0.123	-0.9255651	0.3161471	3.339	0.362
REGISTRO 5	0.122	-0.8492118	0.3161427	3.101	0.420
REGISTRO 6	0.122	-0.8752953	0.3161571	3.013	0.459
REGISTRO 7	0.187	-0.8106837	0.3161828	3.516	0.438

TABLA 6.1.2.2 PARÁMETROS PARA LOS REGISTROS DE PRESIÓN SISTÓLICA DEL VENTRÍCULO IZQUIERDO OBTENIDOS DEL CDA

NOMBRE DE LA SERIE	EXP DE LYAPUNOV	EXP DE HURST	FUNCIÓN DE CORRELACIÓN	DIMENSION DE CORRELACIÓN	ENTROPÍA DE KOLMOGOROV
REGISTRO 1	0.081	-0.8103207	0.3161393	2.641	0.433
REGISTRO 2	0.245	-0.5396211	0.3163294	1.260	0.425
REGISTRO 3	0.131	-0.5237696	0.3163863	2.742	0.402
REGISTRO 4	0.094	-0.8477493	0.3161512	2.591	0.597
REGISTRO 5	0.071	-0.9140803	0.3161421	1.589	0.650
REGISTRO 6	0.061	-0.9235806	0.3161247	3.464	0.448
REGISTRO 7	0.251	-0.4469088	0.3292215	1.544	0.848

En estas tablas observamos los parámetros cuantitativos del análisis de las series de tiempo de la presión sistólica y presión sistólica del ventrículo izquierdo obtenidos del CDA, al comparar las dos tablas encontramos que el exponente de Lyapunov para ambos casos es positivo y son menores de cero, lo cual nos indica que son características de un comportamiento caótico, de igual manera la entropía de Kolmogorov nos muestra para ambos casos que mantiene un valor finito al igual que el exponente de Hurst, estos datos en conjunto con la distribución de probabilidades y el atractor nos proporcionan información sobre el comportamiento del sistema que en este caso es caótico.

TABLA 6.1.2.3 ANÁLISIS CUANTITATIVO DE LOS MAPAS DE RECURRENCIA DE PRESIÓN SISTÓLICA

NOMBRE DE LA SERIE	% DE RECURRENCIA	% DE DETERMINISMO	ENTROPÍA ESPACIO-TEMPORAL
REGISTRO 1	0.806	2.365	1.584
REGISTRO 2	0.599	0.849	1.802
REGISTRO 3	0.027	4.978	1.644
REGISTRO 4	0.364	2.866	1.922
REGISTRO 5	0.225	3.945	1.000
REGISTRO 6	0.756	1.423	0.918
REGISTRO 7	0.428	2.429	1.922

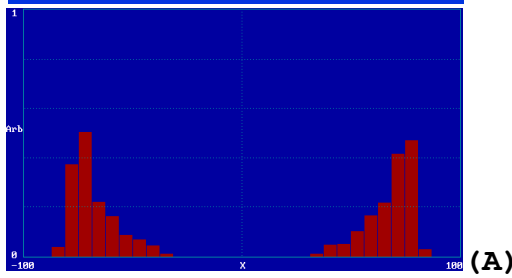
TABLA 6.1.2.4 ANÁLISIS CUANTITATIVO DE LOS MAPAS DE RECURRENCIA DE PRESIÓN SISTÓLICA DEL VENTRÍCULO IZQUIERDO

NOMBRE DE LA SERIE	% DE RECURRENCIA	% DE DETERMINISMO	ENTROPÍA ESPACIO-TEMPORAL
REGISTRO 1	0.0104	97.520	0.918
REGISTRO 2	0.049	86.316	0.880
REGISTRO 3	0.187	75.870	0.961
REGISTRO 4	0.087	99.344	0.855
REGISTRO 5	0.095	96.235	0.961
REGISTRO 6	0.069	62.031	0.880
REGISTRO 7	0.087	97.844	0.855

Al analizar ambas tablas podemos decir que el porcentaje de determinismo para la presión sistólica del ventrículo izquierdo en promedio es del 88% mientras que para la presión sistólica esta es del 3% , pudiendo ser este un parámetro característico junto con la imagen del gráfico de recurrencia para poder comparar el comportamiento que presentan ambas series de tiempo.

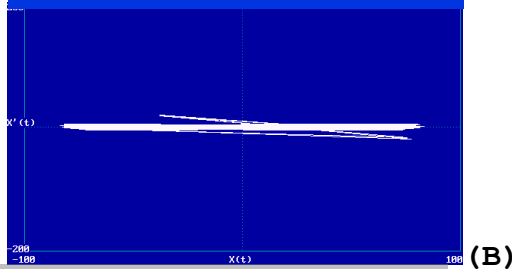
PRESION DIASTÓLICA

DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES



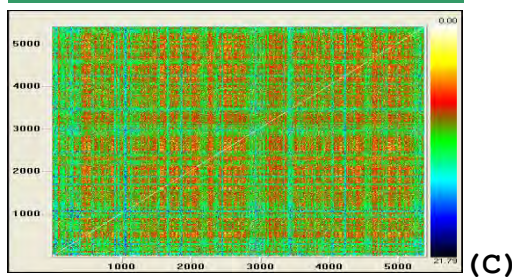
(A)

DIAGRAMA ESPACIO-FASE



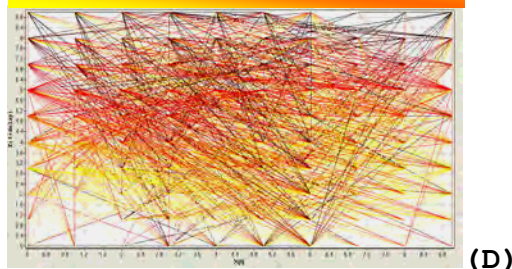
(B)

MAPA DE RECURRENCIA



(C)

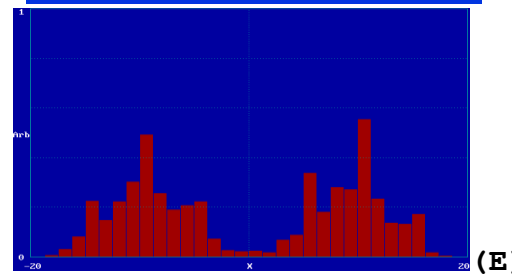
ATRACTOR DE RECURRENCIA



(D)

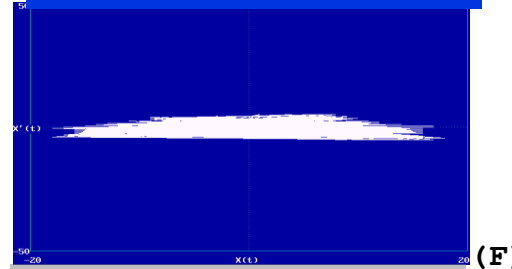
PRESION DIASTÓLICA VENTRICULAR

DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES



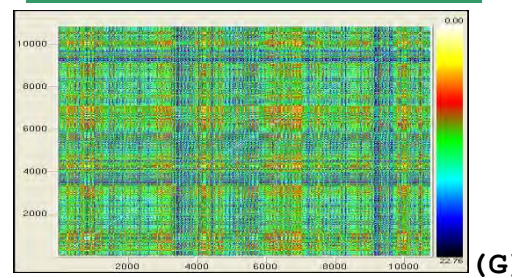
(E)

DIAGRAMA ESPACIO-FASE



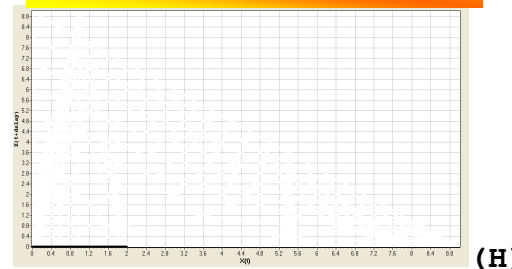
(F)

MAPA DE RECURRENCIA



(G)

ATRACTOR DE RECURRENCIA



(H)

Fig. 6.1.2.2 Parámetros visuales de la presión diastólica y presión diastólica del ventrículo izquierdo. La distribución de probabilidades en la fig. (A) nos proporciona un histograma en donde se observan en los extremos puntas filosas pero que tienden a unirse formando un fractal mientras que la fig (E) nos muestra una distribución en donde no se observa una imagen definida por lo que se dice que es parecida a un fractal, esto es característico de un comportamiento caótico. Al comparar las fig (B y F) observamos que los atractores espacio-fase son diferentes mientras que en B se tiene un atractor casi en línea recta y las trayectorias comienzan a separarse formando un triángulo en el centro y es menos denso que en la F este es diferente ya que las trayectorias divergen del centro y tienden a formar un triángulo en el centro mucho más denso lo cual nos indica que las trayectorias están más separadas, estos dos tipos de atractores al no tener una figura definida son llamados atractores extraños. En la fig C y G observamos los gráficos de recurrencia que presentan patrones discernibles diferentes en donde se pueden observar que en su mayoría predominan los colores verde y naranja que están asociados a pequeñas distancias entre las trayectorias, mientras que el color negro muestra grandes distancias entre las trayectorias, para poder visualizar las trayectorias nos apoyamos en los atractores de recurrencia, (Fig. D y H) en H observamos un atractor negro sobre el eje lo cual nos indica que se separan rápidamente las trayectorias.

TABLA 6.1.2.5 PARÁMETROS DE LAS SERIES DE TIEMPO DE PRESIÓN DIASTÓLICA OBTENIDOS DEL CDA

NOMBRE DE LA SERIE	EXP DE LYAPUNOV	EXP DE HURST	FUNCION DE CORRELACION	DIMENSION DE CORRELACION	ENTROPIA DE KOLMOGOROV
REGISTRO 1	0.053	-0.5796624	0.3168781	2.445	0.123
REGISTRO 2	0.137	-0.6901055	0.3162065	2.678	0.175
REGISTRO 3	0.277	-0.7177005	0.3162425	2.528	0.107
REGISTRO 4	0.166	-0.8370836	0.3161824	3.166	0.407
REGISTRO 5	0.218	-0.6759764	0.3162347	2.780	0.406
REGISTRO 6	0.233	-0.778793	0.3162135	3.177	0.467
REGISTRO 7	0.257	-0.7539587	0.316289	3.543	0.435

TABLA 6.1.2.6 PARÁMETROS PARA LOS REGISTROS DE PRESIÓN DIASTÓLICA DEL VENTRÍCULO IZQUIERDO OBTENIDOS DEL CDA

NOMBRE DE LA SERIE	EXP DE LYAPUNOV	EXP DE HURST	FUNCION DE CORRELACION	DIMENSION DE CORRELACION	ENTROPIA DE KOLMOGOROV
REGISTRO 1	0.424	-0.3638161	0.3208336	3.236	0.922
REGISTRO 2	0.571	-0.0657687	0.3558417	2.084	0.959
REGISTRO 3	0.195	-0.4170207	0.3181364	2.545	0.565
REGISTRO 4	0.337	-0.4121065	0.3188572	2.332	0.361
REGISTRO 5	0.266	-0.2698376	0.3261329	1.814	1.358
REGISTRO 6	0.049	-0.4962208	0.317402	2.138	0.746
REGISTRO 7	0.224	-0.4186167	0.3180535	1.503	1.127

Las tablas 6.1.2.5 y 6.1.2.6 nos muestran los resultados cuantitativos del tratamiento de la información de las series de tiempo para poder distinguir el comportamiento que presenta la presión diastólica y poder compararla con el comportamiento que presenta la presión diastólica del ventrículo izquierdo en donde observamos que el exponente de Lyapunov es positivo y menor de 1 para ambos casos, de la misma forma el exponente de Hurst que es menor de 0.5 y la entropía de Kolmogorov es mayor de 0 lo cual en conjunto con la distribución de probabilidad y el atractor nos indica que el comportamiento para las dos series de tiempo es caótico, para saber con certeza que tipo de comportamiento se tienen en las series experimentales observamos el gráfico de recurrencia así como los parámetros cuantitativos de este tipo de gráfico que se

muestran en las tablas 6.1.2.7 y 6.1.2.8 para las series de la presión diastólica y presión diastólica del ventrículo izquierdo respectivamente, en donde podemos encontrar que la entropía espacio-temporal es mayor para la presión diastólica del ventrículo izquierdo, mientras que el % de determinismo es mayor en la presión diastólica, lo que nos hace pensar que estas dos cuantificaciones pueden ser un parámetro particular de cada una de las series, ya que las dos series presentan un comportamiento de tipo caótico.

TABLA 6.1.2.7 ANÁLISIS CUANTITATIVO DE LOS MAPAS DE RECURRENCIA DE PRESIÓN DIASTÓLICA

NOMBRE DE LA SERIE	% DE RECURRENCIA	% DE DETERMINISMO	ENTROPIA ESPACIO-TEMPORAL
REGISTRO 1	0.023	49.786	0.000
REGISTRO 2	0.021	72.658	0.918
REGISTRO 3	0.017	73.841	0.000
REGISTRO 4	0.015	86.242	0.000
REGISTRO 5	0.034	47.574	1.041
REGISTRO 6	0.023	49.412	0.000
REGISTRO 7	0.087	47.843	1.053

TABLA 6.1.2.8 ANÁLISIS CUANTITATIVO DE LOS MAPAS DE RECURRENCIA DE PRESIÓN DIASTÓLICA DEL VENTRÍCULO IZQUIERDO

NOMBRE DE LA SERIE	% DE RECURRENCIA	% DE DETERMINISMO	ENTROPIA ESPACIO-TEMPORAL
REGISTRO 1	0.908	1.331	2.081
REGISTRO 2	1.124	1.543	2.153
REGISTRO 3	0.720	4.154	1.749
REGISTRO 4	3.445	2.053	2.278
REGISTRO 5	3.234	2.513	2.594
REGISTRO 6	0.638	1.773	2.081
REGISTRO 7	1.125	1.563	2.193

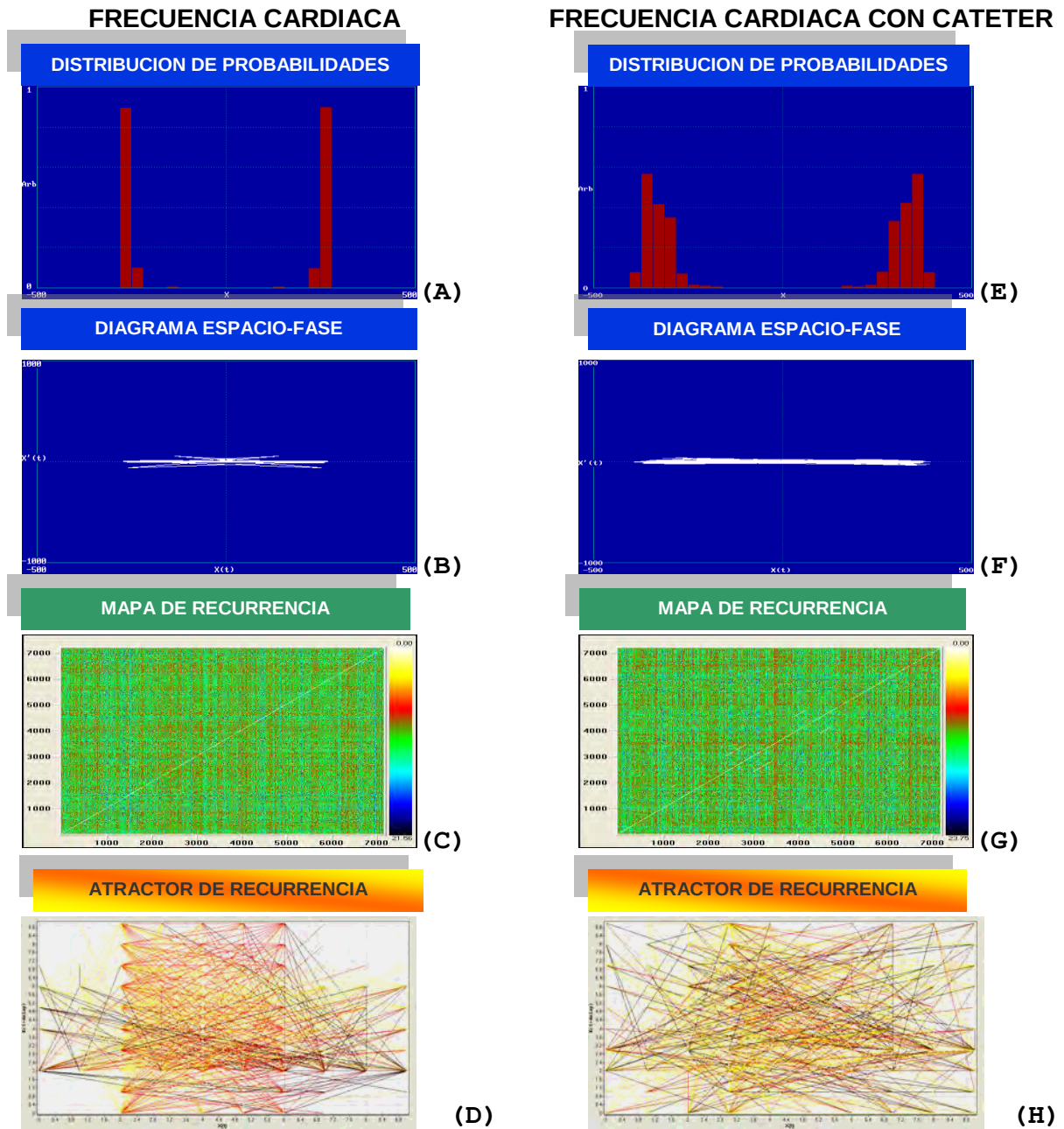


Fig. 6.1.2.3 Parámetros visuales de la frecuencia cardiaca. Para fines exclusivamente didácticos se introduce el termino frecuencia cardiaca con catéter para poder diferenciar entre la frecuencia cardiaca obtenida del monitoreo de la presión arterial y la frecuencia cardiaca al evaluar la actividad hemodinámica. La distribución de probabilidades en la fig (A) nos proporciona un histograma de puntas filosas mientras que la fig (E) nos muestra un a distribución en donde no se observan como si fueran dos histogramas que no tienen una imagen definida por lo que se dice que es parecida a un fractal, esto es característico de un comportamiento caótico. Al comparar las fig (B y F) observamos que los atractores espacio-fase son diferentes mientras que en F se tiene un atractor casi en línea recta las trayectorias no divergen del centro y es mas denso que en la B este es diferente ya que las trayectorias divergen del centro y tienden a formar un triangulo en el centro estos dos tipos de atractores al no tener una figura definida son llamados atractores extraños. En la fig C y G observamos los gráficos de recurrencia en donde se pueden observar que en su mayoría predominan los colores verde y naranja que están asociados a pequeñas distancias entre las trayectorias, se observan patrones discernibles en ambos casos, encontramos que son muy similares pero no son iguales, en las fig D y H observamos el atractor de recurrencia en donde observamos que en D prevalece el color rojo y en el centro mientras que en F no hay color predominante ya que el amarillo, el rojo y el negro están en las mismas proporciones además las trayectorias abarcan la mayoría del espacio fase.

TABLA 6.1.2.9 PARÁMETROS PARA LAS SERIES DE TIEMPO DE LA FRECUENCIA CARDIACA OBTENIDOS DEL CDA

NOMBRE DE LA SERIE	EXP DE LYAPUNOV	EXP DE HURST	FUNCION DE CORRELACIÓN	DIMENSION DE CORRELACIÓN	ENTROPÍA DE KOLMOGOROV
REGISTRO 1	0.057	-2.463704	0.3207884	3.602	0.290
REGISTRO 2	0.023	-0.9723182	0.3161061	2.433	0.387
REGISTRO 3	0.004	-0.7902964	0.3161674	3.321	0.501
REGISTRO 4	0.036	-1.151853	0.3161109	3.409	0.453
REGISTRO 5	0.018	-0.8925515	0.3161310	2.957	0.422
REGISTRO 6	0.032	-1.206003	0.3161062	3.281	0.323
REGISTRO 7	0.048	-0.7324107	0.3161516	2.280	0.310

TABLA 6.1.2.10 PARÁMETROS PARA LOS REGISTROS DE FRECUENCIA CARDIACA CON CATETER OBTENIDOS DEL CDA

NOMBRE DE LA SERIE	EXP DE LYAPUNOV	EXP DE HURST	FUNCION DE CORRELACIÓN	DIMENSIÓN DE CORRELACIÓN	ENTROPIA DE KOLMOGOROV
REGISTRO 1	0.026	-1.03498	0.3161064	2.041	0.480
REGISTRO 2	0.061	-0.9351546	0.3161172	0.939	0.313
REGISTRO 3	0.058	-0.7297182	0.3161514	2.925	0.366
REGISTRO 4	0.129	-0.7187175	0.3161067	1.324	0.617
REGISTRO 5	0.027	-1.204505	0.3161067	2.440	0.311
REGISTRO 6	0.013	-1.189262	0.316109	2.865	0.282
REGISTRO 7	0.190	-0.6602249	0.3161876	0.728	0.658

La frecuencia cardiaca son las veces que se repite el ciclo cardíaco por lo que debe ser igual en los dos experimentos realizados, es por eso que utilizamos el término de frecuencia cardiaca con catéter para diferenciar la frecuencia cardiaca obtenida del monitoreo de la actividad hemodinámica.

Al observar la tabla 6.1.2.9 y 6.1.2.10 alcanzamos a percatarnos que los valores son muy similares para ambos casos tenemos que el exponente de Lyapunov

es positivo y menor a 1, el exponente Hurst es menor de 0.5 y la entropía de Kolmogorov es mayor de 0 además que los valores promedios para ambos caos son: exponente de Hurst -1.1614 y la entropía de Kolmogorov es de 0.311 auxiliándonos en los gráficos de recurrencia y las tablas 6.1.2.11 y 6.1.2.12 que corresponden a los parámetros cuantitativos del VRA para las series de frecuencia cardiaca y frecuencia cardiaca con catéter conseguimos decir que ambos presentan un comportamiento caótico pero diferente ya el % de determinismo es mayor en la frecuencia cardiaca con catéter siendo este parámetro el único que nos serviría para poder distinguir entre estos dos tipos de series de un mismo fenómeno fisiológico.

TABLA 6.1.2.11 ANÁLISIS CUANTITATIVO DE LOS MAPAS DE RECURRENCIA DE LA FRECUENCIA CARDIACA

NOMBRE DE LA SERIE	% DE RECURRENCIA	% DE DETERMINISMO	ENTROPIA ESPACIO-TEMPORAL
REGISTRO 1	0.306	2.996	1.149
REGISTRO 2	0.235	3.662	0.000
REGISTRO 3	0.602	1.674	1.000
REGISTRO 4	1.069	1.239	2.889
REGISTRO 5	0.306	2.785	1.148
REGISTRO 6	0.287	3.002	0.000
REGISTRO 7	0.602	1.674	1.000

TABLA 6.1.2.12 ANÁLISIS CUANTITATIVO DE LOS MAPAS DE RECURRENCIA DE LA FRECUENCIA CARDIACA CON CATETER

NOMBRE DE LA SERIE	% DE RECURRENCIA	% DE DETERMINISMO	ENTROPIA ESPACIO-TEMPORAL
REGISTRO 1	0.354	49.569	3.700
REGISTRO 2	0.050	92.563	0.880
REGISTRO 3	0.092	95.621	1.580
REGISTRO 4	0.352	49.964	3.700
REGISTRO 5	0.047	98.777	0.880
REGISTRO 6	0.092	98.500	2.099
REGISTRO 7	0.215	46.263	1.757

6.2 DISCUSIÓN

Los métodos actuales de análisis de series de tiempo, si bien representan una aproximación diferente al análisis de señales con respecto a técnicas más clásicas como el análisis espectral, no debe dejarse de señalar que aún poseen imperfecciones técnicas, un aspecto a tomar en consideración es la pobre estabilidad de los algoritmos ante la longitud de la señal y la presencia de ruido en esta.

Dentro de la teoría de los sistemas dinámicos se ha prestado especial atención a la descripción del caos clásico; este ha sido muy estudiado sobre todo en sistemas de ecuaciones diferenciales y que son hoy sistemas clásicos en la literatura dentro del tema. No es sin embargo trivial la tarea de demostrar que datos reales obtenidos a partir de la experimentación están regidos por este tipo de dinámica; este ha sido el caso de la Variabilidad de la Frecuencia Cardíaca, así como en nuestro caso la inquietud de observar la variabilidad de la presión arterial y presión ventricular que poco o nada se ha estudiado por lo que no existen reportes con que compararlos.

Para explicar la diferencia entre estas, recordemos que la función celular se realiza en forma constante, por lo cual es necesario un continuo aporte de nutrientes y un constante drenaje de metabolitos celulares. Para que esto sea posible se necesita un flujo sanguíneo que asegure una adecuada perfusión tisular. Para poder manejar este fluido sanguíneo se requiere de una fuerza capaz de vencer la resistencia a la circulación. Dicha fuerza es producto de la actividad cíclica del corazón, que determina una presión denominada presión arterial.⁶²

Entonces, se entiende por presión arterial a la fuerza que ejerce la sangre sobre la superficie interna de las arterias, lo que determina a su vez una tensión en la pared respectiva. Como se dijo anteriormente, la presión sanguínea es el resultado de la actividad cíclica del miocardio. Es por eso que podemos hablar de una presión máxima o sistólica y de una presión mínima o diastólica.

La presión sistólica se puede registrar durante la fase de expulsión máxima del ciclo cardíaco, y su valor es de aproximadamente 120 mmHg, mientras que la presión diastólica se observa al finalizar la fase de contracción isométrica sistólica, justamente en el momento en que procede a la apertura de la sigmoidea aórtica, y su valor es de 80 mmHg. Mientras que las presiones del ventrículo izquierdo están relacionadas con el ciclo cardíaco que es la secuencia de fenómenos eléctricos y mecánicos que se producen en el corazón durante un latido y los cambios resultantes en la presión, el flujo y el volumen en las distintas cavidades cardíacas.

La sucesión cíclica de fases, a partir de la sístole auricular, son las siguientes: a) *Sístole auricular*: la onda de contracción se propaga a lo largo de ambas aurículas estimuladas por el nódulo sinusal. El corazón tiene el manejo automático-eléctrico pero por otro lado las válvulas y las cámaras se abren y cierran de acuerdo a la diferencia de presiones que la sangre tenga en cada una de ellas. El ventrículo tiene sangre en su interior proveniente de la diferencia de presiones en cuanto a que hay mucha sangre en las aurículas y poca en los ventrículos y eso hace que las válvulas se abran y pase la sangre de las aurículas a los ventrículos, luego al final para ayudar a la poca sangre que queda en las aurículas a que pasen al ventrículo se produce la llamada sístole auricular. b) *Sístole ventricular*: comienza a contraerse el ventrículo, con aumento rápido de su presión. En ese momento se cierran las válvulas tricúspide y mitral para que la sangre no refluya hacia las aurículas y el aumento de presiones que sobreviene hace que se abran las válvulas semilunares aórtica y pulmonar y que pase la sangre hacia la aorta y hacia la arteria pulmonar produciéndose el primer tono de los ruidos cardíacos. c) *Aumento de la presión en los ventrículos*; las válvulas semilunares se mantienen cerradas hasta que la presión de los ventrículos se equilibre con la de las arterias. d) *Cuando la presión intraventricular sobrepasa a la de las arterias*, se abren las válvulas semilunares y la sangre se dirige por las arterias aorta y pulmonar. e) *Diástole ventricular*: los ventrículos entran en relajación activa, su presión interna es inferior a la arterial por lo que las válvulas semilunares se cierran produciendo el segundo ruido cardíaco. f) *Descenso de la presión* con relajación de las paredes ventriculares, las válvulas tricúspide y mitral siguen cerradas (la presión ventricular es mayor que la auricular) por lo que no sale ni entra sangre en los ventrículos; aunque sí penetra sangre en las aurículas al mismo tiempo. g) *La presión intraventricular* es

inferior a la auricular porque la aurícula se va llenando de sangre lo que produce una diferencia de presiones con lo cual se abren nuevamente las válvulas tricúspide y mitral y se reinicia el ciclo.^{62, 63,64}

En las figuras 6.1.2.1, 6.1.2.2 y 6.1.2.3 se muestran los la distribución de probabilidad, el diagrama espacio fase, el mapa de recurrencia, así como el atractor de recurrencia, estos son una herramienta visual para poder diferenciar entre el tipo de comportamiento generado; se muestran los histogramas obtenidos a partir de las series de tiempo para presión sistólica donde podemos observar que todos los histogramas son representativos de un comportamiento caótico, pero por si solos no son de utilidad para distinguir el tipo de comportamiento dinámico. Este tipo de análisis proporciona un histograma de los valores de los datos y permite realizar varias pruebas estadísticas sobre éstos. Además muestra la probabilidad de ocurrencia de ciertos valores de datos.

Los comportamientos periódicos o multiperiodicos suelen dar un simple histograma con picos en las orillas, cuando no se tienen una distribución simétrica se trata probablemente de un comportamiento caótico.

A partir del análisis de los histogramas podemos decir que las series de tiempo no presentan comportamiento caótico, pero no son suficiente herramienta para poder distinguir entre nuestros tres parámetros.

Los atractores que se muestran son gráficas en tres dimensiones en donde uno de los ejes es la segunda derivada, el otro la primera derivada y por último la serie de tiempo original el último eje ($X''(t)$ vs $X'(t)$ vs $X(t)$), tanto para presión arterial y presión ventricular los atractores son similares y estos no tienen una figura definida por lo que se consideran atractores extraños.

Los resultados obtenidos en cuanto a la complejidad del sistema fueron muy variados, los índices más representativos de cada tipo de parámetro fueron: el exponente de Hurst, el exponente de Lyapunov y la entropía de Kolmogorov los cuales

se muestran en las tablas. Estos resultados son similares para cada uno de nuestros parámetros analizados y no presentan diferencias significativas entre cada uno de estos parámetros. Podemos afirmar que todas las series de tiempos son periódicas, con cierto grado de caoticidad y antipersistentes.

Por otra parte, las dimensiones de correlación y de capacidad son buenas aproximaciones a la dimensión fractal. En este trabajo se prefirió considerar que la dimensión de correlación es una mejor aproximación a la dimensión fractal. Es bien sabido que el cálculo de la dimensión fractal nos da una cota mínima al número de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y acopladas que se tendrían que proponer para modelar nuestro sistema. La dimensión fractal también nos da una cota máxima del número de ecuaciones diferenciales ordinarias, que es dos veces la dimensión fractal más uno.

Los resultados obtenidos en el análisis de las series de tiempo de nuestros tres parámetros tanto para la presión arterial como la presión ventricular nos dan valores entre 3.602 y 0.728, lo que nos indica que el sistema así como su atractor no son tan complejos, esto es, presentan baja dimensionalidad.

Los mapas de recurrencia visual son una gran herramienta para poder caracterizar series de tiempo y como un gran apoyo y complementación de los datos antes observados. Dos parámetros son de suma importancia en la reconstrucción del mapa de recurrencia: que es el tiempo de retardo y la dimensión inmersa.

El problema a la hora de decidir los parámetros de la reconstrucción es que, en la mayoría de las ocasiones, desconocemos el sistema generador de las series y en consecuencia su dimensionalidad.

En nuestro caso se utilizó un tiempo de retraso de 2 y una dimensión de inmersión de 8 para poder obtener estos parámetros. Se utilizó el método de FNN (False Nearest Neighbors). Este procedimiento consiste en determinar cuándo los puntos en el espacio de fases reconstruido están infinitesimalmente próximos por haber

utilizado una dimensión muy pequeña. El aumento progresivo de la dimensión hasta que desaparezcan los falsos infinitésimos proporciona una medida de la dimensión necesaria para la reconstrucción. En cuanto al retardo adecuado para reconstruir el atractor contenido en la serie, el programa permite calcular la Información Mutua Media $I(T)$. La información mutua entre observaciones de una serie de tiempo hace referencia a la información que el conocimiento de, por ejemplo, X_i proporciona de X_{i+T} . $I(T)$ es una generalización, en dinámica no lineal, de la función de autocorrelación en dinámica lineal.

Los mapas de recurrencia visual nos proporcionan una idea de que nuestras series de tiempo de presión sistólica arterial tiene un % de recurrencia y determinismo bajo lo que nos lleva a pensar que sufre variaciones constantes y eso es normal ya que la presión arterial se ve modificada por cuestiones de estrés, sin embargo en la presión sistólica ventricular, el %determinismo es alto alrededor del 90% lo cual nos indica que es altamente periódico. Estos valores los podemos observar en las tablas 6.1.1.3 y 6.1.1.4.

Para la presión diastólica arterial tenemos valores del 60% determinismo mientras que para la presión diastólica ventricular el % determinismo es del 2%, mientras que en la frecuencia cardíaca los valores van del orden del 3% para los registros de presión arterial y del 95% para los registros de la actividad hemodinámica.

Los valores del % de recurrencia para nuestros tres parámetros analizados es de 0-3% por lo que no existe diferencia significativa. Lo mismo para la entropía espacio-temporal que lleva valores del 10-30% lo que nos indica que existen variables de tipo caótico.

CONCLUSIONES

La importancia en la caracterización de las series de tiempo, radica en que se tengan todas las variables que describen al fenómeno en estudio, no es fácil determinar el tipo de comportamiento que se tiene, por lo que se debe realizar un análisis semi-cualitativo con técnicas de la Dinámica No Lineal (gráficas de espacio de fase, distribución de probabilidades, espectro de potencia, exponente de Lyapunov, función de correlación, exponente de Hurst, entropía de Kolgomorov), así como el análisis con la técnica de mapas recurrentes (entropía espacio-temporal, recurrencia, determinismo).

El análisis de recurrencia visual puede brindar una medida cualitativa del grado de 'orden' en las señales de variabilidad de la frecuencia cardiaca, presión arterial y presión ventricular, pero dada la dificultad teórica existente en la diferencia de 'caos' y ruido, por lo que el método debe combinarse con otras medidas cuantitativas o si es posible, derivar medidas informativas a partir de los gráficos de recurrencia.

Tal enfoque, un estudio clínico exhaustivo promete resultados confiables.

Las sucesiones de tiempo de frecuencia cardiaca, presión arterial y presión ventricular están gobernadas por un sistema de caos clásico de baja dimensión aunque esta posibilidad no queda completamente descartada debido a la inevitable presencia de ruido en los registros en estudio.

Los resultados en particular muestran que las series de tiempo de presión arterial y presión ventricular exhiben un comportamiento periódico con variables de tipo caótico. El caos evita un comportamiento estrictamente periódico que es nocivo para el organismo, ya que éste es un sistema complejo y cuyo comportamiento no es periódico.

Respecto a la caracterización del patrón de reconocimiento visual para ser utilizado como apoyo al diagnóstico en el estudio de las patologías de la presión arterial, con este trabajo se ha iniciado una investigación de nuevas formas de interpretación y caracterización del comportamiento de la presión arterial. Sin embargo aún existe un largo camino que recorrer en esta línea de estudio ya que entre la experimentación en el laboratorio y la aplicación clínica de estos conceptos en el tratamiento de dichas enfermedades, es amplio. A la vez permite generar nuevas herramientas de reconocimiento visual que sirvan de soporte al médico para el diagnóstico clínico.

El conocimiento profundo de los ritmos caóticos corporales está abriendo el camino hacia un nuevo orden de ideas y conceptos basados en la Dinámica no Lineal que sean utilizados en la medicina moderna. Desarrollando un panorama rico y desconcertante. El caos abre la nueva fisiología y el reto es tomar estos conocimientos y aplicarlos en beneficio de la humanidad.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

- 1.- Larousse. (1991). *Nueva Enciclopedia Larousse*. (Vol.I, p 203). México. Ediciones Larousse
2. - Paxis. (1984). *Diccionario filosófico*. (Vol. I p 184).
3. - Ott. E. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press. 1993.
- 4.- Stewart, I. *¿Juega Dios a los dados?* "La nueva matemática del caos." Grijalbo Mondadori. 1991.
5. - Hall, N. *Exploring Chaos: A guide to the new science of disorder*. W.W. Norton Company. USA. 1991.
6. - <http://www.nbi.dk/ChaosBook/>. 2000.
[Fecha consulta 10/09/2006]
7. - <http://buscabiografias.com/cgi-bin/verbio.cgi?>
[Fecha consulta 10/09/2006]
8. - <http://www.sfsu.edu/~rsauzier/Biography.html> [Fecha consulta 10/09/2006]
9. - Hunt, B.; Yorke, J. A. *Maxwell on Chao*", *Nonlinear Science Today*. 3 [1] 1,3-4. 1993.
- 10.- <http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Hangar/5622/maxwell.html>
[Fecha consulta 08/09/2006]
- 11.- http://www.das.uchile.cl/cursos/eh28b/2p16_radioastronomia.html
[Fecha consulta 10/09/2006]
- 12.- <http://www.miexamen.com/Biografias/Jacobo%20Clerk%20Maxwell.htm>
[Fecha consulta 10/09/2006]
- 13.- Alligood K.T. Sauer, T. D.; Yorke, J. A. *CHAOS, An Introduction to Dynamical Systems*; Springer, 1996.
- 14.- <http://www.oceanografia.cicese.mx/personal/ripa/page/pub/Los3nignos.htm>
[Fecha consulta 10/09/2006]
- 15.- <http://www.andalucia24horas.com/frase/autor.asp?aut=Jules%20Henri%20Poincaré>
[fecha consulta 10/09/2006]
- 16.- <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Poincare.html>
[fecha consulta 10/09/2006]

- 17.- Tufillaro, N.B.; Abott, T.; Reilly, J. *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley. 1992.
- 18.- Lorenz, E. N. *The Essence of Chaos*. University of Washington. Seattle. 1993.
- 19.- Monroy Olivares Cesar. *Teoría del caos*. Alfaomega S. A de C. V. 1997. México.
- 20.- <http://almez.pntic.mec.es/~agos0000/Poincare.html> [Fecha consulta 10/09/2006].
- 21.- http://www.inamorif.or.jp/KyotoPrizes/contents_e/laureates/profile/co_07infedward.html27.htm [fecha consulta 10/09/2006].
- 22.- <http://www.santafe.edu/sfi/publications/Bulletins/BulletinSummer01/features/may.html> [fecha consulta 10/09/2006].
- 23.- May, R. *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. Nature. 61 [5560] 459-467
- 24.- Mandelbrot, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman. 1983.
- 25.- <http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/fractals/> [Fecha consulta 08/09/2006].
- 26.- Schifter, I. *La Ciencia del Caos*. Fondo de Cultura Económica, 1996.
- 27.- <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Mandelbrot.html> [Fecha consulta 10/09/2006].
- 28.- <http://www.math.yale.edu/mandelbrot/> [fecha consulta 10/09/2006].
- 29.- <http://buscabioografias.com/cgi-bin/verbio.cgi?id=5560> [Fecha consulta 10/09/2006].
- 30.- <http://wwwgap.dcs.stand.ac.uk/~history/Mathematicians/Feigenbaum.html> [fecha consulta 10/09/2006].
- 31.- <http://www.rockefeller.edu/research/abstract.php?id=38> [Fecha consulta 10/09/2006].
- 32.- <http://www.af-info.or.jp/eng/honor/hot/enr-may.html> [fecha consulta 10/09/2006].
- 33.- Procaccia, Hamar. *Universal properties of dynamically complex system: the organization of chaos*. Nature. 1988;333:618-623.
- 34.- Kondepudi, D.; Prigogine, I. *Modern Thermodynamics. From Heat Engines to Dissipative Structures*. Wiley, 1998.
- 35.- Prigogine, I. *El fin de las Certidumbres*. Andres Bello, 1996
- 36.- <http://buscabioografias.com/cgi-bin/verbio.cgi?id=6287> [Fecha consulta 10/09/2006].
- 37.- <http://order.ph.utexas.edu/people/Prigogine.htm> [Fecha consulta 10/09/2006].
- 38.- Cvitanović, P. et al. *Classical and Quantum Chaos*. Ver 7.1.1
- 39.- J.R. Newman, *El Mundo de las Matemáticas*, Ed. Grijalbo, S.A. 1994.

- 40.- Crutchfield, J. P.; Farmer, J. D.; Packard, N. H.; Shaw, R. *Chaos*, Sci. Am. 255 [6] 46-57, 1986.
- 41.- Gleick, J. *Chaos. Making a new science*. Penguin Books. New York, 1987.
- 42.- Espinosa Contreras Adriana Elisa *El caos y la caracterización de series de tiempo a través de técnicas de la dinámica no lineal* UNAM, FES Aragón. Ingeniero en Computación. México. 2004.
- 43.- Audelo Vucovich María Estela. *Comportamiento dinámico de las series del corazón*. UNAM., Facultad de Ingeniería. Maestro en Ingeniería. México 2005.
- 44.- Beristain Fernando. *Comportamiento dinámico del ozono mediante el análisis no lineal de sistemas dinámicos*. UNAM., Facultad de Ingeniería. Maestro en Ingeniería (eléctrico). México 2005.
- 45.- Goldberger, D. Ringey and B. West, *Caos y fractales en la fisiología humana*. Scientific American, Primera edición, 109-116, 1991.
- 46.- R. Solé y S. Manrubia, *Orden y Caos en Sistemas Complejos*, Ediciones UPC, España, 1993.
- 47.- Crutchfield, J. P.; Farmer, J. D.; Packard, N. H.; Shaw, R. *Chaos*, Num.125, febrero. In pres, 1987.
- 48.- Russell, D. A., Hanson, J. D., Ott, E. *Dimension of Strange Attractors*. Phys. Rev. Lett. 45, 1175-1178. 1980.
- 49.- Grebogi C., Ott E., Yorke J. *Chaos strange attractors, and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics*. Science 1987;238:631-637.
- 50.- P. Grassberger and I. Procaccia, *Characterization of Strange Atractor*, Phys. Rev. Lett. 50; 346:349, 1983.
- 51.- Moon, F. C. *Chaotic and Nonlinear Dynamics. An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, Inc., USA. 1994.
- 52.- Holden, A. (1985). *Chaos is No Longer A Dirty Word*. New Scientist, April 25. 12-15 pp.
- 53.- Scott, S. K. *Oscillations, Waves and Chaos in Chemical Kinetics*. Oxford, 1994.
- 54.- Arellano, M. *Introducción al Análisis Clásico de Series de Tiempo*, (2001): [en línea] 5campus.com, Estadística <<http://www.5campus.com/leccion/serieest>> [fecha consulta 05/10/2006]

- 55.- J. C. Sport *Chaos Data Analyzer (CDA)* University of Wisconsin. Software version 2.1. 1998.
- 56.- Plamen I., Rosenblum M., Peng CK., Mietus J, Havlins, Stanley H., Goldberger A. *Scaling behavior of heartbeat intervals obtained by wavelet-based time-series analysis.* (Letters to nature) Nature. 1996;383:323-327.
- 57.- Goldberger A., B. West. *Fractals in physiology and medicine.* Yale J. Biol. med., 1987; 60:421-435.
- 58.- Garfinkel A., Spano M., Ditto W., Weiss J. *Controlling cardiac chaos.* (Research articles). Science 1992; 257:1230-1235.
- 59.- H. P. Koch, *The Concept of Fractals and the Pharmaceutical Sciences.* Pharmazie; 48:643-655, 1993.
- 60.- Konovov, E. *Visual Recurrence Analysis (VRA).* Software versión 4.2. 1999.
- 61.- monografias. Com: sistemacardiovascular, anatomia y fisiologia.
<http://www.monografias.com/trabajos/anatomia/corazon.html>
- 62.- Harvey, Johns, Mckusik. *Tratado de medicina Interna.* 22ed. Vol I. Pp 44-189. McGraw-Hill. 1994.
- 63.- Ganong William F. *Fisiología médica.* 18 ed. Manual Moderno. 2001 pp. 563-701.
- 64.- Piña Barba María Cristina. *La Física en la medicina.* Fondo de Cultura Económica. México. 1987. 44-55.
- 65.- Goldberger A. *Cardiac chaos.* Science. 1989;243:1419.
- 66.- J. Bassingthwaite, L Liebovitch and B. West , *Fractal Physiology.* American Physiological Society, 1994.
- 67.- Guillen P., Valluerdú M., Rojas R., Jugo D. *Dinámica no lineal para caracterizar variabilidad del ritmo cardiaco en pacientes chagasicos.*
- 68.- Goldberger, *Non-linear Dynamics for Clinicians. Chaos Theory, Fractals and Complexity at the Bedside.* Lancet, 347; 1312:1314. 1996.
- 69.- M. Mackey, L. Glass. *Oscillation and chaos in physiological system.* Science 1977; 197:287-289.
- 70.- M. Guevara, L. Glass, A. Shrier. *Phase locking period doubling bifurcations and irregular dynamics in periodically stimulated cardiac cells.* Science 1981;214,1350-1353.

- 71.- Glass Leon. *Complex cardiac rhythms*. (News and Views).Nature.1987;330(24):695-696.
- 72.- R. Eberhart. *Chaos Theory for the Biomedical Engineer*. IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine; September 1969:41-45.
- 73.- D. Hoyer and R. Schmidt, *Nonlinear Analysis of Heart Rate And Respiratory Dynamics*. IEEE Engineering in Medicine and Biology, January/February 1997; 31:39.
- 74.- E. Mosekilde and L. Mosekilde, *Complexity, Chaos and Biological Evolution*. NATO Scientific Affairs Division, Plenum Press, New York, 1991.
- 75.- W.S. McCulloch, and W. Pitts, "A Logical Calculus of the Ideas Imminent in Nervous Activity", Bulletin of Mathematicla Biophysisc, 5, 115-133, 1943.
- 76.- Piekowsky, *¿Juega Dios a los Dados?*, Mundo Libro. Borja, 1992.
- 77.- Holden, A. *Chaos Is No Longer A Dirty Word* New Scientist, April 25.1985. 12-15pp.
- 78.- Beckers F., Romackers D., Aubert E. *Gender-related differences in nonlinear indices of hear rate variability*.
- 79.- B.West. *Fractal forms in physiology* . Int. J. Mod. Phys.B.1990;4:1629-1669.
- 80.- Akselrod S.,Gordon D., Andrew F., Shannon.,Clifford A., Cohen R. *Power spectral analysis of heart rate fluctuation: A quantitative probe of beat-to beat cardiovascular control* .Science.1981;213:220-222.
- 81.- Vázquez Coutiño G. A. *On the development of new recognition patterns in applied dynamic bioelectrochemistry: An analysis of attractors generated from electrocardiographic data*. Sociedad Química de México A.C. Vol. 41 No. 3 139-142 pp.

APENDICE

APENDICE

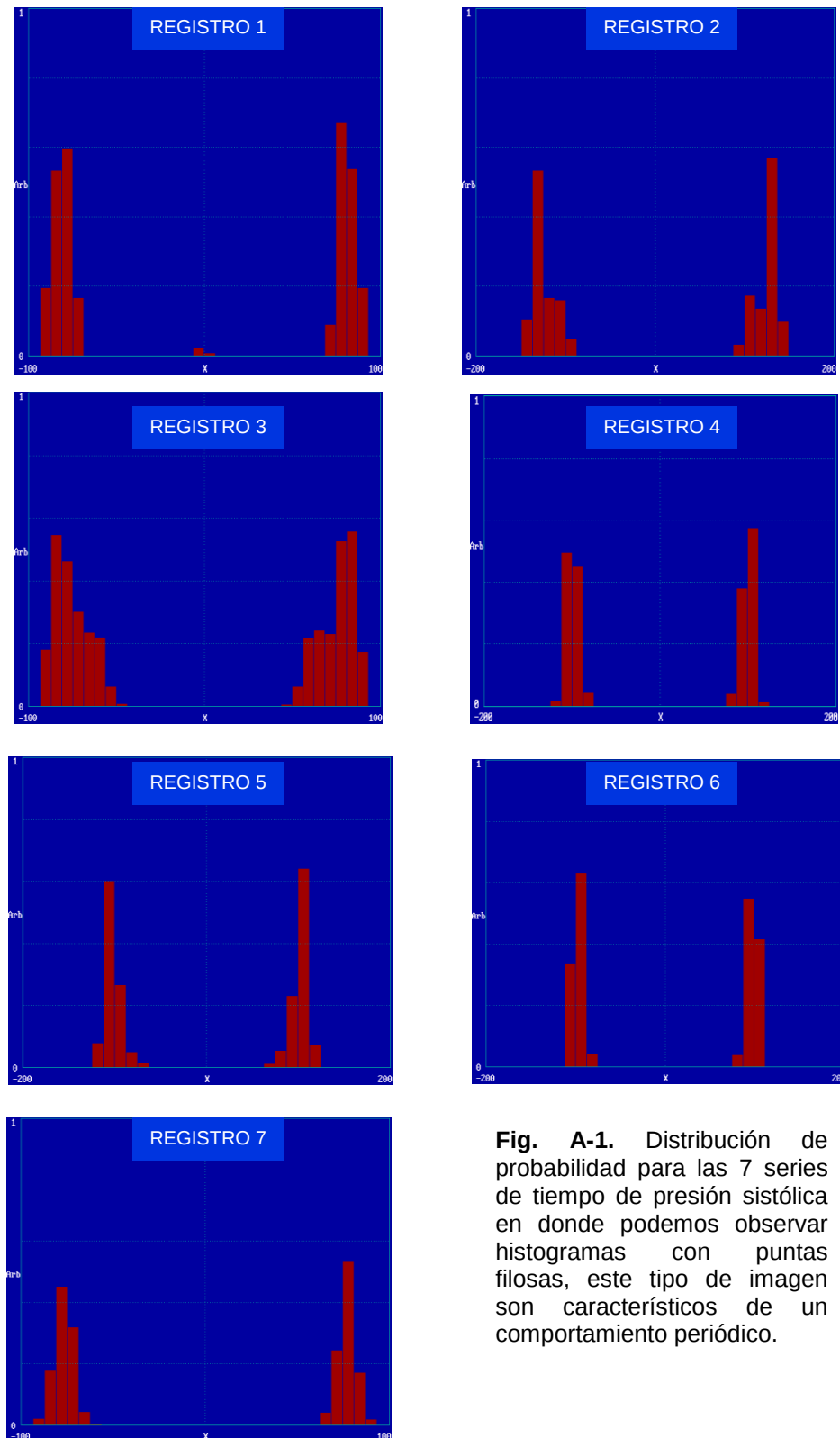


Fig. A-1. Distribución de probabilidad para las 7 series de tiempo de presión sistólica en donde podemos observar histogramas con puntas filosas, este tipo de imagen son característicos de un comportamiento periódico.

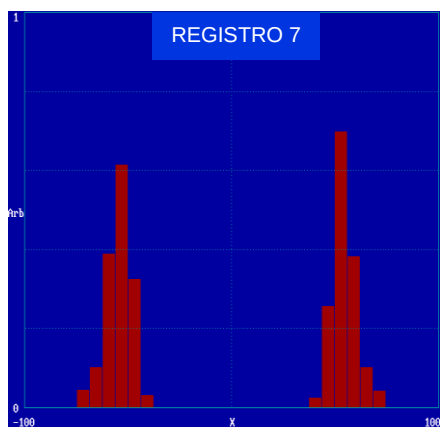
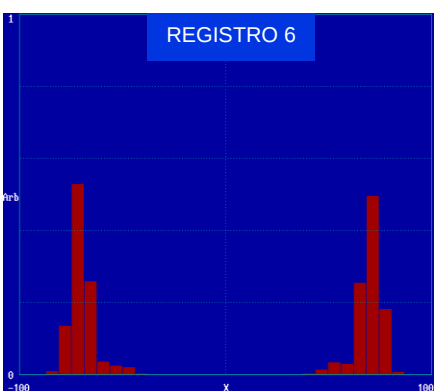
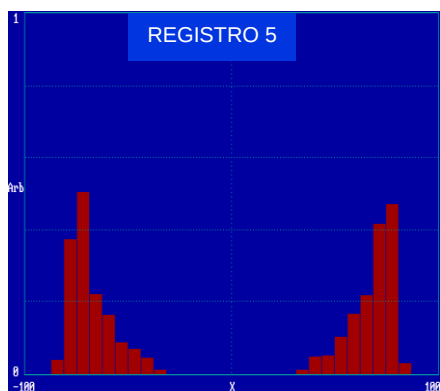
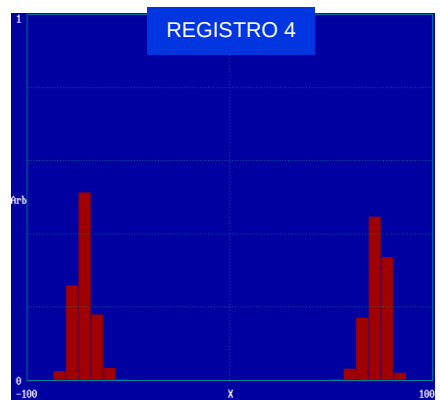
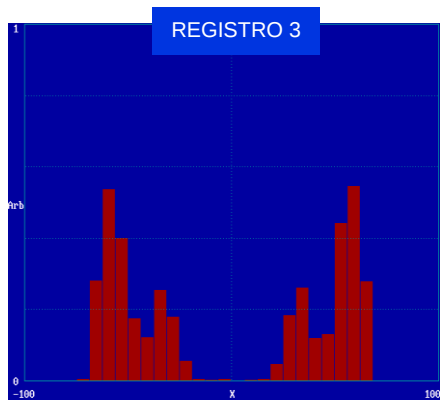
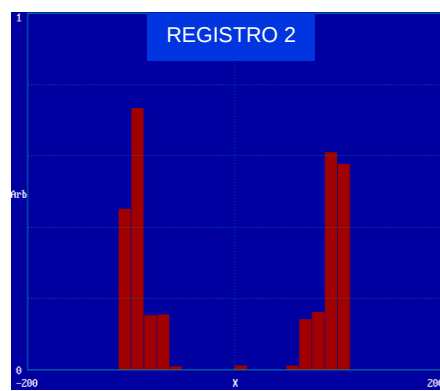
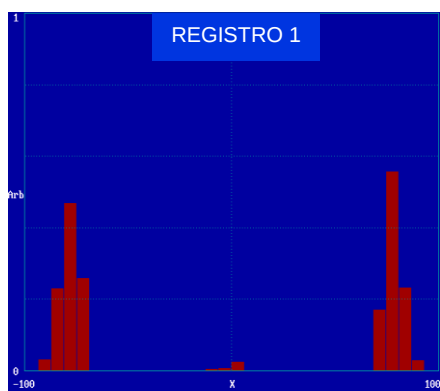


Fig. A-2. Histogramas de la Distribución de probabilidad de las series de tiempo para la presión diastólica en donde observamos que los siete registros conservan un comportamiento periódico ya que los histogramas muestran puntas muy marcadas a los extremos de cada una de ellas.

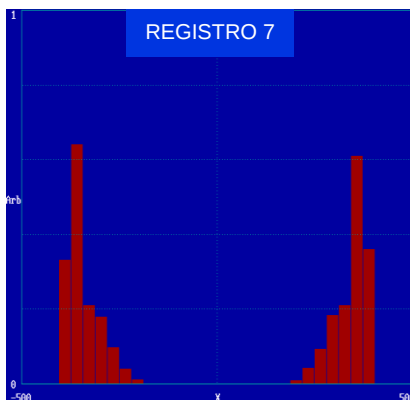
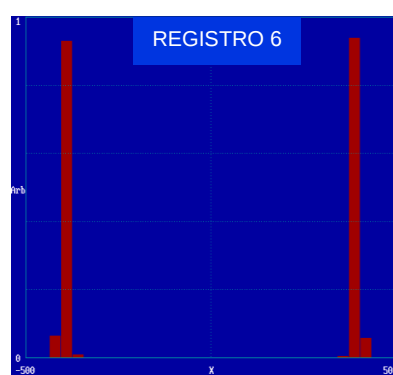
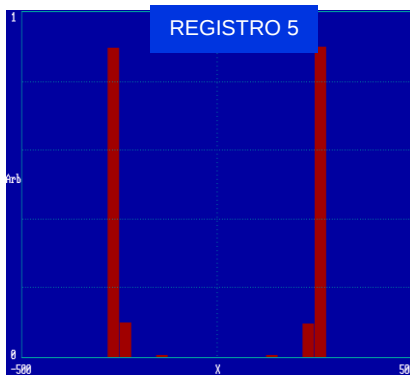
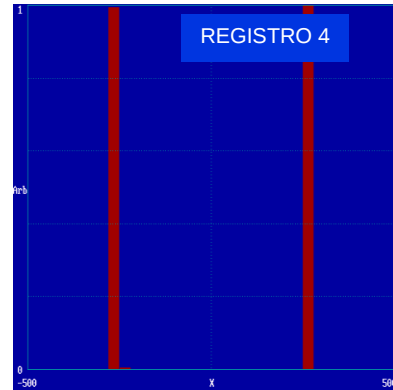
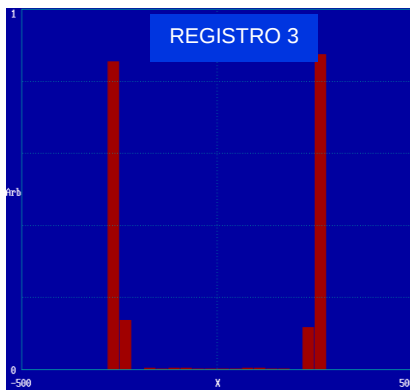
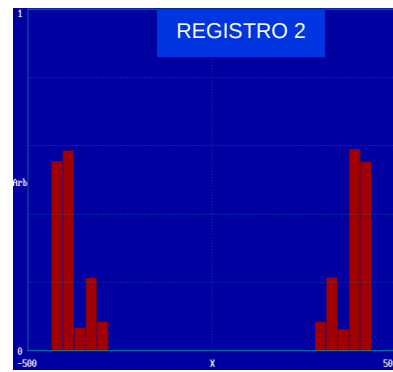
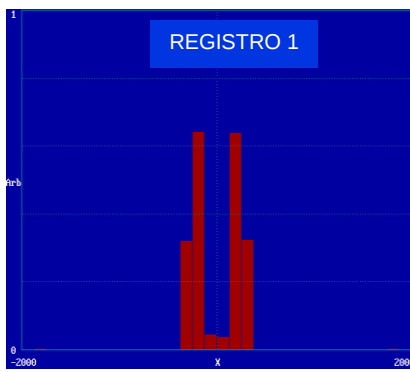


Fig. A-3. Histogramas de la Distribución de probabilidad de las series de tiempo de la frecuencia cardiaca, estos nos muestran un comportamiento periódico muy marcado ya que los picos están estrechamente altos además se distribuyen hacia los extremos del histograma.

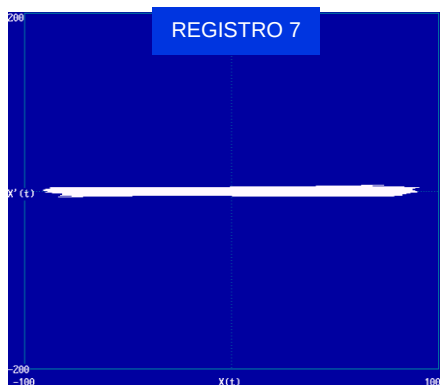
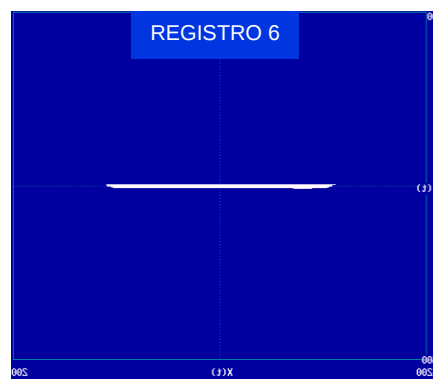
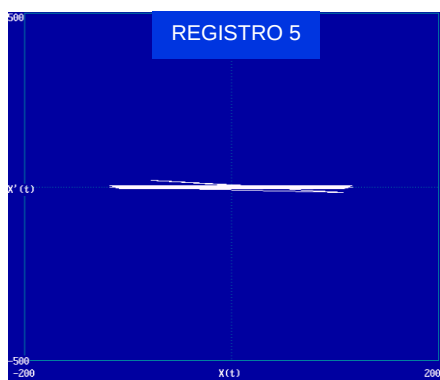
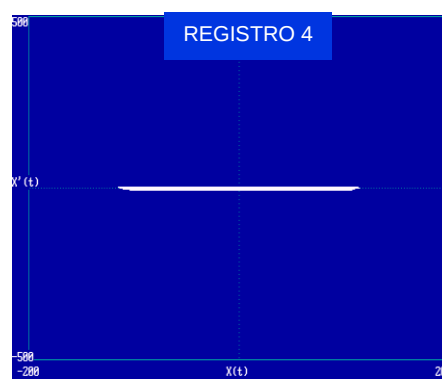
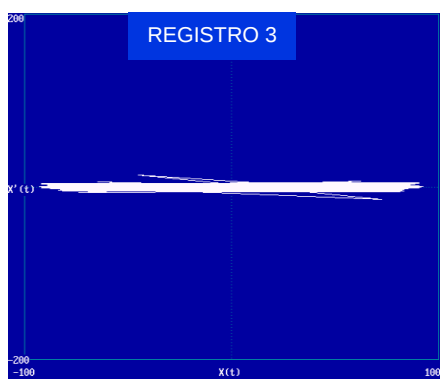
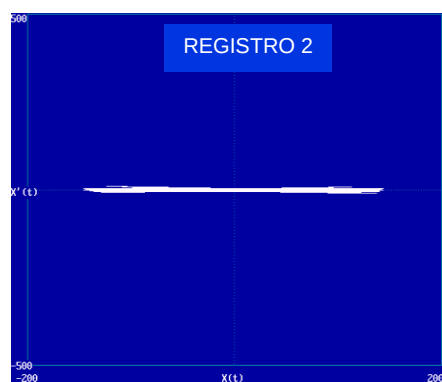
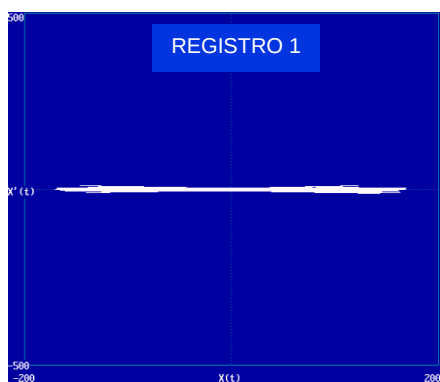


Fig. A-4. Atractores en el espacio fase de las series de tiempo de presión sistólica en donde observamos una línea recta difusa para todos los registros.

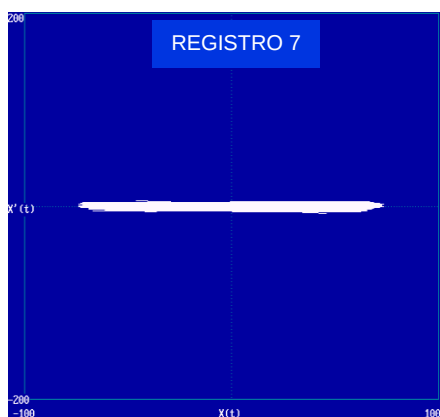
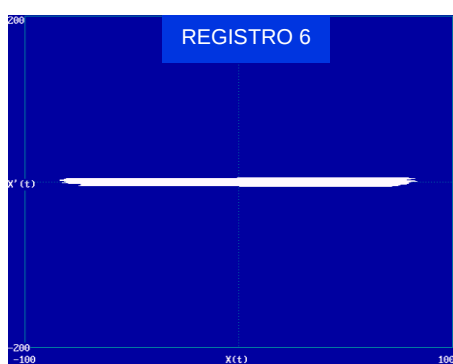
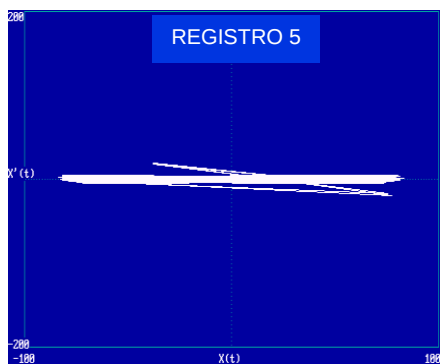
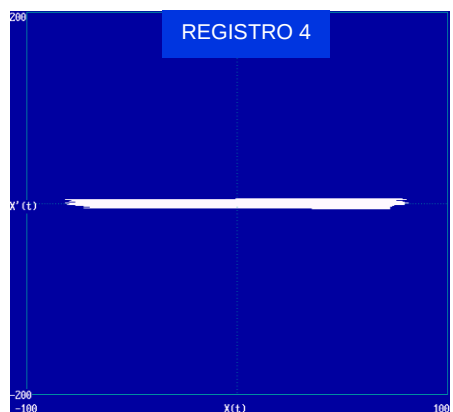
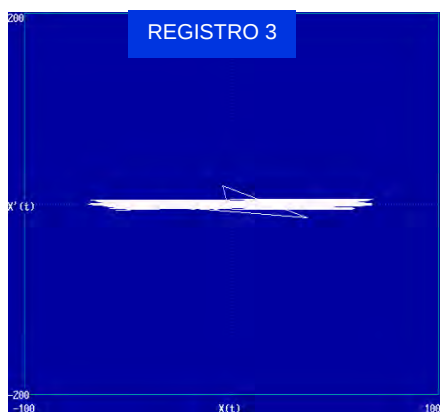
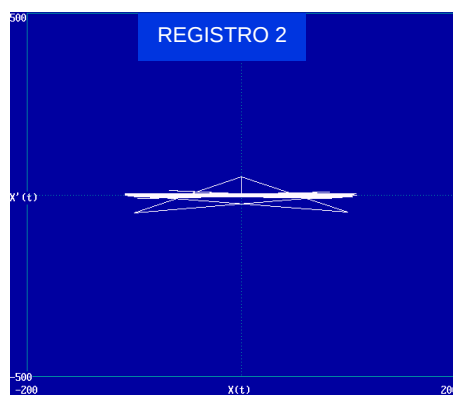
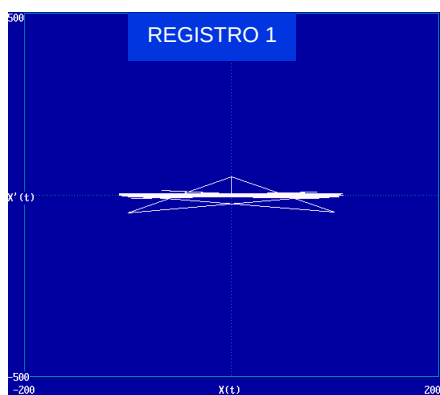


Fig. A-5. Atractores en el espacio fase de las series de tiempo de la presión diastolica, donde se puede observar líneas rectas difusas además de trayectorias que no siguen el mismo comportamiento.

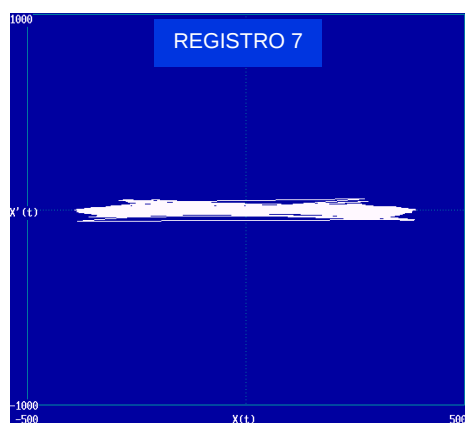
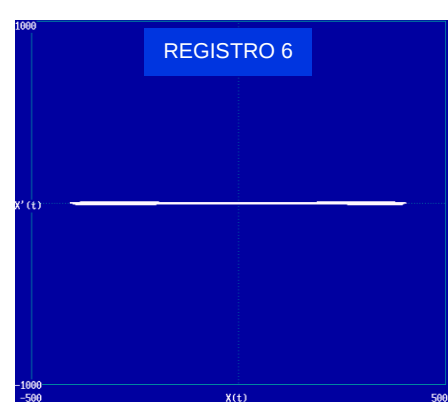
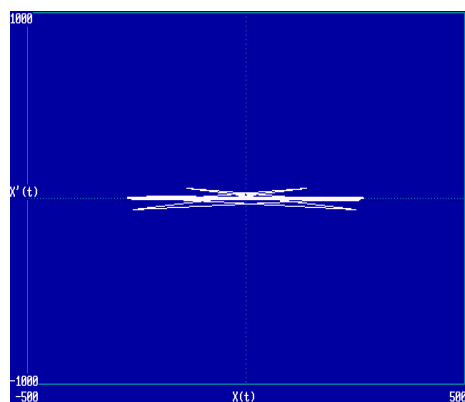
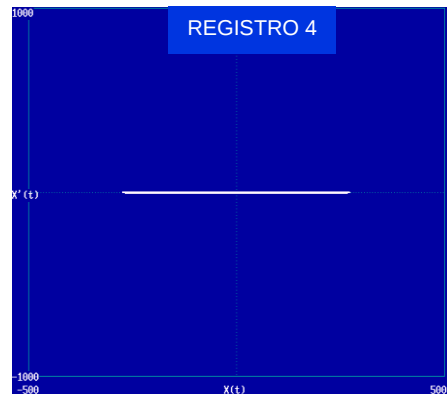
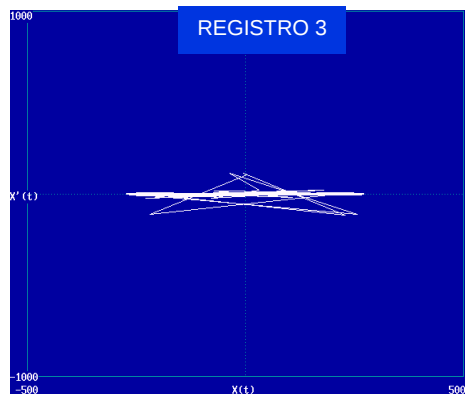
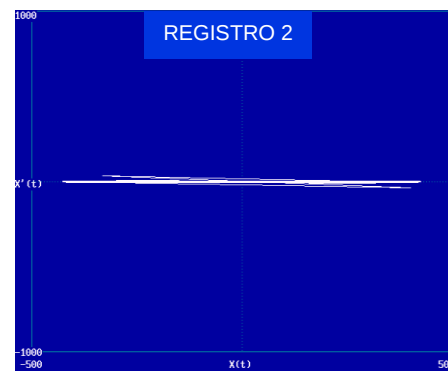
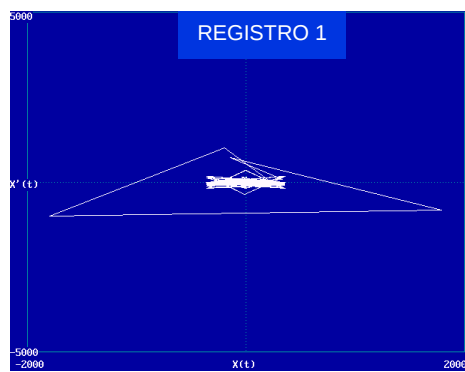


Fig. A-6. Atractores en el espacio fase de las series de tiempo de frecuencia cardiaca en donde se muestran trayectorias que siguen una línea recta difusa, además de que tienen una tendencia marca hacia los extremos de la línea.

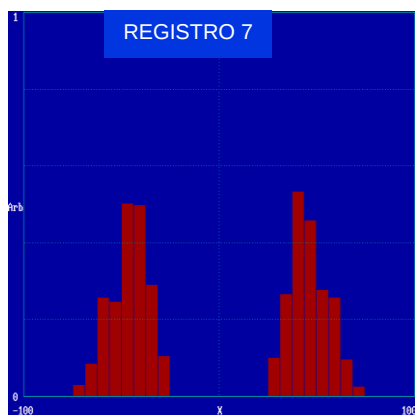
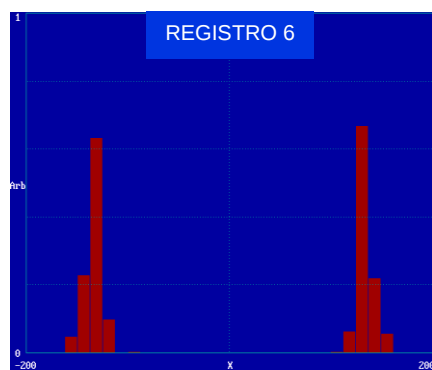
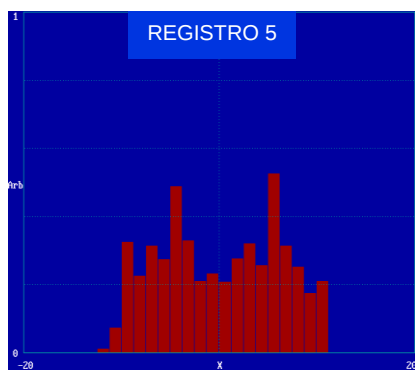
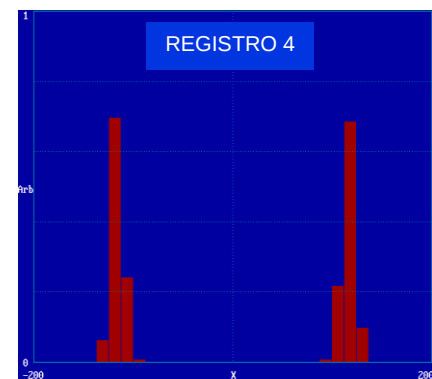
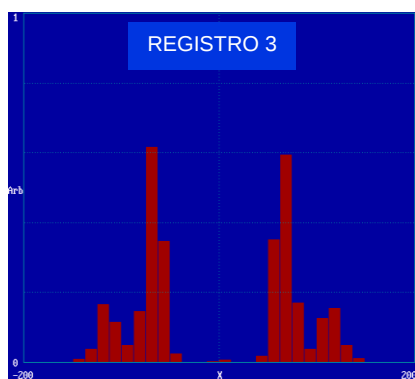
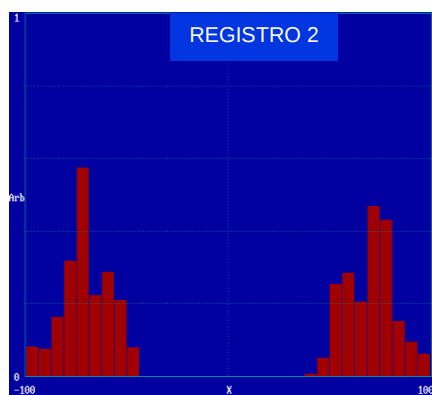
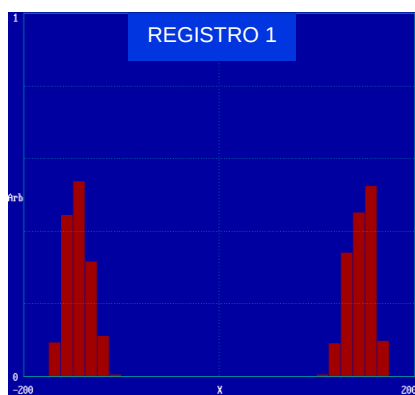


Fig. A-7. Histogramas de la Distribución de probabilidad de las series de tiempo de presión sistólica del ventrículo izquierdo en donde podemos observar gráficos con una tendencia a formar un fractal aunque persisten las puntas filosas en los extremos de la gráfica características de un comportamiento periódico

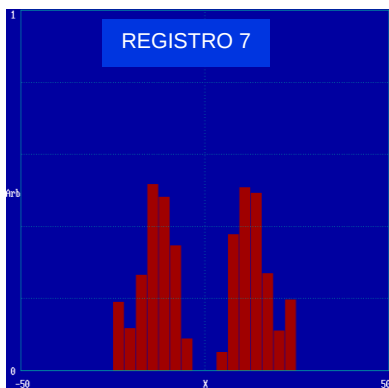
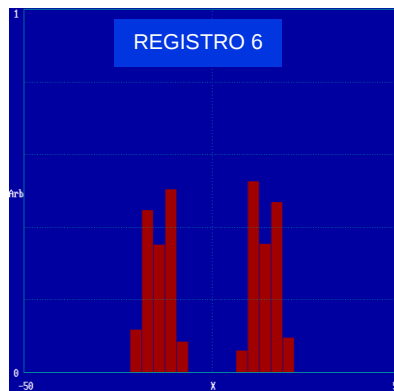
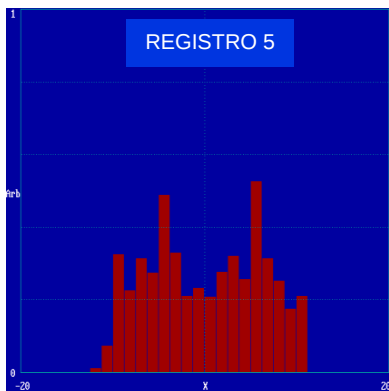
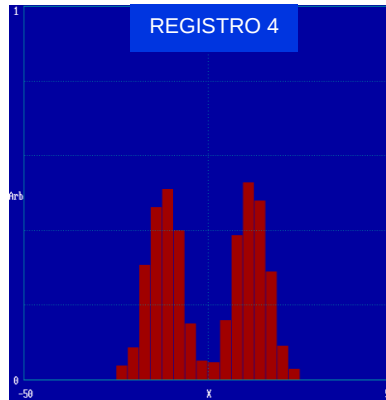
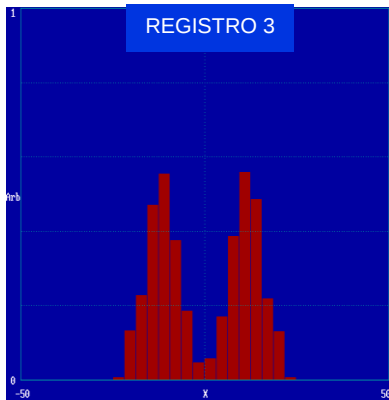
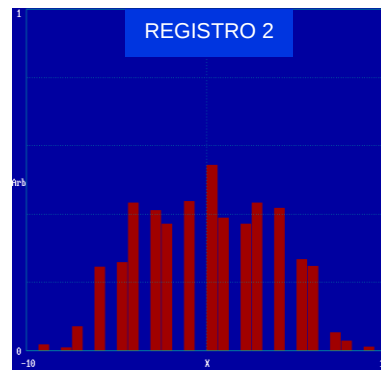
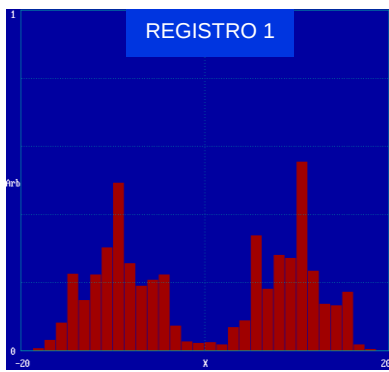


Fig. A-8. Distribución de probabilidad de las series de tiempo para la presión diastólica del ventrículo izquierdo, se alcanza a percibir un comportamiento de tipo caótico ya que los histogramas presentan una forma irregular.

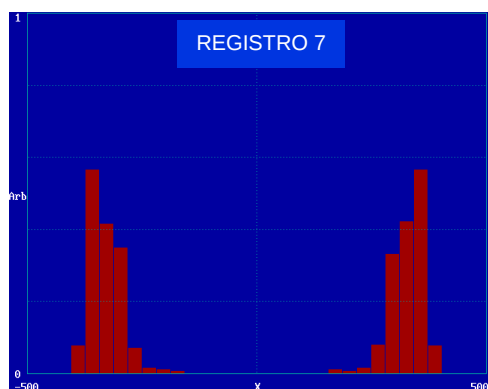
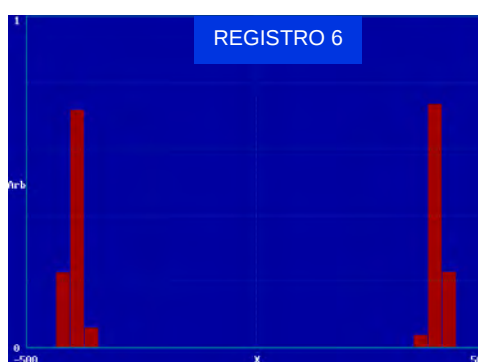
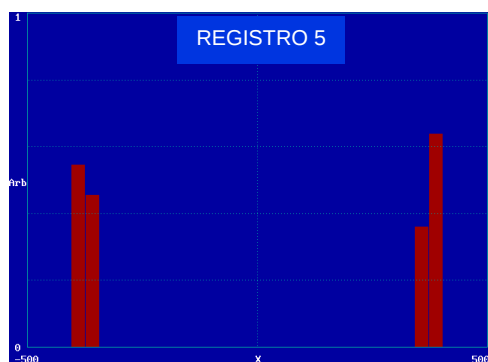
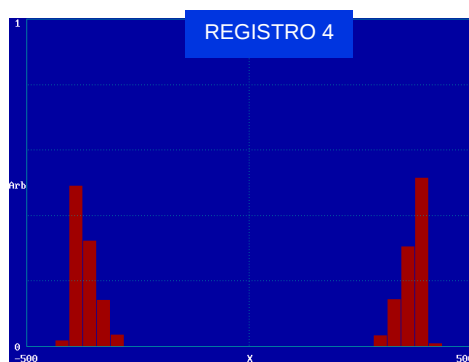
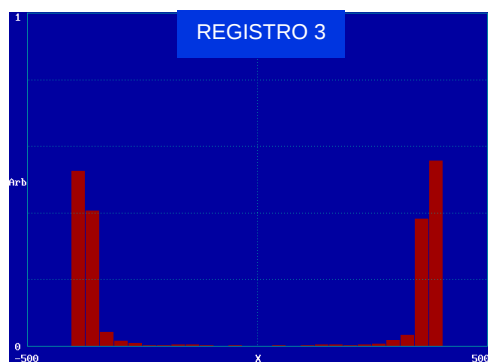
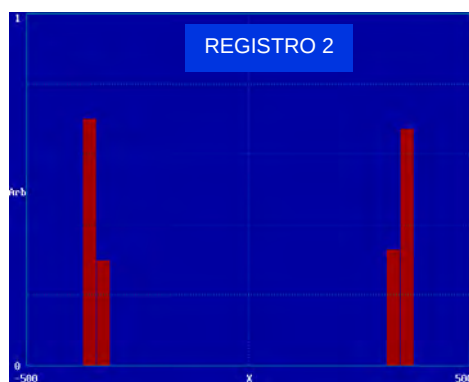
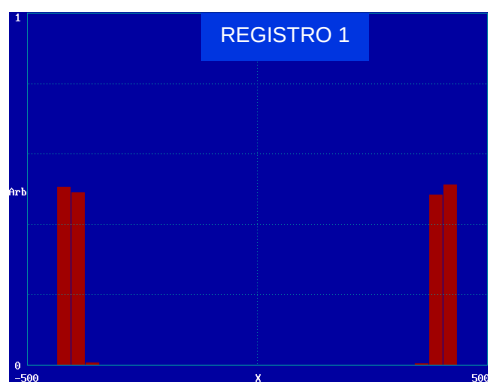


Fig. A-9. Distribución de probabilidad para las series de tiempo de la frecuencia cardiaca aquí se observan histogramas con puntas filosas muy pronunciadas en los extremos del histograma, por lo que tiene un comportamiento periódico.

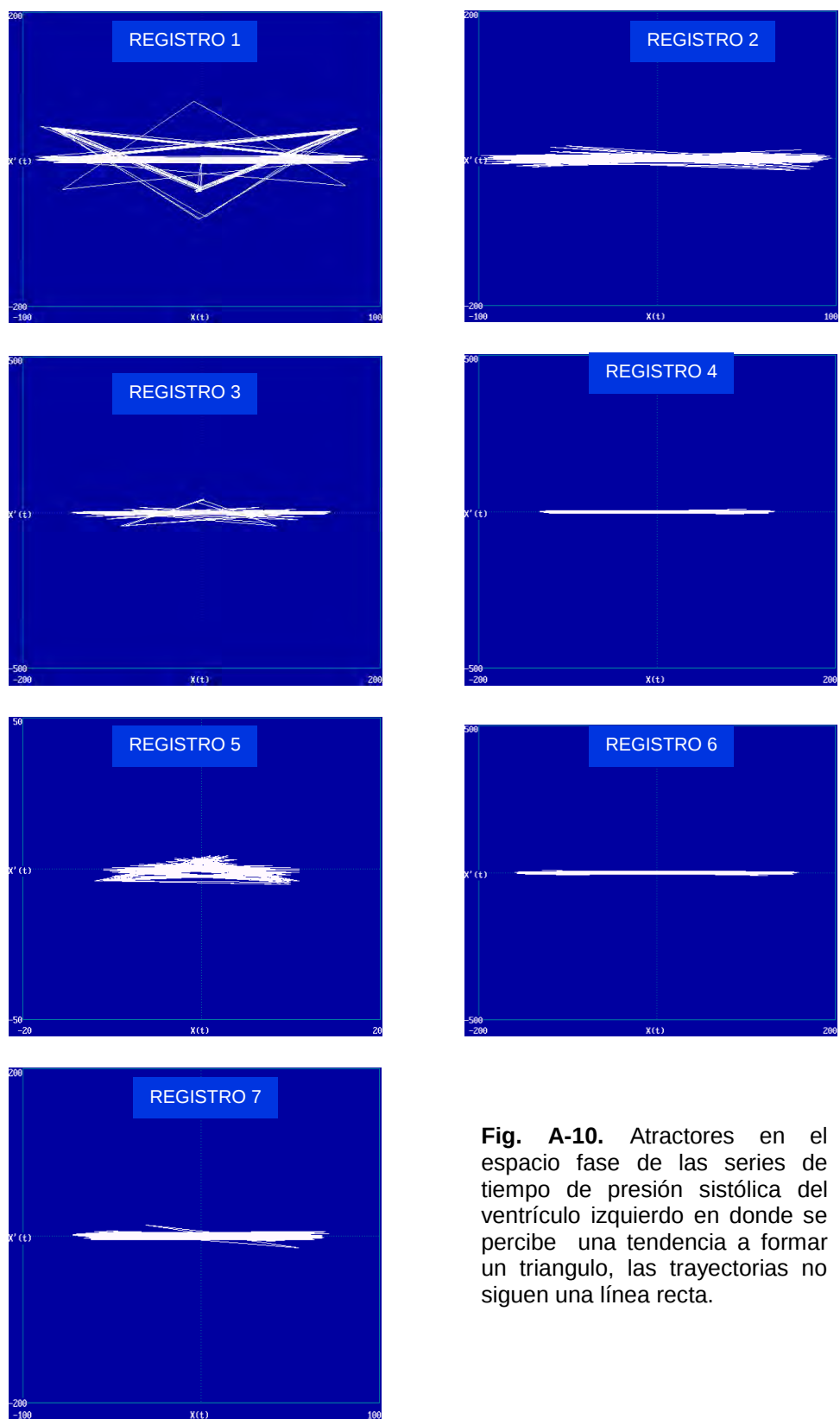


Fig. A-10. Atractores en el espacio fase de las series de tiempo de presión sistólica del ventrículo izquierdo en donde se percibe una tendencia a formar un triángulo, las trayectorias no siguen una línea recta.

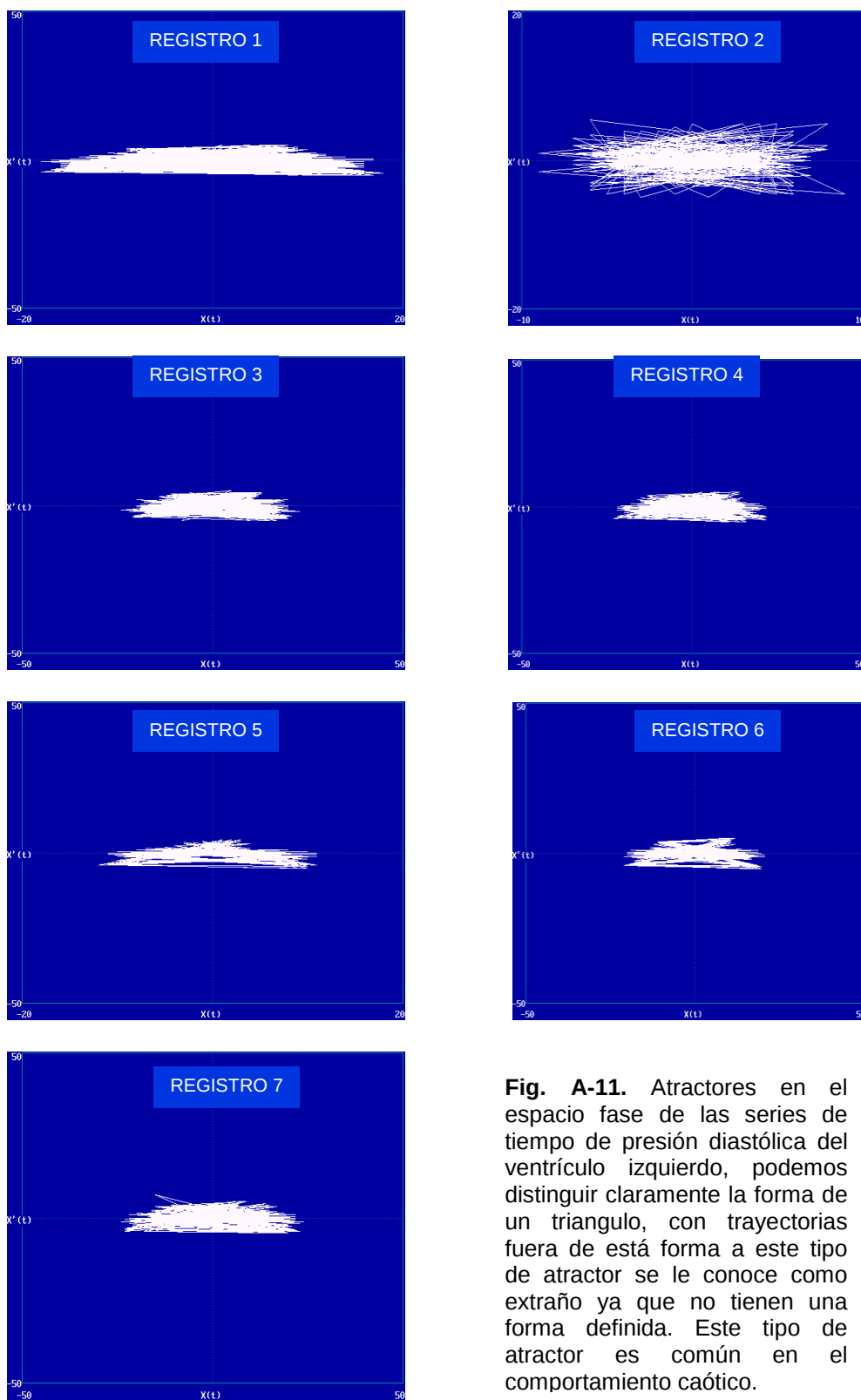


Fig. A-11. Atractores en el espacio fase de las series de tiempo de presión diastólica del ventrículo izquierdo, podemos distinguir claramente la forma de un triángulo, con trayectorias fuera de está forma a este tipo de atractor se le conoce como extraño ya que no tienen una forma definida. Este tipo de atractor es común en el comportamiento caótico.

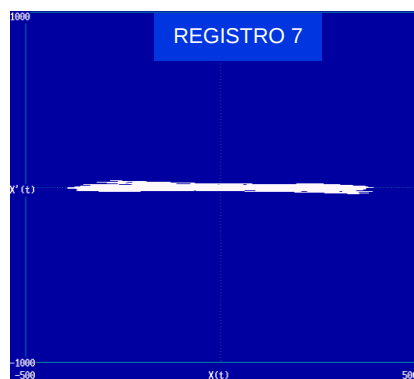
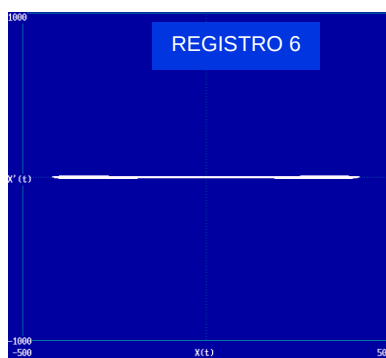
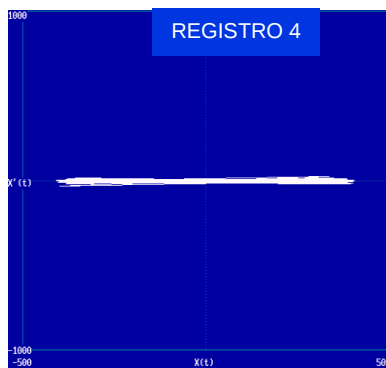
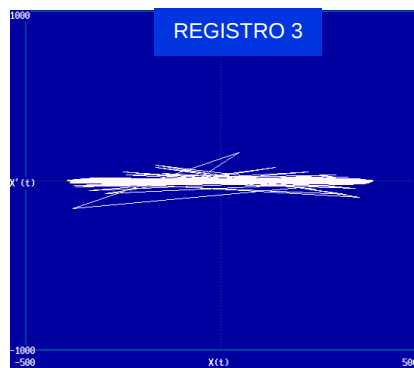
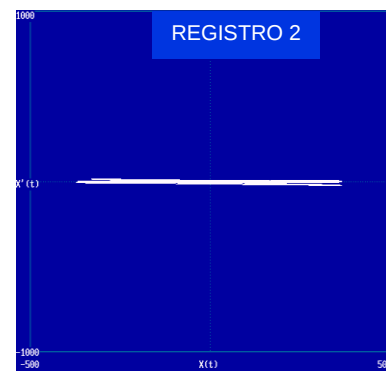
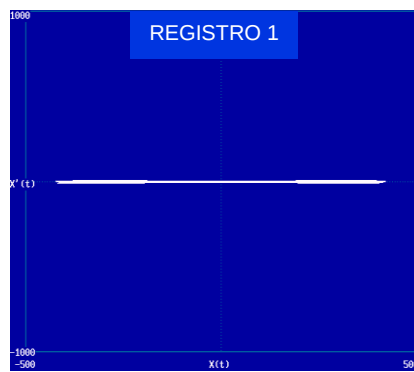


Fig. A-12. Atractores en el espacio fase de las series de tiempo de frecuencia cardiaca se observan líneas rectas difusas, por lo que existe alejamiento y acercamiento de trayectorias, pertenece a un sistema caótico.

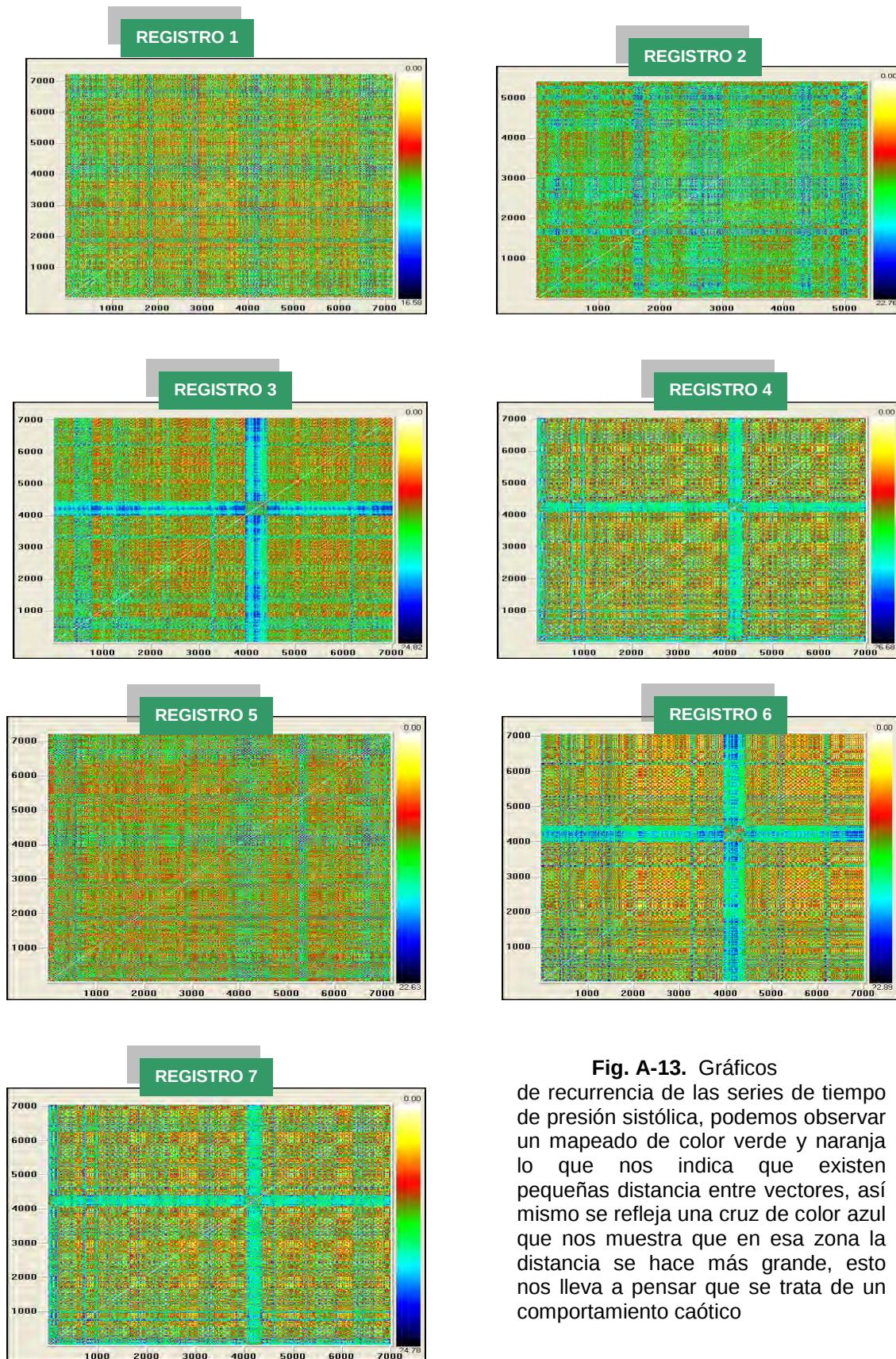


Fig. A-13. Gráficos de recurrencia de las series de tiempo de presión sistólica, podemos observar un mapeado de color verde y naranja lo que nos indica que existen pequeñas distancia entre vectores, así mismo se refleja una cruz de color azul que nos muestra que en esa zona la distancia se hace más grande, esto nos lleva a pensar que se trata de un comportamiento caótico

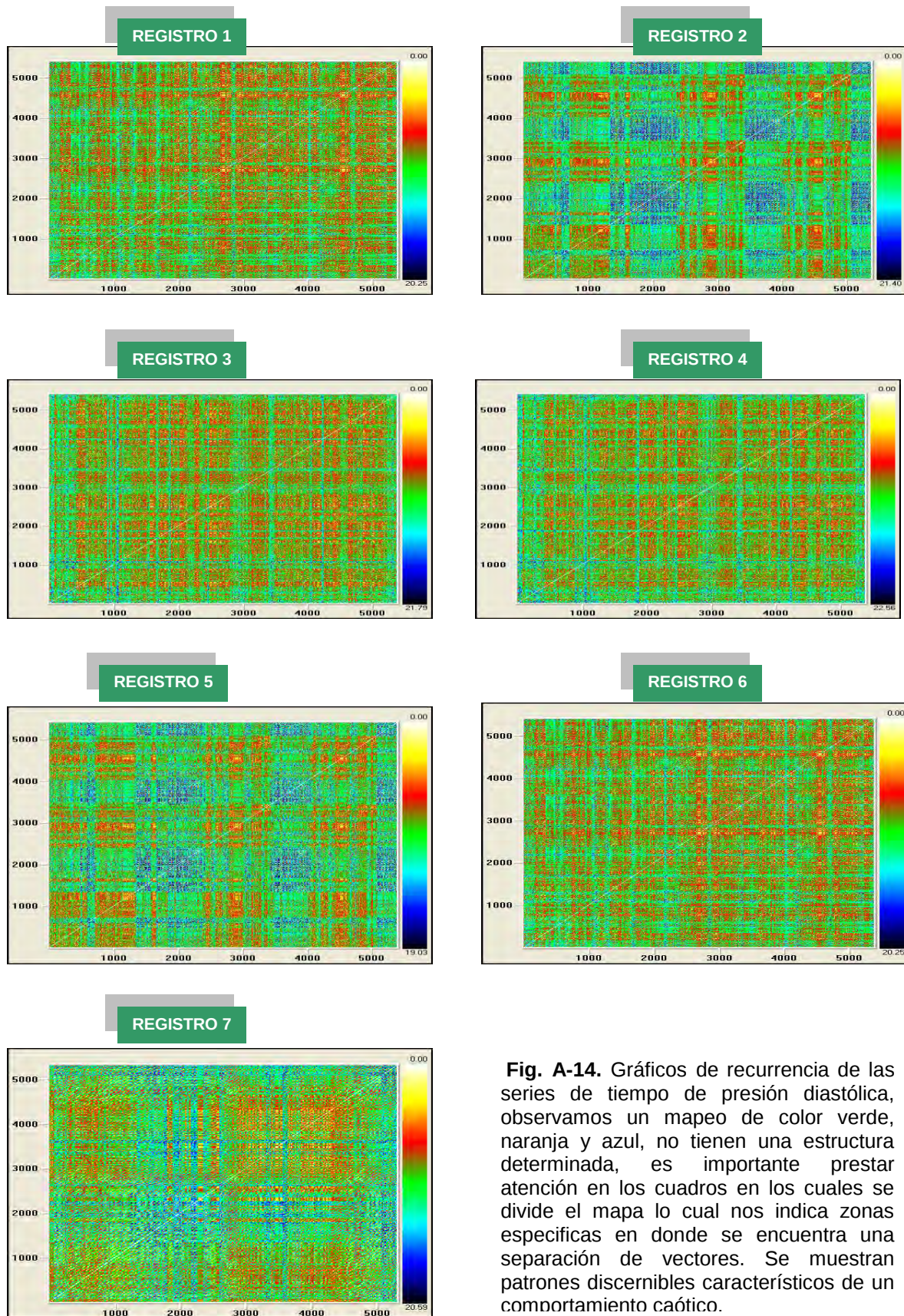


Fig. A-14. Gráficos de recurrencia de las series de tiempo de presión diastólica, observamos un mapeo de color verde, naranja y azul, no tienen una estructura determinada, es importante prestar atención en los cuadros en los cuales se divide el mapa lo cual nos indica zonas específicas en donde se encuentra una separación de vectores. Se muestran patrones discernibles característicos de un comportamiento caótico.

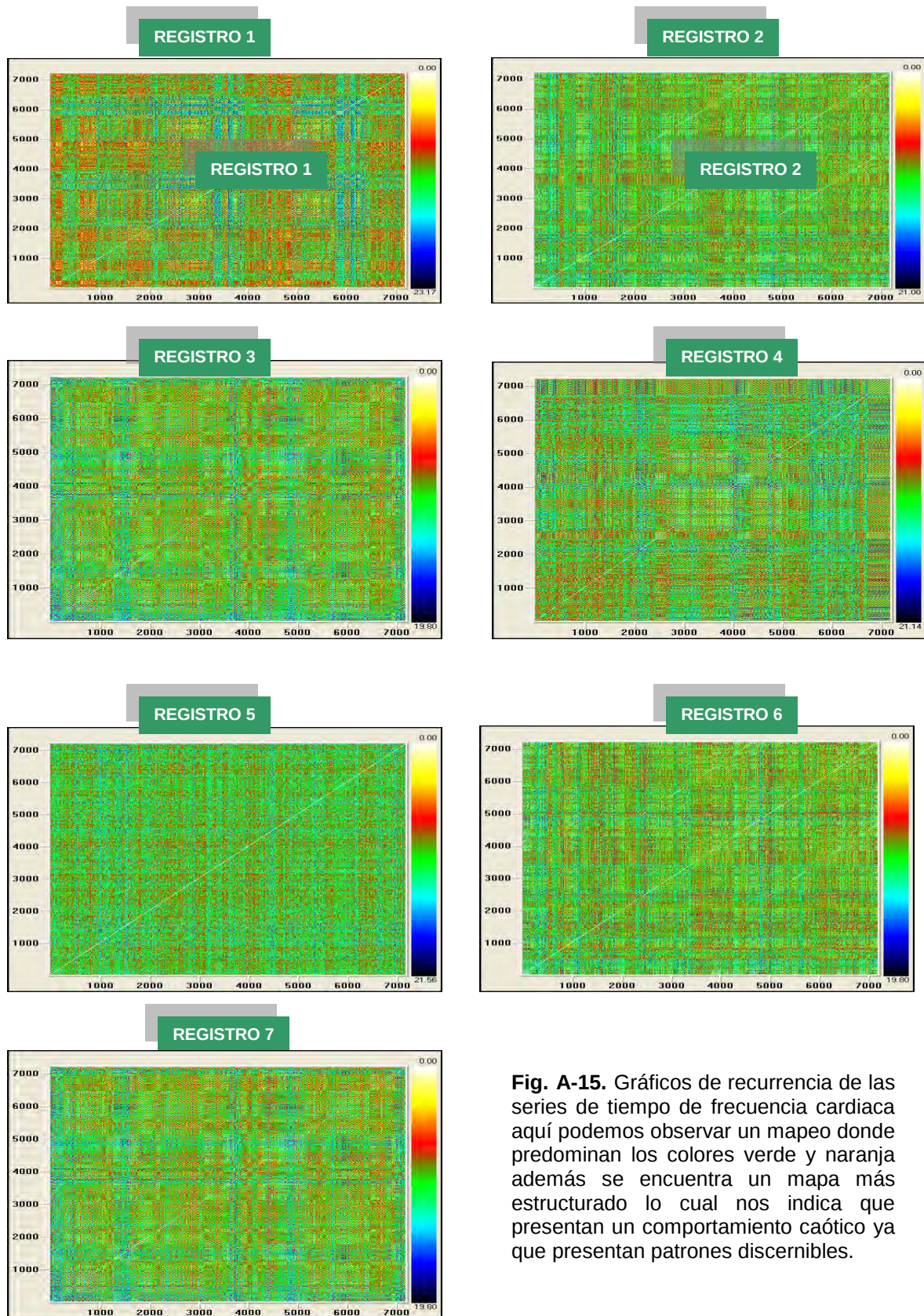


Fig. A-15. Gráficos de recurrencia de las series de tiempo de frecuencia cardiaca aquí podemos observar un mapeo donde predominan los colores verde y naranja además se encuentra un mapa más estructurado lo cual nos indica que presentan un comportamiento caótico ya que presentan patrones discernibles.

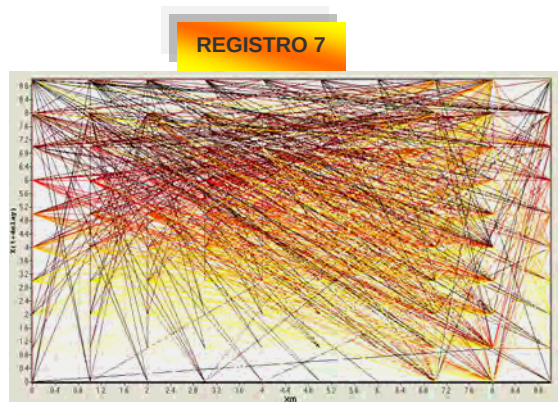
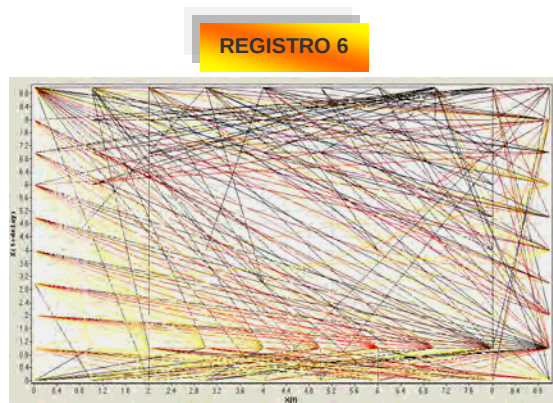
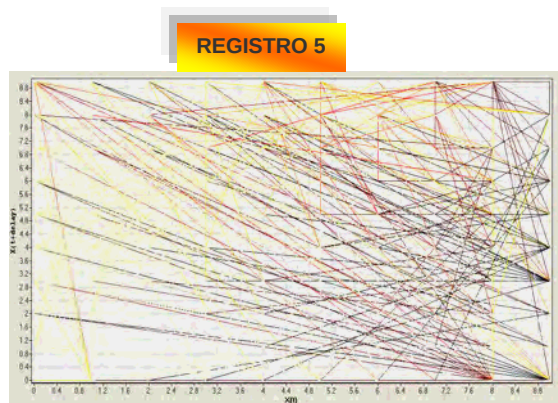
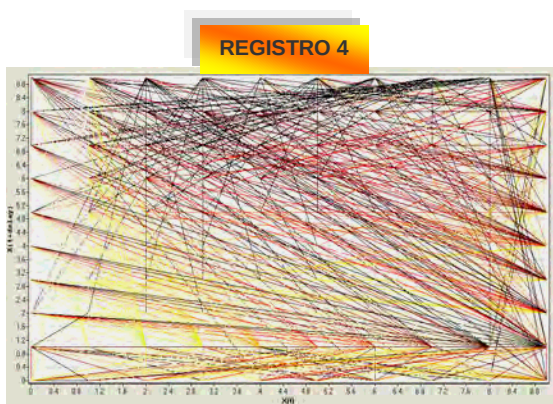
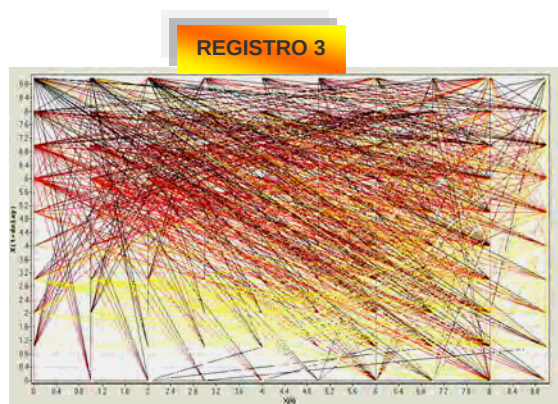
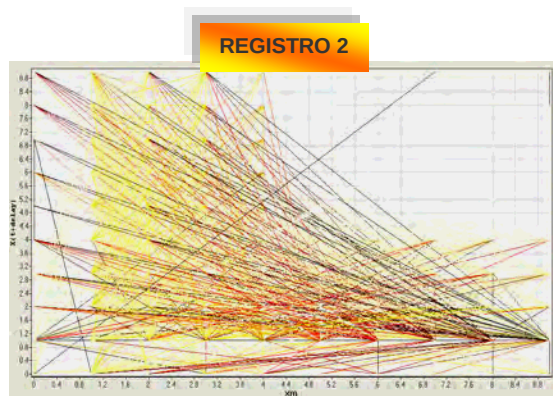
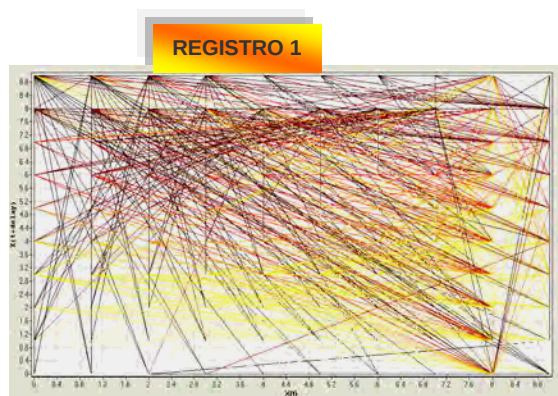


Fig. A-16. Diagrama de espacio-fase para las series de tiempo de presión sistólica aquí podemos observar las trayectorias que van de un punto otro a este tipo de atractores se les denomina atractor extraño.

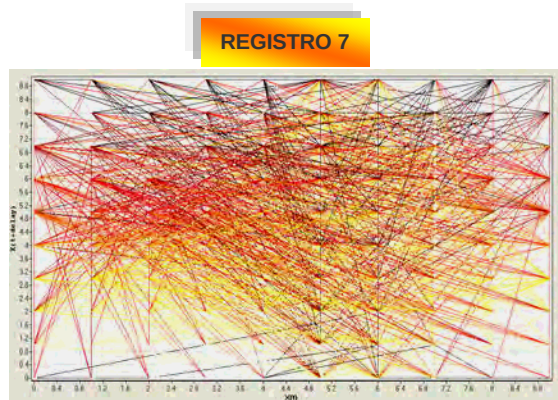
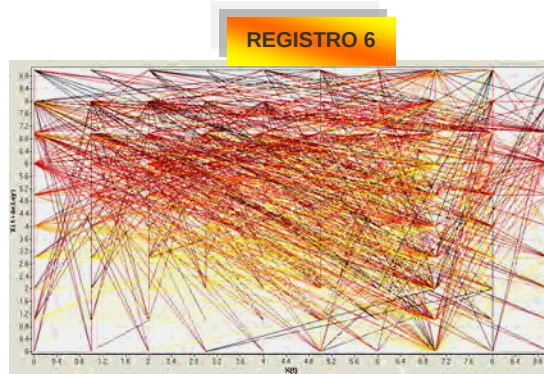
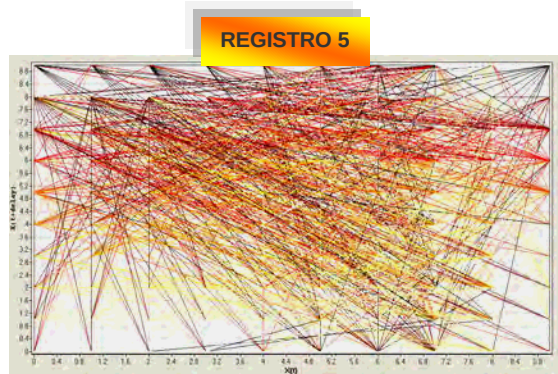
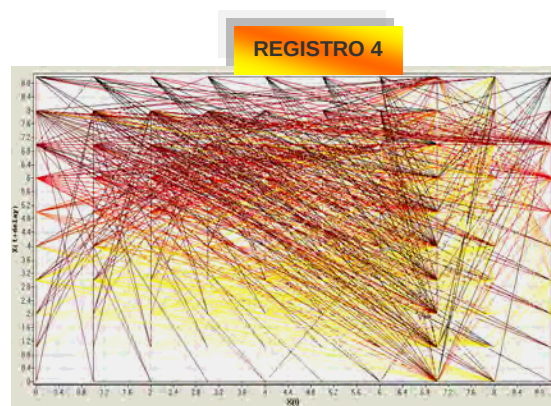
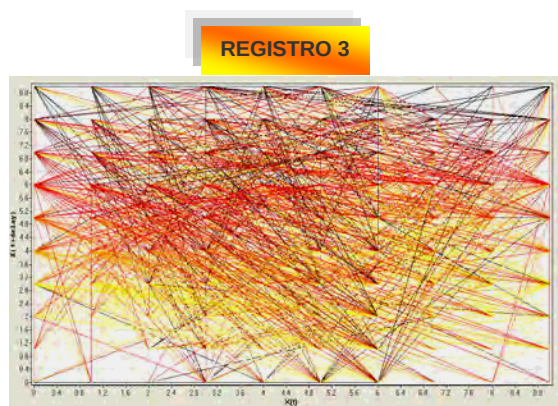
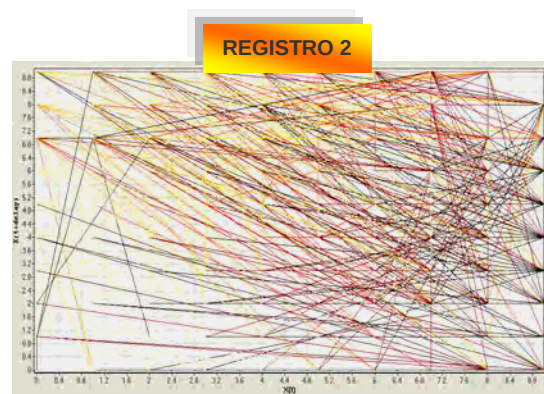
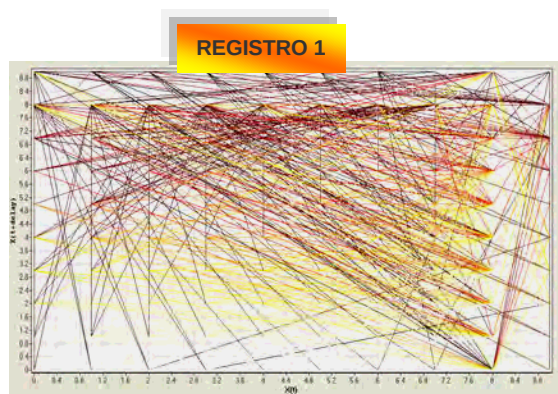


Fig. A-17. Diagramas espacio fase para las series de tiempo de presión diastólica, podemos observar atractores extraños en donde las trayectorias son muy cercanas unas de otras esto por predominar colores rojos y amarillos.

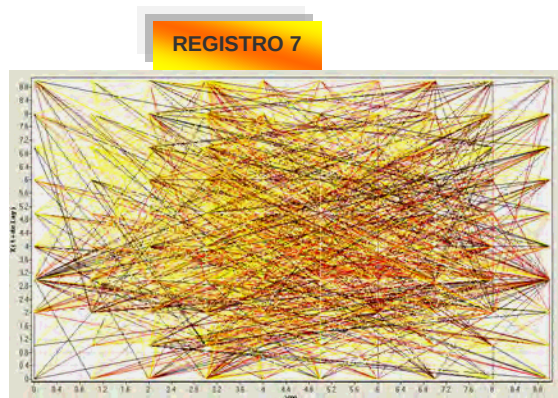
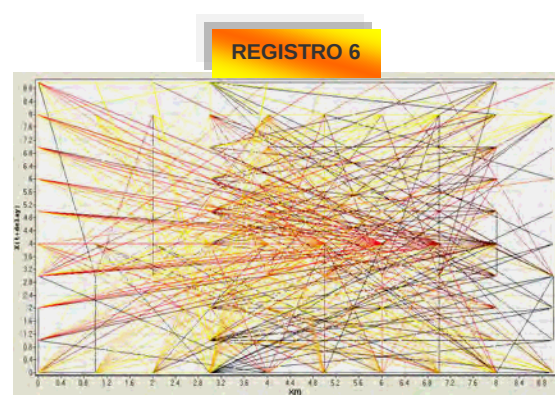
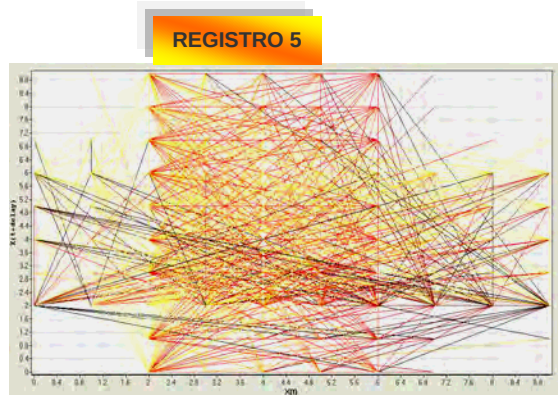
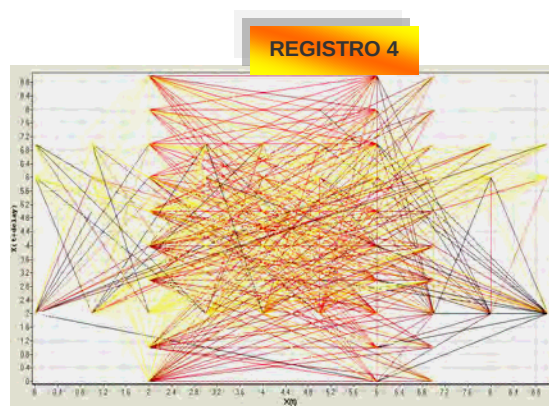
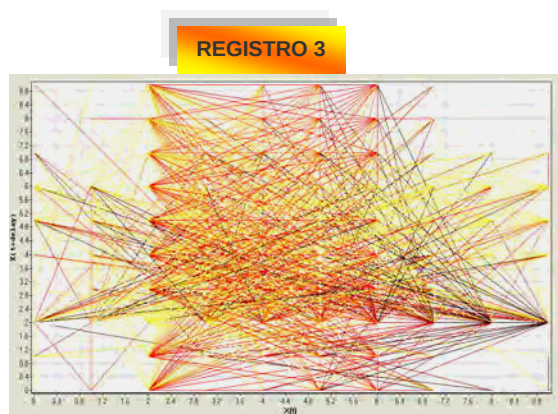
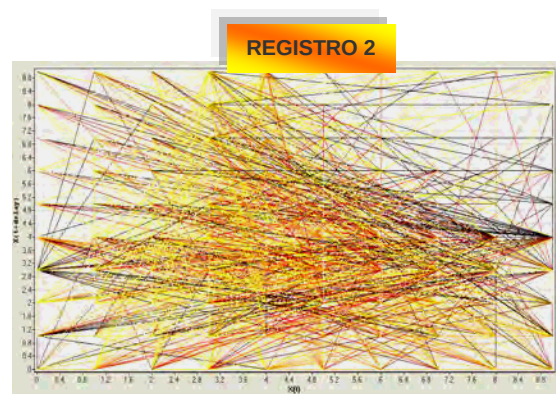
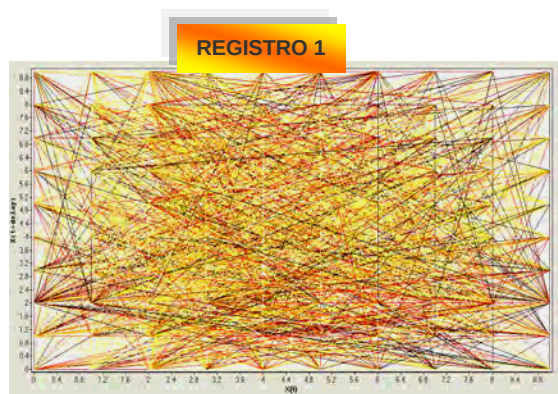


Fig. A-18. Diagramas de espacio-fase para las series de tiempo de frecuencia cardiaca, aquí podemos observar una figura en el centro del atractor de forma ascendente, esto podríamos tomarlo como una característica para clasificar el tipo de comportamiento según el atractor.

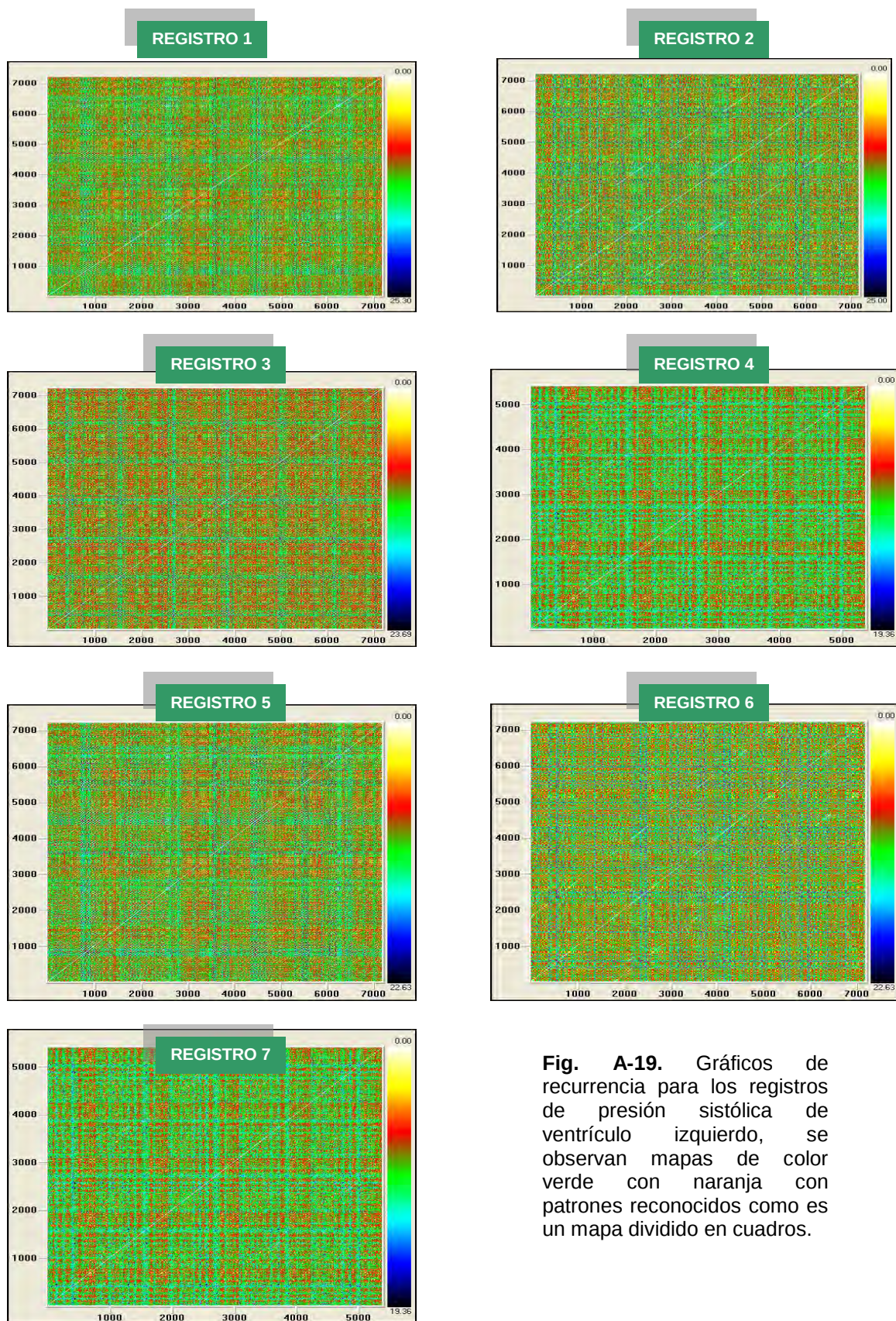


Fig. A-19. Gráficos de recurrencia para los registros de presión sistólica de ventrículo izquierdo, se observan mapas de color verde con naranja con patrones reconocidos como es un mapa dividido en cuadros.

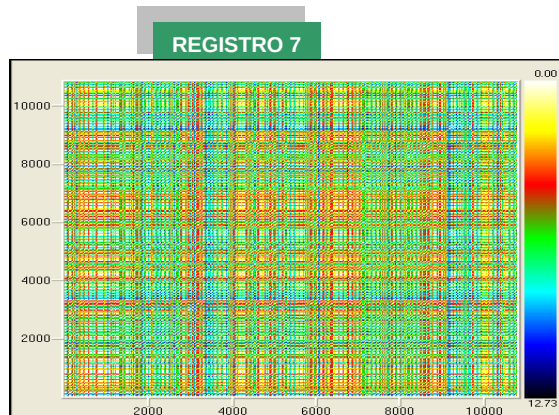
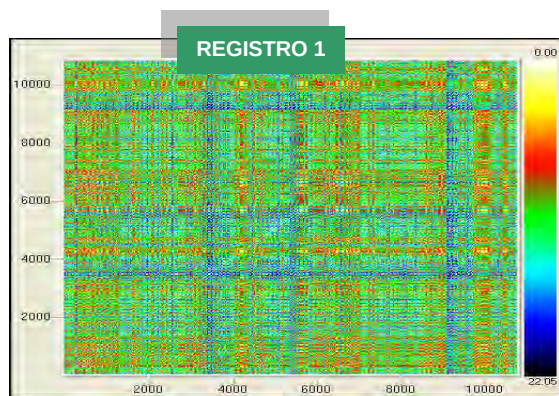


Fig. A-20. Gráficos de recurrencia para los registros de presión diastólica del ventrículo izquierdo el mapeo presenta colores verde, azul y naranja, dividido en cuadros lo cual nos muestra un comportamiento caótico.

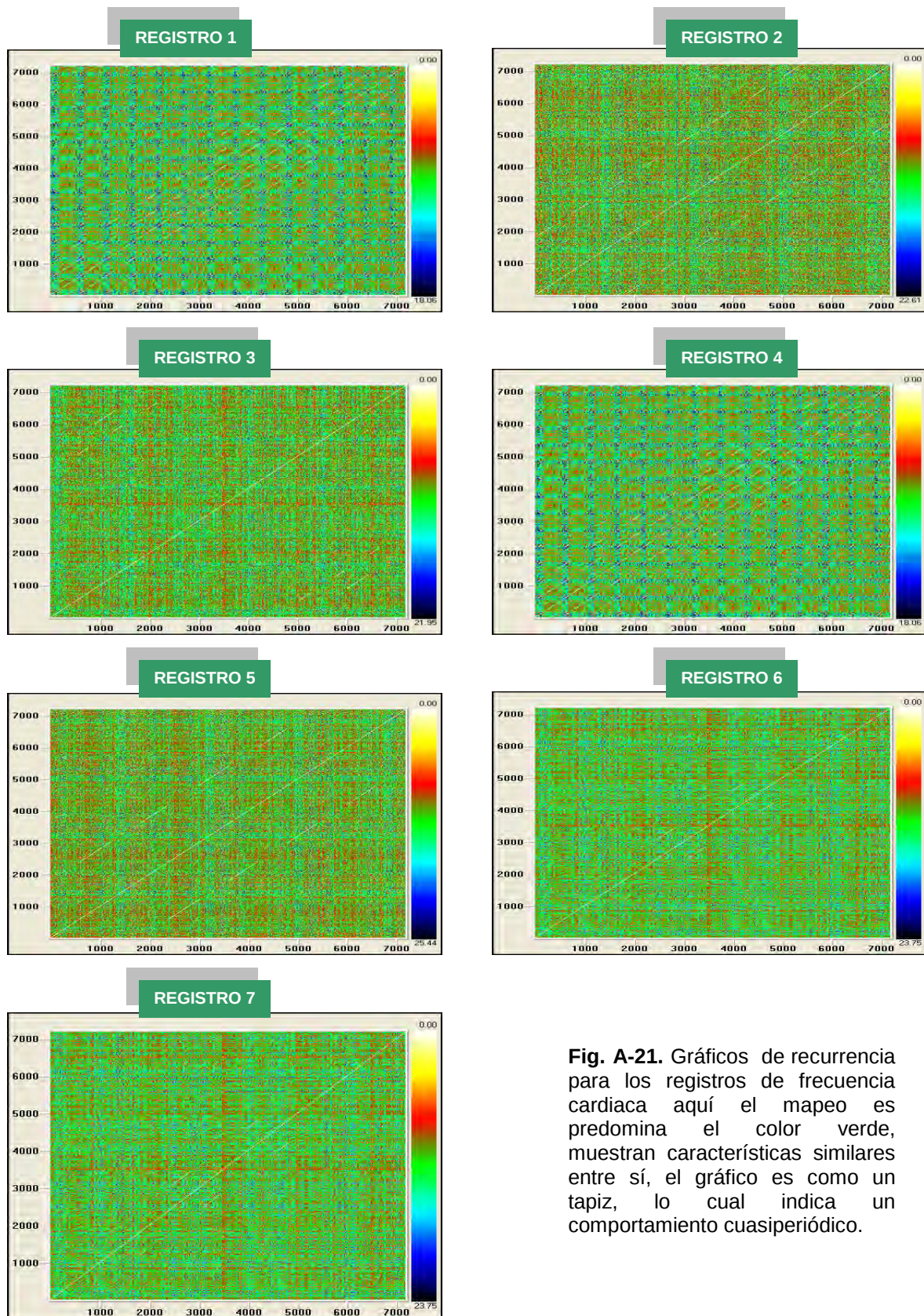


Fig. A-21. Gráficos de recurrencia para los registros de frecuencia cardiaca aquí el mapeo es predomina el color verde, muestran características similares entre sí, el gráfico es como un tapiz, lo cual indica un comportamiento cuasiperiódico.

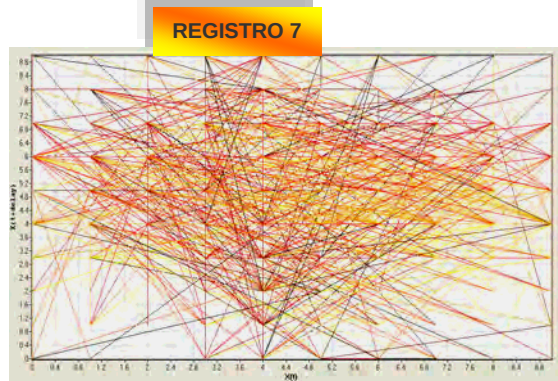
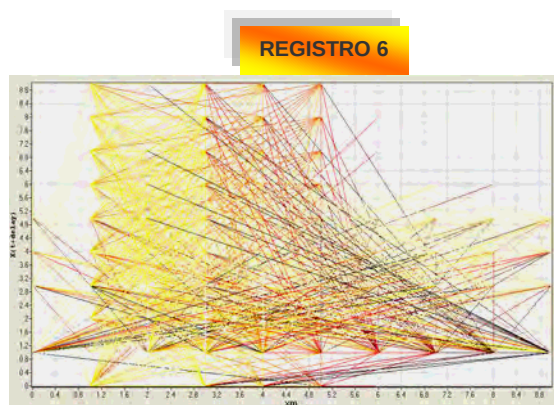
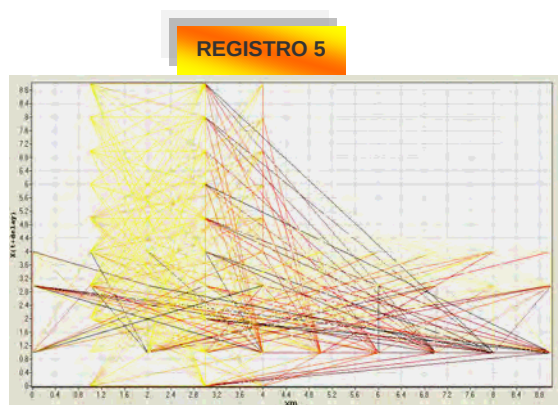
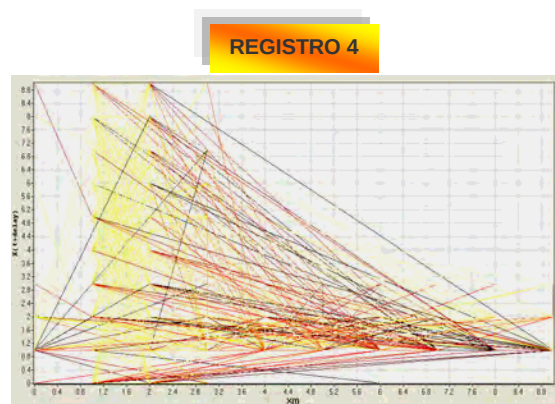
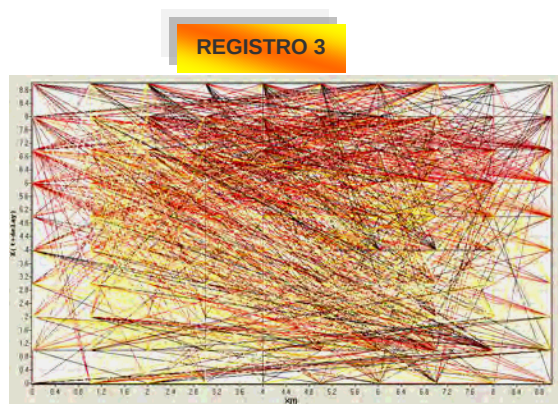
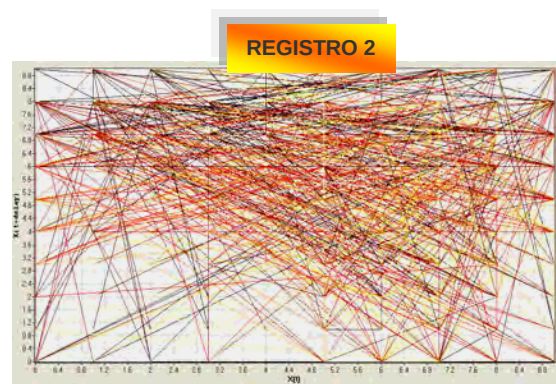
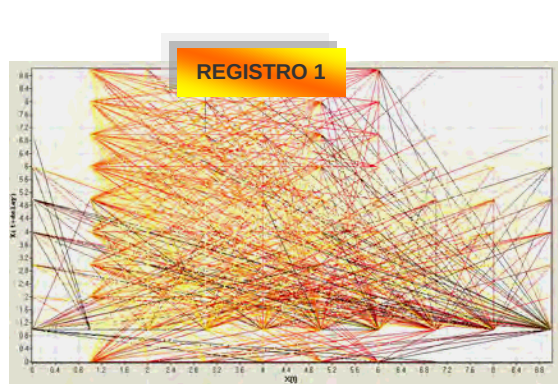


Fig. A-22. Diagramas de espacio-fase para los registros de presión sistólica del ventrículo izquierdo, aquí observamos la formación del triángulo hacia uno de los extremos del plano, existe la formación de otra figura en el centro del atractor, las líneas son en su mayoría rojas.

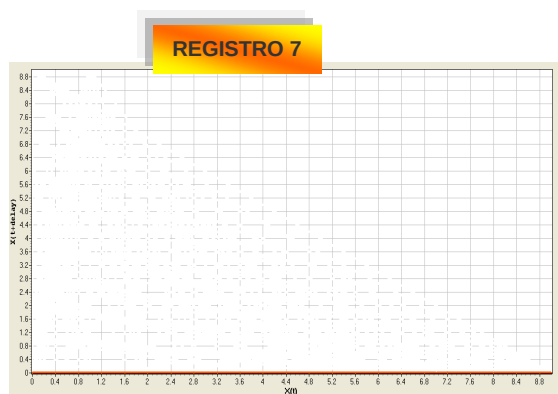
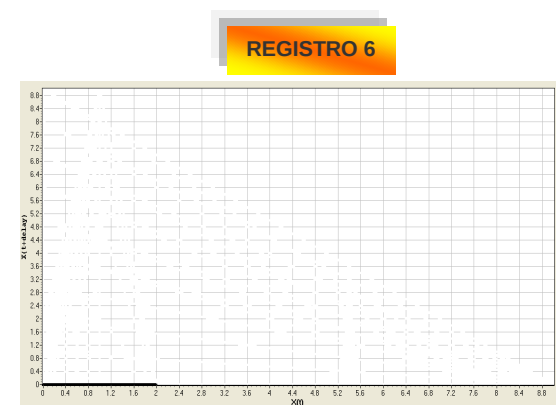
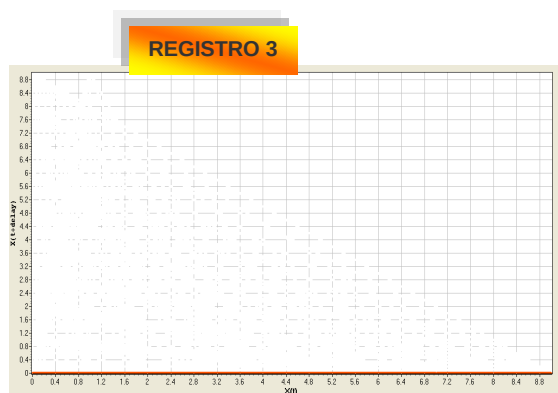
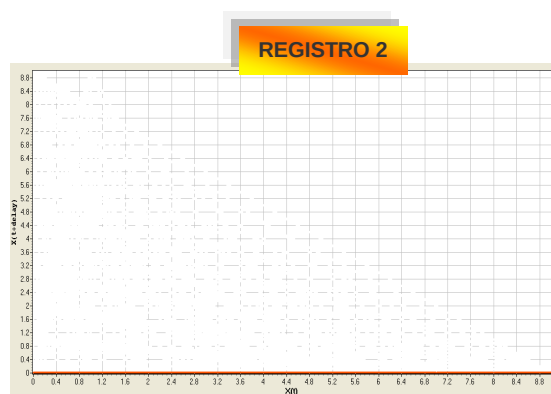
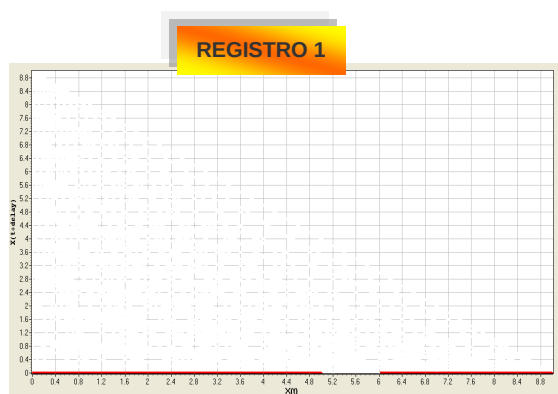


Fig. A-23. Diagrama de espacio-fase para los registros de presión diastólica del ventrículo izquierdo, aquí el atractor se reduce a una línea sobre el mismo eje, de color negro y rojo,

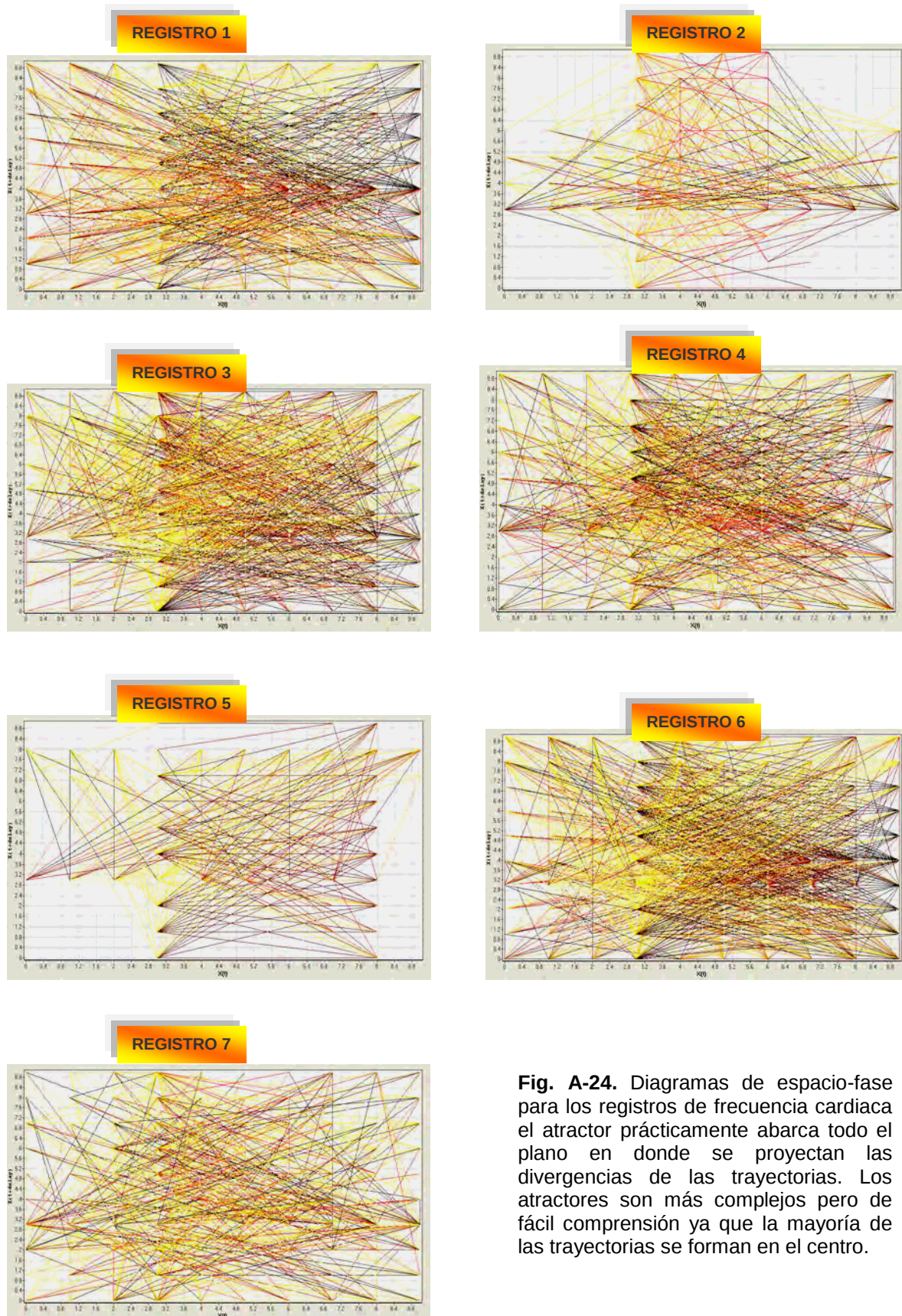


Fig. A-24. Diagramas de espacio-fase para los registros de frecuencia cardiaca el atractor prácticamente abarca todo el plano en donde se proyectan las divergencias de las trayectorias. Los atractores son más complejos pero de fácil comprensión ya que la mayoría de las trayectorias se forman en el centro.