



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

PERTURBACIONES EN EL REGIMEN LINEAL PARA LAS TEORIAS ESCALARES-TENSORIALES DE LA GRAVITACION Y TRATAMIENTO COSMOLOGICO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)
PRESENTA:

CESAR ANTONIO MERLIN GONZALEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. MARCELO SALGADO RODRIGUEZ

COMITÉ TUTORAL: DR. AXEL DE LA MACORRA PETERSSON
DR. DANIEL EDUARDO SUDARSKY



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D. F.

2009



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedico este trabajo a mis padres y hermano, por su apoyo incondicional

Índice general

Resumen	v
1. Introducción	1
1.1. Preludio	1
1.2. Posibles Problemas de la GR	5
2. Cosmología Estándar	13
2.1. Modelo de Friedman-Robertson-Walker (FRW)	14
2.1.1. Soluciones de la ecuación de Friedman	17
2.1.2. Parámetros cosmológicos	18
2.2. Radiación Cósmica de Fondo (CMB)	21
2.2.1. Anisotropías primarias	21
2.2.2. Anisotropías secundarias	23
2.2.3. Descomposición armónica	24
2.3. Inflación	27
2.3.1. Problema de planitud	28
2.3.2. Problema del Horizonte	29
2.3.3. Reliquias no-deseadas	29
2.3.4. Homogeneidad e isotropía	30
2.3.5. Inflación como campo escalar	31

3. Teorías escalares-tensoriales de la gravitación	35
3.1. Contexto histórico	36
3.2. Generalidades de las STT	38
3.2.1. Marco Conforme de Einstein	39
3.2.2. Predicciones teóricas de las STT	41
3.3. Cotas experimentales	43
3.4. Descomposición 3+1	46
3.4.1. Problema de Cauchy de las STT	51
3.5. Cosmología en STT	52
4. Teoría de perturbaciones.	57
4.1. Perturbaciones a la métrica	58
4.2. Expresiones fundamentales.	60
4.3. Perturbaciones al modelo de FRW	67
5. Tratamiento cosmológico	73
5.1. Norma Newtoniana	76
5.2. Norma Sincrónica	84
5.3. Elección de la Norma	89
6. Revisión al efecto Sachs-Wolfe	95
6.1. Derivación estándar	96
6.2. Corrimiento Gravitacional de la Luz	99
6.2.1. Ejemplo: Espacio-tiempo estático y esféricamente si- métrico.	101
6.2.2. Ejemplo: Espacio-tiempo de FRW	102
6.2.3. Ejemplo: Espacio-tiempo estacionario y axialmente si- métrico	103
6.3. Nueva derivación del efecto Sachs-Wolfe	105
6.3.1. Norma Sincrónica.	105
6.3.2. Norma Newtoniana.	106

7. Conclusiones	109
A. Conservación del tensor de energía-momento.	113
B. Soluciones exactas.	117
C. Teoría de Perturbaciones.	119
D. Compatibilidad de resultados	125
D.1. Compatibilidad con Peebles	125
D.2. Compatibilidad con Mukhanov et al.	126
D.3. Compatibilidad con Ma y Bertschinger	127
D.4. Compatibilidad con otros autores	128

Resumen

Este trabajo busca ser principalmente una guía para el desarrollo de futuras investigaciones, principalmente numéricas, de las Teorías Escalares-Tensoriales de la Gravitación, lo cual llevará a la formulación de modelos cosmológicos alternativos que esperamos puedan competir con el modelo estándar.

En el capítulo 2 revisaremos brevemente como a partir de la Relatividad General de Einstein y de la fenomenología observada en el Universo actual, se ha formulado el modelo estándar; discutiremos los elementos más importantes que han llevado a que esta teoría sea la más aceptada por la comunidad científica. Además, veremos como un modelo cosmológico alternativo deberá contener elementos similares o que reproduzcan toda la fenomenología que hasta ahora explica el modelo estándar basado en la GR.

Veremos como históricamente fueron introducidas las Teorías Escalares-Tensoriales (“Scalar-Tensor Theories” o STT)(capítulo 3) como una modificación de la GR y no nos detendremos en justificar el origen del campo escalar; mencionaremos algunos aspectos importantes que a nuestro criterio ponen a este tipo de teorías por encima de otras, además propondremos un modelo cosmológico más general para este tipo de teorías basado en el formalismo de la llamada descomposición 3+1.

Motivados por las anisotropías de la radiación cósmica de fondo, realizaremos un estudio perturbativo a primer orden de las STT (capítulo 4) en el contexto de la descomposición 3+1 y obtendremos las ecuaciones que rigen

la evolución de las componentes de la métrica con lo que posteriormente (capítulo 5) discutiremos la elección de norma y compararemos en particular dos de las normas más populares en la literatura, la norma Newtoniana y la norma Sincrónica.

En el capítulo 6 revisaremos una de las componentes de las anisotropías primarias de la CMB (efecto Sachs-Wolfe) desde un enfoque novedoso y directo, que aplicado al modelo estándar nos regresará resultados conocidos, esto con el objetivo de que en un futuro se aplique la misma idea para los modelos alternativos particularmente aquellos basados en STT y se obtengan cotas con las observaciones.

Finalmente enunciaremos algunas conclusiones a las que hemos llegado durante la realización de este trabajo.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Preludio

La teoría de la Relatividad General (GR) es una teoría geométrica de la gravitación publicada por Albert Einstein en 1916. Esta teoría permite la unificación de la Relatividad Especial y la Ley de la Gravitación Universal Newtoniana¹. La GR describe la gravedad como una propiedad geométrica del espacio-tiempo. En particular relaciona la curvatura de este último con el contenido de energía-momento y/o radiación que se encuentre presente en el espacio-tiempo mediante las ecuaciones de campo de Einstein:²

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi T_{ab} \quad (1.1)$$

donde R_{ab} es el tensor de Ricci, g_{ab} es la métrica del espacio-tiempo, $R \equiv g^{ab}R_{ab}$ y T_{ab} es el tensor de energía-momento de la materia.

Las predicciones de la GR difieren significativamente de aquellas hechas por la física newtoniana, en particular cabe señalar los diversos experimentos en el Sistema Solar (precesión de Mercurio, desviación de la luz por el Sol, di-

¹La teoría newtoniana aparece como la aproximación de campo débil en la Relatividad General.

²Usaremos unidades geometrizadas, estas son aquellas en que $G = c = 1$.

latación gravitacional del tiempo), en el pulsar binario y a nivel cosmológico, aquellas relacionadas con el corrimiento al rojo y las lentes gravitacionales entre otras. La teoría de Einstein tiene importantes aplicaciones astrofísicas y en general es la base teórica de los modelos cosmológicos vigentes para un Universo en Expansión, aunque como veremos más adelante no es la única.

Einstein consideró una aproximación lineal a la métrica representando el límite newtoniano y aplicó la GR al problema de Kepler en el sistema solar³, encontrando una explicación directa al corrimiento anómalo del perihelio de Mercurio observado desde 1859 por Urban Le Verrier. Más tarde se derivó este resultado usando la métrica de Schwarzschild (que describe el espacio tiempo alrededor de un objeto de simetría esférica) y se observó la precesión relativista para planetas cuyas mediciones son certeras (Mercurio, Venus y la Tierra), además de aplicarse a los Pulsares Binarios cuya precesión es cinco ordenes de magnitud mayor al de cualquier objeto del Sistema Solar.

En el caso del pulsar binario existe una predicción adicional que ha sido demostrada experimentalmente con gran precisión: de acuerdo a la GR, un sistema binario emitirá ondas gravitacionales⁴ (en analogía a las ondas electromagnéticas), perdiendo energía y como consecuencia reduciendo la distancia entre los dos objetos orbitantes (y por tanto su periodo orbital). La primera observación en la disminución del periodo por emisión de ondas gravitacionales fue realizada por Hulse y Taylor para el pulsar PSR1913+16 descubierto por ellos en 1974 [45].

Como hemos mencionado arriba, los modelos cosmológicos actuales están basados en las ecs. (1.1), bajo las hipótesis de homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo, estas hipótesis son conocidas con el nombre de “Principio Cosmológico” y conducen al llamado espacio-tiempo de Friedman-Robertson-

³Movimiento de dos cuerpos esféricos que interactúan gravitacionalmente, uno con una masa despreciable a comparación del otro, aproximando así el movimiento de los planetas respecto del Sol.

⁴Ondulaciones en la métrica del espacio-tiempo que se propagan a la velocidad de la luz.

Walker (FRW)(ver sección 2.1). Un modelo del universo basado en el espacio-tiempo de FRW ha permitido obtener importantes predicciones en diferentes fases de su evolución. Desde épocas tempranas posteriores al Big Bang, hasta épocas tardías en que las galaxias y estrellas fueron formadas.

En cuanto a las predicciones asociadas a épocas tempranas cabe señalar la abundancia de los elementos ligeros tales como H-1 (protio), H-2 (deuterio), Helio, (He-3, He-4) y litio (Li-6, Li-7) producidas en la nucleosíntesis primordial (entre los 3 y 20 primeros minutos del Universo aproximadamente)⁵. Para que se realice la síntesis de estos elementos es necesario que la temperatura sea del orden de 0.1 MeV. De acuerdo con la teoría del Big Bang el Universo continuó enfriándose mientras los núcleos ligeros ya formados interactuaban con los fotones⁶, permitiendo que los iones atrapasen electrones y formaran átomos neutros (recombinación). Al reducirse la temperatura a 0.1 eV ocurre el “desacople” de la radiación con la materia (superficie de última dispersión), en este punto se dice que el Universo se vuelve “transparente”. En esta etapa, los fotones emitidos al final de la recombinación viajan libremente y es lo que observamos como la Radiación Cósmica de Fondo (CMB). Debido a la expansión del Universo estos fotones presentan un corrimiento al rojo del orden de 1000. Esta radiación fue predicha por Gamow [34], Alpher y Herman [1] en 1948. Penzias y Wilson [73] en 1964 midieron dicha radiación residual (la cual estaba asociada a la de un cuerpo negro a temperatura de alrededor 3 K) que Dicke, Peebles, Roll y Wilkinson [23] interpretaron como una prueba del Big Bang.

El Explorador del Fondo Cósmico COBE (Cosmic Background Explorer)⁷, conocido también como Explorer 66, fue el primer satélite construido especialmente para estudios de cosmología. Su objetivo era investigar la

⁵Para una revisión completa acerca de la nucleosíntesis primordial ver [70],[93].

⁶En esta época la densidad de materia alcanza a la densidad de radiación.

⁷Constituido por el Diffuse InfraRed Background Experiment (DIRBE), el Far-InfraRed Absolute Spectrophotometer (FIRAS) y el Differential Microwave Radiometer (DMR).

radiación cósmica del universo, incluidas las anisotropías primordiales de temperatura; fue lanzado por la NASA en 1989. Las medidas del FIRAS se realizaron midiendo la diferencia espectral entre una sección estelar de 7 grados contra un cuerpo negro interno. El interferómetro del FIRAS cubría el rango de frecuencias entre 2 y 95 cm^{-1} en dos bandas separadas a 20 cm^{-1} . Con dos longitudes de barrido (corta y larga) y dos velocidades (rápida y lenta) para un total de cuatro modos diferentes de barrido. Los datos fueron recolectados durante un periodo de más de diez meses. Los resultados del FIRAS fueron impresionantes ya que demostraron un acople perfecto del CMB y la curva teórica de un cuerpo negro a una temperatura de 2.7 K [57].

Por otro lado el DMR podía emplear hasta cuatro años mapeando la anisotropía de la radiación de fondo y crear mapas completos del CMB substrayendo emisiones galácticas y dipolos en varias frecuencias. Las fluctuaciones del fondo cósmico de microondas son extremadamente débiles. El instrumento consiste de seis radiómetros de microondas diferenciales, dos canales casi independientes que operan a frecuencias⁸ 31.5, 53, y 90 GHz. Los resultados de este experimento permitieron una identificación de las fluctuaciones de la temperatura respecto de la temperatura del cuerpo negro T_0 dadas como $\frac{\Delta T}{T_0} < 4 \times 10^{-5}$ con un precisión estimada en 95 % [96]. El sucesor del experimento COBE fue la Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) lanzada en 2001.

La WMAP es 45 veces más sensible y cuenta con 33 veces la resolución angular del satélite COBE, lo que ha permitido general un mapa mucho más preciso de la CMB. Actualmente las observaciones de la CMB tienen las características espectrales de un cuerpo negro a una temperatura estimada en 2.725 K y con isotropías hasta una parte entre 10^5 .

⁸Estas fueron seleccionadas para minimizar la contaminación de las emisiones galácticas.

1.2. Posibles Problemas de la GR

A pesar de estas predicciones y confirmaciones de la Relatividad General, existen fuertes indicaciones de que la teoría podría estar incompleta o bien de que existe otro tipo de materia en el Universo hasta ahora desconocida. Observaciones astronómicas relacionadas con la dinámica de las galaxias espirales muestra que las estrellas y el gas que se encuentran alrededor del núcleo galáctico describen una trayectoria aproximadamente circular cuya velocidad tangencial no decae con la distancia como lo predice la teoría Newtoniana. Recientemente se ha especulado sobre el origen de este fenómeno que se ha denominado como el problema de las curvas planas de rotación (FRC-Flat Rotation Curves)[82]. Entre las soluciones a este problema se encuentran las siguientes:

- a) Materia Oscura: Se ha especulado que alrededor de núcleo galáctico existe un halo de materia (materia oscura) que interactúa únicamente gravitacionalmente con la materia visible (fotones, bariones, leptones, etc). dicha materia oscura sería la responsable de producir una fuerza gravitacional mucho mayor a la observada. Mediciones astronómicas muestran que la cantidad de dicha materia sería 10 veces mayor a la observada.

Un análisis sencillo muestra que la densidad ρ asociada a la materia oscura debe decrecer con la distancia r , al centro de la galaxia como $\rho \sim \frac{1}{r^2}$. Dado que la masa $M \sim \rho r^3$ entonces $M \sim r$ y por lo tanto de la dinámica Newtoniana para órbitas circulares $\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}$, donde v es la velocidad tangencial de rotación, se concluye que $v = \text{cte}$. Existen en la literatura numerosas propuestas de modelos con materia oscura que intentan reproducir las curvas planas de rotación ([83], [63], [58]).

- b) Teorías alternativas de la Gravitación: El modelo estándar de la física de partículas, el cual consiste de las familias de quarks, leptones, bosones
-

de norma y la partícula de Higgs, es uno de los modelos de la física más exitosos. Sin embargo, con el objetivo de unificar cierta constante de acoplamiento, se han propuesto algunas extensiones al modelo estándar (como la supersimetría) desde hace varios años. Una de las predicciones de la supersimetría es la existencia de nuevas partículas, tal como el neutralino, las cuales han sido propuestas como candidatos del modelo de materia oscura.

Hasta la fecha no se han observado tales partículas predichas por el modelo de la supersimetría, además de que en la física no existe ninguna otra partícula asociada a la materia oscura. Por esta razón existe otra postura para explicar el problema de las curvas de rotación. Esta consiste en postular que la gravitación Newtoniana o en general la GR, es solo una buena aproximación a una teoría gravitacional que la contiene en cierto límite.

Una de las pioneras de esta postura es la teoría de MOND [59] (Modified Newtonian Dynamics) propuesta en 1981 la cual ha tenido éxitos extraordinarios en explicar las FRC. Este “modelo de juguete” consiste en suponer que para aceleraciones grandes comparadas con $a_0 \sim 10^{-8}$ cm/s² (constante del modelo) la dinámica de las partículas de prueba está dada por la teoría newtoniana usual, en cambio para aceleraciones del orden de a_0 la dinámica se modifica por $\mu\left(\frac{|a|}{a_0}\right)\vec{a} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$. Es decir $\mu \sim 1$ para $|a| \gg a_0$ y $\mu \sim \frac{|a|}{a_0}$ para $|a| \lesssim a_0$. Resulta asombroso que un modelo tan simple logre explicar las FRC de muchas galaxias [36].

Una de las críticas más importantes que sufrió el modelo de MOND por parte de sus detractores es que no existía una teoría de campo propiamente dicha que contuviera a MOND como límite, tal como la GR que contiene a la teoría de Newton en el límite de campo débil. Sin embargo, recientemente Bekenstein [7] ha conseguido proponer una

teoría de campo Tensor-Vector-Escalar (TeVeS) que precisamente contiene a MOND en cierto límite. Esta nueva teoría de la gravitación es mucho más complicada que la GR ya que además de introducir un tensor métrico como campo fundamental, postula la existencia de un campo vectorial y un campo escalar dinámicos, junto con otro campo escalar no dinámico. Es necesario decir que resulta irónico que una teoría que busca evitar la materia oscura requiera de introducir una serie de campos escalares que al igual que la materia oscura, no cuentan con evidencia directa o indirecta de su existencia salvo las FRC. Actualmente se realizan importantes intentos para probar la validez de la teoría TeVeS con pruebas observacionales (Sistema Solar, Cosmología, Pulsar Binario, etc.) ([24], [92], [95], [112]).

Dos paradigmas han abierto otro problema filosóficamente similar al de las FRC sólo que a escala cosmológica. Uno de ellos se refiere al modelo inflacionario, propuesto a finales de los años 70's y principios de los 80's por Guth [37]; el segundo surgió por el reciente descubrimiento de la expansión acelerada del Universo descubierto a través del corrimiento de la luz emitida por supernovas SNIa ([75], [80]).

El modelo inflacionario predice que la densidad total (promedio)⁹ del Universo es $\Omega = 1$. Sin embargo, la nucleosíntesis de elementos ligeros predice que el número máximo de bariones contribuye a Ω solo en un 4%. Es decir $\Omega_{bar} \approx 0.04$, de modo que en el marco de la cosmología estándar de la GR, y asumiendo que el modelo de inflación es correcto, hay un déficit de $\Omega_{?} \approx 0.96$. De esta forma surgen varias posturas conciliadoras entre la hipótesis de inflación y las observaciones. Las tres más populares son las siguientes:

1. Modelo Λ CDM (Constante cosmológica con materia oscura fría): Este modelo propone la existencia de una constante cosmológica tal que $\Omega_{\Lambda} \approx 0.7$, además de una componente de materia oscura fría con

⁹En unidades de densidad crítica.

$\Omega_{CDM} \approx 0.26$. De esta manera $\Omega = \Omega_{bar} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_{CDM} = 1$ (este modelo supone que la contribución actual de fotones es despreciable). Ahora bien, es importante mencionar que esta constante cosmológica Λ , tiene la propiedad de que posee una presión asociada, negativa y de valor $p_{\Lambda} = -\Lambda$ (con $\Lambda > 0$), siendo $\rho_{\Lambda} = \Lambda$ la densidad de energía correspondiente.

De las ecuaciones de Einstein para este modelo resulta que la presión y densidad asociada a Λ producen una aceleración $\ddot{a} \approx \Lambda$, donde al suponer $\Lambda \approx 0.7$ reproduce la expansión acelerada del Universo inferido de las observaciones de las SNIa. La componente $\Omega_{CDM} \approx 0.26$ se ha postulado para explicar la dinámica de cúmulos de galaxias. Sin embargo, no existe evidencia directa que demuestre la existencia de esta materia oscura (aparte de la gravitacional). Además, se desconoce si existe una correlación entre la materia oscura de este modelo y aquella que se utiliza para explicar las FRC.

2. Quintaesencia: El modelo Λ CDM es quizá el más simple y exitoso para explicar muchas de las observaciones cosmológicas, incluidas las fluctuaciones de temperatura de la CMB. Sin embargo, existe un problema filosófico con este modelo: resulta asombroso que después de cerca de 10 mil millones de años de evolución del universo, el ser humano (cuya edad se estima en 100 mil años) tenga la fortuna de vivir en un período en que $\Lambda \approx \rho_{bar} \approx \rho_{CDM}$ (donde Λ es por construcción constante) mientras que en el pasado $\rho_{bar} \gg \Lambda$. A este “problema” se le ha denominado como el “Problema de Coincidencia de la Constante Cosmológica”.

Con el objetivo de evitar este problema, a principios de los 90’s se propuso un modelo de “energía oscura” (i. e. materia oscura con presión negativa) que se comporta como una cantidad dinámica. Para implementar este modelo se postuló la existencia de un campo escalar φ , también llamado quintaesencia, con un potencial respectivo $V(\varphi)$

tal que ρ_φ estuviera correlacionado con ρ_γ y ρ_{matt} durante épocas tempranas, pero tal que no modifica la expansión en época de nucleosíntesis. Además en épocas más recientes dicho campo domina sobre ρ_{matt} de tal manera que su presión es suficientemente negativa para producir la expansión acelerada observada actualmente.

Es decir, φ tendría propiedades de “tracking”¹⁰ de la materia ordinaria a modo de evitar coincidencias tal como la asociada con el modelo Λ CDM. Sin embargo, este modelo de quintaesencia solo desplaza el problema hacia otro nivel, puesto que no existe ninguna evidencia lo suficientemente sólida para tomar en serio a este campo φ . Esta situación nos lleva a la tercera postura.

3. Gravedad modificada $f(R)$: En años recientes se ha logrado demostrar que las teorías de la gravitación tales como aquellas que tienen $\mathcal{L}_{grav} = R + \frac{cte}{R} + \dots$ son capaces de reproducir una expansión acelerada del Universo sin necesidad de introducir una constante cosmológica o un campo escalar extra. Sin embargo, poco después se mostró que las teorías $f(R)$ más simples son incompatibles con los experimentos en el Sistema Solar ([17], [28]). Actualmente se están analizando nuevos modelos de este tipo que puedan evitar dicho problema. Sobre decir que al igual que el modelo de TeVeS, este tipo de teorías deberán satisfacer todas las observaciones que una teoría tan “simple” como la GR ha conseguido. En el contexto cosmológico vale la pena mencionar que está en debate si la teoría de TeVeS puede reproducir la expansión acelerada del Universo y la dinámica de cúmulos de galaxias sin necesidad de introducir materia o energía oscuras. En particular desde agosto de 2006 la observación del “Bullet Cluster”¹¹ ha proporcionado fuerte evidencia descartando

¹⁰Soluciones con un camino común de evolución. El concepto de “tracker fields” fue introducido por Zlatev et al. [113] en 1998.

¹¹El término “Bullet Cluster” se aplica a dos cúmulos en colisión, donde un pequeño subcúmulo se aleja de uno mayor. La separación entre la componente bariónica de la materia y la hipotética materia oscura establecen que existe una interacción que no

algunas versiones populares de MOND [19].

Por último y para concluir esta introducción, mencionemos la clase de teorías que se planea analizar en este trabajo, estas son las Teorías Escalares-Tensoriales (STT) de la Gravitación (ver capítulo 3). Estas teorías tienen la forma $\mathcal{L}_{grav} = F(\phi)R$ donde $F(\phi)$ es una función definida positiva pero arbitraria de un hipotético campo escalar. Históricamente estas teorías se comenzaron a estudiar mucho tiempo antes de que surgieran los problemas arriba aludidos. Por ejemplo, la teoría de Jordan-Brans-Dicke con $F(\phi) = 1 + cte.\phi^2$ es un caso particular de las STT, en la cual se busca incorporar ciertas ideas de Mach ([56], [13]) de manera concreta.

Dado que en este tipo de teorías se puede interpretar a la “constante” de Gravitación efectiva $\left(G_{eff} = \frac{G_0}{F(\phi)}\right)$ como variable en espacio y tiempo, las STT incorporan también la idea de Dirac de que las constantes fundamentales de la física podrían variar en tiempo cósmico [6].

Por otro lado, con el advenimiento de la teoría de cuerdas (1984), M-theories (principios de la década de los 90’s), etc., se ha especulado que a nivel efectivo (i. e. a bajas energías) existe un campo escalar, referido en ocasiones como dilatón [33], el cual se acopla no-mínimamente a la curvatura. Para nuestro trabajo dejaremos, sin embargo, de lado estos argumentos y postularemos a las STT como una teoría de la gravitación fenomenológicamente posible.

A diferencia de las otras teorías alternativas de la gravitación mencionadas anteriormente, las STT modifican a la GR de manera relativamente simple, además de que respetan todos los principios sobre los cuales la GR fue construida. Por último, mencionemos que a nivel de Sistema Solar las STT resultan ser compatibles con la GR si el denominado parámetro de Brans-Dicke $\omega \equiv \frac{8\pi G_0 F'}{F'^2}$ (donde la prima indica derivación respecto del campo escalar ϕ)

puede explicarse con alguna alteración de la fuerza gravitacional.

es lo suficientemente grande¹², mientras que a nivel cosmológico cierta clase de STT también puede ser compatible con las observaciones.

Es importante mencionar que muy probablemente (o de hecho) las STT no resolverán todos los problemas asociados a la materia o a la energía oscuras a todas escalas. Quizá podrían por ejemplo, resolver el problema de coincidencia de Λ y de la expansión acelerada, aunque muy probablemente no el de las FRC.

Por otro lado a diferencia de la quintaesencia, la cual se acopla mínimamente con la gravedad, las STT tienen predicciones muy concretas y falseables. Por ejemplo, predicen un nuevo estado de polarización de las ondas gravitacionales, así como el fenómeno de escalarización espontánea en objetos compactos (ver sección 3.2), independientemente de que se satisfagan el resto de las observaciones locales (Sistema Solar, Pulsar binario, etc.) y cosmológicas (nucleosíntesis, CMB, SNIa). Otra virtud de estas teorías es que poseen un problema de valores iniciales bien planteado [88], propiedad matemática indispensable de toda teoría física respetable. Al respecto se desconoce por ejemplo si la teoría TeVeS posee tal propiedad.

El objetivo del presente trabajo es el de analizar la teoría de perturbaciones cosmológicas en el marco de las STT. Aunque en el pasado se han realizado estudios similares, en este caso se pretende abordar el problema desde la perspectiva del formalismo 3+1 de la GR. Creemos que este punto de vista puede proporcionar un mejor entendimiento de la teoría de perturbaciones cosmológicas tanto en STT como en GR, la cual se presentará como un límite en que $\phi \equiv 0$, además que nos permite crear un puente entre la cosmología y la relatividad numérica.

¹²Actualmente la estimación de este parámetro se encuentra en $\omega \gtrsim 4 \times 10^4$, de acuerdo al experimento Cassini [8], que midió el cambio en la frecuencia de los fotones al pasar cerca del Sol minimizando la contribución de la corona solar.

Capítulo 2

Cosmología Estándar

Hemos revisado brevemente en la introducción el panorama actual en que la GR y la cosmología actual se encuentran. Aunque el propósito de este trabajo es presentar el desarrollo teórico de un esquema cosmológico alternativo al modelo estándar, creemos conveniente revisar algunas características de dicho modelo con la finalidad de sentar las bases para entender nuestro análisis y futuros trabajos en la misma línea.

La principal premisa de la cosmología moderna es que al menos a grandes escalas el Universo es homogéneo e isotrópico (ver sección 2.1). Sin embargo, en regiones cercanas hay gran inhomogeneidad, con la materia agrupándose en estrellas, galaxias y cúmulos de galaxias. Se cree que estas irregularidades han evolucionado gracias a la atracción gravitacional desde una distribución que era más homogénea en el pasado. En el marco de la cosmología estándar o teoría del Big Bang, cuando el Universo era más pequeño las fuentes distantes emitieron luz, durante la expansión, las longitudes de onda de los fotones se “estiran”, la densidad de partículas disminuyó llegando a la baja temperatura y densidad de fotones observadas en el fondo cosmológico actual. Extrapolando al pasado, inferimos que el Universo inició como un estado caliente y denso, el enfriamiento adiabático de la expansión preservó el espectro térmico y explica la naturaleza del espectro de cuerpo negro observado.

Por otro lado de acuerdo con el modelo inflacionario, se cree que fluctuaciones cuánticas, asociadas con el inflatón, generaron los cambios de temperatura y densidad que se manifiestan como pequeñas anisotropías en la CMB, que eventualmente dieron origen a la formación de estructura (galaxias, cúmulos, etc.) en el Universo actual. Además estas anisotropías podrían brindar pistas sobre la tasa de expansión, el contenido de materia y la geometría del espacio-tiempo.

2.1. Modelo de Friedman-Robertson-Walker (FRW)

Hemos mencionado en la introducción sobre los éxitos de la GR, además de algunos problemas que la GR no ha podido conciliar satisfactoriamente. Sin embargo, también hemos visto como a grandes escalas la evidencia proporcionada por la radiación de fondo nos habla de una fuerte homogeneidad e isotropía que da lugar al “principio cosmológico”.

Matemáticamente [104] entendemos que un espacio-tiempo es espacialmente homogéneo si existe una familia uniparamétrica de hipersuperficies espaciales Σ_t que es foliación del espacio-tiempo, tal que para cada t y para cada pareja de puntos $p, q \in \Sigma_t$ existe una isometría¹ de la métrica espacio-temporal g_{ab} que mapea a p en q . Por otro lado un espacio-tiempo se dice espacialmente isotrópico en cada punto si existe una congruencia de curvas temporaloides (observadores) con tangentes que llenan el espacio denotadas por u^a y que satisfacen la siguiente propiedad: dado cualquier punto p y cualesquiera dos vectores tangentes “espaciales” $s_1^a, s_2^a \in \Sigma_t$ (i. e., vectores

¹Si $\phi : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo (un mapeo C^∞ que es uno a uno y cuya inversa también es C^∞) y T es un campo tensorial en M , podemos comparar T con ϕ^*T . En particular si $\phi^*T = T$, entonces aunque hemos “cambiado” T con ϕ , T continua “igual”, es decir ϕ es una transformación de simetría para el campo tensorial T . En el caso en que este campo tensorial corresponde con la métrica g_{ab} , entonces dicha transformación de simetría es llamada isometría.

en p ortogonales a u^a), existe una isometría de g_{ab} que deja a p y a u^a fijos en p pero rota a s_1^a en s_2^a . Entonces en un universo isotrópico no es posible construir un vector tangente preferencial ortogonal a u^a .

Estas dos condiciones nos permiten restringir la geometría [104] con lo que podemos escribir el elemento de línea para un espacio-tiempo homogéneo e isotrópico:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 \right] \quad (2.1)$$

que es conocida con el nombre de métrica de Friedman-Robertson-Walker, en donde $k = 0, 1, -1$ es una constante que se relaciona con la curvatura de las hipersuperficies espaciales Σ_t :

$${}^3R = \frac{6k}{a^2} \quad (2.2)$$

y que corresponden a un modelo “plano”, cerrado y abierto respectivamente. Además $a(t)$ es conocido como factor de escala y es una función positiva que se determinará usando las ecuaciones de campo (1.1), a las cuales podemos agregar un término que incluye la “constante cosmológica” Λ sin alterar la conservación de energía-momento T_{ab} :

$$R_{ab} - g_{ab} \left(\frac{1}{2}R + \Lambda \right) = 8\pi T_{ab} \quad (2.3)$$

Para el tensor de energía-momento consideramos la forma de un fluido perfecto es decir

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b + pg_{ab} \quad (2.4)$$

donde ρ es la densidad en reposo del fluido, p es la presión mientras que $u^a = \frac{dx^a}{ds}$ es la 4-velocidad de fluido tal que $u^a u_a = -1$. Cabe señalar que ρ y p se relacionan por medio de la ecuación de estado $p = \omega\rho$ con ω constante (cuyo valor depende de las características del Universo en sus distintas etapas). El

modelo de FRW puede implementarse a través de las ecs. (2.3) para describir lo que se conoce como cosmología estándar. La componente 0–0 de (2.3) da lugar a la ecuación de Friedman y se escribe como:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi\rho}{3} \quad (2.5)$$

donde \dot{a} indica derivación respecto del tiempo cósmico t . Además podemos identificar $\frac{\dot{a}}{a} = H$ con el llamado parámetro de Hubble, el cual proporciona la tasa de expansión del universo.

Las componentes diagonales (que son idénticas gracias a la isotropía del modelo) están dadas por:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \Lambda = 8\pi p \quad (2.6)$$

Este par de ecuaciones son la base del modelo cosmológico estándar del Big Bang incluyendo el modelo Λ CDM ([50],[69]). Combinando las expresiones anteriores podemos obtener una ecuación para la aceleración en términos solo de sus fuentes:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.7)$$

Para completar el modelo requerimos que se cumpla la ecuación de conservación del tensor de energía-momento, $T_{;b}^{ab} = 0$. Sustituyendo explícitamente para el fluido perfecto tenemos

$$\dot{\rho} = -3H(p + \rho) \quad (2.8)$$

que es la ecuación de continuidad. La época dominada por la radiación, conocida como “Big Bang Caliente”, es la era que contiene a la nucleosíntesis primordial, donde la densidad de energía se encuentra dominada por los fotones o partículas ultrarelativistas. La ecuación de estado asociada a dicha

época esta dada por $p = \frac{1}{3}\rho$. De la ecuación de continuidad es fácil obtener la relación

$$\rho_\gamma = \rho_\gamma^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \quad (2.9)$$

donde ρ_γ^0 es la densidad de fotones medida en la actualidad, así como a_0 es el valor del parámetro de escala al día de hoy. La densidad actual de fotones nos permite inferir que $\rho \sim T^4$.

La época actual está dominada materia la cual solo interactúa gravitacionalmente y es llamada “polvo”, i. e. con ecuación de estado $p = 0$, con esta relación podemos integrar la ecuación de continuidad y obtener

$$\rho_{matt} = \rho_{matt}^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \quad (2.10)$$

donde ρ_{matt}^0 se identifica con la densidad de materia al día de hoy.

Podemos generalizar para $p = \nu\rho$. Usando la ecuación de continuidad (2.8) se obtiene

$$\rho = \rho^0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\nu)} \quad (2.11)$$

El caso en que $\nu = -1$ corresponde a la época dominada por Λ y da lugar a

$$\rho = \Lambda \quad (2.12)$$

Usando (2.11) podremos utilizar la ec. (2.5) para obtener $a(t)$.

2.1.1. Soluciones de la ecuación de Friedman

Consideremos la ecuación de Friedman con $\Lambda = 0$ y la solución para la época de radiación (2.9), esto es

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi\rho_\gamma^0 a_0^4}{3a^2} - k \quad (2.13)$$

de donde es fácil ver que si a es pequeña, entonces k es despreciable, i. e. todos los modelos tienen la misma dinámica inicial dado cualitativamente como

$$a(t) \sim t^{1/2} \quad (2.14)$$

por otro lado si consideramos la relación (2.10) tenemos que el comportamiento es de la forma

$$a(t) \sim t^{2/3} \quad (2.15)$$

En general podemos usar (2.11) en la ecuación de Friedman para determinar la evolución del factor de escala

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3(1+\nu)}} \quad (2.16)$$

que es válido para un fluido con $\nu \neq -1$. Para el caso en que $\nu = -1$ se obtiene un crecimiento exponencial del factor de escala

$$a(t) \sim e^{Ht} \quad (2.17)$$

2.1.2. Parámetros cosmológicos

Ahora conviene enunciar el estado observacional de los diversos parámetros cosmológicos que describen la situación actual del Universo. Cabe señalar que la precisión de dichos parámetros continua en entredicho y solo existe uno que ha sido determinado con gran precisión, este refiere a la CMB. Sin embargo nos encargaremos de la descripción de la CMB más adelante.

- Parámetro de Hubble: La importancia de este parámetro (recordemos que $H = \frac{\dot{a}}{a}$) radica en la idea de que a través de la ley de Hubble²,

²Hubble [44] obtuvo una relación lineal entre el desplazamiento al rojo z y distancia D , de la forma $z = H_0 D$, donde H_0 es la constante de Hubble al momento de la observación. Esta relación aproximada para pequeños desplazamientos al rojo podría implicar, por extrapolación directa, una relación lineal entre la velocidad y la distancia que se cumpliera para cualquier distancia considerada, i. e., $v = Hd$.

podemos inferir que tan rápido se expande el Universo.

La primera medición [76] fue realizada a través de observaciones de las Cefeidas variables estimando el valor ³ de $h = 0.87$ sin embargo, su valor ha sido obtenido por diversos autores y en años recientes parece haberse alcanzado un consenso. Varias mediciones se encuentran alrededor de $h = 0.70$, en particular las observaciones hechas por Telescopio Espacial Hubble de las Cefeidas Virgo (Freedman [32] 1997) y con el método de las supernovas Ia (Riess et al. [81] 1996), con incertidumbres de alrededor 15%. Por otro lado, valores por debajo de $h = 0.50$ siguen apareciendo (Schechter et al. [91] 1997).

- Densidad Crítica y Parámetro de Densidad: La densidad crítica se define

$$\rho_c \equiv \frac{3}{8\pi G_0} H^2 \quad (2.18)$$

la cual depende del parámetro de Hubble. Al día de hoy [50] $\rho_c^0 \sim 2.775h^{-1} \times 10^{11} M_\odot / (h^{-1} \text{Mpc})^3$ donde $M_\odot = 1.99 \times 10^{33} \text{g}$ es la masa del Sol, y corresponde al valor $k = 0$ en la ec. (2.5).

Por otro lado el parámetro de densidad es usualmente definido como $\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_c}$. Desde hace tiempo se ha concluido que la mayoría de la masa del Universo no emite ni absorbe radiación (materia oscura). Por otro lado las observaciones relativas a la materia luminosa prueban (por ejemplo la abundancia de elementos ligeros), nos permite estimar el parámetro de densidad Ω_0 en varias maneras. En un cúmulo de galaxias “rico” (i. e. con gran cantidad de galaxias), las observaciones de la materia luminosa nos permiten inferir la densidad de materia. La evolución de perturbaciones en el Universo es afectada por la densidad media, lo que brinda información útil acerca del parámetro de densidad. En la actualidad las observaciones muestran que Ω_0 se encuentra en el

³Donde h es un número adimensional ampliamente utilizado: $h = \frac{H_0}{100 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}}$.

rango de $0.2 \leq \Omega_0 \leq 0.4$ ([101], [68]) del cual solo $\Omega_0^b \sim 0.04$ puede ser obtenido de las concentraciones de materia bariónica [18], mientras que $\Omega_0^g \sim 10^{-5}$. Más adelante veremos que el modelo inflacionario predice $\Omega = 1$.

- **Edad del Universo:** La edad del Universo, de acuerdo con la Teoría del Big Bang, es el tiempo pasado entre el Big Bang y el presente. Este parámetro resultó problemático en el contexto de un Universo de densidad crítica. Algunas estimaciones de la edad de cúmulos globulares, basados en la evolución estelar, situaban al Universo arriba de 15 Gyr. Esta estimación cambio dramáticamente cuando el satélite Hipparcos (High Precision Parallax Collecting Satellite) midió una gran cantidad de paralajes⁴ estelares. Las estrellas resultaron ser más lejanas, más brillantes y más jóvenes de lo que se pensaba, disminuyendo los límites en la edad (Reid [78], Feast and Catchpole [31], Chaboyer et al. [16]) en alrededor de 10 Gyr, con quizá un giga-año extra anterior para permitir la formación estelar.

Un hipotético Universo (dominado por materia) con $h = 0.70$ tendría una edad menor a 10 Gyr, incompatible con los estimados más bajos de la edad del Universo, es por eso que teóricamente se suele usar $h = 0.50$ [50]. El consenso actual basado en las observaciones de WMAP ubica la edad en 13.7 Gyr. [99] con una incertidumbre de 200 millones de años. La edad del Universo esta relacionada matemáticamente con los otros parámetros cosmológicos de acuerdo a la ecuación de Friedman, ec. (2.5). Si una de las medidas de estos parámetros (H , Ω_0) fuera más exacta, entonces la edad del Universo se podría determinar con mayor precisión.

Sin embargo, en el contexto del modelo Λ CDM, con $k = 0$ y $h \sim 0.7$, se puede obtener una edad del Universo ≥ 14 Gyr compatible con las

⁴Suele emplearse este término para referirse a la distancia a las estrellas.

estimaciones de la edad de los cúmulos globulares [109].

2.2. Radiación C3smica de Fondo (CMB)⁵

Ya hemos presentado en la introducci3n algunas ideas de por que la CMB constituye quiz3 la pieza m3s importante que di3 origen a la cosmolog3a moderna. Ahora nos enfocaremos en enunciar, seg3n el modelo cosmol3gico actual, el origen de las anisotrop3as que se observan en ella. Conviene dividir dichas inhomogeneidades en dos tipos principales

- Anisotrop3as primarias: Son aquellas debidas a procesos en la 3ltima superficie de dispersi3n o cercanas a esta.
- Anisotrop3as secundarias: Estas se presentan por interacciones ocurridas entre la 3ltima superficie de dispersi3n y el observador.

2.2.1. Anisotrop3as primarias

La estructura de las anisotrop3as del fondo de radiaci3n de microondas es determinada principalmente por dos efectos: oscilaciones ac3sticas y amortiguamiento por difusi3n (tambi3n llamado amortiguamiento sin colisiones o amortiguamiento suave). Las oscilaciones ac3sticas surgen a partir de la competencia en el plasma fot3n-bari3n en el Universo primigenio. La presi3n de los fotones tiende a eliminar las anisotrop3as, mientras que la atracci3n gravitacional de los bariones (que se mueven a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz) los hace tender a colapsar para formar densos halos. Estos dos efectos compiten creando oscilaciones ac3sticas que dan al fondo de radiaci3n de microondas su caracter3stica estructural de picos. Estos corresponden, aproximadamente, con resonancias en las que los fotones se

⁵Hemos usado la discusi3n del art3culo “Cosmic Microwave Background Radiation” de www.wikipedia.org.

desacoplan cuando un modo particular se encuentra en su máximo o mínimo de amplitud.

Los picos contienen información importante acerca de los parámetros cosmológicos, por ejemplo la escala angular del primer pico determina la curvatura del Universo (en el modelo FRW). El segundo pico (la proporción de los picos impares con los picos pares) determina la densidad bariónica, mientras que el tercer pico se puede utilizar para extraer información sobre la densidad de materia oscura (ver figura 6.1).

Las localizaciones de los picos también dan importante información sobre la naturaleza de la densidad de perturbaciones primigenia. Hay dos tipos fundamentales de perturbaciones, las llamadas “adiabáticas” y las de “isocurvatura”. Para densidades de perturbación adiabáticas, la sobredensidad fraccional en cada componente de materia (bariones, fotones, etc.) es la misma,

$$\delta_\gamma = \delta_{matt} = \delta_{DM\dots} \quad (2.19)$$

donde hemos definido los contrastes de densidad como $\delta \equiv \frac{\tilde{\rho}}{\rho}$ y $\tilde{\rho}$ es la perturbación asociada para cada una de las componentes⁶. Por otro lado para la densidad de isocurvatura, la suma de las sobredensidades fraccionales es cero

$$\delta_\gamma + \delta_{matt} + \delta_{DM} + \dots = 0. \quad (2.20)$$

En el espectro del CMB se pueden distinguir estos dos tipos de perturbaciones porque los picos se producen en diferentes localizaciones. La densidad de perturbaciones de isocurvatura producen una serie de picos cuyas escalas angulares (l-valores de los picos) están aproximadamente en las relaciones 1 : 3 : 5..., mientras que la densidad de perturbaciones adiabáticas producen picos cuyas ubicaciones están en las relaciones 1 : 2 : 3 [41]. Las observaciones actuales muestran que la densidad de perturbaciones primigenia es completamente adiabática, proporcionando la clave para el soporte de la inflación

⁶La etiqueta DM refiere a la materia oscura.

y descartar muchos modelos de formaci3n de estructuras como las cuerdas c3smicas que predice perturbaciones de isocurvatura [12].

El amortiguamiento sin colisiones es causado por dos efectos, cuando el tratamiento del plasma primigenio como un fluido empieza a romperse:

- el incremento del camino libre medio de los fotones en el plasma primordial llega a estar distorsionado en un Universo en expansi3n.
- el grosor de la 3ltima superficie de dispersi3n, que causa el incremento del camino libre medio durante el desacople, incluso mientras la dispersi3n Compton sigue ocurriendo.

Estos efectos contribuyen por igual a la supresi3n de anisotropías en pequeñas escalas y dan lugar a la característica cola amortiguada exponencial vista en anisotropías en escalas angulares muy pequeñas. La delgadez de la 3ltima superficie de dispersi3n se refiere al hecho de que el desacople de los fotones y bariones no ocurre instantáneamente, sino que requiere una fracci3n apreciable de la edad del Universo por encima de esa 3poca. Los resultados del primer ańo de WMAP [99] dicen que el desacople dur3n unos 115 000 ańos y cuando se complet3n, el Universo tenía unos 487 000 ańos.

2.2.2. Anisotropías secundarias

Despu3s de la creaci3n del CMB en la 3ltima superficie de dispersi3n, 3sta es modificada por varios procesos físicos identificados como anisotropías tardías o secundarias. Despu3s de la emisi3n del CMB, la materia ordinaria en el Universo estaba formada principalmente de hidr3geno neutro y átomos de helio, pero de las observaciones de las galaxias parece que gran parte del volumen del Medio Intergaláctico (IGM) actualmente consiste en material ionizado (esto se aprecia en las líneas de absorci3n debida a átomos de hidr3geno). Esto implica un periodo de reionizaci3n del hidr3geno del Universo.

Los fotones del CMB se esparcen debido a las cargas libres como electrones que no están ligados a átomos. En un Universo ionizado, tales electrones han sido liberados de átomos neutros por radiación ionizante (ultravioleta). En el presente, estas cargas libres son de una densidad suficientemente baja para no afectar las mediciones del CMB. Sin embargo, si el IGM fue ionizado en tiempos muy tempranos cuando el Universo era muy denso, entonces habría dos efectos principales en el CMB:

1. Las anisotropías a pequeña escala son eliminadas (como cuando se observa un objeto a través de la niebla, los detalles del objeto aparecen difusos).
2. La física del cómo los fotones se esparcen en electrones libres (Difusión Thomson) induce a la polarización de las anisotropías en grandes escalas angulares, que está correlacionada con la perturbación de temperatura en gran escala angular.

Estos dos efectos han sido observados por el satélite WMAP, proporcionando pruebas de que el Universo fue ionizado en tiempos muy primigenios, con un corrimiento al rojo de más de 17. El origen de esta radiación ionizante temprana continúa siendo debatida por los científicos.

Otros efectos que ocurren entre la reionización y nuestra observación del CMB, dando lugar a las anisotropías, son el efecto Sunyaev-Zel'dovich, en el que una nube de electrones de alta energía dispersa la radiación, transfiriendo alguna energía a los fotones del CMB, por otro lado tenemos el efecto Sachs-Wolfe (ver capítulo 6), que causa que los fotones del fondo de radiación de microondas estén gravitacionalmente desplazados hacia el rojo o hacia el azul debidos a evolución de los campos gravitacionales.

2.2.3. Descomposición armónica

Matemáticamente podemos describir la CMB como una distribución de radiación sobre la superficie de una esfera (vista desde dentro), la cual esta

caracterizada como una distribuci3n de temperatura:

$$T(\hat{n}) = T_0 + \Delta T(\hat{n}) = T_0 \left[1 + \frac{\Delta T}{T_0}(\hat{n}) \right] \quad (2.21)$$

que se presenta como funci3n de la direcci3n angular \hat{n} en el cielo. Estamos interesados en las fluctuaciones relativas $\frac{\Delta T}{T_0}$ (que identificamos con las anisotropías), adem3s definimos que su valor medio es cero. Las fluctuaciones pueden representarse mediante un mapa en la esfera celeste. Sin embargo los modelos actuales solo predicen la estadística de las fluctuaciones, no su distribuci3n exacta, es por ello que usamos una descomposici3n arm3nica para comparar las observaciones con las fluctuaciones del modelo.

Los experimentos nos permiten medir la intensidad de la CMB como funci3n de la frecuencia y de la direcci3n en el cielo \hat{n} , es decir esta observable esta dada como $\Theta(\hat{n}) = \frac{\Delta T}{T_0}$. Conviene en este punto asumir que las fluctuaciones son gaussianas escribiendolas en t3rminos de sus momentos multipolares

$$a_{lm} = \int d\hat{n} Y_{lm}^*(\hat{n}) \Theta(\hat{n}) \quad (2.22)$$

donde Y_{lm} son los arm3nicos esf3ricos, adem3s la potencia espectral est3 dada por

$$\langle a_{lm}^* a_{l'm'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l \quad (2.23)$$

cuyos valores como funci3n de l son independientes de una medici3n hecha. En pequeñas secciones del espacio donde la curvatura puede ser despreciada, el an3lisis de los arm3nicos esf3ricos se simplifica al an3lisis de Fourier en dos dimensiones. En este l3mite l corresponde con el n3mero de onda de Fourier. La escala angular se aproxima como $\theta \sim \frac{\pi}{l}$, de donde vemos que momentos multipolares grandes corresponden a escalas angulares pequeñas⁷

⁷Es por esto que el monopolo corresponde a la temperatura isotr3pica de la CMB mientras que la componente dipolar corresponde a un corrimiento de tipo Doppler debido al movimiento relativo entre la fuente (3ltima superficie de dispersi3n) y del observador.

en particular aquellas del orden de $l \sim 10^2$. En este límite la variación de la temperatura es $\int \frac{d^2l C_l}{(2\pi)^2}$ con lo que podemos definir la potencia espectral como

$$\Delta_T^2 \equiv \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l T_0^2. \quad (2.24)$$

Podemos expandir $\frac{\Delta T}{T_0}$ en términos de armónicos esféricos

$$\frac{\Delta T}{T_0}(\hat{n}) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} a_{lm} Y_{lm}(\hat{n}), \quad (2.25)$$

nótese que no hemos incluido los términos $l = 0$, $l = 1$ que corresponden al monopolo y al dipolo respectivamente, con lo que sólo estamos considerando las anisotropías en escalas menores de 90° . Recordemos que para $l = 2$ tenemos $\theta \sim \frac{\pi}{2}$, además los coeficientes a_{lm} están dados por (2.22) y nos dan información de la intensidad del modo l, m correspondiente a $Y_{lm}(\hat{n})$ y determinan completamente la estadística de $\frac{\Delta T}{T_0}$. Recordemos que los armónicos esféricos cumplen la condición de normalización

$$\int d\Omega Y_{lm} Y_{l'm'} = \delta_{mm'} \delta_{ll'} \quad (2.26)$$

que se integra sobre toda la esfera celeste. Para estadísticas gaussianas, como hemos definido la del CMB, los coeficientes son independientes de la orientación (independientes de m), esto es los coeficientes relativos para cada modo l son

$$C_l = \langle |a_l|^2 \rangle \equiv a_l^2 \equiv \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{m=l} |a_{lm}|^2. \quad (2.27)$$

La desviación cuadrática media del momento multipolar para el modo l está dada por

$$\sigma_{Tl}^2 = \frac{\Delta T_l^2}{T_0^2} = \frac{2l+1}{4\pi} C_l, \quad (2.28)$$

de donde podemos obtener una desviación “total”, independiente de l , para las fluctuaciones de la temperatura como

$$\sigma_{\frac{\Delta T}{T_0}}^2 = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} C_l. \quad (2.29)$$

Sin embargo, los resultados observacionales se expresan usualmente en términos de la variancia por intervalo logarítmico del espacio angular [15] dada por

$$\delta T_l^2 \equiv \frac{l(2l+1)}{4\pi} C_l. \quad (2.30)$$

Como hemos evitado los valores $l = 0$ y $l = 1$ tomemos la variación [ec. (2.28)] para el término del cuadrupolo (Q), esto es para $l = 2$,

$$Q_{rms}^2 = (\Delta T_2)^2 = T_0^2 \sigma_{T,2}^2 = \frac{5a_2^2}{4\pi} T_0^2. \quad (2.31)$$

De acuerdo con Smoot et al. [96] las mediciones de COBE indican aproximadamente $Q_{rms} = 10.7 \mu K$. Una alta resolución permite obtener modos de multipolos mayores (l grandes). Por ejemplo un ángulo de 5° puede proporcionar información acerca de los primeros 10-20 multipolos. Los valores de los coeficientes a_l pueden predecirse mediante los modelos de formación de estructura ([30], [40]).

2.3. Inflación

La inflación cósmica es la idea (propuesta inicialmente por Alan Guth en (1981) [37]) de que el universo naciente pasó por una fase de expansión exponencial, que fue producida por una densidad de energía del vacío de presión negativa. La inflación cósmica tiene el efecto importante de resolver heterogeneidades, anisotropía y la curvatura del espacio. Esto pone al Universo en un estado muy simple, en el que está completamente dominado por el campo

inflatón y las únicas heterogeneidades significativas son las débiles fluctuaciones cuánticas en el inflatón. La inflación también diluye partículas pesadas exóticas, como los monopolos magnéticos predichos por muchas extensiones del modelo estándar de física de partículas. Algunos de los problemas del modelo estándar que resuelve la inflación, siguiendo el enfoque de Liddle y Lyth [50], son las siguientes:

2.3.1. Problema de planitud

Podemos escribir la ecuación de Friedman en términos del parámetro de densidad⁸ como:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \quad (2.32)$$

si el Universo es plano ($\Omega = 1$), permanece plano todo el tiempo, de otra forma el parámetro de densidad evoluciona. El problema de planitud radica en que durante las épocas de dominación de radiación o de materia, la combinación aH es una función decreciente del tiempo⁹. Por ejemplo en un Universo casi plano dominado por materia tenemos que $|1 - \Omega| \propto t^{2/3}$ y para un Universo casi plano dominado por radiación tenemos que $|1 - \Omega| \propto t$. Sabemos observacionalmente que en el presente Ω_0 no es muy diferente de la unidad, lo que implica que en el pasado debió ser mucho más cercano a 1. Para obtener el Universo presente se requiere que, por ejemplo durante la nucleosíntesis cuando el Universo tenía un segundo de edad, se cumpla

$$|\Omega(t_{nuc}) - 1| \lesssim 10^{-16} \quad (2.33)$$

El problema de planitud implica que dicha relación, para alguna condición inicial, parece poco probable. Casi cualquier condición inicial lleva a un Universo cerrado que reollapse casi inmediatamente o a un Universo abierto que

⁸Dividimos la ec. 2.5 entre ρ_c , ignorando la constante cosmológica, y despejamos Ω definido en la sección 2.1.2, recordemos que $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi\rho}{3H^2}$.

⁹Hemos visto como $a \sim t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}$.

entra rápidamente a un régimen dominado por la curvatura y se enfría a una temperatura menor a 3 K en el primer segundo de su existencia.

2.3.2. Problema del Horizonte

La distancia comóvil en la cual las interacciones pueden ocurrir, antes de la última superficie de dispersión, es aproximadamente $180\Omega_0^{-1/2}h^{-1}\text{Mpc}$ que es considerablemente menor a la distancia comóvil que la radiación viaja después del desacople ($5820h^{-1}\text{Mpc}$ en un Universo plano).

Esto significa que las microondas provenientes de regiones separadas más que la escala del horizonte en la última dispersión, que típicamente subtiende un grado, no pudo haber interactuado antes del desacople. El modelo del Big Bang Caliente no ofrece ninguna propuesta para explicar por que la temperatura observada en distintas regiones del cielo coincide tan exactamente. La homogeneidad debe entonces formar parte de las condiciones iniciales.

Una situación similar ocurre en la nucleosíntesis: para preservar el éxito de la teoría estándar, el Universo debe ser homogéneo en escalas mucho mayores que el tamaño del horizonte en ese tiempo; si hubieron fluctuaciones en la densidad de punto a punto entonces, por la no linealidad del proceso de nucleosíntesis, los valores observados actualmente no se reproducirían cuando todas las regiones separadas se ponen juntas.

2.3.3. Reliquias no-deseadas

Si el Big Bang caliente inicia en una muy alta temperatura, reliquias prohibidas por la observación pueden sobrevivir en el presente. Quizá la reliquia más problemática, desde el punto de vista moderno, es el gravitino. Esta partícula ocurre en la supergravedad como la compañera de spin 3/2 del gravitón, y solo interactúa gravitacionalmente. En la mayoría de versiones de la supergravedad, la masa del gravitino es del orden de 100 GeV, en cuyo caso la nucleosíntesis tiene problemas si el Big Bang Caliente se da antes de

$T \gtrsim 10^9$ GeV (Ellis et al. 1986 [27]).

Otro tipo de reliquia problemática comprende en la teoría de supercuerdas (de Carlos et al. 1993 [22]; Banks et al. 1994 [4]), una sobreproducción de partículas de spin 0 en el Universo temprano, correspondientes a campos que parametrizan el vacío en la ausencia de rompimiento de supersimetría. Sus masas y tiempos de vida son típicamente del mismo orden que las del gravitino pero al estar asociados a campos escalares, es más probable dicha sobreproducción.

Dependiendo de la teoría, pueden también haber algunos defectos topológicos no deseados (Vilenkin and Shellard 1994 [102], Hindmarsh y Kibble 1995 [39]). Si se restaura la simetría de una Teoría de Unificación en el Universo temprano, los monopolos magnéticos se producen al momento de su rompimiento espontáneo, su abundancia es típicamente mayor de lo que las observaciones permiten, a menos que estén conectadas por cuerdas. Históricamente deshacerse de monopolos no deseados fue una de las motivaciones de la inflación.

2.3.4. Homogeneidad e isotropía

Del problema del horizonte hemos concluido que la homogeneidad e isotropía del Universo deben ser parte de las condiciones iniciales, sin embargo, en la práctica sabemos que el Universo no es perfectamente homogéneo, aunque a grandes escalas lo aparenta. Una pregunta vital es si podemos desarrollar una teoría del origen de la inhomogeneidad, o si la explicación de la inhomogeneidad esta relacionada con la elección de las condiciones iniciales.

En el modelo del Big Bang caliente, la situación no se ha aclarado. La interpretación más sencilla de las anisotropías en el CMB observadas por COBE es que corresponden a irregularidades en la superficie de última dispersión. Su escala de correspondencia es por tanto mucho mayor que el horizonte en esa época. Con el modelo del Big Bang caliente, esas perturbaciones no pueden generarse causalmente y nuevamente deberán ser parte de las condiciones

iniciales (Hu et al. 1994b [43]; Liddle 1995 [53]). Sin embargo, es posible que estas anisotropías se generen por efectos gravitacionales más próximos a nosotros que la última dispersión; como ocurre por ejemplo en teorías de defectos topológicos para la formación de estructura.

Entonces la teoría de Big Bang caliente no puede explicar la homogeneidad del Universo a gran escala, puede que explique la generación de inhomogeneidades pero lo más lógico es ir más allá del modelo estándar.

En el marco del modelo inflacionario, las inhomogeneidades y anisotropías son producidas por fluctuaciones cuánticas del inflatón [74]. Dichas fluctuaciones son las semillas que generan las perturbaciones clásicas que originan las variaciones de temperatura y densidad del Universo.

2.3.5. Inflación como campo escalar

Para obtener la inflación, necesitamos un material con la propiedad inusual de ejercer una presión negativa. Dicho material es un campo escalar, que describe a partículas escalares (spin 0). Hasta ahora, sin embargo, no ha habido ninguna observación directa de dicha partícula escalar fundamental (por ejemplo el Higgs [38]). Estas proliferan en las teorías modernas y tienen un papel crucial en el rompimiento de simetría entre las fuerzas fundamentales.

Los campos escalares fueron introducidos por los físicos de partículas mucho antes que en la cosmología aparecieran como tema, pero fueron retomados por la comunidad cosmológica por el rango de fenómenos interesantes en el que pueden intervenir. La cosmología inflacionaria es una de las áreas en que juegan un rol vital ya que poseen la inusual característica de un potencial que produce un corrimiento de la luz extremadamente lento mientras el Universo se expande. Esto corresponde a una ecuación de estado efectiva con presión negativa que es exactamente lo que necesitamos para la inflación. El campo escalar responsable de la inflación es usualmente conocido como inflatón.

Podemos especificar la teoría de la cual obtenemos las ecuaciones de

movimiento en términos del lagrangiano

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi} R - \frac{1}{2} g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - V(\phi) \right] \quad (2.34)$$

que acopla al campo escalar con la gravedad; $V(\phi)$ es el potencial del campo escalar. Para diferentes modelos inflacionarios corresponden distintas elecciones del potencial. Por ahora adoptaremos las expresiones para la densidad de energía y presión para un campo escalar homogéneo, i. e. $\phi \equiv \phi(t)$;

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (2.35)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (2.36)$$

notemos que aunque el campo escalar actúa como un fluido perfecto, no posee una ecuación de estado que relacione p_ϕ con ρ_ϕ , ya que la misma densidad de energía puede corresponder a distintos valores de la presión si se distribuye de forma distinta entre los términos potencial y cinético.

Las ecuaciones de movimiento pueden obtenerse directamente sustituyendo en la ecuación de Friedman y de continuidad, ecs. (2.5) y (2.8) respectivamente. En un Universo espacialmente plano con $\Lambda = 0$ obtenemos

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \left[V(\phi) + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \right] \quad y \quad (2.37)$$

$$\square\phi = \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi} \quad (2.38)$$

que se conoce como ecuación de la onda escalar. Con la forma que tienen la densidad de energía y la presión efectiva se satisface la condición para la inflación, si $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$. Una vez que la inflación comienza, entonces el término de curvatura de la ecuación de Friedman pierde rápidamente importancia, es por eso que normalmente se asume que no interviene desde el inicio.

La técnica estándar para analizar la inflación es la aproximación de “slow-

roll”, en la cual despreciamos el último término en la ec. (2.37) y el primer término de ec. (2.38) dejando:

$$H^2 \simeq \frac{8\pi}{3}V(\phi) \quad \text{y} \quad (2.39)$$

$$3H\dot{\phi} \simeq -V' \quad (2.40)$$

donde la prima implica derivación con respecto al campo escalar ϕ . Para que esta aproximación sea válida se requieren dos condiciones. Estas son

$$\epsilon(\phi) \ll 1, \quad |\eta(\phi)| \ll 1 \quad (2.41)$$

donde los parámetros de “slow-roll” se definen por (Liddle and Lyth 1992 [51], 1993 [52])

$$\epsilon(\phi) = \frac{1}{16\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \quad (2.42)$$

$$\eta(\phi) = \frac{1}{8\pi} \frac{V''}{V}, \quad (2.43)$$

notese que ϵ es positivo definido. Los parámetros de “slow-roll” resultan ser útiles en cuantificar las predicciones de inflación, sin embargo estas condiciones (2.41) no son suficientes, ya que solo restringen la forma del potencial y como la ec. (2.38) es de segundo orden, el valor de $\dot{\phi}$ puede elegirse libremente. En particular puede ser tal que viole la aproximación de “slow-roll”.

Prácticamente buscamos que se satisfagan las ecs. (2.40) y (2.41), la ec. (2.39) es una condición de la ec. (2.40) y $\epsilon \ll 1$. Sólo para algunas elecciones sencillas de potenciales se puede resolver exactamente la evolución del campo escalar, pero para las ecuaciones de “slow-roll” es fácil encontrar soluciones.

La aproximación de “slow-roll” es suficiente para que haya inflación, para ver esto reescribimos la condición de inflación (2.41) como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 > 0 \quad (2.44)$$

que se satisface automáticamente si \dot{H} es positiva o si $-\frac{\dot{H}}{H^2} < 1$. Sustituyendo las ecuaciones de “slow-roll” obtenemos

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq \frac{1}{16\pi} \left(\frac{V'}{V}\right)^2 = \epsilon \quad (2.45)$$

con lo que la aproximación de “slow-roll” es válida ($\epsilon \ll 1$) y se garantiza la inflación.

Esta condición es suficiente pero no necesaria, ya que la validez de la aproximación de “slow-roll” se requiere en su derivación, por lo cual es posible tener inflación aunque dicha aproximación se viole, en tal caso la cantidad de inflación sería poca.

Un modelo inflacionario consiste de un potencial y un modo de detener la inflación [50] que da lugar al Universo actual observado. Una forma de hacer esto es con la violación de las condiciones de “slow-roll” es decir, cuando el campo se aproxima a un mínimo con energía potencial despreciable o cero. En estos casos, se puede asumir que la inflación llega a su fin cuando $\epsilon(\phi)$ alcanza la unidad, con lo que directamente podemos despejar el valor de ϕ necesario para que termine la inflación. En modelos de inflación híbrida hay física extra que interviene al final de la inflación que puede detenerse aunque las condiciones de “slow-roll” se cumplan ([9], [11], [54]).

En la misma época de que Guth [37] propusiera su modelo inflacionario para resolver los problemas mencionados en esta sección, algunos otros se anticiparon a algunas de sus ideas. Starobinsky [100], propuso que correcciones cuánticas de la gravedad podrían reemplazar la singularidad inicial del Universo por una fase de crecimiento exponencial. Kazanas [48] por su parte sugirió que una expansión exponencial podría eliminar el problema del horizonte, mientras que Sato y Einhorn propusieron que dicha expansión podría eliminar las “domain walls” (otra reliquia no-deseada)[90] y resolver la abundancia de los monopolos [25].

Capítulo 3

Teorías escalares-tensoriales de la gravitación

La Teoría General de la Relatividad de Einstein describe al espacio-tiempo como una variedad diferencial 4-dimensional con curvatura. Donde dicha curvatura esta relacionada con el tensor de energía-momento de la materia presente en el espacio tiempo mediante las ecuaciones de campo de Einstein. La Relatividad General logró impresionantes predicciones en el siglo XX, entre las que contamos la desviación de la luz en presencia de campos gravitacionales intensos y la corrección al cálculo del perihelio de Mercurio. Sin embargo, como se mencionó en la introducción, se desconoce si la GR es la teoría de la gravitación más completa. Es decir, se requiere explicar el origen y naturaleza de la energía y materia oscura, o bien si es necesario modificar la GR con el fin de explicar todas las observaciones sin necesidad de un tipo exótico de materia, esto en el contexto antes mencionado del problema de la materia y energía oscura, asociadas a las observaciones relativas a la dinámica de galaxias y cúmulos, así como a la expansión acelerada del Universo.

Con el afán de poder explicar el Universo y sus orígenes, así como de tener un modelo con fuerte poder de predicción, surgieron desde distintas perspectivas varias opciones para reemplazar a la RG como Einstein la había

pensado. Entre ellas las llamadas Teorías Escalares-Tensoriales (STT). Estas teorías tienen la particularidad de acoplar no mínimamente un campo escalar a la curvatura del espacio-tiempo. El término escalar-tensorial fue usado por primera vez por Jordan.

3.1. Contexto histórico¹

La base fundamental de la GR es un campo tensorial métrico, por esto la teoría puede ser llamada “teoría tensorial”. Sin embargo “teorías escalares”, en particular aquella formulada por G. Nordström ([64], [65]), resultaban serios competidores de la teoría de Einstein. La teoría de G. Nordström que carecía de fundamentación geométrica, fue de hecho descartada a principios de la segunda década del siglo XX.

Después de la publicación de la Relatividad General de Einstein y Hilbert, Theodor Kaluza [47] y Oskar Klein [49] propusieron una generalización en una variedad 5 dimensional (la teoría Kaluza-Klein). Esta teoría posee una métrica 5 dimensional (donde la componente g_{55} aparece como un campo escalar) y unifica la gravitación y el electromagnetismo. Es decir, propone una geometrización de la electrodinámica. Esta teoría fue modificada por P. Jordan en 1955 en su teoría de Relatividad Proyectiva [46], en donde se obtiene una constante gravitacional variable G , también de acuerdo con las ideas de Dirac. La teoría de Jordan, es equivalente a la teoría de C. Brans y R. Dicke de 1961 [13], por lo que usualmente se habla de la teoría de Jordan-Brans-Dicke (JBD).

La teoría de Brans-Dicke sigue de la idea de modificar la teoría de Hilbert-Einstein para ser compatible con el principio de Mach², para esto la constante

¹Hemos tomado la cronología y parte de la discusión del artículo “Scalar-Tensor Theory” de www.wikipedia.org.

²Expresado por primera vez por el físico Ernst Mach (1893) y establece que: La inercia de cualquier sistema es el resultado de su interacción con el resto del Universo. En otras palabras, cada partícula del Universo ejerce una influencia sobre todas las demás partículas.

newtoniana de la gravitación debía ser variable, dependiente de la distribución de masa en el Universo y como función de una variable escalar acoplada como un campo en el lagrangiano. Esta teoría usa un campo escalar de largo alcance, con lo cual de acuerdo a la teoría de Yukawa de la física nuclear, se dice que este campo es un campo sin masa. Esta teoría se reduce a la GR para grandes valores de un cierto parámetro del campo escalar. En 1979, R. Wagoner [103] propuso una generalización de las STT usando más de un campo escalar acoplado a la curvatura. Cabe mencionar que las teorías JBD no cambian la ecuación geodésica para partículas de prueba, ver apéndice A.

Las teorías del tipo JBD con campos escalares de corto alcance usan, de acuerdo a la teoría de Yukawa, campos escalares masivos. La primera de estas teorías fué propuesta en 1979 por A. Zee [111]. Quien propuso una teoría de la Gravitación donde combina la idea de Brans y Dicke con una ruptura de simetría espontánea, que esencialmente forma parte del modelo estándar de partículas elementales, donde dicha ruptura de simetría conduce a la generación de masa (como consecuencia de partículas interactuando con el campo de Higgs). Zee propone que el campo de Higgs del modelo estándar es el que genera la constante gravitacional.

Para un campo escalar nulo, las STT usualmente se reducen a la GR y en el caso contrario (no nulo) los parámetros de la teoría deben ser tales que todos los éxitos experimentales de la GR se satisfagan. Sin embargo, no es claro todavía cuales de estos modelos explican mejor la fenomenología observada en la naturaleza. Las teorías JBD se han utilizado para explicar la inflación posterior al Big Bang, así como la expansión acelerada del Universo actual. Como ya hemos mencionado, las STT son una alternativa para explicar algunos de los problemas asociados con la materia y energía oscura.

3.2. Generalidades de las STT

La representación de la STT con un sólo campo escalar en el llamado marco de Jordan está dada por la acción general

$$S[g_{ab}, \phi, \psi] = \int \left\{ \frac{F(\phi)}{16\pi G_0} R - \left(\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right) \right\} \sqrt{-g} d^4x + S_{\text{matt}}[g_{ab}, \psi] \quad (3.1)$$

para la cual se han utilizado unidades en que $c = 1$ además que ψ representa esquemáticamente a todos los campos de materia distintos de ϕ . Las ecuaciones obtenidas de esta acción son

$$G_{ab} = 8\pi G_0 T_{ab}, \quad (3.2)$$

$$\square\phi + \frac{1}{2} f' R = V' \quad (3.3)$$

donde $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$ como en GR, $f(\phi) \equiv \frac{F(\phi)}{8\pi G_0}$ y T_{ab} puede ser escrito como una combinación de varias contribuciones, es decir

$$T_{ab} \equiv \frac{1}{F(\phi)} \left(T_{ab}^f + T_{ab}^\phi + T_{ab}^{\text{matt}} \right) \quad (3.4)$$

donde de acuerdo con [88] se define explícitamente:

$$T_{ab}^f \equiv \nabla_a (f' \nabla_b \phi) - g_{ab} \nabla_c (f' \nabla^c \phi), \quad (3.5)$$

$$T_{ab}^\phi \equiv (\nabla_a \phi)(\nabla_b \phi) - g_{ab} \left[\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right], \quad (3.6)$$

mientras que T_{ab}^{matt} dependerá de la materia presente en el espacio-tiempo [usualmente se modela como un fluido perfecto, i. e. de la forma de (2.4)].

Recordemos que la ec. (3.2) en realidad son 10 ecuaciones y se obtienen al tomar la variación respecto al tensor g_{ab} mientras (3.3) corresponde a la ecuación de Klein-Gordon del campo escalar, a partir de la cual podemos

escribir (para detalles ver [88])

$$\square\phi = \frac{fV' - 2f'V - \frac{1}{2}f'(1 + 3f'')(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}f'T_{matt}}{f(1 + \frac{3f'^2}{2f})} \quad (3.7)$$

Mientras que la conservación del tensor de energía-momento se expresa (ver apéndice A de donde vemos que T^ϕ y T^f no se conservan independientemente y además $\nabla_c \left[\frac{1}{f} (T^{\phi ca} + T^{f ca}) \right] = -T_{matt}^{ca} \nabla_c \left(\frac{1}{f} \right)$)

$$\nabla_c T_{matt}^{ca} = 0, \quad (3.8)$$

lo cual implica que el movimiento de partículas de prueba se lleva a cabo sobre geodésicas de la métrica física (partículas en caída libre), i. e., se cumple el Principio de Equivalencia Débil de Einstein (WEP).

3.2.1. Marco Conforme de Einstein

Generalmente buscamos que el campo escalar no se acople directamente con la materia, esto para evitar violaciones al Principio de Equivalencia. Sin embargo, un estudio reciente de modelos tensor-escalar basados en teorías de cuerdas resulta en efectos de dependencia de la composición, representados por una pequeña fracción ($\sim 10^{-5}$) del acople efectivo con la materia. Dichos efectos de dependencia han sido despreciados en el estudio de la física de las estrellas de neutrones [21].

La teoría más general que describe el acoplamiento con la materia de largo alcance esta definida por la acción:

$$S[g_{ab}^*, \phi^*, \psi] = \frac{1}{16\pi G_0} \int [R^* - 2(\nabla^* \phi^*)^2 - 4W(\phi^*)] \sqrt{-g^*} d^4x + S_{matt}[g^*/F^*(\phi^*), \psi] \quad (3.9)$$

Esta define la teoría escalar-tensorial en el marco de Einstein, la cual se

relaciona con la acción en el marco de Jordan de acuerdo a la transformación

$$g_{ab}^* \equiv F(\phi)g_{ab}, \quad (3.10)$$

$$\phi^* \equiv \int \left[\frac{3}{4} \left(\frac{F'}{F} \right)^2 + \frac{4\pi G_0}{F(\phi)} \right]^{1/2} d\phi, \quad (3.11)$$

$$W(\phi^*) \equiv \frac{4\pi G_0 V(\phi)}{F^2}, \quad (3.12)$$

$$F^*(\phi^*) = F(\phi) \quad (3.13)$$

notemos que las cantidades con ‘*’ se calculan en la métrica no física g_{ab}^* ; el último término de la ec. (3.9) denota la acción de la materia, sin embargo vemos como a diferencia de ec. (3.1) esta acción depende de ϕ^* a través de la función de acople $F^*(\phi^*)$. Podemos escribir las ecuaciones de campo de acuerdo con [110]

$$R_{ab}^* - \frac{1}{2}R^*g_{ab}^* = 8\pi G_0 T_{ab}^* + T_{ab}^{\phi^*}, \quad (3.14)$$

$$\square_{g^*}\phi^* = -4\pi G_0 \alpha(\phi^*)T^* + \frac{dW(\phi^*)}{d\phi^*}, \quad (3.15)$$

donde $T_{ab}^{\phi^*} = 2\partial_a\phi^*\partial_b\phi^* - g_{ab}^*(\nabla^*\phi^*)^2 - 2g_{ab}^*W(\phi^*)$ es el tensor de energía-momento asociado al campo ϕ^* y $T_*^{ab} \equiv 2g_*^{-1/2} \frac{\delta S_{matt}}{\delta g_{ab}^*}$ denota el tensor de energía-momento de la materia en “unidades de Einstein” y $\alpha(\phi)$ es la derivada logarítmica de $F(\phi)$

$$\alpha(\phi^*) \equiv \frac{\partial \ln F^*(\phi^*)}{\partial \phi^*}. \quad (3.16)$$

La cantidad $\alpha(\phi^*)$ juega el papel de medir la fuerza del acople (dependencia del campo) entre el campo escalar y la materia, además todas las variaciones de campo débil “post-newtonianas” de la GR pueden expresarse en términos del valor asintótico de $\alpha(\phi^*)$ en el infinito espacial y sus derivadas subsecuentes respecto de ϕ^* .

Podemos ver que en particular la ec. (3.15) es más sencilla que la ec.

(3.7). Además en las ecs. (3.14) aparece el campo ϕ^* acoplado mínimamente a la métrica g_{ab}^* a diferencia de las ecuaciones en el marco de Jordan (3.2) que escribiremos explícitamente más adelante. Por otro lado, en el marco de Einstein las expresiones de la materia tendrán fuentes (i. e. $\nabla_c^* T_{\text{matt}}^{*ab} \neq 0$), es decir no hay conservación del tensor de energía-momento en este marco, a diferencia del marco de Jordan (ver apéndice A). Esto a su vez implica que las partículas de “prueba” asociadas con T^* no siguen la geodésica de la métrica g_{ab}^*

3.2.2. Predicciones teóricas de las STT

Hemos mencionado brevemente en la introducción la importancia de las predicciones de las STT y como estas resultan una ventaja teórica sobre otros modelos que en general se limitan a buscar coincidencias con las observaciones. Entre las predicciones más importantes (distintas a las de la GR mencionadas en la introducción) podemos citar:

Polarización de las ondas gravitacionales

La detección de ondas gravitacionales podría resultar una útil herramienta para discriminar entre la GR y otras teorías alternativas. Un arreglo de detectores podría distinguir entre modos tensoriales sin masa de spin 2 (los únicos modos presentes en la GR) y modos de distinto spin, en particular los modos de spin cero presentes en las STT de la gravitación.

De acuerdo a la astrofísica relacionada a la generación de ondas gravitacionales, la radiación gravitacional escalar puede ser radiación debida a un monopolo a orden más bajo, en contraste con la radiación de cuadrupolo predicha por el orden más bajo en la teoría de Einstein. Nos limitaremos a discutir las ondas gravitacionales en el marco de Jordan, que es el más usado en este trabajo y dejaremos al lector la revisión el marco de Einstein [29].

Matemáticamente las ondas gravitacionales surgen cuando se considera

el régimen lineal de la teoría de perturbaciones³ en un fondo plano y se elige una norma en la cual solo consideremos las perturbaciones tensoriales de la métrica identificadas con γ_{ab} , con lo que las ecuaciones de primer orden quedan escritas esquemáticamente como [86] (ver sección 4.1)

$$\square_h \gamma_{ab} = 8\pi \frac{G_0}{\overset{\circ}{F}} \left[(\tilde{S}_{\text{matt}} - \tilde{E}_{\text{matt}}) \overset{\circ}{h}_{ab} - 2\tilde{S}_{ab}^{\text{matt}} \right] - \frac{\overset{\circ}{F}'}{\overset{\circ}{F}} \overset{\circ}{h}_{ab} \square_h \tilde{\phi}, \quad (3.18)$$

$$\square_h \tilde{\phi} - m_0^2 \tilde{\phi} = 4\pi \mu \frac{\overset{\circ}{F}'}{\overset{\circ}{F}} \tilde{T}_{\text{matt}} \quad (3.19)$$

donde las cantidades con ‘ \circ ’ se miden respecto de la métrica en el fondo (sin perturbar) y las tildadas representan las perturbaciones, además se han definido las variables

$$m_0^2 \equiv \frac{V^{\circ''}}{1 + \frac{3\overset{\circ}{F}^{\prime 2}}{16\pi\overset{\circ}{F}G_0}}, \quad (3.20)$$

$$\mu \equiv \frac{1}{8\pi \left(1 + \frac{3\overset{\circ}{F}^{\prime 2}}{16\pi\overset{\circ}{F}G_0} \right)} \quad (3.21)$$

La ec. (3.18) es análoga a la que aparece en la GR y no tiene contribuciones dipolares, mientras que la ec. (3.19) representa el estado de polarización asociado a una contribución monopolar.

Escalarización espontánea de objetos compactos

Este efecto fue encontrado por primera vez por Damour y Esposito-Farèse [21], quienes mostraron que las STT pueden inducir efectos no perturbativos

³Para lo cual es usual escribir el elemento de línea como [62]:

$$ds^2 = (1 + \epsilon\tilde{\phi}) \left[-dt^2 + (\overset{\circ}{h}_{ij} + \epsilon\gamma_{ij}^{TT}) dx^i dx^j \right] \quad (3.17)$$

donde γ_{ij}^{TT} es la parte con traza nula y transversa ($\partial^i \gamma_{ij}^{TT} = 0$) de las perturbaciones de la métrica.

en las estrellas de neutrones (NS). Esto se traduce en transiciones de fase que proporciona a la estrella compacta una nueva cantidad global, la “carga” escalar, la cual es análoga a la magnetización de los ferromagnetos a bajas temperaturas y donde la densidad central de energía (o equivalentemente la masa bariónica) del objeto toma el papel de la temperatura en la magnetización espontánea. Se ha argumentado que esta propiedad lleva a la violación de la condición de energía débil (WEC) [105] debido a que los valores en la frontera de cada región para el campo escalar ϕ producen una influencia externa en la estructura de cada objeto compacto. De hecho la condición de frontera para ϕ se relaciona con el valor local de la constante gravitacional que afecta al objeto

$$G_{eff} = \frac{G_0}{F(\phi)}. \quad (3.22)$$

Sin embargo, Salgado et al. [87] han mostrado que esta violación de la WEC no es una propiedad general de todas las STT y muestran que al menos aquellas en las cuales $F(\phi) > 0$ y $\partial_{\phi\phi}^2 F > 0$ (i. e. $\rho_{eff} > 0$) la violación de la WEC ocurre solo después y en una región cercana a la superficie del objeto.

3.3. Cotas experimentales

Hasta ahora nuestro análisis se ha desarrollado de manera natural y puramente analítico. Sin embargo para expresar explícitamente la STT se requiere seleccionar una forma específica de f y V . En los subsecuente pretendemos aplicar teoría de perturbaciones con lo que en las ecuaciones aparecerán otras cantidades indeterminadas. Un análisis exacto resultará entonces de gran complejidad y/o poca relevancia mientras que un análisis numérico resultará más adecuado aunque también exhaustivo.

Por tal motivo en este punto es necesario buscar una correspondencia no solo con las observaciones cosmológicas sino también con los experimentos

de GR, con lo cual podremos acotar algunos de los parámetros libres en las ecuaciones e imponer condiciones más estrictas a los resultados.

El llamado parámetro de Brans-Dicke ω está definido como $\omega_{BD} = \frac{8\pi G_0 F(\phi)}{F'(\phi)^2}$ donde la teoría de BD corresponde a $\omega_{BD} = cte. = \omega$ y esta asociada a una STT con $F(\phi) = \frac{2\pi G_0 \phi^2}{\omega}$.

Salgado [85] se ha preocupado por el problema de coincidencia de la constante cosmológica, esto es que el universo en que vivimos pareciera resultado de muchas casualidades, en lugar de ser un atractor de un sistema dinámico con ciertas condiciones iniciales. Comparando la STT dada por $F(\phi) = 1 + 16\pi G_0 \xi \phi^2$ y $V(\phi) = m^2 \phi^2$ con los experimentos disponibles en el Sistema Solar se obtienen $\dot{\omega}_{BD} \geq 40\,000$ (del experimento Cassini-Huygens [8]). Por otro lado $\beta \equiv \left| \frac{\Delta G}{G \Delta t} \right| \leq 0.3$, que se puede reescribir para la constante efectiva G_{eff} [10] como

$$\left| \frac{\dot{G}_{eff}}{G_{eff}} \right| \leq 6 \times 10^{-12} \text{yr}^{-1} \quad (3.23)$$

mientras que del pulsar binario tenemos $\xi \leq 2.5$. Distintas observaciones pueden proporcionar cotas para $\left| \frac{\dot{G}_{eff}}{G_{eff}} \right|$ entre las más recientes encontramos las presentadas por Will [108] (2005), que corresponden a mediciones del alcance de láseres en la Luna y del alcance de radar en la Tierra, también las que corresponden a mediciones en el pulsar binario, por otro lado las obtenidas de estudios de evolución del Sol, estrellas y de la Tierra, de la nucleosíntesis del Big Bang y finalmente de análisis de datos de antiguos eclipses (ver cuadro 3.1)

A partir de estas cotas se obtienen valores consistentes de ϕ y $\dot{\phi}$ actuales con $m \sim 10^{-30} eV$ [79]. El modelo resultante da lugar una edad del Universo $\sim 6.54 h^{-1} \text{Gy}$ que resulta bajo para el intervalo de $h \in [0.5, 0.8]$, con $\Omega_{DE}^0 \sim 0.66$.

De acuerdo con Riazuelo y Uzan [79] las observaciones cosmológicas y astrofísicas más importantes para restringir los parámetros son la relación entre

Cuadro 3.1: Cotas para \dot{G}_{eff}/G_{eff} (10^{-13}yr^{-1})

Método	\dot{G}_{eff}/G_{eff}
Laseres Lunares	4 ± 9
Pulsar Binario 1913+16	40 ± 50
Heliosismología	0 ± 16
Nucleosíntesis del Big Bang	0 ± 4

luminosidad y corrimiento al rojo de las supernovas Ia, las anisotropías en la temperatura de la radiación cósmica de fondo y los experimentos de dispersión de la luz (weak lensing). De la necesidad de que el gravitón tenga energía positiva concluyen que una STT será posible solo si existe la transformación

$$\begin{aligned}
\hat{g}_{\mu\nu} &\equiv F(\phi)g_{\mu\nu}, \\
\left(\frac{d\hat{\phi}}{d\phi}\right)^2 &\equiv \frac{3}{4}\left(\frac{d\ln F(\phi)}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{2F(\phi)}, \\
A(\hat{\phi}) &\equiv F^{-1/2}(\phi), \\
2U(\hat{\phi}) &\equiv \frac{V(\phi)}{F^2(\phi)}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

con la restricción de que $F(\phi)$ debe ser positivo. Riazuelo y Uzan también acotan los parámetros post-newtonianos⁴ $|\gamma - 1| \leq 2 \times 10^{-3}$ y $|\beta - 1| \leq$

⁴En las STT el parámetro γ se puede definir en términos de la ω como

$$\gamma = \frac{1 + \omega}{2 + \omega}$$

mientras que el parámetro β se define como

$$\beta = 1 + \Lambda$$

donde Λ está dada en términos de ω

$$\Lambda \equiv \frac{\omega'}{(3 + 2\omega)^2(4 + 2\omega^2)}$$

6×10^{-4} .

Además buscamos que el contenido de materia se comporte como radiación en épocas tempranas y que los grados de libertad de las partículas relativistas g_* no varíe más del 20 % durante la época de nucleosíntesis esto es

$$\left| \frac{\delta g_*}{g_*} \right| \leq 0.2 \longleftrightarrow 0.8 \leq \left| \frac{F(\phi_0)}{F(\phi_{nuc})} \right| \leq 1.2 \quad (3.25)$$

3.4. Descomposición 3+1

A partir de este punto resultará útil considerar la formulación 3+1 de la GR y utilizar el mismo formalismo para descomponer las ecuaciones de la Teoría Escalar-Tensorial, esto con la finalidad de obtener un sistema de ecuaciones de primer orden en el tiempo y un conjunto de restricciones para las condiciones iniciales. El objetivo de este formalismo es escribir a la STT en forma de un problema de Cauchy.

Consideremos un espacio-tiempo (M, g_{ab}) y lo foliamos⁵ por una familia de hipersuperficies espaciales Σ_t (ver figura 3.1) parametrizadas por una función global t .

El procedimiento para separar las ecuaciones de Einstein consiste en proyectar los campos tensoriales en dirección ortogonal y paralela al campo vectorial unitario temporal n^a , (i. e. $n^a n_a = -1$), que es normal a Σ_t . La proyección sobre las hipersuperficies se define con el proyector

$$h_b^a = \delta_b^a + n^a n_b \quad (3.26)$$

que cuenta con la propiedad principal de ser idempotente, es decir $h_c^a h_b^c = h_b^a$.

en la cual la prima indica derivación respecto de ϕ , notemos que en particular para la teoría de Brans-Dicke $\Lambda \equiv 0$ [107].

⁵La foliación del espacio tiempo se realiza a partir de una de estas hipersuperficies Σ_t , en la cual se prescriben las condiciones iniciales que satisfacen las constricciones, a partir de ahí el espacio-tiempo queda foliado al hacer evolucionar dichas condiciones a través de un conjunto de ecuaciones de evolución para la hipersuperficie.

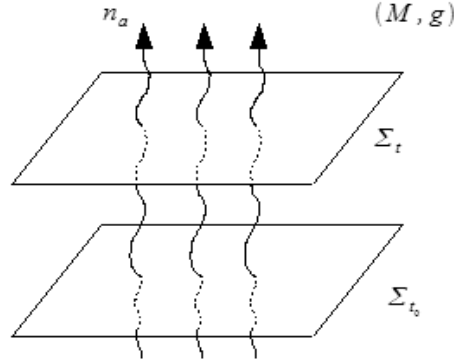


Figura 3.1: Foliación del espacio tiempo (M, g_{ab}) por una familia de hipersuperficies espaciales Σ_t ortogonales a n_a .

Podemos pues escribir la métrica más general bajo la descomposición 3+1

$$ds^2 = -(N^2 - N^i N_i) dt^2 - 2N_i dt dx^i + h_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.27)$$

donde $N > 0$ es la función “lapse”, h_{ij} es la 3-métrica inducida en la hipersuperficie y $n^a = \left(\frac{1}{N}, \frac{N^i}{N} \right)$, donde N^i es el vector “shift”, además se ha definido $n_a = (-N, 0) = -N \nabla t$.

Las ecuaciones de la Teoría Escalar-Tensorial en la descomposición 3+1 se obtienen proyectando las ecs. (3.1) tangencial y ortogonalmente, con h_b^a y n^a respectivamente, y utilizando las ecuaciones

$$R_{abcd} h_i^a h_j^b h_k^c h_l^d = {}^3 R_{ijkl} + K_{ik} K_{jl} - K_{il} K_{jk} \quad (3.28)$$

$$R_{abcd} n^a h_i^b h_j^c h_k^d = D_k K_{ij} - D_j K_{ik} \quad (3.29)$$

que son las ecuaciones de Gauss-Codazzi [77] para hipersuperficies espaciales, además las derivadas covariantes D_a son compatibles con la métrica inducida en las hipersuperficies (i. e. h_{ij}) y corresponden a la proyección espacial de

la derivada covariante ∇_a , esto es

$$D_e {}^3T^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m} = h_{c_1}^{a_1} \dots h_{c_n}^{a_n} h_{b_1}^{d_1} \dots h_{b_m}^{d_m} h_e^f \nabla_f {}^3T^{c_1 \dots c_n}_{d_1 \dots d_m} \quad (3.30)$$

donde ${}^3T^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m}$ es un tensor tangente a Σ_t

Por otro lado K_{ab} es la curvatura extrínseca de Σ_t

$$K_{ab} \equiv -\frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab} \quad (3.31)$$

donde \mathcal{L}_n es la derivada de Lie respecto de n^a .

Las expresiones resultantes de proyectar las ecuaciones de campo (3.2) son aquéllas obtenidas por J. W. York y Salgado [88], corresponden a la constricción hamiltoniana,

$$\begin{aligned} {}^3R + K^2 - K_{ij}K^{ij} - \frac{2}{f} \left[f'(D_l Q^l + K\Pi) + \frac{\Pi^2}{2} + \frac{Q^2}{2}(1 + 2f'') \right] \\ = \frac{2}{f} [E_{matt} + V(\phi)], \end{aligned} \quad (3.32)$$

y a las constricciones de momento

$$D_l K_i^l - D_i K + \frac{1}{f} [f'(K_i^l Q_l + D_i \Pi) + \Pi Q_i (1 + f'')] = \frac{1}{f} J_i^{matt}. \quad (3.33)$$

Las ecuaciones dinámicas de campo están dadas por

$$\begin{aligned} \partial_t K_j^i + N^l \partial_l K_j^i + K_j^i \partial_j N^l - K_j^l \partial_l N^i + D^i D_j N - {}^3R_j^i N - N K K_j^i \\ + \frac{N}{f} [Q^i Q_j (1 + f'') + f'(D^j Q_i + \Pi K_j^i)] - \frac{\delta_j^i N}{2f \left(1 + \frac{3f'^2}{2f}\right)} \times \\ (Q^2 - \Pi^2) \left(\frac{f'^2}{2f} - f'' \right) = -\frac{N}{2f \left(1 + \frac{3f''}{2f}\right)} \left\{ 2S_{matt}^i{}_j \left(1 + \frac{3f'^2}{2f}\right) \right. \\ \left. + \delta_j^i \left[f'V' + 2V \left(1 + \frac{f'^2}{2f}\right) - (S_{matt} - E_{matt}) \left(1 + \frac{f'^2}{f}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde K es la trazas de la curvatura extrínseca y las cantidades S_{matt} , E_{matt} y $S_j^i{}_{matt}$ están definidas en la ec. (3.44). Además tenemos la ecuación que corresponde a la evolución de la traza de la curvatura extrínseca K , que se obtiene al tomar la traza de (3.34) con h^{ij} y sustituir 3R en términos de la ecn. (3.32)

$$\begin{aligned}
& \partial_t K + N^l \partial_l K + {}^3 \Delta N - NK_{ij}K^{ij} - \frac{Nf'}{f}(D_l Q^l + \Pi K) \\
& - \frac{N}{f \left(1 + \frac{3f'}{2f}\right)} \left\{ \Pi^2 \left(1 + \frac{3f'^2}{4f} + \frac{3f''}{2}\right) + Q^2 \left[\frac{3f'^2}{4f}(1 + 2f'') - \frac{f''}{2}\right] \right\} \\
& = \frac{N}{2f \left(1 + \frac{3f'^2}{2f}\right)} \left\{ S_{matt} + E_{matt} \left(1 + \frac{3f'^2}{f}\right) - 2V \left(1 - \frac{3f'^2}{2f}\right) - 3f'V' \right\}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

por otro lado la ecuación de Klein-Gordon que corresponde a la evolución del campo escalar⁶

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_n \Pi - \Pi K - Q^c D_c [\ln N] - D_c Q^c \\
& = - \frac{f'V - 2f'V' - \frac{1}{2}f'(1 + 3f'')(Q^2 - \Pi^2) + \frac{1}{2}f'T_{matt}}{f \left(1 + \frac{3f'}{2f}\right)}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

donde por comodidad se han definido las cantidades

$$Q_a \equiv D_a \phi \tag{3.37}$$

$$\Pi \equiv \mathcal{L}_n \phi. \tag{3.38}$$

En este punto es importante remarcar que Π puede identificarse con el momento del campo escalar, mientras que las cantidades Q_a son análogas a los símbolos de Christoffel en 3 dimensiones en el sentido de que contienen

⁶Esta se ha obtenido al variar la acción respecto del campo escalar respecto de ϕ y sustituyendo los términos T_{ab}^f y T_ϕ dados por las ecs. (3.5) y (3.6).

derivadas espaciales de primer orden del campo escalar y cumplen

$$D_a Q_b = D_b Q_a \rightarrow D_{[a} Q_{b]} = 0 \quad (3.39)$$

que constituye una restricción sobre Q_a y sigue de la condición de integrabilidad para el campo escalar ϕ , $\partial_{ij}^2 \phi = \partial_{ji}^2 \phi$. Explícitamente Π y K_{ab} se calculan en términos del lapse, el shift, la 3-métrica y el campo escalar de acuerdo a

$$\Pi = n^a \nabla_a \phi = \frac{1}{N} (\partial_t \phi + N^i \partial_i \phi) \quad (3.40)$$

$$K_{ij} = -\nabla_i n_j = -\frac{1}{2N} \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} + 2D_{(i} N_{j)} \right). \quad (3.41)$$

donde la ec. (3.41) constituye una ecuación de evolución para h_{ij} mientras que ec. (3.40) representa la evolución de ϕ .

En nuestro tratamiento será necesario que se cumplan las ecuaciones de conservación de momento y energía $\nabla_a T_{matt}^{ab} = 0$, que proyectadas con h_b^a y n^a quedan en la descomposición 3+1 con la forma

$$\begin{aligned} \partial_t J_{matt}^i + N D_l S_{matt}^{li} &= J^l \partial_l N^i - N^l \partial_l J_{matt}^i \\ &+ N (2K_l^i + K \delta_l^i) J_{matt}^l - (S_{matt}^i{}_l + E_{matt} \delta_l^i) D_l N \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \partial_t E_{matt} + N^l \partial_l E_{matt} + N D_l J_{matt}^l \\ = N (S_{matt}^{ij} K_{ij} + E_{matt} K) - 2J_{matt}^l D_l N \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde hemos definido la descomposición 3+1 del tensor de energía-momento de los términos de materia independientes del campo escalar de acuerdo a

$$\begin{aligned} E_{matt} &= n_a n_b T_{matt}^{ab} \\ J_{matt}^a &= -h_b^a T_{matt}^{cb} n_c \\ S_{matt}^{ab} &= h_c^a h_d^b T_{matt}^{cd} \end{aligned} \quad (3.44)$$

mientras que $S_{matt} = h^{ij} S_{matt}{}_{ij}$ corresponde a la traza.

Soluciones numéricas a estas ecuaciones han sido obtenidas por Sotani y Kokkotas [98] para modelos estelares y perturbaciones del espacio-tiempo en el marco de Einstein sin potencial [$W(\phi) = 0$]. Por su lado Babusci et al. [2] han revisado la detección de ondas gravitacionales sin potencial, tomando en cuenta tanto el acople mínimo como el no-mínimo. Nucamendi y Salgado [67] han analizado los hoyos negros con cabello producido por el campo escalar acoplado no-mínimamente a la gravedad, seleccionando un potencial asimétrico que asintóticamente tiende a las soluciones planas.

3.4.1. Problema de Cauchy de las STT

Hemos mencionado en la introducción la importancia de que una teoría física cuente con un problema de valores iniciales bien planteado, en particular para las STT lo ha discutido Salgado [88]. Entonces una vez elegida una norma, que nos simplificará las ecuaciones y nos permitirá la identificación de observables físicas, debemos ser capaces de prescribir un conjunto de datos iniciales ($\Sigma_t, h_{ij}, K_{ij}, \phi, \Pi, Q_i$) que satisfagan las constricciones dadas (ecs. (3.32), (3.33), (3.39)) y hacer evolucionar h_{ij}, K_{ij}, ϕ y Π a través de las ecs. (3.34), (3.41), (3.36), (3.40) que corresponde a un sistema de ecuaciones de primer orden.

Sin embargo las ecuaciones (3.34), (3.41) en el vacío de la GR⁷ no están escritas en una forma adecuada para someterse a un análisis de hiperbolicidad⁸. Para hacer esto debemos de escribir el sistema para nuestras variables ($h_{ij}, K_{ij} \dots$) como un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de la forma

$$\partial_t \vec{u} + \mathbf{M}^i \nabla_i \vec{u} = \vec{S}(\vec{u}) \quad (3.45)$$

donde \vec{u} representa las variables del sistema, \mathbf{M}^i es la matriz característica del sistema y \vec{S} representa las fuentes en términos de variables fundamentales,

⁷Ausencia de campos de materia y campo escalar.

⁸La hiperbolicidad es deseada para garantizar la estabilidad numérica.

no de sus derivadas. Este sistema de PDE es quasi-lineal ya que es lineal en las derivadas pero en general no es lineal en \vec{u} . En cuanto a su hiperbolicidad puede ser

- Débilmente hiperbólico: si para un co-vector s_i , entonces $s_i \mathbf{M}^i$ tiene un conjunto de valores propios reales completo, pero no tiene un conjunto completo de vectores propios.
- Fuertemente hiperbólico: si $s_i \mathbf{M}^i$ tiene un conjunto de valores propios reales completos y un conjunto completo de vectores propios.
- Hiperbólicamente simétrico: si \mathbf{M}^i es simétrica.
- Hiperbólicamente simetrizable: si \mathbf{M}^i puede simetrizarse.

Es importante destacar que solo los tipos fuertemente hiperbólico, simétrico y simetrizable pueden tener un problema de Cauchy bien definido. Otra manera de mostrar que la teoría posee un problema de Cauchy bien planteado consiste en realizar un análisis de segundo orden el cual se realiza al reescribir las ecuaciones de evolución como un sistema de ecuaciones de onda quasi-lineales (QLWE), ecuaciones reducidas [3].

Claramente la parte que corresponde puramente al campo escalar es hiperbólica ya que la ecuación para el campo escalar ec.(3.7) es una ecuación de onda quasi-lineal. Utilizando ambos métodos (primer orden y segundo orden) se ha mostrado que las STT poseen un problema de Cauchy bien planteado [88] y [89].

3.5. Cosmología en STT

Consideremos el sistema de ecuaciones obtenidas en Sec. 3.4 para el caso de un espacio-tiempo isotrópico y homogéneo, (modelo de Friedman-Robertson-Walker (FRW)) cuyo elemento de línea esta dado por (2.1). Cal-

culamos las conexiones compatibles con la métrica inducida⁹ denotadas por ${}^3\Gamma_{jk}^i$ obteniendo que las expresiones no nulas son:

$$\begin{aligned} {}^3\Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1-kr^2}, \quad {}^3\Gamma_{22}^1 = -r(1-kr^2), \\ {}^3\Gamma_{33}^1 &= -r\sin^2(\theta)(1-kr^2), \quad {}^3\Gamma_{12}^2 = {}^3\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \\ {}^3\Gamma_{33}^2 &= -\sin(\theta)\cos(\theta), \quad {}^3\Gamma_{13}^3 = {}^3\Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \\ {}^3\Gamma_{23}^3 &= {}^3\Gamma_{32}^3 = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \end{aligned} \quad (3.46)$$

con las cuales podemos calcular directamente el tensor de Ricci (${}^3R_{ij} = {}^3\Gamma_{ij,k}^k - {}^3\Gamma_{kj,i}^k + {}^3\Gamma_{ij}^l {}^3\Gamma_{lm}^m - {}^3\Gamma_{mj}^l {}^3\Gamma_{li}^m$)

$${}^3R_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{2k}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2kr^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2kr^2\sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

y de donde al tomar la traza con h^{ij} obtenemos el escalar de curvatura de Ricci

$${}^3R = \frac{6k}{a^2(t)} \quad (3.48)$$

que solo depende de la curvatura k y del factor de escala $a(t)$.

Las simetrías de este espacio-tiempo implican que los campos dinámicos dependen únicamente del tiempo cósmico t . Estos campos dinámicos son la curvatura extrínseca (K_{ij}) y el campo escalar (ϕ). Dicha curvatura esta dada

⁹Las conexiones usadas se escriben de acuerdo a la notación dada por Wald [104] esto es

$$\Gamma_{jk}^i \equiv \frac{g^{il}}{2}(g_{lj,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l}).$$

de acuerdo a (3.41)

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{-a\dot{a}}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & -a\dot{a}r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a\dot{a}r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} = -H(t)h_{ij} \quad (3.49)$$

cuya traza dada por $K = h^{ij}K_{ij} = -3\frac{\dot{a}}{a} = -3H(t)$. Es claro que de acuerdo con la forma de (2.1) cualquier gradiente puramente espacial será idénticamente cero.

Con estas consideraciones podemos escribir nuestro sistema de ecuaciones que describe la evolución cosmológica en el marco de las STT, es decir las ecs. (3.32) y (3.35) se reducen respectivamente a:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{1}{3f} \left[E_{matt} + V(\phi) - 3f'H\Pi + \frac{\Pi^2}{2} \right], \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \dot{H} + H^2 - \frac{f'}{f}H\Pi = & -\frac{1}{6f \left(1 + \frac{3f'^2}{2f}\right)} \left\{ 2\Pi^2 \left(1 + \frac{3f'^2}{4f} + \frac{3f''}{2}\right) \right. \\ & \left. + S_{matt} + E_{matt} \left(1 + \frac{3f'^2}{f}\right) - 2V \left(1 - \frac{3f'^2}{2f}\right) - 3f'V' \right\} \end{aligned} \quad (3.51)$$

la primera de estas es la ecuación de Friedman generalizada para STT, la segunda gobierna la aceleración del Universo. Se ha omitido la ec. (3.33) por anularse completamente.

Por último consideramos la ecn. (3.36) la cual se reduce a:

$$\dot{\Pi} + 3H\Pi = -\frac{f'V - 2f'V + \frac{1}{2}f'(1 + 3f'')\Pi^2 + \frac{1}{2}f'T_{matt}}{f \left(1 + \frac{3f'}{2f}\right)} \quad (3.52)$$

donde Π esta dado en correspondencia con (3.38) por

$$\Pi = \dot{\phi}. \quad (3.53)$$

Hemos visto que la identidad de Bianchi garantiza la conservación del tensor de energía-momento de la materia (ver apéndice A) y de acuerdo con las ecuaciones de conservación de la descomposición 3+1, podemos suponer que la materia se comporta como un fluido perfecto, esto es $S_{matt} = 3p$, $E_{matt} = \rho$, que nos permite escribir la ec. (3.43) idénticamente como (2.8), mientras que la ec.(3.42) es idénticamente cero.

Resulta de gran importancia mencionar que las ecuaciones que antes hemos obtenido pueden reducirse a aquellas del modelo estándar (sección 2.1); para comparar nos basta suprimir todas aquellas funciones que dependen del campo escalar $\phi (V, \Pi)$, además de tomar

$$f(\phi) = \frac{1}{8\pi G_0} \quad (3.54)$$

El sistema conformado por las ecs. (3.7), (3.50) y (3.51) permiten encontrar soluciones una vez impuestas la forma explícita para $V(\phi)$ y $f(\phi)$, i. e. podemos encontrar $a(t)$ y $\phi(t)$. Algunas soluciones exactas han sido discutidas a fondo por Faraoni [29] para la teoría de Brans-Dicke que como hemos mencionado corresponde a un caso particular de STT (ver apéndice B).

Capítulo 4

Teoría de perturbaciones.

Es usual considerar que el espacio-tiempo a gran escala es homogéneo e isotrópico, sin embargo en el universo real podemos observar suficientes estructuras inhomogéneas como las galaxias y cúmulos de galaxias.

Un mecanismo usual para estudiar e intentar reproducir la formación de éstas, es considerar una configuración homogénea y a partir de ella aplicar la teoría de perturbaciones para obtener ecuaciones de evolución de las inhomogeneidades. Precisamente esa será la tarea de este capítulo, donde partiremos de las ecuaciones de la teoría escalar-tensorial del capítulo anterior y perturbaremos cada una de las variables con la finalidad de obtener expresiones generales que describan la evolución de dichas perturbaciones.

A partir de las relaciones generales podremos hacer algunas consideraciones, en nuestro caso habremos de tomar como espacio-tiempo no perturbado al universo del tipo Friedman-Robertson-Walker (FRW), y así simplificar las ecuaciones para obtener un formalismo análogo al realizado por Salgado [88].

4.1. Perturbaciones a la métrica

Consideremos la métrica dada por (3.27), entonces podemos escribir el tensor métrico como

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -(N^2 - N^i N_i) & N_i \\ N_i & h_{ij} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Esquemáticamente (ver apéndice C) escribiremos la métrica “total” (o física) como $g_{ab} = \overset{\circ}{g}_{ab} + \epsilon \gamma_{ab}$ donde el cero en $\overset{\circ}{g}_{ab}$ representará de ahora en adelante que es una cantidad relacionada con el fondo, es decir cantidades sin perturbar, mientras que γ_{ab} representa las perturbaciones a la métrica de fondo y ϵ es un parámetro perturbativo adimensional tal que $\epsilon \ll 1$, con lo que los términos de orden ϵ^2 pueden ser despreciados. Así de acuerdo con la descomposición 3+1 las cantidades que aparecen en (4.1) pueden ser escritas análogamente como

$$h_{ij} = \overset{\circ}{h}_{ij} + \epsilon \gamma_{ij} \quad (4.2)$$

$$N_i = \overset{\circ}{N}_i + \epsilon \tilde{N}_i \quad (4.3)$$

$$N = \overset{\circ}{N} + \epsilon \tilde{N} \quad (4.4)$$

donde las cantidades tildadas representan las perturbaciones a las cantidades del fondo correspondientes. En este punto es necesario exigir que se cumpla la condición $g_{ab} g^{bc} = \delta_a^b$ para la métrica 4 dimensional mientras que para la 3 métrica inducida en las hipersuperficies Σ_t tenemos $h_{ij} h^{jk} = \delta_i^k$, i. e. escribimos consistentemente

$$g^{ab} = \overset{\circ}{g}^{ab} - \epsilon \gamma^{ab} \quad (4.5)$$

$$h^{ij} = \overset{\circ}{h}^{ij} - \epsilon \gamma^{ij} \quad (4.6)$$

con lo cual mediante la aplicación de h^{ij} podemos escribir también N^i a

partir de (4.3) obteniendo esquemáticamente

$$N^i = \overset{\circ}{N}{}^i + \epsilon \tilde{N}^i \quad (4.7)$$

donde explícitamente la perturbación esta calculada como:

$$\tilde{N}^i = \overset{\circ}{h}{}^{ij} \tilde{N}_j - \gamma^{ij} \overset{\circ}{N}_j$$

De la misma forma como hemos escrito estas cantidades es necesario saber como se verá alterada la derivada covariante, es decir conviene calcular $\nabla_a A^b$ donde A^b es cualquier 4-vector que se quiera derivar y tiene la forma $A^b = \overset{\circ}{A}{}^b + \epsilon \tilde{A}^b$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \nabla_a A^b &\equiv \overset{\circ}{\nabla}_a \overset{\circ}{A}{}^b + \epsilon (\overset{\circ}{\nabla}_a \tilde{A}^b + \tilde{\nabla}_a \overset{\circ}{A}{}^b) \\ \text{donde: } \overset{\circ}{\nabla}_a \overset{\circ}{A}{}^b &\equiv \partial_a \overset{\circ}{A}{}^b + \overset{\circ}{A}{}^c \overset{\circ}{\Gamma}_{ac}{}^b \\ \tilde{\nabla}_a \tilde{A}^b &\equiv \partial_a \tilde{A}^b + \tilde{A}^c \tilde{\Gamma}_{ac}{}^b \\ \tilde{\nabla}_a \overset{\circ}{A}{}^b &\equiv \overset{\circ}{A}{}^c \tilde{\Gamma}_{ac}{}^b \end{aligned} \quad (4.8)$$

Aunque estas expresiones sean en general para la derivada covariante 4-dimensional ∇_a es posible calcular la derivada D_a ya que de acuerdo con (3.30) las expresiones serán idénticas remplazando las conexiones Γ_{bc}^a por los 3-Christoffel ${}^3\Gamma_{jk}^i$. A partir de este cálculo se puede generalizar para cualquier tensor como se hace en GR, sin embargo para definir por completo estas expresiones debemos considerar la definición de Γ_{bc}^a . En nuestro caso hemos usado aquella dada por Wald [104] y calculando con la métrica física podemos escribir $\Gamma_{bc}^a = \overset{\circ}{\Gamma}_{bc}^a + \epsilon \tilde{\Gamma}_{bc}^a$ donde

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{bc}^a = \frac{\overset{\circ}{g}{}^{ad}}{2} (\overset{\circ}{g}_{dc,b} + \overset{\circ}{g}_{bd,c} - \overset{\circ}{g}_{bc,d}) \quad (4.9)$$

$$\tilde{\Gamma}_{bc}^a = \frac{\overset{\circ}{g}{}^{ad}}{2} (\gamma_{dc,b} + \gamma_{bd,c} - \gamma_{bc,d}) - \frac{\gamma^{ad}}{2} (\overset{\circ}{g}_{dc,b} + \overset{\circ}{g}_{bd,c} - \overset{\circ}{g}_{bc,d}) \quad (4.10)$$

donde los 3-Christoffel ${}^3\Gamma_{jk}^i$ se calcularán usando la métrica h_{ij} ec. (4.2).

Por otro lado la derivada de Lie respecto de un vector n^i , de un vector A^j , considerando ambos arbitrarios se puede definir de acuerdo a

$$\mathcal{L}_{n^i} A^j \equiv \overset{\circ}{\mathcal{L}}_{n^i} \overset{\circ}{A}^j + \epsilon \left(\overset{\circ}{\mathcal{L}}_{n^i} \tilde{A}^j + \tilde{\mathcal{L}}_{n^i} \overset{\circ}{A}^j \right) \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \text{donde: } \overset{\circ}{\mathcal{L}}_{n^i} \overset{\circ}{A}^j &\equiv \dot{n}^i \partial_i \overset{\circ}{A}^j - \overset{\circ}{A}^i \partial_i \dot{n}^j \\ \overset{\circ}{\mathcal{L}}_{n^i} \tilde{A}^j &\equiv \dot{n}^i \partial_i \tilde{A}^j - \tilde{A}^i \partial_i \dot{n}^j \\ \tilde{\mathcal{L}}_{n^i} \overset{\circ}{A}^j &\equiv \tilde{n}^i \partial_i \overset{\circ}{A}^j - \overset{\circ}{A}^i \partial_i \tilde{n}^j \end{aligned}$$

4.2. Expresiones fundamentales.

Hemos visto que cada una de las cantidades que aparecen en la métrica más general pueden ser escritas como una cantidad relacionada con la métrica de fondo más una perturbación. Ahora nos resulta conveniente ver como a partir de esas cantidades podemos escribir algunas relaciones con la misma estructura.

Una vez que hemos separado los símbolos de Christoffel en una parte relacionada con la métrica de fondo y una perturbación podemos hacer lo mismo con cantidades que dependen solo de estas variables, como los tensores de Riemann y Ricci. Esto es, podemos escribir $R_{abc}{}^d = \overset{\circ}{R}_{abc}{}^d + \epsilon \tilde{R}_{abc}{}^d$ y $R_{ac} = \overset{\circ}{R}_{ac} + \epsilon \tilde{R}_{ac}$ donde en correspondencia con Wald [104]

$$\overset{\circ}{R}_{abc}{}^d = \overset{\circ}{\Gamma}_{ac,b}{}^d - \overset{\circ}{\Gamma}_{bc,a}{}^d + \overset{\circ}{\Gamma}_{ac}{}^e \overset{\circ}{\Gamma}_{eb}{}^d - \overset{\circ}{\Gamma}_{bc}{}^e \overset{\circ}{\Gamma}_{ea}{}^d \quad (4.12)$$

$$\tilde{R}_{abc}{}^d = \tilde{\Gamma}_{ac,b}{}^d - \tilde{\Gamma}_{bc,a}{}^d + \tilde{\Gamma}_{ac}{}^e \overset{\circ}{\Gamma}_{eb}{}^d + \overset{\circ}{\Gamma}_{ac}{}^e \tilde{\Gamma}_{eb}{}^d - \tilde{\Gamma}_{bc}{}^e \overset{\circ}{\Gamma}_{ea}{}^d - \overset{\circ}{\Gamma}_{bc}{}^e \tilde{\Gamma}_{ea}{}^d \quad (4.13)$$

$$\overset{\circ}{R}_{ac} = \overset{\circ}{\Gamma}_{ac,b}{}^b - \overset{\circ}{\Gamma}_{bc,a}{}^b + \overset{\circ}{\Gamma}_{ac}{}^e \overset{\circ}{\Gamma}_{eb}{}^b - \overset{\circ}{\Gamma}_{bc}{}^e \overset{\circ}{\Gamma}_{ea}{}^b \quad (4.14)$$

$$\tilde{R}_{ac} = \tilde{\Gamma}_{ac,b}{}^b - \tilde{\Gamma}_{bc,a}{}^b + \tilde{\Gamma}_{ac}{}^e \overset{\circ}{\Gamma}_{eb}{}^b + \overset{\circ}{\Gamma}_{ac}{}^e \tilde{\Gamma}_{eb}{}^b - \tilde{\Gamma}_{bc}{}^e \overset{\circ}{\Gamma}_{ea}{}^b - \overset{\circ}{\Gamma}_{bc}{}^e \tilde{\Gamma}_{ea}{}^b \quad (4.15)$$

y de forma más general también escribimos el escalar de curvatura en términos de las partes de la métrica y las del tensor de Ricci, i. e. $R = g^{ac} R_{ac} = \overset{\circ}{R}$

+ $\epsilon\tilde{R}$ donde

$$\overset{\circ}{R} = \overset{\circ}{R}_{ac}\overset{\circ}{g}^{ac} \quad (4.16)$$

$$\tilde{R} = \tilde{R}_{ac}\overset{\circ}{g}^{ac} - \overset{\circ}{R}_{ac}\gamma^{ac} \quad (4.17)$$

de manera similar podemos encontrar la perturbación en la curvatura extrínseca a partir de (3.48),

$$\tilde{K}_{ij} = -\frac{1}{2\overset{\circ}{N}} \left[\partial_t \gamma_{ij} + 2\overset{\circ}{D}_{(i}\tilde{N}_{j)} + 2\tilde{D}_{(i}\overset{\circ}{N}_{j)} - \frac{\tilde{N}}{\overset{\circ}{N}} (\partial_t \overset{\circ}{h}_{ij} + 2\overset{\circ}{D}_{(i}\overset{\circ}{N}_{j)}) \right] \quad (4.18)$$

que de manera consistente es solo una parte de la curvatura extrínseca total, i. e., $K_{ij} = \overset{\circ}{K}_{ij} + \epsilon\tilde{K}_{ij}$, donde la expresión para $\overset{\circ}{K}_{ij}$ es idéntica a (3.48) pero con las cantidades relacionadas con la métrica de fondo $\overset{\circ}{g}_{ab}$.

Además podemos escribir $K^{ij} = \overset{\circ}{K}^{ij} + \epsilon\tilde{K}^{ij}$ donde \tilde{K}^{ij} puede escribirse en términos de \tilde{K}_{ij} , de γ^{ij} y las cantidades del fondo como

$$\tilde{K}^{ij} \equiv \overset{\circ}{h}^{ik}\overset{\circ}{h}^{jl}\tilde{K}_{kl} - \left(\gamma^{ik}\overset{\circ}{h}^{jl} + \overset{\circ}{h}^{ik}\gamma^{jl} \right) \overset{\circ}{K}_{kl} \quad (4.19)$$

mientras que la perturbación de la traza de la curvatura extrínseca \tilde{K} se calcula explícitamente con

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= -\frac{\overset{\circ}{h}^{ij}}{2\overset{\circ}{N}} \left[\partial_t \gamma_{ij} + 2\overset{\circ}{D}_{(i}\tilde{N}_{j)} + 2\tilde{D}_{(i}\overset{\circ}{N}_{j)} - \frac{\tilde{N}}{\overset{\circ}{N}} (\partial_t \overset{\circ}{h}_{ij} + 2\overset{\circ}{D}_{(i}\overset{\circ}{N}_{j)}) \right] \\ &\quad + \frac{\gamma^{ij}}{2\overset{\circ}{N}} \left[\partial_t \overset{\circ}{h}_{ij} + 2\overset{\circ}{D}_{(i}\overset{\circ}{N}_{j)} \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Tomemos ahora el caso del campo escalar que escribimos como

$$\phi = \overset{\circ}{\phi} + \epsilon \tilde{\phi} \quad (4.21)$$

recordemos que en las ecuaciones de movimiento hemos introducido las cantidades Q_a y Π , entonces suponemos que $Q_a = \overset{\circ}{Q}_a + \epsilon \tilde{Q}_a$ y $\Pi = \overset{\circ}{\Pi} + \epsilon \tilde{\Pi}$ con lo cual sustituyendo (4.21) en las ecuaciones (3.37) y (3.38) encontramos que:

$$\tilde{\Pi} = \overset{\circ}{\mathcal{L}}_n \tilde{\phi} + \tilde{\mathcal{L}}_n \overset{\circ}{\phi} \quad (4.22)$$

$$\tilde{Q}_a = \overset{\circ}{D}_a \tilde{\phi} + \tilde{D}_a \overset{\circ}{\phi} \quad (4.23)$$

donde explícitamente de acuerdo con (4.11)

$$\overset{\circ}{\mathcal{L}}_n \tilde{\phi} \equiv \frac{1}{\overset{\circ}{N}} \partial_t \tilde{\phi} + \frac{\overset{\circ}{N}^i}{\overset{\circ}{N}} \partial_i \tilde{\phi} \quad (4.24)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_n \overset{\circ}{\phi} \equiv -\frac{\tilde{N}}{\overset{\circ}{N}^2} \partial_t \overset{\circ}{\phi} - \frac{\overset{\circ}{N}^i \tilde{N}}{\overset{\circ}{N}^2} \partial_i \overset{\circ}{\phi} + \frac{\tilde{N}^i}{\overset{\circ}{N}} \partial_i \overset{\circ}{\phi} \quad (4.25)$$

también será útil considerar $Q^2 = Q^i Q_i$ quedando como

$$Q^2 = \overset{\circ}{Q}^2 + \epsilon \left(\tilde{Q}^i \overset{\circ}{Q}_i + \overset{\circ}{Q}^i \tilde{Q}_i \right) \quad (4.26)$$

sin embargo, en las ecuaciones (3.32)-(3.36) también aparecen funciones arbitrarias del campo escalar (f , V y sus derivadas), para las cuales podemos hacer una expansión en serie de la forma

$$f(\overset{\circ}{\phi} + \epsilon \tilde{\phi}) = f(\overset{\circ}{\phi}) + \epsilon \tilde{\phi} f'(\overset{\circ}{\phi}) = \overset{\circ}{f} + \epsilon \tilde{f} \quad (4.27)$$

$$f'(\overset{\circ}{\phi} + \epsilon \tilde{\phi}) = f'(\overset{\circ}{\phi}) + \epsilon \tilde{\phi} f''(\overset{\circ}{\phi}) = \overset{\circ}{f}' + \epsilon \tilde{f}' \quad (4.28)$$

$$f''(\overset{\circ}{\phi} + \epsilon \tilde{\phi}) = f''(\overset{\circ}{\phi}) + \epsilon \tilde{\phi} f'''(\overset{\circ}{\phi}) = \overset{\circ}{f}'' + \epsilon \tilde{f}'' \quad (4.29)$$

$$V(\overset{\circ}{\phi} + \epsilon\tilde{\phi}) = V(\overset{\circ}{\phi}) + \epsilon\tilde{\phi}V'(\overset{\circ}{\phi}) = \overset{\circ}{V} + \epsilon\tilde{V} \quad (4.30)$$

$$V'(\overset{\circ}{\phi} + \epsilon\tilde{\phi}) = V'(\overset{\circ}{\phi}) + \epsilon\tilde{\phi}V''(\overset{\circ}{\phi}) = \overset{\circ}{V}' + \epsilon\tilde{V}' \quad (4.31)$$

así de manera análoga podemos obtener las ecuaciones de evolución de las perturbaciones.

Es decir, escribimos sólo las ecuaciones de orden epsilon ya que las expresiones relacionadas con el fondo son idénticas a (3.32)-(3.36) con la única diferencia de tomar todas las cantidades respecto del fondo en lugar de tomarlas respecto de la métrica total.

Obtenemos para la constricción hamiltoniana

$$\begin{aligned} & {}^3\tilde{R} + 2 \overset{\circ}{K} \tilde{K} - \tilde{K}_{ij} \overset{\circ}{K}{}^{ij} - \overset{\circ}{K}{}_{ij} \tilde{K}{}^{ij} - \frac{2}{\overset{\circ}{f}} \left\{ \tilde{f}'(\overset{\circ}{D}_l \overset{\circ}{Q}{}^l + \overset{\circ}{K} \overset{\circ}{\Pi}) + \overset{\circ}{f}' (\tilde{D}_l \overset{\circ}{Q}{}^l \right. \\ & \quad + \overset{\circ}{D}_l \tilde{Q}{}^l + \tilde{K} \overset{\circ}{\Pi} + \overset{\circ}{K} \tilde{\Pi}) + \overset{\circ}{\Pi} \tilde{\Pi} + \overset{\circ}{Q}{}^2 \tilde{f}'' + \frac{1}{2}(\overset{\circ}{Q}{}^l \tilde{Q}_l + \tilde{Q}{}^l \overset{\circ}{Q}_l)(1 + 2 \overset{\circ}{f}'') \\ & \quad \left. + \frac{\tilde{f}}{\overset{\circ}{f}} \left[\overset{\circ}{f}' (\overset{\circ}{D}_l \overset{\circ}{Q}{}^l + \overset{\circ}{K} \overset{\circ}{\Pi}) + \frac{\overset{\circ}{\Pi}^2}{2} + \frac{\overset{\circ}{Q}{}^2}{2}(1 + 2 \overset{\circ}{f}'') \right] \right\} \\ & = \frac{2}{\overset{\circ}{f}} \left[\tilde{E}_{matt} + \tilde{V} - \frac{\tilde{f}}{\overset{\circ}{f}} (\overset{\circ}{E}_{matt} + \overset{\circ}{V}) \right] \end{aligned} \quad (4.32)$$

mientras que para las constricciones de los momentos y las ecuaciones dinámicas de Einstein escribimos respectivamente

$$\begin{aligned} & \tilde{D}_l \overset{\circ}{K}{}^l{}_i + \overset{\circ}{D}_l \tilde{K}{}^l{}_i - \tilde{D}_i \overset{\circ}{K} - \overset{\circ}{D}_i \tilde{K} + \frac{1}{\overset{\circ}{f}} \left\{ \overset{\circ}{f}' (\tilde{K}{}^l{}_i \overset{\circ}{Q}_l + \overset{\circ}{K}{}^l{}_i \tilde{Q}_l + \tilde{D}_i \overset{\circ}{\Pi} \right. \\ & \quad + \overset{\circ}{D}_i \tilde{\Pi}) + \tilde{f}'(\overset{\circ}{K}{}^l{}_i \overset{\circ}{Q}_l + \overset{\circ}{D}_i \overset{\circ}{\Pi}) + \overset{\circ}{\Pi} \tilde{Q}_i \tilde{f}'' + (\overset{\circ}{\Pi} \tilde{Q}_i + \tilde{\Pi} \overset{\circ}{Q}_i)(1 + \overset{\circ}{f}'') \\ & \quad \left. - \frac{\tilde{f}}{\overset{\circ}{f}} \left[\overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{K}{}^l{}_i \overset{\circ}{Q}_l + \overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{D}_i \overset{\circ}{\Pi} + \overset{\circ}{\Pi} \tilde{Q}_i (1 + \overset{\circ}{f}'') \right] \right\} = \frac{1}{\overset{\circ}{f}} \left(\tilde{j}_i^{matt} - \frac{\tilde{f}}{\overset{\circ}{f}} j_i^{matt} \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned}
& \partial_t \tilde{K}_j^i + \tilde{N}^l \partial_l \overset{\circ}{K}_j^i + \overset{\circ}{N}^l \partial_l \tilde{K}_j^i + \overset{\circ}{K}_l^i \partial_j \tilde{N}^l + \tilde{K}_l^i \partial_j \overset{\circ}{N}^l - \tilde{K}_j^l \partial_l \overset{\circ}{N}^i - \overset{\circ}{K}_j^l \partial_l \tilde{N}^i \\
& + \tilde{D}^i \overset{\circ}{D}_j \overset{\circ}{N} + \overset{\circ}{D}^i \tilde{D}_j \overset{\circ}{N} + \overset{\circ}{D}^i \overset{\circ}{D}_j \tilde{N} - {}^3 \tilde{R}_j^i \overset{\circ}{N} - {}^3 \overset{\circ}{R}_j^i \tilde{N} - \tilde{N} \overset{\circ}{K} \overset{\circ}{K}_j^i \\
& - \overset{\circ}{N} \tilde{K} \overset{\circ}{K}_j^i - \overset{\circ}{N} \overset{\circ}{K} \tilde{K}_j^i + \frac{1}{\overset{\circ}{f}} \left(\tilde{N} - \frac{\tilde{f} \overset{\circ}{N}}{\overset{\circ}{f}} \right) \left[\overset{\circ}{Q}^i \overset{\circ}{Q}_j (1 + \overset{\circ}{f}'') \right. \\
& + \overset{\circ}{f}' (\overset{\circ}{D}^i \overset{\circ}{Q}_j + \overset{\circ}{\Pi} \overset{\circ}{K}_j^i) \left. + \frac{\overset{\circ}{N}}{\overset{\circ}{f}} \left[(\overset{\circ}{Q}^i \tilde{Q}_j + \tilde{Q}^i \overset{\circ}{Q}_j) (1 + \overset{\circ}{f}'') \right. \right. \\
& + \overset{\circ}{Q}^i \overset{\circ}{Q}_j \tilde{f}'' + \tilde{f}' (\overset{\circ}{D}^i \overset{\circ}{Q}_j + \overset{\circ}{\Pi} \overset{\circ}{K}_j^i) + \overset{\circ}{f}' (\tilde{D}^i \overset{\circ}{Q}_j + \overset{\circ}{D}^i \tilde{Q}_j + \overset{\circ}{\Pi} \tilde{K}_j^i + \tilde{\Pi} \overset{\circ}{K}_j^i) \left. \left. \right] \right. \\
& - \frac{\delta_j^i}{2 \overset{\circ}{f} \left(1 + \frac{3 \overset{\circ}{f}''}{2 \overset{\circ}{f}} \right)} \left[\overset{\circ}{N} (\overset{\circ}{Q}^2 - \overset{\circ}{\Pi}^2) \left(\frac{\overset{\circ}{f}' \tilde{f}'}{\overset{\circ}{f}} - \frac{\overset{\circ}{f}'' \tilde{f}}{\overset{\circ}{f}^2} - \tilde{f}'' \right) \right. \\
& + \frac{\overset{\circ}{N} (\overset{\circ}{Q}^2 - \overset{\circ}{\Pi}^2)}{\overset{\circ}{f} \left(1 + \frac{3 \overset{\circ}{f}''}{2 \overset{\circ}{f}} \right)} (\tilde{f} + 3 \overset{\circ}{f}' \tilde{f}') \left(\frac{\overset{\circ}{f}''}{2 \overset{\circ}{f}} - \overset{\circ}{f}'' \right) + \left[\tilde{N} (\overset{\circ}{Q}^2 - \overset{\circ}{\Pi}^2) \right. \\
& + \overset{\circ}{N} (\overset{\circ}{Q}^l \tilde{Q}_l + \tilde{Q}^l \overset{\circ}{Q}_l - 2 \overset{\circ}{\Pi} \tilde{\Pi}) \left. \left. \right] \left(\frac{\overset{\circ}{f}''}{2 \overset{\circ}{f}} - \overset{\circ}{f}'' \right) \right] = - \frac{1}{2 \overset{\circ}{f} \left(1 + \frac{3 \overset{\circ}{f}''}{2 \overset{\circ}{f}} \right)} \times \\
& \left[\overset{\circ}{N} \left\{ 2 \tilde{S}_{matt j}^i \left(1 + \frac{3 \overset{\circ}{f}''}{2 \overset{\circ}{f}} \right) + \frac{3 \overset{\circ}{S}_{matt j}^i}{\overset{\circ}{f}} \left(2 \overset{\circ}{f}' \tilde{f}' - \frac{\tilde{f} \overset{\circ}{f}''}{\overset{\circ}{f}} \right) \right. \right. \\
& + \delta_j^i \left[\overset{\circ}{f}' \tilde{V}' + \tilde{f}' \overset{\circ}{V}' + 2 \tilde{V} \left(1 + \frac{\overset{\circ}{f}''}{\overset{\circ}{f}} \right) + \frac{\overset{\circ}{V}}{\overset{\circ}{f}} \left(2 \overset{\circ}{f}' \tilde{f}' - \frac{\tilde{f} \overset{\circ}{f}''}{\overset{\circ}{f}} \right) \right. \\
& \left. \left. - (\tilde{S}_{matt} - \tilde{E}_{matt}) \left(1 + \frac{\overset{\circ}{f}''}{\overset{\circ}{f}} \right) + \frac{1}{\overset{\circ}{f}} (\overset{\circ}{S}_{matt} - \overset{\circ}{E}_{matt}) \left(2 \overset{\circ}{f}' \tilde{f}' - \frac{\tilde{f} \overset{\circ}{f}''}{\overset{\circ}{f}} \right) \right] \right\} \\
& + \left[\tilde{N} - \frac{\overset{\circ}{N} (\tilde{f} + 3 \overset{\circ}{f}' \tilde{f}')}{\overset{\circ}{f} \left(1 + \frac{3 \overset{\circ}{f}''}{2 \overset{\circ}{f}} \right)} \right] \left\{ 2 \overset{\circ}{S}_{matt j}^i \left(1 + \frac{3 \overset{\circ}{f}''}{2 \overset{\circ}{f}} \right) + \delta_j^i \left[\overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{V}' \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \overset{\circ}{V} \left(1 + \frac{\overset{\circ}{f}''}{2 \overset{\circ}{f}} \right) - (\overset{\circ}{S}_{matt} - \overset{\circ}{E}_{matt}) \left(1 + \frac{\overset{\circ}{f}''}{\overset{\circ}{f}} \right) \right] \right\} \quad (4.34)
\end{aligned}$$

cuya traza calculada con la métrica física se expresa de acuerdo con

$$\begin{aligned}
& \partial_t \tilde{K} + \overset{\circ}{N}{}^l \partial_l \tilde{K} + \tilde{N}^l \partial_l \overset{\circ}{K} + {}^3\Delta \tilde{N} - \overset{\circ}{N} \overset{\circ}{K}_{ij} \tilde{K}^{ij} - \overset{\circ}{N} \tilde{K}_{ij} \overset{\circ}{K}{}^{ij} - \tilde{N} \overset{\circ}{K}_{ij} \overset{\circ}{K}{}^{ij} \\
& - \frac{\overset{\circ}{N} \overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}} (\overset{\circ}{D}_l \tilde{Q}^l + \tilde{D}_l \overset{\circ}{Q}^l + \tilde{\Pi} \overset{\circ}{K} + \overset{\circ}{\Pi} \tilde{K}) - \frac{1}{\overset{\circ}{f}} \left(\overset{\circ}{N} \tilde{f}' + \tilde{N} \overset{\circ}{f}' - \frac{\overset{\circ}{N} \tilde{f} \overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}} \right) \times \\
& (\overset{\circ}{D}_l \overset{\circ}{Q}^l + \overset{\circ}{\Pi} \overset{\circ}{K}) - \frac{1}{\overset{\circ}{f} \left(1 + \frac{3 \overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}} \right)} \left[\overset{\circ}{N} \left\{ \overset{\circ}{\Pi}^2 \left(2 \overset{\circ}{f}' \tilde{f}' - \frac{\tilde{f} \overset{\circ}{f}'^2}{\overset{\circ}{f}} \right) \right. \right. \\
& + 2 \overset{\circ}{\Pi} \tilde{\Pi} \left(1 + \frac{3 \overset{\circ}{f}'}{4 \overset{\circ}{f}} \right) + \frac{3}{2} (\overset{\circ}{\Pi}^2 \tilde{f}'' + 2 \overset{\circ}{\Pi} \tilde{\Pi} \tilde{f}'') \\
& + \overset{\circ}{Q}^2 \left(\frac{3}{4 \overset{\circ}{f}} \left[2 \overset{\circ}{f}'^2 \tilde{f}'' + \left(2 \overset{\circ}{f}' \tilde{f}' - \frac{\tilde{f} \overset{\circ}{f}'^2}{\overset{\circ}{f}} \right) (1 + 2 \overset{\circ}{f}) \right] - \frac{\tilde{f}''}{2} \right) \\
& \left. + (\overset{\circ}{Q}^l \tilde{Q}_l + \tilde{Q}^l \overset{\circ}{Q}_l) \left[\frac{3 \overset{\circ}{f}'^2}{4 \overset{\circ}{f}} (1 + 2 \overset{\circ}{f}'') - \frac{\overset{\circ}{f}''}{2} \right] \right\} + \left(\tilde{N} - \overset{\circ}{N} \frac{\tilde{f}' + 3 \overset{\circ}{f}' \tilde{f}'}{\overset{\circ}{f} + \frac{3 \overset{\circ}{f}'^2}{2}} \right) \times \\
& \left\{ \overset{\circ}{\Pi}^2 \left(1 + \frac{3 \overset{\circ}{f}'^2}{4 \overset{\circ}{f}} + \frac{3 \overset{\circ}{f}''}{2} \right) + \overset{\circ}{Q}^2 \left[\frac{3 \overset{\circ}{f}'^2}{4 \overset{\circ}{f}} (1 + 2 \overset{\circ}{f}'') - \frac{\overset{\circ}{f}''}{2} \right] \right\} \\
& = \frac{1}{2 \overset{\circ}{f} \left(1 + \frac{3 \overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}} \right)} \left\{ \overset{\circ}{N} \left[\tilde{S}_{\text{matt}} + \tilde{E}_{\text{matt}} \left(1 + \frac{3 \overset{\circ}{f}'^2}{\overset{\circ}{f}} \right) \right. \right. \\
& + \frac{3 \overset{\circ}{E}_{\text{matt}}}{\overset{\circ}{f}} \left(2 \overset{\circ}{f}' \tilde{f}' - \frac{\overset{\circ}{f}'^2 \tilde{f}}{\overset{\circ}{f}} \right) - 3 \overset{\circ}{V} \left(2 \overset{\circ}{f}' \tilde{f}' - \frac{\overset{\circ}{f}'^2 \tilde{f}}{\overset{\circ}{f}} \right) \\
& \left. - 2 \tilde{V} \left(1 - \frac{3 \overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}} \right) - 3 (\overset{\circ}{f}' \tilde{V}' + \tilde{f}' \overset{\circ}{V}') \right] + \left(\tilde{N} - \overset{\circ}{N} \frac{\tilde{f}' + 3 \overset{\circ}{f}' \tilde{f}'}{\overset{\circ}{f} + \frac{3 \overset{\circ}{f}'^2}{2}} \right) \times \\
& \left. \left[\overset{\circ}{S}_{\text{matt}} + \overset{\circ}{E}_{\text{matt}} \left(1 + \frac{3 \overset{\circ}{f}'^2}{\overset{\circ}{f}} \right) - 2 \overset{\circ}{V} \left(1 - \frac{3 \overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}} \right) - 3 \overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{V}' \right] \right\} \quad (4.35)
\end{aligned}$$

Finalmente escribimos la ecuación que rige la evolución del campo escalar (o en este caso la perturbación del campo escalar)

$$\begin{aligned}
& \dot{\mathcal{L}}_n \tilde{\Pi} + \tilde{\mathcal{L}}_n \dot{\Pi} - \dot{\Pi} \tilde{K} - \tilde{\Pi} \dot{K} - \frac{\dot{Q}^c}{\dot{N}} (\dot{D}_c \tilde{N} + \tilde{D}_c \dot{N}) - \frac{\dot{D}_c \dot{N}}{\dot{N}} \left(\tilde{Q}^c - \dot{Q}^c \frac{\tilde{N}}{\dot{N}} \right) \\
& - \dot{D}_c \tilde{Q}^c - \tilde{D}_c \dot{Q}^c = \frac{1}{\dot{f} \left(1 + \frac{3\dot{f}^{\prime 2}}{2\dot{f}} \right)} \left\{ \dot{f} \tilde{V}' + \tilde{f} \dot{V}' - 2\dot{f}' \tilde{V} - 2\tilde{f}' \dot{V} - \right. \\
& \frac{\dot{f}'}{2} (1 + 3\dot{f}'') (\dot{Q}^l \tilde{Q}_l + \tilde{Q}^l \dot{Q}_l - 2\tilde{\Pi} \dot{\Pi}) - \frac{1}{2} [\tilde{f}' (1 + 3\dot{f}'') + 3\dot{f}' \tilde{f}''] \times \\
& (\dot{Q}^2 - \dot{\Pi}^2) + \frac{1}{2} (\dot{f}' \tilde{T}_{\text{matt}} + \tilde{f}' \dot{T}_{\text{matt}}) - \left(\frac{\tilde{f} + 3\dot{f}' \tilde{f}'}{\dot{f} + \frac{3\dot{f}^{\prime 2}}{2}} \right) [\dot{f} \dot{V}' - 2\dot{f}' \dot{V} \\
& \left. - \frac{1}{2} (1 + 3\dot{f}'') (\dot{Q}^2 - \dot{\Pi}^2) + \frac{1}{2} \dot{f}' \dot{T}_{\text{matt}} \right] \left. \right\} \quad (4.36)
\end{aligned}$$

donde $\dot{\mathcal{L}}_n \tilde{\Pi}$ y $\tilde{\mathcal{L}}_n \dot{\Pi}$ pueden calcularse a partir de (4.11).

Por otro lado, de las ecuaciones de conservación de momento y energía [(3.31) y (3.47)] obtenemos

$$\begin{aligned}
& \partial_t \tilde{J}^i + \dot{N} (\dot{D}_l \tilde{S}^{li} + \tilde{D}_l \dot{S}^{li}) + \tilde{N} \dot{D}_l \dot{S}^{li} = \dot{J}^l \partial_l \tilde{N}^i + \tilde{J}^l \partial_l \dot{N}^i - \tilde{N}^l \partial_l \dot{J}^i \\
& - \dot{N}^l \partial_l \tilde{J}^i + \dot{N} [(2\dot{K}_l^i + \dot{K} \delta_l^i) \tilde{J}^l + (2\tilde{K}_l^i + \tilde{K} \delta_l^i) \dot{J}^l] + \tilde{N} (2\dot{K}_l^i + \dot{K} \delta_l^i) \dot{J}^l \\
& - (\dot{S}_l^i + \dot{E} \delta_l^i) (\dot{D}^l \tilde{N} + \tilde{D}^l \dot{N}) - (\tilde{S}_l^i + \tilde{E} \delta_l^i) \dot{D}^l \dot{N} \quad (4.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_t \tilde{E} + \tilde{N}^l \partial_l \dot{E} + \dot{N}^l \partial_l \tilde{E} + \tilde{N} \dot{D}_l \dot{J}^l + \dot{N} (\dot{D}_l \tilde{J}^l + \tilde{D}_l \dot{J}^l) \\
& = \dot{N} (\dot{S}^{ij} \tilde{K}_{ij} + \tilde{S}^{ij} \dot{K}_{ij} + \dot{E} \tilde{K} + \tilde{E} \dot{K}) + \tilde{N} (\dot{S}^{ij} \dot{K}_{ij} + \dot{E} \dot{K}) \\
& - 2\dot{J}^l (\dot{D}_l \tilde{N} + \tilde{D}_l \dot{N}) - 2\tilde{J}^l \dot{D}_l \dot{N} \quad (4.38)
\end{aligned}$$

notese que hemos supuesto consistentemente que $E = \dot{E} + \epsilon \tilde{E}$, $S = \dot{S} + \epsilon \tilde{S}$ y $J^i = \dot{J}^i + \epsilon \tilde{J}^i$.

4.3. Perturbaciones al modelo de FRW

Hasta ahora no hemos hecho ninguna suposición acerca de la geometría del espacio-tiempo físico ni de aquel que corresponde con el fondo, sin embargo a partir de ahora resultará útil considerar que el Universo en el fondo es del tipo FRW (en correspondencia con el modelo cosmológico estándar expuesto en el capítulo 2).

Esto es que el tensor métrico (3.27) es de la forma (2.1), de donde concluimos que $\overset{\circ}{N}_i = 0$, $\overset{\circ}{N} = 1$ de modo que,

$$\overset{\circ}{h}_{ij} = a^2(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

con lo que podemos escribir directamente en tensor de Ricci en correspondencia con (3.47)

$${}^3 \overset{\circ}{R}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{2k}{1 - kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2kr^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2kr^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

mientras que el escalar de curvatura de Ricci de acuerdo con (3.48)

$${}^3 \overset{\circ}{R} = \frac{6k}{a^2(t)} \quad (4.41)$$

Por otro lado también $\overset{\circ}{K}_{ij}$ debe estar en acuerdo con (3.49), esto es

$$\overset{\circ}{K}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{-a\dot{a}}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & -a\dot{a}r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} = -H(t) \overset{\circ}{h}_{ij} \quad (4.42)$$

cuya traza dada por $\overset{\circ}{K} = \overset{\circ}{h}^{ij} \overset{\circ}{K}_{ij}$ obteniendo,

$$\overset{\circ}{K} = -3\frac{\dot{a}}{a} = -3H \quad (4.43)$$

Las perturbaciones asociadas dadas por la ec. (4.18) se expresan como

$$\tilde{K}_{ij} = -\frac{1}{2} \left[\partial_t \gamma_{ij} + 2 \overset{\circ}{D}_{(i} \tilde{N}_{j)} - 2H\tilde{N} \overset{\circ}{h}_{ij} \right] \quad (4.44)$$

mientras que la perturbación de la traza de acuerdo con (4.20) está dada por

$$\tilde{K} = -\frac{\overset{\circ}{h}^{ij}}{2} \left[\partial_t \gamma_{ij} + 2 \overset{\circ}{D}_{(i} \tilde{N}_{j)} - 2H\tilde{N} \overset{\circ}{h}_{ij} \right] + H\frac{\gamma^{ij}}{2} \overset{\circ}{h}_{ij} \quad (4.45)$$

Consistentemente las ecs. (4.22) y (4.23) se reducen respectivamente a

$$\tilde{Q}_a = \overset{\circ}{D}_a \tilde{\phi} \quad (4.46)$$

$$\tilde{\Pi} = \partial_t \tilde{\phi} - \tilde{N} \partial_t \overset{\circ}{\phi} \quad (4.47)$$

Ahora podemos sustituir estos elementos en las ecuaciones de evolución

para las perturbaciones (4.32)-(4.36) para simplificarlas

$$\begin{aligned}
& {}^3\tilde{R} - 6H\tilde{K} + H\tilde{K}_{ij} \overset{\circ}{h}{}^{ij} + H \overset{\circ}{h}{}_{ij} \tilde{K}{}^{ij} - \frac{2}{\overset{\circ}{f}} \left[-3H\tilde{f}' \overset{\circ}{\Pi} \right. \\
& \quad \left. + \overset{\circ}{f}' (\overset{\circ}{D}_l \tilde{Q}^l + \tilde{K} \overset{\circ}{\Pi} - 3H\tilde{\Pi}) + \overset{\circ}{\Pi} \tilde{\Pi} + \frac{\tilde{f}}{\overset{\circ}{f}} \left(-3H \overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{\Pi} + \frac{\overset{\circ}{\Pi}^2}{2} \right) \right] \\
& = \frac{2}{\overset{\circ}{f}} \left[\tilde{E}_{matt} + \tilde{V} - \frac{\tilde{f}}{\overset{\circ}{f}} (\overset{\circ}{E}_{matt} + \overset{\circ}{V}) \right] \quad (4.48)
\end{aligned}$$

Nótese que aunque el lado derecho de la igualdad no ha sufrido simplificaciones el lado izquierdo se ha simplificado principalmente por el hecho de que $\overset{\circ}{Q}{}^i = 0$ es una propiedad del modelo de FRW ya que de acuerdo a ec. (3.37), $\overset{\circ}{Q}{}^a$ se relaciona con el gradiente (3 dimensional) de $\overset{\circ}{\phi}$, que son idénticamente cero ya que $\overset{\circ}{\phi}$ es solo función del tiempo (por el principio cosmológico en que está basado el modelo de FRW), i. e., $\overset{\circ}{\phi} \equiv \overset{\circ}{\phi}(t)$.

Con este mismo argumento y por el hecho de que $H \equiv H(t)$, es decir también H es función solo del tiempo al igual que $\overset{\circ}{\Pi} \equiv \overset{\circ}{\Pi}(t)$, finalmente en el fondo tenemos que los 3-momentos asociados a la materia se anulan, esto es $\overset{\circ}{J}_i{}^{matt} \equiv 0$, con lo que la constricción de las perturbaciones de los 3-momentos se simplifica quedando

$$\overset{\circ}{D}_l \tilde{K}{}^l_i - \partial_i \tilde{K} + \frac{1}{\overset{\circ}{f}} \left[\overset{\circ}{f}' (\overset{\circ}{K}{}^l_i \tilde{Q}_l + \partial_i \tilde{\Pi}) + \overset{\circ}{\Pi} \tilde{Q}_i (1 + \overset{\circ}{f}'') \right] = \frac{1}{\overset{\circ}{f}} \tilde{J}_i{}^{matt} \quad (4.49)$$

Mientras que las ecuaciones dinámicas de Einstein (evolución de las per-

turbaciones) se reducen a

$$\begin{aligned}
& \partial_t \tilde{K}_j^i + \overset{\circ}{D}^i \overset{\circ}{D}_j \tilde{N} - {}^3\tilde{R}_j^i - \tilde{N} \delta_j^i \left(\frac{2k}{a^2} + 3H^2 \right) + H \left(\tilde{K} \delta_j^i + 3\tilde{K}_j^i \right) \\
& - \frac{H}{\overset{\circ}{f}} \left(\tilde{N} - \frac{\tilde{f}}{\overset{\circ}{f}} \right) \overset{\circ}{\Pi} \delta_j^i + \frac{1}{\overset{\circ}{f}} \left[-H \tilde{f}' \overset{\circ}{\Pi} \delta_j^i + \overset{\circ}{f}' \left(\overset{\circ}{D}^i \tilde{Q}_j \right. \right. \\
& \left. \left. + \overset{\circ}{\Pi} \tilde{K}_j^i - H \tilde{\Pi} \delta_j^i \right) \right] - \frac{\delta_j^i}{2 \overset{\circ}{f} \left(1 + \frac{3\overset{\circ}{f}'^2}{2\overset{\circ}{f}} \right)} \left[-\overset{\circ}{\Pi}^2 \left(\frac{\overset{\circ}{f}' \tilde{f}'}{\overset{\circ}{f}} - \frac{\overset{\circ}{f}'^2 \tilde{f}}{\overset{\circ}{f}^2} - \tilde{f}'' \right) \right. \\
& \left. - \frac{\overset{\circ}{\Pi}^2}{\overset{\circ}{f} \left(1 + \frac{3\overset{\circ}{f}'^2}{2\overset{\circ}{f}} \right)} (\tilde{f} + 3 \overset{\circ}{f}' \tilde{f}') \left(\frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}} - \overset{\circ}{f}'' \right) - (\tilde{N} \overset{\circ}{\Pi}^2 + 2 \overset{\circ}{\Pi} \tilde{\Pi}) \left(\frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}} - \overset{\circ}{f}'' \right) \right] \\
& = -\frac{1}{2 \overset{\circ}{f} \left(1 + \frac{3\overset{\circ}{f}'^2}{2\overset{\circ}{f}} \right)} \left[2\tilde{S}_{matt j}^i \left(1 + \frac{3 \overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}} \right) + \frac{3 \overset{\circ}{S}_{matt j}^i}{\overset{\circ}{f}} \left(2 \overset{\circ}{f}' \tilde{f}' - \frac{\tilde{f} \overset{\circ}{f}'^2}{\overset{\circ}{f}} \right) \right. \\
& \left. + \delta_j^i \left[\overset{\circ}{f}' \tilde{V}' + \tilde{f}' \overset{\circ}{V}' + 2\tilde{V} \left(1 + \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{\overset{\circ}{f}} \right) + \frac{\overset{\circ}{V}}{\overset{\circ}{f}} \left(2 \overset{\circ}{f}' \tilde{f}' - \frac{\tilde{f} \overset{\circ}{f}'^2}{\overset{\circ}{f}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - (\tilde{S}_{matt} - \tilde{E}_{matt}) \left(1 + \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{\overset{\circ}{f}} \right) + \frac{1}{\overset{\circ}{f}} (\overset{\circ}{S}_{matt} - \overset{\circ}{E}_{matt}) \left(2 \overset{\circ}{f}' \tilde{f}' - \frac{\tilde{f} \overset{\circ}{f}'^2}{\overset{\circ}{f}} \right) \right] \right. \\
& \left. + \left[\tilde{N} - \frac{\tilde{f} + 3 \overset{\circ}{f}' \tilde{f}'}{\overset{\circ}{f} \left(1 + \frac{3\overset{\circ}{f}'^2}{2\overset{\circ}{f}} \right)} \right] \left\{ 2 \overset{\circ}{S}_{matt j}^i \left(1 + \frac{3 \overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}} \right) + \delta_j^i \left[\overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{V}' \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \overset{\circ}{V} \left(1 + \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}} \right) - (\overset{\circ}{S}_{matt} - \overset{\circ}{E}_{matt}) \left(1 + \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{\overset{\circ}{f}} \right) \right] \right\} \left. \right] \quad (4.50)
\end{aligned}$$

mientras que la ecuación de evolución para la traza y para la perturbación

del campo escalar se simplifican respectivamente a

$$\begin{aligned}
& \partial_t \tilde{K} + {}^3\Delta \tilde{N} + H \left(\overset{\circ}{h}_{ij} \tilde{K}^{ij} + \tilde{K}_{ij} \overset{\circ}{h}^{ij} \right) - 3H^2 \tilde{N} - \frac{\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}} (\overset{\circ}{D}_i \tilde{Q}^i - 3H \tilde{\Pi} + \overset{\circ}{\Pi} \tilde{K}) \\
& + \frac{3H}{\overset{\circ}{f}} \left(\tilde{f}' + \tilde{N} \frac{\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}} - \frac{\overset{\circ}{f} \tilde{f}'}{\overset{\circ}{f}} \right) \overset{\circ}{\Pi} - \frac{1}{\overset{\circ}{f} \left(1 + \frac{3\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2\overset{\circ}{f}} \right)} \left\{ \overset{\circ}{\Pi}^2 \left(2 \frac{\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}} \tilde{f}' - \frac{\overset{\circ}{f} \tilde{f}{}^{\prime 2}}{\overset{\circ}{f}} \right) \right. \\
& + 2 \overset{\circ}{\Pi} \tilde{\Pi} \left(1 + \frac{3\overset{\circ}{f}'}{4\overset{\circ}{f}} \right) + \frac{3}{2} \left(\overset{\circ}{\Pi}^2 \tilde{f}'' + 2 \overset{\circ}{\Pi} \tilde{\Pi} \tilde{f}'' \right) + \left(\tilde{N} - \frac{\tilde{f} + 3\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f} + \frac{3\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2}} \right) \times \\
& \left. \overset{\circ}{\Pi}^2 \left(1 + \frac{3\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{4\overset{\circ}{f}} + \frac{3\overset{\circ}{f}''}{2} \right) \right\} = \frac{1}{2\overset{\circ}{f} \left(1 + \frac{3\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2\overset{\circ}{f}} \right)} \left\{ \tilde{S}_{matt} + \tilde{E}_{matt} \left(1 + \frac{3\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{\overset{\circ}{f}} \right) \right. \\
& + \frac{3\overset{\circ}{E}_{matt}}{\overset{\circ}{f}} \left(2 \frac{\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}} \tilde{f}' - \frac{\overset{\circ}{f} \tilde{f}{}^{\prime 2}}{\overset{\circ}{f}} \right) - 3\overset{\circ}{V} \left(2 \frac{\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}} \tilde{f}' - \frac{\overset{\circ}{f} \tilde{f}{}^{\prime 2}}{\overset{\circ}{f}} \right) - 2\tilde{V} \left(1 - \frac{3\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2\overset{\circ}{f}} \right) \\
& - 3 \left(\overset{\circ}{f}' \tilde{V}' + \tilde{f}' \overset{\circ}{V}' \right) + \left(\tilde{N} - \frac{\tilde{f} + 3\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f} + \frac{3\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2}} \right) \left[\overset{\circ}{S}_{matt} + \overset{\circ}{E}_{matt} \left(1 + \frac{3\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{\overset{\circ}{f}} \right) \right. \\
& \left. \left. - 2\overset{\circ}{V} \left(1 - \frac{3\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2\overset{\circ}{f}} \right) - 3\overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{V}' \right] \right\} \quad (4.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \overset{\circ}{\mathcal{L}}_n \tilde{\Pi} + \tilde{\mathcal{L}}_n \overset{\circ}{\Pi} - \overset{\circ}{\Pi} \tilde{K} + 3H \tilde{\Pi} - \overset{\circ}{D}_c \tilde{Q}^c \\
& = \frac{1}{\overset{\circ}{f} \left(1 + \frac{3\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2\overset{\circ}{f}} \right)} \left\{ \overset{\circ}{f} \tilde{V}' + \tilde{f} \overset{\circ}{V}' - 2 \left(\overset{\circ}{f}' \tilde{V} + \tilde{f}' \overset{\circ}{V} \right) + \overset{\circ}{f}' \left(1 + 3\overset{\circ}{f}'' \right) \tilde{\Pi} \overset{\circ}{\Pi} \right. \\
& + \frac{\overset{\circ}{\Pi}^2}{2} \left[\tilde{f}' \left(1 + 3\overset{\circ}{f}'' \right) + 3\overset{\circ}{f}' \tilde{f}'' \right] + \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{f}' \tilde{T}_{matt} + \tilde{f}' \overset{\circ}{T}_{matt} \right) \\
& \left. - \left(\frac{\tilde{f} + 3\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f} + \frac{3\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2}} \right) \left[\overset{\circ}{f} \overset{\circ}{V}' - 2\overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{V} + \frac{\overset{\circ}{\Pi}^2}{2} \left(1 + 3\overset{\circ}{f}'' \right) + \frac{1}{2} \overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{T}_{matt} \right] \right\} \quad (4.52)
\end{aligned}$$

mientras que las ecuaciones (4.37) y (4.38) que corresponden a la evolución de las perturbaciones de los 3-momentos,

$$\partial_t \tilde{J}^i + \overset{\circ}{D}_l \tilde{S}^{li} + \tilde{D}_l \overset{\circ}{S}^{li} + \tilde{N} \overset{\circ}{D}_l \overset{\circ}{S}^{li} = -5H\tilde{J}^i - (\overset{\circ}{S}_l^i + \overset{\circ}{E} \delta_l^i) \partial^l \tilde{N} \quad (4.53)$$

y de la perturbación de la energía

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{E} + \tilde{N}^l \partial_l \overset{\circ}{E} + \overset{\circ}{D}_l \tilde{J}^l \\ = \overset{\circ}{S}^{ij} \tilde{K}_{ij} - H \tilde{S}^{ij} \overset{\circ}{h}_{ij} + \overset{\circ}{E} \tilde{K} - 3H\tilde{E} - H\tilde{N}(\overset{\circ}{S} + 3\overset{\circ}{E}) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Capítulo 5

Tratamiento cosmológico

Una parte importante de nuestro trabajo, consistirá en obtener ecuaciones de evolución de la materia y de la formación de estructura del Universo, considerando la presencia del campo escalar. Para un análisis general consideraremos que los términos de materia pueden tratarse como un fluido perfecto T_{pf}^{ab} junto con otra contribución general T_{extra}^{ab} (que correspondiera a fotones, neutrinos, materia oscura, etc., según estudios posteriores consideren convenientes) esto es

$$T^{ab} = T_{pf}^{ab} + T_{extra}^{ab} \quad (5.1)$$

donde T_{pf} esta dado por la expresión (2.4) usada en la sección 2.1. Aplicamos la descomposición 3+1 para T^{ab} y expresamos la parte del fluido perfecto de acuerdo con (3.44)

$$\begin{aligned} E_{pf} &= (\rho + p)\Gamma^2 - p \\ J_{i\ pf} &= (\rho + p)\Gamma u^i \\ S_{pf}^{ij} &= (\rho + p)u^i u^j + p h^{ij} \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde se ha utilizado $\Gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$ y hemos considerado $u^i = \frac{1}{N}(V^i - N^i)$ con lo que $u^2 = \frac{h_{ij}}{N^2}(V^i - N^i)(V^j - N^j)$, sin embargo hemos mostrado que

cantidades como N y N^i se escriben como una cantidad relacionada con el fondo y una perturbación, consistentemente podemos suponer que V^i , u^2 , Γ , S^{ij} , J_i y E deben escribirse de la misma forma. También sabemos por (2.1) que $\overset{\circ}{N}=1$ y $\overset{\circ}{N}^i=0$, además la homogeneidad en el fondo implica que $\overset{\circ}{V}^i=0$, con lo que descartando los términos de orden ϵ^2 tenemos que

$$\begin{aligned}\Gamma &= 1 \\ u^2 &= 0\end{aligned}$$

podemos escribir la descomposición total de T^{ab} como

$$\begin{aligned}E_{matt} &= \overset{\circ}{\rho} + \epsilon(\tilde{\rho} + \Sigma^{00}) \\ J_{matt}^i &= \epsilon \left[\tilde{u}^i(\overset{\circ}{\rho} + \overset{\circ}{p}) + \Sigma_0^i \right] \\ S_{matt}^{ij} &= \overset{\circ}{S}_{pf}^{ij} + \epsilon \left[\tilde{S}_{pf}^{ij} + \Sigma^{ij} \right] \\ &= \overset{\circ}{p}\overset{\circ}{h}^{ij} + \epsilon \left(\tilde{p}\tilde{h}^{ij} - \overset{\circ}{p}\gamma^{ij} + \Sigma^{ij} \right)\end{aligned}\tag{5.3}$$

donde hemos evitado hacer la descomposición de T_{extra}^{ab} y se asume que las cantidades Σ expresan esa descomposición. Escribamos primeramente las ecuaciones de orden cero, correspondientes al modelo de FRW (estas se reducen en el caso sin campo escalar a aquellas dadas por [69] y presentadas en el capítulo 2)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{1}{3\overset{\circ}{f}} \left(\overset{\circ}{E}_{matt} + \overset{\circ}{V} - 3\frac{\dot{a}}{a}\overset{\circ}{f}'\overset{\circ}{\Pi} + \frac{\overset{\circ}{\Pi}^2}{2} \right)\tag{5.4}$$

que corresponde a la constricción hamiltoniana o ecuación de Friedman generalizada, ec. (3.50). En este punto es necesario mencionar que debido a la homogeneidad del modelo, las ecuaciones correspondientes a las constricciones de momento sólo tienen contribuciones a orden ϵ , escribamos pues la ecuación de evolución para $\overset{\circ}{K}_j^i$ que por ser diagonal se escribe como [ver ec.

(3.51)]

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{2a^2} = \frac{1}{2 \overset{\circ}{f}} \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \overset{\circ}{f} \overset{\circ}{\Pi} + \frac{1}{1 + \frac{3\overset{\circ}{f}'^2}{2\overset{\circ}{f}}} \left[-\frac{\overset{\circ}{\Pi}}{2} \left(1 + \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2\overset{\circ}{f}} + 2 \overset{\circ}{f}'' \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \overset{\circ}{V} \left(1 - \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2\overset{\circ}{f}} \right) + \overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{V}' + \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2\overset{\circ}{f}} (\overset{\circ}{S}_{matt} - \overset{\circ}{E}_{matt}) \right] - \frac{\overset{\circ}{S}_{matt}}{3} \right\} \quad (5.5) \end{aligned}$$

por otro lado la ecuación de Klein-Gordon, que proporciona la evolución para el campo $\overset{\circ}{\phi}$, en términos de la variable $\overset{\circ}{\Pi}$ definida por la ec. (3.36) se escribe como [ver ec.(3.52)]

$$\begin{aligned} \partial_t \overset{\circ}{\Pi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \overset{\circ}{\Pi} = - \frac{1}{\overset{\circ}{f} \left(1 + \frac{3\overset{\circ}{f}'^2}{2\overset{\circ}{f}} \right)} \left(\overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{V} - 2 \overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{V}' \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \overset{\circ}{f}' \left(1 + 3 \overset{\circ}{f}'' \right) \overset{\circ}{\Pi}^2 + \frac{1}{2} \overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{T}_{matt} \right) \quad (5.6) \end{aligned}$$

donde $\overset{\circ}{\Pi} = \partial_t \overset{\circ}{\phi}$ de acuerdo con ec. (3.38).

Mientras que la ecuación de conservación de energía [ver ec. (2.8)](la conservación de momentos es idénticamente cero en el fondo):

$$\partial_t \overset{\circ}{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} \overset{\circ}{\rho} (1 + \nu_0) \quad (5.7)$$

donde $\nu_0 \equiv \frac{\overset{\circ}{p}}{\overset{\circ}{\rho}}$ corresponde a la ecuación de estado del fluido en el fondo. Podemos escribir las ecuaciones anteriores ([5.4]-[5.7]) respecto del tiempo conforme ($a d\tau = dt$) análogo a lo que han hecho Ma y Bertschinger [55] y Liddle [50] para el caso sin campo escalar

$$\left(\frac{\partial_\tau a}{a} \right)^2 + k = \frac{a^2}{3 \overset{\circ}{f}} \left(\overset{\circ}{\rho}_{matt} + \overset{\circ}{V} - 3 \frac{\partial_\tau a}{a^2} \overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{\Pi} + \frac{\overset{\circ}{\Pi}^2}{2} \right) \quad (5.8)$$

para este caso queda consistentemente $\overset{\circ}{\Pi} = \frac{1}{a} \partial_\tau \overset{\circ}{\phi}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial_\tau^2 a}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_\tau a}{a^2} \right)^2 + \frac{k}{2} = \frac{a^2}{2 \overset{\circ}{f}} \left\{ \frac{\partial_\tau a}{a} \overset{\circ}{f} \overset{\circ}{\Pi} + \frac{1}{1 + \frac{3 \overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}}} \left[-\frac{\overset{\circ}{\Pi}}{2} \left(1 + \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}} + 2 \overset{\circ}{f}'' \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \overset{\circ}{V} \left(1 - \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}} \right) + \overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{V}' + \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}} (\overset{\circ}{S}_{matt} - \overset{\circ}{E}_{matt}) \right] - \frac{\overset{\circ}{S}_{matt}}{3} \right\} \quad (5.9) \end{aligned}$$

mientras que la conservación de energía mantiene su forma

$$\partial_\tau \overset{\circ}{\rho} = -3 \frac{\partial_\tau a}{a} \overset{\circ}{\rho} (1 + \nu_0) \quad (5.10)$$

por otro lado la ecuación de Klein-Gordon en términos del tiempo conforme se escribe como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \partial_\tau \overset{\circ}{\Pi} + 3 \frac{\partial_\tau a}{a^2} \overset{\circ}{\Pi} = -\frac{1}{\overset{\circ}{f} \left(1 + \frac{3 \overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}} \right)} \left(\overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{V} - 2 \overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{V}' \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \overset{\circ}{f}' (1 + 3 \overset{\circ}{f}'') \overset{\circ}{\Pi}^2 + \frac{1}{2} \overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{T}_{matt} \right) \quad (5.11) \end{aligned}$$

además estas ecuaciones también se reducen a aquellas presentadas por Mukhanov [60] al eliminar la contribución de la materia y considerar el acople mínimo del campo escalar [$F(\phi) = 1$].

5.1. Norma Newtoniana

Ahora podemos escribir las ecuaciones a orden ϵ que corresponden a la evolución de las perturbaciones. En este punto resulta útil escribirlas en cierta norma (para simplificar las expresiones), sin embargo la literatura no es clara en cuanto a que norma tiene más significado físico, o es más fácil de interpre-

tar. Por el momento nos limitamos a escribir las ecuaciones primeramente en la norma Newtoniana, en la cual la métrica física toma la forma:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} -(1 + 2\epsilon\phi) & 0 \\ 0 & (1 + 2\epsilon\psi) \overset{\circ}{h}_{ij} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

donde ϕ y ψ son conocidos como potenciales newtonianos¹, notemos que para sustituir en la ecuaciones (4.48)-(4.50), (4.53) y (4.54) conviene identificar que \tilde{N} no corresponde a 2ϕ sino a ϕ (de acuerdo con 2.1) mientras que $\gamma_{ij} = 2\psi \overset{\circ}{h}_{ij}$, además de que será necesario calcular las perturbaciones inducidas a los símbolos de Christoffel y al tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} {}^3\tilde{\Gamma}_{jk}^i &= \delta_j^i \psi_{,k} + \delta_k^i \psi_{,j} - \overset{\circ}{h}^{il} \overset{\circ}{h}_{jk} \psi_{,l} \\ {}^3\tilde{R}_{ij} &= -\overset{\circ}{D}^l \overset{\circ}{D}_l \psi \overset{\circ}{h}_{ij} - \overset{\circ}{D}_i \overset{\circ}{D}_j \psi \\ {}^3\tilde{R} &= -4 \overset{\circ}{D}^l \overset{\circ}{D}_l \psi - \frac{12k\psi}{a^2} \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación de constricción hamiltoniana, tenemos:

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{D}_i \overset{\circ}{D}^l \psi + 3k \frac{\psi}{a^2} - 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\partial_t \psi - \frac{\dot{a}}{a} \phi \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{\overset{\circ}{f}} \left\{ -3 \frac{\dot{a}}{a} \tilde{f}' \overset{\circ}{\Pi} + \overset{\circ}{f}' \left[\overset{\circ}{D}_l \tilde{Q}^l \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3 \left(\phi \frac{\dot{a}}{a} - \partial_t \psi \right) \overset{\circ}{\Pi} - 3 \frac{\dot{a}}{a} \tilde{\Pi} \right] + \overset{\circ}{\Pi} \tilde{\Pi} + \frac{\tilde{f}}{\overset{\circ}{f}} \left[-3 \frac{\dot{a}}{a} \overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{\Pi} + \frac{\overset{\circ}{\Pi}^2}{2} \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\overset{\circ}{f}} \left[\tilde{E}_{matt} + \tilde{V} - \frac{\tilde{f}}{\overset{\circ}{f}} (\overset{\circ}{E}_{matt} + \overset{\circ}{V}) \right] \end{aligned} \quad (5.13)$$

¹En este punto la notación puede resultar confusa debido a que el campo escalar se ha denotado por ϕ al igual que el potencial newtoniano, sin embargo el campo escalar no aparece explícitamente en las expresiones, sino que aparece implícitamente en las nuevas variables Π , Q^i , y en las funciones f , V . Proponemos entonces que de aparecer el campo escalar se denote como ϕ_s , evitando confusiones.

Para la constricción de momentos

$$\begin{aligned} \mathring{D}_i \partial_t \psi - \frac{\dot{a}}{a} \mathring{D}_i \phi + \frac{1}{2 \mathring{f}} \left\{ \mathring{f}' \left(-\frac{\dot{a}}{a} \tilde{Q}_i + \mathring{D}_i \tilde{\Pi} \right) \right. \\ \left. + \mathring{\Pi} \tilde{Q}_i \left(1 + \mathring{f}'' \right) \right\} = \frac{\tilde{J}_i^{matt}}{2 \mathring{f}} \end{aligned} \quad (5.14)$$

mientras que para las ecuaciones dinámicas, que en general relacionan a $\phi + \psi$ con las anisotropías no diagonales

$$\begin{aligned} \left\{ \partial_t^2 \psi + \frac{\dot{a}}{a} (3 \partial_t \psi - \partial_t \phi) - \phi \left[2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] - \frac{k \psi}{a^2} - \frac{1}{2} \mathring{D}^l \mathring{D}_l (\phi + \psi) \right\} \delta_j^i \\ + \frac{1}{2} \mathring{D}^i \mathring{D}_j (\phi + \psi) = -\frac{1}{2 \mathring{f}} \left[\mathring{f}' \left(\mathring{D}^i \tilde{Q}_j - \mathring{\Pi} \partial_t \psi \delta_j^i + \frac{\dot{a}}{a} \mathring{\Pi} \phi \delta_j^i - \frac{\dot{a}}{a} \tilde{\Pi} \delta_j^i \right) \right. \\ - \frac{\dot{a}}{a} \left(\tilde{f}' - \frac{\tilde{f} \mathring{f}'}{\mathring{f}} \right) \mathring{\Pi} \delta_j^i - \frac{\delta_j^i}{1 + \frac{3 \mathring{f}'^2}{2 \mathring{f}}} \left\{ -\mathring{\Pi} \tilde{\Pi} \left(1 + \frac{\mathring{f}'}{2 \mathring{f}} + 2 \mathring{f}'' \right) \right. \\ - \frac{\mathring{\Pi}^2}{2} \left(\frac{\mathring{f}' \tilde{f}'}{\mathring{f}} - \frac{\mathring{f}'^2 \tilde{f}}{2 \mathring{f}^2} + 2 \tilde{f}'' \right) + \tilde{V} \left(1 - \frac{\mathring{f}'^2}{2 \mathring{f}} \right) - \mathring{V} \left(\frac{\mathring{f}' \tilde{f}'}{\mathring{f}} - \frac{\mathring{f}'^2 \tilde{f}}{2 \mathring{f}^2} \right) \\ \left. + \tilde{f}' \mathring{V}' + \mathring{f}' \tilde{V}' + \frac{\mathring{f}'^2}{2 \mathring{f}} (\tilde{S}_{matt} - \tilde{E}_{matt}) + \left(\frac{\mathring{f}' \tilde{f}'}{\mathring{f}} - \frac{\mathring{f}'^2 \tilde{f}}{2 \mathring{f}^2} \right) (\mathring{S}_{matt} - \mathring{E}_{matt}) \right. \\ \left. - \frac{2 \tilde{f} + 6 \mathring{f}' \tilde{f}'}{2 \mathring{f} + 3 \mathring{f}'^2} \left[-\frac{\mathring{\Pi}^2}{2} \left(1 + \frac{\mathring{f}'^2}{2 \mathring{f}} + 2 \mathring{f}'' \right) + \mathring{V} \left(1 - \frac{\mathring{f}'^2}{2 \mathring{f}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mathring{f}'^2}{2 \mathring{f}} (\mathring{S}_{matt} - \mathring{E}_{matt}) \right] \right\} + \tilde{S}_{matt j}^i - \frac{\tilde{f}}{\mathring{f}} \mathring{S}_{matt j}^i \end{aligned} \quad (5.15)$$

en particular vemos como el campo escalar presenta contribuciones no dia-

gonales, en específico

$$\mathring{D}^i \mathring{D}_j (\phi + \psi) = -\frac{1}{f} \mathring{f}' \mathring{D}^i \tilde{Q}_j \quad \text{con } (i \neq j) \quad (5.16)$$

donde no hemos tomado en cuenta las posibles contribuciones anisotrópicas de la materia. Notemos que esta expresión es una diferencia importante respecto del enfoque de la cosmología estándar en GR² ec. (2.6). Tomando la traza de la ecuación (5.15) podemos escribir la expresión

$$\begin{aligned} & \partial_t^2 \psi + \frac{\dot{a}}{a} (3\partial_t \psi - \partial_t \phi) - \phi \left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] - \frac{k\psi}{a^2} - \frac{1}{3} \mathring{D}^l \mathring{D}_l (\phi + \psi) \\ &= -\frac{1}{2\mathring{f}} \left[\mathring{f}' \left(\frac{1}{3} \mathring{D}^l \tilde{Q}_l - \mathring{\Pi} \partial_t \psi + \frac{\dot{a}}{a} \mathring{\Pi} \phi - \frac{\dot{a}}{a} \mathring{\Pi} \right) \right. \\ & \quad - \frac{\dot{a}}{a} \left(\tilde{f}' - \frac{\tilde{f} \mathring{f}'}{\mathring{f}} \right) \mathring{\Pi} - \frac{1}{1 + \frac{3\mathring{f}'^2}{2\mathring{f}}} \left\{ -\mathring{\Pi} \tilde{\Pi} \left(1 + \frac{\mathring{f}'}{2\mathring{f}} + 2\mathring{f}'' \right) \right. \\ & \quad - \frac{\mathring{\Pi}^2}{2} \left(\frac{\mathring{f}' \tilde{f}'}{\mathring{f}} - \frac{\mathring{f}'^2 \tilde{f}}{2\mathring{f}^2} + 2\tilde{f}'' \right) + \tilde{V} \left(1 - \frac{\mathring{f}'^2}{2\mathring{f}} \right) - \mathring{V} \left(\frac{\mathring{f}' \tilde{f}'}{\mathring{f}} - \frac{\mathring{f}'^2 \tilde{f}}{2\mathring{f}^2} \right) \\ & \quad + \tilde{f}' \mathring{V}' + \mathring{f}' \tilde{V}' + \frac{\mathring{f}'^2}{2\mathring{f}} (\tilde{S}_{matt} - \tilde{E}_{matt}) + \left(\frac{\mathring{f}' \tilde{f}'}{\mathring{f}} - \frac{\mathring{f}'^2 \tilde{f}}{2\mathring{f}^2} \right) (\mathring{S}_{matt} \\ & \quad - \mathring{E}_{matt}) - \frac{2\tilde{f} + 6\mathring{f}' \tilde{f}'}{2\mathring{f} + 3\mathring{f}'^2} \left[-\frac{\mathring{\Pi}^2}{2} \left(1 + \frac{\mathring{f}'^2}{2\mathring{f}} + 2\mathring{f}'' \right) + \mathring{V} \left(1 - \frac{\mathring{f}'^2}{2\mathring{f}} \right) \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\mathring{f}'^2}{2\mathring{f}} (\mathring{S}_{matt} - \mathring{E}_{matt}) \right] \right\} + \frac{1}{3} \tilde{S}_{matt} - \frac{\tilde{f}}{3\mathring{f}} \mathring{S}_{matt} \quad (5.17) \end{aligned}$$

²En efecto para el caso del acople mínimo (GR), $f' \equiv 0$, se obtiene $\mathring{D}^i \mathring{D}_j (\phi + \psi) = 0$ que implica que ambos potenciales newtonianos coincidan, i. e., $\phi = -\psi$. En nuestro caso las observaciones acotarán la diferencia $|\phi| - |\psi|$ y por lo tanto restringirán el valor de $\frac{\mathring{f}'}{\mathring{f}}$.

y la perturbación a la ecuación de Klein-Gordon

$$\begin{aligned}
& \mathring{\mathcal{L}}_n \tilde{\Pi} + \tilde{\mathcal{L}}_n \mathring{\Pi} + 3 \mathring{\Pi} \left(\partial_t \psi - \phi \frac{\dot{a}}{a} \right) + 3 \frac{\dot{a}}{a} \tilde{\Pi} - \mathring{D}_c \tilde{Q}^c \\
&= \frac{1}{\mathring{f} \left(1 + \frac{3\mathring{f}'^2}{2\mathring{f}} \right)} \left\{ \mathring{f} \tilde{V}' + \tilde{f} \mathring{V}' - 2 \left(\mathring{f}' \tilde{V} + \tilde{f}' \mathring{V} \right) + \mathring{f}' \left(1 + 3 \mathring{f}'' \right) \tilde{\Pi} \mathring{\Pi} \right. \\
&+ \frac{\mathring{\Pi}^2}{2} \left[\tilde{f}' \left(1 + 3 \mathring{f}'' \right) + 3 \mathring{f}' \tilde{f}'' \right] + \frac{1}{2} \left(\mathring{f}' \tilde{T}_{matt} + \tilde{f}' \mathring{T}_{matt} \right) \\
&\left. - \left(\frac{\tilde{f} + 3 \mathring{f}' \tilde{f}'}{\mathring{f} + \frac{3\mathring{f}'^2}{2}} \right) \left[\mathring{f} \mathring{V}' - 2 \mathring{f}' \mathring{V} + \frac{\mathring{\Pi}^2}{2} \left(1 + 3 \mathring{f}'' \right) + \frac{1}{2} \mathring{f}' \mathring{T}_{matt} \right] \right\} \quad (5.18)
\end{aligned}$$

donde podemos escribir de acuerdo con ec. (4.11), $\mathring{\mathcal{L}}_n \tilde{\Pi} = \partial_t \tilde{\Pi}$ y $\tilde{\mathcal{L}}_n \mathring{\Pi} = -\phi \partial_t \mathring{\Pi}$.

Mientras que de las ecuaciones de conservación de energía y momento³:

$$\begin{aligned}
\partial_t \delta &= -(1 + \nu_0) (\mathring{D}_i \tilde{u}^i + 3 \partial_t \psi) - 3 \frac{\dot{a}}{a} \delta \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} - \nu_0 \right) \\
&\quad - \frac{\partial_t \Sigma^{00}}{\tilde{\rho}} - \mathring{D}_l \left(\frac{\Sigma_0^l}{\tilde{\rho}} \right) - 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\Sigma}{\tilde{\rho}} + \frac{\Sigma^{00}}{\tilde{\rho}} \right) \quad (5.19)
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la definición usual de $\delta = \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}$

$$\begin{aligned}
\partial_t \partial_i \tilde{u}^i + \frac{\dot{a}}{a} \partial_i \tilde{u}^i (2 - 3\nu_0) + \partial_i \tilde{u}^i \frac{\partial_t \nu_0}{1 + \nu_0} + \frac{1}{1 + \nu_0} \partial_i \partial^i \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \delta \right) \\
+ \frac{\partial_t \partial_i \Sigma_0^i}{\tilde{\rho} + \tilde{p}} + 5 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial_i \Sigma_0^i}{\tilde{\rho} + \tilde{p}} + \frac{\partial_i \mathring{D}_l \Sigma^{il}}{\tilde{\rho} + \tilde{p}} + \partial_i \partial^i \phi = 0 \quad (5.20)
\end{aligned}$$

El sistema conformado por las ecs. (5.13)-(5.20) puede ser escrito en térmi-

³Para estas ecuaciones hemos separado explícitamente T_{pf} y T_{extra} , además de sustituir el término $\tilde{D}_i \mathring{h}^{li} = 2\partial^i \psi$ con la finalidad de reducir la expresión.

nos del tiempo conforme τ antes definido

$$\begin{aligned}
& a^2 \mathring{D}_l \mathring{D}^l \psi + 3k\psi - 3 \frac{\partial_\tau a}{a} \left(\partial_\tau \psi - \frac{\partial_\tau a}{a} \phi \right) + \frac{a^2}{2 \mathring{f}} \left\{ -3 \frac{\partial_\tau a}{a^2} \tilde{f}' \mathring{\Pi} + \mathring{f}' \left[\mathring{D}_l \tilde{Q}^l \right. \right. \\
& \left. \left. + 3 \left(\phi \frac{\partial_\tau a}{a^2} - \frac{\partial_\tau \psi}{a} \right) \mathring{\Pi} - 3 \frac{\partial_\tau a}{a^2} \tilde{\Pi} \right] + \mathring{\Pi} \tilde{\Pi} + \frac{\tilde{f}}{\mathring{f}} \left[-3 \frac{\partial_\tau a}{a^2} \mathring{f}' \mathring{\Pi} + \frac{\mathring{\Pi}^2}{2} \right] \right\} \\
& = -\frac{a^2}{2 \mathring{f}} \left[\tilde{E}_{matt} + \tilde{V} - \frac{\tilde{f}}{\mathring{f}} (\mathring{E}_{matt} + \mathring{V}) \right] \tag{5.21}
\end{aligned}$$

para la constricción del momento se escribe como

$$\begin{aligned}
& \mathring{D}_i \partial_\tau \psi - \frac{\partial_\tau a}{a} \mathring{D}_i \phi + \frac{a}{2 \mathring{f}} \left\{ \mathring{f}' \left(\mathring{D}_i \tilde{\Pi} - \frac{\partial_\tau a}{a^2} \tilde{Q}_i \right) \right. \\
& \left. + \mathring{\Pi} \tilde{Q}_i (1 + \mathring{f}'') \right\} = \frac{a \tilde{J}_i^{matt}}{2 \mathring{f}} \tag{5.22}
\end{aligned}$$

esta norma también es usada por Perez et al. [74] en el caso del acople mínimo con el campo escalar y la ausencia de materia y son utilizadas para reproducir el modelo inflacionario.

$$\begin{aligned}
& \left\{ \partial_\tau^2 \psi + \frac{\partial_\tau a}{a} (2\partial_\tau \psi - \partial_\tau \phi) - \phi \left[2 \frac{\partial_\tau^2 a}{a} - \left(\frac{\partial_\tau a}{a} \right)^2 \right] - k\psi - \frac{a^2}{2} \mathring{D}^l \mathring{D}_l (\phi + \psi) \right\} \delta_j^i \\
& + \frac{a^2}{2} \mathring{D}^i \mathring{D}_j (\phi + \psi) = -\frac{a^2}{2 \mathring{f}} \left[\mathring{f}' \left(\mathring{D}^i \tilde{Q}_j - \mathring{\Pi} \frac{\partial_\tau \psi}{a} \delta_j^i + \frac{\partial_\tau a}{a^2} \mathring{\Pi} \phi \delta_j^i - \frac{\partial_\tau a}{a^2} \tilde{\Pi} \delta_j^i \right) \right. \\
& - \frac{\partial_\tau a}{a^2} \left(\tilde{f}' - \frac{\tilde{f} \mathring{f}'}{\mathring{f}} \right) \mathring{\Pi} \delta_j^i - \frac{\delta_j^i}{1 + \frac{3\mathring{f}'^2}{2\mathring{f}}} \left\{ -\mathring{\Pi} \tilde{\Pi} \left(1 + \frac{\mathring{f}'}{2 \mathring{f}} + 2 \mathring{f}'' \right) \right. \\
& - \frac{\mathring{\Pi}^2}{2} \left(\frac{\mathring{f}' \tilde{f}'}{\mathring{f}} - \frac{\mathring{f}'^2 \tilde{f}}{2 \mathring{f}^2} + 2 \mathring{f}'' \right) + \tilde{V} \left(1 - \frac{\mathring{f}'^2}{2 \mathring{f}} \right) - \mathring{V} \left(\frac{\mathring{f}' \tilde{f}'}{\mathring{f}} - \frac{\mathring{f}'^2 \tilde{f}}{2 \mathring{f}^2} \right) \\
& \left. + \tilde{f}' \mathring{V}' + \mathring{f}' \tilde{V}' + \frac{\mathring{f}'^2}{2 \mathring{f}} (\tilde{S}_{matt} - \tilde{E}_{matt}) + \left(\frac{\mathring{f}' \tilde{f}'}{\mathring{f}} - \frac{\mathring{f}'^2 \tilde{f}}{2 \mathring{f}^2} \right) (\mathring{S}_{matt} - \mathring{E}_{matt}) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\tilde{f} + 6\frac{\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}}\tilde{f}'}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}} + 3\frac{\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{\overset{\circ}{f}^2}} \left[-\frac{\overset{\circ}{\Pi}^2}{2} \left(1 + \frac{\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} + 2\frac{\overset{\circ}{f}''}{\overset{\circ}{f}} \right) + \overset{\circ}{V} \left(1 - \frac{\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} (\overset{\circ}{S}_{matt} - \overset{\circ}{E}_{matt}) \right] \left. \right\} + \tilde{S}_{matt\ j}^i - \frac{\tilde{f}}{\overset{\circ}{f}} \overset{\circ}{S}_{matt\ j}^i \quad (5.23)
\end{aligned}$$

notemos que esta es una de las ecuaciones que presenta variación respecto de su contraparte escrita en el tiempo “cósmico” t , pues el coeficiente de $\partial_\tau\psi$ se ha reducido a 2 mientras en el caso de $\partial_t\psi$ era 3.

Podemos escribir la expresión que corresponde a la traza de la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
& \partial_\tau^2\psi + \frac{\partial_\tau a}{a}(2\partial_\tau\psi - \partial_\tau\phi) - \phi \left[2\frac{\partial_\tau^2 a}{a} - \left(\frac{\partial_\tau a}{a} \right)^2 \right] - k\psi - \frac{a^2}{3} \overset{\circ}{D}{}^l \overset{\circ}{D}_l (\phi + \psi) \\
& = -\frac{a^2}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} \left[\frac{\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}} \left(\frac{1}{3} \overset{\circ}{D}{}^l \tilde{Q}_l - \overset{\circ}{\Pi} \frac{\partial_\tau\psi}{a} + \frac{\partial_\tau a}{a^2} \overset{\circ}{\Pi} \phi - \frac{\partial_\tau a}{a^2} \tilde{\Pi} \right) \right. \\
& - \frac{\partial_\tau a}{a} \left(\tilde{f}' - \frac{\tilde{f}\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}} \right) \overset{\circ}{\Pi} - \frac{1}{1 + \frac{3\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}}} \left\{ -\overset{\circ}{\Pi} \tilde{\Pi} \left(1 + \frac{\overset{\circ}{f}'}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} + 2\frac{\overset{\circ}{f}''}{\overset{\circ}{f}} \right) \right. \\
& - \frac{\overset{\circ}{\Pi}^2}{2} \left(\frac{\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}} \frac{\tilde{f}'}{\overset{\circ}{f}} - \frac{\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} \frac{\tilde{f}}{\overset{\circ}{f}} + 2\tilde{f}'' \right) + \tilde{V} \left(1 - \frac{\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} \right) - \overset{\circ}{V} \left(\frac{\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}} \frac{\tilde{f}'}{\overset{\circ}{f}} - \frac{\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} \frac{\tilde{f}}{\overset{\circ}{f}} \right) \\
& + \tilde{f}' \overset{\circ}{V}' + \frac{\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}} \tilde{V}' + \frac{\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} (\tilde{S}_{matt} - \tilde{E}_{matt}) + \left(\frac{\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}} \frac{\tilde{f}'}{\overset{\circ}{f}} - \frac{\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} \frac{\tilde{f}}{\overset{\circ}{f}} \right) (\overset{\circ}{S}_{matt} \\
& - \overset{\circ}{E}_{matt}) - \frac{2\tilde{f} + 6\frac{\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}}\tilde{f}'}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}} + 3\frac{\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{\overset{\circ}{f}^2}} \left[-\frac{\overset{\circ}{\Pi}^2}{2} \left(1 + \frac{\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} + 2\frac{\overset{\circ}{f}''}{\overset{\circ}{f}} \right) + \overset{\circ}{V} \left(1 - \frac{\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} \right) \right. \\
& \left. \left. + \frac{\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} (\overset{\circ}{S}_{matt} - \overset{\circ}{E}_{matt}) \right] \right\} + \frac{1}{3} \tilde{S}_{matt} - \frac{\tilde{f}}{3\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} \overset{\circ}{S}_{matt} \quad (5.24)
\end{aligned}$$

mientras que la expresión que domina la evolución de la perturbación del

campo escalar se escribe como

$$\begin{aligned}
& \mathring{\mathcal{L}}_n \tilde{\Pi} + \tilde{\mathcal{L}}_n \mathring{\Pi} + 3 \mathring{\Pi} \left(\frac{\partial_\tau \psi}{a} - \phi \frac{\partial_\tau a}{a^2} \right) + 3 \frac{\partial_\tau a}{a^2} \tilde{\Pi} - \mathring{D}_c \tilde{Q}^c \\
&= \frac{1}{\mathring{f} \left(1 + \frac{3\mathring{f}^{\prime 2}}{2\mathring{f}} \right)} \left\{ \mathring{f} \tilde{V}' + \tilde{f} \mathring{V}' - 2 \left(\mathring{f}' \tilde{V} + \tilde{f}' \mathring{V} \right) + \mathring{f}' \left(1 + 3 \mathring{f}'' \right) \tilde{\Pi} \mathring{\Pi} \right. \\
&+ \frac{\mathring{\Pi}^2}{2} \left[\tilde{f}' \left(1 + 3 \mathring{f}'' \right) + 3 \mathring{f}' \tilde{f}'' \right] + \frac{1}{2} \left(\mathring{f}' \tilde{T}_{matt} + \tilde{f}' \mathring{T}_{matt} \right) \\
&\left. - \left(\frac{\tilde{f} + 3 \mathring{f}' \tilde{f}'}{\mathring{f} + \frac{3\mathring{f}^{\prime 2}}{2}} \right) \left[\mathring{f} \mathring{V}' - 2 \mathring{f}' \mathring{V} + \frac{\mathring{\Pi}^2}{2} \left(1 + 3 \mathring{f}'' \right) + \frac{1}{2} \mathring{f}' \mathring{T}_{matt} \right] \right\} \quad (5.25)
\end{aligned}$$

en este caso $\mathring{\mathcal{L}}_n \tilde{\Pi} = \frac{1}{a} \partial_\tau \tilde{\Pi}$ y $\tilde{\mathcal{L}}_n \mathring{\Pi} = -\frac{\phi}{a} \partial_\tau \mathring{\Pi}$.

Además las ecuaciones de conservación de energía-momento se escriben

$$\begin{aligned}
\partial_\tau \delta &= -(1 + \nu_0) (\mathring{D}_i \tilde{U}^i + 3 \partial_\tau \psi) - 3 \frac{\partial_\tau a}{a} \delta \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} - \nu_0 \right) \\
&\quad - \frac{\partial_\tau \Sigma^{00}}{\mathring{\rho}} - a \mathring{D}_l \left(\frac{\Sigma_0^l}{\mathring{\rho}} \right) - 3 \frac{\partial_\tau a}{a} \left(\frac{\Sigma}{\mathring{\rho}} + \frac{\Sigma^{00}}{\mathring{\rho}} \right) \quad (5.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\tau \partial_i \tilde{U}^i &+ \frac{\partial_\tau a}{a} \partial_i \tilde{U}^i (1 - 3\nu_0) + \partial_i \tilde{U}^i \frac{\partial_\tau \nu_0}{1 + \nu_0} + \frac{a^2}{1 + \nu_0} \partial_i \partial^i \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \delta \right) \\
&+ \frac{a \partial_\tau \partial_i \Sigma_0^i}{\mathring{\rho} + \mathring{p}} + 5 \partial_\tau a \frac{\partial_i \Sigma_0^i}{\mathring{\rho} + \mathring{p}} + \frac{a^2 \partial_i \mathring{D}_l \Sigma^{il}}{\mathring{\rho} + \mathring{p}} + a^2 \partial_i \partial^i \phi = 0 \quad (5.27)
\end{aligned}$$

donde hemos definido $\tilde{U}^i \equiv \frac{dx^i}{d\tau}$ como la velocidad del fluido en términos del tiempo conforme τ . Notemos en (5.27) que el coeficiente de $\partial_i \tilde{U}^i$ se ha disminuido de $2 - 3\nu_0$ a $1 - 3\nu_0$ respecto de su contraparte en el tiempo cósmico t , ec. (5.20).

5.2. Norma Sincrónica

Podemos escribir las mismas ecuaciones en términos de la norma sincrónica, dada por

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \overset{\circ}{h}_{ij} + \epsilon \gamma_{ij} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

que a diferencia de la norma Newtoniana no tiene perturbación de la función “lapse”, además la perturbación de la 3-métrica es una perturbación tensorial. En este caso también podemos calcular los 3-Christoffel, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura, sin embargo nos limitamos a anotar la expresión de la perturbación de este último pues los otros resultan complicados

$${}^3\tilde{R} = \overset{\circ}{D}^i \overset{\circ}{D}^j \gamma_{ij} - \overset{\circ}{D}^l \overset{\circ}{D}_l \gamma - \frac{2k}{a^2} \gamma \quad (5.29)$$

con lo que podemos escribir la ecuación de primer orden de la constricción hamiltoniana

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{D}^i \overset{\circ}{D}^j \gamma_{ij} - \overset{\circ}{D}^i \overset{\circ}{D}_i \gamma - \frac{2k}{a^2} \gamma + 2 \frac{\dot{a}}{a} \partial_t \gamma = \frac{2}{f} \left[\tilde{E}_{matt} + \tilde{V} - \frac{\tilde{f}}{f} \left(\overset{\circ}{E}_{matt} + \overset{\circ}{V} \right. \right. \\ \left. \left. - 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\overset{\circ}{f}'}{f} \overset{\circ}{\Pi} + \frac{\overset{\circ}{\Pi}^2}{2} \right) - 3 \frac{\dot{a}}{a} \tilde{f}' \overset{\circ}{\Pi} + \overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{D}_l \tilde{Q}^l - \overset{\circ}{f}' \left(\frac{\partial_t \gamma}{2} \overset{\circ}{\Pi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \tilde{\Pi} \right) + \overset{\circ}{\Pi} \tilde{\Pi} \right] \end{aligned} \quad (5.30)$$

por otro lado la perturbación de la constricción del momento

$$\frac{1}{2} \left[\overset{\circ}{D}_l \partial_t \gamma^l_i - \overset{\circ}{D}_i \partial_t \gamma \right] = -\frac{1}{f} \left[\tilde{J}_{matt}^j + \overset{\circ}{f}' \left(\frac{\dot{a}}{a} \tilde{Q}_i - \overset{\circ}{D}_i \tilde{\Pi} \right) - \overset{\circ}{\Pi} \tilde{Q}_i (1 + \overset{\circ}{f}'') \right] \quad (5.31)$$

también hemos obtenido la expresión

$$-\frac{\partial_t^2 \gamma_j^i}{2} - \frac{3\dot{a}}{2a} \partial_t \gamma_j^i - \frac{1}{2} (\overset{\circ}{D}^l \overset{\circ}{D}^i \gamma_{lj} + \overset{\circ}{D}^l \overset{\circ}{D}_j \gamma^i_l - \overset{\circ}{D}^l \overset{\circ}{D}_l \gamma_j^i - \overset{\circ}{D}_j \overset{\circ}{D}^i \gamma) - \frac{2k}{a^2} \gamma_j^i$$

$$\begin{aligned}
& +(\overset{\circ}{D}{}^l \overset{\circ}{D}{}^m \gamma_{lm} - \overset{\circ}{D}{}^l \overset{\circ}{D}{}_l \gamma) \frac{\delta_j^i}{4} - \frac{k}{2a^2} \gamma \delta_j^i = \frac{1}{2 \overset{\circ}{f}} \left[\overset{\circ}{f}' \left(\overset{\circ}{D}{}^l \tilde{Q}_l - \overset{\circ}{\Pi} \frac{\partial_t \gamma}{6} - \frac{\dot{a}}{a} \tilde{\Pi} \right) \delta_j^i \right. \\
& - 2 \overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{D}{}^i \tilde{Q}_j - \frac{\dot{a}}{a} \left(\tilde{f}' - \frac{\tilde{f} \overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}} \right) \overset{\circ}{\Pi} \delta_j^i - \frac{\delta_j^i}{1 + \frac{3 \overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}}} \left\{ - \overset{\circ}{\Pi} \tilde{\Pi} \left(1 + \frac{\overset{\circ}{f}'}{2 \overset{\circ}{f}} + 2 \overset{\circ}{f}'' \right) \right. \\
& - \frac{\overset{\circ}{\Pi}^2}{2} \left(\frac{\overset{\circ}{f}' \tilde{f}'}{\overset{\circ}{f}} - \frac{\overset{\circ}{f}'^2 \tilde{f}}{2 \overset{\circ}{f}^2} + 2 \tilde{f}'' \right) + \tilde{V} \left(1 - \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}} \right) - \overset{\circ}{V} \left(\frac{\overset{\circ}{f}' \tilde{f}'}{\overset{\circ}{f}} - \frac{\overset{\circ}{f}'^2 \tilde{f}}{2 \overset{\circ}{f}^2} \right) \\
& + \tilde{f}' \overset{\circ}{V}' + \overset{\circ}{f}' \tilde{V}' + \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}} (\tilde{S}_{matt} - \tilde{E}_{matt}) + \left(\frac{\overset{\circ}{f}' \tilde{f}'}{\overset{\circ}{f}} - \frac{\overset{\circ}{f}'^2 \tilde{f}}{2 \overset{\circ}{f}^2} \right) (\overset{\circ}{S}_{matt} - \overset{\circ}{E}_{matt}) \\
& \left. - \frac{2 \tilde{f} + 6 \overset{\circ}{f}' \tilde{f}'}{2 \overset{\circ}{f} + 3 \overset{\circ}{f}'^2} \left[- \frac{\overset{\circ}{\Pi}^2}{2} \left(1 + \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}} + 2 \overset{\circ}{f}'' \right) + \overset{\circ}{V} \left(1 - \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}} (\overset{\circ}{S}_{matt} - \overset{\circ}{E}_{matt}) \right] \right\} + \tilde{S}_{matt j}^i - \frac{\tilde{f}}{\overset{\circ}{f}} \overset{\circ}{S}_{matt j}^i \quad (5.32)
\end{aligned}$$

donde las ecs. (5.32) son las ecuaciones de evolución de las perturbaciones γ_{ij} , y su traza γ evoluciona de acuerdo a

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial_t^2 \gamma}{2} - \frac{3\dot{a}}{2a} \partial_t \gamma - \frac{1}{4} (\overset{\circ}{D}{}^i \overset{\circ}{D}{}^j \gamma_{ij} - \overset{\circ}{D}{}^l \overset{\circ}{D}{}_l \gamma) - \frac{k}{2a^2} \gamma = \frac{1}{2 \overset{\circ}{f}} \left[\overset{\circ}{f}' \left(\overset{\circ}{D}{}^l \tilde{Q}_l - \overset{\circ}{\Pi} \frac{\partial_t \gamma}{2} \right. \right. \\
& \left. \left. - 3 \frac{\dot{a}}{a} \tilde{\Pi} \right) - 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\tilde{f}' - \frac{\tilde{f} \overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}} \right) \overset{\circ}{\Pi} - \frac{3}{1 + \frac{3 \overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}}} \left\{ - \overset{\circ}{\Pi} \tilde{\Pi} \left(1 + \frac{\overset{\circ}{f}'}{2 \overset{\circ}{f}} + 2 \overset{\circ}{f}'' \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\overset{\circ}{\Pi}^2}{2} \left(\frac{\overset{\circ}{f}' \tilde{f}'}{\overset{\circ}{f}} - \frac{\overset{\circ}{f}'^2 \tilde{f}}{2 \overset{\circ}{f}^2} + 2 \tilde{f}'' \right) + \tilde{V} \left(1 - \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}} \right) - \overset{\circ}{V} \left(\frac{\overset{\circ}{f}' \tilde{f}'}{\overset{\circ}{f}} - \frac{\overset{\circ}{f}'^2 \tilde{f}}{2 \overset{\circ}{f}^2} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \tilde{f}' \overset{\circ}{V}' + \overset{\circ}{f}' \tilde{V}' + \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2 \overset{\circ}{f}} (\tilde{S}_{matt} - \tilde{E}_{matt}) + \left(\frac{\overset{\circ}{f}' \tilde{f}'}{\overset{\circ}{f}} - \frac{\overset{\circ}{f}'^2 \tilde{f}}{2 \overset{\circ}{f}^2} \right) (\overset{\circ}{S}_{matt} - \overset{\circ}{E}_{matt}) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\tilde{f} + 6\dot{f}'\tilde{f}'}{2\dot{f} + 3\dot{f}'^2} \left[-\frac{\ddot{\Pi}^2}{2} \left(1 + \frac{\dot{f}'^2}{2\dot{f}} + 2\dot{f}'' \right) + \dot{V} \left(1 - \frac{\dot{f}'^2}{2\dot{f}} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\dot{f}'^2}{2\dot{f}} (\dot{S}_{matt} - \dot{E}_{matt}) \right] \Bigg\} + \left(\tilde{S}_{matt} - \frac{\tilde{f}}{\dot{f}} \dot{S}_{matt} \right) \Bigg] \quad (5.33)
\end{aligned}$$

En la norma sincrónica la ecuación de Klein-Gordon a primer orden en ϵ se escribe como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n \tilde{\Pi} + \frac{\ddot{\Pi}}{2} \partial_t \gamma + 3 \frac{\dot{a}}{a} \tilde{\Pi} - \dot{D}_c \tilde{Q}^c = & \frac{1}{\dot{f} \left(1 + \frac{3\dot{f}'^2}{2\dot{f}} \right)} \left\{ \dot{f} \tilde{V}' + \tilde{f} \dot{V}' - 2(\dot{f}' \tilde{V} \right. \\
& + \tilde{f}' \dot{V}) + \dot{f}' (1 + 3\dot{f}'') \tilde{\Pi} \dot{\Pi} + \frac{\ddot{\Pi}^2}{2} [\tilde{f}'(1 + 3\dot{f}'') + 3\dot{f}'\tilde{f}'] + \frac{1}{2}(\dot{f}' \tilde{T}_{matt} \\
& \left. + \tilde{f}' \dot{T}_{matt}) - \left(\frac{\tilde{f} + 3\dot{f}'\tilde{f}'}{\dot{f} + \frac{3\dot{f}'^2}{2}} \right) \left[\dot{f} \dot{V}' - 2\dot{f}' \dot{V} + \frac{\ddot{\Pi}^2}{2}(1 + 3\dot{f}'') + \frac{1}{2} \dot{f}' \dot{T}_{matt} \right] \right\} \quad (5.34)
\end{aligned}$$

mientras que las ecuaciones de conservación de energía-momento

$$\begin{aligned}
\partial_t \delta = -(1 + \nu_0) \left(\dot{D}_l \tilde{u}^l + \frac{\partial_t \gamma}{2} \right) - 3 \frac{\dot{a}}{a} \delta \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} - \nu_0 \right) \\
- \frac{\partial_t \Sigma^{00}}{\tilde{\rho}} - \frac{\dot{a} \Sigma}{a \tilde{\rho}} - 3 \frac{\dot{a} \Sigma}{a \tilde{\rho}} - \frac{\dot{D}_l \Sigma_0^l}{\tilde{\rho}} \quad (5.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \partial_i \tilde{u}^i + \frac{\dot{a}}{a} \partial_i \tilde{u}^i (2 - 3\nu_0) + \frac{\partial_i \tilde{u}^i \partial_t \nu_0}{1 + \nu_0} + \frac{\partial_i \partial^i}{1 + \nu_0} \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \delta \right) + \frac{\partial_t \partial_i \Sigma_0^i}{\tilde{\rho} + \tilde{p}} \\
+ \frac{\partial_i \dot{D}_l \Sigma^{li}}{\tilde{\rho} + \tilde{p}} + 5 \frac{\dot{a} \partial_i \Sigma_0^i}{a(\tilde{\rho} + \tilde{p})} + \frac{\dot{p}}{\tilde{\rho} + \tilde{p}} \left(\partial_i \tilde{D}_l \tilde{h}^{li} - \partial_i \dot{D}_l \gamma^{li} \right) = 0 \quad (5.36)
\end{aligned}$$

Nuevamente nos permitimos escribir las ecuaciones respecto del tiempo conforme τ recordando que $dt = a d\tau$, entonces la ecuación de orden ϵ para la

constricción hamiltoniana se expresa como

$$\begin{aligned}
a^2 \overset{\circ}{D}^i \overset{\circ}{D}^j \gamma_{ij} - a^2 \overset{\circ}{D}^i \overset{\circ}{D}_i \gamma - 2k\gamma + 2\frac{\partial_\tau a}{a} \partial_\tau \gamma &= \frac{2a^2}{\overset{\circ}{f}} \left[\tilde{E}_{matt} + \tilde{V} \right. \\
&- \frac{\tilde{f}}{\overset{\circ}{f}} \left(\tilde{E}_{matt} + \overset{\circ}{V} - 3\frac{\partial_\tau a}{a^2} \overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{\Pi} + \frac{\overset{\circ}{\Pi}^2}{2} \right) - 3\frac{\partial_\tau a}{a^2} \tilde{f}' \overset{\circ}{\Pi} \\
&\left. + \overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{D}_l \tilde{Q}^l - \overset{\circ}{f}' \left(\frac{\partial_\tau \gamma}{2a} \overset{\circ}{\Pi} + 3\frac{\partial_\tau a}{a^2} \tilde{\Pi} \right) + \overset{\circ}{\Pi} \tilde{\Pi} \right] \quad (5.37)
\end{aligned}$$

y la respectiva ecuación de constricción de momento

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left[\overset{\circ}{D}_l \partial_\tau \gamma^l_i - \overset{\circ}{D}_i \partial_\tau \gamma \right] &= -\frac{a}{\overset{\circ}{f}} \left[\tilde{J}_i{}_{matt} + \overset{\circ}{f}' \left(\frac{\partial_\tau a}{a^2} \tilde{Q}_i \right. \right. \\
&\left. \left. - \overset{\circ}{D}_i \tilde{\Pi} \right) - \overset{\circ}{\Pi} \tilde{Q}_i (1 + \overset{\circ}{f}'') \right] \quad (5.38)
\end{aligned}$$

mientras que las ecuaciones que dominan la evolución de γ_{ij} se escriben

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial_\tau^2 \gamma_j^i}{2} - \frac{\partial_\tau a}{a} \partial_\tau \gamma_j^i - \frac{a^2}{2} (\overset{\circ}{D}^l \overset{\circ}{D}^i \gamma_{lj} + \overset{\circ}{D}^l \overset{\circ}{D}_j \gamma^i_l - \overset{\circ}{D}^l \overset{\circ}{D}_l \gamma^i_j - \overset{\circ}{D}_j \overset{\circ}{D}^i \gamma) - 2k\gamma_j^i \\
+ a^2 (\overset{\circ}{D}^l \overset{\circ}{D}^m \gamma_{lm} - \overset{\circ}{D}^l \overset{\circ}{D}_l \gamma) \frac{\delta_j^i}{4} - \frac{k}{2} \gamma \delta_j^i &= \frac{a^2}{2\overset{\circ}{f}} \left[\overset{\circ}{f}' \left(\overset{\circ}{D}^l \tilde{Q}_l - \overset{\circ}{\Pi} \frac{\partial_\tau \gamma}{a6} - \frac{\partial_\tau a}{a^2} \tilde{\Pi} \right) \delta_j^i \right. \\
- 2\overset{\circ}{f}' \overset{\circ}{D}^i \tilde{Q}_j - \frac{\partial_\tau a}{a^2} \left(\tilde{f}' - \frac{\tilde{f} \overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}} \right) \overset{\circ}{\Pi} \delta_j^i - \frac{\delta_j^i}{1 + \frac{3\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2\overset{\circ}{f}}} \left\{ -\overset{\circ}{\Pi} \tilde{\Pi} \left(1 + \frac{\overset{\circ}{f}'}{2\overset{\circ}{f}} + 2\overset{\circ}{f}'' \right) \right. \\
- \frac{\overset{\circ}{\Pi}^2}{2} \left(\frac{\overset{\circ}{f}' \tilde{f}'}{\overset{\circ}{f}} - \frac{\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2} \tilde{f}}{2\overset{\circ}{f}^2} + 2\tilde{f}'' \right) + \tilde{V} \left(1 - \frac{\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2\overset{\circ}{f}} \right) - \overset{\circ}{V} \left(\frac{\overset{\circ}{f}' \tilde{f}'}{\overset{\circ}{f}} - \frac{\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2} \tilde{f}}{2\overset{\circ}{f}^2} \right) \\
\left. \left. + \tilde{f}' \overset{\circ}{V}' + \overset{\circ}{f}' \tilde{V}' + \frac{\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2}}{2\overset{\circ}{f}} (\tilde{S}_{matt} - \tilde{E}_{matt}) + \left(\frac{\overset{\circ}{f}' \tilde{f}'}{\overset{\circ}{f}} - \frac{\overset{\circ}{f}{}^{\prime 2} \tilde{f}}{2\overset{\circ}{f}^2} \right) (\overset{\circ}{S}_{matt} - \overset{\circ}{E}_{matt}) \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\tilde{f} + 6\frac{\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}}\tilde{f}'}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}} + 3\frac{\overset{\circ}{f}'^2}{\overset{\circ}{f}^2}} \left[-\frac{\overset{\circ}{\Pi}^2}{2} \left(1 + \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} + 2\frac{\overset{\circ}{f}''}{\overset{\circ}{f}} \right) + \overset{\circ}{V} \left(1 - \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} (\overset{\circ}{S}_{matt} - \overset{\circ}{E}_{matt}) \right] \left. \right\} + \tilde{S}_{matt\ j}^i - \frac{\tilde{f}}{\overset{\circ}{f}} \overset{\circ}{S}_{matt\ j}^i \quad (5.39)
\end{aligned}$$

notemos como para el caso de norma sincrónica, al igual que en la norma newtoniana, hay un reducción en el coeficiente de $\partial_\tau \gamma_j^i$ de $\frac{3}{2}$ a 1.

Por otro lado la expresión correspondiente a evolución de la traza γ

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial_\tau^2 \gamma}{2} - \frac{\partial_\tau a}{a} \partial_\tau \gamma - \frac{a^2}{4} (\overset{\circ}{D}^i \overset{\circ}{D}^j \gamma_{ij} - \overset{\circ}{D}^l \overset{\circ}{D}_l \gamma) - \frac{k}{2} \gamma = \frac{a^2}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} \left[\overset{\circ}{f}' \left(\overset{\circ}{D}^l \tilde{Q}_l - \overset{\circ}{\Pi} \frac{\partial_\tau \gamma}{2a} \right. \right. \\
& \left. \left. - 3 \frac{\partial_\tau a}{a^2} \overset{\circ}{\Pi} \right) - 3 \frac{\partial_\tau a}{a^2} \left(\tilde{f}' - \frac{\tilde{f} \overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}} \right) \overset{\circ}{\Pi} - \frac{3}{1 + \frac{3\overset{\circ}{f}'^2}{2\overset{\circ}{f}}} \left\{ -\overset{\circ}{\Pi} \overset{\circ}{\Pi} \left(1 + \frac{\overset{\circ}{f}'}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} + 2\frac{\overset{\circ}{f}''}{\overset{\circ}{f}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\overset{\circ}{\Pi}^2}{2} \left(\frac{\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}} \frac{\tilde{f}'}{\overset{\circ}{f}} - \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} \tilde{f} + 2\tilde{f}'' \right) + \tilde{V} \left(1 - \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} \right) - \overset{\circ}{V} \left(\frac{\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}} \frac{\tilde{f}'}{\overset{\circ}{f}} - \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} \tilde{f} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \tilde{f}' \overset{\circ}{V}' + \overset{\circ}{f}' \tilde{V}' + \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} (\tilde{S}_{matt} - \tilde{E}_{matt}) + \left(\frac{\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}} \frac{\tilde{f}'}{\overset{\circ}{f}} - \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} \tilde{f} \right) (\overset{\circ}{S}_{matt} - \overset{\circ}{E}_{matt}) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2\tilde{f} + 6\frac{\overset{\circ}{f}'}{\overset{\circ}{f}}\tilde{f}'}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}} + 3\frac{\overset{\circ}{f}'^2}{\overset{\circ}{f}^2}} \left[-\frac{\overset{\circ}{\Pi}^2}{2} \left(1 + \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} + 2\frac{\overset{\circ}{f}''}{\overset{\circ}{f}} \right) + \overset{\circ}{V} \left(1 - \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\overset{\circ}{f}'^2}{2\frac{\overset{\circ}{f}}{\overset{\circ}{f}}} (\overset{\circ}{S}_{matt} - \overset{\circ}{E}_{matt}) \right] \right\} + \tilde{S}_{matt} - \frac{\tilde{f}}{\overset{\circ}{f}} \overset{\circ}{S} \quad (5.40)
\end{aligned}$$

también escribimos la ecuación para la evolución de la perturbación del cam-

po escalar

$$\begin{aligned}
\mathring{L}_n \mathring{\Pi} + \frac{\mathring{\Pi}}{2} \frac{\partial_\tau \gamma}{a} + 3 \frac{\partial_\tau a}{a^2} \mathring{\Pi} - \mathring{D}_c \mathring{Q}^c = \frac{1}{\mathring{f} \left(1 + \frac{3\mathring{f}^{\prime 2}}{2\mathring{f}}\right)} & \left\{ \mathring{f} \mathring{V}' + \tilde{f} \mathring{V}' - 2(\mathring{f}' \mathring{V} \right. \\
& + \tilde{f}' \mathring{V}) + \mathring{f}' (1 + 3 \mathring{f}'') \mathring{\Pi} \mathring{\Pi} + \frac{\mathring{\Pi}^2}{2} \left[\tilde{f}' (1 + 3 \mathring{f}'') + 3 \mathring{f}' \tilde{f}'' \right] + \frac{1}{2} (\mathring{f}' \mathring{T}_{\text{matt}} \\
& + \tilde{f}' \mathring{T}_{\text{matt}}) - \left(\frac{\tilde{f} + 3 \mathring{f}' \tilde{f}'}{\mathring{f} + \frac{3\mathring{f}^{\prime 2}}{2}} \right) \left[\mathring{f} \mathring{V}' - 2 \mathring{f}' \mathring{V} + \frac{\mathring{\Pi}^2}{2} (1 + 3 \mathring{f}'') + \frac{1}{2} \mathring{f}' \mathring{T}_{\text{matt}} \right] \left. \right\} \quad (5.41)
\end{aligned}$$

y las ecuaciones de conservación de energía-momento se escriben como

$$\begin{aligned}
\partial_\tau \delta = -(1 + \nu_0) \left(\mathring{D}_l \tilde{U}^l + \frac{\partial_\tau \gamma}{2} \right) - 3 \frac{\partial_\tau a}{a} \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} - \nu_0 \right) \\
- \frac{\partial_\tau \Sigma^{00}}{\mathring{\rho}} - \frac{\partial_\tau a \Sigma}{a \mathring{\rho}} - 3 \frac{\partial_\tau a \Sigma}{a \mathring{\rho}} - \frac{a \mathring{D}_l \Sigma_0^l}{\mathring{\rho}} \quad (5.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\tau \partial_i \tilde{U}^i + \frac{\partial_\tau a}{a} \partial_i \tilde{U}^i (1 - 3\nu_0) + \frac{\partial_i \tilde{U}^i \partial_\tau \nu_0}{1 + \nu_0} + \frac{a^2 \partial_i \partial^i}{1 + \nu_0} \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \delta \right) + \frac{a \partial_\tau \partial_i \Sigma_0^i}{\mathring{\rho} + \mathring{p}} \\
+ \frac{a^2 \partial_i \mathring{D}_l \Sigma^{li}}{\mathring{\rho} + \mathring{p}} + 5 \frac{\partial_\tau a \partial_i \Sigma_0^i}{\mathring{\rho} + \mathring{p}} + \frac{a^2 \mathring{p}}{\mathring{\rho} + \mathring{p}} \left(\partial_i \mathring{D}_l \mathring{h}^{li} - \partial_i \mathring{D}_l \gamma^{li} \right) = 0 \quad (5.43)
\end{aligned}$$

donde en la ec. (5.43) también se ha reducido en una unidad el coeficiente de $\frac{\partial_\tau a}{a} \partial_i \tilde{U}^i$ de $2 - 3\nu_0$ a $1 - 3\nu_0$ y nuevamente hemos utilizado la variable U^i definida anteriormente.

5.3. Elección de la Norma

Una vez que hemos presentado las dos opciones (i. e. norma newtoniana y norma sincrónica) conviene analizar las ventajas y desventajas de ambas.

Para ello consideremos el caso general en que el elemento de línea es aquel dado para un modelo de FRW con la perturbación más general posible de acuerdo a la descomposición 3+1, ec. (3.27), esto es que puede ser escrito como

$$ds^2 = a^2 \left[-(1 + 2\epsilon\tilde{N})d\tau - 2\epsilon\tilde{N}_i dx^i + (\bar{h}_{ij} + \epsilon\bar{\gamma}_{ij}) dx^i dx^j \right] \quad (5.44)$$

donde hemos definido $\bar{h}_{ij} = a^{-2}(\tau) \overset{\circ}{h}_{ij}$ mientras que $\bar{\gamma}_{ij} = a^{-2}(\tau)\gamma_{ij}$. Ahora apliquemos un cambio general de coordenadas dado por $\hat{x}^a = x^a + \epsilon\xi^a$ donde las componentes de $\xi^a = (\eta, \xi^i)$, ante este cambio de coordenadas podemos considerar que las componentes del tensor métrico a primer orden transforman de acuerdo a (ver apéndice C ec. (C-10)):

$$\begin{aligned} \hat{g}_{ab} &= g_{ab} + \mathcal{L}_\xi \overset{\circ}{g}_{ab} \\ &= g_{ab} + \epsilon\xi^c \overset{\circ}{\nabla}_c \overset{\circ}{g}_{ab} + \epsilon \overset{\circ}{g}_{cb} \overset{\circ}{\nabla}_a \xi^c + \epsilon \overset{\circ}{g}_{ac} \overset{\circ}{\nabla}_b \xi^c \\ &= g_{ab} + \epsilon \overset{\circ}{\nabla}_a \xi_b + \epsilon \overset{\circ}{\nabla}_b \xi_a \end{aligned} \quad (5.45)$$

que aplicamos a la métrica dada por (5.44), para las componentes $(0,0)$, $(0,i)$ e (i,j) por separado, una vez que las cantidades de orden cero se anulan por ser invariantes ante dicha transformación de coordenadas ([5] [61]), obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\hat{\tilde{N}} - \tilde{N} = \partial_\tau \eta + \frac{\partial_\tau a}{a} \eta \quad (5.46)$$

$$\hat{\tilde{N}}_i - \tilde{N}_i = -\frac{1}{2} \overset{\circ}{\nabla}_\tau \xi_i + \frac{1}{2} \overset{\circ}{D}_i \eta \quad (5.47)$$

$$\hat{\tilde{\gamma}}_{ij} - \tilde{\gamma}_{ij} = \overset{\circ}{D}_i \xi_j + \overset{\circ}{D}_j \xi_i + 2\eta \frac{\partial_\tau a}{a} \overset{\circ}{h}_{ij} \quad (5.48)$$

de donde es claro ver que ninguna componente es invariante de norma por si sola, además que tenemos una ecuación escalar, una vectorial y una tensorial acopladas. Sin embargo resulta conveniente usar una descomposición de Helmholtz para las cantidades vectoriales y tensoriales, esquemáticamente

escribimos como:

$$V_i = \overset{\circ}{D}_i {}^{(V)}E + V_i^T \quad (5.49)$$

$$T_{ij} = \left(\overset{\circ}{D}_i \overset{\circ}{D}_j - \frac{1}{3} \overset{\circ}{h}_{ij} \overset{\circ}{D}^l \overset{\circ}{D}_l \right) {}^{(T)}E + \overset{\circ}{D}_{(i} {}^{(T)}V_{j)} + T_{ij}^{TT} + \frac{1}{3} \overset{\circ}{h}_{ij} T \quad (5.50)$$

donde ${}^{(V)}E$, ${}^{(T)}E$ son escalares⁴, T es escalar y corresponde a la traza del tensor T_{ij} , mientras que $\overset{\circ}{D}^i V_i^T = 0$ y $\overset{\circ}{D}^i {}^{(T)}V_i = 0$, i. e. son solenoidales (transversos) y T_{ij}^{TT} es transverso y sin traza es decir cumple $\overset{\circ}{D}^i T_{ij}^{TT} = 0$ y $\overset{\circ}{h}^{ij} T_{ij}^{TT} = 0$.

Con esta descomposición la parte escalar del sistema formado por las ecs. (5.46)-(5.48) queda expresado como⁵:

$$\hat{N} - \tilde{N} = \partial_\tau \eta + \frac{\partial_\tau a}{a} \eta \quad (5.51)$$

$${}^{(N)}\hat{E} - {}^{(N)}\tilde{E} = -\frac{1}{2} \partial_\tau \xi + \frac{1}{2} \eta \quad (5.52)$$

$$\hat{\gamma} - \gamma = 2 \overset{\circ}{D}_i \xi^i + 6\eta \frac{\partial_\tau a}{a} \quad (5.53)$$

$${}^{(\gamma)}\hat{E} - {}^{(\gamma)}E = 2\xi \quad (5.54)$$

las dos últimas ecuaciones se han obtenido de la ec. (5.48) tomando la traza con $\overset{\circ}{h}^{ij}$. Nótese también que el escalar ${}^{(\xi)}E$ se ha expresado únicamente como ξ . Podemos aplicar el cambio de coordenadas al tensor de energía-momento del fluido perfecto y aplicar el mismo tipo de descomposición para obtener

⁴Las etiquetas (V) y (T) identifican a que cantidad corresponde el escalar o vector según sea el caso.

⁵Las perturbaciones vectoriales (vorticidad) son suprimidas durante la expansión del Universo, mientras que las tensoriales están asociadas a ondas gravitacionales.

un segundo sistema de ecuaciones puramente escalares

$$\hat{\delta} - \delta = -3\eta \frac{\partial_\tau a}{a} (1 + \nu_0) \quad (5.55)$$

$${}^{(u)}\hat{E} - {}^{(u)}E = -\partial_\tau \xi \quad (5.56)$$

$$\hat{\dot{p}} - \dot{p} = \eta \partial_\tau \dot{p} \quad (5.57)$$

a partir de ambos sistemas (presentados también por Bruni et al. [26]) resulta útil encontrar una combinación lineal tal que las cantidades del lado derecho de las ecuaciones se cancelen, es decir encontrar cantidades invariantes de norma. Con esta idea hemos construido 4 cantidades que corresponden a aquellas dadas por Bardeen [5] solo que las hemos obtenido de forma covariante en lugar de usar el espacio de Fourier:

$$\Phi_A = \tilde{N} - 2\partial_\tau {}^{(N)}E - 2\frac{\partial_\tau a}{a} {}^{(N)}E - \frac{1}{2} \left(\partial_\tau^2 {}^{(\gamma)}E + \frac{\partial_\tau a}{a} \partial_\tau {}^{(\gamma)}E \right) \quad (5.58)$$

$$\Phi_B = \frac{1}{3}\gamma - \frac{1}{3} \overset{\circ}{D}{}^l \overset{\circ}{D}_l {}^{(\gamma)}E - 4\frac{\partial_\tau a}{a} \left({}^{(N)}E + \frac{1}{4} \partial_\tau {}^{(\gamma)}E \right) \quad (5.59)$$

$$\varepsilon_m = \delta + 3(1 + \nu_0) \frac{\partial_\tau a}{a} (2 {}^{(N)}E - {}^{(u)}E) \quad (5.60)$$

$$\varepsilon_g = \delta + 3(1 + \nu_0) \frac{\partial_\tau a}{a} \left(2 {}^{(N)}E + \frac{1}{2} \partial_\tau {}^{(\gamma)}E \right) \quad (5.61)$$

Escribamos (5.58) y (5.59) estas expresiones en términos de la norma sincrónica, que es esta notación estaría dada por $\tilde{N} = 0$, ${}^{(N)}E = 0$

$$\Phi_A = -\frac{1}{2} \left(\partial_\tau^2 {}^{(\gamma)}E + \frac{\partial_\tau a}{a} \partial_\tau {}^{(\gamma)}E \right) \quad (5.62)$$

$$\Phi_B = \frac{1}{3}\gamma - \frac{1}{3} \overset{\circ}{D}{}^l \overset{\circ}{D}_l {}^{(\gamma)}E - \frac{\partial_\tau a}{a} \partial_\tau {}^{(\gamma)}E \quad (5.63)$$

por otro lado en la norma newtoniana $\tilde{N} = \phi$, ${}^{(N)}E = 0$, ${}^{(\gamma)}E = 0$ y $\gamma = 6\psi$

$$\Phi_A = \phi \quad (5.64)$$

$$\Phi_B = 2\psi \quad (5.65)$$

en consecuencia las ecuaciones presentadas en la sección 5.1 son idénticas a las expresiones en términos de los potenciales invariantes de norma, por lo cual podemos resolver el sistema para las variables ϕ y ψ y posteriormente generalizar para Φ_A y Φ_B [60].

Es cierto que la norma sincrónica es muy popular ya que las ecuaciones de evolución para las perturbaciones surgen de manera más simple e históricamente fueron escritas primero en esta norma por Lifshitz (1964), inclusive en algunas exposiciones parecen muy sencillas (Peebles [71]) sin embargo en dicha norma existe todavía una libertad de norma que da origen a modos espúreos, mientras que en la norma newtoniana las coordenadas están fijadas completamente [60].

Capítulo 6

Revisión al efecto Sachs-Wolfe

La observación de anisotropías en la temperatura de la radiación cósmica de fondo (CMB) es actualmente la mejor prueba experimental con la que cualquier teoría de formación de estructura debe ser comparada con la finalidad de analizar cuales teorías pueden viables o no.

Las fluctuaciones en la temperatura son gobernadas a grandes escalas angulares (mayores a diez grados) principalmente por el llamado efecto Sachs-Wolfe (ver figura 6.1). Este efecto consiste en el corrimiento tipo Doppler de la frecuencia con que el observador mide a los fotones provenientes de la última superficie de dispersión producido por las variaciones en los potenciales gravitacionales.

Se distingue entre dos tipos de efecto Sachs-Wolfe: el no integrado, que es causado por los pozos y crestas de potenciales gravitacionales presentes en la última superficie de dispersión; mientras que el integrado (ISW) ocurre en el trayecto de los fotones desde la última dispersión hasta que son observados en la actualidad.

Algunos modelos pueden presentar contribuciones adicionales al espectro del CMB debidas al ISW, principalmente distinguimos dos: puede variar la altura del primer pico [79], sin embargo usualmente este efecto solo se asocia al Sachs-Wolfe no integrado que en épocas tempranas se correlaciona

de manera complicada con el ISW; en épocas tardías el ISW alcanza su máxima amplitud contribuyendo al espectro del CMB principalmente para $l \lesssim 10$ [42], [20].

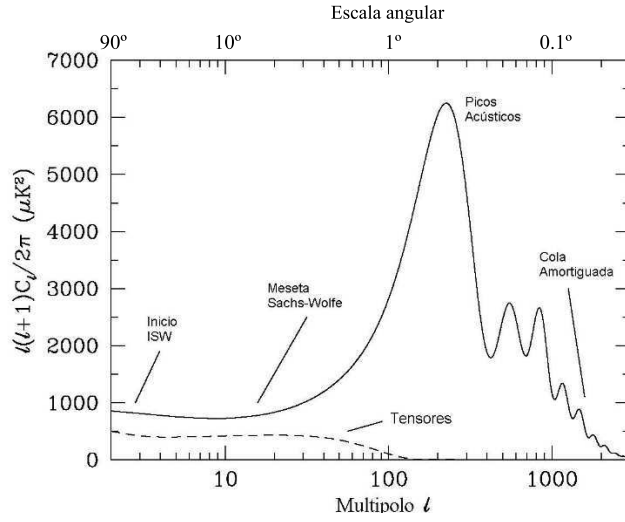


Figura 6.1: Gráfica de la curva teórica del espectro de anisotropías del CMB usando el modelo estándar Λ CDM. La contribución del efecto Sachs-Wolfe se da principalmente para $l \lesssim 100$. Los picos acústicos y la cola amortiguada se han discutido en la sección 2.2.

6.1. Derivación estándar

Consideramos como procedimiento tradicional al que se encuentra en el artículo de Sachs y Wolfe [84], sin embargo a pesar de la simplicidad que presenta trabajar en el espacio de Fourier preferimos revisarlo al modo de Padmanabhan [69] en el espacio de configuración (y nos limitaremos al caso plano, $k = 0$).

Consideremos pues el elemento de línea que corresponde a un universo del tipo FRW perturbado y para el cual hemos fijado la norma sincrónica

(ver sección 5.2)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [\delta_{ij} - \epsilon\gamma_{ij}(\mathbf{x}, t)] dx^i dx^j, \quad (6.1)$$

un fotón emitido en $t = t_e$ es detectado por un observador que se mueve sobre una geodésica nula en $t = t_a$. Sea el vector unitario que apunta de la fuente al observador ${}^3\hat{k}^i$ entonces la ubicación del fotón en cierto tiempo t será

$$x^i = {}^3\hat{k}^i \tau(t) \quad (6.2)$$

donde el tiempo conforme se ha definido como

$$\tau(t) = \int_{t_e}^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (6.3)$$

consideremos dos observadores localizados en x^i y $x^i + \delta x^i$ en la trayectoria del fotón. La separación entre los observadores en cualquier tiempo t está dada por:

$$\begin{aligned} \delta l &= (-g_{ij} \delta x^i \delta x^j)^{1/2} \\ &\propto a \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon \gamma_{ij} {}^3\hat{k}^i {}^3\hat{k}^j \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

que hemos dejado a primer orden en ϵ , con esto, el cambio de δl esta dado por:

$$\begin{aligned} v &= \frac{d\delta l}{dt} = \delta l \frac{d}{dt} (\ln \delta l) \cong \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{2} \epsilon \dot{\gamma}_{ij} {}^3\hat{k}^i {}^3\hat{k}^j \right) \delta l \\ &= \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{2} \epsilon \dot{\gamma}_{ij} {}^3\hat{k}^i {}^3\hat{k}^j \right) \delta t \end{aligned} \quad (6.5)$$

donde hemos usado el hecho de que $\delta l = \delta t$ para los fotones. La velocidad propia de un observador respecto del otro es v entonces el corrimiento al rojo

del fotón esta dado¹ por

$$-v = \frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{\dot{a}}{a}\delta t + \frac{1}{2}\epsilon\dot{\gamma}_{ij} \hat{k}^i \hat{k}^j \delta t \quad (6.6)$$

donde ω es la frecuencia del fotón, notese que los primeros términos $\left(\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{\dot{a}}{a}\delta t\right)$ corresponden al corrimiento estándar en el fondo, por lo que resulta útil reescribir la ecuación anterior como:

$$\frac{\delta(\omega a)}{\omega a} = \frac{\delta(Ta)}{Ta} = \frac{1}{2}\epsilon\dot{\gamma}_{ij} \hat{k}^i \hat{k}^j \delta t \quad (6.7)$$

donde hemos usado el hecho de que el cambio en la frecuencia es proporcional a un cambio en la temperatura medida, i. e., $\delta\omega \propto \delta T$. Integrando a lo largo del camino del fotón de t_e a t_d tenemos que:

$$\ln\left(\frac{T_d a_d}{T_e a_e}\right) = \frac{1}{2} \int_{t_e}^{t_d} \epsilon\dot{\gamma}_{ij} [t, x^k(t)] \hat{k}^i \hat{k}^j dt \quad (6.8)$$

en ausencia de perturbaciones $T \propto a^{-1}$, los fotones emitidos del cuerpo negro en la época en que la temperatura del Universo era T_e se observarían como fotones del cuerpo negro a temperatura $\frac{T_e a_e}{a_d} \equiv T_0$ mientras que la diferencia entre las temperaturas T_d y T_0 será del orden de ϵ entonces podemos escribir el lado izquierdo de la ec. (6.8) como

$$\ln\left(\frac{T_d}{T_0}\right) = \ln\left(\frac{T_0 + \epsilon\delta T}{T_0}\right) \simeq \epsilon\frac{\delta T}{T_0} \quad (6.9)$$

lo que nos permite escribir

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{1}{2} \int_{t_e}^{t_d} \dot{\gamma}_{ij} [t, x^k(t)] \hat{k}^i \hat{k}^j dt \quad (6.10)$$

¹En una región infinitesimalmente separada las leyes de la relatividad especial son válidas

que relaciona las variaciones en la temperatura con la proyección de las perturbaciones de la métrica en el camino de los fotones y donde la integración del lado derecho (de acuerdo con Padmanabhan [69]) da origen al efecto Sachs-Wolfe.

6.2. Corrimiento Gravitacional de la Luz

Obtendremos una fórmula general para el corrimiento al rojo puramente gravitacional basado en el formalismo 3+1 de la sección 3.4. Después la aplicaremos al caso cosmológico para obtener el efecto Sachs-Wolfe.

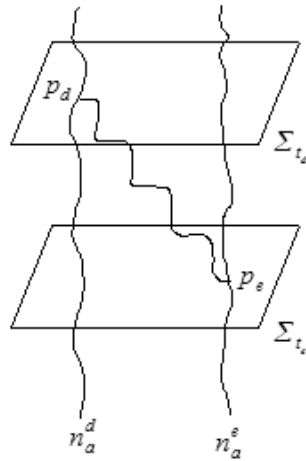


Figura 6.2: Un fotón viaja desde p_e a p_d , donde dos observadores normales a las hipersuperficies Σ_{t_e} y Σ_{t_d} miden su frecuencia.

Para nuestra formulación consideremos un fotón cuyo vector tangente a su trayectoria (geodésica) está dado por $k^a \equiv \frac{dx^a}{d\lambda}$ y dos observadores normales a Σ_t caracterizados por sus 4-velocidades n_a^e y n_a^d (figura 6.2). El observador que se encuentra en la fuente del fotón observará una frecuencia dada por $\omega_e = -k^a n_a|_{p_e}$ mientras que un observador que detecte ese mismo

fotón observará la frecuencia dada por $\omega_d = -k^a n_a|_{p_d}$ donde p_e y p_d están caracterizados por las coordenadas $x^a(\lambda_e)$ y $x^a(\lambda_d)$ respectivamente, de esta forma podemos escribir $\omega_e = \omega(x^a(\lambda_e))$, $\omega_d = \omega(x^a(\lambda_d))$, además podemos decir que $\lambda_d = \lambda_e + \Delta\lambda$. Consideremos pues la diferencia entre las frecuencias (corrimiento de luz) de manera que:

$$\frac{\omega_d - \omega_e}{\Delta\lambda} = \frac{\omega(x^a(\lambda_d)) - \omega(x^a(\lambda_e))}{\Delta\lambda} \quad (6.11)$$

y tomando el límite en que $\Delta\lambda \rightarrow 0$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\lambda} &= \frac{dx^a}{d\lambda} \nabla_a \omega \\ &= k^a \nabla_a \omega \end{aligned} \quad (6.12)$$

En este punto nos permitimos escribir como hemos hecho arriba $\omega = -k^a n_a$ y reemplazando en el segundo miembro de la ecuación anterior podemos expandir y obtener

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = -k^b n_a \nabla_b k^a - k^b k^a \nabla_b n_a \quad (6.13)$$

donde el primer término del lado derecho se anula idénticamente², mientras que el segundo término puede ser escrito mediante la curvatura extrínseca³ como

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = k^a k^b (K_{ab} + n_b D_a \ln N) \quad (6.14)$$

Ahora podemos considerar la descomposición 3+1 del vector $k^a = {}^3k^a +$

² $k^b \nabla_b k^a = 0$ es la ecuación de las geodésicas

³Escribimos $-\nabla_b n_a = K_{ab} + a_a n_b = K_{ab} + n_b D_a \ln N$ dada por Gourgoulhon en [35] y que se deduce de la definición de K_{ab} ec. (3.31).

ωn^a y escribir la ec. 6.14 utilizando los vectores normalizados⁴ ${}^3\hat{k}^a$ como

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = \omega^2 \left({}^3\hat{k}^a {}^3\hat{k}^b K_{ab} - {}^3\hat{k}^a D_a \ln N \right) \quad (6.15)$$

que es la fórmula más general para el corrimiento gravitacional de la luz, además de que es independiente de la teoría utilizada pues no hemos necesitado ninguna ecuación de campo en su derivación sino sólo hemos usado propiedades cinéticas del espacio-tiempo y los “potenciales” de la métrica.

Una de las propiedades más importantes de esta fórmula es que no toma en cuenta el movimiento relativo de los observadores⁵ (corrimiento de luz debido a la Relatividad Especial), pero como veremos más adelante si toma en cuenta los efectos de arrastre debidos a la geometría del espacio-tiempo. Mediante esta expresión deduciremos la ec. (6.10), pero antes veremos algunos ejemplos de su aplicación.

6.2.1. Ejemplo: Espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico.

Consideremos una métrica estática con simetría esférica, esto es, aquella con el elemento de línea

$$ds^2 = -N^2(r)dt^2 + A^2(r)dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (6.16)$$

⁴Podemos escribir ${}^3\hat{k}^a = \frac{{}^3k^a}{\omega}$ ya que

$$g_{ab}k^ak^b = (h_{ab} - n_an_b)k^ak^b = {}^3k^a {}^3k_a - \omega^2 = 0$$

de donde se sigue que $\omega^2 = {}^3k^a {}^3k_a$.

⁵Esto se puede ver directamente de la ec. (6.15), en donde se observa que para un espacio-tiempo plano, $N \equiv 1$, $K_{ab} \equiv 0$, no hay corrimiento gravitacional de luz, ni el Doppler usual de la Relatividad Especial.

en este caso los observadores normales⁶ a Σ_t son estáticos, esto es,

$$n^a = \left(\frac{1}{N(r)}, 0, 0, 0 \right) \quad (6.17)$$

además para este caso $K_{ab} \equiv 0$, con lo que podemos sustituir en la ec. (6.15) para obtener

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{d\omega}{dr} \frac{dr}{d\lambda} = \frac{d\omega}{dr} k^r = -\omega k^r \frac{d \ln N}{dr} \quad (6.18)$$

notese que hemos usado el hecho de que debido a que los potenciales de la métrica (N , A) son solo funciones de la coordenada radial, la frecuencia del fotón emitido también será solo función de esta coordenada, i. e., $\omega = \omega(r)$, entonces obtenemos la ecuación diferencial

$$d \ln \omega = -d \ln N \quad (6.19)$$

que podemos resolver integrando desde t_e a t_d para obtener la relación

$$\frac{\omega_d}{\omega_e} = \frac{N(r_e)}{N(r_d)} \quad (6.20)$$

en el caso de la métrica de Schwarzschild (para la cual $N^2(r) = 1 - \frac{2M}{r}$) obtenemos la relación usualmente presentada en la literatura [104]

$$\frac{\omega_d}{\omega_e} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{r_e}}{1 - \frac{2M}{r_d}}} \quad (6.21)$$

6.2.2. Ejemplo: Espacio-tiempo de FRW

Consideremos el caso del modelo de FRW sin perturbar, esto es la métrica con la forma de la ec. (2.1), que nos resultará útil más adelante. Para este caso hemos visto en la ec. (4.42) $K_{ab} = -\frac{\dot{a}}{a} h_{ab}$ y los observadores normales

⁶Coinciden con el vector de Killing temporal $\chi^a \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a$ ortogonal a Σ_t .

son comóviles i. e.

$$n^a = (1, 0, 0, 0) \quad (6.22)$$

con lo que obtenemos sustituyendo en la ec. (6.15)

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{d\omega}{dt} \frac{dt}{d\lambda} = -\omega^2 \frac{\dot{a}}{a} \quad (6.23)$$

donde podemos sustituir $\frac{dt}{d\lambda} = k^0 = \omega$ para obtener la ecuación diferencial:

$$d \ln \omega = -d \ln a \quad (6.24)$$

cuya solución integrada desde t_e a t_d podemos escribir de la forma

$$\frac{\omega_d}{\omega_e} = \frac{a_e}{a_d} \quad (6.25)$$

Esta fórmula provee el corrimiento de luz debida a la expansión del Universo.

6.2.3. Ejemplo: Espacio-tiempo estacionario y axialmente simétrico

Consideremos un espacio-tiempo estacionario y con simetría respecto de un eje, en forma general escribimos el elemento de línea como

$$ds^2 = - [N^2(r, \theta) - N_\phi(r, \theta)N^\phi(r, \theta)] dt^2 - 2N_\phi(r, \theta) dt d\phi + A^2(r, \theta) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (6.26)$$

en este caso vemos que la componente angular $N_\phi(r, \theta)$ del “shift” dará lugar a efectos de arrastre. Para este caso los observadores normales tienen velocidades $n^a = \left(\frac{1}{N}, 0, 0, \frac{N^\phi}{N} \right)$, que por simplicidad ubicaremos en el plano ecuatorial, i. e. $\theta = \frac{\pi}{2}$. Calculando la curvatura extrínseca y proyectándola

con ${}^3\hat{k}^a$ y ${}^3\hat{k}^b$ para posteriormente sustituir en la ec. (6.15) tenemos

$${}^3\hat{k}^a {}^3\hat{k}^b K_{ab} = -\dot{r} {}^3\hat{k}_t \partial_r \left(\frac{1}{N} \right) - \dot{r} {}^3\hat{k}_\phi \partial_r \left(\frac{N^\phi}{N} \right) \quad (6.27)$$

Ahora podemos sustituir ${}^3\hat{k}_t = g_{ta} {}^3k^a = g_{ti} {}^3k^i = -N_\phi {}^3\hat{k}^\phi$, $\dot{r} = \frac{dr}{d\lambda}$, ${}^3k_\phi = L$ donde L es el momento angular del fotón⁷, con lo cual el lado derecho de la ec. (6.27) se puede escribir como $-\frac{dr}{d\lambda} \frac{L}{N} \partial_r N^\phi$.

La ecuación (6.15) para el corrimiento al rojo queda de la forma

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{d\omega}{dr} \frac{dr}{d\lambda} = -\frac{dr}{d\lambda} \frac{L}{N} \partial_r N^\phi - \frac{\omega}{N} \frac{dr}{d\lambda} \partial_r N \quad (6.28)$$

que lleva a la ecuación diferencial

$$d\omega = -\frac{1}{N} (LdN^\phi + \omega dN) \quad (6.29)$$

que podemos integrar para encontrar la solución

$$\frac{\omega(r_e)}{\omega(r_d)} = \frac{N(r_d)}{N(r_e)} \frac{[1 - \frac{L}{E} N^\phi(r_e)]}{[1 - \frac{L}{E} N^\phi(r_d)]} \quad (6.30)$$

donde $E = -k^a \chi_a$, $L = k^a \psi_a$ son las constantes de integración a lo largo del camino de los fotones asociadas a los vectores de Killing temporal y espacial $\chi^a \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a$ y $\psi^a \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^a$ respectivamente, además podemos tomar que

⁷Asociado al vector de Killing espacial ψ^a tal que

$$\begin{aligned} L &= \psi_b k^b = g_{ab} \psi^a k^b \\ &= g_{ab} \delta_\phi^a k^b = g_{\phi b} k^b \end{aligned}$$

pero con la definición de 3k_a

$$\begin{aligned} {}^3k_a &= k_a - \omega n_a \\ &= g_{ab} k^b - \omega n_a \end{aligned}$$

y como $n_\phi \equiv 0$, entonces ${}^3k_\phi = g_{\phi b} k^b = L$.

la detección de los fotones se realiza muy lejos de la fuente, esto es $r_d \rightarrow \infty$ y simplificar la solución escribiendola como

$$\omega_e = \frac{\omega(\infty)}{N_e} \left(1 - \frac{L}{E} N_e^\phi \right) \quad (6.31)$$

donde hemos asumido que el espacio-tiempo es asintóticamente plano, i. e. $N_\infty \rightarrow 1$, $N_\infty^\phi \rightarrow 0$.

Nótese que la expresión (6.30) para el corrimiento al rojo es la misma que se obtiene de manera directa utilizando los vectores de Killing⁸.

6.3. Nueva derivación del efecto Sachs-Wolfe

6.3.1. Norma Sincrónica.

Consideremos el elemento de línea que corresponde a un universo del tipo FRW perturbado en la norma sincrónica esto es

$$ds^2 = -dt^2 + (\overset{\circ}{h}_{ij} + \epsilon\gamma_{ij})dx^i dx^j \quad (6.32)$$

donde $\overset{\circ}{h}_{ij}$ esta dado por la ec. (2.1), calculamos la curvatura extrínseca (para este caso $K_{ij} = -\frac{\dot{a}}{a} \overset{\circ}{h}_{ij} - \frac{\epsilon}{2} \partial_t \gamma_{ij}$) y sustituimos en la ec. (6.15) obteniendo la

⁸A partir de $\omega = -k_a n^a$ donde $n^a = \frac{1}{N} \chi^a + \frac{N^\phi}{N} \psi^a$ entonces

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{1}{N} (k_a \chi^a + N^\phi k_a \psi^a) = -\frac{1}{N} (-E + LN^\phi) \\ &= \frac{E}{N} \left(1 - \frac{L}{E} N^\phi \right) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{\omega(r_e)}{\omega(r_d)} = \frac{N(r_d) \left[1 - \frac{L}{E} N^\phi(r_e) \right]}{N(r_e) \left[1 - \frac{L}{E} N^\phi(r_d) \right]}$$

expresión

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{d\omega}{dt} \frac{dt}{d\lambda} = \omega \frac{d\omega}{dt} = \omega^2 \left(-\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\epsilon}{2} {}^3\hat{k}^a {}^3\hat{k}^b \partial_t \gamma_{ab} \right) \quad (6.33)$$

que podemos reescribir como

$$\frac{d \ln \omega}{dt} + \frac{d \ln a}{dt} = \frac{d \ln \omega a}{dt} = -\frac{\epsilon}{2} {}^3\hat{k}^a {}^3\hat{k}^b \partial_t \gamma_{ab} \quad (6.34)$$

que es una de las expresiones que ya habíamos obtenido en la sección 6.1 [ec. (6.7)] y por los mismos argumentos podemos recuperar la ec. (6.10).

6.3.2. Norma Newtoniana.

Utilicemos ahora la norma newtoniana y recordemos que en esta norma $N^2 = 1 + 2\epsilon\phi$ mientras que $K_{ij} = -\frac{\dot{a}}{a} \mathring{h}_{ij} + \epsilon \left(-\partial_t \psi + \phi \frac{\dot{a}}{a} - 2\psi \frac{\dot{a}}{a} \right) \mathring{h}_{ij}$, además tenemos que para los fotones se cumple la condición $g_{ab} k^a k^b = 0$ que explícitamente podemos desarrollar como

$$g_{00} k^0 k^0 + {}^3g_{ab} {}^3k^a {}^3k^b = -p^0{}^2 + p^a p_a = 0 \quad (6.35)$$

de donde hemos definido las cantidades

$$\begin{aligned} \omega &= -n_a k^a = N k^0 \\ &= p^0 = \sqrt{g_{00}} k^0 = (1 + \epsilon\phi) k^0 \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$p^a = \sqrt{g_{ii}} {}^3k^a = (1 + \epsilon\psi) {}^3k^a \quad (6.37)$$

donde no hay suma sobre los índices repetidos en (6.37). Además es útil despejar k^0 y ${}^3k^a$ de manera que

$$k^0 = (1 - \epsilon\phi)\omega \quad (6.38)$$

$${}^3k^a = (1 - \epsilon\psi)p^a \quad (6.39)$$

con lo que podemos calcular ${}^3\hat{k}^a {}^3\hat{k}^b = (1 - 2\epsilon\psi)\hat{p}^a\hat{p}^b$ con la condición de que $\hat{p}^a\hat{p}_a = 1$; así directamente podemos sustituir en la ec. (6.15)

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{d\omega}{dt} \frac{dt}{d\lambda} = \omega^2 \left[-\frac{\dot{a}}{a} + \epsilon \left(-\partial_t\psi + \phi \frac{\dot{a}}{a} \right) - \epsilon {}^3\hat{k}^a D_a\phi \right] \quad (6.40)$$

donde hemos utilizado la aproximación lineal de la función logaritmo de tal forma que $D_a \ln(1 + \epsilon\phi) \approx D_a\epsilon\phi$. De acuerdo con (6.38) podemos expresar $\frac{dt}{d\lambda} = k^0 = (1 - \epsilon\phi)\omega$ y despejar para obtener

$$\frac{d\omega}{\omega dt} = - \left(\frac{\dot{a}}{a} + \epsilon\partial_t\psi + \epsilon {}^3\hat{k}^a D_a\phi \right) \quad (6.41)$$

$$= - \left(\frac{\dot{a}}{a} + \epsilon\partial_t\psi + \epsilon \frac{dx^a}{dt} D_a\phi \right) \quad (6.42)$$

por otro lado al calcular la derivada del potencial ϕ respecto del tiempo

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial\phi}{\partial x^i}$$

que al sustituir en (6.41)

$$\frac{d\omega}{\omega dt} = -\frac{\dot{a}}{a} - \epsilon \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{d\phi}{dt} - \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \quad (6.43)$$

podemos integrar fácilmente esta expresión además que de las ecuaciones de Einstein para la época dominada por materia en el contexto de la GR $\phi = -\psi$, por otro lado hemos visto en la sección 6.1 que $\omega \propto T$ con lo que los dos primeros términos pueden combinarse de tal forma que podemos escribir

$$\frac{\delta T}{T} \Big|_{t_e}^{t_d} = \phi(\vec{x}_e, t_e) - \phi(\vec{x}_d, t_d) + 2 \int_{t_e}^{t_d} \frac{\partial\phi[\vec{x}(t), t]}{\partial t} dt \quad (6.44)$$

que es la expresión más sencilla del efecto Sachs-Wolfe [50] y relaciona las variaciones en la temperatura de la CMB con la diferencia de los potenciales

“newtonianos” gravitacionales al momento de la emisión y de la detección, por otro lado el último término corresponde al efecto Sachs-Wolfe integrado y no contribuye a las anisotropía primarias ya que $\partial_t\phi = 0$ en la época de dominación de materia [106].

Recordemos que la fórmula (6.15) es independiente de la teoría estudiada y solo hemos usado las ecuaciones de campo de la GR en el último paso de la deducción del efecto Sachs-Wolfe. Resultará útil obtener el efecto Sachs-Wolfe en el marco de las Teorías Escalares Tensoriales para compararlo con las observaciones, con el fin de obtener cotas a la teoría. Para ello recordemos que la contribución estimada del modelo estándar de este efecto a la CMB es menor a 3×10^{-5} K [60].

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo hemos proporcionado una revisión del panorama cosmológico actual, hemos expuesto los problemas que los modelos cosmológicos basados en la Relatividad General enfrentan y hemos mencionado como las teorías alternativas de la Gravitación han surgido desde distintas perspectivas con la finalidad de reemplazar a la GR.

Dentro de ese contexto hemos encontrado la motivación para revisar el modelo estándar y entender los elementos que un modelo alternativo debe contener. Además se han mencionado algunas de las observaciones importantes que han ayudado a descartar y acotar algunos de los modelos cosmológicos alternativos que se estudian en la actualidad.

Nos hemos enfocado en proporcionar una revisión de las Teorías Escalares Tensoriales en su forma más general sin limitarnos al caso de la teoría de Brans-Dicke. Hemos mencionado también algunas ideas históricas predecesoras de estas teorías así como los elementos teóricos que consideramos importantes para seguir estudiando los modelos basados en estas teorías. Entre dichos elementos hemos mencionado como las STT modifican de manera relativamente sencilla a la GR de Einstein y la contienen en el límite en que $F(\phi_s) = cte.$, o equivalentemente $\omega_{BD} \rightarrow \infty$, además de contar con predicciones teóricas no presentes en la GR, de las cuales hemos revisa-

do brevemente las más importantes: la escalarización espontánea de objetos compactos y la polarización de ondas gravitacionales. Por otro lado hemos mencionado que la descomposición 3+1 nos permite tener un problema de Cauchy bien definido para estas teorías, lo cual abre el camino para evolucionar numéricamente el sistema de ecuaciones y continuar en esta línea de investigación.

Interesados en obtener un modelo cosmológico y de formación de estructura hemos obtenido para las STT una formulación en términos de perturbaciones hasta primer orden en un parámetro perturbativo que hemos denominado ϵ y para un fondo arbitrario, sección 4.2.

Con el fin de aplicar nuestros resultados al caso cosmológico hemos propuesto en primer lugar que el Universo de fondo corresponde a un modelo de FRW, condición que asume también el modelo estándar. Esto nos ha permitido identificar términos que se anulan idénticamente debido a la homogeneidad e isotropía.

Sin embargo, las ecuaciones de orden ϵ continuaban siendo complicadas por lo que la elección de una norma nos podría permitir algunas otras simplificaciones además de darnos más información de las observables físicas. Como ya hemos mencionado la norma sincrónica puede ser muy atractiva debido a que algunas de las ecuaciones pueden ser mucho más sencillas pero como analizamos, ver sección 5.3, en general esta norma no nos proporciona un formalismo invariante de norma directamente, dejando modos de norma espúreos, por lo cual creemos que la elección más natural es la norma newtoniana que aunque pueda proporcionar ecuaciones un poco más complicadas permite realizar la generalización en términos de invariantes de norma, además de que la interpretación de los potenciales newtonianos ϕ y ψ se ha discutido mucho en la literatura [5].

Finalmente en el contexto de la radiación cósmica de fondo hemos revisado el efecto Sachs-Wolfe, que es una de las contribuciones más importantes a las anisotropías primarias y hemos proporcionado una deducción alternativa

a los enfoques usualmente usados ([60], [50], [69]), en donde la principal característica de nuestra deducción radica en la utilización de una nueva fórmula general para el corrimiento gravitacional de luz, la cual es independiente de la teoría métrica, es decir, no se emplean las ecuaciones de campo de la teoría. La propuesta de este enfoque desemboca en la futura utilización de esta fórmula en el marco de las STT para obtener el efecto Sachs-Wolfe correspondiente, a partir de lo cual será posible obtener cotas de los parámetros libres de los modelos particulares que se propongan.

Pretendemos que este trabajo sea una guía para futuros trabajos numéricos de formación de estructura y en particular se pretende que con los resultados expuestos pueda realizarse una modificación al código de CMBFAST [94] para incluir los términos del campo escalar e investigar como las anisotropías de la CMB pueden reproducirse en el contexto de las STT, sin quizá introducir una constante cosmológica.

Apéndice A

Conservación del tensor de energía-momento.

En el marco de Jordan la identidad de Bianchi $\nabla_a G^{ab} = 0$ garantiza la conservación de T_{matt}^{ab} (el tensor de energía-momento de la materia), esto es

$$\nabla_a T_{matt}^{ab} = 0 \quad (\text{A-1})$$

que va en completa correspondencia con el principio débil de equivalencia de Einstein.

Escribamos el tensor de energía-momento como suma de todas las contribuciones:

$$T_{ab} = \frac{G_{eff}}{G_0} \left[T_{ab}^f + T_{ab}^\phi + T_{ab}^{matt} \right] \equiv \frac{G_{eff}}{G_0} \bar{T}_{ab} \quad (\text{A-2})$$

de donde podemos escribir $\frac{G_{eff}}{G_0} = \frac{1}{8\pi f(\phi_s)}$ además al conocer T_{ab}^f y T_{ab}^ϕ [ecs. (3.5) y (3.6)] obtenemos

$$T_{ab} = \frac{1}{F(\phi_s)} \bar{T}_{ab} = \frac{1}{8\pi f} \left\{ \nabla_a (f' \nabla_b \phi_s) - g_{ab} \nabla_c (f' \nabla^c \phi_s) \right. \\ \left. + \nabla_a \phi_s \nabla_b \phi_s - g_{ab} \left[\frac{1}{2} \nabla_c \phi_s \nabla^c \phi_s + V \right] + T_{ab}^{matt} \right\} \quad (\text{A-3})$$

que junto con las ecuaciones de Einstein $G_{ab} = 8\pi G_0 T_{ab}$ implica

$$G_{ab} = \frac{1}{f(\phi_s)} \bar{T}_{ab}, \quad (\text{A-4})$$

ahora lo que nos interesa es calcular $\nabla_a G^{ab} = 0$ para lo cual nos resulta útil recordar que para cualquier cantidad función de ϕ se cumple que $\nabla_a f(\phi_s) = f'(\phi_s) \nabla_a \phi_s$, entonces usando (A-4) tenemos que

$$\nabla_a \left(\frac{\bar{T}^{ab}}{f} \right) = \frac{1}{f} \nabla_a \bar{T}^{ab} - \frac{f'}{f^2} \bar{T}^{ab} \nabla_a \phi_s = 0 \quad (\text{A-5})$$

tomando explícitamente (A-3) llegamos a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f} \left[\nabla_a f'' \nabla^a \phi_s \nabla^b \phi_s + f'' \nabla^2 \phi_s \nabla^b \phi_s + f'' \nabla^a \nabla_a \nabla^b \phi_s + \nabla_a f' \nabla^a \nabla^b \phi_s + \right. \\ & f' \nabla_a \nabla^a \nabla^b \phi_s - g^{ab} \nabla_a f'' \nabla_c \phi_s \nabla^c \phi_s - g^{ab} f'' \nabla_a \nabla_c \phi_s \nabla^c \phi_s - g^{ab} f'' \nabla_c \phi_s \nabla_a \nabla^c \phi_s - \\ & g^{ab} \nabla_a f' \nabla^2 \phi_s - g^{ab} f' \nabla_a \nabla^2 \phi_s + \nabla^2 \nabla^b \phi_s + \nabla^a \phi_s \nabla_a \nabla^b \phi_s - \\ & \left. g^{ab} \nabla_a \nabla_c \phi_s \nabla^c \phi_s - g^{ab} \nabla_a V + \nabla_a T_{\text{matt}}^{ab} \right] - \frac{f'}{f^2} \bar{T}^{ab} \nabla_a \phi_s = 0 \quad (\text{A-6}) \end{aligned}$$

simplificando podemos obtener

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f} \left[f'' \nabla^a \nabla_a \nabla^b \phi_s + f'' \nabla_a \phi_s \nabla^a \nabla^b \phi_s + f' \nabla_a \nabla^a \nabla^b \phi_s - f'' \nabla^b \nabla_c \phi_s \nabla^c \phi_s - \right. \\ & f'' \nabla_c \phi_s \nabla^b \nabla^c \phi_s - f' \nabla^b \nabla^2 \phi_s + \nabla^2 \nabla^b \phi_s + \nabla^a \phi_s \nabla_a \nabla^b \phi_s - \\ & \left. \nabla^b \nabla_c \phi_s \nabla^c \phi_s - V' \nabla^b \phi_s + \nabla_a T_{\text{matt}}^{ab} \right] - \frac{f'}{f^2} \bar{T}^{ab} \nabla_a \phi_s = 0 \quad (\text{A-7}) \end{aligned}$$

la manera más fácil de simplificar esta expresión es analizar los coeficientes de las derivadas de f por separado, así para el coeficiente sin derivada de f tenemos:

$$\nabla^2 \nabla^b \phi_s + \nabla^a \phi_s (\nabla_a \nabla^b \phi_s - \nabla^b \nabla_a \phi_s) = \nabla^2 \phi_s \nabla^b \phi_s \quad (\text{A-8})$$

donde hemos puesto $\nabla_a \nabla^b \phi_s - \nabla^b \nabla_a \phi_s = 0$ puesto que $[\nabla_a, \nabla_b] \phi_s$ define la torsión, que en el espacio que estamos trabajando es cero. Ahora analicemos el coeficiente de f' :

$$\begin{aligned} \nabla_a \nabla^a \nabla^b \phi_s - \nabla^b \nabla_a \nabla^a \phi_s &= \\ g^{ac} g^{bd} (\nabla_a \nabla_c \nabla_d \phi_s - \nabla_d \nabla_a \nabla_c \phi_s) &= \\ g^{ac} g^{bd} (\nabla_a \nabla_c \nabla_d \phi_s - R_{dac}{}^e \nabla_e \phi_s - \nabla_a \nabla_d \nabla_c \phi_s) &= R^{be} \nabla_e \phi_s \quad (\text{A-9}) \end{aligned}$$

mientras que el coeficiente de f''

$$\begin{aligned} \nabla^a \phi_s \nabla_a \nabla^b \phi_s + \nabla_a \phi_s \nabla^a \nabla^b \phi_s - \nabla^b \nabla_a \phi_s \nabla^a \phi_s - \nabla_a \phi_s \nabla^b \nabla^a \phi_s &= \\ \nabla^a \phi_s (\nabla_a \nabla^b \phi_s - \nabla^b \nabla_a \phi_s) + \nabla_a \phi_s (\nabla^a \nabla^b \phi_s - \nabla^b \nabla^a \phi_s) &= (\text{A-10}) \end{aligned}$$

por lo que sustituyendo (A-8)-(A-10) en (A-7) y tomando en cuenta (3.3)

$$\begin{aligned} \nabla_a G^{ab} &= \frac{1}{f} \left[f' R^{be} \nabla_e \phi_s - \frac{1}{2} \nabla^b \phi_s f' R + \nabla_a T_{matt}^{ab} \right] - \frac{f'}{f^2} \bar{T}^{ab} \nabla_a \phi_s = \\ \frac{1}{f} [f' \nabla_e \phi_s G^{be} + \nabla_a T_{matt}^{ab}] - \frac{f'}{f^2} \bar{T}^{ab} \nabla_a \phi_s &= 0 \quad (\text{A-11}) \end{aligned}$$

finalmente usando (A-4) obtenemos

$$\nabla_a T_{matt}^{ab} = 0$$

ahora de la ec. (A-3) podemos tomar $\nabla_a \left(\frac{\bar{T}^{ab}}{F} \right)$ como

$$\begin{aligned} \nabla_a \left(\frac{\bar{T}^{ab}}{F} \right) &= \nabla_a \left[\frac{1}{F} (T^{f ab} + T^{\phi ab} + T_{matt}^{ab}) \right] \\ &= \nabla_a \left[\frac{1}{F} (T^{f ab} + T^{\phi ab}) \right] + \nabla_a \left(\frac{1}{F} T_{matt}^{ab} \right) \\ &= \nabla_a \left[\frac{1}{F} (T^{f ab} + T^{\phi ab}) \right] + T_{matt}^{ab} \nabla_a \left(\frac{1}{F} \right) = 0 \quad (\text{A-12}) \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\nabla_a T_{matt}^{ab} = 0$ y se puede concluir que

$$\nabla_a \left[\frac{1}{F} (T^{f ab} + T^{\phi ab}) \right] = -T_{matt}^{ab} \nabla_a \left(\frac{1}{F} \right) \quad (\text{A-13})$$

es decir, la combinación $\frac{1}{F} (T^{f ab} + T^{\phi ab})$ solo se conserva cuando las únicas contribuciones al tensor de energía-momento aquellas asociadas a la presencia del campo escalar ϕ_s , i. e. en ausencia de materia.

Apéndice B

Soluciones exactas.

Entre las soluciones más importantes discutidas por Faraoni encontramos la de Nariai Generalizada que corresponde a una solución en potencias para un modelo FRW plano ($k = 0$) con $V(\phi_s) = 0$, en general se escribe como

$$a(\tau) = a_0(\tau - \tau_-)^{q_{\mp}}(\tau - \tau_+)^{q_{\pm}}, \quad (\text{B-1})$$

$$\phi_s(\tau) = \phi_0(\tau - \tau_-)^{s_{\mp}}(\tau - \tau_+)^{s_{\pm}}, \quad (\text{B-2})$$

donde

$$q_{\pm} = \frac{\omega}{3 \left[1 + \omega(2 - \gamma) \mp \sqrt{\frac{2\omega+3}{3}} \right]}, \quad (\text{B-3})$$

$$s_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{2\omega+3}{3}}}{1 + \omega(2 - \gamma) \mp \sqrt{\frac{2\omega+3}{3}}}, \quad (\text{B-4})$$

donde a_0 , ϕ_0 y τ_{\pm} son constantes, además de que τ esta definida por el cambio de coordenada

$$d\tau = \frac{dt}{a^{3(\gamma-1)}} \quad (\text{B-5})$$

mientras que $\omega > -3/2$ es un parámetro libre de la teoría, y γ es el parámetro del fluido correspondiente.

Faraoni también discute soluciones para modelos del tipo FRW cerrados ($k = 1$) y abiertos ($k = -1$) con $V(\phi_s) = 0$. Una de las soluciones más interesantes que presenta es para el caso en que $V(\phi_s) = m^2\phi^2/2$, sin imponer restricción en la curvatura, y en términos del tiempo conforme η dado por

$$d\eta = \frac{dt}{a} \quad (\text{B-6})$$

y las variables

$$X \equiv \sqrt{\frac{2\omega + 3}{12}} \frac{\phi'_s}{\phi_s}, \quad (\text{B-7})$$

$$Y \equiv \frac{a'}{a} + \frac{\phi'_s}{2\phi_s}, \quad (\text{B-8})$$

$$Z \equiv \frac{m^2}{2} a^2 \phi_s, \quad (\text{B-9})$$

donde lo primado implica derivación respecto de η , podemos obtener el sistema dinámico:

$$X' = -2XY + \frac{4 - 3\gamma}{4A} \left(Y^2 - X^2 - \frac{Z}{6} + k \right), \quad (\text{B-10})$$

$$Y' = \frac{2 - 3\gamma}{2} (Y^2 - X^2 + k) - 2X^2 + \frac{\gamma}{4} Z, \quad (\text{B-11})$$

$$Z' = 2ZY, \quad (\text{B-12})$$

donde se ha utilizado

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\omega + 3}{3}} \quad (\text{B-13})$$

y se ha asumido que $\omega > -3/2$. Los puntos críticos del sistema dinámico dependerán de la curvatura empleada y del valor del parámetro del fluido γ .

Apéndice C

Teoría de Perturbaciones.

Consideremos una familia de variedades 4 dimensionales M_ϵ que podemos agrupar para formar una variedad 5 dimensional N (ver figura C.1). Identifiquemos una de las M_ϵ para la cual $\epsilon = 0$, además prescribimos una congruencia de curvas ξ en N que permite identificar que puntos en M_0 corresponden a que puntos M_ϵ . Las curvas ξ son tales que

1. existe una curva ξ que pasa por cada uno de los puntos de N ,
2. cada curva ξ interseca a M_ϵ solamente una vez,

aparte de estas características, la elección de esta congruencia es completamente arbitraria.

La congruencia es llamada PIM (Point Identification Map), cada PIM particular tiene asociado un campo 5-vectorial¹ X tangente a ξ , donde el flujo de X es una familia de mapeos $h_\epsilon : N \rightarrow N$, esto como consecuencia directa de (1) y (2), además esta familia de mapeos es tal que $h_\epsilon(M_0) = M_\epsilon$. Entonces podemos decir que M_ϵ es la perturbación de M_0 .

¹Este es aquel cuyo generador esta dado por

$$X^a \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \right)^a$$

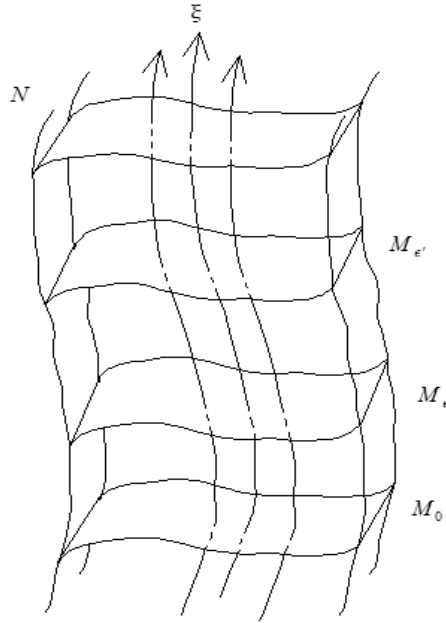


Figura C.1: Variedad 5 dimensional N formada por las variedades M_{ϵ} , además la congruencia prescrita de curvas ξ (PIM).

En este punto podemos construir una carta² en N , i. e. $x^A = (x^a, \epsilon)$, donde $x^a(h_{\epsilon}(p_0)) = x^a(p_0)$ y $x^4(h_{\epsilon}(p_0)) = \epsilon$, esto es que los puntos asociados por el PIM tienen las mismas coordenadas espaciales.

Consideremos ahora un campo tensorial Q_{ϵ} en cada M_{ϵ} , usando el pull-back h^*_{ϵ} podemos expandir

$$Q_X = h^*_{\epsilon} Q_{\epsilon} = Q_0 + \epsilon h^*_{\epsilon} (\mathcal{L}_X Q_{\epsilon}) + O(\epsilon^2) \quad (\text{C-1})$$

donde hemos renombrado a Q_X como el pull-back de la variedad Q_{ϵ} realizado con el flujo X del mapeo ξ .

²Aquí el índice A toma valores de 0, 1, 2, 3, 4; mientras que a toma valores 0, 1, 2, 3 en correspondencia a la notación del resto del trabajo.

Notese que los dos términos del lado derecho (despreciando los de orden ϵ^2) son evaluados en M_0 , además conviene renombrar³

$$\tilde{Q}_X \equiv h_* \epsilon (\mathcal{L}_X Q_\epsilon) \quad (\text{C-2})$$

sin embargo, todo esto se ha realizado para un PIM arbitrario que conserva las coordenadas espaciales definidas en M_0 .

Entonces de manera más general podemos considerar dos PIMs tal que ambos cumplan (1) y (2), pero que no conserven las coordenadas impuestas en M_0 , pero que para un ϵ dado respeten la foliación, es decir aquellos cuyos generadores sean⁴

$${}^{(1)}X^a \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \right)^a + {}^{(1)}\Theta^a \quad (\text{C-3})$$

$${}^{(2)}X^a \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \right)^a + {}^{(2)}\Theta^a \quad (\text{C-4})$$

donde las Θ^a inducen los cambios de coordenadas en M_ϵ , esto es el cambio de norma. De acuerdo con (C-1) podemos escribir los pull-back realizados por estos mapeos ${}^{(1)}\xi$ y ${}^{(2)}\xi$ como

$$Q_{{}^{(1)}X} = Q_0 + \tilde{Q}_{{}^{(1)}X} \quad (\text{C-5})$$

$$Q_{{}^{(2)}X} = Q_0 + \tilde{Q}_{{}^{(2)}X} \quad (\text{C-6})$$

en el caso en que $Q_{{}^{(1)}X} = Q_{{}^{(2)}X}$ se dice que Q es invariante de norma, sin embargo en general eso no es cierto.

Teorema 1. *Sea $\Psi \equiv \mathfrak{R} \times M \rightarrow M$ una familia uniparamétrica de difeomorfismos, entonces $\exists \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)}, \dots$ grupos uniparamétricos de difeomorfismos*

³Nótese que Q_0 corresponde a \hat{Q} usado en los otros capítulos.

⁴La etiquetas ${}^{(1)}$ y ${}^{(2)}$ se utilizarán a partir de este punto para diferenciar entre los dos mapeos que nos interesan, es decir aquellos que no conservan las coordenadas espaciales.

de M tales que:

$$\Psi_\lambda = \dots \circ \varphi_{\frac{\lambda^k}{k!}}^{(k)} \circ \dots \circ \varphi_{\frac{\lambda^2}{2!}}^{(2)} \circ \varphi_\lambda^{(1)} \quad (\text{C-7})$$

donde los campos vectoriales $\zeta_{(1)}, \zeta_{(2)}, \dots, \zeta_{(k)}, \dots$ son los generadores de Ψ

La ec. (C-7) define lo que se conoce como difeomorfismo de caballo (Knight diffeomorphism, ver figura C.2, [97])

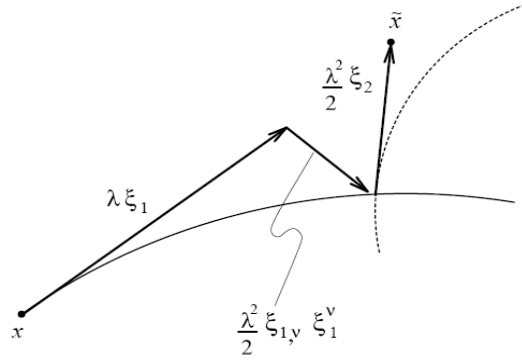


Figura C.2: La acción de un difeomorfismo de caballo Ψ_λ de rango 2 generado por $\zeta_{(1)}$ y $\zeta_{(2)}$.

Lema 1. *El pull-back $\Psi_{*\lambda}T$ de un campo tensorial T definido por una familia uniparamétrica de difeomorfismos de caballo Ψ con generadores $\zeta_{(1)}, \dots, \zeta_{(k)}, \dots$ puede desarrollarse alrededor de $\lambda = 0$ como*

$$\Psi_{*\lambda}T = \sum_{l_1=0}^{+\infty} \sum_{l_2=0}^{+\infty} \dots \sum_{l_k=0}^{+\infty} \dots \frac{\lambda^{l_1+2l_2+\dots+kl_k+\dots}}{2^{l_2} \dots (k!)^{l_k} \dots l_1! l_2! \dots l_k! \dots} \mathcal{L}_{\zeta_{(1)}}^{l_1} \mathcal{L}_{\zeta_{(2)}}^{l_2} \dots \mathcal{L}_{\zeta_{(k)}}^{l_k} \dots T \quad (\text{C-8})$$

Las demostraciones las ha presentado Bruni et al. [26].

El teorema (1) nos permite usar (C-8) y truncar la serie para expresar (C-5) en términos de (C-6) esto es

$$Q_{(2)X\lambda} = Q_{(1)X\lambda} + \lambda \mathcal{L}_{\zeta_{(1)}} Q_{(2)X\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} \left(\mathcal{L}_{\zeta_{(1)}}^2 + \mathcal{L}_{\zeta_{(2)}} \right) Q_{(2)X\lambda} + \dots \quad (\text{C-9})$$

donde en este caso $\zeta_{(1)} = {}^{(2)}\xi - {}^{(1)}\xi$ y $\zeta_{(2)} = [{}^{(1)}\xi, {}^{(2)}\xi]$ definen el cambio de norma.

Nótese que a primer orden en λ

$$Q_{(2)X\lambda} = Q_{(1)X\lambda} + \lambda \mathcal{L}_{\zeta_{(1)}} Q_{(2)X\lambda} \quad (\text{C-10})$$

que es lo que se ha utilizado en la sección (5.3) para seleccionar la norma. Para una revisión más detallada al respecto de la teoría de perturbaciones en variedades diferenciales se recomiendan [5], [61] y [97].

Apéndice D

Compatibilidad de resultados

Durante la obtención de las ecuaciones presentadas en el capítulo 5 nos hemos preocupado de revisar la consistencia de nuestros resultados con aquellos reportados en la literatura procurando que bajo las consideraciones adecuadas recuperemos las ecuaciones de diversos autores. Este apéndice se presenta como un resumen de dichas comparaciones.

Pretendemos no solo mostrar como nuestros resultados son compatibles (y en cierta forma justificar su validez) sino también facilitar la modificación de nuestras ecuaciones a las distintas notaciones empleadas si así lo requiere el lector.

D.1. Compatibilidad con Peebles

Peebles en su libro *The Large-Scale Structure of the Universe* [71] obtiene las ecuaciones que rigen las perturbaciones en la norma sincrónica¹, para el caso particular de FRW en que $k = 0$, sin contribuciones del campo escalar.

Por lo tanto en la notación de Peebles la 3 métrica de fondo ($\overset{\circ}{h}_{ij}$ en nuestra notación) corresponde a δ_{ij} , mientras que las perturbaciones asociadas (γ_{ij} en

¹La signatura de Peebles es $(+, -, -, -)$, contraria a la nuestra.

nuestra notación) se denotan² por $-h_{ij}$. Además Peebles deja expresadas sus ecuaciones en términos de las componentes del tensor de energía-momento T_{ab} . Así la constricción de momento ec. (5.31) coincide idénticamente con la segunda expresión de (82.9) de [71].

Por otro lado la ec. (5.32) deberá corresponder con la tercera expresión de (82.9) sin embargo nosotros hemos sustituido explícitamente ${}^3R_{ij}$ que Peebles solo ha dejado indicado, además que del lado derecho de nuestra ecuación hemos despejado³ el término que contiene \tilde{S}_j^i mientras que Peebles ha dejado la expresión equivalente a $\tilde{S}\delta_j^i - 2\tilde{S}_j^i$.

La primera expresión de (82.9) es un poco más complicada de obtener ya que no coincide con nuestra constricción hamiltoniana, ec. (5.30), en el sentido de que nosotros hemos despejado la componente 0-0 del tensor de energía-momento, mientras que Peebles ha dejado la expresión para \tilde{S} .

Finalmente la ecuación de conservación de la energía⁴ ec. (5.35) coincide idénticamente con la ec. (85.8) (excepto por el signo de la traza de las perturbaciones γ antes mencionado) mientras que la ec. (85.9) puede hacerse coincidir con la ec. (5.36) al expandir el primer término y dividir todo entre $1 + \nu_0$.

D.2. Compatibilidad con Mukhanov et al.

Mukhanov et al. en su trabajo *Theory of Cosmological Perturbations* [60] obtiene también las ecuaciones de evolución de las perturbaciones para el caso sin campo escalar y para el modelo inflacionario implementado con un campo escalar acoplado mínimamente a la curvatura y sin materia.

²El cambio de signo en la definición de las perturbaciones conlleva a la correspondencia global de signos en algunas de ecuaciones aquí mencionadas.

³Utilizando la ec. (5.30).

⁴En este punto conviene aclarar que Peebles no concidera las contribuciones que hemos denotado por Σ , además de que los términos en ec. (5.36) $\left(\partial_i \tilde{D}_l \overset{\circ}{h}{}^{li} - \partial_i \overset{\circ}{D}_l \gamma^{li}\right)$ hemos probado que son cero para el caso plano.

En cuanto a la notación, Mukhanov maneja la signatura contraria a nosotros $(+, -, -, -)$, mientras que uno de los potenciales newtonianos maneja un cambio de signo, es decir en nuestras ecuaciones es necesario cambiar ψ por $-\psi$ para que las ecuaciones coincidan. Además, recordemos como ya hemos mencionado en el capítulo 5 que en este caso las expresiones a comparar son aquellas escritas respecto del tiempo conforme τ . Es importante notar que para Mukhanov la derivada covariante de la métrica inducida en las hipersuperficies (denotada con subíndices ${}_i$) corresponde en nuestra notación con aD_i .

Con todo lo anterior en cuenta es fácil ver como las ecs. (5.14)-(5.16) de Mukhanov coinciden con aquellas que hemos enunciado en el capítulo 5, ecs. (5.21)-(5.23) una vez que hemos quitado la contribución del campo escalar⁵.

En *Theory of Cosmological Perturbations*, también se presentan las ecuaciones para el acople mínimo del campo escalar sin contribuciones de materia, para lo cual se identifica $l^2 = \frac{8\pi G}{3}$, con lo cual las ecuaciones (6.40)-(6.42) de [60] se identifican con ecs. (5.21)-(5.23), mientras que la ecuación de Klein-Gordon, ec. (5.25) coincide con (6.46).

D.3. Compatibilidad con Ma y Bertschinger

El trabajo de Ma y Bertschinger [55] nos ha servido para comparar las ecuaciones de evolución y de conservación en ambas normas, sin embargo en dicho artículo solo se obtienen las expresiones para el caso del modelo de FRW con $k = 0$, además de que se trabaja en el espacio de Fourier⁶.

Respecto de la notación de la norma newtoniana es importante tener en cuenta que los potenciales newtonianos han sido nombrados a la inversa y con una variación de signo, es decir los que para nosotros son ϕ y ψ , tienen que ser identificados con ψ y $-\phi$ respectivamente.

⁵Notese que el cambio en la signatura afecta a la ec. (5.22), cambiando el signo de T_i^0 .

⁶Esta particularidad es fácilmente resuelta considerando de acuerdo con Carloni et al. [14] que $-k^2$ en el espacio de Fourier corresponde a $a^2\nabla^2$ en el formalismo covariante.

En particular, olvidándonos de los términos que dependen del campo escalar, nuestra ecuación (5.21) coincide con las ec. (22a), mientras que para hacer la correspondencia de la ec. (5.22) con la ec. (22.b) será necesario tomar ∇^i , para que aparezca $-k^2$ del espacio de Fourier. Podemos observar que la ec. (22.c) corresponde idénticamente con la ec. (5.24). Finalmente las ecuaciones de conservación de energía y momento⁷, ecs. (5.26) y (5.27) coinciden con las expresiones dadas por (29) de [55].

En cuanto a la norma sincrónica la notación a resultado un poco más complicada de interpretar, nosotros hemos dejado nuestras expresiones en términos de las perturbaciones asociadas a la métrica γ_{ij} , que hemos mostrado en el sección 5.3 que tienen dos escalares asociados, el primero corresponde a la traza γ , mientras que el segundo lo hemos denotado por ${}^{(\gamma)}E$, el cual hemos encontrado que se relaciona con η de la forma que $\nabla^2 {}^{(\gamma)}E \sim \eta$.

Finalmente mencionamos, omitiendo las especificaciones ya citadas, que las ecuaciones de conservación de energía y momento, ecs. (5.42) y (5.43) coinciden con las expresiones (28) de [55].

D.4. Compatibilidad con otros autores

Cabe señalar que hemos revisado otros autores como Nakamura [61] y Liddle [50], pero evitamos hacer la comparación detallada al respecto. Acerca de Nakamura basta decir que las expresiones que obtiene a primer orden (5.16)-(5.18), para el caso sin campo escalar, y (5.31)-(5.34), en el caso de acople mínimo, coinciden con las de Mukhanov [60] que ya hemos mencionado. Por su lado Liddle presenta las ecuaciones de conservación de energía y momento en la norma newtoniana, ecs. (14.141) y (14.142) que son idénticas a las expresiones (29) de Ma y Bertschinger [55].

⁷En [55] solo consideran las perturbaciones Σ_{ij} del fluido perfecto, i. e., $\Sigma_{00} = \Sigma_{0i} = 0$.

Índice de figuras

3.1. Foliación del espacio tiempo (M, g_{ab}) por una familia de hipersuperficies espaciales Σ_t ortogonales a n_a	47
6.1. Gráfica de la curva teórica del espectro de anisotropías del CMB usando el modelo estándar Λ CDM. La contribución del efecto Sachs-Wolfe se da principalmente para $l \lesssim 100$. Los picos acústicos y la cola amortiguada se han discutido en la sección 2.2.	96
6.2. Un fotón viaja desde p_e a p_d , donde dos observadores normales a las hipersuperficies Σ_{t_e} y Σ_{t_d} miden su frecuencia.	99
C.1. Variedad 5 dimensional N formada por las variedades M_ϵ , además la congruencia prescrita de curvas ξ (PIM).	120
C.2. La acción de un difeomorfismo de caballo Ψ_λ de rango 2 generado por $\zeta_{(1)}$ y $\zeta_{(2)}$	122

Índice alfabético

- Amortiguamiento por Difusión, 21, 23
Amortiguamiento sin Colisiones, *véase* Amortiguamiento por Difusión
Anisotrópicas, *véase* Anisotropías
Anisotropías, 4, 14, 21, 23–27, 30, 31, 45, 78, 79, 95, 110, 111
 primarias, 21
 secundarias, 23
Armónicos Esféricos, 25, 26
Bianchi, 55, 113
Big Bang, 3, 13, 16, 20, 29–31, 37
Brans-Dicke, 36, 44, 46, 55
 parámetro, 10, 109
 teoría, 10, 109
Bullet Cluster, 9
Cúmulos de Galaxias, 8, 9, 13, 19, 35, 57
Campo, 30
 débil, 40
 ecuaciones, *véase* ecuaciones de Einstein
 gravitacional, 24, 35
 tensorial, 14, 36, 46, 120, 122
 vectorial, 7, 46, 119, 122
Campo Escalar, 7, 8, 10, 30–33, 37–40, 43, 49, 50, 52, 53, 55, 62, 66, 71, 73, 75, 78, 83, 111, 125–128
 acople mínimo, 41, 51, 76, 79, 81, 126–128
 acople no-mínimo, 10, 36, 51
Carta, 120
Cassini, 11, 44
CMB, 3, 4, 8, 14, 18, 21–26, 30, 45, 95, 110, 111
 picos, 21, 22
CMBFAST, 111
COBE, 3, 4, 27, 30
Congruencia, 119
Conservación
 energía, 15, 16, 39, 41, 50, 55, 66, 75, 76, 80, 83, 86, 89, 126, 128
 momento, 15, 16, 39, 41, 50, 55, 66, 75, 80, 83, 86, 89, 126, 128
Constante Cosmológica, 7, 8, 15, 17
Constricción
 hamiltoniana, 48, 63, 69, 74, 77,
-

-
- 84, 87, 126
 - momento, 48, 63, 69, 74, 78, 81, 84, 87, 126
 - Corrimiento al Rojo, 2, 3, 18, 24, 25, 45, 95, 97, 99–101, 104, 105
 - Corrimiento Gravitacional, 99, 101, 103
 - Cosmología Estándar, 7, 13, 16, 28, 29, 31, 55, 67, 79, 109, 110
 - Covariante, 48, 59, 92, 127
 - Cuadrupolo, 27, 41
 - Cuerdas Cósmicas, 23, 39
 - Cuerpo Negro, 3, 4, 13, 98
 - Curvatura, 1, 10, 22, 25, 27, 29, 32, 35–37, 53, 118, 126
 - extrínseca, 48, 49, 53, 61, 68, 103
 - Densidad
 - bariónica, 22
 - contrastes, 22
 - crítica, 19, 20
 - energía, 8, 16, 27, 32, 43
 - fluido, 15
 - fotones, 13, 17
 - isocurvatura, 22
 - materia, 17, 19
 - materia oscura, 5, 22
 - partículas, 13
 - perturbaciones, 22
 - total, 7
 - Descomposición
 - 3+1, 11, 46, 47, 50, 55, 58, 73, 90, 100, 110
 - armónica, 25
 - Helmholtz, 90, 91
 - Difeomorfismo, 14
 - caballo, 122
 - Difusión
 - Thomson, 24
 - Dilatón, 10
 - Dipolo, 25, 26, 42
 - Dispersión
 - Compton, 23
 - week lensing, 45
 - Domain Walls, 34
 - Doppler, *véase* Corrimiento al Rojo
 - Ecuación
 - aceleración, 16
 - continuidad, 16, 17, 32
 - estado, 15–17, 32
 - Friedman, 16–18, 20, 28, 32, 54, 74
 - geodésica, 37
 - Klein-Gordon, 38, 49, 75, 76, 80, 86, 127
 - onda escalar, 32
 - Einstein, 1, 2, 35, 36, 41, 109, 113
 - ecuaciones, 8, 15, 31, 32, 35, 40, 46, 48, 63, 69, 78, 111, 114
 - marco, 39, 41, 51
 - unidades, 40
 - Energía, 72
-

-
- Energía Oscura, 8, 9, 11, 35, 37
 Energía-Momento
 tensor, 35, 39–41, 50, 91, 113, 126
 Escalarización Espontánea, 11, 110
 Espacio de Configuración, 96
 Expansión Acelerada, 9, 11, 37

 $f(R)$, 9
 Factor de Escala, 15, 18, 53
 Fluctuaciones
 CMB, 4, 8
 cuánticas, 14, 28
 densidad, 29
 temperatura, 4, 25, 27, 95
 Fluido Perfecto, 15, 16, 32, 55, 73, 91,
 128
 Foliación, 121
 Fourier, 25, 92, 96, 127, 128
 FRC, 5–8, 11
 FRW, 2, 15, 16, 22, 52, 57, 67, 69,
 74, 90, 96, 102, 110, 117, 118,
 125, 127

 Galaxias Espirales, 5
 Gauss-Codazzi, 47
 Geodésica, 39, 41, 97
 Gravitón, 29, 45
 Gravitación, 1, 6, 7, 10, 35, 37, 41,
 109
 constante de, 10
 teorías alternativas, 5

 Gravitino, 29, 30

 Higgs, 31, 37
 Hiperbolicidad, 51, 52
 Hipersuperficies, 14, 46, 47, 58, 102,
 127
 curvatura, 15
 Hipparcos, 20
 Hubble
 constante, 18
 ley, 18
 telescopio, 19

 IGM, 23, 24
 Inflación, 7, 14, 20, 22, 27, 28, 30–34,
 37, 81, 126
 Inflatón, 14, 28, 31
 Isometría, 14, 15

 Jordan, 36
 marco, 38, 40, 41, 113
 Kaluza-Klein, 36
 Kepler, 2

 Lapse, 47, 50, 84
 Lentes Gravitacionales, 2
 Lie, 48, 60

 Mach, 10
 principio, 36
 Materia Bariónica, 20
 Materia Oscura, 5–9, 11, 19, 35, 37
-

-
- Modelo inflacionario, *véase* Inflación
- Momento, 69
 ecuaciones, 72
 multipolar, 25, 26
- MOND, 6, 10
- Monopolo, 25, 26, 28, 30, 34, 41, 42
- Nariai, 117
- Neutralino, 6
- Norma
 cambio, 123
 invariante, 90, 92, 93, 110
 Newtoniana, 77, 84, 88, 89, 93, 110, 127
 Sincrónica, 84, 86, 88, 89, 92, 93, 96, 110, 125, 128
- Nucleosíntesis, 3, 7, 9, 16, 28, 29, 46
- Objetos Compactos, 11, 43, 110
- Ondas Gravitacionales, 2, 11, 41, 51, 91
 polarización, 41, 110
- Oscilaciones Acústicas, 21
- Parámetro
 cosmológico, 18, 20, 22
 densidad, 19, 28
 edad del Universo, 20, 23, 44
 escala, 17
 Hubble, 16, 18, 19
 perturbativo, 58, 63, 74, 86, 97, 98, 110
- Paralaje, 20
- PDE, 52
- Perturbaciones, 11, 19, 22, 24, 30, 42, 43, 51, 57, 58, 60, 63, 68, 74, 76, 84, 93, 110, 119, 125, 126
 adiabáticas, 22
 campo escalar, 66, 88
 isocurvatura, 22, 23
 métrica, 58, 84, 85, 87, 125, 126, 128
- Polvo, 17
- Potenciales
 gravitacionales, 95
 métrica, 101
 newtonianos, 77, 79, 110, 127
- Principio Cosmológico, 2, 14, 69
- Problema
 horizonte, 29, 30, 34
 planitud, 28
 reliquias, 29, 30
- Problema de Cauchy, 11, 46, 51, 52, 110
- Problema de Coincidencia, 8, 11, 44
- Pull-Back, 120–122
- Pulsar Binario, 2, 44
- Quintaesencia, 8, 9, 11
- Relatividad Especial, 101
- Relatividad General, 1, 5–7, 9–11, 13, 14, 35–38, 40–42, 44, 46, 51, 59, 79, 107, 109
-

-
- Ricci
- escalar de curvatura, 53, 60, 67, 84
 - tensor de, 1, 53, 60, 67, 77, 84, 126
- Riemann
- tensor, 60
- Símbolos de Christoffel, 60, 77
- 3-Christoffel, 49, 59, 60, 84
- Sachs-Wolfe, 24, 95, 96, 99, 110, 111
- Schwarzschild, 102
- Shift, 47, 50, 103
- Signatura, 125, 127
- Sistema Solar, 1, 2, 9, 10, 44
- Slow-roll, 32–34
- Solenoidal, 91
- STT, 10, 11, 36–39, 41–47, 51, 52, 54, 55, 57, 109–111
- Sunyaev-Zel'dovich, 24
- Supercuerdas, 30
- Superficie de Última Dispersión, 3, 21, 23, 25, 29, 31, 95
- Supergravedad, 29
- Supernovas
- Ia, 19, 45
 - SN Ia, 7, 8
- Supersimetría, 6, 30
- TeVés, 7, 9, 11
- Tiempo
- cósmico, 10, 16, 53, 82, 83
 - conforme, 75, 76, 81, 83, 86, 97, 118, 127
 - tracking, 9
 - Transverso, 91
 - Variedad, 119
 - WEC, 43
 - WEP, 39, 113
 - WMAP, 4, 20, 23, 24
 - Yukawa, 37
-

Bibliografía

- [1] Alpher, R. A., Herman, R. C., *Evolution of the universe*, Nature, 162, 774, (1948).
 - [2] Babusci, D., Baiotti, L., Fucito, F., Nagara, A., *On the Detection of a Scalar Stochastic Background of Gravitational Waves*, Phys. Rev. D, 64, arXiv: gr-qc/0105028v2, (2001).
 - [3] Bahouri, H., Chemin, J. -Y., *Quasilinear wave equations and microlocal analysis*, Proceedings of the ICM, Beijing , 3, 141, arXiv: math/0304390v1, (2002).
 - [4] Banks, T., Kaplan, D. B., Nelson, A., *Cosmological Implications of Dynamical Supersymmetry Breaking*, Phys. Rev. D, 49, 779, arXiv: hep-ph/9308292, (1994).
 - [5] Bardeen, J. M., *Gauge-invariant cosmological perturbations*, Phys. Rev. D, 22, 1882, (1980).
 - [6] Barrow, J. D., *The Constants of Nature; From Alpha to Omega - The Numbers that Encode the Deepest Secrets of the Universe*, Pantheon Books, (2002).
 - [7] Bekenstein, J.D., *Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm*, Phys. Rev. D, 70, 083509, (2004), Erratum-ibid, D, 71, arXiv: astro-ph/0403694, (2005).
-

-
- [8] Bertotti, B., Iess, L., Tortora, P., *A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft*, Nature, 425, 374, (2003).
- [9] Blanco-Pillado, J. J., et al., *Racetrack inflation*, Journal reference: JHEP0411:063, arXiv: hep-th/0406230, (2004).
- [10] Boisseau, B., Esposito-Farese, G., Polarski, D., Starobinsky, A. A., *Reconstruction of a scalar-tensor theory of gravity in an accelerating universe*, Phys. Rev. Lett., 85, arXiv: gr-qc/0001066v1, (2000).
- [11] Brandenberger, R. H., *A Status Review of Inflationary Cosmology*, proceedings Journal-ref: BROWN-HET-1256, arXiv: hep-ph/0101119v1, (2001).
- [12] Brandenberger, R. H., Takahashi, T., Yamaguchi, M., *Adiabatic fluctuations from cosmic strings in a contracting universe*, arXiv: 0808.1285v1, (2008).
- [13] Brans, C. H., Dicke, R. H., *Mach's Principle And A Relativistic Theory Of Gravitation*, Phys. Rev., 124, 925, doi: 10.1103/PhysRev.124.925, (1961).
- [14] Carloni S., Dunsby P. K. S., Rubano, C., *Gauge invariant perturbations of scalar-tensor cosmologies: The vacuum case*, Phys. Rev. D, 74, doi: 10.1103/PhysRevD.74.123513, (2006).
- [15] Caso, C., et al., *Cosmic Background Radiation*, European Physical Journal C3, 1, (1998).
- [16] Chaboyer, B., Demarque, P., Kernan, P., Krauss, L. M., *The Age Of Globular Clusters In Light Of Hipparcos: Resolving the Age Problem?*, Astrophys. J., 494, 96, arXiv: astro-ph/9706128, (1998).
- [17] Chiba, T., *1/R gravity and Scalar-Tensor Gravity*, Phys. Lett. B, 575, 1, arXiv: astro-ph/0307338v3, (2003).
-

-
- [18] Copi, C. J., Schramm, D. N., Turner, M. S., *Big-Bang Nucleosynthesis and the Baryon Density of the Universe*, *Science*, 267, 192, arXiv: astro-ph/9407006v2, (1995a).
- [19] Clowe, D., et. al., *A Direct Empirical Proof of the Existence of Dark Matter*, *The Astrophysical Journal*, 648, L109, doi: 10.1086/508162, (2006).
- [20] Crittenden, R. G., Turok, N., *Looking for Λ with the Rees-Sciama Effect*, *Phys. Rev. Lett.*, 76, 575, arXiv:astro-ph/9510072v1, (1996).
- [21] Damour, T., Esposito-Farèse, G., *Tensor-scalar gravity and binary-pulsar experiments*, *Phys. Rev. D*, 54, 2, (1996).
- [22] de Carlos, B., Casas, J. A., Quevedo, F., Roulet, E., *Model Independent Properties and Cosmological Implications of the Dilaton and Moduli Sectors of 4-d Strings*, *Phys. Lett. B*, 318, 447, arXiv: hep-ph/9308325, (1993).
- [23] Dicke, R. H., Peebles, P. J. E., Roll P. G., Wilkinson, D. T., *Cosmic Black-Body Radiation*, *Astrophys. J.*, 142, 414, (1965).
- [24] Dodelson, S., Liguori M., *Can Cosmic Structure form without Dark Matter?*, *Phys. Rev. Lett.*, 97, 231301, arXiv: astro-ph/0608602v1, (2006).
- [25] Einhorn, M. B., Sato, K., *Monopole Production In The Very Early Universe In A First Order Phase Transition*, *Nucl. Phys. B*, 180, 385, (1981).
- [26] Ellis, G. F. R., Bruni, M., *Perturbations of spacetime: gauge transformations and gauge invariance al second order and beyond.*, *Phys. Rev. D*, 40, 6, 1804, (1989).
- [27] Ellis, J., Nanopoulos, D., Quirós, M., *On the axion, dilaton, Polonyi, gravitino and shadow matter problems in supergravity and superstring models*, *Phys. Lett. B*, 174, 176, (1986).
-

-
- [28] Erickcek, A. L., Smith, T. L., Kamionkowski, M., *Solar System tests DO rule out $1/R$ gravity*, Phys. Rev. D, 74, arXiv: astro-ph/0610483v1, (2006).
- [29] Faraoni, V., *Cosmology in Scalar-Tensor Gravity*, Springer, 1 edition, (2004).
- [30] Faÿ, G., Guilloux, F., Betoule, M., Cardoso, J.-F., Delabrouille, J., Le Jeune M., *CMB power spectrum estimation using wavelets*, Phys. Rev. D, 78, arXiv: 0807.1113v2, (2008).
- [31] Feast, M. W., Catchpole, R. M., *The Cepheid period-luminosity zero-point from HIPPARCOS trigonometrical parallaxes*, Mon. Not. R. Astron. Soc., 286, LI, (1997).
- [32] Freedman, W. L., *Determination of the Hubble Constant*, Critical Dialogues in Cosmology, ed. N. Turok, World Scientific, Singapore, arXiv: astro-ph/9612024, (1997).
- [33] Fujii, Y., Maeda, K.-I., *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*, Cambridge University Press, (2003).
- [34] Gamow, G., *The evolution of the universe*, Nature, 162, 680 (1948).
- [35]ourgoulhon, E., *3+1 formalism and bases of numerical relativity*, arXiv: gr-qc/0703035v1, (2007).
- [36] Brownstein, J. R., Moffat, J. W., *Galaxy Rotation Curves Without Non-Baryonic Dark Matter*, Astrophysical Journal, 636, 721, doi: 10.1086/498208, (2006).
- [37] Guth, A. H., *The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*, Phys. Rev. D 23, 347, (1981).
- [38] Higgs, P., *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons*, Phys. Rev. Lett., 13, 508, (1964).
-

-
- [39] Hindmarsh, M. B., Kibble, T. W. B., *Cosmic strings*, Rep. Prog. Phys., 58, 477, arXiv: hep-ph/9411342, (1995).
- [40] Hivon, E., Górski, K. M., Netterfield, C. B., Crill, B. P., Prunet, S., and Hansen, F. *MASTER of the Cosmic Microwave Background anisotropy power spectrum: A fast method for statistical analysis of large and complex Cosmic Microwave Background data sets*, The Astrophysical Journal, 567, 2, arXiv: astro-ph/0105302v1, (2002).
- [41] Hu, W., White, M., *Acoustic Signatures in the Cosmic Microwave Background*, Astrophysical Journal 471, 30, doi: 10.1086/177951, (1996).
- [42] Hu, W., Dodelsson, S., *Cosmic Microwave Background Anisotropies*, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 40, 171, arXiv: astro-ph/0110414v1, (2002).
- [43] Hu, Y., Turner, M. S., Weinberg, E. J., *Dynamical Solutions to the Horizon and Flatness Problems*, Phys. Rev. D, 49, 3830, arXiv: astro-ph/9302002, (1994).
- [44] Hubble, E., *A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 15, 3, 168, (1929).
- [45] Hulse, R. A., Taylor, J. H., *Discovery of a pulsar in a binary system*, Astrophysical Journal, 195, L51, (1975).
- [46] Jordan, P., *Schwerkraft und Weltall*, Vieweg (Braunschweig), (1955).
- [47] Kaluza, T., *Zum Unitätsproblem in der Physik*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.), 966., (1921).
- [48] Kazanas, D., *Dynamics of the universe and spontaneous symmetry breaking*, Astrophys. J., 241, L59, doi: 10.1086/183361, (1980).
-

- [49] Klein, O., *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*, Zeitschrift für Physik a Hadrons and Nuclei, 37, (12), 895, doi: 10.1007/BF01397481, (1926).
- [50] Liddle, A. R., *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press, (2000).
- [51] Liddle, A. R., Lyth, D. H., *COBE, Gravitational Waves, Inflation and Extended Inflation*, Phys. Lett. B, 291, 391, arXiv: astro-ph/9208007, (1992).
- [52] Liddle, A. R., and Lyth, D. H., *The Cold Dark Matter Density Perturbation*, Phys. Rep., 231, 1, arXiv: astro-ph/9303019, (1993).
- [53] Liddle, A. R., *Inflation as the Unique Causal Mechanism for Generating Density Perturbations on Scales Well Above the Hubble Radius*, Phys. Rev. D, 51, R5347, arXiv: astro-ph/9410083, (1995).
- [54] Linde, A., *Prospects of Inflation*, Physica Scripta Online, arXiv: hep-th/0402051, (2004).
- [55] Ma, C.-P., Bertschinger, E., *Cosmological Perturbation Theory in the Synchronous vs. Conformal Newtonian Gauge*, Astrophysical Journal, 612, 28, (2004).
- [56] Mach, E., *The Science of Mechanics; a Critical and Historical Account of its Development*, LaSalle, IL: Open Court Pub. Co. LCCN 60010179, (1960), reprint of the translation by Thomas H. McCormack (1906).
- [57] Mather, J.C. et al. *A preliminary measurement of the cosmic microwave background spectrum by the cosmic background explorer (COBE)*, Astrophysical Journal, 354, L37, (1990).
-

-
- [58] Merritt, D. et al., *Empirical Models for Dark Matter Halos. I. Nonparametric Construction of Density Profiles and Comparison with Parametric Models*, *Astron. J.*, 132, 2685, (2006).
- [59] Milgrom, M., *A Modification of the Newtonian Dynamics as a Possible Alternative to the Hidden Mass Hypothesis*, *Astrophysical Journal*, 270, 365, (1983).
- [60] Mukhanov, V. F., Feldman, H. A., Brandenberger, R. H., *Theory of Cosmological Perturbations*, *Phys. Rep.*, 215, (1992).
- [61] Nakamura, K., *Second-Order Gauge Invariant Cosmological Perturbation Theory*, *Prog. Theor. Phys.*, 117, 17, arXiv: gr-qc/0605108v3, (2007).
- [62] Nakao, K., Harada, T., Shibata, M., Kawamura, S., Nakamura, T., *Response of Interferometric Detectors to Scalar Gravitational Waves*, *Phys. Rev. D*, 63, arXiv: gr-qc/0006079v1, (2001).
- [63] Navarro, J. F., Frenk, C. S., White, S. D. M., *The Structure of Cold Dark Matter Halos*, *Astrophysical Journal*, 463, 563, doi: 10.1086/177173, (1996).
- [64] Nordström, G., *Relativitätsprinzip und Gravitation*, *Phys. Zeitschr.*, 13, 1126, (1912).
- [65] Nordström, G., *Über die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu vereinigen*, *Phys. Zeitschr.*, 15, 504, (1914).
- [66] Nordtvedt, K., *Equivalence Principle for Massive Bodies. I. Phenomenology*, *Phys. Rev.*, 169, 1014, (1968).
- [67] Nucamendi, U., Salgado, M., *Scalar hairy black holes and solitons in asymptotically flat spacetimes*, *Phys. Rev. D*, 68, arXiv: gr-qc/0301062v2, (2003).
-

-
- [68] Ostriker, J. P., Steinhardt, P. J., *The observational case for a low-density Universe with a non-zero cosmological constant*, Nature, 377, 600, doi: 10.1038/377600a0, (1995).
- [69] Padmanabhan, T., *Structure Formation of the Universe*, Cambridge University Press, (1993)
- [70] Pagel, B. E. J., *Nucleosynthesis and Chemical Evolution of Galaxies*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, (1997).
- [71] Peebles, P. J. E., *The Large-Scale Structure of the Universe*, Princeton University Press, (1980).
- [72] Peebles, P. J. E., *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, (1993).
- [73] Penzias, A. A., Wilson, R. W., *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s*, Astrophysical Journal, 142, 419, doi: 10.1086/148307, (1965).
- [74] Perez, A., Sahlmann, H., Sudarsky, D., *On the quantum origin of the seeds of cosmic*, Class. Quant. Grav., 23, 2317, arXiv: gr-qc/0508100v3, (2006).
- [75] Perlmutter, S. et al., *Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae*, The Astrophysical Journal, 517, 2, 565, (1999).
- [76] Pierce, M. J. et al. *The Hubble constant and Virgo cluster distance from observations of Cepheid variables*, Nature, 371, 385, (1994).
- [77] Poisson, E., *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge University Press, (2004).
- [78] Reid, I. N., , Astron. J., *Younger and brighter - New distances to globular clusters based on Hipparcos parallax measurements of local subdwarfs* 114, 161, arXiv: astro-ph/9704078, (1997)
-

-
- [79] Riazuelo, A., Uzan, J.-P., *Cosmological observations in scalar-tensor quintessence*, Phys. Rev. D, 62, 083506, arXiv: astro-ph/0004156, (2000).
- [80] Riess, A. G. et al., *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, Astronomical Journal, 116, 1009, doi: 10.1086/300499, (1998).
- [81] Riess, A., Press, W., Kirshner, R., *A Precise Distance Indicator: Type Ia Supernova Multicolor Light Curve Shapes*, Astrophys. J., 473, 88, arXiv: astro-ph/9604143, (1996).
- [82] Rubin, V., Ford, W. K. Jr., *Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions*, Astrophysical Journal, 159, 379, doi: 10.1086/150317, (1970).
- [83] Rubin, V., Thonnard, N., Ford, W. K. Jr., *Rotational Properties of 21 Sc Galaxies with a Large Range of Luminosities and Radii from NGC 4605 ($R=4kpc$) to UGC 2885 ($R=122kpc$)*, Astrophysical Journal, 238, 471, doi: 10.1086/158003, (1980).
- [84] Sachs, R. K., Wolfe, A. M., *Perturbations of cosmological model and angular variation of the microwave background*, Astrophysical Journal, 147, 73, (1967).
- [85] Salgado, M., *Scalar-tensor Theories of Gravity: Can They Solve the Coincidence Problem of the Cosmological Constant?*, On the nature of dark energy, Frontier Group, 321, (2002).
- [86] Salgado, M., *On the linear and weak-field limits of scalar-tensor theories of gravity*, Phys. Rev. D, arXiv: gr-qc/0202082v1, (2002).
- [87] Salgado, M., Sudarsky, D., Nucamendi U., *The violation of the weak energy condition, Is it generic of spontaneous scalarization ?*, Phys. Rev. D, 70, arXiv: gr-qc/0402126v3, (2004).
-

-
- [88] Salgado, M., *The Cauchy Problem of Scalar-Tensor Theories of Gravity* Class. Quantum Grav., 23, 4719, doi: 10.1088/0264-9381/23/14/010, (2006).
- [89] Salgado, M., Martínez-del Río, D., Alcubierre, M., Núñez D., *Hyperbolicity of scalar-tensor theories of gravity*, Phys. Rev. D, 77, arXiv: 0801.2372v2, (2008).
- [90] Sato, K., *Cosmological baryon number domain structure and the first order phase transition of a vacuum*, Phys. Lett. B, 33, 66, (1981).
- [91] Schechter, P. L., et al, *The Quadruple Gravitational Lens PG1115+080: Time Delays and Models*, Astrophys. J., 475, L85, arXiv: astro-ph/9611051, (1997).
- [92] Schmidt, F., *Weak Lensing Probes of Modified Gravity*, Phys. Rev. D, 78, 043002, arXiv: 0805.4812v3, (2008).
- [93] Schramm, D. N., Turner, M. S., *Big-bang Nucleosynthesis Enters the Precision Era*, Rev. Mod. Phys., 70, 303, arXiv: astro-ph/9706069, (1998).
- [94] Seljak, U., Zaldarriaga M., *A line-of-sight integration approach to cosmic microwave background anisotropies*, Astrophysics J., 469, 437, arXiv: astro-ph/9603033, (1996).
- [95] Skordis, C., Mota, D. F., Ferreira, P. G., Boehm C., *Large Scale Structure in Bekenstein's theory of relativistic Modified Newtonian Dynamics*, Phys. Rev. Lett., 96, 011301, arXiv: astro-ph/0505519v2, (2006).
- [96] Smoot, G. et al., *Preliminary results from the COBE differential microwave radiometers: Large-angular-scale isotropy of the cosmic microwave background*, Astrophysical Journal, 371, L1, (1991).
-

-
- [97] Sonego Bruni, *Gauge dependence in the theory of non-linear space-time perturbations*, Commun. Math. Phys., 193, 209, arXiv: gr-qc/9708068v1(1998).
- [98] Sotani, F., Kokkotas, K. D., *Stellar Oscillations in Scalar-Tensor Theory of Gravity*, Phys. Rev. D, 71, arXiv: gr-qc/0506060v2, (2005).
- [99] Spergel et al., *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters*, Astrophys. J. Suppl., 148, 175, arXiv: astro-ph/0302209v3, (2003).
- [100] Starobinsky, A. A., *A new type of isotropic cosmological models without singularity*, Phys. Lett. B, 91, 99, (1980).
- [101] Turner, M. S., *Dark matter: theoretical perspectives*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 90, 4827, (1993).
- [102] Vilenkin, A., Shellard, E. P. S., *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press, (1994).
- [103] Wagoner, R. V., *Scalar-tensor theory and gravitational waves*, Phys. Rev. D, 1, 3209, (1970).
- [104] Wald, R. M., *General Relativity*, University Of Chicago Press, (1984).
- [105] Whinnett, A. W., Torres, D. F., *Spontaneous violation of the energy conditions*, Astrophys. J., 603, 133, arXiv: astro-ph/0401521v1, (2004).
- [106] White M., et al., *Anisotropies in the CMB*, Annu. Rev. Astron. Astrophys., 32, 319, (1994).
- [107] Will, C. M., *Theory and experimentation in gravitational physics*, Cambridge University Press, (2000).
- [108] Will, C. M., *The Confrontation between General Relativity and Experiment*, Living Rev. Rel., 9, arXiv: gr-qc/0510072v2, (2005).
-

-
- [109] Yang, R.-J., Zhang, S. N., *Age crisis in Λ CDM model?*, arXiv: 0905.2683v2, (2009).
- [110] Yazadjiev, S. S. *Interior perfect fluid scalar-tensor solution*, Phys. Rev. D, 69, arXiv: gr-qc/0312019v1, (2004).
- [111] Zee, A. *Broken-Symmetric scalar-tensor theory*, Phys. Rev. Lett., 42(7), 417, (1979).
- [112] Zhao, H., Bacon, D. J., Taylor, A. N., Horne, K., *Testing Bekenstein's Relativistic MOND gravity with Lensing Data*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 368, 171, arXiv: astro-ph/0509590v4, (2006).
- [113] Zlatev, I., Wang, L., Steinhardt, P. J., *Quintessence, Cosmic Coincidence and Cosmological Constant*, Phys. Rev. Lett., 82, 896, arXiv: astro-ph/9807002, (1999).
-