



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**MODELADO ESTÁTICO, CINEMÁTICO, DINÁMICO Y
ANÁLISIS DE MOVILIDAD DE UN ROBOT MANIPULADOR
CON REFERENCIA MÓVIL.**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO MECATRÓNICO

PRESENTA

EDUARDO ALEJANDRO HERNÁNDEZ GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. VÍCTOR JAVIER GONZÁLEZ VILLELA

SINODALES: Dr. ANGEL ALFONSO ROJAS SALGADO
M.I. FERNANDO MACEDO CHAGOLLA
M.I. ULISES MARTÍN PEÑELAS RIVAS
Ing. ROGELIO DARIO GUTIERREZ CARRILLO



MAYO 2009



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Matemáticas: “Ciencia (o Arte) del estudio de las cantidades y su relación con algún fenómeno en investigación, por medio de símbolos que las representan”

Modelo: “Representación abstracta de la realidad por medio de símbolos, esquemas o cualquier medio factible, de manera que pueda considerarse la mayor cantidad de elementos constitutivos del fenómeno en estudio”

**“La verdadera belleza no radica en la prioridad del tener,
Si no en la esencia del ser...”**

EAHG

AGRADECIMIENTOS

Una hoja de agradecimientos suele ser, para el autor de un trabajo, una forma austera de expresar su gratificación a toda aquella persona y entidad que intervino de cierta manera en la formación del mismo, y que en muchas ocasiones es reflejado en un elemento que describe el esfuerzo del escritor a través de su paso por la vida estudiantil, para convertirse en un miembro activo de la sociedad profesional. Sin embargo, suele ser difícil recordar todos los momentos y todas las personas que determinan el carácter del nuevo profesional. Si omití a alguien en esta lista, pido una sincera disculpa, saben que estarán ahí siempre para mí, pues forjaron el camino que ahora sigo.

Agradezco inicialmente a **Camila** y a **Clodo** (mis calculadoras), siendo Camila la que estuvo conmigo casi toda la carrera apoyándome en todas las abstracciones extrañas que le pedía.

Posteriormente quiero agradecer a esta máxima casa de estudios, la **UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO (UNAM)**, por todo el apoyo que me brindó para poder hacer mis estudios desde nivel Bachillerato (la **PREPA 6**, donde expandí mi pensamiento hacia horizontes sociológicos, económicos y psicológicos) junto con sus profesores, en especial al profesor Froylan que hizo que “pensara más allá del cuadro”, hasta nivel Licenciatura, en la **FACULTAD DE INGENIERÍA**, donde completé mi formación no sólo como ingeniero, sino como profesional, haciéndome entender las pequeñas y grandes bellezas de la vida, y por supuesto a todos los profesores que me brindaron su conocimiento, iniciando por el Dr. Villela (gracias por todo su apoyo), M.I. Ulises Peñuelas, M.I. Fernando Macedo, Dr. Dorador, Dr. Edmundo (gracias por su conocimiento), M.C. Pilar, Ing. Serafín Castañeda, M.I. Alejandra y en general todo el **Departamento de Ingeniería Mecatrónica** junto con la **DIMEI** (incluyo a la MI Silvina), a todos mis profesores del anexo como Víctor Piña, Juan Velásquez Torres, Heriberto Aguilar y todos los que me enseñaron algo para la vida, pues ello fue determinante para el maestro que soy hoy en día.

Agradezco infinitamente a toda mi **Familia**, a mi mamá (Geogina González), papá (Alejandro Hernández), a mi hermana (Paola Hernández), a Nayeli Vera (sabes que estarás siempre en mi corazón), a todos mis tíos (Ileana, Jose, Argelia, Delfino, Juanita, Sergio, Mara, Rolando, mis tíos maternos) a mis abuelas y abuelos (que en paz descansen), a mis primos, a todos mis **Amigos**, tanto de la prepa (que tantas horas de diversión tuvimos), como los de la carrera (con lo que pasaba horas en la palmera del anexo), mis amigos y **Vecinos** de mi Casa, de McDonald’s, del Colegio, etc. (ustedes saben quienes son) y todas las personas que en algún momento estuvieron ahí para brindarme algún consejo para la vida, y acompañándome en los momentos de plenitud y debilidad.

No puedo dejar atrás los lugares donde he trabajado, en especial al **Colegio Nacional de Matemáticas**, pues las bases de mi carrera y de este trabajo las forjé ahí, además de **McDonald’s**, donde aprendí el verdadero trabajo en equipo. **GRACIAS A LA VIDA POR LA OPORTUNIDAD QUE ME DIÓ**

La Universidad es un camino difícil de recorrer, que tiene subidas y bajadas, victorias y derrotas, encantos y desencantos, amores y desamores, ilusión y decepción, en fin, es un camino de VIDA que sigue todo profesional para llegar a la cima de su superación personal.

El paso por la vida es un proceso que requiere mucha madurez mental para poder afrontar cualquier situación que pueda llegar de improviso. Sin embargo, la madurez de una persona no puede medirse directamente con la edad o con los años que lleva estudiando, sino con la experiencia que se ha dado la oportunidad de tomar cada vez.

Una tesis es un proceso de este tipo, una tesis madura conforme el autor lo hace, pues la misma se transforma, comienza siendo una herramienta para un objetivo en particular (la titulación) y se convierte poco a poco en una extensión de la persona, como si fuera una parte de sus pensamientos plasmada en un elemento abstracto que le permite expresar toda su naturaleza en un solo momento que dura para siempre...

Ese fue el significado la tesis para mí. No sólo fue un medio para poder comprobar una teoría planteada a través de una hipótesis, sino por el contrario fue una experiencia para extrapolar a través de una abstracción todo lo que significa la vida para mi, proyectando elementos, características y propiedades definidas por sí mismas desde su mundo al nuestro; y el lenguaje utilizado no es más que una traslación de su entorno aparente al nuestro. En conclusión, la tesis una obra de arte definida por sí misma, pero indefinida por todos.

Como en la ciencia, aquel lector que tiene la inquietud de estudiar y superarse tiene todas las herramientas para realizar una introspección, guiada por la misma tesis y basada en arte de la ciencia, hacia un mundo desconocido, traducido en principio por el autor mismo, pero interpretado por la humanidad en su contexto más significativo e incomprendido.

*El grado de licenciatura tiene por meta la demostración de los conocimientos de un estudiante para poder ser un profesionalista en la vida; pero como piedra filosofal y columna vertebral el indagar lo más íntimo del autor, creando en muchas ocasiones un elemento que en la actualidad solo puede identificarse con un nombre, que conlleva toda una estructura mítica actual: **TESIS**.*

Estimado lector, este trabajo lleva consigo toda una serie de elementos que pueden considerarse extremadamente abstractos para la mayoría de la gente, sin embargo, son elementos netamente descriptivos del espacio sobre el cual se está trabajando, por lo que existen también elementos filosóficos que pueden tener como fin el indagar sobre la verdadera naturaleza del mismo proceso, o aun más, la misma existencia del ser representado no solo en este tema, sino en todo el tema inmerso dentro de él.

Como dijo en su momento Einstein: "La propiedad más incomprensible, es justamente que sea tan comprensible".

Amigo lector, lo invito a entrar a este mundo de abstracción y disfrutar la lectura tanto como yo disfrute la escritura e investigación.

EAHG

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN.....	7
PRÓLOGO.....	9
Capítulo 1. La Robótica.....	11
Capítulo 2. Diversificación de la Robótica.....	17
Capítulo 3. Modelo Estático del Robot.....	27
Capítulo 4. Modelo Cinemático del Robot.....	64
Capítulo 5. Estática y Cinemática Inversa del Robot.....	95
Capítulo 6. Modelo Dinámico del Robot.....	140
CONCLUSIONES GENERALES DEL TRABAJO.....	154
ANEXO 1: Demostración del Principio de mínima acción.....	155
ANEXO 2: Demostración de la ecuación de Euler-Lagrange.....	156
ANEXO 3: Demostración del Sistema Euler-Lagrange	157
TABLA DE FIGURAS.....	158
TABLA DE DEFINICIONES.....	161
BIBLIOGRAFÍA.....	162

ÍNDICE POR PÁGINA

INTRODUCCIÓN.....	7
PRÓLOGO.....	9
CAPÍTULO 1 LA ROBÓTICA	11
1.1 HISTORIA DE LA ROBÓTICA	11
1.2 DEFINICIÓN ACTUAL DE ROBÓTICA Y ROBOT	15
1.3 PERSPECTIVAS.....	16
CAPÍTULO 2 DIVERSIFICACIÓN DE LA ROBÓTICA.....	17
2.1 TIPOS DE ROBOTS.....	17
Robótica Industrial, didáctica y de exploración	17
Robots inteligentes y autónomos	17
2.2 Elementos generales de un Robot MANIPULADOR	21
2.3 TIPO DE ROBOT EMPLEADO	22
2.4 Antecedentes (Trabajos previos)	26
CAPÍTULO 3 MODELO ESTÁTICO DEL ROBOT	27
3.1 MÉTODOS DE POSICIONAMIENTO. INTRODUCCIÓN	27
3.2 TRASLACIÓN Y ROTACIÓN	30
3.3 COORDENADAS Y	34
3.4 METODOLOGÍA DE POSICIONAMIENTO	37
3.5 POSICIONES DE LOS PUNTOS DEL ROBOT	39
3.6 ANÁLISIS ESTÁTICO Y ESPACIO DE TRABAJO	53
CAPÍTULO 4 MODELO CINEMÁTICO DEL ROBOT.	64
4.1 INTRODUCCIÓN.....	64
4.2 MODELO CINEMÁTICO DE UN ROBOT MANIPULADOR.....	67
4.3 JACOBIANOS Y VELOCIDADES DEL ROBOT	73
4.4 INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS DE JACOBIANOS Y VELOCIDADES	80
4.5 ACELERACIONES DEL ROBOT	87
4.6 INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS DE ACELERACIONES	92
CAPÍTULO 5 ESTÁTICA Y CINEMÁTICA INVERSA DEL ROBOT	95
5.1 INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS INVERSO	95
5.2 ESTÁTICA Y CINEMÁTICA INVERSA	96
5.3 OBTENCIÓN DE SINGULARIDADES POR MEDIO DEL ANÁLISIS DEL JACOBIANO 101	
5.4 POSICIÓN ARTICULAR. INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS Y PERFIL DE TRAYECTORIAS.....	125
5.5 VELOCIDAD ARTICULAR. JACOBIANO INVERSO Y APLICACIÓN.....	136
5.6 ACELERACIÓN ARTICULAR. INTRODUCCIÓN AL PERFIL DE VELOCIDADES Y ACELERACIONES.....	139
CAPÍTULO 6 MODELO DINÁMICO DEL ROBOT	140
6.1 INTRODUCCIÓN. CONCEPTOS BÁSICOS. ANÁLISIS DINÁMICO DE UN ROBOT. APLICACIONES.....	140
6.2 MECÁNICA LAGRANGIANA. ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE. SISTEMAS EULER-LAGRANGE.....	141
6.3 MODELO DEL ROBOT POR MEDIO DE LA ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE	144
CONCLUSIONES GENERALES DEL TRABAJO.....	154
ANEXO 1: DEMOSTRACIÓN DEL PRINCIPIO DE MÍNIMA ENERGÍA.....	155
ANEXO 2: DEMOSTRACIÓN DE LA ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE.....	156
ANEXO 3: DEMOSTRACIÓN DEL SISTEMA EULER LAGRANGE.....	157
TABLA DE FIGURAS.....	158
TABLA DE DEFINICIONES.....	161
BIBLIOGRAFÍA.....	162

INTRODUCCIÓN

CUANDO EL FUTURO NOS ALCANCE...

El término *robótica* se acuñó hace relativamente poco tiempo a nuestro lenguaje social y cultural, regularmente con el fin de denominar algún ente que realiza acciones repetitivas o que bien puede “liberarse” de sus ataduras y tener *conciencia* propia y hacer, pensar o decir (si es el caso) lo que quiera.

Sin embargo, hay gente que utiliza el término de forma específica para identificar ciertas criaturas (si es que se les puede decir así), en general máquinas, que realizan acciones propias de los seres humanos, necesitadas de un algoritmo que pueda dar la organización de esas acciones, aunque la acción sea tomada por la misma máquina.

La imperiosa necesidad de poder realizar esas tareas repetitivas y/o difíciles es un problema que ha acompañado al ser humano desde que este se volvió sedentario. Con la llegada de las máquinas simples se cumplió de forma parcial este objetivo, pues existía ya la capacidad de hacer tareas que el hombre ya realizaba, de una forma más sencilla y sin efectos secundarios o impactos en la salud. Posteriormente, con el crecimiento de las matemáticas y la física, estas máquinas se mejoraron enormemente, debido a que se hizo una sistematización en la creación de estas.

En el libro de **MÁQUINAS** de la *COLECCIÓN CIENTÍFICA DE LIFE* de 1964, Henry Ford II da una pequeña introducción a este texto comentando:

MI ABUELO, el Henry Ford que hizo famoso el Modelo T y la producción en serie, era una persona que establecía una diferencia absoluta entre trabajar duro y hacer un trabajo duro. Él tenía gran fe en lo primero y muy poca en lo segundo.

Su infancia en una granja del siglo XIX le convenció de que los hombres y los caballos hacían mucho trabajo duro que podía y debía ser realizado por medio de máquinas. Fue una convicción que dominó su vida, y esto le ha hecho llegar a las páginas del LIFE, que trata de las máquinas que el hombre ha diseñado para hacer su trabajo más fácil.

Desde el nacimiento de mi abuelo hace un siglo, las máquinas han transformado la vida cotidiana. Como el mismo expreso, “hemos suprimido el trabajo pesado de las espaldas del hombre y lo hemos cargado sobre el ancho lomo de las máquinas”. Pero las máquinas significan mucho más para nosotros que el hecho de aligerarnos nuestra tarea diaria. El hecho verdaderamente significativo respecto a la máquina no es que permita al hombre hacer un trabajo en menos tiempo, sino que permita al hombre el producir el doble en un tiempo determinado.

Así es como en los setentas surgen máquinas que además de reducir la tarea del hombre e incrementar la eficiencia de un proceso, tenían la capacidad de realizar tareas de forma repetitiva, pero con una característica especial, no reaccionan ante cambios en su entorno, ya que no están “programadas” para ello. Estas máquinas son llamadas **robots** ya que la palabra *robota* en checo significa “trabajo”. Es usada por primera vez en una obra R.U.R. o *Rossum's Universal Robots*, de Karen Capek que es un libro clásico de la primera ciencia ficción. Este auguraba lo que en un futuro vendría. Además de este autor, y esta obra ha habido otras más que constituyen utopías acerca del futuro. Un ejemplo de ello es la obra “Metrópolis” o las obras que hablan de robots de Isaac Asimov, como “Yo Robot”.

Pero según lo que comentamos hace un momento un robot sólo tiene la capacidad de realizar tareas repetitivas. Entonces, ¿cómo es que podrían realizar las cosas auguradas en estas obras? La respuesta vino a darse en los noventas, cuando tomó auge una palabra que vino a revolucionar la historia.

La Mecatrónica, disciplina que nació para formar una nueva disciplina que integra sinérgicamente teorías mecánicas, eléctricas-electrónicas y de informática, y así, darle “vida propia” a los objetos, con lo cual fue posible crear máquinas que realizaran tareas repetitivas capaces discernir y tomar decisiones para reaccionar ante el entorno.

El hecho de sólo hacer máquinas capaces de realizar tareas difíciles o iterativas se quedó como segundo plano, para dar paso a **máquinas o autómatas pensantes**, que no solamente reaccionen con la naturaleza, sino que además tomen decisiones iniciales que cambien tanto su vecindad como la de su entorno. Se comenzaron a crear seres que pudieran no sólo emular el comportamiento humano, si no lograr además que tengan la capacidad de **sentir**. Estos seres son androides, y traspasan la barrera de ser sólo máquinas de acción repetitiva a convertirse en seres capaces de “imitar” de forma artificial a la vida humana en todo sentido.

Pero, ¿Qué nos espera en el futuro? Es un tema de gran polémica y discusión, sin embargo, a donde más se apunta es a la creación de organismos capaces de interactuar de manera intrínseca con elementos orgánicos naturales o viceversa, para aprovechar lo mejor de cada uno de ellos. Estos seres son llamados cyborgs, de las palabras cybernetic organisms, y son el futuro, no sólo de la Mecatrónica o de la robótica sino, de toda la humanidad.

El presente trabajo da una pequeña introducción al análisis de movimiento de robots manipuladores capaces de realizar tareas específicas.

PRÓLOGO

El objetivo de este trabajo es proponer un algoritmo simbólico por medio del lenguaje matemático para la planeación del movimiento un robot que tiene un brazo y un antebrazo y puede desplazarse en el plano.

El **problema** que surge es el poder **integrar los conocimientos, tecnologías e ideas desde la creciente perspectiva mecatrónica, en un ámbito matemático** enfocado en un proyecto de interés, no sólo a nivel de investigación sino también social.

Todo esto desemboca a un objetivo general y a su vez un proyecto, que tiene como fin **la creación de un dispositivo mecatrónico, un robot móvil manipulador de 6 grados de libertad, 3 en el brazo manipulador y 3 en el móvil, capaz de realizar diferentes tareas y técnicas de evasión de obstáculos.**

El objetivo particular de este trabajo es **modelar estática, cinemática y dinámicamente de manera matemática el brazo robótico en relación con los movimientos del móvil, para hallar así las condiciones de frontera de los grados de libertad un estado del robot dado.** Además se **simulará, una trayectoria de ejemplo de manera computacional.** Esto servirá para extrapolarlo a condiciones diferentes de las contempladas inicialmente.

De esta manera, las hipótesis que sustentan el trabajo y a su vez la investigación son: **¿Se puede obtener el modelo matemático de un robot manipulador que cuente con una referencia móvil para futuras aplicaciones?, ¿Se puede analizar el comportamiento del robot y planificar que siga una trayectoria en el espacio por medio de dicho modelo?, ¿Esto llevaría a propiciar la generación de una nueva teoría (local) que tenga como objetivo principal el crear robots manipuladores sujetos a cambios de referencia externos?**

A continuación se da una pequeña descripción acerca de lo que se verá en cada capítulo.

En el capítulo 1 (La Robótica) se *explicará la definición actual de Robot y Robótica, además una opinión del autor sobre la perspectiva futura en el tema de Robótica en general.*

En el capítulo 2 (Diversificación de la Robótica) se *darán los diferentes tipos de robots que existen en la actualidad y los elementos básicos de los mismos.*

En el capítulo 3 (Modelo Estático del Robot) se *dará una breve descripción de los métodos de posicionamiento para obtener analíticamente la posición de los puntos del manipulador, dando especial énfasis al punto terminal, para así realizar un análisis del espacio de trabajo.*

En el capítulo 4 (Modelo Cinemático del Robot) se *explicará el método directo de análisis cinemático, para introducir el concepto de Jacobiano, y hallar velocidad y aceleración del efector final junto con otros puntos del manipulador.*

En el capítulo 5 (Estática y Cinemática Inversa del Robot) se *realizará un estudio de las condiciones de reversibilidad articular estática y cinemática, para probar la factibilidad del manipulador ante condiciones de frontera, por medio del análisis cinemático y estático del efector final y los mismos eslabones. Así mismo se dará un análisis simple de la generación de trayectorias y una breve introducción al análisis de perfil de trayectorias*

En el capítulo 6 (Modelo Dinámico del Robot) se *estudiará el análisis dinámico del robot, por medio de la teoría de sistemas dinámicos y modelado energético, para obtener el modelo dinámico del Robot y así explicar su aplicación.*

CAPÍTULO 1 LA ROBÓTICA

1.1 HISTORIA DE LA ROBÓTICA

El inicio de la robótica actual puede fijarse en la industria textil del siglo XVIII, cuando Joseph Jacquard inventa en 1801 una máquina textil programable mediante tarjetas perforadas. La revolución industrial impulsó el desarrollo de estos agentes mecánicos, entre los cuales se destacaron el torno mecánico motorizado de Babbitt (1892) y el mecanismo programable para pintar con spray de Pollard y Roselund (1939). Además de esto durante los siglos XVII y XVIII en Europa fueron construidos muñecos mecánicos muy ingeniosos que tenían algunas características de robots.

La palabra robot se empleó por primera vez en 1920 en una obra de teatro llamada "R.U.R." o "Los Robots Universales de Rossum" escrita por el dramaturgo checo Karel Capek. Este término, *ROBOT*, se atribuye a la palabra checa 'Robota' significa servidumbre o trabajador forzado, y cuando se tradujo al inglés se convirtió en el término robot. En 1939 Isaac Asimov contribuyó con varias narraciones relativas a robots. La imagen de robot que aparece en su obra es el de una **máquina bien diseñada y con una seguridad garantizada** que actúa de acuerdo con tres leyes:

- 1.- Un robot no puede actuar contra un ser humano o, mediante su inacción, que un ser humano sufra daños.
- 2.- Un robot debe de obedecer las órdenes dadas por los seres humanos, salvo que estén en conflictos con la primera ley.
- 3.- Un robot debe proteger su propia existencia, a no ser que esté en conflicto con las dos primeras leyes.

El desarrollo en la tecnología, donde se incluyen las poderosas computadoras electrónicas, los actuadores de control retroalimentados, transmisión de potencia a través de engranes, y la tecnología en sensores contribuyó a flexibilizar los mecanismos autómatas para desempeñar tareas dentro de la industria. Varios factores intervinieron para que se desarrollaran los primeros *robots* en la década de los cincuenta. La investigación en inteligencia artificial desarrolló maneras de emular el procesamiento de información humana con computadoras electrónicas e inventó una variedad de mecanismos para probar sus teorías.

Otros desarrollos importantes en la historia de la robótica fueron:

-En 1960 se introdujo el primer robot "Unimate", basado en la transferencia de artículos. Utilizaron los principios de control numérico para el control de manipulador y era un robot de transmisión hidráulica.

- En 1961 Un robot Unimate se instaló en la Ford Motors Company para atender una máquina de fundición de troquel.

- En 1966 Trallfa, una firma noruega, construyó e instaló un robot de pintura por pulverización.

- En 1971 El "Standford Arm", un pequeño brazo de robot de accionamiento eléctrico, se desarrolló en la Standford University.

- En 1973 Se desarrolló en SRI el primer lenguaje de programación de robots del tipo de computadora para la investigación con la denominación WAVE. Fue seguido por el lenguaje AL en 1974. Los dos lenguajes se desarrollaron posteriormente en el lenguaje VAL comercial para Unimation por Víctor Scheinman y Bruce Simano.

- En 1978 Se introdujo el robot PUMA (Programmable Universal Machine for Assambly) para tareas de montaje por Unimation, basándose en diseños obtenidos en un estudio de la General Motors.

- En 1980 Un sistema robótico de captación de recipientes fue objeto de demostración en la Universidad de Rhode Island. Con el empleo de visión de máquina el sistema era capaz de captar piezas en orientaciones aleatorias y posiciones fuera de un recipiente.

...LLEGAN LOS MÓVILES

El concepto de robótica ha evolucionado hacia los sistemas móviles autónomos, que son aquellos que son capaces de desenvolverse por sí mismos en entornos desconocidos y parcialmente cambiantes sin necesidad de supervisión.

El primer robot móvil de la historia, pese a sus muy limitadas capacidades, fue ELSIE (Electro-Light-Sensitive Internal-External), construido en Inglaterra en 1953. ELSIE se limitaba a seguir una fuente de luz utilizando un sistema mecánico realimentado sin incorporar inteligencia adicional. En 1968, apareció SHACKEY del SRI (standford Research Institute), que estaba provisto de una diversidad de sensores así como una cámara de visión y sensores táctiles y podía desplazarse por el suelo. El proceso se llevaba en dos computadores conectados por radio, uno a bordo encargado de controlar los motores y otro remoto para el procesamiento de imágenes.

En los setenta, la NASA inicio un programa de cooperación con el Jet Propulsión Laboratory para desarrollar plataformas capaces de explorar terrenos hostiles. El primer fruto de esta alianza seria el MARS-ROVER, que estaba equipado con un brazo mecánico tipo STANFORD, un dispositivo telemétrico láser, cámaras estéreo y sensores de proximidad.

En los ochenta aparece el CART del SRI que trabaja con procesado de imagen estéreo, más una cámara adicional acoplada en su parte superior. También en la década de los ochenta, el CMU-ROVER de la Universidad Carnegie Mellon incorporaba por primera vez una rueda timón, lo que permite cualquier posición y orientación del plano.



Figura 1-1, CART del SRI

En la actualidad, la robótica se debate entre modelos sumamente ambiciosos, como es el caso del IT, diseñado para expresar emociones, el COG, también conocido como el robot de cuatro sentidos, el famoso SOUJOURNER o el LUNAR ROVER, vehículo de turismo con control remotos, y otros mucho más específicos como el CYPHER, un helicóptero robot de uso militar, el guardia de tráfico japonés ANZEN TARO o los robots mascotas de Sony.



Figura 1-2, AIBO de SONY

En el campo de los robots antropomorfos (androides) se debe mencionar el P3 de Honda que mide 1.60m, pesa 130 Kg y es capaz de subir y bajar escaleras, abrir puertas, pulsar interruptores y empujar vehículos.



Figura 1-3, ASIMO de HONDA

En general la historia de la robótica se puede clasificar en cinco generaciones (división hecha por Michael Cancel, director del Centro de Aplicaciones Robóticas de Science Application Inc. en 1984).

-Las dos primeras, ya alcanzadas en los ochenta, incluían la gestión de tareas repetitivas con autonomía muy limitada.

-La tercera generación incluiría visión artificial, en lo cual se ha avanzado mucho en los ochenta y noventas.

-La cuarta incluye movilidad avanzada en exteriores e interiores.

-La quinta entraría en el dominio de la inteligencia artificial, en lo cual se está trabajando actualmente. [1]

1.2 DEFINICIÓN ACTUAL DE ROBÓTICA Y ROBOT

La definición actual de **robótica** es un tanto difícil de expresar en términos sencillos y coloquiales. Algunos autores ya se han encaminado por esta senda, y han dado muy buenas definiciones para su campo.

Baturone [1]: *En el término robótica confluyen las imágenes de máquinas para la realización de trabajos productivos y de imitación de movimientos y comportamientos de seres vivos. Los robots actuales son obras de ingeniería y como tales concebidas para producir bienes y servicios o explotar recursos naturales.*

Fu [4]: *Un Robot es un manipulador reprogramable de uso general son sensores externos que pueden efectuar diferentes tareas de montaje.*

McCloy [3]: *Un Robot industrial es un manipulador reprogramable con funciones múltiples diseñado para mover materiales, partes, herramientas o dispositivos especializados a través de movimientos programados variables para el desempeño de una gran diversidad de tareas. Las palabras claves que distinguen a los robots de otras máquinas son “manipulador” y “reprogramable”.*

Inclusive en la red [18] podemos hallar algunas definiciones acertadas para lo que manejan: *La robótica es la ciencia encaminada a diseñar y construir aparatos y sistemas capaces de realizar tareas propias de un ser humano. Con esta definición tan general, la palabra 'robótica' cubre muchos conceptos diferentes, pero todos giran en torno a la misma idea.*

Tal y como se puede ver, la definición de **robótica** toma ciertos matiz relativo con el tema específico que el autor quiere desarrollar en su obra o con lo que está más relacionado. Sin embargo, en todos los casos no se pierde la noción principal acerca de la definición de robótica y robot, que es la que tomaremos para nuestro caso. Esta es:

Definición 1-1: Definición de Robótica

ROBÓTICA: *Rama de la ciencia (incluida la tecnología, física e ingeniería) que junta las disciplinas de mecánica, eléctrica – electrónica, informática y algunos temas de biología natural para diseñar, crear, simular y mejorar **robots** máquinas capaces de interactuar (detectar, decidir, actuar o reaccionar) con su ambiente y que pueden realizar tareas útiles, propias de los seres humanos).*

ROBOT: *Máquina que consta de hardware y software que le permite tener algoritmos de detección, decisión, acción y repetición, para reaccionar ante los efectos de la naturaleza e interactuar con ella; de forma que pueda realizar acciones propias, repetibles y lógicas. Regularmente cuentan o se diseñan con forma antropomórfica (humana) para tener movimientos similarmente humanos.*

Cabe destacar que si una máquina (por más antigua que pueda ser) cumple con estos requisitos, entonces es un robot. En muchos escritos utópicos donde se habla de rebelión de robot se incluyen máquinas que aunque no cuentan con forma humana (como una lavadora) es considerada como tal.

1.3 PERSPECTIVAS

A principios del siglo pasado la revolución industrial se encontraba en su apogeo, debido a que se demostró por medio de eficiencias de procesos que era mejor hacer uso de máquinas para mejorar las acciones y tareas que los humanos realizaban. Sin embargo, al comienzo de esta etapa no muchos apostaban por ese futuro donde las máquinas reemplazaran las pesadas acciones que realizaba el ser humano.

Hasta hace unos años (desde los 60's hasta los 80's) sonaba como una utopía pensar que en el futuro existieran máquinas que pudieran realizar acciones por sí mismas, y más aún, que pudieran tomar decisiones para interactuar con la naturaleza.

Actualmente nos encontramos en una etapa en la cual los robots estarán en muchas de las actividades cotidianas que realizamos los seres humanos. En un futuro, podremos ver que estos seres podrán no sólo realizar acciones humanas, si no acciones que no estamos capacitados para hacer.

De hecho, una serie de autores (ergo Isaac Asimov, Karen Capek, etc.) planteaban un futuro en el cual los humanos y estos seres conviven en armonía y cooperan para hacer la vida (si es que para los robots puede llamarse de esta forma) de ambos mejor.

Pero más allá de pensar que sólo podemos crear y convivir con robots, existe una teoría (no abarcada en esta obra) que plantea la posibilidad de juntar en forma sinérgica las cualidades de seres orgánicos (como humanos) y seres inorgánicos (como robots) para tener seres de mayor capacidad. Esta teoría es la **Cibernética**, y los seres de los que hablamos son **Androides**.

Como perspectiva a futuro, una vez que se tengan los conocimientos necesarios para crear estas máquinas y cada vez sean capaces de realizar acciones mayores, se podrá abundar en el tema de la Cibernética. A lo cual le seguirá una serie de prerrogativas que en la actualidad se tratan y se discuten fuertemente. Uno de los autores que ha entrado a esta filosofía es **Francis Fukuyama**, que en su libro **“El fin del hombre. Consecuencias de una Revolución Biotecnológica”** plantea de forma realista lo que podría ser el futuro conviviendo con estos seres, y lo analiza desde el punto de vista científico, filosófico y legal.

A todo esto, la pregunta que sale a la luz de este último tema es:
¿Hasta dónde podría considerarse un ser humano si es sustituido con piezas mecánicas, eléctricas-electrónicas y/o mecatrónicas, como manos, brazos, piernas, corazón, etc.?, y de forma inversa, ¿Hasta dónde podría considerarse una máquina como tal si es sustituida con partes orgánicas, como brazos, piernas, cerebro, etc.?, todas estas cuestiones concernientes a la filosofía de la robótica.

Pero más allá de esta cuestión, la pregunta que más nos interesa es:
¿Hasta dónde podemos llegar?

CAPÍTULO 2 DIVERSIFICACIÓN DE LA ROBÓTICA

2.1 TIPOS DE ROBOTS

Así como existen distintos tipos y clasificaciones para máquinas y distintos entes, la robótica y los robots pueden clasificarse de distintas maneras. Existen páginas dedicadas a los temas de robots [18], algunas de ellas se dan a continuación:

Robótica Industrial, didáctica y de exploración

Estos robots pueden clasificarse por su ubicación geográfica y propósito.

Robótica Industrial: Es la parte de la Ingeniería Robótica que se dedica a la construcción de máquinas capaces de realizar tareas mecánicas y repetitivas de una manera muy eficiente y con costes reducidos.

Robótica de Servicio: Es la parte de la Ingeniería Robótica que se centra en el diseño y construcción de máquinas capaces de proporcionar servicios directamente a los miembros que forman sociedad.

Robótica de Exploración: Es la parte de la Ingeniería Robótica del Software que se encarga de desarrollar programas capaces de explorar documentos en busca de determinados contenidos. Existen diversos servicios en Internet dedicados a esta parcela de la robótica.

Robots inteligentes y autónomos

Los robots pueden clasificarse por su software interno.

Robots Inteligentes: Son robots capaces de desarrollar tareas que requieren el uso de su capacidad y de razonamiento.

Robots Autónomos: Son dispositivos robóticos capaces de operar por sí mismos, es en la robótica de servicio donde está su uso más extendido, debido a que su reacción y actuación supera las expectativas del usuario. Algunas otras áreas en las que este tipo de robots han incursionado además del área de servicio son:

- Conflictos bélicos
- Exploración espacial
- Exploración submarina
- Rescate en situaciones de emergencia y/o catástrofe

Robots manipuladores, móviles e híbridos

Los Robots pueden clasificarse también por la forma en cómo se mueven.

Robots manipuladores: En específico, cuando hablamos de acciones como tomar piezas (manipulación de objetos), entonces se puede hablar de robots manipuladores. Son aquellos que tienen una base que no se mueve y que es parte del robot. Su función principal es cambiar de estructura (forma geométrica) para poder tomar objetos y maniobrarlos de alguna manera, con el fin de realizar distintas acciones. Sin embargo, el concepto de robot manipulador se extiende a todos aquellos que realizan alguna acción desde alguna base fija, y cambian su posición según sea el caso. No importa si en su terminal cuenta con algún instrumento para tomar objetos, cortar, pintar, etc.

De acuerdo con la definición del "Robotics Institute of America", *un robot industrial es un manipulador programable multifuncional diseñado para mover materiales, piezas, herramientas o dispositivos especiales, mediante movimientos variados, programados para la ejecución de distintas tareas.*[1], De forma que las definiciones comienzan a ayudarnos a poder entender de mejor forma los robots. Anteriormente se dio una definición de Robótica Industrial, en este caso se da la de Robot industrial, con la ayuda de la de Robot Manipulador.

Algunos Robots comerciales de este tipo son [1]:

- PUMA
- Antropomórficos
- SCARA (*Selective Compílanse Assembly Robot Arm*)

Robots móviles: Son aquellos que cuentan con una base móvil y pueden desplazarse ya sea en el plano o en el espacio. De manera rigurosa, este tipo de robots sólo se desplazan, y se les sigue considerando robots debido a que el desplazamiento es una característica inherente de los seres humanos. Cabe destacar que si cambian su geometría sólo para poder desplazarse, siguen siendo móviles.

Existen muchos tipos de Robots Móviles actualmente [1], algunos son:

- Sistema Ackerman
- Triciclo clásico
- Direccionamiento diferencial

Robots manipuladores móviles: Son aquellos que juntan las características principales de un Robot Manipulador y un Robot Móvil, de forma que se tiene un manipulador que puede desplazarse, o dicho de manera más sencilla, son Robots Manipuladores Móviles o bien Robots Móviles Manipuladores.

Existen otro tipo de robots que no entran exactamente dentro de las clasificaciones dadas, pero que bien podrían acoplarse. Algunos de estos son:

Robots de cadena cinemática abierta (seriales) y de cadena cerrada (paralelos).

Hablando específicamente de robots manipuladores, pueden clasificarse como si fuera un mecanismo. Esto es lo que da la forma básica del robot en caso de referirnos a un manipulador. Básicamente existen 2 tipos, de cadena cinemática abierta o seriales, y cadena cinemática cerrada o paralelos.

Robots de cadena cinemática abierta o Seriales: Este tipo de robots se denominan de esta manera debido a que cada eslabón del robot confluye sólo en el eslabón anterior y siguiente, de forma que el punto inicial es único, al igual que el punto terminal. Además de que en cada punto de este sólo se tienen 2 eslabones unidos. Se les llama seriales debido a que cada eslabón va en serie con el siguiente, y tal como en un circuito eléctrico, si uno de los eslabones falla, toda la estructura también lo hace.

Es importante recalcar que este tipo de robots son los más usados en la actualidad, debido primeramente a su uso histórico, y en segundo lugar, que la complejidad matemática y mecánica involucrada en ellos es más sencilla que en un paralelo.

Robots de cadena cinemática cerrada o Paralelos: Estos robots están muy relacionados con los mecanismos paralelos, donde se considera que la referencia (también llamada eslabón inicial) puede tocar 2 o más eslabones del mecanismo; y el punto terminal es la conjunción de 2 ó más eslabones. El uso de estos robots se expande día con día, debido a que tienen una gran ventaja, el punto terminal no es un solo eslabón, si no una serie de estos, lo que puede disminuir de forma circunstancial la flexión en caso de carga.

Grados de Libertad

Los robots pueden también clasificarse por la movilidad en las articulaciones. Esta clasificación es una de las más importantes.

La definición de Grados de Libertad se puede ver desde diversas áreas de conocimiento. Matemáticamente se define como *El número de términos linealmente independientes que definen una operación*. La definición de Mecánica clásica es *El número de variables linealmente independientes que definen la posición y orientación de un objeto en el espacio*. Y aunque parezca extraño, esta definición no está tal alejada de la usada en Robótica. La usada en nuestro caso es:

Definición 2-1: Definición de Grados de Libertad

Grados de Libertad: *Número de variables (movimientos) linealmente independientes que determinan totalmente el estado del robot, en posición y orientación. Para el caso de robots permiten desplazamientos y/o rotaciones.*

De acuerdo con la teoría de los mecanismos, las articulaciones pueden tener distintos grados de libertad. En general, existen dos tipos, de traslación o bien de rotación. Algunos tipos de articulaciones según su configuración son:

Tabla 2-1: Número de grados de libertad por articulación

Articulación	Grados de libertad
Rotación	1
Prismática	1
Cilíndrica	2
Planar	2
Esférica	3

Gracias a esta determinación que existe en los robots, se les puede clasificar basado en sus articulaciones son **Prismáticas** y/o **Rotacionales**, por las siglas de estas mismas. Así, si un robot tiene 2 articulaciones de tipo rotacionales, es un robot **RR**, si se trata de uno con dos prismáticas, es **PP**, si tiene dos prismáticas y dos rotacionales, salteadas (por ejemplo) sería **PRPR**.

Para el caso de los robots manipuladores, la familia a la que perteneces se determina de esta forma. Las estructuras básicas, basándose en los tipos de articulaciones con las que se cuenta, están basadas en los grados de libertad. Algunos tipos son:

Cartesianos (**3P**), Cilíndricos (**R2P**), Polares (**RP**), Angulares Planares (**2R**), Esférico(**2RP**), Articulado/antropomórfico(**3R**), *Selective Compilanse Assembly Robot Arm* (**SCARA**) [1], etc.

Además, cabe mencionar que para el caso de robots móviles existen también grados de libertad, sin embargo estos definen la forma en cómo se desplazan por el espacio. Para el caso de los que se mueven en el plano con ruedas (llantas), depende si estas están motorizadas o no, y de si esa motorización es para tracción u orientación (rotación o traslación).

Si fuera un móvil sin ruedas, como los de tipo reptil, entonces se trata del número de articulaciones que permite su movimiento. Si es el caso de un móvil espacial (como un pequeño avión tipo murciélago, entonces será el número de articulaciones motoras que generan su movimiento da aleteo).

En general, para revisar el número de grados de libertad que tiene un robot manipulador, basta con sumar el número de acciones independientes en cada articulación. Esto no quiere decir que necesariamente cada junta o articulación contenga sólo 1 grado de libertad, ya que pueden llegar a contener varias de ellos, como la **rótula**, tal y como se observa en la tabla 2-1.

2.2 Elementos generales de un Robot MANIPULADOR

Un robot, como un sistema, consiste de varios elementos, que están integrados para formar un todo [5]:

Manipulador. Este es el cuerpo principal del robot y consiste de eslabones, juntas, y otros elementos estructurales del robot. Sin los demás elementos, el manipulador no sería un robot.

Efector final. Esta es la parte conectada a la última junta (mano) del manipulador, que generalmente maneja objetos, hace conexiones con otros robots u otras tareas requeridas. Los fabricantes de robots generalmente no diseñan o venden efectores finales. En la mayoría de los casos, todo lo que tienen es un *gripper*.

Actuadores. Son los “músculos” del manipulador. Comúnmente se trata de servomotores, pero también son usados motores de pasos, cilindros neumáticos y cilindros hidráulicos.

Sensores. Se usan para recolectar información acerca del estado interno del robot o para comunicarse con el espacio externo de este. Como en los humanos, los controladores de los robots necesitan saber donde está cada eslabón para saber la configuración del robot.

Controlador. El controlador es parecido a cerebelo, y no tiene el poder de un cerebro, pero controla la cinética. El controlador recibe la señal de la computadora, controla la cinética de los actuadores y coordina el movimiento con la realimentación de los sensores.

Procesador. Es el cerebro del robot. Calcula el movimiento en las juntas de los motores, determina que tan rápido deben moverse las juntas para llegar a una determinada localización.

Software. Hay tres niveles en el *software*. Uno es el sistema operativo, el segundo es el software del robot. Este *software* puede tener diferentes niveles, desde lenguaje máquina hasta sofisticados lenguajes usados por robots modernos. En realidad, el *software* es el lenguaje de comunicación que tiene el robot para comunicarse con sus periféricos y otros elementos de este.

2.3 TIPO DE ROBOT EMPLEADO

Para este trabajo, el tipo de robot usado es un manipulador de cadena cinemática abierta (serial) con referencia móvil, por lo que puede realizar movimientos sencillos en el plano. La parte fundamental del trabajo es el análisis que se realiza del manipulador y que afecta de manera directa la acción del móvil.

Por otro lado, es un robot que parece de tipo antropomórfico, con la diferencia que este cuenta con 5 grados de libertad (ver Figura 2-1, Robot manipulador original de 5 grados de libertad en el manipulador):

- 2 de rotación en la base (uno de orientación y otro de movimiento)
- 1 de rotación en la junta del primero al segundo eslabón
- 1 de rotación en la junta del segundo al tercer eslabón
- 1 de rotación en el punto terminal, el cual sirve para orientación de la herramienta colocada en el mismo.

Esto lo convierte en un robot 5R. Y si tomamos en cuenta los 3 grados de libertad que proporciona la base móvil (2 para posición y uno para orientación), este robot se convierte en uno de tipo **5R2P**. Por simplicidad, en este trabajo sólo se considera el análisis para los 3 primeros grados de libertad de los 5 que tiene el manipulador (Figura 2-2, Robot manipulador degenerado de 3 grados de libertad en el manipulador), lo que lo convierte en un robot **3R**, y agregando los 3 del móvil, **2PR**, lo hace un robot **2PR3R**.

Cabe destacar que su aplicación principal será la de servicio, sin dejar de ser un robot didáctico para experimentaciones.

Una figura muy sencilla de este robot original es:

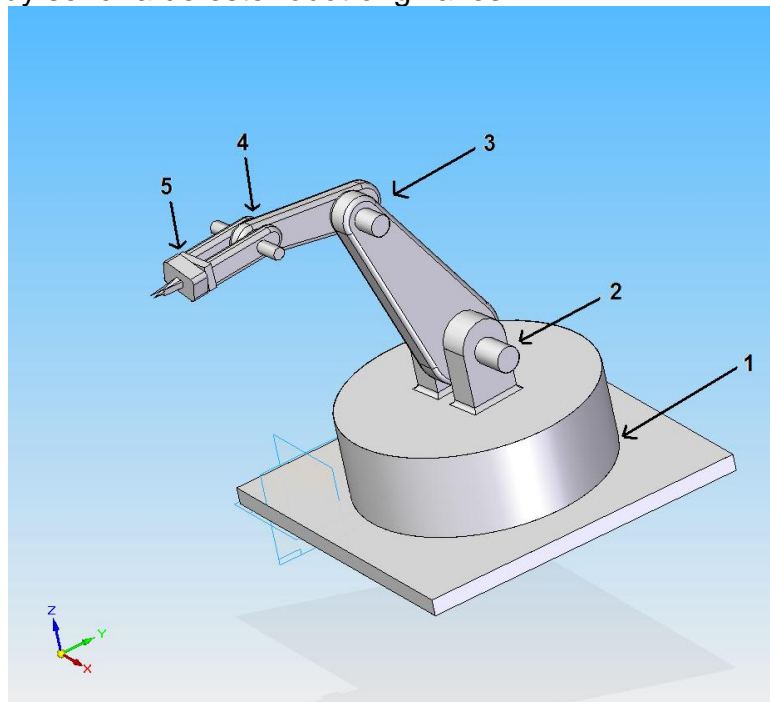


Figura 2-1, Robot manipulador original de 5 grados de libertad en el manipulador

Las siguientes figuras muestran vistas diversas del robot en cuestión:

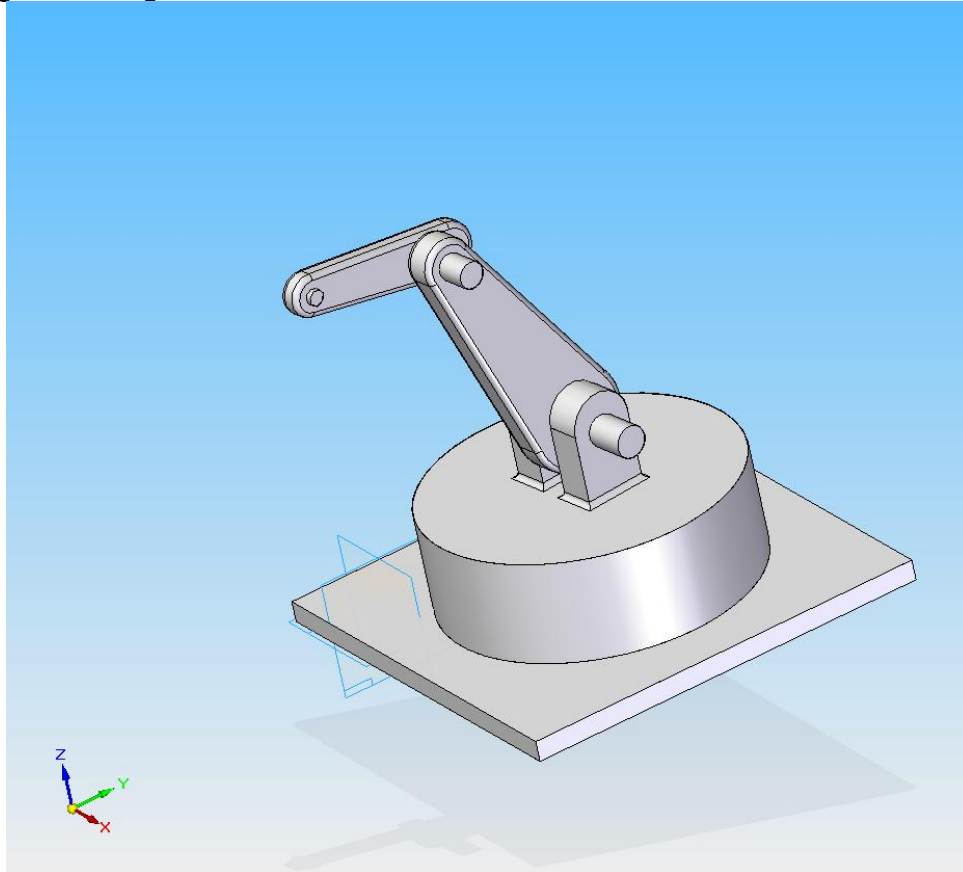


Figura 2-2, Robot manipulador degenerado de 3 grados de libertad en el manipulador

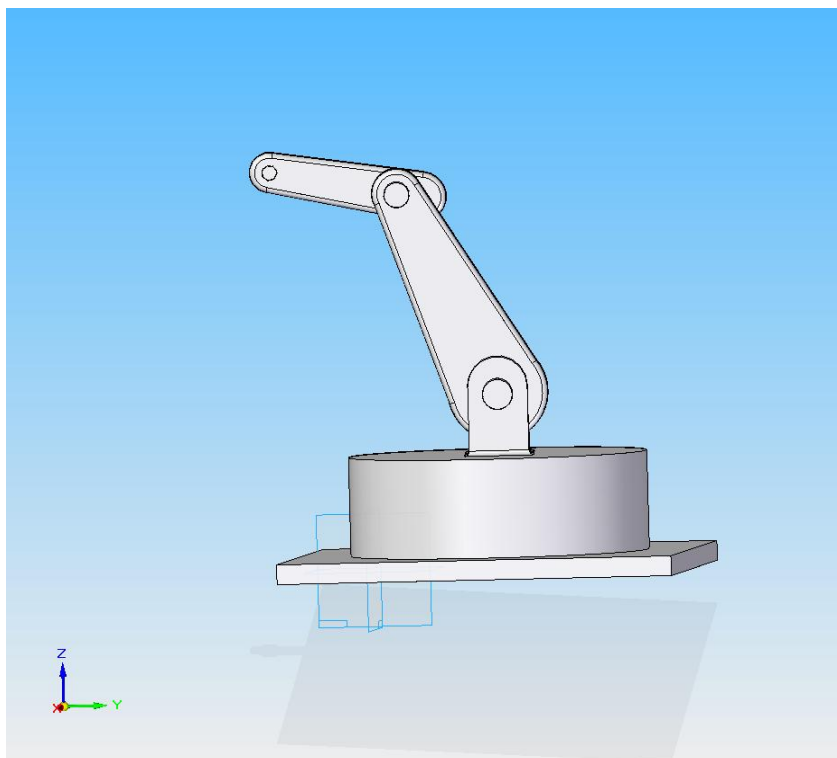


Figura 2-3, Robot manipulador de 3 grados de libertad en el manipulador. Vista lateral

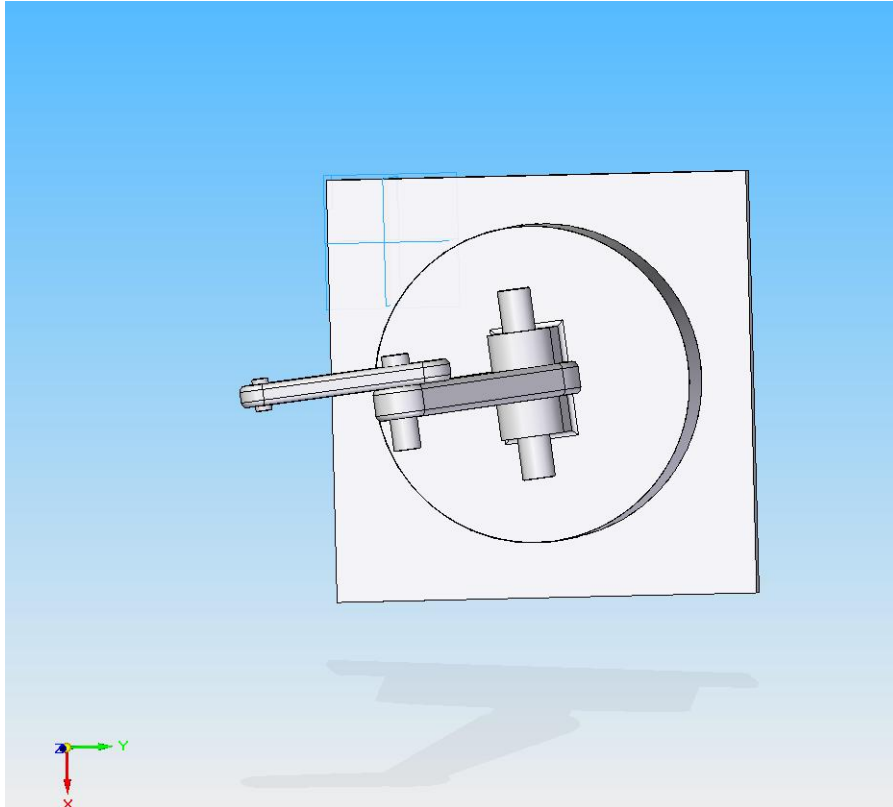


Figura 2-4, Robot manipulador de 3 grados de libertad en el manipulador. Vista superior

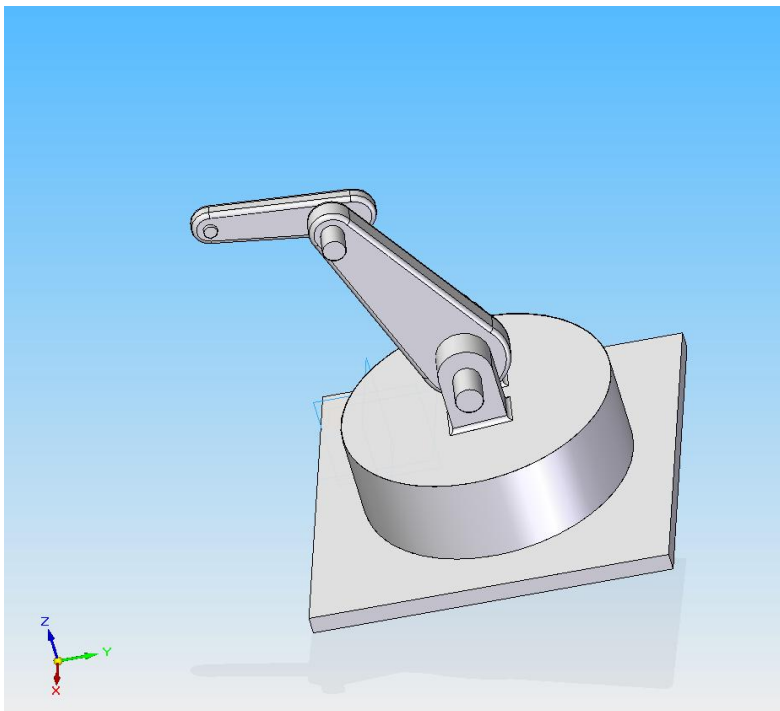


Figura 2-5, Robot manipulador de 3 grados de libertad en el manipulador. Vista de isométrico 2

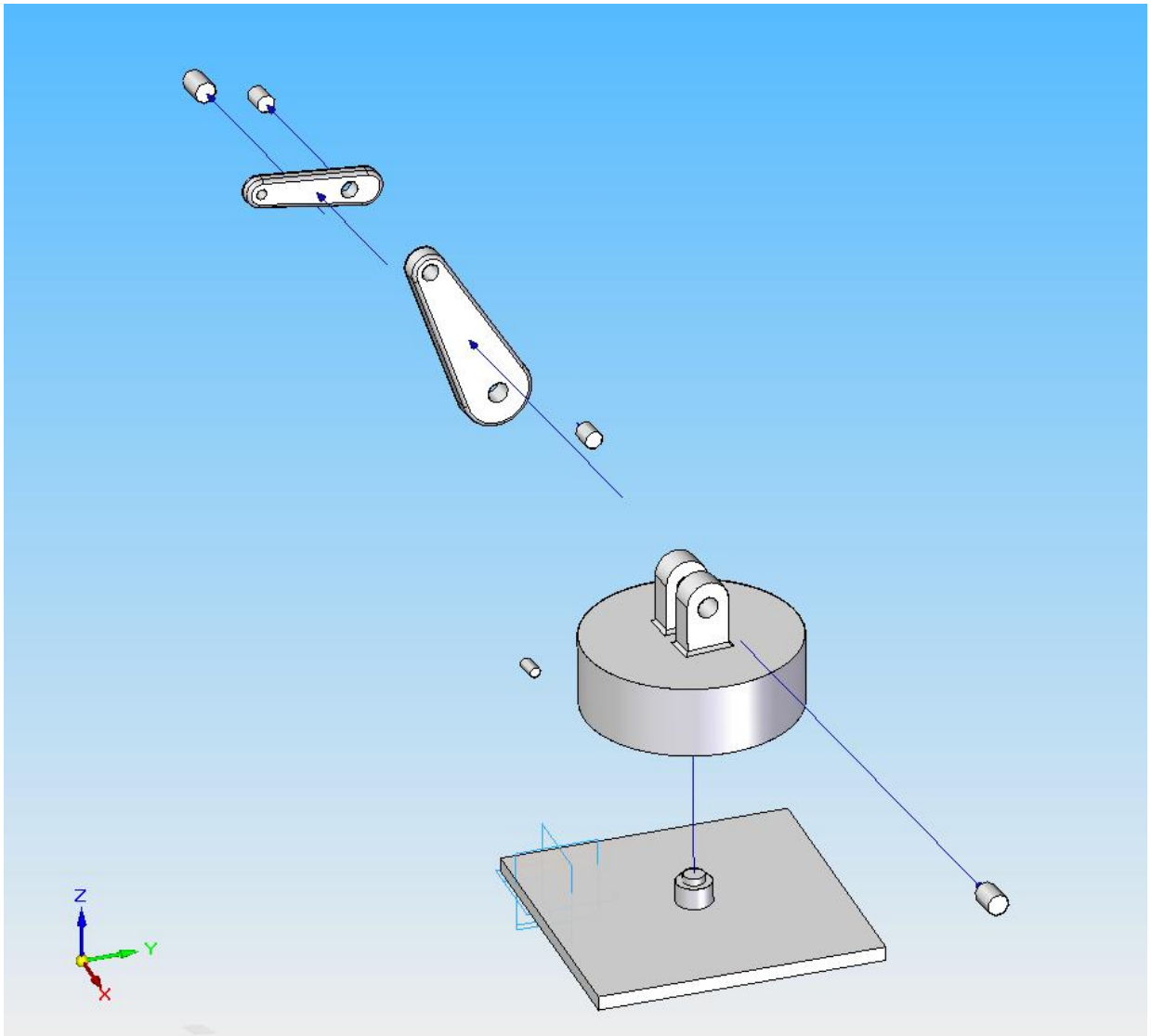


Figura 2-6, Robot manipulador de 3 grados de libertad en el manipulador. Vista en explosión

2.4 Antecedentes (Trabajos previos)

El tema de robótica (tanto de robots manipuladores como móvil) ha sido de gran interés por investigadores, científicos, técnicos, estudiantes y demás personas dentro del ámbito de la ciencia, lo que lo ha llevado a ser un tema bien abundado en la actualidad. Como se mencionó en anteriormente, la hipótesis de este trabajo es intuir las condiciones matemáticas (que darán como resultado las condiciones físicas) de un manipulador montado sobre una base, idea fundamentada en esta tesis. Es por ello que conocer los trabajos anteriores realizados por otras personas es de gran ayuda para el fundamento de este trabajo.

A continuación se presentan las reseñas de algunos trabajos relacionados con robótica de manipuladores, robótica móvil y manipuladores móviles. Los últimos dos trabajos revisados tratan del tema de este trabajo, el objetivo a seguir es más sencillo que estos dos, ya que se obtendrá el modelo para posteriores análisis.

En [22] presentaron el **MODELADO DEL ROBOT SCORBOT ER-V+** , en el cual usan la teoría actual de robótica de manipuladores para desarrollar matemáticamente el modelo de dicho robot.

En [24] se caracterizó un robot *Scorbot - ER V plus* por medio del modelado dinámico del mismo, que sirvió para poder realizar pruebas (entre otras) de torques.

En [25] se presenta entre otras cosas un artículo donde se da la generalidad de la matemática involucrada en la robótica de manipuladores. Es importante destacar que es este trabajo donde se sientan las bases conceptuales del trabajo aquí presentado, sin ser de donde se obtuvo la bibliografía necesaria.

En [26] se presenta un modelo matemático avanzado de un robot manipulador montado sobre una base móvil, situación que además analiza, contextualiza y concluye por medio del concepto de *manipulabilidad* del robot.

En [27] se explica por medio de HILARE -uno de los primeros manipuladores móviles- la cinemática en general de un manipulador que pueda moverse por el plano. En este el concepto clave es que se trata de un móvil no-holonómico, lo cual lo hace tanto diferente como de especial interés.

CAPÍTULO 3 MODELO ESTÁTICO DEL ROBOT

3.1 MÉTODOS DE POSICIONAMIENTO. INTRODUCCIÓN

El poder conocer de forma exacta el comportamiento de un robot es de vital importancia para su buen funcionamiento, ya que sin necesidad de tener una realimentación directa podemos saber donde se encuentra un robot. Pensemos por ejemplo que un robot que tiene sensores de posición pierde por alguna razón la acción de los mismos, por medio de un buen posicionamiento podremos saber donde encontraremos su punto terminal para cierto fin. Es por ello que en la actualidad existen muchos métodos para poder describir la posición en el espacio de un punto terminal para un manipulador.

Entenderemos por posicionamiento *una serie de pasos* (como un algoritmo) *que nos llevan sistemáticamente a poder hallar la posición de algún punto que nos interese del manipulador.* En este trabajo se utilizará un método en especial (aplicable al mismo) que reduce el trabajo de forma notable. Esta es la metodología de *Denavit – Hartenberg*. Por otro lado es importante mencionar que por no ser la única existente, el resultado obtenido puede hallarse de otra forma y llegar al mismo resultado.

Así pues el objetivo de este capítulo es hallar de forma simbólica la posición del punto terminal del manipulador móvil mostrado en la figura 3-1 (que se muestra más adelante) en función de los grados de libertad involucrados, comenzando primero por modelar la parte del manipulador y posteriormente la parte del móvil. Tal y como se explicó en la sección 2.2 el manipulador por si solo cuenta con 3 grados de libertad rotacionales (RRR), por lo que primeramente se hallará la posición deseada en función de estos tres grados, denominados θ_2, θ_3 y θ_4 siendo la rotación del robot respecto al plano horizontal y las rotaciones de las articulaciones superiores respectivamente, para luego adjuntar los de la base (x, y, θ_1) , que son la posición y orientación respecto al plano horizontal de la base móvil.

Considerando que estos tres junto con los grados de libertad de la base (x, y, θ_1) conforman un vector de *coordenadas generalizadas* q que en forma general es: $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]^T$, por lo que para nuestro caso tiene por elementos: $q = [x \ y \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4]^T$, que serán considerados en este trabajo como los grados de libertad del sistema.

Entonces, como se mostrará más adelante, la posición dependerá inicialmente de θ_2, θ_3 y θ_4 , para después ser función de los 6 grados de libertad totales, y de esta manera obtener también la velocidad y aceleración.

Para este trabajo, es importante considerar que el sistema de referencia *inercial* no se halla en el robot, si no fuera de este, por lo que los sistemas de referencia “montados” sobre el robot son relativos.

POSICIÓN DE UN PUNTO DE UN MANIPULADOR EN EL ESPACIO

Recordando de la teoría de la estática de la partícula y del cuerpo rígido, la posición puede hallarse por medio de 6 descriptores, cada uno de ellos dedicados a una función particular, 3 son propiamente de posición (dicen donde está ubicado un cuerpo) y 3 son de orientación (dicen como se encuentra alineado respecto al marco de referencia establecido).

De aquí en adelante se hará uso de la teoría de cálculo vectorial, ya que gracias a ella se puede desarrollar de manera muy versátil la teoría sobre la robótica.

Considérese un vector de coordenadas generalizadas, correspondientes con los grados de libertad de un robot manipulador:

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \text{obien} \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

Donde q_1, q_2, \dots, q_n dependen del tiempo, así:

$$q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), \dots, q_n = q_n(t)$$

$$\Rightarrow q = q(t)$$

Considérese también un punto "a" visto desde el sistema "b" en espacio coordenado derecho que tiene 6 descriptores tiene la forma:

$${}^b P_a = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_\alpha \\ P_\beta \\ P_\gamma \end{bmatrix}$$

Donde P_x, P_y y P_z indican las componentes que describen la posición del punto P , y P_α, P_β y P_γ indican la orientación a los ejes coordenados.

Si se dice que cada una de las componentes de P depende de q , que tiene "n" elementos, entonces quiere decir que cada una de las componentes de P es una *función escalar de variable vectorial*, mientras que P al tener esas 6 componentes se convierte entonces en una *función vectorial de variable vectorial*.

Así entonces:

$$P = \begin{bmatrix} P_x(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ P_y(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ P_z(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ P_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ P_\beta(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ P_\gamma(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{bmatrix}, \Rightarrow P = \begin{bmatrix} P_x(q) \\ P_y(q) \\ P_z(q) \\ P_\alpha(q) \\ P_\beta(q) \\ P_\gamma(q) \end{bmatrix}, \Rightarrow P = (P_x(q), P_y(q), P_z(q), P_\alpha(q), P_\beta(q), P_\gamma(q))$$

Para nuestro caso, q tiene 6 elementos:

$$q = [x \quad y \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4]^T$$

Distribuidos de la siguiente manera:

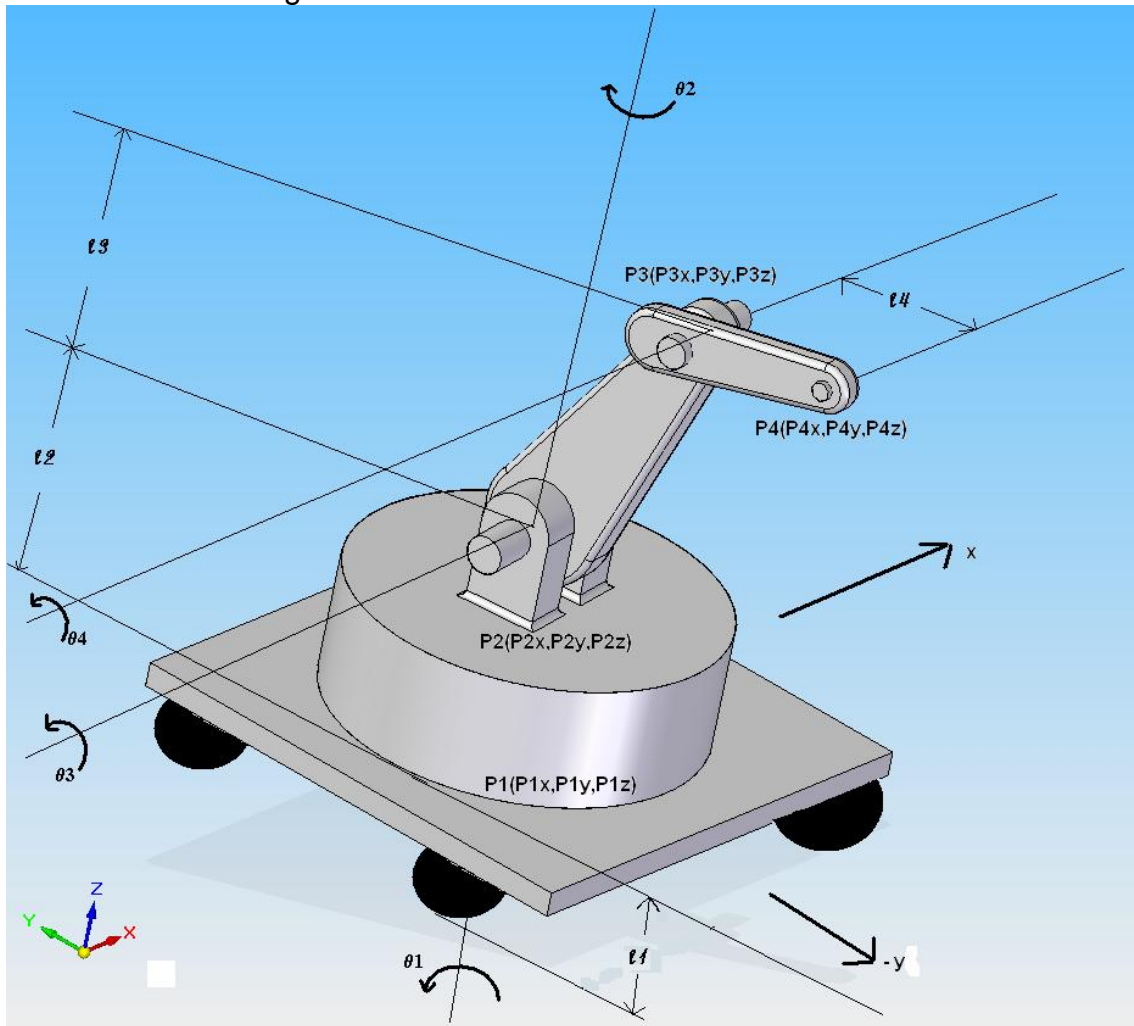


Figura 3-1, Robot manipulador móvil de 6 grados de libertad. Vista mostrando cada uno de los grados

De esta forma, podemos ver que las componentes del punto 1 (P_1), punto 2 (P_2), punto 3 (P_3) y punto 4 (P_4) dependen del vector q , convirtiéndolos en *funciones vectoriales de variable vectorial*.

$$P_1(q) = [P_{1x}(q), P_{1y}(q), P_{1z}(q)]^T$$

$$P_2(q) = [P_{2x}(q), P_{2y}(q), P_{2z}(q)]^T$$

$$P_3(q) = [P_{3x}(q), P_{3y}(q), P_{3z}(q)]^T$$

3.2 TRASLACIÓN Y ROTACIÓN

TRASLACIÓN

De acuerdo con la teoría del álgebra lineal y la mecánica del cuerpo rígido, se puede desplazar un cuerpo desde una posición hacia otra sin sufrir cambios en su orientación.

A este tipo de movimientos se le llama de TRASLACIÓN, y se realiza sumando a la posición inicial del cuerpo un valor en cada componente de esta posición, para dar como resultado una nueva posición.

Si se tiene un vector de posición visto desde un sistema de referencia, si lo que queremos es ver a ese vector desde otro sistema de referencia, lo que hay que hacer es sumar a ese vector el desplazamiento del sistema inicial respecto a la nueva base.

Sea ${}^i P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$ un vector visto desde una base inicial y $D = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{bmatrix}$ el vector de

desplazamiento del sistema inicial al sistema nuevo, el vector de posición P

visto desde el sistema nuevo será ${}^n P = \begin{bmatrix} P_x + x_d \\ P_y + y_d \\ P_z + z_d \end{bmatrix}$. Este mismo procedimiento

se realiza si lo que se quiere es desplazar un cuerpo en el mismo sistema sin afectar su orientación. Por ejemplo, para dos dimensiones se muestra en la Figura 3 – 2.

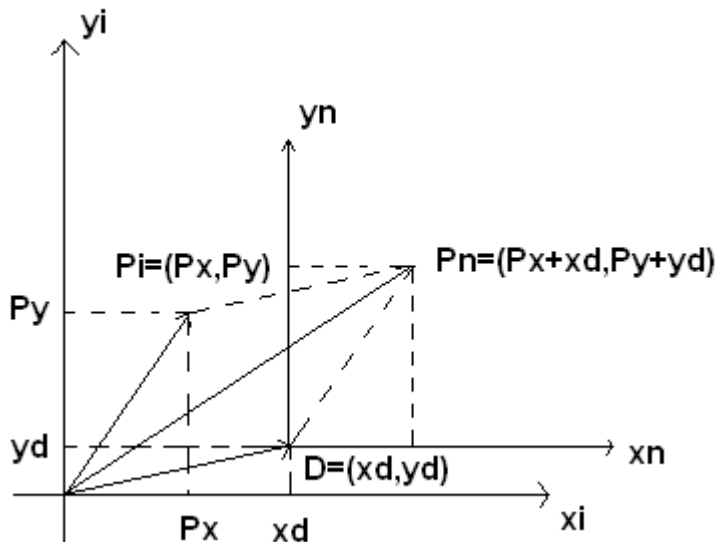


Figura 3-2, Traslación de un sistema de referencia en el plano

ROTACIÓN

Considérese que se quiere rotar un sistema de referencia en el plano, como se muestra en la Figura 3 – 3:

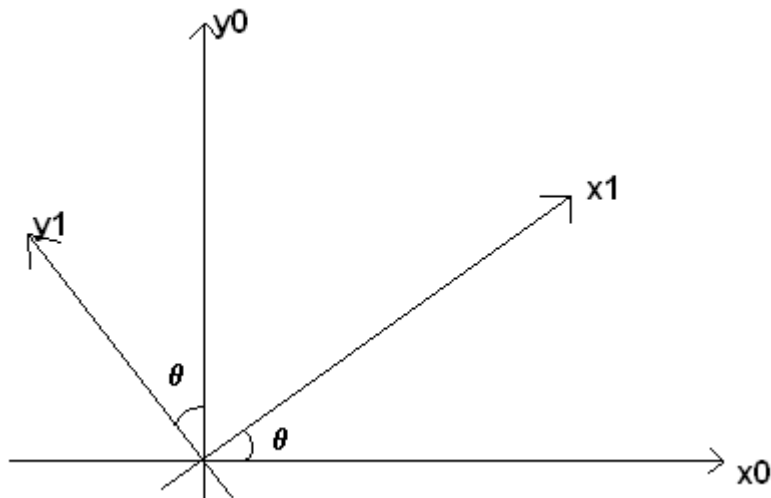


Figura 3-3, Rotación de un sistema de referencia en el plano

Para ello se utiliza las siguientes ecuaciones de rotación:

$$x_1 = x_0 \cos(\theta) + y_0 \sin(\theta)$$

$$y_1 = -x_0 \cos(\theta + 90) + y_0 \sin(\theta + 90)$$

Que lleva a la siguiente reducción, (que puede obtenerse también del diagrama):

$$x_1 = x_0 \cos(\theta) + y_0 \sin(\theta)$$

$$y_1 = -x_0 \sin(\theta) + y_0 \cos(\theta)$$

La cual puede reescribirse matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

..... 3-1

Que puede describirse como:

$$P_1 = {}^1R_0 P_0$$

..... 3-2

donde P_1 es un punto en el sistema rotado (1), P_0 es un punto del sistema original no rotado (0) y 1R_0 es la matriz de rotación desde el sistema 0 al 1. De ahí el uso del subíndice indicando desde que sistema se parte y el superíndice indicando hasta que sistema se llega.

Como se ve, la ecuación 3-1 nos dice como se ven las coordenadas de un punto del sistema 0 en el sistema 1. Si lo que se quiere ahora es saber cómo se ve un punto del sistema 1 desde el sistema 0 hay que despejar el punto 0:

$$\begin{aligned}({}^1R_0)^{-1}({}^1R_0)P_0 &= ({}^1R_0)^{-1}P_1 \\IP_0 &= ({}^1R_0)^{-1}P_1 \\P_0 &= {}^0R_1P_1\end{aligned}$$

..... 3-3

Como se puede ver, la matriz inversa de la rotación desde 0 hasta 1 es justamente la rotación desde 1 hasta 0. Así, para obtener la rotación deseada hay que obtener la matriz inversa de la original:

$${}^0R_1 = ({}^1R_0)^{-1}$$

..... 3-4

Si se ve la ecuación 3-1, se puede ver que la matriz de rotación de 0 a 1 es:

$${}^1R_0 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

..... 3-5

que es una matriz *ortogonal*, lo que quiere decir que su inversa es la transpuesta. De esta forma:

$${}^0R_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

..... 3-6

Así, la ecuación 3-3 toma la forma:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

..... 3-7

En robótica el uso de este tipo de matrices es muy importante, ya que muchas ocasiones se tiene que realizar rotaciones de sistemas en el espacio, pues se conocen la ubicación de un punto en un sistema y se le quiere llevar hasta la referencia inicial.

Las tres rotaciones más importantes usadas en robótica en un espacio tridimensional considerando un sistema (x,y,z) derecho son:

Rotación de un ángulo α respecto al eje x:

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

..... 3-8

Rotación de un ángulo ϕ respecto a y:

$$R_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

..... 3-9

Rotación de un ángulo θ respecto a z:

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-10

3.3 COORDENADAS Y TRANSFORMACIONES HOMOGÉNEAS

COORDENADAS HOMOGÉNEAS

De acuerdo con *Fu* [4], en un espacio tridimensional, un vector de posición

$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

..... 3-11

se representa por un vector ampliado

$$P_h = \begin{bmatrix} {}_w P_x \\ {}_w P_y \\ {}_w P_z \\ w \end{bmatrix}$$

..... 3-12

en la representación de coordenadas homogéneas.

Las coordenadas se relacionan a las coordenadas homogéneas como sigue:

$$P_x = \frac{{}_w P_x}{w}; P_y = \frac{{}_w P_y}{w}; P_z = \frac{{}_w P_z}{w}$$

El valor de *w* representa justamente el *escalamiento* que se le quiere dar al vector del que se trata, ello debido a que las coordenadas originales y las homogéneas están relacionadas con ese factor dependiendo de las escalas consideradas. En el caso de robótica, se utiliza un factor de escalamiento de 1, y solamente algunas veces llega a cambiar.

Así, si un vector tiene por componentes los descritos en la ecuación 3-12, y el factor de escalamiento es 1, el vector *P* homogéneo será:

$$P_h = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Más adelante se explica el uso tan importante que tiene en robótica.

TRANSFORMACIONES HOMOGÉNEAS

Como ya se explico en la sección 3.2, una traslación y rotación permiten cambiar de sistemas de referencia o bien visualizar un punto dado en un sistema desde otro sistema. Una transformación tiene por objetivo justamente visualizar como se ven diferentes puntos desde diferentes sistemas de referencia. Es por ello que las transformaciones son también matrices. Algunos autores inclusive las interpretan como una *especie de tensores de orden fraccionario*.

Así entonces, una matriz de transformación homogénea es una matriz de 4 x 4 que transforma un vector de posición expresado en coordenadas homogéneas desde un sistema de coordenadas hasta otro sistema de coordenadas. Una matriz de transformación homogénea se puede considerar en cuatro submatrices:

$$T = \left[\begin{array}{c|c} R_{3 \times 3} & D_{3 \times 1} \\ \hline f_{1 \times 3} & w \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \text{Matriz de} & \text{Vector de} \\ \text{Rotación} & \text{traslación} \\ \hline \text{transformación de} & \\ \text{perspectiva} & \text{escalamiento} \end{array} \right]$$

De esta manera, si lo que se quiere es ver como se ve un punto desde otro sistema de referencia, lo que se tiene que hacer es multiplicar la transformación desde el sistema anterior hasta el nuevo sistema por el punto tal como se ve en el sistema anterior. Es por esta razón que se usan coordenadas generalizadas, pues las matrices de transformación homogéneas son de 4 x 4 y las coordenadas generalizadas son vectores de 4 x 1, lo que hace consistente la multiplicación. Este procedimiento es equivalente a multiplicar el punto por una matriz de rotación y sumarle un vector de traslación. A continuación se ejemplifica esto:

Sea iP el punto visto desde el sistema inicial, nP el punto visto desde el sistema nuevo, nT_i la matriz de transformación homogénea desde el sistema inicial hasta el nuevo, nR_i la matriz de rotación desde el sistema inicial hasta el nuevo, D el vector de traslación desde el sistema inicial al nuevo:

$${}^nP = {}^nT_i {}^iP$$

..... 3-13

$${}^nP = {}^nR_i {}^iP + D$$

NOTACIÓN USADA

En este trabajo, la notación usada es la siguiente:

${}^n P_a$ indica el punto “a” visto desde el sistema “n”

${}^n P_{ah}$ indica el punto “a” homogéneo visto desde el sistema “n”

${}^n T_m$ indica la matriz de transformación homogénea desde el sistema “m” al sistema “n”

De esta forma, la transformación desde el sistema “n” hasta el sistema “0” es:

$${}^0 T_n = {}^0 T_1 {}^1 T_2 {}^2 T_3 \cdots {}^{n-1} T_n$$

..... 3-14

Y en concordancia con la ecuación 3-13, la ecuación que transforma el punto “a” visto desde el sistema “n” hasta el sistema “0” es:

$${}^0 P_{ah} = {}^0 T_n {}^n P_{ah}$$

..... 3-15

donde ${}^0 T_n = {}^0 T_1 {}^1 T_2 {}^2 T_3 \cdots {}^{n-1} T_n$

3.4 METODOLOGÍA DE POSICIONAMIENTO POR DENAVIT – HARTENBERG

De acuerdo con varios autores como (por mencionar algunos) Craig [2], Fu [4], Spong [29], Baturone [1], McCloy [3], Niku [5], etc. la mejor metodología de posicionamiento de robots manipuladores es justamente la de Denavit – Hartenberg. De acuerdo con Craig [2]:

*Un manipulador puede considerarse como un conjunto de cuerpos conectados en una cadena mediante articulaciones. Estos cuerpos se llaman **vínculos** o **segmentos (eslabones)**. Las articulaciones forman una conexión entre un par adyacente de vínculos. El término **par menor** se utiliza para describir la conexión entre un par de cuerpos, cuando el movimiento relativo se caracteriza por dos superficies que se deslizan una sobre otra.*

*La mayoría de los manipuladores tienen **articulaciones angulares** o articulaciones deslizantes llamadas **articulaciones prismáticas**.*

*Un **vínculo** se considera solamente como un cuerpo rígido que define la relación entre dos ejes de articulaciones adyacentes de un manipulador.*

Parámetros de vínculo.

*Cualquier robot puede describirse en forma cinemática proporcionando los valores de cuatro cantidades para cada vínculo. Dos describen el vínculo en sí, y los otros dos describen la conexión del vínculo con el vínculo adyacente. En el caso de una articulación angular, θ_i , se llama **variable de articulación** y las otras tres cantidades son **parámetros de vínculo** fijos. Para las articulaciones prismáticas, d_i , es la variable de articulación y las otras tres cantidades con parámetros de vínculo fijo. La definición de mecanismos por medio de estas cantidades es una convención que generalmente se le conoce como **NOTACIÓN DENAVIT-HARTENBERG**.*

Resumen del procedimiento para asignar tramas a vínculos:

- 1. Identifique los ejes de articulación e imagine (o dibuje) líneas infinitas sobre ellos. Para los pasos 2 al 5 considere dos de estas líneas adyacentes (en los ejes i e $i+1$).*
- 2. Identifique la perpendicular común entre ellos, o el punto de intersección. En el punto de intersección, o en el punto en el que la perpendicular común se encuentra con el i -ésimo eje, asigne el origen de la trama asociada.*
- 3. Asigne el eje Z_i para que apunte sobre el i -ésimo eje de articulación.*
- 4. Asigne el eje X_i para que apunte sobre la perpendicular común, si los ejes se intersectan, asigne X_i para que sea normal al plano que contiene los dos ejes.*
- 5. Asigne el eje Y_i para completar un sistema de coordenadas de mano derecha.*
- 6. Asigne $\{0\}$ para que concuerde con $\{1\}$ cuando la primera variable de articulación sea cero. Para $\{N\}$ seleccione la ubicación del origen y la dirección de X_N libremente, pero generalmente de manera que haga que la mayor parte de los parámetros de los vínculos sea cero.*

De esta manera, para cada articulación, se ubica un sistema de referencia móvil que será de ayuda para ubicar la posición final del robot. Es muy importante notar que esta metodología sirve solamente si se siguen fielmente los pasos indicados arriba, ya que de no hacerlo se corre el riesgo de equivocarse.

Así entonces, una vez que se tienen correctamente todos los ejes, y de acuerdo con *Spong* [29], para cada eslabón del manipulador se tienen que ubicar 4 parámetros especiales, 2 del propio eslabón y 2 de eslabonamiento con el siguiente eslabón. Estos 4 parámetros son:

- a_i : Distancia perpendicular entre los ejes z_{i-1} y z_i medido a partir de x_i .
- α_i : Ángulo desde el eje z_{i-1} y z_i medido sobre x_i utilizando la regla de la mano derecha.
- d_i : Distancia entre los ejes x_{i-1} y x_i medido sobre el eje z_{i-1} .
- θ_i : Ángulo desde x_{i-1} y x_i medido sobre el eje z_{i-1} usando la regla de la mano derecha.

Estos parámetros pueden depositarse en la siguiente matriz, la cual tiene como columnas los parámetros y como renglones el eslabón presente:

Tabla 3-1, Matriz de elementos de Denavit – Hartenberg

Eslabón	a_i	α_i	d_i :	θ_i :	Sistema
i-1					i-1 → i-2
i					i → i-1
i+1					i+1 → i

Una vez teniendo estos parámetros correctamente, se puede crear una matriz de transformación desde un sistema a otro, en base a lo expuesto en la sección 3.2. En ocasiones a estas matrices se les llega a llamar A_i

$$A_i = {}^{i-1}T_i$$

Y está compuesta por las siguientes matrices:

$${}^{i-1}T_i = R_{z,\theta} D_{z,d} D_{x,\alpha} R_{x,\alpha}$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-16

Así, un punto “a” ubicado en el sistema “i” visto desde “i-1”(de acuerdo con la sección 3.2) sería:

$${}^{i-1}P_{ah} = {}^{i-1}T_i {}^iP_{ah}$$

3.5 POSICIONES DE LOS PUNTOS DEL ROBOT

En esta sección se obtendrán de forma analítica las coordenadas de los puntos del robot. Para ello, se utilizará la metodología de posicionamiento por Denavit – Hartenberg, y en base a lo descrito en la sección 3.4, se presentan los ejes requeridos para ello:

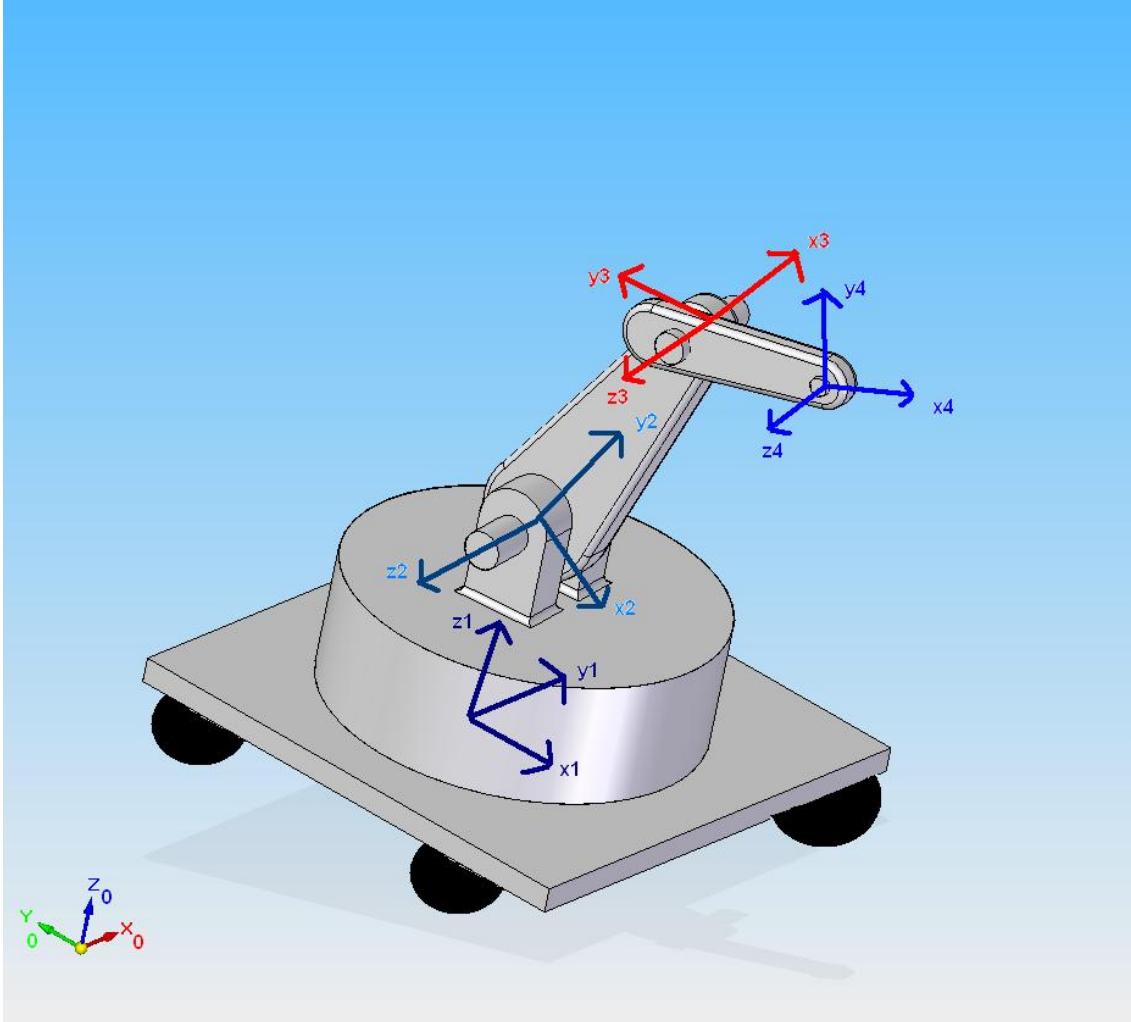


Figura 3-4, Robot de 6 grados de libertad. Vista mostrando los sistemas de referencia

Con base en lo explicado en la sección 3.4, el sistema inercial de un robot manipulador siempre se considera como el sistema 0, ya que siempre es el sistema desde donde se realizan los análisis.

Para el caso, como puede verse en la figura anterior, (figura 3-4) la base del manipulador recibe un número distinto a lo convenido, debido a que no es el sistema inercial del robot manipulador. La base del robot es el sistema 1, que es un sistema que se mueve en un plano paralelo a la superficie, por lo que para su análisis es necesario hacer uso de la metodología de Denavit – Hartenberg, ya que inicialmente se muestran todos los análisis referidos al sistema 1 y posteriormente al sistema 0.

De esta manera, para poder hallar la posición de los puntos del manipulador (ver Figura 3–1), con diferencia que en lugar de que el sistema inicial sea el 0 es el sistema 1.

Así entonces, usando como base los diagramas de grados de libertad de Spong [29], se muestra en la siguiente Figura (Figura 3 – 5), un diagrama de la ubicación de los ejes y los grados de libertad basado a la sección 3.4

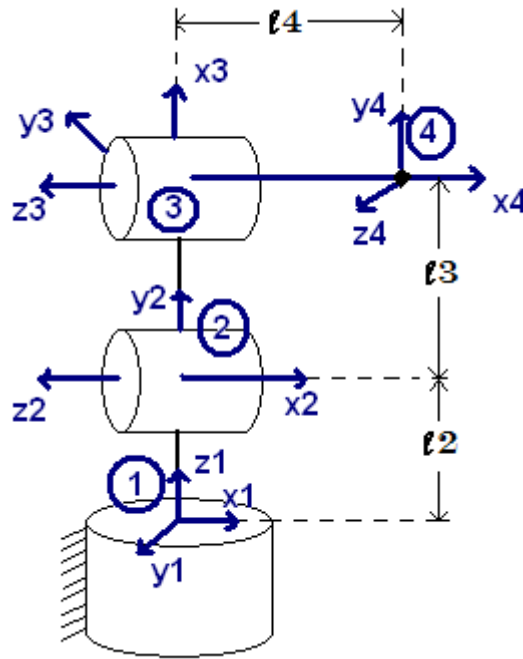


Figura 3-5, Robot manipulador de 3 grados de libertad. Vista mostrando los sistemas necesarios para la metodología de posicionamiento de Denavit – Hartenberg con sistema inicial 1

La matriz de elementos de eslabón y eslabonamiento es:

Tabla 3-2, Matriz de elementos de Denavit – Hartenberg para el robot

Eslabón	a_i	α_i	$d_i :$	$\theta_i :$	Sistema
1	0	90	l_2	θ_2	2 a 1
2	l_3	0	0	$\theta_3 + 90$	3 a 2
3	l_4	0	0	$\theta_4 - 90$	4 a 3

Matrices de transformación de un sistema a otro

Recordando que la matriz de transformación de un sistema a otro se halla por medio de la ecuación 3.4 – 1 presentada en la sección 3.4:

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Del sistema 2 al sistema 1: $a_i = 0$, $\alpha_i = 90^\circ$, $d_i = l_2$, $\theta_i = \theta_2$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \cos(90) & \sin \theta_2 \sin(90) & 0 \cdot \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \cos(90) & -\cos \theta_2 \sin(90) & 0 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 & \sin(90) & \cos(90) & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-17

Del sistema 3 al sistema 2: $a_i = l_3$, $\alpha_i = 0^\circ$, $d_i = 0$, $\theta_i = \theta_3 + 90$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3 + 90) & -\sin(\theta_3 + 90)\cos(0) & \sin(\theta_3 + 90)\sin(0) & l_3 \cdot \cos(\theta_3 + 90) \\ \sin(\theta_3 + 90) & \cos(\theta_3 + 90)\cos(0) & -\cos(\theta_3 + 90)\sin(0) & l_3 \cdot \sin(\theta_3 + 90) \\ 0 & \sin(0) & \cos(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} -\sin \theta_3 & -\cos \theta_3 & 0 & -l_3 \sin \theta_3 \\ \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_3 \cos \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-18

Del sistema 4 al sistema 3: $a_i = l_4$, $\alpha_i = 0^\circ$, $d_i = 0$, $\theta_i = \theta_4 - 90$

$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4 - 90) & -\sin(\theta_4 - 90)\cos(0) & \sin(\theta_4 - 90)\sin(0) & l_4 \cdot \cos(\theta_4 - 90) \\ \sin(\theta_4 - 90) & \cos(\theta_4 - 90)\cos(0) & -\cos(\theta_4 - 90)\sin(0) & l_4 \cdot \sin(\theta_4 - 90) \\ 0 & \sin(0) & \cos(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & l_4 \sin \theta_4 \\ -\cos \theta_4 & \sin \theta_4 & 0 & -l_4 \cos \theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-19

Posiciones

PUNTO 2.

Punto 2 visto desde el sistema 2:

$${}^2P_{2h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-20

Punto 2 visto desde el sistema 1:

De acuerdo con la sección 3.3 el punto en cuestión puede hallarse como

$${}^1P_{2h} = {}^1T_2 {}^2P_{2h}$$

..... 3-21

De esta forma:

$${}^1P_{2h} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1P_{2h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-22

PUNTO 3

Punto 3 visto desde el sistema 3:

$${}^3P_{3h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-23

Punto 3 visto desde el sistema 2:

$${}^2P_{3h} = {}^2T_3 {}^3P_{3h}$$

..... 3-24

$${}^2P_{3h} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_3 & -\cos \theta_3 & 0 & -l_3 \sin \theta_3 \\ \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_3 \cos \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2P_{3h} = \begin{bmatrix} -l_3 \sin \theta_3 \\ l_3 \cos \theta_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-25

Punto 3 visto desde el sistema 1:

$${}^1P_{3h} = {}^1T_2 {}^2P_{3h}$$

..... 3-26

$${}^1P_{3h} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_3 \sin \theta_3 \\ l_3 \cos \theta_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1P_{3h} = \begin{bmatrix} -l_3 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \\ l_3 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ l_3 \cos \theta_3 + l_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-27

De otra forma, para obtener el último punto, se puede utilizar la siguiente ecuación:

$${}^1P_{3h} = {}^1T_3 {}^3P_{3h}$$

..... 3-28

donde ${}^1T_3 = {}^1T_2 {}^2T_3$

$$\Rightarrow {}^1T_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \theta_3 & -\cos \theta_3 & 0 & -l_3 \sin \theta_3 \\ \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_3 \cos \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1T_3 = \begin{bmatrix} -\cos \theta_2 \sin \theta_3 & -\cos \theta_2 \cos \theta_3 & \sin \theta_2 & -l_3 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \\ -\sin \theta_2 \sin \theta_3 & -\sin \theta_2 \cos \theta_3 & -\cos \theta_2 & -l_3 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_3 \cos \theta_3 + l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-29

Con lo que la ecuación 3- 28 se comprueba.

PUNTO 4

Punto 4 visto desde el sistema 4:

$${}^4P_{4h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-30

Punto 4 visto desde el sistema 3:

$${}^3P_{4h} = {}^3T_4 {}^4P_{4h}$$

..... 3-31

$${}^3P_{4h} = \begin{bmatrix} \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & l_4 \sin \theta_4 \\ -\cos \theta_4 & \sin \theta_4 & 0 & -l_4 \cos \theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3P_{4h} = \begin{bmatrix} l_4 \sin \theta_4 \\ -l_4 \cos \theta_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-32

Punto 4 visto desde el sistema 2:

$${}^2P_{4h} = {}^2T_3 {}^3P_{4h}$$

..... 3-33

$${}^2P_{4h} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_3 & -\cos \theta_3 & 0 & -l_3 \sin \theta_3 \\ \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_3 \cos \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_4 \sin \theta_4 \\ -l_4 \cos \theta_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2P_{4h} = \begin{bmatrix} -l_3 \sin \theta_3 + l_4 \cos \theta_3 \cos \theta_4 - l_4 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \\ l_3 \cos \theta_3 + l_4 \cos \theta_3 \sin \theta_4 + l_4 \sin \theta_3 \cos \theta_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Realizando algunas reducciones por medio de las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \dots\dots\dots(a) \end{aligned}$$

Se tiene:

$${}^2P_{4h} = \begin{bmatrix} -l_3 \sin \theta_3 + l_4 (\cos \theta_3 \cos \theta_4 - \sin \theta_3 \sin \theta_4) \\ l_3 \cos \theta_3 + l_4 (\cos \theta_3 \sin \theta_4 + \sin \theta_3 \cos \theta_4) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2P_{4h} = \begin{bmatrix} -l_3 \sin \theta_3 + l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \\ l_3 \cos \theta_3 + l_4 \sin(\theta_3 + \theta_4) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-34

Una manera de comprobar este resultado es por medio de:

$${}^2P_{4h} = {}^2T_4 {}^4P_{4h}$$

..... 3-35

donde ${}^2T_4 = {}^2T_3 {}^3T_4$

$$\Rightarrow {}^2T_4 = \begin{bmatrix} -\sin \theta_3 & -\cos \theta_3 & 0 & -l_3 \sin \theta_3 \\ \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_3 \cos \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & l_4 \sin \theta_4 \\ -\cos \theta_4 & \sin \theta_4 & 0 & -l_4 \cos \theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T_4 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 \cos \theta_4 - \sin \theta_3 \sin \theta_4 & -\cos \theta_3 \sin \theta_4 - \sin \theta_3 \cos \theta_4 & 0 & -l_3 \sin \theta_3 + l_4 \cos \theta_3 \cos \theta_4 - l_4 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \\ \cos \theta_3 \sin \theta_4 + \sin \theta_3 \cos \theta_4 & \cos \theta_3 \cos \theta_4 - \sin \theta_3 \sin \theta_4 & 0 & l_3 \cos \theta_3 + l_4 \cos \theta_3 \sin \theta_4 + l_4 \sin \theta_3 \cos \theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando algunas reducciones trigonométricas se llega a

$${}^2T_4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3 + \theta_4) & -\sin(\theta_3 + \theta_4) & 0 & -l_3 \sin \theta_3 + l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \\ \sin(\theta_3 + \theta_4) & \cos(\theta_3 + \theta_4) & 0 & l_3 \cos \theta_3 + l_4 \sin(\theta_3 + \theta_4) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-36

De manera que se puede observar que la ecuación 3- 35 se comprueba, además de ver que la última expresión (3- 36) es la matriz de transformación del sistema 4 al sistema 2, y efectivamente, en concordancia con la sección 3.3, los primeros 9 elementos -del (1,1) al (3,3)- son elementos de una rotación sobre el eje Z con un valor de $\theta_3 + \theta_4$ grados, y los elementos (1,4),(2,4) y (3,4) son elementos de una traslación, siendo esta justamente el alargamiento del brazo gracias a los grados de libertad en los eslabones, θ_3 y θ_4 .

Vemos así que el uso de estas matrices redujo de manera circunstancial el desarrollo teórico hasta esta parte.

Punto 4 visto desde el sistema 1:

$${}^1P_{4h} = {}^1T_2 {}^2P_{4h}$$

..... 3-37

$${}^1P_{4h} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_3 \sin \theta_3 + l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \\ l_3 \cos \theta_3 + l_4 \sin(\theta_3 + \theta_4) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1P_{4h} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_2 \{l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} \\ -\sin \theta_2 \{l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} \\ l_4 \sin(\theta_3 + \theta_4) + l_3 \cos \theta_3 + l_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-38

Este resultado queda ya reducido debido a que es el producto de una transformación elemental por un vector que se encuentra ya reducido, el punto 4 visto desde el sistema 2 (ec. 3- 34).

Sin embargo, y tal como se ha presentado en los puntos anteriores, este resultado puede deducirse de otras formas, 2 de ellas se presentan a continuación:

Forma I)

$${}^1P_{4h} = {}^1T_3 {}^3P_{4h}$$

..... 3-39

donde 1T_3 es la transformación presentada en la ecuación 3-29

y el punto ${}^3P_{4h}$ es el que se presenta en 3-32, quedando:

$${}^1P_{4h} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_2 \sin \theta_3 & -\cos \theta_2 \cos \theta_3 & \sin \theta_2 & -l_3 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \\ -\sin \theta_2 \sin \theta_3 & -\sin \theta_2 \cos \theta_3 & -\cos \theta_2 & -l_3 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_3 \cos \theta_3 + l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_4 \sin \theta_4 \\ -l_4 \cos \theta_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1P_{4h} = \begin{bmatrix} -l_4 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 + l_4 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 - l_3 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \\ -l_4 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 + l_4 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 - l_3 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ l_4 \cos \theta_3 \sin \theta_4 + l_4 \sin \theta_3 \cos \theta_4 + l_3 \cos \theta_3 + l_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Factorizando este último resultado se llega al resultado presentado en 3- 38

Forma II)

$${}^1P_{4h} = {}^1T_4 {}^4P_{4h}$$

..... 3-40

donde ${}^1T_4 = {}^1T_3 {}^3T_4$

$$\Rightarrow {}^1T_4 = \begin{bmatrix} -\cos \theta_2 \sin \theta_3 & -\cos \theta_2 \cos \theta_3 & \sin \theta_2 & -l_3 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \\ -\sin \theta_2 \sin \theta_3 & -\sin \theta_2 \cos \theta_3 & -\cos \theta_2 & -l_3 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_3 \cos \theta_3 + l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & l_4 \sin \theta_4 \\ -\cos \theta_4 & \sin \theta_4 & 0 & -l_4 \cos \theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1T_4 = \begin{bmatrix} {}^1T_{4(1,1)} & {}^1T_{4(1,2)} & \sin \theta_1 & {}^1T_{4(1,4)} \\ {}^1T_{4(2,1)} & {}^1T_{4(2,2)} & -\cos \theta_1 & {}^1T_{4(2,4)} \\ {}^1T_{4(3,1)} & {}^1T_{4(3,2)} & 0 & {}^1T_{4(3,4)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-41

$${}^1T_{4(1,1)} = \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 - \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4$$

$${}^1T_{4(2,1)} = \sin \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 - \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4$$

$${}^1T_{4(3,1)} = \cos \theta_3 \sin \theta_4 + \sin \theta_3 \cos \theta_4$$

$${}^1T_{4(1,2)} = -\cos \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_4 - \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4$$

$${}^1T_{4(2,2)} = -\sin \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_4 - \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4$$

$${}^1T_{4(3,2)} = \cos \theta_3 \cos \theta_4 - \sin \theta_3 \sin \theta_4$$

$${}^1T_{4(1,4)} = -l_3 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + l_4 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 - l_4 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4$$

$${}^1T_{4(2,4)} = l_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + l_4 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_4 + l_4 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4$$

$${}^1T_{4(3,4)} = l_4 \cos \theta_3 \sin \theta_4 + l_3 \cos \theta_3 + l_4 \sin \theta_3 \cos \theta_4 + l_2$$

Otra forma de obtener esta matriz es por medio de la ecuación ${}^1T_4 = {}^1T_2 {}^2T_4$, y utilizando la ecuación 3- 36 que es una ecuación reducida se obtiene:

$${}^1T_4 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_3 + \theta_4) & -\sin(\theta_3 + \theta_4) & 0 & -l_3 \sin \theta_3 + l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \\ \sin(\theta_3 + \theta_4) & \cos(\theta_3 + \theta_4) & 0 & l_3 \cos \theta_3 + l_4 \sin(\theta_3 + \theta_4) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1T_4 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \cos(\theta_3 + \theta_4) & -\cos \theta_2 \sin(\theta_3 + \theta_4) & \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 \{l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} \\ \sin \theta_2 \cos(\theta_3 + \theta_4) & -\sin \theta_2 \sin(\theta_3 + \theta_4) & -\cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \{l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} \\ \sin(\theta_3 + \theta_4) & \cos(\theta_3 + \theta_4) & 0 & l_4 \sin(\theta_3 + \theta_4) + l_3 \cos \theta_3 + l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-42

de donde vemos que la última columna corresponde con el punto 4 visto desde el sistema 1, comprobando así la ecuación 3- 38.

Si no se contara más que con las matrices de transformación elementales, la forma de obtener esta última matriz es por medio de la ecuación ${}^1T_4 = {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4$, la cual tiene por forma la multiplicación de las transformaciones elementales, concordante con lo descrito en la sección 3.3

$${}^1T_4 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \theta_3 & -\cos \theta_3 & 0 & -l_3 \sin \theta_3 \\ \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & l_3 \cos \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & l_4 \sin \theta_4 \\ -\cos \theta_4 & \sin \theta_4 & 0 & -l_4 \cos \theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasta este momento se han obtenido las coordenadas de cada uno de los puntos y las transformaciones que conforman el manipulador vistos desde el sistema 1. A continuación se describe el procedimiento para obtener las mismas coordenadas vistas desde el sistema inercial 0.

Puntos vistos desde el sistema 0:

De acuerdo con el párrafo anterior y las figuras 3-4,3-5, el sistema inercial para el cual se realizará todo el análisis es el sistema 0, de manera que para poder pasar todos los puntos descritos anteriormente hay que encontrar una transformación que permita realizar ese cambio. Para encontrarla recurriremos a la Figura 3 – 6, la cual muestra la vista superior de los sistemas del robot una vez que se mueve en el plano.

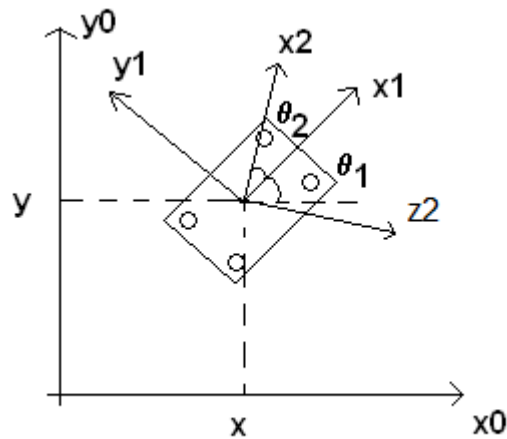


Figura 3-6, Gráfico mostrando el ángulo de rotación correspondiente con la base del robot (sistema 1) y el sistema inercial (sistema 0) cuando el robot se encuentra en movimiento

De acuerdo con lo realizado en esta sección, el sistema base o inercial del robot es el sistema 1, pues todos los puntos están referenciados a este sistema. Por otro lado, si este es el sistema propio del móvil del robot, como puede verse en la figura, este sistema sufre una traslación y una rotación sobre Z en el plano. Conforme con la sección 3.3, la matriz de transformación del sistema 1 al sistema 0 es:

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & x \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-43

Forma que contiene una rotación en el plano sobre el eje z con un valor de θ_1 y una traslación con coordenadas (x, y, l_1) , donde x y y son variables (pues dependen de la posición del móvil en el plano), y por otro lado l_1 (que no puede apreciarse en la imagen debido a que el eje z_0 es perpendicular al plano) es constante para este caso, y es justamente la distancia del suelo hasta la base del robot.

De esta manera, para obtener las posiciones utilizamos los puntos vistos desde el sistema 1 (obtenidos anteriormente) y se multiplican por esta última transformación.

Punto 1 visto desde el sistema 0:

$${}^0P_{1h} = {}^0T_1 {}^1P_{1h}$$

..... 3-44

Si el punto 1 visto desde el sistema 1 es:

$${}^1P_{1h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-45

Entonces este mismo visto desde el sistema 0 es:

$${}^0P_{1h} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & x \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0P_{1h} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ l_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-46

Punto 2 visto desde 0:

$${}^0P_{2h} = {}^0T_1 {}^1P_{2h}$$

..... 3-47

$${}^0P_{2h} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & x \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0P_{2h} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ l_1 + l_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-48

Punto 3 visto desde el sistema 0:

$${}^0P_{3h} = {}^0T_1 {}^1P_{3h}$$

..... 3-49

$${}^0P_{3h} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & x \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_3 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \\ l_3 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ l_3 \cos \theta_3 + l_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0P_{3h} = \begin{bmatrix} -l_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + l_3 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + x \\ -l_3 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 - l_3 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + y \\ l_3 \cos \theta_3 + l_2 + l_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0P_{3h} = \begin{bmatrix} l_3 (-\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \sin \theta_3 + x \\ l_3 (-\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2) \sin \theta_3 + y \\ l_3 \cos \theta_3 + l_2 + l_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por medio de las identidades trigonométricas presentadas anteriormente en (a)

$${}^0P_{3h} = \begin{bmatrix} -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta_3 + x \\ -l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta_3 + y \\ l_3 \cos \theta_3 + l_2 + l_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-50

Punto 4 visto desde el sistema 0:

$${}^0P_{4h} = {}^0T_1 {}^1P_{4h}$$

..... 3-51

$${}^0P_{4h} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & x \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \theta_2 \{l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} \\ -\sin \theta_2 \{l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} \\ l_4 \sin(\theta_3 + \theta_4) + l_3 \cos \theta_3 + l_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego de realizar el producto y factorizar términos semejantes:

$${}^0P_{4h} = \begin{bmatrix} (-\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \{l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} + x \\ (-\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2) \{l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} + y \\ l_4 \sin(\theta_3 + \theta_4) + l_3 \cos \theta_3 + l_2 + l_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Después de utilizar las identidades trigonométricas mostradas en (a):

$${}^0P_{4h} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1 + \theta_2)\{l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} + x \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2)\{l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} + y \\ l_4 \sin(\theta_3 + \theta_4) + l_3 \cos \theta_3 + l_2 + l_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

..... 3-52

Como conclusión a estos resultados, podemos ver que la ecuación 3-52 es casi la misma ecuación que la presentada en 3-38, de la misma manera que la ecuación 3-50 es casi la ecuación 3-27, con la diferencia que a las primeras ecuaciones (3-27 y 3-38) se les se suma el ángulo θ_1 al ángulo θ_2 , además de trasladarse un vector de coordenadas (x, y, l_1) , como se explicó anteriormente, obteniéndose las ecuaciones 3-50 y 3-52, comprobando que el ángulo θ_1 se halla sobre el ángulo θ_2 , volviendo *robusto* al robot.

Además de la forma analítica en cómo se obtuvieron los resultados, pudieron haberse obtenido de forma gráfica al haber observado la figuras 3-4, 3-5 y 3-6; sin embargo, se obtuvieron gracias a los principios del álgebra lineal de manera analítica, lo cual comprueba que el resultado matemático es correcto.

3.6 ANÁLISIS ESTÁTICO Y ESPACIO DE TRABAJO

Cuando se habla de un análisis estático de alguna máquina, se refiere a las condiciones de rigidez y esfuerzo a las cuales se encuentra sometido cierto elemento. Para nuestro caso, el análisis estático (además de todas las secciones del capítulo 3), se refiere a un análisis sencillo de las condiciones de carga a las que se somete el manipulador del robot. Esto da pie a lo que en robótica se conoce como *ESPACIO DE TRABAJO*, que puede definirse de la siguiente manera:

Definición 3-1: Espacio de Trabajo

ESPACIO DE TRABAJO: Región del espacio \mathcal{R}^n de la cual es capaz de alcanzar un manipulador el cualquiera de sus puntos sin mover su base de lugar. Este *espacio de trabajo* se define por medio de los movimientos posibles que puede realizar el manipulador.

ESPACIO DE TRABAJO ÚTIL: Región del espacio de trabajo que puede cubrir un manipulador sin tener que estirarse completamente, de forma que pueda llegar de manera “natural”.

De modo sencillo, el espacio de trabajo son todos los puntos que puede alcanzar un manipulador, y que a su vez forman una región ya sea en dos dimensiones -que forma un plano-, o bien en el espacio -formando una superficie o un volumen-.

El espacio de trabajo útil es aquel que puede alcanzar el manipulador sin tener que estirar por completo sus eslabones, por lo que su posición se halla de forma más “natural”.

Una característica muy importante del espacio de trabajo es que cuando un robot manipulador acerca su punto terminal a la frontera de este, existen un fenómeno llamado *pérdida de grados de libertad*, que en términos más formales se denomina una *SINGULARIDAD*, pues se trata de un momento singular en la ubicación de un punto. Este punto se tratará con mayor énfasis en el capítulo 5, de Estática y Cinemática Inversa.

Así, considerando que el robot permanece en una posición fija sobre el plano, se puede considerar también que las llantas no existen, de manera que se trate sólo de un robot manipulador con referencia fija.

Para hallar el espacio de trabajo hay que considerar las condiciones de frontera del mismo y ver hasta dónde puede llegar, dado que puede estirar completamente sus eslabones por medio de sus grados de libertad.

La siguiente imagen muestra la configuración original deseada del manipulador

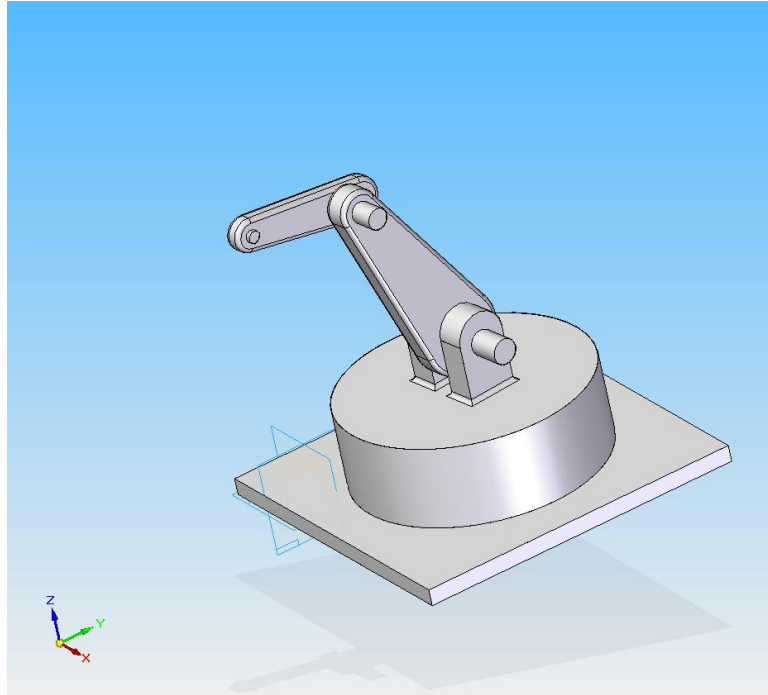


Figura 3-7, Imagen del manipulador en su estado (posición articular) original

En base a la figura original y a los conceptos básicos de la mecánica de sólidos, el manipulador sufre una flexión sobre el último eslabón que provoca un esfuerzo normal, dado por

$$\sigma_{flex} = \frac{Mc}{I}$$

..... 3-53

donde M es el momento proporcionado, que aumenta con el objeto que sostiene el brazo, c es el radio del cual se quiere hallar el esfuerzo e I es momento de Inercia del eslabón. Si se quiere el esfuerzo máximo se utiliza la ecuación

$$\sigma_{max} = \frac{M\rho}{I}$$

..... 3-54

donde ρ es el radio máximo, en este caso, l_4 , que es la distancia entre el final del eslabón anterior donde se halla la articulación 3 y el punto terminal.

Sin embargo, es de notar que estos problemas de flexión son normales, y hasta cierto punto despreciables, pues el momento generado (con objeto o no) es muy poco. Por otro lado, un punto importante del diseño de maquinaria es la obtención del par en el motor en cada articulación. De esta manera, el tamaño del par en cada motor en cada caso del manipulador que la torca generada por la ecuación

$$M = mgl$$

..... 3-55

donde m indica la masa del objeto a cargar, g indica la gravedad del lugar a trabajar y l la distancia de la que se trata. En el caso del último eslabón es l_4 .

Así entonces, un análisis que puede realizarse respecto al mismo robot son las condiciones de esfuerzos para el diseño maquina del robot. Esto además ayudará a determinar la magnitud del torque de los motores.

Sin embargo, este trabajo se aboca principalmente a la mecánica del robot tomando en cuenta que los elementos (como los eslabones) son cuerpos rígidos y no se deforman. De esta manera, para comenzar a analizar el espacio de trabajo utilizaremos la siguiente figura

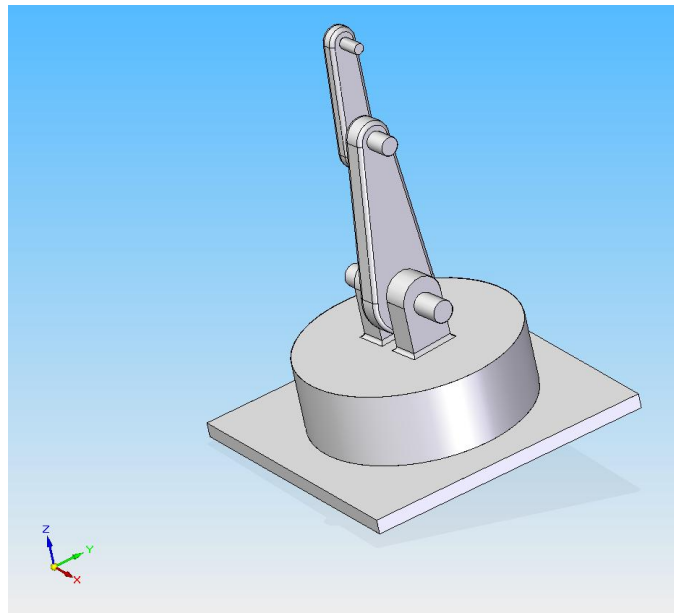


Figura 3-8, Imagen del manipulador mostrando la altura máxima alcanzada

En la figura anterior se ve cómo es que el manipulador alcanza su altura máxima, por medio de estirar por completo sus eslabones y dejarlos colineales y perpendiculares a la base. Esto es debido a que el ángulo θ_3 vale 0° , de forma que el ángulo total valga 90° , en base a la tabla 3 – 2. Esta altura es justamente la suma de las distancias l_3 y l_4 .

A continuación se presentan algunas imágenes mostrando algunos puntos importantes que puede alcanzar el manipulador

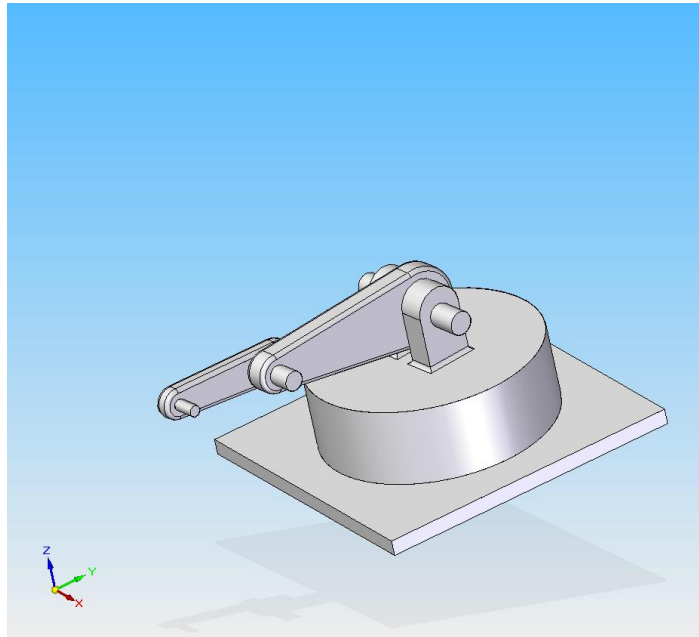


Figura 3-9, Imagen del manipulador mostrando su alcance máximo

En la figura anterior se muestra al manipulador en su alcance máximo hacia uno de los ejes. En base a lo descrito anteriormente, para este caso si se sostiene algún objeto en el punto terminal, el momento que genere deberá ser menor al torque obtenido por los dos motores en la articulaciones 2 y 3.

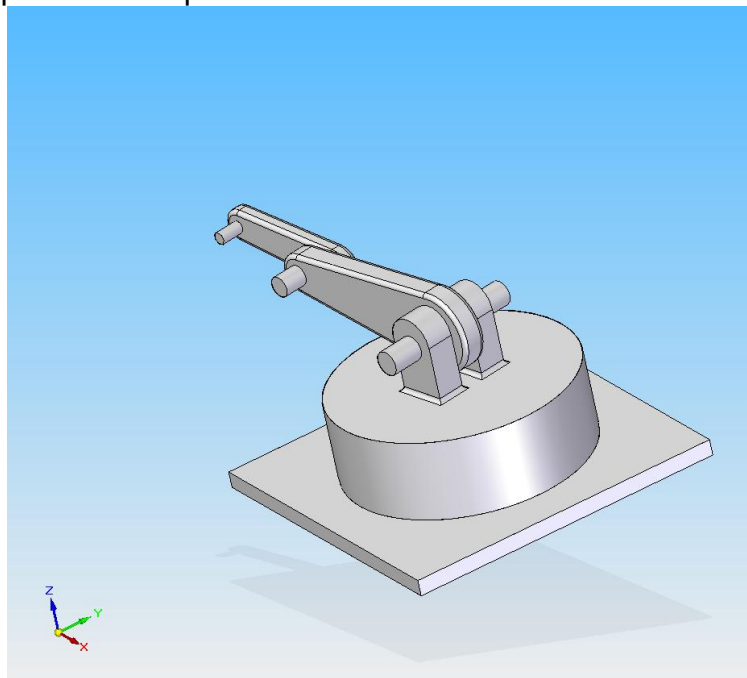


Figura 3-10, Manipulador mostrando su alcance máximo en otro de los ejes

Aquí se muestra al manipulador en otra posición de alcance máximo en otro de los ejes.

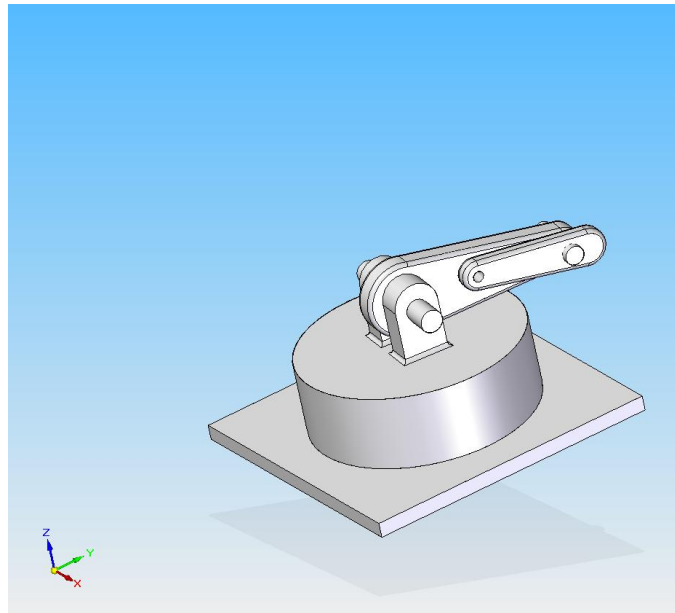


Figura 3-11, Manipulador mostrando su último eslabón rotado hacia el anterior

En esta figura se puede ver que si el último eslabón es capaz de rotar 180° entonces puede volverse paralelo al eslabón anterior, y alcanzar distintos puntos que antes no podía alcanzar.

De esta forma, podemos ver que el espacio de trabajo es una región conformada por una esfera en la cual falta el centro, ya que como se puede apreciar en la figura anterior el manipulador no puede alcanzar su centro a menos que l_3 y l_4 sean del mismo tamaño. Si no es así, entonces al “estirar” el eslabón 2 hacia arriba y el 3 hacia abajo se logra la siguiente posición

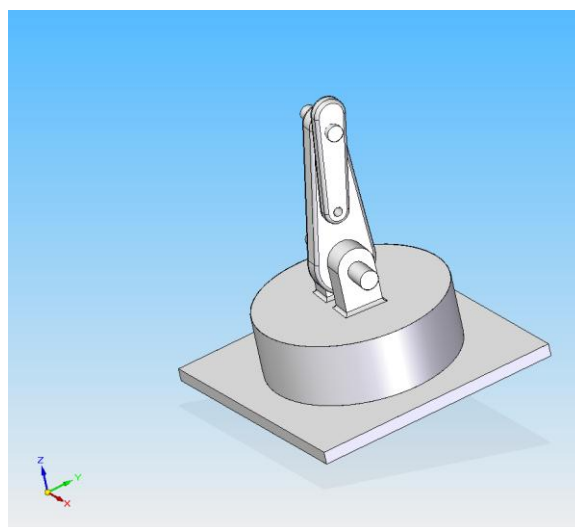


Figura 3-12, Manipulador mostrando su último eslabón rotado hacia el anterior y apuntando hacia arriba

La región descrita de forma gráfica puede verse en las siguientes imágenes

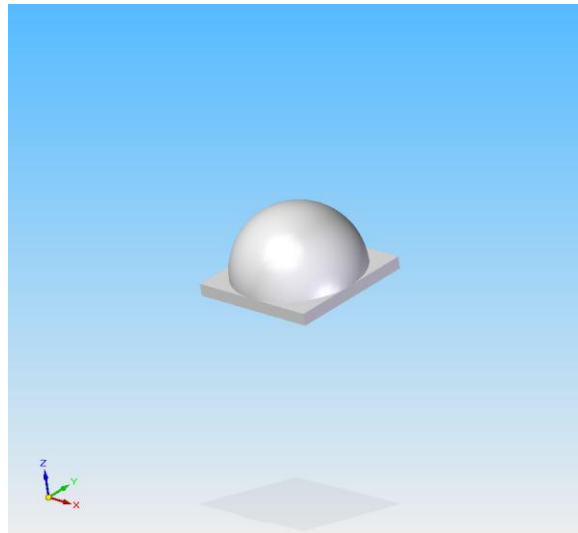


Figura 3-13, Espacio de trabajo en forma gráfica contemplando la base visto en perspectiva

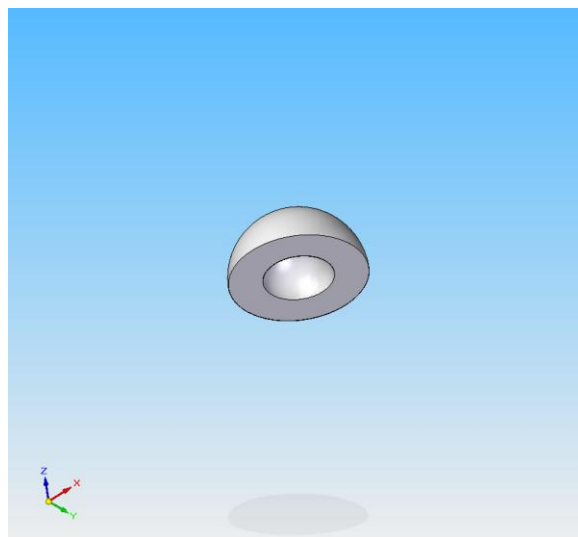


Figura 3-14, Vista inferior del espacio de trabajo



Figura 3-15, Vista inferior (2) del espacio de trabajo

Si consideramos que el último eslabón puede alcanzar puntos por debajo de la 2ª articulación entonces podría (dada la distancia de l_3 y l_4) alcanzar puntos en su propia base, lo que degeneraría el espacio de trabajo tendiendo a completar la esfera por completo. A continuación se muestran imágenes acerca de esto.

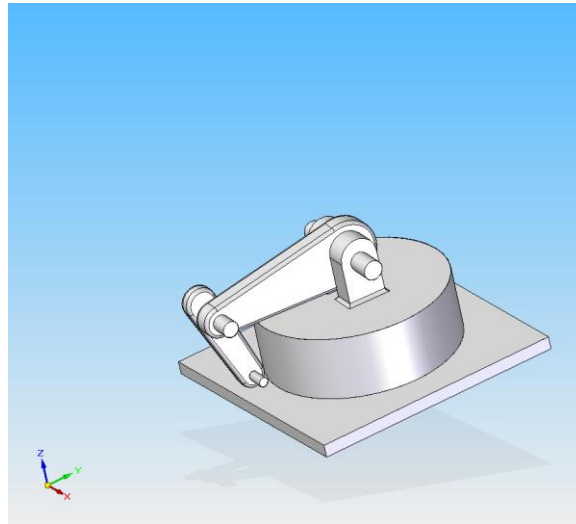


Figura 3-16, Manipulador alcanzando un punto de su base

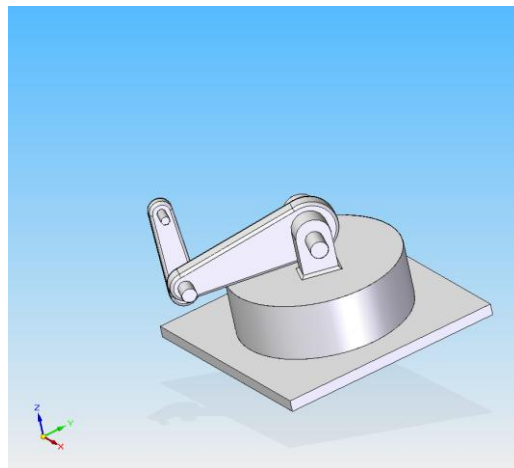


Figura 3-17, Manipulador alcanzando un punto de su espacio de trabajo

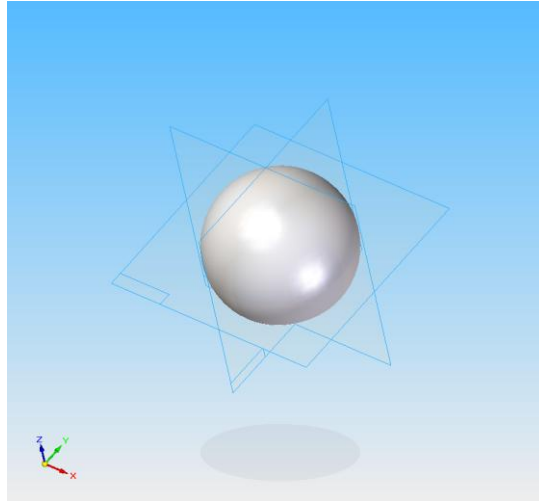


Figura 3-18, Espacio de trabajo modificado, donde parece la esfera completa

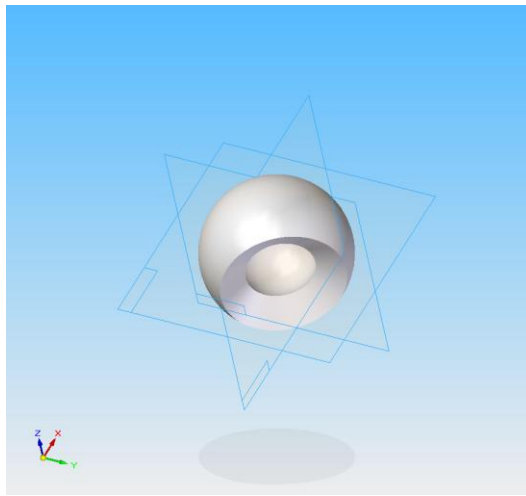


Figura 3-19, Espacio de trabajo modificado mostrando el espacio faltante

En las figuras anteriores se puede ver que si no se encuentra la base el espacio de trabajo es la esfera con el hueco de forma libre. Pero si se trata del caso en el que se encuentre la base el espacio de trabajo se parecería a

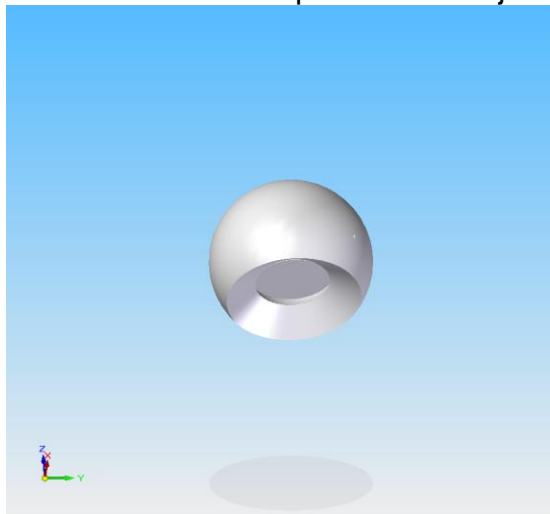


Figura 3-20, Espacio de trabajo mostrando la base muy por arriba del mismo

Donde apenas se puede ver que el espacio de trabajo apenas aparece. Si la distancia l_1 y l_2 lo permite, entonces el espacio podría verse así

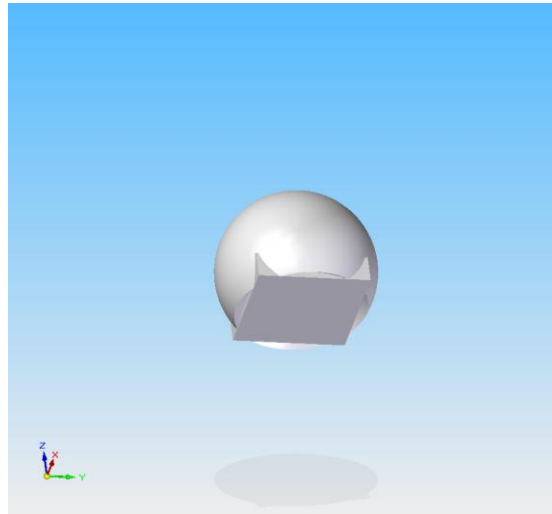


Figura 3-21, Espacio de trabajo mostrando la base más abajo (1)

Ahora que si la base se encuentra más abajo todavía quedaría

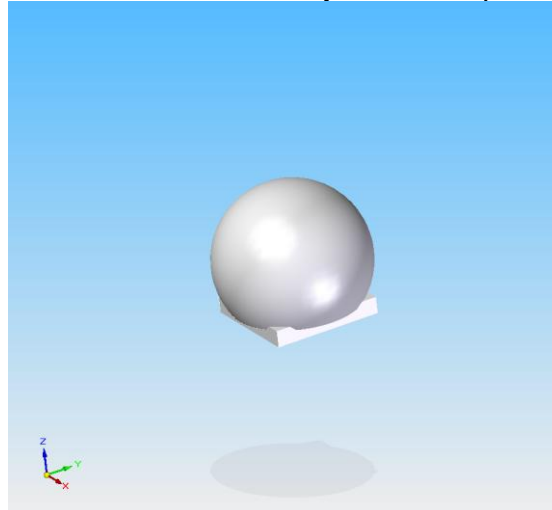


Figura 3-22, Espacio de trabajo mostrando la base más abajo (2)

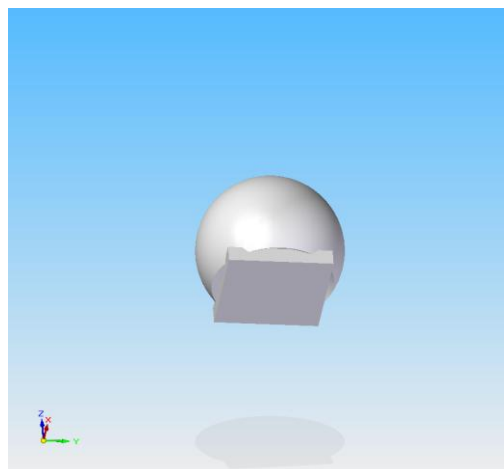


Figura 3-23, Espacio de trabajo mostrando la base más abajo (3)

Como conclusión se puede hallar el espacio de trabajo de forma analítica para fines de análisis posteriores.

Para ello, usamos algunos conceptos de la geometría analítica en el espacio, donde la ecuación general que describe una esfera es

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

..... 3-56

Y la ecuación ordinaria es la descrita por

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$$

..... 3-57

donde el centro de la esfera se halla en $C(h,k,l)$ y el radio de la misma es r

Con la última ecuación, el espacio de trabajo para el sistema 2 de forma analítica es

$$(x_2)^2 + (y_2)^2 + (z_2)^2 = (l_3 + l_4)^2$$

..... 3-58

Por lo cual si se quisiera ver desde el sistema 0 sería

$$(x_0 - x_{s2})^2 + (y_0 - y_{s2})^2 + (z_0 - (l_1 + l_2))^2 = (l_3 + l_4)^2$$

..... 3-59

Ya que el sistema 2 se halla en las coordenadas $(x, y, l_1 + l_2)$ desde (0).

De esta manera, la distancia máxima (distancia de frontera) del espacio de trabajo es el mismo radio de la esfera, que es $r = l_3 + l_4$. Pero si lo que se requiere es que el manipulador tenga una posición más cómoda entonces se tiene que recurrir al espacio de trabajo útil, descrito en la Definición 3 – 1.

La siguiente imagen muestra una idea de ello:

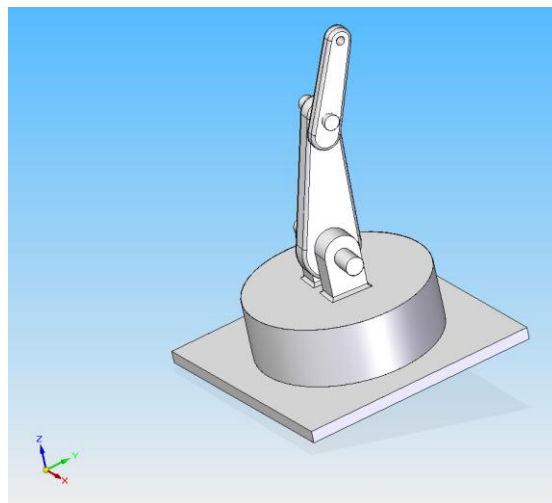


Figura 3-24, Manipulador alcanzando un punto del espacio de trabajo útil

Y la ecuación que describe este espacio de trabajo es

$$(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_2)^2 + (z_0 - (l_1 + l_2))^2 < (l_3 + l_4)^2$$

..... 3-60

Ya que la frontera no puede ser tocada. De otra forma podría ser

$$(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_2)^2 + (z_0 - (l_1 + l_2))^2 = d^2$$

..... 3-61

donde $d = l_3 + l_4 - \text{tolerancia}$, y esa tolerancia describe que tanto del espacio de trabajo original se quiere eliminar.

Una interpretación de esta condición es que el robot necesita una energía muy grande para poder estirar por completo su extremidad, por lo que de manera energética, es mucho más conveniente y cómoda esta posición para el robot.

CAPÍTULO 4 MODELO CINEMÁTICO DEL ROBOT.

4.1 INTRODUCCIÓN.

CONCEPTOS MATEMÁTICOS NECESARIOS

ELEMENTOS DE CÁLCULO VECTORIAL

En el capítulo anterior se obtuvo la estática del robot mediante la explicación de la teoría en base al método de Denavit-Hartenberg. Lo concerniente ahora es obtener la cinemática del mismo, entendida como la velocidad y aceleración de los puntos anteriormente descritos. Para ello se hace uso de algunos conceptos y principios importantes del cálculo vectorial y del álgebra lineal, ya que recuerdese que (como se mencionó en la sección 3.1), el comportamiento de cada punto del manipulador está descrito por una función de los grados de libertad del robot, siendo esta en realidad una *función vectorial de variable vectorial*, que a su vez forma un *campo vectorial*, donde cada componente del punto es a su vez una *función escalar de variable vectorial*, y que forma un *campo escalar*, descrito a partir de una serie de variables, para nuestro caso, los grados de libertad.

Así, para comenzar a describir este comportamiento cinemático es necesario tener ciertos conceptos básicos del cálculo real, vectorial y el álgebra lineal (basados en [28]):

Definición 4-1: Derivación paramétrica real o "regla de la cadena"

Sea f una función real de variable real con variable independiente x definida por la transformación $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, la derivada paramétrica respecto a "t" se define como:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

..... 4-1

Definición 4-2: Diferenciación total de un campo escalar

Sea f una función escalar de variable vectorial que depende de (x_1, x_2, \dots, x_n) y que define un campo escalar por medio de la transformación $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, la diferencial total de f puede hallarse como

$$d f = \frac{\partial}{\partial x_1} f \cdot d x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} f \cdot d x_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} f \cdot d x_n$$

..... 4-2

Definición 4-3: Derivación paramétrica total de un campo escalar

Sea f una función escalar de variable vectorial que depende de (x_1, x_2, \dots, x_n) y que define un campo escalar por medio de la transformación $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, la derivada paramétrica total respecto a "t" de f puede hallarse como

$$\frac{d f}{d t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{d x_1}{d t} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{d x_2}{d t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{d x_n}{d t}$$

..... 4-3

Definición 4-4: Derivación paramétrica total de un campo vectorial

Sea f una función vectorial de variable vectorial de componentes (f_1, f_2, \dots, f_m) que depende de (x_1, x_2, \dots, x_n) y que define un campo vectorial por medio de la transformación $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$, la derivada paramétrica total respecto a "t" de f puede hallarse como

$$\frac{d f}{d t} = \begin{bmatrix} \frac{d f_1}{d t} \\ \frac{d f_2}{d t} \\ \vdots \\ \frac{d f_m}{d t} \end{bmatrix}$$

..... 4-4

$$\frac{d f}{d t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{d x_1}{d t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \frac{d x_2}{d t} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \cdot \frac{d x_n}{d t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdot \frac{d x_1}{d t} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot \frac{d x_2}{d t} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \cdot \frac{d x_n}{d t} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \cdot \frac{d x_1}{d t} + \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \cdot \frac{d x_2}{d t} + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \cdot \frac{d x_n}{d t} \end{bmatrix}$$

..... 4-5

Donde vemos que cada renglón corresponde a la derivada total respecto al parámetro "t" de cada componente correspondientemente.

Definición 4-5:

Matriz jacobiana o gradiente generalizado de un campo vectorial

Sea f una función vectorial de variable vectorial de componentes (f_1, f_2, \dots, f_m) que depende de (x_1, x_2, \dots, x_n) y que define un campo vectorial por medio de la transformación $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$, la matriz jacobiana de f , también conocido como gradiente generalizado de f se halla como

$$J(f(x)) = \nabla f$$

..... 4-6

$$J(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

..... 4-7

De esta manera, la ecuación 4– 5 puede ser escrita como:

$$\frac{df}{dt} = J(f(x)) \cdot \frac{dx}{dt}$$

..... 4-8

Donde $\frac{dx}{dt}$ es la derivada del vector x con respecto al parámetro "t", tomando en cuenta que cada componente del mismo depende de este parámetro.

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}$$

4.2 MODELO CINEMÁTICO DE UN ROBOT MANIPULADOR

De acuerdo con los principios descritos en la sección anterior (4.1), en esta sección se describirá específicamente el uso de las definiciones matemáticas a la robótica, para ello se tomó en parte de Nikú [5] y Juárez [6]

Considérese un vector de “n” coordenadas generalizadas:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

..... 4-9

En el cual todas las componentes dependen a su vez del tiempo, lo que lleva a

$$q = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix}$$

Si se considera ahora que una cierta partícula del robot está descrita por el vector de posición P de 3 coordenadas donde a su vez cada componente depende de todos los grados de libertad, se tiene

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix}$$

..... 4-10

$$P = \begin{bmatrix} P_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ P_2(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \vdots \\ P_m(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1(q) \\ P_2(q) \\ \vdots \\ P_m(q) \end{bmatrix}$$

..... 4-11

De acuerdo con los principios de la mecánica, para obtener la velocidad de la partícula se deriva la posición P con respecto al tiempo, lo cual toma sentido debido a que cada componente de P depende del vector de grados de libertad (q), que depende a su vez del tiempo. De esta manera:

$$V = \frac{d}{dt} P$$

..... 4-12

Y como P tiene “ m ” componentes, entonces V tendrá también “ m ” componentes, dadas por:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix}$$

..... 4-13

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} P_1 \\ \frac{d}{dt} P_2 \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} P_m \end{bmatrix}$$

..... 4-14

Sin embargo, debido a que cada componente de P (P_1, P_2, P_3) depende de “ n ” grados de libertad (q_1, q_2, \dots, q_n) que a su vez dependen del tiempo, se debe utilizar la regla de la derivación total del cálculo vectorial, expuesta en la definición:

Así entonces, para nuestro caso, y retomando la ecuación 4– 14, la velocidad en realidad se halla como:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial q_1} \cdot \frac{d q_1}{dt} + \frac{\partial P_1}{\partial q_2} \cdot \frac{d q_2}{dt} + \dots + \frac{\partial P_1}{\partial q_n} \cdot \frac{d q_n}{dt} \\ \frac{\partial P_2}{\partial q_1} \cdot \frac{d q_1}{dt} + \frac{\partial P_2}{\partial q_2} \cdot \frac{d q_2}{dt} + \dots + \frac{\partial P_2}{\partial q_n} \cdot \frac{d q_n}{dt} \\ \vdots \\ \frac{\partial P_m}{\partial q_1} \cdot \frac{d q_1}{dt} + \frac{\partial P_m}{\partial q_2} \cdot \frac{d q_2}{dt} + \dots + \frac{\partial P_m}{\partial q_n} \cdot \frac{d q_n}{dt} \end{bmatrix}$$

..... 4-15

O bien

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial P_1}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial P_1}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n \\ \frac{\partial P_2}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial P_2}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial P_2}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n \\ \vdots \\ \frac{\partial P_m}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial P_m}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial P_m}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

..... 4-16

donde $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$

De esta manera, este resultado puede expresarse de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \frac{\partial P_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial P_2}{\partial q_1} & \frac{\partial P_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_m}{\partial q_1} & \frac{\partial P_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial P_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

..... 4-17

donde la matriz $\begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \frac{\partial P_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial P_2}{\partial q_1} & \frac{\partial P_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_m}{\partial q_1} & \frac{\partial P_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial P_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}$ se llama **Matriz Jacobiana del punto P**

(en concordancia con los principios del cálculo vectorial), y se representa como $J(P(q))$, ya que es la matriz jacobiana del punto P que depende del vector q . Para este trabajo se usa únicamente la designación de *Jacobiano*, del cual su determinante no tiene un nombre especial. De esta forma:

$$J(P(q)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \frac{\partial P_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial P_2}{\partial q_1} & \frac{\partial P_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_m}{\partial q_1} & \frac{\partial P_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial P_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

..... 4-18

Además, el vector $\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$ es el vector de derivadas temporales del vector q .

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

..... 4-19

Así la ecuación 4 – 19 puede representarse de forma simplificada como

$$V = J(P(q)) \cdot \dot{q}$$

..... 4-20

donde, como puede verse en la ecuación 4 – 18, la matriz Jacobiana tiene por orden $m \times n$, ya que el punto tiene “ m ” componentes y el vector q tiene “ n ” componentes, de manera que la multiplicación pueda realizarse sin problemas, pues la matriz Jacobiana es de orden $m \times n$ mientras que el vector \dot{q} es de orden $m \times 1$, lo que da como resultado un vector de orden $m \times 1$, que es el vector de velocidades de la partícula descrita en posición por P .

Ahora bien, para poder obtener la aceleración de la partícula, es otra vez necesario recurrir de nueva cuenta al concepto de aceleración paramétrica de la mecánica, dada por:

$$A = \frac{d}{dt} V$$

..... 4-21

donde nuevamente A es un vector de “ m ” componentes, dadas por:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} V_1 \\ \frac{d}{dt} V_2 \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} V_m \end{bmatrix}$$

..... 4-22

Sin embargo, ahora cada componente del vector V depende del vector q , (ecuación 4 – 9) y del vector \dot{q} (ecuación 4 – 19), de manera que

$$V = \begin{bmatrix} V_1(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\ V_2(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\ \vdots \\ V_m(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \end{bmatrix}$$

..... 4-23

Por lo cual la expresión completa para hallar la aceleración es:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial q_1} \cdot \frac{d q_1}{dt} + \frac{\partial V_1}{\partial q_2} \cdot \frac{d q_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V_1}{\partial q_n} \cdot \frac{d q_n}{dt} + \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_1} \cdot \frac{d \dot{q}_1}{dt} + \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_2} \cdot \frac{d \dot{q}_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_n} \cdot \frac{d \dot{q}_n}{dt} \\ \frac{\partial V_2}{\partial q_1} \cdot \frac{d q_1}{dt} + \frac{\partial V_2}{\partial q_2} \cdot \frac{d q_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V_2}{\partial q_n} \cdot \frac{d q_n}{dt} + \frac{\partial V_2}{\partial \dot{q}_1} \cdot \frac{d \dot{q}_1}{dt} + \frac{\partial V_2}{\partial \dot{q}_2} \cdot \frac{d \dot{q}_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V_2}{\partial \dot{q}_n} \cdot \frac{d \dot{q}_n}{dt} \\ \vdots \\ \frac{\partial V_m}{\partial q_1} \cdot \frac{d q_1}{dt} + \frac{\partial V_m}{\partial q_2} \cdot \frac{d q_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V_m}{\partial q_n} \cdot \frac{d q_n}{dt} + \frac{\partial V_m}{\partial \dot{q}_1} \cdot \frac{d \dot{q}_1}{dt} + \frac{\partial V_m}{\partial \dot{q}_2} \cdot \frac{d \dot{q}_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V_m}{\partial \dot{q}_n} \cdot \frac{d \dot{q}_n}{dt} \end{bmatrix}$$

..... 4-24

O bien

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial V_1}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial V_1}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n + \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_1} \cdot \ddot{q}_1 + \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_2} \cdot \ddot{q}_2 + \dots + \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_n} \cdot \ddot{q}_n \\ \frac{\partial V_2}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial V_2}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial V_2}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n + \frac{\partial V_2}{\partial \dot{q}_1} \cdot \ddot{q}_1 + \frac{\partial V_2}{\partial \dot{q}_2} \cdot \ddot{q}_2 + \dots + \frac{\partial V_2}{\partial \dot{q}_n} \cdot \ddot{q}_n \\ \vdots \\ \frac{\partial V_m}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial V_m}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial V_m}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n + \frac{\partial V_m}{\partial \dot{q}_1} \cdot \ddot{q}_1 + \frac{\partial V_m}{\partial \dot{q}_2} \cdot \ddot{q}_2 + \dots + \frac{\partial V_m}{\partial \dot{q}_n} \cdot \ddot{q}_n \end{bmatrix}$$

..... 4-25

Que de forma reducida es

$$A = \frac{\partial V}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_n} \dot{q}_n + \dots + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_1} \ddot{q}_1 + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_2} \ddot{q}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_n} \ddot{q}_n$$

..... 4-26

Y de forma matricial quedaría como

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial q_1} & \frac{\partial V_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial V_1}{\partial q_n} & \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_2} & \dots & \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_n} \\ \frac{\partial V_2}{\partial q_1} & \frac{\partial V_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial V_2}{\partial q_n} & \frac{\partial V_2}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial V_2}{\partial \dot{q}_2} & \dots & \frac{\partial V_2}{\partial \dot{q}_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial V_m}{\partial q_1} & \frac{\partial V_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial V_m}{\partial q_n} & \frac{\partial V_m}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial V_m}{\partial \dot{q}_2} & \dots & \frac{\partial V_m}{\partial \dot{q}_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix}$$

..... 4-27

Sin embargo, una manera más para poder obtener la aceleración por medio del Jacobiano del Robot es por medio de la derivada de un producto, para dar como resultado:

$$A = \frac{d}{dt} \{ J(P(q)) \cdot \dot{q} \}$$

$$A = J(P(q)) \cdot \ddot{q} + \left\{ \frac{d}{dt} J(P(q)) \right\} \cdot \dot{q}$$

..... 4-28

Donde el término $\frac{d}{dt} J(P(q))$ se trata de la derivada de una matriz que tiene “n” variables independientes, por lo que se obtiene de manera similar a la descrita en la definición 4 – 3:

Definición 4-6: Derivada de la Matriz Jacobiana de un Robot

Sea un Robot con una Matriz Jacobiana de orden “m” por “n” (m coordenadas del punto y n grados de libertad), la derivada de la misma tendrá en mismo orden y se obtiene como:

$$\frac{d}{dt} J(P(q)) = \frac{\partial J(P(q))}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial J(P(q))}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial J(P(q))}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n$$

..... 4-29

De esta manera, vemos que de la ecuación 4 – 28, el producto $J(P(q)) \cdot \ddot{q}$ generará los términos de aceleración gracias a la aceleración angular, o bien el vector de segundas derivadas respecto al tiempo de los grados de libertad, mientras que el producto $\left\{ \frac{d}{dt} J(P(q)) \right\} \cdot \dot{q}$ genera los términos de aceleración gracias a la velocidad tanto lineal como angular. Más adelante se explicará esta interpretación proveniente del análisis del movimiento relativo de un cuerpo.

4.3 JACOBIANOS Y VELOCIDADES DEL ROBOT

De acuerdo con lo descrito en las secciones anteriores (4.1 y 4.2), para poder obtener de manera simbólica las velocidades de los puntos del robot, es necesario obtener primeramente cada uno de los Jacobianos correspondientes a cada punto, relacionado directamente con el número de grados de libertad que describen ese punto en el espacio.

A continuación se dará una breve descripción de la obtención de cada uno de estos elementos.

Si se considera inicialmente que el punto 1 tiene 2 *gdl* correspondientes a la posición del móvil el análisis se muestra a continuación

Punto 1 (con 2 gdl):

El punto tiene las coordenadas del móvil y a la vez del sistema 1

$$P_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ l_1 \end{bmatrix}$$

..... 4-30

Los grados de libertad para este caso son

$$q_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

..... 4-31

Por lo cual el Jacobiano correspondiente es una matriz de 3 x 2 conformada por los siguientes elementos

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{1x}}{\partial x} & \frac{\partial P_{1x}}{\partial y} \\ \frac{\partial P_{1y}}{\partial x} & \frac{\partial P_{1y}}{\partial y} \\ \frac{\partial P_{1z}}{\partial x} & \frac{\partial P_{1z}}{\partial y} \end{bmatrix}$$

..... 4-32

Resultando

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

..... 4-33

Por lo cual podemos reducir el mismo eliminando el último renglón, ya que el punto 1 no tiene cambios en el eje Z del sistema 0, obteniendo

$$J_{1red} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

..... 4-34

Además, el vector de grados de libertad derivado es

$$\dot{q}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

..... 4-35

De esta forma, para obtener la velocidad del punto 1 basta con multiplicar el Jacobiano de la ecuación 4 – 34 y el vector de la ecuación 4 – 35, de acuerdo con la ecuación 4 – 20:

$$V_1 = J_{1red} \cdot \dot{q}_1$$

..... 4-36

Quedando como resultado

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

..... 4-37

Con lo cual comprobamos que la velocidad del punto 1, correspondiente con el sistema 1 es también la del carro, debido a que el sistema va montado sobre él y no tiene movimiento relativo. Si realizáramos el mismo procedimiento pero con tres grados de libertad, agregando la orientación del carro (θ_1), se llega a lo mismo, como se muestra a continuación.

Punto 1 (con 3 gdl):

Las coordenadas son las mismas que las mostradas en la ecuación 4.30, debido a que el punto no cambia, sin embargo, el número de grados de libertad involucrados si, por lo que redefinimos el vector grados de libertad para este caso, q_1 , obteniendo un nuevo vector, que llamaremos $q_{1(3)}$, por tener ahora 3 grados de libertad:

$$q_{1(3)} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

..... 4-38

De esta manera, el Jacobiano resultante queda de la siguiente manera

$$J_{1(3)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{1x}}{\partial x} & \frac{\partial P_{1x}}{\partial y} & \frac{\partial P_{1x}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial P_{1y}}{\partial x} & \frac{\partial P_{1y}}{\partial y} & \frac{\partial P_{1y}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial P_{1z}}{\partial x} & \frac{\partial P_{1z}}{\partial y} & \frac{\partial P_{1z}}{\partial \theta_1} \end{bmatrix}$$

..... 4-39

Obteniéndose

$$J_{1(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

..... 4-40

Por lo cual, la velocidad del punto 1 puede expresarse como

$$V_1 = J_{1(3)} \cdot \dot{q}_{1(3)}$$

..... 4-41

Quedando como resultado

$$V_1 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

O

$$V_1 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

que el mismo resultado presentado en la ecuación 4.37, debido a que no importa el número de grados de libertad, en el punto 1, pues este solamente se desplaza en el plano, y únicamente influyen los grados de libertad de traslación del móvil, que son x y y .

Punto 2:

El punto 2 está definido como

$$P_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ l_2 + l_1 \end{bmatrix}$$

..... 4-42

y los grados de libertad asociados a este punto son

$$q_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

..... 4-43

Y su vector de derivadas correspondientes es

$$\dot{q}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

..... 4-44

De esta manera, el Jacobiano del punto 2 respecto a q_2 es

$$J_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{2x}}{\partial x} & \frac{\partial P_{2x}}{\partial y} & \frac{\partial P_{2x}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{2x}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial P_{2y}}{\partial x} & \frac{\partial P_{2y}}{\partial y} & \frac{\partial P_{2y}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{2y}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial P_{2z}}{\partial x} & \frac{\partial P_{2z}}{\partial y} & \frac{\partial P_{2z}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{2z}}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}$$

..... 4-45

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

..... 4-46

Así, la velocidad del punto 2 puede obtenerse de la siguiente manera

$$V_2 = J_2 \cdot \dot{q}_2$$

..... 4-47

Obteniéndose

$$V_2 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

O

$$V_2 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

Que es la misma velocidad del punto 1, debido a que visto desde arriba, el punto 1 y 2 están empalmados, y únicamente separados por la distancia l_2 . Esta condición puede observarse claramente en las figuras 3.6 y 3.7.

Punto 3:

El punto 3 está definido como

$$P_3 = \begin{bmatrix} -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) + x \\ -l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) + y \\ l_3 \cos(\theta_3) + l_2 + l_1 \end{bmatrix}$$

..... 4-48

Los grados de libertad para este punto son

$$q_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

..... 4-49

Y su vector de derivadas está dado por

$$\dot{q}_3 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

..... 4-50

El Jacobiano del punto 3 se obtiene como

$$J_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{3x}}{\partial x} & \frac{\partial P_{3x}}{\partial y} & \frac{\partial P_{3x}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{3x}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_{3x}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial P_{3y}}{\partial x} & \frac{\partial P_{3y}}{\partial y} & \frac{\partial P_{3y}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{3y}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_{3y}}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial P_{3z}}{\partial x} & \frac{\partial P_{3z}}{\partial y} & \frac{\partial P_{3z}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{3z}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_{3z}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}$$

..... 4-51

$$J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) \\ 0 & 1 & -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & -l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l_3 \text{sen}(\theta_3) \end{bmatrix}$$

..... 4-52

Por lo cual, la velocidad del punto3 se obtiene como

$$V_3 = J_3 \cdot \dot{q}_3$$

..... 4-53

Después de realizar algunas reducciones trigonométricas se llega a

$$V_3 = \begin{bmatrix} \dot{x} + l_3 \{(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) - \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3)\} \\ \dot{y} - l_3 \{(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) - \dot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3)\} \\ - \dot{\theta}_3 l_3 \text{sen}(\theta_3) \end{bmatrix}$$

..... 4-54

Punto 4:

El punto 4 esta dado por

$$P_4 = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} + x \\ -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} + y \\ l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) + l_3 \cos(\theta_3) + l_2 + l_1 \end{bmatrix}$$

..... 4-55

El vector de grados de libertad relacionado al punto es

$$q_4 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

..... 4-56

El vector de derivadas de los grados de libertad es

$$\dot{q}_4 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix}$$

..... 4-57

De manera que el Jacobiano del punto 4 se obtiene como

$$J_4 = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{4x}}{\partial x} & \frac{\partial P_{4x}}{\partial y} & \frac{\partial P_{4x}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{4x}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_{4x}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial P_{4x}}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial P_{4y}}{\partial x} & \frac{\partial P_{4y}}{\partial y} & \frac{\partial P_{4y}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{4y}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_{4y}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial P_{4y}}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial P_{4z}}{\partial x} & \frac{\partial P_{4z}}{\partial y} & \frac{\partial P_{4z}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{4z}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_{4z}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial P_{4z}}{\partial \theta_4} \end{bmatrix}$$

..... 4-58

De este último, podemos ver que la parte izquierda de la matriz corresponde al Jacobiano del robot respecto a los grados de libertad del móvil, mientras que la parte de la derecha corresponde con el Jacobiano del robot respecto a los grados de libertad del manipulador. Es así como la ecuación 4-58 podría escribirse de la siguiente forma

$$J_4 = [J_{4mov} \mid J_{4man}]$$

..... 4-59

Que simbólicamente queda como

$$J_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & j_{4,(1,3)} & j_{4,(1,4)} & j_{4,(1,5)} & j_{4,(1,6)} \\ 0 & 1 & j_{4,(2,3)} & j_{4,(2,4)} & j_{4,(2,5)} & j_{4,(2,6)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j_{4,(3,5)} & j_{4,(3,6)} \end{bmatrix}$$

..... 4-60

Donde $j_{4,(a,b)}$ indica el elemento del renglón a y columna b de la matriz J_4

$$j_{4,(1,3)} = \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\}$$

$$j_{4,(2,3)} = -\cos(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\}$$

$$j_{4,(1,4)} = \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\}; \quad j_{4,(1,3)} = j_{4,(1,4)}$$

$$j_{4,(2,4)} = -\cos(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\}; \quad j_{4,(2,3)} = j_{4,(2,4)}$$

$$j_{4,(1,5)} = -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \cos(\theta_3) + l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\}$$

$$j_{4,(2,5)} = -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \cos(\theta_3) + l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\}$$

$$j_{4,(3,5)} = l_3 \text{sen}(\theta_3) + l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)$$

$$j_{4,(1,6)} = -\cos(\theta_1 + \theta_2) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)$$

$$j_{4,(2,6)} = -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)$$

$$j_{4,(3,6)} = l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)$$

Así, la velocidad del punto 4 se obtiene como

$$V_4 = J_4 \cdot \dot{q}_4$$

..... 4-61

Que después de ciertas reducciones algebraicas y trigonométricas es

$$V_4 = \begin{bmatrix} \dot{x} + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} - \cos(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\theta_3 + \theta_4) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\} \\ \dot{y} - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} - \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\theta_3 + \theta_4) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\} \\ (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) - \dot{\theta}_3 l_3 \text{sen}(\theta_3) \end{bmatrix}$$

..... 4-62

4.4 INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS DE JACOBIANOS Y VELOCIDADES

En la sección anterior se presentaron los modelos matemáticos correspondientes de posición y velocidad, obtenidos gracias a los modelos de los Jacobianos de los puntos, modelos que tienen toda una interpretación física que puede ser abundantemente estudiada. En esta sección se presenta una interpretación sencilla de estos modelos para comprobar en cierta forma la hipótesis presentada en un principio en este trabajo.

De acuerdo con la cinemática del punto y la teoría del movimiento relativo se exhiben a continuación ciertas ecuaciones que servirán como elemento fundamental para ligar la teoría cinemática con la teoría matemática aquí presentada.

RESUMEN DE LA TEORÍA DE MOVIMIENTO RELATIVO

Considérese un sistema de referencia fijo $O(X, Y, Z)$, un sistema de referencia móvil $O'(x, y, z)$ y un punto de interés P.

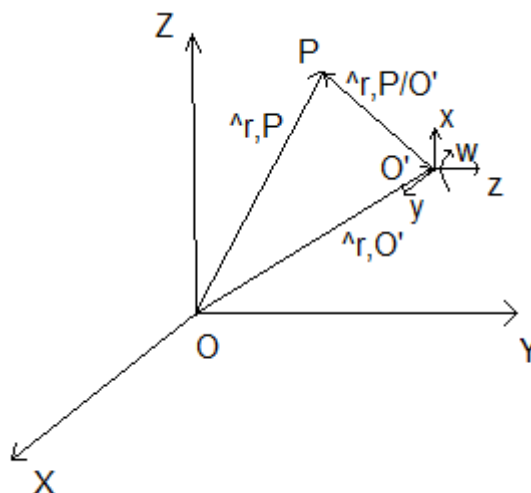


Figura 4-1, Posición absoluta de un punto en el espacio gracias a un sistema de referencia móvil, que puede tener rotación intrínseca.

El Vector de Posición Absoluta está dado por

$$\bar{r}_P = \bar{r}_{O'} + \bar{r}_{P/O'}$$

..... 4-63

Donde

$\bar{r}_{O'}$ = Vector de Posición del sistema móvil

$$\bar{r}_{O'} = X\hat{I} + Y\hat{J} + Z\hat{K}$$

..... 4-64

$\bar{r}_{P/O'}$ = Vector de Posición Relativo respecto del sistema de referencia móvil

$$\vec{r}_{P/O'} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

..... 4-65

De esta manera, el Vector de Posición Absoluta queda como

$$\vec{r}_P = (X\hat{I} + Y\hat{J} + Z\hat{K}) + (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

Definición 4-7: Posición de punto en el espacio dado un sistema de referencia móvil

Sea un sistema de referencia fijo $O(X,Y,Z)$, un sistema de referencia móvil $O'(x,y,z)$ y un punto de interés P, el vector de posición de O a P está dado por

$$\vec{r}_P = (X\hat{I} + Y\hat{J} + Z\hat{K}) + (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

..... 4-66

Definición 4-8: Teorema de Poisson

Sea un vector unitario \hat{e} que rota en el espacio respecto al vector ϖ , la derivada respecto al tiempo y (únicamente) orientación se encuentra como

$$\frac{d}{dt}\hat{e} = \varpi \times \hat{e}$$

..... 4-67

De manera que, para obtener la velocidad del punto se deriva respecto del tiempo la posición (ecuación 4-66), usando el teorema de Poisson (ecuación 4-67)

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}\vec{r}_P$$

..... 4-68

Definición 4-9: Velocidad de un punto en el espacio dado un sistema de referencia móvil

Sea un sistema de referencia fijo $O(X,Y,Z)$, un sistema de referencia móvil $O'(x,y,z)$ que rota respecto del vector ϖ y un punto de interés P, el vector de velocidad absoluta de O a P es

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}_{P/O'} + \varpi \times \vec{r}_{P/O'}$$

..... 4-69

De manera gráfica la velocidad tiene la siguiente forma

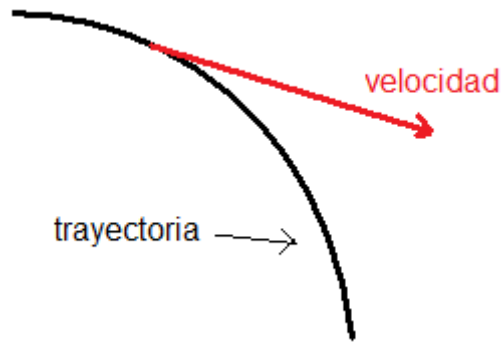


Figura 4-2: Velocidad vectorial (siempre tangente) sobre una trayectoria

De forma similar, para obtener la aceleración del punto se deriva la velocidad (ecuación 4-69) respecto del tiempo, usando también el teorema de Poisson

$$\bar{a}_P = \frac{d}{dt} \bar{v}_P$$

..... 4-70

Definición 4-10: Aceleración de un punto en el espacio dado un sistema de referencia móvil

Sea un punto de interés P visto desde un sistema de referencia fijo $O(X, Y, Z)$ y un sistema de referencia móvil $O'(x, y, z)$ que tiene velocidad angular ω y una aceleración angular α , el vector de aceleración absoluta de O a P es

$$\bar{a}_P = \bar{a}_{O'} + \bar{a}_{P/O'} + 2\omega \times \bar{v}_{P/O'} + \alpha \times \bar{r}_{P/O'} + \omega \times (\omega \times \bar{r}_{P/O'})$$

..... 4-71

La cual se puede reescribir como

$$\bar{a}_P = \bar{a}_T + \bar{a}_N$$

..... 4-72

Donde

\bar{a}_T = Aceleración Tangencial

$$\bar{a}_T = \bar{a}_{O'} + \bar{a}_{P/O'} + 2\omega \times \bar{v}_{P/O'} + \alpha \times \bar{r}_{P/O'}$$

..... 4-73

\bar{a}_N = Aceleración Normal

$$\bar{a}_N = \omega \times (\omega \times \bar{r}_{P/O'})$$

..... 4-74

De donde se desprende que la aceleración total de un punto en el espacio se obtiene como la suma de

$\bar{a}_{O'}$ = Aceleración lineal del sistema móvil, es tangencial

$\bar{a}_{P/O'}$ = Aceleración lineal del sistema móvil al punto, es tangencial

$2\omega \times \bar{v}_{P/O'}$ = Aceleración de Coriolis (\bar{a}_C), –en honor al físico Gustav Coriolis– aceleración generada por los efectos de la rotación de la tierra, es tangencial

$\alpha \times r_{P/O'}$ = Aceleración generada por los efectos de la aceleración angular del sistema móvil, es tangencial

$\omega \times (\omega \times r_{P/O'})$ = Aceleración generada por los efectos de la velocidad del sistema móvil, es normal, pues siempre está dirigida hacia el centro de la trayectoria. Si la trayectoria es rectilínea no existe. Se conoce también como aceleración *centrífuga*

Una forma gráfica de explicar esta aceleración es con el siguiente diagrama

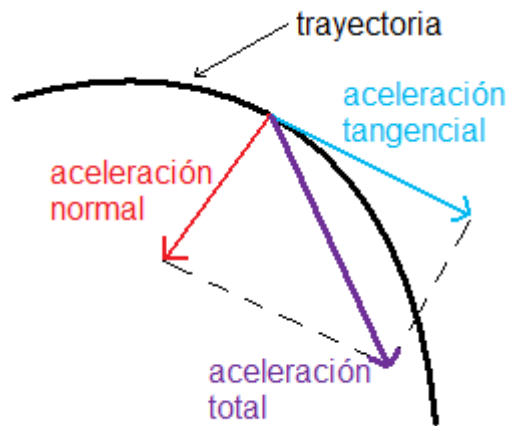


Figura 4-3: Descomposición vectorial de la aceleración en el movimiento relativo

De acuerdo con la ecuación 4-37, la velocidad del punto 1 y punto 2 es

$$V_1 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto es debido a que el punto 1 y 2 son los puntos que representan la posición del carro y la base del robot, por lo que su velocidad será respectivamente la del carro, que tiene como componentes la velocidad en cada grado de libertad del carro.

Por otro lado, el Jacobiano del punto 1 es $J_{1red} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ considerando 2 grados

de libertad y $J_{1(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ si se consideran 3 grados de libertad, mientras

que el Jacobiano del punto 2 es $J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. De estos, puede verse que

a menos que se considere únicamente los dos primeros renglones y las dos primeras columnas, el jacobiano es invertible, lo cual es una propiedad importante que se mencionará en el siguiente capítulo.

En la ecuación 4-54 se presentó el siguiente modelo de la velocidad del punto 3 del robot

$$V_3 = \begin{bmatrix} \dot{x} + l_3 \{(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) - \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3)\} \\ \dot{y} - l_3 \{(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) - \dot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3)\} \\ -\dot{\theta}_3 l_3 \text{sen}(\theta_3) \end{bmatrix}$$

De acuerdo con la definición 4-69, esta velocidad pudo haberse obtenido como la velocidad del sistema móvil, \dot{x} en la componente x y \dot{y} en la componente y, más la velocidad del sistema móvil, que en el caso del punto 3 se trata de la velocidad del brazo, que son $(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3)$ y $-(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3)$ para la componente x y y respectivamente. Además se puede notar que el tercer término tanto de la componente x como de la componente y es la velocidad angular del sistema de referencia móvil, que en este caso se trata del eslabón 1, tanto en la rotación respecto al plano por el cual se desplaza el carro como la rotación que tiene respecto a la articulación.

De esta forma podemos ver que a partir de los métodos matemáticos puede comprobarse la teoría cinemática del movimiento relativo.

Por otro lado, el Jacobiano relacionado al punto 3 es (de acuerdo con la ecuación 4-52)

$$J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) \\ 0 & 1 & -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & -l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l_3 \text{sen}(\theta_3) \end{bmatrix}$$

Del cual si se quiere obtener una inversa, se tienen que elegir 3 columnas; sin embargo, como puede verse, las columnas 3 y 4 son completamente iguales, por lo que si llegaran a elegirse estas dos columnas, la inversa no existiría debido a las condiciones matemáticas que marca el álgebra lineal (inversa de una matriz por medio del análisis del rango de la misma, para mayor referencia, revisar [21]). Esto se da principalmente porque la columna 3 se obtuvo por medio de la derivada respecto a θ_2 y la columna 4 se obtuvo por medio de la derivada respecto a θ_3 , y estos dos ángulos físicamente están empalmados uno sobre el otro.

Sin embargo, si se seleccionaran 3 columnas, incluida siempre la 5, y sin que aparecieran la 3 y la 4 al mismo tiempo, podría obtenerse una inversa de esta matriz reducida. Por ejemplo, los siguientes conjuntos de columnas podrían generar una inversa: (1,2,5), (1,3,5), (2,3,5),...

En la ecuación 4-62 presentó el siguiente modelo de velocidad para el punto 4

$$V_4 = \begin{bmatrix} \dot{x} + (\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} - \cos(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\theta_3 + \theta_4) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\} \\ y - (\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} - \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\theta_3 + \theta_4) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\} \\ (\theta_3 + \theta_4) l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) - \theta_3 l_3 \text{sen}(\theta_3) \end{bmatrix}$$

De este, se puede ver (aunque ya no de manera tan clara) los elementos constituyentes de la velocidad en un movimiento relativo.

Para comprobarlo se puede analizar claramente la componente x de esta velocidad. Primeramente, vemos que se hace presente la velocidad del sistema móvil (\dot{x}). Sumada a esta vemos la velocidad del punto vista desde el sistema móvil ($(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\}$) y por último se tiene la velocidad del sistema móvil multiplicada por la posición del punto vista desde el sistema de referencia móvil ($-\cos(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\theta_3 + \theta_4) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\}$). Es obvio que este último término es escalar, pues se obtuvo como la componente x del vector de velocidad del sistema móvil (el eslabón 1 y 2), multiplicada por la posición desde la base del robot hasta el punto en cuestión (en este caso, el punto 4).

El Jacobiano relacionado al punto es

$$J_4 = [J_{4mov} \mid J_{4man}]$$

Donde

$$J_{4mov} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} \\ 0 & 1 & -\cos(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{4man} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} & -\cos(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 l_3 \cos(\theta_3) + l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\} & -\cos(\theta_1 + \theta_2) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) \\ -\cos(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} & -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 l_3 \cos(\theta_3) + l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\} & -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) \\ 0 & l_3 \text{sen}(\theta_3) + l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) & l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \end{bmatrix}$$

Como puede verse, y de acuerdo con los preceptos del álgebra lineal, la matriz J_{4mov} no es invertible, debido a que tiene todo un renglón de ceros. Más adelante, en el capítulo siguiente, el de mecánica inversa, se verá la interpretación física que esto repercute.

Por otro lado, se puede ver que J_{4man} es invertible, y si se ve como una matriz de términos algebraicos se tendría

$$J_{4man} = \begin{bmatrix} ab & cd & cf \\ cb & -ad & -af \\ 0 & e & g \end{bmatrix}$$

Con

$$a = \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$$

$$b = \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_3)\}$$

$$c = -\cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$d = \{l_3 \cos(\theta_3) + l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_3)\}$$

$$e = l_3 \text{sen}(\theta_3) + l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)$$

$$f = l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)$$

$$g = l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)$$

Por lo cual se puede ver que esta matriz no tiene una forma especial, sin embargo, como se mencionó anteriormente, tiene inversa, aunque no sea tan fácil de obtener y/o reducir.

Nuevamente, la interpretación física de este resultado matemático se verá en el siguiente capítulo

4.5 ACELERACIONES DEL ROBOT

En la sección 4.2 se presentaron las ecuaciones necesarias (basadas en el cálculo vectorial) para poder hallar tanto la velocidad como la aceleración de un punto conociendo el modelo del mismo en función de los grados de libertad y el mismo vector de grados de libertad con su correspondiente vector de derivadas y segundas derivadas. En esta sección se expresarán de manera analítica esos modelos expresados para el robot en cuestión.

De acuerdo con las ecuaciones para obtener el modelo cinemático, la aceleración puede obtenerse como

$$A = J(P(q)) \cdot \ddot{q} + \left\{ \frac{d}{dt} J(P(q)) \right\} \cdot \dot{q},$$

$$\frac{d}{dt} J(P(q)) = \frac{\partial J(P(q))}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial J(P(q))}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial J(P(q))}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n$$

O bien

$$A = \frac{\partial V}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_n} \dot{q}_n + \dots + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_1} \ddot{q}_1 + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_2} \ddot{q}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_n} \ddot{q}_n$$

De esta manera, para los puntos 1,2 y 3 se obtendrá de la primera forma, mientras que para el punto 4 (el punto terminal) se utilizará la segunda forma, para ejemplificar cada una de ellas.

Punto 1:

La aceleración del punto 1 puede obtenerse como

$$A_1 = J_1 \cdot \ddot{q}_1 + \dot{J}_1 \cdot \dot{q}_1$$

..... 4-75

Siendo $J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, su derivada respecto al tiempo es

$$J_1 = \frac{\partial J_1}{\partial x} x + \frac{\partial J_1}{\partial y} y + \frac{\partial J_1}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1$$

..... 4-76

Resultando ser $\dot{J}_1 = [0]$, por lo cual podemos ver que no tiene cambio respecto al tiempo.

Dada la derivada respecto al tiempo de los grados de libertad 1 (ecuación 4-35)

$$\dot{q}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

El vector de aceleraciones \ddot{q}_1 para el punto 1 es

$$\ddot{q}_1 = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}$$

..... 4-77

De esta forma, la aceleración para el punto 1 queda como

$$A_1 = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}$$

..... 4-78

Punto 2:

La aceleración del punto 2 puede obtenerse como

$$A_2 = J_2 \cdot \ddot{q}_2 + \dot{J}_2 \cdot \dot{q}_2$$

..... 4-79

Siendo $J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, su derivada respecto al tiempo es

$$\dot{J}_2 = \frac{\partial J_2}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial J_2}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial J_2}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial J_2}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2$$

..... 4-80

Para este punto, la el vector de velocidades articulares (derivadas de los grados de libertad, ecuación 4-44) es

$$\dot{q}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Y el vector de aceleraciones articulares (el vector de derivadas correspondiente al anterior) es

$$\ddot{q}_2 = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

..... 4-81

De esta forma, la aceleración del punto 2 es

$$A_2 = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

..... 4-82

Punto 3:

La aceleración del punto 3 puede obtenerse por medio de la ecuación

$$A_3 = J_3 \cdot \ddot{q}_3 + \dot{J}_3 \cdot \dot{q}_3$$

..... 4-83

Siendo

$$J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) \\ 0 & 1 & -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & -l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l_3 \text{sen}(\theta_3) \end{bmatrix}$$

$$\dot{q}_3 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

Y consecuentemente

$$\ddot{q}_3 = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

..... 4-84

Para obtener la derivada respecto al tiempo del Jacobiano 3 se usa la ecuación

$$\dot{J}_3 = \frac{\partial J_3}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial J_3}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial J_3}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial J_3}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 + \frac{\partial J_3}{\partial \theta_3} \dot{\theta}_3$$

..... 4-85

Dando como resultados parciales

$$\frac{\partial J_3}{\partial x} \dot{x} = \bar{0}; \quad \frac{\partial J_3}{\partial y} \dot{y} = \bar{0}$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta_1 l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & \theta_1 l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & \theta_1 l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) \\ 0 & 0 & \theta_1 l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & \theta_1 l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & -\theta_1 l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta_2 l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & \theta_2 l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & \theta_2 l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) \\ 0 & 0 & \theta_2 l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & \theta_2 l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & -\theta_2 l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \theta_3} \dot{\theta}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta_3 l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) & \theta_3 l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) & \theta_3 l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) \\ 0 & 0 & -\theta_3 l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) & \theta_3 l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) & \theta_3 l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l_3 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3) \end{bmatrix}$$

Por lo que el producto $J_3 \cdot \dot{q}_3$ es

$$J_3 \cdot \dot{q}_3 = l_3 \begin{bmatrix} (\theta_1 + \theta_2)^2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) + 2(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) + \dot{\theta}_3^2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) \\ (\theta_1 + \theta_2)^2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) - 2(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) + \dot{\theta}_3^2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) \\ -\dot{\theta}_3^2 \cos(\theta_3) \end{bmatrix}$$

..... 4-86

Y paralelamente, el producto $J_3 \cdot \ddot{q}_3$ queda como

$$J_3 \cdot \ddot{q}_3 = \begin{bmatrix} \dot{x} + l_3 \{ (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) - \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) \} \\ \dot{y} - l_3 \{ (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) - \ddot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) \} \\ - \ddot{\theta}_3 l_3 \text{sen}(\theta_3) \end{bmatrix}$$

..... 4-87

Por lo que la aceleración del punto 3 queda como

$$A_3 = \begin{bmatrix} \dot{x} + l_3 \{ (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) - \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) + 2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) + [(\theta_1 + \theta_2)^2 + \theta_3^2] \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) \} \\ \dot{y} - l_3 \{ (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) - \ddot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) - 2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) + [(\theta_1 + \theta_2)^2 + \theta_3^2] \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) \} \\ l_3 \{ - \ddot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_3) - \theta_3^2 \cos(\theta_3) \} \end{bmatrix}$$

..... 4-88

Punto 4:

Para la aceleración del punto 4 puede obtenerse de acuerdo con

$$A_4 = \frac{\partial V_4}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V_4}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial V_4}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial V_4}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 + \frac{\partial V_4}{\partial \theta_3} \dot{\theta}_3 + \frac{\partial V_4}{\partial \theta_4} \dot{\theta}_4 + \frac{\partial V_4}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial V_4}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial V_4}{\partial \theta_1} \ddot{\theta}_1 + \frac{\partial V_4}{\partial \theta_2} \ddot{\theta}_2 + \frac{\partial V_4}{\partial \theta_3} \ddot{\theta}_3 + \frac{\partial V_4}{\partial \theta_4} \ddot{\theta}_4$$

..... 4-89

Siendo

$$V_4 = \begin{bmatrix} \dot{x} + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \} - \cos(\theta_1 + \theta_2) \{ \dot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) \} \\ \dot{y} - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \} - \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{ \dot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) \} \\ (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) - \dot{\theta}_3 l_3 \text{sen}(\theta_3) \end{bmatrix}$$

$$q_4 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix}$$

$$q_4 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix}$$

..... 4-90

Los resultados parciales son

$$\frac{\partial V_4}{\partial x} \dot{x} = \bar{0}; \quad \frac{\partial V_4}{\partial y} \dot{y} = \bar{0}$$

$$\frac{\partial V_4}{\partial \dot{x}} \dot{x} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial V_4}{\partial \dot{y}} \dot{y} = \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_4}{\partial \theta_2} &= \begin{bmatrix} (\theta_1 + \theta_2)\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)\{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} + \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\{\dot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\theta_3 + \theta_4)l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\} \\ (\theta_1 + \theta_2)\dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} - \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)\{\dot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\theta_3 + \theta_4)l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial V_4}{\partial \theta_3} &= \begin{bmatrix} (\theta_1 + \theta_2)\dot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\{l_3 \cos(\theta_3) + l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\} - \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 + \theta_2)\{\dot{\theta}_3 l_3 \text{sen}(\theta_3) + (\theta_3 + \theta_4)l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} \\ -(\theta_1 + \theta_2)\dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 + \theta_2)\{l_3 \cos(\theta_3) + l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\} - \dot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\{\dot{\theta}_3 l_3 \text{sen}(\theta_3) + (\theta_3 + \theta_4)l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} \\ -(\theta_3 + \theta_4)\dot{\theta}_3 l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) - \dot{\theta}_3^2 l_3 \cos(\theta_3) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial V_4}{\partial \theta_4} &= \begin{bmatrix} (\theta_1 + \theta_2)\dot{\theta}_4 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) - \dot{\theta}_4(\theta_3 + \theta_4)l_4 \cos(\theta_1 + \theta_2)\cos(\theta_3 + \theta_4) \\ -(\theta_1 + \theta_2)\dot{\theta}_4 \cos(\theta_1 + \theta_2)l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) - \dot{\theta}_4(\theta_3 + \theta_4)l_4 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\cos(\theta_3 + \theta_4) \\ -(\theta_3 + \theta_4)\dot{\theta}_4 l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial V_4}{\partial \theta_1} &= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} \\ -\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)\{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} \\ 0 \end{bmatrix} & \frac{\partial V_4}{\partial \theta_2} &= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} \\ -\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)\{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial V_4}{\partial \theta_3} &= \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 + \theta_2)\{l_3 \cos(\theta_3) + l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\} \\ -\dot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\{l_3 \cos(\theta_3) + l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\} \\ \dot{\theta}_3 l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) - l_3 \dot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_3) \end{bmatrix} & \frac{\partial V_4}{\partial \theta_4} &= \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_4 \cos(\theta_1 + \theta_2)l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) \\ -\dot{\theta}_4 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) \\ \dot{\theta}_4 l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, la aceleración del punto 4, en componentes, es

$$A_4 = \begin{bmatrix} A_{4x} \\ A_{4y} \\ A_{4z} \end{bmatrix}$$

..... 4-91

Las componentes de la aceleración (después de ciertas reducciones algebraicas y trigonométricas) son

$$\begin{aligned} A_{4x} &= \ddot{x} + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \cos(\theta_1 + \theta_2)\{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} \\ &\quad + 2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\{\dot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\theta_3 + \theta_4)l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\} \\ &\quad - \cos(\theta_1 + \theta_2)\{\dot{\theta}_3^2 l_3 \text{sen}(\theta_3) + (\theta_3 + \theta_4)^2 l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} \\ &\quad + (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} \\ &\quad - \cos(\theta_1 + \theta_2)\{\ddot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4)l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\} \end{aligned}$$

..... 4-92

$$\begin{aligned} A_{4y} &= \ddot{y} + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} \\ &\quad - 2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)\{\dot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\theta_3 + \theta_4)l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\} \\ &\quad - \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\{\dot{\theta}_3^2 l_3 \text{sen}(\theta_3) + (\theta_3 + \theta_4)^2 l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} \\ &\quad - (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)\{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} \\ &\quad - \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\{\ddot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4)l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\} \end{aligned}$$

..... 4-93

$$A_{4z} = -(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2 l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) - \dot{\theta}_3^2 l_3 \cos(\theta_3) + (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4)l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) - \dot{\theta}_3 l_3 \text{sen}(\theta_3)$$

..... 4-94

4.6 INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS DE ACELERACIONES

En la sección 4.4, desde la ecuación 4-70 hasta la ecuación 4-74, junto con la definición 4-10 y la figura 4-3 se presentó el modelo cinemático de la aceleración para una partícula en el espacio usando movimiento relativo.

A partir de estas ecuaciones puede darse una interpretación física de los modelos presentados en la sección anterior, a partir de los cuales pueda surgir un análisis no sólo de tipo matemático, si no también mecánico e inclusive robótico. Así pues, a continuación se presentará la relación de las ecuaciones mencionadas con el movimiento relativo.

En la ecuación 4-78 y 4-82 se presento que la aceleración tanto del punto 1 como del punto 2 está dada por

$$A_2 = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto debido a que tanto el punto 1 es la base del carro y el punto 2 es la base del manipulador, por lo que su aceleración es únicamente lineal y generada por las componentes de la posición del carro, además de no verse afectadas por la rotación que pudiera tener el mismo carro o el robot.

Para los siguientes puntos es conveniente colocar de nueva cuenta las ecuaciones 4-71 y 4-72, necesarias para el análisis de las aceleraciones.

$$\bar{a}_p = \bar{a}_{O'} + \bar{a}_{P/O'} + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_{P/O'} + \bar{\alpha} \times \bar{r}_{P/O'} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{P/O'})$$

Que de manera escalar queda como

$$a_p = a_{O'} + a_{P/O'} + 2\omega v_{P/O'} + \alpha r_{P/O'} + \omega^2 r_{P/O'}$$

..... 4-95

Y como se explicó anteriormente, el último término es el único correspondiente con la aceleración normal, mientras que todos los demás son aceleración tangencial, incluida la aceleración de Coriolis y la generada por la aceleración angular. Así la ecuación anterior podría escribirse en términos de aceleración tangencial y normal de forma vectorial como

$$\bar{a}_p = \bar{a}_T + \bar{a}_N$$

Es importante comentar que de todas estas aceleraciones de la que posiblemente no se pueda tener mucho control e inclusive es un término que podría pensarse que está de más es la aceleración de Coriolis, sin embargo, esta aceleración es sumamente importante, ya que es atribuida en gran manera a la aceleración centrípeta (aquella que arroja a los cuerpos fuera de su trayectoria de manera perpendicular).

Como se vio en la ecuación 4-88 la aceleración del punto 3 está dada por

$$A_3 = \begin{bmatrix} x + l_3 \{ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) - \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) + 2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) + [(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \dot{\theta}_3^2] \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) \} \\ y - l_3 \{ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) - \ddot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) - 2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) + [(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \dot{\theta}_3^2] \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) \} \\ l_3 \{ -\ddot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_3) - \dot{\theta}_3^2 \cos(\theta_3) \} \end{bmatrix}$$

y para ejemplificar el uso y aplicación de la ecuación de aceleración se analizará la componente x de esta última, obtenida de una operación vectorial. Se tomará en cuenta primeramente que el sistema móvil es el carro, y el punto en cuestión es el punto 3, afectado por la rotación del carro, del robot y del ángulo del primer eslabón. Podemos ver primeramente que se tiene la aceleración \ddot{x}_1 , correspondiente con la aceleración lineal del carro.

Por otro lado, podemos ver que el término correspondiente a $\omega \times r_{P/O'}$ es $-\ddot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) + (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3)$, debido a que la aceleración del eslabón, combinada con las rotaciones tanto del carro como del robot corresponde con el del sistema móvil. El término que corresponde a la aceleración lineal del sistema móvil al punto ($\ddot{a}_{P/O'}$) no existe, ya que el punto solamente tiene rotación y no traslación respecto al sistema móvil.

Por último para este punto, se tiene $[(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \dot{\theta}_3^2] l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3)$ como parte del producto de $\omega \times (\omega \times r_{P/O'})$, pues si lo vemos de forma escalar tendríamos $a_N = \omega^2 r_{P/O'}$, por lo que vemos que este término incluye velocidades al cuadrado $[(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \dot{\theta}_3^2]$ y un radio ($l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3)$), que aunque no se ve claramente, es en tres dimensiones, pues los ángulos 1 y 2 son perpendiculares al ángulo 3. Este término es importante para la dinámica, ya que comúnmente esta aceleración queda perdida en el uso e inclusive afecta al rendimiento del movimiento del robot.

De esta manera, vemos que para la robótica la diferenciación de los términos es difícil, principalmente porque los radios no son tan obvios y en cierto punto difícil de obtener.

Para ver qué ocurre con la aceleración del punto terminal se utilizará la ecuación correspondiente con la componente x de la aceleración del punto 4. Recordemos que para este punto el sistema móvil sigue siendo el carro y su rotación, compuesta por el ángulo $\theta_1 + \theta_2$, y que se trata de resultados escalares, obtenidos por medio de una operación vectorial.

$$\begin{aligned} A_{4x} = & \ddot{x} + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & + 2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{ \dot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & - \cos(\theta_1 + \theta_2) \{ \dot{\theta}_3^2 l_3 \text{sen}(\theta_3) + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2 l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & + (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & - \cos(\theta_1 + \theta_2) \{ \ddot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) \} \end{aligned}$$

A continuación se analizará término a término

x : Corresponde con el término de aceleración lineal $\alpha_{O'}$, relacionada con la aceleración lineal en x del carro.

$2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{ \dot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) \}$: Término correspondiente a la aceleración de Coriolis ($2\vec{\omega} \times \vec{v}_{P/O'}$, vectorial; $2\omega v_{P/O'}$, escalar), pues como se ve, incluye la velocidad combinada de $\theta_1 + \theta_2$, que toma lugar como ω , mientras que los demás términos toman lugar como la velocidad del punto 4 visto desde el sistema móvil. $\dot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$ es la correspondiente velocidad del eslabón 1 y $(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$ correspondiente a la velocidad relativa del eslabón 2.

$$(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \} \quad y \quad -\cos(\theta_1 + \theta_2) \{ \ddot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) \}$$

Términos relacionados con la aceleración generada por la aceleración angular ($\vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/O'}$, vectorial; $\alpha r_{P/O'}$, escalar), ya que como se ve, aparece $(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \}$ que incluye la aceleración angular $(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$, por lo que se puede concluir que este término es la aceleración tangencial generada por la rotación del carro y/o del robot. Así mismo, el término $-\cos(\theta_1 + \theta_2) \{ \ddot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) \}$ corresponde concluyentemente con la aceleración tangencial generada por la aceleración angular de los eslabones, tanto $\ddot{\theta}_3$ como $(\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4)$, por ser un ángulo relativo.

$$(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \} \quad y \quad -\cos(\theta_1 + \theta_2) \{ \dot{\theta}_3^2 l_3 \text{sen}(\theta_3) + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2 l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \}$$

Términos relacionados con la aceleración normal ($\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/O'})$, vectorial; $\omega^2 r_{P/O'}$, escalar), ya que dentro de su composición incluyen el cuadrado de velocidades. $(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \}$ está dado gracias a la rotación tanto del carro como del robot sobre el plano. Así, podemos ver que el radio (en el eje x) del sistema móvil (que es el sistema 1) corresponde con la posición enunciada en las ecuaciones 3-38 y 3-52.

Por otro lado, vemos que el término $-\cos(\theta_1 + \theta_2) \{ \dot{\theta}_3^2 l_3 \text{sen}(\theta_3) + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2 l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \}$ corresponde con la aceleración normal generada por la rotación de los eslabones 1 y 2, movimiento generado por los ángulos θ_3 y $\theta_3 + \theta_4$. De hecho, puede reacomodarse este último término y verse también que es cada velocidad angular al cuadrado multiplicada por el radio desde ese sistema de referencia hasta el punto 4. Se ve reflejado en $-\cos(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_3^2 l_3 \text{sen}(\theta_3)$, que está relacionado con el sistema 2 y $-\cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2 l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)$ con el sistema 3.

Tal y como en el caso anterior, no existe término correspondiente a aceleración lineal relativa, pues el punto únicamente rota en torno al carro.

CAPÍTULO 5 ESTÁTICA Y CINEMÁTICA INVERSA DEL ROBOT

5.1 INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS INVERSO

Uno de los puntos clave de la ingeniería es la llamada *ingeniería inversa*, que tiene como piedra fundamental el poder entender los procesos y fenómenos, para que una vez comprendidos y analizados se pueda proceder en sentido contrario, es decir, que se propongan las condiciones finales de un proceso o fenómeno y así obtener las condiciones iniciales del mismo.

Por ejemplo, si en cierto problema se tuviera como ecuación de velocidad

$$v = at + v_i$$

..... 5-1

Donde $v = v(t)$

Se puede ver que la velocidad depende del tiempo, por lo que si se sustituye cierto valor del tiempo se obtendrá un valor de velocidad. Si lo que ahora se quiere es obtener el valor del tiempo para el cual la velocidad tiene cierto valor, se requiera dejar el tiempo en función de la velocidad, $t = t(v)$, resultando en este caso

$$t = \frac{v - v_i}{a}$$

..... 5-2

En muchas ocasiones la ecuación que describe la condición contraria puede hallarse por medio de métodos analíticos, sin embargo, existen casos en los que únicamente puede hallarse la relación inversa por medio de algún método numérico o bien geométrico. Si fuera el caso de un conjunto de variables que dan como resultado otro conjunto (como en un sistema de ecuaciones), entonces la relación inversa debe proveer un conjunto de ecuaciones que resuelva la problemática.

En el caso de la robótica –como se ha visto anteriormente – la posición, velocidad y aceleración dependen de los valores de los grados de libertad y sus respectivas derivadas del mismo robot, por lo que el análisis inverso consiste en hallar el valor de estos dada una posición, velocidad o aceleración.

En los dos capítulos anteriores se presentaron los modelos matemáticos de la estática y cinemática que describen al robot. En este capítulo se explicará la teoría necesaria para la obtención de los modelos inversos tanto de posición como de velocidad para cada caso, sin dejar de lado que la presentación de algunos de los mismos se deja para trabajos posteriores, por su extensión y dificultad.

Hay que mencionar que para este capítulo se utilizarán muchos de los conceptos importantes del cálculo (tanto escalar como vectorial), algebra lineal, geometría, etc. Para cualquier referencia matemática necesaria la bibliografía se encuentra al final de este trabajo.

5.2 ESTÁTICA Y CINEMÁTICA INVERSA

ESTÁTICA INVERSA

De acuerdo con el capítulo 3, la posición del punto terminal de un robot puede expresarse de la siguiente forma

$$P = \begin{bmatrix} P_x(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ P_y(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ P_z(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ P_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ P_\beta(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ P_\gamma(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{bmatrix}$$

..... 5-3

O bien

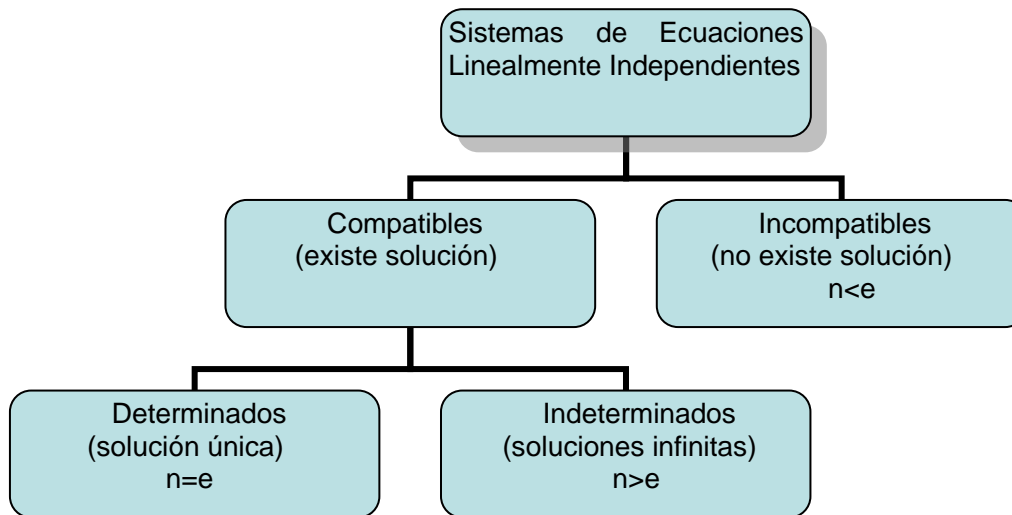
$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_\alpha \\ P_\beta \\ P_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ f_2(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ f_3(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ f_4(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ f_5(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ f_6(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{bmatrix}$$

..... 5-4

De lo cual puede observarse que cada componente de la posición (las 3 primeras correspondientes con la traslación y las 3 segundas correspondientes con la orientación) depende de los n grados de libertad, derivando de esta forma que la posición es una *función vectorial de variable vectorial* (ver la sección 3.1 del capítulo 3, *Estática del manipulador*).

De acuerdo con la teoría de existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones del ALGEBRA LINEAL, para que un sistema de ecuaciones linealmente independiente (ver [21]) tenga solución única es necesario que exista el mismo número de ecuaciones y de incógnitas, y se llama sistema *compatible determinado*. Si tiene más incógnitas que ecuaciones, se trata de un sistema *compatible indeterminado*, de manera que la solución es redundante y tiene una infinidad de ellas (pues quedan en función de una de las variables involucradas). Por otro lado, si tiene menos incógnitas que ecuaciones, entonces se trata de un sistema de ecuaciones *incompatible*, ya que carece de soluciones al no haber suficientes incógnitas para satisfacer todas las condiciones descritas. La siguiente imagen resume esta información en un cuadro sinóptico.

En el n representa el número de incógnitas, mientras que e representa el número de ecuaciones del sistema.



En la ecuación 5-4 puede verse que la posición del robot es matemáticamente un sistema de ecuaciones linealmente independiente. Así, si lo que se quiere es hallar el valor de los grados de libertad, llamada también *posición articular*, es necesario resolver el sistema de ecuaciones generado al proveer el valor de cada coordenada correspondiente a las componentes de la posición. Sin embargo, físicamente puede darse cualquier caso en la naturaleza de soluciones de la determinación del valor de los grados de libertad de un robot.

Siempre que se tenga el mismo número de componentes que de grados de libertad se tendrá una única solución. Pero si se tienen más grados de libertad que componentes, se dice que el robot está *sobredeterminado* o *redundante*, pues hay que entregar el valor de alguno(s) de los grados de libertad para poder crear un sistema de ecuaciones compatible determinado. Por ejemplo, para un robot de 2 grados de libertad es posible obtener 2 coordenadas de posición, así como para un robot de 3 grados de libertad es posible manejar 3 coordenadas de posición (que es el número máximo de coordenadas de posición que se pueden generar). Si existen más de 3 grados de libertad entonces se utilizan los grados de libertad restantes para obtener la orientación del efector final, gracias a los ángulos directores respecto a cada eje de movimiento.

Sin embargo, si el robot tiene una cantidad de grados de libertad no puede generar más componentes que estos, por lo que un robot tridimensional requiere de al menos 3 grados de libertad (salvo excepciones extrañas).

Así entonces, para un robot en el cual únicamente interesa la posición y no la orientación del efector final, es necesario construir un sistema de ecuaciones de 3x3, por lo que para robots con más grados se necesita dejar fijos los valores de los demás. Puede verse que cada vez que se resuelve el sistema de ecuaciones se obtiene un valor diferente para cada grado de libertad, por lo que si se selecciona una serie de puntos en el espacio pueden hallarse las condiciones necesarias para crear cierta trayectoria. Este es el principio del análisis de trayectorias en la robótica. Cabe destacar por último que el tipo de resolución que se usa es numérico ya que los sistemas de ecuaciones generados son altamente no lineales, pues incluyen senos, cosenos, etc.

CINEMÁTICA INVERSA

Así como puede encontrarse la *posición articular* de un robot, puede hallarse la *velocidad articular* y *aceleración articular* del robot. A continuación se mostrará las formas de poder encontrarlas.

Velocidad inversa

De acuerdo con la ecuación 4-14, la velocidad de un robot puede hallarse gracias a la posición como

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} P_1 \\ \frac{d}{dt} P_2 \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} P_m \end{bmatrix}$$

Usando la ecuación 5-13, puede verse que la posición y orientación del efector final del robot depende de los n grados de libertad

$$P = \begin{bmatrix} P_x(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ P_y(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ P_z(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ P_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ P_\beta(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ P_\gamma(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{bmatrix}$$

De esta manera, y gracias a la ecuación 4-14 la velocidad de las componentes del efector final (tanto en posición como en orientación) dependen a su vez de las derivadas de los n grados de libertad.

$$V = \begin{bmatrix} V_x(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\ V_y(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\ V_z(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\ V_\alpha(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\ V_\beta(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\ V_\gamma(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \end{bmatrix}$$

..... 5-5

O bien

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ V_\alpha \\ V_\beta \\ V_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\ f_2(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\ f_3(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\ f_4(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\ f_5(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\ f_6(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \end{bmatrix}$$

..... 5-6

Así entonces, y de igual forma que con la posición, se puede hallar la velocidad por medio del sistema de ecuaciones generado a partir de proponer la velocidad en cada componente en la ecuación 5-6. Sin embargo, para este caso no se obtiene el valor de los grados de libertad, si no el valor numérico de sus derivadas.

Nuevamente hay que notar que por cada vector de velocidad que se proponga se hallara un vector de valores de las derivadas de los grados de libertad correspondientes, además de que el sistema generado es altamente no lineal.

Para hallar la velocidad articular del robot existe una forma alternativa, que es completamente analítica. De acuerdo con la teoría de los sistemas de ecuaciones, si un sistema puede representarse como

$$Ax = B$$

Donde A es la matriz de elementos que al multiplicarse por el vector x de incógnitas da por resultado el vector B de elementos independientes.

Para resolver el sistema de ecuaciones se “despeja” el vector de incógnitas

$$x = A^{-1}B$$

Siempre y cuando exista la inversa de la matriz A, lo que implica a su vez que el determinante del mismo sea diferente de 0 (ya que la inversa de una matriz cuadrada puede obtenerse como su adjunta transpuesta entre el determinante).

De esta forma, de acuerdo con la ecuación 4-17 y 4-20, la velocidad del efector puede obtenerse como

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \frac{\partial P_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial P_2}{\partial q_1} & \frac{\partial P_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_m}{\partial q_1} & \frac{\partial P_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial P_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$V = J(P(q)) \cdot \dot{q}$$

Donde recordemos que $J(P(q))$ es el Jacobiano del punto P, que es una matriz de cuando mucho 6 renglones (por ser el número máximo de grados de libertad para definir la ubicación y/u orientación de un cuerpo), y del mismo número de columnas de los grados de libertad.

Así, si lo que queremos es obtener el vector \dot{q} de la expresión

$$V = J(P(q)) \cdot \dot{q}$$

Hay que despejar matricialmente ese vector, obteniendo

$$\dot{q} = [J(P(q))]^{-1}V$$

..... 5-7

De la última expresión puede apreciarse que es posible obtener la velocidad articular del robot multiplicando la inversa de la matriz jacobiana por el vector de velocidades lineales del robot.

El último párrafo menciona un punto sumamente importante de la robótica de manipuladores, ya que solamente si un robot tiene una matriz jacobiana cuadrada (usando posición o bien orientación) de manera “natural” se podrá obtener la velocidad articular del robot por medio de la ecuación 5-7.

Sin embargo, si el robot tiene más grados de libertad que componentes de posición, entonces tendrá una matriz jacobiana con más columnas que renglones, lo cual no permite de primera forma obtener una inversa de esta matriz, por lo que es necesario reducir la matriz hasta hacerla cuadrada, de manera que sea invertible. Lo mismo se da si se tienen dos grados de libertad iguales en la misma orientación, o de otra manera, la inversa no se podrá obtener si se tienen grados de libertad redundantes.

Esta es la razón por la que se tienen que predeterminar ciertos grados de libertad para resolver el sistema de ecuaciones de la estática inversa y hallar la posición articular de un robot. En el siguiente capítulo se detallará más extensamente la importancia de la *invertibilidad* del jacobiano y las combinaciones (no lineales) que pueden darse para hallar las velocidades articulares y a su vez posiciones articulares de un robot.

Aceleración inversa

De acuerdo con la ecuación 4-22, la aceleración del punto terminal del manipulador se obtiene como la derivada paramétrica total de la velocidad del mismo, sin embargo, como la velocidad depende tanto del valor de los grados de libertad como de sus derivadas, entonces la aceleración queda en términos de estas variables.

Sin embargo, y en concordancia con la obtención de la posición y velocidad articular, la obtención de la *aceleración articular* puede hallarse resolviendo el sistema de ecuaciones no lineales generado por la siguiente ecuación para el vector $[\ddot{q}_1 \ \ddot{q}_2 \ \dots \ \ddot{q}_n]^T$ de aceleraciones de los grados de libertad

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial V_1}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial V_1}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n + \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_1} \cdot \ddot{q}_1 + \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_2} \cdot \ddot{q}_2 + \dots + \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_n} \cdot \ddot{q}_n \\ \frac{\partial V_2}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial V_2}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial V_2}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n + \frac{\partial V_2}{\partial \dot{q}_1} \cdot \ddot{q}_1 + \frac{\partial V_2}{\partial \dot{q}_2} \cdot \ddot{q}_2 + \dots + \frac{\partial V_2}{\partial \dot{q}_n} \cdot \ddot{q}_n \\ \vdots \\ \frac{\partial V_m}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial V_m}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial V_m}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n + \frac{\partial V_m}{\partial \dot{q}_1} \cdot \ddot{q}_1 + \frac{\partial V_m}{\partial \dot{q}_2} \cdot \ddot{q}_2 + \dots + \frac{\partial V_m}{\partial \dot{q}_n} \cdot \ddot{q}_n \end{bmatrix}$$

Cabe mencionar que si se quisiera resolver este sistema para las velocidades y aceleraciones articulares se podría siempre y cuando se tuvieran las condiciones necesarias para ello, o sea el mismo número de ecuaciones que estas. Hay otra forma, sin embargo se extenderá esta forma en la siguiente sección del Jacobiano Inverso.

5.3 OBTENCIÓN DE SINGULARIDADES POR MEDIO DEL ANÁLISIS DEL JACOBIANO

En la sección anterior se explicó de forma muy somera que el jacobiano de un robot es sumamente importante para entender la movilidad del mismo, pues está íntimamente relacionado con la velocidad del robot en cuestión, y además puede decirnos de forma más exacta (matemática) en que momentos es posible lograr cierta velocidad del robot, lo que conlleva a saber de la misma forma (matemáticamente) las condiciones de *controlabilidad* del robot.

De manera análoga, gracias al jacobiano inverso es posible saber de forma analítica, por medio de una expresión matemática cerrada, la configuración articular así como la velocidad articular necesaria para lograr que el robot llegue a cierta velocidad lineal. Esto a su vez da pie a ciertos análisis posteriores importantes del robot, como las condiciones de movilidad o desarrollo articular que ocurre en puntos extremos o difíciles de alcanzar.

Si en un momento del desarrollo articular del manipulador la velocidad lineal de algún punto del robot tiende a hacerse 0 por motivos geométricos naturales, esto es, que logre su alcance máximo y no pueda moverse más, quiere decir que se halla en una SINGULARIDAD. De manera coloquial, una *singularidad* la entendemos como un caso extraño en una situación normal, en cuestión científica lo entendemos como un estado de suma importancia para el sistema, ya que a partir de este puede cambiar su estructura posterior. A continuación se expone la definición usada en el trabajo.

Definición 5-1: SINGULARIDAD

Estado o situación geométrica de suma importancia para un robot manipulador o móvil donde tiende a detener su movimiento debido a la condición articular del mismo. Cuando el robot llega a este estado no puede regresar a su estado original, por lo que es importante evitar estas situaciones. Matemáticamente, la tendencia hacia una singularidad esta expresada por la tendencia hacia una indeterminación, que se da por la combinación de los valores articulares.

Así entonces, las condiciones para que existan singularidades pueden hallarse haciendo un análisis exhaustivo del Jacobiano del robot, de igual forma que para hallar los puntos o coordenadas para esto pueden analizarse ciertos elementos como la posición o la velocidad. Este es uno de los puntos clave de la tesis, y uno de los pilares en los cuales está sustentado el trabajo, pues gracias a este mismo pueden preverse las condiciones especiales de trabajo y lograr mejoras en la movilidad del robot.

En términos de matemáticas, física, ingeniería y la vida cotidiana, una singularidad se define de la misma manera, siendo un estado especial del sistema que requiere atención, y que debe atenderse para evitar problemas del sistema, en caso de que la singularidad pueda tender a afectar el propio sistema. Dependiendo el tipo de sistema, en cada caso se halla de forma diferente los puntos de especial atención.

De acuerdo con la ecuación 5-7, para hallar el vector de derivadas de los grados de libertad es

$$\dot{q} = [J(P(q))]^{-1}V$$

Lo que quiere decir que la *condición suficiente y necesaria* para la invertibilidad de la cinemática y a su vez la existencia de una expresión cerrada para la derivada de los grados de libertad (velocidades angulares) del robot, dada una velocidad lineal del mismo punto, es la existencia de la matriz inversa del Jacobiano de la ecuación 4-20

$$V = J(P(q)) \cdot \dot{q}$$

Por lo que debe de cumplirse:

$$\exists \dot{q} \Leftrightarrow \exists [J(P(q))]^{-1}$$

..... 5-8

Lo cual (recordando que la inversa de una matriz puede obtenerse como la matriz adjunta entre el determinante) puede reducirse a:

$$\exists \dot{q} \Leftrightarrow \det[J(P(q))] \neq 0$$

..... 5-9

Siempre que $J(P(q))$ sea cuadrada, por lo que si esta condición no llega a cumplirse, debe de hacerse cierta partición de la matriz original para lograr este cometido, de manera que la nueva matriz sea cuadrada, cuidando que esta nueva matriz sea *no singular*, o bien que tenga *espacio renglón o columna completo*, lo que significa no tener columnas iguales o renglones de ceros.

El procedimiento anterior tiene una gran interpretación física. Para ello se analiza de nuevo la ecuación 4-20 ($V = J(P(q)) \cdot \dot{q}$), esta nos dice que para obtener la velocidad lineal de cierto punto es necesario construir el Jacobiano en base a los grados de libertad involucrados, por lo que la operación inversa mostrada en la ecuación 5-7 ($\dot{q} = [J(P(q))]^{-1}V$) implica que puede obtenerse la velocidad angular del robot en base a ciertas condiciones, de manera que se puede *controlar* al robot por medio de ciertos grados de libertad del robot.

Definición 5-2: CONTROLABILIDAD DEL ROBOT

La *controlabilidad* de un robot es la propiedad que existe para poder lograr cierto estado de posición, velocidad o aceleración lineal dado un estado articular del mismo, sin alcanzar alguna singularidad del espacio de trabajo.

Matemáticamente, la controlabilidad del robot puede analizarse por medio de la existencia de la matriz inversa del Jacobiano, o sea del determinante del mismo. Cuando este se hace 0, los grados de libertad involucrados en la ecuación de la obtención de la velocidad generan un estado de *incontrolabilidad* del robot. Para evitar esta situación, se seleccionan cuidadosamente los grados de libertad que generaran la posición y el movimiento del punto en cuestión, de manera que el Jacobiano tenga inversa.

Es importante comentar que los grados de libertad seleccionados deben de ser *linealmente independientes*, o al menos *independientes*, ya que de no ser así, dos columnas del Jacobiano serán iguales o generaran un renglón de ceros (como se comentó anteriormente), provocando la no invertibilidad del Jacobiano y a su vez la incontrolabilidad del robot para cierto punto de análisis.

Este resultado es sumamente importante para las condiciones de movilidad del mismo, pues a partir del resultado teórico-matemático pueden seleccionarse las variables necesarias para llegar a un punto determinado.

Por ejemplo, a partir de la ecuación 4-52, el Jacobiano del punto 3 es

$$J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) \\ 0 & 1 & -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & -l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l_3 \text{sen}(\theta_3) \end{bmatrix}$$

Si se quiere analizar la movilidad del punto 3 del robot hay que analizar esta matriz, y en primer plano puede verse que se trata de una matriz no cuadrada, por lo que habría que seleccionar 3 columnas siempre que el tercer renglón no sea de completamente de ceros, por lo que la única opción disponible es tomar las 3 últimas columnas, obteniendo:

$$J_{3red} = \begin{bmatrix} l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) \\ -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & -l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) \\ 0 & 0 & -l_3 \text{sen}(\theta_3) \end{bmatrix}$$

..... 5-10

El determinante de esta matriz arroja:

$$\det(J_{3red}) = \begin{vmatrix} l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) \\ -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_3) & -l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_3) \\ 0 & 0 & -l_3 \text{sen}(\theta_3) \end{vmatrix}$$

$$\det(J_{3red}) = 0$$

..... 5-11

Esto debido a que la matriz J_{3red} tiene 2 columnas iguales, lo que imposibilita la invertibilidad de la misma. Lo que ocurre es que la primera columna corresponde con la rotación del carro mientras que la segunda corresponde con la rotación del robot, que es la misma rotación desfasada.

A continuación se realizará uno de los análisis más importantes del trabajo, relacionado con la movilidad del punto terminal (punto 4) del robot.

En la ecuación 4-58 se describió de forma diferencial simbólica el Jacobiano 4 del robot separándolo en Móvil y Manipulador:

$$J_4 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial P_{4x}}{\partial x} & \frac{\partial P_{4x}}{\partial y} & \frac{\partial P_{4x}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{4x}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_{4x}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial P_{4x}}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial P_{4y}}{\partial x} & \frac{\partial P_{4y}}{\partial y} & \frac{\partial P_{4y}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{4y}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_{4y}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial P_{4y}}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial P_{4z}}{\partial x} & \frac{\partial P_{4z}}{\partial y} & \frac{\partial P_{4z}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{4z}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_{4z}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial P_{4z}}{\partial \theta_4} \end{array} \right]$$

Los elementos de la izquierda corresponden con el Jacobiano del Robot Móvil, mientras que los de la derecha son los que conforman el Jacobiano del Manipulador. Hay que recordar que esa misma ecuación puede expresarse, de acuerdo con la ecuación 4-59 como

$$J_4 = [J_{4mov} \mid J_{4man}]$$

Debido a que el Jacobiano 4 describe, junto con el vector de derivadas de todos los grados de libertad del robot, la velocidad del punto terminal del manipulador (Punto 4), y es una matriz de 3 renglones (dados los 3 descriptores de posición cartesiana) y 6 columnas (dados por los 6 grados de libertad del robot).

Y de acuerdo con la ecuación 4-60 su desarrollo queda como:

$$J_4 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & j_{4,(1,3)} & j_{4,(1,4)} & j_{4,(1,5)} & j_{4,(1,6)} \\ 0 & 1 & j_{4,(2,3)} & j_{4,(2,4)} & j_{4,(2,5)} & j_{4,(2,6)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j_{4,(3,5)} & j_{4,(3,6)} \end{array} \right]$$

donde

$$j_{4,(1,3)} = \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_3)\}$$

$$j_{4,(2,3)} = -\cos(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_3)\}$$

$$j_{4,(1,4)} = \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_3)\}; \quad j_{4,(1,3)} = j_{4,(1,4)}$$

$$j_{4,(2,4)} = -\cos(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_3)\}; \quad j_{4,(2,3)} = j_{4,(2,4)}$$

$$j_{4,(1,5)} = -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \cos(\theta_3) + l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_3)\}$$

$$j_{4,(2,5)} = -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \cos(\theta_3) + l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_3)\}$$

$$j_{4,(3,5)} = l_3 \text{sen}(\theta_3) + l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)$$

$$j_{4,(1,6)} = -\cos(\theta_1 + \theta_2) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)$$

$$j_{4,(2,6)} = -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)$$

$$j_{4,(3,6)} = l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)$$

Al ser J_4 es una matriz no cuadrada, se requiere hacer una partición de esta para el análisis de la movilidad del robot, quedando separada como Jacobiano 4 Móvil (de la parte móvil) y Jacobiano 4 Manipulador (del manipulador).

Así, los correspondientes Jacobianos son:

Jacobiano del Movil:

$$J_{4mov} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_3) \} \\ 0 & 1 & -\cos(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_3) \} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

..... 5-12

Jacobiano de Manipulador:

$$J_{4man} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_3) \} & -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 \cos(\theta_3) + l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_3) \} & -\cos(\theta_1 + \theta_2) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) \\ -\cos(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_3) \} & -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 \cos(\theta_3) + l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_3) \} & -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) \\ 0 & l_3 \text{sen}(\theta_3) + l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) & l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \end{bmatrix}$$

..... 5-13

De esta manera, se puede ver que el Jacobiano 4 Móvil no es invertible, pues tiene un renglón completo de ceros, por tener 2 grados relacionados. Así, con esos tres grados de libertad (x, y, θ_1) es imposible ubicar el punto terminar del manipulador en algún punto dentro del espacio que se desee (con excepción de ciertos puntos, pero estos son un caso especial).

Por otro lado, puede entreverse que el Jacobiano 4 del Manipulador es invertible (por supuesto hay teoremas que pueden demostrar esto), por lo que puede concluirse que con esos 3 grados de libertad $(\theta_2, \theta_3, \theta_4)$ puede ubicarse cualquier punto dentro del espacio de trabajo (con ciertas excepciones).

Para poder analizar la movilidad del robot dentro de su espacio de trabajo se tiene que hacer un *análisis de la factibilidad* de la invertibilidad de Jacobiano 4 del Manipulador por medio del determinante de la misma matriz.

Luego de un arduo trabajo algebraico-trigonometrico y usando métodos del álgebra lineal, el determinante (reducido) del Jacobiano 4 del Manipulador es:

$$\det(J_{4man}) = -l_3 l_4 \cos \theta_4 (l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4))$$

..... 5-14

Este resultado es como una **HUELLA DIGITAL DEL ROBOT**, pues además de aparecer en un gran número de modelos matemáticos, describe la movilidad e inmovilidad del robot. Si se hace este resultado igual a 0 obtendremos las condiciones para las cuales el manipulador entra en una singularidad en su espacio de trabajo.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \det(J_{4man}) = 0 \\ & -l_3 l_4 \cos \theta_4 (l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)) = 0 \end{aligned}$$

..... 5-15

$$\therefore \cos \theta_4 (l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)) = 0$$

Lo que arroja 3 escenarios distintos para alguna singularidad:

Sea $\{S\}_{i=1}^n$ el conjunto de singularidades:

$$\begin{aligned} \text{I) } & \cos \theta_4 = 0 \quad \text{y} \quad (l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)) \neq 0 \\ & \Rightarrow \theta_4 = \text{ang} \cos(0) \\ & \therefore \exists x \in S \text{ tal que } \theta_4 = \pm 90^\circ \end{aligned}$$

Este resultado es sumamente importante para la movilidad del robot, pues lo que indica es que si los brazos se hallan de forma colineal (que es un caso de paralelismo) el robot entrará en una singularidad, debido a que se “estira” completamente y llegará a la frontera de su espacio de trabajo. Recuérdese que por la definición del ángulo θ_4 , los brazos llegarán al paralelismo cuando el ángulo relativo entre el eslabón 2 y 3 sea $\pm 90^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{II) } & \cos \theta_4 \neq 0 \quad \text{y} \quad (l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)) = 0 \\ & \Rightarrow l_3 \sin \theta_3 = l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \end{aligned}$$

De esta última ecuación se llega a:

$$\theta_4 = a \cos\left(\frac{l_3}{l_4} \sin(\theta_3)\right) - \theta_3$$

..... 5-16

Así entonces, para hallar el valor de θ_4 hay que proponer un valor de θ_3 , o bien se propone un valor de θ_4 y se resuelve numéricamente para hallar el de θ_3 , pues como se ve, es una ecuación altamente no lineal. Es obvio que la primera forma es mucho más sencilla, pues únicamente se sustituye un valor en la ecuación compleja y se obtiene la solución. Este resultado es de mucha importancia para el robot, pues lo que significa es que para un valor de θ_3 existirá uno de θ_4 que hace que el robot entre en una indeterminación. Esto indica además que dado que existe un intervalo de valores para θ_3 , existe también un intervalo de valores para θ_4 .

Matemáticamente está expresado de la siguiente manera:

Definición 5-3: Condiciones de inexistencia del determinante de un robot

Sea $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ y $\det : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$, tal que $\theta = f(\psi)$ y $\det = |J(\theta, \psi)|$; $\exists \Theta \in \mathcal{R}$ y $\Xi \in \mathcal{R}$ tal que $\theta \in \Theta$ y $\psi \in \Xi$ de manera que $\exists \det : (\Theta, \Xi) \rightarrow \mathcal{R}$ con $(\Theta, \Xi) \in \mathcal{R}^2$ formándose un elemento complejo en un espacio topológico en el plano $\theta - \psi$, donde el determinante (\det) se anula [$\det(\theta, \psi) = 0$].

Físicamente quiere decir que existe un estado dinámico de valores para θ_3 y θ_4 para los cuales el robot entra en una indeterminación. Más adelante se explicará esto gráficamente.

Así, existen 2 casos en general, dependiendo de los valores de l_3 y l_4

a) Si $l_3 = l_4$ se llega la ecuación 5-15 se transforma en:

$$\sin \theta_3 = \cos(\theta_3 + \theta_4)$$

..... 5-17

$$\theta_4 = a \cos[\sin(\theta_3)] + \theta_3$$

..... 5-18

La condición suficiente y necesaria para que esto se cumpla es

$$-1 \leq \sin(\theta_3) \leq 1$$

$$a \sin(-1) \leq \theta_3 \leq a \sin(1)$$

$$-90^\circ \leq \theta_3 \leq 90^\circ$$

Algunos valores resultantes son

Tabla 5-1, ALGUNOS VALORES DE QUE HACEN QUE EL ROBOT LLEGUE A LA SINGULARIDAD SI $l_3 = l_4$

Θ_3 (grd)	Θ_3 (rad)	Θ_4 (rad)	Θ_4 (grd)	Θ_4 (grd)
-90	-1.57	4.71	270	-90
-75	-1.31	4.19	240	-120
-60	-1.05	3.67	210	-150
-45	-0.79	3.14	180	-180
-30	-0.52	2.62	150	-210
-15	-0.26	2.09	120	-240
0	0	1.57	90	-270
15	0.26	1.05	60	-300
30	0.52	0.52	30	-330
45	0.79	0	0	-360
60	1.05	-0.52	-30	-390
75	1.31	-1.05	-60	-420
90	1.57	-1.57	-90	-450

Puede verse que la ecuación 5-16, $\sin \theta_3 = \cos(\theta_3 + \theta_4)$, tiene un resultado algebraico-trigonométrico obvio, el cual se cumple para

$$\theta_3 = 45^\circ \text{ y } \theta_4 = 0^\circ \text{ y } \theta_3 = 45^\circ \text{ y } \theta_4 = -90^\circ$$

$$\therefore \exists x \in S \text{ tal que } \begin{cases} \theta_3 = 45^\circ \text{ y } \theta_4 = 0^\circ \\ \theta_3 = 45^\circ \text{ y } \theta_4 = -90^\circ \end{cases}$$

Nuevamente este resultado salta a la vista, ya que es sumamente importante para la morfología interna del robot (siempre que $l_3 = l_4$), pues indica que para robots de 2 brazos de distancias iguales (o similares) habrá una singularidad

justo cuando se forme un ángulo de 45° entre ellos, que será una línea imaginaria perpendicular a la base justo en el origen de la primera barra.

Así entonces (si $l_3 = l_4$), el dominio para el cual se cumple la ecuación de esta es $90^\circ \leq \theta_3 \leq 90^\circ$ y $-180^\circ \leq \theta_4 \leq 180^\circ$ con la restricción $\theta_4 = a \cos[\sin(\theta_3)] + \theta_3$, por lo que si se llega a cumplir esa ecuación dentro de ese dominio habrá indeterminación.

- b) Si se trata de un robot que no tenga sus brazos de distancias similares o de órdenes de magnitud diferentes ($l_3 \neq l_4$), entonces no hay una forma general de obtener las condiciones necesarias y suficientes para llegar a una singularidad, pues estas dependen del tamaño de los brazos, por lo que solo una de las variables puede quedar en términos de la otra (como en el caso anterior), lo que a su vez lleva a que para cada caso en particular hay que obtener numéricamente dichas condiciones.

Lo primero que se ve es que se tiene que satisfacer la ecuación

$$l_3 \sin \theta_3 = l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)$$

..... 5-19

que reescrita es

$$\frac{l_3}{l_4} \sin \theta_3 = \cos(\theta_3 + \theta_4)$$

..... 5-20

De manera que hay que hallar para que condiciones angulares el coseno de la suma de los ángulos relativos de los brazos es el seno del ángulo relativo del primer brazo escalado $\frac{l_3}{l_4}$ veces.

Para nuestro caso, $l_3 = 0.22467 [m]$; $l_4 = 0.13 [m]$, por lo que se tiene

$$1.7282 \sin \theta_3 = \cos(\theta_3 + \theta_4)$$

..... 5-21

. Y si se despeja θ_4 de esta última ecuación se tiene:

$$\theta_4 = [a \cos(1.7282 \sin(\theta_3))] - \theta_3$$

..... 5-22

De esta última la condición suficiente y necesaria para que θ_4 exista es:

$$-1 \leq 1.7282 \sin(\theta_3) \leq 1$$

$$-0.5786 \leq \sin(\theta_3) \leq 0.5786$$

$$a \sin(-0.5786) \leq \theta_3 \leq a \sin(0.5786)$$

$$-0.61705618 \leq \theta_3 \leq 0.61705618$$

$$-35.35^\circ \leq \theta_3 \leq 35.35^\circ$$

Algunos valores para los que se cumple esta condición son:

Tabla 5-2, ALGUNOS VALORES DE QUE HACEN QUE EL ROBOT LLEGUE A LA SINGULARIDAD SI $l_3 \neq l_4$

Θ_3 (grd)	Θ_3 (rad)	Θ_4 (rad)	Θ_4 (grd)
-30	-0.52	3.14	179.78
-25	-0.44	2.83	161.92
-20	-0.35	2.55	146.23
-15	-0.26	2.30	131.57
-10	-0.17	2.05	117.46
-5	-0.09	1.81	103.66
0	0	1.57	90
5	0.09	1.33	76.34
10	0.17	1.09	62.54
15	0.26	0.85	48.43
20	0.35	0.59	33.77
25	0.44	0.32	18.08
30	0.52	0.0038	0.22

Por lo cual vemos que para cierto valor del ángulo del primer eslabón existirá un valor específico para el ángulo del segundo eslabón para el cual el robot entra en una singularidad.

$$\text{III) } \cos \theta_4 = 0 \quad \text{y} \quad (l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)) = 0$$

Este caso es una combinación de los dos anteriores, pues se fuerza a que genere uno de los casos a partir del otro. Nuevamente surgen dos escenarios más, uno cuando los brazos son de distancias iguales y otro cuando no lo son.

a) Si $l_3 = l_4$

$$\Rightarrow \cos(\theta_4) = 0 \quad \text{y} \quad \sin \theta_3 = \cos(\theta_3 + \theta_4)$$

$$\therefore \theta_4 = \pm 90^\circ \quad (\text{por el caso I})$$

$$\text{y} \quad \theta_4 = a \cos[\sin(\theta_3)] + \theta_3 \quad (\text{por el caso II, ecuación 5-17})$$

Entonces, se pueden combinar para llegar al siguiente enunciado:

$$\frac{\pi}{2} = a \cos[\sin(\theta_3)] + \theta_3 \quad [\text{rad}]$$

De donde, a partir de la tabla 5-1 se halla que

$$\theta_3 = 0, \quad \theta_4 = 90^\circ$$

$$\therefore \exists x \in S \text{ tal que } \theta_3 = 0^\circ \text{ y } \theta_4 = 90^\circ$$

b) Si $l_3 \neq l_4$
 $\Rightarrow \cos(\theta_4) = 0$ y $l_3 \sin \theta_3 = l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)$

$\therefore \theta_4 = 90^\circ$ y $1.7282 \sin \theta_3 = \cos(\theta_3 + \theta_4)$

De donde se obtiene la siguiente ecuación:

$$1.7282 \sin \theta_3 = \cos\left(\theta_3 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Que reescrita es $\frac{\pi}{2} = [a \cos(1.7282 \sin(\theta_3))] - \theta_3$

Usando los valores expuestos en la tabla 5-2 se tiene que

$$\begin{aligned} \theta_3 &= 0, & \theta_4 &= 90^\circ \\ \therefore \exists x \in S \text{ tal que } \theta_3 &= 0^\circ \text{ y } \theta_4 &= 90^\circ \end{aligned}$$

Que nuevamente es un escenario particular del caso II.

De esta manera vemos como es que para $l_3 = l_4$ y $l_3 \neq l_4$ el caso I y III son cuestiones especiales del caso II. Esto es debido a que si bien el caso I indica la existencia de singularidad cuando el ángulo $\theta_4 = 90^\circ$, el caso II, después del tratamiento matemático presentado, indica la misma conclusión angular, pero aumentada para los dos ángulos de los brazos ($\theta_3 = 0, \theta_4 = 90^\circ$). Así pues, el caso I y III nos dan las condiciones necesarias para una singularidad que pueden obtenerse físicamente analizando las condiciones de movilidad del robot. Por otro lado, el caso II es una generalización de los otros dos, y nos entrega condiciones no triviales para una singularidad. Ejemplo de ello es justamente el presentado en el inciso a) del caso II, en donde si se forma un ángulo recto entre los brazos se tiene esa condición.

Se puede resumir los tres casos anteriores en la siguiente expresión:

Sea $\{S\}_{i=1}^n$ el conjunto de singularidades:

a) Si $l_3 = l_4$

$$\Rightarrow \exists x \in S \text{ tal que } \begin{cases} \theta_4 = \pm 90^\circ, \quad \forall \theta_3 \in \mathfrak{R} \\ \theta_4 = a \cos[\sin(\theta_3)] + \theta_3 \\ \text{con } \theta_3 = 45^\circ \text{ y } \theta_4 = 0^\circ \text{ como el "valor natural"} \end{cases}$$

b) Si $l_3 \neq l_4$

$$\Rightarrow \exists x \in S \text{ tal que } \begin{cases} \theta_4 = \pm 90^\circ, \quad \forall \theta_3 \in \mathfrak{R} \\ \theta_4 = a \cos\left[\frac{l_3}{l_4} \sin(\theta_3)\right] - \theta_3 \\ \text{con } \theta_3 = 45^\circ \text{ y } \theta_4 = 0^\circ \text{ como el "valor natural"} \end{cases}$$

Todo el análisis anterior puede realizarse de forma gráfica gracias al poder de las herramientas matemáticas computacionales. La que se utilizó en esta ocasión para realizar las gráficas mostradas a continuación fue *MathCad*®.

I) Como $\cos \theta_4 = 0$, sin importar si $l_3 = l_4$ o $l_3 \neq l_4$, si hacemos

$$\det_1(\theta_4) = \cos \theta_4$$

..... 5-23

Se trata de una función básica y muy conocida dentro del mundo matemático. La gráfica de esta en radianes es:

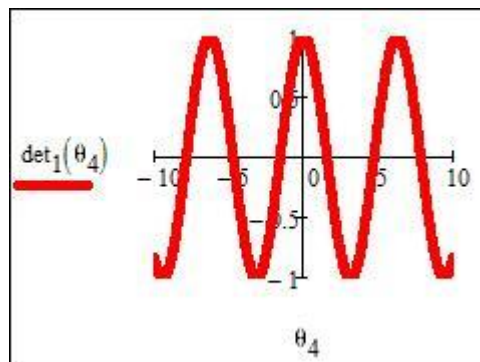


Figura 5-1: Gráfica de $\cos \theta_4$, correspondiente con $\det_1(\theta_4)$

Es de esta última ilustración que puede observarse gráfica (y por ende físicamente) el porqué es que cuando el ángulo θ_4 es $\pm 90^\circ$ existe una singularidad. En la gráfica el ángulo está expresado en radianes, y es por ello que no se ve tan claro, ya que $\pm 90^\circ$ corresponde a $\pm \frac{\pi}{2} \text{ rad} \approx \pm 1.57 \text{ rad}$.

II) Ya que $-l_3 l_4 (l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)) = 0$, se hace

$$\det_2(\theta_3, \theta_4) = -l_3 l_4 (l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4))$$

..... 5-24

que como puede verse, es una función escalar de variable vectorial, y que graficada es de tres dimensiones, pues teóricamente $\det_2 : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$, es decir, \det_2 es una transformación *no lineal* que utiliza como argumento un vector de 2 elementos *perteneciente a* \mathfrak{R}^2 y entrega un escalar *perteneciente a* \mathfrak{R} .

Para poder analizar esta función hacemos uso del programa antes mencionado. Algunas imágenes se muestran a continuación.

Considérese que $\hat{\theta}_3 \times \hat{\theta}_4 = \hat{e}_{\det_2}$, lo que quiere decir que en las gráficas en perspectiva el eje de la izquierda es θ_3 , mientras que el otro es θ_4 , tomando en cuenta que es un sistema derecho.

a) Si $l_3 = l_4$. Para este caso se usó $l_3 = l_4 = 1$

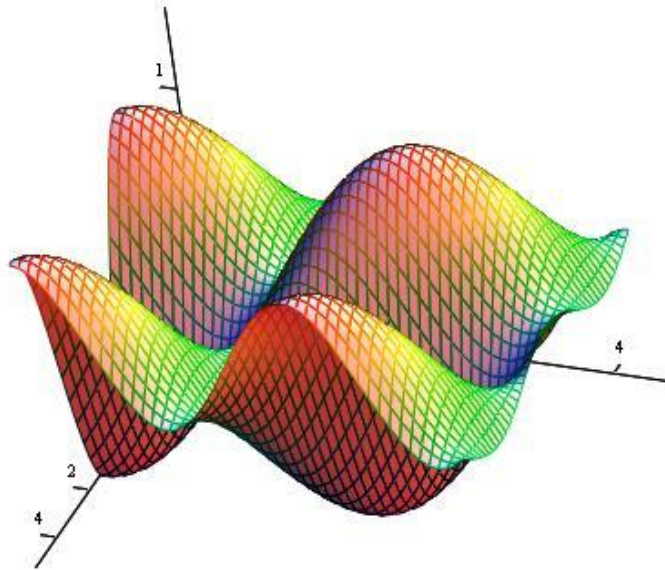


Figura 5-2: Perspectiva de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = l_4 = 1$

Puede verse en la gráfica anterior la forma tan extraña que tiene, razón por la que el resultado analítico es complicado de obtenerse. Una consecuencia más de esto es la periodicidad de la solución, ya que, aunque no se aprecia muy bien, la gráfica tiene a extenderse de forma periódica sin atenuar sus límites.

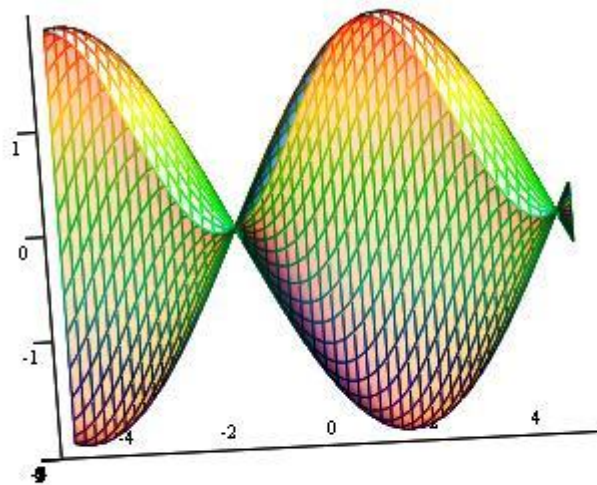


Figura 5-3: Vista del plano $\theta_3 - \det_2$ de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = l_4 = 1$

En la figura anterior se nota claramente la aparición de las funciones trigonométricas relacionadas en la función.

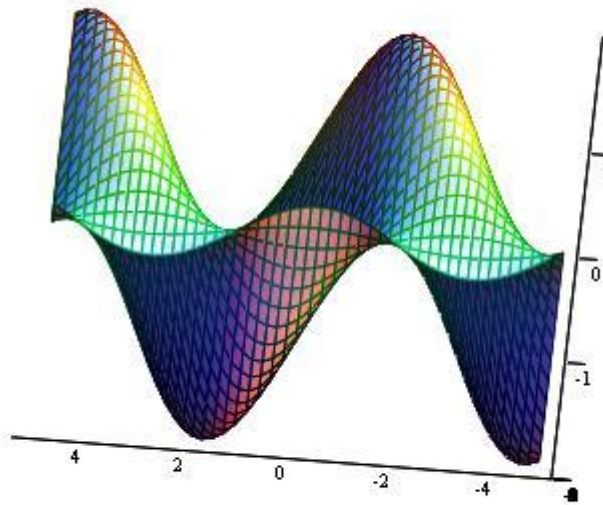


Figura 5-4: Vista del plano $\theta_4 - \det_2$ de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = l_4 = 1$

Aquí se ve esa misma periodicidad mencionada anteriormente, sin embargo, se nota también que al “darle la vuelta” a la gráfica esta cambia completamente de perspectiva, lo que tiene otro tipo de análisis dentro de geometría diferencial.

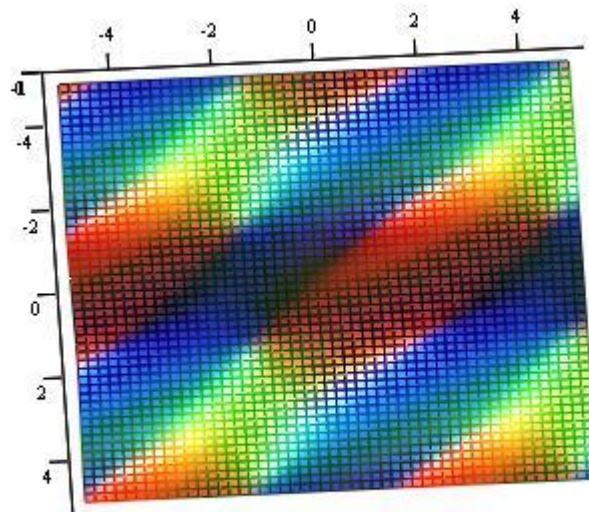


Figura 5-5: Vista superior de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = l_4 = 1$

b) Si $l_3 \neq l_4$. Usando $l_3 = 0.22467 [m]$; $l_4 = 0.13 [m]$ se tiene

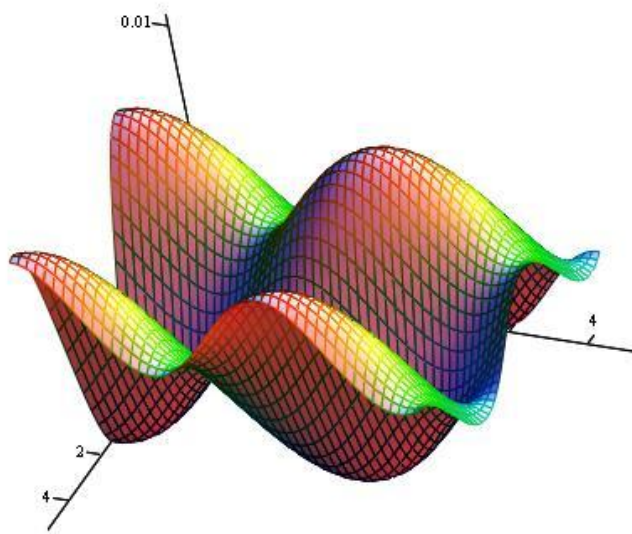


Figura 5-6: Perspectiva de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = 0.224$ y $l_4 = 0.13$

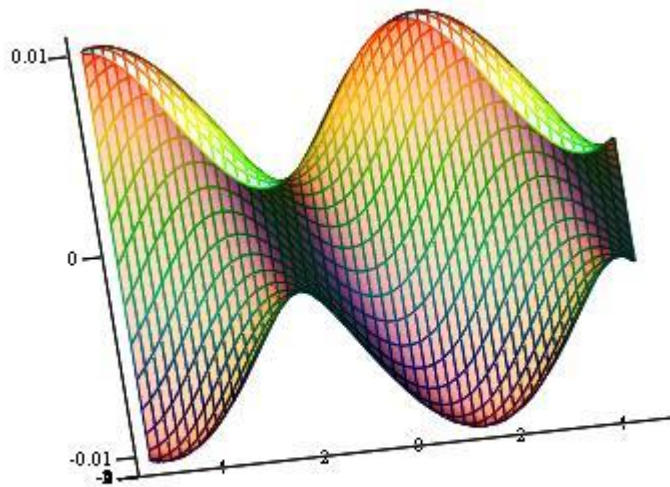


Figura 5-7: Plano $\theta_3 - \det_2$ de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = 0.224$ y $l_4 = 0.13$

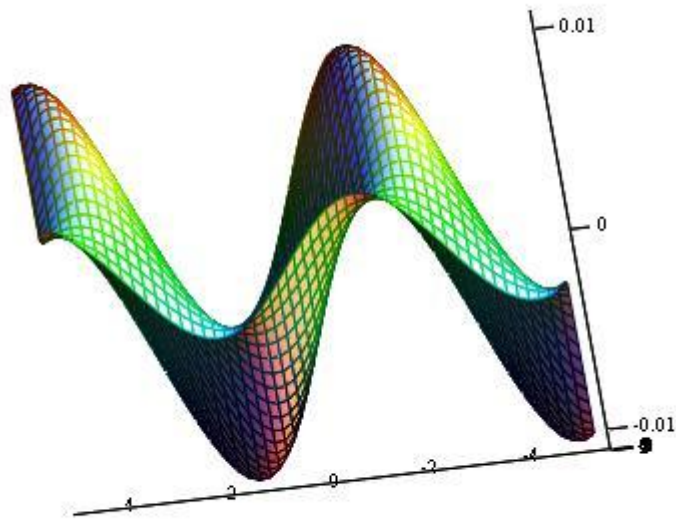


Figura 5-8: Plano $\theta_4 - \det_2$ de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = 0.224$ y $l_4 = 0.13$

En las gráficas anteriores se ven unas cuantas diferencias respecto a las presentadas en el inciso a) anterior. Esto es debido a que si cambia el valor de l_3 o de l_4 , la gráfica cambia tan drásticamente como cambian los valores. Pero si los valores cambian de forma proporcional o similar y conservar un orden de magnitud parecido, entonces la gráfica no se verá tan distinta. Se invita al lector a probar esta aseveración programando esta función en algún paquete computacional de matemáticas y cambiar los valores de l_3 y/o de l_4 .

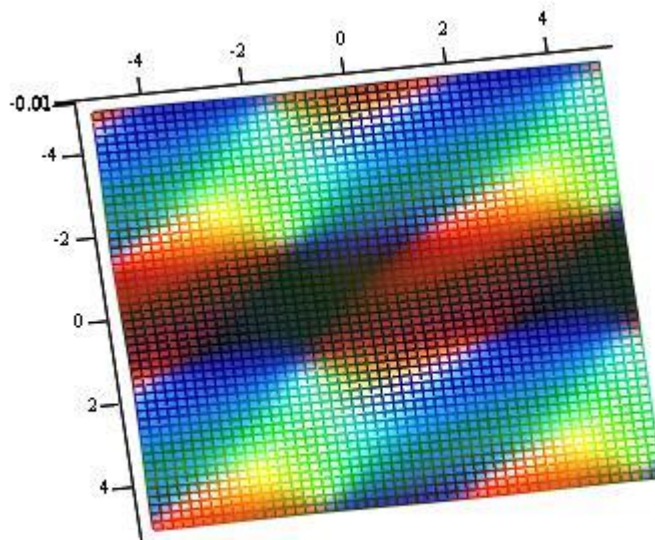


Figura 5-9: Vista superior de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = 0.224$ y $l_4 = 0.13$

III) Como $-l_3 l_4 (l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)) = 0$ y $\cos(\theta_4) = 0$

Debido a que en este caso se mezclan los dos anteriores se tiene de nueva cuenta que

$$-l_3 l_4 \cos(\theta_4) (l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)) = 0$$

Lo que ya se había expuesto como

$$\det(\theta_3, \theta_4) = 0$$

Así, la gráfica que se analizará es

$$\det(\theta_3, \theta_4) = -l_3 l_4 \cos(\theta_4) (l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4))$$

a) Si $l_3 = l_4$. Para este caso se usó $l_3 = l_4 = 1$

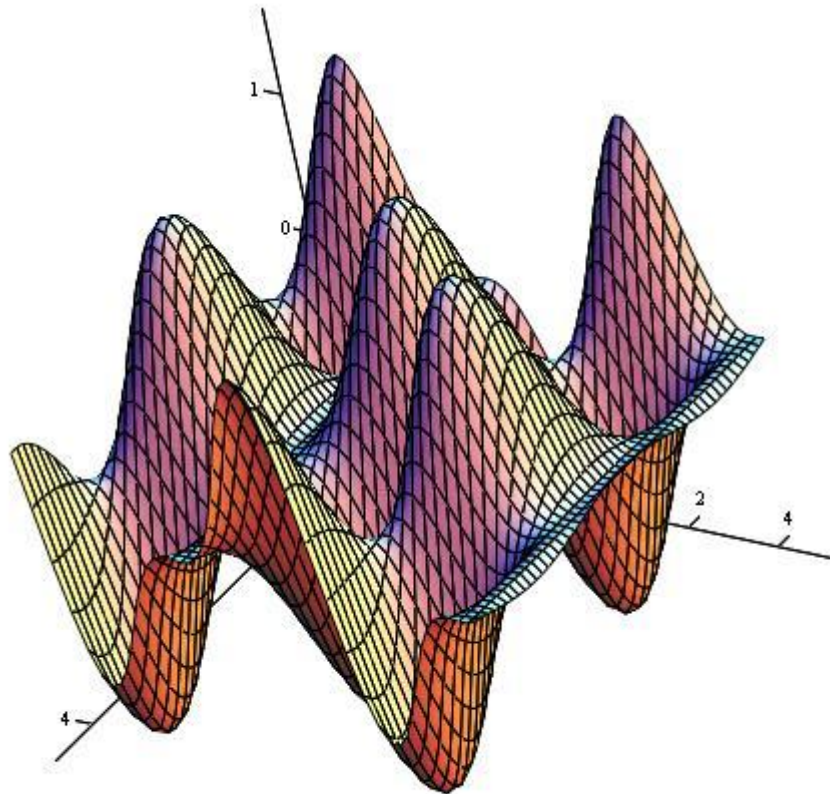


Figura 5-10: Perspectiva de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = l_4 = 1$

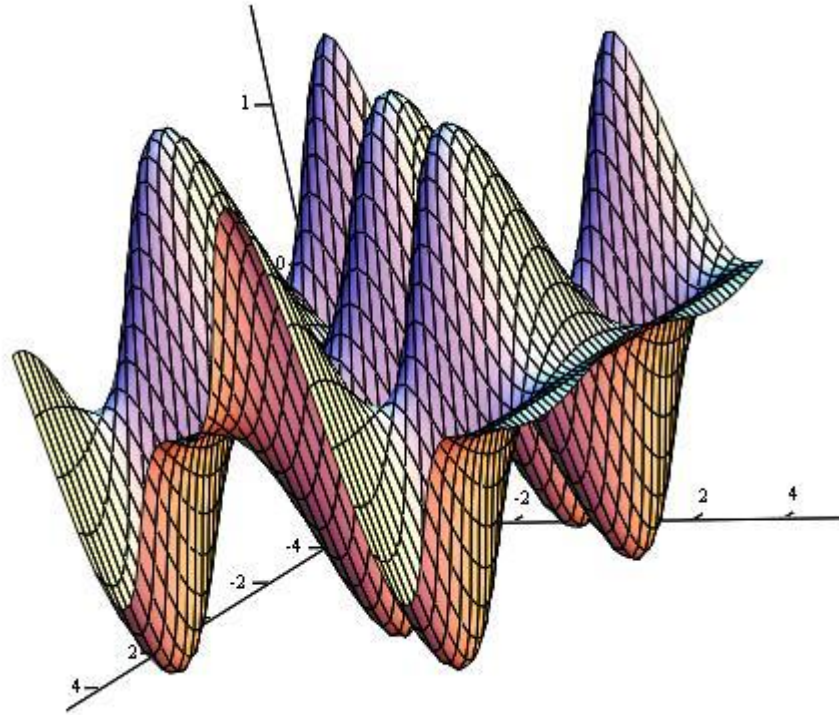


Figura 5-11: Perspectiva 2 de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = l_4 = 1$

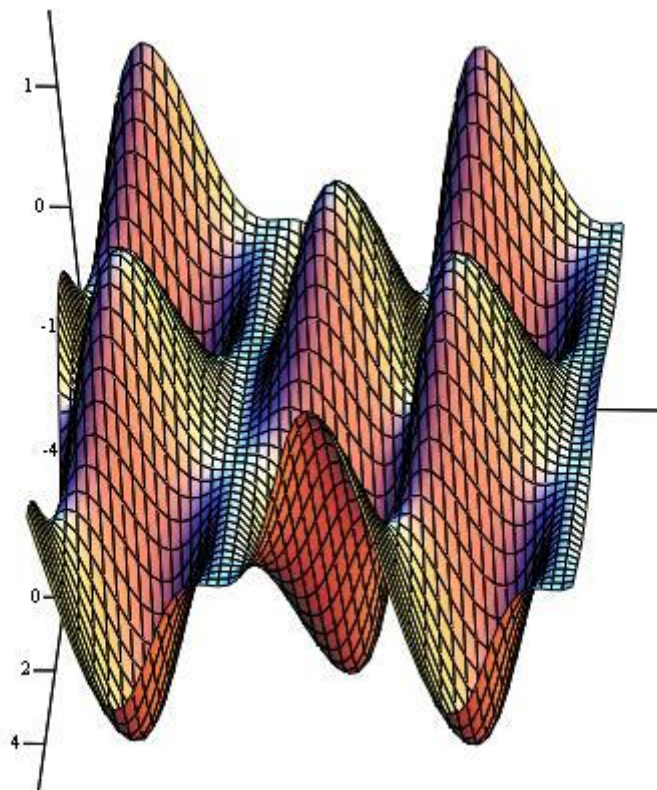


Figura 5-12: Perspectiva aérea de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = l_4 = 1$

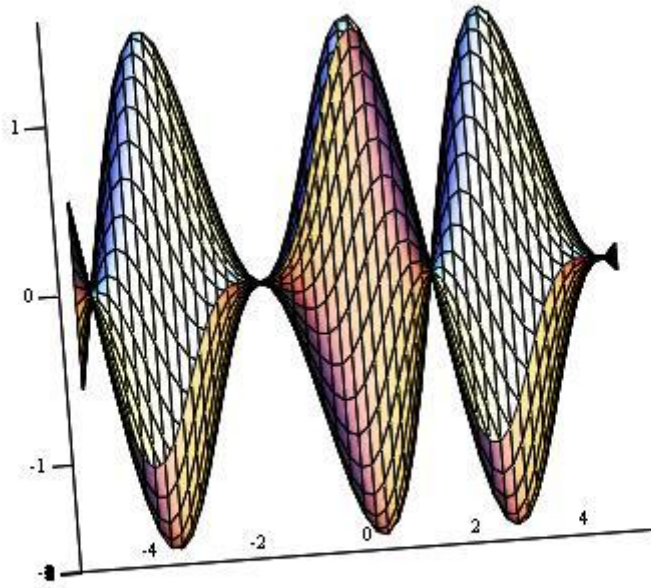


Figura 5-13: Vista del plano $\theta_3 - \det$ de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = l_4 = 1$

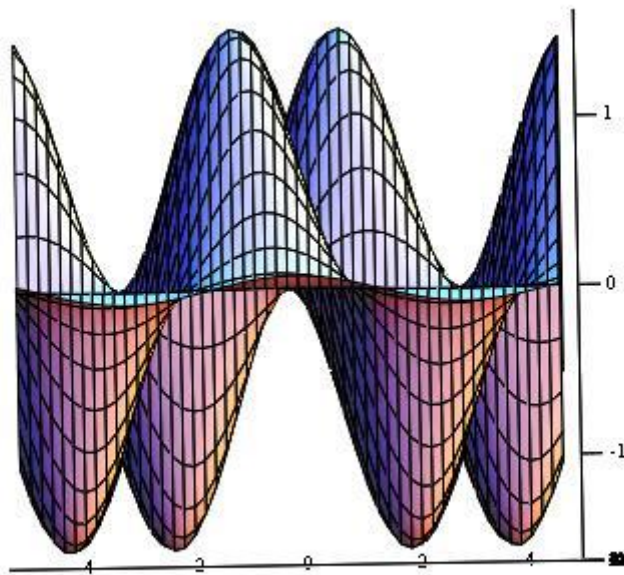


Figura 5-14: Vista del plano $\theta_4 - \det$ de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = l_4 = 1$

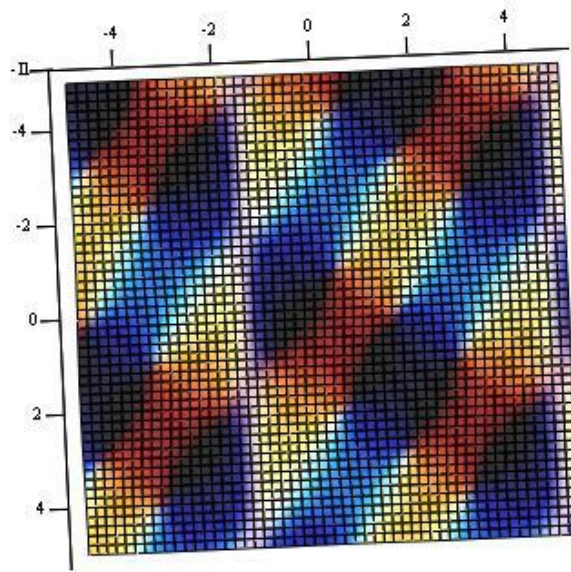


Figura 5-15: Vista superior de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = l_4 = 1$

En la imagen anterior, gracias a los colores puede verse la diferencia entre los puntos donde se tienen crestas (amarillos) y los puntos donde hay valles (rojos), también puede verse en azul los puntos intermedios, donde la función se hace 0, lo cual es el mayor interés de estas gráficas. Por medio del programa se obtiene la siguiente:

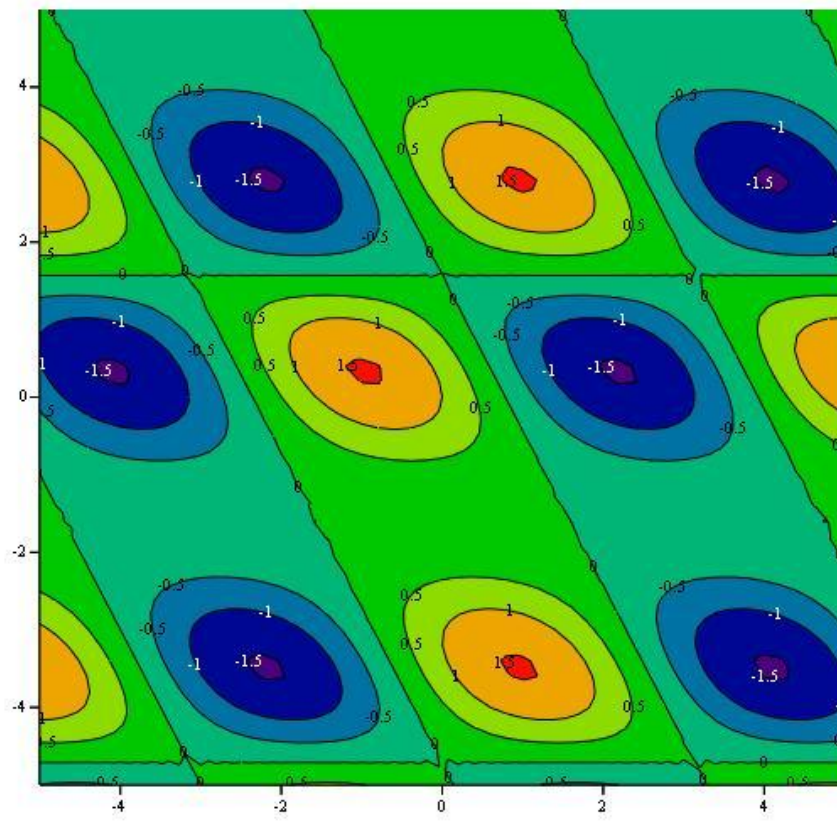


Figura 5-16: Plano de contorno "0" de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$

b) Si $l_3 \neq l_4$. Usando $l_3 = 0.22467 [m]$; $l_4 = 0.13 [m]$

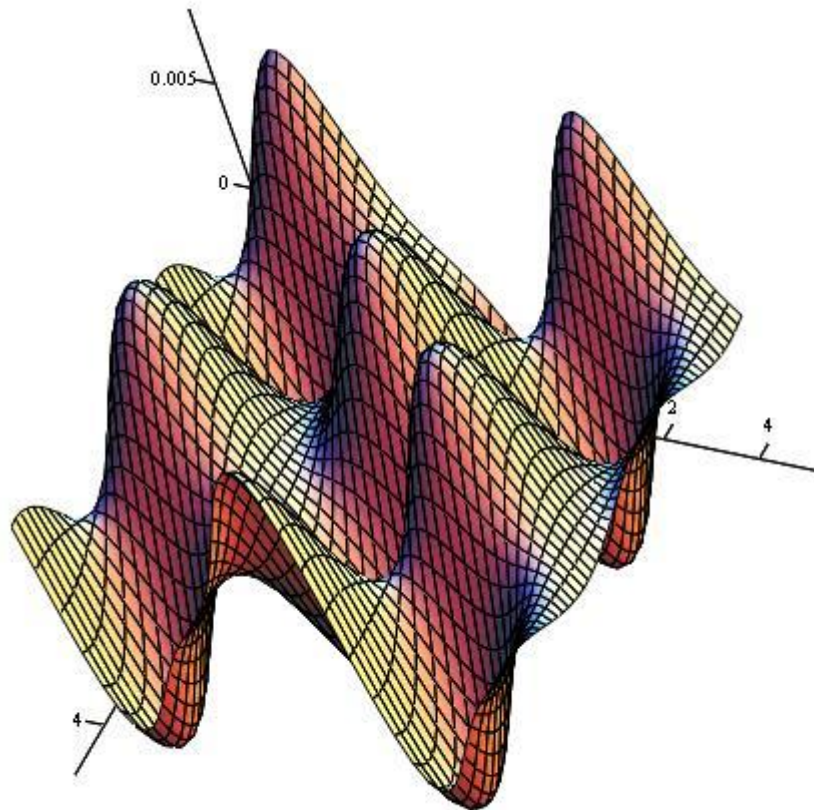


Figura 5-17: Perspectiva de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = 0.224$ y $l_3 = 0.13$

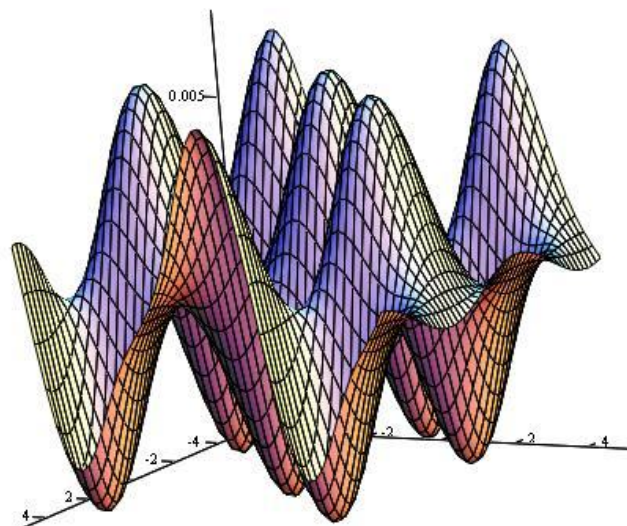


Figura 5-18: Vista ortogonal de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = 0.224$ y $l_3 = 0.13$

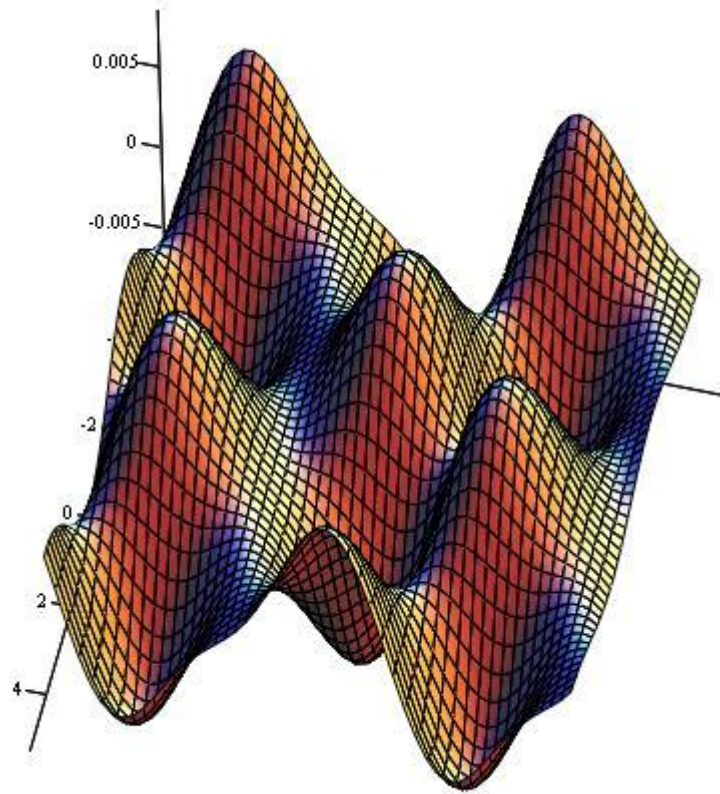


Figura 5-19: Vista aérea de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = 0.224$ y $l_3 = 0.13$

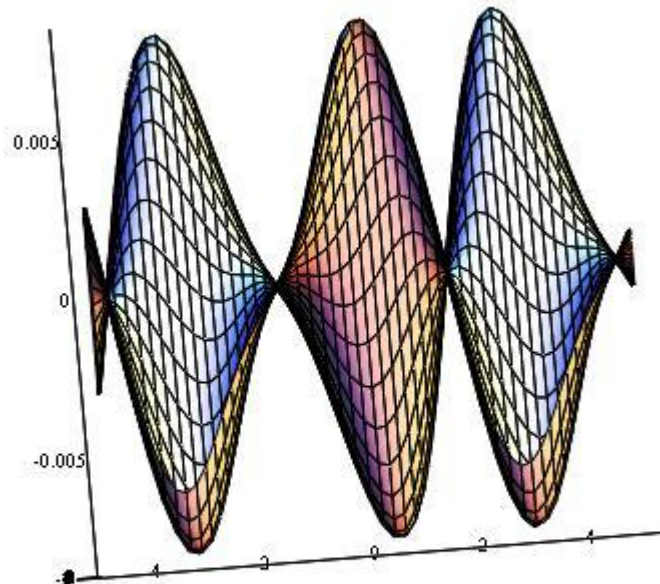


Figura 5-20: Plano $\theta_3 - \det_2$ de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = 0.224$ y $l_3 = 0.13$

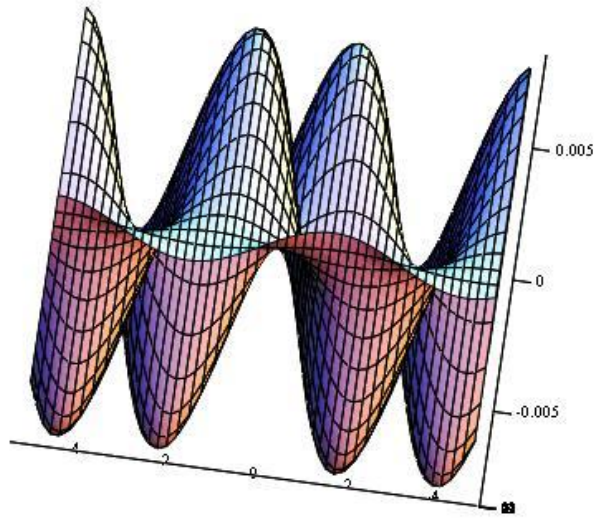


Figura 5-21: Plano $\theta_4 - \det_2$ de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = 0.224$ y $l_3 = 0.13$

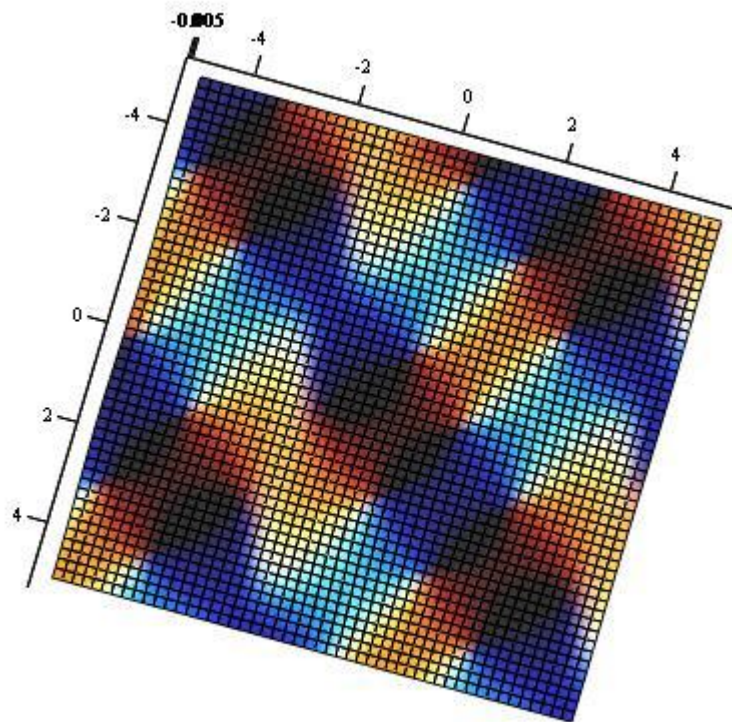


Figura 5-22: Vista superior de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$

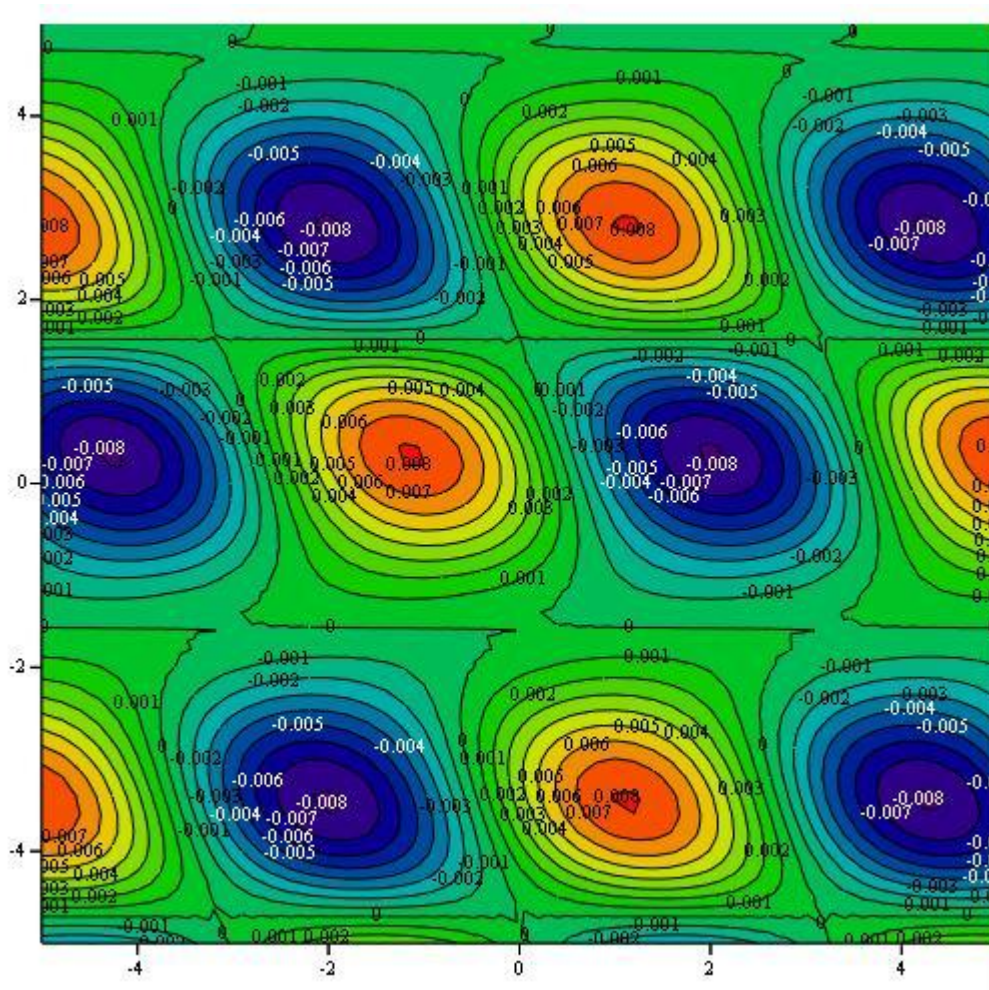


Figura 5-23: Vista de contorno “0” de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$

A partir de la gráfica anterior puede aproximarse alguna de las combinaciones angulares de θ_3 y θ_4 que da como resultado una indeterminación. Por ejemplo, de forma aproximada, para $\theta_4 = 90^\circ$ (en el eje vertical, $\theta_4 = 1.57$) hay muchos valores que cumplen con esta condición. En la siguiente gráfica se muestra el detalle que cumple con esta aseveración y otras como las líneas diagonales.

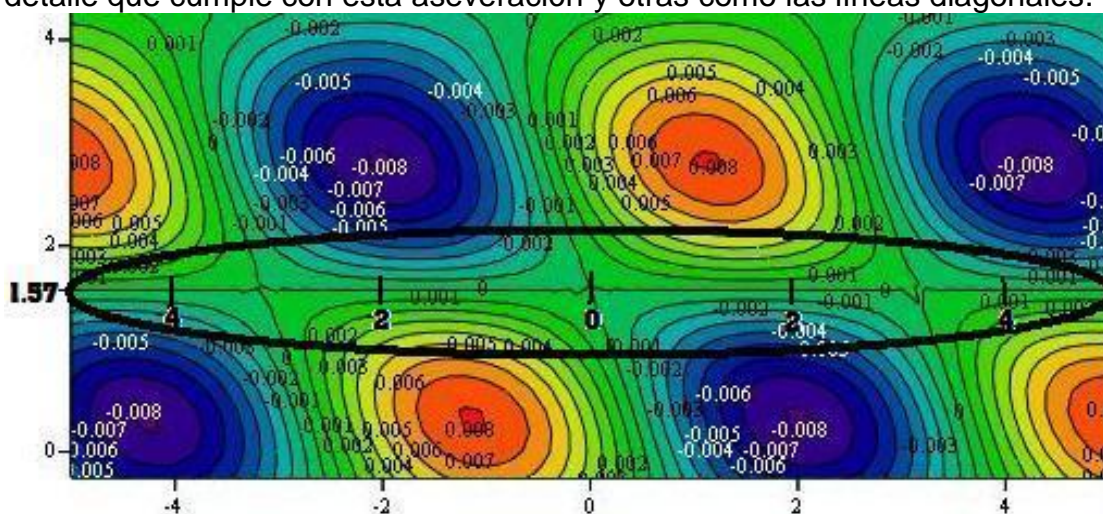


Figura 5-24: Detalle de la vista de contorno 0 de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$ para $\theta_4 = 90^\circ$

Como conclusión de esta sección es importante comentar que actualmente se hace más énfasis en el análisis cinemático del comportamiento móvil de un robot, sea manipulador o no. El análisis presentado es novedoso en el sentido de la forma de operación del mismo.

El uso de paquetes de cómputo matemático le da un toque especial pues pueden analizarse condiciones articulares de singularidad no previstas, además de poder analizar de manera más simple las condiciones matemáticas planteadas.

De esta manera es posible extender el análisis de movilidad e *inmovilidad* a través del *cálculo vectorial*, extendiendo el determinante del jacobiano de un robot como una función escalar de variable vectorial, que tiene todas las características de una función de ese tipo, como máximos, mínimos y ciertos valores de interés. Un punto más interesante aún es el poder saber que tan rápido tiende a ir hacia cero el determinante. Para ello se hace uso de la definición 4-3 (derivación paramétrica total de un campo escalar), obteniéndose

$$\frac{d \det}{dt} = \frac{\partial \det}{\partial \theta_3} \cdot \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{\partial \det}{\partial \theta_4} \cdot \frac{d\theta_4}{dt}$$

..... 5-25

Donde

$$\frac{\partial \det}{\partial \theta_3} = -l_3 l_4 [\cos \theta_4 (l_3 \cos \theta_3 + l_4 \operatorname{sen}(\theta_3 + \theta_4))]$$

..... 5-26

Y

$$\frac{\partial \det}{\partial \theta_4} = -l_3 l_4 [-\operatorname{sen} \theta_4 (l_3 \operatorname{sen} \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)) + \cos \theta_4 (l_4 \operatorname{sen}(\theta_3 + \theta_4))]$$

$$\frac{\partial \det}{\partial \theta_4} = -l_3 l_4 [l_4 \operatorname{sen}(\theta_3 + 2\theta_4) - l_3 \operatorname{sen} \theta_3 \operatorname{sen} \theta_4]$$

..... 5-27

Quedando finalmente

$$\begin{aligned} \frac{d \det}{dt} = -l_3 l_4 \{ & \cos \theta_4 (l_3 \cos \theta_3 + l_4 \operatorname{sen}(\theta_3 + \theta_4)) \theta_3 \\ & + [l_4 \operatorname{sen}(\theta_3 + 2\theta_4) - l_3 \operatorname{sen} \theta_3 \operatorname{sen} \theta_4] \theta_4 \} \end{aligned}$$

..... 5-28

Donde puede verse que la velocidad con la que el determinante del Jacobiano tiende a hacerse cero es un poco complicada de analizar. Lo que resalta a simple vista es el hecho de que si el determinante tiene unidades de $[m^3]$,

entonces la velocidad del determinante tiene por unidades $\left[\frac{m^3}{s} \right]$, como un

flujo, por lo cual podría analizarse de esa forma posteriormente.

5.4 POSICIÓN ARTICULAR. INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS Y PERFIL DE TRAYECTORIAS

En la sección anterior se explicaron los preceptos necesarios para obtener analíticamente y gráficamente de forma aproximada (siempre que sea posible) las condiciones articulares para que un robot este en una singularidad.

Como se mencionó en la parte de ESTÁTICA INVERSA de la sección 5.2, para obtener la posición articular de un robot, es necesario contar con el modelo matemático del mismo para así obtener lo que en matemáticas se conoce como *la solución única* del sistema de ecuaciones, lo que equivale a hallar las condiciones articulares para ciertas condiciones posicionales, entendiendo como condiciones a las coordenadas del punto dato o generado.

Es importante notar que si se va a suministrar las coordenadas de un punto al modelo matemático para hallar los valores de las variables relacionadas con las articulaciones, de cierta manera se está obteniendo una nueva coordenada en otro sistema. Formalmente (desde el punto de vista del álgebra lineal) lo que hace el modelo matemático de la posición de un robot es cambiar de un espacio primario (el espacio articular) al espacio dual (el espacio coordenado).

De acuerdo con la ecuación 4-55 la posición del punto terminal es

$$P_4 = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1 + \theta_2)\{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} + x \\ -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} + y \\ l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) + l_3 \cos(\theta_3) + l_2 + l_1 \end{bmatrix}$$

Y el Punto P_4 es un vector que tiene por coordenadas:

$$P_4 = \begin{bmatrix} P_{4x} \\ P_{4y} \\ P_{4z} \end{bmatrix}$$

..... 5-29

Si se sustituyen los componentes vectoriales del punto P_4 se obtiene

$$\begin{aligned} -\cos(\theta_1 + \theta_2)\{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} + x &= P_{4x} \\ -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} + y &= P_{4y} \\ l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) + l_3 \cos(\theta_3) + l_2 + l_1 &= P_{4z} \end{aligned}$$

..... 5-30

Como puede verse, el último es un sistema de ecuaciones *compatible indeterminado no lineal*, donde las variables de interés son las que conforman el vector de grados de libertad $q = [x \ y \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4]^T$, por lo cual para resolver este sistema es necesario proporcionar el valor de 3 de ellas.

De esta manera, únicamente pueden hallarse hasta 3 valores proporcionando 3 de ellas, ya que se cuenta con 3 ecuaciones linealmente independientes, provenientes de los descriptores de la posición del punto terminal del robot. Si se hubiera tomado en cuenta la orientación del robot, usando los *ángulos de Euler*, se tendrían tantas ecuaciones como descriptores se plantearan.

Para nuestro caso se tienen 6 variables relacionadas con los grados de libertad del robot, 3 de la parte móvil y 3 del manipulador, por lo que para que el punto terminal alcance cierto punto es necesario decidir qué conjunto de variables es necesario encontrar del sistema de ecuaciones descrito en 5-27, si el del manipulador $(\theta_2, \theta_3, \theta_4)$ o bien el del móvil (x, y, θ_1) , tomando en cuenta que debido a que la altura del punto no depende de los valores del móvil, entonces hay que plantear cualquiera de los valores de (x, y, θ_1) .

Así entonces si se quiere hallar un punto dentro del espacio de trabajo del robot se resuelve el sistema 5-27 para el conjunto del manipulador $(\theta_2, \theta_3, \theta_4)$. Si el punto se hallara fuera del espacio de trabajo se resuelve el mismo para el conjunto del móvil (x, y, θ_1) , siempre y cuando el punto se halle en una posición vertical entre su base y su altura máxima y dejando fija la posición articular del robot para alcanzar la altura del punto.

Si lo que se quiere es que el robot siga una trayectoria en específico el algoritmo de decisión (para cualquier lenguaje de programación) se basa en el mencionado para un punto es:

- 1) Se propone la trayectoria a seguir. Esta debe estar en forma cartesiana.
- 2) Se parametriza la trayectoria fijando “n” puntos por los que tendrá que pasar el punto terminal del manipulador.
- 3) Se procede a pasar por el primer punto de la trayectoria siguiendo la siguiente subrutina:
 - a. El robot debe indicar COMPLETAMENTE el valor actual (que será el inicial para este proceso) de sus 6 grados de libertad respecto del sistema inercial, además del tamaño de sus brazos.
 - b. Se evalúa si es que la altura del punto en cuestión es menor que la altura máxima que puede alcanzar el robot, en caso contrario se evalúa el siguiente punto.
 - c. Se verifica si el punto está dentro del espacio de trabajo por medio de la distancia de la base del robot a este o por medio del Jacobiano.
 - d. Se halla el conjunto de variables del manipulador $(\theta_2, \theta_3, \theta_4)$ si el punto se halla dentro del espacio de trabajo, o bien el conjunto del móvil (x, y, θ_1) si el punto está fuera del espacio de trabajo.
- 4) Se sigue la misma rutina a partir de 3.a para los demás puntos de la trayectoria. Aquel punto que no se pueda alcanzar se deja fuera y el algoritmo (y por tanto el robot) sigue adelante con el siguiente punto.
- 5) Una vez que ha pasado por todos los puntos puede asignarse una nueva trayectoria.

Note que aunque el procedimiento anterior no es perfecto, es robusto en el sentido de contemplar casos extraños donde el robot no pueda alcanzar el

punto designado, sin embargo puede llegar a una singularidad particular, en base a lo expuesto en la última sección del capítulo anterior. A continuación se presenta el diagrama de flujo del algoritmo anterior.

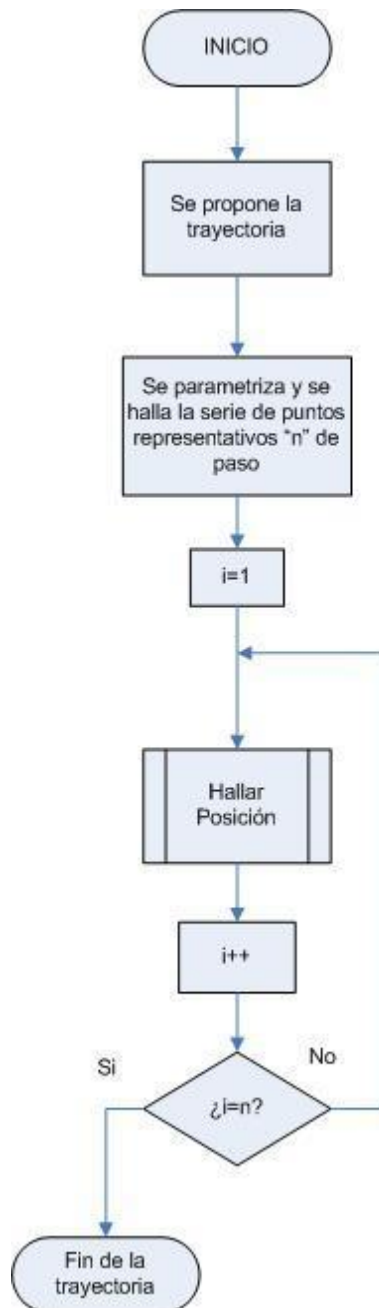


Figura 5-25: Diagrama de flujo principal del algoritmo de decisión del seguimiento de trayectoria del robot.

Un error común que se puede ver en este caso es que la distancia de los brazos se halla en la subrutina y no dentro del programa. Esto es debido a que si el robot cambia súbitamente este tamaño entonces las condiciones de movilidad e inmovilidad cambiarán también. Si es el caso en que no cambiaran nunca entonces se puede manejar en el procedimiento general. La ventaja principal es menor tiempo de procesamiento.

Sin embargo, puede verse que aun así se tiene contemplado el no alcanzar puntos más arriba de su altura máxima.

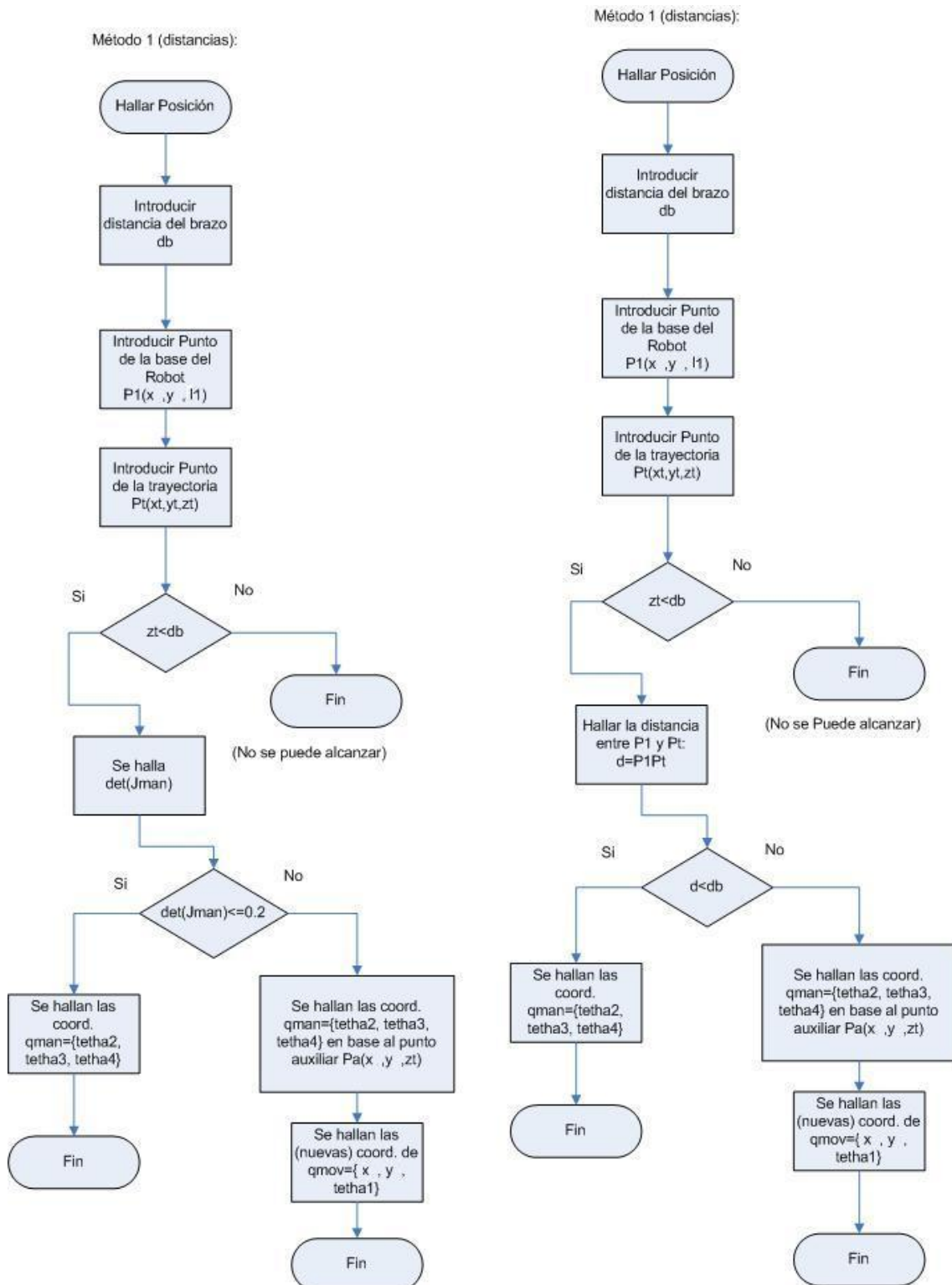


Figura 5-26: Subrutina del algoritmo de decisión del seguimiento de trayectoria. Se presenta como una sola debido a que por dos métodos distintos se puede hallar un punto.

Nótese en esta imagen que se trata de dos subrutinas distintas, sin embargo las dos tienen el mismo objetivo, hallar la posición angular del robot para una posición coordenada.

El primero (Método 1 de Jacobiano) está basado en la propiedad de la invertibilidad del Jacobiano cuando el robot no se halla en una singularidad, de forma que si se evalúa el determinante de la parte del manipulador y este es 0 o cercano entonces quiere decir que el punto está en la frontera o fuera de su espacio de trabajo, por lo que debe de hallarse el conjunto de variables del móvil. Si el determinante no es cero entonces se procede a hallar el conjunto de variables del manipulador.

El segundo (Método 2 por Distancias) plantea que si la distancia al punto desde la base es mayor que la distancia máxima del brazo, entonces el punto está fuera del espacio de trabajo y se procede a hallar el conjunto de valores para el móvil. En caso contrario se procede a hallar el conjunto del manipulador.

Como puede verse, todo este procedimiento tiene por esencia el hallar tres valores (conjunto de valores), ya sea para el manipulador o para el móvil, por medio del sistema de ecuaciones presentado en 5-27. Esta obtención no es sencilla ni mucho menos trivial, ya que no tiene una forma analítica de solución, debido a que es altamente no lineal, pues cuenta con una gama de funciones trigonométricas mezcladas. Es por ello que para la resolución del mismo es necesario usar un **método numérico** que pueda aproximar los valores necesarios.

Para nuestro caso se usó un método (no descrito) interno del programa computacional matemático **MATHCAD 14®**, el cual halla los valores de una ecuación o sistema de ecuaciones sin explicar el método numérico que usa.

Seguido de muestra la forma en cómo se programó el sistema de ecuaciones para su solución. Debido a que únicamente se expresa la obtención de un conjunto de valores no está programado del todo el algoritmo presentado.

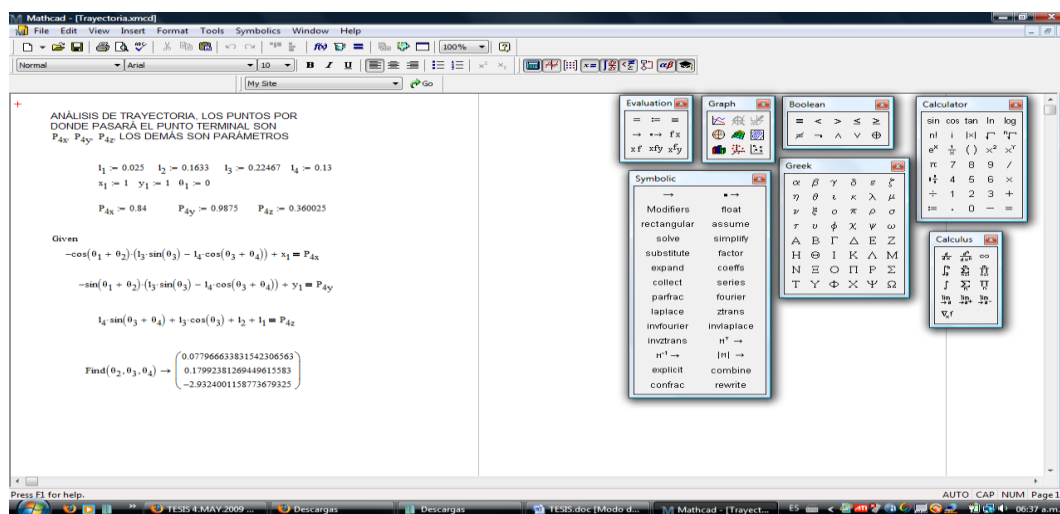


Figura 5-27: Vista del programa con el cual se obtuvieron los puntos de la trayectoria

ANÁLISIS DE TRAYECTORIA, LOS PUNTOS POR
 DONDE PASARÁ EL PUNTO TERMINAL SON
 P_{4x} P_{4y} P_{4z} LOS DEMÁS SON PARÁMETROS

$$l_1 := 0.025 \quad l_2 := 0.1633 \quad l_3 := 0.22467 \quad l_4 := 0.13$$

$$x := 1 \quad y := 1 \quad \theta_1 := 0$$

$$P_{4x} := 0.84 \quad P_{4y} := 0.9875 \quad P_{4z} := 0.360025$$

Given

$$-\cos(\theta_1 + \theta_2) \cdot (l_3 \cdot \sin(\theta_3) - l_4 \cdot \cos(\theta_3 + \theta_4)) + x = P_{4x}$$

$$-\sin(\theta_1 + \theta_2) \cdot (l_3 \cdot \sin(\theta_3) - l_4 \cdot \cos(\theta_3 + \theta_4)) + y = P_{4y}$$

$$l_4 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_4) + l_3 \cdot \cos(\theta_3) + l_2 + l_1 = P_{4z}$$

$$\text{Find}(\theta_2, \theta_3, \theta_4) \rightarrow \begin{pmatrix} 0.077966633831542306563 \\ 0.17992381269449615583 \\ -2.9324001158773679325 \end{pmatrix}$$

Figura 5-28: Programa en *MATCAD 14*® para hallar los puntos de la trayectoria

De esta manera vemos como es que en el programa anterior se puede cambiar el valor del tamaño de los brazos, el punto (coordenada por coordenada) y proporcionar los valores de los tres primeros grados de libertad (x, y, θ_1) para hallar los del manipulador $(\theta_2, \theta_3, \theta_4)$.

Como ejemplo, se planteó una trayectoria para el robot, compuesta por dos rectas, una dentro de su espacio de trabajo y otra que atravesaba ese espacio.

A continuación se muestra un boceto de la misma

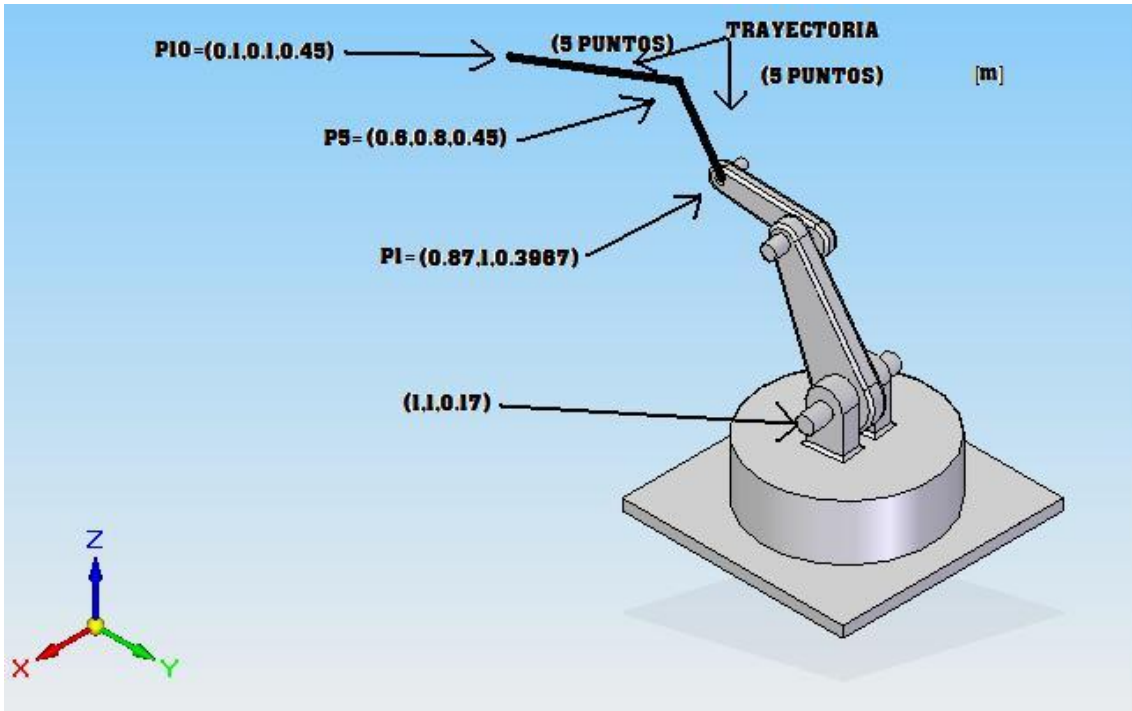


Figura 5-29: Trayectoria ejemplo para el robot

Se muestra a continuación las medidas del robot antes colocado

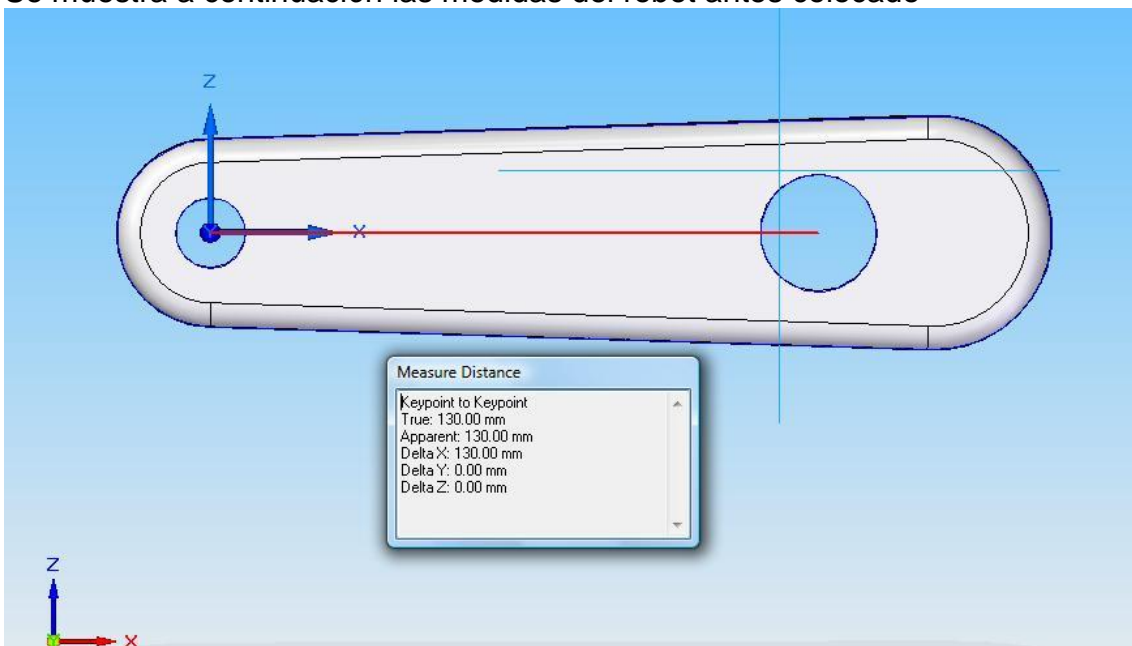


Figura 5-30: Medida del brazo superior

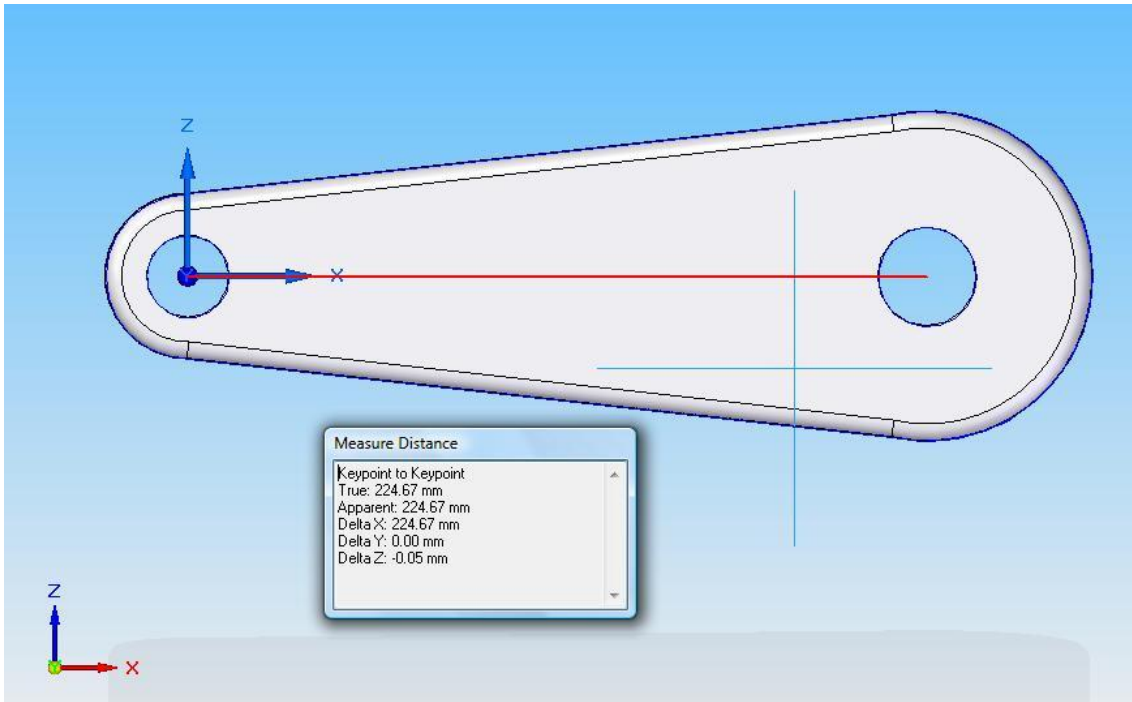


Figura 5-31: Medida del brazo inferior

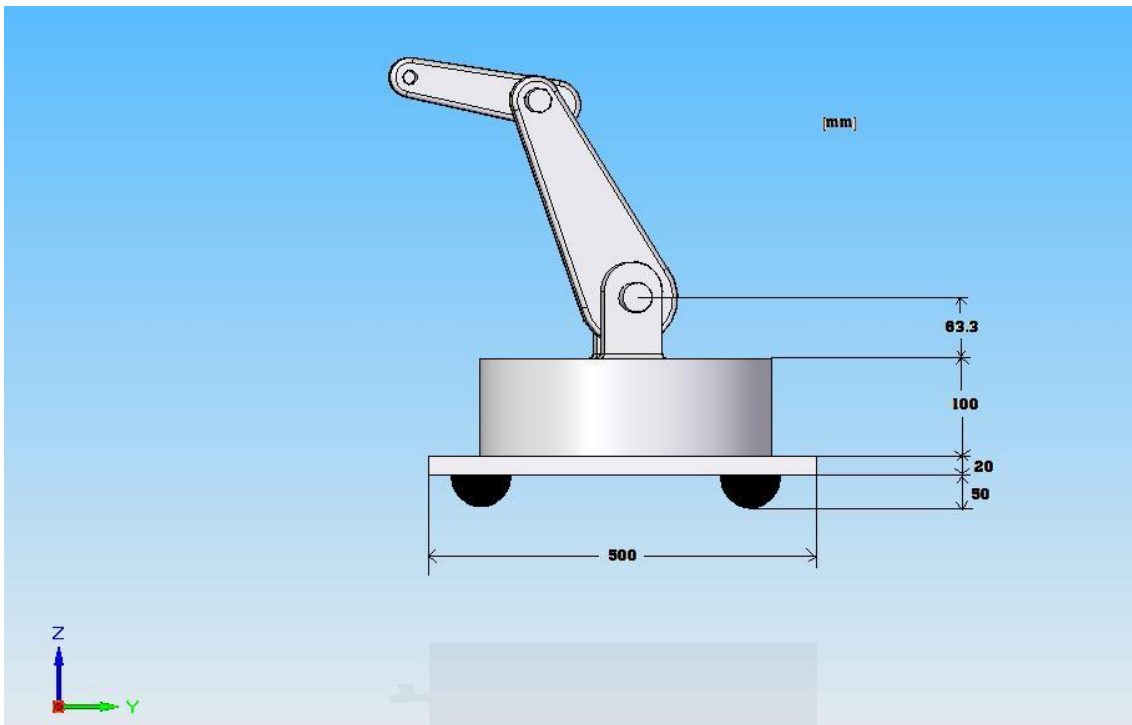


Figura 5-32: Medidas de la base del robot

Siguiendo el algoritmo antes planteado, la trayectoria se divide en dos partes, definidas por medio de dos puntos cada uno de ellos.

De acuerdo con los preceptos de la geometría vectorial, para hallar la ecuación paramétrica dados dos puntos se usa:

$$r = P_0 + ut$$

..... 5-31

Donde:

r : Vector que describe los puntos de la recta

P_0 : Algún punto arbitrario de la trayectoria. Para nuestro caso es el punto inicial del cual parte el robot en cada trayectoria.

u : Vector director (puede o no ser unitario) de la trayectoria. Se obtiene como el punto final menos el punto inicial.

t : Parámetro de la trayectoria. En este caso se trata del tiempo.

Puede notarse que mientras el tiempo (t) cambia, el vector r cambia, pues se le suma "t" veces el vector director de la recta.

Trayectoria 1:

Punto inicial: $P_1 = (0.87, 1, 0.3967)$

Punto final: $P_5 = (0.6, 0.8, 0.45)$

Vector director: $\bar{u}_1 = P_5 - P_1 = (-0.27, -0.2, 0.05533)$

Así, $\bar{r}_1 = (0.87, 1, 0.3967) + (-0.27, -0.2, 0.05533)t$

$$\bar{r}_1 = (0.87 - 0.27t, 1 - 0.2t, 0.3967 + 0.05533t)$$

..... 5-32

Si como vector director se usa un vector unitario en dirección de \bar{u}_1 se tiene:

$$\bar{r}_1 = (0.87 - 0.793t, 1 - 0.587t, 0.3967 + 0.162t)$$

..... 5-33

De forma similar,

Trayectoria 2:

Punto inicial: $P_5 = (0.6, 0.8, 0.45)$

Punto final: $P_{10} = (0.1, 0.1, 0.45)$

Vector director: $\bar{u}_2 = P_{10} - P_5 = (-0.5, -0.7, 0)$

Así, $\bar{r}_1 = (0.6, 0.8, 0.45) + (-0.5, -0.7, 0)t$

$$\bar{r}_1 = (0.6 - 0.5t, 0.8 - 0.7t, 0.45)$$

..... 5-34

Por la forma de la trayectoria, la primera supera el espacio del trabajo del robot, por lo que existe físicamente un punto de intersección de la semiesfera del espacio de trabajo y la recta r_1 .

De esta manera, representando a la recta r_1 (usando la ecuación 5-34) de forma cartesiana se tiene

$$R_1 = \left\{ \frac{x_0 - 0.87}{-0.793} = \frac{y_0 - 1}{-0.587} = \frac{z_0 - 0.396}{0.162} \right\}$$

O bien

$$R_1 = \left\{ \frac{0.87 - x_0}{0.793} = \frac{1 - y_0}{0.587} = \frac{z_0 - 0.396}{0.162} \right\}$$

..... 5-35

Por otro lado, la ecuación de la semiesfera (presentada en 3-59) es

$$(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - 0.17)^2 = (0.35467)^2$$

..... 5-36

De forma que para hallar el punto de intersección se tiene que resolver para (x_0, y_0, z_0) el siguiente sistema de ecuaciones cuadrático-lineal:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{0.87 - x_0}{0.793} = \frac{1 - y_0}{0.587} \\ \frac{0.87 - x_0}{0.793} = \frac{z_0 - 0.396}{0.162} \\ (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - 0.17)^2 = (0.35467)^2 \end{array} \right.$$

..... 5-37

Obteniéndose como resultado:

$$(x_0, y_0, z_0) = \begin{cases} (0.595, 0.796, 0.453) \\ (1.256, 1.286, 0.318) \end{cases}$$

Esto es debido a que geométricamente se está hallando la intersección de una recta y una esfera, y es sabido que habrá dos resultados, dado que una recta corta dos veces a una esfera.

Ahora bien, siguiendo sobre la misma idea de la trayectoria que seguirá el robot, si lo que se quiere es solamente hallar los valores articulares para ciertos puntos, entonces se puede evaluar de forma independiente para cada punto de interés. Esto es lo que da pie al análisis extensivo de trayectorias, ya que para verificar que efectivamente el robot seguirá la trayectoria hay que revisar que al hallar los conjuntos de variables articulares no se halla en una indeterminación. Si el robot tiene una velocidad la cual no permita estacionarse en alguna singularidad la cual genere *acobillamiento* del mecanismo, no habrá problema.

Pero si existe una velocidad que permita que si se estacione, entonces lo que provocará será que el robot no se mueva, aún cuando hay acción en los motores. O peor aún, que haya una fractura mecánica por el esfuerzo generado.

Este análisis de trayectoria da pie al llamado análisis del *PERFIL DE TRAYECTORIAS*. Que consiste en analizar la velocidad y aceleración óptima (dadas las restricciones pertinentes) para cierta trayectoria. En la bibliografía puede hallarse bastante material sobre ello.

En la imagen siguiente se muestra el ejemplo para la trayectoria antes planteada, con los puntos propuestos por los que el robot debe de pasar.

Dada la complejidad del sistema, y a que únicamente se trata de un ejemplo, pueden existir ciertos puntos los cuales son complicados de obtener para el programa, pues como ya se mencionó anteriormente, el sistema de ecuaciones se resuelve por medio de **MATCAD 14®**, y dado el método numérico programado puede ser que existan puntos que no tengan invertibilidad.

Tabla 5-3: Puntos y valores articulares de la trayectoria ejemplo para el robot

Tiempo	P4X	P4Y	P4Z	$\theta 1$			$\theta 2$ [rad]	$\theta 3$ [rad]	$\theta 4$ [rad]	
				x [m]	y [m]	[rad]				
0	0.87	1	0.39	1	1	0	0	1.119	-0.135	TRAYECTORIA 1
1	0.84	0.988	0.36	1	1	0	0.078	0.18	-2.932	
2	0.81	0.965	0.4	1	1	0	0.1821	1.206	0.2357	
3	0.78	0.975	0.4	1	1	0	0.1131	5.864	-3.601	
4	0.75	0.95	0.4	1	1	0	-37.5	0.605	-3.955	
5	0.62	0.78	0.4	0.8	1	0	16.6	-0.9	1.5	
6	0.595	0.796	0.45	0.75	0.85	0	0.335	1.16	0.075	TRAYECTORIA 2
7	0.49	0.61	0.4	0.644	0.663	0	0.335	1.16	0.075	
8	0.36	0.44	0.4	0.514	0.493	0	0.335	1.16	0.075	
9	0.23	0.27	0.4	0.384	0.323	0	0.335	1.16	0.075	
10	0.1	0.1	0.4	0.254	0.153	0	0.335	1.16	0.075	

5.5 VELOCIDAD ARTICULAR. JACOBIANO INVERSO Y APLICACIÓN

En la sección anterior se explicó como es que puede generarse el movimiento sobre una trayectoria para el robot. Sin embargo, hasta este punto sigue sin saberse como hallar la velocidad necesaria para que pueda moverse el robot si está en cierta trayectoria.

O más importante aún, que valor de velocidad angular se requiere para que exista cierta velocidad lineal. Recuerdese que la velocidad del punto terminal del manipulador presentada en 4-62 es

$$V_4 = \begin{bmatrix} x + (\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} - \cos(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\theta_3 + \theta_4) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) \} \\ y - (\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 \text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} - \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\theta_3 + \theta_4) l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) \} \\ (\theta_3 + \theta_4) l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) - \theta_3 l_3 \text{sen}(\theta_3) \end{bmatrix}$$

Lo cual nos indica que dado el vector de grados de libertad $q = [x \ y \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4]^T$ y su vector de derivadas respecto al tiempo correspondiente $\dot{q} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3 \ \dot{\theta}_4]^T$ puede hallarse la velocidad del punto terminal del manipulador.

De acuerdo con la ecuación 5-7 ($\dot{q} = [J(P(q))]^{-1} V$), para hallar la velocidad articular del robot de forma analítica se premultiplica el vector de velocidades lineales por la inversa del Jacobiano relacionado. Para este trabajo, tal como se hizo en la sección 5.3 solamente se consideran Jacobianos cuadrados, dado que una posición puede hallarse con 3 grados de libertad. Usar más es redundante y tienen que omitirse.

Para el caso de la velocidad del punto terminal (V_4) la ecuación resulta

$$\dot{q}_{4man} = (J_{4man})^{-1} \cdot V_4$$

..... 5-38

Donde

$$\dot{q}_{4man} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix}, \quad V_4 = \begin{bmatrix} V_{4x} \\ V_{4y} \\ V_{4z} \end{bmatrix}$$

$$J_{4man} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_1 + \theta_2) (l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)) & -\cos(\theta_1 + \theta_2) (l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)) & -\cos(\theta_1 + \theta_2) l_4 \sin(\theta_3 + \theta_4) \\ -\cos(\theta_1 + \theta_2) (l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) (l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) l_4 \sin(\theta_3 + \theta_4) \\ 0 & -(l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)) & l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \end{bmatrix}$$

De forma que para obtener $(J_{4man})^{-1}$ se usa la técnica:

$$(J_{4man})^{-1} = \frac{adj(J_{4man})}{|J_{4man}|} = \frac{[cof(J_{4man})]^T}{|J_{4man}|}$$

..... 5-39

Se usa el resultado descrito en 5-14

$$\det(J_{4man}) = -l_3 l_4 \cos \theta_4 (l_3 \sin \theta_3 - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4))$$

Para que pueda expresarse el resultado de forma más compacta se usa la siguiente nomenclatura:

$$\begin{aligned} s\theta_{12} &= \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) & c\theta_{12} &= \text{cos}(\theta_1 + \theta_2) \\ s\theta_3 &= \text{sen} \theta_3 & c\theta_3 &= \text{cos} \theta_3 \\ s\theta_4 &= \text{sen} \theta_4 & c\theta_4 &= \text{cos} \theta_4 \\ s\theta_{34} &= \text{sen}(\theta_3 + \theta_4) & c\theta_{34} &= \text{cos}(\theta_3 + \theta_4) \end{aligned}$$

Así pues, los resultados son:

$$(J_{4man})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -l_3 l_4 s\theta_{12} c\theta_4 & l_4 c\theta_{12} [l_3 c(2\theta_3 + \theta_4) + l_4 s(2\theta_{34})] & 0 \\ l_4 c\theta_{12} c\theta_{34} (l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34}) & l_4 c\theta_{34} s\theta_{12} (l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34}) & l_4 s\theta_{34} (l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34}) \\ c\theta_{12} (l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})^2 & -l_4 c\theta_{34} s\theta_{12} (l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34}) & -(l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})(l_3 c\theta_3 - l_4 c\theta_{34}) \end{bmatrix}}{-l_3 l_4 c\theta_4 (l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})}$$

..... 5-40

$$\therefore \dot{q}_4 = \begin{bmatrix} \left(\frac{s\theta_{12}}{(l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})} \right) V_{4x} + \left(-\frac{c\theta_{12} [l_3 c(2\theta_3 + \theta_4) + l_4 s(2\theta_{34})]}{l_3 c\theta_4 (l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})} \right) V_{4y} \\ \left(-\frac{c\theta_{34} c\theta_{12}}{l_3 c\theta_4} \right) V_{4x} + \left(-\frac{c\theta_{34} c\theta_{12}}{l_3 c\theta_4} \right) V_{4y} + \left(-\frac{s\theta_{34}}{l_3 c\theta_4} \right) V_{4z} \\ \left(-\frac{c\theta_{12} (l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})}{l_3 l_4 c\theta_4} \right) V_{4x} + \left(\frac{c\theta_{34} c\theta_{12}}{l_3 c\theta_4} \right) V_{4y} + \left(\frac{(l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})}{l_3 l_4 c\theta_4} \right) V_{4z} \end{bmatrix}$$

..... 5-41

$$\dot{q}_{4man} = \frac{1}{-l_3 l_4 c\theta_4 (l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})} \begin{bmatrix} (-l_3 l_4 s\theta_{12} c\theta_4) V_{4x} + (l_4 c\theta_{12} [l_3 c(2\theta_3 + \theta_4) + l_4 s(2\theta_{34})]) V_{4y} \\ (l_4 c\theta_{12} c\theta_{34} (l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})) V_{4x} + (l_4 c\theta_{34} s\theta_{12} (l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})) V_{4y} + (l_4 s\theta_{34} (l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})) V_{4z} \\ (c\theta_{12} (l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})^2) V_{4x} + (-l_4 c\theta_{34} s\theta_{12} (l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})) V_{4y} + (-l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})(l_3 c\theta_3 - l_4 c\theta_{34}) V_{4y} \end{bmatrix}$$

..... 5-42

$$\dot{q}_{4man} = \frac{\begin{bmatrix} (-l_3 l_4 s\theta_{12} c\theta_4) V_{4x} + (l_4 c\theta_{12} [l_3 c(2\theta_3 + \theta_4) + l_4 s(2\theta_{34})]) V_{4y} \\ (l_4 c\theta_{12} c\theta_{34} (l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})) V_{4x} + (l_4 c\theta_{34} s\theta_{12} (l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})) V_{4y} + (l_4 s\theta_{34} (l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})) V_{4z} \\ (c\theta_{12} (l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})^2) V_{4x} + (-l_4 c\theta_{34} s\theta_{12} (l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})) V_{4y} + (-l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})(l_3 c\theta_3 - l_4 c\theta_{34}) V_{4y} \end{bmatrix}}{-l_3 l_4 c\theta_4 (l_3 s\theta_3 - l_4 c\theta_{34})}$$

..... 5-43

Puede verse entonces, gracias a la ecuación 5-41 que es posible llegar a un resultado EXACTO Y ANALÍTICO del la velocidad articular de un robot, dados

ciertos grados de libertad y la velocidad deseada. Esta última puede plantearse de forma arbitraria o bien usar algún método de *perfil de trayectorias* que describa analíticamente esa velocidad.

Es importante notar que el vector articular presentado en 5-41 depende tanto de las velocidades lineales en cada eje como de los valores de los grados de libertad **QUE PERMITEN LA CONTROLABILIDAD DEL PUNTO TERMINAL** (que es el que está en estudio).

De esta manera se verifica que la velocidad sigue íntimamente ligada a posición, que para nuestro caso es un campo vectorial.

Así entonces, para hallar la velocidad de los grados de libertad puede usarse el modelo anterior o bien resolverse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\{l_3\text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} - \cos(\theta_1 + \theta_2)\{\dot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\} = V_{4x} \\ \dot{y} - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\cos(\theta_1 + \theta_2)\{l_3\text{sen}(\theta_3) - l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)\} - \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\{\dot{\theta}_3 l_3 \cos(\theta_3) + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)l_4 \text{sen}(\theta_3 + \theta_4)\} = V_{4y} \\ (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) - \dot{\theta}_3 l_3 \text{sen}(\theta_3) = V_{4z} \end{cases}$$

..... 5-44

Respecto de cualesquiera tres variables articulares de interés.

Nótese que si se conocen todos los valores de los grados de libertad será más sencilla la resolución de este sistema.

5.6 ACELERACIÓN ARTICULAR. INTRODUCCIÓN AL PERFIL DE VELOCIDADES Y ACELERACIONES

Esta es la última sección del capítulo, y como las secciones anteriores, no se hace un desarrollo matemático, si no es una muy breve introducción a tema que complementa el análisis inverso de un robot.

Primeramente se hablará de la aceleración articular del robot. En las secciones anteriores se habló que una de las opciones de realizar un análisis inverso es básicamente despejar del modelo inicial el parámetro, para hallar condiciones necesarias para que el parámetro tenga cierto valor.

En la sección 5.4, Estática inversa se hallaron ciertos valores usando un método numérico ya que en realidad se tiene un conjunto de parámetros *indespejables*, por lo que se resuelve usando algún algoritmo iterativo. Se hizo mención que el que se usó fue **MATCAD 14®**.

La aceleración inversa es importante debido a que gracias a los valores de aceleración deseados se puede hallar los valores de aceleración articular necesarios para ese fin. Es importante comentar que de esta manera se puede tener mucho mayor idea acerca de los parámetros de diseño de movimiento del robot.

Una desventaja es el hecho de plantear aceleraciones sin visualizar que ocurre con la generación de estas mismas, que es un tema correspondiente de la dinámica del robot.

A la par puede surgir otra interrogante, ¿Qué valores de aceleración y velocidad son óptimos para aplicar al análisis inverso? La respuesta a esta interrogante se halla en el llamado *ANALISIS DEL PERFIL DE TRAYECTORIA*. Anteriormente se mencionó que este está basado en datos ciertos valores de aceleración y velocidad por tramos, denominados por el grado que tienen, de manera que la curva resultante sea lo más suave posible. Esto es debido a que cuando existe un cambio brusco en la aceleración de un cuerpo se presenta un cambio en el **JERK** del mismo, que matemáticamente es la derivada de la aceleración respecto al tiempo.

Del análisis de maquinaria se sabe que un cambio brusco en la aceleración (que provoca a su vez uno en el Jerk) provocará un esfuerzo interno en el elemento. A continuación se muestra un ejemplo de un perfil de 1er orden para la velocidad.



Figura 5-33: Perfil de trayectoria de primer grado

CAPÍTULO 6 MODELO DINÁMICO DEL ROBOT

6.1 INTRODUCCIÓN. CONCEPTOS BÁSICOS. ANÁLISIS DINÁMICO DE UN ROBOT. APLICACIONES.

En los capítulos anteriores se ha hecho un análisis de la movilidad del robot sin hacer mención de los elementos que provocan ese movimiento, los motores del robot. En la mayoría de la bibliografía existente se hace un punto y aparte cuando se comienza a analizar dinámicamente un Robot, pues el análisis CAUSA-EFECTO es sumamente importante para estudiar la posibilidad de movimiento del mismo.

En la teoría de sistema dinámicos se diferencia un sistema dinámico de un estático debido a que el primero tiene elementos que almacenan energía (ya sea de forma inercial o bien capacitiva), mientras que el segundo solo la disipa.

El uso de los modelos es bien conocido y utilizado dentro de la *TEORÍA DE CONTROL MODERNO*, donde se tiene como bandera conocer completamente el sistema (su causa y efecto) para poder dictar cierta ley y técnica de control. En general, hay dos casos: CONTROL EN LAZO ABIERTO es aquel donde se dicta una ley de control pero no se verifica que efectivamente se siga, mientras que en un CONTROL EN LAZO ABIERTO se compara la salida con la referencia para ejercer acción. El control de decisión mostrado anteriormente es de tipo LAZO ABIERTO.

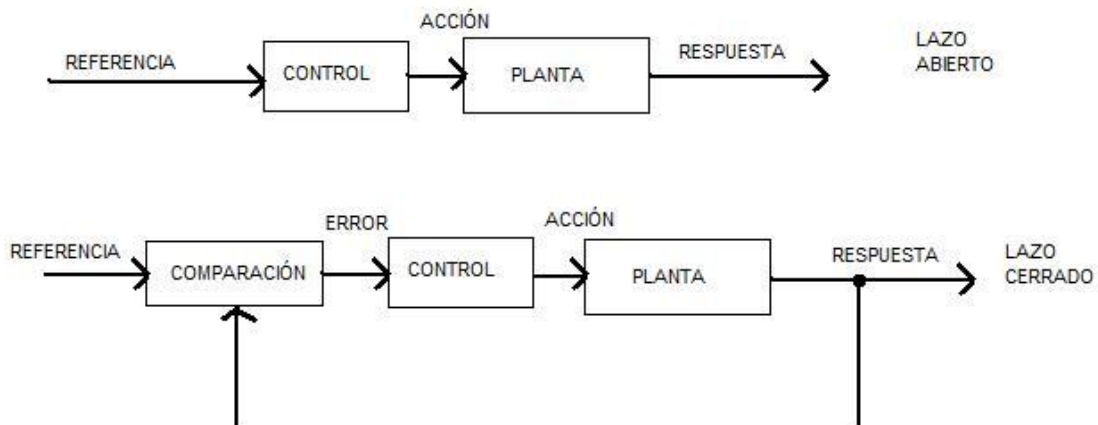


Figura 6-1: Técnicas de control existentes

Los conceptos básicos que se necesitan es UN POCO DE CÁLCULO VECTORIAL y VARIACIONAL, para entender la ecuación EULER-LAGRANGE.

Las aplicaciones son muchísimas, sin embargo la más importante es el CONTROL DE POSICIÓN, DE VELOCIDAD Y DE FUERZA, por medio de distintos métodos.

6.2 MECÁNICA LAGRANGIANA. ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE. SISTEMAS EULER-LAGRANGE.

Como pequeña reseña, en el siglo XVI, llamado en muchas ocasiones surgió una técnica de análisis teórico que amplió y cambió para siempre la perspectiva matemático-física. Este fue el CÁLCULO INFINITESIMAL. Es una historia contada de muy diversas maneras la rivalidad existente entre Newton y Leibniz acerca de quién creó realmente este método. Actualmente se acepta un poco que la idea inicial fue de Newton y fue refinado posteriormente por Leibniz.

Posterior a este suceso, comenzaron a haber una serie de personas que mejoraron todas las técnicas que se habían creado, e inclusive fue usado para resolver problemas que de otra manera hubiera sido imposible resolver. Algunos de los nombres más conocidos son la familia de los *Bernoulli* (*Jakob, Johan y Daniell*), *Hamilton, Euler, Lagrange, etc.*

La historia de todos ellos puede hallarse en bibliografía especializada de la historia de la física. Euler fue alumno de Johan Bernoulli, y recomendado por este ingresó como profesor a la Universidad de San Petersburgo, donde además conoció a su hijo Daniell. Fue en este lugar donde desarrolló una serie de teorías matemáticas.

Por otro lado, desde la época de Newton se utilizaban los métodos de él mismo y Leibniz, que están basados en un axioma físico, la existencia de la masa y de la fuerza, y su relación directa con la aceleración. Sin embargo desde ese entonces (y antes, para ser específicos, desde la época de los griegos) que existía un ente que podía cambiar el estado de movimiento de las cosas. A este elemento se le llama en un principio *vis viva*. Ahora le llamamos ENERGÍA, y lo definimos (de manera somera) como la capacidad de realizar acciones en general.

Jose Luis Lagrange, ingeniero militar desarrolló un método de poder analizar los fenómenos mecánicos de forma teórica por medio de la energía. Su método fue publicado en un libro llamado *MECÁNICA ANALÍTICA*, debido a que a diferencia del método de Newton (que se basa en métodos geométricos para representar los vectores), el método energético es meramente algebraico, y no tiene representación física, sin embargo es una de las formas más sencillas de poder resolver problemas físicos.

Cabe destacar que este método fue ideado por vez primera por Euler, bautizando a las variables que definen el estado del sistema como *grados de libertad*, por lo que desde esa época se utilizan. Lagrange generalizó el método para poder analizar el movimiento de cuerpos rígidos usando los 6 descriptores máximos de un sistema coordinado de 3 dimensiones (3 de posición y 3 de orientación) por medio de energía cinética y potencial del cuerpo.

Posteriormente el señor Hamilton especificó la ecuación obtenida por Lagrange de una forma más general, conocida como de coordenadas generalizadas, llamándoles después *ecuaciones canónicas*. Esto además fue la base para

expresar de forma matemática el principio de mínima energía expresado anteriormente por el físico *Fermat* respecto al camino que sigue la luz.

Hamilton expresó que para un sistema mecánico que únicamente contemple Energía mecánica y potencial la variación de la diferencia de la Energía Cinética menos la Energía Potencial de un tiempo a otro considerando instantes infinitesimales debe ser cero para que haya mínima acción.

Matemáticamente esta expresado como:

PRINCIPIO DE MÍNIMA ACCIÓN

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

..... 6-1

Donde

δ = Variación de una función (en este caso dependiente del tiempo)

L = Lagrangiano del sistema, que es la Energía Cinética menos la Potencial.

Para una demostración más extensa de esta ecuación ver el Anexo 1.

Usando esta ecuación y tras un procedimiento teórico se llega a la siguiente

ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$$

..... 6-2

Donde: $L = k - u$ = Energía Cinética-Energía Potencial

\dot{q} = Derivada de la coordenada generalizada relacionada

q = Coordenada generalizada

τ = Variable generadora de la acción. Variable de esfuerzo.

Que es un resultado importante dentro de la mecánica teórica. Su demostración se puede ver en el Anexo 2.

En teoría avanzada de sistemas dinámicos, existen dos tipos de variables en todo sistema, de esfuerzo y de flujo. Las de flujo son la derivada de una coordenada generalizada, que define por completo es estado del espacio del sistema. La variable de esfuerzo es la que genera esas variación en la variable de flujo.

Si se quiere utilizar para poder modelar sistemas dinámicos hay que hallar primero el número de coordenadas generalizadas que definen al sistema. En general coincide con el número de variables de estado, que son las variables que pueden definir completamente el estado de un sistema, además de ser variables con las cuales puede obtenerse la energía instantánea del sistema.

De esta manera, al ser un conjunto de variables la ecuación 6-2 es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i$$

..... 6-3

Con $i = 1, 2, 3, \dots$

Donde: $L = k - u =$ Energía Cinética-Energía Potencial

$q_i =$ Coordenada generalizada i del sistema. En el caso de un robot se trata de cada grado de libertad.

$\dot{q}_i =$ Derivada generalizada i del sistema. En el caso de un robot se trata de cada derivada de un grado de libertad.

$\tau_i =$ Variable de esfuerzo generalizada i del sistema. En el caso de un robot se trata de la torca de un motor si es una articulación rotacional o fuerza si se trata de una lineal.

Para un robot debe hallarse una ecuación por cada grado de libertad.

En ocasiones es conveniente expresar el conjunto de ecuaciones obtenido por medio de la ecuación 6-3 de forma compacta, pues como se ve, al tener 2 o más coordenadas generalizadas se obtiene una serie de ecuaciones y no una sola, por lo que se resume a una *ecuación matricial dinámica*. Esta se conoce comúnmente como *SISTEMAS EULER-LAGRANGE*. Cabe destacar que NO todos los sistemas pueden expresarse de esta forma.

SISTEMAS EULER LAGRANGE

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$$

..... 6-4

Donde

$q =$ Vector de coordenadas generalizadas. En el caso de un robot se trata del vector de grados de libertad.

$\dot{q} =$ Vector de derivadas generalizadas. En el caso de un robot se trata del vector de derivadas de los grados de libertad.

$\ddot{q} =$ Vector de segundas derivadas generalizadas. En el caso de un robot se trata del vector de segundas derivadas de los grados de libertad.

$M(q) =$ Matriz de Inercia o de elementos constitutivos

$C(q, \dot{q}) =$ Matriz de *Coriolis* (en nombre del científico francés)

$g(q) =$ Vector de gravedad o de efectos inherentes.

$\tau =$ Vector de entradas del sistema.

La demostración de esta ecuación puede hallarse en el Anexo 3.

6.3 MODELO DEL ROBOT POR MEDIO DE LA ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE

Como se mencionó anteriormente, para hallar el modelo matemático del robot es necesario utilizar la ecuación 6-3, una por cada grado de libertad, por lo que a continuación se expresara los elementos necesarios para obtener las 6 ecuaciones relacionadas. En la siguiente imagen se muestran los grados de libertad del robot y las masas relacionadas.

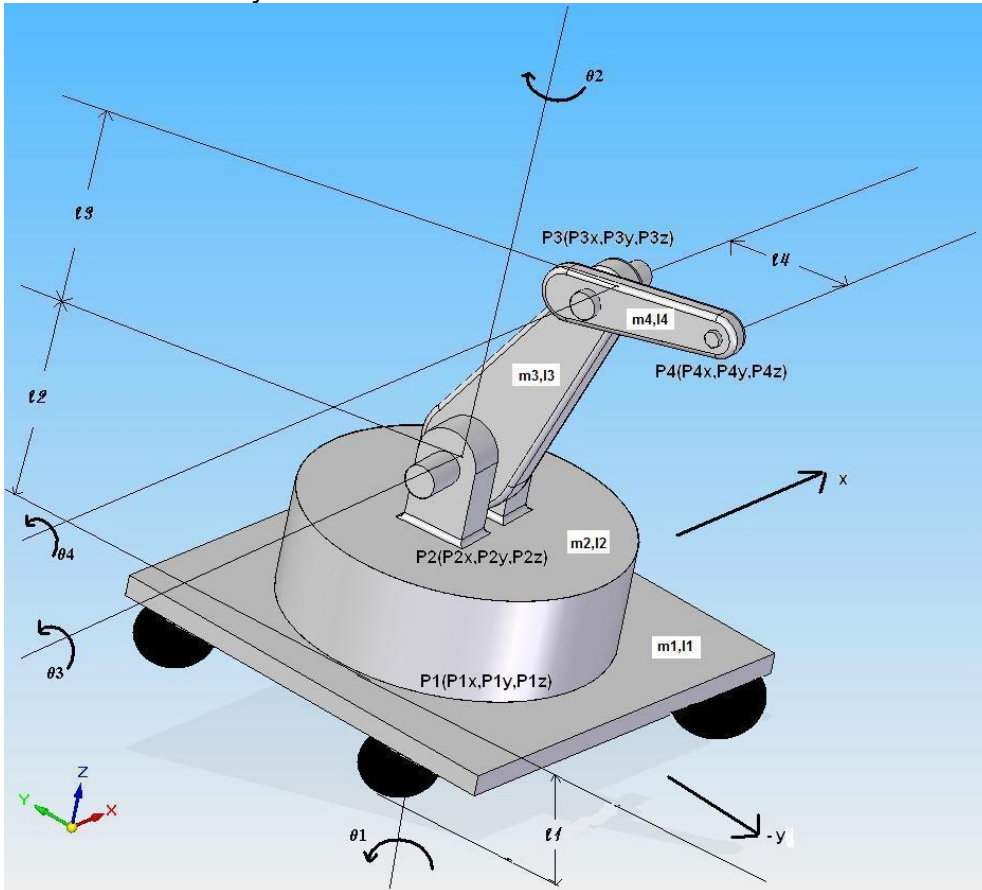


Figura 6-2: Robot con grados de libertad, masas e inercias.

Para el robot completo se tiene que

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

..... 6-5

Y de acuerdo con la ecuación 6-3 hay que hallar la Energía Cinética y Potencial del Robot. Otro punto importante de mencionar es el uso de longitudes y velocidades al centro de masa de cada eslabón. Estas están indicadas con un subíndice c y el indicador correspondiente.

Para facilidad del modelo se usa la siguiente nomenclatura:

$$\begin{aligned}
 s\theta_1 &= \sin \theta_1 & c\theta_1 &= \cos \theta_1 \\
 s\theta_2 &= \sin \theta_2 & c\theta_2 &= \cos \theta_2 \\
 s\theta_{12} &= s(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1 + \theta_2) & c\theta_{12} &= c(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) \\
 s\theta_3 &= \sin \theta_3 & c\theta_3 &= \cos \theta_3 \\
 s\theta_4 &= \sin \theta_4 & c\theta_4 &= \cos \theta_4 \\
 s\theta_{34} &= s(\theta_3 + \theta_4) = \sin(\theta_3 + \theta_4) & c\theta_{34} &= c(\theta_3 + \theta_4) = \cos(\theta_3 + \theta_4)
 \end{aligned}$$

TODAS LAS SIGUIENTES ECUACIONES ESTÁN BASADAS EN LA METODOLOGÍA DINÁMICA PRESENTADA EN [20]
ENERGÍA CINÉTICA TOTAL

$$k(q, \dot{q}) = k_1(q, \dot{q}) + k_2(q, \dot{q}) + k_3(q, \dot{q}) + k_4(q, \dot{q})$$

..... 6-6

ESLABÓN 1

$$k_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^T v_1 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2$$

..... 6-7

$$v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

..... 6-8

$$\|v_1\|^2 = v_1^T v_1 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

..... 6-9

Así

$$k_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2$$

..... 6-10

ESLABÓN 2

$$k_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^T v_2 + \frac{1}{2} I_2 [\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2]^2$$

..... 6-11

$$v_2 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

..... 6-12

$$\|v_2\|^2 = v_2^T v_2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

..... 6-13

Así:

$$k_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_2 [\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2]^2$$

..... 6-14

ESLABÓN 3

$$k_3 = \frac{1}{2} m_3 v_{c3}^T v_{c3} + \frac{1}{2} I_3 [\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3]^2$$

..... 6-15

$$v_{c3} = \begin{bmatrix} \dot{x} + l_{c3} (\dot{\theta}_{12} s \theta_{12} s \theta_3 - \dot{\theta}_3 c \theta_{12} c \theta_3) \\ \dot{y} - l_{c3} (\dot{\theta}_{12} c \theta_{12} s \theta_3 - \dot{\theta}_3 s \theta_{12} c \theta_3) \\ -\dot{\theta}_3 l_{c3} s \theta_3 \end{bmatrix}$$

..... 6-16

$$\begin{aligned} \|v_{c3}\|^2 &= v_{c3}^T v_{c3} \\ &= [\dot{x} + l_{c3} (\dot{\theta}_{12} s \theta_{12} s \theta_3 - \dot{\theta}_3 c \theta_{12} c \theta_3)]^2 \\ &\quad + [\dot{y} - l_{c3} (\dot{\theta}_{12} c \theta_{12} s \theta_3 - \dot{\theta}_3 s \theta_{12} c \theta_3)]^2 \\ &\quad + (-\dot{\theta}_3 l_{c3} s \theta_3)^2 \end{aligned}$$

..... 6-17

Así:

$$\begin{aligned} k_3 &= \frac{1}{2} m_3 [\dot{x} + l_{c3} (\dot{\theta}_{12} s \theta_{12} s \theta_3 - \dot{\theta}_3 c \theta_{12} c \theta_3)]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_3 [\dot{y} - l_{c3} (\dot{\theta}_{12} c \theta_{12} s \theta_3 - \dot{\theta}_3 s \theta_{12} c \theta_3)]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_3 (-\dot{\theta}_3 l_{c3} s \theta_3)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} I_3 [\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3]^2 \end{aligned}$$

..... 6-18

ESLABÓN 4

$$k_4 = \frac{1}{2} m_4 v_{c4}^T v_{c4} + \frac{1}{2} I_4 [\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4]^2$$

..... 6-19

$$v_{c4} = \begin{bmatrix} \dot{x} + (\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4)\} - c(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 c \theta_3 + (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \} \\ \dot{y} - (\theta_1 + \theta_2) c(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4)\} - s(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 c \theta_3 + (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \} \\ (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) - \theta_3 l_3 s \theta_3 \end{bmatrix}$$

..... 6-20

Así:

$$\begin{aligned}
k_4 = & \frac{1}{2}m_4[\dot{x} + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)s(\theta_1 + \theta_2)\{l_3s\theta_3 - l_{c4}c(\theta_3 + \theta_4)\} - c(\theta_1 + \theta_2)\{\dot{\theta}_3l_3c\theta_3 + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_3)l_{c4}s(\theta_3 + \theta_4)\}]^2 \\
& + \frac{1}{2}m_4[\dot{y} - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)c(\theta_1 + \theta_2)\{l_3s\theta_3 - l_{c4}c(\theta_3 + \theta_4)\} - s(\theta_1 + \theta_2)\{\dot{\theta}_3l_3c\theta_3 + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_3)l_{c4}s(\theta_3 + \theta_4)\}]^2 \\
& + \frac{1}{2}m_4[(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_3)l_{c4}c(\theta_3 + \theta_4) - \dot{\theta}_3l_3s\theta_3]^2 \\
& + \frac{1}{2}I_4[\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4]^2
\end{aligned}$$

..... 6-21

De manera que la energía cinética total del robot es:

$$\begin{aligned}
k = & k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \\
= & \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_1[\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2]^2 \\
& + \frac{1}{2}m_3[\dot{x} + l_{c3}\{(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)s(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 - \dot{\theta}_3c(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3\}]^2 \\
& + \frac{1}{2}m_3[\dot{y} - l_{c3}\{(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 - \dot{\theta}_3s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3\}]^2 \\
& - \frac{1}{2}m_3(\dot{\theta}_3l_{c3}s\theta_3)^2 + \frac{1}{2}I_3[\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3]^2 \\
& + \frac{1}{2}m_4[\dot{x} + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)s(\theta_1 + \theta_2)\{l_3s\theta_3 - l_{c4}c(\theta_3 + \theta_4)\} - c(\theta_1 + \theta_2)\{\dot{\theta}_3l_3c\theta_3 + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_3)l_{c4}s(\theta_3 + \theta_4)\}]^2 \\
& + \frac{1}{2}m_4[\dot{y} - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)c(\theta_1 + \theta_2)\{l_3s\theta_3 - l_{c4}c(\theta_3 + \theta_4)\} - s(\theta_1 + \theta_2)\{\dot{\theta}_3l_3c\theta_3 + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_3)l_{c4}s(\theta_3 + \theta_4)\}]^2 \\
& + \frac{1}{2}m_4[(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_3)l_{c4}c(\theta_3 + \theta_4) - \dot{\theta}_3l_3s\theta_3]^2 + \frac{1}{2}I_4[\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4]^2
\end{aligned}$$

..... 6-22

Por otro lado, la energía potencial se obtiene de una forma similar

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

..... 6-23

$$u_1 = m_1gl_1$$

..... 6-24

$$u_2 = m_2g(l_1 + l_2)$$

..... 6-25

$$u_3 = m_3g(l_1 + l_2 + l_{c3}c\theta_3)$$

..... 6-26

$$u_4 = m_4 g(l_1 + l_2 + l_{c3} c\theta_3 + l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4))$$

..... 6-27

Así:

$$u = m_1 g l_1 + m_2 g(l_1 + l_2) + m_3 g(l_1 + l_2 + l_{c3} c\theta_3) + m_4 g(l_1 + l_2 + l_{c3} c\theta_3 + l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4))$$

..... 6-28

De esta forma, el lagrangiano del robot (que para este caso es el sistema) es:

$$L = k - u$$

..... 6-29

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_1 [\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2]^2 \\ & + \frac{1}{2} m_3 [x + l_{c3} \{(\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) s\theta_3 - \theta_3 c(\theta_1 + \theta_2) c\theta_3\}]^2 \\ & + \frac{1}{2} m_3 [y - l_{c3} \{(\theta_1 + \theta_2) c(\theta_1 + \theta_2) s\theta_3 - \theta_3 s(\theta_1 + \theta_2) c\theta_3\}]^2 \\ & - \frac{1}{2} m_3 (\theta_3 l_{c3} s\theta_3)^2 + \frac{1}{2} I_3 [\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3]^2 \\ & + \frac{1}{2} m_4 [x + (\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 s\theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4)\} - c(\theta_1 + \theta_2) \{\theta_3 l_3 c\theta_3 + (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4)\}]^2 \\ & + \frac{1}{2} m_4 [y - (\theta_1 + \theta_2) c(\theta_1 + \theta_2) \{l_3 s\theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4)\} - s(\theta_1 + \theta_2) \{\theta_3 l_3 c\theta_3 + (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4)\}]^2 \\ & + \frac{1}{2} m_4 [(\theta_3 + \theta_4) l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) - \theta_3 l_3 s\theta_3]^2 + \frac{1}{2} I_4 [\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4]^2 \\ & - m_1 g l_1 - m_2 g(l_1 + l_2) - m_3 g(l_1 + l_2 + l_{c3} c\theta_3) - m_4 g(l_1 + l_2 + l_{c3} c\theta_3 + l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4)) \end{aligned}$$

De esta forma, debido a que son 6 grados de libertad, en las siguientes 6 ecuaciones se colocarán de forma *ilustrativa* las 6 ecuaciones que se obtuvieron por medio de un **ARDUO TRABAJO**, y que componen el modelo dinámico del robot, terminando con ello el capítulo y el trabajo.

El sistema que se forma es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i$$

Con $i = 1, 2, \dots, 6$ y $q = [x \quad y \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4]^T$

Para $q_1 = x$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = F_{1x}$$

..... 6-30

$$\begin{aligned} F_{1x} = & [m_1 + m_2 + m_3 + m_4] \ddot{x} \\ & + m_3 l_{c3} [(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) s(\theta_1 + \theta_2) s\theta_3 - \ddot{\theta}_3 c(\theta_1 + \theta_2) c\theta_3] \\ & + m_3 l_{c3} [2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s(\theta_1 + \theta_2) c\theta_3 + [(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \dot{\theta}_3^2] c(\theta_1 + \theta_2) s\theta_3] \\ & + m_4 [(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) s(\theta_1 + \theta_2) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 c(\theta_1 + \theta_2)] \{l_3 s\theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4)\} \\ & \quad + 2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \{ \dot{\theta}_3 l_3 c\theta_3 + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & - m_4 [c(\theta_1 + \theta_2) \{ \ddot{\theta}_3 l_3 c\theta_3 - \dot{\theta}_3^2 l_3 s\theta_3 + (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2 l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \}] \end{aligned}$$

..... 6-31

Para $q_2 = y$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = F_{1y}$$

..... 6-32

$$\begin{aligned} F_{1y} = & [m_1 + m_2 + m_3 + m_4] y \\ & - m_3 l_{c3} [(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) c(\theta_1 + \theta_2) s\theta_3 - \ddot{\theta}_3 s(\theta_1 + \theta_2) c\theta_3] \\ & + m_3 l_{c3} [(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 - \dot{\theta}_3^2] s(\theta_1 + \theta_2) s\theta_3 \\ & - m_4 [(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) c(\theta_1 + \theta_2) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 s(\theta_1 + \theta_2)] \{l_3 s\theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4)\} \\ & \quad + 2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c(\theta_1 + \theta_2) \{ \dot{\theta}_3 l_3 c\theta_3 + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & - m_4 [s(\theta_1 + \theta_2) \{ \ddot{\theta}_3 l_3 c\theta_3 - \dot{\theta}_3^2 l_3 s\theta_3 + (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2 l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \}] \end{aligned}$$

..... 6-33

Para $q_3 = \theta_1$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \tau_1$$

..... 6-34

$$\begin{aligned} \tau_1 = & (I_1 + I_2 + I_3 + I_4) \ddot{\theta}_1 \\ & + \dot{\theta}_3 m_3 l_3 c \theta_3 \{s(\theta_1 + \theta_2) [\dot{x} + l_{c3} \{(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)s(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 - \dot{\theta}_3 c(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3\}] \\ & - c(\theta_1 + \theta_2) [\dot{y} - l_{c3} \{(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 - \dot{\theta}_3 s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3\}]\} \\ & + m_3 l_3 s \theta_3 \{(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)c(\theta_1 + \theta_2) [\dot{x} + l_{c3} \{(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)s(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 - \dot{\theta}_3 c(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3\}] \\ & + s(\theta_1 + \theta_2) [\dot{x} + l_{c3} \{(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)s(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 - \ddot{\theta}_3 c(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3\}] \\ & + 2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 + [(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \dot{\theta}_3^2]c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 \\ & + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)s(\theta_1 + \theta_2) [\dot{y} - l_{c3} \{(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 - \dot{\theta}_3 s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3\}] \\ & - c(\theta_1 + \theta_2) [\dot{y} - l_{c3} \{(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 - \ddot{\theta}_3 s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3\}] \\ & - [(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 - \dot{\theta}_3^2]s(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3\} \\ & + m_4 \{ \dot{\theta}_3 l_3 c \theta_3 - (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} \{ s(\theta_1 + \theta_2) [\dot{x} + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)s(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \}] \\ & - c(\theta_1 + \theta_2) \{ \dot{\theta}_3 l_3 c \theta_3 - (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} \} \\ & - c(\theta_1 + \theta_2) [\dot{y} - l_{c3} \{ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 - \dot{\theta}_3 s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 \}] \\ & - s(\theta_1 + \theta_2) \{ \dot{\theta}_3 l_3 c \theta_3 - (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} \} \\ & + m_4 \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} \{ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)c(\theta_1 + \theta_2) [\dot{x} + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)s(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \}] \\ & - c(\theta_1 + \theta_2) \{ \dot{\theta}_3 l_3 c \theta_3 - (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \} \} \\ & + s(\theta_1 + \theta_2) [\dot{x} + ((\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)s(\theta_1 + \theta_2) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 c(\theta_1 + \theta_2)) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \}] \\ & + 2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)s(\theta_1 + \theta_2) \{ \dot{\theta}_3 l_3 c \theta_3 + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & - c(\theta_1 + \theta_2) \{ \dot{\theta}_3 l_3 c \theta_3 - \dot{\theta}_3^2 l_3 s \theta_3 + (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2 l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)s(\theta_1 + \theta_2) [\dot{y} - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)c(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \}] \\ & - s(\theta_1 + \theta_2) \{ \dot{\theta}_3 l_3 c \theta_3 + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \} \} \\ & - c(\theta_1 + \theta_2) [\dot{y} - ((\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)c(\theta_1 + \theta_2) - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 s(\theta_1 + \theta_2)) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \}] \\ & - 2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)c(\theta_1 + \theta_2) \{ \dot{\theta}_3 l_3 c \theta_3 - (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & - s(\theta_1 + \theta_2) \{ \dot{\theta}_3 l_3 c \theta_3 - \dot{\theta}_3^2 l_3 s \theta_3 + (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \\ & + (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2 l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} \} \\ & + (I_2 + I_3 + I_4) \ddot{\theta}_2 + (I_3 + I_4) \ddot{\theta}_3 + I_4 \ddot{\theta}_4 \\ & - m_3 [\dot{x} + l_{c3} \{ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)s(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 - \dot{\theta}_3 c(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 \}] \\ & \quad \bullet [l_{c3} \{ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 - \dot{\theta}_3 s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 \}] \\ & - m_3 [\dot{y} - l_{c3} \{ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)c(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 - \dot{\theta}_3 s(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 \}] \\ & \quad \bullet [l_{c3} \{ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)s(\theta_1 + \theta_2)s\theta_3 - \dot{\theta}_3 c(\theta_1 + \theta_2)c\theta_3 \}] \\ & - m_4 [\dot{x} + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)s(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \}] - c(\theta_1 + \theta_2) \{ \dot{\theta}_3 l_3 c \theta_3 + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & \quad \bullet [(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)c(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \}] + s(\theta_1 + \theta_2) \{ \dot{\theta}_3 l_3 c \theta_3 + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & - m_4 [\dot{y} - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)c(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \}] - s(\theta_1 + \theta_2) \{ \dot{\theta}_3 l_3 c \theta_3 + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & \quad \bullet [(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)s(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \}] - c(\theta_1 + \theta_2) \{ \dot{\theta}_3 l_3 c \theta_3 + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \} \} \end{aligned}$$

..... 6-35

Para $q_4 = \theta_2$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau_2$$

..... 6-36

$$\begin{aligned} \tau_1 = & (I_1 + I_2 + I_3 + I_4) \ddot{\theta}_2 \\ & + \theta_3 m_3 l_3 c \theta_3 \{ s(\theta_1 + \theta_2) [\dot{x} + l_{c3} \{ (\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) s \theta_3 - \dot{\theta}_3 c(\theta_1 + \theta_2) c \theta_3 \}] \\ & - c(\theta_1 + \theta_2) [\dot{y} - l_{c3} \{ (\theta_1 + \theta_2) c(\theta_1 + \theta_2) s \theta_3 - \dot{\theta}_3 s(\theta_1 + \theta_2) c \theta_3 \}] \} \\ & + m_3 l_3 s \theta_3 \{ (\theta_1 + \theta_2) c(\theta_1 + \theta_2) [\dot{x} + l_{c3} \{ (\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) s \theta_3 - \dot{\theta}_3 c(\theta_1 + \theta_2) c \theta_3 \}] \\ & + s(\theta_1 + \theta_2) [\dot{x} + l_{c3} \{ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s(\theta_1 + \theta_2) s \theta_3 - \ddot{\theta}_3 c(\theta_1 + \theta_2) c \theta_3 \}] \\ & + 2(\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) c \theta_3 + [(\theta_1 + \theta_2)^2 + \theta_3^2] c(\theta_1 + \theta_2) s \theta_3] \\ & + (\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) [\dot{y} - l_{c3} \{ (\theta_1 + \theta_2) c(\theta_1 + \theta_2) s \theta_3 - \dot{\theta}_3 s(\theta_1 + \theta_2) c \theta_3 \}] \\ & - c(\theta_1 + \theta_2) [\dot{y} - l_{c3} \{ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c(\theta_1 + \theta_2) s \theta_3 - \ddot{\theta}_3 s(\theta_1 + \theta_2) c \theta_3 \}] \\ & - [(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 - \dot{\theta}_3^2] s(\theta_1 + \theta_2) s \theta_3 \} \\ & + m_4 \{ \theta_3 l_3 c \theta_3 - (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} \{ s(\theta_1 + \theta_2) [\dot{x}_1 + (\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \}] \\ & - c(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 c \theta_3 - (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} \} \\ & - c(\theta_1 + \theta_2) [\dot{y} - l_{c3} \{ (\theta_1 + \theta_2) c(\theta_1 + \theta_2) s \theta_3 - \dot{\theta}_3 s(\theta_1 + \theta_2) c \theta_3 \}] \\ & - s(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 c \theta_3 - (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} \} \\ & + m_4 \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} \{ (\theta_1 + \theta_2) c(\theta_1 + \theta_2) [\dot{x}_1 + (\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \}] \\ & - c(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 c \theta_3 - (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \} \} \\ & + s(\theta_1 + \theta_2) [\dot{x} + \{ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s(\theta_1 + \theta_2) + (\theta_1 + \theta_2)^2 c(\theta_1 + \theta_2) \} \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \}] \\ & + 2(\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 c \theta_3 + (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & - c(\theta_1 + \theta_2) \{ \ddot{\theta}_3 l_3 c \theta_3 - \dot{\theta}_3^2 l_3 s \theta_3 + (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2 l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & + (\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) [\dot{y} - (\theta_1 + \theta_2) c(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \}] \\ & - s(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 c \theta_3 + (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \}] \\ & - c(\theta_1 + \theta_2) [\dot{y} - \{ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c(\theta_1 + \theta_2) - (\theta_1 + \theta_2)^2 s(\theta_1 + \theta_2) \} \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \}] \\ & - 2(\theta_1 + \theta_2) c(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 c \theta_3 - (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & - s + (I_3 + I_4) \ddot{\theta}_3 + I_4 \ddot{\theta}_4 \\ & - m_3 [\dot{x} + l_{c3} \{ (\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) s \theta_3 - \dot{\theta}_3 c(\theta_1 + \theta_2) c \theta_3 \}] \\ & \quad \bullet [l_{c3} \{ (\theta_1 + \theta_2) c(\theta_1 + \theta_2) s \theta_3 - \dot{\theta}_3 s(\theta_1 + \theta_2) c \theta_3 \}] \\ & - m_3 [\dot{y} - l_{c3} \{ (\theta_1 + \theta_2) c(\theta_1 + \theta_2) s \theta_3 - \dot{\theta}_3 s(\theta_1 + \theta_2) c \theta_3 \}] \\ & \quad \bullet [l_{c3} \{ (\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) s \theta_3 - \dot{\theta}_3 c(\theta_1 + \theta_2) c \theta_3 \}] \\ & - m_4 [\dot{x} + (\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} - c(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 c \theta_3 + (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \}] \\ & \quad \bullet [(\theta_1 + \theta_2) c(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} + s(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 c \theta_3 + (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \}] \\ & - m_4 [\dot{y} - (\theta_1 + \theta_2) c(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} - s(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 c \theta_3 + (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \}] \\ & \quad \bullet [(\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} - c(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 c \theta_3 + (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \}] \end{aligned}$$

..... 6-37

Para $q_6 = \theta_4$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_4} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_4} = \tau_4$$

..... 6-40

$$\begin{aligned} \tau_3 = & -m_4 l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \{ -(\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) [\dot{x} + (\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & - s(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 s \theta_3 + (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \}] \\ & + c(\theta_1 + \theta_2) [\dot{x} + ((\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s(\theta_1 + \theta_2) + (\theta_1 + \theta_2)^2 c(\theta_1 + \theta_2)) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & + 2(\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 c \theta_3 + (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & - c(\theta_1 + \theta_2) \{ \ddot{\theta}_3 l_3 c \theta_3 + \theta_3^2 l_3 s \theta_3 + (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) + (\theta_3 + \theta_4)^2 l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & + (\theta_1 + \theta_2) c(\theta_1 + \theta_2) [\dot{y} - (\theta_1 + \theta_2) c(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & - s(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 c \theta_3 + (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \}] \\ & + s(\theta_1 + \theta_2) [\dot{y} - ((\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c(\theta_1 + \theta_2) - (\theta_1 + \theta_2)^2 s(\theta_1 + \theta_2)) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & - 2(\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 c \theta_3 + (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & - s(\theta_1 + \theta_2) \{ \ddot{\theta}_3 l_3 c \theta_3 - \theta_3^2 l_3 s \theta_3 + (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) + (\theta_3 + \theta_4)^2 l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \}] \\ & - m_4 l_{c4} (\theta_3 + \theta_4) c(\theta_3 + \theta_4) \{ c(\theta_1 + \theta_2) [\dot{x} + (\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & - c(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 s \theta_3 + (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \}] \\ & + s(\theta_1 + \theta_2) [\dot{y} - (\theta_1 + \theta_2) c(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & - s(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 s \theta_3 + (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \}] \\ & - m_4 l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \{ (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) - (\theta_3 + \theta_4)^2 l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) - \ddot{\theta}_3 l_3 s \theta_3 - \theta_3^2 l_3 c \theta_3 \} \\ & - (\theta_3 + \theta_4) m_4 l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \{ (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) - \theta_3 l_3 s \theta_3 \} \\ & + I_4 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) \\ & - m_4 l_{c4} \{ [(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) s(\theta_1 + \theta_2) s(\theta_3 + \theta_4) - (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) c(\theta_1 + \theta_2) c(\theta_3 + \theta_4)] \\ & \quad \bullet [\dot{x} + (\theta_1 + \theta_2) s(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & \quad - c(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 c \theta_3 + (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \}] \\ & - [(\theta_1 + \theta_2) c(\theta_1 + \theta_2) s(\theta_3 + \theta_4) - (\theta_3 + \theta_4) s(\theta_1 + \theta_2) c(\theta_3 + \theta_4)] \\ & \quad \bullet [\dot{y} - (\theta_1 + \theta_2) c(\theta_1 + \theta_2) \{ l_3 s \theta_3 - l_{c4} c(\theta_3 + \theta_4) \} \\ & \quad - s(\theta_1 + \theta_2) \{ \theta_3 l_3 c \theta_3 + (\theta_3 + \theta_4) l_{c4} s(\theta_3 + \theta_4) \}] \} \end{aligned}$$

..... 6-41

FINALMENTE CABE DESTACAR EL HECHO DE QUE AUNQUE ESTE MODELO ES MUY GRANDE Y COMPLICADO, PUEDE SIMULARSE, DE MANERA QUE SE ESTARÍA SIMULANDO EL COMPORTAMIENTO DEL ROBOT. EL PROGRAMA CON LO QUE SE HACE ESTA SIMULACIÓN ES *SIMULINK* DE *MATLAB*.

ES DE ESTA MANERA EN COMO PUEDE COMPROBARSE EL COMPORTAMIENTO DEL ROBOT, DESDE LA ACCIÓN DE LOS MOTORES HASTA EL SEGUIMIENTO DE UNA TRAYECTORIA. ESTA ES LA BASE DEL CONTROL DE ALGÚN TIPO PARA EL ROBOT.

ADEMÁS, DEBIDO A LA COMPLEJIDAD DEL PROBLEMA PUEDE LLEGAR A UTILIZARSE ALGÚN METODO MÁS MODERNO DE CONTROL COMO *CONTROL Y ANÁLISIS DIFUSO*.

CONCLUSIONES GENERALES DEL TRABAJO

Sobre la hipótesis: Se cumplieron satisfactoriamente todas las hipótesis planteadas por medio de este trabajo, pues se comprobó cómo es que el uso de un modelo matemático sirve de guía para el análisis de movilidad e inmovilidad del robot, como se demostró en el capítulo 5 de cinemática inversa, donde se usó el determinante (obtenido del Jacobiano del robot, que se obtuvo a su vez del modelo de posición del robot) para hallar analíticamente y gráficamente las singularidades del robot.

Sobre la relevancia del trabajo: Además del cumplimiento de las hipótesis planteadas, pudo verse en el capítulo de cinemática inversa, **dos nuevos tipos de análisis de la inmovilidad del robot a través del determinante:**

Método 1: Por medio de un estudio analítico exhaustivo de las condiciones suficientes más no necesarias para que este se haga cero.

Método 2: Consiste en la exploración y comprensión del gráfico en 3 dimensiones del determinante, con el objetivo de hallar los valores para los cuales este se hace cero.

Sobre las propuestas, proposiciones o implicaciones a futuro: Es importante comentar que aunque se trata de un trabajo mayoritariamente teórico, los objetivos que planteados fueron pensados a una tesis de licenciatura, y dada la complejidad del tema, **existe un abundante matiz de temas, propuestas, proposiciones e implicaciones que pueden derivarse para futuro sobre el trabajo.** Algunos de los más importantes son:

1. Realizar un análisis vectorial *completo* sobre el determinante del robot, visto como una función escalar de variable vectorial.
2. Hallar un modelo dinámico del robot por medio de lógica difusa, dada la complejidad del robot. Como se vio, el modelo obtenido es demasiado extenso para ser tratado de tanto de forma teórica como de forma práctico-experimental.
3. Programar una simulación ya sea con el modelo dinámico presentado o bien con una actualización más simple (que sea además fiable), de forma que pueda analizarse el comportamiento por medio de esta simulación sin necesidad de entrar en detalles teóricos.
4. A partir del modelo dinámico correctamente hecho, crear un esquema de control dinámico del robot, incluyendo todas las variables concernientes, como el voltaje de los motores o la inercia del robot.

Sobre el trabajo (MODELADO ESTÁTICO, CINEMÁTICO, DINÁMICO Y ANÁLISIS DE MOVILIDAD DE UN ROBOT MANIPULADOR CON REFERENCIA MÓVIL):

Actualmente la Robótica comienza a ser cada vez más importante en nuestra vida cotidiana. El análisis de mejores mecanismos robóticos es un arduo trabajo, que requiere muchas horas y un incontable esfuerzo mental. Este trabajo constituye un avance en el análisis de la movilidad de este tipo de robots y la robótica de manipuladores móviles, es un paso más en el vasto mundo de la ciencia actual y constituye un avance en el tema de la robótica en general en esta facultad y en nuestra máxima casa de estudios.

ANEXO 1 DEMOSTRACIÓN DEL PRINCIPIO DE MÍNIMA ACCIÓN

Esta demostración fue obtenida de [4], donde se presenta también como anexo. En este caso no varía esta situación.

Considérese la segunda ley de Newton:

$$m \frac{d^2 r(t)}{dt^2} - F = 0$$

Si se multiplica ambos lados de la ecuación por una variación de la posición

$$m \frac{d^2 r(t)}{dt^2} \delta r - F \delta r = 0$$

Que se puede expresar como

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{d^2 r(t)}{dt^2} \delta r - F \delta r \right] dt = 0$$

Considerando que $\delta r(t_0) = \delta r(t_1) = 0$ e integrando por partes la parte izquierda

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{d^2 r(t)}{dt^2} \delta r \right] dt = m \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d^2 r(t)}{dt^2} \delta r \right] dt$$

$$m \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d^2 r(t)}{dt^2} \delta r \right] dt = m \left[\frac{dr'(t)}{dt} \delta r \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dr'(t)}{dt} \delta r' dt$$

$$m \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d^2 r(t)}{dt^2} \delta r \right] dt = -m \int_{t_1}^{t_2} \frac{dr'(t)}{dt} \delta r' dt$$

Dado que la energía cinética de un cuerpo es $k = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$, la variación de primer

orden de la energía es $\delta k = m \frac{dr'(t)}{dt} \delta r'$

$$-m \int_{t_1}^{t_2} \frac{dr'(t)}{dt} \delta r' dt = -m \int_{t_1}^{t_2} k dt$$

Por otro lado, la variación de la energía cinética puede obtenerse por medio de

$$F \delta r = -\delta v$$

Así

$$-\int_{t_1}^{t_2} [\delta k - \delta v] dt = 0$$

Considerando que el Lagrangiano del sistema es $L = k - v$, la variación del mismo se obtiene como $\delta L = \delta k - \delta v$

Se llega finalmente a

$$-\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$$

$$\boxed{\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0}$$

ANEXO 2 DEMOSTRACIÓN DE LA ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE

Esta demostración fue obtenida de [4], donde se presenta también como anexo. En este caso no varía esta situación. Este principio está basado en el principio de mínima acción de Hamilton.

Considérese un sistema de N grados de libertad, representados por

$$q = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_N]$$

El lagrangiano para un estado 1 del sistema es entonces

$$L_1 = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_N; \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \cdots \quad \dot{q}_N]$$

Así el lagrangiano para un estado 2 se obtiene con una pequeña variación en cada grado de libertad

$$L_2 = [q_1 + \delta q_1 \quad q_2 + \delta q_2 \quad \cdots \quad q_N + \delta q_N; \dot{q}_1 + \delta \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 + \delta \dot{q}_2 \quad \cdots \quad \dot{q}_N + \delta \dot{q}_N]$$

Si se considera el lagrangiano del sistema como la diferencia del lagrangiano 2 menos el lagrangiano 1 ($L = L_2 - L_1$) y usando el principio de Hamilton se tiene

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

Y de acuerdo con principios variacionales de la variación total de una función

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_1} \delta q_1 + \cdots + \frac{\partial L}{\partial q_N} \delta q_N + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} \delta \dot{q}_N \right] dt$$

E integrando por partes cada término y juntando ciertos de ellos se tiene

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \delta q_1 \right]_{t_0}^{t_1} + \cdots + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \delta q_1 \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) \right] \delta q_1 \right. \\ \left. + \cdots + \left[\frac{\partial L}{\partial q_N} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} \right) \right] \delta q_N \right\} dt = 0$$

Así, para que se cumpla la igualdad debe cumplirse

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Que es la ecuación de Euler-Lagrange para un sistema conservativo.

Si el sistema es no conservativo se tiene:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i}$$

ANEXO 3 DEMOSTRACIÓN DEL SISTEMA EULER-LAGRANGE

Considérese la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i$$

La energía cinética del sistema se obtiene como

$$k(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$$

Donde

q es el vector de grados de libertad

\dot{q} es el vector de grados de libertad

$M(q)$ es la matriz de masas.

De forma que el lagrangiano del sistema es

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - u(q)$$

Puede verse que la energía potencial depende únicamente de la posición, dada su naturaleza.

De esta forma, la ecuación de movimiento puede ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] + \frac{\partial}{\partial q} u(q) = \tau$$

Parcialmente se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] &= M(q) \dot{q} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] \right) &= M(q) \ddot{q} + \dot{M}(q) \dot{q} \end{aligned}$$

Así:

$$M(q) \ddot{q} + \dot{M}(q) \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} [\dot{q}^T M(q) \dot{q}] + \frac{\partial}{\partial q} u(q) = \tau$$

O en su forma compacta

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = \tau$$

Donde $C(q, \dot{q}) \dot{q} = \dot{M}(q) \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} [\dot{q}^T M(q) \dot{q}]$ es la *matriz de Coriolis*.

$g(q) = \frac{\partial}{\partial q} u(q)$ que es la matriz de gravedad

TABLA DE FIGURAS

Figura 1-1, CART del SRI.....	13
Figura 1-2, AIBO de SONY	13
Figura 1-3, ASIMO de HONDA.....	14
Figura 2-1, Robot manipulador original de 5 grados de libertad en el manipulador.....	22
Figura 2-2, Robot manipulador degenerado de 3 grados de libertad en el manipulador.....	23
Figura 2-3, Robot manipulador de 3 grados de libertad en el manipulador. Vista lateral	23
Figura 2-4, Robot manipulador de 3 grados de libertad en el manipulador. Vista superior	24
Figura 2-5, Robot manipulador de 3 grados de libertad en el manipulador. Vista de isométrico 2	24
Figura 2-6, Robot manipulador de 3 grados de libertad en el manipulador. Vista en explosión.....	25
Figura 3-1, Robot manipulador de 6 grados de libertad. Vista mostrando cada uno de los grados.....	29
Figura 3-2, Traslación de un sistema de referencia en el plano	30
Figura 3-3, Rotación de un sistema de referencia en el plano	31
Figura 3-4, Robot de 6 grados de libertad. Vista mostrando los sistemas de referencia	39
Figura 3-5, Robot manipulador de 3 grados de libertad. Vista mostrando los sistemas necesarios para la metodología de posicionamiento de Denavit – Hartenberg con sistema inicial 1	40
Figura 3-6, Gráfico mostrando el ángulo de rotación correspondiente con la base del robot (sistema 1) y el sistema inercial (sistema 0) cuando el robot se encuentra en movimiento	49
Figura 3-7, Imagen del manipulador en su estado (posición articular) original	54
Figura 3-8, Imagen del manipulador mostrando la altura máxima alcanzada ..	55
Figura 3-9, Imagen del manipulador mostrando su alcance máximo	56
Figura 3-10, Manipulador mostrando su alcance máximo en otro de los ejes..	56
Figura 3-11, Manipulador mostrando su último eslabón rotado hacia el anterior	57
Figura 3-12, Manipulador mostrando su último eslabón rotado hacia el anterior y apuntando hacia arriba.....	57
Figura 3-13, Espacio de trabajo en forma gráfica contemplando la base visto en perspectiva	58
Figura 3-14, Vista inferior del espacio de trabajo	58
Figura 3-15, Vista inferior (2) del espacio de trabajo.....	58
Figura 3-16, Manipulador alcanzando un punto de su base.....	59
Figura 3-17, Manipulador alcanzando un punto de su espacio de trabajo	59
Figura 3-18, Espacio de trabajo modificado, donde parece la esfera completa	60
Figura 3-19, Espacio de trabajo modificado mostrando el espacio faltante	60
Figura 3-20, Espacio de trabajo mostrando la base muy por arriba del mismo	60
Figura 3-21, Espacio de trabajo mostrando la base más abajo (1)	61
Figura 3-22, Espacio de trabajo mostrando la base más abajo (2)	61
Figura 3-23, Espacio de trabajo mostrando la base más abajo (3)	61
Figura 3-24, Manipulador alcanzando un punto del espacio de trabajo útil.....	62

Figura 4-1, Posición absoluta de un punto en el espacio gracias a un sistema de referencia móvil, que puede tener rotación intrínseca.....	80
Figura 4-2: Velocidad vectorial (siempre tangente) sobre una trayectoria	82
Figura 4-3: Descomposición vectorial de la aceleración en el movimiento relativo.....	83
Figura 5-1: Gráfica de $\cos \theta_4$	111
Figura 5-2: Perspectiva de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = l_4 = 1$	112
Figura 5-3: Vista del plano $\theta_3 - \det_2$ de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = l_4 = 1$	112
Figura 5-4: Vista del plano $\theta_4 - \det_2$ de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = l_4 = 1$	113
Figura 5-5: Vista superior de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = l_4 = 1$	113
Figura 5-6: Perspectiva de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = 0.224$ y $l_4 = 0.13$	114
Figura 5-7: Plano $\theta_3 - \det_2$ de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = 0.224$ y $l_4 = 0.13$	114
Figura 5-8: Plano $\theta_4 - \det_2$ de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = 0.224$ y $l_4 = 0.13$	115
Figura 5-9: Vista superior de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = 0.224$ y $l_4 = 0.13$	115
Figura 5-10: Perspectiva de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = l_4 = 1$	116
Figura 5-11: Perspectiva 2 de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = l_4 = 1$	117
Figura 5-12: Perspectiva aérea de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = l_4 = 1$	117
Figura 5-13: Vista del plano $\theta_3 - \det$ de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = l_4 = 1$	118
Figura 5-14: Vista del plano $\theta_4 - \det$ de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = l_4 = 1$	118
Figura 5-15: Vista superior de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = l_4 = 1$	119
Figura 5-16: Plano de contorno "0" de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$	119
Figura 5-17: Perspectiva de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = 0.224$ y $l_4 = 0.13$	120
Figura 5-18: Vista ortogonal de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = 0.224$ y $l_4 = 0.13$	120
Figura 5-19: Vista aérea de la gráfica $\det_2(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = 0.224$ y $l_4 = 0.13$	121
Figura 5-20: Plano $\theta_3 - \det_2$ de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = 0.224$ y $l_4 = 0.13$	121
Figura 5-21: Plano $\theta_4 - \det_2$ de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$ cuando $l_3 = 0.224$ y $l_4 = 0.13$	122
Figura 5-22: Vista superior de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$	122
Figura 5-23: Vista de contorno "0" de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$	123

Figura 5-24: Detalle de la vista de contorno 0 de la gráfica $\det(\theta_3, \theta_4)$ para $\theta_4 = 90^\circ$	123
Figura 5-25: Diagrama de flujo principal del algoritmo de decisión del seguimiento de trayectoria del robot.	127
Figura 5-26: Subrutina del algoritmo de decisión del seguimiento de trayectoria. Se presenta como una sola debido a que por dos métodos distintos se puede hallar un punto.....	128
Figura 5-27: Vista del programa con el cual se obtuvieron los puntos de la trayectoria.....	129
Figura 5-28: Programa en <i>MATHCAD 14</i> ® para hallar los puntos de la trayectoria.....	130
Figura 5-29: Trayectoria ejemplo para el robot.....	131
Figura 5-30: Medida del brazo superior.....	131
Figura 5-31: Medida del brazo inferior.....	132
Figura 5-32: Medidas de la base del robot	132
Figura 5-33: Perfil de trayectoria de primer grado	139
Figura 6-1: Técnicas de control existentes	140
Figura 6-2: Robot con grados de libertad, masas e inercias.	144

TABLA DE DEFINICIONES

<i>Definición 1-1: Definición de Robótica.....</i>	15
<i>Definición 2-1: Definición de Grados de Libertad</i>	19
<i>Definición 3-1: Espacio de Trabajo.....</i>	53
<i>Definición 4-1: Derivación paramétrica real o “regla de la cadena”</i>	64
<i>Definición 4-2: Diferenciación total de un campo escalar.....</i>	64
<i>Definición 4-3: Derivación paramétrica total de un campo escalar.....</i>	65
<i>Definición 4-4: Derivación paramétrica total de un campo vectorial</i>	65
<i>Definición 4-5:</i>	66
<i>Definición 4-6: Derivada de la Matriz Jacobiana de un Robot.....</i>	72
<i>Definición 4-7: Posición de punto en el espacio dado un sistema de referencia móvil.....</i>	81
<i>Definición 4-8: Teorema de Poisson</i>	81
<i>Definición 4-9: Velocidad de un punto en el espacio dado un sistema de referencia móvil.....</i>	81
<i>Definición 4-10: Aceleración de un punto en el espacio dado.....</i>	82
<i>Definición 5-1: SINGULARIDAD.....</i>	101
<i>Definición 5-2: CONTROLABILIDAD DEL ROBOT</i>	102
<i>Definición 5-3: Condiciones de inexistencia del determinante del robot.....</i>	106

BIBLIOGRAFÍA.

- [1]. Baturone, A.O., *Robótica. Manipuladores y robots móviles*. 2007, México: Alfa Omega Grupo Editor.
- [2]. Craig, J.J., *Robótica*. Tercera edición, 2006 ed. 2006, México: Prentice Hall.
- [3]. McCloy, D.H., D. M. J., *Robótica, una introducción*. Primera ed. 1993, México: Grupo Noriega Editores.
- [4]. Fu, K.S., *ROBÓTICA: Control, detección, visión e inteligencia*. Primera ed. 1988, España: Mc Graw Hill. 575.
- [5]. Niku, S.B., *Introduction to Robotics. Analysis, Systems, Applications*. 1 ed. 2001, U.S.
- [6]. Juarez, I., *Notas del curso de Robótica*. 1999, Departamento de Mecatrónica. FI. UNAM.
- [7]. Gutiérrez, C.A.G., *Diseño, construcción y control PD con compensación de pares gravitacionales de un robot manipulador didáctico*, Universidad del Valle de México: http://www.uvmnet.edu/investigacion/episteme/numero6-06/reportes/a_control.asp.
- [8]. F. Dreoni, M.G.O., F.R. Rubio, J. Gomez-Ortega, *Identificación y Control de un robot manipulador*
- [9]. Winston Garcia-Gabín, D.Z., *Control predictivo por modo deslizante para robots manipuladores*. 2004.
- [10]. *EL ROBOT MANIPULADOR*: http://www.mailxmail.com/curso/vida/inyecciondetermoplasticos/capitulo2_3.htm.
- [11]. R. Trejo Moreno, J.S.C.R., F. Hernández Ramirez, J. E. Vargas Soto, J. C. Pedraza Ortega *Software de simulación de un Robot Manipulador Marca Mitsubishi RV-2AJ*. 4o Congreso Nacional de Mecatrónica. Coahuila, México, 2005.
- [12]. Guang-chun Lin, D.-m.W., Li-ju Xu, Shan Gao, *The analytical dynamic model of six-DOF industrial robotic manipulators of containing closed chain*. Science Direct, 2004. **40**(4): p. 385-393.
- [13]. D.J. Jimenez, F.R.R., *Aplicación del Control QFT a Robots Manipuladores*. Escuela Superior de Sistemas y Automática.
- [14]. J. Gaméz Garcia, A.R., J. Gómez Ortega, R. Johanson, *Estimación de la fuerza de contacto para el control de robots manipuladores con movimientos restringidos*. Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial, 2007. **4**(1): p. 70-82.
- [15]. *Robótica del brazo manipulador*: http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/msp/florencia_y_an/ca_pitulo2.pdf.
- [16]. L. E. Espinoza Maya, J.L.B., F. Reyes Cortés, *Nuevos controladores de posición para robot manipuladores basados en funciones hiperbólicas*.
- [17]. *Historia de la Robótica*: http://espanol.geocities.com/robottotem/Historia_robotica.htm.
- [18]. *ROBÓTICA*: <http://www.roboticspot.com/robotica/robotica.shtml>
- [19]. INGENIERÍA, F.D., *NOTAS DE LA MATERIA DE INTRODUCCIÓN A SISTEMAS NO LINEALES*.

- [20]. R. Kelly, V. Santibáñez, A. Loría., *Control of Robot Manipulator in Joint Space*. 2005, Germany: Springer. De la serie *Advanced textbook in Control and Signal Processing*.
- [21]. E. Solar, L. Speziale, *Apuntes de Álgebra Lineal*. 2003, México: Limusa Editores
- [22]. J. R. Martínez Mireles, G. V. Guerrero Ramírez, L. G. Vela Valdés, *MODELADO DEL ROBOT SCORBOT ER-V+*
8º CONGRESO IBEROAMERICANO DE INGENIERIA MECANICA
Cusco, 23 al 25 de Octubre de 2007
- [23]. Pontificia Universidad Católica de Chile , Departamento de Ingeniería Eléctrica, *APUNTES EXPERIENCIA CONTROL DE SISTEMA ROBOTICO*, IEE 2682 LABORATORIO DE CONTROL AUTOMATICO
- [24]. ABDALÁ CASTILLO S., ÑECO CABERTA R.
CHARACTERIZACIÓN DE UN ROBOT MANIPULADOR ARTICULADO
CENTRO NACIONAL DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO TECNOLÓGICO
- [25]. Leopoldo Acosta Sánchez y Marta Sigut Saavedra,
Matemáticas y robótica, Curso Interuniversitario “Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas” 2005
- [26]. B. Bayle, J.-Y. Fourquet, M. Renaud,
Manipulability of Wheeled Mobile Manipulators: Application to Motion Generation, The International Journal of Robotics Research Vol. 22, No. 7–8, July–August 2003, pp. 565-581, ©2003 Sage Publications
- [27]. B. BAYLE, M. RENAUD, J.-Y. FOURQUET,
Nonholonomic Mobile Manipulators: Kinematics, Velocities and Redundancies, *Journal of Intelligent and Robotic Systems* **36**: 45–63, 2003.
© 2003 Kluwer Academic Publishers.
- [28]. O. Estrada, P. García y Colomé, G. Monsivais, *Cálculo Vectorial y Aplicaciones*. 2003, México: Grupo Editorial Iberoamericana
- [29]. Spong, M. W., Vidyasagar M., *Robot Dynamics and Control*. Primera ed. 1989, Singapur: John Wiley & Sons, Inc..
- [30]. James Jeans, Sir, *HISTORIA DE LA FÍSICA*. 1953, FCE
- [31]. Guillen, Michael, *LAS CINCO ECUACIONES QUE CAMBIARON EL MUNDO; BARCELONA*