



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**SELECCIÓN DEL PUNTO DE CONEXIÓN DE FACTS EN  
SISTEMAS DE POTENCIA**

**T E S I S**  
**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**  
**Ingeniera Eléctrica – Electrónica**  
**P R E S E N T A:**

**Naomi Berenice Romero Mata**



**DIRECTOR DE TESIS:**  
**Dr. Paul Rolando Maya Ortiz**

**CODIRECTOR DE TESIS:**  
**Dr. Gerardo René Espinosa Pérez**

**Ciudad Universitaria, México D.F. 2009**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Este trabajo de tesis fue desarrollado con apoyo del proyecto PAPIIT

IN112108

Control No Lineal de Dispositivos FACTS en Sistemas de Potencia

Responsable: Dr. Paul Rolando Maya Ortiz

DGAPA-UNAM

## Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México, la máxima casa de estudios de nuestro país, y a la Facultad de Ingeniería por darme la oportunidad de formarme como profesionista y como persona.

Mi más profundo agradecimiento al Dr. Paul Rolando Maya Ortiz, director de este trabajo, por todo su apoyo y amistad, así como por su comprensiva orientación de mismo y por sus consejos para ser una mejor persona.

Igualmente deseo agradecer a la Dra. María Cristina Verde Rodarte, al Dr. César Ángeles Camacho por sus valiosos comentarios para el enriquecimiento de esta tesis, y al M. en I. Ricardo Garibay Jiménez por su apoyo durante todos mis estudios.

Muy especialmente agradezco al Dr. Gerardo René Espinoza Pérez por todo su apoyo, por sus conocimientos para la realización de este trabajo y por brindarme su gran experiencia para poder ser una mejor profesionista.

A mis hermanos Sirani y Jorge con quienes he compartido toda mi vida y porque representan un gran impulso. A toda mi familia por su apoyo, sus ejemplos de perseverancia y esfuerzo y por creer siempre en mí.

A todos mis amigos, con quienes compartí tantas emociones y vivencias dentro y fuera de las clases y por su apoyo incondicional.

Pero, por encima de todo, gracias a quienes no vacilaron en empeñar sus vidas para que yo hiciera la mía y me brindaron la mejor herramienta que se le puede dar a un hijo, la educación: a mis padres, Jorge y Gloria. Esta tesis es apenas un pequeño tributo a su inmenso amor.

# Índice

## 1. Introducción

1.1 Antecedentes.....	2
1.2 Problema.....	5
1.3 Objetivo.....	7
1.4 Estructura de la tesis.....	8

## 2. Análisis matemático

2.1 Modelado de circuitos eléctrico.....	11
2.1.1 Gráficas.....	12
2.1.2 Matrices de incidencia.....	15
2.1.3 Red primitiva.....	17
2.1.4 Formación de matrices de red por transformaciones no cuadradas.....	20
2.2 Análisis de sistemas multivariables.....	23
2.2.1 Ganancia.....	23
2.2.2 Análisis de respuesta en frecuencia multivariable.....	24
2.2.3 Direcciones en sistemas multivariables.....	26
2.2.4 Descomposición en valores singulares.....	29
2.2.4.1 Propiedades de SVD.....	34
2.2.4.2 Condicionalidad.....	36

## 3. Método sistemático

3.1 Caso a: ejemplo.....	39
3.1.1 Modelado.....	39
3.1.2 Red primitiva.....	41
3.1.3 Matrices de transferencia.....	43
3.1.3.1 Ecuación de nodos.....	44
3.1.4 Análisis en la frecuencia.....	46
3.1.5 Análisis de sistema multivariables.....	50
3.1.5.1 Descomposición en valores singulares de $Z_{\text{nodo}}$ .....	50
3.1.5.2 Descomposición en valores singulares de $Y_{\text{nodo}}$ .....	54
3.1.5.3 Condicionalidad.....	56

3.2 Caso b: sistema real.....	62
Paso 1.....	62
Paso 2.....	64
Paso 3 .....	67
Paso 4.....	70
Paso 5.....	74
3.3 Resultados.....	77
<b>4. Conclusiones</b>	
4.1 Conclusiones .....	84
4.2 Trabajo a futuro.....	87
<b>Apéndice</b> .....	89
<b>Bibliografía</b> .....	94

# Introducción

---

---

# 1.1 Antecedentes

Los sistemas de transmisión y las redes de distribución de energía eléctrica constituyen una parte fundamental de los sistemas eléctricos de potencia, ya que los primeros interconectan a las centrales eléctricas con las centrales de carga para transportar a distintos niveles de voltaje y para alimentar, en el caso de las redes de distribución, a los distintos tipos de carga.

Un sistema eléctrico de potencia se puede dividir en tres partes principales:

1. Generación: es la producción de energía eléctrica.
2. Transmisión: es el sistema de líneas que transporta la electricidad de las centrales eléctricas de generación al área en donde es usada.
3. Distribución: es el sistema de líneas que conectan a un cliente individual al sistema eléctrico de potencia.

Durante varios años se ha hecho un esfuerzo por expandir los sistemas eléctricos elevando los niveles de voltaje para cada porción del sistema eléctrico de potencia. Se sabe que las pérdidas más importantes en el sistema de potencia son en el transporte de electricidad y son proporcionales al cuadrado de la corriente, de modo que si se duplica la corriente, se cuadruplican las pérdidas.

También se sabe que la potencia es el producto de la corriente por el voltaje, de modo que en la medida que el voltaje aumenta la corriente disminuye, y entonces las pérdidas también disminuyen para una mayor cantidad de potencia transferida; por lo tanto, el voltaje más alto logrado, es el más favorable para la transmisión de la energía eléctrica.

En un sistema eléctrico tradicional, la producción de la energía eléctrica se concentra únicamente en unas cuantas subestaciones de potencia. El sistema de transmisión y distribución mueve la energía desde las plantas generadoras, generalmente distantes de los consumidores de la energía eléctrica. En algunos casos, el costo se puede disminuir y la confiabilidad incrementar a través del uso de la generación distribuida –numerosos y pequeños generadores colocados en puntos estratégicamente seleccionados dentro del sistema de potencia, cercanos a los clientes-, éstas y otras fuentes distribuidoras, e incluyendo sistemas de almacenamiento y manejos del lado de la demanda algunas veces proporcionan grandes beneficios.

La función de un sistema de transmisión y distribución es:

1. Cubrir el servicio en todo un territorio, extendiéndose a todos sus clientes.
2. Tener la suficiente capacidad para cubrir las demandas de los clientes.
3. Proporcionar una energía altamente confiable.
4. Proporcionar un voltaje estable.

Para proporcionar la energía eléctrica en una forma aprovechable por lo usuarios, un sistema de transmisión y distribución debe cumplir con ciertos requerimientos básicos como son:

1. Suministrar en forma ininterrumpida la potencia que los usuarios demandan.
2. Mantener el voltaje nominal en forma estable, sin que exceda su variación dentro de un cierto rango, fijado por la empresa suministradora, de acuerdo al índice de calidad deseable, que puede estar alrededor de  $\pm 5\%$  con respecto al valor nominal.
3. Mantener la frecuencia estable, de manera que siempre se encuentre dentro de un rango de variación establecido, que puede ser por ejemplo  $\pm 0.1$  Hz.
4. Suministrar la energía a un precio aceptable, es decir, se debe cumplir con un requisito de economía, en la transmisión y distribución.
5. Respetar las normas de seguridad, establecidas en cuando a distancias en aire; distancias de conductores con respecto al suelo y con respecto a construcciones en zonas urbanas; cruzamientos con ríos, carreteras, vías de ferrocarril, etc.
6. Cumplir con los requerimientos de estéticas y de protección del medio ambiente.

Históricamente la industria de energía eléctrica ha crecido drásticamente desde el siglo XIX. Desde sus inicios la expansión incomparable de la actividad industrial, crecimiento exponencial de la población y diversas fuentes de energía disponibles, contribuyen a este crecimiento. A nivel mundial el sector privado predomina en la producción de potencia eléctrica, pero organizaciones gubernamentales también participan en menor medida en la distribución de potencia, contrario a lo que sucede en México donde las empresas federales son las encargadas de la producción de energía eléctrica.

El mantener el voltaje adecuado y los requerimientos de estabilidad transitoria para la expansión de redes interconectadas, incluyendo las restricciones predominantes de la construcción de nuevas líneas de transmisión tales como las consideraciones económicas, permite incrementar las aplicaciones de compensadores de VARs controlables en sistemas de transmisión, cuyo inicio son en los años 1970s. Al día de hoy hay alrededor de 20,000 Mvars controlables instalados en Estados Unidos, México y Canadá, y alrededor de 70 000 en todo el mundo [9].

La solución tradicional a los problemas en sistemas de potencia requiere un gran refuerzo entre las redes de transmisión y las nuevas líneas reestablecidas, manteniendo los límites de voltaje convencionales, estabilidad y márgenes de temperatura bajo las consideraciones de los escenarios de contingencia. Además del costo, hay una consideración mayor en preservar el medio ambiente imponiendo mayores limitaciones que no son fáciles de evitar, con lo que es necesario nuevos avances tecnológicos que ayuden a esta solución. Uno de ellos son los Sistemas Flexibles de Transmisión de Corriente Alterna, conocidos como FACTS (por sus siglas en inglés Flexible AC Transmission System), cuya aplicación basado en electrónica de potencia y controlados con sistemas computacionales en tiempo real permite compensar y controlar los sistemas.

El Instituto de Investigación de Potencia Eléctrica (EPRI), después de años de apoyo en el desarrollo de electrónica de alta potencia para aplicaciones como transmisiones HVDC (High Voltage DC) y compensación reactiva de líneas de AC, a finales de los años 1980s, formalizó el

amplio concepto de Sistemas Flexibles de Transmisión de Corriente Alterna. Específicamente en 1988, uno de los primeros investigadores en introducir este concepto dentro de la teoría de control de redes fue N. G. Hingorani, perteneciente a este Instituto.

El acrónimo FACTS identifica el hecho de trabajar con transmisión en corriente alterna incorporando controles basados en electrónica de potencia de alta velocidad, tecnología avanzada de control, microcomputadoras avanzadas, herramientas analíticas poderosas e incrementando capacidad de transferencia de potencia.

El IEEE define los FACTS como sistemas basados en electrónica de potencia y otro equipo estático que proveen control de uno o varios parámetros en sistemas de transmisión de AC para mejorar la controlabilidad e incrementar la capacidad de transferencia de potencia. La transferencia de potencia en la mayor parte de los sistemas integrados de transmisión es restringida por la estabilidad transitoria, estabilidad del voltaje y/o estabilidad de la potencia. Estas restricciones limitan la utilización plena de los corredores disponibles de transmisión. Los FACTS constituyen una tecnología que proporciona las correcciones necesarias en la funcionalidad de la transmisión con el fin de utilizar plenamente el sistema existente.

Los FACTS originalmente se iniciaron para resolver los problemas emergentes de la década de los 80s debido a restricciones en la construcción de líneas de transmisión, para facilitar el crecimiento de exportación/importación de potencia y manejar transacciones con las empresas del sector público con dos objetivos principales:

1. Incrementar la capacidad de transferencia de potencia de los sistemas de transmisión
2. Mantener el flujo de potencia sobre rutas designadas.

La implementación con éxito de los FACTS que proporcionen las correcciones adecuadas del voltaje de transmisión, la impedancia de la línea y el ángulo de fase del voltaje en los lugares correctos del sistema de transmisión dará como resultado la plena utilización de dichos sistemas, es decir, control pleno del flujo de potencia real y reactiva, sin flujos de lazo o trayectorias de flujo paralelas y, por lo tanto, más energía eléctrica a través de muchas áreas. Además del alivio de cuellos de botella de la transmisión sin la construcción de líneas nuevas.

Los FACTs se clasifican en compensadores en serie y compensadores tipo derivación. Entre los primeros se encuentran: Capacitores en Serie Controlados por Tiristores (TCSC), Reactores en Serie Conmutados por tiristores (TSSR) y Compensador Síncrono Estático en Serie (SSSC). De los segundos se pueden mencionar: Compensador Estático Variable (SVC) y Compensador Estático de VARs (STATCOM). También existen los compensadores combinados como: Controlador Universal de Flujo de Potencia (UPFC) y Controlador Interlínea de Flujo de Potencia (IPFC).

## 1.2 Problema

La industria de suministro de electricidad está teniendo una profunda transformación en todo el mundo como una necesidad de crear una condición de mercado entre las compañías eléctricas para promover menores precios de la energía y motivar el uso eficiente de la infraestructura eléctrica. En contra de estos antecedentes de rápida evolución, los programas de expansión de muchas compañías están siendo detenidos por una variedad de problemas ambientales, de derecho de propiedad y económicos, los cuales han retrasado la autorización y construcción de nuevas líneas de transmisión así como plantas generadoras de electricidad. Asimismo, en algunos países no ha habido expansión del sistema eléctrico debido a los procesos de desintegración vertical de sus sistemas. En este contexto, hay una necesidad por utilizar las redes de transmisión existentes de manera más eficiente para satisfacer la demanda creciente de electricidad.

En diversos países la industria eléctrica se ha estado reestructurando de un monopolio público regulado hacia sistemas de acceso abierto basados en un mercado eléctrico en los cuales compañías eléctricas privadas reemplazan el papel de la regulación al poner el precio de la energía eléctrica, y los consumidores pueden escoger a quién comprar entre estas compañías pagando cuotas definidas por los participantes en el mercado. Sin embargo en México las empresas privadas todavía no juegan un papel en área de transmisión de electricidad por lo que el sector público lo domina en su totalidad.

Como un resultado de esta reestructuración, y al igual que en el caso de sistemas eléctricos verticalmente integrados, la red de transmisión es aún el componente más importante en la operación debido a que debe transportar la energía eléctrica desde los centros de generación hacia los centros de consumo de manera eficiente, segura y manteniendo los niveles de calidad requeridos por los usuarios.

Debido al hecho de que el flujo de potencia a través de la red de transmisión básicamente obedece a las leyes de Ohm y Kirchhoff, su inadecuado uso puede provocar diversos problemas tales como lazos de flujo, sobrecarga en elementos de transmisión e insuficiente capacidad para transferencia de potencia. Estos problemas pueden dificultar una verdadera competencia entre los diferentes participantes en el mercado energético debido a posibles acciones de poder de mercado. Esta acción tiene lugar cuando algún participante es capaz de influenciar de manera significativa los precios o disponibilidad de la electricidad.

Durante su operación, un sistema eléctrico de potencia está expuesto a grandes y pequeñas distorsiones externas lo que provoca un cambio en sus variables de estado. Al analizar el sistema se debe considerar al conjunto de distorsiones que lo modifica, además de los factores variantes del sistema como la topología y los parámetros de la red.

Las perturbaciones que se presentan en diferentes puntos de la red producen una reacción notable en sus variables además de pérdidas de voltaje en los elementos del sistema. Aquellos puntos cuyas variables de estado cambian considerablemente debido a perturbaciones aleatorias externas son llamados nodos sensores. Es importante conocer la respuesta del sistema debida a distorsiones en caso de que éstas afecten negativamente la operación del sistema de potencia como estabilidad dinámica y estática, operación fiable y eficiencia económica. Sin embargo, antes de determinar el significado de la respuesta en términos de los criterios anteriores es necesario proponer un método simple que pueda encontrar los elementos sensores en lugar de obtenerlos mediante simulaciones basadas en métodos de prueba y error. Dentro de estos métodos se deben encontrar factores que indiquen la causa del porqué son nodos sensores de manera que al ser modificados afecten al sistema tanto en operación como en expansión.

Un análisis profundo de las opciones disponibles para optimizar las redes de transmisión existentes, con altos niveles de confiabilidad y estabilidad, ha apuntado en la dirección de los controladores FACTS, cuyos beneficios incluyen reducción del costo de inversión en la transmisión y operación, incremento de la seguridad y confiabilidad del sistema, incremento en las capacidades de transmisión de potencia y un mejoramiento general en la calidad de la energía distribuida a los consumidores. El beneficio total obtenido por el empleo de estos dispositivos depende de tres factores a considerar: qué tipo de FACTS se debe instalar, cuánta capacidad deben tener y en gran medida su ubicación en el sistema de transmisión, tema sobre el cual versa este trabajo de tesis.

Los dispositivos FACTS son capaces de proveer la flexibilidad requerida para operar el sistema de transmisión y pueden ser usados para el manejo preventivo y correctivo de la congestión debido a su capacidad de control de flujo de potencia e incremento de transferencia de potencia. Con la finalidad de obtener el mayor impacto de un dispositivo controlador de esta naturaleza se debe determinar cuál es su mejor ubicación en la red. La selección de esta ubicación dependerá en gran medida del objetivo a cumplir por el dispositivo, por ejemplo que actúe como barrera electrónica, que se tenga control de energía a través de cierta ruta preestablecida, que se prevengan lazos de flujo o control sobre transacciones energéticas entre diferentes compañías. En estos casos, la ubicación puede ser determinada directamente de las características físicas del sistema. De tal manera, en esta tesis se presentan un método sencillo para determinar cuál es el mejor punto de conexión dentro de un sistema de potencia para colocar este tipo de compensadores.

## 1.3 Objetivo

Dentro de los sistemas de potencia existen distorsiones producidas por las cargas no lineales, tales como flujos de potencia reactiva, variaciones de voltaje y armónicos de corriente, por lo que es necesario eliminarlas para evitar un mal funcionamiento de la red. Para corregirlas es necesario colocar dispositivos que disminuyan o eliminen estas distorsiones de manera que no se propaguen por ella. Al agregar elementos a una red es necesario considerar que puede haber más distorsiones provocadas por ellos por así que se tiene que considerar cuál es el mejor punto para conectarlos y esto debe hacerse con un método sencillo y sistemático se conozca dicho punto.

De lo anterior se deriva el objetivo de este trabajo:

Determinar un método sistemático que permita seleccionar el mejor punto de conexión de un compensador en un sistema de distribución de potencia para evitar que distorsiones producidas por las cargas no lineales del sistema se distribuyan a través del mismo. De esta manera no sólo mejora el funcionamiento del sistema sino se promueve el uso adecuado de compensadores.

Para determinar el mejor punto de conexión es necesario tomar en cuenta tres aspectos importantes:

- Modelar el sistema: se realiza para conocer el comportamiento del sistema, para ello es necesario conocer sus características propias como los elementos invariantes además de considerar qué factores se pueden modificar como entradas del sistema, y qué es lo que se va a observar, es decir, cuáles son las salidas.
- Determinar el nodo sensor: una vez obtenido el modelo que caracteriza el sistema es necesario conocer qué punto del sistema es más susceptible a variaciones, lo cual indica que si ahí se conecta el compensador su efecto será mejor que si se coloca en otro nodo. Los nodos más sensibles son aquellos que ante una misma entrada la magnitud de su salida es mayor, por lo que en ocasiones se pueden tener más de un nodo sensor y matemáticamente se puede hacer un análisis para determinar el más adecuado.
- Colocar el compensador: al haber determinado el nodo sensor, habrá una modificación en la estructura del sistema en el punto escogido debido a que se están agregando nuevos elementos de la red, por ello se tiene que analizar el sistema cuando el compensador ha sido

colocado para verificar no sólo que no haya variaciones que afecten a la red sino también que el sistema haya mejorado.

Siguiendo estos tres puntos se puede establecer un método analítico y sistemático que facilite determinar el punto de conexión de un FACTS, para dar una mayor aplicación a estos dispositivos que ayudan a mejorar de gran manera las condiciones de un sistema de potencia.

## **1.4 Estructura de la Tesis**

La manera de encontrar el método que permita determinar el mejor punto de conexión de un compensador se basa de manera particular en tres aspectos fundamentales mencionados en 1.3, y que son desarrollados a lo largo de este trabajo de tesis, así en el Capítulo 2 donde se explican de manera detallada las herramientas matemáticas utilizadas en este trabajo donde destacan dos partes esenciales:

1. Describir el comportamiento del sistema con base en el análisis sistemático de redes, de manera que se pueda modelar el sistema de potencia como un circuito eléctrico considerando como variables independientes las corrientes de bus y las variables dependientes los voltajes de bus, la relación entre ellas está dada por una matriz de transferencia de impedancias de manera que se pueda analizar el sistema en el dominio de la frecuencia por medio del conjunto de ecuaciones obtenidas a partir del modelo. En esta parte se menciona algunos conceptos importantes dentro de la teoría de circuitos que ayudan a conocer ampliamente el sistema. Para la aplicación del método se tomó en cuenta un modelo lineal invariante en el tiempo obtenido a partir de los parámetros invariantes del sistema (elementos pasivos) y de la topología del circuito.
2. Analizar el comportamiento del sistema con herramientas de sistemas MIMO. Una vez definido el modelo del sistema se requiere de descomposición en valores singulares para conocer los puntos donde se presenten las mayores variaciones del sistema. Esta herramienta es útil debido a que muestra el estudio de direcciones en sistemas multivariados indicando el efecto que tiene cada una de las entradas en las salidas del sistema.

La segunda parte se enfoca en aplicar la teoría del Capítulo 2 al análisis de los sistemas de potencia, lo cual se describe en el Capítulo 3 donde se explica con detalle la manera de formar el método sistemático. Dentro de este capítulo se explican dos casos relevantes:

1. El primero es un ejemplo pequeño que muestra detalladamente cómo y porqué se puede obtener el nodo sensor aplicando elementos de la teoría de circuitos para el modelado y la descomposición en valores singulares. Este circuito no tiene una representación física real pero es de gran utilidad para observar específicamente algunos puntos importantes para la aplicación del método tanto conceptuales como numéricos.
2. El segundo ejemplo es un sistema de distribución real donde, a partir del punto anterior se explica paso a paso el método sistemático para la colocación de un compensador. En este caso se muestra la peculiaridad de que puede haber más de un nodo sensor por lo que es necesario complementar el análisis de manera que se pueda definir solamente uno.

En ambos se verifica que el punto escogido es el adecuado por medio de conceptos importantes de sistemas multivariables, específicamente observando la condicionalidad del sistema. De esta manera tanto conceptualmente como numéricamente se cumplen los tres puntos específicos en los que se basa el método de selección de un compensador.

La última parte descrita en el Capítulo 4 conjunta los resultados obtenidos en el Capítulo 3 para observar cuáles son los principales detalles que se pueden presentar al realizar este método. Principalmente están enfocados en la parte matemática ya que es ésta la que indica de manera explícita el nodo sensor.

Dentro de este capítulo se concluye con los pasos que conforman el método sistemático, de tal manera que si se aplican consecutivamente se determina de manera sencilla el punto de conexión de FACTS. También se describen algunas recomendaciones para trabajos futuros de manera que se complemente este método.

# Análisis Matemático

---

En este capítulo se describen las herramientas matemáticas que se necesitan para encontrar el método que indica el mejor punto de conexión.

Como primera parte se explica la manera de realizar el modelado de sistemas de distribución de potencia, los cuales se pueden representar como circuitos eléctricos donde se obtendrán voltajes y corrientes del sistema, para ello se aplican métodos de redes que, dependiendo el marco de referencia usado (nodo, sección de corte o lazo), se obtendrán las variables requeridas. Es de especial importancia la ecuación de nodos, ya que es la que caracteriza el sistema según sus nodos y por medio de su análisis se sabrán en que nodo se colocan los compensadores. El contenido está basado principalmente la referencia [8].

En la segunda parte se describe el método para que, a partir del modelo obtenido, se determinen los puntos donde hay mayores variaciones en el sistema, esto se realiza mediante un análisis de sistemas multivariados donde se observa el efecto que tienen las entradas sobre las salidas. En particular se analiza la descomposición en valores singulares. La información acerca de descomposición en valores singulares se obtuvo principalmente del capítulo 3 de [5].

## 2.1 Modelado de circuitos eléctricos

La formulación de un modelo matemático es el primer paso en el análisis de una red eléctrica. El modelo debe describir las características de los componentes de la red así como las relaciones que rigen la interconexión de los elementos.

Al hacer el modelo se tienen ecuaciones que se pueden agrupar de forma matricial. Una matriz de ecuaciones de la red provee un modelo matemático conveniente para obtener una solución por medio de un software.

Los elementos de la matriz dependen de la selección de las variables independientes, que pueden ser voltajes o corrientes, y por sus elementos serán admitancias o impedancias, respectivamente.

Las características eléctricas de los componentes individuales de la red se presentan en una matriz primitiva de red. Esta matriz describe adecuadamente las características de cada componente, sin embargo no se es fácil ver las interconexiones de la red. Es necesario, entonces, transformar la matriz primitiva en otra que sí describa el comportamiento y las conexiones de la red.

La manera en que se forman las ecuaciones por medio de matrices que describen el comportamiento del circuito depende del marco de referencia, que puede ser nodos o mallas. Cuando los nodos son el marco de referencia las variables a obtener son voltajes de nodo y corrientes de nodo. En caso de que el marco de referencia sean mallas se obtendrán voltajes de lazo y corrientes de malla.

Al realizar el modelo de la red se debe cumplir con las leyes de Kirchhoff que no dependen de la naturaleza de los elementos, para ello se muestran las maneras de expresar los límites impuestos por los voltajes y corrientes dados por las LVK (Ley de voltajes de Kirchhoff) y LCK (Ley de corrientes de Kirchhoff).

Para iniciar con el modelo es necesario conocer algunos conceptos relacionados con la teoría de gráficas que son usados para formular LCK y LVK, para que a partir de ellas faciliten la obtención de matrices de incidencia, que junto con la red primitiva ayudan a obtener matrices de admitancias e impedancias las cuales son matrices de funciones de transferencia obteniendo una representación entrada-salida que caracteriza el sistema.

## 2.1.1 Gráficas

Una red está formada por un conjunto de elementos interconectados, en los que se incluyen resistencias, capacitores, inductores, transformadores, fuentes dependientes e independientes de voltaje y corriente y que de manera general se les puede llamar componentes. Un ejemplo de una red se muestra en la Figura 2.1.

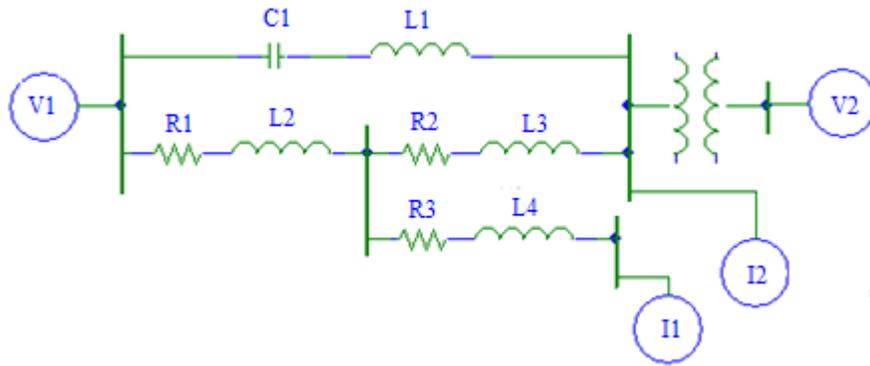


Figura 2.1 Representación de un sistema eléctrico

Como las leyes de Kirchhoff no dependen de la naturaleza de los componentes, es posible omitirla para conocer la estructura geométrica de una red. Para ello se reemplazan los componentes de la red por segmentos de línea, a los que se les llamarán elementos, y al final de cada línea se dibujan puntos llamados nodos. Al resultado de este proceso se le llama *gráfica*.

De una forma más precisa, una gráfica es el conjunto de *nodos* ( $n$ ) y un conjunto de *elementos* ( $e$ ) que muestra la interconexión geométrica de los elementos de una red con la condición de que cada elemento termine en un nodo. Esta definición de gráfica incluye casos especiales en que un nodo no tiene elementos conectados a él. La gráfica del circuito de la Figura 2.1 se muestra en la Figura 2.2 con su respectivo diagrama unifilar.

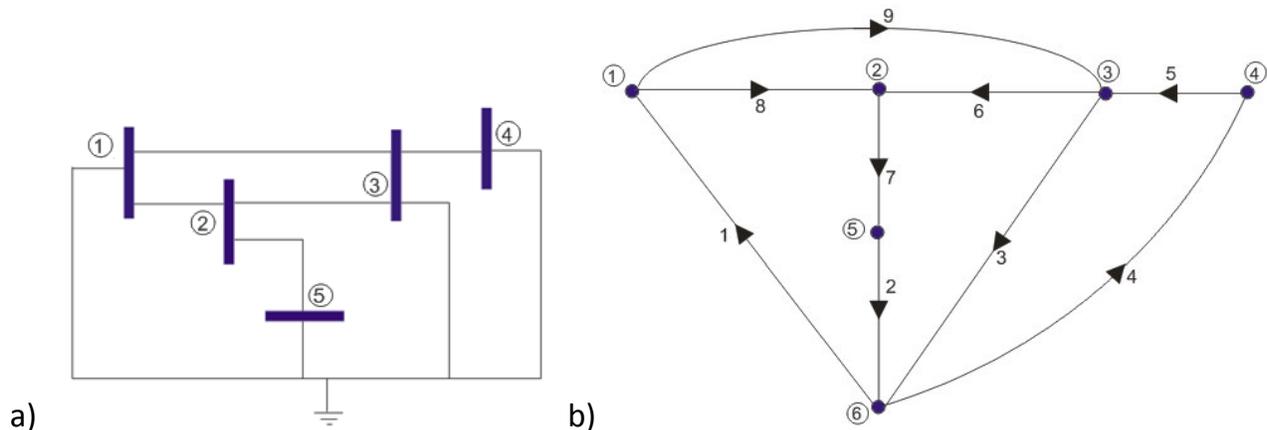


Figura 2.2 a) Diagrama unifilar b) Gráfica orientada y conectada del circuito 2.1

Una *subgráfica* es cualquier subconjunto de elementos de la gráfica. En otras palabras, dada una gráfica, se puede obtener una subgráfica eliminando de algunos elementos y/o nodos de la gráfica.

Se dice que un nodo y un elemento son *incidentes* si el nodo es una terminal de un elemento. Los nodos pueden ser incidentes a varios elementos.

Una gráfica es *conectada* si existe al menos una ruta (a través de los elementos de la gráfica y sin tomar en cuenta la orientación de ellas) entre dos nodos de la gráfica. Por convención, una gráfica que consiste en solo un nodo es conectada. A una red con una dirección específica de referencia para cada de sus ramas se le conoce como *gráfica orientada* mostrada en la Figura 2.2b. Esta dirección se asigna, por lo general, en sentido del flujo de corriente a través de los elementos. Tanto las ramas como los nodos se numeran arbitrariamente.

Dentro del circuito existen diferentes marcos de referencia para poder caracterizar el circuito. Para conocer corrientes y voltajes de nodo se requiere una representación en términos de los elementos incidentes a cada nodo, para determinar voltajes y corrientes de rama es necesario expresar matrices de incidencia relacionando las ramas pertenecientes a las secciones de corte, y para conocer voltajes de malla se determina una representación de los elementos que conforman los lazos del sistema. Por ello es recomendable definir los conceptos de sección de corte y de lazo para caracterizar el sistema.

Un concepto importante en la teoría de gráficas es el de *árbol*. Consideremos una gráfica conectada y a partir de ésta una subgráfica. Se dice que la subgráfica es un árbol si es una gráfica conectada que contiene todos los nodos de la gráfica y no contiene rutas cerradas. Los elementos que pertenecen al árbol son llamados ramas (*b*) y forma un subconjunto de elementos de la gráfica conectada. Aquellos elementos de la gráfica conectada que no están incluidos en el árbol se llaman *uniones* (*l*) y forman una subgráfica, no necesariamente conectada, llamada *coárbol*, la cual es el complemento de un árbol.

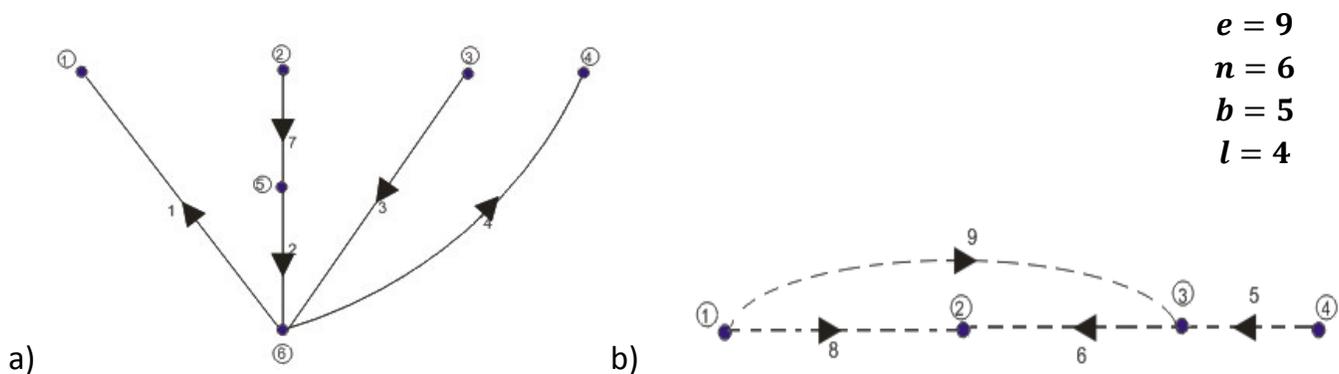


Figura 2.3 a) Árbol b) Coárbol de la gráfica 2.2

Las leyes de Kirchhoff se pueden expresar para cualquier marco de referencia usado. Generalizando, la LCK establece que la suma algebraica de todas las corrientes que dejan un nodo es igual a cero. Entonces si se separan los nodos en dos conjuntos quedan dos grupos de nodos, por ello la LCK implica que la suma de corrientes pertenecientes a las ramas en común a los nodos separados es igual a cero. El conjunto de todas esas las ramas es llamado *sección de corte*. En la Figura 2.4 se muestran las secciones de corte de la gráfica 2.2. Cada línea muestra una sección de corte que indica los elementos que se remueven para formarlo. Se puede escoger un único e independiente grupo de secciones de cortes si cada una contiene solo una rama tomando en cuenta que ésta no debe cortar dos veces el mismo elemento.

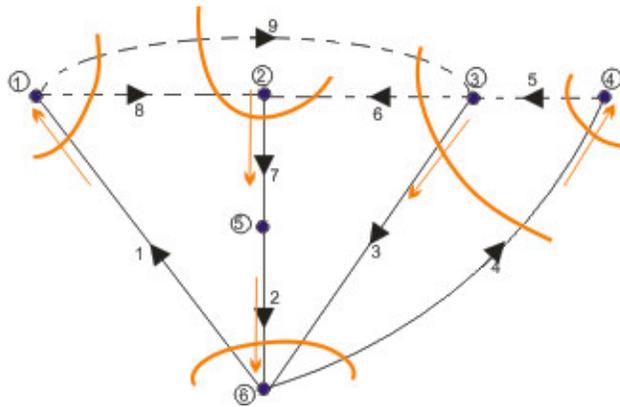


Figura 2.4 Conjunto de secciones de cortes de la gráfica.

Una vez conocido el concepto de sección de corte se puede expresar la LCK como: Para cualquier red, y para cualquiera de sus secciones de cortes, la suma algebraica de las corrientes de rama que atraviesan la sección de corte es igual a cero.

Para poder describir la LVK es necesario conocer el concepto de lazo. Un lazo es una subgráfica conectada en la que a cada uno de sus nodos le inciden dos ramas. Una forma sencilla de obtenerlos es añadir una unión a un conjunto de ramas y la gráfica que contiene la ruta es el lazo. Los lazos de la Figura 2.2 se muestran en la Figura 2.5 donde se observa que por cada unión hay un lazo.

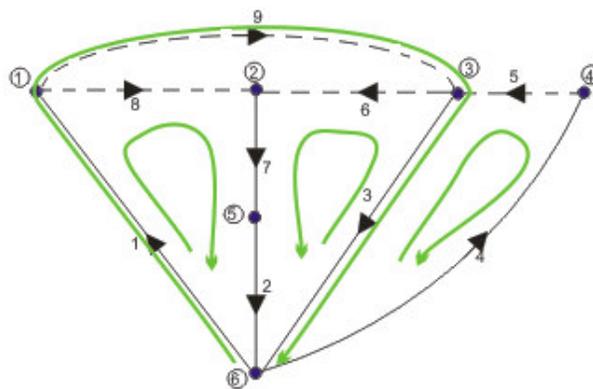


Figura 2.5 Lazos de la gráfica 2.2

De esta manera se cumple la LVK: Para cualquier red, para cualquiera de sus lazos y en cualquier tiempo, la suma algebraica de los voltajes de rama alrededor del lazo es igual a cero.

A partir de estos conceptos se pueden formar matrices de incidencia que indiquen la relación entre cada uno de estos conceptos con los elementos eléctricos del sistema.

## 2.1.2 Matrices de Incidencia

Como se observó anteriormente existen diversos conceptos que definen una red eléctrica y son necesarios para conocer el comportamiento del circuito. Para relacionar estos conceptos con los elementos de la red se utilizan las matrices de incidencia, las cuales indican qué elementos pertenecen a secciones de corte, árboles y lazos de la red o los elementos que inciden en los nodos y forman a partir de las gráficas obtenidas.

Por ejemplo, en la Figura 2.2 se dice que el elemento 6 es incidente con el nodo 2 y el nodo 3, el elemento 6 deja el nodo 3 y entra al nodo 2. En la Figura 2.4 el elemento 8 pertenece a la sección de corte asociada a la rama 1, pero en sentido opuesto. Y en la Figura 2.5 el elemento 3 forma parte del lazo asociado a la unión 5 en el mismo sentido.

Para saber que elemento entra o sale de un nodo, o pertenece o no a una sección de corte o lazo es conveniente escribir su relación en la gráfica mediante una matriz de incidencia, que permite observar la interconexión entre los elementos de un circuito. Las matrices de incidencia que se pueden obtener de un circuito eléctrico son las siguientes:

### a) Matriz de incidencia Elemento-Nodo. ( $\hat{A}$ )

Esta matriz muestra la incidencia de los elementos y los nodos de una gráfica conectada, es rectangular de  $e$  filas y  $n$  columnas donde el elemento  $a_{ij}$  están definido por:

$a_{ij} = 1$ : Si el elemento  $i$  es incidente y deja el nodo  $j$ .

$a_{ij} = -1$ : Si el elemento  $i$  es incidente y entra al nodo  $j$ .

$a_{ij} = 0$ : Si el elemento  $i$  no es incidente con el nodo  $j$ .

Dada una gráfica orientada, es simple cuestión enumerar los elementos y los nodos y escribir la matriz de incidencia  $\hat{A}$ , la cual se obtiene de la gráfica de la Figura 2.2b. Es recomendable que las primeras filas de  $\hat{A}$  correspondan a las ramas y los últimos a las uniones.

**b) Matriz de incidencia de nodo. (A)**

Cualquier nodo conectado a una gráfica puede ser seleccionado como el nodo de referencia, por lo general se escoge el nodo asociado a la referencia del circuito eléctrico (tierra). Si de la matriz  $\hat{A}$  se elimina la columna correspondiente al nodo de referencia, se le denomina *matriz de incidencia de nodo*, cuyas dimensiones son  $e \times (n - 1)$ , por lo tanto es rectangular, y el rango es  $n - 1 = b$  donde  $b$  es el número de ramas de la gráfica.

Esta matriz se puede obtener directamente de la Figura 2.2b habiendo seleccionado el nodo de referencia (nodo cero) y formar la matriz tomando en cuenta sólo la incidencia de los elementos y los nodos restantes.

**c) Matriz de incidencia de secciones de corte (B)**

Esta matriz muestra la incidencia de los elementos y las secciones de corte básicas de una gráfica conectada, y se obtiene a partir de la figura 2.4, sus elementos son:

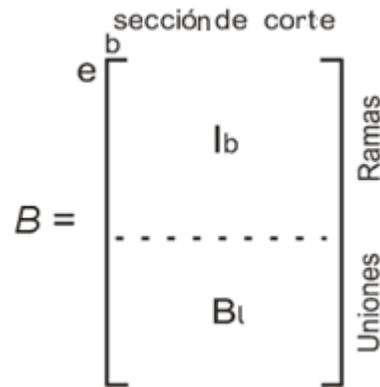
$b_{ij} = 1$ : Si el elemento  $i$  es incidente y orientado en la misma dirección que la sección de corte  $j$ .

$b_{ij} = -1$ : Si el elemento  $i$  es incidente y orientado en dirección opuesta que la sección de corte  $j$ .

$b_{ij} = 0$ : Si el elemento  $i$  no es incidente con la sección de corte  $j$ .

Esta matriz es de dimensiones  $e \times b$  y puede ser dividida en dos submatrices  $I_b$  y  $B_l$ , donde las filas de  $I_b$  corresponden a las ramas y las filas de  $B_l$  a las uniones.

La matriz identidad  $I_b$  muestra la correspondencia uno a uno de las ramas y las secciones de corte.



**d) Matriz de incidencia de lazo (C)**

Esta matriz muestra la incidencia de los elementos y los lazos, se obtiene a partir de la Figura 2.5. Los elementos de la matriz pueden ser de la siguiente manera:

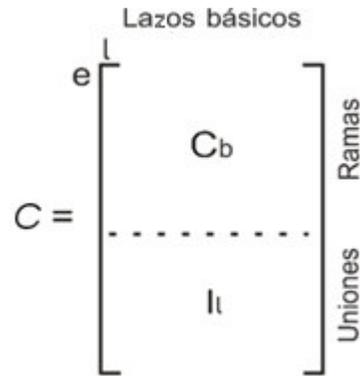
$c_{ij} = 1$ : Si el elemento  $i$  es incidente y orientado en la misma dirección que el lazo  $j$ .

$c_{ij} = -1$ : Si el elemento  $i$  es incidente y orientado en la dirección opuesta que el lazo  $j$ .

$c_{ij} = 0$ : Si el elemento  $i$  no es incidente con el lazo  $j$ .

Esta matriz es de dimensiones  $e \times l$ , y puede ser dividida en dos submatrices  $C_b$  y  $I_l$  donde las filas de  $C_b$  corresponden a las ramas del circuito y las filas de  $I_l$  a las uniones.

La matriz identidad  $I_l$  muestra la correspondencia uno-a-uno de las uniones y los lazos.



La realización de gráficas de un circuito eléctrico es de utilidad para representar la estructura geométrica de la red y a partir de ellas formar matrices de incidencia que relacionan los elementos con cada uno de los conceptos previamente definidos, ahora es necesario conocer las características eléctricas de los elementos que forman la red y junto con estas matrices poder obtener las corrientes y los voltajes el sistema.

### 2.1.3 Red Primitiva

En general, cualquier elemento de una red se puede representar por medio de una impedancia o admitancia, por la que fluye una cantidad de corriente y tiene una diferencia de potencial. Además, cada elemento puede tener una fuente de voltaje y/o una fuente de corriente.

Gráficamente existen dos formas generales en las que se pueden representar los elementos (Figura 2.6). De cada una de ellas se puede obtener su voltaje y su corriente.

Los componentes puede ser expresados de cualquiera de las dos maneras donde las variables y parámetros en consideración son:

$v_{pq}$ : voltaje en el elemento p-q

$e_{pq}$ : fuente de voltaje en serie con el elemento p-q

$i_{pq}$ : corriente del elemento p-q

$j_{pq}$ : fuente de corriente en paralelo al elemento p-q

$z_{pq}$ : impedancia propia del elemento p-q

$y_{pq}$ : admitancia propia del elemento p-q

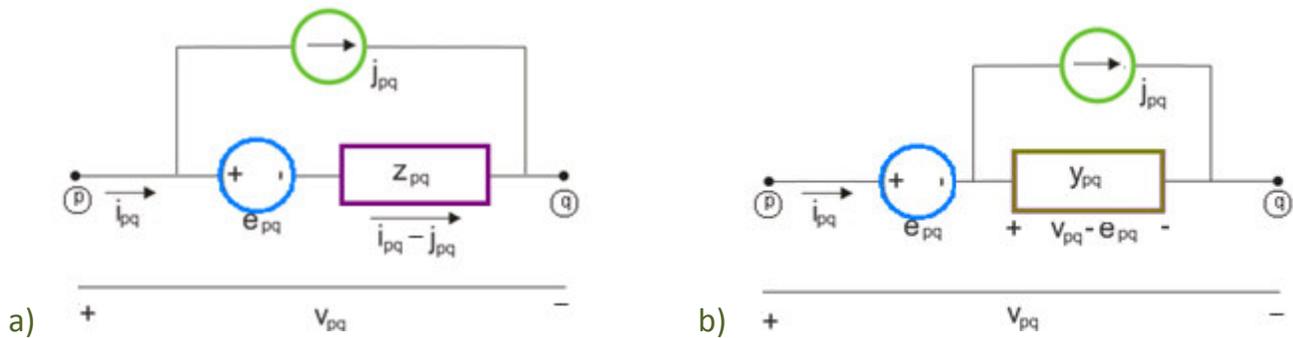


Figura 2.6 Elementos primitivos: a) Representación mediante una impedancia. b) Representación mediante una admitancia.

Cada elemento tiene dos variables  $v_{pq}$  y  $i_{pq}$ . En estado estacionario estas variables y los elementos  $z_{pq}$  y  $y_{pq}$  son números reales para circuitos de corriente directa y números complejos para circuitos de corriente alterna.

Para encontrar la ecuación que describe el comportamiento del elemento de la Figura 2.6a se puede relacionar el voltaje y la corriente por medio de la impedancia. La corriente que pasa por el elemento  $z_{pq}$  es la corriente del elemento  $i_{pq}$  menos la corriente dada por la fuente de corriente  $j_{pq}$ . Entonces el voltaje del elemento  $v_{pq}$  es la suma de voltajes de cada uno de los componentes dado por la fuente de voltaje y el voltaje producido por la impedancia:  $v_{pq} = e_{pq} + z_{pq}(i_{pq} - j_{pq})$ . Si se desarrolla la ecuación se tiene:

$$v_{pq} = z_{pq}i_{pq} + e_{pq} - z_{pq}j_{pq} \quad (2.1)$$

De igual manera, se puede describir el comportamiento del elemento de la Figura 2.7b por medio de una admitancia. El voltaje de  $y_{pq}$  es el voltaje del punto  $p$  a  $q$  menos el voltaje de la fuente  $e_{pq}$ , por lo tanto la corriente del elemento  $i_{pq}$  es la suma de las corrientes de cada uno de los componentes dado por la fuente de corriente y por la corriente de la admitancia:  $i_{pq} = y_{pq}(v_{pq} - e_{pq}) + j_{pq}$ . Si se desarrolla la ecuación se tiene:

$$i_{pq} = y_{pq}v_{pq} - y_{pq}e_{pq} + j_{pq} \quad (2.2)$$

En caso de no haber fuentes de voltaje o fuentes de corriente en los elementos sus términos correspondientes en las ecuaciones (2.1) y (2.2) son igual a cero.

Para representar una fuente de voltaje como una fuente de corriente se utiliza la ecuación:  $e_{pq} = -z_{pq}j_{pq}$ , como se muestra en la Figura 2.7a. De manera equivalente, para expresar una fuente de corriente como una fuente de voltaje se tiene:  $j_{pq} = -y_{pq}e_{pq}$ , mostrado en la Figura 2.7b.

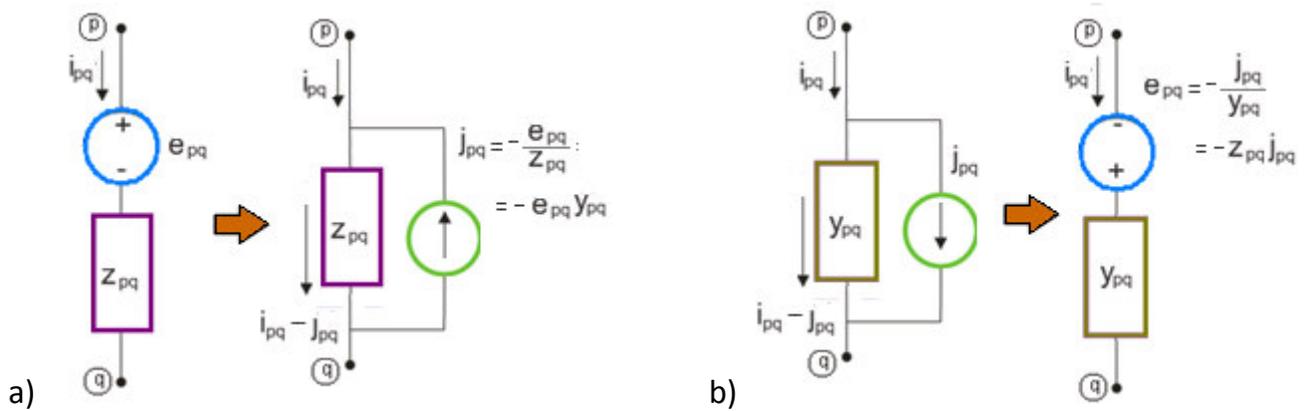


Figura 2.7 a) Fuente de voltaje a fuente de corriente a) Fuente de corriente a fuente de voltaje

Al conjunto de elementos descritos individualmente que no muestran interconexiones entre sí se le conoce como red primitiva. Las ecuaciones de comportamiento de la red primitiva pueden obtenerse de las ecuaciones (2.1) o (2.2) expresando las variables como vectores y los parámetros como matrices. De esta manera la ecuación en forma de impedancia, que relaciona a la corriente como variable independiente y al voltaje como variable dependiente es:

$$\bar{v} = [z]\bar{i} + \bar{e} - [z]\bar{j} \quad (2.3)$$

La manera de relacionar al voltaje como variable independiente y la corriente como variable dependiente se expresa por medio de la ecuación en forma de admitancia:

$$\bar{i} = [y]\bar{v} - [y]\bar{e} + \bar{j} \quad (2.4)$$

donde  $\bar{v}$  y  $\bar{e}$  son vectores cuyos componentes corresponden a los voltajes  $v_{pq}$  y  $e_{pq}$  de cada elemento. De igual manera  $\bar{i}$  y  $\bar{j}$  son vectores correspondientes a las corrientes  $i_{pq}$  y  $j_{pq}$ .

Los elementos de las diagonales de las matrices  $[z]$  y  $[y]$  corresponden a las impedancias,  $z_{pq}$ , y admitancias,  $y_{pq}$ , propias. Los elementos fuera de la diagonal corresponden a las impedancias y admitancias mutuas  $z_{pq,rs}$  o  $y_{pq,rs}$  entre los elementos p-q y r-s. La matriz primitiva  $[y]$  se puede obtener de invertir la matriz primitiva  $[z]$ . Estas matrices son diagonales si no hay acoplamiento mutuo entre los elementos. En este caso las impedancias propias son iguales a recíproco de sus correspondientes admitancias propias.

Como las matrices primitivas expresan solamente las características de los elementos y no dan información sobre las interconexiones de la red, es necesario hacer algunas transformaciones para conocer el comportamiento del sistema, por lo que por lo que utilizando las diferentes matrices de incidencia se pueden obtener los voltajes y corrientes que caracterizan el circuito eléctrico.

## 2.1.4 Formación de matrices de red por transformaciones no cuadradas

En un circuito se tiene diversos voltajes y corrientes que pueden ser entradas o salidas. En un sistema estas variables se relacionan mediante una función de transferencia, por lo que es necesario encontrar esta función. Sin embargo no solo se tiene una entrada y una salida, esto es un sistema SISO, se tienen diversas entradas y diversas salidas teniendo un sistema MIMO, por lo que se tiene una matriz de funciones de transferencia que indican la relación de cada una de las entradas con cada una de las salidas. A estas matrices se les denomina matrices de transferencia las cuales se obtienen dependiendo del marco de referencia.

En este trabajo es de mayor interés conocer las variaciones en voltaje de nodo debido a que son las cargas no lineales, representadas como fuentes de corrientes, las que inyectan componentes indeseados a la red, consideradas las entradas del sistema y así observar el efecto que éstas producen en los voltajes de nodo del circuito, de esta manera se observa cuál es el más afectado por lo tanto se puede conocer el nodo donde es más adecuado colocar el compensador, por ello se describe la manera de obtener las corrientes y voltajes de nodo a partir de la matriz de incidencia de nodo  $A$  y de la red primitiva. Para los otros marcos de referencia el análisis es similar.

La red primitiva describe el comportamiento de cada uno de los elementos de manera individual, pero para obtener voltajes y corrientes es necesario tomar en cuenta las interconexiones de los elementos. Dependiendo del marco de referencia escogido se podrán obtener voltajes y corrientes de nodo, lazo o rama.

Al considerar las interconexiones de los elementos se tienen que cumplir con las leyes de Kirchhoff. De la LCK sabemos que la suma de corrientes de rama incidentes en un nodo es igual a cero, por lo que en forma matricial se puede expresar como:

$$A^T \bar{i} = 0 \quad \bar{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_b \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

donde  $\bar{i}$  representa el vector de corrientes de cada elemento de dimensión  $e \times 1$ , y  $A^T$  es transpuesta de la matriz de incidencia de nodo.

La ecuación (2.5) consiste en  $n$  ecuaciones linealmente independientes con variables  $i_1, i_2, \dots, i_b$ , y la matriz  $A$  de dimensiones  $e \times n$  es de rango  $n$ . Como siempre se cumple que  $e > n$ , se puede afirmar que la matriz  $A$  es de rango completo.

Dentro del sistema se tienen voltajes  $v_{n1}, v_{n2}, \dots, v_{nn}$  medidos con respecto al nodo de referencia llamados voltajes de nodo. La LVK garantiza que los voltajes de nodo son definidos sin ambigüedad, si se calcula el voltaje de cualquier nodo con respecto al nodo de referencia formando la suma algebraica de voltajes de rama a través de la ruta del nodo de referencia al nodo en

cuestión. Considerando el lazo formado por la primera ruta seguido por la segunda ruta, la LVK requiere que la suma de voltajes de rama sea igual a cero.

Una forma efectiva de expresar la LVK consiste en expresar los voltajes de  $b$  ramas en términos de  $n$  nodos. Se puede observar que los voltajes de nodo  $v_{n1}, v_{n2}, \dots, v_{nn}$  son linealmente independientes, esto se debe a que los voltajes de nodo no forman lazos. Si se considera  $\bar{v}_n$  como el vector de voltajes de nodo, los voltajes de rama se pueden obtener a partir de ellos de la siguiente manera:

$$\bar{v} = A\bar{v}_n \quad \bar{v}_n = \begin{bmatrix} v_{n1} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

donde  $A$  es la matriz de incidencia de nodo. Las ecuaciones (2.5) y (2.6) son dos ecuaciones básicas para hacer un análisis de nodos del circuito, y así obtener voltajes y corrientes de nodo, por medio de la obtención de matrices de impedancias y admitancias.

El desempeño de los elementos interconectados de la red esta descrito por  $n - 1$  ecuaciones independientes de nodo. En notación matricial se pueden escribir las ecuaciones como:

$$\bar{V}_{nodo} = Z_{nodo}\bar{I}_{nodo} \quad \text{o} \quad \bar{I}_{nodo} = Y_{nodo}\bar{V}_{nodo}$$

La matriz de admitancia de nodo se puede obtener usando la matriz de incidencia de nodo  $A$  para relacionar las variables y los parámetros de la red primitiva. Utilizando la ecuación (2.4) de la red primitiva, la cual se premultiplica por  $A^T$  entonces se tiene:

$$A^T\bar{i} = A^T[y]\bar{v} - A^T[y]\bar{e} + A^T\bar{j} \quad (2.7)$$

De la LCK sabemos que  $A^T\bar{i} = 0$ .

La suma algebraica de las corrientes en cada nodo está dada por las fuentes de voltaje y corriente de cada elemento y es igual al vector de corrientes de nodo, por lo tanto:

$$\bar{I}_{nodo} = A^T[y]\bar{e} - A^T\bar{j} \quad (2.8)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.5) y (2.8) en (2.7) se obtiene:

$$\bar{I}_{nodo} = A^T[y]\bar{v} \quad (2.9)$$

Por la LVK se cumple  $\bar{v} = A\bar{v}_n$ , por lo que al sustituirla en la ecuación (2.9) se obtiene:

$$\bar{I}_{nodo} = A^T[y]A\bar{v}_n \quad (2.10)$$

Debido a que el comportamiento de nodo de la red es  $\bar{I}_{nodo} = Y_{nodo}\bar{V}_{nodo}$  entonces se puede definir a la matriz de admitancia de nodo como:

$$Y_{nodo} = A^T[y]A \quad (2.11)$$

La matriz de incidencia  $A$  es singular y por lo tanto se puede establecer que  $A^T[y]A$  es la transformación no cuadrada de  $[y]$ .

La matriz de impedancias de nodo se puede obtener de la siguiente manera:

$$Z_{nodo} = Y_{nodo}^{-1} = (A^T[y]A)^{-1} \quad (2.12)$$

La Tabla 1 muestra de manera sencilla las transformaciones no cuadradas de la red, donde a partir de las matrices primitivas y de las matrices de incidencia se pueden obtener las matrices de impedancias y admitancias que caracterizan todo el sistema y así encontrar voltajes y corrientes del circuito.

	Primitiva	Lazo	Nodo	Rama
Impedancia	$[z]$	$Z_{lazo}$	$Z_{nodo}$	$Z_{br}$
Admitancia	$[y]$	$Y_{lazo}$	$Y_{nodo}$	$Y_{br}$

Diagrama de transformaciones no cuadradas de las matrices de red:

- Una flecha horizontal superior muestra la transformación  $C^T[z]C$  de la matriz primitiva de impedancia  $[z]$  a la matriz de impedancia de lazo  $Z_{lazo}$ .
- Una flecha horizontal inferior muestra la transformación  $A^T[y]A$  de la matriz primitiva de admitancia  $[y]$  a la matriz de admitancia de lazo  $Y_{lazo}$ .
- Una flecha horizontal superior muestra la transformación  $B^T[y]B$  de la matriz primitiva de admitancia  $[y]$  a la matriz de admitancia de rama  $Y_{br}$ .
- Una flecha horizontal inferior muestra la transformación  $B^T[y]B$  de la matriz primitiva de impedancia  $[z]$  a la matriz de impedancia de rama  $Z_{br}$ .
- Una flecha vertical superior muestra la transformación  $C^T[z]C$  de la matriz primitiva de impedancia  $[z]$  a la matriz de impedancia de rama  $Z_{br}$ .
- Una flecha vertical inferior muestra la transformación  $A^T[y]A$  de la matriz primitiva de admitancia  $[y]$  a la matriz de impedancia de rama  $Z_{br}$ .
- Una flecha vertical superior muestra la transformación  $C^T[z]C$  de la matriz primitiva de impedancia  $[z]$  a la matriz de impedancia de nodo  $Z_{nodo}$ .
- Una flecha vertical inferior muestra la transformación  $A^T[y]A$  de la matriz primitiva de admitancia  $[y]$  a la matriz de impedancia de nodo  $Z_{nodo}$ .
- Una flecha vertical superior muestra la transformación  $B^T[y]B$  de la matriz primitiva de impedancia  $[z]$  a la matriz de impedancia de nodo  $Z_{nodo}$ .
- Una flecha vertical inferior muestra la transformación  $A^T[y]A$  de la matriz primitiva de admitancia  $[y]$  a la matriz de impedancia de nodo  $Z_{nodo}$ .

Tabla 1. Transformaciones no cuadradas de las matrices de red.

Cada una de las matrices de la tabla representa una matriz de funciones de transferencia. Dependiendo de las entradas conocidas las salidas requeridas se utiliza el marco de referencia adecuado. Para caracterizar el sistema se tiene un conjunto de entradas  $d(s)$  que pueden ser voltajes o corrientes, y un conjunto de salidas  $y(s)$  y se relacionan por medio de las matrices de la Tabla 1 que, generalizando, pueden denominarse como  $G(s)$ , teniendo así una representación entrada-salida de la forma:  $y(s) = G(s)d(s)$ .

La Tabla 2 indica las relaciones de voltaje y corriente entre los elementos interconectados y partir la red primitiva, es decir, de manera simplificada muestra los vectores de la red primitiva necesarios para obtener voltajes y corrientes según el marco de referencia.

	Lazo	Nodo	Rama
Corriente	$\bar{i} = C\bar{I}_{lazo}$	$\bar{I}_{nodo} = A^T\bar{j} - [y]\bar{e}$	$\bar{I}_{br} = B^T\bar{j}$
Voltaje	$\bar{V}_{lazo} = C^T\bar{e}$	$\bar{v} = A\bar{V}_{nodo}$	$\bar{v} = B\bar{V}_{br}$

Tabla 2. Relación entre voltajes y corrientes de la red primitiva y las interconexiones de red.

## 2.2 Análisis de Sistemas Multivariables

Un sistema de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO), es aquel que tiene  $m$  entradas y  $l$  salidas. El modelo de estos sistemas es  $y(s) = G(s)u(s)$ , donde  $y$  es el vector de salidas de dimensión  $l \times 1$ ,  $u$  es el vector de entradas de  $m \times 1$  y  $G(s)$  es una matriz de funciones de transferencia de dimensión  $l \times m$ , la cual se obtiene a partir de las transformaciones no cuadradas de la Tabla 1.

Si se hace un cambio en la primera entrada  $u_1$ , entonces afectará generalmente a todas las salidas,  $y_1, y_2, \dots, y_l$ ; esto es, hay una interacción entre las entradas y las salidas por lo que se le llama sistema interactivo. Un sistema no-interactivo es aquel en el que al entrada  $u_1$  solo afecta a la salida  $y_1$ ,  $u_2$  solo afecta a  $y_2$  y así sucesivamente.

La principal diferencia entre un sistema de una sola entrada y una sola salida (SISO) y un sistema MIMO está en la presencia de direcciones. Las direcciones son relevantes cuando se manejan vectores y matrices pero no para funciones escalares. Sin embargo, la mayoría de las ideas y técnicas presentes en un sistema SISO se pueden aplicar a un sistema MIMO.

La descomposición en valores singulares (SVD) provee una manera útil de cuantificar la direccionalidad en sistemas multivariables, además de dar información acerca de las ganancias máxima y mínima del sistema. De esta manera se observará que la mayoría de los resultados SISO que implican el valor absoluto, que en general se puede decir que es la magnitud del sistema, pueden ser generalizados a sistema multivariables considerando el mayor valor singular.

### 2.2.1 Ganancia

El concepto de ganancia es útil para caracterizar el comportamiento de un sistema, asumiendo un comportamiento estable y se define como la relación de magnitud entre la entrada y la salida. En el caso de sistemas MIMO, la ganancia no sólo se ve afectada por una entrada sino por los componentes de un vector de entrada.

Es importante conocer la ganancia de un sistema MIMO debido a que se pueden observar las variables que tiene mayores o menores variaciones con respecto a las demás, pero para poder hacerlas comparables es necesario realizar un escalamiento ya que la igualdad en unidades es esencial. Por ello, para determinar la ganancia o la relación en magnitud de las variables, más aún en sistemas MIMO, la medición debe normalizarse, esto se puede realizar con un escalamiento. Se recomienda que las variables a manipular estén mapeadas en un intervalo de  $[-1,1]$ , así se tiene tanto magnitud normalizada como sentido de las variables.

De esta manera las unidades y límites individuales de las diversas variables en un modelo complejo de un sistema MIMO pueden ser olvidadas y las ganancias pueden ser comparadas, además evita errores en determinar que tan bien condicionado es un sistema (ver 2.2.4.2).

Para evaluar que tan grande es una ganancia, se usan algunas mediciones para saber el tamaño de una matriz, por ejemplo el radio espectral de una matriz definido por:

$$\rho(G) = \max|\lambda_i| \quad (2.30)$$

donde  $\lambda_i$  son los valores propios de  $G$ . El radio espectral es una medida útil del tamaño de la matriz, sin embargo los valores propios sólo están definidos para matrices cuadradas y en este caso en particular el vector de entradas y el de salidas deben tener la misma tienen la misma dirección. Sin embargo se puede determinar la ganancia del sistema para otras direcciones.

## 2.2.2 Análisis de respuesta en frecuencia multivariable

Las técnicas de respuesta en frecuencia se han aplicado extensivamente en el estudio de sistemas SISO. La salida en estado estacionario de un sistema lineal dada una entrada senoidal también es una señal senoidal con la misma frecuencia, pero se puede determinar los cambios en la ganancia y en la fase por medio de la respuesta en frecuencia.

En el caso de sistemas MIMO la respuesta en frecuencia no solo se debe a una función de transferencia sino a una matriz  $G(s)$  de funciones de transferencia, cuya ganancia no solo depende de la frecuencia sino también de la dirección de entrada. Entonces, es necesario determinar las propiedades de la matriz de transferencia para la o las frecuencias de interés.  $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$ .

La matriz de funciones de transferencia  $G(s)$  es usada para representar la dinámica del sistema. Si se establece  $s = s_0$  se obtiene  $G(s_0)$  simplemente como una matriz compleja de dimensiones  $l \times m$ , que puede ser analizada usando herramientas comunes del álgebra de matrices. En particular, se escoge  $s_0 = j\omega$ , donde  $\omega$  es una frecuencia específica, debido a  $G(j\omega)$  representa la respuesta a señales senoidales de frecuencia  $\omega$ .

El dominio de la frecuencia es ideal para estudiar direcciones en sistemas multivariables así como determinar su ganancia a cualquier valor de frecuencia. Considerando el sistema  $G(s)$  de la Figura 2.9 cuyas entradas son  $d(s)$ <sup>1</sup> y las salidas  $y(s)$ , se tiene:  $y(s) = G(s)d(s)$ .

Si se considera una respuesta senoidal del sistema, se tiene que los elementos de la matriz  $G$  de la forma  $g_{ij}(j\omega)$  representan la respuesta senoidal de la salida  $i$  dada la entrada  $j$ .

---

<sup>1</sup> Se considera a las entradas con la variable  $d$  en vez de la variable  $u$  para evitar confusión con la matriz  $U$  usada posteriormente en SVD.

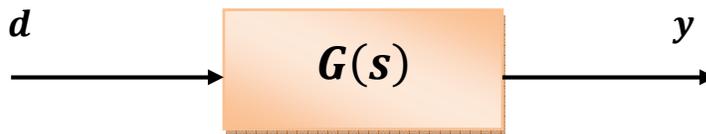


Figura 2.8 Sistema  $G(s)$  con entradas  $d$  y salidas  $y$

De manera específica, si la entrada  $j$  es una señal senoidal tiene la forma:

$$d_j = d_{j0} \sin(\omega t + \alpha_j) \quad (2.13)$$

Esta señal es forzada, esto es, ha sido aplicada desde  $t = -\infty$ .

Entonces la señal de salida  $i$ , es senoidal y de la misma frecuencia:

$$y_i = y_{i0} \sin(\omega t + \beta_i) \quad (2.14)$$

La ganancia y el cambio de fase pueden ser obtenidas de la relación entre  $d_j$  y  $y_i$ , esto es del número complejo  $g_{ij}(j\omega)$  de la siguiente manera:

$$\frac{y_{i0}}{d_{j0}} = |g_{ij}(j\omega)| \quad ; \quad \beta_i - \alpha_j = \angle g_{ij}(j\omega) \quad (2.15)$$

En notación fasorial se puede representar la respuesta senoidal en el tiempo de las señales (2.13) y (2.14) como:

$$y_i(\omega) = g_{ij}(j\omega)d_j(\omega) \quad (2.16)$$

donde la entrada y la salida están dadas por:

$$d_j(\omega) = d_{j0}e^{j\alpha_j} \quad , \quad y_i(\omega) = y_{i0}e^{j\beta_i} \quad (2.17)$$

La respuesta total de una salida debido a señales de entrada simultáneas de la misma frecuencia en diversos canales de entrada es, por el principio de superposición para sistemas lineales, igual a la suma de las respuestas debidas a cada una de las entradas actuando por separado, teniendo así:

$$y_i(\omega) = g_{i1}(j\omega)d_1(\omega) + g_{i2}(j\omega)d_2(\omega) + \dots + g_{ij}(j\omega)d_j(\omega) = \sum_j g_{ij}(j\omega)d_j(\omega) \quad (2.18)$$

De la ecuación anterior se puede establecer la salida total del sistema que puede ser representada de manera matricial mediante la ecuación, a la misma frecuencia  $\omega$ :

$$y(\omega) = G(j\omega)d(\omega)$$

donde  $d(\omega)$  y  $y(\omega)$  son de la forma :

$$d(\omega) = \begin{bmatrix} d_1(\omega) \\ d_2(\omega) \\ \vdots \\ d_m(\omega) \end{bmatrix} ; \quad y(\omega) = \begin{bmatrix} y_1(\omega) \\ y_2(\omega) \\ \vdots \\ y_l(\omega) \end{bmatrix}$$

### 2.2.3 Direcciones en sistemas multivariables

Para un sistema SISO de forma  $y(\omega) = G(j\omega)d(\omega)$  la ganancia a una frecuencia dada es:

$$\frac{|y(\omega)|}{|d(\omega)|} = \frac{|G(j\omega)d(\omega)|}{|d(\omega)|} = |G(j\omega)|$$

La ganancia depende de la frecuencia  $\omega$ , pero como el sistema es lineal, es independiente de la magnitud de la entrada  $|d(\omega)|$ .

Sin embargo para sistemas MIMO no es tan simple definir este concepto debido a que las señales de entrada y salidas son vectores y cada uno de sus elementos aporta ganancia al sistema. Para ello es necesario incorporar las magnitudes de los elementos en cada vector utilizando alguna norma, la cual da una medida útil del tamaño de una matriz o vector. Utilizando la norma-2, entonces a una frecuencia  $\omega$  la magnitud del vector de entrada es:

$$\|d(\omega)\|_2 = \sqrt{\sum_j |d_j(\omega)|^2} = \sqrt{d_{10}^2 + d_{20}^2 + \dots + d_{m0}^2} \quad (2.19)$$

Y la magnitud del vector de la señal de salida es:

$$\|y(\omega)\|_2 = \sqrt{\sum_i |d_i(\omega)|^2} = \sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2 + \dots + y_{l0}^2} \quad (2.20)$$

La ganancia del sistema  $G(s)$  para una señal particular de entrada  $d(\omega)$  esta dada por la relación:

$$\frac{\|y(\omega)\|_2}{\|d(\omega)\|_2} = \frac{\|G(j\omega)d(\omega)\|_2}{\|d(\omega)\|_2} = \frac{\sqrt{y_{10}^2 + y_{20}^2 + \dots + y_{l0}^2}}{\sqrt{d_{10}^2 + d_{20}^2 + \dots + d_{m0}^2}} \quad (2.21)$$

De la ecuación (2.21) se puede observar que la ganancia depende de la frecuencia  $\omega$  y también es independiente de la magnitud de entrada  $\|d(\omega)\|_2$ . Sin embargo, en un sistema MIMO hay otros aspectos a considerar como la direccionalidad, la ganancia también depende de la dirección de la entrada  $d$ . El término direccionalidad se refiere los componentes de un vector normalizado, es decir, a la cantidad (magnitud y sentido) en que se encuentran los elementos de un vector. Como la norma de los vectores debe ser igual a 1 (debido a que están normalizados), entonces:

$$\|d\|_2 = 1, \quad \text{por lo que} \quad -1 \leq d_{10}, d_{20}, \dots, d_{m0} \leq 1$$

La ganancia máxima de  $G$  se obtiene cuando la dirección de la entrada es variada y se obtiene el máximo valor, llamado máximo valor singular:

$$\max_{d \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} = \max_{\|d\|_2=1} \|Gd\|_2 = \bar{\sigma}(G) \quad (2.22)$$

Mientras que cuando se varía la dirección de entrada, si obtiene el mínimo valor de ganancia se le denomina menor valor singular de  $G$ :

$$\min_{d \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} = \min_{\|d\|_2=1} \|Gd\|_2 = \underline{\sigma}(G) \quad (2.23)$$

Las igualdades (2.22) y (2.23) se cumplen debido a que la ganancia es independiente de la dirección de la entrada en un sistema lineal. Es relevante saber en qué direcciones se obtienen las ganancias extremas (máxima y mínima), para determinar cómo actúa o cómo se pueden manipular las entradas en un sistema controlado.

Para comprender mejor el concepto de máxima y mínima ganancia (máximo y mínimo valor singular), se explicará un sencillo ejemplo:

### Ejemplo:

Supongamos que se tiene un sistema de dos entradas y dos salidas cuya matriz de transferencia  $G(\omega)|_{\omega=cte}$  está dada por:

$$G = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

La entrada es un vector de la forma:  $d = \begin{bmatrix} d_{10} \\ d_{20} \end{bmatrix}$ . Algunas de las direcciones que puede tener el vector de entradas son:

$$d_a = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix} \quad d_b = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix} \quad d_c = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cada una de las entradas tiene la misma norma  $\|d\|_2 = 1$  pero tienen diferente dirección.

Para obtener la salida de cada una de las entradas se aplica la ecuación  $y = Gd$ , por lo que las salidas son:

$$y_a = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix} \quad y_b = \begin{bmatrix} 6.2 \\ 3.4 \end{bmatrix} \quad y_c = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix} \quad y_d = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La norma-2 de cada una de las salidas, es decir su magnitud, es:

$$\|y_a\|_2 = 1 \quad \|y_b\|_2 = 7.0711 \quad \|y_c\|_2 = 5.831 \quad \|y_d\|_2 = 4.4721$$

De lo anterior se observa que la ganancia no depende de la magnitud de la entrada  $\|d\|_2$ , debido a que todas tienen norma 1, pero se modifica notoriamente debido a la dirección de  $d$ .

Para observar la dependencia de la ganancia dadas las direcciones de entradas se consideran todos los posibles valores que pueden tomar los componentes del vector de entrada, para ello se establece:  $d_{20} = \pm\sqrt{1 - d_{10}^2}$ , donde se define  $d_{10}$  como un conjunto de valores en el intervalo  $[-1,1]$ , y se obtendrá un conjunto de valores correspondientes a  $d_{20}$  en el mismo intervalo.

Gráficamente se obtiene la figura 2.10a, donde el eje de las abscisas corresponde a  $d_{10}$  (variable independiente) y el eje de las coordenadas a  $d_{20}$ . Cada punto de la gráfica representa una dirección de entrada.

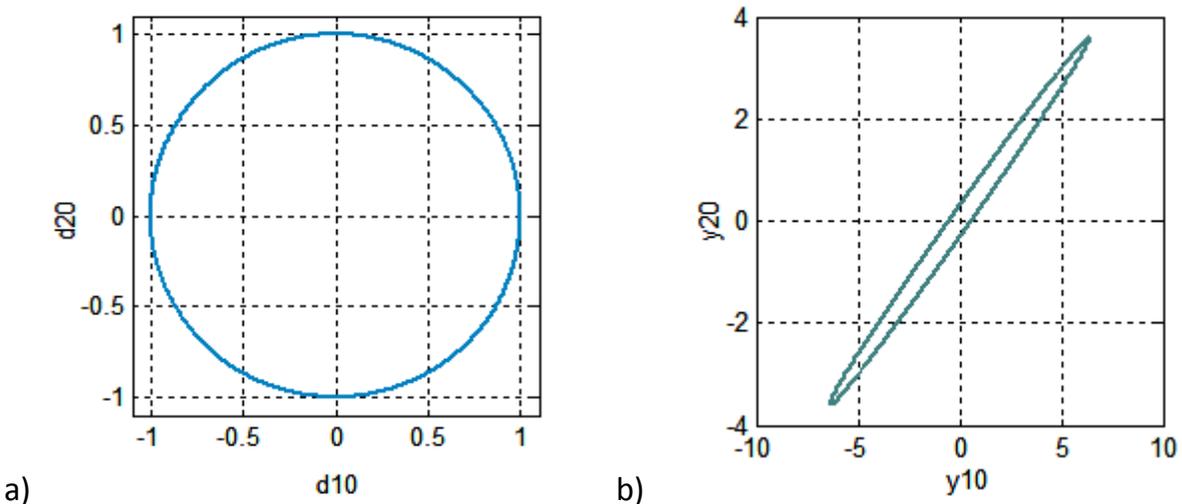


Figura 2.10 a) Representación de las direcciones de entrada con  $\|d\|_2 = 1$  (círculo unitario).  
 b) Salidas del sistema dada una matriz  $G$  con entradas  $d$ .

Si cada punto de  $d = \begin{bmatrix} d_{10} \\ d_{20} \end{bmatrix}$  se multiplica por la matriz del sistema  $G$  para obtener cada una de las salidas  $y = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix}$ , esto es  $y = Gd$ , se obtiene la gráfica de la Figura 2.10b, en la que, de igual manera que la Figura 2.10 el, eje de las abscisas corresponde a la salida  $y_{10}$  y el eje de las coordenadas  $y_{20}$ , en esta gráfica se puede ver la transformación que hace  $G$  de las entradas  $d$  para obtener  $y$ .

La manera de interpretar la gráfica 2.10b es la siguiente: es fácil obtener un incremento en las dos salidas  $y_{10}$  y  $y_{20}$  se cuando aumentan simultáneamente, debido a que se obtiene la mayor ganancia, mientras que es difícil incrementar una y decrementar la otra, lo que indica el menor valor de ganancia.

El ejemplo es muy ilustrativo para sistemas de  $2 \times 2$ , pero para sistemas mayores se requiere una manera de obtener los valores singulares y las direcciones de entrada requeridas para obtener los valores singulares extremos, por este propósito se utiliza la descomposición en valores singulares.

## 2.2.4 Descomposición en valores singulares

La descomposición en valores singulares es de interés debido a que su interpretación física se aplica a la respuesta en frecuencia de un sistema MIMO  $G(s)$  con  $m$  entradas y  $l$  salidas.

Considerando una frecuencia fija  $\omega$  donde  $G(j\omega)$  es una matriz constante compleja de  $l \times m$ , cualquier matriz  $G$  puede ser descompuesta en su descomposición en valores singulares de la siguiente manera:

$$G = U \Sigma V^H \quad (2.24)$$

Donde  $\Sigma$  es una matriz de  $l \times m$  con  $k$  valores singulares no negativos  $\sigma_i$ , donde  $k = \min\{l, m\}$ , acomodados en orden descendente a través de su diagonal principal, los demás elementos son ceros. El número de entradas diferentes de cero en  $\Sigma$  es igual al rango de  $G$  que por lo general es  $k$ . Los valores singulares son raíces cuadradas positivas de los valores propios de  $G^H G$ , donde  $G^H$  es la matriz Hermitiana de  $G$ :

$$\sigma_i(G) = \sqrt{\lambda_i(G^H G)} \quad (2.25)$$

Para esta matriz se tiene que:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} ; l \geq m \quad \text{o} \quad \Sigma = [\Sigma_1 \quad 0] ; l \leq m$$

donde  $\Sigma_1 = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$  y  $\bar{\sigma} \equiv \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k \equiv \underline{\sigma}$ .

$U$  es una matriz compleja unitaria de dimensión  $l \times l$  con vectores columna denominados vectores singulares de salida,  $u_i$ .<sup>2</sup>

$V$  es una matriz compleja unitaria de dimensión  $m \times m$  con vectores singulares de entrada, también vectores columna,  $v_i$ .

Matemáticamente se puede definir que una matriz  $Q$  es unitaria si:

$$QQ^H = 1 \quad (2.26)$$

donde  $Q$  es una matriz compleja de dimensiones  $n \times n$ .  $Q^H$  es la matriz Hermitiana de  $Q$ . Esta condición implica que la matriz inversa de  $Q$  es igual a su matriz Hermitiana, por lo tanto se tiene:

$$Q^H = Q^{-1} \quad (2.27)$$

Las columnas de estas matrices  $U$  y  $V$  son vectores propios unitarios de  $GG^H$  y  $G^HG$ , respectivamente. De la ecuación (2.24), se tiene:

$$GG^H = (U\Sigma V^H)(U\Sigma V^H)^H = (U\Sigma V^H)(V\Sigma^H U^H) = U\Sigma\Sigma^H U^H$$

Como  $U$  es una matriz unitaria se tiene:

$$(GG^H)U = U\Sigma\Sigma^H \quad (2.28)$$

De la ecuación anterior se observa que la matriz  $U$  es la matriz de vectores propios de  $(GG^H)$  y  $\{\sigma_i^2\}$  son sus valores propios.

De manera similar se obtiene la prueba para la matriz  $V$ :

$$G^HG = (U\Sigma V^H)^H(U\Sigma V^H) = (V\Sigma^H U^H)(U\Sigma V^H) = V\Sigma^H\Sigma V^H$$

Como  $V$  también es una matriz unitaria entonces:

$$(G^HG)V = V\Sigma^H\Sigma \quad (2.29)$$

Por lo tanto la matriz  $V$  es la matriz de vectores propios de  $(G^HG)$  y  $\{\sigma_i^2\}$  son sus valores propios.

**Direcciones de entrada y salida:** Los vectores columna de  $U$ , denotados  $u_i$ , representan las direcciones de salida del sistema. Son ortogonales y de longitud unitaria, es decir ortonormales y por ello se satisface:

---

<sup>2</sup> En notación estándar de SVD se utiliza  $U$  como la matriz de direcciones de salida con vectores  $u_i$ , pero también es notación común en sistemas representar las señales de entrada con  $u$ . Es importante distinguir las variables para no crear confusión.

$$\|u_i\|_2 = \sqrt{|u_{i1}|^2 + |u_{i2}|^2 + \dots + |u_{il}|^2} = 1$$

$$u_i^H u_i = 1 \quad , \quad u_i^H u_j = 0 \quad , \quad i \neq j$$

Del mismo modo, los vectores columna de  $V$ , denotados  $v_i$ , son ortogonales y de longitud unitaria, representan las direcciones de entrada.

$$\|v_i\|_2 = \sqrt{|v_{i1}|^2 + |v_{i2}|^2 + \dots + |v_{im}|^2} = 1$$

$$v_i^H v_i = 1 \quad , \quad v_i^H v_j = 0 \quad , \quad i \neq j$$

Las direcciones de entrada y salida están relacionadas a través de los valores singulares. Para comprobar esto, como  $V$  es unitaria se tiene que  $V^H V = I$ , entonces la ecuación (2.24) se puede reescribir como:

$$GV = U\Sigma \tag{2.30}$$

Por lo que para la columna  $i$  obtenemos:  $Gv_i = \sigma_i u_i$ . Donde  $v_i$  y  $u_i$  son vectores, mientras que  $\sigma_i$  es escalar.

El significado físico de SVD es el siguiente. Si se considera una entrada  $v$  en la dirección  $v_i$ , entonces la salida es  $y_i = Gv_i$  en la dirección  $u_i$  con ganancia  $\sigma_i$ . Más aún, debido a que  $\|v_i\|_2 = 1$  y  $\|u_i\|_2 = 1$  se observa que el  $i$  –ésimo valor singular  $\sigma_i$  da directamente la ganancia de la matriz  $G$  en esa dirección. Matemáticamente se puede expresar como:

$$\sigma_i(G) = \|Gv_i\|_2 = \frac{\|Gv_i\|_2}{\|v_i\|_2} \tag{2.31}$$

**Valores singulares máximo y mínimo:** como se estableció antes, se puede mostrar que la mayor ganancia para cualquier dirección de entrada es igual al valor singular mayor.

$$\bar{\sigma}(G) \equiv \sigma_1(G) = \max_{d \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} = \frac{\|Gv_1\|_2}{\|v_1\|_2} \tag{2.32}$$

y que la menor ganancia para cualquier dirección de entrada (excluyendo las entradas descartadas correspondientes al espacio nulo de  $G$  para casos con más entradas que salidas), es igual al mínimo valor singular.

$$\underline{\sigma}(G) \equiv \sigma_k(G) = \max_{d \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} = \frac{\|Gv_k\|_2}{\|v_k\|_2} \tag{2.33}$$

donde  $k = \min\{l, m\}$ . Entonces, para un vector  $d$ , se tiene que:

$$\underline{\sigma}(G) \leq \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} \leq \bar{\sigma}(G) \quad (2.34)$$

Definiendo los vectores para el valor singular mayor  $u_1 = \bar{u}$ ,  $v_1 = \bar{v}$ , y para el valor singular menor  $u_k = \underline{u}$  y  $v_k = \underline{v}$ , se cumple que:

$$G\bar{v} = \bar{\sigma}\bar{u} \quad , \quad G\underline{v} = \underline{\sigma}\underline{u}.$$

El vector  $\bar{v}$  corresponde a la dirección de entrada con la mayor amplificación, y  $\bar{u}$  es el vector correspondiente a la dirección de salida en que dichas entradas son magnificadas. Las direcciones que involucran  $\bar{v}$  y  $\bar{u}$  son algunas veces referidas como las direcciones “más fuertes”, las “de alta-ganancia” o las “más importantes”. Las siguientes direcciones más importantes están asociadas con  $v_2$  y  $u_2$ , y así sucesivamente hasta que las direcciones “menos importantes”, “débiles” o “de baja ganancia” están asociada con  $\underline{v}$  y  $\underline{u}$ .

Entonces se puede decir que la acción de  $G$  es una combinación de una rotación de entradas  $V$ , un escalamiento dado por  $\Sigma$  y una rotación de salidas  $U$ . La ganancia direccional tiene forma de elipse con ganancias extremas:

$$\text{Máxima: } \bar{\sigma} = \max_i \sigma_i = \sigma_1 \quad ; \quad \text{mínima: } \underline{\sigma} = \min_i \sigma_i = \sigma_k$$

Retomando el ejemplo anterior, considerando el sistema dado por:  $G = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

La SVD de  $G$  es:

$$G = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.872 & 0.490 \\ 0.490 & -0.872 \end{bmatrix}}_U \underbrace{\begin{bmatrix} 7.343 & 0 \\ 0 & 0.272 \end{bmatrix}}_\Sigma \underbrace{\begin{bmatrix} 0.794 & -0.608 \\ 0.608 & 0.794 \end{bmatrix}}_V^t$$

El máximo valor de ganancia es  $\bar{\sigma} = 7.34$  para una dirección de entrada  $\bar{v} = \begin{bmatrix} 0.794 \\ 0.608 \end{bmatrix}$ . El mínimo valor de ganancia es  $\underline{\sigma} = 0.272$  para una dirección de entrada  $\underline{v} = \begin{bmatrix} -0.608 \\ 0.794 \end{bmatrix}$ .

Entonces si  $y_i = Gv_i$ , se tiene:

$$\begin{aligned} y_1 &= G \cdot \begin{bmatrix} 0.794 \\ 0.608 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.402 \\ 3.598 \end{bmatrix} & \|y_1\|_2 &= 7.34 \\ y_2 &= G \cdot \begin{bmatrix} -0.608 \\ 0.794 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.136 \\ -0.236 \end{bmatrix} & \|y_2\|_2 &= 0.272 \end{aligned} \quad (2.35)$$

De los resultados anteriores se observa que las salidas tiene la dirección de los vectores de la matriz  $U$  y la magnitud de cada una de ellas corresponde a  $\bar{\sigma}$  y  $\underline{\sigma}$  según los vectores de la matriz  $V$ . Si se cambia solo el signo correspondiente a la entrada 1 del primer vector de entrada se tiene:

$$y_1 = G \cdot \begin{bmatrix} -0.794 \\ 0.608 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.535 \\ -1.164 \end{bmatrix} \quad \|y_1\|_2 = 1.927$$

Se observa que con un pequeño cambio en la entrada la magnitud de la salida varía notoriamente, hay sistemas en lo que con un pequeño cambio en la dirección de los vectores la magnitud de salida de ve fuertemente afectada, por lo que se dice que los sistemas tiene una gran dependencia de la direccionalidad.

Complementando la gráfica 2.10, al tener los vectores unitarios de entrada  $\bar{v}$  y  $\underline{v}$ , mostrados en la Figura 2.11a, se obtendrá la máxima y mínima ganancia en el sistema, cuyos valores corresponden a los obtenidos en (2.35) y se muestran en la gráfica 2.11b.

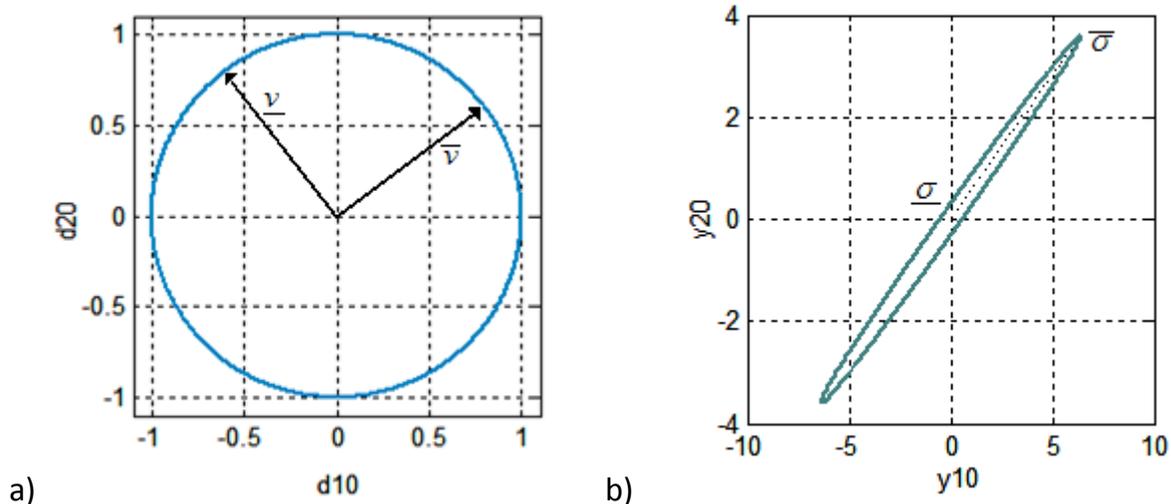


Figura 2.11. a) Direcciones de entrada  $V = [\bar{v} \ \underline{v}]$  b) Salidas del sistema con  $\bar{\sigma}$  y  $\underline{\sigma}$

En resumen, cualquier matriz puede ser descompuesta en su SVD donde las matrices  $U$  y  $V$  representan rotaciones de salidas entradas respectivamente y  $\Sigma$  representa un escalamiento. Esto se ilustra con una SVD de una matriz real de 2x2 que siempre se puede escribir de la forma:

$$G = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \pm \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_2 & \pm \cos \theta_2 \end{bmatrix}^T$$

Donde los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  dependen de la matriz dada. De la ecuación podemos ver que las matrices  $U$  y  $V$  involucran rotaciones y sus columnas son ortonormales.

Los valores singulares algunas veces son llamados valores principales o ganancias principales, y sus direcciones asociadas son llamadas direcciones principales.

Matemáticamente obtener la SVD de un sistema es muy complejo, por lo que el software MATLAB ayuda a obtener esta descomposición con el comando `svd`.

```

>>G=[5 4 ; 3 2]; % se declara una matriz constante G

>> [u, s, v]=svd(G); % con el comando svd se obtienen tres matrices u, s, v
                        correspondientes a las salidas, a los valores singulares y a las
                        entradas, respectivamente.

>>s=svd(G); % de esta manera solo se obtiene un vector cuyos elementos
              corresponden a los valores singulares.

```

### 2.2.4.1 Propiedades de SVD

Dentro de la descomposición en valores singulares hay algunas características que se cumplen debido a que aplicando algunas propiedades matriciales se obtienen igualdades útiles en el análisis que ayudan a entender mejor cuales son los principales factores que afectan el comportamiento del sistema. Las principales propiedades de SVD aplicadas en este trabajo son las siguientes:

#### 1) SVD de una matriz inversa.

Se tiene una matriz  $Q$ , de dimensiones  $m \times m$ . Se puede obtener su SVD:  $Q = U\Sigma V^H$ . Si se puede afirmar que  $Q$  es no singular, entonces existe  $Q^{-1}$  y su SVD está dada por:

$$Q^{-1} = (V^H)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} \tag{2.36}$$

Si se aplica la ecuación (2.27) en la ecuación (2.36) se obtiene:

$$Q^{-1} = V\Sigma^{-1}U^H \tag{2.37}$$

La SVD de  $Q^{-1}$  tiene el orden de los valores singulares invertidos a  $Q$ .

Si se considera  $j = m - i + 1$ , entonces se cumple:

$$\sigma_i(Q)^{-1} = \frac{1}{\sigma_j(Q)}, \quad u_i(Q^{-1}) = v_j(Q), \quad v_i(Q^{-1}) = u_j(Q)$$

En particular se tiene:

$$\bar{\sigma}(Q^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(Q)}$$

## 2) SVD como suma de matrices de rango 1

Se define  $r$  como el rango de la matriz  $Q$  de dimensiones  $l \times m$ . Se puede considerar la SVD como una descomposición de  $Q$  en  $r$  submatrices de  $l \times m$ , cada una de rango 1, la cual está dada por:

$$Q = U\Sigma V^H = \sum_{i=1}^r u_i \sigma_i v_i^H \quad (2.38)$$

Los términos restantes a  $r + 1$  de  $k = \min\{l, m\}$ , tienen valores singulares iguales a cero, por lo que no hacen contribución a la sumatoria.

La primera submatriz es la más importante debido a que considera el valor singular mayor, por lo que se puede decir que da la mayor contribución a la sumatoria y está dada por:

$$Q_1 = u_1 \sigma_1 v_1^H \quad (2.39)$$

Si se considera una diferencia de matrices se tiene:  $Q^1 = Q - Q_1 = Q - u_1 \sigma_1 v_1^H$

Por lo que:  $\sigma_1(Q^1) = \sigma_2(Q)$ . Esto es, el valor singular mayor de  $Q^1$  es igual al segundo valor singular mayor de la matriz original. Esto muestra que la dirección correspondiente a  $\sigma_2(Q)$  es la segunda dirección más importante, y así sucesivamente.

Se sabe que se puede obtener la inversa de la matriz  $Q$  aún cuando sea una matriz singular, por lo que también se puede expresar como una sumatoria de matrices de la siguiente manera:

$$Q^{-1} = V\Lambda^{-1}U^H = \sum_{i=1}^r \frac{v_i u_i^H}{\sigma_i} \quad (2.40)$$

De igual modo se puede decir que la submatriz más importante de la inversa de una matriz está dada por el valor singular menor:

$$Q^{-1}_1 = \frac{v_1 u_1^H}{\sigma_1} \quad (2.41)$$

De esta manera, al tener una matriz se puede conocer el comportamiento de su matriz inversa y se puede establecer que el valor singular menor es el que da una mayor contribución al sistema analizando así solamente el comportamiento del sistema debido a ese valor.

### 3) Definición: Distorsión generalizada.

Se tiene un sistema dado por  $y = Gd$ . Si se obtiene la SVD de  $G$  se tiene:

$$y = (U\Sigma V^H)d \quad (2.42)$$

Donde  $y$  es un vector de salidas de  $l \times 1$  y  $d$  es un vector de entradas de  $m \times 1$

De la propiedad 1) se puede obtener la descomposición como una sumatoria y considerando la submatriz más relevante dada por el valor singular mayor se tiene:

$$y = (u_1\sigma_1v_1^H)d \quad (2.43)$$

Si se consideran los elementos correspondientes a la entrada, se pueden separar de la siguiente manera:

$$y = u_1Dg \quad (2.44)$$

Donde  $Dg$  es un escalar llamado primera distorsión generalizada debida a  $\sigma_1$  y esta dado por:

$$Dg = (\sigma_1v_1^H)d \quad (2.45)$$

De este valor se puede determinar como deben ser las entradas para obtener una distorsión generalizada deseada y así obtener una salida  $u_1$  escalada con un valor  $Dg$ . De esta manera se observa que hay elementos del vector  $d$  que requieren una menor o mayor modificación para obtener una  $Dg$  particular.

Esto es de utilidad para conocer el comportamiento del sistema cuando se analizan compensadores que no pueden ser modelados como impedancias, como el caso de filtros activos los cuales se pueden considerar como nuevas fuentes de corriente, modificando así solo el vector de entradas  $d$  de manera que con un valor  $Dg$  deseado se observen en que punto del vector de entradas se requiere una menor compensación para tener un mejoramiento en el sistema.

#### 2.2.4.2 Condicionalidad

Se ha observado que hay sistemas en los que la ganancia varía considerablemente dependiendo de las direcciones de entrada, por lo que se dice que esos sistemas tienen una fuerte direccionalidad. Una medida que puede cuantificar el grado de direccionalidad de un sistema MIMO está dado por el *número condición*, el cual se define como la relación entre el máximo y el mínimo valor singular:

$$\gamma(G) \triangleq \frac{\bar{\sigma}(G)}{\underline{\sigma}(G)} \quad (2.46)$$

Si existe una gran diferencia entre estas ganancias, es decir que el número condición es grande, se dice que la matriz es *mal condicionada*, lo que indica que hay una gran variación en el sistema.

Para una matriz no singular se tiene que, por la propiedad 2),  $\underline{\sigma}(G) = 1/\overline{\sigma}(G^{-1})$  por lo que el número condición es:

$$\gamma(G) = \overline{\sigma}(G)\overline{\sigma}(G^{-1})$$

Se puede afirmar que  $\gamma$  es muy grande si tanto  $G$  como  $G^{-1}$  tienen elementos grandes.

El número condición se usa como una medida de controlabilidad entrada-salida, en particular se ha establecido que un número condición grande implica gran sensibilidad a incertidumbres debido a que con pequeños cambios en las entradas el sistema puede tener un comportamiento totalmente distinto al deseado. Esto no siempre se cumple pero sí se puede establecer lo contrario: Si el número condición es pequeño los efectos multivariables ante incertidumbres no parecen ser muy serios.

Si el número condición es grande, esto indica problemas de control:

1. Un número condición grande  $\gamma(G) = \overline{\sigma}(G)/\underline{\sigma}(G)$  puede ser causado por un número muy pequeño de  $\underline{\sigma}(G)$ , lo cual es indeseado, por otro lado un valor grande de  $\overline{\sigma}(G)$ , no necesariamente es un problema.
2. Un número condición grande implica que el sistema es sensible a incertidumbres indeseadas de entrada, pero este tipo de incertidumbres no siempre ocurren en la práctica. Entonces generalmente no se puede concluir que un sistema con un número condición grande sea sensible a incertidumbres.

Para poder mejorar la condicionalidad es recomendable incrementar el valor singular menor del sistema, para ello es necesario tomar en cuenta los factores que intervienen a la matriz  $G$  y en medida de lo posible, modificar esos factores de manera que mejore la condicionalidad del sistema, esto es, aumentando  $\underline{\sigma}(G)$ .

# Método sistemático

---

En este capítulo se aplicarán las herramientas matemáticas del capítulo anterior para proponer un método que permita determinar el mejor punto de conexión de un compensador. Este punto se debe de escoger de acuerdo a las propiedades del sistema que en este caso están dadas por la topología de la red y los parámetros del sistema y, de acuerdo a su comportamiento, se observará el punto más afectado ante variaciones lo que indica que ese nodo en particular va a compensar más que si se conecta el compensador en otro nodo. El nodo más susceptible a variaciones se puede obtener haciendo un análisis multivariable mediante la descomposición en valores singulares.

Para ello se presentan dos casos obtenidos de [1] donde analiza estos sistemas para encontrar el punto de conexión de un filtro activo que compensa armónicos de corriente. El primero es un circuito eléctrico que ejemplifica detalladamente los pasos requeridos en el análisis, donde se incluye la manera de obtener la matriz de impedancia de nodo como matriz de transferencia y a partir de ella se pueden encontrar variaciones que más afectan los voltajes de nodo obteniendo su descomposición en valores singulares.

El segundo caso es un circuito eléctrico real de una planta de distribución donde se observa que el método planteado es adecuado para sistemas de cualquier dimensión, de igual manera se requiere de un modelo para conocer el comportamiento del sistema y a partir de éste obtener descomposición en valores singulares, donde particularmente se observa que el resultado es válido al analizar la matriz de impedancias o la matriz de admitancias de nodo.

## 3.1 Caso a: ejemplo

Se tiene un circuito eléctrico mostrado en la Figura 3.1, formado por una fuente de suministro, componentes resistivos, inductivos y capacitivos, y dos fuentes de corriente que representan las cargas no lineales las cuales aportan elementos indeseados al sistema. Todos los valores se expresan en por unidad respecto a los valores base 13.8 kV y 10 MVA a una frecuencia de 50 Hz, [1].

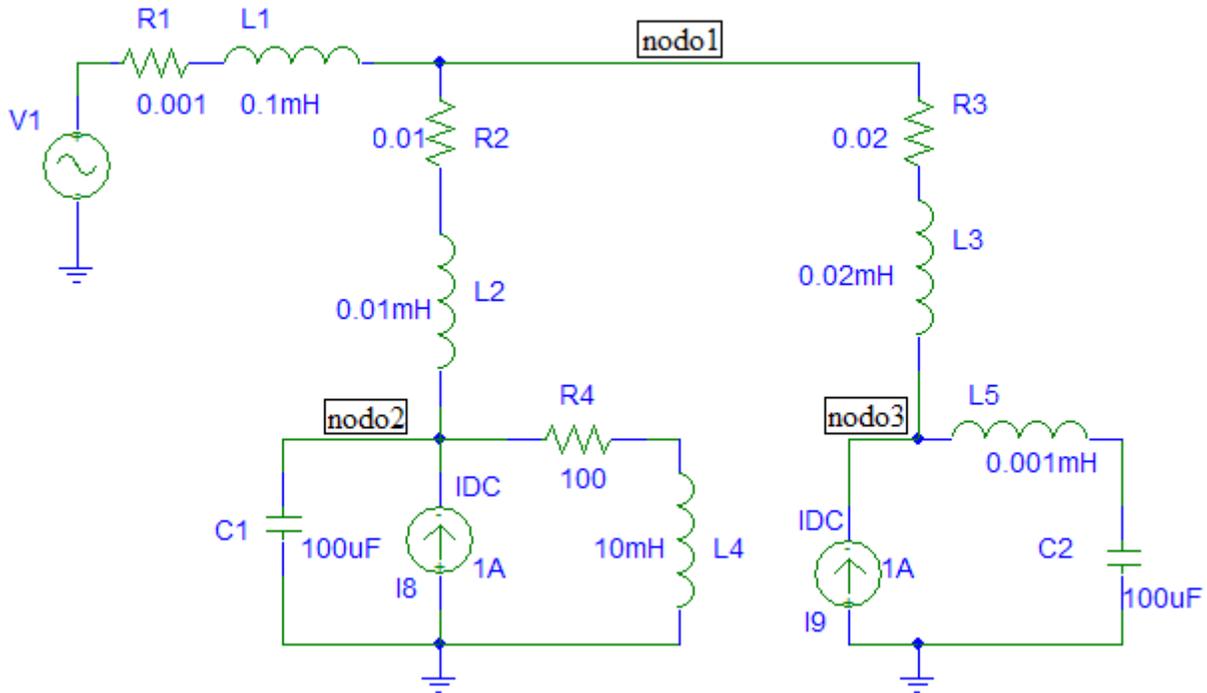


Figura 3.1 Representación de un sistema de distribución de potencia

### 3.1.1 Modelado

El primer paso para determinar el punto de conexión en un nodo del sistema es necesario conocer las ecuaciones algebraicas que definen el circuito, por lo que se requiere determinar la ecuación  $V_{nodo} = Z_{nodo} I_{nodo}$ . Para ello se debe obtener el modelo del sistema considerando su estructura geométrica y los parámetros invariantes, que son las impedancias del circuito las cuales dependen de la frecuencia con lo que se obtendrán funciones de transferencia que permiten conocer el comportamiento del sistema.

Se puede ver que el sistema tiene cuatro nodos y seis elementos, y al escoger un nodo de referencia se tienen tres nodos. Para comenzar con el modelo se recomienda realizar su gráfica para determinar de manera más sencilla la matriz de incidencia de nodo, por lo que cada nodo se representa con un punto y los elementos con segmentos de línea, los cuales se enumeran arbitrariamente, el nodo de referencia suele enumerarse con cero. A cada elemento se le asigna

una orientación correspondiente a la corriente de cada impedancia y se obtiene una gráfica conectada orientada la cual se muestra en la Figura 3.2.

nodos:  $n = 4$   
 elementos:  $e = 6$   
 ramas:  $b = n - 1 = 3$   
 uniones:  $l = e - b = 3$

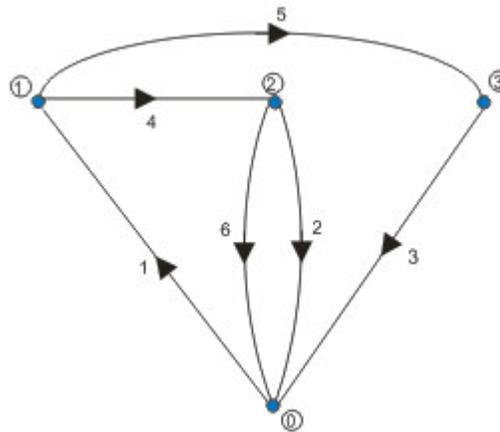


Figura 3.2 Gráfica del circuito de la Figura 3.1

El marco de referencia necesario para modelar este circuito es a partir de sus nodos, por lo que con la gráfica 3.2 se obtiene la matriz de incidencia  $A$  y con las transformaciones de la Tabla 1 se obtiene la matriz de transferencia de nodo.

**a) Matriz de incidencia Elemento-Nodo ( $\hat{A}$ )**

Esta matriz se obtiene de la Figura 3.2, donde se observa que los elementos 1, 2, 3 son incidentes al nodo 0, los elementos 1, 4, 5 son incidentes al nodo 1 y así sucesivamente. Tomando en cuenta la orientación de los elementos se forma la matriz  $\hat{A}$  de dimensiones  $6 \times 4$ . Se puede observar que la suma de los elementos en cada fila es igual a cero

$$\hat{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.1)$$

**b) Matriz de incidencia de nodo. ( $A$ )**

Para formar esta matriz se elimina de  $\hat{A}$  la columna correspondiente al nodo de referencia que en este caso es el nodo cero, sus dimensiones son  $6 \times 3$ , obteniendo la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

### 3.1.2 Red primitiva

Una vez conocida la estructura geométrica de la red y haber formado las matrices de incidencia es necesario conocer las características eléctricas de cada elemento, por lo que con ayuda de la red primitiva se pueden formar las matrices y vectores necesarios para conocer voltajes y corrientes del sistema.

En el circuito se tienen seis elementos y cada uno se puede representar como una impedancia o como una admitancia, por medio de las ecuaciones (2.1) y (2.2). El elemento 1 solo tiene una fuente de voltaje y los elementos 2 y 3 tiene una carga no lineal representados como fuentes de corriente, a partir de ello se puede describir el comportamiento de cada elemento por medio de su impedancia o su admitancia como se muestra en la Tabla 3. Estas ecuaciones se pueden describir en forma matricial como indican las ecuaciones (2.3) y (2.4) con los respectivos valores de los componentes indicados en la Figura 3.1, donde las matrices primitivas de impedancia y admitancia son:

- Matriz primitiva de impedancia:

$$Z_p = \begin{bmatrix} Z_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{p3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_{p4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{p5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{p6} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$= \begin{bmatrix} (1 + 0.1s)10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 + 0.01s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001s + (0.0001s)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (10 + 0.01s)10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (20 + 0.02s)10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (0.0001s)^{-1} \end{bmatrix}$$

- Matriz primitiva de admitancia:

$$y_p = \begin{bmatrix} y_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{p3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{p4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_{p5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{p6} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1000}{s+10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{100}{s+10^4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1000s}{s^2+10^7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10^5}{s+1000} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5 \cdot 10^4}{s+1000} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10^4 s} \end{bmatrix}$$

En (3.8) y (3.9) matrices se cumple se cumple:  $[y_p] = ([z_p])^{-1}$

Elemento	Impedancia	Admitancia
1	$v_{p1} = z_{p1}i_{p1} + e_1$	$i_{p1} = y_{p1}v_{p1} - y_{p1}e_1$
2	$v_{p2} = z_{p2}i_{p2} - z_{p2}j_{p2}$	$i_{p2} = y_{p2}v_{p2} + j_{p2}$
3	$v_{p3} = z_{p3}i_{p3} - z_{p3}j_{p3}$	$i_{p3} = y_{p3}v_{p3} + j_{p3}$
4	$v_{p4} = z_{p4}i_{p4}$	$i_{p4} = y_{p4}v_{p4}$
5	$v_{p5} = z_{p5}i_{p5}$	$i_{p5} = y_{p5}v_{p5}$
6	$v_{p6} = z_{p6}i_{p6}$	$i_{p6} = y_{p6}v_{p6}$

Tabla 3. Ecuaciones primitivas de cada elemento

Formando las ecuaciones de la Tabla 3 en forma matricial se tiene:

- Ecuación matricial en términos de las impedancias:

$$\begin{bmatrix} v_{p1} \\ v_{p2} \\ v_{p3} \\ v_{p4} \\ v_{p5} \\ v_{p6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_{p3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_{p4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_{p5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{p6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{p1} \\ i_{p2} \\ i_{p3} \\ i_{p4} \\ i_{p5} \\ i_{p6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_{p3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_{p4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_{p5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{p6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ j_2 \\ j_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Ecuación matricial en términos de las admitancias:

$$\begin{bmatrix} i_{p1} \\ i_{p2} \\ i_{p3} \\ i_{p4} \\ i_{p5} \\ i_{p6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{p3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{p4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_{p5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{p6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{p1} \\ v_{p2} \\ v_{p3} \\ v_{p4} \\ v_{p5} \\ v_{p6} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{p3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{p4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_{p5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{p6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ j_2 \\ j_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De esta manera se establecieron las ecuaciones de la red primitiva, ahora es necesario conocer las interconexiones del sistema por lo que, basados en la Tabla 1, se pueden obtener las matrices que caracterizan la red.

### 3.1.3 Matrices de transferencia.

Como se determinó en la sección 2.1.4 la manera de relacionar las corrientes con los voltajes es a partir de transformaciones no cuadradas de las matrices de incidencia con las matrices primitivas, y con ayuda de la Tabla 1 poder definir la matriz de transferencia de interés que en este caso es la matriz de impedancias de nodo  $Z_{nodo}$  obtenida de la inversa de la matriz de admitancias de nodo  $Y_{nodo}$ .

Estas matrices relacionan voltajes y corrientes de nodo. Para obtener  $Y_{nodo}$  es necesaria la matriz de incidencia  $A$  obtenida a partir de la gráfica 3.2 y, de acuerdo a la ecuación (2.11) se determina:

$$Y_{nodo} = A^T [y] A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{p3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{p4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_{p5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{p6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_{nodo} = \begin{bmatrix} y_{p1} + y_{p4} + y_{p5} & -y_{p4} & -y_{p5} \\ -y_{p4} & y_{p2} + y_{p4} + y_{p6} & 0 \\ -y_{p5} & 0 & y_{p3} + y_{p5} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

La diagonal de la matriz esta formada por la suma de las admitancias incipientes en cada nodo y los demás elementos son las admitancias comunes entre cada par de nodos con signo negativo, en caso de no haber algún elementos entre dos nodos, se coloca un cero.

Para obtener la matriz de impedancia de nodo simplemente se invierte la matriz (3.5), entonces:

$$Z_{nodo} = (Y_{nodo})^{-1} \quad (3.6)$$

De esta manera se conoce la matriz de transferencia  $G(s)$  que se analizará como un sistema multivariable. A partir de las matrices de transferencia y conociendo información sobre las fuentes de corriente o de voltaje se puede caracterizar todo el sistema dependiendo del marco de referencia, para ello se considera corrientes como entradas y voltajes como salidas.

### 3.1.3.1 Ecuación de nodos:

Esta ecuación relaciona las corrientes y los voltajes de nodo por medio de la matriz de transferencia de impedancias teniendo así la ecuación  $\bar{V}_{nodo} = Z_{nodo}\bar{I}_{nodo}$ , de esta manera se observarán los cambios en cada uno de los nodos debido a las fuentes de corriente del sistema, para ello es necesario conocer las corrientes de nodo.

En el circuito de la Figura 3.1 se tienen dos fuentes de corriente, por lo tanto:

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}$$

Si este vector se sustituye en la ecuación de nodos como las corrientes de nodo, no se pueden obtener los voltajes de nodo debido a que no se cumple con las dimensiones matriciales entre  $Z_{nodo}$  de  $3 \times 3$  e  $\bar{I}_{nodo}$  de  $2 \times 1$ , es por ello que se tiene que encontrar una relación que indique en qué nodos se encuentran las fuentes de corriente de manera que se pueda cumplir con la ecuación, para ello es necesario crear una matriz de incidencia llamada matriz de incidencia de entradas ( $E$ ) y tiene dimensiones  $(n - 1) \times f$ , donde  $f$  son las fuentes de corriente y  $(n - 1)$  el número de nodos, por lo tanto:

$$E = \begin{matrix} & \begin{matrix} j1 & j2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.7)$$

Con esta matriz la ecuación de nodos se puede escribir como:

$$\bar{V}_{nodo} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{31} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_2 \\ j_3 \end{bmatrix}$$

Simplificando la ecuación anterior, el sistema se puede representar de la siguiente manera:

$$\bar{V}_{nodo} = \begin{bmatrix} z_{12} & z_{31} \\ z_{22} & z_{23} \\ z_{32} & z_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

De esta manera la matriz  $Z_{nodo}$  se reduce obteniendo una nueva matriz denominada *matriz de transferencia de nodo*  $H_n$  la cual es no cuadrada y sus dimensiones son  $(n - 1) \times f$ . A partir de la ecuación anterior se puede expresar el sistema con el siguiente diagrama de bloques:

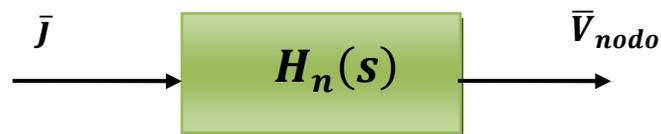


Figura 3.3 Diagrama de bloques del sistema considerando sólo fuentes de corriente

La matriz de transferencia de nodo está formada por los siguientes elementos:

$$H_n = \begin{bmatrix} h_{n11} & h_{n12} \\ h_{n21} & h_{n22} \\ h_{n31} & h_{n32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{12} & z_{31} \\ z_{22} & z_{23} \\ z_{32} & z_{32} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

donde los elementos  $h_{nij}$  representan la función de transferencia entre la entrada  $j$  y la salida  $i$ . En particular se consideran las fuentes de corriente normalizadas por lo que su magnitud es igual a 1, entonces cada elemento  $h_{ij}$  representa el voltaje en el nodo  $i$  cuando se inyecta 1[A] en el nodo  $j$ .

La ecuación (3.8) es útil para representar el sistema solo debido a las cargas no lineales, pero en el sistema las fuentes de voltaje también aportan a las salidas por lo que por medio de la Tabla 2 se puede expresar las corrientes de nodo en términos de todas las fuentes del circuito de la siguiente manera:

$$\bar{I}_{nodo} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ j_2 \\ j_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{p3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{p4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_{p5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{p6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_{p1}e_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenidas las corrientes de nodo, la ecuación de nodos se puede escribir como:

$$\bar{V}_{nodo} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{31} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_{p1}e_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

De esta manera, la matriz de transferencia que relaciona las corrientes con los voltajes es la matriz de impedancias de nodo. Cada elemento  $z_{ij}$  representa una función de transferencia que indica el voltaje en el nodo  $i$  debido a la fuente del nodo  $j$ . Como caso particular se consideran las fuentes de corriente normalizadas por lo que su magnitud es iguala a 1, entonces cada elemento  $z_{ij}$  representa el voltaje en el nodo  $i$  cuando se inyecta 1[A] en el nodo  $j$ .

Por medio de esta ecuación el sistema se puede representar como:

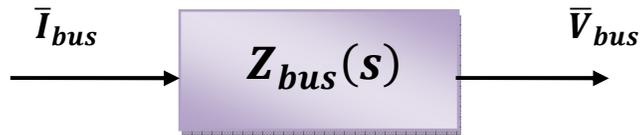


Figura 3.4 Diagrama de bloques del sistema considerando todas las fuentes

En este caso en particular hay una fuente de alimentación en cada nodo, por lo que el análisis involucra todos los elementos de la matriz  $Z_{nodo}$ , sin embargo por lo general el vector de corrientes de nodo tiene algunos elementos iguales a cero lo que indica que no hay fuentes en todos los nodos, teniendo una matriz de transferencia no cuadrada.

### 3.1.4 Análisis en la frecuencia

Es de utilidad que un sistema de distribución de potencia puede ser representado por un conjunto de ecuaciones en el dominio de la frecuencia, con el fin de observar el comportamiento a diferentes frecuencias en especial para determinar aquellas en las que el sistema tiene mayor variación.

El análisis de las resonancias del sistema se puede realizar calculando la matriz  $H_n$  con todas las fuentes de corriente conectadas al sistema de distribución de potencia y graficando cada elemento de las columnas de la matriz para diferentes valores de frecuencia. Este procedimiento además de encontrar las frecuencias de resonancia determina los nodos más afectados a dichas frecuencias. La matriz  $H_n$  ayuda a determinar la sensibilidad de voltaje de los elementos. Esta importante característica puede ser usada para encontrar el nodo que incrementa la efectividad de la compensación activa por medio de la reducción de distorsiones en el sistema de distribución de potencia. Una vez que  $H_n$  es obtenida se calcula el valor de cada elemento de las filas para diferentes valores de frecuencia. El análisis de las filas de la matriz como una función de la

frecuencia permite encontrar los nodos en que el voltaje es más afectado al colocar un compensador indicando cuál es el nodo sensor.

Para conocer el comportamiento en la frecuencia se sustituye  $s = j\omega$ , en cada función de transferencia donde  $\omega$  es la frecuencia en rad/s, obteniendo una matriz constante para una frecuencia en particular o un conjunto de valores para cada elemento de la matriz.

$$Z_{nodo}(j\omega) = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{31} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{32} \end{bmatrix}_{s=j\omega} \quad (3.11)$$

Para observar las magnitudes de voltaje a diferentes valores de frecuencia entonces  $\omega$  es un vector de elementos. Estos valores pueden ser graficados y, dado que la corriente tiene magnitud unitaria, las magnitudes obtenidas representan el voltaje de correspondiente a cada uno de los elementos de la matriz  $Z_{nodo}(j\omega)$ . La Figura 3.5 muestra las magnitudes de los elementos  $z_{ij}$  cuando la frecuencia varía de [10, 1300] rad/s.

Si se quiere observar el comportamiento debido a las fuentes de corriente entonces se puede analizar la matriz de transferencia de nodo en la que, de igual manera, se sustituye  $s = j\omega$ , por lo que:

$$H_n(j\omega) = \begin{bmatrix} h_{n11} & h_{n12} \\ h_{n21} & h_{n22} \\ h_{n31} & h_{n32} \end{bmatrix}_{s=j\omega} \quad (3.12)$$

De la ecuación (3.9) se puede observar que los elementos de  $H_n$  corresponden, en este caso, a las columnas 2 y 3 de la matriz de impedancias de nodo, por lo que al graficar los elementos de  $Z_{nodo}(j\omega)$  también se pueden observar los de  $H_n(j\omega)$  que en la Figura 3.5 representan la segunda y tercer columna de las gráficas.

De las gráficas se puede obtener la siguiente información: hay dos frecuencias de resonancia, es decir, dos valores de frecuencia en que el voltaje es más afectado teniendo una mayor amplitud; esos valores corresponden a:

$$\omega_1 = 10017 \text{ rad/s} \rightarrow f_1 = 1594.3 \text{ Hz} \quad \omega_2 = 2977 \text{ rad/s} \rightarrow f_2 = 473.8 \text{ Hz}$$

De esas dos frecuencias la más representativa es  $\omega_1$  debido a que es la que afecta más al sistema. Si se analizan cada una de las filas por separado nos indican el voltaje del nodo  $i$  cuando se inyecta corriente en el nodo  $j$ , por lo que se puede observar que la mayor amplitud de voltaje en cada uno de los nodos se obtiene cuando se inyecta corriente en el nodo dos.

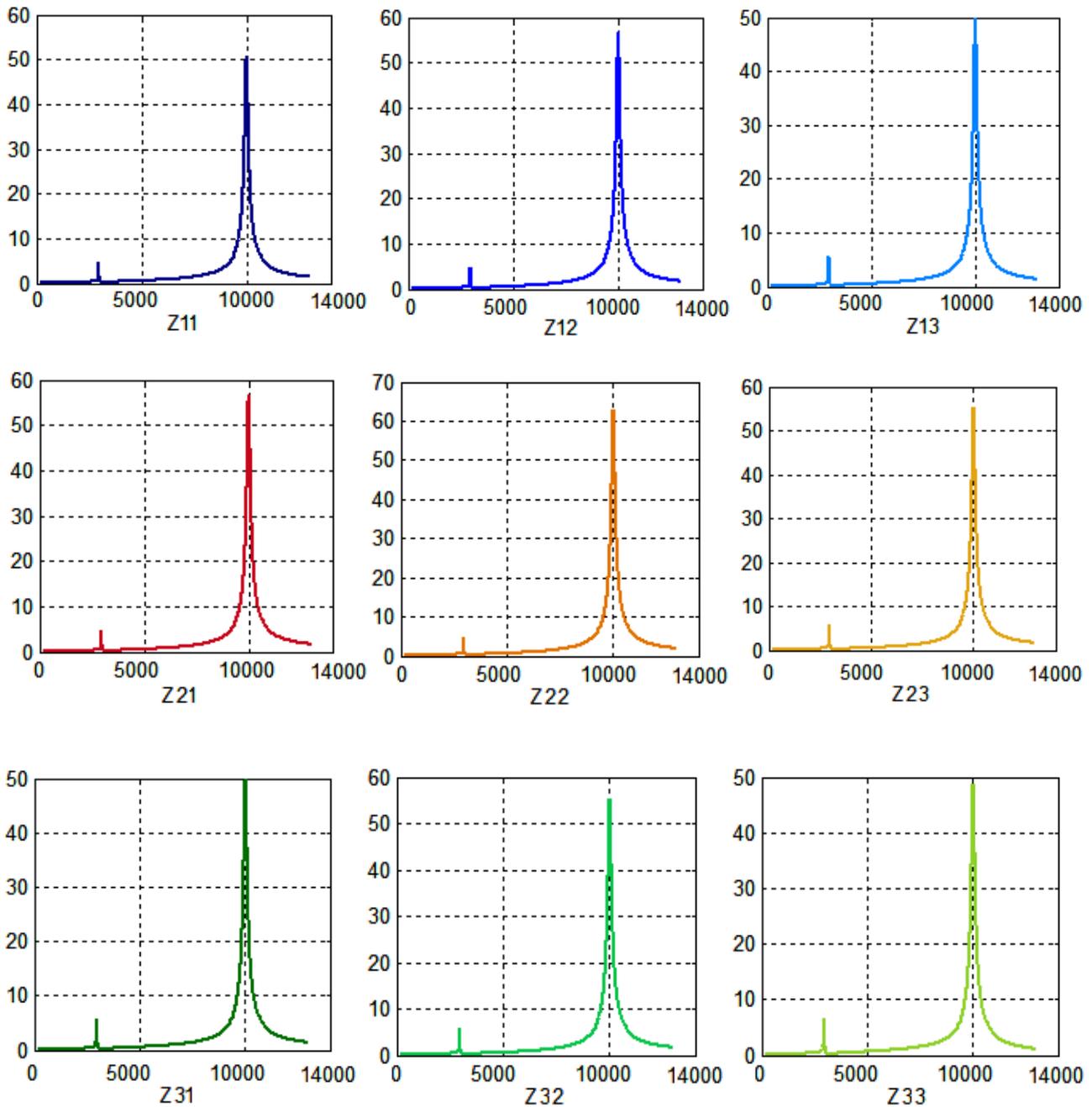


Figura 3.8 Análisis en la frecuencia de cada función de transferencia de  $Z_{nodo}$

Este tipo de análisis indica de una manera gráfica cuál es el posible nodo sensor del sistema debido a que se pueden comparar las magnitudes máximas de cada una de las funciones de transferencia y así determinar donde se colocará el compensador como lo indica [1] cuyos resultados son similares a los obtenidos en la Figura 3.5, además de observar el comportamiento en la frecuencia de cada una de las salidas respecto a cada una de las entradas. Sin embargo no indica

la relación entre todas las entradas a una salida del sistema, además es un procedimiento demasiado largo debido a que en sistemas de distribución reales se pueden tener cientos de nodos por lo que se tendrán que analizar miles de funciones de transferencia, provocando que el análisis sea totalmente impráctico, es por ello que se requiere de una herramienta que provee mayor información realizando menos cálculos. La descomposición en valores singulares aporta información sobre las ganancias del sistema considerando la relación entre las entradas y las salidas.

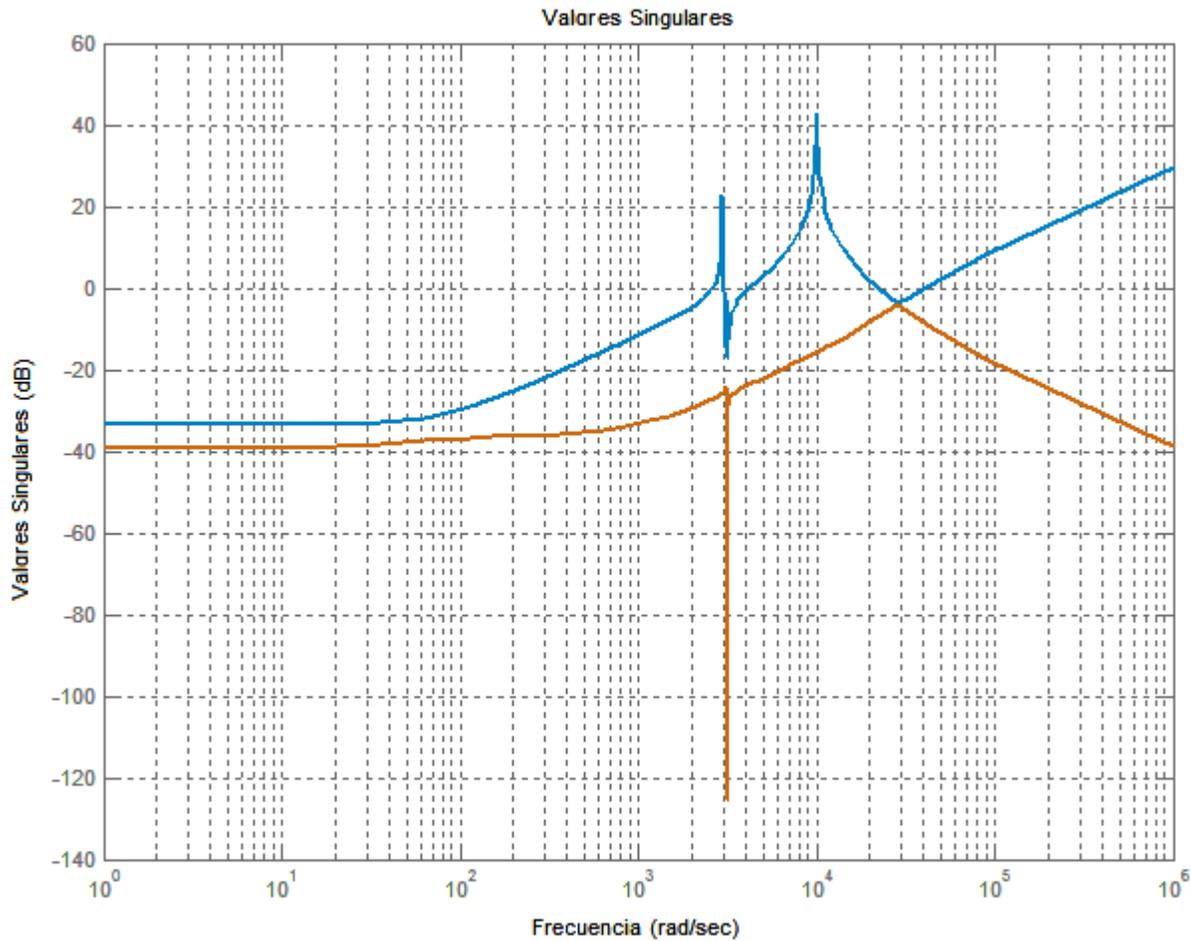


Figura 3.6 Valores singulares del sistema de la Figura 3.1 descrito por la ecuación (3.8)

En la Figura 3.6 se puede observar que la ganancia del sistema depende de la frecuencia a la que se esté trabajando. Una manera de conocer a que frecuencias se amplifica o se reducen las magnitudes del circuito se puede determinar si se conocen los valores singulares para diferentes valores de frecuencia, para ello MATLAB proporciona el comando `<sigma>` que grafica esta información. El sistema se declara como lineal e invariante en el tiempo, por medio de funciones de transferencia o por variables de estado, `<sigma>` grafica las magnitudes de los valores singulares en decibeles para diferentes valores de frecuencia.

La Figura 3.9 muestra esta gráfica para el sistema de la Figura 3.3, donde cada uno de los elementos de  $H_n$  se declara como una función de transferencia. Se observan dos valores singulares debido a que al ser un sistema de dos entradas y tres salidas, el mínimo es dos. Además se determina que hay dos frecuencias en donde las variaciones del circuito son más notorias las cuales son  $\omega_1 = 10017$  y  $\omega_2 = 2977$  y una frecuencia en la que se tiene la atenuación máxima en  $\omega_3 = 3160$ . Por lo tanto para determinar las ganancias del sistema MIMO se puede obtener la gráfica  $\langle \sigma \rangle$  que aporta mayor información que al determinar cada una de las repuestas en frecuencia de las funciones de transferencia de la matriz  $H_n$ .

### 3.1.5 Análisis de sistemas multivariables

Una vez conocido el sistema, obtenido el siguiente paso es determinar sus características que indiquen cuál es el mejor punto de conexión, es decir, hay que conocer el nodo sensor que es el nodo más susceptible a variaciones. Este punto se determina por medio de un análisis multivariable mediante la descomposición en valores singulares, donde analizando el comportamiento de las salidas del sistema debido a una cierta ganancia se determina el punto donde hay una mayor magnitud y así se tendrá el nodo sensor, esto indica que al colocar ahí el compensador va a actuar mejor en el sistema que si se conecta en otro punto.

#### 3.1.5.1 Descomposición en valores singulares de $Z_{nodo}$

El sistema de distribución de potencia está formado por varias cargas no lineales que generan cambios en el voltaje del sistema por lo que es necesario realizar un análisis en el que se observe el efecto que tiene cada una de las entradas (cargas no lineales) con las salidas del circuito, es decir voltajes.

Los compensadores se conectan en derivación a un nodo, por lo que es necesario conocer el comportamiento de los voltajes de nodo, de esta manera si se determina el nodo donde se produce la mayor variación del sistema entonces se puede determinar el punto de conexión del compensador. Para encontrar estas variaciones se utilizará la descomposición en valores singulares.

Con el modelo obtenido, se encontró una relación entre voltajes y corrientes de nodo por medio de la ecuación de nodos y a partir de la matriz de impedancia de nodo se puede analizar el comportamiento del sistema.

Para utilizar SVD se requiere de una matriz constante que caracterice el sistema, para ello se considera la matriz  $H_n$  que muestra la relación entre las cargas no lineales y los voltajes de nodo, entonces es necesario evaluarla en una frecuencia específica, de preferencia la más significativa del sistema por ejemplo  $\omega_1$  ya que genera mayor variación al circuito, por lo tanto:

$$H_n(j\omega)|_{\omega=10017} = \begin{bmatrix} 56.5181 - 1.2292i & 49.7860 - 0.3958i \\ 62.7712 - 1.9841i & 55.2922 - 1.0825i \\ 55.2922 - 1.0825i & 48.7238 - 0.0855i \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Por simplicidad se denominará a esta matriz  $He$  la cual se descompone en valores singulares por medio de la ecuación  $He = U_H \Sigma_H V_H^H$ . Con ayuda de la función `svd` de MATLAB, se obtiene las matrices de la descomposición:

$$U_H = \begin{bmatrix} -0.5596 + 0.0123i & 0.0163 + 0.1202i & -0.7143 + 0.4022i \\ -0.6215 + 0.0203i & 0.0704 + 0.5881i & 0.4448 - 0.2541i \\ -0.5476 + 0.0099i & -0.0863 - 0.7918i & 0.2224 - 0.1271i \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_H = \begin{bmatrix} 134.5718 & 0 \\ 0 & 0.1615 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_H = \begin{bmatrix} -0.7504 & 0.6609 \\ -0.6609 + 0.0095i & -0.7504 + 0.0107i \end{bmatrix}$$

Las matrices  $U_H$  y  $V_H$  son matrices cuadradas y están formadas por vectores que representan direcciones de salida y entrada respectivamente, la matriz  $\Sigma_H$  tiene 2 valores singulares debido a que el mínimo valor entre el número de entradas y salidas es 2, e indica la máxima y mínima ganancia del sistema.

De la descomposición se puede observar que la ganancia máxima es  $\bar{\sigma}_h = 134.5718$  cuando la entrada tiene una dirección  $\bar{v}_h$ , por lo que la salida tiene la dirección  $\bar{u}_h$  con:

$$\bar{v}_h = \begin{bmatrix} -0.7504 \\ -0.6609 + 0.0095i \end{bmatrix} \quad \bar{u}_h = \begin{bmatrix} -0.5596 + 0.0123i \\ -0.6215 + 0.0203i \\ -0.5476 + 0.0099i \end{bmatrix}$$

Una vez obtenidas estas matrices, de la matriz  $U_H$  se puede observar el comportamiento de las salidas, es decir, podemos obtener información acerca de las variaciones en los voltajes de nodo, cada elemento  $u_{ij}$  de los vectores de  $U_H$  representan el voltaje en el nodo  $j$ . Para observar de una manera más clara las variaciones en las salidas es recomendable obtener los valores absolutos de  $U_H$  que indican la magnitud de las salidas, por lo que:

$$|U_H| = \begin{bmatrix} 0.5598 & 0.1213 & 0.8197 \\ 0.6218 & 0.5923 & 0.5123 \\ 0.5477 & 0.7965 & 0.2562 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

La matriz  $U_H$  esta normalizada y si se desean observar las magnitudes de los voltajes es necesario conocer la ganancia la cual está dada por la matriz  $\Sigma_H$ , así si se multiplican estas dos matrices se obtienen las variaciones máxima y mínima de las salidas:

$$|U_H| * \Sigma_H = \begin{bmatrix} 75.3300 & 0.0196 \\ 83.6813 & 0.0957 \\ 73.7048 & 0.1286 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Los vectores de la matriz dada por (3.15) indican las magnitudes de cada una de las salidas con ganancias  $\bar{\sigma}_h$  y  $\underline{\sigma}_h$  al ser solo dos los valores singulares. La mayor variación del sistema se obtiene cuando la ganancia es máxima, que está dada por el vector de salidas asociado al máximo valor singular, que en la ecuación (3.15) corresponde al primer vector.

Una vez obtenido el vector que indica la mayor variación del sistema es necesario observar cada uno de sus elementos, cada uno corresponde al voltaje en el nodo  $i$ , por lo que el elemento que tiene mayor magnitud indica mayor variación ante las mismas entradas del sistema, es decir es el nodo más afectado debido a los cambios de corriente. El punto donde se debe conectar el compensador es aquel donde el sistema sea más susceptible a variaciones al cual se le denomina nodo sensor.

En el ejemplo, el nodo más afectado es el dos por lo que se afirma que es el nodo sensor del sistema, la magnitud de voltaje en ese punto es 83.6813 al inyectar a 1[A] de cada una de las fuentes de corriente.

The diagram shows a yellow L-shaped bracket on the left side of the vector equation. The vector is  $\bar{v}_h = \begin{bmatrix} 75.3300 \\ \mathbf{83.6813} \\ 73.7048 \end{bmatrix}$ . A red arrow points from the middle element, 83.6813, to the text 'nodo sensor'. A yellow L-shaped bracket is also on the right side of the text.

De esta manera se ha determinado el punto donde se puede colocar el compensador debido a que es el nodo más sensible a variaciones.

En este caso se analizó el sistema debido a las cargas no lineales, pero se puede complementar el análisis estudiando la matriz de impedancias de nodo para observar el comportamiento considerando todas las fuentes del sistema como se muestra en la Figura 3.7.

Al analizar  $Z_{nodo}$  se tiene una matriz cuadrada que indica la relación entre todas las fuentes de corriente y los voltajes de nodo. Esta matriz tiene que ser constante para obtener su SVD por lo que se evalúa en la frecuencia de resonancia  $\omega_1$ :

$$Z_{nodo}(j\omega)|_{\omega=10017} = \begin{bmatrix} 50.8910 - 0.5150i & 56.5181 - 1.2292i & 49.7860 - 0.3958i \\ 56.5181 - 1.2292i & 62.7712 - 1.9841i & 55.2922 - 1.0825i \\ 49.7860 - 0.3958i & 55.2922 - 1.0825i & 48.7238 - 0.0855i \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

A esta matriz se le denomina  $Z_e$  y su descomposición en valores singulares corresponde a  $Z_e = U_Z \Sigma_Z V_Z^H$ :

$$\begin{aligned}
U_Z &= \begin{bmatrix} -0.5598 + 0.0060i & 0.0202 + 0.1618i & 0.0754 + 0.8089i \\ -0.6217 + 0.0135i & 0.0684 + 0.5612i & -0.0546 - 0.5392i \\ -0.5477 + 0.0040i & -0.0887 - 0.8037i & -0.0210 - 0.2141i \end{bmatrix} \\
\Sigma_Z &= \begin{bmatrix} 162.4017 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1645 & 0 \\ 0 & 0 & 0.042 \end{bmatrix} \\
V_Z &= \begin{bmatrix} -0.5598 & 0.1630 & 0.8124 \\ -0.6218 - 0.0068i & 0.5654 - 0.0018i & -0.5419 - 0.0043i \\ -0.5477 + 0.0018i & -0.8085 + 0.0118i & -0.2151 - 0.0011i \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Las matrices  $U_Z$  y  $V_Z$  son matrices cuadradas y están formadas por vectores que representan direcciones de salida y entrada respectivamente, la matriz  $\Sigma_Z$  tiene 3 valores singulares correspondientes al mismo número de entradas y salidas, e indica la máxima y mínima ganancia del sistema.

En este caso la máxima ganancia es  $\bar{\sigma}_Z = 162.4017$  cuando la entrada tiene una dirección  $\bar{v}_Z$ , por lo que la salida tiene la dirección  $\bar{u}_Z$  con:

$$\bar{v}_Z = \begin{bmatrix} -0.5598 \\ -0.6218 - 0.0068i \\ -0.5477 + 0.0018i \end{bmatrix} \quad \bar{u}_Z = \begin{bmatrix} -0.5598 + 0.0060i \\ -0.6217 + 0.0135i \\ -0.5477 + 0.0040i \end{bmatrix}$$

Con estas matrices se puede observar el comportamiento de las salidas, observando los elementos  $u_{ij}$  de  $U_Z$  que representa el voltaje en el nodo  $j$ . Al obtener los valores absolutos de  $U_Z$  se observa mejor la magnitud de las salidas:

$$|U_Z| = \begin{bmatrix} 0.5598 & 0.1631 & 0.8124 \\ 0.6218 & 0.5654 & 0.5420 \\ 0.5477 & 0.8086 & 0.2151 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

La matriz  $U_Z$  esta normalizada por lo que, para observar las magnitudes de los voltajes es necesario conocer la ganancia la cual está dada por la matriz  $\Sigma_Z$ , por lo que si se multiplican estas dos matrices se obtienen las variaciones máxima y mínima de las salidas teniendo así:

$$|U_Z| * \Sigma_Z = \begin{bmatrix} 90.9107 & 0.0268 & 0.0341 \\ 100.9869 & 0.0930 & 0.0227 \\ 88.9449 & 0.1330 & 0.0090 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

Los vectores de la matriz (3.19) indican las magnitudes de cada una de las salidas cuya ganancia corresponde a cada uno de los valores singulares. La mayor variación del sistema se obtiene cuando la ganancia es máxima, por lo que está dada por el vector de salidas asociado al máximo valor singular, que en la ecuación (3.19) corresponde al primer vector.

De nuevo se comparan los elementos correspondientes al vector singular mayor para obtener el nodo más sensible a variaciones, cada uno corresponde al voltaje en el nodo  $i$ , por lo que el elemento que tiene mayor magnitud indica mayor variación ante las misma entradas del sistema, es decir es el nodo más afectado debido a los cambios de corriente.

$$\bar{v}_z = \begin{bmatrix} 90.9107 \\ \mathbf{100.9869} \\ 88.9449 \end{bmatrix} \rightarrow \text{nodo sensor}$$

En este vector el nodo sensor de nuevo es el nodo dos indicando el punto más afectado dentro del sistema aún cuando hay otra fuente dentro del circuito.

De la ecuación (3.19) se puede observar que el vector que más aporta a los voltajes de nodo es  $\bar{v}_z$  con lo que se puede afirmar que los vectores asociados al valor singular mayor son los que en mayor parte definen al sistema con lo que la matriz  $Z_{nodo}$  se puede escribir por medio de la ecuación (2.39) de la siguiente manera:

$$Z_{nodo} = u_{z1} \sigma_{z1} v_{z1}^H = \begin{bmatrix} -0.5598 + 0.0060i \\ -0.6217 + 0.0135i \\ -0.5477 + 0.0040i \end{bmatrix} 162.4017 \begin{bmatrix} -0.5598 \\ -0.6218 - 0.0068i \\ -0.5477 + 0.0018i \end{bmatrix}^H$$

En este ejemplo en particular se sabe que hay una fuente en cada uno de los nodos por lo que la matriz  $Z_{nodo}$  corresponde a una matriz de transferencia de nodo ( $H_n$ ) cuando hay el mismo número de entradas que de salidas, pero se puede considerar el caso en que no se conozca exactamente la ubicación de las entradas por lo que si no hay una fuente en cada nodo hay elementos del vector  $\bar{I}_{nodo}$  iguales a cero teniendo una matriz de transferencia no cuadrada similar al caso de la Figura 3.3, sin embargo al no conocer cada una de las cargas no lineales sería difícil formar el vector  $\bar{I}_{nodo}$  por lo que el método permite analizar  $Z_{nodo}$  que caracteriza todo el sistema y, aún así, conocer el nodo sensor adecuado.

### 3.1.5.2 Descomposición en valores singulares de $Y_{nodo}$

En el caso de los sistemas de distribución de potencia, se considera las fuentes de corriente como las entradas del sistema las cuales representan las cargas no lineales, pero realmente estas cargas no pueden ser modificadas, es decir, no se puede manipular su magnitud o su direccionalidad más aún, en ocasiones no se conoce exactamente su ubicación. Matemáticamente puede darse el caso en que  $Y_{nodo}$  sea una matriz no invertible, por lo que es necesario conocer el comportamiento del

sistema a partir de los elementos conocidos, por lo que a se puede conocer el comportamiento de  $Z_{nodo}$  a partir de su matriz inversa  $Y_{nodo}$ .

Una vez determinada la frecuencia de interés se evalúa en la matriz de admitancias de nodo para tener una matriz constante:

$$Y_{nodo}(j\omega)|_{\omega=10017} = \begin{bmatrix} 1.4812 - 15.8251i & -0.9868 + 9.8845i & -0.4934 + 4.9423i \\ -0.9868 + 9.8845i & 0.9918 - 8.8878i & 0 \\ -0.4934 + 4.9423i & 0 & 0.4934 - 5.0531i \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Cuya descomposición en valores singulares es  $Ye = U_y \Sigma_y V_y^H$ :

$$U_y = \begin{bmatrix} -0.0754 + 0.8089i & -0.0202 + 0.1618i & -0.5598 - 0.0060i \\ 0.0546 - 0.5392i & -0.0684 + 0.5612i & -0.6217 - 0.0135i \\ 0.0210 - 0.2141i & 0.0887 - 0.8037i & -0.5477 - 0.0040i \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_y = \begin{bmatrix} 23.8354 & 0 & 0 \\ 0 & 6.0787 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0062 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$V_y = \begin{bmatrix} -0.8124 & -0.1630 & -0.5598 \\ 0.5419 - 0.0043i & 0.5654 - 0.0018i & -0.6218 + 0.0068i \\ 0.2151 - 0.0011i & -0.8085 + 0.0118i & -0.5477 - 0.0018i \end{bmatrix}$$

Aplicando la ecuación (2.37) se puede escribir  $Ze$  a partir de las matrices de (3.21) como:

$$Ze = V_y \Sigma_y^{-1} U_y^H \quad (3.22)$$

En este caso las salidas del sistema están representadas por la matriz de direcciones de entradas de  $Ye$ , y las entradas por su matriz de direcciones de salidas.

El valor singular que más aporta a la matriz  $Ze$  es el valor singular menor de  $\Sigma_y$ ,  $\underline{\sigma}_{y3} = 0.0062$  correspondiente al valor singular mayor de  $\Sigma_z$ , por lo que, de acuerdo a la ecuación (2.40), se puede escribir  $Ze$  a partir de una submatriz de los vectores correspondientes a  $\sigma_{y3}$  que dan la mayor contribución:

$$Ze = \frac{v_{y3} u_{y3}^H}{\sigma_{y3}} = \begin{bmatrix} -0.5598 \\ -0.6218 + 0.0068i \\ -0.5477 - 0.0018i \end{bmatrix} \cdot \left( \frac{1}{0.0062} \right) \begin{bmatrix} -0.5598 - 0.0060i \\ -0.6217 - 0.0135i \\ -0.5477 - 0.0040i \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$= \begin{bmatrix} 50.5374 - 0.8151i & 56.1378 - 0.2937i & 49.4351 - 0.9628i \\ 56.1181 - 1.5169i & 62.3443 - 1.0056i & 54.8921 - 1.6676i \\ 49.4405 - 0.6319i & 54.9173 - 0.1035i & 48.3627 - 0.7800i \end{bmatrix}$$

El nodo sensor se puede encontrar si se obtiene la magnitud correspondiente al vector de salidas de  $Z_e$   $v_{y3}$  dividido entre  $\sigma_{y3}$ , equivalente a lo obtenido anteriormente a partir de la ecuación (3.19):

$$\bar{v}_z = \frac{|v_{y3}|}{\sigma_{y3}} = \begin{bmatrix} 0.5598 \\ 0.6218 \\ 0.5477 \end{bmatrix} \cdot \left( \frac{1}{0.0062} \right) \longrightarrow \bar{v}_z = \begin{bmatrix} 90.2886 \\ \mathbf{100.2958} \\ 88.3362 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{nodo sensor}$$

Se puede observar que el nodo sensor es el nodo dos, lo que corrobora lo obtenido anteriormente por lo que se puede afirmar que al analizar la matriz de admitancias de nodo también se puede conocer el comportamiento de  $Z_{nodo}$ , por lo que se puede encontrar el nodo sensor analizando su respectivo vector de salidas asociado al valor singular más significativo.

### 3.1.5.3 Condicionalidad

Se ha establecido de diferentes maneras para determinar el mejor punto de conexión de un compensador en un sistema de potencia, el cual está basado en obtener el punto más susceptible a variaciones considerando las ganancias de un sistema multivariable. La última etapa del procedimiento es verificar que el punto escogido es el adecuado.

Para determinar esto es necesario verificar la condicionalidad del sistema obteniendo el número condición, si este número es grande indica grandes variaciones dentro del sistema, por ello este número debe disminuir al conectar el compensador ya que éste ayuda a evitar que esas distorsiones se propaguen a través del circuito.

Para considerar el mejoramiento del circuito con la condicionalidad es necesario verificar que se cumple tanto para el sistema de la Figura 3.3 en que se consideran solo cargas no lineales, como para el sistema de la Figura 3.4 donde se consideran todas las fuentes del sistema. Para utilizar este concepto es necesario conocer los valores singulares del sistema obtenidos de SVD, también se pueden conocer a partir de los valores propios siempre y cuando el sistema a evaluar sea cuadrado.

Considerando la matriz de transferencia de nodo  $He$ , el número condición está dado por:

$$\gamma_h = \frac{\bar{\sigma}}{\underline{\sigma}} = \frac{134.5718}{0.1615} = 833.2619 \quad (3.24)$$

Se puede considerar que este número es grande debido a que comparado  $\bar{\sigma}$  este número es mucho mayor lo que indica una mala condicionalidad del sistema que en este caso es causada por sus factores invariantes, es decir, las impedancias del sistema.

Con el análisis se determinó que el compensador será colocado en el nodo dos, por lo que para mejorar la condicionalidad es necesario modificar los parámetros propios del sistema, esto se puede hacer solo si se agregan impedancias. Los FACTS son dispositivos que pueden ser modelados como capacitancias e impedancias dependiendo su tipo, por lo que al colocar un FACTS se está modificando la estructura del sistema.

Considerando el caso en que el FACTS actúa como una capacitancia si es de tipo TSC (Thyristor Switched Capacitor), entonces en el nodo 2 se agrega un elemento correspondiente a una impedancia capacitiva. Al agregar un elemento ajeno al sistema es necesario considerarlo unitario para no modificar parámetros reales del circuito, por lo que la impedancia y admitancia del FACTS están dados por:

$$z_c = \frac{\omega}{sC} = \frac{\omega}{j\omega C} = \frac{1}{jC} \quad y_c = \frac{sC}{\omega} = jC$$

De esta manera, la matriz de admitancias de nodo se modifica añadiendo el término  $y_c$  al elemento  $y_{nodo}(2,2)$  obteniendo una nueva matriz de admitancias  $Y_{Cnodo}$ :

$$Y_{Cnodo} = \begin{bmatrix} y_{p1} + y_{p4} + y_{p5} & -y_{p4} & -y_{p5} \\ -y_{p4} & y_{p2} + y_{p4} + y_{p6} + y_c & 0 \\ -y_{p5} & 0 & y_{p3} + y_{p5} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

De esta matriz se puede obtener la matriz nueva de impedancias de nodo y debido a la ecuación (3.6), entonces se tiene:

$$Z_{Cnodo} = (Y_{Cnodo})^{-1} \quad Hc_n = Z_{Cnodo} * \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con esta nueva matriz donde ya se considera el compensador, se evalúa en la misma frecuencia del análisis anterior  $\omega_1$ :

$$Hc_n(j\omega)|_{\omega=10017} = \begin{bmatrix} 0.0232 - 0.8993i & 0.0377 - 0.7033i \\ 0.0159 - 0.9992i & 0.0246 - 0.8797i \\ 0.0246 - 0.8797i & 0.0575 - 0.4919i \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Con esta matriz  $Hec$  se pueden obtener los dos valores singulares del sistema ya compensado:

$$\sigma(Hec) = \begin{bmatrix} 2.0171 \\ 0.1715 \end{bmatrix}$$

Estos valores son diferentes a los del sistema original y a partir de ellos se calcular el nuevo número condición:

$$\gamma_{hc} = \frac{\bar{\sigma}}{\underline{\sigma}} = \frac{2.0171}{0.1715} = 11.7615 \quad (3.27)$$

En este caso es notoria la mejoría de la condicionalidad del sistema que no sólo está dada por un aumento en el valor singular menor, también se obtiene una ganancia mucho menor obtenida del valor singular mayor, esto indica que a esta frecuencia los voltajes de nodo son mucho menores, con lo que indica una reducción en magnitud a altas frecuencias mejorando el sistema a bajas frecuencias.

Para el sistema de la Figura 3.4 considera la matriz cuadrada de funciones de transferencia que en este caso corresponde a una fuente de corriente en cada nodo, aunque se puede analizar aún cuando no existan entradas en cada uno de los nodos. En ese caso se debe de verificar de nuevo que la condicionalidad del sistema mejora considerando su respectiva descomposición en valores singulares.

El número condición del sistema se puede obtener a partir de la matriz  $\Sigma_Z$  siendo:

$$\gamma_Z = \frac{\bar{\sigma}}{\underline{\sigma}} = \frac{162.4017}{0.042} = 3866.707 \quad (3.28)$$

Se puede observar que al analizar toda la matriz sin considerar exactamente la ubicación de entradas, el número condición aumenta por lo que la condicionalidad empeora, aún así al colocar el compensador este número debe ser menor.

Como en este caso también se determinó que el nodo sensor es el dos, entonces se colocará un capacitor que representa un FACTS, de manera que en la matriz de admitancias de nodo se añade la impedancia capacitiva en el elemento  $y_{nodo}(2,2)$  como se obtuvo en la ecuación (3.24), así la nueva matriz de impedancias compensada corresponde a la inversa de la matriz de admitancias que al evaluarla en la frecuencia  $\omega_1$  se tiene:

$$Z_{cnodo} = (Y_{cnodo})^{-1} \quad Z_{cnodo}(j\omega)|_{\omega=10017} = Z_{ec}$$

$$Z_{ec} = \begin{bmatrix} 0.0369 - 0.7190i & 0.0232 - 0.8993i & 0.0377 - 0.7033i \\ 0.0232 - 0.8993i & 0.0159 - 0.9992i & 0.0246 - 0.8797i \\ 0.0377 - 0.7033i & 0.0246 - 0.8797i & 0.0575 - 0.4919i \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

De esta matriz se pueden obtener sus valores singulares para conocer la nueva condicionalidad:

$$\sigma(Zec) = \begin{bmatrix} 2.4261 \\ 0.1732 \\ 0.0425 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Estos valores también se pueden obtener directamente de  $Yce$ , donde se sabe que su inverso corresponde a los valores singulares de  $Zec$ :

$$Y_{Cnodo}(j\omega)|_{\omega=10017} = Yec \quad \sigma(Yec) = \begin{bmatrix} 23.5439 \\ 5.7764 \\ 0.4120 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma(Zec)}$$

Con los valores singulares conocidos se puede determinar el número condición del sistema compensado:

$$\gamma_{zc} = \frac{\bar{\sigma}}{\underline{\sigma}} = \frac{2.4261}{0.0425} = 57.084 \quad (3.31)$$

De nuevo se observa que la condicionalidad del sistema mejora mucho con respecto a la del sistema original dada principalmente por una disminución considerable de la magnitud del valor singular menor  $\underline{\sigma}(Yec)$ , que es el que da la mayor contribución a las magnitudes de voltajes de nodo.

De esta manera se puede verificar que para cualquier sistema hay una mejoría en su comportamiento a cierta frecuencia cuando se coloca un compensador, observando la condicionalidad del sistema obtenida de la relación entre el valor singular mayor y el valor singular menor, por lo que este término está relacionado con un mejor comportamiento del sistema, el valor cambia según la frecuencia a la que se esté trabajando debido a que se los valores singulares son diferentes, por ello es recomendable conocer a que frecuencias del sistema sin compensar se tiene una mejor o peor condicionalidad para evitar frecuencias que no favorezcan a su comportamiento. Esta información se puede obtener a partir de la gráfica de los valores singulares. Considerando el análisis de la matriz  $Z_{nodo}$  la gráfica de sus valores singulares a diferentes frecuencias se muestra en la Figura 3.7.

De ella se puede observar que hay dos frecuencias en las que hay mayor variación, correspondientes a las obtenidas en el análisis de cada una de las funciones de transferencia mostradas en la Figura 3.5, indicando que los voltajes de nodo tendrán una magnitud más grande a esas frecuencias. También se puede observar que hay un pico negativo donde el valor singular menor es muy pequeño a la frecuencia  $\omega = 3160$  rad/s, indicando un gran número condición con lo que es recomendable evitar esa frecuencia.

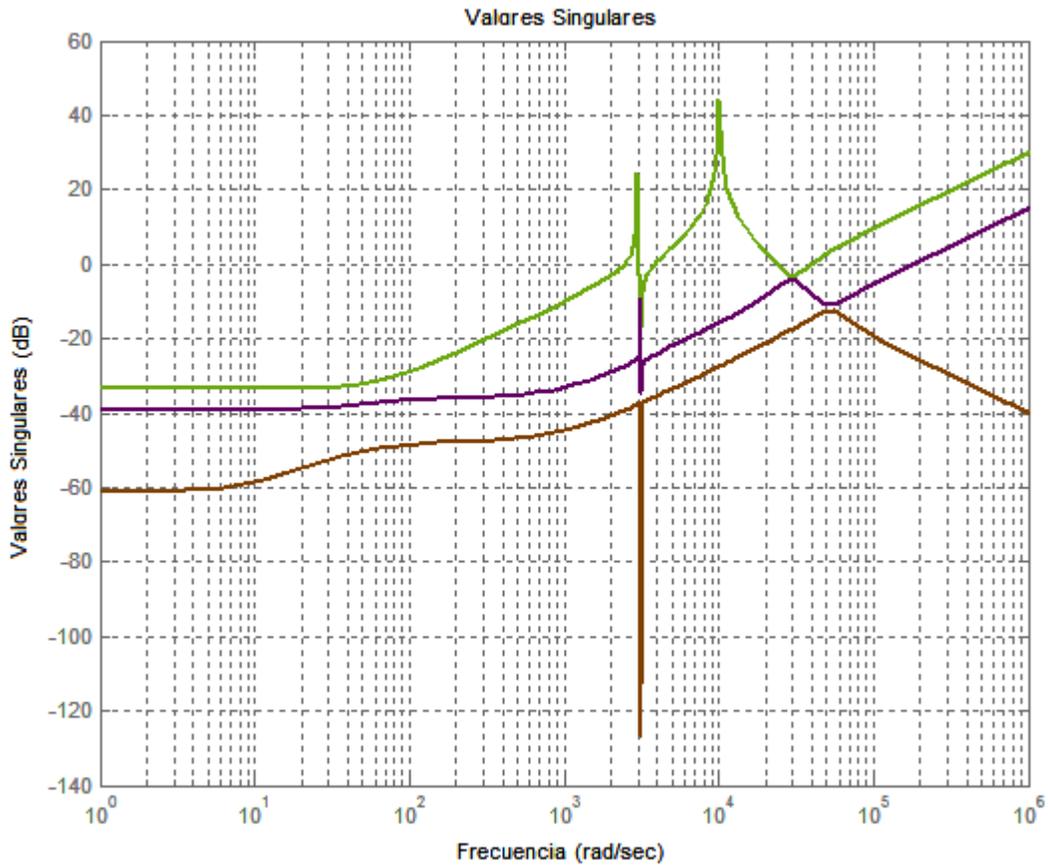


Figura 3.7 Valores singulares de la matriz  $Z_{nodo}$  a diferentes frecuencias.

Esta información también se puede observar de la matriz  $Y_{nodo}$  debido a que para sistemas cuadrados los valores singulares corresponden de cada uno de ellos, por lo que al obtener los valores singulares de  $Y_{bus}$  se puede interpretar la información para conocer  $Z_{nodo}$ , como lo muestra la Figura 3.8 donde se observa que la gráfica corresponde al inverso de la Figura 3.7. Es necesario notar que para conocer información acerca de  $Z_{nodo}$  se tiene que interpretar el inverso de la gráfica lo cual se obtiene fácilmente si se invierte el eje de las ordenadas que indica la magnitud de los valores singulares, por ello un pico grande en el valor singular mayor de  $Y_{nodo}$  corresponde a un bajo de  $Z_{nodo}$  por lo que se tiene una mala condicionalidad. El valor singular menor de  $Y_{nodo}$  muestra dos frecuencias donde el sistema caracterizado por  $Z_{nodo}$  tendrá mayor variación que, como era de esperarse, corresponden a las frecuencias de resonancia del sistema.

Por lo tanto para conocer el comportamiento en la frecuencia del sistema se puede utilizar la gráfica de valores singulares que aporta más información que en lugar de realizar el análisis de cada una de las funciones de transferencia que forman la matriz  $Z_{nodo}$ .

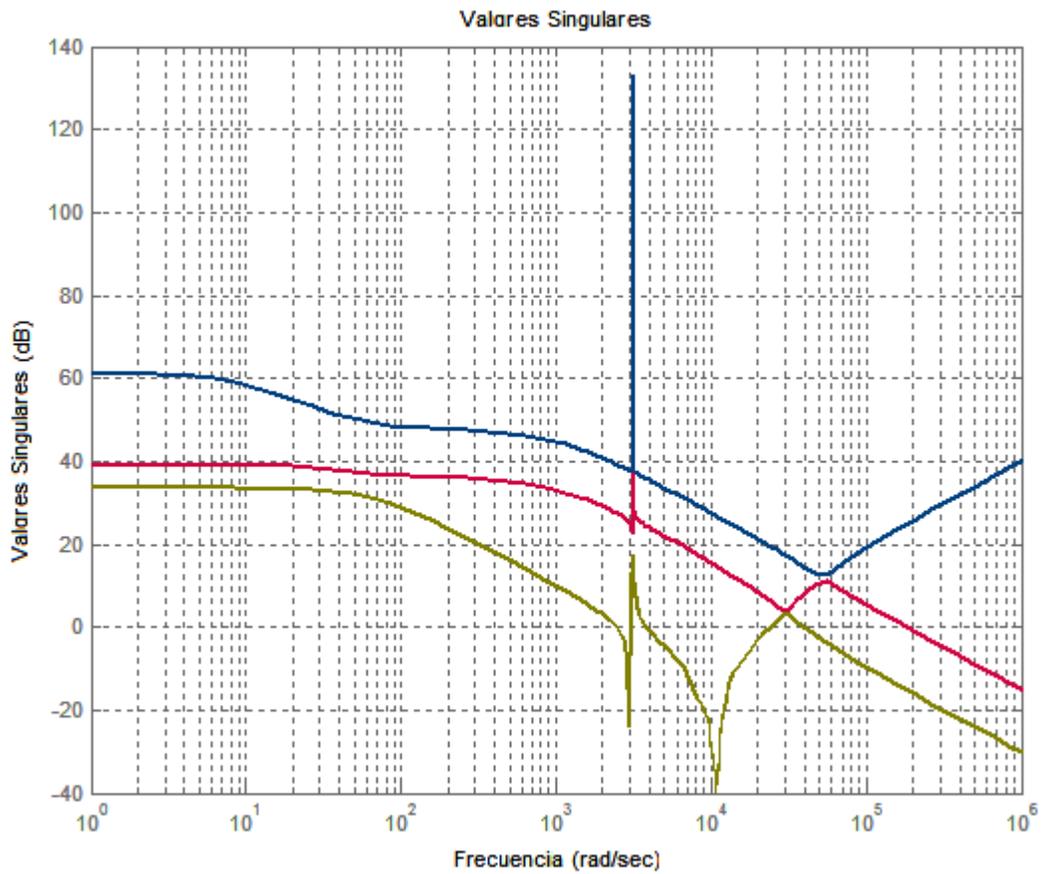


Figura 3.8 Valores singulares de  $Y_{nodo}$

## 3.2 Caso b: sistema real

Para demostrar la validez del método presentado en el ejemplo anterior, ahora se analiza un sistema de distribución real obtenido de [4] mostrado cada uno de los pasos a seguir para determinar el mejor punto de conexión de un compensador.

Se tiene un sistema industrial de distribución de potencial compuesto por varias cargas no lineales, una fuente de suministro, motores y filtro pasivos, el cual representa una planta de fundición de acero, cuyo diagrama unifilar se muestra en la Figura 3.9.

Este circuito tiene seis cargas no lineales representadas con fuentes de corriente. Hay 15 nodos con lo que se tendrá una matriz de impedancias de nodo de dimensiones  $15 \times 15$  y en total se tienen 7 cargas no lineales, alimentados con una fuente de voltaje de 11.287 kV a 50 Hz, [1].

Conociendo el circuito eléctrico del sistema de potencia se puede conocer el punto más adecuado para colocar el compensador siguiendo un método sistemático formado por los siguientes pasos:

### 1. Obtener la matriz $Y_{nodo}$ para formar la ecuación de nodos .

El primer punto a considerar es caracterizar sistema por medio de la ecuación de nodos, para ello se requiere de obtener la matriz de admitancias de nodo. Esta matriz se puede obtener directamente del diagrama debido a que, como se observó en (3.5), la diagonal principal tiene la suma de las admitancias primitivas  $y_{pi}$  incidentes a cada nodo, y los elementos restantes son las impedancias comunes entre cada par de nodo con signo negativo. Para ello es necesario numerar cada uno de los nodos y los elementos arbitrariamente, con ello se puede formar  $Y_{nodo}$ , por ejemplo para la primera fila correspondiente al nodo 1, el primer elemento tiene la suma de las admitancias incidentes a este nodo, que son  $y_{p1} + y_{p2} + y_{p3}$ , el elemento dos incide con el nodo dos por lo que en la matriz se coloca el valor  $-y_{p2}$ , y el elemento tres con el nodo tres, los elementos restantes de la fila son ceros. De esta manera se puede escribir la matriz de admitancias de nodo.

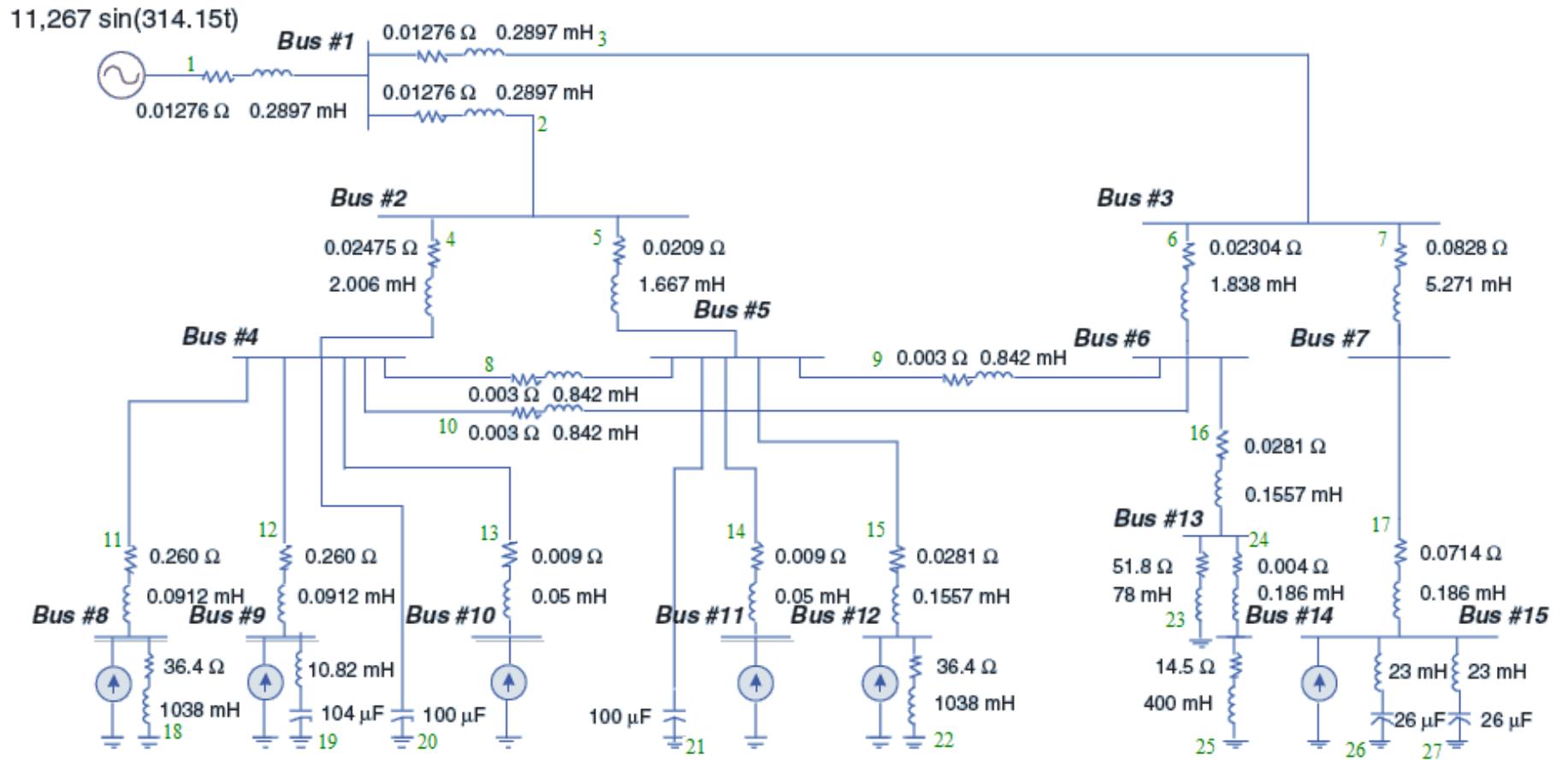


Figura 3.9 Circuito eléctrico que representa una planta de fundición de acero.

$$y_p = \begin{bmatrix} y_{11} & -y_3 & -y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_3 & y_{22} & 0 & -y_4 & -y_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_2 & 0 & y_{33} & 0 & 0 & -y_6 & -y_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -y_4 & 0 & y_{44} & -y_8 & -y_{10} & 0 & -y_{11} & -y_{12} & -y_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -y_5 & 0 & -y_8 & y_{55} & -y_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{14} & -y_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_6 & -y_{10} & -y_9 & y_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_7 & 0 & 0 & 0 & y_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{17} \\ 0 & 0 & 0 & -y_{11} & 0 & 0 & 0 & y_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{99} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{10,10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{11,11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{12,12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{13,14} & -y_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{24} & y_{14,14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{15,15} \end{bmatrix}$$

donde

$$y_{11} = yp1 + yp2 + yp3$$

$$y_{22} = yp3 + yp4 + yp5$$

$$y_{33} = yp2 + yp6 + yp7$$

$$y_{44} = yp4 + yp8 + yp10 + yp11 + yp12 + yp13 + yp20$$

$$y_{55} = yp5 + yp8 + yp9 + yp14 + yp15 + yp21$$

$$y_{66} = yp6 + yp9 + yp10 + yp16$$

$$y_{77} = yp7 + yp17$$

$$y_{88} = yp11 + yp18$$

$$y_{99} = yp12 + yp19$$

$$y_{10,10} = yp13$$

$$y_{11,11} = yp14$$

$$y_{12,12} = yp15 + yp22$$

$$y_{13,13} = yp16 + yp23 + yp24$$

$$y_{14,14} = yp24 + yp24$$

$$y_{15,15} = yp17 + yp26 + yp27$$

Una vez obtenida la matriz  $Y_{nodo}$  se invierte para obtener la matriz de impedancias de nodo teniendo así una matriz cuadrada de funciones de transferencia.

$$Z_{nodo} = (Y_{nodo})^{-1}$$

## 2. Determinar la matriz de transferencia:

### 2a. Matriz de transferencia de nodo $H_n$ :

En este caso se sabe que se tienen 6 fuentes de corriente que representan las cargas no lineales, colocadas en los nodos 8, 9, 10, 11, 12 y 15, y una fuente de voltaje en el nodo 1 la cual se transforma en fuente de corriente por medio de la admitancia del elemento a la cual pertenece la fuente cuya ecuación es:

$$j_1 = -y_{p1}e_1 = -\frac{1}{0.01276 + s \cdot 0.2897 \times 10^{-1}} (1)$$

Considerando la ubicación de cada una de las fuentes del sistema, se pueden encontrar las corrientes de nodo:

$$I_{nodo} = E_n \bar{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_{p1}e_1 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_{p1}e_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_6 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Una vez obtenido el vector de corrientes de nodo y con la matriz  $Z_{nodo}$  ya conocida, se pueden obtener los voltajes de nodo:

$$V_{bus} = \begin{bmatrix} Z_{1,1} & Z_{1,2} & \cdots & Z_{1,14} & Z_{1,15} \\ Z_{2,1} & Z_{2,2} & \cdots & Z_{2,14} & Z_{2,15} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Z_{14,1} & Z_{14,2} & \cdots & Z_{14,14} & Z_{14,15} \\ Z_{15,1} & Z_{15,2} & \cdots & Z_{15,14} & Z_{15,15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_{p1}e_1 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Simplificando la ecuación (3.33) se tiene:

$$V_{nodo} = \begin{bmatrix} Z_{1,1} & Z_{1,8} & Z_{1,9} & Z_{1,10} & Z_{1,11} & Z_{1,12} & Z_{1,15} \\ Z_{2,1} & Z_{2,8} & Z_{2,9} & Z_{2,10} & Z_{2,11} & Z_{2,12} & Z_{2,15} \\ Z_{3,1} & Z_{3,8} & Z_{3,9} & Z_{3,10} & Z_{3,11} & Z_{3,12} & Z_{3,15} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{13,1} & Z_{13,8} & Z_{13,9} & Z_{13,10} & Z_{13,11} & Z_{13,12} & Z_{13,15} \\ Z_{14,1} & Z_{14,8} & Z_{14,9} & Z_{14,10} & Z_{14,11} & Z_{14,12} & Z_{14,15} \\ Z_{15,1} & Z_{15,8} & Z_{15,9} & Z_{15,10} & Z_{15,11} & Z_{15,12} & Z_{15,15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_{p1}e_1 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

De esta manera se obtiene los voltajes de nodo cuya relación con las entradas esta dada por una matriz de transferencia  $H_n$  de dimensiones  $15 \times 7$  formada por las columnas de la matriz  $Z_{nodo}$  donde hay una fuente de corriente. Cada elemento representa el voltaje  $i$  cuando se inyecta una corriente de  $1[A]$  en el nodo  $j$ . De esta manera se tiene un sistema no cuadrado cuyo diagrama de bloques es el de la Figura 3.3.

## 2b. Matriz de transferencia de impedancias:

El sistema también se puede analizar con la matriz cuadrada  $Z_{nodo}$  representado en el diagrama de bloques de la Figura 3.4, donde se observa directamente en que nodos se encuentran las cargas no lineales pero el análisis es más flexible permitiendo conocer el comportamiento a partir de  $Y_{nodo}$ . La ecuación de nodos se forma con el vector de corrientes de nodo obtenido con la ecuación (3.32), por lo tanto:

$$V_{bus} = \begin{bmatrix} Z_{1,1} & Z_{1,2} & Z_{1,3} & \cdots & \cdots & Z_{1,14} & Z_{1,15} \\ Z_{2,1} & Z_{2,2} & Z_{2,3} & \cdots & \cdots & Z_{2,14} & Z_{2,15} \\ Z_{3,1} & Z_{3,2} & Z_{3,3} & \cdots & \cdots & Z_{3,14} & Z_{3,15} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Z_{14,1} & Z_{14,2} & Z_{14,3} & \cdots & \cdots & Z_{14,14} & Z_{14,15} \\ Z_{15,1} & Z_{15,2} & Z_{15,3} & \cdots & \cdots & Z_{15,14} & Z_{15,15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_{p1}e_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ 0 \\ 0 \\ I_6 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

### 3. Determinar frecuencias de interés.

Una vez conocida la matriz de transferencia que caracteriza el sistema se pueden obtener las frecuencias de interés, de dos maneras. La primera evaluando cada una de las funciones de transferencia que forman la matrices de transferencia para diferentes valores de frecuencia y observar donde hay una mayor amplitud indicando las más significativas, la segunda es analizar el comportamiento de los valores singulares en función de la frecuencia que de igual manera indican donde hay una mayor amplificación de voltajes además de determinar a qué frecuencias se tiene un valor singular muy pequeño y así evitar ese punto por mala condicionalidad.

De una marea más práctica conviene obtener los valores singulares, debido a que con una sola gráfica se obtiene la información requerida, en cambio al analizar cada una de las funciones de transferencia no siempre se tienen resultados similares en cada una de ellas, para mostrar esto se graficaron las funciones de transferencia correspondientes al voltaje en el nodo 1 de la matriz de transferencia de nodos  $H_n$ , mostradas en la Figura 3.10.

De las gráficas anteriores se pueden definir tres frecuencias en las que hay una mayor variación en magnitud del sistema:

$$\omega_1 = 2276 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow f_1 = 362.237 \text{ Hz}$$

$$\omega_2 = 1048 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow f_2 = 166.794 \text{ Hz}$$

$$\omega_3 = 6448 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow f_3 = 1026.2 \text{ Hz}$$

La frecuencia más relevante en cada una de las gráficas es  $\omega_1$ , sin embargo en el nodo 1 y en el nodo 15 hay diferencias con respecto a las otras gráficas, específicamente en la frecuencia  $\omega_2$  y valores mayores a la frecuencia  $\omega_3$ , en este caso convendría obtener las gráficas de los nodos restantes, donde se tendrán gráficas similares y así determinar qué frecuencia es la predominante, sin embargo este sistema de orden mayor conviene un análisis en donde se observe el comportamiento en conjunto de todo el sistema por lo que se recomienda obtener la gráfica de valores singulares.

Como los valores singulares de la matriz  $Z_{nodo}$  corresponden al inverso de los valores singulares de la matriz  $Y_{nodo}$  es más sencillo analizar esta matriz ya que se obtuvo de manera directa. Al obtener sus valores singulares e invertir la matriz para determinar el comportamiento de  $Z_{nodo}$  se obtuvo la gráfica mostrada en la Figura 3.11.

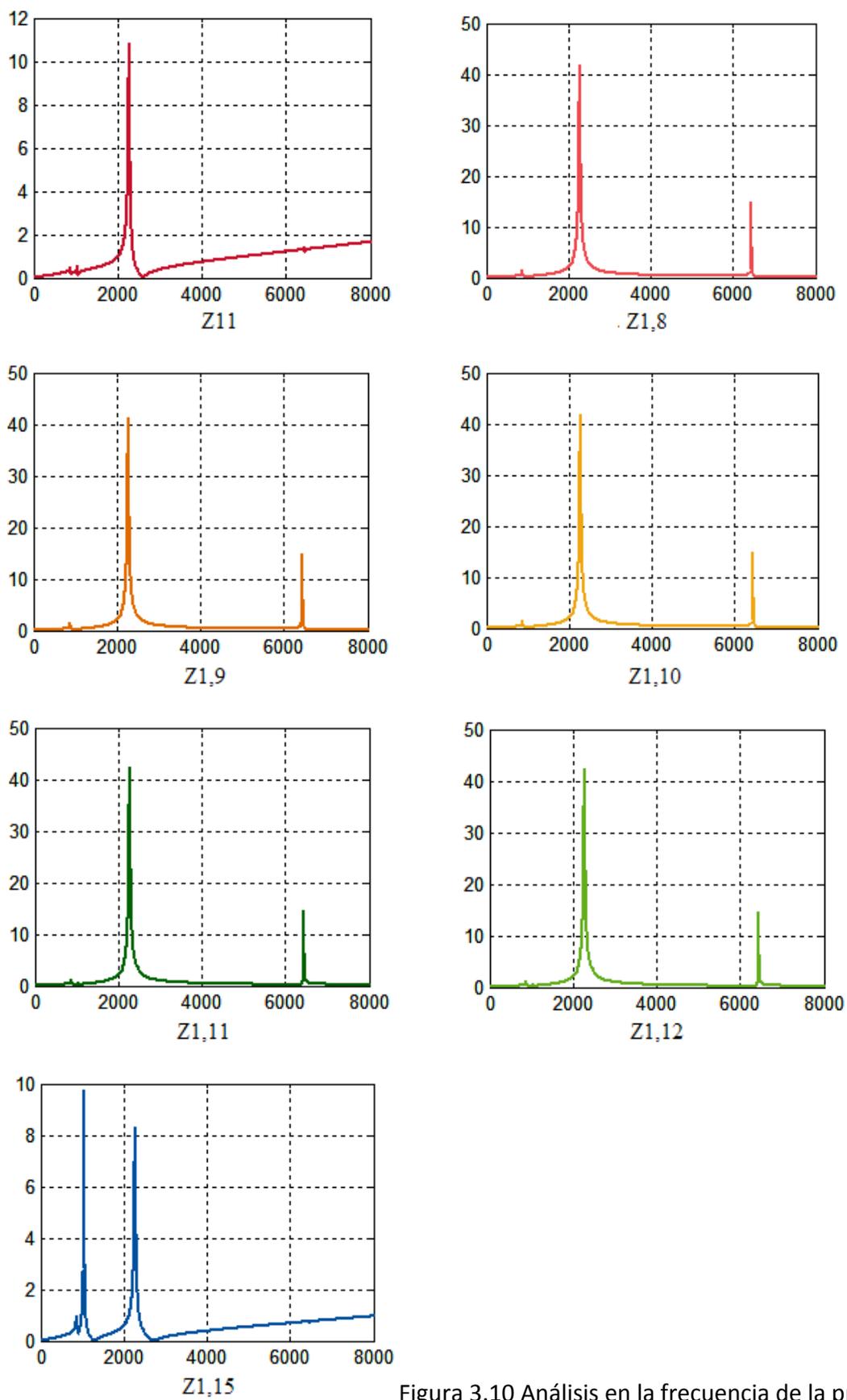


Figura 3.10 Análisis en la frecuencia de la primer fila de  $H_n$

De la gráfica se puede observar que predominan dos valores indicando mayor variación de las magnitudes del sistema, uno a la frecuencia  $\omega_1$  y el otro a la frecuencia  $\omega_2$ , lo cual generaliza las gráficas de la Figura 3.10. También se observan dos picos donde el valor singular es mucho menor provocando un número condición grande a las frecuencias  $\omega_a = 943$  y  $\omega_b = 1290$ . Por lo que es recomendable evitar trabajar a esas frecuencias.

En este caso la frecuencia que da una mayor variación al sistema es  $\omega_1$  por lo que se trabajará con este valor.

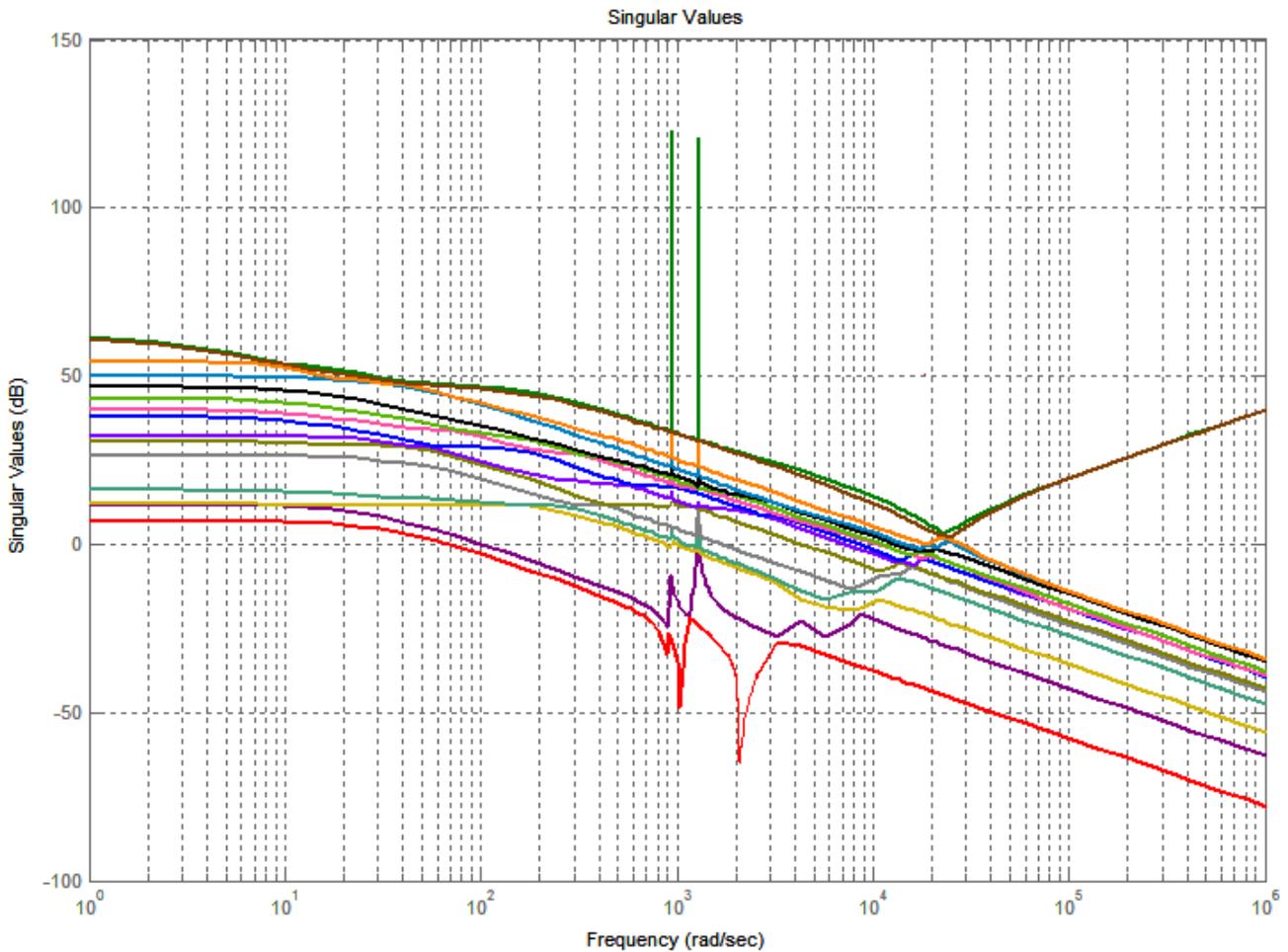


Figura 3.11 Valores singulares del sistema de la Figura 3.9 descrito por la ecuación (3.35)

#### 4. Obtener descomposición en valores singulares de la matriz $Y_{nodo}$

Una vez determinada la frecuencia de interés, se evalúa la matriz de admitancias de nodo para obtener su SVD, obteniendo tres matrices:

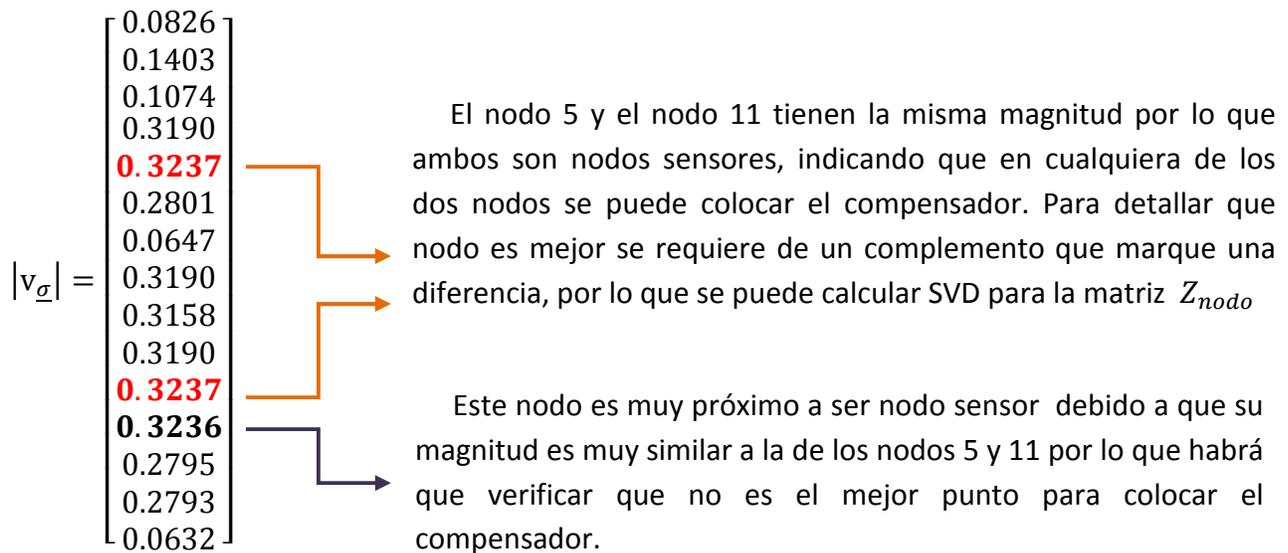
$$Ye = Y_{nodo}(j\omega)|_{\omega=2276} = U_y \Sigma_y V_y^H$$

Donde el valor singular menor indica la mayor aportación a los voltajes de nodo del sistema debido a la ecuación (2.41) por lo que con su respectivo vector de salidas asociado se podrá observar el nodo más afectado a variaciones.

$$Ze = Z_{nodo}(j\omega)|_{\omega=2276} = \frac{u_1 v_1^H}{\sigma_1}$$

Las matriz de salidas y la de valores singulares se muestran en las ecuaciones (3.36) y (3.37). Se puede observar que el valor singular menor es  $\underline{\sigma} = 0.0006$ , si éste se compara con el siguiente valor singular menor en magnitud que es  $\sigma_{14} = 0.0673$  se observa que  $\sigma$  es mucho menor a  $\sigma_{14}$  por lo que se puede afirmar que la mayor aportación al sistema está dada por el menor valor singular.

Ahora se observan las magnitudes del vector singular de la matriz  $V_y$  (correspondiente a las salidas de  $Z_{nodo}$  asociado a  $\underline{\sigma}$ , es decir  $v_{\underline{\sigma}}$  colocado al extremo derecho de  $V_y$ , para determinar el nodo sensor.



$$|U_y| = |V_y| = \begin{bmatrix} 0.0006 & 0.0013 & 0.0110 & 0.8711 & 0.0264 & 0.0212 & 0.0153 & 0.0388 & 0.0005 & 0.0436 & 0.4775 & 0.0268 & 0.0228 & 0.0164 & 0.0826 \\ 0.0068 & 0.0132 & 0.0025 & 0.3528 & 0.0082 & 0.0118 & 0.0296 & 0.0450 & 0.0001 & 0.7369 & 0.5512 & 0.0742 & 0.0099 & 0.0741 & 0.1403 \\ 0.0003 & 0.0003 & 0.0233 & 0.3384 & 0.0145 & 0.0093 & 0.0221 & 0.0796 & 0.0001 & 0.6611 & 0.6495 & 0.0020 & 0.0439 & 0.0017 & 0.1047 \\ 0.7868 & 0.1498 & 0.0026 & 0.0091 & 0.3861 & 0.0006 & 0.0066 & 0.0185 & 0.0057 & 0.0157 & 0.0315 & 0.1011 & 0.0346 & 0.1731 & 0.3190 \\ 0.1590 & 0.7778 & 0.0021 & 0.0055 & 0.0145 & 0.0005 & 0.3042 & 0.0244 & 0.0004 & 0.0170 & 0.0811 & 0.4226 & 0.0329 & 0.4224 & 0.3237 \\ 0.0194 & 0.0267 & 0.5440 & 0.0085 & 0.0316 & 0.0007 & 0.1046 & 0.6998 & 0.0058 & 0.0576 & 0.0221 & 0.1801 & 0.0229 & 0.1796 & 0.2801 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0004 & 0.0133 & 0.0017 & 0.7090 & 0.0010 & 0.0012 & 0.0000 & 0.0059 & 0.0337 & 0.0002 & 0.2912 & 0.0002 & 0.0647 \\ 0.1206 & 0.0262 & 0.0012 & 0.0099 & 0.4696 & 0.0011 & 0.0162 & 0.0565 & 0.7086 & 0.0234 & 0.0364 & 0.1896 & 0.0087 & 0.1900 & 0.3190 \\ 0.1210 & 0.0262 & 0.0012 & 0.0101 & 0.4780 & 0.0011 & 0.0168 & 0.0368 & 0.7056 & 0.0227 & 0.0361 & 0.1872 & 0.3347 & 0.1883 & 0.3158 \\ 0.5812 & 0.1165 & 0.0327 & 0.0239 & 0.6309 & 0.0011 & 0.0066 & 0.0603 & 0.0058 & 0.0147 & 0.0344 & 0.1791 & 0.3348 & 0.1826 & 0.3190 \\ 0.0532 & 0.6075 & 0.0339 & 0.0158 & 0.0238 & 0.0011 & 0.5530 & 0.0385 & 0.0020 & 0.0217 & 0.0882 & 0.4456 & 0.0731 & 0.4454 & 0.3237 \\ 0.0115 & 0.1275 & 0.0014 & 0.0052 & 0.0119 & 0.0011 & 0.7592 & 0.1608 & 0.0015 & 0.0527 & 0.1093 & 0.5036 & 0.0837 & 0.5031 & 0.3236 \\ 0.0034 & 0.0052 & 0.7746 & 0.0222 & 0.0377 & 0.0007 & 0.0620 & 0.2305 & 0.0004 & 0.0174 & 0.0605 & 0.2795 & 0.4240 & 0.2790 & 0.2795 \\ 0.0004 & 0.0008 & 0.3180 & 0.0155 & 0.0324 & 0.0007 & 0.0921 & 0.6425 & 0.0554 & 0.0927 & 0.0879 & 0.3493 & 0.5107 & 0.3448 & 0.2793 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0002 & 0.0112 & 0.0015 & 0.7048 & 0.0015 & 0.0031 & 0.0000 & 0.0244 & 0.0473 & 0.0002 & 0.0099 & 0.7044 & 0.0032 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\Sigma_y = \begin{bmatrix} 21.5553 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 19.9167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.1187 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.7521 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.0986 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.7281 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.9423 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.2095 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.0212 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.9191 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7363 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4519 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3983 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0673 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0006 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

#### 4a. Obteniendo descomposición en valores singulares de la matriz $Z_{nodo}$ :

Como SVD de  $Y_{nodo}$  no definió un solo nodo sensor es recomendable obtener SVD del sistema considerando una matriz que indique la ubicación de las entradas para observar el comportamiento de la matriz de salidas que junto con la ganancia indican la magnitud de los voltajes de nodo, de esta manera se puede determinar el nodo en el cual el voltaje es mayor.

A partir del sistema descrito en (3.34) donde la matriz de transferencia es la matriz de impedancias de nodo, su descomposición en valores singulares está dada por:

$$Ze = (Ye)^{-1} = U_Z \Sigma_Z V_Z^H$$

Una vez obtenida la descomposición se observa la matriz de  $U$  que indica direcciones de salidas, obteniendo su magnitud para determinar las variaciones de las salidas mostradas en las ecuaciones (3.38) y (3.39)

De esta matriz el vector más significativo es el primero  $\bar{u}$  debido a que está asociado al valor singular mayor  $\bar{\sigma}$  y es el que hace mayor aportación al sistema, por lo tanto, para observar los cambios en magnitud de las salidas en necesario multiplicar la matriz  $U$  por la matriz de valores singulares  $\Sigma$ , y observando el valor absoluto se tiene:

Donde el primero vector es:

$$\bar{u}_z = \begin{bmatrix} 131.0582 \\ 222.6409 \\ 170.5337 \\ 506.3274 \\ 513.7747 \\ 444.5993 \\ 102.6683 \\ 506.3647 \\ 501.2698 \\ 506.3301 \\ \mathbf{513.7775} \\ 513.7062 \\ 443.6062 \\ 443.4005 \\ 100.2772 \end{bmatrix}$$

Se puede observar que las magnitudes de los nodos 5 y 11 son parecidas pero con este método sí existe una diferencia pequeña entre ambas, indicando que el nodo 11 es el nodo sensor por lo que será en ese bus donde se coloque el compensador.

El bus 12 se descarta debido a que hay una mayor diferencia con respecto al nodo sensor.

$$|U_z| = \begin{bmatrix} 0.0826 & 0.0164 & 0.0228 & 0.0268 & 0.4775 & 0.0436 & 0.0005 & 0.0388 & 0.0153 & 0.0212 & 0.0264 & 0.8711 & 0.0110 & 0.0013 & 0.0006 \\ 0.1403 & 0.0044 & 0.0099 & 0.0742 & 0.5512 & 0.7369 & 0.0001 & 0.0450 & 0.0269 & 0.0118 & 0.0082 & 0.3528 & 0.0025 & 0.0132 & 0.0068 \\ 0.1074 & 0.0439 & 0.0722 & 0.0020 & 0.6494 & 0.6613 & 0.0005 & 0.0796 & 0.0235 & 0.0098 & 0.0145 & 0.3384 & 0.0233 & 0.0003 & 0.0002 \\ 0.3190 & 0.0345 & 0.3162 & 0.1700 & 0.0304 & 0.0120 & 0.0038 & 0.0185 & 0.0066 & 0.0006 & 0.3290 & 0.0091 & 0.1498 & 0.7975 & 0.7975 \\ 0.3237 & 0.0329 & 0.0719 & 0.4226 & 0.0811 & 0.0171 & 0.0002 & 0.0232 & 0.3040 & 0.0005 & 0.0158 & 0.0053 & 0.0028 & 0.7648 & 0.1590 \\ 0.2801 & 0.0229 & 0.2935 & 0.1806 & 0.0221 & 0.0570 & 0.0058 & 0.6990 & 0.1099 & 0.0007 & 0.0316 & 0.0082 & 0.5434 & 0.0311 & 0.0194 \\ 0.0647 & 0.7012 & 0.0084 & 0.0002 & 0.0337 & 0.0052 & 0.0000 & 0.0011 & 0.0010 & 0.7090 & 0.0017 & 0.0163 & 0.0004 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3190 & 0.0351 & 0.3479 & 0.1896 & 0.0367 & 0.7090 & 0.0234 & 0.0522 & 0.162 & 0.0011 & 0.4659 & 0.0099 & 0.0015 & 0.0262 & 0.1272 \\ 0.3158 & 0.0347 & 0.3436 & 0.1872 & 0.0362 & 0.0227 & 0.7062 & 0.0640 & 0.0168 & 0.0011 & 0.4733 & 0.1010 & 0.0013 & 0.0262 & 0.1273 \\ 0.3190 & 0.3484 & 0.0331 & 0.1791 & 0.0331 & 0.0147 & 0.0058 & 0.0148 & 0.0066 & 0.0011 & 0.6669 & 0.0239 & 0.0343 & 0.1165 & 0.5418 \\ 0.3237 & 0.0331 & 0.0753 & 0.4456 & 0.0885 & 0.0218 & 0.0002 & 0.0365 & 0.5528 & 0.0011 & 0.0295 & 0.0155 & 0.0338 & 0.6005 & 0.1088 \\ 0.3236 & 0.0337 & 0.088 & 0.5033 & 0.1097 & 0.0534 & 0.0020 & 0.1682 & 0.7576 & 0.0008 & 0.0152 & 0.0051 & 0.0014 & 0.1258 & 0.0239 \\ 0.2795 & 0.0240 & 0.4248 & 0.2804 & 0.0670 & 0.0174 & 0.0015 & 0.2270 & 0.0648 & 0.0007 & 0.0377 & 0.0215 & 0.7750 & 0.0061 & 0.0034 \\ 0.2793 & 0.0247 & 0.5107 & 0.3466 & 0.0811 & 0.0918 & 0.0055 & 0.6422 & 0.0969 & 0.0007 & 0.0324 & 0.0150 & 0.3180 & 0.0008 & 0.0004 \\ 0.0632 & 0.7044 & 0.0099 & 0.0002 & 0.0473 & 0.0246 & 0.0000 & 0.0032 & 0.0015 & 0.7048 & 0.0015 & 0.0112 & 0.0002 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$|U_z| * \Sigma_z = \begin{bmatrix} 131.058 & 0.2432 & 0.0573 & 0.0593 & 0.6486 & 0.0227 & 0.0002 & 0.0121 & 0.0039 & 0.0045 & 0.0052 & 0.1514 & 0.0014 & 0.0001 & 0.0006 \\ 222.649 & 0.0659 & 0.0250 & 0.1643 & 0.7487 & 0.3841 & 0.0000 & 0.0141 & 0.0025 & 0.0075 & 0.0016 & 0.0613 & 0.0003 & 0.0007 & 0.0003 \\ 170.537 & 0.5139 & 0.1814 & 0.0043 & 0.8821 & 0.3447 & 0.0002 & 0.0249 & 0.0060 & 0.0020 & 0.0028 & 0.0588 & 0.0029 & 0.0000 & 0.0000 \\ 506.327 & 0.4889 & 0.1806 & 0.7940 & 0.3761 & 0.0413 & 0.0063 & 0.0013 & 0.0058 & 0.0017 & 0.0645 & 0.0016 & 0.0003 & 0.0385 & 0.0370 \\ 513.774 & 0.5889 & 0.1806 & 0.9352 & 0.1101 & 0.0089 & 0.0001 & 0.0771 & 0.0001 & 0.0031 & 0.0009 & 0.0003 & 0.0358 & 0.0074 & 0.0075 \\ 444.599 & 0.3403 & 0.7370 & 0.3997 & 0.300 & 0.0297 & 0.0019 & 0.2186 & 0.0279 & 0.0001 & 0.0062 & 0.0014 & 0.0669 & 0.0016 & 0.0009 \\ 102.668 & 10.426 & 0.0212 & 0.0004 & 0.0457 & 0.0027 & 0.0000 & 0.0004 & 0.0003 & 0.1499 & 0.0003 & 0.0028 & 0.001 & 0.0000 & 0.0000 \\ 506.364 & 0.5231 & 0.8735 & 0.4195 & 0.0499 & 0.0122 & 0.2343 & 0.0163 & 0.0041 & 0.0002 & 0.0914 & 0.0017 & 0.0002 & 0.0013 & 0.0059 \\ 501.269 & 0.5159 & 0.8627 & 0.4142 & 0.0492 & 0.0118 & 0.2338 & 0.0200 & 0.0043 & 0.0002 & 0.0928 & 0.0017 & 0.0002 & 0.0013 & 0.0059 \\ 506.331 & 0.5178 & 0.8314 & 0.3963 & 0.0450 & 0.0076 & 0.0019 & 0.0046 & 0.0017 & 0.0002 & 0.1308 & 0.0042 & 0.0042 & 0.0058 & 0.0251 \\ 513.777 & 0.4927 & 0.1892 & 0.9859 & 0.1201 & 0.0114 & 0.0001 & 0.0113 & 0.1402 & 0.0002 & 0.0058 & 0.0027 & 0.0042 & 0.0302 & 0.0050 \\ 513.706 & 0.5008 & 0.2103 & 1.1136 & 0.1490 & 0.0279 & 0.0007 & 0.0526 & 0.1922 & 0.0002 & 0.0030 & 0.0009 & 0.0002 & 0.0063 & 0.0011 \\ 443.603 & 0.3567 & 1.0667 & 0.6206 & 0.0824 & 0.0091 & 0.0005 & 0.0710 & 0.0164 & 0.0001 & 0.0074 & 0.0037 & 0.0955 & 0.0003 & 0.0002 \\ 443.405 & 0.3670 & 1.2822 & 0.7669 & 0.0479 & 0.0018 & 0.2009 & 0.0246 & 0.0001 & 0.0064 & 0.0026 & 0.092 & 0.0032 & 0.0000 & 0.0000 \\ 100.277 & 10.474 & 0.0247 & 0.0005 & 0.0643 & 0.128 & 0.0000 & 0.0010 & 0.0004 & 0.1491 & 0.0003 & 0.0020 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

## 5. Verificar condicionalidad:

Con descomposición en valores singulares se determinó el nodo sensor que es el punto adecuado para colocar un compensador. Por lo que le último punto a considerar es verificar que es nodo es el adecuado mejorando el funcionamiento de la red.

### 5a. Condicionalidad el sistema sin compensador:

Para confirmar que el nodo 11 es indicado, es necesario observar la condicionalidad del sistema sin compensador, para ello es necesario el modelo real del circuito, es decir

$$V_{nodo} = H_n I_{nodo}$$

Donde  $H_n$  es una matriz de dimensiones  $15 \times 7$  e  $I_{bus}$  un vector de 7 elementos indicando una fuente de voltaje transformada como fuente de corriente y 6 fuentes de corriente representando las cargas no lineales del sistema, como se muestra en la ecuación (3.34).

Como se conocer la matriz de transferencia de nodo y también la frecuencia de interés se evalúa en  $H_n$ , ecuación (3.40), para poder obtener sus valores singulares indicados en el vector  $\Sigma$  (3.41):

$$|He| = \begin{bmatrix} 10.8295 & 41.8023 & 41.3817 & 41.8061 & 42.4209 & 42.4146 & 8.2809 \\ 18.3837 & 71.0136 & 70.2991 & 71.0200 & 72.0645 & 72.0537 & 14.0637 \\ 14.0837 & 54.3934 & 53.8461 & 54.3982 & 55.1983 & 55.1900 & 10.7831 \\ 41.8061 & 161.497 & 159.872 & 161.511 & 163.888 & 163.863 & 31.9849 \\ 42.4209 & 163.873 & 162.224 & 163.888 & 166.297 & 166.272 & 32.4553 \\ 36.7094 & 141.809 & 140.382 & 141.822 & 143.907 & 143.886 & 28.0856 \\ 8.4787 & 32.746 & 32.416 & 32.7490 & 33.2307 & 33.2257 & 9.7611 \\ 41.8023 & 161.742 & 159.858 & 161.497 & 163.873 & 163.848 & 31.9820 \\ 41.3817 & 159.858 & 158.509 & 159.872 & 162.224 & 162.200 & 31.6602 \\ 41.8061 & 161.497 & 159.872 & 161.520 & 163.888 & 163.863 & 31.9849 \\ 42.4209 & 163.873 & 162.224 & 163.888 & 166.306 & 166.272 & 32.4553 \\ 42.4146 & 163.848 & 162.200 & 163.863 & 166.272 & 166.275 & 32.4504 \\ 36.6262 & 141.487 & 140.064 & 141.500 & 143.581 & 143.560 & 28.0219 \\ 36.6091 & 141.422 & 139.999 & 141.434 & 143.515 & 143.493 & 28.0089 \\ 8.2809 & 31.9820 & 31.6602 & 31.9849 & 32.4553 & 32.4504 & 9.8908 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1148.5 \\ 10.539 \\ 1.9821 \\ 0.6999 \\ 0.3310 \\ 0.2422 \\ 0.1854 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Del vector  $\Sigma$  se observa que hay una diferencia notoria entre los dos valores singulares mayores con lo que se puede afirmar que el valor singular mayor con su respectivo vector asociado de entradas y salidas hacen la mayor contribución al sistema. En este caso ya está determinado el nodo sensor por lo que de  $\Sigma$  se obtienen el mayor y menor valor singular para calcular el número condición del sistema:

$$\gamma_{He} = \frac{\bar{\sigma}}{\underline{\sigma}} = \frac{1148.5}{0.1854} = 6195.9$$

El número condición  $\gamma$  indica una mala condicionalidad debido a que el valor es muy grande, con lo que al colocar el compensador la condicionalidad del sistema debe mejorar, modificando estos valores.

### 5b. Condicionalidad del sistema con compensador:

Si se considera un compensador de tipo capacitivo, entonces en el nodo 11 se agrega un elemento correspondiente a una impedancia capacitiva, al considerar elementos unitarios también el compensador se considera unitario por lo que su impedancia y admitancia están dados por:

$$z_c = \frac{\omega}{sC} = \frac{\omega}{j\omega C} = \frac{1}{jC} \quad y_c = jC$$

Esta admitancia se suma a la matriz  $Y_{nodo}$  en el elemento  $y_{11,11}$  y como está conectada en paralelo, no incide con ningún otro nodo. Evaluando esta nueva matriz  $Y_{c_{nodo}}$  en la frecuencia de interés  $\omega = 2276$  rad/s, determina la matriz de impedancias de nodo que al multiplicarla por la matriz de incidencia de entradas se obtiene una nueva matriz de transferencia de nodo ya compensada:

$$Z_{c_{nodo}}(j\omega)|_{\omega=2276} = (Y_{c_{nodo}}(j\omega)|_{\omega=2276})^{-1} \quad Hc_n = E * Z_{c_{nodo}}(j\omega)|_{\omega=2276}$$

$$|H_{ce}| = \begin{bmatrix} 0.4408 & 0.0749 & 0.0741 & 0.0749 & 0.2551 & 0.2260 & 0.2155 \\ 0.2964 & 0.1316 & 0.1303 & 0.1316 & 0.4333 & 0.3840 & 0.1347 \\ 0.3665 & 0.0931 & 0.0922 & 0.0931 & 0.3319 & 0.2941 & 0.5118 \\ 0.0749 & 0.3691 & 0.3654 & 0.3691 & 0.9854 & 0.8732 & 0.0548 \\ 0.2261 & 0.8733 & 0.8645 & 0.8733 & 0.9999 & 0.8860 & 0.1729 \\ 0.0539 & 0.2216 & 0.2194 & 0.2216 & 0.8653 & 0.7667 & 0.0035 \\ 0.2206 & 0.0561 & 0.0555 & 0.0561 & 0.1998 & 0.1771 & 7.3621 \\ 0.0749 & 0.6374 & 0.3654 & 0.3691 & 0.9853 & 0.8731 & 0.0548 \\ 0.0741 & 0.3654 & 0.6258 & 0.3654 & 0.9754 & 0.8643 & 0.0542 \\ 0.0749 & 0.3691 & 0.3654 & 0.4832 & 0.9854 & 0.8732 & 0.0548 \\ 0.2551 & 0.9853 & 0.9754 & 0.9854 & 1.0000 & 0.9998 & 0.1951 \\ 0.2260 & 0.8731 & 0.8643 & 0.8732 & 0.9998 & 0.5331 & 0.1729 \\ 0.0538 & 0.2211 & 0.2189 & 0.2211 & 0.8633 & 0.7650 & 0.0035 \\ 0.0538 & 0.2210 & 0.2188 & 0.2210 & 0.8629 & 0.7647 & 0.0035 \\ 0.2155 & 0.0548 & 0.0542 & 0.0548 & 0.1951 & 0.1729 & 7.6042 \end{bmatrix}$$

Con la nueva matriz de transferencia evaluada se pueden determinar sus valores singulares:

$$\sigma(H_c) = \begin{bmatrix} 10.6165 \\ 4.3048 \\ 2.8647 \\ 0.7014 \\ 0.3310 \\ 0.2660 \\ 0.1856 \end{bmatrix}$$

De este vector se observa que son muy diferentes a los del sistema original, a partir de ellos se puede determinar el nuevo número condición:

$$\gamma_{H_c} = \frac{\bar{\sigma}}{\underline{\sigma}} = \frac{10.6165}{0.1856} = 57.201$$

Se puede observar que la condicionalidad mejora significativamente añadiendo un compensador de tipo capacitivo en el nodo 11, por lo que se puede afirmar que colocando un compensador en este punto el desempeño del sistema es mejor.

Por lo tanto siguiendo 5 pasos que consideran los tres aspectos fundamentales para colocar el compensador se completa el análisis que determina el mejor punto de conexión de compensadores en paralelo.



**b) La siguiente condición es detectar los nodos sensores:** previamente se definió como nodo sensor a aquellos puntos en los que cambian drásticamente debido a distorsiones externas, con lo que los nodos donde se encuentre una mayor variación serán más adecuados para colocar compensadores debido a que ayudarán a que su funcionamiento favorezca al sistema.

Para ello es necesario realizar un análisis en la frecuencia de manera que detectando las frecuencias en donde hay mayor variación se observarán los voltajes más susceptibles a cambios determinando así los nodos sensores.

El comportamiento del sistema se puede determinar analizando cada uno de los elementos de la matriz de impedancias de bus, si se sustituye  $s = j\omega$  donde  $\omega$  es un conjunto de valores de manera que las magnitudes de cada función de transferencia representan el voltaje de cada uno de los buses debido a cada una de las fuentes de corriente de manera independiente, después, por teorema de superposición se suma cada uno de los resultados para obtener el voltaje total. Sin embargo el analizar cada una de las funciones de transferencia no es un trabajo simple debido a que pueden resultar cientos de funciones de transferencia de un sistema de potencia además no es tan fácil de observar en qué nodo se presenta la mayor variación, con lo que este método sólo indica de manera cualitativa a qué frecuencias se obtienen mayores variaciones de voltaje.

Para generalizar el comportamiento en la frecuencia del sistema se recomienda obtener la gráfica  $\sigma$  ya que con una sola gráfica aporta información necesaria acerca de las ganancias de un sistema multivariable, además de observar a que frecuencias hay amplificación o atenuación de voltajes y aquellas donde la condicionalidad es muy mala.

Con las gráficas anteriores se puede escoger una frecuencia de mayor interés, donde las más adecuada es aquella donde las magnitudes en los voltajes sean mayores indicando más variación en las salidas debido a algunas perturbaciones. Es necesario escoger una frecuencia debido a que descomposición en valores singulares se aplica a matrices constantes.

Una vez escogida la frecuencia de interés se evalúa en la matriz de transferencia escogida para caracterizar el sistema. Se puede obtener descomposición en valores singulares para matrices cuadradas que en este caso corresponden a las matrices de impedancias o admitancias de nodo, o para matrices rectangulares como es el caso de la matriz de transferencia de nodo. Para conocer la diferencia entre utilizar una matriz de transferencia cuadrada o rectangular es necesario observar algunos detalles obtenidos en la sección 3.1, donde al ser un sistema pequeño es más fácil comprender los conceptos.

La matriz de transferencia de nodo  $H_n$  es una submatriz de impedancias  $Z_{nodo}$  con lo que, al estar evaluada a la misma frecuencia  $\omega_1 = 10017$  rad/s se obtendrán los mismos valores con excepción de las columnas eliminadas debido a que en los buses correspondientes no hay fuentes de corriente:

$$H_n(j\omega)|_{\omega=10017} = \begin{bmatrix} 56.5181 - 1.2292i & 49.7860 - 0.3958i \\ 62.7712 - 1.9841i & 55.2922 - 1.0825i \\ 55.2922 - 1.0825i & 48.7238 - 0.0855i \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$Z_{nodo}(j\omega)|_{\omega=10017} = \begin{bmatrix} 50.8910 - 0.5150i & 56.5181 - 1.2292i & 49.7860 - 0.3958i \\ 56.5181 - 1.2292i & 62.7712 - 1.9841i & 55.2922 - 1.0825i \\ 49.7860 - 0.3958i & 55.2922 - 1.0825i & 48.7238 - 0.0855i \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Estas matrices pueden descomponerse en valores singulares donde en el primer caso se tendrán dos valores singulares mientras que en el segundo serán tres. Las matrices correspondientes a los valores singulares son:

$$\Sigma_H = \begin{bmatrix} 134.5718 & 0 \\ 0 & 0.1615 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \vdots \quad \Sigma_Z = \begin{bmatrix} 162.4017 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1645 & 0 \\ 0 & 0 & 0.042 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

De estas matrices se observa que no hay relación directa entre los valores singulares de las diferentes representaciones del sistema. Para este tipo de sistemas se tiene la limitante de no poder modificar libremente las entradas del sistema, esto es las cargas no lineales, por lo que su representación simplemente es colocar 1[A] como corrientes de bus, por ello no se puede explotar la información de las matrices de entrada  $V_H$  y  $V_Z$  de manera que no es posible obtener ni magnitudes ni direcciones de estas matrices, por lo que para analizar el sistema es necesario enfocarse en las matrices de salidas. Omitiendo la direccionalidad de las matrices debido a que es difícil llegar a ello sin modificar las entradas, se puede observar las magnitudes de las salidas por medio de sus matrices obteniendo:

$$|U_H| = \begin{bmatrix} 0.5598 & 0.1213 & 0.8197 \\ 0.6218 & 0.5923 & 0.5123 \\ 0.5477 & 0.7965 & 0.2562 \end{bmatrix} \quad \vdots \quad |U_Z| = \begin{bmatrix} 0.5598 & 0.1631 & 0.8124 \\ 0.6218 & 0.5654 & 0.5420 \\ 0.5477 & 0.8086 & 0.2151 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Ambas matrices tienen las mismas dimensiones debido a que en los dos casos a considerar hay tres voltajes de bus. De estas matrices se observa que las magnitudes del primer vector son iguales indicando que a la máxima variación se obtiene el mismo tipo de salida, la magnitud de los voltajes está establecida con la ganancia máxima correspondiente al máximo valor singular.

De estas matrices se observa que en el primer vector el que presenta mayor variación es el nodo dos lo que indica una mayor susceptibilidad a distorsiones, estableciendo el nodo dos como nodo sensor. De lo anterior se puede decir que sin importar la representación con la que se haya modelado el sistema al considera los mismos parámetros, ya que es el mismo circuito, se obtiene el mismo resultado.

En estos dos casos el valor singular mayor es el que hace la mayor aportación al sistema debido a que hay un diferencia considerable entre los dos primeros valores singulares con lo que se puede

hacer una aproximación de cada una de las matrices considerando solamente es valor con sus respectivos vectores de entrada y salida por medio de la ecuación (2.39).

Tomando en cuenta sistema cuadrado dado por la matriz  $Z_{nodo}$  se tiene una matriz simétrica cuya descomposición en valores singulares se muestra en (3.17) de las matrices de entrada y salida se puede obtener su magnitud:

$$|U_z| = \begin{bmatrix} 0.5598 & 0.1631 & 0.8124 \\ 0.6218 & 0.5654 & 0.5420 \\ 0.5477 & 0.8086 & 0.2151 \end{bmatrix} \quad |V_z| = \begin{bmatrix} 0.5598 & 0.1631 & 0.8124 \\ 0.6218 & 0.5654 & 0.5420 \\ 0.5477 & 0.8086 & 0.2151 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Se puede ver que son las mismas matrices en magnitud pero no en dirección, esto se debe a que la matriz  $Z_{nodo}$  es simétrica lo cual representa que la salida del bus  $i$  debido a la entrada en el bnodo  $j$  es igual a la salida del nodo  $j$  debido a la entrada en el nodo  $i$  para  $i \neq j$ , por lo tanto el comportamiento en magnitud de las entradas y las salidas debido a una cierta ganancia es la misma siempre y cuando se analice una matriz simétrica.

Por medio de SVD de una matriz que relacione corrientes como entradas y voltajes como salidas se puede determinar el nodo sensor, sin embargo se estableció que el análisis del sistema se puede conocer a partir de  $Y_{nodo}$  para los casos en que la ubicación de las entradas no esté del todo definida o cuando esta matriz no sea invertible.

Como la matriz  $Y_{nodo}$  se obtiene de manera directa y a partir de ella se obtiene  $Z_{nodo}$  se puede obtener SVD de ambas para conocer sus similitudes de manera que con en análisis de  $Y_{nodo}$  se obtenga información de  $Z_{nodo}$ . Para poder obtener los valores singulares se requiere que sean matrices constantes por lo que están evaluadas en  $\omega_1 = 10017$  rad/s, donde la matriz  $Z_{nodo}$  se muestra en la ecuación (3.16) y la matriz  $Y_{nodo}$  en la ecuación (3.20).

Para observar mejor las variaciones de cada matriz se obtienen los valores absolutos correspondientes a las magnitudes:

$$|Ye| = \begin{bmatrix} 15.8942 & 9.9337 & 4.9668 \\ 9.9337 & 8.9430 & 0 \\ 4.9668 & 0 & 5.0772 \end{bmatrix} \quad |Ze| = \begin{bmatrix} 50.8936 & 56.5314 & 49.7875 \\ 56.5314 & 62.8026 & 55.3028 \\ 49.7875 & 55.3028 & 48.7239 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Entre estas dos matrices la relación está dada por la inversa por lo que se tiene el mismo resultado si primero se evalúa  $Y_{nodo}$  para obtener  $Ye$  y luego invertirla obteniendo  $Ze$ , que invertir  $Y_{nodo}$  para conocer  $Z_{nodo}$  y evaluarla a una frecuencia para tener  $Ze$ .

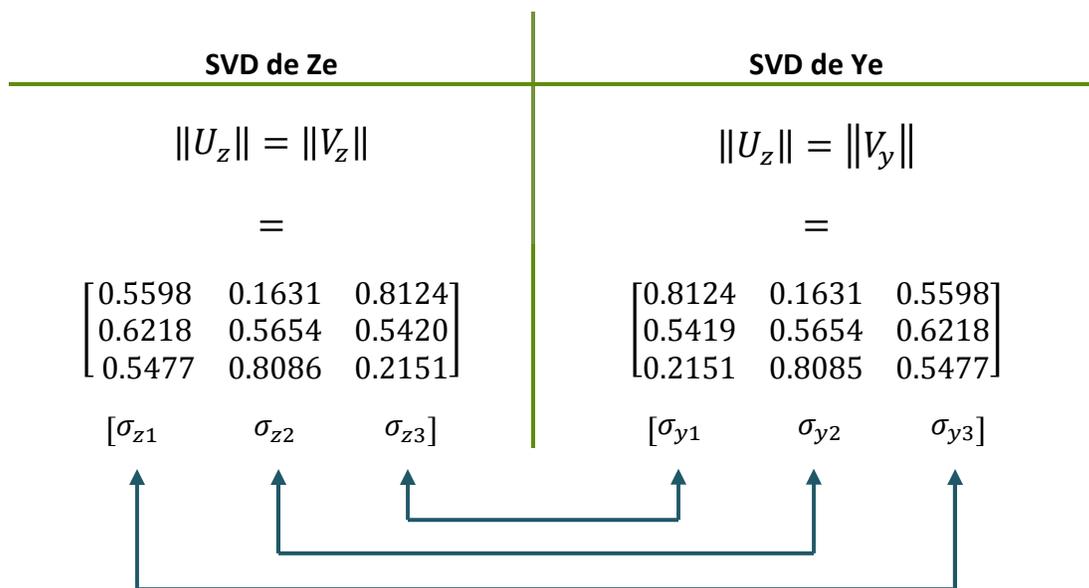
Una vez obtenidas las matrices constantes se puede obtener la descomposición en valores singulares de ambas por medio de las ecuaciones,  $Ye = U_y \Sigma_y V_y^H$  y  $Ze = U_z \Sigma_z V_z^H$  como se muestra en las ecuaciones (3.17) y (3.21), respectivamente.

Entre estas matrices hay una relación directa que para observarla más claramente se obtienen las magnitudes de cada una de ellas:

$$\begin{aligned}
 |U_y| &= \begin{bmatrix} 0.8124 & 0.5598 & 0.1631 \\ 0.5419 & 0.6218 & 0.5654 \\ 0.2151 & 0.5477 & 0.8085 \end{bmatrix} & |U_z| &= \begin{bmatrix} 0.5598 & 0.8124 & 0.1631 \\ 0.6218 & 0.5419 & 0.5654 \\ 0.5477 & 0.2151 & 0.8085 \end{bmatrix} \\
 \Sigma_y &= \begin{bmatrix} 23.8354 & 0 & 0 \\ 0 & 6.0787 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0062 \end{bmatrix} & \Sigma_z &= \begin{bmatrix} 162.4017 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1645 & 0 \\ 0 & 0 & 0.042 \end{bmatrix} \\
 |V_y| &= \begin{bmatrix} 0.8124 & 0.5598 & 0.1631 \\ 0.5419 & 0.6218 & 0.5654 \\ 0.2151 & 0.5477 & 0.8085 \end{bmatrix} & |V_z| &= \begin{bmatrix} 0.5598 & 0.8124 & 0.1631 \\ 0.6218 & 0.5419 & 0.5654 \\ 0.5477 & 0.2151 & 0.8085 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

En estas matrices se tiene que la magnitud de las matrices de entrada y salida es exactamente la misma para cada descomposición. Además se observa que el inverso de los valores singulares  $\Sigma_y$  corresponden a los valores singulares  $\Sigma_z$ , lo que indica que el valor singular menor de  $Y_{nodo}$  corresponde al valor singular mayor de  $Z_{nodo}$ , esto explica que si el valor singular menor hace la mayor aportación al sistema corresponda a la máxima ganancia del sistema.

Entre la descomposición en valores singulares de  $Y_{nodo}$  y la de  $Z_{nodo}$  hay una relación directa en las magnitudes de las matrices, en (3.46) se observó que para matrices simétricas las magnitudes de las matrices de entradas y de salidas son iguales, por lo que esta misma relación se cumple para su matriz inversa, además entre estas hay una relación tomando en cuenta que cada vector está asociado a su respectivo valor singular.



Con esto se puede observar que el vector asociado al valor más representativo que es el aporta más al sistema, indica el nodo sensor en el punto donde la magnitud es máxima. De la tabla anterior se observa que este vector es:

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 0.5598 \\ 0.6218 \\ 0.5477 \end{bmatrix} \text{ Con lo que la magnitud máxima es la del nodo 2, estableciendo así el nodo sensor.}$$

c) **La última consideración relevante para completar el método es que el nodo sensor es el adecuado:** Se han establecido las diferentes maneras de encontrar el nodo sensor donde, como se observó en la sección 3.2, puede darse el caso en que haya más de uno por lo que se tiene que determinar con un análisis complementario cuál es el adecuado. Una vez establecido este nodo es recomendable verifica que el compensador beneficie al sistema por medio de la condicionalidad del sistema.

Para el caso 3.1 la condicionalidad del sistema considerando el sistema rectangular no compensado y con el compensador es:

$$\gamma_h = \frac{\bar{\sigma}}{\underline{\sigma}} = \frac{134.5718}{0.1615} = 833.2619 \quad \rightarrow \quad \gamma_{hc} = \frac{\bar{\sigma}}{\underline{\sigma}} = \frac{2.0171}{0.1715} = 11.7615$$

En este caso se observa que al colocar un compensador representado como una impedancia capacitiva colocada en el bus 2 del circuito mejor significativamente, indicando que se pudo mejorar el sistema a la frecuencia donde se presenta una mayor variación de voltajes. Este valor puede variar dependiendo del valor del capacitor como compensador, en este caso se consideró como unitario agregando una unidad en la parte imaginaria del elemento del nodo sensor.

De esta manera se tienen resueltos los tres puntos importantes a considerar para determinar el mejor punto de conexión de un compensador basado en un análisis matemático donde lo relevante es analizar su interpretación física.

# Conclusiones

---

---

## 4.1 Conclusiones

Un sistema eléctrico de potencia cuando está en operación está expuesto a grandes y pequeñas perturbaciones externas, por ello el sistema responde a ellas modificando las variables de estado del mismo. Una manera de eliminar estas distorsiones es por medio de la colocación de dispositivos que ayuden a mejorar el comportamiento de la red.

En particular estos compensadores son FACTS, Sistemas Flexibles de Transmisión de Corriente Alterna. Estos dispositivos ofrecen una oportunidad para mejorar controlabilidad, estabilidad y capacidad de transferencia de potencia de sistemas de transmisión de CA. Sin embargo para poder utilizar FACTS como compensadores dentro de un sistema de potencia es necesario tomar en cuenta que tipo de FACTS se debe instalar, donde es el mejor punto para colocarlo y cuánta capacidad de transferencia de potencia debe tener. Este trabajo se enfocó en conocer cuál es el mejor punto para colocar estos dispositivos en un sistema de potencia.

El método está basado en un análisis matemático que contempla tres aspectos fundamentales:

**a. Caracterizar el sistema:** es necesario obtener el modelo del sistema de potencia que se puede representar como un circuito eléctrico, donde las variables independientes son las corrientes de bus que representan las cargas no lineales del sistema y las variables dependientes son los voltajes de bus para observar donde se presenta las máximas variaciones. El modelo del sistema se obtiene por medio del análisis de redes de circuitos eléctricos para obtener la ecuación de nodos.

**b. Encontrar nodos sensores:** con el modelo obtenido se aplica descomposición en valores singulares para matrices cuadradas y no cuadradas para observar el valor singular más representativo del sistema de manera que su vector asociado indica en qué punto se tiene una mayor magnitud con lo que se puede decir que es el nodo que presenta mayor variación ante distorsiones, por lo que al colocar un elemento ajeno al sistema en ese nodo, ayuda a que compense más que si se coloca en otro nodo.

**c. Colocar el compensador:** una vez determinado el nodo sensor, se coloca el compensador en ese punto el cual se representa de la misma manera en que se consideró el modelo del sistema es decir con los parámetros invariantes, por lo que en el caso de FACTS se modela como una impedancia dependiendo del sistema. De esta manera se verifica que la condicionalidad del sistema mejora notoriamente mejorando las propiedades del sistema.

Basado en estos puntos y con ayuda de herramientas matemáticas enfocadas en análisis de sistemas multivariados se determinó un método sistemático de 5 pasos simples que defina donde y porqué es adecuado colocar un compensador en ese punto:

1. Obtener la matriz de admitancias de nodo  $Y_{nodo}$
2. Determinar la matriz de transferencia:
  - a. Matriz de transferencia de nodo  $H_n$
  - b. Matriz de transferencia impedancias  $Z_{nodo}$
3. Determinar frecuencias de interés.
4. Obtener descomposición en valores singulares de la matriz  $Y_{nodo}$ 
  - a. Obteniendo descomposición en valores singulares de  $Z_{nodo}$
5. Verificar condicionalidad:
  - a. Condicionalidad el sistema sin compensador
  - b. Condicionalidad el sistema con compensador

En específico a partir de SVD de  $Y_{nodo}$  se puede encontrar el nodo sensor, y sólo cuando no aporte información definitiva se puede realizar descomposición en valores singulares de  $Z_{nodo}$ . Estos métodos se aplican a una matriz constante por lo que también se determinó la manera de encontrar la frecuencia indicada para evaluar la matriz siendo aquella en la que el sistema presenta mayor amplitud indicando más sensibilidad del mismo, para ello se determinó que la gráfica de valores singulares no sólo indica esos puntos, además provee información acerca de las frecuencias donde la condicionalidad del sistema no es adecuada e incluso donde se presentan grandes reducciones o amplificaciones en las salidas del sistema, una de las principales ventajas de esta gráfica es que da información del sistema MIMO por lo que se conoce el comportamiento del sistema para diferentes valores de frecuencia e incluso aún cuando  $Y_{nodo}$  no sea invertible a partir de su análisis se puede conocer la frecuencia de interés.

En general se puede decir que hay dos maneras de obtener la magnitud máxima del vector de voltajes de nodo que indica el nodo sensor del sistema, por medio de descomposición en valores singulares utilizando un sistema rectangular  $H_n$ , o a partir del análisis de la matriz simétrica  $Y_{nodo}$  sin embargo es necesario establecer las diferencias entre ambas.

Analizando el aspecto matemático las principales diferencias son:

- Puede darse el caso en que la matriz  $Y_{nodo}$  no sea invertible debido a los valores de los parámetros y la frecuencia de interés, por lo que no se puede analizar  $Z_{nodo}$  y mucho menos obtener una submatriz  $H_n$ , por lo que por medio del análisis de  $Y_{nodo}$  se obtiene el valor singular más representativo y, con su respectivo vector de salidas asociado, se observa que la mayor magnitud indica el nodo sensor.

- Al analizar la matriz de admitancias de nodo se deja parcialmente a un lado la ubicación y características de las entradas del sistema, presentando una ventaja para el caso no se conozca con exactitud el comportamiento de las mismas, mientras que al analizar la matriz de transferencia de nodo esta información sí es relevante debido a que se muestra con exactitud la ubicación de cada una de las entradas.
- Si se tiene una representación con diferente número de entradas que de salidas sólo se puede analizar por descomposición en valores singulares, donde la información que se tiene es, además de las ganancias del sistema, el comportamiento tanto de las entradas como de las salidas por lo que define de manera más adecuada como se deben colocar las entradas para obtener un tipo específico de salida, es decir se maneja la direccionalidad. Sin embargo las entradas consideradas en este análisis representan las cargas no lineales reales que se tienen en los sistemas de potencias por lo que en la mayoría de los casos no es posible modificarlas.

Es recomendable realizar la descomposición en valores singulares para  $Y_{nodo}$  e incluso para  $H_n$  en caso de que haya dificultad al interpretar los resultados como ocurrió en 3.2 donde por éste método se encontró más de un nodo sensor, para tener un mayor conocimiento acerca del comportamiento de todo el sistema se puede realizar SVD de  $Z_{nodo}$  donde se observa que su análisis corresponde a los obtenido con su matriz inversa.

El método se realiza con un sistema lineal manejando herramientas matemáticas lineales, con lo que se puede decir que el método es adecuado para colocar cualquier tipo de compensador siempre y cuando éste tenga una representación acorde al modelo manejado y al funcionamiento del mismo compensador, por ejemplo al utilizar FACTS se consideran como impedancias agregadas al sistema, pero al utilizar filtros activos para compensar armónicos de corriente se consideran como otra entrada que inyecta corriente.

Por lo tanto se puede afirmar que se encontró un método sistemático que permite determinar cuál es el mejor punto para colocar un compensador teniendo la flexibilidad de que con las mismas herramientas matemáticas hay diferentes maneras de encontrarlo, indicando que no solo se pueden colocar FACTS sino diferentes compensadores fomentando el uso de este tipo de dispositivos para mejorar en diferentes aspectos el funcionamiento de sistemas de potencia.

## 4.2 Trabajo futuro

En este trabajo se determinó un método sistemático que permite determinar el mejor punto de conexión de un compensador el cual está basado en un análisis lineal donde se modela el sistema por medio de análisis de circuitos eléctricos y a partir de éste con herramientas de sistemas multivariables se conoce el punto donde la variación es mayor.

A partir de ello se puede extender esta aportación considerando otro tipo de sistemas de potencia específicamente sistemas de transmisión trifásicos desbalanceados, donde el modelo no se puede determinar a partir de representaciones unifilares, sin embargo el método empleado en este trabajo es una guía para determinar el nodo sensor en ese tipo de sistemas, en donde se modela el sistema con un conjunto de ecuaciones lineales conociendo los parámetros invariantes de la red, estas ecuaciones se pueden expresar en términos de la frecuencia para conocer donde se presentan más variaciones, con esta información y con en análisis de sistemas multivariables se puede determinar el nodo sensor indicado para colocar el compensador.

El método que se planteó en este trabajo se aplica a un sistema lineal e invariante en el tiempo donde los parámetros invariantes del sistema son los que se analizan para obtener el nodo sensor, por lo que se puede decir que las características físicas del sistema son las que causan las variaciones propias de la red. Sin embargo el análisis de sistemas no siempre se puede hacer por medio de modelos lineales, por lo que se requiere de un modelo que además de conocer los parámetros invariantes del sistema también se conozcan los parámetros variantes como flujos de potencia y cambios en la fase del voltaje.

Atendiendo lo anterior, el sistema se puede representar por medio de una matriz Jacobiana que de información acerca de las variaciones en los voltajes debido a los cambios en la potencia:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \delta} & \frac{\partial P}{\partial V} \\ \frac{\partial Q}{\partial \delta} & \frac{\partial Q}{\partial V} \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix}$$

donde  $P$  es la potencia activa,  $Q$  es la potencia reactiva,  $V$  son las magnitudes del voltaje de nodo,  $\delta$  es la fase de los voltajes de nodo, de manera que la matriz Jacobiana relaciona las variaciones de las potencias respecto a las fases y magnitudes de voltaje de manera que se pueda observar el cambio de la fase y magnitud del voltaje cuando varían los flujos de potencia.

De esta manera se puede encontrar el nodo sensor realizando la descomposición en valores singulares de la matriz Jacobiana donde se tiene que escoger un parámetro a evaluar para obtener una matriz constante, sin embargo en estos casos es difícil establecer este parámetro fijo con lo que también se puede conocer la variación de valor singular máximo al modificar algún parámetro de la

matriz Jacobiana, el cual directamente puede ser impedancias o admitancias que representan el compensador a colocar:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial r} = u_1 \left( \frac{\partial J}{\partial r} \right) v_1^H$$

Donde  $u_1$  y  $v_1$  son los vectores de salida y entrada respectivamente asociados al máximo valor singular y  $r$  es el parámetro a modificar dentro de la matriz Jacobiana para determinar la variación de  $\bar{\sigma}$  con respecto  $r$ . De esta manera se puede determinar el valor de  $\bar{\sigma}$  donde la condicionalidad del sistema sea la más adecuada aún con el compensador colocado.

De esta manera se puede decir que el trabajo realizado muestra una guía para determinar el método que determine el punto de selección de FACTS en sistemas de potencia, el cual se puede ampliar de manera que permita conocer otros aspectos dentro del funcionamiento de este tipo de sistemas.

---

# Apéndice

---

Los cálculos realizados en este trabajo se obtuvieron con ayuda del software `Matlab` versión 7, el cual contiene comandos básicos de matemáticas y de control que facilitan la obtención de resultados numéricos.

Dentro de los cálculos es necesario obtener cada una de las matrices de transferencia, de impedancia, de admitancia y de nodo. También se determina el comportamiento en la frecuencia de cada uno de los elementos de estas matrices o por medio de la gráfica de valores singulares. Conocido el valor de la frecuencia más representativa se evalúa en las matrices de transferencia para obtener una matriz constante, a partir de ella se puede obtener su descomposición en valores singulares. Todo el procedimiento puede ser programado en `Matlab` mediante un archivo con extensión `.m`

Para este trabajo se realizaron dos tipos de programas:

- Las matrices de transferencia se declaran a partir de las admitancias primitivas al declara una variable '`s`' que representa la variable de Laplace, para obtener las funciones de transferencia de la matriz  $Y_{bus}$  expresadas como una función de polinomios, de esta manera se puede sustituir directamente '`s`' por '`j $\omega$` ' para conocer la magnitud de los voltajes a diferentes valores de frecuencia.
- Cada admitancia primitiva se declara como una función de transferencia de manera que  $Y_{bus}$  ya está definida como un sistema MIMO donde cada uno de sus elementos están declarados como funciones de transferencia y así obtener la gráfica de valores singulares.

Para el circuito de la figura 3.1 el código del primer programa es el siguiente:

## `% Programa para el análisis del circuito de la figura 3.1`

```
syms s
```

```
% valores de las admitancias
```

```
yp1=1/(0.001+s*0.1e-3);  
yp2=1/(100+s*10e-3);  
yp3=(s*100e-6)/(1+(1e-7)*s^2);  
yp4=1/(0.01+s*0.01e-3);  
yp5=1/(0.02+s*0.02e-3);  
yp6=s*100e-6;
```

Se declara una variable '`s`' que representa la variable de Laplace.

Se definen cada una de las admitancias primitivas del sistema.

```
% matriz primitiva de admitancias
yp=diag([yp1, yp2, yp3, yp4, yp5, yp6]);
```

A partir de las admitancias se forma la matriz primitiva de la ecuación (3.9).

```
% matriz de incidencia de nodo
Anodo=[-1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 -1 0; 1 0 -1; 0 1 0];
```

Se declara la matriz de incidencia de nodo definida en (3.2)

```
% matriz de admitancias de nodo
Ynodo=Anodo'*yp*Anodo;
```

Con la ecuación (2.13) se obtiene la matriz de admitancias de nodo  $Y_{nodo}$

```
% matriz de impedancias de nodo
Znodo=inv(Ynodo);
```

La matriz de impedancias de nodo  $Z_{nodo}$  se obtiene de invertir  $Y_{nodo}$ .

Una alternativa para programar la matriz de admitancias de nodo es escribirla directamente de la ecuación (3.10) donde se sabe que la diagonal principal tiene la suma de las admitancias incidentes a cada nodo y los elementos restantes son las admitancias comunes entre cada par de nodos con signo negativo, de cualquier forma es necesario declarar cada una de las admitancias primitivas.

```
Ynodo=[yn1+yn4+yn5  -yn4  -yn5;
        -yn4  yn2+yn4+yn6  0;
        -yn5  0  yn3+yn5];
Znodo=inv(Ynodo);
```

Matriz de admitancias de nodo declarada como suma de admitancias primitivas, donde su inversa corresponde a la matriz de impedancias de nodo.

De esta manera se obtiene la matriz de admitancias de nodo donde cada uno de sus elementos está representado por una función racional de polinomios. A partir de ella se puede sustituir la variable ' $s$ ' por ' $j\omega$ ' donde  $\omega$  es un conjunto de valores que indican la frecuencia en rad/s y así obtener la respuesta en frecuencia de cada uno de los elementos de  $Z_{nodo}$ .

```
% matriz de entradas
E=[0 1 0; 0 0 1];
```

Se declara la matriz de Entradas que indica donde se encuentran las fuentes de corriente para conocer el comportamiento del sistema de la figura (3.6)

```
% matriz de transferencia de nodo
Hn=Znodo*E';
```

Se obtiene la matriz de transferencia de nodo.

```
% Vector de frecuencias
w=200:13000;
```

Se declara el vector de frecuencias  $\omega$

### % Elementos de la matriz Hn

```
Hn11=subs(Hn(1,1),s,j*w);  
Hn21=subs(Hn(2,1),s,j*w);  
Hn31=subs(Hn(3,1),s,j*w);  
Hn12=subs(Hn(1,2),s,j*w);  
Hn22=subs(Hn(2,2),s,j*w);  
Hn32=subs(Hn(3,2),s,j*w);
```

### % Gráficas de la matriz Hn

```
plot(w,Hn11)  
plot(w,Hn21)  
plot(w,Hn31)  
plot(w,Hn12)  
plot(w,Hn22)  
plot(w,Hn32)
```

A cada uno de los elementos de la matriz Hn se renombra cuando se sustituye la variable ' $s$ ' por ' $j\omega$ ' con el comando <subs> donde se indica la función a evaluar (Hn(1,1)), el término a sustituir ( $s$ ) y el término por el que sustituye ( $j\omega$ ). Se renombran para identificar que ya están evaluados a cierta frecuencia.

Se grafican cada uno de los elementos matriz de transferencia de nodo para cada valor de  $\omega$ , así se puede conocer el comportamiento en la frecuencia de cada uno de los voltajes de nodo debido a cada una de las fuentes de corriente cuyas gráficas corresponden a las columnas 2 y 3 de la figura (3.8).

El mismo procedimiento se sigue para el sistema de la figura (3.6) donde la variable ' $s$ ' de  $Z_{nodo}$  se sustituye por ' $j\omega$ ' para cada uno de sus elementos, definiendo previamente la frecuencia  $\omega$ , obteniendo así las 9 gráficas de la figura (3.8).

A partir de estas gráficas se puede escoger la frecuencia de interés donde se recomienda aquella donde la amplitud es mayor, es decir la frecuencia de resonancia. Conocido este valor sustituye en la matriz de transferencia de nodo para obtener una matriz constante y así determinar su descomposición en valores singulares.

### % Matrices de impedancia y admitancia evaluadas en w=10017

```
Ye=subs(Ynodo,s,j*10017);  
Ze=inv(Ye);
```

De la matriz de admitancias de nodo se sustituye la variable ' $s$ ' por ' $j\omega$ ' donde  $\omega = 10017$ , determinada previamente, obteniendo una matriz constante  $Ye$ . La matriz de impedancias se determina invirtiendo  $Ye$ .

### % Matriz de transferencia de nodo evaluada en w=10017

```
He=subs(Hn,s,j*10017);
```

De igual manera se puede obtener la matriz constante de  $H_n$  si se sustituye la frecuencia correspondiente.

### % SVD de Ye

```
[Vy,Ly]=eig(Ye);
```

Con el comando <svd> se obtienen las matrices de direcciones de entradas y salidas, y la de valores singulares de  $Ye$ .

### % SVD de Ze y He

```
[UZ,SZ,VZ]=svd(ze);  
[UH,VH,VH]=svd(Hn);
```

Con el comando <svd> se obtienen las matrices de la descomposición en valores singulares ya sea de la matriz  $He$  o de  $Ze$ .

Con este código, ya sea en un sólo programa o en varios, se pueden determinar los cálculos necesarios para conocer el comportamiento del sistema. Al ejecutar el programa, se obtienen tanto las gráficas como cada una de las matrices las cuales se pueden observar de manera explícita en el espacio de trabajo de `Matlab`.

Para obtener la gráfica en valores singulares es necesario que el sistema esté declarado mediante una representación de sistemas lineales invariantes en el tiempo, como funciones de transferencia, variables de estado o como datos en respuesta en frecuencia. Para este trabajo la manera más directa es declararlos como funciones de transferencia. Sin embargo `Matlab` no permite algunas operaciones para un sistema MIMO cuando el sistema está establecido con las condiciones anteriores por lo que es necesario determinar los cálculos necesarios a partir de las operaciones que el software permite. El código a seguir es el siguiente:

### % Programa para obtener la gráfica de valores singulares del sistema de la figura 3.1

#### % FT para cada admitancia

```
yp1=tf([1],[0.1e-3 0.001]);
yp2=tf([1],[10e-3 100]);
yp3=tf([100e-6 0],[1e-7 0 1]);
yp4=tf([1],[0.01e-3 0.01]);
yp5=tf([1],[0.02e-3 0.02]);
yp6=tf([100e-6 0],[1]);
```

Se declara cada admitancia primitiva como una función de transferencia con el comando `<tf>`.

#### % Matriz primitiva de impedancias

```
yp=[yp1 0 0 0 0 0; 0 yp2 0 0 0 0; 0 0 yp3 0 0 0;
    0 0 0 yp4 0 0; 0 0 0 0 yp5 0; 0 0 0 0 0 yp6];
```

Se arma la matriz primitiva de admitancias declarando cada uno de los elementos. El comando `<diag>` no está definido para variables establecidas como `<tf>`

#### % matriz de incidencia de nodo

```
Anodo=[-1 0 0; 0 1 0; 0 0 1; 1 -1 0; 1 0 -1; 0 1 0];
```

Se declara la matriz de incidencia de nodo

#### % matriz de admitancias de nodo

```
Ynodo=Anodo'*yp*Anodo;
```

Se obtiene la matriz de admitancias de nodo  $Y_{nodo}$

Con la matriz  $Y_{nodo}$  se pueden obtener los valores singulares de la matriz  $Z_{nodo}$ , como se estableció anteriormente, pero para graficarlos se puede hacer de dos maneras. La primera es graficar los valores singulares de  $Y_{nodo}$  e invertir la gráfica de manera que se observe el comportamiento del sistema y las frecuencias más relevantes, sin embargo de esta manera no se obtiene explícitamente cada valor singular, para ello se tiene que graficar los valores singulares de  $Z_{nodo}$ , la cual no puede ser obtenida directamente de invertir la matriz debido a que el comando `<inv>` no está definido para sistemas MIMO, la segunda manera es declarar  $Z_{nodo}$  a partir de cada

uno de los elementos de la matriz  $Y_{nodo}$  donde se sabe que la inversa de una matriz es la adjunta e ésta entre el determinante.

```
% determinante YBus
det=(YBus(1,1))*(YBus(2,2))*(YBus(3,3))-
((YBus(1,2))^2)*(YBus(3,3))-
((YBus(1,3))^2)*(YBus(2,2));

% adjunta de YBus
zb11=(YBus(2,2))*(YBus(3,3));
zb12=(YBus(1,2))*(YBus(3,3));
zb13=(YBus(1,3))*(YBus(2,2));
zb21=(YBus(1,2))*(YBus(3,3));
zb22=(YBus(1,1))*(YBus(3,3))-(YBus(1,3))^2;
zb23=(YBus(1,2))*(YBus(1,3));
zb31=(YBus(1,3))*(YBus(2,2));
zb32=(YBus(1,2))*(YBus(1,3));
zb33=(YBus(1,1))*(YBus(2,2))-(YBus(1,2))^2;

% matriz de transferencia ZBus
ZBus=(1/det)*[zb11 zb12 zb13; zb21 zb22 zb23;
zb31 zb32 zb33];

% Gráfica de valores singulares
sigma(ZBus)
sigma(YBus)
```

Se declara el determinante de la matriz  $Y_{nodo}$

Se nombran cada uno de los elementos de la matriz adjunta de  $Y_{nodo}$

Se obtiene la matriz  $Z_{nodo}$  dividiendo la matriz adjunta entre el determinanr

Con el comando <sigma> se obtienen las gráficas e los valores singulares de  $Z_{nodo}$  y  $Y_{nodo}$ , donde se observa que una es inversa a la otra.

Siguiendo los algoritmos anteriores se puede observar el comportamiento de la red, gráfica y numéricamente, por lo que de la misma manera se realiza un programa similar para el circuito de la Figura 3.12 en donde se declaran 27 elemento, una matriz de incidencia de nodo de  $27 \times 15$  se puede obtener SVD, descomposición y gráficas de valores singulares.

---

# Bibliografía

---

- [1] Luis T. Morán, José J. Mahomar, Juan R. Dixon. *Careful Connection, Selecting the best point of connection for shunt Active Power Filter in multibus power distribution systems*. IEEE Industry Applications Magazine, Mar-Apr 2004, pp 43-50.
- [2] Gamm Alexandr Z., Golub Irina I. *Determination of Locations for FACTS and Energy Storage by the Singular Analysis*. Proceedings of International Conference on Power System Technology, POWERCON '98. Vol. 1, 18-21 August 1998, pp. 411- 414.
- [3] Gamm Alexandr Z., Golub Irina I., Bachry A., Styczynski Z.A. *Solving Several Problems of Power Systems Using Spectral and Singular Analyses*. IEEE Transactions on Power Systems. Vol. 20, February 2005, pp. 138- 148.
- [4] Bachry A., Styczynski Z. A. *A Method for a Sensitivity Analysis of the Distribution System to Harmonic Distortion*. IEEE, 10<sup>th</sup> International Conference on Harmonics and Quality of Power. 2002 Vol. 1, pp. 149-154.
- [5] Sigurd Skogestad, Ian Postlethwaite. *MULTIVARIABLE FEEDBACK CONTROL, Analysis and design*. Jhon Wiley & Sons. 1996
- [6] Pedro Albertos, Antonio Salas. *Multivariable Control Systems*. Ed. Springer. 1996
- [7] Desoer Charles A., Khu Ernest S. *Basic circuit Theory*. McGraw-Hill. 1969
- [8] G. W. Stagg. *Computer methods in power system analysis*. McGraw-Hill. 1971
- [9] Yong Hua Song, Allan T. John . *Flexible ac transmissions systems (FACTS)*. IET. 1999
- [10] Harper Enriquez. *Sistemas de Transmisión y Distribución de Potencia Eléctrica*. Limusa. 2007
- [11] Ongsakul W., Jirapong P. *Optimal Allocation of FACTS Devices to Enhance Total Transfer Capability Using Evolutionary Programming*. IEEE, International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS 2005. 23-26 May, 2005. Vol. 5, pp. 4175-4178.
- [12] Mahdad B., Bouktir T. *Strategy of Location and Control of FACTS Devices for Enhancing Power Quality*. IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference. May 2006, pp. 1068-1072
- [13] Rubio M. Omar. *Cálculo se Sensibilidades en Sistemas Eléctricos con Dispositivos SIFLETCA*. Instituto Tecnológico de Morelia. Marzo 2004