UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

EJEMPLOS EN TEORÍA DE LA DIMENSIÓN

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

P R E S E N T A
JUAN GABRIEL HERRERA ALVA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ALEJANDRO ILLANES MEJÍA

MÉXICO, D.F. **JUNIO 2009**

Ejemplos en Teoría de la Dimensión

Juan Gabriel Herrera Alva

Junio de 2009

Ejemplos en Teoría de la Dimensión

Juan Gabriel Herrera Alva

Junio de 2009

Índice general

Dedicatoria

Este trabajo lo dedico a mi familia, mis amigos y a todos los que han creido en mí, gracias.

Introducción

La definición de la dimensión de un espacio topológico está dada de manera inductiva en términos de la frontera de algunas vecindades básicas.

Como la propiedad de ser un punto frontera de un conjunto es un invariante topológico, se desprende fácilmente que, los homeomorfismos preservan la dimensión del espacio, es decir, la dimensión de un espacio es una propiedad topológica.

Esta forma de definir la dimensión de un espacio topológico es conocida como dimensión small. Existen otras definiciones de dimensión como lo son la definición mediante cubiertas abiertas y otra que se basa en vecindades cerradas conocida como dimensión large. En este trabajo sólo nos ocuparemos de la definición small de un espacio topológico. Esto porque en cierta forma es la definición más natural, ya que con las otras definiciones podemos encontrar subespacios de dimensión mayor que la del propio espacio [4 ,Ejemplo 3.1, p. 161], lo cual rompe con nuestra intuición. Uno de los resultados más importantes en la teoría clásica de la dimensión es que en espacios métricos separables las tres dimensiones coinciden.

En este trabajo nos planteamos como objetivo calcular la dimensión de los ejemplos de la publicación “Counterexamples in Topology” de Lynn Arthur Steen y J. Arthur Seebach, Jr. Esta publicación cuenta con 143 ejemplos. En cada ejemplo se enumeran varias propiedades topológicas que satisface o no, como lo son la compacidad, la conexidad, los axiomas de separación, entre otras. A saber de la dimensión, la publicación sólo responde a los espacios cero dimensionales. Argumenta (y en algunos casos sin desarrollo) cuándo un ejemplo satisface tener dimensión cero. La idea de este material es justificar con mayor detalle esas pruebas, y en caso de que el ejemplo no sea cero dimensional, agregarle como una nueva propiedad la dimensión que resulta tener. En otras palabras, el cálculo de la dimensión de estos ejemplos es la aportación de este trabajo.

No nos fue posible calcular la dimensión de cinco ejemplos y uno más sólo lo pudimos desarrollar de forma parcial, esto es, aumentando las hipótesis del ejemplo. Estos ejemplos son los siguientes: el Ejemplo 34 (La Compactación por un Punto de un espacio arbitrario con una topología arbitraria) se resolvió aumentando la hipótesis de que el espacio debe ser métrico separable. Los Ejemplos 60 y 61 (Los Números Enteros con la topología de los Números Primos Relativos y Los Números Enteros con la topología de los Números Primos) presentan un comportamiento caótico en la frontera de sus vecindades básicas, el cual no pudimos descifrar. El Ejemplo 92 (El Sacacorchos Condensado de Hewitt) tiene una topología muy rebuscada y difícil de entender. El Ejemplo 110 (Compactación de Stone-Čech de un espacio arbitrario con una topología arbitraria) resultó ser un ejemplo muy general y sólo lo pudimos resolver para los espacios discretos. Por último el Ejemplo 136 (El Espacio de Duncan) presenta una estructura muy compleja.

El estudio de estos seis ejemplos se complicó demasiado, debido en unos casos a la dificultad que presentan sus estructuras topológicas y en otros, debido a la generalidad del ejemplo mismo, como es el caso de los Ejemplos 34 y 110; la generalidad de éstos hace sumamente difícil calcular sus dimensiones, pues éstas siempre dependen de quién es el espacio y qué topología tiene.

Sin embargo invertimos mucho tiempo para tratar de calcular la dimensión del Ejemplo 34 y sólo llegamos a que si X es un espacio métrico no vacío, localmente compacto y $\dim X = n$, entonces la dimensión de su compactación por un punto no aumenta, es decir, también es n.

Por otra parte, durante el desarrollo del trabajo surgió un detalle curioso, resultó que mi forma de percibir cómo estaba dada la topología de un ejemplo fue equivocada; la forma como la había entendido hacía que el espacio definido en ese ejemplo aumentara su dimensión en una unidad cada vez que se le agregaba un nuevo punto a éste. Obviamente, esto no correspondía a la dimensión real de ese ejemplo. Sin embargo, casualmente, esta forma equivocada de entender la topología de ese ejemplo sirvió como herramienta para demostrar la dimensión de varios ejemplos de este libro. Esta topología la llamamos la *Topología Anidada*.

Hubo varios ejemplos que me sorprendieron debido a que la dimensión que resultaron tener fue inesperada, pero ninguno como el Ejemplo 76 (La Topología del Diámetro Extraido) que consiste en tomar al plano coordenado y como básicos a todos los discos de $\mathbb{R}^2$ quitándoles su diámetro horizontal menos su centro. Como estos básicos son gordos y muy parecidos a la de la topología Euclidiana de $\mathbb{R}^2$ tratamos de demostrar que este ejemplo tenía dimensión 2, pero no fue así, el espacio inesperadamente resultó tener dimensión 1. La demostración fue una de las más largas e ingeniosas de este trabajo.

El trabajo está dividido en siete capítulos. En el primer capítulo abordamos los conceptos básicos (definiciones, teoremas y algunos resultados sin pruebas) de la teoría de la dimensión. No incluimos las pruebas de algunos de esos resultados debido a que se encuentran demostrados en el libro "Dimension Theory" de Nadler [5]. El lector solamente requiere tener conocimientos de topología general y un poco de teoría de continuos. Aparte de esto, prácticamente partimos de cero para el estudio de la dimensión de los ejemplos presentados.

Clasificamos a los ejemplos de la publicación de acuerdo a la dimensión que resultaron tener. En el segundo capítulo de este trabajo acomodamos a todos los ejemplos de dimensión 0 y los pusimos en el mismo orden que en la publicación "Counterexamples in Topology". Similarmente, en el tercer capítulo encontramos a todos los ejemplos que resultaron tener dimensión 1. En el cuarto capítulo encontramos a todos los ejemplos que resultaron tener dimensión 2. En el quinto capítulo encontramos a todos los ejemplos que resultaron tener dimensión n y también a los ejemplos de dimensión $n + 1$. En el sexto capítulo se encuentran a todos los ejemplos del libro que tienen dimensión infinita. Por último en el séptimo capítulo encontramos un ejemplo muy genérico (La Completación de Cauchy de un espacio cualquiera). Aquí mostramos mediante dos ejemplos particulares que no es posible determinar la dimensión en general de la Completación de Cauchy de un espacio cualquiera partiendo solamente de la dimensión original del espacio.

Damos por hecho que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la dimensión de $\mathbb{R}^n$ es n. Este resultado que se puede considerar como obvio, no lo es de ninguna manera, se requiere herramienta fuerte para probarlo. De hecho Nadler desarrolla nueve capítulos del libro "Dimension Theory" [5] para poder demostrarlo.

Muchos de los ejemplos se resolvieron de forma inmediata con la aplicación de los teoremas del primer capítulo de esta tesis y del libro "Dimension Theory" [5], sin embargo hubo muchos ejemplos con un alto grado de dificultad que sí pudimos resolver. El trabajo me resulta agradable por la diversidad de ejemplos con los que cuenta. Finalmente, espero que para el lector le resulte entretenido.

Parte I

Teoremas sobre Teoría de la Dimensión

Capítulo 1

Dimensión, Definiciones y Teoremas

En este capítulo enunciamos los teoremas y definiciones de la teoría de la dimensión que son necesarios para el desarrollo de este trabajo. Cabe mencionar que las definiciones de los conceptos topológicos básicos que aquí empleamos son tomadas del libro "Counterexamples in Topology" de Lynn Arthur Steen y J. Arthur Seebach, Jr..

1.1. Definiciones

Definición 1.1 *La dimensión de un espacio topológico X es -1 si y sólo si $X = \emptyset$.*

Definición 1.2 *Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Denotamos la dimensión de X en el punto p como $\dim_p X$.*

Definición 1.3 *Sean X un espacio topológico, $p \in X$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Decimos que $\dim_p X \leq n$ si y sólo si existe una base β de vecindades abiertas alrededor de p en X, tal que para cada $V \in \beta$, $\dim Fr(V) \leq n - 1$.*

Definición 1.4 *Decimos que $\dim X \leq n$ si y sólo si para todo $p \in X$, se tiene que, $\dim_p X \leq n$.*

Definición 1.5 *Decimos que* $\dim X = n$ *si y sólo si* $\dim X \leq n$ *y* $\dim X \nleq n-1$.

Definición 1.6 *Decimos que* $\dim_p X = n$ *si y sólo si* $\dim_p X \leq n$ *y* $\dim_p X \nleq n-1$.

Definición 1.7 *Decimos que* $\dim X = \infty$ *si y sólo si* $\dim X \nleq n$ *para toda* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definición 1.8 *Decimos que* $\dim_p X = \infty$ *si y sólo si* $\dim_p X \nleq n$ *para toda* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Teorema 1.9 *Sean* X *un espacio topológico no vacío y* $p \in X$. *Entonces* $\dim_p X = 0$ *si y sólo si* p *tiene una base de vecindades abiertas y cerradas en* X.

Demostración. Para demostrar la necesidad tomamos $p \in X$ tal que $\dim_p X = 0$. Entonces p tiene una base β de vecindades abiertas en X tal que, dada $V \in \beta$, $\dim Fr(V) = -1$, es decir, $Fr(V) = \emptyset$, de manera que $V = V \cup \emptyset = V \cup Fr(V) = Cl(V)$. Por tanto cada $V \in \beta$ es abierto y cerrado en X.

Para demostrar la suficiencia tomamos $p \in X$ y una base β de vecindades abiertas y cerradas alrededor de p en X. De manera que, para todo $V \in \beta$, $Fr(V) = \emptyset$, es decir, $\dim Fr(V) = -1$. Por tanto tenemos que $\dim_p X = 0$. ■

Corolario 1.10 *Sea* (X, τ) *un espacio topológico no vacío con* τ *diferente a la topología indiscreta y tal que* $\dim X = 0$, *entonces* X *no es conexo.*

Demostración. Como τ no es la topología Indiscreta, existe $U \in \tau$ tal que $U \neq \emptyset$ y $U \neq X$. Elegimos $p \in U$. Como $\dim_p X = 0$, existe una base de vecindades abiertas y cerradas alrededor de p. Tomemos entonces V abierto y cerrado en X tal que $p \in V \subset U$. Claramente V y $X - V$ forman una desconexión de X. Por tanto X no es conexo. ■

Corolario 1.11 *Sea (X, τ) un espacio topológico T_0 y no vacío tal que, para todo $p \in X$, se tiene que, $\dim_p X = 0$, entonces, X es un espacio completamente regular.*

Demostración. Sean $p \in X$ y $K \subset X$ un subconjunto cerrado tales que $p \notin K$. Sea $U = X - K$. Como $\dim_p X = 0$, podemos aplicar el Teorema 1.9 al punto p, y obtener que, existe una base de vecindades abiertas y cerradas alrededor de p en X. De manera que, existe un subconjunto abierto y cerrado V en X tal que $p \in V \subset U$. De aquí que, $K \subset X - V$.

Sea $f : X \to [0,1]$ definida por $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in V, \\ 1, & \text{si } x \in X - V. \end{cases}$

Claramente f es una función continua que satisface que $f(p) = 0$ y $f(K) = 1$, ya que para cualquier abierto H en $[0,1]$, tenemos que

$$f^{-1}(H) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } 0, 1 \notin H, \\ X, & \text{si } 0, 1 \in H, \\ V, & \text{si } 0 \in H \text{ y } 1 \notin H, \\ X - V, & \text{si } 0 \notin H \text{ y } 1 \in H. \end{cases}$$

Por lo tanto X es completamente regular.

Notemos que todo espacio completamente regular es regular. ■

Corolario 1.12 *Sea X un espacio topológico discreto y no vacío. Entonces* $\dim X = 0$.

Demostración. Como X es discreto, cada conjunto que consta de un solo elemento es abierto y cerrado en X, de manera que para cada $p \in X$, la familia $\{\{p\}\}$ es una base local en p. Por tanto, al aplicar el Teorema 1.9 a cada $p \in X$, tenemos que $\dim_p X = 0$, por lo tanto $\dim X = 0$. ■

Corolario 1.13 *Sea X un espacio topológico T_1, finito y no vacío, entonces* $\dim X = 0$.

Demostración. Como X es T_1, cada conjunto que consta de un solo elemento es cerrado en X, y como X es finito tenemos que cualquier unión de conjuntos de un solo elemento es cerrada en X, es decir cualquier subconjunto de X es cerrado, por consiguiente cada subconjunto de X también es abierto, por tanto X es discreto y por el corolario anterior, $\dim X = 0$. ■

Proposición 1.14 *Sean X un espacio topológico y A, B y C subconjuntos no vacíos en X tales que $A \subset B \subset C$ y $Fr(A) \cap Fr(C) \neq \emptyset$, entonces $Fr(B) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $q \in Fr(A) \cap Fr(C)$. Entonces, $q \in Fr(A)$ y $q \in Fr(C)$. Así que, para todo abierto H que contiene a q, se tiene que $H \cap A \neq \emptyset$, $H \cap (X - A) \neq \emptyset$, $H \cap C \neq \emptyset$ y $H \cap (X - C) \neq \emptyset$. Como $A \subset B$ y $X - C \subset X - B$, tenemos que $H \cap B \neq \emptyset$ y $H \cap (X - B) \neq \emptyset$. Por tanto, $q \in Fr(B)$. Así, $Fr(B) \neq \emptyset$. ■

Teorema 1.15 *Si $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia no vacía de espacios topológicos de dimensión cero, entonces $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ tiene dimensión cero.*

Demostración. Notemos que $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$. Por tanto $\dim X \neq -1$, es decir $\dim X \geq 0$.

Así que, para obtener la conclusión deseada, sólo basta probar que $\dim X \leq 0$.

Por definición $\dim X \leq 0$ si y sólo si $\dim_p X \leq 0$ para toda $p \in X$.

Sea $p \in X$ y sea U un abierto de X tal que $p \in U$, entonces existen $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, ...\lambda_k \in \Lambda$ y abiertos $U_{\lambda_1}, ..., U_{\lambda_k}$ de $X_{\lambda_1}, ..., X_{\lambda_k}$, respectivamente, tales que $p \in \bigcap_{i=1}^{k} \pi_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}) \subset U$, (donde $\pi_\lambda : X \to X_\lambda$ es la función proyección, para cada $\lambda \in \Lambda$). Observemos que $p_{\lambda_i} \in U_{\lambda_i}$ para toda $i = 1, ..., k$. Por hipótesis tenemos que para toda $\lambda \in \Lambda$, $\dim X_\lambda = 0$, lo que implica que $\dim_{p_{\lambda_i}} X_{\lambda_i} = 0$ para toda $i = 1, ..., k$. Sea $i \in \{1, ..., k\}$, aplicamos el Teorema 1.9 a X_{λ_i} y obtenemos que el punto p_{λ_i} tiene una base β_i de vecindades abiertas y cerradas en X_{λ_i}. Entonces $p_{\lambda_i} \in V_{\lambda_i} \subset U_{\lambda_i}$ para algún $V_{\lambda_i} \in \beta_i$. De manera que $p \in \bigcap_{i=1}^{k} \pi_{\lambda_i}^{-1}(V_{\lambda_i}) \subset \bigcap_{i=1}^{k} \pi_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}) \subset U$. Dado que la proyección $\pi_\lambda : X \to X_\lambda$ es una función continua y V_{λ_i} es abierto y cerrado en X_{λ_i}, entonces $\bigcap_{i=1}^{k} \pi_{\lambda_i}^{-1}(V_{\lambda_i})$ es abierto y cerrado en X. Por tanto existe una base de abiertos y cerrados alrededor de p en X y al aplicar el Teorema 1.9 a p, obtenemos que $\dim_p X = 0$. Dado que p fue un punto cualquiera de X, concluimos que $\dim X = 0$. ■

Teorema 1.16 *Si X es un espacio métrico, numerable y no vacío, entonces X tiene dimensión cero.*

Demostración. Sea d una métrica para X. Como X es numerable, podemos enumerar a sus elementos, es decir, podemos representarlo como $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Sea $p \in X$ un punto cualquiera, y para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $d_i = d(p, x_i)$. Entonces, el conjunto $D = \{d_i : i \in \mathbb{N}\}$ es numerable.

Demostraremos que, existe una base local β en el punto p, tal que para cada $V \in \beta$, V es abierto y cerrado en X.

Sea U un abierto en X que contiene al punto p, de modo que existe una bola de radio $\epsilon > 0$ y centro en p tal que $B_\epsilon(p) \subset U$. Como D es numerable, existe $\delta > 0$ tal que $\delta < \epsilon$ y para todo $x_i \in X$, $d(p, x_i) \neq \delta$. Por tanto, $p \in B_\delta(p) \subset B_\epsilon(p) \subset U$ y $Fr(B_\delta(p)) \subset \{x_i \in X : d(p, x_i) = \delta\} = \emptyset$. Por tanto, $B_\delta(p)$ es abierto y cerrado en X. Entonces,

$$\beta = \{B_\delta(p) : \delta > 0 \text{ y } d(p, x_i) \neq \delta \text{ para todo } x_i \in X\}$$

es una base local en el punto p de vecindades abiertas y cerradas en X. Al aplicar el Teorema 1.9 a β, obtenemos que, $\dim_p X = 0$. Por lo tanto, $\dim X = 0$. ■

El siguiente resultado es demostrado en [5, Teorema 3.2, p. 15].

Teorema 1.17 *(Teorema del Subespacio). Sea X un espacio topológico tal que* $\dim X \leq n$ *y sea $Y \subset X$. Entonces* $\dim Y \leq n$.

El siguiente resultado es demostrado en [5, Teorema 7.1, p. 33].

Teorema 1.18 *(Teorema de la Suma) Sea X un espacio métrico, separable y no vacío. Si X es una unión numerable de subconjuntos F_σ, cada uno de los cuales con dimensión menor o igual que n, entonces* $\dim X \leq n$.

Teorema 1.19 *Sea $A \subset \mathbb{R}$. Entonces,* $\dim A = 1$ *si y sólo si A contiene un intervalo abierto y no vacío de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Más adelante, en 3.9 se demuestra que $\dim \mathbb{R} = 1$.

Para demostrar la suficiencia tomamos un intervalo abierto no vacío $(a, b) \subset A$. Como (a, b) es homeomorfo a $\mathbb{R}$ y la dimensión es invariante topológico, tenemos que $\dim(a,b) = 1$. Como $(a,b) \subset A \subset \mathbb{R}$, aplicando el Teorema 1.17 (Teorema del subespacio) a A obtenemos que $\dim A = 1$.

Para demostrar la necesidad, supongamos que $\dim A = 1$ y que A no contiene ningún intervalo abierto y no vacío de $\mathbb{R}$. Tomemos $a \in A$ y sea $B_{\frac{1}{n}}(a) = \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$. Como $\left(a - \frac{1}{n}, a\right) \nsubseteq A$ y $\left(a, a + \frac{1}{n}\right) \nsubseteq A$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen x_n y $y_n \in \mathbb{R}$ tales que $x_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a\right) - A$ y $y_n \in \left(a, a + \frac{1}{n}\right) - A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, hacemos $U_n = (x_n, y_n)$. Claramente $U_n \neq \emptyset$, pues $a \in U_n$. De modo que la familia $\beta = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de vecindades en a y $Fr_A(U_n) = \emptyset$, pues los únicos candidatos a ser puntos frontera son x_n y y_n. De aquí que, $\dim_a A \leq 0$. Por tanto, $\dim A \leq 0$, lo cual es una contradicción.

■

El siguiente teorema es una generalización del teorema anterior y es demostrado en [5, Teorema 10.2, p. 53].

Teorema 1.20 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Entonces,* $\dim X = n$ *si y sólo si X contiene un subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{R}^n$.*

El siguiente resultado es demostrado en [5, Corolario 10.4, p. 54].

Proposición 1.21 *Para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mathbb{R}^n$ no puede ser separado por un subconjunto de dimensión menor o igual que $n - 2$.*

Parte II

Ejemplos

Capítulo 2

Espacios de Dimensión Cero

Este capítulo cuenta con 43 ejemplos del libro "Counterexamples in Topology". Las pruebas se desarrollan con detalle. Uno de los ejemplos más interesantes en este capítulo es la Compactación de Stone-Čech de los Enteros, en general se demuestra que la Compactación de Stone-Čech de cualquier espacio discreto tiene dimensión 0. Recordamos que el número dentro del paréntesis corresponde al número de ejemplo del libro.

2.1. Topología Discreta (Ejemplos 1, 2 y 3)

Cualquier conjunto no vacío con la Topología Discreta tiene dimensión 0.

Sea (X, τ) un espacio topológico discreto y no vacío. Entonces, aplicando el Corolario 1.12 a (X, τ) tenemos que, $\dim(X, \tau) = 0$.

2.2. Topología Indiscreta (Ejemplo 4)

Cualquier conjunto no vacío con la Topología Indiscreta tiene dimensión 0.

Sea (X, τ) un espacio topológico indiscreto y no vacío, entonces dado $x \in X$, el único conjunto abierto en (X, τ) que contiene al punto x es el total. Como $Fr(X) = \emptyset$, concluimos que $\dim(X, \tau) = 0$.

2.3. Topología de Partición (Ejemplo 5)

Cualquier conjunto no vacío con la Topología de Partición tiene dimensión 0.

Sea X un conjunto no vacío y sea P una partición cualquiera de X, entonces la familia P junto con el conjunto vacío forma una base para una topología en X, la cual es conocida como la *Topología de Partición.* Notemos que un subconjunto de X es abierto si y sólo si éste es unión de subconjuntos pertenecientes a P.

Con esta topología X tiene dimensión cero, ya que los básicos son ajenos dos a dos y por tanto la frontera de éstos siempre es vacía. Por lo tanto $\dim X = 0$.

2.4. Topología Par-Impar (Ejemplo 6)

El conjunto de los Números Naturales con la Topología Par-Impar tiene dimensión 0.

Sea $X = \mathbb{N}$, la *Topología Par-Impar* es generada por la familia $\mathcal{F} = \{\{2k-1, 2k\} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$.

Notemos que $\mathcal{F}$ forma una partición de $\mathbb{N}$ y por 2.3 (topología de Partición) tenemos que $\dim X = 0$.

2.5. Topología de los Números Enteros Excluidos (Ejemplo 7)

X con la Topología de los Números Enteros Excluidos tiene dimensión 0.

Sea $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}(n-1,n)$, la *Topología de los Números Enteros Excluidos* es generada por la familia $\mathcal{F} = \{(n-1,n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$.

Notemos que, la familia $\mathcal{F}$ forma una partición de X. Por tanto, $\dim X = 0$.

2.6. Espacio Fuerte Infinito (Ejemplos 23 y 24)

El Espacio Fuerte Infinito, ya sea numerable o no numerable, tiene dimensión 0.

Sea X cualquier conjunto infinito. Fijamos un punto $p \in X$, (el cual llamaremos punto especial) y definimos una topología en X tomando como conjuntos abiertos a todos los subconjuntos de X cuyo complemento o bien tiene a p o es finito. Es decir, $\tau = \{U \subset X : p \in X - U \text{ o } X - U \text{ es finito}\}$.

Demostraremos que, cualquier conjunto infinito, numerable o no numerable, con esta topología tiene dimensión cero.

Caso 1. $x \neq p$.

Como $p \in X - \{x\}$, tenemos que el conjunto $\{x\}$ es abierto en X. También, al ser finito el conjunto $\{x\}$, tenemos que $X - \{x\}$ es abierto en X. Notemos que cada uno de estos conjuntos es complemento del otro, de manera que $X - \{x\}$ y $\{x\}$ también son conjuntos cerrados en X. Por tanto la familia $\beta = \{\{x\}\}$ forma una base local en el punto x de conjuntos abiertos y cerrados en X. Aplicando el Teorema 1.9 a β, obtenemos que $\dim_x X = 0$.

Caso 2. $x = p$.

Sea V un abierto que contiene a p. Como $p \notin X - V$, tenemos que $p \in X - (X - V)$, es decir $X - V$ es un conjunto abierto. Por tanto V es abierto y cerrado en X. De modo que, $\beta = \{V \in \tau : p \in V\}$ es una base de vecindades alrededor de p, de conjuntos abiertos y cerrados en X. Aplicando el Teorema 1.9 a β, obtenemos que $\dim_p X = 0$.

Por lo tanto para toda $x \in X$, $\dim_x X = 0$. Así, $\dim X = 0$.

2.7. El Espacio Fortísimo (Ejemplo 25)

El Espacio Fortísimo tiene dimensión 0.

Sea X cualquier conjunto no numerable. Fijamos a un punto $p \in X$, (el cual llamaremos punto especial) y definimos una topología en X tomando como conjuntos abiertos a los subconjunto de X cuyo complemento tenga a p o sea numerable. Es decir, $\tau = \{U \subset X : p \in X - U \text{ o } X - U \text{ es numerable}\}$.

Calculemos la dimensión de X en todos sus puntos. Sea $x \in X$. Consideremos dos casos para x.

Caso 1. $x \neq p$.
Como $p \in X - \{x\}$, tenemos que el conjunto $\{x\}$ es abierto en X. Además, como $\{x\}$ es numerable, el conjunto $\{x\}$ también es cerrado en X. Por lo tanto, la familia $\beta = \{\{x\}\}$ es una base local en el punto x de conjuntos abiertos y cerrados en X. Aplicando el Teorema 1.9 a β, obtenemos que $\dim_x X = 0$.

Caso 2. $x = p$.
Sea V un abierto que contiene a p. Como $p \notin X - V$, tenemos que $p \in X - (X - V)$, es decir $X - V$ es un conjunto abierto. Por tanto V es abierto y cerrado en X. Dado que V se eligió de manera arbitraria, tenemos que p tiene una base de conjuntos abiertos y cerrados en X. Aplicando el Teorema 1.9 tenemos que $\dim_p X = 0$.
Por lo tanto, para toda $x \in X$, $\dim_x X = 0$. Así, $\dim X = 0$.

2.8. El Espacio Fuerte de Arens (Ejemplo 26)

El Espacio Fuerte de Arens tiene dimensión 0.

Sea $X = (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$. Definimos una topología en X de la siguiente manera: dado un punto $p \in X - \{(0,0)\}$, declaramos a $\{p\}$ como abierto. Las vecindades abiertas básicas del origen $(0,0)$ son los conjuntos que son unión de casi todas las columnas (verticales) a las que se les ha quitado un subconjunto finito (a cada una).

Claramente X es un espacio T_1. Sea $p \in X$. Consideremos dos casos para p.

Caso 1. $p \neq (0,0)$.

Entonces, $\beta = \{\{p\}\}$ es una base local en el punto p. Como $\{p\}$ es abierto y cerrado en X, podemos aplicar el Teorema 1.9 a β y obtener que, $\dim_p X = 0$.

Caso 2. $p = (0,0)$.

Entonces, cualquier abierto V que contiene a p también satisface tener frontera vacía, pues $X - \{p\}$ es un subespacio discreto de X. Por tanto, al aplicar el Teorema 1.9, obtenemos que $\dim_p X = 0$.

Por lo tanto, $\dim X = 0$.

2.9. El Conjunto de Cantor (Ejemplo 29)

El Conjunto de Cantor tiene dimensión 0.

El Conjunto de Cantor $\mathbf{C}$ es obtenido removiendo una sucesión de intervalos abiertos, conocidos como tercios medios del intervalo $[0,1]$ con su topología usual. Recordemos el proceso: si $I_1 = [0,1]$, primero removemos el abierto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, dejando a $I_2 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Después, removemos los conjuntos abiertos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ y $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ de I_2, quedando $I_3 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$. Continuamos con este proceso infinito. Entonces, el Conjunto de Cantor $\mathbf{C}$ está dado por $\mathbf{C} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} I_i$.

Notemos que cada conjunto I_i es la unión de 2^i intervalos cerrados, de longitud $\frac{1}{3^i}$, y ajenos dos a dos. Si J es uno de estos intervalos, entonces $\mathbf{C} \cap J$ y $\mathbf{C} - J$ son intersecciones de un cerrado en $[0,1]$ con $\mathbf{C}$, así que cada uno de esos dos conjuntos es abierto y cerrado en $\mathbf{C}$. Esto muestra que $\mathbf{C} \cap J$ es abierto y cerrado en $\mathbf{C}$. Como la longitud de J es $\frac{1}{3^i}$, concluimos que cada punto de $\mathbf{C}$ tiene vecindades abiertas y cerradas tan pequeñas como se quiera. Por tanto $\mathbf{C}$ tiene dimensión 0.

2.10. El Conjunto de los Números Racionales $\mathbb{Q}$ (Ejemplo 30)

El Conjunto de los Números Racionales con la topología inducida por la Euclidiana tiene dimensión 0.

Sean $p \in \mathbb{Q}$ y $\beta = \{(a,b) \subset \mathbb{Q} : a < p < b \text{ y } a, b \notin \mathbb{Q}\}$. Claramente, β es una base local en p tal que, para todo $V \in \beta$, se tiene que $Fr(V) = \emptyset$. Por tanto, para todo $p \in \mathbb{Q}$, se tiene que $\dim_p \mathbb{Q} = 0$.

Por lo tanto $\dim \mathbb{Q} = 0$.

2.11. El Conjunto de los Números Irracionales $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (Ejemplo 31)

El Conjunto de los Números Irracionales con la topología inducida por la Euclidiana tiene dimensión 0.

Sean $p \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $\beta = \{(a,b) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q} : a < p < b \text{ y } a, b \in \mathbb{Q}\}$. Claramente, β es una base local en p tal que, para todo $V \in \beta$, se tiene que $Fr(V) = \emptyset$. Por tanto, para todo $p \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, se tiene que $\dim_p(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = 0$.

Por lo tanto $\dim(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = 0$.

2.12. El Espacio de Ordinales Abierto $[0, \Gamma)$ con $\Gamma < \Omega$ (Ejemplo 40)

El Espacio de Ordinales Abierto $[0, \Gamma)$ tiene dimensión 0.

Sean α y γ elementos cualesquiera en $[0, \Omega]$, donde Ω es el primer ordinal no numerable. Decimos que α *precede* a γ o que γ es el *sucesor* de α si $\alpha < \gamma$.

Decimos que α es el *predecesor inmediato* de γ (o que γ es el *sucesor inmediato* de α), si γ es el menor ordinal entre los sucesores de α (denotamos a γ como $\alpha + 1$). También decimos que α es un *ordinal límite* si $\alpha \neq 0$ y α

no es un sucesor inmediato de nadie. Es decir, si para todo ordinal $\xi < \alpha$, se tiene que $\alpha \neq \xi + 1$.

Notemos que todo ordinal tiene un sucesor inmediato ($\alpha < \alpha + 1$), pero no todo ordinal tiene un predecesor inmediato, por ejemplo ω (primer ordinal infinito) y Ω no lo tienen.

Dado un ordinal límite $\Gamma < \Omega$, el Espacio de Ordinales Abierto $[0, \Gamma)$ consiste de todos los ordinales estrictamente menores que Γ, junto con la topología generada por la familia $\mathcal{F} = \{(x, \Gamma) : x \in [0, \Gamma)\} \cup \{[0, y) : y \in [0, \Gamma)\}$. Esta familia genera una topología conocida como la *Topología del Orden*, la cual estudiaremos con detalle en el siguiente capítulo.

Para demostrar que $\dim[0, \Gamma) = 0$ tomemos $\beta \in [0, \Gamma)$. Consideraremos dos casos para β.

Caso 1. β es un sucesor inmediato de algún ordinal $\gamma \in [0, \Gamma)$.

En este caso, claramente el conjunto $(\gamma, \beta + 1) = \{\beta\}$ es abierto y cerrado en $[0, \Gamma)$. Por tanto, La familia $\{\{\beta\}\}$ es una base local de β en $[0, \Gamma)$. Así, β tiene una base formada por conjunto abiertos y cerrados en $[0, \Gamma)$. De manera que, al aplicar el Teorema 1.9 a β, concluimos que $\dim_\beta[0, \Gamma) = 0$.

Caso 2. β es un ordinal límite.

Notemos que la familia $\{(\alpha, \beta + 1) : \alpha < \beta\}$ forma una base local en el punto β. Además, para cada $\alpha < \beta$ se cumple que $(\alpha, \beta + 1) = [\alpha + 1, \beta]$. De modo que, $(\alpha, \beta + 1)$ es abierto y cerrado en $[0, \Gamma)$. Es decir, β tiene una base local de conjuntos abiertos y cerrados. Aplicando el Teorema 1.9, concluimos que $\dim_\beta[0, \Gamma) = 0$.

Por lo tanto, $\dim[0, \Gamma) = 0$.

2.13. El Espacio de Ordinales Cerrado $[0, \Gamma]$ con $\Gamma < \Omega$ y los Espacios de Ordinales $[0, \Omega)$ y $[0, \Omega]$ (Ejemplos 41, 42 y 43).

Los Espacios $[0, \Gamma]$ con $\Gamma < \Omega$, $[0, \Omega)$, y $[0, \Omega]$ tienen dimensión 0.

La demostración es exactamente la misma que hicimos en 2.12 para $[0, \Gamma)$.

2.14. El Espacio Discreto No Numerable de Ordinales (Ejemplo 44)

El Espacio Discreto No Numerable de Ordinales tiene dimensión 0.

Sea $X = \{\alpha + 1 \in [0, \Omega) : \alpha \text{ es un ordinal límite}\}$, junto con la topología inducida por la topología del Orden en $[0, \Omega)$.

Como $X \subset [0, \Omega)$ y $\dim[0, \Omega) = 0$ (ver 2.13), podemos aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a X y concluir que $\dim X = 0$.

2.15. Topología de Sorgenfrey (o de los Intervalos Semi-Abiertos por la Derecha) (Ejemplo 51)

La Recta Real con la Topología de Sorgenfrey tiene dimensión 0.

Sean $X = \mathbb{R}$ y $\beta = \{[a, b) : a, b \in X\}$. La familia β es una base para una topología τ en X. Notemos que para cualesquiera $a, b \in X$, los conjuntos de la forma $(-\infty, a)$, $[a, b)$ y $[b, +\infty)$ son abiertos y cerrados en X.

Sea $p \in X$. Entonces, la familia $\gamma = \{[a, b) : a \leq p < b\}$ es una base local en el punto p, formada por subconjuntos abiertos y cerrados en X. Aplicando el Teorema 1.9, concluimos que, $\dim_p X = 0$.

Por lo tanto, $\dim X = 0$.

2.16. Topología de los Números Enteros Espaciados (Ejemplo 58)

$\mathbb{Z}$ con la Topología de los Números Enteros Espaciados tiene dimensión 0.

Sea $X = \mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros con la topología τ generada por conjuntos de la forma $\beta = \{a + k\lambda : \lambda \in \mathbb{Z}\}$, donde $a, k \in \mathbb{Z}$ y $k \neq 0$.

Afirmamos que el complemento de cualquier elemento de β es un conjunto abierto, esto es debido a que $\mathbb{Z} - \{a+k\lambda : \lambda \in \mathbb{Z}\} = \{(a+1) + k\lambda : \lambda \in \mathbb{Z}\} \cup \{(a+2) + k\lambda : \lambda \in \mathbb{Z}\} \cup ... \cup \{(a + (k-1)) + k\lambda : \lambda \in \mathbb{Z}\}$. Por tanto, $\{a+k\lambda : \lambda \in \mathbb{Z}\}$ es abierto y cerrado en (X, τ).

Entonces, la familia β es una base local de a formada por subconjuntos que son abiertos y cerrados en X. Aplicando el Teorema 1.9, concluimos que, $\dim X = 0$.

2.17. La Topología p-ádica Sobre $\mathbb{Z}$ (Ejemplo 59)

El conjunto de los Números Enteros con la Topología p-ádica tiene dimensión 0.

Sean $X = \mathbb{Z}$ y p un número primo fijo. Definimos una topología τ en $\mathbb{Z}$ tomando como básicos en $n \in \mathbb{Z}$ a todos los conjuntos de la forma $U_\alpha(n) = \{n + \lambda p^\alpha : \lambda \in \mathbb{Z}\}$, donde $\alpha \in \mathbb{N}$. La topología τ es generada por la métrica:

$$d(n,m) = \begin{cases} 2^{-k}, & \text{si } n \neq m, \\ 0, & \text{si } n = m. \end{cases}$$

Donde $n, m \in \mathbb{Z}$ y k es la mayor potencia de p que divide a $|n - m|$.

Como X es un espacio métrico y numerable, al aplicar el Teorema 1.16 a (X, τ), obtenemos que $\dim X = 0$.

2.18. Topología de las Sucesiones Racionales (Ejemplo 65)

La Recta Real con la Topología de las Sucesiones Racionales tiene dimensión 0.

Sea $X = \mathbb{R}$. *La Topología de las Sucesiones Racionales* es definida declarando a cada número racional como un conjunto abierto. Para elegir a los básicos en los números irracionales, para cada número irracional x se elige y se fija una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de números racionales tal que $\lim x_i = x$ en la topología Euclidiana, y para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos al conjunto $U_n(x) = \{x_i : i \geq n\} \cup \{x\}$. Así, una base local para el punto irracional x está dada por la familia $\beta = \{U_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$.

Demostraremos que X es un espacio de Hausdorff. Sean $p, q \in X$ tales que $p \neq q$. Consideremos tres casos para p y q.

Caso 1, $p, q \in \mathbb{Q}$.
Como los conjuntos unitarios $\{p\}$ y $\{q\}$ son abiertos y $p \neq q$, tenemos que $\{p\} \cap \{q\} = \emptyset$.

Caso 2. $p \in \mathbb{Q}$ y $q \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
Sea $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ la sucesión de números racionales que se eligió para q, entonces $\lim q_i = q$. De modo que, si $p \notin \{q_i : i \in \mathbb{N}\}$, tenemos que dada $n \in \mathbb{N}$, el abierto $U_n(q) \cap \{p\} = (\{q_i : i \geq n\} \cup \{q\}) \cap \{p\} = \emptyset$. Si $p \in \{q_i : i \in \mathbb{N}\}$, entonces existen $i_0, N \in \mathbb{N}$ tales que, $p = q_{i_0}$ y $N > i_0$. De manera que $p \notin U_N(q) = \{q_i : i \geq N\} \cup \{q\}$. De aquí que, $U_N(q) \cap \{p\} = \emptyset$.

Caso 3. $p \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $q \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
Supongamos sin pérdida de generalidad que, $p < q$. Sean $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ las sucesiones que se eligieron para p y q, respectivamente. Como $p < \frac{p+q}{2} < q$, $\lim p_i = p$ y $\lim q_i = q$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_i < \frac{p+q}{2} < q_i$ para toda $i \geq n$. Entonces $U_n(p) \cap U_n(q) = \emptyset$. Por lo tanto, (X, τ) es un espacio de Hausdorff.

Demostraremos mediante dos casos que, para toda $x \in X$, $\dim_x X = 0$. Sea $x \in X$.

Caso 1. $x \in \mathbb{Q}$.
Como (X, τ) es de Hausdorff, tenemos que, para todo $x \in X$, el conjunto que consta de un solo elemento $\{x\}$ es cerrado en (X, τ). De manera que, para cada $x \in \mathbb{Q}$, la familia $\gamma = \{\{x\}\}$ es una base local en el punto x con $\{x\}$ abierto y cerrado en X. Por tanto, al aplicar el Teorema 1.9, obtenemos que, $\dim_x X = 0$.

Caso 2. $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ la sucesión de números racionales que elegimos para x, entonces $\lim x_i = x$. Dada $n \in \mathbb{N}$, sea $U_n(x) = \{x_i : i \geq n\} \cup \{x\}$ un abierto

básico que contiene a x. Notemos que ningún número racional puede estar en la frontera de $U_n(x)$.

Demostraremos que ningún número irracional está en la frontera de $U_n(x)$.

Sea $z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tal que $x \neq z$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $x < z$. Sea $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ la sucesión de números racionales elegida para z, entonces $\lim z_i = z$. Ya que $\{x_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$, $z \notin \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. Como $\lim x_i = x$, el conjunto$\{x\} \cup \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ es un cerrado en la topología Euclidiana de $\mathbb{R}$, de modo que existe $\epsilon > 0$ tal que $(z - \epsilon, z + \epsilon) \cap (\{x\} \cup \{x_i : i \in \mathbb{N}\}) = \emptyset$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|z - z_i| < \epsilon$ para cada $i \geq m$. De manera que $U_m(z) \cap U_n(x) \subset (z - \epsilon, z + \epsilon) \cap (\{x\} \cup \{x_i : i \in \mathbb{N}\}) = \emptyset$. Esto muestra que z no pertenece a la frontera de $U_n(x)$. Por tanto, la familia $\beta = \{U_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local del punto x de conjuntos abiertos y cerrados en X. Así que podemos aplicar el Teorema 1.9 y obtener que $\dim_x X = 0$.

Por lo tanto, $\dim X = 0$.

2.19. Extensión Discreta de Racionales en $\mathbb{R}$ y la Extensión Discreta de Irracionales en $\mathbb{R}$ (Ejemplos 70 y 71)

Las Extensiones Discretas en $\mathbb{R}$ (Racional o Irracional) tienen dimensión 0.

Sean (X, τ) con $X = \mathbb{R}$ y τ la topología Euclidiana. Definimos una nueva topología τ^* sobre $\mathbb{R}$ tomando como base a la familia $\beta^* = \tau \cup \{\{p\} : p \in \mathbb{Q}\}$. Entonces, (X, τ^*) es la *Extensión Discreta de Números Racionales* en $\mathbb{R}$. Análogamente, definimos a τ' como la topología en $\mathbb{R}$ que tiene como base a la familia $\beta' = \tau \cup \{\{p\} : p \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$ y llamamos a (X, τ') la *Extensión Discreta de Números Irracionales* en $\mathbb{R}$.

Sólo demostraremos que la Extensión Discreta de Números Racionales en $\mathbb{R}$ tiene dimensión 0, la demostración para la Extensión Irracional es similar.

Notemos que $\tau \subset \tau^*$, de modo que $(\mathbb{R}, \tau^*)$ es un espacio de Hausdorff.

Notemos que, para todo $p \in \mathbb{Q}$, el conjunto que consta de un solo elemento $\{p\}$ es abierto y cerrado en (X, τ^*). De manera que, para cada $p \in \mathbb{Q}$, la familia $\{\{p\}\}$ es una base local en p formada por conjuntos abiertos y cerrados en X. Por tanto, al aplicar el Teorema 1.9, tenemos que $\dim_p(X, \tau^*) = 0$.

Si $p \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, entonces elegimos como base local en p a la familia $\beta = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q} \text{ y } a < p < b\}$. Claramente, para todo $V \in \beta$, $Fr(V) = \emptyset$, pues $\{a\}$ y $\{b\}$ son abiertos y cerrados en (X, τ^*).

Por lo tanto, para todo $p \in (X, \tau^*)$, se concluye que, $\dim_p(X, \tau^*) = 0$. Luego, $\dim(X, \tau^*) = 0$.

2.20. La Topología de Sorgenfrey en el Plano (Ejemplo 84)

El Plano con la Topología de Sorgenfrey tiene dimensión 0.

Sea $S = (\mathbb{R}, \alpha)$ la línea real con la topología de Sorgenfrey (ver 2.15). El espacio producto $X = S \times S$ tiene entonces la topología que tiene por base a la familia $\beta = \{[a, b) \times [c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } a < b \text{ y } c < d\}$.

Por 2.15, $(\mathbb{R}, \alpha)$ tiene dimensión cero. De modo que podemos aplicar el Teorema 1.15 a $(\mathbb{R}, \alpha)$ y obtener que $\dim((\mathbb{R}, \alpha) \times (\mathbb{R}, \alpha)) = 0$. Por tanto, $\dim(X, \tau) = 0$.

2.21. Producto Cartesiano de Michael (Ejemplo 85)

El Producto de Michael tiene dimensión 0.

Sea $(\mathbb{R}, \tau)$ la línea real con la topología Euclidiana y sea $D = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, definimos $(X, \sigma) = (\mathbb{R}, \tau^*) \times (D, \tau')$ donde τ^* es la topología de la Extensión Discreta de Irracionales (ver 2.19) y τ' es la topología Euclidiana inducida sobre D.

Como $\dim(\mathbb{R}, \tau^*) = 0$ (ver 2.19) y $\dim(D, \tau') = 0$ (ver 2.11), podemos aplicar el Teorema 1.15, usando los espacios $(\mathbb{R}, \tau^*)$ y (D, τ'), y obtener que $\dim((\mathbb{R}, \tau^*) \times (D, \tau')) = 0$. Por tanto, $\dim(X, \sigma) = 0$.

2.22. La Tabla de Tychonoff (Ejemplo 86)

La Tabla de Tychonoff tiene dimensión 0.

Sea Ω el primer ordinal no numerable, y sea ω el primer ordinal infinito, entonces la *Tabla de Tychonoff* T está definida como $T = [0,\Omega] \times [0,\omega]$, ambos espacios con la topología del Orden.

Notemos que $\dim[0,\Omega] = 0$ (ver 2.13) y $\dim[0,\omega] = 0$ (ver 2.13). De manera que, al aplicar el Teorema 1.15 a los espacios $[0,\Omega]$ y $[0,\omega]$ obtenemos que $\dim([0,\Omega] \times [0,\omega]) = 0$.

2.23. La Tabla Suprimida de Tychonoff $T - \{(\Omega,\omega)\}$ (Ejemplo 87)

La Tabla Suprimida de Tychonoff tiene dimensión 0.

Sea $T = [0,\Omega]\times[0,\omega]$ la Tabla de Tychonoff definida en 2.22. El subespacio $T_\infty = T - \{(\Omega,\omega)\}$ es conocido como la *Tabla Suprimida de Tychonoff*.

Como $T_\infty \subset T$ y $\dim T = 0$ (ver 2.22), podemos aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a T_∞ y concluir que $\dim T_\infty = 0$.

2.24. La Tabla de Dieudonné (Ejemplo 89)

La Tabla de Dieudonné tiene dimensión 0.

Sea $X = [0,\Omega]\times[0,\omega]-\{(\Omega,\omega)\}$. Para cada $p \in X$, definimos una familia γ_p de subconjuntos de X de la siguiente manera:

Si $p \in [0,\Omega) \times [0,\omega)$, hacemos $\gamma_p = \{\{p\}\}$. Si $p = (\Omega,\beta)$ para alguna $\beta < \omega$, hacemos, para cada $\alpha < \Omega$, $V_\alpha((\Omega,\beta)) = \{(\lambda,\beta) : \alpha < \lambda \leq \Omega\}$ y definimos $\gamma_p = \{V_\alpha((\Omega,\beta)) : 0 \leq \alpha < \Omega\}$.

Finalmente, si $p = (\beta,\omega)$ para alguna $\beta < \Omega$, hacemos, para cada $\alpha < \omega$, $U_\alpha((\beta,\omega)) = \{(\beta,\lambda) : \alpha < \lambda \leq \omega\}$ y definimos $\gamma_p = \{U_\alpha((\beta,\omega)) : 0 \leq \alpha < \omega\}$.

Tomamos entonces la topología τ en X que tiene como base a la familia $\gamma = \bigcup\{\gamma_p : p \in X\}$.

Notemos que no estamos considerando al espacio X con la topología producto. De hecho, la topología τ es más fina que la topología producto en X. Por tanto, (X, τ) es un espacio de Hausdorff. Así, tenemos que los conjuntos formados de un solo elemento en $[0, \Omega) \times [0, \omega)$ son abiertos y cerrados en (X, τ).

Demostraremos que, para cada $\alpha < \Omega$, el básico $V_\alpha((\Omega, \beta))$ es abierto y cerrado en (X, τ).

Claramente, ningún punto p en $[0, \Omega) \times [0, \omega)$ está en la frontera de $V_\alpha((\Omega, \beta))$, pues $\{p\}$ es cerrado y abierto en (X, τ). Notemos que los puntos de la forma (Ω, κ) donde $0 \leq \kappa < \omega$ y $\kappa \neq \beta$, tampoco están en la frontera de $V_\alpha((\Omega, \beta))$, pues las vecindades básicas de estos puntos son paralelas a $V_\alpha((\Omega, \beta))$. Por último, observemos que los puntos de la forma (κ, ω) donde $0 \leq \kappa < \Omega$, tampoco pueden estar en la frontera de $V_\alpha((\Omega, \beta))$, pues existe $\delta > 0$ tal que $\beta < \delta < \omega$, de modo que, $U_\delta((\kappa, \omega)) \cap V_\alpha((\Omega, \beta)) = \emptyset$. Por tanto, $V_\alpha((\Omega, \beta))$ es abierto y cerrado en (X, τ).

Notemos que, para cada $\alpha < \omega$, el básico $U_\alpha((\beta, \omega))$ también es abierto y cerrado en (X, τ). La demostración es similar a la del básico $V_\alpha((\Omega, \beta))$. Por lo tanto γ_p es una base local en p cuyos elementos son abiertos y cerrados en X. Aplicando el Teorema 1.9, concluimos que, $\dim X = 0$.

2.25. La Tabla de Thomas (Ejemplo 93)

La Tabla de Thomas tiene dimensión 0.

Sea $L_0 = \{(x, 0) : x \in (0, 1)\}$, y para cada entero $i \geq 1$, sea $L_i = \{(x, \frac{1}{i}) : x \in [0, 1)\}$. Hacemos $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$. Definiremos una topología en X diciendo cuáles son los básicos en cada punto. Si $i \geq 1$, el singular de cada punto de L_i, excepto $(0, \frac{1}{i})$, es abierto; las vecindades básicas del punto $(0, \frac{1}{i})$ son los subconjuntos de L_i tales que su complemento en L_i es finito. Los conjuntos de la forma $U_i(x, 0) = \{(x, 0)\} \cup \{(x, \frac{1}{n}) : n > i\}$, donde $i \in \mathbb{N}$, forman una base para los puntos de L_0. Notemos que X es un espacio T_2.

Demostraremos que $\dim_p X = 0$, para toda $p \in X$. Consideremos tres casos.

Caso 1. $p = (x, \frac{1}{i})$, donde $i \geq 1$ y $x \in (0,1)$.
Como X es un espacio T_2, el conjunto $\{p\}$ es abierto y cerrado en X. Al aplicar el Teorema 1.9, obtenemos que $\dim_p X = 0$.

Caso 2. $p = (0, \frac{1}{i})$, con $i \geq 1$.
Sea U un abierto básico en X que contiene a p, entonces $U \subset L_i$ y $L_i - U$ es finito. Notemos que $L_i - U$ es abierto. Por tanto, ningún punto de $L_i - U$ está en la frontera de U. Claramente, los puntos de L_0 tampoco están en la frontera de U, ya que para toda $q = (x,0) \in L_0$, $V = \{(x,0)\} \cup \{(x, \frac{1}{n}) : n > i+1\}$, no intersecta a L_i. También es claro que los puntos que pertenecen a algún L_j, con $j \notin \{0, i\}$ tienen vecindades que no tocan a U. Por lo tanto, $Fr(U) = \emptyset$. Luego, $\dim_p X = 0$.

Caso 3. $p = (x, 0)$, con $0 < x < 1$.
Sea $U = \{(x,0)\} \cup \{(x, \frac{1}{n}) : n > i\}$ un abierto básico en X que contiene a p. Como el conjunto $((0,1) \times (0,1]) \cap X$ tiene la topología Discreta, tenemos que, $Fr(U) = \emptyset$. Luego, $\dim_p X = 0$.
Por lo tanto, $\dim X = 0$.

2.26. Topología Débil de las Líneas Paralelas (Ejemplo 95)

X con la Topología Débil de las Líneas Paralelas tiene dimensión 0.

Sean $A = \{(x,0) : 0 < x \leq 1\}$ y $B = \{(x,1) : 0 \leq x < 1\}$ en $\mathbb{R}^2$. Sea $X = A \cup B$. Dados $a, b \in [0,1]$ tales que $0 \leq a < b \leq 1$, definimos $U(a,b) = \{(x,0) : a < x \leq b\} \cup \{(x,1) : a < x < b\}$, $W(a,b) = \{(x,0) : a < x < b\} \cup \{(x,1) : a \leq x < b\}$ y $Z(a,b) = U(a,b) \cup W(a,b)$. La *Topología Débil de las Líneas Paralelas* τ tiene como base β a los conjuntos de la forma $U(a,b)$ junto con los conjuntos de la forma $W(a,b)$.

Demostraremos que $\gamma = \{Z(a,b) : 0 \leq a < b \leq 1\}$ es una base para τ.
Claramente $\gamma \subset \tau$. Sean $p \in X$ y H un abierto cualquiera que contiene a p. Consideremos dos casos para p.

Caso 1. $p = (t, 0)$, con $0 < t \leq 1$.

Entonces, existe un básico $U(a, t) = \{(x, 0) : a < x \leq t\} \cup \{(x, 1) : a < x < t\}$ tal que $p \in U$ y $U \subset H$. Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $a < r < t$. De manera que, el básico $W(r, t) = \{(x, 0) : r < x < t\} \cup \{(x, 1) : r \leq x < t\}$ queda contenido en U. Por tanto, $p \in Z(r, t) \subset H$.

Caso 2. $p = (t, 1)$, con $0 \leq t < 1$.

Entonces, existe un básico $W(t, b) = \{(x, 0) : t < x < b\} \cup \{(x, 1) : t \leq x < b\}$ tal que $p \in W$ y $W \subset H$. Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $t < r < b$. De manera que, el básico $U(t, r) = \{(x, 0) : t < x \leq r\} \cup \{(x, 1) : t < x < r\}$ queda contenido en W. Por tanto, $p \in Z(r, t) \subset H$.

Por tanto, γ es una base en X.

Por otra parte, notemos que para todo $V = Z(a, b) \in \gamma$, V también es cerrado en X, pues $X - Z(a, b) = Z(0, a) \cup Z(b, 1)$. Por tanto, γ es una base local de conjuntos abiertos y cerrados. Aplicando el Teorema 1.9, obtenemos que $\dim X = 0$.

2.27. El Espacio de Appert (Ejemplo 98)

El Espacio de Appert tiene dimensión 0.

Sea $X = \mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Dados $n \in \mathbb{N}$ y un subconjunto no vacío $E \subset X$, definimos a $N(n, E)$ como el número de enteros que están en el conjunto E y que satisfacen ser menores o iguales que n. Describimos la topología en X tomando como conjuntos abiertos a: cualquier subconjunto de X que excluya al entero 1 o a cualquier subconjunto E que contenga al 1 y que satisfaga que $\lim_{n\to\infty} \frac{N(n,E)}{n} = 1$.

Notemos que si C es un conjunto finito, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{N(n,C)}{n} = 0$. De aquí que, los subconjuntos que constan de un solo elemento son cerrados en X. Es decir, para todo $p \in X$, se tiene que $\{p\}$ es cerrado en X. Por tanto X es un espacio T_1.

Demostraremos que X tiene dimensión cero. Sea $p \in X$, consideremos dos casos.

Caso 1. $p \neq 1$.

Entonces, $\beta = \{\{p\}\}$ es una base local en p. Como $\{p\}$ es abierto y cerrado en X, podemos aplicar el Teorema 1.9 y obtener que $\dim_p X = 0$.

Caso 2. $p = 1$.
Sea U un abierto cualquiera que contiene a p. Dada $q \in X - U$, $\{q\}$ es un abierto de X que tiene a q y que no intersecta a U, esto muestra que U es cerrado. De manera que, podemos aplicar el Teorema 1.9 y obtener que $\dim_p X = 0$.
Por lo tanto, para todo $p \in X$, tenemos que $\dim_p X = 0$. Luego, $\dim X = 0$.

2.28. El Producto Cartesiano $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (Ejemplos 102 y 103)

El Producto Cartesiano $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tiene dimensión 0.

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales con la topología inducida por $\mathbb{R}$, es decir, $\mathbb{N}$ tiene la topología Discreta τ. Sea $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ el producto numerable de copias de $\mathbb{N}$ y sea $Y = \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{N}$ con Λ un conjunto de índices no numerable; ambos espacios con la topología Producto (Tychonoff).

Notemos que cada copia de los números enteros con la topología Discreta tiene dimensión cero (ver 2.1). De manera que, podemos aplicar el Teorema 1.15 y obtener que $\dim X = \dim Y = 0$.

2.29. La Métrica de Baire sobre $\mathbb{R}^{\omega}$ (Ejemplo 104)

La Métrica de Baire sobre $\mathbb{R}^{\omega}$ tiene dimensión 0.

En este ejemplo $X = \mathbb{R}^{\omega}$ es el conjunto $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_i$, donde cada $\mathbb{R}_i$ es una copia de $\mathbb{R}$ con la topología Euclidiana. Definimos la *Métrica de Baire* sobre X

usando la función $d(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}, \{y_i\}_{i=1}^{\infty}) = \frac{1}{k}$, donde k es la primera coordenada donde $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ son diferentes.

Veremos que cada básico de la forma $B_{\frac{1}{i}}(x)$ es cerrado. Bastará con que veamos que $B_{\frac{1}{i}}(x) = \left\{y \in X : d(x,y) \leq \frac{1}{i+1}\right\}$.

Claramente, si $d(x,y) \leq \frac{1}{i+1}$, entonces $y \in B_{\frac{1}{i}}(x)$.

Tomemos ahora $y \in X$ tal que $d(x,y) < \frac{1}{i}$. Supongamos que $x \neq y$ y que $d(x,y) = \frac{1}{k}$, entonces k es la primera coordenada para la que $x_k \neq y_k$.

Si $k < i+1$, entonces $k \leq i$ (porque son enteros), así que $d(x,y) = \frac{1}{k} \geq \frac{1}{i}$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $k \geq i+1$. De manera que $d(x,y) = \frac{1}{k} \leq \frac{1}{i+1}$. Esto termina la prueba de la igualdad entre los dos conjuntos y muestra que los conjuntos de la forma $B_{\frac{1}{i}}(x)$ son abiertos y cerrados. Por tanto $\dim X = 0$.

2.30. La Compactación de Stone-Čech de los Enteros (Ejemplo 111)

En general la Compactación de Stone-Čech de cualquier espacio discreto tiene dimensión 0.

Sea (X, τ) un espacio completamente regular (o espacio de Tychonoff) no vacío, sea I el intervalo cerrado $[0,1] \subset \mathbb{R}$ y sea $C(X,I)$ la colección de todas las funciones continuas de X a I. Entonces, $I^{C(X,I)} = \prod_{\lambda \in C(X,I)} I_\lambda$, donde I_λ es una copia de I indexada por $\lambda \in C(X,I)$. Denotamos por $\langle t_\lambda \rangle$ a los elementos de $I^{C(X,I)}$ cuya λ-ésima coordenada es t_λ. Por otra parte, definamos una función continua $h_X : X \to I^{C(X,I)}$ dada por $h_X(x) = \langle \lambda(x)_\lambda \rangle$. Consideremos $Cl(h_X(X)) \subset I^{C(X,I)}$ y como $I^{C(X,I)}$ es un espacio compacto y de Hausdorff, tenemos que $\beta X = Cl(h_X(X))$ es un subespacio compacto y de Hausdorff de $I^{C(X,I)}$, el cual es conocido como la *Compactación de Stone-Čech de* (X, τ).

Tres propiedades importante de la Compactación de Stone-Čech.

1) $h_X : X \to I^{C(X,I)}$ es un homeomorfismo sobre su imagen, de manera que X es homeomorfo a $h_X(X)$.

2) $h_X(X)$ es denso en βX.

3) Cada función continua $f : X \to [0,1]$ tiene una única extensión continua a βX. Es decir, para cada función continua $f : X \to [0,1]$, existe una función continua $\widehat{f} : \beta X \to [0,1]$ tal que $\widehat{f} \circ h_X = f$.

Demostración. Sólo demostraremos la Propiedad 3, las primeras dos propiedades son fáciles.

Sea $f : X \to [0,1]$ una función continua. Notemos que $f \in C(X, I)$. De manera que, podemos definir a $\widehat{f}$ como $\widehat{f} = \pi_f : \beta X \to [0,1]$ (la f-ésima proyección de βX).

Notemos que, dado $x \in X$, $h_X(x) = \langle \lambda(x)_\lambda \rangle \in \beta X$ y $\pi_f(h_X(x)) = \pi_f(\langle \lambda(x)_\lambda \rangle) = f(x)$. Por tanto, f tiene una extensión continua a βX dada por la f-ésima proyección de βX.

Por la Propiedad 1), podemos identificar a X con $h(X)$, así que podemos suponer que $X \subset \beta X$. Con esta convención, la Propiedad 3) se traduce así: cada función continua $f : X \to [0,1]$ tiene una única extensión continua. Es decir, para $f : X \to [0,1]$ existe una función continua $\widehat{f} : \beta X \to [0,1]$ tal que $\widehat{f}\,|_X = f$. ■

Definición 2.1 *Sea (X, τ) un espacio topológico, y sean A y B dos subconjuntos no vacíos en X. Decimos que A y B están completamente separados en X, si existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$. También, decimos que f separa a los conjuntos A y B.*

Lema 2.2 *Sean (X, τ) un espacio topológico de Tychonoff y $A, B \subset X$ subconjuntos no vacíos que están completamente separados en X. Entonces $Cl_{\beta X}(A) \cap Cl_{\beta X}(B) = \emptyset$.*

Demostración. Sea $f : X \to I$ una función continua tal que separa a los conjuntos A y B en X, es decir, $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$. Entonces, aplicando la Propiedad 3 a f, obtenemos una extensión continua de f sobre βX dada por $\widehat{f} : \beta X \to I$. Como el conjunto $\{0\}$ es cerrado en I y la extensión $\widehat{f}$ es continua, tenemos que $\widehat{f}^{-1}(\{0\})$ es cerrado en βX. Por otra parte, como $A \subset \widehat{f}^{-1}(\{0\})$, tenemos que $A \subset Cl_{\beta X}(A) \subset \widehat{f}^{-1}(\{0\})$. Análogamente, $B \subset Cl_{\beta X}(B) \subset \widehat{f}^{-1}(\{1\})$, y como $\widehat{f}^{-1}(\{0\}) \cap \widehat{f}^{-1}(\{1\}) = \emptyset$, tenemos que $Cl_{\beta X}(A) \cap Cl_{\beta X}(B) = \emptyset$. ■

Lema 2.3 *Sean (X, τ) un espacio topológico de Tychonoff y A un subconjunto no vacío abierto y cerrado en X. Entonces, $Cl_{\beta X}(A)$ es abierta y cerrada en βX.*

Demostración. Notemos que si el conjunto A es abierto y cerrado en X, entonces los conjuntos A y $X - A$ están completamente separados, ya que podemos definir a $f : X \to I$ por $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in A, \\ 1, & \text{si } x \in X - A. \end{cases}$

Claramente, f es una función continua. Aplicando el lema anterior a los conjuntos A y $X - A$, tenemos que $Cl_{\beta X}(A) \cap Cl_{\beta X}(X - A) = \emptyset$; y como $\beta X = Cl_{\beta X}(A) \cup Cl_{\beta X}(X - A)$, tenemos que $Fr_{\beta X}(A) = \emptyset$. Por lo tanto, $Cl_{\beta X}(A) = Int_{\beta X}(A)$. Luego, $Cl_{\beta X}(A)$ es abierta y cerrada. ■

Regresando a nuestro problema original, sea X un espacio topológico no vacío y discreto (y por tanto, completamente regular), $h_X : X \to I^{C(X,I)}$ la función continua definida por $h_X(x) = \langle \lambda(x)_\lambda \rangle$ y $\beta X = Cl(h_X(X))$ la Compactación de Stone-Čech de X. Para demostrar que la dimensión de βX es cero, basta demostrar que para toda $x \in \beta X$, x tiene una base de subconjuntos abiertos y cerrados en βX.

Sea $x \in \beta X$ y sea V un abierto de βX que tiene a x. Como βX es un espacio regular, existe un abierto no vacío W en βX tal que $x \in W \subset Cl_{\beta X}(W) \subset V$.

Sea $A = W \cap X$. Entonces, como X es discreto, tenemos que A es abierto y cerrado en X. Aplicando el lema anterior al conjunto A, obtenemos que $Cl_{\beta X}(A)$ es abierta y cerrada. Sea $U = Cl_{\beta X}(A) = Cl_{\beta X}(W \cap X)$. Como X es denso en βX, $Cl_{\beta X}(W \cap X) = Cl_{\beta X}(W)$. De manera que $Cl_{\beta X}(W)$ es abierto y cerrado en βX, además $x \in Cl_{\beta X}(W) \subset V$. Así que x tiene una base local de conjuntos abiertos y cerrados en βX. Por lo tanto, para toda $x \in \beta X$, concluimos que $\dim_x \beta X = 0$.

Por tanto $\dim \beta X = 0$.

2.31. Espacio de Novak (Ejemplo 112)

El Espacio de Novak tiene dimensión 0.

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales con la topología Discreta y sea $\beta\mathbb{N}$ la Compactación de Stone-Čech de $\mathbb{N}$. Para definir el Espacio de

Novak se construye, usando inducción transfinita, un subconjunto $P \subset \beta\mathbb{N}$. Se define entonces el Espacio de Novak como el subespacio X de $\beta\mathbb{N}$ dado por $X = \mathbb{N} \cup P$. Entonces, por el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) $\dim X = 0$. No repetimos aquí la construcción del conjunto P porque es innecesaria y porque se encuentra en [3, Ejemplo 112, p. 134].

2.32. El Ultrafiltro Singular (Ejemplo 114)

X con la Topología del Ultrafiltro Singular tiene dimensión 0.

Un ultrafiltro no principal F de $\mathbb{N}$ es aquel que no tiene punto de acumulación en $\mathbb{N}$. Elegimos un ultrafiltro no principal F y hacemos $X = \mathbb{N} \cup \{F\}$, donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales y F es un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$. Entonces, definimos una base para una topología τ en X dada por los conjuntos que constan de un solo elemento en $\mathbb{N}$ junto con todos los conjuntos de la forma $A \cup \{F\}$ donde $A \in F$.

Claramente, para toda $x \in \mathbb{N}$, $\dim_x X = 0$, pues $\mathbb{N}$ es discreto y F no es punto frontera de $\{x\}$, ya que la vecindad $(\mathbb{N} - \{x\}) \cup \{F\}$ no intersecta a $\{x\}$. Para demostrar que $\dim X = 0$, basta ver que las vecindades básicas de F son abiertas y cerradas en (X, τ).

Sea $A \in F$. Entonces, $A \subset \mathbb{N}$, como $\mathbb{N}$ es discreto, tenemos que $\mathbb{N} - A$ es abierto en (X, τ). Por tanto, $A \cup \{F\}$ es abierto y cerrado en (X, τ). Por tanto, $\dim_F X = 0$. Luego, $\dim X = 0$.

2.33. El Espacio Métrico de Sierpinski (Ejemplo 135)

El Espacio Métrico de Sierpinski tiene dimensión 0.

Sean $X = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ un conjunto numerable y

$$d(x_i, x_j) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{i+j}, & \text{si } i \neq j, \\ 0, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Claramente la función d es una métrica sobre X.

Notemos que, para $\epsilon = \frac{1}{2}$, la bola $B_{\frac{1}{2}}(x_i) = \{x_i\}$. Por tanto, X es un espacio discreto. De manera que, al aplicar el Corolario 1.12 a X, obtenemos que $\dim X = 0$.

2.34. La Métrica de la Oficina Postal (Ejemplo 139)

El Plano con la Métrica de la Oficina Postal tiene dimensión 0.

Sea (X, d) el plano Euclidiano con la métrica usual. Definimos una nueva métrica d^* en X, dada por:

$$d^*(p,q) = \begin{cases} d(0,p) + d(0,q), & \text{si } p \neq q, \\ 0, & \text{si } p = q. \end{cases}$$

Demostraremos que para todo $p \in X$, $\dim_p X = 0$. Tomemos $p \in X$ y consideremos dos casos.

Caso 1. $p \neq 0$.
Sea $r = \frac{d(0,p)}{2}$. Entonces, $B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d^*(p,x) < r\} = \{p\}$. Por tanto la familia $\beta = \{\{p\}\}$ es una base local alrededor del punto p formada de conjuntos abiertos y cerrados en X. De manera que, al aplicar el Teorema 1.9, obtenemos que $\dim_p X = 0$.

Caso 2. $p = 0$.
Sea V una vecindad abierta en X de p. Como vimos en el párrafo anterior, para cada $q \neq p$, $\{q\}$ es abierto en X. De manera que $X - V$ es abierto en X. Por lo tanto $\dim_p X = 0$.
De aquí que $\dim X = 0$.

2.35. El Espacio de la Extensión Discreta de Bing y el Subespacio de Michael (Ejemplos 142 y 143)

El Espacio de la Extensión Discreta de Bing y el Subespacio Cerrado de Michael tienen dimensión 0.

Sean $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, P el conjunto potencia de $\mathbb{R}$ y $X = \prod_{\lambda \in P} \{0,1\}_\lambda$, donde $\{0,1\}_\lambda$ es una copia de un espacio discreto de dos puntos. Para cada $r \in \mathbb{R}$, sea x_r el punto de X cuya λ-ésima coordenada $(x_r)_\lambda$ es igual a 1 si y sólo si $r \in \lambda$.

Sea $M = \{x_r \in X : r \in \mathbb{R}\}$. Si a X le damos la topología Producto τ, entonces el conjunto $X - M$ es denso en X.

Formamos la *Extensión Discreta* (X, σ) de (X, τ) declarando abiertos (en σ) a todos los conjuntos de la forma $\{p\}$ para $p \in X - M$, mientras cada punto en M conserva sus τ-vecindades.

Por otra parte, el *Subespacio Cerrado de Michael* es definido por $Y = M \cup F$, donde F es la colección de todos los $x \in X - M$ tales que $(x)_\lambda = 1$ sólo para un número finito de índices λ.

Como $X = \prod_{\lambda \in P} \{0,1\}_\lambda$ donde $\{0,1\}_\lambda$ es una copia de un espacio discreto, podemos aplicar el Teorema 1.15 y obtener que $\dim(X, \tau) = 0$.

Notemos que $\tau \subset \sigma$. Además notemos que (X, τ) es un espacio de Hausdorff, ya que cada factor $\{0,1\}_\lambda$ lo es. Como $\tau \subset \sigma$, tenemos que (X, σ) es de Hausdorff.

Demostraremos que para toda $x \in X$, $\dim_x(X, \sigma) = 0$. Sea $x \in X$ y consideremos dos casos para x.

Caso 1. $x \in X - M$.

Entonces, $\beta = \{\{x\}\}$ es una base local de vecindades en el punto x. Como $\{x\}$ es abierto y cerrado en (X, σ), tenemos que $\dim_x(X, \sigma) = 0$.

Caso 2. $x \in M$.

Tomemos un abierto U en σ tal que $x \in U$. Por definición, existe un abierto W en τ tal que $x \in W \subset U$. Como (X, τ) tiene dimensión cero, existe $V \in \tau$ tal que V es abierto y cerrado en (X, τ) (y por tanto abierto y cerrado en (X, σ), pues $\tau \subset \sigma$) tal que $p \in W \subset V \subset U$.

Por tanto, para toda $x \in M$, $\dim_x(X, \sigma) = 0$.

Por lo tanto, $\dim(X, \sigma) = 0$.

Por otra parte, para determinar la dimensión del Subespacio Cerrado de Michael Y, basta observar que $Y \neq \emptyset$ y que $Y \subset X$, de modo que al aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a Y, obtenemos que $\dim Y = 0$.

Capítulo 3

Espacios de Dimensión 1

En este capítulo agrupamos 88 ejemplos del libro “Counterexamples in Topology” que resultan tener dimensión uno. Algunos de los ejemplos más interesantes debido al ingenio empleado al calcular la dimensión son la Topología del Diámetro Extraido (ejemplo 76) y la Topología de los Ultrafiltros Fuertes (ejemplo 113) entre otros.

3.1. Topología del Punto Especial (Ejemplos 8, 9 y 10)

Cualquier conjunto no vacío con la Topología del Punto Especial tiene dimensión 1.

Sea X un conjunto cualquiera con más de un puntos. Fijamos un punto $p \in X$, (el cual llamaremos punto especial) y definimos una topología en X tomando como conjuntos abiertos al conjunto vacío y a los subconjuntos de X que contienen a p. Es decir, $\tau = \{U \subset X : p \in U\} \cup \{\emptyset\}$.

Demostraremos que X tiene dimensión 1.

Como todos los conjuntos abiertos y no vacíos en X contienen al punto p, X es conexo. De modo que, por el Corolario 1.10, tenemos que para toda $x \in X$, $\dim X > 0$.

Sea $x \in X$, demostraremos mediante dos casos que $\dim_x X = 1$.

Caso 1. $x \neq p$.
En este caso la familia que consta de un solo conjunto $\beta = \{\{x, p\}\}$ es una base local en el punto x. Notemos que $Fr(\{x, p\}) = X - \{x, p\}$, el cual es un subespacio discreto de X. De modo que podemos aplicar el Corolario 1.12 a $X - \{x, p\}$, y obtener que $\dim(X - \{x, p\}) = 0$. Por lo tanto $\dim_x X \leq 1$. Como $\dim_x X > 0$, concluimos que $\dim_x X = 1$.

Caso 2. $x = p$.
La familia $\{\{p\}\}$ es una base local en p. Notemos que $Fr(\{p\}) = X - \{p\}$, el cual es un subespacio discreto. Aplicando el Corolario 1.12 a $X - \{p\}$ obtenemos que $\dim(X - \{p\}) = 0$. Así que $\dim_p X \leq 1$. Por lo tanto, $\dim_p X = 1$.
Por lo tanto, para toda $x \in X$, $\dim_x X = 1$. Luego, $\dim X = 1$.

3.2. Espacio de Sierpinski (Ejemplo 11)

El Espacio de Sierpinski tiene dimensión 1.

El *Espacio de Sierpinski* está formado por $X = \{p, q\}$ y tiene la topología $\tau = \{\emptyset, X, \{p\}\} = \{U \subset X : p \in U\} \cup \{\emptyset\}$.

Notemos que el Espacio de Sierpinski es un caso particular de 3.1, cuando X tiene dos puntos. Por tanto $\dim X = 1$.

3.3. Topología del Punto Excluido (Ejemplos 13, 14 y 15)

Cualquier conjunto no vacío con la Topología del Punto Excluido tiene dimensión 1.

Sea X un conjunto con más de un punto. Fijamos un punto $p \in X$ (el cual llamaremos punto especial) y definimos una topología sobre X declarando como conjuntos abiertos a X y a todos los subconjuntos de X que no contienen al punto especial p. A esta topología se le conoce como la *Topología del Punto Excluido.*

Notemos que X es un espacio conexo, ya que el único conjunto abierto que contiene al punto especial p es el total. De manera que al aplicar el Corolario 1.10 a X, obtenemos que, para toda $x \in X$, $\dim_x X > 0$.

Sea $x \in X$, demostraremos mediante dos casos que $\dim_x X \leq 1$.

Caso 1. $x = p$ (el punto especial).

En este caso, el único conjunto abierto que contiene al punto p es X y como $Fr(X) = \emptyset$, concluimos que, $\dim_p X = 0$.

Caso 2. $x \neq p$.

Notemos que la familia $\beta = \{\{x\}\}$ es una base local en el punto x y $Fr(\{x\}) = \{p\}$. Como la dimensión de un conjunto que consta de un solo elemento siempre es 0, tenemos que, $\dim\{p\} = 0$. Así que, $\dim_x X \leq 1$. Como $\dim_x X > 0$ concluimos que $\dim_x X = 1$.

Por lo tanto, $\dim X = 1$.

3.4. La Topología de Este o Este (Ejemplo 17)

X con la Topología de Este o Este tiene dimensión 1.

La *Topología de Este o Este* está definida sobre el intervalo cerrado $X = [-1, 1]$, declarando como conjuntos abiertos a los conjuntos que no contienen al cero y a los que contienen al intervalo abierto $(-1, 1)$.

Sea $p \in X$, calcularemos $\dim_p X$ analizando tres casos.

Caso 1. $p = -1$ o $p = 1$.

Notemos que los conjuntos $[-1, 1)$ y $(-1, 1]$ son conjuntos abiertos. De manera que, los conjuntos $\{1\}$ y $\{-1\}$ son abiertos y cerrados en X y las familias $\{\{1\}\}$ y $\{\{-1\}\}$ son bases locales en el 1 y en el -1, respectivamente. De modo que, al aplicar el Teorema 1.9 obtenemos que $\dim_{\{1\}} X = 0$ y $\dim_{\{-1\}} X = 0$.

Caso 2. $p \in (-1, 1)$ con $p \neq 0$.

Notemos que el conjunto que consta de un solo elemento $\{p\}$ es abierto en X, $\beta = \{\{p\}\}$ es una base de vecindades en el punto p y $Fr\{p\} = \{0\}$. Por tanto, $\dim Fr\{p\} = \dim\{0\} = 0$. Así que, $\dim_p X = 1$.

Caso 3. $p = 0$.

En este caso, la familia $\beta = \{(-1,1)\,, [-1,1), (-1,1], [-1,1]\}$ es una base local en el punto p. Notemos que, para cada $V \in \beta$, tenemos que $Fr(V) = \emptyset$, pues $\{1\}$ y $\{-1\}$ son subconjuntos abiertos y cerrados en X.

Por tanto, $\dim Fr(V) = -1$. Así que, $\dim_p X = 0$.

Por lo tanto, $\dim X = 1$.

3.5. La Topología Cofinita (Ejemplos 18 y 19)

Cualquier conjunto infinito con la Topología Cofinita tiene dimensión 1.

Sea X un conjunto infinito cualquiera, definimos la *Topología Cofinita* en X por, $\tau = \{U \subset X : X - U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$.

Claramente, X es un espacio T_1 y conexo. De modo que, al aplicar el Corolario 1.10 a X, obtenemos que, para toda $x \in X$, $\dim_x X > 0$. Demostraremos que para todo $x \in X$, $\dim_x X = 1$.

Sean $x \in X$ y β una base local en el punto x. Entonces, para cada $V \in \beta$ con $V \neq X$, tenemos que $X - V$ es un conjunto finito en X. Notemos que, $Fr(V) \subset X - V$. Como X es T_1 y $X - V$ es finito, podemos aplicar el Corolario 1.13 a $Fr(V)$, y obtener que, $\dim Fr(V) = 0$. Por tanto, $\dim_x X \leq 1$. Luego, $\dim_x X = 1$.

Por lo tanto, $\dim X = 1$.

3.6. Topología del Complemento Numerable (Ejemplo 20)

Cualquier conjunto no numerable con la Topología del Complemento Numerable tiene dimensión 1.

Sea X un conjunto no numerable, definimos la *Topología del Complemento Numerable* por $\tau = \{U \subset X : X - U \text{ es numerable}\} \cup \{\emptyset\}$.

Claramente, X es un espacio T_1 y conexo. De modo que, al aplicar el Corolario 1.10 a X, obtenemos que para toda $x \in X$, $\dim_x X > 0$.

Demostraremos que, para todo $x \in X$, $\dim_x X = 1$.

Sea $x \in X$ y sea β una base local en el punto x. Entonces, para cada $V \in \beta$ con $V \neq X$, tenemos que $X - V$ es un conjunto numerable en X. Notemos que, $Fr(V) \subset X - V$.

Probaremos que $X - V \subset Fr(V)$.

Sean $w \in X - V$ y U un abierto arbitrario en X que contiene a w. Entonces, $(X - V) \cap U \neq \emptyset$. Por otra parte, como $X - V$ es numerable y U es no numerable, tenemos que $U \cap V \neq \emptyset$. Por tanto, $w \in Fr(V)$. Luego, $Fr(V) = X - V$.

Ahora, probaremos que $X - V$ es un subespacio discreto de X.

Sea $w \in X - V$. Entonces, $W = V \cup \{w\}$ es un conjunto abierto en X que contiene al punto w, y es tal que $W \cap (X - V) = \{w\}$. Por tanto, el conjunto formado por un solo elemento $\{w\}$ es abierto en $X - V$. Además, como X es T_1, el conjunto $\{w\}$ es abierto y cerrado en $X - V$. Por tanto, $X - V$ es un subespacio discreto de X. Aplicando el Corolario 1.12 al conjunto $X - V$, obtenemos que $\dim(X - V) = 0$, es decir, $\dim Fr(V) = 0$. Así que, $\dim_x X \leq 1$. Por lo tanto, para toda $x \in X$, $\dim_x X = 1$. Luego, $\dim X = 1$.

3.7. El Punto Dual con la Topología del Complemento Numerable (Ejemplo 21)

El Espacio del Punto Dual con la Topología del Complemento Numerable tiene dimensión 1.

Sean $Y \neq \emptyset$ con la topología del Complemento Numerable y $Z = \{a, b\}$ con la topología Indiscreta, entonces, $X = Y \times Z$ es el *Espacio del Punto Dual con la Topología del Complemento Numerable*.

Para demostrar que $\dim X = 1$, demostraremos la siguiente proposición.

Proposición 3.1 *Sean Y y Z espacios topológicos no vacíos, tales que para alguna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que,* $\dim Y = n$ *y* $\dim Z = 0$*, entonces* $\dim(Y \times Z) = n$*.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sea $n = 0$. En este caso podemos aplicar el Teorema 1.15 a Y y Z y obtener que $\dim(Y \times Z) = 0$.

Supongamos que la proposición es válida para $n-1$. Entonces, si $\dim Y \leq n-1$ y $\dim Z = 0$, se tiene que $\dim(Y \times Z) \leq n-1$.

Tomemos Y y Z tales que $\dim Y = n$ y $\dim Z = 0$. Demostraremos que $\dim(Y \times Z) = n$.

Como $\dim Y = n$, dado $y_0 \in Y$, existe una base local β en el punto y_0, tal que para todo $V \in \beta$, se tiene que, $\dim Fr(V) \leq n-1$. Sea $p = (y_0, z) \in Y \times Z$. Como $\dim Z = 0$, existe una base γ de vecindades de z en Z con frontera vacía.

Sean $V \in \beta$ y $W \in \gamma$ tales que $p \in V \times W$.

Sabemos que $Fr(V \times W) = (Fr(V) \times Cl(W)) \cup (Cl(V) \times Fr(W))$. Como $Fr(W) = \emptyset$, tenemos que, $Fr(V \times W) = Fr(V) \times Cl(W) = Fr(V) \times W$. Por otra parte, como $W \subset Z$ y $W \neq \emptyset$, se tiene, al aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a W, que $\dim W = 0$. De manera que, $\dim Fr(V) \leq n-1$ y $\dim W = 0$. Aplicando la hipótesis de inducción a $Fr(V)$, obtenemos que, $\dim(Fr(V) \times W) = \dim Fr(V) \leq n-1$. Por tanto, $\dim Fr(V \times W) = \dim(Fr(V) \times W) = \dim Fr(V) \leq n-1$, por tanto, $\dim_p(Y \times Z) \leq n$.

Por lo tanto, $\dim(Y \times Z) \leq n$. Dada $z_0 \in Z$, $Y \times \{z_0\}$ es un subespacio de $Y \times Z$ que es homeomorfo a Y. Entonces $n = \dim(Y \times \{z_0\}) \leq \dim(Y \times Z)$. Por tanto $\dim(Y \times Z) = n$. ■

Como Y tiene la topología del Complemento Numerable, tenemos que $\dim Y = 1$ (ver 3.6) y como Z es un espacio con la topología Indiscreta, tenemos que, $\dim Z = 0$ (ver 2.2). Aplicando la proposición anterior a $Y \times Z$, obtenemos que, $\dim(Y \times Z) = \dim Y = 1$.

3.8. Espacio Fuerte Modificado (Ejemplo 27)

El Espacio Fuerte Modificado tiene dimensión 1.

Sea $X = N \cup \{x_1, x_2\}$, donde N es cualquier conjunto infinito y x_1, x_2 son tales que $x_1 \neq x_2$ y $x_1, x_2 \notin N$. Sea $\tau = \{W : W \subset N\} \cup \{Y \subset X : x_1 \in Y$ o $x_2 \in Y$ y Y contiene a todos los puntos de N excepto un número finito de ellos$\}$.

Claramente, X es un espacio T_1.

Sea $p \in X$. Demostraremos, mediante tres casos, que $\dim_p X \leq 1$.

Caso 1. $p \in N$.

En este caso, la familia $\beta = \{\{p\}\}$ forma una base local en el punto p de conjuntos abiertos y cerrados en X. Aplicando el Teorema 1.9, obtenemos que $\dim_p X = 0$.

Caso 2. $p = x_1$.

Sea V un abierto cualquiera de X que tenga a x_1 y tal que $x_2 \notin V$. Notemos que, V es un conjunto infinito. Cualquier abierto W que contiene al punto x_2 intersecta a V, ya que, W contiene a todos los puntos de N, excepto a un número finito de ellos. Por tanto, $x_2 \in Fr(V)$.

Por otra parte, dado $q \in (X - V) \cap N$, $\{q\}$ es un abierto que no intersecta a V, así que $q \notin Fr(V)$. De modo que, $Fr(V) = \{x_2\}$. Luego, $\dim Fr(V) = 0$. Por tanto, $\dim_p X \leq 1$.

Como probamos que $Fr(V) \neq \emptyset$ para todo abierto V que tiene a x_1 y que no tiene a x_2, obtenemos que $\dim_{x_1} X \geq 1$.

Por tanto $\dim_p X = 1$.

Caso 3. $p = x_2$.

Este caso es similar al anterior.

Por lo tanto $\dim X = 1$.

3.9. La Topología Euclidiana en $\mathbb{R}$ (Ejemplo 28)

$\mathbb{R}$ con la Topología Euclidiana tiene dimensión 1.

Como $\mathbb{R}$ es conexo, al aplicar el Corolario 1.10, obtenemos que, $\dim_p \mathbb{R} > 0$ para todo $p \in \mathbb{R}$.

Sean $p \in \mathbb{R}$ y $\beta = \{(a, b) : a < p < b \in \mathbb{R}\}$. La familia β es la base usual en el punto p. Es claro que para todo $V \in \beta$, $Fr(V) = \{a, b\}$. Como $\{a, b\}$

es un subespacio discreto en $\mathbb{R}$, podemos aplicar el Corolario 1.12 a $\{a, b\}$ y obtener que $\dim Fr(V) = 0$. Así, $\dim_p \mathbb{R} \leq 1$ y $\dim_p \mathbb{R} > 0$. Por tanto, para toda $p \in \mathbb{R}$, tenemos que $\dim_p \mathbb{R} = 1$.

Por lo tanto $\dim \mathbb{R} = 1$.

3.10. Subconjuntos Especiales de la Línea Real (Ejemplo 32)

Los Subconjuntos Especiales de la Línea Real tienen dimensión 0 ó 1.

Sea $(\mathbb{R}, \tau)$ el conjunto de los números reales con su topología usual. Consideremos los siguientes subconjuntos:

1) $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
2) $B = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$.
3) $C = \left\{\frac{1}{1}, 1 + \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, ...\right\}$.
4) $D = \bigcap A_n$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$. Notemos que, $D = \{1\}$.
5) $E = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.
6) $F = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
7) $G = (0, 1)$.
8) $H = \{0\} \cup [1, 2] \cup \{3\}$.
9) $I = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup (2, 3) \cup (3, 4) \cup \left\{4\frac{1}{2}\right\} \cup [5, 6] \cup ([7, 8) \cap \mathbb{Q})$.
10) $J = \mathbb{N}$.

Por el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) tenemos que la dimensión de los conjuntos anteriores es menor o igual que 1, pues $\dim \mathbb{R} = 1$ (ver 3.9). Por el Teorema 1.19, tenemos que la dimensión de los conjuntos A, B, C, D y J tienen dimensión 0, pues no contienen ningún intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Como los conjuntos E, F, G, H, I sí contienen un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, tenemos que cada uno de ellos tiene dimensión 1.

3.11. La Compactación por un Punto de los Números Racionales (Ejemplo 35)

La Compactación de los Números Racionales por un Punto tiene dimensión 1.

Sea $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \cup \{p\}$, donde $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales con su topología usual τ y p un punto especial tal que $p \notin \mathbb{Q}$. La *Compactación de los Números Racionales por un Punto* es formada por $\mathbb{Q}^*$ y la siguiente topología:

$\tau^* = \tau \cup \{U \subset \mathbb{Q}^* : p \in U$ y $\mathbb{Q}^* - U$ es compacto en $\mathbb{Q}\}$. La pareja $(\mathbb{Q}^*, \tau^*)$ es entonces *la Compactación de* $\mathbb{Q}$ *por un Punto*. Notemos que, para cada $U \in \tau^*$, $U \cap \mathbb{Q} \in \tau$. De manera que $\mathbb{Q}$, como subespacio de $\mathbb{Q}^*$, tiene su topología usual.

Notemos que $(\mathbb{Q}^*, \tau^*)$ es un espacio compacto.

Primero demostraremos que $\dim(\mathbb{Q}^*, \tau^*) > 0$ demostrando que $(\mathbb{Q}^*, \tau^*)$ es un espacio conexo.

Supongamos por el contrario que existen dos abiertos ajenos y no vacíos U y V en $\mathbb{Q}^*$ tales que $\mathbb{Q}^* = U \cup V$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el punto especial p pertenece a U. De modo que, el abierto (y cerrado) $V = \mathbb{Q}^* - U$ es compacto en $\mathbb{Q}$. Elegimos $x \in V$, entonces existe un básico (a, b) de $\mathbb{R}$ tal que $x \in (a, b) \cap \mathbb{Q} \subset V$. Es bien sabido que el intervalo abierto (a, b) contiene sucesiones de números racionales que convergen a números irracionales de (a, b), de modo que ese tipo de sucesiones no tienen un punto de acumulación en V; esto contradice la compacidad de V. Por lo tanto $(\mathbb{Q}^*, \tau^*)$ es conexo. Así que, por el Corolario 1.10 aplicado a $\mathbb{Q}^*$, podemos concluir que, $\dim_x(\mathbb{Q}^*, \tau^*) > 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}^*$, es decir, $\dim(\mathbb{Q}^*, \tau^*) > 0$.

Ahora demostraremos que, para todo $x \in \mathbb{Q}^*$, $\dim_x(\mathbb{Q}^*, \tau^*) = 1$.

Caso 1. $x = p$.

Sea U un abierto de $\mathbb{Q}^*$ que contiene a p. Hagamos $K = \mathbb{Q}^* - U$, entonces K es compacto en $\mathbb{Q}$. De manera que K contiene a su frontera, es decir, $K = Cl(K) = Int(K) \cup Fr(K)$.

Demostraremos que $Int(K) = \emptyset$.

Supongamos por el contrario que $Int(K) \neq \emptyset$ y tomemos $x \in Int(K)$. Entonces, existe un básico (a, b) de $\mathbb{R}$ tal que $x \in (a, b)$ y $x \in (a, b) \cap \mathbb{Q} \subset K$. Notemos que (a, b) contiene sucesiones de números racionales que convergen a números irracionales en (a, b), las cuales no tienen puntos de acumulación en K. Esto contradice la compacidad de K. Por tanto $Int(K) = \emptyset$.

Hemos demostrado que $K = Fr(K)$. De aquí que $Fr(U) = Fr(K) = K \subset \mathbb{Q}$. Como $\dim \mathbb{Q} = 0$, al aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a

$Fr(U)$, obtenemos que, $\dim(Fr(U)) = 0$. Como U es un abierto arbitrario que contiene a p, podemos concluir que, $\dim_p(\mathbb{Q}^*, \tau^*) \leq 1$. Como ya sabíamos que $\dim_p(\mathbb{Q}^*, \tau^*) > 0$, obtenemos que $\dim_p(\mathbb{Q}^*, \tau^*) = 1$.

Caso 2. $x \neq p$.

Como $x \neq p$, tenemos que $x \in \mathbb{Q}$. Sean $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tales que $x \in (a, b)$, y V un abierto de $\mathbb{Q}^*$ tal que $p \in V$. El conjunto $K = \mathbb{Q}^* - V$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{Q}$. Como vimos antes, no es posible que $(a, b) \subset K$, lo cual implica que $V \cap (a, b) \neq \emptyset$. Hemos mostrado que $p \in Fr((a, b))$. Por lo tanto $\beta = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $a < x < b\}$ es una base de vecindades en x tal que, para todo $(a, b) \in \beta$, $Fr_{\mathbb{Q}^*}((a, b)) = \{p\}$. Por lo tanto, $\dim Fr_{\mathbb{Q}^*}((a, b)) \leq 0$, de modo que $\dim_x(\mathbb{Q}^*, \tau^*) \leq 1$. Como $(\mathbb{Q}^*, \tau^*)$ es conexo, obtenemos que $\dim_x(\mathbb{Q}^*, \tau^*) = 1$.

Por lo tanto $\dim(\mathbb{Q}^*, \tau^*) = 1$.

3.12. Topología del Orden (Ejemplo 39)

Si X es conexo con más de un punto y tiene la Topología del Orden, entonces X tiene dimensión 1. Si X no es conexo, entonces a lo más la dimensión de X es 1.

Sea X un espacio completamente ordenado y no vacío. Con una flecha apuntando hacia la derecha denotamos a los elementos en X que son mayores que un determinado punto $y \in X$, por Ejemplo: el intervalo $(y, \rightarrow)$ representa a todos los elementos del espacio que son mayores que y. Es decir, $(y, \rightarrow) = \{x \in X : y < x\}$.

Análogamente, representamos a los elementos en X que son menores que un determinado punto y, con una flecha apuntando hacia la izquierda. Es decir, $(\leftarrow, y) = \{x \in X : x < y\}$.

Si X es un conjunto completamente ordenado y no vacío. Entonces, la familia $\beta = \{(y, \rightarrow) : y \in X\} \cup \{(\leftarrow, z) : z \in X\} \cup \{(y, z) : y, z \in X\} \cup \{X\}$ sirve de base para una topología en X, la cual es conocida como la *Topología del Orden.*

A un conjunto completamente ordenado le llamaremos *Espacio Topológico Ordenado,* cuando lo consideremos con la topología inducida por β.

Si X es un espacio topológico ordenado, no degenerado y conexo, demostraremos que $\dim X = 1$.

Dados $p \in X$ y un básico $V \in \beta$ que contiene a p, tenemos que $0 \leq |Fr(V)| \leq 2$, pues si $V = (y, z)$, entonces sólo y y z pueden pertenecer a $Fr(V)$, y los otros casos para V son similares. Dado que X es T_1, $Fr(V_p)$ es discreta. De modo que, al aplicar el Corolario 1.12 a $Fr(V)$, obtenemos que, $\dim Fr(V) = 0$. Luego, $\dim_p X \leq 1$. Por la conexidad de X, $\dim_p X > 0$. Por lo tanto, $\dim X = 1$.

Si X es un espacio topológico ordenado, demostraremos que, $\dim X$ es 0 ó 1.

Análogamente al caso anterior, la frontera de cualquier básico tiene cardinalidad menor o igual a 2. De modo que, para cualquier $p \in X$, $\dim_p X \leq 1$. Así, $\dim_p X = 0$ ó $\dim_p X = 1$. Por lo tanto, $\dim X = 0$ ó $\dim X = 1$.

3.13. La Línea Larga L y La Línea Larga Extendida L^* (Ejemplos 45 y 46)

La Línea Larga L y su Extensión L^* tienen dimensión 1.

Consideremos el producto cartesiano $L = [0, \Omega) \times [0, 1)$, en donde $[0, \Omega)$ es el Espacio de Ordinales Abierto con Ω el primer ordinal no numerable (ver 2.13) y $[0, 1)$ es el intervalo unidad de números reales abierto superiormente. Asignemos el orden lexicográfico a L y consideremos a L con la topología del Orden. Entonces, L es un espacio topológico ordenado, al cual llamaremos la *Línea Larga*.

Similarmente, consideremos a $L^* = L \cup \{(\Omega, 0)\}$ y asignémosle el orden lexicográfico. Llamaremos a L^* la *Línea Larga Extendida*.

Los espacios L y L^* tienen la topología del Orden y ambos espacios son conexos [10, Teorema 4.7, p. 47]. Entonces, podemos aplicar 3.12 a L y L^*, y obtener que $\dim L = 1$ y $\dim L^* = 1$.

3.14. La Línea Larga Alterada (Ejemplo 47)

La Línea Larga Alterada tiene dimensión 1.

A la Línea Larga L (definida en 3.13) le agregamos un punto p el cual no pertenece a L. Entonces, definimos una topología en $X = L \cup \{p\}$, tomando como conjuntos abiertos a los conjuntos que ya lo eran en L, y agregamos a los conjuntos generados por las siguientes vecindades del punto p:

$$U_\beta(p) = \left\{ \bigcup_{\alpha>\beta} ((\alpha,0),(\alpha+1,0)) \right\} \cup \{p\}, \text{ donde } 1 \leq \beta < \Omega.$$

Claramente, X es conexo, ya que L lo es. De manera que, podemos aplicar el Corolario 1.10 a X, y obtener que, para toda $x \in X$, $\dim_x X > 0$.

Para demostrar que, para toda $x \in X$, $\dim_x X = 1$, consideremos dos casos. Tomemos $x \in X$.

Caso 1. $x \neq p$.

Como $X - \{p\}$ tiene la topología del Orden y el conjunto $\{p\}$ es cerrado en X, tenemos que $\dim_x X = 1$.

Caso 2. $x = p$.

Sea $\psi = \{U_\beta(p) : 1 \leq \beta < \Omega\}$ la base local en el punto p. Para cada $U_\beta \in \psi$, tenemos que, $Fr(U_\beta) = \{(\alpha,0) : \beta \leq \alpha \leq \Omega\}$, el cual es un subespacio de X que es homeomorfo a $\{\alpha \in [0,\Omega] : \beta \leq \alpha \leq \Omega\}$. En 2.13 vimos que el espacio $[0,\Omega]$ tiene dimensión cero, así que $\dim Fr(V) = 0$. De aquí que, $\dim_p X \leq 1$. Como ya sabíamos que $\dim_p X > 0$, concluimos que $\dim_p X = 1$.

Por lo tanto, para toda $x \in X$, $\dim_x X = 1$. Luego, $\dim X = 1$.

3.15. El Cuadrado Lexicográfico (Ejemplo 48)

El Cuadrado Lexicográfico tiene dimensión 1.

Sea $X = [0,1] \times [0,1]$ y sean a, b, c y $d \in [0,1]$ tales que $(a,b), (c,d) \in X$. Definimos un orden $\prec$ en X de la siguiente manera: $(a,b) \prec (c,d)$ si y sólo si $a < c$ ó ($a = c$ y $b < d$). Entonces, X con la topología τ inducida por el orden $\prec$ es un espacio linealmente ordenado, el cual es conocido como el *Cuadrado Lexicográfico.*

El Cuadrado Lexicográfico X es conexo [10, Teorema 3.3, p. 36]. Entonces, podemos aplicar 3.12 a X, y obtener que, para todo $p \in X$, $\dim_p X = 1$. Por tanto, $\dim X = 1$.

3.16. La Topología de Hjalmar Ekdal (Ejemplo 55)

$\mathbb{N}$ con la Topología de Hjalmar Ekdal tiene dimensión 1.

La Topología de *Hjalmar Ekdal* es definida sobre el conjunto de los números naturales, tomando como base a la familia

$$\beta = \{\{1,2\}, \{2\}, \{3,4\}, \{4\}, \{5,6\}, \{6\}, ...\}.$$

Calcularemos, para cada $p \in \mathbb{N}$, la $\dim_p \mathbb{N}$. Consideramos dos casos:

Caso 1.
$p = 2n - 1$, para alguna $n \in \mathbb{N}$.
Si β es una base local de vecindades abiertas en p, entonces $\{p, p+1\} \in \beta$. Como $Fr(\{p, p+1\}) = \emptyset$, obtenemos que $\dim_p \mathbb{N} = 0$.

Caso 2. $p = 2n$, para alguna $n \in \mathbb{N}$.
Si β es una base local de vecindades abiertas en p, entonces $\{p\} \in \beta$. Como $Fr(\{p\}) = \{p-1\}$, tenemos que $\dim_p \mathbb{N} \geq 1$. Por otra parte, $\{\{p\}\}$ es una base local en p y $\dim Fr(\{p\}) = 0$, así que $\dim_p \mathbb{N} \leq 1$. Por tanto $\dim_p \mathbb{N} = 1$.
Por lo tanto $\dim \mathbb{N} = 1$.

3.17. Topología de la Recta Real Dual (Ejemplo 62)

La Recta Real Dual tiene dimensión 1.

Sea $X = \mathbb{R} \times \{0,1\}$ el producto cartesiano de la recta real con su topología usual y el conjunto $\{0,1\}$ con la topología Indiscreta.

Como $\dim(\{0,1\}) = 0$ (ver 2.2) y $\dim \mathbb{R} = 1$ (ver 3.9), al aplicar la Proposición 3.1 a $\mathbb{R}$ y $\{0,1\}$, obtenemos que, $\dim X = \dim(\mathbb{R} \times \{0,1\}) = \dim \mathbb{R} = 1$.
Por tanto, $\dim X = 1$.

3.18. Topología de la Extensión del Complemento Numerable (Ejemplo 63)

La Recta Real con la Topología de la Extensión del Complemento Numerable tiene dimensión 1.

Sea $X = \mathbb{R}$ y sean τ_1 y τ_2 la topología Euclidiana sobre $\mathbb{R}$ y la topología del Complemento Numerable (ver 3.6), respectivamente. Definimos la siguiente topología en $\mathbb{R}$:

Sea $\tau = \{W \cap V : W \in \tau_1 \text{ y } V \in \tau_2\}$. Entonces, (X, τ) es llamado *el Espacio de la Extensión del Complemento Numerable*. Notemos que los subconjuntos cerrados en (X, τ) son de la forma $C = \mathbb{R} - (W \cap V) = (\mathbb{R} - W) \cup (\mathbb{R} - V)$, donde $W \in \tau_1$ y $V \in \tau_2$. Sean $K = \mathbb{R} - W$ y $B = \mathbb{R} - B$. Entonces, los subconjuntos cerrados en X son de la forma $K \cup B$, donde K es un subconjunto cerrado en $\mathbb{R}$ con su topología usual y B un subconjunto numerable.

Notemos que τ es una expansión de la topología Euclidiana, ya que si tomamos $V = X$ y $W \in \tau_1$, tenemos que $W \cap V = W \in \tau$.

Demostraremos que (X, τ) es un espacio conexo. Para ello, primero demostraremos la siguiente proposición.

Proposición 3.2 *Sea $(\mathbb{R}, \tau)$ el Espacio de la Extensión del Complemento Numerable y sean un abierto no vacío $V \in \tau$ y un subconjunto cerrado $C = K \cup B$, donde K es cerrado en $\mathbb{R}$, B es numerable y $V \subset C$, entonces $V \subset K$.*

Demostración. Sea $x \in V$, entonces $x \in K$ o $x \in B$.

Supongamos que $x \in B$. Sea H un abierto cualquiera en τ que contiene a x. Entonces, $x \in V \cap H \subset K \cup B$. Como $V \cap H \in \tau$, tenemos que $V \cap H$ es un subconjunto no numerable en $\mathbb{R}$, y como B es un subconjunto numerable en $\mathbb{R}$, tenemos que $(V \cap H) \cap K \neq \emptyset$. De aquí que, $H \cap K \neq \emptyset$. En particular, esto sucede para todo abierto en τ_1 que contiene a x. Por tanto, $x \in Cl_{(\mathbb{R},\tau_1)}(K)$, y como K es cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_1)$, concluimos que, $x \in K$.

Por lo tanto, $V \subset K$. ■

Afirmamos que (X, τ) es un espacio conexo. Supongamos por el contrario que existen abiertos ajenos y no vacíos U y V en (X, τ), tales que $X = U \cup V$.

Entonces, U y V satisfacen ser cerrados en (X, τ). De manera que $U = K \cup B$, donde K es un subconjunto cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_1)$ y B es un subconjunto numerable en $\mathbb{R}$. Notemos que, $U \subset K \cup B$. Aplicando la proposición anterior a U, obtenemos que $U \subset K$. De modo que, $K \cup B \subset U \subset K$. Por tanto, $U = K$. Es decir, U es cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_1)$. Esto sucede también para el conjunto V, de modo que U y V desconectan a $(\mathbb{R}, \tau_1)$, lo cual es absurdo. Por tanto, (X, τ) es un espacio conexo.

Aplicando el Corolario 1.10 a (X, τ), obtenemos que, para todo $p \in X$, $\dim_p X > 0$.

Ahora demostraremos que $\dim_p X \leq 1$.

Sea $p \in \mathbb{R}$ y sea $H = (a, b) \cap V$, donde $a < p < b$ y $\mathbb{R} - V$ es numerable. Entonces $H = (a, b) - (\mathbb{R} - V)$. Observemos que $p \in H \subset U$, y que para toda $x < a$ y toda $x > b$, $x \notin Fr(H)$, pues podemos encontrar abiertos de la forma $(-\infty, a)$ o (b, ∞), los cuales contienen a x y no intersectan a H. Veamos que, $Fr(H) \subset (\mathbb{R} - V) \cup \{a, b\}$. De lo contrario, existe $z \in Fr(H)$ tal que $z \notin (\mathbb{R} - V) \cup \{a, b\}$, entonces $z \in V$ y por lo anterior $a \leq z \leq b$, de modo que $z \in [a, b] \cap V$. Como $z \notin \{a, b\}$, tenemos que $z \in (a, b) \cap V = H$, lo cual es absurdo, pues H es abierto en X. Por tanto, $Fr(H) \subset (\mathbb{R} - V) \cup \{a, b\}$. De aquí que, $Fr(H)$ es numerable.

Probaremos que $\dim Fr(H) = 0$.

Sea $x \in Fr(H)$, entonces $Fr(H) - \{x\}$ es numerable. De manera que, el conjunto $\mathbb{R} - (Fr(H) - \{x\})$ es un abierto en τ que tiene a x, y $(\mathbb{R} - (Fr(H) - \{x\})) \cap Fr(H) = \{x\}$. Como x fue un punto cualquiera en $Fr(H)$, tenemos que $Fr(H)$ es un subespacio discreto, de manera que, al aplicar el Corolario 1.12 a $Fr(H)$, obtenemos que $\dim Fr(H) = 0$. Como los conjuntos que son de la forma de H constituyen una base de p en $(\mathbb{R}, \tau)$, concluimos que, $\dim_p (\mathbb{R}, \tau) \leq 1$. Como ya sabíamos que $\dim_p X > 0$, concluimos que, $\dim_p (\mathbb{R}, \tau) = 1$.

Por lo tanto $\dim (\mathbb{R}, \tau) = 1$.

3.19. Topología de las Sucesiones Suprimidas de Smirnov (Ejemplo 64)

El Espacio de las Sucesiones Suprimidas de Smirnov tiene dimensión 1.

Sean $X = \mathbb{R}$ y $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Definimos una topología τ sobre X por:

$\tau = \{U \subset \mathbb{R} : U = V - B,\ B \subset A$ y V es un abierto cualquiera en $\mathbb{R}\}$. La pareja (X, τ) es conocida como el *Espacio de las Sucesiones Suprimidas de Smirnov.*

Notemos que τ es más fina que la topología usual de $\mathbb{R}$, pues tomando a $B = \emptyset$, obtenemos los abiertos de $\mathbb{R}$. Por tanto (X, τ) es de Hausdorff. También notemos que cada elemento de τ es de la forma $U = V \cap (\mathbb{R} - B)$, donde V es abierto de la topología Euclidiana y $B \subset A$, así que $\mathbb{R} - (\mathbb{R} - B) = B$ es numerable. De modo que U es un abierto en la topología de la Extensión del Complemento Numerable (ver 3.18). Esto prueba que la topología de las Sucesiones Suprimidas de Smirnov está contenida en la topología de la Extensión del Complemento Numerable. Como ésta última es conexa, τ también lo es. Por tanto, para toda $x \in \mathbb{R}$, $\dim_x(X, \tau) > 0$.

Sea $x \in \mathbb{R}$, calcularemos $\dim_x X$. Para ello consideremos cuatro casos.

Caso 1. $x \in \mathbb{R} - [0, 1]$.

Una base local en el punto x está dada precisamente por los abiertos básicos de la topología Euclidiana, es decir, por

$$\beta = \{(a, b) \subset \mathbb{R} - [0, 1] : a < x < b\}.$$

Claramente, para cada $V \in \beta$, $Fr_{(\mathbb{R},\tau)}(V) = \{a, b\}$. Es decir, el comportamiento local de (X, τ) es igual a $\mathbb{R}$ con la topología Euclidiana (ver 3.9). Por tanto, $\dim_x (X, \tau) = 1$.

Caso 2. $x \in (0, 1) - A$.

En este caso, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x \in (\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N})$. Elegimos como base local en x a la siguiente familia:

$\beta = \left\{(a, b) \subset \mathbb{R} : \frac{1}{N+1} < a < x < b < \frac{1}{N}\right\}$. Notemos que localmente la topología de X es igual a la topología Euclidiana. Claramente, la frontera de cada básico (a, b) en $(\mathbb{R}, \tau)$ es la misma que en $\mathbb{R}$ con su topología usual. Similarmente al caso anterior, concluimos que, $\dim_x (X, \tau) = 1$.

Caso 3. $x \in A$.

Aquí, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x = \frac{1}{N}$ y $x \in (\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N-1})$. Elegimos como base local de x a la siguiente familia:

$\beta = \left\{(a, b) \subset \mathbb{R} : x \in (a, b) \text{ y } \frac{1}{N+1} < a < b < \frac{1}{N-1}\right\}$. Similarmente a los casos anteriores, tenemos que, para cada $V \in \beta$, $Fr_{(\mathbb{R},\tau)}(V) = \{a, b\}$. Así, podemos concluir que, $\dim_x (X, \tau) = 1$.

Caso 4. $x = 0$.

Tomemos como base local en x a la familia:

$\beta = \{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) - B : n \in \mathbb{N}$ y $B \subset A\}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $B \subset A$, tenemos que $Fr((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) - B) = \{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\} \cup (B \cap (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}))$, el cual es un subespacio discreto de X. De modo que, al aplicar el Corolario 1.12 a $\{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\} \cup (B \cap (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}))$, obtenemos que $\dim Fr((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) - B) = 0$. Por lo tanto $\dim_0 (X, \tau) \leq 1$. Así que $\dim_0(X, \tau) = 1$.

Por lo tanto, para toda $x \in X$, $\dim_x (X, \tau) = 1$. Luego, $\dim (X, \tau) = 1$.

3.20. La Extensión Indiscreta de $\mathbb{R}$ y la Extensión Puntual de $\mathbb{R}$ (Casos Racional e Irracional) (Ejemplos 66, 67, 68 y 69)

La Extensión Indiscreta y la Extensión Puntual (racional e irracional) de $\mathbb{R}$ tienen dimensión 1.

Sea $X = \mathbb{R}$ con τ la topología Euclidiana. Definimos una nueva topología τ^* sobre $\mathbb{R}$ que tiene como base a $\tau \cup \{U \cap \mathbb{Q} : U \in \tau\}$. Entonces, (X, τ^*) es la *Extensión Racional Indiscreta* de $\mathbb{R}$. Análogamente, definimos a $\widehat{\tau}$ como la topología que tiene como base a $\tau \cup \{U \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) : U \in \tau\}$ y llamamos a $(X, \widehat{\tau})$ la *Extensión Irracional Indiscreta* de $\mathbb{R}$. La *Extensión Racional Puntual* de $\mathbb{R}$ se define tomando a $X = \mathbb{R}$ y τ' como la topología que tiene como base a $\{\{x\} \cup (U \cap \mathbb{Q}) : x \in U \in \tau\}$. Similarmente, definimos a τ'' como la topología que tiene como base a $\{\{x\} \cup (U \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})) : x \in U \in \tau\}$ y llamamos a (X, τ'') la *Extensión Irracional Puntual* de $\mathbb{R}$.

Sólo demostraremos que la Extensión Racional Indiscreta y la Extensión Racional Puntual de $\mathbb{R}$ tienen dimensión 1, la demostración para la Extensión Irracional Indiscreta de $\mathbb{R}$ y la Extensión Irracional Puntual de $\mathbb{R}$ es análoga.

Notemos que $\tau \subset \tau^* \subset \tau'$, de modo que ambos espacios $(\mathbb{R}, \tau^*)$ y $(\mathbb{R}, \tau')$ son de Hausdorff.

Demostraremos que los espacios topológicos $(\mathbb{R}, \tau^*)$ y $(\mathbb{R}, \tau')$ son conexos.

Como $\tau \subset \tau^* \subset \tau'$, es suficiente demostrar que $(\mathbb{R}, \tau')$ es conexo. Para ello probaremos dos afirmaciones.

Afirmación 1. Para cualquier abierto no vacío U en τ', tenemos que, $Cl_{\tau'}(U) = Cl_{\tau}(U)$.

Dado un abierto no vacío U en τ', tenemos claramente que, $Cl_{\tau'}(U) \subset Cl_{\tau}(U)$.

Para probar la otra contención tomamos $p \in Cl_{\tau}(U)$. Sea V abierto en τ que contiene a p. Entonces $V \cap U \neq \emptyset$. Notemos que $V \cap U \in \tau'$. Como $\mathbb{Q}$ es denso en τ', tenemos que $(V \cap U) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$; y como $V \in \tau$ y $p \in V$, se concluye que $\{p\} \cup (V \cap \mathbb{Q}) \in \tau'$ y $(\{p\} \cup (V \cap \mathbb{Q})) \cap U \neq \emptyset$. Así, $p \in Cl_{\tau'}(U)$. Esto termina la prueba de la Afirmación 1.

Afirmación 2. $(\mathbb{R}, \tau')$ es conexo.

Supongamos que $\mathbb{R} = U \cup V$, donde $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset \neq V$ y $U, V \in \tau'$. Entonces U y V también son cerrados en τ'. De manera que $U = Cl_{\tau'}(U) = Cl_{\tau}(U)$ y, similarmente, $V = Cl_{\tau}(V)$. Así que U y V son cerrados no vacíos y ajenos en τ tales que $\mathbb{R} = U \cup V$. Esto contradice la conexidad de $(\mathbb{R}, \tau)$ y termina la prueba de la Afirmación 2.

En consecuencia, como $\tau^* \subset \tau'$, tenemos que, $(\mathbb{R}, \tau^*)$ también es conexo. De manera que al aplicar el Corolario 1.10 a los espacios $(\mathbb{R}, \tau')$ y $(\mathbb{R}, \tau^*)$, obtenemos que, $\dim_x(\mathbb{R}, \tau') \geq 1$ y $\dim_x(\mathbb{R}, \tau^*) \geq 1$, para toda $x \in \mathbb{R}$.

Ahora demostraremos que, dim $(\mathbb{R}, \tau^*) \leq 1$, posteriormente que, dim $(\mathbb{R}, \tau') \leq 1$. Sea $p \in \mathbb{R}$, consideremos dos casos.

Caso 1. $p \in \mathbb{Q}$.

En este caso, una base local en el punto p está dada por la familia:

$\beta = \{(a, b) \cap \mathbb{Q} : a < p < b \text{ y } a, b \notin \mathbb{Q}\}$. De manera que, para cada $V \in \beta$, tenemos que $Fr(V) = \{a, b\} \cup ((a, b) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Notemos que la topología que τ^* le hereda a $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es la misma que la que le hereda la topología Euclidiana a $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Como $Fr(V) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $\dim(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = 0$ (ver 2.11), podemos aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a $Fr(V)$ y obtener que, $\dim(Fr(V)) = 0$. De aquí que, $\dim_p(\mathbb{R}, \tau^*) \leq 1$. Por tanto, $\dim_p(\mathbb{R}, \tau^*) = 1$.

Caso 2. $p \notin \mathbb{Q}$.

En este caso, una base local en p está dada por la familia:

$\beta = \{(a, b) \subset \mathbb{R} : a < p < b\}$. De manera que, para cada $V \in \beta$, tenemos que $Fr(V) = \{a, b\}$, el cual es un subespacio discreto. Al aplicar el Corolario 1.12 a $\{a, b\}$, obtenemos que, $\dim(\{a, b\}) = 0$. Así que, $\dim_p(\mathbb{R}, \tau^*) \leq 1$. Por tanto, $\dim_p(\mathbb{R}, \tau^*) = 1$.

Concluimos que, para todo $p \in \mathbb{R}$, $\dim_p(\mathbb{R}, \tau^*) = 1$.
Por lo tanto, $\dim(\mathbb{R}, \tau^*) = 1$.

Sea $p \in \mathbb{R}$. Ahora demostraremos también, mediante dos casos, que $\dim(\mathbb{R}, \tau') \leq 1$.

Caso 1. $p \in \mathbb{Q}$.
En este caso, una base local en p está dada por:
$\beta = \{(a,b) \cap \mathbb{Q} : a < p < b \text{ y } a, b \notin \mathbb{Q}\}$. De manera que, para cada $V \in \beta$, tenemos que $Fr(V) = [a,b] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Notemos que, $[a,b] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ es un subespacio discreto de $(\mathbb{R}, \tau')$, ya que si $x \in [a,b] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, entonces dado un básico $V \in \tau$ que contiene a x, se tiene que, $(\{x\} \cup (V \cap \mathbb{Q})) \cap ([a,b] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})) = \{x\}$. De modo que al aplicar el Corolario 1.12 a $Fr(V)$, obtenemos que, $\dim Fr(V) = 0$. De manera que, $\dim_p(\mathbb{R}, \tau') \leq 1$. Así, $\dim_p(\mathbb{R}, \tau') = 1$.
Caso 2. $p \notin \mathbb{Q}$.
En este caso, una base local en p está dada por la familia:
$\beta = \{\{p\} \cup ((a,b) \cap \mathbb{Q}) : a < p < b\}$. De modo que, para cada $V \in \beta$, tenemos que $Fr(V) = ([a,b] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})) - \{p\} \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, el cual es discreto en $(\mathbb{R}, \tau')$. Similarmente al caso anterior, concluimos que, $\dim Fr(V) = 0$. De aquí que, $\dim_p(\mathbb{R}, \tau') \leq 1$. Así, $\dim_p(\mathbb{R}, \tau') = 1$.
Por tanto, para todo $p \in \mathbb{R}$, tenemos que $\dim_p(\mathbb{R}, \tau') = 1$.
Por lo tanto, $\dim(\mathbb{R}, \tau') = 1$.

3.21. Extensión Racional en el Plano (Ejemplo 72)

La Extensión Racional en el Plano tiene dimensión 1.

Sea (X, τ) el plano Euclidiano, definimos una topología τ^* en X, tomando como base a los conjuntos unitarios que tienen a un punto del conjunto $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ y a los elementos de la familia $\mathcal{F} = \{\{(x,y)\} \cup (D \cap U) : (x,y) \in U \in \tau\}$.

Notemos que, $\tau \subset \tau^*$. De manera que, (X, τ^*) es un espacio de Hausdorff.
Demostraremos que la dimensión de (X, τ^*) es 1. Sea $p \in X$, consideremos dos casos para p.

Caso 1. $p \in D$.

En este caso, la familia $\beta = \{\{p\}\}$ es una base local en p. Como $\{p\}$ es abierto y cerrado en (X, τ^*), podemos aplicar el Teorema 1.9 y obtener que, $\dim_p X = 0$.

Caso 2. $p \notin D$.

Notemos que los elementos de la familia $\mathcal{L} = \{\{q\} : q \in D\}$ son abiertos y cerrados en (X, τ^*), de manera que, cualquier conjunto abierto V que contiene al punto p, satisface que $Fr(V) \cap D = \emptyset$.

Notemos que si un punto $q \in \mathbb{R}^2 - D$ está en un básico W de $\mathcal{F}$, entonces $W \cap (\mathbb{R}^2 - D) = \{q\}$. De manera que $\mathbb{R}^2 - D$ es un subespacio discreto de (X, τ^*). En particular $Fr(V)$ es un subespacio discreto de (X, τ^*). Aplicando el Corolario 1.12 a $Fr(V)$, obtenemos que, $\dim(Fr(V)) = 0$. Por tanto, $\dim_p(X, \tau^*) \leq 1$.

Demostraremos que para todo $p \notin D$, $\dim_p(X, \tau^*) > 0$.

Sea $U = \{q\} \cup D = \{q\} \cup (D \cap X)$. Notemos que U es un abierto de τ^* que tiene a p. Sea W un abierto cualquiera en τ^* tal que $p \in W \subset U$. Entonces existe un básico $V = \{p\} \cup (D \cap H)$, donde $p \in H \in \tau$ tal que $p \in V \subset W$. Dado un punto $q \neq p$ con $q \in H - D$ (estos puntos existen porque $X - D$ es denso, con la topología τ en X), todo básico en $\mathcal{F}$ que tiene a q intersecta a $H \cap D$. De manera que $q \in Cl(V) \subset Cl(W)$, y como $q \notin U$, tenemos que $q \notin W$. De modo que $q \in Fr(W)$. Hemos probado que $Fr(W) \neq \emptyset$ para todo abierto W en τ^* tal que $p \in W \subset U$. Esto prueba que $\dim_p(X, \tau^*) > 0$. Luego, $\dim_p(X, \tau^*) = 1$.

Por lo tanto, $\dim(X, \tau^*) = 1$.

3.22. Topología Telefase (Ejemplo 73)

X con la Topología Telefase tiene dimensión 1.

Sea (X, τ) el espacio topológico formado al agregar un punto al final del intervalo cerrado $[0, 1]$. Sea 1^* dicho punto. Definimos la base local en el punto 1^* por $\beta = \{(a, 1) \cup \{1^*\} : a \in [0, 1)\}$ y para los puntos en $[0, 1]$ tomamos la base usual del intervalo.

Entonces, al conservar $[0, 1]$ su topología, tenemos que $[0, 1]$ es un subespacio conexo de X. Ya que $[0, 1]$ es claramente denso en X, concluimos que X es conexo. Por tanto, para todo $x \in X$, $\dim_x X > 0$.

Finalmente, demostraremos que $\dim X = 1$. Sea $x \in X$, consideremos tres casos para x.

Caso 1. $x = 1^*$.

Notemos que la base local en el punto $x = 1^*$ está dada por $\beta = \{(a,1) \cup \{1^*\} : a \in [0,1)\}$. De manera que, para todo $V \in \beta$, $Fr(V) = \{a,1\}$. Por tanto, $Fr(V)$ es un subespacio discreto, por lo que podemos aplicar el Corolario 1.12 a $Fr(V)$ y obtener que, $\dim Fr(V) = 0$. Por lo tanto, $\dim_x X \leq 1$. Así tenemos que, $\dim_x X = 1$.

Caso 2. $x = 1$.

En este caso, $\beta = \{(a,1] : 0 \leq a < 1\}$ es una base local en el punto $x = 1$. Por tanto, para todo $V \in \beta$, se tiene que, $Fr(V) = Fr((a,1]) = \{a, 1^*\}$, el cual es un subespacio discreto. Similarmente al caso anterior, tenemos que, $\dim_x X \leq 1$. Así que, $\dim_x X \leq 1$. Por lo tanto, $\dim_x X = 1$.

Caso 3. $x < 1$.

Tomamos como base local en el punto x a la familia:

$\beta = \{(x-\epsilon, x+\epsilon) : 0 < \epsilon < 1-x\}$. Claramente, para todo $V \in \beta$, se tiene que, $Fr(V) \subset \{x-\epsilon, x+\epsilon\}$, así que $Fr(V)$ es un subespacio discreto. Aplicando el Corolario 1.12, obtenemos que, $\dim Fr(V) = 0$. Por tanto, $\dim_x X \leq 1$. Así tenemos que, $\dim_x X = 1$.

Por lo tanto, $\dim X = 1$.

3.23. Topología de la Inclinación Irracional (Ejemplo 75)

X con la Topología de la Inclinación Irracional tiene dimensión 1.

Sean $X = \{(x,y) : y \geq 0 \text{ y } x, y \in \mathbb{Q}\}$ y $\theta > 0$ un número irracional fijo. *La Topología de la Inclinación Irracional* τ sobre X tiene como base a las ε- vecindades de la forma $N_\varepsilon((x,y)) = \{(x,y)\} \cup B_\varepsilon\left(x + \frac{y}{\theta}\right) \cup B_\varepsilon\left(x - \frac{y}{\theta}\right)$, donde $B_\varepsilon(\zeta) = \{(r,0) \in \mathbb{Q} \times \{0\} : |r - \zeta| < \varepsilon\}$. Notemos que cada vecindad $N_\varepsilon((x,y))$ consiste del conjunto formado con un solo elemento $\{(x,y)\}$ y dos intervalos abiertos sobre el eje x centrados en los puntos $(x+\frac{y}{\theta}, 0)$ y $(x-\frac{y}{\theta}, 0)$.

Notemos que las líneas que unen el punto (x, y) con $(x - \frac{y}{\theta}, 0)$ y el punto (x, y) con $(x + \frac{y}{\theta}, 0)$ tienen pendiente θ y $-\theta$, respectivamente.

Demostraremos que la dimensión de X es 1. Sea $p \in X$, consideremos dos casos para p.

Caso 1. $p = (x, y)$ con $y > 0$.

Dada $\epsilon > 0$, sea $N_\varepsilon((x, y)) = \{(x, y)\} \cup B_\varepsilon\left(x + \frac{y}{\theta}\right) \cup B_\epsilon\left(x - \frac{y}{\theta}\right)$ una vecindad básica cualquiera del punto p, con ϵ racional.

Para cada $w \in \mathbb{R}$, sea L_w la recta de pendiente θ que pasa por el punto $(w, 0)$, también sea M_w la recta de pendiente $-\theta$ que pasa por el punto $(w, 0)$.

Tomamos la unión de la familia de rectas de pendiente θ y $-\theta$, es decir, $\bigcup\left\{(L_w \cup M_w) \cap X : w \in \left[x - \frac{y}{\theta} - \epsilon, x - \frac{y}{\theta} + \epsilon\right] \cup \left[x + \frac{y}{\theta} - \epsilon, x + \frac{y}{\theta} + \epsilon\right]\right\}$, llamamos F a esta familia. Es fácil ver que $Fr\left(N_\varepsilon((x, y))\right) = F - \left(N_\varepsilon((x, y))\right)$.

Mostraremos que $F - \left(N_\varepsilon((x, y))\right)$ tiene la topología Discreta. Para empezar, notemos que $F - \left(N_\varepsilon((x, y))\right)$ no intersecta al eje x, pues los extremos de los intervalos $\left[x - \frac{y}{\theta} - \epsilon, x - \frac{y}{\theta} + \epsilon\right]$ y $\left[x + \frac{y}{\theta} - \epsilon, x + \frac{y}{\theta} + \epsilon\right]$ son números irracionales.

Dada $q = (r, t) \in F - \left(N_\varepsilon((x, y))\right)$ y dada una vecindad básica de q, $N_\delta(q) = \{q\} \cup B_\delta(r + \frac{t}{\theta}) \cup B_\delta(r - \frac{t}{\theta})$, tenemos que $N_\delta(q)$ intersecta a $X - (\mathbb{Q} \times \{0\})$ (X menos el eje real) sólo en $\{q\}$, así que $\left(F - N_\varepsilon((x, y))\right) \cap N_\delta(q) = \{q\}$. Por tanto, $Fr\left(N_\varepsilon((x, y))\right)$ es un subespacio discreto. De manera que podemos aplicar el Corolario 1.12 a $Fr\left(N_\varepsilon((x, y))\right)$ y obtener que, $\dim Fr\left(N_\varepsilon((x, y))\right) = 0$. Así tenemos que, $\dim_p X \leq 1$.

Por otra parte, notemos que X es un espacio conexo, ya que la cerradura de cualesquiera dos abiertos ajenos y no vacíos en X contiene franjas infinitas que se intersectan, pues tienen pendiente θ y $-\theta$. De manera que, al aplicar el Corolario 1.10 a X, obtenemos que, para todo $p \in X$, $\dim_p X > 0$.

Por tanto, $\dim_p X = 1$.

Caso 2. $p = (x, 0)$.

En este caso, las vecindades básicas en p son las usuales en $\mathbb{Q} \times \{0\}$, es decir, son las inducidas por la topología usual en $\mathbb{Q} \times \{0\}$. Por tanto, $\dim_p X = 0$ (ver 2.10).

Por lo tanto, $\dim X = 1$.

3.24. Topología del Diámetro Extraido y del Radio Extraido (Ejemplos 76 y 77)

$\mathbb{R}^2$ con la Topología del Diámetro Extraido y con la Topología del Radio Extraido tienen dimensión 1.

Sea X el plano coordenado, definimos *La Topología del Diámetro Extraido* τ sobre X tomando como conjuntos básicos a todos los discos de $\mathbb{R}^2$ quitándoles su diámetro horizontal menos su centro. Análogamente, definimos *La Topología del Radio Extraido* τ^* sobre X tomando como conjuntos básicos a todos los discos abiertos de $\mathbb{R}^2$ sin su radio horizontal derecho, dejando el centro del disco. Entonces, (X,τ) y (X,τ^*) son los espacios con *La Topología del Diámetro Extraido* y *La Topología del Radio Extraido*, respectivamente. Notemos que, ambas topologías son expansiones de la topología Euclidiana en $\mathbb{R}^2$. Por tanto, ambos espacios son de Hausdorff.

Notemos que dada una recta cualquiera no horizontal L, tanto τ como τ^* inducen en L la misma topología que la que le induce la Euclidiana.

Dados dos puntos diferentes, cualesquiera, p,q en X, podemos trazar una poligonal que los una con puros segmentos no horizontales, de manera que (X,τ^*) y (X,τ) son arco conexos. Por tanto, (X,τ^*) y (X,τ) son conexos. Así, tenemos que, para todo $p\in X$, $\dim_p(X,\tau)>0$ y $\dim_p(X,\tau^*)>0$.

Demostraremos que, para toda $p\in X$, $\dim_p(X,\tau)=1$.

Abordaremos el problema estudiando algunas propiedades del conjunto de Cantor $\mathbf{C}$.

En 2.9 vimos la construcción del conjunto de Cantor $\mathbf{C}$. El conjunto de Cantor $\mathbf{C}$ está dado por $\mathbf{C}=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} I_i$, donde cada conjunto I_i es la unión de 2^i intervalos cerrados, de longitud $\frac{1}{3^i}$, y ajenos dos a dos. Notemos que, para cada $i\in\mathbb{N}$ el complemento de I_i en $[0,1]$ es una unión de 2^i-1 componentes conexas (conocidas como tercios medios). También notemos que, para cada $i\in\mathbb{N}$, las componentes conexas en $[0,1]-I_i$ son de la forma $\left(\frac{n}{3^k},\frac{n+1}{3^k}\right)$ para alguna $n\in\mathbb{N}$ y para alguna $1\le k\le i$. Como el conjunto de Cantor es cerrado contiene a los extremos de cada componente conexa de $[0,1]-I_i$ para toda $i\in\mathbb{N}$. A los extremos derechos de cada componente conexa les llamaremos *puntos extremos derechos del conjunto de Cantor* y a los extremos izquierdos de cada componente conexa les llamaremos *puntos extremos izquierdos del conjunto de Cantor*.

Por otra parte, es bien sabido que podemos identificar al conjunto de Cantor $\mathbf{C}$ con el producto numerable de los conjuntos $A_n=\{0,2\}$, con la topología Discreta. Recordemos que si $x\in\mathbf{C}$, entonces x se puede escribir, de manera única, en la forma $x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + ... = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$, en donde, para cada $i \in \mathbb{N}$, $a_i \in \{0, 2\}$.

La función $\rho : \prod_{n=1}^{\infty} A_n \to \mathbf{C}$ dada por $\rho(a_1, a_2, ...) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$ es un homeomorfismo. Por tanto, tiene sentido hablar de su inversa $\rho^{-1} : \mathbf{C} \to \prod_{n=1}^{\infty} A_n$, dada por $\rho^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}\right) = (a_1, a_2, ...)$.

Sea $f : \prod_{n=1}^{\infty} A_n \to [0, 1]$ dada por $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}}$. Hagamos $\Psi = f \circ \rho^{-1} : \mathbf{C} \to [0, 1]$.

Probaremos que la función Ψ es continua y monótona creciente.

Dado un punto $x \in \mathbf{C}$, lo escribimos $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$. De manera que, $\Psi(x) = \Psi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}\right) = f\left(\rho^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}\right)\right) = f((a_1, a_2, ...)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}}$. Notemos que, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$. Por tanto, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}}$ converge. Esto muestra que Ψ está bien definida.

Notemos que, la función Ψ no es inyectiva, pues $\Psi(\frac{1}{3}) = \Psi(\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + ...) = \frac{0}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{2}{2^4} + ... = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{2}$ y $\Psi(\frac{2}{3}) = \Psi(\frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + ...) = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$.

Para ver que Ψ es continua, bastará mostrar que f es continua. Sea $x = (a_1, a_2, a_3, ...) \in \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ y sea $\epsilon > 0$. Queremos ver que, existe un abierto U que contiene al punto x tal que si $y \in U$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Como la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ converge, tenemos que, dada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \epsilon$. Sea $U = \{a_1\} \times \{a_2\} \times \{a_3\} \times ... \times \{a_{n_0}\} \times A_{n_0+1} \times A_{n_0+2} \times ....$ Entonces U es un abierto en el producto $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ que contiene a x. Sea $y \in U$, dado por $y = (b_1, b_2, ...b_{n_0}, b_{n_0+1}, b_{n_0+2}, ...)$. Entonces $b_i = a_i$, para toda $i \leq n_0$. Así que $|f(x) - f(y)| = \left|\sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{a_i - b_i}{2^{i+1}}\right| \leq \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^{i+1}} \leq \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{2^{i+1}} = \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \epsilon$. Por tanto, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Luego, f es continua. Así, concluimos que, Ψ es continua.

Notemos que $\Psi(0) = \Psi(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{0}{3^i}) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{0}{2^{i+1}} = 0$ y $\Psi(1) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{2}{2^{i+1}} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$.

Por último, demostraremos que Ψ es monótona creciente.

Recordemos que, si $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$, entonces la función $\Psi(x) = \Psi\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3}\right) = f\left(\rho^{-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}\right)\right) = f((a_1, a_2, ...)) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}}$.

Sean $x = (a_1, a_2, a_3, ...)$ y $y = (b_1, b_2, b_3, ...)$ tales que $x < y$. Sea k la primera entrada donde $x \neq y$. Aseguramos que $a_k = 0$ y $b_k = 2$. Supongamos por el contrario, que $a_k = 2$ y $b_k = 0$. Como $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$, $y = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}$ y $x < y$, tenemos que $\sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} < \sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}$. De modo que $\frac{2}{3^k} + \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} < 0 + \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i} = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}$. Notemos que, $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i} \leq \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3^k}$. Como $\frac{2}{3^k} + \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} > \frac{1}{3^k}$, tenemos que $\sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{b_i}{3^i} = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i} \leq \frac{1}{3^k} < \frac{2}{3^k} + \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} = \sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$. Por tanto, $\sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} > \sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $a_k = 0$ y $b_k = 2$.

Demostraremos que, $\Psi\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3}\right) \leq \Psi\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3}\right)$. Es decir, demostraremos que, $\sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}} \leq \sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{b_i}{2^{i+1}}$. Como $a_k = 0$, tenemos que, $\sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}} = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}}$, así que, basta probar que, $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}} \leq \sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{b_i}{2^{i+1}}$.

Notemos que, $\sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{b_i}{2^{i+1}} = \frac{2}{2^{k+1}} + \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{b_i}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^k} + \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{b_i}{2^{i+1}}$. Así, tenemos que demostrar que, $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}} \leq \frac{1}{2^k} + \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{b_i}{2^{i+1}}$.

Notemos que, $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}} \leq \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{2}{2^{i+1}} = \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k}$. Por tanto, $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}} \leq \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^k} + \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{b_i}{2^{i+1}} = \sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{b_i}{2^{i+1}}$. Así, $0 + \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}} = \sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}} \leq \sum\limits_{i=k}^{\infty} \frac{b_i}{2^{i+1}}$. Luego, $f(x) \leq f(y)$.

Por lo tanto, Ψ es creciente.

Definiremos una extensión continua $\widehat{\Psi} : [0,1] \to [0,1]$ de Ψ. Para ello observemos lo siguiente:

Si $x \in [0,1]-\mathbf{C}$, entonces $x \in \bigcup\{[0,1]-I_i : i \in \mathbb{N}\}$. En particular, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que x está en alguna componente conexa de $[0,1]-I_{i_0}$. Recordemos que éstas son de la forma $\left(\frac{n}{3^k}, \frac{n+1}{3^k}\right)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ y para alguna $1 \leq k \leq i_0$. Así que $x \in \left(\frac{n}{3^k}, \frac{n+1}{3^k}\right)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ y para alguna $1 \leq k \leq i_0$. Como $\frac{n}{3^k}$ y $\frac{n+1}{3^k}$ son los extremos izquierdo y derecho, respectivamente, de la componente conexa $\left(\frac{n}{3^k}, \frac{n+1}{3^k}\right)$, éstos son puntos extremos izquierdo y derecho del conjunto de Cantor, respectivamente.

Notemos que también $\frac{n}{3^k}$ y $\frac{n+1}{3^k}$ son puntos consecutivos del conjunto de Cantor. Se puede probar fácilmente que $\Psi(\frac{n}{3^k}) = \Psi(\frac{n+1}{3^k})$. Entonces, hacemos $\widehat{\Psi}(x) = \Psi(\frac{n}{3^k})$ y si $x \in \mathbf{C}$, entonces hacemos $\widehat{\Psi}(x) = \Psi(x)$. Se puede mostrar que la función $\widehat{\Psi} : [0,1] \to [0,1]$ es continua y monótona creciente.

A la función $\widehat{\Psi}$ se le conoce como *La Escalera del Diablo*.

Por otra parte, para toda $x \in [0,1]$, hagamos $g_1(x) = 1 - \widehat{\Psi}(x)$, entonces $g_1(x)$ es continua y monótona decreciente. Para toda $x \in [-1,0]$, sea $g_2(x) = \widehat{\Psi}(x+1)$, entonces $g_2(x)$ es continua y monótona creciente, pues sólo trasladamos una unidad a la izquierda a $\widehat{\Psi}(x)$.

Notemos que $g_1(0) = 1 - \widehat{\Psi}(0) = 1 - 0 = 1$ y que $g_2(0) = \widehat{\Psi}(0+1) = \widehat{\Psi}(1) = 1$.

Construimos una nueva función $h : [-1,1] \to [0,1]$, dada por:

$$h(x) = \begin{cases} g_1(x), & \text{si } x \in [0,1], \\ g_2(x), & \text{si } x \in [-1,0]. \end{cases}$$

Entonces h está bien definida y es continua en $[-1,1]$.

Volviendo al problema original, dado $p = (x,y) \in X$, queremos demostrar que, $\dim_p X = 1$.

Como X es el plano coordenado, aún cuando consideremos a X con la topología τ, éste es homogéneo, pues dados $p, q \in X$ la traslación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (x_1+x_2-x, y_1+y_2-y)$, donde $p = (x_1,y_1)$ y $q = (x_2,y_2)$, es un homeomorfismo que manda al punto p en el punto q, de manera que, basta analizar la dimensión en el punto $p = (0,0)$, pues la dimensión es un invariante bajo homeomorfismos.

Tomemos como referencia a la bola $B_1((0,0)) = \{(x,y) \in X : \|(x,y)\| < 1\}$.

Sea $M = \{(x,h(x)) : x \in [-1,1]\} \cup \{(x,-h(x)) : x \in [-1,1]\}$. Demostraremos que, para toda $p \in M$, $\dim_p M = 0$ (con la topología τ). Para hacer esto, analicemos cómo es la topología de M en los puntos de su subconjunto

$M_1 = \{(x, h(x)) : x \in (0,1)\}$. En el resto de los puntos se puede hacer un análisis similar.

Como conjunto, M_1 se puede identificar con el intervalo $(0,1)$, mediante la función $\rho : M_1 \to (0,1)$ dada por $\rho(x, h(x)) = x$. Entonces veamos qué topología le induce M_1 a $(0,1)$ con esa función. Es decir, analicemos $\sigma = \{\rho(U \cap M) \subset (0,1) : U \in \tau\}$.

Tomemos $x \in (0,1)$, si $x \notin \mathbf{C}$, existe un intervalo de la forma (a,b), donde $a, b \in \mathbf{C}$, $a < x < b$ y $(a,b) \cap \mathbf{C} = \emptyset$. Por la definición de h, h es constante en (a,b). De manera que si tomamos un disco pequeño centrado en $(x, h(x))$ al que se le ha quitado el diámetro horizoltal (salvo el punto $(x, h(x))$), su intersección con M es sólo el conjunto $\{(x, h(x))\}$. De modo que $\{(x, h(x))\}$ es abierto en M y, por tanto $\{x\} \in \sigma$. Con un argumento parecido, se puede concluir lo siguiente. (a) si x es un extremo derecho del conjunto de Cantor, entonces sus vecindades básicas en σ son de la forma $[x, x+\delta)$ donde $\delta > 0$, (b) si x es un extremo izquierdo del conjunto de Cantor, sus vecindades básicas son de la forma $(x-\delta, x]$, donde $\delta > 0$ y (c) si $x \in \mathbf{C}$ y x no es un extremo de $\mathbf{C}$, entonces sus vecindades básicas son de la forma $(x-\delta, x+\delta)$, donde $\delta > 0$.

Con la topología dada en $(0,1)$ por estas bases puntuales de vecindades, tenemos que $(0,1)$ es homeomorfo a M_1.

Estamos listos para ver que $\dim_x(0,1) = 0$, para toda $x \in (0,1)$. Analizamos únicamente el caso en que $x \in \mathbf{C}$ y no es extremo de $\mathbf{C}$. Tomemos $\delta > 0$. Sean $a, b \in (0,1)$ tales que $a, b \notin \mathbf{C}$ y $x - \delta < a < x < b < x + \delta$. Entonces (a,b) es un abierto en σ que tiene a x y que también es cerrado, pues $\{a\}$ y $\{b\}$ son abiertos. Por tanto $\dim_x(0,1) = 0$. De manera que $\dim(0,1) = 0$. Por tanto $\dim M_1 = 0$.

Notemos que, para cada básico Euclidiano $B_\epsilon(0)$ en X, podemos construir un abierto H tal que $0 \in H \subset Cl(H) \subset B_\epsilon(0)$ y tal que su frontera es homeomorfa a M. Así tenemos que, $\dim_0 X \leq 1$ y como ya sabíamos que $\dim_0 X > 0$, tenemos que $\dim_0 X = 1$.

Por lo tanto, para toda $p \in X$, $\dim_p X = 1$.

Por lo tanto $\dim X = 1$.

Para la Topología del Radio Derecho Extraido podemos hacer un análisis similar. Otra vez consideramos al conjunto $M_1 = \{(x, h(x)) : x \in (0,1)\}$ y lo identificamos con el intervalo abierto $(0,1)$ con la misma función ρ. Hacemos $\sigma^* = \{\rho(U \cap M) : U \in \tau^*\}$. Tomemos $x \in (0,1)$. Si $x \notin \mathbf{C}$, razonando como antes, tenemos que las vecindades básicas de x en σ^* son de la forma

$(x-\delta, x]$, donde $\delta > 0$. Si x es un extremo derecho de $\mathbf{C}$, sus vecindades básicas son de la forma $(x-\delta, x+\delta)$, donde $\delta > 0$. Si x es un extremo izquierdo de $\mathbf{C}$, sus vecindades básicas son de la forma $(x-\delta, x]$, donde $\delta > 0$. Si $x \in \mathbf{C}$ y no es extremo de $\mathbf{C}$, entonces sus vecindades básicas son de la forma $(x-\delta, x+\delta)$.

Estamos listos para ver que $\dim_x (0,1) = 0$, para toda $x \in (0,1)$. Analizamos únicamente el caso en que $x \in \mathbf{C}$ y no es extremo de $\mathbf{C}$. Tomamos $\delta > 0$. Sean $a, b \in (0,1)$ tales que $x - \delta < a < x < b < x + \delta$ y $a, b \notin \mathbf{C}$. Entonces $(a, b]$ es abierto y cerrado en σ^* y $x \in (a, b] \subset (x-\delta, x+\delta)$. Por tanto $\dim_x(0,1) = 0$. Así que $\dim(0,1)$. Por tanto $\dim M_1 = 0$.

Por lo tanto, $\dim M = 0$.

Por lo tanto, $\dim_p X \leq 1$ y como ya sabíamos que $\dim_p X > 0$, tenemos que $\dim(X, \tau^*) = 1$.

3.25. Topología de la Rejilla Irregular (Ejemplo 79)

X con la Topología de la Rejilla Irregular tiene dimensión 1.

Sea $X = (\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \cup \{0\})) \cup \{(0,0)\}$. Es decir, X consiste de todos los puntos de la forma (i, k) con $i, k > 0$, junto con los puntos de la forma $(i, 0)$ con $i \geq 0$. *La Topología de la Rejilla Irregular* sobre X está determinada por los siguientes subconjuntos básicos: cada conjunto de la forma $\{(i,k)\}$ con i y $k > 0$ es abierto en X, los puntos de la forma $(i, 0)$ con $i > 0$, tienen como base local de vecindades a los conjuntos $U_n((i,0)) = \{(i,k) : k = 0 \text{ o } k \geq n\}$, mientras que los conjuntos $V_n = \{(i,k) : i = k = 0 \text{ o } i \text{ y } k \geq n\}$ forman una base local en el punto $(0,0)$.

Notemos que, X es un espacio de Hausdorff.

Demostraremos que $\dim X = 1$. Sea $p \in X$, consideraremos tres casos.

Caso 1. $p = (i, k)$, con $i, k > 0$.

Notemos que el conjunto que consiste de un solo elemento $\{p\}$ es abierto y cerrado en X, de manera que, la familia $\{\{p\}\}$ es una base local en p. Por tanto, al aplicar el Teorema 1.9, tenemos que, $\dim_p X = 0$.

Caso 2. $p = (i, 0)$, con $i > 0$.

Tomemos la base local en el punto $p = (i, 0)$ dada por la familia $\beta = \{U_n((i, 0)) : n \in \mathbb{N}\}$. Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ el básico U_n está dado por $U_n = \{(i, 0), (i, n), (i, n + 1), (i, n + 2), ...\}$.

Demostraremos que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $Fr(U_n) = \emptyset$.

Dada $q \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\{q\}$ es abierto, así que para todo $q \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $q \notin Fr(U_n)$.

Ahora demostraremos que, $(0, 0) \notin Fr(U_n)$.

Sea $q = (0, 0)$ y sea $m = n + 1$, entonces $V_m(q) = \{(t, k) : t = k = 0$ o t y $k \geq n + 1\}$. Por tanto, $V_m(q) \cap U_n = \emptyset$. Luego, $(0, 0) \notin Fr(U_n)$.

Por último, notemos que si $x \neq i$, entonces claramente el punto $(x, 0) \notin Fr(U_n)$. Por tanto, $Fr(U_n) = \emptyset$. Luego, cada U_n es un subconjunto abierto y cerrado en X. Así que, podemos aplicar el Teorema 1.9 y obtener que $\dim_p X = 0$.

Caso 3. $p = (0, 0)$.

Recordemos que la base local en el punto $p = (0, 0)$ está dada por $\beta = \{V_n((0, 0)) : n \in \mathbb{N}\}$. Claramente, para cada $n \in \mathbb{N}$, $Fr(V_n) = \{(n, 0), (n + 1, 0), (n + 2, 0), ...\}$.

Notemos que, $\{(n, 0), (n + 1, 0), (n + 2, 0), ...\}$ es un subespacio discreto en X, pues para toda $t \in \{n, n+1, n+2, ...\}$, el básico $U_m((t, 0)) \cap Fr(V_n) = \{(t, 0)\}$. De manera que, podemos aplicar el Corolario 1.12 a $Fr(V_n)$, y obtener que $\dim Fr(V_n) = 0$. Por tanto, $\dim_p X \leq 1$.

Por último, demostraremos que, $\dim_p X > 0$.

Sea $H = \{(0, 0) \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})\}$. Notemos que H es un abierto en X que tiene a p. Sea W un abierto arbitrario que contiene a p tal que $W \subset H$. Entonces, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $V_m((0, 0)) \subset W \subset H$. Claramente, el punto $(m, 0) \in Fr(W)$, así que $Fr(W) \neq \emptyset$. Por tanto, $\dim_p X > 0$. Luego, $\dim_p X = 1$.

Por lo tanto, $\dim X = 1$.

3.26. Cuadrado de Arens (Ejemplo 80)

El Cuadrado de Arens tiene dimensión 1.

Sea S el conjunto de parejas de números racionales en el interior del cuadrado unitario excepto los puntos que tienen como abscisa a $x = \frac{1}{2}$. Usaremos la simbología $\langle ... \rangle$ para referirnos a las coordenadas del plano y usaremos los paréntesis $(...)$ para denotar a los intervalos. Definimos a $X = S \cup \{\langle 0, 0 \rangle\} \cup \{\langle 1, 0 \rangle\} \cup \{\langle \frac{1}{2}, r\sqrt{2} \rangle : r \in \mathbb{Q}, 0 < r\sqrt{2} < 1\}$.

Definimos una base para la topología de X de la siguiente manera:

Para todo $p \in S$, los abiertos básicos son los heredados por la topología Euclidiana τ en el cuadrado unitario, para los otros puntos, dada $n \in \mathbb{N}$, hacemos $U_n(\langle 0,0\rangle) = \{\langle 0,0\rangle\} \cup \{\langle x,y\rangle : 0 < x < \frac{1}{4} \text{ y } 0 < y < \frac{1}{n}\}$, $U_n(\langle 1,0\rangle) = \{\langle 1,0\rangle\} \cup \{\langle x,y\rangle : \frac{3}{4} < x < 1 \text{ y } 0 < y < \frac{1}{n}\}$ y $U_n(\langle \frac{1}{2}, r\sqrt{2}\rangle) = \{\langle x,y\rangle : \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \text{ y } \left|y - r\sqrt{2}\right| < \frac{1}{n}\}$.

Demostraremos que la dimensión de X es 1. Sea $p \in X$, consideraremos cuatro casos para p.

Caso 1. $p \in S$.

Sea $p = \langle r_1, r_2\rangle$, con $r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Sea $\beta = \{(i_1,i_2) \times (i_3,i_4) : 0 < i_1 < r_1 < i_2 < 1,\ 0 < i_3 < r_2 < i_4 < 1 \text{ y } i_1,i_2,i_3,i_4 \notin \mathbb{Q} \text{ y } ((i_1,i_2)\times(i_3,i_4)) \cap \left(\left\{\frac{1}{2}\right\} \times [0,1]\right) = \emptyset\}$. Entonces β es una base local de vecindades de p en X.

Notemos que las coordenadas de los puntos del contorno de cada $R \in \beta$ están formadas por al menos una entrada irracional. Por tanto, para cada $R \in \beta$, tenemos que, $Fr(R) = \emptyset$. Luego, $\dim_p X = 0$.

Caso 2. $p = \left\langle \frac{1}{2}, r\sqrt{2}\right\rangle$, para alguna $r \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < r\sqrt{2} < 1\}$.

En este caso, la familia $\beta = \left\{U_n(\left\langle \frac{1}{2}, r\sqrt{2}\right\rangle) : n \in \mathbb{N}\right\}$ es una base local en el punto p.

Dada $n \in \mathbb{N}$ veamos que $R = U_n(\left\langle \frac{1}{2}, r\sqrt{2}\right\rangle)$ no tiene puntos frontera en su parte superior e inferior. Notemos que $\left|y - r\sqrt{2}\right| < \frac{1}{n}$ si y sólo si $r\sqrt{2} - \frac{1}{n} < y < \frac{1}{n} + r\sqrt{2}$, y que $r\sqrt{2} \pm \frac{1}{n} \notin \mathbb{Q}$. De modo que, a lo más los puntos $\left\langle \frac{1}{2}, r\sqrt{2} + \frac{1}{n}\right\rangle$ y $\left\langle \frac{1}{2}, r\sqrt{2} - \frac{1}{n}\right\rangle$ son candidatos a estar en la frontera superior e inferior de R, respectivamente. Pero tampoco esto puede suceder, ya que si $r\sqrt{2} \pm \frac{1}{n} = q\sqrt{2}$ para algún $q \in \mathbb{Q}$ y $0 < q\sqrt{2} < 1$, entonces $\sqrt{2}(r-q) = \pm\frac{1}{n}$, lo cual es imposible. Por tanto, $R = U_n(\left\langle \frac{1}{2}, r\sqrt{2}\right\rangle)$ no tiene puntos frontera en su parte superior e inferior.

Por otra parte, observando los costados de R, tenemos que $Fr(R) = \ell_1 \cup \ell_2$, donde ℓ_1 y ℓ_2 están dados por $\ell_1 = \left(\{\frac{1}{4}\} \times (r\sqrt{2} - \frac{1}{n}, r\sqrt{2} + \frac{1}{n})\right) \cap S$ y $\ell_2 = \left(\{\frac{3}{4}\} \times (r\sqrt{2} - \frac{1}{n}, r\sqrt{2} + \frac{1}{n})\right) \cap S$. Como X le induce a l_1 y a l_2 la misma topología que la Euclidiana y $l_1 = \left\{\frac{1}{4}\right\} \times \left(\left(r\sqrt{2} - \frac{1}{n}, r\sqrt{2} + \frac{1}{n}\right) \cap \mathbb{Q}\right)$, tenemos que l_1 es un subespacio de $\left\{\frac{1}{4}\right\} \times \mathbb{Q}$ (con la topología Euclidiana). Así que $\dim l_1 = 0$. Similarmente, $\dim l_2 = 0$. Por tanto, $\dim(Fr(R)) = 0$. Así, $\dim_p X \leq 1$.

Ahora demostraremos que, $\dim_p X > 0$, es decir, demostraremos que existe un abierto U tal que para todo abierto $V \subset U$ que contiene a p, se tiene que, $\dim Fr(V) > -1$.

Sea $U = U_3(\left\langle \frac{1}{2}, r\sqrt{2} \right\rangle)$ y sea V un abierto que contiene a p tal que $V \subset U$. De manera que, existe $m \in \mathbb{N}$, con $m > 3$ tal que $U_m(\left\langle \frac{1}{2}, r\sqrt{2} \right\rangle) \subset V \subset U$. Notemos que, $Fr(U_m) \neq \emptyset$. De hecho, $Fr(U_m) \subset Fr(U)$, pues $Fr(U_m) = ((\{\frac{1}{4}\} \times (r\sqrt{2} - \frac{1}{m}, r\sqrt{2} + \frac{1}{m})) \cap S) \cup ((\{\frac{3}{4}\} \times (r\sqrt{2} - \frac{1}{m}, r\sqrt{2} + \frac{1}{m})) \cap S)$. Así, $Fr(U_m) \cap Fr(U) \neq \emptyset$. Notemos que, podemos aplicar la Proposición 1.14 a los conjuntos $U_m(\left\langle \frac{1}{2}, r\sqrt{2} \right\rangle)$, V y U, y obtener que $Fr(V) \neq \emptyset$. Luego, $\dim Fr(V) > -1$. Por tanto, $\dim_p X = 1$.

Caso 3. $p = \langle 0, 0 \rangle$.

Sea $\beta = \{U_n(\langle 0, 0 \rangle) : n \in \mathbb{N}\}$ la base local en el punto p. De manera que, $Fr(U_n(\langle 0, 0 \rangle)) = \big(((0, \frac{1}{4}) \times \{\frac{1}{n}\}) \cup (\{\frac{1}{4}\} \times (0, \frac{1}{n}))\big) \cap S$. Notemos que, $Fr(U_n(\langle 0, 0 \rangle)) \subset \mathbb{R}^2$ con su topología usual y que $Fr(U_n(\langle 0, 0 \rangle))$ está formada por $\big(\big((0, \frac{1}{4}) \cap \mathbb{Q}\big) \times \{\frac{1}{n}\}\big) \cup (\{\frac{1}{4}\} \times ((0, \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}))$. Como $\big(\big((0, \frac{1}{4}) \cap \mathbb{Q}\big) \times \{\frac{1}{n}\}\big) \cup (\{\frac{1}{4}\} \times ((0, \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q})) \subset \big(\mathbb{Q} \times \{\frac{1}{n}\}\big) \cup \big(\{\frac{1}{4}\} \times \mathbb{Q}\big)$, se desprende que $\dim Fr(U_n(\langle 0, 0 \rangle)) = 0$. Por tanto, $\dim_p X \leq 1$.

Ahora demostraremos que, $\dim_p X > 0$. Sabemos que, $\dim_p X > 0$ si y sólo si, existe un abierto U que contiene a p y es tal que, para todo abierto $V \subset U$ que contiene a p, se tiene que $\dim Fr(V) > -1$.

Sea $U = \{\langle 0, 0 \rangle\} \cup \{\langle x, y \rangle : 0 < x < \frac{1}{4}$ y $0 < y < \frac{1}{2}\}$. Entonces, $Fr(U) = (((0, \frac{1}{4}) \times \{\frac{1}{2}\}) \cap S) \cup ((\{\frac{1}{4}\} \times (0, \frac{1}{2})) \cap S)$.

Sea V un abierto que contiene a p tal que $V \subset U$, entonces existe $m > 2$ tal que $\frac{1}{m} < \frac{1}{2}$ y $U_m(\langle 0, 0 \rangle) \subset V \subset U$.

Notemos que, $Fr(U_m(\langle 0, 0 \rangle)) = (((0, \frac{1}{4}) \times \{\frac{1}{m}\}) \cap S) \cup ((\{\frac{1}{4}\} \times (0, \frac{1}{m})) \cap S)$. Así, $Fr(U_m(\langle 0, 0 \rangle)) \cap Fr(U) \neq \emptyset$. De modo que, podemos aplicar la Proposición 1.14 a los conjuntos $U_m(\langle 0, 0 \rangle)$, V y U y obtener que $Fr(V) \neq \emptyset$. Luego, $\dim Fr(V) > -1$. Por tanto, $\dim_p X = 1$.

Caso 4. $p = \langle 1, 0 \rangle$.

Este caso es análogo al anterior. Por tanto, $\dim_p X = 1$

Por lo tanto, $\dim X = 1$.

3.27. La Tabla de Alexandroff (Ejemplo 88)

La Tabla de Alexandroff tiene dimensión 1.

Usaremos la simbología $\langle ... \rangle$ para referirnos a las coordenadas de los puntos del espacio y usaremos los paréntesis $(...)$ para denotar a los intervalos.

Sea (X, τ) el producto de $[0, \Omega]$ y $[-1, 1]$, cada uno con la topología del Orden (definida en 3.12). Sea $p = \langle \Omega, 0 \rangle \in X$, entonces definimos la topología σ como la extensión de τ que tiene como base a τ y todos los conjuntos de la forma $U(\alpha, n) = \{p\} \cup ((\alpha, \Omega] \times (0, \frac{1}{n}))$, donde $\alpha \in [0, \Omega)$ y $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que, (X, τ) es un espacio T_1.

Notemos que, dado un ordinal cualquiera $\alpha \in [0, \Omega]$, los subespacios $I_\alpha = \{\alpha\} \times [0, 1]$ y $J_\alpha = \{\alpha\} \times [-1, 0)$ son homeomorfos a los respectivos intervalos $[0, 1]$ y $[-1, 0)$. Como cada punto $q \in X$ pertenece a algún I_α o a algún J_α, concluimos que $\dim_q X \geq 1$.

Demostraremos que, $\dim X = 1$. Sea $q \in X$, analicemos tres casos para q.

Caso 1. $q = \langle \alpha, x \rangle$ y α es un ordinal sucesor.

Notemos que el conjunto formado por un solo elemento $\{\alpha\}$ es abierto en $[0, \Omega]$ y que $\{\alpha\} \times [-1, 1]$ es un abierto en X que es homeomorfo a $[-1, 1]$ y tiene a q. Esto implica que $\dim_q X = 1$.

Caso 2. $q = \langle \alpha, x \rangle$, α es un ordinal límite y $q \neq \langle \Omega, 0 \rangle$.

Sea $\beta = \{(a, b) \cap [-1, 1] : a < x < b\}$. Entonces, la familia dada por $\gamma = \{(\lambda, \alpha] \times V : \lambda < \alpha \text{ y } V \in \beta\}$ es una base local en q. Notemos que, dada $U = (\lambda, \alpha] \times V \in \gamma$ tal que $\langle \alpha, x \rangle \in U$, se tiene que $Fr(U) = [\lambda + 1, \alpha] \times \{Fr_{[-1,1]}(V)\}$. Como los espacios $[\lambda + 1, \alpha]$ y $Fr_{[-1,1]}(V)$ tienen dimensión menor o igual que cero, podemos aplicar el Teorema 1.15 a $[\lambda + 1, \alpha] \times \{Fr_{[-1,1]}(V)\}$ y concluir que, $\dim\big([\lambda + 1, \alpha] \times \{Fr_{[-1,1]}(V)\}\big) \leq 0$. Por tanto, $\dim Fr(U) = 0$. Así tenemos que, $\dim_q X \leq 1$. Luego, $\dim_q X = 1$.

Caso 3. $q = p$.

Sea $U(\alpha, n) = \{q\} \cup \big((\alpha, \Omega] \times (0, \frac{1}{n})\big)$ un básico que contiene al punto q, entonces $Fr(U(\alpha, n)) = ([\alpha + 1, \Omega] \times \{0, \frac{1}{n}\}) - \{\langle \Omega, 0 \rangle\}$. Como $[\alpha + 1, \Omega]$ y $\{0, \frac{1}{n}\}$ tienen dimensión cero, podemos aplicar el Teorema 1.15 a $[\alpha + 1, \Omega] \times \{0, \frac{1}{n}\}$ y concluir que, $\dim\big([\alpha + 1, \Omega] \times \{0, \frac{1}{n}\}\big) = 0$. Como $Fr(U(\alpha, n)) \subset [\alpha + 1, \Omega] \times \{0, \frac{1}{n}\}$, podemos aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a $Fr(U(\alpha, n))$, y obtener que, $\dim Fr(U(\alpha, n)) = 0$. Por tanto, $\dim_q X \leq 1$. Luego, $\dim_q X = 1$.

Por tanto, $\dim X = 1$.

3.28. El Sacacorchos de Tychonoff y el Sacacorchos de Tychonoff Menos un Punto (Ejemplos 90 y 91)

El Sacacorchos de Tychonoff y su Subespacio tienen dimensión 1.

Para cada ordinal α, sea $A_\alpha = \{-0, -1, -2, ..., \alpha, ..., 2, 1, 0\}$ el conjunto linealmente ordenado, con el orden de izquierda a derecha. Es decir, $-0 < -1 < -2 < ... < \alpha < ... < 2 < 1 < 0$, con la topología del Orden τ (ver 3.12). Sea $P = A_\Omega \times A_\omega$ (donde ω es el primer ordinal infinito y Ω es el primer ordinal no numerable); sea $P^* = P - \{(\Omega, \omega)\}$. Entonces P^* puede ser pensado como un rejilla rectangular de puntos con A_Ω y A_ω como ejes coordenados. Para construir el sacacorchos tomamos un número infinito de copias de P^* como escalones rectangulares formando una escalera de caracol S, girando en ambas direcciones hacia arriba y hacia abajo, uniendo cada escalón P^* con el escalón inmediato inferior de la siguiente manera:

El cuarto cuadrante de la rejilla P^* se une con el primer cuadrante de la rejilla inmediata inferior a ésta pegando los ejes positivos. En el siguiente párrafo se da la definición formal. Para completar la construcción del Sacacorchos de Tychonoff, agregamos a S dos puntos ideales a^+ y a^-, los cuales pueden ser interpretados como puntos al infinito en el nivel más alto y en el nivel más bajo de la escalera, respectivamente. Así, el espacio $X = S \cup \{a^+, a^-\}$ se llama el *Sacacorchos de Tychonoff*. El Subespacio $Y = X - \{a^-\}$ es conocido como el *Sacacorchos menos un Punto Ideal*.

Notemos que X puede ser pensado como:

$X = (((A_\Omega \times A_\omega) - \{(\Omega, \omega)\}) \times \mathbb{Z}) \cup \{a^+, a^-\}$ con la topología cuya base se describe a continuación.

Las vecindades básicas del punto a^+ consisten de todos los puntos de X los cuales están arriba de un cierto nivel k y las vecindades básicas del punto a^- consisten de todos los puntos de X los cuales están por abajo de un cierto nivel r. Es decir, para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $W_k = \{a^+\} \cup (((A_\Omega \times A_\omega) - \{(\Omega, \omega)\}) \times \{k, k+1, ...\}) - ((\Omega, 0] \times \{w\} \times \{k\})$, entonces $\beta = \{W_k : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base de vecindades para a^+. Para cada entero negativo r, sea $V_r = \{a^-\} \cup (((A_\Omega \times A_\omega) - \{(\Omega, \omega)\}) \times \{..., r-1, r\})$, entonces $\gamma = \{V_r : r \in \mathbb{Z}^-\}$ es una base de vecindades en a^-. Las vecindades básicas alrededor de los puntos $p = (\alpha, \omega, z) \in (\Omega, 0] \times \{w\} \times \{z\}$, donde $z \in \mathbb{Z}$, son de la forma $(U \times \{\omega, ..., n+2, n+1, n\} \times \{z\}) \cup (U \times \{-n, -n-1, ...\} \times \{z-1\})$, en donde $\alpha \in U \subset (\Omega, 0]$ con U abierto en $(\Omega, 0]$ y $n \in \mathbb{N}$.

Falta definir las vecindades básicas en los elementos del conjunto $S = X - (\{a^+, a^-\} \cup ((\Omega, 0] \times \{w\} \times \mathbb{Z}))$. Como en X no hay puntos de la forma (Ω, ω, z) (con $z \in \mathbb{Z}$), el conjunto S también puede escribirse así: $S = (A_\Omega \times A_\omega \times \mathbb{Z}) - ([\Omega, 0] \times \{\omega\} \times \mathbb{Z})$. Entonces, S puede ser considerado como un subespacio topológico del producto $A_\Omega \times A_\omega \times \mathbb{Z}$ (este producto es considerado con la topología produto) y, de hecho, es un subespacio abierto de este producto. Entonces las vecindades básicas de los puntos de S en X, se definen como las vecindades básicas que tienen en S visto como subespacio del producto mencionado. Como cada uno de los espacios A_Ω, A_ω y $\mathbb{Z}$ tiene dimensión 0, su producto también tiene dimensión 0. De manera que S tiene dimensión 0. Por tanto, para toda $p \in S$, $\dim_p Y = 0 = \dim_p X$.

En [3, Ejemplo 91, p. 109] se prueba que Y no es completamente regular. Como todos los espacios T_0 de dimensión 0 son completamente regulares (Corolario 1.11) tenemos que $\dim Y > 0$ y, en consecuencia, $\dim X > 0$.

Demostraremos que, $\dim X = 1$. Sea $p \in X - S$, consideremos dos casos para p.

Caso 1. $p = (\alpha, \omega, z) \in (\Omega, 0] \times \{w\} \times \{z\}$ para alguna $z \in \mathbb{Z}$.

Sea V un abierto en X tal que $p \in V$. Como $\alpha \in [\Omega, 0]$, y $[\Omega, 0]$ tiene dimensión 0, existe un conjunto abierto y cerrado U de $[\Omega, 0]$ tal que $\alpha \in U \subset (\Omega, 0]$ y el punto p satisface que $p \in (U \times \{\omega, ..., n+2, n+1, n\} \times \{z\}) \cup (U \times \{-n, -(n+1), ...\} \times \{z-1\}) \subset V$.

Para simplificar notación sea $W = (U \times \{\omega, ..., n+2, n+1, n\} \times \{z\}) \cup (U \times \{-n, -(n+1), ...\} \times \{z-1\})$. Notemos que, como z está fija, podemos definir la función $g : U \times \{-n, -(n+1), ..., \omega, ..., n+1, n\} \to W$ dada por

$$g(u, \beta) = \begin{cases} (u, \beta, z), & \text{si } \omega \leq \beta, \\ (u, \beta, z-1), & \text{si } \beta < \omega. \end{cases}$$

Por la forma con que se define la topología en X, g es un homeomorfismo. Ya que U es cerrado en $[\Omega, 0]$, U es compacto. Por tanto, W es compacto. De manera que W es abierto y cerrado y $p \in W \subset V$. Por tanto $\dim_p X = 0$.

Caso 2. $p = a^+$ ó $p = a^-$.

Sean $p = a^+$ y $k \in \mathbb{Z}$ un entero arbitrario. Notemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $W_k \cap V_{-k} = \emptyset$, así que $a^+, a^- \notin Fr_X(W_k)$. De modo que $Fr_X(W_k) \subset X - \{a^+, a^-\}$.

Ya hemos visto que, para toda $q \in X - \{a^+, a^-\}$, $\dim_q X = 0$, de manera que $\dim_q(X - \{a^+, a^-\}) = 0$. Esto muestra que $\dim(X - \{a^+, a^-\}) = 0$. Por tanto $\dim Fr_X(W_k) \leq 0$. Por tanto $\dim_p X \leq 1$.

El caso $p = a^-$ es similar. Por tanto $\dim_p X \leq 1$.

Por lo tanto $\dim X = 1$.

El Subespacio $Y = X - \{a^-\}$ se trata de manera similar y se concluye que $\dim Y = 1$.

3.29. El Sacacorchos de Thomas (Ejemplo 94)

El Sacacorchos de Thomas tiene dimensión 1.

Recordemos que en el Ejemplo 2.25 definimos la Tabla de Thomas, haciendo $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$, donde $L_0 = \{(x, 0) : x \in (0, 1)\}$ y para cada natural $i \geq 1$, $L_i = \{(x, \frac{1}{i}) : x \in [0, 1)\}$. La topología τ que se le dio a X fue la generada por la siguiente base: si $i \geq 1$, el singular de cada punto de L_i, excepto $(0, \frac{1}{i})$, es abierto; las vecindades básicas del punto $(0, \frac{1}{i})$ son los subconjuntos de L_i tales que su complemento en L_i es finito. Los conjuntos de la forma $U_i(x, 0) = \{(x, 0)\} \cup \{(x, \frac{1}{n}) : n > i\}$, donde $i \in \mathbb{N}$, forman una base para los puntos de L_0.

Por otra parte, vimos que $\dim_p X = 0$, para toda $p \in X$. Es decir, $\dim X = 0$.

De aquí en adelante usaremos la simbología $\langle ... \rangle$ para referirnos a las coordenadas de un punto y usaremos los paréntesis (...) para referirnos a los intervalos.

Notemos que podemos escribir $L_0 = (0, 1) \times \{0\}$ y, para cada $i \geq 1$, $L_i = [0, 1) \times \left\{\frac{1}{i}\right\}$.

Colocamos una copia topológica de X en cada cuadrante del plano coordenado, formando una tabla más grande P, la cual no tiene al punto $\langle 0, 0 \rangle$. Es decir, que a P lo podemos poner como $P = \bigcup \{M_i : i \in \mathbb{Z}\}$, donde $M_0 = ((-1, 1) \times \{0\}) - \{\langle 0, 0 \rangle\}$ y, para cada $i \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $M_i = (-1, 1) \times \left\{\frac{1}{i}\right\}$.

Para construir el *Sacacorchos de Thomas* procederemos de igual forma que con el Sacacorchos de Tychonoff (ver 3.28). Tomamos un número infinito de copias de P como escalones rectangulares formando una escalera de caracol S, girando en ambas direcciones hacia arriba y hacia abajo, uniendo cada escalón P con el escalón inmediato inferior de la siguiente manera:

El cuarto cuadrante de la rejilla P se une con el primer cuadrante de la rejilla inmediata superior a ésta pegando los ejes positivos. En el siguiente párrafo se da la definición formal. Para completar la construcción del Sacacorchos de Thomas, agregamos a S dos puntos ideales p^+ y p^-, los cuales pueden ser interpretados como puntos infinitos en el nivel más alto y en el nivel más bajo de la escalera, respectivamente. Así, el espacio $T = S \cup \{p^+, p^-\}$ es llamado el *Sacacorchos de Thomas*.

Observemos que T puede ser pensado como:

$T = (P \times \mathbb{Z}) \cup \{p^+, p^-\}$ con la topología cuya base se describe a continuación:

Las vecindades básicas del punto p^+ consisten de todos los puntos de T los cuales están arriba de un cierto nivel k y las vecindades básicas del punto p^- consisten de todos los puntos de T los cuales están por abajo de un cierto nivel r. Es decir, para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $W_k = \{p^+\} \cup (P \times \{k, k+1, ...\}) - ((0,1) \times \{0\} \times \{k\})$, entonces $\beta = \{W_k : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base de vecindades para p^+. Para cada entero negativo r, sea $V_r = \{p^-\} \cup (P \times \{..., r-1, r\})$, entonces $\gamma = \{V_r : r \in \mathbb{Z}^-\}$ es una base de vecindades en p^-. Las vecindades básicas alrededor de los puntos p que están sobre la parte positiva del eje x, es decir, los puntos de la forma $p = \langle x, 0, z\rangle \in (0,1) \times \{0\} \times \{z\}$, donde $z \in \mathbb{Z}$, son de la siguiente forma: para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $U_i(p) = \{p\} \cup (\{x\} \times \left\{\frac{1}{n} : n > i\right\} \times \{z\}) \cup (\{x\} \times \left\{-\frac{1}{n} : n > i\right\} \times \{z-1\})$, en donde $n \in \mathbb{N}$. Las vecindades básicas alrededor de los puntos p que están sobre la parte negativa del eje x, es decir, $p = \langle x, 0, z\rangle \in (-1,0) \times \{0\} \times \{z\}$, donde $z \in \mathbb{Z}$, son de la siguiente forma: para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $H_i(p) = \{p\} \cup (\{x\} \times \left\{\frac{1}{n} : n > i\right\} \times \{z\}) \cup (\{x\} \times \left\{-\frac{1}{n} : n > i\right\} \times \{z\})$, en donde $n \in \mathbb{N}$. Para los puntos p que no están sobre los ejes y que no son puntos al infinito, definimos el conjunto $\{p\}$ como abierto. Por último, las vecindades básicas alrededor de los puntos $p = \left\langle 0, \frac{1}{i}, z\right\rangle$, donde $i \in \mathbb{Z} - \{0\}$ y $z \in \mathbb{Z}$, son los subconjuntos de M_i tales que su complemento en M_i es finito.

En [3, Ejemplo 94, p. 113] se argumenta por qué T es un espacio regular que no satisface ser completamente regular. Como todos los espacios T_0 de dimensión 0 son completamente regulares (Corolario 1.11) tenemos que $\dim T > 0$.

Demostraremos que, $\dim T = 1$. Sea $p \in T$, consideremos cinco casos para

p.

Caso 1. p no está sobre los ejes y no es un punto al infinito.

En este caso el conjunto $\{p\}$ es abierto. Como T es de Hausdorff, tenemos que p tiene una base de vecindades abiertas y cerradas en T. Por el Teorema 1.9, se desprende que $\dim_p T = 0$.

Caso 2. $p = \left\langle 0, \frac{1}{i}, z \right\rangle$, donde $i \in \mathbb{Z} - \{0\}$ y $z \in \mathbb{Z}$.

En este caso las vecindades básicas de p son los subconjuntos de M_i tales que su complemento en M_i es finito. Supongamos sin pérdida de generalidad que $i \geq 1$. Sea U un abierto básico en T que contiene a p, entonces $U \subset M_i$ y $M_i - U$ es finito. Notemos que $M_i - U$ es abierto, pues para cada $q \in M_i - U$, $\{q\}$ es abierto. Por tanto, ningún punto de $M_i - U$ está en la frontera de U. Claramente, los puntos de M_0 tampoco están en la frontera de U, ya que para toda $q = \langle x, 0, z \rangle \in M_0$, $V = \{\langle x, 0, z \rangle\} \cup \{\left\langle x, \frac{1}{n}, z \right\rangle : n > i + 1\}$, no intersecta a M_i. También es claro que los puntos que pertenecen a algún M_j, con $j \notin \{0, i\}$ tienen vecindades que no tocan a U. Por lo tanto, $Fr(U) = \emptyset$. Luego, $\dim_p X = 0$.

Caso 3. $p = \langle x, 0, z \rangle \in (0, 1) \times \{0\} \times \{z\}$, para alguna $z \in \mathbb{Z}$.

Claramente, para toda $i \in \mathbb{N}$, las vecindades $U_i(p)$ son compactas, pues cualquier abierto del $\langle x, 0 \rangle$ contiene a todos los puntos de $U_i(p)$ excepto a un número finito de ellos. Como T es un espacio de Hausdorff, tenemos que $U_i(p)$ es abierta y cerrada en T. De modo que al aplicar el Teorema 1.9 tenemos que $\dim_p T = 0$.

Caso 4. $p = \langle x, 0, z \rangle \in (-1, 0) \times \{0\} \times \{z\}$, para alguna $z \in \mathbb{Z}$.

Este caso es similar al caso anterior.

Caso 5. $p = p^+$ ó $p = p^-$.

Sean $p = p^+$ y $k \in \mathbb{Z}$ un entero arbitrario. Notemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $W_k \cap V_{-k} = \emptyset$, así que $p^+, p^- \notin Fr_T(W_k)$. De modo que $Fr_T(W_k) \subset T - \{p^+, p^-\}$.

Ya hemos visto que, para toda $q \in T - \{p^+, p^-\}$, $\dim_q T = 0$, de manera que $\dim_q(T - \{p^+, p^-\}) = 0$. Esto muestra que $\dim(T - \{p^+, p^-\}) = 0$. Por lo tanto $\dim Fr_T(W_k) \leq 0$, y en consecuencia $\dim_p T \leq 1$.

El caso $p = p^-$ es similar.

Por lo tanto $\dim X = 1$.

3.30. Las Líneas Paralelas con la Topología Fuerte (Ejemplo 96)

Las Líneas Paralelas con la Topología Fuerte tienen dimensión 1.

Sean $A = \{(x,0) : 0 < x \leq 1\}$ y $B = \{(x,1) : 0 \leq x < 1\}$ en $\mathbb{R}^2$. Sea $X = A \cup B$. Dados $a, b \in [0,1]$ tales que $0 \leq a < b \leq 1$, definimos $U(a,b) = \{(x,0) : a < x \leq b\} \cup \{(x,1) : a < x < b\}$, $W(a,b) = \{(x,1) : a \leq x < b\}$ y $Z(a,b) = U(a,b) \cup W(a,b)$. *La Topología Fuerte de las Líneas Paralelas* τ tiene como base β a los conjuntos de la forma $U(a,b)$ junto con los conjuntos de la forma $W(a,b)$. Notemos, que la topología τ restringida a A es como la topología de Sorgenfrey en $[0,1]$, por lo que $\dim A = 0$.

Demostraremos que la familia:

$$\gamma = \{Z(a,b) : 0 \leq a < b \leq 1\} \cup \{W(a,b) : 0 \leq a < b \leq 1\}$$

forma una base en X.

Claramente $\gamma \subset \tau$. Sean $p \in X$ y H un abierto cualquiera que contiene a p. Consideremos dos casos para p.

Caso 1. $p = (t,0)$, con $0 < t \leq 1$.

Entonces, existe un básico $U(a,t) = \{(x,0) : a < x \leq t\} \cup \{(x,1) : a < x < t\}$ tal que $p \in U$ y $U \subset H$. Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $a < r < t$. De manera que, los básicos $U(r,t) = \{(x,0) : r < x \leq t\} \cup \{(x,1) : r < x < t\}$ y $W(r,t) = \{(x,1) : r \leq x < t\}$ quedan contenidos en U. Por tanto, $Z(r,t) = U(r,t) \cup W(r,t) \subset U \subset H$.

Caso 2. $p = (t,1)$, con $0 \leq t < 1$.

Entonces, existe un básico $W(t,b) = \{(x,1) : t \leq x < b\} \in \gamma$ tal que $p \in W(t,b)$ y $W(t,b) \subset H$.

Por tanto, γ es una base en X.

Demostraremos que $\dim X = 1$. Sea $p \in X$, consideremos dos casos para p.

Caso 1. $p = (t,0)$, con $0 < t \leq 1$.

Notemos que los básicos de γ, de la forma $Z(a,b)$ son abiertos y cerrados en X, pues $X - Z(a,b) = Z(0,a) \cup Z(b,1)$. Así que, al aplicar el Teorema 1.9, tenemos que $\dim_p X = 0$.

Caso 2. $p = (t, 1)$, con $0 \leq t < 1$.

Tomemos un básico $W(t, b) = \{(x, 1) : t \leq x < b\}$. Notemos que $Fr(W(t, b)) = \{(x, 0) : t < x \leq b\}$. Como $\{(x, 0) : t < x \leq b\} \subset A$ y $\dim(A) = 0$, podemos aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a $\{(x, 0) : t < x \leq b\}$, y obtener que, $\dim(\{(x, 0) : t < x \leq b\}) = 0$. Por tanto, $\dim_p X \leq 1$.

Ahora demostraremos que, $\dim_p X > 0$.

Notemos que $p = (t, 1) \in W(t, b)$. Dado un abierto cualquiera $G \in \tau$ tal que $p \in G$, existe $t \leq r < b$ tal que $p \in W(t, r) \subset G$. Como $Fr(W(t, r)) = \{(x, 0) : t < x \leq r\} \subset Fr(W(t, 1))$, podemos aplicar la Proposición 1.14 a los abiertos $W(t, r), G$ y $W(t, b)$ y obtener que, $Fr(G) \neq \emptyset$. Por tanto, $\dim Fr(G) \geq 0$. Hemos demostrado que, $\dim_p X > 0$, lo cual indica que $\dim_p X = 1$.

Por lo tanto, $\dim X = 1$.

3.31. Círculos Concéntricos (Ejemplo 97)

El Espacio de los Círculos Concéntricos tiene dimensión 1.

Sea X el conjunto que consiste en la unión de dos círculos concéntricos C_1 y C_2 en el plano Euclidiano. Sea C_1 el círculo interior y C_2 el círculo exterior. Tomamos como base para la topología en X a todos los subconjuntos que constan de un solo elemento en C_2 y a todos los intervalos abiertos sobre C_1 junto con su proyección radial sobre C_2 excepto la proyección del punto central.

Observemos que C_1 es un subespacio conexo, pues tiene la topología inducida por la topología Euclidiana. Por lo que, para todo $p \in C_1$, se tiene que $\dim_p C_1 > 0$. Como $C_1 \subset X$, podemos aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a X y obtener que, $0 < \dim_p C_1 \leq \dim_p X$, para todo $p \in C_1$.

Demostraremos que $\dim X = 1$. Sea $p \in X$, consideremos dos casos para p.

Caso 1. $p \in C_2$.

El conjunto que consta de un sólo elemento $\{p\}$ es abierto y cerrado en X, de manera que, la familia $\{\{p\}\}$ es una base local en p. Por tanto, al aplicar el Teorema 1.9, tenemos que $\dim_p X = 0$.

Caso 2. $p \in C_1$.
Sea U un intervalo abierto en C_1 que tiene a p y sea V la proyección de U sobre C_2 omitiendo el punto medio. Supongamos que los extremos de U son r y s. Notemos que $Fr(U \cup V) = \{r, s\} \subset C_1$. Como C_1 es un subespacio métrico, podemos aplicar el Teorema 1.16 a $\{r, s\}$, y obtener que, $\dim(\{r, s\}) = 0$. Por tanto $\dim_p X \leq 1$ y como $\dim_p X > 0$ concluimos que $\dim_p X = 1$.
Por lo tanto, $\dim X = 1$.

3.32. La Topología Compacta Maximal de $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{x, y\}$ (Ejemplo 99)

X con la Topología Compacta Maximal tiene dimensión 1.

Sea $X = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{x, y\}$ el producto cartesiano de los números naturales con ellos mismos junto con dos puntos ideales x, y que no pertenecen a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. La topología τ sobre X se define tomando como base (en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) a los conjuntos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que consisten de un solo elemento. Para el punto x tomamos como vecindades abiertas a los conjuntos de la forma $X - A$, donde A es cualquier subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con un número finito de puntos en cada línea horizontal (fila). Para el punto y tomamos como básicos a los conjuntos de la forma $X - B$, donde B es cualquier subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que es la unión de un número finito de líneas horizontales (filas).

Demostraremos que, $\dim X = 1$. Sea $p \in X$, consideremos tres casos.

Caso 1. $p \neq x$ y $p \neq y$.
El conjunto formado por un solo elemento $\{p\}$ es abierto y cerrado en X, de manera que, la familia $\{\{p\}\}$ es una base local en p. Por tanto, al aplicar el Teorema 1.9, tenemos que $\dim_p X = 0$.

Caso 2. $p = x$.
Recordemos que la base local en x está dada por la familia

$$\beta = \{X - A : y \in A \text{ y } A \text{ tiene un número finito de puntos en cada fila}\}.$$

Notemos que, para cada $U \in \beta$, $Fr(U) = \{y\}$.

Por lo tanto, $\dim(Fr(U)) = 0$. Luego, $\dim_x X \leq 1$.

Sea $U = X - \{y\}$. Entonces, para todo abierto $W \subset U$ que contiene a x, tenemos que, $y \in Fr(W)$. Así, $Fr(W) \neq \emptyset$. Por tanto, $\dim_x X > 0$. Por tanto, $\dim_x X = 1$.

Caso 3. $p = y$.

Este caso es similar al caso anterior. Por tanto $\dim_y X = 1$.

Por lo tanto, $\dim X = 1$.

3.33. Topología Minimal de Hausdorff (Ejemplo 100)

X con la Topología Minimal de Hausdorff tiene dimensión 1.

Sea $A = \{1, 2, 3, ..., \omega, ..., -3, -2, -1\}$, a este conjunto lo consideramos con el orden lineal definido por $n < \omega < -n$, para todo entero positivo n. A este conjunto lo dotamos con la topología del Orden. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos con la topología Discreta. Definimos $X = (A \times \mathbb{N}) \cup \{a, -a\}$ el producto cartesiano de A con los números naturales, junto con dos puntos ideales a y $-a$. La topología τ sobre X es determinada por la topología Producto sobre $A \times \mathbb{N}$, junto con las vecindades básicas de a y $-a$, dadas por los conjuntos $M_n^+(a) = \{a\} \cup \{(i, j) : i < \omega \text{ y } j > n\}$ y $M_n^-(-a) = \{-a\} \cup \{(i, j) : i > w \text{ y } j > n\}$, respectivamente.

Demostraremos que, $\dim X = 1$. Sea $p \in X$, consideremos cuatro casos.

Caso 1. $p \in (A \times \mathbb{N}) - (\{w\} \times \mathbb{N})$.

El conjunto que consta de un solo elemento $\{p\}$ es abierto y cerrado en X, de manera que, la familia $\{\{p\}\}$ es una base local en p. Por lo tanto, al aplicar el Teorema 1.9, tenemos que $\dim_p X = 0$.

Caso 2. $p \in \{w\} \times \mathbb{N}$.

Sea $z \in \mathbb{N}$, tal que $p = (\omega, z)$. Entonces, una base local en p está dada por $\beta = \{(n, -n) \times \{z\} : n \in \mathbb{N}\}$. Notemos que, $Fr((n, -n) \times \{z\}) = \emptyset$. De manera que, cada $V \in \beta$ es un subconjunto abierto y cerrado en X. Así, podemos aplicar el Teorema 1.9 y obtener que $\dim_p X = 0$.

Caso 3. $p = a$.

Sea $\beta = \{M_n^+(p) : n \in \mathbb{N}\}$ la base local en p definida anteriormente. Entonces, para cada $V = M_n^+(p) \in \beta$, tenemos que $Fr(V) = \{w\} \times \{n+1, n+2, ...\}$. Notemos que, $Fr(V)$ es un subespacio discreto. Por tanto, al aplicar el Corolario 1.12 a $Fr(V)$, obtenemos que $\dim Fr(V) = 0$. Por tanto, $\dim_p X \leq 1$.

Ahora demostraremos que, $\dim_p X > 0$.

Tomemos el básico $M_1^+(p)$ y sea $W \subset M_1^+(p)$ un abierto cualquiera que contiene a p. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > 1$ y $M_m^+(p) \subset W \subset M_1^+(p)$.

Notemos que, $Fr(M_m^+(p)) = \{w\} \times \{m+1, m+2, ...\}$ y $Fr(M_1^+(p)) = \{w\} \times \{1, 2, ..., m, m+1, m+2, ...\}$. Por tanto, $Fr(M_m^+(p)) \cap Fr(M_1^+(p)) \neq \emptyset$. De modo que podemos aplicar la Proposición 1.14 a los conjuntos $M_m^+(p)$, W y $M_1^+(p)$ y obtener que, $Fr(W) \neq \emptyset$. Por tanto, $\dim_p X > 0$. Esto prueba que $\dim_p X = 1$.

Caso 4. $p = -a$.

Este caso es similar al caso anterior.

Por lo tanto, $\dim X = 1$.

3.34. Cuadrado de Alexandroff (Ejemplo 101)

El Cuadrado de Alexandroff tiene dimensión 1.

Sea X el cuadrado definido por el producto cartesiano del intervalo cerrado $[0, 1]$ con él mismo. Sea $\Delta = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$ la diagonal de X.

Dados $s \in [0, 1]$, $\varepsilon > 0$ y un conjunto finito $F \subset [0, 1]$ tal que $s \notin F$, definimos las vecindades básicas del punto (s, s) (de radio ε) como:

$$M_\varepsilon((s, s), F) = \{(x, y) \in X : s - \varepsilon < y < s + \varepsilon \text{ y } x \notin F\}.$$

Y para los puntos fuera de la diagonal de X, dada $\varepsilon > 0$ y $(s, t) \in X \setminus \Delta$ definimos las vecindades básicas del punto (s, t), de radio ε, tomando a:

$$N_\varepsilon((s, t)) = \{(s, y) \in X \setminus \Delta : |t - y| < \varepsilon\}.$$

La familia de vecindades definida en X sirve de base para una topología en X. Dicha topología recibe el nombre de *Topología de Alexandroff*.

Este espacio resulta ser un continuo no métrico, es decir, X es compacto, conexo y de Hausdorff; [10, p. 61]. Así tenemos que, para toda $p \in X$, $\dim_p X > 0$.

Demostraremos mediante dos casos que, para toda $p \in X$, $\dim_p X = 1$. Sea $p \in X$.

Caso 1. $p = (s,t) \in X - \Delta$.

En este caso, los básicos de la forma $N_\epsilon(p)$ tienen a lo más dos puntos en la frontera, a saber, $(s, t-\epsilon)$ y $(s, t+\epsilon)$. Como X es T_1 y $Fr(N_\epsilon(p)) \subset X$ es finito, podemos aplicar el Corolario 1.13 a $Fr(N_\epsilon(p))$, y así obtener que $\dim Fr(V) = 0$. Por lo tanto, $\dim_p X \leq 1$ y $\dim_p X > 0$. Luego, $\dim_p X = 1$.

Caso 2. $p = (s,s) \in \Delta$.

En este caso, $\beta = \{M_\varepsilon((s,s),F) : \varepsilon > 0 \text{ y } F \subset [0,1] - \{s\} \text{ es finito}\}$ forma una base de vecindades en p. Dada $\epsilon > 0$ y $F \subset [0,1] - \{s\}$ finito, notemos que $Fr(M_\varepsilon((s,s),F)) \subset ([0,1] \times \{s+\varepsilon\}) \cup ([0,1] \times \{s-\varepsilon\})$.

Si $s + \epsilon < 1$, para cada $q \in ([0,1] \times \{s+\epsilon\}) - \Delta$, $\{q\}$ es abierto en $[0,1] \times \{s+\epsilon\}$. Esto implica que $\dim([0,1] \times \{s+\epsilon\}) = 0$. Similarmente, $\dim([0,1] \times \{s-\epsilon\}) \leq 0$. Como $Fr(M_\varepsilon((s,s),F)) \subset ([0,1] \times \{s+\varepsilon\}) \cup ([0,1] \times \{s-\varepsilon\})$, podemos aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a $Fr(M_\varepsilon((s,s),F))$ y obtener que, $\dim Fr(M_\varepsilon((s,s),F)) \leq 0$. Por tanto, $\dim_p X \leq 1$. Como ya sabíamos que $\dim_p X > 0$, concluimos que $\dim_p X = 1$.

Por lo tanto, $\dim X = 1$.

3.35. La Topología de los Ultrafiltros Fuertes (Ejemplo 113)

El Espacio de los Ultrafiltros Fuertes tiene dimensión 1.

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y sea $\mathcal{L}$ la colección de todos los ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$ (recordemos que un ultrafiltro no principal es aquel que no tiene punto de acumulación). Sea $X = \mathbb{N} \cup \mathcal{L}$ y sea τ la topología sobre X que tiene como base a los conjuntos de $\mathbb{N}$ que consisten de un solo elemento y a los conjuntos de la forma $A \cup \{F\}$ donde $A \in F \in \mathcal{L}$.

Claramente para toda $x \in \mathbb{N}$, $\dim_x \mathbb{N} = 0$.

Para demostrar que la dimensión de X es 1, primero demostraremos dos afirmaciones.

Afirmación 1. Sean $A \cup \{F\}$ una vecindad básica de $F \in \mathcal{L}$ y $G \in \mathcal{L}$ un ultrafiltro tal que $A \in G$. Entonces $G \in Cl\,(A \cup \{F\})$.

Tomemos un conjunto cualquiera $B \in G$. Como G es un ultrafiltro, entonces $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cap B \in G$. De manera que para todo $B \in G$, tenemos que $(B \cup \{G\}) \cap (A \cup \{F\}) \neq \emptyset$. Por tanto $G \in Cl(A \cup \{F\})$.

Afirmación 2. X no es un espacio T_3.

Supongamos por el contrario que dado un ultrafiltro cualquiera $F \in \mathcal{L}$ y un abierto $A \cup \{F\}$ que tiene a F, existe un $B \neq A$ tal que $B \in F$ y $F \in B \cup \{F\} \subset Cl(B \cup \{F\}) \subset A \cup \{F\}$. Entonces $B \subset A$.

Notemos que, por la Afirmación 1, $Cl(B \cup \{F\})$ contiene a todos los ultrafiltros que contienen a B. Sea $G \neq F$ un ultrafiltro tal que $G \in \mathcal{L}$ y $B \in G$. Como $B \subset A$, tenemos que $A \in G$ y $G \in Cl(B \cup \{F\}) \subset A \cup \{F\}$, por tanto $G = F$, lo cual contradice nuestra suposición. Por tanto X no puede ser T_3.

Como X no es un espacio T_3, al aplicar el Corolario 1.11 a X, obtenemos que $\dim X \geq 1$.

Ahora demostraremos que la frontera de una vecindad arbitraria $A \cup \{F\}$ de F es precisamente el conjunto de todos los ultrafiltros que contienen a A.

Por una parte tenemos que $\mathbb{N}$ es un subespacio discreto. De modo que para toda $p \in \mathbb{N}$, $p \notin Fr(A \cup \{F\})$. Ahora notemos que si $G \in \mathcal{L}$ es un ultrafiltro y $A \notin G$, entonces $X - A \in G$, así que G no es punto de acumulación de $A \cup \{F\}$, ya que para el abierto $(X - A) \cup \{G\}$ se tiene que $((X - A) \cup \{G\}) \cap (A \cup \{F\}) = \emptyset$, pues $G \neq F$ y $(X - A) \cap A = \emptyset$. Esto implica que $G \notin Fr(A \cup \{F\})$. Por tanto la frontera de $A \cup \{F\}$ consiste exactamente de todos los ultrafiltros que contienen a A.

Sea $G \in Fr(A \cup \{F\})$, entonces para toda vecindad $B \cup \{G\}$ de G en X, tenemos que $(B \cup \{G\}) \cap (Fr(A \cup \{F\})) = \{G\}$. Por lo tanto $Fr(A \cup \{F\})$ es un subespacio discreto, de manera que, al aplicar el Corolario 1.12 a $Fr(A \cup \{F\})$, obtenemos que $\dim Fr(A \cup \{F\}) = 0$. Por tanto $\dim_{\{G\}} X \leq 1$. Concluimos que $\dim_{\{G\}} X = 1$.

Por lo tanto $\dim X = 1$.

3.36. Espacio de los Rectángulos Anidados (Ejemplo 115)

El Espacio de los Rectángulos Anidados tiene dimensión 1.

En el plano Euclidiano denotamos por L_1 a la recta $x = 1$, por L_2 a la recta $x = -1$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea R_n la frontera del rectángulo centrado en el origen de altura $2n$ y ancho $\frac{2n}{n+1}$.

Hacemos $X = L_1 \cup L_2 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right)$ y le asignamos a X la topología inducida por $\mathbb{R}^2$.

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, el subespacio R_n es homeomorfo a la esfera S^1, de manera que, cada R_n es cerrado en X y tiene dimensión 1. De modo que, al aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a X, obtenemos que, $\dim X \geq 1$.

Notemos que X es un espacio métrico separable y que las rectas L_1 y L_2 son cerradas en X y tienen dimensión 1. Por tanto, X es una unión numerable de subconjuntos cerrados de dimensión 1. De manera que, al aplicar el Teorema 1.18 (Teorema de la Suma) a X, obtenemos que $\dim(X) \leq 1$.

Por lo tanto, $\dim X \geq 1$ y $\dim(X) \leq 1$. Luego, $\dim(X) = 1$.

3.37. La Curva $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ (Ejemplos 116, 117 y 118)

La Curva $sen\left(\frac{1}{x}\right) \cup \{(0,0)\}$, su cerradura y su extensión tienen dimensión 1.

Sea $L = \left\{\left(x, sen\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\right\} \cup \{(0,0)\}$, con la topología τ inducida por el plano Euclidiano. Sea K la cerradura de L en $\mathbb{R}^2$, es decir, $K = L \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$ y sea $T = K \cup \{(x,1) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$ la extensión de L.

Demostraremos que L y K tienen dimensión 1. La demostración para T es análoga.

Sea $\varphi : (0,1] \to L - \{(0,0)\}$ dada por $\varphi(x) = \left(x, sen\left(\frac{1}{x}\right)\right)$. Claramente, φ es continua y suprayectiva. Es más, φ es un homeomorfismo pues podemos definir su inversa $\psi : L - \{(0,0)\} \to (0,1]$ por $\psi(x,y) = x$. Como $(0,1]$ tiene dimensión 1, tenemos que $L - \{(0,0)\}$ también tiene dimensión 1, pues la dimensión es un invariante topológico. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ hacemos $L_n = \varphi(\left[\frac{1}{n}, 1\right])$, tenemos que L_n es cerrado en L y en K y tiene dimensión 1. Por tanto L y K se pueden poner como unión numerable de espacios cerrados de dimensión 1 ($K = (\bigcup\{L_n : n \in \mathbb{N}\}) \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$). Aplicando el Teorema 1.18 (Teorema de la Suma), obtenemos que $\dim L = 1$ y $\dim K = 1$.

3.38. La Escoba Infinita y la Escoba Cerrada Infinita (Ejemplos 119 y 120)

La Escoba Infinita y su Cerradura tienen dimensión 1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea L_n el segmento de recta en el plano Euclidiano formado al unir el origen $(0,0)$ con el punto $(1, \frac{1}{n})$. Sea $L = \bigcup\{L_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces, *La Escoba Infinita* queda definida por $B = L \cup ((\frac{1}{2}, 1] \times \{0\})$ con la topología inducida por la topología Euclidiana. *La Escoba Cerrada Infinita* es $Cl(B) = B \cup ((0,1] \times \{0\})$.

Cada L_n es homeomorfo a $[0,1]$, así que $\dim L_n = 1$, pues la dimensión es un invariante topológico. Además $[0,1] \times \{0\}$ es cerrado y tiene dimensión 1.

Por tanto $Cl(B) = L \cup ([0,1] \times \{0\})$ es una unión numerable de espacios cerrados de dimensión 1. Aplicando el Teorema 1.18 (Teorema de la Suma) a $Cl(B)$, obtenemos que $\dim Cl(B) = 1$. Por otra parte, notemos que B es un espacio conexo, y por el Corolario 1.10, $\dim B > 0$. Además, como $B \subset Cl(B)$, podemos aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a B y obtener que, $0 < \dim B \leq \dim Cl(B) = 1$. Por tanto, $\dim B = 1$.

3.39. Espacio de los Ángulos Anidados (Ejemplo 122)

El Espacio de los Ángulos Anidados tiene dimensión 1.

Sea $X = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n\right) \cup \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, en donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $L_n = \left\{\left(x, \frac{-x}{n+1}+1\right) : 0 \leq x \leq n\right\} \cup \left\{\left(x, \frac{1}{n+1}\right) : x \leq n\right\}$. Al conjunto X le asignamos la topología inducida por la topología Euclidiana. Entonces, (X,τ) es *El Espacio de los Ángulos Anidados*.

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, L_n es cerrado en X y tiene dimensión 1. También el conjunto $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ es cerrado en X y tiene dimensión 1. De manera que X es una unión numerable de subespacios cerrados de dimensión 1. Aplicando el Teorema 1.18 (Teorema de la Suma) a X, obtenemos que $\dim X = 1$.

3.40. La Jaula Infinita (Ejemplo 123)

La Jaula Infinita tiene dimensión 1.

Dada $n \in \mathbb{N}$, sean:
$A_n = \left\{(\frac{1}{n}, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 3n\right\}$
$B_n = \left\{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : 2n - \frac{1}{2} \leq y \leq 2n + \frac{1}{2}\right\}$
$C_n = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq \frac{1}{n},\ y = 2n \text{ y } z = x(\frac{1}{n} - x)\right\}$. Definimos *La Jaula Infinita* como $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n \cup C_n)$ y le damos la topología inducida por la topología Euclidiana.

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n, B_n y C_n tienen dimensión 1. Así que, por el Teorema 1.17 (Teorema del subespacio), tenemos que $1 = \dim A_n = \dim B_n = \dim C_n$. Aplicando el Teorema 1.18 (Teorema de la Suma) a X, obtenemos que $\dim X = 1$.

3.41. Conjunto Conexo de Bernstein (Ejemplo 124)

El Conjunto Conexo de Bernstein tiene dimensión 1.

Sea $\mathcal{F} = \{C_\alpha : \alpha \in [0, \Gamma)\}$ la familia de todos los subconjuntos cerrados, conexos y no degenerados del plano Euclidiano, bien ordenados por el primer ordinal Γ, equivalente al cardinal del continuo c. Definimos por inducción transfinita dos sucesiones anidadas $\{A_\alpha\}_{\alpha<\Gamma}$ y $\{B_\alpha\}_{\alpha<\Gamma}$ de subconjuntos del plano tales que para toda $\alpha, \beta \in [0, \Gamma)$, $A_\alpha \cap B_\beta = \emptyset$ y para toda $\gamma \in [1, \Gamma)$, $A_\gamma - (\bigcup\{A_\alpha : \delta < \gamma\})$ y $B_\gamma - (\bigcup\{A_\alpha : \delta < \gamma\})$ constan de un solo punto. Sean A_0 y B_0 dos conjuntos seleccionados de $C_0 \in \mathcal{F}$ que consisten de un solo elemento. Notemos que si $\{A_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ y $\{B_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ han sido definidas, entonces el cardinal de $\bigcup\{(A_\alpha \cup B_\alpha) : \alpha < \beta\}$ es menor que c, y la cardinalidad de C_β es igual a c. Por lo tanto, podemos seleccionar dos puntos diferentes $a_\beta, b_\beta \in C_\beta - \bigcup\{A_\alpha \cup B_\alpha : \alpha < \beta\}$, y definir a $A_\beta = \{a_\beta\} \cup (\bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha)$, $B_\beta = \{b_\beta\} \cup (\bigcup_{\alpha<\beta} B_\alpha)$. Sean $A = \bigcup_{\alpha<\Gamma} A_\alpha$ y $B = \mathbb{R}^2 - A$.

Demostraremos que A y B tienen dimensión 1.

Por construcción A y B son ajenos y contienen a los conjuntos $\bigcup A_\alpha$ y $\bigcup B_\alpha$, respectivamente. Además, es claro que cualquier subconjunto cerrado, conexo y no degenerado del plano Euclidiano intersecta tanto a A como a B.

Por otra parte, notemos que cualquier subconjunto abierto y no vacío del plano contiene a algún subconjunto cerrado conexo y no degenerado de $\mathbb{R}^2$, basta fijarse en cualquier bola cerrada contenida en dicho abierto. De manera que cualquier conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ intersecta a A y B. Luego, los conjuntos A y B son densos en $\mathbb{R}^2$.

Probaremos que A es conexo (la demostración para B es análoga).

Supongamos por el contrario, que existen $K, L \subset A$ tales que $K \neq \emptyset \neq L$, $A = K \cup L$, $Cl(K) \cap L = \emptyset = K \cap Cl(L)$. Como $\mathbb{R}^2$ es completamente normal, existen abiertos ajenos U y V en $\mathbb{R}^2$ tales que $K \subset U$ y $L \subset V$.

Observemos que $U \cup V \subsetneq \mathbb{R}^2$, pues $\mathbb{R}^2$ es conexo, de manera que, $\mathbb{R}^2 - (U \cup V) \neq \emptyset$.

Notemos que $\mathbb{R}^2 - (U \cup V)$ separa al plano. Como $\mathbb{R}^2$ no puede ser separado por subconjuntos de dimensión menor o igual que cero (Proposición 1.21), tenemos que $\dim(\mathbb{R}^2 - (U \cup V)) \geq 1$. Sea $p \in \mathbb{R}^2 - (U \cup V)$ tal que $\dim_p(\mathbb{R}^2 - (U \cup V)) \geq 1$. Sea D el disco cerrado de radio 1 y centro en p. Entonces $E = D \cap (\mathbb{R}^2 - (U \cup V))$ es compacto y como E es una vecindad de p en $\mathbb{R}^2 - (U \cup V)$, $\dim E \geq 1$. Como los espacios métricos totalmente disconexos y compactos tienen dimensión cero [5, Teo 4.7, p. 22], E no es totalmente disconexo. De manera que E contiene un subconjunto conexo y no degenerado G. Como $\mathbb{R}^2 - (U \cup V)$ es cerrado, $Cl(G) \subset \mathbb{R}^2 - (U \cup V)$. Así que $Cl(G)$ es un subconjunto no degenerado, conexo y cerrado en $\mathbb{R}^2$. De aquí que, $A \cap Cl(G) \neq \emptyset$. Luego, $A \cap (\mathbb{R}^2 - (U \cup V)) \neq \emptyset$, lo cual es absurdo. Por tanto A es conexo.

Por lo anterior, tenemos que para todo $p \in A$, $\dim_p A > 0$.

Ahora probaremos que para todo $p \in A$, $\dim_p A \leq 1$.

Supongamos que existe un subconjunto abierto no vacío W de $\mathbb{R}^2$ tal que $W \subset A$. Como A y B son ajenos, tenemos que $W \cap B = \emptyset$, lo cual es imposible, pues B es denso en $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, A no puede tener contenido ningún subconjunto abierto no vacío del plano Euclidiano. Así, al aplicar el Teorema 1.20 a A, tenemos que $\dim A < 2$. Por tanto, para todo $p \in A$, $\dim_p A \leq 1$. Luego, $\dim_p A = 1$.

Por lo tanto $\dim A = 1$.

3.42. El Espacio de las Sucesiones de Gustin (Ejemplo 125)

El Espacio de Sucesiones de Gustin tiene dimensión 1.

Sea $X = Y \cup (\mathbb{N} \times W)$, donde Y es el espacio de todas las sucesiones finitas de números naturales con un número par de términos (incluyendo la sucesión cero, denotada por 0), $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales y W es la colección de todos los pares no ordenados de elementos de Y. Si α y β son cualesquiera dos sucesiones finitas con un número par o impar de términos, denotamos por $|\alpha|$ a la longitud de α y definimos $\alpha\beta$ como la sucesión formada agregando la sucesión β al final de la sucesión α. Sea $i \in \mathbb{N}$, diremos que la sucesión α es mayor o igual que i, ($\alpha \geq i$), si para toda $a \in \alpha$, $a \geq i$. Por último, escribiremos el símbolo $\beta \supset i\alpha$ para denotar que existe una sucesión $\gamma \geq i$ tal que $\beta = \alpha\gamma$.

Antes de definir la topología en X, tomamos una biyección $p : W \to P$, donde P es el conjunto de números primos positivos y definimos la función $q : (\mathbb{N} \times W) \to \mathbb{N}$ dada por $q(n, w) = [p(w)]^n$.

Para cualquier sucesión α (con un número par o impar de elementos) y cualquier $i \in \mathbb{N}$, definimos $U_i(\alpha) = \{\beta \in Y : \beta \supset i\alpha\}$; y para los puntos $(n, w) = (n, \{\alpha, \beta\}) \in \mathbb{N} \times W$, definimos $V_i((n, w)) = \{(n, w)\} \cup U_i(\alpha q(n, w)) \cup U_i(\beta q(n, w))$.

Finalmente, definimos una topología τ sobre X tomando como base a los conjuntos de la familia

$\mathcal{F} = \{U_i(\alpha) : i \in \mathbb{N} \text{ y } \alpha \in Y\} \cup \{V_i((n, w)) : i \in \mathbb{N},\ (n, w) \in \mathbb{N} \times W\}$.

Afirmación 1. (X, τ) es un espacio de Hausdorff.
Realizaremos la demostración analizando tres casos.

Caso 1. Sean $\alpha, \beta \in Y$ tales que $\alpha \neq \beta$.

Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > a$ para toda $a \in \alpha$ y $n > b$ para toda $b \in \beta$. Probaremos que $U_n(\alpha) \cap U_n(\beta) = \emptyset$. Supongamos por el contrario que existe $\delta \in Y$ tal que $\delta \in U_n(\alpha)$ y $\delta \in U_n(\beta)$. De modo que, $\delta \supset n\alpha$ y $\delta \supset n\beta$, es decir, existen $\gamma, \lambda \geq n$ tales que $\delta = \alpha\gamma$ y $\delta = \beta\lambda$. De esta manera, $\alpha\gamma = \beta\lambda$.

Si $|\alpha| = |\beta|$, entonces existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_{j_0} \neq \beta_{j_0}$. De modo que $\alpha\gamma \neq \beta\lambda$, lo cual es absurdo. Por tanto $|\alpha| \neq |\beta|$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $|\alpha| < |\beta|$. Podemos suponer que $|\alpha| = k$ y $|\beta| = k + l$ (l es par). Así, γ debe tener en sus primeras l entradas los últimos l elementos de β, lo cual también es absurdo, pues para toda $b \in \beta$, se tiene que $b < n \leq \gamma$. Por lo tanto $U_n(\alpha) \cap U_n(\beta) = \emptyset$.

Caso 2. Sean $\gamma \in Y$ y $(n, w) = (n, \{\alpha, \beta\}) \in \mathbb{N} \times W$.

Elegimos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > c$ para toda c en alguna de las sucesiones $\alpha q(n, w)$, $\beta q(n, w)$ y γ. Probaremos que $U_m(\gamma) \cap V_m(n, w) = \emptyset$. Supongamos por el contrario que existe $\delta \in U_m(\gamma)$ tal que $\delta \in V_m(n, w)$. Como $U_m(\gamma) \subset Y$, tenemos que $\delta \in U_m(\alpha q(n, w)) \cup U_m(\beta q(n, w))$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\delta \in U_m(\alpha q(n, w))$. De manera que $\delta \supset m\gamma$ y $\delta \supset m\alpha q(n, w)$. Así, existen $\lambda, \phi \geq m$ tales que $\delta = \gamma\lambda$ y $\delta = \alpha q(n, w)\phi$. Luego, $\gamma\lambda = \alpha q(n, w)\phi$.

Si $|\gamma| = |\alpha|$, entonces el primer término de λ coincide con $q(n, w)$, lo cual es absurdo, pues $q(n, w) < m \leq \lambda$.

El caso $|\gamma| < |\alpha|$ es análogo al caso anterior.

Si $|\gamma| > |\alpha|$, entonces podemos suponer que $|\gamma| = k + l$ y $|\alpha| = k$, donde l es un número par. Así, $\phi_1 = \gamma_{k+2}$ (el primer término de ϕ debe coincidir con el término $k + 2$ de γ), lo cual también es absurdo, pues $\gamma_{k+2} < m \leq \phi$. Por lo tanto $U_m(\gamma) \cap V_m(n, w) = \emptyset$.

Caso 3. Sean $(n, w) = (n, \{\alpha, \beta\})$ y $(m, z) = \langle m, \{\gamma, \delta\}\rangle \in \mathbb{N} \times W$ tales que $(n, w) \neq (m, z)$.

Notemos que $n \neq m$ o $\{\alpha, \beta\} \neq \{\gamma, \delta\}$. Tomemos $i \in \mathbb{N}$ tal que $i > c$ para toda c en alguna de las sucesiones $\alpha q(n, w), \beta q(n, w), \gamma q(m, z), \delta q(m, z)$. Probaremos que $V_i((n, w)) \cap V_i((m, z)) = \emptyset$. Supongamos por el contrario que existe $\lambda \in V_i((n, w)) \cap V_i((m, z))$, entonces $\lambda \in V_i((n, w))$ y $\lambda \in V_i((m, z))$. Como $(n, w) \neq (m, z)$, tenemos que $\lambda \in U_i(\alpha q(n, w) \cup U_i(\beta q(n, w))$ y $\lambda \in U_i(\gamma q(m, z)) \cup U_i(\delta q(m, z))$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lambda \in U_i(\alpha q(n, w))$ y $\lambda \in U_i(\gamma q(m, z))$. De manera que $\lambda \supset i\alpha q(n, w)$ y $\lambda \supset$

$i\gamma q(m,z)$, es decir, existen $\eta, \phi \geq i$ tales que $\lambda = \alpha q(n,w)\eta$ y $\lambda = \gamma q(m,z)\phi$. Luego, $\alpha q(n,w)\eta = \gamma q(m,z)\phi$.

Si $|\alpha| = |\gamma|$, entonces $q(n,w) = q(m,z)$, de aquí que $(n,w) = (m,z)$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por tanto, $|\alpha| \neq |\gamma|$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $|\alpha| < |\gamma|$. Entonces podemos suponer que $|\alpha| = k$ y $|\gamma| = k+l$, donde l es un número par. Así, tenemos que $\eta_1 = \gamma_{k+2}$, lo cual no es posible, ya que $\gamma_{k+2} < i \leq \eta_1$. Por lo tanto $V_i((n,w)) \cap V_i((m,z)) = \emptyset$.

Afirmación 2. Sea $U_i(\gamma)$ una vecindad abierta de $\gamma \in Y$, definimos el conjunto

$$Z(i,\gamma) = \{(n, \{\alpha,\beta\}) : \alpha q(n,w) \supset i\gamma \text{ o } \beta q(n,w) \supset i\gamma, \text{ donde } w = \{\alpha,\beta\}\}.$$

Notemos que los elementos $(n, \{\alpha,\beta\})$ pertenecen a $\mathbb{N} \times W$. Aseguramos que, $Cl(U_i(\gamma)) = U_i(\gamma) \cup Z(i,\gamma)$.

Tomemos $p \in Cl(U_i(\gamma))$ y consideremos dos casos.

Caso 1. $p \in Y$.

Sea $p = \alpha$. Como $\alpha \in Cl(U_i(\gamma))$, tenemos que, para toda $k \in \mathbb{N}$, $U_k(\alpha) \cap U_i(\gamma) \neq \emptyset$. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > i$ y k es mayor que todos los términos de α y de γ. Tenemos que existe $\beta \in U_k(\alpha)$ y $\beta \in U_i(\gamma)$. De manera que existen sucesiones λ, δ tales que, para toda $a \in \lambda$, $a \geq k$, para toda $d \in \delta$, $d \geq i$, $\beta = \alpha\lambda$ y $\beta = \gamma\delta$. De modo que $\alpha\lambda = \gamma\delta$.

Si $|\alpha| = |\gamma|$, entonces $\alpha = \gamma$. Por lo tanto, $\alpha \in U_i(\gamma) \subset U_i(\gamma) \cup Z(i,\gamma)$.

Si $|\alpha| < |\gamma|$, entonces podemos suponer que $|\alpha| = n$ y $|\gamma| \geq n+2$, donde n es un entero par. Así, tenemos que $\gamma_{n+1} = \lambda_1$, pero $\gamma_{n+1} < k \leq \lambda_1$. Por tanto, no puede suceder que $|\alpha| < |\gamma|$.

Si $|\alpha| > |\gamma|$, entonces podemos suponer que $|\alpha| = n + l$ y $|\gamma| = n$, donde l es un número par.

Sea $\alpha\lambda = \langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}, ..., \alpha_{n+l}, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \rangle$ y sea $\gamma\delta$ la sucesión con $n+l+r$ elementos dada por $\gamma\delta = \langle \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n, \delta_1, \delta_2, ..., \delta_l, \delta_{l+1}, ..., \delta_{l+r} \rangle$. Como $\alpha\lambda = \gamma\delta$, tenemos que $\langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}, ..., \alpha_{n+l}, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \rangle$ es igual a $\langle \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n, \delta_1, \delta_2, ..., \delta_l, \delta_{l+1}, ..., \delta_{l+r} \rangle$. De modo que la sucesión α es igual a $\langle \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n, \delta_1, \delta_2, ..., \delta_l \rangle$. Así, α es una sucesión que empieza como γ y se completa con términos mayores o iguales que i. Por tanto, $\alpha \in U_i(\gamma) \subset U_i(\gamma) \cup Z(i,\gamma)$.

Caso 2. $p = (n,w) \in \mathbb{N} \times W$.

Sea $w = \{\alpha,\beta\}$. Tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > i$ y k es mayor que todos los términos de las sucesiones α, β y γ. Como $(n,w) \in Cl(U_i(\gamma))$, existe

$\phi \in V_k((n,w)) \cap U_i(\gamma)$. De modo que $\phi \in (U_k(\alpha q(n,w)) \cup U_k(\beta q(n,w)) \cap U_i(\gamma)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\phi \in U_k(\alpha q(n,w)) \cap U_i(\gamma)$. De manera que, existen sucesiones λ, δ tales que para toda $a \in \lambda$, $a \geq k$, para toda $d \in \delta$, $d \geq i$, $\phi = \alpha q(n,w)\lambda$ y $\phi = \gamma\delta$. Luego, $\alpha q(n,w)\lambda = \gamma\delta$.

Si $|\alpha q(n,w)| = |\gamma|$, entonces $\alpha q(n,w) = \gamma$, lo cual no es posible, ya que α y γ son sucesiones pares.

Si $|\alpha q(n,w)| < |\gamma|$, entonces podemos suponer que $|\alpha q(n,w)| = n+1$ y $|\gamma| \geq n+2$, donde n es un entero par.

Sea $\alpha q(n,w)\lambda = \langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, q(n,w), \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \rangle$ y escribamos a γ como la sucesión con $n+l$ elementos: $\gamma = \left\langle \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n, \gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, ..., \gamma_l \right\rangle$. Así, $\lambda_1 = \gamma_{n+2}$, pero $\gamma_{n+2} < k \leq \lambda_1$. Por tanto, la cardinalidad de la sucesión $\alpha q(n,w)$ no puede ser menor que la de γ.

Obtenemos entonces que $|\alpha q(n,w)| > |\gamma|$. Entonces, podemos suponer que $|\alpha q(n,w)| = n+l$ y $|\gamma| = n$, donde n es un número par.

Sea $\alpha q(n,w)\lambda = \langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ..., q(n,w), \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \rangle$, entonces a $\gamma\delta$ la podemos poner en la forma $\gamma\delta = \langle \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n, \delta_1, \delta_2, ..., \delta_{s+1} \rangle$.

Notemos que $\alpha q(n,w) = \langle \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n, \delta_1, \delta_2, ...\delta_l \rangle$, y como para toda $d \in \delta$, $d \geq i$, tenemos que $\alpha q(n,w) \supset i\gamma$. Por lo tanto, $(n,w) \in Z(i,\gamma) \subset U_i(\gamma) \cup Z(i,\gamma)$.

Así, queda demostrada la primera contención.

Ahora demostraremos que $U_i(\gamma) \cup Z(i,\gamma) \subset Cl(U_i(\gamma))$.

Ya sabíamos que $U_i(\gamma) \subset Cl(U_i(\gamma))$.

Sea $(n,w) \in Z(i,\gamma)$, donde $w = \{\alpha, \beta\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\alpha q(n,w) \supset i\gamma$, de manera que existe una sucesión δ tal que para toda $d \in \delta$, $d \geq i$ y $\alpha q(n,w) = \gamma\delta$.

Demostraremos que, para toda $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $V_k((n,w)) \cap U_i(\gamma) \neq \emptyset$. Sea $k \in \mathbb{N}$. Sea $\phi = \alpha q(n,w)(\text{máx}\{k,i\})$. La sucesión formada por un solo punto $\lambda = \langle \text{máx}\{k,i\} \rangle$ satisface ser mayor o igual que k. Entonces $\phi = \alpha q(n,w)\lambda$, así que $\phi \in U_k(\alpha q(n,w)) \subset V_k((n,w))$.

Como $\phi = \alpha q(n,w)\lambda = \gamma\delta\lambda$ y tanto los elementos de δ como el único elemento de λ son mayores o iguales que i, tenemos que $\phi \in U_i(\gamma)$. Así, $\phi \in V_k((n,w)) \cap U_i(\gamma)$. Luego, $V_k((n,w)) \cap U_i(\gamma) \neq \emptyset$. Por tanto, $U_i(\gamma) \cup Z(i,\gamma) \subset Cl(U_i(\gamma))$.

Por lo tanto $Cl(U_i(\gamma)) = U_i(\gamma) \cup Z(i,\gamma)$.

Afirmación 3. Sean $i, j \in \mathbb{N}$ y $\gamma, \delta \in Y$, entonces $Z(i,\gamma) \cap Z(j,\delta) \neq \emptyset$.

Escogemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $q(n, \{\gamma,\delta\}) > \text{máx}\{i,j\}$. Probaremos que el punto $(n, w) = (n, \{\gamma, \delta\}) \in Z(i, \gamma) \cap Z(j, \delta)$. Es decir, probaremos que $\gamma q(n, w) \supset i\gamma$ o $\delta q(n, w) \supset i\gamma$ y $\gamma q(n, w) \supset j\delta$ o $\delta q(n, w) \supset j\delta$.

Claramente $\gamma q(n, w) \supset i\gamma$ y $\delta q(n, w) \supset j\delta$. Por tanto, $(n, w) \in Z(i, \gamma) \cap Z(j, \delta)$.

Afirmación 4. (X, τ) es un espacio conexo.

Supongamos por el contrario que, existen abiertos, ajenos y no vacíos U y V en X tales que $X = U \cup V$. Supongamos sin pérdida de generalidad, que existe $\gamma \in Y$ tal que $\gamma \in U$. Consideremos dos casos para V.

Caso 1. Existe $\delta \in Y$ tal que $\delta \in V$.

Entonces, existen básicos $U_i(\gamma)$ y $U_j(\delta)$ tales que, $\gamma \in U_i(\gamma) \subset U$ y $\delta \in U_j(\delta) \subset V$. Por la Afirmación 2, tenemos que $Cl(U_i(\gamma)) = U_i(\gamma) \cup Z(i, \gamma)$ y $Cl(U_j(\delta)) = U_j(\delta) \cup Z(j, \delta)$. De manera que, al aplicar la Afirmación 3 a los básicos $U_i(\gamma)$ y $U_j(\delta)$, tenemos que sus cerraduras se intersectan, pues $Z(i, \gamma) \cap Z(j, \delta) \neq \emptyset$. De aquí que $U \cap V \neq \emptyset$, lo cual contradice lo supuesto.

Caso 2. Existe $(n, w) = (n, \{\alpha, \beta\}) \in \mathbb{N} \times W$ tal que $(n, w) \in V$.

Entonces, existen básicos $U_i(\gamma)$ y $V_j((n, w))$ tales que, $\gamma \in U_i(\gamma) \subset U$ y $(n, w) \in V_j((n, w)) \subset V$. Por la Afirmación 2, tenemos que $Cl(U_i(\gamma)) = U_i(\gamma) \cup Z(i, \gamma)$ y también tenemos que, $Cl(V_j((n, w))) = Cl(\{(n, w)\}) \cup Cl(U_j(\alpha q(n, w))) \cup Cl(U_j(\beta q(n, w)))$; esto a su vez es igual a $\{(n, w)\} \cup U_j(\alpha q(n, w)) \cup Z(j, \alpha q(n, w)) \cup U_j(\beta q(n, w) \cup Z(j, \beta q(n, w))$. De manera que, al aplicar la Afirmación 3 a los básicos $U_i(\gamma)$ y $V_j((n, w))$, tenemos que sus cerraduras se intersectan, pues $Z(i, \gamma) \cap Z(j, \alpha q(n, w)) \neq \emptyset$. De aquí que, $U \cap V \neq \emptyset$, lo cual contradice lo supuesto.

Por lo tanto (X, τ) es un espacio conexo.

Afirmación 5. $\dim(\mathbb{N} \times W) = 0$.

Sean $(n, w) = (n, \{\alpha, \beta\}) \in \mathbb{N} \times W$ y $V_i((n, w))$ un básico alrededor de (n, w) en X dado por $V_i((n, w)) = \{(n, w)\} \cup U_i(\alpha q(n, w)) \cup U_i(\beta q(n, w))$. Como $U_i(\alpha q(n, w)) \subset Y$ y $U_i(\beta q(n, w) \subset Y$, tenemos que $V_i((n, w)) \cap (\mathbb{N} \times W) = \{(n, w)\}$. Por tanto, $\mathbb{N} \times W$ es un subespacio discreto. Luego, $\dim(\mathbb{N} \times W) = 0$ (ver 2.1).

Por la Afirmación 4, deducimos que para todo $p \in X$, $\dim_p X > 0$.

Resta demostrar que para todo $p \in X$, $\dim_p X \leq 1$. Para ello, consideremos dos casos.

Caso 1. $p = \gamma \in Y$.

Sea $U_i(\gamma)$ un básico cualquiera alrededor de γ en X. Como $U_i(\gamma)$ es abierto, $U_i(\gamma) \cap Fr(U_i(\gamma) = \emptyset$. Además, por la Afirmación 2 aplicada a $U_i(\gamma)$, tenemos que $U_i(\gamma) \cup Fr(U_i(\gamma) = U_i(\gamma) \cup Z(i, \gamma)$, y como $U_i(\gamma) \cap Z(i, \gamma) = \emptyset$, obtenemos que $Fr(U_i(\gamma)) = Z(i, \gamma)$, ya que $Z(i, \gamma) \subset \mathbb{N} \times W$ y $Z(i, \gamma) \neq \emptyset$, aplicamos la Afirmación 5 y obtenemos que $\dim(Fr(U_i(\gamma))) = 0$. De aquí que, $\dim_\gamma X \leq 1$. Como ya sabíamos que $\dim_\gamma X > 0$, obtenemos que $\dim_\gamma X = 1$.

Caso 2. $p = (n, w) \in \mathbb{N} \times W$.

Sea $V_i((n, w)) = \{(n, w)\} \cup U_i(\alpha q(n, w)) \cup U_i(\beta q(n, w))$ un básico alrededor de (n, w) en X. Por la Afirmación 1, (X, τ) es un espacio de Hausdorff. De manera que, $Cl(V_i((n, w))) = \{(n, w)\} \cup Cl(U_i(\alpha q(n, w))) \cup Cl(U_i(\beta q(n, w)))$. Así, la cerradura de $V_i((n, w))$ está formada por la siguiente unión $\{(n, w)\} \cup U_i(\alpha q(n, w)) \cup Fr(U_i(\alpha q(n, w))) \cup U_i(\beta q(n, w)) \cup Fr(U_i(\beta q(n, w)))$. Por tanto, $Cl(V_i((n, w))) = V_i((n, w)) \cup Fr(U_i(\alpha q(n, w))) \cup Fr(U_i(\beta q(n, w)))$. Como $Fr(V_i((n, w))) \subset Cl(V_i((n, w)))$, tenemos que $Fr(V_i((n, w))) \subset V_i((n, w)) \cup Fr(U_i(\alpha q(n, w))) \cup Fr(U_i(\beta q(n, w)))$. Como $V_i((n, w))$ es abierto, tenemos que $Fr(V_i((n, w))) \subset Fr(U_i(\alpha q(n, w))) \cup Fr(U_i(\beta q(n, w)))$. Por la Afirmación 2, obtenemos que, $Fr(U_i(\alpha q(n, w))) \cup Fr(U_i(\beta q(n, w))) \subset Z(i, \alpha q(n, w)) \cup Z(i, \beta q(n, w))$. Por tanto, $Fr(V_i((n, w))) \subset Z(i, \alpha q(n, w)) \cup Z(i, \beta q(n, w)) \subset \mathbb{N} \times W$. Aplicando la Afirmación 5 y el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a $Fr(V_i((n, w)))$, obtenemos que, $\dim(Fr(V_i((n, w)))) = 0$. Por lo tanto, $\dim_{(n,w)} X \leq 1$. Como ya habíamos visto que $\dim_{(n,w)} X > 0$, obtenemos que $\dim_{(n,w)} X = 1$.

Por tanto, $\dim X = 1$.

3.43. El Espacio de la Rejilla de Roy y su Subespacio (Ejemplos 126 y 127)

El Espacio de la Rejilla de Roy y su Subespacio tienen dimensión 1.

Sea $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ una colección numerable de subconjuntos densos y ajenos de $\mathbb{Q}$ (racionales); construimos el espacio X agregando al conjunto $\{(r, i) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{N} : r \in C_i\}$ un punto ideal ω.

En las líneas pares, los puntos son de la forma $(r, 2n)$ y las vecindades de éstos son los básicos ordinarios, es decir, dado $\epsilon > 0$, definimos $U_\varepsilon(r, 2n) =$

$\{(t,2n) \in X : |t-r| < \varepsilon\}$. Las vecindades básicas de los puntos en las líneas impares, es decir, en los puntos de la forma $(r, 2n-1\ )$ están dadas por una pila de tres intervalos abiertos, a saber, dado $\epsilon > 0$, hacemos $V_\varepsilon(r,2n-1) = \{(t,m) \in X : |t-r| < \varepsilon \text{ y } m \in \{2n-2, 2n-1, 2n\}\}$. Por último, una base para el punto ω, consiste de todas las líneas a partir de alguna par, es decir, dada $n \in \mathbb{N}$, definimos $W_n(\omega) = \{(s,i) \in X : i \geq 2n\}$. Estas vecindades forman una base para una topología τ sobre X. El espacio (X,τ) es conocido como la *Rejilla de Roy. El Subespacio de la Rejilla de Roy* está formado por $X - \{\omega\}$ y es denotado por X^*.

Veremos que los espacios X y X^* no son regulares.

Sean $(r,2n) \in X$ y $\epsilon > 0$. Entonces, para todo $\delta < \varepsilon$, $U_\delta(r,2n) \subset U_\varepsilon(r,2n)$ y para cualesquiera $s \in C_{2n+1}$ y $t \in C_{2n-1}$ tales que $r - \delta < s, t < r + \delta$, tenemos que $(s, 2n+1)$ y $(t, 2n-1) \in Cl(U_\delta(r,2n))$. Por tanto, $Cl(U_\delta(r,2n)) \nsubseteq U_\varepsilon(r,2n)$. Así, los espacios X y X^* no son regulares. De modo que, al aplicar el Corolario 1.11 a los espacios X y X^*, obtenemos que $\dim X > 0$ y $\dim X^* > 0$.

Demostraremos que $\dim X = 1$. Sea $p \in X$, consideramos tres casos para p.

Caso 1. $p = (r,2n)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\epsilon > 0$ tal que $r - \varepsilon, r + \varepsilon \notin C_{2n} \cup C_{2n-1} \cup C_{2n+1}$. Observemos que la frontera del abierto $U_\varepsilon(r,2n)$ esta dada por el conjunto $Fr(U_\varepsilon(r,2n)) = \{(t,2n-1) : t \in C_{2n-1} \text{ y } |t-r| < \epsilon\} \cup \{(t,2n+1) : t \in C_{2n+1} \text{ y } |t-r| < \epsilon\}$. También notemos que $(X \cap (\mathbb{R} \times \{2n-1\})) \cup (X \cap (\mathbb{R} \times \{2n+1\}))$ tiene la topología inducida por la topología Euclidiana, así que $\dim Fr(U_\varepsilon(r,2n)) = 0$. De aquí concluimos que $\dim_p X = 1$.

Caso 2. $p = (r, 2n-1)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\epsilon > 0$ tal que $r - \varepsilon, r + \varepsilon \notin C_{2n-3} \cup C_{2n-2} \cup C_{2n-1} \cup C_{2n} \cup C_{2n+1}$. Notemos que $Fr(V_\varepsilon(r,2n-1)) = \{(t,2n+1) : t \in C_{2n+1} \text{ y } |t-r| < \epsilon\} \cup \{(t,2n-3) : t \in C_{2n-3} \text{ y } |t-r| < \epsilon\}$. Análogamente al caso anterior, tenemos que $(X \cap (\mathbb{R} \times \{2n+1\})) \cup (X \cap (\mathbb{R} \times \{2n-3\}))$ tiene la topología inducida por la topología Euclidiana, por lo que $\dim Fr(V_\varepsilon(r,2n-1)) = 0$. De aquí concluimos que $\dim_p X = 1$.

Caso 3. $p = \omega$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces para cada $U_n(\omega) = \{(s,i) \in X : i \geq 2n\}$, tenemos que, $Fr(U_n(\omega)) = \{(s, 2n-1) : s \in C_{2n-1}\}$. Observemos que $X \cap (\mathbb{R} \times$

$\{2n-1\}$) tiene la topología inducida por la topología Euclidiana, por lo que $\dim Fr(U_n(\omega)) = 0$. De aquí concluimos que $\dim_p X = 1$.

Por lo tanto, $\dim X = 1$.

Finalmente, como $X^* \subset X$. Podemos aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a X^* y obtener que, $0 < \dim X^* \leq \dim X = 1$. Por tanto, $\dim X^* = 1$.

3.44. La Tienda India de Cantor y la Tienda India Agujerada de Cantor (Ejemplos 128 y 129)

La Tienda India de Cantor y la Tienda India Agujerada de Cantor tienen dimensión 1.

Sea $\mathbf{C}$ el conjunto de Cantor situado sobre el intervalo $[0,1]$ y sea $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ en el plano Euclidiano. Sea X el cono formado por los segmentos de línea que parten de los puntos de $\mathbf{C} \times \{0\}$ y cuyo otro extremo es p. Es decir, para cada $c \in \mathbf{C}$, sea $L(c)$ el segmento de línea que une a $(c,0)$ con el punto p, entonces $X = \bigcup \{L(c) : c \in \mathbf{C}\}$. Sea E el conjunto de puntos extremos del conjunto de Cantor, entonces el cono sobre E está dado por el conjunto $X_E = \bigcup \{L(c) : c \in E\}$; similarmente, si $F = \mathbf{C} - E$, entonces $X_F = \bigcup \{L(c) : c \in F\}$ denota el cono sobre F. Definimos los siguientes conjuntos.

$Y_E = \{(x,y) \in X_E : y \in \mathbb{Q}\}$, $Y_F = \{(x,y) \in X_F : y \notin \mathbb{Q}\}$ y $Y = Y_E \cup Y_F$.

Los conjuntos X y Y tienen la topología inducida por la topología Euclidiana.

El espacio X no contiene ningún abierto de $\mathbb{R}^2$, de modo que al aplicar el Teorema 1.20 a X, se tiene que $\dim X \leq 1$.

Por otra parte, es claro que X es arco conexo. Por tanto, $\dim X > 0$. Luego, $\dim X = 1$.

Ahora demostraremos que la dimensión del subespacio Y también es 1.

Como $Y \subset X$, podemos aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a Y y obtener que $\dim Y \leq 1$.

Demostraremos que el subespacio Y es conexo.

Supongamos por el contrario, que existen abiertos no vacíos A y B de Y tales que $A \cap B = \emptyset$ y $Y = A \cup B$. Podemos suponer que $p \in A$. Para cada $c \in \mathbf{C}$, sea:

$$\ell(c) = \begin{cases} \sup B \cap L(c), & \text{si } B \cap L(c) \neq \emptyset, \\ (c, 0), & \text{si } B \cap L(c) = \emptyset. \end{cases}$$

Aquí se entiende a $\sup B \cap L(c)$ tomando como orden en $L(C)$ el que dice que un punto es mayor que otro si su segunda coordenada es mayor.

Afirmación 1. Si $\ell(c) \neq (c, 0)$, entonces $\ell(c) \in Cl_X(A) \cap Cl_X(B)$.

Como $p \in A$ y A es abierto, tenemos que existe $z \in L(c)$ tal que $z < p$ y $\{w \in L(c) : z < w < p\} \subset A$. Ya que $l(c) \neq (c, 0)$, tenemos que $B \cap L(c) \neq \emptyset$. Entonces $l(c) \leq z$. Por la definición del supremo, cualquier abierto en X que contiene a $\ell(c)$ intersecta tanto a B como a A. Luego, $\ell(c) \in Cl_X(A) \cap Cl_X(B)$.

Afirmación 2. $Cl_X(A) \cap Cl_X(B) \subset X - Y$.

Sea $t \in Cl_X(A) \cap Cl_X(B)$ y supongamos por el contrario, que $t \in Y$. De manera que, $y \in Cl_Y(A) \cap Cl_Y(B)$. Como $A = Cl_Y(A)$ y $B = Cl_Y(B)$, tenemos que $y \in A \cap B$, lo cual contradice que A y B son conjuntos ajenos. Por tanto, $t \notin Y$. Así que, $t \in X - Y$. Luego, $Cl_X(A) \cap Cl_X(B) \subset X - Y$.

Definimos el conjunto $S = \{c \in F : (c, 0) = \ell(c)\}$. Notemos que $S \cap Y = \emptyset$. A continuación enumeremos a los números racionales que pertenecen al intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ mediante la sucesión $\{r_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Sea $T : X - \{p\} \to C$ la proyección continua dada por $T(q) = c$ si y sólo si $q \in L(c)$. Notemos que T es una función abierta. Sea $\pi : X \to \left[0, \frac{1}{2}\right]$ la proyección en la segunda coordenada, es decir, $\pi(x, y) = y$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $T_i = \{c \in \mathbf{C} : \pi(\ell(c)) = r_i\}$. Hacemos $T^* = \bigcup \{T_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Afirmación 3. $F = S \cup T^*$.

Claramente $S \cup T^* \subset F$.

Sea $c \in F$. Ponemos $\ell(c) = (x, y)$. Si $y \notin \mathbb{Q}$, entonces $\ell(c) \in Y_F \subset Y$, y $l(c) \neq (c, 0)$. Las Afirmaciones 1 y 2 implican que $l(c) \notin Y$, lo cual es absurdo. De modo que $y \in \mathbb{Q} \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Si $y = 0$, entonces $\ell(c) = (x, 0) = (c, 0)$, así que $c \in S$. Si $y \neq \emptyset$, entonces $y = r_i$, para alguna $i \in \mathbb{N}$, de manera que $\ell(c) = (x, r_i)$ y $c \in T_i \subset T^*$. Por lo tanto, $F = S \cup T$.

Por lo anterior, tenemos que $\mathbf{C} = E \cup S \cup T^*$.

Afirmación 4. Para cada $i \in \mathbb{N}$, T_i es denso en ninguna parte en $\mathbf{C}$.

Supongamos por el contrario, que existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que T_{i_0} satisface que $Int_{\mathbf{C}}(Cl(T_{i_0})) \neq \emptyset$. Notemos que, E es denso en $\mathbf{C}$. De modo que, existe

$s \in E$ tal que $s \in Int_{\mathbf{C}}(Cl(T_{i_0})) \subset Cl(T_{i_0})$. Así que, existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en T_{i_0} tal que $\lim t_n \to s$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $t_n \in T_{i_0}$. De modo que, $\ell(t_n) = (x, r_{i_0})$, para alguna $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Por la Afirmación 1, tenemos que $\ell(t_n) \in Cl_X(A) \cap Cl_X(B)$.

Notemos que $\lim(t_n, r_{i_0}) = (s, r_{i_0})$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $(t_n, r_{i_0}) \in Cl_X(A) \cap Cl_X(B)$ y X es cerrado en $\mathbb{R}^2$, tenemos que $(s, r_{i_0}) \in Cl_X(A) \cap Cl_X(B)$ y por la Afirmación 2, concluimos que $(s, r_{i_0}) \in X - Y$, lo cual es una contradicción, pues $s \in E$ y $r_{i_0} \in \mathbb{Q}$. Por lo tanto, para toda $i \in \mathbb{N}$, T_i es denso en ninguna parte en $\mathbf{C}$.

Ya que E es un conjunto numerable y sin puntos aislados, concluimos que el conjunto $E \cup T^*$ es de la primera categoría.

Sabemos que el conjunto de Cantor no es de la primera categoría. Sea U un conjunto abierto y no vacío de $\mathbf{C}$. Entonces U no es de la primera categoría (Teorema de Baire). De manera que, $U \nsubseteq S \cup T^*$; y como $\mathbf{C} = S \cup (E \cup T^*)$, se concluye que U intersecta a S. Por tanto, S es denso en $\mathbf{C}$.

Como $B \neq \emptyset$, podemos elegir un punto $q \in B$. Sea U un abierto en $\mathbb{R}^2$ tal que $q \in U \cap Y \subset B$. Notemos que $T(U \cap Y)$ es abierto en $\mathbf{C}$ (y no vacío) así que existe $c \in T(U \cap Y) \cap S$. Por definición, $\emptyset \neq L(c) \cap U \cap Y \subset L(c) \cap B$; $c \in F$ y $(c, 0) = \ell(c)$. Esto último implica que $L(c) \cap B = \emptyset$. Esta contradicción completa la prueba de que Y es conexo.

Por lo tanto, al aplicar el Corolario 1.10 a Y, obtenemos que $\dim Y > 0$ y como ya sabíamos que $\dim Y \leq 1$, concluimos que $\dim Y = 1$.

3.45. El Pseudo Arco (Ejemplo 130)

El Pseudo Arco tiene dimensión 1.

Recordemos que una *Cadena* $\mathcal{L}$ en el plano Euclidiano es una colección finita de conjuntos abiertos $\{D_i : 1 < i < n\}$ llamados *Eslabones* tales que $D_i \cap D_j = \emptyset$ si y sólo si $|i - j| > 1$.

Sean a y b dos puntos diferentes en el plano Euclidiano. El *Pseudo Arco* que une a los puntos a y b es cualquier conjunto en $\mathbb{R}^2$ que resulta de la siguiente construcción inductiva.

Sea $\mathcal{F} = \{\mathcal{L}_i : i \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de cadenas en el plano Euclidiano tales que:

i) Para cada $i \in \mathbb{N}$, el diámetro de cada eslabón de $\mathcal{L}_i = \left\{D_1^i, ..., D_{n_i}^i\right\}$ es menor que $\frac{1}{i}$.

ii) La cerradura de cada eslabón de $\mathcal{L}_{i+1}$ está contenida en algún eslabón de $\mathcal{L}_i$.

iii) $\mathcal{L}_{i+1}$ está torcida (o doblada) en $\mathcal{L}_i$. Es decir, si $D_m^{i+1}, D_n^{i+1} \in \mathcal{L}_{i+1}$ con $m < n$ y $D_m^{i+1} \subset D_h^i$, $D_n^{i+1} \subset D_k^i$ con $|k-h| > 2$, entonces existen $D_s^{i+1}, D_t^{i+1} \in \mathcal{L}_{i+1}$ con $m < s < t < n$, tales que D_s^{i+1} está contenido en un eslabón de $\mathcal{L}_i$ adyacente a D_k^i, y D_t^{i+1} está contenido en un eslabón adyacente a D_h^i.

iv) El punto a está en el primer eslabón de cada cadena $\mathcal{L}_i$ y el punto b está al final de cada eslabón de cada cadena.

Si $\mathcal{L}_i^* = \bigcup\limits_k D_k^i$ denota la unión de todos los elementos de $\mathcal{L}_i$, entonces $X = \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} Cl(\mathcal{L}_i^*)$ con la topología inducida por el plano Euclidiano es el *Pseudo-Arco.*

Como X es una intersección anidada de subconjuntos conexos y compactos, tenemos que X es conexo. Así que, al aplicar el Corolario 1.10 a X, obtenemos que, $\dim X > 0$.

Demostraremos que X no contiene ningún subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{R}^2$. Para ello definiremos lo que es un continuo indescomponible y demostraremos una afirmación al respecto.

Definición 3.3 *Un continuo no vacío X es* descomponible*, si existen dos subcontinuos propios A y B de X tal que $X = A \cup B$. Decimos que X es* indescomponible *si no es descomponible.*

Definición 3.4 *Un continuo no vacío X es* hereditariamente indescomponible *si X no contiene subcontinuos descomponibles.*

Proposición 3.5 *El* Pseudo-Arco *es hereditariamente indescomponible.*

Demostración. Sea $Y \subset X$ un subcontinuo no degenerado y supongamos que $Y = H \cup K$, donde H y K son dos subcontinuos propios de Y. Entonces, existen $p \in H$ y $q \in K$ y $j \in \mathbb{N}$ tales que $d(H, q) > \frac{2}{j}$ y $d(K, p) > \frac{2}{j}$.

Definimos dos subcadenas $\mathcal{L}'_j = \left\{D^j_h, D^j_{h+1}, ..., D^j_{k-1}, D^j_k\right\}$ con $|h-k| > 2$ y $\mathcal{L}'_{j+1} = \left\{D^{j+1}_u, D^{j+1}_{u+1}, ..., D^{j+1}_{v-1}, D^{j+1}_v\right\}$ de $\mathcal{L}_j$ y $\mathcal{L}_{j+1}$ que tienen al punto p en el primer eslabón y al punto q en el último eslabón. Como $p \in D^j_h$, $D^j_h \cap D^j_{h+1} \neq \emptyset$ y diámetro D^j_h, diámetro $D^j_{h+1} < \frac{1}{j}$, tenemos que todos los puntos de D^j_{h+1} distan de p menos que $\frac{2}{j}$. De manera que D^j_{h+1} no contiene puntos de K. Así que, D^j_{h+1} debe contener puntos de H, pues Y es conexo. Similarmente, D^j_{k-1} contiene puntos de K y no contiene puntos de H.

Como $\mathcal{L}_{j+1}$ está doblada en $\mathcal{L}_j$, existen eslabones D^{j+1}_r, D^{j+1}_s y D^{j+1}_t con $r < s < t$ tales que $D^{j+1}_s \subset D^j_{h+1}$ y $D^{j+1}_r, D^{j+1}_t \subset D^j_{k-1}$. De aquí que D^{j+1}_s no contiene puntos de K, pero D^{j+1}_s y D^{j+1}_t contienen puntos de K y como $r < s < t$, tenemos que K no puede ser conexo. Por tanto Y es indescomponible. ■

Claramente un continuo hereditariamente indescomponible no contiene circunferencias, pues éstas son descomponibles. Por tanto, X no puede tener contenido ningún subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{R}^2$. De manera que, al aplicar el Teorema 1.20, obtenemos que $\dim X < 2$. Por lo tanto $\dim X = 1$.

3.46. El Conjunto Biconexo de Miller (Ejemplo 131)

El Conjunto Biconexo de Miller tiene dimensión 1.

Sea C un conjunto perfecto y denso en ninguna parte contenido en el intervalo $I = [0, 1]$ (podemos pensar a C como el conjunto de Cantor). Sea $W = C \times I \subset \mathbb{R}^2$. Sea K un continuo indescomponible tal que $K \cap I^2 = W$ (se puede construir un tal K tomando $W = C \times I$, en el tope $C \times \{1\}$ se construye una familia de semicircunferencias centradas en el punto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y que unen pares de puntos de $C \times \{1\}$, como en la construcción del arcoiris de Kanaster. Después se construye otra familia de semicircunferencias que una a pares de puntos de $\left(C \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right) \times \{0\}$, como en el Kanaster, etc).

Sea Δ un subconjunto denso numerable de K. Para construir el conjunto Biconexo de Miller, se hace una construcción usando inducción transfinita que se bosqueja en [3, Ejemplo 131, p. 148] y que no reproduciremos aquí. En realidad sólo usaremos las siguientes dos propiedades de tal conjunto, que denotaremos por X, a saber: $X \subset K \subset [-1,2] \times [-1,2]$, X tiene la topología Euclidiana y todo continuo $B \subset \mathbb{R}^2$ tal que $B \cap K$ separa a K y que es ajeno a Δ satisface que $B \cap X \neq \emptyset$. Sea $D = [-1,2] \times [-1,2]$.

Mostraremos que $\dim X = 1$. Para empezar, notemos que el interior de K en $\mathbb{R}^2$ es vacío, esto es porque de lo contrario K contendría un disco D con $D \neq K$. Como $Int_{\mathbb{R}^2}(D) \neq \emptyset$, entonces $Int_K(D) \neq \emptyset$. Pero los continuos indescomponibles no pueden tener subcontinuos propios con interior no vacío. Esta contradicción muestra que $Int_{\mathbb{R}^2}(K) = \emptyset$. De manera que $\dim X \leq \dim K \leq 1$ (Teorema 1.20).

Para concluir que $\dim X = 1$, por el Corolario 1.10 bastará mostrar que X es conexo.

Supongamos por el contrario que existen dos conjuntos separados R y S tales que $X = R \cup S$ y $R \neq \emptyset \neq S$. Como el plano con su topología usual es completamente normal (T_1 y T_5), tenemos que existen abiertos ajenos U' y V' en $\mathbb{R}^2$ tales que $R \subset U'$ y $S \subset V'$. De manera que, U' y V' separan a X. Notemos que los conjuntos $U' \cap D$ y $V' \cap D$ son ajenos, abiertos en D y que $U' \cap D \neq \emptyset \neq V' \cap D$. Así que, al aplicar [7, Corolario 7.72, p. 229], tenemos que existe un continuo $B \subset D - ((U' \cap D) \cup (V' \cap D))$ tal que B separa a X. De aquí que, $B \cap K$ separa a K.

Como $X = R \cup S \subset (U' \cap D) \cup (V' \cap D)$, tenemos que $X \subset (U' \cap D) \cup (V' \cap D)$.

De esto último obtenemos que, $B \cap X = \emptyset$. Esto contradice la propiedad principal del conjunto X. Por lo tanto X es conexo.

Por lo anterior, tenemos que $\dim X > 0$ y como $\dim X \leq 1$, concluimos que $\dim X = 1$.

3.47. La Rueda sin Eje $D_1 - \{0\}$ (Ejemplo 132)

La Rueda sin Eje $D_1 - \{0\}$ tiene dimensión 1.

Sea X el disco unitario cerrado en $\mathbb{R}^2$ menos el origen. La topología τ para X es generada agregando, a la topología Euclidiana, todos los intervalos abiertos contenidos sobre los rayos que parten del origen en el disco unitario abierto. Como los intervalos abiertos no tocan a la circunferencia unitaria S^1, tenemos que ésta tiene la topología heredada por la topología Euclidiana.

Veremos que X es arco conexo. Procederemos por casos. Sean $p, q \in X$.

Caso 1. p y q están en el mismo rayo r (que parte del origen).

Claramente, el intervalo $[p, q]$ sobre el rayo abierto r es homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ con su topología usual. Por tanto, $[p, q]$ es un arco en X.

Caso 2. $p \in r_1$ y $q \in r_2$, donde r_1 y r_2 son rayos diferentes en X.

Aquí estamos pensando que los rayos r_1 y r_2 son radios en el disco a los que les faltan los extremos. Sean $s = \frac{p}{|p|}$ y $t = \frac{q}{|q|}$ en la circunferencia S^1. Sea $\overset{\frown}{st}$ un arco de circunferencia sobre S^1 que une a s con t. Claramente, $[p, s] \cup \overset{\frown}{st} \cup [t, q]$ es un arco en X que conecta a p con q.

Caso 3. $p \in r_1$ y $q \in S^1$.

Este caso se trata en forma parecida al anterior.

Caso 4. p y $q \in S^1$.

Este caso es más simple.

Por tanto, X es arco conexo.

Por lo tanto, X es conexo. Así, podemos aplicar el Corolario 1.10 a X, y obtener que, para todo $p \in X$, $\dim_p X > 0$.

Demostraremos mediante dos casos que, para todo $p \in X$, $\dim_p X = 1$.

Caso 1. $p \notin S^1$.

Entonces, $p \in r$, donde r es un rayo del disco unitario abierto. Notemos que, cada básico en r es homeomorfo a un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ con su topología usual. De manera que, $\dim_p X = 1$.

Caso 2. $p \in S^1$.

En este caso una base local en el punto p está dada por la familia $\beta = \{B_r(p) \cap D_1 : 0 < r < 1\}$. Notemos que, para cada $r \in (0, 1)$, $Fr_X(B_r(p))$ coincide con la frontera de $B_r(p)$ con la topología Euclidiana de D_1. Así que, $Fr_X(B_r(p))$ tiene la forma de un arco de circunferencia. También notemos que, con la topología que le dimos a D_1, el espacio $Fr_X(B_r(p))$ resulta discreto. Así que, podemos aplicar el Corolario 1.12 y obtener que $\dim Fr_X(B_r(p)) = 0$. Por tanto, $\dim_p X \leq 1$ y como sabíamos que $\dim_p X > 0$, concluimos que $\dim_p X = 1$.

Por lo tanto, $\dim X = 1$.

3.48. El Espacio Conexo de Tangora (Ejemplo 133)

El Espacio Conexo de Tangora tiene dimensión 1.

Sean $X = \left\{ \frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N} \right\}$ el conjunto de números diádicos en $\mathbb{R}$, $Y = \mathbb{Q} - X$ y $Z = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Notemos que los conjuntos X, Y y Z son densos en $\mathbb{R}$ y son ajenos dos a dos. Definimos una nueva topología τ sobre $\mathbb{R}$ agregando a su topología usual los conjuntos X, Y y los conjuntos de la forma $\{z\} \cup \{w \in X \cup Y : |w - z| < \delta\}$ donde $z \in Z$ y $\delta > 0$. El espacio $(\mathbb{R}, \tau)$ es conocido como el *Espacio de Tangora*.

Probaremos que $(\mathbb{R}, \tau)$ no es un espacio regular en ninguno de sus puntos. Sea $p \in \mathbb{R}$, analicemos tres casos para p.

Caso 1. $p \in Z$.
Sea $\delta > 0$ y sea $U = \{p\} \cup ((p - \delta, p + \delta) \cap \mathbb{Q})$. Entonces U es abierto en $(\mathbb{R}, \tau)$. Tomemos un abierto cualquiera W tal que $p \in W \subset U$. Sean $0 < \epsilon < \delta$ y $V = \{p\} \cup ((p - \epsilon, p + \varepsilon) \cap \mathbb{Q})$ un básico tal que $p \in V \subset W \subset U$. Notemos que $Cl(V) \subset Cl(W)$ y que $(Cl(V) - \{p\}) \cap Z \neq \emptyset$. De manera que, $(Cl(W) - \{p\}) \cap Z \neq \emptyset$. Por tanto, $Cl(W) \nsubseteq U$.

Caso 2. $p \in Y$.
Sea $\delta > 0$ y sea $U = (p - \delta, p + \delta) \cap Y$. Entonces U es abierto en $(\mathbb{R}, \tau)$. Tomemos un abierto cualquiera W tal que $p \in W \subset U$. Sean $0 < \epsilon < \delta$ y $V = (p - \epsilon, p + \epsilon) \cap Y$ un básico tal que $p \in V \subset W \subset U$. Notemos que, $Cl(V) \subset Cl(W)$ y que $Cl(V) \cap Z \neq \emptyset$. De manera que, $Cl(W) \cap Z \neq \emptyset$. Por tanto, $Cl(W) \nsubseteq U$.

Caso 3. $p \in X$.
Este caso se trata de manera similar al Caso 2.

Por lo tanto $(\mathbb{R}, \tau)$ no es un espacio regular en ninguno de sus puntos. Así que, al aplicar el Corolario 1.11 a $(\mathbb{R}, \tau)$ obtenemos que, para toda $p \in \mathbb{R}$, $\dim_p (\mathbb{R}, \tau) > 0$.

Demostraremos que, para toda $p \in \mathbb{R}$, $\dim_p (\mathbb{R}, \tau) = 1$. Sea $p \in \mathbb{R}$, analicemos tres casos.

Caso 1. $p \in Z$.

Notemos que la familia $\mathcal{F} = \{\{p\} \cup ((p-\delta, p+\delta) \cap \mathbb{Q}) : \delta > 0\}$ es una base local en el punto p. Para cada $U \in \mathcal{F}$, tenemos que $Fr(U) \subset Z$. Claramente Z es un subespacio discreto de $(\mathbb{R}, \tau)$, pues dados $z \in Z$ y $\delta > 0$, $(\{z\} \cup \{w \in X \cup Y : |w-z| < \delta\}) \cap Z = \{z\}$. De manera que, al aplicar el Corolario 1.12 a Z, obtenemos que $\dim Z = 0$. Así, por el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) aplicado a $Fr(U)$, obtenemos que $\dim Fr(U) = 0$. Por tanto $\dim_p(\mathbb{R}, \tau) \leq 1$, y como ya sabíamos que $\dim_p(\mathbb{R}, \tau) > 0$, concluimos que $\dim_p(\mathbb{R}, \tau) = 1$.

Caso 2. $p \in Y$.
La familia $\mathcal{F} = \{(p-\delta, p+\delta) \cap Y : \delta > 0$ y $\delta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$ es una base local en el punto p. Notemos que, para cada $U = (p-\delta, p+\delta) \cap Y \in \mathcal{F}$, $Fr(U) \subset Z$. Similarmente al Caso 1, podemos concluir que, $\dim_p(\mathbb{R}, \tau) = 1$.

Caso 3. $p \in X$.
Este caso es similar al Caso 2.

Por tanto, para toda $p \in (\mathbb{R}, \tau)$, $\dim_p(\mathbb{R}, \tau) = 1$.
Por lo tanto $\dim(\mathbb{R}, \tau) = 1$.

3.49. La Métrica Radial (Ejemplo 140)

El Plano con la Métrica Radial tiene dimensión 1.

Sea (X, d) el plano Euclidiano con la métrica ordinaria y sea 0 el origen del plano. Sean $p, q \in X$, definimos una nueva métrica d^* sobre X dada por:
$d^*(p,q) = 0$, si $p = q$.
$d^*(p,q) = d(p,q)$, si $p \neq q$ y la línea que une p con q pasa por el origen.
$d^*(p,q) = d(p,0) + d(q,0)$, cuando 0 no está en la línea que une a p con q. El espacio (X, d^*) es conocido como el *Espacio de la Métrica Radial.*

Demostraremos que (X, d^*) es arco conexo.
Sean $p, q \in X$, con $p \neq q$ y sea $\overrightarrow{pq}$ la línea que los une.
Si $0 \notin \overrightarrow{pq}$, entonces la unión de los segmentos $\overrightarrow{p0}$ y $\overrightarrow{0q}$ forma un arco que conecta a p con q.
Si $0 \in \overrightarrow{pq}$, entonces $\overrightarrow{pq}$ es un arco, pues tiene la topología inducida por la topología Euclidiana. Por tanto, X es arco conexo.

Por lo tanto, X es conexo. Así, al aplicar el Corolario 1.10 a X, obtenemos que, para todo $p \in X$, $\dim_p X > 0$.

Ahora demostraremos que, para toda $p \in X$, $\dim_p X = 1$. Sea $p \in X$, consideremos dos casos para p.

Caso 1. $p \neq 0$.

Sea $\beta = \{B_r(p) : r > 0\}$ una base local en la topología Euclidiana para el punto p. Sea ℓ la línea que cruza por el origen y pasa por p. Dada $r > 0$, sean $\{s, t\}$ los puntos de intersección de la frontera Euclidiana de $B_r(p)$ con ℓ. Así, una base de vecindades alrededor de p en (X, d^*), está dada por los intervalos de la forma (s, t). Claramente, $Fr((s, t)) = \{s, t\}$. Como $\{s, t\}$ es finito y X es métrico, podemos aplicar el Teorema 1.16 a $\{s, t\}$, y obtener que $\dim Fr(\{s, t\}) = 0$. Así que, $\dim_p X \leq 1$, y como ya sabíamos que $\dim_p X > 0$, concluimos que $\dim_p X = 1$.

Caso 2. $p = 0$.

Sea $\{B_r(0) : r > 0\}$ una base local en el punto $p = 0$ en (X, d^*). Notemos que, para cada $r > 0$, $Fr(B_r(0))$ es un subespacio discreto. Aplicando el Corolario 1.12 a $Fr(B_r(0))$, obtenemos que $\dim Fr(B_r(0)) = 0$. Por tanto, $\dim_p X \leq 1$, y como ya sabíamos que $\dim_p X > 0$, concluimos que $\dim_p X = 1$.

Por lo tanto, $\dim X = 1$.

3.50. La Topología de los Intervalos Radiales (Ejemplo 141)

El Plano con la Topología de los Intervalos Radiales tiene dimensión 1.

Sea X el plano coordenado y sea β una base para X que consiste de todos los intervalos abiertos que no intersectan al origen 0 y que yacen sobre las líneas que pasan por el origen, junto con todos los conjuntos de la forma $\bigcup\{I_\theta : 0 \leq \theta \leq \pi\}$ donde cada I_θ es un intervalo abierto no vacío centrado en el origen, que hace un ángulo θ con el eje x.

X es arco conexo (la demostración es análoga a 3.48). Por tanto X es conexo. Así, al aplicar el Corolario 1.10 a X, obtenemos que, para todo $p \in X$, $\dim_p X > 0$.

Demostraremos mediante dos casos que, $\dim_p X = 1$.

Caso 1. $p \neq 0$.

En este caso, la topología inducida en la línea que contiene a p y al origen es precisamente la topología Euclidiana. Por tanto, $\dim_p X = 1$.

Caso 2. $p = 0$.

Notemos que, para cada abierto U que contiene al punto $p = 0$, $Fr(U)$ está formada por la unión de todos los extremos de los segmentos I_θ, donde $0 \leq \theta \leq \pi$. Así que las semirectas que parten del origen intersectan a $Fr(U)$ en sólo un punto. Por tanto, $Fr(U)$ es un subespacio discreto. De manera que, al aplicar el Corolario 1.12 a $Fr(U)$, obtenemos que, $\dim(Fr(U)) = 0$. De aquí que, $\dim_p X \leq 1$, y como ya sabíamos que $\dim_p X > 0$, concluimos que $\dim_p X = 1$.

Por lo tanto, $\dim X = 1$.

Capítulo 4

Espacios de Dimensión 2

Este capítulo contiene 8 ejemplos de dimensión dos del libro "Counterexamples in Topology". Resulta interesante ver la prueba de que el conjunto de todos los Ideales Primos en $\mathbb{Z}$ tiene dimensión 2 (ejemplo 56).

4.1. Topología del Complemento Compacto en $\mathbb{R}$ (Ejemplo 22)

La Recta real con la Topología del Complemento Compacto tiene dimensión 2.

Sea $\tau^* = \{U \subset \mathbb{R} : U = \emptyset \text{ o } \mathbb{R} - U \text{ es compacto en } (\mathbb{R}, \tau)\}$, donde τ es la topología usual de $\mathbb{R}$. Entonces, $(\mathbb{R}, \tau^*)$ es la Recta real con la *Topología del Complemento Compacto.*

El espacio $(\mathbb{R}, \tau^*)$ es conexo.

Sean U y V dos abiertos no vacíos cualesquiera en $(\mathbb{R}, \tau^*)$. Como $\mathbb{R} - U$ y $\mathbb{R} - V$ son acotados en $(\mathbb{R}, \tau)$, tenemos que V no es acotado y $V \nsubseteq \mathbb{R} - U$. Por tanto, $U \cap V \neq \emptyset$. Luego, $(\mathbb{R}, \tau^*)$ es conexo. De modo que, al aplicar el Corolario 1.10 a $(\mathbb{R}, \tau^*)$, obtenemos que, para todo $p \in (\mathbb{R}, \tau^*)$, $\dim_p(\mathbb{R}, \tau^*) > 0$.

Demostraremos que $\dim(\mathbb{R}, \tau^*) = 2$.

Sea $p \in \mathbb{R}$. Definimos una base en el punto p dada por la familia $\beta = \{(-\infty, a) \cup (x, y) \cup (b, \infty) : a < x < y < b \text{ y } p \in (x, y)\}$. Aseguramos que β es una base en el punto p. Sea $U \in \tau^*$ tal que $p \in U$. Entonces $\mathbb{R} - U$ es compacto en $(\mathbb{R}, \tau)$, de modo que, $\mathbb{R} - U$ es cerrado y acotado en $(\mathbb{R}, \tau)$. Así, $U \in \tau$. Sean, $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < p < b$ y $\mathbb{R} - U \subset [a, b]$. Como $U \in \tau$ y $p \in U$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n}) \subset U$. Por tanto, $(-\infty, a) \cup (p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n}) \cup (b, \infty) \subset U$. Hemos demostrado que β es una base local en el punto p.

Sea $V = (-\infty, a) \cup (x, y) \cup (b, \infty) \in \beta$. Cada punto del espacio $(\mathbb{R}, \tau^*)$ tiene una base similar a β. Usando esto se demuestra que $Fr(V) = Fr((-\infty, a) \cup (x, y) \cup (b, \infty)) = [a, x] \cup [y, b] = \mathbb{R} - V$.

Sea $K = \mathbb{R} - V$. Afirmamos que, $\dim K = 1$.

Demostraremos que (K, τ^*) es homeomorfo a (K, τ). Sea $h : (K, \tau) \to (K, \tau^*)$ dada por $h(x) = x$.

Como $\tau^* \subset \tau$, h es continua. Notemos que (K, τ) es compacto y que (X, τ^*) es de Hausdorff (esto es inmediato si se observan vecindades del tipo de las de β para puntos en K). Por tanto h es un homeomorfismo.

Por lo tanto, $\dim(K, \tau^*) = \dim(K, \tau) = 1$, pues la dimensión es un invariante topológico. Así, $\dim Fr(V) = 1$, por lo cual $\dim_p(\mathbb{R}, \tau^*) \leq 2$.

Afirmamos que $\dim_p(\mathbb{R}, \tau^*) > 1$.

Sean $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, tales que $a < x < p < y < b$. Hacemos $V = (-\infty, a) \cup (x, y) \cup (b, -\infty)$ y sea U un abierto cualquiera que contiene a p tal que $U \subset V$. De manera que existe un básico $W = (-\infty, c) \cup (w, z) \cup (d, -\infty)$ tal que $p \in W \subset U \subset V$. Como $Fr(V) = \mathbb{R} - V$ y $Fr(W) = \mathbb{R} - W$, concluimos que $Cl(V) = Cl(W) = \mathbb{R}$. De aquí que $Cl(U) = \mathbb{R}$. Como $Cl(U) = U \cup Fr(U)$ y $U \cap Fr(U) = \emptyset$, tenemos que $Fr(U) = \mathbb{R} - U$. Por otra parte, como $\mathbb{R} - V \subset \mathbb{R} - U \subset \mathbb{R} - W$, tenemos que $Fr(V) \subset Fr(U) \subset Fr(W)$. Como ya sabíamos que $\dim Fr(V) = 1$ y $\dim Fr(W) = 1$, al aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a $Fr(U)$, obtenemos que $\dim Fr(U) = 1$. Luego, $\dim_p(\mathbb{R}, \tau^*) > 1$. Por lo tanto $\dim_p(\mathbb{R}, \tau^*) = 2$.

4.2. Dos Subconjuntos Especiales del Plano (Ejemplo 33)

Los Subconjuntos Especiales del Plano $A = \{(x, y) : xy \geq 1\}$ y

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \text{ o } y \text{ es un número irracional}\}$ tienen dimensión 2 y 1, respectivamente.

Sea $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ el plano Euclidiano y sean $A = \{(x, y) : xy \geq 1\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \text{ o } y \text{ es un número irracional}\}$.

Afirmamos que $\dim A = 2$ y $\dim B = 1$.

Notemos que el conjunto $A^* = \{(x, y) : xy > 1\}$ es abierto en $\mathbb{R}^2$, así que la dimensión de sus puntos en A^* es igual a su dimensión en $\mathbb{R}^2$. De manera que $\dim A^* = 2$. Como $A^* \subset A \subset \mathbb{R}^2$, podemos aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a A y obtener que $\dim A = 2$.

Ahora calcularemos la dimensión del conjunto B.

Afirmamos que $\dim B = 1$. Claramente, $B \subset \mathbb{R}^2$. Notemos que ningún abierto del plano Euclidiano puede estar contenido en B. Por tanto, al aplicar el Teorema 1.20 a B, obtenemos que $\dim B \leq 1$.

Demostraremos que B es arco conexo.

Sea $(x, y) \in B$. Podemos suponer que y es irracional, el caso en que x es irracional es similar. Basta con que probemos que (x, y) se puede conectar a $(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \in B$ por un arco.

Notemos que si $(x, y) \neq (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, entonces el conjunto $\left(\left[\sqrt{2}, x\right] \times \{y\}\right) \cup \left(\{\sqrt{2}\} \times \left[\sqrt{2}, y\right]\right)$ es un arco que une a (x, y) con $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, por puros elementos de B, donde $\left[\sqrt{2}, x\right]$ es el mínimo subintervalo cerrado en $\mathbb{R}$ que une a x y a $\sqrt{2}$ y $\left[\sqrt{2}, y\right]$ se define similarmente.

Esto termina la prueba de que B es arco conexo. Así tenemos que B es conexo. Aplicando el Corolario 1.10 a B, obtenemos que $\dim B > 0$.

Por tanto $0 < \dim B \leq 1$. Luego, $\dim B = 1$.

4.3. Los Ideales Primos (Ejemplo 56)

El conjunto de todos los Ideales Primos en $\mathbb{Z}$ tiene dimensión 2.

Recordemos que un ideal primo en $\mathbb{Z}$ es un subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{Z}$ que es cerrado bajo la suma, que cumple que si $a \in A$ y $z \in \mathbb{Z}$, entonces $az \in A$; y que además tiene la propiedad de que si $w, z \in \mathbb{Z}$ y $wz \in A$, entonces $w \in A$ o $z \in A$.

Es fácil probar que si A es un ideal primo en $\mathbb{Z}$ y $A \neq \{0\}$, entonces existe un número primo p tal que $A = \{pz \in \mathbb{Z} : z \in \mathbb{Z}\}$. De manera que, en lugar de trabajar con el conjunto de los ideales primos, se puede trabajar con el conjunto P de los números primos (positivos).

Consideremos entonces el conjunto $X = P \cup \{0\}$.

Dado un entero z, se define $V_z = \{p \in X - \{0\} : p \nmid z$ (p no divide a z)$\}$. La topología que se le da a X es la que tiene como base a la familia $\beta = \{V_z : z \in \mathbb{Z}\}$. Notemos que, efectivamente β es una base para una topología en X pues si $w, z \in \mathbb{Z}$, entonces $V_z \cap V_w = \{0\} \cup \{p \in X - \{0\} : p \nmid z \text{ y } p \nmid w\} = \{0\} \cup \{p \in X - \{0\} : p \nmid zw\} = V_{zw}$.

Notemos también que $V_0 = \{p \in P : p \nmid 0\} \cup \{0\} = \emptyset \cup \{0\} = \{0\}$. Así que $\{0\}$ es abierto en X.

Como 0 pertenece a todos los abiertos no vacíos, tenemos que X es conexo, así que $\dim_x X > 0$ para toda $x \in X$.

Dada $z \in \mathbb{Z} - \{0\}$, sean $p_1, p_2, ..., p_r$ los diferentes primos que dividen a z. Entonces $X - V_z = \{p_1, p_2, ..., p_r\}$. Como V_z es abierto, $Fr(V_z) \subset X - V_z = \{p_1, p_2, ..., p_r\}$. Notemos que $V_{p_2 \cdot ... \cdot p_r} \cap \{p_1, p_2, ..., p_r\} = \{p_1\}$. Así que $\{p_1\}$ es abierto en $\{p_1, p_2, ..., p_r\}$. Repitiendo este proceso para cada p_i, concluimos que $\{p_1, p_2, ..., p_r\}$ es discreto y, por tanto, $Fr(V_z)$ es discreta. De manera que $\dim Fr(V_z) \leq 0$.

Dada $p \in X - \{0\}$, $\beta_p = \{V_z \in \beta : p \in V_z\}$ es una base local en p. Si $z \in \mathbb{Z}$ y $p \in V_z$, entonces $z \neq 0$, así que $\dim Fr(V_z) \leq 0$. Esto prueba que $\dim_p X \leq 1$. Como ya sabíamos que $\dim_p X > 0$, concluimos que $\dim_p X = 1$.

Ahora veamos que $\dim_0 X = 2$. Ya que cualquier base local en 0 debe contener a $\{0\}$, tenemos que $\dim Fr(\{0\}) \leq \dim_0 X - 1$. Notemos que $Fr(\{0\}) = X - \{0\}$. Dados dos abiertos básicos no vacíos $V_z \cap (X - \{0\})$ y $V_w \cap (X - \{0\})$, tenemos que $z \neq 0$ y $w \neq 0$. Por lo que probamos antes $X - V_z$ y $X - V_w$ son finitos, así que $(X - V_z) \cup (X - V_w)$ es finito, de modo que $X - (V_z \cap V_w)$ es finito y $V_z \cap V_w$ es infinito. Por tanto $(V_z \cap (X - \{0\})) \cap (V_w \cap (X - \{0\})) \neq \emptyset$. Con esto tenemos que cualesquiera dos abiertos no vacíos de $X - \{0\}$ se intersectan. Por tanto $Fr(\{0\})$ es conexa y $\dim Fr(\{0\}) > 0$. Esto muestra que $\dim_0 X \geq 2$. Para ver la otra desigualdad, tomemos como base para el 0 precisamente a $\{\{0\}\}$. Entonces para cada $z \in X - \{0\}$, $\dim_z (X - \{0\}) \leq \dim_z X = 1$. De manera que $\dim Fr(\{0\}) = \dim (X - \{0\}) \leq 1$. Por tanto, $\dim_0 X \leq 2$. Por tanto $\dim_0 X = 2$ y $\dim X = 2$.

4.4. Topología del Origen Dual (Ejemplo 74)

El Plano con la Topología del Origen Dual tiene dimensión 2.

Sea X el conjunto que consiste de todos los puntos del plano coordenado junto con un punto adicional 0^*. Las vecindades básicas para los puntos en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0), 0^*\}$ son las mismas que en la topología usual τ de $\mathbb{R}^2$ y para los puntos $(0,0)$ y 0^* definimos las siguientes vecindades.

Dada $n \in \mathbb{N}$, sea $V_n((0,0)) = \{(x,y) : x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}$ y $y > 0\} \cup \{(0,0)\}$ y $V_n(0^*) = \{(x,y) : x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}$ y $y < 0\} \cup \{0^*\}$.

Claramente, $\mathbb{R}^2 - \{(0,0), 0^*\}$ es un espacio conexo, pues tiene la topología inducida por la topología Euclidiana de $\mathbb{R}^2$. Como $Cl_X(\mathbb{R}^2 - \{(0,0), 0^*\}) = X$, tenemos que X es conexo. Así que, aplicando el Corolario 1.10 a X, obtenemos que, para todo $p \in X$, $\dim_p X > 0$.

Demostraremos que, para toda $p \in X$, $\dim_p X = 2$. Sea $p \in X$, analicemos tres casos para p.

Caso 1. $p \notin \{(0,0), 0^*\}$.

Notemos que $\mathbb{R}^2 - \{(0,0), 0^*\}$ es abierto en X, así que la dimensión de p en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0), 0^*\}$ es igual a su dimensión en X. Ya que $\mathbb{R}^2 - \{(0,0), 0^*\}$ tiene la misma topología como subespacio de X que como subespacio de $(\mathbb{R}^2, \tau)$, tenemos que $\dim_p X = \dim_p(\mathbb{R}^2 - \{(0,0), 0^*\}) = \dim_p(\mathbb{R}^2, \tau) = 2$.

Por tanto, $\dim_p X = 2$.

Caso 2. $p = (0,0)$.

Notemos que la frontera de cada $V_n((0,0))$ es una curva que tiene la topología Euclidiana, por lo que su dimensión es 1. De manera que $\dim_p X \leq 2$. Supongamos que $\dim_p X = 1$. Sea $Y = \{(x,y) : y > 0\}$. Como $\dim_p X = 1$, existe un abierto U de X tal que $p \in U \subset V_1((0,0))$ y $\dim Fr_X(U) = 0$. Notemos que $Fr_Y(U \cap Y) \subset Fr_X(U)$, aplicando el Teorema 1.17 (Teorema del subespacio), tenemos que $\dim Fr_Y(U \cap Y) \leq 0$. Además notemos que $Fr_Y(U \cap Y)$ tiene la topología Euclidiana. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $V_n((0,0)) \subset U$. Entonces $\emptyset \neq V_n((0,0)) - \{(0,0)\} \subset Int_Y(U \cap Y))$. Como $U \subset V_1((0,0))$, $U \cap Y$ es acotado, así que $Ext_Y(U \cap Y) \neq \emptyset$. De manera que $Fr_Y(U \cap Y)$ es un subconjunto que separa a Y y tiene dimensión menor o igual que 0, lo cual es absurdo, pues por la Proposición 1.21, Y no puede ser separado por un conjunto de dimensión ≤ 0. Por tanto, $\dim_p X \neq 1$. De manera que $\dim_p X = 2$.

Caso 3. $p = 0^*$.
Este caso es similar al Caso 2.

Por tanto, para toda $p \in X$, $\dim_p X = 2$.
Por lo tanto $\dim X = 2$.

4.5. Topología del Semidisco (Ejemplo 78)

El Semiplano con la Topología del Semidisco tiene dimensión 2.

Sea $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ el semiplano superior abierto con la topología Euclidiana τ y sea L el eje real x de $\mathbb{R}^2$. Definimos una nueva topología en $X = P \cup L$ dada por $\tau^* = \tau \cup \{\{x\} \cup (U \cap P) : x \in L$ y $x \in U \in \tau\}$.

Como P es conexo y conserva la topología Euclidiana cuando lo consideramos como subespacio de X, tenemos que $Cl(P) = P \cup L = X$ es conexo. De modo que al aplicar el Corolario 1.10 a X, obtenemos que, para todo $p \in X$, $\dim_p X > 0$.

Demostraremos que, para toda $p \in X$, $\dim_p X \leq 2$. Sea $p \in X$, analicemos dos casos.

Caso 1. $p \in P$.
Como P es abierto en X, $\dim_p X = \dim_p P = 2$.

Caso 2. $p \in L$.
Sea $\beta = \{\{p\} \cup (B_r(p) \cap P) : r \in (0, \infty)\}$. Notemos que, β es una base local de vecindades en p. Sea $V = \{p\} \cup (B_r(p) \cap P) \in \beta$. Notemos que $Fr_X(V) = Fr_P(V)$ (la semicircunferencia sin sus extremos).
Como $\dim Fr_P(V) = 1$, tenemos que $\dim_p X \leq 2$.
Por lo tanto, $\dim X = 2$.

4.6. Cuadrado de Arens Simplificado (Ejemplo 81)

El Cuadrado de Arens Simplificado tiene dimensión 2.

Sea $S = (0,1) \times (0,1)$ y sea $X = S \cup \{(0,0),(1,0)\}$. Los puntos en S tienen la topología inducida por la topología Euclidiana τ y para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos las vecindades básicas de los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$ por $U_n((0,0)) = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) : 0 < x < \frac{1}{2}$, y $0 < y < \frac{1}{n}\}$ y $U_n((1,0)) = \{(1,0)\} \cup \{(x,y) : \frac{1}{2} < x < 1$ y $0 < y < \frac{1}{n}\}$.

Demostraremos que, para toda $p \in X$, $\dim_p X = 2$. Sea $p \in X$, analicemos tres casos para p.

Caso 1. $p \in S$.
Como S es abierto en $\mathbb{R}^2$, tenemos que la dimensión de los puntos en S es igual a su dimensión en $\mathbb{R}^2$. De manera que, para todo $p \in S$, $\dim_p X = 2$.

Caso 2. $p = (0,0)$.
Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $Fr_X(U_n((0,0))) = Fr_{(S,\tau)}(U_n((0,0)))$, así que $\dim Fr_X(U_n((0,0))) = 1$. Por tanto, $\dim_p X \leq 2$.

Caso 3. $p = (1,0)$.
Este caso es similar al caso anterior.
Por tanto, para toda $p \in X$, $\dim_p X \leq 2$.
Por lo tanto $\dim X = 2$.

4.7. Espacio de Niemytzki o Topología del Disco Tangente (Ejemplo 82)

El Espacio de Niemytzki tiene dimensión 2.

Sea $X = P \cup L$, donde $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ es el semiplano superior con la topología Euclidiana τ y $L = \mathbb{R} \times \{0\}$. Damos una topología τ^* en X, tomando como base, para puntos $p \in P$, los elementos de τ que contienen a p y, para puntos $p \in L$, los conjuntos de la forma $\{p\} \cup D$, donde $p \in L$ y D es un disco abierto de P, el cual es tangente a L en el punto p.

Como P conserva la topología Euclidiana (como subespacio de X) y es conexo, tenemos que $X = Cl(P)$ es conexo. Por el Corolario 1.10, tenemos que, para todo $p \in X$, $\dim_p X > 0$.

Demostraremos que, para toda $p \in X$, $\dim_p X \geq 2$. Sea $p \in X$, analicemos tres casos para p.

Caso 1. $p \in P$.
Como P es abierto en $\mathbb{R}^2$, tenemos que la dimensión de los puntos en P es igual a su dimensión en $\mathbb{R}^2$. De manera que, para todo $p \in S$, $\dim_p X = 2$.

Caso 2. $p \in L$.
Supongamos que $\dim_p X \leq 1$. Entonces, existe una base local β en el punto p, tal que para cada $V \in \beta$, se tiene que $\dim Fr(V) \leq 0$. Como X es conexo, tenemos que, para todo $V \in \beta$ que cumple $Cl(V) \neq X$, $Fr(V) \neq \emptyset$ y entonces $\dim Fr(V) = 0$.
Por otra parte, notemos que X es un espacio de Hausdorff. De manera que, podemos elegir $U \in \beta$ tal que $p \in U$ y $P \nsubseteq Cl(U)$. Sea $W = U \cap P$. Como $P \subset X$ y $U \subset X$, tenemos que $Fr_P(U \cap P) = Fr_P(W) \subset Fr(U)$. Como $\dim Fr(U) = 0$ y $Fr_P(W) \neq \emptyset$, tenemos que $\dim Fr_P(W) = 0$. Notemos que P es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, tiene la topología Euclidiana y que $Fr_P(W)$ separa a P, lo cual es absurdo, pues por la Proposición 1.21, $\mathbb{R}^2$ no puede ser separado por un conjunto de dimensión cero. Por tanto, $\dim_p X > 1$.
Sea D un disco, contenido en P y tangente a L en p. Notemos que $Fr_X(\{p\} \cup D) = Fr_P(D)$ y que ésta última es una circunferencia a la que se le quita un punto. De manera que $\dim Fr_X(\{p\} \cup D) = 1$. Esto muestra que $\dim_p X \leq 2$. Por tanto $\dim_p X = 2$.

Por lo tanto $\dim X = 2$.

4.8. Topología del Disco Tangente Metrizable (Ejemplo 83).

El Semiplano con la Topología del Disco Tangente Metrizable tiene dimensión 2.

Sea $Y = P \cup S$, donde $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ es el semiplano superior de $\mathbb{R}^2$ y S es un subconjunto numerable contenido en la recta real. Le damos a Y la topología τ inducida por el Espacio de Niemytzki. Entonces (Y, τ) es el *Disco Metrizable*.

Para todo $p \in Y$, $\dim_p Y = 2$ (la demostración es similar a la de 4.7).
Por lo tanto $\dim Y = 2$.

Capítulo 5

Espacios de Dimensión n y $n+1$

Este capítulo contiene solamente 4 ejemplos del libro "Counterexamples in Topology". Los primeros dos ejemplos se refieren a un espacio de dimensión n que es modificado al igual que su topología original, haciendo que la dimensión aumente a $n+1$.

Sin duda, el ejemplo más interesante en este capítulo es la Topología de la Compactación por un Punto (Ejemplo 34), en el cual se dan las hipótesis necesarias para que la dimensión de un espacio al compactarlo por un punto no aumente.

Recordemos que el número dentro del paréntesis corresponde al número de ejemplo del libro.

5.1. La Extensión Cerrada (Ejemplo 12)

Dado un espacio topológico X de dimensión n su Extensión Cerrada tiene dimensión $n+1$.

Sea (X,τ) un espacio topológico no vacío y sea $p \notin X$ un punto especial. Formamos un nuevo espacio $X^* = X \cup \{p\}$ y definimos una topología en X^* tomando como conjuntos abiertos al conjunto vacío y a cualquier conjunto de la forma $U \cup \{p\}$, donde $U \in \tau$.

Afirmamos que si $\dim X = n$, con $n \geq 0$, entonces $\dim X^* = n+1$. Sea $x \in X^*$, analicemos dos casos para x.

Caso 1. $x = p$ (el punto especial).

Como $\emptyset \cup \{p\} = \{p\}$, tenemos que la familia $\{\{p\}\}$ es una base local en el punto p en X^*. Claramente, $Fr(\{p\}) = X^* - \{p\} = X$. De modo que, $\dim Fr(\{p\}) = \dim X = n$. Por tanto, $\dim_p X^* \leq n+1$.

Como toda base local en p debe tener a $\{p\}$, concluimos que $\dim_p X \geq n+1$. Por lo tanto, $\dim_p X^* = n+1$.

Caso 2. $x \neq p$.

Queremos demostrar que $\dim_x X^* \leq n+1$.

Sea $U \cup \{p\}$ un abierto cualquiera de X^* que tenga a x, donde U es abierto en X y $x \in U$. Notemos que $Fr_{X^*}(U \cup \{p\}) = X - U$ y que la topología de $X - U$ es la misma como subespacio de X^* que como subespacio de X por lo que $\dim(X - U) \leq n$. Por tanto $\dim Fr_{X^*}(U \cup \{p\}) \leq n$. Por tanto $\dim_x X^* \leq n$.

Por lo tanto $\dim X^* = n+1$.

5.2. Topología de la Extensión Abierta (Ejemplo 16)

Dado un espacio topológico X, de dimensión n, su Extensión Abierta tiene dimensión $n+1$.

Sea (X, τ) un espacio topológico no vacío y sea $p \notin X$ un punto especial. Definimos $X^* = X \cup \{p\}$ y definimos una topología τ^* sobre X^* tomando como abiertos en X^* a los elementos de τ y a X^*.

Notemos que la familia $\{X^*\}$ es una base local en el punto p en X^* y $Fr_{X^*}(X^*) = \emptyset$. Por tanto, $\dim_p X^* = 0$.

Demostraremos por inducción que, para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\dim X = n$ implica que $\dim X^* = n+1$.

La prueba de este hecho estará basada en las siguientes afirmaciones, que son fáciles de probar:

(a) Si $A \subset X$, entonces $Fr_{X^*}(A) = Fr_X(A) \cup \{p\}$.

(b) Si $A \subset X$, entonces la topología que tiene $A \cup \{p\}$ como subconjunto de X^* es la topología que se forma con los abiertos que tiene A como subespacio de X añadiendoles el conjunto $A \cup \{p\}$. Para escribirlo en corto: $A \cup \{p\} = A^*$.

(c) Para todo $x \in X$, las bases de vecindades (que no tienen a p) locales de x en X^* son las mismas que en X.

Para $n = 0$. Supongamos que $\dim X = 0$. Claramente, X^* es un espacio conexo, de manera que, podemos aplicar el Corolario 1.10 a X^* y obtener que $\dim X^* > 0$.

Como $\dim X = 0$, x tiene una base β de abiertos con frontera vacía en X. De manera que, para todo $W \in \beta$, $Fr_{X^*}(W) = \{p\}$. Por tanto $\dim Fr_{X^*}(W) = 0$, lo cual implica que $\dim X^* \leq 1$. Por tanto $\dim X^* = 1$.

Supongamos que la afirmación es válida para toda $m \leq n-1$. Es decir, cada vez que $\dim Y = m \leq n-1$ tenemos que $\dim Y^* = m+1$ ($Y^* = Y \cup \{p\}$).

Sea $x \in X$ y sea β una base local de vecindades en X o en X^* para el punto x (son prácticamente las mismas) tal que, para toda $V \in \beta$, $\dim Fr_X(V) \leq n-1$.

Dada $V \in \beta$, podemos aplicar la hipótesis de inducción al espacio $Fr_X(V)$ y obtener que $\dim Fr_{X^*}(V) = \dim (Fr_X(V) \cup \{p\}) = \dim (Fr_X(V))^* = \dim Fr_X(V) + 1$.

Estamos listos para probar que $\dim X^* = n+1$.

Dada $x \in X$, como $\dim X = n$, existe una base local β de vecindades de x en X tal que, para toda $V \in \beta$, $\dim Fr_X(V) \leq n-1$. Si pensamos a β como base de vecindades de x en X^*, tenemos que $\dim Fr_{X^*}(V) \leq n$. Por tanto $\dim_x X \leq n+1$ y $\dim X \leq n+1$. Por otra parte existe $x_0 \in X$ tal que $\dim_{x_0} X = n$. Si $\dim_{x_0} X^* < n+1$, entonces x_0 tiene una base local de vecindades β_0 en X^* (y entonces en X) tal que $\dim Fr_{X^*}(V) \leq n$ para toda $V \in \beta$. Entonces $\dim Fr_X(V) \leq n-1$ para toda $V \in \beta$, lo cual es absurdo. Por tanto $\dim_{x_0} X^* = n+1$. Luego, $\dim X^* = n+1$.

5.3. Topología de la Compactación por un Punto (Ejemplo 34)

Sea X^* la Compactación por un Punto de X. Si X es un espacio métrico, separable, localmente compacto y $\dim X = n$, entonces $\dim X^* = n$.

Sea (X, τ) un espacio topológico no vacío y sea $p \notin X$ un punto especial. Definimos un nuevo espacio $X^* = X \cup \{p\}$ y una topología τ^* sobre X^*

tomando como conjuntos abiertos a los elementos de τ y a los conjuntos en X^* tales que su complemento es cerrado y compacto en X. El espacio (X^*, τ^*) es conocido como la *Compactación por un Punto de* (X, τ).

Proposición 5.1 *Sea* (X, τ) *un espacio métrico, separable, no vacío y localmente compacto, entonces* $\dim(X^*, \tau^*) = \dim(X, \tau)$.

Demostración. Sea $\dim X = n$ y sea $X^* = X \cup \{p\}$. Como $X \subset X^*$, tenemos que, $\dim X^* \geq n$. De modo que, sólo basta probar que, para toda $x \in X^*$, $\dim_x X^* \leq n$. Sea $x \in X^*$, analicemos dos casos.

Caso 1. $x \neq p$.

Como X es un espacio métrico y localmente compacto, existe una base local β en el punto x de subconjuntos relativamente compactos, es decir, para cada abierto $W \subset X$ que contiene al punto x, existe $V \in \beta$, tal que $Cl_X(V)$ es un subconjunto compacto en X y $x \in V \subset Cl(V) \subset W$. Como $\dim X = n$, tenemos que $\dim_x X \leq n$. Así que existe una base local γ en el punto x tal que $\gamma \subset \tau$ y para cada $U \in \gamma$, se tiene que $\dim Fr_X(U) \leq n-1$. De manera que, para cada $V \in \beta$, existe $U \in \gamma$ tal que $x \in U \subset V \subset Cl_X(V)$. De aquí que, $x \in U \subset Cl(U) \subset Cl(V)$. Notemos que, $Fr(U) \subset Cl(U) \subset Cl(V)$, que $p \in X^* - Cl(V)$ y $X^* - Cl(V)$ es un abierto de X^* que contiene a p. Por tanto, para todo $U \in \gamma$, $p \notin Fr(U)$. Así, tenemos que, $Fr_X(U) = Fr_{X^*}(U)$. Por tanto, $\dim Fr_{X^*}(U) = \dim Fr_X(U) \leq n-1$. Por tanto, $\dim_x X^* \leq n$.

Caso 2. $x = p$.

Probaremos que $\dim_p X^* \leq n$.

Tomemos un conjunto abierto U en X^* tal que U contiene al punto p. Sea $K = X^* - U$, de modo que K es un subconjunto cerrado y compacto en X. Sea $q \in K$, entonces existe una vecindad compacta W_q en X que contiene a q. Como X^* es un espacio de Hausdorff, W_q es cerrada. Como $K \subset X$, para toda $q \in K$, existe una vecindad V_q que contiene a q, $\dim(Fr(V_q)) \leq n-1$ y $q \in V_q \subset W_q$. Como W_q es cerrada en X, tenemos que, $q \in V_q \subset Cl(V_q) \subset W_q$, y como W_q es compacta, $Cl(V_q)$ es compacto.

Notemos que la familia $\mathcal{F} = \{V_q : q \in K\}$ es una cubierta abierta de K. Como K es compacto, existe una subcubierta finita $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ de K. Sea $\mathcal{F}' = \{V_{q_1}, V_{q_2}, ..., V_{q_m}\}$, entonces $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{q_i}$. Sea $M = \bigcup_{i=1}^{m} Cl(V_{q_i})$. Así que, $K \subset M$. Por otra parte, notemos que, $Fr(M) \subset \bigcup_{i=1}^{m} Fr(Cl(V_{q_i}))$ y que $\bigcup_{i=1}^{m} Fr(Cl(V_{q_i})) \subset \bigcup_{i=1}^{m} Fr(V_{q_i}) \subset M$.

Notemos que, M es un subconjunto métrico separable y que, $\bigcup_{i=1}^{m} Fr(V_{q_i})$ es una unión finita de cerrados de dimensión $\leq n-1$ contenida en M. De modo que, podemos aplicar el Teorema 1.18 (Teorema de la Suma) a $\bigcup_{i=1}^{m} Fr(V_{q_i})$ y obtener que, $\dim \left(\bigcup_{i=1}^{m} Fr(V_{q_i}) \right) \leq n-1$.

Como $Fr(M) \subset \bigcup_{i=1}^{m} Fr(V_{q_i})$, podemos aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a $Fr(M)$ y obtener que, $\dim Fr(M) \leq n-1$.

Por otra parte, como $K \subset M$, $X^* - M \subset X^* - K = U$ y como M es compacto, tenemos que $X^* - M$ es un abierto que contiene a p. Como $Fr(X^* - M) = Fr(M)$, tenemos que $\dim Fr(X^* - M) \leq n-1$. Por tanto, los abiertos como $X^* - M$ definen una base local en el punto p con frontera de dimensión $\leq n-1$. Luego, $\dim_p X^* \leq n$.

Por lo tanto, para toda $x \in X^*$, $\dim_x X^* \leq n$. Luego, $\dim X^* = n$. $\blacksquare$

5.4. La Métrica Acotada (Ejemplo 134)

Dado un espacio métrico (X, d) de dimensión n, tenemos que los espacios (X, δ) y (X, Δ) tienen dimensión n.

Sea (X, d) un espacio métrico cualquiera de dimensión n. Se definen $\delta = \frac{d}{1+d}$ y $\Delta = \min(d, 1)$. Es fácil ver que δ y Δ son métricas acotadas para X y que inducen en X la misma topología que d. De manera que los tres espacios: (X, d), (X, δ) y (X, Δ) tienen la misma dimensión.

Capítulo 6

Espacios de Dimensión Infinita

Este capítulo contiene 16 ejemplos de dimensión infinita del libro "Counterexamples in Topology". Definimos la Topología Anidada que sirve de base para demostrar la dimensión infinita de varios ejemplos de este capítulo. Entre los ejemplos más interesantes se encuentran el Cubo de Hilbert, el Espacio de Helly, el Espacio de las Funciones Continuas, entre otros.

6.1. Topología Anidada

Los Números Naturales con la Topología Anidada tienen dimensión infinita.

Este ejemplo no forma parte del libro que se está estudiando, pero sirve de base para demostrar la dimensión de varios ejemplos de este capítulo.

Definimos la *Topología Anidada* τ en $\mathbb{N}$ por

$$\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, ...\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, hacemos $Y_n = \{1, ..., n\}$. Aseguramos que $\dim Y_n = n-1$ y que $\dim(\mathbb{N}, \tau) = \infty$.

Notemos que $Y_1 = \{1\}$ por lo que $\dim Y_1 = 0$. Supongamos, inductivamente, que $\dim Y_n = n - 1$. Notemos que Y_{n+1} tiene la topología de la Extensión Abierta definida en 5.2. Es decir, $Y_{n+1} = Y_n^*$. De acuerdo con 5.2, tenemos que $\dim Y_{n+1} = \dim Y_n + 1 = n$. Esto completa la inducción y prueba que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $\dim Y_n = n - 1$.

Como cada Y_n es subespacio de $\mathbb{N}$, $n - 1 = \dim Y_n \leq \dim \mathbb{N}$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $\dim \mathbb{N} = \infty$.

6.2. El Espacio de Hilbert (Ejemplo 36)

El Espacio de Hilbert tiene dimensión infinita.

El *Espacio de Hilbert* H consiste de todas las sucesiones $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de números reales tales que $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i^2$ converge. H tiene la topología generada por la métrica $d(x, y) = \sqrt{\sum(x_i - y_i)^2}$.

En 6.4 se define el Cubo de Hilbert I^{ω}como un subespacio de H y se demuestra que I^{ω} tiene dimensión infinita. Por tanto, al aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a H, obtenemos que $\dim H = \infty$.

6.3. Espacio de Fréchet (Ejemplo 37)

El Espacio de Fréchet tiene dimensión infinita.

El *Espacio de Fréchet* está formado por $X = \mathbb{R}^w$ y la métrica $d(x, y) = \sum \frac{2^{-i}|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|}$.

Notemos que $(\mathbb{R}^w, d)$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}^w, \tau)$, en donde τ es la topología Producto (topología de Tychonoff). Claramente, el Cubo de Hilbert está contenido en $\mathbb{R}^w$. Es decir, $(I^{\omega}, \tau) \subset (\mathbb{R}^w, \tau)$. En 6.4 se demuestra que $\dim I^{\omega} = \infty$. De manera que, $\dim(\mathbb{R}^w, \tau) = \infty$. Como los homeomorfismos preservan la dimensión, podemos concluir que, $\dim(\mathbb{R}^w, d) = \infty$.

6.4. El Cubo de Hilbert (Ejemplo 38)

El Cubo de Hilbert tiene dimensión infinita.

El subespacio I^ω del Espacio de Hilbert H formado por todos los puntos $x = (x_1, x_2, x_3, ...)$ tales que $0 \leq x_j \leq \frac{1}{j}$, para toda $j \in \mathbb{N}$, es conocido como el *Cubo de Hilbert*.

Demostraremos que I^ω es homeomorfo a $I^\infty = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} I_i$, donde $I = [0,1]$ e I^∞ tiene la topología Producto.

Sea $f : I^\infty \to I^\omega$ la función definida por $f(x_1, x_2, ...) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...)$. Claramente f es una biyección.

Para probar que f es continua, tomamos $x \in I^\infty$ y $\epsilon > 0$. Ya que la serie $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ converge, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \frac{\epsilon^2}{2}$. Sea $\delta = \left(\frac{\epsilon^2}{2\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{N^2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$ y tomamos el abierto $U = ((x_1 - \delta, x_1 + \delta) \cap I) \times ... \times ((x_N - \delta, x_N + \delta) \cap I) \times I \times ... \subset I^\infty$. Notemos que U es un abierto de I^∞ que tiene a x.

Dada $y \in U$, tenemos que $|x_1 - y_1| < \delta, ..., |x_N - y_N| < \delta$, de manera que $(d(f(x), f(y)))^2 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} (\frac{x_j}{j} - \frac{y_j}{j})^2 = \sum\limits_{j=1}^{N} \left(\frac{x_j}{j} - \frac{y_j}{j}\right)^2 + \sum\limits_{j=N+1}^{\infty} \left(\frac{x_j}{j} - \frac{y_j}{j}\right)^2 < \delta^2 \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{1}{j^2} + \sum\limits_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2} = \epsilon^2$. Luego, $d\left(f(x), f\left(y\right)\right) < \epsilon$. Esto prueba que f es continua.

Ya que I^∞ es compacto y f es una biyección continua, concluimos que f es un homemorfismo. Por lo tanto, I^ω es homeomorfo a I^∞.

Demostraremos que $\dim I^\infty = \infty$.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A = \prod \{[0,1]_i : 1 \leq i \leq n+1\} \times \prod \{\{0_i\} : i \in \mathbb{N},\ i \geq n+2\}$. Observemos que $A \subset I^\infty$. Notemos que $I^{n+1} = \prod \{[0,1]_i : 1 \leq i \leq n+1\}$ es homeomorfo a A. El homeomorfismo está dado por $h : I^{n+1} \to A$, definido por:

$h(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}) = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, 0, 0, ...)$. Claramente h es inyectiva, sobre y continua y su inversa está dada por:

$h^{-1}(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, 0, 0, ...) = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})$, la cual también es continua. Por tanto, I^{n+1} y A son homeomorfos.

Como $\dim I^m = m$ [5, Teorema 9.5, p. 49], tenemos que $\dim I^{n+1} = n+1$. Como la dimensión se preserva bajo homeomorfismos, tenemos que, $\dim A = n+1$. Por último, como $A \subset I^\infty$, al aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a I^∞, obtenemos que $\dim I^\infty \geq n+1$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\dim I^\infty = \infty$.

6.5. La Topología (Izquierda-Derecha) del Orden y la Topología Derecha del Orden en $\mathbb{R}$ (Ejemplos 49 y 50)

Los Espacios con la Topología Izquierda y Derecha del Orden en el caso de que X sea infinito tienen dimensión infinita. Si X es finito, entonces la dimensión de X es igual a $|X| - 1$.

Sea X un espacio topológico no vacío y linealmente ordenado. La topología τ generada por los conjuntos de la forma $p_a = \{x \in X : x < a\}$ es llamada la *Topología Izquierda del Orden* en X. La *Topología Derecha del Orden* está definida de manera similar usando los conjuntos $S_a = \{x \in X : x > a\}$.

Analicemos la topología Izquierda del Orden en X, para ello consideremos dos casos.

Caso 1. X finito.

En este caso, podemos escribir a X como $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$. De manera que, la topología τ queda determinada por

$\tau = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}, ..., \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}\}$. Es decir, τ es la topología Anidada (ver 6.1). De manera que, $\dim X = n - 1$.

Caso 2. X infinito.

Como, para toda $n \in \mathbb{N}$, podemos elegir n puntos distintos $x_1, ...x_n$ en X, tenemos que $n - 1 = \dim(\{x_1, ..., x_n\}) \leq \dim X$. Por lo tanto, $\dim X = \infty$.

El análisis para la topología Derecha del Orden es similar.

En particular, la topología Derecha del Orden en $\mathbb{R}$ tiene dimensión infinita.

6.6. La Topología de los Intervalos Anidados (Ejemplo 52)

El Intervalo $(0,1)$ con la Topología de los Intervalos Anidados tiene dimensión infinita.

Sea $X=(0,1)$, definimos una topología τ sobre X tomando como abiertos a todos los conjuntos de la forma $U_n=(0,1-\frac{1}{n})$, para $n=2,3,4,...$ junto con $\emptyset$ y X.

Analizaremos un subespacio de X. Sea $W=\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},...,\frac{n-1}{n},...\}$. Notemos que, la topología inducida en W es precisamente la topología Anidada (ver 6.1), ya que un abierto para $\frac{1}{2}$ es $\{\frac{1}{2}\}=W\cap(0,\frac{2}{3})$, para $\frac{2}{3}$ es $\{\frac{1}{2},\frac{2}{3}\}=W\cap(0,\frac{3}{4})$, para $\frac{3}{4}$ es $\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4}\}=W\cap(0,\frac{4}{5})$, etc. Por tanto, $\dim W=\infty$.

Como $W\subset X$, podemos aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a X y concluir que $\dim X=\infty$.

Veremos que de hecho, para toda $p\in X$, $\dim_p X=\infty$.

Sea $p\in X$ y consideremos dos casos para p.

Caso 1. $p\in(0,\frac{1}{2})$.

En este caso, la familia $\beta=\left\{(0,\frac{1}{2})\right\}$ es una base local para p. Notemos que, $Fr((0,\frac{1}{2}))=[\frac{1}{2},1)$. Como $W\subset[\frac{1}{2},1)$, podemos aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a $[\frac{1}{2},1)$ y concluir que $\dim\left([\frac{1}{2},1)\right)=\infty$, es decir, $\dim(Fr((0,\frac{1}{2})))=\infty$. Por tanto, $\dim_p X=\infty$.

Caso 2. $p\in[\frac{1}{2},1)$.

La demostración es parecida a la del caso anterior.

Por tanto, para toda $p\in X$, $\dim_p X=\infty$.

6.7. Topología de los Intervalos Traslapados (Ejemplo 53)

El Intervalo $[-1,1]$ con la Topología de los Intervalos Traslapados tiene dimensión infinita.

Sea $X = [-1, 1]$, generamos una topología τ en X tomando a los conjuntos de la forma $[-1, b)$ con $b > 0$ y $(a, 1]$ con $a < 0$. Notemos que todos los conjuntos de la forma (a, b) con $a < 0 < b$ también son abiertos en X.

Demostraremos que (X, τ) tiene dimensión infinita. Sea $p \in X$, analicemos dos casos.

Caso 1. $p \neq -1$ y $p \neq 1$.
Entonces, los abiertos que tienen a p son los elementos de la familia $\beta = \{X\} \cup \{(a, b) : -1 < a < 0 < b < 1 \text{ y } p \in (a, b)\}$. Notemos que $Fr((a, b)) = [-1, a] \cup [b, 1]$. Notemos que los conjuntos abiertos no vacíos en el subespacio $Fr((a, b))$ son de la forma $\{(\alpha, a] : -1 \leq \alpha < a\}$, $\{[b, \beta) : b < \beta \leq 1\}$, $[-1, a]$, $[b, 1]$ y $[-1, a] \cup [b, 1]$. Es decir, los subespacios $[-1, a]$ y $[b, 1]$ tienen inducida la topología Derecha del Orden y la topología Izquierda del Orden, respectivamente (ver 6.5). Por tanto, $\dim[-1, a] = \infty$ y $\dim[b, 1] = \infty$. Por tanto, $\dim_p X = \infty$.

Caso 2. $p = -1$ o $p = 1$.
Los abiertos que tienen a $p = -1$ son los elementos de la familia $\beta = \{X\} \cup \{[-1, b) : b > 0\}$. Notemos que, para cada $b > 0$, $Fr([-1, b)) = [b, 1]$. Como el subespacio $[b, 1]$ tiene inducida la topología Derecha del Orden (ver 6.5), concluimos que, $\dim[b, 1] = \infty$. Por tanto, $\dim_p X = \infty$.
Similarmente, $\dim_1 X = \infty$.
Por tanto, para toda $p \in X$, $\dim_p X = \infty$.

6.8. La Topología de los Intervalos Encajados (Ejemplo 54)

La Topología de los Intervalos Encajados tiene dimensión infinita.

Sea $X = \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$ el conjunto de los números reales positivos excluyendo a los números enteros positivos. Sea τ la topología sobre X generada por los siguientes conjuntos.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $U_n = (0, \frac{1}{n}) \cup (n, n+1)$. Es decir, para $n = 1$, $U_1 = (0, 1) \cup (1, 2)$, para $n = 2$, $U_2 = (0, \frac{1}{2}) \cup (2, 3)$, etc. Entonces, una base para τ está dada por $\beta = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Notemos que, (X, τ) es conexo, ya

que todos los básicos intersectados con $(0,1)$ están anidados. De modo que, al aplicar el Corolario 1.10 a X, obtenemos que, para toda $x \in X$, $\dim_x X > 0$.

Demostraremos que la dimensión de (X,τ) es infinita.

Consideremos el siguiente subespacio de X.

Sea $Y = \left\{\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$. De manera que, la topología inducida en Y queda determinada por $\tau_Y = \left\{(0, \frac{1}{n}) \cap Y : n \geq 2\right\} \cup \{\emptyset, Y\}$, es decir:

$$\tau_Y = \left\{\emptyset, Y, \left\{\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right\}, \left\{\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right\}, \left\{\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{5}\right\}, ..., \left\{\frac{1}{n}\right\}\right\}.$$

Por tanto, τ_Y es la topología Izquierda del Orden (ver 6.5). De manera que, al aplicar 6.5 a Y, obtenemos que $\dim Y = n - 2$ (tomando al punto $\frac{1}{n}$ como el primer elemento). Por tanto, al tomar el subespacio infinito $Y = \left\{..., \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$ y aplicar 6.5 a Y, obtenemos que $\dim Y = \infty$. Por lo tanto $\dim X = \infty$.

6.9. Topología de los Divisores (Ejemplo 57)

Los Números Naturales con la Topología de los Divisores tiene dimensión infinita.

Sea $X = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 2\}$ y para cada $n \geq 2$, definimos el conjunto $U_n = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ divide a } n\}$. Entonces, la familia de los U_n sirve como base para una topología en X, la cual es conocida como la *Topología de los Divisores*.

Sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^m \in U_n$. Entonces 2^m divide a n. Así que $2, 2^2, ..., 2^{m-1}, 2^m$ dividen a n. Con esto, hemos mostrado que si $2^m \in U_n$, entonces $\{2, 2^2, ..., 2^m\} \subset U_n$. De modo que todo abierto que tiene a 2^m también contiene a $\{2, 2^2, ..., 2^m\}$. Esto muestra que la topología que tiene el conjunto $Y = \{2, 4, 8, ..., 2^n, ...\}$ como subespacio de X tiene por abiertos a $Y, \emptyset, \{2\}, \{2,4\}, \{2,4,8\}, ...$ (claramente $U_{2^n} \cap Y = \{2, 4, 8, ..., 2^n\}$). Es decir, Y tiene la topología Anidada (ver 6.1). Por tanto, $\dim Y = \infty$. Así que, al aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a X, obtenemos que $\dim X = \infty$.

6.10. El Espacio I^I (Ejemplo 105)

El Espacio I^I tiene dimensión infinita.

Sea I el intervalo cerrado $[0,1]$ y para cada $i \in I$, sea I_i una copia de I. Definimos el producto cartesiano de todos los conjuntos I_i con $i \in I$, como el conjunto de todas las funciones con dominio I y cuya imagen está contenida en I. Es decir:

$I^I = \prod_{i \in I} I_i = \{f : I \to I : f \text{ es una función}\}$. Consideramos al espacio I^I con la topología Producto τ.

Para referirnos a algún elemento del espacio coordenado I_i algunas veces escribiremos $f(i)$ o simplemente f_i. Así, entenderemos que el valor del elemento f en la i-ésima coordenada en el intervalo cerrado $[0,1]$ es precisamente $f(i)$.

Más adelante, en 6.12 se define el Espacio de Helly como un subespacio de I^I y se demuestra que el Espacio de Helly tiene dimensión infinita. Por tanto, al aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a I^I, obtenemos que $\dim I^I = \infty$.

6.11. $[0,\Omega) \times I^I$ (Ejemplo 106)

El Producto Cartesiano de $[0,\Omega) \times I^I$ tiene dimensión infinita.

Sea $X = [0,\Omega) \times I^I$ con la topología Producto.

Sabemos que, $\dim I^I = \infty$ (ver 6.10). Por otra parte, notemos que dado $\alpha \in [0,\Omega)$, el conjunto $\{\alpha\} \times I^I \subset [0,\Omega) \times I^I$. Como $\{\alpha\} \times I^I$ es homeomorfo a I^I y los homeomorfismos preservan la dimensión, tenemos que, $\dim(\{\alpha\} \times I^I) = \infty$. Aplicando el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a $[0,\Omega) \times I^I$, concluimos que, $\dim([0,\Omega) \times I^I) = \infty$.

6.12. Espacio de Helly (Ejemplo 107)

El Espacio de Helly tiene dimensión infinita.

Sea X el subespacio de I^I (ver 6.10) que consiste de todas las funciones continuas y no decrecientes, éste se conoce como el *Espacio de Helly.* Como I^I es un espacio de Hausdorff, X es de Hausdorff.

Consideremos al subespacio Y de X que consiste de todas las funciones continuas f tales que para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, f es lineal en cada intervalo cerrado $\left[\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right]$, es decir, f es lineal en cada uno de los intervalos $\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right], ...$ y que satisfacen que $f(0) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f\left(\frac{1}{2}\right) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$,..., $f\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right) \in \left[\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right]$.

Sea $J^\infty = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \times ... \times \left[\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right] \times ....$ Entonces, un punto t en J^∞ es de la forma $t = (t_0, t_1, t_3, ..., t_n, ...)$, en donde, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, la n-ésima coordenada $t_n \in \left[\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right]$.

Definimos $\phi : J^\infty \to Y$ como $\phi(t) = f_t$, donde para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, hacemos $a_n = \frac{2^n-1}{2^n}$, y definimos, para $z \in [a_n, a_{n+1}]$,

$f_t(z) = \left(\frac{z-a_n}{a_{n+1}-a_n}\right) t_{n+1} + \left(1 - \frac{z-a_n}{a_{n+1}-a_n}\right) t_n$. Es decir, f_t es el elemento de Y que cumple $f_t(0) = t_0$, $f_t(\frac{1}{2}) = t_1$, $f_t(\frac{3}{4}) = t_2$, etc.

Demostraremos que ϕ es un homeomorfismo.

Sea $t = (t_0, t_1, t_2, ..., t_n, ...) \in J^\infty$. Tomemos un subbásico U de la topología de Y. Para esto, sean $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\epsilon > 0$, $\alpha \in [a_n, a_{n+1}]$ y U_α un abierto dado por $U_\alpha = (f_t(\alpha) - \epsilon, f_t(\alpha) + \epsilon)$. Entonces, $U = \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ es un subbásico en Y que contiene al punto $f_t = \phi(t)$.

Probaremos que existe un abierto V en J^∞ que contiene al punto $t \in J^\infty$ tal que $\phi(V) \subset U$.

Sea $V = \pi_n^{-1}(V_n) \cap \pi_{n+1}^{-1}(V_{n+1})$, donde V_n es un básico de la coordenada n y V_{n+1} es un básico de la coordenada $n+1$ en J^∞, dados por $V_n = \left(t_n - \frac{\epsilon}{2}, t_n + \frac{\epsilon}{2}\right)$ y $V_{n+1} = \left(t_{n+1} - \frac{\epsilon}{2}, t_{n+1} + \frac{\epsilon}{2}\right)$. Sea $x = (x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in V$. Entonces, $d(x_n, t_n) < \frac{\epsilon}{2}$ y $d(x_{n+1}, t_{n+1}) < \frac{\epsilon}{2}$.

Sólo resta demostrar que $\phi(x) = f_x \in U$.

Por definición: $f_x(\alpha) \in (f_t(\alpha) - \epsilon, f_t(\alpha) + \epsilon)$ si y sólo si $|f_x(\alpha) - f_t(\alpha)| < \epsilon$. Notemos que las rectas, $f_x(\alpha) = \left(\frac{\alpha-a_n}{a_{n+1}-a_n}\right) x_{n+1} + \left(1 - \frac{\alpha-a_n}{a_{n+1}-a_n}\right) x_n$, $f_t(\alpha) = \left(\frac{\alpha-a_n}{a_{n+1}-a_n}\right) t_{n+1} + \left(1 - \frac{\alpha-a_n}{a_{n+1}-a_n}\right) t_n$ y que $0 \leq \frac{\alpha-a_n}{a_{n+1}-a_n} \leq 1$.

Entonces, la diferencia $|f_x(\alpha) - f_t(\alpha)|$ está dada por $|f_x(\alpha) - f_t(\alpha)| = \left|\left(\frac{\alpha-a_n}{a_{n+1}-a_n}\right) x_{n+1} + \left(1 - \frac{\alpha-a_n}{a_{n+1}-a_n}\right) x_n - \left(\left(\frac{\alpha-a_n}{a_{n+1}-a_n}\right) t_{n+1} + \left(1 - \frac{\alpha-a_n}{a_{n+1}-a_n}\right) t_n\right)\right|$, al agrupar los términos semejantes, tenemos que:

$\left|\left(\frac{\alpha-a_n}{a_{n+1}-a_n}\right)(x_{n+1}-t_{n+1})+\left(1-\frac{\alpha-a_n}{a_{n+1}-a_n}\right)(x_n-t_n)\right| \leq$
$\left|\left(\frac{\alpha-a_n}{a_{n+1}-a_n}\right)(x_{n+1}-t_{n+1})\right|+\left|\left(1-\frac{\alpha-a_n}{a_{n+1}-a_n}\right)(x_n-t_n)\right| < \left|\left(\frac{\alpha-a_n}{a_{n+1}-a_n}\right)\frac{\epsilon}{2}\right|+$
$\left|\left(1-\frac{\alpha-a_n}{a_{n+1}-a_n}\right)\frac{\epsilon}{2}\right| \leq \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$

Por lo tanto $f_x(\alpha) \in (f_t(\alpha)-\epsilon, f_t(\alpha)+\epsilon)$. Luego, $\phi(x) = f_x \in U$. De aquí, se concluye que $\phi(V) \subset U$, por lo tanto ϕ es continua en t para toda $t \in J^\infty$.

Ahora demostraremos que ϕ es inyectiva.

Sean $x = (x_0, x_1, ..., x_n, ...)$ y $t = (t_0, t_1, ..., t_n, ...) \in J^\infty$ tales que $x \neq t$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \neq t_m$. De manera que, $f_x\left(\frac{2^m-1}{2^m}\right) = x_m \neq t_m = f_t\left(\frac{2^m-1}{2^m}\right)$. De modo que, $\phi(x) \neq \phi(t)$. Por lo tanto ϕ es inyectiva.

Como J^∞ es compacto concluimos que J^∞ es homeomorfo a $\operatorname{Im}\phi$.

Por otra parte, tenemos que J^∞ es homeomorfo al Cubo de Hilbert I^∞. De modo que, $\operatorname{Im}\phi$ es homeomorfo a I^∞. Como la dimensión es un invariante topológico y el Cubo de Hilbert tiene dimensión infinita (ver 6.4), concluimos que, $\dim \operatorname{Im}\phi = \infty$. Aplicando el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a X, obtenemos que, $\dim X = \infty$.

6.13. El Espacio de las Funciones Continuas $C[0,1]$ (Ejemplo 108)

El Espacio $C[0,1]$ tiene dimensión infinita.

El Espacio $C[0,1]$ consiste de todas las funciones continuas de valores reales sobre el intervalo $[0,1]$ con la métrica del supremo, es decir, $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$ y $d(f,g) = \sup\{|f(t)-g(t)| : t \in [0,1]\}$. De modo que, un básico en $C[0,1]$ con centro en f y radio $\epsilon > 0$ está dado por $B_\varepsilon(f) = \{g : [0,1] \to \mathbb{R} \mid d(f,g) < \varepsilon\}$.

Sean $I = [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$. Daremos un encaje $f_n : I^n \to C[0,1]$. Dada $t = (t_1, ..., t_n) \in I^n$, definimos $t_0 = 0$ y hacemos $g_t : [0,1] \to [0,1]$ dada por $g_t(x) = \frac{\left(x-\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)t_i}{\frac{1}{n}} + \frac{\left(\frac{i}{n}-x\right)t_{i-1}}{\frac{1}{n}}$, si $i \in \{1, ..., n\}$ y $x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$. Notemos que $g_t(\frac{i}{n}) = t_i$ para toda $i \in \{0, 1, ..., n\}$ y que g_t es continua.

Finalmente definimos $f_n(t) = g_t$.

Afirmación 1. Para toda $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I^n \to C[0,1]$ es continua.

Sean $t = (t_1, ..., t_n)$, $s = (s_1, ..., s_n) \in I^n$ y $\epsilon > 0$ tales que las diferencias $|t_1 - s_1|, ..., |t_n - s_n| < \epsilon$. Dadas $i \in \{1, ..., n\}$ y $x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, tenemos que la diferencia $|g_t(x) - g_s(x)| = \left|\frac{\left(x-\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)(t_i - s_i)}{\frac{1}{n}} + \frac{\left(\frac{i}{n}-x\right)(t_{i-1}-s_{i-1})}{\frac{1}{n}}\right| \leq |t_i - s_i| + |t_{i-1} - s_{i-1}| < 2\epsilon$. De manera que $d(g_t, g_s) \leq 2\epsilon$. Por tanto, $d(f_n(t), f_n(s)) < 2\varepsilon$. Como el número ϵ se eligió arbitrariamente obtenemos que f_n es continua.

Afirmación 2. Para toda $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I^n \to C[0,1]$ es inyectiva.

Supongamos que $f_n(t) = f_n(s)$, es decir, $g_t = g_s$. En particular, para cada $i = 1, 2, ..., n$, tenemos que $g_t(\frac{i}{n}) = g_s(\frac{i}{n})$. De manera que, $t_i = s_i$ para toda $i = 1, 2, ..., n$. Por tanto, $t = x$.

Para toda $n \in \mathbb{N}$, f_n está definida de un espacio compacto I^n a un espacio de Hausdorff $f_n(I^n)$, de aquí que f_n es un homeomorfismo.

Por lo tanto, I^n es homeomorfo a $f_n(I^n) \subset C[0,1]$. Así que, para cada $n \in \mathbb{N}$, hemos encajado una n-celda en $C[0,1]$.

Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\dim I^n = n$ [5, Teorema 9.5, p. 49]. De modo que, al aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a $C[0,1]$, obtenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\dim C[0,1] \geq n$. Por lo tanto $\dim C[0,1] = \infty$.

6.14. Topología Caja sobre $\mathbb{R}^\omega$ (Ejemplo 109)

La Topología Caja en $\mathbb{R}^\omega$ tiene dimensión infinita.

Sea $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_i$, donde cada $\mathbb{R}_i$ es una copia de $\mathbb{R}$ con la Topología Euclidiana. Generamos la *Topología Caja* τ tomando como básicos a los conjuntos de la forma $\prod_{i\in\mathbb{N}} U_i$, donde cada U_i es abierto en $\mathbb{R}_i$.

Demostraremos que $\dim X > n$ para toda $n \geq -1$.

Sean τ^* y τ la topología usual en el espacio producto (topología de Tychonof) y la topología Caja, respectivamente. Definimos el conjunto $A = \prod \{[0,1]_i : 1 \leq i \leq n+1\} \times \prod \{\{0_i\} : i \in \mathbb{N},\ i \geq n+2\}$.

Afirmación. τ^* y τ coinciden en A.

Es claro que $\tau^* \subset \tau$. De modo que sólo hay que demostrar la otra contención, para ello basta utilizar únicamente a los básicos.

Sea $U \in \tau$ un básico cualquiera, entonces $U = \prod \{U_i : 1 \leq i \leq n+1\} \times \prod \{\{0_i\} : i \in \mathbb{N},\ i \geq n+2\} = \bigcap\limits_{i=1}^{n+1} \pi_i^{-1}(U_i)$, donde cada U_i es abierto en $[0,1]_i$. Entonces, claramente $U \in \tau^*$.

Por tanto τ^* y τ coinciden en A.

Por tanto $(A, \tau^*) = (A, \tau)$. En 6.4 vimos que $\dim(A, \tau^*) = n+1$. Como $A \subset X$, podemos aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a X y obtener que, $\dim X \geq n+1$. Por lo tanto, $\dim X > n$ para toda $n \geq -1$. Luego, $\dim X = \infty$.

6.15. La Escoba de los Enteros (Ejemplo 121)

La Escoba de Enteros tiene dimensión infinita.

Sea X el conjunto de puntos con coordenadas polares $\{(n, \theta)\}$ en el plano Euclidiano, donde $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ y $\theta \in \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Definimos una topología τ sobre X tomando como base de τ a todos los conjuntos de la forma $U \times V$, donde U es un conjunto abierto de la topología Derecha del Orden en $\{0\} \cup \mathbb{N}$ (ver 6.5) y V es un abierto inducido por la topología Euclidiana en $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Demostraremos que (X, τ) tiene dimensión infinita. Para ello, basta considerar el rayo $R_1 = \{(n, 1) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Notemos que el conjunto $\{1\}$ es abierto en $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. De modo que el conjunto $[n, \infty) \times \{1\}$ es un abierto en X y $[n, \infty) \times \{1\} \subset R_1$. Claramente, la topología Derecha del Orden coincide con la topología Anidada (ver 6.1). De manera que, (R_1, τ) es homeomorfo al conjunto de los números naturales con la topología Anidada (basta tomar la proyección sobre la primera entrada), de modo que por 6.1, tenemos que $\dim(R_1, \tau) = \infty$. Así que, al aplicar el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) a X, obtenemos que $\dim(X, \tau) = \infty$.

Por lo tanto, $\dim X = 1$.

6.16. La Métrica de Hausdorff (Ejemplo 138)

X con la Métrica de Hausdorff tiene dimensión infinita.

Sean (S, d) un espacio métrico no vacío y X la colección de todos los subconjuntos no vacíos, cerrados y acotados de S. Sea $f : S \times X \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(s, B) = \text{ínf}\,\{d(s, b) : b \in B\}$, sea $g : X \times X \to \mathbb{R}^+$ dada por $g(A, B) = \sup\{f(a, B) : a \in A\}$ y $\delta(A, B) = \text{máx}\,\{g(A, B), g(B, A)\}$. El espacio (X, δ) es conocido como *el Espacio de la Métrica de Hausdorff*.

Cualquier espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto X con la Métrica de Hausdorff contiene copias del cubo de Hilbert, esto es demostrado en [8, Teorema 7.6, p. 105]. De modo que al aplicar 6.4 y el Teorema 1.17 (Teorema del Subespacio) tenemos que $\dim X = \infty$.

Capítulo 7

Espacios Genéricos

Este capítulo contiene solamente un ejemplo del libro “Counterexamples in Topology”. Muestra que la dimensión de la Completación de Cauchy de un espacio métrico de dimensión n no depende de la dimensión del espacio.original.

7.1. Completación de Cauchy (Ejemplo 137)

Sea (X, d) un espacio métrico de dimensión n y sea (X^*, d^*) su Completación de Cauchy. La dimensión de (X^*, d^*) no es posible determinarla en general a partir de la dimensión del espacio (X, d).

Sean (X, d) un espacio métrico y X^* el conjunto de todas las clases de equivalencia de todas las sucesiones de Cauchy en X, donde la sucesión $\{x_n\}$ es equivalente a $\{y_n\}$ si y sólo si $\lim_{x\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Definimos una métrica en X^* dada por $d^*(x^*, y^*) = \lim_{x\to\infty} d(x_n, y_n)$, donde $\{x_n\}$ es cualquier elemento en la clase de equivalencia x^* y $\{y_n\}$ es cualquier elemento en la clase de equivalencia y^*. El espacio métrico (X^*, d^*) es la *Completación de Cauchy* de (X, d).

Para ver que, en general, no es posible determinar $\dim(X^*, d^*)$ a partir de la dimensión del espacio original daremos el siguiente ejemplo.

Sea $X = \mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales con su topología usual, sabemos que $\dim \mathbb{Q} = 0$ (ver 2.10). La Completación de Cauchy de $\mathbb{Q}$ es $X^* = \mathbb{R}$ y $\dim \mathbb{R} = 1$ (ver 3.9). Por otra parte, sea $X = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_n$, sabemos que $\dim \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_n = 0$ (Teorema 1.15), sin embargo la Completación de Cauchy de $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_n$ es $X^* = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_n$ y $\dim \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_n = \infty$, pues $I^\infty = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} I_i \subset \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_n$ (ver 6.4). Esto prueba que la dimensión de (X^*, d^*) no depende de la dimensión del espacio original, pues en este caso los espacios originales tienen dimensión 0 y sus Completaciones de Cauchy respectivas tienen dimensión 1 y dimensión infinita.

Bibliografía

[1] Dugundji, James. Topology. Allyn and Bacon (1966).

[2] Willard, Stephen. General Topology. Addison-Wesley (1970).

[3] Steen, Lynn A. and Seebach, Arthur Jr.. Counterexamples in Topology. Dover (1970).

[4] Pears, A. R.. Dimension Theory of General Spaces. Cambridge University Press (1975).

[5] Nadler, Jr., Sam B.. Dimension Theory. SMM (2002).

[6] Nadler, Jr., Sam B.. Continuum Theory. Marcel Dekker (1992).

[7] Gordon T. Whyburn. Analytic Topology, American Mathematical Society. Colloquium Publications, Vol. 28, New York, (1942).

[8] Illanes, Alejandro. Hiperespacios de Continuos. SMM (2004).

[9] Engelking, Ryszard. General Topology. Heldermann Verlag Berlin (1989).

[10] Herrera, J. Gabriel. Continuos no Métricos (Tesis de Licenciatura 2002).