Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

ANILLOS SEMIARTINIANOS CON FACTORES DE LOEWY NO SINGULARES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

RAMIRO VÁZQUEZ VERA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ RÍOS MONTES

2009

Datos del alumno y jurado

1.	**Datos del alumno** Ramiro Vázquez Vera 57305700 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 301295840
2.	**Datos del tutor** Dr José Ríos Montes
3.	**Datos del sinodal 1** Dr Francisco Raggi Cárdenas
4.	**Datos del sinodal 2** Dr Hugo Alberto Rincón Mejía
5.	**Datos del sinodal 3** Dr. Alejandro Alvarado García
6.	**Datos del sinodal 4** M. en C. José Cruz García Zagal
7.	**Datos de la Tesis** Anillos semiartinianos con factores de Loewy no singulares 68 páginas 2009

Agradecimientos

Quiero agradecer profundamente a mis padres Petra Vera Villalobos y Domingo Vázquez, y a mis hermanos Oscar y Omar por su apoyo incondicional tanto moral como económico. Sin este apoyo ni siquiera hubiera podido estudiar la carrera de matemáticas.

También quiero agradecer a mis sinodales por los valiosos comentarios y correcciones que sin duda mejoraron enormemente esta tesis. Especialmete agradezco a José Cruz García Zagal por haberme motivado a continuar mis estudios en Álgebra, y a mi asesor Pepe Ríos por haberme motivado con sus clases a hacer una tesis en teoría de anillos y módulos. Si no hubiera sido por ellos quizá no hubiera descubierto lo bello que es el Álgebra.

Finalmente agradezco a Yadira Salazar Romero por su incomparable compañia y cariño, y a todos mis amigos, quienes compartieron conmigo no solamente su gusto por las matemáticas sino también su amistad incondicional.

Índice general

Introducción

Esta tesis presenta algunos aspectos interesantes de una subclase de los anillos semiartinianos: la clase de los anillos con la propiedad NLF.

Todos los anillos que se consideran en este trabajo se supondrán asociativos (no necesariamente conmutativos), con un elemento identidad distinto de cero. Además todos los módulos se supondrán unitarios.

Como la clase de los anillos con la propiedad NLF es una subclase de los anillos semiartinianos, es necesario hablar de los módulos semiartinianos: dado un R-módulo derecho M, éste tiene una cadena de submódulos $(Zoc_\alpha(M))_{\alpha>0}$, llamada *Cadena de Loewy de* M, que se define de la siguiente manera: $Zoc_0(M) = \{0\}$ y, de manera recursiva, $Zoc_{\alpha+1}(M)/Zoc_\alpha M = Zoc(M/Zoc_\alpha)$ para cada ordinal α, y $Zoc_\alpha(M) = \bigcup_{\beta<\alpha} Zoc_\beta(M)$ si α es un ordinal límite. Al módulo $M/Zoc_\alpha(M)$ se le llama *el* α*-ésimo factor de Loewy de* M y se dice que M es semiartiniano si $Zoc_\xi(M) = M$ para algún ordinal ξ. En el capítulo primero de esta tesis se precisan las definiciones anteriores y se dan algunas de las propiedades de los anillos semiartinianos.

El estudio de los anillos semiartinianos dio inició en el año de 1968 con el artículo [16] de los matemáticos Năstăsescu y Popescu, quienes emplearon por vez primera el término "semiartiniano". La primera construcción de un anillo semiartiniano con factores longitud de Loewy preestablecida fue dada por Fuchs en el artículo [9] de 1969. A partir de entonces varios matemáticos han estudiado este tipo de anillos y se puede encontrar una extensa bibliografía en el libro [10] de Golan.

En [6] Giuseppe Baccella estudió los V-anillos que son anillos semiartinianos y regulares en el sentido de Von Neumann. En el presente trabajo (basada en el Artículo [5] de Baccella y Giovana Di Campli) se estudiará la clase de los anillos semiartinianos en los que sus α-ésimos factores de Loewy son no singulares. A estos anillos se les llamará *anillos* NLF. Esta condición apareció por vez primera en el artículo [15] de Năstăsescu en 1971, y fue hasta 1997, en el artículo de Baccella y Di Campli, que se hizo un estudio más profundo de esta condición.

Esta tesis está dividida en cinco capítulos. El primero de ellos está dedicado a presentar las definiciones y resultados que se utilizarán constantemente en los demás capítulos. Estos resultados están ordenados en tres secciones: "Módulos planos", "Módulos no singulares y proyectivos" y "Módulos semiartinianos".

En el segundo capítulo se presentan varias caracterizaciones de los anillos NLF en términos de su cadena de Loewy. Una de ellas dice que un anillo semiartinano es NLF si y sólo si cada elemento de su cadena de Loewy es idempotente.

En el tercer capítulo se dan algunos ejemplos de anillos con la propiedad NLF: se prueba que todo anillo semiartiniano y regular es un anillo NLF y que todo anillo semiartinaiano que es semihereditario es un anillo NLF. Además se da un ejemplo que muestra que la clase de los anillos NLF no es cerrada bajo anillos cociente.

En el capítulo cuarto se continúa con ejemplos de anillos NLF: se hacen dos construcciones de anillos NLF con longitudes de Loewy preestablecidas.

Finalmente, en el capítulo quinto se estudian cuatro aspectos de los anillos NLF y cada aspecto se ve en una sección. En la primera de ellas se prueba que en la clase de los anillos NLF coinciden los anillos semiprimarios con los anillos I-finitos y con los anillos triangulares; en la segunda sección se prueba que si R es un anillo NLF y S es un R-módulo derecho simple, entonces la clase de R-módulos derechos S-homogéneos es una clase cerrada bajo extensiones (si esto pasa se dice que S se *autoescinde*); en la tercera sección se prueba que el centro de un anillo NLF es semiartiniano y regular en el sentido de Von Neumann, y, finalmente, en la cuarta sección, se prueba que ser NLF es un invariante de Morita.

Es preciso mencionar que cada capítulo y sección se inicia explicando cuáles son los resultados más importantes que se estudiarán en ese apartado; posteriormente se sigue con las definiciones y los resultados necesarios para probar los resultados más importantes. Esto permite que cada sección sea lo más independiente de las demás, dada la variedad de aspectos de las teorías de anillos y módulos que se utilizan en esta tesis.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo está dedicado a recordar al lector las propiedades más importantes de módulos planos, proyectivos y semiartinianos, así como las definiciones que se utilizarán constantemente a lo largo del presente trabajo.

Todos los anillos que se consideran serán anillos asociativos con 1. Si R es un anillo e I es un ideal unilateral, se especificará si es derecho o izquierdo; si no hace esta especificación, se supondrá que I es un ideal bilateral.

Dado un anillo R, se denotará por **Mod-**R y R**-Mod** a las categorías de R-módulos derechos y de R-módulos izquierdos, respectivamente. A menudo se usarán M_R y ${}_RM$ para denotar a un R-módulo derecho y a un R-módulo izquierdo respectivamente. Se denotará con **Simp-**R a un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de R-módulos derechos simples y, con **Prosimp-**R, a un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de R-módulos derechos simples y proyectivos.

Si M es un R-módulo derecho y $m \in M$, entonces $r_R(m) = \{r \in R : mr = 0\}$ y $r_R(M) = \bigcap_{m\in M} r_R(m)$. Además, si $M \in R$-**Mod**, entonces $l_R(m) = \{r \in R : rm = 0\}$ y $l_R(M) = \bigcap_{m\in M} l_R(m)$.

Se usará $Im(f)$ y $Nuc(f)$ para denotar a la imagen y al núcleo de un homomorfismo de R-módulos derechos $f : M \to N$ respectivamente.

1.1. Módulos Planos

En el Teorema 1.7 se dará una caracterización de los R-módulos izquierdos planos. Las definiciones previas y los resultados anteriores a este teorema, permitirán enunciarlo y probarlo.

Sean R un anillo, $\mathbb{Z}$ el anillo de los números enteros y $\mathbb{Q}$ el campo de los números racionales. Dado un R-módulo izquierdo M se denotará por M^* al R-

módulo derecho $Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Recuerde que si $\varphi \in M^*$ y $r \in R$, entonces $\varphi r \in M^*$ esta definido por $(\varphi r)(m) = \varphi(rm)$, para cada $m \in M$.

Por otro lado, un homomorfismo $f : M \to N$ de R-módulos izquierdos induce un homomorfismo de R-módulos derechos $f_* : N^* \to M^*$ dado por $f_*(\varphi) = \varphi \circ f$.

Las asignaciones $M \to M^*$ y $f \to f_*$ definen un funtor contravariante de R-**Mod** a **Mod**-R.

***Lema* 1.1** *Para cualquier R-módulo izquierdo M y $m \in M$ tal que $m \neq 0$, existe $\chi \in M^*$ tal que $\chi(m) \neq 0$.*

Demostración: Primero se definirá un homomorfismo $f : \mathbb{Z}m \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z}m$ está generado por m, entonces, para definir f, basta definir el valor de f en m: si el orden de m es j, definimos $f(m) = 1/j + \mathbb{Z}$ y, si el orden de m es infinito, entonces $f(m) = 1/15 + \mathbb{Z}$. Nótese que, como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es es divisible, entonces es inyectivo como $\mathbb{Z}$-módulo y, por lo tanto, existe un homomorfismo no cero $\chi : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $\chi(m) = f(m) \neq 0$. ■

***Lema* 1.2** *Sea $f : N \to M$ un homomorfismo de R-módulos izquierdos. Entonces*

a) f es suprayectiva si y sólo si f_* es inyectiva.

b) f es inyectiva si y sólo si f_* es suprayectiva.

Demostración: **a)** Supóngase que f es suprayectiva y sea $\varphi \in M^*$ tal que $f_*(\varphi) = 0$. Entonces $\{0\} = f_*(\varphi)(N) = \varphi(f(N)) = \varphi(M)$. Por lo tanto f_* es inyectiva y así φ es el homomorfismo cero. Recíprocamente, si se supone que f no es suprayectiva tomemos $m \in M$ tal que $0 \neq m + f(N) \in M/f(N)$. Por el Lema 1.1, existe $\chi \in (M/f(N))^*$ tal que $\chi(m + f(N)) \neq 0$. Si $\pi : M \to M/f(N)$ es la proyección canónica, entonces $0 \neq \pi_*\chi = \chi \circ \pi \in M^*$ y $f_*(\chi \circ \pi) = \chi \circ \pi \circ f = 0$. Esto contradice el hecho de que $\chi \circ \pi(m) \neq 0$.

b) Supóngase que f es inyectiva, y sea $\chi \in N^*$. Entonces $f(N)$ es un submódulo de M, y defínase $\chi_1 : f(N) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ como $\chi_1(f(n)) = \chi(n)$, para cada $n \in N$. Como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es inyectivo como $\mathbb{Z}$-módulo, entonces existe un homomorfismo de grupos abelianos $\chi_2 : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. De esto se tiene que $f_*(\chi_2)n = \chi_2(f(n)) = \chi(n)$, y $f_*(\chi_2) = \chi$. Por lo tanto f_* es suprayectiva.

Recíprocamente, supóngase que f_* es suprayectiva y que $f(n) = 0$, donde $n \neq 0$. Sea $\chi \in N^*$ tal que $\chi(n) \neq 0$. Como f_* es suprayectiva, existe un homomorfismo $\varphi \in M^*$, tal que $f_*(\varphi) = \chi$. Entonces $0 \neq \chi(n) = (f_*\varphi)(n) = \varphi(f(n)) = 0$. Esto es una contradicción. Por lo tanto f es inyectiva. ■

Es bien sabido que el funtor $Hom_R(.,M)$ es un funtor exacto izquierdo para cada $M \in R$-**Mod**, y es exacto derecho cuando M es un R-módulo inyectivo. Como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es inyectivo, se sigue que $Hom_{\mathbb{Z}}(.,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un funtor exacto derecho y, de esta manera, preserva sucesiones exactas cortas. A continuación se dará una prueba más explícita de este hecho.

***Lema* 1.3** *Considere una sucesión exacta de R-módulos izquierdos*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

y su correspondiente suceción exacta de R-módulos derechos

$$0 \longrightarrow C^* \xrightarrow{\beta_*} B^* \xrightarrow{\alpha_*} A^* \longrightarrow 0. \tag{1.2}$$

Entonces la sucesión (1.1) es exacta si y sólo si la sucesión (1.2) es exacta.

Demostración: Nótese que si $c^* \in C^*$, entonces $\alpha_* \circ \beta_*(c^*) = c^* \circ (\beta \circ \alpha)$. Lo primero que se hará es probar que $\alpha_* \circ \beta_* = 0$ si y sólo si $\beta \circ \alpha = 0$: si $\beta \circ \alpha = 0$, entonces es fácil notar que para cada $c^* \in C^*$ se tiene que $\alpha_* \circ \beta_*(c^*) = c^* \circ (\beta \circ \alpha) = 0$; si se supone que $\alpha_* \circ \beta_* = 0$ y que $\beta \circ \alpha \neq 0$, entonces, por el Lema 1.1, existe $d^* \in C^*$ tal que $d^* \circ (\beta \circ \alpha) \neq 0$. Esto, claro, contradice el hecho de que $\alpha_* \circ \beta_* = 0$.

Ahora continuaremos con la prueba del lema. Supóngase que la sucesión (1.1) es exacta. Entonces por el Lema 1.2, el homomorfismo β_* es monomorfismo y el homomorfismo α_* es un epimorfismo. Como $\alpha_* \circ \beta_* = 0$, es suficiente probar que $nuc(\alpha_*) \subseteq Im(\beta_*)$. Para ello consideremos $b^* \in B^*$ tal que $0 = \alpha_*(b^*) = b^* \circ \alpha$. Definimos $c^* : C \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ como $c^*(\beta(b)) = b^*(b)$. Esta función está bien definida ya que si $b, b_2 \in B$ son tales que $\beta(b) = \beta(b_2)$, entonces $b - b_2 \in \alpha(A) = Nuc(\beta) = Im(\alpha)$ y, así, $b^*(b_1 - b_2) = 0$, es decir, $b^*(b) = b^*(b_2)$. De lo anterior se sigue que c^* es función y es rutina probar que también es un homomorfismo. Además $\beta_*(c^*) = (c^* \circ \beta) = b^*$. Por lo tanto $Nuc(\alpha_*) \subseteq Im(\beta_*)$.

Ahora supóngase que la sucesión (1.2) es exacta. Por el Lema 1.2, se tiene que α es un monomorfismo y β es un epimorfismo. Como $\beta \circ \alpha = 0$, basta probar que $Nuc(\beta) \subseteq Im(\alpha)$. Si esto no sucede, entonces existe $b \in B \setminus \alpha(A)$ tal que $\beta(b) = 0$. Sea $\pi : B \to B/\alpha(A)$ la proyección canónica. Como $0 \neq b + \alpha(A) \in B/\alpha(A) = D$, existe $d^* \in D^*$ tal que $d^*(\pi(b)) \neq 0$. De esto se sigue que $d^* \circ \pi : B \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $d^* \circ \pi \in B^*$ y $(d^* \circ \pi)(\alpha(A)) = 0$. Por lo tanto $[\alpha_*(d^* \circ \pi)](A) = (d^* \circ \pi \circ \alpha)(A) = 0$ y, así, $d^* \circ \pi \in Nuc(\alpha_*) = Im(\beta_*)$. De esto se sigue que $d^* \circ \pi = \beta_*(b^*) = b^* \circ \beta$ para algún $b^* \in B^*$. De lo anterior se puede concluir que $0 \neq (d^* \circ \pi)(b) = (b^* \circ \beta)(b) = b^*(\beta \circ b) = 0$. Esto contradice el hecho de que $b \in Nuc(\beta)$. ■

Definición 1.4 Sea M un R-módulo derecho (izquierdo). Se dice que M es un módulo derecho (izquierdo) plano, si para cada monomorfismo de R-módulos izquierdos (derechos) $i : U \to V$, se tiene que $1_M \otimes i : M \otimes_R U \to M \otimes_R V$ es un monomorfismo.

A partir de la siguiente observación y hasta el final de esta sección, se probarán los resultados para la categoría de R-módulos izquierdos; sin embargo, es necesario aclarar que todos los resultados siguientes tienen una versión para la categoría R-módulos derechos. Solamente en la Proposición 1.11 se dará la versión para R-**Mod**.

Observación 1.5

a) Para un R-módulo derecho A, un S-módulo derecho C y un R-S-bimódulo ${}_RB_S$, existen isomorfismos

$$\varphi : Hom_S(A \otimes B, C) \to Hom_R(A, Hom_S(B, C)) \text{ y}$$
$$\psi : Hom_R(A, Hom_S(B, C)) \to Hom_S(A \otimes B, C),$$

definidos de la siguiente manera: si $f \in Hom_S(A \otimes B, C)$, entonces

$$[\varphi(f)(a)](b) = f(a \otimes b);$$

si $g \in Hom_R(A, Hom_S(B, C))$, entonces

$$\psi(g)(a \otimes b) = [g(a)](b).$$

b) Si R es un anillo y M es un R-módulo izquierdo (derecho), el homomorfismo $\mu : R \otimes_R M \to M$ dado por $\mu(r \otimes m) = rm$ es un isomorfirmo.

***Proposición* 1.6** *Un R módulo izquierdo M es plano si y sólo si M^* es inyectivo como R-módulo derecho.*

Demostración: Sea $0 \longrightarrow A_R \xrightarrow{\alpha} B_R$ una sucesión exacta de R-módulos. Ahora considérense las siguientes sucesiones:

a) $0 \longrightarrow A \otimes M \longrightarrow B \otimes M$,

b) $(B \otimes M)^* \longrightarrow (A \otimes M)^* \longrightarrow 0$ y

c) $Hom_R(B, M_R^*) \longrightarrow Hom_R(A, M_R^*) \longrightarrow 0$.

Aplicando el Lema 1.3 (con $C = 0$) se tiene que la sucesión 1) es exacta si y sólo si la sucesión 2) es exacta. Por el inciso a) de la Observación 1.5, la sucesión 2) es exacta si y sólo si la sucesión 3) es exacta. Además M_R^* es inyectivo si y sólo si la sucesión 3) es exacta. Por lo tanto ${}_RM$ es plano si y sólo si M_R^* es inyectivo. ■

***Teorema* 1.7** *Dado un R-Módulo izquierdo M, las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *M es un módulo plano.*

b) *M es plano relativo a R.*

c) *Para cada ideal derecho $A \subseteq R$ el $\mathbb{Z}$-morfismo $\mu_A : A \otimes_R M \to M$ dado por $\mu_A(a \otimes m) = am$, es un monomorfismo.*

d) *Para cada ideal derecho finitamente generado $A \subseteq R$ el $\mathbb{Z}$-morfismo $\mu_A : A \otimes_R M \to M$ con $\mu_A(a \otimes m) = am$, es un monomorfismo.*

Demostración: Por el inciso b de la Observación 1.5, sabemos que existe un isomorfismo de R-módulos izquierdos $\mu : R \otimes M \to M$ dado por $\mu(r \otimes m) = rm$.

$a) \Rightarrow c)$ Sea A un ideal derecho de R. Como M es plano, entonces el homomorfismo $i \otimes 1_M : A \otimes M \to R \otimes M$ es un monomorfismo. Entonces $\mu \circ (i \otimes 1_M) : A \otimes M \to M$, dado por $\mu(a \otimes m) = am$, es un monomorfismo.

$c) \Rightarrow a)$ Supóngase que para cada ideal derecho A de R, se tiene que $A \otimes M \cong AM$ bajo un isomorfismo $\mu : A \otimes M \to AM$. Si $i : AM \to M$ es la inclusión natural, entonces $f = i \circ \mu$ es un monomorfismo. Por el Lema 1.2, se tiene que $f_* : M^* \to (A \otimes M)^*$ es un epimorfismo. Nótese que $M^* = (A \otimes M)^*$ y, por la Observación 1.5, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes M)^* \arrow[r, "\varphi"] & Hom_R(A, M_R^*) \\
(R \otimes M)^* \arrow[u, "f_*"] & Hom_R(R, M_R^*) \arrow[l, "\psi"] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

En este diagrama $\varphi \circ f_* \circ \psi$ es un epimorfismo que coincide con el morfismo $Hom(i, M^*)$ inducido por el funtor $Hom(., M^*)$ y el monomorfismo canónico $i : A \to R$. De esta observación se concluye que M^* es inyectivo y así M^* es plano por la Proposición 1.6.

$a) \Rightarrow d)$ Es una prueba similar a la dada en $a) \Rightarrow c)$.

$d) \Rightarrow c)$ Supóngase que $A \otimes M \cong AM$ para cada ideal finitamente generado A de R. Para B un ideal derecho de R. A continuación se probará que el homomorfismo canónico $\mu : B \otimes M \to M$ es un monomorfismo. Para ello consideremos $\xi = \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes m_i \in B \otimes M$ y supóngase que $0 = \mu(\xi) = \sum_{i=1}^{n} b_i m_i$. Para el ideal finitamente generado $A = \sum_{i=1}^{n} b_i R$ se tiene que $\xi \in A \otimes M$ y $\mu : A \otimes M \to AM$ es un monomorfismo (por hipótesis). Por lo tanto, como $\mu(\xi) = 0$, se tiene que $\xi = 0$ y, en consecuencia, μ es un monomorfismo.

$a) \Rightarrow b)$ Esta implicación es clara.

$b) \Rightarrow c)$ Supóngase que $_RM$ es plano relativo a R. Sean A un ideal derecho de R e $i : A \to R$ la inclusión natural. Como $_RM$ es plano realtivo a R, entonces el homomorfismo $i \otimes 1_M : A \otimes M \to R \otimes M$ es un monomorfismo. Además, como $R \otimes M$ es isomorfo a M bajo el isomorfismo $g : R \otimes M \to M$ dado por $g(r \otimes m) = rm$, se tiene que $\mu_A = g \circ (i \otimes 1_M)$ es un monomorfismo. ■

***Proposición* 1.8** *Sea F un R-módulo izquierdo plano y K un submódulo de F. Considérese la siguiente sucesión exacta de R-módulos izquierdos:*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\eta} M \longrightarrow 0$$

donde M es un R-módulo izquierdo isomorfo a F/K. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) M es un R-módulo izquierdo plano.

b) $AF \cap K = AK$ para cada ideal derecho A, de R.

c) $AF \cap K = AK$ para cada ideal derecho finitamente generado A de R.

Demostración: $a) \Leftrightarrow b)$ Sea A un ideal derecho de R. Como $(A \otimes \_\_)$ es un funtor exacto derecho, se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$A \otimes K \xrightarrow{1 \otimes i} A \otimes F \xrightarrow{1 \otimes \eta} A \otimes M \longrightarrow 0.$$

Como F es un módulo plano, por el inciso c) del Teorema 1.7, se tiene que $A \otimes F \cong AF$ y $A \otimes K \cong AK$. Por lo tanto

$$A \otimes M \cong AF/AK. \tag{1.3}$$

Ahora, obsérvese que

$$AM = \eta(AF) \cong AF/(AF \cap K). \tag{1.4}$$

Por el inciso c del Teorema 1.7 sabemos que $_RM$ es plano si y sólo si para cada ideal derecho A se tiene que $A \otimes_R M \cong AM$ y, por la ecuaciones 1.3 y 1.4, se tiene que M es un R-módulo izquierdo plano si y sólo si $AF/AK \cong AF/(AF \cap K)$; es decir, M es plano si y sólo si $AK = AF \cap K$ para cada ideal derecho A de R.

Nótese que la prueba de $a) \Leftrightarrow c)$, es análoga a la prueba de $a) \Leftrightarrow b)$. ■

***Proposición* 1.9** *Sean R un anillo y*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de R-módulos izquierdos, donde F es un módulo libre con base $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Si $u = a_1 x_{\alpha_1} + ... + a_n x_{\alpha_n}$ es un elemento de F, se define $I_u = a_1 R + ... + a_n R$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

a) A es un R-módulo izquierdo plano.

b) Si $u \in K$, entonces $u \in I_u K$.

Demostración: $a) \Rightarrow b)$ Como A es un módulo plano y $u \in K$, por la Proposición 1.8, se tiene que $u \in K \cap I_u F = I_u K$.

$b) \Rightarrow a)$ Para esta implicación se utilizará el inciso $b)$ de la Proposición 1.8. Sea I un ideal derecho de R y sea $u \in K \cap IF$; entonces $I_u \subseteq I$ y, así, $u \in I_u K \subseteq IK$. Esto sucede para cada $u \in K \cap IF$. Por lo tanto $K \cap IF = IK$ y, por la Proposición 1.8, A es un módulo izquierdo plano. ■

***Proposición* 1.10** *Sean R un anillo y*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de R-modulos izquierdos, donde F es un modulo libre con base $\{x_\alpha\}_{\alpha \in X}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) A es un módulo izquierdo plano.

b) Dado cualquier $u \in K$, existe un homomorfismo $\theta : F \to K$ tal que $\theta(u) = u$.

c) Dados cualesquiera $u_1, ..., u_n \in K$, existe un homomorfismo $\theta : F \to K$ tal que $\theta(u_i) = u_i$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Demostración: $a) \Rightarrow b)$ Sea $u \in K$. Entonces $u = a_1 x_{\alpha_1} + ... + a_n x_{\alpha_n}$ donde $a_i \in R$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Sea $I_u = a_1 R + ... + a_n R$. Como A es un módulo plano, por la Proposición 1.9, se tiene que $u \in I_u K$ y, así, $u = a_1 v_1 + ... + a_n v_n \in K$ con $v_i \in K$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Defínase $\theta : F \to K$ como $\theta(x_{\alpha_i}) = v_i$ para cada

$i \in \{1, ...n\}$ y $\theta(x_\alpha) = 0$ si $\alpha \notin \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. Notemos que este es un homomorfismo con las propiedades deseadas.

b) $\Rightarrow$ *a*) Dado $u = a_1 x_{\alpha_1} + ... + a_n x_{\alpha_n}$, en K, sea $\theta : F \to K$ un homomorfismo tal que $\theta(u) = u$. Entonces $u = a_1\theta(x_{\alpha_1}) + ... + a_n\theta(x_{\alpha_n})$. Por lo tanto $u \in I_u K$, donde $I_u = a_1 R + ... + a_n R$; así, por la Proposición 1.9, A es un módulo plano.

b) $\Rightarrow$ *c*) Sean $u_1, ..., u_n \in K$. Si $n = 1$, la existencia de la función θ se sigue de *b*). Supongamos que $n > 1$ y que *c*) ocurre para $k < n$. S ea $\theta_n : F \to K$ un homomorfismo tal que $\theta_n(u_n) = u_n$. Sea $v_i = u_i - \theta_n(u_i)$ para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$; entonces, por la hipótesis de inducción, existe un homomorfismo $\theta' : F \to K$ tal que $\theta'(v_i) = v_i$ para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$. Defínase $\theta : F \to K$ como

$$\theta(x) = 1_F(x) - (1_F - \theta')(1_F(x) - \theta_n(x)).$$

Nótese que este es un homomorfismo con las propiedades deseadas.

c) $\Rightarrow$ *b*). Esta implicación es clara. ■

***Proposición* 1.11** *Sea I un ideal izquierdo (derecho) de un anillo R. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) R/I es un R-módulo izquierdo (derecho) plano.

b) $J \cap I = JI$ $(I \cap J = IJ)$ para todo ideal derecho (izquierdo) J, de R.

c) $a \in aI$ $(a \in Ia)$ para cada $a \in I$.

d) $MI \cap N = NI$ $(N \cap IM = IN)$ para cada R-módulo derecho (izquierdo) M y un submódulo N de M.

Demostración: Como R es un R-módulo derecho plano, *a*) $\Leftrightarrow$ *b*) es un caso particular de la Proposición 1.8.

b) $\Rightarrow$ *c*) Si se supone el inciso *b*), entonces para cualquier $a \in I$ tenemos que $I \cap aR = aRI \subseteq aI$. Por lo tanto $a \in aI$

d) $\Rightarrow$ *b*) El enunciado *b*) es un caso particular de *d*) tomando $M = R$ y $N = J$.

c) $\Rightarrow$ *d*) Nótese que $NI \subseteq MI \cap N$. Entonces basta probar que $MI \cap N \subseteq NI$. Sea $x \in MI \cap N$ tal que $x = m_1 a_1 + ... + m_n a_n$, donde $a_i \in I$ y $m_i \in M$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Por el inciso *c*), para cada $a \in I$, se tiene que $a \in aI$; es decir, para cada $a \in I$ existe $e_a \in I$ tal que $ae_a = a$. Por lo tanto el homomorfismo $\phi_a : R \to I$ dado por $\phi_a(x) = ae_a$ satisface que $\phi_a(a) = a$ para cada $a \in I$. Por la Proposición 1.10, lo anterior es equivalente a que exista un homomorfismo $\phi : R \to I$ tal que $\phi(a_i) = a_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$; es decir, existe $c \in I$ tal que $\phi(a_i) = a_i c = a_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. En consecuencia, $x = m_1 a_1 + ... + m_n a_n = m_1(a_1 c) + ... + m_n(a_n c) = xc$. Por lo tanto $x \in NI$ y, así $NI = MI \cap N$. ■

***Proposición* 1.12** *Sea I un ideal de un anillo R. Entonces cada R/I-módulo izquierdo plano es un R-módulo izquierdo plano si y sólo si R/I es plano como R-módulo izquierdo.*

Demostración: Si se supone que cada R/I-modulo izquierdo plano es un R-módulo izquierdo plano, en particular $_R(R/I)$ es un módulo plano.

Supóngase que $_R(R/I)$ es un módulo plano. Sean $_{R/I}F$ un módulo plano e $i :_R N \rightarrow_R M$ un monomorfismo de R-módulos. A continuación se probará que el homomorfismo $i \otimes 1_F : N \otimes F \rightarrow M \otimes F$ es un monomorfismo. Como $_R(R/I)$ es un módulo plano, por la Proposición 1.11, se obtiene que $MI \cap N = NI$. Esto significa que $(N/NI)_R$ puede ser considerado como un submódulo de $(M/MI)_R$, ya que, por el segundo teorema de isomorfismo de módulos, se tiene que

$$\begin{aligned} (N+MI)/MI &\cong N/(MI \cap N) \cong N/NI \\ \text{y} \quad (N+MI)/MI &\subseteq M/MI. \end{aligned}$$

Como I está contenido en el anulador derecho de M/MI, este módulo puede ser considerado como un R/I-modulo derecho. Como F es un R/I-módulo izquierdo plano, se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow MI \otimes F \xrightarrow{j \otimes 1_F} M \otimes F \xrightarrow{\eta \otimes 1_F} M/MI \otimes F$$

donde $j : MI \rightarrow M$ es es la inclusión natural, y $\eta : M \rightarrow M/MI$ es la proyección canónica. Nótese que $MI \otimes F = M \otimes IF = M \otimes \{0\} = \{0\}$. Por lo tanto $\eta \otimes 1_F : M \otimes F \rightarrow M/MI \otimes F$ es un isomorfismo. De manera análoga, se puede probar que $\eta' : N \otimes F \rightarrow N/NI \otimes F$ es un isomorfismo, donde $\eta' : N \rightarrow N/NI$ es la proyección canónica. Con los isomorfismos anteriores se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} N \otimes F \arrow[r, "i \otimes 1_F"] \arrow[d, "\eta' \otimes 1_F"'] & M \otimes F \arrow[d, "\eta \otimes 1_F"] \\ N/NI \otimes F \arrow[r, "i' \otimes 1_F"] & M/MI \otimes F, \end{tikzcd}$$

donde $i' : N/NI \rightarrow M/MI$ es el monomorfismo natural. Dado que $\eta \otimes 1_F$ y $\eta' \otimes 1_F$ son isomorfismos, se sigue que $i \otimes 1_F$ es un monomorfismo. Por lo tanto $_RF$ es un módulo plano. ∎

1.2. Módulos no singulares y proyectivos

El resultado más importante de esta sección es el Teorema 1.27. En este teorema se da una caracterización de los ideales idempotentes del zoclo de un anillo R. Este teorema será de mucha utilidad en el segundo capítulo. Antes de llegar a este importante teorema, será necesario dar algunas propiedades básicas de módulos no singulares y proyectivos.

Definición 1.13 Sean R un anillo, M un R-módulo derecho y N un submódulo de M. Se dice que N es un *submódulo esencial de* M (y lo denotaremos por $N \subseteq^{es} M$) si para cada submódulo no cero N', de M, se tiene que $N \cap N' \neq \{0\}$.

Definición 1.14 Sean R un anillo y M un R-módulo derecho. Defínase

$$Z(M) = \{x \in M : xI = \{0\} \text{ para algún } I_R \subseteq^{es} R\}.$$

A este submódulo de M, se le conoce como el *submódulo singular de* M. Si $Z(M) = M$, se dice que M es un módulo *singular.* Si $Z(M) = \{0\}$ se dice que M es un módulo *no singular.*

Observación 1.15 Si R es un anillo; M y N son R-módulos derechos, y $f \in Hom_R(M, N)$, entonces $f(Z(M)) \subseteq Z(N)$.

***Proposición* 1.16** *Sean R un anillo y M un R-módulo derecho. Entonces M es no singular si y sólo si $Hom_R(N, M) = \{0\}$ para cada R-módulo derecho singular N.*

Demostración: Sean N un R-módulo derecho singular, M un R-módulo derecho no singular y $f : N \to M$ un homomorfismo de R-módulos; entonces $f(N) = f(Z(N)) \subseteq Z(M) = \{0\}$ y, así, $f = 0$. Por lo tanto $Hom_R(N, M) = 0$ cada vez que N es singular y M es no singular.

Recíprocamente, si $Hom_R(N, M) = 0$ para cada módulo singular N, entonces, para $Z(M)$, se tiene que $Hom_R(Z(M), M) = 0$ y, así, la inclusión $i : Z(M) \to M$ es la función cero. Por lo tanto $Z(M) = 0$. ∎

***Proposición* 1.17** *Sean R un anillo, M un R-módulo no singular y N un submódulo de M. Entonces M/N es singular si y sólo si $N \subseteq^{es} M$.*

Demostración: Si M/N es singular y $x \in M$ es un elemento no cero, entonces $(x + N)I = \{0\}$ para algún ideal derecho $I \subseteq^{es} R$ y, así, $xI \subseteq N$. Como M es no singular, se tiene que $xI \neq \{0\}$ y, así, $xR \cap N \neq \{0\}$. Por lo tanto $N \subseteq^{es} M$.

Ahora supóngase que $N \subseteq^{es} M$, tómese $m \in M$ y defínase un homomorfismo de R-módulos derechos $f_m : R \to M$ como $f(r) = mr$. Como f_m es un homomorfismo de R-módulos derechos y $N \subseteq^{es} M$, entonces $f_m^{-1}(N) \subseteq^{es} R$. De esto se sigue que $mf_m^{-1}(N) \subseteq N$; es decir, $f_m^{-1}(N) \subseteq r_R(m+N)$; entonces $r_R(m+N)$ es un ideal esencial de R para cada $m + N \in M/N$. Por lo tanto M/N es singular. ■

Definición 1.18 Sea R un anillo y $\mathfrak{A}$ una clase de R-módulos derechos. Se dice que $\mathfrak{A}$ es una clase *cerrada bajo extensiones esenciales* si cada vez que $N \subseteq^{es} M$ y $N \in \mathfrak{A}$, entonces $M \in \mathfrak{A}$. A continuación se definirá otro tipo de extensiones. Dada una sucesión exacta corta de R-módulos derechos $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, todos ellos contenidos en una clase $\mathfrak{A}$, se dirá que M es una *extensión de M' por M''*. Se dice que $\mathfrak{A}$ es una clase *cerrada bajo extensiones* si $M \in \mathfrak{A}$ cada vez que M es una extensión de $M' \in \mathfrak{A}$ por $M'' \in \mathfrak{A}$.

***Proposición* 1.19** *Sea R un anillo. La clase de todos los R-módulos derechos no singulares, es una clase cerrada bajo submódulos, productos directos, extensiones esenciales y extensiones de módulos.*

Demostración: Sean M un R-módulo derecho no singular y N un submódulo de M. Como $Z(N) = N \cap Z(M)$ y $Z(M) = \{0\}$, se sigue que N es no singular.

Por otro lado, si N es un R-módulo derecho no singular y $N \subseteq^{es} M$, como $N \cap Z(M) = Z(N) = \{0\}$, se tiene que $Z(M) = \{0\}$. Por lo tanto las extensiones esenciales de módulos no singulares son no singulares.

Sean $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de R-módulos derechos no singulares y N un R-módulo derecho singular. Entonces, por la Proposición 1.16, $Hom_R(N, M_\alpha) = 0$ para cada $\alpha \in I$. De esto se sigue que $Hom_R(N, \prod_{\alpha \in I} M_\alpha) = \{0\}$. Nuevamente, por la Proposición 1.16, se tiene que $\prod_{\alpha \in I} M_\alpha$ es no singular.

Supongamos que $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta de R-módulos derechos, donde M' y M'' son no singulares. Por la Proposición 1.16, se tiene que $Hom_R(N, M') = \{0\}$ y $Hom_R(N, M'') = \{0\}$ para cada R-módulo derecho singular. Con esto y el hecho de que la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom_R(N, M') \longrightarrow Hom_R(N, M) \longrightarrow Hom_R(N, M'')$$

es exacta, se obtiene que $Hom_R(N, M) = \{0\}$ para cada módulo N no singular. Por lo tanto, por la Proposición 1.16, M es no singular. ■

Definición 1.20 Sean R un anillo, $\mathcal{A} \subseteq$**Mod**-R y $M \in$ **Mod**-R. Defínase

$$\mathbf{Tr}_{\mathcal{A}}(M) = \sum \{f(A) : f \in Hom_R(A, M), A \in \mathcal{A}\}.$$

En el caso de que $\mathcal{A} = \{N\}$ para algún $N \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ se escribirá $\mathbf{Tr}_N(M)$ en lugar de $\mathbf{Tr}_{\{N\}}(M)$. Nótese que $\mathbf{Tr}_{\mathcal{A}}(M)$ es un submódulo derecho de M.

***Proposición* 1.21** *Sean R un anillo y P un R-módulo derecho proyectivo. Entonces $P\,\boldsymbol{Tr}_P(R) = P$.*

Demostración: Dado que $P(\mathbf{Tr}_P(R)) \subseteq P$, basta probar la otra contención. Como P es un módulo proyectivo, existe un módulo libre A con una base B, y existe un submódulo P', de A, tal que $A = P \oplus P'$. Sea $p \in P$; entonces $p = \sum br_b$, donde $b \in B$ y $r_b \in R$. Sea $\pi_p : A \to P$ la proyección en P. Considérese $\pi_p|_P : P \to P$. Entonces $p = \pi_p(\sum br_b) = \sum \pi_p(b)r_b$. Sea $\eta_b : A \to R$ la proyección canónica en la coordenada b-ésima; entonces $\eta_b(p) = r_b$. Por lo tanto

$$p = \sum \pi_p(b)\eta_b(p).$$

Nótese que $\pi_p(b)\eta_b(p) \in P(\mathbf{Tr}_P(R))$. Por lo tanto $p \in P(\mathbf{Tr}_P(R))$. ■

***Corolario* 1.22** *Sea P un módulo derecho proyectivo. Entonces $\boldsymbol{Tr}_P(R) = (\boldsymbol{Tr}_P(R))^2$.*

Demostración: Sea $H = Hom_R(P, R)$. Por la Proposición 1.21, se tienen las siguientes igualdades:

$$\mathbf{Tr}_P(R) = \sum\{f(P) : f \in Hom_R(P,R)\} = \sum\{f(P(\mathbf{Tr}_P(R))) : f \in H\} =$$
$$\sum\{f(P)(\mathbf{Tr}_P(R)) : f \in H\} = \sum\{f(P) : f \in H\}(\mathbf{Tr}_P(R)) = (\mathbf{Tr}_P(R))^2.$$

■

***Lema* 1.23** *Sea $\mathcal{A} \subseteq \boldsymbol{Simp}\text{-}R$. Entonces*

$$\boldsymbol{Tr}_{\mathcal{A}}(R) = \bigoplus_{S \in \mathcal{A}} \boldsymbol{Tr}_S(R).$$

Demostración: Se sigue del hecho de que cada R-módulo derecho semisimple se puede ver como la suma directa de sus componentes homogéneas. En este caso, las componentes homogéneas de $\mathbf{Tr}_{\mathcal{A}}(R)$ corresponden a los submódulos $\mathbf{Tr}_S(R)$ para cada $S \in \mathcal{A}$. ■

***Lema* 1.24** *Si $S_1, S_2 \in \mathcal{A} \subseteq \boldsymbol{Simp}\text{-}R$ y $S_1 \ncong S_2$, entonces*

$$(\boldsymbol{Tr}_{S_1}(R))(\boldsymbol{Tr}_{S_2}(R)) = 0.$$

Demostración: Si se supone que la multiplicación es distinta de 0, entonces, como $\mathbf{Tr}_{S_1}(R)$ y $\mathbf{Tr}_{S_2}(R)$ son ideales de R, la interseccion de estos dos ideales sería distinta de cero, contradiciendo así el Lema 1.23. ■

***Proposición* 1.25** *Sea R un anillo y S un R-módulo derecho simple. Entonces S es no singular si y sólo si S es proyectivo.*

Demostración: Supóngase que S es un módulo simple y no singular. Entonces $S \cong R/I$, donde I es un ideal derecho máximo de R. Como S es no singular, entonces I no es esencial en R y, por lo tanto, existe un ideal derecho no cero K, de R, tal que $I \cap K = 0$. Como I es un ideal derecho máximo, entonces $I \oplus K = R$ y, así, $S \cong R/I \cong K$ es proyectivo.

Ahora supóngase que S es proyectivo. Como $S \cong R/I$ para algún ideal I derecho máximo, de R, entonces $R \cong I \oplus K$ para algún ideal derecho no cero K, de R; por lo tanto I no es esencial en R y así S es no singular. ■

***Corolario* 1.26** *Sea M un R-módulo derecho semisimple. Entonces M es proyectivo si y sólo si M es no singular.*

Demostración: Sea M un módulo semisimple. Entonces $M \cong \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} S_\alpha$, donde S_α es un módulo simple para cada $\alpha \in \mathcal{A}$. Si M es no singular, entonces, por la Proposición 1.19, cada S_α es no singular. Por la Proposición 1.25, S_α es proyectivo para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ y, por lo tanto, M es proyectivo.

Recíprocamente, si se supone que M es proyectivo, entonces S_α es proyectivo para cada $\alpha \in \mathcal{A}$. Así, de la Proposición 1.25, se sigue que S_α es no singular para cada $\alpha \in \mathcal{A}$. Dado que la clase de módulos no singulares es cerrada bajo productos directos y submódulos (Proposición 1.19), entonces es cerrada bajo sumas directas. Por lo tanto $M = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} S_\alpha$ es no singular. ■

***Teorema* 1.27** *Sean R un anillo y K un ideal contenido en $Zoc(R_R)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $K^2 = K$.

b) *R/K es un R-módulo izquierdo plano.*

c) *Existe un subconjunto $\mathcal{A} \subseteq$ **Prosimp**$_R$ tal que $K =$ **Tr**$_{\mathcal{A}}(R)$.*

Demostración: $a) \Rightarrow b)$ Para probar esta implicación, se utilizará el inciso $c)$ de la Proposición 1.11. Sea K' un ideal derecho de R contenido en K. Como K es semisimple, existe un ideal derecho L, de R, tal que $K = K' \oplus L$. Por hipótesis $K = K^2 = (K' \oplus L)K = K'K \oplus LK$. Entonces $K' = K'K$ y, en particular, dado $a \in K$, para el ideal derecho aR, se tiene que $aR = aRK = aK$. De lo anterior se concluye que $a \in aK$ y, por la Proposición 1.11, se obtiene que $_R(R/K)$ es módulo plano.

$b) \Rightarrow a)$ Como $_R(R/K)$ es un módulo plano, por la Proposición 1.11, $a \in aK \subseteq K^2$ para cada $a \in K$. Por lo tanto $K = K^2$.

$a) \Rightarrow c)$ Sea $a \in K$ tal que $r_R(a) \subseteq^{es} R$. Como K es semisimple, $K \subseteq r_R(a)$; por lo tanto $aK = \{0\}$. Ya se vio que si $K^2 = K$, entonces $_R(R/K)$ es un módulo plano; entonces, por la Proposición 1.11, se tiene que $a \in aK$. En consecuencia $a = 0$ y, así, K es no singular. Por el Corolario 1.26, K es proyectivo. Entonces, el inciso $c)$ se sigue al tomar $\mathcal{A} = \{N_R \subseteq K : N_R \text{ es simple}\}$.

$c) \Rightarrow a)$. Por el Lema 1.23,

$$K = \mathbf{Tr}_{\mathcal{A}}(R) = \bigoplus_{S \in \mathcal{A}} \mathbf{Tr}_S(R).$$

Por el Lema 1.24,

$$K^2 = (\bigoplus_{S \in \mathcal{A}} \mathbf{Tr}_S(R))(\bigoplus_{S \in \mathcal{A}} \mathbf{Tr}_S(R)) = \bigoplus_{S \in \mathcal{A}} (\mathbf{Tr}_S(R))^2.$$

Finalmente, por el Corolario 1.22, se tiene que

$$K^2 = \bigoplus_{S \in \mathcal{A}} (\mathbf{Tr}_S(R))^2 = \mathbf{Tr}_{\mathcal{A}}(R) = K.$$

■

1.3. Módulos Semiartinianos

Esta sección está dedicada a enunciar y probar las propiedades básicas de los anillos y módulos semiartinanos derechos. El resultado que más se utilizará, es la caracterización de anillos semiartinianos (Proposición 1.32).

Sean R un anillo y M un R-módulo derecho. Se definirá una cadena $(Zoc(M))_\alpha$ de submódulos de M (indicada por los ordinales) de la siguiente manera:

- $Zoc_0(M) = \{0\}$.

- Si α es un ordinal sucesor, entonces $Zoc_\alpha(M)$ es el único submódulo de M tal que
$$\frac{Zoc_\alpha(M)}{Zoc_{\alpha-1}(M)} = Zoc(M/Zoc_{\alpha-1}(M)).$$
- Si α es un ordinal límite, entonces
$$Zoc_\alpha(M) = \bigcup_{\beta<\alpha} Zoc_\beta(M).$$

Nótese que para cada R-módulo izquierdo M, la cadena $(Zoc_\alpha(M))_\alpha$ es creciente y siempre se estabiliza, es decir, existe un ordinal β, tal que $Zoc_\beta(M) = Zoc_{\beta+i}(M)$ para cada ordinal i.

En las siguientes dos proposiciones se enunciarán dos propiedades fundamentales de los submódulos Zoc_α.

***Proposición* 1.28** *Sean $M, N \in$ **Mod-**R y $f \in Hom_R(M,N)$. Entonces para cada ordinal i se tiene que $f(Zoc_i(M)) \subseteq Zoc_i(N)$.*

Demostración: La prueba se hará por inducción transfinita. Para $i = 0$ el resultado se sigue fácilmente. Antes del paso inductivo, se verá el caso $i = 1$. En este caso basta observar lo siguiente: si S es un submódulo simple de M, entonces $f(S)$ es un submódulo simple o es el submódulo $\{0\}$; en consecuencia, $f(Zoc(M)) \subseteq Zoc(N)$.

Ahora, supóngase que $1 < i$ y para cada $\alpha < i$ el submódulo $Zoc_\alpha(M)$ satisface el enunciado de la proposición.

Caso 1. Si i es un ordinal límite, entonces, por hipótesis de inducción se tiene que $f(Zoc_\alpha(M)) \subseteq f(Zoc_\alpha(N))$ para cada $\alpha < i$; en consecuencia
$$f(\bigcup_{\alpha<i} Zoc_\alpha(M)) \subseteq \bigcup_{\alpha<i} Zoc_\alpha(N).$$
Por lo tanto $f(Zoc_i(M)) \subseteq Zoc_i(N)$.

Caso 2. Sea $i = \alpha+1$ para algún ordinal α. Para el homomorfismo f, considérese la asignación $\overline{f} : M/Zoc_\alpha(M) \to N/Zoc_\alpha(N)$ dada por
$\overline{f}(m + Zoc_\alpha(M)) = \overline{f}(m) + Zoc_\alpha(N)$. Es fácil notar que $\overline{f}$ es un homomorfismo de R-módulos derechos. Ahora, por lo hecho en el caso $i = 1$, se obtiene que
$$\overline{f}(Zoc_i(M)/Zoc_\alpha(M)) \subseteq Zoc_i(N)/Zoc_\alpha(N),$$
es decir, $f(Zoc_i(M)) + Zoc_\alpha(M) \subseteq Zoc_i(N) + Zoc_\alpha(N)$. Por lo tanto
$$f(Zoc_i(M)) \subseteq f(Zoc_i(N)).$$

■

Proposición 1.29 *Sean M un R-módulo derecho y N un submódulo de M. Entonces, para cada ordinal i, se tiene que*

$$Zoc_i(M) \cap N = Zoc_i(N).$$

Demostración: La prueba se hará por inducción. La proposición se sigue fácilmente cuando $i = 0$. Para el caso $i = 1$ basta observar que cada submódulo simple de N es un submódulo simple de M.

Ahora, supóngase que $i > 1$ y, para cada $\alpha < i$, $Zoc_\alpha(M) \cap N = Zoc_\alpha(N)$.

Caso 1. Si i es un ordinal límite, entonces, por hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned} Zoc_i(M) \cap N &= (\bigcup_{\alpha<i} Zoc_\alpha(M)) \cap N = \bigcup_{\alpha<i}(Zoc_\alpha(M) \cap N) \\ &= \bigcup_{\alpha<i} Zoc_\alpha(N) = Zoc_i(N). \end{aligned}$$

Caso 2. Supóngase que $i = \alpha + 1$ para algún ordinal α. Por la hipótesis de inducción y el segundo teorema de isomorfismo se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{Zoc_i(M)}{Zoc_\alpha(M)} \bigcap \frac{Zoc_\alpha(M) + N}{Zoc_\alpha(M)} &= Zoc\left(\frac{M}{Zoc_\alpha(M)}\right) \cap \frac{Zoc_\alpha(M) + N}{Zoc_\alpha(M)} \\ &= Zoc\left(\frac{Zoc_\alpha(M) + N}{Zoc_\alpha(M)}\right) \cong Zoc\left(\frac{N}{Zoc_\alpha(N)}\right) = \frac{Zoc_i(N)}{Zoc_\alpha(N)}. \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} &\frac{Zoc_i(M)}{Zoc_\alpha(M)} \bigcap \frac{Zoc_\alpha(M) + N}{Zoc_\alpha(M)} = \frac{Zoc_i(M) \cap (Zoc_\alpha(M) + N)}{Zoc_\alpha(M)} = \\ &\frac{Zoc_\alpha(M) + (Zoc_i(M) \cap N)}{Zoc_{\alpha(M)}} \cong \frac{Zoc_i(M) \cap N}{Zoc_\alpha(N)} \end{aligned}$$

De lo anterior se puede concluir que $Zoc_i(M) \cap N = Zoc_i(N)$. ■

Dado un R-módulo derecho M, se denotará por $L(M)$ al menor ordinal para el cual $Zoc_{L(M)}(M) = Zoc_{L(M)+1}(M)$, y se le llamará *la longitud de Loewy* del módulo M.

Definición 1.30 Sean R un anillo y M un R-módulo derecho. Se dice que M es un módulo *semiartiniano* si $Zoc_{L(M)}(M) = M$.

Observación 1.31 *Si M es un R-módulo derecho semiartiniano y finitamente generado, entonces $L(M)$ no puede ser un ordinal límite.*

El siguiente resultado dará una caracterización de los anillos semiartinianos.

***Proposición* 1.32** *Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) Todo R-módulo derecho es semiartiniano.

b) R_R es semiartiniano.

c) Todo R-módulo derecho no cero contiene un submódulo simple.

Demostración: $a) \Rightarrow b)$ Es claro.

$b) \Rightarrow c)$ Sea $M \in \mathbf{Mod}\text{-}R$ tal que $M \neq \{0\}$. Sea $m \in M$ tal que $m \neq 0$. Como $mR \cong R/r_R(m)$ se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow r_R(m) \xrightarrow{i} R \xrightarrow{\eta} mR \longrightarrow 0.$$

Por hipótesis, $Zoc_{L(R)}(R) = R$; en consecuencia, $Zoc_{L(R)}(R/r_R(m)) = Rm$, ya que $Zoc_{L(R)}$ es un prerradical y R está en su clase de pretorsión. Como

$$\{0\} \neq Zoc_{L(R)}(Rm),$$

existe un R-módulo derecho simple tal que $S \subseteq Rm \subseteq M$.

$c) \Rightarrow a)$ Sea M un R-módulo derecho. Se probará que $Zoc_{L(M)}(M) = M$. Supóngase que esto no sucede. Entonces $M/Zoc_{L(M)}(M) \neq \{0\}$. Por hipótesis se tiene que $Zoc(M/Zoc_{L(M)}) \neq \{0\}$. Por lo tanto

$$\frac{Zoc_{L(M)+1}(M)}{Zoc_{L(M)}(M)} = Zoc(M/Zoc_{L(M)}(M)) \neq \{0\},$$

y, así, $Zoc_{L(M)}(M) \subsetneq Zoc_{L(M)+1}(M)$. Esto, claro, es una contradicción. Por lo tanto M es semiartiniano. ■

***Corolario* 1.33** *Sea R un anillo semiartiniano y M un R-módulo derecho. Entonces $Zoc(M) \subseteq^{es} M$.*

***Proposición* 1.34** *Si R_R es un anillo artiniano, entonces cada R-módulo derecho no nulo continene submódulos simples.*

Demostración: Sean M un R-módulo no cero y $m \in M$ tal que $m \neq 0$. Entonces mR es artiniano porque es finitamente generado y R es artiniano. Por lo tanto mR tiene submódulos simples no nulos. ■

Como consecuencia inmediata de las Proposiciones 1.34 y 1.32 se tiene el siguiente resultado:

***Corolario* 1.35** *Si R es un anillo artiniano derecho, entonces R es semiartiniano derecho*

En la Proposición 1.32 se probó que si R es un anillo semiartiniano derecho, entonces cada R-módulo derecho es semiartiniano. En el siguiente resultado se verá que la longitud de Loewy de cada R-módulo derecho es menor o igual que la longitud de Loewy del anillo R.

***Proposición* 1.36** *Sea R un anillo semiartiniano derecho y M un R-módulo derecho. Entonces $L(M) \leq L(R)$.*

Demostración: Sea $m \in M$ y considérese el homomorfismo $f_m : R_R \to M_R$ dado por $f_m(r) = mr$. Por la Proposición 1.28, para cada ordinal i, se tiene que $mZoc_i(R_R) = f_m(Zoc_i(R_R)) \subseteq Zoc_i(M_R)$; en particular,

$$mR = mZoc_{L(R)}(R) \subseteq Zoc_{L(R)}(M)$$

y, así, $M = MR = MZoc_{L(R)}(R) \subseteq Zoc_{L(R)}(M_R)$. Por lo tanto $L(M) \leq L(R)$. ■

Ahora, dado un R-módulo derecho M y un submódulo N, de M, se verá la relación que existe entre los ordinales $L(M)$ y $L(N) + L(M/N)$.

***Proposición* 1.37** *Sean R un anillo semiartiniano, M un R-módulo derecho y N un submódulo de M. Entonces $L(M) \leq L(N) + L(M/N)$.*

Demostración: Sean $(Zoc_\alpha(N))_{\alpha \leq L(N)}$ y $(Zoc_\alpha(M/N) = K_\alpha/N)_{\alpha \leq L(M/N)}$ las cadenas de Loewy de N y M/N respectivamente. Primero obsérvese que, por la Proposición 1.28, $Zoc_\alpha(N) \subseteq Zoc_\alpha(M)$ para cada $\alpha \leq L(N)$.

Ahora se probará por inducción transfinita que $K_\alpha \subseteq Zoc_{L(N)+\alpha}(M)$ para cada $\alpha \leq L(M/N)$. Si $\alpha = 0$, podemos notar que $K_0 = N = Zoc_{L(N)}$.

Para el paso inductivo, supóngase que $\alpha > 0$ y, para cada $\beta < \alpha$, se tiene que $K_\beta \subseteq Zoc_{L(N)+\beta}$.

Caso 1. Si α es un ordinal límite, entonces

$$K_\alpha = \bigcup_{\beta \leq \alpha} K_\beta \subseteq \bigcup_{\beta \leq \alpha} Zoc_{L(N)+\beta}(M) \subseteq Zoc_{L(M)+\alpha}(M).$$

Caso 2. Si $\alpha = \beta + 1$, entonces, por hipótesis de inducción, se tiene que $K_\beta \subseteq Zoc_{L(N)+\beta}$. Con esto en mente se puede considerar el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} K_\beta & \longrightarrow & K_\alpha & \longrightarrow & K_\alpha/K_\beta \\ \big\downarrow & & \big\| & & \big\downarrow{\scriptstyle \eta} \\ Zoc_{L(N)+\beta} \cap K_\alpha & \longrightarrow & K_\alpha & \longrightarrow & \frac{K_\alpha}{Zoc_{L(N)+\beta}(M) \cap K_\alpha} \end{array}$$

donde

$$\eta : \frac{K_\alpha}{K_\beta} \to \frac{K_\alpha}{Zoc_{L(M)+\beta} \cap K_\alpha}$$

dada por $\eta(k + K_\beta) = k + (Zoc_{L(M)+\beta}(M) \cap K_\alpha)$ es un epimorfismo. Además, como

$$\frac{K_\alpha}{Zoc_{L(M)+\beta}(M) \cap K_\alpha} \cong \frac{K_\alpha + Zoc_{L(N)+\beta}(M)}{Zoc_{L(N)+\beta}(M)},$$

y K_α / K_β es semisimple, se concluye que

$$\frac{K_\alpha + Zoc_{L(N)+\beta}(M)}{Zoc_{L(N)+\beta}(M)}$$

es semisimple, es decir, $K_\alpha \subseteq K_\alpha + Zoc_{L(M)\beta}(M) \subseteq Zoc_{L(M)+\alpha}(M)$.

Finalmente, nótese que $M \subseteq K_{L(M/N)} \subseteq Zoc_{L(N)+L(M/N)}(M)$ y así $Zoc_{L(N)+L(M/N)}(M) = M$. De lo anterior se deduce que $L(N)+L(M/N) \geq L(M)$.

■

Capítulo 2

Caracterización de anillos NLF

El objetivo de este capítulo es dar una caracterización de los anillos NLF en términos de sus factores de Loewy. Este objetivo se alcanza en el Teorema 2.9.

Se iniciará este capítulo con las siguientes definiciones:

Definición 2.1 Sean R un anillo semiartiniano y $(Zoc_\alpha(R_R))_{\alpha<L(R_R)}$ su cadena de zoclos. A los cocientes $R/Zoc_\alpha(R_R)$ con $\alpha < L(R_R)$, se les llamará *factores de Loewy de* R_R. Nótese que $Zoc_\alpha(R_R)$ es un ideal de R. Entonces los factores de Loewy de R también tienen estructura de anillo.

Definición 2.2 A un anillo semiartiniano R, cuyos factores de Loewy son anillos no singulares, se le llamará *anillo* NLF.[1]

Definición 2.3 Si R es un anillo semiartiniano y M un R-módulo derecho, entonces se denotará con $h(M)$ al mínimo ordinal para el cual $M = M(Zoc_{h(M)}(R_R))$. Dicho ordinal existe porque, al menos, $M = MR = M(Zoc_{L(R)}(R_R))$.

Ahora se probarán algunos resultados previos a nuestro objetivo principal de este capítulo que es el Teorema 2.9.

***Lema* 2.4** *Sean S y T dos ideales mínimos en la retícula de ideales de un anillo R. Si $ST \neq \{0\}$, entonces $S \cong T$.*

Demostración: Supóngase que $ST \neq \{0\}$. Entonces existen $s \in S$ y $t \in T$ tales que $st \neq 0$. Defínase $f : T \to S$ como $f(x) = sx$. Nótese que f es un homomorfismo

[1] Las siglas NLF provienen de las letras iniciales de “Nonsingular Loewy Factors”.

no cero de R-módulos derechos. Además, al ser S y T ideales derechos mínimos, se tiene que f es un isomorfismo de R-módulos derechos. ■

Para cada anillo R y cada R módulo derecho M se define a $h(M)$ como el mínimo ordinal (si éste existe) tal que $M = MZoc_{h(M)}(R_R)$. Nótese que $h(M)$ existe exactamente cuando R es semiartinano derecho y que si M es finitamente generado, entonces $h(M)$ no es un ordinal límite.

***Lema* 2.5** *Sean R un anillo semiartiniano, S un R-módulo derecho simple y $h(S) = \alpha + 1$. Entonces*

a) $Hom_R(S, R/Zoc_\alpha(R_R)) \neq \{0\}$*;*

b) *S es un $(R/Zoc_\alpha(R_R))$-módulo derecho proyectivo;*

c) $Hom_R(S, R/Zoc_\beta(R_R)) = \{0\}$*, para cada $\beta > \alpha$.*

Demostración: Para probar el inciso a), se va a definir un epimorfismo,

$$f : \frac{Zoc_{\alpha+1}(R_R)}{Zoc_\alpha(R_R)} \to S,$$

que se escinde. Tómese $x \in S$ tal que $x \neq 0$, y defínase a f como

$$f(l + Zoc_\alpha(R_R)) = xl.$$

Para ver que esta asignación es una función, tómese $l + Zoc_\alpha(R_R)$ y $l' + Zoc_\alpha(R_R)$ elementos de $Zoc_{\alpha+1}(R_R)/Zoc_\alpha(R_R)$ tales que $l + Zoc_\alpha(R_R) = l' + Zoc_\alpha(R_R)$. Entonces $l - l' \in Zoc_\alpha(R_R)$ y, por hipótesis y el hecho de que S es simple, se sigue que $S(Zoc_\alpha(R)) = \{0\}$; en consecuencia $x(l - l') = 0$ y, así, $xl = xl'$. Por lo tanto f está bien definida y es distinta de la función cero. Nótese que f es un homomorfismo y, además, es un epimorfismo ya que S es un módulo simple. Ahora, como $Zoc_{\alpha+1}(R_R)/Zoc_\alpha(R_R)$ es semisimple, el epimorfismo f se escinde; es decir, existe un homomorfismo

$$h : S \to \frac{Zoc_{\alpha+1}(R_R)}{Zoc_\alpha(R_R)}$$

tal que $f \circ h = 1_S$ y $h \in Hom_R(S, R/Zoc_\alpha(R_R))$. Nótese que al ser f es distinto del homomorfismo cero, h es un homomorfismo distinto de cero. Por lo tanto $Hom_R(S, R/Zoc_\alpha(R_R)) \neq \{0\}$. Lo cual prueba a).

Para probar el inciso b), supóngase que T es un ideal derecho mínimo de $R/Zoc_\alpha(R_R)$ que no es isomorfo a S. Por el Lema 2.4, $ST = \{0\}$; gracias a esta observación y el hecho de que $S(Zoc_{\alpha+1}(R_R)) = S$, se puede probar que, si K es la componente S-homogénea de $R/Zoc_{\alpha}(R_R)$, entonces $K^2 = K$. Por lo tanto, el Teorema 1.27 garantiza que S es proyectivo como $R/Zoc_{\alpha}(R_R)$-módulo. Lo cual prueba b).

Finalmente, para el inciso c), supóngase que existe un ordinal $\beta > \alpha$ tal que $Hom_R(S, R/Zoc_{\beta}(R_R)) \neq \{0\}$; es decir, existe un R-homomorfismo no cero $g : S \to R/Zoc_{\beta}(R_R)$. Aplicando el tercer teorema de isomorfismos, la sucesión

$$0 \longrightarrow \frac{Zoc_{\beta}(R_R)}{Zoc_{\alpha}(R_R)} \xrightarrow{\ i\ } R/Zoc_{\alpha}(R_R) \xrightarrow{\ \eta\ } R/Zoc_{\beta}(R_R) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de $R/Zoc_{\alpha}(R_R)$-módulos. Como $S(Zoc_{\alpha}(R_R)) = 0$, puede dársele estructura de $R/Zoc_{\alpha}(R_R)$-módulo a S; más aún, g es un homomorfismo de $R/Zoc_{\alpha}(R_R)$-módulos. Entonces, por el inciso b), existe un homomorfismo no cero $\overline{g} : S \to R/Zoc_{\alpha}(R_R)$ tal que $\eta \circ \overline{g} = g$. Como S es un módulo simple, se tiene que $0 = \eta \circ \overline{g} = g \neq 0$. Esto, claro, es una contradicción. Por lo tanto $Hom_R(S, R/Zoc_{\beta}(R_R)) = 0$ para cada $\beta > \alpha$. ■

Es posible que para un R-módulo derecho simple S, con $h(S) = \alpha+1$, existan un ordinal $\beta < \alpha$ y un homomorfismo no cero $f : S \to R/Zoc_{\beta}(R_R)$. A continuación se dará un ejemplo de ello.

Ejemplo 2.6 Sean p un número primo y el anillo $R = Z_{p^n}$, donde $n \geq 1$. Como R_R es un anillo artiniano, por el Corolario 1.35, R_R es un anillo semiartiniano, cuya cadena de zoclos coincide con su retícula de submódulos; es decir

$$\begin{aligned} Zoc_0(R_R) = \{0\} \subseteq Zoc_1(R_R) = p^{n-1}\mathbb{Z}_{p^n} \subseteq ... \\ \subseteq Zoc_{n-1}(R_R) = p\mathbb{Z}_{p^n} \subseteq \mathbb{Z}_{p^n}. \end{aligned}$$

Ahora, si S es un R-módulo simple, entonces $S \cong R/I$, donde I es un ideal máximo de R; en consecuencia, $\mathbb{Z}_{p^n}$**-Simp** $= \{(\mathbb{Z}_{p^n}/p\mathbb{Z}_{p^n}) \cong \mathbb{Z}_p\}$. Por lo tanto S es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ y, así, $Hom_R(S, R/Zoc_{\beta}(R)) \neq \{0\}$. para cada $\beta < n$.

El ejemplo anterior puede ser generalizado para anillos conmutativos que son artinianos y locales.

Definición 2.7 Sea R un anillo conmutativo. Se dice que R es un *anillo local* si R contiene solamente un ideal máximo.

Ejemplo 2.8 Si R es un anillo conmutativo artiniano y un anillo local entonces, para cada ordinal α, se tiene que

$$Hom_R(S, R/Zoc_{\alpha}(R_R)) \neq \{0\}.$$

En el siguiente teorema se verá que los anillos NLF están caracterizados por el hecho de que cada módulo derecho simple se aplica no trivialmente sobre un único factor de Loewy.

***Teorema* 2.9** *Sea R un anillo semiartiniano derecho, y sea $(L_\alpha)_{\alpha\leq\xi+1}$ su cadena de zoclos con $\xi+1 = L(R_R)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *R es un anillo NLF.*

b) *$L_\alpha = (L_\alpha)^2$ para cada $\alpha \leq \xi + 1$.*

c) *${}_R(R/L_\alpha)$ es plano para cada $\alpha \leq \xi + 1$.*

d) *Para cada R-módulo M y cada cada R-módulo derecho simple S, se tiene que*

$$Hom_R(S, M/Zoc_\alpha(M)) \neq \{0\}$$

para, a lo más, un ordinal α.

e) *Para cada $\alpha < \xi + 1$ y para cada R-módulo derecho simple S, se tiene que*

$$Hom_R(S, R/L_\alpha) \neq \{0\}$$

si y sólo si $h(S) = \alpha + 1$.

f) *Para cada $x \in R$, se tiene que $h(xR) = mín\{\alpha \leq \xi + 1 : x \in L_\alpha\}$.*

Demostración: $a) \Rightarrow c)$. La prueba de esta implicación se hará por inducción sobre α. Como $L_1 = Zoc(R_R)$ es un ideal bilateral y, por hipótesis, R es no singular, entonces, por el Corolario 1.26, $L_1 = \mathbf{Tr}_{\mathcal{A}}(R)$ para algún $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{Prosimp}_R$. Entonces, por el Teorema 1.27, ${}_R(R/L_1)$ es plano.

Ahora supóngase que $1 < \alpha < \xi + 1$ y que ${}_R(R/L_\beta)$ es plano para cada $\beta < \alpha$.

Caso 1. Supóngase que $\alpha = \beta + 1$ para algún ordinal β. Por $a)$, R/L_β es un anillo no singular. Por lo tanto L_α/L_β es no singular y semisimple como R/L_β-módulo. Por lo tanto, por el Teorema 1.27, se tiene que

$$R/L_\alpha \cong (R/L_\beta)/(L_\alpha/L_\beta)$$

es plano como R/L_β-módulo izquierdo. Por la Proposición 1.12, se puede concluir que R/L_α es plano como R-módulo izquierdo, ya que R/L_β es plano como R-módulo izquierdo.

Caso 2. Supóngase que α es un ordinal límite y sea $x \in L_\alpha$. Entonces $x \in L_\beta$ para algún $\beta < \alpha$. Por hipótesis de inducción, R/L_β es un R-módulo izquierdo plano y, así, por el inciso $c)$ de la Proposición 1.11, se tiene que $x \in xL_\beta \subseteq xL_\alpha$.

Nuevamente por el inciso c) de la Proposición 1.11, se concluye que ${}_R(R/L_\alpha)$ es plano.

$c) \Rightarrow b)$ Esta implicación es clara tomando en cuenta el Teorema 1.27.

$b) \Rightarrow a)$ Sea $\alpha \leq \xi + 1$. Por $b)$ $L_{\alpha+1} = (L_{\alpha+1})^2$. Entonces

$$\left(\frac{L_{\alpha+1}}{L_\alpha}\right)^2 = \frac{L_{\alpha+1}}{L_\alpha}.$$

Por el Teorema 1.27, $L_{\alpha+1}/L_\alpha$ es proyectivo como R/L_α- módulo, donde $(R/L_\alpha)_{R/L_\alpha}$ es un anillo semiartiniano; de hecho es semiartiniano como R-módulo. Entonces, por el Corolario 1.33, $(L_{\alpha+1}/L_\alpha)_R \subseteq^{es} (R/L_\alpha)_R$. Por lo tanto $(R/L_\alpha)_R$ es no singular ya que la clase de módulos no singulares es cerrada bajo extensiones esenciales (Proposición 1.19).

$d) \Rightarrow e)$. Sean S un R-módulo derecho simple y $h(S) = \alpha + 1$. Por el Lema 2.5, $Hom_R(S, R/L_\alpha) \neq \{0\}$ y, por $d)$, $Hom_R(S, R/L_\beta) = \{0\}$ para cada $\beta \neq \alpha$.

$e) \Rightarrow a)$. Sean $\alpha \leq \xi + 1$ y S un submódulo simple de $L_{\alpha+1}/L_\alpha$. Como $h(S) = \alpha + 1$, por el Lema 2.5, se tiene que S es proyectivo como R/L_α-módulo; más aún, S es proyectivo como R-módulo; en consecuencia $L_{\alpha+1}/L_\alpha$ es no singular. Por lo tanto $L_{\alpha+1}/L_\alpha \subseteq^{es} R/L_\alpha$ ya que R/L_α es un anillo semiartiniano y, por la Proposición 1.19, R/L_α es no singular.

$c) \Rightarrow f)$ Para esta implicación basta probar que si $x \in R$ y $\alpha \leq \xi + 1$, entonces $x \in L_\alpha$ si y sólo si $xR = xL_\alpha$. Supóngase que $xR = xL_\alpha$. Como ${}_R(R/L_\alpha)$ es plano, por el inciso c) de la Proposición 1.11, se tiene que $xL_\alpha = L_\alpha$. Por lo tanto $xR = xL_\alpha = L_\alpha$. Ahora, supóngase que $x \in L_\alpha$ y obsérvese que $xR \supseteq xL_\alpha$. Como ${}_R(R/L_\alpha)$ es plano, existe $y \in L_\alpha$ tal que $x = xy$. Entonces, si $xr \in xR$, se puede notar que $xr = xyr \in xL_\alpha$. Por lo tanto $xR \subseteq xL_\alpha$ y, así, $xR = xL_\alpha$.

$f) \Rightarrow c)$. Sean $\alpha \leq \xi + 1$ y $x \in L_\alpha$. Por $f)$ $h(xR) \leq \alpha$. En consecuencia $xR = (xR)L_\alpha = xL_\alpha$. Por lo tanto $x \in xL_\alpha$ y, así, por la Proposición 1.11, ${}_R(R/L_\alpha)$ es un módulo plano.

$b) \Rightarrow d)$. Sea α el mínimo ordinal tal que $Hom_R(S, M/Zoc_\alpha(M)) \neq \{0\}$. Vamos a probar que para cada $\beta > \alpha$, se tiene que

$$Hom_R(S, M/Zoc_\beta(M)) = \{0\}. \tag{2.1}$$

Nótese que

$$M/Zoc_{\alpha+1}(M) \cong \frac{M/Zoc_\alpha(M)}{Zoc(M/Zoc_\alpha(M))}.$$

De la observación anterior podemos deducir que, para probar la Igualdad (2.1), basta probar que si S es un submódulo simple de un R-módulo derecho N, entonces para cualquier submódulo A de M que contenga a $Zoc(N)$ se tiene que $Hom_R(S, N/A) = \{0\}$. Si se supone lo contrario, existe un submódulo A, de N, que contiene a $Zoc(N)$ tal que $Hom_R(S, N/A) \neq 0$. Entonces existe un submódulo B, de N, que contiene a A y una sucesión exacta de R-módulos derechos:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } B \xrightarrow{\ \eta\ } S \longrightarrow 0. \tag{2.2}$$

donde i es la inclusión natural y η es la proyección canónica. Nótese que $h(S) = \gamma + 1$ para algún ordinal γ. Debido a que $L_\alpha = (L_\alpha)^2$, $\mathbf{Mod}_{R/L_\alpha}$ es una clase de torsión hereditaria. El radical exacto izquierdo asociado a esta clase está dado por el funtor que se calcula $X_R \mapsto l_X(L_\alpha)$. Por lo tanto este radical induce la siguiente sucesión exacta de R/L_α-módulos:

$$0 \longrightarrow l_A(L_\alpha) \longrightarrow l_B(L_\alpha) \longrightarrow S \longrightarrow 0.$$

Esta sucesión se escinde pues S es proyectivo como R/L_α-módulo (Lema 2.5). Como consecuencia la sucesión (2.2) se escinde y, así, $B = A \oplus S$. Esto contradice el hecho de que $Zoc(A) = Zoc(N) = Zoc(B)$. ■

Capítulo 3

Algunos ejemplos interesantes

Este capítulo está dividido en tres secciones. En las dos primeras se dan ejemplos de anillos con características particulares y se prueba que son anillos NLF. En la tercera sección se da un ejemplo de un anillo R que es NLF derecho e izquierdo y que contiene un ideal I tal que R/I no es un anillo NLF derecho ni izquierdo.

3.1. Un anillo regular y semiartiniano es NLF

Los ejemplos que se consideran en esta sección son los anillos semiartinianos que son regulares en el sentido de Von Neumann.

***Lema* 3.1** *Si R es un anillo regular, entonces es no singular.*

Demostración: Si $x \in Z(R_R)$ es un elemento no cero, entonces $r_R(x) \subseteq^{es} R$ y $xR \neq \{0\}$. Como R es un anillo regular existe un elemento idempotente no cero e tal que $xR = eR$. Como $r_R(x) \subseteq^{es} R$, entonces $r_R(x) \cap eR \neq \{0\}$. Sea $es \in eR \cap r_R(x)$. Como $r_R(x) = r_R(e)$, se concluye que

$$0 = e(es) = es.$$

Por lo tanto $x = 0$. Esto, claro, es una contradicción. Así, $Z(R_R) = 0$. ■

Ejemplo 3.2 Sea R un anillo semiartiniano y $(Zoc_\alpha(R_R))_{\alpha \leq L(R_R)}$ su cadena de Loewy. Se probó en el Lema 3.1 que todo anillo regular, en el sentido de Von Neumann, es no singular. De este resultado se sigue que todo factor de Loewy $R/Zoc_\alpha(R_R)$ es no singular. Además, como la condición de ser regular es simétrica, entonces ${}_RR$ es no singular y, en consecuencia, si la cadena de Loewy de ${}_RR$ es $(Zoc_\alpha({}_RR))_{\alpha \leq L({}_RR)}$, entonces los factores de Loewy $R/Zoc_\alpha({}_RR)$ son no singulares. Por lo tanto R es un anillo NLF derecho e izquierdo.

3.2. La clase de los anillos NLF no es cerrada bajo cocientes

Para el análisis de los siguientes ejemplos se necesitará calcular el zoclo de anillos de la forma

$$R = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

donde A y C son anillos dados y ${}_AB_C$ es un bimódulo. Para ello se caracterizará a los ideales izquierdos de R, luego se dirá qué forma tienen los ideales esenciales y, finalmente, se obtendrá $Zoc(R_R)$.

En los siguientes tres resultados A y C denotarán anillos, y ${}_AB_C$ denotará un bimódulo.

***Proposición* 3.3** *Sean* $R = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

a) *Sean M un submódulo de $(B \oplus C)_C$ y K un ideal derecho de A tal que AB es un submódulo de M. Entonces P es un ideal derecho de R si y sólo si* $P = \left(\begin{matrix} K \\ 0 \end{matrix} \ M \right)$.

b) *Sean N un submódulo de ${}_A(A \oplus B)$ y L un ideal izquierdo de C tal que BC es un submódulo de N. Entonces P es un ideal izquierdo de R si y sólo si* $P = \left(\begin{matrix} M \\ 0 \quad L \end{matrix} \right)$.

Demostración: a). Supóngase que $P = \left(\begin{matrix} K \\ 0 \end{matrix} \ M \right)$. Sean $\overline{x} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in R$ y $\overline{p} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in P$. Nótese que P es un subgrupo con la suma de matrices. Además $\overline{px} = \begin{pmatrix} ax & ay + bz \\ 0 & cz \end{pmatrix} \in R$, donde $ax \in K$, y $ay, (b, c)z \in M$. Por lo tanto P es un ideal derecho de R.

Ahora, supóngase que P es un ideal derecho de R. Como $P \cap \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ es cerrado bajo la multiplicación por elementos de $\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, entonces $P \cap \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \ M \right)$ para algún submódulo M, de $(B \oplus C)_C$. De manera análoga $P \cap \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es cerrado bajo la multiplicación por elementos de $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; es decir $P \cap \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde K es un ideal derecho de A. Además como P es cerrado bajo multiplicaciones por la derecha de elementos de $\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces KB es un submódulo de M. Finalmente, nótese que

$$\begin{aligned} P = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\subseteq P \cap \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P \cap \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \subseteq P. \end{aligned}$$

Por lo tanto $P = \begin{pmatrix} K \\ 0 & M \end{pmatrix}$.

b). La prueba de esta inciso es análoga a la de a). ■

***Proposición* 3.4** *Sea* $R = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ *un anillo. Entonces*

a) Un ideal derecho P, de R, es esencial si y sólo si contiene un ideal de la forma $\begin{pmatrix} I & J \\ 0 & K \end{pmatrix}$ donde K es un ideal derecho esencial de C, $J \subseteq^{es} B_C$ e I es un ideal derecho contenido esencialmente en $l_A(B)$.

b) Un ideal izquierdo P, de R, es esencial si y sólo si contiene un ideal de la forma $\begin{pmatrix} I & J \\ 0 & K \end{pmatrix}$ donde I es un ideal izquierdo esencial de A, $J \subseteq^{es} {}_AB$ y K es un ideal izquierdo contenido esencialmente en $r_C(B)$.

Demostración: a). Supóngase que P es un ideal derecho contenido esencialmente en R. Por la Proposición 3.3, $P = \begin{pmatrix} I' \\ 0 & M \end{pmatrix}$, donde M es un submódulo de $(B \oplus C)_C$ e I' es un ideal derecho de A tal que $I'B$ es un submódulo de M. Como $P\begin{pmatrix} 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \neq \{0\}$ para cada submódulo $T \subseteq (B \oplus C)_C$, entonces M está contenido de manera esencial en $(B \oplus C)_C$. Por lo tanto $J = M \cap B$ está contenido esencialmente en B_C; del mismo modo $K = M \cap C$ está contenido esencialmente en C_C. Ahora, nótese que $\begin{pmatrix} l_A(B) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es un ideal derecho de R. Entonces $P \cap \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \{0\}$ para cada ideal derecho L contenido en $l_A(B)$. Se puede notar que $I = I' \cap l_A(B)$ es un ideal derecho contenido esencialmente en $l_A(B)$. Por lo tanto P contiene una ideal de la forma buscada.

Recíprocamente, si se considera un ideal derecho de la forma $\begin{pmatrix} I & J \\ 0 & K \end{pmatrix}$, se puede notar que este ideal está contenido esencialmente en R. Por lo tanto cualquier ideal P que contenga a un ideal de esta forma es un ideal esencial de R.

b) La prueba de este inciso se sigue de manera análoga a a). ■

De la proposición anterior se sigue de forma inmediata el siguiente corolario:

***Corolario* 3.5** *Si* $R = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ *es un anillo, entonces*

a) $Zoc(R_R) = \begin{pmatrix} Zoc(l_A(B)) & Zoc(B_C) \\ 0 & Zoc(C_C) \end{pmatrix}$. *(si* B *es un* A*-módulo fiel, entonces* $Zoc(R_R) = \begin{pmatrix} 0 & Zoc(B_C) \\ 0 & Zoc(C_C) \end{pmatrix}$*).*

b) $Zoc({}_RR) = \begin{pmatrix} Zoc({}_AA) & Zoc({}_AB) \\ 0 & Zoc(r_C(B)) \end{pmatrix}$ *(si* B *es un* A*-módulo fiel, entonces* $Zoc({}_RR) = \begin{pmatrix} Zoc({}_AA) & Zoc({}_AB) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*).*

Como se había mencionado anteriormente, el zoclo del anillo de matrices de la forma descrita anteriormente será fundamental en el siguiente ejemplo. En este ejemplo se verá que la clase de los anillos NLF derechos no es cerrada bajo anillos cocientes.

Ejemplo 3.6 *Existe un anillo* NLF *izquierdo y derecho, que es artiniano izquierdo y derecho, y contiene un ideal* I *tal que* R/I *no es* NLF *izquierdo y no es* NLF *derecho.*

Demostración: Sea F un campo. Considérese el anillo de matrices $R = \mathbb{UT}_3(F)$ y el ideal

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces el anillo R/I es isomorfo al anillo

$$S = \begin{pmatrix} F & F & 0 \\ 0 & F & F \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix},$$

Por el Corolario 3.5, se tiene que

1. $Zoc(S_S) = \begin{pmatrix} 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$ y

2. $Zoc(S_S)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} \neq Zoc(S_S)$.

Por lo tanto $R/I \cong S$ no es un anillo NLF derecho. De manera análoga se muestra que R/I no es un anillo NLF izquierdo. ■

3.3. Un anillo semihereditario y semiartiniano es un anillo NLF

En [15] Nastasescu probó que los anillos que son hereditarios derechos y semiartinianos derechos, son también anillos NLF. En esta sección se verá que, de hecho, todos los anillos que son semihereditarios derechos y semiartinianos son anillos NLF.

Definición 3.7 Se dice que un anillo R es *hereditario derecho* (*semihereditario derecho*) si cada ideal derecho (finitamente generado) es proyectivo como R-módulo derecho.

***Lema* 3.8** *Si R es un anillo semihereditario derecho (hereditario), e I es un ideal bilateral idempotente de R, entonces (R/I) es un anillo semihereditario derecho (hereditario).*

Demostración: Sea J un ideal derecho finitamente generado de R/I. Entonces

$$J \cong \frac{A+I}{I} \cong \frac{A}{I \cap A}$$

para un ideal finitamente generado A, de R. Sean $f : M \to N$ y $g : A/(I \cap N) \to N$ un R/I-epimorfismo y un (R/I)-homomorfismo respectivamente. Si $p : A \to A/(I \cap A)$ es el epimorfismo canónico, como A es proyectivo como R-módulo derecho, existe un R-homomorfismo $h : A \to M$ tal que

$$f \circ h = g \circ p. \tag{3.1}$$

Dado que $I^2 = I$, por el Teorema 1.27, ${}_R(R/I)$ es un módulo plano. Entonces, por la Proposición 1.11, se tiene que $A \cap I = AI$. Por lo tanto si $x \in A \cap I$, entonces $x = ai$ con $a \in A$ e $i \in I$; así

$$h(x) = h(ai) = h(a)i = 0.$$

Por lo tanto $A \cap I \subseteq nuc(h)$. Por lo tanto existe un R- homomorfismo $k : A/(A \cap I) \to N$ tal que $h = k \circ p$. De esta observación y de la ecuación (3.1) se sigue que

$$g \circ p = f \circ h = f \circ k \circ h;$$

en consecuencia $g = f \circ k$. Por lo tanto $A/(I \cap A) \cong J_{R/I}$ es proyectivo. ■

***Lema* 3.9** *Si R es un anillo semihereditario derecho, entonces R es no singular.*

Demostración: Sea $x \in Z(R_R)$ y consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow r_R(x) \longrightarrow R \longrightarrow xR \longrightarrow 0.$$

Como R es semihereditario, xR es proyectivo. Entonces la sucesión anterior se escinde y, en consecuencia, $r_R(x)$ es un sumando directo de R. Como $r_R(x) \subseteq^{es} R$, entonces $xR = 0$. Por lo tanto $x = 0$ y, así, $Z(R_R) = 0$. ■

***Proposición* 3.10** *Si R es un anillo semihereditario derecho y un anillo semiartiniano derecho, entonces R es un anillo NLF derecho.*

Demostración: Sea $(L_\alpha)_\alpha$ la cadena de Loewy del anillo R. En el Teorema 2.9 vimos que R es un anillo NLF si y sólo si $L_\alpha = L_\alpha^2$ para cada ordinal α. Entonces para probar que R es un anillo NLF, basta probar, por inducción, que $L_\alpha = L_\alpha^2$ para cada ordinal α. Para $\alpha = 1$, como R es semihereditario, por el Lema 3.9, $L_1 = Zoc(R_R)$ es no singular. Como L_1 es semisimple, entonces $L_1 = \mathbf{Tr}_{\mathcal{A}}(R)$ para algún subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{Prosimp}_R$ y, por el Teorema 1.27, se concluye que $L_1 = L_1^2$. Sea $\alpha > 1$ y supongamos que para cada $\beta < \alpha$ se tiene que $L_\beta = L_\beta^2$.

Caso 1. Si α es un ordinal límite, por la hipótesis de inducción, es fácil notar que $L_\alpha = L_\alpha^2$.

Caso 2. Si $\alpha = \beta + 1$, por el Lema 3.8, R/L_β es semihereditario y, por el Lema 3.9, es no singular. Por lo tanto $L_\alpha/L_\beta = \mathbf{Tr}_{\mathcal{A}}(R)$ para algún subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{Prosimp}$. Por lo tanto, por el Teorema 1.27, $L_\alpha = L_\alpha^2$.

Por lo tanto R es un anillo NLF. ■

Capítulo 4

Dos construcciones de anillos NLF

Camillo y Fuller probaron en [8] que si R_R es un anillo semiartiniano con longitud de Loewy finita n, entonces ${}_RR$ también es semiartiniano y con longitud de Loewy no mayor a $2^n - 1$; sin embargo, no se conoce un ejemplo de un anillo semiartiniano R tal que $L(R_R) = n$ y $L({}_RR) = 2^n - 1$ para algún número natural n. Con la primera construcción de este capítulo, se dará un ejemplo de un anillo NLF izquierdo y derecho tal que $L(R_R) = n$ y $L({}_RR) = 2n - 1$.

4.1. Primera construcción

Ejemplo 4.1 *Dado un anillo con división D y un entero $n > 0$, existe un anillo NLF derecho e izquierdo R que extiende a D, tal que $L(R_R) = n$ y $L({}_RR) = 2n-1$*

Demostración: Primero tómese un anillo regular y semiartinaiano S con longitud de Loewy n que contenga a D como un subanillo (vea [6, Ejemplo 4.3]). Sea $(L_i)_{0 \le i \le n}$ la cadena de Loewy de S y considérese el anillo

$$R = \begin{pmatrix} D & L_1 & L_2 & \dots & L_{n-2} & L_{n-1} \\ 0 & D & L_2 & \dots & L_{n-2} & L_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & L_{n-2} & L_{n-1} \\ \vdots & & & \ddots & D & L_{n-1} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 & D \end{pmatrix}.$$

Usando inducción y el Corolario 3.5 se obtiene que

$$Zoc_i(R_R) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & L_1 & L_2 & \dots & L_{i-1} & L_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & L_1 & L_2 & \dots & L_{i-1} & L_i \\ \vdots & & & 0 & L_2 & \dots & L_{i-1} & L_i \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & L_{i-1} & L_i \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & L_i \end{pmatrix}.$$

Cuando $1 \leq i \leq n-1$ y $Zoc_n(R_R) = R$. Por el Lado izquierdo se tiene que

$$Zoc_i({}_RR) = \begin{pmatrix} D & L_1 & L_2 & \dots & L_i & L_{i+1} & \dots & L_{n-1} \\ 0 & D & L_2 & \dots & L_i & L_{i+1} & \dots & L_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & D & L_i & L_{i+1} & \dots & L_i \\ \vdots & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

si $1 \leq i \leq n-1$. Entonces $R/Zoc_{n-1}({}_RR) \cong S$ y, por lo tanto, $L({}_RR) = n-1+n = 2n-1$. Ahora, como S es regular, se puede concluir que $Zoc_i(R_R)$ y $Zoc_i({}_RR)$ son idempotentes para cada i, por lo tanto, R es un anillo NLF izquierdo y derecho, por el Teorema 2.9. ■

En la siguiente construcción se verá que es posible dar un anillo NLF derecho e izquierdo con longitudes de Loewy preestablecidas (finita o transfinita). Para esta construcción se necesitarán estudiar algunos aspectos de la *dimensión clásica de Krull* y aspectos de los anillos de matrices con columnas finitas, en las siguientes dos secciones.

4.2. Dimensión clásica de Krull

Dado un conjunto parcialmente ordenado $(I, \leq)$, se denotará por I^{op} al conjunto parcialmente ordenado opuesto a I y por $\leq^{op}$ al orden de I^{op}. Recuérdese que $x \leq^{op} y$ si y sólo si $y \leq x$ en I. Si X es un subconjunto de I, se denotará por $\mathbf{M}(X)$ al conjunto de elementos máximos de X.

Para cada ordinal α se define un subconjunto I^{α}, de I, de la siguiente manera:

$$I^{(0)} = \emptyset$$
$$I^{(\alpha+1)} = I^{(\alpha)} \cup \mathbf{M}(I \setminus I^{(\alpha)}) \text{ para cada } \alpha,$$
$$I^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha}(I^{(\beta)}), \text{ si } \alpha \text{ es un ordinal límite.}$$

Entonces $(I^{(\alpha)})_{0\leq\alpha}$ es una cadena ascendente de subconjuntos de I y existe un ordinal menor ξ tal que $I^{(\xi+1)} = I^{(\xi)}$. A la cadena anterior la llamaremos la *filtración clásica de Krull* del conjunto parcialmente ordenado I. También se puede definir la *filtración clásica dual de Krull* $(I_{(\alpha)})_{0\leq\alpha}$, de I, como $I_{(\alpha)} = (I^{op})^{(\alpha)}$.

Definición 4.2 *Sean I un conjunto parcialmene ordenado y X un subconjunto de I. Se dirá que X es un segmento inicial de I, si para cada $i \in I$ y $j \in X$ tales que $i \leq j$, entonces $i \in X$.*

***Proposición* 4.3** *Para cada ordinal α se tiene que*

1) $I_{(\alpha)}$ es segmento inicial de I.

2) $I^{(\alpha)}$ es segmento inicial de I^{op}.

Demostración: 1). La prueba se hará por inducción transfinita. Para $\alpha = 0$ la afirmación es clara. Ahora, considérese el caso $\alpha = 1$, es decir, $I_{(1)}$ es el conjunto de todos los elementos mínimos de I. Con esta observación se puede concluir que $I_{(1)}$ es un segmento inicial de I.

Ahora, supóngase que $\alpha > 1$ y que para cada $\beta < \alpha$, el conjunto $I_{(\beta)}$ es segmento inicial de I.

Caso 1. Si α es un ordinal límite, entonces, por hipótesis de inducción, $\bigcup_{\beta\leq\alpha} I_{(\beta)} = I_{(\alpha)}$ es un segmento inicial.

Caso 2. Supóngase que $\alpha = \beta + 1$ para algún ordinal β. Entonces $I_{(\alpha)} = I_{(\beta)} \cup \mathbf{M}(I^{op} \setminus I_{(\beta)})$. Sean $i \in I$ y $j \in I_{(\alpha)}$, con $i \leq j$.

Si $j \in I_{(\beta)}$, entonces, por hipótesis de inducción, $i \in I_{(\beta)} \subseteq I_{(\alpha)}$. Si $j \in \mathbf{M}(I^{op} \setminus I_{(\beta)})$, como $i \leq j$ en I, entonces $j \leq^{op} i$ en I^{op}. Si se supone que $i \notin I_{(\alpha)}$, entonces $i \notin I_{(\beta)}$. Por lo tanto $i \in I^{op} \setminus I_{(\beta)}$, y, como j es máximo en $I^{op} \setminus I_{(\beta)}$, se tiene que $i = j \in I_{(\alpha)}$. Esto, claro, es una contradicción. Por lo tanto $I_{(\alpha)}$ es un segmento inicial de I.

La prueba de 2) se hace de manera dual a 1). ■

***Proposición* 4.4** *Para un conjunto parcialmente ordenado I se tiene que*

(1) I satisface la condición descendente de cadena si y sólo si existe un ordinal ξ tal que $I_{(\xi)} = I$.

(2) I satisface la condición ascendente de cadena si y sólo si existe un ordinal ξ tal que $I^{(\xi)} = I$.

Demostración: (1). Supóngase que I satisface la condicion descendente de cadena y que la cadena $(I_{(\alpha)})_{\alpha \geq 0}$ se estabiliza en $I_{(\xi)}$. Si se supone que $I_{(\xi)}$ es un subconjunto propio de I, entonces $I^{op} \setminus I_{(\xi)}$ no contiene elementos máximos. Entonces se puede encontrar una cadena ascendente $x_1 <^{op} x_2 <^{op} ... <^{op} x_n ...$ en I^{op} que no se estaciona; en consecuencia $x_1 > x_2 > ... > x_n > ...$ es una cadena descendente en I que no se estabiliza. Esto contradice la hipótesis. Por lo tanto $I_{(\xi)} = I$.

La otra implicación se hará por inducción. Si $I_{(1)} = I$, entonces cada elemento de I es máximo; en consecuencia todas las cadenas de elementos en I constan de un solo elemento, es decir, I satisface la condición descendente de cadena.

Sea $\alpha > 1$ y supóngase que para cada $\beta < \alpha$ se tiene $I_{(\beta)}$ cumple la condición descendente de cadena.

Caso 1. Si α es un ordinal límite, entonces $I_{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} I_{(\beta)}$; en consecuencia, si $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \geq ...$ es un cadena descendente en $I_{(\alpha)}$, por la Proposición 4.3, podemos suponer que esta cadena está contenida en algún $I_{(\gamma)}$ donde $\gamma < \alpha$ y, así, se estaciona por la hipótesis de inducción.

Caso 2. Supóngase que $\alpha = \beta + 1$ para algún ordinal β, $I_{(\alpha)} = I$ y $x_1 \geq ... \geq x_n \geq ...$ es una cadena descendente contenida en $I_{(\alpha)}$. Si existe un número natural n tal que $x_n \in I_{(\beta)}$, entonces, por la Proposición 4.3, para cada $m > n$, se tiene que $x_m \in I_{(\beta)}$; por lo tanto la cadena $x_1 \geq ... \geq x_n \geq ....$ se estaciona.

Si para cada número natural n, $x_n \in I^{op} \setminus I_{(\beta)}$, entonces x_n es un elemento máximo en $I^{op} \setminus I_{(\beta)}$; en consecuencia $x_n = x_m$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$ y, así, la cadena se estabiliza.

Con lo anterior se puede concluir que para cada ordinal α, el conjunto $I_{(\alpha)}$ cumple la condición descendente de cadena en I y, por lo tanto, I satisface la condición descendente de cadena.

(2). La prueba de este inciso se hace de forma análoga a (1). ■

Definición 4.5 Sea I un conjunto parcialmente ordenado. Si I satisface la condición ascendente de cadena, entonces se llamará *la dimensión clásica de Krull de* I, al menor ordinal ξ tal que $I^{(\xi)} = I$. Si I satisface la condición descendente de cadena se llamará *la dimensión clásica dual de Krull de* I al menor ordinal ξ tal que $I_{(\xi)} = I$.

***Proposición* 4.6** *Dado un conjunto parcialmente ordenado I y un número natural n, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) I satisface la condición descendente de cadena y tiene dimensión clásica dual de Krull igual a n.

(2) I satisface la condición ascendente de cadena y tiene dimensión clásica de Krull igual a n.

(3) I tiene al menos una cadena de longitud n y ninguna que exceda esa longitud.

Demostración: (2) $\Rightarrow$ (1). Esta implicación se probará por inducción. Si $I = I^{(1)}$, entonces los elementos de I son máximos y mínimos en I. Por lo tanto son máximos y mínimos en I^{op}; es decir $I_{(1)} = I$.

Ahora, supóngase que $n \geq 1$ y que para cada conjunto parcialmente ordenado J tal que $J^{(n)} = J$, se tiene que $J_{(n)} = J$. Como $I = I^{(n+1)} = I^{(n)} \cup \mathbf{M}(I \setminus I^{(n)})$, por hipótesis de inducción se tiene que $I = I_{(n)} \cup \mathbf{M}(I \setminus I_{(n)})$. Nótese que para cada $x \in \mathbf{M}(I \setminus I_{(n)})$, x es máximo y mínimo en $I \setminus I_{(n)}$; en consecuencia x es un elemento máximo y mínimo en $I^{op} \setminus I_{(n)}$. Por lo tanto $\mathbf{M}(I \setminus I_{(n)}) = \mathbf{M}(I^{op} \setminus I_n)$ y, así, $I = I_{(n)} \cup \mathbf{M}(I^{op} \setminus I_{(n)}) = I_{(n+1)}$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Se prueba de manera análoga a (2) $\Rightarrow$ (1).

(2) $\Rightarrow$ (3). Supóngase que I tiene dimensión clásica de Krull igual a n. Entonces $I = I^{(n)} = I^{(n-1)} \cup \mathbf{M}(I \setminus I^{(n-1)})$. Sea $x_n \in \mathbf{M}(I \setminus I^{(n-1)})$. Como $x_n \notin \mathbf{M}(I \setminus I^{(n-2)})$ e I satisface la condición ascendente de cadena, existe $x_{(n-1)} \in \mathbf{M}(I \setminus I^{(n-2)})$ tal que $x_{n-1} > x_n$ y, así, se puede definir de manera recursiva, una cadena $x_1 > x_2 > ... > x_n$ donde cada $x_i \in \mathbf{M}(I \setminus I^{(i-1)})$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Ahora, supóngase que existe una cadena de elementos no cero $x_1 < ... < x_m$ con $m > n$, entonces existen x_i y x_j tales que $i < j$, $x_i, x_j \in I^k$ y $x_i, x_j \notin I^{k-1}$. De esto se sigue que $x_i = x_j$. Esto, claro, es una contradicción.

(3) $\Rightarrow$ (2). La prueba se hará por inducción. Si I es un conjunto parcialmente ordenado, tal que existe una cadena de longtud 1 y ninguna cadena tiene longitud mayor que 1, entonces, para cada $x \in I$, x es máximo y mínimo. Por lo tanto $I = \mathbf{M}(I) = I^{(1)}$.

Supóngase que para cada conjunto parcialmente ordenado J tal que contenga una cadena de longitud n y ninguna que exceda esta longitud, se tiene que $J = J^{(n)}$. Sea I un conjunto parcialmente ordenado tal que contiene una cadena de longitud $n+1$ y ninguna que exceda esta longitud. Sea $x_1 < ... < x_{n+1}$ una cadena de longitud $n+1$. Nótese que x_{n+1} es un elemento máximo porque no existen cadenas de longitud mayor que $n+1$. Por lo tanto $x_{n+1} \in \mathbf{M}(I) = I^{(1)}$. Considérese $I \setminus I^{(1)}$ y nótese que $x_1 < ... < x_n$ es una cadena de longitud n contenida en $I \setminus I^{(1)}$. Si se supone que existe una cadena $\{y_1 < ... < y_{n+1}\}$ contenida en $I \setminus I^{(1)}$, como

y_{n+1} no es máximo en I, existe $x \in I$ tal que $y_{n+1} < x$. Por lo tanto la cadena $y_1 < ... < y_{n+1} < x$ es una cadena de longitud $n+2$ en I. Esto contradice la hipótesis. Por lo tanto $I \setminus I^{(1)}$ no contiene cadenas de longitud mayor que n. Por lo tanto, por hipótesis de inducción, $I \setminus I^{(1)}$ tiene dimensión de Krull igual a n. En consecuencia

$$I \setminus I^{(1)} = I^{(n+1)} \setminus I^{(1)};$$

es decir $I = I^{(n+1)}$. ■

4.3. Matrices de columnas finitas

Para un conjunto parcialmente ordenado I y D un anillo con división. Se denotará por $\mathbb{CFM}_I(D)$ al conjunto de funciones $a : I \times I \to D$ para las cuales, dado $i \in I$, se cumple que $a(i,j) \neq 0$ para un número finito de elementos $j \in I$. Se denotará por a_{ij} al elemento $a(i,j)$. A un elemento $a \in \mathbb{CFM}_I(D)$ se le llamará *matriz* y, a un elemento $a_{ij} \in D$, se le llamará *entrada-*(ij) *de la matriz* a.

En este conjunto se definen las siguientes operaciones: dados $a = (a_{ij}), b = (b_{ij}) \in \mathbb{CFM}_i(D)$,

$$(a) + (b) = (c) \quad \text{donde } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{y}$$

$$(a)(b) = (c) \quad \text{donde } c_{ij} = \sum_{k \in I} a_{ik} b_{kj}.$$

La primera operación es llamada *suma* y la segunda es llamada *producto*. Nótese que la operación producto está bien definida ya que, para cada $i \in I$, se tiene que a_{ik} es distinto de cero para un número finito de elementos $k \in I$.

Nótese también que si $I = \{1, ..., n\}$, entonces el anillo $\mathbb{CFM}_I(D)$ coincide con el anillo de matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en un anillo con división D.

Ahora considérese el subconjunto DI, de $\mathbb{CFM}_I(D)$, que consta de todas las matrices a tales que $a_{ii} \neq a_{jj}$ para un conjunto finito de pares $(i,j) \in I \times I$, y a_{ij} es distinto de cero sólo para un número finito de pares $(i,j) \in I \times I$ en los cuales $i < j$. Es fácil notar que el subconjunto DI es un subanillo de $\mathbb{CFM}_I(D)$. Además, si se considera nuevamente el conjunto parcialmene ordenado $I = \{1..., n\}$, entonces DI es el conjunto de matrices triangulares superiores de tamaño $n \times n$.

En lo que sigue $e_{(ij)}$ denotará la matriz cuya entrada-(i,j) es 1 y sus demás entradas son iguales a cero. Nótese que $\{e_{(ii)} : i \in I\}$ es un conjunto de idempotentes primitivos, ortogonales dos a dos, que es completo cuando I es finito.

Para cada subconjunto X, de I, se define el ideal derecho $H(X)$ y el ideal izquierdo $K(X)$ de la siguiente manera:

$$H(X) = \bigoplus\{e_{(ii)}(DI) : i \in X\} \quad \text{y}$$
$$K(X) = \bigoplus\{(DI)e_{(ii)} : i \in X\}.$$

Dados un elemento $a \in DI$ y un elemento $l \in I$, se tiene que, para cada $h, k \in I$

$$e_{(ii)}a = c \quad \text{donde } c_{hk} = \begin{cases} a_{ik} & \text{si } h = i \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad \text{y}$$
$$ae_{(ii)} = d \quad \text{donde } d_{hk} = \begin{cases} a_{hi} & \text{si } k = i \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Usando los cálculos anteriores se puede verificar que

$$ae_{(ii)} \in \bigoplus_{j \leq i}(e_{(jj)})(DI) \quad \text{para cada } i \in I \quad \text{y}$$
$$e_{(ii)}a \in \bigoplus_{j \geq i}(DI)(e_{(jj)}) \quad \text{para cada } i \in I.$$

De las observaciones anteriores se sigue la siguiente proposición:

***Proposición* 4.7** *Sea X un subconjunto de I.*

(a) Si X es un segmento inicial de I, entonces $H(X)$ es un ideal bilateral de DI.

(b) Si X es un segmento inicial de I^{op}, entonces $K(X)$ es un ideal bilateal de DI.

Para cada ordinal α se denotarán por H_α y K_α a los ideales $H(I_\alpha)$ y $K(I^\alpha)$ respectivamente. Nótese que, por las Proposiciones 4.3 y 4.7, H_α y K_α son ideales bilaterales de DI.

Para fines del siguiente resultado, se denotarán por α_0 y β_0 a los siguientes ordinales:

$$\alpha_0 = \text{mín}\{\alpha : I \setminus I_{(\alpha)} \text{ es finito}\} \quad \text{y}$$
$$\beta_0 = \text{mín}\{\alpha : I \setminus I^{(\alpha)} \text{ es finito}\}.$$

Nótese que β_0 (α_0) existe si y sólo si I satisface la condición ascendente (descendente) de cadena; en este caso la dimensión clásica (dual) de Krull de I es β_0 (α_0) si I tiene una cantidad infinita de elementos mínimos (máximos) y, de otra forma, la dimensión es $\beta_0 + n$ ($\alpha_0 + n$), donde n es la dimensión clásica de Krull del conjunto parcialmente ordenado $I \setminus I^{(\beta_0)}$ ($I \setminus I_{(\alpha_0)}$).

***Proposición* 4.8** *Dado un conjunto parcialmente ordenado I y un anillo con división D, usando las notaciones anteriores, se sigue que:*

(a) Para cada ordinal $\alpha \leq \alpha_0$ se tiene que [1]

$$Zoc_\alpha({}_{DI}DI) = H_\alpha. \tag{4.1}$$

(b) Para cada ordinal $\beta \leq \beta_0$ se tiene que [2]

$$Zoc_\alpha(DI_{DI}) = K_\alpha. \tag{4.2}$$

Demostración: Se hará por inducción transfinita la prueba del inciso (b). La prueba del inciso (a) se hace de manera análoga.

Base de inducción. Nótese que la igualdad (4.1) se cumple trivialmente para $\alpha = 0$. Ahora se verá el caso $\alpha = 1$. Nótese que si i es un elemento máximo de I, entonces el ideal derecho

$$e_{(ii)}DI = \{a \in DI : a_{hk} = 0 \text{ si } h \neq i \text{ o } k \neq i\}$$

tiene dimensión 1 como espacio vectorial sobre D. De esto se sigue que es un ideal derecho mínimo de DI. Nótese que

$$K_1 = \bigoplus_{j \in I^{(1)}} e_{jj}DI \subseteq \bigoplus_{j \in I^{(1)}} DIe_{jj}DI;$$

además, como $e_{(jj)}DI \subseteq Zoc(DI_{DI})$ para cada $j \in I^{(1)}$ y $Zoc(DI_{DI})$ es un ideal de DI, entonces

$$DIe_{(jj)}DI \subseteq Zoc(DI_{DI}) \text{ para cada } j \in I^{(1)}.$$

De lo anterior se sigue que $K_1 \subseteq Zoc(DI_{DI})$.

Ahora, para S un ideal derecho simple de DI, obsérvese que existen un elemento $a \in S$ y un elemento $i \in I$ tales que la columna i, de a, es diferente de la columna cero. Se probará que i tiene que ser un elemento máximo de i: supóngase que $j > i$ para algún $j \in I$; entonces $b = ae_{ij}$ es un elemento en S con solamente la columna j diferente de cero. Como S es simple, se tiene que $bDI = S = aDI$; de esto se sigue que existe $c \in DI$ tal que $a = bc$. Si se toma $h \in I$ tal que $a_{hi} \neq 0$, entonces, como $i < j$ y b tiene solamente la columna j distinta de la columna cero, se sigue que

$$0 \neq a_{hi} = \sum_k b_{hk}c_{ki} = b_{hj}c_{ji}.$$

[1]Cuando α_0 no existe, entonces la igualdad (4.1) se da para cada ordinal.
[2]Cuando β_0 no existe, entonces la igualdad (4.2) se da para cada ordinal.

Nótese que $b_{hj}c_{ji} = 0$, ya que $i < j$. Esto, claro, es una contradicción. Por lo tanto, para cada ideal derecho simple S, de DI, $S = e_{(ii)}DI \subseteq K_1$ para algún elemento máximo $i \in I$ y, así, se concluye que $Zoc(DI_{DI}) \subseteq K_1$. Por lo tanto $K_1 = Zoc(DI_{DI})$.

Paso inductivo. Sea $\beta > 0$, supóngase que β_0 no existe o que $\beta \leq \beta_0$, y supóngase que $Zoc_\gamma(DI_{DI}) = K_\gamma$ para cada $\gamma < \beta$.

Caso 1. Si β es un ordinal límite, entonces es fácil notar que

$$Zoc_\beta(DI_{DI}) = \bigcup_{\gamma<\beta} Zoc_\gamma(DI_{DI}) = \bigcup_{\gamma<\beta} K_\gamma = K_\beta.$$

Caso 2. Supóngase que $\beta = \gamma + 1$ para algún ordinal γ, $J = I \setminus I^{(\gamma)}$ y que el conjunto de elementos máximos de J es no vacío ($M(J) \neq \emptyset$). Considérese el idempotente $f \in \mathbb{CFM}_I(D)$ tal que $f_{jj} = 1$ si $j \in J$ y, en las demás entradas, f vale cero. Obsérvese que $fDIf = DIf$ es un subanillo de $\mathbb{CFM}_I(D)$ isomorfo al anillo DJ; además, el homomorfismo $\varphi : DI \to DJ$ dado por $\varphi(a) = af$ es un homomorfismo, de anillos, suprayectivo. También se puede notar que $K_\gamma \subseteq nuc(\varphi)$. Por otro lado, si $a \in nuc(\varphi)$, entonces $a_{jj} = 0$ para cada $j \in J$ y, como J es infinito ya que $\gamma < \beta_0$, se puede concluir que $a \in K_\gamma$. Entonces $nuc(\varphi) = K_\gamma$ y, de acuerdo con la base de inducción, se puede deducir que

$$Zoc(DJ_{DJ}) = \bigoplus\{DJe_{(jj)} : j \in M(J)\}$$

y, en consecuencia,

$$Zoc_\beta(DI_{DI}) = \varphi^{-1}(Zoc(DJ_{DJ})) = K_\beta.$$

■

***Proposición* 4.9** *Dado un conjunto parcialmente ordenado finito I con dimensión clásica de Krull igual a n, entonces*

(a) DI es artiniano y NLF izquierdo y derecho con longitud de Loewy n; además $Zoc_\alpha({}_{DI}DI) = H_\alpha$ cada vez que $0 \leq \alpha \leq n$.

(b) DI es artiniano y NLF izquierdo y derecho con longitud de Loewy igual a n; además $Zoc_\beta(DI_{DI}) = K_\beta$ cada vez que $0 \leq \beta \leq n$.

Demostración: La prueba de (b) se hará por inducción. La prueba de (a) es análoga.

Si I es un conjunto parcialmente ordenado y tiene dimensión clásica de Krull igual a n, entonces, utilizando los mismos argumentos de la demostración de la Proposición 4.8, se prueba que

$$Zoc_\beta(DI_{DI}) = K_\beta$$

cada vez que $0 \leq \beta \leq n$.

Ahora, dado que DI tiene dimensión finita como espacio vectorial sobre D, entonces DI es artiniano derecho e izquierdo. Además, como $K_\beta = K_\beta^2$ para cada ordinal β, entonces por el Teorema 2.9, DI es un anillo NLF derecho. ∎

***Proposición* 4.10** *Sea I un conjunto parcialmente ordenado infinito.*

(a) Si I satisface la condición descendente de cadena, con dimensión clásica dual de Krull igual a ξ, entonces para cada ordinal α con $\alpha_0 < \alpha \leq \xi$ se tiene que

$$Zoc_\alpha({}_{DI}DI) = \{a \in DI : a_{ij} = 0 \quad \textit{para cada } i \in I \setminus I_{(\alpha)}\};$$

además DI es un anillo NLF izquierdo tal que

$$L({}_{DI}DI) = \begin{cases} \xi + 1 & \textit{si } \alpha_0 = \xi, \\ \xi & \textit{si } \alpha_0 < \xi \end{cases}$$

(b) Si I satisface la condición ascendente de cadena, con dimensión clásica de Krull igual a ξ, entonces para cada ordinal β con $\beta_0 < \beta \leq \xi$ se tiene que

$$Zoc_\beta(DI_{DI}) = \{(a \in DI : a_{ij} = 0 \quad \textit{para cadai} \in I \setminus I^{(\alpha)}\}; \tag{4.3}$$

además DI es un anillo NLF izquierdo tal que

$$L(DI_{DI}) = \begin{cases} \xi + 1 & \textit{si } \beta_0 = \xi, \\ \xi & \textit{si } \beta_0 < \xi \end{cases}$$

Demostración: Al igual que en las proposiciones anteriores, se probará solamente el inciso (b). La prueba del inciso (a) es análoga.

Supóngase que I es un conjunto parcialmente ordenado infinito y satisface la condición ascendente de cadena. Entonces $\xi = \beta_0 + n$ para algún número natural n; en particuar, $J = I \setminus I^{(\beta_0)}$ es un conjunto parcialmente ordenado y tiene dimensión clásica de Krull igual a n.

Si $n = 0$, la igualdad (4.3) se cumple trivialmente y $L(DI_{DI}) = \xi + 1$.

Ahora supóngase que $n \geq 1$. Se denotará por f al elemento en DI tal que $f_{(jj)} = 1$ para cada $j \in J$ y, en las demás entradas vale cero. Nótese que existe un homomorfismo inyectivo de anillos $\varphi : D \to DI$ dado de la siguiente manera: $i(x) = e_x$, donde e_x tiene en todas las entradas de la diagonal a x y en las demás entradas cero. Ahora, nótese que $fDIf = DIf$ es isomorfo al anillo DJ y que, para cada $a \in DI$, existen únicos $a' \in K(I)$ y $a'' \in i(D)$ tales que $a = a' + a''$. Entonces es fácil ver que la función $\psi : DI \to DJ \times i(D)$ dada por $\psi(a) = (af, a'')$ es un homomorfismo de anillos suprayectivo cuyo núcleo es $K_{\beta_0} = Zoc_{\beta_0}(DI_{DI})$. Por lo tanto, cada vez que $1 \leq m \leq n$, se tiene que $Zoc_{\beta_0+m}(DI) = \psi^{-1}(Zoc_m(DJ \times i(D)))$. Finalmente, como $Zoc_m(DJ \times i(D))$ es un conjunto parcialmente ordenado finito, se puede aplicar la Proposición 4.9 y obtener la igualdad (4.3); más aún, $L(DI_{DI}) = \beta_0 + n = \xi$. ■

Como un caso particular, si ξ es un ordinal transfinito, entonces $D\xi$[3] es un anillo NLF izquierdo, donde $L({}_{D\xi}D\xi) = \xi + 1$ si ξ es un ordinal límite y $L({}_{D\xi}D\xi) = \xi$ de otra forma. Por el lado derecho, si ξ es un ordinal límite, entonces $Zoc(D\xi_{D_\xi}) = 0$; si $\xi = \eta + n$, donde η es un ordinal límite y n es un entero positivo, entonces se puede calcular que

$$Zoc_{n-1}(D\xi_{D\xi}) \subsetneq Zoc_n(D\xi_{D\xi}) = Zoc_{n+1}(D\xi_{D\xi}) \neq D\xi.$$

En cualquier caso $D\xi$ no es semiartiniano derecho.

En la siguiente y última sección de este capítulo, se construirá un anillo NLF derecho e izquierdo con longitudes de Loewy transfinitas preestablecidas.

4.4. Segunda construcción

Dado un par de conjuntos parcialmente ordenados I y J, se denotará por $I * J$ al conjunto $I \times J$ parcialmente ordenado por la relación

$$(i, j) < (i', j') \quad \text{si y sólo si} \quad i < i' \text{ y } j < j'.$$

***Lema* 4.11** *Sean I y J conjuntos parcialmente ordenados. Entonces,*

(a) Para cada ordinal α se tiene que

$$(I * J)_{(\alpha)} = (I_{(\alpha)} \times J) \cup (I \times J_{(\alpha)}) \text{ y}$$

[3]Se considera a ξ como el conjunto de todos los ordinales menores que ξ bien ordenados por la inclusión.

(b) Para cada ordinal β se tiene que

$$(I * J)^{(\beta)} = (I^{(\beta)} \times J) \cup (I \times J^{(\beta)}). \tag{4.4}$$

Demostración: Se hará la prueba de (b) por inducción. La demostración de (a) se hace de manera análoga.

Note que la igualdad (4.4) se cumple trivialmente para $\beta = 0$. Dado un ordinal $\beta > 0$, supongamos que la igualdad (4.4) se da para cada $\beta < \alpha$.

Caso 1. Si α es un ordinal límite, entonces

$$\begin{aligned}(I * J)^{(\beta)} &= \bigcup_{\gamma<\beta} (I * J)^{(\gamma)} = \bigcup_{\gamma<\beta} (I^{(\gamma)} \times J) \cup (I \times J^{(\gamma)}) \\ &= (I^{(\beta)} \times J) \cup (I \times J^{(\beta)}) = (I * J)^{\beta}.\end{aligned}$$

Caso 2. Si $\beta = \gamma + 1$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}(I * J) &= (I * J)^{(\gamma)} \cup M\big((I \times J) \setminus \big[(I^{(\gamma)} \times J) \cup (I \times J^{(\gamma)})\big]\big) \\ &= (I * J)^{(\gamma)} \cup M\big(\big[(I \setminus I^{(\gamma)}) \times J\big] \cap \big[I \times (J \setminus J^{(\gamma)})\big]\big) \\ &= (I * J)^{(\gamma)} \cup M\big((I \setminus I^{(\gamma)}) \times (J \setminus J^{(\gamma)})\big) \\ &= (I * J)^{(\gamma)} \cup \big[M(I \setminus I^{(\gamma)}) \times (J \setminus J^{(\gamma)})\big] \cup \big[(I \setminus I^{(\gamma)}) \times M(J \setminus J^{(\gamma)})\big] \\ &= \big[\big(I^{(\gamma)} \cup M(I \setminus I^{(\gamma)})\big) \times J\big] \cup \big[I \times \big(J^{(\gamma)} \cup M(J \setminus J^{(\gamma)})\big)\big] \\ &= \big(I^{(\gamma+1)} \times J\big) \cup \big(I \times J^{(\gamma+1)}\big) \\ &= (I * J)^{(\beta)}.\end{aligned}$$

Con lo anterior se completa la prueba de (b). ∎

La descripción anterior de los elementos de la filtración de Krull en el conjunto parcialmente ordenado $(I * J)$ hace posible la siguiente observación:

Observación 4.12 $(I * J)^{(\beta)}$ $\big((I * J)_{(\alpha)} \big)$ es un subconjunto propio de $(I * J)$ justamente cuando $I^{(\beta)}$ $(I_{(\alpha)})$ y $J^{(\beta)}$ $(J_{(\alpha)})$ son subconjuntos propios de I y J respectivamente.

Como consecuencia inmediata del Lema 4.11 y de la Observación 4.12, se tiene el siguiente corolario:

***Corolario* 4.13** *Sean I y J conjuntos parcialmente ordenados.*

(1) Si I satisface la condición ascendente (descendente) de cadena y J no la satisface, entonces $I * J$ satisface la condición ascendente (descendente) de cadena con la misma dimensión clásica (dual) de Krull de I.

(2) *Si I y J satisfacen la condición ascendente (descendente) de cadena con dimensiones clásicas (duales) de Krull ξ y ζ, entonces $(I * J)$ satisface la condición ascendente (descendente) de cadena y tiene dimensión clásica (dual) de Krull igual a* $\min(\xi, \zeta)$.

Finalmente, la siguiente proposición nos da una forma de construir anillo NLF izquierdos y derechos que tiene longitudes de Loewy transfinitas predeterminadas.

***Proposición* 4.14** *Sea D un anillo con división y sean ξ y ζ ordinales transfinitos. Entonces $D(\xi * \zeta^{op})$ es un anillo NLF izquierdo y derecho con longitud de Loewy izquierda ξ o $\xi + 1$, y longitud de Loewy derecha ζ o $\zeta + 1$.*

Demostración: Es una consecuencia directa del Corolario 4.13 y de la Proposición 4.10. ■

Capítulo 5

Algunos aspectos de los anillos NLF

5.1. Anillos semiprimarios, triangulares e I-finitos

En esta sección se probará que en la clase de los anillos NLF, los anillos triangulares, semiprimarios e I-finitos son los mismos. Comenzaremos pues con las definiciones de los anillos antes mencionados.

Definición 5.1 Se dice que un anillo R es *I-finito*, si no continene algún conjunto infinito de elementos idempotentes ortogonales dos a dos.

Definición 5.2 Sean R un anillo y $J(R)$ el radical de Jacobson de R. Decimos que un anillo R es *semiprimario* si $R/J(R)$ es un anillo semisimple y $J(R)$ es un ideal nilpotente.

Definición 5.3 Se dice que un anillo R es un anillo *triangular* si contiene un conjunto completo de idempotentes ortogonales $\{e_1, ..., e_n\}$ tal que cada $e_\alpha R e_\alpha$ es un anillo semisimple y $e_\beta R e_\alpha = 0$ cada vez que $\alpha > \beta$.

Si suponemos que R es un anillo triangular, entonces $R = e_1R \oplus ... \oplus e_nR$. En consecuencia

$$R \cong \begin{pmatrix} End_R(e_1R) & Hom_R(e_1R, e_2R) & \dots & Hom_R(e_1R, e_nR) \\ Hom_R(e_2R, e_1R) & End_R(e_2R) & \dots & Hom_R(e_2R, e_nR) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Hom_R(e_nR, e_1R) & Hom_R(e_nR, e_2R) & \dots & End_R(e_nR) \end{pmatrix}.$$

Nótese que $Hom_R(e_\alpha R, e_\beta R) \cong e_\beta R e_\alpha$. Como $e_\beta R e_\alpha = 0$ cuando $\alpha > \beta$, se puede asegurar que $Hom_R(e_\alpha R, e_\beta R) = 0$ cada vez que $\alpha > \beta$. Con estas observaciones se puede notar que cada anillo triangular R tiene una representación de la forma

$$R = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_2 & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_n \end{pmatrix},$$

donde $A_{\alpha\beta} = e_\beta R e_\alpha$ y $A_\alpha = A_{\alpha\alpha}$.

En el Teorema 5.12, se probará que en la clase de los anillos NLF, los anillos semiprimarios, los anillos triangulares y los I-finitos son los mismos. Todos los resultados previos a este teorema nos permitirán probarlo.

***Proposición* 5.4** *Sean R un anillo y N un ideal derecho mínimo de R. Entonces $N^2 = N$ si y sólo si $N = eR$ para algún elemento idempotente e, de R.*

Demostración: Supóngase que $N = eR$ para algún elemento idempotente e, de R y nótese que $N^2 \subseteq N$. Entonces, basta probar que $N \subseteq N^2$. Si se toma $n \in N$, entonces $n = er$ para algún $r \in R$. Como e es un elemento idempotente, se tiene que $n = er = e(er)$ donde $e \in N$ y $er \in N$. Por lo tanto $N \subseteq N^2$.

Ahora, supóngase que $N^2 = N$. Se verá que $N = eR$ para algún elemento idempotente e, de R. Como $N^2 = N$ y N es un ideal mínimo, existe un elemento no cero $n \in N$ tal que $N = nN$; en particular, existe un elemento no cero $m \in N$ tal que $n = nm$. Obsérvese que $nm^2 = nm$, es decir, $n(m^2 - m) = 0$; entonces, $m^2 - m \in r_R(n)$. Como N es simple, se tiene que $r_R(n) \cap N = 0$. Por lo tanto $m^2 - m = 0$; es decir m es un elemento idempotente de N y, además, $mR = N$. ■

***Proposición* 5.5** *Sea K un ideal contenido en $Zoc(R_R)$ tal que $K = \boldsymbol{Tr}_{\mathcal{U}}(R_R)$ para algún $\mathcal{U} \subseteq$**Simp**-R. Entonces*

i) $K^2 = \boldsymbol{Tr}_{\mathcal{V}}(R_R)$, *donde* $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cap \boldsymbol{Prosimp}_R$ *y*

ii) $K = Z(K_R) \oplus K^2$.

Demostración: Para probar el inciso i) bastará probar que $K^4 = K^2$, pues, si esto sucede, se podrá aplicar el Teorema 1.27 y obtener que $K^2 = \mathbf{Tr}_{\mathcal{W}}(R_R)$ para algún subconjunto $\mathcal{W}$ contenido en $\mathbf{Prosimp}_R$. Con esto se podrá concluir que

$$K^2 \subseteq \mathbf{Tr}_{\mathcal{V}}(R_R) \subseteq (\mathbf{Tr}_{\mathcal{V}})^2 \subseteq K^2.$$

Ahora se procederá a probar la igualdad $K^4 = K^2$. Nótese que, para probar esta igualdad, basta probar que $K^3 = K^2$. Si $K^2 = \{0\}$, el resultado se sigue fácilmente, así que, se supondrá que $K^2 \neq \{0\}$. Nótese que $K^3 \subseteq K^2$. Para probar la otra contención, supóngase que $K^2 \neq \{0\}$ y que $K = \bigoplus_{i\in I} N_i$, donde N_i es un ideal mínimo de R para cada $i \in I$. Sean $x \in N_i$ y $y \in N_j$, donde $i, j \in I$ y $xy \neq 0$. Entonces $N_iN_j = N_i$ por ser N_i y N_j ideales mínimos de R y tener un producto diferente de cero. Con lo anterior se puede notar que

$$N_iN_j^2 = (N_iN_j)N_j = N_iN_j = N_i.$$

Por lo tanto $N_iN_j = N_i = N_iN_j^2$. Como N_i y N_j son ideales mínimos, se concluye que $N_j = N_j^2$. Entonces, por la Proposición 5.4, existe un elemento idempotente, e, de N, tal que $eR = N_j$. Por lo tanto existe $r \in R$ tal que $y = er$; en consecuencia $ey = e^2r = er$, por ser e idempotente. Con lo anterior se puede observar que $xy = xer = xey \in K^3$. Por lo tanto $K^2 \subseteq K^3$ y, así, $K^3 = K^2$.

Ahora, para el inciso ii), obsérvese que, como K^2 es un submódulo de K y K es semisimple, entonces $K = N \oplus K^2$ para algún submódulo N, de K. Como K^2 es la componente proyectiva de K, entonces, el Corolario 1.26 garantiza que K^2 es no singular. Por lo tanto $Z(K) \cap K^2 = \{0\}$. De esto se sigue que $Z(K) \subseteq N$. Además, al ser N singular, $N \subseteq Z(K)$. Por lo tanto $Z(K) = N$ y, así, $K = Z(K) \oplus K^2$. ■

***Corolario* 5.6** *Para un anillo R, la componente proyectiva de $Zoc(R_R)$ está dada por $(Zoc(R_R))^2$.*

***Proposición* 5.7** *Sea K un ideal derecho contenido en $Zoc(R_R)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $(R/K)_R$ *es plano.*

b) Cada ideal derecho mínimo contenido en K está generado por un idempotente.

c) Cada ideal derecho finitamente generado contenido en K está generado por un idempotente.

d) $K \cap J(R) = \{0\}$.

Si cualquiera de estas condiciones ocurre para un ideal K, entonces R/K es plano izquierdo y $K = \boldsymbol{Tr}_{\mathcal{A}}(R_R)$ para algún $\mathcal{A} \subseteq \boldsymbol{Prosimp}_R$.

Demostración: Nótese que la última parte de la proposición se sigue del Teorema 1.27.

Antes de comenzar la prueba de las equivalencias, se escribirá $K = \bigoplus_{i\in I} N_i$, donde N_i es un ideal derecho mínimo de R para cada $i \in I$.

$a) \Rightarrow b)$. Sean N un ideal derecho mínimo contenido en K y $x \in N$ tal que $x \neq 0$. Considérese el ideal izquierdo Rx. Como $(R/K)_R$ es plano, por la Proposición 1.11, se tiene que $Rx = K \cap Rx = KRx \subseteq Kx$. Por lo tanto existe $y \in K$ tal que $0 \neq x = yx$. Por lo tanto existe $i \in I$ tal que $N_i = N_iN \neq \{0\}$; en consecuencia $N_iN^2 = (N_iN)N = N_iN$ y, como N y N_i ideales derechos mínimos, se puede concluir que $N^2 = N$. Con lo anterior y la Proposición 5.4 se sigue el inciso $b)$.

$b) \Rightarrow c)$. La prueba de esta implicación se hará por inducción. Sea H un ideal derecho finitamente generado contenido en K. Nótese que $H = H_1 \oplus ... \oplus H_n$, donde H_i es un ideal derecho mínimo de K para cada $i = 1, ..., n$. Si $n = 1$, entonces, por b), H está generado por un idempotente. Supóngase que $n > 1$ y sea $J = H_1 \oplus ... \oplus H_{n-1} = eR$ con $e = e^2$. Considérese el homomorfismo $\alpha : R_R \to R_R$ dado por $\alpha(r) = (1-e)r$. Como $H_n \nsubseteq J$, se sigue que $\{0\} \neq \alpha(H_n)$. Por lo tanto

$$\{0\} \neq \alpha(H_n) = (1-e)H_n \cong H_n.$$

Además tenemos que

$$eR \oplus (1-e)H_n \cong J \oplus H_n = H.$$

Por lo tanto $(1-e)H_n$ es un ideal mínimo de R contenido en K. Por hipótesis este ideal está generado por un idempotente $f \in K$; es decir $(1-e)H_n = fR$. Sea $g = e + f(1-e) \in H$. Nótese que g es un elemento idempotente y que $gR \subseteq H$. Además, si $x \in H$, entonces $x = ex + (1-e)x$, donde $(1-e)x \in (1-e)H_n = fR$. Por lo tanto $x = ex + f(1-e)x = gx$ y, así, $H \subseteq gR$. Por lo tanto H está generado por un idempotente.

$c) \Rightarrow a)$. Como cada $x \in K$ está contenido en un submódulo finitamente generado de K, por el inciso $c)$, existe un elemento $e \in K$ tal que $x = ex \in Kx$. Por la Proposición 1.11, $(R/K)_R$ es plano.

$b) \Leftrightarrow d)$. Se sigue de la Proposición 5.4. ∎

***Proposición* 5.8** *Para cualquier anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) R satisface la condición de cadena ascendente para sumandos directos derechos.

b) R satisface la condición de cadena descendente para sumandos directos izquierdos.

c) R no contiene conjuntos infinitos de idempotentes ortogonales distintos de cero.

Demostración: $a) \Leftrightarrow b)$. Supóngase que $eR \subsetneq e'R$ ($Re \subsetneq Re'$), donde e, e' son idempotentes. Al tomar los anuladores izquierdos (derechos), se obtiene que $R(1-e) \supseteq R(1-e')$ (y con ideales derechos $(1-e)R \supseteq (1-e')R$). Se puede notar que esta inclusión debe ser estricta ya que, de otro modo, se pueden tomar los anuladores derechos (izquierdos) y obtener que $eR = e'R$ ($Re = Re'$). De estas observaciones se sigue que las condiciones $a)$ y $b)$ son equivalentes.

$a) \Rightarrow c)$. Supóngase que R contiene un conjunto infinito de elementos idempotentes ortogonales. De este conjunto podemos considerar una cantidad numerable, digamos $\{e_1, e_2, ...\}$. Sea $c_n = e_1 + ... + e_n$ para cada $n \geq 1$. Nótese que c_n es idempotente para cada $n \geq 1$. Además

$$c_{n+1}c_n = (e_1 + ... + e_{n+1})(e_1 + ... + e_n) = c_n^2 = c_n$$
$$c_n c_{n+1} = c_n \neq c_{n+1}.$$

De lo anterior se sigue que $c_n R \subsetneq c_{n+1} R$ para cada $n \geq 1$. Esto contradice $a)$.

$c) \Rightarrow b)$. Supóngase que existe una cadena descendente

$$R = B_0 \supsetneq B_1 \supsetneq ...$$

donde cada B_n es un sumando directo de ${}_R R$. Entonces $B_{n-1} = A_n \oplus B_n$ para algunos ideales izquierdos $\{A_n : n \geq 1\}$. Entonces se puede escribir $1 = a_1 + f_1$, donde a_1 y f_1 son idempotentes ortogonales tales que $a_1 R = A_1$ y $f_1 R = B_1$. De la misma forma existen elementos idempotentes ortogonales a_2 y f_2 tales que $a_2 R = A_2$ y $f_2 R = B_2$. Continuando de esta manera, encontramos $A_n = Re_n$ donde $e_n \neq 0$ para cada $n \geq 1$, y

$$1 = e_1 + f_1 = e_1 + e_2 + f_2 = e_1 + ... + e_n + f_n.$$

De esto se sigue que $\{e_1, e_2, ...\}$ es un conjunto infinito de elementos idempotentes ortogonales diferentes de cero. ■

***Teorema* 5.9** *Sean K un ideal bilateral idempotente contenido en $Zoc(R_R)$ y $J(R)$ el radical de Jacobson de R. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) K no contiene conjuntos infinitos de elementos idempotentes ortogonales.

b) $K = Re$ para un idempotente $e \in R$.

c) $(K + J(R))/J(R)$ *es un* R*-módulo derecho finitamente generado.*

Demostración: *a)* $\Rightarrow$ *b)*. La prueba de esta implicación la haremos en varios pasos.

Por la Proposición 5.8 existe un conjunto máximo de elementos idempotentes ortogonales $\{e_1, ..., e_n\}$ contenidos en K. Sea $e = e_1 + ... + e_n$. Nótese que $e^2 = e$ y $K = eR \oplus ((1-e)R \cap K)$.

Paso 1. En este Paso se probará, por doble contención, que

$$K \cap J(R) = \big((1-e)R \cap K\big).$$

Primero se verá que $K \cap J(R) \supseteq \big((1-e)R \cap K\big)$. Para ver esto es suficiente probar que si N es un ideal mínimo de $(1-e)R \cap K$, entonces $N^2 = \{0\}$ (esto se debe a que $J(R)$ contiene a cada ideal nilpotente de R); sin embargo, por la Proposición 5.4, basta probar que si $f \in (1-e)R \cap K$ es un elemento idempotente, entonces $f = 0$. Tómese pues un elemento idempotente $f \in (1-e)R \cap K$ y sea $g = f(1-e)$. Como g un elemento idempotente y, para cada $i \in \{1, ..., n\}$ se tiene que $ge_i = 0$, podemos concluir que $g = 0$, ya que $\{e_1, ..., e_n\}$ es un conjunto máximo de idempotentes ortogonales de K. De lo anterior se sigue que $f = fe$. Finalmente, como $f \in (1-e)R$, exite $r \in R$ tal que $f = (1-e)r$ para algún $r \in R$; en consecuencia

$$f = f^2 = (fe)f = f(ef) = f(e(1-e)r) = 0.$$

Ahora se probará que $K \cap J(R) \subseteq \big((1-e)R \cap K\big)$. Nótese que cada ideal derecho finitamente generado de eR está generado por un elemento idempotente, en consecuencia, por la Proposición 5.7, se tiene que

$$eR \cap J(R) = \{0\}. \tag{5.1}$$

Por lo tanto

$$J(R) \cap K \subseteq \big((1-e)R \cap K\big).$$

De lo anterior se concluye que

$$J(R) \cap K = K \cap (1-e)R. \tag{5.2}$$

Paso 2. En este paso se probará que $eR(1-e) = \{0\}$. Como $K^2 = K$, entonces, por el Teorema 1.27, ${}_R(R/K)$ es un módulo plano y, por la Proposición 1.11, para todo ideal derecho I de R se tiene que $I \cap K = JK$. En particular, para los ideales derechos $eR(1-e)R$ y $(1-e)R$ se tiene que

$$(eR(1-e)R) \cap K = eR(1-e)RK = eR((1-e)R \cap K),$$

y, por las ecuaciones (5.1) y (5.2), se sigue que $eR((1-e)R \cap K) = \{0\}$. Por lo tanto $eR(1-e)R = \{0\}$ y, así, $eR(1-e) = \{0\}$. Esto es lo mismo que

$$er = ere \quad \text{para cada} \quad r \in R. \tag{5.3}$$

Paso 3. En este último paso se probará que para cada ideal mínimo no cero N contenido en K, existe un epimorfismo no cero $\phi : eR \to N$. Supóngase lo contrario: como cada homomorfismo ϕ se calcula como $\phi(er) = nr$ para algún $n \in N$ distinto de cero, entonces $N = nR = \{0\}$ para cada $n \in N$. Esto contradice el hecho de que $N \neq \{0\}$. Por lo tanto existe $\phi : eR \to N$ homomorfismo no cero. Además, por el Teorema 1.27, K es semisimple y proyectivo; en consecuencia N es proyectivo. Por lo tanto el epimorfismo ϕ se escinde; es decir, existe un monomorfismo no cero $\alpha : N \to eR$.

Finalmente, con el homomorfismo α podemos demostrar b). Por la ecuación (5.3), se tiene que

$$\alpha(x) = e\alpha(x) = e\alpha(x)e = \alpha(x)e = \alpha(xe).$$

Por lo tanto $xe = x$. De esta manera $N \subseteq Re$ y, así, $K \subseteq Re$. Con esto se concluye que $K = eR$.

$b) \Rightarrow c)$. Supóngase que $K = Re$ con $e^2 = e$ y sea $f = f^2 \in (1-e)R \cap K$. Entonces $f = fe = (fe)f = (fe)(1-e)f = 0$ y, así, $(1-e)R \cap K \subseteq J(R)$, lo cual implica que

$$eR \cong (K + J(R))/J(R).$$

Por lo tanto $(K + J(R))/J(R)$ es un R-módulo finitamente generado.

$c) \Rightarrow a)$. Si K contiene un conjunto infinito de elementos idempotentes ortogonales, entonces $(K + J(R))/J(R)$, siendo semisimple, no debería ser finitamente generado. ■

Observación 5.10 *En el Teorema 5.9, dado que $K^2 = K$, por el Teorema 1.27, se tiene que $K = \boldsymbol{Tr}_{\mathcal{A}}(R_R)$ para algún subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \boldsymbol{Prosimp}_R$. La condición b), implica que cada módulo simple contenido en $\mathcal{A}$ se aplica no trivialmente sobre $(K + J(R))/J(R)$. Entonces c) implica que $\mathcal{A}$ es finito.*

***Corolario* 5.11** *Para un anillo R tal que $Zoc(R_R)^2 = Zoc(R_R)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $Zoc(R_R)$ no contiene conjuntos infinitos de elementos idempotentes ortogonales.

b) $(Zoc(R_R))^2 = Re$ para algún idempotente $e \in R$.

c) $(Zoc(R_R) + J(R))/J(R)$ *es finitamente generado como R-módulo derecho.*

Demostración: Las condiciones $a)$, $b)$ y $c)$ son equivalentes al tomar $K = Zoc(R_R)$ y aplicar el Teorema 5.9. ■

Teorema 5.12 *Dado un anillo R que es semiartiniano derecho con con una cadena de Loewy $(L_\alpha)_{\alpha>0}$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *R es un anillo NLF derecho e I-finito.*

b) *R es un anillo NLF derecho y triangular.*

c) *R es un anillo NLF derecho y semiprimario.*

d) *R es un anillo NLF derecho y $R/J(R)$ es semisimple.*

e) *Existe un conjunto completo de elementos ortogonales idempotentes $\{e_1, ..., e_n\}$ tal que*

$$L_\alpha = Re_1 \oplus ... \oplus Re_\alpha$$

para cada entero αcon $n > \alpha > 0$ y $R = Re_1 \oplus ... \oplus Re_n$.

Demostración: $a) \Rightarrow e)$ La prueba de esta implicación se hará por recursión. Como R es I-finito, $Zoc(R_R)$ no contiene conjuntos infinitos de elementos idempotentes ortogonales. Además, como R es un anillo NLF, se tiene que $Zoc(R_R)^2 = Zoc(R_R)$. Entonces, por el Corolario 5.11, existe un idempotente e_1 tal que $L_1 = Re_1$. Ahora, para $\beta > 1$, supóngase que se ha definido un conjunto $\{e_1, ..., e_\beta\}$ de elementos idempotentes ortogonales tales que $L_\alpha = Re_1 \oplus ... \oplus Re_\alpha$ para cada $\alpha < \beta$. Si $e = e_1 + ... + e_\beta$, entonces $L_\beta = Re = ReR$ y R/L_β es isomorfo al anillo $S = (1-e)R(1-e) = R(1-e)$. Como S es I-finito y NLF, por el Corolario 5.11, existe un elemento idempotente $e_{\beta+1}$ tal que $Se_{\beta+1} = Zoc(S) \cong L_{\beta+1}/L_\beta$. De hecho $\{e_1, ..., e_{\beta+1}\}$ es un conjunto de idempotentes ortogonales y $L_{\beta+1} = L_\beta \oplus Re_{\beta+1}$.

Ahora, como R es I-finito, existe un número natural n tal que $R = Re_1 \oplus ... \oplus Re_n$.

$e) \Rightarrow b)$ Por el inciso $e)$ existe un elemento idempotente $e_1 \in R$ tal que $Zoc(R_R) = L_1 = Re_1$. Como e_1 es idempotente, se tiene que $R = e_1R \oplus (1-e_1)R$. Como $e_1 \in L_1$, entonces $e_1R \subseteq L_1$ y como todo elemento de L_1 es invariante al multiplicarlo por e_1 por la derecha, se puede concluir que

$$e_1R = e_1Re_1 \subseteq Re_1 = Zoc(R_R)$$

De lo anterior se sigue que e_1Re_1 es un anillo semisimple. Ahora, sean $1 \leq \alpha < n$ y

$$\overline{R} = R/L_\alpha = \frac{R}{Re_1 \oplus ... \oplus Re_\alpha}.$$

Entonces $Zoc(\overline{R}_{\overline{R}}) = \overline{R}\overline{e_{\alpha+1}}$, donde $\overline{e_{\alpha+1}}$ denota la clase de $e_{\alpha+1}$ en $\overline{R}$. Utilizando el argumento anterior se puede concluir que $e_{\alpha+1}Re_{\alpha+1} \cong \overline{e_{\alpha+1}}\overline{R}\overline{e_{\alpha+1}}$ es semisimple. Si $1 \leq \alpha < n$, como $R(e_1 + ... + e_\alpha)$ es un ideal bilateral, se obtiene que $(e_1 + ... + e_\alpha)R(1 - e_1 - ... - e_\alpha) = 0$. Consecuentemente $e_\alpha Re_\beta = 0$ cada vez que $\beta > \alpha$. Por lo tanto R es un anillo triangular.

Finalmente, para terminar de probar esta implicación, hay que probar que R es un anillo NLF; sin embargo, por el Teorema 2.9, basta probar por inducción que $L_\alpha = L_\alpha^2$ para cada $\alpha < n$. Como $Re_1 = L_1 = L_1R = Re_1R$, entonces $Re_1e_1 = Re_1Re_1$, es decir, $L_1 = (L_1)^2$. Ahora supóngase que $k \geq 1$ y que para cada $l < k$ se tiene que $L_l = (L_l)^2$. Si $k \geq n$, entonces $R = L_n = L_k = L_{k+1}$. Por lo tanto $L_{k+1} = (L_{k+1})^2$. Por otro lado, si se supone que $k < n$, entonces, por el inciso e), R/L_k es un anillo tal que $L_{k+1}/L_k = Zoc(R/L_k) = (R/L_k)(e_{k+1} + L_k)$. Entonces por la base de inducción se sigue que $(L_{k+1}/L_k)^2 = L_{k+1}/L_k$ y, así, $(L_{k+1})^2 = L_{k+1}$.

Las implicaciones $b) \Rightarrow c)$ y $c) \Rightarrow d)$ son claras.

$d) \Rightarrow a)$. Nótese que R-**Simp** $= (R/J(R))$-**Simp**. Como $R/J(R)$ es finitamente generado, existen ideales mínimos $S_1, ..., S_n$, de $R/J(R)$ tales que

$$R/J(R) \cong S_1 \oplus ... \oplus S_n.$$

Por lo tanto $(R/J(R))$-**Simp** es finito al igual que R-**Simp**. Del Teorema 2.9 inciso e), se obtiene que $L(R_R)$ es finito. Si se supone que R no es I-finito, entonces existe un número natural n tal que L_{n+1}/L_n tiene una cantidad infinita de idempotentes ortogonales. Además $Zoc(R/L_n) = L_{n+1}/L_n$, $S = R/L_n$ es un anillo NLF y $S/J(S)$ es semisimple y finitamente generado. Entonces $(Zoc(S_S) + J(S_S))/J(S_S)$ es finitamente generado. Esto contradice el Corolario 5.11. Por lo tanto R es I-finito. ∎

5.2. En un anillo NLF los R-módulos derechos simples se autoescinden.

Definición 5.13 Dado un R-módulo derecho simple S, se dirá que S se *autoescinde* si la categoría de R-módulos derechos semisimples S-homogéneos es cerrada bajo extensiones.

***Proposición* 5.14** *Para R un anillo e I un ideal de R. Entonces la clase*

$$\{M \in \boldsymbol{Mod}_R : xI = \{0\},\ \forall\ x \in M\} = \boldsymbol{Mod}_{R/I}$$

es cerrada bajo extensiones si y sólo si $I^2 = I$.

Demostración: Supóngase que $I^2 = I$ y sea

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M/M' \longrightarrow 0\ , \tag{5.4}$$

una sucesión exacta en **Mod**-R tal que $M', (M/M') \in$ **Mod-**(R/I). A continuación se probará que $mI = \{0\}$ para cada $m \in M$. Sea $x \in M$.

Caso 1. Si $x \in M'$, como $M' \in$ Mod-(R/I), entonces $xI = \{0\}$.

Caso 2. si $x \notin M'$, entonces, como $M/M' \in$ **Mod-**R, se tiene que $(m+M')I = \{\overline{0}\}$; es decir, $mI \subseteq M'$. Por lo tanto $\{0\} = (mI)I = mI^2 = mI$.

Con lo anterior se puede concluir que $M \in$ **Mod-**R/I; es decir, **Mod-**R/I es una clase cerrada bajo extensiones.

Ahora supóngase que **Mod-**R/I es una clase cerrada bajo extensiones. Dado que $I^2 \subseteq I$, basta probar que $I \subseteq I^2$. Considérese la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow R/I^2 \longrightarrow R/I \longrightarrow 0.$$

Como $I/I^2, R/I \in$ **Mod-**R/I y **Mod-**R es una clase cerrada bajo extensiones, se tiene que $R/I^2 \in$ **Mod-**R/I; es decir $I = RI \subseteq I^2$. Por lo tanto $I = I^2$. ■

***Proposición* 5.15** *Si R es un anillo NLF, entonces todos los R-módulos derechos simples se autoescinden.*

Demostración: Es suficiente propbar que si S es un R-módulo derecho simple, entonces cada sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow M \longrightarrow S \longrightarrow 0 \tag{5.5}$$

se escinde. Sean $(L_\alpha)_{0\leq\alpha}$ la cadena de Loewy de R_R y $h(S) = \alpha + 1$ para algún ordinal α. Entonces $SL_\alpha = 0$ y, por el Teorema 2.9, $L_\alpha^2 = L_\alpha$. Entonces, por la Proposición 5.14, se tiene que $ML_\alpha = \{0\}$. Con lo anterior se puede concluir que la sucesión 5.5 es exacta en **Mod-**(R/L_α). Como S es proyectivo como R/L_α-módulo (Lema 2.5), entonces la sucesión 5.5 se escinde. ■

5.3. Propiedades del centro de un anillo NLF

En esta sección se analizará el centro de un anillo NLF. Primero se probará que todo anillo conmutativo, inescindible y regular (en el sentido de Von Neumann) es un campo.

Naturalmente la primera definición de esta sección es la de anillo inescindible.

Definición 5.16 Se dice que R es un anillo inescindible si el elemento 1 es el único idempotente central distinto de cero.

***Proposición* 5.17** *Si R es un anillo conmutativo regular e inescindible, entonces R es un campo.*

Demostración: Para probar R es un campo, basta probar que cada elemento no cero a de R tiene inverso multiplicativo. Sea a un elemento no cero de R. Al ser R un anillo regular, existe un elemento $x \in R$ tal que $a = axa = a^2x$. Como ax es un idempotente central y R es inescindible, se concluye que $ax = 1$; es decir, x es un inverso multiplicativo de a. Por lo tanto R es un campo. ■

***Proposición* 5.18** *Si C es un subanillo regular del centro de un anillo semiartiniano derecho R, entonces C es un anillo semiartiniano.*

Demostración: Para probar que C es semiartiniano, se probará que

$$Zoc\big(C/Zoc_\alpha(C)\big) \neq \{0\}$$

para cada ordinal α tal que $Zoc_\alpha(C_C) \subsetneq C_C$. Sea $I = Zoc(C)$. Nótese lo siguiente: como C es regular, entonces R tiene estructura de C-módulo derecho, entonces R_C es plano. En consecuencia, por la Proposición 1.11,

$$I = IC = C \cap IR.$$

Por lo tanto, el anillo regular C/I es isomorfo a $(C + IR)/IR$ (por el segundo teorema de isomorfismo). Además, este último es un subanillo del centro del anillo semiartiniano R/IR. El argumento anterior se puede aplicar para cada ideal de la cadena de Loewy; es decir, $C/Zoc_\alpha(C)$ es un subanillo regular contenido en el centro del anillo semiartiniano $R/Zoc_\alpha(C)R$. De esta forma basta probar que si C es un subanillo regular de un anillo semiartiniano R, entonces C tiene zoclo distinto de cero. Para esto, se puede suponer que $C \cap Zoc(R_R) \neq \{0\}$. Esto se debe a las siguientes observaciones: si $L(R) = \xi$, y $\alpha = \min\{\eta \leq \xi : Zoc_\eta(R_R) \cap C \neq \{0\}\}$, entonces se puede notar que existe un ordinal β tal que $\alpha = \beta + 1$ y, así, identificar a C con un subanillo del anillo semiartiniano derecho $R/Zoc_\beta(R_R)$ y notar que $C \cap Zoc(R/Zoc_\beta(R_R)) \neq \{0\}$. Por esta última observación se puede suponer que $C \cap Zoc(R_R) \neq \{0\}$.

Sean $a \in C \cap Zoc(R_R)$ y $b \in C$ tales que $a \neq 0$ y $aba = a$. Como $a \in C$, entonces $a^2b = a$ y, así, el elemento $e = ab$ es un elemento idempotente central de R. Como $e \in R$, se puede concluir que eR es un anillo semisimple y, además, es un ideal bilateral contenido en $Zoc(R_R)$. Entonces por el Teorema 5.9, eR no contiene conjuntos infinitos de idempotentes ortogonales. De esta observación se sigue que eC no contiene conjuntos infinitos de idempotentes ortogonales; de la Proposición 5.8, existe un subconjunto máximo de idempotentes ortogonales $\{e_1, ..., e_m\}$ tales que $eC = \oplus_{i=1}^m e_i(eC)$ y cada $e_i(eC)$ es un anillo inescindible. Ahora, como eC es regular, cada uno de los anillos $e_i(eC)$ es regular, conmutativo e inescindible, y, por la Proposicón 5.17, $e_i(eC)$ es un campo para cada $i \in \{1, ..., m\}$. Por lo tanto $\{0\} \neq eC \subseteq Zoc(C)$. ■

***Proposición* 5.19** *Dado un anillo R sean $I = \boldsymbol{Tr}_{\boldsymbol{Prosimp}\text{-}R}(R)$ y $a \in Cen(R)$. Entonces $aI = Tr_{\mathcal{A}}(R)$ para algún subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \boldsymbol{Prosimp}_R$.*

Demostración: Supóngase que $I = \bigoplus_{S_\alpha} X_{S_\alpha}$ donde $X_{S_\alpha} = \mathbf{Tr}_{S_\alpha}(R)$, $S_\alpha \in \mathbf{Prosimp}_R$ y S_α es un ideal derecho mínimo de R. Como a es un elemento central de R, entonces $aS_\alpha = (S_\alpha)a$ y, como S_α es un ideal derecho mínimo, se tiene que $(S_\alpha)a = 0$ o $(S_\alpha)a = S_\alpha$; en consecuencia, si $(S_\alpha)a = 0$, entonces $X_\alpha = 0$, y si $(S_\alpha)a = S_\alpha$, entonces $(X_\alpha)a = X_\alpha$. Con estas observaciones se puede concluir que $aI = Ia = \mathbf{Tr}_{\mathcal{A}}(R)$ para algún subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{Prosimp}_R$. ■

***Teorema* 5.20** *Si R es un anillo NLF derecho, entonces $Cen(R)$ es un subanillo regular y semiartiniano de R.*

Demostración: Por la Proposición 5.18, basta probar que $Cen(R)$ es un anillo regular.

Sean $(L_\alpha)_{\alpha \leq \xi}$ la cadena de Loewy de R y $\xi = L(R_R)$ su longitud. Se probará por inducción que si $a \in Cen(R_R)$, entonces para cada $\alpha \leq \xi$

$$aL_\alpha = a^2 L_\alpha. \tag{5.6}$$

Como la igualdad (5.6) se cumple trivialmente para $\alpha = 0$, se supondrá que $\alpha > 0$.

Caso 1. Si α es un ordinal límite, es evidente que $aL_\alpha = a^2 L_\alpha$.

Caso 2. Supóngase que $\alpha = \beta + 1$ para algún ordinal β. Como $L_{\beta+1}/L_\beta$ es el zoclo derecho de R/L_β y es proyectivo por el Corolario 1.26 y el hecho de que R es un anillo NLF derecho. Al escribir $\overline{a} = a + L_\beta$, obtenemos, de la Proposición 5.19, que $\overline{a}(L_{\beta+1}/L_\beta) = Tr_{\mathcal{A}}(R)$, donde $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{Prosimp}_R$. Además, por el Teorema 1.27, se tiene que $\overline{a}(L_{\beta+1}/L_\beta) = [\overline{a}(L_{\beta+1}/L_\beta)]^2 = \overline{a}^2(L_{\beta+1}/L_\beta)$. Por lo tanto

$$aL_{\beta+1} + L_\beta = a^2L_{\beta+1} + L_\beta.$$

Como consecuencia de lo anterior, dado $x \in L_{\beta+1}$, existen $y \in L_{\beta+1}$ y $z \in L_\beta$ tales que $ax = a^2y + z$. De la ecuación anterior se sigue que $a(x - ay) = z$ donde

$$(x - ay) \in L_{\beta+1} \text{ y } z \in L_\beta. \tag{5.7}$$

Como R es un anillo NLF, por el Teorema 2.9 se tiene que ${}_R(R/L_\beta)$ es plano, y por el inciso $b)$ del Teorema 1.27, se sigue que $aL_{\beta+1} \cap L_\beta = aL_\beta$. De esta última igualdad y la igualdad (5.7) se deduce que $a(x - ay) = z \in aL_\beta$. Finalmente, por hipótesis de inducción, existe $u \in L_\beta$ tal que $a(x - ay) = a^2u$, es decir $ax = a^2(y + u) \in a^2L_{\beta+1}$. Con esto último se deduce la ecuación 5.6.

Ahora, al tomar $\alpha = \xi$ se tiene que $aR = a^2R$ para cada $a \in Cen(R)$. Entonces, dado $a \in Cen(R)$, existe $x \in R$ tal que $a = a^2x$. Al tomar $y = xax$, se nota que $a = aya$. Ahora se probará que $y \in Cen(R)$. Para $r \in R$, entonces

$$ry = rxax = arx^2 = axarx^2 = xraxax = xrax \text{ y}$$
$$yr = xaxr = x^2ra = x^2raxa = xaxarx = xarx = xrax.$$

Por lo tanto $Cen(R)$ es un subanillo regular de R. ■

En el segundo resultado más importante de esta sección (Teorema 5.24) se verá que, al menos en el caso conmutativo, los anillos semiartinianos cuyos módulos simples se autoescinden (Definición 5.13), son anillos NLF y anillos regulares. Los siguientes lemas acerca de ideales primos y anillos regulares son importantes para enunciar y probar este resultado.

***Lema* 5.21** *Sean R un anillo conmutativo, y $N(R)$ la intersección de todos los ideales primos de R. Entonces $N(R)$ coincide con el ideal que consta de todos los elementos nilpotentes de R.*

Demostración: Supóngase que J es el conjunto de elementos nilpotentes de R. Supóngse también que $x \in J$ y que P es un ideal primo de R. Entonces $j^n = 0 \in P$ para algún número natural n. Como P es un ideal primo, x es un elemento de P. Por lo tanto $J \subseteq N(R)$.

Para probar la otra contención, se probará que cada elemento de R que no es nilpotente, no está contenido en $N(R)$. Supóngase que x no es un elemento nilpotente de R. Considérese el conjunto Σ que consta de todos los ideales α, de R, tales que

$$\text{para cada } n \in \mathbb{N} \quad x^n \notin \beta.$$

Este conjunto no es vacío ya que $\{0\} \in \Sigma$ y es inductivo. Entonces, por el Lema de Zorn, Σ contiene un elemento máximo I. A continuación se verá que este ideal es un ideal primo.

Sean $a, b \notin I$. Si $\langle a \rangle$ y $\langle b \rangle$ son los ideales generados por a y b, respectivamente, entonces los ideales $I + \langle a \rangle$ e $I + \langle b \rangle$ contienen propiamente a I. Como I es un elemento máximo de Σ, existen números naturales n y m tales que $x^n \in I + \langle a \rangle$ y $x^m \in I + \langle b \rangle$; en consecuencia $x^{n+m} \in I + \langle ab \rangle$ y, así, $I + \langle ab \rangle \notin \Sigma$. De la conclusión anterior se sigue que $ab \notin I$. Por lo tanto I es un ideal primo y, además, $x \notin I$; es decir, $x \notin N(R)$. ■

En el siguiente lema daremos una caracterización de los anillos conmutativos que son regulares. Se denotará por R_P la localización del anillo R con respecto al conjunto multiplicativamene cerrado $R \setminus P$, donde P es un ideal primo de R.

Dado un R-módulo derecho M y un ideal primo P, de R, se denotará por M_P al R_P-módulo derecho localizado.

***Lema* 5.22** *Para un anillo conmutativo las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) R es un anillo regular.

b) R no contiene elementos nilpotentes y cada ideal primo P, de R, es máximo.

c) Para cada ideal máximo P, de R, la localización R_P es un campo[1]*.*

Demostración: $a) \Rightarrow b)$. Para probar que R no contiene elementos nilpotentes, basta probar que para cada $a \in R$, se tiene que $a^2 \neq 0$. Si suponemos lo contrario, entonces existe $a \in R$ tal que $a^2 = 0$. Como R es un anillo regular, existe $b \in R$ tal que $a^2 b = a$. Por lo tanto $0 = a^2 b = a$. De este hecho se puede concluir que R no contiene elementos nilpotentes. Para mostrar que cada ideal primo P es máximo, se probará que $\overline{R} = R/P$ es un campo. Para ello basta probar que todo elemento $a \in R$ es unidad. Si $a \notin P$, entonces $a = a^2 x$ para algún elemento x. Entonces $\overline{a} = \overline{a}^2 \overline{x}$. Como P es un ideal primo, el anillo $\overline{R}$ es un dominio entero. Ahora, como $\overline{0} = \overline{a} - \overline{a}^2 \overline{x} = \overline{a}(1 - \overline{ax})$, se sigue que $\overline{ax} = \overline{1}$. Por lo tanto $\overline{R}$ es un campo y, así, P es un ideal máximo.

$b) \Rightarrow c)$. Sea P un ideal máximo de R. Por la hipótesis, P_P es el único ideal máximo de R_P. Entonces, para probar $c)$, basta probar que P_P es cero. Por $b)$, el

[1] Recuérdese que cada ideal máximo es un ideal primo

ideal P_P es el único ideal primo de R_P. Del Lema 5.21 se sigue que P_P es un ideal nil; en consecuencia, dado $(x/s) \in P_P$, se tiene que $(x/s)^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces $tx^n = 0$ para algún $t \in R \setminus P$; de esto se sigue que $(tx)^n = 0$ y, así, $tx = 0$. Por lo tanto $(x/s) = 0$ para cada $(x/s) \in P_P$; es decir R_P es un campo.

c) $\Rightarrow$ *a*). Supóngase *c*) y considérese un elemento $a \in R$ y un ideal máximo P, de R. Obsérvese que

$$(aR/a^2R)_P \cong (aR)_P/(a^2R)_P \cong aR_P/a^2R_P.$$

Como R_P es un campo, $aR_P = a^2R_P$. Esto implica que $(aR/a^2R)_P = \{0\}$, para cada ideal máximo P. Por lo tanto $aR/a^2R = \{0\}$. De esto se sigue que existe un elemento $x \in R$ tal que $a = a^2x$. Por lo tanto R es un anillo regular. ■

***Lema* 5.23** *Si R es un anillo conmutativo semiartiniano y M es un ideal máximo de R, entonces R_M es semiartiniano.*

Demostración: Por la Proposición 1.32 basta probar que todo R_M-módulo derecho tiene zoclo distinto de cero. Sea N un R_M-módulo derecho. Obsérvese que N tiene estructura de R-módulo derecho. Como R_R es un anillo semiartiniano, por la Proposición 1.32, se sigue que N tiene zoclo distinto de cero como R-módulo derecho. Por lo tanto existe un elemento no cero $x \in N$ tal que xR es un submódulo simple de N; es decir $r_R(xR)$ es un ideal máximo. A continuación se verá que $r_R(xR) = M$. Si se supone lo contrario, entonces $xs = 0$ para algún elemento $s \in R \setminus M$. De lo anterior se siguen las siguientes igualdades:

$$0 = xs = x(ss^{-1}) = x \neq 0$$

Esto, claro, es una contradicción. Por lo tanto $r_R(xN) = M$ y, así, $r_{R_M}(xR_M) = M_M$. De esto se sigue que xR_M es un ideal mínimo de N visto como R_M-módulo derecho. Por lo tanto $Zoc(N_{R_M}) \neq 0$. ■

***Teorema* 5.24** *Si R es un anillo conmutativo y semiartiniano, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *R es un anillo NLF.*

b) *R es un anillo regular.*

c) *$M = M^2$ para cada ideal máximo M.*

d) *Para cada R-módulo simple S la clase de todos los módulos S-homogéneos es una clase cerrada bajo extensiones.*

Demostración: Se puede notar que, de la Proposición 5.20, los enunciados a) y b) son equivalentes, y, de la Proposición 5.14, los enunciados c) y d) son equivalentes. Entonces, para probar este teorema, se probará que b) y c) son equivalentes.

$b) \Rightarrow c)$. Como R es un anillo regular, entonces ${}_R(R/M)$ es un módulo plano. Entonces, por el Teorema 1.27, se sigue que $M = M^2$.

$c) \Rightarrow b)$. Por la Proposición 5.23, R_M es un anillo semiartiniano derecho; en consecuencia todo R_M-módulo derecho es semiartiniano (Proposición 1.32).

Ahora, como M_M es el único ideal máximo de R_M y $M_M^2 = M_M$, entonces la clase de todos los R_M-módulos semisimples, que se denota por $\mathcal{T}$, coincide con la clase de los módulos R_M/M_M-homogéneos. De hecho por la Proposición 5.14, $\mathcal{T}$ es una clase de torsión hereditaria que contiene a **Simp-**R_M.

Por otro lado, la clase generada por **Simp-**R_M es la clase de todos los módulos semiartinianos, que se denotará por $\mathcal{S}$, y es la mínima que contiene a **Simp-**R_M.

De todo lo anterior se puede concluir que

$$\mathbf{Mod}_{R_M} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T};$$

es decir, todos los R_M-módulos son semisimples; en particular R_M es semisimple. Como R_M es un anillo local (Definición 2.7), se puede concluir que R_M es un campo y, al aplicar la Proposición 5.22, se deduce que R_M es un anillo regular. ∎

5.4. La propiedad NLF es un invariante de Morita.

En este capítulo se usarán hechos ya conocidos acerca de equivalencias entre categorías de módulos. Estos resultados, que a continuación enunciaremos, y que no se exponen en esta tesis dada su extensión, son explicados detalladamente en [1, Sección §21].

Recuérdese que si R y S son anillos, y $F : \mathbf{Mod}\text{-}R \to \mathbf{Mod\text{-}S}$ es una equivalencia entre categorías, entonces, para cada R-módulo derecho M, existe un isomorfismo (inducido por la equivalencia) de la retícula de submódulos de M en la retícula de submódulos de $F(M)_S$. A este isomorfismo se le denotará por Λ_M y se calcula de la siguiente manera: si K es un submódulo de M e $i : K \to M$ es la inclusión, entonces

$$\Lambda_M(K) = Im(F(i)) \cong F(K).$$

Nótese que, como F preserva sucesiones exactas, $F(M/K) \cong F(M)/\Lambda_M(K)$ de manera canónica. Denotando por $\mathbb{L}_2(X)$ a la retícula de ideales bilaterales de un anillo X, existe un isomorfismo de retículas $\Phi : \mathbb{L}_2(R) \to \mathbb{L}_2(S)$ definido por

$$\Phi(I) = r_S(F(R/I)).$$

Además F induce una equivalencia entre las categorías **Mod-**R/I y **Mod-**$S/\Phi(I)$.

En lo que resta del capítulo se usará la notación dada anteriormente.

***Proposición* 5.25** *Dados dos anillos R y S, y una equivalencia F : **Mod-**$R \to$ **Mod-**S, para cada módulo M_R y cada ordinal α, el isomorfismo de retículas Λ_M satisface la igualdad*

$$\Lambda_M(Zoc_\alpha(M)) = Zoc_\alpha(F(M)).$$

Demostración: La prueba se hará por inducción. Como el zoclo de un módulo es la suma de sus módulos simples, y Λ_M es un isomorfismo de retículas, se sigue que $\Lambda_M Zoc(M) = Zoc(F(M))$. Sea $\alpha > 1$ y supóngase que $\Lambda_M(Zoc_\beta(M)) = Zoc_\beta(F(M))$ para cada $\beta < \alpha$.

Caso 1. Si α es un ordinal límite, entonces, por hipótesis de inducción y el hecho de que Λ_M un isomorfismo de retículas, se sigue que

$$\Lambda_M(Zoc_\alpha(M)) = \Lambda_M(\bigcup_{\beta<\alpha} Zoc_\beta(M)) =$$
$$\bigcup_{\beta<\alpha} \Lambda_M(Zoc_\beta(M)) = \bigcup_{\beta<\alpha} Zoc_\beta(F(M));$$

es decir, $\Lambda_M(Zoc_\alpha(M)) = Zoc_\alpha(F(M))$.

Caso 2. Supóngase que $\alpha = \beta + 1$ para algún ordinal β. El isomorfismo Λ_M induce un isomorfismo de retículas entre los intervalos $\mathbb{A} = [Zoc_\beta(M), M]$ y el intervalo $\Lambda_M(\mathbb{A}) = [Zoc_\beta(F(M)), F(M)]$. De esta observación se sigue que si $Zoc_\beta(M) \leq H \leq M$, entonces $H/Zoc_\beta(M)$ es simple si y sólo si $\Lambda_M(H)/Zoc_\beta(F(M))$ es simple. Como consecuencia, usando nuevamente el hecho de que Λ_M es un isomorfismo de retículas, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\Lambda_M(Zoc_{\beta+1}(M)) &= \Lambda_M\big(\sum\{H \in \mathbb{A} : H/Zoc_\beta(M) \text{ es simple}\}\big) \\
&= \sum\{\Lambda_M(H) \in \Lambda_M(\mathbb{A}) : H/Zoc_\beta(M) \text{ es simple}\} \\
&= \sum\{K \in \Lambda_M(\mathbb{A}) : K/Zoc_\beta(F(M)) \text{ es simple}\} \\
&= Zoc_{\beta+1}(F(M)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\Lambda_M(Zoc_\alpha(M)) = Zoc_\alpha(F(M))$ para cada ordinal α. ■

***Proposición* 5.26** *Dados dos anillos R y S y una equivalencia F : **Mod-**$R \to$ **Mod-**S, el isomorfismo Φ definido al principio de este capítulo, satisface la siguiente igualdad:*

$$\Phi(Zoc(R_R)) = Zoc(S_S).$$

Demostración: Como F es una equivalencia, preserva sucesiones exactas. En particular, para la sucesión exacta

$$Zoc(R_R) \xrightarrow{i} R \xrightarrow{\eta} R/Zoc(R_R)$$

donde i es la inclusión natural y η es la proyección canónica, F induce la siguiente sucesión exacta:

$$F(Zoc(R_R)) \xrightarrow{F(i)} F(R) \xrightarrow{F(\eta)} F(R/Zoc(R_R))\cdot \tag{5.8}$$

Nótese que, por la Proposición 5.25, $Zoc(F(R_R)) = F(Zoc(R_R))$. Además, como la sucesión 5.8 es exacta, se tiene que

$$\Phi(Zoc(R_R)) = r_S(F(R/Zoc(R_R))) = \{s \in S : F(R)s \subseteq Zoc(F(R))\}.$$

De lo anterior se concluye que para probar $Zoc(S_S) \subseteq \Phi(Zoc(R_R))$, basta probar que para cada $s \in Zoc_{S_S}$, se cumple que $F(R_R)s \subseteq F(R_R)$. Tómese pues $x \in F(R_R)$ y considérese el homomorfismo $\alpha : S \to F(R_R)$ dado por $\alpha(s) = xs$; entonces, por la Proposición 1.28, se concluye que

$$xZoc(S_S) = \alpha(Zoc(S_S)) \subseteq Zoc(F(R_R)).$$

Con lo anterior se puede concluir que $F(R)Zoc(S_S) \subseteq \Phi(Zoc(R_R))$.

Para probar la otra contención, basta probar que J es semisimple. Como F es una equivalencia y R_R es un generador proyectivo finitamente generado, entonces $F(R)$ es un generador proyectivo finitamente generado ([1, Proposición 21.8]). Por lo tanto existen un número natural n y una sucesión exacta

$$F(R)^n \longrightarrow S \longrightarrow 0.$$

Dado que $F(R)$ es proyectivo, entonces es un módulo plano; por lo tanto $F(R)^n \otimes_S J \cong F(R)^n J$. Entonces se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$(F(R)J)^n = F(R)^n J \cong F(R)^n \otimes_S J \longrightarrow J \cong S \otimes J \longrightarrow 0.$$

Como $F(R)J \subseteq Zoc(F(R)_S)$, entonces J es cociente de un módulo semisimple y por lo tanto J es semisimple. Por lo tanto $Zoc(S_S) \supseteq J$. Por lo tanto $\Phi(Zoc(R_R)) = Zoc(S_S)$. ■

Teorema 5.27 *Sean R y S dos anillos, y F : **Mod-**$R \to$ **Mod-**S una equivalencia. Entonces*

(1) Si R es semiartiniano con longitud de Loewy $L(R_R) = \xi + 1$ y cadena de Loewy $(L_\alpha)_{\alpha \leq \xi+1}$, entonces S es semiartiniano, con la misma longitud de Loewy y
$$Zoc_\alpha(S_S) = \Phi(L_\alpha). \tag{5.9}$$
para cada $\alpha \leq \xi + 1$.

(2) Si R es un anillo NLF, entonces S es un anillo NLF.

Demostración: (1). Si R es un anillo semiartiniano con longitud de Loewy $L(R_R)$, por la Proposición 5.25, S es semiartiniano y la longitud de Loewy de S es $L(S_S) = L(R_R)$.

Se usará inducción para probar la igualdad (5.9). Nótese que, para $\alpha = 0$, la igualdad se cumple trivialmente. Ahora, vamos a suponer que $\alpha > 0$ y, para cada $\beta < \alpha$, se cumple $Zoc_\beta(S_S) = \Phi(L_\beta)$.

Caso 1. Si α es un ordinal límite, como Φ es un isomorfismo de retículas, entonces
$$\Phi(L_\alpha) = \Phi(\bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta) = \bigcup_{\beta<\alpha} \Phi(L_\beta) = \bigcup_{\beta<\alpha} Zoc_\beta(S_S) = Zoc_\alpha(S_S).$$

Caso 2. Supóngase que $\alpha = \beta + 1$, para algún ordinal β, y sean $\overline{R} = R/L_\beta$ y $\overline{S} = S/Zoc_\beta(S_S)$. Por hipótesis de inducción, F induce una equivalencia entre las categorías **Mod-**$\overline{R}$ y **Mod-**$\overline{S}$; en consecuencia, por la Proposición 5.26, se tiene que
$$\begin{aligned} Zoc_{\beta+1}(S_S)/Zoc_\beta(S_S) &= Zoc(S/Zoc_\beta(S)) = \Phi(Zoc(R/L_\beta)) \\ &= \Phi(L_{\beta+1}/L_\beta) = r_{\overline{S}}\big(F(\overline{R}/Zoc(\overline{R}))\big). \end{aligned}$$

Como F es una equivalencia, se tiene que
$$F(\overline{R}/Zoc(\overline{R})) \cong F(\overline{R})/F(Zoc(\overline{R})).$$

Por lo tanto
$$Zoc_{\beta+1}(S_S)/Zoc_\beta(S_S) = r_{\overline{S}}\big(F(\overline{R})/F(Zoc(\overline{R}))\big).$$

Ahora, nótese que
$$\begin{aligned} r_{\overline{S}}\big(F(\overline{R}/F(Zoc(\overline{R})))\big) &= \{s + Zoc_\beta(S_S) : F(\overline{R})(s + Zoc_\beta(S_S)) \subseteq Zoc(F(\overline{R}))\} \\ &= \{s + Zoc_\beta : F(\overline{R})s \subseteq Zoc(F(\overline{R}))\} = (Zoc(F\overline{R}) : F(\overline{R}))/Zoc_\beta(S_S). \end{aligned}$$

De estas igualdades y el hecho de que F es una equivalencia, se concluye que

$$\begin{aligned} Zoc_{\beta+1}(S_S) &= (Zoc(F(\overline{R})) : F(\overline{R})) \\ = r_S(F(\overline{R})/Zoc(F(\overline{R}))) &\cong r_S(F(\overline{R}/Zoc(\overline{R}))) \\ &= r_S(F(R/Zoc_\beta(R_R))). \end{aligned}$$

Gracias a estas igualdades se puede concluir que

$$Zoc_{\beta+1}(S_S) = r_s(F(\overline{R})) = \Phi(L_{\beta+1}).$$

Por lo tanto el inciso (1) se cumple.

(2). Del inciso (1), se sigue que R/L_α y $S/Zoc_\alpha(S_S)$ son anillos equivalentes en el sentido de Morita para cada $\alpha \leq \xi + 1$. Por lo tanto R/L_α es no singular si y sólo si $S/Zoc_\alpha(S_S)$ es no singular ya que Φ es un isomorfismo entre las retículas de submódulos de R/L_α y $S/Zoc_\alpha(S)$. ■

Bibliografía

[1] F. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and categories of modules*, segunda edición, Springer Verlag, 1992.

[2] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Adison Wesley Publishing Company, 1969.

[3] G. Azumaya, *Some properties of TTF classes*, Procedings of the conference on orders, group rings and related topics, Lect. Notes in Math., vol 353, Springer Verlag, Berlin Heidelberg-New York, 1973, pp. 72-83.

[4] G. Baccella, *On $\mathcal{C}$-semisimple rings. A study of the socle of a ring,* Comm. Algebra **8** (1980), 889-909.

[5] G. Baccella y G. Di Campli, *Semiartinian rings whose Loewy factors are nonsingular*, Comm. Algebra **9** (1997), 2743-2764.

[6] G. Baccella, *Semiartinian V-rings and semiartinian Von Neumann regular rings*, J. Algebra **173** (1995), 587-612.

[7] J. A. Beachy, *Introductory lectures on rings and modules*, Cambridge, London Mathematical Society, Student texts **47**, 1999.

[8] V. P. Camillo y K. R. Fuller, *On Loewy length of rings*, Pacific J. Math. **53** (1974), 347-354.

[9] L. Fuchs, *Torsion prerradicals and ascending Loewy series of modules*, J. Reine Angew. Math. Wiss **239/240** (1969) 169-179.

[10] J. S. Golan *Torsion theories*, Longman, Harlow, J. Wiley and Sons, New York, 1986.

[11] K. R. Goodearl, *Ring theory. Nonsingular rings and modules,* Marcel Dekker, Inc, New York, 1974.

[12] K. R. Goodearl, *Von Neumann regular rings,* Pitman London, 1979.

[13] N. Jacobson *The structure of rings*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol 37, American Mathematical Society, 1964.

[14] T. Y. Lam, *Lectures on modules and rings,* Graduate text in Math., Vol 189, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1998.

[15] C. Năstăsescu, *Quelques remarques sur la dimension homologique des aneaux. Eléments réguliers,* J. Algebra **19** (1971), 470-485.

[16] C. Năstăsescu and N. Popescu, *Aneaux semi-artiniens*, Bull. Soc. Math. France **96** (1968) 357-368.

[17] B. L. Osofsky, *Loewy length of perfect rings,* Proc. Amer. Math. Soc. **28** (1971), 352-354.

[18] B. Stenström, *Rings of Quotients. An introduction to methods of ring theory*, Springer Verlag, 1975.