

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ECONOMÍA



**ANÁLISIS BAYESIANO DE ESTABILIDAD ESTRUCTURAL
EN MODELOS CAPM**

TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE DOCTOR EN ECONOMÍA

JAIME MUÑOZ FLORES

ASESOR: DR. ALEJANDRO VALLE BAEZA

CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO D. F. AÑO 2009



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice

PRESENTACIÓN	<i>i</i>
Capítulo I ANÁLISIS DE DECISIONES BAJO CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE	7
Capítulo II EL ENFOQUE BAYESIANO Y LAS TEORÍAS OBJETIVAS	33
Capítulo III ANÁLISIS BAYESIANO DE MODELOS DE REGRESIÓN CON CAMBIO ESTRUCTURAL	65
Capítulo IV MODELOS DE MEDIA-VARIANZA EN LA TEORÍA FINANCIERA	86
Capítulo V MODELO DE MARKOWITZ	109
Capítulo VI MODELO DE PRECIOS PARA ACTIVOS DE CAPITAL	160
Capítulo VII ANÁLISIS ESTRUCTURAL DEL CAPM	190
Capítulo VIII APLICACIONES	224
CONCLUSIONES	276
BIBLIOGRAFÍA	282

PRESENTACIÓN.

En los últimos años, la economía ha observado una creciente aproximación hacia la multidisciplinariedad. La integración de desarrollos metodológicos provenientes de otras disciplinas -como la lógica formal, el Análisis Numérico, la Estadística, la Teoría de Juegos, etc.- a las discusiones económicas, es actualmente una práctica común.

Este es el contexto que enmarca a la presente investigación. Para llevarla a cabo, hemos combinado elementos de la teoría de decisiones bajo incertidumbre, estadística Bayesiana, análisis de regresión y teoría financiera, entre otros¹. Es precisamente en tal combinación, así como su aplicación al mercado local de capitales, donde reside la originalidad de este trabajo.

Específicamente, nuestro objetivo ha sido analizar desde la perspectiva Bayesiana la estabilidad paramétrica del modelo CAPM² en el mercado de capitales mexicano. Como hipótesis de trabajo, planteamos que el desarrollo y aplicación de modelos tanto normativos como prospectivos restringen su alcance en la medida en la que no integran componentes que consideren el

¹ Las formulaciones teóricas sobre estos temas se deben a los diversos autores que aparecen en las citas respectivas y exceden por mucho las aplicaciones que aquí presentamos.

² Capital Asset Pricing Model, capítulos V, VI, VII, y VIII.

análisis bayesiano de estabilidad paramétrica y el cambio estructural.

Con tales propósitos, primeramente se discuten en el Capítulo I los elementos centrales del *Análisis de Decisiones en Condiciones de Incertidumbre*. La relación entre las consecuencias de una decisión dado un acontecimiento, y la probabilidad relativa a esas consecuencias, se establece ahí a través del criterio del valor monetario esperado. Asimismo, en ese capítulo se tratan cuestiones tales como la integración de factores de ponderación derivados de juicios personales, la manera de establecer una métrica acerca de los juicios probabilísticos (y su relación con el valor monetario esperado), la pérdida de oportunidad condicional y el valor esperado de la información perfecta. En el marco de los conceptos anteriores, se aborda el problema relativo a la actitud con respecto al riesgo y su repercusión en el carácter condicional del proceso de toma de decisiones financieras. De esta manera, el capítulo I prepara los antecedentes para el análisis de decisiones desde una perspectiva Bayesiana.

Este tema se desarrolla en el capítulo II. En primer término, se discute ahí el propósito que tiene el proceso de construcción de las curvas características de error y curvas de potencia para la selección de pruebas de hipótesis. Con ello se establece el fundamento para la representación de los

riesgos de la prueba en términos de su dependencia funcional hacia el parámetro que se investiga (haciendo uso de funciones de costo).

La incorporación de factores subjetivos para elegir la mejor prueba se conduce a través de la integración de funciones de distribución a priori y de la redefinición de los parámetros de la prueba como las variables aleatorias básicas del problema, poniendo especial énfasis en la ventaja algebraica de utilizar funciones de distribución a priori conjugadas.

Dado que el sentido de este capítulo consiste en fundamentar una alternativa de análisis CAPM -de distinto alcance que la tradicional basada en el enfoque frecuentista clásico- en el capítulo II se lleva a cabo una revisión del uso del teorema de Bayes en procesos inferenciales, así como de las propiedades de los principales estadísticos muestrales.

El capítulo III está dedicado a la aplicación de los métodos Bayesianos al análisis de modelos de regresión. La presentación de las ideas Bayesianas se conduce a través de una síntesis de los resultados más utilizados en esta teoría, como son la descomposición del núcleo de los estimadores de máxima verosimilitud y el uso de funciones de pérdida de oportunidad para la estimación puntual. Asimismo, se incluye en este capítulo una breve revisión de los principales trabajos orientados a la construcción de modelos de regresión que consideran la presencia de cambio estructural en los parámetros. Cabe señalar que la exposición del material que

comprende este capítulo supone la lectura de los dos capítulos precedentes.

El contenido del capítulo IV titulado *Modelos de media-varianza en la teoría financiera*, es de corte descriptivo. La discusión se centra en cuestiones tales como el papel del proceso de diversificación de activos en la reducción del riesgo asociado a un portafolio de inversión, la existencia y los criterios para determinar la composición de un portafolios de frontera eficiente, el efecto de la incertidumbre sobre el manejo de los activos de capital, así como su relación con conceptos como la utilidad prevista y el rendimiento esperado, entre otros.

Lo anterior sienta las bases para la teoría que comprende el capítulo V, que trata sobre el modelo de Markowitz. Si bien este capítulo retoma elementos importantes del capítulo IV, los desarrollos que se presentan en él parten de un enfoque mucho más normativo. Así, los principios que sustentan al modelo de Markowitz son expresados en este capítulo de manera analítica y sintetizados mediante un conjunto de ecuaciones y desigualdades³.

Estrechamente relacionado con el conocido modelo de Markowitz, se encuentra el Modelo de Precios de Activos de Capital (Capital Assets Pricing Model, CAPM). Mientras que en el primero se establece analíticamente una relación de dependencia entre el riesgo y el rendimiento esperado, el

³ Parte de ese conjunto de ecuaciones y desigualdades es utilizado más adelante para llevar a cabo los cálculos que se discuten en el capítulo de aplicaciones.

CAPM postula una relación entre la compensación al riesgo de un portafolio con la correspondiente compensación que ofrece el mercado en su conjunto. Con el CAPM como columna de articulación, en el capítulo VI se discuten aspectos como la descomposición del riesgo en sus partes sistemática y específica, la función de los títulos libres de riesgo en el mercado de capitales, la estimación de los parámetros del modelo y la interpretación de los resultados que éste arroja. La posible existencia de distintos regímenes en el periodo muestral del CAPM se analiza en el capítulo VII. Asimismo, dicho análisis se combina con la teoría Bayesiana aplicada a procesos inferenciales sobre los parámetros del modelo lineal.

Finalmente, se ha incorporado como un complemento importante a la presente investigación un capítulo de aplicaciones. En él, se busca establecer evidencia empírica sobre la validez del CAPM con cambio estructural, basándose la construcción en series muestrales de emisoras que participan en el índice de precios y cotizaciones del mercado nacional de capitales.

CAPITULO I

ANÁLISIS DE DECISIONES BAJO CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE

Todas las decisiones económicas se refieren en algún sentido al futuro, dada la situación presente. En consecuencia, el estudio de la toma de decisiones en economía involucra el comportamiento de los individuos o las sociedades ante algo que desconocen.

Una forma de tratar el problema de la incertidumbre en la toma de decisiones consiste en realizar el análisis sobre la base de varias estimaciones alternativas de los acontecimientos desconocidos. El que toma decisiones, al no conocer qué acontecimientos ocurrirán en realidad, debe comparar de alguna manera un acto con otro para establecer una decisión.

En éste y en el capítulo siguiente examinaremos los dos principales problemas que ocasiona la presencia de incertidumbre en los problemas de decisión:

- a) ¿De qué manera se puede establecer un criterio razonable para elegir entre distintos actos cuando sus consecuencias no pueden ser pronosticadas con certeza?
- b) Cuando la selección no tiene que ser inmediata, ¿que información adicional debe obtenerse para mejorar las predicciones de las consecuencias de los actos?

Este capítulo tratará el tema de la selección de criterios. En el siguiente se tratará la segunda cuestión, que es más

bien concerniente con la aplicación de estadística inferencial y análisis numérico.

1. Análisis Condicional. Supóngase que se tiene que decidir cuántas unidades adquirir de un bien determinado para posteriormente comercializarlo. Debido a los costos asociados con el almacenaje, el bien no puede ser guardado por un tiempo demasiado largo. Por otra parte, como la venta del bien representa un ingreso I_0 , por cada unidad demandada que se deje de satisfacer (como consecuencia de haber calculado menor demanda), se tendrá una pérdida bruta de I_0 .

Si se conociera exactamente la cantidad que será demandada en un período particular, resulta claro que adquirirían las unidades suficientes para satisfacer esa demanda, ni más ni menos. Sin embargo, en una situación concreta no se conoce cuál será la demanda real, y a pesar de ello se debe decidir sobre un determinado stock.

Supondremos por el momento que los agentes económicos encuentran restricciones que limitan su stock a k unidades, de manera que en ningún caso adquirirán más que este número de unidades. Por lo tanto sus posibles decisiones son los stocks de $0, 1, 2, \dots, k$ unidades.

Ahora bien, una forma en la que los agentes podrían proceder consiste en analizar su problema bajo varias suposiciones alternativas con respecto a la magnitud de la demanda. Podríamos llamar a tal enfoque condicional, por su carácter de "si, entonces"; es decir, este análisis no trata de

predecir únicamente cuál será el resultado de un acto particular, sino establecer cuál será, pero condicionando a que ocurra cierto acontecimiento.

Como caso particular podemos tomar el acontecimiento "demanda de L unidades", $0 < L < k$, y determinar cuál será el beneficio bruto del agente para cada acto o nivel de stock posible. Primero debemos notar que el costo total para el agente será de cierta cantidad (que denotaremos c_0) por unidad, multiplicada por el número de unidades solicitadas. Su ingreso será de I_0L , suponiendo que el stock sea de por lo menos L unidades. Podemos sintetizar esta situación de la siguiente manera:

Sea \mathbf{a} el vector columna $(0, 1, 2, \dots, (L-1), L, L, \dots, L)^t$ de dimensiones $k \times 1$, cuyas componentes indican el nivel de actividad en la venta. Por otra parte, definamos el vector \mathbf{b} con componentes iguales al nivel de compra, es decir, $\mathbf{b} = (0, 1, \dots, (k-1), k)^t_{(1,1)}$. Entonces, el ingreso bruto (I.B.) está determinado por:

$$\begin{pmatrix} I_0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots I_0 & 0 \\ & & & \dots 0 & I_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ L \\ L \end{pmatrix}$$

o bien,

$$I.B. = I_0 \mathbf{Ia} \dots \dots (1.2),$$

en donde \mathbf{I} es la matriz identidad de dimensiones $k \times k$. Asimismo, el costo puede calcularse como $c_0(0, 1, 2, \dots, k-1, k)$, o bien,

$$c_0 \mathbf{b} \dots\dots\dots(1.3).$$

De esta manera, tenemos que el beneficio bruto (B.B.) es

$$B.B. = I_0 \mathbf{Ia} - c_0 \mathbf{b} \dots\dots(1.4).$$

Una hipótesis adicional consistirá ahora en ignorar cualquier otro costo e ingreso distintos a los mencionados anteriormente.

De la relación (1.3), es posible determinar el beneficio bruto condicional a cada nivel de stock posible k , para los distintos niveles de demanda l , con $0 < L < k$.

Ahora bien, tomando los vectores de beneficio bruto (B.B.), ingreso bruto (I.B.) y costo ($c_0 \mathbf{b}$), como renglones, se puede conformar una *matriz de resultados condicionales*.

Además de la determinación de las entradas de esta matriz, hay dos importantes cuestiones involucradas en la conformación de la misma:

- a) los actos que deben ser incluidos;
- b) los acontecimientos se le deben asociar.

2. Seguramente para algunos problemas será relativamente sencillo enumerar todas las alternativas posibles en un problema de decisión. En otros problemas, sin embargo, no será tan fácil reconocer cuáles son estas alternativas. No hay regla general alguna para determinar qué alternativas deben ser consideradas en un problema particular. Esta determinación debe ser una cuestión de imaginación y juicio en cada caso. Lo mejor que cualquier análisis puede hacer es identificar el mejor acto *entre los examinados*.

Normas algo más concretas pueden considerarse sobre los acontecimientos a incluir en una matriz de resultados. En primer lugar, surge claramente que la elección de acontecimientos debe hacer posible establecer, en forma concreta y clara, el resultado condicional de cualquier acto dado cualquier *acontecimiento*. Por ejemplo, no serviría considerar una "*demanda por 3 ó 4 unidades*" como acontecimiento, ya que no sería posible establecer unívocamente el beneficio bruto para stocks de "*4 ó 5 unidades*". Sin embargo, sí podríamos agregar el acontecimiento "*demanda por k ó más unidades*", puesto que la limitación del stock asegura que el resultado de cada acto posible será el mismo para todas las demandas iguales o mayores a k unidades.

Un segundo requisito para una relación de acontecimientos complementa al primero: debe ser lógicamente imposible que dos o más acontecimientos de la lista ocurran

simultáneamente. Es decir, no serviría incluir "*demanda por 5 unidades*" y "*demanda por 5 ó más unidades*" en una relación de acontecimientos, puesto que si la demanda es por 5 unidades, esta ocurrencia no puede ser asignada claramente a uno u otro de los acontecimientos. La razón para este segundo requisito es evitar la posibilidad de la doble consideración de algunos de los resultados, en virtud de haber sido incluidos repetidamente. Otra forma de establecer que dos acontecimientos no pueden ocurrir simultáneamente es decir que deben ser *mutuamente excluyentes*.

El tercer requisito para una relación de acontecimientos es que debe ser completa, es decir, que alguno de los acontecimientos de la relación debe ocurrir. Esta hipótesis se incluye para asegurar que son tomadas en cuenta todas las consecuencias de un acto que puede ocurrir. En el caso que estamos exponiendo, si cambiamos *demanda por k ó más unidades* por *demanda por k unidades* la relación no será colectivamente exhaustiva, puesto que la matriz de resultados no mostraría las consecuencias de una *demanda por $k+1$ ó más unidades*.

Cuando el número de actos y el número de acontecimientos son relativamente pequeños, la matriz de resultados es un medio excepcionalmente conveniente para organizar los datos económicos relacionados con el problema de decisión bajo incertidumbre.

Sin embargo, en un problema de naturaleza continua, o cuando el conjunto de acontecimientos es de orden superior, no resultará práctica la construcción de la matriz. La

estrategia entonces debe consistir en tratar de sintetizar los datos económicos en forma de ecuaciones algebraicas. En el caso que estamos exponiendo, por ejemplo, podríamos usar las siguientes ecuaciones:

$$B.B. \begin{cases} I_0 D - C_0 S & \text{si } D < S \\ (I_0 - C_0) S & \text{si } D \geq S \end{cases}$$

donde D representa la cantidad demandada (acontecimiento) y S representa la cantidad en stock (acto). Estas ecuaciones expresan exactamente la misma información que la matriz de resultados, puesto que nos permiten encontrar el beneficio bruto para cualquier combinación de acontecimientos.

Al expresar la información algebraicamente, las relaciones resultan mucho más compactas y además permiten determinar el beneficio bruto para más combinaciones de *acto-acontecimiento* de las que sería posible a través de una matriz de resultados.

Pero a pesar de las ventajas prácticas de la forma algebraica, la matriz de resultados es aún importante como una herramienta conceptual. Frecuentemente es útil, al comenzar el análisis de un problema de decisión bajo incertidumbre, imaginar cómo sería la matriz de resultados, aunque no sea práctico enumerar todos los actos y acontecimientos.

3. Aunque la determinación de resultados es una forma conveniente para organizar los datos económicos relacionados con un problema de decisión bajo incertidumbre, tiene la limitante de que sólo presenta información condicional. Para completar el análisis, debemos establecer entonces una forma de elegir incondicionalmente un *mejor acto*.

Una posibilidad de hacer esto es concentrar la atención sobre el acontecimiento *más probable*. Si, por ejemplo, el agente estima más probable que la demanda sea de L unidades que de cualquier otro número, podría atender solamente la fila *demanda por L unidades* de la matriz de resultados. En la práctica concentrarse sobre el acontecimiento más probable es una forma muy común de decidir cuando se trata de problemas bajo incertidumbre.

Otra posibilidad es adoptar el enfoque conservador, que consiste en observar lo peor que puede ocurrir para cada acto posible, y después elegir el acto para el cual el resultado es el menos malo. Por ejemplo, en el problema que hemos discutido, el acontecimiento más desfavorable para cualquier acto sería *demanda de 0 unidades*. Dado que este acontecimiento siempre resultará en una pérdida efectiva mientras el agente adquiera por lo menos una unidad, la solución conservadora sería no ordenar unidad alguna.

Ahora bien, hay que señalar que un inconveniente asociado con este último enfoque es que se concentra en una consecuencia para cada acto, con exclusión de todas las otras. Sin embargo, una solución bien razonada de un problema de

decisión bajo incertidumbre debiera considerar *todas* las consecuencias que pudiera tener cada acto.

Al mismo tiempo, sería razonable establecer que no todas las consecuencias van a ser tratadas como igualmente importantes. Por ejemplo, si el agente considera el acontecimiento *demanda por k ó más unidades* como bastante improbable, así como considera *demanda por L unidades* como el más probable, entonces querrá dar mayor ponderación a las consecuencias del primer acontecimiento que a las del segundo.

Vamos a dejar por ahora el problema de cómo se puede asignar probabilidades a los acontecimientos y suponer que el agente ha asignado a las demandas potenciales ciertas probabilidades de acuerdo con una distribución particular.

Ya hemos indicado que un buen criterio para evaluar los actos con consecuencias inciertas debe reflejar:

- i) Todas las consecuencias posibles de un acto;
- ii) La probabilidad relativa de esas consecuencias.

Un criterio que cumple las anteriores condiciones es el del *valor monetario esperado*. El valor monetario esperado de un acto es un promedio ponderado de las consecuencias monetarias condicionales de ese acto, usando las probabilidades asignadas a los acontecimientos como ponderaciones.

Tomando las ganancias brutas condicionales de la matriz de resultados y las probabilidades que quedan determinadas por la regla de distribución, podemos calcular el valor monetario esperado del *stock de L unidades*.

4. Aun cuando el criterio del valor monetario esperado considera todas las consecuencias de un acto dado y las pondera de acuerdo con sus probabilidades, hay que señalar que algunas situaciones en las cuales puede no ser de aplicación. Supongamos, por ejemplo, que se debe elegir entre dos actos. El acto 1, con absoluta seguridad, no resultará ni en una ganancia ni en una pérdida. El acto 2, por el contrario, conducirá ya sea a una ganancia de P , o a una pérdida de $-rP$ ($r, P > 1$) ambas alternativas con una probabilidad de un medio.

Muy posiblemente un agente decidirá elegir el Acto 1, aún cuando el Acto 2 tiene un valor monetario esperado mayor. No hay nada inherentemente irracional en tal selección, dado que hay una diferencia importante entre los riesgos de los dos actos; diferencia que no es reflejada en sus valores monetarios esperados. (Puede ser deseable renunciar a una ganancia P , de valor para protegerse de una posible pérdida de $-rP$).

Supongamos por otra parte, que se debe establecer una elección entre el Acto 1 y el Acto 3, siendo el Acto 1 igual al anterior, mientras el Acto 3 conduce alternativamente a una ganancia $1/rP$ o a una pérdida de $-1/rP$, cada alternativa con una probabilidad de un medio. En este caso bien podría decidirse actuar de acuerdo con el criterio del valor monetario esperado y elegir el Acto 3, dado que la diferencia

en riesgo entre los dos actos es pequeña en términos absolutos.

Entonces, la aplicabilidad del criterio del valor monetario esperado a un problema particular de decisión dependerá de los riesgos de los actos considerados. Ninguna regla inflexible y segura trataremos aquí de establecer, puesto que el problema depende fundamentalmente de las circunstancias de la unidad económica que va a tomar la decisión. (Una empresa con grandes recursos financieros, por ejemplo, será capaz de asumir más riesgos que una que tiene problemas para pagar sus cuentas; en consecuencia, esta última puede desear usar el valor monetario esperado en un mayor número de casos).

Más adelante discutiremos un criterio que tiene en cuenta las diferencias de riesgos entre los actos: la utilidad esperada¹.

5. Aun cuando al tomar una decisión se carece en muchas ocasiones de una base cuantitativa sólida en forma de frecuencias relativas para asignar probabilidades a los acontecimientos, aquí afirmamos que la experiencia cualitativa permite hacer juicios tales como "el acontecimiento A es más probable que el acontecimiento B".

Si juicios como éste pudieran ser aceptados realmente como probabilidades, esas probabilidades podrían ser usadas para calcular valores monetarios esperados. *Reducir los juicios*

¹ En la discusión de la utilidad esperada se indicará también una prueba para identificar si el valor monetario esperado es apropiado en un problema de decisión particular.

acerca de la probabilidad de los acontecimientos a términos cuantitativos es un problema de medición.

Para poder *medir* los juicios probabilísticos, se requiere alguna clase de *medida estándar* con la cual comparar los acontecimientos. Esperaríamos que la medida fuera tal que los valores monetarios esperados pudieran ser derivados de ella. *Como medida estándar puede usarse una urna hipotética o un generador de números aleatorios basado en la distribución uniforme.*

Cabe cuestionar cuál es la utilidad de la urna estándar hipotética si de cualquier manera las probabilidades van a ser derivadas por juicios personales. ¿No sería preferible escribir las probabilidades directamente sin pasar por la referencia de la urna o del generador de aleatorios? La respuesta a esta cuestión es afirmativa. Sin embargo, es indudable que la habilidad para estimar se adquiere a través de la experiencia con mediciones reales. De la misma manera, el uso de la urna estándar como marco de referencia hipotético, es útil para desarrollar la intuición con respecto a la estimación de probabilidades.

6. El valor de la información. Una de las ventajas del criterio del valor monetario esperado es que provee una manera para determinar el valor de la información adicional. Esta determinación es especialmente útil cuando la información adicional es adquirida a un costo: convendrá

adquirir la información sí y sólo sí su valor excede a su costo.

Una de las formas de definir el *Valor Esperado de la Información Perfecta* (**VEIP**) es como sigue: *la diferencia entre el beneficio (o costo) esperado del acto óptimo bajo incertidumbre y el beneficio (o costo) esperado del acto óptimo bajo completa certidumbre.*

En otros términos, el VEIP es el monto para el cual el beneficio esperado puede ser incrementado (o el costo esperado disminuido) por la disponibilidad de una predicción perfecta. Más adelante mostraremos cómo puede evaluarse la información menos que perfecta contenida en una muestra.

7. El punto de referencia para medir el VEIP es el beneficio que se obtendría si una predicción perfecta estuviera disponible, y se actuara consecuentemente. Este punto de referencia es llamado *Beneficio Esperado con Información Perfecta*.

Para ilustrar este concepto volvamos al problema del nivel de stock de un bien comercializable. Supongamos que los agentes económicos pudieran disponer de una predicción de su demanda antes de hacer la adquisición del período. ¿Cuál sería su beneficio?

Una respuesta única y definitiva no puede darse a esta pregunta puesto que, bajo incertidumbre, no conocemos cuál será la demanda real. Sin embargo, podemos dar respuestas condicionales. Es decir, podemos decir cuál será el beneficio

para cada pronóstico dado.

Por ejemplo, si el pronóstico es que la demanda será de L unidades, el mejor acto será adquirir un stock de L unidades, lo que le dará un beneficio igual al $\max\{b_i\}$ (véase identidad 1.1). Denominamos a esta *ganancia beneficio condicional con información perfecta para una demanda de L unidades*. (En otros problemas, por supuesto, podríamos tener pérdidas condicionales con información perfecta).

De manera similar se puede obtener el beneficio condicional con información perfecta para todas las otras posibles predicciones de la demanda.

Ahora bien, para obtener el beneficio esperado con información perfecta, debemos multiplicar el beneficio condicional bajo certidumbre por las probabilidades apropiadas y efectuar la suma.

8. Hasta aquí, para calcular el VEIP en un problema de decisión hemos visto la necesidad de determinar primero el acto óptimo bajo incertidumbre. Ahora discutiremos otra forma de análisis en la cual el acto óptimo y el VEIP son determinados simultáneamente.

Para calcular el VEIP, usaremos el beneficio esperado con información perfecta como un punto de referencia con el cual comparar el beneficio del acto óptimo bajo incertidumbre.

Podríamos también comparar otros actos con la acción realizada con información perfecta. Pero primero debemos

definir: la *Pérdida de Oportunidad Condicional* de un acto dado un acontecimiento como la diferencia entre el beneficio condicional del acto y el beneficio condicional con información perfecta.

La pérdida de Oportunidad Condicional se toma siempre como positiva o cero. Esto es, se calcula alternativamente como: (1) Beneficio condicional menos beneficio condicional con información perfecta del acto; o (2) Costo condicional menos costo condicional con información perfecta del acto.

Para dar sentido al término pérdida de oportunidad condicional, consideremos las pérdidas correspondientes a un nivel de stock de L unidades. Si este acto es elegido y la demanda real resulta ser de L unidades, se alcanzará el máximo beneficio posible dada esa demanda. Si por el contrario la demanda real es de $L+1$ unidades, entonces manteniendo un stock de sólo L unidades el agente ha perdido la venta de una unidad, lo que constituye la pérdida de oportunidad.

Finalmente, si la demanda es por sólo $L-1$ unidades, el agente habría mantenido una unidad de más en stock. Por lo tanto, pierde la oportunidad de ahorrar el costo de esa unidad, c_0 .

Así pues, para determinar el acto óptimo debemos encontrar la *Pérdida de Oportunidades Esperada (POE)* de cada uno de los actos, es decir, el promedio ponderado de las pérdidas de oportunidad condicionales usando las probabilidades como

ponderaciones. El mejor acto será aquel que tenga la más baja pérdida de oportunidad esperada.

Varios hechos pueden ser observados con respecto a la pérdida de oportunidad esperada:

Proposición 1.1: El acto óptimo es el que puede obtener la pérdida de oportunidad más próxima a cero sobre la base de la información disponible.

Proposición 1.2: La *POE* de todos los otros actos es mayor que la *POE* del acto óptimo.

Proposición 1.3: La diferencia en la *POE* entre dos actos cualesquiera es igual a la diferencia entre sus beneficios esperados.

Entonces, el uso de la pérdida de oportunidad esperada como criterio, permite simultáneamente encontrar el acto óptimo y encontrar el VEIP.

9. Hemos señalado la existencia de circunstancias en las cuales quien debe tomar una decisión podría pensar que el uso del criterio del valor monetario esperado no es apropiado. Estas circunstancias ocurren cuando un acto tiene un valor monetario esperado mayor que otro, pero también tiene un riesgo sustancialmente mayor.

En tal caso, quien toma la decisión bien podría resolver que el valor esperado adicional del primer acto no es suficiente para compensarle el riesgo adicional.

Pero aunque la actitud hacia el riesgo es una cuestión de preferencia individual, esto no implica que no pueda ser tratada cuantitativamente. Ya hemos apuntado cómo un factor subjetivo -la probabilidad relativa de los acontecimientos- puede ser expresado numéricamente. Quizás resulte más interesante considerar que un mecanismo muy similar puede utilizarse para poner la actitud con respecto al riesgo en una base cuantitativa.

Consideremos para este efecto, el uso de un generador de aleatorios para asignar valores condicionales a los actos dados los acontecimientos, en forma tal que los promedios ponderados de esos valores sean guías válidas para la acción. Los valores condicionales que obtendremos serán llamados utilidades, y el criterio que resulta es llamado por algunos autores criterio de la utilidad esperada.

10. El problema de decisión que hemos citado anteriormente involucra tres valores monetarios condicionales: P , cero y $-kP$. Trataremos ahora sobre la construcción de un estándar que pueda usarse para asignar a esos valores monetarios los correspondientes valores de utilidad, además de incorporar de alguna manera la actitud con respecto al riesgo.

Imaginemos que si el agente realiza un ensayo cuyo resultado es E_1 , recibirá una cantidad P . Si en cambio el resultado del ensayo es el evento E_2 , tendrá una pérdida igual a la cantidad $-kP$ (siendo $k > 1$).

Antes de poder usar este estándar para medir las utilidades, tendrá que calibrarse; es decir, establecer un acuerdo con respecto a la unidad de medida. Para este propósito -y de manera un tanto arbitraria- postularemos que el valor de utilidad de P es de 1.00 y el valor de utilidad de $-kP$ es de 0.00.

Esta "arbitrariedad" no disminuirá la validez del estándar. (La situación es similar a los procesos de calibración de escalas en las Ciencias Naturales).

Si los eventos E_1 y E_2 se consideran equiprobables, tendremos que necesariamente la probabilidad de cada uno de ellos es igual a $1/2$. Esto es igual que pensar en una urna hipotética que contiene la mitad de bolas de color blanco y la otra mitad de color negro. Dados nuestros dos puntos de referencia, la utilidad esperada es simplemente $(1/2)(1.00) + (1/2)(0.00) = 0.5$ ().

Así pues, si tomamos como referencia para la calibración del estándar los posibles cambios de composición de la urna hipotética, podemos producir utilidades numéricas que vayan desde 0 hasta 1.

Supóngase ahora que el agente se muestra completamente indiferente entre: **(a)** \$0.00 con certeza; **(b)** Sacar una bola blanca de una urna con 54 bolas blancas y 46 negras.

La utilidad de la urna en el caso **(b)** es de 0.54. Puesto que a juicio del agente **(a)** es equivalente a **(b)**, debe asignarle al evento **(b)** un valor de utilidad de 0.54.

Puede emplearse un procedimiento similar para encontrar la utilidad de cualquier otro valor monetario que se encuentre en el intervalo $(-kP, P)$. Aquí es importante enfatizar que una vez que los valores de utilidad han sido arbitrariamente asignados a los dos extremos de referencia, todos los demás valores están completamente determinados por la actitud que se tenga con respecto al riesgo.

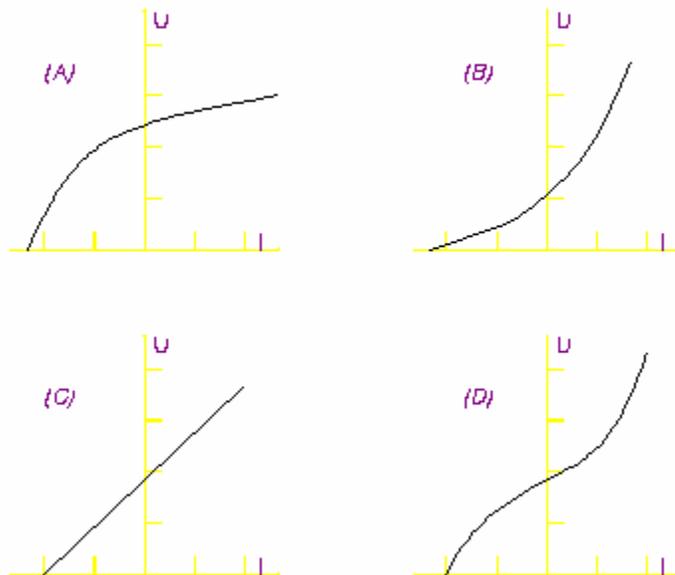
11. Debe notarse que la medición de la utilidad considera como dada la preferencia de quien toma la decisión entre: (a) Una cantidad segura, y (b) la oportunidad de obtener un aleatorio determinado con base en la distribución uniforme (o bien, una urna hipotética).

Mientras es posible obtener un número de utilidad que refleja cuál es esta preferencia, no es posible obtener un número que refleje *cuál debería ser* esta preferencia. *Cuál debería ser*, es una cuestión que depende íntegramente de la actitud personal hacia el riesgo de quien toma las decisiones.

¿Qué valor tiene el criterio de la utilidad esperada si no puede decir a quien toma las decisiones cómo debe actuar en una elección tan simple? La respuesta es que, cuantificando sus juicios en situaciones donde es relativamente fácil medir la cantidad de riesgo involucrado, el criterio de la utilidad esperada permite al tomador de decisiones determinar cómo debe actuar en situaciones más complicadas si desea actuar consistentemente con sus juicios.

12. El uso del generador de aleatorios (o de la urna hipotética) para encontrar la utilidad de todo valor monetario posible en un problema de decisión en el que el riesgo juega un factor importante, sería tan costoso como poco práctico. Sin embargo, es posible evitar esta dificultad en una forma simple para la mayoría de los casos. Quien toma decisiones puede determinar la utilidad de unos pocos valores monetarios, representar esos valores particulares en un plano cartesiano y luego ajustar una curva suave a esos puntos.

Figura 1



La curva puede ser usada para encontrar por interpolación utilidades para valores monetarios adicionales.

Este procedimiento está indicado en la figura 1. Los puntos en esta figura, representan las utilidades.

Una curva de utilidad de pendiente decreciente es típica de un agente que tiene aversión hacia el riesgo; está dispuesto a ceder valor monetario esperado para reducir su riesgo. El efecto de otras actitudes posibles hacia el riesgo sobre la forma de la curva de utilidad, está ilustrado en las figuras adyacentes; el ejemplo (d) corresponde al caso común de un agente cuya actitud hacia el riesgo varía con el monto en juego.

Una curva de utilidad recta (caso c) refleja la actitud de un agente que es neutral en cuanto al riesgo. Tal agente estaría dispuesto a ser guiado por el valor monetario esperado. Cualquier curva suave puede ser aproximada por una línea recta si tomamos un segmento de ella suficientemente pequeño. Esta es la razón por la cual, si el monto en juego en un problema de decisión particular es suficientemente pequeño, el valor monetario esperado puede ser usado aun por alguien que en general no es neutral acerca del riesgo.

Si bien es cierto que el proceso de toma de decisiones ha sido siempre inherente al ser humano, la óptima organización en términos racionales de los elementos que conforman dicho proceso, no siempre ha acompañado la manera de proceder de los individuos ni sus acciones ante la necesidad de afrontar un futuro incierto².

Para terminar con la revisión de este tema, destacaremos el hecho de que formalmente, las fases de identificación y análisis de un problema de decisión, ponderación de criterios, generación de alternativas de solución en términos probabilísticos, selección y finalmente, toma de decisiones, se han ido incorporando a los modelos normativos sobre fenómenos económicos y financieros sólo a partir de mediados del siglo pasado.

Es precisamente por esa época, que J. Hirshleifer (1958) publica un artículo fundacional titulado *On the Theory of Optimal Investment Decision*, en *The Journal of Political Economy*, en el cual introduce formalmente elementos analíticos para la toma de decisiones financieras en condiciones de incertidumbre.

No obstante, es hacia finales del siglo XX que surge el auge que hasta la fecha sigue teniendo la construcción de modelos analíticos sobre el proceso de toma de decisiones, visto éste como factor central de la investigación económica y financiera.

² "Toda mala decisión que tomo, va seguida de otra mala decisión" afirmaba Harry Truman hacia el año 1945, cuando el mundo vivía el dramático final de la segunda guerra mundial.

En particular, en el año 1995 I. Gilboa y D. Schmeidler desencadenan una serie de investigaciones basadas en estudios de caso y series de variables económicas (*Case-Based Decision Theory, The Quarterly Journal of Economics*, 1995).

En ese mismo año, el *Journal of Mathematical Economics* publica el artículo *On the value of information in multi-agent decision theory*, en donde los autores B. Bassan y M. Scarsini ponen en relieve el papel de la calidad de la información que alimenta el proceso de toma de decisiones.

Asimismo, en el ámbito de la investigación de operaciones, J. E. Smith construye en 1995 un interesante modelo de aplicaciones al análisis de decisiones en condiciones de incertidumbre.

Por su parte, J. Peterson (1995, *Journal of European Public Policy*), orienta su investigación hacia una reformulación del modelo clásico de toma de decisiones aplicado a las estrategias de integración de la Unión Europea y a las políticas públicas de ésta con relación a los Estados Unidos de América.

En la misma línea de las anteriores investigaciones, J. Jung, Y. C. Kim y R. M. Stulz (1995) publican el artículo *Timing, Investment Opportunities, Managerial Discretion and the Security Issue* en el *Journal of Financial Economics*, donde ponen énfasis en aspectos como la evaluación de la intervención oportuna (timing model), así como otras variantes de modelos de toma de decisiones en el ámbito de los mercados de capital³.

El papel fundamental de la información de calidad, la experiencia y la heurística como parte integral de los modelos de toma de decisiones en economía y finanzas son discutidas por Busenitz y Barney (1997) en un artículo titulado *Biases and Heuristics in Strategic Decision*.

En virtud de la complejidad que confiere a los procesos de toma de decisiones económicas el hecho de que éstas deban llevarse a cabo con antelación a los acontecimientos económicos y muchas veces en ausencia de cualquier conocimiento, incluso probabilístico, acerca de los resultados que podrían tener los mismos, Foster y Vohra (1999), discuten en su artículo *Regret in the online Decision Problem* los costos que debe considerar el tomador de decisiones financieras en cada estado del proceso.

Para casos en que la ausencia de conocimiento probabilístico sobre futuros acontecimientos económicos, hace que el investigador decida postular una distribución subjetiva de probabilidad y sobre ella basar sus decisiones, es deseable

³ Pecking-order model & Agency Model

contar con criterios de evaluación de las distribuciones predictivas. Con tal propósito, Chamberlain (Econometrics and Decision Theory, Journal of Econometrics, 2000) propone variantes del criterio minimax así como procedimientos Bayesianos aplicados a modelos económicos paramétricos⁴.

Posteriormente, Bewley (2002, *Knightian Decision Theory, Decisions in Economics and Finance*) introduce un nuevo factor de decisión que denomina *inercia de decisión* y que se refiere a la determinación y cálculo del conjunto de alternativas plausibles por el *status quo* de los ámbitos económico y financiero y cómo éste influye en el proceso de toma de decisiones.

En este mismo sentido, Fontana y Gerrard (2004) intentan ir más allá y en su artículo titulado *A post Keynesian Theory of Decision* postulan los fundamentos para una generalización del análisis Keynesiano de incertidumbre y su relevancia para el desarrollo de la teoría de decisiones en condiciones de incertidumbre así como su contribución en lo general a la teoría económica.

⁴ El enfoque Bayesiano en la teoría de las decisiones económicas se discutirá con mayor detalle en el Capítulo II.

De forma casi simultánea, otros trabajos centraron su interés en analizar el papel fundamental de la actitud (vgr. avidez o aversión) hacia el riesgo financiero relacionando la teoría de decisiones financieras con la teoría de juegos y teoría de procesos estocásticos (Cox J.C., Sadiraj V., 2006).

Asimismo, destaca el hecho de que las conclusiones de estas recientes investigaciones apuntalan el criterio del valor monetario esperado como base fundamental de la teoría de decisiones y el análisis de riesgo.

Asimismo, cabe destacar finalmente que la vigencia y validez del criterio mínimax discutido en este capítulo ha superado recientes tamices analíticos, inclusive desde la perspectiva de las pruebas Bayesianas de hipótesis estadísticas (Chamberlain, *Econometrica* 2007).

Hasta aquí dejaremos las referencias sobre los conceptos de *Teoría de las Decisiones* que hemos revisado en este capítulo, no sin mencionar que los desarrollos y la publicación de investigaciones continúan de manera intensiva, integrando inclusive conceptos teóricos de creciente rigor analítico (vgr, *Internacional Journal of Production Economics* 2008, Dimitrakos et all).

CAPITULO II

EL ENFOQUE BAYESIANO Y LAS TEORÍAS OBJETIVAS

Durante las últimas dos décadas, diversos econométricos han apoyado la corriente que se califica como *enfoque Bayesiano* de la estadística de las decisiones. En esencia esta escuela combina de manera original numerosos elementos de análisis, y es a esa manera especial de conjugarlos que se refiere el término *Bayesiano*. En rigor, la designación es un tanto impropia, pues si bien es cierto que en esta teoría se utiliza con más frecuencia que en otras el célebre teorema de Bayes (original del reverendo Thomas Bayes, y publicado póstumamente en 1763), ello no es más que el producto de una actitud diferente a la tradicional con respecto a lo que debe interpretarse como probabilidad. Sin embargo, el nombre de Bayesiano está aceptado y servirá para referirnos al enfoque que adoptaremos en lo subsiguiente.

Las técnicas Bayesianas han alcanzado rápida difusión en su versión moderna, especialmente en algunos países de Europa y en los Estados Unidos. En principio, se desarrollaron como métodos para el análisis de situaciones propias de los negocios, pero rápidamente se han encontrado aplicaciones variadas fuera de ese campo. A pesar de esta amplia difusión que señalamos, han sido relativamente pocos los trabajos en español que se han dado a conocer, especialmente en lo que toca a aplicaciones en problemas sobre mercados financieros. De ahí que encontremos importante incluir el presente

apartado, en donde se exponen las características principales en forma compacta y buscando su vinculación con los resultados de esta investigación.

Con estos propósitos, presentaremos sucesivamente:

(a) Pruebas de hipótesis estadísticas, incluyendo el uso de curvas características de error para la selección de la mejor prueba.

(b) La manera *decisionista* de seleccionar la mejor prueba; y más propiamente en el terreno de las ideas Bayesianas,

(c) La manera *subjetivista* de seleccionar la mejor prueba y

(d) La manera Bayesiana de decidir estadísticamente un problema dado.

El objetivo de este capítulo es llegar a los temas (c) y (d), pero creemos que el orden para la presentación de las ideas facilita la comparación de esta teoría con sus predecesoras.

1. Basaremos el primer razonamiento en una de las formas esenciales de inferencia estadística: el intervalo de confianza.

Para establecer mejor las ideas, consideremos el caso particular de una variable aleatoria Z , con una esperanza $E(Z)$ y una desviación estándar $s(Z)$.

Por consideraciones teóricas, quizás vinculadas al tamaño de las muestras, o por experiencia que se tiene sobre la naturaleza de la situación analizada, o quizás como una

simple aproximación, se acepta en un principio que Z se distribuye normalmente.

Sea $k_{0.05}$ el número real tal que si X es una variable aleatoria normal con esperanza nula y varianza unitaria, se cumple que

$$P(X > k_{0.05}) = 0.05 \quad (2.1)$$

de manera que $-k_{0.95} = k_{0.05}$. Vemos que

$$P(-k_{0.05} \leq \frac{Z - E(Z)}{\sigma(Z)} \leq k_{0.05}) = 0.9 \quad (2.2)$$

y también que

$$P\left(\frac{Z - E(Z)}{\sigma(Z)} \geq -k_{0.05}\right) = 0.95 \quad (2.3).$$

De estas probabilidades, se puede derivar formalmente, transponiendo términos dentro de los paréntesis, un intervalo de confianza del 90% en el primer caso, o un límite superior de confianza del 95% en el caso de la relación (2.3). Por ejemplo, si $s(Z)$ fuera conocida o estimada a satisfacción del investigador, de tal forma que no existiera incertidumbre con respecto a su verdadero valor, el intervalo

$$(Z - k_{0.05} \sigma(Z), Z + k_{0.05} \sigma(Z)) \quad (2.4)$$

es el intervalo de confianza del 90% para $E(Z)$ y

$$(-\infty, Z + k_{0.05} \sigma(Z)) \quad (2.5)$$

el límite superior de confianza del 95% para $E(Z)$.

Para resaltar la naturaleza de este principio, no escribimos el intervalo (2.4), por ejemplo, en la forma de una probabilidad, pues $E(Z)$ no es una variable aleatoria sino un parámetro.

Una forma aceptada de aclarar la naturaleza de (2.4) y (2.5) consiste en decir que bajo una interpretación probabilística de pruebas repetidas, intervalos de confianza de este tipo, calculados para muchos valores z_1, z_2, \dots, z_n del estadístico Z , cubrirán el verdadero (y generalmente desconocido) valor de $E(Z)$ con el 90% y 95% de los casos respectivamente.

Esta misma línea de argumentación puede utilizarse para probar hipótesis (estadísticas) con respecto a $E(Z)$. Así, dada la muestra y un valor calculado en ella, con el 90% de confianza aceptamos la hipótesis de que $E(Z) = E_0(Z)$ sí y solamente sí $E_0(Z)$ cae dentro del intervalo

$$(Z_0 - k_{0.05} \sigma(Z), Z_0 + k_{0.05} \sigma(Z)) \quad (2.6)$$

para una prueba de dos colas y simétrica en probabilidad.

2. En el caso particular de la prueba de hipótesis, es muy importante advertir los efectos de un diseño descuidado de la investigación¹.

En otras palabras, sería muy ventajoso que en la etapa de diseño se pudieran considerar, de una manera práctica, los riesgos de cada decisión en una prueba estadística, y así adecuar el tamaño de la muestra y la ubicación de los puntos críticos, por ejemplo, a los riesgos tolerables para cada valor del parámetro.

La manera de evaluar estos riesgos en el plano probabilístico que ha adquirido mayor aceptación, es la de construir las curvas características operantes (o curvas de potencia) para una prueba determinada. Estas curvas (o funciones) permiten tomar en consideración no sólo el valor del parámetro que corresponde a la hipótesis de nula, sino un intervalo de valores posibles del parámetro y, frecuentemente, todos sus valores posibles.

En general, la curva característica operante (CCO) en una prueba dada, es la representación de la probabilidad de

¹ Supongamos que en una muestra determinada z_0 haya resultado igual a 25 y el intervalo de confianza sea (16,34). Si bien en la mayoría de los casos hay tendencia hacia la aceptación de $E_0(Z)$ con valores, por ejemplo, de 24, 25 ó 26, una vez conocido el resultado muestral puede haber mucha mayor dificultad para aceptar, digamos, $E_0(Z) = 33.9$, a pesar que el modelo indica claramente el juicio que se debe emitir.

aceptar la hipótesis nula, como función del parámetro que se investiga. Por su parte, la curva de potencia es la complementariedad a la unidad, *i.e.*, muestra la probabilidad de rechazar.

Para un caso como el que corresponde a (2.4), o sea una prueba simétrica de dos colas en la distribución normal, la CCO es:

$$f(E(Z)) = P\left[\frac{Z - E(Z)}{\sigma(Z)} \leq k_\alpha\right] = P(Z \leq E(Z) + k_\alpha \sigma(Z)) \quad (2.7)$$

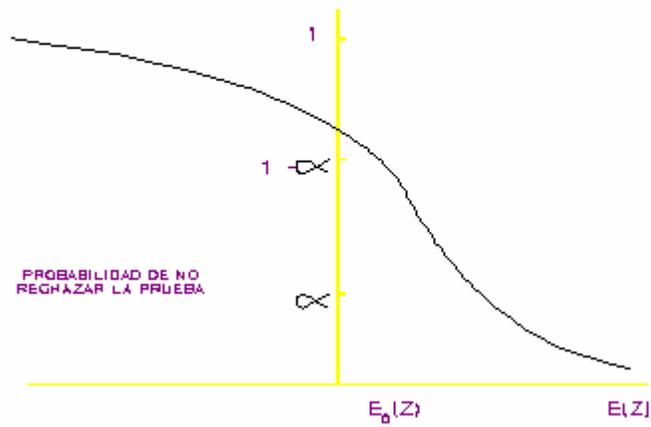
Para una prueba de una sola cola como la que se deriva de (2.5), del tipo *recházese si $z > z_0$* , la CCO es

$$f(E(Z)) = P\left[\frac{Z - E(Z)}{\sigma(Z)} \leq k_\alpha\right] = P(Z \leq E(Z) + k_\alpha \sigma(Z)) \quad (2.8)$$

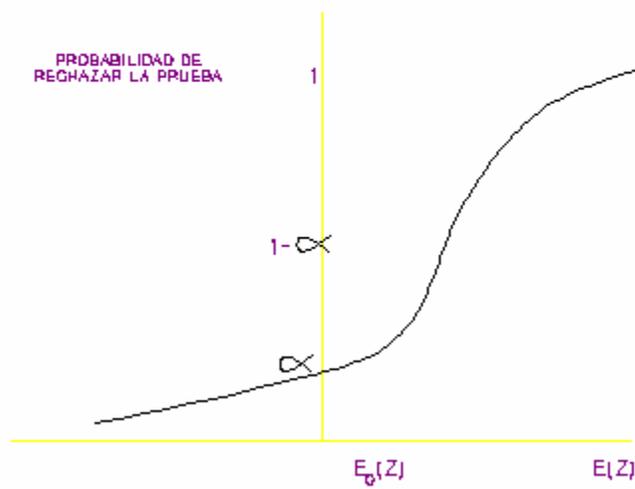
donde claramente se verifica que $z = E(Z) = K \cdot \sigma(Z)$ y α es el nivel de significación prueba (0.1 en (2.7)).

Por ejemplo, para probar la hipótesis nula de que $E(Z) = E_0(Z)$ contra la hipótesis alternativa de que $E(Z) = E_1(Z)$ donde $E_0(Z) < E_1(Z)$ y $\sigma(Z)$ es conocido, el tipo de prueba que corresponde a (2.5) es apropiado y las representaciones gráficas de la CCO (2.8) y de la función de potencia tienen la forma esquemática de las gráficas 2-1 y 2-2 respectivamente.

GRAFICA 2-1



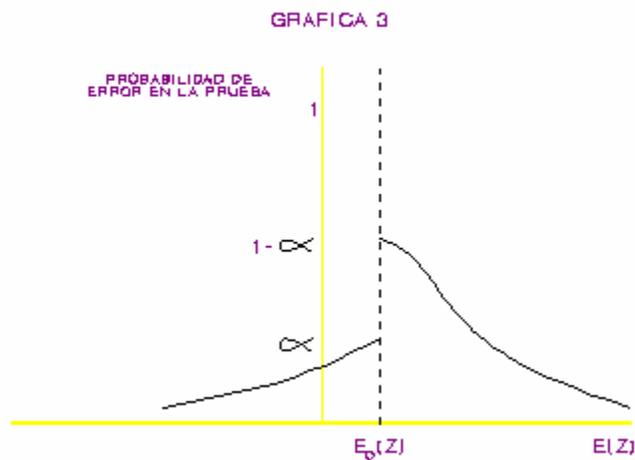
GRAFICA 2



Una formulación quizá más realista es la siguiente: Por consideraciones propias de la situación que se está investigando, se ha llegado a establecer que el valor $E_0(Z)$

del parámetro que se quiere probar, es el valor de indiferencia, de manera que resulta apropiado que la hipótesis nula sea $E(Z) < E_0(Z)$ y la hipótesis alternativa que $E(Z) \geq E_0(Z)$.

Para este tipo de prueba, a menudo resulta más ilustrativo reemplazar la CCO o la función de potencia por la curva característica de error que muestra las porciones de las otras dos curvas en las partes que corresponde a una decisión errónea de la prueba. El esquema de la gráfica 3 es típico de la forma de estas curvas.



3. Por lo menos en un plano teórico, el investigador podría plantear bajo la forma de la gráfica 3, una gran cantidad de las combinaciones posibles de pruebas cambiando la ubicación de Z , modificando el tamaño de la muestra, o haciendo ambas cosas a la vez. Con todo ese material a su disposición,

conjuntamente con el costo de cada alternativa, estaría entonces en condiciones de decidir sobre la prueba óptima.

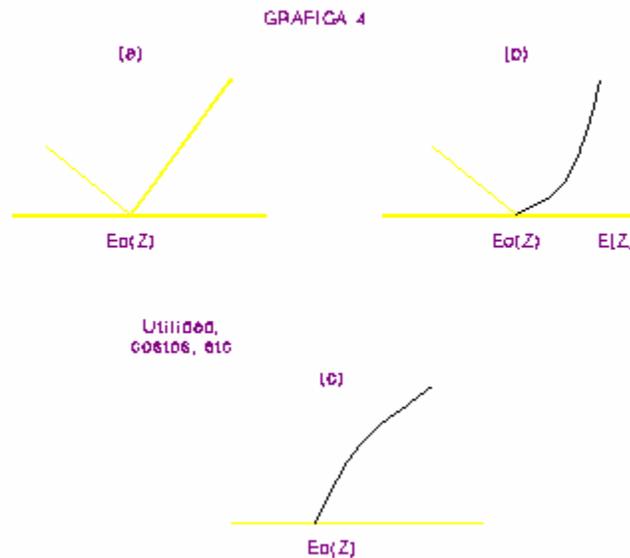
Obsérvese que la variedad de curvas características de error que existen para un caso como el que comentamos es infinita. Sin embargo, aun disponiendo de una experiencia limitada, se podría llegar por eliminación a una cantidad manejable.

Hay que considerar además que si bien los costos de realización de las distintas pruebas pueden estimarse bastante adecuadamente, el poder discriminador de una prueba, tal como aparece en la curva característica de error, viene dado en probabilidades y no en las unidades propias de la situación investigada.

A pesar de estas serias objeciones, es interesante comentar que existen publicados importantes resultados que se han conseguido al aplicar este tipo de análisis en casos concretos.

4. Aun con estos refinamientos, es claro que existe una gran variedad de situaciones en las que este análisis muestra defectos. Por ejemplo, estudiando la gráfica 3, vemos que la probabilidad de error en la prueba que hemos elegido como medida del riesgo en la decisión, se aproxima más al valor de parámetro que corresponde al punto de indiferencia, que a valores mucho más grandes o mucho más pequeños. No obstante, por la propia naturaleza del valor de equilibrio, esperaríamos que los riesgos medidos en las unidades originarias del problema (costos, utilidades, etc.) se

comportaran aproximadamente como en algunos de los esquemas de la gráfica 4.



En funciones tales como las representadas en la gráfica los valores dependen funcionalmente del parámetro que se investiga², *i.e.*, la función representa los riesgos de la decisión de la prueba en las unidades de medida propias del problema.

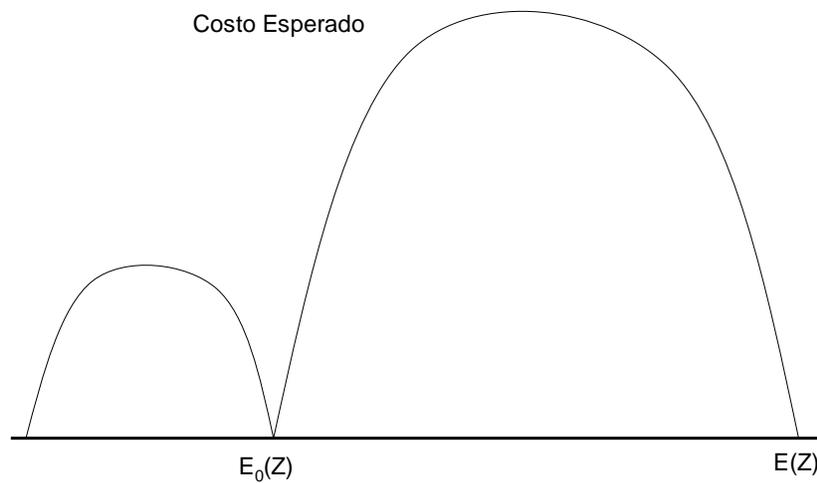
Las funciones de costo habitualmente incluyen sólo los elementos afectados por la decisión que se analiza. En consecuencia, no representan necesariamente el costo total en el sentido económico. Obsérvese que en los esquemas de la gráfica 4 las funciones se anulan por lo menos para $E_0(Z)$, precisamente para hacer resaltar esa situación.

² Se denominan funciones de costo

Estas funciones de costo no son fáciles de obtener en la práctica. Sin embargo, por lo menos en muchos casos de la investigación económica y de la ingeniería, funciones de costo pueden proponerse si se efectúa un análisis detenido del problema. En tal caso, el hecho de que se deba preparar más información original para aplicar las técnicas estadísticas, redundará en un beneficio posterior, pues los modelos podrán responder más adecuadamente muchas preguntas.

5. Si se aceptan y las ventajas del uso de la función de costo en un problema dado, el próximo paso sería emplearla junto con la curva característica de error en el diseño de la prueba, para lograr una evaluación más apropiada del riesgo asociado con cada decisión. En lo sucesivo (y conforme con la tradición en el tema), nos referiremos a "decisiones" y no a "decisiones de la prueba", con la implicación de que al decidir sobre la base de la estructura económica propia del problema, estamos decidiendo esencialmente sobre éste y no su versión estadística.

La manera propuesta para establecer la vinculación entre costos y probabilidades de error, y posiblemente la que más apela al buen sentido, es ponderar los valores de la función de costo por las probabilidades de la curva característica de error. La función resultante, que depende también del parámetro estudiado (función de costo esperado) adopta aproximadamente la forma esquemática de la gráfica 1.



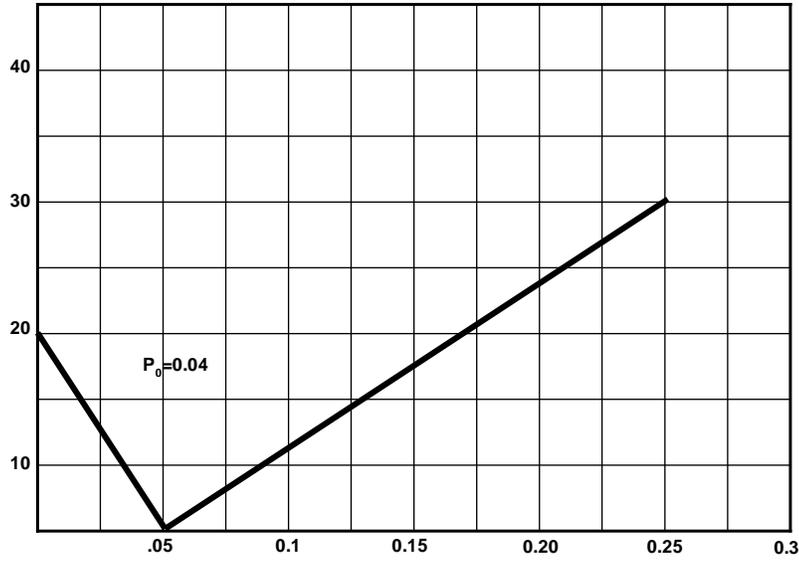
Gráfica 1

Si la función de costo esperado estuviera expresada en dinero, podríamos agregarle el costo de la información muestral que corresponde a la prueba respectiva, el costo del muestreo, con lo que tendríamos nuevas funciones de forma similar a la de la gráfica 1 (éstas son las funciones de costo total esperado).

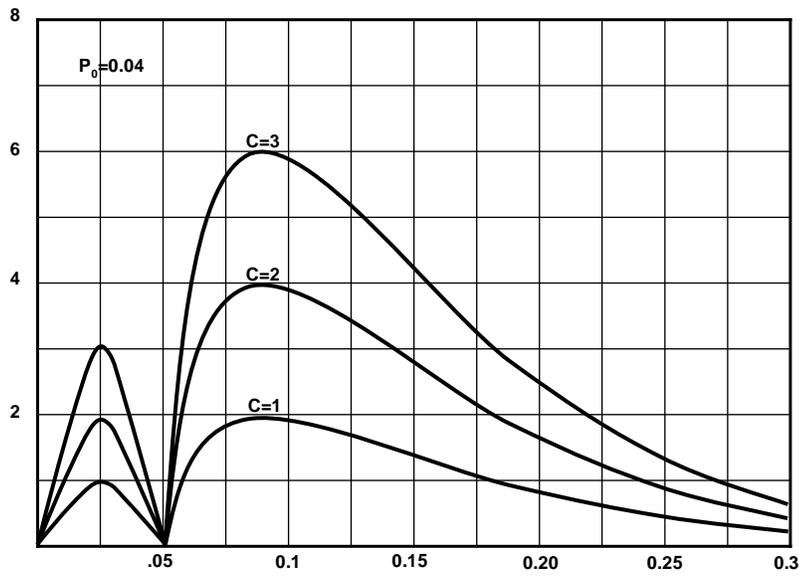
6. Nuevamente nos enfrentamos con el problema de que existen infinitas combinaciones de puntos críticos (z_0) y tamaños muestrales (n), cada una de las cuales origina una función de costo esperado o de costo total esperado.

Cuando las medidas del riesgo eran solamente probabilidades, considerábamos que se podría usar un conocimiento adicional sobre el problema para seleccionar la "mejor" prueba

considerando curvas como las de las gráfica 2 y 3.



Gráfica 2



Gráfica 3

Como ahora las curvas de riesgo representan unidades propias del problema y no probabilidades, podemos esperar que el juicio informal del investigador sea reemplazado por un criterio explícito para definir y seleccionar la mejor, entre el conjunto de pruebas posibles.

Una manera de hacer esta selección objetivamente, consiste en tener en cuenta el resultado más desfavorable de cada prueba (esto es, el máximo de la respectiva curva de costo) y seleccionar el que corresponda al menor de esos resultados desfavorables³.

³ A este método de selección se le conoce como criterio Minimax

7. A pesar de que el criterio *Minimax* posee una serie de propiedades muy atractivas y desde un punto de vista intuitivo es muy razonable, un análisis detenido permite advertir que aún presenta algunos inconvenientes importantes.

En particular, a menudo con este tipo de criterios, resulta imposible combinar explícitamente y como parte del modelo la función de costo esperado con otra información adicional que pudiera tenerse con respecto al parámetro estudiado. Esto representa un verdadero inconveniente, pues si se consiguiera información adicional de mucha credibilidad acerca de valores particulares del parámetro, obviamente sería deseable poder utilizar este conocimiento para seleccionar la mejor prueba. Consideraciones de esta naturaleza, llevan a un enfoque bastante diferente de todo el problema y este es el tema que analizaremos en el resto de este capítulo.

8. En todo nuestro análisis hasta el punto anterior, hemos utilizado las probabilidades bajo una interpretación tradicional y objetiva de pruebas repetidas, es decir, como límites de frecuencias relativas. En ningún momento hemos necesitado suponer que las probabilidades representan medidas del grado de credibilidad que se tiene respecto de un suceso (acorde con la interpretación cotidiana que se da a la palabra probabilidad).

Esta cuestión (teórica, pero fundamental) debe ser analizada para aceptar un nuevo modo de plantear un problema como el

que fue planteado en el punto número 7. Específicamente, la cuestión se centra en la aceptación de la interpretación subjetiva de las probabilidades.

Si estamos dispuestos a dar ese paso y reconocemos a las probabilidades como medidas (posiblemente subjetivas) del grado de factibilidad de un suceso cualquiera, repetitivo o no, proponemos utilizar el siguiente razonamiento:

Por conocimiento que se tiene sobre la naturaleza del problema, se puede asignar una distribución de probabilidades a $E(Z)$. Es decir, el parámetro que se investiga, que revestía ese carácter bien definido en los modelos descritos en los puntos 1-7, es considerado ahora también como una variable aleatoria (la variable aleatoria básica del problema). A ella se le asigna (de alguna manera), una distribución de probabilidad, aceptada por el investigador y aún propuesta subjetivamente por él; para distinguir a esta nueva distribución de la distribución muestral del estadístico que se considere en el muestreo posterior, la llamamos la distribución *a priori* de $E(Z)$. Los elementos que derivamos en los párrafos 1-7 para llegar a la curva de costo esperado, siguen formando parte del modelo, con la única variante que como $E(Z)$ es ahora una variable aleatoria, hablaremos de curvas (o funciones) características condicionales de error, de curvas condicionales de costo y de curvas condicionales de costo esperado; la palabra "condicional" indica que los valores dependen de la variable aleatoria básica del problema.

Es posible revelar ahora que el criterio que se desea proponer es el siguiente: Ponderemos los valores condicionales esperados de las curvas de las gráficas 1 a 3, por las probabilidades a priori asignadas a $E(Z)$ y seleccionemos como mejor prueba aquella que tenga el menor costo esperado incondicional.

9. Dejando para más adelante la discusión de si las probabilidades a priori son verdaderas probabilidades en todos los casos, obsérvese que estamos ya combinando la información que existe con respecto a $E(Z)$ con los datos que se conocen (también a priori), sobre la naturaleza de la prueba. En particular, esta alternativa "subjetivista", se muestra más razonable que utilizar el juicio del investigador para seleccionar la mejor prueba atendiendo únicamente a curvas características (condicionales) de error; estas últimas vienen expresadas en probabilidad y no puede esperarse en todos los casos que un investigador domine su naturaleza. En cambio, puede confiarse que dicho investigador estará en buenas condiciones para evaluar, de la mejor forma posible, su propio conocimiento con respecto a la variable básica del problema.

10. Nuestra presentación ha sido hasta ahora muy informal y sólo ha procurado revisar los elementos de los distintos modelos que consideraremos más adelante. Para proponer normativamente el diseño de la prueba que nos ocupa, utilizaremos la siguiente formulación:

Sea Z una variable aleatoria con espacio muestral \mathcal{R} . Sea θ un punto del espacio paramétrico Ω , donde Ω es un conjunto finito, $\Omega = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_s\}$.

Sea $p(Z/\theta)$ la distribución de probabilidades de Z cuando θ es el verdadero valor del parámetro, de tal manera que existen s distribuciones discretas de probabilidad $p(Z/\theta_1), p(Z/\theta_2), \dots, p(Z/\theta_s)$, una sola de las cuales se supone cierta cuando se realiza una observación de Z .

Sea A el conjunto o espacio de las decisiones, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ que se tomarán con respecto a θ sobre la base de la observación de Z . El conjunto $\{A\}$ será finito en todas nuestras aplicaciones.

Una función decisoria, d , que pertenece a una clase de funciones decisorias D , asocia con cada valor de Z una decisión en $\{A\}$. Por ejemplo, en nuestro caso particular tenemos que

$$d(r) = \begin{cases} a_1 \dots \dots \dots \text{cuando} \dots r > r_c \\ a_2 \dots \dots \dots \text{cuando} \dots r < r_c \end{cases}$$

Asociada con la decisión a , existe una función de costo $C(\theta, a)$ que representa el costo de la decisión a cuando θ es

el valor del parámetro. Esta función está definida en el espacio $\{A\} \times \Omega$ y asigna a cada punto de él un número real. La función de costo esperado es entonces

$$f(\theta, d) = E(C(\theta, d(x))) = \sum_{x \in \mathcal{X}} C(\theta, d(x)) p(x | \theta) \quad (2.9)$$

también llamada frecuentemente función de riesgo, y la suma se toma sobre los puntos de una región R definida por la regla decisoria propuesta.

El criterio minimax aconseja seleccionar la decisión d^0 que satisfaga:

$$f(\theta, d^0) = \min_{d \in D} \max_{\theta \in \Omega} r(\theta, d) \quad (2.10)$$

El criterio subjetivista en cambio, parte de una distribución a priori $q(\theta)$ y llega al costo esperado incondicional:

$$\bar{r}(\theta, d) = \sum_{i=1}^J \sum_{x \in \mathcal{X}} C(\theta_i, d(x)) p(x | \theta) q(\theta_i) \quad (2.11)$$

La decisión d^0 es propuesta como "mejor" sí

$$d^0 = \min_{d \in D} \bar{r}(\theta, d) \quad (2.12)$$

11. A pesar de la interpretación que hemos hecho del concepto de probabilidad y del uso de la distribución a priori, el

enfoque que hemos adoptado comprende lineamientos "tradicionales", es decir, ha buscado diseñar la prueba de una hipótesis estadística seleccionando un punto crítico, etc. Sin embargo, la aplicación de la distribución a priori permite combinar los elementos del problema de una manera diferente. Vamos a discutir a continuación la manera Bayesiana de analizar el problema de decisión. Para ello, existen dos acciones alternativas posibles.

Primero, supongamos que se ha logrado proponer una distribución a priori para la variable aleatoria básica (que denotaremos θ), y que se conoce la función condicional de costo (que denotaremos $C(\theta)$). Si no se dispone de otra información, es razonable proponer como criterio de decisión que se tome aquella acción que minimiza el costo esperado $E'[C(\theta)]$, donde hemos escrito E' para indicar que la esperanza es con respecto a la distribución a priori $q(\theta)$. Suponemos que μ sólo toma un número finito de valores, de manera que $q(\theta)$ es discreta.

Supongamos además que se ha decidido extraer una muestra aleatoria simple de tamaño n y en ella estimar a μ mediante el estadístico Z . Sea $p(Z/\theta)$ la distribución muestral de Z cuando θ es el valor verdadero de la variable básica del problema. Por el teorema de Bayes, tenemos que la distribución posterior de μ cuando se ha observado Z es

$$p(\mu | Z) = p(Z | \mu)q(\mu) / \sum_{\mu} p(Z | \mu)q(\mu) \quad (2.13)$$

Se propone como criterio de decisión en este caso en que existen simultáneamente información a priori e información muestral, seleccionar la acción que minimiza el costo esperado, $E[C(\mu)]$, donde la esperanza E es con respecto a la distribución posterior $p(\mu/Z)$.

12. Para mostrar cómo se calculan estas probabilidades posterior consideremos el siguiente caso: La distribución a priori de π (la proporción favorable a un cierto suceso), es

π	0.2	0.3	0.4	0.5
$q(\pi)$	0.4	0.3	0.2	0.1

Supongamos que se ha seleccionado una muestra aleatoria simple de tamaño 20 y el estadístico r , la observación muestral, ha resultado ser igual a 4; supongamos además que se dan las condiciones para que r pueda considerarse distribuido como una binomial.

Utilizando la nomenclatura de distribuciones conjuntas, marginales y condicionales, tenemos:

Variable Aleatoria Básica π_i	Distribución a priori (Marginal) $q(\pi_i)$	Probabilidad Muestral $p(r=4/\pi_i)$	Probabilidad conjunta $q(\pi_i)p(r/\pi_i)$	Distribución posterior $p(\pi_i/r=4)$
0.20000	0.40000	0.21819940	0.08728	0.65199
0.30000	0.30000	0.13042097	0.03913	0.29228
0.40000	0.20000	0.03499079	0.00700	0.05228
0.50000	0.10000	0.00462055	0.00046	0.00345

Obsérvese cómo la distribución posterior refleja el hecho de que el resultado muestral ($r=4$) ha contribuido a acrecentar la confianza que se tenía en $\pi = 0,2$.

13. Con el propósito de hacer el problema más general, puede suponerse que la variable aleatoria básica es continua. En este caso la densidad posterior es

$$f(\mu | Z) = \frac{p(Z | \mu)F(\mu)}{\int p(Z | \mu)F(\mu)d(\mu)} \quad (2.14)$$

Ahora bien, retomando el caso planteado en el punto número 13, supongamos que se acepta que π es uniforme en el intervalo $[0,1]$. Entonces

$$f(\pi|r) = \frac{\binom{n}{r} \pi^r (1-\pi)^{n-r}}{\binom{n}{r} \int \pi^r (1-\pi)^{n-r} d\pi} \quad (2.15)$$

Utilizando la solución de la función beta

$$\int \pi^r (1-\pi)^{n-r} d\pi = \frac{r!(n-r)!}{(n+1)!} \quad (2.16)$$

y la identidad

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n-r)!} \quad (2.17)$$

resulta que la densidad posterior de π dado r es:

$$\begin{aligned}
 f(\pi/r) &= (n+1) \binom{n}{r} \pi^r (1-\pi)^{n-r} \\
 0 &\leq \pi \leq 1 \\
 r &= 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

14. Quizá el caso más interesante se presenta cuando μ es a priori normal con media $E'(\mu)$ y desviación estándar $\sigma''(\mu)$ y la distribución muestral del estadístico Z es normal $(\mu, \sigma(Z))$ siendo μ el verdadero valor esperado. En este caso, si $\sigma(Z)$ es conocida, resulta que la distribución a posteriori de μ dado Z también es normal con esperanza $E''(\mu)$ y desviación estándar $\sigma''(\mu)$, donde

$$E''(\mu) = \frac{\frac{E'(\mu)}{\sigma^2(\mu)} + \frac{Z}{\sigma^2(Z)}}{\frac{1}{\sigma^2(\mu)} + \frac{1}{\sigma^2(Z)}} \sigma''(\mu) = \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2(Z)}}
 \tag{2.19}$$

Si la variable aleatoria básica, μ , es la esperanza de una distribución normal y el estadístico muestral es la media, entonces la distribución posterior es normal y los parámetros (2.19) adoptan la forma particular

$$E''(\mu) = \frac{\frac{E'(\mu)}{\mathcal{J}^2(\mu)} + \frac{n\bar{x}}{\mathcal{J}^2(\mu)}}{\frac{1}{\mathcal{J}^2(\mu)} + \frac{n}{\mathcal{J}^2(Z)}} \mathcal{J}^2(\mu) = \frac{1}{\frac{1}{\mathcal{J}^2} + \frac{n}{\mathcal{J}^2(Z)}} \quad (2.20)$$

15. En este punto consideraremos dos aspectos estadísticos de suma importancia.

En primer lugar, debemos establecer propiedades de los estadísticos muestrales que permitan seleccionar al más apropiado para utilizar en (2.13) ó (2.14). Resulta que el criterio deseado es el de suficiencia y esto es fácil de aceptar si advertimos que en la formulación "Bayesiana" se define a un estadístico muestral suficiente como aquél que permite obtener la misma distribución posterior que una descripción completa de la muestra, y esto para cualquier distribución a priori que se proponga.

La segunda cuestión se relaciona con la selección de la forma de la distribución a priori. De la discusión precedente se deduce que no existe ninguna restricción esencial sobre la forma de dicha distribución; sin embargo, si la expresión analítica de la distribución a priori se elige convenientemente, el problema matemático se simplifica notablemente, y en particular, la distribución posterior

entonces pertenece a una familia conocida de distribuciones de probabilidad.

Más concretamente, puede probarse que para muchos casos comunes de distribuciones muestrales, se puede obtener una familia de distribuciones a priori conjugadas, intercambiando el papel de los parámetros y las variables en la expresión de la distribución muestral, y entonces la distribución a priori.

16. Con la discusión hasta el punto 16, hemos reunido un conjunto de elementos fundamentales para el análisis estadístico de un problema de decisión, pues disponemos de una estructura económica (función de costo), de una distribución a priori de la variable aleatoria básica del problema y de un estadístico muestral. Además, como señalamos en la última parte del párrafo 12, hemos trazado una manera precisa de combinar esos elementos mediante una regla decisoria basada en el costo esperado incondicional (a priori o posterior, según exista o no muestreo).

Para terminar este capítulo, consideraremos el caso en que se cumplen las siguientes condiciones: (1) La estructura probabilística es como en el párrafo 14; (2) La función de costo es lineal como en la gráfica 2 y las dos ramas tienen pendiente de igual valor absoluto k , partiendo del valor

de indiferencia μ_0 . Se prueba que el valor esperado de la información perfecta (VEIP) es

$$\text{VEIP} = K \sigma(\mu) G(D) \quad (2.21)$$

donde $\sigma(\mu)$ es la desviación estándar de la distribución de μ

(a priori o posterior), y D se define como

$$D = \frac{|\mu_0 - E(\mu)|}{\sigma(\mu)}$$

siendo G la función Gamma definida por

$$G(a) = \int_a^{\infty} (t-a) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

que se encuentra extensamente tabulada en la gran mayoría de los textos de estadística.

A pesar de que la incorporación de la teoría de Bayes al enfoque clásico de decisiones permite mayores alcances y robustece el análisis condicional, en la práctica siguen siendo relativamente pocos los trabajos en los que se aprovecha cabalmente la riqueza de esta teoría.

Parte de la explicación de ello estriba en la complejidad algebraica que puede resultar cuando se utilizan funciones de

heurísticas distribución probabilística, así como en el hecho de que no todos los investigadores aceptan como método combinar la información estadística (muestral) con sus percepciones individuales, necesariamente subjetivas.

Lo anterior ha estado presente en los debates teóricos desde la época en que el propio Reverendo Thomas Bayes publicó su *Essay toward solving a problem in the doctrine of chance*, en la gaceta *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* (1763).

En dicho artículo, Bayes establece una sencilla y clara relación entre la probabilidad de ocurrencia de un evento condicionado a otro, con las probabilidades no condicionales de cada uno de los dos eventos en lo individual.

Sin embargo, es hasta el siglo XX que el poder conceptual de la teoría de Bayes se hace presente de manera relevante en el ámbito de las investigaciones económicas.

En el año de 1949, la reconocida publicación *Econometrica* da a conocer un interesante trabajo desarrollado por J.K. Arrow y D. Blackwell (1949) titulado *Bayes and Minimax Solutions of Sequential Decision Problems*, en donde se establece una caracterización general del problema de decisiones cuando la sucesión de eventos económicos es finita.

Este desarrollo es aprovechado poco tiempo después por Wald y Wolfowitz (1950) para demostrar el carácter óptimo de las pruebas Bayesianas en problemas de decisiones sucesivas.

La factibilidad de aplicar los métodos Bayesianos para propósitos inferenciales y pruebas no paramétricas (inclusive en muestras pequeñas), la ponen en evidencia Fralick y Scott en el año 1971 (*Non parametric risk estimation*, op. cit.).

Con mayor cercanía a la discusión que nos ocupará en lo subsiguiente, en el año de 1986 J. Ahtola, A. Ekholm y A. Somervuori (1986) publican una extensión de la teoría de Bayes aplicada a ecuaciones de regresión múltiple con cambio de coeficientes para el caso de ecuaciones autorregresivas de primer orden. El modelo que dichos autores presentan en este artículo fue aplicado para caracterizar las series muestrales de consumo de alcohol en los Estados Unidos.

Asimismo, con la finalidad de evaluar el marco regulatorio en la producción y uso de vehículos automotores, el *Journal of Risk and Uncertainty* publicó un modelo fundamentado en el teorema de Bayes y desarrollado por los autores D. L. Rubinfeld, y G. B. Rodgers (1992).

Por su parte, J. Krob y H. R. Scholl fueron quienes destacaron en el ámbito de las aplicaciones la utilidad del denominado *criterio minimax*, basando su investigación en series muestrales generadas a partir de procesos de control de calidad (*Economy and Quality Control*, 1997).

Dos años después, en 1999 G. Masayuki y S. Hirasawa publican en el *Internacional Journal of Production* un criterio de validación de modelos fundamentado en la teoría Bayesiana de decisiones así como la formulación y análisis de consistencia

para óptimos Bayesianos relativos a puntos de cambio de parámetros.

Más relacionado con el análisis de precios de activos financieros, que será otro tema de discusión en más adelante, Yong Zeng publica una relevante investigación en 2003 titulada *A Partially Observed Model for Micromovement of Asset Prices with Bayes Estimation* (Mathematical Finance, 2003).

En el año 2004, los autores J. Yao y Y. Lin, ponen en relieve el gran alcance que tiene la teoría probabilística basada en el análisis condicional para la construcción de *Redes Bayesianas de Decisión*⁴.

⁴ Los conceptos originales del reverendo Bayes siguen siendo aplicados para el análisis de problemas de frontera en los más diversos ámbitos de la ciencia. Éste es el caso, vgr., de la investigación desarrollada por C. Ying (2005) en *Internacional Review of Public Administration*, donde se presenta un modelo analítico de decisiones aplicado al problema del calentamiento global.

Asimismo, *The Journal of Marketing Research* publica en 2005 un importante artículo desarrollado por Horvath (2005) que versa sobre un modelo Bayesiano de autocorrección de errores de estimación, aplicado a la caracterización de la dinámica de precios.

Por su parte, *The Journal of Business* da a conocer recientemente una interesante versión de prueba Bayesiana del Modelo de Precios para Activos de Capital CAPM (op. cit. capítulos VI y VII), aplicada al análisis de los mercados financieros internacionales (D. Avramov, J. Chao, 2006).

Finalmente, citaremos entre las publicaciones relevantes relacionadas con los conceptos presentados en este capítulo el artículo titulado *Asymptotic Behaviour of Regresión pre-test Estimators with Minimal Bayes Risk*, (J. Reif (2007), *Journal of Econometrics*) y una interesante aplicación al análisis factorial desarrollada por L. Sikyum (2007) en *Quantitative Finance* bajo el título *Bayesian Análisis of the Factor Model with Finance Applications*.

Así pues, hemos revisado en este capítulo los conceptos de probabilidad subjetiva, distribución del parámetro principal de la distribución probabilística de la muestra para la toma de decisiones, así como la aplicación del teorema de Bayes para el análisis de esquemas de decisión basados en distribuciones de probabilidad condicional.

A continuación haremos uso de estos elementos para establecer el enfoque Bayesiano para modelos normativos de regresión lineal.

Capítulo III

ANÁLISIS BAYESIANO DE MODELOS DE REGRESIÓN
CON CAMBIO ESTRUCTURAL

En el capítulo precedente nos ocupamos casi exclusivamente de problemas relacionados con pruebas estadísticas en su versión Bayesiana. En el siguiente apartado el énfasis estará puesto en los problemas de estimación en modelos de regresión, que además de ser fundamentales para la presente investigación son de suma importancia en una gran variedad de estudios económicos.

1. El problema de regresión lineal puede resumirse de la siguiente manera: Dado un conjunto de T pares ordenados que asumen los valores $\{(X_i, Y_i)\}$, se propone que los Y_i son generados como funciones lineales de los X_i excepto por un término aleatorio. Esto es:

$$Y_i = B_1 + B_2 X_i + u_i \quad i=1,2,\dots,T, \quad (3.1)$$

donde se cumple que:

1) Los X_i son valores de una variable no aleatoria;

2) Los u_i son aleatorios con

$$i) E(u_i) = 0 \quad \text{para todo } i$$

$$ii) E(u_i, u_j) = 0 \quad \text{cuando } i \neq j$$

$$\text{iii) } E(u_i, u_j) = \sigma^2 \quad \text{cuando } i \neq j \quad \text{con } (0 < \sigma^2 < \infty) \quad .$$

3) Los u_i siguen una distribución normal;

4) β_1 , β_2 y σ^2 son parámetros. Supondremos primeramente a σ^2 conocida, no así a β_1 y β_2 .

Los problemas estadísticos que discutiremos son principalmente:

(a) Inferencias con respecto a β_1 y β_2 ; (b) Inferencias (intervalos de confianza) con respecto a toda la relación (1); (c) Inferencias con respecto a $E(Y_i)$; (d) Predicciones con respecto a un valor Y^* que corresponde a un X^* distinto a los datos, pero suponiendo que la relación $Y^* = \beta_1 + \beta_2 X^* + u_i$ siempre se cumple.

Ahora bien, para estimar a β_1 y β_2 podemos seguir dos caminos:

1) Eliminar el supuesto de normalidad de los residuos, o sea que la forma de la distribución de μ es arbitraria; en tal caso el Teorema de Gauss-Markov indica que los estimadores de β_1 y β_2 por mínimos cuadrados son *mejores lineales insesgados* (MLI);

2) Mantener el supuesto de normalidad de los residuos, en cuyo caso los estimadores por mínimos cuadrados revisten

ciertas propiedades estadísticas. En particular, son estimadores de máxima verosimilitud¹.

2. Algunos resultados del caso de la regresión lineal simple son:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \bar{y} - \beta_2 \bar{x} \\ \beta_2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}\end{aligned}\quad (3.2)$$

donde β'_1 y β'_2 son los estimadores por mínimos cuadrados

de β_1 y β_2 respectivamente y, por ejemplo, $\bar{X} = T^{-1} \sum_{i=1}^T X_i$ donde \bar{X} es la media de los X_i observados. Además las varianzas y covarianzas de estos estimadores son:

$$\begin{aligned}V(\beta_1) &= \sigma^2 \frac{\sum X_i^2}{T \sum (X_i - \bar{X})^2} \\ V(\beta_2) &= \sigma^2 \frac{1}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \\ COV(\beta_1, \beta_2) &= \sigma^2 \frac{-\bar{X}}{\sum (X_i - \bar{X})^2}\end{aligned}$$

¹ Las hipótesis de normalidad en los residuos han dado origen a una serie de procedimientos para formar intervalos de confianza y para probar hipótesis estadísticas diversas.

Por otra parte:

$$S^2 = \frac{1}{T-2} \sum_{i=1}^T (Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_i)^2$$

es un estimador insesgado de σ^2 .

Si se desea estimar el valor medio Y^* que corresponde a un cierto X^* distinto a los datos, la predicción MLI es:

$$Y^* = \beta_1 + \beta_2 X^*$$

y su varianza es

$$V(Y^*) = \sigma^2 \left[\frac{1}{T} + \frac{(X^* - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^T (X_i - \bar{X})^2} \right]$$

si en cambio se desea estimar el valor Y^* que corresponde a un cierto X^* , la misma predicción es MLI, pero su varianza es

$$V(Y^*) = \sigma_2^2 + V(\bar{Y}^*)$$

3. Los resultados se extienden casi directamente al caso de la regresión lineal múltiple entre la variable dependiente Y y las variables independientes X_1, X_2, \dots, X_p :

$$Y_i = B_1 X_{i1} + B_2 X_{i2} + \dots + B_p X_{ip} + u_i = \sum (X_{ij} B_j) + u_i$$

$$i = 1, 2, \dots, T, \quad (3.3)$$

donde es frecuente tomar $X_{i1} = 1$ para todo i .

En notación matricial escribimos:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{y} : T \times 1 & \boldsymbol{\beta} : p \times 1 \\ \mathbf{X} : T \times p & \mathbf{u} : T \times 1 \end{array} \quad (3.4)$$

y los supuestos son:

- a) \mathbf{X} es no aleatoria;
- b) \mathbf{u} es un vector aleatorio con:

$$i) \quad E(\mathbf{u}) = 0$$

$$ii) \quad E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \sigma^2 \mathbf{I} \quad (0 < \sigma^2 < \infty) \quad (3.5)$$

- c) \mathbf{u} se distribuye como una normal para cada i ;
- d) $\boldsymbol{\beta}$ y σ^2 son parámetros. Suponemos que σ^2 es conocida.

Nuevamente es cierto que (para el caso no singular en que $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ existe),

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (3.6)$$

es estimador MLI de $\boldsymbol{\beta}$, cualquiera que sea la forma de la distribución de \mathbf{u} , y su varianza es $V(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$. Con la

hipótesis de normalidad de u , la función de verosimilitud para una muestra de T observaciones que cumplan (3.3), es:

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^T \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij})^2\right\}$$

$$= (\sigma\sqrt{2\pi})^{-T} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y - X\beta)'(y - X\beta)\right\} \quad (3.7)$$

de manera que es natural aceptar que el estimador (3.6) será también de máxima verosimilitud.

Utilizando las dos formas (3.3) y (3.4) de expresar los residuos, tenemos:

$$\sum_{i=1}^T \left(y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} \right)^2 = (Y - X\beta)'(Y - X\beta)$$

$$= (Y - X\beta)'(Y - X\beta) + (\beta - \beta)' X' X (\beta - \beta)$$

(3.8)

en donde β' está dado por (3.6) (Ver punto número 5 más adelante).

De manera que la función de verosimilitud puede escribirse

$$L(\beta) = C \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\beta - \beta)' X' X (\beta - \beta)\right\} \quad (3.9)$$

o sea descompuesta en una parte que contiene a los parámetros desconocidos (a la que llamamos el núcleo) y una constante C que no los contiene. Este recurso práctico es muy conveniente para simplificar las operaciones; el valor de las constantes

siempre puede recuperarse en una sola operación, pues las distribuciones de probabilidad tienen que sumar o integrar la unidad. En (3.9) decimos que la función de verosimilitud es proporcional al núcleo. Utilizaremos el símbolo " \propto " para indicar la relación de proporcionalidad.

4.- Deseamos demostrar (3.8), esto es que

$$(Y - X\beta)' = (Y - X\beta) = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) + (\beta' - \beta)' X' X (\beta - \beta)$$

y

$$\begin{aligned} (Y - X\beta)'(Y - X\beta) &= (Y - X\beta + X\beta' - X\beta)'(Y - X\beta + X\beta' - X\beta) = \\ &= (Y - X\beta)'(Y - X\beta) + (\beta' - \beta)' X' X (\beta - \beta) \end{aligned}$$

pues

$$= (Y - X\beta)' X (\beta' - \beta) + (\beta' + \beta)' X' (Y - X\beta) = 0.$$

Para demostrar esta última relación, observamos que cada sumando es de orden 1×1 (escalar), de manera que no se afecta su valor por transposición. Como un término es la traspuesta del otro basta demostrar, por ejemplo, que

$$(Y - X\beta)' X (\beta' - \beta) = 0$$

Reemplazando la expresión $(\beta' - \beta) = (X'X)^{-1}X'u$, ya que

$$\beta' = (X'X)^{-1}X'y$$

tenemos:

$$\begin{aligned} &= [X(\beta - \beta_0 + u)]' X(X'X)^{-1} X'u \\ &= (\beta - \beta_0)' X' X(X'X)^{-1} X'u + u' X(X'X)^{-1} X'u \\ &= -u' X(X'X)^{-1} X'u + u' X(X'X)^{-1} X'u = 0 \end{aligned}$$

5. El análisis Bayesiano comienza utilizando una distribución de probabilidad a priori (que será multivariante en el caso de la regresión múltiple) para β' , la variable aleatoria básica del problema. Por ejemplo, si la distribución a priori es normal de la forma

$$f(\beta) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\beta - \beta_0)' n_0(\beta - \beta_0)\right\} \quad (3.10)$$

n_0 representa la información disponible sobre β en unidades de varianza del proceso σ^2 . Por tanto n_0 es una matriz de orden $(p \times p)$ y contiene la información disponible a priori sobre las varianzas y covarianzas de β ; β_0 es un vector de orden p formado por los valores asignados a priori a la media de β . Bajo los supuestos que comprende el punto número 5, excepto que β es ahora aleatorio, (3.9) representa adecuadamente la función de verosimilitud de las T observaciones muestrales del modelo (3.4). Si hacemos $X'X = n$, puede demostrarse que,

dado que se observó el valor $\beta' = (X'X)^{-1}X'y$ en la muestra, β' a posteriori es normal de la forma (3.10) con

$$\begin{aligned} n_1 &= n_0 + n \\ \beta_1 &= n_1^{-1} (n_0 \beta_0 + n\beta'). \end{aligned} \quad (11)$$

Obsérvese la analogía con el caso del punto número 15 del capítulo II.

Si tomamos a $n_0 = 0$ y además estimamos a β con la media a posteriori, recuperamos el estimador de (3.6), esto es:

$$\begin{aligned} n_1 &= X'X \\ \beta_1 &= n_1^{-1}n\beta' = n^{-1}n\beta' = \beta'. \end{aligned}$$

Cabe mencionar que en este caso particular β' es el estimador a posteriori y su varianza es $\sigma^2(X'X)^{-1}$.

6. Una vez combinada la información a priori y la muestral en la manera descrita, el problema de la estimación puntual será resuelto de acuerdo con una función de pérdida de oportunidad apropiada. Son escasos aún los estudios económicos en los que se proponen justificadamente funciones de pérdidas particulares. La alternativa más utilizada actualmente consiste en recurrir a funciones que tengan dos ventajas principales:

a) Puedan servir de aproximación (local) razonable para un conjunto amplio de funciones;

b) Sean algebraicamente prácticas de operar.

La función de pérdida cuadrática satisface esas dos condiciones y además conduce a resultados que no difieren en esencia de los conocidos por vías de la estadística inferencial.

7. Para el caso normal multivariante que consideramos, es un resultado conocido que cualquier distribución marginal es también normal, univariante o multivariante. De manera que las estimaciones que se desean hacer con respecto a un subconjunto de los β_j se basarán en las propiedades de la distribución normal.

8. Para el problema de predicción en el caso normal con varianza conocida σ^2 , se deduce que la distribución a posteriori predictiva del vector Y^* como función de la matriz X^* de observaciones correspondiente, es:

$$\begin{aligned} & X^* \beta_0 \\ & Y \\ n^* &= I - X^* n_1^{-1} (X^*)' . \end{aligned}$$

9. Consideremos ahora brevemente el caso en que σ^2 es desconocida. La distribución a priori que conviene utilizar (la distribución conjugada natural) para β' y σ'^2 es la distribución normal-gamma, definida en general por:

$$f(\mu, h) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}h(\mu - m)'n(\mu - m)\right\}h^{\frac{1}{2}p} \exp\left\{-\frac{1}{2}vh\lambda\right\}h^{\frac{1}{2}l-1}$$

con parámetros m , p , v y λ , y donde μ es un vector de variables aleatorias.

En este caso utilizando como estadísticos a β' definido en (3.6) y a $s^2 = v^{-1} (y - X\beta')'(y - X\beta')$, donde v son los grados de libertad para s^2 , la distribución marginal a posteriori de β' y σ'^2 es nuevamente normal-gamma. La distribución marginal a posteriori de β' será entonces Student (multivariante) y la correspondiente distribución para cada uno de los β'_i será Student (univariante).

Hacemos notar que para ambos casos (σ^2 conocida o desconocida), los estadísticos utilizados, β' y s^2 son suficientes de acuerdo con lo expresado en el párrafo 16 del capítulo II.

10. Los resultados expuestos en los párrafos 6-9 corresponden a los casos más directos desde el punto de vista estadístico, pues las distribuciones a priori son las conjugadas naturales de las distribuciones muestrales, las que por otra parte se suponen normales. No obstante, desde el punto de vista de la aplicación de las ideas Bayesianas en los trabajos de investigación económica de carácter empírico, conviene considerar por lo menos las siguientes situaciones:

(i) La distribución a priori no es la conjugada natural, sino una distribución particular que sintetiza la información disponible con respecto a las variables aleatorias básicas del problema. En algunos de estos casos las distribuciones a posteriori serán de formas analíticas conocidas y se dispondrá de tablas para el cómputo de probabilidades, pero en otros casos deberá operarse numéricamente para obtener las probabilidades deseadas.

(ii) En la investigación puede desearse optar por una distribución a priori que represente la idea de que el conocimiento de las variables aleatorias básicas del problema es difuso.

(iii) Se supone que ρ y σ se distribuyen a priori en forma independiente.

(iv) Se supone que ρ se distribuye en forma proporcional a una constante k_1 y que $\log \sigma$ se distribuye en forma proporcional a una constante k_2 . Entonces se deduce que la densidad de σ es de la forma

$$p(\sigma) \propto k_2 / \sigma .$$

(v) Finalmente se deduce que *a priori*

$$\begin{aligned} p(\beta, \sigma) &\propto k_1 k_2 / \sigma \\ &\propto 1 / \sigma \end{aligned} \quad (3.13)$$

11. Pasemos ahora a integrar estas ideas al contexto de los modelos de regresión. Una práctica prevaleciente en el desarrollo de este tipo de modelos, ha sido la de suponer que los coeficientes de las regresiones son siempre constantes.

Sin embargo, el análisis de información debe contemplar la posibilidad de introducir consideraciones teóricas y/o empíricas que, en ciertos casos, permitan arribar a la especificación de modelos con parámetros que pudieran presentar cambios. En un esfuerzo encaminado hacia la precisión de patrones bajo los cuales se lleva a cabo el cambio en las relaciones de comportamiento entre las variables, se han sugerido en la literatura más reciente algunos procedimientos de estimación y pruebas de hipótesis, mismos que revisaremos más adelante.

12. Si definimos un cambio estructural como aquel que se presenta en al menos uno de los parámetros del modelo de regresión, podemos afirmar que muchos modelos econométricos pueden ser tratados bajo el enfoque de cambio estructural.

Por el momento, la mayoría del trabajo se ha orientado sólo hacia la inferencia estadística basada en modelos bien conocidos. La meta ha sido desarrollar procedimientos inferenciales de predicción de observaciones futuras, pruebas de hipótesis y estimación de parámetros.

Definiendo un **punto común** como aquel en donde se lleva acabo un cambio de régimen, podemos decir que la construcción

completa de métodos inferenciales para puntos comunes resultará fundamental en dos aspectos principalmente:

a) Para determinar evidencia sobre la validez de una teoría particular.

b) Predicciones muy pobres pueden derivarse de modelos que no toman en cuenta puntos comunes y cambios estructurales. Estas predicciones erróneas han sido frecuentemente tomadas como evidencia de inestabilidad estructural (Goldfeld 1970, Janes 1980).

13. Las ideas alrededor de las relaciones Bayesianas presentadas hasta aquí, han sido objeto de discusión durante mucho tiempo. A continuación haremos una breve mención de los planteamientos que han presentado algunos de los principales investigadores de las aplicaciones de la Teoría Bayesiana.

En primer lugar, Edwards Lindman y Savage, en su trabajo "Bayesian Statistical Inference for Psychological Research", *Psychological Review*, 1983 (70), sostienen en su "principio de estimación estable" que no es necesario aceptar a las probabilidades a priori uniformes como símbolo general y común de ignorancia con respecto a un problema, sino que en el análisis de las relaciones entre la distribución a priori, la función de verosimilitud y la distribución posterior, resulta aceptable actuar como si la distribución a priori fuera aproximadamente uniforme en un intervalo determinado².

Por su parte, el estudio del cambio estructural comienza con el análisis de sucesiones sencillas de variables aleatorias independientes, para luego progresar hacia regresiones simples y múltiples.

Primeramente, Page (1954) encontró métodos para detectar cambios en la distribución de una sucesión de variables aleatorias independientes. Su objetivo era elaborar procedimientos eficientes para control de calidad, mismos que trabajó bajo enfoques no paramétricos. Este es prácticamente el único trabajo de este tipo que se presentó en la década de 1950.

² El hecho de que las distribuciones proporcionales a una constante (positiva) sobre todo el eje real o sobre toda su parte positiva no puedan "normalizarse" para que integren la unidad no crea problemas matemáticos ni conceptuales de importancia, pues la normalización es un proceso relativamente arbitrario.

los cincuenta. Sin embargo, en la siguiente década se observó una explosiva actividad basada en procedimientos estadísticos paramétricos.

Chernoff y Zacks (1964) y Kander-Zacks (1966) estudiaron sucesiones de variables aleatorias normales y encontraron pruebas para detectar cambios en la media.

Las propiedades de estas pruebas fueron determinadas por Battacharya y Jhonson (1968) fundamentadas en los progresos habían sido presentados anteriormente por Chow(1960) y Quandt (1960).

A finales de los sesenta y principios de los setenta, Hinkley (1969, 1971) estudió el cambio estructural en sucesiones de variables aleatorias y en modelos lineales de regresión, empleando un método paramétrico no Bayesiano. Por ejemplo, para detectar cambios estructurales se usó la prueba de razón de verosimilitudes y estimadores de máxima verosimilitud con el fin de estimar los parámetros de sucesiones normales y binomiales.

Las propiedades asintóticas de estos procedimientos fueron también estudiadas por Hinkley. Su trabajo resultó en un importante estímulo para el estudio del cambio estructural.

En una de las primeras contribuciones Bayesianas, Bacon y Watts (1971) introducen herramienta para el estudio de cambios suaves en la función de regresión. Anterior a este estudio, el cambio se representaba por un punto $m = 1, 2, \dots, n-1$ en donde n es el número de observaciones. Es decir,

suponiendo que las primeras m variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_m tienen una distribución común, y que las restantes X_{m+1}, \dots, X_n tienen otra distribución común, el punto m , indicaría entonces dónde ocurrió el cambio.

Bacon y Watts encontraron la forma de inferir la ubicación de este punto m (aunque únicamente para muestras pequeñas) y su método fue de gran utilidad para posteriores investigaciones. Su trabajo motivó además la aparición de contribuciones Bayesianas durante las décadas de los setenta y los ochenta. Los modelos lineales de cambio estructural (univariados y multivariados) han recibido la mayor parte de la atención de los investigadores. Por ejemplo, Ferreira (1975), Holbert y Broemling (1977), Chin Choy y Broemling (1980) han estudiado los problemas de regresión

$$y_i = B_{11} + B_{12}x_i + e_i,$$

con $i = 1, 2, \dots, m$;

$$y_i = B_{21} + B_{22}x_i + e_i,$$

con $i = m+1, 2, \dots, n$,

en donde $m = 1, 2, \dots, n-1$ y (B_{11}, B_{12}) diferente de (B_{21}, B_{22}) , siendo los e_i variables aleatorias independientes con distribución común.

Con base en lo anterior y suponiendo normalidad para los errores, dos importantes problemas se han podido resolver. Primero, asumiendo que un cambio ($m < n-1$) ha ocurrido, los parámetros se pueden estimar encontrando su distribución

posterior marginal. Segundo, la detección de un cambio en los parámetros [es decir, $(B_{11}, B_{12}) = (B_{21}, B_{22})$] se examina probando la hipótesis $1 < m < n-1$. Esto último se basa en la distribución posterior marginal del punto de cambio.

Ferreira también ha estudiado las propiedades del estimador Bayesiano del punto de cambio, con tres distintas distribuciones a priori.

14. El artículo de Chin Choy y Broemling brinda un método Bayesiano para detectar un cambio en los parámetros del modelo lineal general. Este método se contrasta con el elaborado por Smith (1975), quien ha hecho muchas contribuciones Bayesianas a los problemas de cambio estructural, incluyendo exploraciones incipientes de procesos autorregresivos de promedios móviles (Smith 1977, 1980).

Otro importante aporte para el estudio del cambio estructural que debe ser mencionado es el de Box y Tiao (1975), quienes encontraron la manera de estudiar cambios en la media de una serie de tiempo representada por un proceso ARMA (Auto Regresivo de Promedios Móviles).

Dichos autores representan el cambio por una función de transferencia, y su análisis estadístico se basa en técnicas de series de tiempo construidas por Box y Jenkins (1970)³.

Más recientemente, las investigaciones se han orientado a examinar cambio estructural en procesos de series de tiempo como procesos ARMA y pruebas de hipótesis en modelos de regresión con errores autocorrelacionados⁴.

Pruebas de este estilo se basan en la suposición de que el término de error en la regresión no padece de autocorrelación o heterocelastividad.

En el mismo sentido, Toyoda (1974), Smith y Sicks (1979) examinaron la sensibilidad de la prueba de Chow respecto a la heterocelastividad. Un criterio F corregido para el

³ Este trabajo fue uno de los primeros que han tratado cambio estructural en series de tiempo. El análisis de Box y Tiao asume que el tiempo de cambio es conocido. Otro enfoque alternativo para modelar cambio estructural es mediante funciones de spline (Portier 1976).

⁴ Pruebas de hipótesis sobre parámetros relacionadas con la prueba F y conocidas en econometría como pruebas de Chow.

caso de heterocelastividad lo proponen Goldfeld y Quandt (1978) y Tsurumi y Shelfin (1984).

Otras pruebas para determinar los parámetros individuales basadas en el estadístico T, y su modificación para incorporar autocorrelación o heterocelastividad, han sido elaboradas por Tsurumi y Shelfin (1983) e Ilmakunnas y Tsurumi (1984).

Años después, son Bacon - Watts (1991) y Tsurumi (1990) quienes proponen modelos de regresión en donde el punto común de dos regímenes y una trayectoria gradual hacia el nuevo régimen se tratan como los parámetros a ser estimados⁵.

En el ámbito de las aplicaciones de los modelos de cambio estructural, destaca la contribución de Hansen (1997), quien presenta diversas aproximaciones numéricas de distribuciones asintóticas utilizadas para probar hipótesis de cambio estructural en modelos aplicados al estudio de la productividad laboral del Reino Unido (Hansen, 2001).

Maddala y Kim (1999), presentan por su parte una interesante revisión de los métodos basados en la aplicación de raíces

⁵ En ocasiones, el punto común en donde cambia el régimen puede no ser conocido con precisión, y es necesario hacer inferencias acerca de él. Watts-Tsurumi han sido de los primeros investigadores en proponer inferencias sobre puntos comunes. Para ello se preguntan por aquellos puntos en donde la razón de verosimilitudes es mayor y a partir de ahí desarrollan las pruebas de hipótesis.

unitarias y cointegración para identificar cambio estructural tanto desde la perspectiva clásica como Bayesiana.

Enfoques basados en modelos de tipo Markoviano han sido relacionados recientemente también con el análisis de cambio estructural (Carrasco, 2002).

Krämer y Sibbestern (2002), han llevado a cabo un proceso para distinguir perturbaciones de larga incidencia de un mal entendido cambio estructural en modelos de regresión lineal.

Por su parte, como una aportación al estudio de modelos de cambio estructural múltiple, Bai y Perron (2003) desarrollaron pruebas de hipótesis basadas en los valores críticos de la ecuación de regresión. Asimismo, dichos investigadores han elaborado algoritmos computacionales para el análisis de cambio estructural (Bai y Perron 2003).

Otra investigación relevante publicada el mismo año (Donald, 2003), resuelve en buena medida el frecuente problema de cambio estructural con puntos de inflexión desconocidos, a través de pruebas de hipótesis sobre la inestabilidad paramétrica de los modelos.

Los resultados del análisis de cambio estructural han sido también aplicados recientemente en el ámbito de los mercados financieros. Morana y Beltratti (2004), han llevado a cabo una interesante investigación sobre la relación entre la volatilidad de largo plazo del rendimiento de mercado y el cambio estructural.

Para terminar este capítulo, mencionaremos finalmente entre las investigaciones destacadas más recientes, la de Lazarova (2005), que versa sobre pruebas de hipótesis sobre cambio estructural en modelos de larga incidencia (long-memory), así como los artículos publicados por Perron y Qu (2006) y Papell-Prodan (2007) sobre el llamado cambio estructural restringido (i.e., se imponen restricciones sobre los posibles valores de los parámetros del modelo).

.

CAPITULO IV

MODELOS DE MEDIA-VARIANZA EN LA TEORÍA FINANCIERA

Para la determinación de los cambios que se producen a través del tiempo en la composición de un determinado portafolios, o de las diferentes preferencias de cartera de las distintas unidades económicas en un momento dado, y en general para cualquier examen de un cambio financiero, es necesario adoptar algunas hipótesis sobre el comportamiento del poseedor de activos.

Toda vez que hemos hecho en los primeros capítulos un análisis preliminar sobre los conceptos de *riesgo e incertidumbre*, la primera parte de este capítulo presenta una explicación general sobre cómo las unidades económicas que maximizan su utilidad prefieren, frente a un futuro incierto, diversificar sus tenencias de activos entre formas alternativas de riqueza.

Es un hecho que todas las oportunidades de inversión ofrecen rendimientos futuros inciertos, por lo que los poseedores de activos pueden diferenciarse en función del grado de utilidad que les representa asumir un riesgo. En todos los casos en que la distribución prevista de probabilidades de las retribuciones provenientes de diferentes activos no presente una correlación perfecta, puede demostrarse que el riesgo total emergente de la posesión de riqueza se reduce para

cualquier nivel dado de rendimiento previsto, por medio de la diversificación de las tenencias de activos. Como resultado de esto, los poseedores de riqueza no son indiferentes a la composición de sus portafolios.

En el apartado siguiente ofrecemos una explicación en dos partes acerca de las grandes diferencias que se observan en el comportamiento financiero de distintos agentes económicos. Esta diversidad puede relacionarse, por un lado, con las diferencias en el conjunto de oportunidades de inversión que la posesión de riqueza pone a disposición de sus propietarios. Dichas oportunidades, a su vez, están relacionadas con las diferentes características -en especial, la complementariedad- de los activos tangibles y financieros.

La diferencia en el comportamiento financiero también puede explicarse mediante la forma distinta en que la posesión de riqueza influye en las funciones de utilidad de los grupos económicos. Los inversionistas tienen distintas preferencias en cuanto a la toma del riesgo, y diferentes objetivos en cuanto a la acumulación a lo largo del tiempo. Tales diferencias en las oportunidades y las preferencias de las unidades económicas, que explican los variados comportamientos financieros en cuanto al capital, se relacionan con diferencias en el comportamiento frente al consumo y la producción, según precisaremos más adelante.

1. Manejo de los activos en presencia de incertidumbre. La incertidumbre es un aspecto central dentro del comportamiento financiero. La mera existencia de activos e instituciones financieras y del sistema de posesión indirecta de riqueza es fácilmente comprensible si se asume el hecho de que pocos acontecimientos futuros pueden preverse con certidumbre. Si todos los inversionistas tuvieran disponible una previsión perfecta (de modo que el resultado de cada decisión de invertir se conociera por anticipado), y si todos los costos de intercambio fueran nulos, el problema de cartera óptima consistiría, simplemente, en elegir aquel activo con la mayor tasa de retorno.

En un mundo caracterizado por la previsión perfecta, la diversificación de cartera no tendría sentido. Cada poseedor de activos trataría de transformar toda su riqueza en el activo de mayor tasa de rendimiento. Como toda riqueza debe mantenerse en alguna cartera, los precios de los activos se ajustarían de modo que todos estos rindieran idénticamente. La tasa de interés sería una expresión redundante para la tasa de retorno de los activos. Todos los tipos de activos del mercado de capitales rendirían la misma tasa, y la totalidad de la riqueza se mantendría directamente bajo la forma de activos tangibles. No habría préstamos, aunque existiría la posibilidad de alquilar a sus propietarios los activos tangibles. Expresado de otro modo, los servicios de

los activos tangibles, así como ellos mismos, podrían comprarse y venderse en un mercado.

La razón principal del manejo de activos y de la diversificación de cartera surge de la existencia de incertidumbre. Aun cuando los mercados de activos se considerasen perfectos, la incertidumbre acerca de las retribuciones futuras de los activos inducirá a los inversionistas cautos a diversificar y hará que todos sin excepción dejen de ser indiferentes respecto de la composición de sus portafolios. Para cada composición de cartera alternativa, un poseedor racional de riqueza debe tratar de estimar la tasa de rendimiento prevista y la posibilidad de resultados alternativos. ¿Cómo se elige una cartera óptima?

La teoría del comportamiento de cartera puede definirse formalmente como el estudio del procedimiento por el cual la información relativa a determinados activos y pasivos individuales puede transformarse en una información relativa a determinadas carteras y de los criterios para escoger aquella que esté más de acuerdo con los objetivos y preferencias de la unidad poseedora de activos.

2. Riesgo, incertidumbre y confianza. En las últimas décadas, los economistas han tomado progresivamente mayor conciencia de la necesidad de considerar adecuadamente los efectos de la

incertidumbre sobre las decisiones de consumo e inversión de las unidades económicas.

Probablemente, la principal dificultad para la verificación empírica de las hipótesis en esta área se relaciona con el complejo proceso por el cual las unidades de decisión, sobre la base de experiencias pasadas, formulan expectativas del futuro sobre las que puedan basar su comportamiento presente. Sin embargo, rara vez la teoría se ocupa de variables que pueden observarse en forma directa, y en general este problema operativo es aún mayor cuando se trata de medir las anticipaciones que las unidades económicas formulan sobre los acontecimientos futuros.

Particularmente, cuando no existe certidumbre los insumos de información en los que se basa el comportamiento de cartera no se componen únicamente del cálculo formal de los datos sobre conductas pasadas, aunque por lo general esto sea lo único con lo que cuenta el investigador. Los verdaderos insumos son las creencias probabilísticas subjetivas de los administradores de activos respecto de los hechos futuros.

Tales creencias, si bien se basan en cálculos, son interpretadas y luego complementadas con juicios intuitivos. En este sentido, quizás el primer obstáculo que se deba superar sea la distinción entre riesgo e incertidumbre. Ambos conceptos se refieren a situaciones cuyos desenlaces futuros se conocen escasamente. Sin embargo, el término

riesgo denota sólo aquellos hechos futuros en los que se conocen las probabilidades de los posibles resultados alternativos. La probabilidad objetiva se toma generalmente como una medida de la frecuencia relativa de hechos alternativos, y, en sentido estricto, se aplica únicamente a aquellos hechos de naturaleza repetitiva, con una distribución de frecuencias de la cual se pueden extraer observaciones y hacer inferencias estadísticas¹.

En contraste, la incertidumbre se refiere a una situación única, de modo que no se puede especificar en forma objetiva la distribución de frecuencias de los resultados posibles (para muchas decisiones, no se dispone de ninguna distribución de frecuencias relativas).

Pero aún cuando no haya datos objetivos sobre la función de distribución de probabilidad de un evento, por lo general, el tomador de decisiones tendrá creencias acerca de la probabilidad de los resultados alternativos².

En este contexto, hay que destacar que la falta de información objetiva acerca de la probabilidad de un hecho no debe confundirse con la falta de información acerca de ese hecho. Sobre todo porque las unidades inversionistas no

¹ Cuando se dispone de un gran número de observaciones, la frecuencia más probable generada en forma aleatoria se aproxima mucho a la probabilidad objetiva del hecho.

² La probabilidad subjetiva puede interpretarse como la medida del grado de ignorancia o confianza que se tiene con respecto a los resultados de determinados sucesos futuros. El término incertidumbre se usa, por lo general, para denotar el grado de ignorancia respecto de la distribución de frecuencias de un hecho futuro.

tienen otra alternativa que comprometerse con alguna decisión³.

En la presente investigación, sostendremos la posición de que las probabilidades subjetivas deben incorporarse a una teoría del comportamiento, dado que ciertamente éstas caracterizan un grado de probabilidad cuya magnitud tiene que ser al menos estimada por los individuos para tomar una decisión racional⁴.

En este contexto, desecharemos la idea de que las creencias probabilísticas subjetivas pueden normalizarse, ajustándolas por medio de algún tipo de descuento equivalente a la certeza, para compensar el uso de una información no cabalmente confiable. Hasta ahora, nadie ha sugerido la forma de realizar independientemente una medición operativa de este grado de ajuste a la certeza para todas las diferentes circunstancias.

Cabe destacar que el grado de confianza o creencia en las estimaciones probabilísticas subjetivas es función tanto de la información con que cuenta el individuo, como de su habilidad para interpretarla. Ambas diferirán entre los

³ Sin embargo, algunos autores se oponen a tratar las creencias subjetivas en términos de probabilidades.

⁴ El problema de la incorporación de la probabilidad subjetiva dentro de un modelo de toma de decisiones se comentará más adelante.

distintos individuos y por lo general ambas podrán variar con algún costo⁵.

3. Recordemos que la solución clásica al problema de incorporar el riesgo en un modelo consistió en hacer que el individuo racional encargado de tomar las decisiones maximizara el rendimiento previsto. En el largo plazo, el valor previsto se transforma en el valor *cierto*, en el sentido de que una Media muestral obtenida en forma repetida e independiente que es extraída de una misma población se acerca asintóticamente a la media poblacional.

La regla del rendimiento previsto ejerce una gran atracción intuitiva pero lleva con mucha frecuencia a conclusiones que contradicen el comportamiento observado. Al sólo buscar un óptimo de largo plazo, el criterio de la maximización del rendimiento previsto es incompatible con el enfoque de diversificación de cartera.

A fin de subsanar estas deficiencias, la teoría reemplazó la maximización del rendimiento previsto por la maximización de la utilidad prevista, como principio más general del comportamiento racional bajo condiciones de incertidumbre. Bajo este enfoque, no sólo es posible que la satisfacción no varíe en proporción al ingreso, sino que además las

⁵ Por ejemplo, es característico que las decisiones tomadas bajo presión favorecen la intuición a costa del análisis.

probabilidades subjetivas pueden estar sesgadas de modo tal que, por ejemplo, las probabilidades muy pequeñas estén sistemáticamente subvaluadas o las muy grandes sobrevaluadas. En este sentido, puede suponerse que cada unidad encargada de tomar decisiones posee una curva de utilidad que le permite determinar el valor subjetivo de cada resultado. Así, es posible considerar que la unidad elige la alternativa con la mayor expectativa de utilidad. El encargado de tomar decisiones no hace otra cosa que asignar cifras (utilidad) a resultados aleatorios. La cartera óptima es entonces, sencillamente, aquella combinación particular de activos acotada por la restricción presupuestaria externa de la unidad económica, que le promete la mayor utilidad total prevista.

De esta manera, el problema siguiente consiste en especificar la forma de la función de utilidad que surge de la posesión de riqueza y en identificar las variables que se han de incluir. Como es sabido, los activos rinden una gran cantidad de servicios, y se espera que todos ellos entren en la función de utilidad. En la teoría tradicional de la demanda, estos factores se diluyen bajo el calificativo de gustos o preferencias y se centra el análisis sobre las variables más o menos objetivas de ingreso y precios.

La utilidad prevista de la posesión de diferentes activos puede ser función, por ejemplo, de la aprobación o el rechazo

sociales, del deseo de crear, de la avidez por el riesgo, etc., además de la expectativa probabilística subjetiva de pérdida o ganancia. En otras palabras, la elección racional depende no sólo de las creencias probabilísticas subjetivas acerca de los resultados, sino también de la forma en que se generan, ya que se asigna utilidad tanto al *juego* en sí mismo como a la percepción de una cantidad. Puesto que el modo en que se genera la distribución de los resultados será con frecuencia importante, un poseedor de activos podrá, sin ser incongruente, sentir aversión hacia el riesgo con ciertos activos pero avidez hacia el riesgo con otros activos.

Un problema similar se presenta cuando intentamos asociar a una empresa funciones de utilidad colectiva. Las instituciones son responsables de una gran parte de la inversión financiera y tangible. Es natural que los funcionarios institucionales se vean llamados a elegir los activos de acuerdo con pautas de comportamiento socialmente definidas, que se consideran apropiadas para la institución que manejan⁶.

Ahora bien, para cada portafolios se puede suponer que el administrador estimará la distribución de probabilidades subjetivas de los resultados alternativos. ¿Cómo determinará el inversionista la composición de esos portafolios? Si todo lo demás permanece constante, y suponiendo que la ganancia

⁶ La manera en que surgen las preferencias institucionales y cómo influyen sobre el comportamiento institucional son temas no tratados en la presente investigación.

prevista sea buena, preferirá evidentemente un rendimiento mayor a uno menor. Como las perspectivas de ganancias futuras son inciertas, y la mayoría de las unidades inversionistas no son neutrales frente al riesgo, la utilidad prevista que se asigne a los posibles resultados también se relacionará con la incertidumbre de la ganancia o pérdida esperados.

4. A fin de explicar las decisiones que involucran riesgo, la función de utilidad debe tener ciertas propiedades. Por ejemplo, para hacer comparaciones de riesgo diferentes, la escala de utilidad debe ser cardinal. En forma más precisa, lo que está implícito es una escala de intervalos con un origen arbitrario y una unidad de medida no definida pero uniformemente espaciada, ya que el acto de elegir entre resultados inciertos revela el grado de las preferencias entre alternativas, y no un simple ordenamiento.

5. En general, para los inversionistas, excepto los neutrales frente al riesgo, la cartera óptima se define mediante algún tipo de combinación entre el rendimiento previsto y el riesgo que éste supone. A fin de ordenar las distintas carteras alternativas, los individuos deben, explícita o implícitamente, concentrarse en alguna medida de la tendencia predominante en sus distribuciones de probabilidad subjetivas, así como en alguna medida de la probabilidad de que experimenten una ganancia o pérdida excepcionales.

La especificación de determinadas medidas a fin de resumir las características más importantes de las distribuciones de probabilidad subjetivas todavía es, en la actualidad, una cuestión de conveniencias analítica y operativa. Esta situación poco satisfactoria se debe al conocimiento imperfecto del proceso de la toma de decisiones en una situación de incertidumbre.

En lo que se refiere al rendimiento previsto, se dispone de una cantidad de medidas alternativas de la tendencia central de la distribución de probabilidad: la media, la mediana y la moda.

La media, o esperanza matemática del rendimiento de un determinado portafolios, es el promedio ponderado de todos los resultados posibles, utilizando como ponderaciones las respectivas probabilidades de esos resultados. Representa el valor matemáticamente justo, en el sentido de que indica el rendimiento promedio si el inversionista mantuviera la cartera en un número indefinidamente grande de situaciones. La media es más sensible a los cambios en los valores extremos y, desde el punto de vista aritmético, es más conveniente de manejar que otras medidas de tendencia central (como la mediana o la moda). Por ello es usada casi siempre como la medida más apropiada de la tendencia central.

Con esto no queremos sugerir que para distribuciones muy asimétricas de un sólo extremo, como la ji cuadrada⁷, otra

⁷ Cuya distribución es : $f(x;k) = (x^{k/2-1} e^{-x/2}) / (2^{k/2} \Gamma(k/2))$

medida (p. ej., la moda) pueda ser el estadístico más relevante de la tendencia central, en la cual los individuos basan en realidad sus expectativas.

En cuanto al riesgo, la elección de una medida apropiada es mucho más difícil. La dispersión de una distribución de probabilidades puede medirse utilizando el rango, la desviación estándar, la varianza u otros momentos de orden superior centrados en la media. La desviación estándar, al ser raíz de la varianza, se puede comparar directamente con la media y comúnmente es tomada como la medida más general y conveniente de la variabilidad. (Ya que independientemente de la unidad de medida, en la mayoría de las distribuciones es de esperarse que gran parte de los puntos caerán dentro de un intervalo de dos desviaciones estándar a ambos lados de la media).

Por otra parte, desde el punto de vista algebraico, la varianza es más conveniente de manejar que la desviación estándar cuando se trata de obtener algún tipo de relación entre la distribución de probabilidad de los activos y de las carteras.

Una limitación importante en lo que toca a las medidas citadas, es que la dispersión no es una propiedad de la distribución de probabilidad que sea verdaderamente relevante para la construcción de una función de utilidad.

Es decir, los que evitan el riesgo no se desalientan frente a la probabilidad de ganancias superiores al promedio, sino ante la posibilidad de una pérdida fuerte o de un rendimiento nulo. De manera análoga, los individuos ávidos al riesgo no se sienten atraídos por la posibilidad de una pérdida excepcional, sino que únicamente asignan una utilidad muy alta a la probabilidad de una ganancia excepcional.

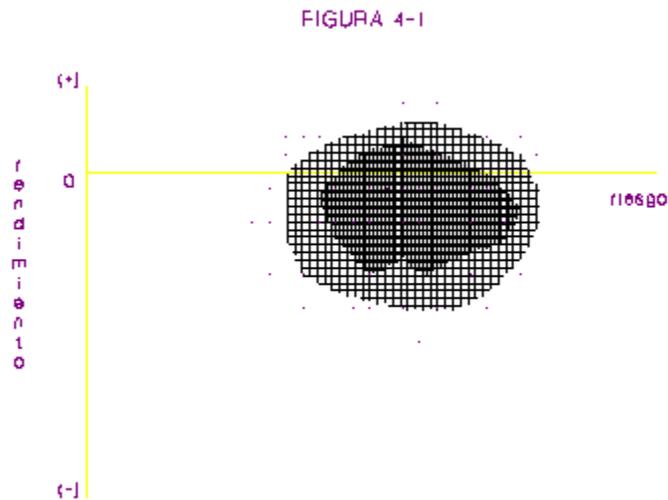
Por ello, debe distinguirse la probabilidad de una pérdida excepcional de la correspondiente a una ganancia excepcional; tanto el cálculo de la desviación estándar como de la varianza toman en cuenta las retribuciones muy altas y muy bajas como igualmente indeseables.

Por ello, en lugar de restringir las distribuciones de probabilidad subjetivas de los resultados previstos a determinadas familias de curvas con dos parámetros (*i.e.*, media y varianza), pueden obtenerse curvas de indiferencia a partir del supuesto de que las funciones de utilidad del tenedor de activos son cuadráticas dentro del intervalo que interesa.

5. Falta considerar la gama de oportunidades con que cuentan los poseedores de riqueza. La distribución de probabilidad subjetiva de pérdida y ganancia, relacionada con las propiedades de determinados activos variará mucho entre los diferentes inversionistas, en proporción a la información de

que dispongan y según su habilidad para convertirla en un beneficio directo.

Las combinaciones estimadas de rendimiento y riesgo, para cada uno de los activos que considera una unidad inversionista en particular, constituyen su campo de oportunidades de inversión disponible. Estas se hallan representadas por puntos en el cuadro de densidad de las oportunidades de inversión indicado en la figura (4-1).



6. Ahora hay que considerar la relación entre las combinaciones rendimiento-riesgo previstas por la tenencia de determinados activos y las combinaciones rendimiento-riesgo previstas por la tenencia en carteras compuestas por un conjunto específico de activos diferentes.

Cuando las distribuciones anticipadas del rendimiento de los activos individuales son, en cierto grado, independientes entre sí (conformando así una cartera diversificada), es posible reducir la incertidumbre del rendimiento al conjunto que queda por debajo del promedio ponderado de los distintos riesgos que se asocian con los activos individuales que integran la cartera. Esto se da siempre que los resultados individuales no estén perfecta y positivamente correlacionados, debido a que es probable que los rendimientos extremadamente bajos de algunos activos sean compensados, de manera global, mediante rendimientos en extremo altos de otros activos.

Recordemos aquí que la covarianza entre dos variables aleatorias se define como el valor previsto del producto de sus desvíos respecto de cada una de sus medias. Mide, pues, en qué grado las dos variables varían en forma conjunta⁸.

Por tanto, cuando dos variables aleatorias son independientes, su covarianza será cero. Un teorema de la teoría de probabilidad establece que la varianza de la suma de N variables aleatorias es igual a la suma de sus varianzas más el doble de la suma de todas sus covarianzas individuales. Por ello, se deduce que si las variables no están correlacionadas, la varianza de la suma es igual a la suma de las varianzas.

Dadas N variables aleatorias no correlacionadas -cada una de ellas con la misma media y varianza-, el promedio de la suma

⁸ $Cov(X, Y) = (1/N) \sum (x - \mu_x)(x - \mu_y)$

de estas variables es igual al valor previsto promedio de cada una. Pero la varianza del promedio de la suma es igual a $1/N$ multiplicado por la varianza de cada variable.

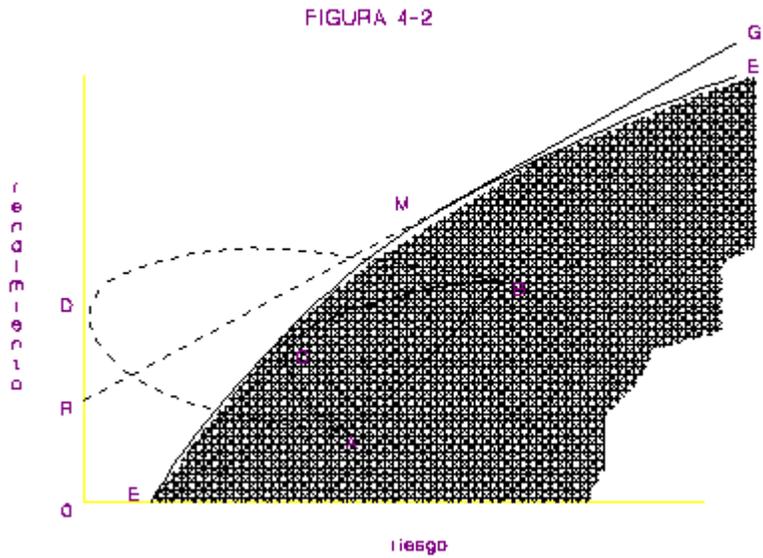
Estas propiedades sugieren que, si las retribuciones de los activos no estuviesen correlacionadas, la varianza del rendimiento promedio previsto de las carteras diversificadas se aproximaría a cero a medida que aumenta N (la cantidad de activos poseída). A causa de esta relación, la diversificación produce, en general, un riesgo mucho menor que el promedio ponderado de los distintos riesgos individuales.

Sin embargo, dado que en la realidad la mayor parte de las retribuciones de los activos están, de hecho, correlacionadas positivamente entre sí, las covarianzas entre las retribuciones de los activos individuales no son cero. Como señalamos antes, para reducir el riesgo que involucra la tenencia de riqueza, la diversificación es una técnica extremadamente poderosa cuando los resultados son bastante independientes o tienen correlación negativa. Es mucho menos eficiente para reducir dicho riesgo cuando existe una correlación positivamente elevada entre los rendimientos. En este último caso, a medida que aumenta el número de activos, la varianza del rendimiento del portafolios no se aproxima a cero, sino al valor del promedio de las distintas covarianzas.

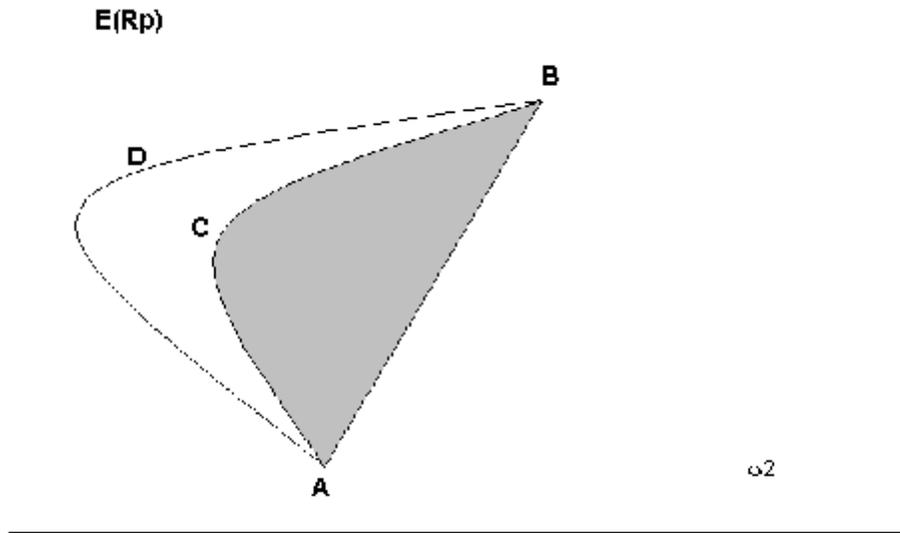
Todo lo anterior muestra que el inversionista racional no debe tener en cuenta la combinación rendimiento-riesgo de un activo aislado, sino considerar su covarianza con toda su cartera. El riesgo total del portafolios puede reducirse extendiendo la diversificación para que incluya un activo de mayor riesgo individual, siempre que su covarianza con los demás activos que ya integran la cartera sea baja o negativa. Es importante enfatizar que el activo que reduce el riesgo total de una cartera puede ser inapropiado e incluso llegará a incrementar el riesgo total de otra cartera. Si bien es posible probar que tomar en cuenta el riesgo lleva racionalmente a la diversificación de las inversiones, debe recordarse que ésta siempre significa un sacrificio de las probabilidades de ganancia⁹.

7. Por lo que se refiere al establecimiento de la frontera de posibilidades del conjunto de oportunidades propio de la tenencia de carteras de activos, los efectos de la diversificación también pueden representarse gráficamente. Una cartera se definirá como eficiente si resulta imposible obtener un rendimiento previsto superior sin un mayor riesgo, o una mayor certidumbre de rendimiento sin una menor expectativa de rendimiento.

⁹ El citado principio se aplica igualmente a las fusiones comerciales de diferentes empresas y a la administración financiera de activos.



Para simplificar el esquema, consideremos una cartera con dos activos, elegidos dentro del cuadrante positivo del cuadro de densidad de oportunidades de inversión, en la figura (4-2). Ahora bien, el punto A de la figura (4-3) representa la combinación rendimiento-riesgo prevista de la tenencia del activo A, y el punto B, la misma



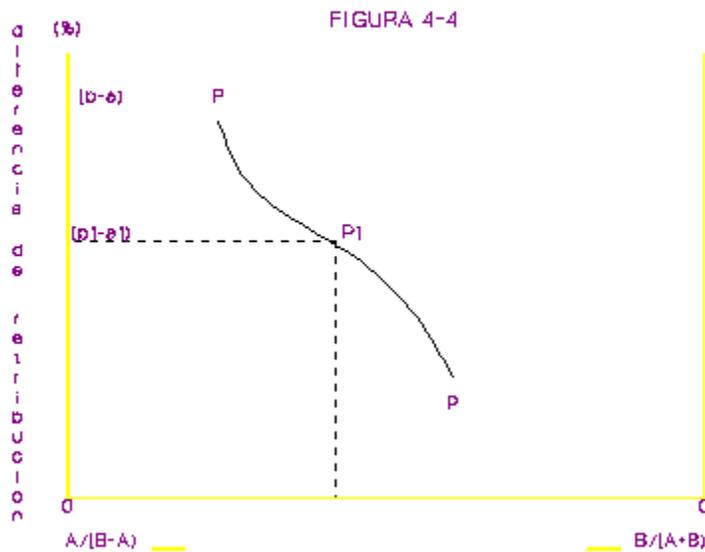
combinación asociada con el activo B. Si los resultados previstos de cada activo estuvieran perfectamente correlacionados en forma positiva, la frontera de oportunidades de la tenencia de todas las combinaciones de cartera de los activos A y B sería la recta AB. Pero si algunos resultados son independientes, o están relacionados en forma negativa, el riesgo colectivo de la cartera será menor que el riesgo promedio individual, de modo que la frontera de oportunidades de la cartera será la curva ACB. Solo la porción CB de tal frontera es eficiente, porque se supone que todos los inversionistas prefieren un mayor rendimiento prevista a igual riesgo. Si A y B tuvieran una perfecta correlación negativa -es decir, si tuvieran

covarianza suficientemente negativa-, podría eliminarse el riesgo por completo, y la frontera de oportunidades sería la curva ADB, constituyendo DB la porción eficiente. Cuando hay más de dos activos, el conjunto de combinaciones rendimiento-riesgo del portafolio deja de ser una curva única y se transforma en una superficie (que en el figura aparece sombreada). El cálculo y la representación de la frontera eficiente EE' son más complicados, pero siempre será convexa hacia arriba en tanto los resultados de las distintas carteras no estén perfectamente correlacionados, y la cartera de máximo riesgo será la que no esté diversificada.

La posibilidad de tomar prestado, que permite a las unidades económicas tener activos por encima de su posición de patrimonio neto puede introducirse sin mayores problemas en el análisis anterior. Los préstamos elevan la frontera de oportunidades de la posesión de riqueza, al permitir que las unidades deudoras se desplacen hacia combinaciones rendimiento-riesgo más elevadas de sus carteras, en comparación con las que habrían alcanzado usando solo sus propios recursos.

Para cualquier combinación de cartera de los activos (por ejemplo, M), puede verse que el acto de tomar prestado extiende la combinación rendimiento-riesgo hacia la derecha, sobre cierta recta (por ejemplo MG). La pendiente de la extensión MG dependerá del costo de interés de la deuda con respecto al rendimiento previsto de esa combinación de activos, M. La longitud de la extensión MG es función del

<<efecto de palanca>> (leverage), de la relación entre la magnitud del préstamo y la posición de patrimonio neto del prestatario. En tanto se pueda considerar que la obligación de pagar el interés por la deuda es cierta, MG será recta y sobre el eje de las ordenadas se podrá medir la tasa de interés del préstamo, OR, como en la figura (4-4). En sentido estricto, en el mundo real no existen créditos ni obligaciones de valor absolutamente conocido y cierto.



Finalmente, para terminar este capítulo destacaremos que todo lo anterior muestra que para cualquier costo de interés del préstamo, generalmente se financiará mediante la emisión representada en cualquier activo; de lo contrario, MG también sería convexa hacia arriba. Si OR representara una tasa de interés para un préstamo libre de riesgo, la frontera de

eficiencia se extendería a lo largo de MR. Las implicaciones de este análisis en cuanto a la optimización de los rendimientos de los activos financieros, se comentarán más adelante.

CAPÍTULO V

MODELO DE MARKOWITZ.

Las ideas expuestas en este capítulo están orientadas hacia la descripción formal del proceso de elección de portafolios de inversión por parte de un agente económico. Nombrar a la síntesis de los elementos aquí presentados como Teoría de Markowitz o Teoría de Portafolio resulta útil para destacar el propósito y la ubicación del material dentro del contexto general de esta investigación; sin embargo, es preciso reconocer que tanto la herramienta analítica como los aspectos teóricos que se utilizan aquí exceden por mucho a las aplicaciones que se discuten.

En particular, detrás del proceso de construcción de cualquier portafolio de inversión existen aspectos fundamentales que tocan a la teoría de las decisiones bajo incertidumbre.

En ese sentido los capítulos (II) y (V) se encuentran relacionados, ya que la elección de un portafolio de inversión es un ejemplo de aplicación - suficientemente importante para ser tratado aparte- de la teoría de decisiones bajo incertidumbre.

La teoría de Markowitz enfatiza la importancia de incorporar de manera explícita la presencia de incertidumbre en modelos de inversión de capital. Asimismo, en esta teoría se pone especial atención en el análisis de las posibles

interrelaciones entre los resultados de un evento (rendimiento de la inversión).

1. Para llevar a cabo la construcción de un modelo, se busca en general que las relaciones entre las variables que comprende puedan establecerse de manera clara y unívoca. En este sentido, los modelos pueden agruparse en dos tipos fundamentales: los modelos normativos, que nos señalan la manera en la que deben ser tomadas las decisiones y sirven como guías para la acción, y los modelos prospectivos, cuya naturaleza es más de corte predictivo y sirven para vincular la toma de decisiones con las relaciones de cambio esperado entre las variables que participan.

La prueba y la implantación de un modelo depende enteramente del propósito para el que haya sido formulado. La prueba de un modelo de tipo prospectivo, tendrá que ver necesariamente con su capacidad de predicción; uno normativo se tendrá que evaluar en cuanto a su capacidad de apoyo para el entendimiento del fenómeno y la toma de decisiones. En cualquiera de los casos, los requerimientos que deben establecerse para la aceptación del modelo han de considerar un margen de error. Es suficiente que el modelo represente al menos una mejora con respecto a otras alternativas anteriores a su construcción para que ésta se justifique.

El apego que un modelo deba tener con la realidad es de importancia relativa. Es decir, ante la gran complejidad que representa un problema real, un análisis completo de todos

los factores que determinen el comportamiento de las variables involucradas es generalmente imposible. En consecuencia, se requiere establecer una abstracción del fenómeno y una serie de hipótesis de trabajo. La atención debe centrarse en aquellos aspectos -relativamente pocos- que se consideren justificadamente como más importantes.

2. La teoría de portafolio formula sus resultados tanto en términos normativos como prospectivos. La frontera entre estos dos ámbitos resulta difícil de precisar, pero puede decirse que en términos generales la parte que toca a la construcción de portafolio lleva un corte normativo, mientras que la teoría de mercados de capital es más de naturaleza prospectiva. Afortunadamente, la vinculación un tanto imprecisa entre estos dos ámbitos no representa ningún problema grave para el desarrollo de la teoría.

3. Teóricamente, una unidad económica puede consumir toda la riqueza que posea de manera inmediata e instantánea, renunciando con ello a cualquier posible consumo futuro. En la realidad esto no es así. Si nos basamos en la definición de que la riqueza está representada por la máxima cantidad de dinero que (en principio) una unidad económica puede obtener, será un hecho que parte de la riqueza presente se reservará en general para acceder a posibles consumos a futuro. La diferencia entre la riqueza y el consumo presentes, constituyen el ahorro de la unidad económica. Este ahorro

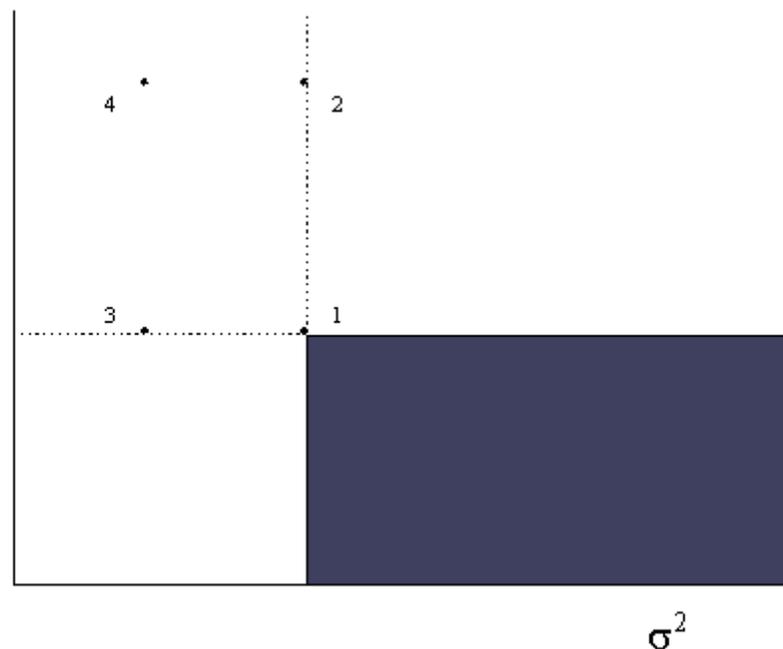
puede ser canalizado hacia la inversión en acciones de riesgo, acciones seguras o efectivo. Desde el punto de vista de la teoría del portafolio, todas estas alternativas son consideradas de manera indistinta como inversiones simplemente.

El conjunto de todas las decisiones que un agente económico tiene a su disposición como prospectos de inversión a futuro constituye su portafolio. En su sentido más amplio, la elección de un portafolio puede comprender incluso el cambio de actividad económica por parte del agente. Sin embargo, lo común en términos teóricos es restringir la discusión a los tipos particulares de decisiones que se refieren a un conjunto apropiado de inversiones en bienes. Así pues, se dice que un portafolio está constituido por bienes, títulos o acciones.

Hemos señalado ya que existen dos coeficientes fundamentales para caracterizar la distribución de probabilidad de la tasa de retorno de cualquier portafolio: la media E (como medida de la tendencia central) y la varianza S^2 (como medida de dispersión del rendimiento).

Las ventajas que puede ofrecer un portafolio particular en términos de riesgo y rendimiento quedan determinadas por los valores de E y S^2 . Dos portafolios cuyas distribuciones de probabilidad son distintas pueden llegar a tener los mismos valores de E y S^2 . Para efectos teóricos se toma como un hecho que cualquier agente considerará a estos portafolios como equivalentes.

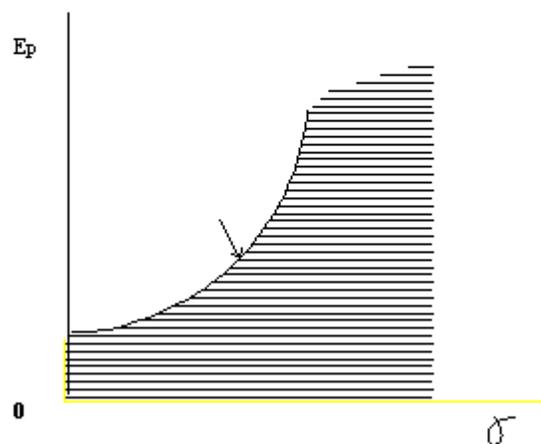
4. La representación de un portafolio puede llevarse también a expresiones gráficas, como se muestra en la siguiente figura. La desviación estándar (o la varianza) de la tasa de retorno se gráfica en el eje horizontal y se cruza contra la esperanza del rendimiento en el eje vertical.



Cuando la esperanza del rendimiento entre dos portafolios es igual, el criterio de elección estará basado en el valor mínimo de los riesgos medidos por la desviación estándar o la varianza correspondientes. De manera alternativa, cuando dos portafolios representan el mismo riesgo, el criterio de elección se basará en el máximo de las esperanzas correspondientes.

La mayor parte de los resultados de la teoría de portafolio se derivan de manera directa o indirecta del hecho de que los inversionistas son ávidos respecto a rendimientos altos y renuentes en lo que toca a asumir riesgos. Por supuesto, el grado de avidez o aversión que se tenga depende enteramente de la unidad económica involucrada en la decisión. En este sentido, la representación de las preferencias de cierta unidad económica particular mediante el uso de curvas de indiferencia (o curvas de nivel) es especialmente conveniente.

En la siguiente figura, las preferencias de inversionista están representadas de manera gráfica.



El área sombreada representa los puntos que significan portafolios menos asequibles -en términos de preferencias-

que aquel marcado en el punto 1. La curva que divide la región comprende todos los puntos que pueden considerarse como equivalentes al portafolio 1. A medida que E se vuelve preferente y S impreferente, la curva de indiferencia acentuará su concavidad hacia arriba.

Una gran cantidad de activos pueden ser elegidos para formar parte de un portafolio, especialmente si el término se utiliza en su sentido más amplio.

Sin embargo, en la práctica sólo un subconjunto dentro de todas las posibilidades es el que se toma realmente en cuenta. La selección de un grupo de acciones no es una tarea fácil.

Se supone que el inversionista tendrá que seleccionar un portafolio que incluya al menos una, de un total de emisoras o títulos disponibles. El número que elija dependerá de las ventajas o desventajas que represente una configuración limitada frente una más completa.

Para las emisoras, por su parte, se postula el principio de divisibilidad perfecta; es decir, dentro de ciertos límites bien determinados, cualquier monto deseado para invertirse en cierto título puede combinarse con los demás, sin que esto afecte de manera alguna las tasas de rendimientos individuales.

5. Ahora bien, formalizaremos las ideas anteriores de la siguiente manera:

Sea X_i la proporción del destinada a invertirse en la i -ésima acción, $i=1, \dots, n$. Entonces, debe cumplirse que

$$\sum X_i = 1$$

siendo factible que $X_j=1$, $X_i = X_j = 0$.

La tasa real de rendimiento del portafolio en su conjunto no es más que la suma

$$R_p = \sum_{i=1}^n X_i R_i$$

Si fuera posible predecir con suficiente exactitud la tasa real de rendimiento de cada una de las emisoras, la tasa de rendimiento del portafolio completo se calcularía simplemente como una suma ponderada. Sin embargo, ni el rendimiento de el portafolio ni los correspondientes de las emisoras individuales pueden predecirse con certidumbre.

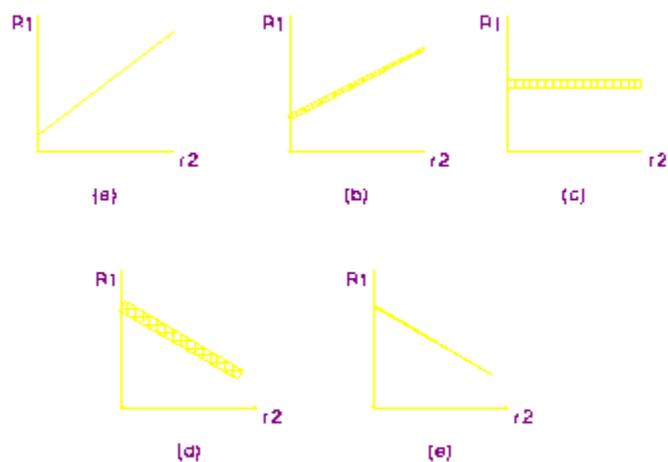
Así pues, otro de los problemas consiste precisamente en establecer estimaciones de R_i que puedan a su vez generar predicciones del rendimiento a futuro del portafolio.

Además de las anteriores estimaciones, es fundamental contar con alguna medida de la incertidumbre. En términos formales, esta medida siempre estará relacionada, como señalamos anteriormente, con la varianza de la distribución de probabilidad.

6. Una de las mayores contribuciones de la teoría de portafolio reside precisamente en el énfasis que pone sobre

el análisis de las interrelaciones de las variables. En el caso de los precios de las acciones, las interrelaciones se establecen a través del coeficiente de correlación, coeficiente de determinación o covarianzas. Con ellos se estima el grado de dependencia que existe entre las variaciones de precio de un título con respecto a otro.

En la siguiente figura se muestra un caso extremo: correlación perfecta entre dos títulos (caso a).



El efecto que produce es un lugar geométrico determinado por una línea recta. Esta última se va desvaneciendo al decrecer la correlación hasta el punto en que se invierte la pendiente y recobra su nitidez cuando la correlación es perfecta y negativa (caso e).

El valor numérico que alcance el coeficiente de correlación dependerá de la probabilidad que tenga cada una de las posibles parejas de resultados, es decir, de la distribución de probabilidad conjunta¹. Aquí es importante enfatizar que correlación no implica necesariamente causalidad. Simplemente se refiere -como su nombre lo indica- a una medida del grado en el que dos variables se mueven de manera conjunta.

Regresando ahora al punto que se refiere a la estimación del rendimiento del portafolio, recordemos que

$$R_p = \sum X_i R_i$$

y en consecuencia

$$E(R_p) = E_p = \sum X_i E_i$$

Es decir, la esperanza del rendimiento del portafolio es una combinación lineal de las respectivas esperanzas de los títulos individuales usando las ponderaciones como coeficientes.

Por su parte, la desviación estándar de la tasa de rendimiento del portafolio naturalmente depende de las respectivas desviaciones de los títulos individuales, de sus coeficientes y de las proporciones de inversión. Es decir,

¹ La probabilidad conjunta de dos variables X, Y, se defina como:
 $P(X=x; Y=y) = P(X=x | Y=y)P(Y=y)$.

$$\sigma^2_p = \sum \sum X_i X_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

lo que indica una suma de N^2 términos calculados independientemente. Dado que $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ y que $\rho_{ii}=1$ para todo $i=1,2,\dots,n$ tenemos que, al sustituir en la relación anterior la ρ por su expresión en términos de la covarianza, nos queda

$$\sigma^2_p = \sum \sum X_i X_j C_{ij}$$

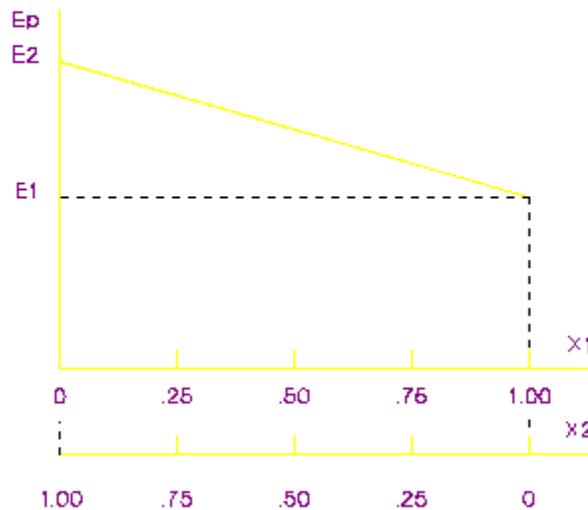
que es la relación que se emplea para el análisis de riesgo-rendimiento.

Considérese la elección de un portafolio que comprenda al menos dos títulos distintos, ninguno de los cuales tenga un rendimiento seguro. Supóngase por el momento, que el título 1 tiene un rendimiento esperado menor que el título 2, de manera que $E_1 < E_2$, $0 < \sigma_1 < \sigma_2$.

En la siguiente figura se muestra la relación entre E_p (en el eje vertical) y X_1, X_2 (en el eje horizontal). Hay varios hechos a destacar.

- La elección puede establecerse sobre la base de X_1 y calcular por diferencia $X_2 = 1 - X_1$, o alternativamente elegir X_2 y calcular $X_1 = 1 - X_2$.

- Solo se toman en cuenta -en este caso- valores positivos para X_1, X_2 ; con ello se está suponiendo que



el inversionista no cuenta con la posibilidad de emitir acciones por cuenta propia.

- El rendimiento esperado lleva una relación lineal con respecto a X_1 .

- La desviación estándar del rendimiento también se relaciona con el vector de composición del portafolio X_i , de modo que

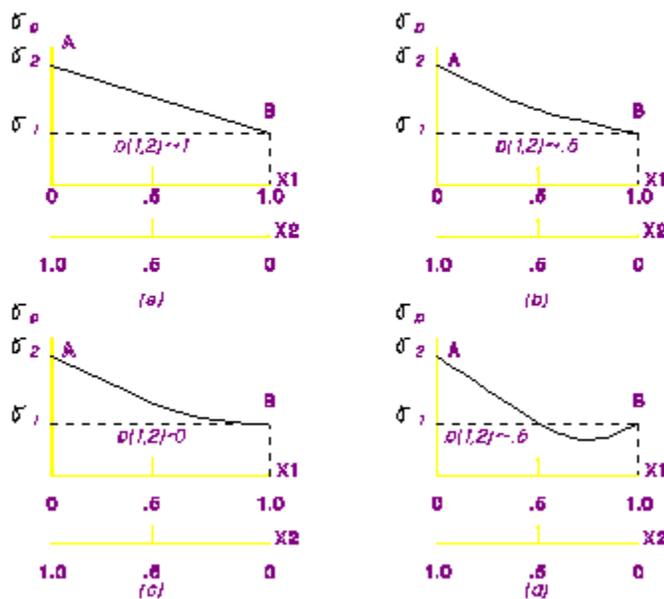
$$\sigma^2 = X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + 2X_1 X_2 \rho_{12} \sigma_{12}.$$

Considérese ahora el caso en el que las tasas de rendimiento están perfectamente correlacionadas. Ya que ρ_{12} toma el valor unitario, entonces

$$\sigma_p^2 = X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + 2X_1X_2\sigma_1\sigma_2.$$

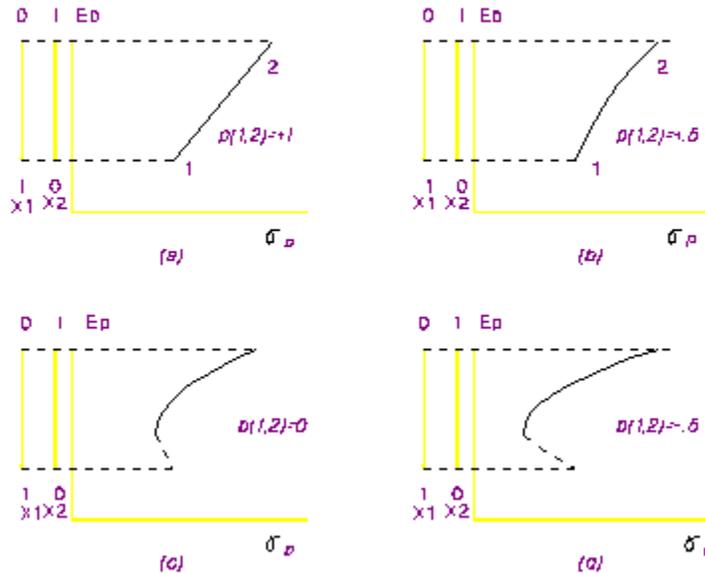
En consecuencia (factorizando) $\sigma_p = \sum X_i \sigma_i$.

El segmento AB de las siguientes figuras muestra gráficamente cómo se dan las relaciones entre σ_p y X_1 .



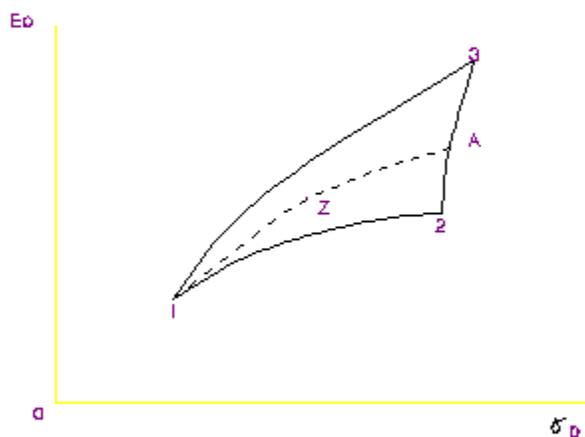
En el primer caso -correlación perfecta- la unión de A y B está determinada por un segmento de recta. Para observar el cambio que se da cuando la correlación no es perfecta, podemos reescribir $\sigma_p^2 = X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + 2(X_1X_2\sigma_1\sigma_2)\rho_{12}$ cuyo término entre paréntesis será positivo siempre que al menos

una proporción de cada título resulte invertida (i.e., $X_i > 0$) y el rendimiento correspondiente represente un riesgo (i.e., $\sigma_i > 0$).



Bajo esas condiciones, para un portafolio dado se tendrá que a menor correlación menor riesgo (σ_p^2). Otros casos se ilustran para distintos valores del coeficiente de correlación. No sobra insistir en el hecho de que cuando la correlación entre títulos no es muy alta, el riesgo del portafolio es menor que el riesgo correspondiente a cada uno de los títulos tomados de manera individual. En este sentido, la diversificación ofrece un importante beneficio en cuanto a reducción del riesgo sin costo de rendimiento.

7. El análisis puede extenderse al caso de 3 títulos. Un portafolio constituido exclusivamente por los títulos 1 y 2, genera combinaciones de riesgo y rendimiento como las que describe la curva 1,2 de la siguiente figura.

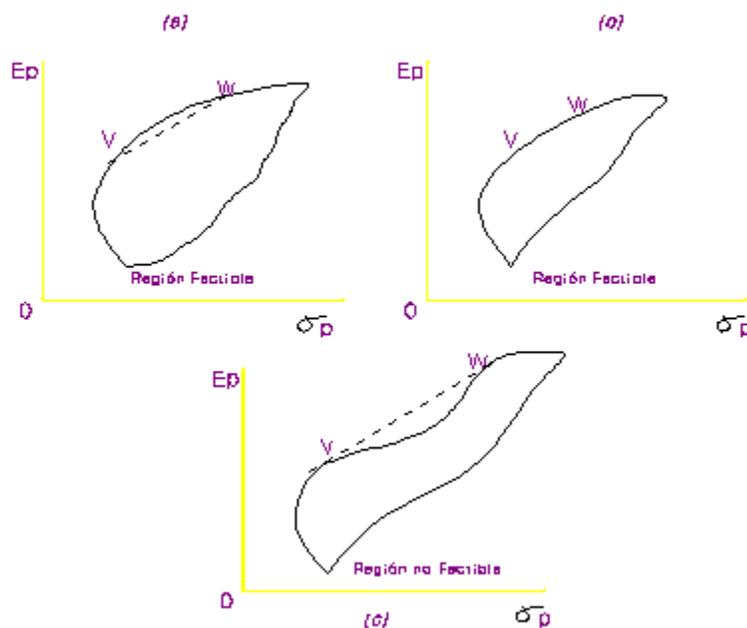


Análogamente, los portafolios con títulos 1 y 3 aparecen en la curva 1, 3 al igual que la combinación 2, 3 respectivamente.

Si se combinan partes iguales de 2 y 3, por ejemplo, se tendría la posición indicada por el punto A. El inversionista puede ver a esta combinación -que por cuenta propia tiene valores específicos de riesgo y rendimiento-, como un título más dentro de su gama de posibilidades. Así pues, cualquier portafolio puede ser tratado para fines analíticos como una emisora individual. Esto fundamenta el hecho de que un

portafolio pueda verse como combinaciones lineales de otros portafolios en el mercado. La consecuencia inmediata es que lo que en un principio se veía como una curva de posibilidades (σ, E_p) , es ahora una superficie convexa en el plano $E_p-\sigma_p$.

Con lo anterior podemos ahora esbozar de una manera más precisa el conjunto de portafolios factibles en el mercado.



Dado que este conjunto debe ser convexo, la forma de las figuras (a), (b), y (c) nos indica dos casos posibles y uno imposible.

8. Las características de un portafolio pueden derivarse de un análisis de su posición dentro de la superficie de factibilidad. Debe advertirse que cualquier selección de

riesgo-rendimiento en el interior del conjunto, será ineficiente en el sentido de que siempre existe otra combinación con igual riesgo pero mayor rendimiento.

Es por esta razón que los puntos de eficiencia yacen sobre el segmento superior de la frontera del conjunto de factibilidad, como se indica en las anteriores figuras.

Dado que el objetivo de un inversionista debe ser construir portafolios eficientes, la selección de cartera nos lleva a un problema de optimización. Como tal, el problema comprende una serie de variables de decisión, una o más restricciones y una función objetivo que debe ser maximizada o minimizada.

Las variables de decisión son en este caso las proporciones X_i , $i=1,2,\dots,n$ de inversión en los distintos títulos que conformarán el portafolio. Cada una debe asumir un valor entre cero y uno, por lo que se tienen N variables de decisión.

En lo que se refiere a las restricciones, surge en primera instancia la necesidad de postular que la suma de las ponderaciones X_i sea igual a 1. Dependiendo del problema que se trate, podrán también incluirse restricciones sobre el signo de las X_i , ya que en algunos casos será deseable que $X_i > 0$ para todo i .

El propósito será -en todos los casos- conseguir una configuración óptima para el portafolio de inversión. En consecuencia, la función objetivo deberá reflejar la idea de

construir un portafolio de rendimiento máximo y varianza (riesgo) mínima. Como esto ocurre en donde convergen (tangencialmente) las curvas de indiferencia con la frontera eficiente, podemos escribir

$$V_p = \alpha + \lambda E_p$$

siendo alfa la ordenada al origen en la relación entre riesgo y rendimiento sobre el plano (V_p, E_p) .

Así pues, tendríamos como propósito la maximización de alfa, escrita como $\alpha = -\lambda E_p + V_p$

en donde

$$E_p = \sum X_i E_i$$

$$VV_p = \sum \sum X_i X_j C_{ij}$$

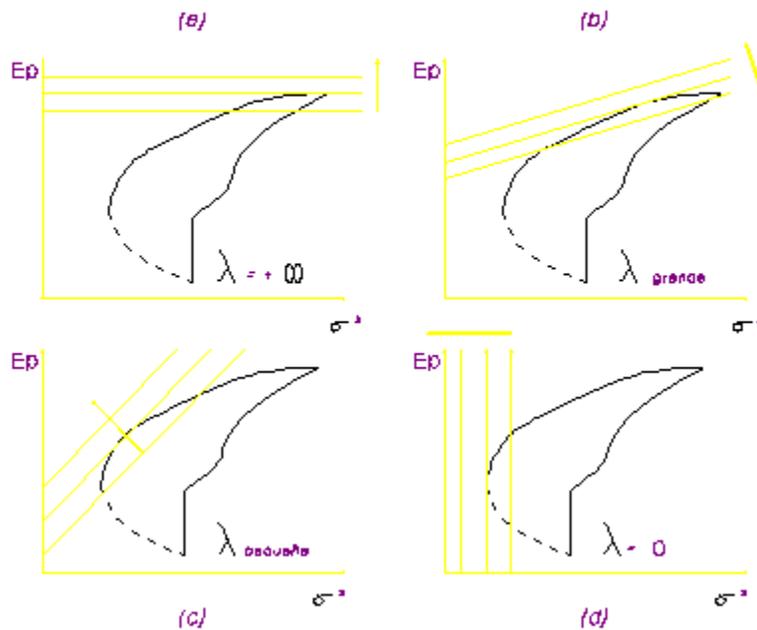
sujeto a la restricción

$$\sum X_i = 1$$

9. La descripción geométrica del proceso de optimización provee antecedentes importantes que facilitan el entendimiento del procedimiento analítico. En las siguientes figuras, se observan distintas posiciones de las curvas de indiferencia con respecto a la frontera de eficiencia.

En primer término, aparecen isocuantas con pendiente igual a cero, que convergen con la frontera eficiente en un punto tan

avanzado hacia la derecha del eje de abscisas, que denotan una elección en la que el riesgo no



no es tomado como un factor importante. Es decir, con una λ tan grande, un pequeño incremento del rendimiento se cambia por uno muy alto del riesgo. Por el contrario, la última figura (caso d) refleja una situación en la que el rendimiento se ha hecho a un lado en la búsqueda de minimizar el riesgo. Para cada valor de λ existe una solución óptima sobre la frontera cuya pendiente en cada punto es distinta.

La solución del planteamiento anterior es relativamente directa. Utilizando multiplicadores de Lagrange², tendríamos que la función objetivo resulta:

$$Z = \Phi \sum X_i E_i - \sum \sum X_i X_j C_{ij} + \lambda (1 - \sum X_i)$$

cuyas condiciones de primer orden para la maximización son:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}}{\partial X_1} &= \Phi E_1 - 2X_1 \alpha_{11} - 2X_2 \alpha_{12} - \dots - 2X_n \alpha_{1n} - \lambda = 0 \\ \frac{\mathcal{L}}{\partial X_2} &= \Phi E_2 - 2X_1 \alpha_{21} - 2X_2 \alpha_{22} - \dots - 2X_n \alpha_{2n} - \lambda = 0 \\ &\dots \\ \frac{\mathcal{L}}{\partial X_3} &= \Phi E_3 - 2X_1 \alpha_{31} - 2X_2 \alpha_{32} - \dots - 2X_n \alpha_{3n} - \lambda = 0 \\ \frac{\mathcal{L}}{\partial X_n} &= \Phi E_n - 2X_1 \alpha_{n1} - 2X_2 \alpha_{n2} - \dots - 2X_n \alpha_{nn} - \lambda = 0 \\ \frac{\mathcal{L}}{\partial \lambda} &= 1 - X_1 - X_2 - X_3 - \dots - X_n = 0 \end{aligned}$$

Que en términos matriciales puede expresarse como

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_{11} & 2\alpha_{12} & \dots & \dots & 2\alpha_{1n} & 1 \\ 2\alpha_{21} & 2\alpha_{22} & \dots & \dots & 2\alpha_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2\alpha_{n1} & 2\alpha_{n2} & \dots & \dots & 2\alpha_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ \dots \\ X_n \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi E_1 \\ \Phi E_2 \\ \dots \\ \dots \\ \Phi E_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

² Los multiplicadores de Lagrange son el fundamento de un método algebraico para encontrar máximos y/o mínimos (i.e., óptimos) de funciones no lineales.

cuyo vector de solución puede expresarse en términos de la inversa de la matriz de varianzas y covarianzas como $\mathbf{X} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{K}$ para cada valor de Φ . Este proceso de cómputo nos dará como resultado un valor de las X_i correspondiente a cada valor de Φ . Es importante enfatizar que si consideramos la obtención de dos portafolios óptimos correspondientes a valores de $\Phi=0$ y $\Phi=\Phi^*$ (algún valor muy alto) cualquier portafolio eficiente que corresponda a un valor intermedio de Φ puede ser determinado por la combinación de los portafolios extremos y el vector de las X_i será una proporción de los anteriores con respecto a Φ .

10. La relación entre el rendimiento esperado de un portafolio eficiente y el valor de Φ es también lineal. Se puede encontrar sustituyendo $X_i = K_i + k_i\Phi$ en $E_p = \sum X_i E_i = \sum (K_i + k_i\Phi)E_i = \sum (K_i E_i) + \sum (k_i E_i)\Phi$ donde el valor de cada uno de los paréntesis es simplemente un escalar. El primero de ellos represente el rendimiento esperado del portafolio de mínima varianza. El segundo paréntesis, indica el rendimiento esperado adicional por cada unidad de Φ .

Si al menos dos títulos tienen rendimientos esperados distintos, el valor de E_p seguirá creciendo conforme Φ se incremente. Este proceso puede continuar ilimitadamente, ya que hasta ahora no se ha impuesto restricción alguna sobre la

posibilidad que tiene el inversionista de emitir títulos a discreción.

Por su parte, la relación entre la varianza del rendimiento del portafolio con el valor de Φ es de tipo cuadrático. Puede obtenerse igualmente sustituyendo las ecuaciones obtenidas anteriormente de la solución

$$VV_p = \sum \sum X_i X_j C_{ij} = \sum \sum (K_i + k_i \Phi)(K_j + k_j \Phi) C_{ij} = (\sum \sum K_i K_j C_{ij}) + (\sum \sum K_i k_j C_{ij} + k_i K_j C_{ij}) + (\sum \sum k_i k_j C_{ij}) \Phi^2.$$

Nuevamente, la suma en cada uno de los paréntesis es simplemente un escalar. El primero de ellos, representa la varianza de el portafolio de mínima varianza. Los paréntesis de la derecha, representan la manera como V_p crece con respecto a Φ . Finalmente, si combinamos las relaciones eliminando Φ , la ecuación de la frontera de eficiencia mostrará que existe una relación cuadrática entre E_p en función de V_p .

11. Es preciso recordar que la mayor parte de los problemas de análisis de cartera resultan demasiado diversos y complejos como para poder encajonarlos dentro del esquema del planteamiento básico que acabamos de discutir. Los valores que se les asignan a las variables de decisión representan generalmente restricciones en distintos sentidos. Dichas restricciones pueden darse tanto en forma de igualdades como de desigualdades. En la práctica, todos los términos que

involucran variables de decisión se escriben generalmente del lado derecho, dejando el lado izquierdo de las ecuaciones o desigualdades para las constantes. Las técnicas de solución estándar requieren de expresiones en el lado izquierdo puestas como función lineal de las variables de decisión, (vgr: $0.3X_5 + 0.92X_8 - 0.1X_{12}$) o de desigualdad débil (vgr: $X_5 > 12$). En principio, incluir restricciones al problema básico no debe significar un cambio sustancial en la naturaleza de la solución. Es decir, cada X_i seguirá siendo una función lineal de Φ , así como V_p será una función cuadrática de E_p sobre la frontera eficiente. Generalmente, mientras mayor número de restricciones tenga un problema, la región de factibilidad resultará más pequeña y será más baja su frontera de eficiencia. La presencia de mayores restricciones implicará mayores costos de cálculo, pero nunca redundará en cambios cualitativos para los resultados.

12. Lo anterior se cumple aun para el caso en que las restricciones adicionales sean desigualdades débiles o estrictas. Sin embargo, el procedimiento de solución que debe emplearse es distinto en cuanto a sus características, y el problema se convierte en uno correspondiente a programación matemática no lineal. Quizá el caso más común de inclusión de desigualdades como restricciones surge cuando al inversionista se le imposibilita para emitir títulos. Formalmente, esto se traduce en una serie de desigualdades débiles de la forma

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$. En consecuencia, el problema básico se traduce en

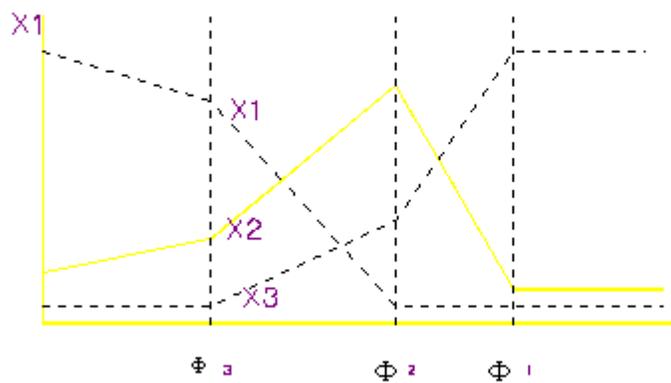
$$\min -\Phi \left(\sum X_i E_i \right) + \left(\sum \sum X_i X_j C_{ij} \right)$$

$$\forall \Phi \geq 0$$

sujeto a $\sum X_i = 1 + \text{restricciones}$ $L_1 \leq x_1 \leq U_1, L_2 \leq x_2 \leq U_2, \text{ etc.},$

en donde U_i es la cota superior para la proporción invertida en el título i , L_i es la cota inferior para la proporción invertida en el título i .

En la siguiente figura aparecen ilustrados los resultados para un caso en el que se involucran tres títulos, tomando las cotas inferiores como cero y las cotas superiores suficientemente grandes para que no tengan efecto.



Como puede advertirse, existen intervalos para los valores de Φ sobre los cuales la composición del portafolio no cambia. Además, los valores de X_1 no varían linealmente con respecto a Φ a lo largo de todo el intervalo, sino que más bien se da una relación lineal por pedazos, apareciendo como consecuencia vértices o esquinas.

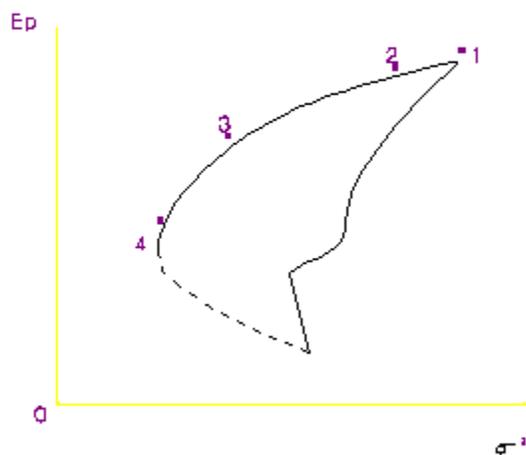
Considérese la forma en la que X_2 cambia en función de un decremento del valor de Φ . Para valores mayores que Φ_1 , $X_2 = 0$. En Φ_1 existe justamente una esquina.

A medida que Φ decrece por debajo de Φ_1 , X_2 crece linealmente hasta el punto $\Phi = \Phi_2$. Reducciones adicionales de Φ producen decrecimiento en X_2 . Esta situación continúa de manera acentuada hasta el punto en que $\Phi = \Phi_3$. En adelante, X_2 decrece lentamente conforme Φ se va reduciendo. En los puntos Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 , al menos una de las relaciones encuentra un vértice. El portafolio representado por estos puntos se denomina precisamente portafolio de vértice. Finalmente, el portafolio que se obtiene cuando $\Phi = 0$ se considera igualmente como un portafolio vértice. Como se muestra en la figura, la frontera de la región no tiene que ser una esquina en el punto representado por un portafolio vértice.

Hemos señalado que cualquier tipo de restricción tiende hacia la reducción de la región de factibilidad de valores (E_p, V_p) . Tanto las cotas inferiores como las superiores para la distribución de títulos llevan seguramente hacia cotas inferiores o superiores en los niveles factibles de (E_p, V_p) .

La región que se muestra en la figura 13 es típica de aquellos casos en los que proporcionas negativas se excluyen y no existen títulos con rendimiento seguro.

figura 13



Aunque los problemas generales de análisis de cartera son difíciles de resolver, el uso de herramienta computacional adecuada facilita gran parte del trabajo. El paso fundamental consiste en determinar la composición de portafolio vértice junto con su rendimiento esperado y riesgo o varianza asociados. Esta determinación genera un avance suficiente debido a que la relación entre dos portafolios de vértice es

lineal. Más aún, entre dos portafolios de vértice cualesquiera, la frontera de eficiencia goza de las siguientes características:

- a) La relación entre E_p y Φ es lineal.
- b) La relación entre V_p y Φ es cuadrática.
- c) La relación entre E_p y V_p es cuadrática.

Así pues, el problema de análisis de cartera queda virtualmente resuelto cuando el conjunto de portafolios de vértice (eficientes) ha sido determinado. Cualquier otra información puede calcularse en caso necesario a partir de dichos valores.

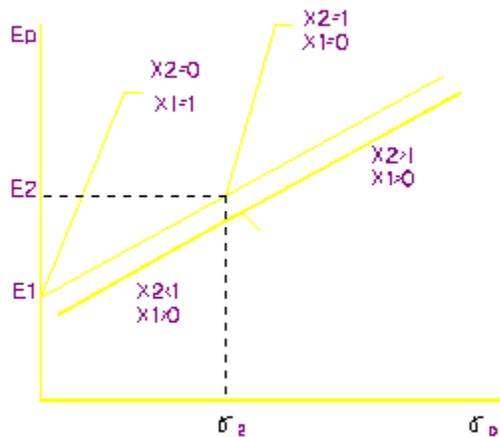
13. Hasta aquí, nada se ha mencionado acerca de préstamos y endeudamientos. Los préstamos son mejor vistos como inversiones en algún título en particular libre de riesgo. Por definición, estos títulos tendrán un rendimiento esperado exactamente igual a su tasa de interés. Dado que se trata de una situación de certidumbre en este caso, la desviación estándar del rendimiento es igual a cero.

Por su parte, el endeudamiento puede ser visto de distintas maneras. Aquí lo consideraremos simplemente como la emisión por parte del agente de algún título libre de riesgo. En otros términos, tendremos valores negativos en el vector de distribuciones X_i para los casos en las que se incurra en un endeudamiento. Así pues, las características de un título

libre de riesgo (i) son: Si $X_i > 0$, el inversionista presta; si $X_i < 0$ el inversionista se endeuda; $E(i) = P =$ tasa de interés; $\sigma_1 = 0$; $C_{11} = \sigma_2 = 0$; $C_{12} = C_{21} = 0$; ...; $C_{n1} = C_{nn} = 0$.

Considérese ahora el efecto de combinar dos títulos, uno de los cuales es libre de riesgo. Como en los casos anteriores, $E_p = X_1E_1 + X_2E_2$; $\sigma_p^2 = X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + 2X_1X_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$.

Si el título 1 es seguro, las relaciones anteriores pueden escribirse como $\sigma_p^2 = X_2^2\sigma_2^2 \Rightarrow \sigma_p = X_2\sigma_2$. En la siguiente figura se muestra el resultado de esta combinación.

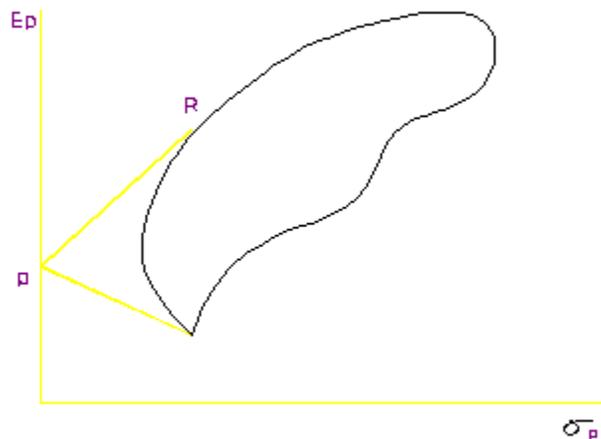


La presencia del título libre de riesgo produce valores de (E_p, V_p) sobre el segmento de recta que une a los puntos que representan a los dos títulos. Cualquier combinación entre

estos dos puntos puede derivarse de un préstamo o una inversión en títulos de rendimiento seguro. De lo anterior se desprende un resultado importante: la incorporación de un título libre de riesgo produce que al menos una parte de la frontera eficiente de la región (E_p, V_p) se vuelva lineal.

En la figura 15 se muestra un caso en el que no existen valores negativos en el vector de distribución X_i .

figura 15

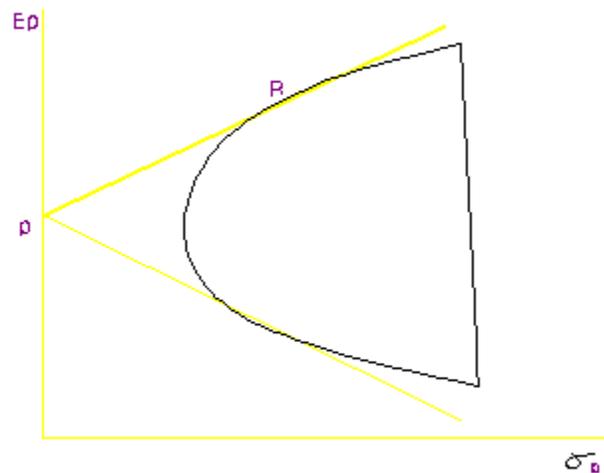


El área interior representa la región factible de (E_p, V_p) en ausencia de títulos libres de riesgo. El complemento que aparece como segmentos de recta constituye la región que resulta al hacerse disponible un título sin riesgo.

El portafolio representado por el punto R es de especial importancia, debido a que cualquier punto sobre la frontera eficiente puede obtenerse mediante una combinación apropiada del título libre de riesgo con el portafolio R. Por su parte, el punto P representa el caso en el que el inversionista presta la totalidad de sus fondos. Para puntos entre P y R se tiene la inversión de una parte en el portafolio R y un préstamo del resto.

Al portafolio R se le ha concedido suficiente importancia para asignarle un término especial: combinación óptima de títulos de riesgo (COTR). Este nombre resulta claramente adecuado si se examina la figura 15. Independientemente de la forma que adopten las curvas de indiferencia del inversionista, mientras sea consistente en buscar rendimientos y rehuir al riesgo, al menos una combinación del portafolio R con préstamo o endeudamiento resultará óptima. Por su parte, en la figura 16 el nombre resultará apropiado solamente para aquel inversionista cuyas

figura 16



preferencias lo lleven a seleccionar alguno de los puntos entre P y R (inclusive).

Las figuras 17 y 18 muestran tres casos distintos en los cuales se tienen posesiones negativas (X_i). De todas ellas, solo las 17-c y 18-c corresponden a una situación en la que R no es una combinación óptima de títulos de riesgo.

Al margen de la discusión del procedimiento analítico-computacional para encontrar el óptimo, la idea geométrica de el proceso es particularmente ilustrativa.

figura 17

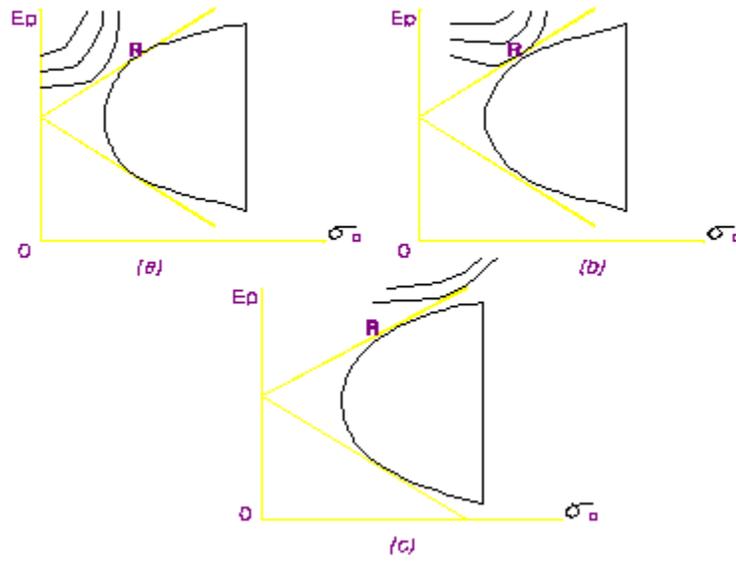
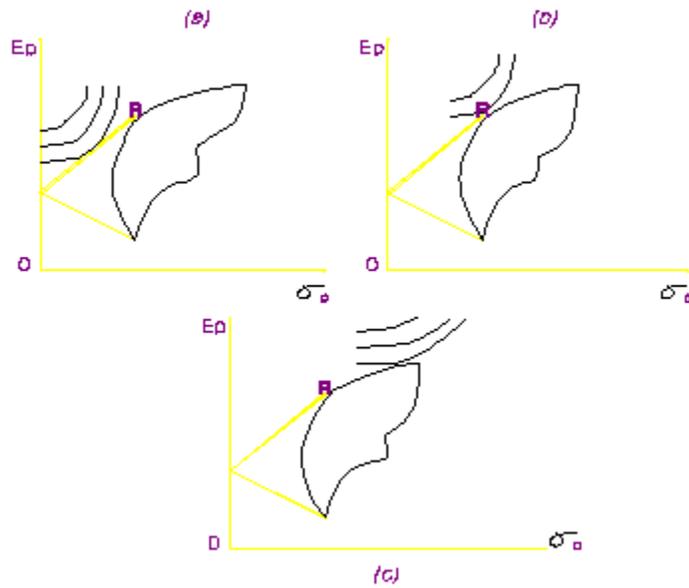
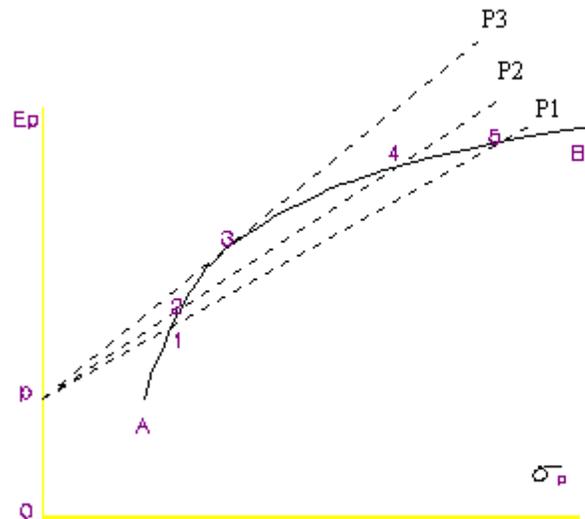


figura 18



En la figura 19 sea P el punto que corresponde el título sin riesgo y sea AB la curva que representa el segmento de la frontera eficiente dentro de la región factible (E_p, V_p) en ausencia de títulos sin riesgo.

figura 19



Las combinaciones de P con el portafolio 1 nos dan un resultado que yace sobre el segmento de recta P_1 . Asimismo, las combinaciones de P con el portafolio 2 yacen sobre el segmento de recta P_2 , etc. Evidentemente, el portafolio 3 representa la combinación óptima de títulos con riesgo. Se puede llegar a este último punto proyectando un rayo desde el punto P de manera que toque tangencialmente a la frontera de eficiencia en la región (E_p, V_p) . Es precisamente la existencia de la combinación óptima de títulos con riesgo la que facilita el procedimiento de selección de portafolio. El inversionista necesita únicamente decidir qué tanto prestar o endeudarse. Existe solo una combinación apropiada de títulos

riesgosos en la cual hay que invertir el remanente del capital.

Así pues, la consideración de combinaciones alternativas de títulos riesgosos puede de esta forma verse por separado de la actitud del inversionista respecto a los riesgos que tenga el rendimiento esperado. A este resultado se le conoce en la literatura con el nombre de *teorema de separación*.

Las relaciones anteriores son aún más claras cuando - regresando al problema básico- una de las acciones es libre de riesgo. Dado que la solución a un problema tal tiene la forma

$$X_1 = K_1 + k_1\Phi, X_2 = K_2 + k_2\Phi, \dots, X_n = K_n + k_n\Phi$$

El portafolio eficiente con menor valor posible para la varianza se obtiene cuando $\Phi = 0$. En este caso, consistirá justamente de un 100% del título 1 (libre de riesgo). En consecuencia $K_1 = 1; K_2 = 0, K_3 = 0, \dots, K_n = 0$, de manera que $X_1 = 1 + k_1\Phi; X_2 = k_2\Phi, \dots, X_n = K_n\Phi$.

En la figura 20 se muestra la composición de todos los portafolios eficientes relativos a un caso particular en el que participan tres títulos riesgosos y uno sin riesgo. El portafolio R es óptimo en Φ^* .

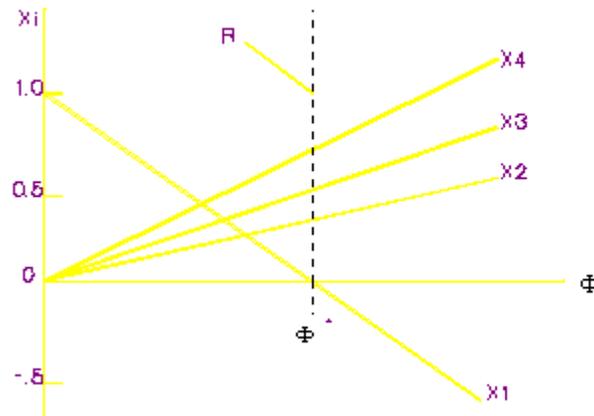


figura 20

Valores de Φ por abajo de Φ^* nos llevan a combinaciones de R con préstamo, mientras que valores de Φ por encima de Φ^* nos llevan a combinaciones de R con endeudamiento. Al cambiar Φ , el total invertido en cualquier título riesgoso dado, mantiene una proporción constante respecto del monto invertido en la totalidad de títulos riesgosos. Por último, cuando alguno de los títulos en un problema estándar es libre de riesgo, el resultado será similar al que se ilustra con la figura 21. A la izquierda del punto Φ^* (que representa el portafolio R), el diagrama comparte las mismas características que en la figura 20.

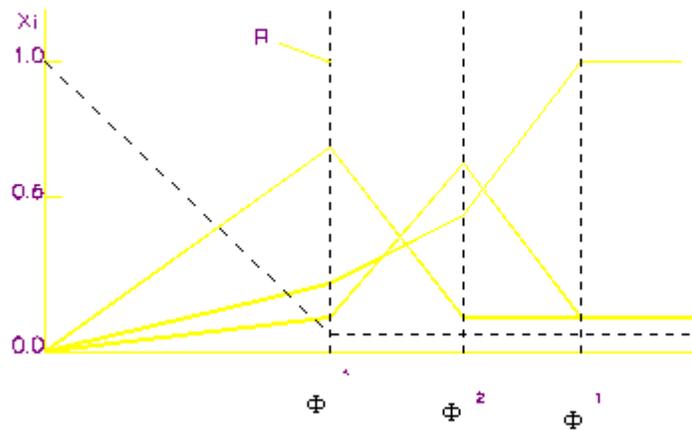


figura 21

Hacia la derecha de dicho punto, el diagrama se vuelve similar al de un problema estándar sin títulos seguros. El portafolio que representa únicamente préstamo ($\Phi = 0$) así como el portafolio R, forman vértices adyacentes.

13. Modelo de Tobin-Sharpe-Lintner. Como se ha discutido anteriormente, la parte central del problema de análisis de cartera está basada en la búsqueda de combinaciones eficientes (E_p, V_p). Trataremos ahora de manera sucinta el caso en el que el portafolio a elegir está sujeto a las siguientes restricciones:

$$\sum X_i = 1 + X_{n+1}; \dots X_i \geq 0, \dots i = 1, 2, \dots, n, \dots X_{n+1} \geq -1$$

La primera restricción puede ser reescrita en su forma estándar como $\sum X_i - X_{n+1} = 1$. Obsérvese que X_{n+1} está acotada por (-1) en lugar de cero. En los análisis de Tobin, Sharpe y Lintner la variable que aquí expresamos como X_{n+1} representa el total de endeudamiento (si X_{n+1} es positivo) o de préstamo (si X_{n+1} es negativo). La tasa de rendimiento recibida (con certidumbre) por el inversionista representa el rendimiento de un título sin riesgo. Un posible conjunto de combinaciones (E_p, V_p) para el modelo de Tobin-Sharpe-Lintner se muestra en la figura 22. Como se ilustra, la cota inferior de la región de factibilidad está constituida por dos ramas (no necesariamente simétricas). La rama derecha ab tiene la forma de "media" parábola con vértice en $(E, V) = (r_0, 0)$, que se extiende sin límite hacia la derecha para todos los $E > r_0$.

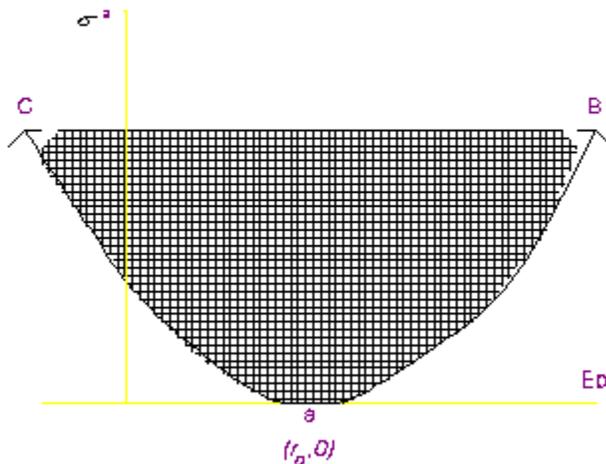


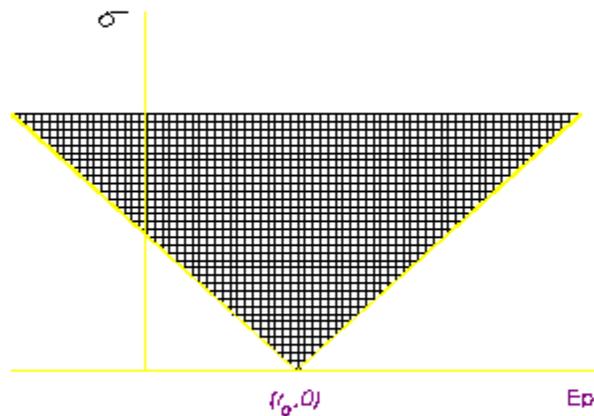
figura 22

La rama izquierda es también media parábola con vértice en (a) pero que se extiende hacia el lado contrario para valores de $E < r_0$. Ambas ramas pueden provenir de parábolas con coeficientes iguales, o de parábolas distintas. Mientras que la rama derecha contiene todas las combinaciones (E_p, V_p) eficientes, la rama izquierda -excluyendo al punto a - contiene solo combinaciones de (E_p, V_p) ineficientes.

Como puede observarse, la región factible de combinaciones (E_p, V_p) no se encuentra acotada superiormente. Para cualquier $E = E_0$ dado, se pueden encontrar combinaciones factibles de (E_p, V_p) con $V_p > V_0$ siendo V_0 el mínimo factible entre las combinaciones (E_0, V) .

El conjunto de combinaciones (E,S) factibles correspondientes a la región de la figura 22 aparece ilustrado en la figura 23. Como puede apreciarse, en este caso la cota inferior está constituida por dos rayos que se extienden en sentidos opuestos.

figura 23



Así pues, el conjunto de combinaciones eficientes el modelo de Tobin-Sharpe-Lintner es parecido al del modelo estándar con cotas superiores. Es posible (aunque no abundaremos en la discusión sobre este caso) que la región de factibilidad llegue a estar constituida por un solo punto (posibilidad que se da en un sentido matemático estricto, cuando aceptamos una elección arbitraria de Φ).

Finalmente, cabe la posibilidad de introducir limitaciones para el endeudamiento, a través de restricciones como $X_{n+1} \leq U_{n+1}$ en cuyo caso la solución del modelo toma más bien la forma de la figura 16.

14. Para concluir este capítulo, revisaremos a continuación los rasgos que han caracterizado a los distintos enfoques de la teoría de portafolio a partir de las publicaciones más relevantes sobre el tema.

Comenzaremos con Hicks (1962), quien describe a la teoría de portafolio como *"Una formalización de un conjunto de ideas con las cuales los economistas han tenido familiaridad desde 1935"*, haciendo referencia a un trabajo presentado por el propio Hicks en 1935. En dicho trabajo, establece que *"en un mundo en donde el costo de las inversiones es insignificante, cualquier agente puede acceder a considerables ventajas en cuanto a reducción del riesgo de la siguiente manera: divide su capital en pequeñas proporciones para conseguir la diversificación de los riesgos y con ello se protege de pérdidas sobre el monto total de su capital. Sin embargo, con los costos que actualmente tienen las inversiones, es definitivamente imposible hacer una inversión pequeña que permita diversificar el riesgo"*.

Markowitz critica la anterior afirmación señalando que no es la indivisibilidad de los bienes el hecho que obstaculiza la diversificación: *"Hicks no advierte que con frecuencia los rendimientos de las inversiones están fuertemente correlacionados y que esto produce que la diversificación no tenga efecto sobre la varianza (riesgo). Para un portafolio con proporciones idénticas de inversión en cada título, a medida que el número de títulos se incrementa la varianza del*

portafolio se aproxima al promedio de las covarianzas entre inversiones".

Otro precursor de la teoría moderna de portafolio fue Dickson Leavens (1941). Leavens utilizó en sus trabajos el cálculo de la varianza como medida del riesgo de una inversión, y mostró heurísticamente cómo el riesgo puede decrecer en función del número de títulos que se obtengan cuando existe poca correlación entre los rendimientos de los mismos.

La era de la teoría moderna de portafolio inicia con dos trabajos publicados en 1952. Roy (1952) utiliza las mismas restricciones que hoy se conocen como modelo de Black con el propósito de caracterizar conjuntos eficientes de media-varianza. Años más tarde, tras haber introducido las nociones de conjuntos eficientes (E,V) , Baumol (1963) establece que un portafolio seguro con mínimo $E-K_s$ tendrá una esperanza y una varianza del rendimiento tan pequeñas o grandes como el inversionista decida al tomar un elemento del conjunto eficiente EV . Esto - según Baumol - obedece a que $E-K_s$ es una medida mucho más apropiada del riesgo que la sola desviación estándar (s) .

La segunda publicación que dio entrada a la teoría moderna de portafolio en los medios académicos fue presentada por Markowitz (1952). En dicho trabajo, fueron definidos con toda precisión y formalidad los conceptos de eficiencia media-

varianza acompañados de un análisis topológico sobre conjuntos eficientes y de factibilidad. La versión general del modelo de selección de portafolios la presentó Markowitz a principios de 1956.

A pesar de que la presentación de la teoría de portafolio se dio desde 1952, ésta no despertó mayor interés sino hasta después de haber sido publicados los trabajos de Tobin (1958), Sharpe (1963, 1964) y Lintner (1965). Un reclamo en este sentido fue hecho por William Barrenan (1955) al propio Markowitz, al recordarle que a principios de los años cincuenta le fue rechazado su proyecto de tesis doctoral sobre el estudio de la teoría de portafolio por considerarse como algo "*demasiado impráctico*" (UCLA).

Tobin (1958) utilizó los resultados de la teoría de portafolio para analizar lo que llamó "*preferencias por la liquidez*". En su trabajo señala que aún cuando el supuesto de endeudamiento ilimitado puede no ser muy realista, tiene la virtud de conferirle al modelo la posibilidad de ser resuelto analíticamente (modelo Tobin-Sharpe-Lintner) y ser comparado con el modelo general para el cual no existe un conjunto de ecuaciones que describan en su totalidad las soluciones.

Una propiedad esencial del modelo de Tobin-Sharpe-Lintner, como se demuestra en Tobin (1958), es lo que ahora se conoce

como teorema de separación de Tobin. Los conjuntos de portafolios eficientes consisten típicamente en:

- a) un portafolio X que comprende solamente acciones riesgosas sin préstamo o endeudamiento, y
- b) un portafolio X más endeudamiento o un portafolio X más préstamo.

De esta manera, la elección de las proporciones entre títulos riesgosos puede considerarse enteramente por separado de la elección correspondiente a prestar ó endeudarse. Además, la elección sobre los montos de un préstamo o un endeudamiento dependen sólo de las preferencias frente al riesgo que tenga el inversionista.

Sharpe (1964) y Lintner (1965) aplican la teoría de portafolio para abordar el problema de equilibrio de precios en activos de capital. Al momento de asumir el conjunto de restricciones que presenta Tobin, encuentran en el curso de su investigación el teorema de separación de Tobin. Es decir, al considerar que todos los inversionistas detentan proporciones iguales X de títulos riesgosos además de cierta cantidad de préstamo o endeudamiento, X debe ser precisamente el portafolio de mercado. En particular, el mercado es un portafolio eficiente. Además de esto, Sharpe y Lintner arriban a la relación fundamental (y sorprendentemente sencilla) $\mu_i - r_0 = K\beta_i$ donde r_0 es el rendimiento esperado de un título libre de riesgo y β_i es el coeficiente de regresión sobre r_i con respecto al mercado (ver capítulo 6).

Mossin (1966) muestra que los resultados de Sharpe-Lintner son igualmente ciertos si se desecha la hipótesis que hace Tobin en su conjunto de restricciones ($X_i > 0$), es decir, si se "mezcla" de alguna manera el modelo de Black con la presencia de títulos libres de riesgo.

Más adelante, Sharpe (1970) y Merton (1972) muestran que si la única restricción es $\sum X_i = 1$ entonces - independientemente de que exista o no un título libre de riesgo-, cualquier portafolio eficiente tiene la forma $X = \alpha K^* + (1 - \alpha) \hat{X}$ con $\alpha \leq 0$, siendo \hat{X} el portafolio de mínima varianza. A este resultado se le ha dado el nombre de Teorema de separación de dos fondos (Two-funds separation theorem).

Black (1972) va más allá al demostrar que la ecuación Sharpe-Lintner se cumple aun cuando la única restricción es $\sum X_i = 1$ independientemente de que existan o no títulos libres de riesgo.

En la década de los ochenta la mayor parte de las investigaciones se concentró en los aspectos algorítmico-computacionales y de aplicación sobre teoría de portafolio.

Hacia 1991, Ralf Ostermark en el *European Journal of Operational Research* presenta un artículo titulado "Vector forecasting and Dynamic Portfolio Selection: Empirical Efficiency of Recursive Multiperiod Strategies", en donde

expone un sistema dinámico de selección de portafolio combinando resultados de análisis de series de tiempo, programación lineal estocástica y teoría de Markowitz. Su modelo consta de 3 partes principales:

- i) un sistema de gestión de inventarios
- ii) un sistema de toma de decisiones y
- iii) un sistema de programación multiperíodo de selección de portafolios bajo incertidumbre.

Presenta además una prueba empírica basada en datos provenientes de la bolsa de Helsinki para 35 títulos. Un aspecto interesante que relaciona el trabajo de Ostermark con el interés de la presente tesis, consiste en la prueba que dicho autor establece sobre la ventaja de combinar información *ex ante* y *ex post* en la construcción de portafolios eficientes, en lugar de limitar la base a la información *ex ante*.

En primavera de 1992, Sorensen-Mezrich-Jhoseph-Thadani-Dilip publican un estudio cuantitativista sobre un proceso para la asistencia a gestores de inversión en decisiones concernientes al uso de la teoría de portafolio dentro de la práctica cotidiana de inversión. En su artículo -publicado por el *Journal of Portfolio Management*- presentan la idea de incorporar moneda en las decisiones de cartera.

Por su parte, Kroll y Levy publican en 1992 en la *American Economic Review* la comparación entre dos ejercicios -el

primero de ellos realizado en 1988- para probar los elementos fundamentales de la teoría de portafolio de Markowitz, Tobin, Sharpe y Lintner. Dichos autores encuentran que, aunque los agentes económicos diversifican efectivamente sus títulos, no reaccionan de manera importante ante cambios en la correlación entre títulos riesgosos, ni ante el surgimiento de oportunidades de inversión sin riesgo. Esto, -según los autores - pone en tela de juicio la aplicabilidad del teorema de separación junto con sus implicaciones.

Dentro de un rally de interesantes investigaciones publicados en 1993, aparecen cuatro de especial relevancia. La primera de ellas (Jay, "An examination approach to risk", Accountancy) examina el papel de la teoría de portafolio y el modelo de precios de Activos de capital (Capital assets Pricing Model, CAPM, capítulo 6), en la evaluación de proyectos de inversión. Jay examina en este trabajo los distintos escenarios que generalmente se construyen para el análisis:

- a) Escenario de un portafolio bien diversificado
- b) Escenario de nuevas inversiones
- c) Escenario basado en los valores de betas para el modelo CAPM.

Larr y Stampleman (1993, *Journal of Commercial Lending*) presentan un modelo estándar de aplicación de teoría de portafolio en el ámbito bancario. Señalan en su trabajo que un método de gran potencial para la gestión de inversiones puede derivarse de la teoría moderna de portafolio ya que en

ella se analizan formalmente las variables fundamentales, como son:

i) la tasa de rendimiento, medida en términos de los dividendos alcanzados más el porcentaje de ganancia o pérdida que otorgue el mercado.

ii) el riesgo, medido por la volatilidad del rendimiento, y

iii) la covarianza de los rendimientos.

Insisten en la idea de que la teoría de portafolio es el mejor mecanismo, siempre que se reconozcan algunas modificaciones para hacerla afín al ámbito bancario y concluyen señalando que las instituciones bancarias que exploten con maestría estos elementos llegarán a ser de las más exitosas en el futuro.

Black-Fischer (Oct., 1993, *Financial Analysts Journal*) establecen en su investigación que el elemento clave para las inversiones es la estimación del rendimiento esperado, y no el cálculo del rendimiento promedio como sugieren Fama y French (1992). Black-Fischer señalan que dichos autores no parecen asistir mucho a la teoría cuando estiman el rendimiento esperado, poniendo demasiada confianza en la información que arrojan los datos.

Un artículo de corte distinto pero igualmente importante fue publicado por Barry Burr (*Pensions and Investments*, 1993). Burr analiza el complejo conjunto de herramienta computacional y estadística que subyace a lo que califica

como teoría post-moderna de portafolio. Concluye en su artículo que la herramienta que existe actualmente para llevar a cabo aplicaciones prácticas de manera casi ilimitada.

En 1994 el *Journal of Financial Planning* publica un artículo de Patula Hogan en el que se señala el rezago que existe entre la práctica de los inversionistas con respecto al desarrollo de la teoría de cartera. Asimismo, recientemente Bernard Dumas (1994, *European Economic Review*) hace un análisis del comportamiento de los inversionistas que acceden a los resultados de Markowitz, Tobin, Sharpe y Lintner principalmente, para aplicarlos en los distintos mercados financieros de cada nación. Dumas enfatiza en este trabajo las diferencias de comportamiento entre los países e introduce la idea de una eventual conformación de un mercado financiero único a nivel mundial.

Por lo que corresponde al análisis de algoritmos y métodos de optimización, Bouchaud y Sornette (1998), proponen un interesante método de distribución de inversión de capital para el caso en que las variaciones en los precios tienen una cola de distribución uniforme.

Por su parte, Shefrin y Statman(2000), desarrollan una teoría de portafolio denominada conductista y comparan su frontera eficiente con la correspondiente a la teoría de Markowitz.

Es el propio Markowits (2002), quien destaca este carácter conductista (y eminentemente normativo) de la teoría moderna

del portafolio, contrastándolo con el positivismo que revisten otras teorías sobre activos de capital.

En virtud de que los datos y mediciones son elementos fundamentales para la evaluación de modelos de media-varianza, Biglova et al (2004), proponen diversas variantes metodológicas para las mediciones utilizadas en los procesos de optimización de portafolios.

Por su parte, Bywaters y Thomas (2006), siguen esta misma beta de análisis empírico en un interesante intento por integrar un modelo de consumo según en los ciclos de la vida con la teoría moderna del portafolio.

En este mismo sentido empírico, destaca la investigación publicada recientemente por Flavin y Limosani (2007) orientada al análisis condicional de la teoría de portafolios aplicada a políticas fiscal y monetaria.

Finalmente, destaca entre las publicaciones más recientes la de Bossaerts et al (2007), quienes plantean un nuevo enfoque de selección de portafolio basado en laboratorios de experimentación que consideran heterogeneidad en las mediciones.

Hasta aquí dejaremos la revisión de la teoría moderna de portafolio. Cabe mencionar que dicha revisión dista mucho de haber sido exhaustiva. Sin embargo, estimamos que con ella se establecen bases suficientes para dar entrada a la discusión del siguiente capítulo, en donde revisaremos una importante teoría complementaria referente a modelos de precios para activos de capital.

CAPITULO VI

MODELO DE PRECIOS PARA ACTIVOS DE CAPITAL (CAPM).

El análisis empírico de los mercados de capital ha jugado un papel fundamental para el desarrollo de la econometría. En 1932, Alfred Cowles -Un analista financiero dedicado a estudios de corte cuantitativista- impulsó fuertemente iniciativas para la formación de la sociedad de econometristas en Estados Unidos. El mismo Cowles financió el surgimiento de la comisión para la investigación en economía que lleva su nombre. En el seno de esta comisión, junto con colaboraciones de las universidades de Chicago y Yale, se desarrollaron gran parte de los resultados más importantes de la economía moderna.

Es interesante comentar sobre un artículo publicado por el propio Cowles en la revista oficial de la sociedad de Econometristas *Econometrika* en su primer volumen, en donde trata de demostrar que "las predicciones de los analistas financieros más exitosos son, si acaso, apenas mejores de lo que puede esperarse como resultado de un ejercicio de mera intuición. Existe cierta evidencia, en cambio, que indica que las predicciones de la mayoría de los analistas financieros son bastantes peores que lo que puede esperarse de la pura intuición".

Desde esa época hasta la actualidad, los métodos de construcción de estimadores así como la herramienta analítica que se incorpora a los modelos han cambiado notablemente. Por lo tanto, consideramos apropiado iniciar en este punto la discusión de las primeras aplicaciones orientadas hacia la exploración empírica de los mercados de capital. Con este objetivo, estableceremos primeramente los elementos fundamentales para la construcción del modelo de precios de activos de capital (Capital Asset Pricing Model) al cual nos referimos como CAPM en lo sucesivo. La idea consiste en vincular los conceptos teóricos que se trataron en el capítulo V con los correspondientes al modelo CAPM, para finalmente arribar a un modelo CAPM que considere cambio estructural (capítulo VII) mismo que será analizado desde una perspectiva Bayesiana (capítulo IV).

Así pues, antes de entrar a los cálculos numéricos (capítulo VIII), trataremos de manera directa las definiciones y los conceptos más relevantes.

1. Supóngase en primer término que cuando un inversionista participa en los mercados de capital obedece a una conducta perfectamente racional, en el sentido de que tiene como interés único acceder a los mejores rendimientos que puedan generarles sus propias inversiones.

Sea r la tasa de rendimiento definida como $r=(p_i+d-p_0)$ en donde:

p_i = precio del bien al final del período

d = dividendos (en caso de existir) pagados durante el período

p_0 = precio del bien al inicio del período.

Si bien el rendimiento r puede ser fácilmente calculado ex post (una vez que la inversión se ha realizado), r es evidentemente incierto ex ante (mientras las decisiones de inversión no hayan sido tomadas). Iniciaremos nuestro análisis considerando en todo momento a r como la tasa esperada (o ex ante) de rendimiento.

Un inversionista típico (con conducta racional) no sólo se interesa por el rendimiento esperado de su inversión; también le importa la distribución que pueda tener r cuando es vista como una variable aleatoria.

El riesgo asociado a cada posible inversión se caracteriza justamente a través de la distribución de r . Supondremos también a r dominada por una distribución normal, en cuyo caso bastan las medidas de μ y σ^2 para completar cualquier caracterización.

Aun en el caso en que existiera una inversión con riesgo igual a cero, el inversionista debe demandar al menos cierto rendimiento para optar por invertir en dicho título renunciando con ello a un consumo presente.

Denotaremos al rendimiento de un título con tales características como r_f (risk-free). Un hecho importante que se observa tanto en los mercados nacionales como en el extranjero, consiste en que la mayoría de los inversionistas toman como una medida de r_f la tasa que ofrecen los bonos del tesoro de los Estados Unidos en un plazo de 30 días. Esto se debe a que -aparentemente- se considera improbable incurrir en pérdida cuando se invierte en dichos bonos, i.e., se asume que el riesgo correspondiente es virtualmente igual a cero.

Con lo anterior podemos definir la compensación por el riesgo (risk premium) del j -ésimo título (o inversión) como el excedente de rendimiento con respecto a la tasa libre de riesgo, es decir $(r_j - r_f)$. Recordemos ahora que en el capítulo anterior se mostró como la presencia de covarianzas entre los rendimientos de los títulos que participan en la conformación de una cartera, redundan en un decremento del riesgo total siempre que se lleve a cabo una diversificación conveniente. Asimismo, para propósitos de toma de decisiones de inversión, resulta fundamental atender a los valores que adoptan el rendimiento y la varianzas marginales. Es decir, supóngase que en un portafolio inicial existiera una proporción X_k igual a cero del k -ésimo título ($X_k = 0$). Aceptamos momentáneamente que el inversionista puede adquirir una fracción infinitesimal del k -ésimo título sin modificar las proporciones de los demás títulos X_i $i \neq k$ que comprende su cartera.

Entonces, el rendimiento marginal r_k de dicho bien sobre r_p (rendimiento del portafolios en su conjunto), queda determinado por:

$$r_k = \delta r_p / \delta x_k$$

De igual forma, el incremento de X_k afecta la varianza de todo el portafolios. Así pues, definimos la varianza marginal como el cambio en σ_p^2 determinado por el incremento en X_k , i.e.,

$$\partial \sigma_p^2 / \partial x_k = 2 \sum x_i \sigma_{ik} = 2 \sigma_{kp}$$

siendo σ_{kp} la covarianza del título k con respecto al portafolios p .

De la relación anterior puede observarse que la varianza marginal -definida como el cambio en la varianza total del portafolios que produce una variación de X_k - depende solamente de la covarianza entre los rendimientos del título en cuestión y del portafolios en conjunto.

2. Podemos ahora abordar un importante principio de optimalidad: si dos títulos que participan en el mismo portafolios tienen igual varianza marginal pero diferentes rendimientos esperados, entonces tal portafolios no puede ser óptimo en el sentido que se definió en el capítulo V, es decir, el de generar un rendimiento máximo dado un valor de riesgo. Este hecho obedece a que sería posible en tales

circunstancias obtener un rendimiento mayor sin incrementar el riesgo mediante un aumento del título que tenga rendimiento más alto (ya que las varianzas marginales se están suponiendo iguales). En consecuencia, se cumple el siguiente corolario: cuando un portafolios es óptimo, todos los títulos que tengan iguales varianzas marginales deberán tener los mismos rendimientos esperados.

Evidentemente, tanto la varianza como la varianza marginal y las covarianzas dependen absolutamente de las unidades de medida. Sin embargo, aquí encontramos más conveniente adoptar el uso de medidas relativas que sean independientes de las escalas. Una de las medidas relativas más usadas y convenientes es el coeficiente beta para el título k , que se calcula simplemente como

$$\beta = \sigma_{kp} / \sigma_p^2.$$

Ya que el valor de beta para cada título depende de su covarianza, misma que a su vez se relaciona fuertemente con la varianza marginal, podemos combinar las expresiones anteriores para construir un factor de proporcionalidad entre beta y la varianza marginal (V_m), a saber

$$V_m = 2\sigma_{kp} = 2\sigma_p^2 \beta_k$$

Ahora bien, dada la anterior relación podemos afirmar que todo lo que discutimos previamente en el capítulo V, puede expresarse de manera equivalente en términos de las betas en lugar de las varianzas y covarianzas. Particularmente, si un

portafolio es óptimo entonces todos los títulos con igual valor de beta deben tener idénticos valores para el rendimiento esperado.

Como siguiente paso discutiremos una de las contribuciones más importantes del CAPM al análisis empírico, misma que nos facilitará la implantación del modelo que se desarrollará más adelante en el capítulo VII, y que se refiere precisamente a la obtención de una relación de primer orden entre el riesgo y el rendimiento.

4. Supóngase que un inversionista tiene un portafolios a , que consiste en la combinación de dos títulos. La combinación de estos dos títulos genera una tasa de rendimiento esperado del portafolios que llamaremos r_a , así como un riesgo medido por la varianza correspondiente σ_a^2 .

Considérese ahora la presencia de un título libre de riesgo r_f , y pensemos que el inversionista puede libremente endeudarse o prestar de manera irrestricta con una tasa r_f en cada caso. Una posibilidad que consideraría el inversionista en tales circunstancias es combinar su portafolios a con el título libre de riesgo para conseguir con ello un nuevo portafolios.

De esta manera, tendría que el rendimiento esperado de su nuevo portafolio queda dado por

$$r_p = (1-X_a) r_f + X_a r_a$$

en donde X_a representa la proporción del total de fondos destinada a la inversión en el portafolios a. La varianza correspondiente a este nuevo portafolios queda dada por

$$\sigma_p^2 = X_a^2 \sigma_a^2 + (1-X_a)^2 \sigma_f^2 + 2X_a(1-X_a)\sigma_{af}$$

en donde σ_{af} es la covarianza existente entre el rendimiento esperado del portafolios y el rendimiento esperado del título seguro.

Sin embargo, ya que por definición el título seguro tiene un riesgo igual a cero (y en consecuencia, varianza igual a cero), el rendimiento r_f tiene correlación igual a cero (y en consecuencia una covarianza igual a cero) con cualquier otro rendimiento, lo que implica que $\sigma_f = \sigma_f^2 = 0$.

Así pues, la ecuación de riesgo se reduce a $\sigma_p^2 = X_a^2 \sigma_a^2$

o bien $\sigma_p = X_a \sigma_a$.

Reacomodando la anterior expresión en términos de X_a y sustituyendo en la ecuación de riesgo obtenemos que $X_a = \sigma_p / \sigma_a$ y $(1-X_a) = 1 - (\sigma_p / \sigma_a)$ que, factorizando términos nos resulta:

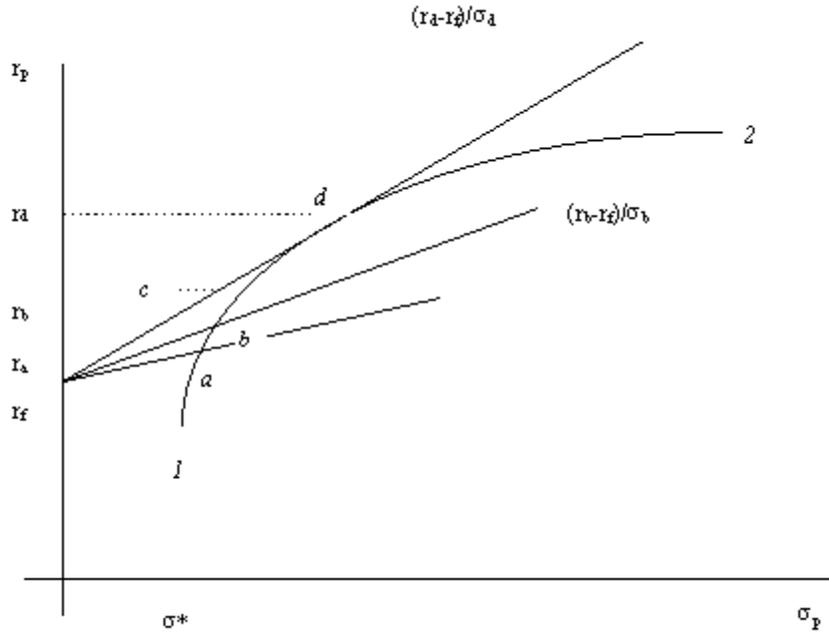
$$r_p = r_f + (r_a - r_f) \sigma_a^{-1} \sigma_p \dots\dots\dots(1)$$

Nótese que con la ecuación anterior hemos alcanzado un importante resultado: existe una relación lineal entre el rendimiento del portafolios r_p y su riesgo correspondiente σ_p .

Específicamente, el rendimiento total del portafolios r_p está determinado por la suma de dos términos: la tasa de rendimiento libre de riesgo r_f (primer término) , y $(r_a - r_f)/\sigma_a$ veces el riesgo del portafolios (segundo término). Obsérvese que cuando el inversionista elige invertir exclusivamente en el título seguro de modo que $X_a = 0$, entonces $r_p = r_f$ y $\sigma_p = 0$. Si por el contrario, el inversionista evita totalmente poner alguna cantidad libre de riesgo, entonces $X_a = 1$, $r_p = r_a$ y $\sigma_p = \sigma_a$. La tangente del ángulo que determina el segmento de recta representa la compensación o premio que el inversionista va teniendo conforme aumenta la proporción de fondos invertidos en el portafolios riesgoso a . Dicho portafolios es, por supuesto, uno de los muchos posibles portafolios riesgosos que puede construir el inversionista; los títulos pueden combinarse de infinidad de maneras alternativas.

De esta manera regresamos a la cuestión planteada en el capítulo V acerca de los criterios de elección al alcance del inversionista para conseguir un portafolio de frontera. Plantearemos, sin embargo, una estrategia alternativa. Para ello, mostraremos primero que aunque la conformación del portafolios a es factible, no es óptima en el sentido de que el inversionista puede alcanzar un rendimiento mayor

prestando cierta proporción de sus fondos $(1-X_p)$ a una tasa r_f , e invirtiendo el



remanente (W_p) conforme a las proporciones de alguno de los portafolios que yacen en la frontera eficiente (portafolios d , en la figura).

Siguiendo la anterior estrategia combinada, el inversionista podría alcanzar el punto c , donde el rendimiento es mayor que en a pero el riesgo es igual.

Esto es más claro aún si se considera otro portafolio b y sus correspondientes posibilidades de riesgo-rendimiento cuando éste es combinado con un bien libre de riesgo. Concretamente, si repetimos el análisis anterior hasta derivar una relación lineal entre riesgo y rendimiento para varias combinaciones

del portafolios b con el título seguro, obtendríamos una ecuación lineal con ordenada al origen r_f y pendiente igual a $(r_b - r_f) / \sigma_b$. Esta recta aparece en la parte media de la figura. Como puede verse, su pendiente es mayor a la que generan las combinaciones del portafolios a con el título seguro, lo que implica que la compensación al riesgo es mayor para el portafolios b combinado con el título seguro que para el portafolios a .

Aplicado el mismo razonamiento se puede mostrar como existe un portafolios c que es mejor aun que el portafolio b en términos de riesgo y rendimiento, y así sucesivamente hasta llegar al punto d .

Las implicaciones de este análisis son muy importantes: podemos afirmar que cada inversionista racional puede detectar un portafolios d y lograr la cantidad deseada de riesgo a través de préstamos y endeudamientos a la tasa r_f . En particular, si σ^* es el riesgo máximo de acuerdo con las preferencias del inversionista, el procedimiento hacia el óptimo consistirá en mezclar los títulos 1 y 2 de acuerdo con el portafolios d y endeudarse o prestar sus fondos a la tasa libre de riesgo r_f hasta alcanzar el punto c . Así pues, el inversionista se ve involucrado únicamente en dos acciones: conformar el portafolios d , y endeudarse o prestar a una tasa r_f .

La misma línea de argumentación puede generalizarse fácilmente a una situación más realista en la que el número de títulos riesgosos disponibles para el inversionista sea mucho mayor que dos. En general, para el caso de n bienes, la estrategia consiste en detectar n títulos en sus proporciones óptimas sobre la frontera cóncava de eficiencia y después ajustar, de acuerdo con la avidez personal hacia el riesgo, el nivel deseado mediante préstamos o endeudamientos a tasa segura.

Si adicionalmente adoptamos el supuesto de que todos los inversionistas disponen de la misma información, y que no existen impuestos ni costos derivados de las operaciones de transacción, entonces aún cuando exista diversidad de actitudes frente al riesgo, todos los agentes económicos tendrán la misma posibilidad de procesar la información para construir sus prospectos de inversión de manera idéntica. En tales circunstancias, todos los inversionistas tendrían una combinación de d con el título libre de riesgo acorde con sus preferencias. Así pues, el portafolio de todo el mercado en su conjunto será un reflejo macro del portafolios d .

En consecuencia, la estrategia de optimización consistirá en invertir en títulos con las mismas proporciones presentes en el mercado global (ya que en principio, corresponde a las proporciones del mejor portafolio) y después ajustar, de acuerdo con las preferencias particulares sobre riesgo-

rendimiento, la cantidad de endeudamiento o préstamo correspondientes al título con tasa segura.

5. Hemos visto en los capítulos IV y V como el proceso de diversificación tiene un efecto directo sobre la reducción del riesgo debido a que, en general, los precios de los bienes tienen una correlación imperfecta. A continuación examinaremos este fenómeno con mayor detalle.

En un estudio empírico conducido por Wayne Wayner y Sheila Lau (1971) se presentó una demostración de que la diversificación impacta fuertemente sobre la reducción del riesgo en un principio, pero que después de cierto grado, la diversificación adicional tiene un efecto muy ligero sobre la variabilidad del riesgo. Específicamente, mediante el uso de muestras históricas de portafolios de distintas configuraciones, Wagner y Lau demostraron que la diversificación puede efectivamente reducir casi a la mitad la variabilidad de los rendimientos, pero que este efecto puede ser conseguido con relativamente pocos títulos, ya que la mejora decrece rápidamente cuando el número de títulos aumenta (proponen $N=10$). Por supuesto, se reconoce que el riesgo no puede ser eliminado por completo.

A la parte del riesgo que es posible eliminar mediante diversificación le llamaremos indistintamente riesgo específico, riesgo único ó riesgo asistemático.

El riesgo específico surge del hecho de que muchos de los peligros u oportunidades que afronta una empresa individual

son muy particulares y sólo le afectan a ella (si acaso, a sus competidores más inmediatos). De ahí la idea de eliminar el riesgo específico mediante la diversificación.

Sin embargo, existen otros riesgos que no pueden evitarse, sea cual sea la diversificación de la cartera. A este tipo de riesgo le llamaremos riesgo *sistemático* o *de mercado*. Surge justamente del hecho de que coexisten una serie de factores globales que representan peligros u oportunidades para cualquier tipo de empresa. Es precisamente la presencia del riesgo de mercado la que explica en gran medida la tendencia hacia ciertos movimientos conjuntos. El riesgo de mercado existirá siempre, incluso cuando se logre un portafolio óptimo.

Hay que enfatizar que una de las implicaciones del CAPM consiste en que el riesgo de un portafolio bien diversificado depende sólo del riesgo de mercado que tengan los títulos que lo conforman. Es decir, supóngase que se dispone de un portafolios bien diversificado (i.e., un reflejo micro del portafolios global de mercado) y que se quiere valorar el grado de dependencia de los rendimientos de los activos sobre el riesgo adicional mediante el cálculo de la sensibilidad que tiene algún título en especial, digamos el título j , con respecto a las variaciones en el rendimiento global de mercado.

Para ello, obviamente no se examinaría el rendimiento de la j -ésima compañía de manera aislada, sino que se utilizaría la

información que brindan las covarianzas o los coeficientes de correlación del mercado en su conjunto.

Recordemos lo que señalamos anteriormente acerca del significado del coeficiente beta para la j-ésima empresa como medida relativa de la varianza marginal respecto del portafolios. Otra interpretación de esta noción de variación relativa es que, si se espera un incremento en el rendimiento del portafolios, digamos, de 1% , entonces la expectativa de aumento en el rendimiento del j-ésimo título será de β_j veces el 1% . La beta de inversión es, por lo tanto, una medida de la sensibilidad del rendimiento de un activo respecto a la variación del rendimiento del portafolio.

6. Para ciertos fines, resulta muy práctico pensar en el mercado global como un gran portafolio. Podemos definir para tal efecto la beta de inversión del título j relativa al portafolios de mercado como

$$\beta_j = \sigma_{jm} / \sigma_m^2 \quad \dots\dots(2)$$

en donde σ_{jm} representa la covarianza entre el rendimiento del título j-ésimo y el rendimiento de mercado, y σ^2 es la varianza del rendimiento de mercado. Sin embargo, existe un problema para relacionar la β_j con el marco del CAPM. Los términos de varianza y covarianza para β_j en la definición anterior se refieren al rendimiento total de los activos, mientras que en contraste hemos desarrollado la discusión

sobre el CAPM en torno a las variaciones en los premios o compensaciones al riesgo, es decir, sobre las diferencias de tipo $(r_m - r_f)$ siendo r_m el rendimiento del mercado en su conjunto.

Para superar esto, hay que advertir como el cociente entre el término σ_{jm} de covarianza y el término σ_m^2 de varianza no se afecta por la sustracción del rendimiento seguro respecto del rendimiento total. El coeficiente Beta de inversión es válido aun cuando se defina en términos de compensaciones en lugar de rendimientos totales. Este hecho tiene una implicación importante en el contexto del CAPM, donde se consideran premios más que rendimientos totales. Concretamente, como la determinación de Beta es invariante ante el cambio de términos entre rendimientos totales y compensaciones, el valor de beta para una compañía en particular es igual a la covarianza entre su compensación al riesgo y la compensación al riesgo que da el mercado, dividida por la varianza de la compensación de mercado. Esto fortalece el hecho que hemos señalado con anterioridad: la Beta como resumen del riesgo de mercado tiene una amplia aplicabilidad.

Las betas de inversión varían considerablemente entre unos títulos y otros. Algunas, por ejemplo, alcanzan valores mayores a 2, lo que indica que una alza o una baja de 1% en el mercado, repercutirá en una correspondiente alza o baja de 2% para el título. Un título como este es relativamente riesgoso. Otros, por el contrario, no son tan sensibles a los

movimientos de mercado y tienen en consecuencia valores de Beta mucho menores (0.5 ó menos). Algunos autores opinan que detentar activos cuyas Betas son mayores a la unidad refleja un comportamiento agresivo, mientras que buscar betas menores que 1 es asumir una posición defensiva. Como se verá en el capítulo VII, algunos títulos llegan a alcanzar incluso valores negativos de beta, que en los términos anteriores significa que son títulos más que defensivos.

Las Betas de inversión pueden definirse también para un portafolio en lugar de un título individual. Por ejemplo, considérese al portafolios q consistente en n títulos, y defínase su valor de beta relativo al mercado como $\beta_{q,m} = \sigma_{qm} / \sigma_m^2$.

Utilizando la definición de covarianza, se puede reescribir la beta $\beta_{q,m}$ como $\beta_{q,m} = \sum X_{i,q} \beta_{i,m}$, donde nuevamente $X_{i,q}$ representa la proporción del portafolios q invertida en el título i , y $\beta_{i,m}$ es el valor de la i -ésima beta respecto del portafolios de mercado. Así pues, el valor de beta de un portafolio no es más que la media ponderada de los valores de beta de sus componentes, siendo las ponderaciones iguales a la proporción de cada título.

Evidentemente, para el mercado en su conjunto la covarianza es igual a la varianza, lo que implica que el coeficiente beta para el mercado es igual a 1. Más aun, ya que la beta de un mercado bien diversificado depende del promedio ponderado de los título individuales, se tiene que la beta de dichos

títulos es igual a 1 y que la $\beta_{i,m}$ es igual a cero cuando el activo i es libre de riesgo.

7. Podemos ahora avanzar hacia la discusión econométrica del procedimiento de implantación operativa del CAPM. El primer paso para ello, consiste en derivar una ecuación que pueda ser estimada.

Considérese para tal efecto la existencia de dos portafolios: uno de ellos -el portafolio p - constituido exclusivamente por un título (j), y por otra parte, un amplio y bien diversificado portafolios m que represente el portafolios del mercado en su conjunto. Aplicando la ecuación que obtuvimos anteriormente podemos escribir la relación lineal del modelo para este caso como

$$r_j - r_f = (\sigma_j / \sigma_m)(r_m - r_f)$$

en donde nuevamente r_j y r_f son las tasas de rendimiento correspondientes al título j y al título seguro respectivamente; r_m es el rendimiento del portafolios de mercado (o rendimiento de mercado), y (σ_j / σ_m) es el cociente de las desviaciones de rendimiento entre el título j y el mercado m . Asimismo, $(r_j - r_f)$ es la compensación al riesgo del título j , mientras que $(r_m - r_f)$ es la correspondiente compensación al riesgo de mercado.

De acuerdo con la ecuación anterior, la compensación del título j no es más que el producto de un factor de proporcionalidad (σ_j / σ_m) por la compensación de mercado. Sin embargo, es importante notar que dicho factor expresa la dependencia del rendimiento del título j respecto del rendimiento de mercado; dependencia que se enfatiza con toda claridad en el CAPM. Además, lo anterior sugiere que el factor de proporcionalidad (σ_j / σ_m) debe estar relacionado de algún modo con la β_j de inversión que hemos discutido con anterioridad.

Para explorar esta relación, generalicemos la ecuación del CAPM añadiéndole un componente independiente α_j , un término estocástico u_i , y renombramos el factor de proporcionalidad como β_j . Con dichos cambios tendremos una ecuación estimable que relaciona la compensación del título con la compensación del mercado y la perturbación estocástica de manera que

$$r_j - r_f = \alpha_j + \beta_j(r_m - r_f) \quad \dots(3)$$

En la ecuación (3) el término estocástico refleja los efectos sobre el modelo de la presencia de riesgos específico y de mercado. Supondremos que este término es un *ruido blanco*, es decir, que su esperanza es cero, su varianza σ_u^2 , y que es independiente e idénticamente distribuido con respecto a la normal. Lo siguiente es una cuestión clave: el estimador de

mínimos cuadrados ordinarios (MCO) de β_j en la ecuación (3) es igual a la beta definida en la ecuación (2).

Para mostrar esto último, considérese el modelo de regresión bivariada $\alpha + \beta x + u$.

El estimador MCO de beta es $\text{cov}(x,y)/\text{var}(x)$. Sea $y = r_j - r_f$ de la ecuación y sea $x = r_m - r_f$. Entonces, el estimador MCO de beta no es más que $\hat{\beta} = \text{cov}(r_j - r_m, r_m - r_f) / (\text{var}(r_m - r_f))$.

Pero la anterior expresión es precisamente igual a σ_{jm} / σ_m^2 es decir, la beta de inversión definida en la ecuación (2). Así pues, puede tomarse al estimador MCO del factor de proporcionalidad β_j simplemente como el cociente entre las desviaciones de las compensaciones del título (j) y del mercado m.

Estas relaciones implican el importante resultado de que para cualquier título (j) puede estimarse la β_j de la ecuación (3) mediante los procedimientos conocidos de MCO. La linealidad de la relación surge precisamente de la ecuación (3).

7. La estimación del parámetro β_j basada en series sobre datos de empresas individuales supone necesariamente que, para cada una de ellas, β_j es razonablemente estable en el tiempo. La mayor parte de los estudios econométricos publicados en el contexto del CAPM se han basado en series de datos mensuales, y se ha demostrado que existe una tendencia hacia la estabilidad cuando el período que se toma en cuenta

es superior a los dos años (Hyde & Cuthbertson(2005), Rahman, & Baten, (2006), Semenov (2007)).

Sin embargo, se prestan casos en los que las condiciones de operación de una industria o una empresa cambian abruptamente, lo que implica que debe ser considerado un cambio (estructural) para la beta correspondiente (ver cap. VII).

Además del parámetro beta, cuya importancia e interés son evidentes, en la ecuación de estimación (3) aparece otro parámetro que fue añadido de manera expresa, i.e., α_j . Recordemos que α_j no aparece en la ecuación (2) que es la ecuación lineal análoga a la ecuación (1). Basados en la teoría financiera que sustenta la validez del CAPM, debiéramos esperar que el valor de α_j fuera estadísticamente igual a cero. En consecuencia, la hipótesis nula de alfa igual a cero debe ser probada antes de forzar la omisión del término constante en el cálculo de los parámetros de la regresión.

Como veremos en el capítulo siguiente, puede ocurrir que mediante la aplicación de MCO resulte que cierta firma tiene un valor de alfa significativamente distinto de cero. Esto implicaría que aunque la compensación de mercado se espera igual a cero, los inversionistas de esa compañía esperan una tasa positiva. Asimismo, para otra compañía el valor de alfa puede resultar negativo y significativamente distinto de cero. La respuesta del modelo CAPM a estos casos es que lo

que debe esperarse en realidad es encontrar , en promedio, un valor de las alfas que resulte muy próximo a cero.

8. Existen varias cuestiones que deben tomarse en cuenta para la aplicación empírica del CAPM:

a) La teoría financiera que fundamenta al CAPM introduce explícitamente rendimientos esperados o ex ante, mientras que los datos que se pueden obtener son sobre rendimientos medidos o ex post¹.

b) De acuerdo con el CAPM, el portafolio de mercado debe estar compuesto por todas las inversiones de riesgo, mientras que la mayoría de los índices y estimaciones de r_m comprenden sólo una muestra, excluyendo inversiones factibles de diversos tipos.

c) La medida más usada tanto en los mercados financieros locales como en el extranjero de la tasa libre de riesgo, se basa de una u otra manera en la tasa que ofrecen los bonos del tesoro de los Estados Unidos. Dada la incertidumbre que existe sobre la inflación, es difícil sostener que dicha tasa esté absolutamente libre de riesgo.

Los indicadores estadísticos que surgen de la aplicación del CAPM a series de datos ayudan a interpretar muchas de las cuestiones que hemos estado señalando. Por ejemplo, el coeficiente de correlación reescrito como

¹ Sin embargo, mediante el uso de ciertas técnicas estadísticas pueden combinarse la información observada y la información subjetiva, capítulos II, III, y VII.

$$\rho_{jm} = \sigma_{jm}^* / (\sigma_j^* \sigma_m^*) = \sigma_{jm}^* / \sigma_m^2 (\sigma_m^* / \sigma_j^*) = \beta_j^* (\sigma_m^* / \sigma_j^*)$$

nos indica cómo la correlación muestral entre la compensación de mercado es simplemente el producto de la estimación de β_j MCO por las desviaciones estándar correspondientes. Por su parte, el error estándar de los residuos en la ecuación de regresión (3) nos ayuda a medir la proporción del riesgo específico del portafolios que no es sensible a las fluctuaciones de mercado, ya que el lado izquierdo de la ecuación (3) refleja los efectos tanto del riesgo específico como del riesgo de mercado y el término $\beta_j(r_m - r_f)$ del lado derecho incorpora sólo el impacto del riesgo de mercado.

De esta manera, un error estándar grande -digamos, del 15% en adelante- nos indicaría que una parte importante de la compensación del portafolio no está explicada por la compensación de mercado. Asimismo, la R^2 indica la proporción del riesgo total que es de tipo sistemático, mientras que $1 - R^2$ nos indica la proporción de riesgo que es de tipo específico.

En un trabajo relativamente reciente, Sharpe (1985) establece que la R^2 de una empresa típica está alrededor de 0.30, pero a medida que se va diversificando la inversión con otras empresas, la R^2 empieza a crecer debido a la reducción del riesgo específico que produce la diversificación.

8. Otro resultado de la regresión interesante por su significado es el estadístico t . Ya comentamos anteriormente la importancia de probar directamente la hipótesis de que $\alpha = 0$. Para ello se ocupa el estadístico t , así como para llevar a cabo la estimación análoga de la hipótesis nula $\beta = 0$ contra la alternativa $\beta \neq 0$. En algunos casos puede ser necesario examinar, por ejemplo, si los cambios de precio de un bono en particular coinciden con los cambios respectivos en el mercado global; para hacer esta prueba, someteríamos a confrontación la hipótesis nula $\beta = 1$ contra la alternativa $\beta \neq 1$, construyendo los intervalos de confianza y determinado si β cae o no en alguno de ellos.

Antes de proseguir con la discusión de los aspectos econométricos del CAPM, a los que volveremos en las aplicaciones del capítulo VII, quisiéramos terminar esta revisión con algunos comentarios sobre las investigaciones más relevantes sobre el modelos de precios para activos de capital.

Desde su primera formulación, el CAPM ha jugado un papel central para el desarrollo de pruebas empíricas sobre modelos financieros. (Black, Jensen y Scholes, 1972; Fama y MacBeth, 1973). Cada día son más sofisticadas las técnicas de prueba que se discuten en las investigaciones publicadas. La estructura general de dichas pruebas se ha basado en la combinación de hipótesis sobre mercados eficientes y técnicas

econométricas de análisis de momentos muestrales. Roll (1978) presenta una crítica en donde establece que las pruebas empíricas fundamentadas en las implicaciones que tiene la existencia de un portafolios de mercado, son pruebas de bajo alcance que probablemente no detectan desviaciones respecto a la eficiencia media-varianza.

El papel central del portafolio de mercado en el CAPM ha sido analizado también por otros autores; Ross (1977) ha mostrado la existencia de elementos equivalentes entre el CAPM y la eficiencia media-varianza del portafolios de mercado. Asimismo, Ross (1977b) demostró que en ausencia de arbitraje, existe siempre al menos un portafolio eficiente. Roll fue más allá de esta observación, enfatizando la importante cuestión de que el portafolio de mercado es inmensurable.

Como consecuencia, la atención puesta sobre las técnicas de prueba del CAPM cambió y surgieron nuevas versiones que consideraban elementos de carácter intertemporal.

En este sentido, se pueden identificar dos vertientes de desarrollo. La primera de ellas, siguió esencialmente la línea del CAPM arribando eventualmente a una versión intertemporal: ICAPM. Merton (1978) encabezó esta línea presentando un modelo de análisis de tiempo continuo en donde muestra que el CAPM puede ser generalizado hacia la intertemporalidad. Más aún, Merton demostró que si el entorno económico puede ser representado por un vector de dimensiones finitas de variables de estado x , y si los precios de los bienes son una variable aleatoria establecida exógenamente,

entonces una ecuación de seguridad de mercado (security market line equation, SML) existe para todo intervalo de tiempo; además, la compensación al riesgo está dada por una combinación lineal de las betas de los rendimientos de cada una de las variables de estado, $x(i)$.

Ross (1979) desarrolló una extensión intertemporal similar del CAPM, pero en su modelo simplifica las preferencias con el fin de añadir una restricción intertemporal y estudiar la dinámica del equilibrio de precios. Sin embargo, los desarrollos de modelos intertemporales han encontrado dificultades para incorporar requerimientos relativos a la determinación endógena de la distribución de precios.

Un trabajo presentado por Cox, Ingersoll y Ross en 1985, puede ser considerado como el último intento de establecer una extensión de carácter intertemporal.

En 1992, Cadsbi publica un trabajo en el que rebate el planteamiento hecho por Tinic y West (1984) acerca de que el intercambio entre riesgo-rendimiento se observa en un t_0 a principios de año. Cadsbi demuestra que el riesgo se compensa más bien en etapas finales de cada período incluyendo meses y semanas. Asimismo, argumenta que los efectos del calendario en la relación de riesgo-rendimiento son consistentes con el CAPM.

En el mismo año, Levy (1992) investiga en qué condiciones se cumple el CAPM asumiendo que los bienes se intercambian a tiempo discreto y que la aversión al riesgo de los

inversionistas difiere en función del período en el que participen.

Entre los escasos estudios empíricos recientes de evaluación del CAPM basados en datos de inversiones fuera de los Estados Unidos, se encuentran los artículos de los Canadienses Carmichael y Samson (1993), de los Italianos Jorion y Giovanni (1993) y del Belga Eun Cheol (1994).

En el primero de estos tres trabajos, Carmichael y Samson contrastan la aplicabilidad del CAPM, que atribuye el riesgo sistemático a la covarianza del rendimiento de un título respecto al rendimiento de mercado, con el Consumption Capital Asset Pricing Model (CCAPM), que atribuye el riesgo a la covarianza entre la tasa de consumo y la tasa de rendimiento de un título.

Concluyen que si bien la evidencia apunta hacia la validez del CAPM, existen imprecisiones serias acerca de la sensibilidad del modelo respecto de la selección de inversiones.

Por su parte, Jorion y Giovanni presentan los resultados de la aplicación de dos distintos métodos de prueba: el primero de ellos, basado en la estimación del CAPM por la vía de máxima verosimilitud, complementada con un modelo explícito de tiempo variable para primero y segundo momentos muestrales. Además presentan otro método basado en el procedimientos generalizado de los momentos.

En la conclusión de este trabajo Jorion y Giovanni señalan que la relajación de la restricción referente a que el coeficiente de aversión al riesgo iguale al inverso de la elasticidad de sustitución intertemporal, no mejora el ajuste del modelo.

El tercero de estos artículos de corte empírico fue publicado por Eun Cheol (1994) en el *Oxford Economic Papers Journal*. En esta investigación el autor enfatiza la importancia de considerar la naturaleza multidimensional de la beta de inversión cuando se pretende aplicar o probar el CAPM. Asimismo, señala que la beta de inversión debe ser tomada en cuenta como una derivación de un componente del existente, pero inobservable portafolios de mercado.

Por otro lado, Chow y Denning (1994) llevan a cabo un análisis en el que demuestran que, desde la perspectiva teórica, el modelo CAPM y el modelo alternativo de momentos parciales, son equivalentes. En consecuencia, todo debate entre el sesgo de la medida del riesgo sistemático proveniente del CAPM respecto de este otro modelo, es irrelevante.

De manera prácticamente simultánea, Bauman y Miller (1994) recuperan los elementos originales del CAPM y establecen que un factor fundamental para la caracterización de los ciclos de mercado es el cálculo de las predicciones de rendimiento basado en las betas de inversión. Aunque aceptan en su artículo la existencia de correlación entre riesgo y

rendimiento, sugieren que ésta debe ser explorada por rangos para establecer una base para un análisis por ciclos.

La distribución de los rendimientos de activos de capital derivada del CAPM junto con una clasificación de restricciones asociadas con las preferencias del inversionista, son presentadas por Berk (1997) en el *Journal of Economic Theory*.

Por su parte, H. C. Huang (2000), lleva a cabo una novedosa prueba del CAPM que comprende la posibilidad de derivar las betas de riesgo a partir de dos estados (alto y bajo) del nivel de riesgo.

Gómez y Zapatero (2003), orientan su investigación hacia el análisis de desempeño de inversionistas institucionales (que consideran han a los agentes de mercado) comparando rendimiento y riesgo de sus portafolios con los correspondientes a un índice europeo de referencia.

Basados en series de datos de esta misma región, Hyde et al (2005), analizan la consistencia entre la evolución observada del rendimiento de mercado y el CCAPM (consumption based capital asset pricing model) mencionado anteriormente.

Finalmente, mencionaremos las publicaciones más recientes sobre otras pruebas empíricas de vigencia del CAPM que han sido desarrolladas por Rahman et al (2006), así como D. Galagedera (2007), en donde nuevamente se fortalece la evidencia de la incuestionable vigencia y amplia aplicabilidad de diversas variantes del modelo de precios de bienes de capital.

Dejaremos aquí la revisión de los elementos que intervienen en la construcción y aplicación del CAPM. En el siguiente capítulo, combinaremos esta teoría con la correspondiente a

modelos de cambio estructural, a fin de completar los fundamentos necesarios para dar lugar a las aplicaciones que presentaremos en el capítulo VIII.

CAPITULO VII

ANÁLISIS ESTRUCTURAL DEL CAPM.

Hace ya varios lustros surgió una polémica entre dos destacados econometristas, Modercal Ezekiel y Frederick Waugh, sobre el uso de la regresión para propósitos de predicción. Ezekiel basaba su argumentación en que si tenemos, por ejemplo, dos variables X_1 y X_2 , independientemente de que queramos hacer una predicción de X_1 dado X_2 o de X_2 dado X_1 , la regresión sobre la que debemos realizar el estudio vendrá siempre dada por la variable efecto sobre la variable causa. Waugh, por otro lado, argumentaba que debemos observar la regresión de la variable que predice sobre la variable a predecir independientemente de la dirección de la causalidad. Ezekiel respondió a esto afirmando que en aquellos casos donde tenemos definitivamente conocimientos no estadísticos sobre cuál es la variable de efecto y cuál es la variable causa, la regresión a la inversa de la variable causa sobre la variable efecto suele tener generalmente poco significado y es común que se use para obtener conclusiones ilógicas o erróneas.

La manera de dar cause a esta polémica depende del modelo que consideremos. Es decir, en situaciones donde el modelo de regresión clásica o de mínimos cuadrados es apropiado, por ejemplo, la variable X se trata como no aleatoria; independientemente de que queramos predecir Y dado X ó Y dado X , deberemos siempre considerar la regresión de Y sobre X . Este debe ser el modelo apropiado para datos experimentales y para curvas de crecimiento donde la variable X refleja el tiempo. Aun con datos no experimentales, cuando consideramos una relación de causa-efecto, parece lógico considerar la regresión de la variable efecto sobre la causal para ambos problemas de predicción. Como Wold (1984) indica: "Bajo la

hipótesis de dependencia unilateral, la elección de la variable dependiente será estrictamente análoga al caso de datos experimentales". En otros problemas de predicción bivariante es natural considerar la variable a predecir como la variable dependiente.

Cuando tenemos varias variables, la discusión es la misma. En vez del término bivariante, tenemos que usar el término multivariante. Wold llama a las dos aproximaciones (mínimos cuadrados y multivariante) *especificaciones de Gauss-Fisher y Galton-Yule*, respectivamente¹.

Aparte del problema de la predicción, existen una serie de diferencias de menor importancia entre los dos modelos de regresión. En el modelo de los mínimos cuadrados, como se mencionó con anterioridad, no necesitamos asumir la existencia de normalidad en los residuos excepto para los procesos inferenciales. Los estimadores de mínimos cuadrados tienen propiedades óptimas independientemente de la distribución de probabilidad que sigan los residuos, siempre que las demás condiciones se cumplan. También la relación será lineal o no por suposición. En la regresión bivariante o multivariante las esperanzas no tienen que ser necesariamente lineales. Pero si asumimos la normalidad, entonces tendrán que ser lineales necesariamente. Para formalizar esto, consideremos el siguiente apartado:

1. A fin de simplificar la notación, escribiremos $(r_m - r_f)' = (r_m - r_f) - \overline{(r_m - r_f)}$. La ecuación de regresión estimada es

$$(r_p - r_f)' = \alpha + (r_m - r_f)' + u_t \quad \dots (7.1)$$

¹ Esta es la razón por la que el método de mínimos cuadrados es atribuido a Gauss (1809), aunque el método fuese quizá usado con anterioridad y de forma exhaustiva por R. A. Fisher y el modelo de regresión bivariante fue introducido por Galton y popularizado por Yule.

Supongamos que para un valor futuro de $(r_m - r_f)^t$, que denotaremos como $(r_m - r_f)^*$, tenemos que estimar la respuesta $(r_p - r_f)^*$ y asociar un intervalo de confianza a la estimación. El principal problema consistirá en obtener los límites del intervalo de confianza de $(r_p - r_f)^*$, porque tanto $(r_m - r_f)^*$ como β se distribuyen normalmente. Para solucionar esto se utiliza el llamado método de Fieller:

Sea θ el equivalente de $E[(r_m - r_f)^* / \beta]$. Entonces la variable $(r_m - r_f)^* - \beta\theta$ se distribuye normalmente con media cero y varianza

$$\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \sigma^2 \frac{\sigma^2}{S_m^2} \quad \dots(7.2)$$

ya que $\text{var}[(r_m - r_f)^*] = \text{var}[(r_m - r_f)^* - \overline{(r_m - r_f)}] = \sigma^2 + \sigma^2/n$ y $\text{cov}[(r_m - r_f)^*, \beta] = 0$.

Sustituyendo el parámetro estimado σ^{2*} que se deriva de σ^2 en la ecuación (7.2), obtenemos la varianza estimada cuya raíz cuadrada es el error estándar de $(r_p - r_f)^* - \beta^*\theta$. Asimismo, el cociente

$$\frac{(r_m - r_f)^* - \beta^* \theta}{\sqrt{\sigma^{2*} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{\sigma^2}{S_m^2}\right)}}$$

sigue una distribución de t con $n - 2$ grados de libertad. Esto puede utilizarse para construir un intervalo de confianza para θ ; Por ejemplo, para un intervalo de confianza del 95 % buscamos un valor de t (de las tablas de t) con $n - 2$ grados de libertad de tal forma que

$$P \left[\frac{(r_m - r_f)^* - \beta^* \theta^2}{\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\sigma^2}{S_{xx}} \right)} \right] \leq 0.95$$

Para obtener los límites de θ , resolvemos la ecuación cuadrática

$$((r_m - r_f)^* - \beta^* \theta)^2 - t^2 \sigma^{2*} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta^2}{S_{xx}} \right) = 0 \quad (7.3)$$

Si θ_1 y θ_2 son las raíces de estas ecuaciones, entonces serán los límites para $(r_p - r_f)^*$. Las raíces pueden resultar complejas si β no es significativamente diferente de cero. En este caso debemos concluir diciendo que cualquier valor de $(r_p - r_f)^*$ es aceptable. Los límites obtenidos se denominan a menudo límites de tolerancia, y el intervalo que acotan se denomina intervalo de tolerancia en vez de intervalo de confianza. También se debe tener en cuenta que el intervalo no es simétrico sobre $(r_p - r_f)^*$.

2. Una de las principales aplicaciones de los análisis de varianza y covarianza es la relacionada con el problema de la combinación de datos de sección cruzada con datos de series temporales (para decidir cuestiones tales como si posible combinar, y en su caso estimar, regresiones combinadas con grados diferentes de combinación).

Inicialmente, consideremos el caso de una sola variable explicativa y supongamos que se tienen datos sobre $(r_m - r_f)$ y $(r_p - r_f)$ para un cierto número de empresas a través del tiempo. Postulamos una regresión separada para cada una de las empresas o títulos dentro del portafolio:

$$(r_m - r_f)_{it} = \alpha_i + \beta(r_p - r_f)_{it} + u_{it} \quad (7.4)$$

Ahora bien, hay N títulos y T_i observaciones para cada título i . Sean $(r_p - r_f)$ e $(r_m - r_f)$ las medias correspondientes a dicha empresa i . Definimos

$$\begin{aligned} W_{xxi} &= \sum_i (X_{it} - \bar{X}_i)^2 \\ W_{xyi} &= \sum_i (X_{it} - \bar{X}_i)(Y_{it} - \bar{Y}_i) \\ W_{yyi} &= \sum_i (Y_{it} - \bar{Y}_i)^2 \end{aligned}$$

El símbolo W y el subíndice i son utilizados para denotar que todas las expresiones anteriores están dentro del grupo i -ésimo. Entonces

$$\beta_i^* = \frac{W_{xyi}}{W_{xxi}} \quad y \quad \alpha_i^* = \beta_i^* \bar{X}_i$$

La suma residual de cuadrados es $RSS_i = W_{yyi} - W_{xyi}^2 / W_{xxi}$, que tiene $(T_i - 2)$ grados de libertad. Para la contrastación de las hipótesis

$$\begin{aligned} H_1: \quad \alpha_1 &= \alpha_2 = \dots = \alpha_n \\ \beta_1 &= \beta_2 = \dots = \beta_n \end{aligned}$$

tenemos que estimar una ecuación de regresión común

$$(r_m - r_f)_{it} = \alpha + \beta(r_p - r_f)_{it} + u_{it}.$$

Sean $\overline{(r_p - r_f)}$ y $\overline{(r_m - r_f)}$ las medias de $(r_p - r_f)$ y $(r_m - r_f)$, respectivamente, basadas en la totalidad de las observaciones. Definamos asimismo

$$T_{xx} = \sum_i \sum_t ((r_p - r_f)_{it} - \overline{(r_p - r_f)})^2$$

$$T_{xy} = \sum_i \sum_t [(r_p - r_f)_{it} - \overline{(r_p - r_f)}] [(r_m - r_f)_{it} - \overline{(r_m - r_f)}]$$

$$T_{yy} = \sum_i \sum_t [(r_m - r_f)_{it} - \overline{(r_m - r_f)}]^2$$

Entonces $\beta = T_{xy}/T_{xx}$ y $\alpha = (r_m - r_f) - \beta(r_p - r_f)$. La suma residual de cuadrados es $RSS = T_{yy} - T_{xy}^2/T_{xx}$, con $(\sum T_i - 2)$ grados de libertad.

Para probar la hipótesis de homogeneidad de las regresiones, podemos utilizar ahora una prueba F. En efecto, lo que estamos haciendo es estimar las ecuaciones de regresión (7.4) sujetas a las $(2N-2)$ restricciones lineales que implica H_1 , es decir, $\alpha_1 = \alpha_n$, $\alpha_2 = \alpha_n$, ..., $\alpha_{n-1} = \alpha_n$ y $\beta_1 = \beta_n$, $\beta_2 = \beta_n$, ..., $\beta_{n-1} = \beta_n$. Por lo tanto, podemos utilizar la prueba F para el propósito que nos ocupa. Sea

S_1 = suma residual de cuadrados sin restricciones = $\sum RSS_i$
 con $gl = \sum (T_i - 2) = (\sum T_i) - 2n$ y S_2 = suma residual de cuadrados con restricciones = RSS con $gl = (\sum T_i) - 2$.

El cociente F es entonces

$$F = \frac{(S_2 - S_1) / (2N - 2)}{S_1 / (\sum T_i - 2N)}$$

Si este cociente F es significativo, al existir diferencias significativas en los coeficientes, entonces no combinamos los datos y estimamos una sola ecuación.

En lugar de probar la hipótesis de que los coeficientes de pendientes, así como las ordenadas en el origen, son iguales para la totalidad de las empresas, estaremos interesados también en la contrastación de la hipótesis de igualdad de

los coeficientes de pendiente. La hipótesis es entonces H_2 : $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n$. Ahora tenemos que estimar una ecuación de regresión con un β constante pero diferentes α 's. El modelo de regresión es

$$(r_m - r_f)_{it} = \alpha_i + \beta(r_p - r_f)_{it} + u_{it}.$$

Minimizando $Q = \sum ((r_m - r_f)_{it} - \alpha_i - \beta(r_p - r_f)_{it})^2$ con respecto a α_i y β se obtienen las ecuaciones normales:

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum ((r_m - r_f)_{it} - \alpha_i - \beta(r_p - r_f)_{it}) = 0$$

o bien $\alpha_i = (r_m - r_f)_i - \beta(r_p - r_f)_i$

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum (r_p - r_f)((r_m - r_f) - \alpha_i - \beta(r_p - r_f)) = 0$$

Sustituyendo el valor de α_i tenemos

$$\sum_i \sum_t (r_p - r_f)_{it} \left[(r_m - r_f)_{it} - \overline{(r_m - r_f)_i} - \beta((r_p - r_f)_{it} - (r_p - r_f)_i) \right] = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\beta = \frac{W_{(r_p - r_f) \times (r_m - r_f)}}{W_{(r_p - r_f) \times (r_p - r_f)}}$$

donde

$$W_{(r_m - r_f) \times (r_p - r_f)} = \sum_i \sum_t \left[(r_p - r_f)_{it} \left((r_m - r_f)_{it} - \overline{(r_m - r_f)_i} \right) \right]$$

y

$$W_{(r_p - r_f) \times (r_p - r_f)} = \sum_i \sum_t \left[\left((r_p - r_f)_{it} - \overline{(r_p - r_f)_i} \right) (r_p - r_f)_{it} \right].$$

La suma de cuadrados residual se puede simplificar a

$$S_3 = W_{(r_m - r_f)(r_m - r_f)} - \frac{W^2 (r_p - r_f)(r_m - r_f)}{W(r_p - r_f)(r_p - r_f)}$$

dado que estamos estimando (N+1) parámetros (N α_i y un solo β).

Para la prueba de la hipótesis H_2 utilizamos de nuevo la prueba F. La suma residual de cuadrados con restricciones es ahora S_3 . La prueba F está dada entonces por

$$F = \frac{(S_3 - S_1) / (N - 1)}{S_1 / \sum (T_i - 2N)}$$

También se puede considerar la hipótesis de una ordenada en el origen común y diferentes pendientes.

La hipótesis es ahora $H_3: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$. Lo que tenemos que

hacer entonces es minimizar $\sum_i \sum_t ((r_m - r_f)_{it} - \alpha - \beta_i (r_p - r_f)_{it})^2$ con respecto al α común y a los N diferentes β_i .

Nótese que las expresiones que obtenemos ahora no son tan claras como antes. Por ello, en este caso el mejor procedimiento para calcular la suma de cuadrados con restricciones es el de combinar los datos y establecer una regresión con variables ficticias. A saber:

$$\begin{bmatrix} \Delta r_{m1} \\ \Delta r_{m2} \\ \Delta r_{m3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta r_{mn} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} \Delta r_{p1} \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta r_{p2} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \beta_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta r_{pn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix}$$

Combinamos así todos los datos y establecemos la regresión del conjunto total de observaciones $(r_m - r_f)$ sobre N variables ficticias con un término constante. Las variables ficticias son

$$D_t^1 = (r_p - r_f)_{t-1} \text{ para las observaciones del primer grupo} \\ = 0 \text{ para las observaciones restantes.}$$

$$D_t^2 = (r_m - r_f)_{t-2} \text{ para las observaciones del segundo grupo} \\ = 0 \text{ para las observaciones restantes.}$$

Entonces, los coeficientes de las ficticias son las estimaciones de las β . El coeficiente del término constante es la estimación de α . Si S_4 es la suma de cuadrados de residuos de esta ecuación, entonces la prueba F para contrastar H_3 es

$$F = \frac{(S_4 - S_1) / (N - 1)}{S_1 / (\sum (T_i - 2n))}$$

3. También se pueden aplicar algunas pruebas condicionales. Por ejemplo, si deseamos someter a contrastación la hipótesis

$$H_4: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n \text{ dados } \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_n$$

entonces, la suma de cuadrados de residuos sin restricciones es S_3 con $\sum T_i - (N+1)$ grados de libertad, y la suma con restricciones es S_2 con $\sum T_i - 2$ grados de libertad. Por tanto, la prueba F viene dada por

$$F = \frac{(S_2 - S_3) / (N - 1)}{S_3 / [\sum T_i - (N + 1)]}$$

Análogamente, si queremos contrastar la hipótesis

$$H_5: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_n$$

$$\text{dado } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n$$

entonces, la suma de cuadrados sin restricciones es S_4 con $\sum T_i - (N+1)$ grados de libertad, y la suma con restricciones es S_2 con $\sum T_i - 2$ grados de libertad. La prueba F la da

$$F = \frac{(S_2 - S_4) / (N - 1)}{S_4 / \sum [T_i - (N + 1)]}$$

En multitud de aplicaciones prácticas, cuando la combinación de datos se realiza, las ecuaciones son estimadas con una ordenada en el origen común y con una pendiente común, o bien con diferentes ordenadas pero pendiente común. De este modo, las pruebas necesarias son las relativas a las hipótesis H_1 , H_2 y H_4 , pero no los restantes. Desde el punto de vista de cálculo necesitamos las medias y covarianzas dentro de cada grupo:

$$\overline{\Delta r_p}, \overline{\Delta r_m}, W(\Delta r_p, \Delta r_p)_i, W(\Delta r_p, \Delta r_m)_i, T(\Delta r_m, \Delta r_m)_i$$

y los correspondientes valores para los totales:

$$\overline{\Delta r_p}, \overline{\Delta r_m}, T(\Delta r_p, \Delta r_p)_i, T(\Delta r_p, \Delta r_m)_i, T(\Delta r_m, \Delta r_m)_i.$$

Si estimamos regresiones separadas, tenemos

$$\beta_i = \frac{W_{(\Delta r_m, \Delta r_p)_i}}{W_{(\Delta r_m, \Delta r_m)_i}} \quad y \quad \alpha_i = \overline{\Delta r_{pi}} - \beta_i \overline{\Delta r_{mi}}$$

Si estimamos una regresión con una pendiente común y una ordenada en el origen también común, obtenemos

$$\beta = \frac{T_{(\Delta r_m, \Delta r_p)_i}}{T_{(\Delta r_p, \Delta r_p)_i}} \quad y \quad \alpha_i = \overline{\Delta r_{pi}} - \beta \Delta r_{mi}$$

Si estimamos una regresión con pendiente común, pero diferentes ordenadas, tenemos

$$\beta = \frac{W_{(\Delta r_m, \Delta r_p)_i}}{W_{(\Delta r_m, \Delta r_m)_i}} \quad y \quad \alpha_i = \overline{\Delta r_{pi}} - \beta \Delta r_{mi}$$

La última es comúnmente conocida como la regresión con variable ficticia.

El método de mínimos cuadrados con variables ficticias (MCVF) es el que se utiliza más frecuentemente para la estimación de parámetros con datos combinados. Sin embargo, ya mencionamos anteriormente cómo este método supone que el coeficiente de pendiente es el mismo para todas las unidades de sección cruzada, y sólo las ordenadas en el origen son diferentes. Por lo tanto, si hay suficientes observaciones disponibles, es mejor verificar que los coeficientes de pendiente sean realmente iguales (utilizando para ello la prueba descrita anteriormente), antes de efectuar combinación de datos alguna.

Otro problema consiste en que a veces es necesario tratar las ordenadas en el origen como *variables aleatorias* más que como parámetros fijos, y entonces ocurre que estos últimos pueden estar correlacionados con la variable explicativa.

4. Hemos insistido repetidas veces en que el supuesto de que los parámetros son constantes para todas las observaciones puede no ser enteramente válido. En los estudios de sección cruzada puede existir heterogeneidad en los parámetros a través de las diferentes unidades de sección cruzada.

Asimismo en las series de tiempo pueden presentarse variaciones en los parámetros a lo largo del tiempo.

En la literatura econométrica reciente se han sugerido diversas formas para abordar tales problemas. Consideraremos a continuación las cinco principales orientadas al caso de nuestra variable explicativa $\Delta r_m = (r_m - r_f)$, ilustrando los principios siempre con referencia al modelo planteado en el capítulo anterior.

Caso a) La variable explicativas Δr_m es conocida. Este es el caso más simple y de mayor sencillez de interpretación. Sea

$$\Delta r_{pt} = \beta_t \Delta r_{mt}, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad \dots\dots\dots (7.5)$$

el modelo de premio al riesgo.

Si existe una variable Z_t que pueda explicar los movimientos en β_t , podemos escribir

$$\beta_t = \alpha + \delta Z_t \quad \dots\dots\dots (7.6)$$

Sustituyendo esta última en la ecuación (7.5), obtenemos

$$\Delta r_{pt} = \alpha \Delta r_{mt} + \delta Z_t \Delta r_{mt} + u_t \quad \dots\dots (7.7)$$

La hipótesis de constancia de las β_t en (7.5) es equivalente a esta otra de que en (7.7) δ sea cero. Por lo tanto, es posible contrastar fácilmente la hipótesis de constancia de β_t

(nota) *

Si la Ecuación (7.6) es aleatorizada, es decir, si

$$\beta_t = \alpha + \delta Z_t + v_t \quad \dots\dots\dots (7.8)$$

entonces, sustituyendo (7.8) en (7.5), obtenemos

$$\Delta r_{pt} = \alpha \Delta r_{mt} + \delta \Delta r_{mt} Z_t + w_t \quad \dots\dots\dots(7.9)$$

donde $w_t = u_t + v_t \Delta r_{mt}$.

Si suponemos $Cov(u_t, v_s) = 0$ para cualesquiera t y s ,

$$Var(u_t) = \sigma_u^2 \quad \text{para todo } t,$$

$$Var(v_t) = \sigma_v^2 \quad \text{para todo } t,$$

y $Cov(u_t, u_s) = Cov(v_t, v_s) = 0$ para todo $t \neq s$, entonces,

$$Var(w_t) = \sigma_u^2 + \lambda \Delta r_{mt}^2 \sigma_v^2$$

y

$$Cov(w_t, w_s) = 0 \quad \text{para } t \neq s.$$

De este modo, la Ecuación (7.6) es un modelo de regresión usual con residuos heterocedásticos, siendo las varianzas proporcionales a $(1 + \lambda \Delta r_{mt}^2)$, donde $\lambda = \sigma_v^2 / \sigma_u^2$.

Las estimaciones máximo verosímiles para este modelo se pueden obtener fácilmente como sigue: El log de la función de verosimilitud viene dado (bajo el supuesto de que u_t y v_t están normalmente distribuidas) por

$$\log L = K - \frac{n}{2} \log \sigma_u^2 - \frac{1}{2} \sum \log(1 + \lambda \Delta r_{mt}^2) - \frac{1}{2 \sigma_u^2} \sum \frac{(\Delta r_{pt} - \alpha \Delta r_{mt} - \delta \Delta r_{mt} Z_t)^2}{1 + \lambda \Delta r_{mt}^2}.$$

La estimación continuaría de la siguiente forma:

Para un λ dado estimamos la ecuación de regresión

$$\frac{\Delta r_{pt}}{c_t} = \alpha \frac{\Delta r_{mt}}{c_t} + \beta \frac{\Delta r_{mt} Z_t}{c_t}$$

donde $c_t = \sqrt{1 + \lambda \Delta r_{mt}^2}$ y calculamos la suma de cuadrados de los residuos $\sigma_u^2(\lambda)$.

Sea

$$F(\lambda) = -\frac{n}{2} \log \sigma_u^2(\lambda) - \frac{1}{2} \sum \log(1 + \lambda \Delta r_{mt}^2)$$

Entonces el valor de λ para el cual $F(\lambda)$ es máximo, es la estimación máximo verosímil de λ , y las estimaciones correspondientes de α y β son las estimaciones máximo verosímiles de α y δ .

Caso b) Modelo de Hildreth y Houck. El modelo considerado por Hildreth y Houck es

$$\Delta r_{pt} = \sum \beta_{jt} \Delta r_{mt} \quad t = 1, 2, \dots, n$$

donde $\text{var}(v_{jt}) = \sigma_j^2$. Estas dos ecuaciones conjuntamente pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\Delta r_{pt} = \Sigma \beta \Delta r_{mjt} + w_t \quad \dots\dots(7.10)$$

donde $\text{var}(w_t) = \Sigma \Delta r_{pjt}^2 \sigma_j^2 \quad \dots\dots(7.11).$

Podemos escribir lo anterior en notación matricial como

$$\Delta r_p = \Delta r_m \beta + w$$

donde Δr_p , Δr_m , β , y w están definidos convenientemente. Si suponemos que los v_{jt} son mutuamente independientes en el tiempo, tenemos

$$\text{Var}(w_t) = \sum \Delta r_{pjt}^2 \sigma_j^2 \dots\dots(7.12).$$

Los parámetros de interés en este modelo son σ_j^2 y β_j . Hildreth y Houck proponen el siguiente método para estimar σ_j^2 .

Primero estimamos la Ecuación (7.10) mediante el método de los mínimos cuadrados ordinarios. Sea r el vector de residuos estimados.

Entonces $r = Mw$ donde $M = 1 - \Delta r_m (\Delta r_m' \Delta r_m)^{-1} \Delta r_m'$. De este modo, $r_t = m_{t1} w_1 + m_{t2} w_2 + \dots + m_{tn} w_n$, donde $(m_{t1}, m_{t2}, \dots, m_{tn})$ es la fila t -ésima de M . Puesto que $E(w_j) = 0$ para todo j , tenemos $E(r_t) = 0$,

$$\begin{aligned} \text{Var}(c_t) &= E(c_t^2) = \sum m_{tj}^2 \text{Var}(w_j) = \\ &= \sum m_{tj}^2 \sum \Delta r_{mij}^2 \sigma_j^2. \end{aligned}$$

Esta relación se puede expresar en forma compacta como

$$E(r) = MX\sigma$$

donde r = vector cuyos elementos son r_t^2
 M = matriz M en la cual cada elemento ha sido sustituido por su cuadrado
 X = Matriz X en la cual cada elemento ha sido sustituido por su cuadrado
 σ = vector con elementos σ_j^2

podemos escribir la Ecuación (7.10) de la siguiente forma:

$$r = MX\sigma + \varepsilon = Z\sigma + \varepsilon \dots\dots(7.14)$$

Hildreth y Houck sugieren estimar σ a partir de la ecuación de regresión múltiple (7.14). El estimador correspondiente en este caso es $(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{r}$.

Este método envuelve dos tipos de problemas. Primero, no garantiza estimaciones positivas para los σ_j^2 .

El otro problema es que el estimador no tiene en cuenta las covarianzas entre los ε en la Ecuación (7.14). Sin embargo, este último problema puede ser resuelto.

En efecto, puede obtenerse una estimación de la matriz de covarianzas de los ε y aplicar a continuación el método de los mínimos cuadrados generalizados. Puede probarse que este estimador MCG era mejor (en el sentido de error cuadrático medio) que el estimador obtenido aplicando MCO a la ecuación (7.14), y éste a su vez mejor que el estimador MV. Cuando se usan sólo tres regresores y se emplea el método de búsqueda para calcular las estimaciones MV, esto implica simplemente buscar dos parámetros $\lambda_1 = \sigma_1^2/\sigma_3^2$ y $\lambda_2 = \sigma_2^2/\sigma_3^2$.

Caso c) Modelo de regresión cambiante. Este es el modelo considerado por Quandt (1958), y estudiado más tarde por McGee y Carlton (1970), Hinkley (1971), el propio Goldfeld y Quandt (1978) y Hansen (2002), entre otros.

Supongamos que tenemos n observaciones de Δr_p y Δr_m . El modelo de regresión conmutada es aquel tal que

$$\Delta r_{pt} = \alpha_1 + \beta_1 \Delta r_m + u_{1t} \quad \text{para } 1 < t < n_0 \quad (7.15)$$

$$\Delta r_{pt} = \alpha_2 + \beta_2 \Delta r_m + u_{2t} \quad \text{para } n_0 < t < n \quad (7.16)$$

es decir, la relación entre Δr_p y Δr_m ha cambiado de dirección en el punto $t = n_0$ pasando de la relación (7.15) a la (7.16). Si n_0 es conocido, realmente no hay ningún problema. Se estima una ecuación de regresión separada para cada uno de

los regímenes. Sin embargo, generalmente no se conoce n_0 y es necesario hacer una estimación.

Si suponemos que las varianzas de los errores son iguales para ambos regímenes, lo único que tenemos que hacer es estimar (7.15) y (7.16) para diferentes valores de n_0 (es decir, diferentes particiones de la totalidad de la muestra), fijarnos en las sumas de los residuos y elegir el valor de n_0 para el cual esta suma es mínima.

Si las varianzas de los errores no son iguales, hay que maximizar el logaritmo de la función de verosimilitud (suponiendo que los residuos u_{1t} y u_{2t} sean independientes y estén normalmente distribuidos)

$$\log L = K - n_0 \log \sigma_1^2 - (n - n_0) \log \sigma_2^2 - \frac{1}{2\sigma_1^2} \sum (y_i - \alpha_1 - \beta_1 \Delta r_{mi})^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2} \sum (\Delta r_{mi})^2$$

respecto a α_1 , β_1 , α_2 , β_2 , σ_1 y σ_2 para diferentes valores de n_0 . Existen, no obstante, algunos problemas con este procedimiento.

Goldfeld y Quandt (1978) analizan nuevas modificaciones de este modelo de regresión conmutada para aquellos casos en los que existe una conmutación continua de atrás hacia adelante. Dichos autores consideran modelos conmutados tanto deterministas como estocásticos. En los modelos deterministas hay algunas otras variables z_1, z_2, \dots, z_k de modo que estamos en el régimen 1 si $\lambda = \pi_1 z_1 + \pi_2 z_2 + \dots + \pi_k z_k < c$ y en el régimen 2 si $\lambda > c$. Los π han de ser estimados, y c es una constante dada. En el modelo conmutado estocástico hay una probabilidad λ de que cada observación pertenezca al régimen 1, y una probabilidad $(1 - \lambda)$ de que pertenezca al régimen 2. Todo esto puede generalizarse a casos de más de un régimen.

McGee y Carlton (1970), Hinkley (1971) consideran por su parte los casos en que no hay discontinuidades en la función

de regresión. Para el caso de dos regímenes, considerado en las ecuaciones (7.16), si las dos líneas de regresión se encuentran en el punto $t=n_0$, esto implica una restricción en los parámetros $\alpha_1 + \beta_1 x^* = \alpha_2 + \beta_2 x^*$, donde x^* es el valor de Δr_m en el punto $t=n_0$.

Si los parámetros de la regresión cambian como respuesta a cualquier cambio en las variables políticas, es cuestionable que cambien de manera brusca, como fue establecido -vía hipótesis- en la forma más simple del modelo de regresión conmutada. Cualquier cambio de un régimen al otro es probable que sea suave. A este respecto, una modificación considerada por Goldfeld y Quandt (op. cit.) es prometedora. Consiste en combinar las Ecuaciones (7.15) y (7.16) de la siguiente forma:

$$\Delta r_{pi} = (\alpha_1 + \beta_1 \Delta r_{mi}) D_i + (\alpha_2 + \beta_2 \Delta r_{mi}) (1 - D_i) + D_i u_{1i} + (1 - D_i) u_{2i}$$

donde D_i será una función de las variables políticas y de otras variables exógenas. Se podría suponer que D_i sigue una curva suave. Podría adoptarse para tal curva la correspondiente a una distribución de probabilidad acumulativa normal, la relativa a una distribución de Cauchy, o bien a cualquier otra función de densidad apropiada.

Goldfeld y Quandt (op. cit. Ibid.) sugieren estimar este modelo bajo el supuesto de que los residuos u_{1i} y u_{2i} tienen una varianza común σ^2 . Esto es porque el modelo que consideran es una mezcla de dos distribuciones normales, y si suponemos distintas varianzas σ_1^2 y σ_2^2 para los residuos en (7.15) y (7.16), la función de verosimilitud para dicha distribución mixta tiende a ∞ cuando $\sigma_1 \rightarrow 0$ y

$\sigma_2 \rightarrow 0$.

Una alternativa al procedimiento de Goldfeld y Quandt, que es diferente al modelo de regresión conmutada y que no envuelve problemas de distribuciones mixtas, es obtenida considerando

un modelo de regresión tal como el (7.5) en el que el parámetro varía continuamente y cambiando la especificación (7.6) de la función lineal a una función de densidad acumulada basada en la normal o en cualquier otra distribución conveniente. Por ejemplo, si consideramos que esta función de densidad acumulada es descrita por la curva logística, podemos escribir

$$\beta_t = \bar{\beta} + \frac{c}{1 + e^{\alpha - \delta Z}}$$

Suponiendo que $\delta < 0$, obtenemos, cuando $Z_t \rightarrow \infty$, $\beta_t \rightarrow \bar{\beta} + c$.

Por su parte cuando $Z_t \rightarrow -\infty$, $\beta_t \rightarrow \bar{\beta}$. Sustituyendo esta expresión de β_t en (7.5), obtenemos, en lugar de la ecuación lineal simple (7.7), la ecuación:

$$\Delta r_{pt} = \bar{\beta} \Delta r_{mt} + \frac{c \Delta r_{mt}}{1 + e^{\alpha - \delta Z}} + u_t$$

5. Modelos adaptativos. Cooley y Prescott (1976), consideran el siguiente modelo:

$$\Delta r_{pt} = \alpha_t + \beta \Delta r_{mt} + u_t \quad (7.21)$$

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + v_{t-1} \quad (7.22)$$

y lo denominan modelo de regresión adaptativa. Aquí $u_t \sim N(0, \sigma_u^2)$, $v_t \sim N(0, \sigma_v^2)$ y u_t y v_t son independientes para todo t y s . Cooley y Prescott (op. cit.) también permiten que β en (7.21) varíe de una forma similar a (7.22), y lo denominan el modelo de regresión con parámetros cambiantes, pero nosotros consideraremos primero el modelo en el cual sólo varía el término de ordenada al origen.

Cooley y Prescott (op. cit. Ibid.) argumentan que muchos pronosticadores econométricos varían sus términos constantes para tomar en consideración los cambios estructurales, y de ahí obtener mejores predicciones. Por eso, ellos consideran un modelo dado por las Ecuaciones (7.21) y (7.22) cuando representan gráficamente el cambio estructural.

El término *regresión adaptativa* surge del hecho de que el residuo en (7.21) es la suma de un proceso estocástico tipo paseo aleatorio y de un error independiente. Para tales estructuras es apropiada la predicción adaptativa. Se puede dar también una justificación alternativa al modelo de regresión adaptativa, la cual es enteramente diferente a la expuesta por Cooley y Prescott. Esto es, en términos de variables omitidas. Supongamos que tenemos una ecuación de regresión

$$\Delta r_{pt} = \alpha + \beta \Delta r_{mt} + dz_t + u_t \quad (7.23)$$

donde z_t no es observable y, por tanto, se considera omitida. La Ecuación (7.23) es la misma que (7.21), con $\alpha_t = \alpha + dz_t$. Si z_t es autorregresiva de primer orden con un coeficiente de autorregresión elevado, entonces (7.22) es una representación razonablemente aproximada de α_t . Con esta interpretación, lo que la Ecuación (7.22) se supone que capta no es el *cambio estructural*, sino el efecto de las variables omitidas. Fijándonos en la Ecuación (7.23), está claro que las variables omitidas pueden ser combinadas también con el residuo u_t . En este caso acabamos con un modelo de regresión en que los residuos son tanto heterocedásticos como autocorrelacionados. De hecho, esto es también lo que implican las Ecuaciones (7.21) y (7.22). Para escribir estas ecuaciones en la forma habitual del modelo de regresión es necesario elegir una de las α como base de referencia. Cooley

y Prescott eligen α_{n+1} porque ello facilita la predicción para el primer período postmuestreal. Sea $\alpha_{n+1} = \alpha$. Entonces

$$\alpha_n = \alpha_{n+1} - v_n = \alpha - v_n$$

$$\alpha_{n-1} = \alpha_n - v_{n-1} = \alpha - v_n - v_{n-1}$$

.....

$$\alpha_2 = \alpha - v_n - v_{n-1} - \dots - v_2$$

$$\alpha_1 = \alpha - v_n - v_{n-1} - \dots - v_1 \quad \text{etc.}$$

Por tanto, la Ecuación (7.21) puede ser expresada como:

$$\Delta r_{p1} = \alpha + \beta \Delta r_{m1} + u_1 - v_1 - v_2 - \dots - v_n$$

$$\Delta r_{p2} = \alpha + \beta \Delta r_{m2} + u_2 - v_2 - v_3 - \dots - v_n$$

.....

$$\Delta r_{pn} = \alpha + \beta \Delta r_{mn} + u_n - v_n$$

Esto implica una ecuación de regresión $\Delta r_{pt} = \alpha + \beta \Delta r_{mt} + w_t$, donde los residuos w_t tienen una matriz de covarianzas (suponiendo que u_t y v_t están distribuidos, independiente e idénticamente, con varianzas σ_u^2 y σ_v^2 , respectivamente):

$$\sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1+n\lambda & (n-\lambda)\lambda & . & . & . & . & . & \lambda \\ (n-\lambda)\lambda & 1+(n-\lambda)\lambda & . & . & . & . & . & \lambda \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 3\lambda & 3\lambda & . & . & . & 1+3\lambda & 2\lambda & \lambda \\ 2\lambda & 2\lambda & . & . & . & 2\lambda & 1+2\lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & . & . & . & \lambda & \lambda & 1+\lambda \end{bmatrix}$$

donde $\lambda = \sigma_v^2 / \sigma_u^2$. Puesto que la matriz de covarianzas es conocida salvo una constante multiplicativa, si λ es conocido, las estimaciones de máxima verosimilitud pueden ser calculadas buscando λ . Cooley y Prescott analizan una transformación que reduce la carga del cálculo de la inversión de la matriz (7.24) para cada valor de λ que busquemos.

La generalización de este modelo al caso en que varíen también los parámetros de las pendientes es denominada por Cooley y Prescott como modelo de regresión con parámetros cambiantes. El modelo que ellos consideran es:

$$\begin{aligned} \Delta r_{mt} &= \beta_t^1 \Delta r_{mt} \\ \beta_t &= \beta_t^p + u_t \\ \beta_t^p &= \beta_{t-1}^p + v_t \end{aligned} \quad (7.25)$$

El superíndice p denota el componente permanente del parámetro. Dichos autores suponen las siguientes matrices de covarianzas para u_t y v_t

$$\begin{aligned} \text{cov}(u_t) &= (1-\theta)\sigma^2 \Sigma u; \\ \text{cov}(v_t) &= \theta\sigma^2 \Sigma v; \end{aligned} \quad 0 < \theta < 1$$

donde Σv y Σu se suponen conocidas. En vista de lo anterior, por simplicidad y sin perder generalidad, podemos suponer que son matrices identidad. Por consiguiente, nuestro problema es estimar σ^2 , θ y β_t^p . De nuevo, no se pueden estimar las β_t^p para todo t . Cooley y Prescott proponen tomar β_{n+1}^p como valor de referencia, ya que éste es el valor necesitado para la predicción del primer período post-muestral. El método de estimación es similar al analizado para el modelo de regresión adaptativa.

Se ha demostrado que para la mayoría de las series de tiempo económicas la predicción adaptativa es mejor que la precedente de modelos autorregresivos. Cooley y Prescott también dan evidencia de que su modelo ha dado resultados satisfactorios en la práctica.

Lo que su modelo implica, en efecto, es un modelo de regresión clásico con los residuos afectados tanto por heterocedasticidad como por autocorrelación. Los modelos de regresión en donde estos dos problemas son tratados simultáneamente no han sido considerados y podría ser razonable suponer que ambos problemas están presentes si hemos omitido variables (lo cual es muy frecuente en el trabajo econométrico)².

6. Si bien hemos establecido en capítulos previos que el análisis bayesiano de estabilidad estructural en modelos de precios para activos de capital constituye el objetivo central de la presente investigación, no podemos avanzar hacia las aplicaciones y resultados de éstas sin antes revisar ciertas consideraciones que en los últimos años han venido tomando importancia creciente en los diversos ámbitos

² Sería interesante considerar un modelo de regresión habitual con residuos afectados tanto por heterocedasticidad como por autocorrelación, y comparar su funcionamiento con el del modelo de Cooley y Prescott.

de aplicación de modelos econométricos de regresión y de series de tiempo.

Particularmente, queremos referirnos en primer término al denominado *problema de especificación* del modelo econométrico (*PEME*) desde la perspectiva de reducción probabilística. Cualquier revisión analítica de los desarrollos recientes en este sentido apunta a los trabajos fundacionales de dos destacados investigadores: Anya McGuirk y Aris Spanos. Son seguramente McGuirk y Spanos los dos econometristas que encabezan la lista de investigaciones relevantes acerca del problema de especificación. Estrechamente ligadas al mencionado problema, han tomado fuerza en años recientes las discusiones sobre el enfoque de reducción probabilística. Por tanto, comentaremos a qué se refiere el problema de especificación y, de manera sintética, las ventajas y limitaciones que se han encontrado al aplicar este importante enfoque así como cuáles son los pasos claramente definidos que se sugiere seguir para integrar el proceso de la reducción probabilística a la construcción de modelos econométricos.

Con tal propósito comentaremos brevemente sobre la evolución histórica del *PEME* en virtud de que el análisis mismo de su desarrollo nos revela los elementos fundamentales para su aplicación.

En primer término, hay que señalar que en enfoque de reducción probabilística (ERP) descansa sobre tres principios fundamentales que fungen como pilares de la modelación econométrica:

i) *La brecha entre teoría y datos*, que se reconoce y se acepta explícitamente. Contra lo que muchos investigadores aplicados esperan comúnmente de los modelos econométricos, éstos no buscan explicar o describir los datos observados

sino describir los datos que teóricamente debieran observarse³.

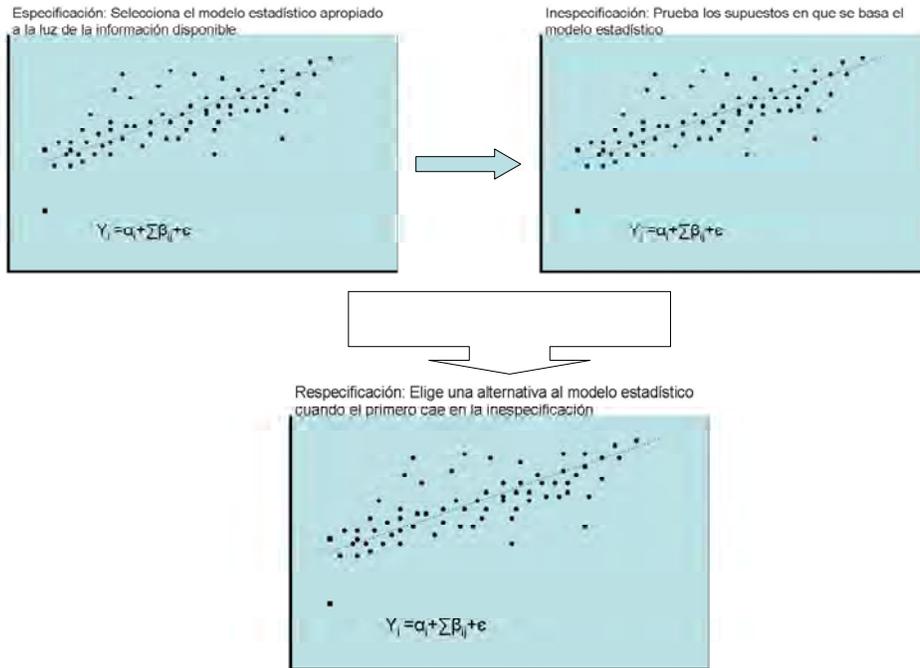
Es debido a este principio que el ERP aparece entre las escasas metodologías econométricas (si no la única existente), que explícitamente distingue entre el proceso de generación de datos, el modelo teórico⁴, y el modelo estadístico, que más bien se basa en un conjunto de suposiciones probabilísticas relacionadas con las variables aleatorias que están atrás de cada conjunto de datos.

ii) El segundo principio del ERP se refiere al hecho de que el proceso de especificación comienza a partir del análisis de una distribución conjunta de las variables observables seleccionadas, por lo que la *distribución condicional* se deriva como consecuencia a partir de dicha distribución conjunta. Ello contrasta con el enfoque econométrico tradicional que liga los datos con la teoría mediante un término de error al que se le supone cierta distribución probabilística, para luego derivar de ella la distribución condicional correspondiente.

iii) Como tercer principio tenemos que antes de comenzar cualquier conjunto de pruebas de hipótesis sobre los parámetros del modelo, es necesario constatar que los supuestos acerca de la distribución estadística se cumplan. Esto es, se debe obtener un modelo estadístico adecuado que considere las propiedades probabilísticas de los datos.

³ Para una interesante discusión sobre este principio, véase Haavelmo

⁴ Mismo que pretende aproximar los datos aislando un conjunto reducido de variables



El procedimiento de aplicación del EPR se basa fundamentalmente en la selección apropiada del modelo estadístico acorde con el conjunto de información disponible (a lo que se le denomina fase de especificación). El paso subsiguiente consiste en probar el conjunto de hipótesis y supuestos que se hallan detrás del modelo especificado. Si alguno de éstos no se sustenta o aparecen inconsistencias, es necesario construir o seleccionar un modelo alternativo y volver a probar las hipótesis sobre el mismo (a lo cual se le denomina respecificación del modelo estadístico).

Ahora bien, dado que en la fase de especificación del modelo la información disponible proviene generalmente de datos y consideraciones teóricas, ello sugiere la existencia de un vector Z_t de variables aleatorias. Por tanto, el investigador comienza con cierta distribución de probabilidad conjunta $D(Z)$ y determinado vector de parámetros ϕ . La *reducción*

(entendida como una fase del proceso) busca justamente *reducir* esta distribución de probabilidad conjunta, pero de forma tal que no se pierda ninguna información sistemática relevante.

En este sentido, puede decirse que las regularidades relevantes quedan comprendidas en alguna de las siguientes categorías: (D) Distribución; (M) Dependencia y (H) Heterogeneidad, de manera que inicialmente se establecen todos los supuestos dentro de alguna de estas categorías.

"El modelo queda especificado entonces únicamente en términos de supuestos probabilísticos, teniendo sus parámetros un significado exclusivamente estadístico; hasta ese momento no existe todavía interpretación teórica alguna" (Spanos, 1995). Una vez especificado el modelo, la atención debe orientarse hacia las pruebas de inespecificación para constatar si los supuestos NIID (Normal, Independiente e Idénticamente Distribuidos) son satisfechos. Como bien enfatizan Spanos y McGurik () lo anterior puede comenzar por la aplicación de técnicas de análisis gráfico como son las gráficas t así como gráficas de dispersión, para luego proseguir hacia las pruebas formales de hipótesis para normalidad, linealidad, homocedasticidad, independencia y estabilidad estructural. En esta fase, las pruebas estadísticas son entendidas como lo que Fisher () denomina *pruebas de significancia pura*, i.e., someter a prueba los parámetros y si los supuestos probabilísticos subyacentes no se satisfacen debe entonces regresarse al modelo de distribución conjunta de las variables observables consideradas, para luego proponer un conjunto diferente de supuestos de reducción a fin de tomar en cuenta cualquier información sistemática soslayada en los supuestos originales.

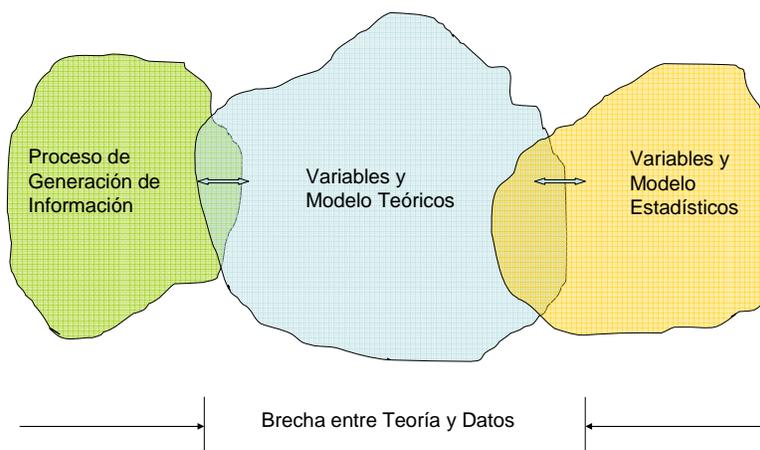
Los anteriores procesos de prueba, *i.e.*, inespecificación y respecificación, continúan hasta que es acuñado un modelo estadístico *adecuado*. Por *adecuado*, debe entenderse que los supuestos probabilísticos subyacentes se satisfacen plenamente y que toda aquella información de naturaleza sistemática que se tenga disponible es tomada en cuenta para la estructura del modelo.

Al cabo de este proceso y toda vez que el modelo estadístico *adecuado* ha quedado estructurado, el siguiente paso consiste en examinar la validez de la teoría que el modelo *adecuado* pretende representar.

Posiblemente, la mayor riqueza que existe detrás del Enfoque de Reducción Probabilística (ERP) yace sobre dos principios básicos de la modelación econométrica. Primero, al poner énfasis en la brecha entre teoría y datos, el ERP decanta el proceso de generación de información, de las variables y modelos teóricos así como de las variables observables y el modelo estadístico. Puede decirse que lo anterior va muy en la línea de las concepciones originales de modelación econométrica de Haavelmo () que hablan del cuidado que debe tener el modelador de falsas o mal concebidas inferencias.

El segundo principio básico de la modelación econométrica que sustenta al proceso ERP consiste en que los errores inferenciales nunca surgen de supuestos estadísticos inadecuados, toda vez que éstos últimos son validados por procedimiento.

ENFOQUE DE REDUCCIÓN PROBABILÍSTICA



Por su parte, es preciso señalar que entre las desventajas más importantes que prevalecen en el ERP se encuentra la falta de especificidad procedimental de sus distintas fases de implementación. Lo anterior ha sido debatido por los econométricos, pues muchos consideran que la falta de especificidad procedimental forma parte del arte de selección del modelo. Sin embargo, dicha postura no contribuye con la necesaria futura sistematización del proceso de especificación de modelos econométricos. Hay que recordar que en la fase de especificación, el conjunto de información disponible proviene en un grado muy importante de la teoría.

"The Choice of the statistical model is influenced by the theory in so far as it is required to allow the modeler to consider the theoretical question of interest in its context" (Spanos, 1995).

Algunos teóricos piensan que afirmaciones como la anterior conducen a descripciones de fenómenos económicos basadas en modelos simplificados, que en el pasado han gozado de un crédito inmerecido.

7. Iniciaremos ahora el análisis bayesiano del modelo con lo que se conoce como distribuciones a priori *conjugadas*. Una distribución a priori conjugada es una distribución a priori que, cuando se combina con la función de verosimilitud, da lugar a una distribución a posteriori que tiene la misma forma funcional que la distribución a priori. La ventaja de una distribución a priori de este género, es que a medida que obtenemos nueva información muestral, podemos combinarla con la distribución a posteriori obtenida en la primera etapa.

Consideremos el modelo $\Delta r_{pi} = \Delta r_{mi} + u_i$, donde $u_i \sim N(0, \sigma^2)$. La función de verosimilitud basada en n observaciones es

$$L(\beta, \sigma) \propto \sigma^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (\Delta r_{pi} - \beta \Delta r_{mi})^2\right]$$

Sea β^* el estimador MCO de β e igual a $\Sigma \Delta r_{mi} \Delta r_{pi} / \Sigma \Delta r_{mi}^2$. Su varianza es $\sigma^2 / \Sigma \Delta r_{mi}^2$. Podemos escribir $\Sigma (\Delta r_{pi} - \beta \Delta r_{mi})^2 = \Sigma (\Delta r_{pi} - \beta^* \Delta r_{mi})^2 + (\beta - \beta^*) 2 \Sigma \Delta r_{pi} \Delta r_{mi} + (\beta - \beta^*)^2 \Sigma \Delta r_{mi}^2$. Definamos

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum (\Delta r_{pi} - \beta^* \Delta r_{mi})^2$$

Podemos expresar la función de verosimilitud como

$$L(\beta, \sigma) \propto \sigma^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(n-1) \sigma^{*2} + (\beta - \beta^*)^2 \Sigma \Delta r_{mi}^2 \right]\right] \quad (7.26)$$

Consideremos ahora los siguientes casos:

Caso d) σ conocido. Podemos escribir entonces:

$$L(\beta) \propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\beta - \beta^*)^2 (\Sigma \Delta r_{mi}^2)\right]$$

Esta expresión sugiere que la distribución normal es una distribución a priori adecuada. Supongamos que la distribución a priori es

$$P(\beta) \propto \exp\left[-\frac{m}{2\sigma^2}(\beta - \beta_0)^2(\sum \Delta r_{mi})^2\right]$$

La media a priori es β_0 y la varianza a priori σ^2/m . Entonces la función de densidad a posteriori es

$$P(\beta | \Delta r_{pi}) \propto \exp\left[-\frac{m}{2\sigma^2}(\beta - \beta_0)^2\right] \quad m > 0.$$

Esto es nuevamente una distribución normal. Para encontrar su media y su varianza, simplificamos la expresión entre corchetes. En efecto, podemos escribirla como

$$\begin{aligned} & \beta^2(\sum \Delta r_{mi}^2 + m) - 2\beta(\beta \sum \Delta r_{mi}^2 + \beta_0 m) + \beta^2 2\sum \Delta r_{mi}^2 + \beta_0^2 m = \\ & (\sum \Delta r_{mi}^2 + m)(\beta - \beta^*)^2 + \nabla \end{aligned}$$

en donde ∇ representa algunos términos independientes de β , y

$$\beta^* = \frac{\beta_0 \sum \Delta r_{mi} + \beta_0 m}{\sum \Delta r_{mi}^2 + m}.$$

Por lo tanto, la distribución a posteriori es

$$P(\beta, \sigma) \propto \sigma^{-k} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[M + m(\beta - \beta_0)^2]\right]$$

Denominaremos *precisión* al recíproco de la varianza. En este caso la precisión a priori es m/σ^2 y la precisión muestral (la precisión de β^*) es $\Sigma(\Delta r_{mi}^2/\sigma^2)$. La precisión de la

distribución a posteriori de $\beta = (m + \sum \Delta r_{mi}^2 / \sigma^2)$ es igual a la suma de la precisión a priori y la precisión muestral.

También la media a posteriori β^* es un promedio ponderado del estimador MCO β^* y la media a priori β_0 con momentos inversamente proporcionales a sus varianzas (o directamente proporcionales a su respectiva precisión).

Caso e: σ desconocido. En este caso consideramos una distribución a priori similar en su expresión a la función de verosimilitud (7.26). Tal distribución a priori es

$$P(\beta, \sigma) \propto \sigma^{-k} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} [M + m(\beta - \beta_0)^2]\right] \quad (7.27)$$

Para un σ dado, esta distribución coincide con una distribución normal de media β_0 y varianza σ^2/m . Para un β dado, la distribución de σ es una distribución gama. Su varianza decrece a medida que aumenta k . La distribución (7.27) es denominada distribución a priori gama-normal.

Los cuatro parámetros a elegir son β_0 , k , M y m , donde β_0 es la media de β y $M/k-1$ la media de σ .

Elegimos valores grandes de m y k si tenemos nociones más precisas sobre β y σ .

La distribución a posteriori es ahora

$$P(\beta, \sigma | \Delta r_{pi}) \propto \sigma^{-(n+k)} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ (n-1)\sigma^{*2} + M \right\} + m(\beta - \beta_0)^2 + \sum \Delta r_{mi}^2 (\beta - \beta^*)^2\right] \quad (7.28)$$

Para obtener la distribución marginal de σ , es necesario integrar (28) respecto a β . Puede verse que la distribución marginal a posteriori de σ es una gama-2 invertida. Para

obtener la distribución marginal de β , tenemos que integrar (7.28) con respecto a σ . Para llevar esto a cabo, hacemos uso de la siguiente integral:

$$\int \frac{1}{\sigma^{n+1}} \exp\left(-\frac{Q}{2\sigma^2}\right) d\sigma = \text{const.} \frac{1}{Q^{n/2}} \quad (7.29)$$

Esta integral puede obtenerse observando que la integral respecto a σ de la función de densidad gama-2 invertida es igual a 1.

Utilizando la fórmula (7.29) para integrar σ a partir de (7.28), obtenemos

$$P(\beta) \propto [(n-1)\sigma^{*2} + M + m(\beta - \beta_0)^2 + \sum \Delta r_{mi}^2 (\beta - \beta_{mi}^*)^2]^{-(n+k-1)/2}$$

La distribución de β es ahora la distribución t con $n+k-2$ grados de libertad.

La distribución marginal de β implicada por la distribución a priori gama-normal (ver ecuación 27) es una distribución t . Para llegar a esta integral partiendo de (7.27) respecto a σ utilizamos (7.29), de tal forma que se obtiene

$$P(\beta) \propto \frac{1}{[M + m(\beta - \beta_0)^2]^{(k-1)/2}} \propto \frac{1}{[1 + (m/M)(\beta - \beta_0)^2]^{(k-1)/2}} \quad (7.30)$$

Comparando esta última con la distribución t , se llega a

$$\left[\frac{m(k-2)}{M} \right]^{1/2} (\beta - \beta_0)$$

la cual tiene una distribución t con $k-2$ grados de libertad. Análogamente podemos simplificar la expresión de (7.30). La expresión dentro del corchete puede escribirse

$$F + G(\beta - \beta^*)^2$$

donde β^* fue definida en (7.17),

$$F = (n-1)\sigma^{*2} + M + m\beta_0^2 + (\sum \Delta r_{mi}^2)\beta^{*2} - (m + \sum \Delta r_{mi}^2)\beta^{*2}$$

$$y \quad G = m + \sum \Delta r_{mi}^2$$

De este modo,

$$\left[\frac{(n+k-2)G}{F} \right]^{1/2} (\beta - \beta^*)$$

tiene una distribución t con $m+k-2$ grados de libertad.

En consecuencia, tendremos finalmente entonces que esta distribución puede ser utilizada para construir intervalos de confianza bayesianos para β casi en la misma forma en que los construimos en los procedimientos clásicos.

En el siguiente capítulo, aprovecharemos los resultados anteriores para aplicarlos al análisis de series recientes correspondientes a emisoras que cotizan en el mercado nacional de capitales.

CAPITULO VIII

APLICACIONES

Este capítulo está dedicado a la presentación de los resultados que se obtienen de aplicar el CAPM con cambio estructural al conjunto de series de las 35 emisoras que conforman la muestra del índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV).

Con dichas series, se preparó una base de datos cuyos registros corresponden a las cotizaciones diarias reportadas por las emisoras entre febrero de 2006 y septiembre de 2007. Asimismo, se incluyeron los campos relativos a los rendimientos de la inversión libre de riesgo (r_f) y el rendimiento de mercado (r_m). Para el primer caso, -inversión libre de riesgo- se ha tomado el rendimiento que ofrecen los Bonos del tesoro Estadounidense.

Por su parte, la serie de rendimientos de mercado será determinada a partir de las variaciones del índice de precios y cotizaciones que reporta la BMV. Esta última serie corresponde a lo que hemos estado denotando como r_m . Así pues, el cálculo de las compensaciones o premios al riesgo para cada título estará determinado por la diferencia entre los vectores \mathbf{r}_i y \mathbf{r}_f , es decir, la serie $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_f)$ (incluyendo el caso particular en que $i=m$).

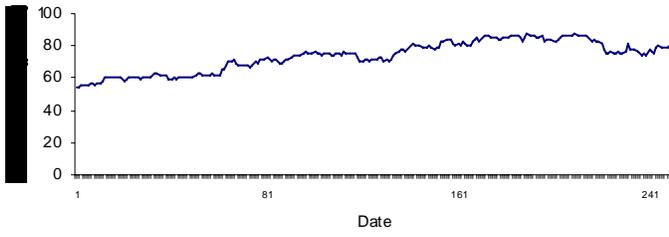
1. El primer hecho a destacar surge del análisis de las curvas de rendimiento para cada una de las emisoras. Como podrá observarse a continuación, en ningún casos existe un

patrón de regularidad que pudiera sugerir la presencia de alguna componente sistemática dominante. Por el contrario, dichas curvas sugieren más bien una fuerte presencia de riesgo específico distribuido a lo largo del año.

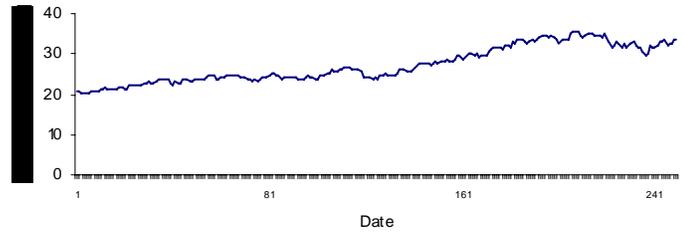
Como era de esperarse dentro del contexto del CAPM, existe relación entre las variaciones de los rendimientos de las empresas a lo largo del periodo de análisis. Por tanto, más adelante se explora la relación entre los premios al riesgo de cada emisora y el premio de mercado. Sin embargo, antes de formular un modelo en el que se proponga tal relación, vale la pena revisar la condición que guardan las varianzas y covarianzas de los títulos entre sí. Dicho análisis nos permitirá justificar la construcción de portafolios de frontera dentro del contexto del modelo CAPM.

Hay que recordar que el propósito de la construcción de un portafolio es permitir una diversificación conveniente del riesgo que se asocia a los distintos niveles de rendimiento asequible.

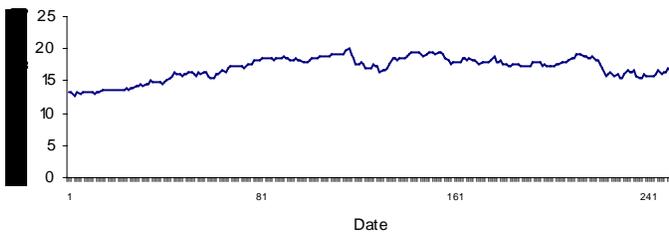
ALFA.A



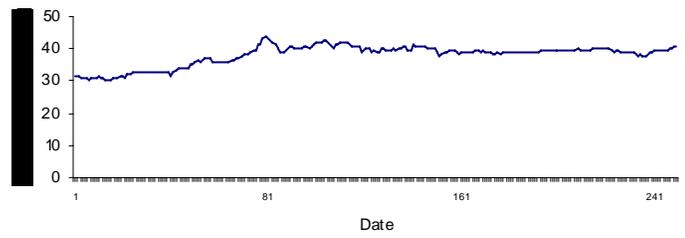
AMX.L



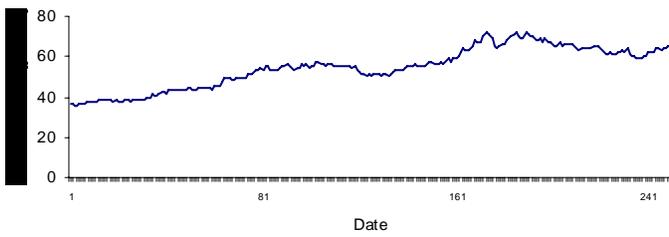
ARA.*



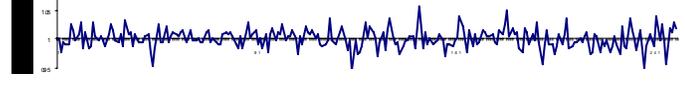
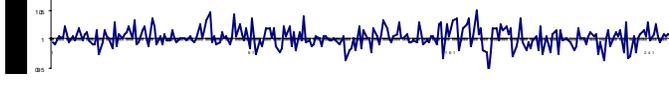
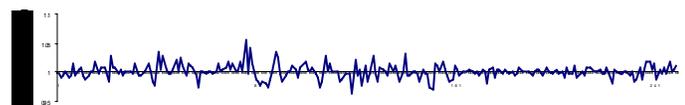
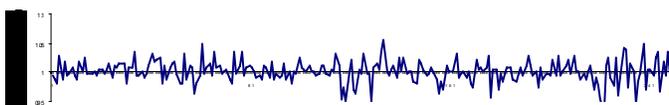
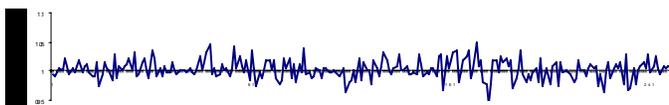
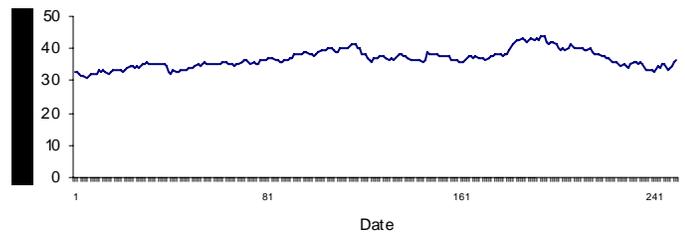
ARCA.*



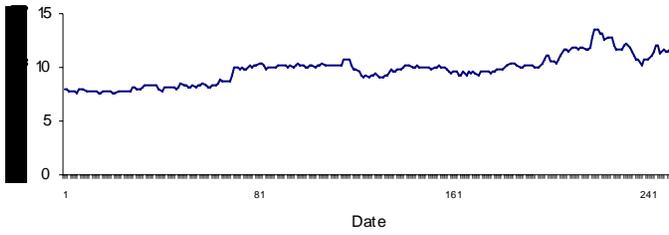
BIMBO.A



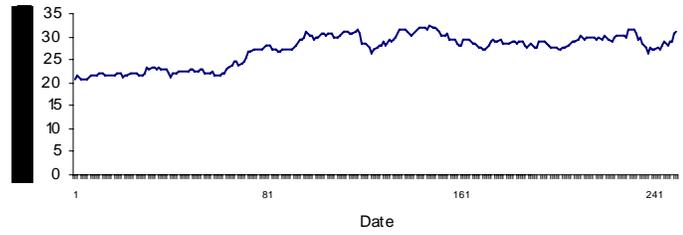
CEMEX.CPO



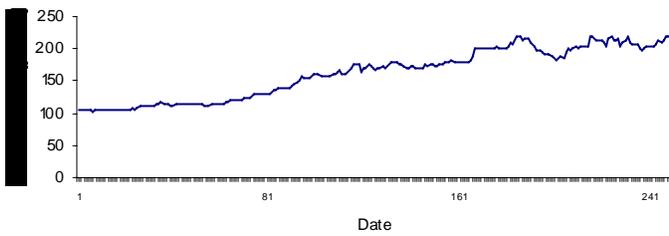
CICSA.B-1



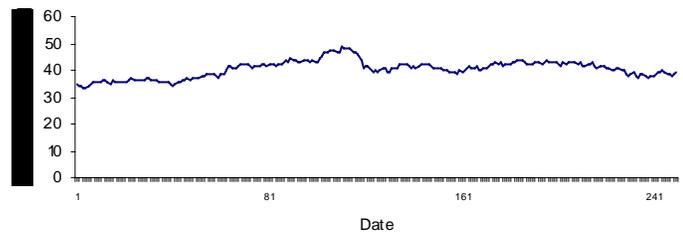
COMERCI.UBC



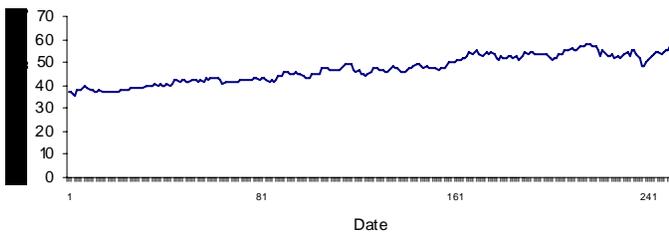
ELEKTRA.*



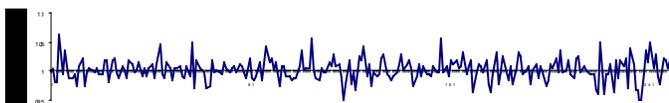
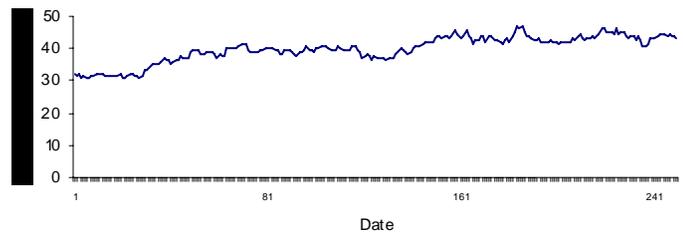
FEMSA.UBD



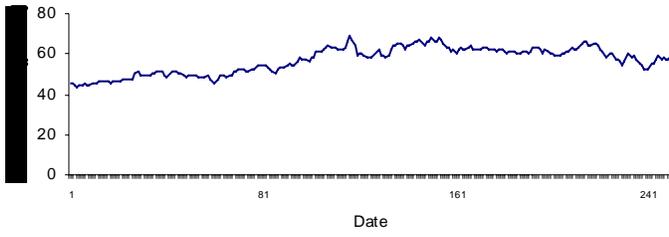
GAP.B



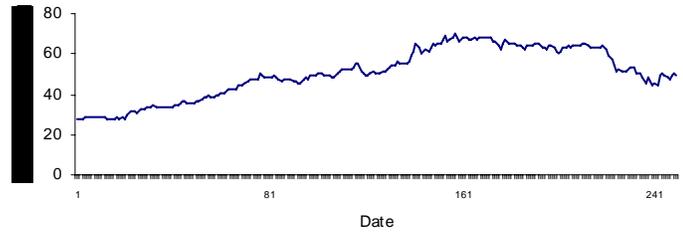
GCARSO.A-1



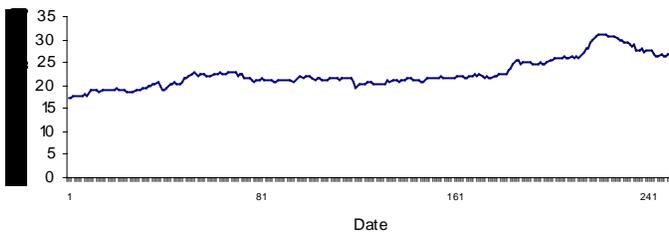
GEO.B



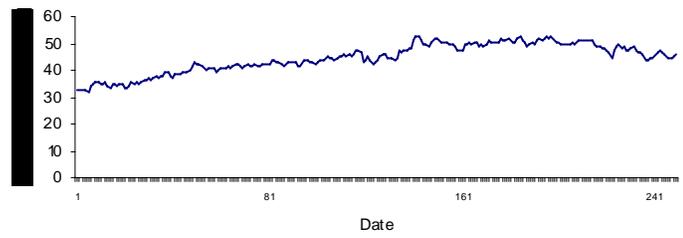
GFAMSA.A



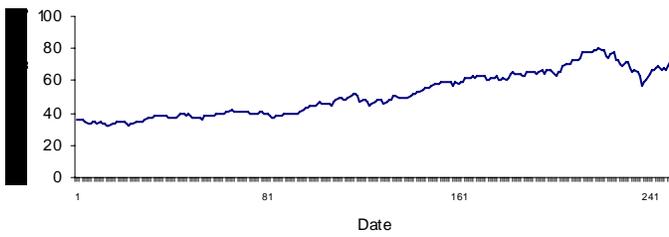
GFINBUR.O



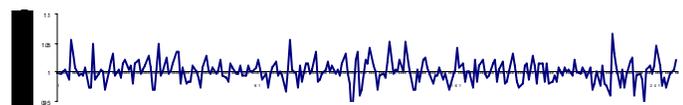
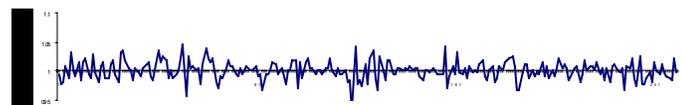
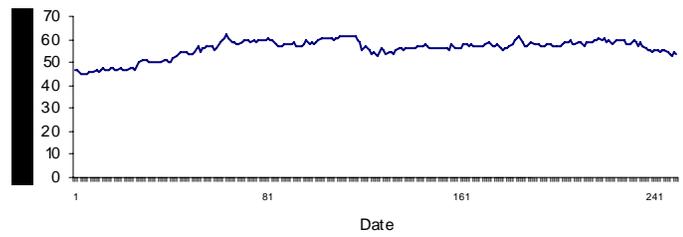
GFNORTE.O



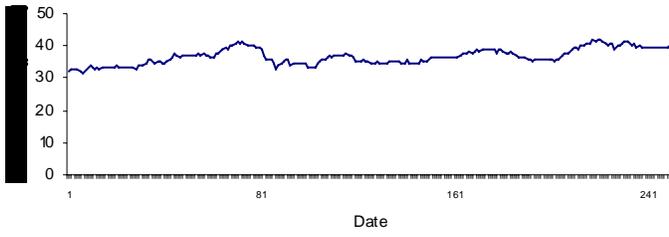
GMEXICO.B



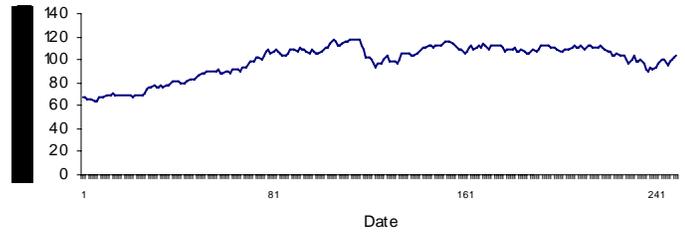
GMODELO.C



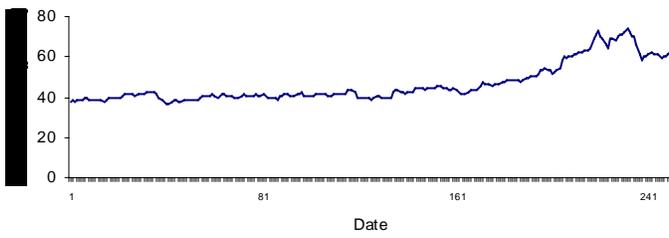
GRUMA.B



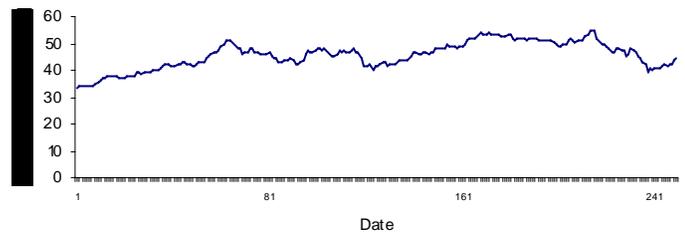
HOMEX.*



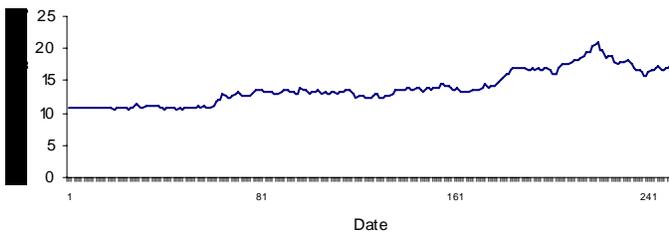
ICA.*



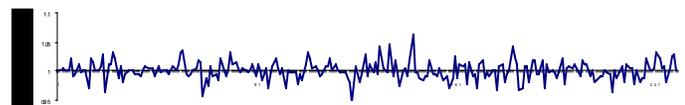
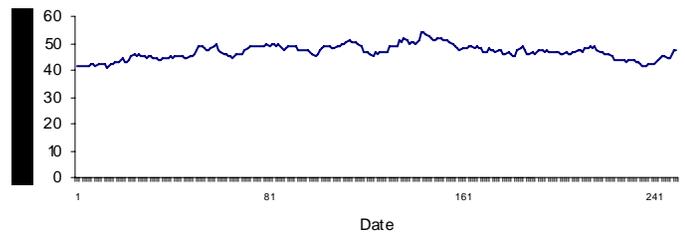
ICHB



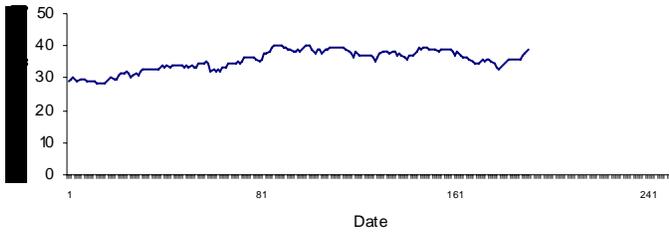
IDEALB-1



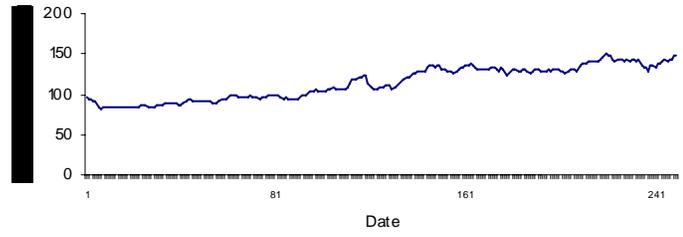
KIMBER.A



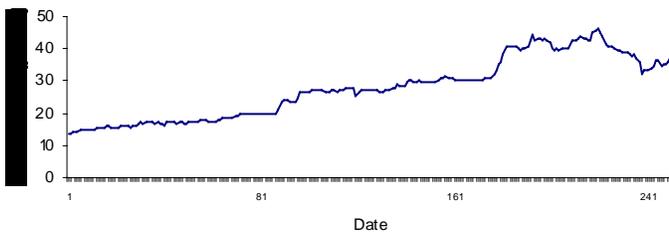
OMA.B



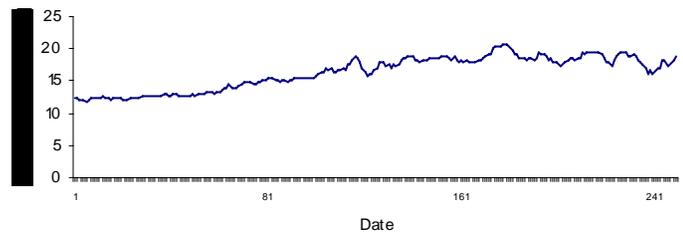
PEÑALES.*



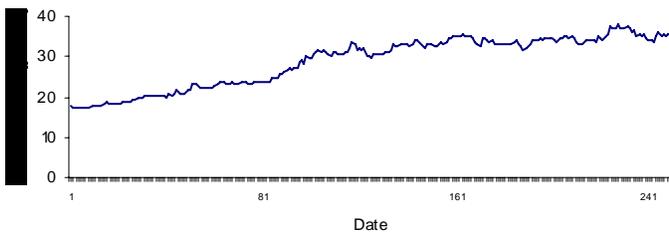
PINFRA.*



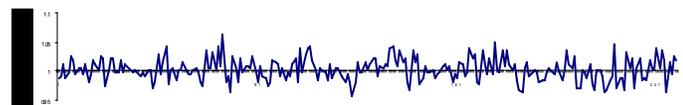
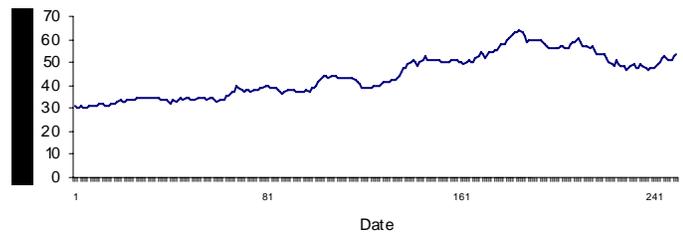
SARE.B



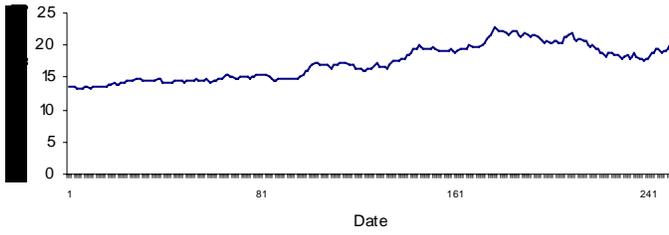
SORIANA.B



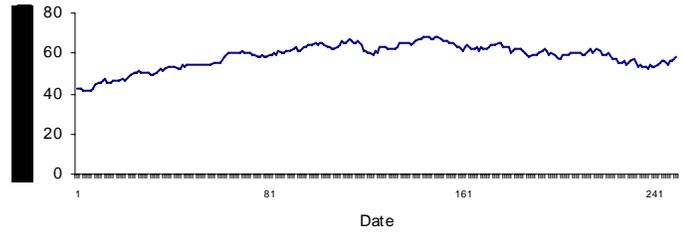
TELECOM.A1



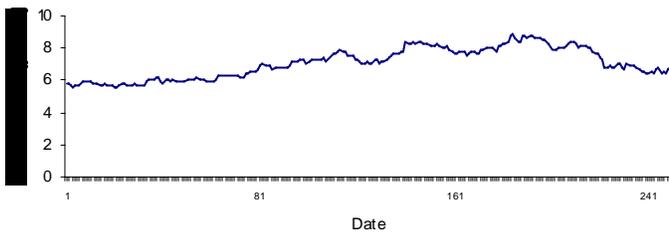
TELMEX.L



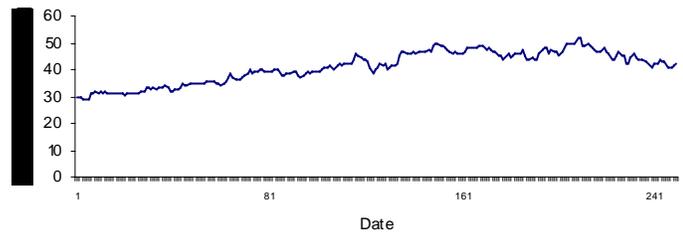
TLEVISA.CPO



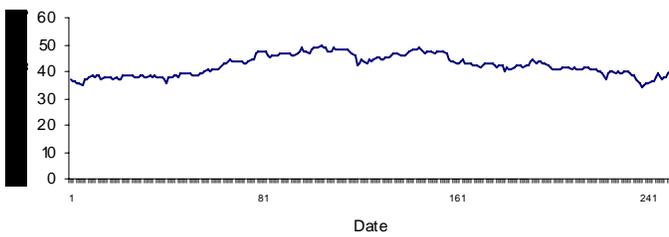
TVAZTECA.CPO



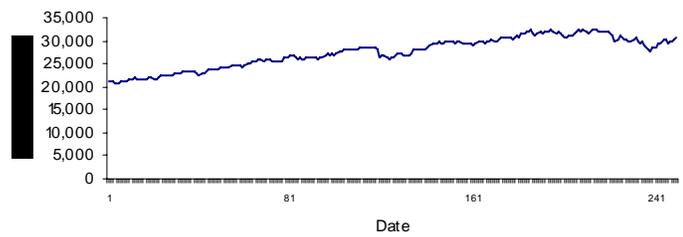
URBI.*



WALMEX.V



IPyC



En un mercado en donde las tasas de rendimiento varían de manera conjunta -es decir, con alta covarianza entre las series de las emisoras- los efectos de la diversificación se desvanecen e incluso pueden no existir (la demostración de la anterior afirmación se encuentra desarrollada en el capítulo VI).

Es por ello que un paso fundamental que debe darse antes de considerar la implantación del CAPM con portafolios en lugar de emisoras o controladoras individuales, consiste en la construcción de la matriz de varianzas y covarianzas entre las series de rendimientos, a fin de identificar la posible presencia de colinealidad o multicolinealidad entre los títulos.

Así pues, a continuación se presenta el listado que corresponde a la matriz de varianzas y covarianzas para las 35 empresas de la muestra seleccionada

Naturalmente, se trata de una matriz simétrica de dimensiones 35 X 35 cuyas entradas en la diagonal representan la varianza del rendimiento porcentual de cada uno de las emisoras.

Matriz de varianzas y covarianzas	ALFA.A	AMX.L	ARA.*	ARCA.*	BIMBO.A	CEMEX.CPO	CICSA.B-1	COMERCI.UBC	ELEKTRA.*	FEMSA.UBD	GAP.B	GCARSO.A-1
ALFA.A	2.6E-04	1.1E-04	1.5E-04	4.4E-05	1.3E-04	9.8E-05	1.2E-04	1.3E-04	6.7E-05	1.0E-04	8.2E-05	1.3E-04
AMX.L	1.1E-04	2.9E-04	1.7E-04	5.0E-05	1.2E-04	1.6E-04	1.5E-04	1.6E-04	6.4E-05	1.6E-04	1.1E-04	1.6E-04
ARA.*	1.5E-04	1.7E-04	3.5E-04	4.1E-05	1.0E-04	1.4E-04	1.5E-04	1.6E-04	8.6E-05	1.5E-04	1.1E-04	1.4E-04
ARCA.*	4.4E-05	5.0E-05	4.1E-05	1.4E-04	5.3E-05	4.4E-05	7.2E-05	5.5E-05	1.2E-05	4.6E-05	1.7E-05	6.0E-05
BIMBO.A	1.3E-04	1.2E-04	1.0E-04	5.3E-05	2.6E-04	8.5E-05	1.1E-04	1.1E-04	7.0E-05	1.1E-04	6.7E-05	1.4E-04
CEMEX.CPO	9.8E-05	1.6E-04	1.4E-04	4.4E-05	8.5E-05	2.7E-04	1.4E-04	1.4E-04	6.4E-05	1.4E-04	1.0E-04	1.1E-04
CICSA.B-1	1.2E-04	1.5E-04	1.5E-04	7.2E-05	1.1E-04	1.4E-04	4.6E-04	1.8E-04	6.0E-05	1.3E-04	1.3E-04	1.8E-04
COMERCI.UBC	1.3E-04	1.6E-04	1.6E-04	5.5E-05	1.1E-04	1.4E-04	1.8E-04	4.0E-04	7.7E-05	1.6E-04	1.0E-04	1.5E-04
ELEKTRA.*	6.7E-05	6.4E-05	8.6E-05	1.2E-05	7.0E-05	6.4E-05	6.0E-05	7.7E-05	2.8E-04	4.1E-05	5.7E-05	7.3E-05
FEMSA.UBD	1.0E-04	1.6E-04	1.5E-04	4.6E-05	1.1E-04	1.4E-04	1.3E-04	1.6E-04	4.1E-05	2.7E-04	1.2E-04	1.4E-04
GAP.B	8.2E-05	1.1E-04	1.1E-04	1.7E-05	6.7E-05	1.0E-04	1.3E-04	1.0E-04	5.7E-05	1.2E-04	3.6E-04	9.7E-05
GCARSO.A-1	1.3E-04	1.6E-04	1.4E-04	6.0E-05	1.4E-04	1.1E-04	1.8E-04	1.5E-04	7.3E-05	1.4E-04	9.7E-05	3.7E-04
GEO.B	1.4E-04	1.6E-04	2.3E-04	3.9E-05	1.0E-04	1.6E-04	1.8E-04	1.6E-04	6.7E-05	1.7E-04	1.6E-04	1.2E-04
GFAMSA.A	5.1E-05	3.5E-05	3.5E-05	5.3E-05	4.2E-05	1.6E-05	7.3E-05	7.5E-06	2.3E-05	1.5E-05	4.2E-05	4.7E-05
GFINBUR.O	5.4E-05	3.3E-05	3.8E-05	4.0E-05	4.2E-05	3.2E-05	3.6E-05	4.3E-05	3.3E-05	4.6E-05	5.4E-06	8.8E-05
GFNORTE.O	1.4E-04	1.8E-04	1.9E-04	5.4E-05	1.2E-04	1.4E-04	1.6E-04	1.8E-04	7.8E-05	1.7E-04	1.2E-04	1.6E-04
GMEXICO.B	1.2E-04	1.6E-04	1.7E-04	5.1E-05	9.3E-05	1.6E-04	2.0E-04	1.6E-04	9.9E-05	1.8E-04	1.8E-04	1.4E-04
GMODELO.C	9.3E-05	1.2E-04	1.1E-04	6.4E-05	1.0E-04	1.1E-04	1.3E-04	1.1E-04	5.0E-05	1.4E-04	8.4E-05	1.2E-04
GRUMA.B	7.3E-05	6.9E-05	8.7E-05	3.8E-05	5.9E-05	6.5E-05	9.5E-05	6.8E-05	3.5E-05	8.5E-05	6.6E-05	9.7E-05
HOMEX.*	1.2E-04	1.7E-04	1.8E-04	5.4E-05	1.1E-04	1.6E-04	1.7E-04	1.7E-04	6.4E-05	1.7E-04	1.7E-04	1.5E-04
ICA.*	1.3E-04	1.6E-04	1.5E-04	5.8E-05	9.1E-05	1.4E-04	2.2E-04	1.6E-04	6.1E-05	1.5E-04	1.3E-04	1.2E-04
ICH.B	1.2E-04	1.2E-04	1.2E-04	4.6E-05	6.5E-05	9.3E-05	1.1E-04	1.4E-04	5.9E-05	1.0E-04	9.7E-05	1.0E-04
IDEAL.B-1	1.1E-04	9.8E-05	1.3E-04	7.0E-05	1.0E-04	1.0E-04	2.5E-04	1.1E-04	8.1E-05	9.9E-05	9.0E-05	1.2E-04
KIMBER.A	7.7E-05	8.8E-05	9.4E-05	4.6E-05	8.2E-05	9.0E-05	8.5E-05	1.1E-04	3.4E-05	9.2E-05	7.4E-05	1.1E-04
OMA.B	5.0E-05	3.0E-05	4.2E-05	4.5E-07	1.5E-05	2.8E-05	-7.2E-07	1.2E-05	5.6E-06	1.5E-05	3.3E-05	2.4E-06
PEÑOLES.*	1.0E-04	1.2E-04	1.2E-04	5.3E-05	8.8E-05	1.1E-04	1.6E-04	1.4E-04	5.1E-05	9.9E-05	9.1E-05	1.3E-04
PINFRA.*	1.4E-04	1.4E-04	1.1E-04	7.2E-05	9.5E-05	1.2E-04	2.1E-04	1.8E-04	6.1E-05	1.3E-04	1.0E-04	1.4E-04
SARE.B	1.1E-04	1.0E-04	1.4E-04	3.4E-05	7.7E-05	1.1E-04	1.7E-04	1.5E-04	5.5E-05	1.0E-04	9.9E-05	8.4E-05
SORIANA.B	1.0E-04	1.1E-04	1.1E-04	4.6E-05	9.8E-05	9.0E-05	1.1E-04	1.4E-04	5.0E-05	1.2E-04	8.0E-05	1.2E-04
TELECOM.A1	1.2E-04	1.5E-04	1.3E-04	5.9E-05	1.1E-04	1.2E-04	1.1E-04	1.4E-04	6.6E-05	1.3E-04	9.0E-05	1.6E-04
TELMEX.L	7.7E-05	1.5E-04	1.1E-04	3.5E-05	6.5E-05	1.2E-04	7.8E-05	1.1E-04	4.7E-05	1.2E-04	1.0E-04	8.3E-05
TLEVISA.CPO	8.9E-05	1.4E-04	1.3E-04	3.4E-05	8.7E-05	1.2E-04	9.7E-05	1.3E-04	6.1E-05	1.4E-04	9.9E-05	1.2E-04
TVAZTECA.CPO	1.5E-04	1.6E-04	1.6E-04	5.9E-05	1.4E-04	1.4E-04	1.6E-04	1.5E-04	8.2E-05	1.3E-04	1.0E-04	1.5E-04
URBI.*	1.5E-04	1.7E-04	2.0E-04	4.7E-05	1.4E-04	1.7E-04	2.1E-04	1.7E-04	8.5E-05	1.6E-04	1.5E-04	1.7E-04
WALMEX.V	1.4E-04	1.7E-04	1.8E-04	6.2E-05	1.2E-04	1.3E-04	1.5E-04	1.8E-04	8.8E-05	1.6E-04	1.0E-04	1.5E-04

Matriz de varianzas y covarianzas	GEO.B	GFAMSA.A	GFINBUR.O	GFNORTE.O	GMEXICO.B	GMODELO.C	GRUMA.B	HOMEX.*	ICA.*	ICH.B	IDEAL.B-1	KIMBER.A
ALFA.A	1.4E-04	5.1E-05	5.4E-05	1.4E-04	1.2E-04	9.3E-05	7.3E-05	1.2E-04	1.3E-04	1.2E-04	1.1E-04	7.7E-05
AMXL	1.6E-04	3.5E-05	3.3E-05	1.8E-04	1.6E-04	1.2E-04	6.9E-05	1.7E-04	1.6E-04	1.2E-04	9.8E-05	8.8E-05
ARA.*	2.3E-04	3.5E-05	3.8E-05	1.9E-04	1.7E-04	1.1E-04	8.7E-05	1.8E-04	1.5E-04	1.2E-04	1.3E-04	9.4E-05
ARCA.*	3.9E-05	5.3E-05	4.0E-05	5.4E-05	5.1E-05	6.4E-05	3.8E-05	5.4E-05	5.8E-05	4.6E-05	7.0E-05	4.6E-05
BIMBO.A	1.0E-04	4.2E-05	4.2E-05	1.2E-04	9.3E-05	1.0E-04	5.9E-05	1.1E-04	9.1E-05	6.5E-05	1.0E-04	8.2E-05
CEMEX.CPO	1.6E-04	1.6E-05	3.2E-05	1.4E-04	1.6E-04	1.1E-04	6.5E-05	1.6E-04	1.4E-04	9.3E-05	1.0E-04	9.0E-05
CICSA.B-1	1.8E-04	7.3E-05	3.6E-05	1.6E-04	2.0E-04	1.3E-04	9.5E-05	1.7E-04	2.2E-04	1.1E-04	2.5E-04	8.5E-05
COMERCI.UBC	1.6E-04	7.5E-06	4.3E-05	1.8E-04	1.6E-04	1.1E-04	6.8E-05	1.7E-04	1.6E-04	1.4E-04	1.1E-04	1.1E-04
ELEKTRA.*	6.7E-05	2.3E-05	3.3E-05	7.8E-05	9.9E-05	5.0E-05	3.5E-05	6.4E-05	6.1E-05	5.9E-05	8.1E-05	3.4E-05
FEMSA.UBD	1.7E-04	1.5E-05	4.6E-05	1.7E-04	1.8E-04	1.4E-04	8.5E-05	1.7E-04	1.5E-04	1.0E-04	9.9E-05	9.2E-05
GAP.B	1.6E-04	4.2E-05	5.4E-06	1.2E-04	1.8E-04	8.4E-05	6.6E-05	1.7E-04	1.3E-04	9.7E-05	9.0E-05	7.4E-05
GCARSO.A-1	1.2E-04	4.7E-05	8.8E-05	1.6E-04	1.4E-04	1.2E-04	9.7E-05	1.5E-04	1.2E-04	1.0E-04	1.2E-04	1.1E-04
GEO.B	4.0E-04	5.3E-05	5.2E-05	2.0E-04	1.9E-04	1.5E-04	8.5E-05	2.1E-04	1.6E-04	1.2E-04	1.5E-04	9.0E-05
GFAMSA.A	5.3E-05	4.9E-04	3.1E-06	7.0E-05	4.7E-05	4.9E-05	2.9E-05	3.6E-05	2.3E-05	6.3E-05	5.1E-05	3.2E-05
GFINBUR.O	5.2E-05	3.1E-06	2.5E-04	6.7E-05	5.9E-05	6.1E-05	5.4E-05	-7.5E-07	6.2E-05	4.1E-05	7.6E-05	3.2E-05
GFNORTE.O	2.0E-04	7.0E-05	6.7E-05	3.9E-04	1.9E-04	1.4E-04	7.7E-05	1.8E-04	1.4E-04	1.2E-04	1.1E-04	1.1E-04
GMEXICO.B	1.9E-04	4.7E-05	5.9E-05	1.9E-04	4.7E-04	1.6E-04	1.3E-04	1.9E-04	2.1E-04	1.9E-04	1.5E-04	8.2E-05
GMODELO.C	1.5E-04	4.9E-05	6.1E-05	1.4E-04	1.6E-04	2.5E-04	7.1E-05	1.3E-04	1.2E-04	1.0E-04	1.1E-04	7.6E-05
GRUMA.B	8.5E-05	2.9E-05	5.4E-05	7.7E-05	1.3E-04	7.1E-05	2.3E-04	6.6E-05	9.6E-05	7.0E-05	8.8E-05	4.8E-05
HOMEX.*	2.1E-04	3.6E-05	-7.5E-07	1.8E-04	1.9E-04	1.3E-04	6.6E-05	3.5E-04	1.4E-04	1.3E-04	1.2E-04	9.8E-05
ICA.*	1.6E-04	2.3E-05	6.2E-05	1.4E-04	2.1E-04	1.2E-04	9.6E-05	1.4E-04	3.9E-04	1.3E-04	1.8E-04	8.0E-05
ICH.B	1.2E-04	6.3E-05	4.1E-05	1.2E-04	1.9E-04	1.0E-04	7.0E-05	1.3E-04	1.3E-04	3.0E-04	1.1E-04	5.9E-05
IDEAL.B-1	1.5E-04	5.1E-05	7.6E-05	1.1E-04	1.5E-04	1.1E-04	8.8E-05	1.2E-04	1.8E-04	1.1E-04	3.8E-04	4.0E-05
KIMBER.A	9.0E-05	3.2E-05	3.2E-05	1.1E-04	8.2E-05	7.6E-05	4.8E-05	9.8E-05	8.0E-05	5.9E-05	4.0E-05	2.5E-04
OMA.B	3.2E-05	7.3E-05	-4.3E-06	1.3E-05	4.3E-05	1.7E-06	1.3E-05	3.8E-05	2.3E-05	4.9E-05	4.0E-05	2.9E-06
PEÑALES.*	1.2E-04	2.0E-05	3.8E-05	1.2E-04	1.7E-04	9.8E-05	7.7E-05	1.1E-04	1.4E-04	1.0E-04	1.1E-04	8.0E-05
PINFRA.*	1.4E-04	6.2E-05	6.8E-05	1.4E-04	2.0E-04	1.2E-04	8.0E-05	1.3E-04	2.0E-04	1.3E-04	2.0E-04	6.1E-05
SARE.B	1.7E-04	3.7E-05	3.4E-06	1.3E-04	1.3E-04	7.2E-05	3.5E-05	1.5E-04	1.4E-04	1.4E-04	1.4E-04	5.3E-05
SORIANA.B	1.3E-04	2.2E-05	5.6E-05	1.3E-04	1.1E-04	1.2E-04	6.5E-05	1.0E-04	1.1E-04	9.9E-05	9.0E-05	1.0E-04
TELECOM.A1	1.2E-04	4.0E-05	4.2E-05	1.3E-04	1.3E-04	9.9E-05	7.0E-05	1.3E-04	1.3E-04	9.4E-05	9.1E-05	1.0E-04
TELMEX.L	1.3E-04	1.6E-05	1.8E-05	1.3E-04	1.0E-04	7.4E-05	4.0E-05	1.3E-04	7.5E-05	7.0E-05	6.0E-05	7.8E-05
TLEVISA.CPO	1.2E-04	4.4E-05	2.5E-05	1.2E-04	1.5E-04	9.9E-05	7.3E-05	1.4E-04	8.9E-05	1.2E-04	6.0E-05	8.6E-05
TVAZTECA.CPO	1.5E-04	5.7E-05	4.3E-05	1.5E-04	1.4E-04	1.2E-04	6.9E-05	1.5E-04	1.3E-04	1.1E-04	1.3E-04	9.4E-05
URBI.*	2.1E-04	7.0E-05	4.0E-05	2.1E-04	2.2E-04	1.4E-04	9.7E-05	1.9E-04	1.7E-04	1.3E-04	1.7E-04	1.2E-04
WALMEX.V	1.7E-04	1.7E-05	6.2E-05	1.9E-04	1.8E-04	1.2E-04	7.0E-05	1.6E-04	1.7E-04	1.3E-04	1.3E-04	9.1E-05

Matriz de varianzas y covarianzas	OMA.B	PEÑOLES.*	PINFRA.*	SARE.B	SORIANA.B	TELECOM.A1	TELMEX.L	TLEVISA.CPO	TVAZTECA.CPO	URBI.*	WALMEX.V
ALFA.A	5.0E-05	1.0E-04	1.4E-04	1.1E-04	1.0E-04	1.2E-04	7.7E-05	8.9E-05	1.5E-04	1.5E-04	1.4E-04
AMX.L	3.0E-05	1.2E-04	1.4E-04	1.0E-04	1.1E-04	1.5E-04	1.5E-04	1.4E-04	1.6E-04	1.7E-04	1.7E-04
ARA.*	4.2E-05	1.2E-04	1.1E-04	1.4E-04	1.1E-04	1.3E-04	1.1E-04	1.3E-04	1.6E-04	2.0E-04	1.8E-04
ARCA.*	4.5E-07	5.3E-05	7.2E-05	3.4E-05	4.6E-05	5.9E-05	3.5E-05	3.4E-05	5.9E-05	4.7E-05	6.2E-05
BIMBO.A	1.5E-05	8.8E-05	9.5E-05	7.7E-05	9.8E-05	1.1E-04	6.5E-05	8.7E-05	1.4E-04	1.4E-04	1.2E-04
CEMEX.CPO	2.8E-05	1.1E-04	1.2E-04	1.1E-04	9.0E-05	1.2E-04	1.2E-04	1.2E-04	1.4E-04	1.7E-04	1.3E-04
CICSA.B-1	-7.2E-07	1.6E-04	2.1E-04	1.7E-04	1.1E-04	1.1E-04	7.8E-05	9.7E-05	1.6E-04	2.1E-04	1.5E-04
COMERCI.UBC	1.2E-05	1.4E-04	1.8E-04	1.5E-04	1.4E-04	1.4E-04	1.1E-04	1.3E-04	1.5E-04	1.7E-04	1.8E-04
ELEKTRA.*	5.6E-06	5.1E-05	6.1E-05	5.5E-05	5.0E-05	6.6E-05	4.7E-05	6.1E-05	8.2E-05	8.5E-05	8.8E-05
FEMSA.UBD	1.5E-05	9.9E-05	1.3E-04	1.0E-04	1.2E-04	1.3E-04	1.2E-04	1.4E-04	1.3E-04	1.6E-04	1.6E-04
GAP.B	3.3E-05	9.1E-05	1.0E-04	9.9E-05	8.0E-05	9.0E-05	1.0E-04	9.9E-05	1.0E-04	1.5E-04	1.0E-04
GCARSO.A-1	2.4E-06	1.3E-04	1.4E-04	8.4E-05	1.2E-04	1.6E-04	8.3E-05	1.2E-04	1.5E-04	1.7E-04	1.5E-04
GEO.B	3.2E-05	1.2E-04	1.4E-04	1.7E-04	1.3E-04	1.2E-04	1.3E-04	1.2E-04	1.5E-04	2.1E-04	1.7E-04
GFAMSA.A	7.3E-05	2.0E-05	6.2E-05	3.7E-05	2.2E-05	4.0E-05	1.6E-05	4.4E-05	5.7E-05	7.0E-05	1.7E-05
GFINBUR.O	-4.3E-06	3.8E-05	6.8E-05	3.4E-06	5.6E-05	4.2E-05	1.8E-05	2.5E-05	4.3E-05	4.0E-05	6.2E-05
GFNORTE.O	1.3E-05	1.2E-04	1.4E-04	1.3E-04	1.3E-04	1.3E-04	1.3E-04	1.2E-04	1.5E-04	2.1E-04	1.9E-04
GMEXICO.B	4.3E-05	1.7E-04	2.0E-04	1.3E-04	1.1E-04	1.3E-04	1.0E-04	1.5E-04	1.4E-04	2.2E-04	1.8E-04
GMODELO.C	1.7E-06	9.8E-05	1.2E-04	7.2E-05	1.2E-04	9.9E-05	7.4E-05	9.9E-05	1.2E-04	1.4E-04	1.2E-04
GRUMA.B	1.3E-05	7.7E-05	8.0E-05	3.5E-05	6.5E-05	7.0E-05	4.0E-05	7.3E-05	6.9E-05	9.7E-05	7.0E-05
HOMEX.*	3.8E-05	1.1E-04	1.3E-04	1.5E-04	1.0E-04	1.3E-04	1.3E-04	1.4E-04	1.5E-04	1.9E-04	1.6E-04
ICA.*	2.3E-05	1.4E-04	2.0E-04	1.4E-04	1.1E-04	1.3E-04	7.5E-05	8.9E-05	1.3E-04	1.7E-04	1.7E-04
ICH.B	4.9E-05	1.0E-04	1.3E-04	1.4E-04	9.9E-05	9.4E-05	7.0E-05	1.2E-04	1.1E-04	1.3E-04	1.3E-04
IDEAL.B-1	4.0E-05	1.1E-04	2.0E-04	1.4E-04	9.0E-05	9.1E-05	6.0E-05	6.0E-05	1.3E-04	1.7E-04	1.3E-04
KIMBER.A	2.9E-06	8.0E-05	6.1E-05	5.3E-05	1.0E-04	1.0E-04	7.8E-05	8.6E-05	9.4E-05	1.2E-04	9.1E-05
OMA.B	2.5E-04	2.5E-05	1.4E-05	5.7E-05	-2.2E-05	1.9E-05	2.4E-05	2.1E-05	3.2E-05	2.8E-05	3.4E-05
PEÑOLES.*	2.5E-05	3.5E-04	1.1E-04	1.3E-04	9.5E-05	9.7E-05	7.1E-05	1.0E-04	1.3E-04	1.3E-04	1.1E-04
PINFRA.*	1.4E-05	1.1E-04	4.9E-04	1.2E-04	8.1E-05	1.5E-04	1.0E-04	7.8E-05	1.6E-04	1.6E-04	1.7E-04
SARE.B	5.7E-05	1.3E-04	1.2E-04	3.9E-04	8.3E-05	9.9E-05	8.1E-05	8.9E-05	1.4E-04	1.5E-04	1.3E-04
SORIANA.B	-2.2E-05	9.5E-05	8.1E-05	8.3E-05	3.4E-04	1.2E-04	6.2E-05	1.1E-04	8.9E-05	1.4E-04	1.2E-04
TELECOM.A1	1.9E-05	9.7E-05	1.5E-04	9.9E-05	1.2E-04	3.5E-04	1.9E-04	9.2E-05	1.5E-04	1.5E-04	1.3E-04
TELMEX.L	2.4E-05	7.1E-05	1.0E-04	8.1E-05	6.2E-05	1.9E-04	2.4E-04	8.6E-05	1.1E-04	1.2E-04	9.8E-05
TLEVISA.CPO	2.1E-05	1.0E-04	7.8E-05	8.9E-05	1.1E-04	9.2E-05	8.6E-05	2.4E-04	1.1E-04	1.4E-04	1.4E-04
TVAZTECA.CPO	3.2E-05	1.3E-04	1.6E-04	1.4E-04	8.9E-05	1.5E-04	1.1E-04	1.1E-04	3.2E-04	1.6E-04	1.6E-04
URBI.*	2.8E-05	1.3E-04	1.6E-04	1.5E-04	1.4E-04	1.5E-04	1.2E-04	1.4E-04	1.6E-04	4.5E-04	1.6E-04
WALMEX.V	3.4E-05	1.1E-04	1.7E-04	1.3E-04	1.2E-04	1.3E-04	9.8E-05	1.4E-04	1.6E-04	1.6E-04	2.9E-04

Existen dos aspectos de esta matriz importantes de destacar: el primero, se refiere a los valores absolutos que alcanzan las covarianzas entre los rendimientos de las emisoras. Como puede apreciarse, corresponden a cifras bajas con respecto a la traza de la matriz. El hecho que esto representa, es más evidente aún si se revisa el listado siguiente, en donde aparece la matriz de correlaciones entre las series de rendimiento. En esta segunda matriz, las unidades de dispersión se encuentran normalizadas de acuerdo con la fórmula del coeficiente de correlación.

Obsérvese que la gran mayoría (70%), de las más de mil doscientas entradas de la matriz de correlaciones toma valores menores a 0.4, lo que significa que -en general- los rendimientos de los títulos no varían de manera conjunta. Este mismo hecho se deriva del análisis de la matriz de varianzas y covarianzas, aunque la presencia de unidades de medida hace menos clara su interpretación.

Matriz de Correlación	ALFA.A	AMX.L	ARA.*	ARCA.*	BIMBO.A	CEMEX. CPO	CICSA B-1	COMERCI. UBC	ELEKTRA.*	FEMSA .UBD	GAP.B	GCARSO. A-1
ALFA.A	1.00	0.42	0.50	0.23	0.49	0.37	0.35	0.42	0.25	0.39	0.27	0.42
AMX.L	0.42	1.00	0.52	0.25	0.44	0.58	0.42	0.48	0.22	0.58	0.35	0.49
ARA.*	0.50	0.52	1.00	0.18	0.34	0.44	0.37	0.44	0.27	0.48	0.31	0.38
ARCA.*	0.23	0.25	0.18	1.00	0.27	0.22	0.28	0.23	0.06	0.23	0.08	0.26
BIMBO.A	0.49	0.44	0.34	0.27	1.00	0.32	0.33	0.35	0.26	0.40	0.22	0.46
CEMEX.CPO	0.37	0.58	0.44	0.22	0.32	1.00	0.41	0.42	0.23	0.54	0.34	0.36
CICSA.B-1	0.35	0.42	0.37	0.28	0.33	0.41	1.00	0.43	0.17	0.36	0.32	0.45
COMERCI.UBC	0.42	0.48	0.44	0.23	0.35	0.42	0.43	1.00	0.23	0.47	0.28	0.38
ELEKTRA.*	0.25	0.22	0.27	0.06	0.26	0.23	0.17	0.23	1.00	0.15	0.18	0.22
FEMSA.UBD	0.39	0.58	0.48	0.23	0.40	0.54	0.36	0.47	0.15	1.00	0.40	0.43
GAP.B	0.27	0.35	0.31	0.08	0.22	0.34	0.32	0.28	0.18	0.40	1.00	0.26
GCARSO.A-1	0.42	0.49	0.38	0.26	0.46	0.36	0.45	0.38	0.22	0.43	0.26	1.00
GEO.B	0.44	0.48	0.60	0.16	0.31	0.48	0.41	0.40	0.20	0.53	0.42	0.31
GFAMSA.A	0.14	0.09	0.09	0.20	0.12	0.04	0.15	0.02	0.06	0.04	0.10	0.11
GFINBUR.O	0.21	0.12	0.13	0.21	0.16	0.12	0.10	0.13	0.12	0.18	0.02	0.29
GFNORTE.O	0.44	0.53	0.51	0.23	0.36	0.42	0.38	0.45	0.24	0.53	0.32	0.41
GMEXICO.B	0.36	0.44	0.42	0.20	0.26	0.44	0.44	0.37	0.27	0.50	0.43	0.33
GMODELO.C	0.37	0.46	0.37	0.34	0.41	0.43	0.38	0.35	0.19	0.55	0.28	0.38
GRUMA.B	0.30	0.27	0.31	0.21	0.24	0.26	0.29	0.22	0.14	0.34	0.23	0.33
HOMEX.*	0.40	0.55	0.53	0.24	0.36	0.54	0.43	0.45	0.20	0.56	0.48	0.41
ICA.*	0.40	0.47	0.41	0.24	0.29	0.42	0.51	0.41	0.18	0.46	0.34	0.32
ICH.B	0.43	0.42	0.37	0.22	0.23	0.33	0.29	0.41	0.20	0.35	0.29	0.30
IDEAL.B-1	0.36	0.30	0.36	0.30	0.33	0.32	0.60	0.28	0.24	0.31	0.24	0.31
KIMBER.A	0.31	0.33	0.32	0.24	0.32	0.35	0.25	0.36	0.13	0.36	0.25	0.35
OMA.B	0.20	0.11	0.14	0.00	0.06	0.11	0.00	0.04	0.02	0.06	0.11	0.01
PEÑOLES.*	0.35	0.37	0.36	0.24	0.29	0.35	0.40	0.38	0.16	0.32	0.26	0.35
PINFRA.*	0.39	0.36	0.27	0.27	0.26	0.33	0.44	0.40	0.16	0.35	0.24	0.32
SARE.B	0.35	0.31	0.38	0.14	0.24	0.34	0.41	0.37	0.16	0.32	0.27	0.22
SORIANA.B	0.35	0.36	0.33	0.21	0.33	0.30	0.27	0.39	0.16	0.39	0.23	0.34
TELECOM.A1	0.39	0.48	0.36	0.27	0.36	0.41	0.27	0.39	0.21	0.44	0.26	0.44
TELMEX.L	0.31	0.55	0.37	0.19	0.26	0.48	0.23	0.36	0.18	0.45	0.36	0.27
TLEVISA.CPO	0.36	0.54	0.44	0.18	0.35	0.47	0.29	0.43	0.24	0.54	0.34	0.40
TVAZTECA.CPO	0.52	0.52	0.47	0.27	0.48	0.46	0.41	0.41	0.27	0.45	0.30	0.44
URBI.*	0.45	0.48	0.52	0.18	0.41	0.48	0.46	0.41	0.24	0.45	0.36	0.43
WALMEX.V	0.52	0.60	0.58	0.30	0.43	0.48	0.41	0.53	0.31	0.57	0.32	0.44

Matriz de Correlación	GEO.B	GFAMSA.A	GFINBUR.O	GFNORTE.O	GMEXICO.B	GMODELO.C	GRUMA.B	HOMEX.*	ICA.*	ICH.B	IDEAL. B-1	KIMBER.A
ALFA.A	0.44	0.14	0.21	0.44	0.36	0.37	0.30	0.40	0.40	0.43	0.36	0.31
AMX.L	0.48	0.09	0.12	0.53	0.44	0.46	0.27	0.55	0.47	0.42	0.30	0.33
ARA.*	0.60	0.09	0.13	0.51	0.42	0.37	0.31	0.53	0.41	0.37	0.36	0.32
ARCA.*	0.16	0.20	0.21	0.23	0.20	0.34	0.21	0.24	0.24	0.22	0.30	0.24
BIMBO.A	0.31	0.12	0.16	0.36	0.26	0.41	0.24	0.36	0.29	0.23	0.33	0.32
CEMEX.CPO	0.48	0.04	0.12	0.42	0.44	0.43	0.26	0.54	0.42	0.33	0.32	0.35
CICSA.B-1	0.41	0.15	0.10	0.38	0.44	0.38	0.29	0.43	0.51	0.29	0.60	0.25
COMERCI.UBC	0.40	0.02	0.13	0.45	0.37	0.35	0.22	0.45	0.41	0.41	0.28	0.36
ELEKTRA.*	0.20	0.06	0.12	0.24	0.27	0.19	0.14	0.20	0.18	0.20	0.24	0.13
FEMSA.UBD	0.53	0.04	0.18	0.53	0.50	0.55	0.34	0.56	0.46	0.35	0.31	0.36
GAP.B	0.42	0.10	0.02	0.32	0.43	0.28	0.23	0.48	0.34	0.29	0.24	0.25
GCARSO.A-1	0.31	0.11	0.29	0.41	0.33	0.38	0.33	0.41	0.32	0.30	0.31	0.35
GEO.B	1.00	0.12	0.16	0.51	0.43	0.47	0.28	0.56	0.40	0.35	0.39	0.29
GFAMSA.A	0.12	1.00	0.01	0.16	0.10	0.14	0.09	0.09	0.05	0.16	0.12	0.09
GFINBUR.O	0.16	0.01	1.00	0.21	0.17	0.24	0.22	0.00	0.20	0.15	0.24	0.13
GFNORTE.O	0.51	0.16	0.21	1.00	0.44	0.46	0.25	0.48	0.35	0.35	0.29	0.34
GMEXICO.B	0.43	0.10	0.17	0.44	1.00	0.46	0.40	0.47	0.50	0.51	0.36	0.24
GMODELO.C	0.47	0.14	0.24	0.46	0.46	1.00	0.30	0.43	0.39	0.38	0.35	0.30
GRUMA.B	0.28	0.09	0.22	0.25	0.40	0.30	1.00	0.23	0.32	0.26	0.29	0.20
HOMEX.*	0.56	0.09	0.00	0.48	0.47	0.43	0.23	1.00	0.39	0.40	0.31	0.33
ICA.*	0.40	0.05	0.20	0.35	0.50	0.39	0.32	0.39	1.00	0.38	0.46	0.26
ICH.B	0.35	0.16	0.15	0.35	0.51	0.38	0.26	0.40	0.38	1.00	0.34	0.22
IDEAL.B-1	0.39	0.12	0.24	0.29	0.36	0.35	0.29	0.31	0.46	0.34	1.00	0.13
KIMBER.A	0.29	0.09	0.13	0.34	0.24	0.30	0.20	0.33	0.26	0.22	0.13	1.00
OMA.B	0.10	0.21	-0.02	0.04	0.13	0.01	0.05	0.13	0.07	0.18	0.13	0.01
PEÑOLES.*	0.32	0.05	0.13	0.33	0.41	0.33	0.27	0.31	0.38	0.31	0.31	0.27
PINFRA.*	0.31	0.12	0.19	0.32	0.41	0.33	0.24	0.32	0.47	0.33	0.45	0.18
SARE.B	0.44	0.08	0.01	0.34	0.30	0.23	0.12	0.42	0.35	0.40	0.37	0.17
SORIANA.B	0.36	0.05	0.19	0.35	0.28	0.43	0.23	0.29	0.31	0.31	0.25	0.35
TELECOM.A1	0.33	0.10	0.14	0.37	0.33	0.34	0.25	0.37	0.34	0.29	0.25	0.35
TELMEX.L	0.43	0.05	0.07	0.43	0.30	0.30	0.17	0.45	0.24	0.26	0.20	0.32
TLEVISA.CPO	0.40	0.13	0.10	0.41	0.45	0.40	0.31	0.47	0.29	0.43	0.20	0.35
TVAZTECA.CPO	0.42	0.14	0.15	0.43	0.36	0.43	0.25	0.45	0.37	0.35	0.36	0.33
URBI.*	0.49	0.15	0.12	0.51	0.48	0.42	0.30	0.47	0.40	0.36	0.40	0.35
WALMEX.V	0.49	0.04	0.23	0.57	0.48	0.44	0.27	0.50	0.49	0.43	0.39	0.34

Matriz de Correlación	OMA.B	PEÑOLES.*	PINFRA.*	SARE.B	SORIANA.B	TELECOM.A1	TELMEX.L	TLEVISA.CPO	TVAZTECA.CPO	URBI.*	WALMEX.V
ALFA.A	0.20	0.35	0.39	0.35	0.35	0.39	0.31	0.36	0.52	0.45	0.52
AMX.L	0.11	0.37	0.36	0.31	0.36	0.48	0.55	0.54	0.52	0.48	0.60
ARA.*	0.14	0.36	0.27	0.38	0.33	0.36	0.37	0.44	0.47	0.52	0.58
ARCA.*	0.00	0.24	0.27	0.14	0.21	0.27	0.19	0.18	0.27	0.18	0.30
BIMBO.A	0.06	0.29	0.26	0.24	0.33	0.36	0.26	0.35	0.48	0.41	0.43
CEMEX.CPO	0.11	0.35	0.33	0.34	0.30	0.41	0.48	0.47	0.46	0.48	0.48
CICSA.B-1	0.00	0.40	0.44	0.41	0.27	0.27	0.23	0.29	0.41	0.46	0.41
COMERCI.UBC	0.04	0.38	0.40	0.37	0.39	0.39	0.36	0.43	0.41	0.41	0.53
ELEKTRA.*	0.02	0.16	0.16	0.16	0.16	0.21	0.18	0.24	0.27	0.24	0.31
FEMSA.UBD	0.06	0.32	0.35	0.32	0.39	0.44	0.45	0.54	0.45	0.45	0.57
GAP.B	0.11	0.26	0.24	0.27	0.23	0.26	0.36	0.34	0.30	0.36	0.32
GCARSO.A-1	0.01	0.35	0.32	0.22	0.34	0.44	0.27	0.40	0.44	0.43	0.44
GEO.B	0.10	0.32	0.31	0.44	0.36	0.33	0.43	0.40	0.42	0.49	0.49
GFAMSA.A	0.21	0.05	0.12	0.08	0.05	0.10	0.05	0.13	0.14	0.15	0.04
GFINBUR.O	-0.02	0.13	0.19	0.01	0.19	0.14	0.07	0.10	0.15	0.12	0.23
GFNORTE.O	0.04	0.33	0.32	0.34	0.35	0.37	0.43	0.41	0.43	0.51	0.57
GMEXICO.B	0.13	0.41	0.41	0.30	0.28	0.33	0.30	0.45	0.36	0.48	0.48
GMODELO.C	0.01	0.33	0.33	0.23	0.43	0.34	0.30	0.40	0.43	0.42	0.44
GRUMA.B	0.05	0.27	0.24	0.12	0.23	0.25	0.17	0.31	0.25	0.30	0.27
HOMEX.*	0.13	0.31	0.32	0.42	0.29	0.37	0.45	0.47	0.45	0.47	0.50
ICA.*	0.07	0.38	0.47	0.35	0.31	0.34	0.24	0.29	0.37	0.40	0.49
ICH.B	0.18	0.31	0.33	0.40	0.31	0.29	0.26	0.43	0.35	0.36	0.43
IDEAL.B-1	0.13	0.31	0.45	0.37	0.25	0.25	0.20	0.20	0.36	0.40	0.39
KIMBER.A	0.01	0.27	0.18	0.17	0.35	0.35	0.32	0.35	0.33	0.35	0.34
OMA.B	1.00	0.09	0.04	0.18	-0.08	0.07	0.10	0.08	0.11	0.08	0.13
PEÑOLES.*	0.09	1.00	0.27	0.36	0.28	0.28	0.24	0.36	0.40	0.34	0.36
PINFRA.*	0.04	0.27	1.00	0.28	0.20	0.36	0.30	0.23	0.39	0.34	0.45
SARE.B	0.18	0.36	0.28	1.00	0.23	0.27	0.26	0.29	0.40	0.36	0.40
SORIANA.B	-0.08	0.28	0.20	0.23	1.00	0.36	0.22	0.39	0.27	0.36	0.38
TELECOM.A1	0.07	0.28	0.36	0.27	0.36	1.00	0.64	0.32	0.44	0.38	0.40
TELMEX.L	0.10	0.24	0.30	0.26	0.22	0.64	1.00	0.35	0.38	0.36	0.37
TLEVISA.CPO	0.08	0.36	0.23	0.29	0.39	0.32	0.35	1.00	0.40	0.44	0.53
TVAZTECA.CPO	0.11	0.40	0.39	0.40	0.27	0.44	0.38	0.40	1.00	0.42	0.51
URBI.*	0.08	0.34	0.34	0.36	0.36	0.38	0.36	0.44	0.42	1.00	0.44
WALMEX.V	0.13	0.36	0.45	0.40	0.38	0.40	0.37	0.53	0.51	0.44	1.00

2. Si bien la matriz de correlaciones nos brinda una información normalizada sumamente útil para interpretar las variaciones conjuntas entre los rendimientos, la matriz de varianzas y covarianzas es aún fundamental para la determinación de un portafolio óptimo. Dos caminos con distintas vertientes son considerados generalmente para este propósito. En el primero, se utiliza un producto de la matriz extendida de varianzas y covarianzas para la aplicación del método de multiplicadores de Lagrange, mismo que permite determinar las componentes del vector \mathbf{x} con las cuales se establece una proporción para cada título dentro del portafolio de frontera.

Como se indicó en el capítulo V, después de la obtención de las ecuaciones normales de maximización de la función objetivo, debe calcularse la inversa del doble producto de la matriz extendida de covarianzas. El resultado de esta operación es nuevamente una matriz cuadrada de dimensiones $(n+1) \times (n+1)$, misma que aparece a continuación.

Matriz Aumentada Inversa/ Multiplicadores de Lagrange	ALFA.A	AMX.L	ARA.*	ARCA.*	BIMBO.A	CEMEX.CPO	CICSA B-1	COMERCI.UBC	ELEKTRA.*	FEMSA.UBD	GAP.B	GCARSO.A-1
ALFA.A	8.0E+03	8.6E+02	-9.4E+02	2.7E+02	-1.7E+03	-5.0E+01	7.5E+01	-1.1E+02	-4.5E+01	4.9E+02	6.8E+01	-3.1E+02
AMX.L	8.6E+02	9.5E+03	-6.1E+02	2.4E+02	-1.0E+03	-1.5E+03	-5.1E+02	-2.6E+01	2.6E+02	-4.8E+02	3.0E+02	-9.6E+02
ARA.*	-9.4E+02	-6.1E+02	6.5E+03	1.4E+02	5.6E+02	2.9E+02	3.4E+02	-3.0E+02	-3.9E+02	4.0E+01	4.6E+02	-1.3E+02
ARCA.*	2.7E+02	2.4E+02	1.4E+02	8.4E+03	-7.2E+02	-2.1E+02	-3.6E+02	2.6E+01	-3.1E+01	1.8E+02	3.1E+02	2.9E+02
BIMBO.A	-1.7E+03	-1.0E+03	5.6E+02	-7.2E+02	6.7E+03	5.4E+02	1.7E+02	-1.7E+02	-6.5E+02	-5.3E+02	-5.4E+00	-7.2E+02
CEMEX.CPO	-5.0E+01	-1.5E+03	2.9E+02	-2.1E+02	5.4E+02	7.4E+03	-3.4E+02	-1.1E+02	-4.2E+02	-7.9E+02	2.1E+02	2.8E+02
CICSA.B-1	7.5E+01	-5.1E+02	3.4E+02	-3.6E+02	1.7E+02	-3.4E+02	5.2E+03	-8.0E+02	3.6E+02	7.2E+02	-1.7E+02	-1.1E+03
COMERCI.UBC	-1.1E+02	-2.6E+01	-3.0E+02	2.6E+01	-1.7E+02	-1.1E+02	-8.0E+02	4.6E+03	-2.5E+02	-5.6E+02	1.6E+02	1.2E+02
ELEKTRA.*	-4.5E+01	2.6E+02	-3.9E+02	-3.1E+01	-6.5E+02	-4.2E+02	3.6E+02	-2.5E+02	4.0E+03	9.2E+02	-3.4E+02	-1.1E+02
FEMSA.UBD	4.9E+02	-4.8E+02	4.0E+01	1.8E+02	-5.3E+02	-7.9E+02	7.2E+02	-5.6E+02	9.2E+02	9.4E+03	-4.0E+02	-3.5E+02
GAP.B	6.8E+01	3.0E+02	4.6E+02	3.1E+02	-5.4E+00	2.1E+02	-1.7E+02	1.6E+02	-3.4E+02	-4.0E+02	4.3E+03	-1.3E+02
GCARSO.A-1	-3.1E+02	-9.6E+02	-1.3E+02	2.9E+02	-7.2E+02	2.8E+02	-1.1E+03	1.2E+02	-1.1E+02	-3.5E+02	-1.3E+02	5.2E+03
GEO.B	-4.9E+02	-1.2E+00	-1.7E+03	8.8E+02	3.0E+02	-3.6E+02	-1.5E+02	1.0E+02	2.9E+02	-5.7E+02	-5.7E+02	4.9E+02
GFAMSA.A	-4.4E+01	3.8E+00	2.5E+01	-1.0E+03	-1.0E+02	2.6E+02	-4.2E+02	3.6E+02	-2.2E+02	2.5E+02	-1.7E+02	3.2E+01
GFINBUR.O	-2.9E+02	5.2E+02	2.2E+02	-1.3E+03	-1.8E+01	-2.4E+02	5.9E+02	2.6E+01	-5.0E+02	-1.7E+02	1.3E+02	-1.1E+03
GFNORTE.O	-4.5E+02	-7.1E+02	-2.7E+02	2.4E+02	2.1E+02	3.8E+02	-8.6E+01	-3.2E+02	-6.0E+01	-7.6E+02	9.8E+01	-2.3E+02
GMEXICO.B	4.5E+02	3.0E+02	-4.0E+01	5.9E+02	3.4E+02	-2.2E+02	-6.0E+02	3.5E+02	-3.9E+02	-6.8E+02	-5.6E+02	3.8E+02
GMODELO.C	2.5E+02	-1.9E+02	5.0E+02	-1.3E+03	-7.8E+02	-4.0E+02	-1.4E+02	3.3E+02	-1.3E+02	-1.7E+03	2.3E+02	6.1E+01
GRUMA.B	-4.0E+02	3.4E+02	-5.2E+02	-9.8E+02	-1.6E+02	-6.3E+01	-2.2E+02	2.0E+02	-2.1E+02	-6.8E+02	-2.9E+02	-4.5E+02
HOMEX.*	2.3E+01	-3.3E+02	-7.7E+02	-8.3E+02	-2.8E+02	-9.2E+02	-2.7E+02	-2.7E+02	7.7E+01	-9.3E+02	-1.0E+03	-7.4E+02
ICA.*	-4.5E+02	-1.2E+03	-3.0E+02	-5.1E+01	3.1E+02	-2.7E+02	-7.9E+02	-1.0E+02	3.0E+01	-7.8E+02	-4.6E+02	5.1E+02
ICH.B	-1.2E+03	-8.8E+02	9.5E+01	-3.6E+02	7.7E+02	4.1E+02	8.6E+02	-7.3E+02	6.6E+01	7.7E+02	-1.0E+02	-1.4E+02
IDEAL.B-1	2.0E+02	6.5E+02	-3.3E+02	-5.7E+02	-5.5E+02	-1.0E+01	-2.1E+03	5.8E+02	-5.5E+02	-1.6E+02	6.6E+01	2.8E+02
KIMBER.A	-1.7E+00	7.7E+02	-2.2E+02	-1.0E+03	-4.9E+02	-5.6E+02	-2.1E+02	-3.9E+02	-3.7E+01	-1.4E+02	-3.4E+02	-3.4E+02
OMA.B	-8.9E+02	-3.0E+02	-2.3E+02	-4.1E+02	-1.4E+02	-3.5E+02	6.6E+02	9.5E+01	-1.3E+02	-1.5E+01	-3.7E+02	2.9E+02
PEÑOLES.*	-2.3E+02	-1.4E+02	-2.7E+02	-5.7E+02	-6.9E+01	-1.5E+02	-3.1E+02	-3.9E+02	8.8E+01	4.7E+02	-1.3E+02	-3.4E+02
PINFRA.*	-5.6E+02	6.5E+01	5.9E+02	-2.8E+02	2.5E+02	2.3E+01	-2.4E+02	-6.1E+02	1.4E+02	4.2E+01	3.1E+01	-1.0E+02
SARE.B	8.3E+01	8.4E+02	5.6E+01	-8.7E+01	-8.8E+01	-1.7E+02	-7.0E+02	-2.0E+02	-1.5E+02	-1.3E+02	1.5E+01	3.6E+02
SORIANA.B	-4.8E+02	-2.5E+02	2.7E+01	-2.6E+02	-2.3E+02	1.0E+02	9.6E+01	-5.2E+02	-1.0E+02	-2.0E+02	-2.4E+02	4.6E+01
TELECOM.A1	-2.6E+02	1.5E+02	-6.6E+01	-1.9E+02	-2.3E+02	1.1E+01	5.6E+02	-2.1E+02	-1.6E+01	-3.9E+02	4.3E+02	-1.3E+03
TELMEX.L	4.4E+01	-2.4E+03	3.1E+01	-8.5E+02	4.1E+02	-9.9E+02	1.0E+02	-8.3E+01	-4.8E+02	-5.5E+02	-1.1E+03	1.2E+03
TLEVISA.CPO	2.6E+02	-1.1E+03	-1.1E+02	1.0E+02	-1.3E+02	-6.3E+02	1.6E+02	-2.9E+02	-4.6E+02	-1.6E+03	-2.0E+02	-3.1E+02
TVAZTECA.CPO	-1.2E+03	-7.8E+02	-4.8E+02	5.0E+00	-8.1E+02	-5.5E+02	-1.5E+02	7.9E+01	-2.4E+02	-1.6E+02	-1.1E+02	-2.5E+02
URBI.*	-3.3E+02	-1.5E+01	-8.2E+02	5.5E+02	-6.1E+02	-6.8E+02	-3.0E+02	-6.4E+01	1.2E+02	3.1E+02	-1.8E+02	-3.4E+02
WALMEX.V	-7.2E+02	-1.3E+03	-1.4E+03	-8.2E+02	-3.7E+02	5.6E+01	1.3E+02	-5.9E+02	-4.8E+02	-9.2E+02	1.2E+02	-1.1E+02
λ	-4.9E-03	-1.9E-02	1.6E-02	2.3E-01	4.8E-02	2.0E-02	3.1E-02	-2.0E-02	1.3E-01	3.9E-02	5.6E-02	-3.0E-02

Matriz Aumentada Inversa/ Multiplicadores de Lagrange	GEO.B	GFAMSA.A	GFINBUR.O	GFNORTE.O	GMEXICO .B	GMODELO .C	GRUMA.B	HOMEX.*	ICA.*	ICH.B	IDEAL. B-1	KIMBER.A
ALFA.A	-4.9E+02	-4.4E+01	-2.9E+02	-4.5E+02	4.5E+02	2.5E+02	-4.0E+02	2.3E+01	-4.5E+02	-1.2E+03	2.0E+02	-1.7E+00
AMX.L	-1.2E+00	3.8E+00	5.2E+02	-7.1E+02	3.0E+02	-1.9E+02	3.4E+02	-3.3E+02	-1.2E+03	-8.8E+02	6.5E+02	7.7E+02
ARA.*	-1.7E+03	2.5E+01	2.2E+02	-2.7E+02	-4.0E+01	5.0E+02	-5.2E+02	-7.7E+02	-3.0E+02	9.5E+01	-3.3E+02	-2.2E+02
ARCA.*	8.8E+02	-1.0E+03	-1.3E+03	2.4E+02	5.9E+02	-1.3E+03	-9.8E+02	-8.3E+02	-5.1E+01	-3.6E+02	-5.7E+02	-1.0E+03
BIMBO.A	3.0E+02	-1.0E+02	-1.8E+01	2.1E+02	3.4E+02	-7.8E+02	-1.6E+02	-2.8E+02	3.1E+02	7.7E+02	-5.5E+02	-4.9E+02
CEMEX.CPO	-3.6E+02	2.6E+02	-2.4E+02	3.8E+02	-2.2E+02	-4.0E+02	-6.3E+01	-9.2E+02	-2.7E+02	4.1E+02	-1.0E+01	-5.6E+02
CICSA.B-1	-1.5E+02	-4.2E+02	5.9E+02	-8.6E+01	-6.0E+02	-1.4E+02	-2.2E+02	-2.7E+02	-7.9E+02	8.6E+02	-2.1E+03	-2.1E+02
COMERCI.UBC	1.0E+02	3.6E+02	2.6E+01	-3.2E+02	3.5E+02	3.3E+02	2.0E+02	-2.7E+02	-1.0E+02	-7.3E+02	5.8E+02	-3.9E+02
ELEKTRA.*	2.9E+02	-2.2E+02	-5.0E+02	-6.0E+01	-3.9E+02	-1.3E+02	-2.1E+02	7.7E+01	3.0E+01	6.6E+01	-5.5E+02	-3.7E+01
FEMSA.UBD	-5.7E+02	2.5E+02	-1.7E+02	-7.6E+02	-6.8E+02	-1.7E+03	-6.8E+02	-9.3E+02	-7.8E+02	7.7E+02	-1.6E+02	-1.4E+02
GAP.B	-5.7E+02	-1.7E+02	1.3E+02	9.8E+01	-5.6E+02	2.3E+02	-2.9E+02	-1.0E+03	-4.6E+02	-1.0E+02	6.6E+01	-3.4E+02
GCARSO.A-1	4.9E+02	3.2E+01	-1.1E+03	-2.3E+02	3.8E+02	6.1E+01	-4.5E+02	-7.4E+02	5.1E+02	-1.4E+02	2.8E+02	-3.4E+02
GEO.B	5.8E+03	-2.1E+02	-4.2E+02	-4.1E+02	-5.4E+01	-9.9E+02	-8.5E+01	-9.6E+02	9.0E+01	3.9E+02	-4.9E+02	1.5E+02
GFAMSA.A	-2.1E+02	2.5E+03	9.9E+01	-4.9E+02	2.0E+02	-1.9E+02	-5.1E+01	2.1E+02	1.3E+02	-3.6E+02	1.9E+02	-1.5E+02
GFINBUR.O	-4.2E+02	9.9E+01	4.8E+03	-4.5E+02	-7.1E+00	-5.2E+02	-7.1E+02	1.2E+03	-3.2E+02	-1.7E+02	-6.3E+02	-3.1E+02
GFNORTE.O	-4.1E+02	-4.9E+02	-4.5E+02	5.3E+03	-3.7E+02	-4.9E+02	1.0E+02	-2.5E+02	4.3E+02	1.4E+02	3.2E+02	-2.0E+02
GMEXICO.B	-5.4E+01	2.0E+02	-7.1E+00	-3.7E+02	4.7E+03	-5.8E+02	-6.7E+02	-4.1E+02	-5.9E+02	-1.4E+03	3.1E+02	3.7E+02
GMODELO.C	-9.9E+02	-1.9E+02	-5.2E+02	-4.9E+02	-5.8E+02	7.8E+03	2.3E+01	-2.2E+02	-9.4E+01	-6.6E+02	-1.4E+02	-2.6E+01
GRUMA.B	-8.5E+01	-5.1E+01	-7.1E+02	1.0E+02	-6.7E+02	2.3E+01	5.7E+03	4.3E+02	-3.2E+02	-1.3E+02	-2.7E+02	-1.4E+02
HOMEX.*	-9.6E+02	2.1E+02	1.2E+03	-2.5E+02	-4.1E+02	-2.2E+02	4.3E+02	6.7E+03	1.6E+02	-3.8E+02	1.4E+02	-1.2E+02
ICA.*	9.0E+01	1.3E+02	-3.2E+02	4.3E+02	-5.9E+02	-9.4E+01	-3.2E+02	1.6E+02	5.1E+03	-1.5E+02	-4.3E+02	-2.8E+02
ICH.B	3.9E+02	-3.6E+02	-1.7E+02	1.4E+02	-1.4E+03	-6.6E+02	-1.3E+02	-3.8E+02	-1.5E+02	6.0E+03	-6.7E+02	2.9E+01
IDEAL.B-1	-4.9E+02	1.9E+02	-6.3E+02	3.2E+02	3.1E+02	-1.4E+02	-2.7E+02	1.4E+02	-4.3E+02	-6.7E+02	5.4E+03	7.0E+02
KIMBER.A	1.5E+02	-1.5E+02	-3.1E+02	-2.0E+02	3.7E+02	-2.6E+01	-1.4E+02	-1.2E+02	-2.8E+02	2.9E+01	7.0E+02	5.7E+03
OMA.B	3.3E+02	-8.8E+02	-4.6E+02	5.3E+02	-7.4E+01	1.7E+02	-4.4E+02	-1.7E+02	6.0E+01	-3.0E+02	-5.0E+02	-2.3E+02
PEÑÓLES.*	1.3E+02	2.1E+02	1.4E+01	-1.1E+02	-6.4E+02	-2.6E+02	-2.5E+02	4.2E+02	-3.4E+02	1.5E+02	-9.1E+01	-2.6E+02
PINFRA.*	4.0E+01	-2.6E+02	-1.6E+02	1.4E+02	-4.8E+02	-9.6E+01	-2.0E+01	2.1E+01	-6.1E+02	-1.1E+01	-7.3E+02	2.3E+02
SARE.B	-7.7E+02	5.6E+01	2.2E+02	-2.5E+02	4.8E+02	6.0E+02	3.8E+02	-5.1E+02	-2.8E+02	-1.0E+03	-2.4E+02	2.5E+02
SORIANA.B	-3.9E+02	8.4E+00	-3.3E+02	-2.3E+01	3.6E+02	-1.0E+03	-1.2E+02	3.1E+02	-1.4E+02	-3.1E+02	-1.9E+02	-7.0E+02
TELECOM.A1	5.1E+02	-1.9E+02	3.7E+02	4.1E+02	-3.8E+02	1.6E+02	-1.1E+02	2.4E+02	-5.0E+02	1.2E+02	1.9E+01	-2.2E+02
TELMEX.L	-8.9E+02	3.1E+02	-4.6E+02	-8.9E+02	5.9E+02	2.6E+02	-4.3E+00	-4.1E+02	1.0E+03	2.8E+01	6.9E+01	-6.8E+02
TLEVISA.CPO	2.1E+02	-5.1E+02	6.2E+01	6.6E+02	-4.4E+02	-3.6E+01	-8.1E+02	-2.7E+02	8.8E+02	-9.6E+02	6.5E+02	-5.7E+02
TVAZTECA.CPO	3.6E+01	-1.4E+02	1.6E+02	3.7E+01	1.9E+02	-6.3E+02	1.5E+02	2.0E+01	3.5E+02	3.9E+01	-1.2E+02	-2.6E+02
URBI.*	-2.1E+02	-1.1E+02	3.5E+02	-7.8E+02	-6.4E+02	-1.3E+02	4.7E+01	7.5E+01	-1.3E+01	6.9E+01	-5.3E+02	-3.2E+02
WALMEX.V	-4.3E+01	6.9E+02	-2.2E+02	-1.5E+03	-3.5E+02	4.1E+02	7.3E+02	8.5E+01	-5.9E+02	-6.6E+01	-2.8E+02	1.4E+00
λ	-4.2E-02	2.9E-02	1.3E-01	-2.2E-02	-7.0E-02	2.9E-02	1.0E-01	-9.8E-03	4.0E-03	1.9E-02	-4.5E-02	6.8E-02

Matriz Aumentada Inversa/ Multiplicadores de Lagrange	OMA.B	PEÑOLES.* PINFRA.*	SARE.B	SORIANA.B TELECOM .A1	TELMEX.L	TLEVISA .CPO	TVAZTECA .CPO	URBI.*	WALMEX .V			
ALFA.A	-8.9E+02	-2.3E+02	-5.6E+02	8.3E+01	-4.8E+02	-2.6E+02	4.4E+01	2.6E+02	-1.2E+03	-3.3E+02	-7.2E+02	-4.9E-03
AMX.L	-3.0E+02	-1.4E+02	6.5E+01	8.4E+02	-2.5E+02	1.5E+02	-2.4E+03	-1.1E+03	-7.8E+02	-1.5E+01	-1.3E+03	-1.9E-02
ARA.*	-2.3E+02	-2.7E+02	5.9E+02	5.6E+01	2.7E+01	-6.6E+01	3.1E+01	-1.1E+02	-4.8E+02	-8.2E+02	-1.4E+03	1.6E-02
ARCA.*	-4.1E+02	-5.7E+02	-2.8E+02	-8.7E+01	-2.6E+02	-1.9E+02	-8.5E+02	1.0E+02	5.0E+00	5.5E+02	-8.2E+02	2.3E-01
BIMBO.A	-1.4E+02	-6.9E+01	2.5E+02	-8.8E+01	-2.3E+02	-2.3E+02	4.1E+02	-1.3E+02	-8.1E+02	-6.1E+02	-3.7E+02	4.8E-02
CEMEX.CPO	-3.5E+02	-1.5E+02	2.3E+01	-1.7E+02	1.0E+02	1.1E+01	-9.9E+02	-6.3E+02	-5.5E+02	-6.8E+02	5.6E+01	2.0E-02
CICSA.B-1	6.6E+02	-3.1E+02	-2.4E+02	-7.0E+02	9.6E+01	5.6E+02	1.0E+02	1.6E+02	-1.5E+02	-3.0E+02	1.3E+02	3.1E-02
COMERCI.UBC	9.5E+01	-3.9E+02	-6.1E+02	-2.0E+02	-5.2E+02	-2.1E+02	-8.3E+01	-2.9E+02	7.9E+01	-6.4E+01	-5.9E+02	-2.0E-02
ELEKTRA.*	-1.3E+02	8.8E+01	1.4E+02	-1.5E+02	-1.0E+02	-1.6E+01	-4.8E+02	-4.6E+02	-2.4E+02	1.2E+02	-4.8E+02	1.3E-01
FEMSA.UBD	-1.5E+01	4.7E+02	4.2E+01	-1.3E+02	-2.0E+02	-3.9E+02	-5.5E+02	-1.6E+03	-1.6E+02	3.1E+02	-9.2E+02	3.9E-02
GAP.B	-3.7E+02	-1.3E+02	3.1E+01	1.5E+01	-2.4E+02	4.3E+02	-1.1E+03	-2.0E+02	-1.1E+02	-1.8E+02	1.2E+02	5.6E-02
GCARSO.A-1	2.9E+02	-3.4E+02	-1.0E+02	3.6E+02	4.6E+01	-1.3E+03	1.2E+03	-3.1E+02	-2.5E+02	-3.4E+02	-1.1E+02	-3.0E-02
GEO.B	3.3E+02	1.3E+02	4.0E+01	-7.7E+02	-3.9E+02	5.1E+02	-8.9E+02	2.1E+02	3.6E+01	-2.1E+02	-4.3E+01	-4.2E-02
GFAMSA.A	-8.8E+02	2.1E+02	-2.6E+02	5.6E+01	8.4E+00	-1.9E+02	3.1E+02	-5.1E+02	-1.4E+02	-1.1E+02	6.9E+02	2.9E-02
GFINBUR.O	-4.6E+02	1.4E+01	-1.6E+02	2.2E+02	-3.3E+02	3.7E+02	-4.6E+02	6.2E+01	1.6E+02	3.5E+02	-2.2E+02	1.3E-01
GFNORTE.O	5.3E+02	-1.1E+02	1.4E+02	-2.5E+02	-2.3E+01	4.1E+02	-8.9E+02	6.6E+02	3.7E+01	-7.8E+02	-1.5E+03	-2.2E-02
GMEXICO.B	-7.4E+01	-6.4E+02	-4.8E+02	4.8E+02	3.6E+02	-3.8E+02	5.9E+02	-4.4E+02	1.9E+02	-6.4E+02	-3.5E+02	-7.0E-02
GMODELO.C	1.7E+02	-2.6E+02	-9.6E+01	6.0E+02	-1.0E+03	1.6E+02	2.6E+02	-3.6E+01	-6.3E+02	-1.3E+02	4.1E+02	2.9E-02
GRUMA.B	-4.4E+02	-2.5E+02	-2.0E+01	3.8E+02	-1.2E+02	-1.1E+02	-4.3E+00	-8.1E+02	1.5E+02	4.7E+01	7.3E+02	1.0E-01
HOMEX.*	-1.7E+02	4.2E+02	2.1E+01	-5.1E+02	3.1E+02	2.4E+02	-4.1E+02	-2.7E+02	2.0E+01	7.5E+01	8.5E+01	-9.8E-03
ICA.*	6.0E+01	-3.4E+02	-6.1E+02	-2.8E+02	-1.4E+02	-5.0E+02	1.0E+03	8.8E+02	3.5E+02	-1.3E+01	-5.9E+02	4.0E-03
ICH.B	-3.0E+02	1.5E+02	-1.1E+01	-1.0E+03	-3.1E+02	1.2E+02	2.8E+01	-9.6E+02	3.9E+01	6.9E+01	-6.6E+01	1.9E-02
IDEAL.B-1	-5.0E+02	-9.1E+01	-7.3E+02	-2.4E+02	-1.9E+02	1.9E+01	6.9E+01	6.5E+02	-1.2E+02	-5.3E+02	-2.8E+02	-4.5E-02
KIMBER.A	-2.3E+02	-2.6E+02	2.3E+02	2.5E+02	-7.0E+02	-2.2E+02	-6.8E+02	-5.7E+02	-2.6E+02	-3.2E+02	1.4E+00	6.8E-02
OMA.B	4.2E+03	-2.0E+02	2.6E+02	-7.1E+02	5.0E+02	2.2E+02	-6.4E+02	-6.3E+01	2.3E+02	1.9E+02	-2.7E+02	1.8E-01
PEÑOLES.*	-2.0E+02	4.3E+03	1.4E+02	-6.5E+02	-1.2E+02	1.0E+02	-8.6E+01	-6.1E+02	-4.8E+02	1.9E+02	4.3E+02	1.7E-02
PINFRA.*	2.6E+02	1.4E+02	3.5E+03	3.8E+01	3.1E+02	-3.5E+02	-4.5E+02	3.6E+02	-3.7E+02	-5.9E+01	-8.1E+02	1.7E-02
SARE.B	-7.1E+02	-6.5E+02	3.8E+01	4.3E+03	-1.5E+02	-2.3E+02	-7.3E+01	-1.4E+02	-6.4E+02	-1.7E+02	-3.2E+02	5.5E-02
SORIANA.B	5.0E+02	-1.2E+02	3.1E+02	-1.5E+02	4.6E+03	-9.3E+02	7.6E+02	-7.9E+02	6.2E+02	-1.7E+02	-9.3E+01	5.1E-02
TELECOM.A1	2.2E+02	1.0E+02	-3.5E+02	-2.3E+02	-9.3E+02	6.5E+03	-4.1E+03	7.3E+02	-6.2E+02	-1.9E+02	-5.9E+01	-5.6E-02
TELMEX.L	-6.4E+02	-8.6E+01	-4.5E+02	-7.3E+01	7.6E+02	-4.1E+03	9.6E+03	-4.7E+02	1.8E+02	7.0E+01	9.3E+02	1.2E-01
TLEVISA.CPO	-6.3E+01	-6.1E+02	3.6E+02	-1.4E+02	-7.9E+02	7.3E+02	-4.7E+02	8.5E+03	1.6E+01	-5.2E+02	-1.6E+03	5.3E-02
TVAZTECA.CPO	2.3E+02	-4.8E+02	-3.7E+02	-6.4E+02	6.2E+02	-6.2E+02	1.8E+02	1.6E+01	6.2E+03	1.4E+02	-4.5E+02	-3.8E-02
URBI.*	1.9E+02	1.9E+02	-5.9E+01	-1.7E+02	-1.7E+02	-1.9E+02	7.0E+01	-5.2E+02	1.4E+02	4.5E+03	6.3E+02	-3.0E-02
WALMEX.V	-2.7E+02	4.3E+02	-8.1E+02	-3.2E+02	-9.3E+01	-5.9E+01	9.3E+02	-1.6E+03	-4.5E+02	6.3E+02	9.0E+03	-6.0E-02
Λ	1.8E-01	1.7E-02	1.7E-02	5.5E-02	5.1E-02	-5.6E-02	1.2E-01	5.3E-02	-3.8E-02	-3.0E-02	-6.0E-02	-4.8E-05

Finalmente, para obtener las proporciones X_i de cada título dentro del portafolio, debe llevarse a cabo el producto matricial entre la inversa de la matriz extendida y el vector de rendimientos esperados multiplicado por el factor de riesgo. Como resultado se tendrá el vector de distribuciones X_i cuyas componentes deben sumar la unidad, ya que ésta es justamente la restricción que se impone al problema de optimización.

3. Aunque método método matricial de multiplicadores de Lagrange ofrece grandes ventajas en cuanto a la simplicidad de los cálculos, existen algunos problemas inherentes a él que en ocasiones no se pueden soslayar. Por ejemplo, la matriz de varianzas y covarianzas puede resultar una matriz mal condicionada; esto significa que el cálculo de la inversa está propenso a una fuerte propagación de errores de redondeo y truncamiento. Por otro lado, el método supone la existencia misma de la matriz inversa, es decir, que el determinante asociado es distinto de cero (hecho que asegura la no singularidad).

Si bien en la aplicación que hemos desarrollado aquí no fueron observados estos problemas (i.e, la matriz de covarianzas es no singular y bien condicionada) un tercer problema referente al signo de las componentes de X_i representa algunas dificultades.

En efecto, el resultado de los multiplicadores de Lagrange no excluye la posibilidad de obtener un portafolio de frontera en el que uno o más títulos tengan que ser emitidos por el inversionista (es decir, existe j tal que $X_j < 0$). Aunque un resultado así no representa ninguna inconsistencia con la teoría, si dificulta significativamente la comprobación de

hipótesis y la construcción de procedimientos de operación práctica. A continuación aparecen los resultados de aplicación del método de multiplicadores de Lagrange para la obtención de un portafolio de frontera.

Proporción por emisora según multiplicador de Lagrange

i	λ_i	$X_i = C^{-1} \lambda$
ALFA.A	1.0016611	-0.0360799
AMX.L	1.0020494	8.2466856
ARA.*	1.0011306	0.0492985
ARCA.*	1.0011319	-3.2355775
BIMBO.A	1.0024786	6.8992134
CEMEX.CPO	1.0005632	-6.8129536
CICSA.B-1	1.0017679	-2.1306083
COMERCI.UBC	1.0017770	0.0555896
ELEKTRA.*	1.0030617	5.3253885
FEMSA.UBD	1.0006089	-6.2748306
GAP.B	1.0018985	-0.0439994
GCARSO.A-1	1.0014225	-2.4222527
GEO.B	1.0011483	-1.5299695
GFAMSA.A	1.0025367	1.9203358
GFINBUR.O	1.0018235	3.1077379
GFNORTE.O	1.0015882	1.7236954
GMEXICO.B	1.0030527	7.1710633
GMODELO.C	1.0006807	-7.5736127
GRUMA.B	1.0009806	-4.4135244
HOMEX.*	1.0019318	5.6132679
ICA.*	1.0021507	0.8358572
ICH.B	1.0012371	-5.6806190
IDEAL.B-1	1.0020972	0.5225679
KIMBER.A	1.0006660	-3.9708475
OMA.B	1.0012785	-0.6759205
PEÑOLES.*	1.0019789	1.5432942
PINFRA.*	1.0042481	8.8050148
SARE.B	1.0018702	2.0703426
SORIANA.B	1.0030073	8.1026176
TELECOM.A1	1.0023558	2.5407281
TELMEX.L	1.0016428	-1.3028759
TLEVISA.CPO	1.0014009	2.0220351
TVAZTECA.CPO	1.0007740	-5.1043059
URBI.*	1.0016405	-1.7917527
WALMEX.V	1.0004751	-12.5550029
λ	1.0000000	

Como puede observarse, aunque la suma de las componentes del vector de distribuciones \mathbf{X} es exactamente igual a 1, existen valores negativos para algunas de las empresas. El paso del

problema de optimización con la única restricción de que las componentes de X sumen 1, hacia el equivalente con restricciones sobre $X_i > 0$, no es inmediato; representa un incremento importante en el grado de dificultad para determinar las soluciones tanto algebraicas como numéricas, ya que el problema cae dentro del campo de la programación matemática no lineal. Sin embargo, debido a la relevancia que tiene la incorporación de las restricciones de desigualdad en la práctica, el propio Markowitz desarrolló a principios de la pasada década un algoritmo que permite calcular la distribución del portafolio de frontera con restricciones de desigualdad.

La traducción de dicho algoritmo escrito originalmente en lenguaje SIMSCRIPT hacia aplicaciones para la llamada quinta generación de tecnologías de información, ha sido realizada por diversas empresas dedicadas al desarrollo de paquetería computacional para análisis financiero¹.

Así pues, con el propósito de construir una versión del CAPM con portafolios de frontera, presentamos a continuación los resultados de la aplicación del algoritmo de línea crítica de Markowitz al conjunto de emisoras con máximo $E(r_i)$.

ALGORITMO DE LÍNEA CRÍTICA CON RESTRICCIONES $X_i \geq 0$

¹ En virtud de las grandes ventajas prácticas que ofrece, para el cálculo del portafolio de frontera hemos utilizado aquí el módulo de cartera de Markowitz del paquete para análisis financiero *ECONOMATICA*.

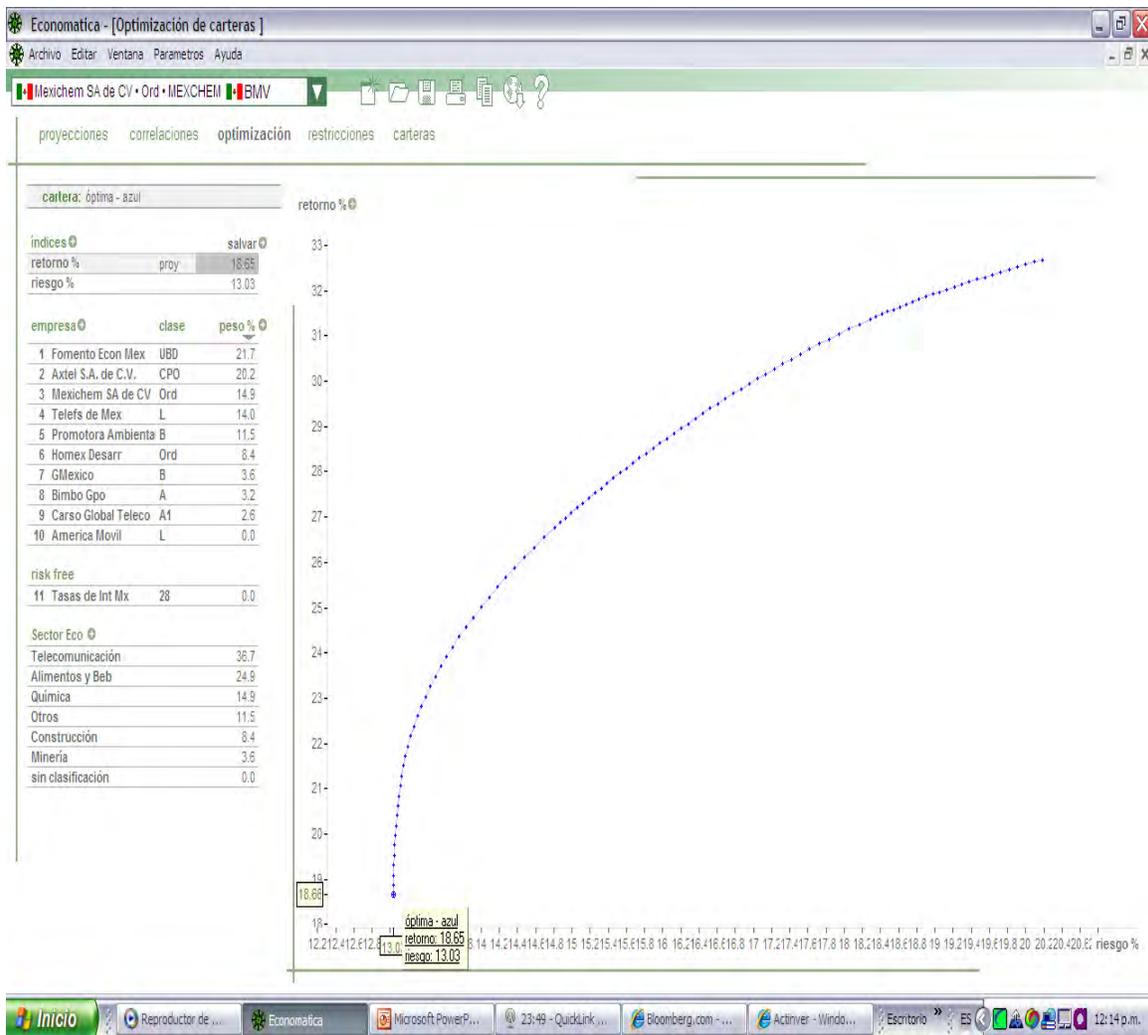
Economática - [Optimización de carteras]

Archivo Editar Ventana Parametros Ayuda

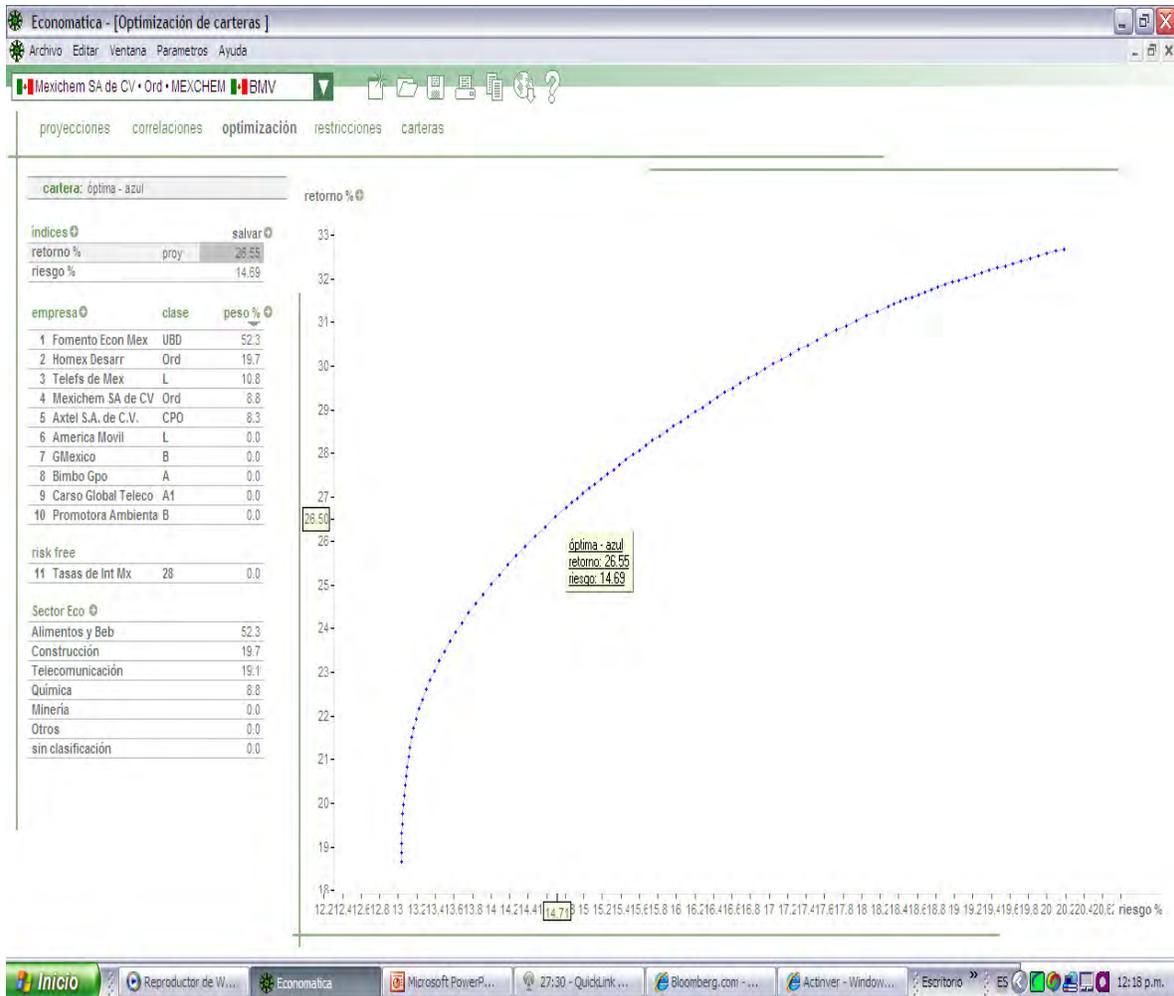
Mexichem SA de CV • Ord • MEXICHEM • BMV

proyecciones correlaciones optimización restricciones carteras

empresa	clase	precio actual	precio objetivo	retorno proy %	riesgo %	retorno activo proy %	tracking error %	Sector Eco	
1	Telefs de Mex	L	20.88	25.00	19.73	21.52	1.10	16.25	Telecomunica
2	America Movil	L	34.40	42.20	22.67	28.35	3.59	15.72	Telecomunica
3	GMexico	B	72.68	74.30	2.23	32.65	-13.68	26.17	Minería
4	Bimbo Gpo	A	65.36	71.00	8.63	26.24	-8.27	22.35	Alimentos y Br
5	Carso Global Teleco	A1	58.73	65.50	11.53	28.52	-5.82	20.99	Telecomunica
6	Homex Desarr	Ord	111.49	140.00	25.57	32.08	6.04	28.60	Construcción
7	Fomento Econ Mex	UBD	42.71	56.67	32.69	21.91	12.04	18.52	Alimentos y Br
8	Axtel S.A. de C.V.	CPO	72.75	82.00	12.71	27.18	-4.82	29.91	Telecomunica
9	Mexichem SA de CV	Ord	39.59	45.00	13.67	27.11	-4.02	28.63	Química
10	Promotora Ambienta	B	31.20	35.00	12.18	32.59	-5.27	35.90	Otros
risk free									
11	Tasas de Int Mx	28		6.91	0.00	-9.72	18.29		
benchmark									
	Indice Prec y Cotiz	MX	32,088	38,000	18.42	18.29	0.00	0.00	



Los anteriores resultados son completamente consistentes con el modelo de Markowitz. El cálculo del rendimiento esperado se lleva a cabo haciendo el producto por la derecha de la matriz de rendimientos por el nuevo vector de distribuciones. De esta manera se conforma la serie que utilizaremos en adelante para determinar los premios al riesgo en la prueba del CAPM.



Para conservar la notación, nombraremos a la serie de rendimientos del portafolio de frontera como r_p (ver capítulos V, VI, VII), siendo por su parte r_m la serie correspondiente a los rendimientos de mercado del año de estudio. Con estos elementos iniciaremos los primeros cálculos de ajuste del CAPM para pasar a continuación al análisis de estabilidad estructural de los parámetros del modelo.

4. Un buen punto de partida para analizar el ajuste del CAPM a los datos muestrales consiste en determinar el valor de la R^2 para la cartera óptima y compararlo con el premio de mercado correspondiente. Considérese para este efecto el modelo

$$\Delta r_{it} = \alpha_i + \beta_i \Delta r_{mt} + u_{it}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$t = 1, 2, \dots, s$$

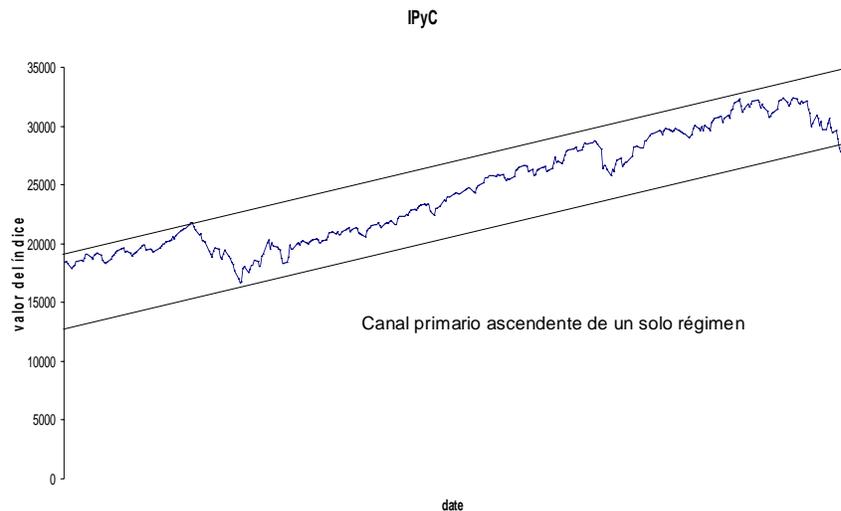
Ahora bien, para obtener los parámetros del CAPM de un solo régimen debe aplicarse el método de mínimos cuadrados ordinarios a las series Δr_{it} y Δr_{mt} correspondientes al premio al riesgo de la cartera óptima y de la muestra del IPyC respectivamente. El resumen de los resultados de dicho cálculo aparece en el siguiente cuadro.

Ajuste del CAPM de un solo régimen

Coeficiente de correlación múltiple	0.609661		
Coeficiente de determinación R ²	0.371686		
R ² ajustado	0.369132		
Error típico	0.012855		
Observaciones	248		
•	0.82012		
ANÁLISIS DE VARIANZA			
	CAPM	Residuos	Total
Grados de libertad	1	246	247
Suma de cuadrados	0.024047	0.04065	0.064697
Promedio de los cuadrados	0.024047	0.000165	
F	145.5243		
Valor crítico de F	1.24E-26		
	•		
Coeficientes	-0.00129		
Error típico	0.000822		
Estadístico t	-1.57406		
Probabilidad	0.11676		
Inferior 95%	-0.00291		
Superior 95%	0.000325		
Inferior 95.0%	-0.00291		
Superior 95.0%	0.000325		

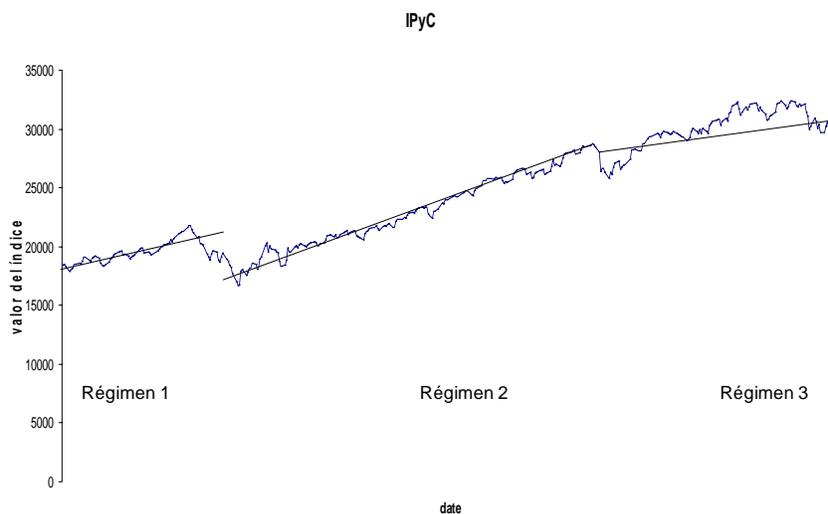
En efecto, la proporción de riesgo de mercado que resulta del ajuste bivariado entre la compensación al riesgo del portafolio óptimo y la correspondiente compensación de mercado es de 0.1798. Asimismo, destaca el alto valor que alcanza el coeficiente de correlación múltiple (mayor a 0.6). Más aún, si observamos los valores de significancia de la prueba t para cada uno de los parámetros del modelo, podemos sostener con base en los datos muestrales que la hipótesis $\beta=0$ debe rechazarse.

Lecturas de similares características se obtienen para los ajustes de premios al riesgo de cada una de las emisoras de la muestra del IPyC.



Sin embargo, las inflexiones que presentan las series originales al inicio y al final del segundo tercio del

intervalo muestral, revelan la necesidad de llevar a cabo el análisis de estabilidad paramétrica del ajuste de CAPM a los rendimientos observados.

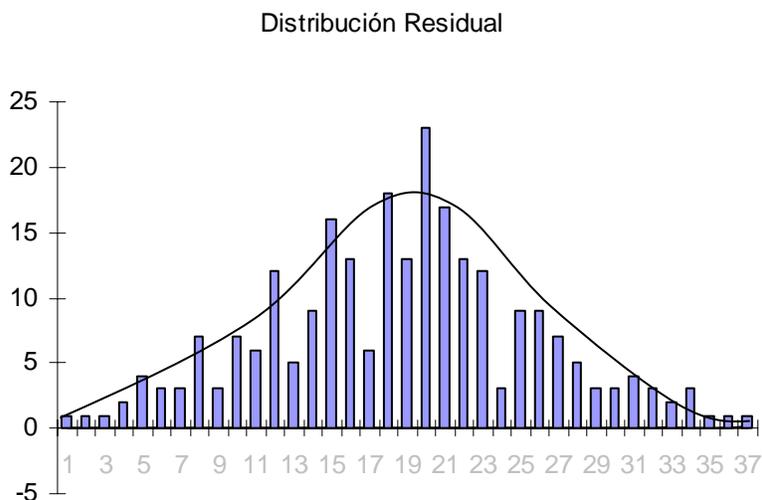


Así pues, presentaremos a continuación en primer término los resultados del análisis residual del modelo de regresión del CAPM para tres regímenes, par luego proseguir con las pruebas de bondad de ajuste y finalmente el análisis de estabilidad estructural de los parámetros del modelo.

5. Los resultados del análisis residual del ajuste del CAPM a las series muestrales revelan que no existe evidencia que sugiera la presencia de un fenómeno de autocorrelación residual. Por el contrario, el estadístico de Durbin- Watson alcanza un valor de 1.775.

Hay que recordar la relación que existe entre dicho estadístico y el coeficiente de correlación residual: cuando el coeficiente de correlación se anula, el valor del Durbin-Watson se aproxima a 2. Por el contrario, para correlaciones altas, DW se aproxima igualmente a cero que a 4, dependiendo del signo que tenga la ρ . Sin embargo, podemos observar que en nuestros resultados el valor de DW es suficientemente bueno para descartar el problema de correlación entre residuos.

Al analizar la distribución residual de las series de datos, ha sido conveniente tomar los valores estandarizados en cada caso. La curva de distribución resultante se muestra en el histograma de residuos estandarizados.



En este histograma se ha superpuesto la curva teórica de la distribución normal univariada, misma que se distingue por la línea continua. Asimismo, se destaca en el diagrama la aproximación entre las distribuciones teórica y muestral.

En términos generales, para la aplicación de los métodos estadísticos se supone que los valores que asume una variable se distribuyen de acuerdo a una distribución estadística en particular; así, con bastante frecuencia, se supone que los datos muestrales provienen de una distribución normal. El método de la bondad proporciona en este caso una técnica útil para comprobar la hipótesis de un buen ajuste, es decir:

$$H_0: O_i = E_i \text{ (buen ajuste)}$$

Frente a la alternativa de un ajuste diferente, esto es:

$$H_1: O_i \neq E_i$$

Se supone a continuación un conjunto de observaciones las cuales se han agrupado en clases y frecuencias. A esta distribución de frecuencias se le ajusta una distribución normal cuyos valores teóricos son obtenidos. El método 2 para comprobar la bondad de un ajuste de una distribución (valores teóricos) permite ver si efectivamente la distribución teórica "ajusta" a la observada. Al efecto se usará el estadístico:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

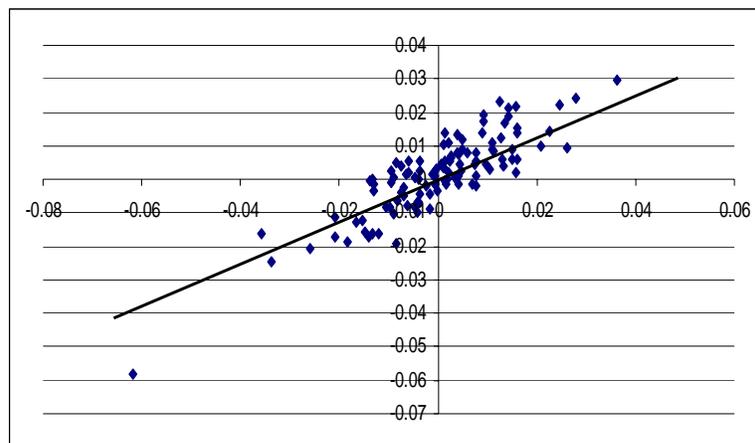
con $\nu = K - p - 1$ grados de libertad, donde p será el número de parámetros estimados por la muestra. Así, en nuestro caso, bajo prueba la hipótesis de normalidad μ y σ^2 se estiman mediante 2 parámetros μ y σ^2 y K el número de intervalos de clase de la distribución. Luego $\nu = K - 3$.

En este contraste la región crítica vendrá determinada por:

$$\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha; K-p-1}$$

Por otra parte, para ilustrar el principio de homocelasticidad, es útil el diagrama que aparece a continuación.

Residuos calculados vs. Residuos esperados (prueba Durbin-Watson)



En este diagrama se grafica la relación -que en principio debe ser lineal- entre los residuos calculados y los residuos esperados.

6. Con base en los datos observados en el periodo de estudio, exploraremos ahora la relación existente entre los premios del portafolio de frontera y el rendimiento de mercado. En primer lugar, destaca el hecho de que el proceso de

diversificación de riesgo específico ha sido efectivo. Esto se refleja en el valor de la R^2 que asciende hasta 0.5126, lo que significa que apenas la mitad del riesgo total es ahora de mercado. Al mismo tiempo, este coeficiente evidencia la alta relación de dependencia que esperábamos entre el premio del portafolio y el rendimiento de mercado en concordancia con la teoría del CAPM.

Régimen 1

Coefficiente de correlación múltiple	0.7159		
Coefficiente de determinación R ²	0.5126		
R ² ajustado	0.5082		
Error típico	0.0071		
Observaciones	114.0000		
ANÁLISIS DE VARIANZA			
	CAPM	Residuos	Total
Grados de libertad	1.0000	112.0000	113.0000
Suma de cuadrados	0.0060	0.0057	0.0117
Promedio de los cuadrados	0.0060	0.0001	
F	117.7747		
Valor crítico de F	0.0000		
	•		β
Coefficientes	-0.0013		0.7561
Error típico	0.0008		0.0697
Estadístico t	-1.5741		10.8524
Probabilidad	0.1168		0.0000
Inferior 95%	-0.0029		0.6180
Superior 95%	0.0003		0.8941
Inferior 95.0%	-0.0029		0.6180
Superior 95.0%	0.0003		0.8941

Régimen 2

Coefficiente de correlación múltiple	0.8815		
Coefficiente de determinación R ²	0.7770		
R ² ajustado	0.7746		
Error típico	0.0065		
Observaciones	93.0000		
ANÁLISIS DE VARIANZA			
	CAPM	Residuos	Total
Grados de libertad	1.0000	91.0000	92.0000
Suma de cuadrados	0.0133	0.0038	0.0171
Promedio de los cuadrados	0.0133	0.0000	
F	317.0734		
Valor crítico de F	0.0000		
	•		β
Coefficientes	-0.0015		0.9593
Error típico	0.0007		0.0539
Estadístico t	-2.1985		17.8066
Probabilidad	0.0305		0.0000
Inferior 95%	-0.0028		0.8523
Superior 95%	-0.0001		1.0663
Inferior 95.0%	-0.0028		0.8523
Superior 95.0%	-0.0001		1.0663

Régimen 3

Coeficiente de correlación múltiple	0.3564		
Coeficiente de determinación R ²	0.1270		
R ² ajustado	0.1052		
Error típico	0.0271		
Observaciones	42.0000		
ANÁLISIS DE VARIANZA			
	CAPM	Residuos	Total
Grados de libertad	1.0000	40.0000	41.0000
Suma de cuadrados	0.0043	0.0294	0.0337
Promedio de los cuadrados	0.0043	0.0007	
F	5.8210		
Valor crítico de F	0.0205		
	•		β
Coeficientes	-0.0060		0.6333
Error típico	0.0042		0.2625
Estadístico t	-1.4212		2.4127
Probabilidad	0.1630		0.0205
Inferior 95%	-0.0144		0.1028
Superior 95%	0.0025		1.1638
Inferior 95.0%	-0.0144		0.1028
Superior 95.0%	0.0025		1.1638

Bondad de ajuste del error régimen 1

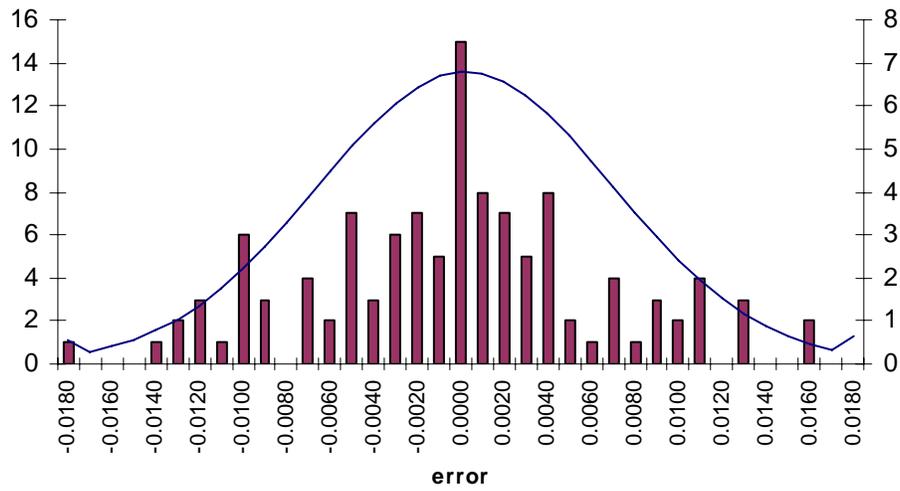
Categorías	Frecuencia Observada	Distribución Normal	Frecuencia Esperada	(F.Observada-F.Esperada)/F.Esperada)
-0.018	1	0.004610477	0.53481538	0.40461949
-0.017	0	0.002399028	0.27828729	0.27828729
-0.016	0	0.003440106	0.39905225	0.39905225
-0.015	0	0.004827734	0.56001719	0.56001719
-0.014	1	0.006630559	0.76914489	0.06929004
-0.013	2	0.008912349	1.03383251	0.90293119
-0.012	3	0.011723828	1.3599641	1.97778586
-0.011	1	0.015093222	1.75081373	0.32197672
-0.01	6	0.019016461	2.20590953	6.52570847
-0.009	3	0.023448373	2.72001131	0.02882108
-0.008	0	0.028296388	3.282381	3.282381
-0.007	4	0.033418316	3.87652461	0.00393295
-0.006	2	0.038625436	4.48055055	1.37329798
-0.005	7	0.043691556	5.06822052	0.73630812
-0.004	3	0.048367866	5.61067245	1.21475825
-0.003	6	0.052402455	6.07868477	0.00101853
-0.002	7	0.055562482	6.4452479	0.04774834
-0.001	5	0.057656323	6.68813343	0.42609713
0	15	0.058552783	6.79212285	9.91873217
0.001	8	0.058194702	6.75058542	0.23124466
0.002	7	0.056604982	6.56617786	0.02866228
0.003	5	0.053884165	6.25056316	0.25020277
0.004	8	0.050199913	5.82318988	0.81372966
0.005	2	0.04576991	5.3093096	2.06270322
0.006	1	0.040840632	4.7375133	2.9485945
0.007	4	0.035664828	4.13712003	0.00454468
0.008	1	0.030480571	3.5357462	1.81857193
0.009	3	0.025494197	2.95732683	0.00061576
0.01	2	0.020868674	2.42076613	0.07313558
0.011	4	0.016717973	1.93928487	2.18974888
0.012	0	0.013107131	1.52042723	1.52042723
0.013	3	0.010056965	1.1666079	2.88128219
0.014	0	0.007551991	0.87603091	0.87603091
0.015	0	0.005549977	0.64379733	0.64379733
0.016	2	0.003991684	0.46303532	5.10168509
0.017	0	0.002809676	0.32592246	0.32592246
0.018	0	0.005536287	0.64220933	0.64220933

Bondad de ajuste del error régimen 2

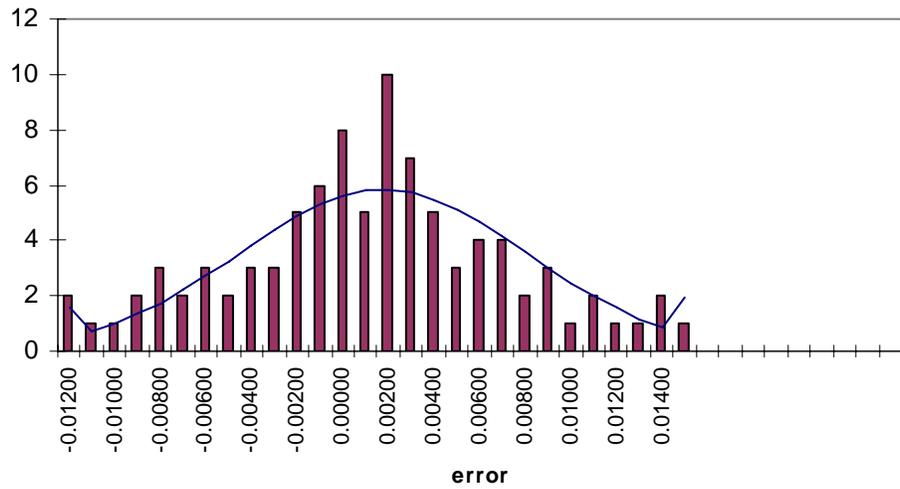
Categorías	Frecuencia Observada	Distribución Normal	Frecuencia Esperada	(F.Observada-F.Esperada)/F.Esperada)
-0.012	2	0.017126536	1.57564131	0.11429016
-0.011	1	0.008014182	0.73730472	0.09359605
-0.01	1	0.010944295	1.00687515	4.6945E-05
-0.009	2	0.014570977	1.34052988	0.32442458
-0.008	3	0.018913061	1.74000165	0.91241053
-0.007	2	0.02393356	2.2018875	0.01851074
-0.006	3	0.029527391	2.71652001	0.0295823
-0.005	2	0.035515276	3.26740538	0.49161834
-0.004	3	0.041646417	3.83147037	0.18043803
-0.003	3	0.047611564	4.38026385	0.4349346
-0.002	5	0.053066397	4.88210853	0.0028468
-0.001	6	0.057663251	5.3050191	0.09104556
0	8	0.061087312	5.6200327	1.0078668
0.001	5	0.063092143	5.80447715	0.11149729
0.002	10	0.063528985	5.8446666	2.95428239
0.003	7	0.062365	5.73758001	0.27776593
0.004	5	0.059687352	5.49123639	0.04394515
0.005	3	0.055692417	5.1237024	0.8802447
0.006	4	0.050661984	4.66090252	0.09371407
0.007	4	0.044930441	4.13360053	0.00431805
0.008	2	0.038848255	3.57403945	0.69322128
0.009	3	0.03274724	3.01274605	5.3925E-05
0.01	1	0.026912263	2.47592819	0.87981713
0.011	2	0.021562448	1.98374519	0.00013319
0.012	1	0.016842952	1.54955159	0.19489958
0.013	1	0.012826574	1.18004478	0.02747025
0.014	2	0.009523035	0.87611924	1.44170784
0.022	1	0.021158693	1.94659975	0.46031604

Bondad de ajuste régimen 3

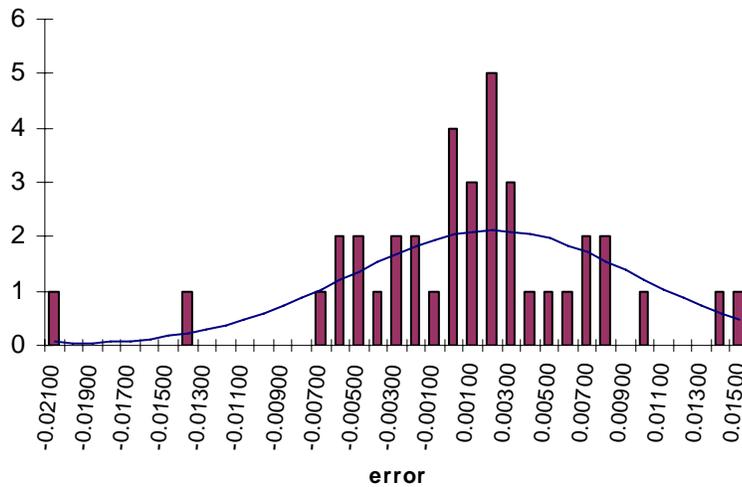
Categorías	Frecuencia Observada	Distribución Normal	Frecuencia Esperada	(F.Observada-F.Esperada)/F.Esperada)
-0.021	1	0.001390623	0.05562491	16.03318178
-0.02	0	0.000739957	0.02959827	0.029598271
-0.019	0	0.0010809	0.04323601	0.043236013
-0.018	0	0.001551383	0.06205531	0.062055306
-0.017	0	0.002187793	0.08751172	0.087511717
-0.016	0	0.00303143	0.12125719	0.121257187
-0.015	0	0.004127079	0.16508316	0.165083165
-0.014	1	0.005520674	0.22082696	2.74925949
-0.013	0	0.007255969	0.29023878	0.290238775
-0.012	0	0.009370285	0.3748114	0.374811402
-0.011	0	0.011889517	0.47558066	0.475580663
-0.01	0	0.014822779	0.59291115	0.592911151
-0.009	0	0.018157209	0.72628837	0.72628837
-0.008	0	0.021853581	0.87414325	0.874143248
-0.007	1	0.025843432	1.03373727	0.001101057
-0.006	2	0.030028373	1.20113492	0.531318681
-0.005	2	0.034282105	1.37128418	0.28825796
-0.004	1	0.038455389	1.53821555	0.188319498
-0.003	2	0.042383908	1.69535632	0.054742339
-0.002	2	0.045898538	1.83594152	0.014660153
-0.001	1	0.048837202	1.95348807	0.465392907
0	4	0.051057172	2.04228687	1.8766417
0.001	3	0.052446535	2.09786141	0.387944616
0.002	5	0.052933537	2.1173415	3.924600765
0.003	3	0.052492723	2.09970891	0.386017343
0.004	1	0.051147139	2.04588557	0.534671458
0.005	1	0.048966342	1.95865368	0.469208459
0.006	1	0.046060435	1.84241742	0.385182588
0.007	2	0.042570866	1.70283463	0.051858974
0.008	2	0.038659033	1.54636132	0.133078891
0.009	0	0.034493999	1.37975998	1.379759979
0.01	1	0.030240584	1.20962337	0.036326973
0.011	0	0.026048988	1.04195952	1.041959517
0.012	0	0.022046801	0.88187205	0.881872047
0.013	0	0.018333879	0.73335517	0.733355169
0.014	1	0.014980186	0.59920742	0.268078608
0.015	1	0.012026356	0.48105424	0.559821892
0.016	1	0.009486477	0.37945909	1.014789319
0.018	1	0.027300823	1.0920329	0.007756227



$\chi^2 > 50.99$ régime 1



$\chi^2 > 38.88$ régime 2



$$\chi^2 > 54.57 \text{ régimen 3}$$

Sin embargo, quizá el resultado más importante en el contexto del CAPM se obtiene de probar la hipótesis de nulidad de los coeficientes del modelo. En efecto, de acuerdo con el reporte, la prueba t para $\alpha = 0$, debe ser rechazada mientras que $\alpha = 0$ no se rechaza (con un nivel de confianza de 95%). En el primer caso, el valor de t es igual a -1.574 con cero de significancia, a diferencia del segundo en donde el valor de t es de -1.5741 con significancia de 0.4567. De esta manera, los datos muestrales prueban la validez de la relación entre las compensaciones al riesgo que establece el CAPM, incluyendo la ausencia de constantes en la parte derecha de la ecuación.

7. En el capítulo VII desarrollamos diversas formas de probar la posible existencia de un fenómeno de inestabilidad estructural de los parámetros del CAPM. Presentaremos ahora

el resultado de aplicar estos procedimientos a los datos muestrales.

En primer lugar, el análisis clásico de sección cruzada nos arroja valores de significancia de para la prueba F de estabilidad paramétrica que varían desde 0.1872 hasta 0.8175. Estos resultados son consistentes con el comportamiento de la curva de la suma cuadrada de residuos (SCR) utilizada para explorar la posible existencia de distintos regímenes. En particular, surge una discontinuidad en dicha curva SCR en torno a $n=116$, que es el valor en donde la suma de los residuos cambia abruptamente de 70.46 a 31.4. Un comportamiento parecido puede identificarse si se examina la SCR cuando n asume el valor de 209. Ambos puntos coinciden con los que resultan de prueba de docimasia sobre estabilidad estructural del modelo conmutado de Chow.

$$F = (SCR_c - (SCR_1 + SCR_2) / k)^{-1} (SCR_1 + SCR_2 / (n - 2k))$$

Considérense, por ejemplo, los resultados correspondientes al primer régimen.

En este caso, tenemos que $\beta = 0.7561$ con una R^2 de 0.5082 y niveles de significancia para T, de cero sobre el coeficiente (i.e., se rechaza $\beta = 0$) y de 0.116 sobre la constante. (i.e. no se rechaza $\alpha = 0$). Además de lo anterior, la prueba F sobre la estabilidad de la R cuadrada nos arroja un valor de sólo 123.28 con significancia igual a cero, y una SCR prácticamente nula.

Así pues, lo anterior nos lleva a afirmar que no sólo hemos conseguido incrementar el efecto de la diversificación del riesgo total (ya que el riesgo específico se reduce a menos de la mitad), sino que adicionalmente se han alcanzado mucho mejores indicadores sobre la estabilidad estructural del modelo y la calidad del ajuste. Análogamente, en el régimen considerado el análisis residual cumple satisfactoriamente las hipótesis para llevar a cabo procedimientos inferenciales². Por lo que se refiere al valor estandarizado de la beta, el 0.925 nos indica la proporción en la que el riesgo del portafolio es menor al riesgo promedio del mercado en su conjunto. Cabe mencionar que los resultados anteriores son consistentes con el hecho de que la incorporación de variables ficticias cuya variación ocurre en función del régimen que se esté considerando, nos generan pruebas t con un valor de significancia que no justifica el rechazo de la hipótesis $\beta_a=0$, siendo β_a el parámetro correspondiente a la variable ficticia.

Por lo que corresponde a los resultados de los regímenes subsecuentes, podrá observarse que de ellos se derivan lecturas muy similares a la anterior. Por tanto, proseguiremos a continuación con las pruebas estadísticas para validar la hipótesis de que en el periodo de estudio el CAPM presenta cambio estructural en dos de los tres regímenes.

² En particular, el estadístico Durbin-Watson toma un valor de 1.734

Quizá sea conveniente enfatizar en este punto la naturaleza no frecuentista del fenómeno que hemos seleccionado para las aplicaciones de este capítulo ya que, evidentemente, el conjunto de condiciones que determinaron las variaciones de las series de rendimientos de las emisoras del IPyC no volverá a repetirse de manera exacta en el futuro³.

8. Hemos dejado como último punto del capítulo la inferencia sobre los parámetros del modelo, misma que conduciremos a continuación a través de un procedimiento Bayesiano con distribución a priori difusa y varianza desconocida.

Es decir, dados Δr_{mi} ($i=1,2,\dots,n$), α , β y σ^2 , entonces Δr_{pi} ($i=1,2,\dots,n$) tendrá esperanza $E(\Delta r_{pi} | \Delta r_{mi}, \alpha, \beta, \sigma^2) = \alpha + \beta \Delta r_{mi}$ y una varianza $\text{Var}(\Delta r_{pi} | \Delta r_{mi}, \alpha, \beta, \sigma^2) = \sigma^2$.

Retomando ahora lo expuesto en los capítulos IV y V, tenemos que:

$$p(\Delta r_{pi} | \Delta r_{mi}, \alpha, \beta, \sigma) \propto \frac{1}{\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (\Delta r_{pi} - \alpha - \beta \Delta r_{mi})^2 \right]$$

Ahora bien, bajo el supuesto de que existe poco conocimiento sobre la distribución de los parámetros, se propone una distribución previa difusa, de manera que

$$p(\beta_1, \beta_2, \sigma) \propto \frac{1}{\sigma} \quad \text{con } -\infty < \beta_1, \quad \beta_2 < \infty, \quad 0 < \sigma < \infty$$

³ Baste mencionar que en dicho periodo los mercados vivieron perturbaciones derivadas de fenómenos únicos, tales como la estabilización de la tasa de referencia de la FED, el desenlace de la elección más competida en la historia de México, el desbordamiento de los

En consecuencia, la distribución conjunta para α , β y σ está dada por

$$p(\beta_1, \beta_2, \alpha | \Delta r_{pi}, \Delta r_{mi}) \propto \frac{1}{\sigma^{p+1}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (\Delta r_{pi} - \alpha - \beta \Delta r_{mi})^2 \right]$$

Esta distribución posterior conjunta es la base para llevar a cabo inferencias sobre α , β y σ .

Siguiendo los pasos que se expusieron en los capítulos anteriores, se obtiene para la distribución conjunta posterior, la proporción:

$$p(\alpha, \beta, \sigma | \Delta r_{pi}, \Delta r_{mi}) \propto \frac{1}{\sigma^{p+1}} \exp \left\{ -\left(\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sigma^2 + n(\alpha - \alpha^*)^2 + (\beta - \beta^*) \sum \Delta r_{mi} + \sum (\Delta r_{mi})^2 \right] \right) \right\}$$

de donde se advierte que la distribución posterior condicional para α y β (dado σ), tiene una estructura normal bivariada con media (α^*, β^*) y matriz de varianzas y covarianzas

$$\begin{bmatrix} n & \sum \Delta r_{mi} \\ \sum \Delta r_{mi} & \sum (\Delta r_{mi})^2 \end{bmatrix}^{-1} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \frac{\sum (\Delta r_{mi})^2}{n \sum (\Delta r_{mi} - \overline{\Delta r_{mi}})} & \frac{-\overline{\Delta r_{mi}}}{\sum (\Delta r_{mi} - \overline{\Delta r_{mi}})^2} \\ \frac{-\overline{\Delta r_{mi}}}{\sum (\Delta r_{mi} - \overline{\Delta r_{mi}})^2} & \frac{1}{\sum (\Delta r_{mi} - \overline{\Delta r_{mi}})^2} \end{bmatrix}$$

gravámenes por arbitraje en el mercado de capitales en china, las crisis inmobiliaria y de créditos, entre muchos otros.

Sin embargo, comentamos ya el problema principal de la anterior formulación: en general, el valor de σ^2 no se conoce. Así pues, procedemos a integrar (8.4) respecto de σ , para obtener la distribución marginal posterior de α y β . Dado que el resultado de esa integral tiene la estructura de una distribución t de Student, podemos echar mano de las propiedades de dicha distribución, y así arribar a las relaciones

$$\left[\frac{\sum(\Delta r_{mi} - \overline{\Delta r_m})}{s^2 \sum \left[\frac{(\Delta r_{mi})^2}{n} \right]} \right]^{1/2} (\alpha - \alpha^*) = t_v$$

y

$$\frac{(\beta - \beta^*)}{s / \left[\sum (\Delta r_{mi} - \overline{\Delta r_m})^2 \right]^{1/2}} = t_v$$

Siendo t_v una variable aleatoria que se distribuye como una t de Student con v grados de libertad.

Finalmente, con los anteriores resultados podemos ya hacer inferencias sobre α y β (utilizando tablas o paquetería de cómputo para calcular los valores de la distribución acumulativa t de Student para distintos niveles de significancia).

Así pues, tenemos que para nuestras series de Δr_m y Δr_p :

i	β_{1i}	β_{2i}
1	-0.0013	0.7561
2	-0.0015	0.9593
3	-0.0060	0.6333

en donde el subíndice denota el régimen al que pertenecen las series de datos.

Por último, sustituyendo en (8.5) y (8.6) se obtienen las distribuciones posteriores de β_{1i} y β_{2i} , cuyas curvas aparecen a continuación.



My Site

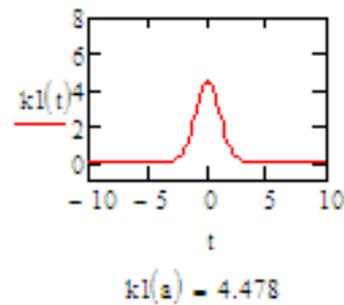
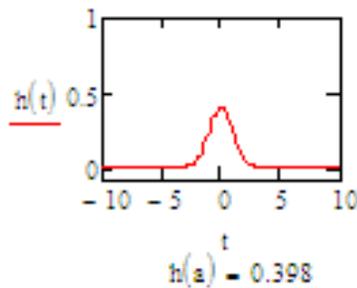
REGIMEN 1

a := .0013 b := 0.7561 g1 := 113

k1 := 11.25 k2 := 13.13
 $k1(t) := k1 \cdot h(t)$ $k2(s) := k2 \cdot h(s)$
 t := -10, -9.9..10 s := -10, -9.9..10

$$h(t) := \frac{\Gamma\left(\frac{g1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{g1}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi \cdot g1}} \left[1 + \frac{(t-a)^2}{g1} \right]^{-\frac{g1+1}{2}}$$

$$\int_{-10}^{10} h(t) dt = 1 \qquad \int_{-10}^{10} k1(t) dt = 11.25$$



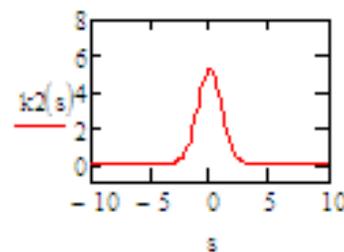
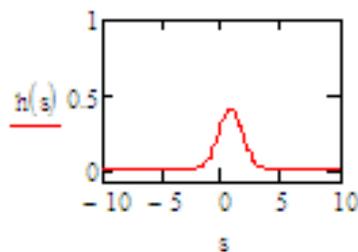
$$h(s) := \frac{\Gamma\left(\frac{g1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{g1}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi \cdot g1}} \left[1 + \frac{(s-b)^2}{g1} \right]^{-\frac{g1+1}{2}}$$

$$\int_{-10}^{10} h(s) ds = 1$$

$$\int_{-10}^{10} k2(s) ds = 13.13$$

h(b) = 0.398

k2(b) = 3.924





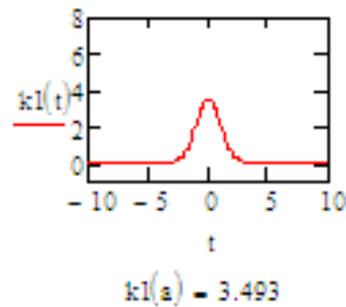
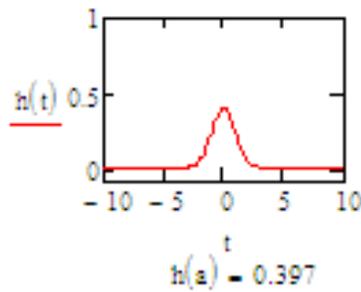
REGIMEN 2

a := 0.0015 b := 0.9593 g1 := 41

k1 := 8.81 k2 := 9.8
 k1(t) := k1·h(t) k2(s) := k2·h(s)
 t := -10, -9.9..10 s := -10, -9.9..10

$$h(t) := \frac{\Gamma\left(\frac{g1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{g1}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi \cdot g1}} \left[1 + \frac{(t-a)^2}{g1} \right]^{-\frac{g1+1}{2}}$$

$$\int_{-10}^{10} h(t) dt = 1 \qquad \int_{-10}^{10} k1(t) dt = 8.81$$



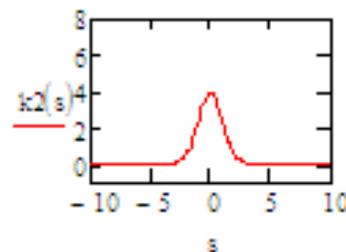
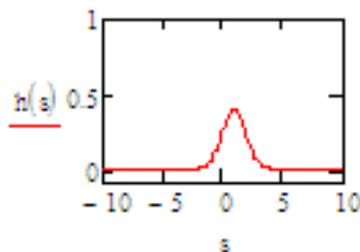
$$h(s) := \frac{\Gamma\left(\frac{g1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{g1}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi \cdot g1}} \left[1 + \frac{(s-b)^2}{g1} \right]^{-\frac{g1+1}{2}}$$

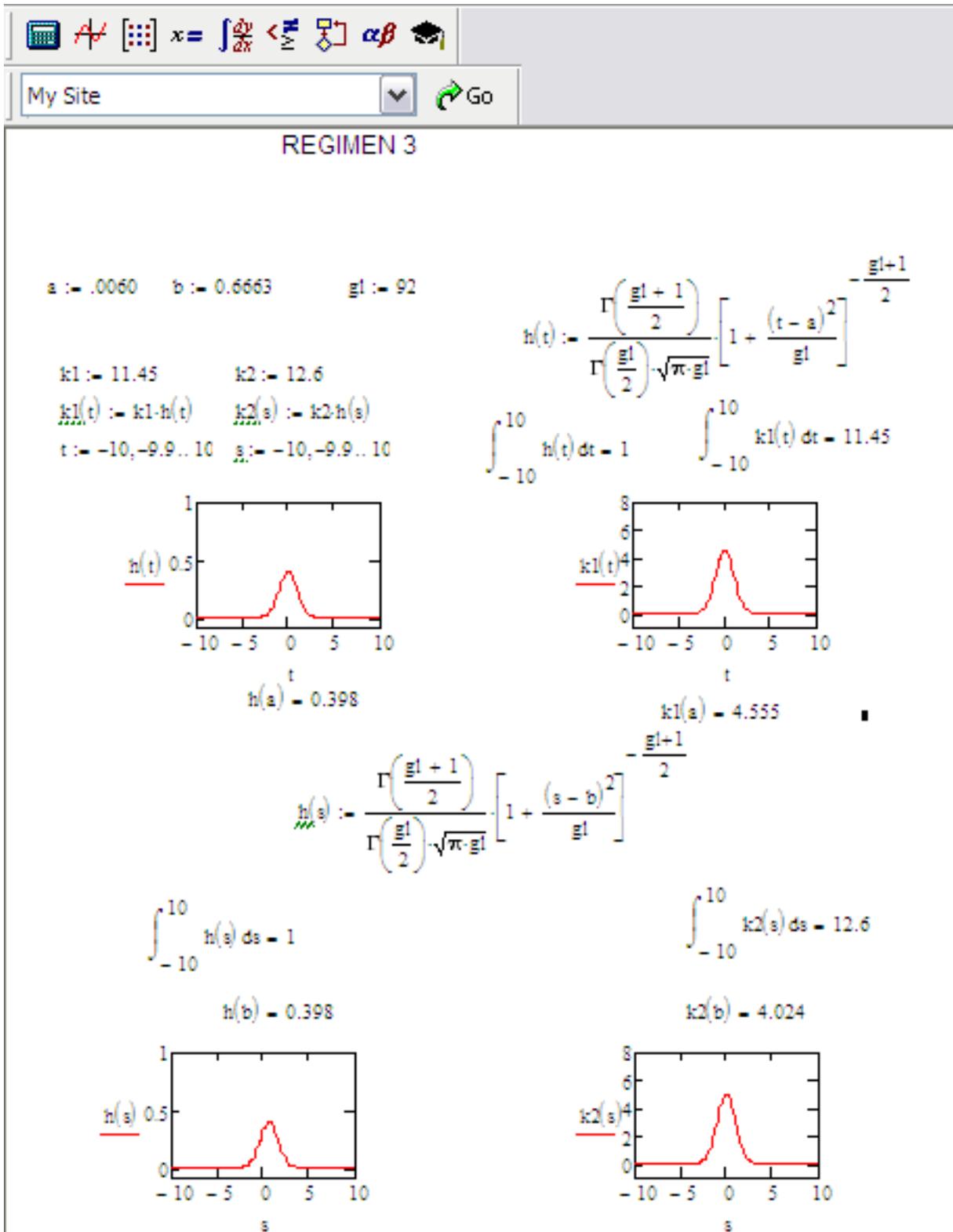
$$\int_{-10}^{10} h(s) ds = 1$$

$$\int_{-10}^{10} k2(s) ds = 9.8$$

$h(b) = 0.397$

$k2(b) = 2.442$





CONCLUSIONES

En ciencias económicas, la prueba y la implantación de un modelo dependen enteramente del propósito para el que haya sido formulado. Los requerimientos que deben establecerse para su aceptación deben considerar márgenes de imprecisión. *Es suficiente que el modelo propuesto signifique al menos una aportación con respecto a anteriores alternativas, para que su formulación esté plenamente justificada.*

El apego que el modelo deba tener con la realidad es de importancia relativa. Es decir, ante la gran complejidad que representan los problemas económicos reales, un análisis completo de todos los factores que determinan el comportamiento de las variables involucradas es generalmente imposible. En consecuencia, se requiere establecer una abstracción del fenómeno y una serie de hipótesis de trabajo. Como principio metodológico es conveniente centrarse en aquellos aspectos, relativamente pocos, que se consideren justificadamente como más importantes (Capítulos V, VI y VII).

2. La práctica más común en la formulación de modelos de regresión consiste en suponer que los coeficientes de las regresiones son constantes a lo largo de todo el

régimen. Sin embargo, hemos evidenciado porqué el análisis de información debe contemplar además la posibilidad de introducir consideraciones teóricas o empíricas que, en ciertos casos, conducen a la especificación de modelos con parámetros que presentan cambios. Es decir, modelos del tipo que describen las ecuaciones 2.1 y 2.2 para representar un cambio de parámetros. La consideración de dichos cambios estructurales ha resultado fundamental para determinar evidencia sobre la validez del CAPM para describir la relación entre las compensaciones al riesgo de mercado de emisoras del IPyC.

En ciencias económicas, la construcción y aplicación de modelos deben integrar componentes que consideren el análisis de estabilidad paramétrica y cambio estructural.

3. Cuando no existe certidumbre, los insumos de información en los que se basa el comportamiento económico no se componen únicamente del cálculo formal de los datos sobre acontecimientos pasados, aunque por lo general esto sea lo único que utiliza el investigador. Los verdaderos insumos son las creencias

probabilísticas subjetivas de los administradores de activos respecto de los hechos futuros. Tales creencias, si bien frecuentemente se acompañan de una variedad de cálculos, son interpretadas y luego complementadas con juicios intuitivos. *De ahí la importancia de integrar estructuras formales que traduzcan los factores subjetivos en términos probabilísticos.*

4. En los que corresponde a mercados emergentes, existen aún pocos desarrollos orientados a incorporar matemáticamente la incertidumbre en las decisiones de inversión de capital. Esto probablemente obedece al grado de complejidad que caracteriza a los procesos por los cuales las unidades económicas de decisión, sobre la base de experiencias pasadas, formulan expectativas del futuro en las que puedan basar su comportamiento.

Como se ha señalado, la estimación clásica de una probabilidad se basa en la frecuencia relativa de acontecimientos alternativos. En sentido estricto, se aplica justificadamente sólo a aquellos eventos de naturaleza repetitiva, con una distribución de frecuencias de la cual se puedan extraer observaciones y hacer inferencias estadísticas.

En contraste, la gran mayoría de los eventos que se estudian en ciencias económicas se refieren a situaciones únicas, por lo que no debiera supeditarse el análisis a la construcción frecuentista clásica de una distribución de probabilidades para los acontecimientos posibles.

Sin embargo, las unidades económicas no tienen otra alternativa que comprometerse con alguna decisión y actuar en consecuencia. En este proceso, la falta de información acerca de la probabilidad de un hecho no debe confundirse con falta de conocimiento acerca de ese hecho.

No obstante que muchos investigadores insisten en oponerse a traducir las creencias subjetivas en términos de probabilidades, hemos buscado en este trabajo aportar evidencia empírica no sólo acerca de la posibilidad, sino también de las ventajas que se logran al integrar factores subjetivos en las proposiciones probabilísticas.

5. A pesar de que los mercados de capitales están expuestos a gran incertidumbre derivada de las enormes oscilaciones que experimentan recurrentemente, algunas de las cuales pueden significar periodos muy largos de recuperación, es un hecho incuestionable que dichos

mercados seguirán siendo en el futuro el uno de los medios más importantes para impulsar el desarrollo económico de cualquier región del mundo. No existe mejor mecanismo que la adecuada operación de dichos mercados, para apuntalar el financiamiento de las empresas y dinamizar el desarrollo de los sectores productivos (Boulhol, 2009).

Sin embargo, las experiencias acumuladas especialmente en los últimos años, revelan la urgente necesidad de replantear el papel de las instituciones financieras y organismos públicos y privados para promover un sano desarrollo con estabilidad en los mercados de dinero. Por ello, es primordial que se lleve a cabo una profunda revisión de las políticas públicas, a fin de que los órganos de regulación y control financiero garanticen en el corto plazo, al menos los siguientes aspectos:

- Información más clara y oportuna sobre las condiciones de estabilidad estructural de los mercados financieros.
- Mayor transparencia con relación a los destinos finales de las inversiones de capital.
- Evaluación estricta de los pronósticos y recomendaciones de intermediarios financieros y calificadoras.
- Evaluación permanente de la pertinencia y eficacia del marco normativo que regula los mercados locales de capital.

-Mayor impulso al desarrollo de los cuerpos académicos y de investigación en ciencias económicas, así como mucha mayor vinculación entre éstos y las instancias responsables de las políticas públicas para la planeación y fomento al desarrollo económico.

6. Al margen de las diferencias entre las corrientes Clásica y Bayesiana, hemos enfatizado *la importancia de los esfuerzos orientados hacia el desarrollo y aplicación de herramienta analítica que permita aprovechar mejor la información (tanto objetiva como subjetiva), sobre los valores particulares de un parámetro* y así decidir de manera condicional sobre la mejor prueba estadística de hipótesis.

7. La teoría financiera moderna permite actualmente fundamentar con una amplia gama de criterios de elección la conformación de carteras de riesgo. Cada día es más variada y amplia esa posibilidad, evidenciándose aquí *al poner al servicio de las aplicaciones, importantes resultados que hasta hace poco solían ser usados sólo para complementar un marco descriptivo.*

BIBLIOGRAFÍA

Ahtola J., Ekholm A., Somervuori A. (1986), Bayes Estimates for the Price and Income Elasticities of Alcoholic Beverages, *Journal of Business & Economic Statistics*.

Andreou E., Pittis N., Spanos A., (2001). On Modelling Speculative Prices: The Empirical Literature. *Journal of Economic Surveys*.

Andreou E., Spanos A., (2003). Statistical Adequacy and the Testing of Trend Versus Difference Stationarity. *Econometric Reviews*.

Anwar S., Jamee M., (2005). Measuring Capacity Utilization in OECD Countries: A Cointegration Method. New School University.

Arrow K.J., Blackwell D. (1949), Bayes and Minimax Solutions of Sequential Decision Problems, *Econometrica*.

Avramov D., Chao J. C. (2006), An exact Bayes test of asset pricing with application to international markets. *Journal of Business*.

Bacon, D. W., and D. G. Watts (1971). Estimating the transition between two intersecting straight lines, *Biometrika*, Vol. 58, pp. 525-534.

Bai Jushan, Perron P. (2003), Computation and analysis of multiple structural change models, *Journal of Applied Econometrics*.

Bai Jushan, Perron P. (2003), Critical values for multiple structural change tests, *The Econometrics Journal*.

Barbuceanu M., Fox M. S. (1997), Integrating Communicative Action, Conversations and Decision Theory to Coordinate Agents. *Proceedings of Autonomous Agents*.

Barnett, V., and T. Lewis (1978). *Outliers in Statistical Data*, Wiley, New York.

Bartelsman E., Haltiwanger J. (2001), Labor Productivity: Structural Change and Cyclical Dynamics, *The Review of Economics and Statistics*.

Bassan B, Scarsini M. (1995), On the value of information in multi-agent decision theory. *Journal of Mathematical Economics*.

Bauman, W Scott; Miller, Robert E. Can managed portfolio performance be predicted?. *Journal of Portfolio Management*. Vol: 20 Iss: 4 Summer 1994 p: 31-40

Bayes T. (1763). An Essay toward Solving a problem in the Doctrine of Chance, Philosophical Transactions of the Royal Society of London.

Berk J. B., (1997) Necessary Conditions for the CAPM, Journal of Economic Theory.

Bernardo, J. M. (1979). Reference posterior distributions for Bayesian inference (with discussion), Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol. 41, No. 2, pp. 137-147.

Bewley T. F. (2002), Knightian decision theory. Decisions in Economics and Finance.

Bhattacharyya, G. K., and B. A. Jhonson (1968). Non-parametric tests for shift at unknown time point, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 39, pp. 1731-1734.

Biglova A., Ortobelli S., Rachev Z., Stoyanov S., (2004) Comparison among different approaches for risk estimation in portfolio theory, Journal of Portfolio Management.

Black, Fischer. Estimating expected return. Financial Analysts Journal. Vol: 49 Iss: 5 Sep/Oct 1993 p: 36-38

Board, John L G; Sutcliffe, Charles M S. Estimation methods in portfolio selection and the effectiveness of short sales restrictions: UK evidence . Management Science. Vol: 40 Iss: 4 Apr 1994 p: 516-534

Booth N. B., and A. F. M. Smith (1982). A Bayesian approach to retrospective identification of change points, Journal of Econometrics, Vol. 19, pp. 7-23.

Bossaerts P., Plott C, Zame W.R., (2007), Prices and Portfolio Choices in Financial Markets: Theory, Econometrics, Experiments, Econometrica.

Bouchaud J.P., Sornette D, Walter, Aguilar J. P., (1998), Taming large events: Optimal portfolio theory for strongly fluctuating assets, International Journal of Theoretical and Applied Finance.

Box, G.E.P., and G.C. Tiao (1973). Bayesian Inference in Statistical Analysis, Addison-Wesley, Reading, Mass.

Box, G. E. P., and G. C. Tiao (1975). Intervention analysis with applications to economic and environmental problems, Journal of American Statistical Association, Vol. 70, pp. 70-79.

Broemeling, L. D., and M. Land (1984). On forecasting with univariate autoregressive processes: a Bayesian approach. Communications in Statistics.

Brown, R. L., J. Durbin, and J. M. Evans (1975). Techniques for testing the constancy of regression relationships over time, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 37, pp. 149-163.

Bruce E. Hansen (1997), Approximate Asymptotic P Values for Structural-Change Tests *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 15, No. 1, pp. 60-67

Bruce E. Hansen (2001), The New Econometrics of Structural Change: Dating Breaks in U.S. Labor Productivity, *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 15, No. 4, pp. 117-128

Boulhol H. (2009). Do capital market and trade liberalization trigger labor market deregulation?. *Journal of International Economics*.

Burr, Barry B. Essential new tool emerges. *Pensions & Investments*. Vol: 21 Iss: 20 Oct 4, 1993 p: 17, 19+

Busenitz L. W., Barney J. B. (1997), Biases and heuristics in strategic decision. *Journal of Business Venturing*.

Bywaters D, Thomas D. G., (2006), Consumption, Wealth, and Indebtedness in the Context of Uncertainty: The Consumption Function Meets Portfolio Theory, *International Advances in Economic Research*.

Cadsby, Charles Bram. The CAPM and the Calendar: Empirical Anomalies and the Risk-Return Relationship *Management Science* Vol: 38 Iss: 11 Date: Nov 1992 p: 1543-1561

Carmichael, Benoit; Samson, Lucie. Excess returns determination: Empirical evidence from Canada. *Journal of Economics & Business*. Vol: 45 Iss: 1 Date: Feb 1993 p: 35-48

Carrasco M., (2002), Misspecified Structural Change, Threshold, and Markov-switching models, *Journal of Econometrics*, Volume 109, Number 2, pp. 239-273(35)

Cassidy, Steven M; Lamb, Reinhold P. Portfolio theory and the selection of companies by independent agents. *CPCU Journal*. Vol: 47 Iss: 1 Mar 1994 p: 44-48

Cha Y. (2005), DECISION-ANALYTIC APPROACH TO GLOBAL WARMING: AN APPLICATION OF BAYES'THEOREM. *International Review of Public Administration*.

Chamberlain G. (2000), Econometrics and decision theory. *Journal of Econometrics*.

Chamberlain G. (2007), Decision Theory Applied to an Instrumental Variables. *Econometrica*.

Chemmanur T. J., Fulghieri P. (1999), A theory of the going-public decision. *Review of Financial Studies*.

Chen M. H., (2003), Risk and return: CAPM and CCAPM, *The Quarterly Review of Economics and Finance*.

Cheol S. The benchmark beta, CAPM, and pricing anomalies. *Oxford Economic Papers*. Vol: 46 Iss: 2 Apr 1994 p: 330-343

Chernoff, H. and S. Zacks (1964). Estimating the current mean of a normal distribution which is subjected o changes over time. *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 35, pp. 999-1018.

Chin Choy, J. H., and L. D. Broemling (1980). Some Bayesian inferences for a changing linear model. *Technometrics*, Vol. 22, pp. 71-78.

Chow, G. (1960). Tests of the equality between two sets of coefficients in two linear regressions, *Econometrica*, Vol. 28, pp. 71-78.

Chow, K Victor; Denning, Karen C. On variance and lower partial movement betas: The equivalence of systematic risk measures. *Journal of Business Finance & Accounting*. Vol: 21 Iss: 2 Mar 1994 p: 231-241

Cooley, T., and E. Prescott (1976). Estimation in the presence of stochastic parameter variation, *Econometrica*, Vol. 44, pp. 167-184.

Cox J. C., Sadiraj V. (2006). Small-and large-stakes risk aversion: Implications of concavity calibration for decision theory. *Games and Economic Behavior*.

Dawid, A.P.,M. Stone, and J.V. Zidek (1973). Marginalization paradoxes in Bayesian and structural inference, *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 35, pp. 189-233.

DeJong D., Liesenfeld R., Richard J. R. (2005), Timing structural change: a conditional probabilistic approach, *Journal of Applied Econometrics*.

Donald W., K. Andrews (2003), Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point: A Corrigendum, *Econometrica*, Vol. 71, No. 1 (Jan., 2003), pp. 395-397

Dumas, Bernard (1994). Some models of the international capital market. *European Economic Review*. Vol: 38 Iss: 3, 4 Apr 1994 p: 923-931

Ezequiel M., Fox K., (1959), *Methods of correlation and regression analysis: linear and cuvilinear.*, edit. John Wiley.

Fama E. F., French K. R., (2003), *The CAPM: Theory and Evidence*, Center for Research in Security Prices.

Ferreira, P. E. (1975). A Bayesian analysis of a swithcing regression model: known number of regimes. *Journal of American Statistical Association*, Vol. 70, pp. 370-374.

Finney D. J., (1996), A note on the history of regression, *Journal of Applied Statistics*.

Flavin T. J., Limosani M. G., (2007), Fiscal, monetary policy and the conditional risk premium in short-term interest rate differentials: an application of Tobin's portfolio theory, *International Review of Economics & Finance*.

Fok D., Horvath C., Paap R., Franses P.H. (2004), Hierarchical Bayes Error Correction Model to Explain Dynamic Effects of Price Changes. *Journal of Marketing Research*.

Fontana G., Gerrard B. (2004), A Post Keynesian theory of decision making under uncertainty. *Journal of Economic Psychology*.

Forchini G. (2002), *Optimal Similar Tests for Structural Change for the Linear Regression Model*, *Econometric Theory*, Cambridge Univ. Press

Fralick S., Scott R. (1971), Nonparametric Bayes-risk estimation, *Information Theory*, *IEEE Transactions*.

Froyen, R. T., and R.N. Waud (1980). Further international evidence on output-inflation tradeoffs, *American Economic Review*, Vol. 70, pp. 409-421.

Gaffard J. L., Saviotti P. P. (2004) Innovation, Structural change and Growth, *Revue Économique*

Galagedera D., (2007), An alternative perspective on the relationship between downside beta and CAPM beta, *Emerging Markets Review*.

Gilboa I., Schmeidler D. (1995), Case-Based Decision Theory. *The Quarterly Journal of Economics*.

Gilboa I., Schmeidler D. (1997), Act similarity in case-based decision theory. *Economic Theory*.

Giordani P., Khon R., Van Dick D. (2007), A Unified Approach to Nonlinearity, Structural Change, and Outliers, *Journal of Econometrics*.

Goldfeld, S. M. (1973). The case of the missing money, Brookings Paper on Economic Activities, Vol 3, pp. 588-635.

Goldfeld. S. M., and R. E. Quandt (1978). Asymptotic tests for the constancy of regressions in the heterocedastic case, mimeograph.

Gómez J. P., Zapatero F., (2003), Asset pricing implications of benchmarking: a two-factor CAPM, The European Journal of Finance.

Hall M. (2007), A decision tree-based attribute weighting filter for naive Bayes. Knowledge-Based Systems.

Hamaker E., Dolan C., Molenaar P., (2005). Modeling of the Individual: Rationale and Application of Multivariate Stationary Time Series. Multivariate Behavioral Research.

Hansen B.E., Seo B., (2002), Testing for two-regime threshold cointegration in vector error-correction models, Journal of Econometrics.

Hawkins. D. M. (1977). Testing a sequence of observations for a shift in location, Journal of American Statistical Association, Vol. 72, pp. 180-186.

Higgins R. S., Johnson P. A. (2003), The mean effect of structural change on the dependent variable is accurately measured by the intercept change alone, Econometric Letters.

Hildreth C., Dent W., (1977), Maximum Likelihood Estimation in Random Coefficient Models, Journal of the American Statistical Association.

Hinkley, D. V., (1971). Inference in two phase regression, Journal of American Statistical Association, Vol. 66, pp. 736-793.

Hirshleifer J. (1958), On the Theory of Optimal Investment Decision. The Journal of Political Economy.

Hoadley B., (1970), A Bayesian Look at Inverse Linear Regression

Hogan, Paula H. Portfolio theory creates new investment opportunities. Journal of Financial Planning ISSN: 1040-3981. Vol: 7 Iss: 1 Jan 1994 p: 35-37

Holbert, D., and L. D. Broemling (1977). Bayesian inference related to shifting sequences and two-phase regression, Communications in Statistics, Vol. A6, No. 3, pp. 265-275.

Hsu, D. A. (1977). Tests for variance shift at unknown time point, Applied Statistics, Vol. 77, pp. 29-39.

Huang H. C., (2000), Tests of regimes-switching CAPM, Applied Financial Economics.

Huffman, Gregory W., (1992). An Analysis of Transaction Volume and Asset Pricing in a Representative Agent Economy. Quarterly Journal of Business & Economics. Vol: 31 Iss: 1 Date: Winter 1992 p: 86-108

Huffman, Gregory W., (1992). Information, Asset Prices, and the Volume of Trade. Journal of Finance. Vol: 47 Iss: 4 Date: Sep 1992 p: 1575-1590

Hyde S., Cuthbertson K., Nitzsche D., (2005), Resuscitating the C-CAPM: empirical evidence from France and Germany, International Journal of Finance and Economics.

Ilmakunnas, P., and H. Tsurumi (1984). Testing for parameter shifts in a regression model with two regimes of autocorrelated errors, Economic Studies Quarterly, Vol. 35, pp. 45-56.

Ilmakunnas, P., and H. Tsurumi (1985). Testing the Lucas hypothesis on the output-inflation tradeoffs, Journal of Business and Economic Statistics, Vol. 3 pp. 43-53.

Jay S., (1996) An examination approach to risk. Accountancy. Vol: 111 Iss: 1196 Apr 1993 p: 92-94

Jorion Ph.; Giovannini A., (1993), Time-series tests of a non-expected-utility model of asset pricing. European Economic Review. Vol: 37 Iss: 5 Date: Jun 1993 p: 1083-1100

Jung K., Kim Y. C., Stulz R. M. (1996), Timing, investment opportunities, managerial discretion, and the security issue decision. Journal of Financial Economics.

Kander, Z., and S. Zacks (1966). Tests procedures for possible changes in parameters of statistical distributions occurring at unknown time points, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 37, pp. 1196-1

Krämer Walter, Sibbertsen Philipp (2002), Testing for Structural Changes in the Presence of Long Memory, International Journal of Business

Krob J., Scholl H. R. (1997), A minimax result for the Kullback-Leibler Bayes risk. Econ. Quality Control.

Kroll Y., Levy H. (1992), Further Tests of the Separation Theorem and the Capital Asset Pricing Model. American Economic Review.

Larr P., Stampleman A. (1993), Concepts of portfolio management part 2: Understanding and using the model. *Journal of Commercial Lending*.

Lazarova S., (2005), Testing for structural change in regression with long memory processes, *Journal of Econometrics*.

Levy H., Samuelson P. A. (1992), The Capital Asset Pricing Model with Diverse Holding Periods. *Management Science*.

Lipman B. L. (1999), Decision Theory without Logical Omniscience: Toward an Axiomatic Framework for Bounded Rationality. *Review of Economic Studies*.

Lyons B. R. (200). Specific investment, economies of scale, and the make-or-buy decision: A test of transaction cost theory. School of Economic & Social Studies, University of East Anglia.

Maddala G. S., Kim I., (1999), Unit Roots, Cointegration, and Structural Change, *Themes in Modern Econometrics*, Sung Kyun Kwan University, Seoul.

Markowitz H., Fabozzi F, Gupta H., (2002) The Legacy of Modern Portfolio Theory, *The Journal of Investing*.

Masayuki G., Shigeichi H. (1999), Model selection based on Bayes decision theory and its application to change detection problem. *International Journal of Production Economics*.

Mayo D. G., Spanos A., (2004). *Methodology in Practice: Statistical Misspecification Testing*. *Philosophy of Science*.

Mayo D., Spanos A., (2006). *Philosophical Scrutiny of Evidence of Risks: From Bioethics to Bioevidence*. *Philosophy of Science*.

Mc Gee, V. E., and W. T. Carlton (1970). Piecewise regression. *Journal of the American Statistical Association*. Vol. 65, pp.

Minushkin Susan (2002), Banqueros and Bolseros: Structural Change and Financial Market Liberalisation in Mexico, *Journal of Latin American Studies*

Moen, D., and L. D. Broemling (1984). Testing for a change in the regression matrix of a multivariate linear mode. *Communications in Statistics*, Vol. 13, pp. 1521-1532.

Mongin P. (2001), A note on mixture sets in decision theory. *Decisions in Economics and Finance*.

Morana C., Beltratti A. (2004), Structural change and long-range dependence in volatility of exchange rates: either, neither or both?, *Journal of Empirical Finance*.

Neftci. S.N., Huang Y., Guo F. (2008). Swap curve dynamics across markets: Case of US dollar versus HK dollar . Journal of International Financial Markets, Institutions and Money.

Nelson L. (2002), Persistence and Reversal in Herd Behavior: Theory and Application to the Decision to Go Public. Review of Financial Studies.

Ostermark R. (1991), Vector Forecasting and Dynamic Portfolio Selection: Empirical Efficiency of Recursive Multiperiod Strategies. European Journal of Operational Research.

Page, E. S. (1957). On problems in which a change in parameter occurs at unknown point. Biometrika, Vol. 44, pp. 248-252.

Papell D., Prodan R. (2007), Restricted Structural Change and the Unit Root Hypothesis, Economic Inquiry.

Perron P., Qu Z. (2006), Estimating restricted structural change models, Journal of Econometrics.

Peterson J. (1995), Decision-making in the European Union: Towards a framework for analysis. Journal of European Public Policy.

Phillips P., (2001). Descriptive econometrics for non-stationary time series with empirical illustrations. Journal of Applied Econometrics. USA.

Pringue D.G. (1995), A Comparative Analysis Of Maximum Likelihood And Empirical Bayes Estimates Of Disease Risk. The Economic and Social Review.

Quandt R., (1958), The Estimation of the Parameters of a Linear Regression System Obeying Two Separate Regimes, Journal of the American Statistical Association.

Quandt, R. E. (1960). Tests of the hipotesis that a linear regression system obeys two-separate regimes, Journal of the American Statistical Association, Vol. 55, pp. 324-330.

Rahman F., Baten A., Uddin B., Zubayer M., (2006), Fama-Frenchs CAPM: An Empirical Investigation on DSE, Journal of Applied Sciences.

Raiffa, H., and R. Schlaifer (1961). Applied Statistical Decision Theory, Graduate School of Business Administration, Harvard University.

Reif J. (2007), Asymptotic behaviour of regression pre-test estimators with minimal Bayes risk. Journal of Econometrics.

Roehring C. S. (1984), Optimal critical regions for pre-test estimators using a Bayes risk criterion. *Journal of Econometrics*.

Rubinfeld D. L., Rodgers G. B. (1992), Evaluating the injury risk associated with All-Terrain Vehicles: An application of Bayes' rule. *Journal of Risk and Uncertainty*.

Salazar, D., L. D. Broemling, and A. Chi (1981). Parameter changes in a regression models with autocorrelated errors, *Communications in Statistics*, Vol. A10, pp. 1751-1758.

Semenov A., (2003), An Empirical Assessment of a Consumption CAPM with a Reference Level under Incomplete Consumption, Department of Economics of York University.

Shefrin H., Statman M., (2000), Behavioral Portfolio Theory, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*.

Sikyum L. (2007), Bayesian analysis of the factor model with finance applications. *Quantitative Finance*.

Smith J. E. (1995). Generalized Chebychev Inequalities: Theory and Applications in Decision Analysis. *Operations Research*.

Sorensen E. H. (1993), Currency hedging through portfolio optimization. *Journal of Portfolio Management*.

SPANOS A. (1989). Early empirical findings on the consumption function, stylized facts or fiction: a retrospective view. *Oxford Economic Papers*.

Spanos A., (1987). Error autocorrelation revisited: the AR (1) case. *Econometric Reviews*.

Spanos A., (1995). On normality and the linear regression model. *Econometric Reviews*.

Spanos A., (2007). Curve Fitting, the Reliability of Inductive Inference, and the Error-Statistical Approach. *Philosophy of Science*.

Spanos A., Hendry D., JamesReade J., (2008). Linear vs. Log-linear Unit-Root Specification: An Application of Mis-specification Encompassing. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*.

Spanos A., McGuirk A., (2001). Econometric Methodologies for the Model Specification Problem: Addressing Old Problems in the New Century: The Model Specification Problem from a Probabilistic Reduction Perspective. *American Journal of Agricultural Economics*.

Spanos A., McGuirk A., (2001). The Model Specification Problem from a Probabilistic Reduction Perspective.

Spanos A., McGuirk A., (2002). The problem of near-multicollinearity revisited: erratic vs systematic volatility. *Journal of Econometrics*.

Van den Berg, H., Jayanetti C., (1993). A novel test of the monetary approach using black market exchange rates and the Johansen-Juselius cointegration method. *Economics Letters*. USA.

Venegas-Martinez F. (2005), Bayesian Inference, Prior Information on Volatility Option Pricing: a Maximum Entropy Approach. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*.

Wald A., Wolfowitz J. (1950), Bayes Solutions of Sequential Decision Problems, *The Annals of Mathematical Statistics*.

Waugh F., (1935), A Simplified Method of Determining Multiple Regression Constants, *Journal of the American Statistical Association*.

West K., (2001). On Optimal Instrumental Variables Estimation of Stationary Time Series Models. *International Economic Review*.

Wold H. (1984), PLS Regression, *Encyclopedia of Statistical Sciences*

Yao J., Lin Y., Kong Y., Zhong M. (2004), Strength Pareto evolutionary algorithm based on Bayes with decision graphs. *Intelligent Control and Automation*.

Young M., Greig D., Wylie D. (1993), Drums along the efficient frontier. *Real Estate Review*.

Zeileis A., Leisch F., Kleiber C., Hornik K. (2005), Monitoring structural change in dynamic econometric models, *Journal of Applied Econometrics*.

Zeng Y. (2003), A Partially Observed Model for Micromovement of Asset Prices with Bayes Estimation. *Mathematical Finance*.