



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**METODOLOGÍA PARA EL CÁLCULO DEL PRECIO  
DEL GAS NATURAL CON UN ENFOQUE  
ESTOCÁSTICO**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**ACTUARIO**

**P R E S E N T A:**

**SOYNER VALENTÍN CONSUELOS RUIZ**

**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. ALBERTO CONTRERAS CRISTÁN**

**CO-DIRECTOR DE TESIS:  
DR. RICARDO GÓMEZ AÍZA**

**2009**





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1.-Datos del alumno

Consuelos

Ruiz

Soyner Valentín

59 74 16 09

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Actuaría

3-0024441-2

2.-Datos del tutor

Dr.

Alberto

Contreras

Cristán

3.-Datos del co-tutor

Dr.

Ricardo

Gómez

Aíza

4.- Datos sinodal 1

Dr.

Juan

González

Hernández

5.- Datos sinodal 2

Dra.

Eliane Regina

Rodrigues

6.- Datos sinodal 3

Dra.

Ruth Selene

Fuentes

García

7.-Datos de trabajo escrito

Metodología para el cálculo del precio del gas natural con un enfoque estocástico

122 páginas

2009

*Al Padre de los cielos*  
*A mi M*

# Agradecimientos

Antes de continuar sobre el camino de la vida, tomaré un pequeño descanso, beberé agua del río de la gratitud y probaré de la fruta de la reflexión.

Este es el espacio más personal de la Tesis, por tanto, entiendo que para el hipotético lector algo o la mayoría de lo comentado aquí le resulte ajeno, sin embargo, la tesis no abarca los últimos dos años, abarca mucho más.

Agradezco al PADRE de los cielos por dejarme vivir en esta era del tiempo y del espacio.

A mi abuelo Rafa por que a pesar del breve tiempo, el amor y la admiración duran una eternidad.

A mi Má y a Betza por que no la hemos rifado durante todos estos años juntos, espero que así sea por mucho más rato y bienvenidos MaryFer y Omar y los que vengan por mi parte.

Intentado dar cierta cronología:

Durante esos primeros 6 años en donde las cosas empiezan a cambiar y surge la condición de no poder jugar hasta que se acaba la bendita tarea, recuerdo a personas y les agradezco por apoyarme en esos comienzos. Profesores José Luis y Carmelita, y de mis primeros amigos Orlando, Edgar y Javier (posteriormente el Nassau).

La Etapa más divertida, más sana y más profética en donde algunos nos adelantamos a nuestro tiempo (y así seguimos) fue la secu. Agradezco a Nimbs, Miguel, Jael, el Cachorro, el Don, Victor, Nassau, Radditz, Pawis, a la pandilla, a los 7, a los Rebooks y a todas las sectas raras que se dieron.

A los amigos de la familia, quienes siempre nos han apoyado: Jesús Atempa, Doña Ernestina, Don José, Gaby, Maritza, la familia Reyes-Davalos, Manuela, Juventina, los Moncada, la familia San Agustín, Don Manuel, etc.

A la familia, Placida, Olivia, Los Yopis, Los Mine, Los Panchos.

Después había que comenzar a pintarse la piel Azul por que el corazón ya era dorado, así que se comenzó siendo un cachorro de la Prepa 2. Agradecimientos para: Fili el calvo, el Clon, el Morro, Paul el Rosa, Carmen, Pilar de Pilylandia, Emmanuel, Laura T. y otros.

Inició el viaje al pedregal, mi segunda casa: La Facultad de Ciencias, mentiría si digo que me pasé todo el tiempo en el Amoxcalli, quizá fue más tiempo en el Topotlachco. Ahí conocí la magia de ser universitario. Por esos maravillosos 4 años gracias: Bola, Carlos el Sabroson, Bad Boy, Milky, el Abuelo, Cítla, Juan, Condor, a los Actuarios Neza, Alfredo, Erendira, Monky, Manatí, ...

A los chavos de teatro, Yuri, Pily, Azalia, Gabriel.

A la UNAM, por que vivirla desde adentro te llena el corazón y te hace vibrar con el Goya. SOMOS PUMAS!!!! (o no Bola?)

A los chavos chavos del HH: Mitz, Dayana, Ivo, Adris, Karys, Mayris, Lili, Frank 1 y Frank 2, gracias por devolverme la diversión.

A José Apolinar y a su mamá y a todo el Borussia.

Principalmente quiero agradecer a Alejandro Cuevas, por que independientemente de que esta Tesis esta basada en uno de sus artículos, lo considero un amigo y aprendí mucho durante mi Servicio.

Gracias a Ricardo y a Alberto por su gran apoyo, consejos, tiempo, motivación, aportes, etc. para la realización de este trabajo. Sin ustedes no hubiera sido posible. Además son de poca .... que gusto ha sido trabajar con ustedes.

A Ma. Emilia por que de no ser por su curso de procesos, esto sería una historia totalmente diferente.

A los Doctores Juan, Eline y Ruth, por sus comentarios, aportaciones y tiempo para este proyecto.

Finalmente a Watson Wyatt, en especial a Pedro Sánchez y Jorge Alarcón por que me han brindado el apoyo necesario para poder iniciar mi vida profesional y brindarme los tiempos para concluir este trabajo de Tesis.

Por tanto para todos, la palabra más importante:

**G R A C I A S**

SOY

Es momento de retomar el camino ...

# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>vii</b>
<b>Introducción</b>	<b>ix</b>
<b>1. Probabilidad y Variables Aleatorias</b>	<b>1</b>
1.1. Definición de Probabilidad . . . . .	2
1.2. Probabilidad de eventos condicionados e independientes . . . . .	4
1.2.1. Probabilidad de eventos condicionados . . . . .	4
1.2.2. Probabilidad de eventos independientes . . . . .	6
1.3. Variables Aleatorias . . . . .	6
1.3.1. Variables Aleatorias Discretas . . . . .	7
1.3.2. Variables Aleatorias Continuas . . . . .	8
1.4. Esperanza y Momentos . . . . .	9
1.4.1. Esperanza . . . . .	9
1.4.2. Momentos . . . . .	11



---

1.5. Vectores Aleatorios . . . . .	12
1.5.1. Distribución Conjunta . . . . .	13
1.5.2. Densidad Conjunta . . . . .	13
1.5.3. Distribución Marginal . . . . .	14
1.6. Variables Aleatorias Condicionadas . . . . .	15
1.6.1. Variables Aleatorias Discretas Condicionadas . . . . .	15
1.6.2. Variables Aleatorias Continuas Condicionadas . . . . .	16
1.7. Función Generadora de Momentos . . . . .	17
1.8. Transformación de Variables Aleatorias . . . . .	18
1.9. Intervalos de Confianza . . . . .	20
<b>2. Procesos Estocásticos</b>	<b>23</b>
2.1. Introducción a los Procesos Estocásticos . . . . .	23
2.1.1. Definición de Proceso Estocástico . . . . .	23
2.1.2. Caminatas Aleatorias . . . . .	25
2.2. Cadenas de Markov . . . . .	27
<b>3. Algoritmo EM</b>	<b>29</b>
3.1. Estadística Bayesiana . . . . .	29
3.1.1. Distribución <i>a priori</i> . . . . .	30
3.1.2. Distribución predictiva <i>a priori</i> . . . . .	31

---

3.1.3.	Distribución <i>posterior</i> o final . . . . .	31
3.1.4.	Distribución predictiva posterior . . . . .	32
3.2.	El Algoritmo EM . . . . .	33
3.2.1.	Descripción del algoritmo . . . . .	34
<b>4.</b>	<b>Proceso estocástico del precio del gas natural...</b>	<b>35</b>
4.1.	Antecedentes . . . . .	35
4.2.	Incremento de los logaritmos del precio de un instrumento . . . . .	36
4.3.	Distribución muestral de los logaritmos de las tasas de rendimiento . . . . .	39
4.4.	Distribución teórica de los logaritmos de las tasas de rendimiento . . . . .	41
4.5.	Distribución marginal de los precios . . . . .	42
<b>5.</b>	<b>Evaluación de un proyecto de inversión de generación de electricidad...</b>	<b>51</b>
5.1.	Valor capitalizable . . . . .	52
5.2.	Valor presente . . . . .	53
5.3.	Costo Unitario Nivelado de Generación (CUNG) . . . . .	53
5.4.	Valor esperado del CUNG . . . . .	56
<b>6.</b>	<b>Aplicación</b>	<b>65</b>
6.1.	Precios del Gas Natural . . . . .	65
6.2.	Análisis de los datos . . . . .	70
6.3.	Estimación de los Parámetros . . . . .	75

---

6.4. Valor Presente de la Esperanza del Precio del Gas Natural . . . . .	78
6.5. Intervalo de Confianza para el Precio del Gas Natural . . . . .	81
6.6. Cálculo del CUNG . . . . .	83
6.6.1. Costo Nivelado del MWh Neto Generado por Concepto de Inversión .	84
6.6.2. Costo Nivelado del MWh Neto Generado por Concepto de Operación y Mantenimiento . . . . .	86
6.6.3. Costo Nivelado del MWh Neto Generado por Concepto de Combustible	86
6.6.4. Costo Total del MWh Neto Generado . . . . .	88
<b>Conclusiones</b>	<b>89</b>
<b>A. COPAR de Generación 2006</b>	<b>91</b>
A.1. Costos totales de generación . . . . .	91
A.2. Descripción de tecnologías: Unidades turbogás . . . . .	92
A.3. Costos de Inversión . . . . .	94
A.3.1. Conceptos de Costo Directo, Indirecto y Actualizado . . . . .	94
A.3.2. Estructura del Costo de Inversión . . . . .	96
A.4. Características y costos de los combustibles . . . . .	96
A.4.1. Precios externos de referencia . . . . .	98
A.4.2. Equivalencias . . . . .	99
A.5. Costos de Operación y Mantenimiento . . . . .	99
A.6. Costos, Consumos y Usos de Agua . . . . .	101

---

A.6.1. Costos del agua . . . . .	101
A.6.2. Consumos de agua . . . . .	102
A.7. Costo total del MWh Neto Generado . . . . .	102
A.7.1. Metodología de evaluación . . . . .	103
<b>B. Programas</b>	<b>109</b>
B.1. Funciones Básicas en R . . . . .	109
B.2. logt.R . . . . .	110
B.3. Algoritmo EM . . . . .	111
B.3.1. mainP.R . . . . .	111
B.3.2. em.R . . . . .	112
B.3.3. makeweight1.R . . . . .	113
B.3.4. makeweight2.R . . . . .	113
B.3.5. pe.R . . . . .	114
B.4. plotmix.R . . . . .	114
B.5. MetNewNorm.R . . . . .	115
<b>C. Glosario de Términos Técnicos y Definiciones</b>	<b>117</b>



# Prefacio

Realizar una tesis a mi gusto siempre ha sido una forma elegante de concluir una etapa de desarrollo académico, por tanto, no podía dejar pasar la oportunidad para realizar una.

Una vez teniendo la motivación, era necesario encontrar un tema que me involucrara de tal forma, que la idea de desistir fuera nula.

Elegir un tema no fue fácil, había tantos temas por desarrollar, sin embargo, la idea siempre fue buscar un proyecto que permitiera utilizar las herramientas aprendidas en la facultad.

Durante mi servicio social en la Secretaría de Energía, realizado bajo la tutoría del Físico Alejandro Cuevas, participe en el desarrollo de su artículo llamado *Técnica para la evaluación del costo unitario nivelado de generación con un enfoque estocástico*. El modelo financiero que se plantea en dicho artículo me pareció novedoso e interesante, además de que empleaba conceptos con los que uno se va familiarizando durante su permanencia en Ciencias, razón por la cual me intereso estudiarlo más a fondo y desarrollarlo.

Se puede dividir este trabajo de Tesis en tres principales partes, en la primera parte están las bases matemáticas que sustentan dicho modelo, en la segunda parte el desarrollo del modelo y finalmente en la tercera la aplicación.

¿Que más puedo decir ? Disfrute hacer este trabajo, aprendí nuevos temas que sirvieron para dar mayor fuerza a la modelación, se cumplieron a mi parecer los objetivos trazados y finalmente este trabajo está aquí presente.

Le agradezco al hipotético lector tomarse su tiempo para leer este trabajo, y espero que sea de su agrado y utilidad.

# Introducción

La carrera de Actuaría es bastante interesante por el campo tan grande en donde puede aplicar sus conocimientos el estudiante, esto gracias a la base matemática con la que cuenta la carrera. Dentro de las principales áreas laborales para el Actuario se encuentran los Seguros, Pensiones, Finanzas, Estadística, Demografía, Investigación de Operaciones y en general cualquier área en donde el problema pueda ser representado mediante una modelación matemática con la idea de encontrar la solución a través de esta.

En el presente trabajo se menciona y desarrolla el modelo propuesto por el Físico Alejandro Cuevas para el cálculo del valor presente de los precios del gas natural en un horizonte de largo plazo, este valor presente es necesario para la estimación de los costos que puede tener una planta de generación de energía eléctrica que utiliza como combustible base gas natural.

Debido a que los precios del gas natural presentan incertidumbre a lo largo del tiempo es necesario tener una estimación a cerca de los ellos, por tal motivo se utilizará un modelo en donde se buscará obtener la esperanza del valor presente del precio del gas natural a lo largo de un horizonte de tiempo dado.

En el modelo a desarrollar se utilizará la hipótesis de que el precio del gas natural en un determinado momento puede ser representado como el precio que tomó en un momento anterior más algún incremento (decremento) y si se piensa de esta forma se puede llegar a tener la proyección de los precios a partir del precio actual y una vez estos se traen a valor presente. Lo anterior es la idea principal del modelo, se puede adelantar que para estos pasos se utilizará la propiedad de Markov, para modelar los incrementos (decrementos) se supondrán que estos serán el logaritmo del precio actual sobre el precio anterior y nos dará como resultado variables aleatorias independientes que seguirán una distribución de mezcla de normales (la modelación mediante mezcla de normales es ampliamente probada en el ámbito de la investigación y favorecida por su flexibilidad para aproximar diversas

distribuciones), una vez que se tenga el precio del gas natural en términos del precio anterior se recurrirá a la llamada inducción hacia atrás (empleada en Programación Dinámica) para conocer la expresión del valor esperado de los precios en el horizonte condicionados al precio que es conocido en el momento en que se inicia la proyección y una vez que tenemos estos precios esperados, serán traídos a valor presente con la fórmula conocida en matemáticas financieras.

Como se puede apreciar se utilizarán varias herramientas matemáticas que se van aprendiendo durante el transcurso de la carrera además de otras.

A grandes rasgos se utilizará herramientas de probabilidad, procesos estocásticos, estadística, matemáticas financieras, programación, programación dinámica, etc.

El presente trabajo está estructurado iniciando con bases matemáticas que dan sustento al modelo, posteriormente el desarrollo del modelo y en la parte final la aplicación del mismo. Adicionalmente se presentan Anexos con información que complementa el desarrollo del trabajo.



# Capítulo 1

## Probabilidad y Variables Aleatorias

En este capítulo presentamos de manera muy breve los conceptos básicos de probabilidad y de variables aleatorias que serán fundamentales a lo largo de la tesis y con los cuales podremos describir el modelo que presentamos más adelante. No es la intención la de presentar un compendio completo acerca de estos temas que normalmente se adquieren en cursos de licenciatura. Los hemos incluido con la finalidad de hacer un trabajo autocontenido. Existen muchas fuentes en las que el lector podrá encontrar tratamientos detallados. En nuestro caso, nos hemos basado en las notas de curso de las profesoras Carrasco y Eslava y en el libro de Rincón (véase las referencias [3, 4, 5] respectivamente).

El contenido de este capítulo es el siguiente. Iniciaremos la primera sección con el tema de probabilidad, dándose una interpretación y dos diferentes definiciones: (1) una interpretación clásica, (2) una definición de carácter *uniforme* y finalmente (3) una definición axiomática general (esta será la que adoptaremos a lo largo del trabajo). En la segunda sección definiremos y enunciaremos algunas de las características de la probabilidad condicional, lo cual nos lleva a definir el concepto de independencia. En la sección tres observamos la distinción de los dos tipos de variables aleatorias: las discretas y las continuas. En la sección cuatro introducimos los conceptos de esperanza y momentos. Más adelante, en la quinta sección, regresamos nuevamente a las variables aleatorias, pero con la característica de que ahora se tratarán cuando estas son condicionadas. Posteriormente, en las secciones 1.7 y 1.8, hablaremos de la función generadora de momentos y de la transformación de variables aleatorias, siendo estos dos últimos temas esenciales para el desarrollo del modelo que se describe en esta tesis. Finalmente se dará una breve definición de un intervalo de confianza.

## 1.1. Definición de Probabilidad

A continuación se darán la interpretación y las dos diferentes definiciones de probabilidad que mencionamos anteriormente. La primera es una motivación al concepto de probabilidad. La segunda se basa en esta motivación para poder presentar una definición más precisa, pero incluye solamente a espacios de eventos de cardinalidad finita y que están uniformemente distribuidos. La tercera definición, la axiomática, es la más general y la que asumiremos en la tesis.

1. **Interpretación clásica:** Esta interpretación de probabilidad viene dada por la forma de como es obtenida. Está basada en el resultado de un experimento el cual se realiza repetidamente. Dicho de otra forma, definimos

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n},$$

donde  $\mathbb{P}(A)$  representa la probabilidad de que ocurra el evento  $A$ ,  $a_n$  es el número de veces que el resultado pertenece al conjunto de eventos  $A$  hasta el intento  $n$ ,  $n$  es el número total de intentos realizados. El problema de esta interpretación es que resulta poco práctica ya que necesitan muchos intentos para definir la probabilidad del evento  $A$ , es decir, depende de  $n$ . También presenta polémica si nos preguntamos acerca de la existencia del límite que la define. El que un número suficiente de experimentos bastarían para estimar la probabilidad del evento  $A$  es un hecho que requiere de demostración.

2. **Probabilidad uniforme:** Básicamente se trata de una definición, que se propone antes de realizar el experimento y supone que los resultados que se esperan son equiprobables (o uniformemente distribuidos), o sea, tienen la misma probabilidad de ocurrir. Matemáticamente, la probabilidad de que resulte un evento  $A$  viene dada por

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(a)}{\text{card}(\Omega)},$$

donde  $\text{card}(Z)$  denota la cardinalidad de conjunto  $Z$ , es decir,  $\mathbb{P}(A)$  representa una “medida” de que el evento  $A$  ocurra dentro del “espacio” de resultados  $\Omega \{A \subseteq \Omega\}$ . Entonces  $\text{card}(a)$  se refiere a la cantidad de resultados que pertenecen al evento  $A$ , cada uno de los cuales asumimos que tienen la misma probabilidad de ocurrir, y por otro lado,  $\text{card}(\Omega)$  es la cantidad de todos los posibles resultados del experimento.

### 3. *Definición Axiomática*

**Espacio muestral.** Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento y por lo general se le denota  $\Omega$ . Un resultado en particular pero no especificado de  $\Omega$  puede ser denotado por  $\omega$ .

**Eventos.** Un evento es un subconjunto del espacio  $\Omega$ . En particular,  $\Omega$  es llamado un evento cierto, y su complemento  $\Omega^c$  es llamado evento imposible, que se suele denotarse por  $\Omega^c = \emptyset$ , el conjunto vacío. Si dos eventos  $A$  y  $B$  satisfacen que  $A \cap B = \emptyset$ , entonces se dice que son *ajenos*. Se requiere que la familia de eventos sea cerrada bajo intersecciones y uniones numerables. Por lo cual se define lo siguiente:

**Familia de eventos ( $\sigma$ -álgebra).** Una colección de eventos es llamada *familia de eventos* y se denota por  $F$ , si satisface

- a)  $\emptyset$  pertenece a  $F$ ,
- b) Si  $A$  pertenece a  $F$ , entonces  $A^c$  pertenece a  $F$ ,
- c) Si  $A_n$  pertenece a  $F$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , entonces  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  pertenece a  $F$ .

(La familia de eventos puede ser llamada también una sigma álgebra y suele denotarse por  $\sigma$ -álgebra).

La idea es asignar una probabilidad a un evento en  $F$ , por lo tanto la probabilidad es una función  $\mathbb{P}: F \rightarrow [0, 1]$  que a cada evento asigna su probabilidad. Podemos pensar que la probabilidad está relacionada con la idea de proporción, lo cual es consistente con las primeras dos interpretaciones presentadas anteriormente.

A continuación se mencionan las propiedades de la función  $\mathbb{P}(\cdot)$  que debe satisfacer:

**Medida de Probabilidad** La función  $\mathbb{P}(\cdot)$ , definida sobre los eventos en una familia  $F$ , es una *medida de probabilidad* si:

- a)  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ,
- b)  $\mathbb{P}(A) \geq 0, \forall A \in F$ ,
- c) si  $A_j \cap A_k = \emptyset$  para  $j, k \in \mathbb{N}$  distintas, entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n),$$

donde  $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$  puede ser una colección de eventos finitos o contables.

La función  $\mathbb{P}(\cdot)$  puede ser llamada también una distribución de probabilidad.

La estructura compuesta por el espacio  $\Omega$  junto con su familia de eventos  $F$  y su medida de probabilidad  $\mathbb{P}(\cdot)$  es llamada un *Espacio de Probabilidad*  $(\Omega, F, \mathbb{P})$ .

De la definición axiomática podemos deducir algunas relaciones muy útiles e importantes entre las probabilidades de diversos eventos. A continuación presentamos una proposición en la que se enuncian algunas de estas relaciones, utilizaremos letras mayúsculas para denotar eventos en  $F$ . Sus demostraciones se dejan como ejercicio <sup>1</sup>.

**Proposición 1.1.** *Sea  $(\Omega, F, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad. Sean  $A, B, A_1, A_2, \dots \in F$  eventos.*

1.  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ .
2.  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .
3.  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .
4.  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ , si  $A \subseteq B$ .
5.  $\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) - \sum_{k < l} \mathbb{P}(A_k \cap A_l) + \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^n A_k)$ .

## 1.2. Probabilidad de eventos condicionados e independientes

### 1.2.1. Probabilidad de eventos condicionados

Sea  $(\Omega, F, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad. Dados dos eventos  $A, B \in F$  con  $\mathbb{P}(B) > 0$ , se define la *probabilidad de que ocurra A dado que ya se conoce que ocurrió B* por:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \quad (1.1)$$

De manera más general, sea  $\mathbb{P}(B) > 0$  o no, se puede escribir así:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B). \quad (1.2)$$

---

<sup>1</sup>Las demostraciones se pueden encontrar en el libro del Dr. Rincón, ver referencia [5]

*Ejemplo 1.1.* Sea  $\Omega$  finito. Es muy usual trabajar con la regla de *equiprobabilidad* o *probabilidad uniforme*, es decir, cada punto del espacio es igualmente probable. En este caso cualquier elemento de  $\Omega$  tiene la probabilidad  $\frac{1}{K}$ , donde  $K \in \mathbb{N}$  es el número de elementos de  $\Omega$  y si  $A \subset \Omega$ ,  $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{K}$ , donde  $\#A$  es el número de elementos de  $A$ . Si ahora se tienen dos eventos  $A, B \neq \emptyset$ ,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\#(A \cap B)}{\#B}.$$

Es decir, ya que se sabe que ocurrió  $B$ , es inútil contar los elementos de  $A \cap B^c$ , sólo es de interés saber cuántos elementos tiene el conjunto  $A \cap B$ , por lo cual se debe dividir entre  $\#B$ , el número de resultados posibles.

Mediante estas definiciones se puede llegar a obtener la siguientes igualdades:

1. *La regla del complemento,*

$$\mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B).$$

2. *La regla de partición (simple),*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c).$$

3. *La regla de partición (general),*

Si  $B_j \cap B_k = \emptyset$  para  $j \neq k$ , y  $A \subseteq \bigcup_{r \in I} B_r$  entonces

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{r \in I} \mathbb{P}(A|B_r)\mathbb{P}(B_r).$$

donde  $I$  es un conjunto finito o numerable.

4. *La regla de la multiplicación,*

La forma elemental  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$  en (1.2) es fácilmente extendida a una forma más general

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{r=1}^{n+1} A_r\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}\left(A_{n+1} \mid \bigcap_{r=1}^n A_r\right).$$

5. *La regla de Bayes.*

Se obtiene combinando la forma extensa de la regla de partición con la expresión (1.1).

Si  $A_j \cap A_k = \emptyset$  para  $j \neq k$ , y  $B \subseteq \bigcup_{r=1}^n A_r$ , y  $\mathbb{P}(B) > 0$ , entonces

$$\mathbb{P}(A_r|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_r)\mathbb{P}(A_r)}{\sum_{r=1}^n \mathbb{P}(B|A_r)\mathbb{P}(A_r)}. \quad (1.3)$$

### 1.2.2. Probabilidad de eventos independientes

Si se quiere definir el concepto de eventos independientes, es razonable pedir que la información sobre uno de ellos no afecte la probabilidad del otro, es decir, dos eventos  $A$  y  $B$  son *independientes* si

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A),$$

es decir,

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A).$$

Esto motiva que definamos a  $A$  y a  $B$  como independientes, incluso si  $\mathbb{P}(B) = 0$ , si se satisface

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Aún más general, una familia de eventos  $(A_i : 1 \leq i \leq n)$  es independiente si

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \dots \mathbb{P}(A_{i_r}).$$

para toda selección  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$ .

## 1.3. Variables Aleatorias

*Definición 1.1.* Sea  $(\Omega, F, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad. Una función  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una *variable aleatoria* si para cualquier real  $x$  se tiene que :

$$[X \leq x] := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in F$$

En otras palabras, una variable aleatoria es una función evaluada numéricamente y está definida sobre un espacio muestral. Es una regla que asocia un valor numérico a cada suceso de un experimento.

*Definición 1.2.* La *función de distribución (acumulativa)*  $F_X(x)$  de  $X$  se define por

$$F_X(x) = \mathbb{P}(\mathcal{B}_x),$$

donde

$$\mathcal{B}_x = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}.$$

Tenemos que para toda  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x).$$

y para todas  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $b > a$ ,

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Todas las variables aleatorias tiene una función de distribución. Para nuestros fines existen dos tipos de variables aleatorias de dimensión uno que utilizaremos; las discretas absolutas y las continuas absolutas (no tomaremos las continuas singulares).

### 1.3.1. Variables Aleatorias Discretas

Una *variable aleatoria discreta* toma solamente valores en algún subconjunto numerable  $D$  de  $\mathbb{R}$ . Frecuentemente este subconjunto  $D$  es un subconjunto de los números enteros.

Entonces la probabilidad de que  $X$  tome algún valor dado  $x$  en  $D$  es denotada por

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(V_x),$$

donde  $V_x$  es el evento  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ . La función  $f(x)$  es llamada función de probabilidad de  $X$  solo si  $\sum_x f(x) = 1$ , también puede ser denotada por  $f_X(x)$ .

Trabajando con la función de probabilidad  $f_X(x)$  de  $X$ , para algún subconjunto  $C$  de los posibles valores  $D$  de  $X$ ,

$$\mathbb{P}(X \in C) = \sum_{x \in C} f_X(x). \quad (1.4)$$

En particular,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{y \leq x} f_X(y). \quad (1.5)$$

Como vemos, la función de distribución  $F(\cdot)$  puede ser obtenida de la función de probabilidad  $f(\cdot)$ , y viceversa.

### 1.3.2. Variables Aleatorias Continuas

Una variable aleatoria que no es discreta se dice que es una *variable aleatoria continua* y su función de distribución  $F_X(x)$  se escribe de la siguiente forma:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u)du, \quad (1.6)$$

y además la función  $f_X(x)$  es definida para toda  $x$  (dicha función  $f$  no necesariamente existe, sin embargo en este trabajo sólo consideraremos variables aleatorias cuya distribución está determinada por una función de densidad) y cumple las siguientes propiedades:

- $F_X(x) \leq F_X(y)$  si  $x \leq y$ , es decir, es monótona creciente
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$

entonces  $f_X(x)$  es llamada la *función de densidad* de  $X$ .

La función de densidad  $f_X(x)$  tiene la propiedad de que en un intervalo  $(a, b)$ ,

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(u)du. \quad (1.7)$$

De aquí se sigue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1. \quad (1.8)$$

A continuación se presenta un ejemplo de este tipo de variables.

*Ejemplo 1.2 (Función de densidad normal).* Para constantes  $\mu$  y  $\sigma^2 > 0$ ,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (1.9)$$

Usualmente, la distribución normal se denota por  $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ . Un caso especial de la Normal es cuando  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = 1$ , la cual se llama distribución normal estandarizada, y se utiliza la siguiente notación



$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad (1.10)$$

y entonces

$$\Phi(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \phi(u) \delta u. \quad (1.11)$$

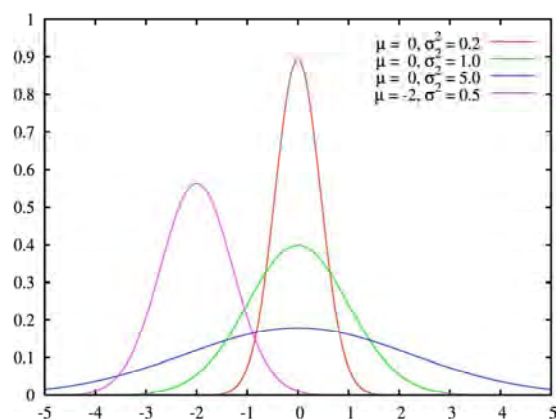


Figura 1.1: Gráfica de diversas densidades normales

En la figura 1.1 se presentan diversas gráficas de la densidad normal para distintos valores  $\mu$  y  $\sigma^2$ .

## 1.4. Esperanza y Momentos

En esta sección se dará las definiciones tanto de esperanza como de los momentos para variables aleatorias discretas y continuas.

### 1.4.1. Esperanza

La *esperanza* o *valor esperado*, trata de dar la idea de un promedio de los valores que toma una variable aleatoria, ponderando cada valor con su respectiva probabilidad de ocurrencia.

Debido a que estamos considerando dos tipos de variables aleatorias (discretas y continuas), cada una tiene una expresión de esperanza. A continuación se mencionarán ambas expresiones.

Para una variable aleatoria discreta:

*Definición 1.3.* Sea  $X$  una variable aleatoria discreta con función de probabilidad  $f(k)$ , con  $k \in A$ . El *valor esperado (o media)* de  $X$  es denotado por  $\mathbb{E}[X]$  y se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in A} kf(k), \quad (1.12)$$

siempre que haya convergencia absoluta, es decir,

$$|\mathbb{E}[X]| < \infty \Leftrightarrow \sum_{k \in A} |k|f(k) < \infty,$$

(si esta condición falla, entonces  $X$  no tiene una media finita o no está definida).

Para el caso de una variable aleatoria continua:

*Definición 1.4.* Sea  $X$  una variable aleatoria continua con función de densidad  $f(x)$ , tal que  $x \in A$ . El *valor esperado (o media)* de  $X$  es denotado por  $\mathbb{E}[X]$  y se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{x \in A} xf(x)dx, \quad (1.13)$$

siempre que,

$$|\mathbb{E}[X]| < \infty \Leftrightarrow \int_{x \in A} |x|f(x)dx,$$

es decir, sea finito.

Se enunciará a continuación otro caso, que es cuando consideramos una función de distribución de una o más variables aleatorias, por lo cual es importante conocer el valor esperado de cada función. Para esto denotemos a  $Y = g(X)$ . El valor esperado de  $Y$  puede ser obtenido mediante la distribución de  $Y$ , la cual puede ser discreta o continua. Pero calcular esto puede ser difícil y para evitar la tarea de calcular  $f_Y(y)$ , se puede hacer uso del siguiente resultado.

**Teorema 1.1.** *Si las variables aleatorias  $X$  y  $Y$  satisfacen  $Y = g(X)$ , donde  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función con valores en los reales definida sobre  $\mathbb{R}$ , entonces*

1. Si  $X$  es discreta y  $g$  es una función de probabilidad, entonces

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{x \in A_g} g(x) f_X(x),$$

siempre que  $\sum_{x \in A_g} |g(x)| f_X(x) < \infty$ .

2. Si  $X$  es continua y  $g$  es una función de densidad, entonces

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{A_g} g(x) f_X(x) dx,$$

siempre que  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_X(x) dx < \infty$ .

Donde  $A_g$  es el contradominio de  $X$  al aplicarle  $g$ .

Algunas de las propiedades que son de gran ayuda de la esperanza (o valor esperado) son las siguientes:

**Linealidad.** Supongamos que  $\mathbb{E}[X]$  y  $\mathbb{E}[Y]$  existen para  $X$  y  $Y$  variables aleatorias independientes. Para cualesquiera  $a, b \in \mathbb{R}$ , ocurre que

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

**Caso de independencia.** Si  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias independientes y existe  $\mathbb{E}[X]$  y  $\mathbb{E}[Y]$ , entonces para cualquier par de funciones de densidad  $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ocurre que

$$\mathbb{E}[g(X)h(Y)] = \mathbb{E}[g(X)]\mathbb{E}[h(Y)],$$

siempre y cuando existan.

### 1.4.2. Momentos

Los momentos pueden dar una descripción total de la distribución de una variable aleatoria. La sucesión de momentos puede determinar a la distribución, pero esto no siempre sucede. El problema de determinar si una distribución está completamente descrita por su sucesión de momentos es conocido como el *problema de los momentos*. La distribución normal es un ejemplo de una distribución que está determinada por su sucesión de momentos, mientras que la lognormal no lo está (no nos enfocaremos a analizar esto). Veamos qué son los momentos.

1. El  $k$ -ésimo momento de una variable aleatoria  $X$  se define como

$$\mu_k = \mathbb{E}[X^k].$$

- a) Para el caso en que  $X$  es discreta, se tiene que

$$\mu_k(X) = \sum_{x \in D} x^k \mathbb{P}(X = x) : k = 0, 1, 2, \dots$$

- b) Para el caso en que las variables son continuas

$$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx.$$

2. El  $k$ -ésimo momento central de  $X$  se define como

$$\sigma_k = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]]^k.$$

En particular  $\mu_1$  es la media  $\mu = \mathbb{E}[X]$ , y  $\sigma_2$  es llamada la varianza y se denota por  $\sigma^2$  o  $var X$ . Esto es

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[X - \mu]^2 = var X,$$

y para el segundo momento

$$\mathbb{E}[X]^2 = var X + (\mathbb{E}[X])^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

## 1.5. Vectores Aleatorios

*Definición 1.5.* Sea  $(\Omega, F, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad. Un vector aleatorio es una función  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

Un vector aleatorio suele representarse como  $X = (X_1, \dots, X_n)$  en donde cada coordenada es una función de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}$ . En particular, cuando el vector aleatorio es bidimensional, es decir, esta formado de dos coordenadas, suele denotarse por  $(X, Y)$ .

### 1.5.1. Distribución Conjunta

Como en el caso de variables aleatorias, todo vector aleatorio induce una medida de probabilidad pero ahora en  $\mathbb{R}^n$ . Esta medida de probabilidad puede estudiarse, de manera equivalente, mediante la función de distribución conjunta.

*Definición 1.6.* La función de distribución de un vector  $(X, Y)$ , denotada por  $F(X, Y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ , se define como:

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y).$$

Las funciones de distribución conjunta satisfacen propiedades semejantes al caso unidimensional, estas son:

1.  $\lim_{x, y \rightarrow \infty} F(x, y) = 1$ , ambas variables.
2.  $\lim_{x, y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$ , ambas variables.
3.  $F_{X,Y}(x, y)$  es no decreciente en cada variable.
4.  $F_{X,Y}(x, y)$  es continua por la derecha en cada variable.
5. Si  $a_1 < a_1$  y  $a_2 < b_2$ , entonces

$$F_{X,Y}(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \geq 0.$$

### 1.5.2. Densidad Conjunta

Como el caso unidimensional, algunos vectores tienen asociada otra función llamada de probabilidad o de densidad.

*Definición 1.7.* La función de probabilidad conjunta para un vector aleatorio discreto  $(X, Y)$  es la función  $f_{X,Y}(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

La función de probabilidad conjunta de un vector aleatorio discreto cumple las siguientes propiedades:

1.  $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$ .
2.  $\sum_{x,y} f_{X,Y}(x, y) = 1$ .

*Definición 1.8.* Sea  $(X, Y)$  un vector continuo con función de distribución  $F_{X,Y}(x, y)$ . Se dice que  $(X, Y)$  es absolutamente continuo si existe una función no negativa e integrable  $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty]$ , tal que, para todo  $(x, y)$  en  $\mathbb{R}^2$ , se cumple la igualdad:

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) dv du.$$

La función de densidad conjunta  $f_{X,Y}(x, y)$  de un vector absolutamente continuo cumple la siguientes propiedades:

1.  $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$ .
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$ .

### 1.5.3. Distribución Marginal

Dada la función de distribución  $F_{X,Y}(x, y)$  de un vector aleatorio  $(X, Y)$ , es posible obtener la función de distribución de cada variable aleatoria por separado mediante el siguiente procedimiento.

*Definición 1.9.* Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio con función de distribución  $F_{X,Y}(x, y)$ . A la función

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y),$$

se le conoce como función de distribución marginal de  $X$ . Análogamente para la distribución marginal de  $Y$ .

Para el caso de funciones de densidad o probabilidad conjunta, se pueden obtener las funciones de densidad o probabilidad individuales.

*Definición 1.10.* Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio discreto con función de probabilidad  $f_{X,Y}(x, y)$ . A la función

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x, y),$$

se le conoce como la función de probabilidad marginal de  $X$ . Análogamente se define la función de probabilidad marginal de  $Y$ .

*Definición 1.11.* Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio absolutamente continuo con función de densidad  $f_{X,Y}(x, y)$ . A la función

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy,$$

se le conoce como la función de densidad marginal de  $X$ . Análogamente se define la función de densidad marginal de  $Y$ .

## 1.6. Variables Aleatorias Condicionadas

Hasta el momento se han mencionado las características de las variables aleatorias, pero falta mencionar que sucede cuando una variable es dependiente de algún resultado o alguna variable aleatoria. En esta sección abordaremos esta situación. Las letras mayúsculas describirán a una variable aleatoria y las letras minúsculas un valor en particular que toma dicha variable. Como ya se ha mencionado estamos utilizando dos tipos de variables. Iniciaremos esta sección describiendo el caso de las variables discretas.

### 1.6.1. Variables Aleatorias Discretas Condicionadas

*Definición 1.12.* Si  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias discretas, entonces la *función de probabilidad de  $X$  dado  $Y$*  se define para toda  $y$  tal que  $f(y) > 0$ , por

$$f_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} \quad (1.14)$$

$$= \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}. \quad (1.15)$$

Y por consiguiente la probabilidad condicional de  $Y$  dado  $X$  es

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{Y,X}(y, x)}{f_X(x)},$$

cuando  $f_X(x) > 0$ .

*Definición 1.13.* La función de distribución condicional de  $X$  dado que  $Y = y$  está dada por

$$F_{X|Y}(x|y) = \sum_{u \leq x} f_{X|Y}(u|y). \quad (1.16)$$

Ahora se verá el caso de la esperanza condicional para las variables aleatorias discretas.

*Definición 1.14.* La *esperanza condicional* de  $X$  dado que  $Y = y$  se denota por  $\mathbb{E}[X|Y = y]$  y se define por

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \sum_x x f_{X|Y}(x|y), \quad (1.17)$$

siempre y cuando la suma en valores absolutos sea convergente.

### 1.6.2. Variables Aleatorias Continuas Condicionadas

*Definición 1.15.* Si  $X$  y  $Y$  son dos variables aleatorias continuas, entonces la función de densidad condicional de  $X$  dado  $Y$  se define por

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad (1.18)$$

cuando  $f_Y(y) > 0$ .

*Definición 1.16.* La función de distribución condicional de  $X$  dado que  $Y = y$  es

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(u|y) du. \quad (1.19)$$

Y para la esperanza condicional en el caso continuo se tiene

*Definición 1.17.* La *esperanza condicional* de  $X$  dado que  $Y = y$  es

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(u|y) du, \quad (1.20)$$

siempre y cuando la integral en los valores absolutos converja.

En caso de tener mas de una variable aleatoria condicional la definición de densidad condicional se extiende naturalmente. Concretamente, si  $X, Y_1, \dots, Y_n$  son variables aleatorias, entonces

$$f_{X|Y_1, \dots, Y_n}(x, y_1, \dots, y_n) = \frac{f_{X, Y_1, \dots, Y_n}(x, y_1, \dots, y_n)}{f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n)}. \quad (1.21)$$



A continuación se dará una proposición que es de vital importancia para el modelo que se desarrollará más adelante.

**Proposición 1.2.** *Si  $X$  es una variable aleatoria discreta con esperanza finita y  $Y$  es cualquier variable aleatoria discreta, entonces,  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$ .*

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] &= \sum_y \mathbb{E}[X|Y = y]f_Y(y) \\
 &= \sum_y \left( \sum_x x f_{X|Y}(x|y) \right) f_Y(y) \\
 &= \sum_y \left( \sum_x x \mathbb{P}(X = x|Y = y) \right) \mathbb{P}(Y = y) \\
 &= \sum_y \sum_x x \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} \mathbb{P}(Y = y) \\
 &= \sum_y \sum_x x \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\
 &= \sum_x x \sum_y \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\
 &= \sum_x x \mathbb{P}(X = x) \\
 &= \sum_x x f_X(x) \\
 &= \mathbb{E}[X].
 \end{aligned}$$

✦

## 1.7. Función Generadora de Momentos

Aún cuando una función de densidad determina el comportamiento de una variable aleatoria, es importante dar especificaciones alternativas que pudieran permitir una aplicación práctica más directa o que ayuden a una interpretación más útil. Una especificación alternativa es mediante los sistemas de momentos.

Como ya se vió en la sección 1.4, el conjunto de valores esperados de las  $k$ -ésimas potencias de una variable aleatoria conforman un conjunto de momentos. Los momentos pueden ser derivados mediante la función generadora de momentos  $M_X(t)$ . Recordemos que

$$e^{Xt} = 1 + Xt + \frac{X^2t^2}{2!} + \frac{X^3t^3}{3!} + \dots$$

*Definición 1.18.* La *función generadora de momentos* de una variable aleatoria  $X$  está dada por

$$M_X(t) = \mathbb{E} [e^{tX}],$$

para toda  $t$  real donde el valor esperado existe.

1. Para el caso discreto de una variable aleatoria que toma valores en el conjunto de los números enteros  $\mathbb{Z}$ , se define de la siguiente manera

$$\mathbb{E} [e^{tX}] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{xt} \mathbb{P}(x).$$

2. Y para el caso continuo se define de la siguiente manera

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f(x) dx.$$

*Ejemplo 1.3.* Si  $X$  es  $\mathbf{N}(0, 1)$ . Entonces para  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{tx} dx \\ &= e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx \\ &= e^{\frac{1}{2}t^2}. \end{aligned}$$

## 1.8. Transformación de Variables Aleatorias

No siempre las variables aleatorias que uno quiere son precisamente las que se pueden medir o estudiar de manera sencilla. En muchas ocasiones se tendrá que *transformar* las variables con la finalidad de facilitar su estudio. En estos casos se puede hacer uso del teorema de cambio de variable jacobiano.

- Sea  $T: A \rightarrow B$  una transformación y  $T^{-1}$  su inversa, donde  $A \subset \mathbb{R}^k$  es el dominio de  $T$  y  $B \subset \mathbb{R}^k$ . De forma que para todo  $x \in A$  y  $y \in B$ ,

$$\begin{aligned}x &\mapsto T(x) \\ y &\mapsto T^{-1}(y)\end{aligned}$$

- Sea  $J^{-1}$  el determinante jacobiano de la transformación inversa ( $|J^{-1}| = \frac{1}{|J|}$ ).

**Teorema 1.2.** *Teorema de cambio de variable.*

$$\int_A f(x)dx = \int_{T(A)} f(T^{-1}(y))|J^{-1}|dy. \quad (1.22)$$

Aplicando el teorema del cambio de variable a la integral de una densidad  $f_X$ , aparece un resultado general de gran uso práctico. Se obtiene la densidad  $f_Y$  de un *vector aleatorio*  $Y$ , que es función de otro vector aleatorio  $X$ , a partir de la densidad  $f_X$  y de acuerdo a la regla que determina  $T$ .

**Proposición 1.3.** *Sea  $X$  un vector aleatorio continuo con densidad  $f_X$ . Sea  $Y = T(X)$ , donde  $T: A \rightarrow B$  es un difeomorfismo con  $A, B \subset \mathbb{R}^k$ . Sea  $T^{-1}$  la transformación inversa de  $T$ . Entonces  $Y$  es continua y*

$$f_Y(y) = f_X(T^{-1}(y))|J^{-1}|. \quad (1.23)$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea  $E \subset B$ . Sabemos que

$$\mathbb{P}_Y(E) = \int_E f_Y(y)dy,$$

por ser  $f_Y$  la densidad de  $Y$ . Luego tenemos que

$$\mathbb{P}_Y(E) = \mathbb{P}_X(T^{-1}(E)),$$

por ser  $T^{-1}(E)$  la imagen inversa de  $E$  por  $T$ . Luego, aplicando el teorema del jacobiano, se tiene

$$\mathbb{P}_X(T^{-1}(E)) = \int_{T^{-1}(E)} f_X(x)dx = \int_E f_X(T^{-1}(y))|J^{-1}|dy,$$

luego entonces

$$\int_E f_Y(y)dy = \int_E f_X(T^{-1}(y))|J^{-1}|dy,$$

para toda  $E \subset B$  y por lo tanto para cada elemento de  $E$

$$f_Y(y) = f_X(T^{-1}(y))|J^{-1}|.$$

✦

## 1.9. Intervalos de Confianza

*Definición 1.19.* Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, entonces forman una muestra aleatoria independiente de tamaño  $n$  de la población.

*Definición 1.20.* Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria independiente de la densidad  $f_X(x, \theta)$ , donde  $\theta$  es un vector de parámetros para la función. Sean  $L(X) = L(X_1, \dots, X_n)$  y  $U(X) = U(X_1, \dots, X_n)$  dos estadísticas que satisfacen que  $L(X) \leq U(X) \forall X = (X_1, \dots, X_n)$  para las cuales

$$\mathbb{P}(L(X) \leq \theta \leq U(X)) = 1 - \alpha, \text{ con } \alpha \leq 1,$$

en donde  $\alpha$  no depende de  $\theta$ ; entonces al intervalo aleatorio  $[L(X), U(X)]$  se le llama *Intervalo de confianza* para  $\theta$ , con un coeficiente de confianza de  $1 - \alpha$ .

A  $L(X)$  se le conoce como límite inferior de confianza para  $\theta$  y a  $U(X)$  como límite superior de confianza para  $\theta$ .

Para encontrar a  $L(X)$  y  $U(X)$ , se puede hacer de la siguiente manera:

Considerese a  $Z(X_1, \dots, X_n, \theta)$ , tal que,  $f_Z(z)$  es la densidad de  $Z$  ó  $F(z)$  es la distribución de  $Z$ , se puede evaluar;

$$\mathbb{P}[Z \leq z_1] = 1 - \alpha \tag{1.24}$$

$Z(X_1, \dots, X_n, \theta) < z_1$  implica una restricción en el valor de  $\theta$  y puede suceder que está restricción tome la forma  $l \leq \theta \leq u$  donde  $l$  y  $u$  son evaluaciones de una estadística que no depende de  $\theta$ . Entonces 1.24, toma la forma:

$$\mathbb{P}[l \leq \theta \leq u],$$

finalmente se busca  $l$  y  $u$  tal que,

$$\mathbb{P}[L(X) \leq \theta \leq U(X)] \tag{1.25}$$

*Ejemplo 1.4.* Sea

$$x_i \sim N(\mu, \sigma^2),$$

entonces

$$z = \frac{x_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1),$$

donde

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2},$$

queremos encontrar

$$\mathbb{P}[|z| \leq z_1] = 1 - \alpha,$$

lo que es

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\left|\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right| \leq z_1\right] &= 1 - \alpha \\ \mathbb{P}[|x_i - \mu| \leq z_1\sigma] &= 1 - \alpha \\ \mathbb{P}[-z_1\sigma \leq x_i - \mu \leq z_1\sigma] &= 1 - \alpha \\ \mathbb{P}[-x_i - z_1\sigma \leq -\mu \leq z_1\sigma - x_i] &= 1 - \alpha \\ \mathbb{P}[x_i - z_1\sigma \leq \mu \leq x_i + z_1\sigma] &= 1 - \alpha.\end{aligned}$$

En general para encontrar un intervalo de confianza  $[a, b]$  a nivel  $1 - \alpha$  para una función de densidad o probabilidad, se necesita encontrar los valores  $a = a_0$  y  $b = b_0$ , con  $a_0 \leq b_0$  ( $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ ), tales que la función de distribución,  $F(a_0) = \frac{\alpha}{2}$  y  $F(b_0) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ .



# Capítulo 2

## Procesos Estocásticos

En este capítulo se dará una breve introducción a los procesos estocásticos. Cabe aclarar que aunque el estudio de los procesos estocásticos es muy extenso, en este trabajo únicamente se tomarán los temas que son necesarios para dar base al modelo que se describirá en los capítulos posteriores. Por tal motivo, en la siguiente sección, se dará una breve introducción a los procesos estocásticos, abarcando la definición de dichos procesos y el tema de la caminata aleatoria. En la sección siguiente se hablará de las cadenas de Markov, que es la clase de proceso en la que se basa el modelo que presentamos. En particular para este trabajo nos hemos basado en los libros de Caballero y Stirzaker (véase las referencias [2, 8] respectivamente)

### 2.1. Introducción a los Procesos Estocásticos

#### 2.1.1. Definición de Proceso Estocástico

El término estocástico es sinónimo de la palabra aleatorio, por lo cual un proceso estocástico es un proceso aleatorio que se desarrolla en el tiempo y durante el paso del mismo se presentan eventos provocando variaciones que se realizan de manera azarosa. Este proceso o sistema puede ser definido mediante una familia de variables aleatorias  $\{X_t\}$ , donde  $X_t$  mide en el tiempo  $t$ , el aspecto del sistema que se está estudiando.

*Ejemplo 2.1.* Sea  $X_t$  el número de automóviles que hacen fila en una caseta de cobro al

instante  $t$ . Conforme pase el tiempo, se incorporarán y avanzarán automóviles, por lo tanto, el valor de  $X_t$  cambiará.

En cualquier momento  $t$ ,  $X_t$  puede tomar alguno de los siguientes valores  $0, 1, 2, 3, \dots$  y  $t$  es cualquier valor en un subconjunto de  $(-\infty, \infty)$ .

Al observar continuamente la fila llegan automóviles de uno en uno para ser atendidos por un solo cobrador, entonces, cuando llega un nuevo automóvil, el valor de  $X_t$ , que es el número de automóviles que hacen fila, se incrementa en uno y cuando un automóvil se marcha, después de ser atendido, el valor de  $X_t$  disminuye en uno.

Los valores que puede tomar  $X_t$ , son llamados sus estados y los cambios en el valor de  $X_t$  reciben el nombre de transiciones entre sus estados. Si se observa el tamaño de la fila no continuamente sino a intervalos unitarios, por ejemplo: una vez cada 10 minutos, entonces observaremos que pueden llegar o salir más de un automóvil en cada intervalo de tiempo. Lo cual conduce a mayores fluctuaciones en el valor de  $X_t$ . Lo que se estudia son las consecuencias que en la realidad son a menudo más complejas que estos modelos. A pesar de lo sencillo de estos modelos, al incluir la aleatoriedad que se presenta en el mundo real, se obtiene una imagen mucho mejor que la que posiblemente se lograría con modelos en los que se desperdicia el comportamiento aleatorio.

Los modelos estocásticos son aplicables a casi todos los sistemas que impliquen variabilidad al azar con el paso del tiempo.

*Definición 2.1.* Un *proceso estocástico* es una colección de variables aleatorias  $\{X_t : t \in T\}$ , donde  $t$  es un punto en un conjunto  $T$ , en general  $t$  puede ser llamado el parámetro del tiempo (o simplemente el tiempo) y  $T \subseteq \mathbb{R}$ . Cada  $X_t$  toma valores en algún conjunto  $E \subseteq \mathbb{R}$ , llamado espacio de estados; donde  $X_t$  es el estado del proceso en el tiempo  $t$ .

Un proceso estocástico es caracterizado por 3 principales componentes:

1. El espacio de estados.
2. El conjunto de parámetros.
3. La relación de dependencia entre las variables aleatorias  $X_t$ .

Ya que  $X_t$  es una variable aleatoria, el espacio de estados puede ser discreto o continuo.  $X_t$  puede ser en sí mismo un vector aleatorio.



Un proceso estocástico *a tiempo discreto* es aquel en donde los parámetros  $T$  de índices son discretos, por ejemplo,  $T = \mathbb{Z}^+$  o  $T = \mathbb{Z}$  (por costumbre se usa  $n$  para denotar el tiempo y se denotan las variables aleatorias por  $X_n$ ).

Un proceso estocástico cuyo conjunto  $T$  de índices es un intervalo en la línea de números reales, comúnmente  $T = [0, \infty)$  se le llama proceso en *tiempo continuo*.

Sea  $\{N(t) : t \geq 0\}$  un proceso estocástico en el que  $N(t)$  representa el número de veces que ocurre un cierto evento, en el intervalo  $[0, t]$  para  $t > 0$ , con  $N(0) = 0$ , en este caso se dice que el proceso es un proceso de conteo y es evidente que su espacio de estados es el conjunto  $E = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  y que tiene trayectorias no decrecientes, es decir,  $N(e) \leq N(t)$  si  $0 \leq e < t$ .

Las relaciones de dependencia entre las variables aleatorias de un proceso estocástico son usualmente sugeridas por algún problema práctico; son una expresión formal acerca de la modelación asumida, haciéndose esto para el análisis del proceso y para las predicciones en el mundo real. En general el proceso es determinado por su conducta local y posteriormente el análisis se dirige a descubrir su conducta global.

### 2.1.2. Caminatas Aleatorias

Las caminatas aleatorias son ejemplos comunes en el tema de los procesos estocásticos, ya que son muy ilustrativas además de que nos permiten introducirnos al tema de las cadenas de Markov, que es uno de los temas de mayor importancia dentro de la teoría de estos procesos.

A grandes rasgos, una caminata aleatoria es aquella en donde los pasos o direcciones futuras, no pueden ser anticipadas con exactitud tomando como base los eventos, acciones o pasos ocurridos en el pasado, es decir, si nos encontramos en este momento en un punto, no se puede determinar cual va a ser la posición exacta en donde nos encontraremos en el siguiente momento en base a los puntos en donde se estuvo con anterioridad.

Por la descripción anterior, se puede mencionar que la secuencia de la caminata es independiente, por ejemplo si se toma al más simple y no trivial ejemplo de un proceso estocástico que es  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  y  $\{X_m : m \in \mathbb{N}\}$ , donde  $m$  puede ser escrito como  $m = n+p$  con  $p \in \mathbb{N}$ , entonces el valor que toma  $X_n$  no tiene influencia con el valor que tome  $X_m$ , debido a que  $n < m$ , significa que para llegar al paso  $m$  han pasado  $p$  pasos desde que se estaba en  $n$ , y por lo tanto estando en  $n$  no se puede saber con exactitud el valor que se tendrá en  $m$ , por lo que son independientes.

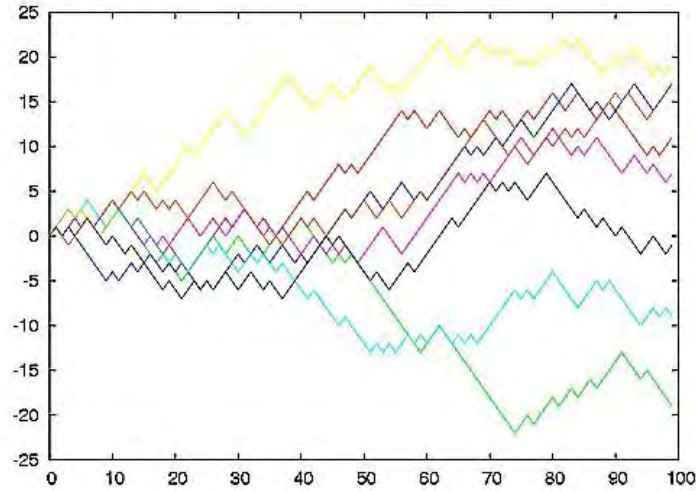


Figura 2.1: Ocho caminatas aleatorias de una dimensión comenzando en cero. Tiempo sobre posición

El ejemplo mas común es el de la caminata aleatoria finita o caminata del borracho y se ilustra de la siguiente manera:

*Ejemplo 2.2.* Un borracho sale de una cantina ubicada en el lugar con número  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k < n$ . Los lugares por donde puede pasar están etiquetados con los valores que corren del 0 al  $n$  y sólo puede ir en cada paso de un punto  $m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  al que sigue  $(m+1)$  o al anterior  $(m-1)$ . En el número 0 está un lago (si el borracho llega al lago se ahoga) y en el número  $n$  está su casa. Camina hacia casa con probabilidad  $0 < p < 1$  y hacia el lago con probabilidad  $q = 1 - p$ .

*Ejemplo 2.3.* Otro ejemplo es el de la caminata aleatoria en la línea real. Si  $\{X_n : n \geq 1\}$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que toman valores en los reales y el conjunto  $S_n \in \mathbb{R}$ , tal que,

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i + S_0, \quad (2.1)$$

donde  $S_0$  es el punto inicial, entonces  $\{S_n : n \geq 0\}$  es una caminata aleatoria en la línea recta.

## 2.2. Cadenas de Markov

Antes de dar la definición de lo que es una cadena de Markov, se verá el ejemplo de la caminata aleatoria en los enteros.

*Ejemplo 2.4.* Si  $\{X_n : n \geq 1\}$  son variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas y con valores en los enteros, entonces pueden producir una caminata aleatoria que se describe por:

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad (2.2)$$

ahora si se quiere representar el valor de  $S_{n+1}$ , se puede hacer de dos maneras; la primera es utilizando la forma de la ecuación (2.2) y queda de la siguiente manera:

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} X_i, \quad (2.3)$$

a partir de esta forma y utilizando la propiedad asociativa de la suma, se puede llegar a representar de una manera recursiva al valor de  $S_{n+1}$  que nos será más útil.

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} X_i = \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) + X_{n+1}, \quad (2.4)$$

por (2.2)

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}. \quad (2.5)$$

Esta última representación de  $S_{n+1}$  muestra que  $S_n$  tiene la propiedad de que si es conocida, el futuro de la caminata es independiente a su pasado.

Esta idea de que el proceso futuro es independiente al pasado, teniéndose como punto como referencia el presente o el pasado más cercano, se le llama propiedad de Markov. Ahora se dará una definición más formal.

*Definición 2.2.* Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad y  $E$  un conjunto no vacío, finito o numerable. Una sucesión de variables aleatorias  $\{X_n : \Omega \rightarrow E : n = 0, 1, 2, \dots\}$  se llama cadena de Markov con espacio de estados  $E$  si satisface la condición de Markov, esto es, si para todo  $n \geq 1$  y toda sucesión  $x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x, y \in E$ , se cumple

$$\mathbb{P}(X_n = y \mid X_{n-1} = x, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_n = y \mid X_{n-1} = x). \quad (2.6)$$

La distribución de  $X_0$  se llama *distribución inicial*.

Los siguientes puntos son precisiones y complementos de esta definición.

1. Frecuentemente  $E$  es un subconjunto de los números enteros ( $\mathbb{Z}$ ). En estos casos  $E$  es un conjunto ordenado.
2. El lado derecho de la ecuación (2.6) se refiere a que la probabilidad de estar en el estado  $y$  al instante  $n$  dado que en los instantes anteriores la cadena siguió la trayectoria  $(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x)$ , sólo depende del estado inmediato anterior, es decir, del estado en el instante  $n - 1$  y esto corresponde al tipo de fenómeno que se pretende modelar.
3. A la familia  $\{\mathbb{P}(X_n = y \mid X_{n-1} = x) : n \in \mathbb{N}, x, y \in E\}$  se le llama familia de probabilidades de transición de la cadena. Describe la evolución de la misma en el tiempo.
4. Si  $\mathbb{P}(X_n = y \mid X_{n-1} = x)$  no depende de  $n$ , decimos que la cadena es homogénea (con respecto al tiempo). Para una cadena de Markov homogénea se denotará a  $\mathbb{P}(X_n = y \mid X_{n-1} = x)$  simplemente como  $\mathbf{P}_{x,y}$ .
5. Para  $m \geq 1$  se denotará por  $\mathbf{P}_{x,y}^{(m)}$  a  $\mathbb{P}(X_{n+m} = y \mid X_n = x)$  y significa la probabilidad de ir en  $m$  pasos o unidades de tiempo de  $x$  a  $y$ . Se llama probabilidad de transición en  $m$  pasos.
6. En el caso en que  $E$  sea finito, se considera a la matriz  $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_{x,y})_{x,y \in E}$  y se le llama *matriz de transición*.
7. La suma de las entradas de los renglones de la matriz de transición es igual a uno, es decir, para todo  $x \in E$  se tiene  $\sum_{y \in E} \mathbf{P}_{x,y} = 1$ . En efecto, sea  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned}
 1 &= \mathbb{P}(X_{n+1} \in E \mid X_n = x) \\
 &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{y \in E} \{X_{n+1} = y\} \mid X_n = x\right) \\
 &= \sum_{y \in E} \mathbf{P}_{x,y}.
 \end{aligned}$$

# Capítulo 3

## Algoritmo EM

El algoritmo EM, es frecuentemente utilizado para encontrar el estimador máximo verosímil de una distribución, para nuestro caso en particular, se empleará dicho algoritmo para encontrar los estimadores de las medias y varianzas de nuestro modelo de combinación de distribuciones normales para describir el comportamiento del precio del gas natural en el tiempo. Para el desarrollo del presente capítulo nos hemos basado en el trabajo de tesis de Chong (véase la referencia [15]).

### 3.1. Estadística Bayesiana

Como se planteará durante el desarrollo de este trabajo, nos enfrentaremos a un fenómeno aleatorio debido a la incertidumbre de sus datos (el precio del gas natural en el tiempo) por tanto se le ha asociado un modelo probabilístico y podemos asumir que dicho modelo depende de un vector o un escalar que se conoce como parámetro  $\theta$  que pertenece al espacio parametral  $\Theta$ . El problema ahora a resolver es encontrar una distribución de probabilidad (o densidad) completamente especificada de entre un conjunto infinito de distribuciones de probabilidad y como dijimos anteriormente podemos pensar en que cada distribución depende de un valor del parámetro  $\theta$ , entonces se puede denotar al conjunto de distribuciones posibles como  $\Theta$ .

$$\mathcal{P} = \{\mathbb{P}(X|\theta) : \theta \in \Theta\}.$$

Entonces dentro de un punto de vista de la estadística clásica, el problema que surge es

equivalente a encontrar  $\theta \in \Theta$  “adecuado” para un conjunto de datos  $x$ , pero mejor aún desde el punto de vista de la estadística Bayesiana, se puede pensar en cuantificar la incertidumbre proponiendo distribuciones de probabilidad no sólo para datos provenientes de nuestro fenómeno, sino también para el valor de  $\theta$ .

Tomando la idea del *teorema de representación de Finetti*, el cual justifica (bajo algunos supuestos) la existencia de una distribución de probabilidad para  $\theta$ . Esta distribución se puede interpretar como la cuantificación de nuestro conocimiento inicial respecto a  $\theta$ . Las conclusiones acerca del parámetro  $\theta$ , así como de *datos no observados*  $\tilde{x}$ , se hacen en términos de probabilidades condicionales en el valor de datos observados  $x$ , por lo que son de interés  $\mathbb{P}(\theta|x)$  o  $\mathbb{P}(\tilde{x}|x)$ .

### 3.1.1. Distribución *a priori*

Se usará  $\mathbb{P}(\cdot|\cdot)$  para denotar *funciones de probabilidad* (o densidad) con los argumentos determinados por el contexto, al igual que  $\mathbb{P}(\cdot)$  denota una *función de probabilidad marginal* (o densidad marginal). Recordemos que  $\theta$  es considerada como una *variable aleatoria*.

La distribución *a priori* o inicial, es una distribución de probabilidad sobre el parámetro  $\theta$  que denotaremos por  $\pi(\theta)$  y que refleja la cantidad de incertidumbre o certidumbre que subjetivamente tenemos de  $\theta$ .

El término distribución *a priori* implica la traducción de la información inicial que tiene una persona sobre  $\theta$  en una distribución de probabilidad sobre este parámetro.

Entenderemos por muestra lo siguiente:

*Definición 3.1.* Sea  $x = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$  una muestra de tamaño  $n$ , proveniente del modelo probabilístico  $\mathbb{P}(x|\theta)$ . Asumiremos la siguiente estructura de independencia condicional al valor de  $\theta$

$$\mathbb{P}(x|\theta) = \mathbb{P}(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n|\theta) \quad (3.1)$$

$$= \mathbb{P}(X_1|\theta)\mathbb{P}(X_2|\theta) \dots \mathbb{P}(X_n|\theta) \quad (3.2)$$

$$= l(x|\theta). \quad (3.3)$$

Se llama a  $l(x|\theta)$  la *función de verosimilitud* de los datos.

### 3.1.2. Distribución predictiva *a priori*

En general  $\theta$  es desconocido, por lo cual si se utiliza la distribución *a priori*, que es la información disponible sobre nuestro parámetro  $\theta$ , nos es posible generar una muestra  $\tilde{x}$  con determinada probabilidad. Así pues utilizando la función de distribución *a priori*  $\pi(\theta)$  y al utilizar el resultado de probabilidad total se puede calcular

$$\mathbb{P}(\tilde{x}, \theta) = \mathbb{P}(\tilde{x}|\theta)\pi(\theta),$$

al marginizar con respecto a  $\theta$  tenemos la posibilidad de generar una muestra  $\tilde{x}$

$$\mathbb{P}(\tilde{x}) = \int_{\theta \in \Theta} \mathbb{P}(\tilde{x}, \theta) d\theta = \int_{\theta \in \Theta} \mathbb{P}(\tilde{x}|\theta)\pi(\theta) d\theta,$$

a  $\mathbb{P}(\tilde{x})$  se le conoce como: *la función de distribución predictiva a priori*.

### 3.1.3. Distribución *posterior* o final

Si se tiene una muestra  $x$  de datos observados y se utiliza el Teorma de Bayes obtenemos

$$\begin{aligned} \pi(\theta|x) &= \frac{\mathbb{P}(\theta, x)}{\mathbb{P}(x)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \mathbb{P}(x|\theta)\pi(\theta) d\theta} \\ &= \frac{l(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} l(x|\theta)\pi(\theta) d\theta} \end{aligned}$$

De la función posterior se puede obtener los siguiente:

1. La cantidad  $K = \frac{1}{\mathbb{P}(x)} = \frac{1}{\int_{\Theta} \mathbb{P}(x|\theta)\pi(\theta) d\theta}$  es una constante con respecto a  $\theta$ , la cual garantiza que  $\int_{\Theta} \pi(\theta|x) d\theta = 1$ , por lo que la probabilidad *posterior* es proporcional a la multiplicación de la verosimilitud por la distribución inicial, y la denotaremos con el símbolo  $\propto$  a esta proporcionalidad de la siguiente manera:

$$\pi(\theta|x) \propto l(x|\theta)\pi(\theta).$$

2. Tanto la distribución *posterior* como la *a priori* son distribuciones de probabilidad sobre  $\theta$ , con la diferencia de que en la primera se toma en cuenta tanto la información que dan los datos observados respecto a  $\theta$ , así como la información *a priori* con respecto a  $\theta$ .
3. Este razonamiento induce un ciclo, puesto que la distribución *posterior* pasa a ser nuestra nueva distribución *a priori*, si es posible obtener más datos observados bajo el mismo procedimiento podemos generar una nueva distribución *posterior*.
4. Entonces considerandose que se puede hacer un ciclo, podemos obtener la distribución *posterior* a partir de una muestra que puede ser tan pequeña como un solo dato.
5. Si  $\pi(\theta)$  es una constante entonces

$$\pi(\theta|x) \propto l(x|\theta),$$

y como consecuencia al encontrar el estimador máximo verosímil estaríamos encontrando la moda de la distribución posterior.

### 3.1.4. Distribución predictiva posterior

Ahora que contamos con algunos elementos como : una muestra  $x$ , un modelo probabilístico  $\mathbb{P}(\cdot|\theta)$  y una distribución *posterior*, se puede hacer una predicción sobre observaciones futuras del fenómeno aleatorio. Veamos como estos elementos inducen una distribución conjunta para  $\tilde{x}$  y  $\theta$ , condicionada a la muestra  $x$ .

$$\begin{aligned} \pi(\tilde{x}, \theta|x) &= \frac{\mathbb{P}(\tilde{x}, \theta, x)}{\mathbb{P}(x)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\tilde{x}|\theta, x)\mathbb{P}(\theta, x)}{\mathbb{P}(x)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\tilde{x}|\theta, x)\mathbb{P}(\theta|x)\mathbb{P}(x)}{\mathbb{P}(x)} \\ &= \mathbb{P}(\tilde{x}|\theta, x)\mathbb{P}(\theta|x). \end{aligned}$$

Notese que  $\mathbb{P}(\tilde{x}|\theta, x) = \mathbb{P}(\tilde{x}|\theta)$  por que  $\tilde{x}$  y  $x$  son independientes dado el valor de  $\theta$ .

Se puede obtener la distribución marginal de  $\tilde{x}$  a partir de la función de distribución conjunta  $\pi(\tilde{x}, \theta|x)$ . De la última igualdad de arriba se tiene que

$$\mathbb{P}(\tilde{x}|x) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\tilde{x}, \theta|x) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(\tilde{x}|\theta)\mathbb{P}(\theta|x) d\theta.$$



A la función de distribución  $\mathbb{P}(\tilde{x}|x)$  se le conoce como *distribución predictiva posterior*.

*Definición 3.2.* Sea  $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}(\cdot|\theta) : \theta \in \Theta\}$  una familia paramétrica. Se dice que una colección de distribuciones de probabilidades  $\mathcal{G}$ , es una familia conjugada para  $\mathcal{P}$  si ocurre que:

$$\forall \mathbb{P}(\cdot|\theta) \in \mathcal{P} \text{ y } \pi(\theta) \in \mathcal{G} \text{ entonces } \pi(\theta|x) \in \mathcal{G}$$

Pese que en la estadística Bayesiana se permite incorporar el conocimiento respecto a  $\theta$  a través de la asignación de una distribución inicial, este paso puede ser subjetivo. Por lo cual se ha llegado al concepto de *distribución no informativa* y como su nombre lo indica, la idea en este tipo de asignación es proponer una distribución que no se basa en la información que subjetivamente tiene el investigador sobre el fenómeno sino de la evidencia que da una muestra. De las varias formas que existen para hacer esto, se tomará la regla de Jeffreys. Este método propone distribuciones iniciales que requieren de verificar las condiciones de regularidad que se mencionan a continuación:

1. El modelo paramétrico  $f(x; \theta)$  para la distribución de la población es tal que el soporte de  $f$  no depende de  $\theta$ .
2. La función  $\ln(l(x; \theta))$  es dos veces diferenciable con continuidad, es decir, de clase  $C^2$ .
3. Las operaciones de derivación e integración o suma en caso discreto son intercambiables.

*Definición 3.3.* Sea un modelo paramétrico  $\mathbb{P}(X|\theta), \pi(\theta)$  es no informativa de Jeffreys si:

$$\pi(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)} \theta \in \Theta, \text{ donde } I(\theta) = \mathbb{E} \left[ \frac{d \ln(l(x|\theta))}{d\theta} \right]^2.$$

## 3.2. El Algoritmo EM

Esta parte corresponderá para describir el algoritmo EM que será empleado para el cálculo de los estimadores de las medias y varianzas dentro del modelo que estamos estudiando.

Cuando nos enfrentamos al problema de los datos faltantes, que ocurren cuando durante la investigación de un fenómeno aleatorio existan datos que por una u otra razón no pueden ser observados, una solución es el uso del algoritmo iterativo debido a Dempster, Laird y Rubin (1977), cuyo objetivo es encontrar la moda de la distribución posterior o de

manera equivalente el estimador máximo verosímil en el caso que se proponga una distribución *a priori* constante; el método consta de dos pasos: paso **E** (*Esperanza*) y el paso **M** (*Maximización*) y por tanto es conocido como el algoritmo **EM**.

Este método en lugar de hacer difíciles maximizaciones y simulaciones, propone “aumentar” los datos faltantes imputandoles variables aleatorias, las cuales llamamos variables latentes que nos faciliten el cálculo de la maximización de la función de verosimilitud aumentada o la distribución posterior aumentada con dichas variables latentes.

### 3.2.1. Descripción del algoritmo

El algoritmo es un método iterativo para encontrar la moda de la distribución posterior o el estimador máximo verosímil para datos incompletos. Dentro de este algoritmo en cada iteración se consta de dos pasos: El *paso E* (paso de la esperanza) y el *paso M* (paso de la maximización). Denotemos a  $\theta^u$  la hipótesis actual para la moda de la distribución posterior de nuestro interés  $f(\theta|x)$  y sea  $f(\theta|x, z)$  la distribución posterior aumentada, donde  $x$  son los valores observados y  $z$  los datos aumentados (variables latentes). Por último definamos a  $f(z|x; \theta^u)$  como la distribución predictiva condicional de los datos latentes  $z$  dada la hipótesis actual de la moda posterior.

- **Entrada:** Una hipótesis actual para la moda de la distribución posterior de nuestro interés  $\theta^u$ .
- **Salida:** La moda de la distribución posterior o el estimador obtenido a través del algoritmo EM  $\theta^n$ .

**Paso E** Consiste en calcular

$$Q(\theta, \theta^u) = \int_z f(z|x; \theta^u) \log f(\theta|x, z) dz,$$

es decir, la esperanza de  $\log f(\theta|x, z)$  con respecto a  $f(z|x; \theta^u)$ .

**Paso M** Consiste en maximizar la función  $Q(\theta, \theta^u)$  con respecto a  $\theta$  para obtener  $\theta^{u+1}$ . Después de esto, regresamos al **Paso E**.

El algoritmo se itera hasta que  $\|\theta^{u+1} - \theta^u\|$  ó  $|Q(\theta^{u+1}, \theta^u) - Q(\theta^u, \theta^u)|$  sea suficientemente pequeño.

# Capítulo 4

## Proceso estocástico del precio del gas natural y del logaritmo de las tasas de cambio.

En este capítulo se presentará y se desarrollará la teoría para considerar al precio del gas natural ( $S_t : S_t > 0$  y  $t \geq 0$ ) en un determinado tiempo como una variable aleatoria, en donde los incrementos de las tasas de rendimiento pueden ser descritas mediante el  $\log \frac{S_t}{S_{t-1}}$  (consideraremos al  $\log$  base  $e$ ) esta hipótesis es de vital importancia, debido a que gracias a ella es posible llegar a una expresión más sencilla para el cálculo de la esperanza del valor presente que se mencionará mas a detalle en los siguientes capítulos. Estos análisis llevarán a la búsqueda de la distribución muestral de los logaritmos de las tasas de rendimiento (sección 4.3) y a la distribución teórica de éstas (sección 4.4). Finalmente se procederá a la búsqueda de la distribución marginal del precio del gas (sección 4.5).

### 4.1. Antecedentes

En la década de 1930 al efectuarse algunos estudios, se llevaron a cabo diversos análisis empíricos del comportamiento de los mercados financieros, con el fin de explicar diversos aspectos como el comportamiento de los precios de los instrumentos y valores cotizados, como por ejemplo el precio del gas natural. La mayoría de estos artículos fueron escritos por

estadísticos<sup>1</sup>. Gracias a la realización de estos artículos se obtuvieron datos y conclusiones interesantes. De estas conclusiones se tomará una en particular, y es el hecho de que los incrementos de los logaritmos de los precios son independientes.

## 4.2. Incremento de los logaritmos del precio de un instrumento

Se definirá al precio de un instrumento al tiempo  $t$  como  $S_t$  ( donde  $S_t$  es mayor a cero por ser un precio) y  $X_t$  representará la notación de los incrementos de los logaritmos de los precios de  $S_t$ ,

$$X_t = \log_e \frac{S_t}{S_{t-1}}, \text{ donde } t > 0. \quad (4.1)$$

a partir de aquí nos referiremos al  $\log_e$  simplemente como  $\log$ .

En Compbell, Lo y Mackinlay (1997)<sup>2</sup>, sección 2.1.1., se propone la estructura de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas para el proceso definido por (4.1). De forma que la suma de los incrementos  $\{Y_t : t \geq 1\}$ , donde  $Y_t = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_t$ , tienen la naturaleza de una caminata aleatoria, es decir, es la suma de variables aleatorias independientes. Es conocido en teoría de procesos estocásticos que el proceso  $\{Y_t : t \geq 1\}$  es de Markov (véase en el texto de Caballero et al.<sup>3</sup>, capítulo 1.)

M. Kendall en 1953, después de analizar el comportamiento de diversos datos estadísticos del mercado de Chicago y del mercado de Nueva York, llegó a la conclusión de que los logaritmos de los precios presentan un comportamiento como el de una caminata aleatoria,

---

<sup>1</sup>Entre los autores:

Cowles, A. (1933). Can Stock Market Forecasters Forecast? *Econometrica*

Working, H. (1934). A Random Difference-Series for Use in the Analysis of Time Series. *Journal of American Statistical Association*

Cowles, A. (1944). Stock Market Forecasting. *Econometrica*, no. 3/4

<sup>2</sup>ver en bibliografía [6]

<sup>3</sup>ver en bibliografía [2]

donde  $X_t$  es definida como en (4.1), y partiendo de la definición de  $Y_t$  se tiene que

$$\begin{aligned}
 Y_t &= X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_t \\
 &= \left[ \log \frac{S_1}{S_0} \right] + \left[ \log \frac{S_2}{S_1} \right] + \left[ \log \frac{S_3}{S_2} \right] + \cdots + \left[ \log \frac{S_t}{S_{t-1}} \right] \\
 &= [\log S_1 - \log S_0] + [\log S_2 - \log S_1] + [\log S_3 - \log S_2] + \cdots + [\log S_t - \log S_{t-1}] \\
 &= \log S_t - \log S_0 \\
 &= \log \frac{S_t}{S_0}.
 \end{aligned}$$

De aquí que  $Y_0 = 0$  y

$$e^{Y_t} = \frac{S_t}{S_0}; \quad t > 0, \quad (4.2)$$

de forma que

$$S_t = S_0 e^{Y_t}; \quad t \geq 1.$$

El uso de la hipótesis de la caminata aleatoria dió como resultado el concepto de *mercado racional* o *mercado eficiente*, esto quiere decir, que el mercado responde racionalmente a la nueva información que llega.

Estas son algunas de las características de un mercado eficiente:

- Las correcciones de los precios son instantáneas y el mercado está siempre en equilibrio.
- Los precios son justos y no permiten a los participantes realizar operaciones de arbitraje.
- Los participantes son uniformes en su interpretación de la información obtenida y corrigen sus decisiones instantaneamente conforme hay nueva información disponible.
- Los participantes son homogéneos en sus metas; sus acciones son colectivamente racionales.

Desde el punto de vista formal, el concepto de *eficiencia* tiene que ser considerado como relacionado y dependiente a la naturaleza de la información que fluye hacia el mercado y sus participantes. Entre esta información se tienen: los precios pasados, toda información adicional a los precios pasados que aparecen en diversos medios (radio, revistas, periódicos, etc.) y toda información concebible. Las hipótesis anteriores pueden ser presentadas en la siguiente forma:

- La historia pasada está completamente reflejada en el precio actual, por lo que no se requiere información adicional.
- Los mercados responden inmediatamente a cualquier nueva información sobre un instrumento.

En este sentido, el precio del valor cotizado es un *proceso Markoviano*. En otras palabras, toda la información pasada está contenida en el precio actual.

Se verificará la propiedad Markoviana del proceso  $S_t$ . Para ésto bastará demostrar que

$$f_{S_t|S_{t-1}, \dots, S_1}(s_t, \dots, s_1) = f_{S_t|S_{t-1}}(s_t, s_{t-1}),$$

(véase 1.21). Suponemos que el proceso  $\{Y_t\}$  es Markoviano, es decir,

$$f_{Y_t|Y_{t-1}, \dots, Y_1}(y_t, \dots, y_1) = f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t, y_{t-1}). \quad (4.3)$$

El proceso  $\{S_t\}$  resulta de  $\{Y_t\}$  bajo la transformación  $T: \mathbb{R}^t \rightarrow \mathbb{R}^t$  definida por la regla

$$(y_1, \dots, y_t) \mapsto (s_0 e^{y_1}, \dots, s_0 e^{y_t}) = (s_1, \dots, s_t),$$

$s_0$  es una constante y  $T^{-1}$  está definida por la regla

$$(s_1, \dots, s_t) \mapsto \left( \log \frac{s_1}{s_0}, \dots, \log \frac{s_t}{s_0} \right) = (y_1, \dots, y_t).$$

El determinante Jacobiano de  $T^{-1}$  es

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \log \frac{s_1}{s_0}}{\partial s_1} & \frac{\partial \log \frac{s_1}{s_0}}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial \log \frac{s_1}{s_0}}{\partial s_t} \\ \frac{\partial \log \frac{s_2}{s_0}}{\partial s_1} & \frac{\partial \log \frac{s_2}{s_0}}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial \log \frac{s_2}{s_0}}{\partial s_t} \\ \frac{\partial \log \frac{s_t}{s_0}}{\partial s_1} & \frac{\partial \log \frac{s_t}{s_0}}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial \log \frac{s_t}{s_0}}{\partial s_t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/s_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/s_t \end{vmatrix} = \frac{1}{\left| \prod_{j=1}^t s_j \right|}.$$

Entonces por el teorema de cambio de variable (ver teorema 1.2),

$$f_{S_t, \dots, S_1}(s_t, \dots, s_1) = \frac{1}{\left| \prod_{j=1}^t s_j \right|} f_{Y_t, \dots, Y_1} \left( \log \frac{s_t}{s_0}, \dots, \log \frac{s_1}{s_0} \right),$$

entonces

$$\begin{aligned}
 f_{S_t|S_{t-1}, \dots, S_1}(s_t, \dots, s_1) &= \frac{f_{S_t, S_{t-1}, \dots, S_1}(s_t, \dots, s_1)}{f_{S_{t-1}, \dots, S_1}(s_{t-1}, \dots, s_1)} \\
 &= \frac{1}{\left| \prod_{j=1}^t s_j \right|} f_{Y_t, \dots, Y_1} \left( \log \frac{s_t}{s_0}, \dots, \log \frac{s_1}{s_0} \right) \\
 &= \frac{1}{\left| \prod_{j=1}^t s_j \right|} f_{Y_{t-1}, \dots, Y_1} \left( \log \frac{s_{t-1}}{s_0}, \dots, \log \frac{s_1}{s_0} \right) \\
 &= \frac{1}{|s_t|} f_{Y_t|Y_{t-1}, \dots, Y_1} \left( \log \frac{s_t}{s_0}, \dots, \log \frac{s_1}{s_0} \right) \\
 &= \frac{1}{|s_t|} f_{Y_t|Y_{t-1}} \left( \log \frac{s_t}{s_0}, \log \frac{s_{t-1}}{s_0} \right) \\
 &= f_{S_t|S_{t-1}}(s_t, s_{t-1}),
 \end{aligned}$$

para la última igualdad nuevamente aplicamos la transformación.

Esto concluye la prueba de nuestra afirmación, es decir, se concluye que los precios cumplen con la propiedad de Markov: *el precio actual incorpora toda la historia pasada*.

### 4.3. Distribución muestral de los logaritmos de las tasas de rendimiento (*log-returns*)

Para el estudio del comportamiento de los precios de un instrumento que se cotiza en un mercado financiero, se trabajará con el tiempo de manera discreta, debido a que los cambios se observan en intervalos de tiempo discretos:

- Los mercados sólo operan en días laborales.
- Los mercados tienen un horario preestablecido.
- Los movimientos en los precios o en los índices se dan a lo largo del día laborable en función de la oferta y la demanda de los mismos.

Por tanto, como se puede ver en los puntos anteriores, la naturaleza operativa de los mercados financieros implica que las observaciones de precios y/o índices se hagan de manera

discreta en el tiempo. Se sabe que durante una jornada financiera, existen tres tipos de precios a los cuales se les pone mayor atención, y estos son los precios mínimos, máximos y de cierre. Las observaciones se pueden hacer según la estrategia que se tome, esto es, que pueden ser de manera diaria, mensual o anual.

Para la aplicación de la técnica estudiada en este documento con base al artículo: *Técnica para la evaluación del costo unitario nivelado de generación con un enfoque estocástico* escrito por el Físico Alejandro Cuevas <sup>4</sup>, las observaciones se considerarán en intervalos de tiempo equidistantes entre cada observación, por lo que es indistinta la magnitud del intervalo de tiempo utilizado.

El tamaño de la muestra (número de observaciones) se establece en términos de los siguientes elementos:

- La disponibilidad de datos observados.
- Los elementos estadísticos y económicos del proceso analizado (precios o índices).
- El conocimiento del proceso y de la técnica por parte del analista.
- Las características y los objetivos del problema específico a resolver.

Los mercados financieros constituyen una parte importante de la economía (nacional, regional o global), por lo que se encuentran inmersos en una dinámica de cambio constante al igual que la misma economía. De esta manera, la evolución de los factores económicos afecta a los mercados financieros, originando que los procesos que determinan los precios e índices cambien constantemente. Entonces, bajo la hipótesis del *mercado eficiente*, los precios y los índices actuales contienen toda la información pasada, aunque en la práctica dicha información pudiera no reflejarse inmediatamente en las observaciones. Esta situación implicaría que en los intervalos de tiempo relativamente grandes, los procesos (considerados estocásticos) que dan origen a los precios cambien su estructura. Entonces, un proceso podría tener cierta estructura estocástica en un intervalo específico, para luego convertirse en otro tipo de proceso desconocido. En consecuencia, el tamaño de la muestra y su posición en el tiempo deberían elegirse de forma que se encuentren dentro de un proceso *homogéneo*, es decir, que dentro del intervalo de tiempo considerado, el proceso no cambie en su contexto económico ni en su estructura interna.

---

<sup>4</sup>ver en bibliografía [1]



## 4.4. Distribución teórica de los logaritmos de las tasas de rendimiento

De la discusión en la sección 4.2 consideraremos que los logaritmos de las tasas de rendimiento

$$X_t = \log \frac{S_t}{S_{t-1}}: t = 1, 2, \dots, n.$$

se pueden pensar como una sucesión de variables aleatorias independientes y con la misma distribución.

Una forma de modelar la distribución de probabilidades de  $X_t$ , la cual resulta flexible en aplicaciones es usando mezclas. Para nuestro caso y en virtud de que  $S_t$  toma valores sobre la recta real podemos usar mezclas de distribuciones normales. De esta manera, la densidad  $f_{X_t}(x)$ , puede tener diversas formas que van desde la simetría hasta patrones muy diferentes a la misma. Con este fin, pensamos que asociada a cada  $X_t$  hay una variable aleatoria de mezcla  $M_t$  (que no podemos observar), de forma que  $M_t$  toma valores en  $\{1, 2, \dots, m\}$ , donde  $m$  es un entero positivo fijo, la elección de dicha  $m$  se hace de acuerdo al modelo que se este estudiando, más adelante se hará la elección de nuestra  $m$ .

La función de densidad de  $X_t$ , condicional a que la variable aleatoria  $M_t$  tome algún valor  $i$  es:

$$f_{X_t}(x_t|M_t = i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(x_t - \mu_i)^2}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m.$$

Para la variable latente  $M_t$  se supondrá que tiene una distribución de probabilidad, para la cual la probabilidad de que  $M_t$  tome un valor  $i$  sea igual a  $\pi_i > 0$ . Es decir, que la función de probabilidad de  $M_t$  es

$$\mathbb{P}(M_t = i) = \pi_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m, \text{ donde } \sum_{i=1}^m \pi_i = 1 \text{ y } \pi_i > 0.$$

Tomando como referencia lo visto en la sección 1.2 y tomando de ésta la ecuación (1.2), se puede expresar a la probabilidad del evento  $M_t = i$  y  $X_t \leq x$ , para algún intervalo  $(-\infty, x] \in \mathbb{R}$ , como:

$$\mathbb{P}(X_t \leq x, M_t = i) = \mathbb{P}(X_t \leq x|M_t = i)\mathbb{P}(M_t = i).$$

Para todos los valores de  $X_t$  que pertenecen al intervalo  $(-\infty, x]$ , la función conjunta entonces es:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_t \leq x, M_t = i) &= \pi_i \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(z-\mu_i)^2} dz \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{\pi_i}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(z-\mu_i)^2} dz.\end{aligned}$$

Sea

$$f_{X_t, M_t}(x, i) = \frac{\pi_i}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(x-\mu_i)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Para obtener la función de densidad de  $X_t$ , es necesario sumar la función anterior sobre todos los valores de  $i$ , es decir,

$$f_{X_t}(x) = \sum_{i=1}^m f_{X_t, M_t}(x, i) \quad (4.4)$$

$$= \sum_{i=1}^m \frac{\pi_i}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(x-\mu_i)^2} \quad (4.5)$$

$$= \sum_{i=1}^m \pi_i f_{X_t}(x | M_t = i). \quad (4.6)$$

## 4.5. Distribución marginal de los precios

En la sección anterior se pudo ver que la función  $f_{X_t}(x)$  es una función de densidad, dada por  $f_{X_t}(x) = \sum_{i=1}^m \pi_i f_{X_t}(x | M_t = i)$ , donde  $m$  es conocida y además  $f_{X_t}(x | M_t = i)$  es una densidad  $N(\mu_i, \sigma_i^2)$  para cada  $i = 1, \dots, m$ .

Con base a lo anterior y con lo visto en la sección 1.8 se procederá a aplicar un cambio de variable para estudiar la distribución marginal de los precios  $\{S_t\}_t$  en función de la distribución de los logaritmos de las tasas de rendimiento  $f_{X_t}(x)$ .

Para cada  $n$  entero positivo y  $t = 1, 2, \dots, n$  definimos

$$T(X_t) = S_{t-1} e^{X_t} = S_t,$$

(donde su dominio esta en  $\mathbb{R}^+$ ).

Entonces

$$\frac{dS_t}{dX_t} = S_{t-1}e^{X_t},$$

y para la transformación inversa se tiene

$$T^{-1}(S_t) = \log \frac{S_t}{S_{t-1}} = X_t,$$

(con dominio en  $\mathbb{R}$ ) y por consiguiente

$$\frac{dX_t}{dS_t} = \frac{1}{S_t}.$$

Después de definir la transformación y su inversa, se aplicará ésto de tal forma que nos quede una expresión similar a (1.23) que se vió en la sección 1.8, por lo que se tiene

$$g_{S_t|S_{t-1}}(S_t|S_{t-1}) = f_{X_t} \left( \log \frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \frac{1}{S_t}, \quad (4.7)$$

que es una función de densidad.

Se recuerda que  $S_t$  representa el valor del precio del gas natural en el momento  $t$  y que  $S_0$  es conocido en este momento por representar al valor del precio del gas natural en el momento cero, es decir, en el momento en que inicia el proceso. Ahora lo que se desea encontrar es la función de densidad marginal de los precios, es decir de  $S_t$ , donde  $t$  corre en  $\mathbb{N}$  hasta un  $n$  establecido.

Ahora se verá a la función  $g$  para los valores de  $s_t$ , empezando con  $s_1$ , por lo cual se tiene:

$$g_{S_1}(s_1) = g_{S_1|S_0}(s_1|s_0) = f_{X_1} \left( \log \frac{s_1}{s_0} \right) \frac{1}{s_1}. \quad (4.8)$$

Para  $s_2$  se tiene:

$$g_{S_2}(s_2) = g_{S_2|S_0}(s_2|s_0) = \int_0^\infty g_{S_2|S_1}(s_2|s_1)g_{S_1|S_0}(s_1|s_0)ds_1 = \int_0^\infty g_{S_2|S_1}(s_2|s_1)g(s_1)ds_1,$$

esto basándose en la Ley de Probabilidad Total. Ahora usandose (4.7), se tiene

$$\begin{aligned} g_{S_2}(s_2) &= \int_0^\infty f_{X_2} \left( \log \frac{s_2}{s_1} \right) \frac{1}{s_2} f_{X_1} \left( \log \frac{s_1}{s_0} \right) \frac{1}{s_1} ds_1 \\ &= \int_{-\infty}^\infty f_{X_2}(\log s_2 - \log s_1) \frac{1}{s_2} f_{X_1}(x_1) dx_1. \end{aligned}$$

Ahora basandose en la igualdad  $\log s_1 = x_1 + \log s_0$ , se tiene

$$\begin{aligned} g_{S_2}(s_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2}(\log s_2 - [x_1 + \log s_0]) \frac{1}{s_2} f_{X_1}(x_1) dx_1 \\ &= \frac{1}{s_2} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2}(\log s_2 - x_1 - \log s_0) f_{X_1}(x_1) dx_1 \\ &= \frac{1}{s_2} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2} \left( \log \frac{s_2}{s_0} - x_1 \right) f_{X_1}(x_1) dx_1, \end{aligned}$$

y ahora por la definición de la función  $f_{X_t}(x_t) = \sum_{i=1}^m \pi_i f_i(x_i)$ , nos queda de la siguiente manera:

$$= \frac{1}{s_2} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^m \pi_j f_j \left( \log \frac{s_2}{s_0} - x_1 \right) \sum_{i=1}^m \pi_i f_i(x_1) dx_1.$$

Ahora por (4.5) se tiene

$$g_{S_2}(s_2) = \frac{1}{s_2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^m \pi_j \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2} \left[ \left( \log \frac{s_2}{s_0} - x_1 \right) - \mu_j \right]^2} \right) \left( \sum_{i=1}^m \pi_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2} [x_1 - \mu_i]^2} \right) dx_1,$$

de donde finalmente tenemos

$$g_{S_2}(s_2) = \frac{1}{s_2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \pi_j \pi_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2} \left[ \left( \log \frac{s_2}{s_0} - x_1 \right) - \mu_j \right]^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2} [x_1 - \mu_i]^2} dx_1. \quad (4.9)$$

Se desarrollará el integrando para una  $j$  e  $i$  fijas:

$$\begin{aligned} A_{ij}(s_2, x_1) &= \pi_j \pi_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2} \left[ \left( \log \frac{s_2}{s_0} - x_1 \right) - \mu_j \right]^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2} [x_1 - \mu_i]^2} \\ &= \pi_j \pi_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2} \left[ \left( \log \frac{s_2}{s_0} - x_1 \right) - \mu_j \right]^2 - \frac{1}{2\sigma_i^2} [x_1 - \mu_i]^2} \\ &= \frac{\pi_j \pi_i}{2\pi \sqrt{\sigma_i^2 \sigma_j^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2} \left[ \left( \log \frac{s_2}{s_0} - x_1 \right) - \mu_j \right]^2 - \frac{1}{2\sigma_i^2} [x_1 - \mu_i]^2} \\ &= \frac{\pi_j \pi_i}{2\pi \sqrt{\sigma_i^2 \sigma_j^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2} \left[ \left( \log \frac{s_2}{s_0} \right)^2 - 2 \log \left( \frac{s_2}{s_0} \right) x_1 + x_1^2 - 2 \log \frac{s_2}{s_0} \mu_j + 2 x_1 \mu_j + \mu_j^2 \right] - \frac{1}{2\sigma_i^2} [x_1^2 - 2 x_1 \mu_i + \mu_i^2]}}, \end{aligned}$$

reagrupando nuevamente se tiene

$$\begin{aligned}
A_{ij}(s_2, x_1) &= \frac{\pi_j \pi_i}{2\pi \sqrt{\sigma_i^2 \sigma_j^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2} \left[ \log \frac{s_2}{s_0} - \mu_j \right]^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2} \left[ -2 \log \frac{s_2}{s_0} x_1 + x_1^2 + 2x_1 \mu_j \right] - \frac{1}{2\sigma_i^2} \left[ x_1^2 - 2x_1 \mu_i + \mu_i^2 \right]} \\
&= \frac{\pi_j \pi_i}{2\pi \sqrt{\sigma_i^2 \sigma_j^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2} \left[ \log \frac{s_2}{s_0} - \mu_j \right]^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2 \sigma_i^2} \left[ -2\sigma_i^2 \log \frac{s_2}{s_0} x_1 + \sigma_i^2 x_1^2 + 2\sigma_i^2 x_1 \mu_j + \sigma_j^2 x_1^2 - 2\sigma_j^2 x_1 \mu_i + \sigma_j^2 \mu_i^2 \right]} \\
&= \frac{\pi_j \pi_i}{2\pi \sqrt{\sigma_i^2 \sigma_j^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2} \left[ \log \frac{s_2}{s_0} - \mu_j \right]^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2 \sigma_i^2} \left[ x_1^2 (\sigma_i^2 + \sigma_j^2) - 2x_1 (\sigma_i^2 \log \frac{s_2}{s_0} - \sigma_i^2 \mu_j + \sigma_j^2 \mu_i) \right]} e^{-\frac{\mu_i^2}{2\sigma_i^2}} \\
&= \frac{\pi_j \pi_i}{2\pi \sqrt{\sigma_i^2 \sigma_j^2}} e^{-\frac{\mu_i^2}{2\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2} \left[ \log \frac{s_2}{s_0} - \mu_j \right]^2} e^{-\frac{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}{2\sigma_j^2 \sigma_i^2} \left[ x_1^2 - 2x_1 \frac{\sigma_i^2 \log \frac{s_2}{s_0} - \sigma_i^2 \mu_j + \sigma_j^2 \mu_i}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} \right]} \\
&= \frac{\pi_j \pi_i}{2\pi \sqrt{\sigma_i^2 \sigma_j^2}} e^{-\frac{\mu_i^2}{2\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2} \left[ \log \frac{s_2}{s_0} - \mu_j \right]^2} e^{\frac{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}{2\sigma_j^2 \sigma_i^2} \left[ \frac{\sigma_i^2 \log \frac{s_2}{s_0} - \sigma_i^2 \mu_j + \sigma_j^2 \mu_i}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} \right]^2} e^{-\frac{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}{2\sigma_j^2 \sigma_i^2} \left[ x_1 - \frac{\sigma_i^2 \log \frac{s_2}{s_0} - \sigma_i^2 \mu_j + \sigma_j^2 \mu_i}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} \right]^2}.
\end{aligned}$$

Ahora sustituyendose la última expresión en (4.9) y recordando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}{2\sigma_j^2 \sigma_i^2} \left[ x_1 - \frac{\sigma_i^2 \log \frac{s_2}{s_0} - \sigma_i^2 \mu_j + \sigma_j^2 \mu_i}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} \right]^2} dx_1 = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma_i^2 \sigma_j^2}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}},$$

se tiene

$$g_{S_2}(s_2) = \frac{1}{s_2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\pi_j \pi_i}{\sqrt{2\pi(\sigma_j^2 + \sigma_i^2)}} e^{-\frac{\mu_i^2}{2\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2} \left[ \log \frac{s_2}{s_0} - \mu_j \right]^2} e^{\frac{[\sigma_i^2 \log \frac{s_2}{s_0} - \sigma_i^2 \mu_j + \sigma_j^2 \mu_i]^2}{2\sigma_j^2 \sigma_i^2 (\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}} \quad (4.10)$$

$$= \frac{1}{s_2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\pi_j \pi_i}{\sqrt{2\pi(\sigma_j^2 + \sigma_i^2)}} e^{-\frac{\mu_i^2}{2\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2} \left[ \left[ \log \frac{s_2}{s_0} - \mu_j \right]^2 - \frac{[\sigma_i^2 \log \frac{s_2}{s_0} - \sigma_i^2 \mu_j + \sigma_j^2 \mu_i]^2}{\sigma_i^2 (\sigma_i^2 + \sigma_j^2)} \right]} \quad (4.11)$$

Al desarrollar la última exponencial

$$e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2} \left[ \left[ \log \frac{s_2}{s_0} - \mu_j \right]^2 - \frac{[\sigma_i^2 \log \frac{s_2}{s_0} - \sigma_i^2 \mu_j + \sigma_j^2 \mu_i]^2}{\sigma_i^2 (\sigma_i^2 + \sigma_j^2)} \right]}$$

$$= e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2} \left[ \left[ \log \frac{s_2}{s_0} - \mu_j \right]^2 - \frac{\sigma_i^4 \log^2 \frac{s_2}{s_0} + \sigma_i^4 \mu_j^2 + \sigma_j^4 \mu_i^2 - 2\sigma_i^4 \log \frac{s_2}{s_0} \mu_j + 2\sigma_i^2 \log \frac{s_2}{s_0} \sigma_j^2 \mu_i - 2\sigma_i^2 \mu_j \sigma_j^2 \mu_i}{\sigma_i^2(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)} \right]} \quad (4.12)$$

$$= e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2} \left[ \log^2 \frac{s_2}{s_0} - 2 \log \frac{s_2}{s_0} \mu_j + \mu_j^2 + \frac{-\sigma_i^4 \log^2 \frac{s_2}{s_0} - \sigma_i^4 \mu_j^2 - \sigma_j^4 \mu_i^2 + 2\sigma_i^4 \log \frac{s_2}{s_0} \mu_j - 2\sigma_i^2 \log \frac{s_2}{s_0} \sigma_j^2 \mu_i + 2\sigma_i^2 \mu_j \sigma_j^2 \mu_i}{\sigma_i^2(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)} \right]} \quad (4.13)$$

$$= e^{-\frac{1}{2(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)} \left[ \log^2 \frac{s_2}{s_0} - 2 \log \frac{s_2}{s_0} (\mu_j + \mu_i) \right]} e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2 \sigma_j^2 (\sigma_i^2 + \sigma_j^2)} \left[ \sigma_i^2 \sigma_j^2 (2\mu_j \mu_i + \mu_j^2) - \sigma_j^4 \mu_i^2 \right]} \quad (4.14)$$

Finalmente se llega a que (4.14) vale

$$= e^{-\frac{1}{2(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)} \left[ \log \frac{s_2}{s_0} - (\mu_j + \mu_i) \right]^2} e^{\frac{(\mu_j + \mu_i)^2}{2(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}} e^{\frac{-\sigma_i^2 \sigma_j^2 (2\mu_j \mu_i + \mu_j^2) + \sigma_j^4 \mu_i^2}{2\sigma_i^2 \sigma_j^2 (\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}} \quad (4.15)$$

Sustituyendo la fórmula (4.15) en (4.11) se obtiene la siguiente expresión para  $g_{S_2}(s_2)$

$$= \frac{1}{s_2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\pi_i \pi_j}{\sqrt{2\pi(\sigma_j^2 + \sigma_i^2)}} e^{-\frac{1}{2(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)} \left[ \log \frac{s_2}{s_0} - (\mu_j + \mu_i) \right]^2} e^{-\frac{\mu_i^2}{2\sigma_i^2}} e^{\frac{(\mu_j + \mu_i)^2}{2(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}} e^{\frac{-\sigma_i^2 \sigma_j^2 (2\mu_j \mu_i + \mu_j^2) + \sigma_j^4 \mu_i^2}{2\sigma_i^2 \sigma_j^2 (\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}}, \quad (4.16)$$

desarrollando las tres últimas exponenciales

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{\mu_i^2}{2\sigma_i^2}} e^{\frac{(\mu_j + \mu_i)^2}{2(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}} e^{\frac{-\sigma_i^2 \sigma_j^2 (2\mu_j \mu_i + \mu_j^2) + \sigma_j^4 \mu_i^2}{2\sigma_i^2 \sigma_j^2 (\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}} \\ &= e^{-\frac{\mu_i^2}{2\sigma_i^2} + \frac{(\mu_j + \mu_i)^2}{2(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)} + \frac{-\sigma_i^2 \sigma_j^2 (2\mu_j \mu_i + \mu_j^2) + \sigma_j^4 \mu_i^2}{2\sigma_i^2 \sigma_j^2 (\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}} \\ &= e^{\frac{-\mu_i^2 \sigma_j^2 (\sigma_i^2 + \sigma_j^2) + (\mu_j + \mu_i)^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2 - \sigma_i^2 \sigma_j^2 (2\mu_j \mu_i + \mu_j^2) + \sigma_j^4 \mu_i^2}{2\sigma_i^2 \sigma_j^2 (\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}} \\ &= e^{\frac{-\mu_i^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2 - \mu_i^2 \sigma_j^4 + (\mu_j + \mu_i)^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2 - \sigma_i^2 \sigma_j^2 (2\mu_j \mu_i + \mu_j^2) + \sigma_j^4 \mu_i^2}{2\sigma_i^2 \sigma_j^2 (\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}} \\ &= e^{\frac{(\mu_j + \mu_i)^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2 - (\mu_j^2 + 2\mu_j \mu_i + \mu_i^2) \sigma_i^2 \sigma_j^2}{2\sigma_i^2 \sigma_j^2 (\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}} \\ &= e^{\frac{(\mu_j + \mu_i)^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2 - (\mu_j + \mu_i)^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2}{2\sigma_i^2 \sigma_j^2 (\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}} \\ &= e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Finalmente tenemos que (4.16) es igual a

$$g_{S_2}(s_2) = \frac{1}{s_2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\pi_i \pi_j}{\sqrt{2\pi(\sigma_j^2 + \sigma_i^2)}} e^{-\frac{1}{2(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)} \left[ \log \frac{s_2}{s_0} - (\mu_j + \mu_i) \right]^2}.$$

Se puede pensar ahora que para algún  $n = k$

$$g_{S_k}(s_k) = \frac{1}{s_k} \sum_{i_k=1}^m \cdots \sum_{i_1=1}^m \frac{\pi_{i_k} \cdots \pi_{i_1}}{\sqrt{2\pi(\sigma_{i_k}^2 + \cdots + \sigma_{i_1}^2)}} e^{-\frac{1}{2(\sigma_{i_k}^2 + \cdots + \sigma_{i_1}^2)} \left[ \log \frac{s_k}{s_0} - (\mu_{i_k} + \cdots + \mu_{i_1}) \right]^2}, \quad (4.17)$$

ahora procederemos a obtener a partir de (4.17) la expresión para  $k + 1$ , esto es

$$g_{S_{k+1}}(s_{k+1}) = g_{S_{k+1}|S_0}(s_{k+1}|s_0) = \int_0^\infty g_{S_{k+1}|S_k}(s_{k+1}|s_k) g_{S_k|S_0}(s_k|s_0) ds_k = \int_0^\infty g_{S_{k+1}|S_k}(s_{k+1}|s_k) g(s_k) ds_k,$$

esto basándose en la Ley de Probabilidad Total. Ahora usandose (4.7), se tiene

$$\begin{aligned} g_{S_{k+1}}(s_{k+1}) &= \int_0^\infty f_{X_{k+1}} \left( \log \frac{s_{k+1}}{s_k} \right) \frac{1}{s_{k+1}} g(s_k) ds_k \\ &= \int_{-\infty}^\infty f_{X_{k+1}} (\log s_{k+1} - \log s_k) \frac{1}{s_{k+1}} g(s_k) ds_k. \end{aligned}$$

tomando la igualdad ( $\log s_k = x_k + \log s_{k-1} = x_k + x_{k-1} + \log s_{k-2}$ ), sucesivamente se llega a tener ( $\log s_k = x_k + \cdots + x_1 + \log s_0$ ) y utilizandose lo que se vió en la sección 4.2 podemos resumir ( $\log s_k = y_k + \log s_0$ ), se tiene

$$\begin{aligned} g_{S_{k+1}}(s_{k+1}) &= \int_{-\infty}^\infty f_{X_{k+1}} (\log s_{k+1} - [y_k + \log s_0]) \frac{1}{s_{k+1}} g(s_k) ds_k \\ &= \frac{1}{s_{k+1}} \int_{-\infty}^\infty f_{X_{k+1}} \left( \log \frac{s_{k+1}}{s_0} - y_k \right) g(s_k) ds_k, \end{aligned}$$

y por la definición de la función  $f_{X_t}(x_t)$  y por la expresión (4.17) tenemos

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{s_{k+1}} \int_{-\infty}^\infty \sum_{i_{k+1}=1}^m \pi_{i_{k+1}} f_{i_{k+1}} \left( \log \frac{s_{k+1}}{s_0} - y_k \right) \frac{1}{s_k} \sum_{i_k=1}^m \cdots \sum_{i_1=1}^m \frac{\pi_{i_k} \cdots \pi_{i_1}}{\sqrt{2\pi(\sigma_{i_k}^2 + \cdots + \sigma_{i_1}^2)}} e^{-\frac{1}{2(\sigma_{i_k}^2 + \cdots + \sigma_{i_1}^2)} \left[ \log \frac{s_k}{s_0} - (\mu_{i_k} + \cdots + \mu_{i_1}) \right]^2} ds_k \\ &= \frac{1}{s_{k+1}} \int_{-\infty}^\infty \sum_{i_{k+1}=1}^m \pi_{i_{k+1}} f_{i_{k+1}} \left( \log \frac{s_{k+1}}{s_0} - y_k \right) \sum_{i_k=1}^m \cdots \sum_{i_1=1}^m \frac{\pi_{i_k} \cdots \pi_{i_1}}{\sqrt{2\pi(\sigma_{i_k}^2 + \cdots + \sigma_{i_1}^2)}} e^{-\frac{1}{2(\sigma_{i_k}^2 + \cdots + \sigma_{i_1}^2)} \left[ y_k - (\mu_{i_k} + \cdots + \mu_{i_1}) \right]^2} dx_k \\ &= \frac{1}{s_{k+1}} \int_{-\infty}^\infty \sum_{i_{k+1}=1}^m \frac{\pi_{i_{k+1}}}{\sqrt{2\pi\sigma_{i_{k+1}}^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{i_{k+1}}^2} \left[ \left( \log \frac{s_{k+1}}{s_0} - y_k \right) - \mu_{i_{k+1}} \right]^2} \sum_{i_k=1}^m \cdots \sum_{i_1=1}^m \frac{\pi_{i_k} \cdots \pi_{i_1}}{\sqrt{2\pi(\sigma_{i_k}^2 + \cdots + \sigma_{i_1}^2)}} e^{-\frac{1}{2(\sigma_{i_k}^2 + \cdots + \sigma_{i_1}^2)} \left[ y_k - (\mu_{i_k} + \cdots + \mu_{i_1}) \right]^2} dx_k \end{aligned}$$

Ahora hemos llegado a tener para  $g_{S_{k+1}}(s_{k+1})$  la siguiente expresión

$$= \frac{1}{S_{k+1}} \sum_{i_{k+1}=1}^m \dots \sum_{i_1=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi_{i_{k+1}}}{\sqrt{2\pi\sigma_{i_{k+1}}^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{i_{k+1}}^2} \left[ \left( \log \frac{s_{k+1}}{s_0} - y_k \right) - \mu_{i_{k+1}} \right]^2} \frac{\pi_{i_k} \dots \pi_{i_1}}{\sqrt{2\pi(\sigma_{i_k}^2 + \dots + \sigma_{i_1}^2)}} e^{-\frac{1}{2(\sigma_{i_k}^2 + \dots + \sigma_{i_1}^2)} \left[ y_k - (\mu_{i_k} + \dots + \mu_{i_1}) \right]^2} dx_k \quad (4.18)$$

Desarrollando el integrando una vez fijado cada sub-índice,

$$A_{i_{k+1} \dots i_1}(S_{k+1}, X_k) = \frac{\pi_{i_{k+1}}}{\sqrt{2\pi\sigma_{i_{k+1}}^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{i_{k+1}}^2} \left[ \left( \log \frac{s_{k+1}}{s_0} - y_k \right) - \mu_{i_{k+1}} \right]^2} \frac{\pi_{i_k} \dots \pi_{i_1}}{\sqrt{2\pi(\sigma_{i_k}^2 + \dots + \sigma_{i_1}^2)}} e^{-\frac{1}{2(\sigma_{i_k}^2 + \dots + \sigma_{i_1}^2)} \left[ y_k - (\mu_{i_k} + \dots + \mu_{i_1}) \right]^2},$$

la expresión  $A_{i_{k+1} \dots i_1}(S_{k+1}, X_k)$ , puede escribirse de una manera más sencilla si re-expresamos los siguientes sumandos como:  $\Pi_{i_{k,1}} = \pi_{i_k} \dots \pi_{i_1}$ ,  $\Sigma_{i_{k,1}}^2 = \sigma_{i_k}^2 + \dots + \sigma_{i_1}^2$  y  $\mathcal{M}i_{k,1} = \mu_{i_k} + \dots + \mu_{i_1}$ , entonces re-escribiendo

$$A_{i_{k+1} \dots i_1}(S_{k+1}, X_k) = \frac{\pi_{i_{k+1}}}{\sqrt{2\pi\sigma_{i_{k+1}}^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{i_{k+1}}^2} \left[ \left( \log \frac{s_{k+1}}{s_0} - y_k \right) - \mu_{i_{k+1}} \right]^2} \frac{\Pi_{i_{k,1}}}{\sqrt{2\pi(\Sigma_{i_{k,1}}^2)}} e^{-\frac{1}{2(\Sigma_{i_{k,1}}^2)} \left[ y_k - (\mathcal{M}i_{k,1}) \right]^2},$$

esta expresión es muy similar con la que se inició  $A_{ij}(S_2, X_1)$ , por lo tanto, siguiendo un desarrollo similar se llega a tener para  $A_{i_{k+1} \dots i_1}(S_{k+1}, X_k)$

$$= \frac{\pi_{i_{k+1}} \Pi_{i_{k,1}}}{2\pi \sqrt{\Sigma_{i_{k,1}}^2 \sigma_{i_{k+1}}^2}} e^{-\frac{\mathcal{M}^2 i_{k,1}}{2\Sigma_{i_{k,1}}^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{i_{k+1}}^2} \left[ \log \frac{s_{k+1}}{s_0} - \mu_{i_{k+1}} \right]^2} e^{\frac{\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2}{2\sigma_{i_{k+1}}^2 \Sigma_{i_{k,1}}^2} \left[ \frac{\Sigma_{i_{k,1}}^2 \log \frac{s_k}{s_0} - \Sigma_{i_{k,1}}^2 \mu_{i_{k+1}} + \sigma_{i_{k+1}}^2 \mathcal{M}i_{k,1}}{\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2} \right]^2} e^{-\frac{\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2}{2\sigma_{i_{k+1}}^2 \Sigma_{i_{k,1}}^2} \left[ y_k - \frac{\Upsilon}{\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2} \right]^2}, \quad (4.19)$$

donde  $\Upsilon = \Sigma_{i_{k,1}}^2 \log \frac{s_{i_{k+1}}}{s_0} - \Sigma_{i_{k,1}}^2 \mu_{i_{k+1}} + \sigma_{i_{k+1}}^2 \mathcal{M}i_{k,1}$ . Tomandose la última exponencial y recordando que  $y_k = x_k + \dots + x_1$  y que  $y_z = \log \frac{s_z}{s_0}$

$$= e^{-\frac{\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2}{2\sigma_{i_{k+1}}^2 \Sigma_{i_{k,1}}^2} \left[ y_k - \frac{\Sigma_{i_{k,1}}^2 \log \frac{s_{i_{k+1}}}{s_0} - \Sigma_{i_{k,1}}^2 \mu_{i_{k+1}} + \sigma_{i_{k+1}}^2 \mathcal{M}i_{k,1}}{\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2} \right]^2} \\ = e^{-\frac{\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2}{2\sigma_{i_{k+1}}^2 \Sigma_{i_{k,1}}^2} \left[ x_k - \frac{\Sigma_{i_{k,1}}^2 \log \frac{s_{i_{k+1}}}{s_0} - \Sigma_{i_{k,1}}^2 \mu_{i_{k+1}} + \sigma_{i_{k+1}}^2 \mathcal{M}i_{k,1} - \log \frac{s_{k-1}}{s_0} (\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2)}{\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2} \right]^2},$$



sustituyéndose la expresión (4.19) (considerando esta última igualdad para el exponente respectivo) en (4.18) y recordándose que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2}{2\sigma_{i_{k+1}}^2 \Sigma_{i_{k,1}}^2} \left[ x_k - \frac{\Sigma_{i_{k,1}}^2 \log \frac{s_{i_{k+1}}}{s_0} - \Sigma_{i_{k,1}}^2 \mu_{i_{k+1}} + \sigma_{i_{k+1}}^2 \mathcal{M}_{i_{k,1}} - \log \frac{s_{k-1}}{s_0} (\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2)}{\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2} \right]^2} dx_k = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma_{i_{k+1}}^2 \Sigma_{i_{k,1}}^2}{\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2}},$$

se tiene

$$\begin{aligned} g_{S_{k+1}}(s_{k+1}) &= \\ &= \frac{1}{s_{k+1}} \sum_{i_{k+1}=1}^m \dots \sum_{i_1=1}^m \frac{\pi_{i_{k+1}} \prod_{i_{k,1}}}{\sqrt{2\pi(\sigma_{i_{k+1}}^2 + \Sigma_{i_{k,1}}^2)}} e^{-\frac{\mathcal{M}_{i_{k,1}}^2}{2\Sigma_{i_{k,1}}^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{i_{k+1}}^2} \left[ \log \frac{s_{k+1}}{s_0} - \mu_{i_{k+1}} \right]^2} e^{-\frac{\left[ \frac{\Sigma_{i_{k,1}}^2 \log \frac{s_k}{s_0} - \Sigma_{i_{k,1}}^2 \mu_{i_{k+1}} + \sigma_{i_{k+1}}^2 \mathcal{M}_{i_{k,1}}}{2\sigma_{i_{k+1}}^2 \Sigma_{i_{k,1}}^2 (\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2)} \right]^2}} \\ &= \frac{1}{s_{k+1}} \sum_{i_{k+1}=1}^m \dots \sum_{i_1=1}^m \frac{\pi_{i_{k+1}} \prod_{i_{k,1}}}{\sqrt{2\pi(\sigma_{i_{k+1}}^2 + \Sigma_{i_{k,1}}^2)}} e^{-\frac{\mathcal{M}_{i_{k,1}}^2}{2\Sigma_{i_{k,1}}^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{i_{k+1}}^2} \left[ \left[ \log \frac{s_{k+1}}{s_0} - \mu_{i_{k+1}} \right]^2 - \frac{\left[ \frac{\Sigma_{i_{k,1}}^2 \log \frac{s_k}{s_0} - \Sigma_{i_{k,1}}^2 \mu_{i_{k+1}} + \sigma_{i_{k+1}}^2 \mathcal{M}_{i_{k,1}}}{\Sigma_{i_{k,1}}^2 (\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2)} \right]^2}{\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2} \right]}}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

se llega ahora a una expresión como (4.11), entonces siguiendo un proceso similar para desarrollar la última exponencial se llega a tener una expresión como en (4.14),

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{1}{2\sigma_{i_{k+1}}^2} \left[ \left[ \log \frac{s_{k+1}}{s_0} - \mu_{i_{k+1}} \right]^2 - \frac{\left[ \frac{\Sigma_{i_{k,1}}^2 \log \frac{s_k}{s_0} - \Sigma_{i_{k,1}}^2 \mu_{i_{k+1}} + \sigma_{i_{k+1}}^2 \mathcal{M}_{i_{k,1}}}{\Sigma_{i_{k,1}}^2 (\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2)} \right]^2}{\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2} \right]} \\ &= e^{-\frac{1}{2(\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2)} \left[ \log \frac{s_{k+1}}{s_0} - (\mu_{i_{k+1}} + \mathcal{M}_{i_{k,1}}) \right]^2} e^{\frac{(\mu_{i_{k+1}} + \mathcal{M}_{i_{k,1}})^2}{2(\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2)}} e^{-\frac{\Sigma_{i_{k,1}}^2 \sigma_{i_{k+1}}^2 (2\mu_{i_{k+1}} \mathcal{M}_{i_{k,1}} + \mu_{i_{k+1}}^2) + \sigma_{i_{k+1}}^4 \mathcal{M}_{i_{k,1}}^2}{2\Sigma_{i_{k,1}}^2 \sigma_{i_{k+1}}^2 (\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2)}}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

sustituyendo (4.21) en (4.20)

$$= \frac{1}{s_{k+1}} \sum_{i_{k+1}=1}^m \dots \sum_{i_1=1}^m \frac{\pi_{i_{k+1}} \prod_{i_{k,1}}}{\sqrt{2\pi(\sigma_{i_{k+1}}^2 + \Sigma_{i_{k,1}}^2)}} e^{-\frac{1}{2(\Sigma_{i_{k,1}}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2)} \left[ \log \frac{s_{k+1}}{s_0} - (\mu_{i_{k+1}} + \mathcal{M}_{i_{k,1}}) \right]^2},$$

volviendo a reexpresar llegamos finalmente a tener

$$g_{S_{k+1}}(s_{k+1}) = \frac{1}{s_{k+1}} \sum_{i_{k+1}=1}^m \dots \sum_{i_1=1}^m \frac{\pi_{i_{k+1}} \pi_{i_k} \dots \pi_{i_1}}{\sqrt{2\pi(\sigma_{i_{k+1}}^2 + \sigma_{i_k}^2 + \dots + \sigma_{i_1}^2)}} e^{-\frac{1}{2(\sigma_{i_k}^2 + \dots + \sigma_{i_1}^2 + \sigma_{i_{k+1}}^2)} \left[ \log \frac{s_{k+1}}{s_0} - (\mu_{i_{k+1}} + \mu_{i_k} + \dots + \mu_{i_1}) \right]^2}, \quad (4.22)$$

Mediante un proceso de inducción estándar, como se vio para  $g_{S_{k+1}}(s_{k+1})$  llegando a (4.22), se llega a tener para  $g_{S_n}(S_n)$

$$g_{S_n}(S_n) = \frac{1}{S_n} \sum_{i_n=1}^m \cdots \sum_{i_1=1}^m \frac{\pi_{i_n} \cdots \pi_{i_1}}{\sqrt{2\pi(\sigma_{i_n}^2 + \cdots + \sigma_{i_1}^2)}} e^{-\frac{1}{2(\sigma_{i_n}^2 + \cdots + \sigma_{i_1}^2)} \left[ \log \frac{S_n}{s_0} - (\mu_{i_n} + \cdots + \mu_{i_1}) \right]^2}. \quad (4.23)$$

## Capítulo 5

# Evaluación de un proyecto de inversión de generación de electricidad con gas natural como combustible.

En este capítulo se mencionará a grandes rasgos dos de las herramientas que son comúnmente usadas en el ramo de las matemáticas financieras, estamos hablando de los conceptos de *valor capitalizable* y *valor presente*. Estas herramientas son básicas y sus cálculos se realizan de manera muy sencilla.

Para el concepto del valor capitalizable, que se verá en la siguiente sección, únicamente se tomará el concepto de interés compuesto, es decir, no se mencionará al interés simple, esto con el fin de introducir al concepto del valor presente que se emplea en el modelo, para los precios del Gas Natural. Posteriormente se definirá la fórmula del Costo Unitario Nivelado de Generación conforme al documento denominado “Costos y Parámetros de Referencia para la Evaluación de Proyectos de Generación 2006” (véase en COPAR de Generación 2006<sup>1</sup>), finalmente a esta fórmula se le incorporará el costo económico asociado a la volatilidad del precio del gas natural.

---

<sup>1</sup>ver en bibliografía [9]

## 5.1. Valor capitalizable

Cuando se habla de dinero o capital, es muy frecuente tomar en cuenta el valor de éste durante el transcurso del tiempo con el fin de que no pierda valor de adquisición. Es por eso que cuando se habla de préstamos o alguna operación financiera que involucre un desembolso en un tiempo dado y el pago de este desembolso se de en fechas posteriores se cobra el llamado *interés*, que por lo general es un valor porcentual del capital desembolsado. Para el cálculo del interés se suele usar una tasa de interés que denotamos  $i$ .

Cuando se habla de interés compuesto, se entiende que durante un periodo de tiempo establecido (que por lo general es de un año) se cobra un interés por el capital prestado y una vez concluido este lapso de tiempo el interés pasa a formar parte del capital, por lo que para un siguiente periodo de tiempo, el interés ahora será la parte porcentual del capital inicial más el interés generado en el lapso de tiempo anterior. En términos de notación se representa al valor capitalizable de la siguiente manera:

- Para el primer periodo se tiene

$$C_1 = C_0 + iC_0 = C_0(1 + i),$$

donde:

$C_1$  = es el capital al final del periodo.

$C_0$  = es el capital inicial.

$i$  = es el interés.

- Para el segundo periodo se tiene

$$C_2 = C_1 + iC_1 = C_1(1 + i) = C_0(1 + i)(1 + i) = C_0(1 + i)^2,$$

donde:

$C_2$  = es el capital al final del segundo periodo.

$C_1$  = es el capital al final del primer periodo.

$C_0$  = es el capital inicial.

$i$  = es el interés.

- Para un periodo  $n$  se tiene

$$C_n = C_{n-1} + iC_{n-1} = C_{n-1}(1 + i) = C_0(1 + i)^n,$$

donde:

$C_n$  = es el capital al final del n-ésimo periodo.

$C_{n-1}$  = es el capital al final del periodo  $n - 1$ .

$C_0$  = es el capital inicial.

$i$  = es el interés.

Por lo tanto, a grandes rasgos, el *valor capitalizable* se obtiene al añadir al valor de un capital en un periodo dado, el incremento en este valor ocasionado por los intereses. Al iterar esta forma de cálculo durante varios periodos obtenemos:

$$VC = C_0(1 + i)^n.$$

## 5.2. Valor presente

El valor presente es la operación inversa al valor capitalizable, pues este último toma capitales en el momento presente y los lleva hacia el futuro, mientras que el valor presente trae capitales del futuro a su valor actual. La herramienta para capitalizar es la tasa de interés y la herramienta para traer a valor presente se le llama *tasa de descuento*.

Es fácil obtener la notación para el valor presente, una vez que se tiene la notación del valor capitalizable, por lo que se tiene

$$\begin{aligned} VC &= C_0(1 + i)^n, \\ C_0 &= VC(1 + i)^{-n}. \end{aligned}$$

Y comunmente suele denotarse al valor presente traído a  $n$  periodos como:

$$VP = C(1 + d)^{-n},$$

donde:

$VP$  = es el valor presente.

$C$  = es el capital o monto.

$d$  = es la tasa de descuento.

## 5.3. Costo Unitario Nivelado de Generación (CUNG)

Para poder definir el Costo Unitario Nivelado de Generación (**CUNG**) se requiere de los siguientes conceptos basados en el documento denominado “Costos y Parámetros de

Referencia para la Evaluación de Proyectos de Generación 2006<sup>2</sup>”, una breve descripción de las unidades puede verse en la sección C:

■ **Costo por capacidad (CCa):**

Este queda constituido por:

● Costo de inversión:

Se distinguen tres costos unitarios de inversión:

- *Costo directo*: Es la suma, en moneda constante, de las erogaciones correspondientes de una central incluyendo los costos de financiamiento y en su caso incluye el costo de la subestación eléctrica, dividida entre la capacidad de la misma (la vida útil expresada en meses) lo cual es equivalente a que todos los costos de inversión de la obra fueran erogados instantáneamente. En inglés este costo se conoce como *overnight cost*.
- *Costo directo más indirecto*: Es el resultado de añadir al costo directo los costos de ingeniería, administración y control de la obra, incurridos en las oficinas centrales.
- *Costo actualizado al inicio de la operación*: A partir del “costo directo más indirecto” y mediante el uso de una tasa real de descuento del 12% anual, se calcula el valor de la inversión actualizada al inicio de la puesta en operación de la central. Esta tasa de descuento incluye el costo de intereses devengados durante el proceso de construcción y otros conceptos.

● Costo fijo de operación y mantenimiento de la planta:

Los costos fijos están presentes independientemente de la operación de la planta y por lo tanto no están directamente relacionados con la energía generada; la siguiente enumeración incluye los conceptos de costos:

- Salarios.
- Prestaciones.
- Seguro Social.
- Servicios a Terceros.
- Gastos Generales.
- Materiales (excepto del área de operación).

■ **Costo por energía (CE):**

Que considera:

---

<sup>2</sup>ver en bibliografía [9]

- Costo variable de operación y mantenimiento:  
Son costos variables que guardan una relación directa con la generación de energía eléctrica. En este renglón sólo son considerados los costos de materiales del área de operación, así como los costos de agua, productos químicos, lubricantes, manejo de cenizas, en su caso, y materiales consumibles.
- Costo por consumo de combustible:  
El costo del combustible refleja el valor imputado a los recursos energéticos necesarios para obtener, por medio de las diversas tecnologías, un MegaWatt-hora(MWh) neto generado.

El CUNG<sup>3</sup> está compuesto por la suma de los costos por capacidad y los costos por energía. Es decir el CUNG consta de dos partes, los costos fijos (carga por capacidad) y los costos variables (carga por energía).

En base a lo estipulado en el documento denominado “Costos y Parámetros de Referencia para la Evaluación de Proyectos de Generación 2006”, se realizará la evaluación del concepto de Costo Unitario Nivelado de Generación (Pesos/MWh) que se calculará de acuerdo a la fórmula siguiente:

$$CUNG = CCa + CE = \frac{VPCI}{\sum_{t=1}^N \frac{GNM_t}{(1+i)^t}} + VPC_{F.O.M.} + VPE + VPC_{V.O.M.} \quad (5.1)$$

con:

$$\begin{aligned} CCa &= \frac{VPCI}{\sum_{t=1}^N \frac{GNM_t}{(1+i)^t}} + VPC_{F.O.M.}, \\ CE &= VPE + VPC_{V.O.M.}. \end{aligned}$$

donde:

$VPCI$  = Suma de los *valores presentes por los costos de inversión*.

$GNM_t$  = *Generación Neta* en el mes <sup>4</sup> “ $t$ ”, la cual resulta del producto de la Capacidad Neta Garantizada con Combustible Base por el Factor de Planta por 730 horas de operación

<sup>3</sup>El COPAR de Generación 2006 (ver en bibliografía [9]) establece otro orden equivalente para el cálculo del CUNG, pero para la modelación de la metodología estudiada en este documento el orden es cambiado para una mejor explicación de la metodología.

<sup>4</sup>En el documento COPAR de Generación 2006, se establece este valor como el  $GNA_t$ , donde representa la generación neta en el año “ $t$ ”, sin embargo nuestro análisis contempla el precio del gas natural de manera mensual.

al mes bajo carga, este valor forma parte del costo por inversión, dividiendolo para obtener el Costo Nivelado por concepto de Inversión (CI).

$VPC_{F.O.M.}$  = Suma de los *valores presentes de los Costos Fijos de Operación y Mantenimiento*.

$VPE$  = Suma de los *valores presentes de cada Cargo por Energía* a la fecha de apertura de propuestas técnicas, empleando la Capacidad Neta Ponderada con Combustible Base. Nota: el Cargo por Arranque (CA) es función del Precio Índice del Combustible Base.

$VPC_{V.O.M.}$  = Suma de los *valores presentes de los Costos Variables de Operación y Mantenimiento*.

$N$  = El periodo de evaluación en meses, que será en este caso de 360, que será el período de vida económica de una central que usa como combustible base Gas Natural.

$i$  = Tasa de interés real mensual en pesos, calculada a partir de la tasa de interés anual  $I$ , con la siguiente expresión:

$$i = \left[ (1 + I)^{\frac{1}{12}} - 1 \right], \text{ con: } I = 12\%.$$

$t$  = El número de meses a evaluar,  $t = 1, 2, \dots, 360$ .

## 5.4. Valor esperado del CUNG

Como ya se vió en la sección anterior, la fórmula (5.1) es empleada para el cálculo del CUNG. Entonces, dado que:

$$CUNG = \frac{VPCI}{\sum_{t=1}^N \frac{GNM_t}{(1+i)^t}} + VPC_{F.O.M.} + CE,$$

se tiene que

$$\mathbb{E}[CUNG] = \mathbb{E} \left[ \frac{VPCI}{\sum_{t=1}^N \frac{GNM_t}{(1+i)^t}} + VPC_{F.O.M.} + CE(PICB) \right],$$

donde el concepto  $CE(PICB)$  que ahora es la suma de los valores presentes de cada Cargo por Energía en función del Precio Índice del Combustible Base (PICB). Notemos que como el precio del combustible (Gas Natural) es aleatorio entonces el  $CE(PICB)$  es aleatorio.



Es decir, nuevamente haciendo uso del documento “Costos y Parámetros de Referencia para la Evaluación de Proyectos de Generación 2006”, se calculará el  $CE(PICB)$  como:

$$CE(PICB) = \sum_{t=1}^N \frac{f(S_t)}{(1+i)^t} = \sum_{t=1}^N \frac{\frac{S_t}{\eta P_c} + T + C_{V.O.M} + AC_A}{(1+i)^t}, \quad (5.2)$$

donde:

1.  $i$  = Tasa de interés real mensual en pesos, calculada mediante la siguiente expresión:

$$\left[ (1 + I)^{\frac{1}{12}} - 1 \right], \text{ con: } I = 12\%$$

2.  $T$  = Costo de transportación del gas desde los centros de procesamiento de PEMEX hasta la central.
3.  $\eta$  = Eficiencia de conversión (%).
4.  $P_c$  = Poder calorífico del combustible (MJ/U).
5.  $S_t$  = Precio del combustible al momento  $t$  (\$/MJ).

Lo anterior es necesario en el cálculo ya que como se menciona en el documento de la COPAR de Generación 2006, Energía eléctrica = Energía Térmica\* $\eta = (P_c\eta)$ .

6.  $C_{V.O.M}$  = Costo Variable de Operación y Mantenimiento (\$/MWh neto generado).
7.  $A$  = Consumo de agua.

$$A = A_E + A_R$$

donde:

$A_E$  = Consumo de agua de enfriamiento (en todas las tecnologías menos las geotermoelectricas).

$A_R$  = Consumo de agua de repuesto al ciclo termodinámico en las siguientes tecnologías:

- Termoeléctrica convencional.
- Ciclo Combinado.
- Central carboeléctrica.

8.  $C_A$  = Costo de agua.

Los incisos 2, 3, 4 y 5 corresponden al combustible, le inciso 6 corresponde a operación y mantenimiento y los incisos 7 y 8 al consumo de agua.

Como la parte aleatoria en el  $CUNG$  es el  $CE(PICB)$  y por la linealidad del operador esperanza se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[CUNG] &= \frac{VPCI}{\sum_{t=1}^N \frac{GNM_t}{(1+i)^t}} + VPC_{F.O.M.} + \mathbb{E}[CE(PICB)] \\ \mathbb{E}[CUNG] &= \frac{VPCI}{\sum_{t=1}^N \frac{GNM_t}{(1+i)^t}} + VPC_{F.O.M.} + \sum_{t=1}^N \int_0^\infty \frac{f(S_t)}{(1+i)^t} g(S_t) dS_t.\end{aligned}$$

Sustituyendo  $f(S_t)$  de la fórmula (5.2):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[CUNG] &= \frac{VPCI}{\sum_{t=1}^N \frac{GNM_t}{(1+i)^t}} + VPC_{F.O.M.} + \sum_{t=1}^N \int_0^\infty \frac{\frac{S_t}{\eta P_c} + T + C_{V.O.M.} + AC_A}{(1+i)^t} g(S_t) dS_t \\ &= \frac{VPCI}{\sum_{t=1}^N \frac{GNM_t}{(1+i)^t}} + VPC_{F.O.M.} + \sum_{t=1}^N \frac{1}{(1+i)^t} \int_0^\infty \left( \frac{S_t}{\eta P_c} + T + C_{V.O.M.} + AC_A \right) g(S_t) dS_t.\end{aligned}$$

Por la linealidad del operador integral y definiendo  $W = (T + C_{V.O.M.} + AC_A)$ , tenemos:

$$\begin{aligned}&= \frac{VPCI}{\sum_{t=1}^N \frac{GNM_t}{(1+i)^t}} + VPC_{F.O.M.} + \sum_{t=1}^N \frac{1}{(1+i)^t} \left[ \int_0^\infty \frac{S_t}{\eta P_c} g(S_t) dS_t + \int_0^\infty W g(S_t) dS_t \right] \\ &= \frac{VPCI}{\sum_{t=1}^N \frac{GNM_t}{(1+i)^t}} + VPC_{F.O.M.} + \sum_{t=1}^N \frac{1}{(1+i)^t} \left[ \frac{1}{\eta P_c} \int_0^\infty S_t g(S_t) dS_t + W \int_0^\infty g(S_t) dS_t \right] \\ &= \frac{VPCI}{\sum_{t=1}^N \frac{GNM_t}{(1+i)^t}} + VPC_{F.O.M.} + \sum_{t=1}^N \frac{W}{(1+i)^t} + \sum_{t=1}^N \frac{1}{\eta P_c (1+i)^t} \left[ \int_0^\infty S_t g(S_t) dS_t \right] \\ &= \frac{VPCI}{\sum_{t=1}^N \frac{GNM_t}{(1+i)^t}} + VPC_{F.O.M.} + \sum_{t=1}^N \frac{(T + C_{V.O.M.} + AC_A)}{(1+i)^t} + \sum_{t=1}^N \frac{\mathbb{E}[S_t]}{\eta P_c (1+i)^t}.\end{aligned}$$

Sin embargo, según con la estructura que tiene la distribución marginal de los precios se debe de buscar una alternativa que solución de manera sencilla este cálculo.

Por lo que resulta más conveniente ver a  $\mathbb{E}[CUNG]$  como:

$$\mathbb{E}[CUNG] = \frac{VPCI}{\sum_{t=1}^N \frac{GNM_t}{(1+i)^t}} + VPC_{F.O.M.} + \sum_{t=1}^N \frac{(T + C_{V.O.M} + ACA)}{(1+i)^t} + \frac{1}{\eta P_c} \mathbb{E} \left[ \sum_{t=1}^N \frac{S_t}{(1+i)^t} \right]. \quad (5.3)$$

El cálculo del valor esperado de los precios del gas natural se hará a través de una metodología retrospectiva que se realiza de manera recursiva, puesto que se cuenta con una estructura condicional. En otras palabras, dado que el precio del gas natural es conocido en el momento en que se inicia la evaluación y lo que se quiere es obtener una estimación del precio del gas natural en un tiempo posterior, sabiendo que el precio que se tiene en un mes determinado depende del precio del mes anterior. En un lenguaje estocástico, se puede decir que el precio que toma el gas natural en un tiempo  $t$  depende de la historia del proceso. En forma más simple, significa que para la estimación del precio en el mes 360 es necesario saber el valor estimado del precio de dicho combustible en el mes 359 y para este último se requiere a su vez el valor estimado del mes anterior, y así en forma recursiva.

Por lo descrito anteriormente, se puede deducir que calcular los valores esperados del precio del gas natural es una labor complicada, más aun si se pretende realizar con una visión progresiva, por lo que en el modelo que se está describiendo se desarrolla de manera retrospectiva.

Para ésto, primero se retomará el concepto de los incrementos de los logaritmos de los precios de  $S_t$  que se vió en la ecuación (4.1), la cual es  $X_t = \log \frac{S_t}{S_{t-1}}$ , donde  $f_{X_t}(x)$  es una densidad dada por  $f_{X_t}(x) = \sum_{i=1}^m \pi_i f_i(x)$ , donde  $m$  es conocida y  $f_i(x)$  es una densidad Normal, para  $i = 1, 2, \dots, m$ , como se vió en la sección 4.4.

Ahora si se toma en cuenta el concepto de esperanza condicional y aplicando el teorema del cambio de variable que se vió en la sección 1.8, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_t | S_{t-1}] &= \int_0^{\infty} s_t g_{S_t | S_{t-1}}(S_t | S_{t-1}) ds_t \\ &= \int_0^{\infty} s_t f_{X_t} \left( \log \frac{s_t}{s_{t-1}} \right) \frac{1}{s_t} ds_t \\ &= \int_0^{\infty} f_{X_t} \left( \log \frac{s_t}{s_{t-1}} \right) ds_t. \end{aligned}$$

A partir de que  $X_t = \log \frac{S_t}{S_{t-1}}$  se tiene  $S_t = S_{t-1} e^{X_t}$  lo que implica que  $\frac{dS_t}{dX_t} = S_{t-1} e^{X_t}$  y entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_t|S_{t-1}] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_t}(x_t) s_{t-1} e^{x_t} dx_t \\ &= s_{t-1} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_t}(x_t) e^{x_t} dx_t.\end{aligned}$$

De la última expresión, se puede observar que si  $M_{X_t}(1)$  denota la función generadora de momentos de  $X_t$  del primer momento (véase la sección 1.7), entonces podemos escribir

$$\mathbb{E}[S_t|S_{t-1}] = S_{t-1} M_{X_t}(1). \quad (5.4)$$

Por el desarrollo anterior se tiene que  $\mathbb{E}[S_t|S_{t-1}] = S_{t-1} M_{X_t}(1)$  para toda  $t \geq 1$ . Sin pérdida de generalidad y desarrollando de manera análoga se puede llegar a  $\mathbb{E}[S_{t-1}|S_{t-2}] = S_{t-2} M_{X_{t-1}}(1) = S_{t-2} M_{X_t}(1)$ , puesto que las  $X_t$  tienen la misma distribución (puesto que no depende de  $t$ ) lo que implica que por notación  $M_{X_t}(1) = M(1)$  donde  $M$  será la función generadora de momentos de una mezcla de dos normales (con el fin de que una normal tenga una tendencia hacia la baja, es decir, que se provoque un decremento en el precio del gas natural y para ello su media será menor a cero, y una normal que tenga una tendencia hacia la alta) la cual es conocida.

A continuación explicamos como calcular en forma recursiva el valor esperado de la ecuación (5.3). Se definirá:  $J_t(S_t) = \frac{S_t}{(1+i)^t}$ ,  $t = 0, 1, \dots, N$ , que como se puede observar es el valor presente (con una tasa  $i$ ) del precio del gas natural en el momento  $t$ .

Este método recursivo es conocido como inducción hacia atrás en programación dinámica.

A continuación definiremos la “condición de frontera”

$$\begin{aligned}\overline{J_N}(S_N|S_{N-1}) &\equiv \mathbb{E}[J_N(S_N)|S_{N-1}] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{S_N}{(1+i)^N}|S_{N-1}\right] \\ &= \frac{1}{(1+i)^N} \mathbb{E}[S_N|S_{N-1}] \\ \overline{J_N}(S_N|S_{N-1}) &= \frac{M(1)}{(1+i)^N} S_{N-1}\end{aligned} \quad (5.5)$$

por el cálculo hecho en (5.4).

Consideremos ahora calcular  $\mathbb{E} \left[ \sum_{t=1}^N \frac{S_t}{(1+i)^t} \right]$  en forma iterativa, con este fin comenzaremos por calcular  $\mathbb{E} \left[ \sum_{t=N-1}^N \frac{S_t}{(1+i)^t} \right]$ , que son los dos últimos sumandos, teniendo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \sum_{t=N-1}^N \frac{S_t}{(1+i)^t} \right] &= \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left[ \sum_{t=N-1}^N \frac{S_t}{(1+i)^t} \middle| S_{N-1} \right] \right\} \\
&= \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left[ \frac{S_N}{(1+i)^N} \middle| S_{N-1} \right] + \frac{S_{N-1}}{(1+i)^{N-1}} \right\} \\
&= \mathbb{E} [\overline{J}_N(S_N | S_{N-1}) + J_{N-1}(S_{N-1})] \\
&= \mathbb{E} [J_{N-1}(S_{N-1}) + \overline{J}_N(S_N | S_{N-1})] \\
\mathbb{E} \left[ \sum_{t=N-1}^N \frac{S_t}{(1+i)^t} \right] &= \mathbb{E} \{ \mathbb{E} [J_{N-1}(S_{N-1}) + \overline{J}_N(S_N | S_{N-1}) | S_{N-2}] \}. \tag{5.6}
\end{aligned}$$

(para la condicional de esta última igualdad se ha tomado la proposición 1.2, que se encuentra en el Capítulo 1)

Sea

$$\begin{aligned}
\overline{J}_{N-1}(S_{N-1} | S_{N-2}) &\equiv \mathbb{E} [J_{N-1}(S_{N-1}) + \overline{J}_N(S_N | S_{N-1}) | S_{N-2}] \\
&= \mathbb{E} \left[ \frac{S_{N-1}}{(1+i)^{N-1}} + \frac{M(1)}{(1+i)^N} S_{N-1} \middle| S_{N-2} \right] \\
&= \frac{M(1)}{(1+i)^{N-1}} S_{N-2} + \frac{M(1)M(1)}{(1+i)^N} S_{N-2} \\
&= \left[ \frac{M(1)}{(1+i)^{N-1}} + \frac{M^2(1)}{(1+i)^N} \right] S_{N-2} \\
\overline{J}_{N-1}(S_{N-1} | S_{N-2}) &= \left[ \frac{M(1)}{(1+i)^{N-1}} + \frac{M^2(1)}{(1+i)^N} \right] S_{N-2}, \tag{5.7}
\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se sigue de (5.4).

Ahora procedemos a calcular  $\mathbb{E} \left[ \sum_{t=N-2}^N \frac{S_t}{(1+i)^t} \right]$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sum_{t=N-2}^N \frac{S_t}{(1+i)^t} \right] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{t=N-1}^N \frac{S_t}{(1+i)^t} \right] + \mathbb{E} \left[ \frac{S_{N-2}}{(1+i)^{N-2}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \overline{J_{N-1}}(S_{N-1}|S_{N-2}) \right] + \mathbb{E} \left[ \frac{S_{N-2}}{(1+i)^{N-2}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \overline{J_{N-1}}(S_{N-1}|S_{N-2}) + J_{N-2}(S_{N-2}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left[ \overline{J_{N-1}}(S_{N-1}|S_{N-2}) + J_{N-2}(S_{N-2}) \right] | S_{N-3} \right\}, \end{aligned}$$

la segunda igualdad se sigue de (5.6)

Sea

$$\begin{aligned} \overline{J_{N-2}}(S_{N-2}|S_{N-3}) &\equiv \mathbb{E} [J_{N-2}(S_{N-2}) + \overline{J_{N-1}}(S_{N-1}|S_{N-2}) | S_{N-3}] \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{S_{N-2}}{(1+i)^{N-2}} + \left[ \frac{M(1)}{(1+i)^{N-1}} + \frac{M^2(1)}{(1+i)^N} \right] S_{N-2} | S_{N-3} \right] \\ &= \frac{M(1)}{(1+i)^{N-2}} S_{N-3} + \left[ \frac{M(1)}{(1+i)^{N-1}} + \frac{M^2(1)}{(1+i)^N} \right] M(1) S_{N-3} \\ &= \left[ \frac{M(1)}{(1+i)^{N-2}} + \frac{M^2(1)}{(1+i)^{N-1}} + \frac{M^3(1)}{(1+i)^N} \right] S_{N-3} \end{aligned}$$

Se ha calculado para  $N-2$ , ahora suponemos que se cumple para algún  $t = N-j$ , esto es

$$\begin{aligned} \overline{J_{N-j}}(S_{N-j}|S_{N-(j+1)}) &\equiv \mathbb{E} [J_{N-j}(S_{N-j}) + \overline{J_{N-j+1}}(S_{N-j+1}|S_{N-j}) | S_{N-(j+1)}] \\ &= \left[ \sum_{k=1}^{j+1} \frac{M^k(1)}{(1+i)^{N-(j+1)+k}} \right] S_{N-(j+1)}, \end{aligned}$$

donde por construcción

$$\mathbb{E}[\overline{J_{N-j}}(S_{N-j}|S_{N-(j+1)})] = \mathbb{E} \left[ \sum_{k=N-j}^N \frac{S_k}{(1+i)^k} \right].$$

siguiendo el proceso de inducción habrá que ver que se cumpla para  $t = N - (j + 1)$

$$\begin{aligned}
\overline{J_{N-(j+1)}}(S_{N-(j+1)}|S_{N-(j+2)}) &\equiv \mathbb{E} [J_{N-(j+1)}(S_{N-(j+1)}) + \overline{J_{N-j}}(S_{N-j}|S_{N-(j+1)})|S_{N-(j+2)}] \\
&= \mathbb{E} \left[ \frac{S_{N-(j+1)}}{(1+i)^{N-(j+1)}} + \left[ \sum_{k=1}^{j+1} \frac{M^k(1)}{(1+i)^{N-(j+1)+k}} \right] S_{N-(j+1)} | S_{N-(j+2)} \right] \\
&= \frac{M(1)}{(1+i)^{N-(j+1)}} S_{N-(j+2)} + \left[ \sum_{k=1}^{j+1} \frac{M^k(1)}{(1+i)^{N-(j+1)+k}} \right] M(1) S_{N-(j+2)} \\
&= \frac{M(1)}{(1+i)^{N-(j+1)}} S_{N-(j+2)} + \left[ \sum_{k=1}^{j+1} \frac{M^k(1)M(1)}{(1+i)^{N-(j+1)+k}} \right] S_{N-(j+2)} \\
&= \left[ \frac{M(1)}{(1+i)^{N-(j+1)}} + \sum_{k=1}^{j+1} \frac{M^k(1)M(1)}{(1+i)^{N-(j+1)+k}} \right] S_{N-(j+2)} \\
&= \left[ \sum_{k=1}^{j+2} \frac{M^k(1)}{(1+i)^{N-(j+2)+k}} \right] S_{N-(j+2)},
\end{aligned}$$

donde por construcción

$$\mathbb{E}[\overline{J_{N-(j+1)}}(S_{N-(j+1)}|S_{N-(j+2)})] = \mathbb{E} \left[ \sum_{k=N-(j+1)}^N \frac{S_k}{(1+i)^k} \right],$$

se ha visto que para  $t = N - (j + 1)$  se cumple.

En general tenemos para  $t=1, 2, \dots, N-1$

$$\begin{aligned}
\overline{J_{N-t}}(S_{N-t}|S_{N-(t+1)}) &\equiv \mathbb{E} [J_{N-t}(S_{N-t}) + \overline{J_{N-t+1}}(S_{N-t+1}|S_{N-t})|S_{N-(t+1)}] \\
&= \left[ \sum_{j=1}^{t+1} \frac{M^j(1)}{(1+i)^{N-(t+1)+j}} \right] S_{N-(t+1)},
\end{aligned}$$

donde por construcción

$$\mathbb{E}[\overline{J_{N-t}}(S_{N-t}|S_{N-(t+1)})] = \mathbb{E} \left[ \sum_{k=N-t}^N \frac{S_k}{(1+i)^k} \right].$$

En particular para  $t = N - 1$  tenemos

$$\overline{J_1}(S_1|S_0) = \mathbb{E}[J_1(S_1) + \overline{J_2}(S_2|S_1)|S_1] = \left[ \sum_{j=1}^N \frac{M^j(1)}{(1+i)^j} \right] S_0, \quad (5.8)$$

con

$$\mathbb{E}[\bar{J}_1(S_1|S_0)] = \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^N \frac{S_k}{(1+i)^k} \right].$$

Finalmente se sustituye en la ecuación (5.3), por lo que queda:

$$\mathbb{E}[CUNG] = \frac{VPCI}{\sum_{t=1}^N \frac{GNM_t}{(1+i)^t}} + VPC_{F.O.M.} + \sum_{t=1}^N \frac{(T + C_{V.O.M} + ACA)}{(1+i)^t} + \frac{1}{\eta P_c} S_0 \sum_{j=1}^N \frac{M^j(1)}{(1+i)^j}. \quad (5.9)$$



# Capítulo 6

## Aplicación

Hasta el momento hemos tratado en este trabajo las bases teóricas del modelo que propone el Físico Alejandro Cuevas, sin embargo, no podemos quedarnos en una simple descripción. Hoy en día es necesario poner a prueba los modelos mediante aplicaciones para demostrar que lo que se está proponiendo tenga sentido y valga la pena todo el desarrollo. Este capítulo tiene esta finalidad. Tomaremos datos reales y veremos la utilidad del modelo *Cuevas*. Para esto primero haremos un análisis sobre los incrementos de los logaritmos del precio del gas natural, con el fin de que se cumplan las hipótesis que son necesarias para el funcionamiento del modelo, posteriormente utilizaremos el *Algoritmo EM* para estimar los parámetros del modelo (una descripción del algoritmo, así como el código para llevarlo a cabo en el paquete **R** se encuentran en el capítulo 3 y el apéndice B, respectivamente). Habiendo obtenido así las estimaciones  $\hat{\mu}_1$ ,  $\hat{\mu}_2$ ,  $\hat{\sigma}_1$ ,  $\hat{\sigma}_2$  y  $\hat{\pi}_1$  (basta con obtener los parámetros de dos familias de normales) utilizaremos nuestro método de inducción hacia atrás para conocer los valores esperados de dichos precios.

### 6.1. Precios del Gas Natural

México se encuentra en el mercado Norteamericano del Gas Natural, teniendo sus yacimientos de este hidrocarburo en la zona del Golfo de México. En este mercado el valor del gas es determinado libremente, lo que ha provocado alta volatilidad, en especial en los últimos años. Además por ser Estados Unidos el mercado más grande de consumo de dicho combustible, tiene una incidencia importante en los precios del mercado regional. Debido a

la volatilidad y a la influencia de Estados Unidos en el precio del gas natural, el Comité de Precios aprobó el 21 de julio de 1995 la metodología vigente <sup>1</sup>, la cual describimos a continuación. La Venta de Primera Mano, es una actividad reservada en exclusiva al Estado por conducto de Pemex y sus organismos subsidiarios, es la primera enajenación de gas de origen nacional que realiza Pemex a un tercero para su entrega en territorio nacional <sup>2</sup>.

### Metodología para Venta de Primera Mano:

- El precio de gas natural en Reynosa es igual al promedio de los índices de los mercados de referencia en el sur de Texas (Tetco y EPGT, ante PG&E)<sup>3</sup>
- El punto de arbitraje se ubica en Los Ramones, N.L.
- El Precio de Venta de Primera Mano en Cd. Pemex es igual al precio en Reynosa, más tarifa de transporte autorizada para el trayecto Reynosa-Los Ramones, menos la tarifa de transporte autorizada de Ciudad Pemex a Los Ramones.

### Fórmula

$$PVC = PR + TRR - TCR$$

donde:

*PVC* = Precio de venta de primera mano en Ciudad Pemex

*PR* = Precio de Reynosa

*TRR* = Tarifa de transporte autorizada para el trayecto Reynosa-Los Ramones

*TCR* = Tarifa de transporte autorizada para el trayecto Ciudad Pemex - Los Ramones

Con base en la lista de Tarifas de Transporte Autorizadas a Pemex-Gas y Petroquímica Básica para el Sistema Nacional de Gasoductos <sup>4</sup>

---

<sup>1</sup>La Resolución Núm. RES/046/2005. para las ventas de primera mano.

<sup>2</sup>ver en bibliografía [10]

<sup>3</sup>Los índices son:

- Tetco: Texas Eastern Transmission Corporation,
- EPGT: Electric Power Generation Technology,
- PG&E: Pacific Gas and Electric Company.

<sup>4</sup>ver en bibliografía [11]



Figura 6.1:

Mensualmente en la página de la Comisión Reguladora de Energía <sup>5</sup> se publican los precios de referencia para venta de primera mano, y estos datos serán los que tomaremos en cuenta para aplicar en el modelo al que estamos haciendo referencia, tomando en cuenta que en dichos datos ya esta reflejada la información de los precios del Sur de Texas que se toman como referencia para el mercado mexicano.

---

<sup>5</sup>[www.cre.gob.mx](http://www.cre.gob.mx)

En la cuadro [6.1] se muestran los valores<sup>6</sup> históricos del precio<sup>7</sup> del Gas Natural:

Veamos las cifras en la línea del tiempo:

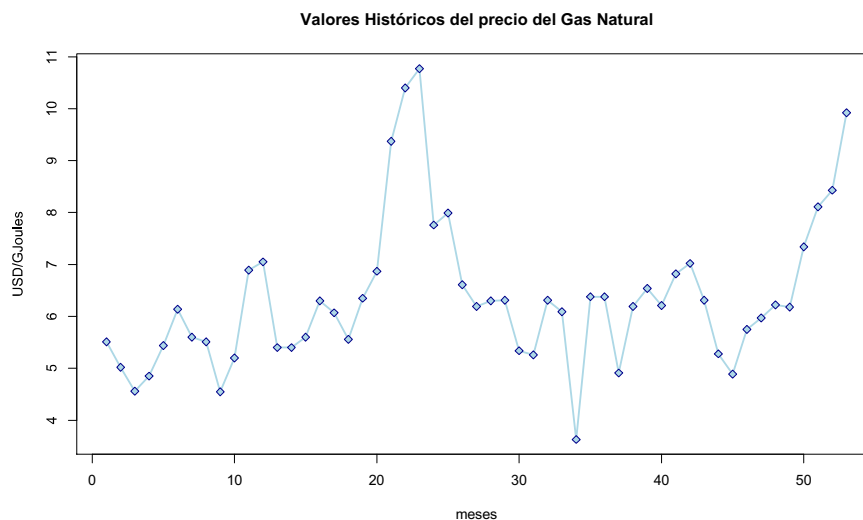


Figura 6.2:

Cabe mencionar que en los últimos meses de 2005, las principales causas para que el precio del gas natural se disparara tanto, fueron <sup>8</sup> :

- Diferencias crecientes de los precios del combustóleo pesado de bajo azufre y gasóleo para calefacción en Estados Unidos, situación que contribuyó a una mayor incertidumbre y volatilidad en los precios del gas.<sup>9</sup>
- Los huracanes Katrina y Rita que afectaron la costa norteamericana del Golfo de México ocasionaron reducciones de hasta 90 por ciento en la producción de esa región, que en condiciones normales es de alrededor de 10 mil millones de pies cúbicos diarios.

<sup>6</sup>Fuente: CRE y PEMEX.

<sup>7</sup>Reynosa, bajo RES/046/2005.

<sup>8</sup>ver en bibliografía [12]

<sup>9</sup>Los precios del gas natural en Estados Unidos se ubican en un intervalo limitado por los equivalentes calóricos de los precios del combustóleo pesado de bajo azufre y el gasóleo para calefacción.

Cuadro 6.1: Valores Históricos del precio del Gas Natural (2004-2008)

<b>Año 2004</b>		<b>Año 2005</b>	
<b>MES</b>	<b>USD/Gjoules</b>	<b>MES</b>	<b>USD/Gjoules</b>
enero	5.51	enero	5.40
febrero	5.02	febrero	5.40
marzo	4.56	marzo	5.60
abril	4.85	abril	6.30
mayo	5.44	mayo	6.07
junio	6.14	junio	5.56
julio	5.60	julio	6.35
agosto	5.51	agosto	6.87
septiembre	4.55	septiembre	9.37
octubre	5.20	octubre	10.40
noviembre	6.89	noviembre	10.77
diciembre	7.05	diciembre	7.76
<b>Año 2006</b>		<b>Año 2007</b>	
<b>MES</b>	<b>USD/Gjoules</b>	<b>MES</b>	<b>USD/Gjoules</b>
enero	7.99	enero	4.91
febrero	6.61	febrero	6.19
marzo	6.19	marzo	6.54
abril	6.30	abril	6.21
mayo	6.31	mayo	6.82
junio	5.34	junio	7.02
julio	5.26	julio	6.31
agosto	6.31	agosto	5.28
septiembre	6.09	septiembre	4.89
octubre	3.63	octubre	5.75
noviembre	6.38	noviembre	5.97
diciembre	6.38	diciembre	6.22
<b>Año</b>		<b>2008</b>	
<b>MES</b>		<b>USD/Gjoules</b>	
enero		6.18	
febrero		7.34	
marzo		8.11	
abril		8.43	
mayo		9.92	

A causa de dichos huracanes, y para mitigar sus efectos en la economía mexicana, el Ejecutivo Federal emitió dos decretos<sup>10</sup>. El primero, con vigencia desde el 15 de abril de 2005 hasta septiembre de 2006, el cual consistió en un descuento máximo de 28 por ciento a los usuarios residenciales de gas natural. El segundo, referente al consumo industrial, se publicó en septiembre de 2005 y estuvo vigente hasta enero de 2006. El mecanismo de este último decreto determinó un precio de referencia para el primer mes de 2006 de 7.11 dólares por Gigajoule, en lugar del precio de referencia generalmete aplicado, que fue de 7.99 dólares para dicho mes. A partir de febrero, para la determinación del precio del gas natural se retomó el mecanismo de referencia previo a estos decretos mencionados. Se hace mención de esto último, para evidenciar que en ocasiones el precio del gas natural se sujeta a mandato del Ejecutivo, sin embargo, nos enfocaremos a trabajar con las cifras que se den en los índices, es decir, ignorando los decretos, para tener el dinámismo natural y poder trabajar con los datos tal y cuales son, con el fin de eliminar cualquier posible influencia que afecte a las hipótesis.

## 6.2. Análisis de los datos

En esta sección realizaremos el análisis de los datos que hemos obtenido según han sido publicados en la página de la Comisión Reguladora de Energía. Los datos aparecen en el cuadro [6.1] y una gráfica de los mismos en la figura 6.2.

Empezaremos nuestro análisis observando la gráfica de tipo Parcial de los ACF de los valores  $S_t$ , para determinar si es un proceso autorregresivo y conocer su orden.

Aprovecho para indicar que la mayoría de los cálculos realizados se han hecho utilizando el software libre <sup>11</sup> **R**.

Llamaremos **CRE** al vector con los valores del históricos del precio del Gas Natural, este es:

$$CRE = (5.51, 5.02, 4.56, 4.85, 5.44, 6.14, 5.6, 5.51, 4.55, 5.2, 6.89, 7.05, 5.4, 5.4, 5.6, 6.3, 6.07, 5.56, 6.35, 6.87, 9.37, 10.4, 10.77, 7.76, 7.99, 6.61, 6.19, 6.3, 6.31, 5.34, 5.26, 6.31, 6.09, 3.63, 6.38, 6.38, 4.91, 6.19, 6.54, 6.21, 6.82, 7.02, 6.31, 5.28, 4.89, 5.75, 5.97, 6.22, 6.18, 7.34, 8.11, 8.43, 9.92).$$

Utilizando la función ACF de  $R$ , en tipo parcial, hemos obtenido la siguiente gráfica:

<sup>10</sup>ver en bibliografía [13]

<sup>11</sup>R versión 2.4.1 (2006-12-18), Copyright (C) 2006 The R Foundation for Statistical Computing ISBN. 3-900051-07-0

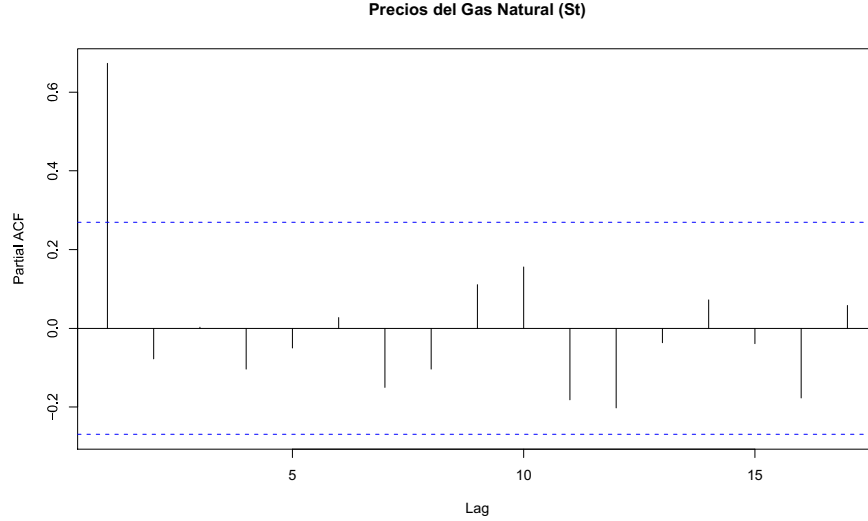


Figura 6.3:

Como se puede observar en la figura 6.3, el único lag que sale de los intervalos de confianza es el lag 1, ¿esto qué quiere decir?. A continuación enunciaremos brevemente la teoría de los modelos estacionarios de series de tiempo<sup>12</sup>.

En dichos modelos este tipo de gráfica nos sirve para analizar procesos autoregresivos, veamos como se define un proceso autoregresivo.

Si solo un número finito de pesos  $\kappa$  no son cero, esto es,  $\kappa_1 = \phi_1$ ,  $\kappa_2 = \phi_2, \dots, \kappa_p = \phi_p$  y  $\kappa_k = 0$  para  $k > p$ , entonces el resultado del proceso es llamado un proceso autoregresivo de orden  $p$ , y es denotado por **AR(p)**. Esta dado por:

$$\dot{Z}_t = \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + \dots + \phi_p \dot{Z}_{t-p} + a_t,$$

o en forma abreviada

$$\phi_p(B) \dot{Z}_t = a_t,$$

donde  $\phi_p(B)$  es lo que se conoce como operador polinomial de retardos:

$$\phi_p(B) = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p),$$

y donde el término  $B$  se le conoce como operador retardo tal que, aplicado al valor de una variable en  $t$ , dé como resultado el valor de esa misma variable en  $t - 1$ :

$$B \dot{Z}_t = \dot{Z}_{t-1},$$

<sup>12</sup>ver William W.S. Wei[14]

y aplicado sucesivamente  $p$  veces retarda el valor en  $p$  periodos:

$$B^p \dot{Z}_t = \dot{Z}_{t-p}.$$

Dado que  $\sum_{j=1}^{\infty} |\kappa_j| = \sum_{j=1}^p |\phi_j| < \infty$ , el proceso es siempre reversible. Los procesos **AR** son usados para describir situaciones en que el valor presente de una serie de tiempo depende solamente de sus  $p$  valores precedentes más un incremento variable.

En especial nos interesa cuando  $p = 1$ , es decir, un proceso autoregresivo de primer orden AR(1) y este se escribe:

$$\dot{Z}_t = \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + a_t,$$

o utilizando el operador de retardo,

$$(1 - \phi_1 B) \dot{Z}_t = a_t.$$

Como se mencionó el proceso es siempre reversible y al ser estacionario (todas las variables tienen la misma distribución), la raíz de  $(1 - \phi_1 B) = 0$  debe ser externo al círculo unitario. Esto quiere decir, para un proceso estacionario, se tiene  $|\phi_1| < 1$ . El proceso AR(1) es llamado **Proceso de Markov** por que el valor de  $\dot{Z}_t$  es completamente determinado por el conocimiento de  $\dot{Z}_{t-1}$ , y recordemos que una de nuestras principales hipótesis es considerar que el precio del gas natural  $S_t$ , es un proceso de Markov.

Para un proceso AR(1), es decir, un proceso de Markov, el **PACF** es:

$$\phi_k \begin{cases} \phi_1 = \phi_1, & k=1; \\ 0, & \text{para } k \geq 2. \end{cases}$$

Lo que quiere decir que el valor en  $t$  depende únicamente del valor precedente  $t - 1$  más un incremento variable.

Por lo descrito arriba, entonces, podemos concluir según la gráfica, que los precios  $S_t$  son un proceso de Markov.

Ahora veremos que sucede con los incrementos en los logaritmos del precio<sup>13</sup> del Gas Natural, estos los hemos descrito mediante:  $X_t = \log \frac{S_t}{S_{t-1}}$ , por tal motivo lo primero que haremos será conocer estos incrementos.

<sup>13</sup>Ver capítulo 4.



Dichos incrementos correspondientes al vector  $CRE$  son:

$LOGCRE = (-0.093762325, -0.095121162, 0.062457355, 0.114304771, 0.1212613, -0.092074679, -0.017065261, -0.190964653, 0.132489183, 0.282651191, 0.023114557, -0.266404674, 0.000000, 0.036179657, 0.117971023, -0.038318864, -0.088148387, 0.133957923, 0.078893942, 0.309511043, 0.104651763, 0.034934139, -0.328406263, 0.030104621, -0.190181547, -0.065208281, 0.01670502, 0.003007521, -0.168010042, -0.014311514, 0.181269953, -0.035649763, -0.516553315, 0.56371034, -0.000148599, -0.261621488, 0.231601887, 0.055259385, -0.051895982, 0.092920825, 0.028788828, -0.105360516, -0.178724431, -0.076458474, 0.162422026, 0.037349746, 0.040282252, -0.007036896, 0.172447981, 0.099529595, 0.038995767, 0.162631409).$

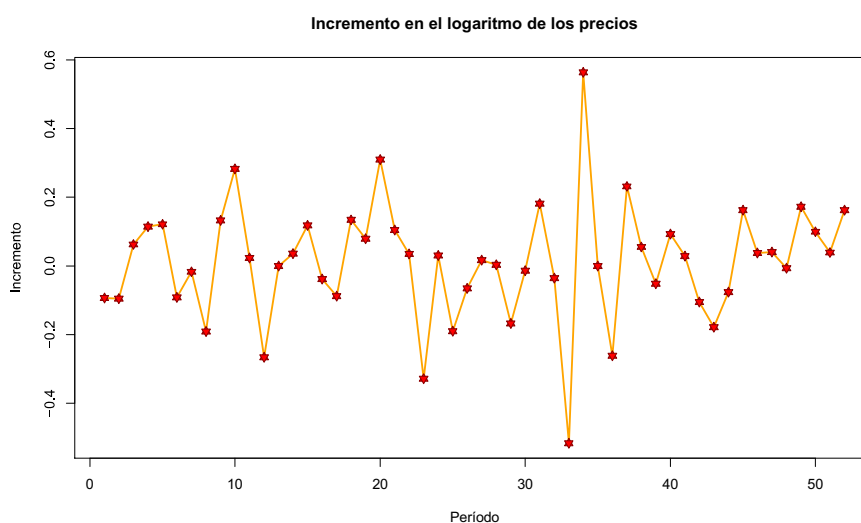


Figura 6.4:

A este vector lo llamaremos  $LOGCRE$ .

Utilizando la función ACF de  $R$  para conocer el correlograma sobre los datos de  $LOGCRE$  obtuvimos la siguiente gráfica con la intención de comprobar si se cumple con la hipótesis de no-correlación.

Como se puede observar el  $lag\ 2$  en la figura 6.5 toca la línea del intervalo de confianza. Por lo que se procederá a aplicar las pruebas de *Box-Pierce* y *Ljung-Box*. Esto es con base a algunos libros de Series de Tiempo<sup>14</sup>, donde explican que si el número de datos no es

<sup>14</sup>A.-Brockwell y Davis, *Time series: Theory and methods*  
B.-Penha, Tiao y Tsay, *A course in Time series Analysis*

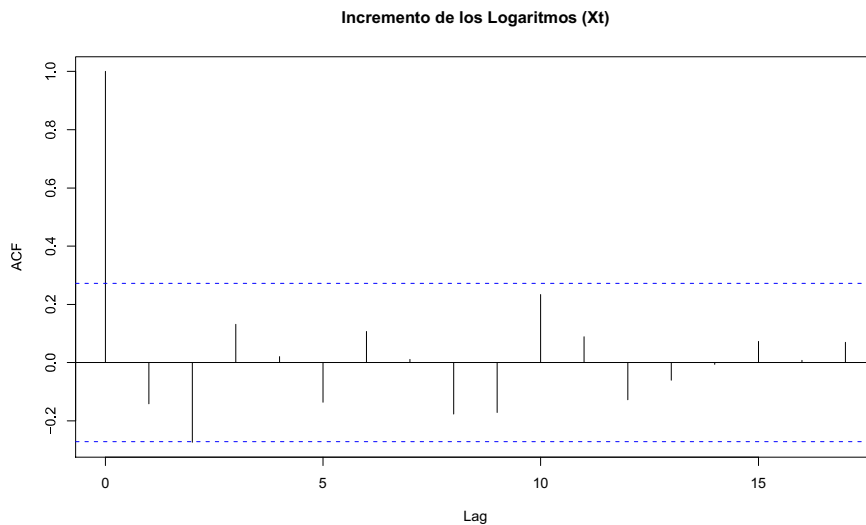


Figura 6.5:

muy grande, el correlograma y el correlograma parcial pueden fallar, en este caso es el correlograma, como ya se vió el correlograma parcial *PACF* se adecua perfectamente.

El paquete **R** tiene la función *Box.test()* que cálcula las estadísticas para las pruebas mencionadas arriba.

#### PRUEBA.

Sea  $\rho$  el coeficiente de correlación entre dos variables aleatorias y  $\rho(i)$  denota la correlación a lag  $i$ ;  $i = 1, 2, \dots$ , entonces para un entero  $k$  (en donde  $k$  denota de dos variables separadas  $k$  instantes) de nuestro interés se puede probar:

$$\begin{cases} H_0 : \rho(1) = \rho(2) = \rho(2) = \dots = \rho(k) = 0 \\ H_1 : \exists i \text{ tal que } \rho(i) \neq 0, \text{ con } i \in \{1, \dots, k\}, \end{cases}$$

es decir, si los incrementos son independientes sus primeras  $k$  autocorrelaciones son cero, entonces, el contraste de Ljung-Box contrasta la hipótesis nula de que las primeras  $k$  autocorrelaciones son cero.

A continuación se muestran los resultados que se obtuvieron al correr la función *Box.test()*, donde  $Q(k)$  es la estadística de Ljung-Box,  $k$  es el lag que se seleccionó para probar  $H_0$  y

$D.f.$  es el valor del parámetro de grados de libertad de una distribución Chi-Cuadrada ( $D.f.$ ) que es la distribución aproximada de  $Q(k)$ .

Por lo que al nivel  $alpha$  rechazamos  $H_0$  si  $Q(k)$  es mayor que un cuantil  $1-alpha$  (%) de una distribución Chi-Cuadrada ( $\chi^2$ ).

Cuadro 6.2: Prueba Ljung-Box

$k$	$Q(k)$	$D.f.$	$alpha$	$\chi^2$	$alpha$	$\chi^2$
2	4.9366	2	0.05	5.9915	0.01	9.2104
3	5.8311	3	0.05	7.8147	0.01	11.3449

Al comparar los resultados obtenidos con los valores de la Chi-cuadrada (a niveles  $alpha = 0.05$  y  $0.01$ ) no se rechaza:

$$H_0 : \rho(1) = \rho(2) = 0$$

ni se rechaza

$$H_0 : \rho(1) = \rho(2) = \rho(3) = 0$$

Lo que quiere decir que no hay evidencia en contra de la hipótesis de que  $X_t$  sean observaciones independientes. Por lo que podemos seguir trabajando con nuestro modelo.

### 6.3. Estimación de los Parámetros

Tras el análisis de *LOGCRE*, hemos metido estos valores en el código para valuar el algoritmo EM, en el paquete *R*. Se han arrojado los siguientes valores:

Los valores obtenidos son pequeños debido a que estamos trabajando con una muestra de diferencia de logaritmos de datos que no son tan distantes entre sí.

Se observa que los estimadores de las medias son de signo contrario, algo que se esperaría puesto que una familia representa la tendencia hacia la baja de los precios, mientras la otra

Cuadro 6.3: Parámetros estimados mediante EM

Familia 1	Familia 2
$\hat{\mu}_1 = 0.024418540$	$\hat{\mu}_2 = -0.014456808$
$\hat{\sigma}_1 = 0.007878448$	$\hat{\sigma}_2 = 0.057104270$
$\hat{\pi}_1 = 0.570639839$	$\hat{\pi}_2 = 0.42936016$

la tendencia hacia la alza de los mismos precios (motivo por el cual se han elegido una mezcla de dos normales,  $m = 2$ ). Y las desviaciones estándares de igual forma son pequeñas, por la misma razón de que los valores no son tan dispersos entre sí.

Tomando estos estimadores, podemos sustituir los valores en la función de densidad de  $X_t$ , esto es, de nuestra ecuación (4.5), vista en el capítulo 4:

$$f_{X_t}(x_t) = \sum_{i=1}^m \pi_i f_{X_t}(x_t | M_t = i)$$

y tomando que  $m = 2$ , entonces tenemos,

$$f_{X_t}(x_t) = \pi_1 f_{X_t}(x_t | M_t = 1) + \pi_2 f_{X_t}(x_t | M_t = 2) \quad (6.1)$$

$$= \frac{\hat{\pi}_1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_1^2}} e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}_1^2}(x_t - \hat{\mu}_1)^2} + \frac{\hat{\pi}_2}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_2^2}} e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}_2^2}(x_t - \hat{\mu}_2)^2} \quad (6.2)$$

y por tanto, la función de distribución es:

$$F_{X_t}(x_t) = \int_{-\infty}^{x_t} \frac{\hat{\pi}_1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_1^2}} e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}_1^2}(u - \hat{\mu}_1)^2} + \frac{\hat{\pi}_2}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_2^2}} e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}_2^2}(u - \hat{\mu}_2)^2} du \quad (6.3)$$

A continuación se presentan las gráficas de la función de distribución para la función  $\pi_1 f_{X_t}(x_t | M_t = 1)$ ,  $\pi_2 f_{X_t}(x_t | M_t = 2)$  y  $f_{X_t}(x_t)$ , respectivamente.

Como se puede observar en la figura 6.6, los valores más representativos del dominio de la función están concentrados en  $[0, .05]$ , mientras para el caso del dominio influyente de la figura 6.7 es  $[-.15, .15]$  y como hemos hecho mención arriba, estos dominios son pequeños a

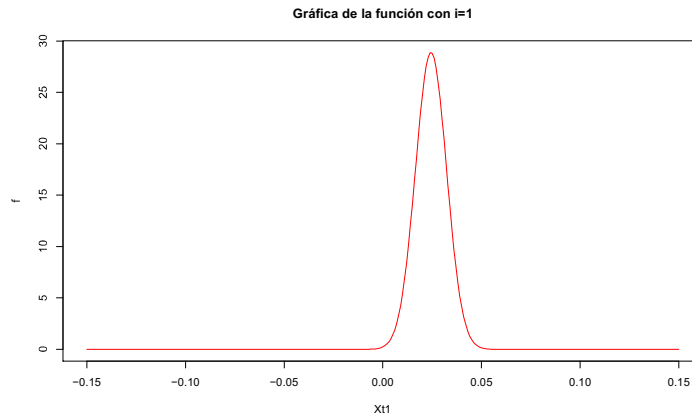


Figura 6.6:

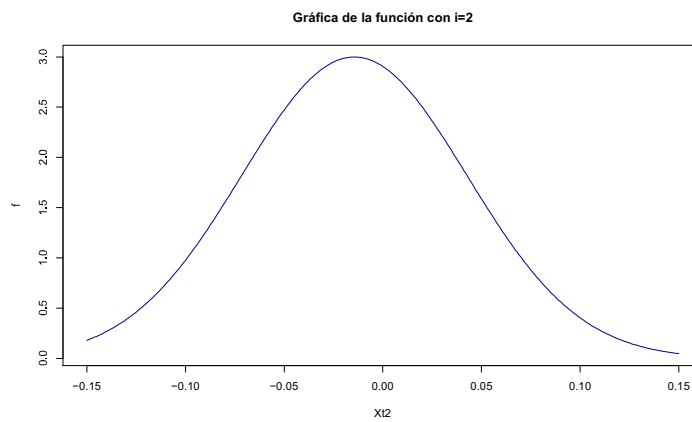


Figura 6.7:

causa de trabajar con una muestra de diferencia de logaritmos. En la figura 6.8, se puede observar la nueva función como resultado de la suma de las dos funciones normales anteriores. De esta última figura se puede deducir que es mayor la influencia de que el incremento de los logaritmos se dé a que exista un decremento.

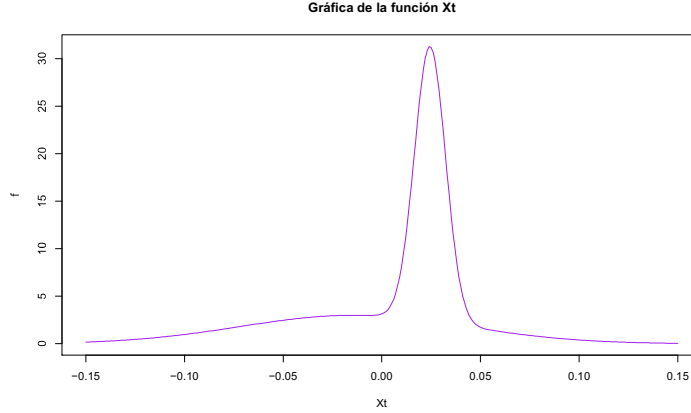


Figura 6.8:

## 6.4. Valor Presente de la Esperanza del Precio del Gas Natural

En esta sección vamos a proceder a calcular la esperanza del valor presente de los precios del gas natural, mediante la expresión (5.8), que se vió en el capítulo 5.4, utilizando la información real de los precios del gas natural y los estimadores de los parámetros que hemos encontrado para nuestras familias de normales.

Como se recordará, será necesario encontrar la función generadora de momentos para nuestra función. La definición de la función generadora de momentos se vió en 1.7, retomando lo visto en aquella parte de este trabajo, se llega a la siguiente expresión para la función generadora de momentos de una  $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ ,

$$M_X(\tau) = e^{\mu\tau + \frac{\sigma^2\tau^2}{2}} \quad (6.4)$$

y como se mencionó para la expresión (5.8),  $\tau$  es igual a 1.

Entonces de la expresión 5.4 tenemos:

$$\mathbb{E}[S_t | S_{t-1}] = S_{t-1} M_{X_t}(1) \quad (6.5)$$

La parte derecha de la igualdad es ahora la que nos interesa encontrar, es decir, la función

generadora de momentos para la mezcla de dos normales.

Por la definición vista en 1.7 y la propiedad distributiva de la integral se llega a:

$$M_{X_t}(1) = \pi_1 M_{X_{t1}}(1) + \pi_2 M_{X_{t2}}(1) \quad (6.6)$$

$$= \pi_1 e^{\widehat{\mu}_1 + \frac{\widehat{\sigma}_1^2}{2}} + \pi_2 e^{\widehat{\mu}_2 + \frac{\widehat{\sigma}_2^2}{2}}. \quad (6.7)$$

Finalmente en esta última expresión se sustituyen los valores y se obtiene la esperanza del valor presente del precio del gas natural.

Veamos un ejemplo. Queremos es conocer el valor esperado para el próximo mes, esto es  $t = 1$ . Tomemos como valor inicial  $S_0=9.92$ , que es el último valor que conocemos de nuestra lista de precios, y tomemos los estimadores del cuadro [6.3]. Al sustituir en la fórmula 6.5 nos queda

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_1|S_0] &= S_0 M_{X_t}(1) \\ &= (9.92) \left( (0.570640) e^{0.024418 + \frac{0.007878^2}{2}} + (1 - 0.570640) e^{-0.014457 + \frac{0.057104^2}{2}} \right) \\ &= (9.92)(0.584764 + 0.423888) \\ &= 10.00583. \end{aligned}$$

Por tanto, para el próximo mes, el valor esperado es 10.01. Si ahora queremos traer este resultado a valor presente, bastará con aplicar la función conocida:

$$VP(\mathbb{E}[S_1|S_0 = 9.92]) = \frac{10.01}{(1 + I)^{1/12}}$$

donde  $I$  es la tasa de descuento anual ( $I = 12\%$ ).

Para las hipótesis de este mismo ejemplo, si ahora se pide para  $t = h$ , entonces la expresión queda:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_h|S_0 = 9.92] &= S_0 M_{X_t}(1)^h \\ &= (9.92)(0.584764 + 0.423888)^h, \end{aligned}$$

y para el valor presente:

$$VP(\mathbb{E}[S_h|S_0 = 9.92]) = \frac{(9.92)(0.584764 + 0.423888)^h}{(1 + i)^h}.$$

Finalmente, sustituyendo los valores numéricos para la esperanza del valor presente del precio del gas natural para  $N$  periodos en la ecuación (5.9) que se vió en 5.4, obtenemos

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{t=1}^N \frac{S_t}{(1+i)^t} \right] S_0 = \sum_{t=1}^N \frac{(0.584764 + 0.423888)^t}{(1+i)^t} 9.92.$$

Nótese que esta última ecuación, en su forma desarrollada, puede ser simplificada, tratándola como una suma telescópica, es decir, si tenemos:

$$VPEGN = \left[ \frac{M(1)^N}{(1+i)^N} + \frac{M(1)^{N-1}}{(1+i)^{N-1}} + \cdots + \frac{M(1)^3}{(1+i)^3} + \frac{M(1)^2}{(1+i)^2} + \frac{M(1)}{(1+i)^1} \right] S_0, \quad (6.8)$$

al multiplicar expresión por el factor  $\frac{M(1)}{(1+i)}$  nos resulta

$$VPEGN \frac{M(1)}{(1+i)} = \left[ \frac{M(1)^{N+1}}{(1+i)^{N+1}} + \frac{M(1)^N}{(1+i)^N} + \cdots + \frac{M(1)^3}{(1+i)^3} + \frac{M(1)^2}{(1+i)^2} \right] S_0. \quad (6.9)$$

Ahora, si se resta de la ecuación (6.8) la ecuación (6.9), obtenemos

$$\begin{aligned} VPEGN - VPEGN \frac{M(1)}{(1+i)} &= \left[ \frac{M(1)^N}{(1+i)^N} + \cdots + \frac{M(1)}{(1+i)} \right] S_0 - \left[ \frac{M(1)^{N+1}}{(1+i)^{N+1}} + \cdots + \frac{M(1)^2}{(1+i)^2} \right] S_0 \\ VPEGN - VPEGN \frac{M(1)}{(1+i)} &= \left[ \frac{M(1)}{(1+i)^1} - \frac{M(1)^{N+1}}{(1+i)^{N+1}} \right] S_0 \\ VPEGN \left( 1 - \frac{M(1)}{(1+i)} \right) &= \left[ \frac{M(1)}{(1+i)} - \frac{M(1)^{N+1}}{(1+i)^{N+1}} \right] S_0, \end{aligned}$$

finalmente obtenemos

$$VPEGN = \frac{\left[ \frac{M(1)}{(1+i)} - \frac{M(1)^{N+1}}{(1+i)^{N+1}} \right] S_0}{\left( 1 - \frac{M(1)}{(1+i)} \right)}. \quad (6.10)$$

De esta última expresión, se ve claramente que es más fácil calcular la esperanza del valor presente de los precios del gas natural, en lugar de la expresión de la que se partió.



## 6.5. Intervalo de Confianza para el Precio del Gas Natural

Ahora, con el fin de obtener una mejor estimación, vamos a buscar un intervalo de confianza para nuestro valor esperado del precio del gas natural.

Como se vió en 1.9, lo que necesitamos es

$$F_{X_t}(a) = \frac{\alpha}{2},$$

y

$$F_{X_t}(b) = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

con  $a, b \in R$ . En otra notación,

$$\mathbb{P}[a \leq X_t \leq b] = 1 - \alpha,$$

Si  $\alpha = .05$ , entonces requerimos

$$\mathbb{P}(X_t \leq a) = 0.025,$$

que en nuestro caso se convierte en

$$\int_{-\infty}^a \left( \frac{\hat{\pi}_1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_1^2}} e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}_1^2}(x-\hat{\mu}_1)^2} + \frac{\hat{\pi}_2}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_2^2}} e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}_2^2}(x-\hat{\mu}_2)^2} \right) dx = 0.025,$$

y de manera similar requerimos

$$1 - \mathbb{P}(X_t \leq b) = 0.975,$$

que se convierte en

$$1 - \int_b^{\infty} \left( \frac{\hat{\pi}_1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_1^2}} e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}_1^2}(x-\hat{\mu}_1)^2} + \frac{\hat{\pi}_2}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_2^2}} e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}_2^2}(x-\hat{\mu}_2)^2} \right) dx = 0.975.$$

Para encontrar  $a$  y  $b$  recurrimos al paquete **R** y se utilizó el *método de Newton*<sup>15</sup> para encontrar las soluciones del problema.

<sup>15</sup>El método de Newton es utilizado para encontrar las soluciones o raíces de funciones con ciertas características y generalmente es enseñado en cursos de Análisis numérico y su algoritmo puede ser encontrado en internet

Los valores que se obtuvieron son,  $a = -0.10410137$  y  $b = 0.0751877$ , es decir,

$$\mathbb{P}(-0.1041 + X_t \leq X_t \leq 0.0751875 + X_t) = 0.95$$

Nótese que este intervalo es para el valor de  $X_t$ , es decir, para el incremento de los logaritmos, por tanto,  $a$  y  $b$  representan cuando más o menos puede ser el incremento de los logaritmos con cierta probabilidad a partir del incremento estimado. Lo que ahora nos interesa es pasar estos valores en términos de  $\widehat{S}_1$ , donde  $\widehat{S}_1$  es el valor estimado.

Como sabemos  $\mathbb{E}[S_1|S_0] = X_1$ , para el ejemplo que estamos siguiendo,  $X_1 = 0.008615$ . Ahora lo que deseamos es tener un incremento de  $a$ , si  $\widehat{X}_{1a} = X_1 + a$ , entonces

$$\begin{aligned}\widehat{X}_{1a} &= \log \frac{S_{1a}}{S_0} \\ e^{\widehat{X}_{1a}} &= \frac{S_{1a}}{S_0} \\ S_0 e^{\widehat{X}_{1a}} &= S_{1a} \\ S_0 e^{X_1+a} &= S_{1a},\end{aligned}$$

y en esta última expresión se sustituyen los valores de  $S_0$ ,  $X_1$  y  $a$  para obtener  $S_{1a}$ ,

$$9.92e^{0.008615 + (-0.10410137)} = 9.02,$$

por tanto,  $S_{1a} = 9.02$ . Haciendo el proceso análogo para  $b$ , tenemos  $S_{1b} = 10.79$ .

Esto quiere decir que el valor de  $S_1$  estará en el intervalo (9.02, 10.79) con un porcentaje de confianza del 95% y de manera puntual será 10.01.

El valor real del precio del gas natural para el mes de junio de 2008 fue \$10.66. Como se puede observar, dicho valor se encuentra dentro de nuestro intervalo propuesto.

Para el intervalo de confianza del VPEGN se tomará, para el límite inferior

$$VPEGN_a = \frac{\left[ \frac{S_{1a}}{(1+i)} - \frac{S_{N+1a}}{(1+i)^{N+1}} \right] S_0}{\left( 1 - \frac{S_{1a}}{(1+i)} \right)},$$

donde  $S_{N+1a}$  se define, como se definió  $S_{1a}$  en la sección previa, de igual manera para el intervalo superior se tendrá

$$VPEGN_b = \frac{\left[ \frac{S_{1b}}{(1+i)} - \frac{S_{N+1b}}{(1+i)^{N+1}} \right] S_0}{\left( 1 - \frac{S_{1b}}{(1+i)} \right)}.$$

## 6.6. Cálculo del CUNG

A continuación se realizará el cálculo del *CUNG* mediante la expresión (5.9) que se vió en el capítulo 5, tomando los valores de las constantes que se presentan en el apéndice A. Recordando dicha expresión

$$\mathbb{E}[CUNG] = \frac{VPCI}{\sum_{t=1}^N \frac{GNM_t}{(1+i)^t}} + VPC_{F.O.M} + \sum_{t=1}^N \frac{(T + C_{V.O.M} + AC_A)}{(1+i)^t} + \frac{S_0}{\eta P_c} \sum_{j=1}^N \frac{M^j(1)}{(1+i)^j}. \quad (6.11)$$

De donde los dos primeros sumandos corresponden al Costo por Capacidad (*CCa*) mientras que los otros dos corresponden al Costo por Energía (*CE*)<sup>16</sup>. El *CCa* esta constituido por el Costo de Inversión (*CI*) y el Costo Fijo de Operación y Mantenimiento (*C<sub>F.O.M</sub>*) y el *CE* por el Costo Variable de Operación y Mantenimiento (*C<sub>V.O.M</sub>*), Costos por conceptos de uso de Agua (*AC<sub>A</sub>*), Transporte de combustible (*T*) y el Costo por Consumo de Combustible (*CCo*). Para el proceso del cálculo del CUNG, se va a re-distribuir la ecuación (6.11), para que quede en términos del Costo de Inversión, Costos de Operación y Mantenimiento (se incluirá los costos por consumo de Agua), y Costo por Combustible, para esto, por tanto

$$CUNG = \frac{VPCI}{VPGNM} + VPC_{F.O.M} + VPC_{V.O.M} + VPCCo,$$

ahora si,  $VPOM = VPC_{F.O.M} + VPC_{V.O.M}$ , entonces obtenemos

$$CUNG = \frac{VPCI}{VPGNM} + VPOM + VPCCo, \quad (6.12)$$

ahora la expresión (6.12), puede escribirse en términos de la ecuación (A.3) del apéndice A

$$CT = \frac{1}{1-up} \frac{Iv}{C} fvp(i, \bar{\omega}) \frac{frc(i, n)}{(1+i)} \frac{1}{8760xFP} + \frac{3600xCC}{\eta} + OM,$$

<sup>16</sup>Ver sección 5.4

de donde:

$$\begin{aligned} Inv &= \frac{Iv}{C} fvp(i, \bar{\omega}) \frac{frc(i, n)}{(1+i)}, \\ GNA &= 12 * GNM = (1 - up)(8760x fp), \\ CCo &= \frac{3600x CC}{\eta}, \\ OM &= OM. \end{aligned}$$

Veamos el cálculo de estos componentes de manera individual. Para este ejemplo tomaremos los datos de una Central Turbogás industrial gas con una potencia bruta de 1 x 85MW

### 6.6.1. Costo Nivelado del MWh Neto Generado por Concepto de Inversión

El Costo Nivelado del MWh Neto Generado por Concepto de Inversión ( $CI$ ), tiene dos principales componentes: La Inversión ( $Inv$ ) y la Generación Neta (sea mensual o anual) ( $GNA$  o  $GNM$ ).

De los datos del apéndice A, tenemos:

Capacidad Instalada(C)	:	85	MW
Factor de Planta(fp)	:	0.125	
Vida Económica(N)	:	30	años
Tasa real de descuento(I)	:	12.00	%
Usos Propios(up)	:	0.01	
Porcentaje de Costo Indirectos(CIn)	:	2.5	%
Costo Unitario Directo(CUD)	:	5,636,160	\$/MW
Inversión(Iv)	:	491,050,100	pesos(\$)
Número de horas al año	:	8760	h

Primero calcularemos la Inversión, para esto tenemos que:

$$Inv = \frac{Iv}{C} fvp(i, \bar{\omega}) \frac{frc(i, n)}{(1+i)},$$

cálculos

- Costo Unitario (CU)

$$\begin{aligned} CU &= \frac{491050100}{85} \\ &= 5777060 \frac{\$}{MW}, \end{aligned}$$

- Factor de recuperación de capital

$$\begin{aligned} frc(0.12, 30) &= \frac{0.12(1.12)^{30}}{(1.12)^{30}} - 1 = 0.12414 \\ \frac{frc(0.12, 30)}{(1 + .12)} &= \frac{0.12414}{1 + .12} = 0.11084, \end{aligned}$$

- Factor de valor presente

$$fvp = 1.057,$$

ahora la parte correspondiente a la Generación Neta Anual (GNA):

$$\begin{aligned} GNA &= (1 - up)(8760x fvp) \\ &= (1 - 0.01)(8760 * 0.125) \\ &= 1084.05 \frac{MWh}{MW}, \end{aligned}$$

finalmente

$$CI = 5777060 * 1.057 * 0.11084 * \frac{1}{1084.05} \quad (6.13)$$

$$= 624.366 \frac{\$}{MWh}. \quad (6.14)$$

### 6.6.2. Costo Nivelado del MWh Neto Generado por Concepto de Operación y Mantenimiento

Como ya se ha mencionado, los componentes del Costo de Operación y Mantenimiento se dividen en Fijo y Variable. De los datos del apéndice A tenemos:

Costo Fijo de Operación y Mantenimiento ( $C_{F.O.M}$ )	:	137,162	\$/MW – Año,
Costo Variable de Operación y Mantenimiento ( $C_{V.O.M}$ )	:	1.46	\$/MWh,
Costos de Agua ( $AC_A$ )	:	4.70	\$/MWh,

finalmente se tiene que

$$OM = 132.72 \frac{\$}{MWh}. \quad (6.15)$$

### 6.6.3. Costo Nivelado del MWh Neto Generado por Concepto de Combustible

En lo referente al Costo por combustible, se encuentran los siguientes componentes:

Eficiencia Neta ( $\eta$ )	:	29.69	%,
Poder Calorífico Superior del Gas Natural ( $P_c$ )	:	1064.3	MJ/U,
Precio Nivelado del Gas Natural ( $S$ )	:	0.097727	\$/MJ,

donde la Unidad (U) es  $1000 ft^3$ .

Con respecto al precio del Gas Natural, este se ha calculado utilizando la proyección que se propone en este trabajo, basandonos en los precios de referencia de venta de primera mano que se publican en la página electrónica de la Comisión Reguladora de Energía (CRE), expresados estos en dólares sobre Gigajoules, en vez del precio nivelado que se da en el documento “COPAR de Generación 2006 siendo este de 7.22 dólares sobre  $1000 ft^3$ , no obstante, mantendremos el tipo de cambio propuesto en dicho documento, equivalente a 11.4 pesos por dólar.

A continuación se presentará el cálculo del precio del Gas Natural, de la ecuación (6.10)

y tomando como  $S_0=9.92$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 VPEGN &= \frac{\left[ \frac{M(1)}{(1+i)} - \frac{M(1)^{N+1}}{(1+i)^{m+1}} \right] S_0}{\left( 1 - \frac{M(1)}{(1+i)} \right)} \\
 &= \frac{\left[ \frac{(0.584764+0.423888)}{1.009489} - \frac{(0.584764+0.423888)^{361}}{1.009489^{361}} \right] 9.92}{\left( 1 - \frac{(0.584764+0.423888)}{1.009489} \right)} \\
 &= \frac{\left[ \frac{1.008652}{1.009489} - \frac{22.418839}{30.244206} \right] 9.92}{\left( 1 - \frac{1.008652}{1.009489} \right)} \\
 &= \frac{[0.999171 - 0.741260637] 9.92}{0.000829} \\
 &= \frac{2.558471}{0.000829} \\
 &= 3086.111318.
 \end{aligned}$$

este último valor es la esperanza del valor presente del Gas Natural, ahora para nivelarlo se divide entre el número de periodos a los que se proyecta, es decir, a 360 meses, lo que nos da:

$$S = \frac{3086.111318}{360} = 8.572531 \frac{USD}{GJ},$$

tomando la tasa de cambio peso-dólar y dividiendo sobre 1000 para pasar de GJ a MJ,

$$S = 0.097727 \frac{\$}{MJ}, \quad (6.16)$$

$$CCo = \frac{3600xCC}{\eta},$$

de donde:

- $CC = \frac{S}{P_c}$ , dado que el precio que hemos estimado está en términos de joules, el poder calorífico  $P_c$  se anula, esto es por que en los ejemplos utilizados en el "COPAR de Generación 2006 el  $P_c$  cambia de  $\frac{USD}{ft^3}$  a  $\frac{USD}{MJ}$
- $3600(\frac{MWh}{MJ})$  es el factor para hacer equivalentes la unidad calorífica  $Mj$  a  $MWh$ , es decir, 1 MWh es igual a 3600 MJ.

por tanto, reescribiendo finalmente tenemos

$$CCo = 3600 * 0.097727 \quad (6.17)$$

$$= 1,184.967 \frac{\$}{MWh}. \quad (6.18)$$

El precio de Transportación no se ha tomado en cuenta para facilitar el ejemplo, debido a que dependiendo del lugar de donde se instalaría la planta dependerá de donde se obtiene el Gas Natural y se está tomando en cuenta el precio de venta de primera mano, no se utiliza el supuesto de transportación.

#### 6.6.4. Costo Total del MWh Neto Generado

Como se ha mencionado anteriormente el Costo Total del MWh Neto Generado es la suma de los Costos Nivelados por los conceptos de Inversión, Operación y Mantenimiento y Combustible. De las anteriores secciones tomaremos los resultados obtenidos (6.14), (6.15) y (6.18), por tanto tenemos,

$$\begin{aligned} CT &= CI + OM + CCo \\ &= 624.366 + 132.72 + 1,184.967 \\ &= 624.366 + 132.72 + 1,184.967 \\ &= 1942.477 \frac{\$}{MWh}, \end{aligned}$$

Se ha obtenido el Costo Total del MWh Generado para una central de Turbogás industrial gas con una potencia bruta 1 x 85 MW, con los datos obtenidos en el "COPAR de Generación 2006 y la estimación del precio del Gatural con la metodología estudiada en el presente trabajo.



# Conclusiones

Durante el desarrollo del presente trabajo, en donde se ha presentado, sustentado y aplicado el modelo propuesto por el Físico Alejandro Cuevas en su artículo “Técnica para la evaluación del costo unitario nivelado de generación con un enfoque estocástico”, se han obtenido resultados favorables hacia dicho modelo.

A continuación se presenta un listado de los principales resultados que se han obtenido durante el desarrollo de este trabajo, dichos puntos el lector los podrá observar en los capítulos respectivos.

1. En efecto, los precios del gas natural ( $S_t$ ) cumplen con la propiedad de Markov, es decir, el precio actual incorpora toda la historia pasada.
2. Es razonable considerar que el logaritmo de los incrementos del precio del gas natural puede ser modelado mediante una distribución de una mezcla de normales debido a que su uso nos permite tener diversas formas que van desde la simetría hasta patrones muy diferentes y consideramos una mezcla de 2 normales con el fin de que una representa la tendencia hacia la alza de los precios (tomando como media un valor positivo) mientras la otra una tendencia hacia la baja (tomando como media un valor negativo).
3. A través de la propiedad de Markov y el uso de un proceso iterativo hacia atrás, se ha obtenido la Esperanza del precio del gas natural a cierto intervalo en el tiempo, tomando como punto de partida un precio conocido y los estimadores obtenidos mediante el algoritmo EM.
4. Utilizar modelos de proyección a largo plazo de una variable con alta incertidumbre siempre es riesgoso, sin embargo, a veces son necesarios para la evaluación de proyectos como es el caso del “COPAR de Generación 2006”, y para tal caso, se ha aplicado el modelo estudiado a ello.

5. El modelo presentado no solo es aplicable a los precios del gas natural, el desarrollo se ha hecho de tal manera que puede ser utilizado con otros activos que compartan las características necesarias para aplicarse este modelo.

# Apéndice A

## COPAR de Generación 2006

En esta parte se presentará un resumen del documento denominado *Costos y parámetros de referencia para la formulación de proyectos de inversión en el sector eléctrico generación 2006* (COPAR), que es mencionado con anterioridad y sólo nos enfocaremos a las tecnologías referentes con respecto al uso del gas natural como combustible base.

### A.1. Costos totales de generación

El Costo Total de generación está compuesto por la suma de los Costos de Inversión, Combustible y Operación y Mantenimiento.

Los costos utilizados en este anexo están expresados a precios medios de 2006.

El cargo por combustibles es un costo nivelado, el cual depende del escenario de evolución de precio del combustible en cuestión (gas natural para nuestro caso), del precio externo de referencia y de la tasa de descuento utilizada. El precio externo de referencia es representativo del valor de los energéticos en algunos mercados internacionales relevantes para México, en tanto que la tasa de descuento empleada en esta edición corresponde al 12%.

## A.2. Descripción de tecnologías: Unidades turbogás

Recordamos nuevamente que para los fines de este documento sólo mencionaremos las tecnologías que emplean como combustible base al gas natural.

La generación de energía eléctrica en las unidades de turbogás, se logra cuando el sistema toma aire de la atmósfera a través de un filtro y pasa después al compresor. El aire es comprimido aquí antes de llegar a la cámara de combustión, donde el combustible, inyectado en las toberas, se mezcla con el aire altamente comprimido, quemándose posteriormente. De ello resultan gases de combustión calientes los cuales al expandirse hacen girar la turbina de gas. El generador, acoplado a la turbina de gas, transforma esta energía mecánica en energía eléctrica.

La figura A.1 muestra esquemáticamente el funcionamiento de este ciclo <sup>1</sup>; como se observa, los gases de la combustión, después de mover la turbina, son descargados directamente a la atmósfera.

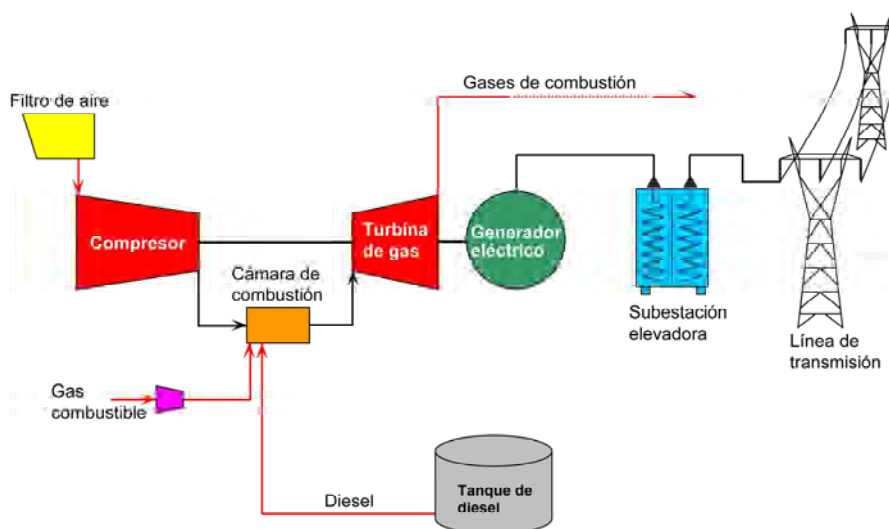


Figura A.1: Central Turbogás

Estas unidades emplean como combustible gas natural o diesel en forma alternativa y en los modelos avanzados también pueden quemar combustóleo o petróleo crudo. En una

<sup>1</sup>Ciclo Brayton.

máquina preparada para ello, donde el cambio de combustible puede realizarse en forma automática en cualquier momento; este cambio tiene efectos sobre la potencia y la eficiencia. El cuadro siguiente muestra la magnitud de estos efectos, tomando el desempeño con gas natural como base de comparación.

<b>Combustible</b>	<b>Potencia</b>	<b>Eficiencia</b>
Gas natural	Base	Base
Diesel	-2.7 %	+1.9 %
Combustóleo	-4.1 %	+3.5 %

Desde el punto de vista de la operación, el breve tiempo de arranque y la versatilidad para seguir a la demanda hacen a las turbinas de gas ventajosas para satisfacer cargas en horas pico, aunque existen modelos de tecnología avanzada que han sido diseñados para servicio de carga base y cogeneración industrial.

Los fabricantes ofrecen una amplia serie de capacidades para estas máquinas, las cuales van desde 0.50 MW hasta 253 MW y con frecuencia de 60 Hertz para estas unidades; en este estudio son presentados costos referentes a máquinas de tecnología de vanguardia como las llamadas de trabajo pesado (Heavy-Duty) para aplicaciones en la industria eléctrica, con capacidades de 85 MW a 253 MW.

También son presentados costos para las turbinas de gas de tecnología avanzada, las cuales derivan o provienen de las turbinas utilizadas en la aviación; estas son conocidas como turbinas de gas aeroderivadas y cuya aplicación principal es el servicio de carga en horas pico.

Las condiciones climatológicas del sitio, particularmente la presión barométrica (altitud sobre el nivel del mar) y la temperatura del aire, influyen en forma sensible en los parámetros de operación de las turbinas de gas, principalmente en la potencia y eficiencia. Aunque cada fabricante y cada modelo de turbina tienen su respuesta propia a las condiciones del sitio, la diferencia entre ellas no es significativa y pueden esperarse los valores mostrados en la figura A.2.

Para un sitio definido donde se pretenda instalar una cierta capacidad con turbina de gas, la capacidad nominal de ésta podrá ser mayor o menor a la requerida en el sitio, al corregir su capacidad por el efecto de la temperatura y la presión barométrica.

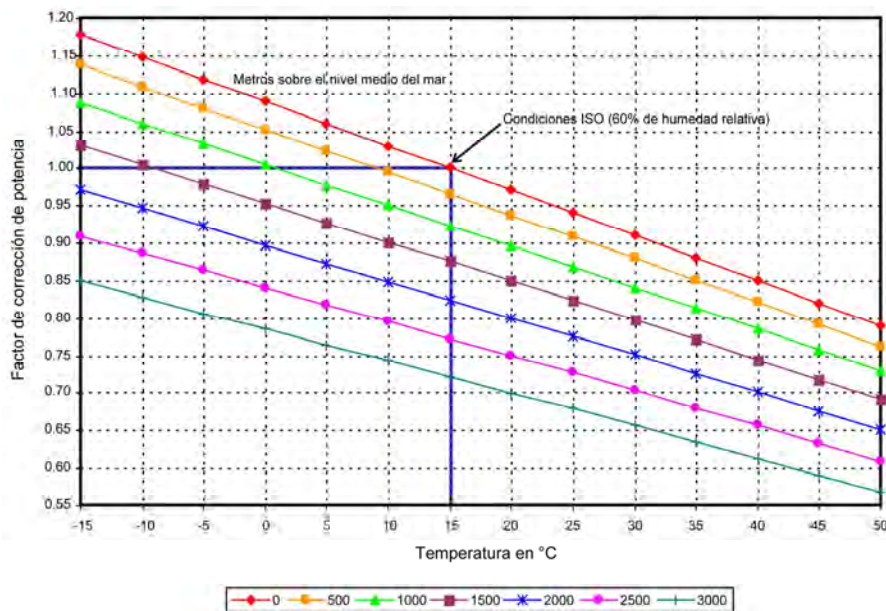


Figura A.2: Efecto de la temperatura ambiente y la altitud en la potencia de salida de las turbinas de gas

### A.3. Costos de Inversión

Estos conceptos ya se han mencionado con anterioridad en el desarrollo del modelo a estudiar y ahora los retomaremos según el documento de “COPAR de Generación 2006”.

#### A.3.1. Conceptos de Costo Directo, Indirecto y Actualizado

Este estudio distingue tres elementos del Costo Unitario de Inversión: Costo Directo, Costo Directo más Indirecto y Costo Actualizado al Inicio de la Operación.

El Costo Directo se obtiene al dividir, en moneda constante, todas las erogaciones correspondientes a la obra entre la capacidad de la central. Este costo refleja el valor de los materiales, equipos, mano de obra, etc., incorporados a la central y mide el costo de inversión como si todas las erogaciones tuvieran lugar en el mismo año.

Existen inversiones dentro de la central las cuales no pueden estandarizarse, por ejemplo

el costo de la subestación eléctrica difiere de una central a otra debido al arreglo y características específicas en cada central. Es por ello que en el Costo Directo es excluido el costo de la subestación; esto implica tener presente en las evaluaciones de proyectos de generación, la necesidad de agregar el Costo Directo de dicha subestación eléctrica.

Este concepto es utilizado en la formulación del Programa de Obras e Inversiones del Sector Eléctrico (POISE), en la elaboración de los presupuestos anuales de inversión por proyecto y para las actividades de seguimiento de avance de presupuestos en las obras.

Al añadir al Costo Directo los costos originados por: estudios previos, administración del proyecto, ingeniería, control y otras actividades relacionadas con la obra, los cuales pertenecen a las oficinas centrales y unidades foráneas de la CFE, es obtenido el Costo Directo más Indirecto.

La estimación para el Costo Indirecto, para la tecnología de generación por Turbogás es del 2.5% (relación de costo indirecto a costo directo más indirecto).

El Costo Actualizado al Inicio de la Operación, es el resultado de asignar un valor al dinero en el tiempo mediante una tasa de descuento <sup>2</sup>, es decir, son tomados en cuenta el plazo de construcción y el cronograma de inversiones. Este concepto incorpora el costo de los intereses devengados durante la construcción de la obra.

En el cuadro [A.1] se resume, para el tipo de central Turbogás los programas de inversión empleados para obtener el Costo Actualizado al inicio de la Operación y que corresponden a cronogramas mensuales.

Los programas de inversión son estimados a partir de los cronogramas de construcción y de pago de equipos de cada tecnología. El perfil en porcentaje de cada año es la suma de los cocientes de la erogación mensual entre la suma total de erogaciones. Debe notarse que todos los montos están en moneda constante. Los años asociados al periodo de construcción están denominados con números negativos con objeto de llamar cero al primer año de operación de la central; esta convención es únicamente de notación y no implica diferencias conceptuales con cualquier otra.

En el cuadro [A.1] se muestra el factor de valor presente, el cual está en función del perfil de inversión mensual y de la tasa mensual de descuento; el producto de este factor por el Costo Directo más Indirecto proporciona el Costo Actualizado al Inicio de Operación, año

---

<sup>2</sup>Los costos empleados en este estudio, están denominados en moneda constante, en consecuencia es excluido el efecto inflacionario; por lo que las tasas de actualización o de descuento son tasas reales.

cero.

En el cuadro [A.2] es anotado el factor para obtener el costo nivelado; este parámetro depende del factor de valor presente, de la vida económica de la central, del factor de planta, de la proporción de energía dedicada a usos propios y de la tasa de descuento. La metodología de cálculo es presentada en la sección A.7.

Al multiplicar el factor de costo nivelado por el Costo Directo más Indirecto por kW, es obtenido el costo nivelado del MWh neto generado, por concepto de inversión.

### **A.3.2. Estructura del Costo de Inversión**

Es costo de inversión puede desglosarse en los siguientes componentes: mano de obra, equipos nacionales, equipos importados, materiales y otros (servicios y gastos diversos).

Esta clasificación representa los recursos que el Sector Eléctrico aplica a sus obras. En el renglón de servicios comprende a su vez una parte de mano de obra y una pequeña fracción de equipo y materiales, los cuales no es posible identificar por separado.

Los equipos nacionales incluyen importaciones indirectas cuya estimación preliminar es incorporada en el rubro de equipos importados, tal como aparecen en los cuadros citados posteriormente. Sin embargo, los rubros de “materiales” y de “otros” pueden incluir componentes de importación no identificados a partir de la información disponible. Adicionalmente, para algunas tecnologías es posible distinguir dos procesos genéricos, la obra civil y la obra electromecánica.

En el cuadro [A.3] son anotados los resultados de las dos clasificaciones por tipo de recurso y proceso.

A continuación se presentan los cuadros anteriormente mencionados.

## **A.4. Características y costos de los combustibles**

La decisión de construir una central generadora, compromete recursos durante la vida útil de la instalación. Esto significa que para lograr una selección adecuada de proyectos, es



Cuadro A.1: Programa de Inversión

Central	Potencia bruta (MW)	Programa de inversión (%)		Factor de valor presente al inicio de la operación		No. meses
		Años de construcción		12 %	14 %	
		-2	-1			
Turbogás aeroderivada gas	1 x 43.4	0	100	1.0575	1.0668	10
Turbogás industrial gas	1 x 85.0	0	100	1.0575	1.0668	10
Turbogás industrial gas "F"	1 x 190	0	100	1.0668	1.0777	12
Turbogás industrial gas "G"	1 x 267	0	100	1.0668	1.0777	12

Cuadro A.2: Parámetros básicos del Costo de Generación

Central	Potencia bruta (MW)	Vida útil (años)	Factor de planta	Usos propios (%)	Factor de costo nivelado x 10 <sup>-2</sup>	
					12 %	14 %
					Turbogás aeroderivada gas	1 x 43.4
Turbogás industrial gas	1 x 85.0	30	0.125	1.0	10.8149	12.3297
Turbogás industrial gas "F"	1 x 190	30	0.125	0.8	10.8851	12.4273
Turbogás industrial gas "G"	1 x 267	30	0.125	1.2	10.9309	12.4795

Cuadro A.3: Composición del Costo de Inversión por tipo de recurso y proceso

Central	Tipo de recurso						Tipo de proceso (Obra)			
	Mano de obra	Equipo nacional	Equipo importado		Materiales	Otros	Total	Civil	Electro- mecánica	Total
			directo	indirecto						
Turbogás y diesel	3.1	3.1	92.3	N/A	1.2	0.1	100.0	ND	ND	100

necesario considerar el flujo monetario implicado en cada tecnología, desde el inicio de su construcción hasta que es retirada de operación. Durante el periodo de operación, uno de los componentes más importantes del flujo es el costo por concepto de combustible.

El costo de los energéticos a lo largo de un periodo tan grande, aún medido en moneda constante, es variable; esto es debido a diversas causas, entre las que destacan:

- Los recursos energéticos son finitos y en la medida que son utilizados, su precio aumenta, aún cuando las demás condiciones permanezcan constantes.
- Los energéticos se comercializan en mercados parcialmente competitivos y son a menudo substitutivos. Las reducciones en la demanda del energético desplazado inducen disminuciones en su precio.
- Al explotar un recurso de manera racional, primero son extraídas las reservas de costo mínimo y posteriormente las de mayor costo, esto repercute en incrementos del precio en el futuro.
- Los avances tecnológicos tienden a disminuir el costo de explotación y procesamiento de los recursos.
- Los efectos ambientales tienen cada vez un mayor peso, esto trae consigo una tendencia a la sustitución de combustibles “sucios” por “limpios” y la instalación de aditamentos de costos, ya sea de los energéticos o de las instalaciones para su tratamiento.
- Existen factores coyunturales que alteran el comportamiento de los mercados energéticos; así, por ejemplo, un conflicto en el Golfo Pérsico, o un invierno riguroso en los países nórdicos puede, en forma temporal, alterar el precio del petróleo.

#### **A.4.1. Precios externos de referencia**

El precio externo de referencia es una aproximación al precio de cuenta<sup>3</sup> de los combustibles. Su uso elimina posibles distorsiones de los precios internos de los energéticos en México y permite comparar los costos económicos de los distintos medios de generación. Para convertir a pesos los precios cotizados en divisas se utiliza el “el tipo de cambio para Solventar Obligaciones en Moneda Extranjera en la República Mexicana”.

---

<sup>3</sup>Precio de cuenta: Es el valor de consumo de un bien o servicio, una vez eliminados las distorsiones de la economía (subsidios, aranceles, etc.).

### A.4.2. Equivalencias

La relación entre energía térmica consumida y la energía eléctrica generada es:

$$\text{energía eléctrica} = \eta * \text{energía térmica} \quad (\text{A.1})$$

Donde “ $\eta$ ” es la eficiencia de conversión.

Para transformar unidades térmicas, son empleadas las relaciones de equivalencia que aparecen en el cuadro [A.4].

Los datos mostrados en el cuadro [A.5] son los poderes caloríficos superiores con los cuales son calculados los costos por concepto de combustible.

En el cuadro [A.6] son presentados los valores de las eficiencias de conversión bruta y neta de los distintos medios de generación. Estos valores son modificados en cada edición, pues cada día contamos con mejores estimaciones basadas en la experiencia internacional y en la información disponible de las centrales en operación de la CFE. Este cuadro también muestra información relativa al régimen térmico neto y al consumo específico neto para los diversos medios de generación aquí tratados.

Cuadro A.4: Equivalencias entre unidades caloríficas

Unidades	joule	kWh	BTU	kcal	MWd <sup>2</sup>
1 joule	1	$2.77 \times 10^{-7}$	$9.481 \times 10^{-4}$	$2.389 \times 10^{-4}$	$1.16 \times 10^{-11}$
1 kWh	3600000	1	3413.00	860	$4.17 \times 10^{-5}$
1 BTU	1054.79	$2.93 \times 10^{-3}$	1	0.252	$1.22 \times 10^{-8}$
1 kCal	4186.05	$1.163 \times 10^{-3}$	3.9686	1	$4.84 \times 10^{-8}$
1 MWd	$86.40 \times 10^9$	24000	$81.89 \times 10^6$	$20.64 \times 10^6$	1

## A.5. Costos de Operación y Mantenimiento

El Costo de Operación y Mantenimiento del MWh neto generado considera dos componentes, uno fijo y otro variable. Los costos fijos están presentes independientemente de

Cuadro A.5: Poderes caloríficos de los combustibles

Combustible	Unidad	MJ	kWh	BTU	kcal
Gas natural nacional	$m^3$	37.58	10.44	35633.98	8978.97
	$ft^3$	1.06	0.30	1009.05	254.26
Gas natural importado	$m^3$	38.29	10.64	36304.98	9148.04
	$ft^3$	1.08	.030	1028.05	259.05

Cuadro A.6: Eficiencia de conversión

Central	Potencia bruta (MW)	Eficiencia		Régimen térmico neto (MJ/MWh)	Consumo especifico neto (U/MWh)	Unidad
		Bruta (%)	Neta (%)			
Turbogás aeroderivada gas	1 x 43.4	37.97	37.55	9587	255.08	$m^3$
Turbogás industrial gas	1 x 85.0	30.00	29.69	12125	322.61	$m^3$
Turbogás industrial gas "F"	1 x 190.0	33.49	33.22	10837	288.33	$m^3$
Turbogás industrial gas "G"	1 x 267.0	35.55	35.12	10251	272.73	$m^3$

la operación de la planta y por lo tanto no están directamente relacionados con la energía generada; este renglón incluye los siguientes conceptos de costos:

- Salarios.
- Prestaciones.
- Seguro Social.
- Servicios de Terceros.
- Gastos Generados.
- Materiales (excepto del área de operación).

son costos variables los que guardan una relación directa con la generación de energía eléctrica. En este renglón sólo son considerados los costos de materiales del área de operación.

Debido a que los tipos de tecnologías de centrales en operación de la CFE no cubren el total de las utilizadas en el “COPAR de Generación 2006”, no ha sido posible obtener información actualizada de todos los costos. Por lo tanto, para plantas de ciclo combinado y turbogás se supuso que el personal necesario para llevar a cabo las labores de operación y mantenimiento sería el mismo en costo y número al empleado en las centrales existentes de CFE.

## A.6. Costos, Consumos y Usos de Agua

El agua es uno de los principales elementos que emplean las centrales generadoras para producir la electricidad, por ejemplo: las centrales termoeléctricas consumen y usan agua para enfriamiento y condensación del fluido de trabajo; las hidroeléctricas, en cambio, usan el agua prácticamente como combustible.

Las centrales generadoras usan agua, cuando la toman de una corriente derivada de su curso normal, y la retornan a su corriente natural, sin disminuir su calidad y volumen originales; en cambio, se dice que las centrales consumen agua, sí durante el proceso de generación eléctrica alteran las características fisicoquímicas del agua, pudiendo variar también su volumen o bien, si vierten el agua a un sistema de alcantarillado o agua residual.

### A.6.1. Costos del agua

Tanto el uso como el consumo de agua son gravados con un cargo por  $m^3$ , de acuerdo con el capítulo VIII, artículo 223 de la Ley Federal de Derecho en Materia de Agua vigente.

En Chile y Francia no se grava el uso de agua para generación. En los Estados Unidos de América, la Federal Energy Regulatory Commission establece cargos por uso de agua para empresas privadas, que utilicen aprovechamientos hidráulicos construidos por el gobierno federal; la Boneville Power Administration, del Departamento de Energía de los EUA, exenta de pago por derechos de uso de agua a las plantas hidroeléctricas federales. Algo semejante aplica la Canadian Electrical Association desde 1979.

### A.6.2. Consumos de agua

Generalmente las centrales generadoras consumen agua y, dependiendo del proceso de generación, su consumo puede ser menor o mayor. Existen centrales donde el consumo de agua es mínimo y se requiere únicamente para riego de áreas verdes, sistema contra incendio o servicios del personal que opera la planta, en otros casos el agua es imprescindible para el proceso y su consumo de agua es mayor.

En lo concerniente a las centrales de turbogás sin inyección de agua, el gasto de agua para enfriamiento es mínimo, por ello, el consumo de agua se reduce solo al concepto de servicios. El consumo de agua de servicios está calculado como el 2% de un litro por segundo por MW.

## A.7. Costo total del MWh Neto Generado

El costo total del MWh neto generado es una función de los parámetros definidos en las secciones previas:

$$CT = f(up, Iv, C, i, \bar{w}, n, FP, CC, \eta, OM) \quad (A.2)$$

donde:

- $CT$  = Costo total del MWh en pesos.
- $up$  = Usos propios (por unidad)
- $Iv$  = Inversión total (pesos).
- $C$  = Capacidad de la central en MegaWatts.
- $i$  = Tasa de descuento.
- $\bar{w}$  = Periodo de construcción (porcentaje en cada año).
- $n$  = Vida económica (número de años).
- $FP$  = Factor de planta (por unidad).
- $CC$  = Costo del Megajoule del energético (pesos/Mj).
- $\eta$  = Eficiencia de conversión (por unidad).
- $OM$  = Costo de operación y mantenimiento (pesos/MWh).

La forma explícita de “ $CT$ ” es:

$$CT = \frac{1}{1 - up} \frac{Iv}{C} fvp(i, \bar{w}) \frac{frc(i, n)}{(1 + i)} \frac{1}{8760xFP} + \frac{3600xCC}{\eta} + OM \quad (A.3)$$

donde “fvp” es la función de valor presente definida por:

$$fvp(i, \bar{w}) = \sum_{t=-N}^{-1} W_t (1 + i)^{-t} \quad (A.4)$$

y  $W_t$  es el porcentaje del perfil de inversión en el año “t” del periodo de construcción  $\bar{W}$ .

“ $frc(i, n)$ ” es el factor de recuperación del capital expresado como:

$$frc(i, n) = \frac{i(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \quad (A.5)$$

### A.7.1. Metodología de evaluación

#### Flujo de efectivo

En términos de erogaciones de efectivo, una central de generación de energía eléctrica inicia su vida con el estudio de factibilidad técnica y económica y termina cuando deja de ser conveniente su operación y por tanto es retirada. Durante este periodo son generados gastos e ingresos asociados a las diferentes etapas, las cuales con frecuencia son denominadas: estudios, construcción y operación.

Las etapas de estudios y construcción forman la etapa conocida como periodo de construcción. A la duración de la etapa de operación, se le conoce como vida útil o vida económica de la central.

Los costos originados durante el periodo de construcción son denominados costos de inversión. Durante la vida económica de la central se tienen costos de producción, los cuales pueden subdividirse en costos de combustibles y de operación y mantenimiento.

Una inversión es el gasto en cual se incurre para la adquisición o instalación de un bien duradero, mientras tanto un costo de operación está asociado con bienes y servicios consumidos directamente durante el proceso de producción de energía.

En el periodo de construcción se efectúan principalmente gastos por concepto de inversiones, aunque también ocurren gastos de operación. De igual manera en el periodo de operación se llegan a presentar algunos gastos de inversión.

No existe una frontera precisa entre la terminación del periodo de construcción y el inicio del periodo de operación de la central. Por ello, para el análisis económico se ha adoptado la práctica de considerar que el inicio del periodo de operación coincide con el término del periodo de construcción. Este momento corresponde a la entrada en servicio de la primera unidad de la central, esto es, una vez realizadas satisfactoriamente las pruebas de operación y ha concluido el periodo de puesta en servicio.

En realidad se incurre en erogaciones en forma casi continua; sin embargo, para efectos del análisis se puede suponer que éstas se presentan en forma discreta, una vez por año y precisamente al principio del mismo. La siguiente figura muestra las convenciones prácticas del análisis económico comparadas con lo que en realidad podría ocurrir.

En la parte superior de la figura A.3 se presentan los gastos acumulados de la central para periodos anuales. Nótese que la altura de la gráfica corresponde a la suma de las erogaciones realizadas durante un año. La parte inferior del dibujo muestra el esquema de la convención adoptada, donde la magnitud de la “flecha” corresponde exactamente a la altura de la gráfica de gastos acumulados en el periodo.

Los costos incurridos en los periodos  $(1, 2, \dots, N)$  corresponden a inversiones, mientras que los incurridos en  $(N + 1, \dots, N + n)$  son los costos de operación.

Para facilitar el análisis económico de los proyectos se considera que el principio del año cero es el inicio del periodo de operación. Esto equivale a recorrer arbitrariamente la numeración de los años, de manera que la construcción va del año “ $-N$ ” al año “ $-1$ ”, esto se puede ver en la figura A.4.

Los egresos en  $(-N, \dots, -1)$  corresponden a inversiones, mientras tanto los egresos en  $(0, \dots, n - 1)$  son los costos de operación. “ $N$ ” es la duración del periodo de construcción y “ $n$ ” la del periodo de operación. Cada erogación es representada esquemáticamente por una flecha hacia abajo en el eje del tiempo, y algebraicamente con un símbolo con subíndice, representando éste punto el punto en el tiempo en el cual es llevada a cabo la erogación.



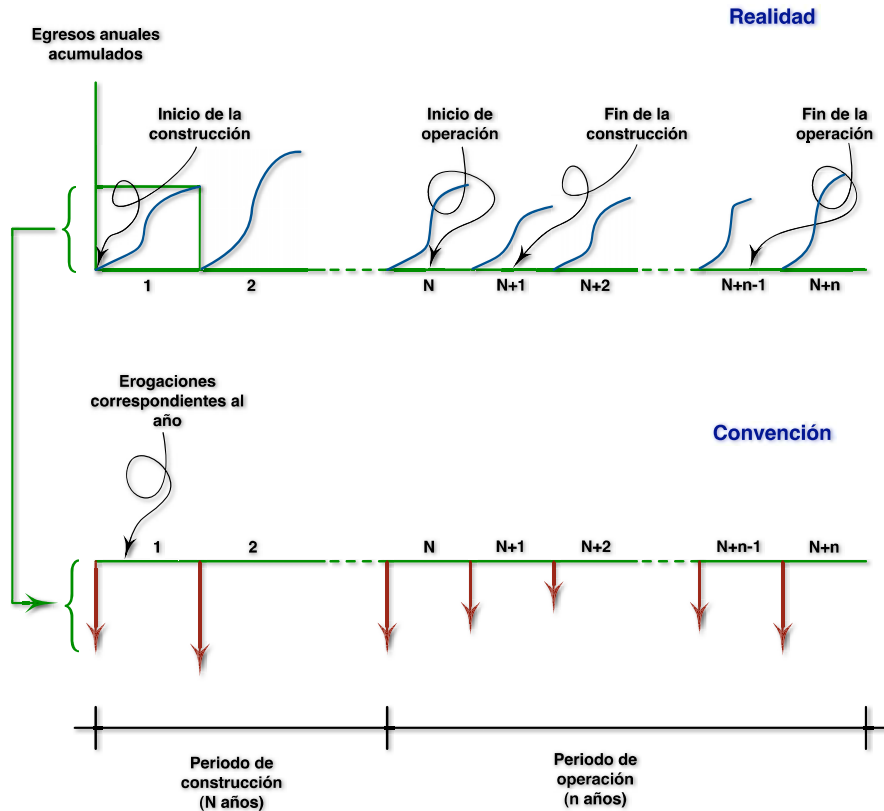


Figura A.3: Flujos de inversión y operación reales y convencionales

### Metodología para el cálculo del Costo Nivelado

El costo nivelado es un concepto que sintetiza la información económica disponible acerca de un proyecto. Su valor expresa el costo medio del bien o servicio producido y es particularmente útil para comparar dos o más proyectos optativos que permitan obtener un mismo producto.

El costo de un MegaWatt-hora generado está integrado por tres partes: Costo de Inversión, de Combustibles y de Operación y Mantenimiento. En este apartado se expone la técnica para la obtención del costo nivelado por concepto de inversión; empero, la misma técnica puede ser empleada para obtener costos nivelados por otros conceptos.

La determinación del costo nivelado del MegaWatt-hora por concepto de inversión in-

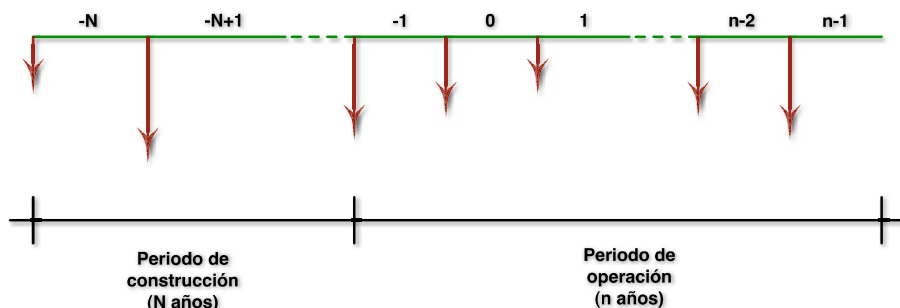


Figura A.4: Flujo convencional de erogaciones durante la construcción y operación de una central

volucra aspectos técnicos y económicos que definen una tecnología, como son: los Costos de Inversión, el programa de inversión, el factor de planta medio, la potencia por unidad y total, la vida económica y la tasa de descuento.

El Costo Nivelado del MWh por concepto de inversión, es definido como el valor que al multiplicarse por el valor presente de la generación de la central, considera su vida útil, igual al valor presente de los costos incurridos en la construcción de la central en la cuestión<sup>4</sup>. A partir de esta definición se obtiene la ecuación:

$$\overline{CI} = \frac{\sum_{t=-N}^{-1} I_t(1+i)^{-t}}{\sum_{t=0}^{n-1} GNA_t(1+i)^{-t}} \quad (\text{A.6})$$

donde:

- $\overline{CI}$  = Costo Nivelado del MWh por concepto de Inversión.
- $I_t$  = Inversión en el año t (pesos).
- $GNA_t$  = Generación Neta en el año t (MWh).
- $N$  = Periodo de construcción (años).
- $n$  = Vida económica (años).
- $i$  = Tasa de descuento (como fracción de la unidad).

Si la Generación Neta Anual (GNA) es uniforme<sup>5</sup> año con año, la relación definida en

<sup>4</sup>Al usar esta definición se puede considerar una central completa, una unidad o un MW.

<sup>5</sup>Si no es uniforme se puede estimar una generación neta equivalente a GNA que si lo sea, de la siguiente

la ecuación (A.6) es puede ser expresada como sigue:

$$\overline{CI} = \left[ \frac{i(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n - 1} \right] \left[ \frac{1}{GNA * C} \right] \left[ \sum_{t=-N}^{-1} I_t(1+i)^{-t} \right] \quad (A.7)$$

donde:

$C$  = Capacidad de la central expresada en MW.

$GNA$  = Generación Neta Anual en MWh/MW

$$GNA = (1 - up) * FP * 8760 \quad (A.8)$$

donde:

$up$  = Usos propios (como fracción de la unidad).

$FP$  = Factor de planta (como fracción de la unidad).

8760 = Número de horas en un año.

El factor  $\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$  es conocido como “factor de recuperación del capital” y es denotado por el símbolo  $frc(i, n)$ . Por lo tanto, el primer término de la ecuación (A.7) puede escribirse como:

$$\frac{frc(i, n)}{(1+i)}$$

Por toro lado, la expresión puede tomar la forma siguiente:

$$\overline{CI} = \left[ \frac{1}{C} \right] \left[ \frac{1}{GNA} \right] \left[ \frac{frc(i, n)}{(1+i)} \right] \left[ \sum_{t=-N}^{-1} W_t(1+i)^{-t} \right] \quad (A.9)$$

donde:

$$I = \sum_{t=-N}^{-1} I_t$$

manera:

$$GNA = \frac{i(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n - 1} \sum_{t=0}^{n-1} GNA_t(1+i)^{-t}$$

y

$$W_t = \frac{I_t}{I}$$

$\frac{1}{C} = CU$  es el costo unitario de inversión por kW.

A los números  $W_t$  se le conoce como factores del perfil o cronograma de inversión y están expresados como fracción de la unidad.

La suma  $\sum_{t=-N}^{-1} W_t(1+i)^{-t}$  es denominada factor de valor presente, y se le denota  $fvp(i, \bar{\omega})$ .

La expresión (A.9) puede escribirse, entonces, de la siguiente manera:

$$\bar{CI} = CU \left[ \frac{1}{GNA} \right] \left[ \frac{frc(i, n)}{(1+i)} \right] [fvp(i, \bar{\omega})] \quad (\text{A.10})$$

La expresión (A.10) involucra el producto del costo unitario de inversión ( $CU$ ) por una expresión conocida como factor de costo nivelado.

# Apéndice B

## Programas

En este Apéndice hacemos referencia a las rutinas utilizadas para los cálculos respectivos. La mayoría de las rutinas han sido programadas para ser utilizadas en el software libre **R**.

### B.1. Funciones Básicas en R

A continuación se va a mencionar algunas de las funciones que ya vienen programadas en *R*, en las cuales nos hemos apoyado para ahorrarnos programación en las rutinas a utilizar.

Sea  $V$  un vector con  $k$  elementos numéricos, entonces podemos definir las siguientes funciones:

<code>n &lt;- length(V)</code>	Asigna a $n$ la longitud del vector $V$ , es decir, el número de elementos, $n = k$ .
<code>V[i]</code>	Es el elemento $i$ del vector $V$ , $i = 1, \dots, k$ .
<code>log(V)</code>	Devuelve el logaritmo de los elementos de $V$ .
<code>plot(V)</code>	Grafica los puntos del vector $V$ de manera puntual en el plano.
<code>plot(V,type='l')</code>	Grafica los puntos del vector $V$ unidos por una línea en el plano.

<code>acf(y,type''correlation'')</code>	Grafica los correlogramas de correlación de $V$ .
<code>acf(y,type''partial'')</code>	Grafica los correlogramas de correlación de forma parcial de $V$ .
<code>sum(V)</code>	Devuelve la suma de los elementos de $V$ .
<code>dnorm(V[i],mean = mu,sd = s)</code>	Calcula la función densidad del punto $V[i]$ , de una normal $N \sim (\mu = m, \sigma^2 = s^2)$ .
<code>pnorm(V[i],mean = mu,sd = s)</code>	Calcula la función probabilidad hasta el punto $V[i]$ , de una normal $N \sim (\mu = m, \sigma^2 = s^2)$ .
<code>seq(a,b,by=inc)</code>	Si $a, b$ son dos puntos en la línea real, esta función segmenta el intervalo $[a, b]$

## B.2. logt.R

Esta rutina calcula el incremento de los logaritmos de un vector  $\mathbf{Y}$  dado, tomando el logaritmo de la división de un valor  $Y[i] = y_i$  entre el valor  $Y[i-1] = y_{i-1}$ , con  $i = 1, \dots, n$ .

```
logt <- function(Y) {
  ene <- length(Y)-1
  e <- c(1:ene)
  for(i in {1:ene}) {
    e[i] <- log(Y[i+1] / Y[i])
  }
  #plot(e)
  #plot(e,type''l'')
  #acf(y,type''partial'')
  acf(y,type''correlation'')
  e
}
```

$Y$  es el vector compuesto por números reales positivos, de dimensión  $1 \times n$ .

Se calcula la longitud del vector  $Y$  y se le resta una unidad.

Se crea un nuevo vector de dimensión  $1 \times ene$ .

Ciclo *for* que deposita en la entrada  $i$  del vector  $e$ , los valores de la operación del logaritmo de la división de la entrada  $i + 1$  entre la entrada  $i$  del vector  $Y$ .

Regresa al vector  $e$ .

## B.3. Algoritmo EM

Este programa lo utilizaremos para el cálculo de los estimadores de máxima verosimilitud que se obtienen al hacer uso del algoritmo EM (ver capítulo 3), como ya se hizo mención en el capítulo 6, algunos resultados se han obtenido utilizando este programa.

La estructura del programa consiste en una rutina base, la cual pide los valores de entrada y a su vez llama a otras sub-rutinas para realizar los cálculos y una vez que se terminan las iteraciones pedidas, despliega los resultados.

Veamos las estructuras de las rutinas involucradas en el programa.

### B.3.1. mainP.R

```
mainP <- function( ){  
  source('C:/precios.R')  
  
  n <- length(LOGCRE)  
  thet0 <- c(m1,m2,s1,s2,pi)  
  
  niter <- 80  
  theta1 <- em(LOGCRE,thet0,niter)  
  print(theta1)  
}
```

Busca el archivo donde se encuentra el vector con la muestra de los datos, a los que se les va a calcular los estimadores de máxima verosimilitud.

Asigna a `n` el tamaño de la muestra.

Se proponen unos valores iniciales para los estimadores de máxima verosimilitud.

Número de iteraciones del Algoritmo EM.

Iteraciones de los pasos E y M.

### B.3.2. em.R

```

em <- function(datos,theta0,iter){

# theta(1) =mu1
# theta(2) = mu2
# theta(3) = (s1)2
# theta(4) = (s2)2
# theta(5) = pi
n <- length(datos)
for(i in {1:iter}){
ww1 <- makeweight1(datos,theta0)
ww2 <- makeweight2(datos,theta0)
para1 <- sum(ww1) para2 <- sum(ww2)

pi1 <- para1/n
mu1 <- sum( datos*ww1 )/para1
mu2 <- sum( datos*ww2)/para2
sq1 <- (datos-mu1){2}
sq2 <- (datos-mu2){2}
sig1sq <- sum( sq1*ww1 )/para1
sig2sq <- sum( sq2*ww2)/para2
theta0 <- c(mu1,mu2,sig1sq,sig2sq,pi1)
write(t(theta0),file='C:/iterations.txt'
,ncol=5,append=TRUE)
}
theta0
}

```

Rutina para la iteración de los pasos E y M.

Requiere una propuesta de los valores iniciales para los estimadores de máxima verosilitud, incluidos en `theta0`.

Inicia ciclo de repeticiones.

Se computan los NUEVOS estimadores.

Se obtiene una nueva theta.

Guarda las iteraciones en un archivo.

Termina el ciclo de repeticiones.

Regresa el vector con los estimadores.



### B.3.3. makeweight1.R

```

makeweight1 <- function(datos,theta){
# datos = vector de los datos observados,
# requeridos para la rutina pe.R
# theta(1) = mu1 theta(2) = mu2
# theta(3) = (s1)2 theta(4) = (s2)2
# theta(5) = pi
n <- length(datos)
w <- {1:n}
s1 <- sqrt(theta[3])
for(i in {1:n}){
w[i] <- (dnorm(datos[i],mean=theta[1],sd=s1)
          *theta[5])/pe(datos[i],theta)
}
w
}

```

Computa el peso definiendo los estimadores EM. Correspondientes a la **Familia 1**. **theta** es el vector dado con los parámetros propuestos.

Regresa el vector **w**

### B.3.4. makeweight2.R

```

makeweight2 <- function(datos,theta){
# datos = vector de los datos observados,
# requeridos para la rutina pe.R
# theta(1) = mu1 theta(2) = mu2
# theta(3) = (s1)2 theta(4) = (s2)2
# theta(5) = pi
n <- length(datos)
w <- {1:n}
pi2 <- 1-theta[5]
s2 <- sqrt(theta[4])
for(i in {1:n}){
w[i] <- (dnorm(datos[i],mean=theta[2],sd=s2)
          *pi2)/pe(datos[i],theta)
}
w
}

```

Computa es peso definiendo los estimadores EM. Correspondientes a la **Familia 2**. **theta** es el vector dado con los parámetros propuestos.

Regresa el vector **w**

### B.3.5. pe.R

```

pe <- function(t,theta){
# Evalua la mixtura de dos densidades normales
# theta(1) = mu1
# theta(2) = mu2
# theta(3) = (s1)^2
# theta(4) = (s2)^2
# theta(5) = pi
pi2 <- 1-theta[5]
s1 <- sqrt(theta[3])
s2 <- sqrt(theta[4])
theta[5]*dnorm(t,mean=theta[1],sd=sig1)
+pi2*dnorm(t,mean=theta[2],sd=sig2)
}

```

### B.4. plotmix.R

Esta rutina se utiliza para ver la gráfica de la mezcla de dos normales, con  $N_1 \sim (\mu_1 = m1, \sigma_1^2 = s1^2)$  y  $N_2 \sim (\mu_2 = m2, \sigma_2^2 = s2^2)$ , es decir, realiza la gráfica de  $N = N_1 + N_2$ .

```

plotmix <- function(m1,m2,s1,s2,pi,inc){

```

La función pide los valores de la media, la desviación estándar y el peso de las respectivas funciones Normales, además de nivel de segmentación del intervalo de donde se pide la mezcla.

```

x <- seq(-.15,.15,by=inc)
efe <- pi*dnorm(x,mean=m1,sd=s1)
+ (1-pi)*dnorm(x,mean=m2,sd=s2)

plot(x,efe,type='l')
}

```

Evalúa los valores dados en la mezcla Normal.

## B.5. MetNewNorm.R

Esta rutina utiliza el método de Newton (dicho método es utilizado para encontrar las raíces de una función continua y derivable, es decir, el valor o valores en donde la función se hace cero), en el caso particular en esta función el método es empleado encontrar el valor en la recta real, donde la función de probabilidad, de la mezcla de dos Normales con parámetros dados, es igual a cierta probabilidad.

```
MetNewNorm <- function(L,m1,s1,m2,s2,pi,prob,err){

f <-function(L,m1,s1,m2,s2,pi,prob){

fun = (pnorm(L,m1,s1)*pi+pnorm(L,m2,s2)*(1-pi)-prob)
}
  fa=f(L,m1,s1,m2,s2,pi,prob)
  while ( abs(fa) > err){
    m = dnorm(L,m1,s1) + dnorm(L,m1,s1)

    L=L-(fa/m)
    fa=f(L,m1,s1,m2,s2,pi,prob)
  }
  y=L
}
```

La función pide como datos de entrada, un valor  $L$  propuesto como raíz, los parámetros y el peso de cada Normal, la probabilidad que requiere desde  $-\infty$  hasta el valor buscado, y el nivel de error. Crea la función de probabilidad de la mezcla de las Normales.

$m$  es la pendiente en el punto  $L$ .

# Apéndice C

## Glosario de Términos Técnicos y Definiciones

En esta sección se presentan las definiciones de algunos términos tanto utilizados en el COPAR de generación como de uso común. Se ha tomado el glosario que se encuentra en el documento “COPAR de Generación 2006” como base para las definiciones.

### *Términos económicos-financieros*

**Costo de Construcción:** Suma de todos los costos, directos o indirectos, inherentes a la transformación de un diseño o plan en una instalación lista para operación.

**Costo nivelado de energía:** Se calcula dividiendo el valor presente de los egresos que ocasionan el diseño y la construcción de una central generadora, más los costos de su operación durante su vida útil, entre la energía que aportará la planta en dicho periodo

**Costos de operación y mantenimiento:** Costos directos e indirectos de mano de obra, administrativos, refacciones y equipo asociados con la operación y mantenimiento de centrales generadoras. Este concepto no incluye los costos de combustible.

**Costos directos de capital:** Costos de los materiales y mano de obra involucrados en la fabricación, montaje y edificación de una instalación, para una central generadora; se incluyen los del equipo y de su instalación en sitio.

**Costos fijos de operación y mantenimiento:** Costos independientes de las variaciones de la producción del sistema bajo consideración. Se incluye en ellos: mano de obra,

mantenimiento, servicio técnico, laboratorio, impuestos y seguros, reparaciones y administración.

**Costos indirectos de construcción:** Costos asociados con la construcción pero no directamente relacionados con la fabricación, montaje y edificación de instalaciones. Incluyen los de los servicios de construcción (instalaciones temporales en sitio, herramientas, combustibles, permisos, etc.), administración del proyecto y servicios de ingeniería en oficinas y campo.

**Costos variables de operación y mantenimiento:** Costos de materias primas y del proceso, que varían con el volumen de producción de la central.

**Moneda constante:** Unidades monetarias con valor de compra constante, el cual corresponde a una fecha de referencia.

**Tasa de descuento:** Tasa de interés que refleja el valor del dinero en el tiempo y que se utiliza para convertir costos y beneficios que ocurren en tiempos diferentes a valores equivalentes asociados a un tiempo común. Teóricamente, refleja el costo de oportunidad del dinero para un inversionista en particular (o en términos más amplios, para un país específico).

**Tipo de cambio:** Relación existente entre la moneda de un país y el peso mexicano en una fecha determinada.

**Vida de una instalación:**

- Económica. Periodo después del cual una máquina o instalación debe ser desmantelada o reemplazada debido a sus costos excesivos o baja rentabilidad,
- Física. Periodo después del cual una máquina ya no puede ser reparada para desarrollar su función adecuadamente,
- En servicio. Periodo en que una instalación desarrolla satisfactoriamente su función, sin reparaciones.

**Vida útil:** Periodo para el cual ha sido diseñado cualquier equipo o instalación a fin de que su operación sea eficiente.

**Volatilidad:** Para un instrumento financiero cuyo retorno sigue un proceso aleatorio gaussiano, la volatilidad se incrementa según la raíz cuadrada del tiempo conforme aumenta el tiempo. Conceptualmente, esto se debe a que existe una probabilidad creciente de

---

que el precio del instrumento esté más alejado del precio inicial conforme el tiempo aumenta.<sup>1</sup>

### *Términos técnicos*

**Balance térmico:** Estudio de equilibrio térmico entre energía calorífica recibida y entregada.

**BTU:** Es una medida para la energía, que significa *British thermal unit* (unidad calorífica termal inglesa). Se define como la cantidad de energía en forma de calor para aumentar la temperatura de una libra de agua a un grado Fahrenheit al nivel del mar. La equivalencia  $1 \text{ BTU} \approx 1,000 \text{ joules}$ .<sup>2</sup>

**Capacidad:** Medida de la aptitud para generar potencia eléctrica generalmente expresada en MegaWatts o kiloWatts. El término capacidad puede referirse a la potencia suministrada por un solo generador, una central, un sistema local o uno interconectado.

**Capacidad base:** Capacidad de generación que se opera para satisfacer la carga base.

**Capacidad bruta:** Corresponde a la potencia medida en las terminales del generador y por lo tanto incluye aquella para los auxiliares y las pérdidas en los transformadores que se consideran parte integral de la central.

**Capacidad de generación:** Máxima carga que un sistema de generación puede alimentar, bajo condiciones establecidas, por un periodo de tiempo dado.

**Capacidad de placa:** Potencia eléctrica definida por el fabricante para la unidad generadora, cuando ésta opera bajo las condiciones de diseño.

**Capacidad instalada:** Potencia nominal o de placa de una unidad generadora.

**Capacidad neta:** Capacidad de una unidad generadora medida en las terminales del generador menos la potencia requerida por los equipos auxiliares (motores, motobombas y otros equipos esenciales para operar la unidad) y las pérdidas en los transformadores.

**Central generadora:** Lugar y conjunto de instalaciones, incluida las obras de ingeniería civil y edificaciones necesarias, directa o indirectamente utilizadas para la producción de energía eléctrica.

**Combustóleo:** Mezcla de hidrocarburos utilizada para la combustión, producto final de la refinación del petróleo.

---

<sup>1</sup>Definición de es.wikipedia.org

**Consumo (gasto):** Cantidad de una sustancia en movimiento, medida en función del tiempo.

**Consumo de energía:** Energía eléctrica utilizada por toda o por una parte de una instalación de utilización durante un periodo determinado.

**Consumo específico de combustible:** Cantidad de combustible necesario para generar un kWh de energía eléctrica.

**Eficiencia térmica:** Proporción de energía calorífica utilizada que se convierte en trabajo útil.

**Energía necesaria bruta:** Energía que se requiere para satisfacer la demanda de un sistema eléctrico, incluyendo los usos propios de la central.

**Energía necesaria neta:** Energía necesaria bruta menos la de los usos propios de la central.

**Factor de capacidad:** Relación de la carga promedio de una unidad por un periodo de tiempo determinado, y la potencia de la unidad o equipo.

**Factor de planta:** Conocido también como factor de utilización de una central, es la relación entre la energía eléctrica producida por un generador o conjunto de ellos, durante un intervalo de tiempo determinado y la energía que habría sido producida si este generador o conjunto de ellos hubiese funcionado durante ese intervalo de tiempo, a su potencia máxima posible en servicio. Se expresa generalmente en porcentaje.

**Gasoducto:** Tubería usada para transportar gas.

**Generación bruta:** Cantidad total de energía eléctrica producida por las unidades generadoras en una o varias centrales.

**Generación de energía eléctrica:** Producción de electricidad por el consumo de alguna otra forma de energía.

**Generación neta:** Es la generación bruta menos la energía consumida para los usos propios de la central.

**Hidrocarburo:** Compuesto químico, combinación principalmente de hidrógeno y carbono.

**Joule (J):** Es una medida de energía y se define como la cantidad de energía (trabajo) necesario para elevar 102 gramos a una altura de un metro.<sup>2</sup>

**Poder calorífico de un combustible:** Contenido de energía. Se expresa en Joules, kilocalorías o BTU por unidad de masa o volumen.

**Potencia eléctrica:** Tasa de producción, transmisión o utilización de energía eléctrica, generalmente expresada en Watts.

**Potencia instalada:** Suma de potencias nominales de máquinas de la misma clase en una instalación eléctrica.

**Potencia real instalada:** Capacidad efectiva.

**Régimen térmico:** Es la relación entre la energía suministrada al ciclo termodinámico de la unidad en kcal/h, BTU/h, kJ/h, dado el consumo de combustible, con respecto a la energía que se obtiene a la salida del generador eléctrico en kW.

**Turbina:** Motor primario accionado por vapor, gas o agua, que convierte en movimiento giratorio la energía cinética del medio.

**Usos propios:** Es la energía eléctrica recibida y autoabastecida consumida por los equipos auxiliares de las centrales.

**Watt-hora ( $Wh$ ):** Es una unidad que se emplea muy a menudo para medir la energía eléctrica. Una energía de 1  $Wh$  corresponde al trabajo de una máquina que desarrolle una potencia de 1  $W$  durante una hora. En el presente trabajo se ha estado utilizando un múltiplo de esta unidad siendo el MegaWatt-hora ( $MWh$ ), que corresponde a  $10^6Wh$ .<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Definición de normateca.energia.gob.mx





# Bibliografía

- [1] A. Cuevas, Técnica para la evaluación del costo unitario nivelado de generación con un enfoque estocástico, no publicado.
- [2] M.E. Caballero, V.M. Rivero, G. Uribe, C. Velarde. Cadenas de Markov. Sociedad Matemática Mexicana. 2004.
- [3] G. Carrasco. Notas de clase del curso de Probabilidad 2. Facultad de Ciencias, UNAM. 2004.
- [4] G. Eslava. Notas de clase del curso de Estadística 1. Facultad de Ciencias, UNAM. 2005.
- [5] L. Rincón. Curso intermedio de probabilidad. Facultad de Ciencias, UNAM. 2007.
- [6] Compbell, Lo , Macklinlay. The Econometrics of Financial Markets. Pricenton University Press. 1997.
- [7] Puterman Matin L. Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming. 1994.
- [8] D. Stirzaker. Stochastic Processes & Models. Oxford Univerity Press. 2005.
- [9] Costos y parámetros de referencia para la formulación de proyectos de inversión en el sector eléctrico. Generación 2006. 26.<sup>a</sup> Edición, CFE, 2006.
- [10] Prospectiva del Mercado de Gas Natural 2007-2016, SENER. 2007.
- [11] Metodología net back, CRE. 1995.
- [12] Memoria de Labores 2005, PEMEX. 2006.
- [13] Memoria de Labores 2006, PEMEX. 2007.

- [14] William. W. S. Wei. Times Series Analysis Univariate and Mathematics Methods 1990, Addison - Wesley Publishing Company
- [15] M. Chong. Una Aplicación del algoritmo EM para un problema de datos censurados con identificación parcial. Tesis, Facultad de Ciencias, UNAM. 2006.