Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

# ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS DE MRÓWKA

# T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

Noriko Georgina Amano Patiño

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Ángel Tamariz Mascarúa

2009

1. **Datos del alumno**
   Noriko Amano Patiño
   55 36 97 88 90
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   302501856
   norikoamano@gmail.com

2. **Datos del Tutor**
   Dr. Ángel Tamariz Mascarúa

3. **Datos del Sinodal 1**
   Dr. Fernando Hernández Hernández

4. **Datos del Sinodal 2**
   Dr. Javier Páez Cárdenas

5. **Datos del Sinodal 3**
   M. en C. Rodrigo Jesús Hernández Gutiérrez

6. **Datos del sinodal 4**
   Dr. Fidel Casarrubias Segura

A mis primeros maestros de matemáticas: mis padres
A quien siempre ha creído en mí: mi hermana

# Índice general

# Índice alfabético

# Introducción

Los espacios numerablemente compactos (aquellos en que toda cubierta abierta numerable tiene una subcubierta finita) fueron introducidos por Fréchet en 1906. Más tarde, en 1948, Hewitt definió los espacios pseudocompactos (espacios en los que cualquier función continua y realvaluada es acotada). Todo espacio numerablemente compacto es pseudocompacto.

El recíproco del enunciado anterior no es cierto. En 1954, en un artículo titulado *On completely regular spaces* ([M1]), Mrówka construye un tipo de espacios topológicos que son pseudocompactos y no numerablemente compactos. A este tipo de espacios se les conoce como espacios de Mrówka, espacios de Mrówka-Isbell, espacios de Isbell o $\psi$-espacios. La diversidad de nombres se debe a que no se tiene certeza de la autoría de dichos espacios. De acuerdo con el libro *Rings of continuous functions* escrito por L. Gillman y M. Jerison ([GJ]), estos espacios fueron comunicados por Isbell a los autores antes de que el artículo de Mrówka fuera publicado.

A 55 años del primer registro que se tiene de los espacios de Mrówka, se siguen estudiando sus características debido a lo poco convencionales que resultan gran parte de ellas. El propósito de este trabajo es dar a conocer de manera clara y sencilla estos espacios y algunas de sus propiedades topológicas.

El presente trabajo consta de cinco capítulos y dos apéndices, de los cuales, el primer capítulo consiste de conceptos y resultados de topología general que se usan en los subsecuentes capítulos, y los siguientes cuatro conforman el cuerpo de la tesis. Los apéndices, el primero de teoría de conjuntos y el segundo de topología, contienen definiciones y resultados básicos que se usan a lo largo de este trabajo y tienen como propósito facilitar la lectura del mismo. En el segundo capítulo se definen las familias casi ajenas, cuyo papel en los espacios de Mrówka es fundamental, y se habla muy brevemente del axioma de Martin para ver sus consecuencias respecto a las familias casi ajenas maximales. En el tercer capítulo se definen los $\psi$-espacios, se dan propiedades básicas de ellos y posteriormente, se prueba que son espacios de Moore y se da un teorema que caracteriza los espacios de Mrówka (véase el Teorema 3.3.15). En el capítulo cuatro, se prueba que el espacio de Niemytzki es un espacio de Mrówka y se prueba que el espacio de Niemytzki es $\mathbb{N}$-compacto. En el quinto capítulo, se dan varios resultados necesarios para probar que, por un lado, existe un espacio de Mrówka cuyo residuo en su compactación de Stone-$\check{C}$ech tiene al menos $2^{\aleph_0}$ puntos, y por otro, que existe un espacio de Mrówka cuyo residuo en su compactación de Stone-$\check{C}$ech es un punto.

Las demostraciones del capítulo cuatro fueron desarrolladas por la autora. En particular, el Teorema que caracteriza a los $\psi$-espacios (véase el Teorema 3.3.15), cuyo enunciado y demostración no aparecen en la bibliografía fueron (guiados por el Dr. Ángel Tamariz Mascarúa y) realizados por la misma.

Este trabajo no hubiera sido posible sin el apoyo brindado por parte de mi director de tesis, mis sinodales, mis profesores de Topología y Teoría de Conjuntos a lo largo de la carrera, mis amigos (tanto de la facultad como fuera de ella), en particular Alfonso Ruiz Camargo, y sobre todo mi familia. Manifiesto mi más sincero agradecimiento a los mencionados puesto que cada uno, a su manera, colaboró en la realización de este trabajo.

# Capítulo 1

# Compactaciones y espacios 0-dimensionales

En este capítulo se definen algunas funciones cardinales topológicas cuyos valores para los espacios de Mrówka se calcularán en el capítulo 3. Se introducen los conceptos *conjunto nulo*, *filtro* y *espacios 0-dimensionales*, y se analizan algunas de sus propiedades básicas que posteriormente resultarán útiles.

Por otra parte, se define el espacio topológico conocido como *la línea de Sorgenfrey* y se ven algunas de sus características que serán utilizadas más adelante.

Se dan un par de construcciones de la compactación de Stone-Čech y estudian brevemente los *espacios* $\mathbb{N}$-*compactos*.

## 1.1. Funciones cardinales topológicas

Una *función cardinal topológica* es una función $\phi$ que a cada espacio topológico $X$ le asigna un número cardinal $\phi(X) \geqslant \aleph_0$ tal que $\phi(X) = \phi(Y)$ para cualquier par de espacios homeomorfos $X$ y $Y$. Este tipo de funciones son también conocidas como *invariantes cardinales*. Las funciones cardinales topológicas son generalmente utilizadas como herramienta para describir propiedades topológicas.

La invariante cardinal más frecuentemente utilizada es aquella que a cada espacio topológico le asocia su cardinalidad.

Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Las siguientes funciones cardinales (junto con la cardinalidad de un espacio topológico antes mencionada) surgieron en la primera etapa de desarrollo de la topología general.

El *peso de* $X$, que se denota como $w(X)$, es el mínimo número cardinal $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, tal que $\mathfrak{m} = |\mathcal{B}|$ y $\mathcal{B}$ es base para $\tau$.

**Observación 1.1.1.** Un espacio $X$ es segundo numerable si y sólo si $w(X) = \aleph_0$.

Una familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos abiertos no vacíos de $X$ es *celular* si cualesquiera dos elementos distintos $A$ y $B$ de $\mathcal{C}$ tienen intersección vacía.

La *celularidad* o *número de Souslin de* $X$, que denotamos por $c(X)$, es igual a $\sup\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C}$ es una familia celular en $X\} + \aleph_0$.

La *densidad de* $X$, denotada por $d(X)$, es el mínimo número cardinal $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ tal que $\mathfrak{m} = |D|$ y $D$ es un subconjunto denso de $X$.

**Observación 1.1.2.** Un espacio $X$ es separable si y sólo si $d(X) = \aleph_0$.

**Lema 1.1.3.** *Todo espacio separable tiene celularidad numerable.*

**Demostración.** Sea $X$ un espacio separable y sea $N$ un subespacio denso numerable de $X$. Consideremos una familia celular $\mathcal{C}$. Como cada elemento de $\mathcal{C}$ es abierto, cada $C \in \mathcal{C}$ interseca al menos un conjunto unitario de $N$. De esta manera, de ocurrir que $|\mathcal{C}| > \aleph_0$, existiría un elemento de $N$ que pertenece a más de un elemento de $\mathcal{C}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $c(X) = \aleph_0$. $\square$

El *grado* o *número de Lindelöf de* $X$, $L(X)$, es el menor cardinal infinito $\kappa$ tal que toda cubierta abierta tiene una subcubierta de cardinalidad a lo más $\kappa$.

**Observación 1.1.4.** Un espacio $X$ es Lindelöf si y sólo si $L(X) = \aleph_0$.

Estas simples nociones se hicieron rápidamente importantes al introducirse en la resolución y demostración de ciertos problemas. Por ejemplo, un problema fundamental en topología es determinar si un espacio topológico dado es o no metrizable, un resultado clásico al respecto es el Lema de metrización de Urysohn (véase Teorema B.3.4) que afirma que todo espacio regular de peso numerable es metrizable. Además recordemos que los números cardinales están bien ordenados por la relación $\in$, de manera que por la naturaleza de las funciones cardinales, surgieron preguntas relacionadas con la comparación de magnitudes de invariantes cardinales. Gran parte de la investigación en cuanto a invariantes cardinales fue estimulada por el problema de estimar la cardinalidad de un espacio compacto, Hausdorff y primero numerable, problema que permaneció abierto de 1923 a 1969.

Dado $x \in X$, se llama *carácter de $x$ en $X$* al número $\min\{|\mathcal{B}(x)| : \mathcal{B}(x)$ es una base local de $x$ en $X\} + \aleph_0$, y lo denotamos por $\chi(x, X)$. Y definimos el *carácter de $X$* como $\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\}$.

**Observación 1.1.5.** El espacio $X$ es primero numerable si y sólo si $\chi(X) = \aleph_0$.

En 1969, Arkhangel'skii probó que para todo espacio Hausdorff $X$, $|X| \leqslant 2^{L(X)\cdot\chi(X)}$ (véase [Ar1], [Ar2]).

El cálculo de funciones cardinales toma lugar en practicamente todas las ramas de la topología general por la naturaleza conjuntista de esta. A continuación definimos varias funciones cardinales más que usaremos posteriormente para estudiar algunas propiedades de los espacios de Mrówka.

Decimos que una colección $\mathcal{R}$ de subconjuntos de $X$ es una *red*, si cada subconjunto abierto no vacío de $X$ es la unión de elementos de alguna subcolección de $\mathcal{R}$.

El *peso de red* de $X$, que usualmente se denota por $nw(X)$, es el menor cardinal $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ tal que $X$ tiene una red de cardinalidad $\mathfrak{m}$.

Si $X$ es $T_1$ y $x \in X$, decimos que una colección $\mathcal{V}_x$ de vecindades de $x$ es una *pseudobase de $x$* si $\{x\} = \bigcap \mathcal{V}_x$.

El *pseudocarácter de $X$ en el punto $x$*, denotado $\Psi(x, X)$, es el número $\min\{|\mathcal{V}_x| : \mathcal{V}_x$ es una pseudobase de $x\} + \aleph_0$.

El *pseudocarácter de $X$* está dado por $\Psi(X) = \sup_{x\in X} \Psi(x, X)$.

La *amplitud de $X$*, denotada $s(X)$ por su nombre en inglés (spread), se define como el número cardinal $s(X) = \sup\{|D| : D \subseteq X$ y $D$ es discreto$\} + \aleph_0$.

La *extensión de $X$*, está dada por $e(X) = \sup\{|D| : D \subseteq X$ y $D$ es discreto y cerrado$\} + \aleph_0$

La *densidad hereditaria de $X$*, que denotaremos $hd(X)$, es el número $\sup\{d(Y) : Y \subseteq X\} + \aleph_0$.

La demostración de la siguiente proposición puede consultarse en [E, teo.3.8.12, p.193].

**Proposición 1.1.6.** *Para todo espacio topológico $X$, $L(X) \leqslant nw(X)$.*

El *grado* o *número hereditario de Lindelöf de $X$*, denotado $hL(X)$, es el supremo de los cardinales $L(Y)$, con $Y$ un subespacio de $X$.

Sean $A$ un subconjunto de $X$ y $\kappa$ un número cardinal; la $\kappa$-cerradura de $A$ es el conjunto $[A]_\kappa = \bigcup\{cl_X(B) : B \subseteq A$ y $|B| \leqslant \kappa\}$.

Definimos la *estrechez de $X$* como $t(X) = \min\{\kappa \geqslant \aleph_0 : [A]_\kappa = cl_X A$ para toda $A \subseteq X\}$.

**Lema 1.1.7.** *$t(X) \leqslant \chi(X)$ para todo espacio topológico $X$.*

**Demostración.** Sean $A \subseteq X$, $x \in cl_X(A)$ y $\mathcal{W}(x)$ base local de $x$ de cardinalidad $\chi(X)$. Elijamos un punto de $A$ en cada uno de los elementos de $\mathcal{W}(x)$ y llamemos a esta colección de puntos $B$. Entonces $B \subseteq A$, $|B| = |\mathcal{W}(x)| = \chi(X)$ y toda vecindad de $x$ interseca a $B$, es decir, $x \in \bigcup\{cl_X(B) : B \subseteq A$ y $|B| \leqslant \chi(X)\} = [A]_{\chi(X)}$. De esta manera, $cl_X(A) = [A]_{\chi(X)}$ y por tanto $t(X) \leqslant \chi(X)$. □

## 1.2. Conjuntos nulos y conulos

**Definición 1.2.1.** Dado un espacio topológico $X$, decimos que $A \subseteq X$ es un *conjunto nulo* (o *conjunto cero*) de $X$, si existe una función $f \in C(X)$ (es decir una función continua $f : X \to \mathbb{R}$) tal que $A = f^{-1}[\{0\}]$. En este caso, denotamos a $A$ por $Z(f)$, i.e. $Z(f) = f^{-1}[\{0\}]$. Por otra parte, decimos que un subconjunto $B$ de $X$ es un *conjunto conulo* si es el complemento de algún conjunto nulo de $X$.

**Lema 1.2.2.** *Todo conjunto nulo en un espacio $X$ es cerrado en $X$ y todo conjunto conulo de un espacio $X$ es abierto en $X$.*

**Demostración.** Consideremos $N = Z(f)$, para alguna $f \in C(X)$, un conjunto nulo de $X$. Como $\{0\}$ es cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_e)$ (donde $\tau_e$ denota la topología usual de $\mathbb{R}$), es cerrado en $X$. Por otra parte, dado $C \subseteq X$ un conjunto conulo, existe un conjunto nulo $Z \subseteq X$, tal que $C = X \backslash Z$, y por tanto $C$ es abierto. □

**Lema 1.2.3.** *La unión y la intersección de dos conjuntos nulos (respectivamente conulos) son nulos (respectivamente conulos).*

**Demostración.** Sean $Z_1, Z_2 \subseteq X$ un par de conjuntos nulos, digamos $Z_1 = Z(f)$ y $Z_2 = Z(g)$.

Entonces, si definimos $h : X \to \mathbb{R}$ como $h = f \cdot g$, tenemos que $h$ es una función continua y dada $x \in Z_1 \cup Z_2$, $h(x) = 0$. Además, dada $x \in h^{-1}[\{0\}]$ se tiene que $0 = h(x) = f(x) \cdot g(x)$, de modo que $x \in Z_1$ o $x \in Z_2$. Por lo tanto, $Z_1 \cup Z_2 = Z(h)$.

Por otra parte, si definimos $h' : X \to \mathbb{R}$ como $h' = |f| + |g|$, entonces $h'$ es una función continua. Si $x \in Z_1 \cap Z_2$, $h(x) = 0$ y dada $x \in h^{-1}[\{0\}]$, se tiene que $0 = h(x) = |f(x)| + |g(x)|$, de manera que $f(x) = 0 = g(x)$ y así $h^{-1}[\{0\}] \subseteq Z_1 \cap Z_2$.

Con lo anterior, probado que la unión e intersección de un par de conjuntos nulos, son nulos.

Consideremos ahora $C_1, C_2 \subseteq X$ un par de conjuntos conulos y sean $Z_1, Z_2 \in X$ los nulos tales que $C_i = X \backslash Z_i$, con $i = 1, 2$. Entonces como $Z_1 \cap Z_2$ es nulo, $(X \backslash Z_1) \cup (X \backslash Z_2) = C_1 \cup C_2$ es conulo, y similarmente, como $Z_1 \cup Z_2$ es nulo, $C_1 \cap C_2$ es conulo. Esto concluye la prueba. □

**Lema 1.2.4.** *Si $\{A_n\}_{n\in\omega}$ es una familia de conjuntos nulos de un espacio topológico $X$, entonces $\bigcap_{n\in\omega} A_n$ es un conjunto nulo.*

**Demostración.** Supongamos que para cada $n \in \omega$, $A_n = f_n^{-1}[\{0\}]$. Definimos $g_n : X \to \mathbb{R}$ como $g_n = \text{mín}\{|f_n|, \frac{1}{2^n}\}$ para cada $n \in \omega$, y aseguramos que $g_n^{-1}[\{0\}] = A_n$. En efecto, sea $x \in g_n^{-1}[\{0\}]$. Entonces $0 = g_n(x) = \text{mín}\{|f_n|, \frac{1}{2^n}\}$

y por tanto $|f_n(x)| = 0$, que implica que $x \in f_n^{-1}[\{0\}]$. Por otra parte, dada $x \in A_n$, se tiene que

$$0 = f_n(x) = |f_n(x)| = \text{mín}\{|f_n(x)|, \frac{1}{2^n}\} = g_n(x).$$

Sea entonces $h : X \to \mathbb{R}$ dada por $h = \sum_{n\in\omega} g_n$. Observemos que $|g_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$. De manera que como $\{\frac{1}{2^n}\}_{n\in\omega}$ converge a 0, entonces $\sum_{n\in\omega} |g_n|$ converge y así, (de la Prueba $M$ de Weierstrass, véase [S; teo.4, p. 693]) $\sum_{n\in\omega} g_n$ converge uniformemente. Esto es, $h$ es una función continua (véase [S; cor. de teo.3, p.692]).

Consideremos ahora $x \in X$ tal que $h(x) = 0$. Entonces $\sum_{n\in\omega} g_n(x) = 0$ y así $g_n(x) = 0$ para toda $n \in \omega$, es decir, $x \in \bigcap_{n\in\omega} A_n$. Por otra parte, dada $x \in \bigcap_{n\in\omega} A_n$, se tiene que $g_n(x) = 0$ para toda $n \in \omega$ y por tanto $x \in h^{-1}[\{0\}]$. Por lo tanto, $\bigcap_{n\in\omega} A_n$ es un conjunto nulo, a saber, $\bigcap_{n\in\omega} A_n = h^{-1}[\{0\}]$. $\square$

**Proposición 1.2.5.** *Si $(X, \tau)$ es un espacio Tychonoff, entonces la familia de conulos es base para $X$.*

**Demostración.** Sea $A \in \tau$ y sea $x \in A$. Entonces $X\backslash A$ es un cerrado en $X$ tal que $x \notin X\backslash A$, y así, por ser $X$ un espacio Tychonoff, existe $f \in C(X, [0, 1])$ tal que $f[X\backslash A] \subseteq \{1\}$ y $f(x) = 0$. Sea $g : X \to [0, 1]$ dada por $g(x) = 1 - f(x)$. Entonces $g$ es continua y tal que $g[X\backslash A] \subseteq \{0\}$ y $g(x) = 1$, de manera que $X\backslash A \subseteq g^{-1}[\{0\}]$ y $x \notin g^{-1}[\{0\}]$. Por lo tanto, $X\backslash g^{-1}[\{0\}]$ es un conulo tal que $x \in X\backslash g^{-1}[\{0\}] \subseteq A$. $\square$

Probaremos que todo espacio Tychonoff de peso $m$ es encajable en el espacio producto $[0, 1]^m$. Para ello, enunciamos los siguientes conceptos y resultados.

A continuación, un par de resultados respecto a $w(X)$.

**Proposición 1.2.6.** *Si $w(X) \leqslant m$, entonces para toda familia $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos abiertos de $X$, existe un conjunto $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ tal que $|\Lambda_0| \leqslant m$ y $\bigcup_{\lambda\in\Lambda_0} U_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$.*

**Demostración.** Sea $\mathcal{B}$ una base de $X$ tal que $|\mathcal{B}| \leqslant m$ y denotemos por $\mathcal{B}_0$ a la colección de todos los $U \in \mathcal{B}$ tales que para alguna $\lambda \in \Lambda$, se tiene que $U \subseteq U_\lambda$. Para cada $U \in \mathcal{B}_0$ elegimos un $\lambda(U) \in \Lambda$ tal que $U \subseteq U_{\lambda(U)}$. De esta manera, queda definida una función $\lambda$ de $\mathcal{B}_0$ en $\Lambda$; resta probar que el conjunto $\Lambda_0 = \lambda[\mathcal{B}_0] \subseteq \Lambda$ satisface la proposición.

Observemos primero que

$$|\Lambda_0| = |\lambda[\mathcal{B}_0]| \leqslant |\mathcal{B}| \leqslant m.$$

Consideramos ahora un punto $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Entonces existe un $\lambda \in \Lambda$ tal que $x \in U_\lambda$ y un $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq U_\lambda$; claramente $U \in \mathcal{B}_0$ y $\lambda(U) \in \Lambda_0$. Así, de la contención $U \subseteq U_{\lambda(U)}$, se tiene que $x \in U \subseteq U_{\lambda(U)} \subseteq \cup_{\lambda\in\Lambda_0} U_\lambda$, de manera que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda_0} U_\lambda$. La otra contención es clara.

**Teorema 1.2.7.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $w(X) \leqslant m$, entonces para cada base $\mathcal{B}$ de $X$, existe una base $\mathcal{B}_0$ de $X$ tal que $|B_0| \leqslant m$ y $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ .*

**Demostración.** Tenemos que $m \geqslant \aleph_0$ y elegimos $\mathcal{B}_1 = \{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una base para $X$ tal que $\Lambda \leqslant m$. Sea $\mathcal{B} = \{U_\upsilon\}_{\upsilon\in\Upsilon}$ y para cada $\lambda \in \Lambda$, sea $\Upsilon(\lambda) = \{\upsilon \in \Upsilon : U_\upsilon \subseteq W_\lambda\}$. Como $\mathcal{B}$ es una base para $X$, tenemos que $\bigcup_{\upsilon\in\Upsilon(\lambda)} U_\upsilon = W_\lambda$ y de la Proposición 1.2.6, exite un conjunto $\Upsilon_0(\lambda) \subseteq \Upsilon(\lambda)$ tal que $|\Upsilon_0(\lambda)| \leqslant m$ y $W_\lambda = \bigcup_{\upsilon\in\Upsilon(\lambda)} U_\upsilon = \bigcup_{\upsilon\in\Upsilon_0(\lambda)} U_\upsilon$.

Sea $\mathcal{B}_0 = \{U_\upsilon\}_{\upsilon\in\Upsilon_0(\lambda),\lambda\in\Lambda}$. Como $|\Lambda| \leqslant m$, entonces se tiene que, como $m^2 = m$ y $|\Upsilon_0(\lambda)| \leqslant m$, $|\mathcal{B}_0| \leqslant m$.

Resta probar que $\mathcal{B}_0$ es base. Para ello, consideremos un punto arbitrario $x \in X$ y una vecindad de $x$, digamos $V$. Como $\mathcal{B}_1$ es base, tenemos que para alguna $\lambda \in \Lambda$, $x \in W_\lambda = \bigcup_{\upsilon\in\Upsilon_0(\lambda)} U_\upsilon \subseteq V$, y así, existe $\upsilon \in \Upsilon_0(\lambda)$ tal que $x \in U_\upsilon \subseteq W_\lambda \subseteq V$. Además, por como definimos $\mathcal{B}_0$, se tiene que $U_\upsilon \in \mathcal{B}_0$, lo que prueba que $\mathcal{B}_0$ es base para $X$. □

**Teorema 1.2.8.** *Todo espacio Tychonoff de peso $m \geqslant \aleph_0$ es encajable en el espacio producto $[0,1]^m$.*

**Demostración.** Sea $X$ un espacio Tychonoff. Entonces la familia de conulos es base para $X$. Así, tenemos que del Teorema 1.2.7, existe una base $\{U_s\}_{s\in S}$ para el espacio $X$, formada por conulos y tal que $|S| = m$. Para cada $s \in S$, sea $U_s = X\backslash Z(f_s)$ y sea $\mathcal{F} = \{f_s : s \in S\}$. Entonces la familia $\mathcal{F}$ es tal que para cada cerrado $F \subseteq X$ y cada $x \in X\backslash F$, existe $f_s \in \mathcal{F}$ tal que $f_s(x) \notin f_s[F]$. Como $X$ es $T_0$, entonces por el Teorema de la diagonal (véase B.1.28), se sigue que la diagonal $\Delta_{s\in S} f_s$ es encaje de $X$ en $[0,1]^m$. □

Del teorema anterior y el Teorema de Tychonoff de la inmersión se desprende el siguiente resultado ([E, teo.3.2.5, p. 139]).

**Teorema 1.2.9.** *Todo espacio compacto $T_2$ de peso $m \geqslant \aleph_0$, es homeomorfo a un subespacio cerrado del cubo de Tychonoff $[0,1]^m$.*

Combinando la Proposición B.2.4 y el Teorema 1.2.9, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 1.2.10.** *Un espacio topológico es Tychonoff si y sólo si es encajable en un espacio compacto $T_2$.*

## 1.3. Compactaciones

A continuación, trataremos varios conceptos relacionados con compactaciones. En esta sección, *espacio topológico* significará *espacio topológico $T_2$*

**Definición 1.3.1.** Sea $X$ un espacio topológico. Una pareja $(Y, c)$, donde $Y$ es un espacio compacto y $c : X \to Y$ es un encaje de $X$ en $Y$ tal que $cl(c[X]) = Y$, es llamada *compactación del espacio* $X$.

**Observación 1.3.2.** Si un espacio $X$ es encajable en un espacio compacto $Y$, i.e., si existe un homeomorfismo $f : X \to M$ con $M = f[X]$ un subconjunto de $Y$, entonces claramente la pareja $(cl(f[X]), i \circ f)$, donde $i$ denota la inclusión de $M$ en $cl(M)$, es una compactación del espacio $X$. Por tanto, cada espacio encajable en un espacio compacto tiene una compactación.

En lo que sigue del texto, utilizaremos el término *compactación de* $X$ no sólo para referirnos a la pareja $(Y, c)$, sino también al espacio compacto $Y$ en el que $X$ puede ser encajado como un subespacio denso.

**Notación.** Las compactaciones de un espacio $X$ serán usualmente denotadas mediante los símbolos $cX, c_iX, \alpha X$, etc., donde $c$, $c_i$ y $\alpha$ son los símbolos usados para denotar al encaje de $X$ en su compactación.

**Definición 1.3.3.** Diremos que un par de compactaciones $c_1X$ y $c_2X$ de un espacio $X$ son *equivalentes* si existe un homeomorfismo $f : c_1X \to c_2X$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id_X"] \arrow[d, "c_1"] & X \arrow[d, "c_2"] \\ c_1X \arrow[r, "f"] & c_2X \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir, tal que $f \circ c_1(x) = c_2(x)$ para toda $x \in X$.

Por el Teorema 1.2.10 y la Observación 1.3.2, obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 1.3.4.** *Un espacio topológico* $X$ *tiene una compactación* $T_2$ *si y sólo si* $X$ *es un espacio Tychonoff.*

De acuerdo con [E], de los teoremas 1.2.8 y B.2.7, también tenemos lo siguiente:

**Teorema 1.3.5.** *Todo espacio Tychonoff* $X$ *tiene una compactación* $(Y, c)$ *tal que* $w(Y) = w(X)$.

**Definición 1.3.6.** Sean $X$ un espacio Tychonoff,

$$\beta = \Delta_{f \in C(X,[0,1])} f : X \to [0,1]^{C(X,[0,1])}$$

la función diagonal definida por la colección $C(X, [0,1])$, y $\beta X$ la cerradura de $\beta[X]$ en $[0,1]^{C(X,[0,1])}$. Por el Teorema de la Diagonal (véase B.1.28), $\beta$ es un encaje y así $(\beta, \beta X)$ es compactación de $X$. Dicha compactación recibe el nombre de *compactación de Stone-Čech*.

A continuación mostraremos una de las propiedades que caracterizan a la compactación de Stone-Čech.

**Definición 1.3.7.** Dados $X$ un espacio topológico y $Y$ subespacio de $X$, decimos que $Y$ *está $C^*$-encajado en* $X$ si para cada $f \in C(Y, [0,1])$ existe una extensión continua de $f$ a todo $X$, i.e. existe $\hat{f} \in C(X, [0,1])$ tal que $\hat{f} \restriction_Y = f$.

**Lema 1.3.8.** *Cualquier espacio Tychonoff $X$ está $C^*$-encajado en su compactación de Stone-Čech.*

**Demostración.** Sea $f \in C(X, [0,1])$. Por la definición de $\beta$ como el producto diagonal de $C(X, [0,1])$, tenemos que $f = p_f \circ \beta$ donde $p_f : [0,1]^{C(X,[0,1])} \to [0,1]$ es la proyección correspondiente al elemento $f$ de $C(X, [0,1])$. Sea $f^* = p_f \restriction_{\beta X}$. La función $f^*$ es la extensión requerida. $\square$

## 1.4. Espacios 0-dimensionales

Ahora analizaremos algunas clases de espacios que podemos pensar que son poco conexos y sus relaciones con clases de espacios ya mencionadas. Dado un espacio topológico $X$, llamaremos *separación* de $X$ a una pareja $(U, V)$ de subconjuntos abiertos de $X$, tales que $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ y $U \neq \emptyset \neq V$. Por otra parte, diremos que $X$ es *conexo* si no existe una separación de él.

**Definición 1.4.1.** Un espacio topológico es 0-*dimensional* si existe una base para $X$ formada por abiertos y cerrados.

Los espacios discretos son claramente 0-dimensionales. Además, no es difícil verificar que los espacios de ordinales, el conjunto de Cantor, el conjunto de números racionales y la línea de Sorgenfrey también lo son. Probaremos el último de estos ejemplos en la sección 1.5.

**Lema 1.4.2.** *Cualquier espacio 0-dimensional y $T_1$ es Tychonoff, ya que en dichos espacios las funciones características de los abiertos-cerrados son continuas.*

**Demostración.** Sea $X$ un espacio 0-dimensional y $T_1$. Veamos que $X$ es Tychonoff. Sean $F \subseteq X$ un cerrado y $x \in X \setminus F$. Entonces por la 0-dimensionalidad de $X$, existe $U \subseteq X$ abierto y cerrado tal que $x \in U \subseteq X \setminus F$. De esta manera, la función característica de $U$, que denotamos por $\chi_U$ es una función continua. En efecto, dada $a \in (0,1)$, se tiene que $\chi_U^{-1}[[0,a)] = X \setminus U$ y si $b \in (0,1)$,

$\chi_U^{-1}[(b,1]] = U$, de manera que como $\mathcal{S} = \{[0,a) : a \in [0,1]\} \cup \{(b,1] : b \in [0,1]\}$ es subbase de $[0,1]$, la imagen inversa de todo subbásico bajo $\chi_U$ es abierta, y entonces la continuidad se tiene de la Proposición B.1.24. Además, dicha función es tal que $\chi_U(x) = 1$ y $\chi_U[F] \subseteq \{0\}$, esto es, $X$ es completamente regular. □

**Proposición 1.4.3.** *Cualquier subespacio de un espacio 0-dimensional es 0-dimensional.*

**Demostración.** Sea $X$ un espacio 0-dimensional, $\mathcal{B}$ una base para $X$ de abiertos y cerrados y sea $Y \subseteq X$. Entonces $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ es base de abiertos y cerrados para $Y$. Por lo tanto, $Y$ es 0-dimensional. □

**Proposición 1.4.4.** *Sea $\{X_j : j \in J\}$ familia de espacios topológicos. El producto topológico $X = \Pi_{j \in J} X_j$ es 0-dimensional si cada factor es 0-dimensional.*

**Demostración.** Para cada $j \in J$, sea $\mathcal{B}_j$ una base de $X_j$ formada por subconjuntos cerrado-abiertos. Así, una base para $X$ es la colección $\mathcal{B} = \{\pi_{j_0}^{-1}[A_0] \cap ... \cap \pi_{j_k}^{-1}[A_k] : k \in \omega,\ j_0, ..., j_k \in J$ y $A_i \in \mathcal{B}_{j_i}$ para cada $i \leqslant k\}$. Pero cada conjunto de esta forma es tanto abierto como cerrado pues es un abierto básico (véase Observación B.1.17) que es intersección de cerrados. □

**Observación 1.4.5.** El recíproco de la proposición anterior también es cierto. La prueba puede consultarse en [CT; prop.5.16, p.179].

**Definición 1.4.6.** Decimos que un espacio Tychonoff no vacío $X$ es *fuertemente* 0-*dimensional* si cada cubierta finita de $X$ formada por conjuntos conulos tiene un refinamiento finito formado por abiertos ajenos por pares.

En la última sección de este capítulo veremos que la línea de Sorgenfrey $\mathcal{S}$ es un espacio fuertemente 0-dimensional.

**Proposición 1.4.7.** *Un espacio Tychonoff $X$ es fuertemente* 0-*dimensional si y sólo si para cualesquiera conjuntos nulos ajenos en $X$ $A$ y $B$, existe un subconjunto $U$ de $X$ abierto y cerrado tal que $A \subseteq U$ y $B \cap U = \emptyset$.*

**Demostración.** $\Rightarrow]$ Sean $A$ y $B$ nulos ajenos en $X$, digamos $A = f^{-1}[\{0\}]$ y $B = g^{-1}[\{0\}]$. Entonces $A \subseteq X \backslash g^{-1}[\{0\}]$, $B \subseteq X \backslash f^{-1}[\{0\}]$ y

$$X = (X \backslash g^{-1}[\{0\}]) \cup (X \backslash f^{-1}[\{0\}]).$$

Por tanto, por la 0-dimensionalidad fuerte de $X$, existe un refinamiento finito de $\{X \backslash g^{-1}[\{0\}], X \backslash f^{-1}[\{0\}]\}$ formado por abiertos ajenos por pares, digamos $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, ..., V_m\}$ para alguna $m \in \mathbb{N}$. Consideramos entonces, sin pérdida de generalidad, que $V_1, ..., V_k$ son los elementos de $\mathcal{V}$ contenidos en $X \backslash f^{-1}[\{0\}]$ y hacemos

$$U = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_k \ \text{ y } \ V_{k+1} \cup ... \cup V_m = V \subseteq X \backslash g^{-1}[\{0\}].$$

Entonces $A \subseteq X \backslash U$ y $B \subseteq g^{-1}[\{0\}] \subseteq X \backslash V \subseteq U$ (de hecho, más aún, como $X = U \cup V$, $U = X \backslash V$). De modo que $X \backslash U$ es un abierto y cerrado tal que $A \subseteq X \backslash U$ y $B \cap (X \backslash U) = \emptyset$

$\Leftarrow$] Sea $\mathcal{U}$ una cubierta finita de $X$ formada por conulos, digamos $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$.

Probaremos por inducción sobre $n$ que si para cualesquiera dos subconjuntos nulos ajenos $A$ y $B$ de $X$ tales que existe un subconjunto $U$ de $X$ abierto y cerrado tal que $A \subseteq U$ y $B \cap U = \emptyset$, entonces existe un refinamiento finito de $\mathcal{U}$ formado por abiertos-cerrados ajenos dos a dos.

Consideremos para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $U_i = X \backslash f_i^{-1}[\{0\}]$.

Si $n = 2$, tenemos que $f_1^{-1}[\{0\}] \cap f_2^{-1}[\{0\}] = \emptyset$. Así, $U_1$ y $U_2$ son conjuntos abiertos-cerrados y por lo tanto nulos. Entonces existe un conjunto abierto y cerrado $W \subseteq X$, tal que $X \backslash U_1 \subseteq W$ y $(X \backslash U_2) \cap W = \emptyset$. Por tanto, $\{W, X \backslash W\}$ es un refinamiento finito formado por abiertos-cerrados ajenos por pares de $\mathcal{U}$.

Supongamos que para $|\mathcal{U}| = n$ existe un refinamiento finito formado por abiertos-cerrados ajenos por pares.

Sea $|\mathcal{U}| = n + 1$. Como $\bigcup_{i=1}^{n+1} U_i = \bigcup_{i=1}^{n+1} X \backslash f_i^{-1}[\{0\}] = X$, entonces

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} f_i^{-1}[\{0\}] = \emptyset.$$

Además, del Lema 1.2.4, $\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}[\{0\}]$ es un conjunto nulo. Por lo tanto, existe $W \subseteq X$ abierto y cerrado tal que $f_{n+1}^{-1}[\{0\}] \subseteq W$ y $\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}[\{0\}] \cap W = \emptyset$.

Observemos además, que $W$ es nulo (pues $\chi_{X \backslash W}$ es continua), de modo que, como $X \backslash (\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}[\{0\}] \cap W) = X$, entonces $(\bigcup_{i=1}^{n} X \backslash f_i^{-1}[\{0\}]) \cup (X \backslash W) = X$.

Esto es, $\mathcal{V} = \{U_1, U_2, ..., U_{n-1}, (U_n \cup (X \backslash W))\}$ es una cubierta abierta de $X$ formada por conulos, pues por el Lema 1.2.3, $U_n \cup (X \backslash W)$ es conulo.

Así, como $|\mathcal{V}| = n$, por la hipótesis de inducción, existe un refinamiento $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ formado por abiertos-cerrados ajenos por pares.

Sea $\mathcal{W}' = \{U \cap W : U \in \mathcal{W}\} \cup \{U \cap (X \backslash W) : U \in \mathcal{W}\}$. Como tanto $W$ como cada elemento de $\mathcal{W}$ son abiertos-cerrados, cada elemento de $\mathcal{W}'$ es abierto-cerrado. Además, cada par de elementos de $\mathcal{W}$ son ajenos y $W$ es ajeno a su complemento, de manera que los elementos de $\mathcal{W}'$ son ajenos dos a dos.

Por otra parte, $\bigcup \mathcal{W} = \bigcup \mathcal{W}'$ y $X = \bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{W}$, de manera que $\mathcal{W}'$ es cubierta de $X$.

Por último, sea $Z \in \mathcal{W}'$. Si $Z = V \cap W$ para alguna $V \in \mathcal{W}$, como $W \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $V \subseteq V'$ para alguna $V' \in \mathcal{V}$, $Z \subseteq U$ para alguna $U \in \mathcal{U}$. Por otro lado, si $Z = V \cap (X \backslash W)$ para alguna $V \in \mathcal{W}$, como $X \backslash W \subseteq U_{n+1}$, $Z \subseteq U_{n+1}$.

Por lo tanto, $\mathcal{W}'$ es el refinamiento finito de $\mathcal{U}$ buscado. $\square$

**Proposición 1.4.8.** *Todo espacio topológico $T_1$, 0-dimensional y Lindelöf es fuertemente 0-dimensional.*

**Demostración.** En virtud del Lema 1.4.2, $X$ es un espacio Tychonoff.

Sean $N_1$ y $N_2$ un par de conjuntos nulos ajenos, digamos $N_1 = f_1^{-1}[\{0\}]$ y $N_2 = f_2^{-1}[\{0\}]$. A la luz de la Proposición 1.4.7, basta probar que existe un conjunto $U \subseteq X$ abierto y cerrado tal que $N_1 \subseteq U$ y $N_2 \cap U = \emptyset$.

Para cada $i = 1, 2$, llamemos $U_i = X \backslash f_i^{-1}[\{0\}]$. Por ser $N_1$ y $N_2$ ajenos, $X = U_1 \cup U_2$. Como $U_1$ y $U_2$ son abiertos y $X$ es 0-dimensional, entonces para cada $x \in X$ existen abiertos-cerrados $C_x$ y $D_x$ tales que $x \in C_x \subseteq U_1$ si $x \in U_1$ y $x \in D_x \subseteq U_2$ si $x \in U_2$. Entonces $X = (\bigcup_{x\in X} C_x) \cup (\bigcup_{x\in X} D_x)$. De esta manera, como $X$ es Lindelöf, existe una subcubierta numerable de $\{C_x : x \in X\} \cup \{D_x : x \in X\}$, digamos $\{C_i : i \in \{0, 1, 2, ...\}\} \cup \{D_i : i \in \{0, 1, 2, ...\}\}$ (es decir, $X = (\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i)$) donde $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \subseteq U_1$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \subseteq U_2$.

Para cada $n \in \omega\backslash\{0\}$, definamos

$$V_n = C_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n} D_i, \quad W_n = D_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$
$$\text{y} \quad Z_n = [C_n \cap (\bigcup_{i=1}^{n} D_i)] \backslash [(\bigcup_{i=1}^{n} V_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} W_i)].$$

Sean $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ y $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$. Aseguramos que $X\backslash A$ es un abierto y cerrado tal que $N_1 \subseteq X\backslash A$ y $N_2 \cap (X\backslash A) = \emptyset$.

Notemos que como $C_i$ y $D_i$ son abiertos y cerrados para toda $i \in \omega$, entonces $V_n, W_n$ y $Z_n$ son abiertos y por tanto $A$ es abierto. Para probar que $X\backslash A$ es también abierto, veamos que $A$, $B$ y $C$ son ajenos por pares y que $X = A \cup B \cup C$.

De existir $x \in A \cap B$ tendríamos que

$$x \in C_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n} D_i \quad \text{y} \quad x \in D_m \backslash \bigcup_{i=1}^{m} C_i$$

para algunas $n$ y $m$ en $\omega$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $n \leq m$, de manera que como $x \notin \bigcup_{i=1}^{m} C_i$, $x \notin C_n$ lo cual es una contradicción, y por tanto $A \cap B = \emptyset$. Por otra parte, de existir $x \in A \cap C$, tendríamos que

$$x \in C_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n} D_i$$
$$\text{y} \quad x \in [C_n \cap (\bigcup_{i=1}^{n} D_i)] \backslash [(\bigcup_{i=1}^{n} V_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} W_i)]$$

para algunas $n, m \in \omega$. Así, $m < n$. Pero $x \in V_n$ implica que $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, y $x \in Z_m$ implica que $x \in \bigcup_{i=1}^{m} D_i$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $A \cap C = \emptyset$ Por último, de existir $x \in B \cap C$, entonces

$$x \in D_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

$$\text{y} \;\; x \in [C_n \cap (\bigcup_{i=1}^{n} D_i)] \backslash [(\bigcup_{i=1}^{n} V_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} W_i)]$$

para algunas $n, m \in \omega$. De modo que $n < m$. Pero $x \in D_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, implica que $x \in \bigcup_{i=1}^{m} V_i$, que es una contradicción.

Por lo tanto $A$, $B$ y $C$ son ajenos dos a dos. Ahora, consideremos $x \in X$ y supongamos que $x \notin C$. Entonces $x \notin Z_n$, para toda $n \in \omega$. De esta manera, se tienen los siguientes casos; si $x \in C_n$ para alguna $n \in \omega \backslash \{0\}$, entonces:

(I) si $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, entonces $x \in C_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n} D_i \subseteq A$

(II) si $x \in \bigcup_{j=1}^{n} C_j \backslash \bigcup_{i=1}^{j} D_i$, entonces $x \in A$

(III) si $x \in \bigcup_{j=1}^{n} D_j \backslash \bigcup_{i=1}^{j} C_i \subseteq B$, por tanto, $x \in A \cup B$.

Por otra parte, si $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, entonces $x \in D_m$ para alguna $m \in \omega$ y $x \in D_m \backslash \bigcup_{i=1}^{m} C_i = W_m \subseteq B \subseteq A \cup B$.

Por tanto, tenemos que $x \in (A \cup B)$ y así, $X = A \cup B \cup C$.

Cabe destacar que como $A \cap B = \emptyset$ y $A \cap C = \emptyset$, entonces $B \subseteq X \backslash A$ y $C \subseteq X \backslash A$. Por lo tanto, usando que $X = A \cup B \cup C$, tenemos que $X \backslash A = B \cup C$, que es un abierto. Además, es evidente que $A \subseteq U_1$, que $B \subseteq U_2$ y que $C \subseteq U_1 \cap U_2$, de manera que $N_1 \subseteq X \backslash A$, y $N_2 \cap (X \backslash A) = N_2 \cap (B \cup C) \subseteq (X \backslash U_2) \cap [U_2 \cup (U_1 \cap U_2)] = (X \backslash U_2) \cap U_2 = \emptyset$, con lo cual, queda probada la afirmación. □

**Lema 1.4.9.** *Si $X$ es un espacio topológico fuertemente 0-dimensional y $Y$ es un subespacio $C^*$-encajado en $X$, entonces $Y$ es también fuertemente 0-dimensional.*

**Demostración.** Sean $A, B \subseteq Y$ un par de nulos ajenos tales que existe $f : Y \to [0,1]$ continua y tal que $f[A] \subseteq \{0\}$ y $f[B] \subseteq \{1\}$. Consideremos una extensión continua de $f$, $\hat{f} : X \to [0,1]$. Entonces $\hat{f}[A] = f \restriction_Y [A] \subseteq \{0\}$ y $\hat{f}[B] = f \restriction_Y [B] \subseteq \{1\}$. De manera que por la 0-dimensionalidad fuerte de $X$, existe un abierto y cerrado $U \subseteq X$ tal que $A \subseteq U$ y $B \cap U = \emptyset$.

Sea $V = U \cap Y$. Entonces $V$ es abierto y cerrado en $Y$ y tal que $A = A \cap Y \subseteq V$ y $B \cap V = B \cap (U \cap Y) = B \cap U = \emptyset$.

Por lo tanto, de la Proposición 1.4.7, $Y$ es fuertemente 0-dimensional. □

## 1.5. La línea de Sorgenfrey

Ahora recordamos un espacio topológico de especial relevancia, la línea de Sorgenfrey.

**Definición 1.5.1.** La *línea de Sorgenfrey* es un espacio topológico que tiene como conjunto base a la recta real y una topología definida mediante la base

$$\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}.$$

Denotamos a tal espacio por $\mathcal{S}$.

**Observación 1.5.2.** Sea $x \in \mathcal{S}$. Para cada $n \in \omega\backslash\{0\}$ definimos $B_n^x = [x, x+\frac{1}{n})$. De esta manera, se tiene que para cada abierto $V \subseteq \mathcal{S}$, existe $n \in \omega\backslash\{0\}$ tal que $B_n^x \subseteq V$ y por lo tanto $\mathcal{S}$ es primero numerable.

**Definición 1.5.3.** *Decimos que un espacio $X$ es* hereditariamente Lindelöf *si todo subespacio de $X$ es Lindelöf.*

**Proposición 1.5.4.** *$\mathcal{S}$ es un espacio hereditariamente Lindelöf.*

**Demostración.** En efecto, sea $\mathcal{T}$ un subespacio de $\mathcal{S}$ y denotemos por $\mathcal{T}'$ al espacio $(\mathcal{T}, \tau_e)$, donde $\tau_e$ denota a la topología euclidiana. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta en $\mathcal{S}$ de $\mathcal{T}$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los elementos de la familia $\mathcal{U}$ son abiertos básicos de $\mathcal{S}$. Definimos $\mu = \{(a,b) : [a,b) \in \mathcal{U}\}$ y hacemos $Z = \bigcup \mu$. Entonces como el espacio de los reales con la topología usual es segundo numerable, el subespacio $Z$ de $\mathbb{R}$ es Lindelöf (pues si $\mathcal{B}$ es una base numerable de $(\mathbb{R}, \tau_e)$, entonces $\mathcal{B}(Z) = \{Z \cap B : B \in \mathcal{B}\}$ es una base numerable para $Z$, de manera que $Z$ es segundo numerable, y por el inciso (3) del Ejemplo B.2.17, $Z$ es Lindelöf). Por lo tanto, podemos extraer una subcubierta numerable $\eta$ de la cubierta $\mu$ de $Z$. Sea $\mathcal{G} = \{[a,b) : (a,b) \in \eta\}$.

Afirmamos que $|\mathcal{T}\backslash \bigcup \mathcal{G}| \leqslant \aleph_0$. En efecto, supongamos por el contrario que $|\mathcal{T}\backslash \bigcup \mathcal{G}| > \aleph_0$. Como $\mathcal{U}$ es cubierta de $\mathcal{T}$, para cada $x \in \mathcal{T}\backslash \bigcup \mathcal{G}$, podemos elegir $[a_x, b_x) \in \mathcal{U}$ de manera que $x \in [a_x, b_x)$.

Observemos que de ocurrir que $x \in (a_x, b_x)$, existiría $(a'_x, b'_x) \in \eta$ tal que $x \in (a'_x, b'_x)$ (pues $(a_x, b_x) \in \mu$ y $\eta$ es subcubierta de $\mu$). Pero entonces $x \in \bigcup \mathcal{G}$, contradiciendo nuestra elección de $x$. Por tanto, $x = a_x$ para cada $x \in \mathcal{T}\backslash \bigcup \mathcal{G}$. Además, dados $x, y \in \mathcal{T}\backslash \bigcup \mathcal{G}$ distintos, sin pérdida de generalidad digamos, $x < y$, se tiene que de existir $z \in (a_x, b_x) \cap (a_y, b_y)$, ocurriría que $x < y < z < b_x$, y entonces $y \in \bigcup \mathcal{G}$, lo cual es una contradicción.

De esta manera, $\mathcal{C} = \{(a_x, b_x) : x \in \mathcal{T}\backslash \bigcup \mathcal{G}\}$ es una familia de subconjuntos abiertos no vacíos de $(\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R})$ $\mathbb{R}$ ajenos dos a dos, y cuya cardinalidad excede $\aleph_0$, contradiciendo la separabilidad de $\mathbb{R}$.

Por tanto, $|\mathcal{T}\backslash \bigcup \mathcal{G}| \leq \aleph_0$. Entonces hay una cantidad numerable de elementos de $\mathcal{U}$ que cubren a $\mathcal{T}\backslash \bigcup \mathcal{G}$, llamemos a la colección de estos elementos de $\mathcal{U}$, $\mathcal{H}$. Entonces $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$ es la subcubierta numerable de $\mathcal{U}$ buscada. □

**Proposición 1.5.5.** *La línea de Sorgenfrey $\mathcal{S}$ es un espacio fuertemente 0-dimensional.*

**Demostración.** Recordemos que $\{[a,b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ es base para $\mathcal{S}$ y que $[a,b) \subseteq \mathcal{S}$ es abierto y cerrado para toda $a$ y $b$ en $\mathbb{R}$ (pues $\mathcal{S}\backslash[a,b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$ y se tiene que $(-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a-n, a)$ y $[b, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[b, n)$). Entonces $\mathcal{S}$ es 0-dimensional. Además $\mathcal{S}$ es $T_1$, puesto que cada conjunto unitario es cerrado en $\mathcal{S}$. Por lo tanto, de las proposiciones 1.4.8 y 1.5.4, tenemos el resultado. □

Como es de esperarse, decimos que un espacio $X$ es *hereditariamente fuertemente 0-dimensional* si todo subespacio de $X$ es fuertemente 0-dimensional.

**Corolario 1.5.6.** $\mathcal{S}$ *es hereditariamente fuertemente* 0*-dimensional.* $\square$

## 1.6. Filtros sobre $X$ y $Z(X)$-filtros

**Definición 1.6.1.** Una familia de subconjuntos $\mathcal{F}$ de un conjunto $X$ tiene la *propiedad de la intersección finita* (o bien es una *familia centrada*) si para toda subfamilia finita $\mathcal{F}'$ no vacía de $\mathcal{F}$, se tiene que $\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset$.

**Definición 1.6.2.** Sea $X$ un conjunto no vacío. Una colección no vacía $\mathcal{F}$ de subconjuntos no vacíos en $X$ es llamada *filtro en* $X$ o *filtro sobre* $X$ si se satisfacen las siguientes condiciones:
(i) Si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subseteq F' \subseteq X$, entonces $F' \in \mathcal{F}$.
(ii) Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

**Definición 1.6.3.** Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto $X$ es un *ultrafiltro sobre* $X$ si es un filtro maximal con el orden inducido por la contención. Es decir, si no existe un filtro $\mathcal{G}$ sobre $X$ tal que $\mathcal{F} \subsetneqq \mathcal{G}$.

**Notación.** Sea $X$ un espacio topológico. Denotamos por $Z(X)$ al conjunto $\{Z(f) : f \in C(X)\}$.

**Definición 1.6.4.** Sea $X$ un espacio topológico no vacío. Decimos que $\mathcal{F} \subseteq Z(X)$ es un $Z(X)$*-filtro*, si se satisfacen las siguientes condiciones:
(i) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
(ii) Si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subseteq F' \in Z(X)$, entonces $F' \in \mathcal{F}$.
(iii) Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

El sistema de vecindades de un punto en un espacio topológico es un ejemplo clásico de filtro. Veremos ahora que un filtro puede ser determinado por subcolecciones especiales de él. A continuación introducimos la noción de base de filtro.

**Definición 1.6.5.** Dado un filtro $\mathcal{F}$ en un conjunto $X$, una subcolección no vacía $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}$ es una *base de filtro* para $\mathcal{F}$ si ocurre que para todo $F \in \mathcal{F}$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq F$.

**Observación 1.6.6.** Cualquier filtro y cualquier base de filtro es una familia centrada.

**Proposición 1.6.7.** *Sean $X$ un conjunto y $\mathcal{B}$ una familia no vacía de subconjuntos de $X$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de filtro para algún filtro en $X$ si y sólo si $\emptyset \notin \mathcal{B}$ y para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

**Demostración.** $\Rightarrow$] Si $\mathcal{B}$ es una base de filtro de $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ y por tanto $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Ahora bien, si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$ y por ser $\mathcal{B}$ base de filtro de $\mathcal{F}$, debe existir un elemento $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

$\Leftarrow$] Si $\emptyset \notin \mathcal{B}$ y para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existe $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, definimos $\mathcal{F}_B = \{F \subseteq X : \text{existe } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } B \subseteq F\}$. Entonces $\emptyset \notin \mathcal{F}_B$, y de la definición de $\mathcal{F}_B$ se deduce que si $F \in \mathcal{F}_B$ y $F \subseteq F_1$, entonces $F_1 \in \mathcal{F}_B$. Consideremos ahora $F_1$ y $F_2$ en $\mathcal{F}_B$. Existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $B_1 \subseteq F_1$ y $B_2 \subseteq F_2$. Sea $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Entonces $B_3 \subseteq F_1 \cap F_2$, y por lo tanto $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_B$. Esto prueba que $\mathcal{F}_B$ es filtro, y claramente $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{F}_B$. □

**Observación 1.6.8.** Si $\mathcal{B}$ es una colección no vacía que satisface que $\emptyset \notin \mathcal{B}$ y para cualesquiera $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, entonces el filtro del cual $\mathcal{B}$ es base es la colección $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} = \{F \subseteq X : \text{existe } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } B \subseteq F\}$ y decimos que *el filtro $\mathcal{F}_B$ es generado por* $\mathcal{B}$.

Enunciaremos un teorema cuyo corolario es el llamado Teorema del ultrafiltro, que es un debilitamiento del Axioma de Elección. Nuestra prueba de dicho teorema dependerá del Lema de Zorn.

**Teorema 1.6.9.** *Sea $X$ un conjunto. Para toda familia centrada $\mathcal{C}$ de subconjuntos de $X$ existe un ultrafiltro $\mathcal{G}$ que contiene a $\mathcal{C}$.*

**Demostración.** Sea $\Phi$ el conjunto dado por

$$\Phi = \{\mathcal{D} : \mathcal{D} \text{ es una familia centrada en } X \text{ con } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}\}.$$

Es claro que este conjunto no es vacío y está parcialmente ordenado por la relación de contención de conjuntos ($\subseteq$). Además, toda cadena en $(\Phi, \subseteq)$ está acotada superiormente en $(\Phi, \subseteq)$. En efecto, consideremos una cadena no vacía $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha \in J}$ en $\Phi$.
Definamos $\mathcal{H} = \bigcup_{\alpha \in J} \mathcal{D}_\alpha$. Se tiene entonces que $\mathcal{H} \in \Phi$ y que $\mathcal{D}_\alpha \subseteq \mathcal{H}$ para cada $\alpha \in J$. Así, por el Lema de Zorn, existe un elemento $\subseteq$-maximal $\mathcal{F} \in \Phi$.

Afirmación. $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro que contiene a $\mathcal{C}$.

Veamos que $\mathcal{F}$ es filtro. Como $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de intersección finita, se tiene que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Además, si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B \subseteq X$, entonces la colección $\mathcal{F} \cup \{B\}$ es una familia centrada que contiene a $\mathcal{C}$, de modo que, por la $\subseteq$-maximalidad de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \{B\}$ y por lo tanto $B \in \mathcal{F}$. Consideremos ahora un par de elementos $A, B \in \mathcal{F}$. Es fácil verificar que $\mathcal{F} \cup \{A \cap B\}$ tiene la propiedad de la intersección finita y entonces, por un razonamiento similar al anterior, $A \cap B \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es un filtro.

Ahora bien, de la Observación 1.6.6, tenemos que si $\mathcal{G}$ es un filtro que contiene a $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{G}$ es una familia centrada que contiene a $\mathcal{F}$ y por lo tanto también a $\mathcal{C}$. Entonces, por la $\subseteq$-maximalidad de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. De esta manera, $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro y claramente contiene a $\mathcal{C}$, lo que concluye la prueba. $\square$

Del teorema anterior y la Observación 1.6.6, se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 1.6.10.** ***(Teorema del ultrafiltro)*** *Sea $X$ un conjunto. Si $\mathcal{F}$ es un filtro (respectivamente una base de filtro) sobre $X$, entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{G}$ que contiene a $\mathcal{F}$.*

**Observación 1.6.11.** En el caso de que $X$ sea un espacio topológico, se emplean convenciones análogas a las señaladas en la Definición 1.6.5 y la Observación 1.6.8, y se tienen las versiones correspondientes a los resultados 1.6.7 y 1.6.10, para los $Z(X)$-filtros.

**Proposición 1.6.12.** *Sea $\mathcal{F}$ un $Z(X)$-filtro. Entonces son equivalentes:*
*(a) $\mathcal{F}$ es un $Z(X)$-ultrafiltro y*
*(b) si $A \in Z(X)$ es tal que $A \cap B \neq \emptyset$ para cada $B \in \mathcal{F}$, entonces $A \in \mathcal{F}$.*

**Demostración.** (a)$\Rightarrow$(b) Supongamos que existe $A \in Z(X)$ tal que $A \cap B \neq \emptyset$ para cada $B \in \mathcal{F}$ y sea $\mathcal{B} = \mathcal{F} \cup \{A \cap F : F \in \mathcal{F}\}$.

Aseguramos que $\mathcal{B}$ es base para algún $Z(X)$-filtro. En efecto, como $\emptyset \notin \mathcal{F}$ y $A \cap F \neq \emptyset$ para toda $F \in \mathcal{F}$, entonces $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Además, dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, tenemos que:

1) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{F}$, entonces $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ pues $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$.

2) Si $B_1 \in \mathcal{F}$ y $B_2 = A \cap F_2$ para alguna $F_2 \in \mathcal{F}$, entonces

$$B_1 \cap B_2 = B_1 \cap A \cap F_2 = A \cap (B_1 \cap F_2)$$

con $B_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$

3) Si $B_1 = A \cap F_1$ y $B_2 = A \cap F_2$ para ciertos $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $B_1 \cap B_2 = A \cap (F_1 \cap F_2)$, de manera que $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$.

Por tanto, de la Proposición 1.6.7, $\mathcal{B}$ es base para un $Z(X)$-filtro, digamos $\mathcal{G}$. Observemos además que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ y que como $A \cap F \subseteq A \in Z(X)$ y $A \cap F \in \mathcal{G}$ para cada $F \in \mathcal{F}$, entonces $A \in \mathcal{G}$.

Entonces, como $\mathcal{F}$ es $Z(X)$-ultrafiltro, tenemos que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, y por lo tanto, $A \in \mathcal{F}$.

(b)$\Rightarrow$(a) Supongamos que $\mathcal{F}$ no es un $Z(X)$-ultrafiltro. Tenemos que del Teorema 1.6.10, exite un $Z(X)$-ultrafiltro $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$, de manera que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$.

Sea $A \in \mathcal{G} \backslash \mathcal{F} \subseteq Z(X)$. Entonces, por hipótesis, $A \in \mathcal{F}$, lo cual es una contradicción. $\square$

## 1.7. La compactación de Stone-$\check{C}$ech

En esta sección, daremos una construcción alternativa de la compactación de Stone-Čech de un espacio topológico, que a menudo resulta bastante útil.

En lo que sigue de esta sección, consideraremos un espacio completamente regular $X$.

Recordemos de la sección 1.3, que la compactación de Stone-Čech del espacio $X$, denotada usualmente por $\beta X$, es el espacio $cl(\beta[X])$, donde $\beta$ es la función diagonal $\beta = \Delta_{f \in C(X,[0,1])} f : X \to [0,1]^{C(X,[0,1])}$ definida por la colección $C(X,[0,1])$, que para espacios Tychonoff es un encaje.

Antes de enunciar la construcción alternativa de la compactación de Stone-Čech, es menester definir ciertos conjuntos y dar algunas propiedades respecto a ellos.

Denotemos por $\mathcal{W}$ al conjunto $\{\mathcal{F} \subseteq Z(X) : \mathcal{F}$ es $Z(X)$-ultrafiltro$\}$. Dado $A \in Z(X)$ sea $S(A) = \{\mathcal{F} \in \mathcal{W} : A \in \mathcal{F}\}$.

Sea $\mathcal{U}_x = \{A \in Z(X) : x \in A\}$. Notemos entonces que si $f : X \to [0,1]$ es la función constante cero, entonces $x \in Z(f)$ y por tanto, $Z(f) \in \mathcal{U}_x$. Además, dada $A \in \mathcal{U}_x$, se tiene que $x \in A$ y por lo tanto $A \neq \emptyset$. De esta manera, $\mathcal{U}_x$ es una colección no vacía de conjuntos no vacíos. Por otra parte, si $A, B \in \mathcal{U}_x$, entonces por el Lema 1.2.3, $A \cap B \in Z(X)$ y claramente $x \in A \cap B$, por lo que $A \cap B \in \mathcal{U}_x$. Ahora bien, sean $A \in \mathcal{U}_x$ y $A \subseteq B \in Z(X)$. Entonces $x \in B$ y por lo tanto $B \in \mathcal{U}_x$, con lo cual, se tiene que $\mathcal{U}_x$ es un $Z(X)$-filtro para toda $x \in X$. Pero se tiene más aún, se tiene que $\mathcal{U}_x$ es un $Z(X)$-ultrafiltro. En efecto, supongamos $A \in Z(X)$ tal que para cada $B \in \mathcal{U}_x$, $A \cap B \neq \emptyset$. De ocurrir que $x \notin A$, existiría una función $f : X \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 0$ y $f[A] \subseteq \{1\}$. Entonces $B = f^{-1}[\{0\}]$ sería un elemento de $\mathcal{U}_x$ tal que $A \cap B = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x \in A$, es decir, $A \in \mathcal{U}_x$. Así, de la Proposición 1.6.12, se tiene que $\mathcal{U}_x$ es $Z(X)$-ultrafiltro.

Definimos $e : X \to \mathcal{W}$ tal que $e(x) = \mathcal{U}_x$ para cada $x \in X$.

Observemos que dados $x, y \in X$ distintos, se tiene que existe una función $f : X \to [0,1]$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. Entonces $Z(f) \in \mathcal{U}_x \backslash \mathcal{U}_y$ y así, tenemos que $e$ es una función inyectiva.

Veamos que la colección $\{S(A) : A \in Z(X)\}$ es una base para los cerrados de alguna topología en $\mathcal{W}$. Para ello, probamos el siguiente lema.

**Lema 1.7.1.** *Sean $A, B \in Z(X)$, entonces $S(A) \cup S(B) = S(A \cup B)$ y $S(A) \cap S(B) = S(A \cap B)$.*

**Demostración.** Consideremos $\mathcal{F} \in S(A) \cup S(B)$, entonces, sin pérdida de generalidad, $\mathcal{F} \in S(A)$. Y como $A \subseteq A \cup B \in Z(X)$, $A \cup B \in \mathcal{F}$, esto es, $S(A) \cup S(B) \subseteq S(A \cup B)$.

Sea ahora $\mathcal{F} \in S(A \cup B)$. Entonces $A \cup B \in \mathcal{F}$ y de ocurrir que $A \notin \mathcal{F}$, existiría (de la Proposición 1.6.12) $C \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap C = \emptyset$. Entonces $(A \cup B) \cap C \in \mathcal{F}$ y por tanto, $B \cap C \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $B \in \mathcal{F}$ y así, $S(A) \cup S(B) = S(A \cup B)$.

Sea ahora $\mathcal{F} \in S(A) \cap S(B)$, entonces $A, B \in \mathcal{F}$ y por tanto, $A \cap B \in \mathcal{F}$. De manera que $S(A) \cap S(B) \subseteq S(A \cap B)$. Por otra parte, dado $\mathcal{F} \in S(A \cap B)$, se tiene que $A \cap B \in \mathcal{F}$. Como $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, entonces $\mathcal{F} \in S(A)$ y $\mathcal{F} \in S(B)$, con lo que concluimos la prueba. □

**Proposición 1.7.2.** $\{S(A) : A \in Z(X)\}$ *forma una base para los cerrados de alguna topología en* $\mathcal{W}$. *Es decir, la colección* $\beta = \{\mathcal{W} \backslash S(A) : A \in Z(X)\}$ *es base para alguna topología en* $\mathcal{W}$.

**Demostración.** Tenemos que dado $\mathcal{F} \in \mathcal{W}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{W} \backslash S(\emptyset)$. Y además, dados $A, B \in Z(X)$,

$$(\mathcal{W} \backslash S(A)) \cap (\mathcal{W} \backslash S(B)) = \mathcal{W} \backslash (S(A) \cup S(B)) = \mathcal{W} \backslash S(A \cup B),$$

que es un elemento de $\beta$ por el Lema 1.2.3. De esta manera, de la Proposición B.1.5, existe una única topología para la cual $\beta$ es base. □

**Definición 1.7.3.** Damos una construcción equivalente de la *compactación de Stone-Čech* como el espacio que tiene como conjunto base a $\mathcal{W}$ con la topología para la cual $\{S(A) : A \in Z(X)\}$ es base de cerrados.

La prueba de que esta definición es equivalente a la dada previamente (i.e. la prueba de que $\mathcal{W}$ es una compactación de $X$ y que es equivalente como compactación a $\beta X$), puede consultarse en [GJ; p. 82-88].

En lo que sigue de la sección, supondremos a $(\mathcal{W}, e)$ como la compactación de Stone-Čech, de manera que $e : X \to \mathcal{W}$ es un encaje de $X$ en $\mathcal{W}$ tal que $cl_{\mathcal{W}}(e[X]) = \mathcal{W}$.

A lo largo de este trabajo, el *residuo de* $X$, usualmente denotado por $\beta X \backslash X$, tendrá dos interpretaciones. Si consideramos $\beta X = cl(\beta[X])$ donde $\beta$ es un encaje de $X$ en el cubo $[0,1]^{C(X,[0,1])}$, interpretamos a $\beta X \backslash X$ como el conjunto $cl(\beta[X]) \backslash \beta[X]$. Por otra parte, si $\beta X = \mathcal{W}$ (véase la Definición 1.7.3), interpretamos a $\beta X \backslash X$ como el conjunto $\mathcal{W} \backslash e[X]$.

A continuación enunciamos y probamos varias propiedades de la compactación de Stone-Čech que usaremos posteriormente.

**Lema 1.7.4.** *Sea* $A \in Z(X)$. *Entonces:*
*(1)* $S(A) = \emptyset$ *si y sólo si* $A = \emptyset$ *y*
*(2)* $S(A) = \mathcal{W}$ *si y sólo si* $A = X$.

**Demostración.** En la afirmación *(1)*, la suficiencia es trivial. Supongamos que $A \neq \emptyset$. Entonces

$$\mathcal{F}(A) = \{B \in Z(X) : A \subseteq B\}$$

es un $Z(X)$-filtro y (por el Teorema 1.6.10) existe un $Z(X)$-ultrafiltro $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{G}$. Entonces $\mathcal{G} \in \mathcal{W}$ y además $A \in \mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{G}$. Por lo tanto, $\mathcal{G} \in S(A)$.

Para probar la afirmación *(2)*, supongamos que $S(A) = \mathcal{W}$, y que existe $x \in X \backslash A$. Entonces, como $A \in Z(X)$, $A$ es un cerrado. Por lo tanto, existe $f \in C(X, [0,1])$ tal que $f(x) = 0$ y $f[A] \subseteq \{1\}$ y así, $A \cap Z(f) = \emptyset$. Observemos además que

$$\mathcal{F}(Z(f)) = \{B \in Z(X) : Z(f) \subseteq B\}$$

es un $Z(X)$-filtro y por tanto, del Teorema 1.6.10, existe un $Z(X)$-ultrafiltro $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{F}(Z(f)) \subseteq \mathcal{G}$. Entonces $\mathcal{G} \in \mathcal{W} = S(A)$, lo cual es una contradicción.

Por otra parte, si $A = X$, como todo $Z(X)$-ultrafiltro tiene a $X$ como elemento, $S(A) = \mathcal{W}$. □

**Lema 1.7.5.** *Si $A \in Z(X)$, entonces $e[A] = S(A) \cap e[X]$.*

**Demostración.** Sea $\mathcal{U}_x \in e[A]$. Como $A \in Z(X)$ es tal que $x \in A$, $A \in \mathcal{U}_x$. Por lo tanto $\mathcal{U}_x \in S(A)$. Esto es $e[A] \subseteq S(A)$, y como $e[A] \subseteq e[X]$, se tiene una de las contenciones.

Para probar la otra, consideremos $\mathcal{U}_x \in S(A) \cap e[X]$. Entonces $A \in \mathcal{U}_x$ por lo que $x \in A$ y así, $e(x) \in e[A]$. □

**Lema 1.7.6.** *Si $A \in Z(X)$, entonces $cl_{\mathcal{W}} e[A] = S(A)$.*

**Demostración.** Como $S(A)$ es cerrado en $\mathcal{W}$ y $e[A] \subseteq S(A)$, entonces $cl_{\mathcal{W}} e[A] \subseteq S(A)$.

Por otra parte, sea $\mathcal{F} \in S(A)$ y supongamos que $\mathcal{F} \notin cl_{\mathcal{W}} e[A]$. Entonces existe una vecindad $\mathcal{U}$ de $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F} \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{W} \backslash e[A]$. Como la colección $\{\mathcal{W} \backslash S(A) : A \in Z(X)\}$ es base de $\mathcal{W}$, existe $B \in Z(X)$ tal que $\mathcal{F} \in \mathcal{W} \backslash S(B) \subseteq \mathcal{W} \backslash e[A]$. De modo que $\mathcal{F} \notin S(B)$ y así $B \notin \mathcal{F}$ y $e[A] \subseteq S(B)$.

Entonces, para toda $x \in A$, $\mathcal{U}_x \in S(B)$, por lo que $A \subseteq B$. Y como $\mathcal{F} \in S(A)$, $A \in \mathcal{F}$, por lo cual, $B \in \mathcal{F}$, lo cual es una contradicción. □

**Proposición 1.7.7.** *Para cada abierto-cerrado $A$ de $X$, $cl_{\mathcal{W}} e[A]$ es abierto-cerrado en $\beta X$.*

**Demostración.** Sea $A$ un conjunto abierto y cerrado en $X$. Claramente sólo hay que probar que $cl_{\mathcal{W}} e[A]$ es abierto en $\beta X$. Observemos que como $A$ es abierto y cerrado, la función $\chi_{X \backslash A}$ es continua. Esto es, $A = Z(\chi_{X \backslash A}) \in Z(X)$. Y de manera análoga, $X \backslash A \in Z(X)$.

Por lo tanto, por los lemas 1.7.6, 1.7.1 y 1.7.4, $cl_{\mathcal{W}} e[A] = S(A)$, $\mathcal{W} = S(A) \cup S(X \backslash A)$ y $S(A) \cap S(X \backslash A) = \emptyset$. Entonces $cl_{\mathcal{W}} e[A] = S(A) = \mathcal{W} \backslash S(X \backslash A)$. Por lo tanto, $cl_{\mathcal{W}} e[A]$ es abierto ya que $S(X \backslash A)$ es cerrado (puesto que forma parte de la base de cerrados de $\beta X$) en $\beta X = \mathcal{W}$ □

Para finalizar esta sección, enunciamos una propiedad que relaciona la 0-dimensionalidad fuerte de un espacio topológico Tychonoff con la 0-dimensionalidad de su compactación de Stone-Čech.

**Proposición 1.7.8.** *Un espacio Tychonoff no vacío $X$ es fuertemente 0-dimensional si y sólo si $\beta X$ es 0-dimensional.*

**Demostración.** $\Rightarrow$] Sea $X$ un espacio fuertemente 0-dimensional. Consideremos un abierto $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{W} = \{\mathcal{F} \subseteq Z(X) : \mathcal{F}$ es $Z(X)$-ultrafiltro$\}$. Entonces, como $\{\mathcal{W}\backslash S(A) : A \in Z(X)\}$ es una base para la topología de $\mathcal{W}$, se tiene que dado $\mathcal{G} \in \mathcal{Z}$, existe $A \in Z(X)$ tal que $\mathcal{G} \in \mathcal{W}\backslash S(A) \subseteq \mathcal{Z}$. Por lo tanto $A \notin \mathcal{G}$, y así, de la Proposición 1.6.12, existe $B \in \mathcal{G}$ tal que $A \subseteq X\backslash B$.

Entonces, por la Proposición 1.4.7, existe un subconjunto de $X$ abierto y cerrado tal que $A \subseteq U$ y $B \cap U = \emptyset$. De esta manera $\chi_{X\backslash U}$ es una función continua y $U \in Z(X)$. Además, $B \cap U = \emptyset$ implica que $U \notin \mathcal{G}$, y entonces $\mathcal{G} \in \mathcal{W}\backslash S(U)$. Por otra parte, como $A \subseteq U$, se tiene que $S(A) = \{\mathcal{F} \in \mathcal{W} : A \in \mathcal{F}\} \subseteq \{\mathcal{F} \in \mathcal{W} : U \in \mathcal{F}\} = S(U)$, de modo que $\mathcal{G} \in \mathcal{W}\backslash S(U) \subseteq \mathcal{W}\backslash S(A) \subseteq \mathcal{Z}$, donde $\mathcal{W}\backslash S(U)$ es cerrado-abierto puesto que $U$ lo es (véanse 1.7.6 y 1.7.7). Por tanto, $\mathcal{W}$ es 0-dimensional.

$\Leftarrow$] Supongamos que $\beta X = \mathcal{W}$ es 0-dimensional. Entonces, como $\beta X$ es compacto, de la Proposición 1.4.8, $\beta X$ es fuertemente 0-dimensional. Por otra parte, como $X$ está $C^*$-encajado en $\beta X$ (véase la Proposición 1.3.8), entonces $X$ es fuertemente 0-dimensional. □

## 1.8. Conjuntos $G_\delta$ y $F_\sigma$

**Definición 1.8.1.** Dado un espacio topológico $X$, se dice que $A \subseteq X$ es un *conjunto* $G_\delta$, si $A$ es igual a la intersección de una cantidad a lo más numerable de abiertos. Se dice que un subconjunto $B$ de $X$ es un *conjunto* $F_\sigma$, si $B$ es unión de una cantidad a lo más numerable de cerrados.

Veremos una propiedad de los conjuntos $G_\delta$ que usaremos más adelante.

**Proposición 1.8.2.** *Sea $X$ un espacio normal. Entonces son equivalentes:*
*(a) $A$ es un subconjunto cerrado $G_\delta$.*
*(b) $A$ es un conjunto nulo.*

**Demostración.** (a)$\Rightarrow$(b) Sea $A$ un subconjunto cerrado de $X$ tal que $A$ es $G_\delta$ y sea $\{A_n : n \in \omega\}$ una familia de abiertos tal que $A = \bigcap_{n\in\omega} A_n$. Como $A \subseteq A_n$ para toda $n \in \omega$, entonces $A \cap (X\backslash A_n) = \emptyset$ para toda $n \in \omega$. Así, por el Lema de Urysohn (véase [E; teo.1.5.11, p.41]), existe una función continua $f_n \in {}^X[0,1]$ para cada $n \in \omega$ tal que

$$f_n[A] \subseteq \{0\} \text{ y } f_n[X\backslash A_n] \subseteq \{1\}.$$

Aseguramos que $A = \bigcap_{n\in\omega} f_n^{-1}[\{0\}]$. En efecto, por un lado, como $f_n[A] \subseteq \{0\}$, entonces dada $x \in A$, se tiene que $f_n(x) = 0$ para toda $n \in \omega$. Por otro lado, dada $x \in X\backslash A$, se tiene que $x \in X\backslash A_n$ para alguna $n \in \omega$. Entonces, para dicha $n$, $f_n(x) = 1$ y así, $x \notin \bigcap_{n\in\omega} f_n^{-1}[\{0\}]$. De manera que, como la intersección numerable de nulos es nula (véase Lema 1.2.4), $A$ es un nulo.

(b)$\Rightarrow$(a) Sea $A$ un subconjunto nulo de $X$, digamos $A = Z(f)$. Entonces, como $f^{-1}[\{0\}] = f^{-1}[\bigcap_{n\in\omega}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})] = \bigcap_{n\in\omega} f^{-1}[(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})]$, con $f^{-1}[(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})]$ abierto para cada $n \in \omega$ por la continuidad de $f$. Por lo tanto, $A = f^{-1}[\{0\}]$ es intersección numerable de abiertos. $\square$

**Definición 1.8.3.** La clase de las funciones continuas es llamada *clase* 0 *de Baire*. Para cada natural $n > 0$, las funciones que pueden ser consideradas como límites puntuales de sucesiones de funciones de la $(n-1)$-ésima clase de Baire, se llaman elementos de la *n-ésima clase de Baire*.

**Proposición 1.8.4.** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de la primera clase de Baire. Entonces $f^{-1}[A]$ es un $G_\delta$ ($F_\sigma$) para todo cerrado (abierto) $A$ contenido en $\mathbb{R}$.*

**Demostración.** Sean $\{f_n \in C(\mathbb{R}) : n \in \omega\}$ una colección de funciones tales que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $A \subseteq \mathbb{R}$ un abierto. Entonces, si para cada $n \in \omega\backslash\{0\}$, $F_n = \{x \in \mathbb{R} : d(x, \mathbb{R}\backslash A) \geqslant \frac{1}{n}\}$, $F_n$ es cerrado para toda $n \in \omega\backslash\{0\}$ y $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Es decir, $A$ es un conjunto $F_\sigma$.

Aseguramos que $f^{-1}[A] = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n>m} f_n^{-1}[F_m]$. En efecto, sea $x \in f^{-1}[A]$. Entonces $f(x) \in A$. Sea $n_0 \in \omega$ el primer natural tal que $x \in F_{n_0}$. De ocurrir que $x \notin \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n>m} f_n^{-1}[F_m]$, entonces para cada $m \in \omega$, existiría $n_m > m$ tal que $x \notin f_{n_m}^{-1}[F_m]$, de manera que $f_{n_m}(x) \notin F_m$. Además, como $F_1 \subseteq F_2 \subseteq ... \subseteq F_n \subseteq ...$ entonces

$$\lim_{m\to\infty} d(f_{n_m}(x), \mathbb{R}\backslash A) = 0.$$

Pero $f(x) \in F_{n_0}$, por lo tanto $\lim_{m\to\infty} f_{n_m}(x) \neq f(x)$, lo cual contradice nuestra elección de la sucesión $(f_n)_{n\in\omega}$. De esta manera,

$$f^{-1}[A] \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n>m} f_n^{-1}[F_m].$$

Para verificar que la otra contención se da, consideremos un elemento $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n>m} f_n^{-1}[F_m]$. Entonces $x \in \bigcap_{n>m} f_n^{-1}[F_m]$ para alguna $m \in \omega$, es decir, $f_n(x) \in F_m$ para toda $n > m$. Pero $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ y $F_m$ es cerrado, de modo que $f(x) \in F_m \subseteq A$, con lo cual queda probada la afirmación.

Como $f_n^{-1}[F_m]$ es cerrado para toda $n$ y toda $m$ en $\omega$, y la intersección de cerrados es cerrada, se tiene que $f^{-1}[A]$ es un conjunto $F_\sigma$.

Consideremos ahora un cerrado $F \subseteq \mathbb{R}$. De lo anterior, $f^{-1}[\mathbb{R}\backslash F] = \mathbb{R}\backslash f^{-1}[F]$ es un conjunto $F_\sigma$, digamos $\bigcup_{n\in\omega} E_n$. Entonces

$$f^{-1}[F] = \mathbb{R}\backslash \bigcup_{n\in\omega} E_n$$

$$= \bigcap_{n\in\omega} \mathbb{R}\backslash E_n,$$

donde $\mathbb{R}\backslash E_n$ es abierto para cada $n \in \omega$ y por lo tanto $f^{-1}[F]$ es $G_\delta$, con lo cual concluimos la prueba. $\square$

**Teorema 1.8.5.** *Cualquier $G_\delta$ ($F_\sigma$) $A$ de $\mathbb{R}$ no numerable, tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$.*

**Demostración.** Probaremos que todo conjunto $G_\delta$ no numerable contiene un conjunto de cardinalidad $2^{\aleph_0}$.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no numerable tal que $A = \bigcap_{n\in\omega} A_n$ con $A_n$ abierto para toda $n \in \omega$. La demostración consiste en la construcción de un conjunto homeomorfo al conjunto de Cantor (véase [R; sec.2.44, p.41]) a partir de $A$. Sea $A^* = \{x \in A : \text{para todo abierto } U \text{ con } x \in U,\ |U \cap A| > \aleph_0\}$, a éste último conjunto se le conoce como el *conjunto de los puntos de condensación de $A$*. Afirmamos que $A^* \neq \emptyset$ y que $A^* \subseteq der(A^*)$ (es decir, todos los puntos de $A^*$ son puntos de acumulación.

Supongamos que $A^* = \emptyset$, entonces para todo $x \in A$, existe un abierto $(a_x, b_x) \subseteq \mathbb{R}$, tal que $x \in (a_x, b_x)$ y $|(a_x, b_x) \cap A| \leqslant \aleph_0$. De esta manera, $\{(a_x, b_x) : x \in A\}$ es una cubierta abierta de $A$, y por la segundo numerabilidad de $\mathbb{R}$, se tiene que existe una colección $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ de elementos de $A$ tales que $A \subseteq \bigcup_{n\in\omega}(a_{x_n}, b_{x_n})$, con $|(a_{x_n}, b_{x_n}) \cap A| \leqslant \aleph_0$ para toda $n \in \omega$. Así, $|A| \leqslant \sum_{n\in\omega} |(a_{x_n}, b_{x_n}) \cap A| \leqslant \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, lo cual es una contradicción puesto que por hipótesis $A$ es no numerable. Por lo tanto, $A^* \neq \emptyset$.

Para verificar que $A^* \subseteq der(A^*)$, supongamos que existe un punto aislado $x \in A^*$ y sea $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ tal que $(a, b) \cap A^* = \{x\}$. Entonces, para toda $y \in [(a, b) \cap A]\backslash\{x\}$, se tiene que $y \notin A^*$ y por lo tanto existe $(a_y, b_y) \subseteq \mathbb{R}$ tal que $y \in (a_y, b_y)$ y $|(a_y, b_y) \cap A| \leqslant \aleph_0$. Usando el mismo argumento que para el inciso *(a)*, tendríamos que $|(a, b) \cap A| \leqslant \aleph_0$, lo cual es una contradicción pues $x \in (a, b) \cap A^*$ implica que $|(a, b) \cap A| > \aleph_0$ por definición de $A^*$. Por lo tanto, $A^* \subseteq der(A^*)$.

Construiremos el conjunto homeomorfo al conjunto de Cantor con base en estas dos propiedades de $A^*$.

Construiremos de manera inductiva intervalos con propiedades particulares. Ilustraremos el procedimiento con el caso base. Sean $E(0)$ y $E(1)$ intervalos cerrados (no unitarios) tales que:

1. $E(0) \cap E(1) = \emptyset$,
2. $E(0) \cap A^* \neq \emptyset$ y $E(1) \cap A^* \neq \emptyset$,
3. $E(0) \cup E(1) \subseteq A_0$,
4. la longitud de los intervalos $E(0)$ y $E(1)$ es menor que $\frac{1}{3}$.

Podemos considerar estos intervalos dado que $A^* \neq \emptyset$ y $A^*$ no tiene puntos aislados. En efecto, sea $x \in A^*$ y sea $I = (a, b)$ tal que $x \in I$. Entonces existe $y \neq x$ tal que $y \in I \cap A^*$. Hacemos $\delta = \frac{\text{mín}\{\frac{1}{3}, |x-y|\}}{2}$, $E_x = (x - \delta, x + \delta)$ y $E_y = (y - \delta, y + \delta)$. Así, los intervalos $E_x$ y $E_y$ son ajenos y tienen longitud menor que $\frac{1}{3}$. Ahora bien, $A^* \subseteq A \subseteq A_1$ y $A_1$ es un conjunto abierto, de manera que existen $a_x, b_x \in \mathbb{R}$ tales que $a_x < x < b_x$ y $[a_x, b_x] \subseteq E_x \cap A_1$. Similarmente, existen $a_y, b_y \in \mathbb{R}$ tales que $a_y < y < b_y$ y $[a_y, b_y] \subseteq E_y \cap A_1$.

Sean $E(0) = [a_x, b_x]$ y $E(1) = [a_y, b_y]$.

Habiendo elegido $2^n$ intervalos cerrados cada uno asociado a una $n$-ada de ceros y unos tales que:

1. si $E(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ y $E(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n)$ son tales que para alguna $m \leqslant n$, $\alpha_m \neq \beta_m$ entonces $E(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n) \cap E(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n) = \emptyset$,

2. $E(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n) \cap A^* \neq \emptyset$,

3. $E(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n) \subseteq A_n \cap E(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1})$,

4. la longitud de los intervalos $E(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ es menor que $\frac{1}{3^n}$.

Elegimos, de cada uno de los intervalos dados, dos intervalos de la misma manera que en el caso base. Entonces, por las mismas razones que en el caso base, los $2^{n+1}$ intervalos elegidos satisfacen las condiciones deseadas.

Observemos que por ser $E_n = \bigcup E(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ unión finita de $2^n$ intervalos cerrados, se tiene que $E_n$ es compacto. Llamemos $\mathcal{C}$ al conjunto $\bigcap_{n\in\omega} E_n$. Notemos que entonces $\mathcal{C}$ es cerrado. Además, como para cada $n \in \omega$ $E_n \subseteq A_n$, entonces $\mathcal{C} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} E_n \subseteq \bigcap_{n\in\omega} A_n = A$.

Aseguramos que $[0, 1]$ es biyectable con $\mathcal{C}$. En efecto, sea $x \in [0, 1]$ y consideremos su expansión binaria como la función $b_x : \omega \to \{0, 1\}$. Llamemos $E_n^x$ al intervalo $E(b_x(0), b_x(1), ..., b_x(n))$ y consideremos la sucesión $(E_n^x)_{n\in\omega}$. Tenemos que para cada $n \in \omega$, $E_{n+1}^x \subseteq E_n^x$ y que $\text{lím}_{n\to\infty} |E_n^x| = 0$. Esto es, tenemos una sucesión de intervalos anidados cuya longitud tiende a cero y por lo tanto, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{n\in\omega} E_n^x = \{r\}$. De esta manera, como $\bigcap_{n\in\omega} E_n^x \subseteq \bigcap_{n\in\omega} E_n$, $r \in \mathcal{C}$. Sea $g : [0, 1] \to \mathcal{C}$ dada por $g(x) = \bigcap_{n\in\omega} E_n^x$.

$g$ es inyectiva puesto que dados $x \neq y$, se tiene que $b_x \neq b_y$ y por lo tanto $\bigcap_{n\in\omega} E_n^x \neq \bigcap_{n\in\omega} E_n^y$.

Veamos que es sobre $\mathcal{C}$. Consideremos $x \in \mathcal{C}$. Dada $n \in \omega$, existe $b_n$ (una sucesión de ceros y unos) tal que $x \in E(b_n)$. Observemos que de ocurrir que para algunas $l, m, n \in \omega$, con $m < n$, $l < m$ y $b_m(l) \neq b_n(l)$, tendríamos que, por la construcción de tales intervalos (condición 1.), $E(b_m) \cap E(b_n) = \emptyset$ lo cual es una contradicción (puesto que se tiene que $x \in E(b_m) \cap E(b_n)$). Por lo tanto, $b_m \subseteq b_n$ y $b_x = \bigcup_{n\in\omega} b_n$. De modo que tenemos que para toda $n, m \in \omega$, si $x \in E(b_n) \cap E(b_m)$ y $m < n$ entonces $b_m \subseteq b_n$. Así, $b_x = \bigcup_{n\in\omega} b_n$ es una sucesión infinita de ceros y unos que representa a $x$ puesto que $x \in \bigcap_{n\in\omega} E(b_n)$. Por lo tanto, existe $z \in [0, 1]$ tal que $b_x = b_z$, esto es, existe $z \in [0, 1]$ tal que $g(z) = \bigcap_{n\in\omega} E_n^z = \bigcap_{n\in\omega} E(b_n) = x$. $\square$

## 1.9. Espacios $\mathbb{N}$-compactos

En el capítulo 7 se prueba que el espacio de Niemytzki es $\mathbb{N}$-compacto. El objetivo de esta sección es dar las herramientas necesarias para que dicha demostración sea breve y concreta.

Los espacios $\mathbb{N}$-compactos fueron introducidos por S. Mrówka en su artículo *On universal spaces* ([M4]) en el año 1956, donde se definió además el concepto general de espacio $E$-compacto.

Catorce años más tarde, contruyó un espacio de Mrówka $\mathbb{N}$-compacto (la noción de espacio de Mrówka será introducida en el capítulo 4).

**Definición 1.9.1.** Decimos que un espacio topológico $X$ es $\mathbb{N}$-*compacto* si es homeomorfo a un subespacio cerrado de algún producto de copias de $\mathbb{N}$.

**Observación 1.9.2.** Si $X$ es un espacio $\mathbb{N}$-compacto, entonces de las proposiciones 1.4.3 y 1.4.4, se tiene que $X$ es un espacio 0-dimensional.

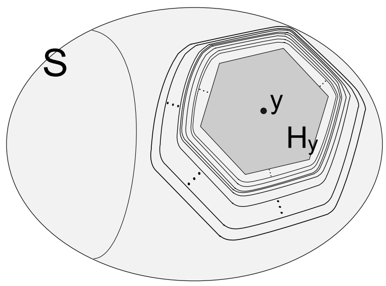
**Definición 1.9.3.** Dados un espacio topológico $X$ y $S$ un subespacio de $X$, decimos que $S$ es $G_\delta$-*cerrado* en $X$ si para cada $x \in X \backslash S$, existe un conjunto $G_\delta$ $G$ tal que $x \in G$ y $G \cap S = \emptyset$.

**Lema 1.9.4.** *Un subespacio $G_\delta$-cerrado $S$ de un espacio $\mathbb{N}$-compacto $X$ es $\mathbb{N}$-compacto.*

**Demostración.** Sean $Y = X \backslash S$ y $y \in Y$. Como $S$ es $G_\delta$-cerrado, existe un conjunto $G_\delta$ $E_y$ tal que $y \in E_y \subseteq Y$. Sea $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ una colección de abiertos en $X$ tales que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = E_y$.

Por la 0-dimensionalidad de $X$ (véase la Observación 1.9.2), para cada $n \in \omega \backslash \{0\}$, existe un conjunto abierto y cerrado $U_n \subseteq X$ tal que $y \in U_n \subseteq V_n$.

Reenumeremos los abiertos-cerrados $U_n$ de manera que $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ sea una sucesión decreciente de abiertos-cerrados y sea $H_y$ la intersección de dicha colección (es decir, $H_y = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$). Sea $N_y = X \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$.

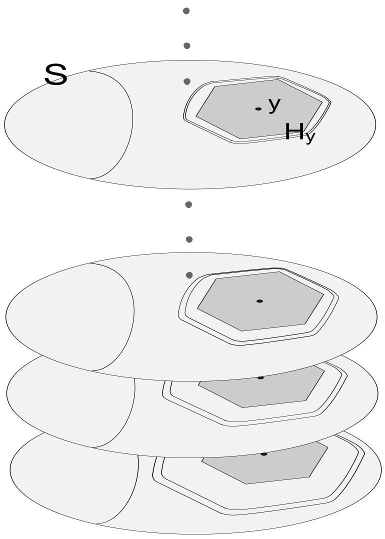


Aseguramos que $N_y$ es $\mathbb{N}$-compacto.

En efecto, como $X$ es un espacio $\mathbb{N}$-compacto, $X \times \mathbb{N}$ también es $\mathbb{N}$-compacto, donde

$$X \times \mathbb{N} \cong \bigoplus_{n\in\omega} X \times \{n\}$$

($\mu \in {}^{X\times\mathbb{N}}[\bigoplus_{n\in\omega} X \times \{n\}]$ dada por $\mu(\langle x, n\rangle) = \langle\langle x, n\rangle, n\rangle$ es un homeomorfismo). Sea $U_0 = X$. Consideremos el subespacio $\bigcup_{n\in\omega}((U_n \backslash U_{n+1}) \times \{n\})$ de $X \times \mathbb{N}$.




Notemos que la intersección de dicho subespacio con cada uno de los sumandos de $\bigoplus_{n\in\omega} X \times \{n\} = X \times \mathbb{N}$ es cerrada (puesto que cada $U_n$ es abierto y cerrado) y por lo tanto es un subespacio cerrado de $X \times \mathbb{N}$. Definamos

$$h : N_y \to \bigcup_{n\in\omega}((U_n \backslash U_{n+1}) \times \{n\}) \text{ como } h(z) = (z, n_z),$$

con $n_z$ el único natural tal que $z \in U_{n_z}$ y $z \notin U_{n_z+1}$.

De esta manera, $h$ es una función biyectiva. Veamos que $h$ es continua. Sea $z \in N_y$ y sea $W$ un abierto en $\bigcup_{n\in\omega}((U_n \backslash U_{n+1}) \times \{n\})$ tal que $h(z) \in W$. Como $W$ es abierto en $\bigcup_{n\in\omega}((U_n \backslash U_{n+1}) \times \{n\})$ y este último es abierto en $X \times \mathbb{N}$, tenemos que $W$ es abierto en $X \times \mathbb{N}$. Así que $W \cap (X \times \{n_z\})$ es abierto en $X \times \{n_z\}$ y $(z, n_z) \in W \cap (X \times \{n_z\})$. Como $(U_{n_z} \backslash U_{n_z+1}) \times \{n_z\}$ es un abierto en $X \times \{n_z\}$ que contiene a $(z, n_z)$, existe un abierto $V$ de $X$ tal que $(z, n_z) \in V \times \{n_z\} \subseteq W \cap [(U_{n_z} \backslash U_{n_z+1}) \times \{n_z\}]$. Notemos que $V \subseteq N_y$. Así, $V$ es un abierto en $N_y$ tal que $z \in V$ y $h[V] = V \times \{n_z\} \subseteq W$.

Veamos que es abierta. Sea $V$ un abierto en $N_y$, y consideremos $w \in h[V]$ con $w = h(z)$. Entonces $V \cap (U_{n_z} \backslash U_{n_z+1})$ es un vecindad abierta de $z$ contenida en $V$ tal que

$$h[V \cap (U_{n_z} \backslash U_{n_z+1})] = (V \cap (U_{n_z} \backslash U_{n_z+1})) \times \{n_z\},$$

que es abierto en $\bigcup_{n\in\omega}((U_n\backslash U_{n+1})\times\{n\})$ y está contenido en $h[V]$.

Por lo tanto, hemos probado que $N_y$ es homeomorfo al subespacio cerrado $\bigcup_{n\in\omega}((U_n\backslash U_{n+1})\times\{n\})$ del espacio $\mathbb{N}$-compacto $X\times\mathbb{N}$. Esto es, $N_y$ es $\mathbb{N}$-compacto.

Eligiendo así a $N_y$ para cada $y\in Y$, tenemos que $S=\bigcap_{y\in Y}N_y$. Más aún, como cada factor $N_y$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de un producto de copias de $\mathbb{N}$, el producto $\Pi_{y\in Y}N_y$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de un producto de productos de copias de $\mathbb{N}$ (véase la Proposición B.1.20), de manera que $\Pi_{y\in Y}N_y$ es también $\mathbb{N}$-compacto.

Sea $F=\{(x_y)_{y\in Y}\in\Pi_{y\in Y}N_y : x_y=x_{y'}$, para cada $y,y'\in Y\}$. Notemos que dado $(z_y)_{y\in Y}\notin F$, tenemos que existen $y_1,y_2\in Y$ tales que $z_{y_1}\neq z_{y_2}$ y por ser $X$ un espacio $T_2$, existen un par de abiertos ajenos $V_1$ y $V_2$ tales que $z_{y_1}\in V_1$ y $z_{y_2}\in V_2$. Sean $U_1=V_1\cap N_{y_1}$ y $U_2=V_2\cap N_{y_2}$. Entonces $z_{y_i}\in U_i$ y $U_i$ es abierto en $N_{y_i}$ para $i=1,2$. Sea $W=p_{y_1}^{-1}[U_1]\cap p_{y_2}^{-1}[U_2]$. Entonces $W$ es abierto en $\Pi_{y\in Y}N_y$ y $(z_y)_{y\in Y}\in W$. Además, dado $(a_y)_{y\in Y}\in W$, se tiene que $a_{y_1}\in U_1$ y $a_{y_2}\in U_2$, entonces $a_{y_1}\neq a_{y_2}$ y por lo tanto $W\subseteq(\Pi_{y\in Y}N_y)\backslash F$. Esto es, $F$ es cerrado en $\Pi_{y\in Y}N_y$.

Definimos $\varphi:S\to F$ como $\varphi(s)=(s_y)_{y\in Y}$ donde $s_y=s$ para toda $y\in Y$. Es claro que $\varphi$ es biyectiva. Además, se tiene que $\varphi$ seguida de cada una de las proyecciones $p_y$ es la identidad de $S$ en $S$, de modo que la composición de $\varphi$ con cada una de las proyecciones es continua y por lo tanto $\varphi$ es continua (véase [E; prop.2.3.6, p. 78]). Veamos que $\varphi^{-1}$ es continua en $(x_y)_{y\in Y}\in F$. Notemos que $\varphi^{-1}:F\to S$ es tal que $\varphi^{-1}((x_y)_{y\in Y})=x$ donde $x=x_y\in S$ para cada $y\in Y$. Sea $V$ un abierto en $S$ tal que $\varphi^{-1}((x_y)_{y\in Y})\in V$ y sea $U$ un abierto en $X$ tal que $V=U\cap S$. Entonces

$$(x_y)_{y\in Y}\in(p_{y_0}^{-1}[U\cap N_{y_0}])\cap F,$$

para cualquier $y_0\in Y$. Sea $(z_y)_{y\in Y}\in(p_{y_0}^{-1}[U\cap N_{y_0}])\cap F$, entonces $z_{y_0}\in U\cap N_{y_0}$ y $z_{y_0}=z$ para alguna $z\in S$, esto es $z_{y_0}=z\in U\cap N_{y_0}\cap S$. Pero $S\subseteq N_{y_0}$, de modo que $z\in U\cap S=V$. Es decir $\varphi^{-1}((z_y)_{y\in Y})\in V$, que implica que $\varphi^{-1}[(p_{y_0}^{-1}[U\cap N_{y_0}])\cap F]\subseteq V$. Por lo tanto, $\varphi$ es bicontinua y de esta forma, $S\cong F$.

Hemos probado entonces que $S$ es homeomorfo al subespacio cerrado $F$ del espacio $\mathbb{N}$-compacto $\Pi_{y\in Y}N_y$. Por lo tanto, $S$ es $\mathbb{N}$-compacto. $\square$

**Proposición 1.9.5.** *Si $X$ es un espacio $T_1$ primero numerable, entonces todo subespacio $Y$ de $X$ es $G_\delta$-cerrado.*

**Demostración.** Consideremos un subespacio $Y$ de $X$. Por la primero numerabilidad de $X$, cada elemento de $X$ posee una base local de vecindades numerable. Sin perder generalidad, podemos suponer que las bases locales de vecindades para los puntos de $X$ están formadas por abiertos de $X$. En particular, si $\{B_n : n\in\omega\}$ es una base de vecindades abiertas para algún $z\in X\backslash Y$, $\{z\}=\bigcap_{n\in\omega}B_n$. Esto es, cada conjunto unitario de $X\backslash Y$ es un $G_\delta$, lo que concluye la prueba. $\square$

**Corolario 1.9.6.** *Todo* $\mathbb{N}$*-compacto primero numerable es hereditariamente* $\mathbb{N}$*-compacto.*

**Demostración.** Se sigue directamente de los resultados 1.9.4 y 1.9.5. □

Antes de continuar, definimos los espacios realcompactos.

**Definición 1.9.7.** Decimos que un espacio topológico Tychonoff $X$ es *realcompacto* si para cada $p \in \beta X \backslash X$, existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ que no se puede extender continuamente a $X \cup \{p\}$.

La siguiente proposición tiene consecuencias que motivarán el tema central del capítulo 4.

**Proposición 1.9.8.** *Si un espacio topológico es realcompacto y pseudocompacto, entonces es compacto.*

**Demostración.** Sea $X$ un espacio realcompacto, pseudocompacto y supongamos que no es compacto. Entonces existe $p \in \beta X \backslash X$. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $f$ no se puede extender a $X \cup \{p\}$.

Como $X$ es pseudocompacto, $f$ es acotada, es decir, existe $n \in \omega$ tal que $f[X] \subseteq [-n, n]$. Entonces existe $\hat{f} : \beta X \to [-n, n]$ continua y tal que $\hat{f} \restriction_X = f$ (véase el Lema 1.3.8).

Pero entonces $\hat{f} \restriction_{X \cup \{p\}}$ es una extensión continua de $f$ a $X \cup \{p\}$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $X$ es compacto. □

Los siguientes dos resultados son esenciales para probar el último Teorema de esta sección. Sin embargo, la prueba de cada uno de ellos es bastante extensa por lo que no las incluiremos en este trabajo. El lector interesado puede consultarlas en [MN; teo. 3.10, p.470] y [N; cor. 2, p.184] respectivamente.

**Teorema 1.9.9.** *Todo espacio fuertemente* $0$*-dimensional y realcompacto es* $\mathbb{N}$*-compacto.*

**Teorema 1.9.10.** *Todo espacio regular y Lindelöf es realcompacto.*

**Teorema 1.9.11.** *Sea* $X$ *un espacio* $T_1$*, tal que* $X$ *es un espacio* $0$*-dimensional y Lindelöf. Entonces* $X$ *es* $\mathbb{N}$*-compacto.*

**Demostración.** De la Proposición 1.4.8, tenemos que $X$ es fuertemente 0-dimensional, y por tanto es Tychonoff. De esta manera, del Teorema 1.9.10, $X$ es realcompacto. Entonces, del Teorema 1.9.9, $X$ es $\mathbb{N}$-compacto. □

# Capítulo 2

# Familias casi ajenas y Axioma de Martin

En este capítulo definiremos y veremos propiedades de uno de los conceptos más importantes de la combinatoria infinita, las familias casi ajenas, cuyo papel será fundamental en los siguientes capítulos. Enunciaremos y veremos algunas de las consecuencias del axioma de Martin, un enunciado independiente de los axiomas de $ZFC$ (es decir, los axiomas básicos de la Teoría de Conjuntos), nombrado así en honor a Donald A. Martin. Con tal propósito, definiremos también órdenes parciales y filtros de órdenes parciales.

## 2.1. Familias casi ajenas

**Definición 2.1.1.** Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\omega$ es una *familia casi ajena* si cada elemento en $\mathcal{A}$ es infinito y para cualesquiera dos elementos distintos $A, B \in \mathcal{A}$ se cumple que $\mid A \cap B \mid < \aleph_0$.

Un ejemplo de una familia casi ajena en $\omega$ de cardinalidad $\aleph_0$ es la colección $\mathcal{A} = \{\{p^n : n \in \omega\} : p$ es primo $\}$. En efecto, todo elemento de $\mathcal{A}$ es infinito y dados $A, B \in \mathcal{A}$ distintos, digamos $A = \{p^n : n \in \omega\}$ y $B = \{q^m : m \in \omega\}$, se tiene que $p \neq q$, de modo que $A \cap B = \emptyset$; de lo contrario, $p^n$ sería igual a $q^m$ para ciertas $m, n \in \omega$, contradiciendo el teorema fundamental de la aritmética. Por último, $\mathcal{A}$ es infinita puesto que el conjunto de primos lo es.

Observemos además que dada una familia casi ajena $\mathcal{A}$ de $\omega$, se tiene que $\mathcal{A} \subseteq P(\omega)$, de modo que $\mid \mathcal{A} \mid \leq 2^{\aleph_0}$.

**Proposición 2.1.2.** *Existe una familia casi ajena $\mathcal{A}$ en $\omega$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$.*

**Demostración.** Sea $h : \mathbb{Q} \to \omega$ una función biyectiva. Para cada número irracional $r$, fijemos una sucesión $s_r = (q_m^{(r)})_{m \in \omega}$ de números racionales que converge a $r$ y tal que $q_m^{(r)} \neq q_{m'}^{(r)}$, para toda $m \neq m'$. Definimos $\mathcal{A} = \{h[\{q_m^{(r)} : m \in \omega\}] : r \in \mathbb{I}\}$, donde $\mathbb{I}$ denota al conjunto de números irracionales (i.e. $\mathbb{I} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ). Aseguramos que $\mathcal{A}$ es un familia casi ajena de $\omega$.

Sea $A \in \mathcal{A}$. Entonces $A = h[\{q_m^{(r)} : m \in \omega\}]$ para alguna $r \in \mathbb{I}$ fija. Como $h$ es biyectiva, $h \restriction_{\{q_m^{(r)} : m \in \omega\}}$ lo es, de modo que $|A| = |\{q_m^{(r)} : m \in \omega\}| = \aleph_0$ y así, tenemos que todo elemento de $\mathcal{A}$ es infinito.

Sean $A, B \in \mathcal{A}$, tales que $A \neq B$. Entonces $A = h[s_r],\ B = h[s_t]$ para ciertos $r, t \in \mathbb{I}$, con $r \neq t$.

Veamos que $|A \cap B| < \aleph_0$. Para ello, supongamos que $|A \cap B| = \aleph_0$. Entonces existen subsucesiones $s_{r_n} = (q_{m_n}^{(r)})_{n\in\omega}$ y $s_{t_n} = (q_{m_n}^{(t)})_{n\in\omega}$ de $s_r$ y $s_t$ respectivamente, a saber las consistentes de los elementos de $h^{-1}[A \cap B]$, tales que $h[s_{r_n}] = h[s_{t_n}]$ donde para toda $n \neq n'$ y para toda $i \in \{r, t\}$, $q_{m_n}^{(i)} \neq q_{m_{n'}}^{(i)}$. Así, por la inyectividad de $h$, se tiene que $s_{r_n} = s_{t_n}$. Pero $(q_{m_n}^{(r)}) \to r$, por tanto, como $(q_{m_n}^{(r)}) = (q_{m_n}^{(t)})$, tenemos que $(q_{m_n}^{(t)}) \to r$, que es una contradicción pues $r \neq t$ y $s_t$ converge a $t$. Por tanto, $|A \cap B| < \aleph_0$ y así, hemos probado la afirmación.

Además, a cada $r \in \mathbb{I}$, podemos asociarle inyectivamente la imagen bajo $h$ de una sucesión $s_r$, que es un elemento de $\mathcal{A}$, con lo que podemos concluir que $|\mathbb{I}| \leq |\mathcal{A}|$, y de la observación antes hecha, esto implica que $|\mathcal{A}| = 2^{\aleph_0}$.

Por tanto, $\mathcal{A}$ es la familia casi ajena de la cardinalidad buscada. $\square$

**Observación 2.1.3.** Si consideramos un subconjunto numerable $\mathcal{N}$ de $\omega$, podemos definir una biyección de $\mathbb{Q}$ en $\mathcal{N}$, digamos $g$, fijar para cada número irracional $r$, una sucesión $s_r = (q_m^{(r)})_{m\in\omega}$ de números racionales que converge a $r$ y tal que $q_m^{(r)} \neq q_{m'}^{(r)}$, para toda $m \neq m'$, y definir $\mathcal{B} = \{g[\{q_m^{(r)} : m \in \mathcal{N}\}] : r \in \mathbb{I}\}$.

Entonces se sigue, de una prueba similar a la de la Proposición 2.1.2, que $\mathcal{B}$ es un familia casi ajena de cardinalidad $2^{\aleph_0}$ y así, podemos concluir que dado un subconjunto numerable de $\omega$, existe una familia casi ajena de tal subconjunto de cardinalidad $\mathfrak{c}$.

**Definición 2.1.4.** Una familia casi ajena $\mathcal{A}$ de $\omega$ es *maximal* si para cualquier subconjunto infinito $H$ de números naturales, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap H$ es infinito.

**Proposición 2.1.5.** *Cada familia casi ajena $\mathcal{A}$ de $\omega$ está contenida en una familia casi ajena $\mathcal{B}$ que es maximal.*

**Demostración.** Sea $\mathfrak{A}$ la colección de familias casi ajenas sobre $\omega$ que contienen a $\mathcal{A}$. Tenemos que $\mathfrak{A}$ está parcialmente ordenado por la contención y es diferente de $\emptyset$ pues $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$. Sea $\mathscr{C}$ una $\subseteq$-cadena de familias casi ajenas. Aseguramos que $\bigcup\mathscr{C}$ es cota superior de $\mathscr{C}$. En efecto, sean $A, B \in \bigcup\mathscr{C}$. Entonces $A \in \mathcal{A}$ para alguna $\mathcal{A} \in \mathscr{C}$ y $B \in \mathcal{B}$ para alguna $\mathcal{B} \in \mathscr{C}$ (de manera que cada elemento de $\bigcup\mathscr{C}$ es infinito). Entonces, siendo $\mathscr{C}$ una $\subseteq$-cadena, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Entonces $A, B \in \mathcal{B}$ y así, $|A \cap B| < \aleph_0$. Por tanto, $\bigcup \mathscr{C}$ es una familia casi ajena y así, es cota superior de $\mathscr{C}$.

De manera que, por el lema de Zorn, existe un elemento $\subseteq$-maximal de $\mathfrak{A}$, digamos $\mathscr{B}$. Entonces la familia casi ajena $\mathcal{A}$ está contenida en $\mathscr{B}$.

Sea $H \subseteq \omega$ tal que $|H| = \aleph_0$. Entonces, si $H \in \mathscr{B}$, se tiene un elemento de $\mathscr{B}$ cuya intersección con $H$ es infinita, si no, entonces necesariamente existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $|B \cap H| = \aleph_0$, de otra forma, tendríamos que $\mathscr{B} \cup \{H\}$ es una familia casi ajena contradiciendo la $\subseteq$-maximalidad de $\mathscr{B}$. $\square$

**Observación 2.1.6.** Sea $\mathcal{N} \subseteq \omega$ un conjunto numerable. Entonces de argumentos análogos a los de las pruebas de las proposiciones 2.1.5 y 2.1.2, existe una familia casi ajena maximal de cardinalidad $2^{\aleph_0}$ en $\mathcal{N}$.

**Proposición 2.1.7.** *Ninguna familia casi ajena numerable en $\omega$ es maximal.*

**Demostración.** Consideremos $\mathcal{A}$ una familia casi ajena numerable y $\{A_n : n \in \omega\}$ una enumeración de ella. Sea $B_n = A_n \backslash \bigcup_{m \in n} A_m$. Observemos que:

$$\begin{aligned} B_n &= (A_n \backslash \bigcup_{m\in n} A_n) \cup (A_n \backslash A_n) \\ &= A_n \backslash [(\bigcup_{m\in n} A_m) \cap A_n] \\ &= A_n \backslash \bigcup_{m\in n} (A_m \cap A_n) \end{aligned}$$

Y que $|\bigcup_{m\in n}(A_m \cap A_n)| \leq \sum_{m\in n} |A_m \cap A_n| < \aleph_0$ (por ser $A_n$ y $A_m$ elementos de $\mathcal{A}$), mientras que $|A_n| = \aleph_0$, de manera que $B_n \neq \emptyset$.

Elegimos para cada $n \in \omega$, $b_n \in B_n$. Observemos que como $B_n \cap B_m = \emptyset$ por construcción, $b_i \neq b_j$ para toda $i \neq j$, con $i, j \in \omega$.

Definimos $D = \{b_i : i \in \omega\}$, entonces $|D| = \aleph_0$. Por otra parte, observemos que si $b_n \in A_m$, entonces $m \geqslant n$. De manera que $D \cap A_m \subseteq \{b_i : i \leq m\}$, y así, tenemos que $D$ es tal que:

(i) $D \notin \mathcal{A}$ y

(ii) $|D \cap A| < \aleph_0$ para toda $A \in \mathcal{A}$.

Y por tanto, $\mathcal{A}$ no es maximal. $\square$

**Definición 2.1.8.** Definimos el cardinal $\mathfrak{a}$ como $\mathfrak{a} = \text{mín}\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal infinita en $\omega\}$.

**Corolario 2.1.9.** $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{a} \leqslant 2^{\aleph_0}$.

**Demostración.** Tenemos que de la Proposición 2.1.7, $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{a}$. Por otra parte, como para toda $\mathcal{A} \subseteq P(\omega)$, $|\mathcal{A}| \leqslant 2^{\aleph_0}$, entonces $\mathfrak{a} \leqslant 2^{\aleph_0}$, lo que completa la prueba. $\square$

**Corolario 2.1.10.** *Suponiendo la hipótesis del continuo,* $\mathfrak{a} = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

**Demostración.** Del corolario anterior, $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{a} \leqslant 2^{\aleph_0}$, entonces, de $(HC)$, se tiene el resultado. □

## 2.2. Axioma de Martin y familias casi ajenas

El llamado Axioma de Martin (que denotaremos por $AM$) es un enunciado de tipo combinatorio que afirma que para cualquier cardinal $\kappa$ menor que el cardinal del continuo y para cualquier familia de a lo más $\kappa$ subconjuntos "densos"en un orden parcial que tenga una propiedad (llamada *c.c.c.*), existe un subconjunto del orden parcial, que es "genérico"en el sentido de intersecar a todos los densos.

Para presentar con precisión este axioma, definimos antes los conceptos *orden parcial*, *c.c.c.*, *subconjunto denso* y *filtro genérico.*

1. En lo que resta de este capítulo, $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ denotará un orden parcial reflexivo no vacío y $<$ el orden parcial estricto asociado a $\leq$ (i.e. para $x, y \in \mathbb{P}$, $x < y$ si y sólo si $x \leq y$ y $x \neq y$). Dadas $p, q \in \mathbb{P}$, si $p \leq q$, decimos que *$p$ extiende a $q$.*

2. Decimos que $p$ y $q$ son *compatibles* si y sólo si existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$, en cuyo caso decimos que $r$ es *extensión común* de $p$ y de $q$. Decimos que $p$ y $q$ son *incompatibles*, denotado $p \perp q$, si y sólo si no son compatibles.

3. Una *anticadena* en $\mathbb{P}$ es un subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ tal que para cualesquiera $p, q \in A$, si $p \neq q$ entonces $p \perp q$.

4. $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ tiene la *condición de cadena contable*, abreviada *c.c.c.*, si y sólo si toda anticadena en $\mathbb{P}$ es a lo más numerable.

5. $D \subseteq \mathbb{P}$ es *denso* en $\mathbb{P}$ si para toda $p \in \mathbb{P}$ existe $q \leq p$ tal que $q \in D$.

6. $G \subseteq \mathbb{P}$ es un *filtro* en $\mathbb{P}$ si y sólo si se satisfacen:
   (i) para cualesquiera $p, q \in G$ existe $r \in G$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$ y
   (ii) para toda $p \in G$ y para toda $q \in \mathbb{P}$, si $q \geq p$, entonces $q \in G$.

7. El axioma de Martin $(AM)$ es el enunciado:

   *Para todo $\kappa < 2^{\aleph_0}$, para cualquier orden parcial $\mathbb{P}$ no vacío que cumple c.c.c. y para cualquier familia $\mathcal{D}$ de a lo más $\kappa$ subconjuntos densos en $\mathbb{P}$, existe un filtro $G$ sobre $\mathbb{P}$ tal que para toda $D \in \mathcal{D}$, $G \cap D \neq \emptyset$.*

   Tal filtro se conoce como *filtro genérico* o filtro *$\mathcal{D}$-genérico* sobre $\mathbb{P}$. El enunciado de $AM$ para un cardinal particular $\kappa$, se denota $AM(\kappa)$, con esta notación, podemos reenunciar $AM$ como:

*para todo $\kappa < 2^{\aleph_0}$, se satisface el enunciado $AM(\kappa)$.*

**Teorema 2.2.1.** *(a) Si $\kappa < \kappa'$ entonces $AM(\kappa')$ implica $AM(\kappa)$.*

*(b) $AM(2^{\aleph_0})$ es falso.*

*(c) $AM(\aleph_0)$ es verdadero (a este enunciado se le conoce también como el Lema de Rasiowa–Sikorski).*

**Demostración.** Para probar *(a)*, supongamos que $\kappa < \kappa'$, que $AM(\kappa')$ es verdadero y consideremos $(\mathbb{P}, \leq)$ un orden parcial no vacío que satisface la c.c.c. y $\mathscr{D}$ una familia de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ con cardinalidad menor o igual que $\kappa$. Entonces, $\mathscr{D}$ es una familia de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ con cardinalidad menor (o igual) que $\kappa'$ y por tanto existe un filtro $G$ en $\mathbb{P}$ tal que para toda $D \in \mathscr{D}$, $G \cap D \neq \emptyset$. Esto es, $AM(\kappa)$ es verdadero.

Para probar *(b)*, consideramos $\mathbb{P}$ el conjunto de funciones parciales finitas de $\omega$ en 2, i.e. $\mathbb{P} = \{p : p \subseteq \omega \times 2 \text{ y } |p| < \omega \text{ y } p \text{ es una función}\}$, y el siguiente orden: para cada $p, q \in \mathbb{P}$, $p \leq q$ si y sólo si $q \subseteq p$. Entonces $p$ y $q$ son compatibles si y sólo si coinciden en $dom(p) \cap dom(q)$, en cuyo caso $p \cup q$ es una extensión común de $p$ y $q$. Además, como $\mathbb{P}$ es un conjunto numerable, toda anticadena en $\mathbb{P}$ es a lo más numerable, i.e. $\mathbb{P}$ satisface la c.c.c.

Para cada $n \in \omega$, sea $D_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in dom(p)\}$. Como cada $p \in \mathbb{P}$ puede extenderse a una función con $n$ en su dominio, $D_n$ es denso. Ahora, para cada función $h \in {}^{\omega}2$, sea $D_h = \{p \in \mathbb{P} : \text{existe } n \in dom(p) \text{ tal que } p(n) \neq h(n)\}$. Entonces dada $p \in \mathbb{P}$, se tiene que si $p \neq h\restriction_{dom(p)}$, existe $q \in D_h$ tal que $q \leq p$, a saber, $p$ mismo. Por otra parte, si $p = h\restriction_{dom(p)}$, entonces consideramos $n \in \omega \setminus dom(p)$ y hacemos $q = p \cup \{(n, \overline{h(n) + 1})\}$, donde la barra indica tomar el residuo módulo 2. Entonces claramente $q \leq p$ y $q \in D_h$. De manera que cada $D_n$ y cada $D_h$ es denso en $\mathbb{P}$. Así, si $AM(2^{\aleph_0})$ fuera cierto, tendríamos que existe un $\mathbb{P}$-filtro $G$ que interseca a cada $D_n$ y a cada $D_h$, lo que significaría que $f_G = \bigcup G$ es una función con dominio en $\omega$ y rango $\{0, 1\}$ distinta de cualquier $h \in {}^{\omega}2$ que es una contradicción.

Para (c), consideramos tanto $\mathbb{P}$ como cada $D_n$ de la misma forma que en *(b)*. Sea $\mathscr{D} = \{D_n : n \in \omega\}$ y definamos inductivamente sobre $n$, $p_n \in \mathbb{P}$ de manera que $p_0$ sea un elemento aritrario de $\mathbb{P}$ (que es posible pues $\mathbb{P} \neq \emptyset$), y $p_{n+1}$ sea una extensión de $p_n$ tal que $p_{n+1} \in D_n$; que es posible puesto que $D_n$ es denso. Entonces se tiene que $p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq ....$ Sea $G$ el filtro generado por $\{p_n : n \in \omega\}$; i.e., $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists n(q \geq p_n)\}$; entonces $G$ es un filtro y para toda $n \in \omega$, $G \cap D_n \neq \emptyset$. $\square$

Del teorema anterior, se tiene que si $AM(\kappa)$ es verdadero, entonces de *(b)*, $\kappa \neq 2^{\aleph_0}$. Por otra parte, si $AM(\kappa)$, de *(a)* $2^{\aleph_0} \not< \kappa$. Así, podemos concluir que si $AM(\kappa)$ es verdadero, $\kappa < 2^{\aleph_0}$. De esto se desprende que, si $AM(\aleph_1)$ es verdadero, $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$, es decir, $AM(\aleph_1)$ implica la negación de la hipótesis del continuo.

La prueba del siguiente teorema puede consultarse en [J; p.277].

**Teorema 2.2.2.** ***(Generalización de la Categoría de Baire)*** *Sea $\kappa < 2^{\aleph_0}$. Si el enunciado $AM(\kappa)$ es verdadero entonces dada una familia $\{D_\alpha \subseteq \mathbb{R} : \alpha \in \kappa\}$ de subconjuntos densos abiertos, se tiene que $\bigcup_{\alpha\in\kappa} D_\alpha$ es denso.*

Como corolario, tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 2.2.3.** ***(Teorema de la Categoría de Baire)*** *La intersección de $\aleph_0$ subconjuntos densos abiertos de $\mathbb{R}$ es un conjunto denso.*

Pasaremos ahora a ver una de las aplicaciones de $AM$ que tiene que ver con familias casi ajenas.

**Definición 2.2.4.** Sea $\mathcal{A} \subseteq P(\omega)$ una familia casi ajena sobre $\omega$. El *orden parcial de conjuntos casi ajenos* denotado por $\mathbb{P}_\mathcal{A}$, es el conjunto $\{\langle s, F\rangle : s \subseteq \omega, |s| < \aleph_0, F \subseteq \mathcal{A} \text{ y } |F| < \aleph_0\}$, donde $\langle s', F'\rangle \leq \langle s, F\rangle$ si y sólo si $s \subseteq s'$, $F \subseteq F'$ y para toda $x \in F$ se tiene que $x \cap s' \subseteq s$.

Ahora, es claro que la relación $\leq$ sobre $\mathbb{P}_\mathcal{A}$ es reflexiva y antisimétrica. Verifiquemos que es transitiva:

Consideremos $\langle r, F\rangle, \langle s, H\rangle, \langle t, I\rangle$ elementos de $\mathbb{P}_\mathcal{A}$, tales que $\langle r, F\rangle \leq \langle s, H\rangle$ y $\langle s, H\rangle \leq \langle t, I\rangle$. Entonces, por definición de $\leq$, $s \subseteq r$, $H \subseteq F$ y para toda $x \in H$, $x \cap r \subseteq s$ y por otro lado, $t \subseteq s$, $I \subseteq H$ y para toda $x \in I$, $x \cap s \subseteq t$. De manera que $t \subseteq r$, $I \subseteq F$ y además, dado $x \in I \subseteq H$, se tiene que $x \cap r = x \cap (x \cap r) \subseteq x \cap s \subseteq t$. Por tanto $\langle r, F\rangle \leq \langle t, I\rangle$ y entonces se tiene que en efecto, $\langle \mathbb{P}_\mathcal{A}, \leq\rangle$ es un orden parcial.

**Lema 2.2.5.** *En $\mathbb{P}_\mathcal{A}$, $\langle s_1, F_1\rangle$ y $\langle s_2, F_2\rangle$ son compatibles si y sólo si para toda $x \in F_1$, $x \cap s_2 \subseteq s_1$ y para toda $x \in F_2$, $x \cap s_1 \subseteq s_2$, en cuyo caso $\langle s_1 \cup s_2, F_1 \cup F_2\rangle$ es una extensión común.*

**Demostración.** Supongamos que $\langle s_1, F_1\rangle$ y $\langle s_2, F_2\rangle$ son compatibles. Entonces existe $\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_\mathcal{A}$ tal que $\langle s, F\rangle \leq \langle s_1, F_1\rangle$ y $\langle s, F\rangle \leq \langle s_2, F_2\rangle$. Por lo tanto, $s_1 \subseteq s$, $s_2 \subseteq s$, $F_1 \subseteq F$, $F_2 \subseteq F$, para toda $x \in F_1$, $x \cap s \subseteq s_1$ y para toda $x \in F_2$, $x \cap s \subseteq s_2$. De esta manera, para toda $x \in F_1$, $x \cap s_2 \subseteq x \cap s \subseteq s_1$ y similarmente, para toda $x \in F_2$, $x \cap s_1 \subseteq s_2$, que prueba la necesidad.

Supongamos ahora que para toda $x \in F_1$, $x \cap s_2 \subseteq s_1$ y para toda $x \in F_2$, $x \cap s_1 \subseteq s_2$. Entonces, para toda $x \in F_1$, $x \cap (s_1 \cup s_2) = (x \cap s_1) \cup (x \cap s_2) \subseteq s_1$ y análogamente, para toda $x \in F_2$, $x \cap (s_1 \cup s_2) \subseteq s_2$. Entonces, como para cada $i = 1, 2$, $s_i \subseteq s_1 \cup s_2$ y $F_i \subseteq F_1 \cup F_2$, $\langle s_1 \cup s_2, F_1 \cup F_2\rangle$ es extensión común de $\langle s_1, F_1\rangle$ y de $\langle s_2, F_2\rangle$, con lo que concluimos la prueba. □

La condición de compatibilidad es equivalente a:

*Para toda $x \in F_1$ y para toda $n \in x \backslash s_1$ se tiene que $n \notin s_2$ y para toda $x \in F_2$, se tiene que $x \cap s_1 \subseteq s_2$*

**Definición 2.2.6.** Si $G$ es un filtro en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$, sea $d_G = \bigcup\{s :$ existe $F \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\langle s, F\rangle \in G\}$.

**Lema 2.2.7.** *Si $G$ es un filtro en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ y $\langle s, F\rangle \in G$, entonces para toda $x \in F$ se tiene que $x \cap d_G \subseteq s$.*

**Demostración.** Si $\langle s', F'\rangle \in G$, entonces $\langle s', F'\rangle$ y $\langle s, F\rangle$ son compatibles y así, por el Lema 2.2.5, $x \cap s' \subseteq s$ para toda $x \in F$. □

**Definición 2.2.8.** Sea $x \in \mathcal{A}$, entonces definimos $D_x$ como el conjunto $\{\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}} : x \in F\}$.

**Lema 2.2.9.** *Sea $G$ un filtro en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ tal que $G \cap D_x \neq \emptyset$, entonces $|x \cap d_G| < \aleph_0$.*

**Demostración.** Se sigue del Lema 2.2.7. □

**Lema 2.2.10.** *Si $x \in \mathcal{A}$, entonces $D_x$ es denso en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$.*

**Demostración.** Para cualquier $\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$, tenemos que $\langle s, F \cup \{x\}\rangle \leq \langle s, F\rangle$, y claramente $x \in F \cup \{x\}$ de manera que $\langle s, F \cup \{x\}\rangle \in D_x$. Por tanto $D_x$ es denso en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$. □

**Lema 2.2.11.** *$\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ tiene la c.c.c.*

**Demostración.** Supongamos que $\langle s_\xi, F_\xi\rangle$ para $\xi < \omega_1$, fueran incompatibles dos a dos. Entonces, por el Lema 2.2.5, todos los $s_\xi$ serían distintos, lo cual es imposible. □

**Teorema 2.2.12.** *Sea $\mathcal{A} \subseteq P(\omega)$ una familia casi ajena de cardinalidad $\kappa$, donde $\aleph_0 \leqslant \kappa < 2^{\aleph_0}$. Entonces suponiendo $AM(\kappa)$, $\mathcal{A}$ no es maximal.*

**Demostración.** Como $\mathcal{A}$ es por lo menos numerable y sus elementos se intersecan en un conjunto finito, para todo subconjunto finito $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$, $|\omega \setminus \bigcup \mathcal{F}| = \aleph_0$.

Para cada $n \in \omega$, sea $E_n = \{\langle s, \mathcal{F}\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}} : s \not\subseteq n\}$.

Consideremos una $n \in \omega$ fija. Notemos que dada $\langle s, \mathcal{H}\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ arbitraria, si $m \in \omega \setminus \bigcup \mathcal{H}$ es tal que $m > n$, se tiene que $s \cup \{m\} \subseteq \omega$ y $|s \cup \{m\}| < \aleph_0$. De esta manera, $\langle s \cup \{m\}, \mathcal{H}\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$. Además, $s \subseteq s \cup \{m\}$ y para toda $x \in \mathcal{H}$, $x \cap (s \cup \{m\}) = (x \cap s) \cup (x \cap \{m\}) \subseteq s$, esto es, $\langle s \cup \{m\}, \mathcal{H}\rangle$ extiende a $\langle s, \mathcal{H}\rangle$ (o bien $\langle s \cup \{m\}, \mathcal{H}\rangle \leq \langle s, \mathcal{H}\rangle$). Más aún, como $s \cup \{m\} \not\subseteq n$, $\langle s \cup \{m\}, \mathcal{H}\rangle \in E_n$. Por lo tanto, para cada elemento de $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$, existe uno en $E_n$ que lo extiende y por lo tanto $E_n$ es denso en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$.

Por lo argumentado en el párrafo anterior y por el Lema 2.2.10, $\{D_x : x \in \mathcal{A}\} \cup \{E_n : n \in \omega\}$ es una familia de $\kappa$ subconjuntos densos en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$. Como se satisface $AM(\kappa)$, existe un filtro $G$ en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ que interseca a todos los elementos en $\{D_x : x \in \mathcal{A}\} \cup \{E_n : n \in \omega\}$.

Ahora bien, para cada $s \subseteq \omega$ tal que $\langle s, \mathcal{F}\rangle \in G$, $s \subseteq d_G$ (véase la Definición 2.2.6). Como $G$ interseca a todos los elementos de $E_n$, tenemos que $d_G \nsubseteq n$ para toda $n \in \omega$. Por lo tanto $d_G$ es infinito. Además, por el Lema 2.2.9, $d_G \cap x$ es finito para $x \in \mathcal{A}$. Entonces $d_G$ es un subconjunto infinito de $\omega$ cuya intersección con cualquier elemento de $\mathcal{A}$ es finita. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ no es maximal. $\square$

Recordemos que $\mathfrak{a} = \text{mín}\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal infinita en $\omega\}$ (véase la Definición 2.1.8). Veremos un resultado más respecto a este cardinal.

**Corolario 2.2.13.** *Supongamos AM y la negación de HC. Entonces* $\aleph_1 < \mathfrak{a} = 2^{\aleph_0}$.

**Demostración.** Del Corolario 2.2.12, tenemos que $\mathfrak{a} = 2^{\aleph_0}$. De manera que como de la negación de $HC$ se tiene que $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$, tenemos el resultado. $\square$

También es posible demostrar que $\aleph_1 < \mathfrak{a} < 2^{\aleph_0}$ y $\aleph_1 = \mathfrak{a} < 2^{\aleph_0}$ son consistentes con $ZFC$ (los axiomas básicos de la Teoría de Conjuntos). Con respecto a esto, se pueden consultar las fuentes [K], [vD] y [RG].

# Capítulo 3

# Los espacios de Mrówka y sus propiedades topológicas básicas

Los espacios de Mrówka fueron considerados en un principio, como se mencionó en la introducción, para dar un ejemplo de un espacio pseudocompacto y no numerablemente compacto, sin embargo, estos espacios tienen muchas más características interesantes, algunas de las cuales estudiaremos en este capítulo.

Por otra parte, veremos ejemplos de estos espacios que son homeomorfos a espacios que se pueden considerar cotidianos, con el propósito de esclarecer la belleza del estudio de los espacios de Mrówka y sus propiedades.

## 3.1. La definición de $\psi(\mathcal{A})$

Dada una familia casi ajena $\mathcal{A}$ en $\omega$ podemos asociarle un espacio topológico $(\psi(\mathcal{A}), \tau_\psi)$ como sigue:

(i) para cada elemento $A \in \mathcal{A}$, tomamos un punto $e_A \in \mathbb{R}\backslash\omega$, de modo que $e_A \neq e_B$ si $A \neq B$.

(ii) el conjunto base $\psi(\mathcal{A})$ es igual a $\{e_A : A \in \mathcal{A}\} \cup \omega$.

(iii) a cada $x \in \psi(\mathcal{A})$ le asociamos una colección $\mathcal{B}_\psi(x)$ de subconjuntos de $\psi(\mathcal{A})$ como sigue:
si $x \in \omega$, $\mathcal{B}_\psi(x) = \{\{x\}\}$, y
si $x = e_A$, $\mathcal{B}_\psi(x) = \{\{e_A\} \cup D : D \subseteq A \ y \ \mid A\backslash D \mid < \aleph_0\}$.

**Notación.** En adelante, el conjunto $\{e_A : A \in \mathcal{A}\}$ para alguna familia casi ajena $\mathcal{A}$, será denotado por $M_{\mathcal{A}}$.

Aseguramos que la familia de colecciones $\mathcal{B}_\psi(x)$, $x \in \psi(\mathcal{A})$, define en $\psi(\mathcal{A})$ una topología en la cual cada $\mathcal{B}_\psi(x)$ es una base de vecindades abiertas de $x$.

En efecto, se tiene que para cada $x \in \psi(\mathcal{A})$, las colecciones $\mathcal{B}_\psi(x)$, satisfacen las siguientes condiciones:

*(i)* para cada $V \in \mathcal{B}_\psi(x), x \in V$,

*(ii)* si $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_\psi(x)$, entonces existe $V_3 \in \mathcal{B}_\psi(x)$ tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$,

*(iii)* para cada $V \in \mathcal{B}_\psi(x)$ si $y \in V$, entonces existe $W \in \mathcal{B}_\psi(y)$ tal que $W \subseteq V$.

**Demostración.** El inciso *(i)* es claro.

Para probar *(ii)*, sean $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_\psi(x)$. Se tienen dos casos:

caso 1: Si $x \in \omega$, entonces $V_3 = \{x\} \in \mathcal{B}_\psi(x)$ es tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2 = \{x\}$

caso 2: Si $x = e_A$, entonces $V_1 = \{e_A\} \cup D$ para alguna $D \subseteq A$ tal que $|A \backslash D| < \aleph_0$ y $V_2 = \{e_A\} \cup E$ para alguna $E \subseteq A$ tal que $|A \backslash E| < \aleph_0$. Sea $V_3 = \{e_A\} \cup (D \cap E)$. Tenemos que $D \cap E \subseteq D \subseteq A$ y $|A \backslash (D \cap E)| = |(A \backslash D) \cup (A \backslash E)| \leqslant |A \backslash D| + |A \backslash E| < \aleph_0$. Entonces $V_3 \in \mathcal{B}_\psi(x)$ es tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.

*(iii)* Sea $V \in \mathcal{B}_\psi(x)$ y sea $y \in V$, entonces tenemos los siguientes casos:

caso 1: si $x \in \omega$, entonces $W = V \in \mathcal{B}_\psi(x) = \mathcal{B}_\psi(y)$ es el elemento buscado.

caso 2: si $x = e_A$, entonces $V = \{e_A\} \cup D$ para alguna $D \subseteq A$ tal que $|A \backslash D| < \aleph_0$. Entonces:

caso 2.1: Si $y \in \omega$, $y \in D$ y $\mathcal{B}_\psi(y) = \{\{y\}\}$, de modo que $W = \{y\} \in \mathcal{B}_\psi(y)$ es tal que $W \subseteq V$.

caso 2.2: Si $y \in M_\mathcal{A}$, entonces $y = e_A = x$ y así $W = V \in \mathcal{B}_\psi(y) = \mathcal{B}_\psi(x)$ es tal que $W \subseteq V$. □

De esta manera, de la Proposición B.1.4, la familia:

$$\tau = \{A \subseteq \psi(\mathcal{A}) : \text{para toda } x \in A \text{ existe } V \in \mathcal{B}_\psi(x) \text{ tal que } V \subseteq A\}$$

define una topología en $\psi(\mathcal{A})$ y cada colección $\mathcal{B}_\psi(x)$ es una base de vecindades abiertas de $x \in \psi(\mathcal{A})$ para esta topología.

**Definición 3.1.1.** Al espacio topológico $(\psi(\mathcal{A}), \tau_\psi)$ se le conoce como *espacio de Mrówka definido por* $\mathcal{A}$.

## 3.2. Propiedades topológicas básicas de $\psi(\mathcal{A})$

En esta sección, probaremos que si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena de $\omega$, entonces $(\psi(\mathcal{A}), \tau_\psi)$ es un espacio topológico con las siguientes propiedades:

(i) $\psi(\mathcal{A})$ es primero numerable,

(ii) $\psi(\mathcal{A})$ es localmente compacto (i.e. todo punto en $\psi(\mathcal{A})$ tiene una vecindad con cerradura compacta),

(iii) $\omega$ es denso en $\psi(\mathcal{A})$,

(iv) $M_{\mathcal{A}}$ es cerrado y discreto en $(\psi(\mathcal{A}), \tau_\psi)$,

(v) si $\mathcal{A}$ es infinito, $(\psi(\mathcal{A}), \tau_\psi)$ no es numerablemente compacto,

(vi) $\psi(\mathcal{A})$ es 0-dimensional,

(vii) $\psi(\mathcal{A})$ es Tychonoff y

(viii) $\psi(\mathcal{A})$ es pseudocompacto si y sólo si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal, de modo que en este caso, por la Proposición B.2.25, $\psi(\mathcal{A})$ no es normal.

Previo a ello, veamos cómo son los espacios de Mrówka definidos por $\mathcal{A}$ cuando $\mathcal{A}$ es de cardinalidad a lo más numerable.

**Proposición 3.2.1.** *Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena en $\omega$. Entonces:*

*(i) Si $\mathcal{A} = \emptyset$, $\psi(\mathcal{A}) \cong \mathbb{N}$.*

*(ii) Si $|\mathcal{A}| = n \in \omega$ con $0 < n$, entonces: si $|\omega \setminus \cup \mathcal{A}| = \aleph_0$, $\psi(\mathcal{A})$ es homeomorfo al espacio de ordinales $[0, \omega \cdot (n+1))$, y si $|\omega \setminus \cup \mathcal{A}| < \aleph_0$, $\psi(\mathcal{A})$ es homeomorfo al espacio de ordinales $[0, \omega \cdot n]$.*

*(iii) $|\mathcal{A}| = \aleph_0$ si y sólo si $\psi(\mathcal{A})$ es homeomorfo al espacio de ordinales $[0, \omega \cdot \omega)$.*

**Demostración.** La afirmación *(i)* es clara.

*(ii)* Sea $\{A'_i : i \in n\}$ una enumeración de $\mathcal{A}$. Definimos $A_0 = A'_0$, $A_1 = A'_1 \setminus A'_0$, $A_2 = A'_2 \setminus (A'_0 \cup A'_1)$ y en general, $A_m = A'_m \setminus (\bigcup_{i \in m} A'_i)$.

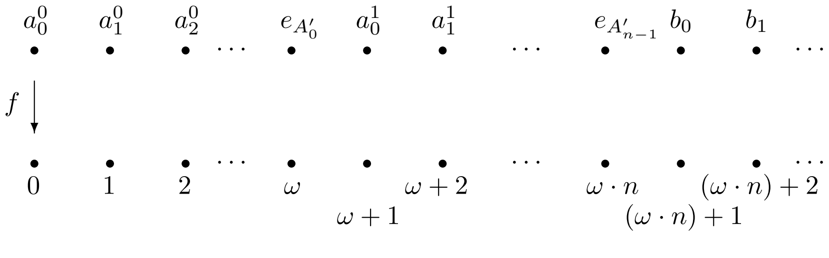
Observemos que entonces, $A'_i \setminus A_i$ es finito para cada $i \in \omega$ puesto que $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena. Además, por la definición de $A_i$, se tiene que $\bigcup_{i \in n} A_i = \bigcup_{i \in n} A'_i$.

Sea $\{b_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ una enumeración de $\omega \setminus \bigcup \mathcal{A}$ y $\{a^i_n\}$ una enumeración de $A_i$.

Tenemos dos casos, si $\lambda = \omega$, definimos entonces $f : \psi(\mathcal{A}) \to [0, \omega \cdot (n+1))$ como:

$$f(x) = \begin{cases} m & \text{si } x = a^0_m; \\ \omega \cdot i + (m+1) & \text{si } x = a^i_m, \text{ con } i > 0; \\ \omega \cdot (i+1) & \text{si } x = e_{A'_i}; \\ \omega \cdot n + (j+1) & \text{si } x = b_j. \end{cases}$$

Así, $f$ queda completamente determinada y es claramente biyectiva.



Observemos que, en el espacio $[0, \omega\cdot(n+1))$, los puntos de la forma $\omega\cdot i+k$ con $k \in \omega\backslash\{0\}$ son puntos aislados y que los intervalos de la forma $(\omega\cdot i+k, \omega\cdot(i+1)]$ con $k \in \omega$ son vecindades del punto $\omega \cdot (i+1)$.

De esta manera, dada $x \in \psi(\mathcal{A})$ y un abierto $U \subseteq [0, \omega \cdot (n+1))$ tal que $f(x) \in U$, tenemos que si $x \in \omega$, $\{x\}$ es un abierto en $\psi(\mathcal{A})$ tal que $\{x\} \subseteq f^{-1}[U]$.

Y si $x = e_{A'_i}$ para alguna $A'_i \in \mathcal{A}$, $f(x) = \omega \cdot (i+1)$, entonces existe $k \in \omega$ tal que $(\omega \cdot i + k, \omega \cdot (i+1)] \subseteq U$. Así, por la definición de $f$, $\{a^i_\beta : \beta > k\} \subseteq f^{-1}[(\omega \cdot i + k, \omega \cdot (i+1))] \subseteq \{a^i_\beta : \beta \geqslant k\}$.

De manera que $f^{-1}[(\omega \cdot i + k, \omega \cdot (i+1))] \subseteq A_i$ y además $|A_i\backslash f^{-1}[(\omega \cdot i + k, \omega \cdot (i+1)]]| \leqslant k+1$, entonces $\{e_{A'_i}\} \cup f^{-1}[(\omega\cdot i+k, \omega\cdot(i+1))]$ es una vecindad de $e_{A'_i}$ contenida en $f^{-1}[U]$, lo que prueba que $f$ es continua.

Verifiquemos ahora que $f$ es abierta. Para ello, consideramos un abierto canónico $A \subseteq \psi(\mathcal{A})$. Aseguramos que $f[A]$ es un abierto de $[0, \omega \cdot (n+1))$. En efecto, si $A = \{a^j_m\}$ para alguna $m \in \omega$ y alguna $j \in \omega$, entonces $f[A] = \{\omega\cdot j+m\}$ si $j = 0$ y $f[A] = \{\omega\cdot j+(m+1)\}$ si $j > 0$. Y si $A = \{p\}$ con $p \in \omega\backslash\cup\mathcal{A}$, entonces $p = b_j$ para alguna $j \in \omega$, y por lo tanto, $f[A] = \{\omega \cdot n + (j+1)\}$, que son abiertos canónicos de $[0, \omega \cdot (n+1))$.

Por otra parte, si $A = \{e_{A'_i}\} \cup (A'_i\backslash S)$ para algún $S \subseteq A'_i$ finito (supondremos que $i \neq 0$ sólo para facilitar la escritura aunque la prueba para $i = 0$ es análoga) se tiene que de haber elementos en $A'_i\backslash(A_i \cup S)$, necesariamente hay una cantidad finita de estos y por la definición de $A_i$, $A'_i\backslash(A_i \cup S) \subseteq \bigcup_{j\in i} A'_j = \bigcup_{j\in i} A_i$. Como las imágenes de estos puntos son aislados en $[0, \omega \cdot (n+1))$, $f[A] = f[A'_i\backslash S] = f[A_i\backslash S] \cup f[A'_i\backslash(A_i \cup S)] = f[A_i\backslash S] \cup \{\{f(y)\} : y \in A'_i\backslash(A_i \cup S)\}$ es abierto en $[0, \omega \cdot (n+1))$. Esto prueba que $f$ es abierta.

De esta manera tenemos que $f$ es biyectiva y bicontinua y por tanto es homeomorfismo.

Por otra parte, si $\lambda = l \in \omega$, entonces definimos $g : \psi(\mathcal{A}) \to [0, \omega \cdot n]$ como:

$$g(x) = \begin{cases} j & \text{si } x = b_j, \text{ con } j \in l; \\ m + l & \text{si } x = a^0_m; \\ \omega \cdot i + (m+1) & \text{si } x = a^i_m, \text{ con } i > 0; \\ \omega \cdot (i+1) & \text{si } x = e_{A'_i}. \end{cases}$$

Notemos que en este caso, a diferencia del anterior, los naturales que no pertenecen a ningún elemento de $\mathcal{A}$ se "acomodan" junto con los naturales pertenecientes a $A'_0 = A_0$ en la "primer copia de $\omega$".

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
b_0 & b_1 & b_2 & & b_{l-1} & a_0^0 & a_1^0 & & e_{A'_0} & a_0^1 & & e_{A'_{n-1}} \\
\bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
\Big\downarrow g & & & & & & & & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
0 & 1 & 2 & & l-1 & l & l+1 & & \omega & \omega+1 & & \omega\cdot n
\end{array}$$

Por lo demás, $g$ está definida como $f$ y la prueba de que $g$ es un homeomorfismo es análoga a la dada para demostrar que $f$ es un homeomorfismo.

Veamos ahora que se da *(iii)*. $\Rightarrow$] Consideremos $\{A'_i : i \in \omega\}$ una enumeración de $\mathcal{A}$ y definamos para cada $i \in \omega$, $A_i$ como en *(ii)*.

Recordemos que entonces, $A'_i \backslash A_i$ es finito para cada $i \in \omega$ puesto que $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena. Además, por la definición de $A_i$, se tiene que $\bigcup_{i\in n} A_i = \bigcup_{i\in n} A'_i$, para cada $n \in \omega$.

Sea $\{b_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ una enumeración de $\omega\backslash \bigcup \mathcal{A}$ y $\{a_n^i\}$ una enumeración de $A_i$.

Entonces, se tienen dos casos, si $\lambda = \omega$, definimos $h : \psi(\mathcal{A}) \to [0, \omega\cdot\omega)$ como:

$$h(x) = \begin{cases} m & \text{si } x = a_m^0; \\ \omega \cdot i + (m+2) & \text{si } x = a_m^i, \text{ con } i > 0; \\ \omega \cdot (i+1) & \text{si } x = e_{A'_i}; \\ \omega \cdot (j+1) + 1 & \text{si } x = b_j. \end{cases}$$

que resulta ser un homeomorfismo de $\psi(\mathcal{A})$ en $[0, \omega\cdot\omega)$ por un argumento similar al dado en *(ii)*.

Por otra parte, si $\lambda \in \omega$, entonces definimos $h' : \psi(\mathcal{A}) \to [0, \omega \cdot \omega)$ como:

$$h'(x) = \begin{cases} j & \text{si } x = b_j, \text{ con } j \in \lambda; \\ m + \lambda & \text{si } x = a_m^0; \\ \omega i + (m+1) & \text{si } x = a_m^i, \text{ con } i > 0; \\ \omega \cdot (i+1) & \text{si } x = e_{A'_i}. \end{cases}$$

y con un argumento análogo al dado en *(ii)*, se tiene que $h'$ es un homeomorfismo de $\psi(\mathcal{A})$ en $[0, \omega \cdot \omega)$.

$\Leftarrow$] Sea $f : \psi(\mathcal{A}) \to [0, \omega \cdot \omega)$ un homeomorfismo. Entonces cada $e_A \in \psi(\mathcal{A})$ tiene como imagen bajo $f$ un ordinal límite de $[0, \omega\cdot\omega)$ puesto que toda vecindad $V$ de $e_A$ contiene una infinidad de puntos de $\psi(\mathcal{A})$, y recíprocamente, como toda vecindad de un ordinal límite $\lambda$ de $[0, \omega \cdot \omega)$ tiene una infinidad de puntos de $[0, \omega \cdot \omega)$, entonces $f^{-1}(\lambda)$ no puede ser un número natural, i.e., $f^{-1}(\lambda) = e_A$ para alguna $A \in \mathcal{A}$.

Por tanto, hay una correspondencia entre los puntos de $M_{\mathcal{A}}$ y los ordinales límite de $\omega\cdot\omega$, de manera que hay tantos elementos en $M_{\mathcal{A}}$ como ordinales límite en $\omega \cdot \omega$. Entonces hay $\aleph_0$ elementos en $M_{\mathcal{A}}$, y así $|\mathcal{A}| = \aleph_0$. $\square$

**Proposición 3.2.2.** *Dada una familia casi ajena $\mathcal{A}$ en $\omega$, $\psi(\mathcal{A})$ es $T_2$, primero numerable y localmente compacto.*

**Demostración.** Para ver que $\psi(\mathcal{A})$ es $T_2$, consideremos $x, y \in \psi(\mathcal{A})$ tales que $x \neq y$. Entonces si $x, y \in \omega$, $\{x\}$ y $\{y\}$ son abiertos ajenos que tienen a $x$ y a $y$ respectivamente. Por otra parte, si ocurre que, sin pérdida de generalidad, $x \in \omega$ y $y = e_A \in M_{\mathcal{A}}$ para alguna $A \in \mathcal{A}$, entonces $U = \{x\}$ y $V = \{e_A\} \cup (A \backslash \{x\})$ son abiertos ajenos. Por último, si $x = e_A$ y $y = e_B$ para algunas $A, B \in \mathcal{A}$, entonces, sean $C = A \backslash B$ y $D = B \backslash A$. Se tiene que $C \subseteq A$ y $|A \backslash C| = |A \backslash (A \backslash B)| = |A \cap B| < \aleph_0$. Análogamente, $D \subseteq B$ es tal que $|B \backslash D| < \aleph_0$. Por tanto $\{e_A\} \cup C$ y $\{e_B\} \cup D$ son los abiertos buscados. Esto prueba que $\psi(\mathcal{A})$ es $T_2$.

Veamos que $\psi(\mathcal{A})$ es localmente compacto. Sea $x \in \psi(\mathcal{A})$, entonces, si $x \in \omega$, $\{x\} \in \mathcal{B}_\psi(x)$ es compacto. Si $x = e_A \in M_{\mathcal{A}}$, $\{e_A\} \cup A \in \mathcal{B}_\psi(x)$ es compacto. En efecto, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $B = \{e_A\} \cup A$, y consideremos $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $e_A \in U_0$. Entonces existe $V \in \mathcal{B}_\psi(e_A)$ tal que $V \subseteq U_0$, de modo que $V = \{e_A\} \cup D$, donde $D \subseteq A$ es tal que $A \backslash D$ es finito. Entonces

$$|B \backslash U_0| \leq |(\{e_A\} \cup A) \backslash (\{e_A\} \cup D)| < \aleph_0$$

y por tanto, $B$ es compacto.

De esta manera, de la Proposición B.2.9, $\psi(\mathcal{A})$ es localmente compacto.

Sea $x \in \psi(\mathcal{A})$ veamos que existe una base local de vecindades numerable. Si $x \in \omega$ entonces $\mathcal{B}_\psi(x) = \{\{x\}\}$ es la base local buscada. Por otra parte, si $x = e_A$ para alguna $A \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{B}_\psi(x) = \{\{e_A\} \cup D : D \subseteq A, |A \backslash D| < \aleph_0\}$ es una base local de vecindades numerable. En efecto, de la Observación A.3.14, $|\mathcal{B}_\psi(x)| = \aleph_0$. Por tanto, $\psi(\mathcal{A})$ es primero numerable. $\square$

**Lema 3.2.3.** $\mathbb{N}$ *es denso en* $\psi(\mathcal{A})$ *y* $M_{\mathcal{A}}$ *es un subespacio discreto y cerrado de* $\psi(\mathcal{A})$.

**Demostración.** Sea $U$ un abierto básico de $\psi(\mathcal{A})$, entonces se tienen dos casos:

1) Si $U = \{x\}$ para alguna $x \in \omega$, $U \cap \omega \neq \emptyset$.

2) Si $U = \{e_A\} \cup D$ para alguna $A \in \mathcal{A}$ y para algún $D \subseteq A$ tal que $|A \backslash D| < \aleph_0$, entonces $|D \cap \omega| = \aleph_0$ y así, claramente $U \cap \omega \neq \emptyset$.

Esto prueba que $\mathbb{N}$ es denso en $\psi(\mathcal{A})$.

Observemos que para cada $A \in \mathcal{A}$ , $\{e_A : A \in \mathcal{A}\} \cap (\{e_A\} \cup A) = \{e_A\}$, de manera que la topología de $\psi(\mathcal{A})$ restringida a $\{e_A : A \in \mathcal{A}\}$ es la topología discreta.

Si tomamos $x \in \psi(\mathcal{A}) \backslash M_{\mathcal{A}}$, entonces $x \in \omega$ y por lo tanto $\{x\} \subseteq \psi(\mathcal{A}) \backslash M_{\mathcal{A}}$ es abierto. Esto es, $M_{\mathcal{A}}$ es cerrado. $\square$

**Proposición 3.2.4.** *Si* $\mathcal{A}$ *es una familia casi ajena infinita en* $\omega$*, entonces* $\psi(\mathcal{A})$ *no es numerablemente compacto.*

**Demostración.** Por 3.2.3, tenemos que $M_{\mathcal{A}}$ es cerrado y discreto. Por lo tanto, como $M_{\mathcal{A}}$ es infinito ya que $\mathcal{A}$ es infinito, de la Proposición B.2.14, $\psi(\mathcal{A})$ no es numerablemente compacto. $\square$

**Proposición 3.2.5.** *Dadas una familia casi ajena $\mathcal{A}$ de $\omega$ y $x \in \psi(\mathcal{A})$, se tiene que cualquier elemento de la base canónica en $x$, $\mathcal{B}_\psi(x)$, es tanto abierto como cerrado en $\psi(\mathcal{A})$ (es decir, $\psi(\mathcal{A})$ es un espacio 0-dimensional).*

**Demostración.** Sea $x \in \psi(\mathcal{A})$. Entonces, si $x \in \omega$, como $\psi(\mathcal{A})$ es $T_2$, entonces $\{x\}$ es claramente abierto y cerrado.

Por otra parte, si $x = e_A$ para alguna $A \in \mathcal{A}$, todo $U \in \mathcal{B}_\psi(x)$, es de la forma $U = \{e_A\} \cup (A \backslash D)$ con $D \subseteq \omega$ finito. Tenemos que $U$ es abierto en $\psi(\mathcal{A})$. Consideremos ahora $y \in \psi(\mathcal{A}) \backslash U$; si $y \in \omega$, entonces $\{y\}$ es una vecindad en torno a $y$ contenida en $\psi(\mathcal{A}) \backslash U$. Por otro lado, si $y = e_B$ para algún $B \in \mathcal{A}$, consideramos $\{e_B\} \cup B \in \mathcal{B}_\psi(y)$. Como $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena, $|(A \backslash D) \cap B| < \aleph_0$. Sea $(A \backslash D) \cap B = F$. Entonces $\{e_B\} \cup (B \backslash F)$ es una vecindad de $e_B$ contenida en $\psi(\mathcal{A}) \backslash U$, por tanto $U$ es abierto y cerrado en $\psi(\mathcal{A})$. Así, para todo $U \in \mathcal{B}_\psi(x)$, $U$ es abierto y cerrado. $\square$

**Proposición 3.2.6.** *Si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena en $\omega$, $\psi(\mathcal{A})$ es Tychonoff.*

**Demostración.** Ya vimos que $\psi(\mathcal{A})$ es $T_2$ y 0-dimensional. Entonces, del Lema 1.4.2, $\psi(\mathcal{A})$ es Tychonoff. $\square$

**Teorema 3.2.7.** *Dada una familia casi ajena infinita $\mathcal{A}$ en $\omega$, $\psi(\mathcal{A})$ es pseudocompacto si y sólo si $\mathcal{A}$ es maximal.*

**Demostración.** $\Leftarrow]$ Sea $f : \psi(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ una función continua y supongamos que $f$ no es acotada. Sea entonces $x_0 \in \psi(\mathcal{A})$ tal que $f(x_0) > 0$ y sea $x_{n+1} \in \psi(\mathcal{A})$ tal que $f(x_{n+1}) > \text{máx}\{n+1, f(x_n)\}$. Notemos que

$$f(x_0) < f(x_1) < ... < f(x_n) < ...$$

Definimos $L = \{x_k : k \in \omega\}$. Observemos que existe $N \in \mathcal{A}$ tal que $|L \cap N| = \aleph_0$. En efecto, de ocurrir que $L \notin \mathcal{A}$, la maximalidad de $\mathcal{A}$ nos garantiza la existencia de dicho $N$. Si $L \in \mathcal{A}$, basta tomar $N = L$.

Consideremos entonces $e_N \in \psi(\mathcal{A})$, tenemos que, como $f(e_N) \in \mathbb{R}$, existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $s - 1 < f(e_N) < s + 1$ (i.e. $e_N \in f^{-1}[(s-1, s+1)]$).

Ahora, por la continuidad de $f$, existe un abierto básico, digamos $\{e_N\} \cup D$, con $D \subseteq N$ tal que

$$\{e_N\} \cup D \subseteq f^{-1}[(s-1, s+1)].$$

Como $|L \cap N| = \aleph_0$ y $|N \backslash D| < \aleph_0$, entonces $|L \cap D| = \aleph_0$. Además, como $D \subseteq f^{-1}[(s-1, s+1)]$, entonces $|L \cap f^{-1}[(s-1, s+1)]| = \aleph_0$. Por lo tanto, existe $k > s+1$ tal que $x_k \in L \cap f^{-1}[(s-1, s+1)]$, pero $k > s+1$ implica que $f(x_k) > s+1$, lo cual es una contradicción.

Por tanto, $f$ es acotada y así $\psi(\mathcal{A})$ es pseudocompacto.

$\Rightarrow]$ Supongamos ahora que $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena no maximal. Entonces existe $L \subseteq \omega$ tal que $L$ es numerable, su intersección con $A$ es finita para toda $A \in \mathcal{A}$ y además no pertenece a $\mathcal{A}$. Sea $L = \{m_i\}_{i \in \omega}$.

Definimos $f : \psi(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} i & \text{si } x = m_i, \text{ con } i \in \omega; \\ 0 & \text{si } x \in \psi(\mathcal{A})\backslash L. \end{cases}$$

Observemos que entonces, dada $x \in \psi(\mathcal{A})$ y un abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f(x) \in U$, se tienen los siguientes casos. Si $x \in \omega$, entonces $\{x\}$ es un abierto de $\psi(\mathcal{A})$ tal que $f[\{x\}] \subseteq U$. Por otra parte, si $x = e_A \in M_\mathcal{A}$, entonces $f(x) = 0 \in U$, de manera que el abierto $\{e_A\} \cup (A\backslash L)$ es tal que $f[\{e_A\} \cup (A\backslash L)] \subseteq f[\psi(\mathcal{A})\backslash L] = \{0\}$. Así $f[\{e_A\} \cup (A\backslash L)] \subseteq U$ y por lo tanto $f$ es continua. Además, es claro que $f$ no es acotada de manera que $\psi(\mathcal{A})$ no es pseudocompacto. □

**Proposición 3.2.8.** *Si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal infinita, entonces $\psi(\mathcal{A})$ no es normal.*

**Demostración.** Supongamos que $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal infinita y que $\psi(\mathcal{A})$ es normal. Entonces, por el Teorema 3.2.7, $\psi(\mathcal{A})$ es pseudocompacto, pero entonces, de la Proposición B.2.25, $\psi(\mathcal{A})$ es numerablemente compacto, contradiciendo así la Proposición 3.2.4, pues por hipótesis, $|\mathcal{A}| \geq \aleph_0$. □

## 3.3. Caracterización de los espacios de Mrówka

En esta sección, veremos que todo espacio de Mrówka es perfecto y daremos condiciones equivalentes a que estos espacios sean perfectamente normales. Probaremos también, dada $\mathcal{A}$ una familia casi ajena, una serie de condiciones equivalentes a que $\mathcal{A}$ sea a lo más numerable o bien maximal y finita. Veremos propiedades de los subconjuntos nulos de $M_\mathcal{A}$ que nos serán necesarias en el último capítulo.

Por otra parte, calcularemos los valores de las funciones cardinales definidas en el capítulo 1 valuadas en $\psi(\mathcal{A})$ y probaremos que $\psi(\mathcal{A})$ es de Moore.

El resultado más notable de esta sección (Teorema 3.3.15) es un teorema que caracteriza los espacios de Mrówka.

Se dice que un espacio $X$ es *perfecto* si todo subconjunto cerrado de $X$ es un conjunto $G_\delta$.

**Proposición 3.3.1.** *Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena en $\omega$. Todo subconjunto de $X = \psi(\mathcal{A})$ es $G_\delta$. En particular, $\psi(\mathcal{A})$ es un espacio perfecto.*

**Demostración.** Sea $F \subseteq X$ y sean $D = (X\backslash F) \cap M_\mathcal{A}$ y $E = (X\backslash F) \cap \omega$.

$D$ es cerrado pues $M_\mathcal{A}$ es cerrado y discreto. Notemos además que $E$ es a lo más numerable. Sea entonces $\{x_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de $E$ (i.e. $E = \cup_{n\in\omega}\{x_n\}$). De esta manera,

$$X\backslash F = D \cup E = D \cup (\bigcup_{n\in\omega}\{x_n\}),$$

Entonces $X \backslash F$ es unión numerable de cerrados. Por tanto, $F$ es intersección numerable de abiertos. $\square$

De la proposición anterior, se desprende un resultado ligado a los espacios *perfectamente normales.*

**Definición 3.3.2.** Decimos que un espacio $X$ es *perfectamente normal* si $X$ es perfecto y normal.

**Corolario 3.3.3.** *Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena en $\omega$. Son equivalentes:*
*(a) $\psi(\mathcal{A})$ es normal,*
*(b) $\psi(\mathcal{A})$ es perfectamente normal,*
*(c) $\psi(\mathcal{A})$ es hereditariamente normal.*

**Demostración.** (a)⇒(b) Como $\psi(\mathcal{A})$ es normal y perfecto, entonces es perfectamente normal.

(b)⇒(c) Sean $A$ y $B$ subconjuntos de $\psi(\mathcal{A})$ tales que $cl(A) \cap B = \emptyset = A \cap cl(B)$. Por la Proposición 1.8.2, existen $f, g : \psi(\mathcal{A}) \to [0,1]$ continuas tales que $cl(A) = Z(f)$ y $cl(B) = Z(g)$. Sean $U = \{y \in \psi(\mathcal{A}) : f(y) < g(y)\}$ y $V = \{y \in \psi(\mathcal{A}) : g(y) < f(y)\}$. $U$ y $V$ son abiertos ya que si $h_1(x) = \text{máx}\{g(x)-f(x), 0\}$ y $h_2(x) = \text{máx}\{f(x)-g(x), 0\}$, entonces $\psi(\mathcal{A}) \backslash h_1^{-1}[\{0\}] = U$ y $\psi(\mathcal{A}) \backslash h_2^{-1}[\{0\}] = V$. Además tenemos que $U \cap V = \emptyset$. Más aun, como $y \in A$ implica $f(y) = 0$ y $A \cap cl(B) = \emptyset$, tenemos que $g(y) > 0$, de modo que $A \subseteq U$; similarmente, $B \subseteq V$, completando la prueba (véase la Proposición B.1.12).
Por último, (c)⇒(a) se satisface puesto que $\psi(\mathcal{A})$ es subespacio de sí mismo. $\square$

Al principio de la sección anterior vimos que si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena a lo más numerable, el espacio de Mrówka definido por $\mathcal{A}$ es un espacio linealmente ordenable. En la siguiente proposición veremos una serie de equivalencias más de esta condición.

**Proposición 3.3.4.** *Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena en $\omega$. Son equivalentes los siguientes enunciados:*
*(a) $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$*
*(b) $\psi(\mathcal{A})$ es segundo numerable.*
*(c) $\psi(\mathcal{A})$ es metrizable.*
*(d) $\psi(\mathcal{A})$ es $\sigma$-compacto.*
*(e) $\psi(\mathcal{A})$ es Lindelöf.*
*(f) $\psi(\mathcal{A})$ es paracompacto.*
*(g) $\psi(\mathcal{A})$ es metacompacto.*
*(h) $\psi(\mathcal{A})$ es linealmente ordenable.*
*(i) $\psi(\mathcal{A})$ es colectivamente normal.*
*(j) $\psi(\mathcal{A})$ es colectivamente Hausdorff.*

**Demostración.** (a)$\Rightarrow$(b) Observemos que la colección $\beta = \bigcup_{x\in\psi(\mathcal{A})} \mathcal{B}_\psi(x)$ con $\mathcal{B}_\psi(x)$ la colección definida en la Sección 4.1, es base para $\psi(\mathcal{A})$ y que $|\mathcal{A}| \leqslant \aleph_0$ implica que $\psi(\mathcal{A})$ es numerable. Tenemos que si $x \in \omega$, $|\mathcal{B}_\psi(x)| = 1$ y si $x \in M_\mathcal{A}$, de la Observación A.3.14, $|\mathcal{B}_\psi(x)| = \aleph_0$. De esta manera, como la unión numerable de conjuntos a lo más numerables es numerable, $\beta = \bigcup_{x\in\psi(\mathcal{A})} \mathcal{B}_\psi(x)$ es una base numerable de $\psi(\mathcal{A})$.

(b)$\Rightarrow$(c) Supongamos ahora que $\psi(\mathcal{A})$ es segundo numerable. Entonces como de la Proposición 3.2.6 se tiene que $\psi(\mathcal{A})$ es regular, por el Lema de Metrización de Urysohn (Lema B.3.4) $\psi(\mathcal{A})$ es metrizable.

(c)$\Rightarrow$(d) Supongamos que $\psi(\mathcal{A})$ es un espacio metrizable. Recordemos que del Lema 3.2.3, $\omega$ es denso en $\psi(\mathcal{A})$, de manera que $\psi(\mathcal{A})$ separable. Así, del Teorema B.3.3, $\psi(\mathcal{A})$ es segundo numerable (y entonces (b)$\Leftrightarrow$(c)).

Ahora bien, consideremos la familia de abiertos $\{\{e_A\}\cup A : A \in \mathcal{A}\}$ de $\psi(\mathcal{A})$. Entonces, como $w(\psi(\mathcal{A})) = \aleph_0$, se tiene que de la Proposición 1.2.6, existe un conjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tal que

$$|\mathcal{B}| \leqslant \aleph_0 \ \text{ y } \ \bigcup\{\{e_A\} \cup A : A \in \mathcal{B}\} = \bigcup\{\{e_A\} \cup A : A \in \mathcal{A}\},$$

pero claramente no es posible que la contención $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ sea propia, de manera que $|\mathcal{A}| \leqslant \aleph_0$ (con lo cual, hemos probado que (c)$\Rightarrow$(a)).

Tenemos entonces que si $\psi(\mathcal{A})$ es metrizable, es numerable y por tanto es $\sigma$-compacto.

(d)$\Rightarrow$(e) Cualquier espacio $\sigma$-compacto es Lindelöf. ([E; ej. 3.8.C(b), p. 195]).

(e)$\Rightarrow$(f) Cualquier espacio de Lindelöf Tychonoff es paracompacto. (véase [E; teo. 5.1.2, p. 300])

(f)$\Rightarrow$(g) Todo paracompacto es metacompacto.

Para probar que (g)$\Rightarrow$(h), veremos que (g)$\Rightarrow$(a). De esta manera, como (a)$\Rightarrow$(h) se obtiene de la Proposición 3.2.1, tendremos la implicación deseada.

Supongamos entonces que $\psi(\mathcal{A})$ es metacompacto y consideremos la cubierta abierta $\mathcal{C} = \{\{e_A\} \cup A : A \in \mathcal{A}\} \cup \{\{n\} : n \in \omega\}$. Sea $\mathcal{D}$ un refinamiento puntualmente finito de $\mathcal{C}$. Notemos que podemos considerar a $\mathcal{D}$ como constituido por básicos canónicos (dado $x \in \psi(\mathcal{A})$ si $\mathcal{D}_x = \{D \in \mathcal{D} : x \in D\}$, podemos elegir $E_x \in \mathcal{B}_\psi(x)$ tal que $E_x \subseteq \bigcap \mathcal{D}_x$ por ser $\mathcal{D}_x$ finito).

Ahora, para cada $n \in \omega$, sea $\mathcal{D}_n = \{D \in \mathcal{D} : n \in D\}$. Entonces $\mathcal{D} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{D}_n$. Y como cada $D \in \mathcal{D}$ tiene a lo más un elemento de $M_\mathcal{A}$ por la definición de $\mathcal{C}$, entonces necesariamente $|\mathcal{A}| \leqslant \aleph_0$.

(h)$\Rightarrow$(i) Todo espacio linealmente ordenado es colectivamente normal. ([M; teo.3.4, p.496, línea 36 p.491, línea 2 p.492 y teo.2.9, p.493]).

(i)$\Rightarrow$(j) Es inmediato pues $\psi(\mathcal{A})$ es $T_1$ y por tanto $\{x\}$ es cerrado para cada $x \in \psi(\mathcal{A})$.

(j)$\Rightarrow$(a) Supongamos que $|\mathcal{A}| = \kappa = |M_\mathcal{A}|$. Enumeramos a los elementos de $\mathcal{A}$ como $\{A_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ de manera que $A_\alpha \neq A_\beta$ siempre que $\alpha, \beta \in \kappa$ y $\alpha \neq \beta$.

Sabemos, del Lema 3.2.3, que $M_{\mathcal{A}}$ es un subconjunto discreto de $\psi(\mathcal{A})$. Entonces existe una familia de abiertos ajenos $\{B_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ tal que $e_{A_\alpha} \in B_\alpha$ para cada $\alpha \in \kappa$.

Resulta entonces que si $\alpha \neq \beta$, $(B_\alpha \cap \omega) \cap (B_\beta \cap \omega) = \emptyset$, es decir, la colección $\{B_\alpha \cap \omega : \alpha < \kappa\}$ es una colección de subconjuntos de $\omega$ no vacíos y ajenos. Esto significa que $|\omega| \geqslant \kappa$ y por tanto $|\mathcal{A}| \leqslant \aleph_0$. □

Para el caso en que $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal finita, se tiene aún más como mostramos a continuación.

**Proposición 3.3.5.** *Para una familia casi ajena maximal $\mathcal{A}$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

*(a) $\mathcal{A}$ es finita.*

*(b) $\psi(\mathcal{A})$ es compacto.*

*(c) $\psi(\mathcal{A})$ es numerablemente compacto.*

*(d) $\psi(\mathcal{A})$ es secuencialmente compacto.*

**Demostración.** (a)⇒(b) Sea $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, ..., A_n\}$ una familia casi ajena maximal. Observemos que entonces $H = \omega \backslash (A_0 \cup ... \cup A_n)$ es finito. De otra forma, como $H \cap A_i = \emptyset$ para toda $i \in \{0, ..., n\}$, se contradiría la maximalidad de $\mathcal{A}$.

Consideremos entonces $\mathcal{U} = \{U_j : j \in J\}$ una cubierta abierta de $\psi(\mathcal{A})$, y sea, para cada $i \in \{0, ..., n\}$, $U_i \in \mathcal{U}$ tal que $e_{A_i} \in U_i$. Entonces cada $U_i$ contiene a $A_i$, $i \in \{0, ...n\}$, salvo por una cantidad finita de puntos $S_i$. Sea $S = \bigcup_{i=0}^{n} S_i$ y sean $U_{n+1}, ..., U_{n+m} \in \mathcal{U}$ tales que para cada $x \in H \cup S$, $x \in U_{n+j}$ para alguna $j \in \{1, ..., m\}$. Entonces $\mathcal{V} = \{U_0, ..., U_n, ..., U_{n+m}\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$, lo que prueba que $\psi(\mathcal{A})$ es compacto.

Hemos observado ya que cualquier espacio compacto es numerablemente compacto por lo que (b)⇒(c) es clara.

(c)⇒(d) De la Proposición 3.2.2 $\psi(\mathcal{A})$ es primero numerable y en espacios primero numerables, compacidad numerable y compacidad secuencial coinciden (véase [E; teo. 3.10.31, p. 209]).

Para probar que (d)⇒(a), supongamos que $\psi(\mathcal{A})$ es secuencialmente compacto. Esto implica que $\psi(\mathcal{A})$ es numerablemente compacto. Se vió en el Lema 3.2.3 que $M_{\mathcal{A}}$ es un subespacio discreto y cerrado de $\psi(\mathcal{A})$. Entonces $\mathcal{A}$ debe ser finita. □

El siguiente es un resultado respecto a los subconjuntos nulos de $M_{\mathcal{A}}$ que usaremos más adelante.

**Proposición 3.3.6.** *Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena. Entonces,*

*(1) $M_{\mathcal{A}}$ es un conjunto nulo de $\psi(\mathcal{A})$.*

*(2) Todo subconjunto finito de $M_{\mathcal{A}}$ es un conjunto nulo de $\psi(\mathcal{A})$,*

*(3) Si $\mathcal{A}$ es maximal, ningún subconjunto infinito numerable de $M_{\mathcal{A}}$ es nulo en $\psi(\mathcal{A})$.*

*(4) Todo subconjunto infinito $E$ de $M_{\mathcal{A}}$ tal que $|M_{\mathcal{A}} \backslash E| \leqslant \aleph_0$ es nulo.*

**Demostración.** *(1)* Observemos que la función $g : \psi(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in M_{\mathcal{A}}, \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } x = n \in \omega \end{cases}$$

es continua. Pues dados $y \in \psi(\mathcal{A})$ y un abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ tales que $f(y) \in U$, se tienen los siguientes casos. Si $y = e_A$ para alguna $A \in \mathcal{A}$, entonces $f(y) = 0 \in U$, de modo que existe $m \in \omega$ tal que $[0, \frac{1}{m}) \subseteq U$. Así, dada $x \in A \backslash \{0, 1, ..., m\}$, $x > m$, y entonces $f[\{e_A\} \cup (A \backslash \{0, 1, ..., m\})] \subseteq [0, \frac{1}{m})$. Por otro lado, si $y = n \in \omega$, entonces $\{y\}$ es abierto y claramente $f[\{y\}] \subseteq U$.

*(2)* Sea $A \in \mathcal{A}$. Aseguramos que $\{e_A\}$ es nulo. En efecto, sea $f : \psi(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = e_A, \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } x = n \in A; \\ 1 & \text{si } x \notin A \text{ o } x \in M_{\mathcal{A}} \backslash \{e_A\}. \end{cases}$$

Veamos que dicha función es continua.

Sea $y \in \psi(\mathcal{A})$ y sea $U \subseteq \mathbb{R}$ un abierto tal que $f(y) \in U$. Se tienen tres casos. Si $y = e_A$, entonces $f(y) = 0 \in U$. Consideremos $m \in \omega$ tal que $[0, \frac{1}{m}) \subseteq U$ y observemos que entonces dada $x \in A \backslash \{0, 1, ..., m\}$, se tiene que $x \geqslant m + 1$, de modo que $f(x) \leqslant \frac{1}{m+1}$ y así, $f[\{e_A\} \cup (A \backslash \{0, 1, ..., m\})] \subseteq [0, \frac{1}{m}) \subseteq U$. Así, en este caso, el abierto $B = \{e_A\} \cup (A \backslash \{0, 1, ..., m\})$, es tal que $f[B] \subseteq U$.

Por otra parte, si $y \in \omega$, entonces $\{y\}$ es el abierto en $\psi(\mathcal{A})$ tal que $f[\{y\}] \subseteq U$.

Por último, si $y \in \{e_B : B \in \mathcal{A}\}$ y $y \neq e_A$, entonces $f(y) = 1$. Consideramos $A' \in \mathcal{A}$ tal que $y = e_{A'}$. Entonces, $W = \{e_{A'}\} \cup (A' \backslash A)$ es un abierto de $\psi(\mathcal{A})$ que contiene a $e_{A'}$ y tal que $f[W] \subseteq \{1\} \subseteq U$.

Así, para cada $A \in \mathcal{A}$, $\{e_A\}$ es un conjunto nulo de $\psi(\mathcal{A})$, de modo que cualquier subconjunto finito de $M_{\mathcal{A}}$ es nulo (pues la unión finita de nulos es nula (véase Lema 1.2.3)).

*(3)* Consideremos ahora un subconjunto infinito $E$ de $M_{\mathcal{A}}$ que es nulo, digamos $E = \mathcal{Z}(f) \subseteq M_{\mathcal{A}}$ y supongamos que $E$ es numerable. Sea $\{e_{A_n} : n \in \omega\}$ una enumeración inyectiva de dicho conjunto.

Elijamos $k_0 \in f^{-1}[(-1, 1)] \cap A_0$ y sea $r_1 = \text{mín}\{\frac{1}{2}, |f(k_0)|\}$. Escogemos entonces $k_1 \in [f^{-1}[(-r_1, r_1)] \cap A_1] \backslash A_0$ y hacemos $r_2 = \text{mín}\{\frac{1}{3}, |f(k_1)|\}$. Siguiendo con este proceso y habiendo definido $k_{n-1}$, definimos $r_n = \text{mín}\{\frac{1}{n},\, k_{n-1}\}$ y elegimos $k_n \in [f^{-1}[(-r_n, r_n)] \cap A_n] \backslash (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)$.

Definimos $B = \{k_n : n \in \omega\} \subseteq \omega$. Observemos que $e_{A_i} \in f^{-1}[(-r_i, r_i)]$, entonces como $f^{-1}[(-r_i, r_i)]$ es abierto por la continuidad de $f$, se tiene que $f^{-1}[(-r_i, r_i)] \cap A_i$ es infinito. Por lo tanto, podemos elegir los $k_i$ de forma que $B \notin \mathcal{A}$. Así, por la maximalidad de $\mathcal{A}$, existe $C \in \mathcal{A}$ tal que $B \cap C$ es infinita. Como $B$ interseca a $A_i$ sólo en un punto para cada $i \in \omega$, tenemos que $e_C \notin E$, por tanto, $f(e_C) \neq 0$.

Como $f(e_C) \neq 0$ y $r_{n+1} < r_n$ para todo $n \in \omega$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|(f(e_C) - \varepsilon, f(e_C) + \varepsilon) \cap \{r_n : n \in \omega\}| \leq 1$. Sea $U = (f(e_C) - \varepsilon, f(e_C) + \varepsilon)$.

Observemos que $f^{-1}[U]$ es un abierto en $\psi(\mathcal{A})$ que contiene a $e_C$ y por tanto a una infinidad de puntos de $B \cap C$. Entonces $f[f^{-1}[U] \cap B \cap C] \subseteq U$ debe contener una colección infinita de elementos de $\{r_n : n \in \omega\}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $E$ debe ser finito.

Para probar *(4)*, consideremos $E$ un subconjunto de $M_{\mathcal{A}}$ tal que $|M_{\mathcal{A}} \backslash E| \leqslant \aleph_0$. Sea $F = M_{\mathcal{A}} \backslash E$, y sea $\{e_{A_k} : k \in \lambda\}$, con $\lambda \leqslant \omega$, una enumeración inyectiva de $F$.

Para cada $n \in \lambda$, definimos $E_n$ como $\psi(\mathcal{A}) \backslash (\{e_{A_n}\} \cup A_n)$ y $f_n : \psi(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in E_n, \\ 1 & \text{si } x \in \psi(\mathcal{A}) \backslash E_n. \end{cases}$$

Dicha función es continua puesto que $\{e_{A_n}\} \cup A_n$ es abierto y cerrado.

Por lo tanto, $E_n$ es un conjunto nulo para cada $n \in \lambda$. Ahora bien, notemos, que $E = (\bigcap_{n \in \lambda} E_n) \cap M_{\mathcal{A}}$. Entonces, siendo $\lambda$ a lo más numerable, se tiene que, del Lema 1.2.3 para el caso de $\lambda \in \omega$, y el Lema 1.2.4 para el caso $\lambda = \omega$, $E$ es nulo.

Con esto conluimos la prueba. $\square$

**Observación 3.3.7.** Si $P$ es un conjunto nulo en $\psi(\mathcal{A})$, entonces $P \cap M_{\mathcal{A}}$ también lo es. En efecto, del inciso *(2)* de la Proposición 3.3.6, tenemos que $M_{\mathcal{A}}$ es un conjunto nulo, de manera que del Lema 1.2.3, $P \cap M_{\mathcal{A}}$ es un conjunto nulo.

El concepto de *espacio de Moore* fue formulado por R. L. Moore en la primera parte del siglo XX. Los espacios de Moore son generalmente importantes en matemáticas porque pueden aplicarse para probar teoremas interesantes respecto a metrización. Un espacio de Moore es un espacio topológico que satisface un axioma que puede ser pensado como un axioma de separación. A continuación enunciamos un par de conceptos para dar su definición.

**Definición 3.3.8.** Sea $X$ un espacio topológico. Un *desarrollo* de $X$ es una colección numerable $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n, ...$ de cubiertas abiertas de $X$ tales que para cualquier subconjunto cerrado $C$ de $X$ y cualquier punto $p \in X \backslash C$, existe una cubierta $\mathcal{F}_j$ tal que ningún elemento de $\mathcal{F}_j$ que contenga a $p$ interseca a $C$. A un espacio con un desarrollo se le llama *espacio desarrollable*.

**Definición 3.3.9.** Decimos que un espacio topológico $X$ es un *espacio de Moore* si es regular y desarrollable.

**Ejemplo 3.3.10.** Todo espacio métrico es un espacio de Moore ya que la sucesión de cubiertas abiertas formadas por bolas de radio $\frac{1}{n}$ es un desarrollo.

A continuación enunciamos algunas propiedades importantes respecto a los espacios de Moore.

1. Todo subespacio de un espacio de Moore es de Moore.
2. Todo espacio metacompacto, separable, normal y de Moore es metrizable. Este teorema es conocido como el Teorema de Traylor (véase [Ru; VII(2), p.44].
3. Todo espacio localmente compacto, localmente conexo, normal y de Moore es metrizable. La demostración de este teorema fue dada por Reed y Zenor ([Ru; VII(3), p.44])
4. Si $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$, entonces todo espacio separable, normal y de Moore es metrizable. A este teorema se le conoce como Teorema de Jones (puede consultarse en [AL; teo.5, p.532])

Por mucho tiempo se intentó probar la llamada *conjetura del espacio normal de Moore* que establece que todo espacio normal y de Moore es metrizable. Esta conjetura fue inspirada en el hecho de que todos los espacios que se conocían de Moore y no metrizables, tampoco eran normales. Hubieron varios resultados parciales muy satisfactorios al respecto, a saber, las propiedades 2, 3 y 4 arriba mencionadas.

Sin embargo, bajo la suposición de $AM$ y la negación de $HC$, hay varios ejemplos de espacios normales y de Moore que no son metrizables (véase [Ru; VII(6), p.44]).

Finalmente, Nyikos probó que la conjetura es independiente de los axiomas de $ZFC$ (los axiomas básicos de la Teoría de Conjuntos). Por otra parte Moore probó que un espacio colectivamente normal de Moore es metrizable ([Ru; VII(1), p.44]).

**Proposición 3.3.11.** *Todo espacio de Mrówka es un espacio de Moore.*

**Demostración.** Consideremos el espacio de Mrówka $\psi(\mathcal{A})$. Tenemos que $\psi(\mathcal{A})$ es regular por la Proposición 3.2.6. Resta probar que tiene un desarrollo.

Sean $A \in \mathcal{A}$ y $n \in \omega$. De la Proposición A.3.12, se desprende que hay una cantidad numerable de subconjuntos finitos de $A$, en particular, hay una cantidad numerable de subconjuntos de cardinalidad $n$ en $A$. Sea $\{B^A_{n,k} : k \in \omega\}$ una enumeración de tales subconjuntos y sea $A_{n,k} = A \backslash B^A_{n,k}$ para cada $k \in \omega$.

Sea $h$ una biyección de $\omega \times \omega$ en $\omega$.

Definimos $\mathcal{N} = \{\{n\} : n \in \omega\}$. Para cada $n \in \omega$, si $n = h(m,k)$, definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{2n} &= \mathcal{N} \cup \{\{e_A\} \cup A_{m,k} : A \in \mathcal{A}\} \\ \text{y } \ \mathcal{F}_{2n+1} &= \mathcal{N} \cup \{\{e_A\} \cup (A \backslash \{n\}) : A \in \mathcal{A}\}. \end{aligned}$$

Entonces $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_n : n \in \omega\}$ es una familia numerable de cubiertas abiertas. Dado un cerrado $C \subseteq \psi(\mathcal{A})$ y $x \in \psi(\mathcal{A}) \backslash C$, se tienen los siguientes casos:

Si $x \in \omega \backslash \bigcup \mathcal{A}$, tomamos cualquier $\mathcal{F}_n \in \mathfrak{F}$. Resulta que el único elemento de $\mathcal{F}_n$ que tiene a $x$ como elemento es $\{x\}$. Es claro que $C \cap \{x\} = \emptyset$.

Si $x \in A$ para alguna $A \in \mathcal{A}$ , entonces consideramos la cubierta $\mathcal{F}_{2x+1} \in \mathfrak{F}$. Observemos que en dicha cubierta, nuevamente el único elemento (de ésta) que contiene a $x$ es $\{x\}$, cuya intersección con $C$ es vacía.

Por otra parte, si $x = e_A$ para alguna $A \in \mathcal{A}$, entonces, como $C$ es cerrado, existe $S \subseteq A$ finito tal que $\{e_A\} \cup (A \backslash S) \subseteq \psi(\mathcal{A}) \backslash C$. Sea $n = |S|$. Entonces $S = B^A_{n,k}$ para alguna $k \in \omega$, de modo que $\{e_A\} \cup (A \backslash S) \in \mathcal{F}_{2h(n,k)}$, ningún otro elemento de $\mathcal{F}_{2h(n,k)}$ contiene a $x$ y $(\{e_A\} \cup (A \backslash S)) \cap C = \emptyset$.

De esta manera se tiene que $\mathfrak{F}$ es un desarrollo de $\psi(\mathcal{A})$. Por tanto, todo espacio de Mrówka es un espacio de Moore. $\square$

En las siguientes tres proposiciones calculamos y comparamos los valores de las funciones cardinales topológicas definidas en el capítulo 1 valuadas en espacios de Mrówka.

**Proposición 3.3.12.** *Para cualquier familia casi ajena $\mathcal{A}$,*

$$\chi(\psi(\mathcal{A})) = \Psi(\psi(\mathcal{A})) = d(\psi(\mathcal{A})) = t(\psi(\mathcal{A})) = c(\psi(\mathcal{A})) = \aleph_0.$$

**Demostración.** Del Lema 3.2.3, se tiene que $\mathbb{N}$ es denso en $\psi(\mathcal{A})$, de manera que $d(\psi(\mathcal{A})) = \aleph_0$.

Por el Lema 1.1.3, $c(\psi(\mathcal{A})) = \aleph_0$.

Ahora, por la Proposición 3.2.2 $\psi(\mathcal{A})$ primero numerable, por lo tanto, de la Observación 1.1.5, $\chi(\psi((\mathcal{A}))) = \aleph_0$.

Recordemos que para todo espacio $T_1$ $X$, $\Psi(X) \leqslant \chi(X)$, de manera que $\Psi(\psi(\mathcal{A})) = \aleph_0$ [E; ej. 31F, p. 135].

Del Lema 1.1.7 $t(\psi(\mathcal{A})) \leqslant \chi(\psi(\mathcal{A}))$, sin embargo, veremos una prueba alternativa de que $t(\psi(\mathcal{A})) = \aleph_0$ que refleja un poco más de los espacios de Mrówka. Consideremos un subconjunto $A$ de $\psi(\mathcal{A})$, sea $x \in cl_{\psi(\mathcal{A})}(A)$ y $U \in \mathcal{B}_\psi(x)$. Entonces $|U \cap A| \leqslant \aleph_0$ y $U \cap A \subseteq A$. Además, dado $V \in \mathcal{B}_\psi(x)$, como $x \in cl_{\psi(\mathcal{A})}(A)$ y $V \cap U$ es una vecindad de $x$, $(A \cap U) \cap V = A \cap (V \cap U) \neq \emptyset$. Por lo tanto $x \in cl_{\psi(\mathcal{A})}(A \cap U)$ y de esta manera, $x \in \bigcup\{cl_{\psi(\mathcal{A})}(B) : B \subseteq A \text{ y } |B| \leqslant \aleph_0\}$. Esto es, $t(\psi(\mathcal{A})) \leqslant \aleph_0$.

Observemos que si $A \in \mathcal{A}$, entonces $e_A \in cl_{\psi(\mathcal{A})}\omega$ y para cualquier subconjunto finito $F \subseteq \omega$, $e_A \notin cl_{\psi(\mathcal{A})}F$. Por lo cual, $t(\psi(\mathcal{A})) \geqslant \aleph_0$. Con esto concluimos la prueba. $\square$

**Proposición 3.3.13.** *Para cualquier familia casi ajena infinita $\mathcal{A}$, $w(\psi(\mathcal{A}))$ $= nw(\psi(\mathcal{A})) = s(\psi(\mathcal{A})) = e(\psi(\mathcal{A})) = hd(\psi(\mathcal{A})) = hL(\psi(\mathcal{A})) = L(\psi(\mathcal{A})) = |\mathcal{A}|$.*

**Demostración.** Se tiene que $M_\mathcal{A}$ es un subespacio discreto y cerrado de $\psi(\mathcal{A})$, donde $|M_\mathcal{A}| = |\mathcal{A}|$. Así, como los subespacios de $\psi(\mathcal{A})$ tienen cardinalidad a lo más $|\psi(\mathcal{A})| = \aleph_0 + |M_\mathcal{A}| = |\mathcal{A}|$, entonces $s(\psi(\mathcal{A})) = e(\psi(\mathcal{A})) = |\mathcal{A}|$.

Ahora, para calcular la densidad hereditaria de $\psi(\mathcal{A})$, observemos que, dado que $M_\mathcal{A}$ es un subespacio discreto de $\psi(\mathcal{A})$, se tiene que el único subconjunto denso de $M_\mathcal{A}$ es él mismo y por lo tanto, $d(M_\mathcal{A}) = |\mathcal{A}|$. Por otra parte, como

$|\psi(\mathcal{A})| = |\mathcal{A}|$, entonces dado $Y \subseteq \psi(\mathcal{A})$, se tiene que $d(Y) \leqslant |\mathcal{A}|$, lo que prueba que $hd(\psi(\mathcal{A})) = |\mathcal{A}|$.

Sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta de $\psi(\mathcal{A})$. Cada elemento de $\mathcal{C}$ puede expresarse como unión de abiertos básicos de $\psi(\mathcal{A})$. De manera que como hay $|\mathcal{A}|$ de ellos, la colección de tales básicos es una subcubierta de $\mathcal{C}$ de cardinalidad $|\mathcal{A}|$. Entonces $L(\psi(\mathcal{A})) \leqslant |\mathcal{A}|$. Además, la cubierta $\mathcal{D} = \{\{n\} : n \in \omega\} \cup \{\{e_A\} \cup A : A \in \mathcal{A}\}$ no tiene subcubiertas de cardinalidad menor que $|\mathcal{A}|$. Por lo tanto, $L(\psi(\mathcal{A})) = |\mathcal{A}|$.

Ahora bien, claramente $hL(\psi(\mathcal{A})) \leqslant |\mathcal{A}|$. Además, como el subespacio $M_{\mathcal{A}}$ de $\psi(\mathcal{A})$ es discreto, $L(M_{\mathcal{A}}) = |\mathcal{A}|$ y por tanto $hL(\psi(\mathcal{A})) = |\mathcal{A}|$.

Para verificar que el peso de $\psi(\mathcal{A})$ es $|\mathcal{A}|$, consideremos $\mathscr{B}$ una base de $\psi(\mathcal{A})$. Tenemos que por la Proposición B.1.1, dados $e_A \in M_{\mathcal{A}}$ y cualquier vecindad en torno a $e_A$, digamos $V = \{e_A\} \cup A$, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $e_A \in B \subseteq V$. De esta manera, toda base de $\psi(\mathcal{A})$ tiene cardinalidad por lo menos $|\mathcal{A}|$. Por otra parte, la base $\bigcup_{x \in \psi(\mathcal{A})} \mathcal{B}_\psi(x)$ de $\psi(\mathcal{A})$, es tal que $|\bigcup_{x \in \psi(\mathcal{A})} \mathcal{B}_\psi(x)| = |\mathcal{A}|$, entonces $w(\psi(\mathcal{A})) = |\mathcal{A}|$.

Sea $\mathcal{R}$ una red de $\psi(\mathcal{A})$. Es claro que $\{V : V \in \mathcal{B}_\psi(x) \text{ y } x \in \psi(\mathcal{A})\}$ es una red en $\psi(\mathcal{A})$. De manera que $nw(\psi(\mathcal{A})) \leqslant |\psi(\mathcal{A})| = |\mathcal{A}|$. Notemos por otro lado, que como cada $\{e_A\} \cup A$ es un abierto en $\psi(\mathcal{A})$, entonces para cada $A \in \mathcal{A}$, existe $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$, tal que $\bigcup \mathcal{R}' = \{e_A\} \cup A$. Por lo tanto toda red debe tener por lo menos $|\mathcal{A}|$ elementos y así, $nw(\psi(\mathcal{A})) = |\mathcal{A}|$. □

**Proposición 3.3.14.** *Si $\mathcal{A}$ es finita, entonces* $w(\psi(\mathcal{A})) = nw(\psi(\mathcal{A})) = s(\psi(\mathcal{A})) = e(\psi(\mathcal{A})) = hd(\psi(\mathcal{A})) = hL(\psi(\mathcal{A})) = L(\psi(\mathcal{A})) = \aleph_0$

**Demostración.** Notemos que en este caso, $\psi(\mathcal{A})$ es segundo numerable y Lindelöf (véase la Proposición 3.3.4). De esta manera, de las observaciones 1.1.1 y 1.1.4, $w(\psi(\mathcal{A})) = L(\psi(\mathcal{A})) = \aleph_0$.

Se tiene además que la cardinalidad de $\psi(\mathcal{A})$ es numerable, de modo que todo subespacio discreto es numerable. Esto es, $s(\psi(\mathcal{A})) = e(\psi(\mathcal{A})) = \aleph_0$.

Ahora, como todo subespacio de $\psi(\mathcal{A})$ es numerable, todo subespacio de $\psi(\mathcal{A})$ es separable y por lo tanto $hd(\psi(\mathcal{A})) = \aleph_0$. Así mismo, todo subespacio de $\psi(\mathcal{A})$ es Lindelöf, de modo que también $hL(\psi(\mathcal{A})) = \aleph_0$.

Por último, $\{B \in \mathcal{B}_\psi(x) : x \in \psi(\mathcal{A})\}$ es una red de cardinalidad $\aleph_0$ de $\psi(\mathcal{A})$ puesto que todo subconjunto abierto no vacío de $\psi(\mathcal{A})$ es la unión de abiertos básicos de $\psi(\mathcal{A})$. Por lo tanto, $nw(\psi(\mathcal{A})) = \aleph_0$. □

A continuación, enunciamos un teorema que caracteriza los espacios de Mrówka, cuyo enunciado y demostración no aparecen en la bibliografía.

**Teorema 3.3.15.** *Sea $X$ un espacio topológico $T_2$. Entonces $X$ es homeomorfo a un espacio de Mrówka si y sólo si $X$ satisface las siguientes condiciones:*

*1) $X$ es primero numerable,*

*2) $X$ es localmente compacto,*

*3) $X$ es separable y*

*4) $der(X)$ es discreto.*

**Demostración.** La necesidad es consecuencia de las proposiciones 3.2.2 y 3.2.3. Probemos la suficiencia.

Se tienen dos casos. Si $der(X) = \emptyset$, entonces por la separabilidad de $X$, $X$ es numerable. De esta manera, si $\{x_n : n \in \omega\}$ es una enumeración de $X$, por ser $X$ un espacio discreto, $f : X \to \mathbb{N}$ dada por $f(x_n) = n$ es un homeomorfismo. Por lo tanto, por la Proposición 3.2.1, $X$ es un espacio de Mrówka.

Supongamos entonces que $der(X) \neq \emptyset$. Como $X$ es localmente compacto y $T_2$, cada punto de $X$ tiene un sistema básico de vecindades cuyas cerraduras son compactas. Así, dado un cerrado $F \subseteq X$ y $x \in X \backslash F$, se tiene que existe una vecindad $U$ de $x$ tal que $cl(U)$ es compacto y $x \in U \subseteq cl(U) \subseteq X \backslash F$, de manera que $X$ es un espacio regular (véase Teorema B.1.9).

Ahora bien, sea $x \in der(X)$, y sea $V$ una vecindad de $x$ tal que $V \cap der(X) = \{x\}$ (dicha vecindad existe por la condición *(4)*). Como $X$ es $T_3$, existe un abierto $U$ tal que $x \in U \subseteq cl(U) \subseteq V$. Afirmamos que $U$ es un conjunto cerrado. En efecto, sea $y \in cl(U)$ y supongamos que $y \notin U$. Entonces $y \in der(U)$ y $y \neq x$, de modo que $y \in der(X) \backslash \{x\}$. Por otra parte, $y \in V$, y por nuestra elección de $V$, $y \in \{x\}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $U = cl(U)$ y entonces $U$ es abierto y cerrado.

Con ello tenemos que $X$ es un espacio 0-dimensional.

Llamemos $N$ a la colección $\{x : \{x\} \text{ es abierto}\}$ Aseguramos que $N$ es numerable. En efecto, como cualquier denso en $X$ contiene a $N$, entonces por la separabilidad de $X$ (condición *(3)*), $N$ es a lo más numerable.

Notemos que de ocurrir que $|N| < \aleph_0$, tendríamos que dado $x \in der(X)$ y $V$ una vecindad de $x$ tal que $V \cap der(X) = \{x\}$ (véase condición *(4)*), $|V| < \aleph_0$. De manera que $\{x\}$ sería abierto, contrario a la definición de $der(X)$. Por tanto, $|N| = \aleph_0$. Sea $f : N \to \omega$ biyectiva.

Observemos que $X = der(X) \cup N$ y que $der(X) \cap N = \emptyset$.

Ahora bien, para cada $x \in der(X)$, existe un abierto en $X$, digamos $V_x$, tal que $V_x \cap der(X) = \{x\}$. Luego, por la compacidad local de $X$ (condición *(2)*), existe una vecindad compacta $W_x$ de $x$, tal que $W_x \subseteq V_x$. Y como $X$ es primero numerable y 0-dimensional, existe una colección $\mathcal{B}(x) = \{B_0^x, B_1^x, ..., B_n^x, ...\}$ de abierto-cerrados tales que:

- $\mathcal{B}(x)$ es base local de $x$ en $X$,
- $B_0^x \supseteq B_1^x \supseteq ... \supseteq B_n^x \supseteq ...$ y
- $B_0^x \subseteq W_x$.

Observemos que para cada $n \in \omega$, se tiene que, como $B_0^x \backslash B_n^x$ es cerrado y $B_0^x \backslash B_n^x \subseteq W_x$, $B_0^x \backslash B_n^x$ es un compacto contenido en un discreto (a saber $N$), por lo que $|B_0^x \backslash B_n^x| < \aleph_0$.

Para cada $x \in der(X)$, sea $A_x = B_0^x \backslash \{x\}$. Entonces $\mathcal{A} = \{A_x : x \in der(X)\}$ es una familia casi ajena sobre $N$. En efecto, sean $x, y \in der(X)$ un par de elementos distintos, entonces

$$A_x \cap A_y = B_0^x \cap B_0^y \subseteq W_x \cap W_y.$$

De manera que, como $A_x \cap A_y$ es un cerrado contenido en $W_x \cap W_y$, $A_x \cap A_y$ es un compacto contenido en un conjunto discreto, y por tanto es finito.

Notemos además que la colección $\{A_x : x \in der(X)\}$, consiste de elementos infinitos por ser $der(X)$ el conjunto de puntos de acumulación.

Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena sobre $N$ y $\mathcal{C} = \{C_x : f[A_x] = C_x\}$ es una familia casi ajena sobre $\omega$.

Aseguramos que $\phi : X \to \psi(\mathcal{C})$ dada por:

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in N, \\ e_{C_x} & \text{si } x \in der(X). \end{cases}$$

es un homeomorfismo.

Claramente $\phi$ está bien definida y es biyectiva. Para verificar que $\phi$ es continua, consideremos $x \in X$ y un abierto $U \subseteq \psi(\mathcal{C})$ tal que $\phi(x) \in U$.

Observemos que si $x \in N$, entonces $\{x\}$ es un abierto en $X$ tal que $\phi[\{x\}] = \{\phi(x)\} \subseteq U$. Por otra parte, si $x \in der(X)$, entonces $\phi(x) = e_{C_x}$, de manera que $\{e_{C_x}\} \cup (C_x \backslash S) \subseteq U$ para algún $S \subseteq C_x$ finito. Sea $n \in \omega$ tal que $B_n^x \subseteq \{x\} \cup A_x \backslash f^{-1}[S]$.

Entonces $B_n^x$ es un abierto en $X$ tal que

$$\begin{aligned} \phi[B_n^x] &\subseteq \phi[\{x\} \cup A_x \backslash f^{-1}[S]] \\ &= (\phi[\{x\}] \cup \phi[A_x]) \backslash S \\ &= \{e_{C_x}\} \cup (C_x \backslash S) \subseteq U. \end{aligned}$$

Y por lo tanto, $\phi$ es continua.

Para verificar que $\phi$ es abierta, consideramos $W$ un abierto en $X$ y $y \in \phi[W] \subseteq \psi(\mathcal{C})$. Sea $x \in W$ tal que $\phi(x) = y$. Entonces de ocurrir que $x \in N$, $\phi[\{x\}] = \{\phi(x)\} = \{f(x)\}$ sería una vecindad abierta de $y$ contenida en $\phi[W]$. Supongamos que $x \in der(X)$ y sea $y = e_{C_x}$. Sabemos que existe $n \in \omega$ tal que $B_n^x \subseteq W$, donde $B_n^x$ es de la forma $\{x\} \cup A_x \backslash F_n$ con $F_n \subseteq A_x$ finito. Entonces $\phi[B_n^x] = \phi[\{x\}] \cup \phi[A_x \backslash F_n] = \{y\} \cup \phi[A_x] \backslash \phi[F_n]$, que es una vecindad abierta de $y$ en $\psi(\mathcal{C})$ tal que $\phi[B_n^x] \subseteq \phi[W]$. Por lo tanto $\phi[W]$ es abierto en $\psi(\mathcal{C})$.

De esta manera, tenemos que si $X$ es un espacio $T_2$ que satisface las 4 condiciones enunciadas, $X$ es homeomorfo a un espacio de Mrówka. $\square$

# Capítulo 4

# El espacio de Niemytzki $\mathcal{N}$

Si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal infinita, de las proposiciones 3.2.7, 1.9.8 y 3.3.5, el espacio de Mrówka definido por $\mathcal{A}$ no es un espacio realcompacto.

El objetivo de este capítulo es mostrar el ejemplo de un espacio de Mrówka relativamente simple que es realcompacto, al cual Mrówka se refiere como *El espacio de Niemytzki* y que denotaremos por $\mathcal{N}$.

## 4.1. El espacio de Niemytzki $\mathcal{N}$

Originalmente, el espacio de Niemytzki consiste de todos los puntos del semiplano superior $y \geq 0$ (al cual denotaremos por $\mathbb{H}$) del plano $\mathbb{R}^2$ con la topología euclidiana heredada a $\mathbb{H}$, añadiendo todos los conjuntos de la forma $K \cup \{p\}$, donde $p$ es un punto de la recta $y = 0$ y $K$ es el conjunto de puntos de un disco abierto contenido en $\mathbb{H}$ y tangente a $y = 0$ en $p$ (véase la figura 1).

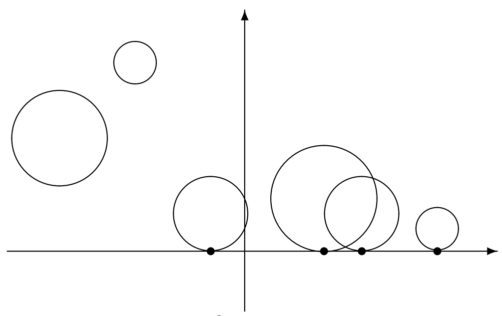


figura 1

Se han hecho varias modificaciones de tal espacio y nosotros consideraremos la siguiente:

Sea $R$ la recta $y = 0$ y $R_n$ la recta $y = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{Z}^+$. El espacio $\mathcal{N}$ consiste de todos los puntos de la línea $R$ y todos los de las rectas $R_n$ de la forma $\langle \frac{m}{n}, \frac{1}{n} \rangle$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$.

Para cada $p \in R$, denotamos por $T_p$ a la intersección de $\mathcal{N}$ con el triángulo rectángulo e isósceles (con fronteras), que tiene a $p$ como uno de sus vértices, los lados adyacentes a $p$ como catetos y cuya hipotenusa es un segmento de $R_1$.

Los puntos de las líneas $R_n \cap \mathcal{N}$ serán puntos aislados y las vecindades de un punto $p \in R$ serán de la forma $T_p \backslash S$, donde $S$ es un subconjunto finito arbitrario de $\mathcal{N} \backslash R$ (véase la figura 2).

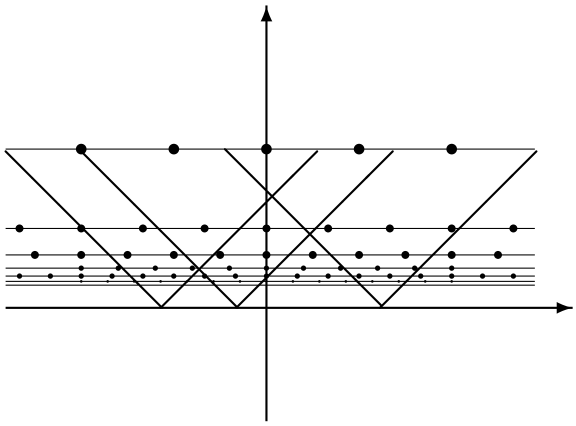


figura 2

A cada $x \in \mathcal{N}$ le asociamos una colección $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x)$ de subconjuntos de $\mathcal{N}$ como sigue:

si $x \in R_n$, $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x) = \{\{x\}\}$, y

si $x \in R$, $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x) = \{T_x \backslash S : S \subseteq \mathcal{N} \backslash R \text{ y } |T_x \cap S| < \aleph_0\}$.

Aseguramos que la familia de colecciones $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x)$, $x \in \mathcal{N}$, define en $\mathcal{N}$ una topología en la cual cada $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x)$ es una base de vecindades abiertas de $x$.

En efecto, se tiene que para cada $x \in \mathcal{N}$, las colecciones $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x)$, satisfacen las siguientes condiciones:

*(i)* para cada $V \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x), x \in V$.

*(ii)* si $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x)$, entonces existe $V_3 \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x)$ tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.

*(iii)* para cada $V \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x)$ si $y \in V$, entonces existe $W \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(y)$ tal que $W \subseteq V$.

**Demostración.** *(i)* es claro.

*(ii)* Sean $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x)$. Se tienen dos casos:

caso 1: Si $x \in R_n$, entonces $V_3 = \{x\} \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x)$ es tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2 = \{x\}$

caso 2: Si $x = (r, 0)$ para alguna $r \in \mathbb{R}$, entonces $V_1 = T_r \backslash S$ para algún $S \subseteq \mathcal{N} \backslash R$ tal que $|T_r \cap S| < \aleph_0$ y $V_2 = T_r \backslash S'$ para alguna $S' \subseteq \mathcal{N} \backslash R$ tal que

$|T_r \cap S'| < \aleph_0$. Sea $V_3 = T_r \backslash (S \cup S')$. Entonces $V_3 \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x)$ y $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.

*(iii)* Sea $V \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x)$ y sea $y \in V$, entonces tenemos los siguientes casos:

caso 1: si $x \in R_n$, entonces $V = \{x\}$ y $W = V \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x) = \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(y)$ es tal que $W \subseteq V$.

caso 2: si $x = (r, 0)$, entonces $V = T_r \backslash S$ para alguna $S \subseteq \mathcal{N} \backslash R$ tal que $|T_r \cap S| < \aleph_0$. Entonces:

caso 2.1: Si $y \in R_n$, entonces $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}(y) = \{\{y\}\}$, de modo que $W = \{y\} \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(y)$ es tal que $W \subseteq V$.

caso 2.2: Si $y \in R$, entonces $y = (r, 0)$ y así $W = V \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(y) = \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x)$ es tal que $W \subseteq V$. $\square$

De esta manera, de la Proposición B.1.4, la familia

$$\tau = \{A \subseteq \mathcal{N} : \text{para toda } x \in A \text{ existe } V \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x) \text{ tal que } V \subseteq A\}$$

define una topología en $\mathcal{N}$ y cada colección $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x)$ es una base de vecindades abiertas de $x \in \mathcal{N}$ para esta topología.

Respecto a este espacio se tienen las siguientes propiedades:

**Proposición 4.1.1.** *$\mathcal{N}$ es $T_2$.*

**Demostración.** Sean $x, y \in \mathcal{N}$ un par de elementos distintos de $\mathcal{N}$. Se tienen los siguientes casos:

(i) si $x, y \in R$, digamos $||x-y|| = \delta > 0$, entonces $T_x \cap T_y$ contiene únicamente puntos de las rectas de la forma $R_a$ con $a$ menor o igual que el máximo entero menor o igual que $\frac{2}{\delta}$. Entonces $T_x \cap T_y$ es un subconjunto finito de $\mathcal{N} \backslash R$ y así, $T_x \backslash T_y$ y $T_y \backslash T_x$ son abiertos ajenos y tales que $x \in T_x \backslash T_y$ y $y \in T_y \backslash T_x$.

(ii) de ocurrir que, sin pérdida de generalidad $x = (p, 0) \in R$ y $y \in \mathcal{N} \backslash R$, entonces $\{y\}$ y $T_p \backslash \{y\}$ son los abiertos buscados.

(iii) por último, si $x, y \in \mathcal{N} \backslash R$, entonces $\{x\}$ y $\{y\}$ son abiertos ajenos que contienen a $x$ y a $y$ respectivamente. $\square$

**Proposición 4.1.2.** *$\mathcal{N}$ es primero numerable.*

**Demostración.** Aseguramos que cada $x \in \mathcal{N}$ tiene una base local de vecindades $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x)$ numerable. En efecto, dada $x \in \mathcal{N}$, se tienen dos casos; si $x \in R_n$, entonces $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x) = \{\{x\}\}$. Por otra parte, si $x \in R$, tenemos que $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x) = \{T_x \backslash S : S \subseteq \mathcal{N} \backslash R \text{ es finito}\}$, y por la Observación A.3.14, $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}(x)$ es numerable. $\square$

**Proposición 4.1.3.** *$\mathcal{N}$ es localmente compacto.*

**Demostración.** Sea $p \in \mathcal{N}$, entonces, si $p \in R_n$, tenemos que $\{p\} \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(p)$ es compacto. Y si $p \in R$, consideremos $T_p \backslash S$ tal que $S \subseteq T_p$ es finito. Aseguramos que $T_p \backslash S \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(p)$ es compacto. En efecto, de la Proposición B.2.3, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta en $\mathcal{N}$ de $B = T_p \backslash S$, y consideremos $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $p \in U_0$. Entonces existe $V \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(p)$ tal que $V \subseteq U_0$, de modo que $V = T_p \backslash D$ para algún $D \subseteq T_p$ finito. Entonces $B \backslash U_0 \subseteq B \backslash V \subseteq D \backslash S$ que es finito y por tanto, $B$ es compacto. $\square$

**Proposición 4.1.4.** *$R$ es un subespacio discreto y cerrado de $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N} \backslash R$ es discreto, numerable, abierto y denso en $\mathcal{N}$.*

**Demostración.** Veamos que $R$ es un espacio discreto de $\mathcal{N}$. Sea $p \in R$ y consideremos la vecindad canónica $U = T_p$ de $p$. Entonces $U \cap R = \{p\}$. De manera que la topología de $\mathcal{N}$ restringida a $R$ es la topología discreta.

Para ver que $R$ es cerrado en $\mathcal{N}$, consideremos $x \in \mathcal{N} \backslash R$, entonces $\{x\}$ es una vecindad de $x$ contenida en $\mathcal{N} \backslash R$. Esto prueba que $\mathcal{N} \backslash R$ es abierto y discreto.

Es claro que $\mathcal{N} \backslash R$ es numerable.

Por último, veamos que $cl(\mathcal{N} \backslash R) = \mathcal{N}$. Sea $p \in R$ y consideremos la vecindad básica $U = T_p$ de $p$. Entonces, claramente $T_p \cap (\mathcal{N} \backslash R) \neq \emptyset$, lo cual prueba que $\mathcal{N} \backslash R$ es denso en $\mathcal{N}$. $\square$

**Corolario 4.1.5.** *$\mathcal{N}$ es un espacio de Mrówka.*

**Demostración.** Tenemos que $|\mathcal{N} \backslash R| = |\bigcup_{n=1}^{\infty} (R_n \cap \mathcal{N})| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |R_n \cap \mathcal{N}| \leqslant \omega$. Por lo tanto, de la Proposición 4.1.4, $\mathcal{N}$ es separable.

Por otra parte, observemos que $der(\mathcal{N})$ es precisamente $R$, de manera que nuevamente de la Proposición 4.1.4, $der(\mathcal{N})$ es discreto en $\mathcal{N}$.

Por lo tanto, de las proposiciones 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3 y el Teorema 3.3.15, tenemos que $\mathcal{N}$ es un espacio de Mrówka. $\square$

## 4.2. $\mathcal{N}$ es $\mathbb{N}$-compacto

Recordemos que un espacio topológico $X$ es $\mathbb{N}$-*compacto* si es homeomorfo a un subespacio cerrado de algún producto de copias de $\mathbb{N}$.

Como mencionamos en la sección 3.7, los espacios $\mathbb{N}$-compactos fueron introducidos por S. Mrówka en [M4] en el año 1956, donde se definió además el concepto general de espacio $E$-compacto: dado un espacio Hausdorff $E$, un espacio topológico $X$ es un espacio $E$-*compacto* si es homeomorfo a un subespacio cerrado de $E^m$ para algún número cardinal $m$.

Es posible demostrar que los espacios $I$-compactos (donde $I$ es el intervalo unitario cerrado) son los espacios compactos de Hausdorff (véase el Teorema 1.2.8) y que los espacios $\mathbb{R}$-*compactos* son precisamente los espacios *realcompactos* definidos en 1.9.7 (véase [E; teo. 3.11.3, p. 214 y teo. 3.11.10, p. 215]).

De manera que, en virtud de la Proposición B.1.20, todo espacio $\mathbb{N}$-compacto es realcompacto.

En esta sección probaremos algo más fuerte que la realcompacidad de $\mathcal{N}$; probaremos que dicho espacio es $\mathbb{N}$-compacto.

Recordemos que la línea de Sorgenfrey (véase 1.5.1) es un espacio Lindelöf (véase Proposición 1.5.4) y es fuertemente 0-dimensional (Proposición 1.5.5)

Denotemos por $\mathcal{S}^2$ al producto cartesiano de un par de líneas de Sorgenfrey. Para probar que $\mathcal{N}$ es efectivamente $\mathbb{N}$-compacto, veremos que existe un encaje de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{S}^2$, y demostraremos que $\mathcal{S}^2$ es hereditariamente $\mathbb{N}$-compacto.

Del Teorema 1.9.11, se tiene que $\mathcal{S}$ es un espacio $\mathbb{N}$-compacto. Esto es, $\mathcal{S}$ es homeomorfo a algún subespacio cerrado de $\mathbb{N}^\kappa$ para algún ordinal $\kappa$. De manera que $\mathcal{S}\times\mathcal{S} = \mathcal{S}^2$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de $\mathbb{N}^\kappa\times\mathbb{N}^\kappa$. En efecto, sea $\varphi$ el encaje de $\mathcal{S}$ en $\mathbb{N}^\kappa$ tal que $\varphi[\mathcal{S}]$ es cerrado en $\mathbb{N}^\kappa$. Definimos $\Phi : \mathcal{S}^2 \to \mathbb{N}^\kappa\times\mathbb{N}^\kappa$ tal que $\Phi((x, y)) = (\varphi(x), \varphi(y))$.

De esta manera, del Teorema B.1.25, se tiene que como $\phi$ es continua y abierta, $\Phi$ también lo es. Además $\Phi$ es claramente inyectiva de manera que es un encaje. Además, $\Phi[\mathcal{S}^2] = \varphi[\mathcal{S}]\times\varphi[\mathcal{S}]$ entonces, de la Proposición B.1.20, $\Phi[\mathcal{S}^2]$ es cerrado en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

**Lema 4.2.1.** *El plano $\mathcal{S}^2$ es hereditariamente $\mathbb{N}$-compacto.*

**Demostración.** Para cada $s = (x, y) \in \mathcal{S}^2$ y cada $n \in \omega$, sea $W_n = B^x_n \times B^y_n = [x, x + \frac{1}{n}) \times [y, y + \frac{1}{n})$ (véase 1.5.2). Así, para todo abierto $V \subseteq \mathcal{S}^2$ en torno a $s$, se tiene que existe $n \in \omega$ tal que $W_n \subseteq V$, por lo que $\mathcal{S}^2$ es primero numerable. De esta manera, del Corolario 1.9.6, $\mathcal{S}^2$ es hereditariamente $\mathbb{N}$-compacto. □

**Teorema 4.2.2.** *$\mathcal{N}$ es $\mathbb{N}$-compacto.*

**Demostración.** Definimos, como usualmente se hace, $e^{iy} = \cos(y) + i \operatorname{sen}(y)$. Y denotamos por $Re(x + iy)$ al número real $x$ y por $Im(x + iy)$ a $y$.

Dicho esto, consideremos $\phi : \mathcal{N} \to \mathcal{S}^2$ dada por

$$\varphi((x, y)) = (Re(e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot (x + iy)), Im(e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot (x + iy)))$$

Entonces $\varphi$ es la rotación del conjunto base $\mathcal{N}$ sobre el origen, por un ángulo de $-\frac{\pi}{4}$. Nótese que $\varphi$ es una función inyectiva (véase la figura 3).

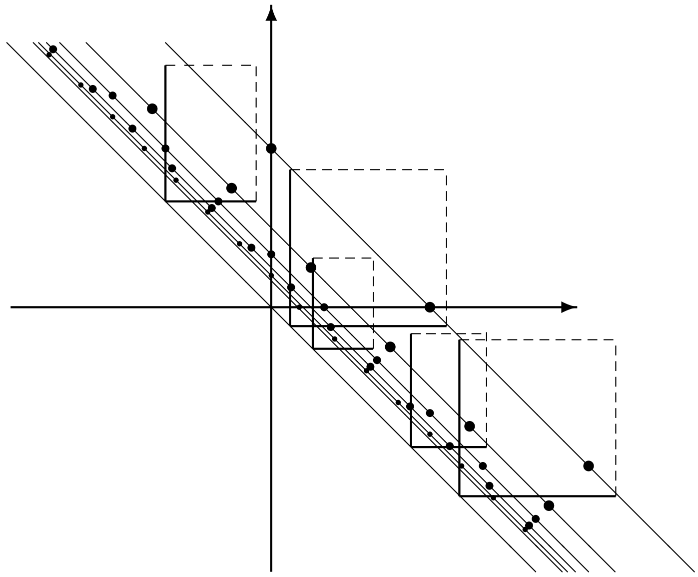


figura 3

Llamemos $\mathcal{M}$ a la imagen de $\mathcal{N}$ bajo $\varphi$.

Ahora, dados $\hat{x} \in \mathcal{N}$ y $U \subseteq \mathbb{S}^2$ un abierto tales que $\varphi(\hat{x}) \in U$, tenemos los siguientes casos:

(I) Si $\hat{x} \in \mathcal{N} \backslash R$, entonces como $\hat{x}$ es aislado en $\mathcal{N}$, se tiene que $\{\hat{x}\}$ es un abierto tal que $\varphi[\{\hat{x}\}] \subseteq U$.

(II) Si $\hat{x} = (x, 0)$, entonces $\varphi(\hat{x}) = (\frac{\sqrt{2}x}{2}, -\frac{\sqrt{2}x}{2})$, de modo que $[\frac{\sqrt{2}x}{2}, a) \times [-\frac{\sqrt{2}x}{2}, b) \subseteq U$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ mayores que $\frac{\sqrt{2}x}{2}$ y $-\frac{\sqrt{2}x}{2}$ respectivamente.

Llamemos $D$ al triángulo cuya intersección con $\mathcal{M}$ es $\varphi[T_{\hat{x}}]$. Observemos que los catetos del triángulo $D$ yacen en las rectas que pasan por $\varphi(\hat{x})$, una de ellas paralela al eje $X$ y la otra al eje $Y$. Dicho triángulo tiene como vértices el punto $(\frac{\sqrt{2}x}{2}, -\frac{\sqrt{2}x}{2})$ y las intersecciones de sus catetos con la recta ortogonal a la identidad con ordenada al origen 1.

Sea $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ la intersección del cateto del triángulo $D$ paralelo al eje $X$ y la recta $x = a$ y $\hat{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ la intersección del cateto paralelo al eje $Y$ y la recta $y = b$ (véase la figura 4).

Entonces, si $D$ está contenido en $[\frac{\sqrt{2}x}{2}, a) \times [-\frac{\sqrt{2}x}{2}, b) \subseteq U$, $V = T_{\hat{x}}$ es un abierto de $\mathcal{N}$ tal que $\varphi[V] \subseteq U$.

Por otra parte, si $D$ no está contenido en $[\frac{\sqrt{2}x}{2}, a) \times [-\frac{\sqrt{2}x}{2}, b)$, $\hat{\alpha}$ o $\hat{\beta}$ pertenecen a $D$, sea $\gamma = \text{mín}\{\alpha_1, \beta_2\}$. Llamemos $\Delta$ al conjunto de puntos en $\mathcal{M}$ contenidos en el triángulo rectángulo isósceles cerrado que tiene como vértices los puntos $(\frac{\sqrt{2}x}{2}, -\frac{\sqrt{2}x}{2})$, $(\gamma, \alpha_2)$ y $(\beta_1, \gamma)$, sin los puntos $(\gamma, \alpha_2)$ ni $(\beta_1, \gamma)$. Observemos que entonces $\Delta$ es subconjunto de un triángulo rectágulo isósceles completamente contenido (salvo por a lo más dos puntos) en $[\frac{\sqrt{2}x}{2}, a) \times [-\frac{\sqrt{2}x}{2}, b) \subseteq U$.

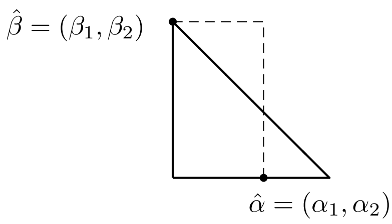



figura 4

Por otro lado, tenemos que como $\Delta \subseteq \varphi[T_{\hat{x}}]$, entonces $\varphi^{-1}[\Delta] \subseteq T_{\hat{x}}$. De hecho, se tiene todavía más. Por ser $\varphi$ una biyección, entonces $|T_{\hat{x}} \backslash \varphi^{-1}[\Delta]| = |\varphi[T_{\hat{x}} \backslash \varphi^{-1}[\Delta]]| = |\varphi[T_{\hat{x}}] \backslash \Delta| < \aleph_0$.

Sea $V = \varphi^{-1}[\Delta]$. Por lo anterior, tenemos que $V$ es un abierto de $\mathcal{N}$ que contiene a $(x, 0)$ y además

$$\varphi[V] \subseteq \Big[\frac{\sqrt{2}x}{2}, a\Big) \times \Big[-\frac{\sqrt{2}x}{2}, b\Big) \subseteq U.$$

Lo que prueba que $\varphi$ es continua.

Resta probar que $\varphi$ es abierta. Consideremos un abierto $A \subseteq \mathcal{N}$, y $\hat{y} \in \varphi[A] \subseteq \mathcal{M}$. Sea $\hat{x} \in A$, tal que $\varphi(\hat{x}) = \hat{y}$ y $U \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(\hat{x})$ tal que $U \subseteq A$. Se tienen dos casos. Si $\hat{x} \in \mathcal{N} \backslash R$, digamos $\hat{x} = (\frac{m}{n}, \frac{1}{n})$, entonces $U = \{\hat{x}\}$ y $\varphi[U] = \{\varphi(x)\}$ es un abierto en $\mathcal{M}$ tal que $\varphi[U] \subseteq \varphi[A]$.

Por otra parte, si $\hat{x} = (x, 0)$ para alguna $x \in \mathbb{R}$, entonces $U = T_{\hat{x}} \backslash S$ para algún subconjunto finito $S$ de $T_{\hat{x}} \cap (\mathcal{N} \backslash R)$. Por la finitud de $S$, existe $N \in \omega$ tal que para toda $n \geqslant N$, $R_n \cap T_{\hat{x}} \subseteq U$. Llamemos $T'_{\hat{x}}$ al triángulo rectángulo isósceles contenido en $T_{\hat{x}}$ que tiene a $x$ como vértice, al segmento $R_N \cap T_{\hat{x}}$ como hipotenusa y cuyos catetos son segmentos de los catetos del triángulo $T_{\hat{x}}$.

Sea $D_x$ el cuadrado cerrado que tiene a $\hat{x}$ como uno de sus vértices, los lados adyacentes a $\hat{x}$ contenidos en los lados de $T'_{\hat{x}}$ y diagonal de tamaño $\frac{2}{N}$. Supongamos que la imagen de dicho cuadrado bajo $\varphi$ queda descrito por el producto $[a, b] \times [c, d]$, definimos $D'_x$ como el conjunto $[a, b) \times [c, d)$.

Entonces $\varphi^{-1}[D'_x] \cap \mathcal{N}$ es un subconjunto de $D_x \cap \mathcal{N} \subseteq T'_x \subseteq U \subseteq A$ y su imagen bajo $\varphi$ es la intersección de un abierto de $\mathbb{S}^2$ con $\mathcal{M}$ , es decir, un abierto en $\mathcal{M}$, que tiene a $\varphi(\hat{x}) = \hat{y}$ como elemento y está completamente contenido en $\varphi[A]$. Esto prueba que $\varphi[A]$ es abierto en $\mathcal{M}$.

Por lo tanto $\varphi$ es un encaje de $\mathcal{N}$ en $\mathbb{S}^2$. Y como $\mathbb{S}^2$ es hereditariamente $\mathbb{N}$-compacto por el Lema 4.2.1, se tiene que $\mathcal{N}$ es $\mathbb{N}$-compacto. □

**Corolario 4.2.3.** *$\mathcal{N}$ es realcompacto.*

**Demostración.** Como $\mathcal{N}$ es $\mathbb{N}$ compacto, para algún ordinal $\kappa$, existe un encaje $\phi : \mathcal{N} \to \mathbb{N}^\kappa$ con $\phi[\mathcal{N}]$ cerrado en $\mathbb{N}^\kappa$.

Sea $i$ el encaje natural de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ y sea $j : \mathbb{N}^\kappa \to \mathbb{R}^\kappa$ dada por $j((x_\lambda)_{\lambda\in\kappa}) = (i(x_\lambda))_{\lambda\in\kappa}$. Entonces $j$ es un encaje de $\mathbb{N}^\kappa$ en $\mathbb{R}^\kappa$ (véase el Teorema B.1.25) y por lo tanto la imagen bajo $j$ del cerrado $\phi[\mathcal{N}]$ en un cerrado en $j[\mathbb{N}^\kappa] \subseteq \mathbb{R}^\kappa$.

Además, $i[\mathbb{N}]$ es cerrado en $\mathbb{R}$, de manera que por la Proposición B.1.20, $j[\mathbb{N}^\kappa]$ es cerrado en $\mathbb{R}^\kappa$. Por lo tanto, $\mathcal{N}$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^\kappa$. □

Finalizamos esta sección con una propiedad interesante del espacio de Niemytzki que además será usada en el siguiente capítulo.

**Proposición 4.2.4.** *Existe una biyección $\phi : \mathbb{R} \to R$ tal que para toda función continua y real valuada $f$ definida sobre $\mathcal{N}$, $f\restriction_R \circ\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de la primera clase de Baire (véase la Definición 1.8.3) cuando consideramos a $\mathbb{R}$ con su topología usual.*

**Demostración.** Sea $\phi : \mathbb{R} \to R$ dada por $\phi(x) = (x, 0)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Sea $f$ una función continua y con valores reales definida en $\mathcal{N}$ y denotemos por $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a la composición $f\restriction_R \circ\phi$.

Para cada $n \in \omega\backslash\{0\}$ definimos $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(\langle x, \frac{1}{n}\rangle), & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ para alguna } m \in \mathbb{Z}; \\ & \\ (nx-m)y_2 - (nx-m-1)y_1, & \begin{array}{l}\text{si } x \in (\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}) \text{ para alguna} \\ m \in \mathbb{Z} \text{ con } f(\langle \frac{m}{n}, \frac{1}{n}\rangle) = y_1 \\ \text{y } f(\langle \frac{m+1}{n}, \frac{1}{n}\rangle) = y_2.\end{array} \end{cases}$$

Es decir, para cada $n \in \omega$, la gráfica de la función $f_n$ es la poligonal que tiene como vértices los puntos $f(\langle \frac{m}{n}, \frac{1}{n}\rangle)$ con $m \in \mathbb{Z}$, la cual es claramente continua.

Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}$. Por la continuidad de $f$, existe un abierto básico $U_\varepsilon \in \mathcal{B}_{\mathcal{N}}((x,0))$ en $\mathcal{N}$ tal que para todo $\hat{u} \in U_\varepsilon$, $|f(\hat{u}) - f(\langle x, 0\rangle)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $U_\varepsilon = T_x\backslash S$ con $S \subseteq \mathcal{N}\backslash R$ un conjunto finito y $T_x$ dado como al inicio de este capítulo. Entonces existe $N_0 \in \omega$ tal que para toda $n \geqslant N_0$, $R_n \cap T_x \subseteq U_\varepsilon$.

Observemos que para cada $n \in \omega$, el segmento $R_n \cap T_x$ mide $\frac{2}{n}$, y cada punto de dicho segmento, dista de sus puntos contiguos $\frac{1}{n}$. De esta manera, como $2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$, en cada segmento $R_n \cap T_x$ hay al menos una pareja de puntos de $\mathcal{N}$.

Esto es, a partir de cierta $N \in \omega$, si $n \geqslant N$ y $m \in \mathbb{Z}$ son tales que $\frac{m}{n} \leqslant x \leqslant \frac{m+1}{n}$, entonces $\langle \frac{m}{n}, \frac{1}{n}\rangle, \langle \frac{m+1}{n}, \frac{1}{n}\rangle \in U_\varepsilon$.

Afirmamos que para toda $n \geqslant N$, $|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$. Sean $n \geqslant N$ y $m \in \mathbb{Z}$ tales que $\frac{m}{n} \leqslant x \leqslant \frac{m+1}{n}$. Entonces $\langle \frac{m}{n}, \frac{1}{n}\rangle, \langle \frac{m+1}{n}, \frac{1}{n}\rangle \in U_\varepsilon$, y por tanto, $f_n(\frac{m}{n}), f_n(\frac{m+1}{n}) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(\langle x, 0\rangle))$.

Ahora bien, $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(\langle x, 0\rangle))$ es un conjunto convexo, de modo que el segmento $[f_n(\frac{m}{n}), f_n(\frac{m+1}{n})] \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(\langle x, 0\rangle))$. Pero $f_n(x) \in [f_n(\frac{m}{n}), f_n(\frac{m+1}{n})]$, por lo tanto, $f_n(x) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(\langle x, 0\rangle))$.

Así, basta observar que $f(\langle x, 0\rangle) = f \restriction_R \circ \phi(x) = g(x)$ para concluir la prueba. $\square$

# Capítulo 5

# La compactacion de Stone-$\check{C}$ech de $\psi(\mathcal{A})$

Es sencillo construir familias casi ajenas maximales de $\mathcal{A}$, de modo que $\beta(\psi(\mathcal{A}))$ sea lo suficientemente grande como para que $\beta(\psi(\mathcal{A}))\setminus\psi(\mathcal{A})$ contenga al menos $2^{\aleph_0}$ puntos.

El principal resultado en esta sección es probar que existe una familia casi ajena maximal $\mathcal{A}$ tal que $\beta(\psi(\mathcal{A}))$ es la compactación por un punto de $\psi(\mathcal{A})$. Para la construcción de dicha familia casi ajena, haremos un par de "operaciones"sobre espacios de Mrówka; la unión ajena y la descomposición en clases de equivalencia de espacios de Mrówka.

Los siguientes dos resultados muestran que la unión ajena de espacios de Mrówka y la descomposición en clases de un espacio de Mrówka son espacios de Mrówka.

**Proposición 5.1.1.** *La unión discreta de dos espacios de Mrówka es nuevamente un espacio de Mrówka.*

**Demostración.** Sean $\psi(\mathcal{A})$ y $\psi(\mathcal{B})$ un par de espacios de Mrówka. Denotamos por $X_0$ al espacio $\psi(\mathcal{A}) \times \{0\}$, por $X_1$ al espacio $\psi(\mathcal{B}) \times \{1\}$ y por $X$ a la unión discreta de $\psi(\mathcal{A})$ y $\psi(\mathcal{B})$ (i.e. $X = X_0 \cup X_1$ con la topología de la unión discreta).

Notemos que $f : \psi(\mathcal{A}) \to X_0$ dada por $f(x) = (x, 0)$ y $g : \psi(\mathcal{B}) \to X_1$ dada por $g(x) = (x, 1)$ son homeomorfismos de $\psi(\mathcal{A})$ en $X_0$ y $\psi(\mathcal{B})$ en $X_1$ respectivamente, de manera que $X_0$ y $X_1$ son un par de espacios de Mrówka.

Por el Teorema 3.3.15, basta probar que $X$ es $T_2$ y satisface las condiciones *(1)*, *(2)*, *(3)* y *(4)* de dicho Teorema.

Sean $x, y \in X$ un par de puntos distintos. Si ocurre que, sin pérdida de generalidad, $x \in X_0$ y $y \in X_1$, entonces claramente existen abiertos ajenos $U$ y $V$ de $X$ tales que $x \in U$, y $y \in V$.

Supongamos entonces que $x, y \in X_i$ para alguna $i = 0, 1$. Como $X_i$ es

Hausdorff, existen un par de abiertos ajenos $U$ y $V$ tales que $x \in U$ y $y \in V$. Como $U$ y $V$ son abiertos y ajenos en $X$, entonces $X$ es un espacio $T_2$.

Observemos que para cada $x \in X$, $x \in X_i$ para alguna $i \in \{0,1\}$. Entonces por ser $X_i$ primero numerable, se tiene que existe una base local de vecindades numerable de $x$ en $X_i$, digamos $\mathcal{B}(x)$. De manera que para cada vecindad $V$ de $x$ en $X$, como $V \cap X_i$ es una vecindad de $x$ en $X_i$, existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $x \in B \subseteq V \cap X_i \subseteq V$. Esto es, $\mathcal{B}(x)$ es una base local de vecindades numerable en $X$ y por lo tanto $X$ es primero numerable (condición *(1)*).

Sea $x \in X$, entonces $x \in X_i$ para alguna $i \in \{0,1\}$, por ello, existe una vecindad $U$ del punto $x$ en $X_i$ que contiene a $x$ y tal que su cerradura en $X_i$ es compacta. Claramente $U$ es vecindad de $x$ en $X$ y la cerradura de $U$ en $X$, siendo idéntica a la cerradura de $U$ en $X_i$, es compacta. Por lo tanto $X$ es localmente compacto (condición *(2)*).

Sea $N = (\omega \times \{0\}) \cup (\omega \times \{1\})$. Entonces

$$\begin{aligned} cl(N) &= cl((\omega \times \{0\}) \cup (\omega \times \{1\})) \\ &= (cl(\omega \times \{0\})) \cup (cl(\omega \times \{1\})) \\ &= (cl_{X_0}(\omega \times \{0\})) \cup (cl_{X_1}(\omega \times \{1\})) \\ &= X_0 \cup X_1 = X \end{aligned}$$

y por lo tanto, tenemos que $N$ es denso en $X$ (condición *(3)*).

Observemos que $\emptyset \neq der(X) = (M_{\mathcal{A}} \times \{0\}) \cup (M_{\mathcal{B}} \times \{1\})$. Sea $x \in der(X)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x = (e_A, 0) \in M_{\mathcal{A}} \times \{0\}$. Entonces $U = (\{e_A\} \cup A) \times \{0\}$ es un abierto en torno a $x$ y

$$U \cap der(X) = [(\{e_A\} \cup A) \times \{0\}] \cap [(M_{\mathcal{A}} \times \{0\}) \cup (M_{\mathcal{B}} \times \{1\})]$$

$$= [(\{e_A\} \times \{0\}) \cup (A \times \{0\})] \cap [(M_{\mathcal{A}} \times \{0\}) \cup (M_{\mathcal{B}} \times \{1\})]$$

y como $(A \times \{0\}) \cap [(M_{\mathcal{A}} \times \{0\}) \cup (M_{\mathcal{B}} \times \{1\})] = \emptyset$, lo anterior es igual a $(\{e_A\} \times \{0\}) \cap [(M_{\mathcal{A}} \times \{0\}) \cup (M_{\mathcal{B}} \times \{1\})] = \{(e_A, 0)\} \cap [(M_{\mathcal{A}} \times \{0\}) \cup (M_{\mathcal{B}} \times \{1\})] = \{(e_A, 0)\}$. Por lo tanto, la topología de $X$ restringida a $der(X)$ es la topología discreta (condición *(4)*).

Por lo tanto, $X$ es un espacio de Mrówka. $\square$

Sean $X$ un espacio topológico y $r$ una relación de equivalencia sobre $X$. Recordemos que la *topología cociente* sobre el conjunto base $X/r$ está dada como sigue: $X/r$ es el *conjunto cociente* (es decir el conjunto que consiste de todas las clases de equivalencia inducidas por $r$) y un conjunto de clases de equivalencia en $X/r$ es abierto si y sólo si la unión de dicho conjunto es abierta en $X$.

El conjunto cociente muchas veces es llamado *descomposición de $X$ en clases* (inducidas por $r$), a las clases inducidas se les llama *clases de equivalencia módulo $r$* y el *espacio cociente resultante de dicha descomposición* se refiere al espacio topológico cuyo conjunto base es $X/r$ con la topología cociente.

En el caso particular de los espacios de Mrówka, si $\alpha$ es una descomposición de $\mathcal{A}$ en clases inducidas por una relación $r$ (i.e. si $\alpha = \mathcal{A}/r$), por *espacio cociente resultante*, nos referimos al espacio que tiene como conjunto base $\psi(\mathcal{A})/R$ con la topología cociente, donde $R \subseteq \psi(\mathcal{A}) \times \psi(\mathcal{A})$ es una extensión de $r$ definida de la siguiente manera: $e_A R e_B$ si y sólo si $ArB$, $nRm$ si y sólo si $n = m$ y ningún elemento en $\omega$ está $R$-relacionado con algún elemento en $M_{\mathcal{A}}$. Denotamos por $[A]$ al conjunto $\{B \in \mathcal{A} : BrA\}$ para cada $A \in \mathcal{A}$, por $[e_A]$ al conjunto $\{e_B \in M_{\mathcal{A}} : e_B R e_A\}$ y por $M_{\mathcal{A}/r}$ a la colección $\{[e_A] : A \in \mathcal{A}\}$.

**Proposición 5.1.2.** *Consideremos el espacio topológico $\psi(\mathcal{A})$ y sea $\alpha$ una descomposición de $\mathcal{A}$ en clases finitas. El espacio cociente resultante es nuevamente un espacio de Mrówka.*

**Demostración.** Sea $r$ la relación tal que $\alpha = \mathcal{A}/r$ y sea $R \subseteq \psi(\mathcal{A}) \times \psi(\mathcal{A})$ una extensión de $r$ tal que el espacio cociente resultante de la descomposición $\alpha$ es el espacio $\psi(\mathcal{A})/R$. Sea $\rho : \psi(\mathcal{A}) \to \psi(\mathcal{A})/R$ la función cociente.

Dicho espacio es $T_2$ por el siguiente argumento. Dados $x, y \in \psi(\mathcal{A})/R$, distintos, se tienen tres casos. Si $x, y \in \rho[\omega]$, entonces $x$ y $y$ se separan por abiertos ajenos de manera trivial. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x = [e_A] \in M_{\mathcal{A}/r}$ y $y \in \rho[\omega]$. Entonces si para toda $B \subseteq \omega$ tal que $BrA$, $\bigcup y \notin B$, $\{y\}$ y $\{[e_A]\} \cup \rho[\bigcup[A]]$ son un par de conjuntos ajenos que contienen a $y$ y a $x$ respectivamente. Claramente $\{y\}$ es abierto y además, $\{[e_A]\} \cup \rho[\bigcup[A]]$ es abierto puesto que

$$\begin{aligned}
\bigcup(\{[e_A]\} \cup \rho[\bigcup[A]]) &= (\bigcup\{[e_A]\}) \cup (\bigcup \rho[\bigcup[A]]) \\
&= [e_A] \cup (\bigcup[A]) \\
&= \{e_B : BrA\} \cup (\bigcup\{B : BrA\}) \\
&= (\bigcup\{\{e_B\} : BrA\}) \cup (\bigcup\{B : BrA\}) \\
&= \bigcup\{\{e_B\} \cup B : BrA\}
\end{aligned}$$

que es unión finita de abiertos en $\psi(\mathcal{A})$ y por tanto es abierto en $\psi(\mathcal{A})/R$.

Ahora bien, si $\bigcup y \in B$ para algún $BrA$, entonces $\{y\}$ y $\{[e_A]\} \cup \rho[\bigcup[A] \backslash y])$, son un par de conjuntos ajenos que contienen a $y$ y a $x$ respectivamente. $\{y\}$ es abierto y además

$$\begin{aligned}
\bigcup(\{[e_A]\} \cup \rho[\bigcup[A] \backslash y]) &= (\bigcup\{[e_A]\}) \cup (\bigcup \rho[\bigcup[A] \backslash y] \\
&= [e_A] \cup (\bigcup[A] \backslash y) \\
&= \{e_B : BrA\} \cup (\bigcup\{B \backslash y : BrA\})
\end{aligned}$$

$$= \bigcup\{\{e_B\} \cup (B \backslash \bigcup y) : BrA\}$$

que es abierto en $\psi(\mathcal{A})$. Por lo tanto, $\{y\}$ y $\{[e_A]\} \cup \rho[\bigcup[A] \backslash y]$ son abiertos y ajenos en $\psi(\mathcal{A})/R$.

Por último, si $x, y \in M_{\mathcal{A}/r}$, digamos $x = [e_A]$, $y = [e_C]$, entonces como $x \neq y$, se tiene que $[A] \neq [C]$. Sean $U = \{x\} \cup \rho[\bigcup[A] \backslash \bigcup[C]]$ y $V = \{y\} \cup \rho[\bigcup[C] \backslash \bigcup[A]]$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\bigcup U &= \bigcup(\{x\} \cup \rho[\bigcup[A] \backslash \bigcup[C]]) \\
&= (\bigcup\{[e_A]\}) \cup (\bigcup \rho[\bigcup[A] \backslash \bigcup[C]]) \\
&= [e_A] \cup (\bigcup[A] \backslash \bigcup[C]) \\
&= [e_A] \cup ((\bigcup_{BrA} B) \backslash (\bigcup_{DrC} D)) \\
&= [e_A] \cup (\bigcup_{BrA} (B \backslash (\bigcup_{DrC} D))) \\
&= [e_A] \cup (\bigcup_{BrA} (B \backslash (B \cap (\bigcup_{DrC} D)))) \\
&= (\bigcup_{BrA} \{e_B\}) \cup (\bigcup_{BrA} (B \backslash (\bigcup_{DrC} (B \cap D)))) \\
&= \bigcup_{BrA} (\{e_B\} \cup (B \backslash (\bigcup_{DrC} (B \cap D))))
\end{aligned}$$

que es abierto en $\psi(\mathcal{A})$ por ser $\mathcal{A}$ casi ajena y por ser finitas las clases de equivalencia módulo $r$. Simétricamente $\bigcup V$ es abierto en $\psi(\mathcal{A})$. Por lo tanto $U$ y $V$ son abiertos en $\psi(\mathcal{A})/R$, tales que $x \in U$ y $y \in V$. Además, de existir $z \in U \cap V$, habrían $a \in \bigcup[A] \backslash \bigcup[C]$ y $c \in \bigcup[C] \backslash \bigcup[A]$ tales que $\rho(a) = z = \rho(c)$. Pero por como está definida $\rho$, esto implica $a = c$, lo cual es imposible puesto que $\bigcup[A] \backslash \bigcup[C]$ y $\bigcup[C] \backslash \bigcup[A]$ son un par de conjuntos ajenos. Por lo tanto $U$ y $V$ son ajenos y de esta manera, $\psi(\mathcal{A})/R$ es un espacio $T_2$.

Veamos que $\psi(\mathcal{A})/R$ es primero numerable. Sea $x \in \psi(\mathcal{A})/R$, entonces si $x \in \rho[\omega]$, $\mathcal{B}_R(x) = \{\{x\}\}$ es una base local de vecindades de $x$. Por otra parte, si $x = [e_A] \in M_{\mathcal{A}/r}$, entonces definimos la colección $\mathcal{B}_R([e_A])$ como la colección $\{\{[e_A]\} \cup \rho[D] : D \subseteq \bigcup[A]$ y $|\bigcup[A] \backslash D| < \aleph_0\}$. Notemos que cada uno de los elementos de $\mathcal{B}_R(x)$ es abierto, puesto que

$$\begin{aligned}
\bigcup(\{[e_A]\} \cup \rho[D]) &= (\bigcup\{[e_A]\}) \cup (\bigcup \rho[D]) \\
&= [e_A] \cup D = [e_A] \cup (\bigcup[A] \cap D) \\
&= [e_A] \cup (\bigcup_{BrA} B \cap D) \\
&= \bigcup_{BrA} (\{e_A\} \cup (B \cap D))
\end{aligned}$$

y para cada $B \in [A]$, $|B \backslash D| \leq |(\bigcup[A]) \backslash D)| < \aleph_0$. Aseguramos que dicha colección es una base local de vecindades de $[e_A]$. En efecto, sea $V$ una vecindad de $x$. Entonces existe un abierto $W$ de $\psi(\mathcal{A})/R$ tal que $x \in W \subseteq V$. Así, $\bigcup W$ es un abierto en $\psi(\mathcal{A})$ tal que $\bigcup\{x\} = \bigcup\{\{e_B : e_B R e_A\}\} \subseteq \bigcup W$. Entonces $\{e_B\} \cup (B \backslash S_B) \subseteq \bigcup W$ para algún subconjunto finito $S_B$ de $B$, para cada $BrA$. Por lo tanto, si $T = \bigcup\{S_B : BrA\}$, se tiene que

$$\{[e_A]\} \cup (\rho[\bigcup[A] \backslash T]) \in \mathcal{B}_R([e_A])$$

$$\text{y} \ \ \{[e_A]\} \cup (\rho[\bigcup[A] \backslash T]) \subseteq W \subseteq V.$$

Aseguramos que $\psi(\mathcal{A})/R$ es localmente compacto. Sea $x \in \psi(\mathcal{A})/R$. Entonces si $x \in \rho[\omega]$, $\{x\} \in \{\{x\}\} = \mathcal{B}_R(x)$ es una vecindad compacta de $x$. Por otra parte, si $x = [e_A] \in M_{\mathcal{A}/r}$, $\{[e_A]\} \cup (\rho[\bigcup[A]]) \in \mathcal{B}_R([e_A])$ es una vecindad compacta. En efecto, consideremos $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $\hat{A} = \{[e_A]\} \cup \rho[\cup[A]]$ y sea $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $[e_A] \in U_0$. Entonces existe $V \in \mathcal{B}_R([e_A])$ tal que $V \subseteq U_0$. Sea y $V = \{[e_A]\} \cup \rho[D]$, con $D \subseteq \bigcup[A]$ tal que $|\bigcup[A] \backslash D| < \aleph_0$. Entonces

$$\begin{aligned}
|\hat{A} \backslash U_0| &\leq |(\{[e_A]\} \cup \rho[\bigcup[A]]) \backslash (\{[e_A]\} \cup \rho[D])| \\
&= |(\rho[\bigcup[A]]) \backslash (\rho[D])| \\
&= |(\rho[\bigcup[A]) \backslash D]| \\
&= |\bigcup[A] \backslash D| < \aleph_0
\end{aligned}$$

y así, $\hat{A}$ es compacto.

Por lo tanto, de la Proposición B.2.9, $\psi(\mathcal{A})/R$ es localmente compacto.

Aseguramos que $\rho[\omega]$ es denso en $\psi(\mathcal{A})/R$. Sea $U$ un abierto no vacío en $\psi(\mathcal{A})/R$. Entonces, dada $x \in U$, como la colección $\mathcal{B}_R(x)$ es base local de vecindades de $x$, existe $W \in \mathcal{B}_R(x)$ tal que $W \subseteq U$. Si $x \in \rho[\omega]$, claramente $U \cap \rho[\omega] \neq \emptyset$. Por otra parte, si $x \in M_{\mathcal{A}/r}$, entonces $W = \{[e_A]\} \cup (\rho[\bigcup[A] \backslash S])$ para algún $S \subseteq \bigcup[A]$ finito. De manera que como $\rho[\bigcup[A] \backslash S] \cap \rho[\omega] \supseteq \rho[(\bigcup[A] \backslash S) \cap \omega] \neq \emptyset$, se tiene que $U \cap \rho[\omega] \supseteq W \cap \rho[\omega] \neq \emptyset$.

Consideremos ahora $[A] \in \mathcal{A}/r$ y notemos que $(\{[e_A]\} \cup \rho[\bigcup[A]]) \cap M_{\mathcal{A}/r} = \{[e_A]\}$. Esto es, la topología de $\psi(\mathcal{A})/R$ restringida a $M_{\mathcal{A}/r}$ es la topología discreta.

Entonces, hemos probado que $\psi(\mathcal{A})/R$ es un espacio $T_2$, primero numerable, localmente compacto, separable y tal que $der(\psi(\mathcal{A})/R) = M_{\mathcal{A}/r}$ es discreto en $\psi(\mathcal{A})/R$. Por lo tanto, en virtud del Teorema 3.3.15, $\psi(\mathcal{A})/R$ es un espacio de Mrówka.

□

**Corolario 5.1.3.** *Consideremos el espacio topológico $\psi(\mathcal{A})$ y $\varphi$ un mapeo inyectivo cuyo dominio y contradominio son subconjuntos ajenos de $\mathcal{A}$. El espacio obtenido mediante la identificación de cada $A \in dom(\varphi)$ con $\varphi(A)$, es un espacio de Mrówka, a saber $\psi(\mathcal{B})$, donde $\mathcal{B} = (\mathcal{A}\backslash im(\varphi)) \cup \{A \cup \varphi(A) : A \in dom(\varphi)\}$.*

A continuación damos una serie de resultados enfocados a probar que hay $2^{2^{\aleph_0}}$ espacios pseudocompactos no homeomorfos dos a dos (un poco ajeno al tema central de este capítulo) a manera de (primera) aplicación de los dos resultados anteriores.

**Proposición 5.1.4.** *Hay $2^{2^{\aleph_0}}$ familias casi ajenas maximales infinitas $\mathcal{A}$ en $\omega$.*

**Demostración.** Sean $\mathcal{N}_1$ y $\mathcal{N}_2$ subconjuntos infinitos y ajenos de $\omega$, tales que $\omega = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$. Tenemos que de la Observación 2.1.6, existen familias casi ajenas maximales $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ de $\mathcal{N}_1$ y $\mathcal{N}_2$ respectivamente, cuya cardinalidad es $2^{\aleph_0}$. Sea $\phi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ una función biyectiva y definamos $\mathcal{A}_\phi = \{A \cup \phi(A) : A \in \mathcal{A}_1\}$. Entonces $\mathcal{A}_\phi$ es una familia casi ajena maximal en $\omega$. En efecto, cada elemento de $\mathcal{A}_\phi$ es infinito. Además, dados $A\cup\phi(A)$ y $B\cup\phi(B)$ elementos de $\mathcal{A}_\phi$ distintos, tenemos que

$$\begin{aligned}(A \cup \phi(A)) \cap (B \cup \phi(B)) &= (A \cap B) \cup (A \cap \phi(B)) \cup (\phi(A) \cap B) \cup (\phi(A) \cap \phi(B)) \\ &= (A \cap B) \cup (\phi(A) \cap \phi(B)),\end{aligned}$$

de manera que la intersección de los elementos de $\mathcal{A}_\phi$ es finita, por lo tanto $\mathcal{A}_\phi$ es una familia casi ajena. Para verificar la maximalidad de dicha familia, consideramos un conjunto infinito $H \subseteq \omega$ tal que $H \notin \mathcal{A}_\phi$. Entonces, si para toda $A \in \mathcal{A}_1$ $H \cap (A \cap \phi(A))$ fuera finito, para toda $A \in \mathcal{A}_1$, $H \cap A$ y $H \cap \phi(A)$ serían finitos, pero esto contradice la maximalidad de $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$. Por lo tanto, existe $A \in \mathcal{A}_1$ tal que $H \cap (A \cup \phi(A))$ es infinito y así, $\mathcal{A}_\phi$ es una familia casi ajena maximal.

Sean $\phi$ y $\phi'$ un par de biyecciones de $\mathcal{A}_1$ en $\mathcal{A}_2$ tales que $\mathcal{A}_\phi = \mathcal{A}_{\phi'}$. Entonces para cada $A \in \mathcal{A}_1$ existe $B \in \mathcal{A}_1$ tal que $A \cup \phi(A) = B \cup \phi'(B)$. Además, como $\mathcal{N}_1$ y $\mathcal{N}_2$ son conjuntos ajenos de $\omega$,

$$A = (A \cup \phi(A)) \cap \mathcal{N}_1 = (B \cup \phi'(B)) \cap \mathcal{N}_1 = B,$$

y análogamente, $\phi(A) = \phi'(B)$ y entonces $\phi(A) = \phi'(A)$. Por lo tanto, dado un par de biyecciones de $\mathcal{A}_1$ en $\mathcal{A}_2$ distintas, $\phi$ y $\phi'$, $\mathcal{A}_\phi$ y $\mathcal{A}_{\phi'}$ (definidas como antes) son también distintas.

Por supuesto, hay al menos una pareja $\{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2\}$ de subconjuntos numerables y complementarios de $\omega$ (por ejemplo, los pares y los impares).

Por otra parte, sea $\mathbb{B} = \{f \in {}^{\mathcal{A}_1}\mathcal{A}_2 : f \text{ es biyectiva}\}$. Entonces $|\mathbb{B}| = |\{f \in {}^{|\mathcal{A}_1|}|\mathcal{A}_2| : f \text{ es biyectiva}\}|$. Como $|\mathcal{A}_1| = |\mathcal{A}_2| = 2^{\aleph_0}$, entonces del Teorema A.3.23, se tiene que $|\mathbb{B}| = 2^{2^{\aleph_0}}$.

Por lo tanto hay al menos $2^{2^{\aleph_0}}$ familias casi ajenas maximales en $\mathbb{N}$, pero hay $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))| = 2^{2^{\aleph_0}}$ familias de subconjuntos de $\omega$. Por lo tanto hay $2^{2^{\aleph_0}}$ familias casi ajenas maximales en $\omega$. $\square$

Con base en la Proposición 3.2.7, podemos generar $2^{2^{\aleph_0}}$ espacios de Mrówka pseudocompactos. Sin embargo, probar que hay $2^{2^{\aleph_0}}$ espacios pseudocompactos no homeomorfos dos a dos, requiere de algunos resultados más. Veremos que la colección de familias casi ajenas maximales infinitas que generan espacios de Mrówka homeomorfos son a lo más $2^{\aleph_0}$ y haciendo uso de las propiedades del producto de cardinales infinitos y del Axioma de Elección, obtendremos el resultado.

Comenzamos definiendo la relación de equivalencia $\Upsilon$.

Recordemos que la *diferencia simétrica* entre un par de conjuntos $A$ y $B$, denotada $A \triangle B$, es el conjunto $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Con el propósito de probar el Teorema 5.1.11, definiremos una relación de equivalencia, y enunciaremos y probaremos las siguientes proposiciones.

**Definición 5.1.5.** Dado un par de familias casi ajenas maximales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, decimos que $\mathcal{A}$ *está* $\Upsilon$*-relacionada con* $\mathcal{B}$ (que denotaremos por $\mathcal{A}\Upsilon\mathcal{B}$) si existe una función biyectiva $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tal que para cada $A \in \mathcal{A}$, la diferencia simétrica entre $A$ y $\phi(A)$ es finita.

Claramente la relación $\Upsilon$ es reflexiva (puesto que la diferencia simétrica entre un conjunto cualquiera y él mismo es vacía), simétrica (porque la relación inversa de una función biyectiva es biyectiva y por la simetría de la diferencia simétrica) y transitiva (por propiedades de los conjuntos finitos). De esta manera, $\Upsilon$ es de equivalencia.

**Notación.** Dadas $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ un par de familias casi ajenas maximales tales que $\mathcal{A}\Upsilon\mathcal{B}$ y $A \in \mathcal{A}$, denotaremos por $B_A$ al elemento de $\mathcal{B}$ que le corresponde a $A$ bajo alguna función testigo de que $\mathcal{A}\Upsilon\mathcal{B}$, que podemos escoger arbitrariamente y luego fijar.

**Proposición 5.1.6.** *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son un par de familias casi ajenas $\Upsilon$-relacionadas, entonces $\varphi : \psi(\mathcal{A}) \to \psi(\mathcal{B})$, dada por:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} e_{B_A} & si\ x = e_A; \\ x & si\ x \in \omega, \end{cases}$$

*es un homeomorfismo.*

**Demostración.** Es claro que $\varphi$ está bien definida y como la función que asocia a cada elemento $A \in \mathcal{A}$ con $B_A \in \mathcal{B}$ es biyectiva, entonces $\varphi$ es biyectiva.

Consideremos ahora $x \in \psi(\mathcal{A})$ y $U \subseteq \psi(\mathcal{B})$ tal que $\varphi(x) \in U$. Entonces, si $x \in \omega$, $\{x\} \subseteq \psi(\mathcal{A})$ es un abierto tal que $\varphi[\{x\}] \in U$. Por otra parte, si $x = e_A$ para alguna $A \in \mathcal{A}$, entonces $\varphi(x) = e_{B_A}$, de manera que $\{e_{B_A}\} \cup (B_A \backslash S) \subseteq U$ para algún $S \subseteq B_A$ finito. Como $|A \triangle B_A| < \aleph_0$, se tiene que $\{e_A\} \cup (A \backslash (S \cup (A \backslash B_A)))$ es un abierto de $\psi(\mathcal{A})$ tal que:

$$\begin{aligned}\varphi[\{e_A\} \cup (A \backslash (S \cup (A \backslash B_A)))] &= \{e_{B_A}\} \cup (A \backslash (S \cup (A \backslash B_A))) \\ &= \{e_{B_A}\} \cup ((A \cap B_A) \backslash S)\end{aligned}$$

y $\{e_{B_A}\} \cup ((A \cap B_A) \backslash S) = \{e_{B_A}\} \cup (B_A \backslash (S \cup (B_A \backslash A)))$ es claramente un abierto contenido en $U$. Por lo tanto $\varphi$ es continua.

Veamos ahora que $\varphi$ es abierta. Consideremos un abierto canónico, digamos $A$. Entonces, si $A = \{n\}$ para alguna $n \in \omega$, $\varphi[A]$ es claramente abierto. Si $A = \{e_C\} \cup (C \backslash S)$ para algún $S \subseteq C$ finito, entonces $\varphi[A] = \{e_{B_C}\} \cup (C \backslash S)$ con $|B_C \triangle C| < \aleph_0$. Así, $S \cup (B_C \backslash C)$ es finito y por tanto $\varphi[A] = \{e_{B_C}\} \cup (B_C \backslash (S \cup (B_C \backslash C))) \cup (C \backslash (B_C \cup S))$ es abierto. □

**Notación.** Dada una familia casi ajena $\mathcal{A}$, denotaremos por $[\mathcal{A}]_\Upsilon$ al conjunto de familias casi ajenas $\{\mathcal{B} : \mathcal{B} \Upsilon \mathcal{A}\}$.

**Proposición 5.1.7.** *Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena. Entonces $|[\mathcal{A}]_\Upsilon| \leqslant 2^{\aleph_0}$.*

**Demostración.** Observemos que dada una familia casi ajena $\mathcal{A}$, $[\mathcal{A}]_\Upsilon$ consiste de las familias casi ajenas "parecidas" a $\mathcal{A}$. Es decir, la familia casi ajena $\mathcal{B}$ es tal que $\mathcal{A} \Upsilon \mathcal{B}$ si cada elemento de $\mathcal{A}$ se distingue de uno (y sólo uno) de $\mathcal{B}$ en un número finito de naturales. De esta manera, hay tantos elementos en $[\mathcal{A}]_\Upsilon$ como subconjuntos de $\omega$ que difieren de un elemento $A \in \mathcal{A}$ en un número finito de naturales, para cada $A \in \mathcal{A}$. Pero dado $A \in \mathcal{A}$, hay sólo una cantidad numerable de subconjuntos de $\omega$ que se distinguen de $A$ en un número finito de naturales (véase la Proposición A.3.12), entonces $|[\mathcal{A}]_\Upsilon| = |\mathcal{A}| \cdot \aleph_0 \leqslant 2^{\aleph_0}$. □

**Lema 5.1.8.** *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ un par de familias casi ajenas. Si $\phi : \psi(\mathcal{A}) \to \psi(\mathcal{B})$ es un homeomorfismo entonces $\phi(n) \in \omega$ para toda $n \in \omega$.*

**Demostración.** Supongamos que existe $n \in \omega$ tal que $\phi(n) = e_B$ para alguna $B \in \mathcal{B}$. Entonces $\phi[\{n\}] = \{e_B\}$. Observemos que $\{e_B\}$ no es abierto de acuerdo con la topología definida en $\psi(\mathcal{B})$. Sin embargo $\{n\}$ es abierto en $\psi(\mathcal{A})$, lo cual es una contradicción pues $\phi$ es homeomorfismo y por tanto es abierta. □

Elijamos un representante de cada clase de equivalencia de familias casi ajenas maximales inducida por $\Upsilon$. Llamemos al representante de la clase $[\mathcal{A}]_\Upsilon$, $\hat{\mathcal{A}}$.

Fijemos una familia casi ajena maximal $\mathcal{A}$.

Sea $\mathfrak{A} = \{\hat{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{P}(\omega) : \hat{\mathcal{B}}$ es representante de una de las clases de equivalencia inducidas por $\Upsilon$ y $\psi(\mathcal{A}) \cong \psi(\hat{\mathcal{B}})\}$.

Dado $\hat{\mathcal{B}} \in \mathfrak{A}$, sea $\phi_{\mathcal{B}}$ un homeomorfismo de $\psi(\mathcal{A})$ en $\psi(\hat{\mathcal{B}})$ y sea $f_{\mathcal{B}}$ la restricción de $\phi_{\mathcal{B}}$ a los naturales.

**Proposición 5.1.9.** *Si $f_{\mathcal{B}} = f_{\mathcal{C}}$ entonces $\hat{\mathcal{B}}\Upsilon\hat{\mathcal{C}}$.*

**Demostración.** Sea $f = f_{\mathcal{B}} = f_{\mathcal{C}}$. Definimos $\mathcal{D}$ como la colección $\{f[A] : A \in \mathcal{A}\}$. Sea $\eta : \hat{\mathcal{C}} \to \mathcal{D}$ la función definida de la siguiente manera: para cada $C \in \hat{\mathcal{C}}$, $\eta(C) = f[A_C]$, donde $A_C \in \mathcal{A}$ es tal que $\phi_{\mathcal{C}}(e_{A_C}) = e_C$.

Aseguramos que, para cada $C \in \hat{\mathcal{C}}$, $|C\triangle\eta(C)| < \aleph_0$. En efecto, como $\phi_{\mathcal{C}}(e_{A_C}) = e_C$, por la continuidad de $\phi_{\mathcal{C}}$, para algún conjunto $S \subseteq A_C$ finito, se tiene que

$$\phi_{\mathcal{C}}[\{e_{A_C}\} \cup (A_C \backslash S)] \subseteq \{e_C\} \cup C.$$

Por lo tanto $f[A_C]\backslash C \subseteq f[S]$. Como $f[S]$ es finito, $|\eta(C)\backslash C| = |f[A_C]\backslash C| < \aleph_0$.

Ahora bien, $\phi_{\mathcal{C}}^{-1}(e_C) = e_{A_C}$. Por un razonamiento análogo al anterior se tiene que $|f^{-1}[C]\backslash A_C| < \aleph_0$. Entonces, $|f[f^{-1}[C]\backslash A_C]| = |C\backslash f[A_C]| = |C\backslash\eta(C)|$ es finito. Por lo tanto, $|C\triangle\eta(C)| < \aleph_0$. Es decir, $\hat{\mathcal{C}}\Upsilon\mathcal{D}$. De manera semejante $\hat{\mathcal{B}}\Upsilon\mathcal{D}$ y por lo tanto, por la transitividad de la relación $\Upsilon$, se tiene que $\hat{\mathcal{B}}\Upsilon\hat{\mathcal{C}}$. $\square$

**Proposición 5.1.10.** $|\mathfrak{A}| \leqslant 2^{\aleph_0}$.

**Demostración.** Definimos $\beth : \mathfrak{A} \to^{\omega} \omega$ como $\beth(\hat{\mathcal{B}}) = f_{\mathcal{B}}$ y aseguramos que $\beth$ es inyectiva.

Sean $\hat{\mathcal{B}}, \hat{\mathcal{C}} \in \mathfrak{A}$ tales que $f_{\mathcal{B}} = \beth(\hat{\mathcal{B}}) = \beth(\hat{\mathcal{C}}) = f_{\mathcal{C}}$, entonces de la Proposición 5.1.9, se tiene que $\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathcal{C}}$, con lo que concluimos la prueba. $\square$

**Teorema 5.1.11.** *Hay $2^{2^{\aleph_0}}$ espacios de Mrówka pseudocompactos no compactos no homeomorfos dos a dos.*

**Demostración.** Sea $\mathfrak{M}$ el conjunto de familias casi ajenas maximales infinitas sobre $\omega$. Para cada $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}$, sea $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{B} \in \mathfrak{M} : \psi(\mathcal{A})$ es homeomorfo a $\psi(\mathcal{B})\}$. Como dado un par de familias casi ajenas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, la relación "$\psi(\mathcal{A})$ es homeomorfo a $\psi(\mathcal{B})$" es de equivalencia, los conjuntos $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{H}(\mathcal{B})$ son o bien idénticos o ajenos. Por la Proposición 5.1.4, $\mathfrak{M}$ tiene cardinalidad $2^{2^{\aleph_0}}$ y para cada conjunto $\mathcal{A}$, $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ tiene cardinalidad menor o igual que $2^{\aleph_0}$ (véase la Proposición 5.1.10). Por lo tanto, por el Corolario A.3.20, el conjunto $\{\mathcal{H}(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \in \mathfrak{M}\}$ tiene cardinalidad $2^{2^{\aleph_0}}$ y así, en virtud del Axioma de Elección, podemos obtener un conjunto de $2^{2^{\aleph_0}}$ familias casi ajenas maximales infinitas que generan espacios de Mrówka no homeomorfos dos a dos, digamos $\mathfrak{P}$.

Ahora bien, recordemos que de la Proposición 3.3.5, $\psi(\mathcal{A})$ es compacto si y sólo si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena finita, de manera que ninguno de los elementos de $\mathfrak{P}$ define un espacio de Mrówka compacto y por lo tanto tenemos lo que se quería demostrar. $\square$

Habiendo probado la proposición anterior, retomamos el tema central de este capítulo; la compactación de Stone-Čech de los espacios de Mrówka. Probaremos primero que hay una familia casi ajena maximal tal que la compactación de Stone-Čech del espacio de Mrówka que define tiene un residuo con la cardinalidad del continuo.

**Proposición 5.1.12.** *Existe una familia casi ajena maximal $\mathcal{A}$ tal que si $\psi(\mathcal{A}) = X$, entonces $\beta X \backslash X$ tiene por lo menos $2^{\aleph_0}$ puntos.*

**Demostración.** Sea $\mathcal{B}$ una familia casi ajena maximal en $\omega$ de cardinalidad $2^{\aleph_0}$ arbitraria (notemos que tal $\mathcal{B}$ existe de la Observación 2.1.6).

Ahora, para cada $B \in \mathcal{B}$, consideremos una familia casi ajena maximal infinita $\mathcal{A}_B$ en $B$ (podemos considerar a dichos $\mathcal{A}_B$ también por la Observación 2.1.6), y sea $\mathcal{A} = \bigcup\{\mathcal{A}_B : B \in \mathcal{B}\}$.

Afirmación. $\mathcal{A}$ es la familia casi ajena maximal buscada.

Primero veamos que $\mathcal{A}$ es efectivamente una familia casi ajena maximal infinita. Observemos que todo elemento de $\mathcal{A}$ es infinito, pues dada $A \in \mathcal{A}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $A \in \mathcal{A}_B$ y $\mathcal{A}_B$ es una familia casi ajena.

Consideremos ahora $A, B \in \mathcal{A}$ distintos. Entonces tenemos dos casos; si $A, B \in \mathcal{A}_C$ para alguna $C \in \mathcal{B}$, entonces $A \cap B$ es finito por ser $\mathcal{A}_C$ una familia casi ajena. Por otra parte, si $A \in \mathcal{A}_C$ para alguna $C \in \mathcal{B}$ y $B \in \mathcal{A}_D$ para alguna $D \in \mathcal{B}\backslash\{C\}$, entonces se tiene que, de ocurrir que $A \cap B$ fuera infinito, tendríamos que un subconjunto de $C$ interseca a uno de $D$ en una infinidad de elementos. De manera que $C \cap D$ sería infinito contradiciendo que $\mathcal{B}$ es una familia casi ajena. De donde se tiene que $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena.

Además, si $F \subseteq \omega$ es infinito y tal que $F \notin \mathcal{A}$, entonces para toda $B \in \mathcal{B}$, $F \notin \mathcal{A}_B$. Como $\mathcal{B}$ es maximal, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $|B \cap F| = \aleph_0$. Por tanto, existe $D_B \in \mathcal{A}_B$ tal que $|F \cap D_B| = \aleph_0$. Así, existe $D_B \in \mathcal{A}$ tal que $|F \cap D_B| = \aleph_0$ y entonces $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal.

Ahora, denotemos por $\widehat{\mathcal{A}_B}$ al conjunto $\{e_C : C \in \mathcal{A}_B\}$. Entonces $X = \psi(\mathcal{A}) = (\omega \cup \bigcup\{\widehat{\mathcal{A}_B} : B \in \mathcal{B}\}, \tau_\psi)$. Para cada $B \in \mathcal{B}$, consideremos el conjunto $\mathcal{F}_B = \{M \in Z(X) : M \subseteq \widehat{\mathcal{A}_B} \text{ y } |\widehat{\mathcal{A}_B} \backslash M| < \aleph_0\}$.

Elijamos una $B \in \mathcal{B}$ arbitraria, fija. Aseguramos que $\widehat{\mathcal{A}_B} \in Z(X)$. En efecto, sea $B = \{b_n : n \in \omega\}$ una enumeración inyectiva de $B$. Definamos $f : \psi(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } x = b_n; \\ 0 & \text{si } x = e_A \text{ para alguna } A \in \mathcal{A}_B; \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observemos que así, dada $x \in \psi(\mathcal{A})$ y un abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f(x) \in U$ se tienen tres casos: si $x \in \omega$, entonces $\{x\}$ es un abierto en $\psi(\mathcal{A})$ tal que $f[\{x\}] \subseteq U$. Por otro lado, si $x = e_A$ para alguna $A \in \mathcal{A}_B$, tenemos que $f(x) = 0$ y entonces existe $m \in \omega$ tal que $[0, \frac{1}{m}) \subseteq U$. Así, $\{e_A\} \cup (A \backslash \{b_0, b_1, ..., b_m\}) \subseteq \psi(\mathcal{A})$ es abierto y tal que $f[\{e_A\} \cup (A \backslash \{b_0, b_1, ..., b_m\})] \subseteq [0, \frac{1}{m+1}) \subseteq U$. Por último, si $x = e_C$ para alguna $C \in \mathcal{A}_{B'}$ con $B \neq B'$, entonces como $\mathcal{B}$ es una familia casi ajena, $|C \cap B'| \leq |B \cap B'| < \aleph_0$. Entonces $\{e_C\} \cup (C \backslash B')$ es un abierto de $\psi(\mathcal{A})$ tal que $f[\{e_C\} \cup (C \backslash B')] \subseteq \{1\}$.

Así, $\widehat{\mathcal{A}_B} \in \mathcal{F}_B$, es decir, $\mathcal{F}_B$ es no vacío y $\mathcal{F}_B$ es base de $Z(X)$-filtro. En efecto, como $|\widehat{\mathcal{A}_B}| > \aleph_0$, $\emptyset \notin \mathcal{F}_B$. Además, dados $M_1, M_2 \in \mathcal{F}_B$, tenemos que

$M_1 \cap M_2 \subseteq \widehat{\mathcal{A}_B}$ y

$$|\widehat{\mathcal{A}_B} \backslash (M_1 \cap M_2)| = |(\widehat{\mathcal{A}_B} \backslash M_1) \cup (\widehat{\mathcal{A}_B} \backslash M_2)| < \aleph_0.$$

Entonces existe $M_3 \in \mathcal{F}_B$ tal que $M_3 \subseteq M_1 \cap M_2$. Por lo tanto, por la Proposición 1.6.7, $\mathcal{F}_B$ es base de filtro.

Sea pues $\mathcal{G}_B$ un $Z(X)$-ultrafiltro que contiene a $\mathcal{F}_B$ (véase el Teorema 1.6.10). Afirmamos que $\mathcal{G}_B$ es un $Z(X)$-ultrafiltro libre, es decir, que $\mathcal{G}_B$ no pertenece a $e[\psi(\mathcal{A})] = \{\{A \in Z(X) : x \in A\} : x \in \psi(\mathcal{A})\}$. En efecto, supongamos, por el contrario, que existe un elemento $z \in \psi(\mathcal{A})$ tal que $z \in \cap \mathcal{G}_B$ y sea $\mathcal{H}_B$ el $Z(X)$-filtro generado por $\mathcal{F}_B$ (véase la Observación 1.6.8). Entonces en particular para cada $H \in \mathcal{H}_B$, $z \in H$. De manera que, como $\widehat{\mathcal{A}_B} \in \mathcal{F}_B$, se tiene que $z = e_C$ para alguna $C \in \mathcal{A}_B$, y por lo tanto $e_C \in H$ para cada $H \in \mathcal{H}_B$.

Por otra parte, $\widehat{\mathcal{A}_B} \backslash \{e_C\}$ es un conjunto nulo (pues $\widehat{\mathcal{A}_B}$ y $M_{\mathcal{A}} \backslash \{e_C\}$ son nulos (véase el inciso *(4)* de la Proposición 3.3.6) y por lo tanto su intersección también lo es, véase 1.2.3), así, por la definición de $\mathcal{F}_B$, $\widehat{\mathcal{A}_B} \backslash \{e_C\} \in \mathcal{H}_B$. Pero $e_C \notin \widehat{\mathcal{A}_B} \backslash \{e_C\}$, que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{G}_B$ es un $Z(X)$-ultrafiltro libre.

Además, en virtud de que, dado $B' \in \mathcal{B}$, $\mathcal{G}_{B'}$ es $Z(X)$-ultrafiltro y de que $\widehat{\mathcal{A}_B} \cap \widehat{\mathcal{A}_{B'}} = \emptyset$ para todo $B \neq B'$ (puesto que $e_C \in \widehat{\mathcal{A}_B} \cap \widehat{\mathcal{A}_{B'}}$ implica que $C \in \mathcal{A}_B \cap \mathcal{A}_{B'}$, de manera que $C$ sería un subconjunto infinito de $B \cap B'$, que contradice que $B$ y $B'$ sean elementos de la familia casi ajena $\mathcal{B}$), se tiene que $\widehat{\mathcal{A}_B} \in \mathcal{G}_B \backslash \mathcal{G}_{B'}$. De manera que hemos encontrado $2^{\aleph_0}$ elementos de $\beta X = \{\mathcal{F} \subseteq Z(X) : \mathcal{F}$ es $Z(X)$-ultrafiltro$\}$ que no pertenecen a $e[\psi(\mathcal{A})]$, a saber, los $Z(X)$-ultrafiltros $\mathcal{G}_B$ con $B \in \mathcal{B}$. $\square$

Ahora veremos que, en contraste, también existe una familia casi ajena maximal cuyo espacio de Mrówka asociado tiene compactación de Stone-Čech con residuo de cardinalidad 1.

Se requerirán varios resultados para probarlo, empezamos recurriendo a un concepto definido previamente; las funciones de Baire.

**Proposición 5.1.13.** *Existe una familia casi ajena $\mathcal{A}$ en $\omega$ de cardinalidad $2^{\aleph_0}$ tal que para cada función continua realvaluada $f$ definida en $\psi(\mathcal{A})$, $f \restriction_{M_{\mathcal{A}}}$ es "equivalente"a una función de la primera clase de Baire. (i.e. existe una biyección $\varphi$ de los reales en $M_{\mathcal{A}}$ tal que la función $f \restriction_{M_{\mathcal{A}}} \circ \varphi$ es de la primera clase de Baire sobre $\mathbb{R}$).*

**Demostración.** De la sección 6.1, tenemos que exite una familia casi ajena $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{N} \cong_h \psi(\mathcal{A})$, donde identificamos (de acuerdo con la notación del capítulo 6) a la recta $R$ con $M_{\mathcal{A}}$ y a $\mathcal{N} \backslash R$ con $\mathbb{N}$.

Con tal asociación, dada una función continua y realvaluada $f : \psi(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$, tenemos que $f \circ h : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ es continua. Pero de la Proposición 4.2.4, tenemos que existe una biyección $\phi : \mathbb{R} \to R$ tal que $(f \circ h) \restriction_R \circ \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de la primera clase de Baire.

Observemos que $h\restriction_R \circ \phi : \mathbb{R} \to M_{\mathcal{A}}$ es biyectiva y que $(f \circ h)\restriction_R \circ \phi = f\restriction_{M_{\mathcal{A}}} \circ h\restriction_R \circ \phi$

Por lo tanto, existe una biyección $\xi : \mathbb{R} \to M_{\mathcal{A}}$, a saber $\xi = h\restriction_R \circ \phi$, tal que $f\restriction_{M_{\mathcal{A}}} \circ \xi$ es de la primera clase de Baire. □

Veremos un resultado respecto a los subconjuntos nulos de los espacios de Mrówka definidos por familias casi ajenas que satisfacen la Proposición 5.1.13 cuyo papel será fundamental más adelante.

**Proposición 5.1.14.** *Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena con las propiedades enunciadas en la Proposición 5.1.13. Entonces todo subconjunto no numerable $E \subseteq M_{\mathcal{A}}$, que sea un conjunto nulo o conulo en $\psi(\mathcal{A})$ es de cardinalidad $2^{\aleph_0}$.*

**Demostración.** Sea $E \subseteq M_{\mathcal{A}}$ un conjunto nulo (respectivamente conulo) no numerable de $\psi(\mathcal{A})$. Sea $g : \psi(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $E = g^{-1}[\{0\}]$ (respectivamente, $E = g^{-1}[\mathbb{R}\backslash\{0\}]$). Por hipótesis $(g\restriction_{M_{\mathcal{A}}}) \circ \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de la primera clase de Baire, en donde $\phi$ es una función biyectiva (véase la Proposicion 5.1.13). Ahora, la Proposición 1.8.4 nos garantiza que $[(g\restriction_{M_{\mathcal{A}}}) \circ \phi]^{-1}[\{0\}] = H$ (respectivamente, $[(g\restriction_{M_{\mathcal{A}}}) \circ \phi]^{-1}[\mathbb{R}\backslash\{0\}] = H$) es un conjunto $G_\delta$ (respectivamente un conjunto $F_\sigma$). Como $\phi$ es biyectiva y $\phi[H] = E$, $H$ es no numerable. Por lo tanto, por la Proposición 1.8.5, $H$ y, por lo tanto, $E$ tienen cardinalidad $2^{\aleph_0}$. □

Construiremos una familia casi ajena maximal infinita $\mathcal{A}$ tal que si $E \subseteq M_{\mathcal{A}}$ es infinito, entonces sean equivalentes que $E$ sea nulo y que $|M_{\mathcal{A}}\backslash E| \leqslant \aleph_0$. Esta familia casi ajena es precisamente la que define un espacio de Mrówka cuya compactación de Stone-Čech tiene residuo de cardinalidad 1.

La construcción de dicha familia inicia con una familia casi ajena maximal que satisface las propiedades de la Proposición 5.1.13. La existencia de esta última familia se prueba a continuación.

**Proposición 5.1.15.** *Existe una familia casi ajena maximal con las propiedades enunciadas en la Proposición 5.1.13.*

**Demostración.** Consideremos una familia casi ajena $\mathcal{A}'$ cualquiera, que satisfaga las propiedades enunciadas en la Proposición 5.1.13. Extendemos $\mathcal{A}'$, por la Proposición 2.1.5, a una familia casi ajena maximal $\mathcal{A}''$. Como la cardinalidad de $\mathcal{A}'$ es $2^{\aleph_0}$, existe una función inyectiva $\varphi$ de $\mathcal{A}''\backslash\mathcal{A}'$ en $\mathcal{A}'$. Notemos que entonces $\varphi$ es un mapeo inyectivo cuyo dominio y contradominio son conjuntos ajenos de $\mathcal{A}''$ ($dom(\varphi) = \mathcal{A}''\backslash\mathcal{A}'$, $im(\varphi) \subseteq \mathcal{A}'$), entonces, por el Corolario 5.1.3, el espacio $\psi(\mathcal{A})$ con $\mathcal{A} = (\mathcal{A}'\backslash\varphi[\mathcal{A}''\backslash\mathcal{A}']) \cup \{A \cup \varphi(A) : A \in \mathcal{A}''\backslash\mathcal{A}'\}$, es de Mrówka. Sea $X = \psi(\mathcal{A})$. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\psi(\mathcal{A}') \xrightarrow{\ i\ } \psi(\mathcal{A}'') \xrightarrow{\ q\ } X = \psi(\mathcal{A})$$

donde $i$ es la inclusión de $\psi(\mathcal{A}')$ en $\psi(\mathcal{A}'')$ y $q$ es el cociente descrito de $\psi(\mathcal{A}'')$ en $X = \psi(\mathcal{A})$. Entonces tenemos que tanto $i$ como $q$ son funciones continuas.

Notemos además que $\mathcal{A}$ es maximal. En efecto, consideremos un conjunto infinito $H \subseteq \omega$. Entonces, por la maximalidad de $\mathcal{A}''$, existe un elemento $A \in \mathcal{A}''$ tal que $A \cap H$ es infinita. Se tienen tres casos, si $A \in \mathcal{A}'' \backslash \mathcal{A}'$, entonces el elemento $A \cup \varphi(A) \in \mathcal{A}$ es tal que $|H \cap (A \cup \varphi(A))| = \aleph_0$. Por otra parte, si $A \in \mathcal{A}'$ y $A \notin \varphi[\mathcal{A}'' \backslash \mathcal{A}']$, $A$ mismo es un elemento de $\mathcal{A}$ tal que su intersección con $H$ es infinita. Si $A \in \mathcal{A}'$ y $A \in \varphi[\mathcal{A}'' \backslash \mathcal{A}']$, entonces $\varphi(B) = A$ para alguna $B \in \mathcal{A}'' \backslash \mathcal{A}'$, y $B \cup \varphi(B) \in \mathcal{A}$ es tal que $|H \cap (B \cup \varphi(B))| = \aleph_0$.

Además, sabemos que existe una función biyectiva $h : \mathbb{R} \to M_{\mathcal{A}'}$, tal que para toda función continua $f : \psi(\mathcal{A}') \to \mathbb{R}$, la composición $f\restriction_{M'_{\mathcal{A}}} \circ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de la primera clase de Baire.

Definimos $\xi : \mathbb{R} \to M_{\mathcal{A}}$ como $\xi = q\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ i\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ h$ y aseguramos que dicha función es biyectiva.

Consideremos un par de reales distintos, digamos $x$ y $y$. Como $h$ es biyectiva $h(x), h(y) \in M_{\mathcal{A}'}$ son distintos. Luego, $i\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ h(x) \neq i\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ h(y)$.

Sean $i\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ h(x) = e_C$ y $i\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ h(y) = e_D$. Entonces $C, D \in \mathcal{A}'$ y $C \neq D$. Supongamos primero que $C, D \in \mathcal{A}' \backslash \varphi[\mathcal{A}'' \backslash \mathcal{A}']$. Entonces

$$q\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ i\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ h(x) = e_C \neq e_D = q\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ i\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ h(y).$$

De ocurrir que, sin pérdida de generalidad, $C \in \mathcal{A}' \backslash \varphi[\mathcal{A}'' \backslash \mathcal{A}']$ y $D \in \varphi[\mathcal{A}'' \backslash \mathcal{A}']$, se tiene que $q\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ i\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ h(x) = e_C$ mientras que $q\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ i\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ h(y) = e_{A \cup \varphi(A)}$ para alguna $A \in \mathcal{A}'' \backslash \mathcal{A}'$ tal que $\varphi(A) = D$ y claramente $e_C \neq e_{A \cup \varphi(A)}$. Por último, si $C, D \in \varphi[\mathcal{A}'' \backslash \mathcal{A}']$, entonces $q\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ i\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ h(x) = e_{A \cup \varphi(A)}$ con $A \in \mathcal{A}'' \backslash \mathcal{A}'$ tal que $\varphi(A) = C$ y $q\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ i\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ h(y) = e_{B \cup \varphi(B)}$ con $B \in \mathcal{A}'' \backslash \mathcal{A}'$ tal que $\varphi(B) = D$, de manera que $e_{A \cup \varphi(A)} \neq e_{B \cup \varphi(B)}$. Por lo tanto, $\xi$ es inyectiva.

Consideremos ahora un elemento de $M_{\mathcal{A}}$, digamos $e_A$. Entonces, si $A \in \mathcal{A}' \backslash \varphi[\mathcal{A}'' \backslash \mathcal{A}']$, $e_A \in M_{\mathcal{A}'}$ es tal que $\xi(h^{-1}(e_A)) = e_A$, por otra parte, si $A = B \cup \varphi(B)$ con $B \in \mathcal{A}'' \backslash \mathcal{A}'$, entonces $\varphi(B) \in \phi[\mathcal{A}'' \backslash \mathcal{A}']$ es tal que $\xi(h^{-1}(e_{\phi(B)})) = q\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ i\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ h(h^{-1}(e_{\varphi(B)})) = e_A$. Así, en efecto, $\xi$ es una biyección.

Más aún, aseguramos que $\xi$ es tal que para toda función continua $f$ de $\psi(\mathcal{A})$ en $\mathbb{R}$, la función $f\restriction_{M_{\mathcal{A}}} \circ \xi$ es de la primera clase de Baire. En efecto, sea $f : \psi(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ una función continua y consideremos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\psi(\mathcal{A}') \arrow[r, "i"] & \psi(\mathcal{A}'') \arrow[r, "q"] & X = \psi(\mathcal{A}) \arrow[d, "f"] \\
\mathbb{R} \arrow[u, "h"] & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $f\restriction_{M_{\mathcal{A}}} \circ \xi = (f \circ q \circ i)\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ h$. Además $f \circ q \circ i : \psi(\mathcal{A}') \to \mathbb{R}$ es una función continua. Y por las características de $h$, $(f \circ q \circ i)\restriction_{M_{\mathcal{A}'}} \circ h$ es de la primera clase de Baire.

Por lo tanto, $\psi(\mathcal{A})$ satisface las condiciones de la Proposición 5.1.13. $\square$

Como mencionamos previo a la Proposición 5.1.15, la construcción de la familia casi ajena maximal infinita que define un espacio de Mrówka cuya compactación de Stone-Čech tiene residuo de cardinalidad 1, inicia con una familia casi ajena $\mathcal{A}$ que satisface la Proposición 5.1.13. Se considera una copia ajena $\mathcal{A}_1$ y el espacio $\psi(\mathcal{A}) \oplus \psi(\mathcal{A}_1)$. Este último espacio se descompondrá en clases inducidas mediante la identificación de elementos en el dominio de una función, con sus respectivas imágenes. La construcción de tal función hace uso del Lema 5.1.18, para el cual requeriremos introducir un nuevo concepto y enunciar un conocido resultado; el Lema del refinamiento ajeno.

**Definición 5.1.16.** La *fibra* de un punto $y$ bajo la función $f : X \to Y$ es la imagen inversa de $\{y\}$ bajo $f$. Esto es, $f^{-1}[\{y\}] = \{x \in X : f(x) = y\}$.

**Lema 5.1.17.** ***(Lema del refinamiento ajeno)****Sea* $\mathfrak{m}$ *un cardinal infinito; sea* $\{C_\xi : \xi \in \Xi\}$ *una colección de conjuntos tales que* $|\Xi| \leqslant \mathfrak{m}$ *y* $|C_\xi| = \mathfrak{m}$ *para cada* $\xi \in \Xi$. *Entonces existe una colección de conjuntos* $\{A_\xi : \xi \in \Xi\}$ *tal que* $A_\xi \subseteq C_\xi$, $|A_\xi| = \mathfrak{m}$ *y* $A_\xi \cap A_{\xi'} = \emptyset$ *para todo* $\xi, \xi' \in \Xi$ *con* $\xi \neq \xi'$.

La prueba puede consultarse en [Ku2; prop.2, p. 330]. $\square$

**Lema 5.1.18.** *Sea* $\mathfrak{m}$ *un cardinal infinito y* $\mathcal{F}$ *una colección de funciones sobre un conjunto* $R$, *donde* $|R| = \mathfrak{m}$ *y* $|\mathcal{F}| \leqslant \mathfrak{m}$. *Entonces existe una biyección* $\pi$ *del conjunto* $R$ *en sí mismo con la propiedad de que, si* $f \in \mathcal{F}$ *es tal que* $f \circ \pi \in \mathcal{F}$, *entonces* $|R \backslash f^{-1}[\{y\}]| < \mathfrak{m}$ *para alguna* $y \in f[R]$.

**Demostración.** Sea $\mathcal{F}_0$ la colección de todas las funciones $f$ en $\mathcal{F}$ tales que la cardinalidad del conjunto $R \backslash f^{-1}[\{y\}]$ es $\mathfrak{m}$ para toda $y \in rang(f)$.

Entonces basta probar que existe una biyección $\pi$ de $R$ en $R$ tal que $f \circ \pi \notin \mathcal{F}$ para toda $f \in \mathcal{F}_0$.

Enumeremos $\mathcal{F}_0$ como $\{f_\xi : \xi \in \Xi\}$. Así, $|\Xi| \leqslant \mathfrak{m}$.

Sean $\Xi_1 = \{\xi \in \Xi : f_\xi$ tiene una fibra de cardinalidad $\mathfrak{m}\}$ y $\Xi_2 = \{\xi \in \Xi :$ toda fibra de $f_\xi$ tiene cardinalidad menor que $\mathfrak{m}\}$.

Para cada $\xi \in \Xi_1$, denotamos por $A_\xi$ a una de las fibras de $f_\xi$ tal que $|A_\xi| = \mathfrak{m}$ y hacemos $B_\xi = R \backslash A_\xi$. Observemos que $|B_\xi| = \mathfrak{m}$ para toda $\xi \in \Xi_1$ por la definición de $\mathcal{F}_0$.

Para cada $\xi \in \Xi_2$, sean $C_\xi = R$ y $D_{\xi,y} = R \backslash f_\xi^{-1}[\{y\}]$, para cada $y \in f_\xi[R]$.

Entonces la colección

$$\{A_\xi : \xi \in \Xi_1\} \cup \{B_\xi : \xi \in \Xi_1\} \cup \{C_\xi : \xi \in \Xi_2\} \cup \{D_{\xi,y} : \xi \in \Xi_2,\ \ y \in f_\xi[R]\}$$

es de cardinalidad menor o igual a $\mathfrak{m}$ y cada elemento de dicha colección tiene cardinalidad $\mathfrak{m}$. Por lo tanto, por el Lema 5.1.17, existe una colección

$$\{A'_\xi : \xi \in \Xi_1\} \cup \{B'_\xi : \xi \in \Xi_1\} \cup \{C'_\xi : \xi \in \Xi_2\} \cup \{D'_{\xi,y} : \xi \in \Xi_2 \text{ y } y \in f_\xi[R]\}$$

de conjuntos ajenos dos a dos de cardinalidad $\mathfrak{m}$ y tales que $A'_\xi \subseteq A_\xi$ y $B'_\xi \subseteq B_\xi$ para toda $\xi \in \Xi_1$ y también $C'_\xi \subseteq C_\xi$ y $D'_{\xi,y} \subseteq D_{\xi,y}$ para toda $\xi \in \Xi_2$ y toda $y \in f_\xi[R]$.

Sea $\xi \in \Xi_1$. Dado un conjunto $K \subseteq A'_\xi$, denotamos por $\pi_K$ a una biyección de $A'_\xi \cup B'_\xi$ en $A'_\xi \cup B'_\xi$, tal que $\pi_K(x) = x$ para $x \in K$ y $\pi_K(x) \in B'_\xi$ para $x \in A'_\xi \backslash K$.

De esta manera, si $K$ y $K'$ son subconjuntos distintos de $A'_\xi$, y $z \in K\backslash K'$, se tiene que $f_\xi \circ \pi_K(z) = f_\xi(z) = y$ mientras que $f_\xi \circ \pi_{K'}(z) \in B_\xi = R\backslash f_\xi^{-1}[\{y\}]$, esto es, las funciones $f_\xi \circ \pi_K$ y $f_\xi \circ \pi_{K'}$ son también distintas. Como hay $2^{\mathfrak{m}}$ subconjuntos de $A'_\xi$ y $|\mathcal{F}| \leqslant \mathfrak{m}$, podemos elegir una biyección $\pi_\xi$ de $A'_\xi \cup B'_\xi$ en $A'_\xi \cup B'_\xi$, tal que $f_\xi \circ \pi_\xi \neq f\restriction_{A'_\xi \cup B'_\xi}$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

Sea $\mathcal{D} = \{A \subseteq C'_\xi : f_\xi\restriction_A \text{ es inyectiva}\}$. $\mathcal{D}$ es un conjunto parcialmente ordenado por la contención y es distinto del vacío puesto que $\{x\} \in \mathcal{D}$ para toda $x \in C'_\xi$.

Sea $\mathscr{C}$ una $\subseteq$-cadena de elementos de $\mathcal{D}$. Aseguramos que $\bigcup\mathscr{C}$ es cota superior de $\mathcal{D}$. En efecto, sean $x$ y $y$ elementos distintos de $\bigcup\mathscr{C}$. Entonces por ser $\mathscr{C}$ una cadena, existe $A \in \mathscr{C}$ tal que $x, y \in A$. Como $f_\xi\restriction_A$ es inyectiva, entonces $f_\xi\restriction_A(x) \neq f_\xi\restriction_A(y)$. Por tanto, $f_\xi$ es inyectiva en $\bigcup\mathscr{C}$ y así, es cota superior de $\mathscr{C}$.

De manera que, por el lema de Zorn, existe un elemento $\subseteq$-maximal de $\mathcal{D}$, digamos $C''_\xi$. Observemos que además $f_\xi[C''_\xi] = f_\xi[C'_\xi]$, de lo contrario, existiría un elemento $a \in C'_\xi\backslash C''_\xi$ tal que $f_\xi(a) \notin f_\xi[C''_\xi]$. Pero entonces, $f_\xi$ sería inyectiva en $C''_\xi \cup \{a\}$, lo cual contradice la maximalidad de $C''_\xi$.

Sean $\xi \in \Xi_2$ y $E_\xi = f_\xi[C''_\xi]$. Definimos $\mathfrak{m}_y = |f_\xi^{-1}[\{y\}] \cap C'_\xi|$ para cada $y$ en la imagen de $f_\xi$. Entonces, para cada $y \in E_\xi$, $f_\xi^{-1}[\{y\}] \in C'_\xi$, y por lo tanto $\mathfrak{m}_y = |f_\xi^{-1}[\{y\}]| < \mathfrak{m}$. Además, $C''_\xi \sim_{f_\xi} f_\xi[C''_\xi] = E_\xi$ y $|C'_\xi| \leqslant |f_\xi^{-1}[f_\xi[C'_\xi]]| = |f_\xi^{-1}[f_\xi[C''_\xi]]| = |C''_\xi|$. De manera que $\sum\{\mathfrak{m}_y : y \in E_\xi\} = |E_\xi| = \mathfrak{m}$.

Denotemos por $x_y$, con $y \in E_\xi$, al único elemento de $C''_\xi$ tal que $f_\xi(x_y) = y$. Consideremos el producto $D^* = \Pi_{y \in E_\xi} D'_{\xi,y}$. Si hacemos $\mathfrak{m}^*_y = \mathfrak{m}$ para cada $y \in E_\xi$, tenemos que $\mathfrak{m}^*_y > \mathfrak{m}_y$ para toda $y \in E_\xi$, de manera que, por el Teorema de König (véase A.3.26), $|D^*| = \Pi\{\mathfrak{m}^*_y : y \in E_\xi\} > \sum\{\mathfrak{m}_y : y \in E_\xi\} = \mathfrak{m}$.

Para cada elemento $d^* \in D^*$, $d^* = (x^*_y)_{y \in E_\xi}$, denotamos por $\pi_{d^*}$ a la biyección de $C''_\xi \cup \bigcup\{D'_{\xi,y} : y \in E_\xi\}$ en sí mismo, dada por $\pi_{d^*}(x_y) = x^*_y$ y $\pi_{d^*}(x^*_y) = x_y$ para cada $y \in E_\xi$, con $\pi_{d^*}$ la identidad sobre $\bigcup\{D'_{\xi,y} : y \in E_\xi\}\backslash\{x^*_y : y \in E_\xi\}$. Entonces si $d^*$ y $d^*_1$ son un par de elementos distintos de $D^*$, tenemos $y \in E'_\xi$ tal que $d^*$ y $d^*_1$ difieren en la $y$-ésima coordenada. Si, digamos, $d^* = (x^*_y)_{y \in E_\xi}$, entonces $f_\xi \circ \pi_{d^*}(x^*_y) = f_\xi(x_y) = y$, mientras que $f_\xi \circ \pi_{d^*_1}(x^*_y) = f_\xi(x^*_y) \neq y$, de manera que las funciones $f_\xi \circ \pi_{d^*}$ y $f_\xi \circ \pi_{d^*_1}$ son también distintas.

Por lo tanto, como la cardinalidad de $D^*$ es mayor que $\mathfrak{m}$, podemos elegir una biyección $\pi_\xi$ de $C''_\xi \cup \bigcup\{D'_{\xi,y} : y \in E_\xi\}$ en sí mismo tal que $f_\xi \circ \pi_\xi \neq f\restriction_{C''_\xi \cup \bigcup\{D'_{\xi,y} : y \in E_\xi\}}$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

Hemos definido biyecciones $\pi_\xi$ para toda $\xi \in \Xi$. Como tales biyecciones actúan en conjuntos ajenos dos a dos, podemos elegir la biyección requerida $\pi$ como la extensión común de todas las $\pi_\xi$ en los conjuntos de la forma $A'_\xi$,

$B'_\xi$, $C'_\xi$ y $D'_{\xi,y}$ para toda $\xi \in \Xi$ con $y \in E_\xi$, y como la identidad en otro caso. Entonces dada $f_\xi \in \mathcal{F}_0$, se tiene que si $\xi \in \Xi_1$, existe $x \in A'_\xi \cup B'_\xi$ tal que $f_\xi \circ \pi(x) \neq f(x)$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Por otra parte, si $\xi \in \Xi_2$, entonces para alguna $x \in C''_\xi \cup \bigcup\{D'_{\xi,y} : y \in E_\xi\}$, $f_\xi \circ \pi(x) \neq f(x)$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $f_\xi \circ \pi \notin \mathcal{F}$. Es decir, $\pi$ es una biyección de $R$ en $R$ tal que $f \circ \pi \notin \mathcal{F}$ para toda $f \in \mathcal{F}_0$. Con esto conluimos la prueba. □

Probaremos una serie de equivalencias a la condición de que una familia casi ajena infinita sea maximal. Esta proposición será una herramienta fundamental en el último teorema de este trabajo.

**Proposición 5.1.19.** *Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena infinita, sea $X = \psi(\mathcal{A})$ y sea $e : X \to \mathcal{W} = \{\mathcal{F} \subseteq Z(X) : \mathcal{F}$ es $Z(X)$-ultrafiltro$\}$ tal que $e(x) = \{A \in Z(X) : x \in A\}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*
*(a) $\mathcal{A}$ es maximal,*
*(b) $X$ es pseudocompacto,*
*(c) todo subconjunto infinito $A \subseteq \omega$ tiene un punto de acumulación en $M_\mathcal{A}$,*
*(d) $\beta X \backslash e[\mathbb{N}] = cl_{\beta X} M_\mathcal{A}$,*
*(e) para todo subconjunto cerrado $A$ de $X$, $cl_{\beta X}(A) \cap (\beta X \backslash X) \subseteq cl_{\beta X}(A \cap M_\mathcal{A})$.*

**Demostración.** En la Proposición 3.2.7 se probó que *(a)⇔(b)*.

Veamos que *(a)* implica *(c)*. Sea $B$ un subconjunto infinito de $\omega$. Entonces, por la maximalidad de $\mathcal{A}$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap B| = \aleph_0$ y así, todo abierto en torno a $e_A$ interseca a $B$, de manera que $e_A$ es punto de acumulación de $B$.

Para probar que *(c)* implica *(d)*, recordemos que $\mathcal{W}$ es la compactación de Stone-Čech de $X$, que para cada $A \subseteq Z(X)$, $S(A) = \{\mathcal{F} \in \mathcal{W} : A \in \mathcal{F}\}$, que $\beta = \{\mathcal{W} \backslash S(A) : A \in Z(X)\}$ es base para $\mathcal{W}$ y que para cada $x \in X$, $\mathcal{U}_x = \{A \in Z(X) : x \in A\}$.

Ahora, de la Proposición 3.3.6, tenemos que $M_\mathcal{A}$ es nulo, entonces, del Lema 1.7.6:

$$cl_{\beta X} M_\mathcal{A} = cl_\mathcal{W} e[M_\mathcal{A}] = S(M_\mathcal{A}) = \{\mathcal{F} \in \mathcal{W} : M_\mathcal{A} \in \mathcal{F}\}$$

Por otra parte, tenemos que $\beta X \backslash e[\mathbb{N}] = \mathcal{W} \backslash e[\mathbb{N}]$, donde $e[\mathbb{N}] = \{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ y como para ninguna $n \in \omega$ ocurre que $n \in M_\mathcal{A}$, entonces los elementos de $S(M_\mathcal{A})$ no pertenecen a $e[\mathbb{N}]$. Esto es, $cl_{\beta X} M_\mathcal{A} \subseteq \beta X \backslash e[\mathbb{N}]$.

Consideremos ahora un ultrafiltro $\mathcal{F}$ en $\mathcal{W} \backslash e[\mathbb{N}]$. Como $cl_{\beta X}(M_\mathcal{A}) = S(M_\mathcal{A})$, entonces basta probar que $M_\mathcal{A} \in \mathcal{F}$.

Sea $B \in \mathcal{F}$ y supongamos que $B \subseteq \omega$. Entonces, si $|B| = n$ para alguna $n \in \omega$, $\mathcal{F} \in e[\mathbb{N}]$. En efecto, se tiene que necesariamente $n > 0$ y si $n = 1$, entonces claramente $\mathcal{F} = \mathcal{U}_k$ para alguna $k \in \omega$. Supongamos inductivamente que si un elemento $D \in \mathcal{F}$ es tal que $D \subseteq \omega$ y $|D| = n$, entonces $\mathcal{F} \in e[\mathbb{N}]$, y sea $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subseteq \omega$ y $|B| = n + 1$. Entonces existe un elemento $C \in \mathcal{F}$ tal que $C \cap B \subsetneq B$, de lo contrario, $\mathcal{F}$ no sería un filtro maximal. Así, $|C \cap B| < n$ y uniendo a $C \cap B$ los naturales necesarios para formar un conjunto de $n$ elementos, digamos $D$, tenemos que $|D| = n$ y $D \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, por la hipótesis inductiva, $\mathcal{F} \in e[\mathbb{N}]$.

De esta manera, si $B \in \mathcal{F}$ y $B \subseteq \omega$, $B$ es infinito. Ahora, como cualquier elemento de $\mathcal{F}$, $B$ es nulo, de manera que del Lema 1.2.2, $B$ es cerrado. Se tiene que de *(c)*, $B$ tiene un punto de acumulación en $M_{\mathcal{A}}$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, no existe un elemento de $\mathcal{F}$ completamente contenido en $\omega$, es decir, para todo $B \in \mathcal{F}$, $B \cap M_{\mathcal{A}} \neq \emptyset$, de manera que de la Proposición 1.6.12, $M_{\mathcal{A}} \in \mathcal{F}$.

Para probar que *(d)*$\Rightarrow$*(e)*, consideremos un cerrado $A$ de $X$. Supongamos que

$$p \in [cl_{\beta X}(A) \cap (\beta X \backslash X)] \backslash cl_{\beta X}(A \cap M_{\mathcal{A}}).$$

Como $cl_{\beta X}(A) = cl_{\beta X}((A \cap \omega) \cup (A \cap M_{\mathcal{A}}))$, se tiene que $p \in cl_{\beta X}(A \cap \omega) \backslash X$.

Como $cl_{\beta X}(A \cap \omega) \backslash X \neq \emptyset$ y $A \cap \omega \subseteq X$, tenemos que $A \cap \omega$ es infinito.

Se tienen dos casos: que para cada $B \subseteq A \cap \omega$ infinito, $B$ tenga un punto de acumulación en $M_{\mathcal{A}}$, o bien, que exista un subconjunto $B$ de $A \cap \omega$ infinito que sea cerrado. En el primer caso, sea $V$ una vecindad de $p$ en $\beta X$. La regularidad de $\beta X$ garantiza la existencia de una vecindad $U$ de $p$ en $\beta X$ tal que $cl_{\beta X}(U) \subseteq V$. Como $p \in cl_{\beta X}(A \cap \omega)$, $U \cap (A \cap \omega)$ es infinito y por lo tanto existe $x \in M_{\mathcal{A}} \cap cl_X(U \cap (A \cap \omega))$. Ahora bien, por un lado,

$$M_{\mathcal{A}} \cap cl_X(U \cap (A \cap \omega)) \subseteq M_{\mathcal{A}} \cap cl_{\beta X}(U \cap (A \cap \omega))$$

por ser $X$ un subespacio de $\beta X$, y

$$M_{\mathcal{A}} \cap cl_{\beta X}(U \cap (A \cap \omega)) \subseteq M_{\mathcal{A}} \cap cl_{\beta X}(U) \subseteq M_{\mathcal{A}} \cap V.$$

Por otro lado, también

$$M_{\mathcal{A}} \cap cl_X(U \cap (A \cap \omega)) \subseteq M_{\mathcal{A}} \cap cl_X(A) = M_{\mathcal{A}} \cap A.$$

Por lo tanto $x \in (M_{\mathcal{A}} \cap A) \cap V$ y así $p \in cl_{\beta X}(A \cap M_{\mathcal{A}})$, lo cual es una contradicción.

En el segundo caso, consideramos al conjunto $B$ de $A \cap \omega$ tal que $B$ es cerrado en $X$. Como $B$ es también abierto, se tiene que es un conjunto nulo. De manera que como $M_{\mathcal{A}}$ es nulo de la Proposición 3.3.6, del Lema 1.7.6,

$$\emptyset = cl_{\beta X}(B \cap M_{\mathcal{A}}) = cl_{\beta X}(B) \cap cl_{\beta X}(M_{\mathcal{A}}),$$

que además, por el inciso (d) es igual al conjunto $cl_{\beta X}(B) \cap (\beta X \backslash \mathbb{N})$. Por lo tanto $cl_{\beta X}(B) \subseteq X$, y así, $B$ es cerrado en $\beta X$. Entonces por la compacidad de $\beta X$, $B$ es compacto. Pero esto es una contradicción puesto que $B$ es un conjunto discreto e infinito.

Con esto queda probado el inciso *(e)*.

Probaremos que *(e)*$\Rightarrow$*(a)* por reducción al absurdo. Supongamos que $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena que no es maximal. Sea $H \subseteq \omega$ un conjunto infinito tal que para toda $A \in \mathcal{A}$, $A \cap H$ es finito. Observemos que entonces $H$ es cerrado y más aún, es un conjunto nulo. En efecto, la función $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ si $x \in H$ y $f(x) = 1$ en otro caso, es tal que dada $x \in X$ y un abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f(x) \in U$, si $x \in \omega$, entonces el abierto $\{x\}$ es tal que $f[\{x\}] \subseteq U$. Si $x = e_A \in M_{\mathcal{A}}$, entonces $\{e_A\} \cup (A \backslash H)$ es un abierto cuya imagen bajo $f$ está contenida en $U$.

Además, de *(e)*, se tiene que por ser $H$ un cerrado,

$$cl_{\beta X}(H) \cap (\beta X \backslash X) \subseteq cl_{\beta X}(H \cap M_{\mathcal{A}}).$$

Esto es, $cl_{\mathcal{W}} e[H] \cap (\mathcal{W} \backslash e[X]) = \emptyset$, o bien, del Lema 1.7.6, $S(H) \subseteq e[X]$. Entonces, del Lema 1.7.5, $e[H] = S(H)$. De esta manera, se tiene que $e[H]$ es cerrado en $\mathcal{W}$, o equivalentemente, que $H$ es cerrado en $\beta X$. Por lo tanto, $H$ es un conjunto compacto de $\beta X$.

Por otra parte, se tiene también que para cada $m \in \omega$, $\{m\}$ es cerrado, por lo que con un razonamiento análogo al anterior y en virtud del Lema 1.7.6, $e[\{m\}] = S(\{m\}) = cl_{\mathcal{W}} e[\{m\}]$. Entonces, de la Proposición 1.7.7, $\{m\} = cl_{\beta X}\{m\}$ es abierto y cerrado en $\beta X$.

Esto implica que $H$ es discreto, lo cual es una contradicción por ser $H$ compacto e infinito.

Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es maximal. □

Como comentamos ya, hemos de probar que existe una familia casi ajena maximal infinita $\mathcal{A}$ tal que si $E \subseteq M_{\mathcal{A}}$ es infinito, son equivalentes que $E$ sea un conjunto nulo en $\psi(\mathcal{A})$ y que $M_{\mathcal{A}} \backslash E$ sea a lo más numerable. El siguiente lema se usará para verificar que, a lo largo de la demostración de esta afirmación (enunciada en la Proposición 5.1.21), se cumplen las condiciones necesarias para aplicar el Lema 5.1.18.

**Lema 5.1.20.** *Si $X$ es separable, la colección $\mathcal{C} = \{f \in {}^X\mathbb{R} : f$ es continua$\}$ tiene la cardinalidad del continuo.*

**Demostración.** Sea $D \subseteq X$ numerable y denso en $X$. Recordemos que dado un par de funciones continuas realvaluadas $f$ y $g$ tales que $f\restriction_D = g\restriction_D$, $f = g$. En efecto, de existir $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$, habrían un par de abiertos ajenos $U_1$ y $U_2$ tales que $f(x) \in U_1$ y $g(x) \in U_2$. Por la continuidad de $f$ y de $g$, existirían también un par de abiertos $W_1$ y $W_2$, tales que $x \in W_1 \cap W_2$ con $f[W_1] \subseteq U_1$ y $g[W_2] \subseteq U_2$, pero $W_1 \cap W_2 \cap D \neq \emptyset$ y dado $d \in W_1 \cap W_2 \cap D$, se tiene que $f(d) \in U_1$, $g(d) \in U_2$ y $f(d) = g(d)$ lo cual es una contradicción.

De esta manera, si $F : \mathcal{C} \to {}^D\mathbb{R}$ está dada por $F(f) = f\restriction_D$, se tiene que $F$ es inyectiva y por lo tanto

$$|\mathcal{C}| \leqslant |{}^D\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|^{|D|} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Por otra parte, $g : \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ dada por $g(z) = h_z$ donde $h_z$ es la función constante $z$ es también inyectiva y por lo tanto $2^{\aleph_0} \leqslant |\mathcal{C}|$. Por lo tanto, por el Teorema A.3.2, se tiene el resultado. □

A continuación el anunciado resultado que tiene por corolario el último teorema de este trabajo.

**Proposición 5.1.21.** *Existe una familia casi ajena maximal infinita $\mathcal{A}$ tal que si $E \subseteq M_{\mathcal{A}}$ es infinito, entonces $E$ es un conjunto nulo en $\psi(\mathcal{A})$ si y sólo si $M_{\mathcal{A}} \backslash E$ es a lo más numerable.*

**Demostración.** Sea $\mathcal{A}'$ una familia casi ajena maximal sobre $\omega$ tal que $|\mathcal{A}'| = 2^{\aleph_0}$ y para toda función continua realvaluada y definida sobre $\psi(\mathcal{A}')$ $f$, $f{\restriction}_{M_{\mathcal{A}'}}$ es equivalente a una función de la primera clase de Baire (véase la Proposición 5.1.15).

Sea $\mathscr{F}$ la colección de funciones definidas sobre $M_{\mathcal{A}'}$ que pueden extenderse continuamente a $\psi(\mathcal{A}')$, es decir, sea $\mathscr{F} = \{f \in C(M_{\mathcal{A}'}) :$ existe una función $\hat{f} \in C(\psi(\mathcal{A}'))$ tal que $\hat{f}{\restriction}_{M_{\mathcal{A}'}} = f\}$.

Como $\psi(\mathcal{A})$ es separable (véase Lema 3.2.3), entonces del Lema 5.1.20, hay $2^{\aleph_0}$ funciones continuas y realvaluadas en $\psi(\mathcal{A})$, de manera que $|\mathscr{F}| \leqslant 2^{\aleph_0}$. Entonces, por el Lema 5.1.18, existe una biyección $\pi$ de $M_{\mathcal{A}'}$ en sí mismo tal que para toda función $f$ con dominio $M_{\mathcal{A}'}$, si tanto $f$ como $f \circ \pi$ pertenecen a $\mathscr{F}$, entonces para alguna $y$, $|M_{\mathcal{A}'} \backslash f^{-1}[\{y\}]| < 2^{\aleph_0}$.

Consideremos una copia ajena de $\psi(\mathcal{A}')$, digamos $\psi(\mathcal{A}_1')$. De la Proposición 5.1.1, $\psi(\mathcal{A}') \oplus \psi(\mathcal{A}_1')$ es un espacio de Mrówka, digamos $\psi(\mathcal{B})$.

Recordemos además que como $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{A}_1'$ son familias casi ajenas maximales, $\psi(\mathcal{A}')$ y $\psi(\mathcal{A}_1')$ son espacios pseudocompactos (véase la Proposición 3.2.7), de manera que de la Proposición B.2.22, $\psi(\mathcal{B})$ es también pseudocompacto.

Consideremos $\nu$ la biyección natural de $\mathcal{A}'$ en $\mathcal{A}_1'$. Entonces, viendo a $\pi$ como una biyección de $\mathcal{A}'$ en sí misma, $\nu \circ (\pi^{-1})$ es un mapeo inyectivo cuyo dominio y contradominio son conjuntos ajenos de $\mathcal{B}$, Así, del Corolario 5.1.3, el espacio obtenido mediante la identificacion de cada $A \in dom(\nu \circ \pi) = \mathcal{A}'$ con $\nu \circ (\pi^{-1})(A)$ es un un espacio de Mrówka. Llamemos a dicho espacio $X$.

Llamemos $i$ a la inclusión de $\psi(\mathcal{A}')$ en $\psi(\mathcal{B})$, $j$ a la de $\psi(\mathcal{A}_1')$ en $\psi(\mathcal{B})$ y sea $\rho$ la función cociente de $\psi(\mathcal{B})$ en $X$. Notemos que $X$ es imagen continua de un pseudocompacto y así, del Lema B.2.21, $X$ es pseudocompacto. De manera que si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena tal que $X = \psi(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ es maximal.

$$\begin{tikzcd}
\psi(\mathcal{A}') \arrow[dr, "i"] & & \\
& (\psi(\mathcal{A}') \oplus \psi(\mathcal{A}_1')) = \psi(\mathcal{B}) \arrow[r, "\rho"] & X = \psi(\mathcal{A}) \\
\psi(\mathcal{A}_1') \arrow[ur, "j"] & &
\end{tikzcd}$$

Aseguramos que $\mathcal{A}$ es tal que si $E \subseteq M_{\mathcal{A}}$ es infinito, entonces $E$ es un conjunto nulo en $X$ si y sólo si $M_{\mathcal{A}} \backslash E$ es a lo más numerable. La suficiencia del enunciado anterior se demostró en la Proposición 3.3.6 inciso *(4)*.

Para probar la necesidad, consideremos $E \subseteq M_{\mathcal{A}}$ infinito y tal que $E = g^{-1}[\{0\}]$ para alguna $g \in C(X)$. Sea $f = g{\restriction}_{M_{\mathcal{A}}}$ y llamemos $\hat{f}$ a la función

$f\circ\rho\restriction_{M_{\mathcal{A}'}}\circ\, i\restriction_{M_{\mathcal{A}'}}: M_{\mathcal{A}'} \to \mathbb{R}$. Afirmamos que tanto $\hat{f}$ como $\hat{f}\circ\pi$ pertenecen a $\mathcal{F}$. En efecto, $(g\circ\rho\circ i)$ es extensión continua de $\hat{f}$. Por otra parte, viendo a $\nu$ como la biyección natural de $M_{\mathcal{A}'}$ en $M_{\mathcal{A}'_1}$, y extendiéndola a la biyección canónica entre $\psi(\mathcal{A}')$ en $\psi(\mathcal{A}'_1)$, digamos a la función $\nu'$, $(g\circ\rho\circ j\circ\nu')$ es extensión continua de $\hat{f}\circ\pi$.

Por lo tanto, por el Lema 5.1.18, para alguna $y$, $|M_{\mathcal{A}'}\backslash\hat{f}^{-1}[\{y\}]| < 2^{\aleph_0}$.

Por otra parte, de la Proposición 3.3.6 inciso (3), $E$ es un conjunto no numerable y de la Proposición 5.1.14, $E$ es un conjunto de cardinalidad $2^{\aleph_0}$.

Sea $\{e_{A_\lambda} : \lambda \in 2^{\aleph_0}\}$ una enumeración inyectiva de $E$ y observemos que la imagen inversa de este conjunto bajo $\rho$, es un conjunto de la forma

$$\{e_{B_\lambda} : \lambda \in 2^{\aleph_0}\} \cup \{e_{\nu\circ(\pi^{-1})(B_\lambda)} : \lambda \in 2^{\aleph_0}\}.$$

Sea $E' = i^{-1}[\rho^{-1}[E]] = \{e_{B_\lambda} : \lambda \in 2^{\aleph_0}\}$. Entonces tenemos que $|E'| = 2^{\aleph_0}$ y por tanto, $E'\cap\hat{f}^{-1}[\{y\}] \neq \emptyset$. Sea $z \in E'\cap\hat{f}^{-1}[\{y\}]$. Entonces $z \in i^{-1}[\rho^{-1}[E]]\cap(f\circ\rho\restriction_{M_{\mathcal{A}'}}\circ\, i\restriction_{M_{\mathcal{A}'}})^{-1}[\{y\}]$. Como $E = g^{-1}[\{0\}]$, entonces $g(\rho\circ i(z)) = 0$ y $f(\rho\circ i(z)) = y$. De manera que, como $z \in M_{\mathcal{A}'}$, necesariamente $y = 0$.

Por lo tanto, $|M_{\mathcal{A}}\backslash E| = |M_{\mathcal{A}'}\backslash\hat{f}^{-1}[\{y\}]| < 2^{\aleph_0}$.

Ahora bien, $\psi(\mathcal{A}')\backslash\hat{f}^{-1}[\{y\}]$ es un conjunto conulo de $\psi(\mathcal{A}')$. Por tanto, nuevamente por la Proposición 5.1.14, $|M_{\mathcal{A}'}\backslash\hat{f}^{-1}[\{y\}]| \leq \aleph_0$. Pero $|M_{\mathcal{A}}\backslash E| = |M_{\mathcal{A}'}\backslash\hat{f}^{-1}[\{y\}]|$. De manera que concluimos que $|M_{\mathcal{A}}\backslash E| \leq \aleph_0$. □

**Teorema 5.1.22.** *Existe una familia casi ajena maximal $\mathcal{A}$ tal que $\beta\psi(\mathcal{A})$ es la compactación por un punto de $\psi(\mathcal{A})$.*

**Demostración.** Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena que satisface las propiedades de la Proposición 5.1.21. Llamemos $X$ al espacio de Mrówka generado por tal familia casi ajena.

Consideramos $p$ y $q$ un par de elementos distintos de $\beta X\backslash X$. Podemos ver a $p$ y a $q$ como un par de $Z(X)$-ultrafiltros distintos (véase la Definición 1.7.3). Entonces existe una pareja de nulos $P$ y $Q$ de $p$ y $q$ respectivamente, tales que $P\cap Q = \emptyset$. Por lo tanto, por la Observación 3.3.7, $P\cap M_{\mathcal{A}}$ y $Q\cap M_{\mathcal{A}}$ son nulos. De esta manera, de la Proposición 5.1.21, se tiene que sin pérdida de generalidad $|P\cap M_{\mathcal{A}}| < \aleph_0$. Como $p \in S(P) = cl_{\beta X}(P)$ (véase Lema 1.7.6), por la Proposición 5.1.19, $p \in cl_{\beta X}(P\cap M_{\mathcal{A}})$. Pero $P\cap M_{\mathcal{A}}$ es finito, de manera que $P\cap M_{\mathcal{A}} = cl_{\beta X}(P\cap M_{\mathcal{A}})$. Esto es, $p \in X$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $\beta X\backslash X$ no puede tener más de un punto. □

# Apéndice A

# Conceptos básicos de teoría de conjuntos

El objetivo de este capítulo es agrupar conceptos, definiciones y teoremas puramente conjuntistas que se utilizan a lo largo de este trabajo. A pesar de la belleza de esta materia, con el propósito de ser concisos, nos limitaremos únicamente a un desarrollo suficiente para las necesidades de este trabajo y referiremos la mayor parte de nuestros resultados.

Citando a G. Cantor, por un conjunto se entiende un agrupamiento en un todo de objetos que distingue con claridad nuestra intuición o nuestro pensamiento. (Véase [C].)

Supondremos que el lector tiene nociones de los conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos y del álgebra de conjuntos.

Usaremos las palabras *colección* o *familia* como sinónimos de conjunto y el símbolo $\in$ para denotar la relación de pertenencia. Al lector interesado en una introducción axiomática, cuidadosa y básica de la Teoría de Conjuntos, le recomendamos [H] o [A] para un primer acercamiento o [K] para un estudio más avanzado.

## A.1. Órdenes parciales, totales y buenos

Sea $r \subseteq A \times A$. Recordemos que:

(i) $\langle A, r\rangle$ es un *conjunto parcialmente ordenado* (que denotaremos por *copo*) si para todo $x \in A$, $\langle x, x\rangle \in r$ ($r$ es *reflexiva* en $A$), para todo $x, y, z \in A$, si $\langle x, y\rangle \in r$ y $\langle y, z\rangle \in r$ entonces $\langle x, z\rangle \in r$ ($r$ es *transitiva* en $A$) y para cualesquiera $x, y \in A$, si $\langle x, y\rangle \in r$ y $\langle y, x\rangle \in r$, entonces $x = y$ ($r$ es *antisimétrica* en $A$).

(ii) $\langle A, r\rangle$ es un *conjunto estrictamente ordenado* (que denotaremos por *copo'*) si para todo $x \in A$, $\langle x, x\rangle \notin r$ ($r$ es *irreflexiva* en $A$) y para todo

$x, y, z \in A$, si $\langle x, y\rangle \in r$ y $\langle y, z\rangle \in r$ entonces $\langle x, z\rangle \in r$ (r es *transitiva* en $A$).

(iii) $\langle A, r\rangle$ es un *conjunto totalmente ordenado* (denotado *coto*) si $\langle A, r\rangle$ es un copo' y para cualesquiera $x, y \in A$ se cumple una de las siguientes condiciones: $x = y$ ó $\langle x, y\rangle \in r$ ó $\langle y, x\rangle \in r$.

(iv) $\langle A, r\rangle$ es un *conjunto bien ordenado* (o *cobo*) si $\langle A, r\rangle$ es un copo' y para todo $x \subseteq A$, si $x \neq \emptyset$ entonces hay $y \in x$ tal que para todo $z \in x$: $\langle y, z\rangle \in r$ ó $y = z$; y tal $y$ se llama el $r$-mínimo de $x$.

**Proposición A.1.1.** *Sea $r \subseteq A \times A$. Entonces:*
*(i) si $\langle A, r\rangle$ es un cobo, también es un coto.*
*(ii) si $\langle A, r\rangle$ es un coto, entonces $\langle A, r\rangle$ es tanto un copo' como un cotri.*

**Demostración.** Veamos que se satisface (i). Si $x, y \in A$, entonces el conjunto $\{x, y\} \subseteq A$ es no vacío. Por lo tanto tiene $r$-mínimo, digamos, sin pérdida de generalidad $x$. Entonces si $x \neq y$, se tiene que $\langle x, y\rangle \in r$ y no es posible que $\langle y, x\rangle \in r$, pues $r$ es transitiva y $\langle A, r\rangle$ un copo'. Así, ocurre que $\langle x, y\rangle \in r$ o $\langle y, x\rangle \in r$ o $x = y$ y sólo una.
La afirmación (ii) es clara. $\square$

## A.2. Ordinales

**Definición A.2.1.** Un conjunto $x$ es *transitivo* si todo elemento de $x$ es un subconjunto de $x$, es decir, si para cualesquiera conjuntos $y$ y $z$, $y \in x$ y $z \in y$ implica que $z \in x$ (o equivalentemente, si $\cup x \subseteq x$).

**Ejemplo A.2.2.** $\cup\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, de manera que $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ es un conjunto transitivo.

**Definición A.2.3.** $x$ es un *ordinal* si $x$ es un conjunto transitivo y $\langle x, \in\rangle$ es un cobo.

**Ejemplo A.2.4.** Claramente $\emptyset$ es un conjunto transitivo y por vacuidad $\langle \emptyset, \in\rangle$ es un cobo. Por lo tanto $\emptyset$ es un ordinal. A dicho ordinal se le denota por 0.

**Definición A.2.5.** Dado un ordinal $\alpha$, definimos el *sucesor de* $\alpha$ (denotado $s(\alpha)$) como $\alpha \cup \{\alpha\}$, que es un ordinal.

**Definición A.2.6.** $\alpha$ es un *ordinal sucesor* si $\alpha = s(\beta)$ para algún ordinal $\beta$. $\alpha$ es un *ordinal límite* si $\alpha \neq \emptyset$ y $\alpha$ no es un ordinal sucesor.

**Observación A.2.7.** Si $\alpha = s(\beta)$, $\beta \in \alpha$.

**Notación.** Dados $\alpha$ y $\beta$ un par de ordinales, denotamos por $\alpha < \beta$ a $\alpha \in \beta$, y por $\alpha \leqslant \beta$ a $\alpha \in \beta$ ó $\alpha = \beta$.

Notemos entonces que $<$ es irreflexiva y transitiva sobre la clase de los ordinales, y que para cada ordinal $\alpha$, $0 < \alpha$ o $0 = \alpha$. De hecho, $\leqslant$ bien ordena la clase de los ordinales (véase [H; teo.9.10, p.220] para consultar la prueba).

**Definición A.2.8.** Un ordinal $\alpha$ es un *número natural* si para todo $\beta \leqslant \alpha$, se tiene que $\beta = \emptyset$ ó $\beta$ es un ordinal sucesor.

Intuitivamente, los números naturales son los obtenidos de aplicar iteradamente la función $s$ al conjunto $\emptyset$ un número "finito"de veces.

**Ejemplo A.2.9.** $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ es un número natural. En efecto, del Ejemplo A.2.2, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ es un conjunto transitivo. Por otra parte, se tiene que $\in$ es irreflexiva en $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (es fácil de verificar) y transitiva por vacuidad, de manera que $\langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \in \rangle$ es un copo'. Además es claro que cualquier subconjunto no vacío de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ tiene $\in$-mínimo.

Por lo tanto $\langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \in \rangle$ es un cobo y de esta manera, un ordinal sucesor.

A este natural, usualmente se le denota por 2.

Para tener un concepto más claro de la definición anterior, enunciamos el siguiente axioma llamado *Axioma de Infinito*:

*Existe un conjunto $x$ tal que $\emptyset \in x$ y para todo elemento $y$ de $x$, $s(y) \in x$.*

Si $x$ satisface el Axioma de Infinito, entonces por inducción, $x$ contiene a todos los números naturales.

**Notación.** $\omega$ es el conjunto de números naturales.

$\omega$ es un ordinal y todos los ordinales menores que él (es decir, todos sus elementos) son ordinales sucesores o son $\emptyset$. Además, $\omega$ es un ordinal límite (pues de no serlo, por la Observación A.2.7, $\omega = s(\beta)$ para algún $\beta \in \omega$ y entonces $\omega$ sería un número natural), y por tanto, $\omega$ es el menor ordinal límite. De hecho, el Axioma de Infinito implica la existencia de un ordinal límite.

**Definición A.2.10.** ***(Suma de Ordinales)*** Para todo ordinal $\beta$,

1. $\beta + 0 = \beta$
2. $\beta + (\alpha + 1) = s(\beta + \alpha)$ para todo $\alpha$,
3. $\beta + \alpha = \sup\{\beta + \gamma : \gamma < \alpha\}$ para todo ordinal límite $\alpha \neq 0$.

**Definición A.2.11.** ***(Multiplicación de Ordinales)*** Para todo ordinal $\beta$:

1. $\beta \cdot 0 = 0$
2. $\beta \cdot (\alpha + 1) = (\beta \cdot \alpha) + \beta$ para todo $\alpha$,
3. $\beta \cdot \alpha = \sup\{\beta \cdot \gamma : \gamma < \alpha\}$ para todo ordinal límite $\alpha \neq 0$.

**Ejemplo A.2.12.** Sea $m \in \omega \backslash \{0\}$.

*1)* Entonces $m + \omega = \sup\{m + n : n < \omega\} = \omega$ puesto que $m + n$ es un número natural para toda $n \in \omega$. Así, $m + \omega$ es el límite de la sucesión $(m + n)_{n \in \omega}$, mientras que $\omega + m$ es un ordinal sucesor.

*2)* Similarmente $m \cdot \omega = \sup\{m \cdot n : n \in \omega\} = \omega$ y $\omega \cdot m$ es un ordinal sucesor, de manera que $m \cdot \omega \neq \omega \cdot m$.

## A.3. Cardinales

Para comparar el número de elementos de un par de conjuntos usamos funciones inyectivas.

**Definición A.3.1.** Sean $A$ y $B$ un par de conjuntos.

(1) Decimos que $A$ *está dominado por* $B$, denotado $A \preccurlyeq B$, si existe una función inyectiva de $A$ en $B$.

(2) Se dice que $A$ *es equipotente con* $B$, denotado $A \sim B$, si existe una biyección de $A$ en $B$.

(3) $A$ *está estrictamente dominado por* $B$, o bien $A \prec B$, si $A \preccurlyeq B$ y $A \not\sim B$.

**Notación.** En lo que sigue del texto, usaremos ${}^{A}B$ para denotar al conjunto $\{f \subseteq A \times B : f$ es función y $dom(f) = A\}$

**Teorema A.3.2.** ***(Cantor-Schröder-Bernstein)*** *Si $A \preccurlyeq B$ y $B \preccurlyeq A$, entonces $A \sim B$.*

La prueba de este teorema puede consultarse en [H; teo. 7.25, p. 162]. □

**Definición A.3.3.** Un número *cardinal*, es un número ordinal que no es biyectable con ordinales anteriores (es decir, con ordinales menores que él).

**Proposición A.3.4.** *Cada $n \in \omega$ y $\omega$ mismo son cardinales.*

La prueba puede consultarse en [K; cap. 1, p. 28]. □

Para definir el cardinal de un conjunto, enunciamos el Principio de enumeración, que requiere de la siguiente definición.

**Definición A.3.5.** Si $\langle A, r\rangle$ y $\langle B, s\rangle$ son un par de cotos, diremos que $f : A \to B$ es un *isomorfismo* si $f$ es suprayectiva y para todo $x, y \in A$, $x\ r\ y$ implica $f(x)$ $s\ f(y)$, y en ese caso diremos que $\langle A, r\rangle$ y $\langle B, s\rangle$ son *isomorfos* y lo denotaremos por $\langle A, r\rangle \cong \langle B, s\rangle$.

**Teorema A.3.6.** ***(Principio de enumeración)*** *Todo buen orden es isomorfo a un único ordinal. Es decir, si $\langle A, <\rangle$ es un cobo, entonces existe un único ordinal $\gamma$ tal que $\langle A, <_A\rangle \cong \langle \gamma, \in\rangle$.*

El lector puede consultar la prueba en [K; teo. 7.6, p. 17]. □

**Definición A.3.7.** Si $A$ es un conjunto bien ordenable, *la cardinalidad de $A$* (denotada por $|A|$) es el mínimo ordinal $\alpha$ tal que $A \sim \alpha$, que es, por supuesto, un cardinal.

Para definir la cardinalidad de un conjunto arbitrario, es necesario considerar el Axioma de Elección.

**Definición A.3.8.** Sea $A$ un conjunto. Una función de elección para $A$ es una función $f : A \to \bigcup A$ tal que para cada $x \in A$ con $x \neq \emptyset$ se tiene que $f(x) \in x$. El *axioma de elección*, abreviado (AE), es el enunciado:

*Para todo conjunto de conjuntos no vacíos existe una función de elección*,

Suponiendo dicho axioma, todo conjunto $A$ es bien ordenable (véase [H; teo.8.13, p.185] para consultar la prueba) y por lo tanto, por el Teorema de enumeración, existe un ordinal $\alpha$ tal que $\langle A, <_A \rangle \cong \langle \alpha, \in \rangle$. Entonces $A \sim \alpha$ y considerando la clase no vacía de ordinales biyectables con $A$, digamos $\mathcal{C}$, se puede verificar que $\bigcap \mathcal{C}$ es el mínimo de $\mathcal{C}$ y por lo tanto, $|A| = \bigcap \mathcal{C}$.

Notemos que, independientemente de $AE$, $|\alpha|$ está definido para todo ordinal $\alpha$.

A continuación, damos el Lema de Zorn, un enunciado equivalente al Axioma de Elección. La prueba de esta equivalencia puede consultarse en [A; prop.5, p. 98].

**Definición A.3.9.** Si $\langle A, r \rangle$ es un copo', una *cadena en A* es un subconjunto $C \subseteq A$ tal que $\langle C, r{\restriction_C} \rangle$ es un coto.

El *Lema de Zorn* es el enunciado:

*Para todo copo' $\langle A, r \rangle$ no vacío tal que toda cadena $C \subseteq A$ está acotada superiormente en $A$, hay un elemento $m \in A$ $r$-maximal en $\langle A, r \rangle$.*

**Definición A.3.10.** Diremos que un conjunto $A$ es *finito* si $|A| < \omega$, que es *numerable* si $|A| = \omega$ y que es *a lo más numerable* si $|A| \leqslant \omega$.

**Observación A.3.11.** $A$ es un conjunto finito si y sólo si es biyectable con algún número natural.

Como la potencia de $\omega$ es no numerable, existen ordinales mayores a $\omega$. Además, la clase de ordinales está bien ordenada por la relación $\in$, de manera que exite un mínimo ordinal mayor a $\omega$. Llamamos $\omega_1$ a dicho ordinal.

**Notación.** De la Proposición A.3.4, tenemos que $\omega$ es un cardinal, sin embargo, para no tener problemas de ambigüedad, cuando hablemos de cardinales, usaremos $\aleph_0$ para denotar al conjunto $\omega$, y $\omega$ mismo cuando hablemos del ordinal $\omega$.

De la definición anterior, resulta claro que $\omega_1$ es un cardinal, y de manera similar a como trataremos $\omega$ y $\aleph_0$, usaremos $\aleph_1$ para referirnos a $\omega_1$ como cardinal y $\omega_1$ mismo cuando hablemos de ordinales.

La siguiente proposición respecto a $\omega$ se utiliza en varios de los resultados del presente trabajo.

**Proposición A.3.12.** *El conjunto de todos los subconjuntos finitos de números naturales es numerable.*

**Demostración.** Consideremos el conjunto de todas las sucesiones finitas de números naturales $\bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega$ y sea $D = \{A \in \mathcal{P}(\omega) : A \sim n \text{ para alguna } n \in \omega\}$. Definimos $F : \bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega \to D$ como:

$$F(\langle a_0, a_1, ..., a_n\rangle) = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$$

para cada elemento $\langle a_0, a_1, ...a_n\rangle \in \bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega$. Así, claramente $F$ está bien definida y como $\bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega$ es un conjunto numerable y $F$ es función, entonces $F[\bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega]$ es a lo más numerable. Aseguramos que $D \subseteq F[\bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega]$. En efecto, sea $A \in D$. Entonces existe $n \in \omega$ tal que $n \sim A$, llamemos $f$ a una biyección de $n$ en $A$. Denotamos $a_i = f(i)$ para cada $i \in n$. Entonces $A = \{a_0, a_1, ..., a_{n-1}\}$. Consideremos $\langle a_0, a_1, ..., a_{n-1}\rangle \in {}^n\omega$. Entonces $F(\langle a_0, a_1, ..., a_{n-1}\rangle) = \{a_0, a_1, ..., a_{n-1}\} = A$. Por tanto $D \subseteq F[\bigcup_{n\in\omega} {}^n\omega] \preccurlyeq \omega$, y así $D \preccurlyeq \omega$.

Por otra parte, observemos que para cada $n \in \omega$, $\{n\} \in D$. Definamos entonces $G : \omega \to D$ como $G(n) = \{n\}$ para cada $n \in \omega$. Se tiene que $G$ está bien definida y es inyectiva, por tanto $\omega \preccurlyeq D$. Así, por el Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein, $\omega \sim D$, con lo cual finalizamos la prueba. □

**Corolario A.3.13.** *El conjunto de todos los subconjuntos finitos de un conjunto numerable es numerable.*

**Observación A.3.14.** En un conjunto numerable, la colección de todos los subconjuntos cuyo complemento es finito, es numerable.

**Definición A.3.15.** *Dados un par de cardinales $\kappa$ y $\lambda$, definimos las operaciones $\kappa + \lambda$, $\kappa \cdot \lambda$ y $\kappa^\lambda$ como sigue:*

*(i)* $\kappa + \lambda = |\{(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|$

*(ii)* $\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$

*(iii)* $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$

Respecto a tales operaciones se tienen las siguientes propiedades.

**Teorema A.3.16.** ***(Propiedades de las operaciones cardinales)*** *Sean $\kappa, \lambda, \mu$ números cardinales. Entonces:*

*(i) si $\kappa \leqslant \lambda$ entonces $\kappa + \mu \leqslant \lambda + \mu$,*

*(ii) si $\kappa \geqslant 2$ y $\lambda \geqslant 2$, entonces $\kappa + \lambda \leqslant \kappa \cdot \lambda$,*

*(iii) si $\kappa \leqslant \lambda$ entonces $\kappa \cdot \mu \leqslant \lambda \cdot \mu$,*

*(iv) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$,*

*(v) si $\mu \leqslant \lambda$, entonces $\mu^\kappa \leqslant \lambda^\kappa$ y*

*(vi) $\kappa < 2^\kappa$ (Teorema de Cantor).*

Véase [A; teo.17, p.83] para consultar la prueba del inciso *(i)*, [A; teo.18, p.85] para consultar las demostraciones de *(ii)* y *(iii)*, y [A; teo.19, p. 86] para las pruebas de *(iv)*, *(v)* y *(vi)*. □

**Definición A.3.17.** Definimos $\mathfrak{c}$ como el cardinal $2^{\aleph_0}$, conocido como *el cardinal del continuo.*

Respecto a la relación entre los cardinales $\aleph_1$ y $2^{\aleph_0}$, se tiene un axioma independiente de los axiomas básicos de la Teoría de Conjuntos (llamados $ZFC$) que enunciamos a continuación:

**Definición A.3.18.** La *hipótesis del continuo*, abreviada $HC$ es el enunciado:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

La demostración del siguiente teorema puede consultarse en [A; teo.21, p.107].

**Teorema A.3.19.** *Si $\kappa$ es un cardinal infinito entonces $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. Es decir, si $A$ es un conjunto infinito, $A \times A \sim A$.*

**Corolario A.3.20.** *Sean $\kappa$ y $\lambda$ cardinales; uno infinito y el distinto cero. Entonces,*

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

**Demostración.** Supongamos sin pérdida de generalidad que $\lambda \leqslant \kappa$. Entonces $\kappa$ es infinito y $\lambda \neq 0$, entonces

$$\kappa \leqslant \kappa + \lambda \leqslant \kappa + \kappa \leqslant \kappa \cdot \kappa = \kappa \leqslant \kappa \cdot \lambda \leqslant \kappa \cdot \kappa = \kappa$$

por lo tanto, $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \kappa = \max\{\kappa, \lambda\}$. $\square$

**Corolario A.3.21.** *Si $\lambda \leqslant \aleph_0$ y $2 \leqslant \kappa \leqslant \lambda$, entonces $2^\lambda = \kappa^\lambda = \lambda^\lambda$.*

**Demostración.** $2 \leqslant \kappa \leqslant \lambda < 2^\lambda$, por lo tanto

$$2^\lambda \leqslant \kappa^\lambda \leqslant \lambda^\lambda \leqslant (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda \cdot \lambda} = 2^\lambda.$$

Así pues, $2^\lambda = \kappa^\lambda = \lambda^\lambda$. $\square$

**Observación A.3.22.** Si $A$ y $B$ son un par de conjuntos ajenos, $|A \cup B| = |A| + |B|$. Como consecuencia, dado un par de conjuntos $A$ y $B$, $|A \cup B| \leqslant |A| + |B|$.

El siguiente teorema es un resultado utilizado en la Proposición 5.1.4.

**Teorema A.3.23.** *Sea $\kappa$ un cardinal infinito. Hay $2^\kappa$ funciones biyectivas de $\kappa$ en $\kappa$.*

**Demostración.** Sea $a$ un conjunto no vacío y consideremos $\phi : {}^{a}2 \to {}^{a\times 2}(a\times 2)$ dada por $\phi(f)(x,n) = (x, \overline{f(x)+n})$, donde la barra indica tomar el residuo módulo 2. Probaremos que ${}^{a}2 \preccurlyeq \{f \in {}^{a\times 2}(a \times 2) : f \text{ es biyectiva}\}$.

Afirmación. Para todo elemento $f$ de ${}^{a}2$, $\phi(f)$ es una función biyectiva.

Para probar la inyectividad de la función, consideremos $(x,n),(y,m) \in a\times 2$ un par de elementos distintos. Entonces, si $x \neq y$, se tiene que $(x, \overline{f(x)+n}) \neq (y, \overline{f(y)+m})$. Por otra parte, si $x = y$, entonces $n \neq m$ y así, $\overline{f(x)+n} \neq \overline{f(x)+m} = \overline{f(y)+m}$, de manera que $(x, \overline{f(x)+n}) \neq (y, \overline{f(y)+m})$.

Ahora bien, dado $(x,n) \in a \times 2$, se tiene que

$$\phi(f)(x, f(x)+n) = (x, \overline{f(x)+f(x)+n}) = (x,n),$$

de manera que $\phi(f)$ es sobreyectiva. Con esto, concluimos la prueba de la afirmación.

Aseguramos que $\phi$ es inyectiva. En efecto, consideremos un par de funciones $f$ y $g$ en ${}^{a}2$ distintas, y sea $x \in a$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Entonces

$$\phi(f)(x,0) = (x, \overline{f(x)+0}) = (x, f(x)) \neq (x, g(x)) = (x, \overline{g(x)+0}) = \phi(g)(x,0).$$

Por lo tanto, ${}^{a}2 \preccurlyeq \{f \in {}^{a\times 2}(a \times 2) : f \text{ es biyectiva}\}$ así, $2^{|a|} = |{}^{a}2| \leqslant |\{f \in {}^{a\times 2}(a \times 2) : f \text{ es biyectiva}\}|$.

Entonces, en particular para $\kappa$, $2^{\kappa} \leqslant |\{f \in {}^{\kappa\times 2}(\kappa \times 2) : f \text{ es biyectiva}\}|$. De manera que, como $|\kappa \times 2| = \kappa \cdot 2 = \kappa$ para $\kappa \geqslant \aleph_0$ (véase Corolario A.3.20), existe una biyección $h : \kappa \times 2 \to \kappa$. Así, la función $g : \{f \in {}^{\kappa\times 2}(\kappa \times 2) : f \text{ es biyectiva}\} \to \{f \in {}^{\kappa}\kappa : f \text{ es biyectiva}\}$ dada por $g(f) = h \circ f \circ h^{-1}$ está bien definida y es biyectiva. Entonces $2^{\kappa} \leqslant |\{f \in {}^{\kappa}\kappa : f \text{ es biyectiva}\}|$.

Además, por supuesto, $\{f \in {}^{\kappa}\kappa : f \text{ es biyectiva}\} \subseteq {}^{\kappa}\kappa$. Entonces $|\{f \in {}^{\kappa}\kappa : f \text{ es biyectiva}\}| \leqslant |{}^{\kappa}\kappa| = \kappa^{\kappa} = 2^{\kappa}$.

Por lo tanto, $|\{f \in {}^{\kappa}\kappa : f \text{ es biyectiva}\}| = 2^{\kappa}$. □

Terminamos esta sección definiendo las sumas y productos generalizados de cardinales y enunciamos el Teorema de König.

**Definición A.3.24.** Sea $\{A_i : i \in I\}$ un conjunto de conjuntos, definimos $\Pi_{i\in I} A_i = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i : \text{para cada } i \in I,\ f(i) \in A_i\}$.

Notemos que los elementos de $\Pi_{i\in I} A_i$ son funciones de elección. De hecho, $AE$ es equivalente a la siguiente afirmación: para cualquier familia de conjuntos $\{A_i : i \in I\}$ tal que para toda $i \in I$, $A_i$ es no vacío ocurre que $\Pi_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.

**Definición A.3.25.** Sea $\{\kappa_i : i \in I\}$ una familia de cardinales infinitos. Definimos:

(i) $\sum_{i\in I} \kappa_i = |\bigcup_{i\in I} (\kappa_i \times \{i\})|$ y

(ii) $\Pi_{i\in I} \kappa_i = |\Pi_{i\in I} \kappa_i|$.

**Teorema A.3.26.** ***(Teorema de König)*** *Si* $\{\kappa_i : i \in I\}$ *y* $\{\lambda_i : i \in I\}$ *son conjuntos de cardinales tales que para cada* $i \in I$, $\kappa_i < \lambda_i$, *entonces* $\sum_{i\in I} \kappa_i < \Pi_{i\in I}\lambda_i$.

La prueba de este teorema puede consultarse en [K; ej.(18, a), p. 45]. $\square$

# Apéndice B

# Espacios Topológicos

En este capítulo damos una serie de convenciones en notación y terminología. Por otra parte enunciamos resultados básicos y nociones de la topología con el propósito de agrupar conceptos, definiciones y teoremas puramente topológicos que serán utilizados a lo largo de este trabajo.

Con tal propósito, veremos primero algunas definiciones y proposiciones básicas.

## B.1. Resultados básicos de la topología

Recordemos que una *topología* en un conjunto $X$ es una familia $\tau$ de subconjuntos de $X$ que satisface que los conjuntos $\emptyset$ y $X$ son elementos de $\tau$, que si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$ y que si $\mathcal{A} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

Una pareja $(X, \tau)$ es un *espacio topológico* si $\tau$ es una topología en $X$, y los elementos que pertenecen a $\tau$ reciben el nombre de *subconjuntos abiertos de* $X$. Por otra parte, decimos que $E \subseteq X$ es un *subconjunto cerrado de* $X$ si $X \backslash E$ es abierto, es decir, si $X \backslash E \in \tau$.

Una subcolección $\mathcal{B}$ de $\tau$ es una *base* para $(X, \tau)$ si para cada elemento $A \in \tau$ existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup \mathcal{A}$. Y una subcolección $\mathcal{S}$ de una topología $\tau$ en $X$ es una *subbase* para $(X, \tau)$ si $\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{S} \text{ es finito}\}$ es una base para $(X, \tau)$.

**Proposición B.1.1.** *Una subcolección $\mathcal{B}$ de una topología $\tau$ en $X$ es una base de $\tau$ si y sólo si para cada $A \in \tau$ y cada $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ con la propiedad $x \in B \subseteq A$.*

**Demostración.** Supongamos que $\mathcal{B}$ es una base de $\tau$. Si $A = \emptyset$ el consecuente se tiene por vacuidad, por otro lado, si $A \in \tau \backslash \{\emptyset\}$ y $x \in A$, por definición, podemos encontrar $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup \mathcal{A}$. Esto significa que para algún $B \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ se cumple que $x \in B \subseteq A$.

Recíprocamente, sea $A \in \tau$. Para cada $x \in A$ podemos encontrar $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq A$. Resulta entonces que $A = \bigcup\{B_x : x \in A\}$. $\square$

**Observación B.1.2.** $\mathcal{S} \subseteq \tau$ es una subbase para $\tau$ si y sólo si, para cada $A \in \tau$ y cada $x \in A$, existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ finita no vacía tal que $x \in \bigcap \mathcal{A} \subseteq A$.

**Ejemplo B.1.3.** Sea $(X, <)$ un coto no vacío tal que $|X| \geqslant 2$. Para cada $a \in X$, sean $I_a = \{x \in X : x < a\}$ y $D_a = \{x \in X : x > a\}$. Entonces la colección $\mathcal{S} = \{I_a : a \in X\} \cup \{D_a : a \in X\}$ es subbase para una topología $\tau_<$ en $X$ a la que llamaremos *topología inducida por el orden* $<$. Se dice que el espacio topológico $(X, \tau_<)$, es *linealmente ordenado*. Una base de $\tau_<$ es pues la colección $\mathcal{B} = \mathcal{S} \cup \{(a, b) : a, b \in X \text{ y } a < b\}$.

Un espacio topológico se llama *linealmente ordenable* si existe un orden total $<$ sobre $X$ tal que $\tau_<$ es una topología en $X$.

A los espacios linealmente ordenados cuyo conjunto base es un ordinal y cuya topología es la inducida por el orden $\leqslant$, se les llama *espacios de ordinales*.

**Notación.** Para facilitar la notación en los siguientes capítulos, cuando hablemos de un ordinal $\alpha$ como conjunto base de su espacio de ordinales, escribiremos $[0, \alpha)$.

Denotaremos por $\mathbb{N}$ al espacio de ordinales $([0, \omega), \tau_<)$.

Sea $x$ un elemento del espacio topológico $(X, \tau)$. A la colección de vecindades de $x$ en $X$ le llamamos *el sistema de vecindades del punto $x$ (en $(X, \tau)$)* y lo denotamos por $\mathcal{V}(x)$. Una *base local* para $x$ o una *base de vecindades* de $x$ en $(X, \tau)$, es una familia $\mathcal{B}(x)$ tal que para cualquier $U \in \tau$ con $x \in U$, existe $V \in \mathcal{B}(X)$ tal que $V \subseteq U$.

Por otra parte, decimos que una colección $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es *base para los cerrados de una topología* $\tau$ si la colección $\beta = \{X \backslash B : B \in \mathcal{B}\}$ es base para $\tau$.

**Proposición B.1.4.** *Supongamos que para cada elemento $x$ de un conjunto $X$ existe una familia $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ de subconjuntos de $X$ que satisfacen las siguientes condiciones:*

*(i) para cada $V \in \mathcal{B}(x)$, $x \in V$,*

*(ii) si $V_1$ y $V_2$ son miembros de $\mathcal{B}(x)$, entonces existe $V_3 \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$,*

*(iii) para cada $V \in \mathcal{B}(x)$, si $y \in V$, entonces existe $W \in \mathcal{B}(y)$ tal que $W \subseteq V$.*

*Entonces la familia $\tau = \{A \subseteq X : \text{para cada } x \in A, \text{ existe } V \in \mathcal{B}(x) \text{ con } V \subseteq A\}$ es una topología en $X$ y cada $\mathcal{B}(x)$ resulta ser una base de vecindades de $x$ para esta topología. Además, $\tau$ es la única topología en $X$ para la cual $\mathcal{B}(x)$ es una base de vecindades de cualquier punto $x$.*

**Demostración.** Por vacuidad, el conjunto vacío pertenece a $\tau$. Por otra parte, el hecho de que $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in X$, garantiza que $X \in \tau$. Ahora bien, si $A_1$ y $A_2$ son elementos de $\tau$ y $x \in A_1 \cap A_2$, entonces podemos encontrar $V_1, V_2 \in \mathcal{B}(x)$ con la propiedad $V_1 \subseteq A_1$ y $V_2 \subseteq A_2$. Como las familias elegidas $\mathcal{B}(x)$ satisfacen la condición *(ii)*, entonces existe $V_3 \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2 \subseteq A_1 \cap A_2$. Así, podemos concluir que $A_1 \cap A_2 \in \tau$. Por otro lado, sea $\mathcal{A} \subseteq \tau$, entonces para $x \in \cup\mathcal{A}$, $x \in A$ para alguna $A \in \mathcal{A} \subseteq \tau$, de modo que existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V \subseteq A$, y como $A \subseteq \cup\mathcal{A}$, tenemos que para cada $x \in \cup\mathcal{A}$, existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V \subseteq \cup A$. Con lo cual concluimos que $\tau$ es topología en $X$.

Verifiquemos que $\mathcal{B}(x) \subseteq \tau$ para cualquier $x \in X$. Sean $x \in X$ y $V \in \mathcal{B}(x)$. Para cualquier $y \in V$, *(iii)* asegura la existencia de $W \in \mathcal{B}(y)$ tal que $W \subseteq V$. Por lo tanto, $V \in \tau$.

Se tiene entonces que $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ para cualquier $x \in X$. En efecto, si $x \in X$ y $V \in \mathcal{B}(x)$, como por *(i)* $x \in V$ y por lo anterior $V \in \tau$, hay $U \in \tau$ (a saber $V$) tal que $x \in U \subseteq V$. Por lo tanto $V \in \mathcal{V}(x)$.

Sea ahora $V$ una vecindad de un punto $x$ en $(X, \tau)$. Por definición de vecindad, $V$ contiene un elemento $A \in \tau$ tal que $x \in A$. Por consiguiente, existe $V_x \in \mathcal{B}(x)$ contenida en A; es decir, $x \in V_x \subseteq A \subseteq V$. Por lo tanto, $\mathcal{B}(x)$ es una base de vecindades de $x$.

Sea por último $\tau'$ cualquier topología en $X$ para la cual $\mathcal{B}(x)$ es una base de vecindades de $x$, para todo $x \in X$. Probemos que $\tau' = \tau$. Sea $U \in \tau'$, y sea $x \in U$. Claramente, $U$ es vecindad de $x$, por lo que hay $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V \subseteq U$.

Recíprocamente, sea $A \subseteq X$ tal que para toda $x \in A$, existe $V_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V_x \subseteq A$. Por definición de base de vecindades, los elementos de $\mathcal{B}(x)$ son vecindades de $x$, para toda $x \in X$. Así, para cada $x \in A$, existe $V_x \in \mathcal{B}(x)$ y hay $U_x \in \tau'$ tal que $x \in U_x \subseteq V_x \subseteq A$. Por tanto $A = \bigcup_{x\in A} U_x$, y así, $A \in \tau'$. $\square$

**Proposición B.1.5.** *Sea $X$ un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de $X$ que satisface las siguientes propiedades:*

*(1) Para toda $x \in X$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V$.*

*(2) Para cualesquiera $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$, y para toda $x \in V_1 \cap V_2$, existe $V_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.*

*Entonces, existe una única topología $\tau$ en X, para la cual $\mathcal{B}$ es base.*

**Demostración.** Definamos $\tau$ como la colección de todos los subconjuntos de $X$ que tienen la forma $\bigcup_{\alpha\in J} V_\alpha$ donde $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J} \subseteq \mathcal{B}$. Entonces $\tau$ es una topología en $X$. En efecto, $\emptyset \in \tau$ (por ser unión de una familia vacía de elementos de $\mathcal{B}$) y como la condición *(1)* garantiza que existe una vecindad $V_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_x$, entonces $X = \bigcup_{x\in X} V_x$ y por tanto $X \in \tau$. Consideremos ahora una familia arbitraria de elementos en $\tau$, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$. Entonces para cada $\alpha \in J$ existe una familia $\{V_{\gamma_\alpha}\}_{\gamma_\alpha\in J_\alpha}$ de elementos en $\mathcal{B}$ tal que $U_\alpha = \bigcup_{\gamma_\alpha\in J_\alpha} V_{\gamma_\alpha}$. De esta manera,

$$\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in J,\gamma_\alpha\in J_\alpha} V_{\gamma_\alpha}$$

y por lo tanto $\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \in \tau$. Por último, sean $U, V \in \tau$ y $\{U_{\alpha_1}\}_{\alpha_1\in J_1}$ y $\{V_{\alpha_2}\}_{\alpha_2\in J_2}$ un par de familias de elementos de $\mathcal{B}$ tales que $U = \bigcup_{\alpha_1\in J_1} U_{\alpha_1}$ y $V = \bigcup_{\alpha_2\in J_2} V_{\alpha_2}$. Entonces

$$U\cap V = (\bigcup_{\alpha_1\in J_1} U_{\alpha_1}) \cap (\bigcup_{\alpha_2\in J_2} V_{\alpha_2}) = \bigcup_{\alpha_1\in J_1,\alpha_2\in J_2} U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}.$$

Ahora, por la condición *(2)*, para cada $x \in U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}$ existe $W_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W_x \subseteq U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}$. Entonces $U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2} = \bigcup_{x\in U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}} W_x$. Así, $U\cap V$ se expresa como unión de elementos de $\mathcal{B}$ y por lo tanto $U\cap V \in \tau$.

Con esto hemos probado que $\tau$ es una topología en $X$ para la cual $\mathcal{B}$ es base. Veamos que es única. Supongamos que $\tau'$ es una topología en $X$ para la cual $\mathcal{B}$ es base. Sea $U \in \tau'$. Entonces $U = \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha$ donde $U_\alpha \in \mathcal{B} \subseteq \tau$ para toda $\alpha \in J$. Así, $U \in \tau$ y por lo tanto $\tau' \subseteq \tau$. Análogamente $\tau \subseteq \tau'$. □

Cuando tenemos un espacio topológico $(X,\tau)$ y un subconjunto $E$ de $X$, podemos definir los puntos que están "muy cercanos" a $E$ según $\tau$ de la siguiente manera: Un punto $x \in X$ es un *punto de acumulación de* $E$ si cada vecindad $V$ de $x$ en $(X,\tau)$ contiene algún punto de $E$ diferente de $x$ (esto es, si $(E\cap V)\setminus\{x\} \neq \emptyset$ para cada $V \in \mathcal{V}(x)$). El *conjunto derivado* de $E$, que denotaremos por $der(E)$ es el conjunto de todos los puntos de acumulación de $E$. Un punto $x$ en $E$ es un *punto aislado* de $E$ si $x \in E\setminus der(E)$. La *cerradura* de $E$, denotada por $cl(E)$, es el conjunto $E \cup der(E)$. Es decir, $x \in cl(E)$ si y sólo si toda vecindad de $x$ contiene un punto de $E$. El *interior* de $E$, que denotamos por $int(E)$, es la unión de la colección de subconjuntos de $E$ que son abiertos.

**Proposición B.1.6.** *Sea $(X,\tau)$ un espacio topológico y sean $E$ y $F$ subconjuntos de $X$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades.*

*(1) $x \in cl(E)$ si y sólo si cada subconjunto abierto de $X$ que contiene a $x$ tiene intersección no vacía con $E$.*

*(2) $cl(E)$ es cerrado.*

*(3) Si $F \subseteq X$ es un cerrado que contiene a $E$, entonces $cl(E) \subseteq F$.*

*(4) $E$ es cerrado si y sólo si $E = cl(E)$.*

*(5) Si $E \subseteq F$ entonces $cl(E) \subseteq cl(F)$.*

*(6) $cl(E) = \cap\{F : F \subseteq X$ es un cerrado tal que $E \subseteq F\}$.*

*(7) $cl(E\cup F) = cl(E)\cup cl(F)$.*

*(8) $cl(E\cap F) \subseteq cl(E)\cap cl(F)$.*

*(9) $int(E)$ es un subconjunto abierto de $X$.*

*(10) Si $A$ es un abierto en $X$ contenido en $E$, entonces $A \subseteq int(E) \subseteq E$.*

*(11) Si $E \subseteq F$, entonces $int(E) \subseteq int(F)$.*

*(12) $E \in \tau$ si y sólo si $int(E) = E$.*

*(13)* $int(int(E)) = int(E)$
*(14)* $int(E \cap F) = int(E) \cap int(F)$.

La prueba de los primeros ocho incisos puede consultarse en [E; p.13-14] y la de los últimos incisos en [E; prop.1.1.4, p.14 y prop.1.1.5-1.1.6, p.15]. $\square$

El concepto de densidad fue introducido por Georg Cantor y fue utilizado en muchos de los resultados presentados. Dado un espacio topológico $X$, decimos que un subconjunto $A$ de $X$ es *denso en* $X$, si para todo elemento $x \in X$, se tiene que toda vecindad $V$ de $x$ contiene al menos un punto de $A$. Equivalentemente, $A$ es denso en $X$ si el único cerrado de $X$ que lo contiene es $X$ mismo.

Por otra parte, un espacio topológico $X$ es llamado *separable* si contiene un subconjunto denso numerable.

Antes de la definición general actual, habían varias candidatas a ser la definición de espacio topológico. Muchas de ellas suponían (lo que hoy día conocemos como) axiomas de separación. Estos diferentes intentos de crear una definición adecuada de espacio topológico culminaron con los trabajos de Felix Hausdorff en 1914. Hausdorff introdujo en su célebre obra *Fundamentos de la Teoría de Conjuntos* la noción de espacio topológico, definiéndolo como lo que ahora conocemos como un espacio (de) Hausdorff.

Existen varios niveles de separación creciente que se puede pedir a un espacio topológico, que suelen denominarse con la letra $T$ (de *Trennung*, *separación* en alemán) y un subíndice.

Recordemos que un espacio topológico $(X, \tau)$ es un *espacio* $T_1$, si para cualesquiera dos puntos distintos $x$ y $y$ de $X$, existen subconjuntos abiertos $U$ y $V$ de $X$ tales que $x \in U \backslash V$ y $y \in V \backslash U$.

**Teorema B.1.7.** *Un espacio topológico $(X, \tau)$ es un espacio $T_1$ si y sólo si para todo $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es un subconjunto cerrado de $X$.*

La prueba de este teorema puede consultarse en [E; p. 37, línea 11]. $\square$

Diremos que un espacio topológico $(X, \tau)$ es un *espacio Hausdorff o* $T_2$ si es tal que para cualesquiera puntos distintos $x$ y $y$ de $X$, existen abiertos $U$ y $V$ de $X$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Un espacio $T_1$ $X$ es *regular* (o $T_3$) si dados $F \subseteq X$ un conjunto cerrado y $x \in X \backslash F$, existe una vecindad $U$ de $x$ y un abierto $V$ con $F \subseteq V$, tales que $U \cap V = \emptyset$.

**Observación B.1.8.** Como todos los conjuntos unitarios de un espacio regular $X$ son subconjuntos cerrados del mismo, todo espacio $T_3$ es un espacio $T_2$.

**Teorema B.1.9.** *Un espacio topológico $T_1$ $X$ es $T_3$ si y sólo si para cada punto $x \in X$ y cada abierto $W$ tal que $x \in W$, existe un abierto $U$ tal que $x \in U \subseteq cl(U) \subseteq W$.*

La demostración de este teorema puede consultarse en [E, prop.1.5.5, p. 38]. □

**Lema B.1.10.** *Dado un espacio regular $X$, y un subconjunto infinito $A \subseteq X$, existe una familia $\{U_n : n \geqslant 0\}$ formada por abiertos, cuyas cerraduras son ajenas dos a dos, y tales que $A \cap U_n \neq \emptyset$ para cada $n \geqslant 1$.*

**Demostración.** Procedemos por inducción tomando $U_0 = \emptyset$. Supongamos que $U_0, U_1 ..., U_n$ han sido definidos de modo que $cl(U_0), cl(U_1), ..., cl(Un)$ son ajenas dos a dos, $A \cap U_k \neq \emptyset$ para $1 \leqslant k \leqslant n$ y tales que $A_n = A \setminus \bigcup_{i=0}^{n} cl(U_i)$ es un conjunto infinito.
Sean $a, b \in A_n$ un par de elementos distintos. Como $X$ es regular, existe un abierto $V \subseteq X$ tal que

$$a \in V \subseteq cl(V) \subseteq X \setminus (cl(U_0) \cup ... \cup cl(U_n) \cup \{b\})$$

y un abierto $W$ tal que

$$b \in W \subseteq cl(W) \subseteq X \setminus (cl(U_0) \cup ... \cup cl(U_n) \cup cl(V)).$$

Ahora, definimos $U_{n+1} = V$ si $cl(V) \cap A$ es finita, y $U_{n+1} = W$ en otro caso. Entonces $cl(U_0), ..., cl(U_n), cl(U_{n+1})$ son ajenos dos a dos, $A \setminus \bigcup_{i=0}^{n+1} cl(U_i)$ es infinito, y $A \cap U_k \neq \emptyset$ para $1 \leqslant k \leqslant n+1$, completando el paso inductivo. □

Un *subespacio* de un espacio topológico $(X, \tau)$, es un subconjunto $Y$ de $X$ dotado con la topología $\tau$ heredada a $Y$. Dicha topología es llamada *topología $\tau$ relativizada a $Y$*, a la cual denotamos por $\tau_Y$, y está dada por:

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}.$$

Esto es, un subconjunto de $Y$ es abierto si y sólo si es la intersección de $Y$ con algún abierto de $X$. En general, los subconjuntos de espacios topológicos serán considerados con la topología heredada a menos que se estipule de otra manera. De esta manera, si $F$ es un subconjunto de $Y$, el conjunto $cl_Y(F)$ que denota la *cerradura de $F$ en $Y$* (es decir, la colección de elementos de $Y$ tales que cada una de sus vecindades en $Y$ tienen un punto de $F$), es tal que $cl_Y(F) = cl_X(F) \cap Y$. Similarmente, el conjunto $int_Y(F)$ que denota el *interior de $F$ en $Y$* (es decir la unión de la colección de subconjuntos de $F$ que son abiertos en $Y$), es tal que $int_X(F) \cap Y \subseteq int_Y(F)$.

**Proposición B.1.11.** *Las propiedades $T_0$, $T_1$, $T_2$ y $T_3$, son* propiedades hereditarias. *Es decir, si $X$ es un espacio $T_i$ y $Y \subseteq X$, entonces $Y$ también es un espacio $T_i$, donde $i = 0, 1, 2, 3$.*

Como ejemplo, probaremos que la propiedad $T_3$ es hereditaria. Sea $U$ un abierto en $Y$. Entonces si $V$ es un abierto en $X$ tal que $V \cap Y = U$, por la regularidad de $X$ se tiene que para toda $x \in V$, existe un abierto $W_x$ en $X$ tal que $x \in W_x \subseteq cl_X(W_x) \subseteq V$. En particular, para todo $x \in U$, $x \in W_x \cap Y \subseteq cl_X(W_x \cap Y) \cap Y \subseteq cl_X(W_x) \cap Y \subseteq U$. Pero $cl_X(W_x \cap Y) \cap Y = cl_Y(W_x \cap Y)$ y $W_x \cap Y$ es un abierto en $Y$, de manera que $Y$ es un espacio $T_3$. □

Decimos que un espacio topológico $(X, \tau)$ es *normal* o $T_4$, si tiene las siguientes propiedades:

(i) $X$ es un espacio $T_1$; y

(ii) para cualesquiera subconjuntos cerrados y ajenos $F_1$ y $F_2$ de $X$ existen subconjuntos abiertos ajenos $A_1$ y $A_2$ de $X$ tales que $F_1 \subseteq A_1$ y $F_2 \subseteq A_2$.

Se dice que $X$ es *hereditariamente normal* si todo subespacio de $X$ es normal.

**Proposición B.1.12.** *Un espacio $X$ $T_1$ es hereditariamente normal si y sólo si para cada par de subconjuntos $A$ y $B$ de $X$ con $A \cap cl(B) = \emptyset = cl(A) \cap B$, existen abiertos $U$ y $V$ de $X$ tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

**Demostración.** $\Rightarrow]$ Sean $A, B$ subconjuntos de $X$ tales que $A \cap cl(B) = \emptyset = cl(A) \cap B$. Observemos que de ocurrir $cl(A) \cap cl(B) = \emptyset$ habríamos terminado, puesto que $X$ es normal. Supongamos entonces que $cl(A) \cap cl(B) \neq \emptyset$.

Definimos $C = X \backslash (cl(A) \cap cl(B))$, $A' = C \cap cl(A)$ y $B' = C \cap cl(B)$. Entonces

$$A' \cap B' = C \cap cl(A) \cap cl(B) = C \cap (X \backslash C) = \emptyset.$$

Por tanto, por la normalidad de $C$, existen abiertos $U$ y $V$ de $C$ tales que $A' \subseteq U$ y $B' \subseteq V$.

Aseguramos que $A = A \cap C$ y $B = B \cap C$. En efecto, sea $x \in A \subseteq X \backslash cl(B)$, entonces

$$x \in (X \backslash cl(B)) \cup (X \backslash cl(A)) = C,$$

de manera que $x \in A \cap C$. El recíproco es claro y $B = B \cap C$ se prueba de manera análoga.

Por tanto, $A \subseteq cl(A) \cap C = A' \subseteq U$ y similarmente, $B \subseteq V$.

Entonces existen abiertos $U'$ y $V'$ de $X$ tales que $U = U' \cap C$ y $V = V' \cap C$. Pero $C$ es abierto, de manera que $U$ y $V$ son abiertos en $X$ y son tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

$\Leftarrow]$ Consideremos ahora un subespacio $Y$ del espacio topológico $(X, \tau)$, y $\tau_Y$ la topología de $X$ heredada a $Y$. Sean $F_1, F_2 \subseteq Y$ subconjuntos cerrados ajenos de $Y$. Entonces existen cerrados $F_1'$ y $F_2'$ de $X$ tales que $F_1 = F_1' \cap Y$ y $F_2 = F_2' \cap Y$. De manera que

$$\begin{aligned} F_1 \cap cl_X(F_2) &= (F_1' \cap Y) \cap cl_X(F_2' \cap Y) \\ &\subseteq F_1' \cap Y \cap cl_X(F_2') \cap cl_X(Y) \\ &= F_1' \cap Y \cap F_2' \cap cl_X(Y) \\ &= F_1' \cap Y \cap F_2' = F_1 \cap F_2 = \emptyset \end{aligned}$$

y análogamente, $cl_X F_1 \cap F_2 = \emptyset$, de manera que existen abiertos ajenos $U$ y $V$ de $X$ tales que $F_1 \subseteq U$ y $F_2 \subseteq V$. Sean $U' = U \cap Y$ y $V' = V \cap Y$. Entonces $U'$

y $V'$ son abiertos y ajenos en $Y$ y además $F_1 \subseteq U'$ y $F_2 \subseteq V'$. Por lo tanto, $Y$ es normal. $\square$

Ahora trataremos un axioma de separación intermedio entre el axioma de regularidad y el de normalidad que determina una nueva clase de espacios topológicos llamados usualmente *espacios completamente regulares* o *espacios de Tychonoff*. Para ello, recordemos la siguiente definición.

Dados $X$ y $Y$ espacios topológicos, se dice que una función $f : X \to Y$ es *continua* en un punto $x \in X$, si para toda vecindad $V$ de $f(x)$, existe una vecindad $U$ de $x$ en $X$ tal que $f[U] \subseteq V$. Se dice que $f$ es *continua* si es continua para todo punto $x \in X$. Equivalentemente, $f$ es continua si la preimagen de todo abierto en $Y$ es abierto en $X$ (que a su vez es equivalente a que la preimagen de todo cerrado en $Y$ es cerrado en $X$) (véase [E; prop.1.4.1, p.28] para consultar la prueba de que éstas definiciones son equivalentes).

**Observación B.1.13.** Sean $g : X \to Y$ y $h : Y \to Z$ un par de funciones continuas. La preimagen de un cerrado $F$ de $Z$ bajo $h$, es cerrado en $Y$ por la continuidad de $h$, y similarmente, $g^{-1}[h^{-1}[F]]$ es cerrado en $X$. Por lo tanto, la preimagen de todo cerrado en $Z$ bajo $h \circ g$, es cerrado en $X$, es decir, la composición de funciones continuas es continua.

Recordemos que un espacio topológico $(X, \tau)$ *es completamente regular* (o *Tychonoff*), también denotado $T_{3\frac{1}{2}}$, si satisface las siguientes condiciones:

(i) $(X, \tau)$ es un espacio $T_1$; y

(ii) para cualquier subconjunto cerrado $F$ de $X$ y cualquier punto $x \in X \setminus F$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f[F] \subseteq \{1\}$ y $f(x) = 0$, donde consideramos al intervalo $[0, 1]$ con la topología usual (llamada *topología euclidiana*).

**Observación B.1.14.** De la definición de espacio completamente regular podemos deducir que los espacios completamente regulares son espacios regulares. En efecto, si $X$ es un espacio completamente regular, $F \subseteq X$ es un subconjunto cerrado y $x \notin F$ es arbitrario, entonces existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f[F] \subseteq \{1\}$ y $f(x) = 0$. Entonces los subconjuntos $A_1 = f^{-1}[(\frac{1}{2}, 1]]$ y $A_2 = f^{-1}[[0, \frac{1}{2})]$, son subconjuntos abiertos de $X$ ajenos y satisfacen que $F \subseteq A_1$ y $x \in A_2$.

**Proposición B.1.15.** *La propiedad de ser* $T_{3\frac{1}{2}}$*, es hereditaria.*

**Demostración.** Sean $X$ un espacio Tychonoff y $Y \subseteq X$. $Y$ es $T_1$ por la Proposición B.1.11.

Ahora bien sea $F$ un subconjunto cerrado de $Y$ y sea $y \in Y \setminus F$. Entonces existe un cerrado $G$ de $X$ tal que $F = G \cap Y$ y así, $y \in (X \setminus (G \cap Y)) \cap Y =$

$(X \backslash G) \cap Y$. Por lo tanto, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f[G] \subseteq \{1\}$ y $f(y) = 0$. Entonces si $g = f\restriction_Y : Y \to [0,1]$, se tiene que si $U$ es un abierto en $[0,1]$, $f^{-1}[U]$ es abierto en $X$, de manera que $g^{-1}[U] = f^{-1}[U] \cap Y$ es abierto en $Y$ y por lo tanto $g$ es continua y más aún, $g$ es tal que $g[F] = f\restriction_Y [F] = f[G \cap Y] \subseteq \{1\}$ y $g(y) = 0$. □

A continuación definimos una topología del producto cartesiano de espacios topológicos, la *topología producto*, también llamada *topología de Tychonoff*. Para ello, introducimos la siguiente notación.

Como vimos en el capítulo 1, dada $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia de conjuntos, el *producto cartesiano* $\Pi_{\alpha \in J} A_\alpha$ es el conjunto de todos los mapeos $c : J \to \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ que satisfacen que para toda $\alpha \in J$, $c(\alpha) \in A_\alpha$. Un elemento $c \in \Pi_{\alpha \in J} A_\alpha$ es usualmente escrito $(a_\alpha)_{\alpha \in J}$, donde $c(\alpha) = a_\alpha$ para cada $\alpha \in J$. Con esta notación, $a_\alpha \in A_\alpha$ es llamada la $\alpha$-ésima coordenada de $(a_\alpha)$. El conjunto $A_\alpha$ es llamado el $\alpha$-ésimo factor de $\Pi_{\alpha \in J} A_\alpha$ y para cada $\beta \in J$, el mapeo $p_\beta : \Pi_{\alpha \in J} A_\alpha \to A_\beta$ dado por $(a_\alpha)_{\alpha \in J} \to a_\beta$, es llamado la proyección sobre el $\beta$-ésimo factor.

Si $X$ es un espacio topológico, denotamos con $X^M$ al producto cartesiano $\Pi_{m \in M} X_m$, donde $X_m = X$ para cada $m \in M$.

**Definición B.1.16.** Sea $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ cualquier familia de espacios topológicos y denotemos por $\tau_\alpha$ la topología de $X_\alpha$ para cada $\alpha \in J$. La *topología producto en* $\Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$, es aquella que tiene por subbase todos los conjuntos $\langle U_\beta \rangle = p_\beta^{-1}(U_\beta)$, donde $U_\beta$ varía en todos los elementos de $\tau_\beta$ y $\beta \in J$.

**Observación B.1.17.** Los elementos de la topología de Tychonoff son uniones de subconjuntos de la forma $\Pi_{\alpha \in j} U_\alpha$, donde $U_\alpha$ es un subconjunto abierto de $X_\alpha$, con la condición adicional de que $U_\alpha = X_\alpha$ para todos salvo por una cantidad finita de índices $\alpha$.

Podemos describir una base para la topología producto usando bases de los factores $X_\alpha$. Supongamos que para cada $\alpha \in J$, elegimos un conjunto $Y_\alpha$ que es o bien todo $X_\alpha$ o bien un básico de dicho espacio, de manera que $X_\alpha = Y_\alpha$ para todos salvo por una catidad finita de factores. Sea $B$ el producto cartesiano de los conjuntos $Y_\alpha$. La colección de todos los conjuntos $B$ que pueden ser construidos de esta manera es una base para $X$.

En particular, para un producto finito, los productos de los elementos básicos de cada $X_\alpha$, dan una base para la topología producto.

**Proposición B.1.18.** *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia de espacios topológicos $T_2$. Entonces, el producto $X = \Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$ es $T_2$.*

**Demostración.** Sean $x, y \in X$ puntos distintos. Entonces existe un índice $j \in J$ para el cual $x(j) \neq y(j)$. Como el espacio $X_j$ es Hausdorff, podemos elegir subconjuntos abiertos ajenos $U$ y $V$ de $X_j$ tales que $x(j) \in U$ y $y(j) \in V$. Consideremos ahora los subconjuntos abiertos $A = p_j^{-1}[U]$ y $B = p_j^{-1}[V]$ del producto topológico $X$. Es claro que $A$ y $B$ son ajenos porque $U$ y $V$ lo son. Además, como $x(j) \in U$ y $y(j) \in V$, se tiene que $x \in A$ y $y \in B$. De manera que $X$ es $T_2$. $\square$

**Proposición B.1.19.** Sea $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia de espacios topológicos $T_i$, con $i = 0, 1, 3, 3\frac{1}{2}$. Entonces, el producto $X = \Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$ es $T_i$. La prueba puede consultarse en [E; teo.2.3.11, p. 80].

**Proposición B.1.20.** *Sea $A$ un conjunto de índices. Si para toda $\alpha \in A$, $B_\alpha$ es un subconjunto cerrado en el espacio topológico $X_\alpha$, entonces $\Pi_{\alpha \in A} B_\alpha$ es cerrado en $\Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$.*

La prueba de este resultado puede consultarse en [E; cor.2.3.4, p. 78]. $\square$

Antes de continuar, recordemos que dado un par de espacios topológicos $X$ y $Y$, una *función* $f : X \to Y$ es *abierta* si para todo conjunto abierto $A$ de $X$, $f[A]$ es abierto en $Y$. Equivalentemente, $f$ es abierta si existe una base $\mathcal{B}$ de $X$ tal que $f[U]$ es abierto en $Y$ para toda $U \in \mathcal{B}$ (véase [E; teo. 1.4.14, p.32]).

Con base en los conceptos de función continua y función abierta, introducimos el siguiente. Un *homeomorfismo* o *isomorfismo topológico* es una función $f : X \to Y$ biyectiva continua y abierta (una función que cumple sólo las últimas dos propiedades es también llamada *bicontinua*). Un par de espacios topológicos entre los cuales hay un homeomorfismo, se llaman *homeomorfos*, y desde un punto de vista topológico son el mismo espacio.

La clase de espacios completamente regulares fue introducida poco tiempo después de que H. Tietze introdujera los espacios normales. En 1930 el matemático ruso Andrei Nikolaevich Tychonoff demostró en su artículo [T] que para todo espacio normal $X$ existe un subespacio de un espacio producto tipo $[0, 1]^M$, para un conjunto adecuado $M$ (los espacios $[0, 1]^M$ son conocidos hoy en día como *cubos de Tychonoff*), homeomorfo a $X$. Además notó que la condición de normalidad en su resultado no era necesaria demostrando la existencia de espacios topológicos no normales homeomorfos a un subespacio producto de la forma $[0, 1]^M$, a los cuales llamó espacios completamente regulares.

Los siguientes dos teoremas son fundamentales y muestran la importancia de la normalidad. La demostración de estos resultados puede verse en [E; teo.1.5.11, p. 41] y [E; teo.2.1.8, p. 69-70] respectivamente.

**Teorema B.1.21.** ***(Lema de Urysohn)*** *Sea $X$ un espacio $T_1$, entonces $X$ es un espacio normal si y sólo si para cualesquiera subconjuntos cerrados ajenos $F_1$ y $F_2$ de $X$ existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f[F_1] \subseteq \{0\}$ y $f[F_2] \subseteq \{1\}$.*

**Corolario B.1.22.** *Todo espacio normal es un espacio completamente regular.*

**Teorema B.1.23.** ***(Teorema de extensión de Tietze-Urysohn)*** *Un espacio topológico $X$ es un espacio normal si y sólo si toda función continua $f : F \to [a,b]$ (o bien $f : F \to \mathbb{R}$), definida en algún subconjunto cerrado $F$ de $X$, tiene una extensión continua sobre todo $X$; esto es, existe $g : X \to [a,b]$ (respectivamente $g : X \to \mathbb{R}$) continua tal que $f(x) = g(x)$ para toda $x \in F$.*

La siguiente proposición será útil en la prueba del siguiente teorema (B.1.25).

**Proposición B.1.24.** *Sean $(X,\tau)$ y $(Y,\gamma)$ un par de espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función. Entonces, si la imagen inversa de cualquier subbásico de $Y$ bajo $f$ es abierto, $f$ es continua.*

**Demostración.** Sea $\mathcal{S}$ una subbase de $Y$ y sea $\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ y $0 < |\mathcal{A}| < \aleph_0\}$. Entonces $\mathcal{B}$ es base para $\gamma$ y por tanto, dado $G \in \gamma$, existe una colección $\{C_j : j \in J\} \subseteq \mathcal{B}$ con $J$ un conjunto de índices, tal que $G = \bigcup_{j\in J} C_j$. Para cada $C_j \in \mathcal{B}$, existe una colección $\{S_{j_1}, S_{j_2}, ..., S_{j_{n_j}}\} \subseteq \mathcal{S}$, tal que $C_j = \bigcap\{S_{j_1}, S_{j_2}, ..., S_{j_{n_j}}\}$. Esto es $G = \bigcup_{j\in J}(S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap ... \cap S_{j_{n_j}})$, donde $S_{j_i} \in \mathcal{S}$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n_j\}$ y para cada $j \in J$. Entonces, de ocurrir que para toda $S \in \mathcal{S}$, $f^{-1}[S] \in \tau$, tendríamos que como

$$\begin{aligned} f^{-1}[G] &= f^{-1}[\bigcup_{j\in J}(S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap ... \cap S_{j_{n_j}})] \\ &= \bigcup_{j\in J} f^{-1}[S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap ... \cap S_{j_{n_j}}] \\ &= \bigcup_{j\in J}(f^{-1}[S_{j_1}] \cap ... \cap f^{-1}[S_{j_{n_j}}]), \end{aligned}$$

$f^{-1}[G]$ es la unión de una intersección finita de abiertos. Esto es, $f^{-1}[G]$ es un abierto y por lo tanto, $f$ es continua. □

**Teorema B.1.25.** *Sea $\kappa$ un cardinal. Consideremos $\{X_\lambda : \lambda \in \kappa\}$ y $\{Y_\lambda : \lambda \in \kappa\}$ familias de espacios topológicos y $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ una familia de funciones. Entonces si $\Pi f : \Pi_{\lambda\in\kappa} X_\lambda \to \Pi_{\lambda\in\kappa} Y_\lambda$ está dada por $\Pi f((x_\lambda)_{\lambda\in\kappa}) = (f_\lambda(x_\lambda))_{\lambda\in\kappa}$, se tiene lo siguiente:*

*(i) si $f_\lambda$ es continua para toda $\lambda \in \kappa$, entonces $\Pi f$ es continua.*

*(ii) si cada $f_\lambda$ es abierta y todas las $f_\lambda$ salvo por un número finito son suprayectivas, entonces $\Pi f$ es también abierta.*

**Demostración.** Para probar *(i)*, sean $\alpha \in \kappa$, $V_\alpha$ un subconjunto abierto de $Y_\alpha$ y consideremos el abierto subbásico $p_\alpha^{-1}[V_\alpha]$ de $\Pi_{\lambda\in\kappa} Y_\lambda$. Observemos que dada $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\kappa} \in X$, se tiene que

$$p_\alpha \circ \Pi f(x) = p_\alpha((f_\lambda(x_\lambda))_{\lambda\in\kappa}) = f_\alpha(x_\alpha) = f_\alpha \circ p_\alpha(x)$$

de manera que $p_\alpha \circ \Pi f = f_\alpha \circ p_\alpha$. Entonces $(\Pi f)^{-1}(p_\alpha^{-1}[V_\alpha]) = p_\alpha^{-1}[f_\alpha^{-1}[V_\alpha]]$. Por la continuidad de $f_\alpha$, se tiene que $p_\alpha^{-1}[f_\alpha^{-1}[V_\alpha]]$ es abierto en $\Pi_{\lambda\in\kappa} X_\lambda$. De manera que de la Proposición B.1.24, $\Pi f$ es una función continua.

Ahora, para verificar *(ii)*, observemos que dada $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\kappa} \in \Pi_{\lambda\in\kappa}X_\lambda$, $\Pi f(x) = (f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha\in\kappa}$. Entonces bajo $\Pi f$, el abierto básico $p_{\alpha_0}^{-1}[U_{\alpha_0}]\cap p_{\alpha_1}^{-1}[U_{\alpha_1}]\cap ... \cap p_{\alpha_n}^{-1}[U_{\alpha_n}]$, se mapea en

$$f_{\alpha_0}[U_{\alpha_0}] \times ... \times f_{\alpha_n}[U_{\alpha_n}] \times \Pi\{f_\beta[X_\beta] : \beta \neq \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n\}.$$

Como todas las funciones $f_\lambda$, salvo por un número finito, son suprayectivas, para toda $\lambda \in \kappa$, salvo por un número finito, $f_\lambda[X_\lambda] = Y_\lambda$ y los demás son conjuntos abiertos. Entonces la imagen de $p_{\alpha_0}^{-1}[U_{\alpha_0}] \cap p_{\alpha_1}^{-1}[U_{\alpha_1}] \cap ... \cap p_{\alpha_n}^{-1}[U_{\alpha_n}]$ es un conjunto abierto. De manera que $\Pi f$ es abierta. $\square$

A continuación definimos la unión discreta de una colección de espacios topológicos.

**Definición B.1.26.** Sea $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una colección de espacios topológicos con $\Lambda$ un conjunto de índices. Consideremos el conjunto $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda \times \{\lambda\})$ y la familia $\tau$ de todos los conjuntos $U \subseteq X$ tales que $U \cap (X_\lambda \times \{\lambda\})$ es abierto en $X_\lambda \times \{\lambda\}$ para toda $\lambda \in \Lambda$. Se puede verificar fácilmente que $\tau$ es topología para $X$. A dicho espacio topológico se le llama *la unión discreta de* $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ (o bien *unión ajena de* $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$) y usualmente se le denota por $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

Usualmente, dado un par de espacios topológicos, digamos $X$ y $Y$, tales que $X$ es homeomorfo a un subespacio de $Y$, decimos que existe un *encaje* de $X$ en $Y$, o bien, que $X$ es *encajable* en $Y$.

Como mencionamos antes, A. N. Tychonoff demostró en 1930, que los espacios normales pueden encajarse en espacios de tipo $[0,1]^M$. El método desarrollado por Tychonoff para la demostración de su resultado es conocido como *producto diagonal de funciones* y es una herramienta muy importante en topología general para construir encajes.

A continuación enunciamos el anunciado teorema de Tychonoff que caracteriza a los espacios completamente regulares.

**Teorema B.1.27.** ***(Teorema de Tychonoff de la inmersión)*** *Un espacio topológico $X$ es completamente regular si y sólo si $X$ es homeomorfo a un subespacio de un espacio producto de tipo $[0,1]^M$, donde $M$ es un conjunto.*

Como en el capítulo 1, denotamos por ${}^X[0,1]$ al conjunto de funciones cuyo dominio es $X$ y contradominio es $[0,1]$. Sean $X$ un espacio completamente regular, $\mathcal{F} = \{f \in {}^X[0,1] : f \text{ es continua}\}$ y $\{f_\alpha : \alpha \in J\}$ una enumeración de la familia $\mathcal{F}$. Entonces podemos definir una función $f : X \to [0,1]^J$ de la siguiente manera: para cada $\beta \in J$, $f(x)$ es el único elemento de $[0,1]^J$ cuya $\beta$-ésima coordenada es $f_\beta(x)$. Dicha función es llamada *producto diagonal de las funciones* $f_\alpha$ y es comúnmente denotada con el símbolo $\Delta f_\alpha$, o bien $\Delta_{g\in\mathcal{F}}g$. Como $X$ es Tychonoff, el producto diagonal $\Delta f_\alpha = f : X \to [0,1]^J$ dado por $f(x)(\alpha) = f_\alpha(x)$ para toda $x \in X$ y $\alpha \in J$, es un homeomorfismo sobre el subespacio $f[X]$ de $[0,1]^J$. La prueba de este hecho y de la suficiencia del teorema de la imersión de Tychonoff pueden consultarse en [CT, teo. 7.21, p.254]. La prueba del Teorema de la inmersión de Tychonoff, hace uso del siguiente resultado, conocido como el Teorema de la Diagonal.

**Notación.** Denotaremos al conjunto $\{f \in {}^A B : f \textit{ es continua}\}$ por $C(A,B)$. En particular, en el caso $B = \mathbb{R}$, escribiremos simplemente $C(A)$.

La prueba del Teorema de la inmersión de Tychonoff hace uso del siguiente resultado, conocido como el Teorema de la Diagonal.

**Teorema B.1.28.** ***(Teorema de la diagonal)*** *Si la familia $\mathcal{F} = \{f_s \in C(X, Y_s) : s \in S\}$ es tal que para cualesquiera $x, y \in X$ distintos, existe $f_s \in \mathcal{F}$ tal que $f_s(x) \neq f_s(y)$, entonces, la diagonal $f = \Delta_{s\in S} f_s : X \to \Pi_{s\in S} Y_s$ es una función inyectiva. Más aún, si la familia $\mathcal{F}$ es tal que para cualquier cerrado $F \subseteq X$ y cualquier $x \in X \backslash F$, existe $f_s \in \mathcal{F}$ tal que $f_s(x) \notin f_s[F]$, entonces $f$ es un encaje.*

La prueba de este teorema puede consultarse en [E, 2.3.20, p. 82]. □

## B.2. Espacios compactos y localmente compactos

En esta sección introduciremos la noción de compacidad en espacios topológicos y algunos conceptos relacionados. La compacidad apareció desde los primeros tiempos del análisis clásico como una de las principales propiedades que tienen los intervalos cerrados y acotados en la recta real, o cualquier esfera en espacios euclidianos. Actualmente sigue siendo una de las propiedades topológicas de mayor trascendencia.

Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de $X$ es una *cubierta de* $X$ si $X = \bigcup \mathcal{U}$. Si además cada uno de los elementos de $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $X$, entonces a $\mathcal{U}$ le damos el nombre de *cubierta abierta de* $X$. Por otro lado, si $\mathcal{U}$ es una cubierta de $X$ y $\mathcal{V}$ es una subcolección de $\mathcal{U}$, diremos que $\mathcal{V}$ es una *subcubierta* de $\mathcal{U}$ si $\bigcup \mathcal{V} = X$.

**Definición B.2.1.** Un espacio topológico $X$ es un *espacio compacto* si toda cubierta abierta de $X$ tiene una subcubierta finita.

Naturalmente cualquier espacio finito es compacto. Damos a continuación otro ejemplo.

**Ejemplo B.2.2.** El espacio de ordinales $[0, \omega_1]$ es compacto. En efecto, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $[0, \omega_1]$. Para algún $U_0 \in \mathcal{U}$, $\omega_1 \in U_0$. Entonces existe $\alpha_0 < \omega_1$ tal que $(\alpha_0, \omega_1] \subseteq U_0$. Sea $U_1 \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha_0 \in U_1$. Si $\alpha_0 > 0$, entonces podemos encontrar $\alpha_1 < \alpha_0$ tal que $(\alpha_1, \alpha_0] \subseteq U_1$. Tomemos ahora $U_2 \in \mathcal{U}$ que contiene a $\alpha_1$. Si $\alpha_1 > 0$, existe $\alpha_2 < \alpha_1$ tal que $(\alpha_2, \alpha_1] \subseteq U_2$. De esta manera podemos continuar. Notemos que para algún $n \in \mathbb{N}$, deberá ocurrir que $\alpha_n = 0$, puesto que de lo contrario obtendríamos una sucesión estrictamente decreciente de la forma $... < \alpha_{n+1} < \alpha_n < ... < \alpha_1 < \alpha_0$. Entonces $\{\alpha_n : n \in \omega\}$, sería un subconjunto de $\langle [0, \omega_1], \in \rangle$ que no tiene primer elemento, lo cual no es posible pues $\in$ es un buen orden en $[0, \omega_1]$.

Observemos ahora que la existencia de $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_n = 0$ implica que la subcolección finita $U_0, U_1, ..., U_{n+1}$ de elementos de $\mathcal{U}$ cubre a $[0, \omega_1]$.

Una demostración análoga nos permite afirmar que para cualquier número ordinal $\alpha$, el espacio $[0, \alpha]$ es compacto. Además si $\alpha$ es un ordinal límite mayor que 0, $[0, \alpha)$ no es compacto pues la colección $\{[0, \beta) : \beta < \alpha\}$ es una cubierta abierta de $[0, \alpha)$ que carece de subcubiertas finitas.

**Proposición B.2.3.** *Si $X$ es un espacio topológico y $Y$ es un subespacio de $X$, entonces $Y$ es compacto si y sólo si toda colección de abiertos de $X$ que cubre a $Y$ tiene una subcolección finita que sigue cubriendo a $Y$.*

**Demostración.** Para probar la necesidad consideremos una colección $\mathcal{U}$ de abiertos de $X$ que cubren a $Y$. Entonces la colección $\mathcal{V} = \{U \cap Y : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta (en $Y$) de $Y$. Por la compacidad de $Y$, existe una subcubierta finita $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$. De esta manera, $\mathcal{U}' = \{U \in \mathcal{U} : U \cap Y \in \mathcal{V}'\}$ es una subcolección finita de $\mathcal{U}$ que sigue cubriendo a $Y$.

Para probar la suficiencia, consideramos una cubierta abierta (en $Y$) de $Y$, digamos $\mathcal{W} = \{W_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, sea $V_\lambda$ un abierto en $X$ tal que $W_\lambda = V_\lambda \cap Y$. Entonces la colección $\mathcal{V} = \{V_\lambda : W_\lambda \in \mathcal{W}\}$ es una colección de abiertos en $X$ que cubre a $Y$. Por tanto, existe una subcolección finita $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}'$ sigue cubriendo a $Y$ y así, $\mathcal{W}' = \{W_\lambda : V_\lambda \in \mathcal{V}'\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{W}$. Esto es, $Y$ es compacto. □

**Proposición B.2.4.** *Sean $X$ un espacio compacto y $F$ un subespacio cerrado de $X$. Entonces $F$ es compacto.*

**Demostración.** Sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una colección de abiertos en $X$ que cubre a $F$. Entonces $\mathcal{V} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \cup \{X \backslash F\}$ es una cubierta abierta de $X$. Sea $\mathcal{U}'$ una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. La familia $\{U \in \mathcal{U} : U \in \mathcal{U}'\}$ es una subcolección finita de $\mathcal{U}$ que cubre a $F$, y por la Proposición B.2.3, $F$ es compacto.

□

**Proposición B.2.5.** *Cualquier espacio compacto $T_2$ es normal.*

**Demostración.** Sea $X$ un espacio compacto y $T_2$ y sean $F_1$ y $F_2$ cerrados ajenos de $X$. Entonces $F_1$ y $F_2$ son compactos.

Fijamos un punto $y \in F_1$. Para todo $x \in F_2$, sean $U_x^y, V_x^y$ abiertos en $X$ tales que $x \in U_x^y$, $y \in V_x^y$ y $U_x^y \cap V_x^y = \emptyset$. La familia $\mathcal{U} = \{U_x^y : x \in F_2\}$ es una colección de abiertos en $X$ que cubre a $F_2$. De la Proposición B.2.3, hay $x_1, x_2, \ldots, x_m$ en $F_2$ tales que la subfamilia $\{U^y_{x_1}, U^y_{x_2}, \ldots, U^y_{x_m}\}$ sigue cubriendo a $F_2$. Hagamos $A_y = U^y_{x_1} \cup ... \cup U^y_{x_m}$ y $B_y = V^y_{x_1} \cap ... \cap V^y_{x_m}$. Notemos que la colección $\mathcal{W} = \{B_y : y \in F_1\}$ es una colección de abiertos en $X$ que cubre a $F_1$. Como $F_1$ es compacto, de la Proposición B.2.3, existen $y_1, y_2, ..., y_n$ en $F_1$ tales que la subcolección $\{B_{y_1}, ..., B_{y_n}\}$ cubre a $F_1$. Definimos $U = B_{y_1} \cup ... \cup B_{y_n}$ y $V = A_{y_1} \cap ... \cap A_{y_n}$. Entonces $F_1 \subseteq U$, $F_2 \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. □

**Proposición B.2.6.** *Si $X$ es un espacio de Hausdorff y $K$ es subespacio compacto de $X$, entonces $K$ es cerrado en $X$.*

**Demostración.** Sea $x \in X \backslash K$ y sean $F_1 = \{x\}$ y $F_2 = K$. Observemos que con un argumento análogo al de la Proposición B.2.5, podemos concluir que existen subconjuntos abiertos ajenos $U$ y $V$ que satisfacen $F_1 \subseteq U$ y $F_2 \subseteq V$. Entonces $x \in U \subseteq X \backslash K$ y por tanto $K$ es cerrado. □

A continuación enunciamos otro conocido teorema de Tychonoff, el llamado *Teorema de Tychonoff del producto.* Este teorema es equivalente al Axioma de Elección (véase la Definición A.3.24).

**Teorema B.2.7.** ***(Teorema de Tychonoff del producto)*** *El producto arbitrario de espacios compactos es compacto.*

La prueba de este teorema puede consultarse en [Du; cap. xi, teo. 1.4, p. 224]. □

**Definición B.2.8.** Un espacio $X$ se llama *localmente compacto* si todo punto de $X$ tiene un sistema básico de vecindades cuyas cerraduras son compactas.

**Proposición B.2.9.** *Si $X$ es un espacio Hausdorff y todo punto de $X$ tiene una vecindad compacta, entonces $X$ es localmente compacto.*

**Demostración.** Sea $x \in X$ y $V$ un abierto de $X$ tal que $x \in V$. Sea $K$ una vecindad compacta de $x$ en $X$. Entonces $V \cap int_X(K)$ es un abierto en el compacto $K$ que contiene a $x$. Como $K$ es $T_2$ (porque $X$ lo es), $K$ es un espacio $T_4$. Por la regularidad de $K$, existe un abierto $B$ en $K$ tal que $x \in B \subseteq cl_K(B) \subseteq V \cap int_X(K)$. Podemos elegir entonces un abierto $U$ de $X$ tal que $K \cap U = B$. Como $K$ es una vecindad de $x$ en $X$, tenemos que $x \in int_X(K) \cap U \subseteq B \subseteq cl_K(B)$. Notemos ahora que $int_X(K) \cap U$ es un abierto de $X$ y que $cl_K(B)$ es compacto. Entonces $int_X(K) \cap U$ es una vecindad de $x$ contenida en $V$, con cerradura compacta. □

**Corolario B.2.10.** *Sea $X$ un espacio Hausdorff. El espacio $X$ es localmente compacto si y sólo si todo $x \in X$ tiene una vecindad abierta $U$ tal que la cerradura de $U$ es compacta.*

**Demostración.** La suficiencia es consecuencia de la Proposición B.2.9. El recíproco es claramente cierto. □

**Ejemplo B.2.11.** (1) Como todo espacio topológico es vecindad de cada uno de sus puntos, todo espacio compacto $T_2$ es localmente compacto por la Proposición B.2.9.

(2) Tenemos ya que para cada número ordinal $\alpha \in [0, \omega_1)$, $[0, \alpha]$ es compacto. Por lo tanto, $[0, \omega_1)$ es localmente compacto.

(3) $\mathbb{R}$ con la topología euclidiana es localmente compacto ya que todo $x \in \mathbb{R}$ tiene una vecindad compacta de la forma $[x-\delta, x+\delta]$ para alguna $\delta > 0$, lo cual implica, por la Proposición B.2.9, que todo punto de $\mathbb{R}$ tiene un sistema básico de vecindades compactas.

**Definición B.2.12.** Un espacio topológico $X$ es un *espacio numerablemente compacto* si toda cubierta abierta numerable de $X$ tiene una subcubierta finita.

**Proposición B.2.13.** *Un espacio topológico $T_1$ es numerablemente compacto si y sólo si cada subconjunto infinito tiene un punto de acumulación.*

**Demostración.** Sea $X$ un espacio $T_1$. Supongamos que $F$ es un suconjunto infinito de $X$ que no tiene puntos de acumulación. Entonces $F$ es cerrado en $X$, y para cada $x \in F$ existe una vecindad abierta $V_x$ de $x$ tal que $V_x \cap F = \{x\}$. La colección $\mathcal{U} = \{V_x : x \in F\} \cup \{X \backslash F\}$ es una cubierta abierta de $X$ que no tiene subcubiertas finitas. Por lo tanto $X$ no es numerablemente compacto.

Ahora supongamos que $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$ es una cubierta abierta de $X$ que no tiene subcubiertas finitas.

Elegimos $x_0 \in X$ y un elemento $U_{n_0} \in \mathcal{U}$ tal que $x_0 \in U_{n_0}$. Tenemos que $X \backslash \bigcup_{i=0}^{n_0} U_i \neq \emptyset$. Elegimos entonces $x_1 \in X \backslash \bigcup_{i=0}^{n_0} U_i$. Como $\mathcal{U}$ es cubierta de $X$, existe $n_1 \in \omega$ tal que $x_1 \in U_{n_1}$ (notemos que $n_0 < n_1$). Habiendo elegido $n_0, n_1, ..., n_k \in \omega$ y $x_0, x_1, ..., x_k \in X$ tales que $n_0 < n_1 < ... < n_k$, $x_0 \in U_{n_0}$ y $x_j \in U_{n_j} \backslash \bigcup_{i=0}^{n_j - 1} U_i$ para cada $j \in \{1, 2, ..., k\}$, elegimos $x_{k+1} \in X \backslash \bigcup_{i=0}^{n_k} U_i$ y $n_{k+1} \in \omega \backslash \{0, 1, ..., n_k\}$ tales que $x_{k+1} \in U_{n_{k+1}}$. Entonces

$$x_{k+1} \in U_{n_{k+1}} \backslash \bigcup_{i=0}^{n_k} U_i$$

y siguiendo con este procedimiento, nos es posible definir un conjunto infinito $F = \{x_k : k \in \omega\}$ y una sucesión $\{U_k : k \in \omega\}$ de elementos de $\mathcal{U}$.

Probaremos ahora que el conjunto $F$ no tiene puntos de acumulación en $X$. En efecto, para cada $x \in X$ existe un natural $n$ tal que $x \in U_n$ y $U_n$ contiene a lo más una colección finita $G$ de puntos de $F$. Así, $(U_n \backslash G) \cup \{x\}$ es una vecindad de $x$ que no interseca a $F$. □

**Proposición B.2.14.** *Sea $X$ un espacio numerablemente compacto y sea $F$ un subespacio cerrado de $X$. Entonces $F$ es numerablemente compacto.*

La prueba de este resultado es análoga a la de la Proposición B.2.4, tomando una cubierta abierta numerable en lugar de una arbitraria. $\square$

**Definición B.2.15.** Un espacio topológico $X$ es de *Lindelöf* si cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de $X$ contiene una subcolección numerable que cubre a $X$.

**Observación B.2.16.** (1) De las definiciones resulta claro que cualquier espacio compacto es numerablemente compacto y Lindelöf.

(2) No es difícil verificar que todo espacio Lindelöf numerablemente compacto es un espacio compacto.

**Ejemplo B.2.17.** (1) Si $X$ es un *espacio discreto*, es decir un espacio cuya topología es el conjunto $\mathcal{P}(X)$, y además es infinito, entonces $X$ no es numerablemente compacto. Efectivamente, si $N$ es un subconjunto numerable de $X$, entonces la colección $\mathcal{U} = \{\{x\} : x \in N\} \cup \{X \setminus N\}$ es una cubierta numerable para $X$ que no admite subcubiertas finitas.

Por otra parte notemos que si $X$ es no numerable, entonces la familia $\mathcal{V} = \{\{x\} : x \in X\}$ es una cubierta abierta para $X$ que no admite una subcubierta numerable. De esta manera, si $X$ es un espacio discreto de cardinalidad no numerable, entonces $X$ no es un espacio Lindelöf.

(2) Claramente cualquier espacio numerable es Lindelöf. De esta manera, cualquier espacio discreto infinito numerable es un ejemplo de un espacio Lindelöf que no es numerablemente compacto.

(3) Cualquier espacio topológico que tenga una base numerable es Lindelöf.

**Demostración.** Sea $\mathcal{B}$ una base numerable para $X$. Consideremos ahora una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de $X$. Y definamos $\mathcal{B}_0 = \{B \in \mathcal{B} : \text{existe un } U \in \mathcal{U} \text{ con } B \subseteq U\}$. Para cada elemento $B \in \mathcal{B}_0$, fijemos un único elemento $U_B \in \mathcal{U}$ tal que $B \subseteq U_B$. Definamos $\mathcal{V} = \{U_B : B \in \mathcal{B}_0\}$. Como $|\mathcal{V}| \leqslant |\mathcal{B}_0| \leqslant |\mathcal{B}|$, la colección $\mathcal{V}$ es numerable. Ahora, veremos que $\mathcal{V}$ es una subcubierta de $\mathcal{U}$. Para ello, sea $x \in X$ arbitrario. Como $\mathcal{U}$ es cubierta abierta de $X$, existe una $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Podemos elegir $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$ ya que $\mathcal{B}$ es base para $X$. Entonces $B \in \mathcal{B}_0$, y podemos considerar a su correspondiente $U_B \in \mathcal{V}$. Por la elección de $U_B$ tenemos que $x \in B \subseteq U_B$. Por lo tanto, $x \in \bigcup \mathcal{V}$. De esta manera se tiene que $X \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. La contención contraria es trivialmente cierta. $\square$

(4) Otro ejemplo de espacio Lindelöf de especial relevancia es la línea de Sorgenfrey, que fue definida y analizada en la sección 1.5.

**Proposición B.2.18.** *Si $X$ es un espacio topológico y $Y$ es un subespacio de $X$, entonces $Y$ es Lindelöf si y sólo si toda colección de abiertos de $X$ que cubre a $Y$ tiene una subcolección numerable que sigue cubriendo a $Y$.*

La prueba es muy similar a la de la Proposición B.2.3. $\square$

**Lema B.2.19.** *La imagen continua de cualquier espacio numerablemente compacto es numerablemente compacto.*

**Demostración.** Sea $f : X \to Y$ una función continua y consideremos $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$ una cubierta abierta de $f[Y]$. Definimos $\mathcal{V} = \{f^{-1}[U_n] : n \in \omega\}$. Entonces, por la continuidad de $f$ y la sobreyectividad sobre su imagen, $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta y numerable de $X$. Así, por la compacidad numerable de $X$, existe una subcubierta finita de $\mathcal{V}$, digamos, sin pérdida de generalidad, $\{f^{-1}[U_1], f^{-1}[U_2], ..., f^{-1}[U_n]\}$. De esta manera, $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$ y así $f[Y]$ es numerablemente compacto. $\square$

Notemos que si $X$ es un espacio compacto y $f : X \to Y$ es una función continua, entonces dada una cubierta abierta de $f[Y]$, existe una subcubierta finita que contiene a $f[Y]$ (la prueba es similar a la demostración del Lema B.2.19). Por otra parte, por el Teorema de Heine-Borel-Lebesgue (véase [R; teo.2.40, p. 39]) se tiene que en $\mathbb{R}$ todo subespacio compacto es acotado.

Esto es, todo espacio compacto satisface que para toda función continua $f : X \to \mathbb{R}$, $f[X]$ es acotada.

**Definición B.2.20.** Se dice que un espacio topológico $(X, \tau)$ es *pseudocompacto* si cualquier función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es acotada.

De las observaciones previas a la definición anterior, tenemos que todo espacio compacto es pseudocompacto.

**Lema B.2.21.** *La imagen continua de cualquier espacio pseudocompacto es pseudocompacto.*

**Demostración.** Sea $Y$ imagen continua de $X$. Entonces, dado un par de funciones continuas $g : X \to Y$ y $h : Y \to \mathbb{R}$, se tiene que (de la Observación B.1.13) $h \circ g$ es una función continua de $X$ en $\mathbb{R}$. Como consecuencia, $h$ es acotada y entonces $Y$ es pseudocompacto. $\square$

**Proposición B.2.22.** *Si $X_1$ y $X_2$ son espacios pseudocompactos, entonces $X_1 \oplus X_2$ es pseudocompacto.*

**Demostración.** Notemos que como $X_1$ es pseudocompacto, para toda función continua $g : X_1 \times \{1\} \to \mathbb{R}$, $g$ está acotada puesto que $h : X_1 \to \mathbb{R}$ dada por $h(y) = g(y, 1)$ lo está. Esto es, $X_1 \times \{1\}$ es pseudocompacto. Análogamente, $X_2 \times \{2\}$ es pseudocompacto.

Sean $f : X_1 \oplus X_2 \to \mathbb{R}$ una función continua, $j_1$ el encaje de $X_1 \times \{1\}$ en $X_1 \oplus X_2$ y $j_2$ el de $X_2 \times \{2\}$ en $X_1 \oplus X_2$. Entonces dada $x \in X_1 \oplus X_2$, si $x \in X_i \times \{i\}$, $f \circ j_i(x) = f(x) = f{\restriction}_{X_i}(x)$ para $i = 1, 2$. Y como $f = f{\restriction}_{X_1 \times \{1\}} \cup f{\restriction}_{X_2 \times \{2\}}$, $f = (f \circ j_1) \cup (f \circ j_2)$.

Por la continuidad de $f$, $f \circ j_1$ y $f \circ j_2$ son continuas y por lo tanto acotadas. Así, $f$ es acotada y entonces $X_1 \oplus X_2$ es pseudocompacto. $\square$

**Proposición B.2.23.** *Cualquier espacio numerablemente compacto es pseudocompacto.*

**Demostración.** Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que $f$ no es acotada. Sea entonces $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) > 0$ y sea $x_{n+1} \in X$ tal que $f(x_{n+1}) > \text{máx}\{n+1, f(x_n)\}$. Entonces la sucesión $\{f(x_n) : n \in \omega\}$ no es convergente, esto es, $\{f(x_n) : n \in \omega\}$ es un conjunto infinito que no tiene puntos de acumulación. Por tanto, $f[X]$ no es numerablemente compacto. □

**Ejemplo B.2.24.** El espacio de ordinales $[0, \omega_1)$ es pseudocompacto. En efecto, como toda colección numerable de elementos en $[0, \omega_1)$ tiene un supremo en $[0, \omega_1)$, dicho espacio es numerablemente compacto. Por lo tanto, de la Proposición B.2.23, se tiene el resultado.

**Proposición B.2.25.** *Si $X$ es un espacio normal y pseudocompacto, entonces $X$ es numerablemente compacto.*

**Demostración.** Supongamos que $X$ es un espacio normal y no numerablemente compacto. Por la Proposición B.2.13, existe un conjunto numerable $A \subseteq X$, tal que $A$ no tiene puntos de acumulación (i.e. $der(A) = \emptyset$). Sea $A = \{x_n : n \in \omega\}$ una enumeración inyectiva de $A$. Entonces la función $f : A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_n) = n$ es continua (pues para cada $x \in A$ existe un abierto $V$ de $X$ tal que $V \cap A = \{x\}$). Ahora bien, $A$ es un subconjunto cerrado de $X$, por lo tanto, por el Teorema de extensión de Tietze-Urysohn (Teorema B.1.23), existe una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $g\restriction_A = f$, de modo que $g(x_i) = i$ para toda $i \in \omega$. Así, tenemos que $g$ es una función continua y no acotada y por tanto $S$ no es pseudocompacto. □

A continuación, definimos otra clasificación de espacios relacionada con la compacidad.

**Definición B.2.26.** Por un espacio *$\sigma$-compacto* entenderemos un espacio topológico que es la unión de una colección numerable de subespacios compactos.

Para pasar a las siguientes dos definiciones, recordemos que un *refinamiento* $\mathcal{D}$ de una cubierta $\mathcal{C}$ de un espacio $X$ es una cubierta de $X$ que satisface que para cada $D \in \mathcal{D}$, existe un $C \in \mathcal{C}$ tal que $D \subseteq C$. Un refinamiento es *localmente finito* si para cada punto en el espacio, existe una vecindad que interseca sólo a una cantidad finita de elementos del refinamiento. Dada una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de $X$, se dice que un refinamiento $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ es *puntualmente finito* si dicho refinamiento tiene la propiedad de que cada punto $x \in X$ pertenece sólo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{V}$.

**Definición B.2.27.** Un espacio $X$ es *paracompacto* si es regular y cada cubierta abierta de $X$ tiene un refinamiento abierto localmente finito.

**Definición B.2.28.** Decimos que un espacio topológico $X$ es *metacompacto* si toda cubierta abierta de $X$ tiene un refinamiento puntualmente finito.

Sea $X$ un espacio topológico. Recordemos que una *sucesión* es una función de $\mathbb{N}$ en $X$. La sucesión $n \mapsto x_n$ será representada por $(x_n)_{n\in\omega}$. Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ *converge* a un punto $x_0 \in X$ (denotado $(x_n) \to x_0$) si para cada vecindad $V$ de $x_0$, existe un número natural $n_V$ tal que $x_m \in V$ para toda $m \geqslant n_V$.

**Definición B.2.29.** Un espacio topológico es *secuencialmente compacto* si toda sucesión en el espacio tiene una subsucesión convergente.

**Proposición B.2.30.** *Todo espacio secuencialmente compacto es numerablemente compacto.*

**Demostración.** Sea $X$ un espacio secuencialmente compacto y $E$ un subconjunto numerable de $X$. Entonces si enumeramos $E$ como $\{e_n\}_{n\in\omega}$, por la compacidad secuencial de $X$, existe una subsucesión convergente de $\{e_n\}_{n\in\omega}$, digamos $\{e_{n_m}\}_{m\in\omega}$. Sea $x \in E$ tal que $\{e_{n_m}\}_{m\in\omega}$ converge a $x$. Entonces $x$ es un punto de acumulación de $E$, y así, de la Proposición B.2.13, se tiene el resultado. $\square$

En cuanto a clasificaciones por axiomas de separación se refiere, definimos por último, los conceptos *colectivamente Hausdorff* y *colectivamente normal.* Previo a ello, cabe mencionar que un subconjunto $D$ de un espacio topológico $X$ se llama *subespacio discreto de* $X$ si para todo $x \in D$, existe un abierto $U$ de $X$ tal que $U \cap D = \{x\}$. Asimismo una familia de subconjuntos $\mathcal{F}$ de $X$ es llamada *discreta* si todo punto de $X$ tiene una vecindad que interseca a lo más uno de los elementos de $\mathcal{F}$.

**Definición B.2.31.** Sea $X$ un espacio topológico. Decimos que $X$ es un espacio *colectivamente Hausdorff* si para cada conjunto discreto $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de $X$ existe una familia de abiertos ajenos dos a dos $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tal que $x_\lambda \in A_\lambda$ para toda $\lambda \in \Lambda$.

**Definición B.2.32.** Sea $X$ un espacio topológico. Decimos que $X$ es un espacio *colectivamente normal* si $X$ es $T_1$ y para toda familia discreta $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos cerrados de $X$, existe una familia discreta $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de abiertos en $X$ tal que $F_\lambda \subseteq V_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Equivalentemente, $X$ es colectivamente normal si para cada familia discreta de cerrados $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de $X$ existe una familia de abiertos ajenos dos a dos $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tal que $F_\lambda \subseteq U_\lambda$ para toda $\lambda \in \Lambda$ (véase [E; teo.5.1.17, p.305]).

**Ejemplo B.2.33.** Todo espacio paracompacto es colectivamente normal (y por lo tanto, colectivamente Hausdorff). En efecto, sea $\{F_s\}_{s\in S}$ una familia dicreta de subconjuntos cerrados en un espacio paracompacto $X$. Para cada $x \in X$ sea $H_x$ una vecindad abierta del punto $x$ cuya cerradura interseca a lo más un elemento de $\{F_s\}_{s\in S}$. Por la paracompacidad de $X$ existe un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{W}$ de la cubierta abierta $\{H_x\}_{x\in X}$. Para cada $s \in S$ sea $V_s = X\setminus\bigcup\{cl(W) : W \in \mathcal{W}$ y $cl(W) \cap F_s = \emptyset\}$. Aseguramos que la colección $\{V_s : s \in S\}$ es una familia discreta de abiertos en $X$ tal que $F_s \subseteq V_s$. Claramente $F_s \subseteq V_s$. Además dado $W \in \mathcal{W}$, se tiene que existe $H_z \in \{H_x\}_{x\in X}$ tal que $W \subseteq H_z$. De esta manera, $cl(W)$ interseca a lo más a un elemento de $\{F_s\}_{s\in S}$, digamos $F_t$. Notemos que entonces $cl(W) \cap V_t \neq \emptyset$ y que de ocurrir que $cl(W) \cap V_{t'} \neq \emptyset$, $cl(W) \cap F_{t'}$ sería distinto de vacío y entonces $t = t'$, es decir, $W$ interseca a lo más a un elemento de la familia $\{V_s\}_{s\in S}$.

Para terminar con esta sección, recordamos el primer y segundo axioma de numerabilidad.

El espacio de los números reales con su topología usual tiene algunas propiedades esenciales que se expresan en términos de numerabilidad y que le confieren a $(\mathbb{R}, \tau_e)$ (donde $\tau_e$ denota a la topología euclidiana) gran parte de sus características fundamentales. Por ejemplo, el conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, es un conjunto numerable y denso en $(\mathbb{R}, \tau_e)$. Además, para cada punto $x$ en $\mathbb{R}$ la colección de las bolas con centro en $x$ y radio $\frac{1}{n}$, donde $n$ varía en el conjunto $\omega\setminus\{0\}$, es una base local numerable de vecindades de $x$. Más aún, el conjunto $\{B(r, \frac{1}{n}) : r \in \mathbb{Q}, n \in \omega\setminus\{0\}\}$ es una base numerable para la topología $\tau_e$ en $\mathbb{R}$.

Estas propiedades de $\mathbb{R}$ fueron el incentivo para definir los conceptos de primero y segundo numerabilidad, enunciados a continuación.

**Definición B.2.34.** Un espacio topológico $(X, \tau)$ es *primero numerable* (o satisface el *primer axioma de numerabilidad*) si cada punto $x \in X$ posee una base local numerable de vecindades.

**Definición B.2.35.** El espacio $(X, \tau)$ es *segundo numerable* (o satisface el *segundo axioma de numerabilidad*) si existe una base numerable para $\tau$.

**Ejemplo B.2.36.** Para un espacio discreto $(X, \tau)$ y un punto $x$ en él, el conjunto $\{x\}$ es abierto, de tal manera que el único subconjunto denso en $X$ es $X$ mismo, y cualquier base de $X$ debe contener a todos los subconjuntos unipuntuales de $X$. Por lo cual, en el espacio $(X, \tau)$ son equivalentes el segundo axioma de numerabilidad, la separabilidad y la propiedad $|X| \leqslant \aleph_0$. De esta forma tenemos que la condición $|X| > \aleph_0$ implica que $X$ con la topología discreta es un ejemplo de un espacio primero numerable que no es separable (y entonces tampoco segundo numerable).

## B.3. Espacios metrizables

El propósito de esta sección es probar (para hacer uso de ello más adelante) que el espacio producto $[0,1]^\omega$, llamado *el cubo de Hilbert* es un espacio metrizable.

La clase de espacios métricos fue la primera clase de espacios abstractos en la que varias nociones y resultados, descubiertas en el estudio de los subconjuntos de la recta real y los espacios euclidianos, fueron exitosamente generalizados. La clase de espacios métricos es suficientemente grande como para incluir varios objetos estudiados en distintas ramas de las matemáticas, y a la vez, suficientemente simple como para permitir el uso de la intuición geométrica. El concepto de espacio métrico fue introducido en 1906 por Fréchet en su tesis doctoral. Por muchos años, la atención de los topólogos estuvo enfocada en los espacios métricos y, en particular, en los espacios métricos separables. Sin duda, ésta última es la clase más estudiada de espacios topológicos.

Recordemos que un *espacio métrico* es una pareja $\mathbf{X} = \langle X, d\rangle$, donde $X$ es un conjunto y $d : X \times X \to [0,\infty)$ es una *métrica*, i.e., es tal que para todo $x$ y $y$ en $X$:
(i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$
(ii) $d(x,y) = d(y,x)$
(iii) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

Dado un espacio métrico $(X,d)$, podemos generar, con la métrica $d$ una topología en $X$ de la siguiente forma. Para cada $x \in X$ y cada número real positivo $r$, tomamos el conjunto $B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$, a este conjunto le llamaremos *bola abierta de radio $r$ y centro en $x$.*

Definimos entonces $\tau_d = \{E \subseteq X : E \text{ es unión de bolas abiertas}\}$. La colección $\tau_d$ es una topología en $X$ (puede verificarse fácilmente o consultarse [CT; sec. 2.1, p.51]) a la que llamaremos *topología en $X$ inducida por la métrica $d$.*

**Definición B.3.1.** Un espacio topológico $(X,\tau)$ es un *espacio metrizable* si existe una métrica $d$ en $X$ tal que $\tau_d = \tau$.

**Proposición B.3.2.** *Todo espacio metrizable es regular.*

**Demostración.** Sea $(X,\tau_\rho)$ un espacio metrizable, con $\rho$ una métrica sobre $X$. Consideramos un subconjunto cerrado $F$ de $X$ y $x \in X\backslash F$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(x)$ no interseca a $F$. Ahora, $U = B_{\frac{r}{2}}(x)$ es una vecindad abierta de $x$ y $V = \cup\{B_{\frac{r}{2}}(y) : y \in F\}$ es un abierto que contiene a $F$ y que no interseca a $U$. En efecto, de existir $z \in B_{\frac{r}{2}}(x) \cap B_{\frac{r}{2}}(y)$ para alguna $y \in F$, tendríamos que $\rho(x,z) < \frac{r}{2}$ y $\rho(z,y) < \frac{r}{2}$. De manera que, como $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(y,z)$, entonces $\rho(x,y) < r$. Así, $y \in B_r(x)$, situación que contradice nuestra elección de $r$. Por tanto, $X$ es regular. $\square$

**Teorema B.3.3.** *Todo espacio metrizable separable tiene una base numerable de abiertos.*

**Demostración.** Sea $(X, \tau_\rho)$ un espacio metrizable y separable, con $\rho$ una métrica para $X$. Entonces, por definición, $X$ contiene un subconjunto denso numerable. Sea $S$ tal denso y sea $\{B_n\}_{n\in\omega}$ la sucesión de bolas abiertas con centro en algún elemento de $S$ que tienen radios racionales positivos.

Consideramos un conjunto abierto $G \subseteq X$ y $p \in G$. Entonces existe $\eta > 0$ tal que para toda $x \in X$, $\rho(x, p) < \eta$ implica $x \in G$.

Ahora, como $S$ es denso, existe un $s \in S$ y algún racional $\varrho > 0$ tal que $\rho(s, p) < \varrho < \frac{\eta}{2}$.

Entonces $p \in B_\varrho(s)$. Más aún, si $x \in B_\varrho(s)$, entonces $\rho(x, s) < \varrho$, de manera que $\rho(x, p) \leqslant \rho(x, s) + \rho(s, p) < \eta$ y así, $x \in G$. Por lo tanto, $B_\varrho(s) \subseteq G$ y entonces tenemos que $\{B_n\}_{n\in\omega}$ es una base para $X$. $\square$

Un problema fundamental en Topología es determinar si un espacio topológico dado es o no metrizable. Existen diversos resultados al respecto. Un ejemplo clásico es el siguiente (su prueba puede consultarse en [Ku1; §22, teo.1, p.241]):

**Teorema B.3.4.** ***(Teorema de metrización de Urysohn)*** *Todo espacio topológico regular que cumpla el segundo axioma de numerabilidad es metrizable.*

Probaremos el siguiente teorema para obtener como corolario que, en efecto, el cubo de Hilbert es metrizable.

**Teorema B.3.5.** *Sea $\{X_i\}_{i\in\omega}$ una familia de espacios metrizables y sea, para cada $i \in \omega$, $\rho_i$ una métrica sobre el espacio $X_i$, tal que $\rho_i(x, y) \leqslant 1$ para todo $(x, y) \in X_i$ y que define la topología de $X_i$. Entonces, la topología inducida sobre el conjunto $X = \Pi_{i\in\omega} X_i$ por la métrica $\rho$ definida para $x = (x_i)_{i\in\omega}, y = (y_i)_{i\in\omega} \in X$, como:*

$$\rho(x, y) = \sum_{i\in\omega} \frac{1}{2^i} \rho_i(x_i, y_i)$$

*coincide con la topología producto (dada en la Definición B.1.16) en $X$.*

**Demostración.** Sean $x = (x_i)_{i\in\omega}, y = (y_i)_{i\in\omega}, z = (z_i)_{i\in\omega} \in X$. Notemos que $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $\rho_i(x_i, y_i) = 0$ para cada $i \in \omega$, de manera que $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$. Además, $\rho(x, y) = \sum_{i\in\omega} \frac{1}{2^i} \rho_i(x_i, y_i) = \sum_{i\in\omega} \frac{1}{2^i} \rho_i(y_i, x_i) = \rho(y, x)$. Por otra parte, como $\rho_i$ es métrica para cada $i \in \omega$, y además la serie $\sum_{i\in\omega} \frac{1}{2^i}(\rho_i(x_i, y_i) + \rho_i(y_i, z_i))$ converge, se tiene que:

$$\begin{aligned}\rho(x, z) &= \sum_{i\in\omega} \frac{1}{2^i} \rho_i(x_i, z_i) \\ &\leqslant \sum_{i\in\omega} \frac{1}{2^i} (\rho_i(x_i, y_i) + \rho_i(y_i, z_i))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i\in\omega}(\frac{1}{2^i}\rho_i(x_i, y_i) + \frac{1}{2^i}\rho_i(y_i, z_i)) \\
&= (\sum_{i\in\omega}\frac{1}{2^i}\rho_i(x_i, y_i)) + (\sum_{i\in\omega}\frac{1}{2^i}\rho_i(y_i, z_i)) \\
&= \rho(x, y) + \rho(y, z),
\end{aligned}
$$

y por lo tanto $\rho$ es métrica sobre $X$.

Ahora bien, para $x = (x_i)_{i\in\omega}, y = (y_i)_{i\in\omega} \in X$, tenemos que $\rho_i(x_i, y_i) < \varepsilon$ siempre que $\rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{2^i}$, así, la proyección $p_i$ de $X$ sobre $X_i$ es continua respecto a la topología inducida sobre $X$ por $\rho$. Se sigue entonces, de la definición de la topología de Tychonoff, que la topología inducida por $\rho$ contiene a la del producto sobre $X$.

Veamos ahora que todo conjunto $U \subseteq X$ abierto con respecto a la topología inducida por $\rho$ es también abierto con respecto a la topología producto. Consideremos un punto $x = (x_i)_{i\in\omega} \in U$. Entonces existe una $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq U$. Basta encontrar un entero positivo $k$ y abiertos $U_i \subseteq X_i$ con $i = 0, 1, 2, ..., k$ tales que $x \in \bigcap_{i=1}^{k} p_i^{-1}(U_i) \subseteq B_r(x) \subseteq U$. Sea $k$ un entero positivo tal que $\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2}r$ y para cada $i = 0, 1, 2, ..., k$, sea $U_i = B_{\frac{r}{4}}(x_i) = \{z \in X_i : \rho_i(x_i, z) < \frac{r}{4}\}$. Para cada $y = (y_i)_{i\in\omega} \in \bigcap_{i=1}^{k} p_i^{-1}(U_i)$, tenemos que $\rho_i(x_i, y_i) < \frac{r}{2}$ siempre que $i \leqslant k$, de modo que:

$$
\rho(x, y) = \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2^i}\rho_i(x_i, y_i) + \sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\rho_i(x_i, y_i) < \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r = r,
$$

lo que concluye la prueba. □

**Corolario B.3.6.** *El cubo de Hilbert* $[0, 1]^\omega$ *es un espacio metrizable.*

Este corolario es consecuencia directa de que $[0, 1]$ es métrico y el teorema anterior. □

# Referencias

[A] José Alfredo Amor Montaño. *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias.* Las prensas de ciencias, 2005.

[AL] C. E. Aull, R. Lowen. *Handbook of the history of General Topology, II.* Kluwer Academic Publishers, 1998.

[Ar1] A. V. Arkhangel'skii, V. I. Ponomarev, *Fundamentals of General Topology: problems and exercises.* Reidel, 1984.

[Ar2] – *Structure and classification of topological spaces and cardinal invariants.* Russian Math. Surveys, 33, **6** (1978), p. 33-96.

[BS] J. L. Bell, E. B. Slomson, *Models and ultraproducts; an introduction.* Dover Publications, 2006.

[C] G. Cantor, *Gessamelte Abhandlungen.* Springer. 1932.

[CT] Fidel Casarrubias Segura, Ángel Tamariz Mascarúa. *Elementos de topología general.* 2007.

[Du] James Dugundji. *Topology.* McGraw-Hill Companies, 1966.

[E] Ryszard Engelking. *General Topology.* Heldermann Verlag, 1989.

[GJ] L. Gillman, M. Jerison. *Rings of continuous functions.* University Series in Higher Math., Van Nostrand, Princeton, N., J., 1960.

[H] Fernando Hernández Hernández. *Teoría de Conjuntos; Una Introducción.* Aportaciones Matemáticas, **13**, Sociedad Matemática Mexicana.

[J] Thomas Jech. *Set theory.* Springer-Verlag, 2000.

[K] Kenneth Kunen, *Set theory; an introduction to independence proofs.* Northholland, 1980. p. 48-57.

[Ku1] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. I. PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa.

[Ku2] K. Kuratowski, *Topologie. I*, Segunda Edición, Monografie Matematyezne, Warzawa-wroclaw, 1948.

[M] M. J. Mansfield. *Some generalizations of full normality.* Trans. Amer. Math. Soc. **86** (1957), 489-505.

[MN] K. Morita, J. Nagata. *Topics in General Topology.* North-Holland Mathematical Library. Elsevier Science Publisher B.V., 1989.

[M1] S. Mrówka. *On completely regular spaces.* Fund. Math. **41** (1954), 105-106.

[M2] — *Some set-theoretic constructions in topology*, ibid., **94** (1977), 83-92.

[M3] — *Some Comments on the Author's Example of a Non-$\mathcal{R}$-compact Space*, ibid., **18** (1970), 443-448.

[M4] — *On $E$-compact spaces II*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. XIV **11**(1966), 599.

[M5] — *On universal spaces*, ibid., III **4**(1956), 479-481. MR 19, 669.

[N] J. Nagata. *Modern General Topology.* North-Holland Mathematical Library, 1985.

[RG] U. A. Ramos García, *Algunos cardinales pequeños no numerables y su relación con la topología.* Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2004.

[R] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill Kogakusha, LTD, 3a edición, 1976.

[Ru] Mary Ellen Rudin. *Lectures on set theoretic topology; Conference Board of the Mathematical Sciencies.* Amer. Math. Soc., **23**(1975).

[S] Michael Spivak. *Calculus; Cálculo Infinitesimal*, 2a edición. Reverté, 2004.

[T] A. N. Tychonoff, *Über die topologische Erweiterung von Räumen*, Mathematische Annalen, **102**, (1930), 544-561.

[vD] E. van Douwen, *The integers and topology; Handbook of set-theoretic topology.* K. Kunen y J. E. Vaughan (editores), pp. 111-167, 1984.