



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

PROGRAMA MAESTRIA Y DOCTORADO EN  
INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA

ESTUDIO DE CONTROL DE VIBRACIONES BASADO  
EN PASIVIDAD DEL EL MECANISMO TORA

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA

CAMPO DE CONOCIMIENTO - MECÁNICA APLICADA

P R E S E N T A

MSc Illya Emmanuel Arcos Pérez

TUTOR:

Dr. YU TANG XU

2009





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Ramírez Reivich Alejandro Cuauhtémoc

Secretario: Dr. Santillán Gutiérrez Saúl Daniel

Vocal: Dr. Tang Xu Yu

1er Suplente: Dr. Ascanio Gasca Gabriel

2ndo Suplente: M.I. Acosta Flores Mario

**Lugar o Lugares donde se realizó la Tesis:**

UDETEC, Juriquilla Querétaro

Tutor de Tesis:

Dr. Tang Xu Yu

---

FIRMA

## **Agradecimientos**

A Liliana que ha estado a mi lado durante estos años y ha sido pilar fundamental de mi éxito. A mis padres, hermano y hermana que hicieron el hombre que soy. A mis maestros por lo que me enseñaron en esta maestría. A General Electric por el apoyo que me brindó para el estudio de esta maestría. Igualmente me gustaría agradecer a la Universidad Nacional Autónoma de México, así como al Dr. Yu Tang por haberme apoyado el desarrollo de este trabajo.

# INDICE

<b>INDICE</b>	<b>3</b>
<b>Capítulo 1      Introducción</b>	<b>5</b>
1.1      Motivo	5
1.2      Estado del Arte	6
1.3      Aplicaciones Prácticas	8
1.4      Problema y Objetivos	9
1.5      Contribución del Trabajo de Tesis	10
1.6      Organización del trabajo de tesis	11
<b>Capítulo 2      Preliminar</b>	<b>14</b>
2.1      Modelado Matemático mediante las ecuaciones de Lagrange	14
2.1.1 <i>Bases Teóricas</i>	14
2.2      Modelado Matemático de un péndulo Simple	18
2.3      Sistema Pasivo	23
2.3.1 <i>Sistema</i>	23
2.3.2 <i>Pasividad</i>	24
2.4      Estabilidad Lyapunov	25
2.4.1 <i>Puntos de Equilibrio</i>	25
2.4.2 <i>Estabilidad Asintótica (Teorema de Lyapunov)</i>	27
2.4.3 <i>Teorema de La Salle</i>	27
2.4.4 <i>Observabilidad de Estado Cero</i>	28
2.5      Control de vibraciones Basado en Pasividad	28
2.6      Propiedades de los sistemas mecánicos.	30
<b>Capítulo 3      Modelado Matemático</b>	<b>34</b>
3.1      Descripción del Mecanismo TORA	34
3.2      Generación de las Ecuaciones del Mecanismo TORA	36
3.3      Modelo de Simulink del Mecanismo TORA	40

<b>Capítulo 4</b>	<b>Control de Vibraciones Basado en Pasividad</b>	<b>42</b>
4.1	Propiedades del Mecanismo TORA	42
4.2	Control Con Retroalimentación de Velocidad	43
4.3	Control Con Retroalimentación de Velocidad y Posición	45
4.4	Control Con Retroalimentación de Posición	46
<b>Capítulo 5</b>	<b>Simulación e Interpretación</b>	<b>49</b>
5.1	Análisis del Sistema DVA	49
5.2	Cálculo de los coeficientes de controlador basado en Posición	59
<b>Capítulo 6</b>	<b>Conclusiones y Trabajos Futuros.</b>	<b>63</b>
<b>Bibliografía</b>		<b>65</b>
<b>Anexo A</b>	<b>Tabla de Imágenes</b>	<b>68</b>
<b>Anexo B</b>	<b>Índice de Tablas</b>	<b>70</b>
<b>Anexo C</b>	<b>Índice de Ecuaciones</b>	<b>71</b>

# Capítulo 1 Introducción

## *1.1 Motivo*

El Mecanismo TORA (de las siglas en inglés Translational Oscillator Rotacional Actuator) es un sistema que junta tanto los movimientos longitudinales de un carro como los movimientos rotacionales de un péndulo. Este sistema puede ser utilizado para reducir las vibraciones de una masa que está sufriendo de algún tipo de vibración longitudinal. La inspiración de realizar este estudio viene de un artículo de Bupp y Wan (1995) en el cual comentan que este mecanismo es una simplificación de un mecanismo espacial utilizado para la reducción de vibraciones.

Los intereses principales para el estudio de esta tesis era investigar y comparar los métodos de control que pueden ser utilizados para reducir las vibraciones en el sistema. El estudio se enfocó en el diseño del control basado en pasividad, el cual por medio de un motor que actúa sobre el péndulo reduce el nivel de vibraciones del carro.

Un segundo motivo de la tesis era entender el comportamiento del mecanismo TORA. Se deseaba tratar el sistema mediante el

uso de las ecuaciones de Lagrange en el modelado de sistemas mecánicos no lineales. Al realizar simplificaciones lineales a sistemas mecánicos se pierde parte de la dinámica del sistema. Por este motivo se quiso usar el modelo no lineal para comprender y estudiar cual era el sistema no lineal y su comportamiento.

## ***1.2 Estado del Arte***

Como se sabe, muchos de los sistemas físicos que nos rodean son sistemas vibratorios no lineales. El poder entender estos sistemas y la forma de controlarlos puede llegar a ser útil para la sociedad. Por lo general los sistemas mecánicos siempre son simplificados a sistemas lineales debido a la complejidad de la solución. Como se sabe el estudio del péndulo es uno de los primeros mecanismo no lineal que un ingeniero encuentra en su camino, el cual posee muchas propiedades de sistemas reales.

En la literatura especializada se muestran distintos métodos de control para el mecanismo TORA. Diversos autores basan sus artículos en los estudios de control basado en pasividad. Jankovic y Fontaine et al.(1996) presentan un método basado en pasividad un modelo adimensional del mecanismo. En su



artículo presenta funciones de Lyapunov complejas para implementar.

Alleyne (1998) presenta también un método basado en pasividad, pero utiliza el método de mínima energía potencial para determinar los parámetros de control. Para su estudio Alleyne (1998) sigue utilizando el mismo modelo adimensional de Jankovic y Fontaine (1996).

Bupp et al. (1995) presenta otro controlador del sistema basado en pasividad, adicionalmente también presenta una comprobación experimental del sistema. Hace una comparación entre el método experimental y el método analítico y presenta similitud en los resultados.

Una de las constantes en los trabajos previos es que los sistemas de control por lo general utilizan la velocidad rotacional del péndulo o la velocidad longitudinal de la masa como señal de retroalimentación del sistema de control. Burg y Dawson (1997) menciona en su artículo que por lo general la velocidad es complicada y costosa de medir. De ahí que haga una propuesta de un mecanismo de control basado en pasividad utilizando una señal filtrada de la posición con el fin de sustituir el uso de la velocidad. Esta misma consideración se

utiliza en el presente estudio. Un estudio similar fue propuesto por Khalil (2001) y por Escobar y Ortega et al. (1999). En estos trabajos se presenta un sistema control el cual utiliza funciones de saturación para obtener sistemas robustos de control. Estas mismas funciones son las propuestas en este estudio.

Además de los sistemas de control basados en pasividad mencionados previamente se tienen casos de estudio donde se presentan otros métodos de control. Pavlov, Janssen et al. (2005) presentan una solución basada en datos experimentales. Petres, Baranyi et al. (2007) presentan un estudio basado en el análisis de trayectorias. Tadmor (2001) presentó un método de control basado en disipación y la dinámica del sistema. Existe también el estudio realizado por Hung, Lin et al. (2007) en el cual presenta un método de control basado en la lógica difusa.

### ***1.3 Aplicaciones Prácticas***

Una aplicación podría ser en una mesa horizontal donde se desea soportar algún tipo de equipo sensible. Esta mesa como la DT-6050 construido por Herzan absorbe las vibraciones del

equipo que sea puesto sobre él. El tiempo de respuesta es de un segundo y trabaja a base de neumática.



**Figura 1:1 Mesa Absorbedora de Vibraciones**

El mecanismo de estudio es un mecanismo similar. El mecanismo TORA consta de una mesa horizontal a la cual se le agrega un péndulo para poder absorber las vibraciones longitudinales de esta.

#### ***1.4 Problema y Objetivos***

El problema principal era determinar cómo se podía reducir las vibraciones longitudinales del carro del mecanismo TORA utilizando las fuerzas del péndulo. Para este problema solamente se consideró que el carro tenía un desplazamiento inicial mas no una fuerza excitadora.

Para resolver el problema se tuvo que hacer el planteamiento de las ecuaciones del sistema y estas se tradujeron a un lenguaje de simulación numérica (Simulink). Teniendo esto se

prosiguió a determinar el control a implementar en el sistema.

Se deseaba tener un sistema de control que fuera fácil de implementar. Por este motivo se consideró los sistemas de control basados en pasividad con una señal filtrada simulando la velocidad. Este método mostró ser fácil de implementar dado que solo se requería la posición angular del péndulo para controlar el mecanismo.

### ***1.5 Contribución del Trabajo de Tesis***

Para el estudio presentado en este trabajo de tesis se considera que se tuvieron tres aportaciones principales.

En primer lugar se hizo la recopilación de la información relacionada con el mecanismo TORA. Dentro de la literatura existen muchos artículos relacionados con este mecanismo. Una de las primeras tareas de este trabajo fue la de recopilar la mayor cantidad de artículos relacionados con el mecanismo TORA. Se pudo recopilar cerca de doce artículos relacionados con el mecanismo y sus distintos métodos de control. Para el

caso de esta tesis solamente se consideró el método de control basado en pasividad.

Como segundo punto de la tesis se presenta un método de optimización de parámetros de control basado en la reducción del tiempo mínimo de respuesta. En la literatura estudiada por lo general se buscaba un método de optimización basado en la energía potencial del sistema. En el método propuesto se trata de minimizar el tiempo de respuesta. Este método logró una reducción significativa en el tiempo de respuesta de 17s a 2s. Este método hace una optimización de los parámetros de control analizando la respuesta del sistema y encontrando que conjunto de parámetros son los óptimos basados en un nivel máximo de amplitud.

Una tercera contribución fue el hecho de que se pudo comprobar el modelo matemático mediante la simulación numérica. Un método explícito de solución fue utilizado para resolver el mecanismo. Para este medio se utilizó la herramienta SIMULINK de Matlab.

## ***1.6 Organización del trabajo de tesis***

En la primera sección de la tesis se presentan los conceptos básicos utilizados para el análisis del mecanismo TORA. Primero se presenta brevemente toda la teoría básica de mecánica de Lagrange donde se explica cómo se deben de determinar las ecuaciones. En esa misma sección se expone la teoría de control basado en pasividad, en la cual se basa el sistema de control del mecanismo TORA.

La segunda sección del trabajo presenta el desarrollo de las ecuaciones para el sistema TORA utilizando las ecuaciones de Lagrange. Aquí se hace una presentación de las ecuaciones sin fricción pero sin desprestigiar los términos no lineales.

En una tercera etapa se expone el desarrollo del sistema de control basado en pasividad para el mecanismo TORA. Se presentan tres distintos tipos de control. El primero de ellos solamente toma en cuenta la velocidad del péndulo como señal retroalimentación. Este primer controlador se obtiene suponiendo que el sistema mecánico es pasivo respecto a la relación par-velocidad si se toma como función de almacenamiento la energía total del sistema.

En el segundo control se considera tanto la posición del péndulo como la velocidad del mismo. Esto asegura la reducción de la vibración de manera eficiente.

El tercer control toma en consideración que la velocidad no es una señal fácil de medir. Mediante la medición de la posición y una señal filtrada de la posición podemos estimar la velocidad del péndulo. Este último control es muy sencillo de implementar dado que solo se requiere la posición del péndulo en todo momento.

La cuarta sección de la tesis muestra el proceso de optimización de los sistemas de control. Los tres mecanismos de control son totalmente válidos pero el tercero es el más simple de implementar. Con el fin de determinar las constantes usadas por el sistema se realiza un proceso de optimización del controlador. Para poder lograr esto se propone un nuevo método para determinar las constantes del controlador basado en el tiempo mínimo de respuesta.

En la última parte del capítulo se presentan las conclusiones del trabajo y los trabajos futuros que pueden ser generados a partir del estudio presentado.

## **Capítulo 2 Preliminar**

### ***2.1 Modelado Matemático mediante las ecuaciones de Lagrange***

#### **2.1.1 Bases Teóricas**

Lagrange fue un matemático del siglo XVIII que publicó su libro de dinámica unos cien años después de Newton (1687). La mecánica de Lagrange se puede considerar como una aproximación diferente para determinar las ecuaciones de un sistema físico. Este análisis se basa más que nada en análisis de la energía potencial, cinética y disipada del sistema en estudio. Este método de modelado es distinto al utilizado por Newton dado que las leyes de Newton se basan en los principios de momentum.

Este método de análisis es particularmente útil cuando se tienen varios grados de libertad así como no linealidades en el sistema.

##### **2.1.1.1 Teoría de las ecuaciones de Lagrange**

La ecuación fundamental para el estudio de la mecánica de Lagrange es



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.1)$$

$$L = T - V$$

Donde:

L es el Lagrangiano definido por T-V.

T es la energía cinética del sistema con respecto a los ejes de inercia.

V es la energía potencial del sistema.

n son los grados de libertad del sistema. <sup>1</sup>

$q_i$  es la coordenada generalizada.

$Q_i$  es la fuerza generalizada.

La derivada parcial con respecto a las coordenadas generalizadas debe de realizar suponiendo que las demás coordenadas generalizadas así como el tiempo son fijos. A su vez la derivada con respecto al tiempo se debe de hacer para cada una de las cantidades escalares presentes en la ecuación.

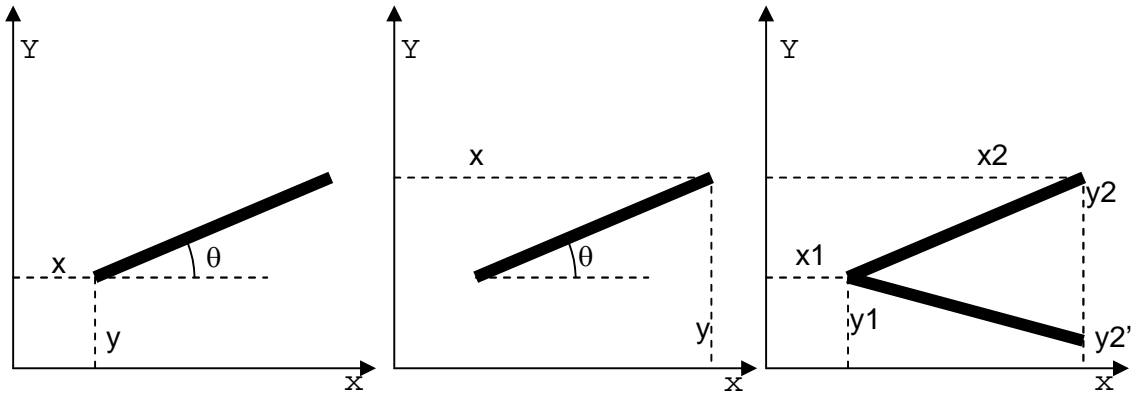
### **Definiciones**

---

<sup>1</sup>En el caso del mecanismo TORA se tienen dos grados de libertad.

Grado de libertad: Los grados de libertad son el número mínimo de parámetros que se requieren para definir en un sistema la posición de cada uno de los miembros del mecanismo. Otra forma de verlo es como el número mínimo de movimientos independientes que tiene el sistema.

Coordenada Generalizada: El número de coordenadas generalizadas corresponde al número de grados de libertad. Cada coordenada es independiente de las demás pero en su conjunto deben de ser suficientes para determinar la posición de cada miembro del mecanismo. Puede existir más de un conjunto de coordenadas generalizadas, pero por lo general existe un grupo de coordenadas que simplifican el análisis. En la imagen que se muestra a continuación se pueden deducir más de un conjunto de coordenadas generalizadas para la barra. Los primeros dos casos presentan un estado único del cuerpo. La coordenada de uno de sus extremos y el ángulo de inclinación definen las coordenadas generalizadas. En cambio el tercer grupo puede tener más de una posible configuración. La coordenada  $X_2$  puede tener distintos valores de  $Y_2$ . Esto no es una situación deseada, aunque en ocasiones no puede ser evitada.



**Figura 2:1 Coordenadas Generalizadas**

Existen casos en los cuales se tienen más coordenadas generalizadas  $M$  que grados de libertad  $N$ . La diferencia  $N-M$  es el número de ecuaciones de restricción que deben de haber entre las coordenadas generalizadas. Por lo general las ecuaciones de restricciones se pueden escribir en términos de las coordenadas generalizadas y del tiempo.

$$f(q_1, q_2, q_3 \dots q_m, t) = 0 \quad (2.2)$$

En el caso del mecanismo TORA se tienen dos coordenadas generalizadas. La primera es la posición longitudinal de la mesa y la segunda es la posición angular del péndulo.

Fuerza Generalizada: Todas las fuerzas no conservativas que actúan en el sistema generan trabajo. Ahora bien, ese trabajo puede ser expresado en términos de las coordenadas naturales.

Se calcula como la derivada con respecto al tiempo del trabajo virtual que generan todas las fuerzas externas que actúan en el sistema.

Fuerza Disipativa: Son funciones de disipación de energía que se pueden incluir en el análisis para hacer una mejor aproximación en el modelo. En el caso del mecanismo TORA ni la fricción ni el amortiguamiento viscoso serán considerados en el análisis.

## ***2.2 Modelado Matemático de un péndulo Simple***

El péndulo fue el primer sistema vibratorio analizado en la ciencia. Pero desde su estudio siempre se ha considerado como si fuera un sistema lineal. En realidad el péndulo simple es un sistema no lineal, el cual no tiene solución exacta a su ecuación de movimiento.

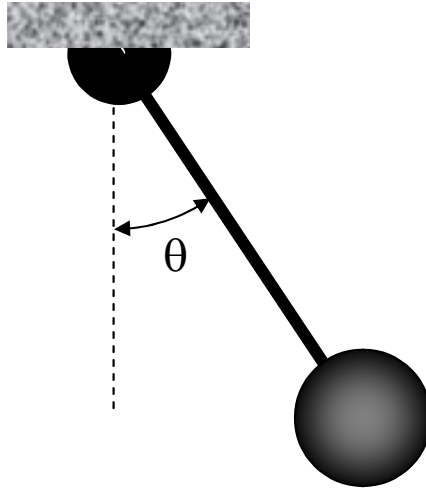


Figura 2:2 Péndulo Simple

La ecuación general del péndulo en su forma lineal y no lineal es:

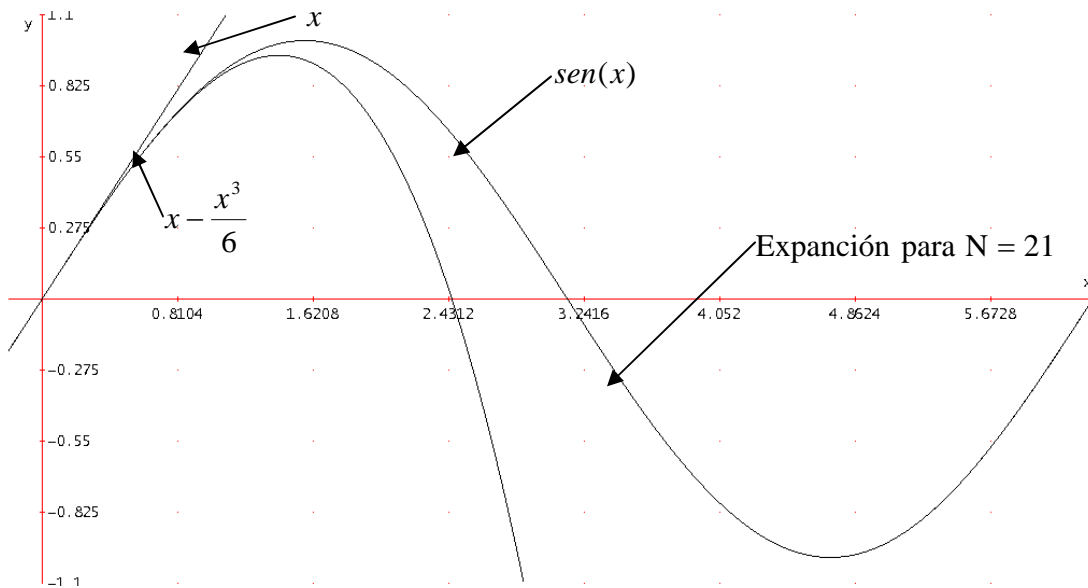
$$\begin{aligned}\ddot{\theta} + \omega^2 \text{sen}(\theta) &= 0 \\ \ddot{\theta} + \omega^2 \theta &= 0\end{aligned}\quad (2.3)$$

La aproximación no lineal se logra suponiendo que el ángulo  $\theta$  va a ser muy pequeño durante el análisis por lo cual la función  $\text{sen}(\theta)$  puede sustituida por la expansión en serie de Taylor en donde se omiten todos los términos no lineales. Esta aseveración es prácticamente cierta para ángulos menores a 14 grados donde se generan errores menores al 1%. En el caso de ángulos mayores el error en las respuestas crece considerablemente. Cuando se incluye el primer término no

lineal a la ecuación esta se conoce como la ecuación general de Duffin.

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \omega^2 \text{sen}(\theta) &= 0 \\ \ddot{\theta} + \omega^2 \theta + \alpha \omega^2 \theta^3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

La ecuación de Duffin se considera una mejor aproximación pero solo es funcional durante los primeros 58 grados que es donde se genera un error del 1% en la aproximación del ángulo.



**Figura 2:3 Comparación de las diferentes aproximaciones de la función sen (x)**

Como se puede ver en la tabla a medida que se van aumentando los términos de la serie de Taylor el error en la

aproximación es menor. Para poder considerar los 360 grados se requiere un polinomio de 21 términos<sup>2</sup>.

<b>Terminos de Serie de Taylor</b>	<b>Angulo Grados</b>
1	13.99
3	57.74
5	100.67
7	137.23
9	164.72
11	177.82
13	272.19
15	310.22
17	339.12
19	355.40
21	443.96

Tabla 2:1 Número de términos de la serie de Taylor de la función seno y el ángulo en grados para el cual el error de estimación es menor al 1%

---

<sup>2</sup> En el caso de la serie de Taylor de senos se debe de recordar que todos los términos pares son cero.

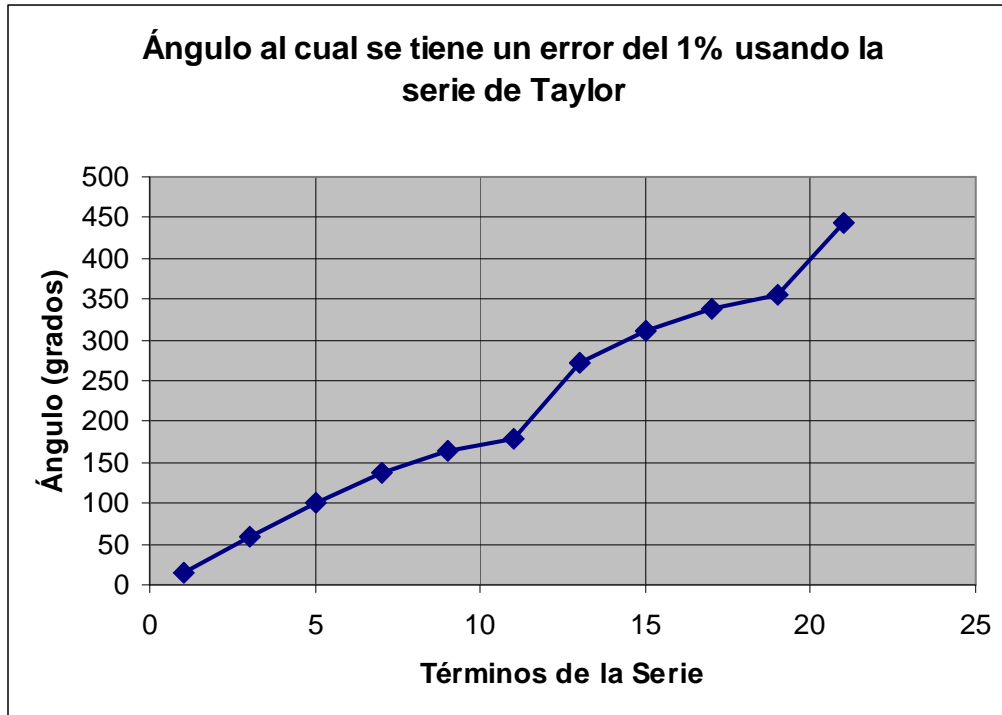


Figura 2:4 Error en el calculo de la función  $\text{sen}(x)$  en usando series de Taylor.

Mediante el uso de Simulink se modelaron ambos sistemas y se hace una comparación de las curvas de respuesta para distintas condiciones iniciales de ángulo.



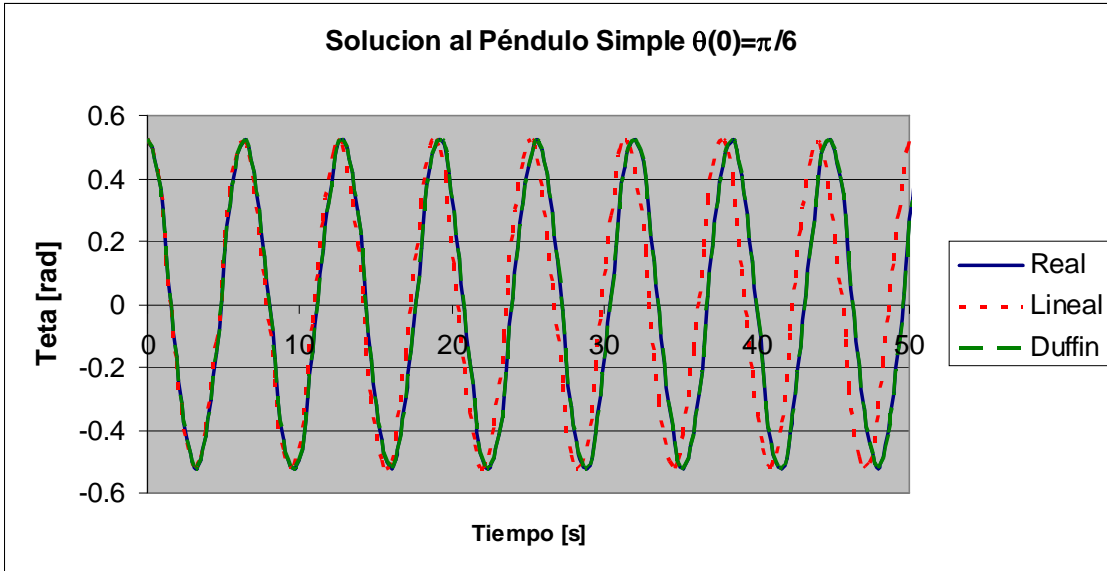


Figura 2:5 Respuesta de los sistemas de simulación del péndulo usando teta inicial como treinta grados.

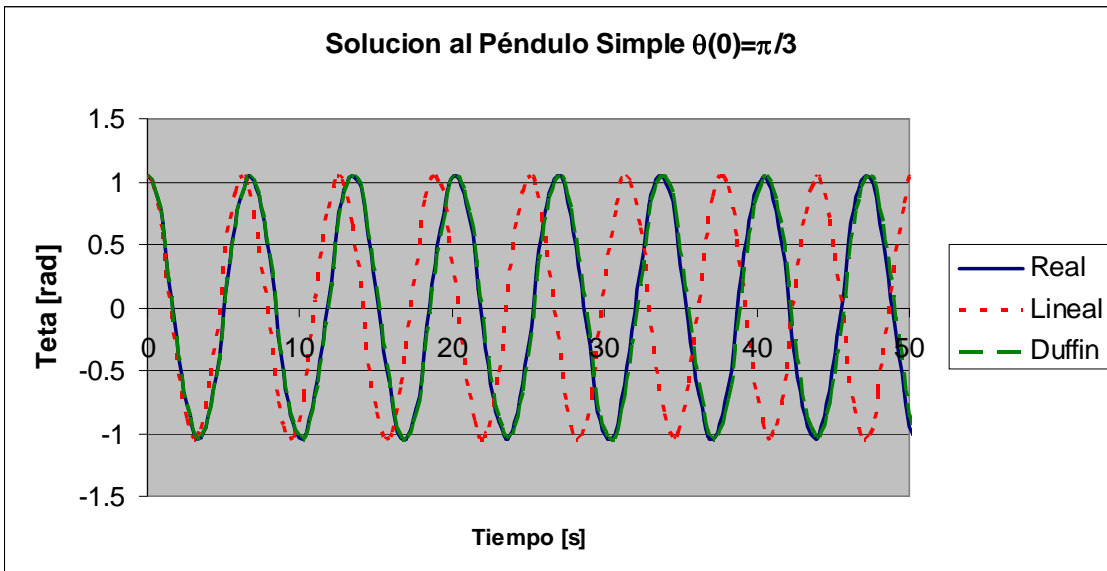


Figura 2:6 Respuesta de los sistemas de simulación del péndulo usando teta inicial como sesenta grados.

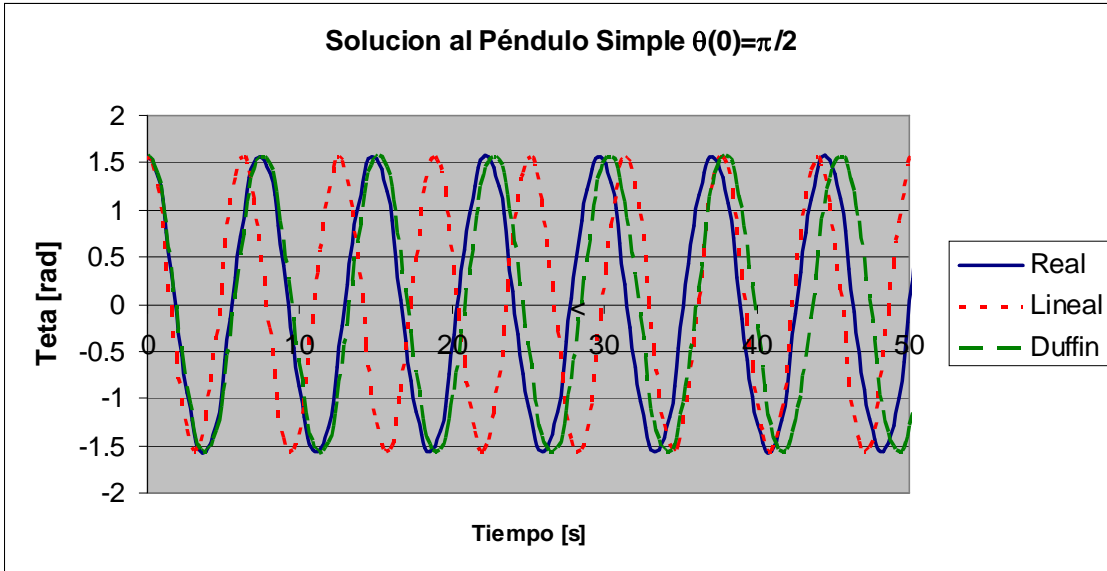


Figura 2:7 Respuesta de los sistemas de simulación del péndulo usando teta inicial como noventa grados.

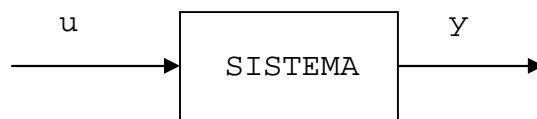
Como se puede ver en las graficas anteriores la aproximación lineal se desfasa rápidamente de la ecuación real del sistema desde los treinta grado. En el caso de la ecuación de Duffin se puede ver esta separación más claramente a partir de los noventa grados.

## 2.3 Sistema Pasivo

### 2.3.1 Sistema mecánico

La dinámica de un sistema mecánico se puede representar como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (2.5)$$



**Figura 2:8 Representación de un Sistema Mecánico**

En el sistema  $u$  es la entrada al sistema,  $y$  es la salida del sistema y  $x$  es el estado.

### **2.3.2 Pasividad**

Un sistema se puede considerar pasivo si se puede encontrar una función escalar, la cual es llamada función de almacenamiento de energía, que cumple con los siguientes puntos.

$$V(x) \geq 0, \forall x \quad (2.6)$$

$$\dot{V}(x) \leq u^T y \quad (2.7)$$

La ecuación 2.6 nos dice que la función de almacenamiento de energía debe de ser positiva para todo valor de  $x$ . Además de esto, se puede ver que el cambio de la energía  $\dot{V}(x)$  debe de ser menor o igual a la potencia suministrada  $u^T y$ .

Para un sistema mecánico la función que expresa la energía total del sistema en todo momento será positiva o cero por lo que puede ser considerada como función de almacenamiento de energía.

## 2.4 Estabilidad Lyapunov

### 2.4.1 Puntos de Equilibrio

Consideremos el sistema formado por la ecuación 2.5. Se considera que un sistema está en equilibrio cuando si cumple con:

$$f(x,0) = 0 \quad (2.8)$$

Es decir, que para una entrada cero en el sistema se tiene  $\dot{x} = 0$ . Existen tres distintos tipos de equilibrio.

El equilibrio Estable se presenta no importando la excitación que tenga el sistema. En la figura 2.9 podemos ver una esfera que está en equilibrio.  $x=0$  es estable si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) \text{ tal que } \|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$$

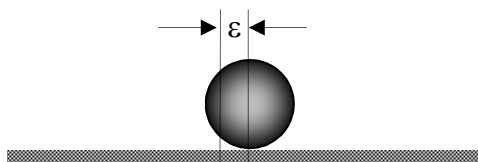
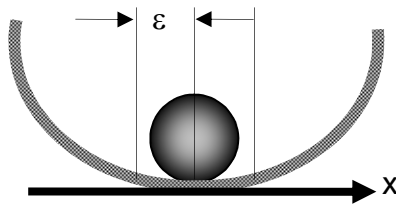


Figura 2:9 Equilibrio Estable

El equilibrio Asintóticamente estable se presenta cuando el sistema al ser excitado trata de regresar a su punto de equilibrio de manera asintótica. En la Figura 2.10 se puede

ver la esfera sobre una superficie curva. Si esta esfera excitada con un desplazamiento inicial se puede visualizar como la gravedad va a hacer que la esfera regrese al punto más bajo de la superficie.  $x=0$  es asintóticamente estable si:

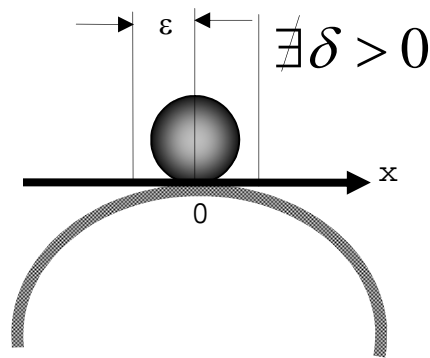
$x=0$  es estable y  $x \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$



**Figura 2:10 Equilibrio Asintóticamente Estable**

El equilibrio Inestable, se presenta cuando el sistema al ser excitado pierde equilibrio y no regresa al punto de equilibrio. La Figura 2.11 muestra nuevamente a la esfera pero ahora al ser excitada esta pierde por completo el equilibrio y su estabilidad.  $x=0$  es inestable si:

$x=0$  no es estable



**Figura 2:11 Equilibrio Inestable**

Una vez dadas las definiciones de estabilidad de puntos de equilibrio se necesita condiciones que determinen la estabilidad de los puntos de equilibrio.

#### **2.4.2 Estabilidad Asintótica (Teorema de Lyapunov)**

Considere la ecuación de movimiento 2.5

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

Se supone que  $f(0,0)=0$  entonces para  $x=0$  es un punto de equilibrio. El teorema de Lyapunov, que a continuación se enuncia, da una condición suficiente para garantizar que sea asintóticamente estable.

Se dice que un sistema es asintóticamente estable estado cero si existe una función de almacenamiento continuamente diferenciable que cumpla con:

$$\begin{aligned} V(x) &> 0 \\ \forall x &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Tal que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &< 0 \\ \forall x &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

### 2.4.3 Teorema de La Salle

En el teorema de Lyapunov se requiere que  $\dot{V} < 0$  para poder garantizar la estabilidad asintótica. En el caso de  $\dot{V} \leq 0$  el teorema de La Salle nos proporciona las condiciones que garantizan la estabilidad asintótica.

El estado cero del sistema es asintóticamente estable si existe una función de almacenamiento continuamente diferenciable, y

$$\begin{aligned} V(x) &> 0 \\ \forall x &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Tal que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq 0 \\ \forall x &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Si  $\dot{V} \equiv 0$ , implica que  $x \equiv 0$

### 2.4.4 Observabilidad de Estado Cero

Retomando las ecuaciones del sistema mecánico

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,u) \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

Se dice que el estado cero del sistema es observable si  $y=0$   
 $\Rightarrow x=0$ .

## ***2.5 Control de vibraciones basado en pasividad***

Uno de los objetivos del sistema de control es el hacer que la salida del sistema tienda a cero asintóticamente. Para lograr este objetivo, considere las ecuaciones(2.5).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,u) \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

donde  $x$  representa el error de la salida con respecto a una referencia dada. La metodología de control basada en pasividad consiste en encontrar una función de almacenamiento continuamente diferenciable

$$\begin{aligned}V(x) &> 0 \\ \forall x &\neq 0\end{aligned}$$

Tal que

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &\leq u \cdot y \\ \forall x &\neq 0\end{aligned}$$



Es decir, el sistema es pasivo de  $u$  a  $y$ . Para este caso, si se diseña la entrada  $u$  como

$$u = -\varphi(y) \quad (2.13)$$

donde la función  $\varphi(\cdot)$  es una función continua de primer y tercer cuadrante es decir  $\varphi(y)y > 0, y \neq 0$ .

Por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -y\varphi(y) > 0 \\ y &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

De acuerdo con el Teorema de Lyapunov  $x=0$  es asintóticamente estable.

## ***2.6 Propiedades de los sistemas mecánicos***

Un sistema mecánico como el TORA que se considera en la tesis se puede expresar de la siguiente forma.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) = u \quad (2.15)$$

$M$  es una matriz de masa la cual debe de ser positiva definida.

$C$  es una matriz que define la fuerza centrífuga y de Coriolis.

$G$  es una matriz de gravedades y donde entraría la rigidez del sistema.

$F$  es la matriz de fuerzas disipativas como la fricción y el amortiguamiento.

$u$  es una fuerza generalizada del sistema.

El sistema mecánico expresado por la ecuación 2.15 cumple las siguientes tres propiedades:

- 1- La Matriz de masa es positiva definida:  $M > 0$
- 2-  $M - 2C$  es anti simétrica.
- 3- El sistema es pasivo de  $u$  a  $\dot{q}$ .

Esta tercera propiedad se puede demostrar a continuación.

Demostración

Definamos una función de almacenamiento de energía positiva definida para todo  $(\dot{q}, q) \neq 0$

$$V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} + P(q) \quad (2.16)$$

Esta ecuación representa la suma de la energía potencial del sistema más la energía cinética.

Derivando la ecuación 2.16

$$\dot{V} = \frac{1}{2}(\dot{q}^T \dot{M} \dot{q} + \dot{q}^T \dot{M} \dot{q} + \dot{q}^T M \ddot{q}) + \frac{\partial P}{\partial q} \dot{q} \quad (2.17)$$

Se debe de hacer notar que el primer y el tercer término de la ecuación son exactamente iguales. Por lo tanto, simplificando la ecuación 2.17.

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M} \dot{q} + \dot{q}^T M \ddot{q} + \frac{\partial P}{\partial q} \dot{q} \quad (2.18)$$

Sustituyendo en el primer término la ecuación general de los sistemas mecánicos obtenemos

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M} \dot{q} + \dot{q}^T (u - C \dot{q} - G - F) + \frac{\partial P}{\partial q} \dot{q} \quad (2.19)$$

Reescribiendo la ecuación

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M} \dot{q} + \dot{q}^T u - \dot{q}^T C \dot{q} - \dot{q}^T G - \dot{q}^T F + \frac{\partial P}{\partial q} \dot{q} \quad (2.20)$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{q}^T (\dot{M} - 2C) \dot{q} + \dot{q}^T u - \dot{q}^T F + \frac{\partial P}{\partial q} \dot{q} - \dot{q}^T G \quad (2.21)$$

De la segunda propiedad de los sistemas mecánicos podemos eliminar el primer término. Dado que una matriz anti-simétrica pre- y post-multiplicada por un mismo vector es

cero. También se puede ver que los últimos dos términos son iguales. Esto se deduce del cálculo de las ecuaciones mediante el método de Lagrange, por lo que la ecuación se puede reescribir como:

$$\dot{V} = \dot{q}^T u - \dot{q}^T F \quad (2.22)$$

Dado que  $F$  es una matriz de fuerzas de fricción y se considera una fuerza disipativa, por lo que el resultado sería un valor negativo que al ser multiplicado por el negativo antepuesto se convierte en un valor positivo.

En el caso del primer término tenemos que el producto de la fuerza por la velocidad es la potencia del sistema, la cual siempre será positiva.

Por lo tanto la derivada de nuestra función de almacenamiento será igual o menor que la potencia del sistema. Por lo tanto, el sistema es pasivo respecto a la velocidad.

## Capítulo 3 Modelado Matemático

### 3.1 Descripción del Mecanismo TORA

El mecanismo TORA (Translational Oscillador Rotacional Actuator) consta de una base horizontal la cual corre libremente de derecha a izquierda. A esta base se le incluye un péndulo simple.

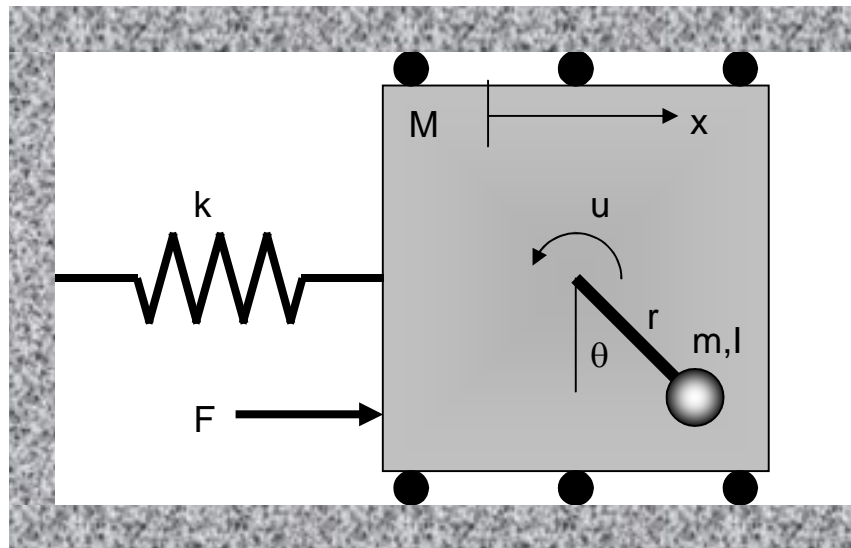


Figura 3:1 Vista Superior del Mecanismo Tora

Parámetros y Variables del sistema	
M = Masa de la mesa	m = Masa del péndulo
I = Momento de inercia centroidal del péndulo	r = Excentricidad del centro del gravedad del péndulo
F = Fuerza de Excitación	u = Par de Motor
$\theta$ = Posición Angular del	x = Posición longitudinal del

péndulo	carro
---------	-------

**Tabla 3:1 Parámetros y Variables del Mecanismo TORA**

Debido a que el péndulo está posicionado de manera horizontal los efectos gravitacionales no se tomaron en cuenta en este modelo. El mecanismo se une a un marco de referencia fijo mediante un resorte.

La idea central del mecanismo es que mediante el uso del péndulo se pueden atenuar las vibraciones translacionales del carro. Cuando el carro es excitado por una fuerza  $F$  o un desplazamiento inicial el péndulo debe de reaccionar contrario a esta condición atenuando las vibraciones del carro.

En este trabajo solamente se considerara una fuerza de excitación impulsiva. Es decir que el análisis se hará suponiendo un desplazamiento inicial en el sistema.

Para el análisis del mecanismo se consideró el problema tipo propuesto por Escobar, Ortega et al. (1999). En el cual utilizan los siguientes parámetros para el sistema.

Propiedad	Valor
-----------	-------

M	1.3608 kg
m	0.096 kg
I	0.0002175 kg/m <sup>2</sup>
r	0.0592 m
k	186.3 N/m

**Tabla 3:2 Parámetros del para el estudio de simulación del mecanismo TORA**

Estos mismos valores fueron usados en este estudio con el fin de poder hacer comparaciones de los métodos de atenuación de vibraciones.

### ***3.2 Generación de las Ecuaciones del Mecanismo TORA***

Para el desarrollo del mecanismo se utilizará el método de análisis de Lagrange dado que se tiene más de un grado de libertad. Se hacen las siguientes suposiciones para la generación de las ecuaciones con la finalidad de simplificar el análisis:

1. El mecanismo trabaja de manera horizontal, por lo cual no hay efectos de gravedad analizados.
2. La masa y por lo tanto la inercia del resorte son despreciables.

3. La fricción entre las paredes es muy baja y no presenta amortiguamiento.
4. El resorte se considera ideal por lo que no genera amortiguamiento.
5. Los desplazamientos del resorte son pequeños (Resorte de Hooke).
6. El aire no genera amortiguamiento en la pieza.
7. El mecanismo no se deforma.

Como se puede ver en la imagen 3.1 el mecanismo TORA tiene dos grados de libertad. El primer grado de libertad es el movimiento longitudinal de carro, y el segundo es el movimiento rotacional del péndulo.

La energía potencial del resorte es:

$$V = \frac{1}{2}kx^2 \quad (3.1)$$

La energía cinética de la caja y el péndulo es:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x} + r\dot{\theta}\cos(\theta))^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta}\sin(\theta))^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 \quad (3.2)$$

Simplificando 3.2

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mr\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 \quad (3.3)$$



El Lagrangiano es igual a

$$L = T - V \quad (3.4)$$

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mr\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad (3.5)$$

Se sabe que las ecuaciones de movimiento se obtienen mediante la siguiente ecuación

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i \quad (3.6)$$

Para la primera coordenada generalizada  $\mathbf{x}_1$  la cual representa el desplazamiento longitudinal  $\mathbf{x}$  del carro:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = M\dot{x} + m\dot{x} + mr\dot{\theta}\cos(\theta) \quad (3.7)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = M\ddot{x} + m\ddot{x} + mr\ddot{\theta}\cos(\theta) - mr\dot{\theta}^2\sin(\theta) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -kx \quad (3.9)$$

$$M\ddot{x} + m\ddot{x} + mr\ddot{\theta}\cos(\theta) - mr\dot{\theta}^2\sin(\theta) + kx = F(t) \quad (3.10)$$

Para la segunda coordenada generalizada  $\mathbf{x}_2$  la cual representa el desplazamiento angular  $\theta$  del péndulo:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = mr\dot{x}\cos(\theta) + mr^2\dot{\theta} + I_G\dot{\theta} \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = mr\ddot{x}\cos(\theta) + mr^2\ddot{\theta} + I_G\ddot{\theta} - mr\dot{x}\dot{\theta}\sin(\theta) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -mr\dot{x}\dot{\theta}\sin(\theta) \quad (3.13)$$

$$mr^2\ddot{\theta} + I_G\ddot{\theta} + mr\ddot{x}\cos(\theta) = M(t) \quad (3.14)$$

Usando el teorema de ejes paralelos

$$I_o = I_G + mr^2 \quad (3.15)$$

$$I_o\ddot{\theta} + mr\ddot{x}\cos(\theta) = M(t) \quad (3.16)$$

Las ecuaciones 3.10 y 3.16 son las dos ecuaciones de movimiento.

Despejando la aceleración angular de la ecuación 3.16 obtenemos:

$$\ddot{\theta} = \frac{M(t)}{I_o} - \frac{mr}{I_o}\ddot{x}\cos(\theta) \quad (3.17)$$

Sustituyendo en la ecuación 3.10

$$(M + m)x + \frac{mr}{I_o}M(t)\cos(\theta) - \frac{m^2r^2}{I_o}\ddot{x}\cos(\theta)^2 - mr\dot{\theta}^2\sin(\theta) + kx = F(t) \quad (3.18)$$

Dividiendo entre M+m y despejando la aceleración lineal

$$\ddot{x} = \frac{\frac{F(t)}{M+m} + \frac{mr}{M+m} \theta^2 \text{sen}(\theta) - \frac{k}{M+m} x - \frac{mr}{I_o(M+m)} M(t) \text{cos}(\theta)}{1 - \frac{m^2 r^2}{I_o(M+m)} \text{cos}(\theta)} \quad (3.19)$$

### **3.3 Modelo de Simulink del Mecanismo TORA**

Las ecuaciones 3.19 y 3.17 mostradas en la sección anterior fueron modeladas en Simulink<sup>1</sup> de Matlab. La imagen 3.2 muestra el sistema general del mecanismo TORA, mediante el uso de subsistemas se incluyó las ecuaciones de movimiento. Como se comento previamente las ecuaciones fueron despejadas para poder ser incluidas en el simulador.

La segunda imagen muestra la ecuación 3.19 la cual está relacionada con el movimiento de translación del carro. Esta ecuación es la que se obtuvo de la coordenada generalizada X.

La tercera imagen representa la ecuación 3.17 del sistema, es la que está relacionada con el movimiento rotacional del péndulo obtenida de la segunda coordenada generalizada.

---

<sup>1</sup> Simulink: Simulador de sistemas físicos mediante diagramas de bloque

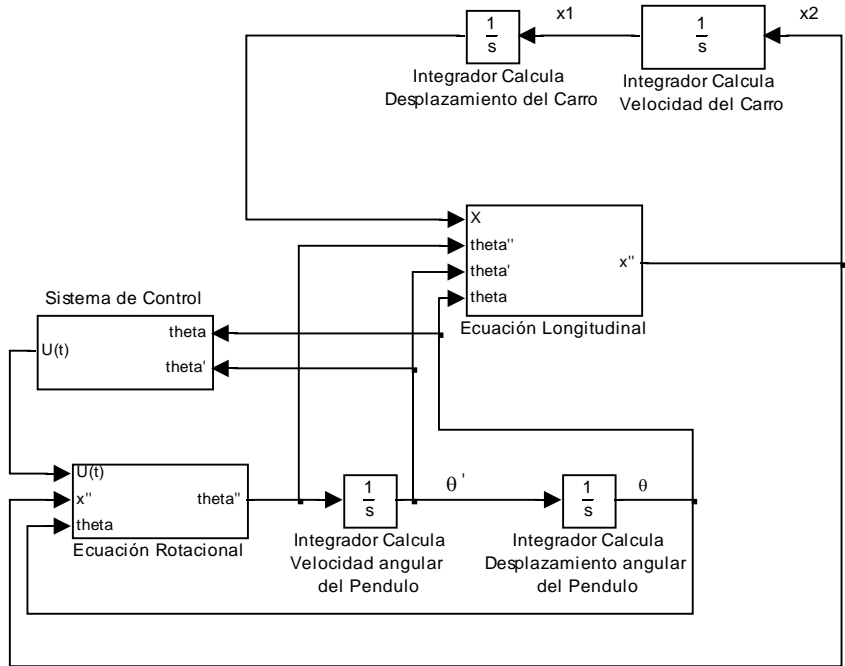


Figura 3:2 Modelos de Simulink de las ecuaciones del mecanismo TORA

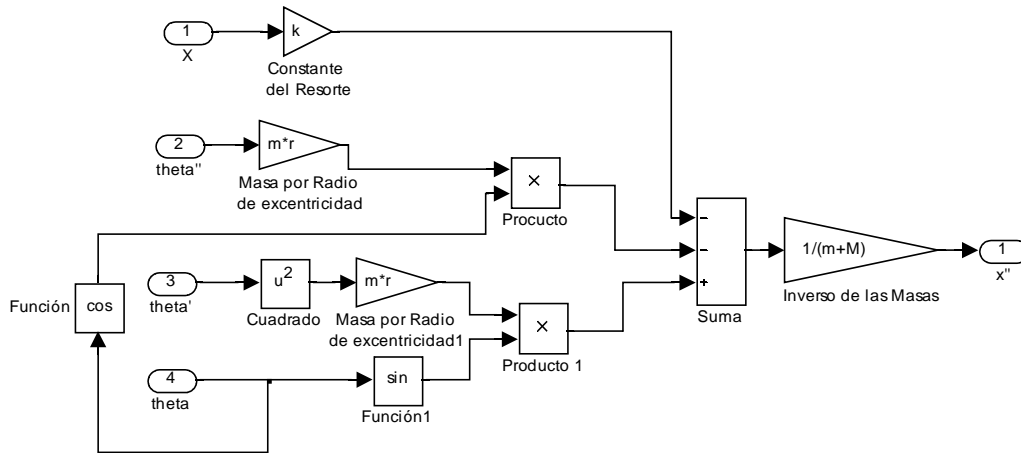


Figura 3:3 Ecuación Transnacional del Mecanismo Tora

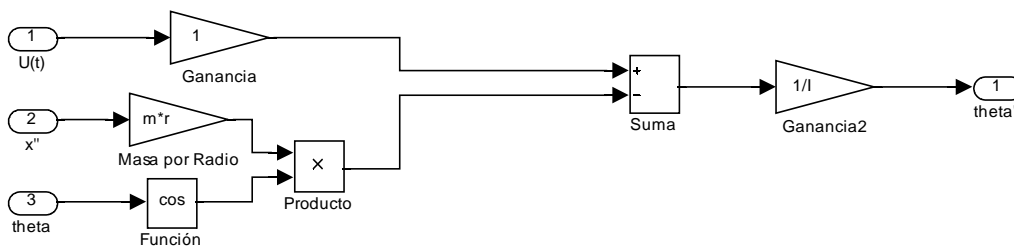


Figura 3:4 Ecuación Rotacional del Mecanismo Tora

# Capítulo 4 Control de Vibraciones Basado en Pasividad

## 4.1 Propiedades del Mecanismo TORA

Tal y como se había mostrado en capítulos anteriores las ecuaciones para el mecanismo TORA sin fricción son:

$$\begin{bmatrix} M+m & m \cdot e \cdot \cos(\theta) \\ m \cdot e \cdot \cos(\theta) & I_o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -m \cdot e \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Se mostrará cómo las propiedades de los sistemas descritas en el capítulo 2 se aplican las ecuaciones del mecanismo con el fin de verificar su resultado.

1ra Propiedad: La matriz de Masa es positiva definida:

Dado que  $M+m > 0$  y

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc} M+m & m \cdot r \cdot \cos(\theta) \\ m \cdot r \cdot \cos(\theta) & mr^2 + I_G \end{array} \right] &= (M+m)(mr^2 + I_G) - m^2 \cdot r^2 \cdot \cos^2(\theta) \\ &= M \cdot I_G + M \cdot m + m \cdot I_G + m^2 \cdot r^2 (1 - \cos^2(\theta)) > 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dado que el  $\cos(\theta)$  no es mayor que uno, el determinante de la matriz de masa es positivo en todo momento.

2da Propiedad:  $dM/dt - 2C$  es anti-simétrica.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} M+m & m \cdot e \cdot \cos(\theta) \\ m \cdot e \cdot \cos(\theta) & I_o \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & -m \cdot e \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m l \sin(\theta) \\ -m l \sin(\theta) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Se puede ver que el resultado de la operación es anti-simétrica.

#### **4.2 Control Con Retroalimentación de Velocidad**

El sistema es pasivo de la entrada de fuerza  $\mathbf{u}$  a la salida de velocidad  $\dot{\theta}$  tomando como función de almacenamiento la energía total del sistema (3ra Propiedad). Como se mostró anteriormente la energía total del sistema en todo momento está dado por:

$$V = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(I_G + mr^2)\dot{\theta}^2 + mr\dot{x}\theta \cos(\theta) + \frac{1}{2}kx^2 \quad (4.4)$$

Como se puede ver esta no es una función Lyapunov candidata dado que no importando que valor de de ángulo  $\theta$  se tome la función puede llegar a ser cero si la velocidad angular es cero (esto se puede ver en el tercer término). Sin embargo, sí es una función de almacenamiento de energía. Como se demostró previamente esta función satisface lo siguiente:

$$\dot{V} \leq u\dot{\theta} \quad (4.5)$$

Para poder hacer la función de almacenamiento una función Lyapunov candidata se propone

$$V = V_0 + \frac{1}{2}k_1\theta^2 > 0 \quad (4.6)$$

$$\forall (\theta, \dot{\theta}) \neq 0$$

Esta función suma a la función de almacenamiento un término adicional que genera en el sistema el estado cero. Físicamente, se puede ver como si se agregara un resorte de torsión al péndulo.

Ahora, se usará esta función Lyapunov candidata para obtener la ley de control de vibraciones de acuerdo con el método de control basado en pasividad.

Al derivar la función de almacenamiento obtenemos

$$\dot{V} \leq u\dot{\theta} + k_1\theta\dot{\theta} = (u + k_1\theta)\dot{\theta} \quad (4.7)$$

Definiendo  $\phi$  como una función del primer y tercer cuadrantes

$$u + k_1\theta = -\phi(\dot{\theta}) \quad (4.8)$$

$$u = -\phi(\dot{\theta}) - k_1\theta \quad (4.9)$$

$$\dot{V} \leq \phi(\dot{\theta})\dot{\theta} \leq 0 \quad (4.10)$$

$$\dot{V} \leq -k_2\dot{\theta}^2 \quad (4.11)$$

$$u + k_1\theta = -k_2\dot{\theta} \quad (4.12)$$

$$u = -k_1\theta - k_2\dot{\theta} \quad (4.13)$$

De aquí podemos ver la observabilidad de estado cero, cuando  $\dot{\theta} \equiv 0 \Rightarrow \theta \equiv 0$ . De esto último vemos que de acuerdo con Teorema La Salle el sistema es asintóticamente estable.

Por lo tanto, como se ve este sistema de control es equivalente a agregar un resorte de torsión al igual que un amortiguado rotativo. El problema con este sistema de control es que si el par del motor es pequeño no se puede controlar el sistema dado que las constantes hacen que el sistema crezca sin control lo que provocaría la quema del motor.

### **4.3 Control Con Retroalimentación de Velocidad y Posición**

Para poder mejorar este sistema de control se propone la siguiente función Lyapunov candidata con el fin de evitar la saturación del sistema.

$$V = V_0 + \int_0^\theta \varphi_1(\sigma) d\sigma \quad (4.14)$$

Aquí la función  $\varphi_1$  es de primer y tercer cuadrantes.

Derivando la función Lyapunov Obtenemos:

$$\dot{V} = \dot{\theta}(\varphi_1(\theta) + u) \quad (4.15)$$

De acuerdo con lo visto anteriormente

$$u + \varphi_1(\theta) = -\varphi_2(\dot{\theta}) \quad (4.16)$$



$$u = -\varphi_1(\theta) - \varphi_2(\dot{\theta}) \quad (4.17)$$

$$\dot{V} = -\varphi_2(\dot{\theta})\dot{\theta} \quad (4.18)$$

Las funciones  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son continuas y de primer y tercer cuadrantes por lo que se puede escoger cualquiera según convenga. Una función podría ser la función saturación, la cual nos permite topar el par máximo al par del motor que tengamos para la aplicación.

El problema con este sistema es que la velocidad de rotación es complicada de medir por lo que se desea un controlador que solo requiera de la posición angular del péndulo.

#### ***4.4 Control Con Retroalimentación de Posición***

Burg y Dawson (1997) mencionan en su artículo que por lo general la velocidad es complicada y costosa de medir. Por este motivo se busca eliminar esta medición y se pretende sustituir mediante una señal filtrada de la posición del péndulo. De esta forma solo se tendrá que medir la posición y esto eliminaría una posibilidad de error en el sistema.

Para este tercer sistema se propone:

$$V = V_0 + \int_0^\theta \varphi_1(\sigma) d\sigma + \int_0^z \frac{1}{b} \varphi_2(\sigma) d\sigma \quad (4.19)$$

Donde  $z$  es una nueva variable de estado la cual llamaremos la estimación de la velocidad. Derivando la función Lyapunov candidata obtenemos:

$$\dot{V} = \theta(\varphi_1(\theta) + u) + \frac{1}{b} \varphi_2(z) \dot{z} \quad (4.20)$$

Dado que  $z$  es una nueva variable de estado también tiene una velocidad asociada. Se propone

$$\dot{z} = -az + b\theta \quad (4.21)$$

Sustituyendo en la derivada de la función de almacenamiento

$$\dot{V} = \theta(\varphi_1(\theta) + u) + \frac{1}{b} \varphi_2(z) (-az + b\theta) \quad (4.22)$$

$$\dot{V} = \varphi_1(\theta)\theta + u\theta - \frac{a}{b} z\varphi_2(z) + \theta\varphi_2(z) \quad (4.23)$$

$$\dot{V} = (u + \varphi_1(\theta) + \varphi_2(z))\theta - \frac{a}{b} z\varphi_2(z) \quad (4.24)$$

si

$$u = -\varphi_1(\theta) - \varphi_2(z) \quad (4.25)$$

$$\dot{V} = -\frac{a}{b} z\varphi_2(z) \quad (4.26)$$

Se puede ver que si  $z$  es cero entonces la velocidad angular es cero y por ende todas las demás variables de estado son cero. Nuevamente las funciones  $\varphi$  son continuas y de primer y

tercer cuadrantes, de las cuales se puede escoger la función saturación.

Ahora bien para poder implementar se toma la ecuación

$$\dot{z} = -az + b\dot{\theta} \quad (4.27)$$

$$\dot{z} - b\dot{\theta} = -az \quad (4.28)$$

$$(z - b\theta)' = -az + \frac{b}{a}\dot{\theta} - \frac{b}{a}\dot{\theta} \quad (4.29)$$

$$(z - b\theta)' = -a(z - b\theta) - \frac{b}{a}\dot{\theta} \quad (4.30)$$

si

$$v = z - b\theta \quad (4.31)$$

$$\dot{v} = -av - \frac{b}{a}\dot{\theta} \quad (4.32)$$

$$z = b\theta + v \quad (4.33)$$

La penúltima ecuación es una ecuación diferencial, la cual se puede resolver para cada caso de theta. Al encontrar el valor de v para el tiempo indicado se sustituye en la última ecuación y se obtiene el valor de z.

Este controlador es muy fácil de implementar dado que solo requiere la medición de la velocidad angular.

## Capítulo 5 Simulación e Interpretación

### 5.1 Análisis del Sistema DVA

En el capítulo Anterior se mostró que un control del mecanismo TORA era equivalente a agregar de manera activa un resorte de torsión y un amortiguador torsional al sistema con el fin de evitar su movimiento longitudinal. Existe una analogía de un sistema lineal conocida como Absorbedor Dinámico de Vibraciones o DVA por sus siglas en inglés propuesto por Alleyne (1998).

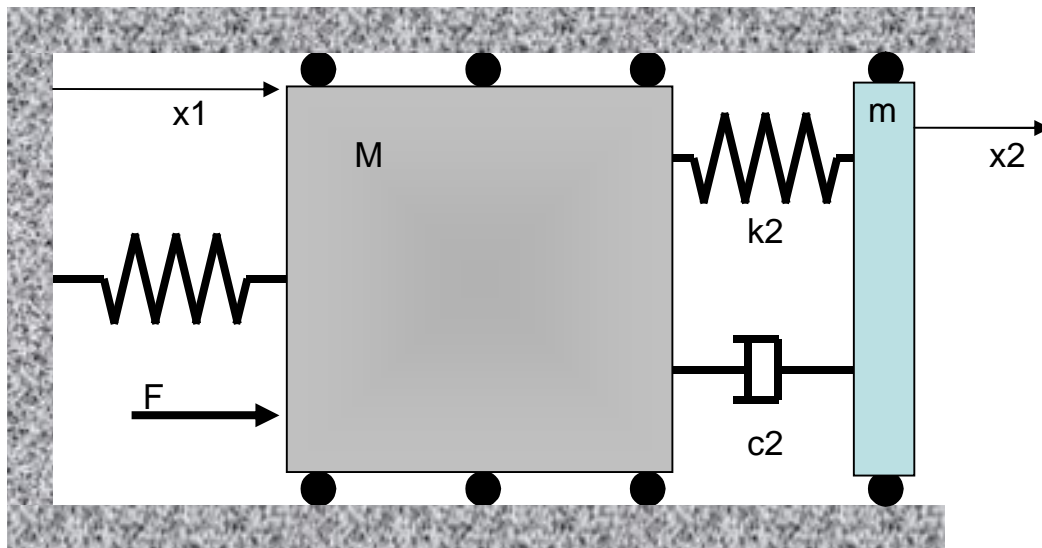


Figura 5:1 Mecanismo DVA

Este mecanismo es similar al TORA, pero con la diferencia de que es lineal. El objetivo del estudio de este mecanismo es el de aprender cómo se pueden optimizar las magnitudes del

resorte  $k_2$  y el amortiguador  $c_2$  con el fin de atenuar la vibraciones lo más posible.

Para este mecanismo existen dos métodos de optimización que se pueden tomar siendo el primero es el analítico. Este método es apropiado para los sistemas lineales dado que tenemos una solución conocida la cual podemos optimizar.

El segundo método es el numérico. Este método es de mayor interés dado que en el caso de los sistemas no lineales no podemos obtener las ecuaciones de salida del sistema. El método consta de minimizar la energía potencial del sistema variando las constantes del resorte y el amortiguador. Aquel sistema que presente la menor cantidad de energía potencial será el sistema óptimo.

El método numérico será el que se utilizará en el sistema TORA.

Las ecuaciones del DVA son

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \ddot{X} + \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \dot{X} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Para el caso de estudio se supondrán los siguientes valores los cuales fueron propuestos por Alleyne en su artículo.

$M=10$  kg

$m = 1$  kg

$k_1 = 10$ N/m

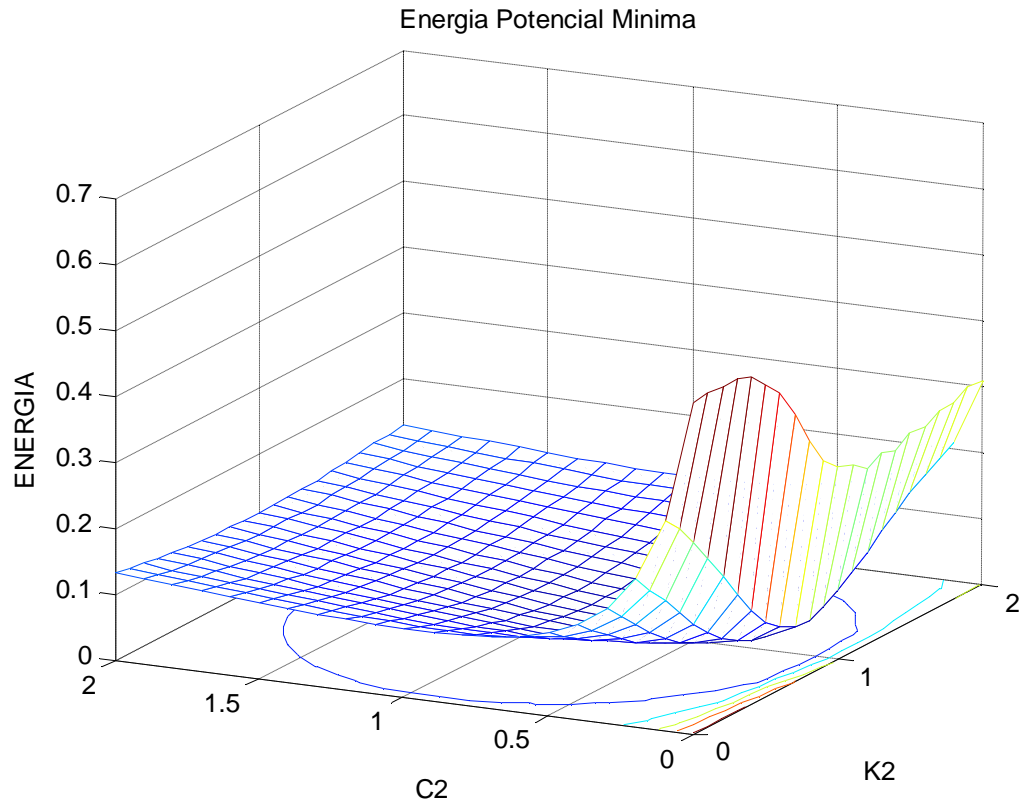
Se hará el cálculo para determinar cuál es la constante de amortiguamiento y de resorte óptima para el sistema. Al igual que en el mecanismo TORA la excitación está a cargo de un desplazamiento inicial.

Alleyne(1998) propone minimizar la energía potencial del sistema para poder determinar cuál es el sistema óptimo.

$$V = \int_0^t x_1^2 dt \quad (5.2)$$

Por lo tanto, al variar nuestros parámetros, aquel que genere la menor energía potencial será el óptimo. Para el Caso en estudio se analizara un tiempo de 100 segundos. Se hará una primera variación de las constantes del controlador de 0 a 2 con incrementos de 0.1.

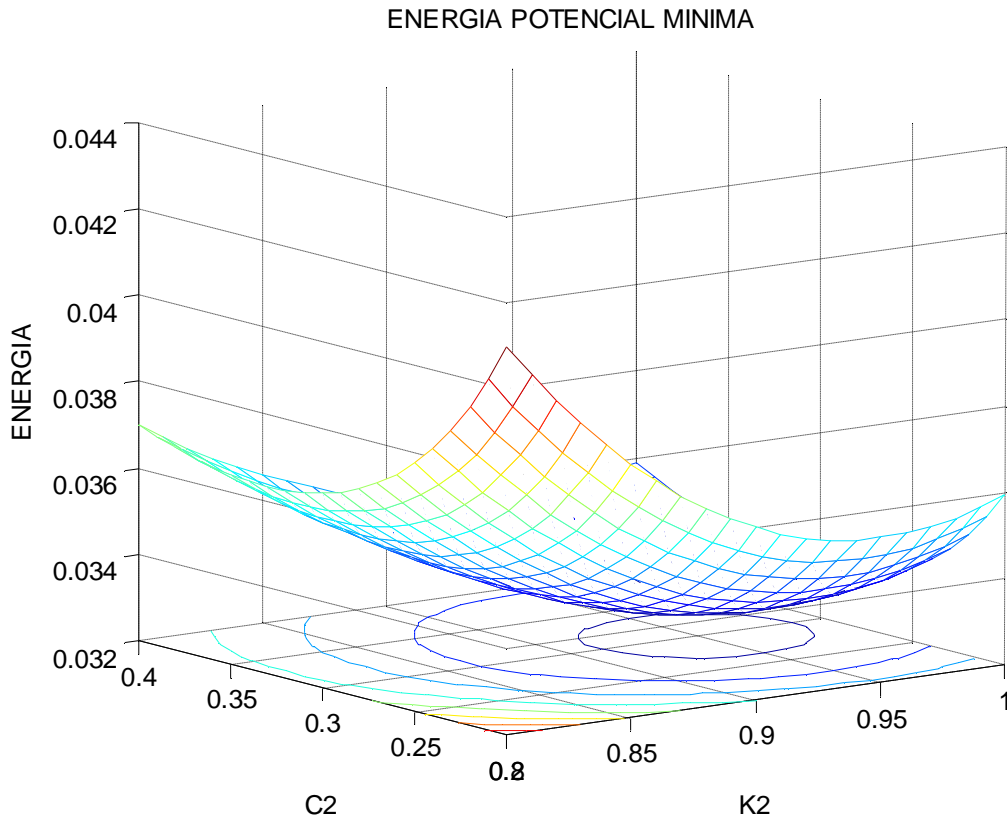
La gráfica muestra la energía potencial del sistema a medida que se varían las constantes del resorte y del Amortiguador. Se puede ver de maneras clara que existe un mínimo, correspondiente a  $k_2 = 0.9$  N/m y  $c_2 = 0.3$  Ns/m



**Figura 5:2 Energía Potencial Mínima del Mecanismo DVA**

Con el fin de tener una mejor aproximación se realizó una segunda simulación pero ahora reduciendo el área de búsqueda.

En la segunda optimación el valor  $k_2$  fue variado de 0.8 a 1.0 cada 0.01 y el valor de  $C_2$  fue variado de 0.2 a 0.4 cada 0.01.

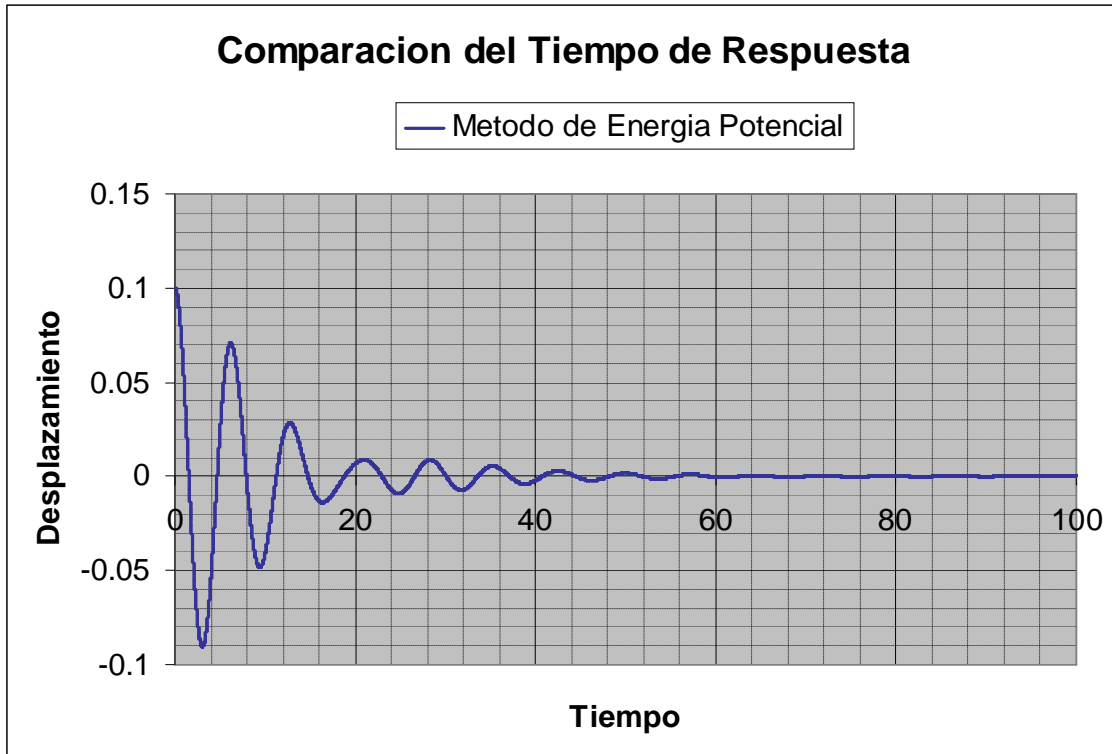


**Figura 5:3 Energía Potencial Mínima del Mecanismo DVA**

Nuevamente la gráfica muestra un mínimo absoluto para los valores de  $K2=0.91$  y  $C2 = 0.37Ns/m$ .

Quando se analiza el tiempo de respuesta del sistema, utilizando las constantes obtenidas previamente, se puede observar que la reducción de la vibración es notable a partir de los 40 segundos de operación.



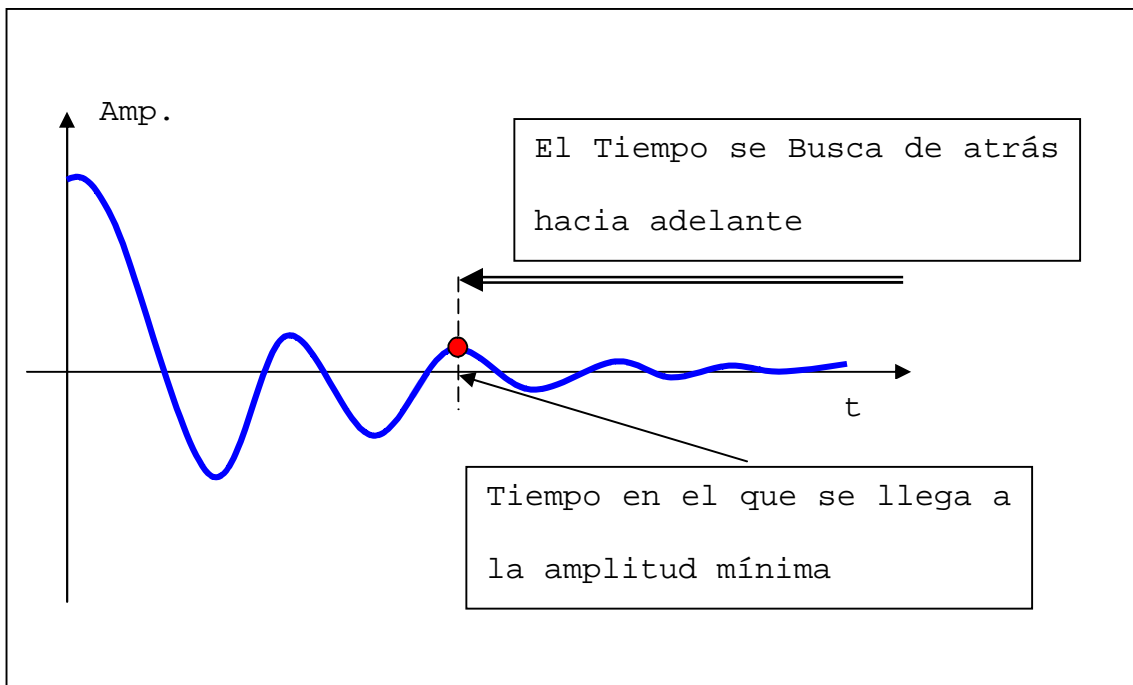


**Figura 5:4 Tiempo de respuesta del Mecanismo DVA**

Este método de optimización no es el correcto dado que lo que se pretende es tener una reducción en la amplitud de la vibración en el menor tiempo posible.

El método propuesto en este trabajo hace una inspección de la salida del sistema. Identifica en que tiempo el sistema llega a una amplitud de vibración específica. Y usa ese valor de tiempo para optimizar los coeficientes del sistema de control.

Para poder realizar esta inspección se revisa la historia del desplazamiento de atrás hacia adelante. En cuanto el método encuentra la amplitud deseada obtiene el tiempo en el que sucedió el evento y lo registra. El conjunto de parámetros que presenten el menor tiempo serán los óptimos.



**Figura 5:5 Tiempo Mínimo de Respuesta**

Este método también puede ser obtenido analizando las raíces de la primera derivada de la salida del sistema. A cada raíz le correspondería una amplitud máxima de la respuesta. Por simplificación de la programación no se utilizó el método de la derivada, aunque no se descarta para futuros estudios.

Este método fue programado en Matlab para que hiciera el análisis de la salida de Simulink. Para el caso en cuestión se propuso que la amplitud mínima fuera de 0.001 equivalente a un milímetro.

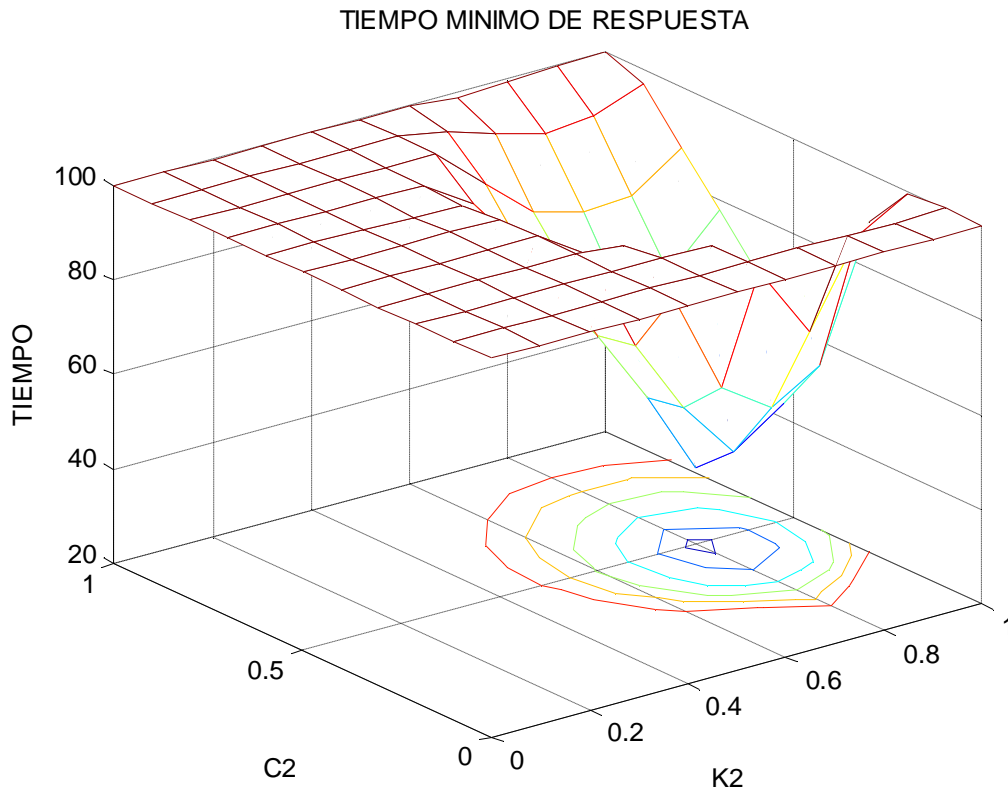
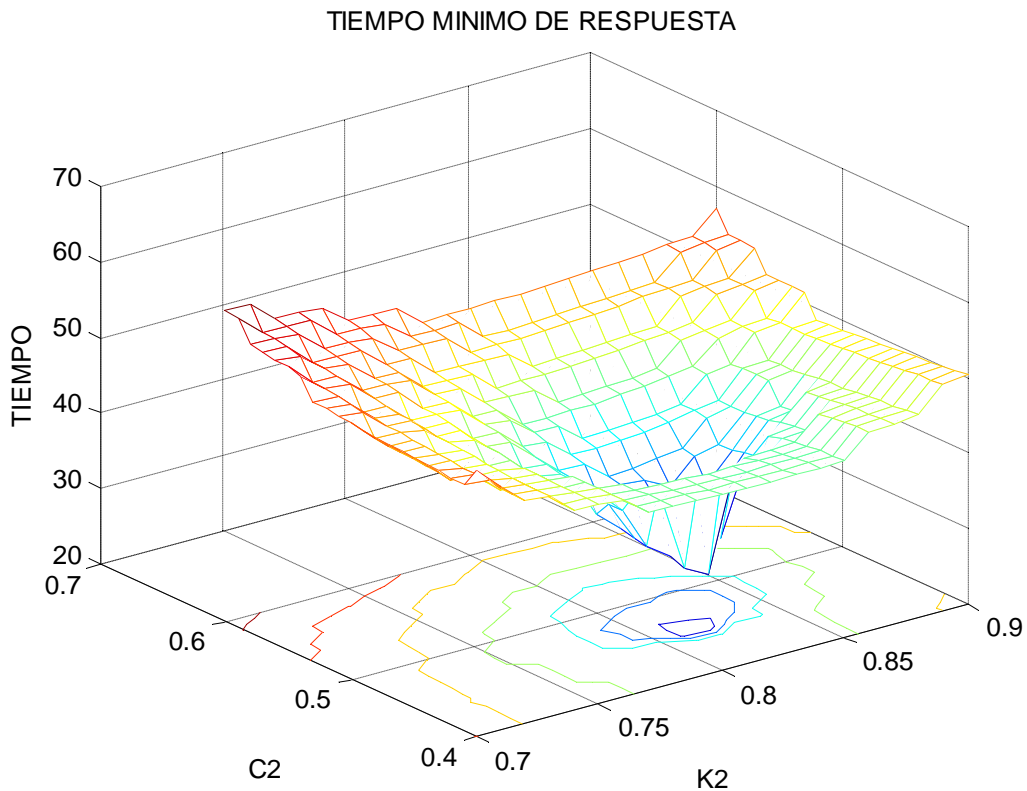


Figura 5:6 Tiempo Mínimo de Respuesta del Mecanismo DVA

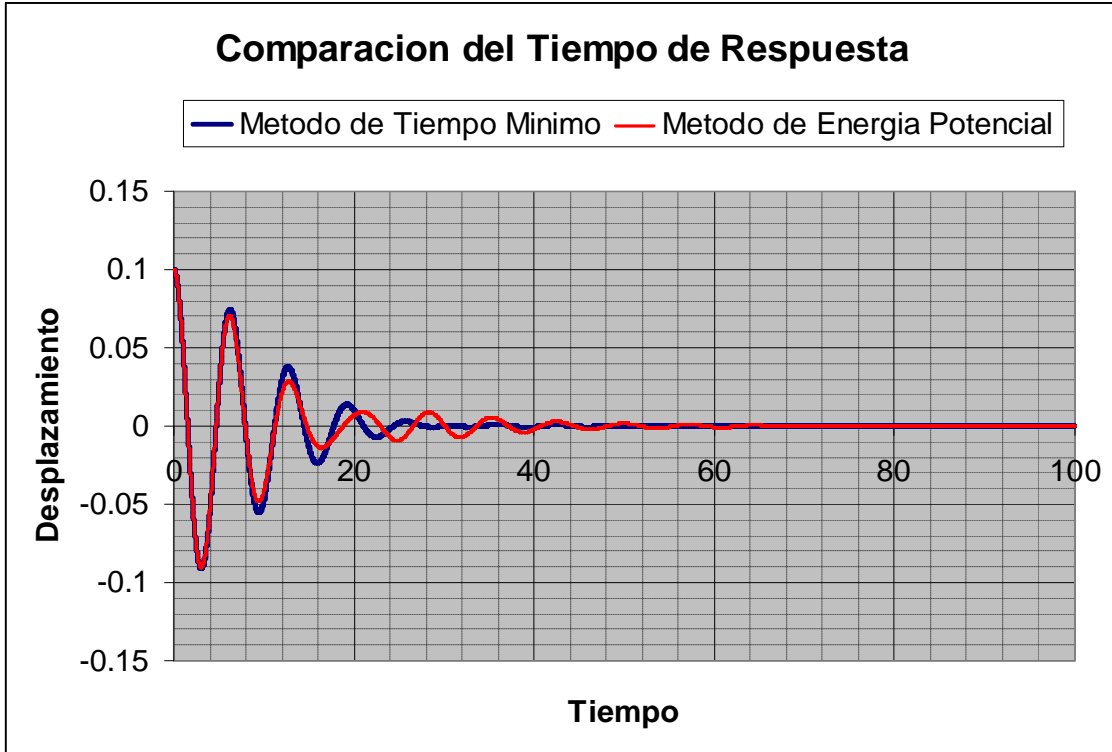
En la primera aproximación podemos ver claramente que hay un mínimo absoluto, en  $c2=0.5$  Ns/m y  $k2=0.8$  N/m con un tiempo mínimo de 36.1s. A simple vista se puede ver que esta optimización aun en su aproximación mas simple es mejor que la presentada por Alleyne.

Para la segunda aproximación se manipula  $c_2$  de 0.4 a 0.6 cada 0.01 y  $k_2$  de 0.7 a 0.9 cada 0.01.



**Figura 5:7 Tiempo Mínimo de Respuesta del Mecanismo DVA**

En esta segunda simulación se ve que el mínimo esta en  $k_2 = 0.82$  N/m y  $c_2 = 0.45$  Ns/m. Como se puede ver los valores obtenidos son cercanos a los que se obtienen utilizando el método de la energía potencial pero como se muestra en la imagen siguiente la diferencia en respuesta es significativa.



**Figura 5:8 Comparación de los tiempos de respuesta usando el método de energía potencial mínima y el tetrodo de tiempo mínimo**

Como se puede ver en la gráfica la respuesta del método de tiempo mínimo de respuesta presenta una reducción de en la amplitud de la vibración cercano a los 24 segundos, que comparado con los 40 segundos que se presentan con el método de energía potencial mínima se tiene una reducción del 50% en el tiempo de respuesta.

En el caso del DVA los coeficientes que se presentan en el mecanismo deben de ser constantes dado que están representando de manera activa a un resorte y a un

amortiguador. Se puede suponer que en caso del controlador pasivo del TORA dado que el resorte y el amortiguador son ficticios se podría investigar la posibilidad de tener funciones de la velocidad y la posición del carro que modifiquen los coeficientes del sistema de control.

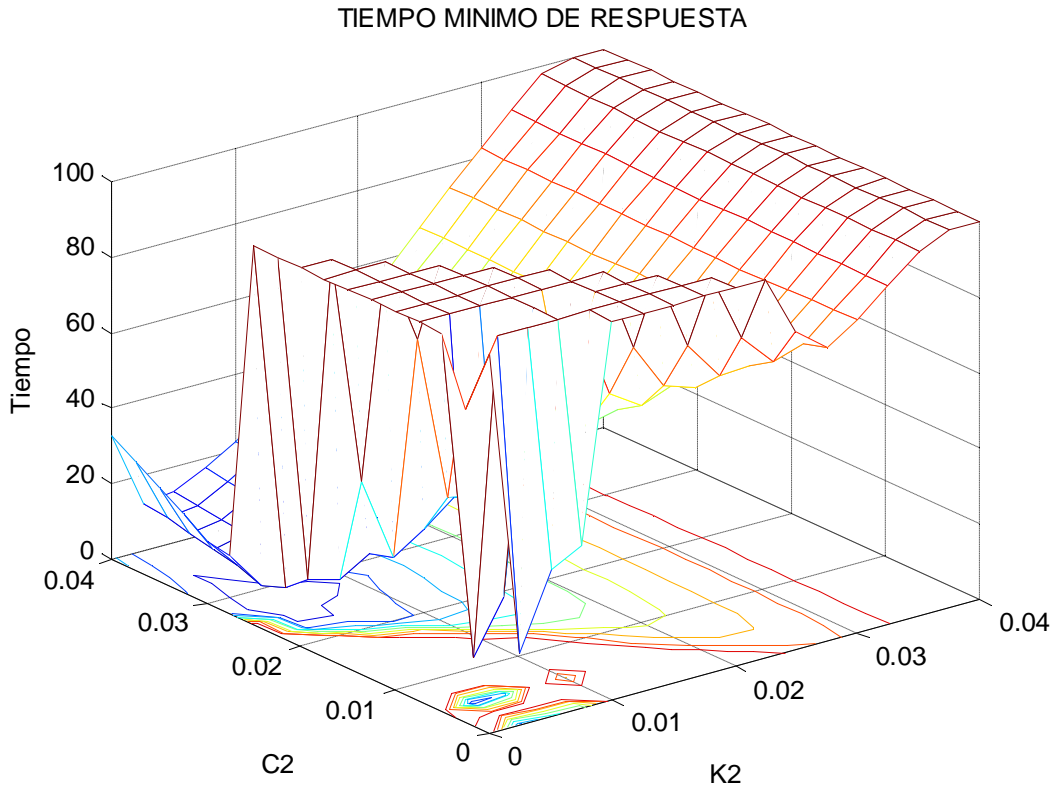
## ***5.2 Cálculo de los coeficientes de controlador basado en Posición***

En el caso del mecanismo TORA se había comentado en el capítulo anterior que el controlador que conviene es el que está solo en función de la posición. Esto debido a que la medición de la posición es más sencilla que la medición de la velocidad. Mediante el uso de un filtro se puede simular el efecto de la velocidad, la cual se puede introducir al sistema.

El motor que se planea usar en el mecanismo TORA es de 0.04 Nm, por lo tanto los coeficientes utilizados deben de sumar 0.04 o menos. No es una condición el que los coeficientes sumen 0.04 Nm dado que se puede dar el caso de que a una menor potencia se da el óptimo de reducción de desplazamiento.

$$\begin{aligned}
 \dot{v} &= -av - \frac{b}{a}\theta & (5.3) \\
 z &= b\theta + v
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones 5.3 representan el sistema de control que se quiere optimizar. Estas ecuaciones fueron determinadas en el capítulo anterior. Como primera aproximación se realiza una variación de los parámetros del controlador de 0.0 a 0.4 con un intervalo de solución de 0.0025 en ambos casos.



**Figura 5:9 Tiempo Mínimo de respuesta del mecanismo TORA**

Se puede ver en la gráfica que el mínimo se encuentra en  $c2 = 0.0275$  Ns/m y  $k2 = 0.0075$  N/m. Con estos valores se realiza

una segunda aproximación donde  $c_2$  varía de 0.025 a 0.03 cada 0.00025 y  $k_2$  va de 0.005 a 0.01 cada 0.00025.

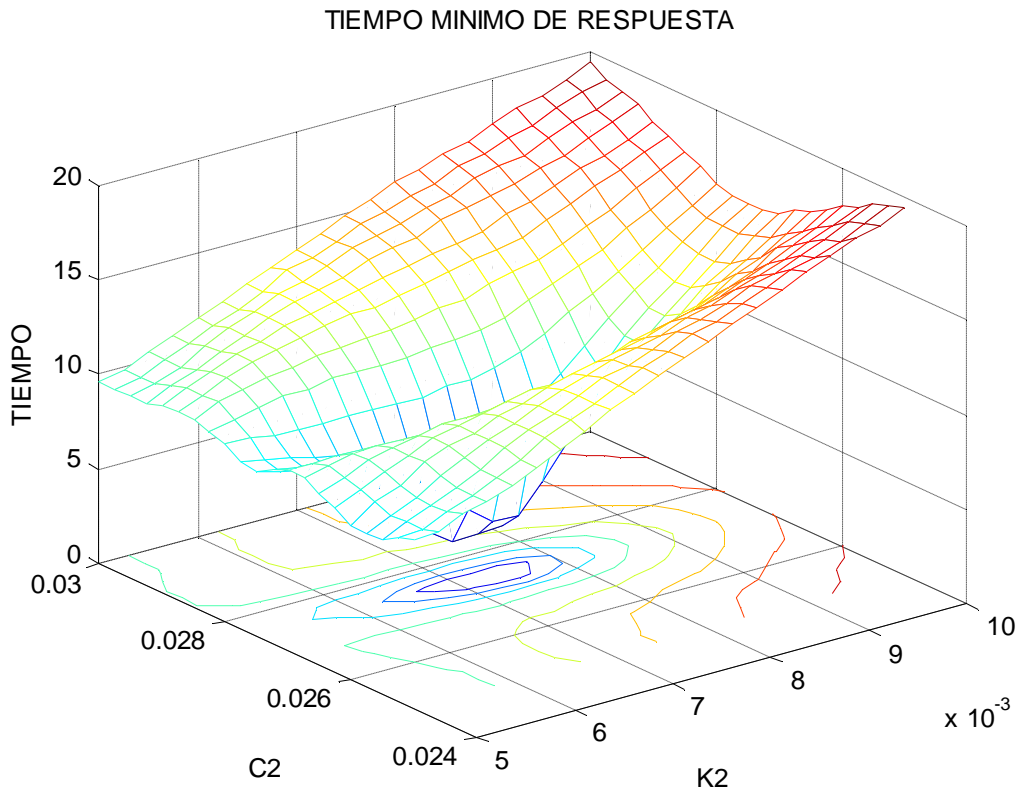


Figura 5:10 Tiempo Mínimo de respuesta del mecanismo TORA

Como se puede ver en la grafica el tiempo mínimo de respuesta se encuentra en  $k_2=0.007$  N/m y  $c_2=0.0275$  Ns/m. El tiempo mínimo de respuesta es de 2.17 segundos.

Este tiempo es considerablemente menor a los tiempos presentaos en los artículos que se tiene como base de



estudio. Además la suma de ambos coeficientes es 0.0345 menor a 0.040. Esto muestra que solo se requiere una fracción de la potencia máxima del motor par frenar el mecanismo.

Cuando Analizamos la historia de desplazamiento del mecanismo se puede ver como el desplazamiento rápidamente decae a los 2 segundos de haber iniciado el movimiento.



Figura 5:11 Tiempo de respuesta del mecanismo TORA

Evidentemente que este consolador está calibrado para una cierta condición inicial, pero se ve como este puede ayudar a la reducción de la vibración del mecanismo.

En un trabajo futuro se podrá explorar la posibilidad de alterar los coeficientes del controlador a manera que se adecuen de acuerdo al estado inicial de movimiento. De esta forma se obtendrá la reducción óptima de vibración para cada caso.

## Capítulo 6 Conclusiones y Trabajos Futuros

En primer lugar se estudió el método energético de obtención de Ecuaciones de Movimiento mediante la ecuación de Lagrange. Este estudio permitió obtener las ecuaciones de movimiento par el mecanismo TORA y para el Mecanismo DVA.

Segundamente, se pudo obtener un controlador para el mecanismo TORA utilizando la teoría de control basada en pasividad. El control obtenido se basa simplemente en la medición de la posición angular del péndulo. Al poder realizar esto se puede ubicar la posición mediante el uso de un potenciómetro. El uso de un filtro permitió simular la velocidad del péndulo. Estos dos parámetros fueron usados para generar la salida del controlador utilizando funciones de saturación.

Además de estos objetivos se propuso un método para optimizar los coeficientes del controlador basado en el tiempo mínimo de respuesta del sistema. Este método de optimización es específico para la condición inicial del sistema. Es por esto que se propone un trabajo futuro en el que se obtengan los coeficientes del sistema de control para

distintas condiciones iniciales. De esto modo se puede optimizar el funcionamiento del mecanismo para distintos tipos de estados iniciales.

Un segundo trabajo futuro podría ser el de incluir las componentes de amortiguamiento viscoso histerítico y de fricción al modelo matemáticos del mecanismo con el fin de obtener un modelo más realista del sistema TORA.

Un trabajo siguiente puede ser el de construir el mecanismo TORA y poner a prueba lo mostrado en este trabajo de tesis.

## Bibliografía

- [1] Alleyne, Andrew, (1997) Physical Insights on Passivity-Based TORA Control Designs, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 6(3), 436-439
- [2] Bupp, Robert, Dennis Berstein, and Vincent Coppola, (1995), A Benchmark Problem for Nonlinear Control Design: Problem Statement, Experimental Testbed, and Passive Nonlinear Compensation. University of Michigan 4363-4367, FP16-450
- [3] Burg, Timothy, Daren Dawson, (1997) Additional Notes on the TORA example: A Filtering Approach to eliminate Velocity Measurements. IEEE, Transactions on Control Systems Technology. 5(5), 520-523
- [4] Escobar, Gerardo, Romeo Ortega y Hebertt Sira-Ramírez, (1999), Output-Feedback Global Stabilization of a Nonlinear Benchmark System Using a Saturated Passivity Based Controller. IEEE, Transactions on Control Systems Technology. 7(2), 289-293
- [5] <http://www.msm.cam.ac.uk/phase-trans/2005/t101/t101.html>  
(Junio 2008)
- [6] <http://www.herzan.com/dt.html> (Junio 2008)
- [7] Hung, Lon-Chen, Hung-Ping Lin, Huang-Yuan Chung, (2007), Design of self-tuning sliding mode control for

- TORA system. Expert Systems with Applications 32(1), 201,212
- [8] Jankovic, Mrdjan, Dan Fontaine and Peter V. Kokotovic, (1996) TORA Example: Cascade and Passivity Control Designs. IEEE, Transactions on Control Systems Technology. 4(3), 292-297
- [9] Kelly, Graham S., -Fundamental of Mechanical Vibrations Second Edition. McGraw Hill
- [10] Khalil, Hassan, Non Linear Systems, Third Edition, Prentice Hall
- [11] Mabie - Reinholtz, Mecanismos y Dinámica de maquinaria. Ed. Limusa 1998
- [12] Pavlov, Alexei, Nathan van de Wouw, and Henk Nijmeijher, (2004), The Local Output Regulation Problem: Convergence Region Estimate. IEEE, Transactions on Automatic Control. 49(5), 814-819
- [13] Pavlov, Alexei, Nathan van de Wouw, and Henk Nijmeijher, Bart Janssen. (2005) Experimental output regulation for the TORA system. IEEE 44<sup>th</sup> Conference on Decision and Control. (1108-1113)
- [14] Petres, Zoltan Peter Baranyi, Peter Korondi, Hideki Hashimoto (1997), Trajectory Tracking by TP Model Transformation: Case Study of a Benchmark Problem. IEEE,

- Transactions and On Industrial Electronics. 54(3), 1654-1662
- [15] Tadmor, Gilead, 2001 Dissipative Design, Lossless Dynamics, and the Nonlinear TORA Benchmark Example. IEE, Transactions and Control Systems Technology. 9(2), 391-398
- [16] Wan, Chih-Jian, Dennis Berstain, and Vincent Coppola, (1994), Global Stabilization of the Oscillating Eccentric Rotor. 33<sup>rd</sup> Conference on Decision and Control. 4024-4029

## Anexo A Índice de Figuras

FIGURA 1:1 MESA ABSORBEDORA DE VIBRACIONES	8
FIGURA 2:1 COORDENADAS GENERALIZADAS	17
FIGURA 2:2 PÉNDULO SIMPLE	18
FIGURA 2:3 COMPARACIÓN DE LAS DIFERENTES APROXIMACIONES DE LA FUNCIÓN SIN (X)	20
FIGURA 2:4 ERROR EN EL CALCULO DE LA FUNCIÓN SIN(X) EN USANDO SERIES DE TAYLOR.	21
FIGURA 2:5 RESPUESTA DE LOS SISTEMAS DE SIMULACIÓN DEL PÉNDULO USANDO THETA INICIAL COMO TREINTA GRADOS.	22
FIGURA 2:6 RESPUESTA DE LOS SISTEMAS DE SIMULACIÓN DEL PÉNDULO USANDO THETA INICIAL COMO SESENTA GRADOS.	22
FIGURA 2:7 RESPUESTA DE LOS SISTEMAS DE SIMULACIÓN DEL PÉNDULO USANDO THETA INICIAL COMO NOVENTA GRADOS.	23
FIGURA 2:8 REPRESENTACIÓN DE UN SISTEMA MECÁNICO	24
FIGURA 2:9 EQUILIBRIO ESTABLE	25
FIGURA 2:10 EQUILIBRIO ASINTOTICAMENTE ESTABLE	26
FIGURA 2:11 EQUILIBRIO INESTABLE	26
FIGURA 3:1 VISTA SUPERIOR DEL MECANISMO TORA	34
FIGURA 3:2 PARÁMETROS DE Y VARIABLES DEL MECANISMO TORA	37
FIGURA 3:3 MODELOS DE SIMULINK DE LAS ECUACIONES DEL MECANISMO TORA	41
FIGURA 5:1 MECANISMO DVA	49
FIGURA 5:2 ENERGÍA POTENCIAL MÍNIMA DEL MECANISMO DVA	52
FIGURA 5:3 ENERGÍA POTENCIAL MÍNIMA DEL MECANISMO DVA	53
FIGURA 5:4 TIEMPO DE RESPUESTA DEL MECANISMO DVA	54
FIGURA 5:5 TIEMPO MÍNIMO DE RESPUESTA DEL MECANISMO DVA	56
FIGURA 5:6 TIEMPO MÍNIMO DE RESPUESTA DEL MECANISMO DVA	57
FIGURA 5:7 COMPARACIÓN DE LOS TIEMPOS DE RESPUESTA USANDO EL MÉTODO DE ENERGÍA POTENCIAL MÍNIMA Y EL TETRODO DE TIEMPO MÍNIMO	58



FIGURA 5:8 TIEMPO MÍNIMO DE RESPUESTA DEL MECANISMO TORA	60
FIGURA 5:9 TIEMPO MÍNIMO DE RESPUESTA DEL MECANISMO TORA	61
FIGURA 5:10 TIEMPO DE RESPUESTA DEL MECANISMO TORA	62

## Anexo B Índice de Tablas

TABLA 3:1 PARÁMETROS Y VARIABLES DEL MECANISMO TORA	35
TABLA 3:2 PARÁMETROS DEL PARA EL ESTUDIO DE SIMULACIÓN DEL MECANISMO TORA	36

## Anexo C Índice de Ecuaciones

$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.1)$	15
$f(q_1, q_2, q_3 \cdots q_m, t) = 0 \quad (2.2)$	17
$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin(\theta) = 0 \quad (2.3)$	19
$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$	
$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin(\theta) = 0 \quad (2.4)$	19
$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta + \alpha \omega^2 \theta^3 = 0$	
$\dot{x} = f(x, u)$	
$y = h(x) \quad (2.5)$	23
$V(x) \geq 0, \forall x \quad (2.6)$	24
$\dot{V}(x) \leq u^T y \quad (2.7)$	24
$f(x, 0) = 0 \quad (2.8)$	25
$V(x) > 0$	
$\forall x \neq 0 \quad (2.9)$	27
$\dot{V}(x) < 0$	
$\forall x \neq 0 \quad (2.10)$	27
$V(x) > 0$	
$\forall x \neq 0 \quad (2.11)$	28
$\dot{V}(x) \leq 0$	
$\forall x \neq 0 \quad (2.12)$	28
$V(x) > 0$	
$\forall x \neq 0 \quad (2.13)$	29
$\dot{V}(x) \leq u \cdot \dot{y}$	
$\forall x \neq 0 \quad (2.14)$	29
$u = -\varphi(y) \quad (2.15)$	29

$$\dot{V}(x) = -y\varphi(y) > 0 \quad (2.16) \dots\dots\dots 29$$

$$\dot{y} \neq 0$$

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) = u \quad (2.17) \dots\dots\dots 30$$

$$V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} + P(q) \quad (2.18) \dots\dots\dots 31$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2} (\dot{q}^T \dot{M} \dot{q} + \dot{q}^T \dot{M} \dot{q} + \dot{q}^T M \ddot{q}) + \frac{\partial P}{\partial q} \dot{q} \quad (2.19) \dots\dots\dots 31$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M} \dot{q} + \dot{q}^T M \ddot{q} + \frac{\partial P}{\partial q} \dot{q} \quad (2.20) \dots\dots\dots 31$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M} \dot{q} + \dot{q}^T (u - C\dot{q} - G - F) + \frac{\partial P}{\partial q} \dot{q} \quad (2.21) \dots\dots\dots 32$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M} \dot{q} + \dot{q}^T u - \dot{q}^T C \dot{q} - \dot{q}^T G - \dot{q}^T F + \frac{\partial P}{\partial q} \dot{q} \quad (2.22) \dots\dots\dots 32$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{q}^T (\dot{M} - 2C) \dot{q} + \dot{q}^T u - \dot{q}^T F + \frac{\partial P}{\partial q} \dot{q} - \dot{q}^T G \quad (2.23) \dots\dots\dots 32$$

$$\dot{V} = \dot{q}^T u - \dot{q}^T F \quad (2.24) \dots\dots\dots 32$$

$$V = \frac{1}{2} kx^2 \quad (3.1) \dots\dots\dots 37$$

$$T = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x} + r\dot{\theta} \cos(\theta))^2 + \frac{1}{2} m(r\dot{\theta} \sin(\theta))^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 \quad (3.2) \dots\dots\dots 37$$

$$T = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} mr^2 \dot{\theta}^2 + mr\dot{x}\dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 \quad (3.3) \dots\dots\dots 38$$

$$L = T - V \quad (3.4) \dots\dots\dots 38$$

$$L = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} mr^2 \dot{\theta}^2 + mr\dot{x}\dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} kx^2 \quad (3.5) \dots\dots\dots 38$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i \quad (3.6) \dots\dots\dots 38$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = M\dot{x} + m\dot{x} + mr\dot{\theta} \cos(\theta) \quad (3.7) \dots\dots\dots 38$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = M\ddot{x} + m\ddot{x} + mr\ddot{\theta} \cos(\theta) - mr\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \quad (3.8) \dots\dots\dots 38$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -kx \quad (3.9) \dots\dots\dots 38$$

$$M\ddot{x} + m\ddot{x} + mr\ddot{\theta} \cos(\theta) - mr\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + kx = F(t) \quad (3.10) \dots\dots\dots 38$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = mr\dot{x} \cos(\theta) + mr^2\dot{\theta} + I_G\dot{\theta} \quad (3.11) \dots\dots\dots 38$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = mr\ddot{x} \cos(\theta) + mr^2\ddot{\theta} + I_G\ddot{\theta} - mr\dot{x}\dot{\theta} \sin(\theta) \quad (3.12) \dots\dots\dots 39$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -mr\dot{x}\dot{\theta} \sin(\theta) \quad (3.13) \dots\dots\dots 39$$

$$mr^2\ddot{\theta} + I_G\ddot{\theta} + mr\ddot{x} \cos(\theta) = M(t) \quad (3.14) \dots\dots\dots 39$$

$$I_o = I_G + mr^2 \quad (3.15) \dots\dots\dots 39$$

$$I_o\ddot{\theta} + mr\ddot{x} \cos(\theta) = M(t) \quad (3.16) \dots\dots\dots 39$$

$$\ddot{\theta} = \frac{M(t)}{I_o} - \frac{mr}{I_o} \ddot{x} \cos(\theta) \quad (3.17) \dots\dots\dots 39$$

$$(M + m)\ddot{x} + \frac{mr}{I_o} M(t) \cos(\theta) - \frac{m^2 r^2}{I_o} \ddot{x} \cos(\theta)^2 - mr\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + kx = F(t) \quad (3.18) \dots\dots\dots 39$$

$$\ddot{x} = \frac{\frac{F(t)}{M + m} + \frac{mr}{M + m} \dot{\theta}^2 \sin(\theta) - \frac{k}{M + m} x - \frac{mr}{I_o(M + m)} M(t) \cos(\theta)}{1 - \frac{m^2 r^2}{I_o(M + m)} \cos(\theta)} \quad (3.19) \dots\dots\dots 39$$

$$\begin{bmatrix} M + m & m \cdot e \cdot \cos(\theta) \\ m \cdot e \cdot \cos(\theta) & I_o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -m \cdot e \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

..... 42

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc} M + m & m \cdot r \cdot \cos(\theta) \\ m \cdot r \cdot \cos(\theta) & mr^2 + I_G \end{array} \right] &= (M + m)(mr^2 + I_G) - m^2 \cdot r^2 \cdot \cos^2(\theta) \quad (4.2) \dots\dots\dots 42 \\ &= M \cdot I_G + M \cdot m + m \cdot I_G + m^2 \cdot r^2 (1 - \cos^2(\theta)) > 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \begin{array}{cc} M + m & m \cdot e \cdot \cos(\theta) \\ m \cdot e \cdot \cos(\theta) & I_o \end{array} \right] - 2 \left[ \begin{array}{cc} 0 & -m \cdot e \cdot \theta \cdot \sin(\theta) \\ 0 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} 0 & m l \sin(\theta) \\ -m l \sin(\theta) & 0 \end{array} \right] \quad (4.3) 42$$

$$V = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(I_G + mr^2)\dot{\theta}^2 + mrx\dot{\theta}\cos(\theta) + \frac{1}{2}kx^2 \quad (4.4) \dots\dots\dots 43$$

$$\dot{V} \leq u\dot{\theta} \quad (4.5) \dots\dots\dots 43$$

$$V = V_0 + \frac{1}{2}k_1\theta^2 > 0 \quad (4.6) \dots\dots\dots 43$$

$$\forall (\theta, \dot{\theta}) \neq 0$$

$$\dot{V} \leq u\dot{\theta} + k_1\theta\dot{\theta} = (u + k_1\theta)\dot{\theta} \quad (4.7) \dots\dots\dots 44$$

$$u + k_1\theta = -\varphi(\dot{\theta}) \quad (4.8) \dots\dots\dots 44$$

$$u = -\varphi(\dot{\theta}) - k_1\theta \quad (4.9) \dots\dots\dots 44$$

$$\dot{V} \leq \varphi(\dot{\theta})\dot{\theta} \leq 0 \quad (4.10) \dots\dots\dots 44$$

$$\dot{V} \leq k_2\dot{\theta}^2 \quad (4.11) \dots\dots\dots 44$$

$$u + k_1\theta = -k_2\dot{\theta} \quad (4.12) \dots\dots\dots 44$$

$$u = -k_1\theta - k_2\dot{\theta} \quad (4.13) \dots\dots\dots 44$$

$$V = V_0 + \int_0^\theta \varphi_1(\sigma) d\sigma \quad (4.14) \dots\dots\dots 45$$

$$\dot{V} = \dot{\theta}(\varphi_1(\theta) + u) \quad (4.15) \dots\dots\dots 45$$

$$u + \varphi_1(\theta) = -\varphi_2(\dot{\theta}) \quad (4.16) \dots\dots\dots 45$$

$$u = -\varphi_1(\theta) - \varphi_2(\dot{\theta}) \quad (4.17) \dots\dots\dots 45$$

$$\dot{V} = -\varphi_2(\dot{\theta})\dot{\theta} \quad (4.18) \dots\dots\dots 45$$

$$V = V_0 + \int_0^\theta \varphi_1(\sigma) d\sigma + \int_0^z \frac{1}{b} \varphi_2(\sigma) d\sigma \quad (4.19) \dots\dots\dots 46$$

$$\dot{V} = \theta(\varphi_1(\theta) + u) + \frac{1}{b}\varphi_2(z)z \quad (4.20) \dots\dots\dots 46$$

$$\dot{z} = -az + b\dot{\theta} \quad (4.21) \dots\dots\dots 47$$

$$\dot{V} = \theta(\varphi_1(\theta) + u) + \frac{1}{b}\varphi_2(z)(-az + b\dot{\theta}) \quad (4.22) \dots\dots\dots 47$$

$$\dot{V} = \varphi_1(\theta)\dot{\theta} + u\dot{\theta} - \frac{a}{b}z\varphi_2(z) + \dot{\theta}\varphi_2(z) \quad (4.23) \dots\dots\dots 47$$

$$\dot{V} = (u + \varphi_1(\theta) + \varphi_2(z))\dot{\theta} - \frac{a}{b}z\varphi_2(z) \quad (4.24) \dots\dots\dots 47$$

$$u = -\varphi_1(\theta) - \varphi_2(z) \quad (4.25) \dots\dots\dots 47$$

$$\dot{V} = -\frac{a}{b}z\varphi_2(z) \quad (4.26) \dots\dots\dots 47$$

$$\dot{z} = -az + b\dot{\theta} \quad (4.27) \dots\dots\dots 47$$

$$\dot{z} - b\dot{\theta} = -az \quad (4.28) \dots\dots\dots 47$$

$$(z - b\theta)' = -az + \frac{b}{a}\dot{\theta} - \frac{b}{a}\dot{\theta} \quad (4.29) \dots\dots\dots 47$$

$$(z - b\theta)' = -a(z - b\theta) - \frac{b}{a}\dot{\theta} \quad (4.30) \dots\dots\dots 47$$

$$v = z - b\theta \quad (4.31) \dots\dots\dots 48$$

$$\dot{v} = -av - \frac{b}{a}\dot{\theta} \quad (4.32) \dots\dots\dots 48$$

$$z = b\theta + v \quad (4.33) \dots\dots\dots 48$$

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \dot{X} + \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1) \dots\dots\dots 50$$

$$V = \int_0^t x_1^2 dt \quad (5.2) \dots\dots\dots 51$$

$$\dot{v} = -av - \frac{b}{a}\dot{\theta}$$

$$z = b\theta + v \quad (5.3) \dots\dots\dots 59$$