UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Sobre la Estructura de los Módulos k-nosingulares

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO
PRESENTA:

Luis Ángel Zaldívar Corichi

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. JOSÉ RÍOS MONTES

2009

Agradecimientos

Antes que nada le doy gracias a mi familia, a mi madre por todo lo que me ha dado y enseñado, a la UNAM por todo el mundo que me hizo ver.

Este trabajo representa mucho de mi esfuerzo a través de mi carrera, y mucho de él no pudo haberse concretado sin ustedes mis amigos de carrera Rodrigo, Rafael, Minerva, Jesús, Diego, Violeta, Víctor, Jessica, Darío, Álvaro, Ramiro que agradezco y estimo cada momento que pasamos juntos y cada plática que tuvimos (y tenemos), mucha de mi visión como matemático y como persona se las debo a ustedes, a mis amigos y compañeros que tanto aprecio Araceli, Ramón, Karla, Elie, Adela, Ilán, Abraham, Allan, Guillermo que no solo me han enseñado a transmitir mejor mis conocimientos, sino también me han enseñado a ser mejor persona, a mi tío Felipe por las innumerables conversaciones que hemos sostenido y por hacerme ver otras facetas de las matemáticas. Gracias Tío, todo ésto se los dedico a ustedes.

Finalmente quiero expresar mis agradecimientos al Dr. José Ríos Montes no sólo por haber dirigido este trabajo sino también junto con el M.en C. José Cruz Garcia Zagal por haber orientado mi formación como matemático y hacerme ver la belleza y elegancia de las matemáticas.

A mis sinodales los doctores Hugo Alberto Rincón, Francisco Raggi y Alejandro Alvarado por sus acertados y sabios comentarios que ayudaron a mejorar exponencialmente este trabajo.

Gracias.

Índice general

Introduccion

Nuestro principio fundamental es que toda cuestión que puede resolverse por la lógica, puede resolverse sin más.

Wittgenstein

Could it be that Ring theory is the part of mathematics where chaos is most present?

Năstăsescu

Cuando estudia un objeto o concepto en matemáticas, algunas veces lo que se desea es caracterizar este mediante la asociación de invariantes, o tratar de ver si su forma es parecida a algo conocido. En particular si el objeto de estudio tiene alguna estructura álgebraica lo que se desea es caracterizarlo en términos de tal estructura, ésa será la esencia del presente trabajo: caracterizar a una clase de módulos por medio de su estructura interna.

El presente trabajo se basa fundamentalmente en un artículo de Tariq Rizvi y Cosmin Roman publicado en la revista *Communications in Algebra* en 2007 en este artículo los autores dan un concepto que generaliza la no singularidad es así que ellos definen la k-nosingularidad de un módulo. Lo que hacen después es seguir el camino natural, es decir, estudiar cuáles de los resultados de la no singularidad se preservan en la k-nosingularidad. Ésta será la manera de presentar este trabajo, tratar de dilucidar la estructura de los módulos k-nosingulares.

En [3] Goodearl y Boyle desarrollan una teoría de descomposición en Tipos para módulos nosingulares e inyectivos en módulos de tipo I, II y III, siguiendo los pasos dados por Kaplansky en [5] en el que él analiza a profundidad los anillos de Baer haciendo notar que un anillo de Baer se descompone de manera única en anillos de Tipo I, II y III. Así la teoria de Kaplansky resulta ser la base de la teoría presentada por Goodearl y Boyle. En particular en [3] se prueba que el anillo de endomorfismos de un módulo no singular e inyectivo es un anillo regular en el sentido de Von Neumann y auto-inyectivo, es de está manera que las ideas de Kaplansky son totalmente validas. En este caso, se descompone al anillo de endomorfismos del módulo nosingular e inyectivo en anillos de tipo I, II y III y esta descomposición induce de manera natural una descomposición de cada módulo sobre el anillo. Este será el camino a seguir, es decir, dar una descomposición para el caso k-nosingular, y en contraste pediremos un concepto que en el caso no singular es la inyectividad, este concepto será el de continuidad (y en efecto inyectividad implica continuidad). Luego procederemos como en el caso no singular e inyectivo, primero observando que el anillo de endomorfismos de un módulo k-nosingular y continuo es un anillo de Baer, descomponemos este anillo en ciertos tipos y estudiaremos la descomposición inducida en la categoría de módulos sobre el anillo.

A lo largo del trabajo se presentarán las pruebas necesarias para entender la descomposición y se pondrá énfasis en la teoría de anillos de Baer (ya que estos son el pilar para los resultados principales del trabajo que presentan Rizvi y Roman en [9]) con base en varios artículos donde se estudian a detalle estos. De hecho se reconstruirán las pruebas dadas en [10] donde se generaliza un resultado que liga los conceptos de anillos de Baer con la k-nosingularidad y éste es el resultado que da pie a la teoría de descomposición que trataremos de describir.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo está dedicado a estudiar las propiedades básicas de los llamados anillos de Baer que son fundamentales en nuestro trabajo. Como se verá en capítulos posteriores, la condición de que un anillo sea de Baer es bastante poderosa. Además introducimos el concepto de módulo k-nosingular y daremos un teorema bastante que relaciona estos dos conceptos.

Todos los anillos que consideraremos serán asociativos y con unidad y los denotaremos por la letra R, S, la palabra ideal se usará para indicar que el ideal es bilateral y en otro caso se especificará si el ideal considerado es izquierdo o derecho. Los módulos que consideraremos serán $S-R$-bimódulos, es decir, serán módulos derechos sobre el anillo R e izquierdos sobre el anillo S donde S denotará el anillo de endomorfismos de M como R-Módulo derecho, $S = End_R(M)$. Denotaremos por $r_R(.)$ y con $l_M(.)$ al anulador derecho con coeficientes en R de subconjuntos de M al anulador izquierdo con coeficientes en M de subconjuntos de R, y por $r_M(.)$ y $l_S(.)$ los anuladores respectivamente derechos con coeficientes en M de subconjuntos de S e izquierdos con coeficientes en S de subconjuntos de M, usaremos $N \leq^{ess} M$ para indicar que N es un submódulo esencial en M y $N \leq^{\oplus} M$ indicará que N es un sumando directo de M.

Definición 1.1. Diremos que R es un *anillo de Baer* si el anulador derecho de todo ideal izquierdo esta generado como ideal derecho por un elemento idempotente $e \in R$, es decir, para todo ideal izquierdo I de R se tiene que, $r_R(I) = eR$.

Definición 1.2. Diremos que R es un *anillo no singular* si para todo $r \in R$ tal que $r_R(r) \leq^{ess} R$ se tiene que $r = 0$. Equivalentemente R es un anillo no singular si $Z(R) = 0$, donde:

$$Z(R) = \{a \in R | r_R(a) \leq^{ess} R\}.$$

Definición 1.3. Sea $M \in Mod - R$, diremos que M es un *módulo de Baer*, si para todo N de M se tiene que, ${}_S l(N)$ es sumando directo de S, es decir, ${}_S l(N) = Se$, donde e es un endomorfismo idempotente de M.

Ahora, notemos que para un módulo de Baer M, al considerar cualquier ideal izquierdo I de S y su anulador derecho, $r_M(I)$ cumple

$${}_S l(r_M(I)) := r_M(Se) = \{m \in M \,|(se)m = s(em) = 0\} = eM$$

Recíprocamente si para todo ideal izquierdo I de S, se cumple que $r_M(I) = eM$, con e un elemento idempotente de S entonces M es un módulo de Baer.

La siguiente definición introduce el objeto principal de estudio de los capítulos dos y tres, por el momento sólo usaremos este para probar uno de los resultados del capítulo.

Definición 1.4. Sea $M \in Mod - R$, diremos que M es un módulo *k-nosingular* si para todo $\varphi \in S$ con anulador esencial en M, entonces $\varphi = 0$.

En el siguiente capítulo se probará que en efecto la k-nosingularidad generaliza la no singularidad usual.

Notemos que para un módulo M que es k-nosingular al considerar un ideal del anillo de endomorfismos de M, $I \leq S$ tal que el anulador derecho con coeficientes en M de I, $r_M(I) \leq^{ess} M$ entonces $I = 0$. Pues si tomamos un elemento $\varphi \in S$, entonces $r_M(I) = \bigcap_{\psi \in I} Nuc(\psi) \subseteq Nuc(\varphi)$ por lo tanto $Nuc\varphi \leq^{ess} M$, como M es k-nosingular entonces $\varphi = 0$ por lo que $I = 0$. Ahora bien para $\varphi \in S$ tal que $Nuc(\varphi) \leq^{ess} M$, ya que $r_M(S\varphi) = \bigcap_{f \in S}(f\varphi)$ y como $Nuc(\varphi) \subset Nuc(f\varphi)$ se tiene que $Nuc(\varphi) \subset r_M(S\varphi) = \bigcap Nuc(f\varphi)$ entonces como por hipótesis $S\varphi = 0$, lo que implica $\varphi = 0$ y como φ fue arbitrario M es k-nosingular. Así hemos probado que:

Lema 1.5. Un módulo M es k-nosingular si y sólo si $I \leq S$ y $r_M(I) \leq^{ess} M$ $\Rightarrow I = 0$.

$\square$

Siempre que uno introduce un nuevo concepto en teoría general de módulos surge de manera natural, el concepto dual al original, en nuestro caso ¿cuál es el concepto dual a la k-nosingularidad?. Para responder eso primero introduzcamos lo dual de no singularidad.

Definición 1.6. Diremos que un anillo R es (co) *no singular* si para todo ideal derecho $I_R \leq R$ tal que $_R l\,(I) = 0$ se tiene que $I \leq^{ess} R$.

El concepto dual a la k-nosingularidad es dado en la siguiente:

Definición 1.7. Sea $M \in Mod - R$, diremos que M es k-(co) *nosingular* si para todo N submódulo de M tal que $_S l\,(N) = 0$ entonces $N \leq^{ess} M$. Equivalentemente si $\varphi\,(N) \neq 0$ para todo endomorfismo $\varphi \in S$ no cero, se tiene que $N \leq^{ess} M$.

Definición 1.8. Sea $M \in Mod - R$, diremos que M tiene la propiedad C_1 o M es *extendible* si para todo N submódulo de M, existe N' sumando directo de M, $N' \leq^{\oplus} M$, tal que $N \leq^{ess} N'$.

En los capítulos siguientes analizaremos más a fondo la propiedad de que un módulo tenga la propiedad C_1 o sea extendible, también se darán familias de módulos con tal propiedad. Las siguientes proposiciones relacionan los conceptos de la k-nosingularidad y la propiedad de que M sea de Baer.

Proposición 1.9. Todo módulo extendible es k-(co)nosingular.

Demostración. Sea N un submódulo de M tal que para todo $\varphi \in S$ no cero se tiene que $\varphi\,(N) \neq 0$, supongamos que N no es esencial en M. Entonces existe $eM \in Sub_R\,(M)$ tal que $N \leq^{ess} eM$, con $e \in S$ idempotente y $e \neq 1$.

Entonces el endomorfismo $(1-e)$ no es cero y $(1-e)\,N = 0$ lo que es un absurdo, por lo tanto $N \leq^{ess} M$, es decir, M es un módulo k-(co)nosingular. $\square$

Proposición 1.10. Todo módulo k-nosingular extendible es un módulo de Baer.

Demostración. Sea N un submódulo de un módulo M, como M es extendible, hay un endomorfismo idempotente e de S tal que $N \leq^{ess} eM$. Afirmamos que:

$$_S l\,(N) = S\,(1-e)\,.$$

Para probar ésto supongamos que $S\,(1-e) = {_S l}\,(eM) \subsetneq {_S l}\,(N)$ por tal motivo existe $\varphi \in {_S l}\,(N) - {_S l}\,(eM)$. Como $_S S = Se \oplus S\,(1-e)$, se tiene que $\varphi = s_1 e + s_2\,(1-e)$ para algún $s_1, s_2 \in S$. Como $s_1 \neq 0$ entonces substituyendo φ por $\varphi - s_2\,(1-e)$ podemos suponer $\varphi \in Se$ y entonces se tiene que $\varphi\,(N) = 0$ ya que $\varphi \in {_S l}\,(N)$ y $\varphi\,((1-e)\,M) = 0$. Entonces

$\varphi(N \oplus (1-e) M) = 0$ y notemos que $N \oplus (1-e) M \leq^{ess} M$. Al ser M k-nosingular, se tiene que $\varphi = 0$ lo que es una contradicción por lo tanto ${}_Sl(N) = S(1-e)$ por lo que prueba que M es de Baer. □

Proposición 1.11. Todo módulo de Baer es k-nosingular

Demostración. Sea M un módulo de Baer y $\varphi \in S$ tal que $Nuc\varphi \leq^{ess} M$. Consideremos el ideal $S\varphi$. Como $Nuc\varphi = r_M(S\varphi) = fM$ con f un elemento idempotente de S se tiene que $M = fM \oplus (1-f) M$. Por lo que $Nuc\varphi = M$, por lo tanto $\varphi = 0$, es decir, M es k-nosingular. □

Proposición 1.12. Todo módulo k-(co)nosingular de Baer es un módulo extendible y k-nosingular.

Demostración. Sea $M \in Mod{-}R$ k-(co)nosingular y de Baer, por la proposición anterior basta probar que M es extendible para esto consideremos N un submódulo M. Por ser M de Baer se tiene que ${}_Sl(N) = Sf$ con $f^2 = f \in S$, notemos que $f(n) = 0$ para todo $n \in N$ por lo que implica que $N \subseteq r_M({}_Sl(N)) = (1-f) M$. Ahora bien supongamos que N no es esencial en $(1-f) M$ por tal motivo existe $P \leq (1-f) M$ no cero tal que $N \cap P = \{0\}$. Tomemos un pseudocomplemento $\bar{N} \supseteq N$ de P en M y observemos que ${}_Sl\left(\bar{N}\right)$ es no cero al ser M k-(co)nosingular debe suceder que $\bar{N} \not\leq^{ess} M$. Entonces para $\varphi \in S - \{0\}$ tal que $\varphi\bar{N} = 0$ se tiene que $\varphi N = 0$ y como ${}_Sl(N) = Sf$ entonces $\varphi(1-f) = 0$, $\varphi P = 0$ por lo que $\varphi((1-f) M) = 0$ y $\varphi\left(\bar{N} \oplus P\right) = 0$ y como $\bar{N} \oplus P \leq^{ess} M$. Al ser M k-nosingular se tiene que $\varphi = 0$ lo cual es un absurdo que viene de suponer N no es esencial en $(1-f) M$ por lo tanto M es extendible. □

Note que con las proposiciones anteriores hemos demostrado el siguiente:

Teorema 1.13. Si $M \in Mod - R$, entonces M es un módulo k-nosingular extendible si y solo si M es k-(co)nosingular de Baer.

La importancia del teorema anterior resaltará en capítulos posteriores ya que es una piezas clave para nuestra teoría a desarrollar.

Teorema 1.14. Si M es un módulo de Baer entonces todo sumando directo N de M es un módulo de Baer.

Demostración. Sea N un sumando directo de M y sea P un complemento para N en M, es decir, $M = N \oplus P$. Hagamos $S^{'}{=}End_R(N)$, entonces para todo $\varphi^{'} \in S^{'}$ existe $\varphi \in S$ definido como $\varphi = \varphi^{'} \oplus 0_P$, sea $I^{'} \leq S^{'}$ y

$$I = \left\{ \varphi \,|\, \varphi = \varphi^{'} \oplus 0_P, \varphi^{'} \in S^{'} \right\}$$

I no necesariamente es un ideal izquierdo de S, consideremos el ideal generado por I, $SI = \bar{I}$, entonces para todo $\varphi \in \bar{I}$ se tiene que $\varphi = \sum_{i \in \mathbb{N}} s_i \left(\varphi_i^{'} \oplus 0_P \right)$ y $s_i \left(\varphi_i^{'} \oplus 0_P \right)(P) = 0 = s_i(0) = 0, \varphi_i^{'} \in \bar{I}$.

Como M es un módulo de Baer $r_M\left(\bar{I}\right) \leq^{\oplus} M$, es decir, existe $Q \leq^{\oplus} M$ tal que $M = r_M\left(\bar{I}\right) \oplus Q$, como $P \subset r_M\left(\bar{I}\right) \leq^{\oplus} M$, entonces existe un complemento $L \subseteq r_M\left(\bar{I}\right)$ tal que $r_M\left(\bar{I}\right) = P \oplus L$, es decir, $L \leq M$ es un sumando directo de M, y así se tiene que $P \oplus N = M = r_M\left(\bar{I}\right) \oplus Q = P \oplus (L \oplus Q)$. Sea $\pi_N|_{Q \oplus L}{:}P \oplus (L \oplus Q) \longrightarrow N$ y notemos que $N \cong M/P$ y $Q \oplus L \cong M/P \cong N$ por lo que $\pi_N(Q \oplus L) \cong N$ entonces $\pi_N(Q) \oplus \pi_N(L) = N$, demostraremos que $r_M\left(I^{'}\right) = \pi_N(L)$.

En efecto, si $\varphi^{'} \in I^{'}$ entonces $\varphi^{'} \oplus 0_P \in \bar{I}$ y $\left(\varphi^{'} \oplus 0_P\right)(L) = 0$ pero todo elemento $l \in L$ se puede escribir como $l = \pi_N(l) + \pi_P(l)$. Como $\pi_P(l)$ es anulado por $\varphi^{'} {\oplus} 0_P$ entonces $\left(\varphi^{'} \oplus 0_P\right)\pi_N(l) = \varphi^{'} {\oplus} 0_P(\pi_N(l)) = 0$. Entonces $\left(\varphi^{'} \oplus 0_P\right)\pi_N(L) = 0$, entonces $\varphi^{'}(\pi_N(L)) = 0$, por lo que $\pi_N(L) \subset r_N\left(I^{'}\right)$, ya que $\varphi^{'} \in I^{'}$.

Ahora sea $n \in N - \pi_N(L)$ entonces $n = n_1 + n_2$ con $n_1 \in \pi_N(L)$ y $0 \neq n_2 \in \pi_N(Q)$. Como $\pi_{NQ \oplus L}$ es isomorfismo entonces existe $\bar{n}_2 \in Q$ tal que $\pi_N(\bar{n}_2) = n_2$ y $Q \cap r_M\left(\bar{I}\right) = 0$, *i.e* existe $\varphi \in \bar{I}$ tal que $\varphi(\bar{n}_2) \neq 0$ pero $\varphi = \sum_{i \in \mathbb{N}} s_i \left(\varphi_i^{'} \oplus 0_P\right)$, entonces existe un índice i_0 tal que $s_{i_0}\left(\varphi_{i0}^{'} \oplus 0_P\right)(\bar{n}_2) \neq 0$ y entonces $\left(\varphi_{i_0}^{'} \oplus 0_P\right)(\bar{n}_2) \neq 0$. Como se tiene una descomposición de $\bar{n_2} = \pi_N(\bar{n_2}) + \pi_P(\bar{n}_2)$, entonces $\varphi_{i_0}^{'}(\pi_N(\bar{n_2})) \neq 0$ si y sólo si $\varphi_{i_0}^{'}(n_2) \neq 0$ y $\pi_P(n_2) = 0$ bajo $\varphi_{i_0}^{'}$ por lo que $r_N\left(I^{'}\right) = \pi_N(L)$ el cual es un sumando directo de N. Por lo tanto N es un módulo de Baer. □

En general la clase de módulos de Baer no es cerrada bajo submódulos ni sumas directas. Por ejemplo, al considerar $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_2$ como $\mathbb{Z}$-modulo es de Baer (por la Proposición 2.10 ya que $\mathbb{Q}$ es k-nosingular, de hecho es no-singular y $\mathbb{Z}_2$ también es k-nosingular por ser simple) el submódulo $\mathbb{Z} {\oplus} \mathbb{Z}_2$ no es de Baer ya que el endomorfismo $\varphi(n, \hat{m}) = (\hat{n}, 0) \in \mathbb{Z} {\oplus} \mathbb{Z}_2$ cuyo núcleo es $2\mathbb{Z} {\oplus} \mathbb{Z}_2$ no es un sumando de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ por lo que submódulos de Baer no necesariamente son de Baer y sumas directas de módulos de Baer tampoco son de Baer ($\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_2$ son de Baer).

Con lo que tenemos desarrollado hasta el momento podemos dar una caracterización de los $\mathbb{Z}$-módulos finitamente generados de Baer.

Teorema 1.15. Si G un $\mathbb{Z}$-módulo finitamente generado, G es un $\mathbb{Z}$-módulo de Baer si y sólo si G es o bien semisimple o bien libre de torsión.

Demostración. Sea G semisimple entonces todo submódulo de G es sumando directo, por lo que G es de Baer. Ahora si G es libre de torsión y finitamente generado entonces es libre y así

$$G \cong \mathbb{Z}^n, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}.$$

Como $\mathbb{Z}^n$ es no singular y extendible(lo cual se demostrará en el capítulo 3 como un ejemplo) entonces por el Teorema 1.13, G es un módulo de Baer.

Supongamos ahora que G es finitamente generado de Baer, entonces

$$G = t(G) \oplus f(G)$$

donde $f(G)$ es la parte libre de torsión de G y $t(G)$ es la parte de torsión de G. Supongamos ahora que $t(G) \neq 0$ y $f(G) \neq 0$ entonces $t(G) \cong \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{{p_i}^{n(p_i)}}$, $n(p_i) \neq 0$ y $f(G) \cong \mathbb{Z}^n$.Sea $1 \leq j_0 \leq k$ y p_{j_0} el primo correspondiente a esa entrada. Consideremos el homorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_{{p_{j_0}}^{n(p_{j_0})}}$$

dado por $x \mapsto \bar{x}_0$. El núcleo de este homomorfismo es esencial en $\mathbb{Z}$. Extendemos φ a un endomorfismo $\bar{\varphi}$ de $G \cong \oplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{{p_i}^{n(p_i)}} \oplus \mathbb{Z}^n$ de la siguiente manera:

$$(x_{p_1}, \ldots, x_{p_k}, a_1, \ldots, a_n) \mapsto (0, \ldots, \bar{a_1}, 0 \ldots, 0).$$

Donde $\bar{a_1} = \varphi(\bar{a_1})$ está en la coordenada correspondiente a p_{j_0}. Notemos que $Nuc\bar{\varphi} \leq^{ess} G$. De hecho, $Nuc\bar{\varphi} = \oplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{{p_i}^{n(p_i)}} \oplus p_{j_0}^{n(p_{j_0})} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-1}$ pero $Nuc\bar{\varphi} \neq G$ por lo que G no es de Baer, lo cual es un absurdo. Por lo tanto $t(G) = 0$ o $f(G) = 0$.

Si $f(G) = 0$ entonces $t(G) = G$ *i.e* $G \cong \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{{p_i}^{n(p_i)}}$ donde $\mathbb{Z}_{{p_j}^{n(p_j)}}$ es de Baer, fijemos j con $1 \leq j \leq k$ y supongamos que $n(p_j) > 1$. Consideremos el morfismo

$$\varphi : \mathbb{Z}_{{p_j}^{n(p_j)}} \longrightarrow \mathbb{Z}_{{p_j}^{n(p_j)}}$$

Dado por $\varphi(x) = p_j x$. Notemos que φ no es cero ya que $\varphi_{p_j}(1) = p_j \neq 0$ y notemos que $Nuc\varphi \neq 0$ ya que $\bar{p}\bar{p}_j^{n(p_j)-1} = \bar{p}_j^{n(p_j)} = 0$. Como $\mathbb{Z}_{p_j^{n(p_j)}}$ es uniforme entonces $Nuc\varphi \neq \mathbb{Z}_{p_j^{n(p_j)}}$ de donde, $Nuc\varphi$ no puede ser sumando de $\mathbb{Z}_{p_j^{n(p_j)}}$. Por lo tanto $\mathbb{Z}_{p_j^{n(p_j)}}$ no es de Baer, lo que es una contradicción ya que G es de Baer, por lo que $n(p_j) = 1$, es decir, $t(G) = \bigoplus_{p \in P} \mathbb{Z}_p$, es decir, G es semisimple.

Por último, si $G = f(G)$ entonces $f(G) = \mathbb{Z}^n$ que es de Baer y libre de torsión.

□

La siguiente definición nos ayudara a dar otra caracterización de los módulos de Baer.

Definición 1.16. Sea $M \in Mod - R$ Diremos que M tiene la *propiedad de la intersección de los sumandos* si para cualesquiera dos sumandos directos $N, N^{'}$ de M su intersección $N \cap N^{'}$ es un sumando directo de M y diremos que M tiene la *propiedad generalizada de la intersección de los sumandos* si para toda familia $\{N_{\alpha \in I}\} \subset Sub_R(M)$ tal que $N_\alpha \leq^{\oplus} M$ para toda α entonces $\bigcap_{\alpha \in I} N_\alpha \leq^{\oplus} M$.

Proposición 1.17. Un módulo M es de Baer si y solamente si M tiene la propiedad generalizada de la intersección de los sumandos y el núcleo de cualquier elemnto de S es un sumando directo de M.

Demostración. Supongamos que M es de Baer. Sea $\{e_i\}_{i \in \Lambda} \in S$ donde $e_i^2 = e_i$ para toda $i \in \Lambda$ y sea $I = \sum_{i \in \Lambda} S(1 - e_i)$. Observemos que $Nuc(1 - e_i) \supset r_M(I)$ para toda $i \in \Lambda$ y sea $N = \bigcap_{i \in \Lambda} Nuc(1 - e_i) \supset r_M(I)$. Entonces para todo morfismo de I, $\sum_{i \in \Lambda} s_i(1 - e_i)$ se tiene que $\left(\sum_{i \in \Lambda} s_i(1 - e_i)\right)(N) = 0$ ($s_i = 0$ salvo un número finito de índices). Entonces $r_M(I) = N$ por lo que tenemos lo siguiente: $\bigcap_{i \in \Lambda} e_i M = N = r_M(I) \leq^{\oplus} M$. Por ser M de Baer entonces M satisface la propiedad generalizada de la intersección de los sumandos.

Y claramente por ser M un módulo Baer el núcleo de todo endomorfismo de M es un sumando directo.

Ahora veamos que si M es un módulo que satisface la propiedad generalizada de la intersección de los sumandos implica que M es un módulo de Baer.

Para esto sea $\varphi \in I$, para un ideal I de S tenemos que $r_M(M) \leq^{\oplus} M$ entonces $r_M(I) = \bigcap_{\varphi \in I} Nuc(\varphi) \leq^{\oplus} M$ ya que M tiene la propiedad generalizada de la intersección de los sumandos, de donde M es de Baer como se quería. $\square$

Uno de los objetivos inmediatos es probar (Proposición 1.22) que el anillo de endomorfismo de un módulo de Baer es un anillo de Baer. La siguiente proposición ayudará en el objetivo.

Proposición 1.18. *M es un módulo de Baer e inescindible si y solamente si todo $\varphi \in S$ no cero es monomorfismo.*

Demostración. Sea $\varphi \in S$ no cero, como M es de Baer inescindible entonces $r_M(\varphi) \leq^{\oplus} M$ por lo que $r_M(\varphi) = 0$ o bien $r_M(\varphi) = M$, la hipótesis garantiza que $\varphi \neq 0$ entonces $Nuc(\varphi) = 0$, es decir, φ es monomorfismo.

Recíprocamente supongamos que M no es inescindible, entonces sea $M = M_1 \oplus M_2$ una descomposición de M con $M_1, M_2 \neq 0$ sea

$$\pi_1 : M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_1$$

la proyección canónica en el factor M_1. Note que $Nuc\pi_1 = M_2$ por lo que π_1 no es monomorfismo, lo que es una contradicción, y por lo tanto M es de Baer. $\square$

Proposición 1.19 (Condición relativa de Rickart)**.** *Sea $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia de módulos de Baer, si $\bigoplus_{i\in\Lambda} M_i$ es un módulo de Baer entonces $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ satisface lo siguiente: Para todo (i_0, j_0) con $i_0 \neq j_0 \in \Lambda$ y $\psi \in Hom(M_{j_0}, M_{i_0})$, $Nuc\psi \leq^{\oplus} M_{j_0}$*

Demostración. Pongamos $M = \bigoplus_{i\in\Lambda} M_i$ y sean M_{j_0} y M_{i_0} sumandos de M con $i_0 \neq j_0$, consideremos un morfismo $\psi \in Hom(M_{j_0}, M_{i_0})$ ahora bien como M_{j_0} es un sumando directo de M entonces podemos extender el morfismo ψ a un endomorfismo de M digamos $\hat{\psi}$ como $\hat{\psi}_{|M_{j_0}} = \psi$ y $\hat{\psi} = 0$ para toda $i \neq j_0$ y así por ser M de Baer se tiene que el núcleo de tal morfismo es un sumando directo de M de hecho el núcleo de $\hat{\psi}$ es $Nuc(\hat{\psi}) = \bigoplus_{i\neq j_0} M_i \oplus Nuc(\psi)$ y por ende el núcleo de este morfismo en M_{j_0} es un sumando directo de M_{j_0} como se deseaba.

$\square$

Para los sumandos de los módulos k-nosingulares tenemos lo análogo a los módulos de Baer.

Proposición 1.20. Si M es un módulo k-nosingular y N un sumando directo de M, entonces N es k-nosingular.

Demostración. Sea $\varphi \in End(N)$ tal que $Nuc\varphi \leq^{ess} N$, probaremos que $\varphi = 0$.

Escribamos $M = N \oplus N'$ y extendamos φ a un endomorfismo de M. $\bar{\varphi} = \varphi \oplus 0|_{N'}$ y notemos que $Nuc(\bar{\varphi}) = Nuc(\varphi) \oplus N' \leq^{ess} N \oplus N' = M$. Entonces por k-nosingularidad se tiene que $\bar{\varphi} = 0$, es decir, $\varphi = 0$ para todo $\varphi \in End(N)$ por lo tanto N es k-nosingular. $\square$

Con lo anterior también tenemos la siguiente.

Proposición 1.21. Sea $M \in Mod - R$, k-nosingular, si X es esencial en un sumando directo N de M entonces N es único.

Demostración. Supongamos que N_1 no es único, es decir, existe $N_2 \neq N_1$ tal que $X \leq^{ess} N_1 \leq M$ y $X \leq^{ess} N_2 \leq M$ con N_1 y N_2 sumandos directos de M. Entonces $M = N_1 \oplus P_1 = N_2 \oplus P_2$ ($N_1 \subsetneq N_2$ y $N_2 \subsetneq N_1$). Sea $\varphi = \pi_{P_2} \circ \pi_{N_1}$, donde π_{P_2} y π_{N_1} denotan las proyecciones en los respectivos factores y observemos que $\varphi \neq 0$ ya que existe $x \in N_1 - N_2$ tal que $\pi_{P_2}(x) \neq 0$.

Ahora sea $m \in M$, escribámos a m, $m = n_1 + p_1$. Como $X \leq^{ess} N_1$ entonces existe $r \in R$ tal que $0 \neq n_1 r \in X$. Se sigue que $mr \neq 0$, $\varphi(mr) = \varphi(n_1 r + p_1 r) = (\pi_{P_2} \circ \pi_{N_1})(n_1 r + p_1 r) = \pi_{P_2}(n_1 r) = 0$ ya que $n_1 r \in X \leq^{ess} N_2$ *i.e* $Nuc\varphi \leq^{ess} M$. Como M es k-nosingular se tiene que $\varphi = 0$ lo que es un absurdo, por lo tanto se tiene que $N_1 = N_2$ $\square$

Regresando a Módulos de Baer.

Proposición 1.22. Sea M un módulo de Baer, entonces el anillo de endomorfismos S de M es un anillo de Baer.

Demostración. Sea $I \leq S$ un ideal izquierdo, como M es de Baer se tiene que $r_M(I) \leq^{\oplus} M$, entonces existe $e^2 = e \in S$ tal que $r_M(I) = eM$.

Probaremos que $r_S(I) = eS$, para ello sea $e\psi \in eS$ observemos que $Ie\psi = 0$ pues para toda $x \in M$ de donde se sigue que $Ie\psi(x) \subset IeM = 0$. Entonces $IeS = 0$ y $eS \subset r_S(I)$.

Ahora para $\varphi \in r_S(I)$ tenemos que, podemos escribir φ como $\varphi = e\varphi + (1-e)\varphi$. Como $I\varphi = 0$, $I\varphi(M) = 0$ entonces $I(\varphi(M)) = 0$, de donde $\varphi(M) \subset r_M(M) = eM$. Si $m \in M$ entonces $\varphi(m) = em'$, de donde $e\varphi(m) = em' = \varphi(m)$ de aquí se tiene que $e\varphi = \varphi$. Por lo tanto $\varphi \in eS$ y $eS = r_S(I)$ como se deseaba. $\square$

Proposición 1.23. Sea $M = \bigoplus_{i\in\Lambda} M_i$ y M_i es totalmente invariante en M para todo $i \in \Lambda$, entonces $\bigoplus_{i\in\Lambda} M_i$ es de Baer si y solo si M_i es de Baer para toda $i \in \Lambda$.

Demostración. Si M es de Baer entonces cualesquiera de sus sumandos directos es un módulo de Baer.

Ahora supongamos que M_i es de Baer para toda $i \in \Lambda$, por hipótesis M_i es totalmente invariante para toda i lo que implica que, $Hom\,(M_i, M_j) = 0$ para toda $i \neq j$. Entonces en el anillo de endomorfismos de M visto como anillo de matrices, cada endomorfismo solo tiene elementos no nulos en la diagonal.

Sea $I \leq_S S$, tenemos que $r_M\,(I) = \bigoplus_{i\in\Lambda} r_{M_i}\,(I \cap S_i)$,donde $S_i = End_R\,(M_i)$. Como en cada componente el anulador derecho es un sumando en M_i (por hipótesis), se tiene que $r_M\,(I) = \bigoplus_{i\in\Lambda} r_{M_i}\,(I \cap S_i) \leq^{\oplus} \bigoplus_{i\in\Lambda} M_i = M$ de donde M es de Baer. $\square$

Terminaremos este capítulo con un resultado que nos será útil en capitulos posteriores.

Lema 1.24. Sea M un módulo, y sea $M = M_1 \oplus M_2$ una descomposición tal que M_1, M_2 son totalmente invariantes en M.Si $N \leq^{\oplus} M$, entonces $N = N_1 \oplus N_2$ donde, $N_i = N \cap M_i$, con $i = 1, 2$.

Demostración. Claramente se tiene que $N_1 \oplus N_2 \subset N$. Para la otra contención, sea $n \in N$, por hipótesis $n = m_1 + m_2$ donde $m_i \in M_i$, $i = 1, 2$. Veamos que $m_i \in N \cap M_i$, como por hipótesis M_i es totalmente invariante en M, existen prerradicales $r_1, r_2 \in R{-}pr$ tales que $r_1\,(M) = M_1$ y $r_2\,(M) = M_2$ y asi se tiene que:

$$M_1 = r_1\,(M) = r_1\,(N) \oplus r_1\,(K)\, y M_2 = r_2\,(M) = r_2\,(N) \oplus r_2\,(K)$$

por ser r_1, r_2 prerradicales y así se tiene que

$$M = (r_1\,(N) \oplus r_1\,(K)) \oplus (r_2\,(N) \oplus r_2\,(K))$$

luego entonces, $m_1 = n_1 + k_1$ y $m_2 = n_2 + k_2$ por lo que se tiene que $n = m_1 + m_2 = n_1 + k_1 + n_2 + k_2$. Entonces $n + (-n_1 - n_2) = k_1 + k_2 \in N \cap K = 0$.

De donde $n = n_1 + n_2$, por lo tanto $N = N_1 \oplus N_2$. $\square$

Capítulo 2

k-nosingularidad

En este capítulo estudiamos aalgunas propiedades de la clase de módulos k-nosingulares, primero estableceremos la generalización de la no singularidad a la k-nosingularidad, luego analizaremos las sumas directas de módulos k-nosingulares para dar condiciones relativas para que la suma sea k-nosingular. Por último estudiaremos la relación estrecha entre la semisimplicidad del anillo R y los módulos k-nosingulares sobre él.

Comenzamos recordando la definición de k-nosingularidad.

Definición 2.1. Un módulo derecho M es *k-nosingular* si para todo endomorfismo $\varphi \in S$ con $Nuc\varphi \leq^{ess} M$ se tiene que $\varphi = 0$.

Proposición 2.2. Todo módulo no singular es k-nosingular.

Demostración. Supongamos que M es un módulo no singular que no es k-nosingular, por no ser k-nosingular, existe $\varphi \in S$ no cero tal que $Nuc\varphi \leq^{ess} M$. Como φ no es el morfismo cero existe $m \in M - Nuc\varphi$ no cero. Consideremos el conjunto $I = \{r \in R | mr \in Nuc\varphi\}$ y notemos que I es un ideal derecho de R como $Nuc\varphi$ es esencial en M entonces I es esencial en R y así $\varphi(m) I = 0$ con $\varphi(m) \neq 0$, es decir, $\varphi(m)$ es un elemento no cero de M con anulador esencial, lo cual es un absurdo ya que M es no singular. Por lo tanto M es k-nosingular. $\square$

La siguiente proposición establece a una clase de módulos que son k-nosingulares.

Proposición 2.3. Todo módulo poliforme es k-nosingular.

Demostración. Sea M un módulo poliforme (es decir, para todo morfismo $\varphi \in Hom\,(K, M)$ y $K \in Sub_R\,(M)$ tal que $Nuc\varphi \leq^{ess} M$ implica $\varphi = 0$), en particular para $K = M$, se sigue que M es k-nosingular. □

El recíproco a la proposición anterior no necesariamente es cierto. Por ejemplo para el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_p$ con p primo, notemos que este $\mathbb{Z}$-módulo es k-nosingular, pero no es no singular ya que todo elemento no cero, digamos $\hat{x} \in \mathbb{Z}_p$ tiene anulador esencial, a saber $p\mathbb{Z}$.

Aunque la no singularidad, la k-nosingularidad y els er poliforme no son condiciones que coinciden en módulos estas propiedades si se cumplen en cualquier anillo.

Proposición 2.4. Si R es un anillo entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(i) R es k-nosingular.

(ii) R es no-singular.

(iii) R es poliforme.

Demostración. Primero notemos que por las dos proposiciones anteriores solo necesitamos probar que la condición (i) implica las condiciones (ii) y (iii).

(i) $\Rightarrow$ (ii).

Tomemos $x \in R$ tal que x tenga anulador derecho esencial en R, pero notemos que

$$r_R\,(x) = \{r \in R | xr = 0\} = 0$$

por ser R, un R-módulo k-nosingular. Ya que todos los endomorfismos de R

$$\varphi \in End(R)$$

son de la forma $\varphi_r(x) = rx$ y así $Nuc\varphi = r_R(r)$ que por hipótesis son esenciales en R.

(i) $\Rightarrow$ (iii).

Tomemos $I \leq R$ y $f \in Hom\,(I, R)$ tal que

$$Nucf \leq^{ess} M.$$

Veamos que $f = 0$, supongamos que $f \neq 0$. Entonces existe $r \in I$ tal que $r \notin Nucf$, en particular $r \in R$. Ahora sea $(Nucf : r) = J$ el ideal trasladado por r que es esencial en R y notemos que $f\,(r)\,J = 0$. Es decir, $f\,(r)$ es un elemento de R con anulador esencial, lo que es un absurdo ya que R es no-singular por lo que $f = 0$. Por lo tanto R es poliforme. □

Definición 2.5. Para un módulo M definimos la parte *k-singular* de M como $Z^k(M) := \sum\{\varphi(M) : \varphi \in S \text{ y } Nuc\varphi \leq^{ess} M\}$.

Note que de la definición anterior se sigue que M es k-nosingular si y sólo si

$$Z^k(M) = 0$$

Proposición 2.6. Si M es un módulo derecho entonces $Z^k(M)$ es un submódulo totalmente invariante de M. Más aún $Z^k(M) \subseteq Z(M)$ donde $Z(M)$ es la parte singular de M.

Demostración. Para la primera parte primero obsérvese que al considerar cualquier endomorfismo $\psi \in S$ y $\varphi \in S$, tal que $Nuc\varphi \leq^{ess} M$, entonces $Nuc\varphi \subseteq Nuc(\psi\varphi)$ y así $Nuc(\psi\varphi)$ es esencial en M.

Ahora sea $x \in Z^k(M)$, entonces existen $f_1, ...f_n$ endomorfismos de M tales que $Nucf_i$ es esencial en M para toda $i \in 1, ...n$ y existen $x_1, ..., x_n \in M$ tales que $x = f_1(x_1) + ... + f_n(x_n)$. Entonces aplicando ψ a la expresión anterior se tiene que $\psi(x) = \psi f_1(x_1) + ... + \psi f_n(x_n)$. Por la observación previa cada ψf_i tiene núcleo esencial en M para toda i. Así $\psi(x) \in Z^k(M)$ por lo tanto $Z^k(M)$ es un submódulo totalmente invariante en M.

Probaremos ahora que $Z^k(M) \subseteq Z(M)$. Tomemos $x \in Z^k(M)$ entonces, como antes, x es de la forma $x = f_1(x_1) + ... + f_n(x_n)$ con $f_1, ...f_n$ endomorfismos de M con núcleo esencial y $x_1, ..., x_n \in M$. Sea $I_i = (Nucf_i : x_i)$ el ideal derecho trasladado por x_i. Como $Nucf_i$ es esencial en M, entonces I_i es un ideal derecho esencial en R, al considerar $I = \bigcap_{i=1}^n I_i$ el cual es un ideal esencial de R, puesto que es la intersección finita de ideales esenciales. Así se tiene que $xI = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)I = \sum_{i=1}^n f_i(x_iI) = 0$ ya que I_i lleva a m_i al núcleo de f_i para toda i. Por lo tanto x tiene anulador esencial, es decir, $x \in Z(M)$. $\square$

Proposición 2.7. Si $M = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ entonces $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} Z^k(M_\alpha) \subset Z^k\left(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha\right)$

Demostración. Por la proposición anterior sabemos que $Z^k\left(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha\right)$ es un submódulo totalmente invariante en M entonces observemos que

$$Z^k\left(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha\right) = \bigoplus\left(Z^k\left(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha\right) \cap M_\alpha\right).$$

Para esto tomemos un elemento $(x_\alpha) \in \bigoplus \left(Z^k \left(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha\right) \cap M_\alpha\right)$ este elemento lo podemos escribir de la siguiente manera, como

$$(u_\alpha \pi_\alpha x_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\alpha_i}(y_{\alpha_i})$$

Para algunos $y_{\alpha_i} \in M$ y $Nuc\varphi_{\alpha_i} \leq^{ess} M$ donde π_α denota la proyección de $\left(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha\right)$ en el factor $Z^k(M_\alpha)$ y u_α la inclusión en M_α. Entonces el juego de coordenadas

$$(x_\alpha) = \sum_\alpha (u_\alpha \pi_\alpha)(x_\alpha) = \sum_\alpha \left(\sum_{i=1}^{n_\alpha} \varphi_{\alpha_i}(x_{\alpha_i})\right) \in Z^k(M).$$

Para la otra contención tomemos $(x_\alpha) \in Z^k(M)$. Entonces lo pensamos como $\sum_\alpha (u_\alpha \pi_\alpha)(x_\alpha)$. Entonces este es un elemento de la forma $\sum_{i=1}^{n} \varphi_{\alpha_i}(x_{\alpha_i})$ para cada α *i.e.* $(x_\alpha) \in Z^k(M) \cap M_\alpha$.

Con ésto en mente, si fijamos un índice $\alpha \in \Lambda$, sea $x \in Z^k(M_\alpha)$ entonces $x = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \varphi_{\alpha_i}(x_{\alpha_i})$, $\varphi_{\alpha_i} \in End(M_\alpha)$ y $Nuc\varphi_{\alpha_i} \leq^{ess} M_{\alpha_i}$ para toda $i = 1, ..., n$, extendiendo cada φ_{α_i} a un endomorfismo de M definido por $\hat{\varphi}_{|M_\beta} = 0$ si $\beta \neq \alpha$ y $\hat{\varphi}|_{M_\beta} = 1$ si $\beta = \alpha$. Entonces para toda $1 \leq i \leq n$ se tiene que $Nuc\hat{\varphi} \leq^{ess} M$ *i.e.* $u_\alpha(x) = \sum \hat{\varphi}(u_\alpha(x_{\alpha_i})) \in Z^k(M) \cap M_\alpha$. Entonces $Z^k(M) \subset Z^k(M) \cap M_\alpha$ y esto para toda α entonces por la primera observación se tiene lo deseado. □

En general, para módulos de Baer la suma de módulos k-nosingulares no necesariamente es k-nosingular, de hecho el ejemplo es el mismo que después de 1.14. Con lo definido anteriormente podemos dar otra prueba diferente a la dada en 1.20.

Proposición 2.8. Si M es un módulo derecho k-nosingular y si $N \leq^{\oplus} M$ un sumando directo de M. Entonces N es k-nosingular.

Demostración. Tenemos que M se descompone como $M = N \oplus H$. Entonces por la proposición anterior $Z^k(M) \supseteq Z^k(N) \oplus Z^k(H)$. Por hipótesis $Z^k(M) = 0$, por lo que $Z^k(N) = 0$, es decir, N es k-nosingular. □

Definición 2.9. Sean M y N módulos derechos, diremos que M es *k-nosingular relativo* a N si para todo morfismo $\varphi \in Hom(M, N)$ tal que $Nuc\varphi \leq^{ess} M$ se tiene que $\varphi = 0$

Proposición 2.10. Si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de módulos entonces $M = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ es k-nosingular si y sólo si M_α es k-nosingular relativo a M_β para todos $\alpha, \beta \in \Lambda$.

Demostración. Supongamos que M_α es k-nosingular relativo a M_β. Veamos que M es k-nosingular. Tomemos $\psi \in S$ tal que $Nuc\psi \leq^{ess} M$, entonces $Nuc\psi \cap M_\alpha \leq^{ess} M_\alpha$ para toda α. Sea pues $\alpha \in \Lambda$ fijo. Podemos ver al endomorfismo ψ como $\psi = \oplus_{\beta\in\Lambda}\pi_\beta\psi_{|M_\alpha}$ donde π_β es la proyección de M en el factor M_β para cada β. Entonces $Nuc\psi_{|M_\alpha} = Nuc\psi \cap M_\alpha \leq^{ess} M_\alpha$. Como

$$Nuc\psi_{|M_\alpha} = \bigcap_{\beta\in\Lambda} Nuc\pi_\beta\psi_{|M_\alpha}$$

tenemos que $Nuc\pi_\beta\psi_{|M_\alpha} \leq^{ess} M_\alpha$. Entonces por k-nosingularidad relativa se tiene que $\pi_\beta\psi_{|M_\alpha} = 0$, para toda β. Entonces $\psi_{|M_\alpha} = 0$. Como α fue arbitrario entonces $\psi = 0$, es decir, M es k-nosingular.

Ahora bien, si M es k-nosingular entonces se tiene $Z^k(M) = 0$ por lo que $\bigoplus Z^k(M_\alpha) = 0$. Sea

$$f \in Hom(M_\alpha, M_\beta)$$

tal que $Nucf \leq^{ess} M_\alpha$. Podemos extender f a un endomorfismo F de M mediante $F = f \oplus 0_{|_{M'}}$ donde $M' = \bigoplus_{\beta\neq\alpha} M_\beta$. Por la k-nosingularidad tenemos que $F = 0$, así que $f = 0$. Por lo tanto M_α es k-nosingular relativo a M_β. □

Proposición 2.11. Sea M un R-módulo derecho tal que $E(M)$ es k-nosingular entonces M es k-nosingular.

Demostración. Sea $\varphi \in S$ tal que $Nuc\varphi \leq^{ess} M$, como $E(M)$ es inyectivo entonces podemos extender φ a un endomorfismo $\hat{\varphi}$ de $E(M)$ de tal forma que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & E(M) \arrow[d, "\hat{\varphi}"] \\ M \arrow[r] & E(M) \end{tikzcd}.$$

Como $Nuc\varphi \subseteq Nuc\hat{\varphi}$ entonces $Nuc\hat{\varphi} \leq^{ess} E(M)$ y por k-nosingularidad de $E(M)$ se tiene que $\hat{\varphi} = 0$ por lo que $\varphi = 0$. Por lo tanto M es k-nosingular. □

El recíproco de la proposición anterior es falso en general. Por ejemplo el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_p$ tiene cápsula inyectiva $E(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. $\mathbb{Z}_p$ es k-nosingular pero $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ no es k-nosingular ya que el endomorfismo $\alpha : \mathbb{Z}_{p^\infty} \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty}$ dado por $\alpha(x) = xp^n$ es no cero con núcleo esencial.

Definición 2.12. Diremos que dos módulos derechos M y N sobre un anillo R son *Rickart relativos* si para todo morfismo $\varphi \in Hom(M, N)$ el núcleo de φ es un sumando directo de M y para todo morfismo $\psi \in Hom(N, M)$ su núcleo tambien es un sumando de N.

En vista de la proposición 1.19 se tiene que cualesquiera dos módulos de Baer son Rickart relativos.

Teorema 2.13. Sea R un anillo entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(i) Todo $M \in Mod - R$ inyectivo es de Baer.

(ii) Todo $M \in Mod - R$ es un módulo de Baer.

(ii) R es semisimple artiniano.

Demostración. Como todo módulo derecho M sobre un anillo semisimple artiniano es semisimple entonces se tiene (iii)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$ (i).

(i)$\Rightarrow$(iii).

Tomemos un módulo derecho M sobre R, consideremos el módulo $B = E(M) \oplus E(E(M)/M)$ y observemos que B es inyectivo. Más aún, por hipótesis es de Baer. Sea $\varphi \in Hom(E(M), E(E(M)/M))$ dado por $\varphi(x) = x + M$, para toda $x \in E(M)$, entonces $Nuc\varphi = M$. Como $E(M)$ y $E(E(M)/M)$ son de Baer entonces son Rickart relativos por lo que M es un sumando directo de $E(M)$ pero $M \leq^{ess} E(M)$ por lo tanto $M = E(M)$. Entonces M es inyectivo y como M fue arbitrario entonces todo R-modulo derecho es inyectivo por lo que R es semisimple artiniano. $\square$

Corolario 2.14. Sea R un anillo entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Todo módulo derecho M es k-nosingular.

(ii) Todo módulo derecho M inyectivo es k-nosingular.

(iii) R es semisimple artiniano.

Demostración. (i)⇒(ii)

La clase de módulos inyectivos k-nosingulares son algunos de los módulos k-nosingulares.

(ii)⇒(iii)

Como todo módulo inyectivo es extendible (la prueba se dará a detalle en el capítulo siguiente), entonces por hipótesis todo módulo inyectivo es k-nosingular y extendible. Por 1.13 todo módulo derecho sobre R es de Baer y así por la parte (ii) del teorema anterior R es semisimple y artiniano.

(iii)⇒(i)

Como todo módulo derecho sobre R es semisimple entonces para todo endomorfismo $\varphi \in S$ no cero se tiene que $Nuc\varphi \leq M$ es un sumando directo de M por lo que el núcleo de φ no es esencial en M. Entonces si $Nuc\varphi \leq^{ess} M$ se debe de tener que $\varphi = 0$. Por lo tanto todo módulo derecho M sobre R es k-nosingular como se deseaba. □

Capítulo 3

Módulos k-nosingulares y relaciones con sus anillos de endomorfismos

Antes de analizar las relaciones de los módulos k-nosingulares con sus anillos de endomorfismos necesitaremos conceptos sobre cierta clase de módulos, a saber, módulos continuos, casi-continuos y sus relaciones con sus anillos de endomorfismos para ver despúes cómo se relacionan estos si el módulo es k-nosingular.

3.1. Módulos A-inyectivos

Definición 3.1.1. Sea $A \in Mod - R$ y N cualquier módulo, diremos que N es un módulo $A - \textit{inyectivo}$ si para todo submodulo X de A y todo morfismo $\varphi : X \to N$ existe $\hat{\varphi} \in Hom(A, N)$ tal que $\hat{\varphi}_{|X} = \varphi$, es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[dl, dashed, "\hat{\varphi}"] \\ N & \end{tikzcd}$$

Lema 3.1.2. Sea N un módulo A-inyectivo y B es un submódulo de A, entonces N es un módulo B-inyectivo.

Demostración. Si $C \leq B$ y $\psi \in Hom_R(C, N)$, consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'"'] \arrow[rr, bend left] & B \arrow[r] \arrow[dl, "\hat{\varphi}"] & A \arrow[dll, bend left, "\hat{\varphi}'"] \\ N & & \end{tikzcd}$$

donde $\hat{\varphi}$ es la restricción de $\hat{\varphi}'$ a C por lo que el triangulo pequeño conmuta. Por lo tanto N es tambien B-inyectivo. $\square$

Proposición 3.1.3. Si N es un R-módulo derecho entonces, N es A-inyectivo si y solo si N es $\langle a \rangle$-inyectivo para toda $a \in A$

Demostración. Si N es A-inyectivo entonces es aR-inyectivo por la proposición anterior.

Reciprocamente supongamos que N es un módulo $\langle a \rangle$-inyectivo, para X submódulo de A y $\varphi \in Hom(X, N)$, consideremos la familia $\mathcal{F}$ de parejas (C, ρ) tales que C es un submódulo de A que contiene a X y ρ es un morfismo de C a N que extiende a φ. Notemos que $(\mathcal{F}, \subset)$ es un conjunto parcialmente ordenado con la inclusión y es no vacio puesto que (X, φ) está en $\mathcal{F}$. Así se cumplen las hipótesis del lema de Zorn, por lo que existe una pareja (B, ψ) máxima tal que $X \leq B \leq A$ y $\psi : B \to N$ tal que extiende a φ. De la maximalidad notemos que $B \leq^{ess} A$ supongamos que $B \neq A$, consideremos un elemento $a \in A - B$ y sea $K = \{r \in R : ar \in B\}$. Entonces $aK \neq 0$. Definamos el morfismo $\mu : aK \to N$ como; $\mu(ak) = \psi(ak)$. Por hipótesis podemos extender a μ a un morfismo de aR, digamos $\bar{\mu} : aR \to N$. Ahora definamos $\chi : B + aR \to N$ mediante $\chi(b + ar) = \psi(b) + \bar{\mu}(ar)$. χ esta bien definida, ya que si $b + ar = 0$, entonces para $r \in K$ se tiene que bajo χ, $\psi(b) + \bar{\mu}(ar) = \psi(b) + \mu(ar) = \psi(b) + \psi(ar) = \psi(b + ar) = 0$, además el morfismo χ extiende a φ por lo que la pareja $(B + aR, \chi)$ es tal que contiene propiamente a B lo cual contradice la maximalidad de la pareja (B, ψ). Por lo que $B = A$. Por lo tanto N es A-inyectivo. $\square$

Proposición 3.1.4. Si $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq Mod - R$ es una familia de módulos y N es un módulo, entonces N es $\left(\bigoplus_{i \in I} A_i\right)$-inyectivo si y solamente si N es A_i-inyectivo para toda $i \in I$.

Demostración. Suponga que N es A_i-inyectivo para toda $i \in I$, llamemosle $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ tomemos $X \in Sub_R(A)$ y $\varrho \in Hom(X, N)$ cualquier morfismo. Queremos extender tal morfismo. Para esto primero consideramos la familia $\mathcal{A}$ de parejas de (B, ρ), donde ρ es un morfismo de B a N que exitiende a ϱ y B

es un submódulo de A que contiene a X. Notemos que ordenando a $\mathcal{A}$ con la inclusión el conjunto $(\mathcal{A}, \subset)$ es un conjunto parcialmente ordenado y no vacío puesto que la pareja (X, ϱ) está en $\mathcal{A}$ además $(\mathcal{A}, \subset)$ satisface las hipótesis del lema de Zorn, por tal motivo podemos encontrar un elemento máximo en tal familia. Sea pues (X', φ) un máximo, y notemos que por construcción φ no se puede extender a un morfismo ψ de K en N donde K contiene propiamente a X'. Más aún $X' \leq^{ess} A$. Lo que afirmamos es que $X' = A$. Supongamos que no, entonces exise un índice j de I y $a \in A_j$ tal que $a \notin X'$. Como por hipótesis N es A_j-inyectivo entonces por la proposición anterior es aR-inyectivo y así podemos construir un morfismo $\psi : X' + aR \to N$ tal que extiende a φ, lo que contradice la maximalidad de la pareja (X', φ). Por lo tanto se debe de tener que $X' = A$, es decir, N es A-inyectivo. El recíproco se obtiene por el lema 3.1.2. □

Proposición 3.1.5. Dada una familia de módulos $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, entonces el producto directo $\prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ es A-inyectivo si y solo si cada factor M_α es A-inyectivo para toda $\alpha \in \Lambda$.

Demostración. Es similar a la anterior. □

Definición 3.1.6. Un módulo Q se dice *casi-inyectivo o auto-inyectivo* si es Q-inyectivo.

Teorema 3.1.7. Un módulo N es A-inyectivo si y solo si $\psi A \leq N$ para todo $\psi \in Hom_R(E(A), E(N))$

Demostración. Como $E(N)$ es inyectivo, entonces es suficiente considerar $\psi \in Hom(A, E(N)$. Supongamos que $\psi A \leq N$ para todo morfismo $\psi \in Hom(A, E(N))$. Queremos ver que dado cualquier $X \in Sub_R(A)$ y cualquier $\varphi \in Hom(X, N)$ existe $\hat{\varphi} \in Hom(A, N)$ tal que $\hat{\varphi}_{|X} = \varphi$. Sea pues $X \leq A$ y $\varphi \in Hom(X, N)$. Como $E(N)$ es inyectivo entonces φ se extiende a un morfismo $\psi \in Hom(A, E(N))$ y como por hipótesis $\psi A \leq N$ entonces se tiene que ψ extiende a φ. Por tanto N es A-inyectivo.

Para un morfismo $\psi : E(A) \longrightarrow E(N)$ consideremos el submódulo $X = \{a \in A : \psi(a) \in N\} \leq A$. Al ser N un módulo A-inyectivo se tiene que si restringimos el morfismo ψ a X este se extiende a un morfismo $\nu : A \to N$, afirmamos que $N \cap (\nu - \psi)A = 0$. En efecto: si $n \in N$ y $a \in A$ son tales que $n = (\nu - \psi)(a)$, entonces

$$n = \nu(a) - \psi(a)$$

si y sólo si

$$\psi(a) = \nu(a) - n \in N.$$

Así $a \in X$, y entonces $n = \nu(a) - \psi(a) = \psi(a) - \nu(a) = 0$, lo que prueba la afirmación y como $N \leq^{ess} E(N)$ entonces $(\nu - \psi)A = 0$ por lo que $\psi A = \nu A \leq N$ como se queria. $\square$

Corolario 3.1.8. Un módulo Q es casi-inyectivo si y sólo si $fQ \leq Q$ para todo $f \in End(E(Q))$

Demostración. Se sigue del teorema anterior ya que Q es Q-inyectivo. $\square$

Definición 3.1.9. Si A y B son módulos tales que A es B-inyectivo y B es A-inyectivo, entonces diremos que A y B son *inyectivos relativos.*

Corolario 3.1.10. Si A y B son módulos inyectivos relativos tales que $E(A) \cong E(B)$ entonces $A \cong B$, de hecho cualquier isomorfismo

$$\psi : E(A) \to E(B)$$

restringido a A da un isomorfismo de A a B. Más aún A y B son casi-inyectivos.

Demostración. Sea $g : E(A) \to E(B)$ un isomorfismo. Como B es A-inyectivo, se tiene por 3.1.7 que $g(A) \leq B$. Similarmente $g^{-1}(B) \leq A$ por lo que $B = (gg^{-1})B = g(g^{-1}(B)) \leq g(A) \leq B$. Por tanto $g(A) = B$ y así $g_{|A} : A \to B$ es isomorfismo y A es A-inyectivo. $\square$

De 3.1.4 y 3.1.5 se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.1.11. $M_1 \oplus M_2$ es casi-inyectivo si y sólo si M_i es M_j-inyectivo $(i, j = 1, 2)$. En particular, todo sumando directo de un módulo casi-inyectivo es casi-inyectivo.

$\square$

Definición 3.1.12. Diremos que un módulo D es *directamente finito* si D no es isomorfo a ningun sumando directo propio de D.

Note que D es directamente finito si y sólo si $X = 0$, es el único módulo tal que $D \cong D \oplus X$.

Proposición 3.1.13. Un módulo D es directamente finito si y sólo si $fg = 1$ implica $gf = 1$ donde $f, g \in End(D)$

Demostración. Supongamos que D es directamente finito, sean $f, g \in End(D)$ tales que $fg = 1$ entonces $D = g(D) \oplus Nucf$ y por hipótesis D es directamente finito y $D \cong g(D)$, entonces $Nucf = 0$. Como f es suprayectiva por hipótesis, entonces f es isomorfismo por lo que $gf = 1$. Recíprocamente suponga que $D = B \oplus C$ donde $B \cong D$. Sea pues $\varphi : D \to B$ un isomorfismo, completamos φ a un endomorfismo $\hat{\varphi}$ de D definido como $\hat{\varphi} = \varphi^{-1} \oplus 0_{|C}$. Entonces $\hat{\varphi}\varphi = 1$ y por hipótesis se tiene que $\varphi\hat{\varphi} = 1$, por lo que $\hat{\varphi}$ es monomorfismo, por lo tanto $C = 0$. Como queriamos. $\square$

Lema 3.1.14. Si M no es directamente finito entonces $X^{(\mathbb{N})}$ se sumerge en M para algún módulo X no cero.

Demostración. Por hipótesis M no es directamente finito, entonces se tiene que si $M = A \oplus X$, con $A \cong M$ y $X \neq 0$ entonces $A = A_1 \oplus X_1$ con $A \cong A_1$ y $X \cong X_1$. Iterando este proceso obtenemos

$$A = A_n \oplus X_n \oplus \ldots \oplus X_2 \oplus X_1$$

donde $X_i \cong X$, $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto M contiene una suma directa inifinita numerable $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} X_i = X^{(\mathbb{N})} \hookrightarrow M$. $\square$

Proposición 3.1.15. Un módulo inyectivo M no es directamente finito si y solo si $X^{(\mathbb{N})}$ se sumerge en M para algun módulo $X \neq 0$

Demostración. Si M no es directamente finito por lo anterior se tiene lo deseado. Recíprocamente, pongamos $K = X^{(\mathbb{N})} \leq M$ con $X_i \cong X$ y $X \neq 0$. Sea $K_1 = X_1$ y $K_2 = \bigoplus_{i=2}^{\infty} X_i$, entonces $K = K_1 \oplus K_2$ con $K_2 \cong K$ por lo que $E(K)$ no es directamente finito. Como $E(K)$ es sumando directo de $M = E(M)$ entonces $M = E(K) \oplus N = E(K_1) \oplus E(K) \oplus N$, es decir, M no es directamente finito. $\square$

Definición 3.1.16. Sean $M, M' \in Mod - R$, diremos que M es *ortogonal* a M' si M y M' no comparten submódulos isomorfos no nulos.

Antes de continuar hacia nuestro primer teorema de descomposición de este capítulo, necesitaremos las siguientes nociones.

Consideremos una clase de módulos derechos $\mathcal{C} \subseteq Mod - R$, denotemos por $\mathcal{C}^{\perp} = \{N \in Mod - R : N$ es orotgonal a M para todo $M \in \mathcal{C}\}$, note que

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^{\perp\perp}$$

y $\mathcal{C}^{\perp} = \mathcal{C}^{\perp\perp\perp}$. Además $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\perp\perp}$ si y sólo si $\mathcal{C}$ es cerrada bajo isomorfismos, submódulos, extensiones esenciales y sumas directas, a tales clases de módulos se les conoce como *clases naturales* y son estudiadas a profundidad por Dauns y Zhou en [1]. A la dupla $(\mathcal{C}^{\perp}, \mathcal{C}^{\perp\perp})$ se le llama par ortogonal, es decir, una pareja de clases $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ tal que

$$\mathcal{A}^{\perp} = \mathcal{B} \text{ y } \mathcal{B}^{\perp} = \mathcal{A}$$

Al considerar una clase natural $\mathcal{C}$ y $M \in Mod - R$ cualquier módulo pensemos en el siguiente conjunto

$$\mathcal{F} = \left\{ \{H_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq Sub(M) : \{H_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \text{ es independiente y } H_\alpha \in \mathcal{C} \right\}$$

Primero obsérvese que $\mathcal{F}$ no es vacía puesto que de la definición las clases naturales siempre tienen el submódulo trivial como elemento. Lo que queremos encontrar es un elemento máximo en tal familia, primero notemos que podemos ordenar a $\mathcal{F}$ con la inclusión y así $(\mathcal{F}, \subset)$ es un conjunto parcialmente ordenado que cumple las hipótesis del lema de Zorn. Por tanto hay máximos, sea $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un elemento máximo en $\mathcal{F}$, pongamos $K = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} H_\alpha$ y consideremos una extensión esencial máxima de K digamos $\hat{K}$ en M. Por ser $\mathcal{C}$ natural entonces $\hat{K} \in \mathcal{C}$ de este modo hemos argumentado que podemos encontrar máximos con la propiedad de pertenecer a $\mathcal{C}$. El hecho anterior será crucial para nuestros teoremas de descomposición (para una prueba con lujo de detalle ver [1]).

Por último si la clase $\mathcal{C}$ es hereditaria, es decir, cerrada bajo submodulos e isomorfimos, entonces:

$$\mathcal{C}^{\perp} = \{M : M \text{ no tiene submodulos no cero en } \mathcal{C}\}$$

$$\mathcal{C}^{\perp\perp} = \{M : \text{ todo submódulo de M tiene un submodulo no cero en } \mathcal{C}\}$$

Entonces al par $(\mathcal{C}^{\perp}, \mathcal{C}^{\perp\perp})$ como antes, se le llama la clase $\mathcal{C}$-vacía y $\mathcal{C}$-llena respectivamente.

Definición 3.1.17. Sean A y B sumandos directos de un módulo M diremos que A es *perspectivo* a B si existe un submódulo X de M tal que $M = A \oplus X = B \oplus X$ y diremos que A es *superspectivo* a B si para todo submódulo X de M se tiene que $M = A \oplus X$ si y solo si $M = B \oplus X$, note que la relación de perspectividad es reflexiva y simetrica pero no transitiva, mientras que la relación de superspectividad es una relación de equivalencia.

Una descomposición $M = M_1 \oplus M_2$ con una propiedad P se dice única salvo superspectividades si para cualquier otra descomposición $M = N_1 \oplus N_2$ con la propiedad P, se tiene que M_1 es superspectivo a N_1 y M_2 es superespectivo a N_2. Diremos que la descomposición es única salvo isomorfismos si $M_1 \cong N_1$ y $M_2 \cong N_2$. Note que si la descomposición es única entonces es única salvo superspectividades y también que si es única salvo superspectividad entonces es única salvo isomorfismos.

Lema 3.1.18 (Argumento de la Proyección)**.** Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de módulos derechos, $x \in E(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$ no cero. Entonces existe $r \in R$ no cero, $\alpha \in \Lambda$ y $x_\alpha \in M_\alpha$ no cero tales que $xrR \cong x_\alpha R$ con $r_R(xr) = r_R(x_\alpha)$.

Demostración. Sea $\eta_\alpha : \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \to M_\alpha$ la proyección y $x \in \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$, denotemos por $sop(x)$ al soporte de x. Como $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \leq^{ess} E(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$, si $x \in E(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$ es no cero, entonces existe $t \in R$ tal que $xt \neq 0$ y $xt \in \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$. Como $sop(x)$ es finito, entonces la prueba se hará por inducción sobre $|sop(x)|$.

Supongamos que $|sop(x)| = 1$, entonces solo existe un indice $\alpha \in \Lambda$ tal que $\eta_\alpha(xt) \neq 0$, y si $x_\alpha = \eta_\alpha(xt)$ entonces $xrR \cong x_\alpha R$ y $r_R(xr) = r_R(x_\alpha)$. Ahora supongamos que si $0 < |sop(xr)| < n$ para alguna $r \in R$ entonces existe $\alpha \in \Lambda$ y $x_\alpha \in M_\alpha$ no cero tales que $xrR \cong x_\alpha R$ con $r_R(xr) = r_R(x_\alpha)$.

Supongamos que $|sop(xr)| = n$ y supongamos que existe $\alpha \in |sop(xt)|$ tal que $r_R(xt) = r_R(\eta_\alpha(xt))$., sea $x_\alpha = \eta_\alpha(xt)$ y por lo tanto $xtR \cong x_\alpha R$. Ahora, suponga que para toda $\alpha \in sop(xt)$ se tiene que $r_R(xt) \neq r_R(\eta_\alpha(xt))$. Sea $s \in r_R(\eta_{\alpha_0}(xt)) - r_R(xt)$ para alguna $\alpha_0 \in sop(xt)$, entonces $\eta_{\alpha_0}(xts) = 0$ y $xts \neq 0$, por lo que $0 < |sop(xts)| < n$. Por hipótesis de inducción se tiene que existen $\alpha \in \Lambda$ y $x_\alpha \in M_\alpha$ no cero tales que $xtsR \cong x_\alpha R$ con $r_R(xts) = r_R(x_\alpha)$. $\square$

Definición 3.1.19. Un módulo P se dice $puramente\ infinito$ si $P \cong P \oplus P$.

Con todo ésto en mente tenemos todos los ingredientes para nuestro Teorema de descomposición.

Teorema 3.1.20. Todo módulo inyectivo E tiene una descomposición $E = D \oplus P$ única salvo superspectividades donde D es directamente finito y P puramente infinito, más aún D y P son ortogonales.

Demostración. Primero veamos la existencia de tal descomposición. Considere la clase hereditaria $\mathcal{C} = \{X : X^{\mathbb{N}} \hookrightarrow E\}$ y la pareja $(\mathcal{C}^{\perp}, \mathcal{C}^{\perp\perp})$. Ahora bien, como se mencionó anteriormente existe (por el lema de Zorn) un módulo D que es $\mathcal{C}$-vacío y un módulo P que es $\mathcal{C}$-lleno máximos tales que $D+P$ es directa (de hecho es esencial) en E. Como E es inyectivo, $E = D \oplus P$. Ahora bien por construcción D y P son ortogonales, más aún, por la proposición 3.1.15, D es directamente finito.

Basta ver que P es puramente infinito. Aplicando el lema de Zorn podemos encontrar una familia independiente máxima $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ en P, donde Y_α es isomorfo a $X_\alpha^{\mathbb{N}}$, sea pues $K = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$, así

$$K \cong \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha^{\mathbb{N}} \cong \left(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha\right)^{\mathbb{N}} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Z_i$$

donde $Z_i \cong \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Sea $K_1 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} Z_{2n-1}$ y $K_2 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} Z_{2n}$, entonces $K = K_1 \oplus K_2$ y $K_1 \cong K \cong K_2$. Como P es inyectivo se tiene que $P = F \oplus N$ donde $N = E(K)$. Por la maximalidad de K, F es directamente finito. Además $N = E(K) = E(K_1) \oplus E(K_2) \cong N \oplus N$ y así N es puramente infinito.

Ahora bien, si consideramos el conjunto de todos los monomorfismos entre un submódulo H de F y N, podemos encontrar por el lema de Zorn un monomorfismo máximo $f : A \to N$. Así f ya no se puede extender a un morfismo de F en N. Por la inyectividad de P se tiene que H es un sumando directo de F y también que la imagen de H bajo f, $f(H)$ es un sumando directo de N. Pongamos $F = H \oplus H'$ y $N = f(H) \oplus N'$ entonces $f(H) \oplus N' = N \cong N \oplus N = f(H) \oplus N' \oplus N$. Como $f(H) \cong H$ y H es inyectivo y directamente finito se tiene por 1.29 en [8], que podemos cancelar, entonces $N' \cong N' \oplus N$. Como $N' \leq N$ y N es puramente infinito, $N' \cong N$, ya que en general si L es inyectivo se tiene una descomposición digamos $L = B \oplus P'$ con P' puramente infinito y si $B \hookrightarrow P'$ entonces $L \cong P'$. Pues si $B \hookrightarrow P'$ entonces $B^{\mathbb{N}} \hookrightarrow P'$ por ser P' puramente infinito y por tanto $\bigoplus_{\mathbb{N}} B_n \leq P'$ con $B_n \cong B$ para toda n. Por inyectividad de E se tiene que

$$P' = E(\bigoplus_{\mathbb{N}} B_n) \oplus C = E(B_1) \oplus E(\bigoplus_{n=2}^{\infty} B_n) \oplus C$$

es isomorfo a

$$B \oplus E(\bigoplus_{\mathbb{N}} B_n) \oplus C = B \oplus P' = L$$

Afirmamos que: $H' = 0$.

Supongamos que no es cero, como H' es $\mathcal{C}$-lleno H' contiene un submódulo no cero W tal que $W^{\mathbb{N}} \hookrightarrow E$, entonces $\bigoplus_{j=1}^{\infty} \leq E$ tal que $W_j \cong W$ para toda $j \in \mathbb{N}$., y como D es $\mathcal{C}$-vacío se tiene que $D \cap (\bigoplus W_j) = 0$ por 3.1.14. Por lo tanto $\bigoplus W_j \hookrightarrow P$. Como F directamente finito, $N \cap (\bigoplus W_j) \neq 0$, en otro caso se tendría que $\bigoplus W_j \hookrightarrow F$ lo cual es una contradicción (por ser F directamente finito) y así de nuevo por 3.1.14 existe $t \in \mathbb{N}$ y $T \leq N$ no cero tal que $T \leq N \cong N'$, entonces obtenemos un monomorfismo no cero $H' \geq H'' \overset{g}{\hookrightarrow} N'$. Pero entonces $H \oplus H'' \overset{f \oplus g}{\to} fH \oplus N' = N$ extiende a f, lo cual es un absurdo. Por lo tanto $H' = 0$ y así $F = H$ en otras palabras $F \hookrightarrow N$, aplicando el mismo argumento para ver que $N' \cong N$ se tiene que $P = F \oplus N \cong N$,*i.e.* P es puramente infinito.

Solamente falta probar la unicidad de la descomposición

Para ésto consideremos otra descomposición de E digamos $E = D' \oplus P'$ con las propiedades requeridas, es decir, que D' es un módulo $\mathcal{C}$-vacio y P' es un módulo $\mathcal{C}$-lleno. Como P' es puramente infinito se tiene que $P^{\mathbb{N}} \hookrightarrow P' \leq E$ y asi P' es $\mathcal{C}$-lleno.

Ahora consideremos a D' y $X \in \mathcal{C}$ no cero. Si $P' \cap (\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i) = 0$ entonces $\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i \hookrightarrow D'$ lo que es un absurdo pues D' es directamente finito. Así pues $P' \cap (\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i) \neq 0$. Entonces por el lema 3.1.14 existe una $t \in \mathbb{N}$ y un submódulo no cero P'' de P' tal que $P'' \hookrightarrow X_t \cong X \leq D'$ lo que contradice la ortogonalidad de D' y P'. Entonces se tiene que tener $X = 0$ y así D' es $\mathcal{C}$-vacio.

Por tanto la descomposición $E = D \oplus P$ es única (por lo tanto única salvo superspectividades). □

3.2. Propiedades: C_1, C_2 y C_3

En esta sección introducimos una clase de módulos llamados los módulos (casi)continuos, y veremos algunos aspectos de su estructura. La importancia (no sólo por sí mismos) de ellos en nuestro estudio resaltará más adelante, a saber cuando hablemos de la k-nosingularidad.

Proposición 3.2.1. Cualquier módulo M (casi)-inyectivo satisface las siguientes condiciones:

(1) Todo submódulo de M es esencial en un sumando directo de M.

(2) Si $M^{'} \leq M$ tal que $M^{'} \cong N^{'}$, donde $N^{'}$ es un sumando directo de, M entonces $M^{'}$ es un sumando de M.

Demostración. (1) Sea N un submódulo de M. Como $E(M) = E_1 \oplus E_2$ donde $E_1 = E(N)$, ahora observemos que en general, si A es un módulo casi-inyectivo entonces cualquier descomposición de $E(A) = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$ induce una descomposición de A, a saber, $A = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda}(A \cap E_\alpha)$. En efecto, si al considerar $p_\alpha : \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha \to \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$, entonces por el Corolario 3.1.8, se tiene que $p_\alpha(A) \leq A$ esto es, la E_α-componente de todos los elementos de A está en A, y esto ocurre para toda α, por lo que se $A = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda}(A \cap E_\alpha)$, entonces tenemos que $M = M \cap E_1 \oplus M \cap E_2$ y $N \leq^{ess} M \cap E_1$ y así (1) se cumple.

(2) Sea $M^{'} \overset{f}{\hookrightarrow} M$ un monomorfismo, con $M^{'}$ sumando directo de M. Por ser M un módulo M-inyectivo se tiene que $M^{'}$ es también M-inyectivo¨, entonces f se escinde, es decir, $f(M^{'}) \cong M^{'}$ y así (2) se cumple.

□

Proposición 3.2.2. Si M es un módulo que cumple (2) de la proposición anterior, entonces M cumple la siguiente propiedad:

Si M_1 y M_2 son sumandos de M tales que $M_1 \cap M_2 = 0$, entonces $M_1 \oplus M_2$ es un sumando de M.

Demostración. Escribamos $M = M_1 \oplus M_1^*$ y sea $\eta : M_1 \oplus M_1^* \to M_1^*$ la proyección en M_1^*. Entonces $M_1 \oplus M_2 = M_1 \oplus \eta(M_2)$. Como $\eta_{|M_2}$ es monomorfismo entonces, por hipótesis, ηM_2 es un sumando de M y como $\eta M_2 \leq M_1^*$ entonces $M_1 \oplus \eta M_2$ es un sumando directo de M como se quería. □

Diremos que un R-módulo (izquierdo ó derecho) M que tenga la propiedad (1) de la proposición 3.2.1 es de *tipo* (ó tiene la *propiedad*) C_1, notemos que esta propiedad (C_1) es la de ser un módulo extendible como se definio en el capítulo 1. Del mismo modo un módulo que cumpla la propiedad (2) de la proposición 3.2.1 diremos que es de *tipo* (ó tiene la *propiedad*) C_2 y si cumple la propiedad de la proposición 3.2.2 diremos que es de *tipo* (ó tiene la *propiedad*) C_3. Estamos en condiciones de definir a los módulos continuos y (casi)continuos.

Definición 3.2.3. Un módulo derecho M es un módulo continuo si es de tipo C_1 y C_2 y diremos que M es casi-continuo si es de tipo C_1 y C_3

De los comentarios anteriores se sigue que todo módulo inyectivo es continuo. Y el siguiente:

Lema 3.2.4. Para un módulo M se tiene:

(1) M satisface la propiedad C_1 si y solo si todo submódulo cerrado de M es un sumando directo de M.

(2) Un módulo M que sea inescindible es extendible si y sólo si M es uniforme. En particular todo módulo uniforme es casi-continuo.

□

Lema 3.2.5. Sean $M \in Mod - R$ y $A \leq M$. Si A es cerrado en un sumando de M, entonces A es cerrado en M.

Demostración. Pongamos $M = M_1 \oplus M_2$ tal que A es cerrado en M_1. Sea $\eta_{M_1} : M \to M_1$ la proyección canónica en M_1 y supongamos que $A \leq^{ess} B$ para algún $B \leq M$. Entonces observemos que $A = \eta_{M_1}(A) \leq^{ess} \eta_{M_1}(B) \leq M_1$. Como A es cerrado en M_1, entonces $A = \eta_{M_1}(B) \leq B$ por lo que $(1-\eta_{M_1})B \leq B$ y como $(1-\eta_{M_1})B \cap A = 0$ y $A \leq^{ess} B$ entonces $B = \eta_{M_1}(B)$. Por lo tanto $A = B$ esto es, A es cerrado en M. □

Corolario 3.2.6. Si un módulo derecho tiene la propiedad C_i para $i = 1, 2, 3$. Entonces cualquier sumando directo de el tiene la propiedad.

Demostración. Sea M un módulo con la propiedad C_1 y $N \leq M$ un sumando directo de M. Al considerar un submódulo cerrado A de N se sigue que A es cerrado en M y así A es un sumando directo de M en particular A es sumando de N y así por 3.2.4(1), N es un módulo de tipo C_1 C_1. De manera análoga se demuestra para C_2 y C_3 □

Estamos en condiciones de justificar el siguiente:

Ejemplo: $\mathbb{Z}^n$ es extendible.

Para ésto recordemos que un submódulo N de un módulo M no singular es cerrado si y sólo si M/N es no singular. En efecto supongamos que M es no singular y tomemos un submódulo N de M cerrado. Si $N = M$ entonces se tiene lo deseado. Supongamos que $N \neq M$. Por hipótesis existe un pseudo-complemento K de N no cero. Ahora al ser N cerrado por hipótesis N es pseudocomplemento para K en M por lo que $K \cong \frac{N \oplus K}{K} \leq^{ess} M/N$ y así K es no singular, por lo tanto $Z(M/N) = 0$. El recíproco es claro.

Con lo anterior en mente, tomemos K cerrado en $\mathbb{Z}^n$ como $\mathbb{Z}^n$ es no singular entonces el cociente $\mathbb{Z}^n/K$ es no singular, por lo tanto $\mathbb{Z}^n/K$ es finitamente generado y libre de torsión. Entonces $\mathbb{Z}^n/K$ es libre y en consecuencia es proyectivo por lo que la sucesión

$$0 \to K \to \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n/K \to 0$$

se escinde, es decir, K es sumando de $\mathbb{Z}^n$. Por la parte (1) de 3.2.4, $\mathbb{Z}^n$ es extendible. (Notese que con este argumento el teorema 1.15 queda justificado).

Teorema 3.2.7. Las siguientes condiciones son equivalentes para un Módulo derecho M.

(1) M es casi-continuo.

(2) Si X, Y son submódulos de M tales que cada uno es pseudocomplemento del otro, entonces M se descompone como $M = X \oplus Y$.

(3) $fM \leq M$ para todo endomorfismo idempotente en $End(E(M))$.

(4) Si $E(M) = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$, entonces $M = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda}(M \cap E_\alpha)$.

Demostración. Supongamos (1) y probaremos (2). Es decir, sea M casi-continuo y tomemos $X, Y \in Sub_R(M)$ como en la hipotesis en particular M tiene la propiedad C_1 y como X, Y son pseudocomplemento uno del otro, entonces son cerrados y así son sumandos y por la propiedad C_3 su suma es un sumando directo de M y es esencial en M por lo tanto $M = X \oplus Y$.

Ahora supongamos (2) y probemos (3). Sea $f \in End(E(M))$ idempontente y pongamos $A_1 = M \cap f(E(M))$ y $A_2 = M \cap (1-f)E(M)$. Sean B_1 complemento de A_2 que contenga a A_1 y B_2 complemento de B_1 que contenga a A_2, entonces $M = B_1 \oplus B_2$, por hipótesis. Ahora consideremos la proyección $\eta_{B_1} : M \to B_1$, lo que se afirma es que $M \cap (f - \eta_{B_1})M = 0$.

Para mostrar esto, sean $x, y \in M$ tales que $(f - \eta_{B_1})(x) = y$, entonces $f(x) = \eta_{B_1}(x) + y \in M$ y como $f(x) \in A_1$ y $(1-f)x \in M$ entonces $(1-f)x \in A_2$ y asi bajo η se tiene que $\eta(x - f(x)) = 0$. Esto es igual a que $\eta_{B_1}(x) - f(x) = 0$. Por lo tanto $\eta_{B_1}(x) = f(x)$, es decir, $y = 0$ lo cual prueba nuestra afirmación. Además, como $M \leq^{ess} E(M)$, entonces $(f - \eta_{B_1})M = 0$, por lo que $fM = \eta_{B_1}(M) \leq M$ como se quería.

Supongamos (3) y probemos (4). Es claro que $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}(M \cap E_\alpha) \leq M$. Sea $m \in M$, entonces $m \in \bigoplus_{i\in F\subseteq\Lambda} E_i$ con F finito, si escribimmos a $E(M)$ como $E(M) = \bigoplus_{i\in F\subseteq\Lambda} E_i \oplus E^*$, entonces existen elementos idempotentes ortogonales $f_i \in End(E(M))$, $i \in F$, tales que $E_i = f_iE(M)$. Por hipótesis

$f_iM \leq M$ por lo que $m = (\sum_{i\in F} f_i)(m) = \sum_{i\in F} f_i(m) \in \bigoplus(M \cap E_i)$. Por lo tanto $M = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda}(M \cap E_\alpha)$.

Finalmente supongamos (4) y probemos (1). Para esto tomemos un submódulo A de M arbitrario y veamos que este tiene la propiedad C_1. Escribamos a la capsula inyectiva de M como $E(M) = E(A) \oplus E^*$, entonces tenemos que $M = M \cap E(A) \oplus M \cap E^*$. Entonces $A \leq^{ess} M \cap E(A)$ como queriamos. Ahora veamos que cumple la propiedad C_3. Consideremos M_1 y M_2 sumandos de M tales que $M_1 \cap M_2 = 0$. Entonces tenemos que $E(M) = E_1 \oplus E_2 \oplus E^{'}$ donde $E_i = E(M_i)$ para $i = 1, 2$. Por (4) se tiene que $M = M \cap E_1 \oplus M \cap E_2 \oplus M \cap E^{'}$. Al ser M_i sumandos de M y $M_i \leq^{ess} M \cap E_i$ para $i = 1, 2$ entonces $M_i = M \cap E_i$ como queriamos. □

Proposición 3.2.8. Si la suma directa $M_1 \oplus M_2$ es un módulo casi-continuo entonces M_1 y M_2 son módulos derechos, inyectivos relativos.

Demostración. Mostraremos que M_2 es M_1-inyectivo.

Llamemos $M = M_1 \oplus M_2$, al tomar $X \in Sub_R(M_1)$ y $\varphi : X \to M_2$ un morfismo, para $B = \{x - \varphi(x) : x \in X\}$, notemos que $B \cap M_2 = 0$. Sea $M_1^{'}$ un pseudocomplemento de M_2 que contenga a B, entonces $M = M_1^{'} \oplus M_2$ por el teorema anterior. Ahora bien al considerar la proyección en el factor M_2, $\eta : M \to M_2$ para toda $x \in X$ tenemos que $0 = \eta(x - \varphi(x)) = \eta(x) - \eta(\varphi(x)) = \eta(x) - \varphi(x)$, por lo tanto $\eta_{|X} = \varphi$. En otras palabras η extiende a φ . Por lo tanto M_2 es un módulo derecho M_1-inyectivo. La prueba de que M_1 es M_2-inyectivo se hace de manera similar. Por lo tanto M_1 y M_2 son módulos derechos inyectivos relativos. □

Teorema 3.2.9. Si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de Módulos derechos sobre R tal que M_α es casi-continuo para toda α. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $M = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ es casi-continuo.

(2) $\bigoplus_{\beta\neq\alpha} M_\beta$ es M_α-inyectivo para toda $\alpha \in \Lambda$.

(3) M_α es M_β-inyectivo para toda $\alpha \neq \beta$.

Demostración. Por 3.1.4 y 3.1.5 se tiene (2) $\Leftrightarrow$ (3) y por el corolario anterior también tenemos (1) $\Rightarrow$ (2).

Sólo queda probar (2) $\Rightarrow$ (1). En vista del teorema 3.2.7 necesitamos probar que $eM \leq M$ para todo elemento idempotente, $e \in End(E(M))$, para ello notemos que es suficiente mostrar que para cada elemento idempotente e en el anillo de endomorfismo de $E(M)$ y $M = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ entonces $eM_\alpha \leq M$ para toda α.

Fijemos $\alpha \in \Lambda$, como M_α es M_β-inyectivo para toda α distinta de β, entonces M_α es $\bigoplus_{\beta\in\Lambda-\alpha} M_\beta$-inyectivo por hipótesis. Pongamos $N_1 = M_\alpha$ y $N_2 = \bigoplus_{\beta\in\Lambda-\alpha} M_\beta$, entonces N_1 es N_2-inyectivo y N_2 es N_1-inyectivo. Así que N_1 es casi-continuo. Sean E, E_1 y E_2 las cápsulas inyectivas de M, N_1 y N_2 respectivamente, entonces se tiene $E = E_1 \oplus E_2$ y

$$e = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}$$

donde $e_{ij} : E_j \to E_i$. Como N_2 es N_1-inyectivo, $e_{21}N_1 \leq N_2$ por 3.1.7 y así $eN_1 = e_{11}N_1 + e_{21}N_1 \leq e_{11}N_1 + N_2$. Sólo falta hacer ver que $e_{11}N_1 \leq M$.

Para ello notemos que $e^2 = e$ entonces $e_{11} = e_{11}^2 + e_{12}e_{21}$. Pongamos $a = e_{11}$ y $b = 1 - e_{11}$, entonces haciendo cálculos tenemos que $ab = ba$, luego $ab = ba = a - a^2 = e_{12}e_{21} \in End(E_1)$.

Si $K = Nuc(ab)$. Note que $aK \cap bK = 0$ ya que

$$e_{11}Nuc(e_{12}e_{21}) \cap (1 - e_{11})Nuc(e_{12}e_{21}) = 0.$$

Además $aK \leq Nuc(b) \leq Nuc(ab) = K$, por tanto

$$K = aK \oplus bK.$$

Como E_1 es inyectivo y $eN_1 = e_{11}N_1 + e_{21}N_1$, entonces

$$E(eN_1) = E(e_{11}N_1 \oplus E(e_{21}N_1))$$

es un sumando directo de E_1. Entonces

$$E_1 = E(eN_1) \oplus C = (E(e_{11}N_1) \oplus E(e_{21}N_1)) \oplus C.$$

Por lo tanto existen idempotentes ortogonales f y g en $End(E_1)$ tales que $E_1 = fE_1 \oplus gE_2$, y también si $aK \leq fE_1$ y $bK \leq gE_1$. Entonces $fK = f(aK \oplus bK) = f(aK) = aK$ por lo que

$$K \cap fE_1 \leq fK = aK \leq K \cap fE_1.$$

En otras palabras $K \cap fE_1 = aK \leq Nuc(b)$. Entonces $a|_{b(fE_1)}$ es monomorfismo, y como E_1 es inyectivo existe $\psi \in End(E_1)$ tal que $bf = \psi abf$ y

$\psi a_{|_{b(fE_1)}} = bf$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} bfE_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d] & E_1 \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ E_1 & \end{tikzcd}$$

Como N_1 es casi-continuo y además N_1 y N_2 son inyectivos relativos, por el teorema anterior y por el teorema 3.1.7 tenemos que

$$bfN_1 = \psi abfN_1 \leq \psi abN_1 = \psi e_{12}e_{21}N_1 \leq \psi e_{12}N_2 \leq N_1.$$

De manera análoga se prueba $agN_1 \leq N_1$. En resumen tenemos que:

$$aN_1 = a(f+g)N_1 = afN_1 + agN_1 = (-b)fN_1 + agN_1 \leq N_1.$$

Por lo tanto $e_{11}N_1 = aN_1 \leq N_1$, y así por el teorema anterior M es un módulo derecho que es casi-continuo. □

Definición 3.2.10. Un Módulo M se dice que es *cuadrado* si $M \cong X^2$ para algun módulo X. Un Módulo se dice que es *libre de cuadrados* si no contiene cuadrados no cero.

Definición 3.2.11. Un submódulo T de un módulo derecho M se dice que es *raiz cuadrado* si $T^2 \hookrightarrow M$. Y M se llama *lleno de cuadrados* si todo submódulo no cero N de M contiene un submódulo raiz cuadrado distinto de cero en M.

Proposición 3.2.12. Sea $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ un par ortogonal de clases de módulos.

(1) Si un módulo M tiene la propiedad C_1 entonces M se descompone como $M = A \oplus B$ con $A \in \mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{C}'$.

(2) Si M es casi-continuo, entonces la descomposición anterior es única salvo superspectividades.

Demostración. (1) Primero consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \left\{ \{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq Sub_R(M) : \{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathcal{C} \text{ y } \{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \text{ independiente } \right\}$$

Ordenando parcialmente esta familia con la contención de conjuntos se tiene que $(\mathcal{F}, \subset)$ cumple las hipótesis del lema de Zorn, por lo que la familia tiene elementos máximos. Sea $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uno de tales máximos en $\mathcal{F}$.

Sea C una extensión esencial máxima de $\bigoplus C_\alpha$ en M, observemos que si sucediera $C \subsetneq X \subseteq M$, con $X \in \mathcal{C}$ entonces C no es esencial en X por lo que existe un $K \leq X$ no cero tal que $C \cap K = 0$ como $X \in \mathcal{C}$ entonces $K \in \mathcal{C}$ por lo tanto se tiene que $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \cup \{K\}$ es independiente mayor que $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ lo cual contradice la maximalidad de la familia $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ por lo tanto C es máximo en $\mathcal{C}$.

Sea A como el C del parrafo anterior, por la propiedad C_1 se tiene que A es un sumando directo de M. Ahora escribamos $M = A \oplus B$. Aplicando el mismo argumento para B, tenemos que $B = L \oplus D$ donde L es máximo en $\mathcal{C}'$, resta ver que $D = 0$. Para esto suponga que no, como $C \in \mathcal{C}'$, se tiene entonces que $D \in \mathcal{C}$ por lo que $M = A \oplus (C \oplus D)$, por lo que D es un submódulo no cero en $\mathcal{C}$ lo cual contradice la maximalidad de A. Por lo tanto $D = 0$ y asi $M = A \oplus B$.

(2) Tomemos dos descomposiciones de M, digamos $M = A_1 \oplus B_1 = A_2 \oplus B_2$ tales descomposiciones con $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ y $B_1, B_2 \in \mathcal{C}'$¨. Veamos que A_1 es superspectivo a A_2. Suponga que $M = A_1 \oplus X$ entonces $B_1 \cong X$ por lo que $X \in \mathcal{C}'$ y asi $X \cap A_2 = 0$. Como X y A_2 son sumandos de M y M tiene C_2, entonces $X \oplus A_2$ es un sumando directo de M. Por lo que $M = (X \oplus A_2) \oplus Y$. Entonces $A_1 \cong (A_2 \oplus Y)$ y $(X \oplus Y) \cong B_2$ con $A_1 \in \mathcal{C}$ y $B_2 \in \mathcal{C}'$, entonces se debe de tener $Y = 0$. Entonces $M = A_2 \oplus X$. Como X fue arbitrario entonces A_1 es superspectivo a A_2. Similarmente B_1 es superspectivo a B_2.

□

Como en la sección anterior tenemos el teorema de descomposición para módulos casi-continuos.

Teorema 3.2.13. Un Módulo derecho M casi-continuo tiene una descomposición única salvo superspectividades $M = M_1 \oplus M_2$, donde M_1 es libre de cuadrados, M_2 es lleno de cuadrados y M_1, M_2 son ortogonales. Mas aún M_2 es M_2-inyectivo.

Demostración. La clase $\mathcal{C} = \{X : X^2 \hookrightarrow M\}$es una clase hereditaria. Por la parte (2) de la proposición anterior, M tiene una descomposición como $M = M_1 \oplus M_2$ donde M_1 es $\mathcal{C}$-vacío y M_2 es $\mathcal{C}$-lleno, por la construcción dada obsérvese que M_1 y M_2 son ortogonales y notemos que M_1 es libre de cuadrados por ser $\mathcal{C}$-vacio. Veamos que M_2 es lleno de cuadrados.

Para ello sea $N \in Sub_R(M_2)$ no cero, como M_2 es $\mathcal{C}$-lleno, se tiene que N contiene un submódulo T no cero tal que $T^2 \hookrightarrow M$. Como M_1 es $\mathcal{C}$-vacio por el lema 3.1.18, $T^2 \hookrightarrow M_2$, es decir, M_2 es lleno de cuadrados.

La auto-inyectividad de M_2, se sigue directo de 2.35 en [8], por ser lleno de cuadrados y casi-continuo.

□

Con lo que hemos desarrollado a lo largo de esta sección podemos demostrar el siguiente teorema que nos da condiciones necesarias y suficientes para que un módulo derecho casi-continuo sea directamente finito ó puramente infinito.

Teorema 3.2.14. Si M es un módulo casi-continuo entonces se tiene que:

(1) M es puramente infinito si y sólo si $E(M)$ es puramente infinito.

(2) M es directamente finito si y sólo si $E(M)$ es directamente finito.

Demostración. (1) Suponga que M es puramente infinito, es decir, $M \cong M \oplus M$, entonces $E(M) \cong E(M) \oplus E(M)$.

Recíprocamente supongamos que la capsula inyectiva $E(M)$ es un módulo puramente infinito, entonces $E(M) = E_1 \oplus E_2$ tal que $E(M) \cong E_1 \cong E_2$. Además como M es casi-continuo entonces se tiene por el Teorema 3.2.7 que $M = M_1 \oplus M_2$ donde $M_1 = M \cap E_1$ y $M_2 = M \cap E_2$ y por 3.2.8 M_1 y M_2 son inyectivos relativos. Como $E(M_1) \cong E(M_2)$ entonces por 3.1.10 $M_1 \cong M_2$, es decir, M_1 es un módulo M_1-inyectivo. Además por 3.1.4 y 3.1.5 M y M_1 son inyectivos relativos, en otras palabras M es puramente infinito.

(2) Si M no es un módulo directamente finito entonces $M \cong M \oplus X$ con $X \neq 0$. Por lo tanto $E(M) \cong E(M) \oplus E(X)$ con $E(X) \neq 0$, es decir, $E(M)$ no sería directamente finito.

Para el recíproco supongamos que $E(M)$ no es directamente finito, sabemos por 3.1.20 que $E(M)$ se descompone de manera única salvo superspectividades en $E(M) = D \oplus P$ donde D es directamente finito y P es puramente infinito. Por la casi-continuidad de M se tiene que $M = N_1 \oplus N_2$ donde $N_1 = M \cap D$ y $N_2 = M \cap P$. Como N_2 es casi-continuo y su cápsula inyectiva es puramente infinita, entonces por (1) N_2 es puramente infinito. Por lo tanto $M = N_1 \oplus N_2 \cong N_1 \oplus N_2 \oplus N_2 \cong M \oplus N_2$ y $N_2 \neq 0$, es decir, M no es directamente finito lo cual es un absurdo.

□

El Teorema anterior y junto con 3.1.20 y 3.2.7 se obtiene el siguiente:

Teorema 3.2.15. Todo Módulo M casi-continuo tiene una descomposición única salvo superespectividades $M = D \oplus P$ con D directamente finito y P puramente infinito, mas aún D y P son ortogonales.

$\square$

3.3. Anillos de endomorfismos

Esta sección está dedica al estudio del anillo de endomorfismos de módulos (casi) continuos, para ver relaciones entre ellos y tratar de responder bajo qué condiciones se heredan las propiedades C_1, C_2 y C_3 al anillo de Endomorfismos del módulo.

Lema 3.3.1. Sea $M \in R - Mod$, $S = End_R(M)$ y denotemos por

$$\Delta = \{\alpha \in S : Nuc(\alpha) \leq^{ess} M\}$$

entonces:

(1) Δ es un ideal de S.

(2) Si $\{e_i : i \in \Lambda\}$ es una familia de elementos idempotentes de S, ortogonales módulo Δ, entonces la suma $\sum_{i\in\Lambda} e_i M$ es una suma directa.

Demostración. (1) Sean a y b en Δ y $\alpha \in S$ entonces por definición $Nuc(a) \leq^{ess} M$ y $Nuc(b) \leq^{ess} M$. Como $Nuc(a) \cap Nuc(b) \subseteq Nuc(a-b)$ y $Nuc(a) \leq Nuc(\alpha a)$, se tiene que $Nuc(a-b)$ y $Nuc(\alpha a)$ son esenciales en M entonces $a - b \in \Delta$ y $\alpha a \in \Delta$. Ahora sea $N = \{n \in M : \alpha(n) \in Nuc(a)\}$. Note que $N \leq^{ess} M$ y $N \leq Nuc(a\alpha)$ por lo que $a\alpha \in \Delta$. Por lo tanto Δ es un ideal de S.

(2) Basta considerar una familia finita de elementos idempotentes e_i. Para $i \neq j$ se tiene que $e_ie_j \in \Delta$ ya que e_i y e_j son ortogonales módulo Δ. Como la intersección finita de submódulos esenciales es un submódulo esencial entonces existe un submódulo K de M esencial esencial en M tal que $e_ie_jK = 0$ para toda $i \neq j$ ahora $\sum_{i=1}^n e_iK$ es directa ya que si tomamos $x \in (e_iK) \cap (\sum_{i\neq j} e_jK)$ entonces $x = e_ik_i = \sum_{i\neq j} e_jk_j$ multiplicando por e_i la igualdad anterior se tiene que $e_ix = e_i^2x = x = 0$, ya que los e_i son ortogonales módulo Δ. Por lo tanto $\sum_{i=1}^n e_iK$ es directa y como $e_iK \leq^{ess} e_iM$ entonces $\sum_{i=1}^n e_iM$ es una suma directa como se quería. $\square$

Lema 3.3.2. Si $M = M_1 \oplus M_2$, si M_1 y M_2 son ortogonales entonces $S/\Delta \cong (S_1/\Delta_1 \times S_2/\Delta_2)$ donde $S_1 = End(M_1)$ y $S_2 = End(M_2)$. El recíproco es válido si M_1 y M_2 son inyectivos relativos.

Demostración. El anillo de endomorfimos de M es

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & Hom(M_2, M_1) \\ Hom(M_1, M_2) & S_2 \end{pmatrix}$$

Entonces para todo $s \in S$, s es de la forma

$$s = \begin{pmatrix} s_1 & \varphi \\ \psi & s_2 \end{pmatrix}$$

Con $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$, $\varphi \in Hom(M_1, M_2)$ y $\psi \in Hom(M_2, M_1)$. Observese que ψ y φ se pueden considerar como elementos en S simplemente completandolos con el morfismo cero en su respectiva coordenada de M_1 y M_2. Denotemos por $\hat{\varphi}$ y $\hat{\psi}$ a las respectivas extensiones de φ y ψ. Como M_1 y M_2 son ortogonales, entonces $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \in \Delta$ y además $Nuc(s) \cap M_1 = Nuc(s_1) \cap Nuc\varphi$ y $Nuc(s) \cap M_2 = Nuc(s_2) \cap Nuc\psi$.

Probaremos primero que $s \in \Delta$ si y solamente si $s_1 \in \Delta_1$ y $s_2 \in \Delta_2$. Para ello supongamos $s \in \Delta$, entonces $Nuc(s) \leq^{ess} M$. Como $Nuc(s) \cap M_1 = Nuc(s_1) \cap Nuc\varphi \leq^{ess} M_1$ entonces $Nuc(s_1) \leq^{ess} M_1$ por lo tanto $s_1 \in \Delta_1$. Análogamente $s_2 \in \Delta_2$.

Ahora si $s_1 \in \Delta_1$ y $s_2 \in \Delta_2$, como $Nuc\varphi \leq^{ess} M_1$ y $Nuc\psi \leq^{ess} M_2$ entonces $Nuc(s_1) \cap Nuc\varphi \leq^{ess} M_1$ y $Nuc(s_2) \cap Nuc\psi \leq^{ess} M_2$ por lo tanto $Nuc(s) \leq^{ess} M$ y asi $s \in \Delta$. De lo anterior se sigue que

$$S/\Delta = \begin{pmatrix} S_1/\Delta_1 & 0 \\ 0 & S_2/\Delta_2 \end{pmatrix} \cong S_1/\Delta_1 \times S_2/\Delta_2.$$

Finalmente probaremos que el recíproco es cierto si suponemos que M_1 y M_2 son módulos inyectivos relativos.

Suponga que existe un submódulo $K \leq M_2$ no cero y $f : K \to M_1$ un monomorfismo. Por inyectividad relativa se tiene que existe $\varphi : M_2 \to M_1$ tal que $\varphi_{|_K} = f$. Note que $Nuc\varphi$ no es esencial en M_2. Sea:

$$s = \begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por hipótesis existen $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \Delta = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} + \Delta.$$

Por lo tanto

$s' = \begin{pmatrix} -s_1 & \varphi \\ 0 & -s_2 \end{pmatrix} \in \Delta$ si tiene núcleo esencial. Entonces $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \in$ Nuc(s') $\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} -s_1 & \varphi \\ 0 & -s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_1(m_1) + \varphi(m_2) \\ -s_2(m_2) \end{pmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow \varphi(m_2) - s_1(m_1) = 0, s_2(m_2){=}0$. Por lo que

$$0 \neq Nuc(s^{'}) \cap M_1 = Nuc(s_1) \leq^{ess} M_1$$

y

$$0 \neq Nuc(s^{'}) \cap M_2 = Nuc(s_2) \leq^{ess} M_2$$

de donde

$$\begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Delta$$

Por lo tanto $Nuc\varphi \leq^{ess} M$ lo cual es una contradicción, por lo tanto M_1 y M_2 son ortogonales.

□

Lema 3.3.3. Si M es un módulo derecho libre de cuadrados entonces S/Δ es un anillo reducido, en particular todos los elementos idempotentes de S/Δ son centrales.

Demostración. Tomemos $\alpha \in S$ tal que $\alpha^2 \in \Delta$, llamemosle K al $Nuc(\alpha^2)$ y sea $0 \neq L$ un complemento para $Nuc(\alpha)$ en M, entonces $Nuc(\alpha) \oplus L \leq^{ess} M$ y $K \leq^{ess} M$ y además $Nuc(\alpha) \geq \alpha(K \cap L) \cong K \cap L$, pero, por otro lado se tiene que $M \supseteq \alpha(K \cap L) \oplus (K \cap L) \cong (K \cap L)^2$, de donde se tiene (por ser M libre de cuadrados) que $K \cap L = 0$. Entonces $L = 0$, por lo que $Nuc\alpha \leq^{ess} M$ por lo tanto $\alpha \in \Delta$. □

Proposición 3.3.4. Si M es un módulo continuo, entonces S/Δ es un anillo regular (en el sentido de von Neumann) y $\Delta = J(S)$ donde $J(S)$ es el radical de Jacobson de S.

Demostración. Sea $\alpha \in S$ y L un complemento de $K = Nuc(\alpha)$, por hipótesis M es continuo, en particular es extendible por lo que L es un sumando directo de M. Ahora bien, $\alpha_{|_L}$ es un monomorfismo entonces, por la propiedad C_2, la imagen, $\alpha(L)$ es un sumando de M. Por lo tanto existe $\beta \in S$, tal que $\beta\alpha = 1_{|_L}$, por lo que $(\alpha - \alpha\beta\alpha)(K \oplus L) = (\alpha - \alpha\beta\alpha)(L) = 0$. Como $K \oplus L \leq Nuc((\alpha - \alpha\beta\alpha))$ y como $K \oplus L \leq^{ess} M$ entonces $Nuc((\alpha - \alpha\beta\alpha)) \leq^{ess} M$. Por lo tanto $\alpha - \alpha\beta\alpha \in \Delta$, es decir, S/Δ es un anillo regular, además de lo anterior se tiene que $J(S/\Delta) = 0$, por lo que $J \leq \Delta$.

Para la otra contención. Tomemos $a \in \Delta$, como $Nuc(a) \cap Nuc(1-a) = 0$ y $Nuc(a) \leq^{ess} M$, entonces $Nuc(1-a) = 0$. Así que $(1-a)M \leq M$ es un sumando directo por tener la propiedad C_2. Pero $(1-a)M \leq^{ess} M$ ya que $Nuc(a) \leq (1-a)M$ entonces $(1-a)M = M$. Por lo tanto $(1-a)$ es unidad en S y por ende $a \in J(S)$ de donde $\Delta = J(S)$ como se queria.

$\square$

Lema 3.3.5. Si M es casi-continuo entonces S/Δ tiene la propiedad C_3.

Demostración. Sea $\bar{S} = S/\Delta$.

Como M es casi-continuo entonces por 3.2.13, M se descompone como suma directa $M = M_1 \oplus M_2$ donde M_1 es libre de cuadrados, M_2 es M_2-inyectivo y M_1, M_2 son ortogonales. Entonces $\bar{S} = \bar{S}_1 \times \bar{S}_2$ por el lema 3.3.2. Como M_2 es continuo, entonces por la proposición anterior $\bar{S}_2$ es regular y como todo anillo regular cumple C_2 entonces $\bar{S}_2$ cumple C_3. Para ver que $\bar{S}_1$ tiene la propiedad C_3 tomemos idempotentes $\bar{e}$ y $\bar{f}$ de $\bar{S}_1$ tales que $\bar{e}\bar{S}_1 \cap \bar{f}\bar{S}_1 = 0$. Como $\bar{e}$ y $\bar{f}$ son centrales, por 3.3.3 se tiene que $\bar{e}\bar{f} = \bar{f}\bar{e} \in \bar{e}\bar{S}_1 \cap \bar{f}\bar{S}_1 = 0$. Por lo tanto $\bar{e}$ y $\bar{f}$ son ortogonales y así $\bar{e}\bar{S}_1 \oplus \bar{f}\bar{S}_1$ es un sumando de $\bar{S}_1$. $\square$

Sea M un módulo derecho y S su anillo de endomorfismo dado un elemento idempotente $\xi \in S/\Delta$ diremos que ξ se puede levantar a S si existe un elemento idempotente ζ en S tal que $\zeta = \xi$ en S/Δ.

Lema 3.3.6. Si M es un módulo casi-continuo, entonces todos los idempotentes módulo Δ se pueden levantar a S.

Demostración. Considere $\xi \in S$ tal que $\xi^2 - \xi \in \Delta$ y sea $K = Nuc(\xi^2 - \xi)$. Notese que $\xi K \cap (1-\xi)K = 0$. Pongamos $M = M_1 \oplus M_2$ tal que $\xi K \subseteq M_1$, y η la proyección en el factor M_1, $\eta : M \to M_1$, entonces $(\eta - \xi)K \subseteq (\eta - \xi)\xi K + (\eta - \xi)(1-\xi)K = 0$. Como $K \leq^{ess} M$, entonces $\eta - \xi \in \Delta$. $\square$

Lema 3.3.7. Sea M un módulo casi-continuo y $\{e_i : i \in I\}$ una familia de elementos idempotentes en S, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) $\sum_{i\in I} e_iM$ es directa.

(2) Existen idempotentes ortogonales $\{f_i\}_{i\in I}$ tales que $e_iS = f_iS$ para toda $i \in I$.

(3) $\sum_{i\in I} \bar{e}_i\bar{S}$ es directa.

Demostración. (2)$\Rightarrow$ (3).

Como $e_iS = f_iS$ para toda i, basta probar que $\sum f_iS$ es una suma directa. Para esto tomemos $x \in f_iS \cap \sum_{i\neq j} f_jS$, entonces $x = f_ia_i = \sum_{i\neq j} f_j(a_j)$ entonces $f_i(a_i) = 0$. Por ortogonalidad $x = 0$. Por lo tanto $\sum f_iS$ es directa y en consecuencia $\sum_{i\in I} \bar{e}_i\bar{S}$ es directa.

(3)$\Rightarrow$(1) Es suficiente considerar una familia $\{e_i : i \in I\}$ que es finita. Como $\bar{S}_{\bar{S}}$ tiene la propiedad C_3 (por el lema 3.3.5), y como $\sum_{i\in I} \bar{e}_i\bar{S}$ es directa, entonces $\bigoplus \bar{e}_i\bar{S}$ es un sumando directo de $\bar{S}$, entonces existen idempotentes ortogonales $\{\bar{g}_i\}$ tales que $\bar{e}_i\bar{S} = \bar{g}_i\bar{S}$. Por el lema anterior los $\bar{g}_i$ los podemos levantar a idempotentes en S, entonces $\sum g_iM$ es directa por 3.3.1. Ahora pongamos $\bar{e}_i = \bar{g}_i\bar{e}_i$ entonces $\bar{e}_i - \bar{g}_i\bar{e}_i = \bar{0}$ y por lo tanto $e_i - g_ie_i \in \Delta$ por lo tanto existen submódulos esenciales K_i tales que $(e_i - g_ie_i)K_i = 0$. Notemos que $e_iK_i \leq g_iK_i$ Como $\sum g_iM$ es directa entonces $\sum e_iK_i$ pero por la propiedad C_1 se tiene que $e_iK_i \leq^{ess} e_iM$ para toda i. Por lo tanto $\sum e_iM$ es directa.

(1)$\Rightarrow$(2) Sea C_i una cerradura de $\sum_{j\neq i} e_jM$. Como M es un módulo casi-continuo se tiene que, $M = e_iM \oplus C_i \oplus D_i$ para álgun $D_i \leq M$. Note que $e_iM + C_i + (1 - e_i)D_i$ es directa y por lo tanto $D_i \leq e_iD_i \oplus (1 - e_i)D_i$. Así $M = e_iM \oplus C_i \oplus (1 - e_i)D_i$.

Considere $f_i : e_iM \oplus C_i \oplus (1 - e_i)D_i \to e_iM$ y $Nucf_i = C_i \oplus (1 - e_i)D_i$. Entonces $f_i^2 = f_i$ y $e_iM = f_iM$, por lo que $e_iS = f_iS$. Así $e_if_i = f_i$ y $f_ie_i = e_i$. Además como $e_jM \leq C_i$ para toda $j \neq i$, se tiene que $f_ie_j = 0$. Entonces $f_if_j = f_ie_jf_j = 0$. para toda $i \neq j$, por lo tanto f_i son ortogonales para toda i como se quería.

□

Teorema 3.3.8. Si M es un módulo derecho, M-inyectivo, entonces el anillo $\bar{S}_{\bar{S}}$ es casi-inyectivo y regular.

Demostración. Como M es M-inyectivo, en particular es continuo y así por la proposición 3.3.4, $\bar{S}$ es regular.

Ahora considere $\bar{A}$ un ideal derecho de $\bar{S}$ y $\varphi : \bar{A} \to \bar{S}$ cualquier morfismo. Consideremos una familia máxima independiente de ideales principales de $\bar{A}$ (que existe por el lema de Zorn) digamos $\left\{\bar{e}_i\bar{S}\right\}_{i\in I}$. Entonces $\bigoplus_{i\in I} \bar{e}_i\bar{S} \leq^{ess} \bar{A}$. Como $\bar{S}$ es regular, todos lo idempotentes módulo Δ se pueden levantar a S por 3.3.6. Así $\sum e_iM$ es directa por el lema 3.3.1. Pongamos $\varphi(\bar{e}_i) = \bar{x}_i = \bar{x}_i\bar{e}_i$ y definamos $\psi_i : e_iM \longrightarrow M$ mediante $e_im \longmapsto \bar{x}_i\bar{e}_im$. Tomemos, $\psi = \bigoplus_{i\in I} \psi_i$, entonces estamos en la situación:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in I} e_iM \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\psi"'] & M \arrow[dl, dashed, "\alpha"] \\
M &
\end{tikzcd}$$

donde α extiende a ψ (por M-inyectividad).

Entonces $0 = (\alpha - \psi_i)e_i = (\alpha - \bar{x}_i\bar{e}_i)\bar{e}_i$. Pasando a $\bar{S}$ se tiene que $0 = (\bar{\alpha} - \bar{x}_i\bar{e}_i)\bar{e}_i = (\bar{\alpha}_i - \varphi)\bar{e}_i$.

Sea $\bar{a} \in \bar{S}$, entonces existe un submódulo escencial $\bar{K}$ de $\bar{S}$ tal que

$$\bar{a}\bar{K} \leq \bigoplus_{i\in I} \bar{e}_i\bar{S}.$$

Así $(\bar{\alpha} - \varphi)(\bar{a})\bar{K} = (\bar{\alpha} - \varphi)(\bar{a}\bar{K}) \leq (\bar{\alpha} - \varphi)(\bigoplus_{i\in I} \bar{e}_i\bar{S}) = 0$. Como $\bar{S}$ es regular y entonces es no singular, se tiene que $(\bar{\alpha} - \varphi)(\bar{a}) = 0$. Por lo tanto $\bar{\alpha}(\bar{a}) = \varphi(\bar{a})$, para toda $\bar{a} \in \bar{A}$, en otras palabras $\bar{\alpha}$ extiende a φ.

□

Teorema 3.3.9. Si M es un módulo continuo Entonces $\bar{S}_{\bar{S}}$ es un anillo regular y continuo como $\bar{S}$-módulo derecho.

Demostración. Primero observe que $\bar{S}$ es regular en vista de la Proposición 3.3.4. Ahora sea $\bar{A} \leq \bar{S}$ un ideal derecho, como en el teorema anterior existen idempotentes e_i de S tales que $\bigoplus \bar{e}_i\bar{S} \leq^{ess} \bar{A}$. Consideremos una cerradura de $\bigoplus_{i\in I} e_iM$, digamos eM.

Afirmamos que: $\bigoplus_{i\in I} \bar{e}_i\bar{S} \leq^{ess} \bar{e}\bar{S}$.

Supongamos que $(\bigoplus_{i\in I} \bar{e}_i\bar{S}) \cap \bar{\zeta}\bar{S} = 0$, para algún $\bar{\zeta} \in \bar{e}\bar{S}$. Como $\bar{S}$ es regular, entonces los idempotentes módulo Δ se pueden levantar a un idempotente en S. Entonces $(\bigoplus_{i\in I} e_iS) \cap \zeta S = 0$. Como $\bar{e}\bar{\zeta} = \bar{\zeta}$ entonces $e\zeta - \zeta \in \Delta$ y consecuentemente $(e\zeta - \zeta)K = 0$, para álgun $K \leq^{ess} M$. Entonces se tiene que, $\zeta K \leq eM$. Por lo tanto $\zeta K = 0$ ya que $\bigoplus_{i\in I} e_iM \leq^{ess} eM$. Por lo que $\zeta \in \Delta$ y $\bar{\zeta} = \bar{0}$, es decir, $\bar{\zeta}\bar{S} = 0$, lo cual prueba nuestra afirmación.

Ahora sea $\bar{a} \in \bar{A}$, entonces

$$\bar{a}\bar{S} \cap (\bigoplus_{i\in I} \bar{e}_i\bar{S}) \leq^{ess} \bar{a}\bar{S} \cap \bar{A} = \bar{a}\bar{S}.$$

y

$$\bar{a}\bar{S} \cap (\bigoplus_{i\in I} \bar{e}_i\bar{S}) \leq \bar{a}\bar{S} \cap \bar{e}\bar{S} \leq \bar{a}\bar{S}.$$

por lo tanto $\bar{a}\bar{S} \cap \bar{e}\bar{S} \leq^{ess} \bar{a}\bar{S}$. Sin embargo, como $\bar{S}$ es regular, $\bar{a}\bar{S} \cap \bar{e}\bar{S}$ es generado por un idempotente. Entonces $\bar{a}\bar{S} \cap \bar{e}\bar{S} = \bar{a}\bar{S}$. Consecuentemente $\bar{a}\bar{S} \leq \bar{e}\bar{S}$ y se tiene que $\bar{A} \leq \bar{e}\bar{S}$. Como $\bigoplus_{i\in I} \bar{e}_i\bar{S} \leq \bar{A}$, entonces $\bar{A} \leq^{ess} \bar{e}\bar{S}$. Por lo que $\bar{S}$ cumple la propiedad C_1, y cumple la propiedad C_2 por ser regular. Por lo tanto se tiene que $\bar{S}$ es continuo. □

3.4. Anillos de endomorfismos de módulos k-nosingulares

En esta sección estudiaremos al anillo de endomorfismos de un módulo k-nosingular, también analizaremos algunas propiedades de anillos de Baer para después aplicar estas propiedades a anillos de endomorfismos de módulos k-nosingulares continuos. Por último se dan condiciones para que un Módulo de Baer sea un Módulo semisimple a saber, que todo submódulo cíclico sea un sumando directo ó que el módulo sea regular.

Proposición 3.4.1. Si M es un módulo k-nosingular y continuo entonces S es un anillo regular y es continuo como módulo derecho sobre sí mismo.

Demostración. Por ser M continuo se tiene $\bar{S}$ es un anillo regular y continuo por el Teorema 3.3.9. Además por ser M un módulo k-nosingular, $J(S) = \Delta = 0$, por lo tanto $\bar{S} = S$ como se quería. □

Proposición 3.4.2. Si M es un módulo derecho tal que S es un anillo regular, entonces M es k-nosingular.

Demostración. Tomemos un endomorfismo cualquiera $\varphi \in S$, con núcleo esencial en M, esto es $Nuc\varphi \leq^{ess} M$. Como S es regular, existe $\psi \in S$ tal que $\varphi\psi\varphi = \varphi$. Note que $\psi\varphi$ es idempotente y por lo tanto $Nuc(\psi\varphi)$ es un sumando directo de M, pero $Nuc\varphi \subseteq Nuc(\psi\varphi)$ por lo que $Nuc(\psi\varphi)$ es esencial en M. Como es un sumando se debe tener que $Nuc(\psi\varphi) = M$. Por lo tanto $\psi\varphi = 0$, por lo tanto $\varphi = 0$ y así M es un módulo k-nosingular.

□

Corolario 3.4.3. Si M es un módulo extendible tal que su anillo de endomorfismos S es un anillo regular, entonces M es de Baer y consecuentemente S es un anillo de Baer.

Demostración. Como M tiene anillo de endomorfismos regular entonces, por la proposición anterior M, es un módulo k-nosingular y por hipótesis es extendible así que, por el Teorema 1.13 M, es un módulo de Baer. Por 1.22 S, es un anillo de Baer. □

Proposición 3.4.4. Sea M un módulo tal que su anillo de endomorfismos S es un anillo semisimple, entonces M es un módulo de Baer.

Demostración. Como S es un anillo semisimple entonces es un anillo de Baer, y para todo ideal I de S se tiene que I es un sumando directo de S, entonces $I = Se$ donde e es un idempotente de S. Entonces, $r_M(I) = (1-e)M$ es un sumando directo de M por lo que M es un módulo de Baer.

□

Definición 3.4.5. Diremos que un módulo derecho M es *retraíble* si para todo submódulo no cero N de M, el $Hom(M, N) \neq 0$.

Proposición 3.4.6. Sea M un módulo retraíble, si M es un módulo k-nosingular, entonces S es un S-módulo derecho no singular.

Demostración. Tomemos $\varphi \in S$, tal que $r_S(\varphi)$ sea esencial en S. Veamos que $\varphi = 0$, para esto supongamos que $r_M(\varphi) = Nuc\varphi$ no es esencial en M, entonces existe un pseudocomplemento no cero N en M tal que $N \cap Nuc\varphi = 0$. Por ser M un módulo retraíble existe $\psi \in S$ no cero tal que $Im\psi \subseteq N$ pero $\psi\varphi \neq 0$ y entonces $\psi S \cap r_S(\varphi) = 0$ ya que para cualquier endomorfimo digamos ψ' la imagen de $\psi \circ \psi'$ esta en N, pero esto contradice la esencialidad de $r_S(\varphi)$. Por lo tanto se debe tener que $r_M(\varphi)$ es esencial en M. Por k-nosingularidad $\varphi = 0$ por lo que S es no singular. □

Teorema 3.4.7. Si M es un módulo retraible entonces M es un módulo de Baer si y solamente si S es un anillo de Baer.

Demostración. Ya sabemos que si M es un módulo de Baer entonces S es un anillo de Baer por 1.22.

Ahora supongamos que S es un anillo de Baer. Tomemos $I \leq S$ un ideal tal que $r_S(I) = eS$ donde e es un idempotente de S. Afirmamos que

$$r_M(I) = eM.$$

Para probar esta igualdad notemos $eM \subseteq r_M(I)$. Para la otra contención, supongamos que existe $m \in M - eM$ tal que $Im = 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $m \in (1-e)M$, por ser M un módulo retraíble existe un endomorfismo φ no cero tal que $Im(\varphi) \subseteq mR$. Entonces $I\varphi M \subseteq ImR = 0$, de donde $\varphi \in r_S(I)$ pero esto implica que $\varphi \in (1-e)S \cap eS = 0$. Lo cual es un absurdo por lo que se tiene la igualdad $r_M(I) = eM$ por lo tanto M es un módulo de Baer. □

Los siguientes resultados nos serán utiles para probar el teorema principal.

Proposición 3.4.8. Para cualquier anillo R. Las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) R satisface la condición ascendente de cadena para sumandos directos derechos.

(2) R satisface la condición descendente de cadena para sumandos directos izquierdos.

(3) R no tiene conjuntos infinitos de elementos idempotentes ortogonales.

Demostración. (1)$\Leftrightarrow$(2).

Observemos que si suponemos que $eR \subsetneq e'R$, donde e y e' son idempotentes, al tomar los anuladores izquierdos de e y e' se tiene que

$$R(1-e') \subsetneq R(1-e).$$

Está inclusión en este caso sigue siendo estricta ya que de lo contrario, si tomamos anuladores derechos a $R(1-e') \subseteq R(1-e)$ obtenemos que $eR = e'R$ lo cual es un absurdo. Con esta observación obtenemos las equivalencias (1) si y sólo si (2).

(1)$\Rightarrow$(3).

Suponga que R tiene un conjunto infinito de elementos idempotentes ortogonales no cero, digamos $\{e_1, e_2, \ldots, e_n \ldots\}$, pongamos $c_n = e_1 + e_2 + \ldots.. + e_n$ con $n \geq 1$ y notemos que c_n es idempotente para toda $n \geq 1$. También $c_{n+1}c_n = (e_1 + \ldots. + e_n + e_{n+1})(e_1 + \ldots. + e_n) = c_n^2 = c_n$ y $c_n c_{n+1} = c_n \neq c_{n+1}$. Lo cual implica que $c_n R \subsetneq c_{n+1} R$ para toda n. Así (1) no es cierto, por lo tanto R no tiene subconjuntos infinitos de elementos idempotentes ortogonales.

(3)$\Rightarrow$(2).

Suponga que existe $R = B_0 \supsetneq B_1 \supsetneq \cdots$ donde cada B_n es un sumando directo de ${}_RR$, entonces $B_{n-1} = A_n \oplus B_n$ donde los A_n son ideales izquierdos para toda $n \geq 1$ (de hecho los A_n son los complementos orotogonales de los B_n). Escribamos $1 = e_1 + f_1$ donde $e_1 \in A_1$ y $f_1 \in B_1$, además pongamos $f_1 = e_2 + f_2$ donde $e_2 \in A_2$ y $f_2 \in B_2$, y así sucesivamente. Entonces $A_n = Re_n$ y $e_n \neq 0$, mas aún tenemos que :

$$1 = e_1 + f_1 = e_1 + e_2 + f_2 = \cdots = e_1 + \cdots + e_n + f_n$$

es la descomposición de 1 con respecto a la descomposición del anillo en $R = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \oplus B_n$. Esto quiere decir que la familia $e_1, e_2, \cdots$ es una familia de idempotentes ortogonales no cero infinita lo cual contradice la hipotesis. Por lo tanto se cumple (2).

$\square$

Teorema 3.4.9. Si R es un anillo de Baer con sólo una cantidad numerable de elmentos idempotentes, entonces R no tiene conjuntos infinitos de elementos idempotentes ortogonales.

Demostración. Suponga que R tiene un conjunto infinito de idempotentes ortogonales, digamos $E = \{e_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Sean A y B subconjuntos no vacíos de E, tales que $A \neq B$. Como R es un anillo de Baer, $r_R(A) = f_a R$ y $r_R(B) = f_b R$ donde f_a y f_b son idempotentes de R. Veamos que son distintos. Si sucediera que $f_a = f_b$, entonces se tiene que $r_R(A) = f_a R = r_R(B) = f_b R$. Como $A \neq B$, podemos suponer que existe un idempotente no cero $e \in B$ tal que $e \notin A$ y así $e \in r_R(A) = f_a R$, es decir, $e = f_a r$ para algún $r \in R$. Entonces $f_a r \in f_b R$ y se tiene $e = ee = e(f_a r) = 0$. Por lo que $e = 0$, lo cual es un absurdo por lo que $f_a \neq f_b$. Por lo que R tiene una cantidad no numerable de idempotentes, lo cual contradice nuestra hipótesis general, por lo tanto R no tiene conjuntos infinitos de idempotentes ortogonales. $\square$

El siguiente teorema da condiciones necesarias y sufucientes para que un anillo de Baer tenga solamente una cantidad numerable de elementos idempotentes ortogonales.

Teorema 3.4.10. Sea R un anillo regular de Baer con solo una cantidad numerable de elementos idempotentes, entonces R es un anillo artiniano semisimple.

Demostración. Como R es un anillo de Baer, entonces para todo $a \in R$ se tiene que su anulador $r_R(a) = eR$ es un sumando directo de R. Además por hipótesis R tiene sólo una cantidad numerable de elementos idempotentes, entonces por el Teorema anterior R no tiene conjuntos infinitos de idempotentes ortogonales. Por la Proposición 3.4.8 inciso (1) R cumple la condición ascendente de cadena para ideales derechos que son sumandos directos(en nuestro caso para anuladores derechos). Como R es un anillo regular entonces todo ideal finitamente generado es generado por un idempotente y así R satisface la condición ascendente de cadena para ideales finitamente generados, y note que en general si un anillo satisface la condición ascendente de cadena para ideales finitamente generados entonces se tiene que si $I \leq R$ es cualquier ideal y en él consideramos $r_1 \in I$ y su generado $\langle r_1 \rangle$, podemos formar la cadena ascendente $\langle r_1 \rangle \subseteq \langle r_1, r_2 \rangle \subseteq \cdots = \langle r_1, r_2, ..., r_k \rangle$ de elementos de I y esta cadena se estaciona en un número finito por hipótesis y así $I = \langle r_1, r_2, ..., r_k \rangle$, en otras palabras todo ideal de R es finitamente generado. Por lo tanto R es neteriano. Además por ser R regular, todo submódulo de R es sumando directo de R. Por lo tanto R es artiniano semisimple. $\square$

Teorema 3.4.11. Si M es un módulo de Baer con solo un cantidad numerable de sumandos directos, entonces M no contiene sumas directas infinitas.

Demostración. Como M es de Baer, entonces S es un anillo de Baer por 1.22, además por hipótesis M tiene una cantidad numerable de sumandos directos, entonces S tiene una cantidad numerable de elementos idempotentes y así por el Teorema 3.4.9, S no tiene conjuntos infinitos de elementos idempotentes ortogonales. Por lo tanto no existen conjuntos infinitos de sumandos en M. $\square$

Lema 3.4.12. Sean $M \in Mod{-}R$ y $I \leq S$. Suponga que se tienen elementos idempotentes $\mu \in I$ y $\nu \in I$, tales que $\mu M \cap \nu M = 0$ y $\nu\mu = 0$. Entonces existe un idempotente $\lambda \in I$, tal que $\mu M \oplus \nu M = \lambda M$, es decir, $\mu M \oplus \nu M$, es un sumando directo de M.

Demostración. Pongamos $\eta = (1-\mu)\nu$ entonces $\eta \in I$ y $\nu\eta = \nu(1-\mu)\nu = \nu^2 = \nu$ mientras que $\eta^2 = (1-\mu)\nu\eta = (1-\mu)\nu = \eta$, es decir, es idempotente, además $\mu\eta = 0 = \eta\mu$.

Ahora como $\eta M = (1-\mu)\nu M = \nu M - \mu\nu M = \nu M$ y $\nu M = \nu\eta M \subseteq \eta M$ entonces $\nu M = \eta M$, como ν y η son ortogonales, se tiene que

$$(\mu+\eta)M \subseteq \mu M + \nu M = (\mu+\eta)(\mu M + \eta M)$$

y

$$(\mu+\eta)(\mu M + \eta M) \subseteq (\mu+\eta)M.$$

entonces $\mu M \oplus \nu M = \mu M + \eta M = (\mu+\eta)M$ y así el elemento idempotente es $(\mu+\eta)^2 = \mu+\eta \in I$. □

Lema 3.4.13. Sea $M \in Mod - R$, tal que todo submódulo cíclico de M es un sumando directo de M, entonces dados N un sumando de M y $m \in M$, existe $m^{'} \in M$ tal que $N + mR = N \oplus m^{'}R$. Por lo tanto $N + mR$ es un sumando de M.

Demostración. Sea N un sumando directo de M, entonces existe $e \in S$ idempotente tal que $eM = N$. Ahora $mR = emR + (1-e)mR \subseteq N \oplus (1-e)mR$, y la última suma es directa ya que $N \cap (1-e)M = 0$, entonces $N + mR \subseteq N \oplus (1-e)mR$ y como $(1-e)mR \subseteq mR + emR \subseteq mR + N$ entonces $N + mR = eM \oplus (1-e)mR$, lo cual prueba la primera afirmación. Ahora como $(1-e)mR$ es cíclico por hipótesis se tiene que existe $\nu \in S$ idempotente tal que $\nu M = (1-e)mR$. Así $N + mR = eM \oplus \nu M$ y por el lema anterior existe un idempotente $\lambda \in S$ tal que $eM \oplus \nu M = \lambda M$ y por lo tanto es un sumando directo de M. □

Lema 3.4.14. Sea $M \in Mod - R$ tal que todo submódulo cíclio es sumando directo, entonces todo submódulo finitamente generado de M es suma directa de cíclicos y todo submódulo finitamente generado de M es sumando directo de M.

Demostración. La prueba es por inducción sobre el número de sumandos. Note que basta mostrarlo para $n = 2$. Sea $C \leq M$ finitamente generado. Si $C = m_1R$ entonces por hipótesis C es un sumando directo de M. Ahora bien si $C = \langle m_1, m_2 \rangle$, entonces se tiene que, como $\langle m_1 \rangle$ es sumando directo, $M = m_1R \oplus K$ y así $C = m_1R + m_2R = m_1R \oplus \eta_K(m_2R) \subseteq m_1R \oplus K$. Por hipótesis $\eta_K(m_2R)$ es sumando directo de M y asi $C = m_1R \oplus \eta_K(m_2R)$ que es sumando de $m_1R \oplus K = M$. Por lo tanto C es sumando directo de M y es suma directa de submódulos cíclicos (por el lema previo). □

Definición 3.4.15. Si $M \in Mod-R$, diremos que M es un módulo *regular* si para todo $m \in M$ existe $f \in Hom(M, R)$ tal que $m = mfm$.

Note que submódulos de un módulo regular son regulares.

Proposición 3.4.16. Sea M un módulo regular, entonces todo submódulo finitamente generado de M es sumando directo de M y todo submódulo finitamente generado de M es suma directa de módulos cíclicos regulares.

Demostración. Por el lema anterior basta probar que todo cíclico mR de M es un sumando de M. Como $m = mfm$ con $f \in Hom(M, R)$ entonces $M = mR \oplus Nuc[f, m]$ (donde $[,]$ denota a la función R-bilineal $[,] : Hom(M, R) \times M \to End(M)$ dada por $m[f, n] = mfn$. Entonces $[f,]$ es un R-morfismo). Por lo tanto mR es un sumando directo de M. □

Estamos en condiciones de probar el teorema principal de este capítulo. Este teorema da condiciones necesarias para que un módulo de Baer sea un módulo semisimple.

Teorema 3.4.17. Si M es un módulo de Baer con solo una cantidad numerable de sumandos directos, tal que alguna de las siguientes condiciones se cumple:

(1) Todo submódulo cíclico de M es sumando directo de M.

(2) M es un módulo regular.

Entonces M es un R-módulo semisimple.

Demostración. **(1)**

Por hipótesis tenemos que todo submódulo cíclico de M es sumando directo de M. Entonces, por 3.4.14, todo submódulo finitamente generado de M es sumando directo de M y es suma directa de submódulos cíclicos.

Y así, como M sólo tiene una cantidad numerable de sumandos directos (por 3.4.11) M sólo tiene una cantidad finita de sumandos. Entonces el conjunto de submódulos finitamente generados de M satisface la condición ascendente de cadena y además como todo submódulo finitamente generado de M es sumando directo se tiene que M es semisimple.

(2)

Por hipótesis M es un módulo regular, luego por 3.4.16, todo submódulo finitamente generado de M es sumando directo y de hecho es suma directa de submódulos cíclicos regulares. Así estamos en las hipótesis de (1), por lo tanto M es semisimple.

$\square$

Proposición 3.4.18. Si M es un módulo de Baer inescindible entonces S es un dominio entero.

Demostración. Por 1.18 todo endomorfismo no cero es monomorfismo, por lo que S es un dominio. $\square$

Proposición 3.4.19. Si M es retraíble y S es un dominio entero, entonces M es un módulo de Baer inescindible.

Demostración. Por ser S dominio, S es un anillo de Baer y como por hipótesis M es retraíble, por 3.4.7, se tiene que M es de Baer. Además como S es dominio, entonces no tiene elementos idempotentes no cero por lo que M es inescindible. $\square$

Capítulo 4

La estructura de los módulos k-nosingulares

Una de las técnicas más usuales del álgebra es clasificar los objetos, estructuras, asi cuando uno tiene un resultado para determinar cierto tipo de estructura en un anillo éste es de gran importancia, ya que este tipo de estructura se verá reflejado, en los ideales o en su categoria de módulos esta es la idea central del capitulo, describir la estructura de los módulos k-nosingulares (continuos), para ello introduciremos una teoría de descomposición de estos módulos, que en esencia sigue la idea de Goodearl y Boyle dada [3] y que en efecto es una generalización de la teoría de descomposición que proponen siguiendo la linea del trabajo de Kaplansky en [5], en el cual se da una teoría de descomposición para anillos de Baer. Es por eso que nuestros tipos de descomposición llevan el nombre tipos de Kaplansky.

4.1. Tipos de Kaplansky

Proposición 4.1.1. Sea $M \in Mod - R$, k-nosingular y (casi)continuo, entonces M tiene la propiedad de la intersección de los sumandos además si dados cualesquiera dos sumandos directos de M, P y N se tiene que $P + N$ es un sumando directo de M.

Demostración. Como M es un módulo k-nosingular continuo, en particular es extendible. Por 1.13 M es un módulo de Baer, por lo tanto en vista de 1.17, M cumple la propiedad de la intersección de los sumandos.

Para ver que M cumple la segunda propiedad, consideremos dos sumandos M_1, M_2 de M y pongamos $N = M_1 \cap M_2$, que es un sumando directo de M por lo anterior. Entonces $M = M_1 \oplus K_1 = M_2 \oplus K_2 = N \oplus M_1^{'}$, por lo que existen $K_1^{'}$ y $K_2^{'}$ sumandos de M_1 y M_2 respectivamente, tales que $M_1 = K_1^{'} \oplus N$ y $M_2 = K_2^{'} \oplus N$. Entonces $M_1 + M_2 = K_1^{'} \oplus N \oplus K_2^{'}$ y por C_3 la suma anterior es directa.

□

Proposición 4.1.2. Si M es un módulo k-nosingular casi-continuo, entonces S como módulo derecho sobre si mismo satisface C_3. Mas aún si en general S_S satisface C_3 entonces M tiene la propiedad C_3.

Demostración. La primera afirmación es clara ya que por k-nosingularidad $\Delta = 0$ y así por 3.3.5 S tiene la propiedad C_3.

Para la segunda parte, consideremos dos sumandos de M, digamos N_1 y N_2 tales que $N_1 \cap N_2 = 0$, entonces existen elementos idempotentes e_1 y e_2 en S tales que $N_1 = e_1 M$ y $N_2 = e_2 M$. Como $Se_1 \oplus Se_2$ es un sumando directo de S por hipótesis, existe un idempotente $f \in S$ tal que $Sf = Se_1 \oplus Se_2$, veamos que $fM = e_1 M \oplus e_2 M$. Para esto tomemos $m^{'} \in fM$, entonces $m^{'} = f(m)$ pero $f = e_1 + e_2$ por lo que $fM \subseteq e_1 M \oplus e_2 M$. Recíprocamente si $m^{''} \in e_1 M \oplus e_2 M$ entonces $m^{''} = e_1 m + e_2 m$. Pero $e_1 m + e_2 m = f(m)$, por lo tanto $fM = e_1 M \oplus e_2 M$ como se quería. □

Proposición 4.1.3. Sea M un módulo k-nosingular continuo y $\varphi \in S$, entonces tanto $Nuc\varphi$ como $Im(\varphi)$ son sumandos directos de M

Demostración. Como M es k-nosingular continuo, en particular es extendible y así M es un módulo de Baer por lo que $Nuc\varphi$ es un sumando directo de M. Ahora pongamos $M = Nuc\varphi \oplus K$, entonces $\varphi_{|_K}(K)$ es isomorfo a un sumando de M (por tener M la propiedad C_2) así $\varphi(M)$ es un sumando de M. □

Proposición 4.1.4. Si M es un módulo k-nosingular continuo e inescindible, entonces S es un anillo con división.

Demostración. Como M es inescindible de Baer entonces por 1.18 todo endomorfismo no cero φ es monomorfismo y como S es un anillo regular existe $f \in S$ tal que $\varphi = \varphi f \varphi$. Entonces $1 = f\varphi$ por lo que S es con división.

□

Definición 4.1.5. Un módulo M es *abeliano* si todos los endomorfismos idempotentes de M son centrales, un idempotente $e \in S$ es *abeliano* si eM es un módulo abeliano.

Una proposición que se tiene ya con esta definición es:

Proposición 4.1.6. Todo módulo k-nosingular, libre de cuadrados es un módulo abeliano.

Demostración. Por 3.3.3 S/Δ es un anillo reducido, por ser M k-nosingular se tiene que $\Delta = 0$ y por lo tanto S es reducido y asi M es abeliano. $\square$

Teorema 4.1.7. Si $M \in Mod - R$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) M es abeliano.

(2) Todo sumando directo de M es totalmente invariante.

(3) Sumandos directos isomorfos de M son iguales.

(4) Si N_1 y N_2 son sumandos de M y $N_1 \cap N_2 = 0$ entonces

$$Hom(N_1, N_2) = 0.$$

Demostración. (1)⇒(2). Sea $N \leq M$ un sumando directo de M, entonces existe un elemento idempotente $e \in S$ tal que $eM = N$. Ahora como M es un módulo abeliano se tiene que para todo $\varphi \in S$, $\varphi(eM) = (e\varphi)M \subseteq eM$, por lo tanto eM es un submódulo totalmente invariante de M.

(2)⇒(3).

Sean N_1 y N_2 sumandos de M, y

$$\psi : N_1 \longrightarrow N_2 \text{ un isomorfismo.}$$

Pongamos $M = N_1 \oplus N_1'$, como N_2 es totalmente invariante en M se tiene que $N_2 = (N_2 \cap N_1) \oplus (N_2 \cap N_1')$. Ya que si consideramos las proyecciones $\eta_{N_1} : M \to N_1$ y $\eta_{N_1'} : M \to N_1'$, entonces $\eta_{N_1}(N_2) \subseteq N_2 \cap N_1$ y $\eta_{N_1'}(N_2) \subseteq N_2 \cap N_1'$ por lo que

$$N_2 \subseteq \eta_{N_1}(N_2) \oplus \eta_{N_1'}(N_2) \subseteq (N_2 \cap N_1) \oplus (N_2 \cap N_1') \subseteq N_2$$

Veamos ahora que $N_2 \cap N_1' = 0$. Para esto supongamos que esa intersección no es cero. Entonces $\psi^{-1}(N_2 \cap N_1') \leq N_1$ es un sumando directo de N_1 por lo que podemos construir un morfismo no cero $\hat{\psi}$ de N_1 en N_1' como $\hat{\psi}(\psi^{-1}(N_2 \cap N_1')) = \psi$ y cero en el complemento de $\psi^{-1}(N_2 \cap N_1')$. Esto es un absurdo ya que cualquier morfismo de N_1 en M se puede extender a un endomorfismo de M y N_1 es invariante bajo tal morfismo, por lo tanto $N_2 \cap N_1' = 0$ y asi se tiene $N_2 \subseteq N_1$, de igual forma $N_1 \subseteq N_2$ por ende $N_1 = N_2$.

(3)$\Rightarrow$(4).

Supongamos que se tiene un morfismo no cero $\varphi \in Hom(N_1, N_2)$ y pongamos $M = N_1 \oplus N_1'$ y $\eta_{N_1'} : M \to N_1'$ la proyección en tal factor. Entonces $\eta_{N_1'}\varphi$ es no cero ya que $N_1 \cap N_2 = 0$. Ahora consideremos el submódulo de M, $P = \left\{n + \eta_{N_1'}\varphi(n) : n \in N_1\right\}$, luego notemos que $P \cap N_1' = 0$ y que $P + N_1' = M$. Como $N_1 \subseteq P + N_1'$ se tiene entonces que $M = P \oplus N_1'$ por lo que $P \cong N_1$. Más aún, por hipótesis $P = N_1$ y por lo tanto $\eta_{N_1'}\varphi = 0$. Una contradicción. Por lo que $Hom(N_1, N_2) = 0$.

(4)$\Rightarrow$(1).

Sea $e \in S$ un elemento idempotente tal que $N_1 = eM$ entonces para la descomposición de M como $M = N_1 \oplus N_2$ se tiene que, al no haber morfismo no cero entre N_1 y N_2 y se cortan en el cero, N_1 y N_2 son submódulos totalmente invariantes en M. Así para cualquier endomorfismo $\varphi \in S$, sucede que $e\varphi(M) = e(\varphi M) \subseteq eM = N_1$, pero $\varphi(eM) \subseteq eM$ por lo tanto $e\varphi = \varphi e$. □

Proposición 4.1.8. (1) Si M es un módulo de Baer y abeliano, entonces todo sumando directo de M es un módulo de Baer y abeliano.

(2) Si $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia de módulos derechos sobre R, entonces $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ es de Baer y abeliano si y sólo si M_α es de Baer y abeliano para toda $\alpha \in \Lambda$ y $Hom(M_\alpha, M_\beta) = 0$ para todo $\alpha \neq \beta$.

Demostración. (1) Sabemos que todo sumando directo de un módulo de Baer es de Baer. Para ver que todo sumando directo es abeliano, tomemos $P \leq N$ sumando directo de N y N un sumando directo de M. Entonces P es un sumando directo de M y por lo tanto es totalmente invariante por (2) del teorema anterior. Ahora bien, todo endomorfismo de N se puede extender a un endomorfismo de M y asi P es un submódulo totalmente invariante de N. Por el teorema anterior N es abeliano.

(2) Si $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ es de Baer abeliano entonces cada factor es de Baer abeliano por el inciso anterior. En vista del teorema anterior (inciso (4)) se tiene que $Hom(M_\alpha, M_\beta) = 0$ para todo $\alpha \neq \beta$. Recíprocamente si $Hom(M_\alpha, M_\beta) = 0$ para todo $\alpha \neq \beta$, entonces M_α es totalmente invariante en $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ y así por 1.23 $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ es de Baer. □

Corolario 4.1.9. Si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de módulos derechos sobre un anillo R entonces $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ es un módulo abeliano, k-nosingular y (casi)continuo si y sólo si M_α es abeliano, k-nosingular y (casi)continuo para toda α y $Hom(N_\alpha, N_\beta) = 0$ para todo $N_\alpha \leq M_\alpha$ y $N_\beta \leq M_\beta$, $\alpha \neq \beta$.

Demostración. Supongamos que $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ es un módulo k-nosingular continuo abeliano, entonces por el lema anterior inciso (1) cada factor es abeliano para toda α. Mas aún, por 2.8 también cada factor es k-nosingular y por 3.2.6 es continuo. Ahora suponga que hay morfismo no cero entre $N_\alpha \leq M_\alpha$ y $N_\beta \leq M_\beta$. Como $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ es continuo se tiene por 3.2.8 que M_α y M_β son inyectivos relativos y así, si $\varphi : N_\alpha \to N_\beta$ es un morfismo no cero, entonces por inyectividad relativa de M_α y M_β se puede extender φ a un morfismo no cero de M_α a M_β. Esto contradice la parte (2) de la proposición anterior, por ende $Hom(N_\alpha, N_\beta) = 0$.

Recíprocamente, por la parte (2) de la proposición anterior $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ es abeliano y k-nosingular (por 2.10), la continuidad se sigue de 3.2.9.

□

Definición 4.1.10. Sea $M \in Mod - R$, un elemento idempotente $e \in S$ se dice que es directamente finito si eM es un módulo directamente finito.

Lema 4.1.11. (1) Todo Módulo abeliano es directamente finito.

(2) La clase de módulos directamente finitos es cerrada bajo sumandos directos.

(3) Para toda familia de módulos derechos sobre R, $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tal que

$$Hom(M_\alpha, M_\beta) = 0, \alpha \neq \beta$$

se tiene que $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ es directamente finito de Baer si y solo si M_α es directamente finito de Baer para toda $\alpha \in \Lambda$.

Demostración. (1). Sean $f, g \in S$ tales que $fg = 1$, entonces $(gf)(gf) = g(fg)f = gf$ y asi gf es idempotente. Como M es abeliano entonces todos los idempotentes son centrales, por lo que $1 = (fg)(fg) = f(gf)g = (gf)(fg) = gf$. Así en vista de 3.1.13 M es directamente finito.

(2). Sea $N \leq M$ un sumando directo de M. Veamos que N es directamente finito. Sean $f, g \in End(N)$ tales que $fg = 1$, entonces extendemos los morfismos f y g a endomorfismos de M, es decir, si $M = N \oplus N^{'}$ entonces $\hat{f} = f \oplus id_{N'}$ y $\hat{g} = g \oplus id_{N'}$. Entonces $\hat{f}\hat{g} = (f \oplus id_{N'})(g \oplus id_{N'}) = (fg \oplus id_{N'}) = 1$. Como M es directamente finito se tiene que $\hat{g}\hat{f} = 1$ por lo que $gf = 1$. Por lo tanto N es directamente finito.

(3). Ahora bien, si $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ es un módulo directamente finito de Baer entonces por 1.14 y el inciso anterior, M_α es de Baer directamente finito.

Recíprocamente como M_α es totalmente invariante en $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ para toda α, entonces por 1.23, $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ es un módulo de Baer. Veamos que es directamente finito, tomemos $f, g \in End(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$. Como $Hom(M_\alpha, M_\beta) = 0$ para todo $\alpha \neq \beta$ se tiene que $f(M_\alpha) \subseteq M_\alpha$. De igual forma para g. Así podemos descomponer cada endomorfismo de $End(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$, como $f = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha$ y $g = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} g_\alpha$ con $f_\alpha, g_\alpha \in End(M_\alpha)$. Así obtenemos $1 = fg = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha g_\alpha$ entonces $f_\alpha g_\alpha = id_{M_\alpha}$ y $g_\alpha f_\alpha = id_{M_\alpha}$ para toda α. Por lo tanto $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} g_\alpha f_\alpha = 1 = gf$. Por lo tanto $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ es directamente finito. □

Para un anillo R y $\mathcal{B}(R)$ el conjunto de idempotentes centrales de R. En $\mathcal{B}(R)$ introducimos el siguiente orden parcial: diremos que u esta relacionado con v, $u \prec v$ si y sólo si $vu = u$. Note que $\mathcal{B}(R)$ con ese orden resulta ser una retícula booleana más aún, si R es un anillo de Baer, entonces $\mathcal{B}(R)$ es una retícula completa. Con esto en mente daremos la siguiente:

Definición 4.1.12. Si R es un anillo de Baer y $x \in R$ un elemento cualquiera, *la cubierta central de* x denotada por $c(x)$, es el menor idempotente central $v \in R$ que satisface $vx = x$. Un idempotente $e \in R$ se dice *fiel* si $c(e) = 1$.

Definición 4.1.13 (Tipos de Kaplansky)**.** Sea R un anillo de Baer.

(i) Diremos que R es del *Tipo I* si tiene un idempotente abeliano fiel.

(ii) Diremos que R es del *Tipo II* si tiene un idempotente directamente finito fiel, pero no tiene idempotentes abelianos no cero.

(iii) Diremos que R es del *Tipo III* si no tiene elementos idempotentes centrales directamente finitos no cero.

Definición 4.1.14. Diremos que un anillo de Baer R es *$puramente\ infinito$* si no tiene idempotentes centrales directamente finitos.

Definición 4.1.15. Sea R un anillo de Baer diremos que R es del *Tipo* I_f si R es del Tipo I directamente finito, del *Tipo* II_f si R es del Tipo II directamente finito, además diremos que R es del *Tipo* I_∞ si es del Tipo I puramente infinito y por último diremos que R es de l*Tipo* II_∞ si R es del Tipo II puramente infinito.

Estamos en condiciones de enunciar el Teorema que nos dará descomposiciones dela clase los módulos k-nosingulares.

Teorema 4.1.16 (Descomposición en Tipos de Kaplansky)**.** Un anillo de Baer se descompone de manera única como la suma directa de anillos de Baer de Tipo I_f, Tipo I_∞, Tipo II_f, Tipo II_∞ y de Tipo III.

Daremos solamente un esbozo de la prueba y lo haremos para el Tipo I.

Demostración. Supongamos que tenemos dados idempotentes centrales de R, $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y sea u la menor cota superior de $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

Ahora supongamos que $u_\alpha R$ es de Tipo I, entonces existen idempotentes abelianos $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ con cubierta central $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ para cada α. Nuestra meta es probar que uR es de Tipo I.

Para esto consideremos el producto de los $\{e_\alpha\}_\alpha$ y el anulador derecho de tal elemento. Por ser R de Baer el anulador es de la forma $r_R(e_1 \cdot ... \cdot e_\alpha) = (1-e)R$. Notemos que $e_\alpha(1-e) = 0$, por lo que $e_\alpha = e_\alpha e$. Pongamos $f_\alpha = ee_\alpha$ y obsérvemos que $f_\alpha^2 = f_\alpha$. Afirmamos que $eu_\alpha = f_\alpha$.

En efecto, pongamos $x = eu_\alpha - f_\alpha$. Para $\beta \neq \alpha$ se tiene que $e_\beta x = e_\beta eu_\alpha - e_\beta ee_\alpha = e_\beta u_\alpha e - e_\beta e_\alpha = 0$. Ya que $u_\alpha u_\beta = 0$ y como $e_\beta e = e_\beta$, entonces $u_\beta \prec e_\beta$ y así $e_\beta x = 0$. Notemos que también $e_\alpha x = e_\alpha eu_\alpha - e_\alpha ee_\alpha = e_\alpha u_\alpha - e_\alpha = e_\alpha - e_\alpha$ por ser u_α cubierta central para e_α. Esto quiere decir que x anula a todos los e_α por lo que $x \in (1-e)R$. Luego $ex = 0$, pero por otro lado $x - ex = 0$. Entonces $x = ex$ y por lo tanto $x = 0$. De lo anterior se sigue que $eu_\alpha = f_\alpha = ee_\alpha$.

Afirmación:$c(e) = u$

Observemos que para toda α se tiene que $e_\alpha = e_\alpha u_\alpha = e_\alpha u_\alpha u = e_\alpha u$. Entonces $e_\alpha(1-u) = 0$ y así $e(1-u) = 0$, por lo que $e = eu$ y así $c(e) \prec u$. Para la otra desigualdad notemos que si multiplicamos por la izquierda los e_α por $e = ec(e)$, se tiene que $e_\alpha e = e_\alpha ec(e) = e_\alpha c(e)$, por lo que $u_\alpha \prec c(e)$ para toda α. Por ende $u \prec c(e)$ y por lo tanto $u = c(e)$.

e es abeliano

Notemos primero que f_α es abeliano. Definimos $e_\alpha Re_\alpha \xrightarrow{\varphi} f_\alpha Rf_\alpha$ mediante $x \mapsto ex$, entonces φ esta bien definida, ya que si $x = e_\alpha re_\alpha$ entonces $e(e_\alpha re_\alpha) = ee_\alpha re_\alpha ee_\alpha$. φ es morfismo de anillos, y notemos que si tenemos un elemento cualquiera en $f_\alpha Rf_\alpha$ digamos $y = ee_\alpha ree_\alpha$, entonces $\varphi(e_\alpha(re)e_\alpha) = ee_\alpha ree_\alpha = y$. Así φ es suprayectiva, de hecho es biyectiva, pues si tomamos $x \in e_\alpha Re_\alpha$ $x = e_\alpha re_\alpha$ tal que $ex = 0$, (es decir, $x \in (1-e)R$) entonces $x = e_\alpha x = e_\alpha ex = 0$ (ya que $e_\alpha = e_\alpha e$). En definitiva tenemos que φ es un isomorfismo.

Vía este isomorfismo los idempotentes centrales en $e_\alpha Re_\alpha$ son centrales en $f_\alpha Rf_\alpha$, por lo que f_α es abeliano. Sea $g \in eRe$ idempotente, veamos que conmuta con todos los elementos de eRe. Para esto probaremos que para cualquier $x \in eRe$ se tiene que $gx - xg$ anula a u_α para toda α (y así $xg - gx$ anulará a u). En efecto, como gu_α es idempotente en $f_\alpha Rf_\alpha$, f_α abeliano, entonces conmuta con todos los xu_α. En particular se tiene que $xu_\alpha = ereu_\alpha = erf_\alpha$ y así $gx - xg$ anula a u_α para toda α por lo tanto $gx - xg$ anula a u. Se sigue entonces que $gx = xg$ en eRe, o lo que es lo mismo, e es abeliano.

Por lo tanto uR es de Tipo I.

De manera análoga se prueba que si $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de idempotentes centrales ortogonales con u el menor tal que $u_\alpha u = u_\alpha$ y cada $u_\alpha R$ es de tipo II, entonces uR es de tipo II. De hecho en la prueba si hubieramos pedido que cada u_α fuera directamente finito para toda α, entonces u sería directamente finito y así uR sería del Tipo I_f.

□

Con este resultado en mente estamos listos para dar el Teorema de Descomposición para Módulos k-nosingulares extendibles.

Definición 4.1.17. Diremos que un módulo $M \in Mod - R$ k-nosingular extendible es de *Tipo* T si su anillo de endomorfismo $S = End(M)$ es de Tipo T donde $T \in \{I_f, I_\infty, II_f, II_\infty \text{ y } III\}$

Teorema 4.1.18. Un módulo M k-nosingular extendible se descompone de manera única en una suma directa de módulos totalmente invariantes de Tipo I_f, Tipo I_∞, Tipo II_f, Tipo II_∞ y de Tipo III.

Demostración. Por hipótesis M es k-nosingular extendible ergo M es un módulo de Baer por el Teorema 1.13. Por ende su anillo de endomorfismos S

es un anillo de Baer. Entonces por el Teorema anterior, podemos descomponer a S en una suma directa de anillos de tipos $I_f, I_\infty, II_f, II_\infty$ y III. Pongamos

$$S = Se_{I_f} \oplus Se_{II_f} \oplus Se_{I_\infty} \oplus Se_{II_\infty} \oplus Se_{III}.$$

Entonces esta descomposición induce una descomposición de M como $M = e_{I_f}M \oplus e_{II_f}M \oplus e_{I_\infty}M \oplus e_{II_\infty}M \oplus e_{III}M$, donde cada factor de la descomposición es totalmente invariante ya que cada idempotente involucrado es central.

Ahora el anillo de endomorfismo de cada sumando e_TM es de la forma $End(e_TM) = e_TSe_T = Se_T$ pues e_T es central para todo tipo T por lo que cada e_TM es de tipo T.

Sólo falta ver la unicidad. Para esto suponga que se tiene dada otra descomposición de M, digamos $M = f_{I_f}M \oplus f_{II_f}M \oplus f_{I_\infty}M \oplus f_{II_\infty}M \oplus f_{III}M$, donde cada factor es totalmente invariante en M. Así esta descomposición induce una descomposición del anillo S como

$$S = Sf_{I_f} \oplus Sf_{II_f} \oplus Sf_{I_\infty} \oplus Sf_{II_\infty} \oplus Sf_{III}.$$

Pero como S es de Baer entonces por el teorema anterior la primera descomposición para S es única. Por ende

$$Sf_{I_f} \oplus Sf_{II_f} \oplus Sf_{I_\infty} \oplus Sf_{II_\infty} \oplus Sf_{III} = Se_{I_f} \oplus Se_{II_f} \oplus Se_{I_\infty} \oplus Se_{II_\infty} \oplus Se_{III}$$

por lo que la descomposición de M es única.

$\square$

Corolario 4.1.19. Un módulo k-nosingular (casi)continuo se descompone de forma única como una suma directa de módulos de Tipo $I_f, I_\infty, II_f, II_\infty$ y III ortogonales.

Demostración. Sea M k-nosingular continuo, en particular M es k-nosingular extendible y por el teorema anterior M se descompone de manera única como $M = M_{I_f} \oplus M_{II_f} \oplus M_{I_\infty} \oplus M_{II_\infty} \oplus M_{III}$, donde cada sumando es k-nosingular continuo de Tipo T respectivamente. Más aún por ser M continuo, M_T y $M_{T'}$ son inyectivos relativos (por 3.2.8) para todo $T \neq T'$. Para la ortogonalidad, si existiera $N \leq M_T$ y $\varphi : N \longrightarrow M_{T'}$ un monomorfismo no cero, entonces por inyectividad relativa φ se extendería a un morfismo de M_T en $M_{T'}$ lo que es un absurdo, puesto que cada M_T es totalmente invariante en M para toda $T \in \{I_f, I_\infty, II_f, II_\infty \text{ y } III\}$. Por lo tanto M_T y $M_{T'}$ son ortogonales para toda $T \neq T'$. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la teoría de descomposición que acabamos de obtener es en efecto una generalización de la teoría que desarrollan Goodearl y Boyle en [3]. De hecho muestra que no siempre se puede usar la técnica que ellos usan para la descomposición de módulos inyectivos no singulares.

Ejemplo:

Sea p un número primo, sabemos que el $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z}_p$ es k-nosingular continuo de tipo I puesto que es simple. Considere la cápsula inyectiva de M $E(M) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ que es un módulo singular inyectivo, para el que la teoría desarrollada por Goodearl y Boyle no es aplicable. Este ejemplo muestra el hecho de que la teoría de tipos de descomposición para módulos k-nosingulares (casi)continuos no puede, en general, ser obtenida analizando la cápsula inyectiva del módulo en cuestión, es decir, descomponiendo a $E(M)$ en tipos I, II y III y luego por continuidad, descomponer a M.

4.2. Módulos k-nosingulares continuos de Tipo I, II y III

En esta sección se dan algunas equivalencias para que un módulo k-nosingular continuo sea de Tipo I y Tipo II, para los de Tipo III como se verá se tiene otro tipo de caracterización distinta de las de los módulos de Tipo I y II.

Lema 4.2.1. Si R es un anillo extendible nosingular y semiprimo y e es un elemento idempotente de R, entonces e es fiel si y solo si para todo $f \in R$, idempotente no cero se tiene que fRe es no cero.

Demostración. Suponga que e es fiel, como R es extendible se tiene que $ReR \leq^{ess} hR$ donde $h \in R$ es idempotente. Veamos que h es central.

En efecto, sea $x \in R$ arbitrario, entonces $xReR \subseteq ReR \subseteq hR$ y así $(1-h)xReR \subseteq (1-h)R \cap hR = 0$, por lo que $((1-h)xh)(ReR \oplus (1-h)R) = 0$. Pero $ReR \oplus (1-h)R \leq^{ess} R$ y como por hipótesis R es no-singular se tiene que $(1-h)xh = 0$. Luego $xh = hxh$ por lo que $(1-h)Rh = 0$ ya que x fue arbitrario. Por otro lado, como R es semiprimo por hipótesis, entonces $hR(1-h)hR(1-h) = 0$ se sigue que $hR(1-h) = 0$. Por lo que $hx(1-h) = 0$. Entonces $hx = hxh = xh$, por lo tanto h es central, y así $he = e$, por ser e fiel. Así $h = 1$ y entonces $ReR \leq^{ess} R$. Por último, si $f \in R$ es idempotente no cero, si sucediera que $fRe = 0$ entonces $fReR = 0$. Así por no singularidad se tendria que $f = 0$ lo que es un absurdo puesto que $f \neq 0$.

Recíprocamente si $h^2 = h$ es central en R, tal que $he = e$, como $(1-h)$ es central entonces $(1-h)Re = (1-h)Rhe \oplus (1-h)R(1-h)e = 0$, ya que $(1-h)re = (1-h)rhe + (1-h)r(1-h)e = r(1-h)he = r(he - he) = 0$. Por lo tanto $1 - h = 0$, entonces $h = 1$, es decir, e es fiel.

□

Teorema 4.2.2. Si M es un módulo k-nosingular continuo entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) M es de Tipo I.

(2) Todo sumando directo de M no cero contiene un sumando directo abeliano no cero.

(3) La suma de todos los sumandos directos abelianos es esencial en M.

Demostración. (1)⇒(2).

Si N un sumando directo de M, entonces existe $f \in S$ idempotente no cero tal que $N = fM$. Ahora bien como M es de Tipo I existe un idempotente $e \in S$ abeliano fiel. Más aún, se tiene por 3.4.1 que S es regular continuo. En particular es no singular y semiprimo y así, por el lema anterior se tiene que $fSe \neq 0$. Así existe $s \in S$ tal que $fse \neq 0$ y $fseM \subseteq fM$. Más aún por 4.1.3 $Nuc(fs)$ es un sumando directo de M y así $Nuc(fs_{|_{eM}}) = eM \cap Nuc(fs)$. Luego por 4.1.1 $Nuc(fs)$ es un sumando directo de eM y $Im(fs_{|_{eM}}) \cong eM/Nuc(fs_{|_{eM}})$, por ende $Im(fs_{|_{eM}})$ es un sumando directo de M por C_2. Ahora $Im(fs_{|_{eM}}) = fseM \cong eM/Nuc(fs_{|_{eM}})$ es un sumando directo de eM pero $eM/Nuc(fs_{|_{eM}})$ es abeliano ya que eM lo es, entonces $fseM$ es un sumando directo abeliano no cero de N.

(2)⇒(3).

Supongamos que la suma interna de todos los sumandos directos abelianos de M no es un submódulo esencial de M. Pero al tener M la propiedad C_1 la suma es esencial en un sumando directo de M, digamos N. Entonces si $M = N \oplus N'$, por (2) N' contiene un sumando directo abeliano y así $N \cap N' \neq 0$, lo que es un absurdo. Por lo tanto la suma de todos los sumandos directos abelianos de M es esencial en M.

(3)⇒(1).

Por el teorema 4.1.18, M se descompone de forma única en

$$M = M_I \oplus M_{II} \oplus M_{III}.$$

Tomemos un sumando directo abeliano de M, digamos N, como M_T es totalmente invariante en M para todo Tipo T, se tiene que por 1.24 que $N = (N \cap M_I) \oplus (N \cap M_{II}) \oplus (N \cap M_{III})$. Como sumandos directos de abelianos son abelianos y que M_{II}, M_{III} no contienen sumandos abelianos, se tiene que $N = N \cap M_I$. Entonces $N \subseteq M_I$ pero como por hipótesis la suma de todos los sumandos directos abelianos es esencial en M y está contenida en M_I. Por lo que se tiene $M_I \leq^{ess} M$ por lo tanto $M = M_I$. □

Teorema 4.2.3. Sea M un módulo k-nosingular extendible para el que su anillo de endomorfismos S es extendible y semiprimo, entonces son equivalentes:

(1) M es de Tipo I.

(2) Todo sumando directo de M contiene un submódulo no cero abeliano tal que es isomorfo a un sumando directo de M.

(3) La suma de todos los submódulos abelianos que son isomorfos a un sumando directo de M forman un submódulo esencial de M.

Demostración. Antes de comenzar la prueba, notemos que por k-nosingularidad y C_1, M es de Baer y entonces S es un anillo de Baer por lo que S es no singular y por hipotesis es semiprimo. Como en el teorema anterior y por el Lema 4.2.1 podemos encontrar un morfismo $\varphi : eM \longrightarrow N$ donde $e \in S$ es un idempotente fiel (que existe si suponemos (1)) y N es un sumando directo de M. Con esto en mente: (1)⇒(2).

Tomemos $N \leq M$ un sumando directo y $\varphi : eM \longrightarrow N$ el morfismo de la observación anterior donde $e \in S$ es un idempotente fiel. Por k-nosingularidad de M, como $\varphi \neq 0$ podemos restringirlo al complemento del sumando N en M donde $Nuc\varphi$ sea esencial. Así φ es monomorfismo y si lo restringimos a la imagen, resulta que será la imagen isomorfa de un submódulo abeliano de N (como en (1) si y sólo si (2) de la prueba anterior), por lo que todo sumando directo de M contiene un submódulo abeliano isomorfo a un sumando directo de M.

(2)⇒(3).

Por hipótesis todo sumando contiene un submódulo abeliano no cero isomorfo a un sumando directo de M. Como en la prueba anterior si la suma de ellos no es esencial por ser M extendible esa suma es esencial en un sumando directo de M. Descomponemos a M como la suma directa de ese sumando y su complemento que por hipótesis contiene un submódulo abeliano. Así no se cortan en el cero lo que es un absurdo. Por ende la suma de todos los submódulos abelianos que son isomorfos a un sumando directo de M es esencial en M.

(3)$\Rightarrow$(1).

Si descomponemos a M en tipos I, II y III. Por definición M_{II} y M_{III} no tienen abelianos no cero y por hipótesis todos los abelianos de M están en M_I. Más aún todos los submódulos de M isomorfos a un sumando abeliano de M estan también en M_I. Así M_I es un sumando esencial de M por lo tanto $M_I = M$. $\square$

Para los módulos k-nosingulares se tienen las siguientes equivalencias.

Teorema 4.2.4. Si M es k-nosingular continuo entonces son equivalentes:

(1) M es de Tipo II.

(2) Todo sumando directo no cero de M contiene un sumando directamente finito pero M no tiene sumandos abelianos.

(3) La suma de todos los sumandos directamente finitos de M forman un submódulo esencial en M, y M no contiene sumandos directos abelianos no cero.

Demostración. (1)$\Rightarrow$(2).

Como por hipótesis M es de Tipo II existe $e \in S$ idempotente fiel directamente finito. Además M no tiene idempotentes abelianos por hipótesis. Ahora sea N un sumando directo de M, entonces existe un idempotente $f \in S$ no cero tal que $fM = N$ y como S es continuo regular (por 3.4.1) entonces por el lema 4.2.1 se tiene que $fSe \neq 0$. Tomemos $s \in S$ no cero entonces fse es no cero y así se tiene que $fseM \subseteq fM$. Como en el teorema 4.2.2, obtenemos que $Im(fs_{|_{eM}}) \leq M$ es un sumando directo y entonces $Im(fs_{|_{eM}}) = fseM \cong eM/Nuc(fs_{|_{eM}}) \leq M$ es un sumando de M directamente finito puesto que $eM/Nuc(fs_{|_{eM}})$ es directamente finito. Por lo tanto $fseM$ es un sumando no cero directamente finito de fM.

(2)$\Rightarrow$(3).

Supongamos que la suma interna de todos los sumandos directamente finitos no es esencial en M. Como en particular M tiene C_1, entonces la suma de ellos es esencial es un sumando directo de M, digamos K, pongamos $M = K \oplus K'$. Por hipótesis K' contiene un sumando directamente finito no cero, entonces $K \cap K' \neq 0$ lo que es una contradicción. Por lo tanto la suma de todos los sumandos directamente finitos de M es un submódulo esencial en M.

(3)$\Rightarrow$(1).

Por 4.1.19 M se descompone se manera única como $M = M_I \oplus M_{II} \oplus M_{III}$. Sea $N \leq M$ un sumando directo directamente finito. Como M_T es totalmente invariante para todo tipo T, se tiene por 1.24 que $N = (N \cap M_I) \oplus (N \cap M_{II}) \oplus (N \cap M_{III})$. Como sumandos directos de directamente finitos son directamente finitos y como $M_I = 0$, ya que no hay idempotentes abelianos no cero y $M_{III} = 0$ (ya que no contiene sumandos directamente finitos) se tiene entonces que $N = N \cap M_{II}$. Como $N \subseteq M_{II}$, como N fue arbitrario entonces todos los sumandos directamente finitos de M están en M_{II}. Como por hipótesis la suma de estos es esencial en M entonces, M_{II} es esencial en M. Por ende $M_{II} = M$ como se quería.

□

Teorema 4.2.5. Si M es un módulo k-nosingular extendible tal que su anillo de endomorfismos S es extendible y semiprimo, entonces son equivalentes:

(1) M es de Tipo II.

(2) Todo sumando directo de M contiene un sumando no cero directamente finito isomorfo a un sumando directo de M y M no tiene idempotentes abelianos no cero.

(3) La suma de todos los sumandos directamente finitos de M que son isomorfos a un sumando directo de M forman un submódulo esencial en M.

Demostración. (1)$\Rightarrow$(2).

De nuevo usando el Lema 4.2.1 podemos encontrar para todo sumando directo de M, digamos N, un morfismo no cero φ de eM en ese sumando, donde e es un idempotente fiel directamente finito (por ser M de Tipo II). Como M es k-nosingular, de forma análoga a la del teorema anterior φ se puede restringir a un complemento de un sumando de eM donde el núcleo de φ sea esencial. Así φ es un monomorfismo por lo que la imagen de φ restringido a ese complemento es isomorfa a un submódulo directamente finito de N, que es isomorfo a un sumando directo de M y por hipótesis M no tiene idempotentes abelianos no cero.

(2)$\Rightarrow$(3). La prueba es análoga a la del teorema anterior.

(3)$\Rightarrow$(1).

Descompongamos a $M = M_I \oplus M_{II} \oplus M_{III}$. Como por hipótesis M no tiene idempotentes no cero, entonces la componente de Tipo II en la descomposición anterior es cero y además la componente de Tipo III también es cero por definición de Tipo III. Así todos los sumandos directamente finitos de M están en la componente de Tipo II y su suma por hipótesis es esencial en M y así M_I es un sumando esencial de M por lo que $M_I = M$.

$\square$

Proposición 4.2.6. (1) Sea M un módulo k-nosingular continuo de Tipo T, entonces todo sumando directo N de M es de tipo T donde ($T = I, II, III$).

(2) $M = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ es k-nosingular continuo de Tipo T si y sólo si M_α es k-nosingular continuo de Tipo T. Más aún M_β es M_α-inyectivo para toda $\alpha \neq \beta$.

Demostración. (1)

Por el teorema 4.2.2, se tiene que si M es de Tipo I, entonces todo sumando directo de M contiene un sumando no cero abeliano, y así todo sumando directo de N contiene un sumando directo abeliano no cero. Como sumandos de módulos k-nosingulares continuos son k-nosingulares continuos N es k-nosingular continuo y así por el mismo teorema, N es de Tipo I. De hecho de manera análoga, por el teorema 4.2.4 si M es de Tipo II entonces N es de Tipo II. Por último si M es de tipo III por definición todo sumando debe ser de Tipo III.

(2) Si suponemos que M es k-nosingular continuo de Tipo T, entonces por 3.2.9 cada factor es continuo. De hecho también por ese mismo teorema M_α es M_β-inyectivo. Por 2.8 cada factor es k-nosingular. Más aún por el inciso anterior, cada factor es de Tipo T.

Ahora si suponemos que cada factor es k-nosingular continuo y además tenemos que son inyectivos relativos para cada $\alpha \neq \beta$, por el teorema 2.8 M es continuo y por 2.10 M es k-nosingular. Más aún por 4.1.19 M se descompone en $M = M_I \oplus M_{II} \oplus M_{III}$ donde cada factor (por lo anterior) es k-nosingular continuo de Tipo T. De hecho son totalmente invariantes, por lo que para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene que por 1.24

$$M_\alpha = (M_\alpha \cap M_I) \oplus (M_\alpha \cap M_{II}) \oplus (M_\alpha \cap M_{III}).$$

Por lo que si M_α es de Tipo T entonces $M_\alpha \subseteq M_T$ para toda $\alpha \in \Lambda$. Por lo que $M \subseteq M_T$, por lo que M es de Tipo T con $T = I, II, III$. $\square$

Lema 4.2.7. Sea $M = M_1 \oplus M_2$ un módulo k-nosingular continuo, tal que M_1 y M_2 son inescindibles. Entonces $M_1 \cong M_2$ (en este caso son casi-inyectivos) o M_1 y M_2 son ortogonales .

Demostración. Por 4.1.3 para todo mofismo no cero $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ se tiene que $Nuc\varphi$ es un sumando directo de M_1. Entonces $Nuc\varphi = 0$ o $Nuc\varphi = M_1$ y también $Im\varphi$ es un sumando directo de M_2 por lo que $Im\varphi = 0$ o $im\varphi = M_2$. Así $M_1 \cong M_2$ o $Hom(M_1, M_2) = 0$. En conclusión $M_1 \cong M_2$, por lo tanto $Hom(M_1, M_2) = 0$ y $Hom(M_2, M_1) = 0$.

Para el caso cuando $Hom(M_1, M_2) = 0$ y $Hom(M_2, M_1) = 0$, si se supone que existe un morfismo no cero $\psi : M' \longrightarrow M_2$ donde $M' \leq M_1$, como M_1 y M_2, son inyectivos relativos ese morfismo puede ser extendido a un morfismo de $Hom(M_1, M_2)$ lo que es un absurdo por hipótesis. Por lo que M_1 y M_2 son ortogonales.

$\square$

Teorema 4.2.8. Sea M un módulo k-nosingular continuo con una descomposición en una suma directa de inescindibles. Entonces M es de Tipo I y es isomorfo a una descomposición $M \cong \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha^{(X_\alpha)}$ donde cada factor es inescindible y N_α, N_β son ortogonales para toda $\alpha \neq \beta$. Más aún, si $|X_\alpha| \geq 2$, N_α es casi-inyectivo para toda $\alpha \in \Lambda$.

Demostración. Pongamos $M = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$, descomposición de M en inescindibles. Entonces en particular, $M_\alpha \oplus M_\beta$ es k-nosingular continuo para toda $\alpha \neq \beta$ y así por el lema anterior $M_\alpha \cong M_\beta$ o M_α y M_β son ortogonales. Ahora bien, ordenando por bloques la descomposición, obtenemos una descomposición de M como $M \cong \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} N_\alpha^{(X_\alpha)}$, donde N_α no es isomorfo a N_β si $\alpha \neq \beta$. Note que si hay más de un bloque se debe tener que son ortogonales por el lema anterior. En particular, si hay mas de un factor en un mismo bloque se tiene que N_α es casi-inyectivo y M es de Tipo I por definición, ya que cada factor es inescindible como se quería.

$\square$

Para los módulos de Tipo III veremos que se tienen distintas caracterizaciones. La siguiente proposición será de gran ayuda.

Proposición 4.2.9. Sea M un módulo k-nosingular continuo y suponga que M no tiene sumandos directos abelianos no cero , entonces existe una familia $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de sumandos directos de M tal que $M_n^{(n)} \cong M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Primero veamos que para todo sumando directo N de M, existe un sumando directo $N' \leq N$ tal que $N' \cong P^{(n)}$ para algun módulo P.

Obsérvese que por definición N no puede ser inescindible, ya que si lo fuera seráa abeliano y por hipótesis M y N no tiene sumandos directos abelianos no cero. Sea K_1 un sumando directo de N no cero y pongamos $N = K_1 \oplus K_2$. Así por 4.1.7, K_1 no es totalmente invariante en N y $Hom(K_1, K_2) \neq 0$. Tomemos un morfismo $\varphi : K_1 \to K_2$. Como N es k-nosingular continuo por la Proposición 4.1.3 $Nuc\varphi$ es un sumando directo de K_1 y por la propiedad C_2 la imagen $Im\varphi$ es un sumando directo de K_2. Entonces $K_1/Nuc\varphi \cong Im\varphi$, además $K_1/Nuc\varphi$ es un sumando directo de K_1 por lo que $K_1/Nuc\varphi \oplus Im\varphi \cong (Im\varphi)^2$. Así obtenemos lo deseado un sumando directo N_1 de N con la propiedad de que $N_1 = P_1 \oplus P_1$. Como N fue arbitrario, por inducción se sigue que existe $N_k \leq N$ sumando directo tal que $N_k \cong P_k^{(2k)}$ para algún módulo P_k. Eligiendo una k suficientemente grande tal que $2^k \geq n$, existe un sumando directo de N digamos N' tal que $N_k' \cong P_k^{(n)}$.

Fijemos un natural $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la familia $\mathcal{A}$ de colecciones de submódulos de M, $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset Sub_R(M)$ tal que $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ es independiente, N_α es sumando de M y $N_\alpha \cong P^{(n)}$ para algún módulo P y todo $\alpha \in \Gamma$.

Ordenando parcialmente a $\mathcal{A}$ con la contención y observando que $\mathcal{A}$ es no vacío ya que contiene al sumando que acabamos de construir, se tiene que $\mathcal{A}$ cumple las hipótesis del lema de Zorn. Podemos considerar un máximo de esa familia, digamos $\mathcal{C}'$. Ahora por la propiedad C_1, se tiene que $\bigoplus_{N\in\mathcal{C}'} N \leq^{ess} M'$, donde M' es un sumando directo de M. Pongamos $M = M' \oplus M''$. Si sucediera que $M'' \neq 0$ entonces existe un sumando directo (por lo anterior) de él, digamos N'', tal que $N'' \cong P^{(n)}$ para alguna n. Poniendo $\mathcal{C}' \cup \{N''\}$ se tiene que el conjuto anterior contradice la máximalidad de $\mathcal{C}'$. Por lo tanto se debe de tener $M'' = 0$. Se sigue que $\bigoplus_{N\in\mathcal{C}'} N \leq^{ess} M$ por lo que si consideramos la cápsula inyectiva de M, se tiene que:

$$E(M) = E(\bigoplus_{N\in\mathcal{C}'} N) \cong E(\bigoplus_{P^{(n)}\cong N} P^{(n)}).$$

Además

$$(E(\bigoplus P)^{(n)}) \cong (E(\bigoplus P))^{(n)} \cong E(\bigoplus P)^{(n)} \cong E^{(n)}.$$

Así se tiene que $E(M) = \bigoplus_{1\leq i\leq n} E_i$, donde $E_i \cong E$. Más aún, por el teorema 3.2.7, $M = \bigoplus_i (E_i \cap M)$, por ser M continuo. Además por 3.2.9 $M \cap E_i$ y $M \cap E_j$ son inyectivos relativos y de hecho $E(M \cap E_i) = E_i \cong E_j = E(M \cap E_j)$. Entonces por 3.1.10 $M \cap E_i \cong M \cap E_j$ para toda $i \neq j$. Por lo que en definitiva se tiene $M_n = M \cap E_1$ y asi $M \cong M_n^{(n)}$, como se quería.

□

Corolario 4.2.10. Si M es un módulo k-nosingular continuo de Tipo II o III, entonces M es cuadrado y de hecho M es auto-inyectivo.

Demostración. Como M es de Tipo II o III entonces M no continene sumandos abelianos no cero y así por la Proposición anterior $M \cong M_1 \oplus M_1$. Como M es continuo por hipótesis es M-inyectivo, por 3.2.8. □

Teorema 4.2.11. Un módulo k-nosingular (casi)continuo M es de Tipo III si y sólo si todo sumando directo $N \leq M$ es puramente infinito. De nuevo en este caso, M es M-inyectivo.

Demostración. Si suponemos que todo sumando directo de M, digamos N es puramente infintio, es decir, N no tiene sumandos directamente finitos. Por definición de Tipo III M es de Tipo III.

Recíprocamente, observemos que la afirmación basta probarla para M puesto que todo sumando es k-nosginular continuo de Tipo III.

Ahora, como M es de Tipo III, M no tiene sumandos directamente finitos. Por el teorema 3.2.14, parte (1), $E(M)$ no tiene sumandos directamente finitos. Consideremos la familia $\mathcal{A}$ de colecciones de submódulos de $E(M)$, $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset Sub_R(E(M))$ tales que $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ es independiente, N_α es sumando de $E(M)$ y $N_\alpha \cong N_\alpha \oplus N_\alpha$ para toda $\alpha \in \Gamma$.

Ordenando parcialmente a $\mathcal{A}$ con la contención y notando que esa familia no es vacía puesto que $E(M)$ es puramente infinito, se tiene que $(\mathcal{A}, \subset)$ cumple las hipótesis del Lema de Zorn. Así hay máximos. Sea $\mathcal{C}'$ uno de tales máximos. Como $E(M)$ es inyectivo, se tiene que $\bigoplus_{N\in\mathcal{C}'} N \leq^{ess} E_1 \leq E(M)$ donde E_1, es un sumando directo de $E(M)$. Si ponemos $E(M) = E_1 \oplus E_2$, se tendría que si E_2 contiene sumandos puramente infinitos no cero por la proposición 5.7 en [2], existe un sumando directo $N' \leq E_2$ tal que es puramente infinito y $N' \oplus N' \cong N'$. Por lo que se tendría que la familia $\mathcal{C}' \cup \{N'\}$ cumple las propiedades anteriores y esto contradice el hecho de que $\mathcal{C}'$ sea máxima. Por lo tanto E_2 no tiene sumandos puramente infinitos. Por ende, todos los sumandos no cero de E_2 son directamente finitos asi por hipótesis, $E(M)$ no tiene sumandos directamente finitos. En definitiva $E_2 = 0$ y así

$$E(M) = E(\bigoplus_{N\in\mathcal{C}'} N) \cong E(\bigoplus_{N\in\mathcal{C}'} N \oplus N) \cong E(\bigoplus_{N\in\mathcal{C}'} N) \oplus E(\bigoplus_{N\in\mathcal{C}'} N).$$

Entonces $E(M) \cong E(M) \oplus E(M)$. Luego por la parte (1) del teorema 3.2.14, $M \cong M \oplus M$. Por último, se tiene que M es M-inyectivo por 3.2.8.

$\square$

Bibliografía

[1] Dauns, J. and Zhou Y. (2006) *Classes of Modules*. Chapman and Hall.

[2] Goodearl, K.R.(1991) *Von Neumann Regular Rings*. Pitman.

[3] Goodearl, K.R. and Boyle, A.K. (1976). *Dimension Theory for nonsingular injective modules*. Memoris of the American Mathematical Society(7/177).

[4] Goodearl, K.R. (1976) *Ring Theory:Nonsingular Rings and Modules*. Marcel-Dekker.

[5] Kaplansky, I. (1968) *Rings of Operators*. New York. A.Benjamin.

[6] Kim, J.Y., Park, J.K.(1997). *When is a Regular Ring a semisimple artinian ring*? Math. Japonica 45(2):311-313.

[7] Lam, T.Y. (1999) *Lectures on Modules and Rings*. GTM, Berlin-Heidelberg-NewYork:Springer Verlag.

[8] Mohamed, S.H. and Müller, S.T. (1990).*Continuous and Discrete Modules*. London Mathematical Society. Lectures Notes Series 147.

[9] Rizvi, S.T., Roman, C.S. (2007) *On K-Nonsingular Modules and Applications*. Comm. Alg, 35(9), 2960-2982.

[10] Rizvi, S.T., Roman, C.S. (2004) *Baer Modules and quasi-Baer modules*. Comm. Alg, 32(1), 103-123.

[11] Roman,C.S. (2005). *Baer and Quasi-Baer Modules*. Doctoral Dissertation. The Ohio state University.

[12] Stenström,B. (1975) *Rings of Quotients*. GTM, Berlin-Heidelberg-NewYork:Springer Verlag.

[13] Zelmanowitz, J: (1972). *Regular modules*. Trans.Am.Math. Soc (163)341-355.