



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

DEBRAYES SOBRE LA CURVATURA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

EFRAÍN VEGA LANDA



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO
2009**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

<p>1. Datos del alumno.</p> <p>Autor</p> <p>Apellido paterno:</p> <p>Apellido materno:</p> <p>Nombres(s)</p> <p>Teléfono:</p> <p>Universidad Nacional Autónoma de México</p> <p>Facultad o escuela:</p> <p>Carrera:</p> <p>No. de cuenta:</p>	<p>Vega</p> <p>Landa</p> <p>Efraín</p> <p>55443805</p> <p>Universidad Nacional Autónoma de México</p> <p>Facultad de Ciencias</p> <p>Matemáticas</p> <p>097570550</p>
<p>2. Datos del tutor</p> <p>Grado</p> <p>Nombre(s)</p> <p>Apellido paterno</p> <p>Apellido materno</p>	<p>2. Datos del tutor</p> <p>Dr</p> <p>Palmas</p> <p>Velasco</p> <p>Oscar Alfredo</p>
<p>3. Datos del sinodal 1</p> <p>Grado</p> <p>Nombre(s)</p> <p>Apellido paterno</p> <p>Apellido materno</p>	<p>3. Datos del sinodal 1</p> <p>Act</p> <p>Fernández</p> <p>García</p> <p>Javier</p>
<p>4. Datos del sinodal 2</p> <p>Grado</p> <p>Nombre(s)</p> <p>Apellido paterno</p> <p>Apellido materno</p>	<p>4. Datos del sinodal 2</p> <p>Dr</p> <p>López</p> <p>De Medrano</p> <p>Santiago</p>
<p>5. Datos del sinodal 3</p> <p>Grado</p> <p>Nombre(s)</p> <p>Apellido paterno</p> <p>Apellido materno</p>	<p>5. Datos del sinodal 3</p> <p>Dr</p> <p>Alvarez</p> <p>Scherer</p> <p>María de la Paz</p>
<p>6. Datos del sinodal 4</p> <p>Grado</p> <p>Nombre(s)</p> <p>Apellido paterno</p> <p>Apellido materno</p>	<p>6. Datos del sinodal 4</p> <p>Dr</p> <p>King</p> <p>Dávalos</p> <p>Edwin Jefferson</p>
<p>7. Datos del trabajo escrito.</p> <p>Título:</p> <p>Subtítulo:</p> <p>No. de páginas:</p> <p>Año:</p>	<p>7. Datos de la tesis.</p> <p>Debrayes sobre la curvatura</p> <p>201</p> <p>2009</p>

Debrayes sobre la curvatura

Efraín Vega Landa

2009

Índice

Índice	1
1. Curvas planas	6
1.1. ¿Qué es la curvatura de una curva? Discusión intuitiva.	6
1.2. Definición de curva	8
1.3. Curvatura de una circunferencia	10
1.4. Curvatura de una curva plana	12
1.5. Curvatura a través de la indicatriz de las tangentes	13
1.6. Curvatura a través de la circunferencia límite determinada por una terna de puntos en la curva	17
1.7. Curvatura como el inverso del radio de la circunferencia de mayor orden de contacto con la curva	19
1.8. Curvatura como el inverso del radio de la circunferencia que más se pega a la curva	23
1.9. Curvatura como rapidez angular	23
1.10. Curvatura en la Segunda Ley de Newton	26
1.11. Fórmula de la curvatura de la gráfica de $f(x)$	28
1.12. Fórmula de la curvatura de una curva plana	34
1.13. Fórmula de la evoluta	35
1.14. Diedro de Frenet-Serret	36
1.15. El sistema de ecuaciones diferenciales determinado por las ecuaciones de Frenet-Serret	39
2. Curvas espaciales	42
2.1. Definición y una manera de determinar la forma de una curva espacial	42
2.2. Curvatura de una curva espacial	44
2.3. La curvatura no determina la forma de una curva en \mathbb{R}^3	44
2.4. Triedro de Frenet-Serret y sus ecuaciones	46
2.5. El sistema de ecuaciones diferenciales determinado por las ecuaciones de Frenet	50
3. Superficies	53
3.1. Idea intuitiva de superficie y un intento de describir su forma	53
3.2. Curvatura de superficies, a través de la curvatura de sus secciones normales.	55
3.3. Interpretación física a través de la aceleración (los jalones)	59
3.4. Segunda forma fundamental	60
3.5. Condición suficiente para que $II(x, y)$ sea forma cuadrática	62
3.6. Una superficie en la cual $II(x, y)$ no es una forma cuadrática	64
3.7. Ejemplo de una superficie con segunda forma fundamental discontinua	66
3.8. Segunda forma fundamental de la esfera	70
3.9. Teorema de Meusnier	73
3.10. Geodésicas: las curvas en una superficie con aceleración (curvatura) mínima	76
3.11. Ortogonalidad de las direcciones principales y fórmula de Euler	77
3.12. Indicatriz de Dupin	79
3.13. Curvatura a través de la aplicación de Gauss	84
3.14. Formas de la diferencial de la aplicación de Gauss y curvatura gaussiana	94
3.15. La variación de $T_P S$ a través del gradiente y las curvas de nivel	96
3.16. Marco de Darboux-Ribaucour, torsión y curvatura geodésica	97

4. Curvatura intrínseca	103
4.1. Idea panorámica	103
4.2. ¿Qué es una línea recta?	104
4.3. ¿Hay líneas rectas en mundos curvos?	105
4.4. Curvatura geodésica	106
4.5. Definición extrínseca de geodésica	108
4.6. Definición intrínseca de geodésica	108
4.7. ¿Recto implica corto? ¿Corto implica recto? Teorema de Bernoulli	110
4.8. Transporte paralelo intrínseco a lo largo de geodésicas en una superficie S .	112
4.9. Transporte paralelo a lo largo de una curva en S .	115
4.10. Transporte paralelo en una curva cerrada γ ; transformación de holonomía de γ	117
4.11. Transformación de holonomía en un polígono geodésico en S .	119
4.12. Área de un polígono geodésico en la esfera y la fórmula de Gauss-Bonnet	121
4.13. Fórmula de Gauss-Bonnet para curvas cerradas contenidas en la esfera S_r^2	123
4.14. Método intrínseco para calcular la curvatura gaussiana en la esfera y su generalización	128
4.15. El teorema Egregio de Gauss	129
4.16. Teorema de Gauss-Bonnet para una superficie S	130
4.17. Transporte paralelo extrínseco	131
4.18. Una propiedad extrínseca que caracteriza los campos paralelos	132
5. Curvas en \mathbb{R}^n	134
5.1. Curvas en \mathbb{R}^4	134
5.2. El sistema de ecuaciones diferenciales determinado por las ecuaciones de Frenet	136
5.3. Curvas en \mathbb{R}^n	138
6. Una interpretación del tensor de curvatura en superficies y su generalización a variedades	140
6.1. Una curva en \mathbb{R}^2	140
6.2. El sistema de ecuaciones diferenciales asociado	142
6.3. Forma de la conexión	145
6.4. Superficies	147
6.5. El sistema de ecuaciones diferenciales asociado	148
6.6. La esfera S^2 y el sistema de ecuaciones que describe sus campos paralelos	151
6.7. La curvatura de S_r^2 como una matriz antisimétrica (velocidad de giro)	155
6.8. La curvatura de S como una matriz antisimétrica (velocidad de giro)	157
6.9. La 2-forma de curvatura para superficies (2-variedades)	159
6.10. El paso a más dimensiones	160
7. Interpretación general del tensor de curvatura	162
7.1. Interpretación de la derivada covariante	162
7.2. Flujos que conmutan y que no conmutan	162
7.3. Derivada de Lie y su expresión en términos de la derivada covariante.	165
7.4. La no conmutatividad de dos flujos en un punto como una aceleración	167
7.5. El corchete de Lie $[X, Y]$	170
7.6. Interpretación de la fórmula $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$	171
A. Ecuaciones de Darboux	174
B. Teoremas del índice de Poincaré y de Gauss-Bonnet para superficies compactas	178
B.1. Campos vectoriales y su índice	178
B.2. Teorema del índice de Poincaré	186
B.3. Demostración del teorema de Gauss-Bonnet (superficies compactas)	188
C. Los sistemas de ecuaciones que describen el movimiento del marco paralelo en la esfera	191
C.1. Visto desde el marco α	191
C.2. Visto desde el marco U	192
D. Equivalencia entre definiciones del corchete de Lie	193
Referencias	199

Prefacio

A continuación narro cómo fue que elegí este tema de tesis. Un día en algún semestre acababa mi curso de geometría diferencial II. Pregunte al profesor (ahora mi tutor de tesis) si veríamos curvatura en variedades de más dimensiones. La respuesta fue que no. Aprovechando la confianza con el profesor, bromeando, le dije que que chafa...La verdad es que el tema no está incluido en el temario del curso, pero yo quería oír algo del tensor, ya llevaba dos cursos de geometría diferencial y todavía no sabía nada de él. Tiempo después, ya concluido el curso, en una conversación de pasillo, salió al tema que yo estaba pensando en empezar mi trabajo de tesis. Oscar me dijo hazla sobre curvatura. Rápidamente me vinieron a la mente dos cosas: el deseo de entender la famosa teoría de la Relatividad General y deseo pendiente de saber que era el tensor de curvatura. Así que decidí en ese momento que había que entrarle.

Acerca del estilo de la tesis

Empezaré con una cita del matemático ruso V. I. Arnold:

Es casi imposible para mí leer a matemáticos contemporáneos quienes, en lugar de decir "Petya se lavó las manos", simplemente escriben:

Hay un $t_1 < 0$ tal que la imagen de t_1 bajo el mapeo natural $t_1 \rightarrow Petya(t_1)$ pertenece al conjunto de manos sucias, y un $t_2, t_1 < t_2 \leq 0$, tal que la imagen de t_2 bajo el mapeo arriba mencionado pertenece al complemento del conjunto definido en el enunciado precedente.

En mi opinión hay una fuerte tendencia al estilo de hacer matemáticas al que Arnold hace referencia. No la comparto, en ella quedan incluidos cursos en los cuales, en cada clase, te dejan caer varios teoremas y resultados rigurosamente probados, codificados de tal manera que no quedan claras las ideas que hay detrás de ellos ni las conexiones que pueden tener con otras áreas, ya sean de las matemáticas o de otras ciencias como física, biología, etc. Mucha de la información codificada rápidamente se olvida. Se siente la carencia cuando alguien te pide (bien puede ser tu hermano pequeño) que le cuentes lo que aprendiste. Lo más que puedes hacer es buscar lo que aún queda en la memoria y recitar algunos fórmulas o teoremas. Menos comunes son los cursos en los que se intenta presentar la información descodificada (las ideas detrás de los resultados y no tanto las pruebas rigurosas) y establecer conexiones entre las diversas áreas de las matemáticas. Lo bueno es que sí los hay, pero hay que buscarlos bien (paradójicamente, en algunos casos son cerrados "por falta de estudiantes").

El espíritu del presente trabajo titulado (a propuesta de mi tutor) Debrayes sobre la curvatura, es el de presentar la información de manera descodificada. Debrayes está más del lado de las interpretaciones y de las ideas que del lado de la presentación rigurosa de los conceptos matemáticos. No vi sentido en hacer (o copiar) pruebas rigurosas que pueden ser consultadas en textos estandar de geometría. Preferí motivar las ideas a través de ejemplos.

Debrayes **intenta** desarrollar algo de intuición a cerca del concepto de curvatura y de ideas relacionadas a él; y dejar patente como se relacionan algunas áreas de las matemáticas (geometría, topología, ecuaciones diferenciales, grupos) en torno a la curvatura.

A continuación presento una idea panorámica del contenido de la tesis mencionando la discusión abordada en cada sección.

Sección 1 Introducimos el concepto de curvatura más cotidiano, el de una curva plana. Damos varias definiciones e interpretaciones y mencionamos que la última (la del marco de Frenet) fue muy útil para entender el concepto de curvatura en más dimensiones.

Sección 2 Ampliamos la dimensión del espacio donde vive nuestra curva y motivamos por qué necesitamos de un ingrediente extra (la torsión) para determinar su forma. Hacemos énfasis en el marco de Frenet, sus ecuaciones y el sistema de ecuaciones diferenciales que determinan (un flujo en el haz tangente de \mathbb{R}^3).

Sección 3 Aumentamos la dimensión, de uno a dos, del objeto que se curva. Motivamos el concepto de curvatura de una superficie contenida en \mathbb{R}^3 a través de dos enfoques: la segunda forma fundamental y la aplicación de Gauss. En el primero mencionamos por qué es importante la suavidad. En el segundo introducimos el marco de Darboux, importante porque relaciona los enfoques extrínseco e intrínseco (sección 4) de la curvatura de una superficie.

Sección 4 En las tres secciones anteriores el enfoque de la curvatura fue extrínseco, en ésta damos una discusión intrínseca de la curvatura de una superficie. Se menciona la relación entre la curvatura intrínseca y extrínseca a través del teorema de Gauss-Bonnet. Aparecen ingredientes que serán esenciales para entender el tensor de curvatura como la transformación de holonomía y su dependencia de la trayectoria.

Sección 5 Ampliamos primero a 4 y luego a n la dimensión del espacio en el que vive una curva (1-variedad), discutimos la necesidad de $k - 1$ parámetros (curvaturas) para determinar su forma y el papel que dichas curvaturas juegan en el marco de Frenet (n -dimensional) y el sistema de ecuaciones diferenciales asociado al movimiento de dicho marco (flujo en el haz tangente de \mathbb{R}^n).

Sección 6 Retomando las ideas de las dos secciones anteriores, desarrollamos una interpretación del tensor (2-forma) de curvatura en superficies y luego la extendemos a variedades. La idea es ver al tensor como una máquina que asigna a cada pareja de vectores en el espacio tangente un campo vectorial en dicho espacio.

Sección 7 Damos una interpretación de la fórmula habitual¹ del tensor de curvatura, desarrollando previamente algo de intuición en los conceptos de derivada covariante y corchete de Lie.

¹ $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$

He aprendido muchas ideas en estos dos años que llevo haciendo la tesis. Por falta de tiempo o de madurez algunas ya no pudieron ser incluidas, sin embargo espero que las que si quedaron puedan ser útiles a los lectores de los Debrayes sobre la curvatura. Cualquier comentario o crítica, bienvenida.

Efraín Vega Landa
Mayo 2009
efveglan@gmail.com

Agradecimientos

Quiero agradecer a:

A mis padres por la vida y por todo lo que me han dado, por el apoyo constante a lo largo de muchos años, por su paciencia (todavía no me toca ser papá, pero ya me imagino), por convivir conmigo en las buenas y en las no tan buenas, por dejarme ser libre, por motivarme a seguir adelante, por presionarme sólo de manera muy simbólica por el tiempo que me tardé en acabar. En buena medida gracias a ustedes soy lo que soy.

Mi papá, a todos mis hermanos y al equipo de CDM gracias por su apoyo.

Mi hermano todos los momentos que hemos vivido juntos, por tolerar mi vida en otro mundo, mis locuras, por ser noble e incondicional.

Jorge, porque por increíble que parezca fue quien acabó de definir mi rumbo hacia las matemáticas.

Pibis y a mis tios por toda su hospitalidad a lo largo de mi vida.

Mis primos Charly y Xochitl por haber perdido en la recta final de nuestra carrera por titularnos.

Cori por tu amor, cariño, por los momentos que hemos pasado juntos, por tu apoyo en algunos momentos grises en la obra negra de este largo camino.

Ana Guzmán por haber revisado detenidamente gran parte de los Debrayes y por brindarme comentarios y sugerencias para mejorarlos. Espero que te mejores de todo corazón.

Oscar Palmas por darme la oportunidad de elaborar el presente trabajo sobre la curvatura, por tenerme una gran paciencia y no desesperarte ante mi evolución que no fue muy rápida que digamos, por darme libertad para debrayar, por todas las revisiones y correcciones que diste a la tesis, por todo tu tiempo, y por todo lo que aprendí en los cursos que he llevado contigo (inscrito o de oyente, de licenciatura o maestría, son siete).

Santiago López por el seminarito que compartes todos los viernes con nosotros (desde hace algunos semestres), por todo el espacio que en él le dimos a algunas ideas de la tesis, por los cuatro cursos que llevé contigo; confieso que algunos compañeros y yo no supimos explotar tu potencial (oculto en tu gran modestia) y sacar jugo de todo lo que sabes, espero haber mejorado un poco.

Javier Fernández por el tiempo que dedicaste a escuchar el presente trabajo, por tus comentarios, por las ideas que me dejaron tus cuatro cursos de cálculo y por todo lo que aprendí siendo tu ayudante.

Paz Alvarez y Jefferson King por la lectura, comentarios y correcciones que hicieron a la tesis, por los cursos que lleve con ustedes, recuerdo momentos de inolvidable asombro en el curso de Paz sobre la forma del espacio, fue mi primer contacto con las 3-variedades

Laura Ortiz y Ernesto Rosales por todo las ideas que me han dejado sus cursos. No sé por qué, pero los conocí (en una escuela en cuernavaca) ya cuando había terminado mis materias, a pesar de esto son seis los cursos (en licenciatura y maestría) que he llevado con ustedes. Creo que por ustedes fuí aceptado (puse que era su alumno en la página del evento) en la Escuela de Verano de Sistemas Dinámicos en Guanajuato. Aprovecho el viaje para agradecer también a

Xavier Gomez Mont y Raúl Quiroga A Xavier por su empeño para darle a dicha escuela una vibra muy padre, incluyendo un contenido integral y la idea de que hay que comerse primero el postre. A Raúl por la tarde completa que me dedicó cuando le platiqué de la tesis. Es la escuela que más me ha gustado, varias de las ideas finales de la tesis las escuché por primera vez ahí.

Max Neumann por su curso de topología y por el seminario que hemos tenido los últimos dos semestres en donde hemos tenido nuestras primeras experiencias con las geometrías de las 3-variedades. Me gusta tu estilo intuitivo de tratar los conceptos, quisiera llevar más cursos contigo, pero Cuernavaca está un poco lejos.

Micho Durdevich por el panorama general que dejan tus cursos, por el enfoque diferente que tienes al plantear que hay muchas ideas matemáticas y físicas que se pueden ir tratando poco a poco de manera unificada desde los primeros semestres (para qué esperarse a los cursos del posgrado en el mejor de los casos), por la libertad que nos das a los estudiantes para que te ametrallemos preguntas diversas de matemáticas y física. Salimos con ideas nuevas cada clase, algunas más complicadas, se resbalan una y otra vez, pero espero que con perseverancia las fijemos poco a poco. Por tu humildad, cuando hay algo que no sabes, simplemente lo dices y listo, y por tu buena voluntad (incluyendo la noble intención de que dejemos el patético windows).

Chryssomalis Chryssomalakos por los cursos de geometría y topología diferencial para físicos, en ellos he escuchado por primera vez muchos ejemplos concretos de varios conceptos matemáticos, por la claridad de tus ideas, algunas de las cuales están presentes en la tesis.

Miguel Sokolovsky por tu curso de grupos en donde aprendí que éstos son parte esencial de muchas ramas de la física y por tu apoyo para intentar que no nos cerraran las puertas de la biblioteca del Instituto de Nucleares a todos los estudiantes externos que hacíamos uso de ella.

Genaro de la Vega (y a sus papás) por los fines de semana que nos pasamos en tu casa haciendo buena parte de las figuras de esta tesis, por las ricas comidas que compartimos, por tu ayuda en algunas cuestiones técnicas de scientific y latex, por tus consejos, comentarios y por la posibilidad de acceder a varios de los libros que has digitalizado.

Vinicio Gómez y Sergio Gutierrez por haber hecho equipo con ustedes al dar algunas materias.

Eleazar, Otto y Noel por su espíritu rebelde de hacer matemáticas (autodidacta en muchas ocasiones), por lo que he aprendido de ustedes y porque a veces son como una brújula que apunta en direcciones importantes para explorar en el saber de las matemáticas.

Todas aquellas personas en el mundo que luchan por tener una vida en la cual los valores sean más parejos y sensatos. En particular a todos aquellos que lucharon por que la UNAM siga siendo una universidad para todos. Y más en particular a todos los compañeros que hacen que la Facultad de Ciencias sea una Facultad distinta, dándole vida a proyectos que tienen en la mira el bienestar colectivo, como lo son; El Comedor Estudiantil, El Café Ciencias, los talleres de hidroponía, Eduktodos, La Peña Ciencias, los cursos para el examen de ingreso al bachillerato, de baile, de Capoeira, de cultivo de hongos, de café, etc. La estancia de muchos estudiantes de la Facultad (y de otras escuelas) sería significativamente distinta si no estuvieran estos proyectos.

A mis amigos y compañeros Sergio, Genaro, Arturo, Mónica, Anaid, Monris, Melina, Rosa, Eleazar, Rodrigo, Vinicio, Ricardo, Otto, Marco, Noel, Ivalí, Bicho, Fach, Marco Patines, Salvador, Oso, Toño, Javier, Cesar, Natalia, Pita, Alíne, Marisol, Abril, Ken, Joel, Israel, Eric, Galletón, Hector, Gabriel, Alejandra (perdón, espero se me olviden pocos).

1. Curvas planas

1.1. ¿Qué es la curvatura de una curva? Discusión intuitiva.

Cuando vemos una curva dibujada en un papel sabemos si está curvada o no. Lo que hacemos, tal vez sin darnos cuenta, es comparar la curva en cuestión con una recta, ya que consideramos que la recta no está curvada (la recta siempre se va derecho ¿o no?). Si la curva se parece mucho a una recta decimos que está poco curvada y cuando no se parece tanto decimos que está más curvada (ver Fig.1).

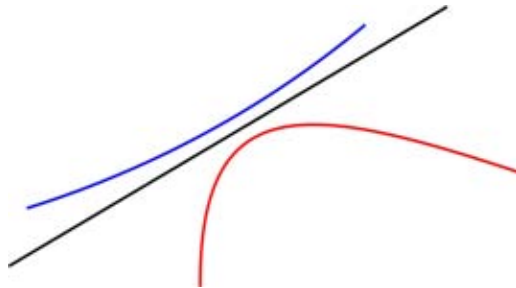


Fig. 1.

Efectuamos esta comparación inconscientemente cuando viajamos en una carretera (supongamos que es plana). Cuando vamos manejando en una recta y a lo lejos vemos una curva sabemos que para pasar por ella sin problemas habremos de bajar nuestra rapidez. Si desde lejos vemos que la dirección de la curva cambia muy poquito, entonces tendremos que bajar sólo un poco la rapidez (ver Fig. 2. (1)); si vemos que la curva cambia mucho la dirección tendremos que bajar mucho la rapidez, llegando al extremo de frenar casi por completo en una vuelta en U (ver figura (2)).



Fig. 2.

Entonces, intuitivamente, sabemos cuándo una curva está más curvada que otra e incluso, en función de esta apreciación, a veces tomamos decisiones como en el ejemplo de la carretera. El concepto matemático que se usa para decir con precisión cuándo una curva está más curvada que otra es el de curvatura.

La forma en que está curvada la carretera puede ir cambiando a medida que la recorremos. Entonces la curvatura es una propiedad local de las curvas y no global, puede ir cambiando de un punto a otro, de hecho, debe ser un concepto puntual. Ver Fig. 4.

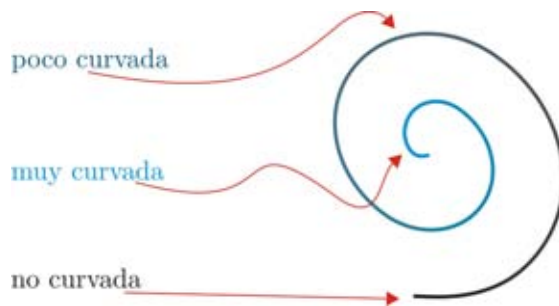


Fig. 4. La forma de curvarse de una curva depende del punto.

¿Habrán curvas tales que se curven de la misma forma en cada punto? Intuitivamente debieran verse igual en todos sus puntos. Si pensamos en una recta, por ejemplo, diríamos que en cualquiera de sus puntos no se curva ya que siempre lleva la misma dirección. Podríamos convenir que la recta tiene una curvatura constante igual a cero. ¿Habrán otras curvas que se curven de la misma manera en cada punto? Recurramos de nuevo a la experiencia. Supongamos que vamos conduciendo un auto a rapidez constante en una carretera plana que tenga la forma de una circunferencia. Para poder seguir la carretera tendríamos que mantener el volante en una posición constante, girado un cierto ángulo a la izquierda, por ejemplo. Ver Fig. 5.

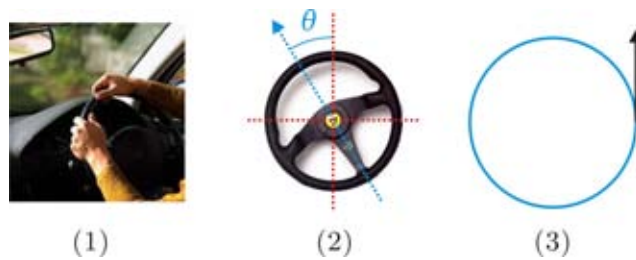


Fig. 5. Posición del volante al viajar por una carretera con forma de circunferencia (1). Ángulo que debe girar el volante para poder viajar sobre la carretera (2). Representación de la carretera (3).

La posición constante del volante refleja el hecho de que la carretera se curva igual en todos sus puntos y esto es así porque tiene la forma circular. Entonces hemos encontrado una curva que se curva de la misma manera en cada punto, la circunferencia.

Si consideramos varias circunferencias de distintos tamaños, ¿qué relación habrá entre la forma en que se curvan unas y otras? Ver Fig. 6.

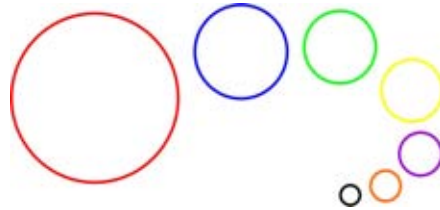


Fig. 6.

Volvamos a nuestras carreteras con forma de circunferencia. Denotaremos, indistintamente, C_r a una circunferencia o a una carretera con forma de circunferencia de radio r . Recorramos dos carreteras C_{r_1}, C_{r_2} , con $r_1 < r_2$. La posición del volante será constante en ambas carreteras, la única diferencia consiste en que el ángulo de giro en C_{r_1} será mayor que en C_{r_2} . Ver Fig. 7. Mientras más giremos el volante, más curvada estará la carretera, de modo que está más curvada una circunferencia de radio pequeño que una de radio grande.

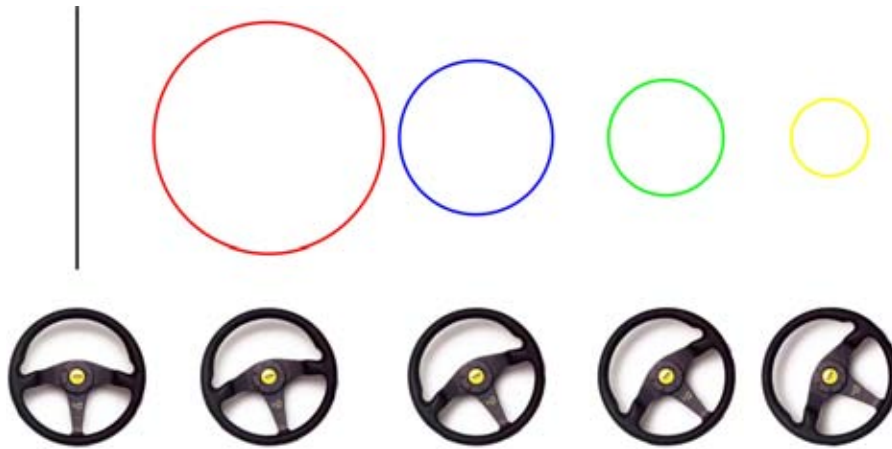


Fig. 7. Varias carreteras y la posición que deberá tener el volante para que el auto pueda viajar en ellas. Vemos que mientras más pequeño sea el radio de C_r , más grande tendrá que ser el ángulo del volante y al revés, mientras más grande sea r más pequeño deberá ser el ángulo, llegando al extremo de no tener que girarlo cuando $r = \infty$, es decir, cuando C_r se vuelve una recta.

Podemos asociar a C_r un número real k_r que refleje la forma en que se curva la circunferencia en función de su radio. La forma de asignar el número a k_r debe cumplir lo observado arriba, es decir, si r se hace pequeño, k_r se hace grande y si r se hace grande, k_r se hace pequeño. Una forma sencilla² de lograr esto sería hacer $k_r = \frac{1}{r}$.

Definición 1 (provisional) Al número k_r lo llamaremos *curvatura* de la circunferencia de radio r .

¿Qué sucede si tenemos una curva que no sea una circunferencia? ¿Cómo hacemos para medir cuánto se curva? Podemos imaginar³ que para cada C_r , tomamos una foto f_r de la posición que necesita tener el volante para que el carro siga la carretera. Consideremos el conjunto formado por todas esas fotos $\{f_r\}$. En ese conjunto habrá fotos de todas las posibles posiciones del volante dentro del rango de radios considerado. Ahora supongamos que tenemos una carretera A plana con una forma arbitraria y que queremos ver cómo se curva ésta en un cierto punto arbitrario P . Imaginemos que vamos en un coche recorriendo la carretera dirigiéndonos hacia P . Ya próximos a

²Hay muchas asignaciones posibles, tomaremos la del inverso del radio porque, como veremos en 1.3, ella captura la información de qué tanto se aleja C_r de ser una recta.

³Variando r en un intervalo adecuado de valores (para no perder la correspondencia entre las posiciones del volante y la forma de la carretera).

P nos fijamos en la posición del volante y le tomamos una foto justo al pasar por P . Esta foto, que depende de P , se compara con las del conjunto $\{f_r\}$ y se busca la que sea igual (ver Fig. 8). Ésta última será la foto de la posición del volante al recorrer una carretera circular C_{r_P} .



Fig. 8.

Intuitivamente, la carretera A y la carretera circular C_{r_P} se deben curvar de la misma manera en P , ya que la posición del volante es la misma. Podemos asociar al punto P de la carretera A la curvatura k_{r_P} de la carretera C_{r_P} . Ver Fig. 9.

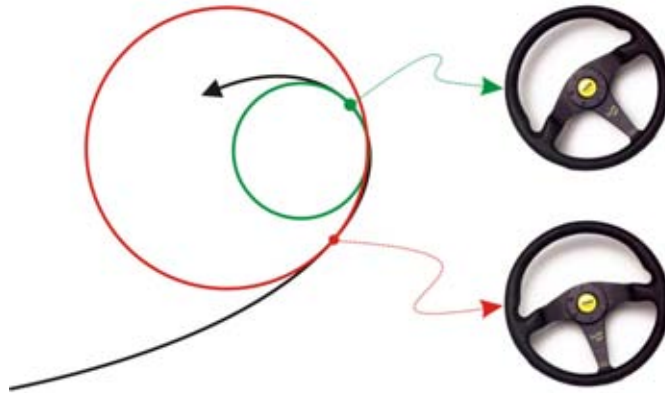


Fig. 9.

Entonces, para saber cómo se curva una carretera, necesitaremos una función k_{r_P} y no sólo un número, como en el caso de una carretera circular C_r .

Definición 2 A esa función se le llama **función de curvatura** de la carretera A .

A continuación precisaremos los conceptos que hemos introducido de forma intuitiva, primero el de curva y después su curvatura.

1.2. Definición de curva

Si nos imaginamos el auto como un punto y la carretera como una curva, el auto recorriendo la carretera sería como el punto recorriendo la curva. Podemos imaginar la dirección del automóvil vista en la curva como un vector tangente a la curva. Una forma de medir la dirección de este vector es ver el ángulo θ que forma con una dirección fija, por ejemplo, con el eje x (ver Fig. 10.).

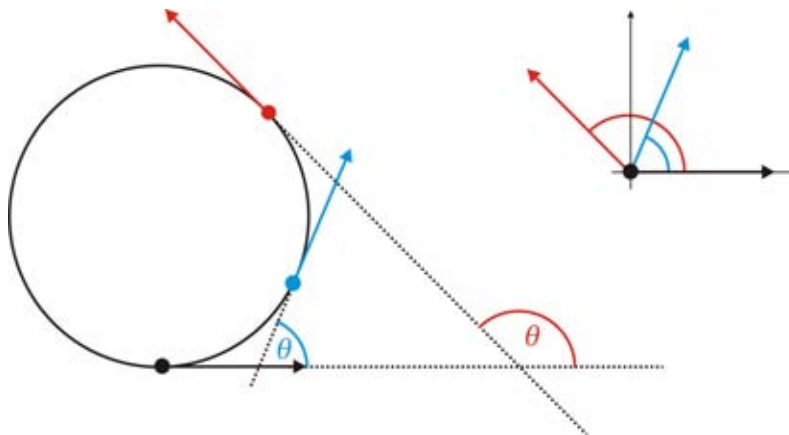


Fig. 10. En la figura se muestran tres vectores tangentes a la curva y su respectivo ángulo con el eje x .

Dada una curva, podríamos pensar que dicho ángulo θ depende del punto P de la curva en el que está anclado el vector tangente, pero la curva puede pasar más de una vez por el punto P con vectores tangentes diferentes que tengan distinto ángulo θ .

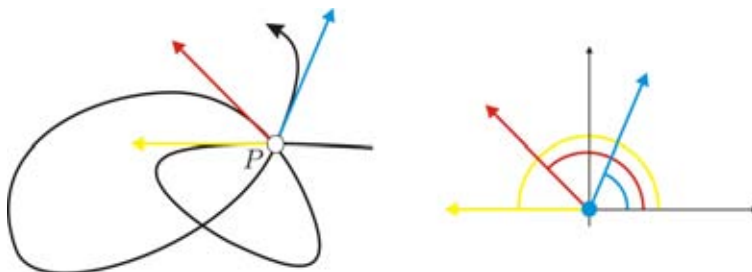


Fig. 11. Una curva que pasa por el punto P tres veces y en cada una de ellas el vector tangente forma un ángulo θ distinto con el eje x .

El ángulo θ depende de la forma en que pasemos por P ¿Qué quiere decir esto? ¿Cómo diferenciar las veces que pasamos por el punto P ? Para contestar necesitamos precisar nuestra idea de curva; usemos la idea intuitiva que tenemos para llegar a una definición.

Podemos diferenciar las veces que pasamos por el punto P midiendo la distancia recorrida a lo largo de la curva. Escogemos un punto P_0 (por el que sólo pase una vez la curva) y una forma de recorrer la curva. Así a cada vez que pasemos por el punto P le corresponde un número diferente que representa la distancia que se ha recorrido hasta llegar a P . Ver Fig. 12.

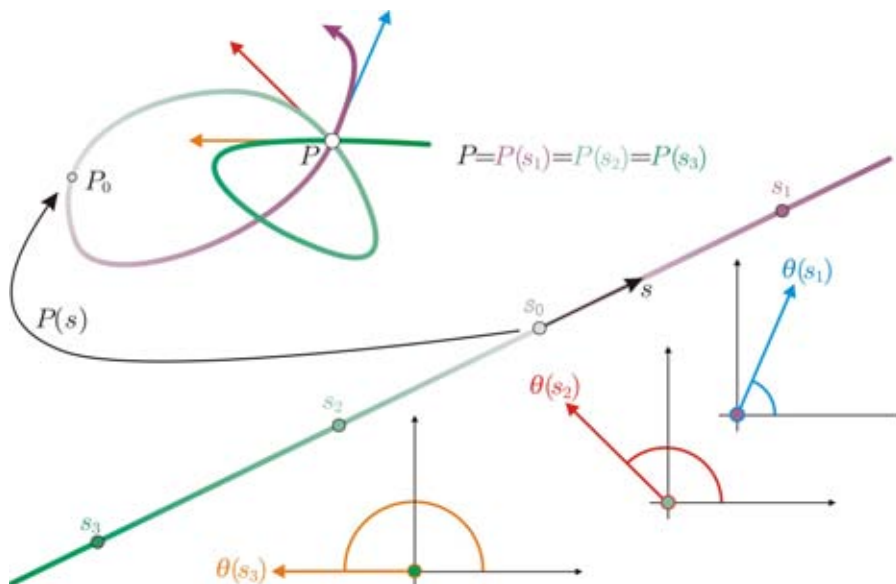


Fig. 12. A cada vez que pasamos por P le corresponde una cierta distancia medida desde el punto P_0 . En la figura la curva pasa 3 veces por P y a cada vez le corresponden los números $s_3 < s_2 < 0 < s_1$. Entonces a cada s le corresponde un punto P de la curva y también un ángulo θ , es decir, $P(s)$ y $\theta(s)$ son funciones de s .

El número puede ser positivo o negativo, según caminemos, partiendo de P_0 , hacia un lado u otro de la curva para llegar al punto P .

Definición 3 (parámetro longitud de arco) A dicho número se le llama el camino recorrido o la **longitud de arco** recorrida partiendo de P_0 para llegar a P , y lo denotamos por s .

Entonces a cada valor de s le corresponde un punto del viaje a lo largo de la curva y una dirección del vector tangente a la curva. La figura anterior ilustra la idea para dar una definición precisa de curva, a través del parámetro s .

Definición 4 Una *curva* en el plano es un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ que es la imagen de un intervalo abierto I bajo una aplicación diferenciable

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2; \text{ donde } s \rightarrow \gamma(s) \in \mathbb{R}^2;$$

$$A = \{\gamma(s) \in \mathbb{R}^2 : s \in I\}.$$

Se suele decir que $\gamma(s)$ es una parametrización de la curva con el parámetro longitud de arco s . Notamos que el parámetro no tiene que ser necesariamente el camino recorrido s , puede ser un parámetro t arbitrario, sin embargo la curvatura es una propiedad de una curva que es independiente del parámetro y muchas veces es más fácil visualizarla cuando el parámetro es s . De aquí en adelante tomaremos curvas con parámetro s , es decir, curvas recorridas con rapidez unitaria y cuando usemos otro parámetro usaremos la letra t .

El ángulo que forma el vector tangente a la curva es una función de s (ver figura anterior)

$$\theta(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$$

y esta función $\theta(s)$ nos dará información de cómo se curva la curva, es decir, nos servirá para dar una definición precisa de curvatura.

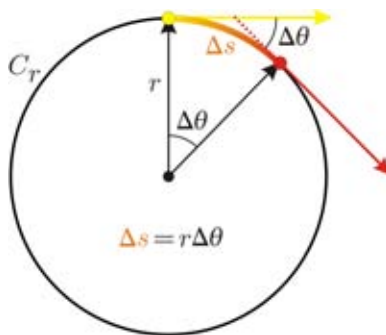
1.3. Curvatura de una circunferencia

En la discusión del coche viajando a rapidez constante en carreteras circulares C_r , la idea clave era la posición del volante. ¿Qué es lo que significa la posición fija del volante? Podríamos pensar que esto significa que la velocidad con la que cambia la dirección del coche es constante. Para ver si esto es así pensemos en el siguiente

Ejemplo 5 Una circunferencia C_r recorrida de dos maneras distintas: una con rapidez constante y la otra con el doble de dicha rapidez.

En ambos casos tenemos la misma posición constante del volante, sin embargo, la rapidez con la que cambia la dirección del coche es el doble en el segundo caso. Entonces la posición constante del volante es independiente de la rapidez con que recorremos la carretera y de la rapidez $\frac{d\theta}{dt}$ con que cambia el coche de dirección. En otras palabras, $\frac{d\theta}{dt}$ no es una propiedad que refleje la forma de la carretera C_r . ¿Qué sucede con la variación $\frac{d\theta}{ds}$ de la dirección del coche respecto del camino recorrido? Analicemos el ejemplo anterior: cuando recorremos C_r en el segundo caso la dirección del coche va cambiando dos veces más rápido, pero también recorremos el doble de distancia respecto al primer caso. Hay un equilibrio al considerar la variación en el ángulo respecto a la variación en la distancia recorrida, de modo que obtenemos el mismo valor para las dos formas mencionadas.

En general se dará el equilibrio manifiesto en el ejemplo anterior, sin importar la rapidez con que recorramos la carretera. Supongamos que nuestro coche es un punto moviéndose en una circunferencia. La variación del ángulo del vector velocidad $\Delta\theta$ en dos puntos por los que ha pasado el coche es igual⁴ a la variación en el ángulo del vector de posición del punto.



El arco que subtende el ángulo $\Delta\theta$ es el camino Δs que ha recorrido el punto en la circunferencia; usando la relación que hay entre un ángulo central de C_r y el arco que subtende:

$$\Delta s = r\Delta\theta,$$

obtenemos que la razón de la variación del ángulo entre la variación del camino recorrido es constante

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{1}{r}. \tag{1.1}$$

⁴Estamos usando un resultado de geometría elemental que dice que si tenemos dos ángulos cuyos lados son perpendiculares entre sí, entonces dichos ángulos son iguales.

Notamos que no hicimos distinción entre la pareja de puntos de C_r que elegimos, de modo que 1.1 sigue siendo cierta para puntos tan cercanos como queramos:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}.$$

Lo importante del razonamiento anterior es que no usamos en ningún momento la forma en que el punto recorrió la circunferencia, lo que está en sintonía con el equilibrio del ejemplo 5. Una manera de argumentar dicho equilibrio en general es expresando $\frac{d\theta}{ds}$ en términos de la rapidez angular del vector velocidad y de la rapidez $\frac{ds}{dt}$ con que se mueve el punto

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d\theta}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{r}.$$

La derivada $\frac{d\theta}{ds}$ es independiente de la manera de recorrer la circunferencia C_r (es decir, de su parametrización) y determina su radio r , de modo que determina la forma geométrica de C_r .

Conclusión 6 *La posición fija del volante significa que la tasa de cambio $\frac{d\theta}{ds}$ entre ángulo $\theta(s)$ que forma el vector velocidad del coche y un vector fijo (por ejemplo e_1), y el camino recorrido s por el coche es constante.*

La gráfica de la función $\theta(s)$ para un punto que se mueve en C_r será tal que su razón de cambio es constante, es decir, será un segmento⁵ de recta con pendiente $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}$. Ver Fig.13. Mientras más pequeño (grande) sea el radio de C_r más rápido (lento) cambiará θ con respecto al camino recorrido y la pendiente de la recta sería menor (mayor).

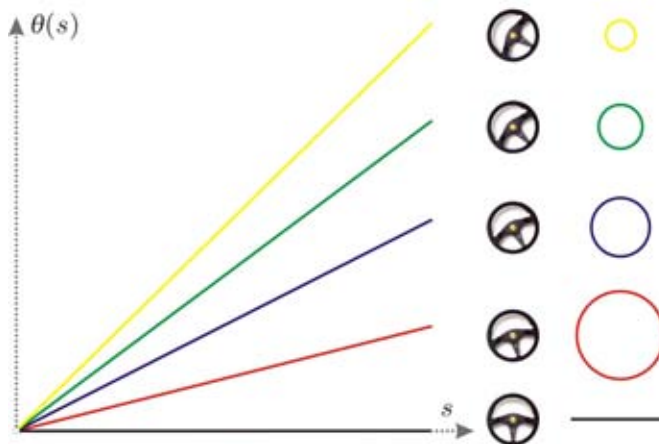


Fig. 13.

Resumen 7 *En la sección 1.1 dimos una discusión intuitiva de cómo tendría que ser el concepto que nos sirva para describir la forma en que se curvan las circunferencias. Vimos que un número k_r es suficiente para describir la forma en que se curva una circunferencia C_r , con tal de que k_r crezca cuando r decrezca y viceversa. Acabamos de ver que*

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}$$

determina la forma de C_r y además satisface lo anterior ya que es inversamente proporcional a r . Así que tomaremos este número como medida de qué tanto se curva una circunferencia, por lo que damos la siguiente

Definición 8 *La curvatura k_r de una circunferencia C_r de radio r es el número real*

$$k_r = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}.$$

⁵La gráfica será un segmento de recta para valores de $s \in [0, 2\pi r)$. Si tomamos $s \in \mathbb{R}$, entonces la gráfica estará conformada por una infinidad de segmentos que se repiten en intervalos de longitud $2\pi r$.

1.4. Curvatura de una curva plana

Ya tenemos una definición formal de curvatura para una circunferencia, ¿Cuál será la definición de curvatura para una curva arbitraria? ¿Tiene $\frac{d\theta}{ds}$ información sobre geometría de la curva? Veamos.

A cada circunferencia S_r le corresponde una línea recta en el plano (s, θ) con pendiente

$$m = \frac{d\theta}{ds} = k_r = \frac{1}{r},$$

y al revés, a cada recta en (θ, s) le corresponde una circunferencia (puede ser sólo un arco) de radio

$$r = \frac{1}{m} = \frac{1}{\frac{d\theta}{ds}}.$$

Para una curva γ arbitraria la gráfica del ángulo del vector tangente $\theta(s)$ no será una recta, sin embargo cerca de cada punto $(s, \theta(s))$ será muy parecida a su recta tangente, cuya pendiente es precisamente $\frac{d\theta}{ds}$. A esa recta tangente le corresponde una circunferencia $C_{r(s)}$ de radio $r(s) = \frac{1}{m} = \frac{1}{\frac{d\theta}{ds}}$. En la siguiente figura (1) mostramos algunas rectas y las circunferencias correspondientes (ver Fig. 14).

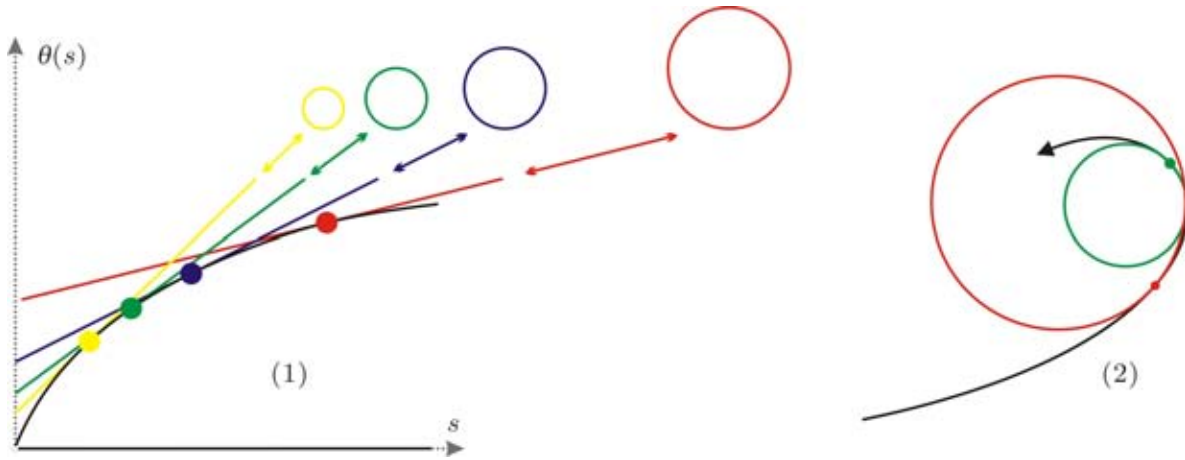


Fig. 14.

Cerca del punto $\gamma(s)$ la curva deberá parecerse a la circunferencia $C_{r(s)}$ (ver figura 14 (2)); de hecho, como veremos en la sección 1.6, $C_{r(s)}$ es, de todas las circunferencias, la mejor que aproxima la curva cerca del punto $\gamma(s)$. Entonces, también en el caso de un curva arbitraria, la derivada $\frac{d\theta}{ds}$ posee información de su forma; nos dice que localmente es como una circunferencia de radio $r = \frac{1}{\frac{d\theta}{ds}}$, de modo que la curva, cerca del punto se curvará como lo hace dicha circunferencia. Por lo anterior tomaremos a la derivada $\frac{d\theta}{ds}$ como nuestra definición de curvatura en general.

Definición 9 La curvatura k de una curva γ en el instante s es el número real

$$k(s) = \frac{d\theta}{ds}. \tag{1.2}$$

Esta definición abarca la que habíamos dado para circunferencias, ya que si $\gamma = C_r$ entonces obtenemos que la curvatura $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}$, es constante para todo valor de s . Por otro lado,

Definición 10 La circunferencia de radio

$$r_{k(s)} = \frac{1}{k(s)} = \frac{1}{\frac{d\theta}{ds}}$$

se llama **circunferencia⁶ de curvatura** $C_{r_{k(s)}}$, y su radio, **radio de curvatura** $r_{k(s)}$.

⁶ A la circunferencia de curvatura también se le llama comúnmente circunferencia osculadora u osculatriz. En la sección 1.7 veremos que es la circunferencia que mejor aproxima a la curva.

1.5. Curvatura a través de la indicatriz de las tangentes

Ahora imaginemos que un punto se mueve con rapidez $v_p = 1$ a lo largo de una curva⁷ $\gamma(s)$. Fijemos un punto de la curva $\gamma(0)$ a partir del cual empezemos a medir distancias sobre la curva. A cada instante s le podemos asociar su vector velocidad γ' , es decir, es el vector tangente unitario $\mathbf{t}(s)$ a la curva γ , creando así una aplicación

$$\mathbf{t} : [0, s] \rightarrow C_1$$

que se llama indicatriz de las tangentes. Ver Fig. 15.

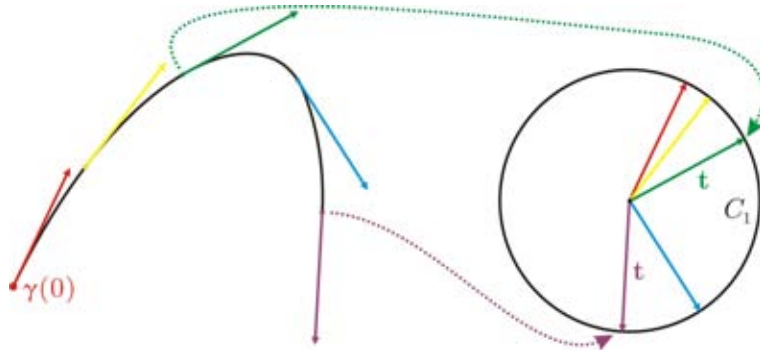


Fig. 15. Puntos en la curva y sus indicatriz.

La imagen de \mathbf{t} está contenida en la circunferencia unitaria C_1 centrada en el origen. De modo que al transcurrir el tiempo s , $\gamma(s)$ se mueve a lo largo de la curva y su indicatriz $\mathbf{t}(s)$ se mueve en C_1 (ver Fig. 16).

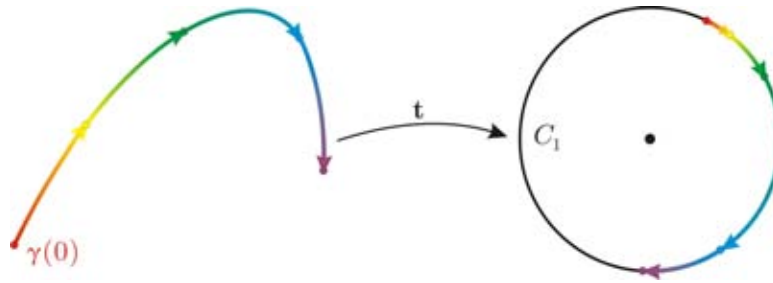


Fig. 16. En esta figura se muestra el movimiento del punto sobre la curva y el movimiento que induce la indicatriz \mathbf{t} en C_1 .

A continuación exploraremos algunos ejemplos y a partir de ellos obtendremos otra manera de ver la curvatura: la rapidez con que se mueve la indicatriz \mathbf{t} .

Ejemplo 11 *La línea recta.*

Si $\gamma = \gamma(s)$ es una recta, el vector $t = t(s)$ apuntará siempre en una misma dirección de modo que la indicatriz t será constante; un solo punto en C_1 (ver Fig. 17.) que no se mueve por lo que su rapidez es nula, es decir

$$\|\mathbf{t}'(s)\| = 0.$$

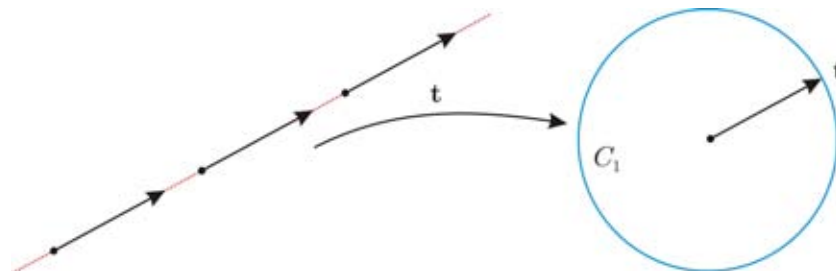


Fig. 17.

Ejemplo 12 *La circunferencia.*

Supongamos ahora que nuestra curva es una circunferencia $C_r = C_r(s)$. ¿Cómo será la rapidez $\|\mathbf{t}'\|$ con la que la indicatriz recorre C_1 ? Intuitivamente, $\|\mathbf{t}'\|$ es pequeña cuando t se mueve lento en C_1 y esto es así cuando al movernos sobre la circunferencia C_r la dirección del vector t cambia muy poco. Esto último pasa si el radio y la curvatura de C_r son grande y pequeño respectivamente. Ver Fig.18. Por otro lado, si $\|\mathbf{t}'\|$ es grande entonces t se mueve rápido sobre C_1 , lo que significa que la dirección de t cambia mucho cuando recorremos C_r . Esto último pasa si el radio y la curvatura de C_r son pequeño y grande respectivamente.

⁷Supondremos que γ no se autointerseca, pues en caso de hacerlo podría haber más de un vector tangente asociado a $P(s)$.

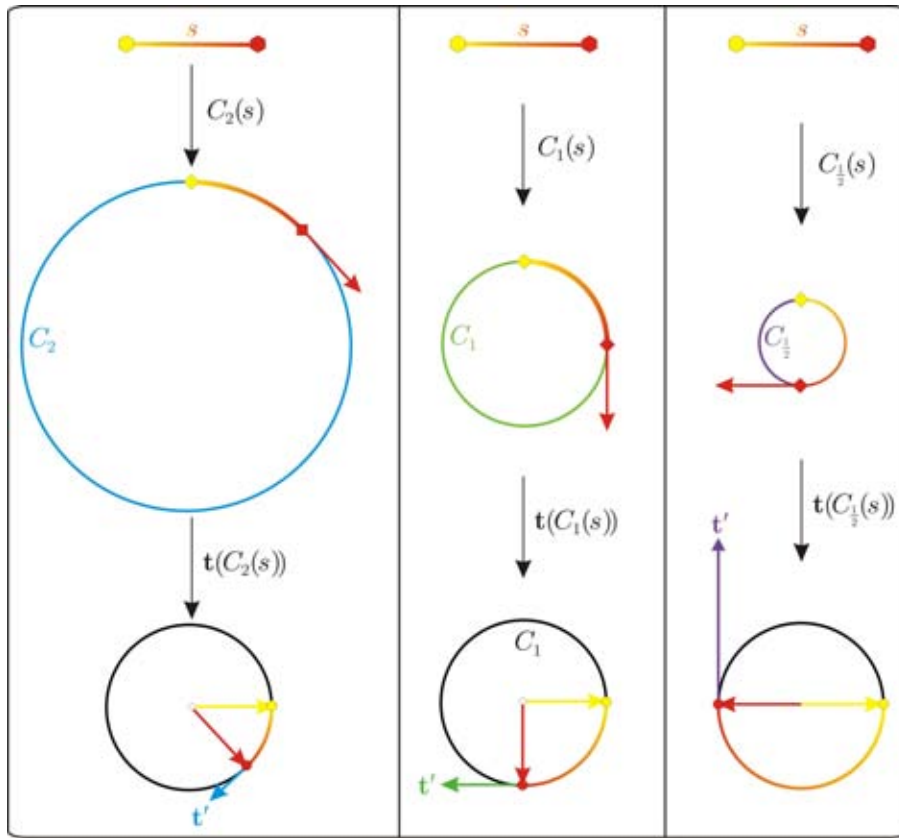
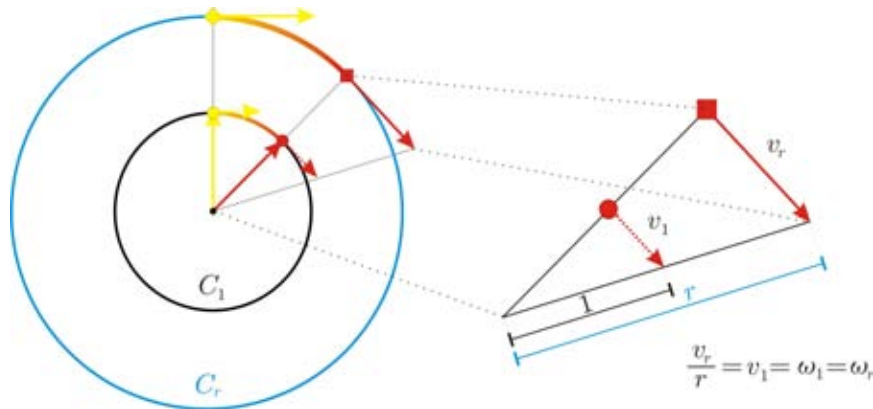


Fig. 18. Circunferencias de radio $\frac{1}{2}, 1, 2$ recorridas a rapidez unitaria, en cada caso mostramos la imagen de su indicatriz \mathbf{t} . La rapidez $\|\mathbf{t}'\|$ es $\frac{1}{2}, 1$ y 2 , para $r = 2, 1$ y $\frac{1}{2}$, respectivamente.

Lo anterior muestra que hay una relación entre $\|\mathbf{t}'\|$ y la curvatura de C_r ; para llegar a ella, recordemos un resultado que vincula la rapidez de un movimiento circular con su rapidez angular. Si un punto se mueve a rapidez constante v_r a lo largo de C_r , entonces su rapidez angular ω_r está relacionada con v_r . Veamos cómo. Proyectemos el movimiento en C_r sobre C_1 (ver la siguiente figura), obtenemos un movimiento en C_1 con una rapidez constante $v_1 = \frac{v_r}{r}$ que coincide con la rapidez angular $\omega_1 = \omega_r$ de los movimientos en C_1 y C_r ; de modo que

$$\omega_r = \frac{v_r}{r}. \quad (1.3)$$



Veamos cuál es la relación entre $\|\mathbf{t}'\|$ y la curvatura de C_r . Por (1.3) tenemos que la rapidez angular ω_r con la que se mueve el punto sobre C_r es

$$\omega_r = \frac{1}{r}; \quad (1.4)$$

Por otro lado, $C_r(s)$ y $t(s)$ son perpendiculares en cada momento por lo que giran al mismo ritmo; de modo que movimiento de la indicatriz t en C_1 tendrá la misma rapidez angular

$$\omega_{\mathbf{t}} = \omega_r. \quad (1.5)$$

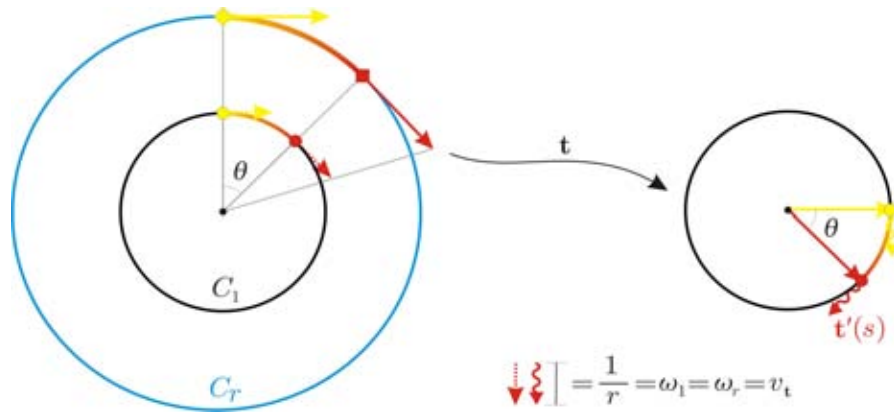


Fig. 21.

Aplicando la fórmula (1.3) al movimiento de t en C_1 y sustituyendo (1.4) y (1.5) obtenemos:

$$\|\mathbf{t}'\| = \omega_t = \omega_r = \frac{1}{r}$$

por lo que t se mueve a lo largo de C_1 con una rapidez

$$\|\mathbf{t}'\| = \frac{1}{r} = k_r,$$

que es la curvatura de C_r . Hemos llegado a otra manera de visualizar la curvatura de una circunferencia C_r :

$$k_r = \|\mathbf{t}'(s)\|;$$

es decir, la curvatura es la rapidez con que se mueve en C_1 la indicatriz de las tangentes t .

Ejemplo 13 Curvas arbitrarias

Veamos que para una curva arbitraria γ también tendremos que su curvatura es igual a la rapidez $\|\mathbf{t}'\|$ con que se mueve t . Supongamos que nos movemos con rapidez unitaria a lo largo γ (Véase Fig. 22).

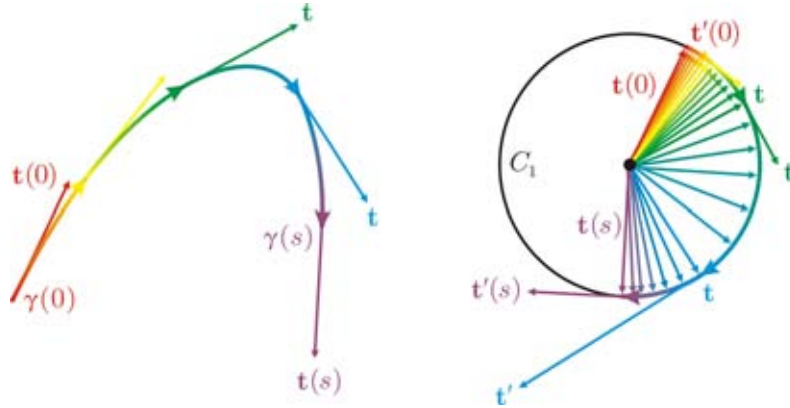


Fig. 22.

La imagen de t genera un movimiento en C_1 cuya velocidad es igual a la segunda derivada de la curva γ (ya que $\gamma' = \mathbf{t}$) y su rapidez en un instante s_0 está dada por

$$\|\mathbf{t}'(s_0)\| = \|\gamma''(s_0)\|.$$

A continuación mostraremos que $\|\mathbf{t}'(s_0)\|$ es igual a la curvatura de la curva en el punto $\gamma(s_0)$:

$$\|\mathbf{t}'(s_0)\| = k(s_0) = \frac{d\theta}{ds}(s_0).$$

Por definición

$$\mathbf{t}'(s_0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{t}(s_0 + s) - \mathbf{t}(s_0)}{s},$$

donde $\mathbf{t}(s_0 + s) - \mathbf{t}(s_0)$ es el vector que va de $\mathbf{t}(s_0)$ a $\mathbf{t}(s_0 + s)$, de modo que $\frac{\mathbf{t}(s_0 + s) - \mathbf{t}(s_0)}{s}$ es un vector en la misma dirección y su tamaño es $\frac{\|\mathbf{t}(s_0 + s) - \mathbf{t}(s_0)\|}{s}$. Véase Fig. 23.

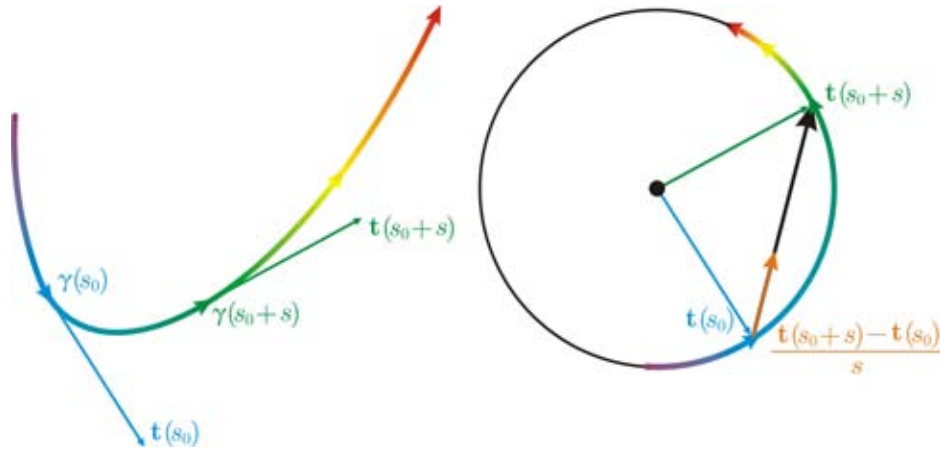


Fig. 23.

Cuando $s \rightarrow 0$ el vector que va de $\mathbf{t}(s_0)$ a $\mathbf{t}(s_0+s)$ tenderá a un vector en la dirección de la recta tangente a C_1 en $\mathbf{t}(s_0)$, de modo que $\mathbf{t}'(s_0)$ será un vector en la dirección de dicha recta. Para calcular $\|\mathbf{t}'(s_0)\|$ veamos cómo es

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{t}(s_0+s) - \mathbf{t}(s_0)\|}{s}$$

Cuando s es muy pequeño $\|\mathbf{t}(s_0+s) - \mathbf{t}(s_0)\|$ se parece mucho al arco de C_1 que une a $\mathbf{t}(s_0)$ con $\mathbf{t}(s_0+s)$. Dicho arco tiene una longitud igual al ángulo que lo genera. (véase la siguiente figura)

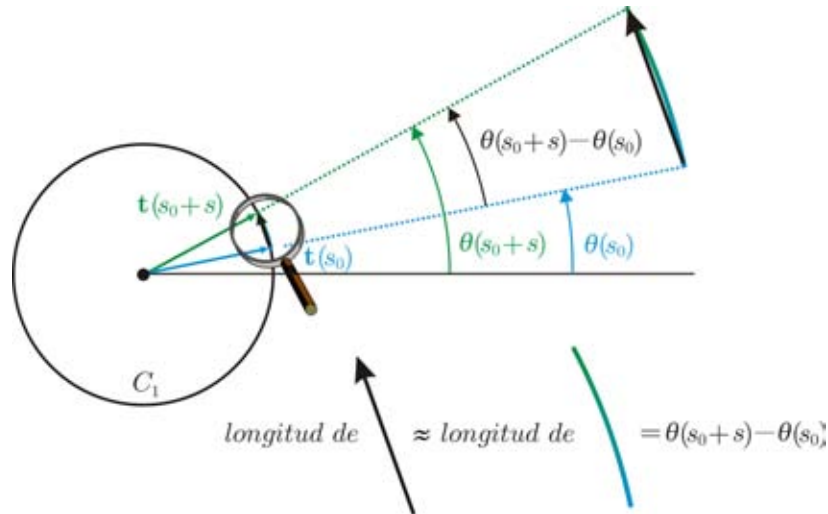


Fig. 24.

Este último se puede expresar como la diferencia $\theta(s_0+s) - \theta(s_0)$ donde $\theta(s)$ es la dirección del vector $\mathbf{t}(s)$ con respecto a una dirección fija

$$\|\mathbf{t}(s_0+s) - \mathbf{t}(s_0)\| \approx \theta(s_0+s) - \theta(s_0)$$

de donde

$$\frac{\|\mathbf{t}(s_0+s) - \mathbf{t}(s_0)\|}{s} \approx \frac{\theta(s_0+s) - \theta(s_0)}{s}$$

La aproximación se vuelve igualdad en el paso al límite cuando $s \rightarrow 0$:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{t}(s_0+s) - \mathbf{t}(s_0)\|}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\theta(s_0+s) - \theta(s_0)}{s} = \frac{d\theta}{ds}(s_0)$$

donde la primera y última expresiones son $\|\mathbf{t}'(s_0)\|$ y $k(s_0)$ respectivamente por lo que obtenemos la igualdad buscada

$$\|\gamma''(s_0)\| = \|\mathbf{t}'(s_0)\| = k(s_0).$$

Conclusión 14 La curvatura de una curva es igual a la rapidez con que se mueve su indicatriz \mathbf{t} .

Este resultado nos permite dar una definición alternativa de curvatura.

Definición 15 La curvatura de una curva en el punto $\gamma(s_0)$ es igual al tamaño de su segunda derivada $\|\gamma''(s_0)\|$

$$k(s_0) = \|\gamma''(s_0)\| = \|\mathbf{t}'(s_0)\|.$$

Definición 16 Al vector $\gamma''(s)$ se le llama **vector de curvatura** de la curva γ .

1.6. Curvatura a través de la circunferencia límite determinada por una terna de puntos en la curva

En la discusión que dimos en 1.4 mencionamos que la circunferencia de curvatura es la que mejor aproxima a la curva γ cerca de cada punto. Discutamos esta idea más detalladamente; veremos qué significa que una circunferencia sea la que mejor aproxima la curva en un punto y demostraremos que el radio de dicha circunferencia debe ser el radio de curvatura:

$$r = r_{k(s)} = \frac{1}{k(s)} = \frac{1}{\|\gamma''(s)\|}.$$

La idea es tomar tres puntos $\gamma(s_1), \gamma(s_2), \gamma(s_3)$ en la curva⁸ cercanos al punto $\gamma(s_0)$ que nos interesa, de modo que

$$s_1 < s_2 < s_3 \text{ y } s_0 \in (s_1, s_3);$$

dichos puntos determinan una circunferencia $C = C(s_1, s_2, s_3)$. Veremos que si hacemos tender los tres puntos a $\gamma(s_0)$, entonces, en el límite, la circunferencia C tiende⁹ a la circunferencia de curvatura $C_{r_{k(s_0)}}$ de γ en el punto $\gamma(s_0)$ (véase la siguiente figura).

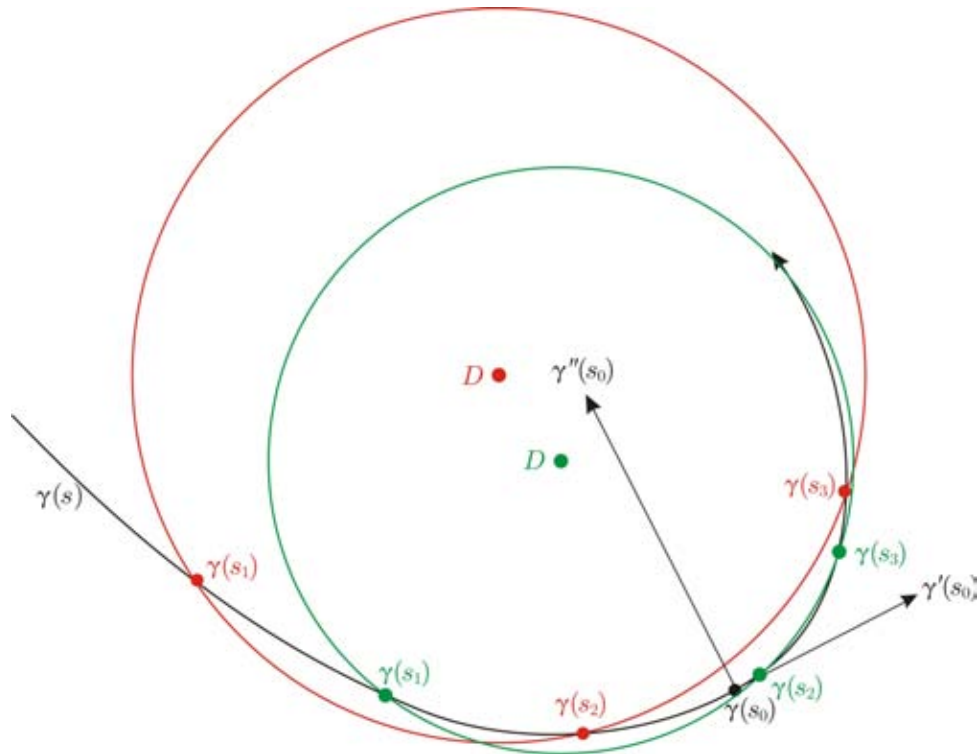


Fig. 25. Tomamos dos ternas de puntos $\gamma(s_1), \gamma(s_2), \gamma(s_3)$, la roja más alejada de $\gamma(s_0)$ que la verde. Cerca de $\gamma(s_0)$ se amolda más a la curva la circunferencia determinada por la terna verde. Si imaginamos cómo la terna de puntos tienden a s_0 obtendremos una curva formada por los centros D de las circunferencias que determinan las ternas en cada instante. En el límite obtendremos que esta curva converge al centro de la circunferencia de curvatura de la curva en el punto $\gamma(s_0)$. Los radios de las circunferencias convergerán al radio de curvatura.

Prueba. Sea $D = D(s_1, s_2, s_3)$ el centro de la circunferencia C que pasa por $\gamma(s_1), \gamma(s_2), \gamma(s_3)$. Consideremos la función

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ donde } F(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - D\|^2,$$

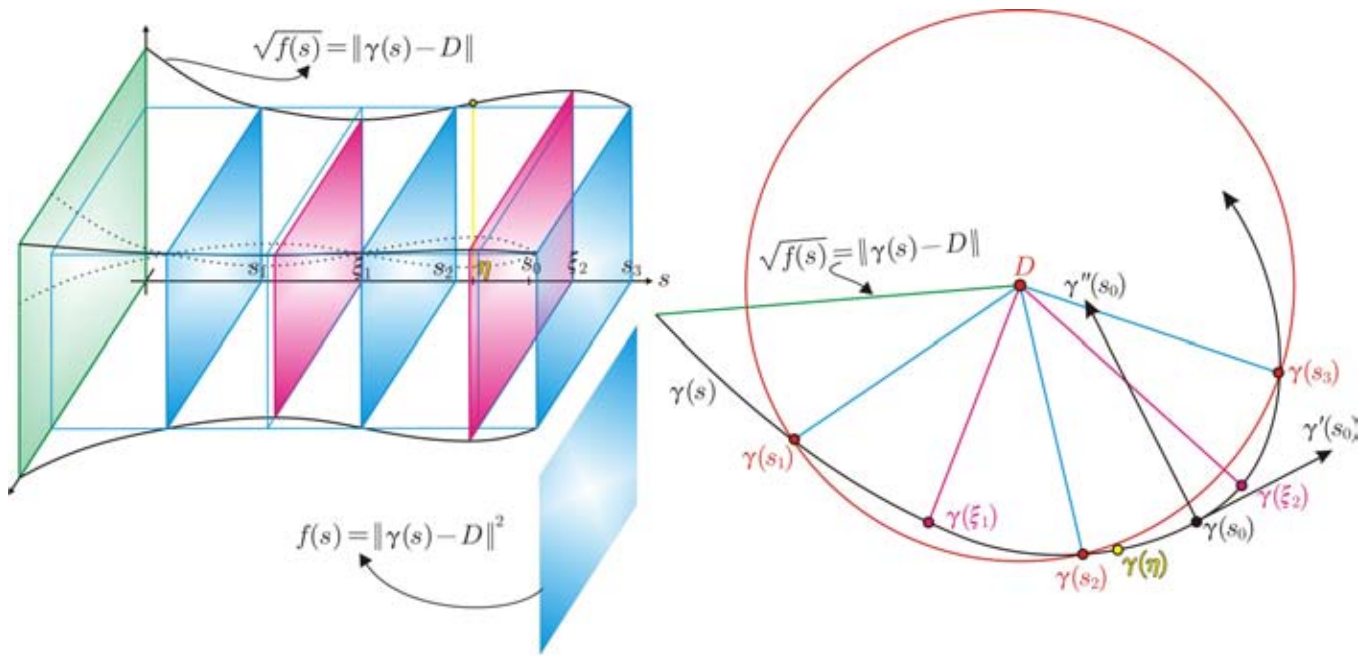
que mide el cuadrado de la distancia de un punto en \mathbb{R}^3 al punto D ; si la evaluamos en los puntos de la curva γ obtenemos la función

$$f = F \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ donde } f(s) = F(\gamma(s)) = \|\gamma(s) - D\|^2,$$

que es el cuadrado de la distancia de los puntos de la curva $\gamma(s)$ al punto D . En la siguiente figura mostramos el comportamiento de la función $f(s)$, sus valores están representados en cada instante s por el área de un cuadrado de lado $\sqrt{f(s)}$. Al evaluar f en s_1, s_2 y s_3 , tenemos que $f(s_i)$ es igual al cuadrado del radio r de C , ya que C pasa por $\gamma(s_1), \gamma(s_2)$ y $\gamma(s_3)$.

⁸Vamos a suponer que la curva no es una recta ni una circunferencia.

⁹Esta idea es parecida a la que se usa en Cálculo para llegar a la recta que más se parece a la gráfica de una función cerca de un punto, en donde se toman dos puntos en lugar de tres y se hace pasar una recta en lugar de una circunferencia.



El valor de f no es constante para todo s , pues supusimos que la curva no es una circunferencia. Entonces al variar s de s_1 a s_2 el valor de $f(s)$ varía, iniciando y acabando en el mismo valor:

$$f(s_1) = f(s_2) = r^2.$$

Hay un par de momentos $\xi_1 \in (s_1, s_2)$ y $\xi_2 \in (s_2, s_3)$ en los cuales $f(s)$ alcanza un máximo o un mínimo, es decir, $f'(\xi_i) = 0$. Cerca de $\gamma(\xi_1)$ y $\gamma(\xi_2)$ la curva γ se comporta como una circunferencia con centro en D y de radio

$$r_1 = \|D - \gamma(\xi_1)\| \text{ y } r_2 = \|D - \gamma(\xi_2)\|$$

respectivamente. En los instantes ξ_i la velocidad de la curva es ortogonal al vector que une D y $\gamma(\xi_i)$:

$$\gamma'(\xi_i) \perp \gamma(\xi_i) - D \tag{1.6}$$

La velocidad con que varía $f'(s)$ en (ξ_1, ξ_2) , es decir, $f''(s)$, deberá ser distinta de cero en algunos puntos dentro de (ξ_1, ξ_2) . Pues en otro caso, partiendo del hecho de que $f'(\xi_1) = 0$ tendríamos que $f'(s) = 0$ en todo el intervalo $[\xi_1, \xi_2]$; de donde llegaríamos a que el valor de f en $[\xi_1, \xi_2]$ sería constante

$$f(s) = r_1, \forall s \in [\xi_1, \xi_2];$$

esto implicaría que γ es una circunferencia, lo que contradice nuestra suposición inicial.

Por otro lado existe un punto $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$ donde la velocidad con que se aleja la curva alcanza un máximo o mínimo, es decir

$$f''(\eta) = 0.$$

Podemos expresar a $f''(s)$ en términos de la aceleración (curvatura) $\gamma''(s)$ de la curva ya que $f = F(\gamma(s))$. Derivemos dos veces a f , interpretándola como la derivada direccional de la función F en la dirección del vector $\gamma'(s)$:

$$\begin{aligned} f'(s) &= \nabla F(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) = 2(\gamma(s) - D) \cdot \gamma'(s) \\ \frac{1}{2}f''(s) &= \gamma'(s) \cdot \gamma'(s) + [\gamma(s) - D] \cdot \gamma''(s) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Evaluemos en η , tomando en cuenta la rapidez constante de la curva, $\|\gamma'(s)\| = 1$, y que $f''(\eta) = 0$:

$$[\gamma(\eta) - D] \cdot \gamma''(\eta) + 1 = 0$$

De la ecuación anterior obtenemos la siguiente relación

$$[D - \gamma(\eta)] \cdot \gamma''(\eta) = 1 \tag{1.8}$$

Por otro lado (1.6) garantiza que para cada terna (s_1, s_2, s_3) el vector $D - \gamma(\xi_i)$ es perpendicular al vector velocidad $\gamma'(\xi_i)$. Cuando $(s_1, s_2, s_3) \rightarrow (s_0, s_0, s_0)$, $\xi_i \rightarrow s_0$ y $\eta \rightarrow s_0$, el vector $\gamma(\xi_i) \rightarrow \gamma(s_0)$, y el vector $D - \gamma(\xi_i)$ se hará indistinguible del vector $D - \gamma(\eta)$. Pasemos al límite considerando dos casos:

1. $\gamma''(s_0) \neq 0$. En este caso el vector $D - \gamma(\eta)$ convergerá a un vector que parte de $\gamma(s_0)$, contenido en la línea perpendicular $\gamma'(s_0)$. Además (1.8) garantiza que estará del mismo lado que $\gamma''(s_0)$ respecto del vector $\gamma'(s_0)$ y que su longitud, que es el radio de la circunferencia buscada, será

$$\|D - \gamma(s_0)\| = \frac{1}{\|\gamma''(s_0)\|}.$$

2. $\gamma''(s_0) = 0$. En este caso la dirección del vector $D - \gamma(\eta)$ convergerá a la dirección de la recta perpendicular a $\gamma'(s_0)$. Sin embargo 1.8 nos dice que el vector D se hará tan grande como se quiera, es decir, $\|D\| \rightarrow \infty$. Podemos interpretar lo anterior diciendo que la circunferencia a la que converge C es una circunferencia de radio infinito C_∞ y curvatura cero.

■

El procedimiento muestra otra posibilidad para introducir la curvatura de una curva plana.

Definición 17 La *curvatura* de una curva γ en el punto $\gamma(s_0)$ es el inverso del radio de la circunferencia que obtenemos de tomar el límite de la circunferencia que determina una terna de puntos $\gamma(s_i)$ en γ , donde $s_i \rightarrow s_0$.

1.7. Curvatura como el inverso del radio de la circunferencia de mayor orden de contacto con la curva

A continuación precisaremos lo que entenderemos al decir que una circunferencia sea la que más se parece a la curva. Para ello definiremos el concepto de orden de contacto de una curva $\gamma(s)$ con respecto a otra que se puede expresar como la curva de nivel de una cierta función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

La idea intuitiva es que la intersección de dos curvas en un punto puede ser transversal o tangente. En el segundo caso, las curvas serán más parecidas cerca del punto de intersección. En la siguiente figura ilustramos esta idea: $\gamma(s_0)$ es el punto de intersección de una curva de nivel cero $F^{-1}(0)$ y dos curvas $\gamma(s)$. La intersección es transversal con la curva roja y tangente con la azul. Cerca del punto $\gamma(s_0)$ la curva $F^{-1}(0)$ se parece más a la curva azul, su orden de contacto será mayor.

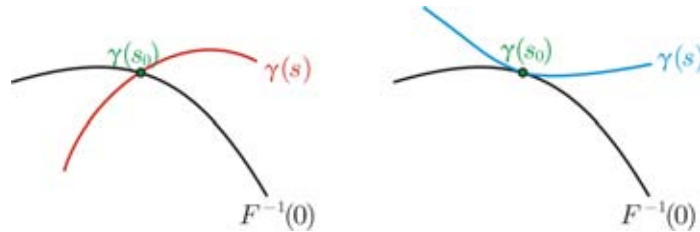


Fig. 27. Mostramos una curva de nivel cero $F^{-1}(0)$ de $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y dos curvas $\gamma(s)$. Intuitivamente la curva azul se pega más a $F^{-1}(0)$ que la curva roja, y por lo tanto tendrá un orden de contacto mayor.

Precisemos, sea

$$F^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$$

la curva de nivel cero de F y $\gamma(s)$ una curva en el dominio de F . Podemos evaluar la función F a lo largo de la curva $\gamma(s)$ obteniendo así una función

$$f(s) = F \circ \gamma(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Los puntos de intersección de las curvas serán ceros de f .

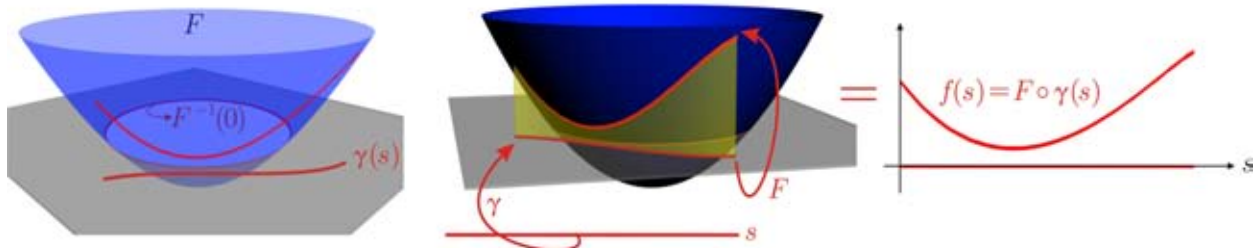
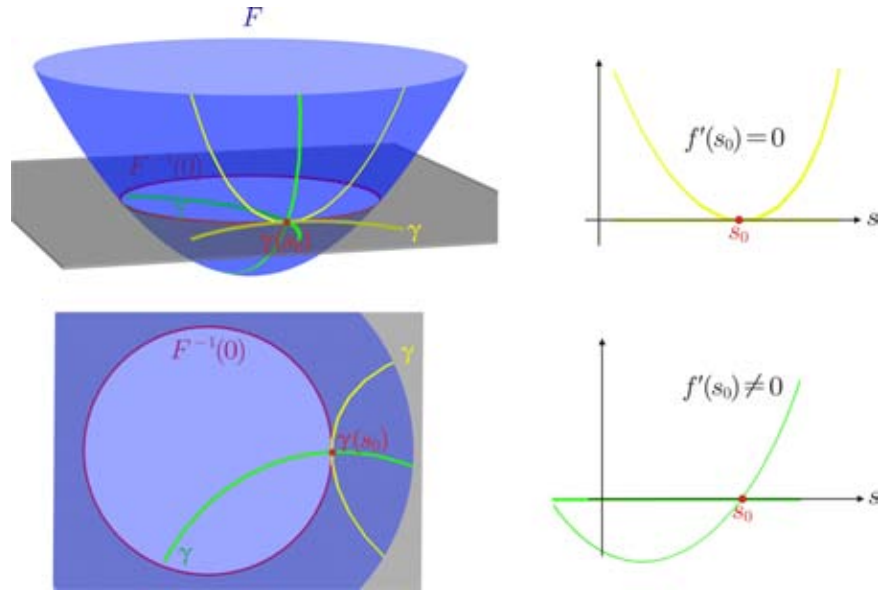


Fig. 28. En la figura mostramos la gráfica de F (un paraboloid), una circunferencia ($F^{-1}(0)$), una curva $\gamma(s)$ y la función $f(s) = F \circ \gamma(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ilustramos que si $f(s) \neq 0$ entonces $\gamma(s)$ y $F^{-1}(0)$ no se intersecan.

Supongamos que $F^{-1}(0)$ y $\gamma(s)$ se intersecan en $\gamma(s_0)$ de modo que $f(s_0) = 0$. La forma en que $f(s)$ se acerca al cero cuando $s \rightarrow s_0$ nos dará una medida de qué tanto se pegan $F^{-1}(0)$ y $\gamma(s)$ cerca de $\gamma(s_0)$. En la siguiente figura mostramos dos curvas γ , en la verde f se acerca al cero como una recta, es decir, $f'(s_0) \neq 0$ y en la amarilla f se acerca al cero como una parábola, es decir, $f'(s_0) = 0$. La primera se pega menos a la circunferencia $F^{-1}(0)$ que la segunda.



Para analizar cómo se acerca f al cero hay que derivarla y a partir de estas derivadas definimos el orden de contacto.

Definición 18 Decimos que $F^{-1}(0)$ y $\gamma(s)$ tienen un **orden de contacto 1** en $\gamma(s_0)$ si

$$f(s_0) = 0, \text{ y } f'(s_0) \neq 0,$$

orden de contacto 2 si

$$f(s_0) = f'(s_0) = 0, \text{ y } f''(s_0) \neq 0,$$

y en general **orden de contacto n** si

$$f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = \dots = f^{(n-1)}(s_0) = 0, \text{ y } f^{(n)}(s_0) \neq 0.$$

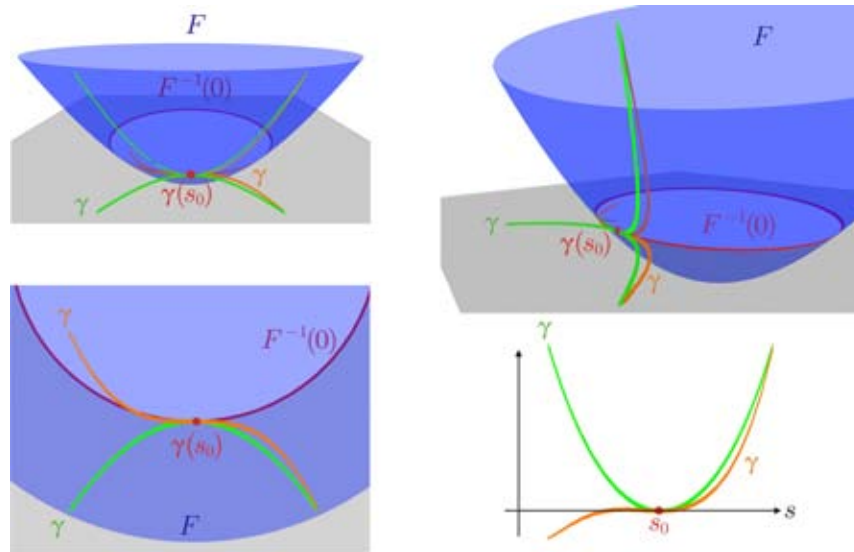


Fig. 30. En la figura se muestran dos curvas α en el plano xy . Una tiene la forma de la gráfica de $h(x) = x^2$ (en verde) y la otra de $g(x) = x^3$ (en naranja). Ambas son tangentes a la curva de nivel $F^{-1}(0)$ en el punto $\alpha(s_0)$. De ellas la cúbica se pega más a $F^{-1}(0)$ (ver imagen inferior izquierda). Satisface que $f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = 0$ y $f'''(s_0) \neq 0$ por lo que tiene orden de contacto 3 con $F^{-1}(0)$. Para la parábola tenemos que $f(s_0) = f'(s_0) = 0$ y $f''(s_0) \neq 0$, por lo que tiene orden de contacto 2 con $F^{-1}(0)$.

Plantearemos ahora la discusión sobre cuál es la circunferencia $F^{-1}(0)$ que más se parece a una curva γ cerca de un punto $\gamma(s_0)$. Sea \mathbf{C} el conjunto de circunferencias en el plano, cada una de ellas queda determinada por su centro D y su radio r . Es decir, existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de \mathbf{C} y los puntos del semiespacio superior en \mathbb{R}^3 ,

$$\mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^3,$$

Denotaremos $C_{(D,r)}$ a los elementos de \mathbf{C} . Para que la circunferencia $C_{(D,r)}$ tenga orden de contacto uno con la curva γ en el punto $\gamma(s_0)$ necesita pasar por dicho punto. Esta condición descarta gran parte de puntos $(D,r) \in \mathbb{R}^2 \times [0,\infty)$, de hecho sólo nos quedamos con aquellos que cumplen la relación

$$\|D - \gamma(s_0)\| = r,$$

y que están contenidos en un cono $\Psi \subset \mathbb{R}^2 \times [0,\infty)$, cuyo vértice es el punto $(\gamma(s_0), 0)$. Para ver qué puntos en Ψ representan circunferencias $C_{(D,r)}$ que tengan orden de contacto 2 o más, necesitamos especificar una función suave F para cada uno de ellos

$$(D,r) \rightarrow F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

que tenga a $C_{(D,r)}$ como curva de nivel cero $F^{-1}(0)$. La función

$$\Phi_D(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - D\|^2, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,$$

es suave, su gráfica es un paraboloide con vértice en D y sus curvas de nivel son circunferencias. Para lograr que la circunferencia $C_{(D,r)}$ sea la curva de nivel cero necesitamos bajar el paraboloide para que su altura sobre el punto $\gamma(s_0)$ sea cero, es decir hay que restarle el valor de Φ en $\gamma(s_0)$ que es el cuadrado del radio $\|D - \gamma(s_0)\|^2 = r^2$:

$$F_D(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - D\|^2 - \|\gamma(s_0) - D\|^2$$

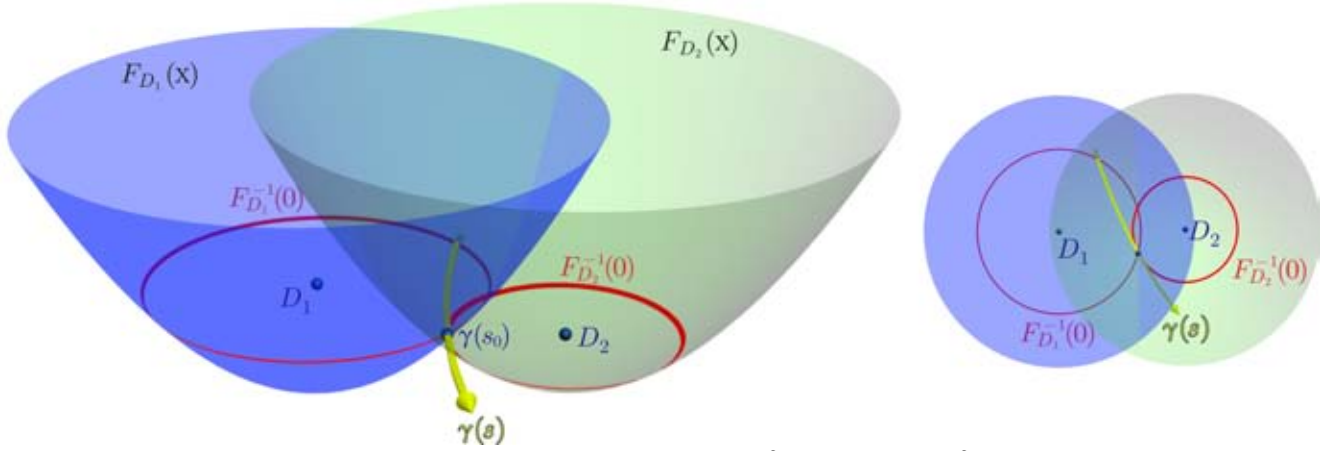


Fig. 31. En la figura se muestra la gráfica de la función $F_D(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - D\|^2 - \|\gamma(s_0) - D\|^2$, para dos valores de D , D_1 y D_2 . La gráfica es un paraboloide centrado en D_i y bajado una distancia $\|\gamma(s_0) - D_i\|^2$. Para cada punto D del plano hay una función $F_D(\mathbf{x})$. En la parte de abajo se muestran las gráficas vistas desde abajo (izquierda) y desde arriba (derecha).

Derivemos las funciones

$$f_D(s) = F_D(\gamma(s)) = \|\gamma(s) - D\|^2 - \|\gamma(s_0) - D\|^2.$$

en el punto s_0 para ver qué puntos en el cono Ψ representan circunferencias $C_{(D,r)}$ que tengan orden de contacto 2.

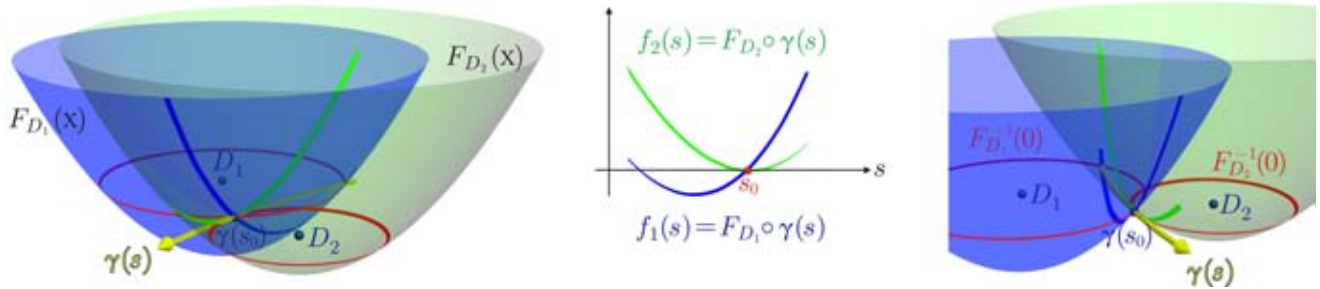


Fig. 32. En la figura tenemos una curva $\gamma(s)$ (amarillo) y las gráficas de las funciones $F_{D_1}(\mathbf{x})$ y $F_{D_2}(\mathbf{x})$. Las curvas de nivel cero $F_{D_1}^{-1}(0)$ y $F_{D_2}^{-1}(0)$ son dos circunferencias centradas en D_1 y D_2 . Al evaluar $F_{D_1}(\mathbf{x})$ y $F_{D_2}(\mathbf{x})$ en $\gamma(s)$ obtenemos una curva en cada paraboloide y la forma en que pasan por el punto $(\gamma(s_0), 0)$ nos da información de qué tanto se pegan $F_{D_1}^{-1}(0)$ y $F_{D_2}^{-1}(0)$ a $\gamma(s)$ en $\gamma(s_0)$. La curva $(\gamma(s), F_{D_2}(\gamma(s)))$ toca al plano x,y de manera tangente en el punto $(\gamma(s_0), 0)$, mientras que $(\gamma(s), F_{D_1}(\gamma(s)))$ lo hace de manera transversal.

Si $f'_D(s_0) \neq 0$, $C_{(D,r)}$ tendrá orden de contacto 1; y si $f'_D(s_0) = 0$, $C_{(D,r)}$ tendrá orden de contacto 2 o más. Así, el hecho de que la derivada de f_D se anule:

$$f'_D(s_0) = 2(\gamma(s_0) - D) \cdot \gamma'(s_0) = 0$$

implica que el vector velocidad $\gamma'(s_0)$ es ortogonal al vector que va del punto $\gamma(s_0)$ a D , $\gamma'(s_0) \perp (\gamma(s_0) - D)$. Entonces para que $C_{(D,r)}$ tenga orden de contacto 2 o más, su centro D deberá estar contenido en la recta L perpendicular a $\gamma'(s_0)$ que pasa por $\gamma(s_0)$. En términos del cono Ψ , sólo los puntos que están arriba de L representan circunferencias con orden de contacto 2 o más, los puntos restantes representan circunferencias con orden de contacto 1.

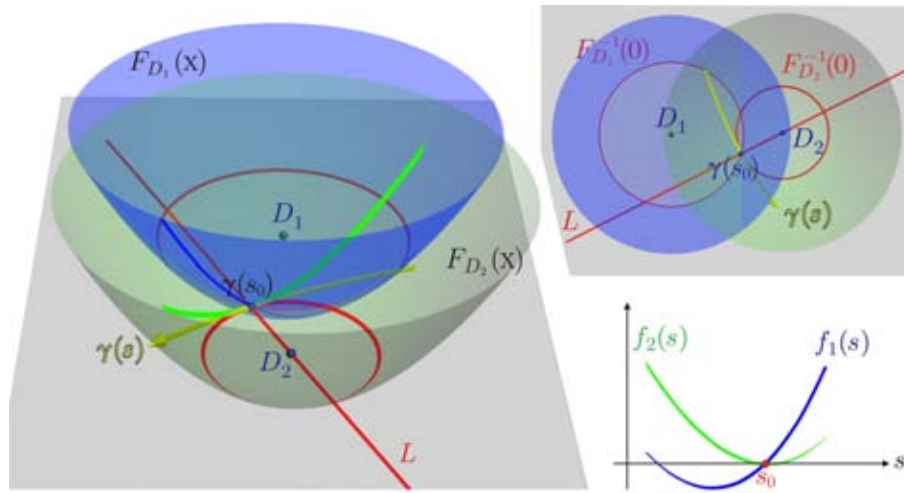


Fig. 33. En la figura se muestra la recta L donde deberá estar el centro de la circunferencia (D_2) para que $f_2'(s_0) = 0$, es decir, para que la curva $(\gamma(s), F_{D_2}(\gamma(s)))$ pase por $(\gamma(s_0), 0)$ tangente al plano xy . Si el centro de la circunferencia (D_1) está fuera de L entonces $f_1'(s_0) \neq 0$. Esto quiere decir que la curva $(\gamma(s), F_{D_1}(\gamma(s)))$ atraviesa el plano xy de manera no tangente.

Para ver si hay circunferencias que tengan orden de contacto 3 necesitamos ver si alguna de las circunferencias que tienen orden de contacto 2 también tiene orden de contacto 3. Tomemos la segunda derivada de $f_D(s)$ en s_0 , igualemos a cero y veamos qué podemos decir de D :

$$\frac{1}{2}f_D''(s_0) = \gamma'(s_0) \cdot \gamma'(s_0) + (\gamma(s_0) - D) \cdot \gamma''(s_0) = 0 \quad (1.9)$$

La rapidez de la curva es constante $\|\gamma'(s)\| = 1$, de donde se desprende que

$$\gamma'(s_0) \cdot \gamma'(s_0) = 1, \quad (1.10)$$

$$\gamma'(s_0) \perp \gamma''(s_0). \quad (1.11)$$

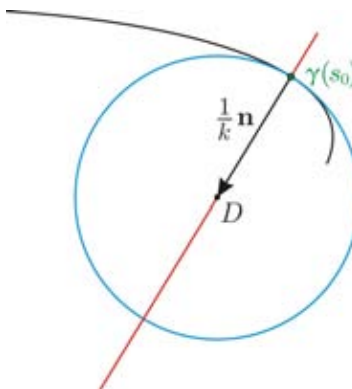
Sustituyendo (1.10) en (1.9) obtenemos

$$(D - \gamma(s_0)) \cdot \gamma''(s_0) = 1. \quad (1.12)$$

Por otro lado, debido a (1.11) y al hecho de que D vive en L (pues $C_{(D,r)}$ tiene orden de contacto 2, los vectores $\gamma''(s_0)$ y $D - \gamma(s_0)$ son perpendiculares a un mismo vector $\gamma'(s_0)$ en \mathbb{R}^2 , por lo tanto son colineales. Entonces su producto punto se reduce al producto de sus tamaños, con signo más o menos, dependiendo de si los vectores poseen la misma dirección o la opuesta. Por (1.12), concluimos que tendrán la misma dirección de modo que el tamaño de $D - \gamma(s_0)$ será el inverso multiplicativo del tamaño de $\gamma''(s_0)$:

$$\|D - \gamma(s_0)\| = \frac{1}{\|\gamma''(s_0)\|} = \frac{1}{k(s_0)}.$$

Conclusión 19 Sólo una circunferencia tiene orden de contacto¹⁰ 3 con la curva γ en el punto $\gamma(s_0)$: la circunferencia de curvatura de γ en el punto $\gamma(s_0)$. Su centro vive en la línea L ortogonal a $\gamma'(s_0)$ y su radio es el inverso de la curvatura $k(s_0)$ de la curva en el punto $\gamma(s_0)$. Si la curvatura $k(s_0)$ es cero, entonces el radio de la circunferencia que tiene orden de contacto 3 con la curva se haría infinito, es decir, se convertiría en la recta tangente a la curva en $\gamma(s_0)$.



¹⁰El orden de contacto puede ser mayor que 3, como en el caso de los vértices de una parábola o una elipse, o en el caso de una recta.

1.8. Curvatura como el inverso del radio de la circunferencia que más se pega a la curva

Mencionamos otra posible interpretación de la idea de que la circunferencia de curvatura es la que más se parece a la curva cerca del punto $\gamma(s_0)$. En una vecindad $v_\varepsilon(s_0)$ del punto $\gamma(s_0)$ podemos definir una función tal que a cada instante $s \in v_\varepsilon(s_0)$ y a cada circunferencia en el plano $C_{(D,r)} \in \mathbf{C}$, le asigne la distancia del punto $\gamma(s)$ a la circunferencia $C_{(D,r)}$:

$$\begin{aligned} \phi : v_\varepsilon(s_0) \times \mathbf{C} &= v_\varepsilon(s_0) \times \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \\ (s, C_{(D,r)}) &\rightarrow \phi(s, C_{(D,r)}) = d(\gamma(s), C_{(D,r)}). \end{aligned}$$

Si dejamos fija la circunferencia obtenemos una función

$$\phi_C(s) : v_\varepsilon(s_0) \rightarrow \mathbb{R}.$$

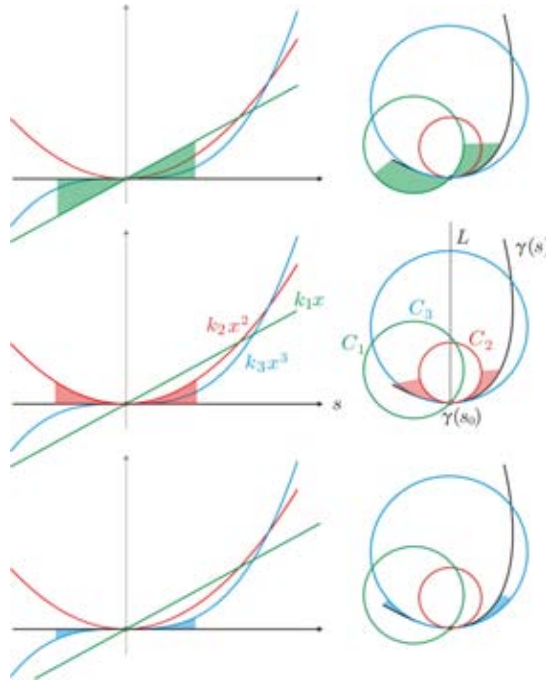
De manera análoga a la discusión del orden de contacto: si la circunferencia $C_{(D,r)}$ interseca a γ en $\gamma(s_0)$, entonces $\phi_C(s)$ tiene un cero en s_0 , si D está en L , entonces $\phi_C(s)$ y $\phi'_C(s_0)$ tienen un cero en s_0 , y si D es el centro de curvatura, entonces también se anula la segunda derivada

$$\phi_C(s_0) = \phi'_C(s_0) = \phi''_C(s_0) = 0$$

En otras palabras, de las circunferencias en el plano $C_{(D,r)} \in \mathbf{C}$, existe sólo una para la cual la función $\phi_C(s)$ se pega al cero (cuando $s \rightarrow s_0$) como una cúbica,

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\phi_C(s)}{s^3} = a \in \mathbb{R}.$$

En la siguiente figura mostramos una curva $\gamma(s)$ y tres circunferencias C_i que pasan por el punto $\gamma(s_0)$, C_1 tiene su centro fuera de la recta L , C_2 y C_3 tienen su centro en L y C_3 es la circunferencia de curvatura. Mostramos las gráficas de las funciones ϕ_i ; cerca de $s_0 = 0$ la función ϕ_1 se ve como una recta, ϕ_2 se ve como una parábola y ϕ_3 se ve como una cúbica, es decir, $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\phi_i(s)}{s^i} = a_i$, con $0 \neq a_i \in \mathbb{R}$.



1.9. Curvatura como rapidez angular

La velocidad $\gamma'(s)$ de una curva $\gamma(s)$ describe una curva que está contenida en la circunferencia unitaria y su velocidad, la aceleración $\gamma''(s)$ de la curva $\gamma(s)$, es perpendicular a $\gamma'(s)$.

Definición 20 El **vector normal** \mathbf{n} a la curva $\gamma(s)$ es el vector unitario en la dirección de su aceleración:

$$\mathbf{n} = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}.$$

Definición 21 La **indicatriz del vector normal** $\mathbf{n}(s)$ es la curva que describe el vector \mathbf{n} en la circunferencia unitaria

La expresión de la aceleración en términos de \mathbf{n} es:

$$\gamma''(s) = \|\gamma''(s)\| \mathbf{n} = k(s) \mathbf{n}$$

Cuando nos movemos a lo largo de $\gamma(s)$ el vector $-\mathbf{n}$ también describe una indicatriz en la circunferencia unitaria C_1 , y en cada momento su vector de posición es ortogonal al vector de la indicatriz de las tangentes de $\gamma(s)$. De modo que la rapidez angular con que se mueve el vector $-\mathbf{n}$ en C_1 es

$$\omega = -\mathbf{n}'_{\gamma}(s_0) = k(s_0).$$

De la ecuación anterior podemos interpretar la curvatura positiva o negativa de una curva como el sentido de giro del vector \mathbf{n} .

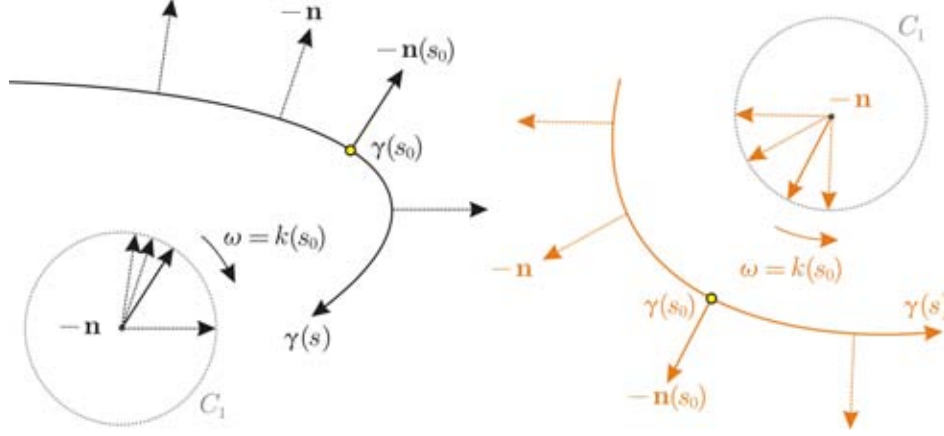


Fig. 36. Dos curvas y la forma en que varía el campo $-\mathbf{n}$ sobre ellas. El signo \pm en la ecuación $\omega = \pm k(s_0)$ es porque $-\mathbf{n}$ puede girar en sentido positivo (curva de la derecha) o negativo (curva de la izquierda) al pasar por $\gamma(s_0)$.

Ahora imaginemos la curva $-\mathbf{n}_C(s)$ que en C_1 describe el vector $-\mathbf{n}$ de cada una de las circunferencias que pasan por el punto $\gamma(s_0)$. Para que en los instantes de tiempo cercanos a s_0 (es decir, en una vecindad $v_\varepsilon(s_0)$) $-\mathbf{n}_C(s)$ sea parecida a la curva $-\mathbf{n}_\gamma(s)$, que determina el vector normal a $\gamma(s)$, necesitamos que

$$-\mathbf{n}'_{\gamma}(s_0) = -\mathbf{n}'_C(s_0),$$

lo que implica que el centro de la circunferencia debe estar en la recta L por $\gamma(s_0)$ perpendicular a $\gamma'(s_0)$. Sólo la indicatriz $-\mathbf{n}_C(s_0)$ de una de las circunferencias con centro en L es tal que su velocidad coincide con la de $-\mathbf{n}'_{\gamma}(s_0)$, es decir

$$-\mathbf{n}'_{\gamma}(s_0) = -\mathbf{n}'_C(s_0) = k(s_0)$$

lo que implica que su radio debe ser

$$r = \frac{1}{k(s_0)}.$$

Conclusión 22 Cerca del instante s_0 , la indicatriz $-\mathbf{n}_C$ de la circunferencia de curvatura es la que más se parece a la indicatriz $-\mathbf{n}_\gamma$ de la curva.

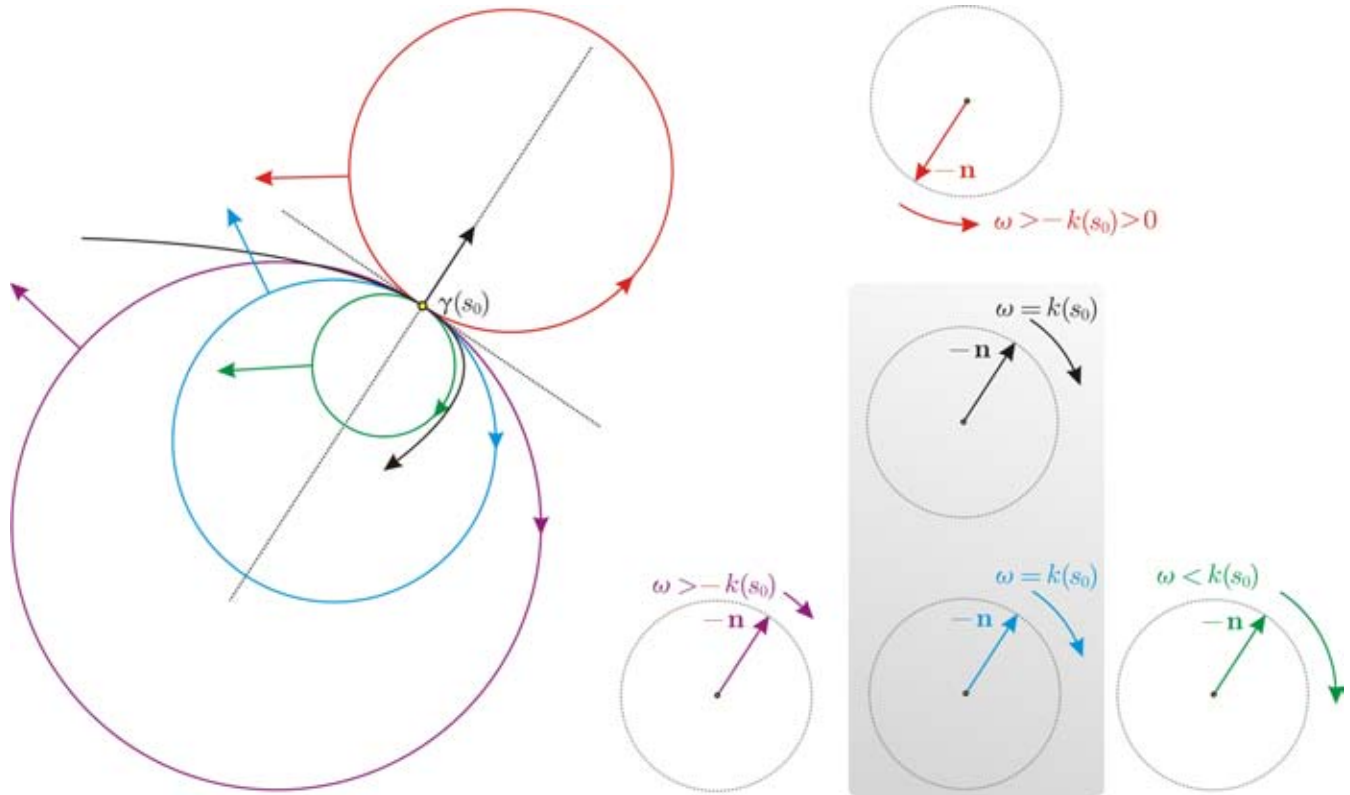


Fig. 37. En la figura se muestran cuatro circunferencias con centros en L . Sus indicatrices $-\mathbf{n}$ giran en C_1 con una rapidez angular $\omega = \frac{1}{r}$, si la circunferencia está en el lado inferior de la recta tangente a $\gamma(s)$ en $\gamma(s_0)$; y $\omega = -\frac{1}{r}$ si está en el lado superior. La indicatriz de la circunferencia azul es la única que pasa por el punto $-\mathbf{n}(s_0)$ girando con la misma rapidez angular que la indicatriz de la curva $\gamma(s)$.

Cerca de cada punto de la curva $\gamma(s)$ es muy parecido viajar a lo largo de ella o a lo largo de la circunferencia de curvatura. Podemos imaginar que la curva γ es generada por un punto que va girando en una circunferencia de tamaño variable, cuyo centro se mueve a lo largo de otra curva e_γ .

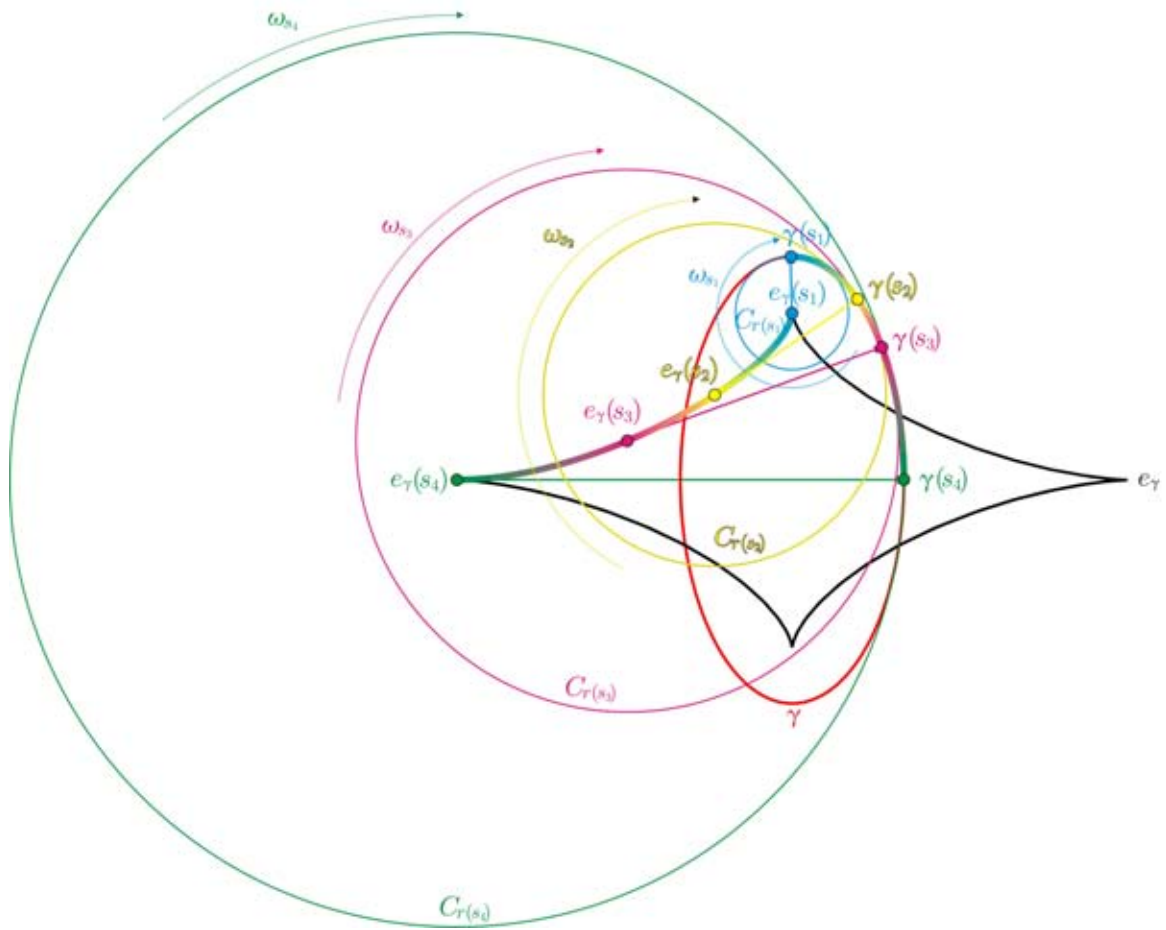
La curvatura de γ sería la rapidez angular del giro del punto que va generando la curva γ .
 Veamos la idea anterior en detalle.

Definición 23 La *evoluta* e_γ de la curva γ es la curva formada por los centros de curvatura de la curva γ .

Conforme un punto viaja en la curva $\gamma(s)$ el centro de la circunferencia de curvatura viaja en la evoluta. El radio de la circunferencia de curvatura $\frac{1}{k(s)}$ varía al movernos por la curva. Cada punto de la curva γ está en la circunferencia de curvatura respectiva, así que podemos imaginar a la curva $\gamma(s)$ como la traza que deja un punto que va girando con rapidez angular

$$\omega_s = k_s,$$

igual a la curvatura de γ , a lo largo de la circunferencia de curvatura $C_{r(s)}$, que a su vez, va cambiando de radio a cada instante, y cuyo centro se mueve a lo largo de la evoluta $e_\gamma(s)$. Entonces la curvatura de γ es la rapidez angular instantánea con la que giraría $\gamma(s)$ para un observador que viaja a lo largo de la evoluta $e_\gamma(s)$, en un sistema de referencia α con ejes paralelos a los ejes x y y . En la siguiente figura ilustramos la idea anterior, hemos tomado como curva γ una elipse (en rojo), su evoluta e_γ (en negro) y cuatro instantes de tiempo s_i .



Podemos imaginar que la elipse es generada por un punto que gira en una circunferencia $C_{r(s)}$ de radio variable y cuyo centro se va moviendo a lo largo de e_γ ; en la figura iniciamos con $C_{r(s_1)}$ (en azul) cuyo centro se mueve pasando de $e_\gamma(s_1) \rightarrow e_\gamma(s_2) \rightarrow e_\gamma(s_3) \rightarrow e_\gamma(s_4)$, mientras tanto los radios de las circunferencias $C_{r(s)}$ aumentan hasta llegar al radio más grande de $C_{r(s_4)}$ (en verde). Un observador en el marco de referencia α ve que en s_1 el punto $\gamma(s_1)$ gira alrededor de él con una rapidez angular máxima ω_1 (azul) y al transcurrir el tiempo de s_1 a s_4 la rapidez angular con que gira $\gamma(s)$ disminuye: $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3 > \omega_4$, hasta alcanzar su mínimo ω_4 (verde) en el instante s_4 . Entonces la curvatura en γ se ve como rapidez angular para el observador en el marco α .

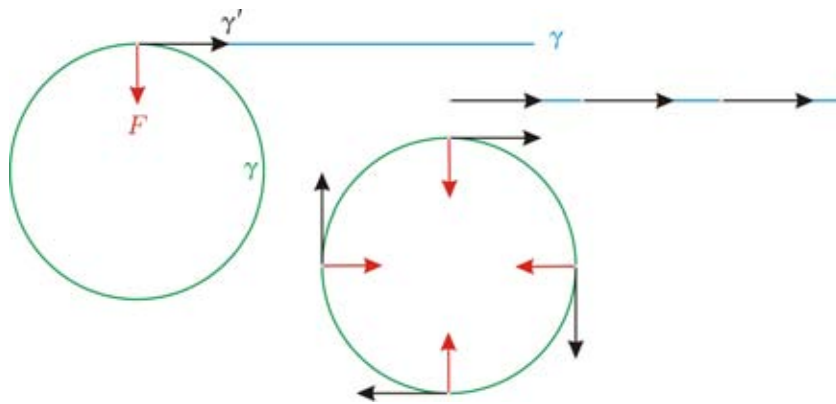
1.10. Curvatura en la Segunda Ley de Newton

Recordemos las dos primeras leyes de Newton¹¹:

1. Todo cuerpo continúa en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, a menos que actúe sobre él una fuerza que le obligue a cambiar dicho estado.
2. El cambio en la velocidad (aceleración) de un cuerpo es proporcional a la fuerza impresa e inversamente proporcional a su masa (inercial) y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.

La idea que combinan estas leyes es la siguiente: para que un cuerpo siga una trayectoria distinta del reposo o del movimiento uniforme a lo largo de una línea recta, es necesario que exista una fuerza que actúe sobre el objeto (ver la siguiente figura).

¹¹Newton, Isaac (1643, 1727), físico, filósofo, inventor, alquimista y matemático inglés.



Imaginemos un par de puntos (verde y azul) que en un instante tienen la misma velocidad γ' . Sobre uno de ellos (azul) no actúa fuerza alguna, entonces su movimiento será a lo largo de una recta con velocidad constante en un instante de tiempo. Sobre el otro actúa una fuerza F (rojo) en cada momento lo que hace que el movimiento que describe el punto verde no sea una recta sino una circunferencia.

Suponiendo que el cuerpo es un punto que se mueve a través de la curva $\gamma(t)$, podemos expresar la segunda ley a través de la ecuación

$$F = m\gamma''(t). \tag{1.13}$$

Si hacemos la suposición adicional de que la masa y la rapidez con que se mueve el cuerpo sean unitarias, entonces (1.13) toma la forma

$$F = \gamma''(s) = k(s)\mathbf{n}. \tag{1.14}$$

Es decir, el tamaño de la fuerza que necesitamos imprimir al punto para que viaje a lo largo de γ es igual a la curvatura $k(s)$ de γ en cada punto. Entonces, en una carretera necesitamos más fuerza para seguir una curva pronunciada (con curvatura grande) que una curva muy amplia (con curvatura muy pequeña).

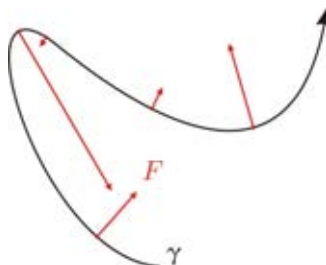


Fig. 40.

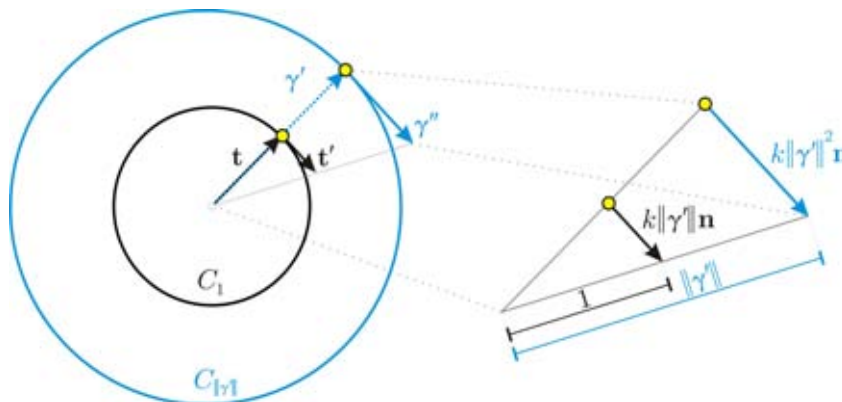
Y al revés si nos imaginamos como tripulantes de una nave sin ventanas que viaja a lo largo de una curva plana a rapidez unitaria, de manera que en cada momento sabemos cuál es la fuerza que actúa sobre la nave, entonces podríamos decir qué tan curvada es la trayectoria que sigue la nave, aún sin verla.

En general, cuando recorremos la curva γ con rapidez arbitraria la igualdad (1.14) puede dejar de ser válida por dos motivos:

1. La rapidez con que recorremos la curva.

Veamos un ejemplo. Supongamos que un punto con masa unitaria se mueve a lo largo de una circunferencia γ con rapidez constante $\|\gamma'\|$. La indicatriz de sus tangentes \mathbf{t} será una curva en C_1 que se mueve con una velocidad constante

$$\mathbf{t}' = \|\gamma'\|k\mathbf{n}. \tag{1.15}$$



γ' describe una circunferencia $C_{\|\gamma'\|}$ (de radio $r = \|\gamma'\|$) que gira con la misma rapidez angular que la indicatriz \mathbf{t} de modo que su velocidad γ'' será colineal con \mathbf{t}' , con factor de proporcionalidad $\|\gamma'\|$:

$$F = \gamma'' = \|\gamma'\| \mathbf{t}' = \|\gamma'\|^2 k \mathbf{n}.$$

El ejemplo anterior ilustra que la fuerza, como en (1.14), es perpendicular a γ' , y que su tamaño depende no sólo de la curvatura de la circunferencia, sino también del cuadrado de la rapidez con que es recorrida. También nos dice que si recorremos una circunferencia con una rapidez dada $\|\gamma'_1\|$ y luego con el doble de dicha rapidez

$$\|\gamma'_2\| = 2 \|\gamma'_1\|,$$

la fuerza F_2 necesaria para el segundo movimiento no será el doble de F_1 , como podríamos pensar equivocadamente, sino el cuádruple:

$$F_2 = \|2\gamma'_1\|^2 k \mathbf{n} = 4 \|\gamma'_1\|^2 k \mathbf{n} = 4F_1.$$

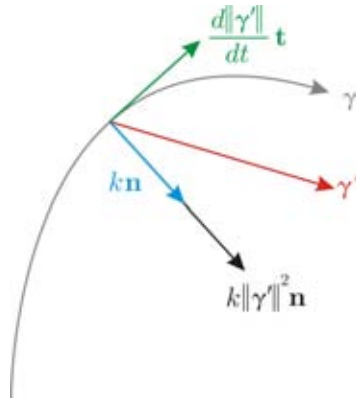
Por ello, hay que tomar precauciones si tomamos una curva a $120 \frac{km}{h}$ en lugar de hacerlo a $60 \frac{km}{h}$.

2. La variación en la rapidez con que recorremos la curva.

Si al recorrer una curva γ la rapidez va cambiando, (aumentando por ejemplo), la aceleración γ'' ya no será perpendicular a su vector tangente \mathbf{t} ; tendrá una componente en él que será la que motive el cambio en la rapidez.

En general si nos movemos a lo largo de una curva γ con una rapidez arbitraria podemos obtener la expresión general para la aceleración derivando la expresión

$$\begin{aligned} \gamma' &= \|\gamma'\| \mathbf{t} \\ \gamma'' &= \frac{d\|\gamma'\|}{dt} \mathbf{t} + k \|\gamma'\|^2 \mathbf{n} \end{aligned} \tag{1.16}$$



Esta expresión, en lugar de (1.14), nos dice cuál es la fuerza que en cada momento tenemos que imprimir al objeto para lograr que viaje a lo largo de γ . Tomando en cuenta la masa, la expresión general de la segunda ley de Newton es

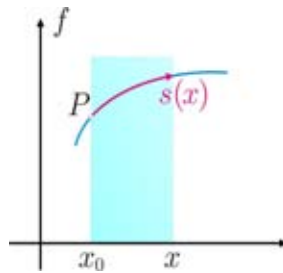
$$F = m \left(\frac{d\|\gamma'\|}{dt} \mathbf{t} + k \|\gamma'\|^2 \mathbf{n} \right).$$

Conclusión 24 *La curvatura de la curva que recorre un objeto es un ingrediente esencial en la segunda ley de Newton; impone una componente sobre la fuerza F que se deberá imprimir sobre el objeto para que se mueva a lo largo de dicha curva. Restringiendo la masa y rapidez a que sean unitarias, la curvatura de la curva determina la fuerza F .*

1.11. Fórmula de la curvatura de la gráfica de $f(x)$

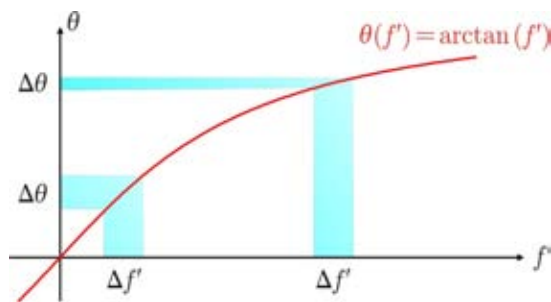
Calculemos la curvatura k de una curva que podemos expresar como la gráfica $gráf(f)$ de una función $f(x)$ de clase¹² C^2 . La curvatura es la variación instantánea $\frac{d\theta}{ds}$ del ángulo θ que forma la recta tangente con el eje x con respecto a la longitud recorrida a lo largo de $gráf(f)$. Tomemos un punto x_0 y el correspondiente punto $P = (x_0, f(x_0))$ en $gráf(f)$, a partir del cual mediremos el ángulo θ y el camino recorrido s (véase la siguiente figura).

¹²Véase en la sección 3.7 un ejemplo de lo que sucede si $f \notin C^2$.



Cuando nos movemos a lo largo del eje x cambian tanto θ como s ; ambos son funciones de x . Entonces si sabemos cómo son las variaciones del ángulo y el camino recorrido respecto a x , $\frac{d\theta}{dx}$ y $\frac{ds}{dx}$, podemos calcular $\frac{d\theta}{ds}$ multiplicando $\frac{d\theta}{dx}$ y $\frac{dx}{ds}$, es decir, usando la regla de la cadena. Veamos entonces cómo son $\frac{d\theta}{dx}$ y $\frac{ds}{dx}$.

La derivada f mide la pendiente de la recta tangente, entonces, de manera intuitiva podemos decir que si $f'(x)$ varía mucho el ángulo θ también varía mucho y en consecuencia la gráfica de $f(x)$ se curvará mucho. La variación de $f'(x)$ es la segunda derivada $f''(x)$, entonces se antoja que la curvatura tenga una relación directa con $f''(x)$. No será una proporcionalidad lineal ya que la variación del ángulo con respecto a la pendiente de la recta tangente $f'(x)$ no es uniforme. Por ejemplo, no varía lo mismo θ cuando la pendiente de la recta tangente $f'(x)$ varía de 0 a 2 que cuando varía de 10 a 12; entonces el incremento en el ángulo $\Delta\theta$ depende de la posición del incremento $\Delta f'$. Esto es así porque la función que expresa el ángulo θ como función de f' es $\theta(f') = \arctan(f')$ como se muestra en la siguiente figura.

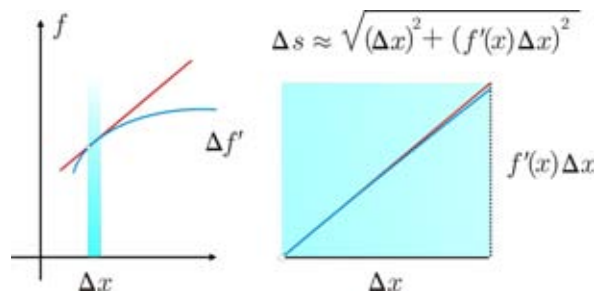


La expresión de θ como función de x es $\theta(x) = \arctan(f'(x))$; al derivar usando la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d(\arctan)}{df'} \frac{df'}{dx} = \arctan'(f') f'' = \frac{f''(x)}{1 + [f'(x)]^2};$$

y vemos que, efectivamente, no podemos obtener $\frac{d\theta}{dx}$ directamente de $f''(x)$, necesitamos multiplicarla por el factor de corrección $\frac{1}{1+[f'(x)]^2}$.

Ahora obtengamos $\frac{ds}{dx}$. De manera intuitiva, si estamos parados en un punto x y damos un pequeño paso Δx , entonces la variación en el camino recorrido Δs a lo largo de $gráf(f)$ será aproximadamente la misma que la variación que obtenemos tomando la gráfica de la recta tangente (veáse la siguiente figura):



$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(x) \Delta x)^2} = \Delta x \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

En el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, la variación en $gráf(f)$ se vuelve igual a la variación en la recta tangente por lo que la variación instantánea del camino recorrido a lo largo de $gráf(f)$ respecto a x es:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Una forma más directa de obtener la igualdad anterior es derivar directamente la expresión

$$s(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

de la función longitud de arco $s(x)$ en términos de x .

Calculemos ahora la curvatura; de la expresión $\frac{ds}{dx}$ obtenemos que $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}$ entonces, para obtener $\frac{d\theta}{ds}$ usamos la variable intermedia x y por la regla de la cadena llegamos a que

$$k(x) = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{f''(x)}{1 + [f'(x)]^2} \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} = \frac{f''(x)}{(1 + [f'(x)]^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

Sobre el signo de la curvatura.

Comúnmente se define la curvatura como $|\frac{d\theta}{ds}|$ por lo que en la ecuación anterior tendríamos que sustituir $|f''(x)|$ en lugar de $f''(x)$ que puede ser positiva o negativa. Sin embargo en el caso de curvas planas y en particular en el caso de la gráfica de una función podemos interpretar que la curvatura sea positiva o negativa. Una forma de interpretar el signo fue mencionada en la sección 1.9 y consiste en el sentido de giro de la recta tangente. Otra puede ser la posición de las rectas tangentes a $gráf(f)$; si están por debajo de ella entonces $k(x) > 0$ y si están por arriba, $k(x) < 0$.

Veamos cómo es la función curvatura $k(x)$ (con signo) para algunas funciones $f(x)$, graficando ambas en cada caso.

Ejemplo 25 *Línea recta y circunferencia.*

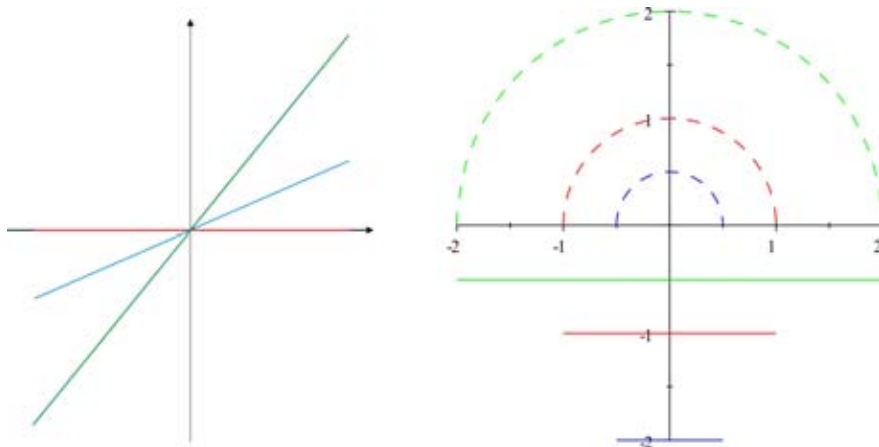
Consideremos las funciones

$$g_m(x) = mx, \\ f(x) = \sqrt{r^2 - x^2};$$

cuyas gráficas son, respectivamente, una recta y una semicircunferencia. Sabemos que tienen curvatura 0 y $-\frac{1}{r}$ (el signo es porque las tangentes están por arriba de $gráf(f)$); los cálculos muestran que en efecto es así:

$$k_{g_m} = \frac{\frac{d^2}{dx^2}(mx)}{\left(1 + \left[\frac{d}{dx}(mx)\right]^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0 \\ k_f = \frac{\frac{d^2}{dx^2}(\sqrt{r^2 - x^2})}{\left(1 + \left[\frac{d}{dx}(\sqrt{r^2 - x^2})\right]^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{r}$$

En la figura siguiente (izquierda) mostramos dos líneas rectas (verde y azul) que comparten la función de curvatura constante cero (en rojo); y tres circunferencias $f_r(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ de radios $r = \frac{1}{2}, 1$ y 2 (punteadas en azul rojo y verde, respectivamente) con sus respectivas funciones constantes de curvatura $k_{f_r} = -\frac{1}{r}$.

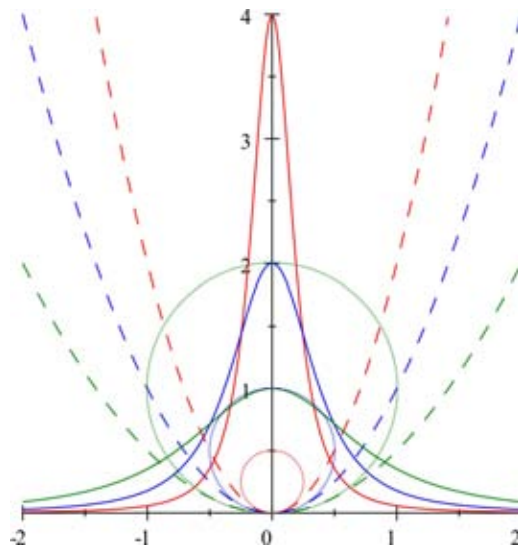


Ejemplo 26 *Las potencias de x .*

En la siguiente figura mostramos las gráficas de $f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2}x^2$, $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2x^2$, punteadas en verde, azul y rojo respectivamente. También se muestran sus funciones de curvatura

$$k_a(x) = \frac{2a}{(4x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

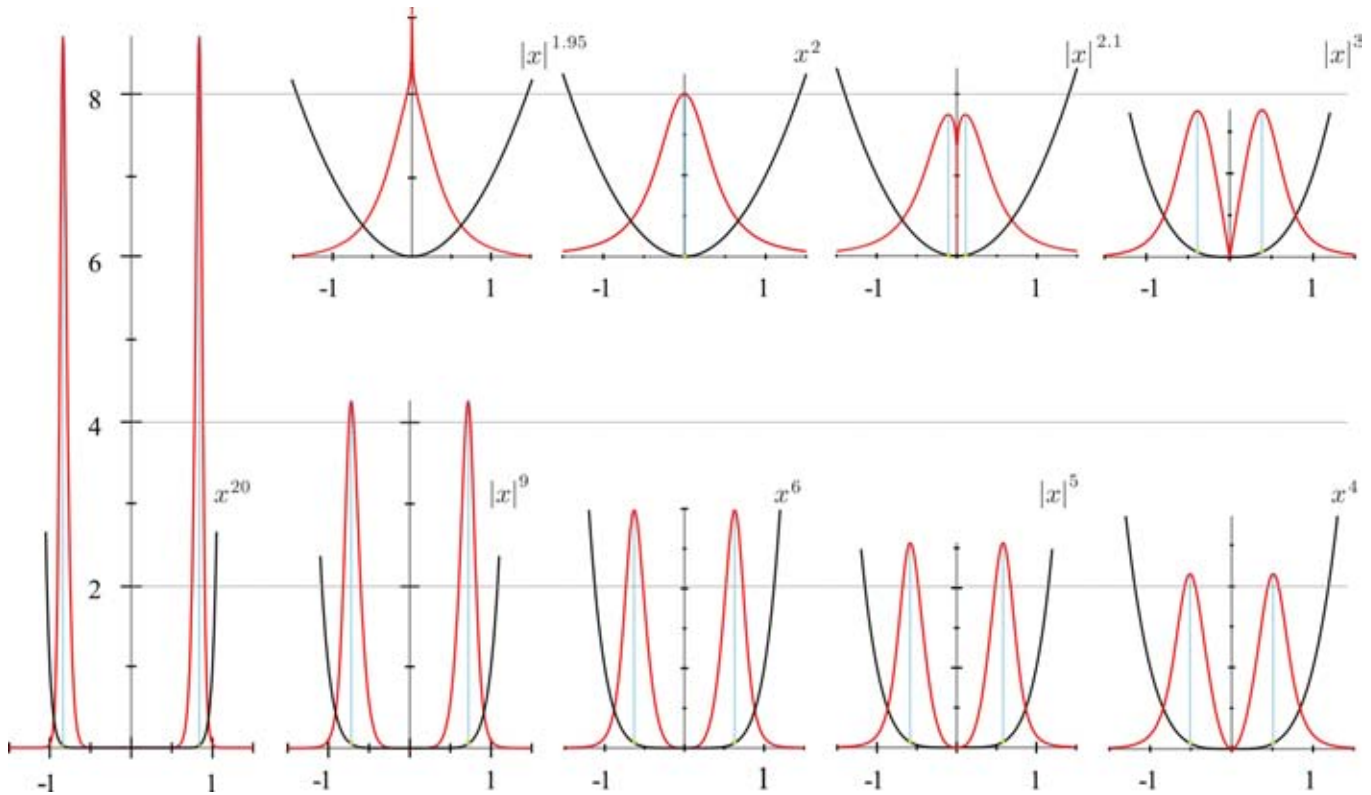
y sus circunferencias oscultrices en el origen.



Ahora analicemos lo que sucede con la función curvatura para las gráficas de las funciones¹³

$$f_\alpha(x) = |x|^\alpha.$$

En la siguiente figura tomamos los valores $\alpha = 1.95, 2, 2.1, 3, 4, 5, 6, 9$ y 20 . Evaluando las funciones en la fórmula (1) llegamos a que la única potencia de x que tiene curvatura distinta de cero o infinito en el origen es x^2 . Mostramos las gráficas de las funciones de curvatura k_α (en rojo). Si $1 < \alpha < 2$, entonces la curvatura es infinita en $x = 0$. Y si $\alpha > 2$ entonces la curvatura se anula en el origen. En el caso de x^2 la curvatura alcanza su máximo en un punto único, $x = 0$; si $\alpha > 2$ hay dos puntos donde k_α alcanza su máximo y cuando $\alpha \rightarrow 2$ estos dos puntos se funden en uno solo. Por otro lado cuando $\alpha \rightarrow \infty$ los puntos donde curvatura es máxima tienden a ± 1 y su valor se hace infinitamente grande. Globalmente, cuando $\alpha \rightarrow \infty$, la función curvatura k_α converge puntualmente a la función constante cero en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ y en $\{-1, 1\}$ es infinita.

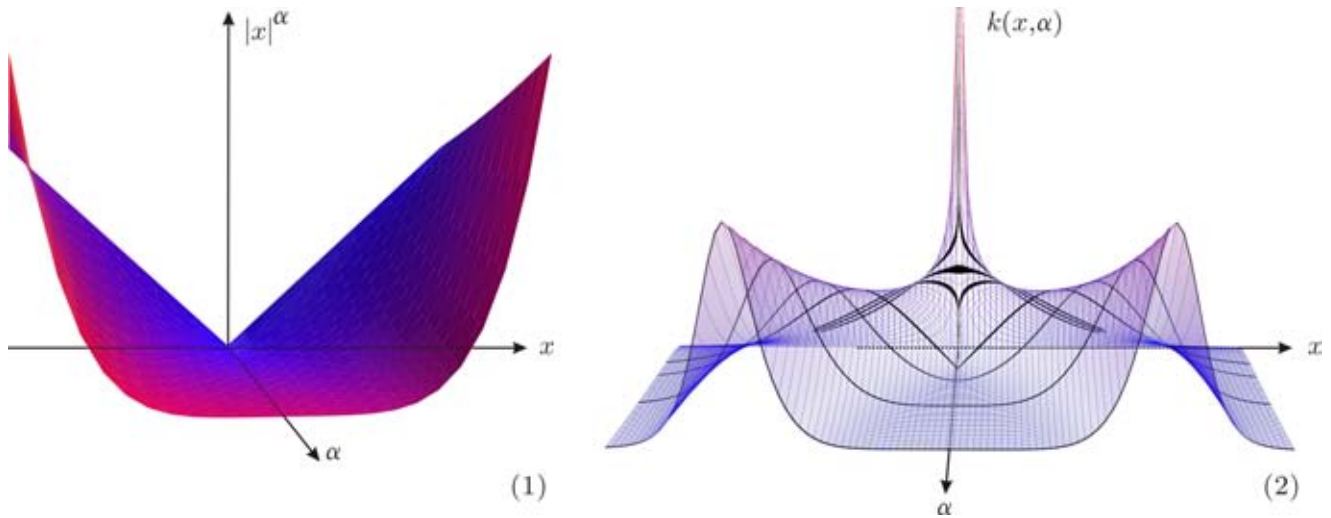


Una manera de visualizar al mismo tiempo todas las potencias de x es mediante la gráfica de la función (ver la siguiente figura, gráfica (1)):

$$f : \mathbb{R} \times [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x, \alpha) = |x|^\alpha.$$

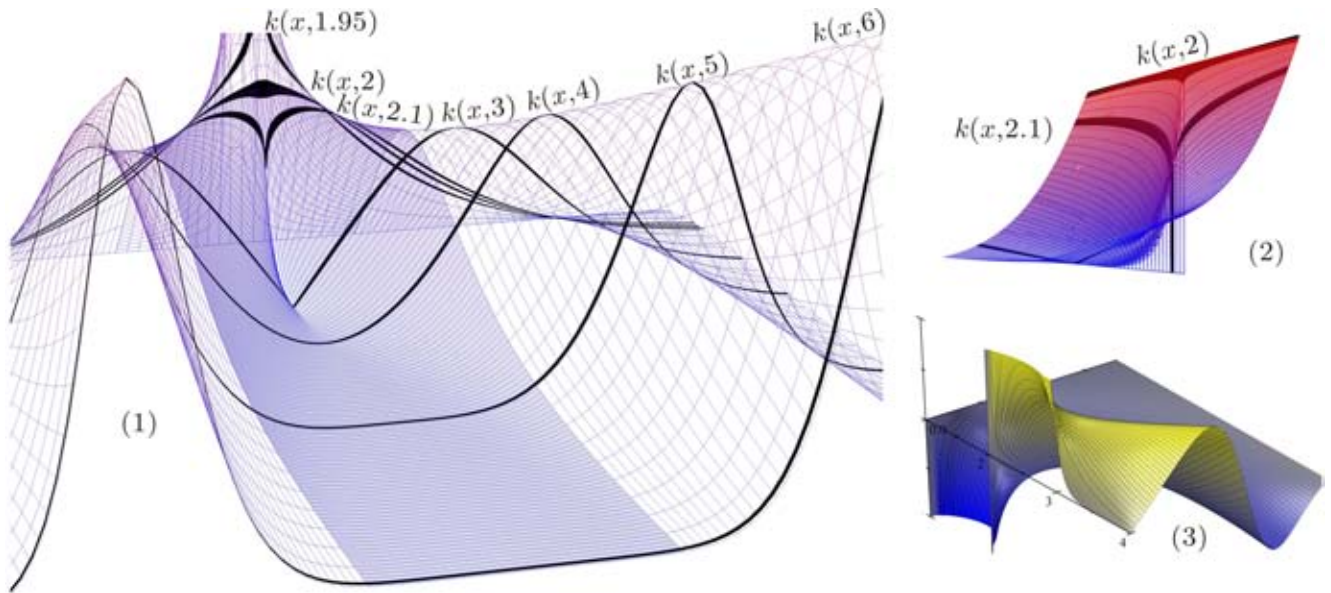
¹³Tomamos el valor absoluto de x para que esté bien definida la función en el intervalo $[-1, 1]$ para cualquier valor del exponente α .



También podemos ver como varía de manera continua la función de curvatura para potencias de x analizando la gráfica ((2) en la figura) de

$$k(x, \alpha) = \frac{\frac{d^2}{dx^2} (|x|^\alpha)}{\left(1 + \left[\frac{d}{dx} (|x|^\alpha)\right]^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

que es la función de curvatura como función del punto x y del exponente α . En la siguiente figura mostramos tres perfiles de la gráfica de $k(x, \alpha)$ y algunas secciones (curvas en negro) $k(x, \alpha)$ con $\alpha = 1.95, 2, 2.1, 3, 4, 5, 6$. Podemos ver que si α se mueve del $1 \rightarrow 2$ (es decir si $1 < \alpha < 2$) entonces el valor de la curvatura de $|x|^\alpha$, en $x = 0$, es infinito; y cuando α toma el valor 2 la curvatura da un brinco súbito de ∞ a un valor real, y en cuanto deja de ser $\alpha = 2$, el valor de la curvatura vuelve a brincar súbitamente, ahora al valor cero (ver (2) en la figura). Para los valores de $\alpha \in (2, 4)$, las secciones $k(x, \alpha)$ tienen un pico en $x = 0$, que se va suavizando conforme $\alpha \rightarrow 4$. El pico desaparece para todo $\alpha \geq 4$. En (3) mostramos la gráfica de la derivada de la curvatura $\frac{\partial k}{\partial x}$ (para $x \geq 0$) y vemos que será continua en (x, α) donde $\alpha \geq 4$.



Interpretación física

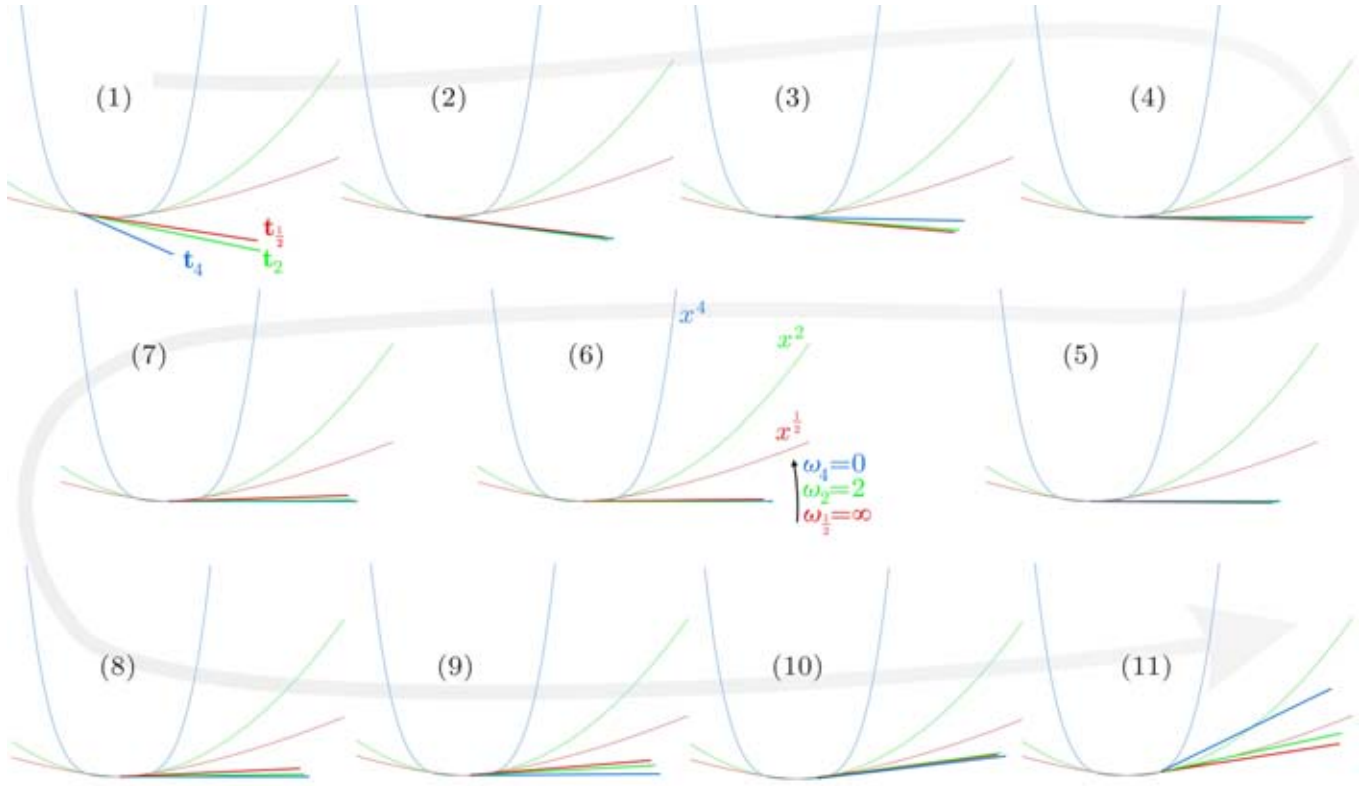
Si recorremos la curva

$$\gamma_\alpha(t) = (t, c|t|^\alpha)$$

con rapidez unitaria tendremos que al pasar por el origen el vector tangente \mathbf{t} va girando con una rapidez angular ω_α que depende del exponente α :

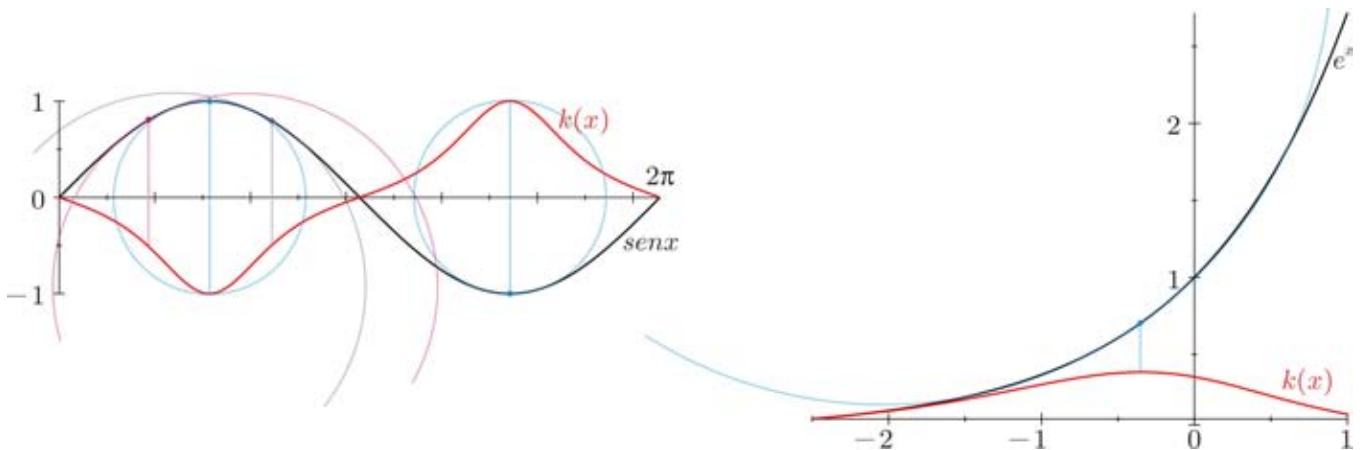
1. $\omega_\alpha = \infty$ es infinito si $\alpha \in (\frac{1}{2}, 2)$
2. $\omega_\alpha = 2c = k \in \mathbb{R} - \{0\}$, es decir, ω_α es finita y distinta de cero, si $\alpha = \frac{1}{2}$ o $\alpha = 2$.
3. $\omega_\alpha = 0$ si $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \cup (2, \infty)$.

En la siguiente figura ilustramos el comportamiento del vector tangente \mathbf{t}_α a la curva γ_α al pasar por el origen, para los valores de $\alpha = \frac{1}{2}, 2$ y 4 , y $c = 1$. En (1) los vectores $\mathbf{t}_4, \mathbf{t}_2$ y $\mathbf{t}_{\frac{1}{2}}$ van girando con rapidez angular $\omega_4 > \omega_2 > \omega_{\frac{1}{2}}$ respectivamente. En el paso de (1) a (2) el vector \mathbf{t}_4 alcanza y rebasa (3) a los vectores \mathbf{t}_2 y $\mathbf{t}_{\frac{1}{2}}$; al acercarse al origen ω_4 disminuye drásticamente, (4) y (5), permitiendo que \mathbf{t}_2 y $\mathbf{t}_{\frac{1}{2}}$ se acerquen a \mathbf{t}_4 ; \mathbf{t}_2 lo hace primero y a un ritmo más uniforme y $\mathbf{t}_{\frac{1}{2}}$ lo hace después y de manera súbita, alcanzando a los vectores \mathbf{t}_4 y \mathbf{t}_2 con una rapidez $\omega_{\frac{1}{2}} = \infty$, justo al pasar por el origen, (6) y (7). En contraste \mathbf{t}_4 pasa por el origen frenándose por completo, es decir, $\omega_4 = 0$; y \mathbf{t}_2 lo hace a un ritmo conservador con una rapidez angular $\omega_2 = 2$. Poco después de pasar por el origen $\mathbf{t}_{\frac{1}{2}}$ se frena súbitamente por lo que \mathbf{t}_2 y \mathbf{t}_4 lo alcanzan, (8), (9) y (10); \mathbf{t}_2 primero y a un ritmo más uniforme y \mathbf{t}_4 lo hace al final súbitamente. Después de esto \mathbf{t}_4 rebasa a \mathbf{t}_2 y \mathbf{t}_2 rebasa a $\mathbf{t}_{\frac{1}{2}}$; y continúan girando en ese orden por siempre (figura 11).



Ejemplo 27 Gráficas de e^x y $\text{sen}(x)$.

En la siguiente figura mostramos dichas gráficas, así como sus funciones de curvatura (en rojo), los puntos donde $|k|$ alcanza su máximo y sus circunferencias osculadoras correspondientes (en azul). Para e^x ; cuando $x \rightarrow \pm\infty$ tenemos que $k \rightarrow 0$, es decir, la circunferencia de curvatura se hace infinitamente grande. En el caso de $\text{sen}x$ cuando $x \rightarrow m\pi, m \in \mathbb{Z}$, los radios de curvatura $r = \frac{1}{|k|}$ se hacen infinitamente grandes. Entonces cuando $x = m\pi$ las circunferencias de curvatura degeneran en una recta, pasando de un lado a otro de la gráfica.



1.12. Fórmula de la curvatura de una curva plana

Hemos estudiado la curvatura de una curva usando la parametrización especial de la curva que tiene a la longitud de arco s como parámetro. Sin embargo, hay muchos casos útiles de curvas con parámetros distintos de la longitud de arco s , por ejemplo la curva

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{2} \cos t, \text{sen} t \right)$$

es una elipse. Teóricamente podemos reparametrizar la curva con el parámetro longitud de arco, sin embargo, en uno de los pasos requeridos, que es el cálculo de la longitud de arco interviene la integral

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau = \int_0^t \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)} d\tau; \quad (1.17)$$

que no puede ser expresada¹⁴ en términos de funciones elementales del cálculo. En resumen, son muchos los casos en que no podremos encontrar de manera explícita una parametrización dada por el parámetro s , de modo que los métodos discutidos, restringidos a este tipo de parametrización, no nos servirán para encontrar la curvatura de muchas curvas. En la sección anterior vimos una fórmula para encontrar la curvatura de una curva que puede ser expresada en la forma

$$\gamma(t) = (t, f(t)).$$

Daremos una manera alternativa de calcular la curvatura de una curva a través de la información que nos da un movimiento arbitrario a lo largo de ella, que no necesariamente es realizado con una rapidez constante. En otras palabras necesitamos una fórmula para la curvatura en términos de una parametrización

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

arbitraria de la curva $\gamma \subset \mathbb{R}^2$. Llegaremos a una fórmula a partir de la definición

$$k = \frac{d\theta}{ds} \quad (1.18)$$

que aparece como ecuación (1.2) en la sección 1.4. La curvatura será una función del parámetro t . Nos interesa calcular el límite del cociente de la variación en el ángulo entre la variación del camino recorrido $s(t)$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}.$$

El camino recorrido se hace pequeño cuando el tiempo transcurrido es pequeño, es decir, $s(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$; de modo que¹⁵

$$k = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta\theta}{\Delta t}}{\frac{\Delta s}{\Delta t}} = \frac{d\theta}{ds}.$$

Podemos expresar (1.17) el camino recorrido s y el ángulo

$$\theta = \arctan \frac{y'}{x'},$$

en términos de las componentes de la velocidad de la curva γ . Derivando obtenemos una expresión para la curvatura que podemos calcular a partir las componentes de γ y sus derivadas de orden uno y dos:

$$k = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d\theta}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{x'y'' - x''y'}{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.19)$$

¹⁴En el caso de la elipse conduce a

$$\int_0^t \sqrt{\frac{1}{4} \text{sen}^2 \tau + \cos^2 \tau} d\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{3}{4} \text{sen}^2 \tau} d\tau$$

que es una integral elíptica de segunda especie que no puede ser expresada en términos de funciones elementales del cálculo.

¹⁵En los cálculos siguientes todo estará evaluado en el instante de tiempo t .

1.13. Fórmula de la evoluta

En la sección (1.9) mencionamos que la evoluta es la curva formada por todos los centros de las circunferencias de curvatura. La fórmula (1.19) nos permite encontrar una parametrización de la evoluta $e_\gamma(t)$ de una curva $\gamma(t)$. Para llegar a ella hay que notar que el centro de curvatura se puede expresar como la suma del vector γ y un vector $c(t) = e_\gamma(t) - \gamma(t)$ que va de $\gamma(t)$ al centro de curvatura $e_\gamma(t)$. Dicho vector deberá apuntar en la dirección del vector \mathbf{n} normal a γ y su tamaño deberá de ser igual al radio de curvatura, es decir, $\frac{1}{k}$. Usando (1.19) llegamos a que:

$$e_\gamma - \gamma = \frac{1}{k} \mathbf{n}.$$

Si consideramos curvatura con signo, podemos expresar al vector \mathbf{n} a través de

$$\mathbf{n} = \mathbf{t}^\perp = \left[\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \right]^\perp = \frac{(-y', x')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

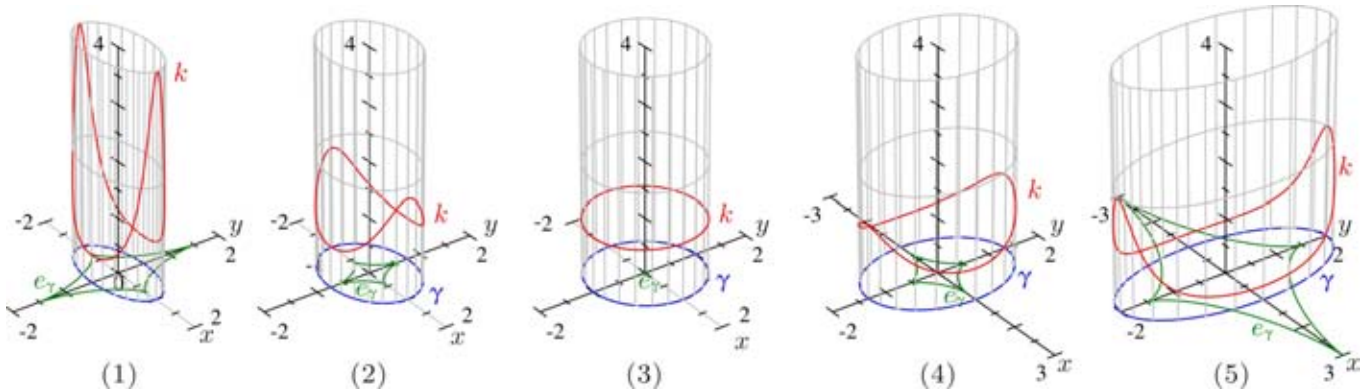
de modo que la parametrización de la evoluta toma la siguiente expresión:

$$e_\gamma = \gamma + c = (x, y) + \frac{1}{k} \frac{(-y', x')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = (x, y) + \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'} \frac{(-y', x')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = (x, y) + \frac{(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} (-y', x')$$

$$e_\gamma(t) = \left[x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} \quad y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} \right]_t \quad (1.20)$$

Ejemplo 28 *Elipse.*

En la siguiente figura tenemos la circunferencia unitaria C_1 (3) y unas elipses que obtenemos, para facilitar el análisis, a partir de contraer ((1), (2)) o estirar ((4) y (5)) la circunferencia en la dirección del eje y . En los vértices sobre el eje y de las elipses en (4) y (5) la curvatura es más grande que en la circunferencia y en los vértices sobre el eje x es más pequeña. En las elipses en (1) y (2) la curvatura es mayor en los vértices del eje y y menor en los del eje x . Encima de cada curva, en las paredes de un cilindro, mostramos la gráfica (en rojo) de la función curvatura.



Encontremos la función $k(t)$ para confirmar nuestras ideas intuitivas. Nuestra elipse está dada por

$$\gamma(t) = (\cos t, a \sin t)$$

(En la figura anterior tomamos algunos valores $a \in [\frac{1}{2}, 2]$). Mediante la fórmula (1.19) encontramos que su curvatura está dada por

$$k(t) = \frac{a}{(a^2 \cos^2 t + \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}};$$

así que la curvatura oscilará entre los valores que toma en los vértices de la elipse:

$$a = k|_{t=n\frac{\pi}{2}} \quad y \quad \frac{1}{a^2} = k|_{t=n\pi}; \text{ con } n \in \mathbb{N}.$$

Si $a < 1$ entonces $k(t)$ oscila en valores contenidos en el intervalo $[a, \frac{1}{a^2}]$; toma el valor a en los vértices del eje y y el valor $\frac{1}{a^2}$ en los del eje x . Cuando $a \rightarrow 0$ la elipse degenera en un segmento y los valores de la curvatura en dichos vértices tienden a 0 e ∞ . Si es $a > 1$ entonces $k(t)$ oscila en $[\frac{1}{a^2}, a]$; toma el valor $\frac{1}{a^2}$ en los vértices del eje x y el valor a en los del eje y . Cuando $a \rightarrow \infty$ la elipse degenera en una recta y los valores de la curvatura en dichos vértices se hacen 0 e ∞ . Con la información anterior vemos que la evoluta de la elipse estará a una distancia de ella que oscilará de máxima a mínima al pasar de un vértice a otro. Se alejará más de la elipse en vértice de curvatura menor y se acercará más en el vértice de curvatura mayor como se puede ver en la figura. Usemos la fórmula (1.20) para encontrar la parametrización de la evoluta de la elipse

$$e_\gamma(t) = \left(\cos t - a \cos t \frac{a^2 \cos^2 t + \sin^2 t}{a}, a \sin t - \sin t \frac{a^2 \cos^2 t + \sin^2 t}{a} \right);$$

que usamos para hacer las gráficas de la figura.

Ejemplo 29 *Espiral.*

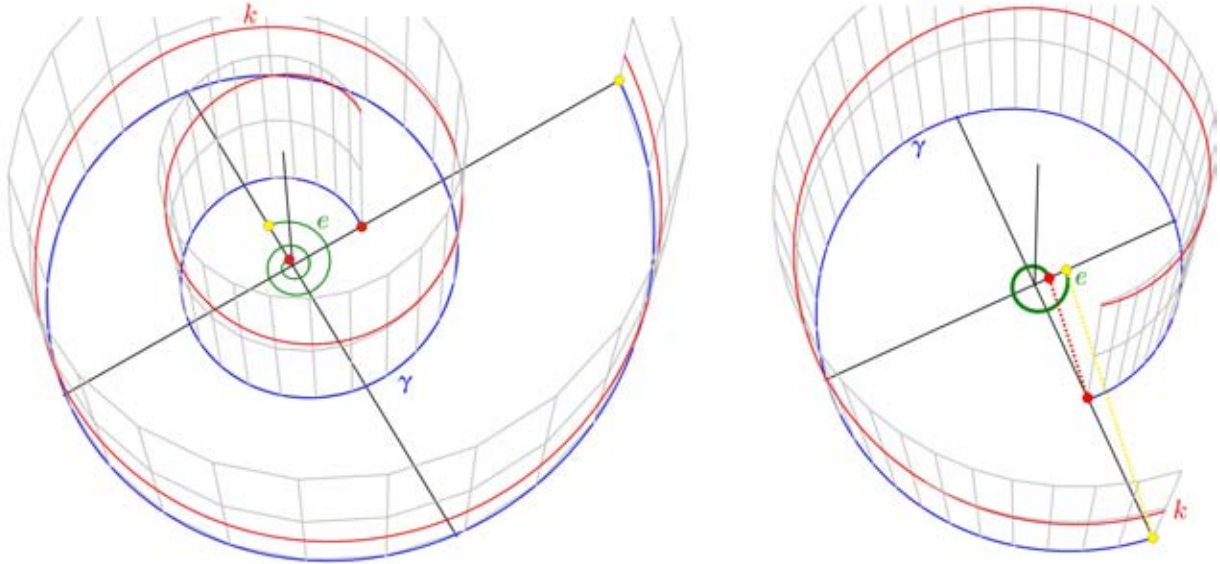
Para obtener una espiral podemos imaginar un punto que se mueve a lo largo de una circunferencia, ahora pensemos que mientras gira su distancia al origen varía; por ejemplo, que disminuye si t se hace pequeño y aumenta si t se hace grande. La curvatura de una curva así crecerá si t se hace pequeño y decrecerá cuando t crece. Tomemos a

$$\gamma(t) = \frac{1}{10}e^t (\cos 8t, \text{sen}8t)$$

como nuestra espiral¹⁶. Utilizando la fórmula (1.19) llegamos a que su función curvatura es

$$k(t) = 16 \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} e^{-t}.$$

Notamos que la curvatura cumple con lo dicho arriba: crece, $k \rightarrow \infty$, cuando $t \rightarrow -\infty$ y decrece, $k \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. En la figura siguiente mostramos la imagen de la curva $\gamma(t)$ y la gráfica de la función curvatura $k(t)$ (en rojo y contenida en el cilindro $(\gamma(t), z)$).



Utilizando la fórmula (1.20) llegamos a la parametrización

$$e_\gamma(t) = -\frac{1}{80}e^t (\text{sen}8t, \cos 8t)$$

de la evoluta (verde en la figura) de nuestra espiral. Su imagen es otra espiral que se pega a γ cuando $t \rightarrow -\infty$ y se separa cuando $t \rightarrow \infty$ (ver la longitud de los segmentos que unen los puntos amarillos y rojos en la figura).

1.14. Diedro de Frenet-Serret

Imaginemos una curva $\gamma(s)$ en el plano; si γ no es localmente una recta, es decir, si su curvatura es distinta de cero en cada momento, podemos formar un marco de referencia móvil con los vectores \mathbf{t} y \mathbf{n} , es decir, un diedro ortonormal de vectores que se adapta a la curva (ver la siguiente figura).

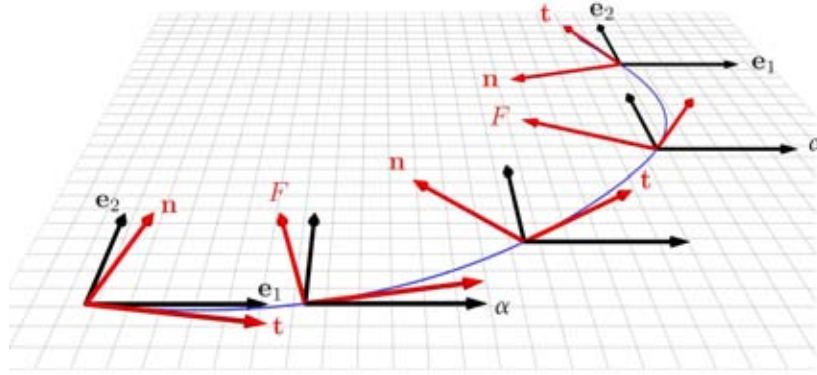
Definición 30 *El marco (o diedro) de Frenet-Serret*¹⁷ F de una curva γ es la pareja de vectores¹⁸ conformada por el vector tangente \mathbf{t} y el vector normal \mathbf{n} a la curva γ en cada punto.

¹⁶El factor $\frac{1}{10}$ y $8t$ no tienen nada de especial, los tomamos para amortiguar el rápido crecimiento de la exponencial y así poder hacer la gráfica.

¹⁷Serret, Joseph Alfred (1819-1885).

Frenet, Jean Frédéric (1816-1900), ambos matemáticos franceses.

¹⁸Es una base del espacio tangente $T_\gamma\mathbb{R}^2$.



Mencionamos que el marco de Frenet-Serret de una curva contiene mucha información, y de hecho puede ser una puerta de entrada a conceptos como grupos de Lie, haces fibrados principales y formas de conexión, entre otros. No entraremos en detalles, pero todo lo mencionado aquí se puede analizar en el contexto de dichos conceptos.

La idea es cómo medir la velocidad con que se mueve el marco de Frenet cuando recorremos la curva, respecto del marco de referencia

$$\alpha = \{e_{1,\gamma}, e_{2,\gamma}\}$$

formado por el traslado paralelo de los vectores e_1 y e_2 a lo largo de la curva (ver figura anterior).

Definición 31 *Un marco paralelo a lo largo de la curva $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ será una pareja de vectores en cada punto de γ que se encuentre en reposo respecto del marco $\alpha = \{e_{1,\gamma}, e_{2,\gamma}\}$.*

Ejemplo 32 *Una circunferencia.*

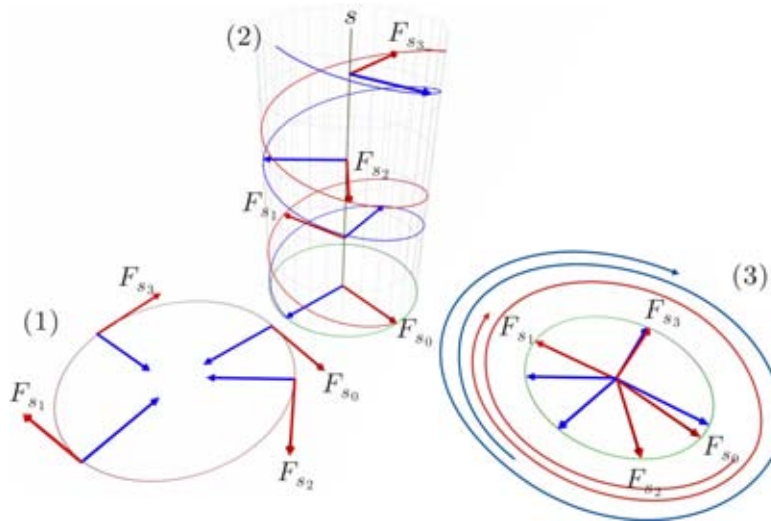
En la siguiente figura mostramos una circunferencia C_r (1), algunos de sus vectores tangentes (en rojo) y normales (en azul), y marcamos el marco de Frenet en cuatro instantes de tiempo s_i . Imaginemos ahora que somos observadores en el marco α . Veremos que el marco de Frenet F_s gira respecto a nosotros en el sentido de las manecillas del reloj (figura 3). En la figura (2), aprovechando nuestra tercera dimensión, introducimos el tiempo s en el eje vertical, obteniendo así la gráfica del movimiento de los diedros; es decir, las gráficas de las indicatrices \mathbf{t} y \mathbf{n} , que serán dos hélices contenidas en el cilindro

$$\mathfrak{C} = C_1 \times [0, \infty).$$

Al movernos a lo largo de γ los vectores que conforman el marco giran con la misma rapidez angular. Entonces podemos decir que el marco de Frenet F_s gira con respecto del marco α con una rapidez angular

$$\omega = \frac{1}{r} = k_r$$

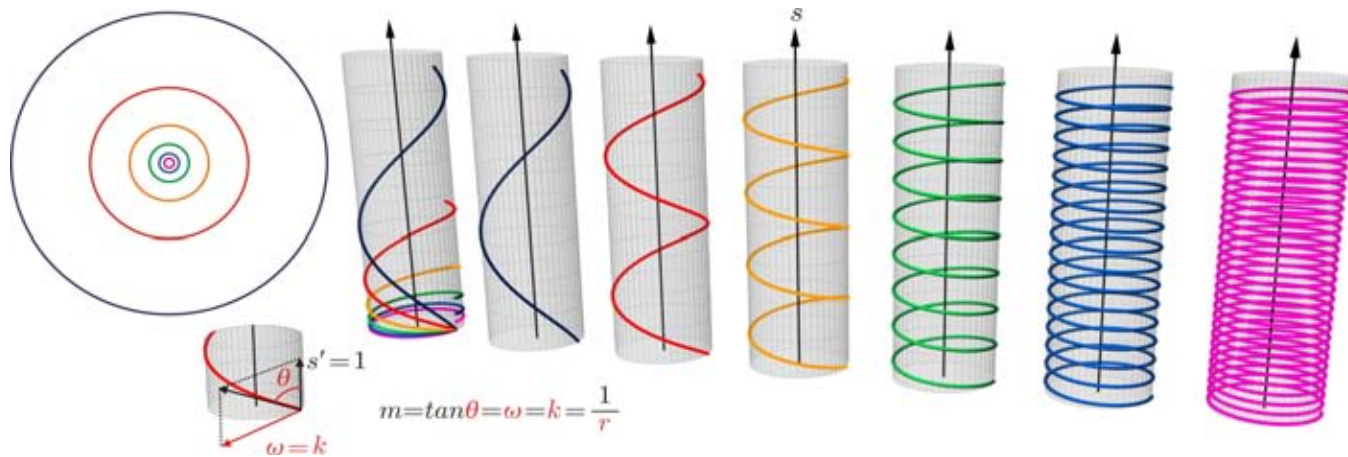
igual a la curvatura de la circunferencia C_r .



Podemos apreciar dicha rapidez ω en la inclinación de las hélices:

1. Si r es muy grande la rapidez ω con que gira el marco de Frenet será muy pequeña por lo que el tiempo que tardará la hélice en dar una vuelta al cilindro C será muy grande, es decir, tendremos una hélice con una pendiente pequeña (ver la hélice azul oscura en la siguiente figura). En el caso límite, cuando la circunferencia se convierte en recta ($r = \infty$) las hélices degeneran en dos rectas verticales (hélices con pendiente cero) que representan el reposo del marco de Frenet.

2. Si r es pequeño ω será grande y en poco tiempo la hélice dará muchas vueltas a C . Su pendiente será grande. Conforme $r \rightarrow 0$ la hélice dará más y más vueltas (ver hélice de la orilla derecha), colapsando en una circunferencia recorrida una infinidad de veces cuando C_r colapsa en un punto ($r = 0$).



Gráficas de la indicatriz de las tangentes t de circunferencias de distintos radios.

Una curva arbitraria.

En general si γ es una curva arbitraria F_s girará con una rapidez angular variable

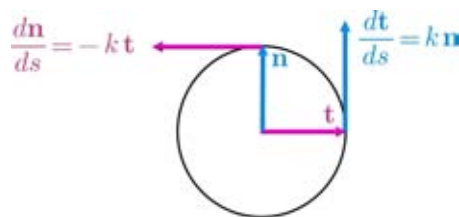
$$\omega(s) = k(s).$$

Las gráfica del giro del marco F_s será un par de curvas sobre el cilindro \mathcal{C} con una pendiente

$$m = \omega = k$$

que es igual a la curvatura de la curva γ .

Las indicatrices de \mathbf{t} y \mathbf{n} son un un par de curvas que se mueven con una rapidez igual a la curvatura de γ a lo largo de la circunferencia unitaria S^1 , de modo que sus vectores velocidad, $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ y $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$ son perpendiculares a \mathbf{t} y \mathbf{n} , respectivamente; por lo que resulta cómodo expresar a $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ y $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$ en términos de los vectores \mathbf{t} y \mathbf{n} .



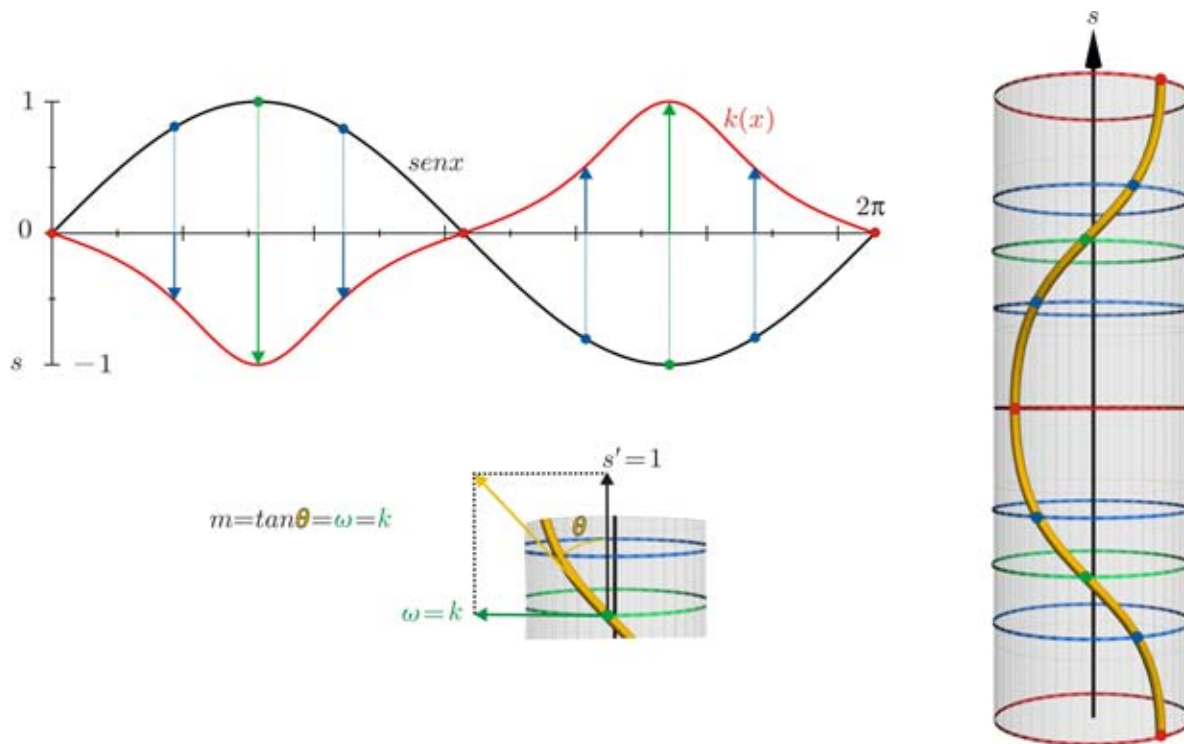
Definición 33 Las velocidades de las indicatrices \mathbf{t} y \mathbf{n} , expresadas en términos de los vectores del marco¹⁹ de Frenet-Serret, están dadas a través de las ecuaciones de **Frenet-Serret**

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= k\mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -k\mathbf{t} \end{aligned}$$

Ejemplo 34 Gráfica de la función $\text{sen}x$.

En la siguiente figura tenemos la gráfica de la función $\text{sen}x$ como nuestra curva γ , mostramos la gráfica de su función curvatura. La gráfica de la indicatriz de sus tangentes \mathbf{t} será una curva contenida en el cilindro C y su pendiente m es es igual a la curvatura de γ , que oscila entre los valores de curvatura máxima -1 y 1 .

¹⁹Estamos calculando las velocidades $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ y $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$ usando la conexión usual en \mathbb{R}^n y las expresamos, en cada instante, en términos del marco $F_s = \{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ de $T_{\gamma(s)}\mathbb{R}^2$.



Hemos marcado en rojo (en el cilindro) los puntos donde la curvatura de γ y la pendiente de la indicatriz \mathbf{t} son cero, $k = m = 0$, en verde los puntos de curvatura máxima y en azul unos puntos intermedios.

1.15. El sistema de ecuaciones diferenciales determinado por las ecuaciones de Frenet-Serret

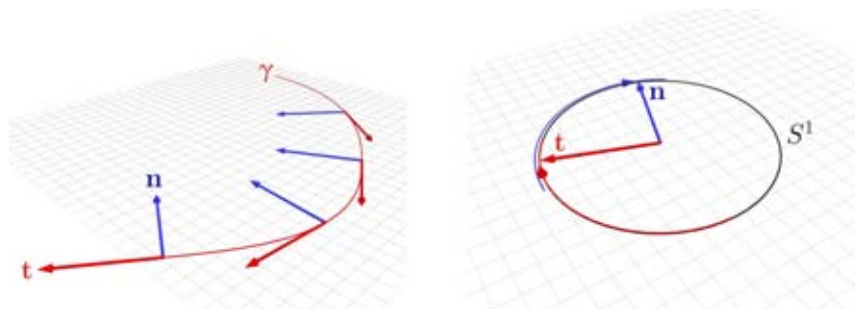
A continuación veremos una manera alternativa de interpretar las ecuaciones de Frenet-Serret.

Podemos asociar a cada instante de tiempo s la transformación lineal ortogonal que lleva el diedro F_0 en $F_s = F$ (ver la siguiente figura). Obtenemos así una curva en el espacio de transformaciones ortogonales que tiene asociada una curva de matrices ortogonales

$$s \rightarrow A_s \in SO_2 \subset M_{2 \times 2},$$

que tiene como punto inicial, en $s = 0$ a la matriz identidad

$$A_0 = I.$$



La curvatura $k(s)$ determina que tan rápido cambia de posición el diedro, en consecuencia también está involucrada en la velocidad con que la curva A_s se mueve en SO_2 . Veamos a continuación qué es la velocidad de una curva de matrices.

Las matrices $M_{2 \times 2}$ forman un espacio vectorial y podemos introducir una manera de medir la norma de una matriz y por lo tanto la distancia entre dos matrices, en otras palabras, $M_{2 \times 2}$ es un espacio vectorial normado. Con esa norma podemos definir el concepto de límite en $M_{2 \times 2}$ y definir la derivada de una curva de matrices

$$A_s = \begin{pmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) \end{pmatrix}$$

como el límite

$$A'_s = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(s+h) - A(s)}{h} = \begin{pmatrix} a'_{11}(s) & a'_{12}(s) \\ a'_{21}(s) & a'_{22}(s) \end{pmatrix}.$$

El significado geométrico de A'_s está en la velocidad de las curvas que describen los vectores \mathbf{t} y \mathbf{n} de F . Si aplicamos cada matriz de la curva A_s a los vectores $\mathbf{t}_0 = e_1$ y $\mathbf{n}_0 = e_2$ del marco F_0 obtenemos las curvas en \mathbb{R}^2

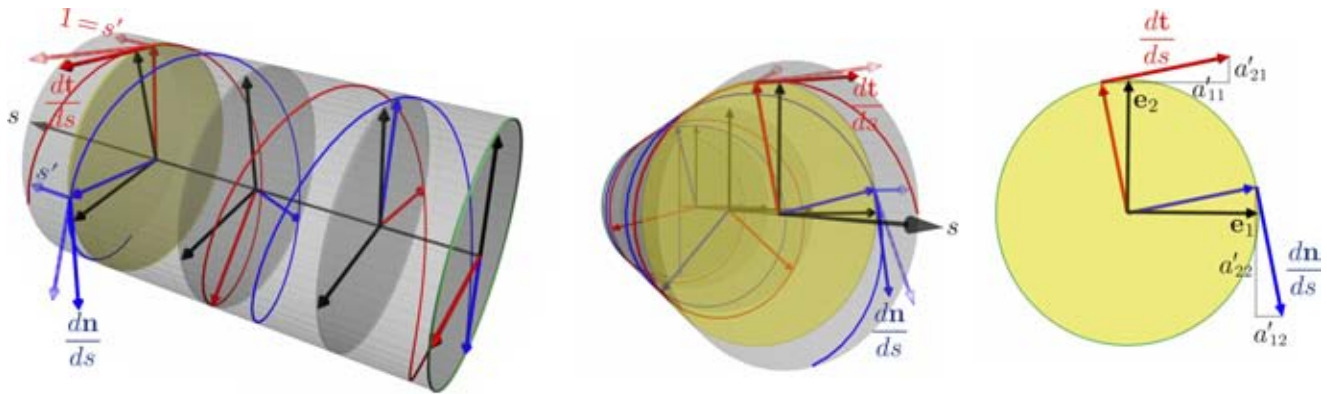
$$A_s(\mathbf{t}_0) = \mathbf{t} = \begin{pmatrix} a_{11}(s) \\ a_{21}(s) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_s(\mathbf{n}_0) = \mathbf{n} = \begin{pmatrix} a_{12}(s) \\ a_{22}(s) \end{pmatrix}$$

y sus velocidades

$$A'_s(\mathbf{t}_0) = \left[\frac{d\mathbf{t}}{ds} \right]_{\alpha} = \begin{pmatrix} a'_{11}(s) \\ a'_{21}(s) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A'_s(\mathbf{n}_0) = \left[\frac{d\mathbf{n}}{ds} \right]_{\alpha} = \begin{pmatrix} a'_{12}(s) \\ a'_{22}(s) \end{pmatrix}$$

son las columnas de A'_s (ver la siguiente figura):

$$A'_s = (A'_s(\mathbf{t}_0) \quad A'_s(\mathbf{n}_0))_{\alpha} = (\left[\frac{d\mathbf{t}}{ds} \right]_{\alpha} \quad \left[\frac{d\mathbf{n}}{ds} \right]_{\alpha})$$



Expresemos los vectores $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ y $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$ en términos del marco $F = \{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\mathbf{t}}{ds} \right]_F &= [I]_{\alpha}^F \left[\frac{d\mathbf{t}}{ds} \right]_{\alpha} \\ \left[\frac{d\mathbf{n}}{ds} \right]_F &= [I]_{\alpha}^F \left[\frac{d\mathbf{n}}{ds} \right]_{\alpha} \end{aligned}$$

donde $[I]_{\alpha}^F$ es la matriz que lleva las coordenadas en el marco α a las coordenadas en el marco F . Desarrollemos las igualdades anteriores en forma matricial y sustituyendo las ecuaciones de Frenet obtenemos la velocidad con que se mueve el marco F (expresada en términos de los vectores del mismo marco F):

$$\begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} = (\left[\frac{d\mathbf{t}}{ds} \right]_F \quad \left[\frac{d\mathbf{n}}{ds} \right]_F) = I_{\alpha}^F (\left[\frac{d\mathbf{t}}{ds} \right]_{\alpha} \quad \left[\frac{d\mathbf{n}}{ds} \right]_{\alpha}) = I_{\alpha}^F A'_s \quad (1.21)$$

Podemos imaginar que el marco F determina un plano Π_F que gira con respecto del plano Π_{α} que determina el marco α ; y la ecuación (1.21) puede ser interpretada como la velocidad de giro del plano Π_F respecto del plano Π_{α} . Un observador en el plano Π_{α} verá que los puntos del plano Π_F van girando, de modo que las coordenadas que les asigna serán variables. La ecuación (1.21) gobierna dicho movimiento, a través de un sistema de ecuaciones diferenciales que a continuación presentamos.

Un vector que tenga coordenadas constantes en el marco F (es decir, de un punto en el plano Π_F) será una curva para un observador en el marco α y sus coordenadas estarán relacionadas con las del marco F a través de las ecuaciones

$$[v]_{\alpha} = [I]_F^{\alpha} [v]_F \quad (1.22)$$

$$[v]_F = [I]_{\alpha}^F [v]_{\alpha} \quad (1.23)$$

donde $[I]_{\alpha}^F$ y $[I]_F^{\alpha}$ son las matrices que llevan (en el instante s) las coordenadas del marco α al marco F y del F al α , respectivamente. La velocidad de la curva que ve el observador en el marco α es

$$\frac{d[v]_{\alpha}}{ds} = \frac{d[I]_F^{\alpha}}{ds} [v]_F \quad (1.24)$$

Por (1.23) podemos expresar las coordenadas $[v]_F$ en términos de las coordenadas en el marco α , sustituyendo en (1.24) obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d[v]_{\alpha}}{ds} = \frac{d[I]_F^{\alpha}}{ds} [I]_{\alpha}^F [v]_{\alpha} \quad (1.25)$$

Notamos que la matriz de cambio de coordenadas $[I]_F^\alpha$ es igual a la matriz A_s asociada a la transformación que lleva el marco α en el marco F , y en consecuencia

$$A'_s = \frac{d[I]_F^\alpha}{ds}.$$

De (1.21) llegamos a que

$$[I]_F^\alpha \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} = \frac{d[I]_F^\alpha}{ds},$$

sustituyendo en (1.25) obtenemos

$$\frac{d[v]_\alpha}{ds} = [I]_F^\alpha \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} [I]_F^\alpha [v]_\alpha$$

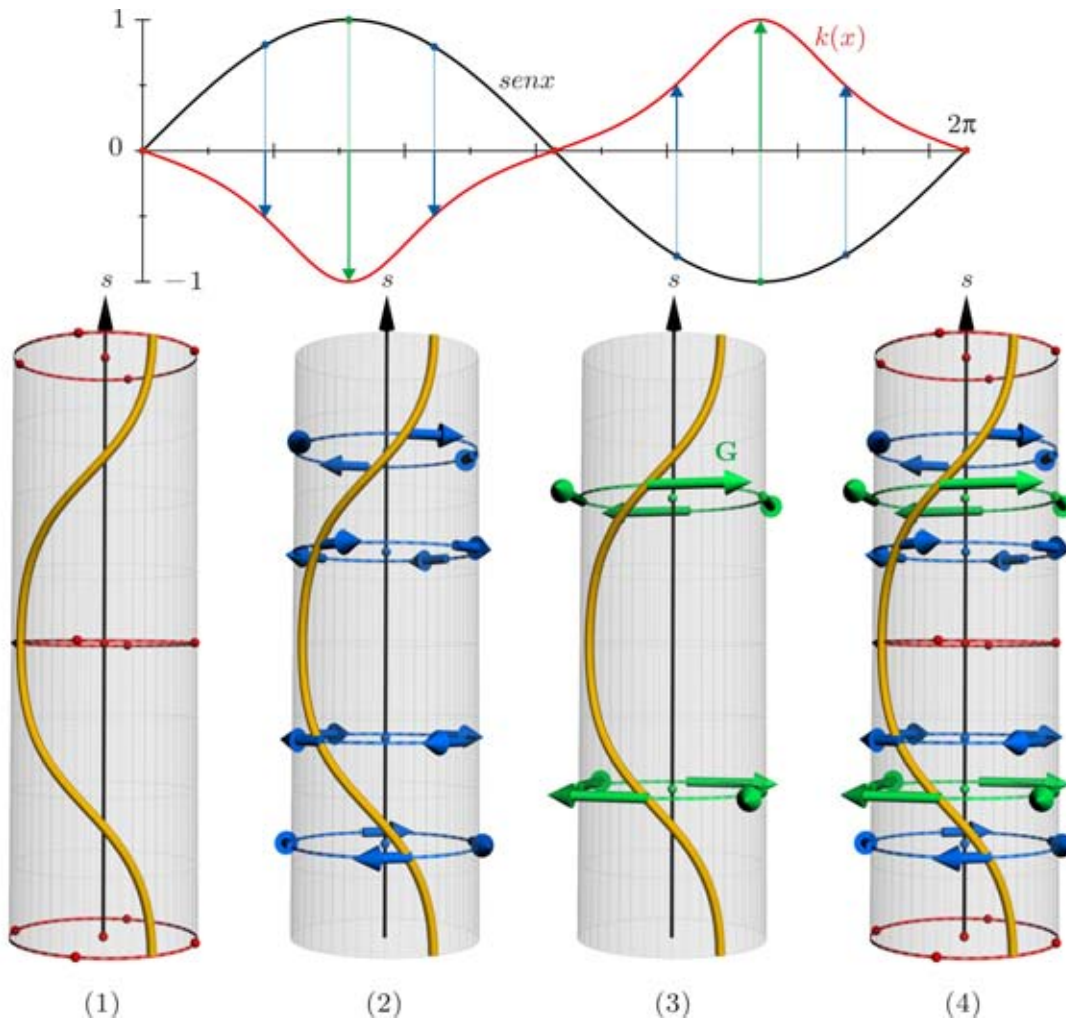
Tomando en cuenta que las matrices diagonales y ortogonales conmutan y que $[v]_\alpha = x \in \mathbb{R}^2$ llegamos al sistema de ecuaciones diferenciales lineales que depende del tiempo:

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & -k(s) \\ k(s) & 0 \end{pmatrix} x,$$

del que son soluciones particulares los movimientos que describen \mathbf{t} y \mathbf{n} .

Ejemplo 35 *El sistema de ecuaciones diferenciales asociado a la gráfica de la función $\text{sen}x$.*

En la siguiente figura tomamos como nuestra curva $\gamma(s)$ a la gráfica de la función $\text{sen}x$, suponiendo que es recorrida hacia la derecha empezando en $s = 0$ en el punto $(0,0)$. Mostramos los campos que determina el diedro F , en un espacio fase extendido con el tiempo en la dirección vertical; la curva amarilla es la gráfica de la indicatriz \mathbf{t} , sería una curva integral y su proyección al plano xy sería una solución del sistema de ecuaciones diferenciales. A distintas alturas (instantes de tiempo) hemos puesto los campos correspondientes, todos son centros²⁰ y su rapidez angular está dada por la curvatura (gráfica en rojo en la figura). Debido a que en el punto $(0,0)$ en la gráfica de $\text{sen}x$ no hay curvatura, la curva integral es localmente vertical en el punto más bajo. Mientras avanzamos hacia $x = \frac{\pi}{2}$ la curva integral se inclina, girando en contra de las manecillas del reloj hasta alcanzar su inclinación máxima en $x = \frac{\pi}{2}$ y luego por la simetría del seno la curva integral inclina de nuevo, girando al revés para ser de nuevo localmente vertical en el punto correspondiente a $x = \pi$.



²⁰Un campo es un centro si todas sus soluciones son circunferencias recorridas con la misma rapidez angular constante.

2. Curvas espaciales

2.1. Definición y una manera de determinar la forma de una curva espacial

En las secciones anteriores vimos cómo se curvan las curvas que están contenidas en un plano. Ahora consideraremos curvas en un espacio más grande, \mathbb{R}^3 .

Definición 1 Una curva en el espacio es un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ que es la imagen de un intervalo abierto I bajo una aplicación diferenciable

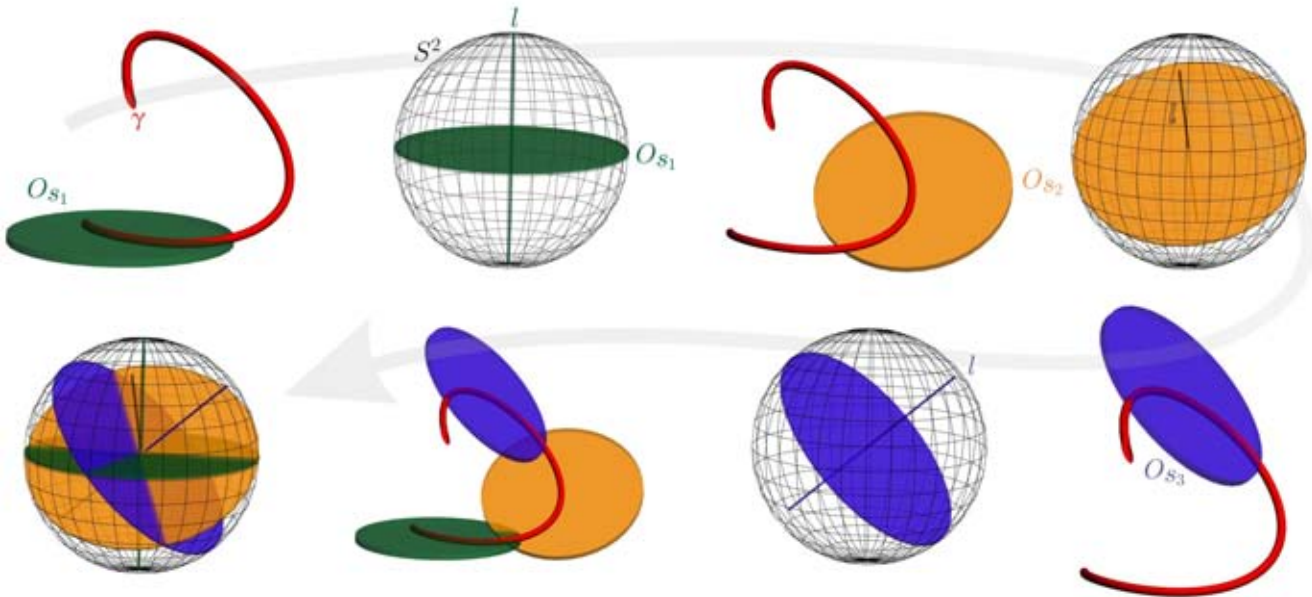
$$\begin{aligned} \gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^3; \text{ donde } s \rightarrow \gamma(s) \in \mathbb{R}^3; \\ A &= \{ \gamma(s) \in \mathbb{R}^3 : s \in I \}. \end{aligned}$$

Las curvas γ contenidas en \mathbb{R}^3 viven en un espacio con una dimensión extra, respecto al mundo donde viven las curvas planas. La forma de γ puede variar con más libertad, incluso para sacar a la curva de cualquier plano que quisiera contenerla. Éstas son las curvas que nos interesan en \mathbb{R}^3 pues si una curva estuviera contenida en un plano no habría nada nuevo que decir. Veamos cómo podemos detectar si una curva es o no plana.

Sea γ una curva en \mathbb{R}^3 parametrizada a longitud de arco.

Definición 2 Sus vectores tangente y normal, \mathbf{t} y \mathbf{n} , generan en cada punto de γ un plano $O_\gamma = O$ que se llama **plano osculador** de la curva γ

Podemos saber si una curva está contenida en algún plano a partir de la variación del plano osculador O . Si la curva es plana el plano osculador O_γ a lo largo de γ siempre será el mismo, pero cuando la curva ya no está contenida en un plano habrá puntos en ella para los cuales el plano O ya no es el mismo, varía al movernos sobre γ (ver la siguiente figura). ¿Cómo medimos la variación del plano osculador a lo largo de γ ? Una manera de analizar el movimiento del plano osculador O es imaginando que lo trasladamos de manera paralela al origen de \mathbb{R}^3 . Así tendremos dos movimientos gemelos, uno el del plano O_γ a lo largo de γ y el otro, que será el que usaremos, el de los planos trasladados al origen. En la siguiente figura mostramos una curva, sus planos osculadores en tres instantes de tiempo y sus respectivos traslados paralelos al origen.



Cada plano osculador $O \subset \mathbb{R}^3$ queda determinado por la pareja de vectores \mathbf{t} y \mathbf{n} . Por otro lado hay dos marcos ortonormales de \mathbb{R}^3 que contienen a los vectores \mathbf{t} y \mathbf{n} , de ellos uno tiene la misma orientación (positiva) que el marco $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 . Por lo tanto podemos establecer una correspondencia biunívoca entre los posibles planos osculadores y los marcos ortonormales que contienen a \mathbf{t} y \mathbf{n} que tienen orientación positiva. Definimos a continuación el tercer vector del marco en cuestión.

Definición 3 El vector **binormal** a una curva $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ es un vector normal unitario al plano osculador dado por

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}.$$

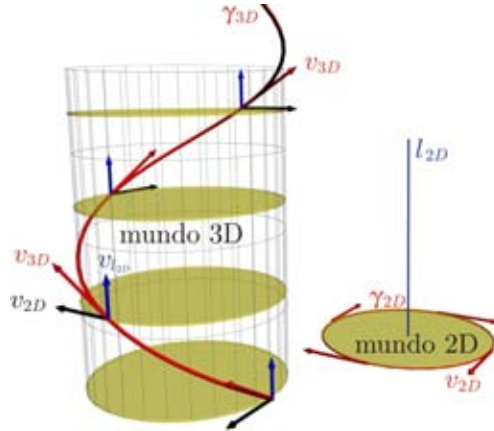
De la correspondencia anterior inferimos que la variación del plano osculador se podrá leerse en la variación del vector binormal \mathbf{b} . La indicatriz del vector binormal \mathbf{b} será una curva contenida en la esfera unitaria S^2 y su forma estará estrechamente relacionada con la forma de la curva γ .

Ejemplo 4 Una curva plana

Si γ está contenida en un plano entonces la indicatriz \mathbf{b} es constante en S^2 , es decir, es el. Recíprocamente, si la indicatriz \mathbf{b} de una curva γ es constante entonces γ es plana. Entonces el hecho de que γ se salga del plano implica que la indicatriz \mathbf{b} se empieza a mover en S^2 y al revés, si sabemos que \mathbf{b} se mueve en S^2 entonces γ ya no será plana.

Ejemplo 5 Una hélice

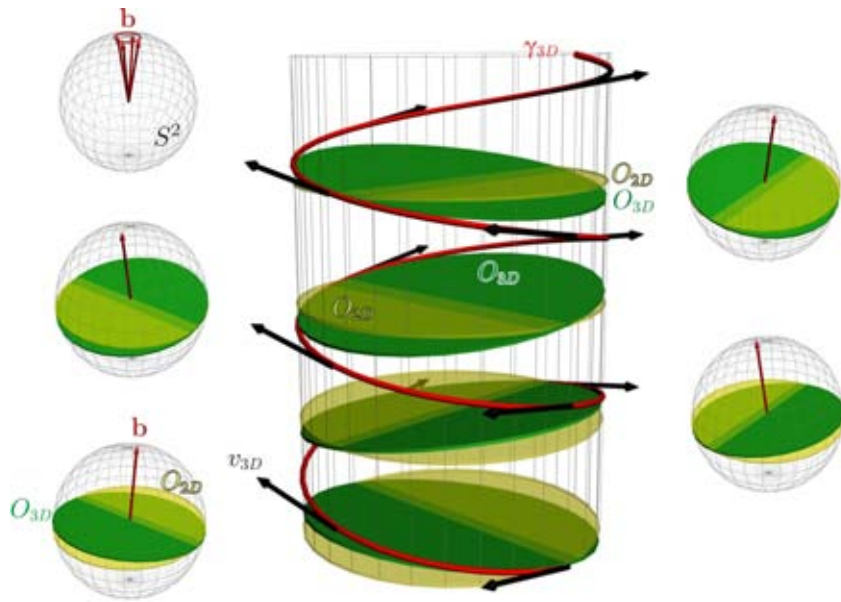
Podemos obtener un ejemplo sencillo de una curva γ que ya no es plana imaginando un mundo plano bidimensional 2D en donde un punto está recorriendo a rapidez unitaria una circunferencia (ver la siguiente figura). Ahora imaginemos el mundo 2D inmerso en nuestro mundo tridimensional 3D con una dimensión extra, la de la recta l_{2D} normal al mundo 2D (azul en la figura). Supongamos que el mundo 2D se mueve a una velocidad constante en la dirección l_{2D} . ¿Qué curva describe, en nuestro mundo 3D, el punto que se mueve a lo largo de la circunferencia en el mundo 2D? La curva γ_{3D} que describe es una hélice.



El punto se mueve, al mismo tiempo, en nuestro mundo 3D y en el 2D. Para nosotros la velocidad v_{3D} es distinta de la velocidad v_{2D} (que ve un ser 2D); tiene una componente en el mundo 2D y otra, que no puede ver el ser 2D, en la recta l_{2D} :

$$v_{3D} = v_{2D} + v_{l_{2D}}$$

La aceleración a_{3D} que vemos es igual que la aceleración a_{2D} que ve un ser 2D ya que el movimiento a lo largo de l_{2D} es a velocidad constante. Para un ser 3D el plano osculador O_{3D} de la curva será distinto del plano O_{2D} que ve un ser 2D. Como seres 3D vemos que O_{3D} se inclina respecto de O_{2D} debido a la componente $v_{l_{2D}}$. En la siguiente figura se muestra la inclinación de O_{3D} (en verde) respecto de O_{2D} (en amarillo) en cada punto de la hélice.



Al recorrer la hélice O_{3D} va cambiando su posición de modo que la indicatriz del vector binormal \mathbf{b} es una curva no constante en la esfera S^2 . Como la hélice tiene simetría de rotación respecto de la línea l_{2D} , la forma en la que va variando O_{3D} hereda esa simetría por lo que la indicatriz \mathbf{b} será una circunferencia (un paralelo rojo, arriba y a la izquierda, en la figura) en S^2 . Mientras más grande sea $v_{l_{2D}}$, más se acercará la indicatriz \mathbf{b} al ecuador. La velocidad con la que la indicatriz \mathbf{b} completa una vuelta no sólo depende de $v_{l_{2D}}$ sino de la longitud de la circunferencia en el mundo 2D, es decir, depende de la curvatura k_{2D} de la circunferencia.

Conclusión 6 *El movimiento del plano osculador hace la diferencia entre una curva plana y una curva que no está contenida en ningún plano. En el primer caso permanece constante y en el segundo se mueve.*

2.2. Curvatura de una curva espacial

¿Qué es la curvatura de una curva espacial? Necesitamos describir el movimiento del plano osculador para determinar la forma de la curva en \mathbb{R}^3 . El plano osculador es generado en cada instante por los vectores \mathbf{t} y \mathbf{n} . De las formas de abordar el concepto de curvatura de una curva plana, vistas en la sección 1, aquella que define (sección 1.5) la curvatura de $\gamma(s)$ cómo la rapidez con que se mueve la indicatriz de las tangentes $\mathbf{t} = \gamma'$:

$$k = \|\gamma''\|;$$

nos da información parcial de como se mueve el plano osculador. Nos dice hacia dónde se mueve el vector tangente a la curva γ :

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k \frac{\gamma''}{\|\gamma''\|} = k\mathbf{n},$$

que es uno de los vectores que determinan al plano osculador. Usaremos entonces esta idea para definir la curvatura de una curva en \mathbb{R}^3 . Antes, notamos que la indicatriz de las tangentes (traslado paralelo los vectores tangentes \mathbf{t} de γ al origen de \mathbb{R}^3) es una curva contenida en la esfera unitaria S^2

Definición 7 *La curvatura de una curva $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ es la rapidez con que se mueve en S^2 la indicatriz de las tangentes de la curva γ :*

$$k = \|\mathbf{t}'\| = \|\gamma''\|.$$

Notamos que:

1. Para curvas espaciales la curvatura siempre es positiva. Pierde significado la interpretación del signo de la curvatura que hacíamos en el caso de curvas planas: el sentido de giro del diedro de Frenet. Ahora los vectores \mathbf{t} y \mathbf{n} se mueven en un espacio de tres dimensiones por lo que hay muchas posibilidades adicionales para su movimiento con respecto a las dos que había para curvas planas: girar en el sentido de las manecillas o en el contrario.
2. La definición de curvatura a través de la derivada $\frac{d\theta}{ds}$ no puede ser usada en el caso de curvas en \mathbb{R}^3 ya que ahora un ángulo no determina la dirección del vector tangente a la curva.
3. La circunferencia de curvatura sí tiene significado y en cada instante s está contenida en el plano osculador de la curva y su radio es

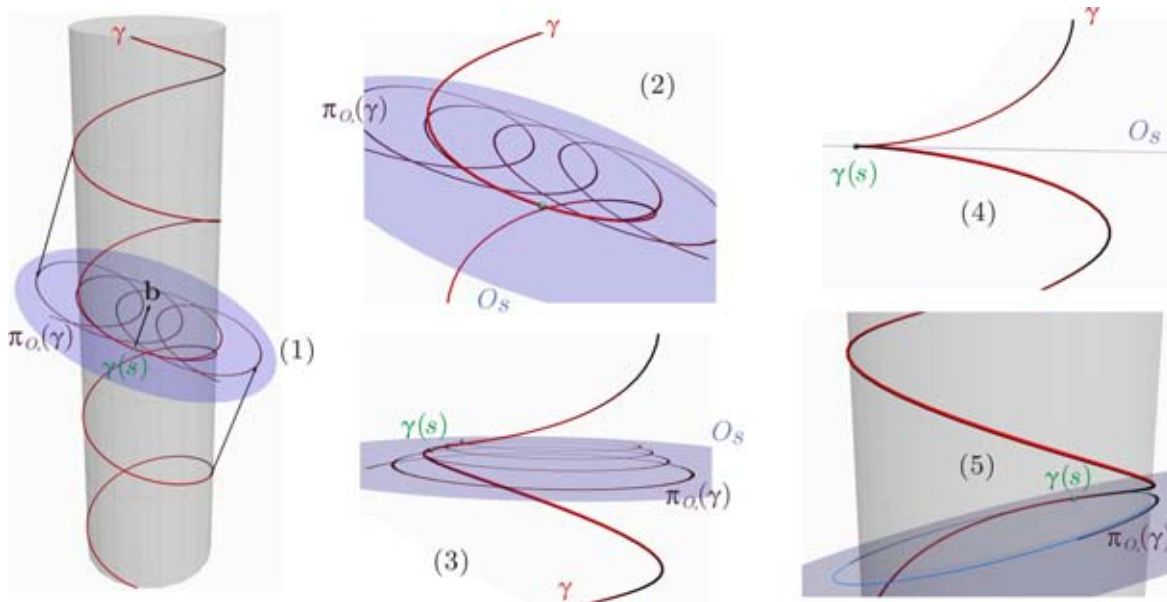
$$r_{k(s)} = \frac{1}{k(s)} = \frac{1}{\|\gamma''\|}.$$

2.3. La curvatura no determina la forma de una curva en \mathbb{R}^3

A continuación daremos una idea para ilustrar por qué la curvatura no determina la forma de una curva: *la curvatura no determina la forma en que se mueve el plano osculador.*

Una manera de interpretar la circunferencia de curvatura de la curva γ es proyectar²¹ la curva γ en el plano osculador, así obtenemos en cada instante una curva $\pi_{O_s}(\gamma)$ contenida en el plano osculador O_s correspondiente; la circunferencia de curvatura de $\pi_{O_s}(\gamma)$ es la circunferencia de curvatura de γ . En la siguiente figura ilustramos la idea anterior, tenemos una hélice como nuestra curva γ , mostramos varias perspectivas de la proyección $\pi_{O_s}(\gamma)$ (curva morada contenida en el plano osculador O_s) en un instante de tiempo dado. En (5) mostramos la circunferencia de curvatura (en azul) de las curvas $\pi_{O_s}(\gamma)$ y γ en el punto $\gamma(s)$.

²¹La proyección es ortogonal, en la dirección del vector \mathbf{b} .



La función de curvatura $k(s)$ de la curva γ determina en cada instante el radio de la circunferencia de curvatura de γ , sin embargo, no determina su posición en el espacio. En el siguiente ejemplo presentamos dos curvas espaciales diferentes²² cuyas circunferencias de curvatura tienen el mismo radio.

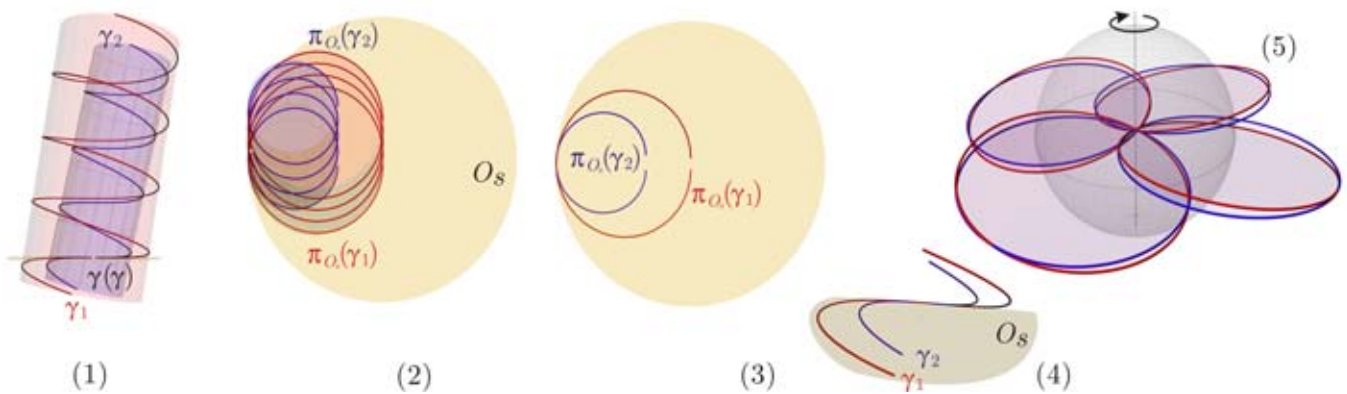
Ejemplo 8 *Dos curvas diferentes con la misma función de curvatura.*

Tomemos las hélices

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{2}(\cos t, \text{sent}, t),$$

$$\gamma_2(t) = \left(\frac{1}{3}\cos t, \frac{1}{3}\text{sent}, \frac{\sqrt{2}}{3}t\right).$$

Debido a la simetría de las hélices (ver la siguiente figura), en distintos instantes de tiempo, las proyecciones $\pi_{O_s}(\gamma_i)$ de cada hélice serán curvas (en sus respectivos planos osculadores) que tienen la misma forma²³. Esto garantiza que el radio de la circunferencia de curvatura de cada hélice es constante. Hay una fórmula²⁴ para calcular la curvatura que nos garantiza la igualdad entre los radios de las circunferencias de curvatura de ambas hélices. En la siguiente figura (1)-(4) hacemos coincidir las hélices en un punto para mostrar las proyecciones $\pi_{O_s}(\gamma_1)$ y $\pi_{O_s}(\gamma_2)$ en un plano osculador O_s común, ambas proyecciones tienen la misma circunferencia de curvatura. Cada hélice tiene la misma función de curvatura, sin embargo las hélices son diferentes²⁵. En (5) hemos transportado paralelamente las circunferencias de curvatura (correspondientes a cuatro puntos en cada hélice) al origen, de modo que en cada instante el punto de tangencia se mueve al origen. Al recorrer las hélices sus circunferencias de curvatura se mueven de maneras distintas alrededor del origen, ya que una de ellas (circunferencia roja) está más inclinada que la otra.



²²Dos curvas en \mathbb{R}^3 son iguales si existe una isometría (traslación o rotación) que nos lleva una en la otra.

²³La proyección en un instante puede ser llevada en la proyección en otro instante mediante una isometría en \mathbb{R}^3 .

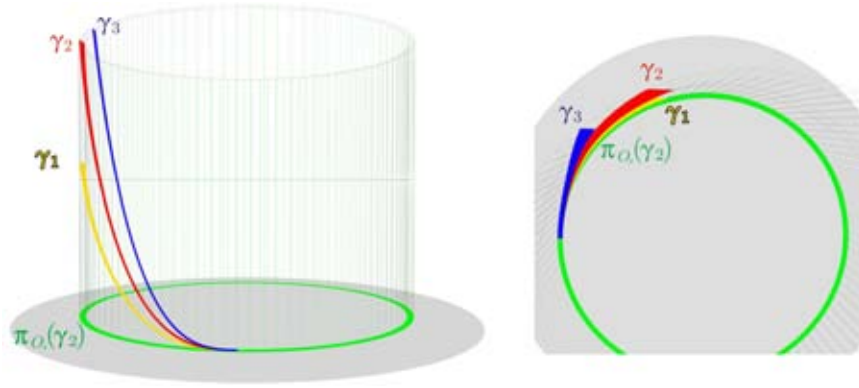
²⁴La curvatura de la hélice $\gamma(t) = (a\text{sent}, a\cos t, bt)$ viene dada por

$$k(s) = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

de modo que la curvatura de las hélices γ_1 y γ_2 es 1.

²⁵No podemos llevar una en otra con una isometría.

Del ejemplo anterior podemos ver lo que sucede en general: puede haber muchas curvas $\hat{\gamma}$ que al ser proyectadas sobre el plano osculador arrojan una proyección $\pi_{O_s} \hat{\gamma}$ que tiene la misma circunferencia de curvatura. En la siguiente figura ilustramos este hecho con tres curvas γ_i que en el instante s coinciden, comparten su plano osculador y proyectan en él tres curvas que comparten la misma circunferencia de curvatura (en verde).



Imaginemos la función de curvatura $k(s)$ como el proceso de tomar la circunferencia de curvatura de la proyección $\pi_{O_s}(\gamma)$, entonces para cada instante tenemos una circunferencia en O_s , es decir, una curva $C_{\frac{1}{k(s)}}$ de circunferencias de curvatura, que podríamos pensar que es una película de circunferencias proyectada en una pantalla que es el plano osculador. Dicha película es independiente de si se mueve la pantalla de proyección (el plano osculador). Cada curva en \mathbb{R}^3 tiene asociada una curva de circunferencias de curvatura, sin embargo, dada una curva $C_{\frac{1}{k(s)}}$, hay muchas en curvas en \mathbb{R}^3 que la proyectan como su película de circunferencias de curvatura.

Conclusión 9 La curvatura no determina una curva en \mathbb{R}^3 , puede haber muchas curvas espaciales diferentes que tengan la misma función de curvatura. El problema es que la curvatura no detecta que las circunferencias de curvatura, a pesar de que tienen el mismo radio, pueden estar contenidas en planos osculadores que se mueven de maneras diferentes. Para distinguir esas curvas, necesitamos un ingrediente adicional que nos diga si se mueve el plano osculador y con que velocidad. Dicho ingrediente será la torsión de una curva, que es la causante, cuando es distinta de cero, de que no podamos encerrar a la curva en plano alguno en \mathbb{R}^3 .

2.4. Triedro de Frenet-Serret y sus ecuaciones

Definición 10 El marco²⁶ formado por el vector tangente, normal y binormal a la curva γ es llamado **marco** o **triedro de Frenet-Serret**

$$F = \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$$

Los vectores del marco de Frenet generan tres planos, uno de ellos el osculador y los otros dos son:

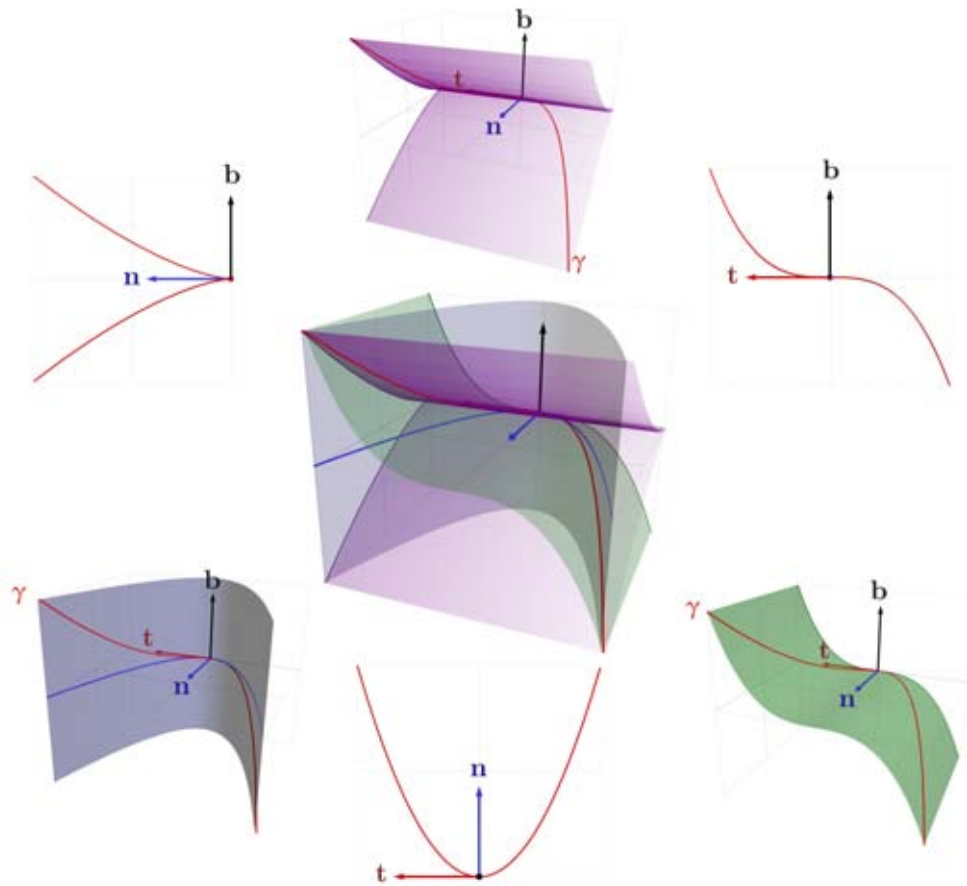
Definición 11 el generado por \mathbf{n} y \mathbf{b} se llama **plano normal** y por \mathbf{t} y \mathbf{b} **plano rectificador**.

Mencionamos (ver la siguiente figura) que la forma local de una curva γ en una pequeña vecindad de un punto es tal que las proyecciones de la curva en los planos osculador, rectificador y normal nos dan curvas que esencialmente²⁷ son una parábola, una cúbica y una cúspide respectivamente.

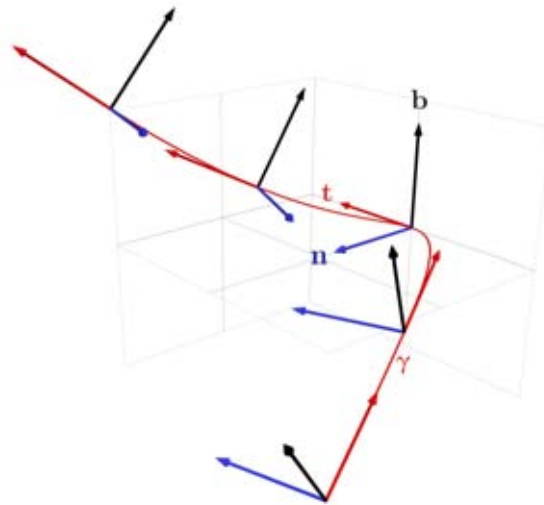
²⁶Ya mencionado en la sección 2.1

²⁷La curva γ cerca del punto en cuestión, expresada en términos de marco $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ es tal que

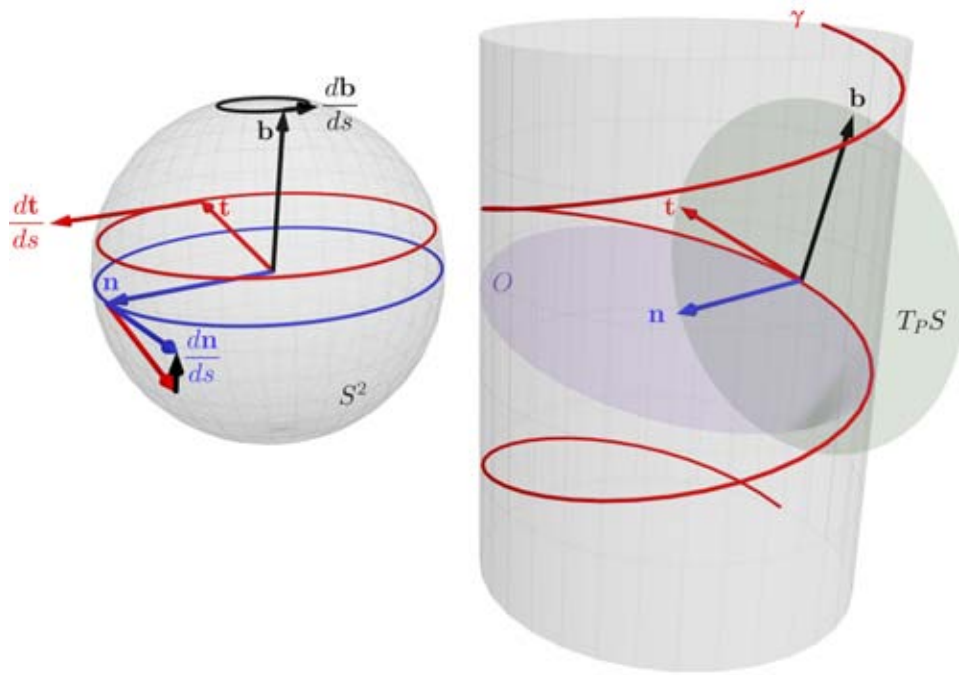
$$\gamma(s) = \left(s, \frac{1}{2}ks^2, \frac{1}{6}k\tau s^3 \right) + \mathbf{o}(4)$$



A cada curva γ le corresponde una terna de campos vectoriales unitarios $\mathbf{t}_\gamma = \mathbf{t}$, $\mathbf{n}_\gamma = \mathbf{n}$ y $\mathbf{b}_\gamma = \mathbf{b}$ a lo largo de ella, o equivalentemente un campo de triedros F_S .



Si trasladamos paralelamente los vectores \mathbf{t} , \mathbf{n} y \mathbf{b} al origen obtendremos sus indicatrices que son tres curvas contenidas en S^2 . La velocidad $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ con que se mueve \mathbf{b} en S^2 tendrá la información que necesitamos para determinar la forma de la curva γ . Como los vectores del triedro se encuentran unidos las velocidades de \mathbf{t} , \mathbf{n} y \mathbf{b} deberán estar relacionadas, veamos cómo.



La rapidez con que recorremos γ es unitaria, $\gamma' = \mathbf{t}$, entonces la velocidad con la que se mueve \mathbf{t} en S^2 es la aceleración que experimenta el punto que se mueve a lo largo de γ ; que es un vector en la dirección del vector normal a γ y con un tamaño igual a la curvatura de la curva γ en el punto en cuestión

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n}$$

Por otro lado la velocidad $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ es un vector que está contenido en el plano tangente $T_{\mathbf{b}}S^2$, que es siempre paralelo al plano osculador O . Éste último es generado por los vectores \mathbf{t} y \mathbf{n} por lo que

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \alpha \mathbf{t} - \tau \mathbf{n}$$

podrá expresarse como combinación lineal de ellos²⁸. Si α fuera distinta de cero produciríamos una componente de $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ en la dirección del vector \mathbf{b} la cual no existe, por lo tanto

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n}$$

la velocidad del vector binormal es múltiplo del vector \mathbf{n} .

Definición 12 El número τ de la ecuación anterior se denomina la **torsión**²⁹ de la curva γ .

La ecuación anterior nos dice que al movernos a lo largo de γ el plano osculador O va girando infinitesimalmente alrededor de la recta que genera el vector \mathbf{t} con una velocidad angular³⁰

$$\omega = \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \mathbf{b} \times -\tau \mathbf{n} = -\tau (\mathbf{b} \times \mathbf{n}) = \tau \mathbf{t},$$

que es múltiplo positivo de \mathbf{t} , cuando la torsión es positiva. Podemos entonces interpretar a $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ como la velocidad tangencial con la que rota el vector \mathbf{b}

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \omega \times \mathbf{r} = \tau \mathbf{t} \times \mathbf{b} = -\tau \mathbf{n}$$

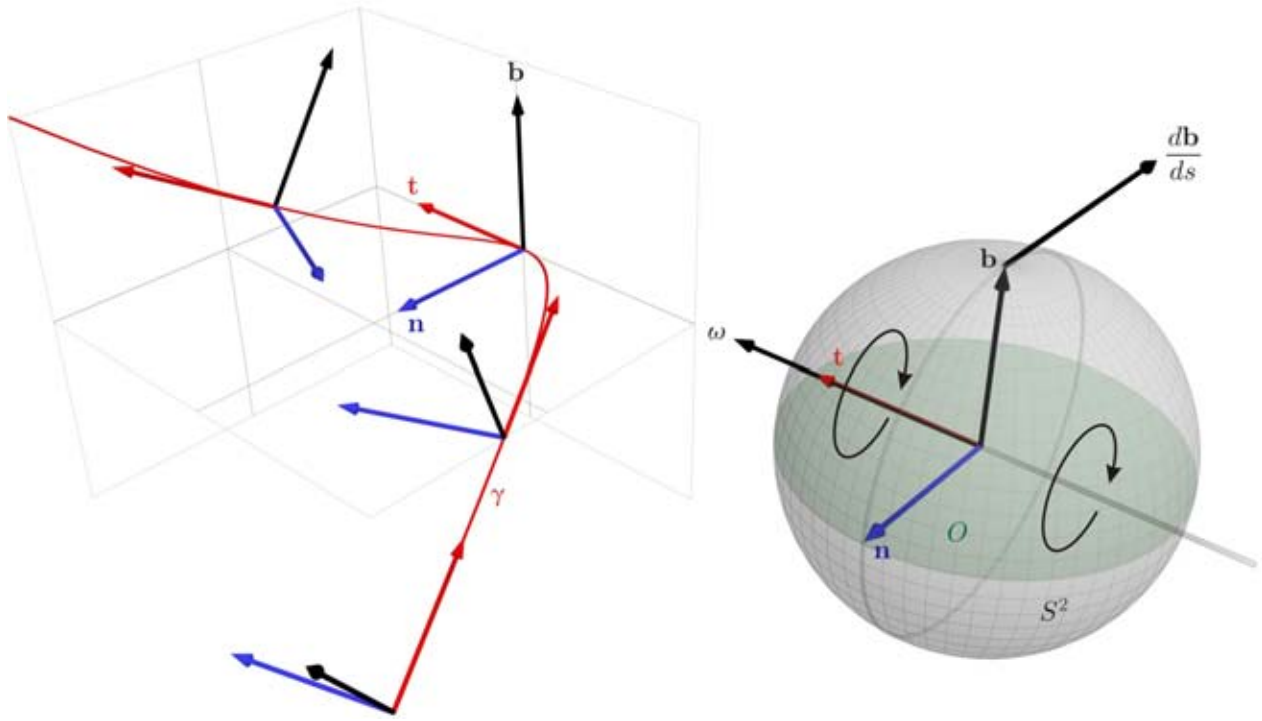
²⁸El signo menos es para ajustarnos a una de las dos posibles definiciones de torsión. La otra es con signo positivo.

²⁹La otra definición de torsión es a partir de $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \tau \mathbf{n} = \beta \mathbf{n}$. Nosotros optamos por $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n}$ para que la velocidad angular con la que gira el plano O sea un múltiplo positivo de \mathbf{t} , si la torsión τ es positiva.

³⁰Estamos usando la fórmula

$$\omega = \mathbf{r} \times \mathbf{v},$$

donde \mathbf{r} es el vector binormal \mathbf{b} y \mathbf{v} la velocidad $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$.



El tamaño de la torsión $|\tau|$ nos dice que tan rápido va girando el plano O alrededor de la recta que genera \mathbf{t} . Si vemos al plano O desde la punta del vector \mathbf{t} , entonces O gira en contra de las manecillas de un reloj cuando la torsión τ es positiva y a favor si τ es negativa.

Ahora analicemos el movimiento del vector \mathbf{n} , para ello veamos cómo se va moviendo el marco de Frenet F a lo largo de la curva. Podemos pensar que el vector \mathbf{n} es al mismo tiempo habitante de dos mundos 2D diferentes: el plano osculador O y el plano normal \mathbf{N} . Pausemos el movimiento del marco de Frenet a lo largo de la curva (cómo detener una película 3D) en un instante dado, y coloquémonos de frente al plano O , en la punta del vector \mathbf{b} . Al quitarle la pausa veremos que, para tiempos cercanos, los vectores \mathbf{t} y \mathbf{n} giran, ambos con una velocidad angular

$$\omega_O = k\mathbf{b}.$$

Análogamente podemos colocarnos de frente al plano \mathbf{N} , en la punta del vector \mathbf{t} , y al quitar la pausa lo que veremos desde ahí es que los vectores \mathbf{n} y \mathbf{b} giran, ambos con una velocidad angular

$$\omega_{\mathbf{N}} = \tau\mathbf{t}.$$

Entonces juntando las dos tendencias a girar que siente el vector \mathbf{n} tenemos que gira a una velocidad angular

$$\omega = \omega_O + \omega_{\mathbf{N}} = k\mathbf{b} + \tau\mathbf{t},$$

de donde obtenemos, usando la fórmula

$$v = \omega \times r,$$

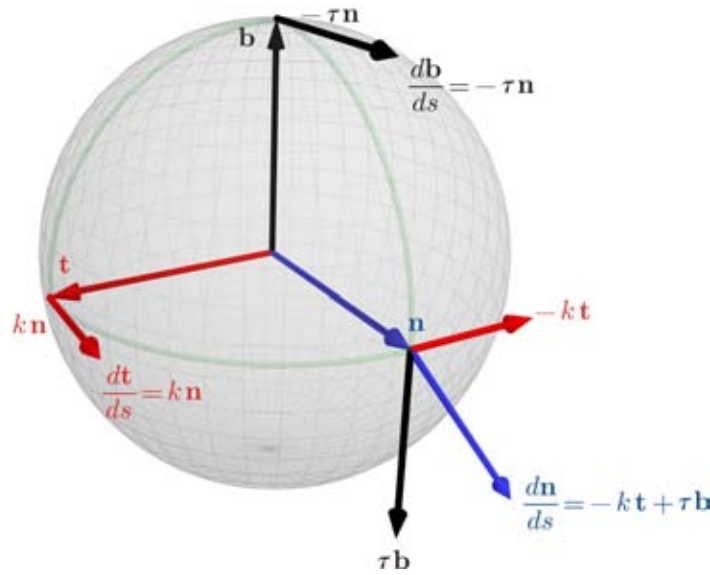
que la velocidad tangencial con la que gira el vector \mathbf{n} es

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \omega \times \mathbf{n} = (k\mathbf{b} + \tau\mathbf{t}) \times \mathbf{n} = k(\mathbf{b} \times \mathbf{n}) + \tau(\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$$

Hemos encontrado la velocidad con la que van girando los vectores \mathbf{t} , \mathbf{n} y \mathbf{b} a lo largo de la curva γ o lo que es lo mismo, las velocidades con las que se mueven las indicatrices de \mathbf{t} , \mathbf{n} y \mathbf{b} en S^2 :

Definición 13 Las velocidades de las indicatrices \mathbf{t} , \mathbf{n} y \mathbf{b} expresadas en términos de los vectores del marco F están dadas a través de las **ecuaciones de Frenet-Serret** para una curva γ en \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= k\mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -\tau\mathbf{n} \end{aligned} \tag{2.1}$$

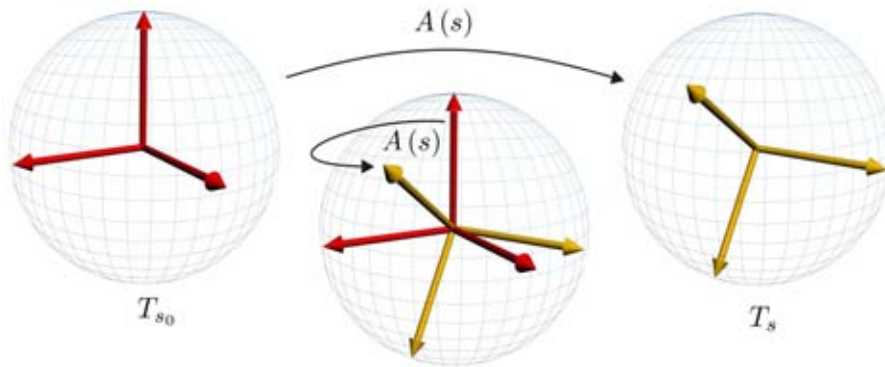


2.5. El sistema de ecuaciones diferenciales determinado por las ecuaciones de Frenet

Podemos asociar a cada instante de tiempo s la transformación lineal ortogonal que lleva el marco F_0 en F_s . Obtenemos así una curva en el espacio de transformaciones lineales ortogonales que tiene asociada una curva de matrices ortogonales

$$s \rightarrow A_s \in SO_3 \subset M_{3 \times 3},$$

que tiene como punto inicial (en $s = 0$) a la matriz identidad.



Motivemos con un ejemplo la relación que hay entre la velocidad de la curva de marcos A_s y la curvatura y torsión de la curva γ .

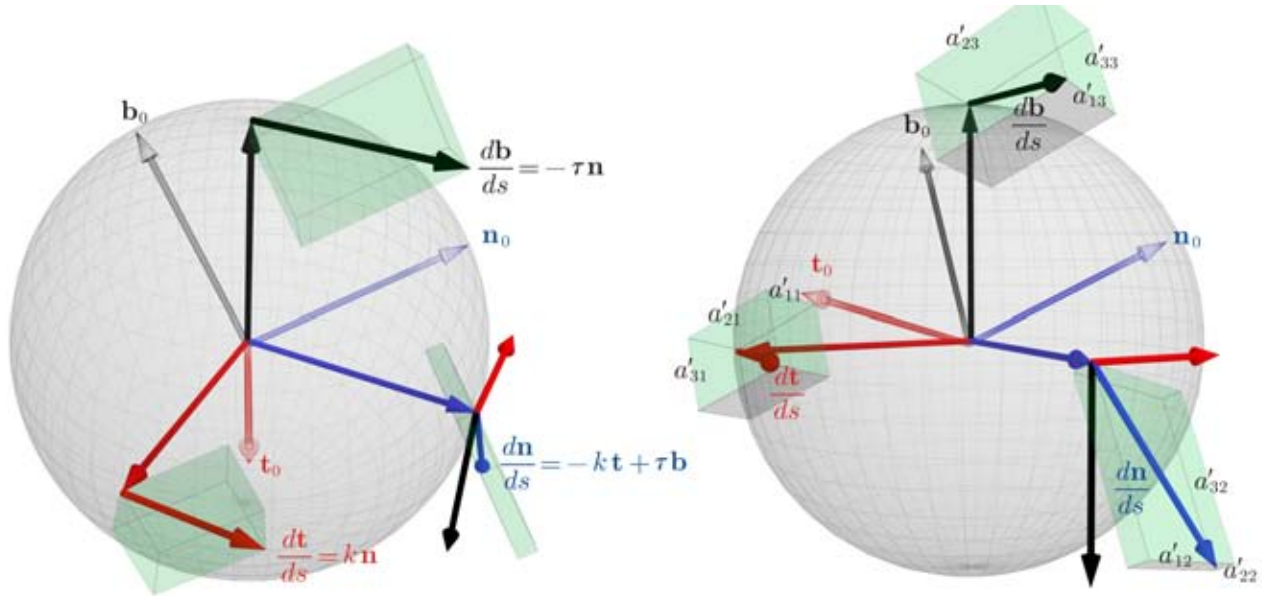
Ejemplo 14 *Dos curvas homotéticas*³¹.

Tomemos dos curvas homotéticas γ_1 y γ_2 en \mathbb{R}^3 . La curvatura y torsión de γ_1 serán proporcionales a las de γ_2 y la proporción es el factor de la homotecia. Las posiciones de los marcos de Frenet, en los puntos correspondientes en ambas curvas, son iguales, es decir, las curvas en SO_3 , determinadas por el movimiento de los marcos de Frenet de cada curva, coinciden en instantes de tiempo que también son proporcionales. Entonces las velocidades de dichas curvas en SO_3 tendrán la misma proporción que las curvaturas y torsiones de γ_1 y γ_2 .

La idea que deseamos motivar en el ejemplo es que la velocidad A'_s de la curva que determina en SO_3 el movimiento del marco de Frenet está determinada por la curvatura y torsión de la curva γ . Calculemos A'_s . Por un razonamiento análogo al de la sección (1.15) tenemos que las columnas de la matriz A'_s son las velocidades de las indicatrices de \mathbf{t} , \mathbf{n} y \mathbf{b} , expresadas en términos del marco $F_0 = \{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$.

$$A'_s = \left(\begin{array}{ccc} \left[\frac{d\mathbf{t}}{ds} \right]_{F_0} & \left[\frac{d\mathbf{n}}{ds} \right]_{F_0} & \left[\frac{d\mathbf{b}}{ds} \right]_{F_0} \end{array} \right)$$

³¹Es decir una puede ser obtenida como la imagen bajo una homotecia de la otra.



En la figura mostramos (dos perspectivas) los marcos F_0 (en malla) y $F_s = F$; y la velocidad del marco F (conformada por los vectores $\frac{dt}{ds}$, $\frac{dn}{ds}$ y $\frac{db}{ds}$) expresada en términos de los marcos $F = \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ y $F_0 = \{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$ (mostramos las coordenadas a'_{ij} en términos del marco F_0)

Expresando las columnas de A'_s en términos del marco $F = \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ y sustituyendo las ecuaciones (2.1) de Frenet en \mathbb{R}^3 llegamos a la velocidad con que se mueve el marco F

$$[I]_{F_0}^F A'_s = \left(\begin{array}{ccc} \left[\frac{dt}{ds}\right]_F & \left[\frac{dn}{ds}\right]_F & \left[\frac{db}{ds}\right]_F \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Podemos imaginar que el marco F determina un espacio tridimensional Π_F que gira con respecto del espacio tridimensional Π_{F_0} que determina el marco F_0 ; y la ecuación (2.2) puede ser interpretada como la velocidad de giro del espacio Π_F respecto del espacio Π_{F_0} . Un observador en el espacio Π_{F_0} verá que los puntos del espacio Π_F van girando (ahora un giro en \mathbb{R}^3), de modo que las coordenadas que les asigna serán variables. La ecuación (2.2) gobierna dicho movimiento, a través de un sistema de ecuaciones diferenciales que a continuación presentamos.

Un vector que tenga coordenadas constantes en el marco F (es decir, de un punto en el espacio Π_F) será una curva en el marco F_0 y sus coordenadas estarán relacionadas con las del marco F a través de las ecuaciones

$$[v]_{F_0} = [I]_F^{F_0} [v]_F \quad (2.3)$$

$$[v]_F = [I]_{F_0}^F [v]_{F_0} \quad (2.4)$$

donde $[I]_{F_0}^F$ y $[I]_F^{F_0}$ son las matrices que llevan (en cada instante s) las coordenadas del marco F_0 al marco F y del F al F_0 , respectivamente. La velocidad de la curva que ve el observador en el marco F_0 es

$$\frac{d[v]_{F_0}}{ds} = \frac{d[I]_F^{F_0}}{ds} [v]_F. \quad (2.5)$$

Por (2.4) podemos expresar las coordenadas $[v]_F$ en términos de las coordenadas en el marco F_0 , sustituyendo en (2.5) obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d[v]_{F_0}}{ds} = \frac{d[I]_F^{F_0}}{ds} [I]_{F_0}^F [v]_{F_0}. \quad (2.6)$$

Notamos que la matriz de cambio de coordenadas $[I]_F^{F_0}$ es igual a la matriz A_s asociada a la transformación que lleva el marco F_0 en el marco F_s , y en consecuencia

$$A'_s = \frac{d[I]_F^{F_0}}{ds}.$$

De (2.2) llegamos a que

$$[I]_F^{F_0} \begin{pmatrix} 0 & -k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} = \frac{d[I]_F^{F_0}}{ds}$$

sustituyendo en (2.6) obtenemos

$$\frac{d[v]_{\alpha}}{ds} = [I]_F^{F_0} \begin{pmatrix} 0 & -k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} [I]_{F_0}^F [v]_{\alpha}$$

Aquí llegamos a una diferencia con el procedimiento usado en dos dimensiones. En tres dimensiones ya no podemos conmutar las matrices en la igualdad anterior. Tomando en cuenta que $[v]_{\alpha} = x \in \mathbb{R}^3$ llegamos al sistema de ecuaciones diferenciales lineales que depende del tiempo:

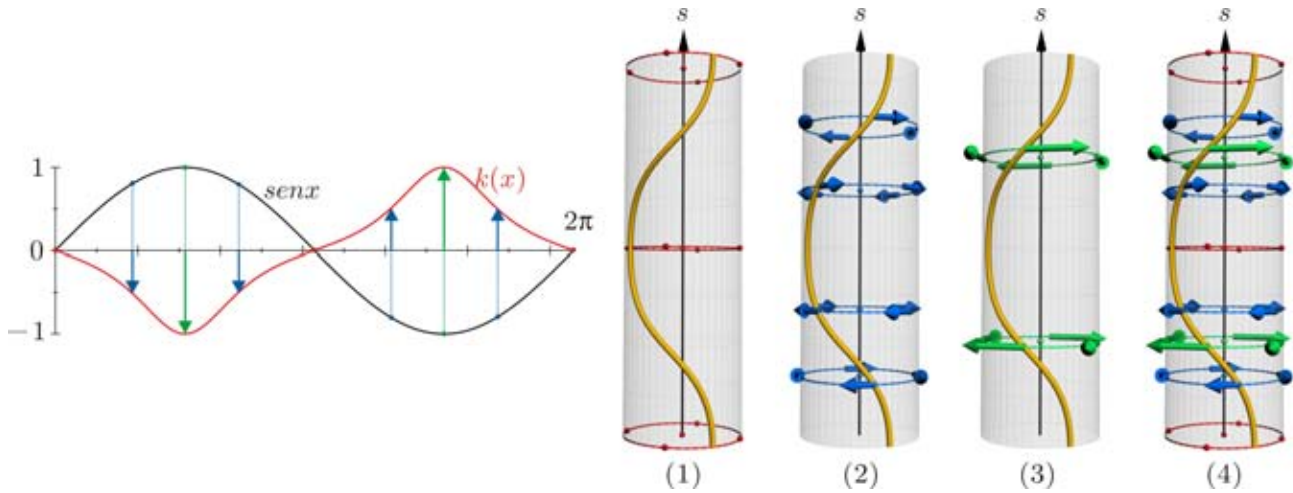
$$x' = \left[[I]_F^{F_0} \begin{pmatrix} 0 & -k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} [I]_{F_0}^F \right] x, \tag{2.7}$$

del que son soluciones particulares los movimientos que describen \mathbf{t} , \mathbf{n} y \mathbf{b} .

Finalmente mencionamos que no pondremos ejemplos de las gráficas del movimiento de las indicatrices de \mathbf{t} , \mathbf{n} y \mathbf{b} , ya que ahora son tres curvas contenidas en las paredes tridimensionales de un cilindro

$$\mathfrak{C} = S^2 \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^4.$$

Tampoco intentaremos visualizar el espacio fase extendido (\mathbb{R}^4) del sistema de ecuaciones diferenciales (2.7). Sin embargo algo podemos decir, recordemos la figura que teníamos en el caso de curvas planas:



Si pudieramos ver en \mathbb{R}^4 tendríamos los siguientes cambios en la figura:

1. Una curva espacial en lugar de una curva plana (gráfica del $\text{sen } x$ en la figura).
2. La gráfica de la función torsión además de la gráfica de la función curvatura.
3. El espacio fase extendido del sistema de ecuaciones diferenciales sería \mathbb{R}^4
4. Los campos que en cada instante determinan la curvatura y torsión serían tridimensionales, es decir, serían rebanadas horizontales de tres dimensiones en el espacio fase extendido.
5. Los campos en cada rebanada estarían determinados por la velocidad de alguna curva de rotaciones en \mathbb{R}^3 .
6. Las soluciones que determinan las indicatrices de \mathbf{t} , \mathbf{n} y \mathbf{b} estarían contenidas en el cilindro tridimensional \mathfrak{C} .

3. Superficies

3.1. Idea intuitiva de superficie y un intento de describir su forma

Cuando pensamos en la palabra superficie nos viene a la mente la imagen de algún objeto o lugar, por ejemplo; la superficie de la cáscara de una manzana, de un plátano, la superficie de una pelota, de una dona, de una antena parabólica, de una silla de montar, de un valle, de una loma, de un paso de montaña, de una manguera, de un rin de automóvil,... etc. Precisemos nuestra idea de superficie a través de la siguiente



Definición 1 Un subconjunto S en \mathbb{R}^3 es una superficie si para cada P en S existe una vecindad V en \mathbb{R}^3 y una transformación

$$\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$$

de un conjunto U abierto en \mathbb{R}^2 a $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que \mathbf{x} es biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable.

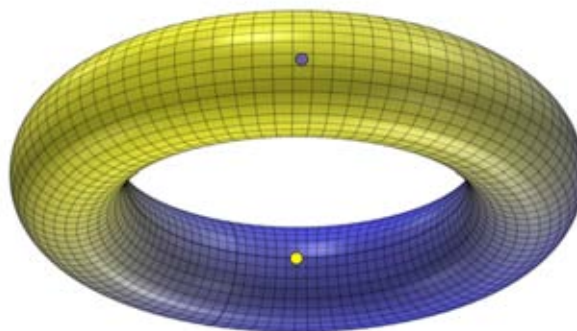
En esta sección introduciremos el concepto de curvatura de una superficie. Podríamos pensar que las ideas que seguimos para llegar al concepto de curvatura de curvas funcionan para superficies. Intentemos seguir los pasos que nos llevaron al concepto de curvatura en el caso de curvas.

Empecemos con una superficie bien conocida, la esfera. Por su simetría, si nos imaginamos parados en una gran esfera, la veríamos exactamente igual sin importar el punto en el que estemos. En consecuencia, la manera en que se curva es la misma en todos sus puntos. Entonces el concepto buscado, la curvatura, deberá ser constante en el caso de la esfera. Veamos ahora qué sucede con un par de esferas de distinto radio.



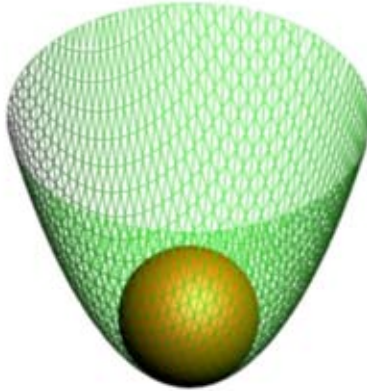
La pregunta es análoga a la que nos hacíamos con las circunferencias en la sección (1.1) ¿Cuál de las dos esferas está más curvada? Nuevamente, podríamos contestar que mientras más grande sea el radio de una esfera menos se curva, y viceversa. Entonces, si nos fijamos únicamente en esferas pareciera que, como en el caso de las curvas, la curvatura k_r de una esfera de radio r , es una función decreciente del radio. Veremos más adelante que esto así pero ahora k_r será $\frac{1}{r^2}$ en lugar de $\frac{1}{r}$ como sucede con la curvatura de una circunferencia.

La manera en que se curvan superficies distintas de la esfera depende del punto que consideremos (ver la siguiente figura), es decir, la curvatura será una propiedad puntual.



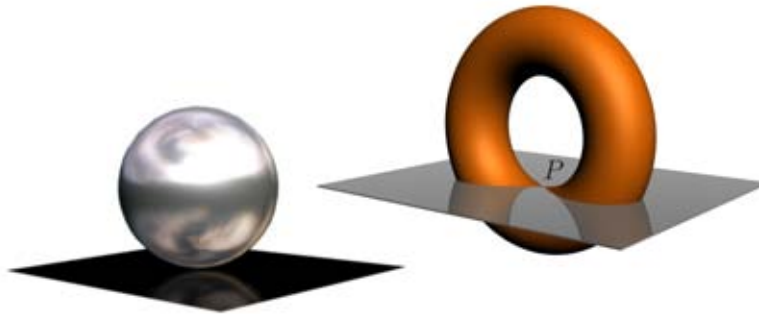
Un toro se curva de manera diferente en los puntos amarillo y azul.

En el caso de curvas recogíamos esa dependencia encontrando en cada punto la circunferencia que más se parecía a la curva. Intentemos algo análogo para las superficies. ¿Ocurrirá que cerca de cada punto la superficie se ve como una esfera? es decir, ¿existirá una esfera que se parezca mucho a la superficie en todo punto? Parece que sí, como vemos en la figura.



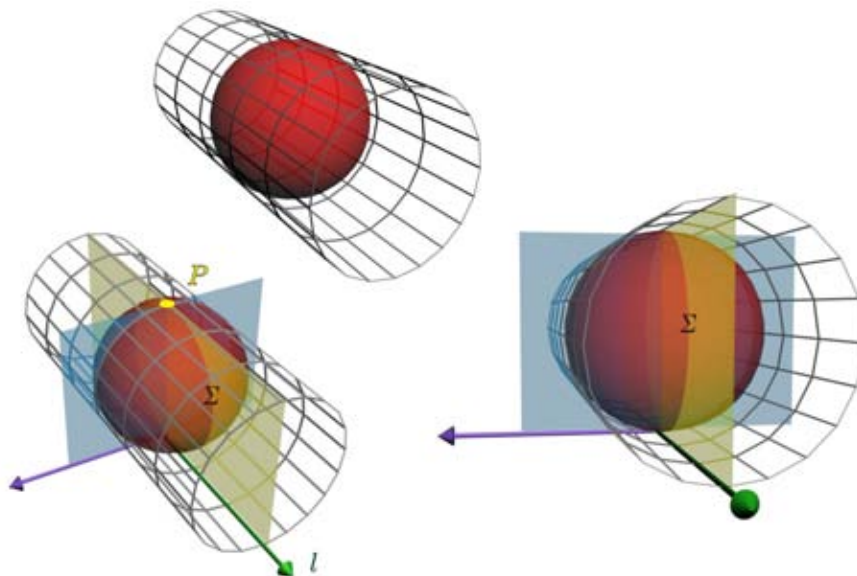
Para una superficie como este paraboloides, sí existe una esfera que más se le parece en el origen. ¿Siempre sucederá esto?

El paso de curvas a superficies nos da más posibilidades para la forma de una superficie. Veamos un ejemplo. Si nos fijamos en el punto P de la superficie de una dona, ¿podemos poner ahí una esfera que se acomode en la superficie? es decir, ¿en ese punto la dona se verá como alguna esfera? La respuesta es no. Intuitivamente podemos recargar la esfera en su plano tangente, y la dona no, pues queda una parte de la dona a ambos lados del plano.



Para esta superficie no hay ninguna esfera que se vea como ella cerca del punto P . Así, no toda superficie es localmente como una esfera.

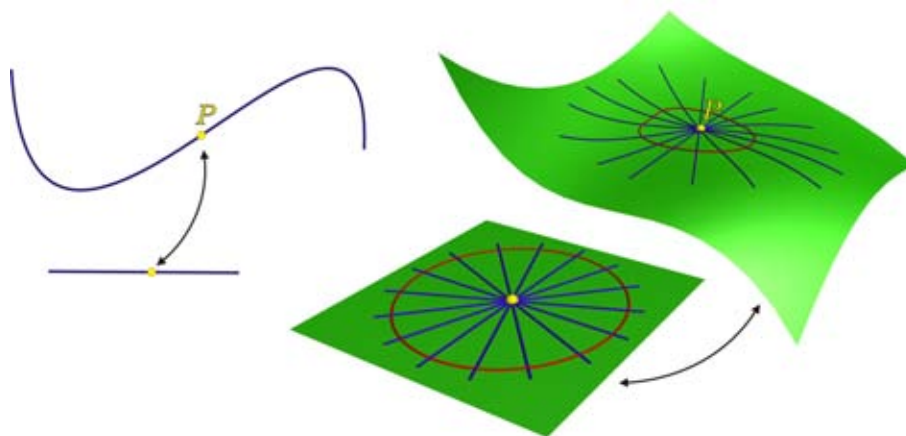
Veamos otro ejemplo, el cilindro. Si quisiéramos obtener una esfera que se viera como el cilindro cerca del punto P , escogeríamos el radio de la sección circular del cilindro (ver la siguiente figura). Efectivamente, en esa sección del cilindro conseguimos que las superficies no sólo se parezcan sino que coincidan; pero si nos fijamos en la sección del cilindro que es perpendicular a la anterior, tendremos una recta l . La sección Σ correspondiente de la esfera es un círculo máximo y no se parece a la sección l del cilindro.



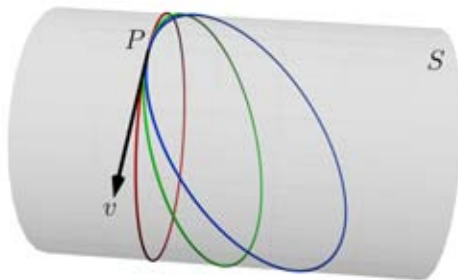
De los ejemplos vemos que no podemos seguir los mismos pasos que dimos en el caso de curvas para llegar al concepto de curvatura; las esferas no son suficientes para describir localmente a las superficies. El paso de mundos 1D (de una dimensión) a mundos 2D (superficies) nos obliga a seguir un camino distinto para entender el concepto de curvatura.

3.2. Curvatura de superficies, a través de la curvatura de sus secciones normales.

Los ejemplos anteriores muestran que la forma en que se curva una superficie depende del punto y de la dirección por la que lleguemos al punto. En el caso de curvas sólo tenemos la primera dependencia, así que el ingrediente nuevo de la curvatura para las superficies está en la segunda. Analicemos ésta última dejando fija la primera, es decir, fijemos un punto P en una superficie S . En lo que sigue supondremos que la superficie S tiene plano tangente en cada uno de sus puntos. ¿De cuántas formas podemos pasar por un punto P en una superficie S ? Podemos pasar por P viajando en una infinidad de direcciones. Ésta es la gran diferencia al dar el paso de mundos 1D a 2D ya que cuando viajamos a lo largo de una curva sólo tenemos dos formas de pasar por P ; en un sentido y en el contrario. En la siguiente figura ilustramos la idea anterior, en el caso de la superficie mostramos varias curvas distintas que pasan por P .



Hay muchas formas de pasar por P con una dirección dada. Escogeremos para cada dirección una manera especial de pasar por el punto P : lo haremos con secciones normales (curva roja en la siguiente figura).



Definición 2 El conjunto de todos los vectores velocidad que obtenemos al pasar por el punto P viajando a lo largo de curvas contenidas en la superficie, forma un plano³² que llamaremos el **plano tangente** $T_P S$ a la superficie.

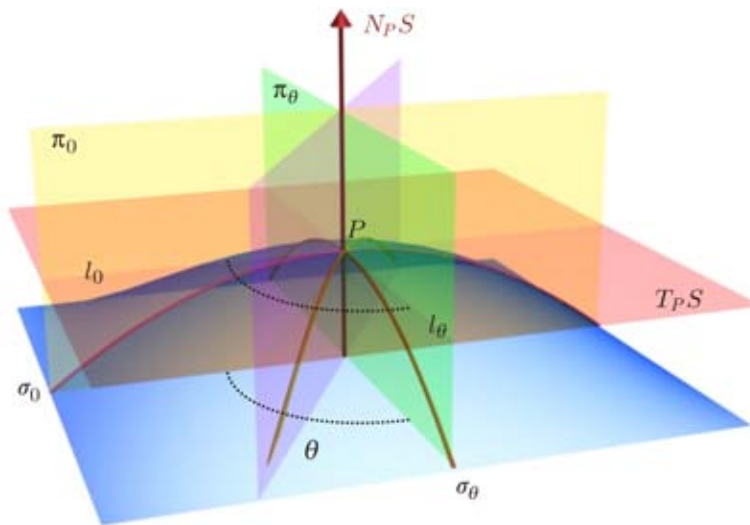
Definición 3 Denotaremos $N_P S$ a la recta normal al plano tangente $T_P S$, que llamaremos **recta normal** a la superficie, y \mathbf{N} a un vector unitario en la recta $N_P S$ (hay dos posibles elecciones), que llamaremos **vector normal a la superficie**.

Usemos la recta normal $N_P S$ para generar las curvas especiales que nos servirán para pasar por P con todas las direcciones posibles.

Definición 4 Las intersecciones de la superficie con los planos que contienen a la recta normal a la superficie $N_P S$ generan curvas que son llamadas **secciones normales**.

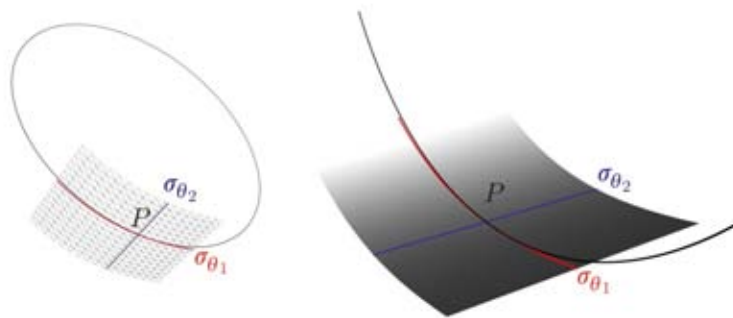
Imaginemos el haz de todos los planos que pasan por $N_P S$. Cada plano corta a la superficie en una sección normal σ , y a $T_P S$ en una línea recta l . Escojamos un plano π_0 del haz, que corta a S en σ_0 y a $T_P S$ en l_0 ; a partir de l_0 mediremos algunos ángulos (ver la siguiente figura). Para cada ángulo $\theta \in [0, \pi)$ tenemos un plano π_θ del haz, una línea l_θ y una sección σ_θ que forman un ángulo θ con π_0 , l_0 y σ_0 , respectivamente.

³²Un espacio vectorial isomorfo a \mathbb{R}^2 .



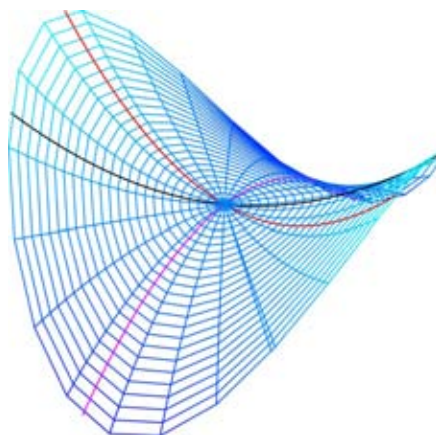
l_θ y σ_θ son las intersecciones de los planos del haz con el plano tangente $T_P S$ y con la superficie respectivamente.

Cada curva σ_θ está contenida en S y su curvatura k_θ en el punto P nos da información de cómo se curva la superficie en la dirección l_θ , es decir, cerca de P la intersección de S con π_θ se parece a la circunferencia de curvatura $C_{\frac{1}{k_\theta}}$ de la curva σ_θ en P . En la siguiente figura se muestra una superficie con dos secciones normales σ_{θ_1} y σ_{θ_2} con curvaturas $k_{\theta_1} = 0$ y $k_{\theta_2} > 0$. Cerca del punto P las curvas σ_{θ_1} y σ_{θ_2} se parecen a una circunferencia de radio $\frac{1}{k_{\theta_1}}$ y a una línea recta respectivamente.



Definición 5 A cada ángulo $\theta \in [0, \pi)$ le corresponde el valor k_θ de la curvatura de la sección normal σ_θ en el punto P ; y es llamada la **curvatura normal**³³ de la sección σ_θ . Si el vector normal \mathbf{n} a la curva σ_θ coincide con la elección del vector normal a la superficie \mathbf{N} , entonces la curvatura normal tendrá signo positivo y negativo en el caso contrario.

Conociendo el valor de k_θ para todo $\theta \in [0, \pi)$ podremos hacernos una idea del comportamiento de la superficie cerca del punto P . Podemos imaginar que la superficie está hecha por una infinidad de curvas, podemos ver a cada una de ellas como una rebanada de la superficie que pasa por la recta $N_P S$. En la siguiente figura mostramos una superficie con varias de estas rebanadas de las cuales hemos resaltado tres.



Si sabemos cómo es cada rebanada, sabremos cómo es el pastel (la superficie).

³³ Veremos adelante que el concepto de curvatura normal se aplica no sólo a secciones normales sino a cualquier curva que pase por P .

Conclusión 6 A partir de la función

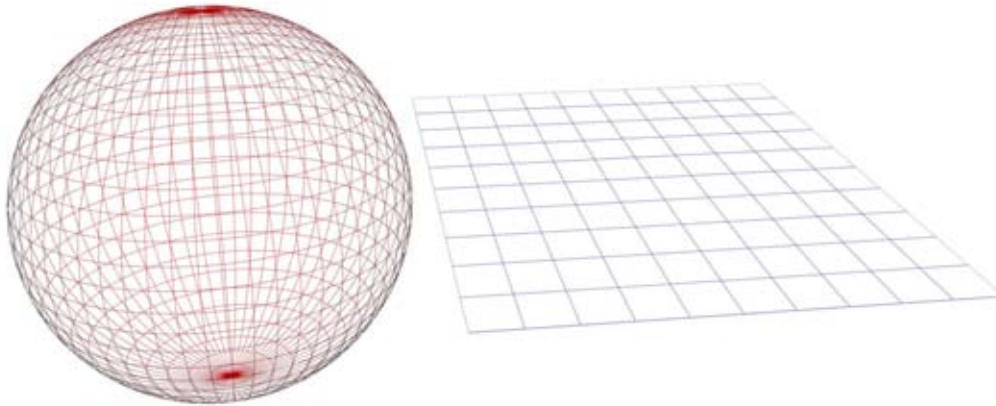
$$k_\theta : [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

nos podemos hacer una idea de cómo se curva la superficie. Aquí tenemos una gran diferencia entre las curvas y las superficies; la manera en que se curva una curva queda caracterizada con un solo número, en cambio, para describir cómo se curva una superficie necesitamos un conjunto infinito de números, tantos como direcciones tenemos para pasar por P .

Veamos algunos ejemplos para analizar el comportamiento de la función k_θ .

Ejemplo 7 El plano y la esfera.

Si la superficie es un plano o una esfera entonces la curvatura normal k_θ será la misma en todas las direcciones, nula en el plano e inversamente proporcional al radio en la esfera.

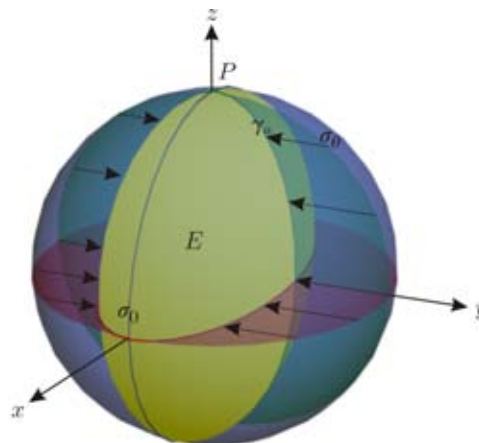


Ejemplo 8 Un elipsoide.

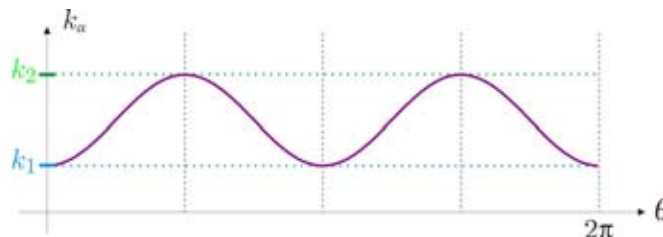
Ahora supongamos que P es el polo norte de la esfera S del ejemplo anterior. Para quitarle simetría, apachurrémosla a la mitad en la dirección del eje y para obtener el elipsoide

$$E = \{(x, y, z) : x^2 + (2y)^2 + z^2 = 1\}.$$

Analicemos qué le pasa a las secciones σ_θ de S . Una sección σ_θ de S se transforma en una sección γ_α de E , es decir, $\sigma_\theta \mapsto \gamma_\alpha$, donde el ángulo de la sección disminuye, es decir, $\alpha \leq \theta$. Si comparamos las curvaturas de σ_θ con las de sus imágenes γ_α vemos que todas aumentan, excepto la de σ_0 que queda sin cambio. La sección que más aumenta su curvatura (al doble) es $\sigma_{\frac{\pi}{2}}$. Hay un par de secciones perpendiculares, γ_0 y $\gamma_{\frac{\pi}{2}}$, tales que sus curvaturas k_0 y $k_{\frac{\pi}{2}}$ son los valores mínimo y máximo, respectivamente, de la función k_α .



La curvatura k_α comienza a crecer, cuando α se mueve de 0 a $\frac{\pi}{2}$, hasta hacerse máximo en $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Después, cuando α se mueve de $\frac{\pi}{2}$ a π , la curvatura k_α disminuye hasta alcanzar un mínimo en π . Si hacemos variar α entre π y 2π las curvaturas de las secciones se repetirían. Si graficamos k_α tendríamos una gráfica con periodo π como la de la figura:



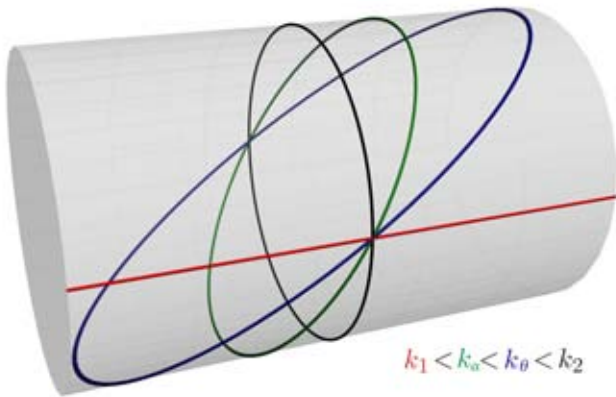
Más adelante probaremos que la forma de esta onda es

$$k_\theta = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta;$$

con $0 < k_1 < k_2$, donde k_1 y k_2 son las curvaturas normales máxima y mínima.

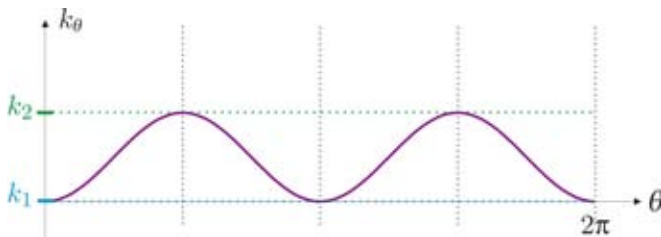
Ejemplo 9 *Un cilindro.*

La sección normal dada por una recta tendrá curvatura normal nula y si tomamos la sección normal que es una circunferencia, la curvatura normal será máxima. De nuevo hay un par de direcciones perpendiculares en las que k_θ alcanza su máximo y su mínimo.



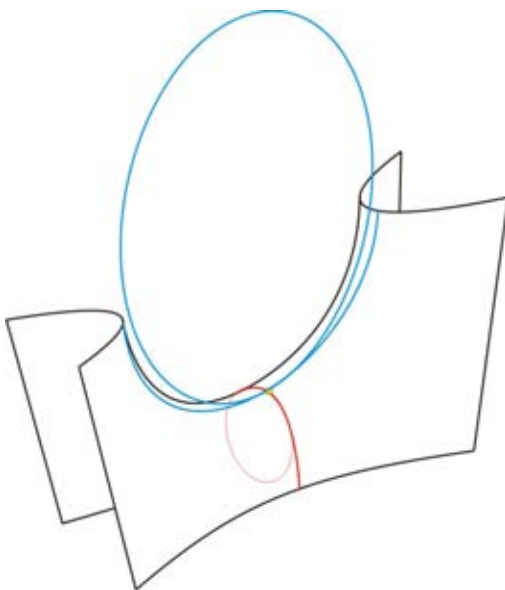
Si graficamos la función curvatura normal k_θ tendríamos una onda como en el caso anterior, pero ahora hay un par de ángulos (0 y π) en los cuales k_θ es cero. En la siguiente figura mostramos la gráfica de

$$k_\theta = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta, \text{ con } 0 = k_1 < k_2$$

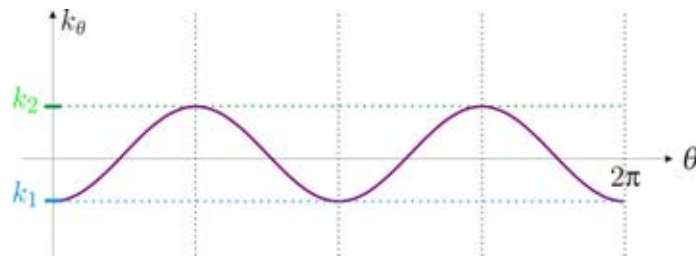


Ejemplo 10 *Una silla de montar.*

En los ejemplos anteriores todas las circunferencias oscultrices quedan del mismo lado de $T_P S$. En esta ocasión habrá direcciones para las cuales la circunferencia oscultriz de σ_θ quede arriba y abajo de $T_P S$. De modo que la curvatura normal será positiva en algunas secciones normales y negativa en otras.



Así k_θ será positiva si la circunferencia oscultriz queda en el mismo lado de $T_P S$ que el vector \mathbf{N} y negativa si queda en el lado contrario. Eligiendo \mathbf{N} hacia arriba en la silla de montar tenemos que k_θ alcanza su máximo en la sección azul y su mínimo en la sección roja. Hay también dos direcciones en las que la sección normal es una línea recta por lo que $k_\theta = 0$. En este caso la función k_θ es también una onda que asume valores negativos para algunas secciones normales.



$$k_\theta = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \operatorname{sen}^2 \theta \text{ con } k_1 < 0 < k_2$$

Notemos que en los ejemplos anteriores el punto P tiene dos secciones normales perpendiculares para las cuales la curvatura k_θ es mínima y máxima. Esto también sucede en general en una superficie S cualquiera³⁴.

Definición 11 Las curvaturas normales mínima y máxima en un punto P en S se llaman **curvaturas principales** k_1 y k_2 ; y las direcciones en el plano tangente en las que se alcanzan dichos valores extremos se llaman **direcciones principales**.

De los ejemplos anteriores es de esperarse que la forma de la función k_θ dependa de las curvaturas principales k_1 y k_2 . Si esto fuera así entonces podríamos calcular todas las curvaturas normales k_θ con $\theta \in [0, \pi)$, a partir del conocimiento de las curvaturas principales; y eso es lo que necesitamos para saber cómo se curva la superficie. Efectivamente, veremos en la sección 3.11 que k_θ es función de k_1 y k_2 . La expresión que las relaciona es la fórmula de Euler³⁵:

$$k_\theta = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \operatorname{sen}^2 \theta.$$

Conclusión 12 A cada par de valores

$$(k_1, k_2) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \text{ con } k_1 \leq k_2,$$

le corresponde una manera en la que se puede curvar una superficie S en el punto P .

Definición 13 La **curvatura gaussiana** de la superficie en el punto P es el producto de las curvaturas principales en dicho punto:

$$k = k_1 k_2.$$

Notamos que en los ejemplos anteriores:

1. El plano y el cilindro tiene curvatura gaussiana cero.
2. La esfera y el elipsoide tienen curvatura gaussiana positiva.
3. La silla de montar tiene curvatura gaussiana negativa.

Más adelante volveremos a la curvatura gaussiana de una superficie y daremos una interpretación intrínseca.

3.3. Interpretación física a través de la aceleración (los jalones)

A continuación veremos un enfoque, equivalente al anterior, para llegar al concepto de curvatura de una superficie. Podemos interpretar la curvatura de una curva como la aceleración que experimenta un punto que la recorre con rapidez unitaria. Esto nos proporcionará una manera de introducir su segunda forma fundamental.

En el caso de una curva plana, llegamos al concepto de curvatura imaginando que viajábamos a lo largo de ella en un auto. Imaginemos ahora una situación análoga para una superficie: viajar en una nave a lo largo y ancho de una superficie S contenida en nuestro mundo 3D. Para ello necesitaremos un volante poco usual que, además del habitual movimiento izquierda-derecha del volante de un auto, tendrá un movimiento arriba-abajo. Es decir, necesitamos un volante a dos parámetros para que nuestra nave se mueva describiendo curvas espaciales contenidas en S . Viajemos con rapidez unitaria a lo largo de una sección normal $\sigma_\theta \subset S$. Necesitamos ir variando la dirección del vector velocidad de la nave para seguir la trayectoria de σ_θ y así, mantenernos dentro de S . Dicha variación es la aceleración

$$a_\theta(t) = \sigma_\theta''(t)$$

que necesita tener la nave. Como σ_θ es una curva plana que es recorrida a rapidez unitaria entonces al pasar por P el vector aceleración a_θ está contenido en la recta $N_P S$ y es igual a la curvatura normal multiplicada por el vector normal \mathbf{N} a la superficie. Como tripulantes de la nave, al pasar por P , sentiremos un jalón

$$J_\theta = j_\theta \mathbf{N}$$

³⁴Hay que pedir que la función tenga un buen comportamiento (que sea de clase C^2) para que k_θ sea como en los ejemplos. Más adelante veremos un ejemplo donde la función k_θ alcanza máximos y mínimos en direcciones que no son perpendiculares entre sí.

³⁵Euler, Leonhard (1707-1783), matemático suizo.

de fuerza en la dirección contraria a la de a_θ y proporcional a su tamaño $\|a_\theta\|$. Es análogo al que sentimos cuando viajamos en un coche a lo largo de una curva. Supondremos que nuestra masa es uno para que el factor de proporcionalidad sea menos uno, es decir, para que $J_\theta = -a_\theta$. Así, mientras más grande sea la magnitud $|j_\theta|$ del jalón J_θ que se sienta dentro de la nave cuando pasamos por P viajando a lo largo de σ_θ , más curvada estará la superficie en P en la dirección de σ_θ . Con este enfoque en lugar de tener función k_θ , tendremos una función análoga

$$j_\theta : [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$j_\theta = -k_\theta,$$

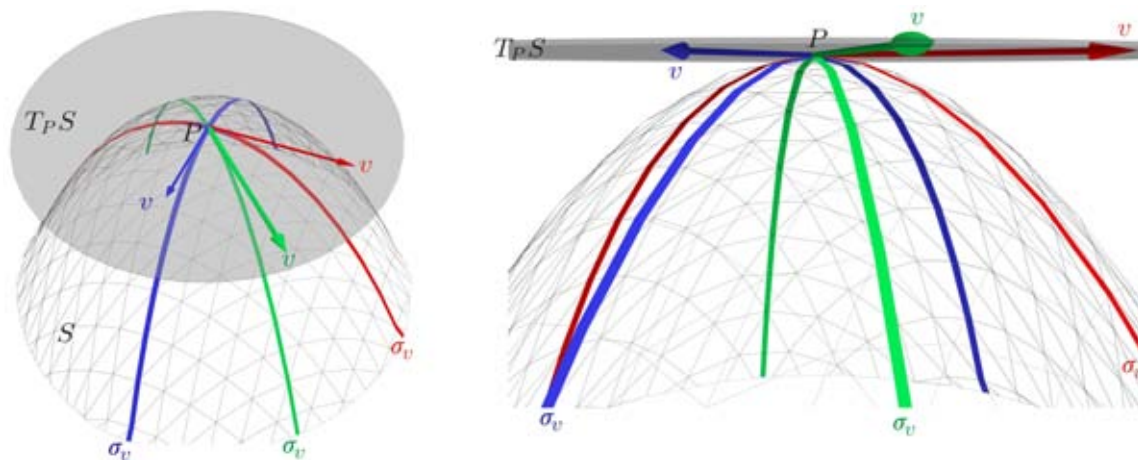
que en valor absoluto es igual a la magnitud del jalón que sentimos dentro de la nave al pasar por P viajando a lo largo de σ_θ . Ahora en lugar de una colección de curvaturas normales k_θ tendremos una colección de jalones j_θ que nos darán información de cómo se curva la superficie en el punto P .

Si consideramos las superficies de los ejemplos de la sección anterior tendremos que las gráficas de los jalones j_θ serán las reflexiones sobre el eje y de las gráficas de la curvatura normal k_θ de la superficie. En cada una de ellas habrá un par de secciones σ_θ tales que al viajar a lo largo de ellas sentiremos los jalones más grande y más pequeño. En la silla de montar sentiríamos jalones hacia arriba y hacia abajo. Y por último, el teorema de Euler quedaría reflejado por el hecho de que sólo necesitamos viajar a lo largo de dos secciones especiales y recabar sus jalones, j_1 y j_2 , para poder calcular, a partir de ellos, los jalones que sentiríamos al pasar por P viajando a lo largo de cualquier otra sección σ_θ :

$$j_\theta = j_1 \cos^2 \theta + j_2 \sin^2 \theta.$$

3.4. Segunda forma fundamental

En lo que sigue discutiremos cuestiones referentes al punto P de una superficie y para simplificar la notación nos referiremos a los vectores tangentes $v_P \in T_P S$ como v . En esta sección introduciremos la segunda forma fundamental de una superficie. Usaremos la idea de viajar a lo largo de las secciones normales pasando por el punto P . Asociemos a cada vector tangente v en P un movimiento con rapidez constante $\|v\|$ a lo largo de la sección normal σ_v (en la siguiente figura mostramos algunas curvas σ_v). Supondremos que en el instante $t = 0$ pasamos por el punto P .



Debido a su rapidez constante, le corresponde a la curva σ_v , al pasar por P , una aceleración $a_v = \sigma_v''(0)$ que es múltiplo del vector normal a la superficie \mathbf{N} :

$$a_v = k \|v\|^2 \mathbf{n} = k_v \|v\|^2 \mathbf{N}, \tag{3.1}$$

donde \mathbf{n} es el vector normal a σ_v , k su curvatura y k_v su curvatura normal.

Definición 14 (Restringida a secciones normales³⁶) La función

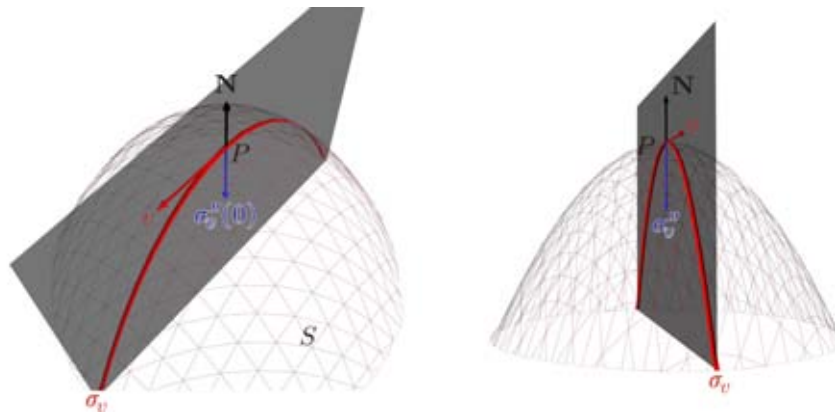
$$II : T_P S \rightarrow \mathbb{R}$$

que asocia a cada vector tangente el escalar

$$II(v) = k_v \|v\|^2 \tag{3.2}$$

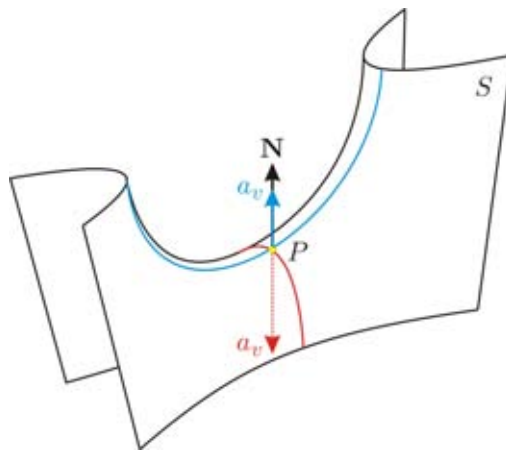
que relaciona a \mathbf{N} con la aceleración a_v , resulta ser una forma cuadrática llamada **segunda forma fundamental** de la superficie en el punto P .

³⁶En la definición 18 de la sección 3.9 veremos que la curva σ_v puede ser una curva en general que pase por P con velocidad v .



Notamos que:

1. Los vectores \mathbf{n} y \mathbf{N} son unitarios y colineales por lo que $\mathbf{n} = \mathbf{N}$ o $\mathbf{n} = -\mathbf{N}$. En el primer caso $k_v = k$ y en el segundo $k_v = -k$. Es decir el signo de la curvatura normal k_v depende de la elección del vector normal a la superficie.



Si a_v y N_{PS} apuntan en la misma dirección (sección azul) la curvatura normal es positiva y es negativa en el caso contrario (sección roja).

2. Si fijamos una sección normal tendremos que al pasar por P la aceleración será proporcional al cuadrado de la rapidez del movimiento.

$$\|a_v\| = k \|v\|^2 = |k_v| \|v\|^2.$$

3. Podemos obtener la curvatura normal de la sección σ_v a partir de la aceleración:

$$k_v = \frac{\|a_v\|}{\|v\|^2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{N}.$$

Identifiquemos el plano tangente $T_P S$ con \mathbb{R}^2 para visualizar la segunda forma fundamental II a través de la gráfica de

$$II(v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Si v es unitario, $II(v)$ es la curvatura normal k_v de σ_v ; de modo que al evaluar en II en la circunferencia unitaria obtenemos todos los valores de las curvaturas normales de las secciones σ_θ

$$k_\theta : [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Y, como vimos en la sección 3.2, k_θ tiene la información de cómo se curva la superficie cerca del punto P . Entonces la segunda forma contiene también la información de cómo se curva la superficie. Al evaluar II en vectores en la misma dirección de v obtenemos

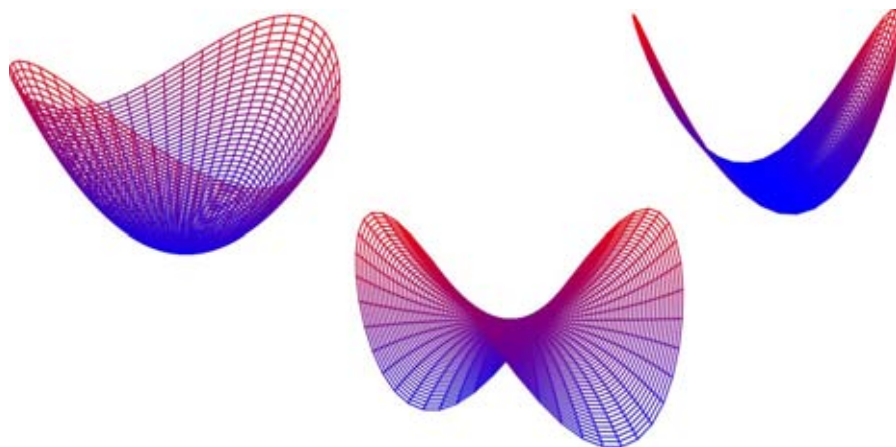
$$II(\lambda v) = \lambda^2 II(v) = \lambda^2 k_v, \tag{3.3}$$

lo que significa que la gráfica de II restringida a la recta generada por v es una parábola.

Hay muchas posibles gráficas de funciones tales que a lo largo de rectas por el origen sean parábolas. En la sección 3.5 veremos que las gráficas que corresponden a la segunda forma fundamental II de alguna superficie son de la forma

$$II(x, y) = Ax^2 + By^2; \tag{3.4}$$

es decir, las gráficas de los polinomios homogéneos de segundo grado³⁷. En la siguiente figura ilustramos las gráficas de II para un paraboloides, una silla de montar y un cilindro (de izquierda a derecha respectivamente).



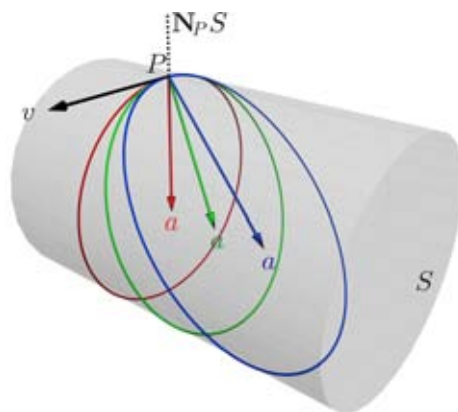
Para que la segunda forma fundamental tenga la forma $Ax^2 + By^2$ es necesario que la superficie tenga cierto grado de suavidad, hay que pedir que las derivadas parciales de la transformación \mathbf{x} (de la definición 1 de superficie) sean diferenciables.

3.5. Condición suficiente para que $II(x, y)$ sea forma cuadrática

En la definición 14 de la segunda forma fundamental II no es necesario restringirnos a curvas que sean secciones normales, podemos tomar curvas arbitrarias con la única condición de que, al pasar por el punto P , lo hagan con una velocidad v . En la siguiente figura ilustramos tres curvas que comparten su vector velocidad, de las cuales sólo la roja es sección normal. La aceleración

$$a = a_t + a_n = \frac{d\|v\|}{dt} \mathbf{t} + k \|v\|^2 \mathbf{n},$$

de las curvas que no son secciones normales no estará sobre la recta $N_P S$, pero su componente normal será constante³⁸, lo que nos servirá para definir a $II(v)$ como el número que hay que multiplicar con el vector normal a la superficie \mathbf{N} para obtener dicha componente.



Sea S una superficie que está parametrizada por

$$\mathbf{x}(u_1, u_2) : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3.$$

Veremos que si las derivadas parciales $\mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$ de \mathbf{x} son diferenciables en todo punto $(u_1, u_2) \in A$ entonces $II(x, y)$ es una forma cuadrática. Notamos que esta condición es menos fuerte que pedir que \mathbf{x} sea de clase C^2 , en la sección 3.7 veremos un ejemplo para notar la diferencia.

³⁷De manera preliminar: esto es porque una superficie cerca de un punto P se puede ver como la gráfica de una función en $T_P S$. De la expresión en serie de Taylor de f , sólo los términos de grado dos arrojan información sobre la curvatura normal k_θ y toman la forma (acomodando nuestros ejes de manera adecuada):

$$f(x, y) \approx \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{0})x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{0})y^2$$

La segunda forma de II para f es:

$$II(x, y) = 2f(x, y)$$

³⁸Este resultado es el teorema de Meusnier que veremos en la sección siguiente.

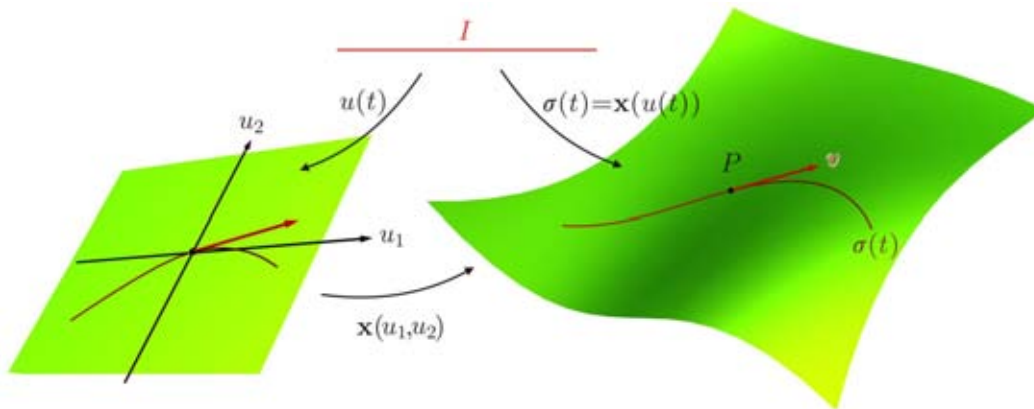
Tomemos un vector $v \in T_P S$ y una curva cualquiera

$$\sigma(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$$

tal que $\sigma(0) = P$ y $\sigma'(0) = v$. Sea

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t)) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow A$$

la imagen inversa en A , bajo \mathbf{x} , de la curva $\sigma(t)$.



Entonces

$$\sigma(t) = \mathbf{x}(u(t)) = \mathbf{x}(u_1(t), u_2(t)), \quad (3.5)$$

con

$$\sigma(0) = \mathbf{x}(u(0)) = \mathbf{x}(u_1(0), u_2(0)) = P.$$

Veamos qué forma tiene la aceleración $\sigma''(0)$ de la curva σ al pasar por el punto P . Omitiremos en la notación la evaluación en t y usamos la notación $\mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$. Derivemos 3.5 para encontrar la velocidad:

$$\sigma' = [D\mathbf{x}(u)] u' = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(u) & \mathbf{x}_2(u) \end{pmatrix} u' = u'_1 \mathbf{x}_1 + u'_2 \mathbf{x}_2$$

Derivemos de nuevo para obtener la aceleración:

$$\sigma''(t) = (u'_1 \mathbf{x}_1)' + (u'_2 \mathbf{x}_2)';$$

es aquí donde necesitamos que las transformaciones (que se pueden ver como dos nuevas superficies) $\mathbf{x}_1(u_1, u_2)$ y $\mathbf{x}_2(u_1, u_2)$ sean diferenciables. Esto nos permite usar de nuevo la regla de la cadena, aplicada a \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 , para obtener:

$$\sigma''(t) = u_1'^2 \mathbf{x}_{11} + u_1' u_2' \mathbf{x}_{12} + u_1'' \mathbf{x}_1 + u_1' u_2' \mathbf{x}_{21} + u_2'^2 \mathbf{x}_{22} + u_2'' \mathbf{x}_2; \quad (3.6)$$

que es la suma de seis aplicaciones vectoriales

$$\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{ij} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad i, j = 1, 2.$$

Nos interesa la componente de la aceleración $\sigma''(t)$ en \mathbf{N} . Podemos obtenerla expresando cada uno de los vectores $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{ij}$ en términos del marco $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{N}\}$ para quedarnos con los términos donde aparece \mathbf{N} . Entonces tenemos que

$$\mathbf{x}_{ij} = \Gamma_{ij}^1 \mathbf{x}_1 + \Gamma_{ij}^2 \mathbf{x}_2 + L_{ij} \mathbf{N}.$$

Definición 15 Los coeficientes Γ_{ij}^1 y Γ_{ij}^2 de los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in T_P S$ en la expresión del vector \mathbf{x}_{ij} en términos del marco $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{N}\}$ son llamados *símbolos de Christoffel*³⁹.

Por otro lado

$$L_{ij} = \mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{N}$$

son las componentes de los vectores \mathbf{x}_{ij} en el vector normal a la superficie. Reescribiendo los 4 primeros sumandos de $\sigma''(t)$ en (3.6) tenemos:

$$\begin{aligned} u_1'^2 \mathbf{x}_{11} &= u_1'^2 [\Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_1 + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_2 + L_{11} \mathbf{N}], \\ u_1' u_2' \mathbf{x}_{12} &= u_1' u_2' [\Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_1 + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_2 + L_{12} \mathbf{N}], \\ u_1' u_2' \mathbf{x}_{21} &= u_1' u_2' [\Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_1 + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_2 + L_{21} \mathbf{N}], \\ u_2'^2 \mathbf{x}_{22} &= u_2'^2 [\Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_1 + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_2 + L_{22} \mathbf{N}]. \end{aligned}$$

³⁹En honor de Christoffel, Elwin Bruno (1829-1900), matemático alemán.

Si agrupamos los sumandos de $\sigma''(t)$ en términos de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ y \mathbf{N} obtenemos:

$$\sigma''(t) = ([\Gamma_{11}^1 u_1'^2 + (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^1) u_1' u_2' + \Gamma_{22}^1 u_2'^2] + u_1'') \mathbf{x}_1 + ([\Gamma_{11}^2 u_1'^2 + (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2) u_1' u_2' + \Gamma_{22}^2 u_2'^2] + u_2'') \mathbf{x}_2 + [L_{11} u_1'^2 + (L_{12} + L_{21}) u_1' u_2' + L_{22} u_2'^2] \mathbf{N}$$

El coeficiente de la componente normal de $\sigma''(t)$ es

$$[L_{11} u_1'^2 + (L_{12} + L_{21}) u_1' u_2' + L_{22} u_2'^2]$$

y vemos que en efecto es una forma cuadrática.

Conclusión 16 *La segunda forma fundamental*

$$II(v) : T_P S \rightarrow \mathbb{R},$$

es una forma cuadrática y tiene la siguiente expresión en la base $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ del plano tangente $T_P S$:

$$II(v) = II(u_1' \mathbf{x}_1 + u_2' \mathbf{x}_2) = \sigma'' \cdot \mathbf{N} = L_{11} u_1'^2 + (L_{12} + L_{21}) u_1' u_2' + L_{22} u_2'^2$$

Si la superficie es de clase C^2

Las superficies que habitualmente se nos vienen a la mente son muy suaves, en particular son de clase C^2 . En este caso, que tendremos que $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$, y $L_{12} = L_{21}$, por lo que

$$\sigma'' = ([\Gamma_{11}^1 u_1'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u_1' u_2' + \Gamma_{22}^1 u_2'^2] + u_1'') \mathbf{x}_1 + ([\Gamma_{11}^2 u_1'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u_1' u_2' + \Gamma_{22}^2 u_2'^2] + u_2'') \mathbf{x}_2 + [L_{11} u_1'^2 + 2L_{12} u_1' u_2' + L_{22} u_2'^2] \mathbf{N}$$

de donde obtenemos que la expresión para la segunda forma fundamental queda

$$II(v) = II(u_1' \mathbf{x}_1 + u_2' \mathbf{x}_2) = \sigma'' \cdot \mathbf{N} = L_{11} u_1'^2 + 2L_{12} u_1' u_2' + L_{22} u_2'^2$$

3.6. Una superficie en la cual $II(x, y)$ no es una forma cuadrática

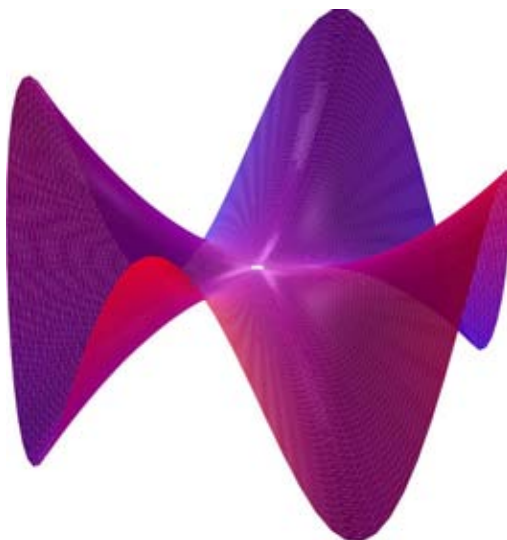
A continuación veremos un ejemplo de una superficie que no cumple la condición de suavidad pedida en la sección anterior, es decir sus derivadas parciales $\mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$ de \mathbf{x} no serán diferenciables; veremos que la función II no será una forma cuadrática, es decir, no tendrá la forma $Ax^2 + By^2$.

Consideremos como nuestra superficie la gráfica de la función f que tiene las expresiones

$$f(x, y) = \frac{4xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$f(r, \theta) = r^2 (\text{sen}4\theta).$$

en coordenadas cartesianas y polares respectivamente.



Esta superficie es diferenciable y su plano tangente en el origen es el plano xy . Para calcular la segunda forma fundamental de la superficie utilizemos la igualdad (3.3):

$$II(\lambda v) = \lambda^2 II(v) = \lambda^2 k_v, \tag{3.7}$$

donde k_v es la curvatura normal de las parábolas que resultan al evaluar la función f en rectas que pasan por el origen con dirección determinada por un vector unitario v . La gráfica restringida a estas rectas (θ constante) es una parábola que tiene la forma

$$f(r) = r^2 (\text{sen}4\theta).$$

La curvatura en su vértice (ver ejemplo 26 de la sección 1.11)

$$k = 2\text{sen}4\theta.$$

Tomemos $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$ como nuestro vector normal al plano tangente para llegar a que la curvatura normal de dichas parábolas es

$$k_v = 2\text{sen}4\theta. \tag{3.8}$$

Haciendo $v = (\cos \theta, \text{sen}\theta)$ y $\lambda = r$ podemos expresar a cualquier punto de \mathbb{R}^2 como

$$(x, y) = r (\cos \theta, \text{sen}\theta);$$

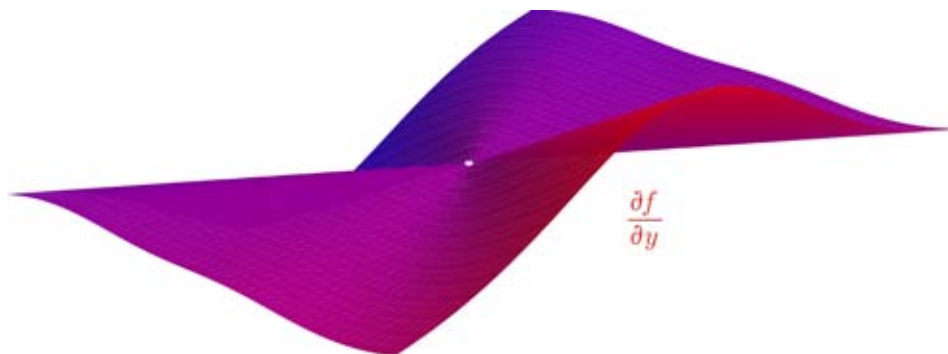
sustituyendo en (3.7) obtenemos la segunda forma fundamental de la gráfica de f en el origen

$$II(x, y) = II(r(\cos \theta, \text{sen}\theta)) = r^2 k_v = 2r^2 (\text{sen}4\theta) = 2f(x, y) = \frac{8xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2},$$

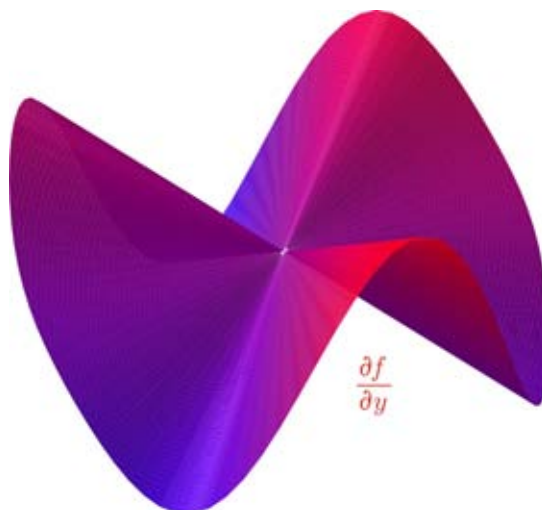
que no es una forma cuadrática ya que no tiene la forma $Ax^2 + Cxy + By^2$. Esto se debe a que la gráfica de f no tiene la suavidad necesaria para ello. El problema radica en que las derivadas parciales de f no son diferenciables, por ejemplo la derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4x^5 - 16x^3x^2 - 4xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

no es diferenciable en el origen, es decir, carece de plano tangente como lo muestra su gráfica.



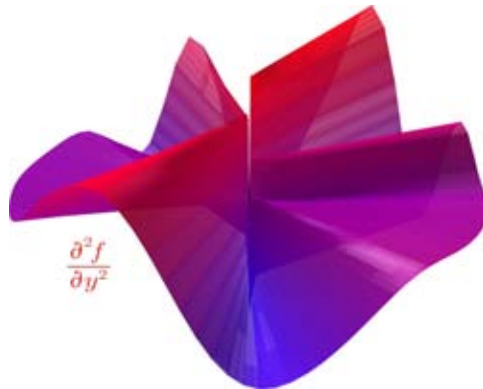
Notamos que las segundas derivadas parciales de f no son continuas en el origen como se aprecia en la siguiente perspectiva de la gráfica de $\frac{\partial f}{\partial y}$.



A continuación mostramos la gráfica de la segunda derivada parcial de la función

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -16x^3y \frac{3x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

que es discontinua en el origen como podemos ver en la siguiente figura.



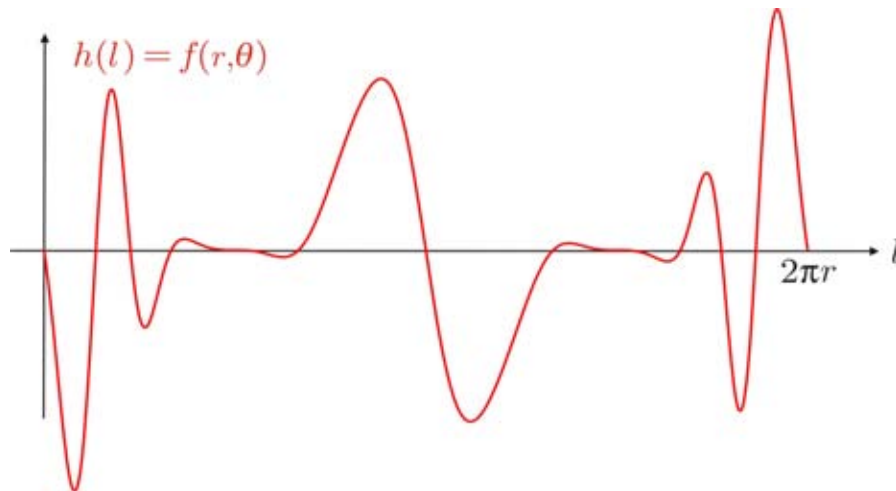
Nos podemos acercar al origen viajando a lo largo de rectas (r, θ) con θ constante. La función

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(r, \theta)$$

tiene un valor constante diferente en cada una de ellas. Si evaluamos $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ en circunferencias C_r de radio r , es decir, en (r, θ) con r constante, obtenemos valores que oscilan; en la siguiente figura mostramos la gráfica de estos valores como función de la longitud $l(\theta) = r\theta$ del arco de C_r :

$$h(l) = f(r, \theta)$$

Al tomar el límite cuando $r \rightarrow 0$ la segunda derivada parcial $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ no tiende a ningún valor, es discontinua. De modo que la función f no es de clase C^2 .



Podemos evitar estos monstruos de superficies pidiendo que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial x}$ sean diferenciables o mejor aún que f sea de clase C^2 , es decir, que existan y sean continuas las segundas derivadas parciales de f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ y } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

3.7. Ejemplo de una superficie con segunda forma fundamental discontinua

Mencionamos en la sección 3.5 que si las parciales de la parametrización \mathbf{x} de la superficie son diferenciables entonces II es una forma cuadrática. Pedir que \mathbf{x} sea de clase C^2 es algo mucho más fuerte y a continuación veremos con un ejemplo (que no lo cumple)

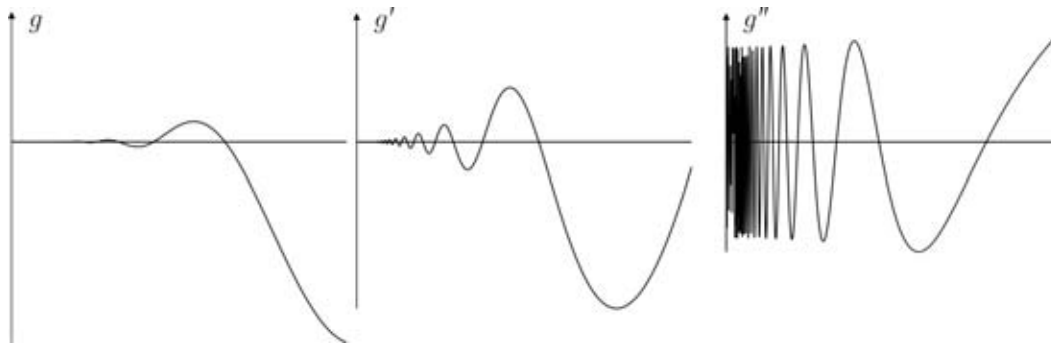
por qué es importante esta exigencia. La superficie será la gráfica de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y la construiremos rotando alrededor del eje z la gráfica de una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La manera en que g se acercará a cero generará en f la discontinuidad en el origen de su segunda forma fundamental. Queremos que al acercarnos al cero las circunferencias de curvatura de la gráfica de g tengan un comportamiento no continuo. Tomemos

$$g(x) = x^4 \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$

En la siguiente figura mostramos las gráficas de g , g' y g'' , donde

$$g' = 4x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x^2 \cos \frac{1}{x}$$

$$g'' = 12x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 6x \cos \frac{1}{x} - \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$



Para ver que las circunferencias de curvatura tienen un comportamiento no continuo cerca del cero notamos que:

1. La primera derivada es continua en el cero, por lo que en una vecindad de él $\sqrt{1 + g'(x)}$ se parece mucho a 1, como vemos en la siguiente figura (izquierda).
2. La segunda derivada está directamente relacionada con la curvatura mediante la ecuación

$$k(x) = \frac{g''(x)}{\sqrt{1 + g'(x)}}$$

3. Al aproximarnos a cero la segunda derivada oscila lejos del cero.

En la siguiente figura mostramos las gráficas de

$$h(x) = \sqrt{1 + g'(x)},$$

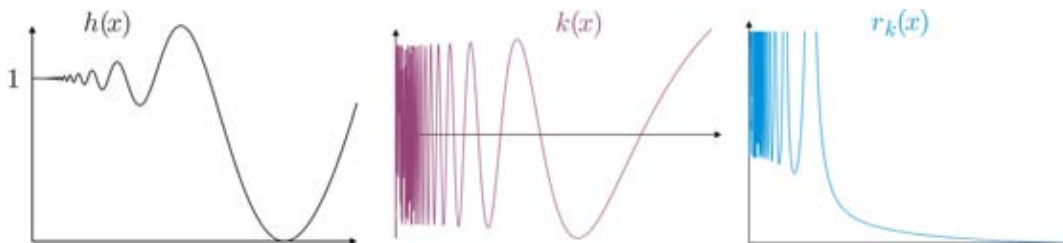
de la curvatura (en morado)

$$k(x) = \frac{12x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 6x \cos \frac{1}{x} - \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + 4x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x^2 \cos \frac{1}{x}}}$$

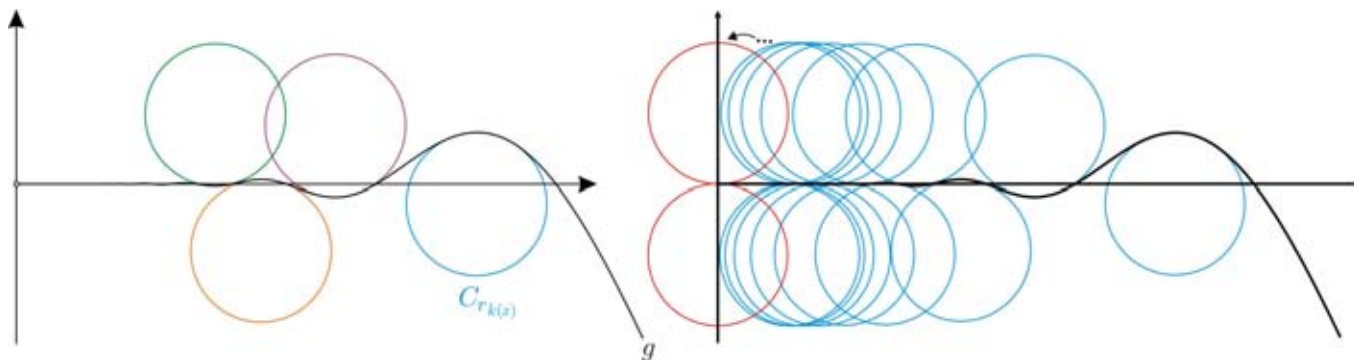
y del radio de curvatura (en azul)

$$r_k(x) = \frac{1}{|k(x)|}.$$

La curvatura oscilará lejos del cero al acercarnos al origen, es decir, los radios de curvatura oscilarán entre infinito y cierto valor positivo.



En la siguiente figura mostramos cómo se van aproximando al origen las circunferencias de curvatura de los puntos donde g alcanza máximos y mínimos locales. Cuando nos acercamos a cero encontramos una infinidad de estos puntos por lo que tenemos una sucesión de circunferencias que se acumula en las dos circunferencias rojas (figura de la derecha). Por otro lado la circunferencia de curvatura en el origen es una recta, es decir, el radio de curvatura es infinito, por lo tanto el comportamiento de las circunferencias de curvatura es discontinuo en el origen.



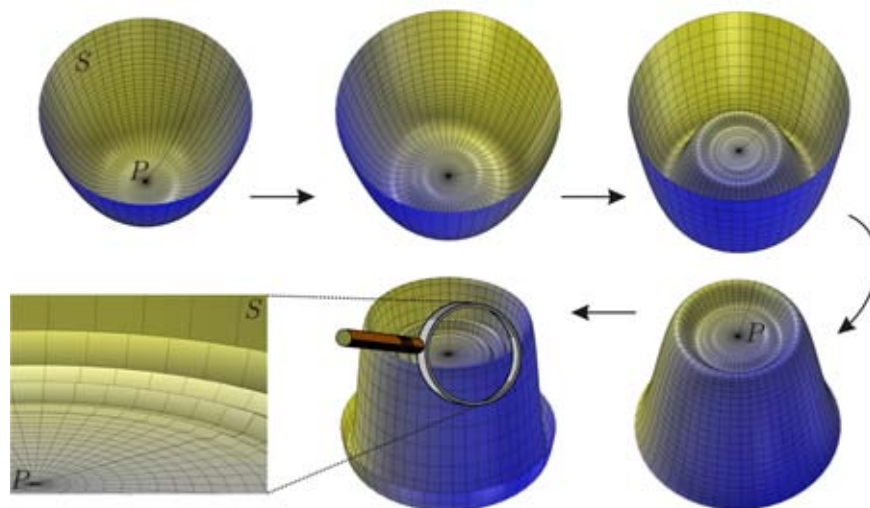
Construyamos ahora una superficie rotando la gráfica anterior alrededor del eje z para obtener la gráfica de

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right),$$

o en coordenadas polares,

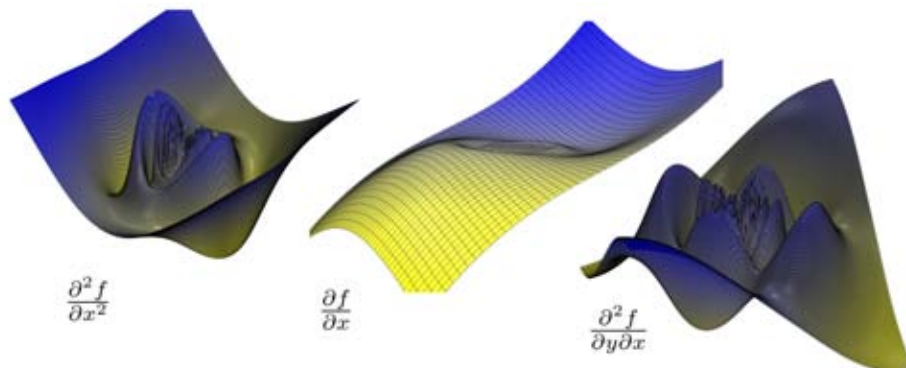
$$f(r, \theta) = r^4 \operatorname{sen} \frac{1}{r}$$

Tomemos al $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ como punto P en S . Si vemos la gráfica de lejos (figura siguiente la de la esquina superior izquierda) parece no tener ondulaciones alrededor del origen, pero deberá tenerlas, pues g las tiene, para verlas hay que acercarnos más. La gráfica tiene plano tangente en P y además la posición de los planos tangentes en puntos cercanos es cercana, ya que f es de clase C^1 . Como se muestra en la figura (abajo, izquierda) las ondulaciones que podrían hacer variar la posición del plano tangente se atenúan al acercarnos a P .



Gráfica de f sobre los círculos de radio 1, 0.5, 0.35, 0.25, 0.10, empezando arriba a la izquierda y acabando con un zoom cerca del origen.

Por la simetría de f las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son muy parecidas (giras una $\frac{\pi}{2}$ y obtienes la otra), así que nos fijaremos sólo en la primera de ellas. Tenemos que $\frac{\partial f}{\partial x}$ es diferenciable en el origen, como se ve en la figura (centro). Las segundas derivadas $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ son discontinuas en el cero (izquierda y derecha respectivamente).



Si cortamos la gráfica de f con un semiplano vertical que pase por el eje z obtenemos $r^4 \text{sen} \frac{1}{r}$. Por el análisis que hicimos para g tenemos que todas las derivadas direccionales de orden dos, en cualquier dirección, son cero. Esto implica que la segunda forma fundamental en el origen es la función constante cero. También podemos usar la fórmula

$$II(v) = L_{11}u_1'^2 + (L_{12} + L_{21})u_1'u_2' + L_{22}u_2'^2$$

para llegar a que $II(v) = 0$. Sea

$$\mathbf{x}(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2));$$

entonces

$$\mathbf{x}_{11} = \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}\right), \quad \mathbf{x}_{22} = \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}\right), \quad \mathbf{x}_{12} = \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}\right), \quad \mathbf{x}_{21} = \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_1}\right).$$

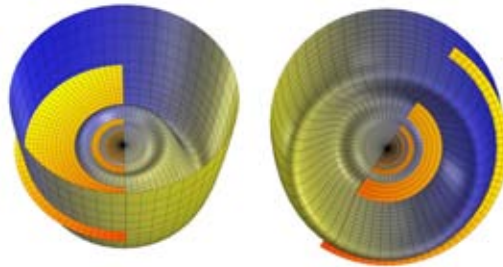
Por el análisis que hicimos para g tenemos que

$$\mathbf{x}_{11} = \mathbf{x}_{22} = 0.$$

Además por la simetría de f tenemos que

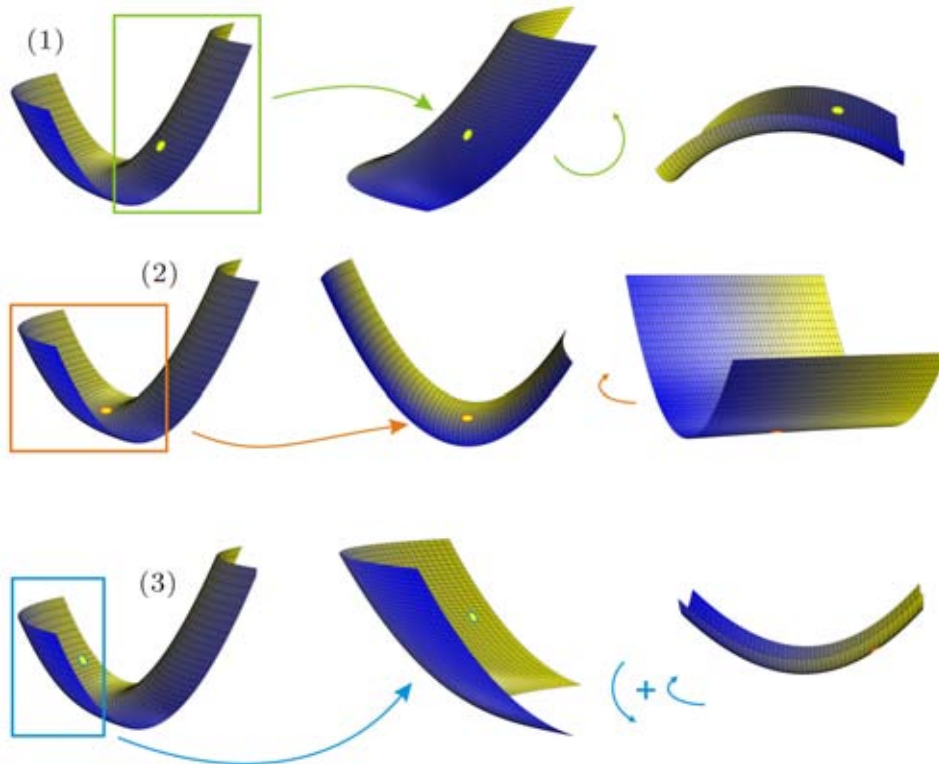
$$\mathbf{x}_{12} = -\mathbf{x}_{21}.$$

Por lo tanto $II(v) = 0$, es decir, el polinomio de grado menor o igual que dos que mejor aproxima a la superficie en P es la constante cero (ver la siguiente figura).

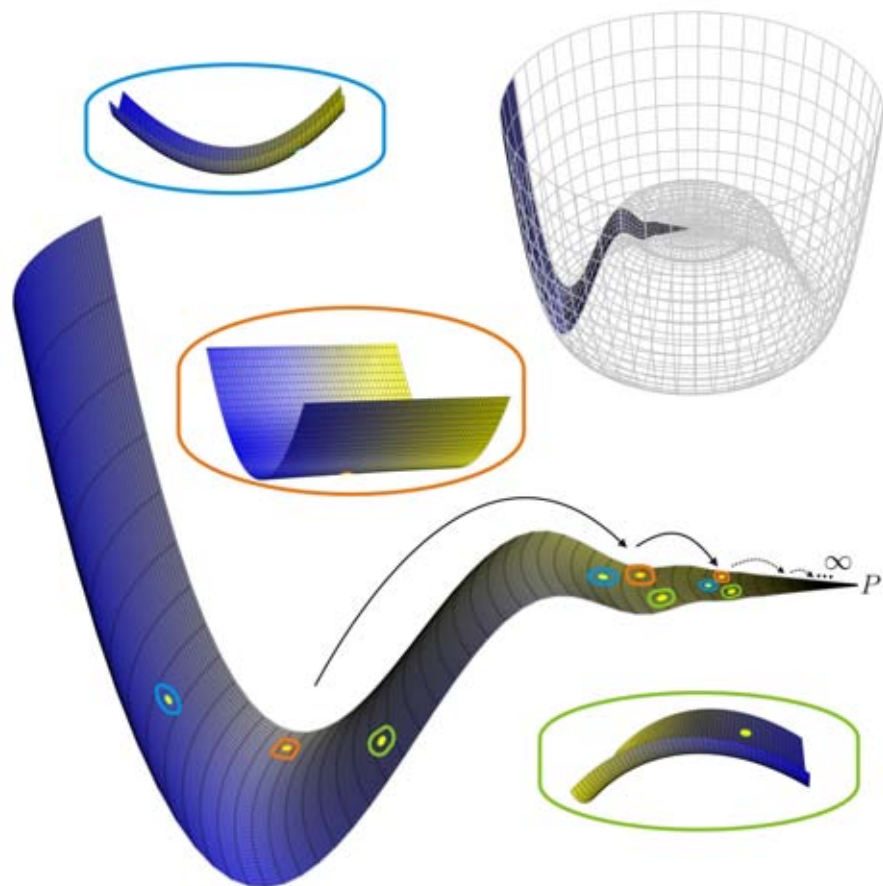


$$II(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2, \text{ con } a, b, c = 0, \text{ vista desde arriba y abajo.}$$

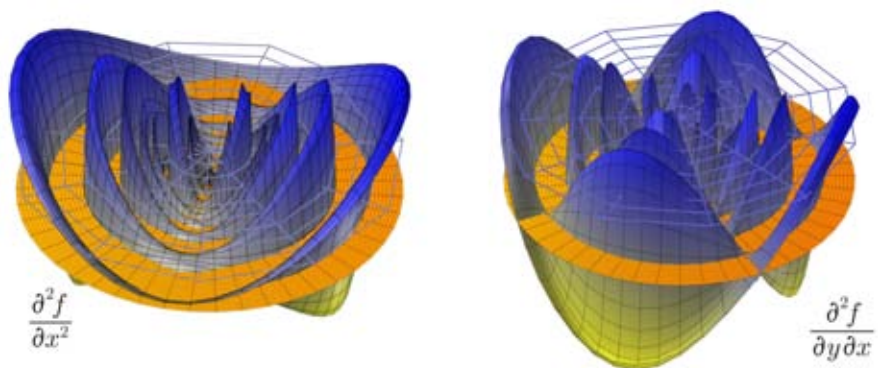
Ahora veamos que el comportamiento de la segunda forma fundamental es discontinuo en las cercanías de P . En la siguiente figura hemos tomado tres regiones de la onda ((1), (2) y (3)) que aparecerán una infinidad de veces al acercarnos al punto P . Existen puntos en las regiones (1), (2) y (3) en los que la superficie es como una silla de montar, un cilindro y un paráboloide, respectivamente.



La idea para garantizar la discontinuidad en la segunda forma fundamental en P es ver que podemos encontrar tan cerca como queramos de P puntos en los que la superficie es como un paraboloides, como un cilindro o como una silla de montar. Veamos la idea anterior en la siguiente figura.



Al ver la gráfica podríamos pensar que los paraboloides, cilindros y sillas terminan por suavizarse al llegar al punto P , pero esto no es así ya que esto implicaría que el valor de las segundas derivadas \mathbf{x}_{ij} tienen límite cero al acercarnos al origen. Sin embargo, mostramos en la siguiente figura las gráficas de las funciones \mathbf{x}_{ij} y vemos que presentan oscilaciones que no se suavizan. Tan cerca como queramos del origen, podemos encontrar alturas de la gráfica que rebasan un valor positivo dado (representado en la figura por la distancia entre el plano naranja y el plano en alambre poligonal azul), es decir, las funciones \mathbf{x}_{ij} no tienen límite.



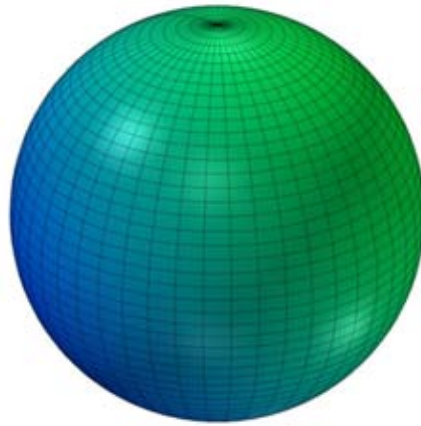
Entonces las formas que localmente tiene S tampoco se suavizan cuando nos acercamos al origen. Esto último implica la discontinuidad de la segunda forma fundamental en el origen.

En lo que sigue vamos a considerar solamente superficies de clase C^2 .

3.8. Segunda forma fundamental de la esfera

Calculemos la segunda forma fundamental para la esfera S^2 a través de la siguiente parametrización:

$$\mathbf{x} = (\cos u_1 \cos u_2, \sin u_1 \cos u_2, \sin u_2)$$

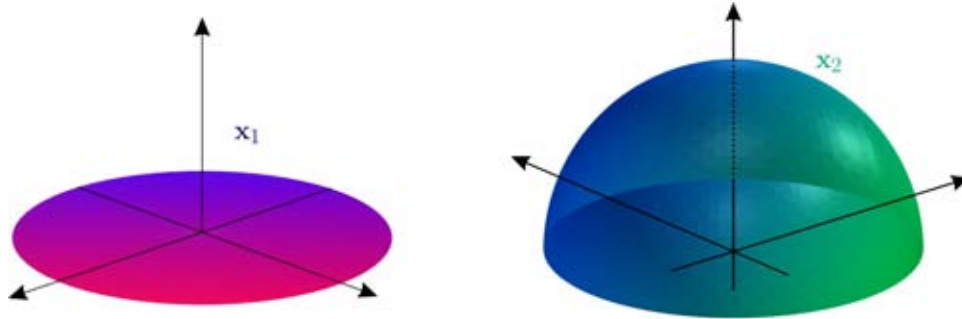


Las primeras derivadas parciales son

$$\mathbf{x}_1 = (-\operatorname{senu}_1 \cos u_2, \cos u_1 \cos u_2, 0)$$

$$\mathbf{x}_2 = (-\cos u_1 \operatorname{senu}_2, -\operatorname{senu}_1 \operatorname{senu}_2, \cos u_2);$$

la imagen de una de ellas es un disco y la otra media esfera.



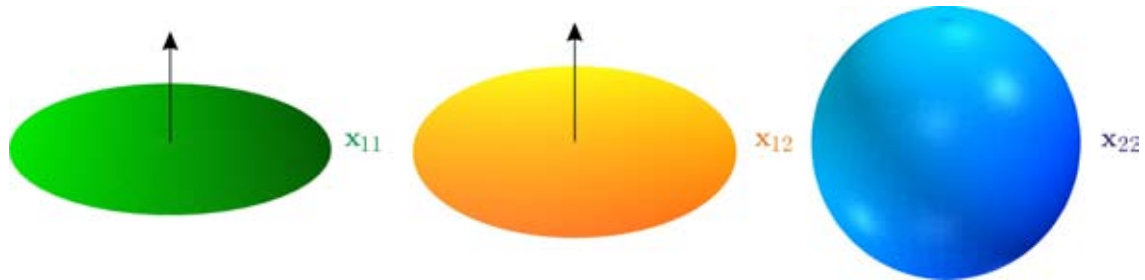
Las segundas derivadas parciales son

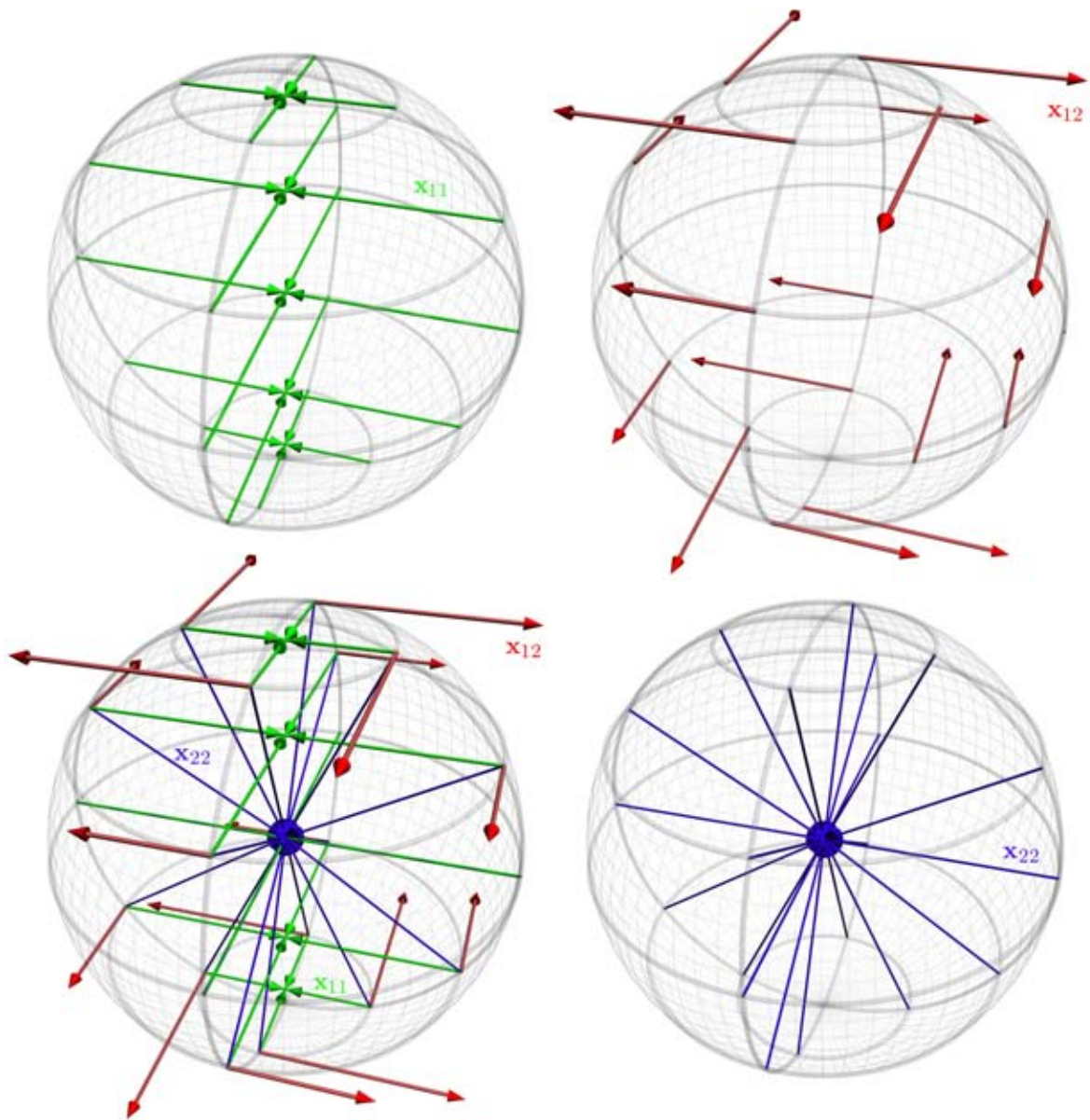
$$\mathbf{x}_{11} = [-\cos u_1 \cos u_2, \operatorname{senu}_1 \cos u_2, 0],$$

$$\mathbf{x}_{12} = \mathbf{x}_{21} = [\operatorname{senu}_1 \operatorname{senu}_2, -\cos u_1 \operatorname{senu}_2, 0],$$

$$\mathbf{x}_{22} = [-\cos u_1 \cos u_2, \operatorname{senu}_1 \cos u_2, \operatorname{senu}_2];$$

que ilustramos como campos y superficies (en verde, amarillo y azul, respectivamente) en las dos figuras que siguen.





Los símbolos de Christoffel son

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{\text{sen}2v}{2}$$

y como \mathbf{x} es de clase C^2 tenemos que los otros cuatro son

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\tan v,$$

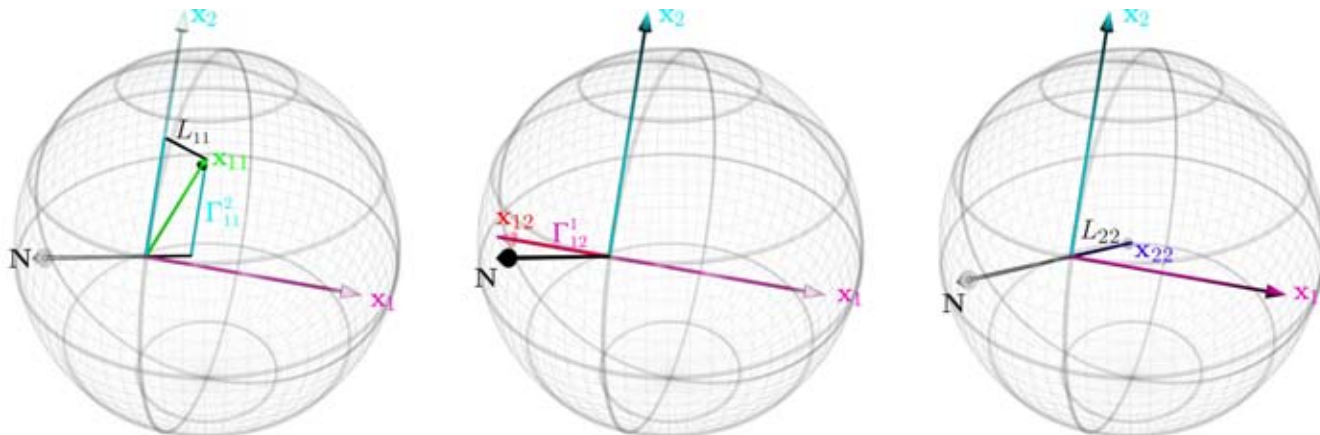
$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0.$$

Los coeficientes de la segunda forma fundamental son

$$L_{11} = \cos v,$$

$$L_{12} = L_{21} = 0,$$

$$L_{22} = 1.$$



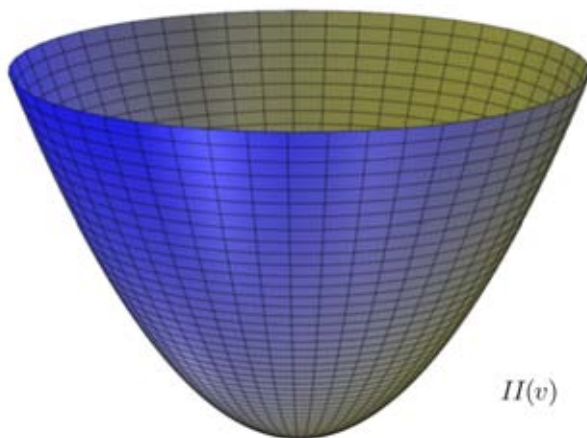
La figura muestra los campos \mathbf{x}_{ij} junto con el triedro $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{N}\}$ en un punto P . Los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k miden la componente de la aceleración en \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 , es decir, en $T_P S$; y los coeficientes L_{ij} miden la componente en \mathbf{N} .

La segunda forma fundamental expresada en la base $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ viene dada por

$$II(v) = II(u'_1 \mathbf{x}_1 + u'_2 \mathbf{x}_2) = L_{11} u_1'^2 + L_{22} u_2'^2 = \cos^2 u_2 u_1'^2 + u_2'^2;$$

si la expresamos en términos de la base ortonormal $\left\{ \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|}, \mathbf{x}_2 \right\}$ obtenemos la siguiente expresión que refleja la simetría que tiene la esfera:

$$II(v) = u_1'^2 + u_2'^2.$$



3.9. Teorema de Meusnier

En la sección 3.5 expresamos la segunda derivada de una curva $\sigma \subset S$ en términos de los vectores del marco $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{N}\}$. Vimos que si la velocidad σ' de la curva al pasar por el punto P es

$$v = u'_1 \mathbf{x}_1 + u'_2 \mathbf{x}_2,$$

entonces la componente en el vector \mathbf{N} de la aceleración es

$$\sigma'' \cdot \mathbf{N} = L_{11} u_1'^2 + 2L_{12} u'_1 u'_2 + L_{22} u_2'^2.$$

De la igualdad anterior concluimos que la componente de la aceleración normal a la superficie es la misma para cualquier curva que pase por P con velocidad v . En particular, si $\|v\| = 1$ tendremos que la proyección en \mathbf{N} del vector de curvatura de cualquier curva que pase por P con velocidad v será constante. A este resultado se le conoce como el **teorema de Meusnier**⁴⁰.

En la definición de segunda forma fundamental, que dimos en la sección 3.4, nos restringimos a secciones normales que pasan por P con velocidad v . El teorema de Meusnier nos da la posibilidad de considerar curvas arbitrarias en la definición de la segunda forma fundamental. En efecto, de las curvas que pasan con velocidad v por P , las secciones normales tienen aceleración contenida en $N_P S$; por lo tanto la componente normal a la superficie de la aceleración de una curva cualquiera que pase por P con velocidad v será la

⁴⁰Meusnier, Jean Baptiste (1754-1793), matemático francés.

aceleración de la sección normal que pasa por P con velocidad v . En particular, si una curva y una sección normal comparten su recta tangente en P , entonces la proyección del vector de curvatura de la primera en la dirección del vector normal \mathbf{N} es igual a la curvatura de la segunda.

A continuación desarrollamos en detalle las ideas anteriores.

Si pasamos por P viajando a rapidez constante $\|v\|$ a lo largo de una sección normal $\tilde{\sigma}_v = \tilde{\sigma}$, la componente en \mathbf{N} de la aceleración es

$$\tilde{\sigma}'' \cdot \mathbf{N} = k_v \|v\|^2.$$

donde k_v es la curvatura normal de $\tilde{\sigma}$. Entonces $k_v \|v\|^2$ es el valor de la componente en \mathbf{N} de la aceleración de cualquier curva $\sigma_v = \sigma$ que comparta el vector velocidad con $\tilde{\sigma}$:

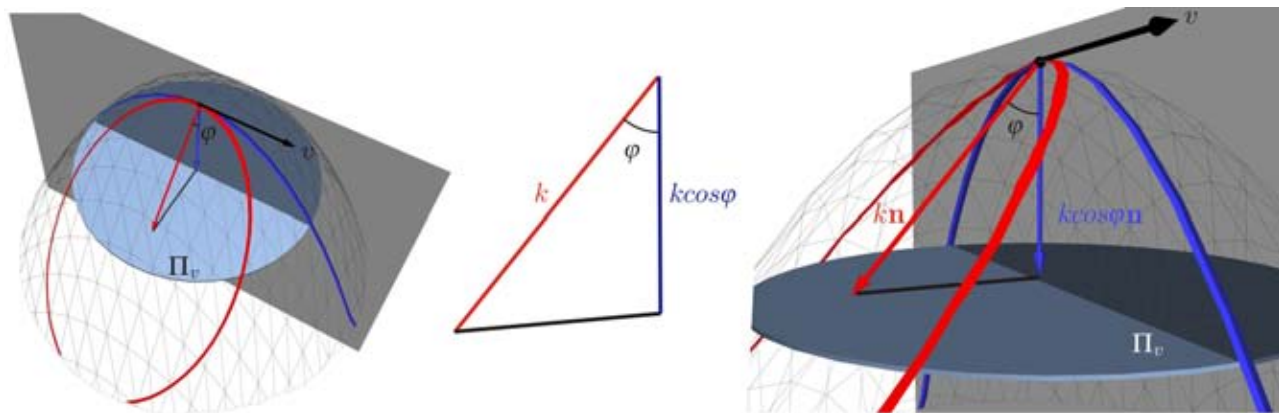
$$\sigma'' \cdot \mathbf{N} = k_v \|v\|^2. \quad (3.9)$$

Por otro lado, usando la fórmula⁴¹ (1.16) de la sección 1.10, podemos expresar la componente en \mathbf{N} de la aceleración de la siguiente manera:

$$\sigma'' \cdot \mathbf{N} = k \|v\|^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = k \|v\|^2 \cos \varphi; \quad (3.10)$$

donde k es la curvatura de σ y φ es el ángulo que forman los vectores normal a la superficie \mathbf{N} y normal a la curva \mathbf{n} . De (3.9) y (3.10) obtenemos la igualdad del teorema de Meusnier

$$k_v = k \cos \varphi = k \mathbf{n} \cdot \mathbf{N};$$



Definición 17 La componente normal a la superficie S del vector de curvatura de una curva $\sigma \subset S$ que pasa por el punto P se llama **curvatura normal**

$$k_{\mathbf{N}}(P, \sigma, S) = k_{\mathbf{N}} = k_v = k \cos \varphi,$$

de la curva σ y es igual a curvatura de una sección normal que comparte la recta tangente con σ en el punto P .

La definición de la segunda forma fundamental no restringida a secciones normales queda de la siguiente manera.

Definición 18 La función

$$II : T_P S \rightarrow \mathbb{R}$$

que asocia a cada vector tangente el escalar

$$II(v) = k_{\mathbf{N}} \|v\|^2 = k \cos \varphi \|v\|^2$$

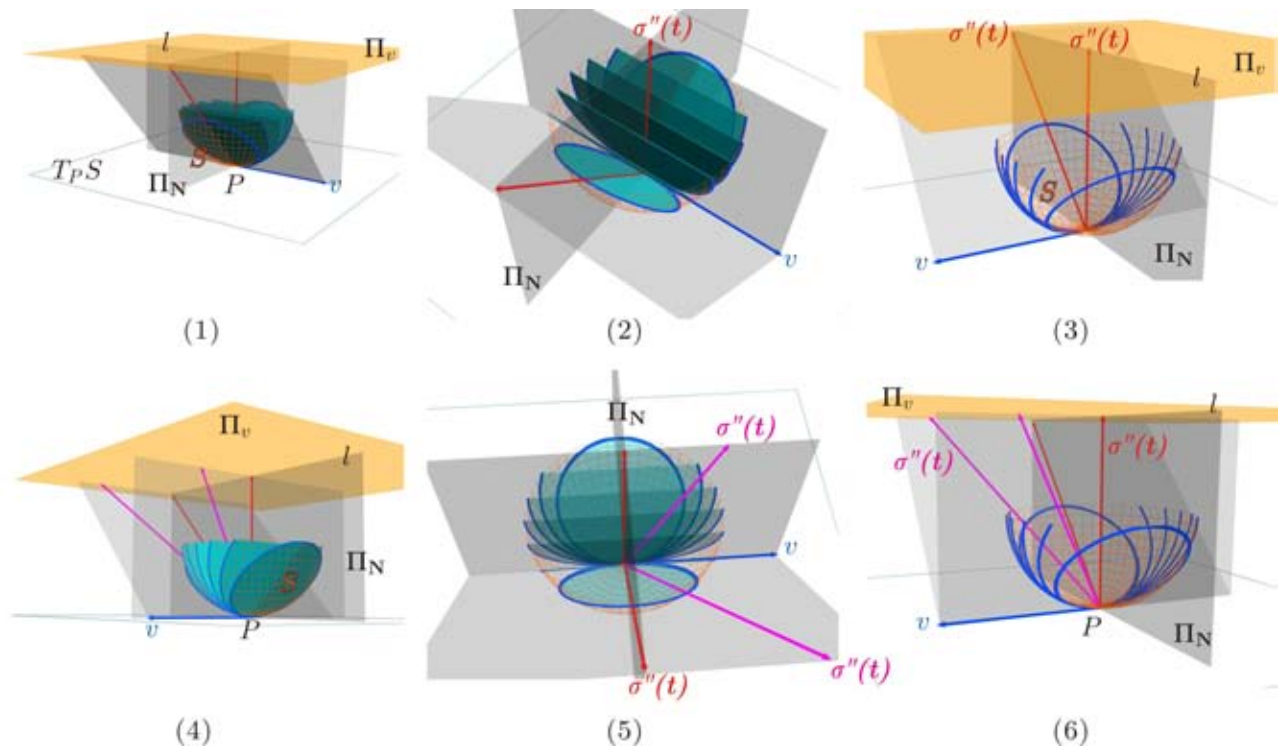
que relaciona a \mathbf{N} con la aceleración normal $a_{\mathbf{N}} = (\sigma'' \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N}$, es una forma cuadrática llamada **segunda forma fundamental** de la superficie en el punto P .

Notamos que las aceleraciones de todas las curvas σ_v (que pasan por P con velocidad v) pertenecen a un plano Π_v paralelo a $T_P S$ y que se encuentra a una distancia de éste igual al cuadrado del tamaño de la velocidad v por la curvatura normal de σ_v

$$k_{\mathbf{N}} \|v\|^2$$

En la siguiente figura mostramos una superficie (en malla naranja) y algunas curvas σ (en azul) que pasan por el punto P con un mismo vector velocidad v .

⁴¹ $\sigma'' = \frac{d\|\sigma'\|}{dt} \mathbf{t} + k \|\sigma'\|^2 \mathbf{n} = \frac{d\|v\|}{dt} \mathbf{t} + k \|v\|^2 \mathbf{n}$



Cómo se distribuyen las aceleraciones de las curvas σ_v en el Π_v

La aceleración $\sigma''_v(t)$ es un vector en Π_v que respecto al plano normal Π_N a la curva, podrá estar del mismo lado que v , en el lado opuesto o en la línea de intersección l de ambos planos y esto dependerá de la forma que varíe la rapidez de la curva, como veremos a continuación. Si al pasar por P la rapidez es esencialmente constante, es decir, si

$$\left. \frac{d\|\sigma'_v\|}{dt} \right|_{t=0} = 0,$$

entonces $\sigma''_v(0)$ vive en la recta l . Para ver qué pasa si la rapidez va aumentando o disminuyendo, ($\frac{d\|\sigma'_v(t)\|}{dt} \neq 0$) usamos la fórmula de la aceleración que vimos en la sección 1.10:

$$\sigma''_v = \frac{d\|\sigma'_v\|}{dt} \mathbf{t} + k \|v\|^2 \mathbf{n}.$$

Si la rapidez va en aumento

$$\left. \frac{d\|\sigma'_v\|}{dt} \right|_{t=0} > 0$$

la aceleración vivirá en el mismo lado que v respecto de Π_N (figura anterior, figuras 4-6) y del otro lado si va disminuyendo

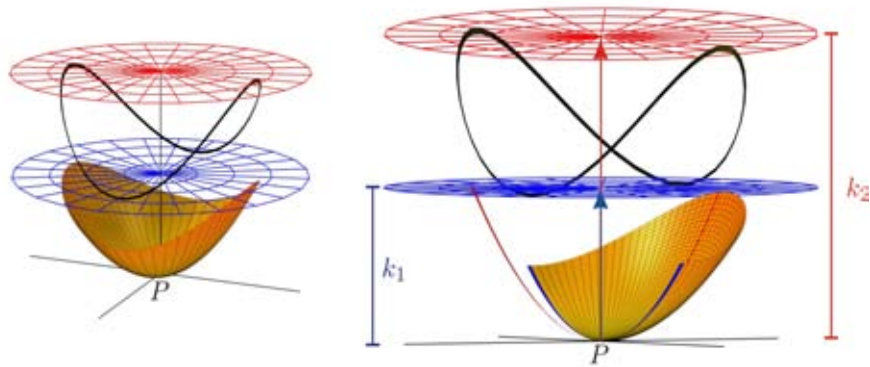
$$\left. \frac{d\|\sigma'_v\|}{dt} \right|_{t=0} < 0.$$

Notamos que si $\|v\| = 1$, el tamaño de la aceleración σ''_v es mayor o igual al tamaño de la curvatura normal:

$$\|\sigma''_v\| \geq |k_v|$$

y la igualdad se dará cuando $\frac{d\|\sigma'_v\|}{dt} = 0$ y los vectores \mathbf{N} y \mathbf{n} sean colineales, es decir, cuando σ_v sea localmente como una sección normal.

En la siguiente figura mostramos una superficie S y un punto P en ella (el origen). La curva en negro representa el valor de las curvaturas normales o, equivalentemente, el valor de las aceleraciones al pasar por P viajando a lo largo de las secciones normales con velocidad unitaria. Las aceleraciones σ''_v para cualquier v unitario estarán contenidas entre los planos azul y rojo correspondientes a las curvaturas principales k_1 y k_2 .



Curvas en una superficie S con curvatura infinita

La relación

$$k_{\mathbf{N}} = k_v = k \cos \varphi \tag{3.11}$$

nos da información de como debe ser el plano osculador de una curva contenida en una superficie que tenga curvatura infinita: el plano osculador debe ser el plano tangente $T_P S$. Si $k = \infty$, la igualdad (3.11) implica que del haz de planos que pasan por el vector v , el único que podría ser el plano osculador de la curva es el plano tangente, pues cualquier otro proyectaría una curvatura normal finita. El regreso sin embargo no es cierto, puede haber curvas cuyo plano osculador sea el plano tangente $T_P S$ que tengan curvatura finita.

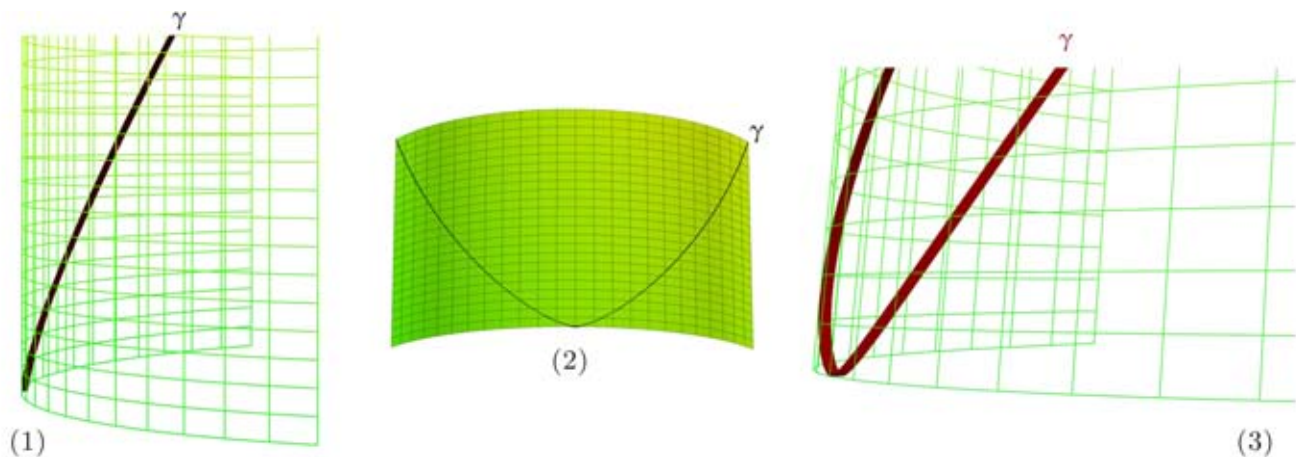
En la siguiente figura tenemos un ejemplo de una curva con curvatura infinita en un cilindro; intuitivamente podemos obtenerla al enredar la gráfica de la función

$$f(x) = |x|^{\frac{3}{2}}$$

en el cilindro. Explícitamente puede servir la curva

$$\gamma(\theta) = \left(\text{sen}\theta, -\text{cos}\theta, |\theta|^{\frac{3}{2}} \right)$$

en una vecindad de $\theta = 0$. En la figura (1) podemos visualizar que el plano osculador de γ es el plano tangente $T_P S$.



3.10. Geodésicas: las curvas en una superficie con aceleración (curvatura) mínima

Podríamos decir que la curvatura de una superficie impone a la aceleración σ''_v (o curvatura si $\|v\| = 1$) una cota en su tamaño:

$$\|\sigma''_v\| \geq |k_v| \|v\|^2 = \|\tilde{\sigma}''_v\|$$

que es el tamaño de la aceleración que experimenta un punto al pasar por P viajando a lo largo de la sección normal $\tilde{\sigma}_v$. En otras palabras: no hay curva σ_v dentro de la superficie tal que

$$\|\sigma''_v\| < |k_v| \|v\|^2 = \|\tilde{\sigma}''_v\|,$$

es decir, que al pasar por P tenga una aceleración menor que la de la sección normal. Y el mínimo lo alcanzan curvas que comparten el plano osculador con la sección normal. Las curvas en S que en cada momento tienen la menor aceleración posible serán aquellas que infinitesimalmente coincidan con una sección normal. Esto es equivalente a que los vectores normales a la curva y a la superficie, \mathbf{n} y \mathbf{N} , sean paralelos a lo largo de la curva. Estas curvas toman en S el papel que en el plano toman las curvas de menor aceleración posible, es decir, las rectas.

Definición 19 Las curvas en una superficie S que en cada momento tienen la menor aceleración posible se llaman **geodésicas**.

Las geodésicas son las curvas más derechas de la superficie, es decir, sus líneas rectas. Una curva tiene en cada momento la menor aceleración si y sólo si los dos primeros vectores de la expresión

$$\sigma'' = [(\Gamma_{11}^1 u_1'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u_1' u_2' + \Gamma_{22}^1 u_2'^2) + u_1''] \mathbf{x}_1 +$$

$$[(\Gamma_{11}^2 u_1'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u_1' u_2' + \Gamma_{22}^2 u_2'^2) + u_2''] \mathbf{x}_2 + [L_{11} u_1'^2 + 2L_{12} u_1' u_2' + L_{22} u_2'^2] \mathbf{N}$$

para la aceleración son cero

$$\begin{aligned} ([\Gamma_{11}^1 u_1'^2 + (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^1) u_1' u_2' + \Gamma_{22}^1 u_2'^2] + u_1'') \mathbf{x}_1 &= 0 \\ ([\Gamma_{11}^2 u_1'^2 + (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2) u_1' u_2' + \Gamma_{22}^2 u_2'^2] + u_2'') \mathbf{x}_2 &= 0; \end{aligned}$$

ya que el último sumando es precisamente la aceleración mínima que impone la curvatura de S :

$$|L_{11} u_1'^2 + 2L_{12} u_1' u_2' + L_{22} u_2'^2| = |k_v| \|v\|^2 = |II(v)|$$

En consecuencia para que una curva sea geodésica necesitamos que sus símbolos de Christoffel cumplan un par de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Volveremos a esto más adelante.

3.11. Ortogonalidad de las direcciones principales y fórmula de Euler

Vimos en la sección 3.2 ejemplos de superficies en las que hay puntos que tienen un par de secciones normales, perpendiculares entre sí, con curvatura máxima y mínima. Probaremos que esto sucede en general. Lo haremos usando la segunda forma fundamental; la evaluaremos en la circunferencia unitaria y obtendremos una onda que alcanza su máximo y su mínimo en direcciones perpendiculares entre sí.

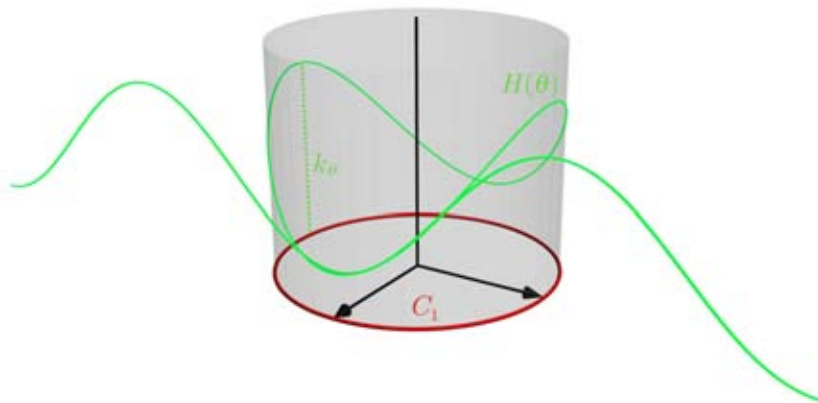
La expresión de la segunda forma fundamental

$$II(v) = II(u_1' \mathbf{x}_1 + u_2' \mathbf{x}_2) = L_{11} u_1'^2 + 2L_{12} u_1' u_2' + L_{22} u_2'^2$$

está dada en términos de la base $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ del plano tangente $T_P S$. Expresemos II en términos de una base ortonormal $\alpha = \{e_1, e_2\}$ de $T_P S$:

$$II(\tilde{x}e_1 + \tilde{y}e_2) = Q(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{A}\tilde{x}^2 + C\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{B}\tilde{y}^2. \quad (3.12)$$

donde Q es un polinomio homogéneo de grado 2. La evaluación de $Q(\tilde{x}, \tilde{y})$ en la circunferencia unitaria $C_1 \subset \mathbb{R}^2$ determina una curva, contenida en la gráfica de Q , que vive en un cilindro y que tiene la forma de una onda. Sus alturas representan las curvaturas normales de las distintas secciones normales que pasan por el punto P en la superficie.



Para ver que dicha curva alcanza su máximo y su mínimo en dos direcciones que son perpendiculares entre sí hagamos un nuevo cambio de coordenadas, rotemos nuestros ejes para que desaparezca el término $C\tilde{x}\tilde{y}$ en 3.12. Obtenemos ahora la expresión

$$Q(x, y) = Ax^2 + By^2$$

para la segunda forma fundamental. Al evaluar Q en la circunferencia unitaria

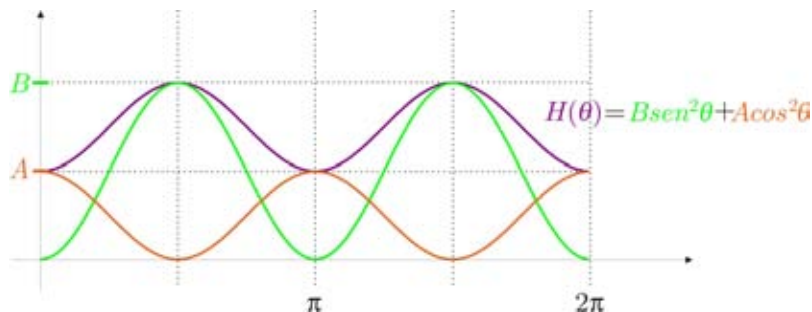
$$(\cos \theta, \text{sen} \theta) = h : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

obtenemos

$$A \cos^2 \theta + B \text{sen}^2 \theta = H(\theta) = Q(h(\theta)) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

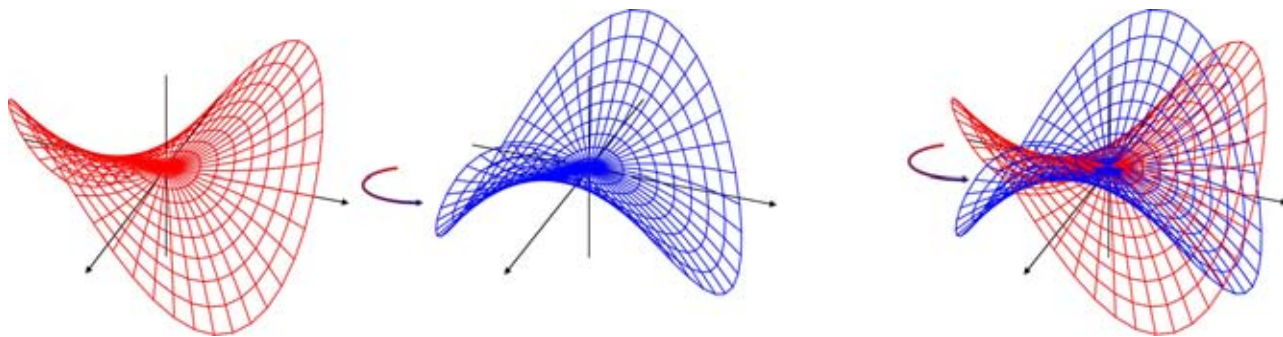
Analizando la forma de los sumandos $A \cos^2 \theta$ y $B \text{sen}^2 \theta$ llegamos a que:

1. Si $A = B$ entonces $H(\theta)$ es constante, es decir todas las curvaturas normales son iguales, como en el caso de una esfera.
2. Si $A < B$ entonces $H(\theta)$ alcanza en 0 un mínimo y en $\frac{\pi}{2}$ un máximo (ver la siguiente figura).
3. Si $A > B$ entonces $H(\theta)$ alcanza en 0 un máximo y en $\frac{\pi}{2}$ un mínimo.



Conclusión 20 Las direcciones principales son ortogonales.

Interpretemos de otra forma el cambio de coordenadas de $(\tilde{x}, \tilde{y}) \rightarrow (x, y)$. Esto es equivalente a rotar la gráfica de $Q(\tilde{x}, \tilde{y})$ de manera que las direcciones de máximo y mínimo crecimiento queden alineadas con los ejes, como se muestra en la siguiente figura.



En la sección 3.2 vimos que una manera de saber cómo se curva la superficie S cerca de un punto P consiste en conocer la curvatura normal de todas las secciones normales que pasan P . Mencionamos que basta encontrar las curvaturas normales mínima k_1 y máxima k_2 de todas las secciones normales que pasan por el punto P , para poder calcular el valor de la curvatura normal de cualquier otra sección σ_θ mediante la fórmula de Euler que probaremos a continuación. El resultado se sigue de la siguiente

Proposición 21 si tomamos una base ortonormal $\{\beta_1, \beta_2\}$ de $T_P S$ que coincida con las direcciones principales, la segunda forma fundamental viene dada por

$$Q(x, y) = Ax^2 + By^2.$$

Al evaluar Q en los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ obtenemos A y B , pero estos valores son iguales a los valores que obtenemos al evaluar la segunda forma en los vectores β_1 y β_2 de $T_P S$. Finalmente estos últimos son las curvaturas principales k_1 y k_2 . En resumen:

$$A = Q(1, 0) = II(\beta_1) = k_1$$

$$B = Q(0, 1) = II(\beta_2) = k_2$$

En consecuencia Q toma la forma

$$Q(x, y) = k_1x^2 + k_2y^2.$$

Si evaluamos en los puntos de la circunferencia unitaria obtenemos las distintas curvaturas normales en función del ángulo θ formado con β_1 a través de la siguiente expresión

$$k(\theta) = Q(\cos\theta, \text{sen}\theta) = k_1\cos^2\theta + k_2\text{sen}^2\theta$$

que es llamada la fórmula de Euler.

Prueba. (Proposición 21) Veremos que escoger los vectores β_1 y β_2 de la base de $T_P S$ en la dirección de las curvaturas principales obliga a que se anule el término cruzado C en

$$Q(x, y) = Ax^2 + Cxy + By^2.$$

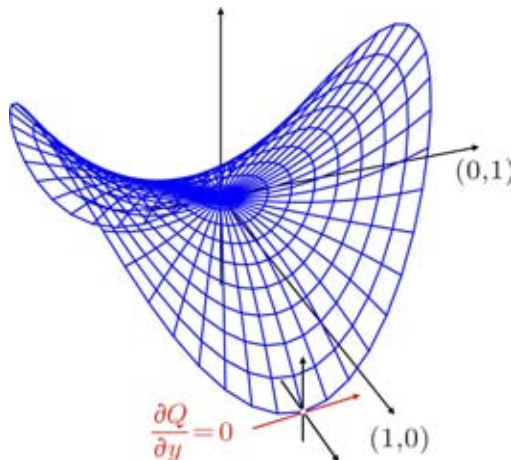
Notamos que la derivada parcial de Q respecto a y es:

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = Cx + 2By.$$

Al evaluarla en $(1, 0)$ se anula el término $2By$ y obtenemos que

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(1,0)} = C.$$

Como tomamos los vectores β_1 y β_2 en las direcciones principales, la recta tangente a la curva $(\cos\theta, \text{sen}\theta, H(\theta))$ en el punto $(1, 0, k_1)$ deberá ser paralela al vector $(0, 1, 0)$ (vector rojo en la siguiente figura), lo que implicaría que $C = 0$. Esto se debe a que las alturas de esta curva alcanzan en este punto un máximo o mínimo pues representan los valores de las curvaturas normales en las distintas direcciones.



Para checar la idea anterior basta mostrar que $H'(0) = 0$, derivemos:

$$H'(0) = \nabla H(1, 0) \cdot \frac{dh}{d\theta}(0) = - \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(1,0)} \text{sen}0 + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(1,0)} \text{cos}0 = C,$$

y el máximo o mínimo de $H(0)$ obliga a que

$$H'(0) = C = 0$$

■

3.12. Indicatriz de Dupin

Si escogemos adecuadamente nuestro sistema de referencia, en cada punto $P = \mathbf{x}(u, v)$ en S la segunda forma fundamental tiene la expresión

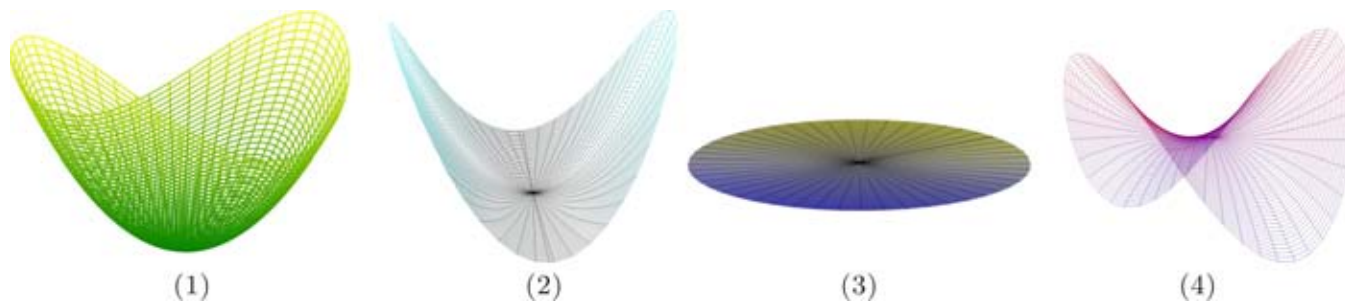
$$Q_P = Q(x, y) = k_1x^2 + k_2y^2.$$

De modo que tenemos una familia a dos parámetros de formas fundamentales, una para cada pareja $(u, v) \subset \mathbb{R}^2$. Las cuatro posibles formas⁴² (ver la siguiente figura) de la gráfica de $Q(x, y)$ son:

⁴²Formalmente: tendrán Q_1 y Q_2 la misma forma cuando sean C^∞ equivalentes, es decir cuando existan difeomorfismos $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ tales que $\psi \circ Q_2 \circ \phi = Q_1$. Para más detalles véase:

Bulajich R. y López S. Teoría de Singularidades, Aportaciones Matemáticas #15, Sociedad Matemática Mexicana.

1. Un paraboloido elíptico si $0 < k_1 \leq k_2$.
2. Un cilindro parabólico si $0 = k_1 \leq k_2$.
3. Un plano si $0 = k_1 = k_2$.
4. Una silla de montar si $k_1 < 0 < k_2$.



La forma de $Q(x, y)$ nos da información sobre cómo se curva S cerca del punto P . Evaluada en S^1 nos dice cómo son las curvaturas normales. Otra manera en que podemos visualizar geoméricamente la dependencia entre la dirección θ y el tamaño de la curvatura normal en esa dirección es mediante la indicatriz de Dupin⁴³; que es la curva en $T_P S$ que resulta de tomar la unión de las curvas de nivel 1 y -1 de la segunda forma fundamental:

$$ID_P = \{v \in T_P S : II_p(v) = \pm 1\}$$

Interpretamos la curvatura mediante la ID como sigue: tomemos un punto M en la indicatriz descrito como λv , donde v es un vector unitario en $T_P S$. Al evaluar en la segunda forma fundamental llegamos a que

$$II(\lambda v) = \lambda^2 k_v = \pm 1$$

de donde

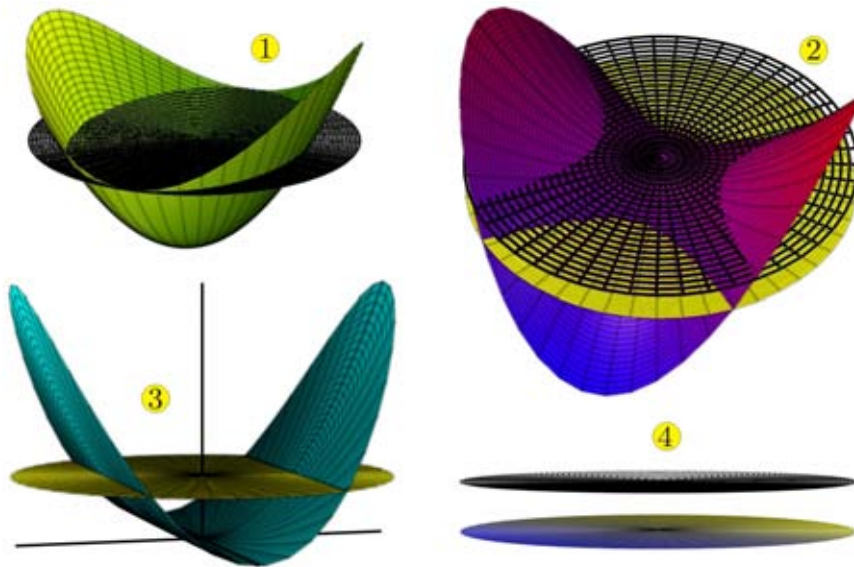
$$\lambda^2 = \pm \frac{1}{k_v} = r_v,$$

es decir, el cuadrado de la distancia de M al origen de $T_P S$ es el radio de curvatura de la sección normal σ_v .

Heredadas de las formas de Q , la indicatriz de Dupin tiene 4 posibles formas (ver la figura siguiente):

1. Una elipse, si Q es un paraboloido elíptico. En este caso las curvaturas normales tienen signo constante en cualquier dirección, por lo que la ID permanece acotada. Una de las dos curvas de nivel de II es el conjunto vacío. La ID puede ser una circunferencia, si Q es un paraboloido circular.
2. Un par de hipérbolas que comparten asíntotas, si Q es una silla de montar. En este caso hay un par de direcciones en las cuales $k_v = 0$, lo que implica que los puntos en la ID cuyas direcciones tienden a las de dicho par, se alejan tanto como queramos. Una hipérbola es $II = 1$ y la otra es $II = -1$.
3. Un par de líneas rectas, si Q es un cilindro parabólico. En este caso hay una dirección en la cual $k_v = 0$ lo que implica que si las direcciones de puntos sobre ID tienden a dicha dirección sus distancias se hacen infinitas. Una de las dos curvas de nivel de II es el conjunto vacío.
4. El vacío, si Q es un plano. Podemos ver este último caso como el límite de los anteriores cuando se hace plana la superficie, en todos los casos los puntos en la ID se van alejando infinitamente, por lo que podemos interpretar la ID del plano como la recta al infinito.

⁴³Dupin, Francois Pierre Charles (1784-1873), matemático francés.



En general la ID en un punto P es una curva en $T_P S$ que no pasa por P , pues esto implicaría que existe una sección normal con curvatura infinita. Siempre hay un punto en la indicatriz de Dupin que es el más cercano a P , la dirección de ese punto corresponde a una de las dos direcciones principales.

Como varía la forma de la indicatriz de Dupin al movernos en la superficie

Tanto la forma cuadrática como la indicatriz de Dupin ID cambian su forma al variar el punto P en la superficie. Para imaginarnos dicho cambio podemos asignar a cada forma cuadrática, y, por lo tanto, a cada indicatriz, un punto (k_1, k_2) en \mathbb{R}^2 de la siguiente manera⁴⁴:

$$II_P = Q_P = k_1 x^2 + k_2 y^2 \rightarrow (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2, \text{ donde } |k_1| \leq k_2.$$

Así a cada punto de la superficie le corresponde una indicatriz que podemos ver como un punto (k_1, k_2) en la región

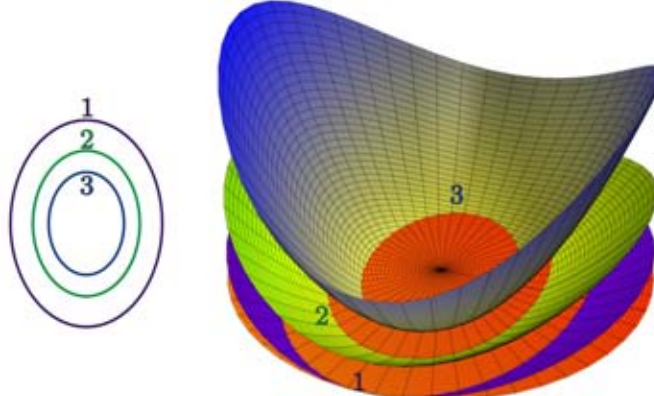
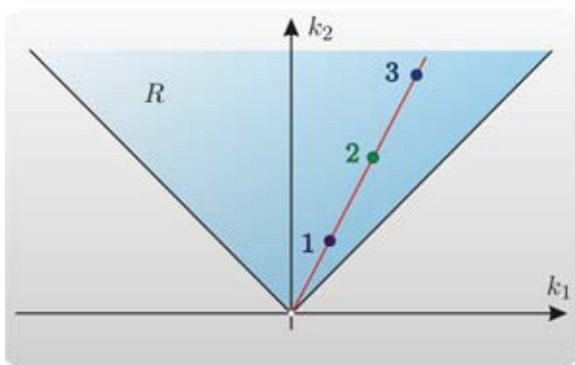
$$R = \{(k_1, k_2) : |k_1| \leq k_2\} \subset \mathbb{R}^2$$

que es la región por arriba de la gráfica del valor absoluto $k_2 = |k_1|$ (ver la siguiente figura). Si nos movemos a lo largo de una curva $\gamma(s)$ en la superficie, el cambio en la forma su la indicatriz quedará capturado en la curva $(k_1(s), k_2(s)) \subset R$.

A continuación veremos que a los puntos (k_1, k_2) en un rayo por el origen (excluyéndolo) les corresponden indicatrices que tienen esencialmente la misma forma. Si (k_1, k_2) varía sobre dicho rayo, entonces la gráfica de la segunda forma fundamental II_P correspondiente se irá estirando en el eje z , y la indicatriz ID_P se estirará en $T_P S$ preservando las proporciones. En la siguiente figura se muestran tres puntos (k_{1i}, k_{2i}) que están situados en un rayo, las gráficas de sus segundas formas fundamentales

$$II_i(x, y) = k_{1i}x^2 + k_{2i}y^2$$

y sus indicatrices ID_i . Vemos que la forma de las indicatrices es la misma (módulo una homotecia) para todos los puntos en el rayo. Podemos tomar un punto de cada rayo en R como representante⁴⁵ de la forma de todas las indicatrices que corresponden a los puntos del rayo.

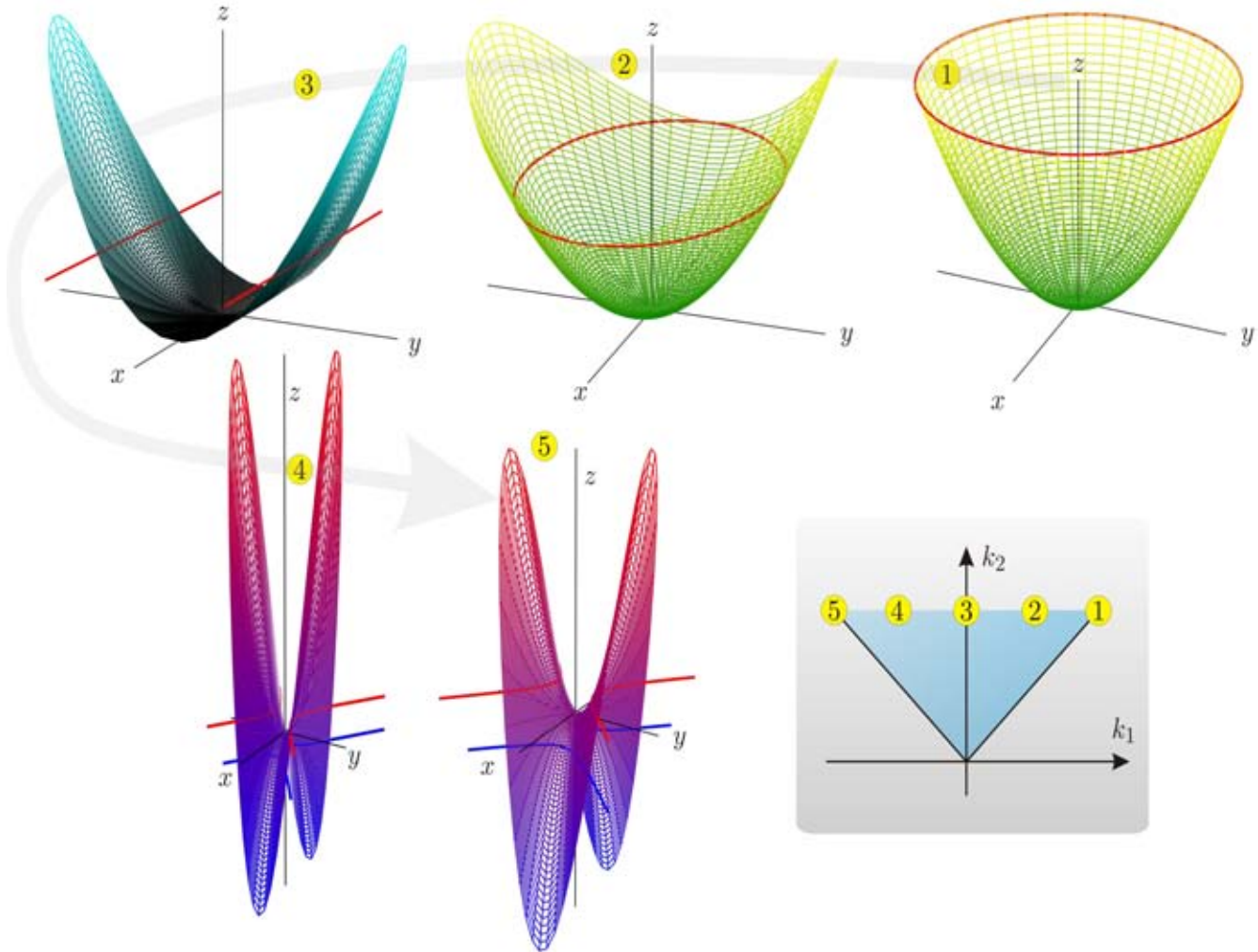


⁴⁴Pedimos que $|k_1| < k_2$ para descartar indicatrices que difieren por una rotación de $\frac{\pi}{2}$.

⁴⁵Es decir, un representante de la órbita de la acción del grupo de homotecias sobre R .

Entonces basta ver cómo varían las formas de las $ID(k_1, k_2)$ y de las $II(k_1, k_2)$ correspondientes a los puntos de una curva que atraviese la región R , por ejemplo la recta $\lambda = \lambda(k_1) = 1$ (ver la siguiente figura), para ver cómo varían todas las posibles formas de la indicatriz de Dupin y de las segundas formas fundamentales. En general al movernos a lo largo de una curva γ en una superficie obtendremos una curva $(k_1, k_2) \subset R$, que al proyectarla sobre λ nos dará una curva contenida en ella. De modo que si sabemos cómo varían las indicatrices al movernos a lo largo de λ , sabremos cómo varían al movernos a lo largo de $\gamma(s)$ en la superficie.

En la siguiente figura se muestran los cambios en la forma de $ID(k_1, k_2)$ y de $II(k_1, k_2)$ al movernos en λ . Empecemos en el punto que está en $(1, 1)$ (1), la ID que le corresponde será una circunferencia (1). Si nos movemos hacia el eje k_2 la ID se hará una elipse (2) cada vez más alargada hasta degenerarse, al llegar al eje k_2 , en un par de rectas paralelas al eje k_1 (3). Al cruzar el eje k_2 la indicatriz se convierte en un par de hipérbolas (4). El ángulo que forman las asíntotas de la hipérbola roja y azul es obtuso y agudo, respectivamente. Al llegar al punto $(-1, 1)$ (5) ambas hipérbolas se vuelven equiláteras, es decir, el ángulo entre las asíntotas se vuelve recto en cada caso.

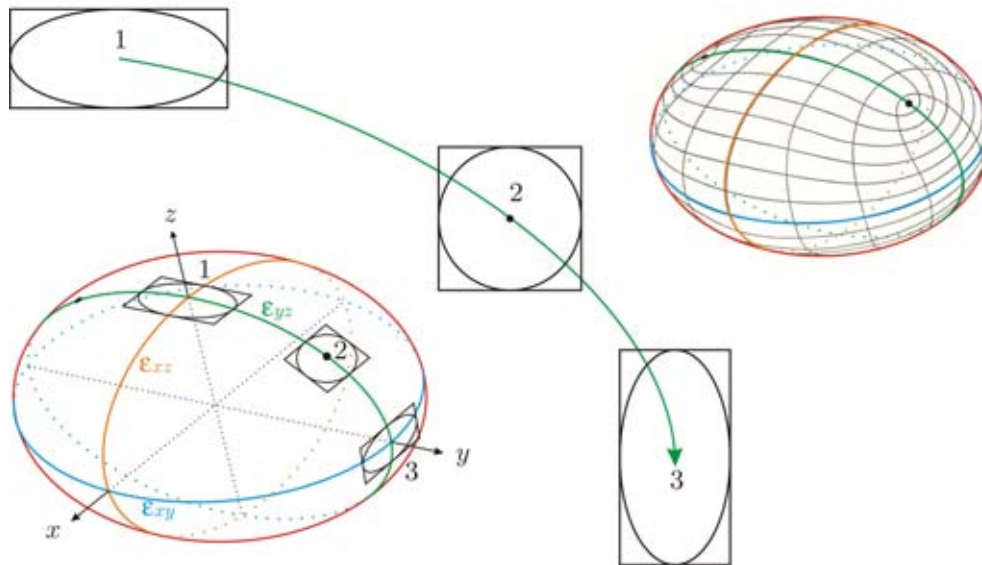


Ejemplo 22 La indicatriz de Dupin y los puntos umbílicos de un elipsoide

Argumentemos intuitivamente que existen al menos 4 puntos umbílicos en un elipsoide. Un elipsoide se puede ver como la superficie S de nivel de valor 1 de la función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Supongamos que tenemos que $b > a > c > 0$. Esto último hace que las intersecciones de S con los planos xy , xz y yz sean tres elipses diferentes: ε_{xy} , ε_{xz} y ε_{yz} respectivamente (azul, naranja y verde en la siguiente figura). El elipsoide es simétrico con respecto a los planos xy , xz y yz . Debido a esta simetría ε_{xy} , ε_{xz} y ε_{yz} deben ser líneas de curvatura, es decir líneas cuyos vectores tangentes coinciden con las direcciones principales en $T_p S$ (en la figura de arriba a la derecha se muestran líneas de curvatura sobre el elipsoide).

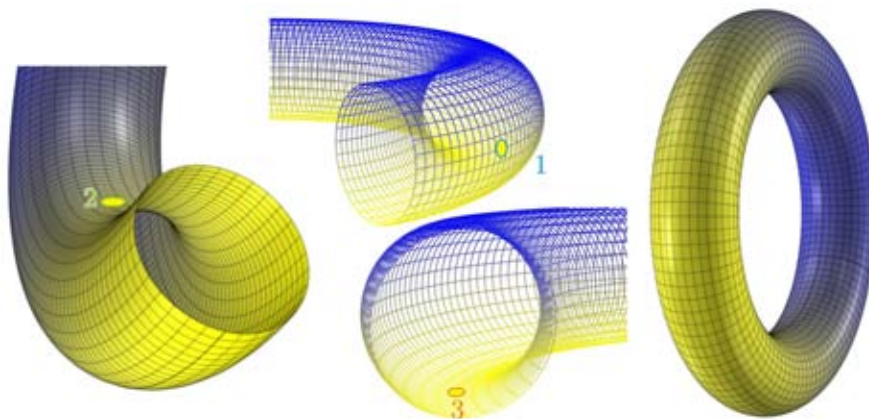


De las elipses ε_{xy} , ε_{xz} y ε_{yz} , es ε_{yz} la que tiene el eje mayor más grande y el eje menor más pequeño. En el punto 1 obtenemos una indicatriz de Dupin como la que se muestra en la figura. Si nos movemos sobre ε_{yz} , la ID irá cambiando su forma y cuando llegemos al punto 3, tendrá la forma que se muestra en la figura. La ID no rota en el trayecto ya que ε_{yz} es línea de curvatura y la otra dirección principal queda fija ya que siempre es ortogonal a la dirección de ε_{yz} . Así, deberá haber un punto 2 entre los puntos 1 y 3 en el cual la ID sea una circunferencia y por lo tanto ese punto sería un punto umbílico. Si vemos las cosas en el plano k_1k_2 , la ID del punto 1 tiene asociado un punto en el plano k_1k_2 que está a un lado de la identidad y la ID del punto 3 tiene asociado un punto del otro lado de la identidad (vease figura anterior, a la derecha y abajo). Al viajar de un vértice al otro en el elipsoide, el punto asociado a cada ID en el plano k_1k_2 se moverá de un lado a otro de la identidad y deberá cortarla en algún momento. Es en ese momento en el que la ID se hace una circunferencia y el respectivo punto en el elipsoide se vuelve umbílico. Por la simetría del elipsoide, garantizamos la existencia de al menos 4 puntos umbílicos (en la parte de arriba y derecha en la figura anterior se muestran dos de ellos).

Puntos elípticos, parabólicos e hiperbólicos

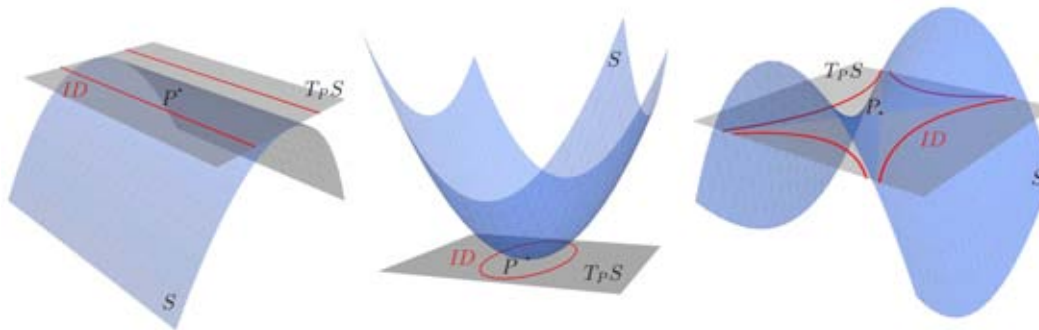
Atendiendo a la forma de la indicatriz de Dupin se clasifican los puntos de una superficie en (ver la siguiente figura):

1. elíptico, si la indicatriz es una elipse; k_1 y k_2 tienen el mismo signo, (1 en la figura). A los puntos en una superficie cuya ID es una circunferencia (caso especial de punto elíptico) se les llama puntos umbílicos.
2. hiperbólico, si la indicatriz es una hipérbola; k_1 y k_2 tienen signos distintos, (2 en la figura).
3. parabólicos⁴⁶, a los puntos que están en el caso frontera, es decir, que tienen como indicatriz un par de rectas, k_1 o k_2 es cero, (3 en la figura).



Si el punto es elíptico las direcciones de los ejes menor y mayor en la indicatriz de Dupin son las direcciones donde se alcanzan las curvaturas normales máxima y mínima, k_2 y k_1 respectivamente (ver la figura siguiente). Si el punto es parabólico, la dirección que determina el punto más cercano a P en la ID , es la dirección de k_2 y la del par de líneas que conforman la ID es la dirección de k_1 . Si el punto es hiperbólico, el vértice en cada una de las hipérbolas que conforman la ID determina una de las direcciones principales.

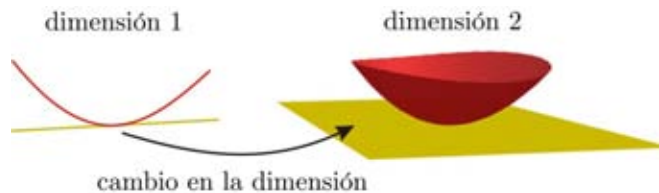
⁴⁶Tal vez porque en las cónicas una parábola es el caso frontera entre hipérbolas y elipses.



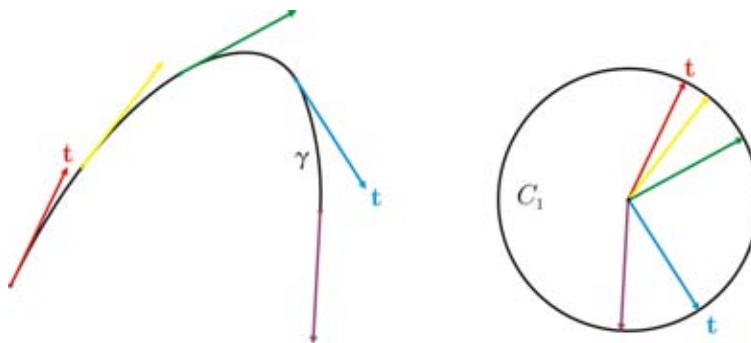
3.13. Curvatura a través de la aplicación de Gauss

Veremos a continuación una aplicación definida en la superficie que será de útil para explicar su curvatura.

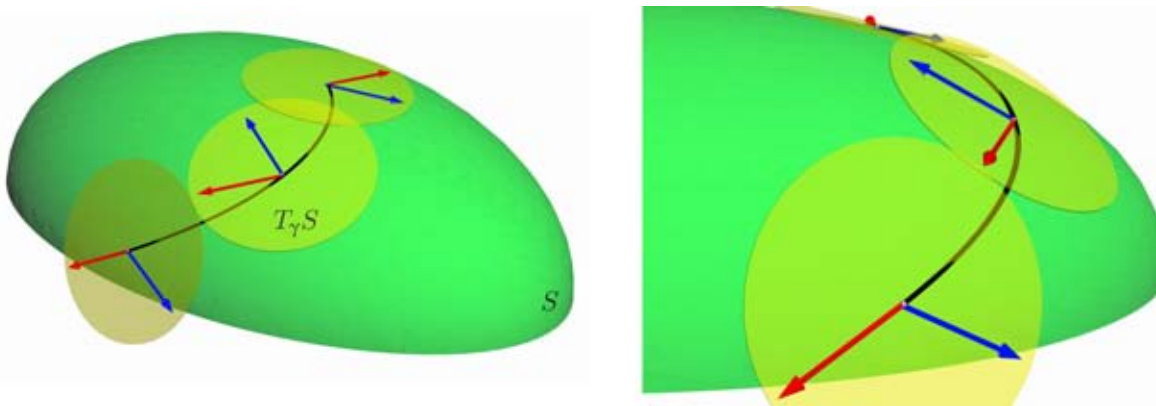
Recordamos que una manera de entender la curvatura de una curva es ver cómo varía su recta tangente mientras la recorremos. Hemos subido una dimensión en nuestro objeto de estudio (ver la siguiente figura); en lugar de curva (objeto de dimensión uno) tenemos ahora una superficie (dimensión dos) y en lugar de recta tangente a la curva (espacio tangente de dimensión 1), tendremos ahora un plano tangente (espacio tangente de dimensión 2).



Extender la idea de la variación de la recta tangente a las superficies, sería analizar ahora cómo varía el plano tangente $T_P S$ a la superficie al movernos en ella. ¿Cómo podemos ahora medir la variación de $T_P S$? En el caso de curvas, medíamos la variación de la recta tangente al movernos sobre la curva a partir de la variación de un vector unitario que la genera, el vector tangente.

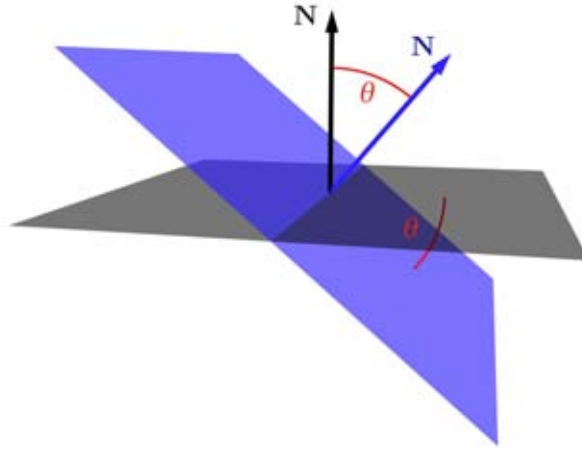


Ahora queremos medir la variación del plano tangente a la superficie. Si quisiéramos medir esta variación con un vector tangente, tendríamos problemas, pues ¿qué vector tangente de $T_P S$ escogeríamos? Tendríamos en cada plano tangente una infinidad de formas de escoger un vector tangente unitario, en la siguiente figura mostramos tres planos tangentes y algunos de los vectores que en ellos podríamos escoger.



Supongamos que sabemos cómo escogerlo, aún así, dicho vector no nos da información suficiente de $T_P S$, ya que no lo genera. Entonces tampoco obtendremos por este camino información de cómo es que varía $T_P S$.

Sigamos otro camino para analizar la variación de $T_P S$. Recordemos que un plano que pasa por el punto P queda determinado por la recta normal en P a dicho plano. De modo que la posición del plano tangente $T_P S$ queda determinada por la posición de su recta normal $N_P S$. Entonces al movernos por la superficie generaremos un movimiento de la recta $N_P S$ que nos dará información de la variación de $T_P S$.



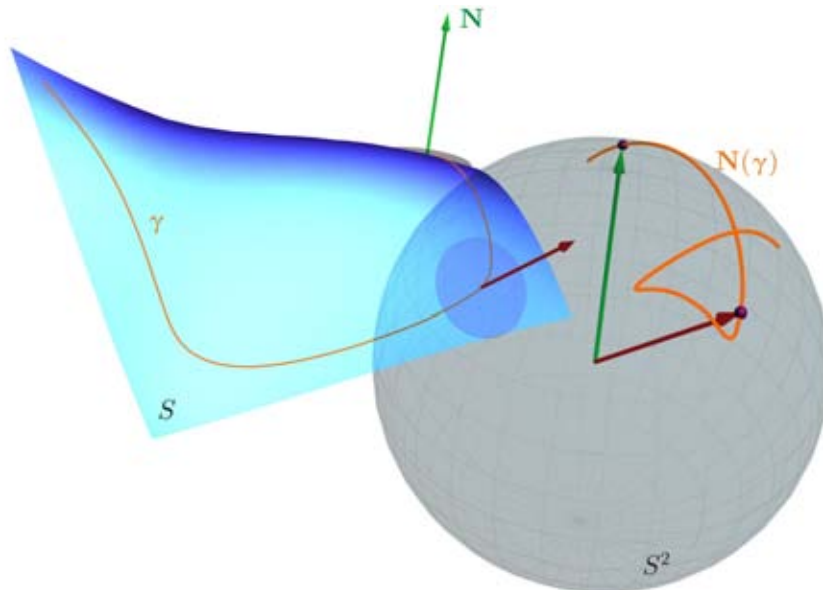
Podemos escoger⁴⁷ de dos maneras un vector normal a la superficie \mathbf{N} ; elijamos una de ellas para dar lugar a

Definición 23 la aplicación de Gauss⁴⁸, que es un mapeo

$$\mathbf{N} : S \rightarrow S^2$$

que manda los puntos de la superficie en puntos en la esfera S^2 .

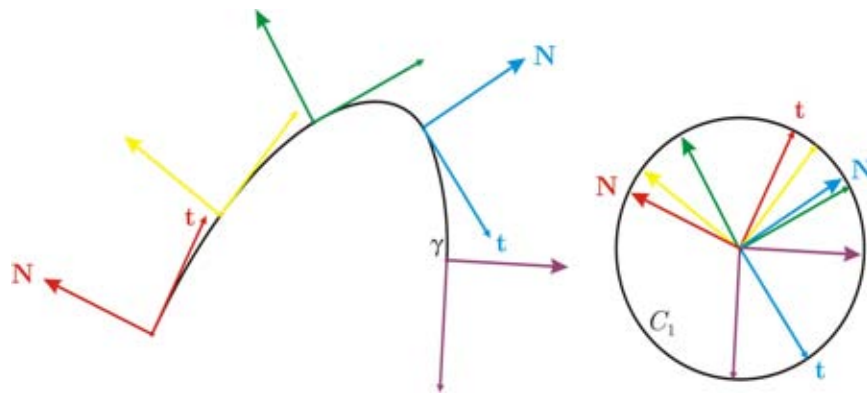
También podemos ver la aplicación de Gauss como un campo vectorial sobre la superficie, anclando sobre cada punto P el respectivo vector normal $\mathbf{N}(P)$. En la siguiente figura ilustramos (en tres perspectivas) dos formas de ver la aplicación de Gauss, como un campo normal en S y como su imagen en la esfera. Mostramos dos puntos de una curva contenida en S y su evaluación en la aplicación de Gauss, es decir, sus vectores normales \mathbf{N} . Entonces al movernos a lo largo de una curva γ generamos con la aplicación de Gauss un campo a lo largo de γ y una curva $\mathbf{N}(\gamma)$ en S^2 . Veremos que la imagen de la aplicación de Gauss tendrá información de cómo varía $T_P S$ al movernos en S .



Notamos que es posible dar una definición de curvatura de una curva plana que al ser llevada a superficies coincide con la idea de la aplicación de Gauss. La idea de medir la variación de la recta tangente (espacio tangente de una dimensión) a una curva plana a través de la variación de la recta $N_P S$ (que en este caso es el complemento ortogonal a $T_P S$ en \mathbb{R}^2) es equivalente a la idea de medir la variación de la recta tangente usando la indicatriz del vector tangente \mathbf{t} . Ambos vectores giran con rapidez angular igual a la curvatura de la curva (ver sección 1.14).

⁴⁷Hay superficies para las cuales no podemos hacer una elección global y continua del vector normal \mathbf{N} , por ejemplo la banda de Möbius. En estos casos definiríamos la aplicación de Gauss sólo de manera local, es decir, en una región adecuada de S que no puede extenderse a toda la superficie.

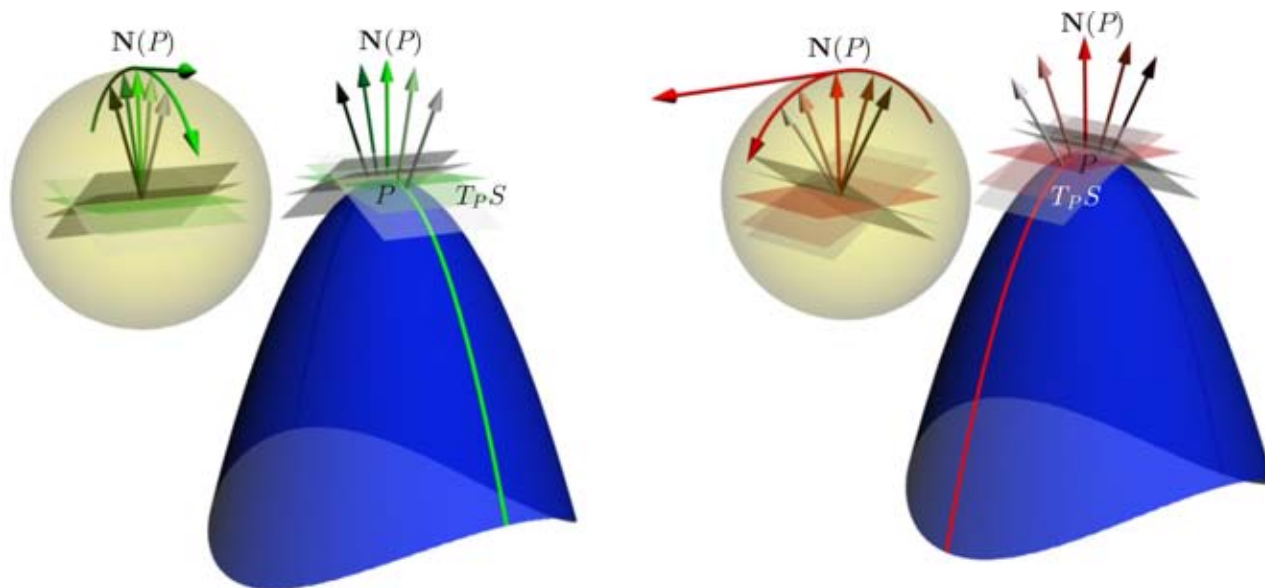
⁴⁸Gauss, Carl Friedrich (1777-1855), matemático, astrónomo y físico alemán.



En la figura mostramos que la rapidez angular con que gira el vector \mathbf{N} (que genera la recta $N_P\gamma$ normal a la curva γ) es igual a la rapidez angular con que gira el vector \mathbf{t} que es la curvatura de γ . Así que podemos definir la curvatura de γ como la rapidez con que varía $N_P\gamma$.

Entonces medir la variación del espacio tangente a través de la variación de su complemento ortogonal, la recta normal $N_P S$, es una idea que captura como se curvan no sólo las curvas planas, sino también las superficies $S \subset \mathbb{R}^3$ en el espacio euclideo tridimensional, y en general, las variedades de dimensión n contenidas en \mathbb{R}^{n+1} .

Ahora veamos cómo es la imagen de la aplicación de Gauss al movernos en la superficie. Habrá de nuevo una infinidad de formas de pasar por el punto P y a cada una le corresponde un movimiento del plano tangente. En la siguiente figura ilustramos una superficie y dos maneras distintas de pasar por el punto P , en cada una de ellas tenemos una velocidad del vector \mathbf{N} diferente lo que corresponde a dos velocidades de giro del plano tangente.

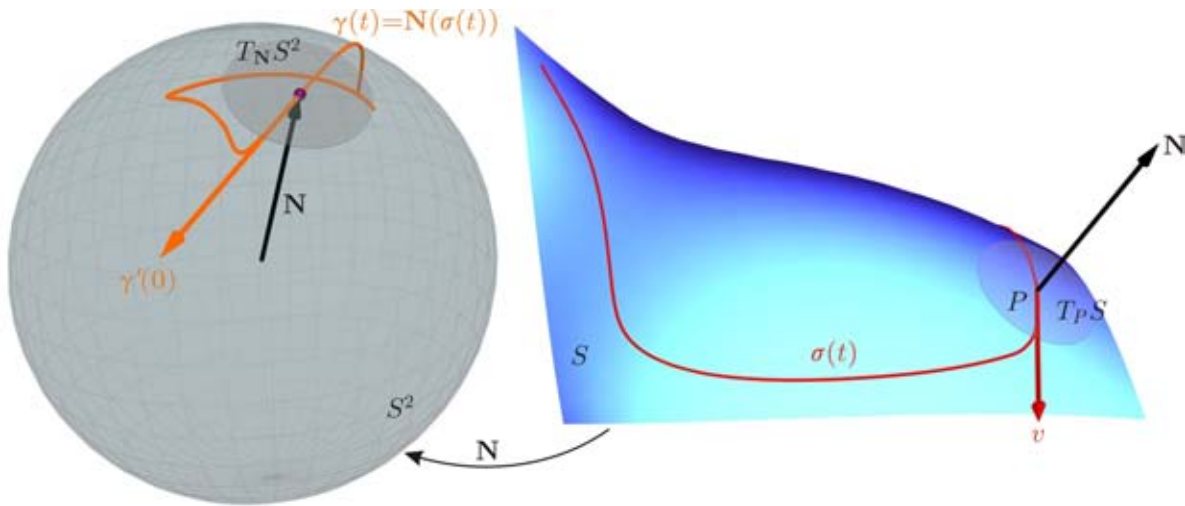


Tomemos una curva que en $t = 0$ pase por P , $\sigma(0) = P$, con velocidad v , $\sigma'(0) = v$. Al evaluar la aplicación de Gauss en los puntos de $\sigma(t)$ obtenemos la curva en S^2 :

$$\gamma(t) = \mathbf{N}(\sigma(t)).$$

La velocidad de γ en $t = 0$ es

$$w = \gamma'(0) = [\mathbf{N} \circ \sigma]'(0).$$



Para cada velocidad con que pasemos por P hay una velocidad con la que pasamos por $\mathbf{N}(P)$ dada por la diferencial de la aplicación de Gauss

$$d\mathbf{N}_P : T_P S \rightarrow T_{\mathbf{N}(P)} S^2,$$

que a cada vector v en $T_P S$ le asigna el vector

$$w = \gamma'(0) = d\mathbf{N}|_P(v) = D\mathbf{N}|_P \sigma'(0)$$

en el plano tangente $T_{\mathbf{N}(P)} S^2$. Como $T_P S$ y $T_{\mathbf{N}(P)} S^2$ son paralelos, podemos identificarlos y ver a $d\mathbf{N}_P$ como una aplicación en el plano tangente

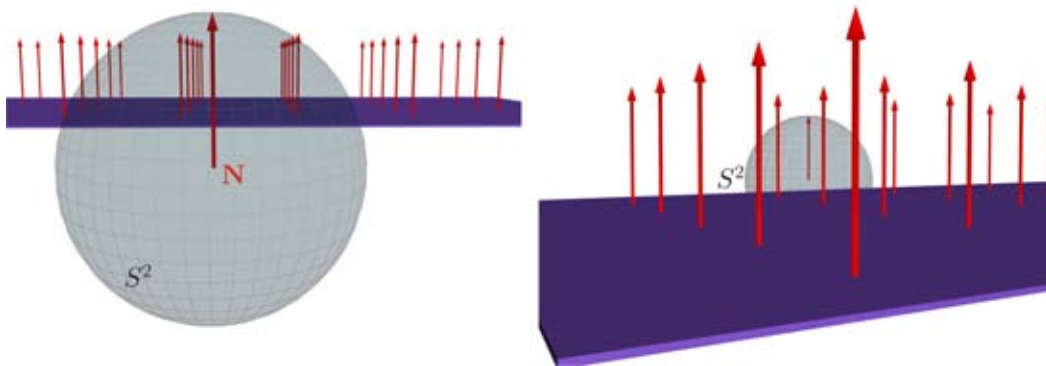
$$d\mathbf{N}_P : T_P S \rightarrow T_P S.$$

En lo que resta de esta sección veremos que la aplicación de Gauss, a través de su diferencial, contiene información de cómo se curva la superficie. A partir de su diferencial $d\mathbf{N}_P$ podemos obtener la curvatura normal de cada sección normal en P , con las que (por lo visto en la sección 3.2) determinamos la manera en que se curva la superficie cerca del punto P .

Veamos algunos ejemplos para familiarizarnos con la aplicación de Gauss y su diferencial.

Ejemplo 24 *El Plano*

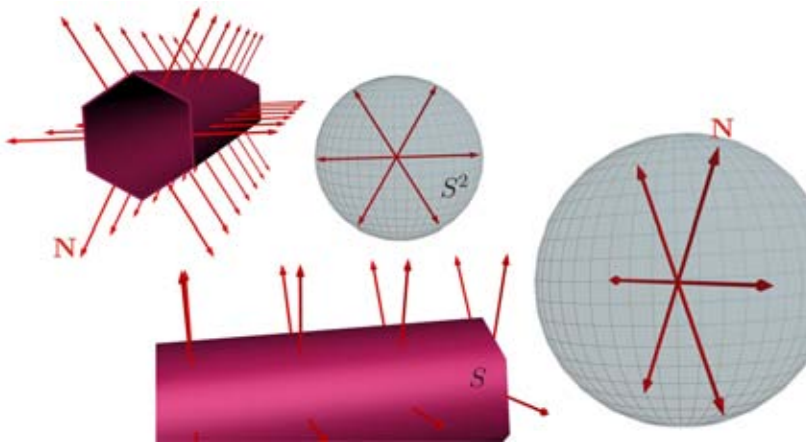
El vector normal a un plano es el mismo en todos los puntos por lo que la imagen consta de un solo punto de S^2 .



Así que no importa cuál sea el punto P del plano, ni la velocidad v con la que pasemos por P viajando por $\sigma(t)$, la imagen de $\mathbf{N}(\sigma(t))$ será sólo un punto, no se mueve, de modo que su velocidad será siempre cero, lo que está de acuerdo con la nula variación del vector normal al plano. En otras palabras, la diferencial de la aplicación de Gauss $d\mathbf{N}$ aplica (colapsa) a todo $T_P S$ en el vector cero.

Ejemplo 25 *Un ángulo diédrico*

En las superficies que son formadas por caras planas la aplicación de Gauss es constante en el interior de cada cara mientras que en las aristas comunes entre dos caras no está bien definida. Además no hay manera de extender la aplicación de Gauss a las aristas de manera continua ya que brinca súbitamente el vector normal en ellas.



Ejemplo 26 *Cilindro.*

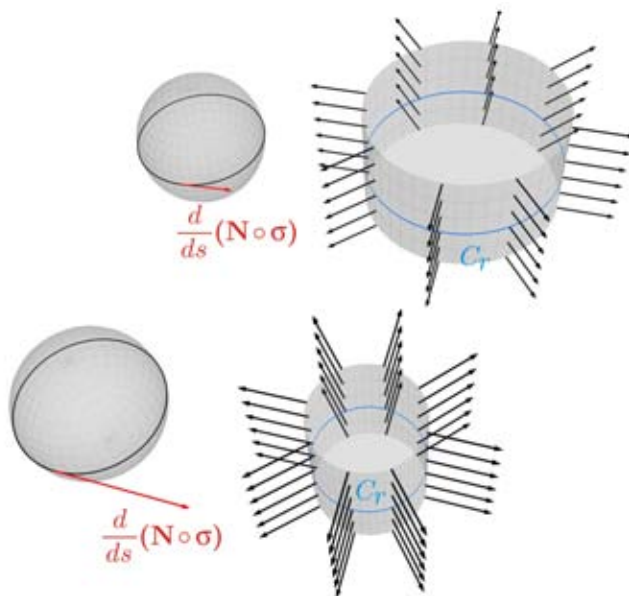
Sea S un cilindro que tenga una circunferencia base C_r . El vector normal \mathbf{N} en cualquier punto del cilindro está contenido en una circunferencia máxima C en S^2 , contenida a su vez en un plano paralelo al plano que contiene a C_r (ver la siguiente figura). La diferencial de la aplicación de Gauss $d\mathbf{N}$ no será inyectiva ya que la imagen de la esfera bajo la aplicación de Gauss es una circunferencia. Para ver cómo es $d\mathbf{N}$ basta evaluarla en una base de $T_P S$. En otras palabras, hay que tomar un par de curvas σ y γ que pasen por P ($\sigma(0) = \gamma(0) = P$) de tal forma que sus velocidades $\sigma'(0)$ y $\gamma'(0)$ generen a $T_P S$, para después mapear dichas curvas a S^2 y ver cuál es su velocidad al pasar por $\mathbf{N}(P)$. Escogamos un par de vectores unitarios, uno tangente a C_r y el otro ortogonal al primero como las velocidades $\sigma'(0)$ y $\gamma'(0)$. Tomemos una parametrización $\sigma(s)$ de C_r . La velocidad de la curva $\mathbf{N}(\sigma)$ será mayor en cilindros de menor radio (ver la siguiente figura). Para calcular la velocidad de $\mathbf{N}(\sigma)$ notamos que C_r es una geodésica del cilindro, por lo que, si escogemos el vector normal al cilindro \mathbf{N} apuntando hacia afuera tendremos la relación

$$\mathbf{N}(\sigma) = -\mathbf{n},$$

de donde obtenemos que

$$d\mathbf{N}|_P(\sigma') = \frac{d}{ds}(\mathbf{N} \circ \sigma) = -\frac{d\mathbf{n}}{ds} = k\mathbf{t} = \frac{1}{r}\mathbf{t}$$

la rapidez con que se mueve $\mathbf{N}(\sigma)$ viene dada por la curvatura de C_r .



Si $r \rightarrow \infty$, el movimiento de $\mathbf{N}(\sigma(s))$ en S^2 se volvería muy lento y en el límite tendería a no moverse, lo que concuerda con nuestra percepción visual: al crecer el radio, a partir de cierto momento no distinguimos al cilindro de un plano. Por otro lado, si $r \rightarrow 0$, la rapidez al pasar por $\mathbf{N}(P)$ se hará tan grande como se quiera y, en el límite, cuando el cilindro degenera en una línea, será infinita.

Ahora tomemos $\gamma(s)$ una recta generatriz del cilindro tal que su velocidad al pasar por P sea ortogonal σ' . El vector normal al cilindro a lo largo de γ es constante, es decir $\mathbf{N}(\gamma)$ no se mueve en S^2 , por lo que

$$d\mathbf{N}|_P(\gamma') = \frac{d}{ds}(\mathbf{N} \circ \gamma) = 0$$

Entonces $d\mathbf{N}_P$ es una transformación lineal no inyectiva, es decir, colapsa a $T_P S$ en una dirección y en la dirección perpendicular expande (o contrae) en un factor determinado por la curvatura $k_r = \frac{1}{r}$ de C_r . Si tomamos a $\{u_1, u_2\}$ como base de $T_P S$, con $u_1 = \sigma'(0)$ y $u_2 = \gamma'(0)$, entonces, $d\mathbf{N}_P$ toma la forma

$$d\mathbf{N}_P (au_1 + bu_2) = \frac{a}{r}u_1.$$

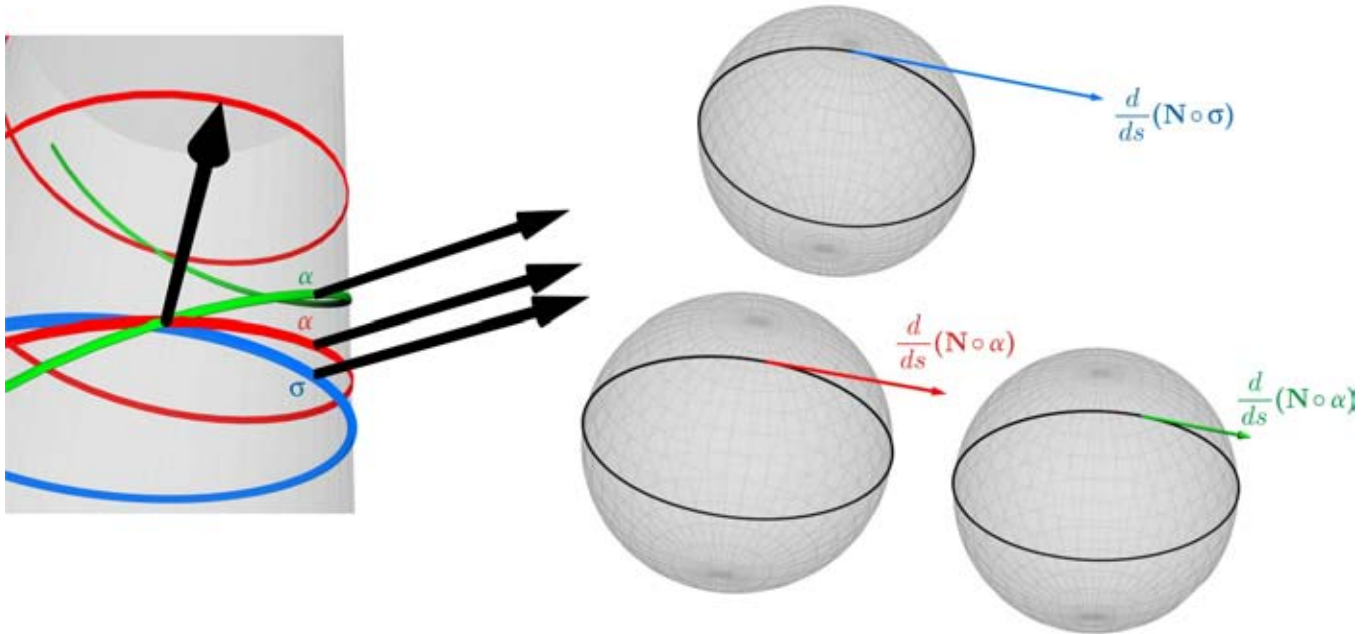
Por la fórmula anterior, si pasamos por P con curvas α en direcciones distintas a las de σ y γ , es decir, tales que

$$\alpha'(0) = au_1 + bu_2, \text{ con } a, b \neq 0;$$

entonces será la componente de α' en σ' la causante de la velocidad $\frac{d}{ds}(\mathbf{N} \circ \alpha)$; si θ es el ángulo que forma α' con σ' tendremos que

$$\left\| \frac{d}{ds}(\mathbf{N} \circ \alpha) \right\| = \left| \frac{a}{r} \cos \theta \right|.$$

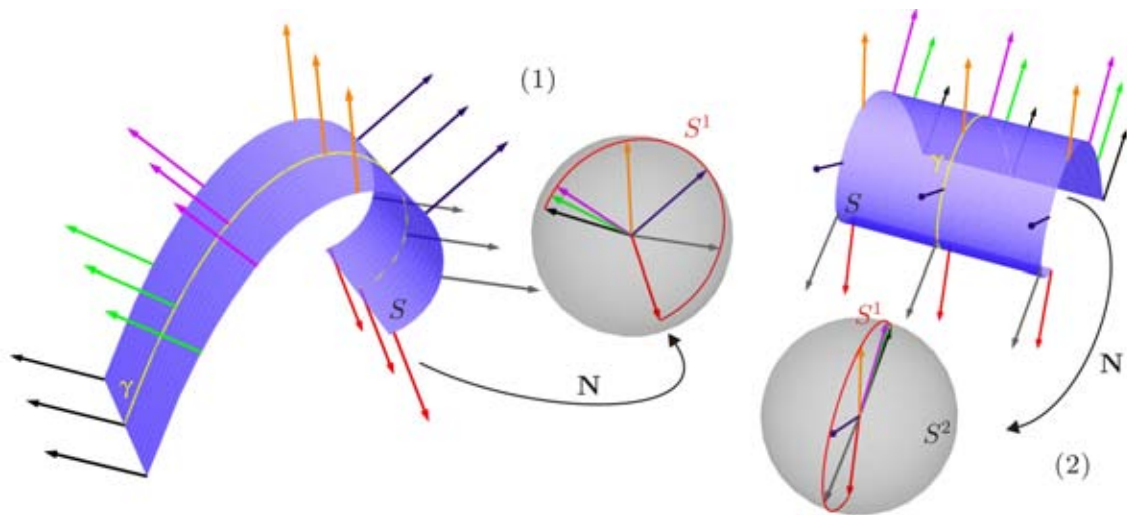
En la siguiente figura ilustramos la idea anterior, hemos tomado un par de hélices α , además de la circunferencia base $\sigma = C_r$.



Cuando $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ la hélice $\alpha(s)$ degenera en una recta, el vector normal \mathbf{N} deja de moverse y su imagen en S^2 degenera en el punto $\mathbf{N}(P)$.

Ejemplo 27 *Cilindros con base arbitraria*

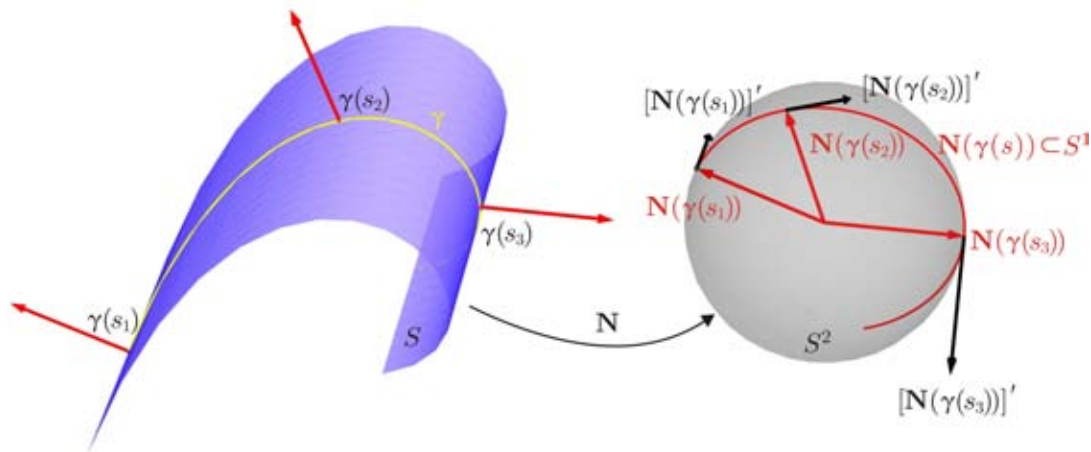
Tomemos ahora una hoja de papel y formemos un cilindro $S = \gamma \times \mathbb{R}$, donde γ es la base del cilindro. La aplicación de Gauss de S será de nuevo un arco de circunferencia, de modo que la diferencial de la aplicación de Gauss dN_P será no inyectiva.



La curva γ será geodésica del cilindro, de modo que los vectores normal al cilindro \mathbf{N} y a la curva \mathbf{n} serán colineales. Si recorremos S a lo largo de γ con rapidez unitaria, obtendremos bajo la aplicación de Gauss una curva $\mathbf{N}(\gamma(s))$ en S^2 que tendrá rapidez variable; será mayor donde más dobles el papel, es decir, donde más se curve γ . Si escogemos el vector normal a la superficie $\mathbf{N} = -\mathbf{n}$ la velocidad de la curva $\mathbf{N}(\gamma)$ estará dada por

$$[\mathbf{N}(\gamma(s))]' = d\mathbf{N}|_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) = -\frac{d\mathbf{n}}{ds} = k(s)\mathbf{t}$$

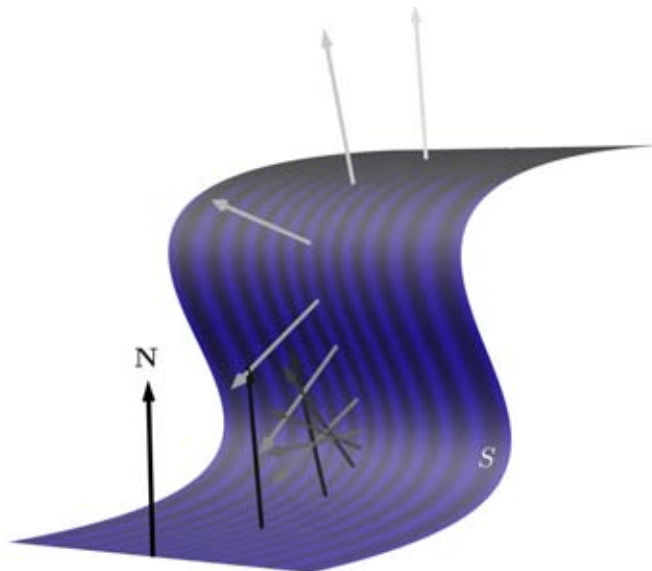
donde k es la curvatura de la base del cilindro γ . En la siguiente figura mostramos la base del cilindro $\gamma \subset S$, tres puntos $\gamma(s_i)$ en ella con diferente curvatura, la imagen de γ bajo la aplicación de Gauss $\mathbf{N}(\gamma) \subset S^2$, y su velocidad al pasar por $\mathbf{N}(\gamma(s_i))$. La velocidad va creciendo ya que la curvatura de γ va aumentando al pasar de $\gamma(s_1)$ a $\gamma(s_3)$.



dN_P será de nuevo una transformación lineal no inyectiva, que colapsa el plano tangente $T_P S$ en una recta del plano tangente de la esfera $T_{\mathbf{N}(P)} S^2$. Dicha recta será estirada un factor que es igual a la curvatura k de la curva paralela a γ que pasa por P . Si tomamos $\{u_1, u_2\}$ como base de $T_P S$, con $u_1 = \gamma'_P(s)$ y $u_2 = \gamma'_P(s)^\perp$, entonces, dN_P toma la forma

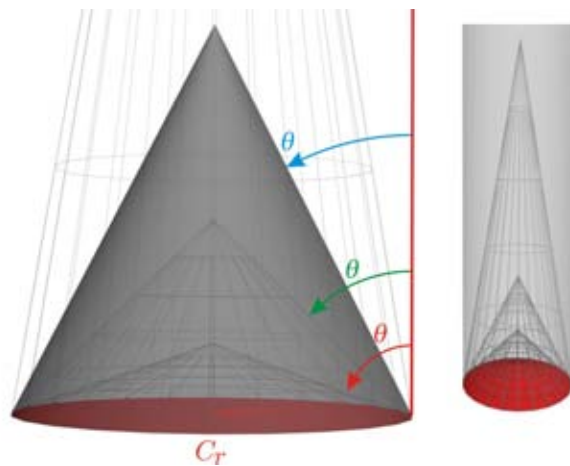
$$dN_P(au_1 + bu_2) = aku_1.$$

Notamos que hay algunas maneras de doblar el papel en las que la imagen de la aplicación de Gauss es un arco de circunferencia recorrido en ambos sentidos. La diferencial de la aplicación de Gauss en algunos puntos colapsará el plano en una recta que a su vez es estirada en un factor $k(s)$ negativo. En los puntos de inflexión de γ , donde su curvatura se anula, $k(s) = 0$, la diferencial dN_γ se convierte en la transformación lineal cero, es decir, colapsa todo el plano tangente $T_\gamma S$ en el cero.

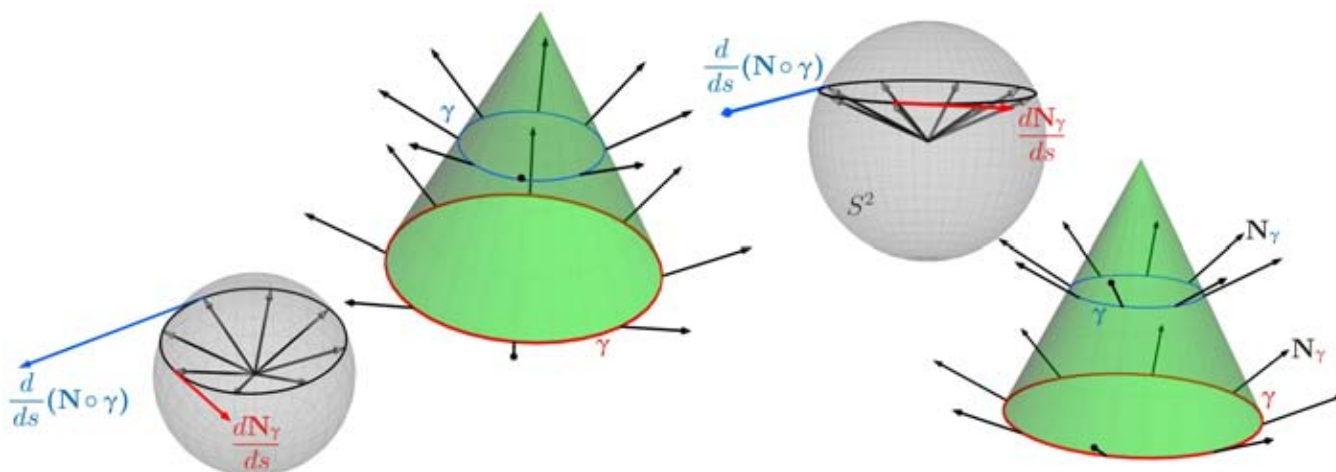


Ejemplo 28 *Un Cono*

Tomemos un cono que tenga una circunferencia base C_r y que su generatriz forme un ángulo θ con la vertical (ver la siguiente figura).



¿Cómo es la imagen de la aplicación de Gauss para un cono? Vuelve a ser una circunferencia, pero ahora no es una circunferencia máxima en la esfera unitaria, sino un paralelo.



Si nos movemos en el cono con rapidez unitaria, dando una vuelta a lo largo de dos circunferencias horizontales, entonces sus imágenes bajo la aplicación de Gauss darán una vuelta a lo largo de un paralelo en S^2 . El movimiento que corresponde a la circunferencia de menor radio en el cono tardará menos en recorrer el paralelo en S^2 . En detalle, sea $\gamma(s)$ una parametrización con rapidez unitaria de una circunferencia horizontal en cono C_r , la rapidez con que la curva imagen $\mathbf{N} \circ \gamma$ recorre el paralelo en S^2 será constante y está dada por el cociente de la distancia que recorre $\mathbf{N} \circ \gamma$ entre el tiempo que requiere para hacerlo:

$$\left\| \frac{d}{ds} (\mathbf{N} \circ \gamma) \right\| = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{\text{Perímetro paralelo}}{\text{Perímetro de } \gamma} = \frac{2\pi \cos \theta}{2\pi r} = \frac{\cos \theta}{r}.$$

Si damos vueltas en circunferencias tan cercanas como queramos al vértice del cono tendremos que $\left\| \frac{d}{ds} (\mathbf{N} \circ \gamma) \right\| \rightarrow \infty$, lo que significa que la posición del plano tangente $T_P S$ varía con una velocidad tan grande como se quiera. La diferencial de la aplicación de Gauss será esencialmente la misma para los puntos en las circunferencias C_r , no será inyectiva, colapsará $T_P S$ sobre una recta seguido de un estiramiento. Dado un punto P en el cono hay una circunferencia horizontal $\gamma(s) = C_r$ que pasa por P , si tomamos $\{u_1, u_2\}$ como base de $T_P S$, con $u_1 = \gamma'(s)$ y $u_2 = \gamma'(s)^\perp$, entonces, $d\mathbf{N}_P$ toma la forma

$$d\mathbf{N}_P (au_1 + bu_2) = \frac{a \cos \theta}{r} u_1$$

El caso general

Hasta ahora hemos analizado superficies que tienen una aplicación de Gauss que transforma una vecindad del punto P en S en un segmento de curva en S^2 que pasa por el punto $\mathbf{N}(P)$. Es decir la aplicación de Gauss y su diferencial son no inyectivas (colapsan). Analizaremos a continuación el caso general en el cual la diferencial de la aplicación de Gauss ya no perderá la inyectividad. Consideremos nuestra superficie $S = G_{f_S} = \text{gráf}(f_S)$ como la gráfica de la función

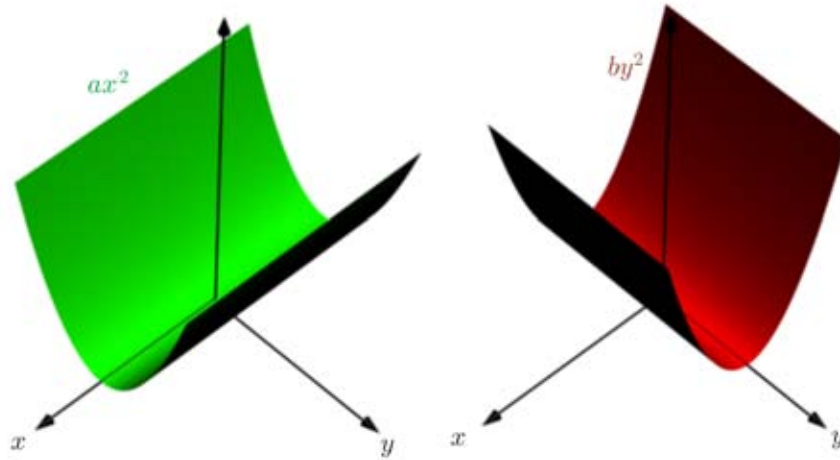
$$f_S : T_P S \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ahora consideremos la cuádrica f que mejor aproxima a f_S , es decir, los términos de grado dos del polinomio de Taylor de f_S . Tomando en $T_P S$ las coordenadas convenientes y expresando a f en términos de ellas llegamos a que

$$f(x, y) = ax^2 + by^2.$$

En otras palabras, podemos aproximar a G_{f_S} mediante $G_f = \text{gráf}(f)$ dejando un error de orden mayor o igual a tres⁴⁹ que no tomaremos en cuenta ya que no tiene influencia⁵⁰ sobre la aplicación de Gauss. En consecuencia, los resultados que obtengamos para la superficie que determina G_f serán válidos para superficies en general.

Tomemos como superficie S la gráfica G_f de $f(x, y)$. Haremos el análisis en el punto $(0, 0, 0) = \mathbf{0}$. Si a o b son iguales a cero entonces f será un cilindro parabólico y entonces \mathbf{N} y $d\mathbf{N}$ no serán inyectivas; si $f(x, y) = ax^2$ entonces $d\mathbf{N}$ es una función lineal que apachurra el plano en el eje x y si $f(x, y) = by^2$ entonces $d\mathbf{N}$ apachurra el plano en el eje y .

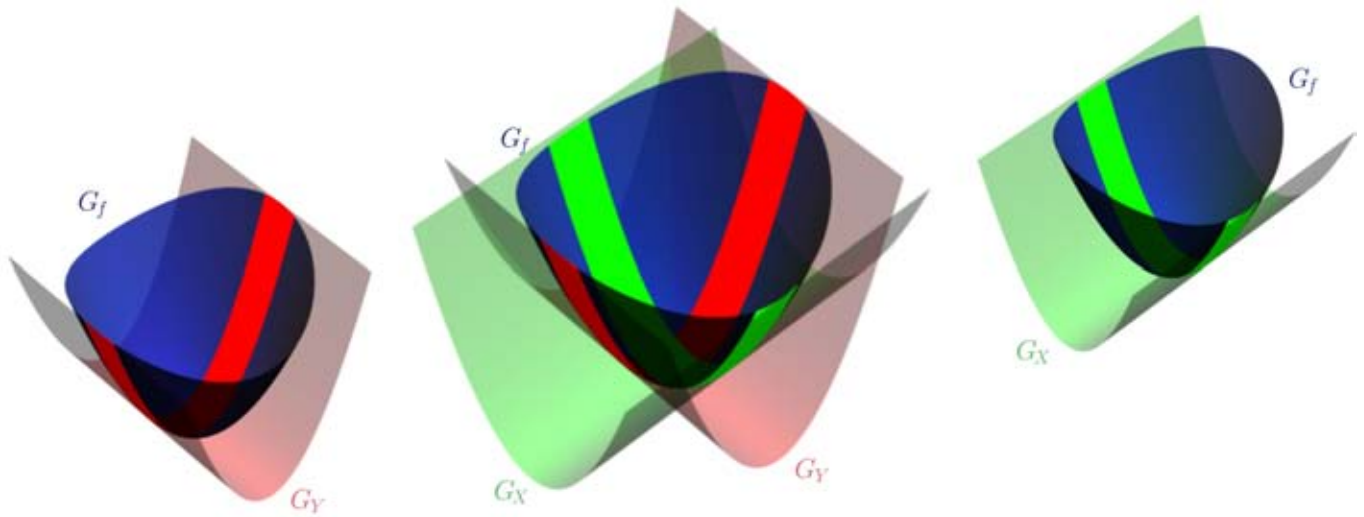


Si a y b son distintos de cero, podemos ver a $f(x, y) = ax^2 + by^2$ como la suma de dos cilindros parabólicos:

$$f(x, y) = X(x, y) + Y(x, y)$$

$$\text{donde } X(x, y) = ax^2 \text{ y } Y(x, y) = by^2.$$

Sean γ_X y γ_Y las intersecciones de G_f con las gráficas $G_X = \text{gráf}(X)$ y $G_Y = \text{gráf}(Y)$ de los cilindros parabólicos (ver siguiente figura). G_f comparte planos tangentes a lo largo de γ_X y γ_Y con G_X y G_Y respectivamente, de modo que, al viajar a lo largo de γ_X los planos tangentes de G_f varían de la misma forma que los planos tangentes de G_X y de manera análoga para γ_Y . Por lo anterior, es equivalente analizar el comportamiento de la aplicación de Gauss a lo largo de las curvas γ_X y γ_Y en G_f , que hacerlo en G_X y G_Y respectivamente.



⁴⁹Esto significa que $f_S = f + e$, donde la función $e(x, y)$ es tal que

$$0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow \mathbf{0}} \frac{e(x, y)}{\|(x, y)\|^3} < \infty,$$

lo que significa que en una vecindad infinitesimal del origen e es un polinomio en dos variables de grado 3 o mayor.

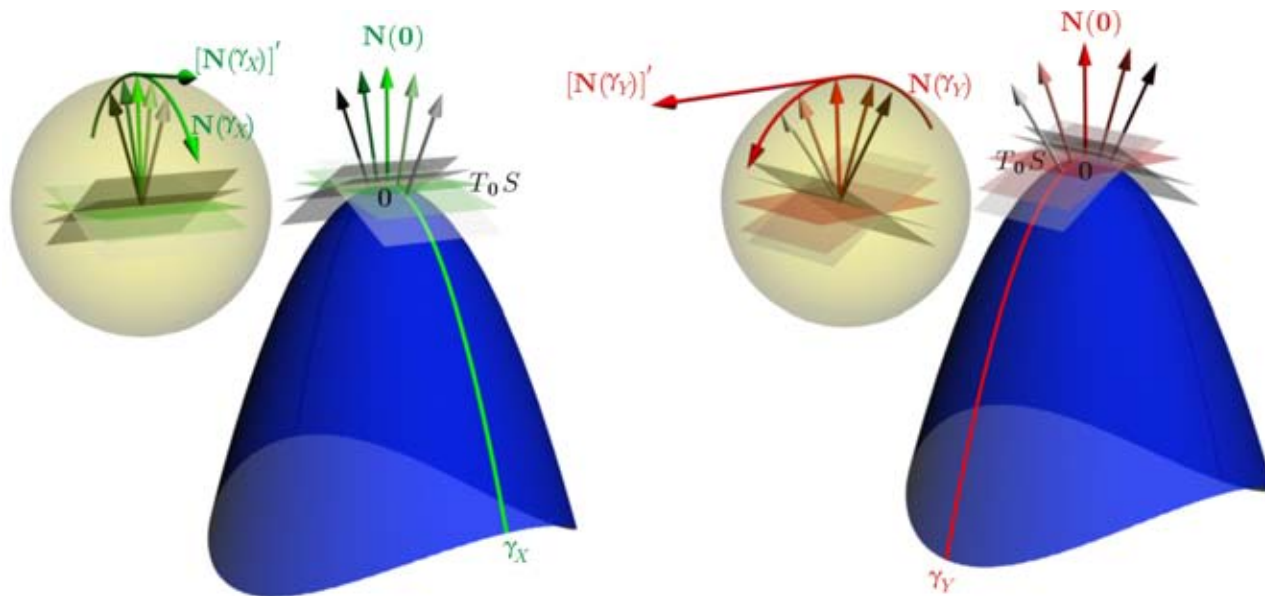
⁵⁰Esto porque al pasar por $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ viajando a lo largo de una curva γ contenida en la gráfica Ge de $e(x, y)$, con velocidad $\gamma' \in T_P Ge_0$; la aplicación de Gauss mapea a γ en una curva $\mathbf{N}(\gamma) \subset S^2$ tal que su velocidad $\mathbf{N}(\gamma)'$ al pasar por $\mathbf{N}(\mathbf{0})$ es cero. En otras palabras, la diferencial de la aplicación de Gauss en el punto $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ de la gráfica de la función $e(x, y)$ colapsa $T_P Ge_0$ en el cero de $T_P Ge_0$. De modo que no contribuye a la diferencial de la aplicación de Gauss en el mismo punto cuando es considerado como punto de G_{f_S} .

En azul mostramos la gráfica G_f del paraboloido $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ y las gráficas G_X y G_Y de los cilindros parabólicos $X(x, y) = x^2$ y $Y(x, y) = 2y^2$, en verde y rojo, respectivamente. Se muestran dos franjas donde el paraboloide se parece mucho a los cilindros, en ellas las aplicaciones de Gauss para el paraboloido y los cilindros serán muy parecidas, siendo idénticas en las intersecciones γ_X y γ_Y .

Si imaginamos que pasamos por el origen viajando a lo largo de las curvas γ_X y γ_Y , con velocidades $\gamma'_X = e_1 = (1, 0, 0)$ y $\gamma'_Y = e_2 = (0, 1, 0)$, respectivamente, entonces sus imágenes bajo la aplicación de Gauss \mathbf{N} serán dos curvas $\mathbf{N}(\gamma_X)$ y $\mathbf{N}(\gamma_Y)$ que (por lo visto en el ejemplo 27) pasan por el polo norte⁵¹ de la esfera con velocidades

$$[\mathbf{N}(\gamma_X)]' = k_X e_1 \text{ y } [\mathbf{N}(\gamma_Y)]' = k_Y e_2,$$

respectivamente, donde k_X y k_Y son las curvaturas en el origen de γ_X y γ_Y .



Tomemos una curva γ cuya velocidad al pasar por el origen no sea paralela a los ejes x o y ,

$$\gamma' = \gamma'(0) = (r, s, 0), \text{ con } r, s \neq 0$$

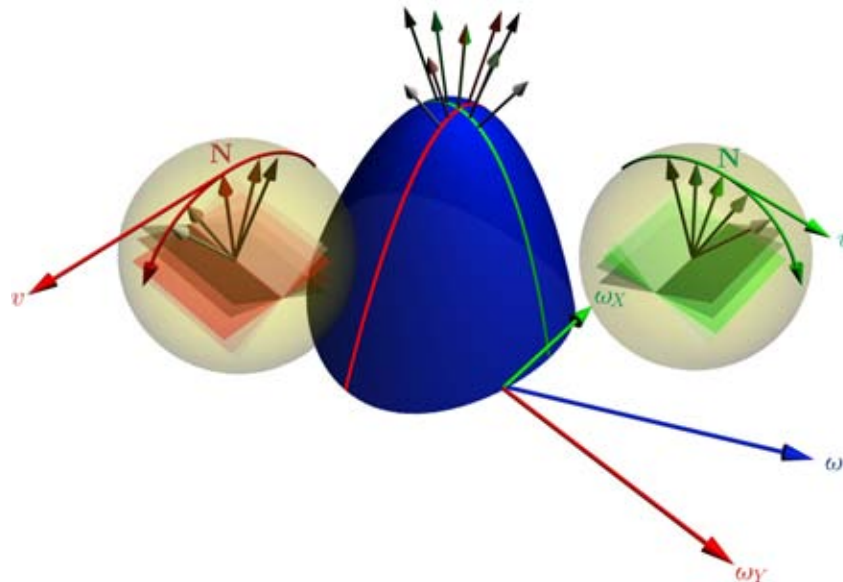
No podremos aplicar la idea de que la superficie G_f a lo largo de γ es como alguno de los cilindros parabólicos G_X o G_Y . Ahora tendrá la influencia de cada uno de ellos ya que f es la suma de X y Y . Entonces la variación de $T_P S$ a lo largo de γ tendrá una componente debida a G_X y otra debida a G_Y . Al pasar por el origen cada cilindro induce una velocidad angular en $T_P S$, una de ellas alrededor del eje x y la otra alrededor del eje y . La velocidad angular con que gira el vector normal \mathbf{N} a G_f , o equivalentemente, la velocidad angular con que gira $T_P S$, será la suma vectorial de las velocidades que inducen los cilindros G_X y G_Y . Veamos esto más en detalle la idea anterior apoyándonos en la fórmula de la velocidad angular $v = \omega \times r$. Al pasar por el origen moviéndonos a lo largo de γ , el plano tangente en el origen, $T_0 S$, va girando simultáneamente alrededor del eje y y del eje x con velocidades angulares dadas por la fórmula $\omega = r \times v$:

$$\omega_X = r \times v = \mathbf{N} \times r (k_X e_1)$$

$$\omega_Y = r \times v = \mathbf{N} \times s (k_Y e_2)$$

respectivamente.

⁵¹En las figuras que siguen reflejaremos el paraboloido en el plano xy para apreciar mejor el movimiento del vector \mathbf{N} y de $T_P S$.



Usando el carácter vectorial de la fórmula $v = \omega \times r$ hallamos que la velocidad angular con la que gira T_0S al pasar por el origen es igual a la suma de las dos velocidades angulares anteriores:

$$\omega = \omega_X + \omega_Y = \mathbf{N} \times (rk_X e_1 + sk_Y e_2);$$

El vector ω está contenido en el eje instantáneo de giro de T_0S , que es una recta contenida en T_0S , es decir, en el plano xy y su dirección dependerá de (a, b, r, s) . La velocidad $[\mathbf{N} \circ \gamma]'(0)$ con que se mueve el vector normal será perpendicular al eje instantáneo de giro y está dada por:

$$[\mathbf{N} \circ \gamma]'(0) = \omega \times \mathbf{N}$$

Podríamos pensar que ω siempre es perpendicular al vector γ' , pero esto no es así, como se puede ver en la penúltima figura. Por lo regular estará desviado de la dirección en el plano xy perpendicular a γ' , hacia el eje x si $|a| > |b|$ y hacia el eje y si $|b| > |a|$.

Si ω es perpendicular a γ' entonces $[\mathbf{N} \circ \gamma]'$ tendrá la misma dirección que γ' , es decir, γ' será un vector propio de la diferencial de la aplicación de Gauss. Para que γ' sea vector propio de la diferencial de la aplicación de Gauss necesitamos que se dé una de las situaciones siguientes:

1. r o s son cero en $\gamma' = (r, s, 0)$; es decir, γ' coincide con alguna de las direcciones principales (caso que ya analizamos) y los valores propios serán las curvaturas mínima y máxima k_1 y k_2 , respectivamente.
2. $a = b$; en este caso la superficie G_f tiene simetría de rotación, es un paraboloides circular y entonces todos los vectores en T_0S son vectores propios de $d\mathbf{N}_0$.

3.14. Formas de la diferencial de la aplicación de Gauss y curvatura gaussiana

Tomemos una base ortonormal $\{u_1, u_2\}$ de $T_P S$ donde u_1 y u_2 son vectores unitarios en las direcciones principales de S en P . Todo vector en $T_P S$ se puede expresar como

$$v = xu_1 + yu_2 = (x, y)$$

La diferencial de la aplicación de Gauss es una transformación lineal $d\mathbf{N} : T_P S \rightarrow T_P S$ tal que:

1. Es la constante cero si S es localmente plana. Su expresión es

$$d\mathbf{N}_P(v) = \mathbf{0};$$

como en el caso de un plano o en superficies que se peguen mucho a su plano tangente como la silla del mono⁵².

2. Apachura a $T_P S$ en una recta (paralela al vector u_2)

$$d\mathbf{N}_P(v) = (0, k_2 y);$$

si S es localmente como un cilindro.

⁵²Esta superficie es la gráfica de la función

$$g(r, \theta) = r^3 \sin 3\theta$$

3. Expande o contrae⁵³ mediante una homotecia a $T_P S$

$$d\mathbf{N}_P(v) = k_1 v = k_2 v;$$

si S es localmente como una esfera.

4. Expande o contrae en un factor $k_1 > 0$ a lo largo de la dirección de u_1 y en un factor $k_2 > k_1 > 0$ a lo largo de la dirección de u_2 , si S es localmente como un paraboloides elíptico. Su expresión es:

$$d\mathbf{N}_P(v) = (k_1 x, k_2 y), \text{ con } k_2 > k_1 > 0;$$

tiene un par de vectores propios, que coinciden con las direcciones principales, con valores propios $k_2 > k_1 > 0$.

5. Expande o contrae $T_P S$ en un factor negativo⁵⁴, $k_1 < 0$, a lo largo de una de las direcciones principales, y en un factor $k_2 > 0$ a lo largo de la otra, si S es localmente como una silla de montar. Su expresión es:

$$d\mathbf{N}_P(v) = (k_1 x, k_2 y), \text{ con } k_1 < 0 < k_2;$$

tiene un par de vectores propios, que coinciden con las direcciones principales, con valores propios $k_1 < 0 < k_2$. En este caso $d\mathbf{N}$ invierte la orientación de $T_P S$.

Conclusión 29 *Notamos que en todos los casos la curvatura gaussiana de la superficie en el punto P*

$$k_P = k_1 k_2$$

puede ser interpretada como el factor de agrandamiento de áreas de la diferencial de la aplicación de Gauss, es decir, su determinante en el punto

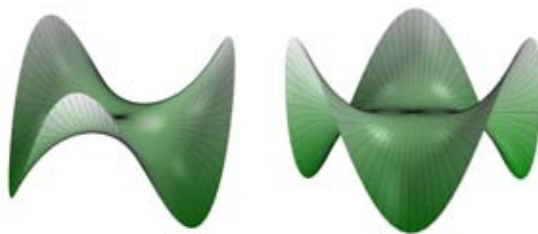
$$k_P = \det d\mathbf{N}_P.$$

Ilustramos la idea anterior con el siguiente

Ejemplo 30 *La esfera S_r^2*

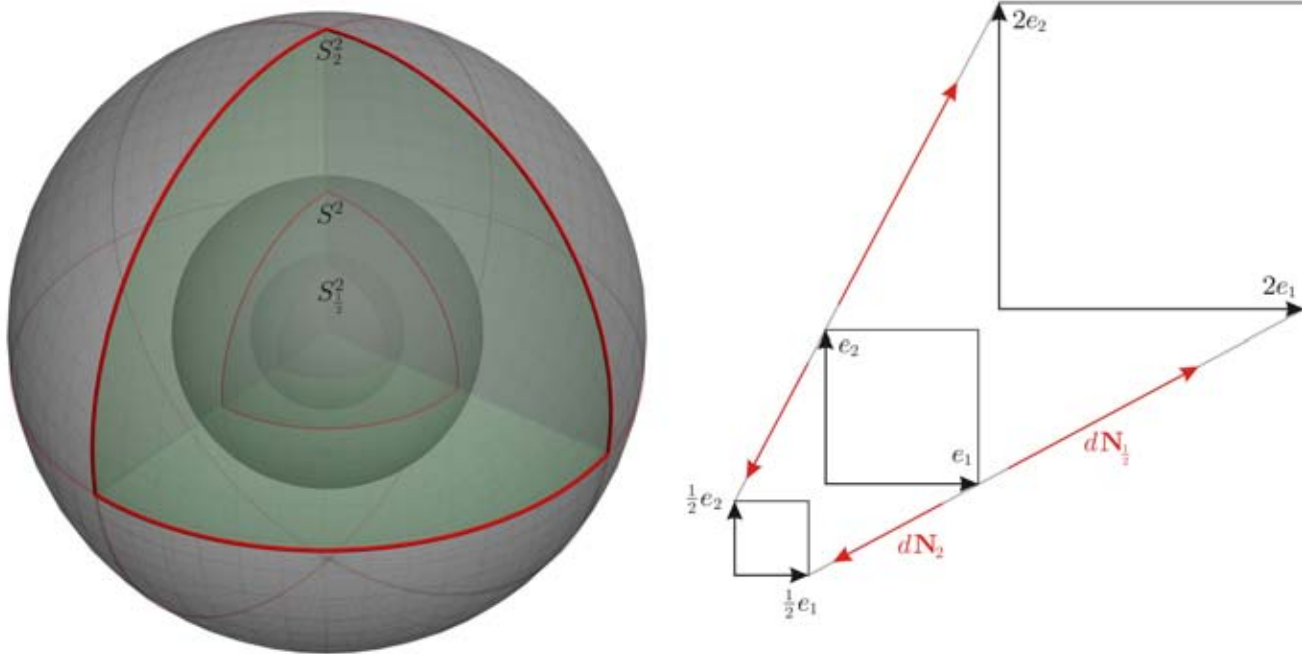
Tomemos un par de esferas $S_{\frac{1}{2}}^2$ y S_2^2 de radios $\frac{1}{2}$ y 2. La imagen bajo la aplicación de Gauss en los dos casos es la esfera unitaria S^2 , sin embargo en el primer caso el área se hace cuatro veces mayor, y en el segundo cuatro veces menor (ver la siguiente figura):

$$A\left(S_{\frac{1}{2}}^2\right) = 4\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \xrightarrow{\mathbf{N}} A(S^2) = 4\pi \xleftarrow{\mathbf{N}} 4\pi (2)^2 = A(S_2^2)$$



⁵³dependiendo si $k_i > 1$ o $k_i \in (0, 1)$

⁵⁴Expande o contrae un factor $-k_1 > 0$ y después refleja respecto al origen.



Los determinantes de la aplicación de Gauss son

$$\det dN_{\frac{1}{2}} = 4 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{r^2}$$

$$\det dN_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{(2)^2} = \frac{1}{r^2}$$

para $S_{\frac{1}{2}}^2$ y S_2^2 respectivamente.

3.15. La variación de $T_P S$ a través del gradiente y las curvas de nivel

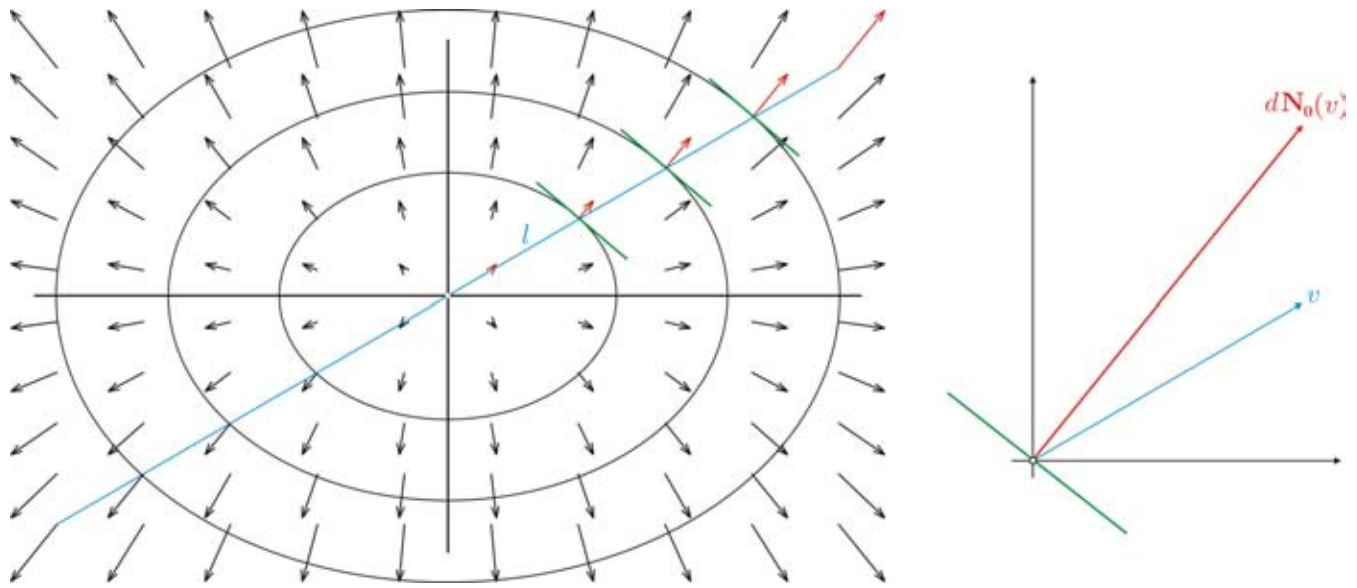
Sea S la gráfica $\text{gráf}(f) = G_f$ de

$$f(x, y) = ax^2 + by^2.$$

Podemos interpretar su campo gradiente

$$\nabla f(x, y) = (2ax, 2by)$$

como un campo vectorial que indica la dirección de máximo crecimiento de G_f (ver la siguiente figura). Las curvas de nivel de f serán aquellas en las que f asume un valor constante y son en cada punto perpendiculares al campo gradiente. Dado un punto $P = (x, y, f(x, y))$, el plano tangente $T_P G_f$ pertenece al haz de planos que pasan por la recta tangente a la curva de nivel en el punto (x, y) . Como $\nabla f(x, y)$ es un campo lineal, el ángulo que forma $\nabla f(x, y)$ a lo largo de una línea l que pasa por el origen es constante. Esto implica que también las curvas de nivel cortan a l formando un ángulo constante; por lo que sus rectas tangentes (verdes la figura) a lo largo de l serán paralelas. Así, al movernos a lo largo de la curva $\gamma_l = (l, f(l))$ en G_f el plano tangente $T_P G_f$ irá girando alrededor de un mismo eje. Entonces al pasar por el origen la velocidad del vector normal será perpendicular a dicho eje de giro (veáse la figura de la derecha).



De la figura anterior vemos que la dirección del vector ∇f a lo largo de la recta l , generada por el vector v , determina la dirección de la recta que es la imagen de l bajo la diferencial de la aplicación de Gauss. También hay coincidencia en la dirección del ∇f a lo largo de los ejes con la dirección de estos, lo que se corresponde con el hecho de que los vectores propios de dN son los vectores e_1 y e_2 .

3.16. Marco de Darboux-Ribaucour, torsión y curvatura geodésica

Un marco de referencia móvil a lo largo de una curva γ nos ayudará a entender la diferencial de la aplicación de Gauss desde otra perspectiva. Este marco es análogo al marco de Frenet (que vimos en la sección 1.14) de una curva en \mathbb{R}^2 , que formamos con un vector \mathbf{t} en el espacio tangente a la curva y con otro \mathbf{n} contenido en su complemento ortogonal. Una superficie en \mathbb{R}^3 tiene un espacio tangente $T_\gamma S$ bidimensional, por lo que un marco que se adapte a ella deberá tener un par de vectores que generen $T_\gamma S$ y un vector adicional $\mathbf{N} = \mathbf{N}_\gamma$ en el complemento ortogonal a $T_\gamma S$. Uno de los vectores tangentes será $\mathbf{t} = \mathbf{t}_\gamma$ y presentamos al otro con la siguiente

Definición 31 el vector tangente normal \mathbf{G}_γ a lo largo de γ es un vector unitario en $T_\gamma S$ que es ortogonal al vector tangente \mathbf{t}_γ y viene dado por la expresión

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_\gamma = \mathbf{N} \times \mathbf{t}.$$

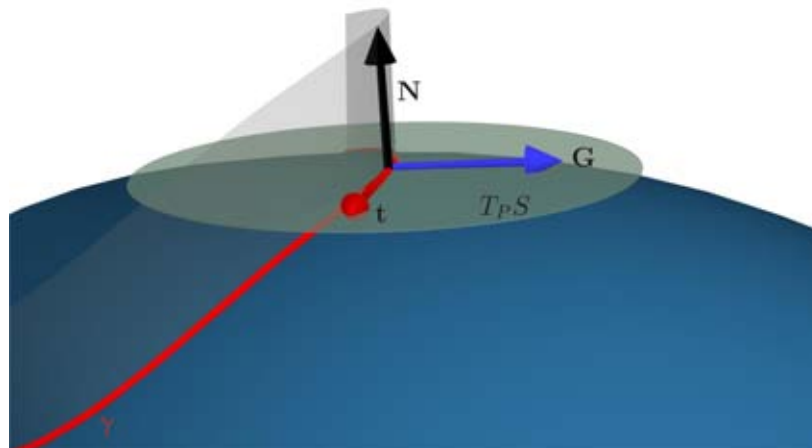
Notamos que el vector \mathbf{G}_γ también es ortogonal al vector normal a la superficie \mathbf{N}_γ .

Definición 32 El marco ortonormal

$$D = \{\mathbf{t}, \mathbf{G}, \mathbf{N}\}$$

es llamado *marco de Darboux-Ribaucour*⁵⁵ de la superficie S a lo largo de la curva $\gamma \subset S$.

Dicho marco va cambiando de posición⁵⁶ y si trasladamos paralelamente los vectores \mathbf{t}, \mathbf{G} y \mathbf{N} al origen de \mathbb{R}^3 , obtenemos sus indicatrices en la esfera S^2 .



⁵⁵Darboux, Gaston (1847-1917) matemático francés.

Ribaucour, Albert (1845-1893). matemático e ingeniero francés.

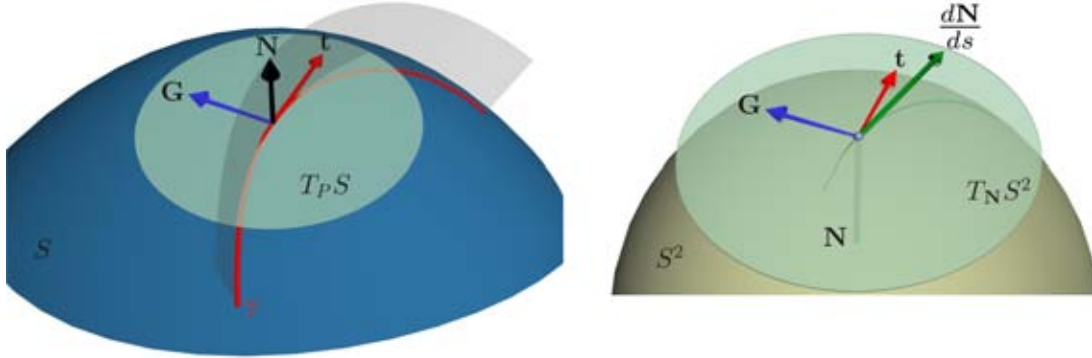
⁵⁶A cada posición le corresponde un punto en el grupo de Lie SO_3 que es una 3-variedad (una esfera rellena, con una identificación de los puntos antípodas que tienen radio π). Entonces al movernos a lo largo de γ el TDR determina una curva en SO_3 .

Nos interesa la velocidad $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$ con que \mathbf{N} se mueve en S^2 ya que es la diferencial de la aplicación de Gauss aplicada al vector \mathbf{t} . Deberá $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$ estar contenida en el plano tangente $T_{\mathbf{N}}S^2$ a la esfera a lo largo de la indicatriz \mathbf{N} , que en cada instante es paralelo a $T_{\gamma}S$. Podemos expresar a $\frac{d\mathbf{N}}{ds} \in T_{\mathbf{N}}S^2$ en términos de los vectores del marco

$$D = \{\mathbf{t}, \mathbf{G}, \mathbf{N}\}.$$

La componente en \mathbf{N} es cero por lo que

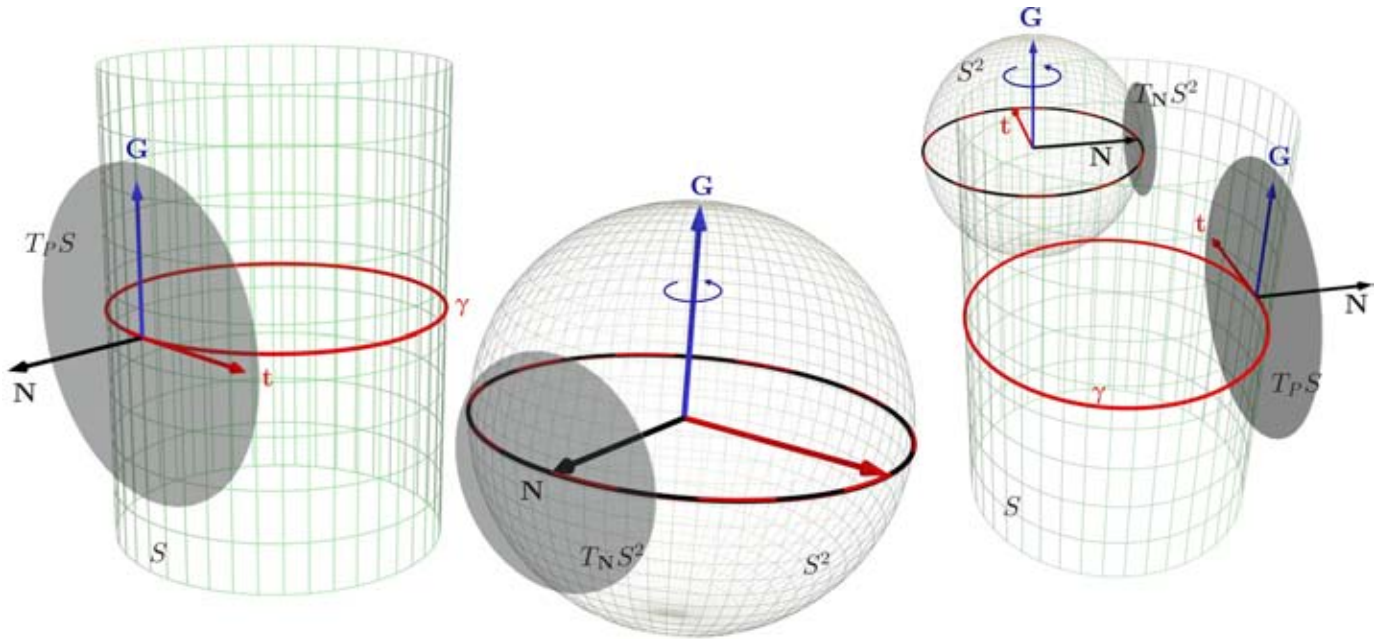
$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \alpha\mathbf{G} + \beta\mathbf{t}. \tag{3.13}$$



Veamos algunos ejemplos para ver de qué dependen los coeficientes α y β .

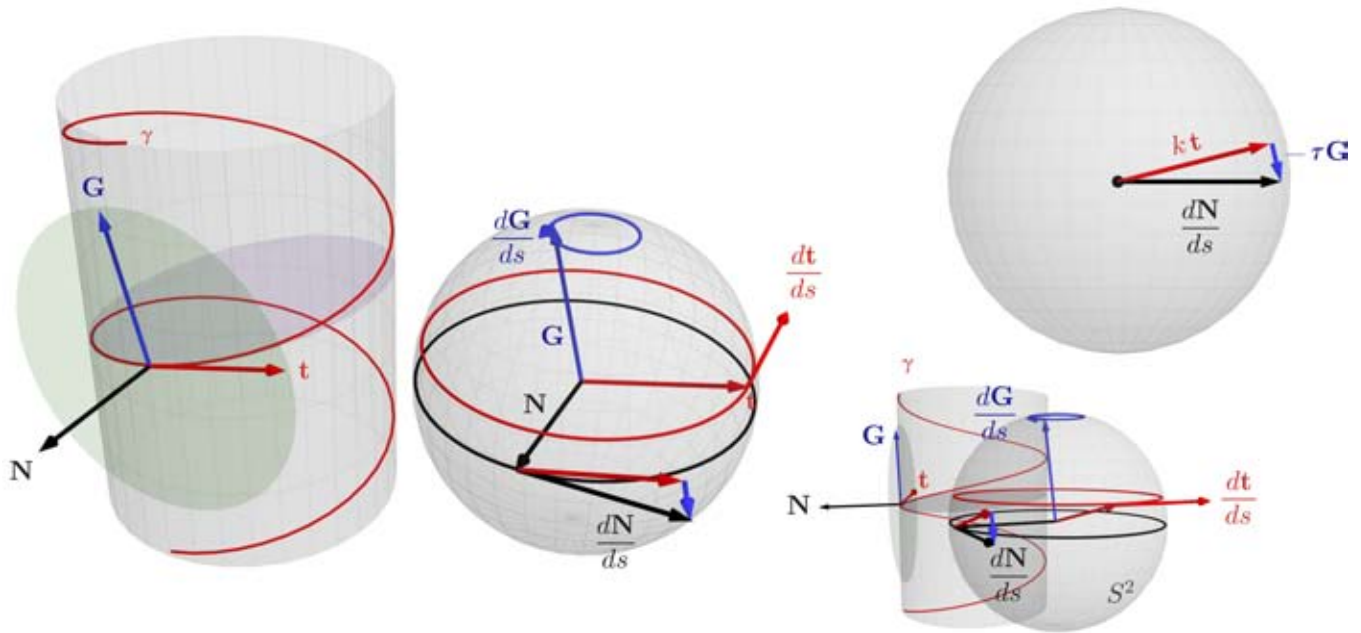
Ejemplo 33 *Cilindro*

Supongamos que nuestra curva γ es la circunferencia base C_r del cilindro. Los vectores \mathbf{t} y \mathbf{N} del marco de Darboux quedan contenidos en el plano que contiene a γ , por lo que las indicatrices \mathbf{t} y \mathbf{N} recorren la misma circunferencia máxima en S^2 a una rapidez igual a la curvatura $k = \frac{1}{r}$ de γ (ver siguiente figura); en consecuencia el vector \mathbf{G} será constante. En resumen $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = -k\mathbf{N}$, $\frac{d\mathbf{G}}{ds} = 0$, $\frac{d\mathbf{N}}{ds} = k\mathbf{t}$.



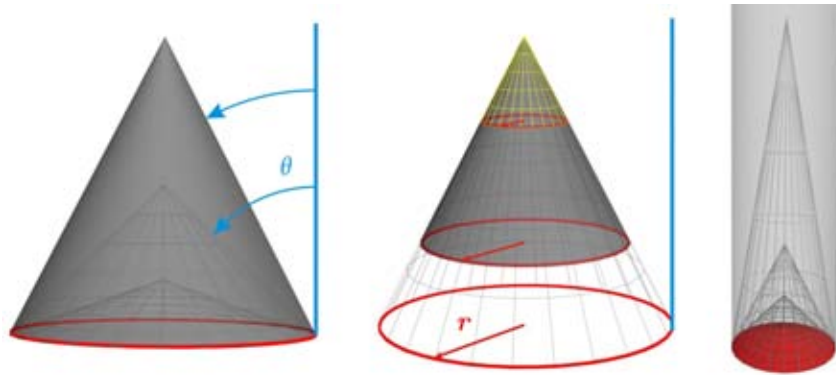
Si nuestra curva γ es una hélice el vector \mathbf{t} y \mathbf{N} ya no se moverán a lo largo del ecuador, \mathbf{t} girará en un paralelo y el vector \mathbf{G} deja el estado de reposo para girar en otro paralelo. El marco de Darboux coincide con el marco de Frenet: $\mathbf{b} = \mathbf{G}$ y $-\mathbf{N} = \mathbf{N}$, el vector \mathbf{G} coincide con el vector \mathbf{b} del marco de Frenet por lo que su rapidez estará determinada por la torsión de la curva y \mathbf{N} se moverá esencialmente como lo hace \mathbf{n} :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= -k\mathbf{N} \\ \frac{d\mathbf{G}}{ds} &= \tau\mathbf{N} \\ \frac{d\mathbf{N}}{ds} &= (k\mathbf{t} - \tau\mathbf{G}) \end{aligned}$$



Ejemplo 34 *Un Cono.*

Determinamos un cono con el radio r de su circunferencia base C_r y el ángulo θ que forma su generatriz con el vector normal al plano que contiene a C_r (figuras al centro e izquierda). Veamos cómo es el movimiento del marco de Darboux D a lo largo la curva $\gamma = C_r$.

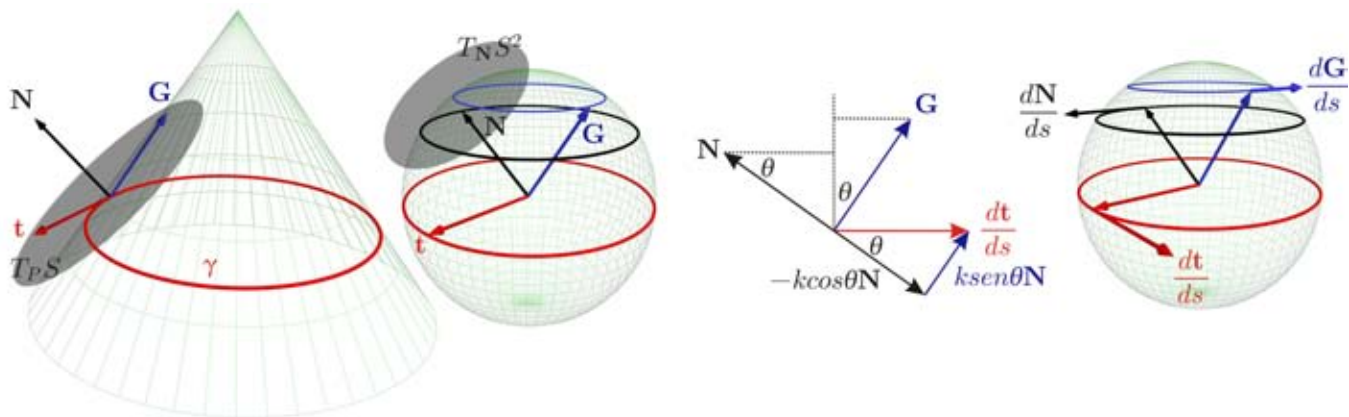


Para $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, la indicatriz del vector \mathbf{t} será la circunferencia máxima en S^2 por lo que mientras que las indicatrices de \mathbf{N} y \mathbf{G} serán un par de paralelos en S^2 (ver la siguiente figura) que giran con una rapidez proporcional al radio de cada paralelo. Cuando $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ la indicatriz del vector \mathbf{N} degenera en un punto y \mathbf{G} se mueve a lo largo de la misma curva que describe \mathbf{t} . Entonces en el cono las velocidades de los vectores del marco de Darboux son:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = -k \cos \theta \mathbf{N} + k \operatorname{sen} \theta \mathbf{G};$$

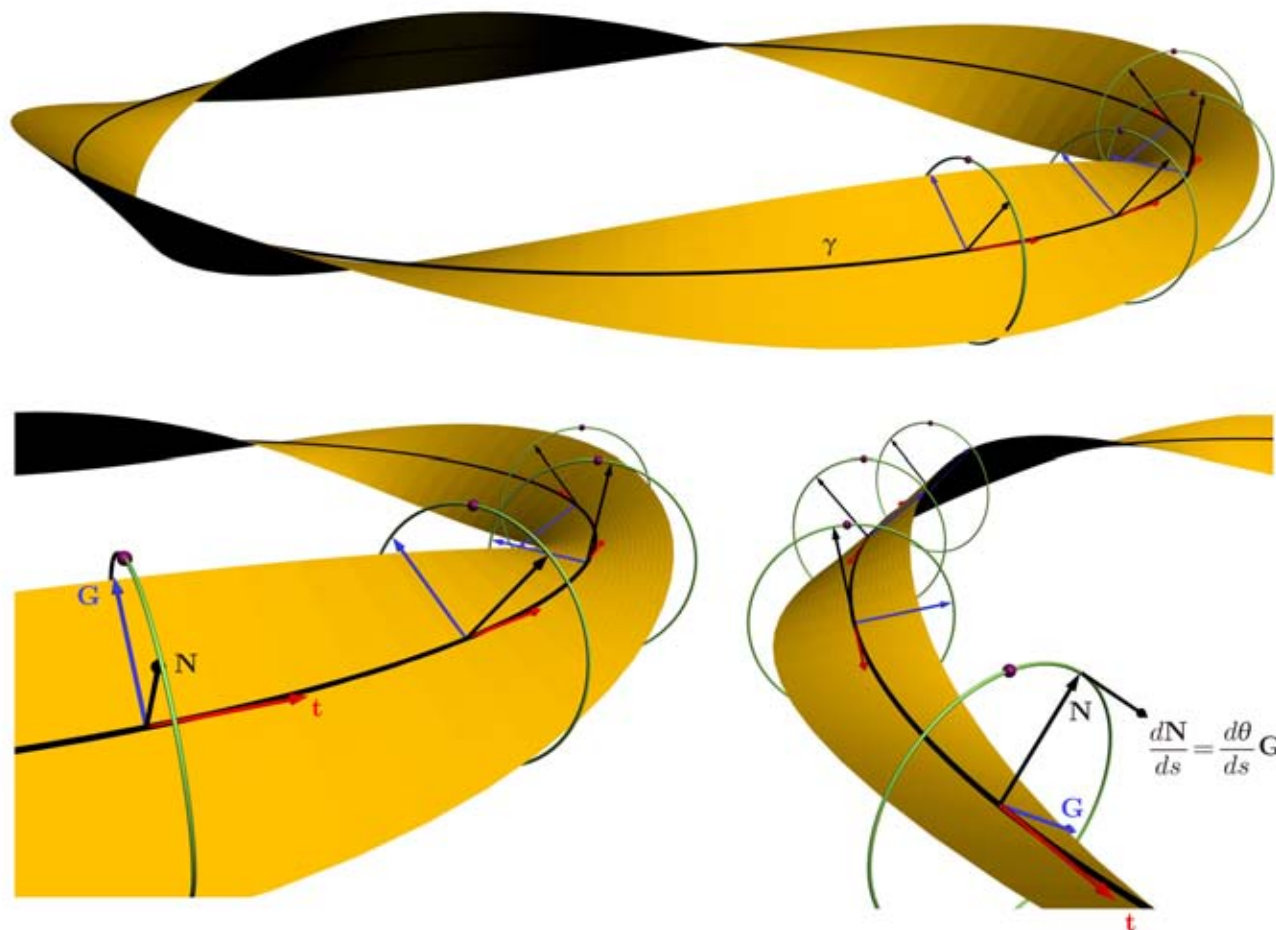
$$\frac{d\mathbf{G}}{ds} = -k \operatorname{sen} \theta \mathbf{t};$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = k \cos \theta \mathbf{t}.$$



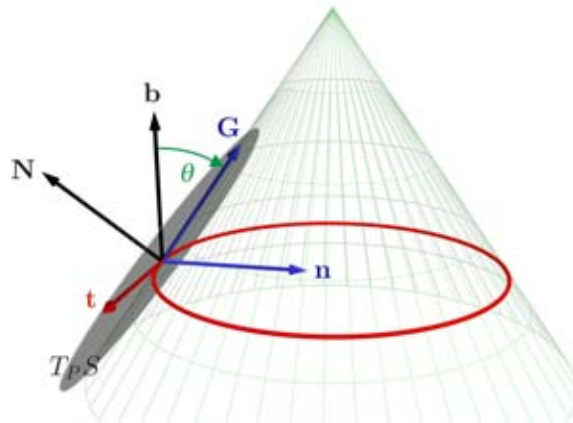
Ejemplo 35 Una superficie con una curva plana a lo largo de la cual $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$ y \mathbf{t} no son colineales.

Parece, de los ejemplos vistos, que la causa de que $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$ se desvíe de la dirección del vector \mathbf{t} es la torsión de la curva γ . Sin embargo, hay otro factor que puede hacer que el vector $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$ tenga componente en \mathbf{G} , aún cuando la curva sea plana, es decir con torsión nula. En la siguiente figura mostramos una curva γ plana y una superficie que la contiene, formada de la siguiente manera. Tomamos un segmento de recta contenido en el plano normal al vector \mathbf{t} (mostramos algunos en la figura por medio de circunferencias) y al avanzar a lo largo de la curva lo giramos para obtener la superficie⁵⁷. El vector normal a la superficie \mathbf{N} girará en el plano normal al vector \mathbf{t} (comparar en la figura la posición del vector \mathbf{N} respecto de la posición del punto de referencia rojo, contenido en circunferencias en el plano normal a γ), por lo que su velocidad $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$ tendrá componente en el vector \mathbf{G} y el tamaño de esta componente será la rapidez angular $\frac{d\theta}{ds}$ con que gira el marco de Darboux respecto del marco de Frenet.



Hemos motivado en los ejemplos anteriores que la velocidad con que se mueve el marco de Darboux (expresada en términos de los vectores del marco $D = \{\mathbf{t}, \mathbf{G}, \mathbf{N}\}$), depende de $k \text{sen } \theta$, $k \text{cos } \theta$, τ , y $\frac{d\theta}{ds}$.

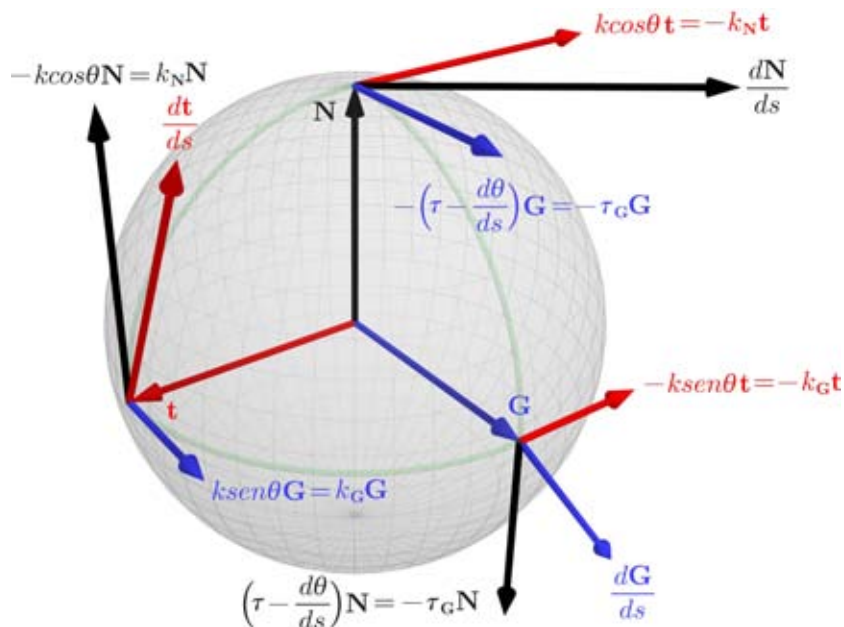
⁵⁷Es una superficie reglada.



En general, a partir de la velocidad con que se mueve el marco de Frenet podemos obtener la velocidad con que se mueve el marco de Darboux; que estará dada por una matriz antisimétrica

$$\begin{pmatrix} \frac{dt}{ds} \\ \frac{dG}{ds} \\ \frac{dN}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \operatorname{sen} \theta \mathbf{G} - k \cos \theta \mathbf{N} \\ -k \operatorname{sen} \theta \mathbf{t} + \left(\tau - \frac{d\theta}{ds} \right) \mathbf{N} \\ k \cos \theta \mathbf{t} - \left(\tau - \frac{d\theta}{ds} \right) \mathbf{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \operatorname{sen} \theta & -k \cos \theta \\ -k \operatorname{sen} \theta & 0 & \left(\tau - \frac{d\theta}{ds} \right) \\ k \cos \theta & -\left(\tau - \frac{d\theta}{ds} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{G} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}$$

obtenida al expresar la velocidad de cada vector del marco de Darboux en términos de los vectores del marco $D = \{\mathbf{t}, \mathbf{G}, \mathbf{N}\}$ que está en reposo respecto del marco $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. θ es el ángulo θ es que tenemos que girar al vector \mathbf{b} para llegar al vector \mathbf{G} ; ver el apéndice A para una demostración.



A continuación damos dos definiciones para expresar la velocidad del marco de Darboux de otra manera.

Definición 36 La *curvatura geodésica* es la proyección del vector de curvatura en el plano tangente a la superficie

$$k_G = k \operatorname{sen} \varphi,$$

donde φ es el ángulo que forman \mathbf{n} y \mathbf{N} .

Definición 37 La diferencia de la torsión de la curva $\gamma \subset S$ (a lo largo de la cual se mueven los marcos de Darboux y Frenet) con la rapidez angular con que gira el marco de Darboux respecto del marco de Frenet es llamada *torsión geodésica* de la curva γ en la superficie S

$$\tau(\gamma, S) = \tau_G = \left(\tau - \frac{d\theta}{ds} \right)$$

En términos de la curvatura geodésica, curvatura normal y torsión geodésica, las ecuaciones de Darboux toman la forma (ver apéndice A)

$$\begin{pmatrix} \frac{dt}{ds} \\ \frac{dG}{ds} \\ \frac{dN}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_G & k_N \\ -k_G & 0 & \tau_G \\ -k_N & -\tau_G & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{G} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}$$

La velocidad con que se mueve el vector \mathbf{N} :

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -k_{\mathbf{N}}\mathbf{t} - \tau_{\mathbf{G}}\mathbf{G}$$

tiene información acerca de la diferencial de la aplicación de Gauss. Su componente en la dirección de \mathbf{G} está determinada por la torsión geodésica $\tau_{\mathbf{G}}$ y es la causante de que $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$ se desvíe de la dirección de \mathbf{t} .

4. Curvatura intrínseca

Sabemos ya lo que significa que una superficie inmersa en nuestro espacio se curve. En cada enfoque hemos mirado la superficie desde afuera, es decir, hemos aprovechado que el espacio en que vivimos tiene tres dimensiones, una dimensión más que las dos que tiene una superficie.

Podemos saber si una superficie se curva sin tener que verla desde mundos más grandes. Para entender esto imaginemos que nos apachurran en la dimensión de la altura hasta convertirnos en un ser 2D, seríamos entonces como una sombra viviendo en nuestro nuevo mundo: la superficie. Suponiendo que no somos conscientes de la tercera dimensión, (la dimensión que nos quitaron al apachurrarnos) ¿Cómo podríamos saber si nuestro mundo está curvado? En la superficie sólo podremos movernos en dos dimensiones, hacia adelante y atrás y hacia la derecha e izquierda, ya no podríamos hacerlo hacia arriba y abajo pues esa dimensión ya no es parte de nuestro mundo. Nos interesa saber si está curvado nuestro nuevo mundo y no podemos verlo desde afuera.

Hasta el momento los métodos empleados para saber si la superficie se curva se basan, de una u otra manera, en el vector normal a la superficie. Ahora no podemos verlo, para nosotros no existe, en consecuencia, no tienen sentido las aceleraciones normales ni la aplicación de Gauss. Entonces dichos métodos ahora no funcionan, por lo tanto, para saber si nuestro mundo está curvado o no tendremos que encontrar un método nuevo al que llamaremos intrínseco. Es decir, una forma de expresar la curvatura en términos de conceptos que tienen sentido para un ser 2D que habite la superficie.

Es importante hacerlo porque nosotros como seres 3D estamos en la misma posición con respecto a la forma de nuestro universo que los seres 2D con respecto a la forma su mundo 2D. Nosotros tampoco podemos abandonar nuestro universo para irnos a un hiperespacio de más dimensiones (4D o más) para ver cómo se curva éste, es decir, no tenemos vectores normales a nuestro universo ni aplicación de Gauss⁵⁸ a la mano. Entonces si encontramos tal método podríamos usarlo para saber si nuestro universo se curva, más aún, podríamos usarlo para saber si una n -variedad se curva.

4.1. Idea panorámica

Empecemos a buscar dicho método haciendo trampa, es decir, aprovechando que somos seres 3D y que vemos el mundo del ser 2D (la superficie) desde afuera; pero siempre pensando si dicho método podría ser utilizado por un ser 2D en la superficie.

Necesitamos introducir algunos conceptos que pueda medir un ser 2D en su mundo. Expresaremos la curvatura del mundo 2D en términos de ellos. A continuación los mencionaremos brevemente:

1. Veremos qué es una línea recta para un ser 2D, la llamaremos **geodésica** y separaremos la idea de ser geodésica de la idea de ser la línea que minimiza distancias ya que son dos conceptos que solemos pensar equivalentes cuando no siempre lo son. Hecho esto sabremos qué es para un ser 2D un triángulo y, en general, un polígono con lados rectos, es decir, un triángulo y **polígono geodésico**.
2. Necesitamos saber cuál será la dirección paralela a una dada, después de que un ser 2D ha viajado a lo largo de una curva γ desde un punto P hasta a otro punto Q en su mundo. Viendo las cosas desde afuera, esto equivaldría a saber qué vector del plano tangente $T_Q S$ en Q será el que obtendremos si movemos paralelamente un vector dado de $T_P S$. Esto conduce al concepto de **transporte paralelo**. Transportaremos vectores de manera paralela **a lo largo de geodésicas** y después **a lo largo de curvas arbitrarias** en una superficie.
3. Un vector tangente en $T_P S$ puede ser trasladado paralelamente de P a Q a lo largo de curvas distintas. ¿Obtendremos para cada una de esas curvas el mismo vector en $T_Q S$? La respuesta es no. De manera equivalente, si trasladamos paralelamente un vector a lo largo de una curva cerrada en el mundo 2D, entonces el vector que obtengamos, después de dar una vuelta completa a la curva y regresar al punto inicial, puede o no coincidir con el original. El vector final estará rotado un cierto ángulo⁵⁹ respecto del vector inicial, su longitud quedará invariante. Dicho ángulo (medido en contra de las manecillas del reloj) es llamado **holonomía** y determina una transformación en $T_P S$ llamada **transformación de holonomía** que conecta los vectores iniciales con los finales después del traslado paralelo. Esta transformación será un ingrediente esencial de la curvatura: en mundos sin curvatura será siempre la identidad y en mundos curvados será distinta de la identidad.
4. Necesitamos saber cuál es el **área** de una región en la esfera. Un ser 2D sabría cómo hacer esto ya que esto es análogo al hecho de que nosotros seres 3D sabemos medir volúmenes dentro de una región espacial.

Ya definidos dichos conceptos, encontraremos el método intrínseco para medir la curvatura gaussiana en un mundo 2D especial: la esfera. Posteriormente extendaremos estas ideas a mundos 2D arbitrarios, es decir, a superficies en general.

Con esta idea panorámica, empecemos a ver las ideas involucradas más detalladamente.

⁵⁸Ahora sería una aplicación de los puntos de nuestro universo a la esfera S^3 en \mathbb{R}^4 .

⁵⁹Hay transportes paralelos más generales, en los que la conexión no es compatible con la métrica, que también puede cambiar la longitud de los vectores después de trasladar paralelamente a lo largo de curvas cerradas. No entraremos en más detalles de esto.

4.2. ¿Qué es una línea recta?

Esta pregunta que pudiera parecer obvia esconde ideas importantes.

Veamos qué es una recta en un espacio euclidiano tridimensional. Si buscamos en un diccionario podemos encontrar estas dos ideas:

1. Línea que no se inclina a un lado ni a otro.
2. La línea más corta que une dos puntos.

Cotidianamente se usan una u otra como la esencia de lo que es una línea recta. Nosotros hemos tomado ya en la discusión de curvatura de curvas la primera idea como nuestra guía. De hecho las dos ideas no son equivalentes, como veremos pronto. Decíamos que una línea es recta cuando su curvatura es idénticamente cero en todos sus puntos. Esto significa que la dirección del vector velocidad de la curva no cambia. Veamos una manera equivalente de ver la idea anterior que nos servirá para introducir el concepto de desplazamiento paralelo.

Tomemos una curva $\alpha(s)$ recorrida con rapidez unitaria y veamos cómo varía el vector $\alpha'(s)$ con respecto del vector $\alpha'(0)$. Traslademos paralelamente el vector $\alpha'(0)$ (azul en la siguiente figura) desde $\alpha(0)$ hasta $\alpha(s)$, es decir, en cada punto de $\alpha(s)$ podemos tomar un vector⁶⁰ con la misma dirección y tamaño que $\alpha'(0)$; y veamos cómo varía el vector $\alpha'(s)$ a lo largo de la curva respecto de los vectores paralelos a $\alpha(0)$ a lo largo de la curva.

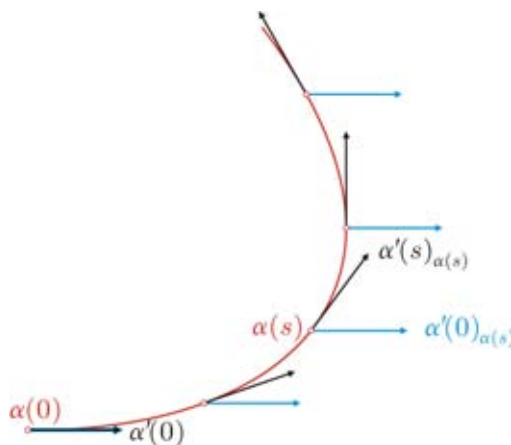


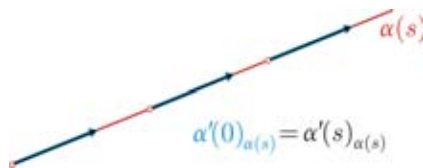
Fig. #. Curva plana donde mostramos el desplazamiento paralelo del vector $\alpha'(0)_{\alpha(0)}$

Podemos en este momento introducir una notación que nos indique el punto en el que está anclado un vector o equivalentemente, el plano tangente en el que vive, denotaremos

$$\alpha'(0)_{\alpha(s)} \in T_{\alpha(s)}\mathbb{R}^2$$

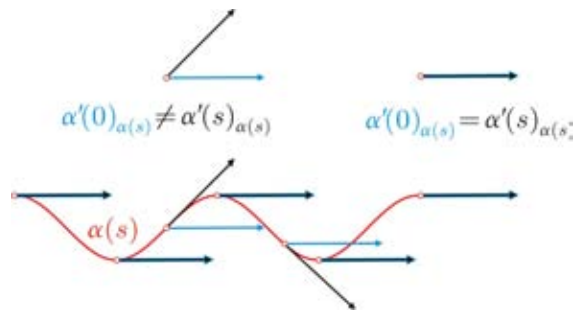
al vector en el plano tangente a \mathbb{R}^2 en el punto $\alpha(s)$ que es paralelo al vector $\alpha'(0)$ en el plano $T_{\alpha(0)}\mathbb{R}^2$ tangente a \mathbb{R}^2 en el punto $\alpha(0)$. Entonces, el subíndice indica el punto en el que está anclado, es decir, el plano tangente al que pertenece.

Regresando al asunto de ver cómo varía el vector velocidad $\alpha'(s)_{\alpha(s)}$ a lo largo de la curva, tenemos que, en la mayoría de las curvas no coinciden el vector $\alpha'(0)_{\alpha(s)}$, que es el vector velocidad inicial, trasladado paralelamente del punto $\alpha(0)$ al punto $\alpha(s)$, y el vector velocidad $\alpha'(s)_{\alpha(s)}$ en el instante s (ver figura anterior). Sin embargo, en el caso de una recta los vectores $\alpha'(0)_{\alpha(s)}$ y $\alpha'(s)_{\alpha(s)}$ coinciden para todo instante s como podemos ver en la siguiente figura.



El recíproco también es cierto: si una curva $\alpha(s)$ es tal que $\alpha'(0)_{\alpha(s)}$ y $\alpha'(s)_{\alpha(s)}$ coinciden para todo instante s entonces $\alpha(s)$ es una recta. Es importante que $\alpha'(0)_{\alpha(s)}$ y $\alpha'(s)_{\alpha(s)}$ coincidan para todo instante s ya que puede haber curvas para las cuales $\alpha'(0)_{\alpha(s)}$ y $\alpha'(s)_{\alpha(s)}$ coincidan en algunos instantes y que no sean rectas (ver la siguiente figura).

⁶⁰Sabemos que existe, ya que el quinto postulado de Euclides garantiza que por cualquier punto $\alpha(s)$ existe una (y sólo una) paralela a la recta que pasa por $\alpha(0)$ y que es generada por $\alpha'(0)$. Entonces sobre esta recta escogemos el vector del mismo tamaño y dirección que $\alpha'(0)$. En términos de conexiones, estamos usando la conexión asociada al grupo de Lie de las traslaciones en \mathbb{R}^n .



Conclusión 1 *Tenemos dos ideas equivalentes que caracterizan la esencia de lo que es una recta:*

1. *La curvatura de una curva es cero en todos sus puntos.*
2. *Los vectores $\alpha'(0)_{\alpha(s)}$ y $\alpha'(s)_{\alpha(s)}$ de una curva $\alpha(s)$ coinciden en todos sus puntos.*

También podemos recurrir a la física para interpretar esta equivalencia. Si los vectores velocidad $\alpha'(0)_{\alpha(s)}$ y $\alpha'(s)_{\alpha(s)}$ de una masa puntual unitaria coinciden para todo instante de tiempo s quiere decir que tenemos un movimiento con una velocidad constante y entonces, por la primera ley de Newton, no hay fuerzas que actúen sobre la masa. Al revés, si sobre la masa no actúan fuerzas, ésta se moverá con una velocidad constante viajando en una línea recta.

Ya tenemos ideas que caracterizan a las rectas en el plano o en el espacio euclidiano. Ahora nos preguntamos:

4.3. ¿Hay líneas rectas en mundos curvos?

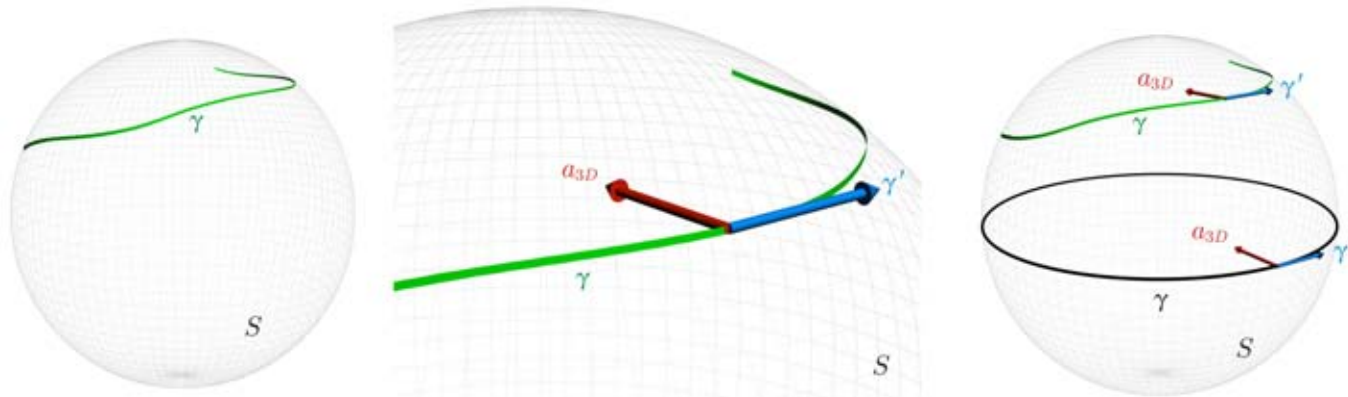
¿Cómo imaginarnos líneas derechas en un mundo 2D que de entrada nosotros vemos curvo? Tomemos la esfera S^2 como ejemplo de mundo 2D. ¿Cómo escogemos líneas en ella que se vayan derecho? Puede parecernos un tanto paradójico y diríamos que no hay, pero un ser 2D nos reclamaría enseguida que estamos en un error y nos diría que en su mundo sí hay rectas. Hagamos una analogía para sentir la idea anterior. Vamos a subir las dimensiones, ahora el papel del mundo 2D lo jugará nuestro universo 3D, nosotros, seres 3D, jugaremos en nuestro universo el papel de los seres 2D en la esfera. El papel del observador ahora lo tendrá un ser de cuatro (o más) dimensiones ¿Qué pensaríamos si nos enteramos de que el ser 4D piensa que en nuestro universo no debe haber líneas rectas, ya que él lo ve curvo en su mundo 4D? Diríamos que el ser 4D está en un error y pondríamos ejemplos bien conocidos de rectas. Lo que sucede es que nuestras líneas rectas se van derechito en nuestro universo y no tienen por qué ser líneas rectas en el universo del ser 4D. Entonces lo paradójico se debe a la intención de ver a nuestras líneas rectas 3D como rectas del mundo 2D y esto no tiene por qué ser así, las líneas deben ser derechas para el ser del mundo en cuestión y no para quien las ve desde un mundo externo.

En general cada mundo 2D, es decir, cada superficie S tiene sus líneas rectas. Y no sólo eso, sino que cada mundo nD (variedad de dimensión n) tiene sus líneas rectas, es decir, las líneas que se van derechito.

Definición 2 (Provisional) *A las líneas rectas de cada mundo en cuestión se les llama **geodésicas**.*

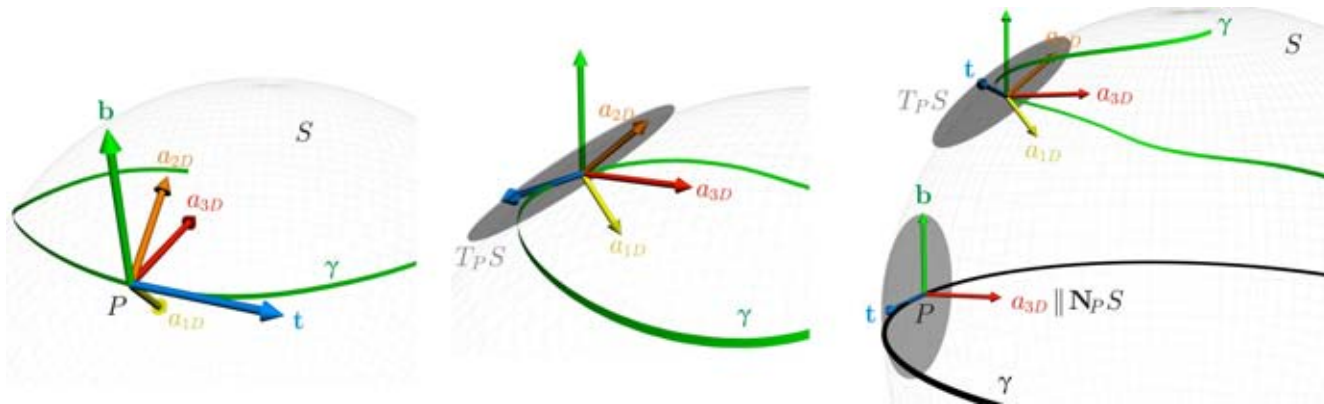
¿Cómo saber cuáles son las geodésicas en mundos 2D?

Tomemos una superficie S como mundo 2D. Haciendo trampa, lo veremos (como seres 3D) inmerso en nuestro universo 3D (\mathbb{R}^3), es decir, lo veremos desde afuera. Supongamos que un punto se mueve con rapidez unitaria a lo largo de una curva γ contenida en S (curva verde en la siguiente figura).



Para nosotros dicha curva no es una recta 3D, hay variación en la dirección de la velocidad 3D γ' y en consecuencia habrá aceleración 3D a_{3D} (vector rojo). Si un punto se mueve a lo largo de una recta en el mundo 2D S , entonces no deberá existir aceleración 2D, es decir, la aceleración 3D no produce ningún efecto en el mundo 2D (curva negra en la figura anterior).

¿Cómo sabemos qué parte de la aceleración 3D puede tener efecto en el mundo 2D? En otras palabras, ¿qué parte del vector a_{3D} es el vector a_{2D} ? Veamos qué relación hay entre los vectores del mundo 2D con los vectores del mundo 3D. Tomemos un punto P en S , muy cerca de P un ser 3D no distingue a S de su plano tangente $T_P S$ (disco gris en la siguiente figura). Si consideramos una región cercana al punto P de la superficie como si fuera parte del plano tangente $T_P S$, entonces un vector 2D que parta de P sería un vector 3D que pertenece a $T_P S$. Podemos convenir que la parte del vector a_{3D} que tiene efecto sobre el mundo 2D es la que pertenece a $T_P S$ (vector naranja) y la que no siente un ser 2D es la componente contenida en la recta generada por el vector normal a la superficie (vector amarillo).

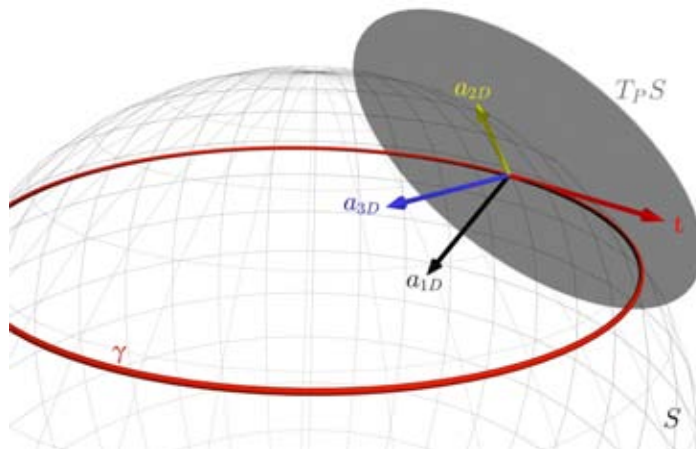


Conclusión 3 De todas las curvas que ve un ser 3D en S , serán líneas rectas en el mundo 2D las que en cada instante tienen un vector aceleración 3D que no tiene componente en $T_P S$ (ver curva negra en la figura anterior); es decir, el vector aceleración 3D es perpendicular al plano tangente $T_P S$, o equivalentemente, a_{3D} esta contenido en la recta $N_P S$ normal a la superficie.

4.4. Curvatura geodésica

Tomemos una curva γ en una superficie S junto con su plano tangente $T_\gamma S$ y vector normal $\mathbf{N}_\gamma S$ a lo largo de ella. Podemos descomponer la aceleración 3D en cada momento en dos componentes, una de ellas en $T_\gamma S$ y la otra en $\mathbf{N}_\gamma S$. Un ser 2D, habitante de S , puede sentir la componente de la aceleración $\gamma'' = a_{3D}$ en $T_\gamma S$, pero no siente la componente en $\mathbf{N}_\gamma S$; que sí sería sentida por un ser 1D que viviera en la recta generada por $\mathbf{N}_\gamma S$. Si sumamos dichas componentes obtenemos

$$a_{3D} = a_{2D} + a_{1D} \tag{4.1}$$



y en términos de la parametrización

$$\gamma'' = \gamma''_T + \gamma''_N$$

Como $\gamma(s)$ es una parametrización a longitud de arco tenemos que

$$a_{3D} = \gamma'' = k\mathbf{n}$$

donde $k(s)$ es la curvatura 3D de γ . Tomando el vector \mathbf{N} en la misma dirección de a_{1D} , obtenemos que

$$a_{1D} = \gamma''_{\mathbf{N}} = k_{\mathbf{N}}\mathbf{N}.$$

donde $k_{\mathbf{N}}$ es la curvatura normal de γ . Expresando a_{2D} en términos del vector $\mathbf{G} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$ del marco de Darboux (ver sección 3.16) tenemos

$$a_{2D} = \gamma''_{\mathbf{T}} = k_{\mathbf{G}}\mathbf{G}.$$

Definición 4 La *curvatura geodésica* es el número $k_{\mathbf{G}}$ por el que hay que multiplicar a \mathbf{G} para obtener la aceleración 2D.

De las igualdades anteriores llegamos a que (4.1) toma la forma

$$k\mathbf{n} = k_{\mathbf{G}}\mathbf{G} + k_{\mathbf{N}}\mathbf{N}. \quad (4.2)$$

Definición 5 Los tres vectores en la igualdad anterior se suelen nombrar:

1. *vector de curvatura*

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n},$$

2. *vector de curvatura geodésica*

$$\mathbf{k}_{\mathbf{G}} = k_{\mathbf{G}}\mathbf{G}$$

3. *vector de curvatura normal*

$$\mathbf{k}_{\mathbf{N}} = k_{\mathbf{N}}\mathbf{N}$$

de la curva γ .

\mathbf{k} depende sólo de γ , mientras que $\mathbf{k}_{\mathbf{G}}$ y $\mathbf{k}_{\mathbf{N}}$ dependen tanto de γ como de la superficie S . En términos de ellos la igualdad (4.2) queda

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\mathbf{G}} + \mathbf{k}_{\mathbf{N}}$$

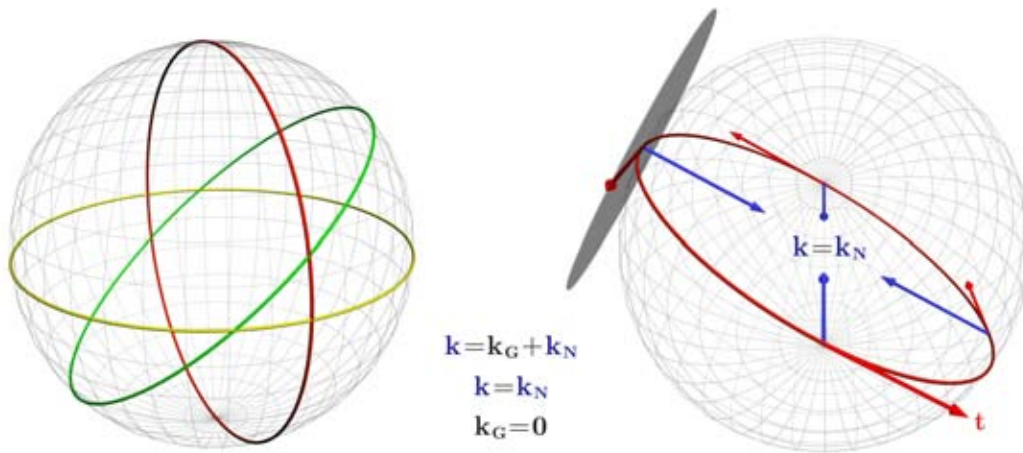
donde $\mathbf{k}_{\mathbf{G}}$ es la parte del vector \mathbf{k} de curvatura 3D de γ que puede ser sentida por un ser 2D, es decir, es el vector de curvatura 2D de la curva γ .

Conclusión 6 Para que una curva en S sea geodésica su vector de curvatura 2D deberá ser cero en todo momento, es decir

$$\mathbf{k}_{\mathbf{G}} = 0.$$

Ejemplo 7 La esfera.

Las líneas rectas en S^2 son circunferencias máximas es decir, aquellas contenidas en planos que pasan por el centro de la esfera (ver la siguiente figura).



La aceleración 3D (vector azul) apunta en todo momento al centro de S^2 por lo que en todos los puntos de la circunferencia máxima $a_{1D} = k_{\mathbf{N}}$ coincide con el vector $a_{3D} = k$. Entonces a_{3D} no tiene componente en $T_P S$, es decir, el movimiento está libre de aceleración 2D

$$a_{2D} = \gamma''_{\mathbf{T}} = \mathbf{k}_{\mathbf{G}} = 0;$$

de modo que para un habitante 2D de S^2 , dicha circunferencia será una recta.

Por cierto, nosotros no estamos habituados a este tipo de rectas ya que si alguien nos dice que emprenderá un viaje espacial a lo largo de una línea recta y nos asegura que volverá a pasar por el punto en el que comenzó el viaje, entonces contestaríamos que esto no es posible. En el mundo 2D esférico esto pasa; un ser 2D puede emprender un viaje partiendo de un punto, siguiendo una línea recta y regresar al mismo punto. Esto podría suceder en nuestro universo, ya que éste puede ser una 3-variedad con líneas rectas cerradas, por ejemplo, una 3-esfera S^3 .

Resumen 8 Una curva $\gamma(s)$ será geodésica en un mundo 2D (superficie) siempre que en cada instante se cumpla, una de las 3 condiciones equivalentes:

1. El vector aceleración 3D es perpendicular a $T_P S$.
2. El vector aceleración 3D está contenido en la recta normal a la superficie $N_P S$.
3. El vector de curvatura geodésica \mathbf{k}_G es cero.

4.5. Definición extrínseca de geodésica

La formulación matemática de la idea anterior sería la siguiente:

Una línea vista desde un mundo 3D será geodésica en un mundo 2D si y sólo si la proyección $\pi_{T_P S}$ de la aceleración 3D de la curva γ sobre el plano tangente a la superficie (mundo 2D) es igual a cero en todo momento.

$$\pi_{T_P S} \left(\frac{d}{ds} \gamma'(s) \right) = \pi_{T_P S} (\gamma''(s)) = 0$$

Notamos que la aceleración 3D es la derivada del campo de velocidades $\gamma'(s)_{\gamma(s)}$ a lo largo de γ . Será común que derivemos campos a lo largo de curvas γ contenidas en la superficie S y luego proyectemos $T_P S$

Definición 9 a esta proyección se le llama **derivada covariante** del campo w_γ en la superficie S (inducida por la derivada usual del campo w en \mathbb{R}^3)

$$\pi_{T_P S} \left(\frac{d}{ds} w_\gamma \right) = \frac{Dw_\gamma}{ds}$$

Intuitivamente la derivada covariante es la parte de la variación de un campo que puede sentir un ser 2D. La definición de geodésica queda de la siguiente manera usando derivada covariante.

Definición 10 Una curva $\gamma \subset S$ es una **geodésica** si en todo momento la derivada covariante del campo $\gamma'(s)_{\gamma(s)}$ es igual a cero:

$$\pi_{T_P S} \left(\frac{d}{ds} \gamma'(s) \right) = \frac{D\gamma'(s)}{ds} = 0$$

4.6. Definición intrínseca de geodésica

Ahora expresemos la idea anterior en términos de una parametrización. Sea

$$\mathbf{x}(u_1, u_2) : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$

una parametrización de S . La curva γ viene dada por

$$\gamma(s) = \mathbf{x}(u(s)) = \mathbf{x}(u_1(s), u_2(s)).$$

En la sección 3.5 llegamos a la expresión

$$\begin{aligned} \gamma''(s) = & (\Gamma_{11}^1 u_1'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u_1' u_2' + \Gamma_{22}^1 u_2'^2 + u_1'') \mathbf{x}_1 + (\Gamma_{11}^2 u_1'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u_1' u_2' + \Gamma_{22}^2 u_2'^2 + u_2'') \mathbf{x}_2 \\ & + (L_{11} u_1'^2 + 2L_{12} u_1' u_2' + L_{22} u_2'^2) \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

de la aceleración de la curva $\gamma(s)$ en términos del marco de vectores $\{\mathbf{N}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$, donde $\mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$ son las parciales de \mathbf{x} . La derivada covariante del campo de velocidad γ'_γ a lo largo de γ , será igual a los sumandos donde aparecen \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 :

$$\frac{D\gamma'(s)}{ds} = \pi_{T_P S} (\gamma'') = \gamma''_T = a_{2D} = \mathbf{k}_G =$$

$$(\Gamma_{11}^1 u_1'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u_1' u_2' + \Gamma_{22}^1 u_2'^2 + u_1'') \mathbf{x}_1 + (\Gamma_{11}^2 u_1'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u_1' u_2' + \Gamma_{22}^2 u_2'^2 + u_2'') \mathbf{x}_2.$$

Por lo tanto para que γ sea geodésica necesitamos que la expresión anterior se anule

$$(\Gamma_{11}^1 u_1'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u_1' u_2' + \Gamma_{22}^1 u_2'^2 + u_1'') \mathbf{x}_1 + (\Gamma_{11}^2 u_1'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u_1' u_2' + \Gamma_{22}^2 u_2'^2 + u_2'') \mathbf{x}_2 = 0. \quad (4.4)$$

Esta igualdad proporciona una manera intrínseca de definir una geodésica. Veamos por qué.

Supongamos que un ser 2D mide longitudes, ángulos o áreas y que nosotros lo vemos desde afuera (un mundo 3D). Los números que el ser 2D obtiene de sus mediciones deberán coincidir con los que nosotros calculemos a partir de una parametrización \mathbf{x} del mundo 2D. Nosotros podemos calcular las longitudes, ángulos y áreas que el ser 2D mide a partir de las funciones

$$E = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1$$

$$F = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2$$

$$G = \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2$$

que son los coeficientes de la llamada primera forma fundamental. Entonces, el hecho de que un ser 2D pueda medir equivale a que nosotros, seres 3D, conozcamos el valor de E , F y G en una región $A \subset \mathbb{R}^2$ que al ser transformada con \mathbf{x} tape la región donde el ser 2D realizó sus medidas. Más aún, si el ser 2D tuviera la información del valor de E , F y G en cada punto de su mundo 2D podría encontrar longitudes, ángulos o áreas sin tener que realizar mediciones físicamente, por ejemplo sin salir de su casa 2D. Entonces las funciones E , F y G tienen la información de cualquier medición que el ser 2D pudiera hacer en su mundo y no sólo eso, cualquier concepto que pueda definir el ser 2D a partir de mediciones de ángulos, longitud, o áreas puede ser definido a partir de las funciones E , F y G .

Conclusión 11 *Podríamos definir un mundo 2D, como algo que sea localmente plano y que además tenga una regla para hacer mediciones determinada por las tres funciones E , F y G definidas en cada punto. En términos matemáticos se dice que el mundo 2D es una variedad riemanniana de dimensión 2.*

De la misma manera, si un ser 4D pudiera parametrizar nuestro universo U (o un pedazo de) con

$$\mathbf{x}(u_1, u_2, u_3) : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^4$$

y nos pasara la información de las seis funciones $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$ con $i, j = 1, 2, 3$ (son seis ya que $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_i$), entonces podríamos calcular longitudes, ángulos, áreas y volúmenes sin tener que ir a medir a los lugares en cuestión. Análogamente, podríamos definir un universo (una variedad riemanniana de dimensión 3) como algo que localmente sea como \mathbb{R}^3 y que en cada punto tenga seis funciones que nos indiquen cómo medir.

Regresemos al mundo 2D. Recordemos que los símbolos de Christoffel son los coeficientes de \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 cuando expresamos al vector \mathbf{x}_{ij} en términos del marco $\{\mathbf{N}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$, es decir,

$$\mathbf{x}_{ij} = \Gamma_{ij}^1 \mathbf{x}_1 + \Gamma_{ij}^2 \mathbf{x}_2 + L_{ij} \mathbf{N}.$$

Si pudiéramos mostrar que los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^1 , Γ_{ij}^2 , con $i, j = 1, 2$, se pueden expresar en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental E , F y G , entonces al definir un mundo 2D como una 2-variedad con sus funciones E , F y G , quedarían automáticamente definidas las geodésicas a través de las curvas en el mundo 2D determinadas por las soluciones al sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 u_1'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u_1' u_2' + \Gamma_{22}^1 u_2'^2 + u_1'' &= 0 \\ \Gamma_{11}^2 u_1'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u_1' u_2' + \Gamma_{22}^2 u_2'^2 + u_2'' &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

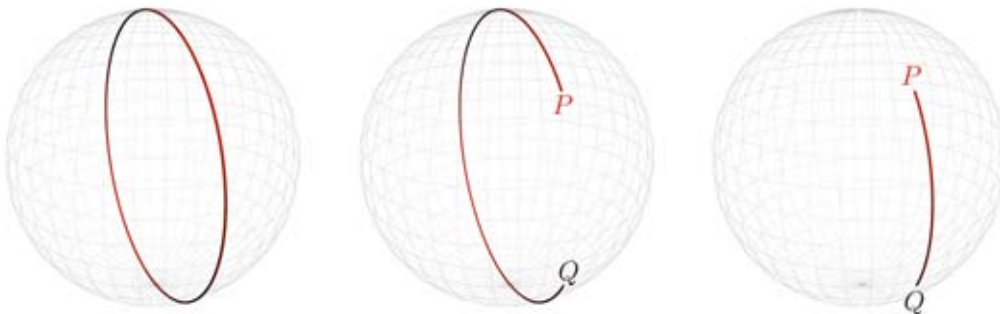
que es equivalente a (4.4).

Resulta que sí es posible expresar los símbolos de Christoffel en términos de E , F y G (y sus derivadas parciales), por lo que el sistema (4.5) proporciona una forma de definir las geodésicas que no depende del vector normal a S ni de la proyección a $T_P S$ de un vector en un espacio más grande (aceleración 3D). El sistema (4.5) sólo depende de la manera en que se mide en el mundo 2D, es decir, de E , F y G o como se suele decir, de la métrica.

Conclusión 12 *Al definir un mundo 2D (y en general cada mundo nD) como una 2-variedad riemanniana, quedarán definidas automáticamente sus líneas rectas.*

4.7. ¿Recto implica corto? ¿Corto implica recto? Teorema de Bernoulli

¿Una geodésica que une dos puntos P y Q en S será la línea más corta en S que une los puntos? Pensemos en la esfera S^2 . Sabemos ya que las geodésicas de la esfera son las circunferencias máximas. Tomemos un par de puntos P y Q sobre un meridiano como se muestran en la figura.

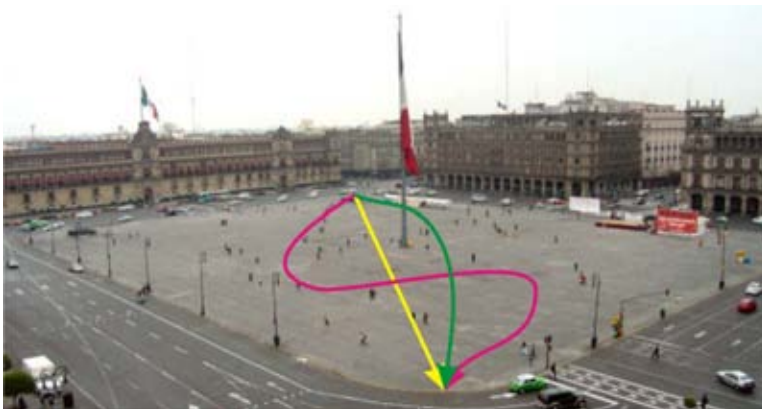


Podemos ir de P a Q de dos formas distintas. En ambas estamos viajando a lo largo de una geodésica que une los puntos P y Q en S . Una de estas geodésicas no será la línea más corta en S que una P y Q .

Conclusión 13 Una geodésica que une un par de puntos en una superficie S no tiene por que ser la curva más corta que une dichos puntos, es decir, recto no implica corto.

Ahora abordemos la pregunta recíproca.

Imaginemos que estamos en una esquina del Zócalo y queremos llegar a la otra caminando lo menos posible. ¿Cómo le hacemos? Por la experiencia sabemos que debemos caminar a través de la diagonal que une las dos esquinas del Zócalo, es decir, tenemos que caminar por el segmento de línea recta que une las dos esquinas.



También sabemos que si hacemos el recorrido siguiendo cualquier otra ruta caminaremos más. En ideas más precisas tendríamos:

En un mundo que no se curva como \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , o en general como \mathbb{R}^n , tomemos dos puntos P y Q y consideremos el conjunto $C = C(P, Q)$ de todas las líneas que unen a P con Q . A cada curva $\gamma \in C$ le podemos asociar su longitud y entonces podemos considerar el conjunto $L = L(C)$ de números reales que son longitud de alguna curva $\gamma \in C$. Sabemos que L siempre tiene un elemento mínimo, que es justo la distancia del segmento de línea recta PQ que une a P y Q . Entonces en \mathbb{R}^2 , y en general en \mathbb{R}^n , las líneas más cortas son líneas rectas, es decir, geodésicas.

Veamos si esta propiedad sigue siendo válida en mundos 2D que se curven, es decir, en superficies arbitrarias. Supongamos que tomamos una superficie bonita en el sentido de que el conjunto L siempre tiene un elemento mínimo para cualquier par de puntos P y Q ⁶¹. Sea γ la curva en S tal que su longitud es el mínimo de L , ¿será γ una geodésica de S ? Contestemos de manera intuitiva a través de un experimento virtual con una liga.

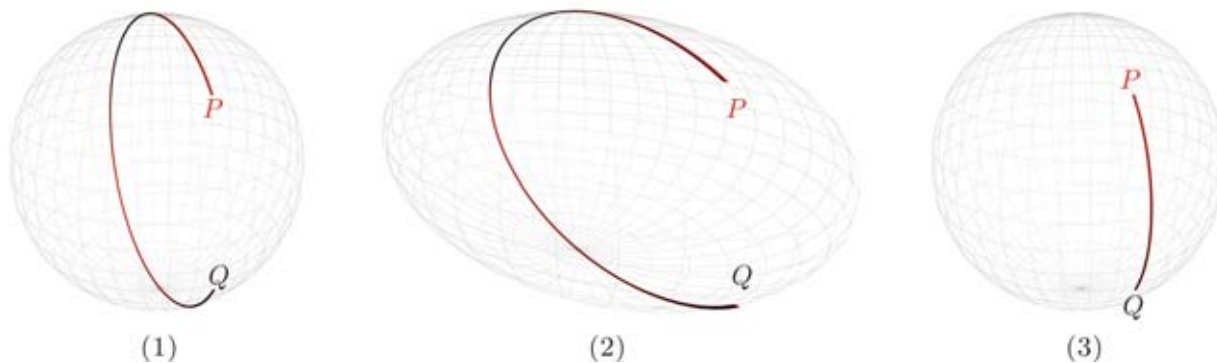
*Teorema de Johann Bernoulli*⁶²

La línea más corta de todas las que unen dos puntos en una superficie, es un arco de línea geodésica.

Para simplificar supondremos que la superficie no cambia de concavidad como una silla de montar. Dada una superficie S y un par de puntos P y Q contenidos en ella, hay muchas líneas que los unen. Una manera de encontrar una curva que minimiza la distancia entre P y Q es con una liga, veamos por qué. Tomemos un segmento de liga, clavemos uno de sus extremos en el punto P y después de estirla, clavemos el otro extremo en el punto Q . Supongamos que no hay fricción entre la liga y la superficie, por lo que, en general (ver la siguiente figura), cuando soltemos la liga ésta se encogerá hasta hacerse lo más corta posible y alcanzar el estado de reposo estable.

⁶¹Si a S^2 le quitamos un punto podemos encontrar una pareja de puntos P y Q para la cual L ya no tiene mínimo.

⁶²Bernoulli, Johann (1667-1748), matemático suizo.



En la figura mostramos que hay casos (1) y (2) donde la liga podría quedar en reposo sin alcanzar su longitud mínima, pero en ellos el estado de reposo sería inestable, es decir, al mover un poco la liga ya no regresaría a su estado de reposo inicial. Por otro lado en (3) la liga queda en reposo estable adoptando una posición de longitud mínima.

Sea γ la forma de la liga cuando ésta quede en reposo estable; en este caso, γ será la curva más corta de las que unen los puntos P y Q , pues de lo contrario la liga no estaría en reposo.

Veamos ahora si γ es una geodésica en S . Si probamos que en cada punto $O \in \gamma$ las direcciones del vector normal \mathbf{n} a la curva γ y del vector normal $\mathbf{N}_O S$ a la superficie en el punto O coinciden, entonces γ será una geodésica.

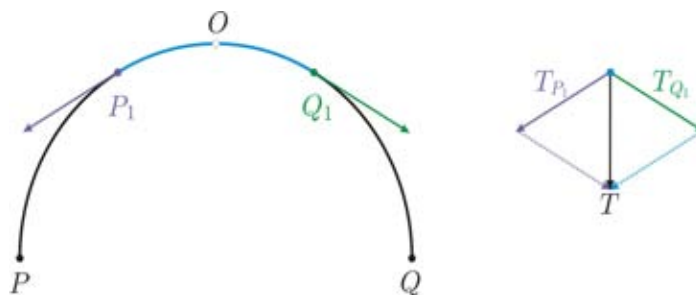
Para lo anterior veremos que:

1. El campo de vectores de presión de la liga a la superficie apunta en cada punto O en la dirección de la normal principal a γ .
2. El campo de vectores de presión de la superficie a la liga apunta en cada punto O en la dirección normal a la superficie $\mathbf{N}_O S$.
3. Por estar en reposo, la suma de dichos campos debe anularse, lo que garantiza que la dirección de la normal a la superficie y la dirección de la normal principal a γ coinciden.

Verifiquemos (1):

Cada punto $O \in \gamma$ tiene asociada una circunferencia de curvatura que es muy parecida a la curva cerca del punto O . Así que cerca del punto O podemos suponer que la forma de la liga es la de un arco de su circunferencia de curvatura. Esto equivale a pensar que cerca del punto O la liga está atada en una circunferencia. Entonces para que (1) se cumpla, basta ver que el vector de la presión que la liga ejerce sobre la circunferencia apunta en la dirección del centro de ésta. Veamos esto último:

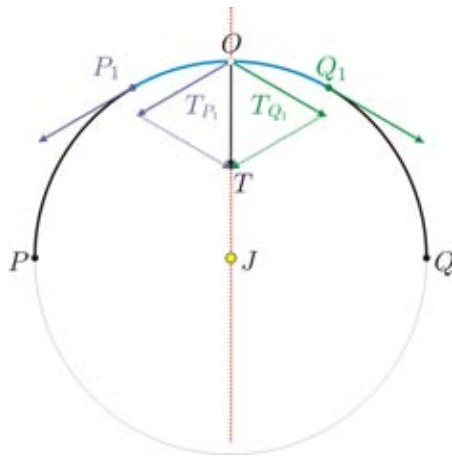
Atemos la liga de la manera antes mencionada y supongamos que la liga va de P a Q pasando por el polo norte O de la circunferencia y que éste es el punto medio del arco PQ . Veamos ahora cómo es la resultante de la fuerza tensión que actúa sobre un pequeño arco de liga $P_1 Q_1$.



Sobre el arco actúan dos fuerzas de tensión T_{P_1} y T_{Q_1} en la dirección tangente a la circunferencia en los puntos P_1 y Q_1 . Como la liga está en reposo $T_{P_1} = T_{Q_1}$, pues en otro caso el arco de liga $P_1 Q_1$ estaría en movimiento. La fuerza resultante de la tensión será la suma vectorial de estas dos fuerzas

$$T = T_{P_1} + T_{Q_1}$$

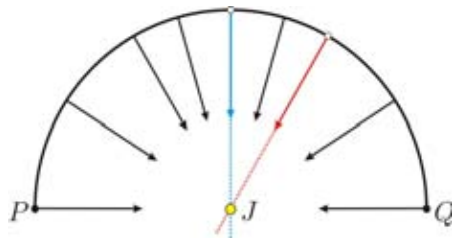
y apunta en la dirección del centro J de la circunferencia.



Lo anterior vale para cualquier arco de circunferencia P_1Q_1 , en consecuencia la presión de la liga en el punto O , que es el límite de la tensión por unidad de longitud

$$\lim_{P_1Q_1 \rightarrow 0} \frac{T}{P_1Q_1},$$

es un vector que apunta en la dirección del centro de la circunferencia. Como el punto O fue arbitrario, tenemos que el vector presión apunta, en cualquier punto de la circunferencia, hacia el centro de ésta.



Ahora Verifiquemos (2):

Cuando estamos parados sobre el piso, estamos en estado de reposo debido a que la fuerza de nuestro peso es equilibrada por una fuerza normal al piso que éste ejerce sobre nosotros. Análogamente, como la liga ejerce una fuerza sobre la superficie, ésta ejerce una fuerza sobre la liga. Así que a lo largo de la liga hay un campo de vectores de presión de la superficie a la liga y este campo está dirigido en cada punto O de γ en la dirección normal a la superficie $\mathbf{N}_O S$.

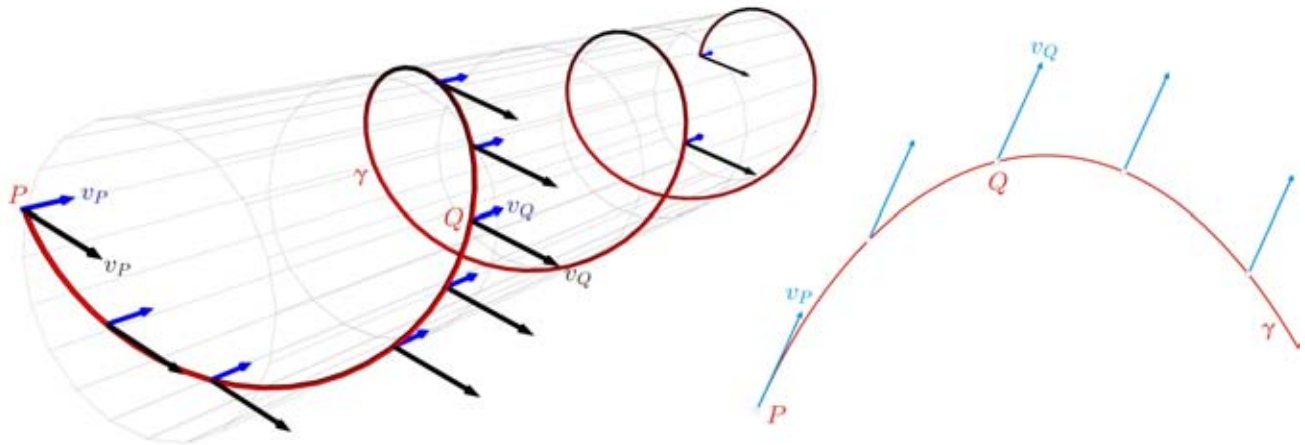
Finalmente verifiquemos (3):

La liga está en posición de reposo, lo que implica que cualquier segmento infinitesimal de ésta también está en reposo. Sobre cada segmento infinitesimal de liga actúan sólo dos fuerzas, la tensión T y una fuerza F_S que ejerce la superficie sobre él. Por lo tanto T y F_S deben anularse para cada segmento infinitesimal de liga y en consecuencia los campos de presión de la liga a la superficie y de la superficie a la liga se anulan. El primero de ellos apunta siempre en la dirección del vector normal \mathbf{n} de la curva γ ; el segundo apunta en la dirección del vector normal a la superficie \mathbf{N} . En consecuencia, en cada punto $O \in \gamma$, las direcciones de los vectores \mathbf{n} y \mathbf{N} coinciden; por lo tanto, γ es una geodésica.

4.8. Transporte paralelo intrínseco a lo largo de geodésicas en una superficie S .

Transporte paralelo en mundos que no se curvan, como \mathbb{R}^n

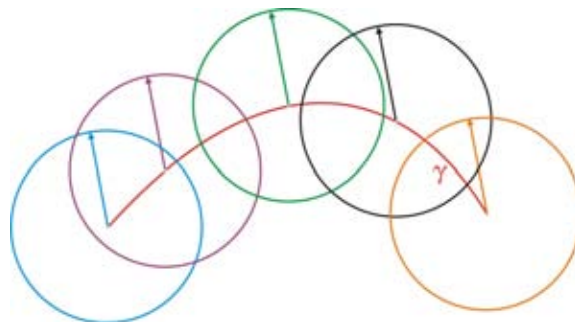
Mencionamos en la sección 4.2 cómo transportar paralelamente un vector en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 (o incluso en \mathbb{R}^n); imaginemos que tenemos un par de puntos P y Q en \mathbb{R}^3 y un vector anclado en P , $v_P \in T_P \mathbb{R}^3$. Para transportar paralelamente a v_P desde el punto P hasta Q a lo largo de una curva γ , movemos el vector a lo largo de la curva γ de manera que en cada momento tengamos un vector v_γ paralelo a v_P y del mismo tamaño. En la siguiente figura mostramos un transporte paralelo a lo largo de dos curvas contenidas en \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2 respectivamente.



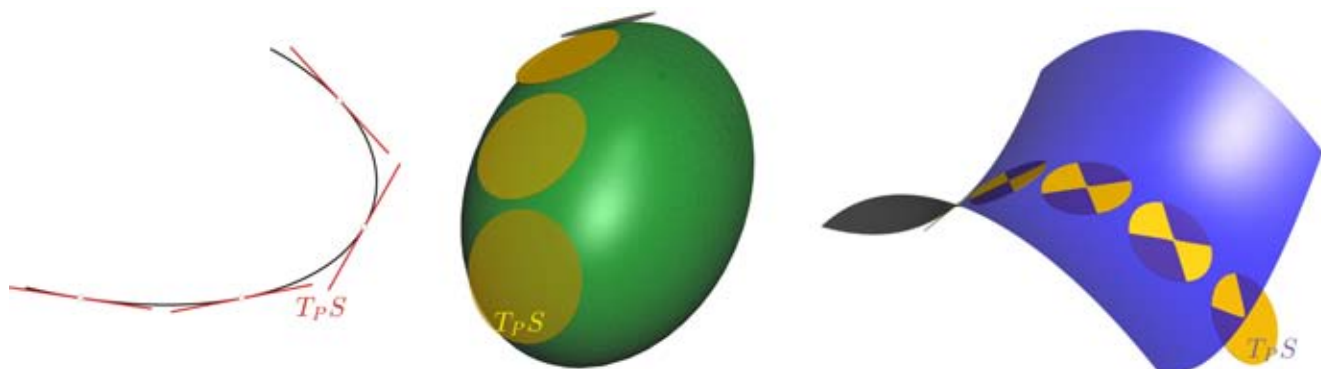
Cuando llegamos al punto Q obtenemos el vector $v_Q \in T_Q\mathbb{R}^3$ paralelo a v_P y del mismo tamaño que pasa por Q . Hemos formado así un campo de vectores paralelos a lo largo de γ . Notamos que es el quinto postulado de Euclides, el de las paralelas, quien asegura la posibilidad⁶³ de encontrar en cada momento el vector v_γ paralelo a v_P y del mismo tamaño.

Los que se transportan paralelamente no pertenecen a la variedad

A continuación haremos hincapié en un asunto que suele causar confusión. Cuando trasladamos paralelamente un vector en \mathbb{R}^n a lo largo de una curva γ , da la impresión de que vamos tomando vectores (trasladados) contenidos en la variedad \mathbb{R}^n . Sucede que en \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 o, en general, \mathbb{R}^n los espacios tangentes están dispuestos de una manera muy particular, si los visualizamos geoméricamente da la impresión de que se enciman con \mathbb{R}^n en cada punto. Pareciera ser que cada vector $v_P \in T_P\mathbb{R}^n$ está contenido en \mathbb{R}^n , o sea, en la variedad misma. Podemos pensar que el plano tangente $T_P\mathbb{R}^2$ a todo punto $P \in \mathbb{R}^2$ está contenido en \mathbb{R}^2 . En la siguiente figura mostramos circunferencias contenidas en los planos tangentes $T_\gamma\mathbb{R}^2$ a \mathbb{R}^2 a lo largo de la curva γ y pareciera ser que dichas circunferencias están contenidas en \mathbb{R}^2 .



En realidad, esto no es así, y la confusión se debe a que los planos tangentes de un espacio vectorial como \mathbb{R}^n se enciman en él. Las cosas se aclaran en cuanto tomamos una variedad distinta de \mathbb{R}^n . Tomemos ahora una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ que se curva. Cuando la vemos desde afuera resulta que su plano tangente $T_P S$ deja de encimarse en ella, como podemos ver en la siguiente figura. Ahora es más claro que en el plano; ni el plano tangente $T_P S$, ni sus vectores tangentes a S , están contenidos en S .



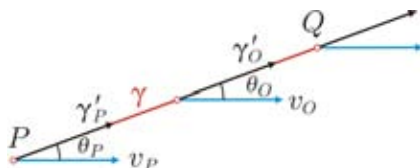
⁶³En términos de conexiones: es la forma de la conexión asociada al grupo de Lie de traslaciones en \mathbb{R}^n .

Entonces, cuando trasladamos paralelamente un vector no tomamos vectores a lo largo de la curva contenidos en la variedad, sino contenidos en los espacios tangentes a lo largo de la curva. Lo que en realidad hacemos al trasladar paralelamente un vector en \mathbb{R}^n , es tomar en el plano tangente $T_O S$ de cada punto $O \in \gamma$, el vector v_O paralelo al vector $v_P \in T_P S$.

Transporte paralelo en superficies que se curvan

Podemos extender esta idea a superficies (o variedades en general), es decir, ir escogiendo para cada $O \in \gamma$ un vector v_O paralelo al vector $v_P \in T_P S$. Ahora tenemos que ver cuál de los vectores $v_O \in T_O S$ consideraremos paralelo a v_P . Analicemos con más detalle lo que sucede en \mathbb{R}^n para ver qué ideas podemos extender a superficies o variedades en general.

Empecemos con el desplazamiento paralelo a lo largo de geodésicas en \mathbb{R}^2 , esto nos dará una pista para hacerlo posteriormente en una superficie en general. Traslademos paralelamente un vector a lo largo del segmento de recta $\gamma = PQ$ que une los puntos P y Q . Una manera de desplazar paralelamente el vector a lo largo de γ es observando que el ángulo $\theta_P = \angle(v_P, \gamma'_P)$ permanezca constante. En otras palabras, estamos generando un campo de vectores a lo largo de γ , de manera que para cada punto $O \in PQ$, escogemos en $T_O \mathbb{R}^2$, el vector v_O cuyo tamaño sea igual al de v_P y tal que $\theta_O = \angle(v_O, \gamma'_O) = \theta_P$.



Extendamos ahora la idea anterior a geodésicas en una superficie S arbitraria.

Definición 14 Para **transportar paralelamente** un vector desde el punto P hasta el punto Q a lo largo de un segmento de geodésica γ que une los puntos P y Q en S , los pasos a seguir son:

1. Fijarnos en el ángulo $\theta_P = \angle(v_P, \gamma'_P)$.
2. Generar un campo de vectores contenidos en los planos tangentes a S a lo largo de γ de manera que en cada punto $O \in \gamma$ escojamos el vector $v_O \in T_O S$ tal que:

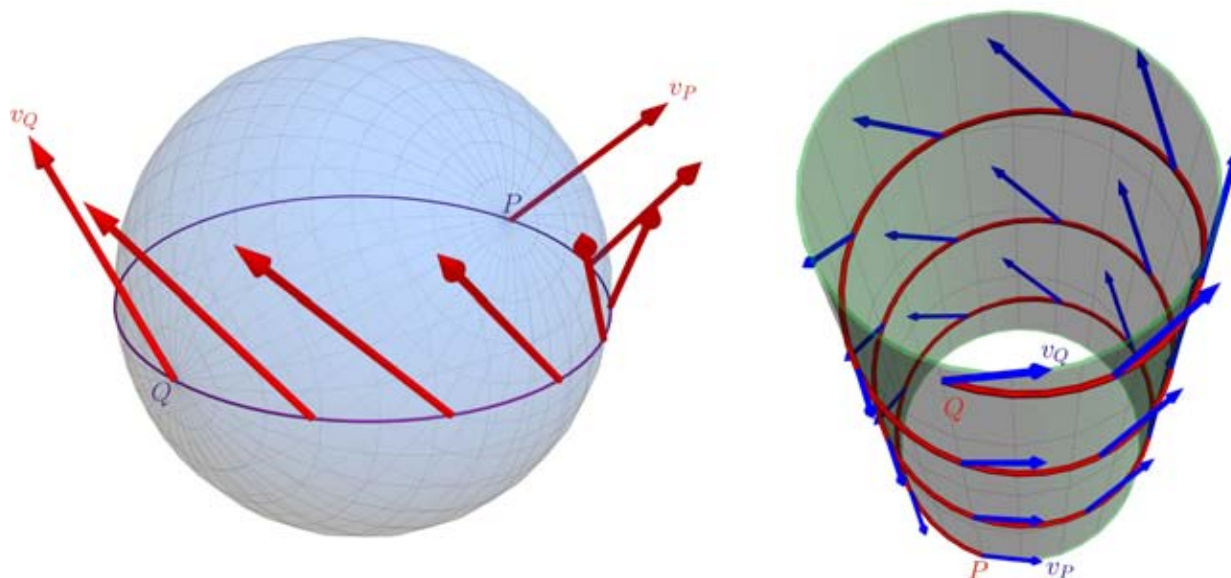
$$\|v_O\| = \|v_P\|;$$

$$\theta_O = \angle(v_O, \gamma'_O) = \angle(v_P, \gamma'_P) = \theta_P$$

3. Mover el vector v_P de manera que para cada $O \in \gamma$ escojamos el vector v_O del campo anterior.

Definición 15 Al campo formado por los vectores v_O se le llama **campo paralelo** a lo largo del segmento de geodésica γ en la superficie S .

Ejemplo 16 Las ideas anteriores se aplican a cualquier superficie S , en particular a S^2 y a un cilindro. Para transportar paralelamente a v_P a lo largo del segmento de geodésica que une los puntos P y Q seguimos los pasos 1 a 3 descritos arriba, como mostramos en la siguiente figura.



Ya sabemos cómo transportar paralelamente vectores a lo largo de una geodésica que une P y Q en una superficie S arbitraria. El siguiente paso consiste en hacer el transporte paralelo a lo largo de una curva arbitraria $\gamma = \gamma_P^Q$ que une los puntos P y Q en S .

4.9. Transporte paralelo a lo largo de una curva en S .

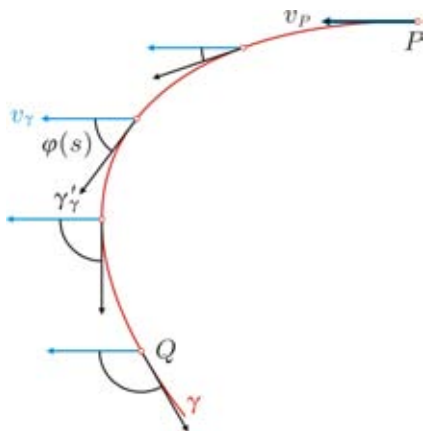
El vector paralelo rota con respecto de γ'_γ cuando γ no es geodésica

Analicemos qué sucede en el plano al transportar paralelamente un vector a lo largo de una curva

$$\gamma_P^Q = \gamma(s) : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ (con } \gamma(0) = P \text{ y } \gamma(l) = Q),$$

que no sea geodésica. En el plano, para trasladar paralelamente el vector v_P desde P hasta Q hay que usar el quinto postulado de Euclides para ir tomando en cada instante el vector v_γ tangente en $T_\gamma \mathbb{R}^2$ paralelo a v_P y del mismo tamaño; así el vector v_P va pasando a través de los planos tangentes a lo largo de γ .

A diferencia de lo que ocurre si γ es una recta (geodésica de \mathbb{R}^2), el vector velocidad γ'_γ va rotando respecto del campo paralelo v_γ (ver la siguiente figura), es decir, ahora el ángulo $\varphi(s) = \angle(\gamma'_\gamma, v_\gamma)$ va cambiando, es una función de s .



La rapidez angular está dada por la curvatura

$$\frac{d\varphi}{ds} = k_{\gamma(s)}$$

de γ en el punto en cuestión. Dicho giro puede ser interpretado como una indicatriz de las tangentes móvil en cada plano tangente $T_\gamma \mathbb{R}^2$.

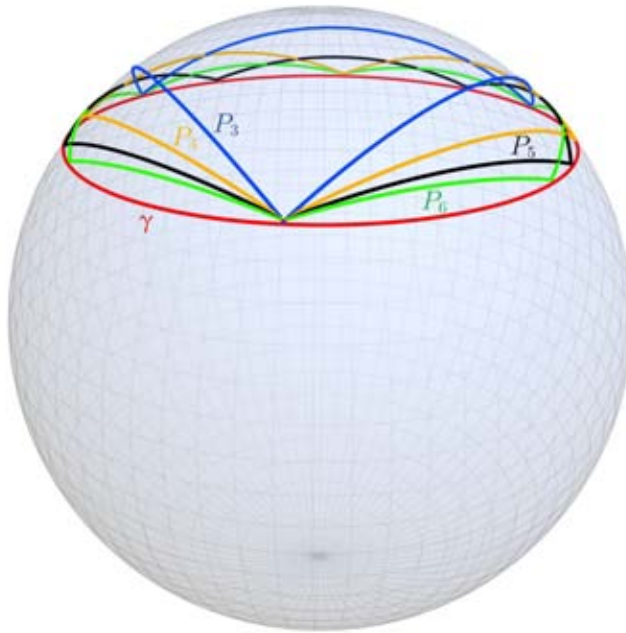
Cuando pasamos a superficies ocurrirá algo análogo. Si $\gamma_P^Q = \gamma$ es una curva en una superficie arbitraria S , que no es geodésica, entonces, al transportar paralelamente v_γ a lo largo de γ , el vector γ'_γ va rotando con respecto del campo paralelo v_γ . No sabemos, en principio, la posición de v_γ al movernos a lo largo de γ pero el ángulo $\varphi(s)$ va cambiando, es una función de s .

Por ejemplo, si transportamos paralelamente un vector $v_{\gamma(0)}$ a lo largo de un paralelo γ en la esfera, el vector tangente γ'_γ rota con respecto del vector paralelo v_γ . Nosotros conocemos en cada momento la posición de γ'_γ , así que el vector paralelo v_γ que buscamos rota con respecto de γ'_γ al movernos a lo largo de γ .

Definición de transporte paralelo a lo largo de una curva en S

La idea de la definición será aproximar la curva γ con una sucesión de polígonos geodésicos en S , que son curvas en las que sabemos cómo transportar paralelamente. Definiremos el transporte paralelo a lo largo de γ como el límite de los transportes paralelos a lo largo de los polígonos.

Sea $\gamma_P^Q = \gamma$ y P_n una sucesión de polígonos geodésicos con vértices en γ que converja de manera puntual a la curva γ (ver la siguiente figura).

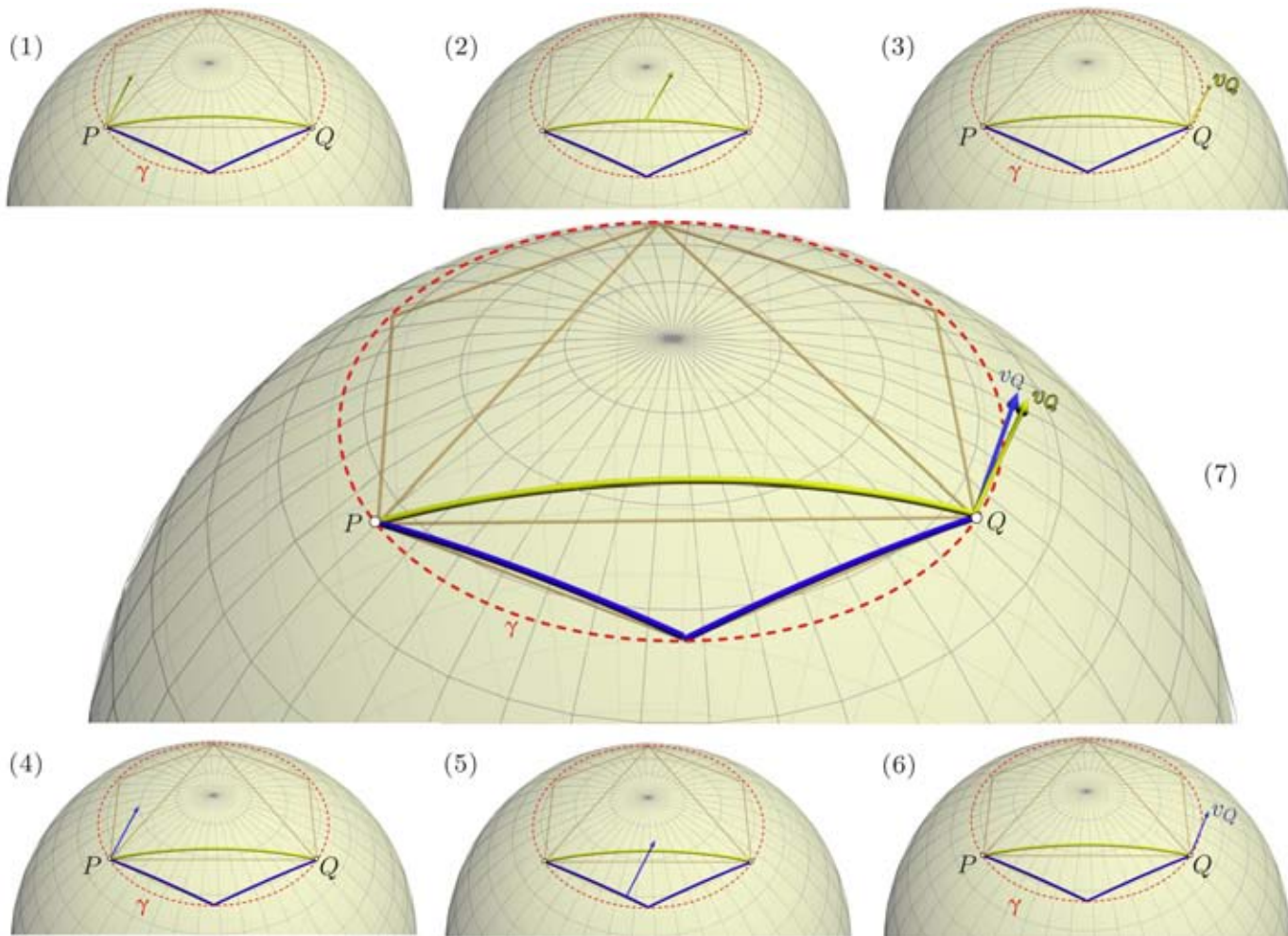


Definición 17 Definimos el **transporte paralelo de un vector v_P a lo largo de la curva γ** como el vector $v_Q \in T_Q S$ que es el límite de la sucesión de vectores v_{Q_n} en $T_Q S$ que resultan de transportar paralelamente al vector v_P a lo largo de cada uno de los polígonos geodésicos P_n :

$$v_Q = v_Q(v_P, \gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_{Q_n}$$

En la siguiente figura mostramos dos polígonos de la sucesión⁶⁴ P_n que aproximan a un paralelo en la esfera, un vector $v_P \in T_P S$ y sus correspondientes transportes en $T_Q S$. En las figuras (1)-(3) mostramos el transporte a lo largo de un polígono y en (4)-(6) a lo largo del otro. En (7) mostramos los vectores v_Q correspondientes a cada transporte.

⁶⁴Sucesión de polígonos regulares en S^2 que convergen al paralelo (círcunferencia en S^2)



Podemos ver el transporte paralelo como una aplicación

$$H(v_P, \gamma) : T_P S \times \{\gamma_P^Q\} \rightarrow T_Q S.$$

Cuando fijamos la curva $\gamma \in \{\gamma_P^Q\}$, obtenemos una aplicación que manda vectores tangentes en $T_P S$ en vectores tangentes del mismo tamaño en $T_Q S$.

$$v_Q = \Psi(v_P) : T_P S \rightarrow T_Q S$$

Ésta es la idea intuitiva de lo que es una conexión, una manera de conectar los vectores de los espacios tangentes $T_P S$ y $T_Q S$ a través de la transformación $H(v_P, \gamma)$. Podemos formular ya una idea importante:

si la transformación es diferente para un par de curvas que unen P y Q , entonces en la región R que encierran dichas curvas habrá curvatura, es decir, necesariamente habrá puntos en R y pequeñas vecindades alrededor de ellos en las cuales la geometría será no euclídeana.

4.10. Transporte paralelo en una curva cerrada γ ; transformación de holonomía de γ

Si en la curva $\gamma = \gamma_P^Q$ de la definición anterior los puntos P y Q en S coinciden, entonces $\gamma = \gamma_P^Q = \gamma_P^P$ será una curva cerrada. El transporte paralelo del vector v_P a lo largo de la curva cerrada γ es el vector

$$v_P^1 = v_P^1(v_P, \gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_{P_n}^1$$

en $T_P S$, que resulta de tomar el límite de la sucesión $v_{P_n}^1$ de vectores en $T_P S$ que resultan de transportar paralelamente al vector v_P a lo largo de cada polígono geodésico P_n hasta completar una vuelta.

En este caso H es una aplicación⁶⁵

$$H(v_P, \gamma) : T_P S \times \{\gamma_P^P\} \rightarrow T_P S;$$

⁶⁵Todas las transformaciones forman un grupo que se llama grupo de holonomía.

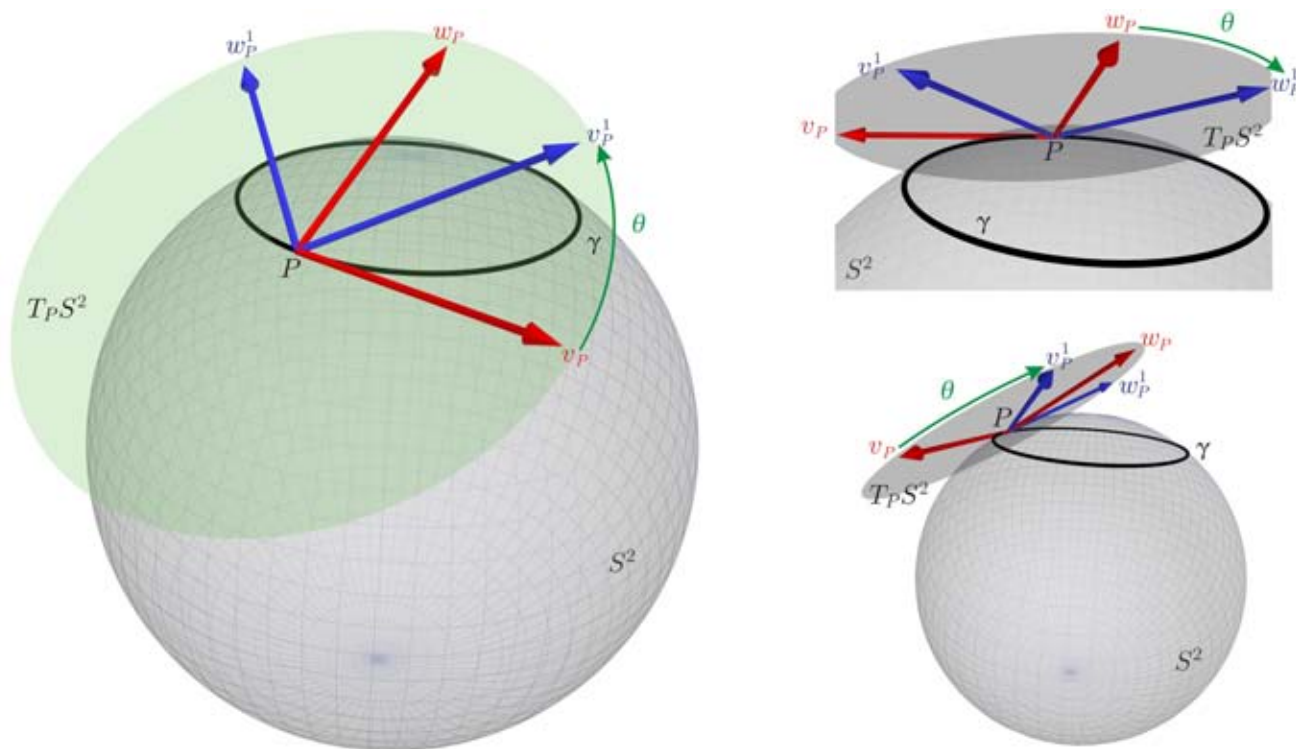
Definición 18 Si fijamos la curva γ , entonces la transformación H se convierte en una transformación de $T_P S$ en sí mismo

$$H_\gamma : T_P S \rightarrow T_P S, \text{ con } H_\gamma(v_P) = v_P^1;$$

que es llamada **transformación de holonomía**.

Veamos qué forma tiene; tomemos un vector $v_P \in T_P S$ y transportemos paralelamente a lo largo de γ hasta completar una vuelta para obtener $H_\gamma(v_P) = v_P^1$. Los vectores v_P y v_P^1 tienen el mismo tamaño ya que al trasladar a v_P a lo largo de cada P_n no cambia su tamaño.

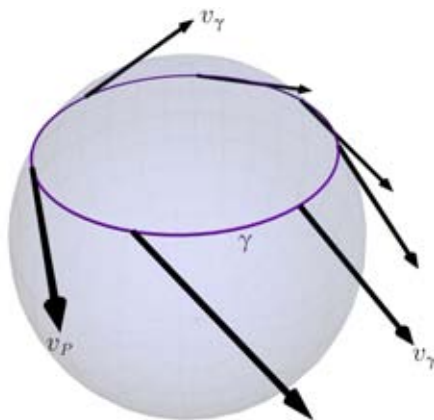
El vector v_P^1 puede o no coincidir con el vector v_P ; en general, forman un ángulo $\theta = \angle(v_P, v_P^1)$. Cualquier otro vector $w_P \in T_P S$ forma con v_P un ángulo $\angle(v_P, w_P)$ que se conserva cuando transportamos ambos vectores de manera paralela, a lo largo de cada uno de los polígonos P_n , es decir, $\angle(v_P, w_P) = \angle(v_P^1, w_P^1)$. Lo anterior implica que H_γ es una rotación de $T_P S$ por un ángulo⁶⁶ $\varphi = \varphi_\gamma$ que se llama ángulo de holonomía de la curva γ (veáse la siguiente figura). En superficies suele usarse el término holonomía para referirse tanto a la transformación como al ángulo de holonomía ya que uno está determinado por el otro.



Campo paralelo a lo largo de una curva arbitraria

Podemos repetir el proceso de tomar límite de transportes paralelos para encontrar vectores paralelos a v_P en todos los puntos de γ_P^Q que están entre P y Q , formando así un campo vectorial a lo largo de γ que es llamado **campo paralelo**.

En la siguiente figura mostramos un vector $v_P \in T_P S$ y el campo paralelo que genera a lo largo de una curva γ (un paralelo) en la esfera.



⁶⁶Medido en contra de las manecillas del reloj, una vez que hemos escogido una orientación.

Para cada vector $v_P \in T_P S$ existe un campo paralelo sobre γ . Si conocemos uno de estos campos paralelos⁶⁷ podemos imaginar el campo paralelo de cualquier otro vector $w_P \in T_P S$, ya que se encontrará formando un ángulo constante respecto del campo paralelo que conocemos. En una superficie todos los campos paralelos a lo largo de γ van girando con la misma rapidez angular con respecto del vector tangente \mathbf{t} a la curva γ . Veremos esto con más detalle en la sección 4.17

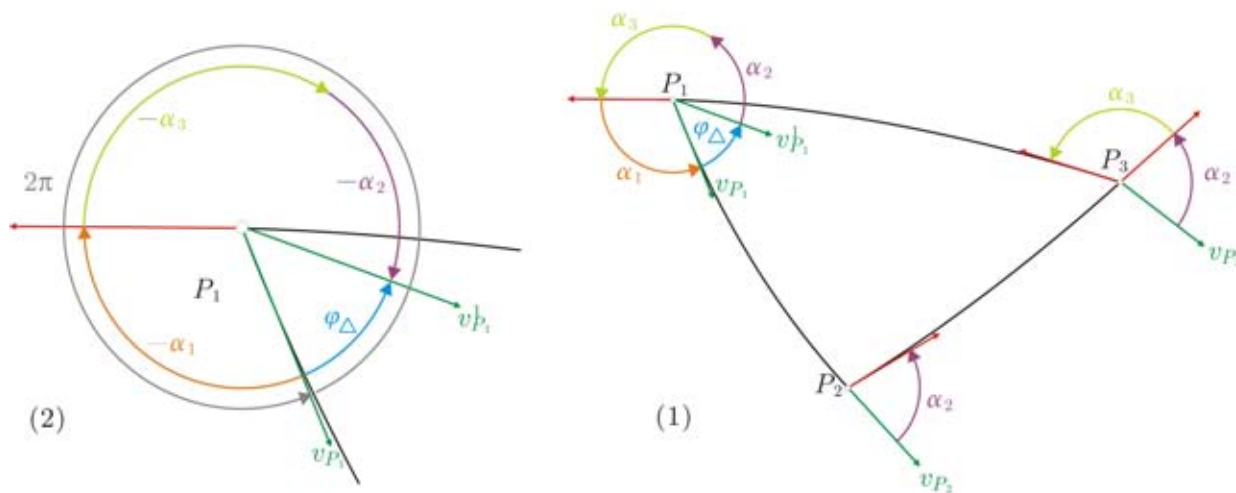
Todos los campos paralelos se comportan de la misma manera y forman un sistema de referencia del plano tangente⁶⁸ $T_\gamma S$ a lo largo de γ que llamaremos **sistema de referencia paralelo**. Con respecto a este sistema de referencia diremos que un campo a lo largo de γ varía.

4.11. Transformación de holonomía en un polígono geodésico en S

Tomemos una curva cerrada $\gamma = \gamma_P^P$. Sea $v_P^1 \in T_P S$ el vector que obtenemos al transportar paralelamente el vector v_P a lo largo de γ hasta completar una vuelta. En general v_P y v_P^1 no coincidirán y tendremos una transformación de holonomía H_γ asociada a γ . A continuación veremos algunos resultados para llegar a la relación que vincula la transformación de holonomía H_γ con la aplicación de Gauss.

Transformación de holonomía en un triángulo geodésico en S

Empecemos relacionando la holonomía de un triángulo geodésico Δ en una superficie S con sus ángulos. Sabemos transportar paralelamente vectores a lo largo de geodésicas en S , de modo que podremos transportar paralelamente un vector a lo largo de un triángulo geodésico hasta regresar al punto inicial. Tomemos un triángulo geodésico con vértices P_1, P_2 y P_3 en S . Sea $v_{P_1} \in T_{P_1} S$ un vector tangente en P_1 , como se muestra en la siguiente figura. Desplacemos paralelamente v_{P_1} de P_1 a P_2 ; para ello necesitamos verificar que el vector trasladado sea en todo momento tangente al lado $P_1 P_2$. Obtenemos así un vector $v_{P_2} \in T_{P_2} S$.



Ahora transportemos paralelamente v_{P_2} de P_2 a P_3 ; en este caso necesitamos verificar que el ángulo entre el vector desplazado y el vector tangente al lado $P_2 P_3$ sea α_2 en cada instante. Obteniendo así el vector $v_{P_3} \in T_{P_3} S$. Finalmente transportemos paralelamente v_{P_3} de P_3 a P_1 , cuidando que el ángulo entre el vector desplazado y el vector tangente al lado $P_3 P_1$ sea $\alpha_2 + \alpha_3$. Obtenemos con ello otro vector $v_{P_1}^1 \in T_{P_1} S$. El ángulo que forma con el vector inicial es

$$\angle(v_{P_1}^1, v_{P_1}) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Definición 19 Y a partir de él podemos obtener el **ángulo de holonomía del triángulo** (ver figura 2), es lo que le falta o sobra respecto de 2π (haber girado una vuelta entera):

$$\varphi_\Delta = \angle(v_{P_1}, v_{P_1}^1) = 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 2\pi - \sum \alpha_i$$

Entonces φ_Δ es una medida del giro de $v_{P_1}^1$ respecto de v_{P_1} . Un ser 2D puede medir este ángulo y más adelante veremos que φ_Δ tiene que ver con la forma en que se curva la superficie en el interior del triángulo. De hecho el método intrínseco para expresar la curvatura gaussiana que estamos buscando tiene que ver con la velocidad con que $v_{P_1}^1$ tiende a separarse de v_{P_1} respecto al área que encierra una curva γ .

⁶⁷Esto es así solo en dos dimensiones. En más dimensiones un campo paralelo difiere de otro por una rotación en más dimensiones (transformación ortogonal).

⁶⁸De hecho forman un flujo en el conjunto de planos tangentes a lo largo de γ : el haz tangente a S sobre la curva γ . Una conexión asigna a cada curva un flujo en el haz sobre la curva. Sin entrar en detalles mencionamos que un flujo similar interviene en la noción de curvatura de haces fibrados.

Notamos que en \mathbb{R}^n la transformación de holonomía H_Δ de cualquier triángulo, y en general de cualquier curva cerrada γ , es la identidad ya que la suma de los ángulos exteriores de un triángulo es

$$\sum \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi,$$

y en consecuencia el ángulo de holonomía es cero. De lo anterior se desprende que la transformación de holonomía H_Δ depende de la suma $\sum \alpha_i$ de los ángulos exteriores del triángulo.

1. Si $\sum \alpha_i = 2\pi$, entonces $\varphi_\Delta = 0$, lo que significa que el vector trasladado regresa a su posición original. Esto sucede en superficies isométricas a \mathbb{R}^2 como un cono, un cilindro,...etc. Veremos más adelante (teorema de Gauss-Bonnet, sección 4.16) que v_{P_1} y $v_{P_1}^1$ coincidirán en una superficie S si el triángulo encierra una región de S que tenga equilibrio entre la curvatura gaussiana positiva y negativa.
2. Si $\sum \alpha_i = 2\pi - \varepsilon > 2\pi$, entonces $\varphi_\Delta = \varepsilon$, lo que significa que el vector trasladado queda a un ángulo $\varepsilon > 0$ del vector original. Esto sucede en superficies con curvatura gaussiana positiva, como una esfera o un elipsoide. $\sum \alpha_i$ Puede ser cero; por ejemplo, tomando un triángulo degenerado γ que coincida con el ecuador de S^2 . Además v_{P_1} y $v_{P_1}^1$ coinciden, pues trasladar en γ es hacerlo en una geodésica; así, el vector trasladado guarda la misma posición respecto al vector tangente a γ , quien regresa, junto con el primero, a su posición inicial al dar una vuelta.
3. Si $\sum \alpha_i = 2\pi + \varepsilon > 2\pi$, entonces $\varphi_\Delta = -\varepsilon$, lo que significa que el vector trasladado queda a un ángulo $\varepsilon > 0$ del vector original. Esto sucede en superficies con curvatura gaussiana negativa como una silla de montar. Notamos que si $k < 0$, entonces v_{P_1} y $v_{P_1}^1$ no pueden coincidir ya que, por un lado, la suma de los ángulos exteriores α_i de un triángulo geodésico es mayor que 2π ; y por el otro, cada ángulo exterior de un triángulo α_i a lo más vale π . Por lo tanto

$$2\pi < \sum \alpha_i < 3\pi;$$

Lo que impide que $\sum \alpha_i$ sea un múltiplo de 2π , por lo tanto, v_{P_1} y $v_{P_1}^1$ no coinciden.

Podemos resumir el desplazamiento paralelo en el triángulo en la siguiente tabla (θ es el ángulo que forma v_{P_1} con el vector tangente al lado P_1P_2 en P_1)

\sphericalangle	P_1P_2	P_2P_3	P_3P_1
v_{P_1}	θ		
v_{P_2}		$\theta + \alpha_2$	
v_{P_3}			$\theta + \alpha_2 + \alpha_3$
$v_{P_1}^1$	$\theta + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$		
$v_{P_2}^1$		$\theta + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$	
$v_{P_3}^1$			$\theta + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$
$v_{P_1}^2$	$\theta + 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$		
\vdots			
$v_{P_1}^n$	$\theta + n(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$		

donde mostramos cómo van cambiando los ángulos que forma el vector trasladado con los vectores tangentes a lo largo de los lados del triángulo. Podemos recorrer el triángulo un número entero m de veces y para cada m tenemos una transformación H_{γ_m} . Obtenemos así un grupo de transformaciones

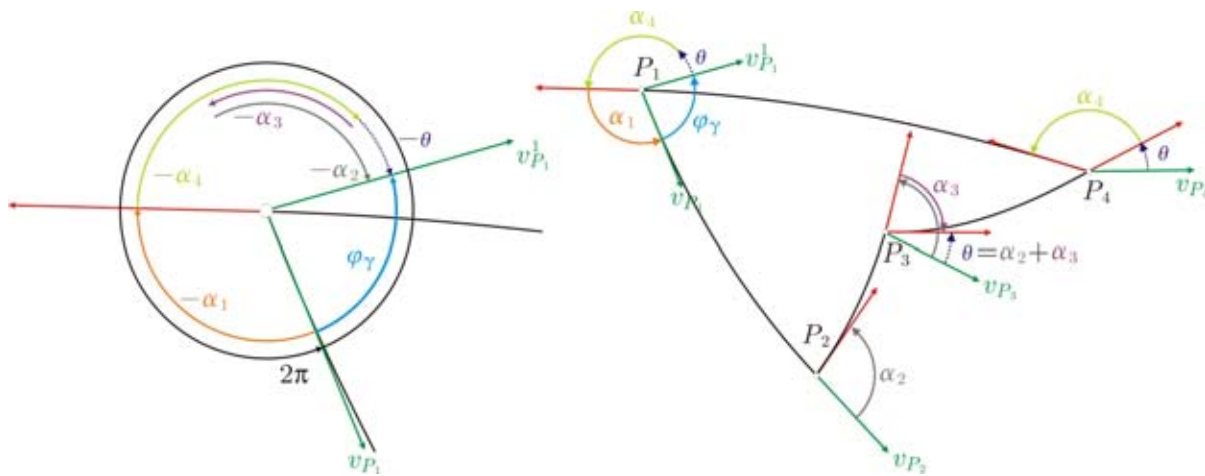
$$\{H_{\gamma_m} : m \in \mathbb{Z}\}$$

en $T_{P_1}S$ isomorfo a \mathbb{Z} .

Transformación de holonomía de un polígono geodésico en S

Las ideas anteriores se aplican también a polígonos geodésicos, que incluso pueden ser no convexos. Sea P un pequeño polígono geodésico de n lados, (en la siguiente figura tomamos un polígono no convexo de cuatro lados) y traslademos v_{P_1} paralelamente. La no convexidad del polígono se refleja en el transporte paralelo de la siguiente manera: en cada vértice el vector trasladado podrá girar en dirección positiva o negativa y esto depende de la naturaleza de cada vértice. En la figura tenemos que $\alpha_3 < 0$ en el P_3 . Entonces al darle una vuelta a P el vector trasladado podrá ir girando en ambos sentidos, pero al final obtendremos el mismo resultado para el ángulo de holonomía:

$$\varphi_P = 2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i. \tag{4.6}$$



4.12. Área de un polígono geodésico en la esfera y la fórmula de Gauss-Bonnet

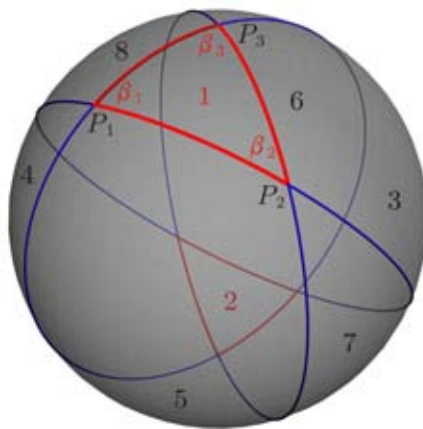
Enseguida calcularemos el área de un polígono (lo haremos primero para un triángulo) geodésico en la esfera S_r^2 y el resultado que obtendremos será fundamental en el siguiente sentido:

1. Nos dará un método intrínseco para calcular la curvatura gaussiana de la esfera.
2. A partir de él obtendremos el método intrínseco que buscamos para calcular la curvatura de una superficie que consiste en vincular la transformación de holonomía de una curva γ con la curvatura gaussiana de la región que γ encierra.
3. Nos permitirá llegar a un resultado central en geometría, el teorema de Gauss-Bonnet⁶⁹.

En el caso de S^2 veremos que el valor de ángulo de holonomía φ_Δ es el área $A(\Delta)$ que encierra el triángulo en S^2 . Y en general en S_r^2 el ángulo φ_Δ será igual al área de la imagen bajo la aplicación de Gauss de la región que encierra el triángulo.

Triángulo geodésico

Calculemos el área de un triángulo geodésico $\Delta = \Delta P_1 P_2 P_3$ en S^2 (ver siguiente figura). Sean β_i los ángulos interiores del triángulo. Consideremos las circunferencias máximas que pasan por P_1, P_2 y P_3 y las 8 regiones que determinan.



La región 1 corresponde a Δ , la 2 es un triángulo diametralmente opuesto igual a Δ . Las circunferencias máximas que pasan por P_1 , por ejemplo, determinan una lúnula L_1 (conformada por las regiones 1,3,2 y 4) y su área A_{L_1} depende linealmente del ángulo β_1 . Para saber qué expresión tiene la función $A_{L_1}(\beta_1)$ basta conocer el valor de A_{L_1} para algún ángulo β_1 . Cuando $\beta_1 = \pi$ obtenemos que $A_{L_1} = 4\pi$, que es el área de S^2 . Por lo tanto

$$A_{L_1}(\beta_1) = 4\beta_1. \tag{4.7}$$

Imaginemos ahora que pintamos las tres lúnulas; habremos pintado toda la esfera, pero algunas regiones las pintamos más de una vez, por ejemplo pintamos tres veces Δ y su antípoda. Para cubrir la esfera basta pintar dichos triángulos sólo una vez; si pintamos las tres lúnulas cubrimos un área equivalente a la de S^2 más cuatro veces el área de Δ :

$$\sum A_{L_i} = A(S^2) + 4A(\Delta) = 4\pi + 4A(\Delta).$$

⁶⁹Bonnet, Pierre Ossian (1819-1892) matemático francés.

Si sustituimos (4.7) en la ecuación anterior llegamos a que

$$4 \sum \beta_i = 4\pi + 4A(\Delta),$$

de donde obtenemos el área de Δ en términos de sus ángulos interiores β_i :

$$\sum \beta_i - \pi = A(\Delta) \tag{4.8}$$

Para vincular $A(\Delta)$ con el valor del ángulo de holonomía expresemos el área del triángulo en términos de los ángulos exteriores α_i . Notamos que cada ángulo interno es el complemento del ángulo externo correspondiente

$$\beta_i = \pi - \alpha_i;$$

sustituyendo en (4.8) obtenemos la igualdad buscada entre el área que encierra el triángulo y su ángulo de holonomía

$$A(\Delta) = 2\pi - \sum \alpha_i = \varphi_\Delta. \tag{4.9}$$

Si la esfera es de radio r entonces el área cambia en un factor r^2 :

$$A(\Delta) = \left[2\pi - \sum \alpha_i\right] r^2; \tag{4.10}$$

de donde obtenemos que el ángulo de holonomía de Δ es

$$\frac{A(\Delta)}{r^2} = \left[2\pi - \sum \alpha_i\right] = \varphi_\Delta.$$

En este caso φ_Δ no es el área del triángulo. Esto se debe a que podemos considerar un triángulo en S_r^2 como la expansión por un factor r de un triángulo en S^2 . Al expandir los ángulos se preservan, de modo que el transporte paralelo a lo largo del triángulo en S_r^2 y el ángulo de holonomía no cambian, (son invariantes bajo expansiones); pero el área del triángulo sí cambia, por un factor r^2 . Entonces necesitamos multiplicar el área $A(\Delta)$ por $\frac{1}{r^2}$ para compensar y así obtener el ángulo de holonomía φ_Δ . Notamos que

1. El factor $\frac{1}{r^2}$ es la curvatura gaussiana de S_r^2 .
2. $\frac{A(\Delta)}{r^2}$ es el área de la imagen bajo la aplicación de Gauss de la región que encierra el triángulo.

Llegamos así a la **fórmula de Gauss-Bonnet** para un triángulo geodésico en S_r^2 que establece que su ángulo de holonomía es igual al área de la imagen bajo la aplicación de Gauss de la región que encierra el triángulo

$$A(\mathbf{N}(\Delta)) = A(\Delta) k = \frac{A(\Delta)}{r^2} = 2\pi - \sum \alpha_i = \varphi_\Delta. \tag{4.11}$$

Esta fórmula es importante ya que proporciona un puente entre la transformación de holonomía y la aplicación de Gauss que está íntimamente relacionada con la curvatura gaussiana. En el caso particular de la esfera S_r^2 la fórmula de Gauss-Bonnet proporciona una manera intrínseca de medir su curvatura gaussiana mediante la igualdad

$$\frac{A(\mathbf{N}(\Delta))}{A(\Delta)} = k = \frac{\varphi_\Delta}{A(\Delta)}.$$

Conclusión 20 *Un ser 2D que habite en S_r^2 puede transportar paralelamente un vector a lo largo de un triángulo geodésico. Luego puede medir el ángulo de holonomía y el área de dicho triángulo. Finalmente, los divide para obtener la curvatura gaussiana de su mundo 2D.*

También podemos usar la fórmula de Gauss-Bonnet para interpretar la curvatura gaussiana como una especie de densidad de holonomía por unidad de área⁷⁰. Es decir si tenemos un triángulo en S_r^2 entonces podemos obtener su ángulo de holonomía multiplicando su área por la curvatura gaussiana de la esfera.

$$\varphi_\Delta = A(\Delta) k$$

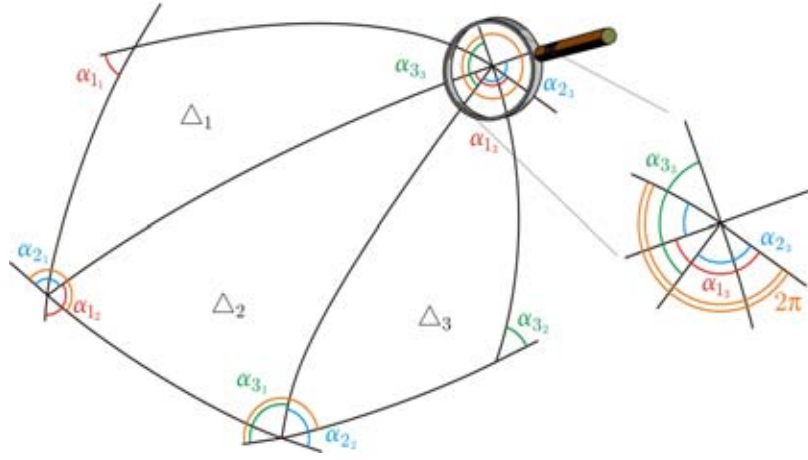
Polígono geodésico

Ilustraremos con un ejemplo que el área de un polígono geodésico en la esfera está expresada por fórmulas análogas a (4.9) y (4.10). Supongamos que tenemos un polígono como el de la siguiente figura. Podemos dividir el polígono en tres triángulos Δ_j . El área del polígono es la suma de las áreas de Δ_j :

$$A(P) = \sum A(\Delta_j);$$

y cada una de $A\Delta_j$ es la diferencia entre 2π y la suma de sus ángulos exteriores.

⁷⁰ Algo análogo al flujo por unidad de área cuando se discute el concepto de divergencia.



En la figura tenemos que

$$\begin{aligned} \sum A(\Delta_j) &= 2\pi - (\alpha_{1_1} + \alpha_{1_2} + \alpha_{1_3}) + 2\pi - (\alpha_{2_1} + \alpha_{2_2} + \alpha_{3_3}) + 2\pi - (\alpha_{3_1} + \alpha_{3_2} + \alpha_{3_3}) \\ &= 2\pi - [(\alpha_{1_1}) + (\alpha_{3_2}) + (\alpha_{1_2} + \alpha_{2_1} - \pi) + (\alpha_{2_2} + \alpha_{3_1} - \pi) + (\alpha_{1_3} + \alpha_{3_2} + \alpha_{3_3} - 2\pi)] \end{aligned}$$

donde los sumandos en paréntesis en la última igualdad son los cinco ángulos exteriores α_i del polígono, por lo que podemos expresar el área del polígono como

$$A(P) = 2\pi - \sum_{i=1}^5 \alpha_i$$

En el caso general, si tenemos un polígono geodésico arbitrario de n lados, podemos calcular su área siguiendo la misma idea. El área del polígono será igual a la suma de las áreas de cada triángulo.

$$A(P) = \sum A(\Delta_j) = \sum_{j=1}^n \left[2\pi - \sum_{i=1}^3 \alpha_{j_i} \right]$$

Si desarrollamos la suma renombrando los ángulos (como en el ejemplo) obtenemos que el ángulo de holonomía del polígono es igual al área del polígono

$$A(P) = 2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i = \varphi_P. \quad (4.12)$$

Si el polígono está en S_r^2 entonces obtenemos que

$$A(P) = \left(2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) r^2;$$

Y a partir de un razonamiento análogo al que dimos para un triángulo, llegamos a la fórmula de Gauss-Bonnet para polígonos geodésicos, la cual establece que su ángulo de holonomía es igual al área de su imagen bajo la aplicación de Gauss.

$$A(\mathbf{N}(P)) = A(P) k = \frac{A(P)}{r^2} = 2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i = \varphi_P; \quad (4.13)$$

Y de nuevo, a partir de la igualdad anterior, obtenemos que la curvatura gaussiana de S_r^2 es el cociente del ángulo de holonomía de un polígono geodésico entre su área

$$\frac{A(\mathbf{N}(P))}{A(P)} = k = \frac{\varphi_P}{A(P)}.$$

La interpretación de la densidad de holonomía por unidad de área es válida para cualquier polígono en la esfera; podemos obtener su ángulo de holonomía multiplicando su área por la curvatura gaussiana de la esfera.

4.13. Fórmula de Gauss-Bonnet para curvas cerradas contenidas en la esfera S_r^2

Para un ser 2D que habite S_r^2 será tan natural desplazar paralelamente un vector a lo largo de una curva cerrada γ que no sea un polígono geodésico, como lo es para nosotros el desplazar un vector paralelamente en \mathbb{R}^2 a lo largo de una curva cerrada γ que no sea un polígono. Si nuestro amigo 2D mide el ángulo de holonomía después de trasladar a lo largo de la curva γ , el área que encierra

γ , y luego realiza el cociente $\frac{\varphi_\gamma}{A(\gamma)}$; ¿obtendrá como resultado la curvatura gaussiana de su mundo S_r^2 ? es decir, ¿vale la fórmula de Gauss-Bonnet para curvas cerradas en general? Resulta que sí, el ser 2D obtendrá que $k = \frac{\varphi_\gamma}{A(\gamma)}$ o, equivalentemente, la fórmula de Gauss-Bonnet vale si γ pertenece a una familia de curvas más grande que la de polígonos geodésicos:

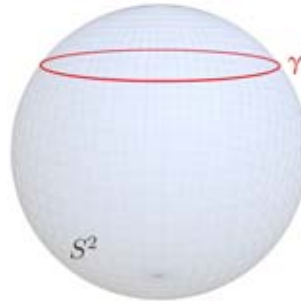
$$\Gamma = \{ \text{curvas cerradas en } S_r^2, \text{ lisas por tramos y homeomorfas a una circunferencia} \}. \quad (4.14)$$

En la figura mostramos algunas curvas $\gamma_i \in \Gamma$.

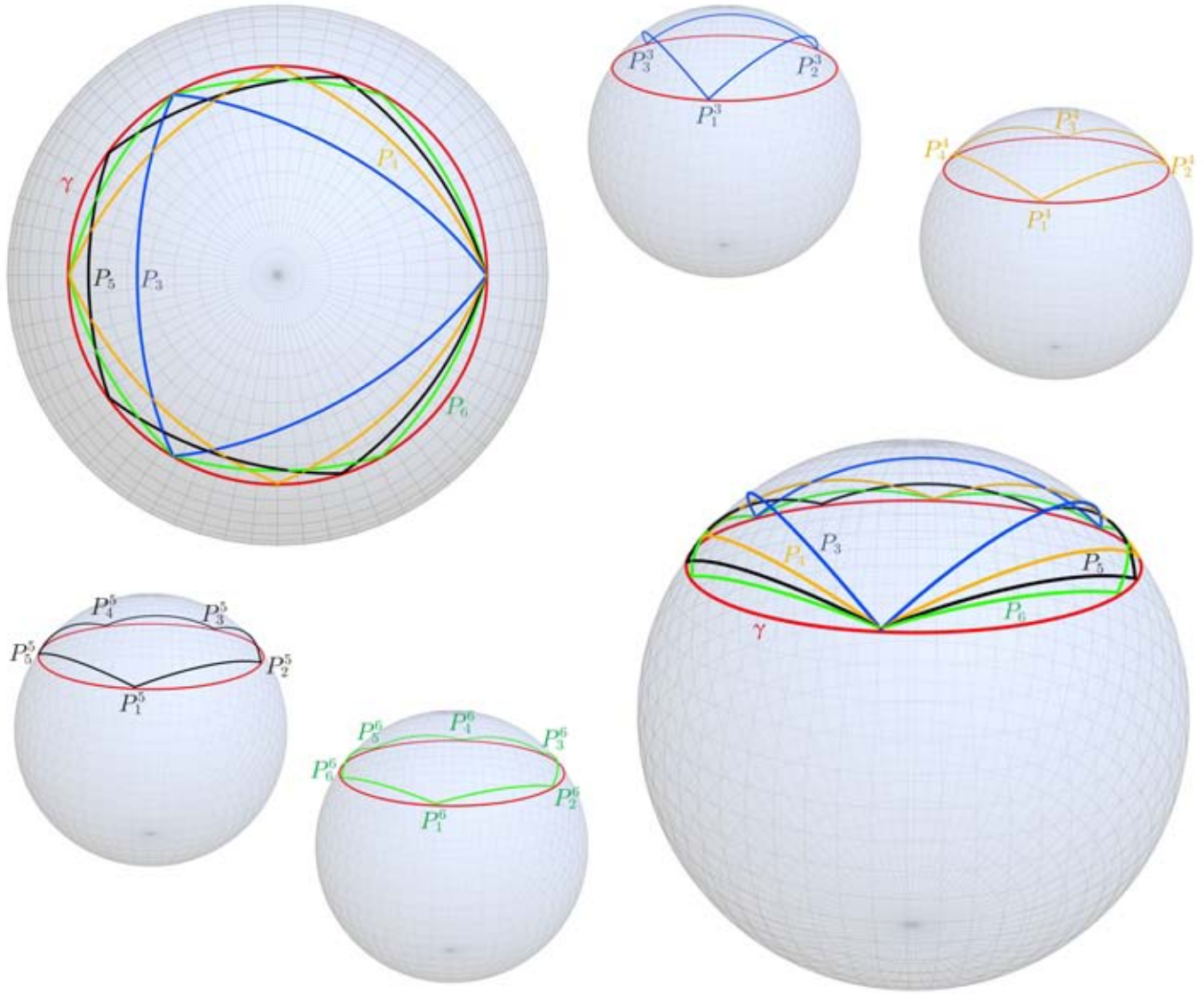


El ángulo de holonomía de una curva $\gamma \in \Gamma \subset S_r^2$ es igual al área de la imagen bajo la aplicación de Gauss de la región que γ encierra

Tomemos una curva concreta en Γ para visualizar el resultado, un paralelo en S^2 . Queremos transportar paralelamente un vector a lo largo de un paralelo $\gamma \subset S^2$ (ver la siguiente figura).



Tomemos un punto Q en el paralelo. Cuando le damos una vuelta al paralelo transportando paralelamente al vector v_Q , llegamos de nuevo al punto Q con un vector v_Q^1 . Hay que mostrar que el ángulo φ_γ de holonomía es igual al área $A(\gamma)$ que encierra el paralelo. Para transportar paralelamente a lo largo de γ tomaremos una sucesión de polígonos geodésicos (regulares) P_n , con vértices en γ , que converja al paralelo γ . Comencemos tomando tres puntos en el paralelo P_1^3, P_2^3, P_3^3 igualmente espaciados. Dichos puntos generan un triángulo equilátero P_3 en la esfera (ver la siguiente figura).



Polígonos geodésicos que aproximan al paralelo.

P_3 se parece poco a nuestro paralelo γ . Tomemos cuatro puntos P_1^4, P_2^4, P_3^4 y P_4^4 en γ igualmente espaciados para formar un cuadrado P_4 . Éste será más parecido al paralelo que P_3 . De manera análoga formemos un pentágono P_5 , y así sucesivamente, tomemos n puntos P_1^n, \dots, P_n^n para formar un n -ágono regular P_n con vértices en γ . Hemos creado una sucesión de polígonos geodésicos P_n que converge al paralelo γ . Veamos qué sucede con los transportes paralelos y con las áreas al tomar el límite. Por un lado, la sucesión de áreas $A(P_n)$ de cada polígono de la sucesión P_n , converge al área $A(\gamma)$ que encierra el paralelo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(P_n) = A(\gamma);$$

y por el otro, la sucesión de ángulos de holonomía φ_{P_n} converge, por definición, al ángulo de holonomía del paralelo φ_γ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{P_n} = \varphi_\gamma.$$

Por la fórmula de Gauss-Bonnet para polígonos geodésicos en S^2 (4.12), el área $A(P_n)$ de cada polígono es igual a su ángulo de holonomía φ_{P_n} :

$$\varphi_{P_n} = A(P_n);$$

es decir, en cada paso las sucesiones φ_{P_n} y $A(P_n)$ son iguales. Esto implica que sus límites también lo son

$$\varphi_\gamma = A(\gamma).$$

Si el paralelo lo tomamos en S_r^2 el único cambio es que hay que considerar la sucesión de áreas $A(\mathbf{N}(P_n))$ de las imágenes bajo la aplicación de Gauss de las regiones que encierran los polígonos P_n . Esta sucesión converge al área de la imagen bajo la aplicación de Gauss de la región que encierra el paralelo γ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(\mathbf{N}(P_n)) = A(\mathbf{N}(\gamma)).$$

El ángulo de holonomía φ_γ se comporta igual que en el caso de la esfera S^2 . Y la fórmula de Gauss-Bonnet (4.13) para polígonos en S^2_r

$$\varphi_{P_n} = A(\mathbf{N}(P_n)); \quad (4.15)$$

nos permite concluir una parte de la fórmula de Gauss-Bonnet para curvas $\gamma \in \Gamma$ en S^2_r :

$$\varphi_\gamma = A(\mathbf{N}(\gamma)). \quad (4.16)$$

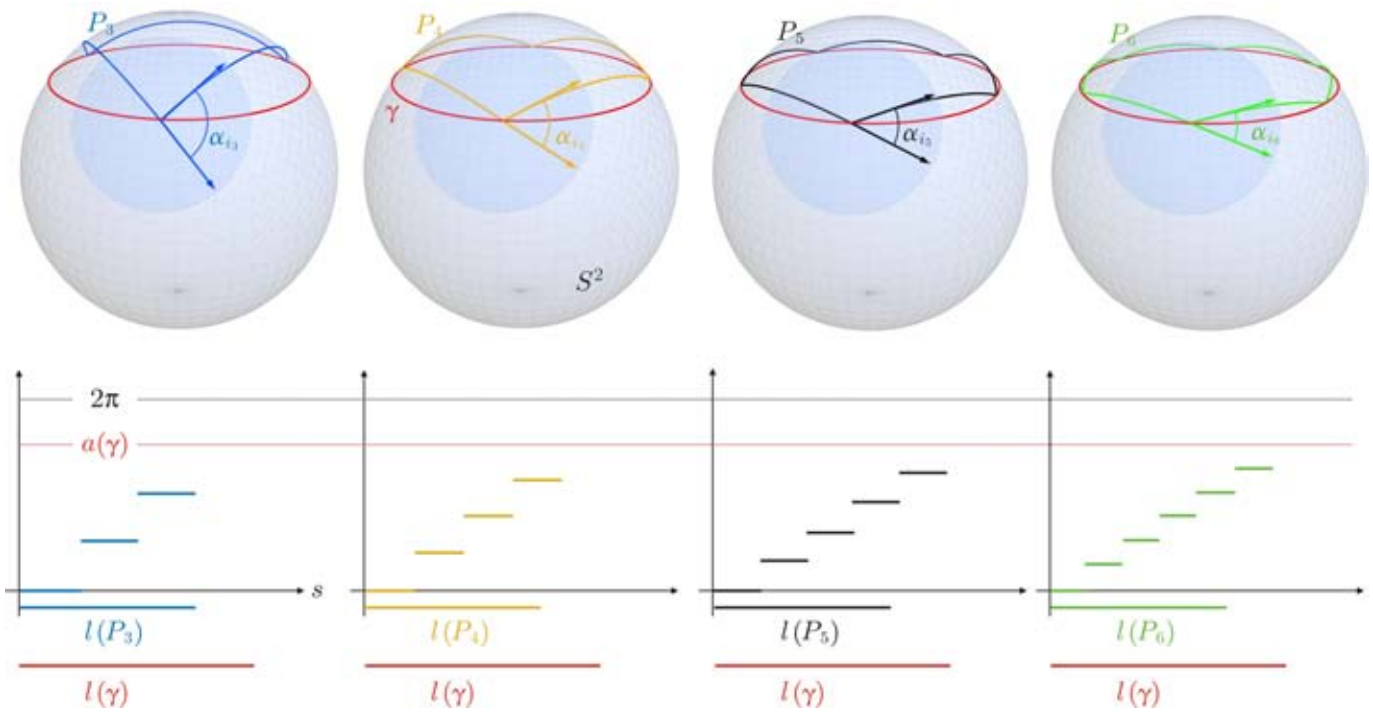
Relación entre la integral de la curvatura geodésica y el ángulo de holonomía de una curva γ

Nos falta la parte de la fórmula de Gauss-Bonnet que relaciona el ángulo de holonomía con la diferencia entre 2π y la suma de los ángulos exteriores. ¿Qué sentido tienen los ángulos exteriores en nuestra curva γ ? Veremos que la sucesión de polígonos geodésicos nos dará la pista para interpretar lo que sucede en el límite con sus ángulos exteriores.

Sabemos (igualdad 4.6 de la sección 4.12) que el ángulo de holonomía φ_{P_n} de cada polígono es igual a la diferencia entre 2π y la suma de sus ángulos exteriores

$$\varphi_{P_n} = 2\pi - \sum \alpha_{i_n}. \quad (4.17)$$

Parametricemos el polígono P_n a longitud de arco. Podemos interpretar sus ángulos exteriores α_{i_n} como los brinco que da el vector tangente P'_n del polígono cuando pasamos por sus vértices (ver la siguiente figura).



En la figura mostramos algunos polígonos de la sucesión P_n (que converge a un paralelo de la esfera S^2), sus ángulos exteriores y una gráfica del ángulo que rota el vector tangente de P_n como función del parámetro longitud de arco.

Cuando hacemos crecer el número de lados del polígono geodésico que aproxima al paralelo γ , los brinco del vector tangente se harán más pequeños y se darán tras intervalos de tiempo cada vez más cortos. En el límite, cuando $n \rightarrow \infty$:

1. Los ángulos exteriores α_{i_n} de P_n tenderán a cero;
2. El vector tangente P'_n del polígono P_n tenderá al vector tangente γ' del paralelo;
3. El tamaño de los brinco del vector P'_n es cada vez menor y el intervalo de tiempo entre un brinco y el siguiente tenderá a cero, por lo que el movimiento a brinco de P'_n culmina en un giro suave del vector γ' , que cada en cada instante s gira con una rapidez angular igual a la curvatura geodésica k_G del paralelo γ , respecto al vector tangente de la geodésica que pasa por $\gamma(s)$ con velocidad $\gamma'_{\gamma(s)}$.
4. El movimiento del vector P'_n tiende al movimiento suave a rapidez unitaria del vector γ' a lo largo de γ .
5. De lo incisos anteriores y la expresión (4.17) obtenemos

$$\varphi_\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{P_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\pi - \sum \alpha_{i_n} \right) = 2\pi - \int_\gamma k_G. \quad (4.18)$$

Notamos que las ideas anteriores son válidas no sólo para curvas en la esfera, sino para curvas en una superficie arbitraria S . Esto se debe a que en la sección 4.11 llegamos a la igualdad (4.6) para un polígono geodésico contenido en una superficie arbitraria y por otro lado, en los argumentos anteriores no usamos a la esfera ningún momento.

Fórmula de Gauss-Bonnet para curvas cerradas suaves en S_r^2

Además es la parte de la fórmula de Gauss-Bonnet que nos faltaba; igualándola con (4.16) obtenemos la fórmula de Gauss-Bonnet para el paralelo en S_r^2

$$2\pi - \int_{\gamma} k_{\mathbf{G}} = \varphi_{\gamma} = A(\mathbf{N}(\gamma)). \quad (4.19)$$

Podemos dar otra expresión de la fórmula anterior, que usaremos en la formulación del teorema de Gauss-Bonnet para una superficie arbitraria. Por estar en la esfera de radio r , la razón entre el área $A(\gamma)$ de la región que encierra el paralelo y el área $A(N(\gamma))$ de su imagen bajo la aplicación de Gauss es la curvatura gaussiana de la esfera S_r^2

$$A(\mathbf{N}(\gamma)) = \frac{1}{r^2} A(\gamma) = kA(\gamma).$$

Por otro lado podemos expresar el producto de la curvatura por el área de la región R_{γ} que encierra γ como la integral de la curvatura gaussiana sobre la misma región; como k es constante en S_r^2 , obtenemos

$$kA(\gamma) = \iint_{R_{\gamma}} k.$$

De modo que la fórmula de Gauss-Bonnet para el paralelo γ en S_r^2 toma la forma

$$2\pi - \int_{\gamma} k_{\mathbf{G}} = \varphi_{\gamma} = \iint_{R_{\gamma}} k. \quad (4.20)$$

Notamos que las fórmulas (4.20) y (4.19) son válidas no sólo en caso de que γ sea un paralelo en S_r^2 ; los mismos argumentos sirven para probar que son válidas para cualquier curva suave y cerrada en la esfera S_r^2 .

Fórmula de Gauss-Bonnet para curvas lisas por tramos en la esfera

Supongamos que la curva

$$\gamma \in \Gamma = \{ \text{curvas cerradas en } S_r^2, \text{ lisas por tramos y homeomorfas a una circunferencia} \}.$$

tiene vértices Q_i ; y que en ellos cambia de dirección en un ángulo θ_i . En otras palabras, la curva tiene picos en Q_i , y la diferencia en los ángulos de los vectores tangentes que llegan y salen de Q_i es θ_i . Consideremos la sucesión de polígonos geodésicos P_n con vértices en γ y que converge a γ ; por (4.17) y (4.15) sabemos que el ángulo de holonomía de la sucesión de polígonos es igual, por un lado, a la diferencia de 2π con la suma de los ángulos exteriores α_{i_n} ; y por el otro, al área $A(N(P_n))$ de la imagen bajo la aplicación de Gauss de la región que encierra el polígono P_n

$$2\pi - \sum \alpha_{i_n} = \varphi_{P_n} = A(N(P_n)). \quad (4.21)$$

Al tomar límite en el lado izquierdo de la igualdad anterior habrá una diferencia respecto de la toma del límite en el procedimiento para llegar a la fórmula de Gauss-Bonnet (4.18) para curvas suaves en la esfera. Ahora la sucesión de polígonos no tiende a una curva suave, sino a una curva suave por tramos donde el vector velocidad de γ tiene i brinco en los puntos Q_i . Entonces al tomar el límite en la sucesión de polígonos deberán aparecer estos puntos Q_i donde el vector velocidad brinca. Consecuentemente, en el límite de la sucesión de ángulos de holonomía obtendremos i nuevos sumandos correspondientes a los ángulos de los brinco θ_i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{P_n} = \varphi_{\gamma} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\pi - \sum \alpha_{i_n} \right) = 2\pi - \int_{\gamma} k_{\mathbf{G}} - \sum \theta_i. \quad (4.22)$$

El límite del lado derecho de (4.21) nos da el área $A(N(\gamma))$ de la imagen bajo la aplicación de Gauss de la región que encierra γ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{P_n} = A(N(\gamma)) \quad (4.23)$$

Igualando (4.22) y (4.23) obtenemos la fórmula de Gauss-Bonnet para curvas suaves por tramos en S_r^2

$$2\pi - \sum \theta_i - \int_{\gamma} k_{\mathbf{G}} = H(\gamma) = A(N(\gamma)); \quad (4.24)$$

que también puede ser expresada de la siguiente manera en términos de la curvatura gaussiana de S_r^2

$$2\pi - \sum \theta_i - \int_{\gamma} k_{\mathbf{G}} = H(\gamma) = \iint_{\gamma} k.$$

4.14. Método intrínseco para calcular la curvatura gaussiana en la esfera y su generalización

En la sección 4.12 encontramos que un ser 2D habitante de S_r^2 podía calcular de manera intrínseca la curvatura gaussiana de su mundo dividiendo el ángulo de holonomía de un polígono geodésico entre el área que éste encierra. La fórmula (4.19) garantiza que cuando el ser 2D realice el cociente del ángulo de holonomía entre el área, encontrará el mismo resultado para una familia más grande de curvas Γ en la esfera que la de polígonos geodésicos (es decir, podrá calcular la curvatura de su mundo S_r^2 usando no solo polígonos geodésicos, sino curvas $\gamma \in \Gamma$). En efecto a partir de (4.19) llegamos a

$$\frac{\varphi_{\gamma}}{A(\gamma)} = k = \frac{A(\mathbf{N}(\gamma))}{A(\gamma)}. \quad (4.25)$$

Hemos encontrado un método intrínseco para calcular la curvatura de la esfera, ¿funcionará este método en otras superficies?, es decir, si un ser 2D en una superficie S que no sea una esfera S_r^2 usa el método anterior ¿obtendrá la curvatura de su mundo? Las líneas que siguen serán para explicar que en efecto sí funciona este método en cualquier superficie S . Sin embargo hay que hacerle una pequeña modificación pues la curvatura gaussiana de S ya no es constante como en S_r^2 , por lo que el cociente $\frac{\varphi_{\gamma}}{A(\gamma)}$ nos arrojaría solamente una aproximación al comportamiento de la curvatura gaussiana en la región R_{γ} que encierra γ . Dicha aproximación será mejor mientras menor sea el área que encierra γ . De modo que la modificación será tomar el límite⁷¹ del cociente

$$\lim_{A(\gamma) \rightarrow 0} \frac{\varphi_{\gamma}}{A(\gamma)}. \quad (4.26)$$

Adelantamos que el punto esencial será garantizar que la siguiente igualdad se verifique

$$\varphi_{\gamma} = A(\mathbf{N}(\gamma)). \quad (4.27)$$

A partir de ella podemos obtener la curvatura gaussiana tomando el límite (4.26). Veamos que en efecto esto es así. Tomemos una sucesión de curvas γ_n tales que

1. Siempre contengan a un punto $P \in S$ en la región R_{γ} que encierran.
2. El área que encierran tienda a cero, $\lim_{n \rightarrow \infty} A(\gamma_n) = 0$.

Si aplicamos la igualdad (4.27) a nuestra sucesión γ_n tendríamos que

$$\varphi_{\gamma_n} = A(\mathbf{N}(\gamma_n));$$

por lo que al tomar el límite obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{\gamma_n}}{A(\gamma_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(\mathbf{N}(\gamma_n))}{A(\gamma_n)},$$

donde el lado derecho de la última igualdad es la curvatura gaussiana en el punto P .

Conclusión 21 Si la igualdad (4.27) es válida entonces tendríamos una expresión intrínseca de la curvatura gaussiana: el límite cuando $n \rightarrow \infty$ del cociente del ángulo de holonomía que obtenemos al transportar paralelamente un vector a lo largo de la curva γ_n entre el área $A(\gamma_n)$ que encierra la curva γ_n :

$$k(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{\gamma_n}}{A(\gamma_n)};$$

es decir, habríamos encontrado el método intrínseco que buscábamos para expresar la curvatura gaussiana de S .

⁷¹La manera de tomar el límite es análoga a la que se usa para definir el concepto de divergencia y rotacional de campos en \mathbb{R}^2 . Esto es así porque tanto la divergencia, el rotacional y la curvatura comparten algo en común: son 2-formas diferenciales como veremos más adelante.

Ahora veremos qué necesitamos para garantizar que el ángulo de holonomía de la curva γ sea igual al área de la imagen bajo la aplicación de Gauss de la región que encierra la curva γ

$$\varphi_\gamma = A(\mathbf{N}(\gamma)).$$

¿Qué relación hay entre el ángulo de holonomía φ_γ y $A(\mathbf{N}(\gamma))$? Aplicando el teorema de Gauss-Bonnet a la curva $\mathbf{N}(\gamma)$ contenida en S^2 tenemos que

$$\varphi_{(\mathbf{N}(\gamma))} = A(\mathbf{N}(\gamma)). \quad (4.28)$$

¿Hay alguna relación entre φ_γ y $\varphi_{(\mathbf{N}(\gamma))}$? Si se diera la igualdad

$$\varphi_\gamma = \varphi_{(\mathbf{N}(\gamma))} \quad (4.29)$$

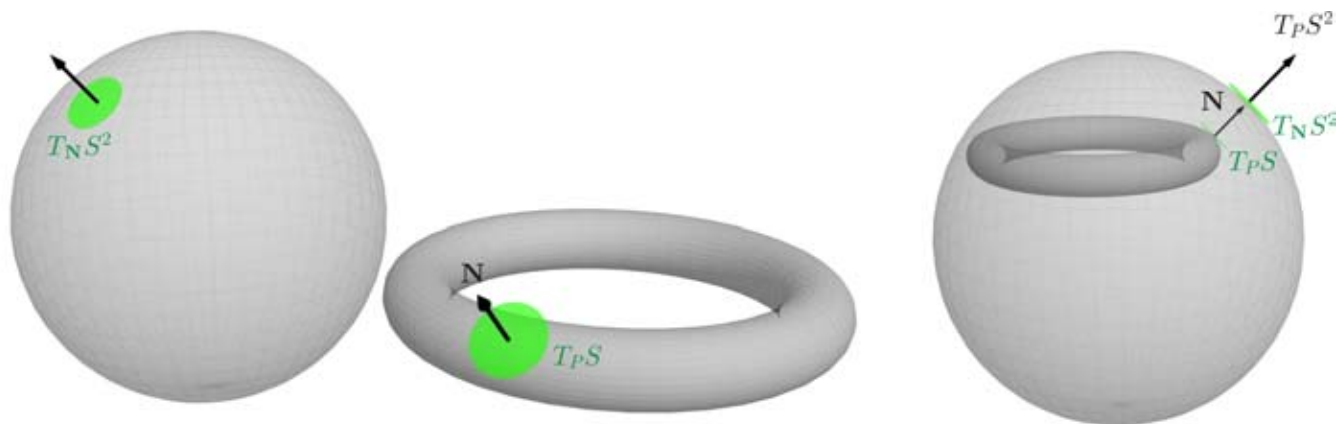
entonces sustituyendo en (4.28) obtendríamos la igualdad que queremos:

$$\varphi_\gamma = A(\mathbf{N}(\gamma)). \quad (4.30)$$

Exploremos enseguida si la igualdad (4.29) es cierta. La aplicación de Gauss asocia a cada punto $P \in S$, el vector normal $\mathbf{N}(P)$ a la superficie S en P . El vector $\mathbf{N}(P)$ vive en S^2 , entonces podemos ver la imagen de la aplicación de Gauss de toda la superficie S como una nueva superficie \tilde{S} contenida en S^2

$$\tilde{S} = \mathbf{N}(S) = \{\mathbf{N}(P) : P \in S\}.$$

Por ende el plano tangente $T_{\mathbf{N}(P)}\tilde{S}$ a \tilde{S} en el punto $\mathbf{N}(P)$ es perpendicular a $\mathbf{N}(P)$, pues éste es un radio de S^2 . Por otro lado el plano tangente $T_P S$ es perpendicular al vector normal $\mathbf{N}_P S$, lo que implica que los planos $T_P S$ y $T_{\mathbf{N}(P)}\tilde{S}$ son paralelos.



Entonces los planos tangentes $T_\gamma S$ y $T_{\mathbf{N}(\gamma)}\tilde{S}$ serán paralelos al movernos a lo largo de γ en S y a lo largo de $\mathbf{N}(\gamma)$ en S^2 . Así el campo paralelo v_γ que obtenemos al desplazar paralelamente un vector v_{γ_0} a lo largo de γ , induce un campo tangente a lo largo de $\mathbf{N}(\gamma)$. Veamos cómo. Podemos imaginar que, usando el transporte paralelo de \mathbb{R}^3 , transportamos paralelamente los vectores del campo v_γ (que inicialmente están anclados a lo largo de γ) del punto $\gamma(s)$ al punto $\mathbf{N}(\gamma(s))$ para obtener un campo vectorial $v_{\mathbf{N}(\gamma)}$ tangente a S^2 a lo largo de $\mathbf{N}(\gamma)$ (Los vectores $v_{\mathbf{N}(\gamma)}$ y v_γ son iguales vistos como vectores en \mathbb{R}^3). Si el campo $v_{\mathbf{N}(\gamma)}$ resultase ser un campo paralelo en S^2 a lo largo de $\mathbf{N}(\gamma)$, entonces obtendríamos que el ángulo de holonomía de la curva $\gamma \subset S$ sería igual al ángulo de holonomía de la curva $\mathbf{N}(\gamma) \subset S^2$

$$\varphi_\gamma = \varphi_{(\mathbf{N}(\gamma))};$$

es decir, se cumple la igualdad (4.29), pero ya vimos que ésta implica la igualdad (4.30) que buscamos.

Por una propiedad que demostraremos en la sección 4.18, la derivada covariante del campo v_γ es cero, pero esto implica que la proyección en $T_\gamma S$ de la derivada del campo $\frac{dv_\gamma}{ds}$ es igual a cero. Como los campos v_γ y $v_{\mathbf{N}(\gamma)}$ son los mismos salvo por los puntos donde se aplican y los planos $T_\gamma S$ y $T_{\mathbf{N}(\gamma)}\tilde{S}$ son paralelos, entonces la proyección de $\frac{dv_{\mathbf{N}(\gamma)}}{ds}$ en $T_{\mathbf{N}(\gamma)}\tilde{S}$ también será cero, por lo que $v_{\mathbf{N}(\gamma)}$ será un campo paralelo a lo largo de $\mathbf{N}(\gamma) \subset S^2$.

4.15. El teorema Egregio de Gauss

En la sección 4.14 encontramos ya un método intrínseco para calcular la curvatura gaussiana:

$$k(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{\gamma_n}}{A(\gamma_n)} \quad (4.31)$$

Midiendo ángulos y áreas un ser 2D (y 3D también como veremos después) puede calcular la curvatura de su mundo. La igualdad (4.31) tiene mucha información, en particular si tenemos una superficie vista desde nuestro mundo 3D y la deformamos isométricamente no cambiarán las áreas ni los ángulos, por lo que un ser 2D no se dará cuenta de que le estamos deformando su mundo. Seguirá midiendo el mismo ángulo de holonomía φ_{γ_n} de la sucesión de curvas γ_n y también medirá igual el área $A(\gamma_n)$ de las regiones que encierran las curvas γ_n . Entonces obtendrá también el mismo valor para el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{\gamma_n}}{A(\gamma_n)},$$

y en consecuencia el mismo valor para la curvatura gaussiana antes y después de la derformación. Lo anterior nos dice que la curvatura Gaussiana se conserva bajo isometrías. Es un invariante. Ésta es la idea del teorema Egregio de Gauss.

4.16. Teorema de Gauss-Bonnet para una superficie S

En la sección 4.13 llegamos a que el ángulo de holonomía de una curva $\gamma \subset S$ es la diferencia entre 2π y la integral a lo largo de γ de la curvatura geodésica de γ

$$2\pi - \int_{\gamma} k_{\mathbf{G}} = \varphi_{\gamma} \tag{4.32}$$

Si la curva γ es suave por tramos, entonces, por mismo argumento que usamos en (4.13) tenemos que

$$2\pi - \sum \theta_i - \int_{\gamma} k_{\mathbf{G}} = \varphi_{\gamma}. \tag{4.33}$$

Vimos en la sección 4.14 que el ángulo de holonomía de la curva γ es igual al área $A(\mathbf{N}(R_{\gamma}))$ bajo la aplicación de Gauss de la región que encierra γ .

$$\varphi_{\gamma} = A(\mathbf{N}(R_{\gamma})). \tag{4.34}$$

Recordamos que la curvatura gaussiana en un punto P puede ser interpretada como

$$\lim_{A(\Omega) \rightarrow 0} \frac{A(\mathbf{N}(\Omega))}{A(\Omega)},$$

donde Ω es una región que contiene a P . Entonces podemos ver a $A(\mathbf{N}(\gamma))$ como la integral de superficie de la función curvatura gaussiana

$$A(\mathbf{N}(R_{\gamma})) = \iint_{R_{\gamma}} k.$$

Sustituyendo en (4.34) llegamos a la siguiente igualdad:

$$\varphi_{\gamma} = \iint_{R_{\gamma}} k \tag{4.35}$$

Sustituyendo esta última igualdad en (4.32) y (4.33) llegamos al teorema de Gauss-Bonnet para curvas suaves

$$2\pi - \int_{\gamma} k_{\mathbf{G}} = \varphi_{\gamma} = \iint_{\gamma} k; \tag{4.36}$$

y para curvas suaves por tramos

$$2\pi - \sum \theta_i - \int_{\gamma} k_{\mathbf{G}} = \varphi_{\gamma} = \iint_{\gamma} k.$$

El teorema de Gauss-Bonnet local se puede extender a un teorema global para superficies compactas, relacionando así la geometría y la topología. Discutiremos en el apéndice B una forma de abordar este resultado, a través del concepto de índice de un campo vectorial y el teorema del índice de Poincaré.

4.17. Transporte paralelo extrínseco

A continuación trataremos en detalle el marco de referencia paralelo que introducimos en la sección 4.10. En la sección 4.13 llegamos a que el vector velocidad $\gamma'_{\gamma(s)}$ de una curva gira con una rapidez angular

$$\omega = k_{\mathbf{G}}$$

con respecto al vector velocidad $\gamma'_{\gamma(s)}$ de una geodésica que pasa por el punto $\gamma(s)$ con velocidad $\gamma'_{\gamma(s)}$. El ángulo entre dos campos paralelos a lo largo de una curva es constante, de modo que la rapidez angular con la que gira el vector $\gamma'_{\gamma(s)}$ respecto a cualquier campo paralelo es $k_{\mathbf{G}}$.

Definición 22 Si nos fijamos en los vectores \mathbf{t} y \mathbf{G} del marco de Darboux a lo largo de γ obtenemos un marco F_{2D} que será el **marco de Frenet intrínseco** para un habitante 2D de la superficie S .

Como ambos vectores giran al mismo ritmo tendremos que el marco F_{2D} gira con una rapidez angular $k_{\mathbf{G}}$ respecto de cualquier campo paralelo. Construyamos ahora un marco ortonormal de $T_{\gamma}S$ con dos campos paralelos.

Definición 23 Llamaremos **marco paralelo de $T_{\gamma}S$** a un marco α_{2D} de $T_{\gamma}S$ formado por dos campos paralelos linealmente independientes a lo largo de γ .

Imaginemos que trasladamos paralelamente los vectores \mathbf{t}_0 y \mathbf{G}_0 a lo largo de la curva γ , así obtenemos en cada espacio tangente a lo largo de γ un par de vectores $R_s(\mathbf{t}_0)$, y $R_s(\mathbf{G}_0)$ y con ello un marco paralelo $\alpha_{2D} = \{R_s(\mathbf{t}_0), R_s(\mathbf{G}_0)\}$ a lo largo de γ . Para un ser 2D que viaje a lo largo de γ , el sistema de referencia α_{2D} será un sistema de referencia análogo a nuestro sistema de referencia $\{e_1, e_2\}$ en \mathbb{R}^2 .

Si vemos las cosas desde \mathbb{R}^3 podemos completar el marco α_{2D} a un marco $\delta = \{R_s(\mathbf{t}_0), R_s(\mathbf{G}_0), \mathbf{N}\}$ de $T_{\gamma}\mathbb{R}^3$, añadiendo el vector normal a la superficie \mathbf{N} . Tenemos entonces que los marcos de Darboux D y δ a lo largo de γ van girando uno respecto del otro. Cualquier campo paralelo tendrá coordenadas constantes respecto del marco δ , por lo que estará girando respecto del marco D con una rapidez angular igual a la curvatura geodésica.

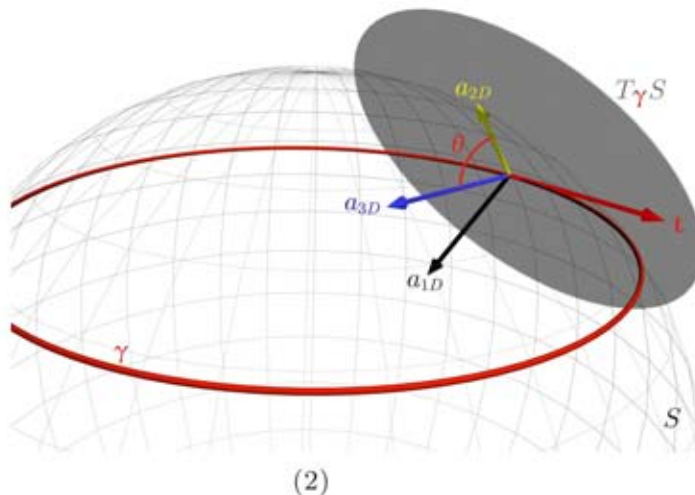
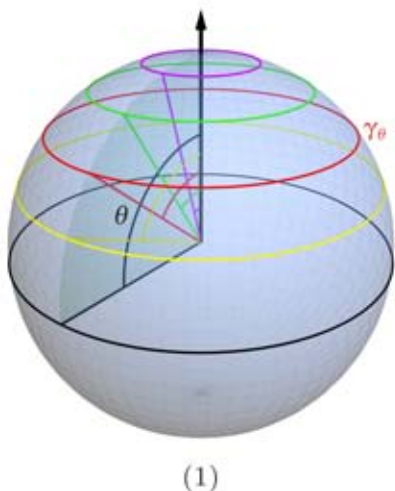
Conclusión 24 Entonces como seres 3D vemos que un sistema de referencia paralelo α_{2D} gira a lo largo de γ , respecto del marco de Darboux D , con una rapidez angular igual al negativo de la curvatura geodésica.

Notamos que la idea anterior se verifica también si nuestro mundo 2D es un plano, por ejemplo \mathbb{R}^2 . En este caso, el marco de Darboux está formado por el diedro de Frenet F (que vimos en la sección 1.14) y por el vector normal al plano. Un marco paralelo puede ser $\delta = \{R_s(\mathbf{t}_0), R_s(\mathbf{G}_0), \mathbf{N}\}$, que está formado por el traslado paralelo de los vectores del marco de Darboux en el instante $s = 0$. El marco δ se encuentra en reposo respecto del marco paralelo de $T_{\gamma}\mathbb{R}^3$ que obtenemos al trasladar paralelamente a lo largo de γ a los vectores de nuestro marco $\{e_1, e_2, e_3\}$ usual de referencia en \mathbb{R}^3 . El marco D gira con una rapidez angular igual a la curvatura de γ con respecto de cualquier marco paralelo a lo largo de γ .

Ejemplo 25 La esfera

Tomemos paralelos en S^2 como nuestras curvas $\gamma(s)$. El vector aceleración 3D apunta siempre hacia el centro del paralelo, su tamaño depende del ángulo de θ que forma el paralelo γ_{θ} respecto al polo norte de la esfera (ver figura siguiente (1)), y será el inverso del radio del paralelo

$$\|a_{3D}\| = \|\gamma''_{\theta}\| = \frac{1}{|\text{sen}\theta|} = \frac{1}{r_{\theta}}$$



Para calcular la curvatura geodésica $k_{\mathbf{G}}$ proyectemos a_{3D} en $T_{\gamma}S$ (ver figura anterior (2)) y obtenemos que

$$k_{\mathbf{G}} = \cot \theta$$

por lo tanto para que un marco de $T_{\gamma}S^2$ sea un marco paralelo necesitamos que gire respecto del marco $F_{2D} = \{\mathbf{t}, \mathbf{G}\}$ con una rapidez angular $-k_{\mathbf{G}}$

$$\omega = -k_{\mathbf{G}} = -\cot \theta.$$

4.18. Una propiedad extrínseca que caracteriza los campos paralelos

La derivada covariante de un campo paralelo es cero

Recordamos que la derivada covariante de un campo w a lo largo de $\gamma \subset S \subset \mathbb{R}^3$ es el campo que obtenemos a lo largo de γ al hacer la proyección

$$\frac{Dw}{ds} = \pi_{T_{\gamma}S} \left(\frac{dw}{ds} \right)$$

en el plano tangente a la superficie S de la derivada del campo $\frac{dw}{ds}$ (usando el transporte paralelo usual en \mathbb{R}^3). Vimos en la sección 4.5 que la derivada covariante de un campo de velocidades en una geodésica es cero. Este campo es paralelo a lo largo de la geodésica. En general esta propiedad se verifica para cualquier campo paralelo a lo largo de una curva arbitraria γ , es decir, la derivada covariante de un campo paralelo a lo largo de γ es cero. La idea es que

1. El marco de Frenet intrínseco $F_{2D} = \{\mathbf{t}, \mathbf{G}\}$ gira con una rapidez angular igual a la curvatura geodésica respecto de cualquier marco paralelo en S . En la siguiente figura (1) mostramos el marco F_{2D} (en malla azul) y dos marcos paralelos α_{2D} y β_{2D} (en amarillo); F_{2D} y α_{2D} coinciden. F_{2D} gira con la misma rapidez angular respecto a cualquiera de ellos y la velocidad de F_{2D} respecto del marco α_{2D} está dada por una matriz antisimétrica

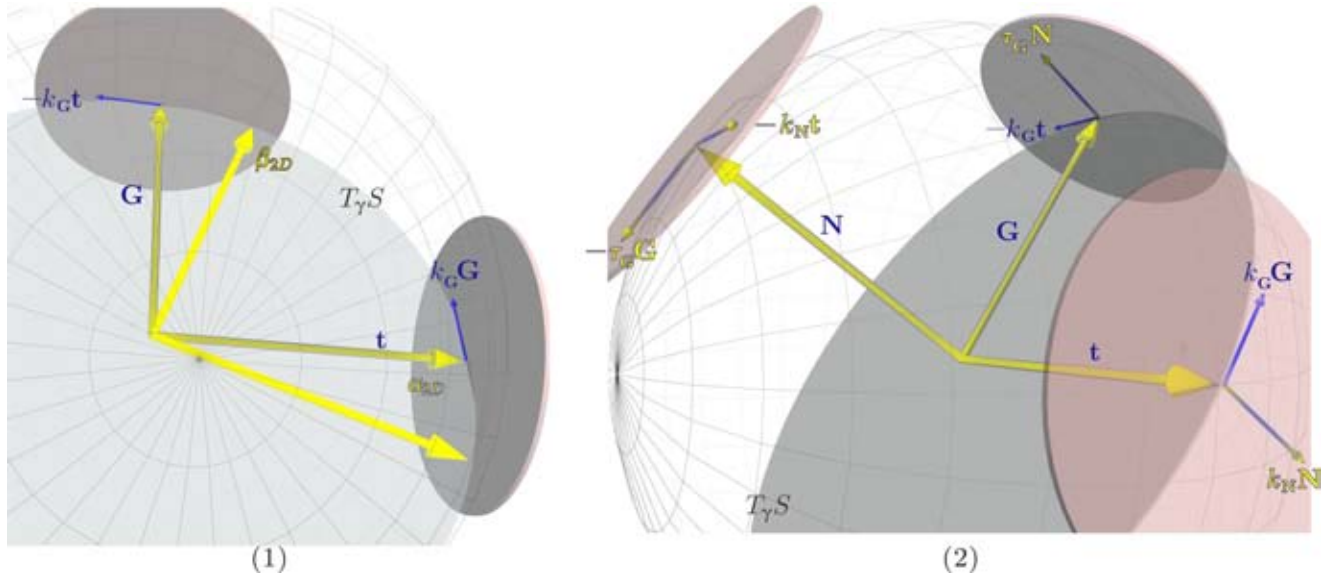
$$\left(\begin{array}{c} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{G}}{ds} \end{array} \right)_{\alpha_{2D}} = \begin{pmatrix} 0 & k_{\mathbf{G}} \\ -k_{\mathbf{G}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}$$

2. Viendo las cosas extrínsecamente (como seres 3D) tenemos que las ecuaciones de Darboux (ver sección 3.16 y apéndice A)

$$\left(\begin{array}{c} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{G}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{N}}{ds} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & k_{\mathbf{G}} & k_{\mathbf{N}} \\ -k_{\mathbf{G}} & 0 & \tau_{\mathbf{G}} \\ -k_{\mathbf{N}} & -\tau_{\mathbf{G}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{G} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{\mathbf{G}}\mathbf{G} + k_{\mathbf{N}}\mathbf{N} \\ -k_{\mathbf{G}}\mathbf{t} + \tau_{\mathbf{G}}\mathbf{N} \\ -k_{\mathbf{N}}\mathbf{t} - \tau_{\mathbf{G}}\mathbf{G} \end{pmatrix}.$$

garantizan que el marco de Darboux $D = \{\mathbf{t}, \mathbf{G}, \mathbf{N}\}$ gira en $T_{\gamma}S$, respecto de los vectores $\{\mathbf{t}, \mathbf{G}\} \subset \{\mathbf{t}, \mathbf{G}, \mathbf{N}\}$ con una rapidez angular igual a la curvatura geodésica. Las componentes de las velocidades $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ y $\frac{d\mathbf{G}}{ds}$ en los vectores \mathbf{t} y \mathbf{G} del marco D coinciden con las componentes de las velocidades $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ y $\frac{d\mathbf{G}}{ds}$, respecto de un marco paralelo α_{2D} formado con los vectores \mathbf{t} y \mathbf{G}

3. Entonces un marco paralelo α_{2D} en $T_{\gamma}S$ está en reposo respecto de la parte $\{\mathbf{t}, \mathbf{G}\} \subset \{\mathbf{t}, \mathbf{G}, \mathbf{N}\} = D$ en $T_{\gamma}S$. Por lo que la derivada covariante de cualquiera de los vectores de α_{2D} (o de cualquier otro campo paralelo) será cero.



Si la derivada covariante de un campo w_γ es cero entonces el campo es paralelo

Completemos el campo w_γ a un marco de $T_\gamma S$ a lo largo de γ y después con \mathbf{N} a un marco δ_w de $T_\gamma \mathbb{R}^3$. Como la derivada covariante del campo w es cero, esto implica que la velocidad del marco δ_w expresada en términos de los vectores del marco $\{w, w^\perp, \mathbf{N}\}$ está dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{dw}{ds} \\ \frac{dw^\perp}{ds} \\ \frac{d\mathbf{N}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k_{\mathbf{N}} \\ 0 & 0 & \tau_{\mathbf{G}} \\ k_{\mathbf{N}} & -\tau_{\mathbf{G}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ w^\perp \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_{\mathbf{N}}\mathbf{N} \\ \tau_{\mathbf{G}}\mathbf{N} \\ k_{\mathbf{N}}\mathbf{t} - \tau_{\mathbf{G}}\mathbf{G} \end{pmatrix}.$$

Un marco paralelo que coincida en $s = 0$ con w y w^\perp , coincidirá para todo s puesto que ambos marcos estarán en reposo entre ellos porque ambos tienen derivada covariante cero.

5. Curvas en \mathbb{R}^n

5.1. Curvas en \mathbb{R}^4

En esta sección motivaremos la herramienta matemática para describir la forma de una curva en el espacio euclidiano de n dimensiones \mathbb{R}^n .

Definición 1 Una curva en \mathbb{R}^n es un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ que es la imagen de un intervalo abierto I bajo una aplicación diferenciable

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n; \text{ donde } s \rightarrow \gamma(s) \in \mathbb{R}^n;$$

$$A = \{\gamma(s) \in \mathbb{R}^n : s \in I\}.$$

Imaginemos ahora a un ser 4D que vive en \mathbb{R}^4 y que ve a nuestro mundo⁷² \mathbb{R}^3 como una rebanada del suyo, de la misma manera en que nosotros concebimos a \mathbb{R}^2 como una rebanada de nuestro mundo \mathbb{R}^3 . El ser 4D ve todas nuestras curvas tridimensionales en una rebanada tridimensional de su mundo. Análogamente a lo que ocurre con las curvas que no son planas en \mathbb{R}^3 , el ser 4D puede ver curvas en \mathbb{R}^4 que no pueden ser encerradas en rebanada tridimensional alguna (hiperplanos de dimensión 3 contenidos en \mathbb{R}^4). Así como la variación del plano osculador origina que una curva en \mathbb{R}^3 no sea plana, en el caso de una curva en \mathbb{R}^4 , será la variación de un espacio osculador O^3 tridimensional quien determine si la curva es o no plana. Las curvas espaciales en \mathbb{R}^4 serán aquellas en las cuales la posición del espacio osculador permanece constante. Entonces, de manera intuitiva; el movimiento de dicho espacio osculador determinará la forma de la curva \mathbb{R}^4 .

Más en detalle, ¿Quién es dicho espacio osculador? Podríamos pensar en definir el espacio osculador O^3 de una curva $\gamma \subset \mathbb{R}^4$ como el hiperplano tridimensional en \mathbb{R}^4 determinado por los vectores \mathbf{t} , \mathbf{n} , y \mathbf{b} . Sin embargo, definimos en la sección 2.1 al vector binormal \mathbf{b} de una curva $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ usando el producto cruz, que es una operación exclusiva del espacio tridimensional. De modo que se nos ha desvanecido el vector binormal \mathbf{b} al pasar a \mathbb{R}^4 .

Necesitamos una manera de llegar al marco de Frenet en \mathbb{R}^3 que no use ideas propias de dicho espacio, para después extenderlas y considerar marcos y espacios osculadores en más dimensiones. Hagamos primero un cambio en la notación nos será útil al considerar curvas en dimensiones mayores, renombramos a los actores de las ecuaciones de Frenet en \mathbb{R}^3 : los vectores del marco, la curvatura y torsión

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_1, \mathbf{n} = \mathbf{t}_2, \mathbf{b} = \mathbf{t}_3, k = k_1, \tau = k_2.$$

Tomemos ahora una curva γ una curva en \mathbb{R}^3 . Veremos que hay una relación entre las derivadas de γ la dimensión del espacio donde vive la curva.

1. *Curvas contenidas en una recta.* El vector⁷³ $\gamma^{(1)}$ determina una línea recta O^1 (un espacio lineal de dimensión uno), si derivamos por segunda vez a γ obtendremos el vector aceleración $\gamma^{(2)}$. Si en todo momento la aceleración $\gamma^{(2)}$ está contenida en O^1 , entonces la curva γ está contenida en la recta O^1 .
2. *Curvas que no están contenidas en ninguna recta.* Si existe algún instante s_0 en el que $\gamma^{(2)}$ no vive en O^1 ($\gamma^{(2)}(s_0) \notin O^1$), entonces γ no está contenida en ninguna recta. Si además pedimos que $\gamma^{(1)}$ y $\gamma^{(2)}$ sean linealmente independientes para todo instante s , garantizamos que generan en cada momento un plano O^2 (el plano osculador) del cual $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}$ es un marco ortonormal.
3. *Curvas contenidas en un plano* Si para todo $s \in I$, el vector tercera derivada $\gamma^{(3)}$ está contenido en el plano O^2 , entonces γ está contenida en O^2 .
4. *Curvas que no están contenidas en ningún plano.* Por otro lado, si existe algún s_0 en el que $\gamma^{(3)}$ no vive en O^2 , entonces la curva no está contenida en ningún plano. Si además pedimos que en todo instante los vectores $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\gamma^{(3)}$ sean linealmente independientes, garantizamos que generan en cada momento un hiperplano tridimensional O^3 . Podemos escoger un marco ortonormal de O^3

$$\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$$

tomando \mathbf{t}_3 en el complemento ortogonal al plano O^2 dentro de O^3 .

De esta forma queda definido un vector binormal \mathbf{t}_3 independientemente del producto cruz en \mathbb{R}^3 . Sin embargo estas ideas no son exclusivas de \mathbb{R}^3 , es decir, funcionan también para encontrar un vector \mathbf{t}_3 en espacios de dimensiones mayores.

Notamos que la tercera derivada de γ es linealmente independiente de las dos primeras si y sólo si la torsión de la curva sea distinta de cero

$$\gamma^{(1)} = \mathbf{t}$$

$$\gamma^{(2)} = k\mathbf{n}$$

$$\gamma^{(3)} = k^{(1)}\mathbf{n} + k\mathbf{n}^{(1)} = k^{(1)}\mathbf{n} + k(-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) = k^{(1)}\mathbf{n} - k^2\mathbf{t} + k\tau\mathbf{b}$$

⁷²Estamos suponiendo que la forma de nuestro mundo es \mathbb{R}^3 .

⁷³En lo que sigue $\gamma^{(n)}$ denotará la n -ésima $\frac{d^n \gamma}{ds^n}$ derivada de γ .

Conclusión 2 Podemos construir el marco de Frenet a partir de la independencia lineal de las tres primeras derivadas de la curva $\gamma \subset \mathbb{R}^3$. La dimensión del espacio en el que vive la curva es igual a la dimensión del espacio que generan sus tres primeras derivadas.

Las ideas anteriores no son exclusivas de la dimensión 3, llevémoslas a nuestra curva en \mathbb{R}^4 .

1. *Curvas contenidas en un hiperplano de dimensión 3.* Si para todo $s \in I$ el vector cuarta derivada $\gamma^{(4)}$ está contenido en el hiperplano O^3 .
2. *Curvas que no están contenidas en ningún espacio tridimensional.* Si existe algún s_0 en el que $\gamma^{(4)}$ no vive en O^3 , entonces la curva no está contenida en ningún espacio tridimensional. Si además pedimos que en todo instante los vectores $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}, \gamma^{(4)}$ sean linealmente independientes, garantizamos que generan en cada momento un hiperplano de cuatro dimensiones O^4 . Podemos escoger un marco ortonormal de O^4

$$\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, \mathbf{t}_4\}$$

tomando \mathbf{t}_4 en el complemento ortogonal al plano O^3 dentro de O^4

A partir de la independencia lineal de las cuatro primeras derivadas de \mathbf{t} podemos:

1. concluir de nuevo que el espacio donde vive la curva es de dimensión cuatro.
2. construir el marco de Frenet de la curva γ .

También a través del movimiento del marco de Frenet podremos saber la dimensión del espacio en el que la curva habita. Dicho movimiento estará determinado por las ecuaciones de Frenet. A continuación daremos ideas para llegar a dichas ecuaciones.

De manera análoga a lo que sucedía con una curva plana en \mathbb{R}^3 , donde los vectores \mathbf{t}_1 y \mathbf{t}_2 giraban en una circunferencia S^1 contenida en S^2 , dejando en reposo al vector binormal \mathbf{t}_3 ; una curva en \mathbb{R}^4 contenida en un hiperplano tridimensional será tal que en todo momento los vectores $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ y \mathbf{t}_3 roten en una esfera S^2 contenida en la esfera de tridimensional $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ dejando al vector vector \mathbf{t}_4 en reposo. De modo que la velocidad $\frac{d\mathbf{t}_4}{ds}$ con que la indicatriz del vector \mathbf{t}_4 se mueve en S^3 determina si la curva es espacial o no.

Una curva en \mathbb{R}^3 tiene una hélice osculadora; que es aquella que en el punto en cuestión comparte tanto el marco de Frenet como la velocidad de éste con la curva. Así como tenía sentido hablar de la circunferencia osculadora de una curva en \mathbb{R}^3 . Tiene sentido hablar de la hélice osculadora de una curva en \mathbb{R}^4 , que estará contenida en el espacio osculador O^3 . La proyección $\pi_{O^3}(\gamma)$ de una curva en \mathbb{R}^4 sobre su espacio osculador O^3 es una curva en este último que comparte la hélice osculadora (determinada por la curvaturas k_1 y k_2 de γ) con la curva γ . Puede haber muchas curvas en \mathbb{R}^4 tales que sus proyecciones $\pi_{O^3}(\gamma)$ en O^3 sean curvas que comparten su hélice osculadora. Por lo tanto las dos primeras curvaturas k_1 y k_2 (curvatura y torsión usuales) no determinan la forma de una curva en \mathbb{R}^4 . Necesitamos otro parámetro que será la tercera curvatura k_3 que esencialmente medirá la velocidad con que se mueve el espacio osculador O^3 , o equivalentemente, la velocidad con que se mueve el cuarto vector del marco de frenet \mathbf{t}_4 .

Analicemos ahora la manera en que se mueve el marco $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, \mathbf{t}_4\}$ de una curva γ en \mathbb{R}^4 . Trasladando paralelamente los vectores al origen en \mathbb{R}^4 obtenemos cuatro indicatrices contenidas en la esfera tridimensional S^3 . Cerca de un punto arbitrario la proyección $\pi_{O^3}(\gamma)$ y la curva tienen la misma hélice osculadora. Esto implica que para un observador en el espacio osculador O^3 el marco formado por los vectores $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ y \mathbf{t}_3 se mueve con una velocidad determinada por las ecuaciones de Frenet tridimensionales. Dicha velocidad, expresada en terminos de los vectores del marco $F = \{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, \mathbf{t}_4\}$ tiene la forma

$$\left(\begin{array}{ccc} \left[\frac{d\mathbf{t}_1}{ds} \right]_{F_{s\alpha}} & \left[\frac{d\mathbf{t}_2}{ds} \right]_{F_{s\alpha}} & \left[\frac{d\mathbf{t}_3}{ds} \right]_{F_{s\alpha}} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

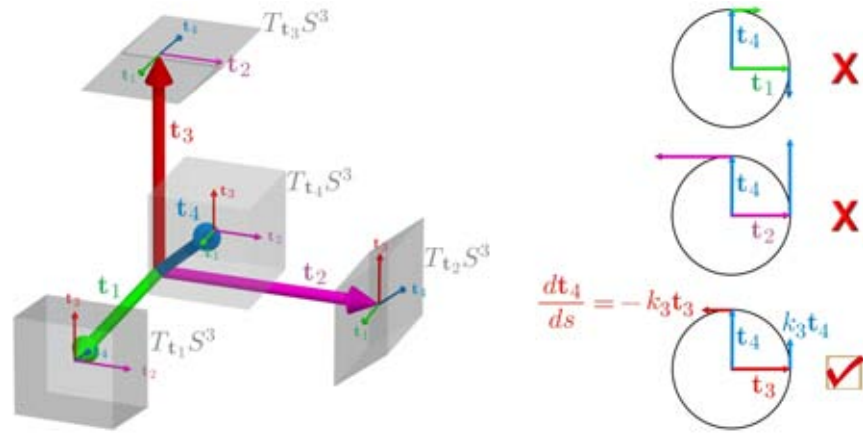
Las velocidades de los vectores \mathbf{t}_1 y \mathbf{t}_2 para un ser 3D en O^3 deberán coincidir con las velocidades para el ser 4D. No así la velocidad del vector \mathbf{t}_3 , ya que si coincidiera, entonces el vector \mathbf{t}_4 sería constante y la curva sería una curva espacial. Entonces debemos ver en O^3 que $\frac{d\mathbf{t}_3}{ds} = -k_2\mathbf{t}_2$; pero además el ser 4D deberá ver una componente de $\frac{d\mathbf{t}_3}{ds}$ que no ve el ser en O^3 , es decir, una componente en el vector \mathbf{t}_4 que llamaremos k_3 :

$$\frac{d\mathbf{t}_3}{ds} = -k_2\mathbf{t}_2 + k_3\mathbf{t}_4$$

Dicha componente k_3 ocasiona el movimiento del vector \mathbf{t}_4 y su velocidad será

$$\frac{d\mathbf{t}_4}{ds} = -k_3\mathbf{t}_3,$$

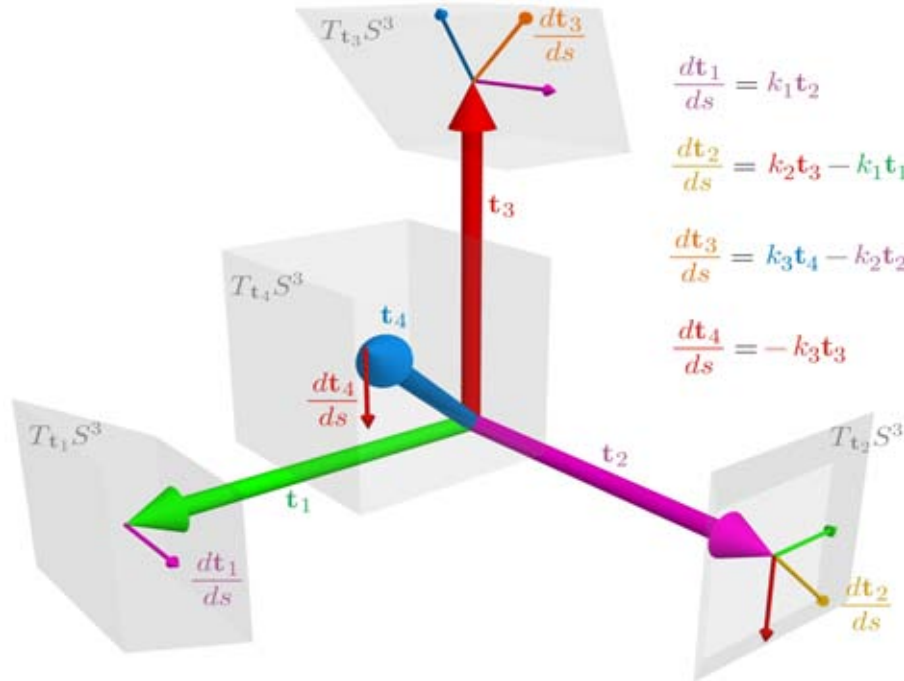
donde las componentes en los vectores $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ y \mathbf{t}_3 son cero ya que si alguna fuera distinta de cero ésta produciría una componente adicional a las de Frenet en dichos vectores y esto no es posible (En la siguiente figura ilustramos la idea anterior mediante el dibujo que haría un ser 4D en un cuaderno 3D del marco de Frenet F y de las componentes que podrían tener las velocidades $\frac{d\mathbf{t}_i}{ds} \in T_{\mathbf{t}_i}S^3$ de los vectores \mathbf{t}_i del marco F . Del lado derecho mostramos que el vector $\frac{d\mathbf{t}_4}{ds} \in T_{\mathbf{t}_4}S^3$ no puede tener componente en \mathbf{t}_1 ni en \mathbf{t}_2 , ya que éstas producirían en las velocidades $\frac{d\mathbf{t}_1}{ds}$ y $\frac{d\mathbf{t}_2}{ds}$ una componente en \mathbf{t}_4 , que sabemos no existen; entonces $\frac{d\mathbf{t}_4}{ds}$ debiera apuntar en la dirección del vector \mathbf{t}_3).



Por lo tanto tenemos que el marco de Frenet F se mueve con una velocidad⁷⁴ dada por el siguiente sistema matricial de Frenet

$$\left(\begin{array}{cccc} \left[\frac{dt_1}{ds} \right]_F & \left[\frac{dt_2}{ds} \right]_F & \left[\frac{dt_3}{ds} \right]_F & \left[\frac{dt_4}{ds} \right]_F \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_3 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones de Frenet en la manera usual tienen la forma



5.2. El sistema de ecuaciones diferenciales determinado por las ecuaciones de Frenet

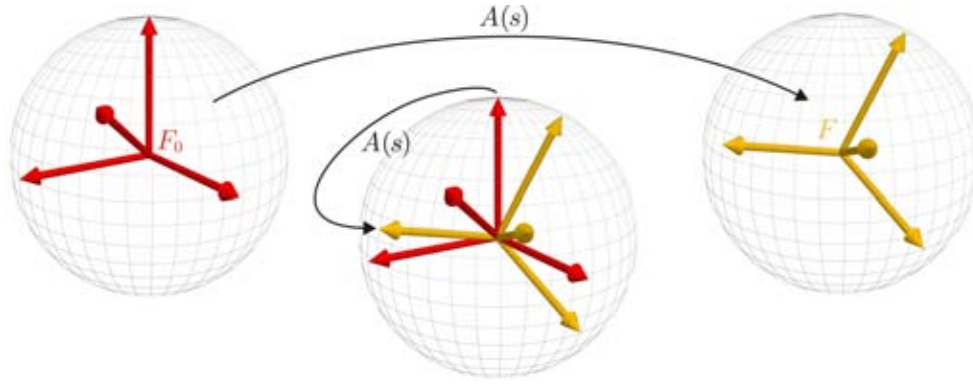
Podemos asociar a cada instante de tiempo s la transformación lineal ortogonal que lleva el marco F_0 en $F = F_s$.

Obtenemos así una curva en el espacio de transformaciones lineales ortogonales que tiene asociada una curva de matrices ortogonales

$$s \rightarrow A_s \in SO_4 \subset M_{3 \times 3},$$

que tiene como punto inicial (en $s = 0$) a la matriz identidad.

⁷⁴Mencionamos que tenemos derecho a llamar velocidad a esta matriz ya que es un vector en el álgebra de Lie del grupo de marcos SO_3 con la forma de conexión determinada por las simetrías del grupo SO^3 .



Esta figura representa el dibujo de dos marcos (tetraedros) F_0 y F que ha realizado un ser 4D en la hoja 3D de su cuaderno.

La derivada A'_s de la curva de matrices es

$$A'_s = \left(\begin{array}{cccc} [\frac{dt_1}{ds}]_{F_0} & [\frac{dt_2}{ds}]_{F_0} & [\frac{dt_3}{ds}]_{F_0} & [\frac{dt_4}{ds}]_{F_0} \end{array} \right) \quad (5.1)$$

donde

$$F_0 = \{\mathbf{t}_{1_0}, \mathbf{t}_{2_0}, \mathbf{t}_{3_0}, \mathbf{t}_{4_0}\}$$

es el marco de Frenet en $s = 0$.

Expresando las columnas de A'_s en términos del marco $F = \{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, \mathbf{t}_4\}$ y sustituyendo las ecuaciones de Frenet en \mathbb{R}^4 llegamos a la velocidad con que se mueve el marco F .

$$[I]_{F_0}^F A'_s = \left(\begin{array}{cccc} [\frac{dt_1}{ds}]_F & [\frac{dt_2}{ds}]_{F_s} & [\frac{dt_3}{ds}]_F & [\frac{dt_4}{ds}]_F \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_3 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Podemos imaginar que el marco F determina un espacio tetradimensional Π_F que gira con respecto del espacio tetradimensional Π_{F_0} que determina el marco F_0 ; y la ecuación (5.1) puede ser interpretada como la velocidad de giro del espacio Π_F respecto del espacio Π_{F_0} . Un observador en el espacio Π_{F_0} verá que los puntos del espacio Π_F van girando (ahora un giro en \mathbb{R}^3), de modo que las coordenadas que les asigna serán variables. La ecuación (5.1) gobierna dicho movimiento, a través de un sistema de ecuaciones diferenciales que a continuación presentaremos.

Un vector que tenga coordenadas constantes en el marco F (es decir, de un punto en el espacio Π_F) será una curva en el marco F_0 y sus coordenadas estarán relacionadas con las del marco F a través de las ecuaciones

$$[v]_{F_0} = [I]_{F_0}^F [v]_F \quad (5.3)$$

$$[v]_F = [I]_{F_0}^F [v]_{F_0} \quad (5.4)$$

donde $[I]_{F_0}^F$ y $[I]_F^{F_0}$ son las matrices que llevan las coordenadas del marco F_0 al marco F y del F a F_0 , respectivamente. La velocidad de la curva que ve el observador en el marco F_0 es

$$\frac{d[v]_{F_0}}{ds} = \frac{d[I]_{F_0}^F}{ds} [v]_F. \quad (5.5)$$

Por (5.4) podemos expresar las coordenadas $[v]_F$ en términos de las coordenadas en el marco F_0 , sustituyendo en (5.5) obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d[v]_{F_0}}{ds} = \frac{d[I]_{F_0}^F}{ds} [I]_{F_0}^F [v]_{F_0}. \quad (5.6)$$

Notamos que la matriz de cambio de coordenadas $[I]_{F_0}^F$ es igual a la matriz A_s asociada a la transformación que lleva el marco F_0 en el marco F , y en consecuencia

$$A'_s = \frac{d[I]_{F_0}^F}{ds}.$$

De (5.2) llegamos a que

$$[I]_{F_0}^F \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_3 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{d[I]_{F_0}^F}{ds}$$

sustituyendo en (5.6) obtenemos

$$\frac{d[v]_{F_0}}{ds} = [I]_{F_0}^F \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_3 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \end{pmatrix} [I]_{F_0}^F [v]_{F_0}$$

Tomando en cuenta que $[v]_{F_0} = x \in \mathbb{R}^4$ llegamos al sistema de ecuaciones diferenciales lineales que depende del tiempo:

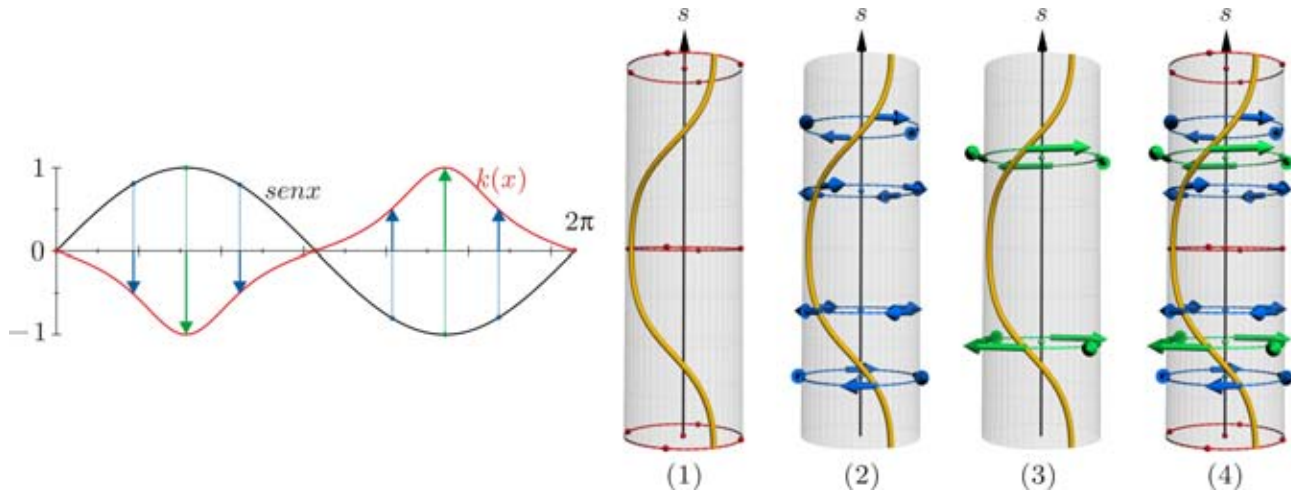
$$x' = \left[[I]_{F_0}^F \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_3 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \end{pmatrix} [I]_{F_0}^F \right] x, \tag{5.7}$$

del que son soluciones particulares los movimientos que describen $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ y \mathbf{t}_4 .

Las curvas integrales del sistema 5.7 estarán ahora en el espacio fase extendido \mathbb{R}^5 y las indicatrices de $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ y \mathbf{t}_4 , son cuatro curvas contenidas en las paredes tetradimensionales de un cilindro

$$\mathfrak{C} = S^3 \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^5.$$

No podemos ver el espacio fase extendido, sin embargo algo podemos decir: en la figura tendrían que estar las gráficas de las curvaturas k_1, k_2 y k_3 , que ahora determinarán los campos vectoriales de las rebanadas horizontales tetradimensionales del espacio fase extendido (\mathbb{R}^5).



Si pudieramos ver en \mathbb{R}^5 tendríamos los siguientes cambios en la figura:

1. Una curva 4-espacial (que no cabe en subespacios de dimensión 3 en \mathbb{R}^4) en lugar de una curva plana (gráfica del $\text{sen}x$ en la figura).
2. Tres gráficas de las funciones k_1, k_2, k_3 , es decir de las tres primeras curvaturas, en lugar de sólo una: la gráfica de la curvatura k .
3. El espacio fase extendido del sistema de ecuaciones diferenciales sería \mathbb{R}^5
4. Los campos que en cada instante determinan las tres curvaturas serían tetradimensionales, es decir, serían rebanadas horizontales de cuatro dimensiones en el espacio fase extendido.
5. Los campos en cada rebanada estarían determinados por la velocidad de alguna curva del grupo SO_4 (rotaciones en \mathbb{R}^4).
6. Las soluciones que determinan las indicatrices de \mathbf{t}, \mathbf{n} y \mathbf{b} estarían contenidas en el cilindro tetradimensional \mathfrak{C} .

5.3. Curvas en \mathbb{R}^n

Para una curva γ en \mathbb{R}^n tenemos dos posibilidades:

1. La curva está contenida en un hiperplano de dimensión $k \leq n - 1$. Si para todo $s \in I$ el vector $(k + 1)$ -ésima derivada $\gamma^{(k+1)}$ está contenido en el hiperplano O^k .

2. *La curva no está contenida en ningún espacio k -dimensional.* Si existe algún s_0 en el que $\gamma^{(k+1)}$ no vive en O^k , entonces la curva no está contenida en ningún hiperplano de dimensión k . Si además pedimos que en todo instante los vectores $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(k+1)}$ sean linealmente independientes, garantizamos que generan en cada momento un hiperplano de dimensión $k + 1$. Podemos escoger un marco ortonormal de O^{k+1}

$$\{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{k+1}\}$$

tomando \mathbf{t}_{k+1} en el complemento ortogonal al hiperplano O^k dentro de O^{k+1} . Lo más lejos que podemos llegar es a que $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}$ sean linealmente independientes en \mathbb{R}^n , es decir, todas las siguientes derivadas de γ estarán contenidas en $O^n = \mathbb{R}^n$.

Nos interesan las curvas en \mathbb{R}^n que no están contenidas en ningún hiperplano de dimensión $n - 1$ (de lo contrario serían esencialmente como las curvas en \mathbb{R}^{n-1}).

Mencionamos finalmente que el comportamiento en este caso es el mismo que el de las curvas en \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^4 , es decir, para describir una curva en \mathbb{R}^n necesitamos $n - 1$ curvaturas

$$k_1, k_2, \dots, k_{n-1},$$

y la forma matricial de las ecuaciones de Frenet-Serret está dada por una matriz antisimétrica

$$\left(\begin{array}{c} \left[\frac{d\mathbf{t}_1}{ds} \right]_F \\ \left[\frac{d\mathbf{t}_2}{ds} \right]_F \\ \left[\frac{d\mathbf{t}_3}{ds} \right]_F \\ \dots \\ \left[\frac{d\mathbf{t}_n}{ds} \right]_F \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & 0 & \dots & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & & \\ 0 & k_2 & 0 & -k_3 & \\ \vdots & & k_3 & \ddots & -k_{n-1} \\ 0 & & & k_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

que representa la velocidad con que se mueve el marco $F = \{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n\}$ en SO_n .

El movimiento del marco de Frenet que ve un observador del marco F_0 satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = \left[\begin{array}{c} [I]_F^{F_0} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & -k_1 & 0 & \dots & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & & \\ 0 & k_2 & 0 & -k_3 & \\ \vdots & & k_3 & \ddots & -k_{n-1} \\ 0 & & & k_{n-1} & 0 \end{array} \right) \end{array} \right] [I]_{F_0}^F x, \quad (5.8)$$

del cual son soluciones particulares las curvas que describen en S^{n-1} las n indicatrices de los vectores $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n$ del marco de Frenet. Las curvas integrales del sistema 5.8 estarán ahora en el espacio fase extendido \mathbb{R}^{n+1} y las indicatrices de $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ y \mathbf{t}_4 , son cuatro curvas contenidas en las paredes tetradimensionales de un cilindro

$$\mathfrak{C} = S^{n-1} \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Las curvaturas k_1, k_2, \dots, k_{n-1} determinarán los campos vectoriales de las rebanadas horizontales n -dimensionales del espacio fase extendido (\mathbb{R}^{n+1}).

6. Una interpretación del tensor de curvatura en superficies y su generalización a variedades

En lo que sigue esbozaremos brevemente una manera de abordar las ideas matemáticas que describen la curvatura de una variedad n -dimensional. Consideremos una variedad de dimensión n encajada en un espacio euclidiano de una dimensión mayor \mathbb{R}^{n+1} . Trabajaremos primero con las variedades que podemos ver, es decir, con las superficies (2-variedades) encajadas en \mathbb{R}^3 . Después diremos algunas cosas de las 3-variedades encajadas en \mathbb{R}^4 que motiven las ideas que están detrás del tensor de curvatura para una variedad de dimensión n .

6.1. Una curva en \mathbb{R}^2

La idea que abordaremos en las líneas que siguen es que podemos describir un marco paralelo a lo largo de una curva en \mathbb{R}^2 desde el marco de Frenet que es un marco de los espacios tangentes $T_\gamma \mathbb{R}^2$ a lo largo de la curva. La idea de describir el marco paralelo del espacio tangente a lo largo de la curva γ a partir de otro marco (un marco de Frenet intrínseco) a lo largo de γ nos será útil para describir la transformación de holonomía en superficies y en general en variedades n -dimensionales encajadas en \mathbb{R}^{n+1} , $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Al tomar curvas muy pequeñas el comportamiento de la transformación de holonomía nos dará información del tensor de curvatura. El marco de Frenet intrínseco será un marco de $T_\gamma M^n$ determinado por (la parte en $T_\gamma M^n$ de) un marco del espacio tangente $T_\gamma \mathbb{R}^{n+1}$ que será una generalización del marco de Darboux.

En lo que sigue haremos uso de distintos marcos de referencia de un espacio vectorial, como puede ser, por ejemplo, el espacio tangente a \mathbb{R}^2 en el punto P , $T_P \mathbb{R}^2$, o el plano tangente a una superficie $T_\gamma S$. En otras palabras, expresaremos los vectores de un espacio vectorial dado como combinaciones lineales de diferentes bases, que incluso variarán en el tiempo. Haremos hincapié en el marco de referencia respecto al cual decimos las cosas.

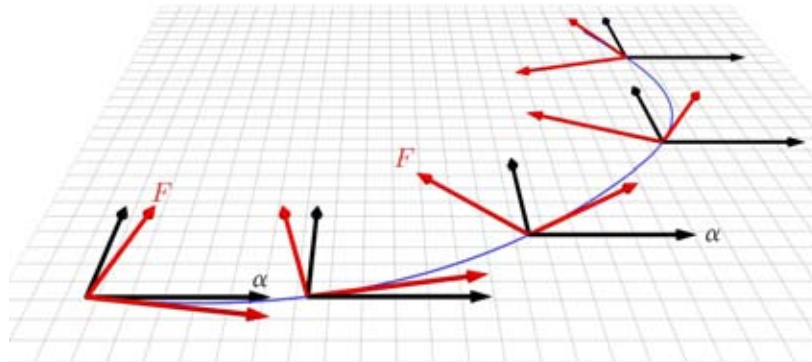
Supongamos que tenemos una curva γ contenida en \mathbb{R}^2 que es recorrida con rapidez unitaria respecto al marco de referencia usual $\{e_1, e_2\}$ de \mathbb{R}^2 . Tomemos ahora dos marcos del espacio tangente $T_\gamma \mathbb{R}^2$ a lo largo de la curva γ , uno de ellos el marco de Frenet

$$F = \{\mathbf{t}_\gamma, \mathbf{n}_\gamma\} = \{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$$

y el otro es el marco paralelo

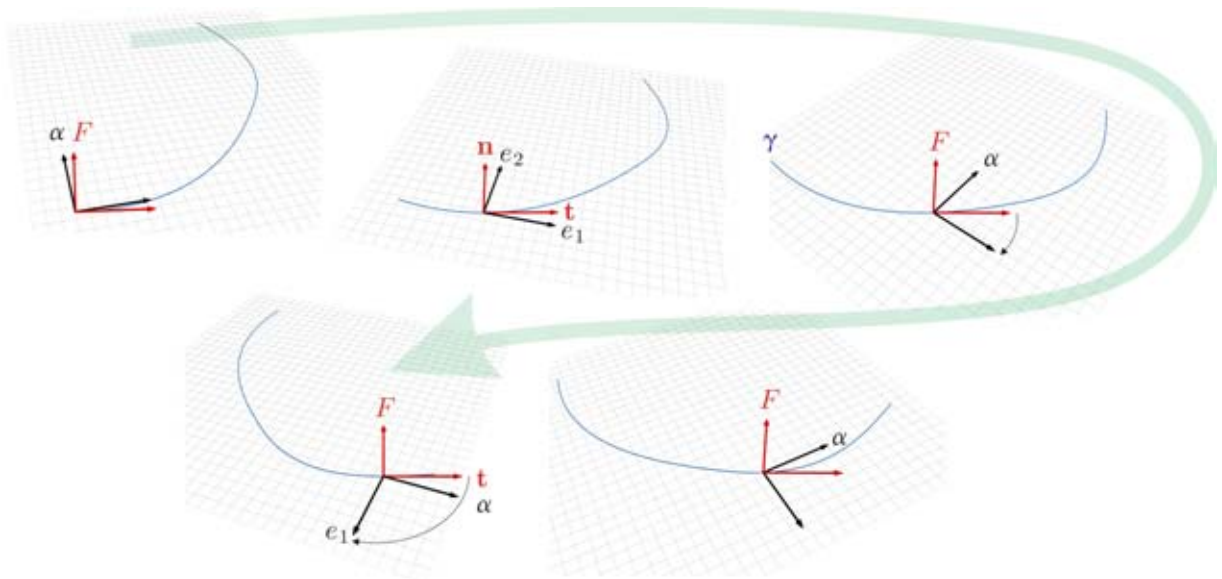
$$\alpha = \{e_{1_\gamma}, e_{2_\gamma}\}$$

que obtenemos mediante el transporte paralelo de los vectores e_1 y e_2 a lo largo de γ . En la siguiente figura mostramos algunos marcos F y α vistos desde un marco de referencia en reposo respecto del marco de referencia $\{e_1, e_2, e_3\}$ usual de \mathbb{R}^3 .



Si nos imaginamos en el marco de referencia α , al transcurrir el tiempo veremos que la curva nos va atravesando con rapidez unitaria y el marco F va girando respecto a nosotros con una rapidez angular igual a la curvatura de la curva (ver sección 1.14), en otras palabras, la dirección en la que la curva nos atraviesa cambia al ritmo que marca la curvatura de la curva.

Ahora cambiemos de sistema de referencia, imaginemos que nuestro marco de referencia es el de Frenet. Veremos que la curva nos atraviesa a rapidez unitaria, pero ahora la dirección en la que lo hace permanece constante ya que uno de los vectores del marco F es el vector \mathbf{t} , que se adapta a la dirección de la curva en cada instante de tiempo. Ilustramos la idea anterior en la siguiente figura, donde vemos la curva γ y los marcos α y F en algunos instantes de tiempo (desde un sistema de referencia de \mathbb{R}^3 en reposo respecto del marco F).



Por otro lado, veremos que el marco α gira respecto a nosotros con una rapidez angular

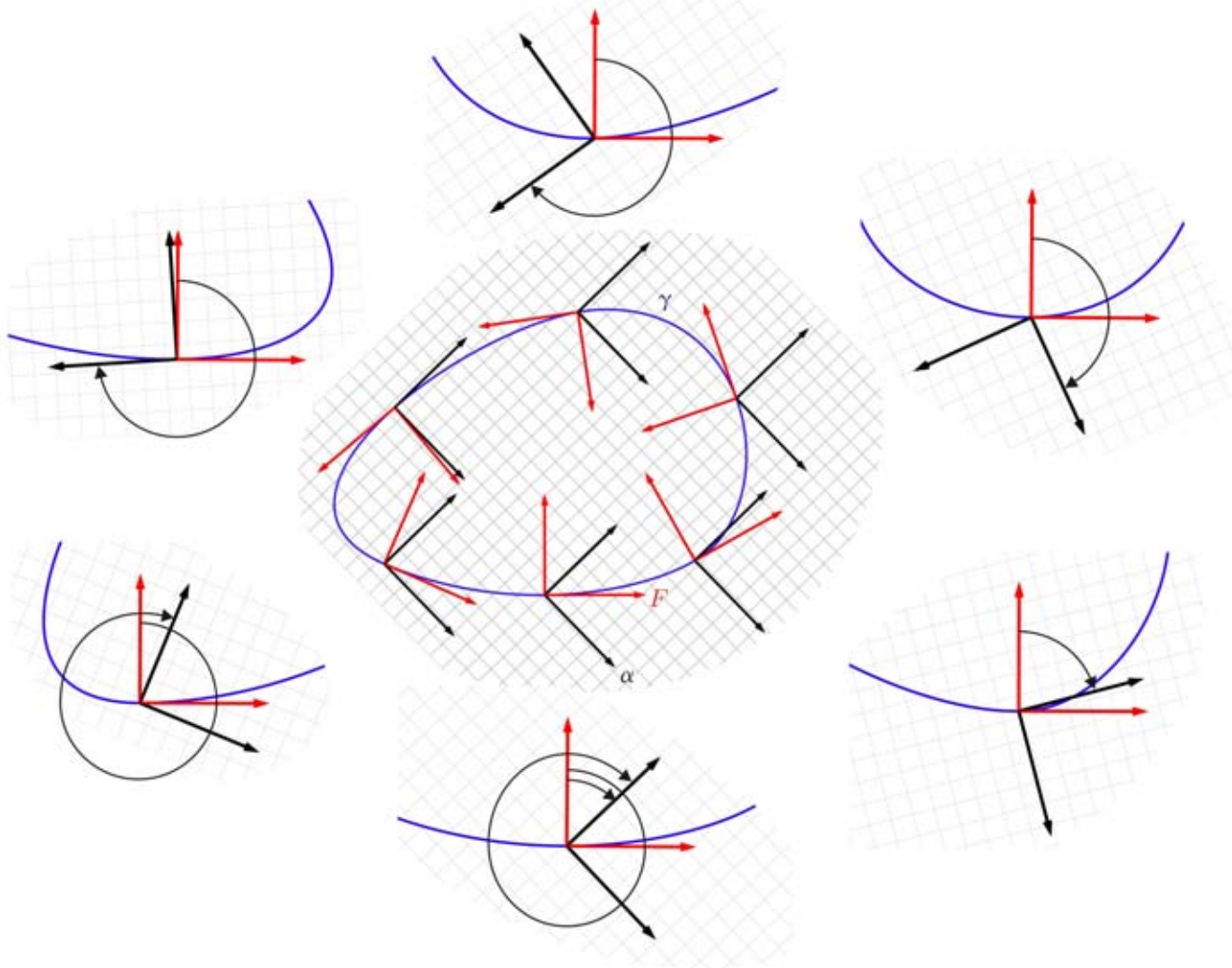
$$w = -k(s); \quad (6.1)$$

es decir, α gira tan rápido, respecto de F , como lo hace F , respecto de α ; y el signo menos es porque el giro de α respecto de F , es en sentido contrario respecto al giro de F respecto de α . Si queremos saber cuánto ha girado el marco α respecto a nosotros (marco F) tenemos que integrar la rapidez angular:

$$\int_0^s w(\sigma) d\sigma = - \int_0^s k(\sigma) d\sigma. \quad (6.2)$$

De manera intuitiva podemos decir que los campos paralelos a lo largo de γ viven en el sistema de referencia determinado por el marco α , y ya sabemos cuánto se ha movido dicho marco respecto a nosotros, es decir, respecto al marco F . De modo que sabemos cuáles son todos los campos paralelos a lo largo de γ , se mueven respecto a nosotros con una velocidad determinada por (6.1) y su posición está determinada por (6.2). Si la curva γ es cerrada el observador en el marco F verá que (después de que la curva lo atraviesa una vez) el marco α gira una vuelta⁷⁵.

⁷⁵Este resultado se conoce como el teorema de la rotación de las tangentes.



Ésta es una idea válida en \mathbb{R}^2 , sin embargo si nuestro mundo 2D es una superficie en general, entonces el marco de Frenet intrínseco puede no girar una vuelta entera respecto del marco paralelo. Mientras más pequeña sea la curva más cerca estarán los marcos de girar una vuelta uno respecto al otro. La diferencia de haber girado una vuelta entera se mide por una pequeña rotación que será la transformación de holonomía. El comportamiento límite de esta rotación (respecto al área que encierra la curva γ), nos llevará al concepto de tensor de curvatura en el caso de una superficie o variedad de dimensión 2.

6.2. El sistema de ecuaciones diferenciales asociado

A partir de la velocidad ω con que gira el marco de Frenet F respecto del marco paralelo α podemos obtener la velocidad con que gira el marco paralelo respecto del marco de Frenet; de modo que si somos observadores en el marco de Frenet, el marco paralelo se moverá respecto a nosotros con una velocidad $-\omega$. Esta velocidad determina de manera implícita⁷⁶ un grupo de difeomorfismos a un parámetro, o equivalentemente, un sistema de ecuaciones diferenciales que nos dan la posición del marco paralelo respecto al marco de Frenet en cada instante de tiempo. Hay dos maneras de interpretar el sistema de ecuaciones diferenciales:

1. Pasivo. El marco F gira respecto al marco α con una rapidez angular ω , en este caso hay un flujo de las coordenadas asignadas a los campos paralelos a lo largo de γ .
2. Activo. Nos dice cómo se mueve el marco paralelo (y con él todos los campos paralelos) respecto del marco F : giran a una rapidez angular $-\omega$.

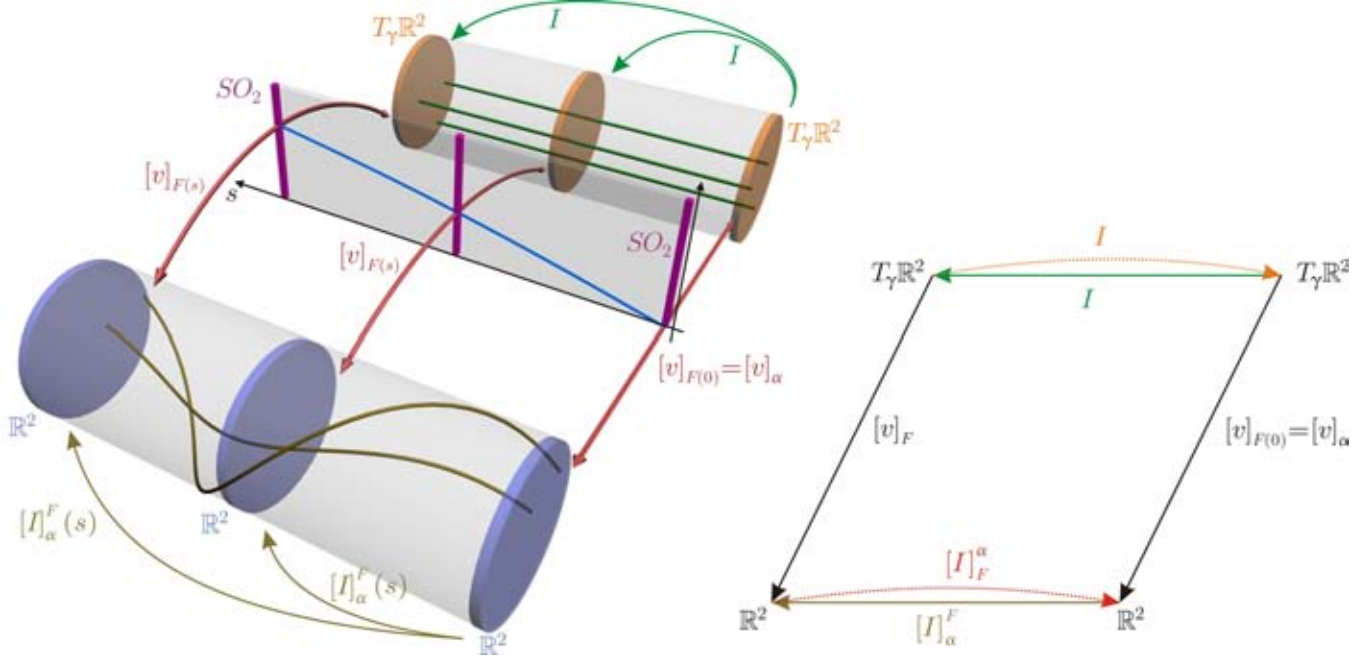
Discutamos estos dos enfoques más detalladamente. Supongamos que los marcos α y F coinciden en un instante de tiempo inicial $s = 0$ y ahora imaginemos que:

⁷⁶La curva $-\omega(s)$ es una curva en el álgebra de Lie del haz de marcos. Esta curva induce (a través de la exponencial) una curva en el grupo SO_2 , que a su vez actúa en los espacios tangentes (que podemos ver cómo \mathbb{R}^2) dando lugar a una ecuación diferencial que nos describe la posición de los campos paralelos cuando los vemos desde el marco F .

1. (Pasivo) Somos observadores en el marco α . Las coordenadas $[v]_\alpha$ que asignamos a un campo paralelo a lo largo de γ serán constantes ya que los vectores que conforman el marco α son dos campos paralelos a lo largo de γ . Veremos que el marco F se mueve por lo que las coordenadas $[v]_F$ del vector v en el marco F irán cambiando con el tiempo y estarán dadas por

$$[v]_F = [I]_\alpha^F(s) [v]_\alpha \quad (6.3)$$

donde $[I]_\alpha^F(s)$ es la matriz que nos lleva las coordenadas de la base α a las coordenadas de la base F . En la siguiente figura mostramos un diagrama. En cada instante s los puntos de $T_\gamma \mathbb{R}^2$ son etiquetados de dos maneras distintas, lo que da origen a una curva $[I]_\alpha^F(s) \subset SO_2$ de matrices ortogonales de cambios de coordenadas (curva azul). Esta curva actúa en \mathbb{R}^2 y sus órbitas (curvas verde olivo) serán curvas en \mathbb{R}^2 que describen el cambio en las coordenadas $[v]_F$ de un vector paralelo (con coordenadas constantes $[v]_\alpha$).



Recíprocamente podemos expresar las coordenadas $[v]_\alpha$ de v en términos de las coordenadas $[v]_F$ (ver diagrama de la derecha)

$$[v]_\alpha = [I]_F^\alpha(s) [v]_F. \quad (6.4)$$

Ahora derivemos las coordenadas $[v]_F$ en la expresión (6.3)

$$\frac{d[v]_F}{ds} = \frac{d[I]_\alpha^F}{ds} [v]_\alpha; \quad (6.5)$$

sustituyendo (6.4) en (6.5) obtenemos el sistema de ecuaciones expresado en términos de $[v]_F$

$$\frac{d[v]_F}{ds} = \frac{d[I]_\alpha^F}{ds} [I]_F^\alpha(s) [v]_F = B(s) [v]_F. \quad (6.6)$$

Ahora veamos quién es $B(s)$, la obtendremos a partir de la velocidad con que gira el marco de Frenet respecto del marco paralelo. De la sección (1.15) sabemos que la velocidad con que gira el marco de Frenet viene dado por

$$\omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & -k(s) \\ k(s) & 0 \end{pmatrix} = [I]_\alpha^F A'_s = [I]_\alpha^F \frac{d[I]_F^\alpha}{ds}$$

donde $A(s)$ es la curva de matrices $[I]_F^\alpha$. Para relacionar a B con ω derivemos la igualdad $[I]_\alpha^F [I]_F^\alpha = I$ para obtener

$$\frac{d[I]_\alpha^F}{ds} [I]_F^\alpha(s) + [I]_\alpha^F \frac{d[I]_F^\alpha}{ds} = B(s) + \omega(s) = 0;$$

de modo que $B(s) = -\omega(s)$ y en consecuencia el sistema (6.6) toma la forma

$$\frac{d[v]_F}{ds} = -[I]_\alpha^F \frac{d[I]_F^\alpha}{ds} [v]_F = -\omega(s) [v]_F. \quad (6.7)$$

Notamos que $[v]_F = x \in \mathbb{R}^n$ por lo que podemos expresar (6.7) de la siguiente manera

$$\frac{dx}{ds} = -\omega(s) x = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix} x \quad (6.8)$$

2. (Activo) Somos observadores en el marco F . Veremos que los campos paralelos se mueven, van rotando respecto a nosotros. Supongamos que $v(0)$ es la posición de uno de ellos en $s = 0$, su posición al transcurrir el tiempo está dada por la rotación $R_F^\alpha(s) = R_F^\alpha$ que lleva el marco F en el marco α en el instante s .

$$v(s) = R_F^\alpha(v(0)).$$

Las coordenadas

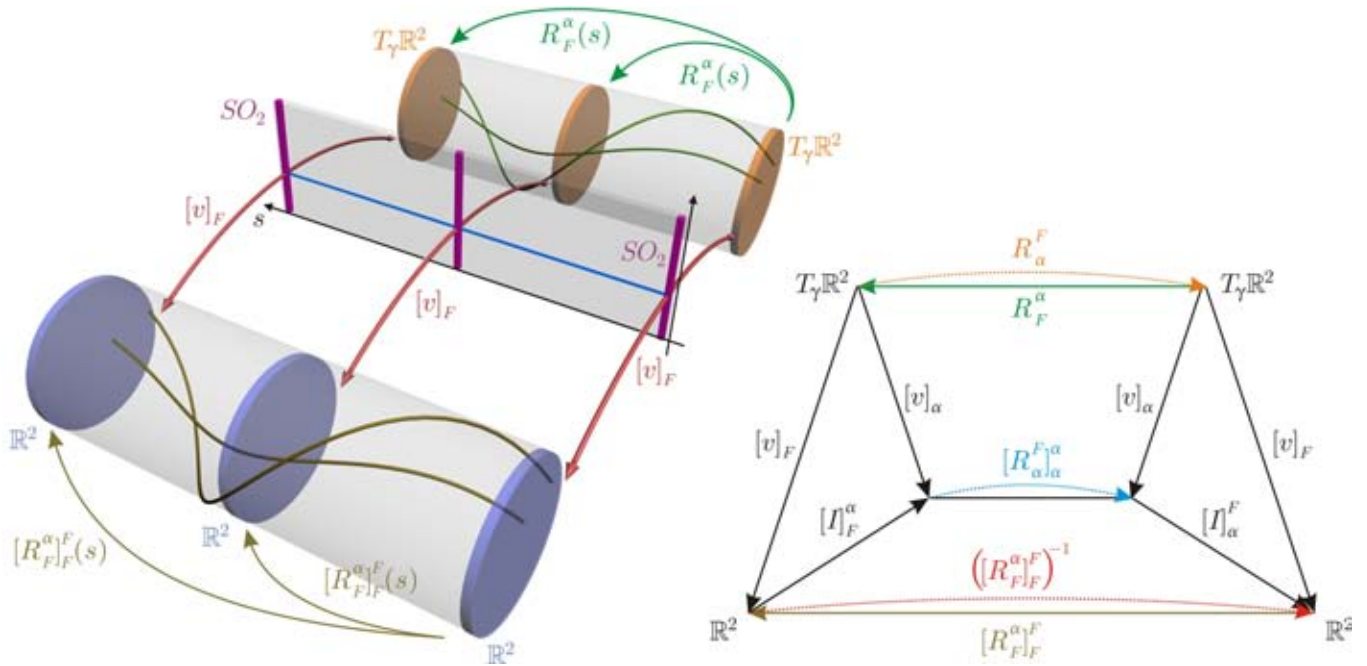
$$[v(s)]_F = [R_F^\alpha(v(0))]_F$$

que asignaremos cambiarán en el tiempo debido a que $v(s)$ cambia su posición y estarán dadas por

$$[v(s)]_F = [R_F^\alpha(v(0))]_F = [R_F^\alpha]_F^F [v(0)]_F; \quad (6.9)$$

es decir, mediante la multiplicación del vector de coordenadas $[v(0)]_F$ del vector inicial del campo paralelo por la matriz $[R_F^\alpha]_F^F$ asociada en la base F a la rotación R_F^α .

En la siguiente figura mostramos un diagrama. En cada instante s los puntos de $T_\gamma\mathbb{R}^2$ son transformados mediante la rotación R_F^α , que genera una curva de rotaciones. A través del isomorfismo $[v]_F$ se genera una curva de matrices $[R_F^\alpha]_F^F$ que actúa en \mathbb{R}^2 y sus órbitas serán curvas en \mathbb{R}^2 que describen el cambio en las coordenadas del vector $[v(s)]_F$; que refleja el cambio en la posición para un observador en el marco F del vector paralelo $[v]_\alpha$.



Recíprocamente podemos expresar las coordenadas $[v(0)]_F$ en términos de las coordenadas $[v(s)]_F$

$$[v(0)]_F = \left([R_F^\alpha]_F^F\right)^{-1} [v(s)]_F = [R_\alpha^F]_\alpha^\alpha [v(s)]_F. \quad (6.10)$$

Para ver el por qué la igualdad de la derecha, notamos que

$$[R_F^\alpha]_F^F = [I]_\alpha^F \quad (6.11)$$

$$[R_\alpha^F]_\alpha^\alpha = [I]_F^\alpha \quad (6.12)$$

Sustituimos (6.12) en la siguiente igualdad (que obtenemos a partir del diagrama de la derecha en la figura anterior):

$$\left([R_F^\alpha]_F^F\right)^{-1} = [I]_\alpha^F [R_\alpha^F]_\alpha^\alpha [I]_F^\alpha = [R_\alpha^F]_\alpha^\alpha.$$

Ahora derivemos (6.9)

$$\frac{d[v(s)]_F}{ds} = \frac{d[R_F^\alpha]_F^F}{ds} [v(0)]_F; \quad (6.13)$$

sustituyendo (6.10) en (6.13) llegamos al sistema de ecuaciones expresado en términos de $[v(s)]_F$

$$\frac{d[v(s)]_F}{ds} = B(s) [v(s)]_F = \frac{d[R_F^\alpha]_F^F}{ds} [R_\alpha^F]_\alpha^\alpha [v(s)]_F. \quad (6.14)$$

donde $B(s)$ resulta de nuevo $-\omega(s)$, el negativo de la velocidad con que se mueve el marco de Frenet respecto del marco paralelo. Veamos los detalles, de la sección (1.15) sabemos que la velocidad con que gira el marco de Frenet viene dado por

$$\omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & -k(s) \\ k(s) & 0 \end{pmatrix} = [I]_F^F \frac{d[I]_F^\alpha}{ds} = [R_F^\alpha]_F \frac{d[R_\alpha^F]^\alpha}{ds}$$

Por otro lado, de (6.11) y (6.12) se sigue que

$$[R_F^\alpha]_F [R_\alpha^F]^\alpha = Id$$

derivando obtenemos:

$$\frac{d[R_F^\alpha]_F}{ds} [R_\alpha^F]^\alpha + [R_F^\alpha]_F \frac{d[R_\alpha^F]^\alpha}{ds} = B(s) + \omega(s) = 0 \quad (6.15)$$

Notamos que $[v(s)]_F = x \in \mathbb{R}^n$, al sustituir esta igualdad y (6.15) en (6.14) obtenemos

$$\frac{dx}{ds} = -\omega(s)x = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix} x. \quad (6.16)$$

Forma explícita del grupo de rotaciones

La matriz $[R_F^\alpha]_F(s)$ asociada al grupo de rotaciones a un parámetro que en cada instante de tiempo lleva el marco F en el marco α tiene la forma

$$[R_F^\alpha]_F(s) = \begin{pmatrix} \cos\left(-\int_0^s k(\sigma) d\sigma\right) & -\text{sen}\left(-\int_0^s k(\sigma) d\sigma\right) \\ \text{sen}\left(-\int_0^s k(\sigma) d\sigma\right) & \cos\left(-\int_0^s k(\sigma) d\sigma\right) \end{pmatrix}. \quad (6.17)$$

El ángulo de cada rotación del grupo de rotaciones está determinado por la integral de la curvatura que es la rapidez angular con que giran los marcos entre sí. Finalmente mencionamos que también podemos llegar al sistema de ecuaciones (6.16) a partir de (6.17): Derivando y tomando su inversa llegamos a que

$$-\omega(s) = \frac{d[R_F^\alpha]_F}{ds} [R_\alpha^F]^\alpha = \left[k(s) \begin{pmatrix} -\text{sen}\left(\int_0^s k(\sigma) d\sigma\right) & \cos\left(\int_0^s k(\sigma) d\sigma\right) \\ -\cos\left(\int_0^s k(\sigma) d\sigma\right) & -\text{sen}\left(\int_0^s k(\sigma) d\sigma\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\int_0^s k(\sigma) d\sigma\right) & -\text{sen}\left(\int_0^s k(\sigma) d\sigma\right) \\ \text{sen}\left(\int_0^s k(\sigma) d\sigma\right) & \cos\left(\int_0^s k(\sigma) d\sigma\right) \end{pmatrix} \right];$$

haciendo la multiplicación de matrices y simplificando llegamos al sistema

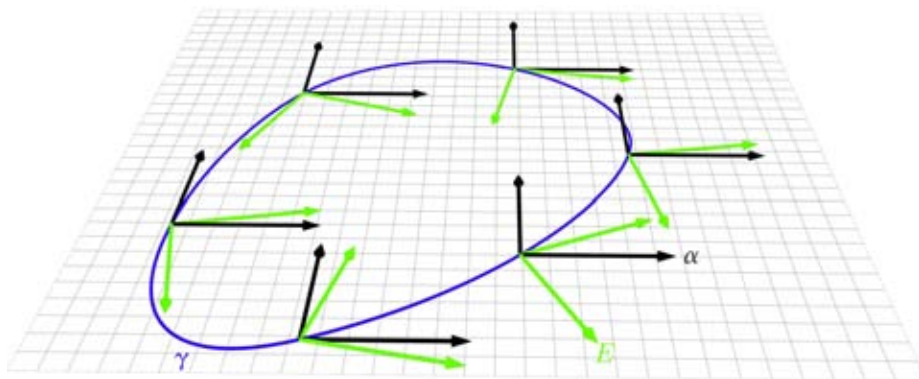
$$\frac{dx}{ds} = -\omega(s)x = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix} x = -k(s) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x \quad (6.18)$$

6.3. Forma de la conexión

Una manera alternativa de obtener el sistema (6.18) es a partir de la forma de la conexión en $\mathbb{R}^2 \times SO_2$. A continuación presentaremos las ideas detrás del concepto de forma de la conexión. Imaginemos que tenemos un campo de marcos

$$E = \{E_{1_\gamma}, E_{2_\gamma}\}$$

a lo largo de una curva γ .



Como en el caso del marco de Frenet F , desde el marco

$$\alpha = \{e_{1,\gamma}, e_{2,\gamma}\} = \{e_1, e_2\}$$

veremos que el marco E gira mientras γ pasa a través de nosotros. Una manera de interpretar la forma de la conexión⁷⁷ del marco E respecto al marco α es a través de una matriz antisimétrica de 1-formas

$$\omega = [I]_\alpha^E \frac{d[I]_E^\alpha}{ds}; \quad (6.19)$$

que representa la velocidad de giro del marco E respecto del marco α , expresada en términos del marco

$$E_\alpha = \{E_{1,\gamma}, E_{2,\gamma}\}_\alpha;$$

que es el marco que está en reposo respecto del marco α y que está formado por los vectores $E_{1,\gamma}, E_{2,\gamma}$. En la ecuación (6.19) $\frac{d[I]_E^\alpha}{ds}$ representa la velocidad de giro de E respecto del marco α . Para expresar la velocidad⁷⁸ $\frac{d[I]_E^\alpha}{ds}$ en términos del marco E_α se multiplica por la matriz $[I]_\alpha^E$ y así obtenemos la 1-forma de la conexión ω . Veamos lo anterior en detalle. Los vectores E_i describen un par de curvas y cada una se mueve respecto del marco α con una velocidad $\left[\frac{dE_i}{ds}\right]_\alpha$ que es una de las columnas de la matriz $\left[\frac{d[I]_E^\alpha}{ds}\right]_\alpha$. Esta matriz al ser multiplicada por la matriz de cambio de coordenadas $[I]_\alpha^E$ se transforma en la velocidad $\left[\frac{dE_i}{ds}\right]_E$ con la que se mueve el vector E_i expresada en términos de los vectores del marco E :

$$\omega = \left(\left[\frac{dE_1}{ds}\right]_E \quad \left[\frac{dE_2}{ds}\right]_E \right) = [I]_\alpha^E \left(\left[\frac{dE_1}{ds}\right]_\alpha \quad \left[\frac{dE_2}{ds}\right]_\alpha \right) = [I]_\alpha^E \frac{d[I]_E^\alpha}{ds}$$

donde la matriz

$$\left(\left[\frac{dE_1}{ds}\right]_E \quad \left[\frac{dE_2}{ds}\right]_E \right) = \begin{pmatrix} E_1 \cdot \frac{dE_1}{ds} & E_2 \cdot \frac{dE_1}{ds} \\ E_1 \cdot \frac{dE_2}{ds} & E_2 \cdot \frac{dE_2}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix}$$

puede ser expresada en términos de las 1-formas diferenciales de valores reales

$$\omega_{ij} : T(\mathbb{R}^2 \times SO_2) = (T\mathbb{R}^2 \times TSO_2) \rightarrow \mathbb{R}$$

definidas en el producto $\mathbb{R}^2 \times SO_2$ de la siguiente manera

$$\omega_{ij} \left(\gamma'_P, \left(\frac{d[I]_E^\alpha}{ds} \right)_E \right) = E_i \cdot \frac{dE_j}{ds}$$

donde

$$\gamma'_P \in T\mathbb{R}^2 \quad \text{y} \quad \left(\frac{d[I]_E^\alpha}{ds} \right)_E \in TSO_2.$$

Notamos que la matriz ω es antisimétrica⁷⁹, es decir, podemos interpretarla como un elemento del espacio $T_e SO_2$ donde e es el marco que corresponde a la identidad en SO_2 . Por lo anterior ω es una 1-forma

$$\omega : T(\mathbb{R}^2 \times SO_2) = (T\mathbb{R}^2 \times TSO_2) \rightarrow A_2(\mathbb{R})$$

$$\omega \left(\gamma'_P, \left(\frac{d[I]_E^\alpha}{ds} \right)_E \right) = [I]_\alpha^E \frac{d[I]_E^\alpha}{ds} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix} \in A_2(\mathbb{R}) = T_e SO_2$$

en $\mathbb{R}^2 \times SO_2$ con valores en el álgebra de Lie de SO_2 (el espacio tangente $T_e SO_2$ en el elemento identidad e del grupo SO_2), que es el conjunto de matrices antisimétricas $A_2(\mathbb{R})$.

En particular cuando el campo de marcos es el de Frenet tenemos que

$$\omega = [I]_\alpha^F \frac{d[I]_F^\alpha}{ds}$$

por lo que la matriz ω en el sistema

$$\frac{dx}{ds} = -\omega(s)x = - \begin{pmatrix} 0 & -k(s) \\ k(s) & 0 \end{pmatrix} x \quad (6.20)$$

⁷⁷Para una interpretación parecida véase O'Neill sección 2.6 (su ω es la traspuesta de la nuestra).

La forma de la conexión tiene su origen en una 1-forma diferencial (forma de Cartan) con valores en el álgebra de Lie (matrices antisimétricas) definida en el grupo de Lie $SO(n, \mathbb{R})$. Luego se extiende a haces fibrados donde la fibra es un haz de marcos, pero no entraremos en los detalles de estas construcciones.

⁷⁸Lo que estamos haciendo aquí es una traslación izquierda en el grupo de Lie que nos lleva un vector tangente en un punto $[I]_E^\alpha(s)$ en un vector en el álgebra de Lie.

⁷⁹Derivando la igualdad $[I]_\alpha^E [I]_E^\alpha = Id$ obtenemos $\frac{d[I]_\alpha^E}{ds} [I]_E^\alpha + [I]_\alpha^E \frac{d[I]_E^\alpha}{ds} = 0$; por otro lado $\left([I]_\alpha^E \frac{d[I]_E^\alpha}{ds}\right)^T = \left(\frac{d[I]_E^\alpha}{ds}\right)^T \left([I]_\alpha^E\right)^T = \frac{d[I]_E^\alpha}{ds} [I]_E^\alpha$; por lo que la matriz $\omega = [I]_\alpha^E \frac{d[I]_E^\alpha}{ds}$ es antisimétrica.

que obtuvimos en la sección 6.2, es la matriz de la forma de la conexión evaluada en los vectores tangentes

$$\left(\gamma'_\gamma, \left(\frac{d[I]_F^\alpha}{ds} \right)_F \right)$$

del haz de marcos $\mathbb{R}^2 \times SO_2$. Analizando con esta nueva maquinaria el sistema (6.20) podemos interpretar la integral

$$\int_{\hat{\gamma}} \omega \tag{6.21}$$

de la 1-forma de la conexión a lo largo del levantamiento $\hat{\gamma} = (\gamma, F)$, que induce γ junto con el campo de marcos de Frenet en el haz de marcos $\mathbb{R}^2 \times SO_2$, como la distancia que ha recorrido el marco α respecto del marco F después de recorrer $\hat{\gamma}$. En \mathbb{R}^2 el marco α da una vuelta respecto al marco F después de recorrer γ , de modo que

$$\int_{\hat{\gamma}} \omega = Id \tag{6.22}$$

Con la idea anterior podemos ver que la 1-forma de la conexión en $\mathbb{R}^2 \times SO_2$ es exacta ya que si tomamos una curva $\hat{\gamma} \subset \mathbb{R}^2 \times SO_2$ cerrada tendremos que la posición inicial y final de los marcos α y F será la misma por lo que (6.22) se verifica. Las ideas anteriores se aplican no sólo al marco de Frenet, dan una manera de interpretar la integral de línea de la 1-forma de la conexión a lo largo de un levantamiento $\hat{\gamma} = (\gamma, E)$ en el haz $\mathbb{R}^2 \times SO_2$: Es la distancia que ha caminado el marco α visto desde el marco E .

6.4. Superficies

Llevemos la idea anterior a una superficie S encajada en \mathbb{R}^3 ; para ello tomaremos un par de marcos de $T_\gamma S$ (definidos en la sección 4.17): El marco de Frenet intrínseco F_{2D} y el marco paralelo α_{2D} que serán los marcos, en los planos tangentes $T_\gamma S$ a la superficie a lo largo de γ , que jugarán el papel del marco Frenet intrínseco y del marco paralelo, respectivamente, para un ser 2D que habite la superficie.

Un ser 2D observador del marco F_{2D} verá que el marco paralelo de la superficie α_{2D} se mueve y con él se moverán todos los posibles desplazamientos paralelos a lo largo de la curva γ en la superficie. Obtendremos de nuevo un sistema de ecuaciones diferenciales y una matriz análoga a la matriz de la conexión que obtuvimos en las secciones 6.2 y 6.3, donde el papel de la curvatura de γ lo tendrá la curvatura geodésica de γ en S (curvatura en el mundo 2D).

En el caso de una superficie en general habrá una diferencia respecto a lo que sucedía en el plano ($S = \mathbb{R}^2$): al movernos a lo largo de una curva cerrada γ y completar una vuelta, un observador en el marco F_{2D} no necesariamente verá que el marco α_{2D} regrese a su posición original, por lo que la integral de la forma de la conexión $\int_{\hat{\gamma}} \omega$ no será la identidad siempre y en consecuencia ω no será una 1-forma exacta, el transporte paralelo dependerá de la trayectoria.

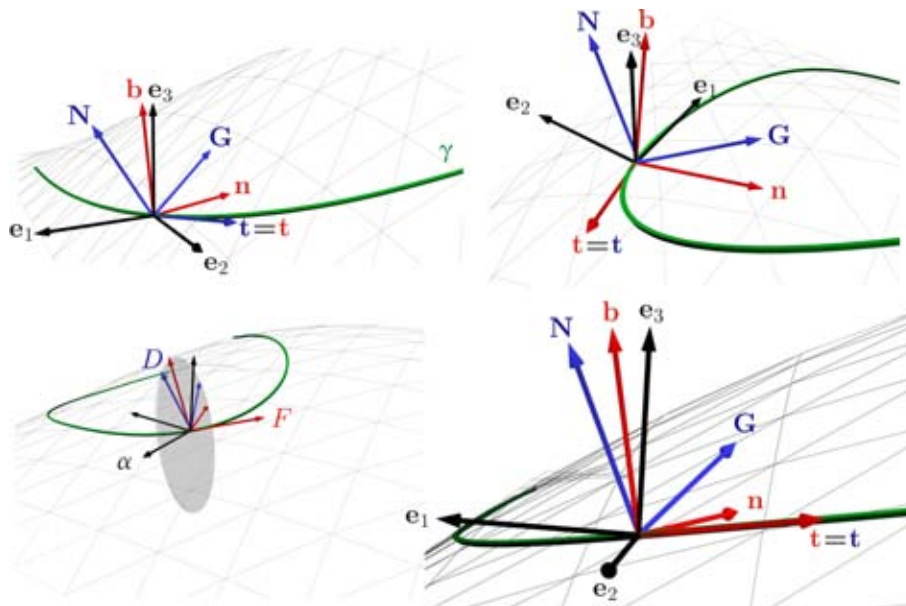
Tomemos una curva γ en $S \subset \mathbb{R}^3$ recorrida a rapidez unitaria respecto al marco de referencia usual $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 . Consideremos los marcos $\alpha = \{e_{1\gamma}, e_{2\gamma}, e_{3\gamma}\}$ y $F = \{\mathbf{t}_\gamma, \mathbf{n}_\gamma, \mathbf{b}_\gamma\}$ de los espacios $T_\gamma \mathbb{R}^3$ tangentes a \mathbb{R}^3 a lo largo de γ . Para elegir el marco de Frenet intrínseco F_{2D} tomaremos un marco de $T_\gamma S$ que herede de alguna manera parte del comportamiento del marco de Frenet F de la curva $\gamma \subset \mathbb{R}^3$. Lo construiremos a partir de las derivadas de la curva γ : estará determinado por la componente de la velocidad y aceleración de γ que pueda sentir el ser 2D, es decir, por la primera y segunda derivadas covariantes de γ

$$\frac{D\gamma^{(1)}}{ds} \quad \text{y} \quad \frac{D\gamma^{(2)}}{ds}.$$

Ambas viven en $T_\gamma S$ y supondremos que a lo largo de γ son linealmente independientes, es decir, generan a $T_\gamma S$; de hecho son perpendiculares por lo que podemos tomar un vector \mathbf{G} unitario en la dirección de $\frac{D\gamma^{(2)}}{ds}$ para formar nuestro marco

$$F_{2D} = \{\mathbf{t}, \mathbf{G}\}.$$

Si le agregamos al marco F_{2D} el vector \mathbf{N} normal a la superficie, obtenemos una manera alternativa (a la dada en la sección 3.16) de construir el marco de Darboux $D = \{\mathbf{t}, \mathbf{G}, \mathbf{N}\}$ de $T_\gamma \mathbb{R}^3$.



Imaginemos que somos seres 2D en S y observadores del marco F_{2D} . Al recorrer la curva γ veremos que el marco α_{2D} gira con una rapidez que será el negativo de la curvatura geodésica (curvatura de γ dentro de la superficie)

$$\omega = -k_{\mathbf{G}}.$$

Podemos definir nuestro marco α_{2D} de la siguiente manera: en $s = 0$, tomamos

$$\alpha_{2D} = \{\mathbf{t}_0, \mathbf{G}_0\}$$

y en un instante arbitrario s , el marco α_{2D} estará girado respecto de nuestro marco F_{2D} por un ángulo

$$\phi(s) = \int_0^s \omega(\sigma) d\sigma = - \int_0^s k_{\mathbf{G}}(\sigma) d\sigma, \quad (6.23)$$

es decir nuestro marco paralelo

$$\alpha_{2D} = \{R_s(\mathbf{t}_0), R_s(\mathbf{G}_0)\}$$

está determinado por los vectores $R_s(\mathbf{t}_0)$ y $R_s(\mathbf{G}_0)$ que obtenemos de rotar a los vectores $\mathbf{t}_0, \mathbf{G}_0$ un ángulo $\phi(s)$. Ahora los campos paralelos en S a lo largo de γ tendrán coordenadas constantes respecto del marco α_{2D} , por lo que, respecto del marco F_{2D} , girarán al ritmo del marco α_{2D} y su posición estará determinada por (6.23), que implícitamente determina un sistema de ecuaciones diferenciales en $T_\gamma S$.

En general, si γ es una curva cerrada $\gamma \subset S$, al recorrerla veremos (como observadores del marco F_{2D}) que el marco α_{2D} va rotando y completar una vuelta no necesariamente vuelve a su posición inicial. La diferencia entre la posición inicial y final del marco α_{2D} da lugar a la transformación de holonomía que es una rotación en $T_P S$:

$$H_\gamma : T_P S \rightarrow T_P S$$

Si tomamos curvas pequeñas el marco α_{2D} rotará respecto del marco F_{2D} y al completar una vuelta la transformación de holonomía será una rotación de un ángulo pequeño, es decir una transformación cercana a la identidad. Si tomamos como parámetro el área a_γ que encierra la curva γ obtenemos una curva de transformaciones de holonomía, cuya velocidad de giro respecto de a_γ es un operador antisimétrico en $T_P S$ y veremos que tiene la forma

$$\lim_{a_\gamma \rightarrow 0} \frac{H_\gamma}{a_\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -k(P) \\ k(P) & 0 \end{pmatrix}$$

en donde k es la curvatura gaussiana de la superficie en el punto P .

6.5. El sistema de ecuaciones diferenciales asociado

A través de marcos D y δ de $T_\gamma \mathbb{R}^3$

Podemos completar los marcos F_{2D} y α_{2D} de $T_\gamma S$ a dos marcos de $T_\gamma \mathbb{R}^3$ agregando el vector normal. Como ya mencionamos en el primer caso obtenemos el marco de Darboux $D = \{\mathbf{t}, \mathbf{G}, \mathbf{N}\}$ y en el segundo caso obtenemos el marco $\delta = \{R_s(\mathbf{t}_0), R_s(\mathbf{G}_0), \mathbf{N}\}$ donde los vectores $R_s(\mathbf{t}_0)$ y $R_s(\mathbf{G}_0)$ son los campos que obtenemos al trasladar paralelamente a los vectores \mathbf{t}_0 y \mathbf{G}_0 . Los marcos D y δ coinciden en $s = 0$. Supongamos que recorremos la curva γ , si somos observadores del marco $\alpha = \{e_{1,\gamma}, e_{2,\gamma}, e_{3,\gamma}\}$ veremos que los marcos D y δ giran respecto a nosotros y además veremos que van girando uno respecto al otro con el vector \mathbf{N} como eje de giro. La ecuación (6.23) nos da para cada curva γ un grupo de difeomorfismos a un parámetro y si nos imaginamos como observadores en el marco D , veremos que se mueven los puntos que tienen coordenadas constantes en el marco δ , y de ellos, los que tienen coordenada cero en \mathbf{N} son los campos paralelos en S a lo largo de γ . Equivalentemente podemos pensar que somos observadores del marco δ y veremos cómo se mueve respecto a nosotros el marco D por lo que las coordenadas de un vector en $T_\gamma \mathbb{R}^3$ expresadas en ambos marcos estarán relacionadas a través de las siguientes curvas de matrices de cambios de coordenadas

$$[v]_D = [I]_\delta^D(s) [v]_\delta \quad (6.24)$$

$$[v]_\delta = [I]_D^\delta(s) [v]_D \quad (6.25)$$

derivando (6.24) y sustituyendo (6.25) en la expresión obtenemos:

$$\frac{d[v]_D}{ds} = C(s) [v]_D = \frac{d[I]_\delta^D}{ds} [I]_D^\delta(s) [v]_D \quad (6.26)$$

La velocidad con que gira el marco de Darboux (ver sección 3.16) viene dada por

$$\omega \left(\gamma'_P, \left(\frac{d[I]_D^\alpha}{ds} \right)_D \right) = [I]_\alpha^D \frac{d[I]_D^\alpha}{ds} = \begin{pmatrix} 0 & -k_{\mathbf{G}} & k_{\mathbf{N}} \\ k_{\mathbf{G}} & 0 & -\tau_{\mathbf{G}} \\ -k_{\mathbf{N}} & \tau_{\mathbf{G}} & 0 \end{pmatrix}$$

Dos de los vectores del marco de Darboux conforman el marco de Frenet intrínseco F_{2D} de modo que el marco F_{2D} deberá girar respecto del marco paralelo α_{2D} con una velocidad dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & -k_{\mathbf{G}} \\ k_{\mathbf{G}} & 0 \end{pmatrix}.$$

De modo que el marco D gira respecto del marco δ en torno al vector normal \mathbf{N} por lo que

$$\tilde{\omega}(s) = [I]_\delta^D \frac{d[I]_D^\delta}{ds} = \begin{pmatrix} 0 & -k_{\mathbf{G}} & 0 \\ k_{\mathbf{G}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otro lado

$$\frac{d[I]_\delta^D}{ds} [I]_D^\delta(s) + [I]_\alpha^D \frac{d[I]_D^\alpha}{ds} = C(s) + \tilde{\omega}(s) = 0 \quad (6.27)$$

sustituyendo (6.27) en (6.26) llegamos a que el sistema de ecuaciones diferenciales toma la forma

$$\frac{d[v]_D}{ds} = -\tilde{\omega}(s) [v]_D = - \begin{pmatrix} 0 & -k_{\mathbf{G}} & 0 \\ k_{\mathbf{G}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [v]_D$$

Notamos que $[v]_D = x \in \mathbb{R}^3$ de modo que podemos expresar la igualdad anterior de la siguiente manera

$$\frac{dx}{ds} = -\tilde{\omega}(s) x = \begin{pmatrix} 0 & k_{\mathbf{G}} & 0 \\ -k_{\mathbf{G}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [v]_D \quad (6.28)$$

A través de marcos F_{2D} y α_{2D} de $T_\gamma S$

Por otro lado si restringimos las ideas anteriores a los vectores de los marcos D y δ que conforman los marcos α_{2D} y F_{2D} obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d[v]_{F_{2D}}}{ds} = \frac{d[I]_{\alpha_{2D}}^{F_{2D}}}{ds} [I]_{F_{2D}}^{\alpha_{2D}}(s) [v]_{F_{2D}} = - \begin{pmatrix} 0 & -k_{\mathbf{G}} \\ k_{\mathbf{G}} & 0 \end{pmatrix} [v]_{F_{2D}}$$

que en coordenadas ($[v]_{F_{2D}} = x \in \mathbb{R}^2$) toma la forma⁸⁰

$$\frac{dx}{ds} = -\omega_{\mathbb{R}^3}(s) x = \begin{pmatrix} 0 & k_{\mathbf{G}} \\ -k_{\mathbf{G}} & 0 \end{pmatrix} x. \quad (6.29)$$

⁸⁰Hemos usado la notación $\omega_{\mathbb{R}^3}$ para hacer notar que $\omega_{\mathbb{R}^3}$ es la forma de la conexión que induce en la superficie la forma de la conexión usual en \mathbb{R}^3 .

El sistema (6.29) está contenido en el sistema (6.28), es decir, el primero representa las dos primeras componentes del segundo. Además notamos que las soluciones de (6.28) son curvas horizontales por lo que la forma de las soluciones de (6.28) son las de (6.29) salvo una traslación en la tercera coordenada.

En la siguiente sección veremos un ejemplo de una superficie y el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento de sus campos paralelos a lo largo de algunas curvas. La superficie será la esfera. A continuación presentaremos unos cálculos que usaremos en dicho ejemplo, que nos ayudarán a encontrar el sistema de ecuaciones diferenciales. Consisten en encontrar la forma que adopta el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento de los campos paralelos cuando los vemos desde los marcos

$$\alpha = \{e_{1\gamma}, e_{2\gamma}, e_{3\gamma}\}$$

$$\mathbf{U} = \{e_1, e_2, e_3\}$$

donde \mathbf{U} es el marco usual de \mathbb{R}^3 y α es el transporte paralelo de \mathbf{U} a lo largo de la curva γ .

El sistema de ecuaciones diferenciales a través de marcos α y δ de $T_\gamma\mathbb{R}^3$

Imaginemos ahora que queremos describir los campos paralelos desde el marco α de $T_\gamma\mathbb{R}^3$. Encontramos ahora una expresión del sistema de ecuaciones diferenciales que determinan las coordenadas de los campos paralelos a lo largo de γ para un observador en el marco α . Los coordenadas que asignan observadores en los marcos α y δ están relacionadas por

$$[v]_\alpha = [I]_\delta^\alpha [v]_\delta \quad (6.30)$$

$$[v]_\delta = [I]_\alpha^\delta [v]_\alpha \quad (6.31)$$

derivando (6.30)

$$\frac{d[v]_\alpha}{ds} = \frac{d[I]_\delta^\alpha}{ds} [v]_\delta \quad (6.32)$$

sustituyendo (6.31) en (6.32) obtenemos

$$\frac{d[v]_\alpha}{ds} = \frac{d[I]_\delta^\alpha}{ds} [I]_\alpha^\delta [v]_\alpha \quad (6.33)$$

Encontramos una expresión de (6.33) en términos del marco de Darboux D . Hemos supuesto que en $s = 0$ los marcos D y δ coinciden, sin embargo α ya no coincidirá con ellos en general. Construyamos ahora otro marco Δ trasladando paralelamente en \mathbb{R}^3 el marco $D(0)$ a lo largo de γ . Así (6.30) y (6.31) toman la forma:

$$[v]_\alpha = [I]_\delta^\alpha [v]_\delta = [I]_D^\alpha [I]_\delta^D [v]_\delta \quad (6.34)$$

$$[v]_\delta = [I]_\alpha^\delta [v]_\alpha = [I]_D^\delta [I]_\alpha^D [v]_\alpha \quad (6.35)$$

Derivamos (6.34):

$$\begin{aligned} \frac{d[v]_\alpha}{ds} &= \frac{d[I]_\delta^\alpha}{ds} [v]_\delta = \frac{d}{ds} \left([I]_D^\alpha [I]_\delta^D [v] \right) [v]_\delta = \left[\left(\frac{d[I]_D^\alpha}{ds} \right) [I]_\delta^D + [I]_D^\alpha \frac{d[I]_\delta^D}{ds} \right] [v]_\delta \\ &= \left[[I]_\Delta^\alpha \frac{d[I]_\Delta^D}{ds} [I]_\delta^D + [I]_\Delta^\alpha [I]_D^\Delta \frac{d[I]_\delta^D}{ds} \right] [v]_\delta \end{aligned}$$

sustituyendo (6.35) en la igualdad anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d[v]_\alpha}{ds} &= \left(\left[\left(\frac{d[I]_D^\alpha}{ds} \right) [I]_\delta^D + [I]_D^\alpha \frac{d[I]_\delta^D}{ds} \right] [I]_D^\delta [I]_\alpha^D \right) [v]_\alpha \\ &= \left[\left(\frac{d[I]_D^\alpha}{ds} \right) [I]_\alpha^D + [I]_D^\alpha \frac{d[I]_\delta^D}{ds} [I]_D^\delta [I]_\alpha^D \right] [v]_\alpha \end{aligned}$$

por lo que el sistema toma la forma

$$\frac{d[v]_\alpha}{ds} = W(s) [v]_\alpha = \left[\left(\frac{d[I]_D^\alpha}{ds} \right) [I]_\alpha^D + [I]_D^\alpha \frac{d[I]_\delta^D}{ds} [I]_D^\delta [I]_\alpha^D \right] [v]_\alpha \quad (6.36)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales a través del marco U de \mathbb{R}^3 y δ de $T_\gamma\mathbb{R}^3$

Supongamos que ahora queremos describir los movimientos del campo paralelo desde el marco $\mathbf{U} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Para obtener las coordenadas $[v]_{\mathbf{U}}$ de un campo paralelo v a lo largo de $\gamma \subset S$ tendremos que sumar a las coordenadas del campo v para el observador en el marco α , las coordenadas $[\gamma]_{\mathbf{U}}$ de γ respecto a un observador en el marco \mathbf{U} :

$$[v]_{\mathbf{U}} = [\gamma]_{\mathbf{U}} + [v]_{\alpha} \quad (6.37)$$

derivando obtenemos

$$\frac{d[v]_{\mathbf{U}}}{ds} = \frac{d[\gamma]_{\mathbf{U}}}{ds} + \frac{d[v]_{\alpha}}{ds}$$

sustituyendo (6.36)

$$\frac{d[v]_{\mathbf{U}}}{ds} = \frac{d[\gamma]_{\mathbf{U}}}{ds} + W(s)[v]_{\alpha} \quad (6.38)$$

sustituyamos ahora el valor de $[v]_{\alpha}$ que obtenemos de (6.37) en (6.38) para obtener

$$\frac{d[v]_{\mathbf{U}}}{ds} = \frac{d[\gamma]_{\mathbf{U}}}{ds} + W(s)([v]_{\mathbf{U}} - [\gamma]_{\mathbf{U}}) = W(s)[v]_{\mathbf{U}} + \left(\frac{d[\gamma]_{\mathbf{U}}}{ds} - W(s)[\gamma]_{\mathbf{U}} \right) \quad (6.39)$$

Vemos un ejemplo donde ilustramos lo anterior:

6.6. La esfera S^2 y el sistema de ecuaciones que describe sus campos paralelos

A continuación tomaremos como curva γ un paralelo en la esfera y calcularemos el sistema de ecuaciones diferenciales que describe los campos paralelos a lo largo de γ . Sea θ el ángulo que forma el paralelo con respecto al polo norte de la esfera. El radio de un paralelo es

$$r_{\theta} = \text{sen}\theta;$$

de modo que el tiempo que tardaremos en darle una vuelta, viajando a rapidez unitaria será igual a su perímetro, es decir

$$t_{\theta} = 2\pi \text{sen}\theta.$$

Hemos visto (sección 4.17) que la curvatura geodésica de un paralelo en S^2 es

$$k_{\mathbf{G}} = \cot \theta$$

Hagamos a continuación el análisis de las coordenadas de los campos paralelos a lo largo de γ usando distintos marcos:

Desde el marco α

Construyamos una solución al sistema (6.36), es decir, encontremos las coordenadas $[v]_{\alpha}$ para un observador del marco α de un campo paralelo v que tiene coordenadas $[v]_{\delta}$ constantes en el marco δ a través de la ecuación

$$[v]_{\alpha} = [I]_{\delta}^{\alpha} [v]_{\delta} = [I]_{\mathbf{D}}^{\delta} [I]_{\alpha}^{\mathbf{D}} [v]_{\alpha} \quad (6.40)$$

que vimos en (6.34). En el cálculo introduciremos un marco Δ adicional por lo que la igualdad anterior tomará la forma

$$[v]_{\alpha} = [I]_{\delta}^{\alpha} [v]_{\delta} = [I]_{\mathbf{D}}^{\delta} [I]_{\alpha}^{\mathbf{D}} [v]_{\alpha} = [I]_{\Delta}^{\delta} [I]_{\mathbf{D}}^{\Delta} [I]_{\alpha}^{\mathbf{D}} [v]_{\alpha}.$$

Supongamos que damos una vuelta a lo largo de un paralelo de S^2 a rapidez unitaria (viendo las cosas desde el marco \mathbf{U} de \mathbb{R}^3). Las coordenadas de un campo paralelo v a lo largo de γ para un observador en el marco δ serán constantes

$$[v_0]_{\delta} = (a_0, b_0, c_0).$$

Un observador en el marco de Darboux \mathbf{D} verá que el marco δ rota en torno al vector normal a la superficie \mathbf{N} con una rapidez angular $\omega_g = -k_{\mathbf{G}} = -\cot \theta$, para él el vector del campo paralelo se mueve en una circunferencia y sus coordenadas

$$[v]_{\mathbf{D}} = [I]_{\delta}^{\mathbf{D}} [v_0]_{\delta} \quad (6.41)$$

estarán relacionadas con las del observador del marco δ a través de la curva

$$[I]_{\delta}^{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \cos \omega_g s & -\text{sen} \omega_g s & 0 \\ \text{sen} \omega_g s & \cos \omega_g s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \cos \omega_g s + b_0 \text{sen} \omega_g s \\ b_0 \cos \omega_g s - a_0 \text{sen} \omega_g s \\ c_0 \end{pmatrix}$$

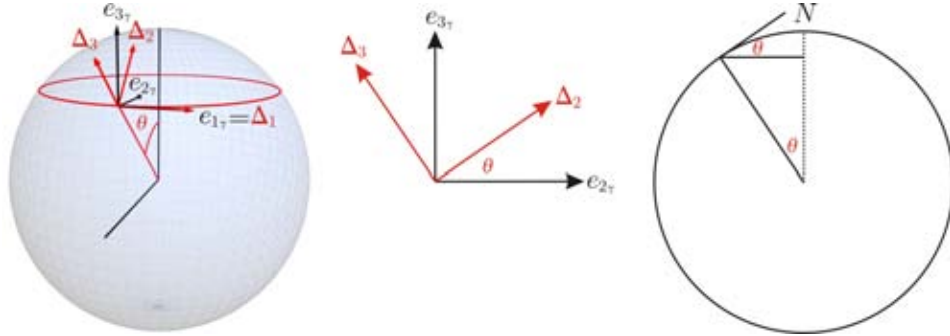
de matrices de cambios de coordenadas. Explícitamente tienen la siguiente forma:

$$[v]_D = \begin{pmatrix} \cos \omega_g s & -\text{sen} \omega_g s & 0 \\ \text{sen} \omega_g s & \cos \omega_g s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \cos \omega_g s + b_0 \text{sen} \omega_g s \\ b_0 \cos \omega_g s - a_0 \text{sen} \omega_g s \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \cos (s \cot \theta) + b_0 \text{sen} (s \cot \theta) \\ b_0 \cos (s \cot \theta) - a_0 \text{sen} (s \cot \theta) \\ c_0 \end{pmatrix}$$

Ahora encontremos las coordenadas del campo paralelo respecto a un observador que se encuentre en el marco α . Para ello necesitamos la matriz $[I]_D^\alpha$ que nos da el cambio de coordenadas del marco D al marco α . Podemos encontrar esa matriz a través de la matriz $[R_\alpha^D]_\alpha$ asociada a la transformación que lleva el marco α en el marco D respecto a la base α de $T_\gamma \mathbb{R}^3$. Notamos que

$$[R_\alpha^D]_\alpha = [R_\Delta^D]_\alpha [R_\alpha^\Delta]_\alpha;$$

es decir, encontraremos $[R_\alpha^D]_\alpha$ a través de las matrices $[R_\alpha^\Delta]_\alpha$ y $[R_\Delta^D]_\alpha$ asociadas, en la base α , a las transformaciones que llevan el marco α en Δ y el marco Δ en D , respectivamente. El marco Δ nos servirá para alcanzar la inclinación de los planos tangentes a lo largo del paralelo γ . Obtenemos Δ de rotar el marco α en torno del vector e_1 un ángulo θ .



Los vectores Δ_i del marco Δ son las columnas de la matriz

$$[R_\alpha^\Delta]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ 0 & \text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (6.42)$$

Como Δ es un marco que no se mueve respecto de α , $[R_\alpha^\Delta]_\alpha$ es una matriz constante a lo largo del paralelo asociado al ángulo θ . Ahora encontremos a $[R_\Delta^D]_\alpha$. El marco de Darboux D gira respecto del marco Δ y su eje de giro es la línea que genera el vector e_3 del marco α . La rapidez angular de dicho giro es

$$\omega_p = \text{csc} \theta.$$

que se mantiene constante a lo largo de γ (debido a la simetría de la esfera). De modo que

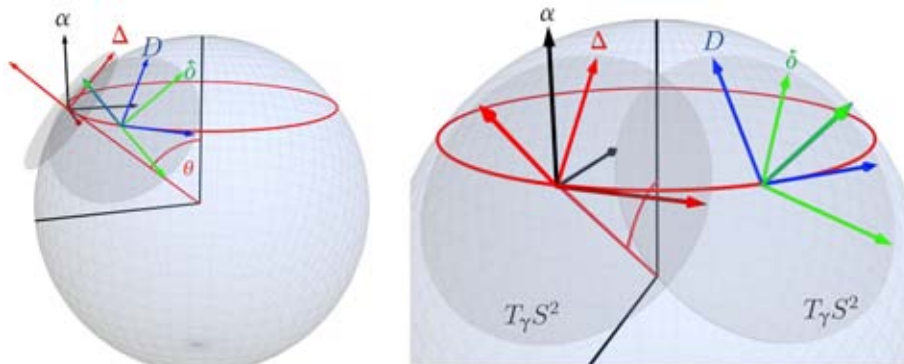
$$[R_\Delta^D]_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \omega_p s & -\text{sen} \omega_p s & 0 \\ \text{sen} \omega_p s & \cos \omega_p s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.43)$$

Entonces la matriz $[R_\alpha^D]_\alpha$ toma la forma

$$[R_\alpha^D]_\alpha = [R_\Delta^D]_\alpha [R_\alpha^\Delta]_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \omega_p s & -\text{sen} \omega_p s & 0 \\ \text{sen} \omega_p s & \cos \omega_p s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ 0 & \text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{\text{sen} \theta} & -\text{sen} \frac{s}{\text{sen} \theta} \cos \theta & \text{sen} \frac{s}{\text{sen} \theta} \text{sen} \theta \\ \text{sen} \frac{s}{\text{sen} \theta} & \cos \frac{s}{\text{sen} \theta} \cos \theta & -\cos \frac{s}{\text{sen} \theta} \text{sen} \theta \\ 0 & \text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Por otro lado notamos que

$$[R_\alpha^D]_\alpha = [R_\Delta^D]_\alpha [R_\alpha^\Delta]_\alpha = [I]_\Delta^\alpha [I]_D^\Delta = [I]_D^\alpha$$



Con ello queda determinada la matriz de la ecuación (6.40):

$$[I]_{\delta}^{\alpha} = [I]_{\Delta}^{\alpha} [I]_{D}^{\Delta} [I]_{\delta}^D = [I]_{D}^{\alpha} [I]_{\delta}^D = \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{\text{sen}\theta} & -\text{sen} \frac{s}{\text{sen}\theta} \cos \theta & \text{sen} \frac{s}{\text{sen}\theta} \text{sen}\theta \\ \text{sen} \frac{s}{\text{sen}\theta} & \cos \frac{s}{\text{sen}\theta} \cos \theta & -\cos \frac{s}{\text{sen}\theta} \text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_g s & -\text{sen} \omega_g s & 0 \\ \text{sen} \omega_g s & \cos \omega_g s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(s \cot \theta) \cos \frac{s}{\text{sen}\theta} + \text{sen}(s \cot \theta) \text{sen} \frac{s}{\text{sen}\theta} \cos \theta & \text{sen}(s \cot \theta) \cos \frac{s}{\text{sen}\theta} - \cos(s \cot \theta) \text{sen} \frac{s}{\text{sen}\theta} \cos \theta & \text{sen} \frac{s}{\text{sen}\theta} \text{sen}\theta \\ \cos(s \cot \theta) \text{sen} \frac{s}{\text{sen}\theta} - \text{sen}(s \cot \theta) \cos \frac{s}{\text{sen}\theta} \cos \theta & \text{sen}(s \cot \theta) \text{sen} \frac{s}{\text{sen}\theta} + \cos(s \cot \theta) \cos \frac{s}{\text{sen}\theta} \cos \theta & -\cos \frac{s}{\text{sen}\theta} \text{sen}\theta \\ -\text{sen}(s \cot \theta) \text{sen}\theta & \cos(s \cot \theta) \text{sen}\theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

y también las coordenadas $[v]_{\alpha} = [I]_{\delta}^{\alpha} [v]_{\delta}$:

$$[v]_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(s \cot \theta) \cos \frac{s}{\text{sen}\theta} + \text{sen}(s \cot \theta) \text{sen} \frac{s}{\text{sen}\theta} \cos \theta & \text{sen}(s \cot \theta) \cos \frac{s}{\text{sen}\theta} - \cos(s \cot \theta) \text{sen} \frac{s}{\text{sen}\theta} \cos \theta & \text{sen} \frac{s}{\text{sen}\theta} \text{sen}\theta \\ \cos(s \cot \theta) \text{sen} \frac{s}{\text{sen}\theta} - \text{sen}(s \cot \theta) \cos \frac{s}{\text{sen}\theta} \cos \theta & \text{sen}(s \cot \theta) \text{sen} \frac{s}{\text{sen}\theta} + \cos(s \cot \theta) \cos \frac{s}{\text{sen}\theta} \cos \theta & -\cos \frac{s}{\text{sen}\theta} \text{sen}\theta \\ -\text{sen}(s \cot \theta) \text{sen}\theta & \cos(s \cot \theta) \text{sen}\theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

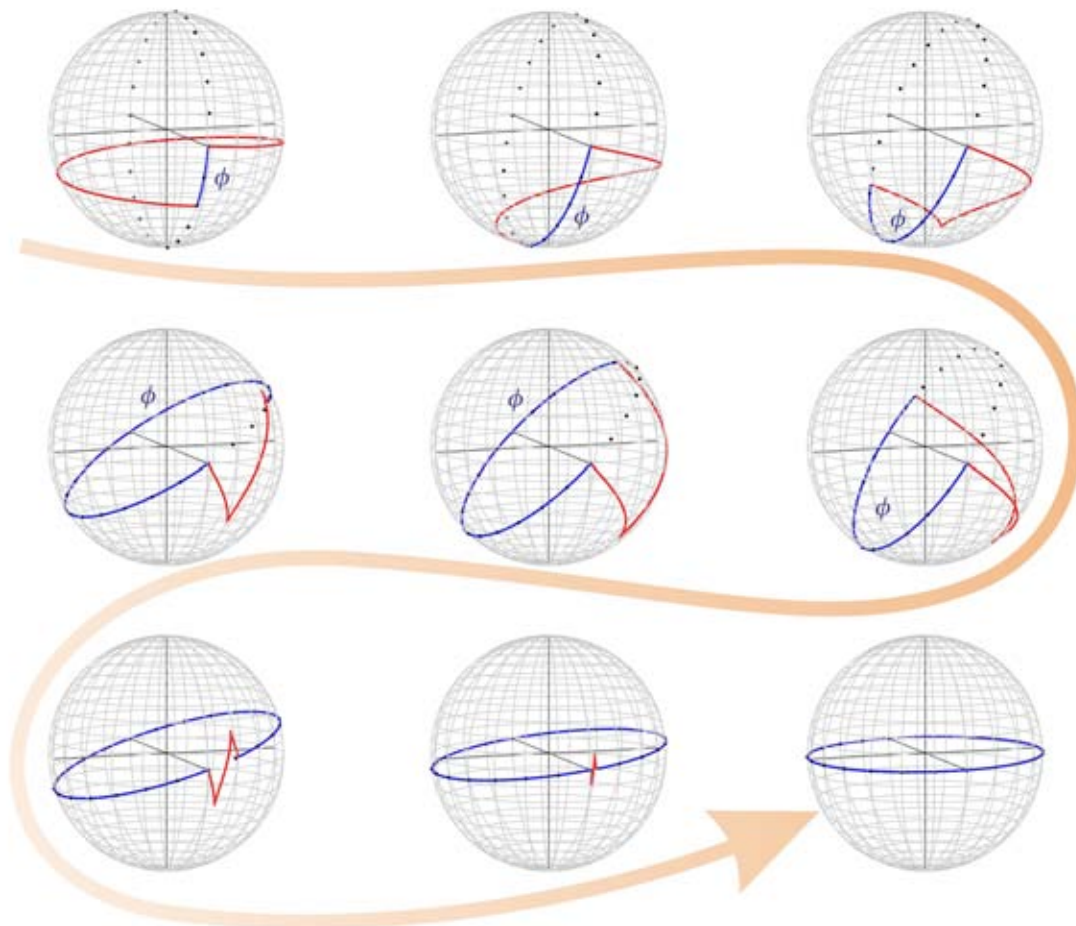
La expresión anterior nos proporciona el grupo de difeomorfismos que nos da las coordenadas en el marco α de todos los campos paralelos a lo largo de un paralelo en S^2 . Dicho grupo tiene asociado un sistema de ecuaciones diferenciales en el marco α que presentaremos en (C.1).

Una solución al sistema de ecuaciones que describe el movimiento del marco paralelo visto desde el marco α

Veamos cómo es una de las soluciones, es decir, tomemos un campo paralelo v con coordenadas $[v]_{\delta} = (1, 0, 0)^T$, entonces las coordenadas $[v]_{\alpha}$ del campo para el observador del marco α toman la forma

$$[v]_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(s \cot \theta) \cos \frac{s}{\text{sen}\theta} + \text{sen}(s \cot \theta) \text{sen} \frac{s}{\text{sen}\theta} \cos \theta \\ \cos(s \cot \theta) \text{sen} \frac{s}{\text{sen}\theta} - \text{sen}(s \cot \theta) \cos \frac{s}{\text{sen}\theta} \cos \theta \\ -\text{sen}(s \cot \theta) \text{sen}\theta \end{pmatrix};$$

por lo que el observador en α verá el campo paralelo como una curva que cambia su posición de acuerdo con la ecuación anterior. Para cada valor de θ tenemos un paralelo y por tanto un sistema de ecuaciones diferente. A continuación, en la figura, tomamos algunos valores decrecientes de θ y mostramos la imagen de la solución con condición inicial $[v]_{\delta} = (1, 0, 0)^T$ correspondiente de cada sistema. Estas imágenes corresponden a un sistema de referencia que se encuentra a una distancia dada y en reposo respecto del marco α .



La esfera S que se muestra no es la que tomamos inicialmente donde vive el paralelo γ en el que se mueve el marco α ; es una esfera con centro en el origen del marco α y en ella estará contenida la solución $[v]_\alpha$. Si nos imaginamos que la curva γ nos va atravesando el vector $[v]_\alpha$ irá describiendo una curva en S y después de que γ nos atraviesa por completo la curva $[v]_\alpha$ regresará al plano tangente inicial en una posición diferente de la inicial, el vector final regresará rotado en un ángulo ϕ (azul en la figura) respecto del inicial. Cuando θ se hace más pequeño ϕ se hace más grande y cuando $\theta \rightarrow 0$ el $\phi \rightarrow 2\pi$. La holonomía es lo que le falta a ϕ para llegar a 2π , $H = 2\pi - \phi$. Es el cociente de ese pequeño ángulo de holonomía entre el área que encierra el paralelo de S^2 lo que nos arrojará información sobre la 2-forma de curvatura como veremos más adelante.

En el apéndice C calculamos explícitamente el sistema de ecuaciones que describe el movimiento del marco paralelo visto desde el marco α .

Una solución al sistema de ecuaciones que describe el movimiento del marco paralelo visto desde el marco \mathbf{U}

Para un observador en el marco \mathbf{U} (o en algún marco que se encuentre en reposo respecto del marco \mathbf{U}) las coordenadas de un campo paralelo a lo largo de γ (un paralelo de S^2) tienen la forma:

$$[v]_{\mathbf{U}} = [\gamma]_{\mathbf{U}} + [v]_{\alpha} = [\gamma]_{\mathbf{U}} + [I]_{\delta}^{\alpha} [v]_{\delta} = \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\omega_p s \\ -\sin\theta \cos\omega_p s \\ \cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\omega_p s & -\sin\omega_p s & 0 \\ \sin\omega_p s & \cos\omega_p s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega_g s & -\sin\omega_g s & 0 \\ \sin\omega_g s & \cos\omega_g s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [v]_{\delta};$$

donde el primer sumando representa la parametrización del paralelo γ en la esfera a lo largo del cual viajan los marcos D y α . Tomemos ahora un campo paralelo con coordenadas

$$[v]_{\delta} = (1, 0, 0)^T$$

en el marco α ; un observador en el marco \mathbf{U} verá que v se mueve a lo largo de una curva con coordenadas

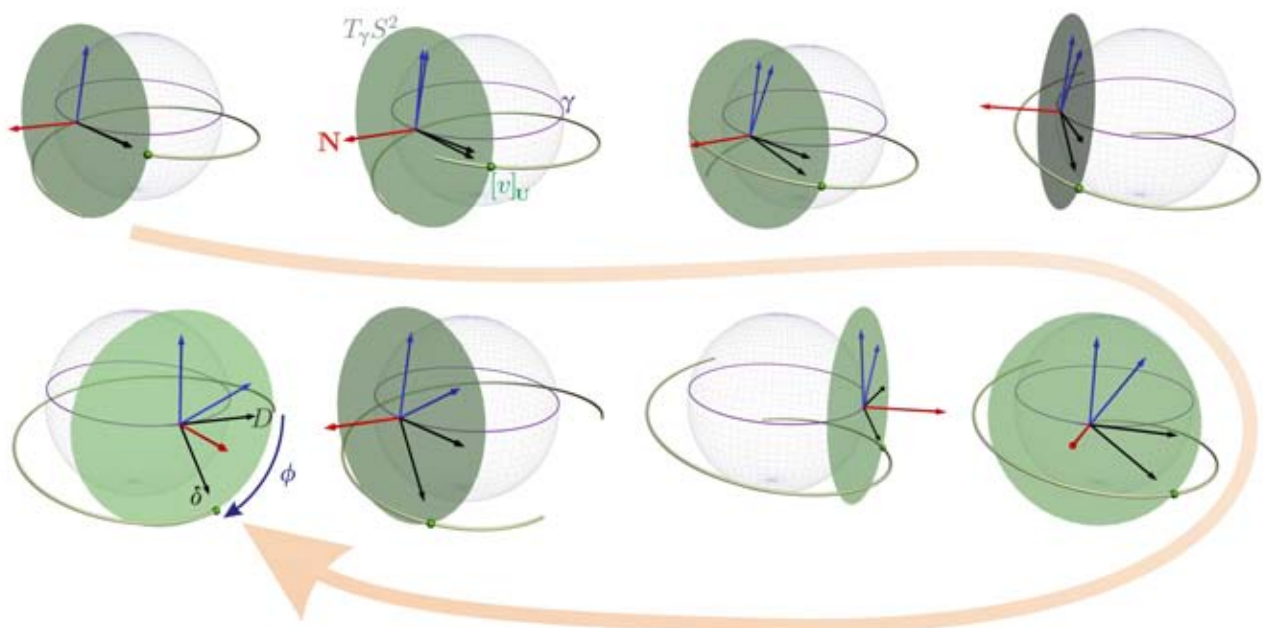
$$[v]_{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \sin\frac{s}{\sin\theta} \sin\theta + \cos(s \cot\theta) \cos\frac{s}{\sin\theta} + \sin(s \cot\theta) \sin\frac{s}{\sin\theta} \cos\theta \\ \cos(s \cot\theta) \sin\frac{s}{\sin\theta} - \cos\frac{s}{\sin\theta} \sin\theta - \sin(s \cot\theta) \cos\frac{s}{\sin\theta} \cos\theta \\ \cos\theta - \sin(s \cot\theta) \sin\theta \end{pmatrix}$$

Como la transformación que nos interesa $R_\gamma : T_P S \rightarrow T_P S$ es una rotación, basta que nos fijemos en la curva que describe un solo vector para determinar su posición final y con ello a R_γ .

En la siguiente figura ilustramos un paralelo γ_θ (morado) y la curva $[v]_{\mathbf{U}}$ que ve un observador en un marco a una distancia dada y en reposo respecto del marco \mathbf{U} . La curva $[v]_{\mathbf{U}}$ es una solución a un sistema de ecuaciones diferenciales en el marco \mathbf{U} (que veremos más adelante). En la figura mostramos la posición de $[v]_{\mathbf{U}}$ en algunos instantes de tiempo (punto verde) y notamos que después de completar una vuelta al paralelo no coinciden la posición inicial y final de $[v]_{\mathbf{U}}$, hay una rotación

$$R_\gamma : T_P S \rightarrow T_P S$$

de un ángulo ϕ de por medio.



Para cada $v \in T_\gamma S$ hay una solución $[v]_{\mathbf{U}}$, así que el sistema de ecuaciones diferenciales contiene la información de todos los campos paralelos a lo largo de γ_θ

6.7. La curvatura de S_r^2 como una matriz antisimétrica (velocidad de giro)

Esfera unitaria S^2 .

De las figuras que vimos en la sección anterior queda ilustrado (cuando vemos las cosas desde el marco α o \mathbf{U}) que a cada paralelo γ_θ le corresponde una transformación lineal ortogonal, es decir, una rotación

$$R_\gamma : T_{\gamma_0}S \rightarrow T_{\gamma_0}S$$

en el plano tangente por un ángulo ϕ que depende de θ . ϕ es igual a la integral de la curvatura geodésica de $s = 0$ hasta la longitud de $\gamma_\theta = 2\pi \text{sen}\theta$

$$\phi = - \int_0^{2\pi \text{sen}\theta} k_{\mathbf{G}}(\sigma) d\sigma = - \int_0^{2\pi \text{sen}\theta} \cot \theta d\sigma = -2\pi \text{sen}\theta \cot \theta = -2\pi \cos \theta. \quad (6.44)$$

Recordemos⁸¹ que el área que encierra un paralelo γ_θ en S_r^2 es

$$a_\gamma = 2\pi - 2\pi \cos \theta.$$

Entonces el ángulo ϕ es igual al negativo del área que hay entre el ecuador de S^2 y el paralelo γ :

$$\phi = a_\gamma - 2\pi.$$

La rotación R_γ determina la transformación de holonomía

$$H_\gamma : T_{\gamma_0}S \rightarrow T_{\gamma_0}S$$

$$H_\gamma = Id - R_\gamma$$

que también es ortogonal y que podemos interpretar como la rotación que hay que aplicar a los vectores que han sido trasladados paralelamente a lo largo de todo el paralelo γ para llevarlos a su posición inicial que sería alcanzada después de una rotación por un ángulo de -2π . De modo que el ángulo φ que rota la transformación H_γ es

$$\varphi = -2\pi - \phi = -a_\gamma.$$

Imaginemos ahora que somos observadores en el marco F_{2D} , la matriz que le asociamos a la transformación H_γ es

$$\begin{aligned} [H_\gamma]_{F_{2D}} &= [Id - R_\gamma]_{F_{2D}} = \begin{pmatrix} \cos(-2\pi) & -\text{sen}(-2\pi) \\ \text{sen}(-2\pi) & \cos(-2\pi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(-a_\gamma) & -\text{sen}(-a_\gamma) \\ \text{sen}(-a_\gamma) & \cos(-a_\gamma) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(-a_\gamma) & -\text{sen}(-a_\gamma) \\ \text{sen}(-a_\gamma) & \cos(-a_\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \cos a_\gamma & -\text{sen} a_\gamma \\ \text{sen} a_\gamma & 1 - \cos a_\gamma \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

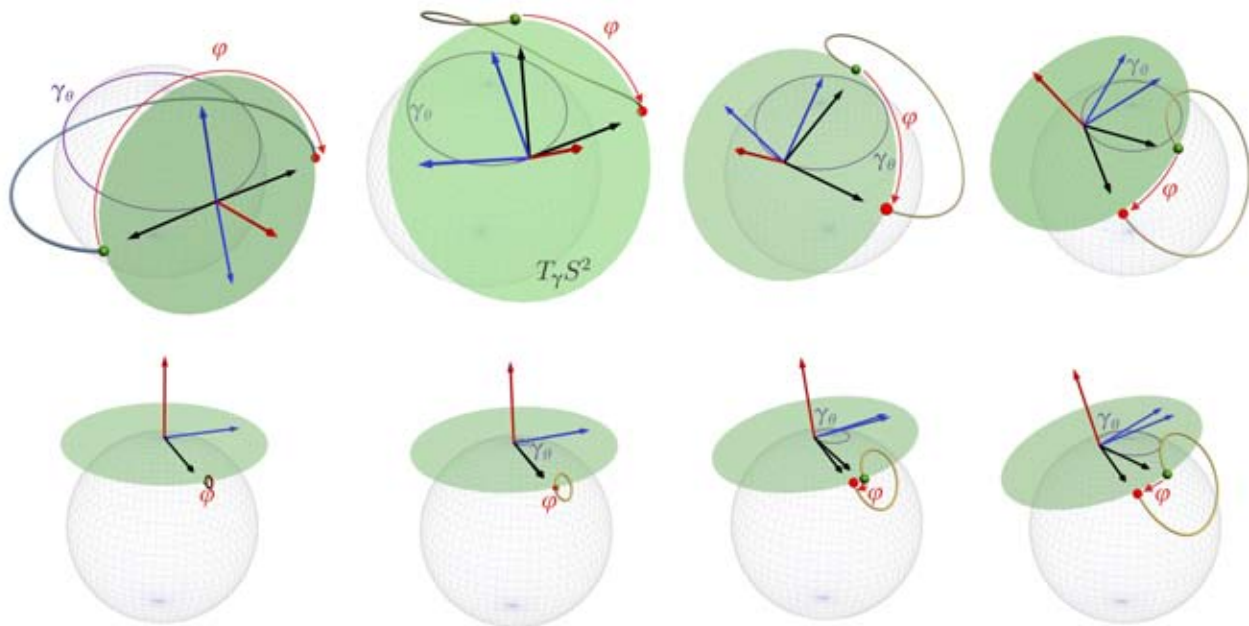
A cada ángulo θ le cooresponde un paralelo γ_θ y a éste le corresponde el área a_γ que encierra. Entonces para cada área a_γ tenemos una transformación H_γ y su matriz asociada en el marco F_{2D} , $[H_\gamma]_{F_{2D}}$. Cuando $a_\gamma \rightarrow 0$ los paralelos tienden al polo (ver la siguiente figura); el ángulo φ de la rotación H_γ tiende a cero por lo que H_γ tiende a la transformación identidad y $[H_\gamma]_{F_{2D}}$ tiende a la matriz identidad.

⁸¹El área que encierra un paralelo γ_θ en S_r^2 es

$$2\pi r^2 (1 - \cos \theta);$$

si $r = 1$ tenemos que

$$a = 2\pi - 2\pi \cos \theta$$



Las velocidades (respecto al parámetro a_γ), con las que llegan a la transformación y matriz identidad son, respectivamente:

$$\left. \frac{dH_\gamma}{da_\gamma} \right|_{a_\gamma=0}$$

$$\left. \frac{d[H_\gamma]_{F_2D}}{da_\gamma} \right|_{a_\gamma=0} = \lim_{a_\gamma \rightarrow 0} \frac{[H_\gamma]_{F_2D}}{a_\gamma} = A.$$

donde A es una matriz antisimétrica, como veremos a continuación a partir de (6.45):

$$A = \lim_{a_\gamma \rightarrow 0} \frac{[H_\gamma]_{F_2D}}{a_\gamma} = \lim_{a_\gamma \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{1 - \cos a_\gamma}{a_\gamma} & \frac{-\operatorname{sen} a_\gamma}{a_\gamma} \\ \frac{\operatorname{sen} a_\gamma}{a_\gamma} & \frac{1 - \cos a_\gamma}{a_\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k(\gamma_0) \\ k(\gamma_0) & 0 \end{pmatrix}$$

donde $k(\gamma_0)$ es la curvatura gaussiana de S^2 en el punto γ_0 .

La esfera de radio r , S_r^2

Lo que hicimos en la sección anterior vale no sólo para la esfera unitaria sino para la esfera S_r^2 de un radio arbitrario. El razonamiento es muy parecido y sólo presentaremos las partes que cambian.

De la misma manera que en la sección anterior a cada paralelo γ_θ le corresponde una transformación lineal ortogonal R_γ en $T_{\gamma_0}S$. Pensemos en γ_θ una esfera de radio $r < 1$, los vectores paralelos girarán más rápido cuando recorremos γ_θ pero esto se equilibra con el hecho de que recorremos γ_θ en menos tiempo; de modo que finalmente el ángulo ϕ de la rotación R_γ será el mismo que en el caso $r = 1$. Algo análogo pasa si $r > 1$, giran los vectores paralelos más lento, pero más tiempo. Veamos la idea anterior en detalle. El ángulo ϕ que gira un vector paralelo respecto al marco F_{2D} depende de θ y r ; y de nuevo es igual a la integral de la curvatura geodésica

$$k_G = \frac{\cot \theta}{r}$$

desde $s = 0$ hasta la longitud $2\pi r \operatorname{sen} \theta$ de γ_θ

$$\phi = - \int_0^{2\pi r \operatorname{sen} \theta} k_G(\sigma) d\sigma = - \int_0^{2\pi r \operatorname{sen} \theta} \frac{\cot \theta}{r} d\sigma = -2\pi r \operatorname{sen} \theta \frac{\cot \theta}{r} = -2\pi \cos \theta.$$

La igualdad anterior muestra el equilibrio arriba mencionado ya que es igual a la obtenida en (6.44). El área que encierra un paralelo γ_θ en S_r^2 es

$$a_\gamma = (2\pi - 2\pi \cos \theta) r^2.$$

Entonces el ángulo ϕ ahora es igual a

$$\phi = \frac{a_\gamma}{r^2} - 2\pi.$$

que es el negativo del área que hay entre el ecuador de S^2 y la imagen bajo la aplicación de Gauss del paralelo γ_θ en S_r^2 . La transformación de holonomía

$$H_\gamma = Id - R_\gamma$$

será una rotación de un ángulo

$$\varphi = -2\pi - \phi = -\frac{a_\gamma}{r^2}.$$

Como observadores en el marco F_{2D} , la matriz que le asociamos a la transformación H_γ es

$$\begin{aligned} [H_\gamma]_{F_{2D}} &= [Id - R_\gamma]_{F_{2D}} = \begin{pmatrix} \cos(-2\pi) & -\text{sen}(-2\pi) \\ \text{sen}(-2\pi) & \cos(-2\pi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{a_\gamma}{r^2}\right) & -\text{sen}\left(-\frac{a_\gamma}{r^2}\right) \\ \text{sen}\left(-\frac{a_\gamma}{r^2}\right) & \cos\left(-\frac{a_\gamma}{r^2}\right) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{a_\gamma}{r^2}\right) & \text{sen}\left(\frac{a_\gamma}{r^2}\right) \\ -\text{sen}\left(\frac{a_\gamma}{r^2}\right) & \cos\left(\frac{a_\gamma}{r^2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \cos\left(\frac{a_\gamma}{r^2}\right) & -\text{sen}\left(\frac{a_\gamma}{r^2}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{a_\gamma}{r^2}\right) & 1 - \cos\left(\frac{a_\gamma}{r^2}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Ahora las velocidades con que H_γ y $[H_\gamma]_{F_{2D}}$ llegan a la transformación y matriz identidad son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{dH_\gamma}{da_\gamma} \Big|_{a_\gamma=0} \\ \frac{d[H_\gamma]_{F_{2D}}}{da_\gamma} \Big|_{a_\gamma=0} &= \lim_{a_\gamma \rightarrow 0} \frac{[H_\gamma]_{F_{2D}}}{a_\gamma} = A. \end{aligned}$$

donde A es una matriz antisimétrica, como veremos a continuación a partir de (6.46):

$$A = \lim_{a_\gamma \rightarrow 0} \frac{[H_\gamma]_{F_{2D}}}{a_\gamma} = \lim_{a_\gamma \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{1 - \cos\left(\frac{a_\gamma}{r^2}\right)}{\frac{a_\gamma}{r^2}} & \frac{-\text{sen}\left(\frac{a_\gamma}{r^2}\right)}{\frac{a_\gamma}{r^2}} \\ \frac{\text{sen}\left(\frac{a_\gamma}{r^2}\right)}{\frac{a_\gamma}{r^2}} & \frac{1 - \cos\left(\frac{a_\gamma}{r^2}\right)}{\frac{a_\gamma}{r^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{r^2} \\ \frac{1}{r^2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k(\gamma_0) \\ k(\gamma_0) & 0 \end{pmatrix}$$

donde $k(\gamma_0)$ es la curvatura gaussiana de S_r^2 en el punto γ_0 .

La interpretación de la curvatura como una velocidad de giro vale para una superficie en general, como veremos a continuación.

6.8. La curvatura de S como una matriz antisimétrica (velocidad de giro)

Tomemos en una superficie S una familia de curvas γ_a que sean frontera de un disco, donde el área que encierran sea el parámetro y supongamos que cuando $a_\gamma \rightarrow 0$ la curva γ colapsa en un punto P de S . A cada curva γ_a le corresponde una transformación lineal ortogonal R_γ en $T_{\gamma_0}S$. El ángulo ϕ que gira un vector paralelo respecto al marco F_{2D} (después de que γ atraviesa por completo al marco F_{2D}) depende de cómo se curva la superficie en la región interior a γ_a y de nuevo es igual a la integral de la curvatura geodésica desde $s = 0$ hasta la longitud $l(\gamma)$ de la curva γ_a

$$\phi = - \int_0^{l(\gamma)} k_{\mathbf{G}}(\sigma) d\sigma \quad (6.47)$$

Por otro lado sabemos (sección 4.16) que

$$- \int_0^{l(\gamma)} k_{\mathbf{G}}(\sigma) d\sigma = \varphi - 2\pi \quad (6.48)$$

donde φ es el ángulo de la transformación de holonomía H_γ . Igualando (6.48) y (6.47) tenemos que

$$\phi = \varphi - 2\pi.$$

Recordando que el ángulo φ está dado por el área de la imagen bajo la aplicación de Gauss de la región ρ_γ que encierra la curva

$$\varphi = A(\mathbf{N}(\rho_\gamma))$$

llegamos a la siguiente expresión

$$\phi = A(\mathbf{N}(\rho_\gamma)) - 2\pi;$$

por lo que el ángulo ϕ es el negativo del área que hay entre el ecuador de S^2 y la imagen bajo la aplicación de Gauss de la región ρ_γ . La transformación de holonomía

$$H_\gamma = Id - R_\gamma$$

será una rotación de un ángulo

$$\varphi = A(\mathbf{N}(\rho_\gamma)).$$

Como observadores en el marco F_{2D} , la matriz que le asociamos a la transformación H_γ es

$$\begin{aligned} [H_\gamma]_{F_{2D}} &= [Id - R_\gamma]_{F_{2D}} = \begin{pmatrix} \cos(-2\pi) & -\text{sen}(-2\pi) \\ \text{sen}(-2\pi) & \cos(-2\pi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(A(\mathbf{N}(\rho_\gamma))) & -\text{sen}(A(\mathbf{N}(\rho_\gamma))) \\ \text{sen}(A(\mathbf{N}(\rho_\gamma))) & \cos(A(\mathbf{N}(\rho_\gamma))) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(A(\mathbf{N}(\rho_\gamma))) & \text{sen}(A(\mathbf{N}(\rho_\gamma))) \\ -\text{sen}(A(\mathbf{N}(\rho_\gamma))) & \cos(A(\mathbf{N}(\rho_\gamma))) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(A(\mathbf{N}(\rho_\gamma))) & -\text{sen}(A(\mathbf{N}(\rho_\gamma))) \\ \text{sen}(A(\mathbf{N}(\rho_\gamma))) & 1 - \cos(A(\mathbf{N}(\rho_\gamma))) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Ahora las velocidades con que H_γ y $[H_\gamma]_{F_{2D}}$ llegan a la transformación y matriz identidad son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{dH_\gamma}{da_\gamma} \Big|_{a_\gamma=0} \\ \frac{d[H_\gamma]_{F_{2D}}}{da_\gamma} \Big|_{a_\gamma=0} &= \lim_{a_\gamma \rightarrow 0} \frac{[H_\gamma]_{F_{2D}}}{a_\gamma} = A. \end{aligned}$$

donde A es una matriz antisimétrica, como veremos a continuación a partir de (6.49):

$$A = \lim_{a_\gamma \rightarrow 0} \frac{[H_\gamma]_{F_{2D}}}{a_\gamma} = \lim_{a_\gamma \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{1 - \cos(A(\mathbf{N}(\rho_\gamma)))}{a_\gamma} & \frac{-\text{sen}(A(\mathbf{N}(\rho_\gamma)))}{a_\gamma} \\ \frac{\text{sen}(A(\mathbf{N}(\rho_\gamma)))}{a_\gamma} & \frac{1 - \cos(A(\mathbf{N}(\rho_\gamma)))}{a_\gamma} \end{pmatrix}$$

Por otro lado si la región ρ_γ es muy pequeña

$$A(\mathbf{N}(\rho_\gamma)) \rightarrow k(P) a_\gamma$$

es decir

$$\lim_{a_\gamma \rightarrow 0} \frac{A(\mathbf{N}(\rho_\gamma))}{a_\gamma} = k(P)$$

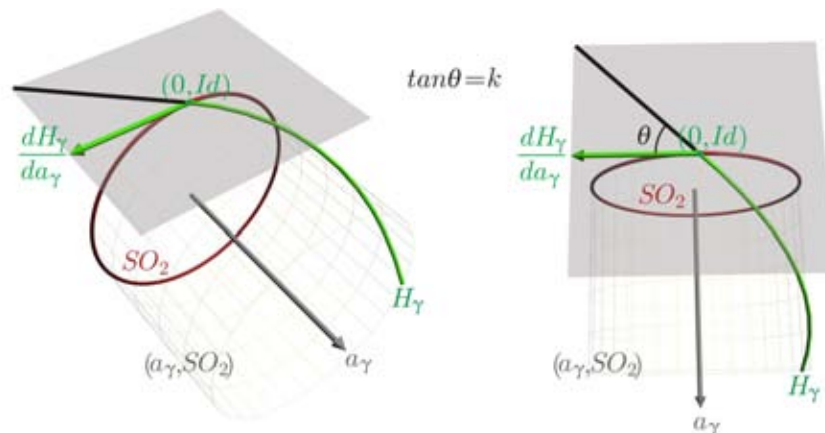
de donde

$$A = \lim_{a_\gamma \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{1 - \cos(k(P)a_\gamma)}{a_\gamma} & \frac{-\text{sen}(k(P)a_\gamma)}{a_\gamma} \\ \frac{\text{sen}(k(P)a_\gamma)}{a_\gamma} & \frac{1 - \cos(k(P)a_\gamma)}{a_\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k(P) \\ k(P) & 0 \end{pmatrix} \quad (6.50)$$

donde $k(P)$ es la curvatura gaussiana de S en el punto P .

El procedimiento anterior se parece al usado para encontrar el rotacional de un campo vectorial en el plano. De hecho el rotacional es una 2-forma diferencial en \mathbb{R}^2 . Resulta que la curvatura también será una 2-forma como veremos en la siguiente sección.

Visualicemos la idea de la curvatura como una matriz antisimétrica en la siguiente figura. La circunferencia roja representa SO_2 que es el conjunto donde se mueve la curva de transformaciones de holonomía H_γ . La identidad es el punto de donde parte el vector verde. En la dirección ortogonal al plano que contiene a SO_2 tenemos el parámetro área obteniendo así un campo de direcciones sobre un cilindro (donde el tiempo ahora es el área). La curva verde es una curva integral del campo de direcciones, es decir, representa la gráfica $G(H_\gamma)$ de H_γ . Conforme $a_\gamma \rightarrow 0$ la gráfica de H_γ se acerca al punto $(0, Id)$. La forma en la que $G(H_\gamma) \rightarrow (0, Id)$ depende de la curvatura gaussiana de la superficie. La pendiente de la recta tangente a $G(H_\gamma)$ en el punto $(0, Id)$ nos da información de qué tan rápido llega a la identidad de SO_2 la curva H_γ . El vector verde representa esta velocidad $\frac{dH_\gamma}{da_\gamma}$, es decir, es un vector tangente en la identidad de SO_2 .



Si $G(H_\gamma)$ corta a $(0, SO_2)$ (circunferencia roja) en el punto $(0, Id)$ pegándose a la dirección del eje a_γ , entonces

$$\frac{dH_\gamma}{da_\gamma} = \mathbf{0}; \text{ y } \frac{d[H_\gamma]_{F_{2D}}}{da_\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el ángulo φ de la transformación de holonomía H_γ se va a cero más rápido que el área a_γ , por lo que en el punto P la curvatura gaussiana será cero. En otras palabras, al hacer traslados paralelos a lo largo de curvas γ_a que encierren un área pequeña, los vectores regresarán al plano tangente inicial esencialmente en la misma posición de la que partieron. Por otro lado, si $G(H_\gamma)$ corta a $(0, SO_2)$ en $(0, Id)$ pegándose a $(0, SO_2)$, entonces la transformación lineal $\frac{H_\gamma}{a_\gamma}$ y su matriz asociada $\frac{[H_\gamma]_{F_{2D}}}{a_\gamma}$ se harán tan grandes como se quiera cuando $a_\gamma \rightarrow 0$, heurísticamente tendremos que

$$\frac{dH_\gamma}{da_\gamma} = \lim_{a_\gamma \rightarrow 0} \frac{H_\gamma}{a_\gamma} = \infty;$$

$$\frac{d[H_\gamma]_{F_{2D}}}{da_\gamma} = \lim_{a_\gamma \rightarrow 0} \frac{[H_\gamma]_{F_{2D}}}{a_\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -k(P) \\ k(P) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, al hacer traslados paralelos a lo largo de curvas γ_a que encierren un área pequeña, los vectores regresarán al plano tangente inicial en una posición que difiere mucho de la inicial, con respecto del tamaño de a_γ .

Otra manera de interpretar la matriz $\frac{d[H_\gamma]_{F_{2D}}}{da_\gamma}$ es como una densidad infinitesimal de desviación en el marco α_{2D} (visto desde F_{2D}) por unidad de área, es decir, que tan rápido se aleja el marco final del inicial con respecto al parámetro a_γ . En otras palabras si tomamos una pequeña curva γ que encierre un área Δa y al punto γ_0 , entonces al viajar a lo largo de ella un observador de F_{2D} verá que los campos paralelos giran, y después de que γ atraviesa por completo el marco, ellos quedarán en una posición que difiere de la original en una rotación que es aproximadamente igual a

$$H \approx \frac{dH}{da_\gamma} \Delta a = \begin{pmatrix} 0 & -k(\gamma_0) \\ k(\gamma_0) & 0 \end{pmatrix} \Delta a.$$

6.9. La 2-forma de curvatura para superficies (2-variedades)

El concepto que está detrás de las ideas de la sección anterior, es el de 2-forma de curvatura. Analicemos este concepto para superficies.

Identificamos⁸² una vecindad V_0 del cero de $T_P S$ con una vecindad V_P del punto P en S . Tomemos ahora un par de vectores ξ, η en $T_P S$ y parámetro auxiliar ε que se encargue de hacer pequeño el paralelogramo $\Pi(\xi, \eta)$ que generan ξ y η , de modo que, a partir de algún valor de ε el paralelogramo Π_ε^* generado por los vectores que $\varepsilon\xi$ y $\varepsilon\eta$ estará contenido en V_0 en $T_P S$. A través de la identificación de V_0 con V_P le corresponde a Π_ε^* un paralelogramo Π_ε en $V_P \subset S$. Pensemos ahora que somos observadores de un marco β que dé una vuelta entera⁸³ a lo largo del paralelogramo. Al recorrer el paralelogramo veremos que el marco paralelo α_{2D} rota respecto a nosotros de modo que a Π_ε le corresponde una transformación ortogonal

$$R_{\Pi_\varepsilon} : T_P S \rightarrow T_P S$$

que nos lleva las posiciones iniciales de los traslados paralelos de vectores a lo largo de Π_ε en las posiciones finales, después de que viajamos a lo largo de Π_ε . Tendremos también para cada Π_ε una transformación de holonomía

$$H_{\Pi_\varepsilon} : T_P S \rightarrow T_P S;$$

$$H_{\Pi_\varepsilon} = Id - R_{\Pi_\varepsilon}$$

Obtenemos así una curva de transformaciones H_{Π_ε} . Conforme ε se hace pequeño la curva de transformaciones H_{Π_ε} tenderá a la identidad. En la sección anterior hablábamos de la velocidad de la curva H_γ al llegar a la identidad, ahora, definimos el valor de la forma de curvatura evaluada en ξ, η como la velocidad de la curva H_{Π_ε} al partir de la identidad, a través de la expresión

$$\Omega(\xi, \eta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_{\Pi_\varepsilon} - Id}{\varepsilon^2} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H_{\Pi_\varepsilon}}{\varepsilon^2} = - \frac{dH_{\Pi_\varepsilon}}{d\varepsilon^2}$$

Veamos a continuación que

$$[\Omega(\xi, \eta)]_\beta$$

⁸²Podemos usar algún sistema local de coordenadas, por ejemplo la transformación exponencial.

⁸³Una curva cerrada que no sea homotópica a un punto en el conjunto de marcos. Con esto aseguramos que el marco da una vuelta entera mientras recorremos el paralelogramo.

es una matriz antisimétrica. Sabemos (sección 4.16) que

$$\varphi(\Pi_\varepsilon) = A(\mathbf{N}(\Pi_\varepsilon))$$

el ángulo $\varphi(\Pi_\varepsilon)$ de la rotación H_{Π_ε} es igual al área $A(\mathbf{N}(\Pi_\varepsilon))$ de la región $\mathbf{N}(\Pi_\varepsilon)$ que encierra la imagen bajo la aplicación de Gauss de la región que encierra Π_ε . De lo anterior tenemos que

$$[\Omega(\xi, \eta)]_\beta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} [R_{\Pi_\varepsilon} - Id]_\beta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\begin{pmatrix} \cos(A(\mathbf{N}(\Pi_\varepsilon))) & \text{sen}(A(\mathbf{N}(\Pi_\varepsilon))) \\ -\text{sen}(A(\mathbf{N}(\Pi_\varepsilon))) & \cos(A(\mathbf{N}(\Pi_\varepsilon))) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(\Pi_{(\xi, \eta)})}{\varepsilon^2 A(\Pi_{(\xi, \eta)})} \begin{pmatrix} \cos(A(\mathbf{N}(\Pi_\varepsilon))) - 1 & \text{sen}(A(\mathbf{N}(\Pi_\varepsilon))) \\ -\text{sen}(A(\mathbf{N}(\Pi_\varepsilon))) & \cos(A(\mathbf{N}(\Pi_\varepsilon))) - 1 \end{pmatrix} = A(\Pi_{(\xi, \eta)}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{\cos(A(\mathbf{N}(\Pi_\varepsilon))) - 1}{A(\Pi_\varepsilon)} & \frac{\text{sen}(A(\mathbf{N}(\Pi_\varepsilon)))}{A(\Pi_\varepsilon)} \\ -\frac{\text{sen}(A(\mathbf{N}(\Pi_\varepsilon)))}{A(\Pi_\varepsilon)} & \frac{\cos(A(\mathbf{N}(\Pi_\varepsilon))) - 1}{A(\Pi_\varepsilon)} \end{pmatrix}$$

Por otro lado sabemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(\mathbf{N}(\Pi_\varepsilon))}{A(\Pi_\varepsilon)} = k(P)$$

lo cual implica que

$$[\Omega(\xi, \eta)]_\beta = A(\Pi_{(\xi, \eta)}) \begin{pmatrix} 0 & k(P) \\ -k(P) & 0 \end{pmatrix}$$

donde $A(\Pi_{(\xi, \eta)})$ es la 2-forma de área en $T_P S$ (es decir, a cada pareja de vectores (ξ, η) la forma les asocia el área del paralelogramo que generan). Si hubieramos escogido otro marco desde el cual observar nos hubiera dado la misma matriz, siempre que el marco dé una vuelta completa. Hemos llegado entonces a la igualdad que nos define la 2-forma de curvatura Ω

$$\Omega(\xi, \eta) = k(P) A(\Pi(\xi, \eta)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donde Ω es una 2-forma con valores en el espacio vectorial de las matrices antisimétricas en $T_P S$ que, como ya mencionamos, se pueden interpretar como las velocidades en $\varepsilon = 0$ de las curvas de transformaciones de holonomía (asociadas a los paralelogramos Π_ε) con parámetro ε^2 .

6.10. El paso a más dimensiones

Ahora tomemos una curva γ en una variedad M^n encajada en \mathbb{R}^{n+1} . Supondremos que sus primeras n derivadas $\gamma^{(n)}$ son linealmente independientes, así podemos enderezarlas y formar su marco de Frenet-Serret (ver sección 5.3). Las derivadas $\gamma^{(n)}$ dejan de alguna manera rastro en el espacio tangente $T_\gamma M^n$ a nuestra variedad y a partir de él construiremos un marco de Frenet intrínseco en $T_\gamma M^n$. Cambiemos las derivadas de la curva $\gamma^{(n)}$ por las derivadas covariantes $\frac{D\gamma^{(n)}}{ds}$, es decir las proyecciones de $\gamma^{(n)}$ al espacio tangente $T_\gamma M^n$. Supondremos que las derivadas covariantes son linealmente independientes, es decir, γ es una curva en posición general, lo que significa que γ se tuerce dentro de la variedad de tal manera que posee marco de Frenet intrínseco en cada momento; así descartamos curvas en M^n como las geodésicas, que al igual que las rectas en \mathbb{R}^n , que no tienen definido un marco de Frenet intrínseco. Nos fijamos en los subespacios de $T_\gamma M^n$ que van generando las sucesivas derivadas covariantes $\frac{D\gamma^{(n-1)}}{ds}$ y vamos enderezándolas para formar un marco ortonormal de $T_\gamma M^n$. Obtenemos así un marco de $T_\gamma M^n$ formado por n vectores ortonormales que sería el marco de Frenet $F = F_{nD}$ intrínseco

$$F = \left\{ \mathbf{t}_1 = \widehat{\mathbf{t}}_1, \widehat{\mathbf{t}}_2, \dots, \widehat{\mathbf{t}}_n \right\}$$

para un ser nD habitante de M . Si completamos el marco F con el vector normal a la variedad obtenemos el marco de Darboux

$$D = \left\{ \mathbf{t}_1 = \widehat{\mathbf{t}}_1, \widehat{\mathbf{t}}_2, \dots, \widehat{\mathbf{t}}_n, \mathbf{N} \right\}$$

de $T_\gamma \mathbb{R}^{n+1}$. Consideremos ahora que somos observadores de marco $\alpha = \{e_{1\gamma}, e_{2\gamma}, \dots, e_{n+1\gamma}\}$. Al recorrer la curva γ con rapidez unitaria veremos que el marco D se mueve y podemos obtener su velocidad⁸⁴ proyectando a lo largo de γ las velocidades $\frac{d\widehat{\mathbf{t}}_1}{ds}, \frac{d\widehat{\mathbf{t}}_2}{ds}, \dots, \frac{d\widehat{\mathbf{t}}_n}{ds}, \frac{d\mathbf{N}}{ds}$, en cada uno de los vectores del marco de Darboux. Llegamos así a una matriz antisimétrica conformada por n^2 1-formas diferenciales ω_{ij} , llamada la 1-forma de la conexión.

$$\omega = [J]_\alpha^D \left(\left[\frac{d\widehat{\mathbf{t}}_1}{ds} \right]_\alpha \quad \dots \quad \left[\frac{d\widehat{\mathbf{t}}_n}{ds} \right]_\alpha \quad \left[\frac{d\mathbf{N}}{ds} \right]_\alpha \right) = \left(\left[\frac{d\widehat{\mathbf{t}}_1}{ds} \right]_D \quad \dots \quad \left[\frac{d\widehat{\mathbf{t}}_n}{ds} \right]_D \quad \left[\frac{d\mathbf{N}}{ds} \right]_D \right)$$

⁸⁴Estamos obteniendo la 1-forma de la conexión evaluada en la curva $(\gamma', \left(\frac{d[J]_\alpha^D}{ds}\right)_D)$ del haz tangente al haz $\mathbb{R}^{n+1} \times SO_{n+1}$.

$$= \begin{pmatrix} \omega_{11} & \cdots & \omega_{1n} & \omega_{1(n+1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \omega_{n1} & \cdots & \omega_{nn} & \omega_{n(n+1)} \\ \omega_{(n+1)1} & \cdots & \omega_{(n+1)n} & \omega_{(n+1)(n+1)} \end{pmatrix} \in A_n(\mathbb{R})$$

Esta matriz contiene la información de la velocidad del movimiento del marco D respecto del marco α . De la velocidad de cada vector del marco $\frac{d\hat{\mathbf{t}}_i}{ds}$ un ser nD que viva en $T_\gamma M^n$ sólo siente las componentes en su mundo, no siente la componente $\omega_{(n+1)i}\mathbf{N}$, es decir, para él la velocidad se debe sólo a las componentes $\hat{\mathbf{t}}_i \in T_\gamma M^n$ de $\frac{d\hat{\mathbf{t}}_i}{ds}$ y viene dada por

$$\pi_{T_\gamma M^n} \left(\frac{d\hat{\mathbf{t}}_i}{ds} \right) = \frac{D\hat{\mathbf{t}}_i}{ds} = \nabla_{\hat{\mathbf{t}}_1} \hat{\mathbf{t}}_i = \omega_{1i}\hat{\mathbf{t}}_1 + \omega_{2i}\hat{\mathbf{t}}_2 \dots + \omega_{ni}\hat{\mathbf{t}}_n$$

que es la derivada covariante en $T_\gamma M^n$ de cada $\hat{\mathbf{t}}_i$. En otras palabras, tomamos sólo las componentes de $\frac{d\hat{\mathbf{t}}_i}{ds}$ en los vectores $\hat{\mathbf{t}}_1, \hat{\mathbf{t}}_2, \dots, \hat{\mathbf{t}}_n$ que pertenecen al mundo del ser nD para formar una matriz

$$\omega_{\mathbb{R}^{n+1}} = [I]_\delta^F \frac{d[I]_F^\delta}{ds} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \cdots & \omega_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{n1} & \cdots & \omega_{nn} \end{pmatrix} \in A_n(\mathbb{R})$$

antisimétrica que representa la velocidad con la que se mueve el marco F respecto a lo que será el marco paralelo δ al espacio tangente $T_\gamma M^n$ a la variedad, en términos de los vectores $\{\hat{\mathbf{t}}_1, \hat{\mathbf{t}}_2, \dots, \hat{\mathbf{t}}_n\}$ del marco F . Podemos interpretar a $\omega_{\mathbb{R}^{n+1}}$ como la 1-forma de la conexión (evaluada en la curva que determinan γ y el marco F) que es inducida en la variedad $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ por la 1-forma de la conexión del haz $\mathbb{R}^{n+1} \times SO_{n+1}$.

Si vemos las cosas desde el marco F de $T_\gamma M^n$ tendremos que el marco paralelo δ se mueve respecto a nosotros. Como en secciones anteriores, podemos describir las coordenadas de los campos paralelos a lo largo de γ a través de un sistema de ecuaciones diferenciales. Las relaciones entre las coordenadas en los marcos F y δ estarán dadas por:

$$[v]_F = [I]_\delta^F [v]_\alpha \tag{6.51}$$

$$[v]_\alpha = [I]_F^\delta [v]_F \tag{6.52}$$

por otro lado derivando (6.51) y sustituyendo (6.52) obtenemos

$$\frac{d[v]_F}{ds} = \frac{d[I]_\delta^F}{ds} [I]_F^\delta(s) [v]_F. \tag{6.53}$$

finalmente derivando la igualdad $[I]_\delta^F [I]_F^\delta = Id$ obtenemos

$$\frac{d[I]_\delta^F}{ds} [I]_F^\delta(s) + [I]_\delta^F \frac{d[I]_F^\delta}{ds} = 0; \tag{6.54}$$

sustituyendo (6.54) en (6.53) llegamos al sistema

$$\frac{d[v]_F}{ds} = -[I]_\delta^F \frac{d[I]_F^\delta}{ds} [v]_F = -\omega_{\mathbb{R}^{n+1}}(s) [v]_F.$$

Tomando en cuenta que $[v]_F = x \in \mathbb{R}^n$, tenemos que, al transcurrir el tiempo, la posición de cada campo paralelo v a lo largo de γ , vista en desde el marco F está determinada por una solución al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en \mathbb{R}^n :

$$\frac{dx}{ds} = -\omega_{\mathbb{R}^{n+1}}(s) x$$

7. Interpretación general del tensor de curvatura

El tensor de curvatura asocia a un par de vectores X y Y en $T_P M$ un operador antisimétrico

$$R(X, Y) : T_P S \rightarrow T_P S$$

que representa un campo vectorial⁸⁵ $T_P S$ que es la velocidad de una curva de rotaciones en $t = 0$. Encontraremos una fórmula para la evaluación de $R(X, Y)$ en un vector Z del espacio tangente $T_P S$. Empecemos por introducir las ideas que intervienen en la fórmula.

7.1. Interpretación de la derivada covariante

Interpretemos la derivada covariante $\nabla_X Z$ de un campo Z en la dirección del campo X . De manera intuitiva lo que una conexión hace es determinar cuáles serán los sistemas de referencia respecto a los cuales realizaremos nuestras mediciones. Tomemos una curva γ en una superficie contenida en \mathbb{R}^3 imaginemos que somos habitantes del plano tangente a un punto que se moverá a lo largo de γ . Supongamos que en el punto inicial marcamos los ejes de nuestro sistema de referencia paralelo $\delta_0 = \{\delta_{1_0}, \delta_{2_0}\}$, respecto al cual mediremos. Ahora veamos, como seres 3D (en \mathbb{R}^3), cómo el punto comienza a moverse a lo largo γ y con él el marco δ del plano tangente. ¿Cómo veremos que se mueven los vectores que marcó el ser 2D? Es la conexión quien nos ayuda a responder esta pregunta, pues determina cuáles serán los vectores que iremos tomando, como paralelos a δ_{1_0} y δ_{2_0} , en cada plano tangente a lo largo de γ . Es decir, la conexión nos va proporcionando nuestros marcos de referencia paralelos $\delta_s = \{\delta_{1_s}, \delta_{2_s}\}$ en cada plano tangente $T_{\gamma(s)} S$ a lo largo de la curva. Con respecto a ellos mediremos. Ahora imaginemos un campo tangente $Z_\gamma \in T_\gamma S$ a lo largo de γ . ¿Cómo lo verá el ser 2D que viaja a lo largo de γ en el sistema de referencia paralelo? Supongamos que se encuentra parado en el punto que se mueve a lo largo de la curva γ , es decir, en el cero de cada plano tangente. Lo que verá será la curva que describe el vector Z , el vector velocidad de dicha curva, en cada instante, será la derivada covariante

$$\nabla_X Z$$

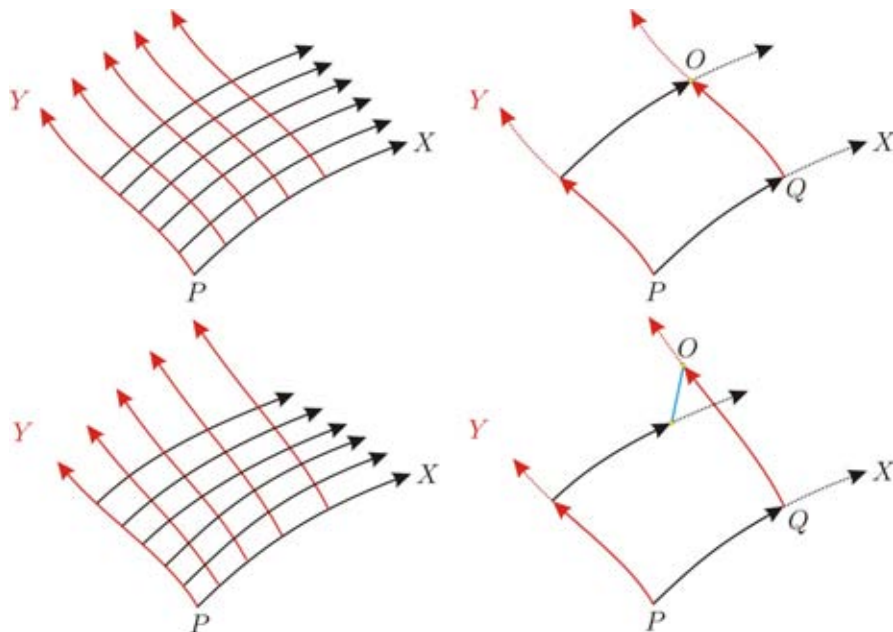
del campo Z respecto al campo de velocidades $X = \gamma'$ a lo largo de la curva. Entonces, en general, para calcular $\nabla_X Z$ en un punto P hay que tomar una curva que pase por el punto P con una velocidad X , evaluar el campo Z a lo largo de la curva y después medir la velocidad al pasar por P , con que se mueve con respecto al sistema paralelo a lo largo de la curva determinado por la conexión. Esta idea se puede extender a variedades de más dimensiones, la diferencia es que la manecilla se moverá en espacios de dimensiones mayores.

Conclusión 1 *La derivada covariante del campo Z en la dirección determinada por las soluciones del campo X es un tercer campo $\nabla_X Z$ conformado por las velocidades que va midiendo un observador que viaja a lo largo de las soluciones del campo X en el sistema de referencia paralelo $\delta_s = \{\delta_{1_s}, \delta_{2_s}\}$ determinado por la conexión.*

7.2. Flujos que conmutan y que no conmutan

Tomemos un par de campos X y Y alrededor de un punto P en una superficie. Estos campos determinan un par de flujos. Podemos imaginarlos como dos ríos bidimensionales (ver la siguiente figura); supongamos que estamos parados en un punto P y que fluye sólo el río X , dejemos que nos arrastre su corriente un tiempo ε , llegaremos a un punto Q ; ahora supongamos que fluye el río Y y nos dejamos arrastrar por su corriente un tiempo ε para llegar a un punto O . ¿Llegaremos al mismo punto si nos dejamos llevar primero por el río Y y luego por el río X ? A veces sí y a veces no, depende de cómo sean los ríos; es decir de cómo sean los campos y los flujos que determinan. En la figura mostramos dos pares de campos, en el de arriba sí llegamos al mismo punto y en el de abajo no.

⁸⁵Que podemos ver como un vector tangente en el álgebra de Lie del haz de marcos ortogonales a la variedad M .



Veamos las ideas anteriores con un enfoque equivalente. Supongamos que estamos viendo una película del flujo que determina un campo X y que está en pausa en un instante $t = 0$; ahora imaginemos que le ponemos play a la película y la volvemos a pausar después de un tiempo t . Vemos a cada punto de la variedad moverse de su posición inicial a la final, es decir, el fluir un tiempo t induce una transformación⁸⁶ sobre la variedad:

$$\phi^t : M \rightarrow M$$

Denotemos por ϕ^t y ψ^t los difeomorfismos asociados a los flujos de X y Y , en el instante t , respectivamente. Supongamos que en $t = 0$ estamos parados en el punto P (ver la siguiente figura). Viajemos a lo largo de la línea de flujo de X que pasa por el punto P durante un tiempo t para llegar a

$$Q(t) = \phi^t(P);$$

luego viajemos un tiempo t a lo largo de la línea de flujo de Y que pasa por el punto Q para llegar a

$$O(t) = \psi^t(Q) = \psi^t \circ \phi^t(P);$$

luego viajemos un tiempo $-t$ a lo largo de la línea de flujo de X que pasa por O para llegar

$$S(t) = \phi^{-t}(O) = \phi^{-t} \circ \psi^t \circ \phi^t(P);$$

finalmente viajemos un tiempo $-t$ a lo largo de la línea de flujo de Y que pasa por S para llegar a

$$L(t) = L_P(t) = \psi^{-t}(S) = \psi^{-t} \circ \phi^{-t} \circ \psi^t \circ \phi^t(P). \quad (7.1)$$

Diremos, para abreviar, que fuimos un tiempo t a lo largo de la pareja de flujos (X, Y) . Después de hacerlo ¿Regresamos al punto P ? Es decir, ¿ $L = P$? La respuesta de nuevo es que, en general, no regresamos al punto P , es decir, $L \neq P$.

Definición 2 Los flujos que determinan los campos X y Y **conmutan** en una región cuando al fluir un tiempo t

$$L_P(t) = \psi^{-t} \circ \phi^{-t} \circ \psi^t \circ \phi^t(P)$$

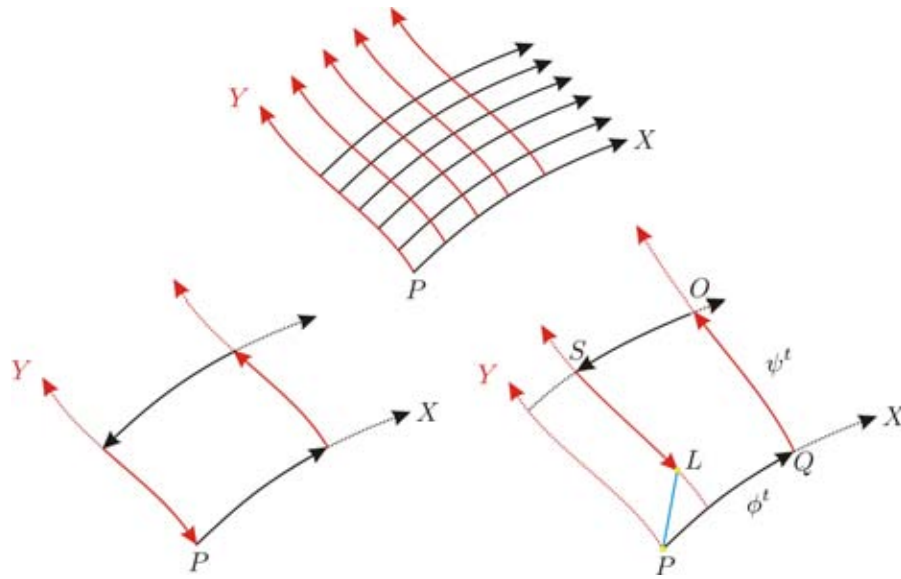
(con t en alguna vecindad del cero) a lo largo de la pareja de flujos (X, Y) , partiendo de un punto P arbitrario en la región, regresamos al punto P , es decir, cuando

$$L_P(t) = P$$

y **no conmutan** cuando existe algún P en la región para el que

$$L_P(t) \neq P.$$

⁸⁶El conjunto de todas las transformaciones $\{\phi^t : t \in \mathbb{R}\}$ forma un grupo de difeomorfismos a un parámetro.

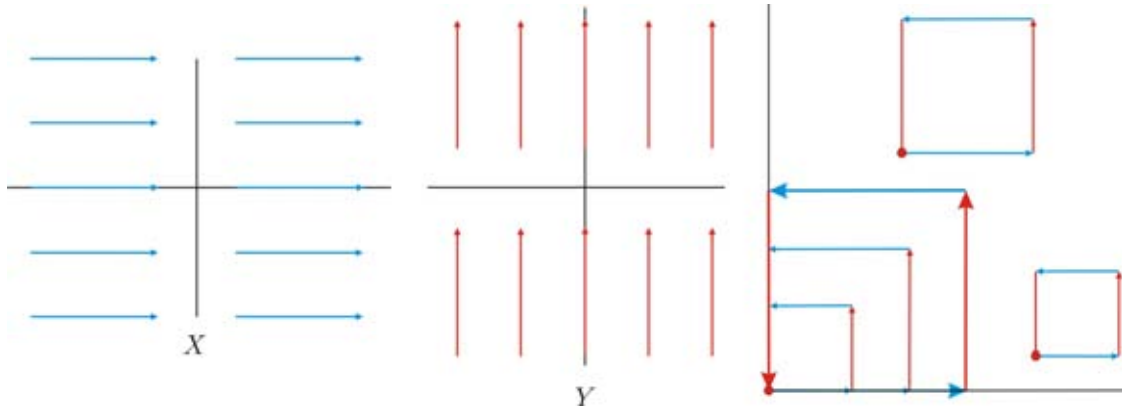


Regresar o no al punto de partida P después de fluir un tiempo t depende de cómo sean los campos X y Y como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3 *Dos flujos que conmutan*

En \mathbb{R}^2 los campos $X = (1, 0)$ y $Y = (0, 1)$ conmutan ya que en cualquier punto $P \in \mathbb{R}^2$

$$L_P(t) = \psi^{-t} \circ \phi^{-t} \circ \psi^t \circ \phi^t (P) = P.$$



Ejemplo 4 *Dos flujos que no conmutan*

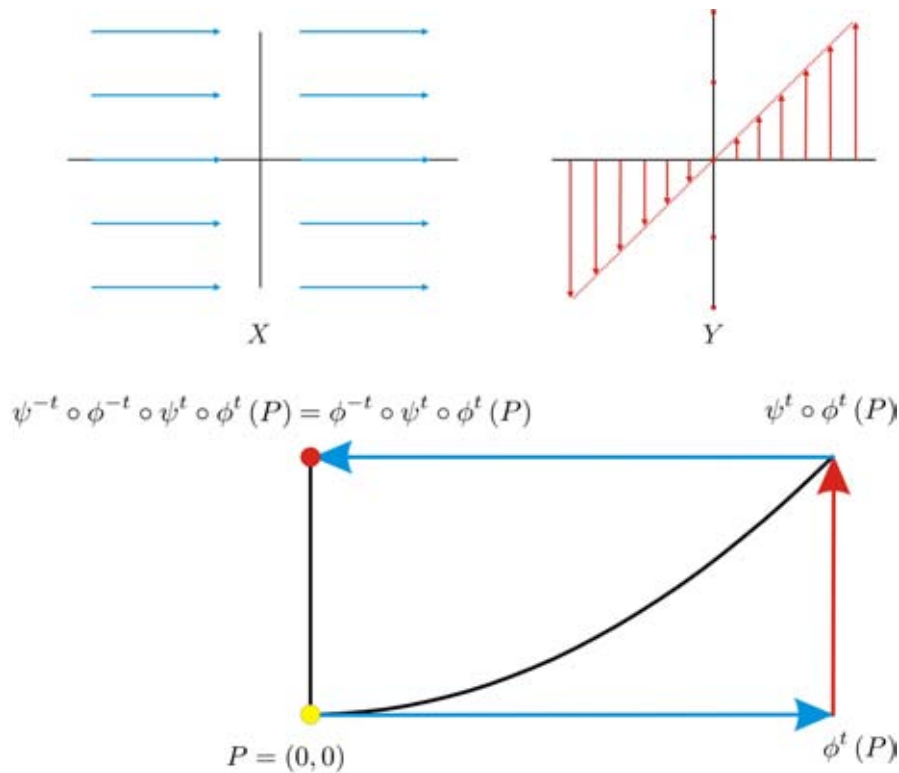
Por otro lado los campos

$$X = (1, 0)$$

$$Y = (0, x)$$

no conmutan en el origen: si tomamos $P = (0, 0)$ tenemos que

$$L_P(t) = \psi^{-t} \circ \phi^{-t} \circ \psi^t \circ \phi^t (0, 0) \neq (0, 0)$$



¿Qué diferencia hay entre los dos pares de campos anteriores? El campo X es el mismo en ambos ejemplos por lo que la diferencia está en el campo Y ; en el primer ejemplo al movernos en la dirección del campo X el campo Y permanece constante y en el segundo el campo Y va variando su tamaño. Es debido a ello que no regresamos al origen ya que la velocidad del flujo Y en el punto $\phi^t(0,0)$ es distinta de cero por lo que ψ^t nos hace avanzar hacia arriba; en cambio la velocidad del flujo en el punto $\phi^{-t} \circ \psi^t \circ \phi^t(0,0)$ es cero por lo que ψ^{-t} ya no nos hace avanzar y por ello no volvemos al origen.

Para saber cuándo dos flujos conmutan necesitamos saber cómo varía un flujo en la dirección del otro, es decir, necesitamos derivar de alguna manera cada flujo en la dirección del otro. Abordaremos a continuación la discusión de dos formas de derivar estos flujos para después conectarlas con la cuestión de cuándo dos flujos conmutan.

7.3. Derivada de Lie y su expresión en términos de la derivada covariante.

Hay dos formas de ver cómo varía un flujo en la dirección del otro; una es usando la derivada covariante de uno de los campos en la dirección del otro; y la otra es con la derivada de Lie⁸⁷, en la que el flujo arrastra los objetos que vamos a derivar o equivalentemente arrastra el sistema de referencia \mathfrak{F} desde el cual observamos los objetos a derivar. Podemos interpretar a la derivada de Lie de manera semejante a la derivada covariante, pero en este caso uno de los flujos será quien determine el comportamiento del marco de referencia del observador que medirá la variación del otro campo. En el caso de la derivada covariante, cuando vemos el marco de referencia paralelo α del espacio tangente, desde un mundo externo de más dimensiones, solamente notamos que va rotando⁸⁸. El sistema de referencia \mathfrak{F} que es arrastrado por el flujo está sujeto a transformaciones más generales. En otras palabras, supongamos que en $t = 0$ los ejes de ambos sistemas de referencia del espacio tangente coinciden; con el paso del tiempo los vectores del marco paralelo α sólo rotarán y los vectores del marco del flujo \mathfrak{F} podrán cambiar incluso su tamaño y el ángulo entre ellos. Si nos imaginamos como observadores en cada uno de estos marcos de referencia veremos cómo cambian los ejes del otro marco. Para cada instante de tiempo una transformación lineal nos llevará los ejes de un marco en los del otro, es decir, sus coordenadas están conectadas a través de una curva de matrices.

Precisemos cómo el marco \mathfrak{F} es determinado por el flujo de un campo. Tomemos en $t = 0$ un marco \mathfrak{F}_0 del espacio tangente de algún punto P . Dejemos fluir el campo X y analicemos el movimiento de la solución ϕ_P^t que en $t = 0$ pasa por el punto P . Para cada instante de tiempo t existe un difeomorfismo que lleva una vecindad del punto P en una vecindad del punto ϕ_P^t . Los vectores del marco \mathfrak{F}_t estarán determinados por la aplicación de la diferencial $d\phi_P^t$ a los vectores del marco \mathfrak{F}_0 . Un observador en el marco paralelo α a lo largo de la solución ϕ_P^t verá cómo cambia el marco el \mathfrak{F}_t a través del movimiento de los vectores que lo conforman, es decir, verá n curvas que se mueven de acuerdo a la curva de matrices que conecta los marcos α_t y \mathfrak{F}_t .

Conclusión 5 *La derivada de Lie $L_X Y$ de un campo Y en la dirección del campo X se puede interpretar como una medida de la variación del campo Y visto desde el marco de referencia \mathfrak{F} (determinado por el flujo del campo X) que se mueve a lo largo de una línea del flujo X . Al medir la variación en cada punto obtenemos otro campo vectorial $L_X Y$.*

⁸⁷Lie, Marius Sophus (1842-1899), matemático noruego.

⁸⁸Estamos suponiendo aquí que la conexión es compatible con la métrica, sin embargo hay conexiones más generales en las cuales los ángulos y longitudes determinados por los vectores del marco pueden ir cambiando.

A continuación motivaremos con un ejemplo que la derivada de Lie puede ser expresada en términos de derivadas covariantes a través de la siguiente igualdad

$$L_X Y(P) = (\nabla_X Y - \nabla_Y X)(P).$$

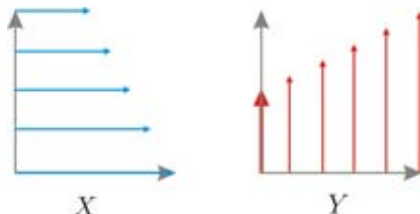
Ejemplo 6 *Derivada de Lie y covariante de un par de campos*

Tomemos los campos

$$X = \left(-\frac{y}{2} + 1, 0\right)$$

$$Y = \left(0, \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

en azul y en rojo respectivamente.



En la siguiente figura vemos (como observadores 3D) cómo se mueven los vectores $e_1^t, e_2^t, f_1^t, f_2^t$ que conforman los marcos de referencia paralelos⁸⁹ (figuras (1) y (2))

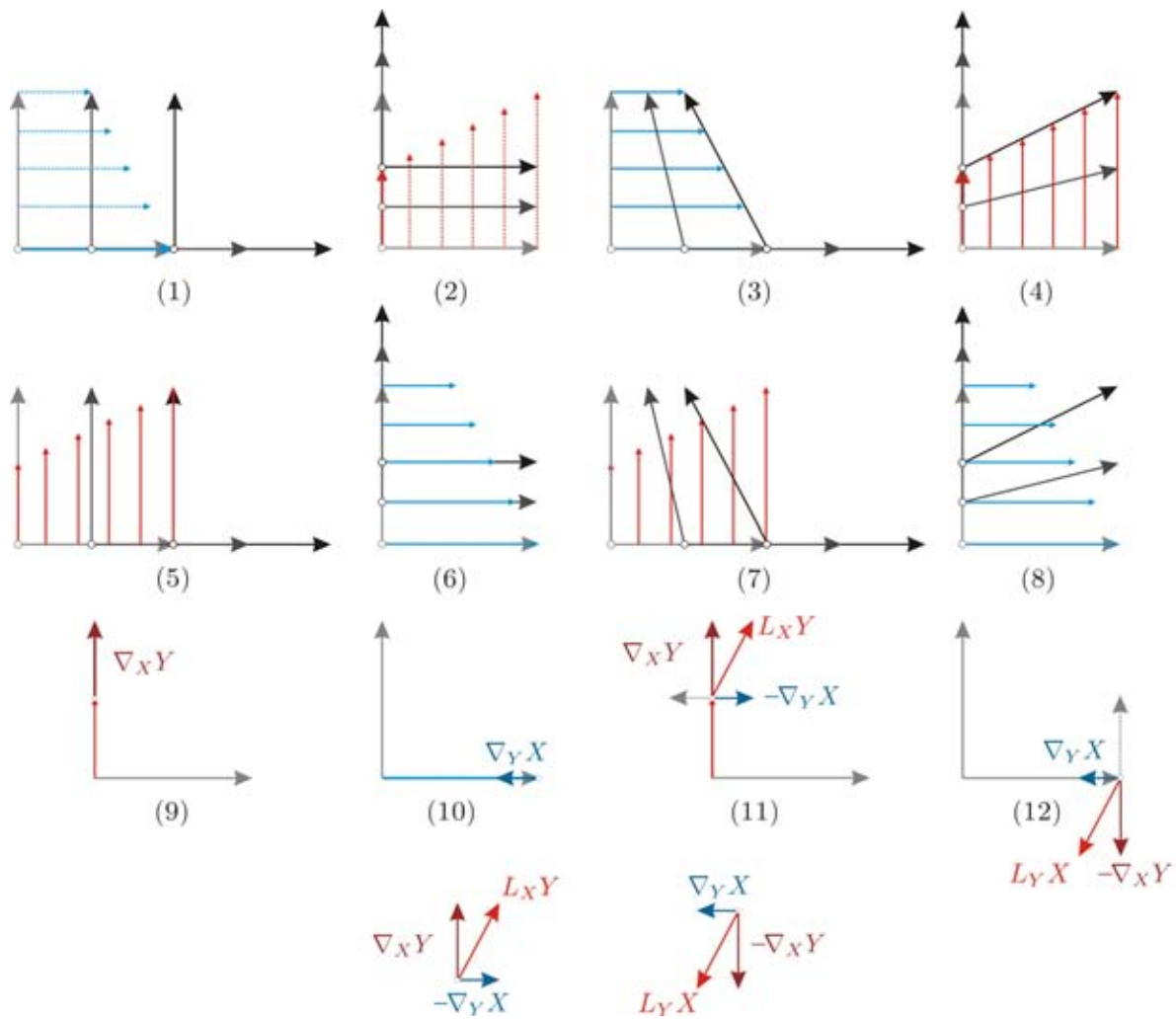
$$\alpha_t = \{e_1^t, e_2^t\}$$

y del flujo (figuras (3) y (4))

$$\mathfrak{F}_t = \{f_1^t, f_2^t\}.$$

Mostramos en las figuras (1) a (4) los vectores que conforman los marcos de referencia α_t y F_t , en tres instantes de tiempo: $t = 0, \frac{1}{2}, 1$, en colores gris claro, oscuro y negro respectivamente. En (1) vemos que los vectores e_1^t y e_2^t que conforman el marco α_t están determinados por el traslado paralelo de los vectores e_1 y e_2 a lo largo de la solución del campo X que pasa por el origen. En (2) los vectores e_1^t y e_2^t son el traslado paralelo de e_1 y e_2 a lo largo de la solución del campo Y que pasa por el origen. En (3) los vectores f_1^t y f_2^t que conforman el marco F_t son arrastrados por el flujo X y se van abriendo debido a la diferencia en las velocidades de X . En (4) los vectores f_1^t y f_2^t son arrastrados por Y y se van cerrando.

⁸⁹Determinado por la conexión usual en \mathbb{R}^2 .



En las figuras (5) a (8) tenemos el campo que vamos a derivar visto desde el marco de referencia correspondiente. En (5) vemos desde el marco α_t descrito en (1) que el campo Y se mueve con una velocidad $\nabla_X Y$ (vector rojo oscuro en (9)). En (6) vemos desde el marco α_t descrito en (2) que el campo X se mueve con una velocidad $\nabla_Y X$ (vector azul oscuro en (10)). En (7) vemos desde el marco F_t descrito en (3) que Y se mueve con una velocidad $L_X Y$ (vector rojo en (11)). Esto es así ya que, debido a la diferencia en las velocidades del flujo X , el vector f_2^0 del marco F_0 va girando hacia la izquierda y en el punto $Y(0,0)$ tiene una velocidad $\nabla_Y X$ (vector gris punteado), en consecuencia el observador del marco F_0 verá que el campo Y se mueve horizontalmente con una velocidad $-\nabla_Y X$, y por otro lado, verticalmente ve lo mismo que el observador de (5), es decir, ve que se aleja con una velocidad $\nabla_X Y$. De lo anterior tenemos que la velocidad $L_X Y$ con que se mueve el campo Y respecto al observador en el marco F_t (en $t=0$) arrastrado por X se puede expresar así:

$$L_X Y = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

Análogamente en (8) vemos desde el marco F_t arrastrado por Y que el campo X se mueve con una velocidad $L_Y X$ (vector rojo en (12)) que puede ser expresada así:

$$L_Y X = \nabla_Y X - \nabla_X Y.$$

Las igualdades anteriores son válidas no sólo para la pareja de campos que usamos en el ejemplo sino para cualquier pareja de campos (X, Y) y para cualquier punto. Cada pareja de campos tiene un par de campos $L_X Y$ y $L_Y X$ asociados. ¿Qué tienen que ver estos campos con el hecho de que conmuten o no los campos X y Y ? ¿Qué relación hay entre la derivada de Lie y el hecho de que la curva $L_P(t) = \psi^{-t} \circ \phi^{-t} \circ \psi^t \circ \phi^t(P)$ cierre o no? Para contestar estas preguntas revisemos de nuevo el ejemplo de los campos $X = (1, 0)$ y $Y = (0, x)$ en \mathbb{R}^2 .

7.4. La no conmutatividad de dos flujos en un punto como una aceleración

Veremos en este ejemplo y luego probaremos en general que la derivada de Lie

$$L_X Y(P) = \nabla_X Y(P) - \nabla_Y X(P)$$

resulta ser el vector aceleración de la curva $L(t)$. Usaremos esta relación más adelante para interpretar la fórmula del tensor de curvatura. Vimos ya en el ejemplo 4 que si partimos del origen $P = (0, 0)$ y viajamos un tiempo $t \neq 0$ a lo largo de las soluciones de los campos $X = (1, 0)$ y $Y = (0, x)$; no regresamos al origen. Es decir

$$L_P(t) = \psi^{-t} \circ \phi^{-t} \circ \psi^t \circ \phi^t(P) \neq (P);$$

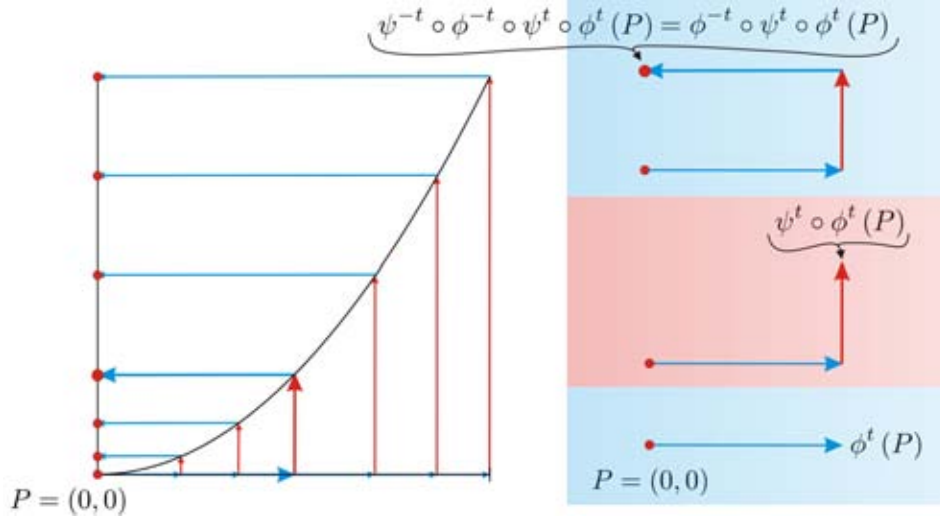
entonces podemos asociar a cada tiempo t el punto donde quedamos después del viaje para formar la curva

$$L_P(t) = \psi^{-t} \circ \phi^{-t} \circ \psi^t \circ \phi^t(P).$$

Veamos quién es esta curva. Si partimos del origen y viajamos t a lo largo del campo X tendremos que

$$\phi^t(P) = (t, 0),$$

luego de ahí viajamos de nuevo t a lo largo del campo Y (ver la siguiente figura).



Como la velocidad del campo Y a lo largo de la línea vertical (t, y) es constante $Y(t, y) = (0, t)$, tenemos que

$$\psi^t \circ \phi^t(P) = \psi^t(t, 0) = (t, t^2);$$

luego seguimos un tiempo $-t$ el flujo X para obtener

$$\phi^{-t} \circ \psi^t \circ \phi^t(P) = \phi^{-t}(t, t^2) = (0, t^2);$$

y finalmente viajamos $-t$ a lo largo de Y . Como Y no se mueve a lo largo del eje y obtenemos que

$$L_P(t) = \psi^{-t} \circ \phi^{-t} \circ \psi^t \circ \phi^t(P) = \psi^{-t}(0, t^2) = (0, t^2).$$

La curva $L_P(t)$ se mueve hacia arriba a lo largo del eje y , en $t = 0$ su velocidad es cero

$$L'_P(0) = (0, 0);$$

y su aceleración es

$$L''_P(0) = (0, 2).$$

Por otro lado, la derivada de Lie del campo Y respecto a X en el origen es

$$L_X Y(P) = (0, 1)$$

(Las derivadas covariantes de un campo respecto del otro son

$$\nabla_X Y = (0, 1)$$

$$\nabla_Y X = (0, 0),$$

de modo que para este par de campos también se verifica la igualdad $L_X Y = \nabla_X Y - \nabla_Y X$. Vemos que la aceleración de la curva $L''_P(0)$ es el doble de la derivada de Lie

$$L''_P(0) = 2L_X Y(P) = 2[\nabla_X Y(P) - \nabla_Y X(P)].$$

Habíamos mencionado que la derivada de Lie contiene información de cuándo dos campos conmutan y en este ejemplo vemos que ella nos proporciona una medida de la aceleración de la curva $L_P(t)$, es decir, de que tan rápido aumenta la velocidad (en $t = 0$) con la que se separa el vértice final del cuadrilátero cuyos lados son

$$\begin{aligned} & \phi^\tau(P) \\ & \psi^\tau \circ \phi^\tau(P) \\ & \phi^{-\tau} \circ \psi^\tau \circ \phi^\tau(P) \\ L_P(t) &= \psi^{-\tau} \circ \phi^{-\tau} \circ \psi^\tau \circ \phi^\tau(P) \end{aligned}$$

donde $\tau \in [0, t]$.

En el ejemplo de los flujos que conmutan, $X = (1, 0)$ y $Y = (0, 1)$, la curva $L_P(t)$ es la constante cero, de modo que su aceleración es la constante cero, $L_P''(0) = 0$. Entonces si

$$L_P''(0) = 2L_X Y = 2(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \neq 0$$

el vértice final del cuadrilátero se alejará en la dirección de L_P'' en un movimiento análogo al de una caída libre: el vector L_P'' es análogo al vector de aceleración que actúa en un objeto en el momento en que lo dejamos caer. Ahora el vector L_P'' indica (al empezar a correr el tiempo, $t = 0$):

1. La dirección en la que el vértice final del cuadrilátero iniciará su separación respecto del punto P (vértice inicial)
2. La rapidez con que aumentará la velocidad (que en inicialmente es cero) con que se separan los vértices, es decir, la aceleración de la separación, que es el análogo al valor de la constante de la gravedad en el movimiento de caída libre.

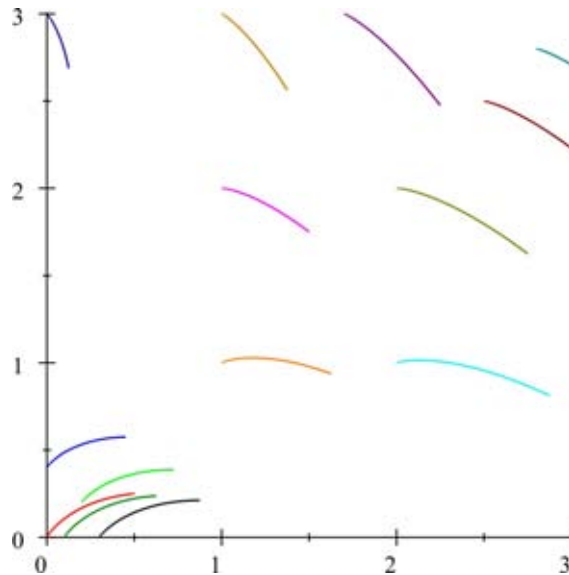
En cada punto P tenemos una curva

$$L_P(t) = \psi^{-t} \circ \phi^{-t} \circ \psi^t \circ \phi^t(P)$$

y su respectivo vector aceleración $L_P''(0)$, de modo que estos vectores forman un nuevo campo. Ilustramos la idea anterior en la siguiente figura donde mostramos varias curvas $L_P(t)$ para los campos

$$\begin{aligned} X &= \left(-\frac{y}{2} + 1, 0\right) \\ Y &= \left(0, \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

del ejemplo 6. El punto P es el extremo izquierdo de cada curva y su correspondiente vector aceleración L_P'' (no mostrado en la figura) es un vector tangente en dicho punto.



7.5. El corchete de Lie $[X, Y]$

Las ideas que acabamos de ver en algunos ejemplos son válidas en general, es decir, dados dos campos X, Y y un punto P , la curva $L_P(t)$ tiene velocidad cero y probaremos en el apéndice D que su aceleración satisface la relación

$$\frac{L_P''(0)}{2} = (\nabla_X Y - \nabla_Y X)(P) \tag{7.2}$$

Es común que se defina el corchete de Lie de la pareja de campos (X, Y) como el vector

$$[X, Y]_p = (\nabla_X Y - \nabla_Y X)(P).$$

Nosotros optaremos por el lado izquierdo de la igualdad 7.2 para definir el corchete de Lie:

Definición 7 El corchete de Lie de los campos X y Y en el punto P es la mitad de la aceleración

$$[X, Y]_p = \frac{L_P''(0)}{2}.$$

de la curva $L_P(t)$.

En el apéndice D daremos una prueba de que ambas definiciones son equivalentes.

El vector $[X, Y]_P$ es una medida de la conmutatividad de los campos X y Y cerca de cada punto P . Entonces tenemos un nuevo campo vectorial asociado a los campos X y Y determinado por $[X, Y]_P$ en cada punto P ; podemos pensarlo como un operador⁹⁰ que a cada pareja de campos (X, Y) le asigna el campo $[X, Y]$.

Ejemplo 8 En la siguiente figura tenemos los campos

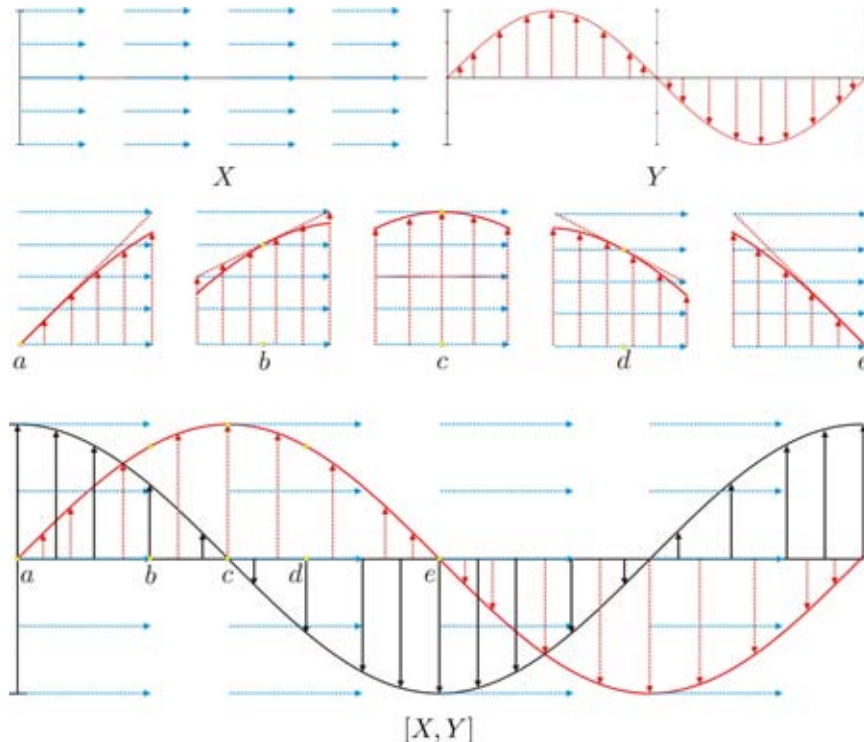
$$X = (1, 0)$$

$$Y = (0, \text{sen}x)$$

y su corchete de Lie $[X, Y]$ en azul, rojo y negro respectivamente. Debido a que X es constante, $\nabla_Y X$ es cero en todo el plano. Entonces el corchete de Lie en cada punto es igual a la derivada covariante del campo Y en la dirección de X :

$$[X, Y]_{P=(x,y)} = \nabla_X Y = (0, \cos x)$$

El tamaño de $[X, Y]_P$ depende de la variación del campo Y en la dirección del campo X es mayor, es decir, de la derivada de la función $\text{sen}x$. En las cinco figuras del centro ilustramos lo anterior; en el punto a el corchete es de tamaño máximo y apunta en la dirección del eje y y al movernos hacia el punto b el corchete se hace más pequeño hasta volverse cero en el punto $c = \frac{\pi}{2}$, al viajar de c a e el corchete crece de nuevo pero ahora en la dirección negativa del eje y .



⁹⁰Es una 2-forma definida en el grupo de difeomorfismos $\text{diff}(M)$ de una variedad tal que a cada pareja de campos (vectores tangentes en el álgebra de Lie \mathfrak{g}) le asigna otro campo (vector en \mathfrak{g}): el corchete de Lie

$$[X, Y] = 2d\omega$$

que al mismo tiempo es el doble derivada exterior de la 1-forma de la conexión en $\text{diff}(M)$.

En los puntos $P = (k\pi - \frac{\pi}{2}, y)$ el campo Y permanece localmente constante en la dirección del campo X de modo que su corchete se anula

$$[X, Y]_P = 0.$$

Esto no significa que la curva $L_P(t)$ sea constante, $L_P(t) = P$, ya que, a diferencia de lo que sucedía en el ejemplo 3 (de los campos $X = (1, 0)$ y $Y = (0, 1)$) donde el corchete se anulaba para todo punto P

$$[X, Y]_P = 0;$$

en este caso, hay puntos cercanos a los puntos $P = (k\pi - \frac{\pi}{2}, y)$ en los cuales el corchete de Lie no se anula.

En este ejemplo y en general, si desarrollamos la curva $L_P(t)$ en su serie de Taylor tendremos sólo términos de grado tres o más, es decir $L_P(t)$ tendrá en $t = 0$ velocidad y aceleración nulas

$$L'_P(0) = L''_P(0) = 0;$$

de modo que si la curva $L_P(t)$ se aleja del punto P lo hará con una rapidez menor o igual a la rapidez con que la curva $(0, t^3)$ se aleja del origen.

7.6. Interpretación de la fórmula $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$

En lo que sigue $M = M^n$ será una variedad de dimensión n en \mathbb{R}^{n+1} . A cada pareja de vectores $(X(P), Y(P))$ en el espacio tangente $T_P M$ a la variedad en P le corresponde una transformación lineal

$$R(X, Y) : T_P M \rightarrow T_P M; \quad (7.3)$$

que en el caso de una conexión compatible con la métrica será un vector velocidad en el haz de marcos (SO_n) , es decir, un vector en el álgebra de Lie del haz de marcos. En otras palabras, la matriz asociada a dicha transformación lineal será una matriz antisimétrica y representa la aceleración que inicia la desviación de un marco paralelo al ser trasladado paralelamente a lo largo de una curva de pentágonos (que pueden ser cuadriláteros si el corchete de Lie $[X, Y]$ de los campos se anula en una región que contenga a P) infinitesimales generados por los flujos (X, Y) . La transformación $R(X, Y)$ aplicada a un vector $Z \in T_P M$ en el espacio tangente tiene la forma

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (7.4)$$

A continuación veremos quién es la transformación $R(X, Y)$ y argumentaremos la fórmula anterior.

La pareja de campos (X, Y) determina en cada punto P de la variedad una curva de pentágonos

$$\Pi = \Pi(t) = \varphi^{-t} \circ \psi^{-t} \circ \phi^{-t} \circ \psi^t \circ \phi^t(P)$$

que inician y terminan en P ; donde la transformación φ^{-t} consiste en moverse un tiempo $-t$ a lo largo del campo de velocidades de la curva $L(t)$ (que definimos en la sección 7.4).

El marco $\delta_\Pi(t)$ de $T_P M$ que resulta de trasladar paralelamente un marco δ de $T_P M$ a lo largo del pentágono Π induce una transformación lineal de holonomía

$$H_t(X, Y) : T_P M \rightarrow T_P M;$$

que lleva los vectores de un marco en los del otro. En otras palabras $H_t(X, Y)$ es la transformación lineal en $T_P M$ asociada al mapeo de los marcos

$$\delta \rightarrow \delta_\Pi(t);$$

Si variamos t obtenemos una curva de transformaciones ortogonales de holonomía. Cuando $t \rightarrow 0$ la curva $\Pi(t)$, a lo largo de la cual hacemos los traslados paralelos, colapsa en el punto P y el movimiento del marco $\delta_\Pi(t)$ respecto del marco δ se vuelve nulo, es decir, cuando $t \rightarrow 0$ la curva de transformaciones de holonomía tiende a la identidad en $T_P M$

$$H_t(X, Y) \rightarrow Id.$$

La velocidad con que la curva $H_t(X, Y)$ llega a la identidad, en $t = 0$, es cero. Sin embargo su aceleración no es cero, es un vector tangente en el haz de marcos. La mitad de la aceleración es la transformación que buscamos (7.3):

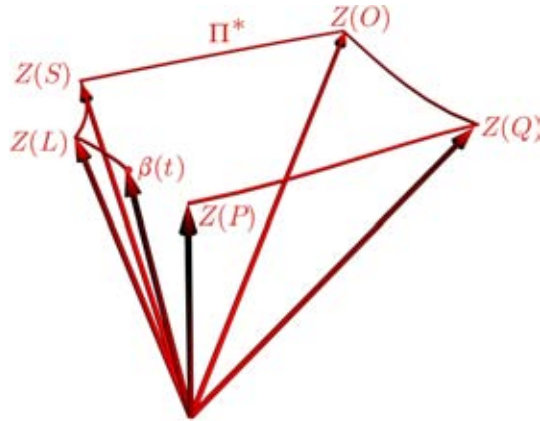
$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt^2} H_t(X, Y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{H_t(X, Y)}{t^2} = R(X, Y).$$

Si la conexión es compatible con la métrica y el marco tomado para hacer los traslados es ortonormal entonces, la matriz asociada a la transformación lineal $R(X, Y)$, expresada en términos de los vectores del marco δ , es una matriz antisimétrica (un vector velocidad del haz de marcos).

A continuación veremos la forma que toma la evaluación de $R(X, Y)$ en un vector $Z_P \in T_P M$, para así llegar a la fórmula (7.4). Tomemos un campo que en el punto P coincida con el vector Z_P

$$Z_P = Z(P).$$

Un observador del marco $\alpha = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ de \mathbb{R}^{n+1} ve que el campo Z a lo largo del pentágono Π regresa a su posición original después de darle una vuelta. Por otro lado, si los marcos δ_P y $\delta_{P\Pi}$ no coinciden (es decir si la transformación de holonomía es distinta de la identidad) para un instante de tiempo t fijo, un observador en el marco paralelo a lo largo del pentágono deberá de observar, que el vector del campo Z se mueve describiendo otro pentágono $\Pi^*(t)$, de tal forma que después de que completamos una vuelta al pentágono Π (o equivalentemente podríamos decir: después de que el pentágono Π atraviesa por completo al marco paralelo), la posición final del vector del campo es distinta de la inicial.



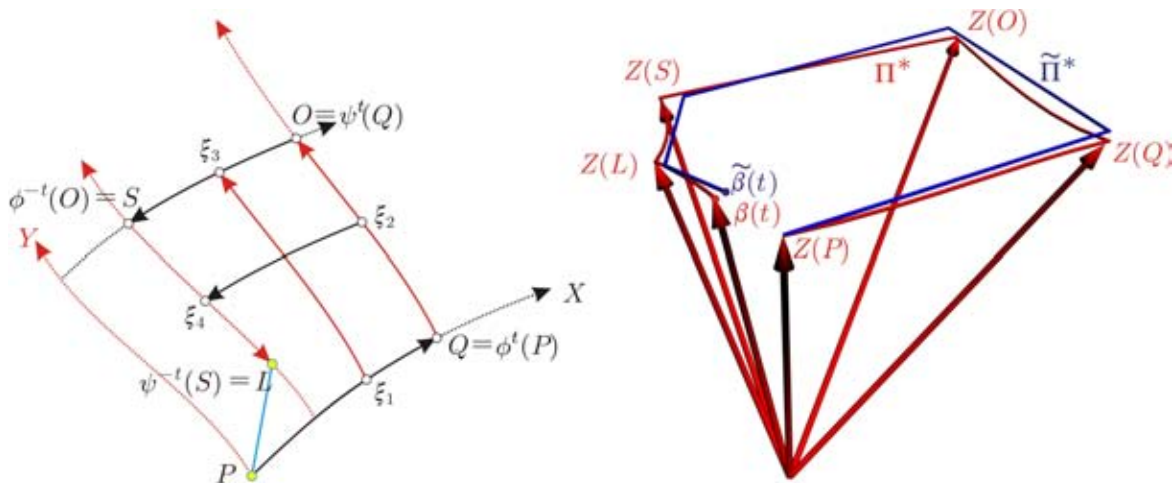
Podemos ver todas las imágenes de los pentágonos $\Pi^*(t)$ que ve el observador del marco paralelo a lo largo del pentágono $\Pi(t)$ en un mismo espacio tangente $T_P M$. Para ello podemos trasladar paralelamente los vectores del campo Z a lo largo de cada pentágono $\Pi(t)$ al espacio tangente $T_P M$. Con esto obtenemos al variar t una nueva curva de pentágonos $\Pi^*(t)$ que no cierran. El extremo final de cada pentágono describe una curva $\beta(t)$ en $T_P M$ que, cuando $t \rightarrow 0$, tiende al vector $Z(P)$, la velocidad de esta curva cuando llega a dicho vector será cero y un medio de su aceleración será $R(X, Y)Z$.

Para analizar los pentágonos $\Pi^*(t)$ y la curva $\beta(t)$ generada por sus puntos finales tomaremos una curva $\tilde{\beta}$ que será una aproximación a la curva β y que en el límite cuando $t \rightarrow 0$ será como la curva β . Veremos que la mitad de la aceleración con que $\tilde{\beta}$ llega al punto $Z(P)$ es justo

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

evaluado en el punto P .

Flujos aproximadores. Tomemos un punto $\xi_1 = \phi^{\tau_1}(P)$ entre P y $Q = \phi^t(P)$ (ver la siguiente figura); luego fluyamos t por la solución del campo Y para obtener el punto $\xi_3 = \psi^t \phi^{\tau_1}(P)$ entre O y S . Tomamos $\xi_2 = \psi^{\tau_2} \phi^t$ entre Q y O y fluyamos t a lo largo del campo $-X$ para obtener el punto $\xi_4 = \phi^{-t} \psi^{\tau_2} \phi^t$ entre S y L .



La curva $\tilde{\beta}(t)$ que aproxima $\beta(t)$ consiste de los puntos finales de una nueva curva de pentágonos $\tilde{\Pi}^*(t)$ que aproxima a la curva de pentágonos $\Pi^*(t)$. Para t s pequeños serán prácticamente idénticas las curvas $\Pi^*(t)$ y $\tilde{\Pi}^*(t)$. Cada pentágono $\tilde{\Pi}^*$ estará conformado de segmentos de rectas en lugar de los segmentos curvos que conforman el pentágono original Π^* . Dichos segmentos estarán generados por las velocidades con que se mueve el vector del campo para un observador en el marco paralelo a lo largo de los pentágonos Π . Éstas serán $\nabla_X Z$ en el primer y tercer lado del pentágono Π^* , $\nabla_Y Z$ en el segundo y cuarto lado y finalmente $\nabla_{L(t)} Z$ en el último lado.

Como primer lado tomemos el segmento de recta que resulta de partir de $Z(P)$ y viajar un tiempo t con velocidad constante $\nabla_X Z|_{\xi_1}$. Llegamos a un punto $\tilde{Z}(Q)$ que aproxima a $Z(Q)$; luego partimos de $\tilde{Z}(Q)$ viajando un tiempo t con velocidad constante $\nabla_Y Z|_{\xi_2}$ para llegar a un punto $\tilde{Z}(O)$ que aproxima a $Z(O)$; luego partimos de $\tilde{Z}(O)$ viajando t con velocidad constante $-\nabla_X Z|_{\xi_3}$ para llegar a $\tilde{Z}(S)$ que aproxima a $Z(S)$; partimos de $\tilde{Z}(S)$ viajando t con velocidad constante $-\nabla_Y Z|_{\xi_4}$ para llegar a $\tilde{Z}(L)$ que aproxima a $Z(L)$. Para escoger la velocidad del último segmento recordamos que la curva $L(t)$ es tal que $L'(0) = 0$ y $\frac{1}{2}L''(0) = [X, Y]_P$ de modo que para t s pequeños su velocidad media es aproximadamente

$$\frac{L'(0) + L'(t)}{2} = \frac{L'(0) + L''(0)t}{2} = t[X, Y]_P.$$

Finalmente viajamos t con una velocidad $-\nabla_{t[X, Y]}Z|_P$ que es una aproximación al valor promedio de la velocidad con que se mueve el vector del campo Z , para un observador en el marco paralelo que se mueve a lo largo de la curva $L(t)$, que es el quinto lado del pentágono Π .

Entonces la curva $\tilde{\beta}(t)$ tiene la forma:

$$\tilde{\beta}(t) = Z(P) + t \left(\nabla_X Z|_{\xi_1} - \nabla_X Z|_{\xi_3} \right) + t \left(\nabla_Y Z|_{\xi_2} - \nabla_Y Z|_{\xi_4} \right) - t \nabla_{t[X, Y]}Z|_P$$

Ahora calculemos la mitad de la aceleración de la curva $\tilde{\beta}(t)$ en $t = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{\beta}(t) - \tilde{\beta}(0)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{\beta}(t) - Z(P)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \left(\nabla_X Z|_{\xi_1} - \nabla_X Z|_{\xi_3} \right) + t \left(\nabla_Y Z|_{\xi_2} - \nabla_Y Z|_{\xi_4} \right) - t \nabla_{t[X, Y]}Z|_P}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(\nabla_X Z|_{\xi_1} - \nabla_X Z|_{\xi_3} \right)}{t} + \frac{\left(\nabla_Y Z|_{\xi_2} - \nabla_Y Z|_{\xi_4} \right)}{t} - \frac{\nabla_{t[X, Y]}Z|_P}{t} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Un observador del marco paralelo que fluye a lo largo de la línea de flujo del campo Y que une los puntos ξ_1 y ξ_3 verá que el vector del campo $\nabla_X Z$ se mueve de la posición $\nabla_X Z|_{\xi_1}$ a la posición $\nabla_X Z|_{\xi_3}$ en un intervalo de tiempo t . De modo que

$$\frac{\left(\nabla_X Z|_{\xi_1} - \nabla_X Z|_{\xi_3} \right)}{t} = - \frac{\left(\nabla_X Z|_{\xi_3} - \nabla_X Z|_{\xi_1} \right)}{t}$$

puede ser interpretado como el negativo de la velocidad media con que se mueve el vector $\nabla_X Z$ al pasar de la posición $\nabla_X Z|_{\xi_1}$ a la posición $\nabla_X Z|_{\xi_3}$. En el límite, cuando $t \rightarrow 0$, tendremos que $\xi_3(t) \rightarrow \xi_1(t) \rightarrow P$ y la velocidad media se convierte en una velocidad instantánea

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(\nabla_X Z|_{\xi_1} - \nabla_X Z|_{\xi_3} \right)}{t} = - \nabla_Y \nabla_X Z|_P \quad (7.6)$$

Un observador del marco paralelo que fluye a lo largo de la línea de flujo del campo X que va del punto ξ_4 al punto ξ_2 verá que el vector del campo $\nabla_Y Z$ se mueve de la posición $\nabla_Y Z|_{\xi_4}$ a la posición $\nabla_Y Z|_{\xi_2}$ en un intervalo t . De modo que

$$\frac{\left(\nabla_Y Z|_{\xi_2} - \nabla_Y Z|_{\xi_4} \right)}{t}$$

puede ser interpretado como la velocidad media con que se mueve el vector $\nabla_Y Z$ al pasar de la posición $\nabla_Y Z|_{\xi_4}$ a la posición $\nabla_Y Z|_{\xi_2}$. En el límite, cuando $t \rightarrow 0$ obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(\nabla_Y Z|_{\xi_2} - \nabla_Y Z|_{\xi_4} \right)}{t} = \nabla_X \nabla_Y Z|_P. \quad (7.7)$$

Respecto al último sumando de (7.5) tenemos que en cada instante

$$\nabla_{t[X, Y]}Z|_P = t \nabla_{[X, Y]}Z|_P$$

por lo que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\nabla_{t[X, Y]}Z|_P}{t} = \frac{t \nabla_{[X, Y]}Z|_P}{t} = \nabla_{[X, Y]}Z|_P. \quad (7.8)$$

Sustituyendo (7.6), (7.7) y (7.8) en (7.5) llegamos a que

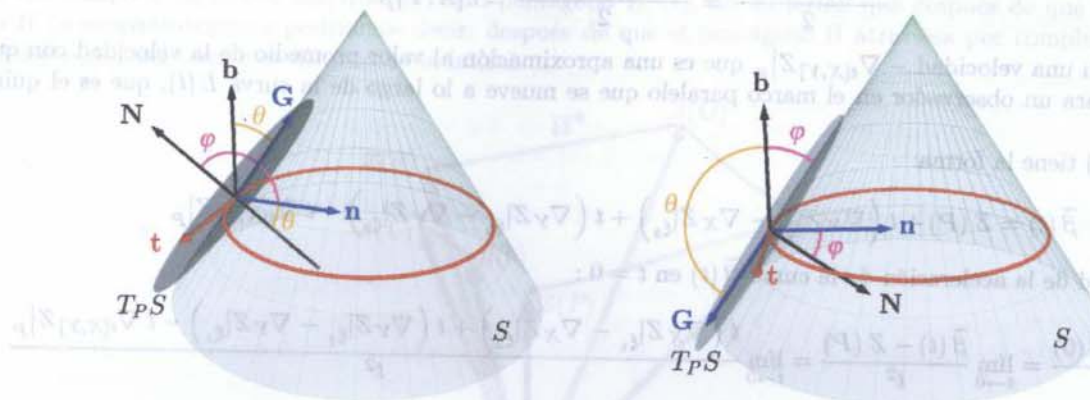
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{\beta}(t) - \tilde{\beta}(0)}{t^2} = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z|_P$$

Por lo tanto, la mitad de la aceleración de nuestra curva original será

$$R(X, Y)Z = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\beta(t) - \beta(0)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{\beta}(t) - \tilde{\beta}(0)}{t^2} = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z|_P$$

A. Ecuaciones de Darboux

A continuación haremos los cálculos mencionados en la sección 3.16 para obtener la velocidad con que gira el marco de Darboux. Mediremos la velocidad con respecto al marco $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ y la expresaremos en términos de los vectores del marco $D = \{t, G, N\}_\alpha$. La idea es que el marco de Darboux va girando respecto del marco de Frenet con una rapidez angular $\frac{d\theta}{ds}$, donde θ es el ángulo que hay que rotar al vector b del marco de Frenet para obtener el vector G del marco de Darboux. En la figura ilustramos las dos posibles configuraciones del marco de Darboux, que dependen de la manera de escoger el vector N .



Expresaremos la derivada del marco de Darboux en términos de la derivada del marco de Frenet, que ya sabemos calcular (sección 2.4) y finalmente regresaremos a los vectores del marco de Darboux. Seguiremos los siguientes pasos:

1. Expresamos a los vectores del marco de Darboux en términos de los vectores del marco de Frenet.

$$N = \sin\theta b - \cos\theta n$$

$$G = N \times t = \sin\theta n + \cos\theta b$$

2. Derivamos.

$$\frac{dt}{ds} = kn$$

$$\frac{dG}{ds} = \cos\theta \frac{d\theta}{ds} n + \sin\theta \frac{dn}{ds} - \sin\theta \frac{d\theta}{ds} b + \cos\theta \frac{db}{ds}$$

$$\frac{dN}{ds} = \cos\theta \frac{d\theta}{ds} b + \sin\theta \frac{db}{ds} + \sin\theta \frac{d\theta}{ds} n - \cos\theta \frac{dn}{ds}$$

3. A partir de las fórmulas de Frenet (sección 2.4), obtenemos las siguientes expresiones para las derivadas de los vectores del marco de Darboux en términos de los vectores de Frenet

$$\frac{dG}{ds} = \cos\theta \frac{d\theta}{ds} n + \sin\theta (-kt + \tau b) - \sin\theta \frac{d\theta}{ds} b + \cos\theta (-\tau n)$$

$$\frac{dN}{ds} = \cos\theta \frac{d\theta}{ds} b + \sin\theta (-\tau n) + \sin\theta \frac{d\theta}{ds} n - \cos\theta (-kt + \tau b)$$

4. Sustituimos las expresiones

$$b = \cos\theta G + \sin\theta N$$

$$n = \sin\theta G - \cos\theta N$$

de los vectores del marco de Frenet en términos de los vectores del marco de Darboux, para obtener así las derivadas de los vectores del marco de Darboux en términos de los vectores del marco $D_{s_\alpha} = \{t, G, N\}_\alpha$:

$$\frac{dt}{ds} = k \sin\theta G - k \cos\theta N;$$

$$\frac{dG}{ds} = \cos\theta \frac{d\theta}{ds} (\sin\theta G - \cos\theta N) - k \sin\theta t + \tau \sin\theta (\cos\theta G + \sin\theta N) - \sin\theta \frac{d\theta}{ds} (\cos\theta G + \sin\theta N) - \tau \cos\theta (\sin\theta G - \cos\theta N)$$

$$= \cos\theta \sin\theta \frac{d\theta}{ds} G - \cos^2\theta \frac{d\theta}{ds} N - k \sin\theta t + \tau \sin\theta \cos\theta G + \tau \sin^2\theta N - \sin\theta \cos\theta \frac{d\theta}{ds} G - \frac{d\theta}{ds} \sin^2\theta N - \tau \cos\theta \sin\theta G + \tau \cos^2\theta N$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{d\theta}{ds} \mathbf{N} - k \operatorname{sen}\theta \mathbf{t} + \tau \mathbf{N} \\
 &= -k \operatorname{sen}\theta \mathbf{t} + \left(\tau - \frac{d\theta}{ds} \right) \mathbf{N} \\
 \frac{d\mathbf{N}}{ds} &= \cos\theta \frac{d\theta}{ds} (\cos\theta \mathbf{G} + \operatorname{sen}\theta \mathbf{N}) - \tau \operatorname{sen}\theta (\operatorname{sen}\theta \mathbf{G} - \cos\theta \mathbf{N}) + \operatorname{sen}\theta \frac{d\theta}{ds} (\operatorname{sen}\theta \mathbf{G} - \cos\theta \mathbf{N}) + k \cos\theta \mathbf{t} - \tau \cos\theta (\cos\theta \mathbf{G} + \operatorname{sen}\theta \mathbf{N}) \\
 &= \cos^2\theta \frac{d\theta}{ds} \mathbf{G} + \cos\theta \frac{d\theta}{ds} \operatorname{sen}\theta \mathbf{N} - \tau \operatorname{sen}^2\theta \mathbf{G} + \tau \operatorname{sen}\theta \cos\theta \mathbf{N} + \operatorname{sen}^2\theta \frac{d\theta}{ds} \mathbf{G} - \operatorname{sen}\theta \cos\theta \frac{d\theta}{ds} \mathbf{N} + k \cos\theta \mathbf{t} - \tau \cos^2\theta \mathbf{G} - \tau \cos\theta \operatorname{sen}\theta \mathbf{N} \\
 &= \frac{d\theta}{ds} \mathbf{G} - \tau \mathbf{G} + k \cos\theta \mathbf{t} \\
 &= \left(\frac{d\theta}{ds} - \tau \right) \mathbf{G} + k \cos\theta \mathbf{t}
 \end{aligned}$$

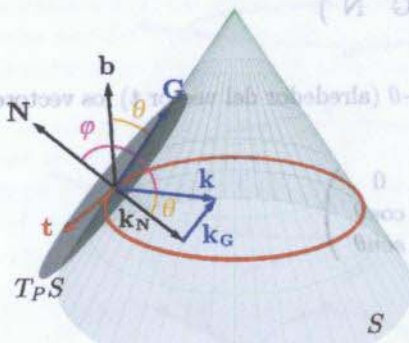
5. Finalmente obtenemos⁹¹ las ecuaciones de Darboux

$$\begin{pmatrix} \frac{dt}{ds} \\ \frac{d\mathbf{G}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{N}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \operatorname{sen}\theta \mathbf{G} - k \cos\theta \mathbf{N} \\ -k \operatorname{sen}\theta \mathbf{t} + \left(\tau - \frac{d\theta}{ds} \right) \mathbf{N} \\ k \cos\theta \mathbf{t} - \left(\tau - \frac{d\theta}{ds} \right) \mathbf{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \operatorname{sen}\theta & -k \cos\theta \\ -k \operatorname{sen}\theta & 0 & \left(\tau - \frac{d\theta}{ds} \right) \\ k \cos\theta & -\left(\tau - \frac{d\theta}{ds} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{G} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

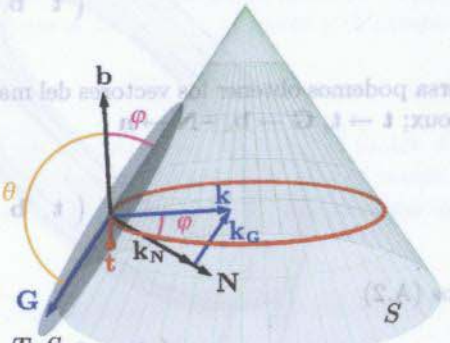
6. Podemos relacionar algunas de las componentes de las velocidades $\frac{dt}{ds}$, $\frac{d\mathbf{G}}{ds}$, $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$, con la curvatura normal y geodésica de la curva γ (secciones 3.9 y 4.4). Recordamos que φ es el ángulo que forman los vectores normal a la curva \mathbf{n} y a la superficie \mathbf{N} . Los ángulos θ y φ son suplementarios, $\theta = \pi - \varphi$ (ver la siguiente figura), de modo que podemos dar las expresiones de la curvatura normal y geodésica que vimos en las secciones 3.9 y 4.4 en términos del ángulo θ :

$$k_{\mathbf{N}} = k \cos\varphi = -k \cos\theta.$$

$$k_{\mathbf{G}} = k \operatorname{sen}\varphi = k \operatorname{sen}\theta$$



$$\begin{aligned}
 k &= k_{\mathbf{G}} + k_{\mathbf{N}} \\
 k_{\mathbf{N}} &= k \cos\varphi \mathbf{N} = -k \cos\theta \mathbf{N} \\
 k_{\mathbf{G}} &= k \operatorname{sen}\varphi \mathbf{G} = k \operatorname{sen}\theta \mathbf{G}
 \end{aligned}$$



En la sección 3.9 definimos la torsión geodésica de una curva γ como

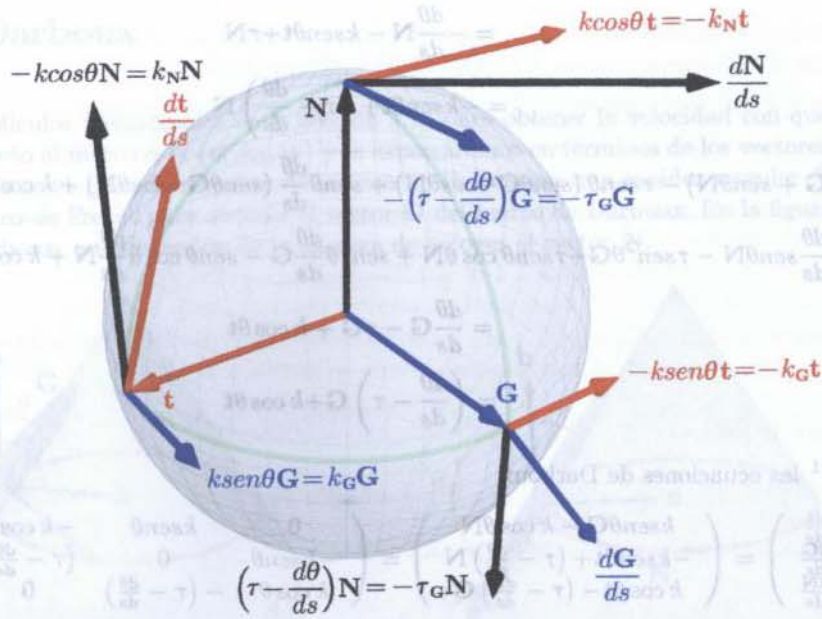
$$\tau_{\mathbf{G}} = \left(\tau - \frac{d\theta}{ds} \right)$$

Sustituimos las expresiones anteriores en A.1 para obtener

$$\begin{pmatrix} \frac{dt}{ds} \\ \frac{d\mathbf{G}}{ds} \\ \frac{d\mathbf{N}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_{\mathbf{G}} & k_{\mathbf{N}} \\ -k_{\mathbf{G}} & 0 & \tau_{\mathbf{G}} \\ -k_{\mathbf{N}} & -\tau_{\mathbf{G}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{G} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}$$

⁹¹Nuestros cálculos son similares que da Valiron salvo por un signo en la rapidez angular.

A. Ecuaciones de Darboux



Forma matricial de las ecuaciones de Darboux

Un observador en el marco α puede llevar (en cada instante s) los vectores del marco de Frenet a los vectores del marco de Darboux

$$\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}, \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{G}, \mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{N}$$

mediante una rotación por un ángulo θ , alrededor del vector \mathbf{t} , de los vectores del marco de Frenet:

$$(\mathbf{t} \ \mathbf{b} \ \mathbf{n}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen} \theta & -\text{cos} \theta \\ 0 & \text{cos} \theta & \text{sen} \theta \end{pmatrix} = (\mathbf{t} \ \mathbf{G} \ \mathbf{N}) \tag{A.2}$$

Y viceversa podemos obtener los vectores del marco de Frenet rotando por un ángulo $-\theta$ (alrededor del vector \mathbf{t}) los vectores del marco de Darboux; $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}, \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{b}, -\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{n}$

$$(\mathbf{t} \ \mathbf{b} \ \mathbf{n}) = (\mathbf{t} \ \mathbf{G} \ \mathbf{N}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen} \theta & \text{cos} \theta \\ 0 & -\text{cos} \theta & \text{sen} \theta \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

derivamos (A.2)

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{t} \ \mathbf{b} \ \mathbf{n}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen} \theta & -\text{cos} \theta \\ 0 & \text{cos} \theta & \text{sen} \theta \end{pmatrix} + (\mathbf{t} \ \mathbf{b} \ \mathbf{n}) \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen} \theta & -\text{cos} \theta \\ 0 & \text{cos} \theta & \text{sen} \theta \end{pmatrix} = \frac{d}{ds} (\mathbf{t} \ \mathbf{G} \ \mathbf{N})$$

Sustituyendo las ecuaciones de Frenet obtenemos

$$(\mathbf{t} \ \mathbf{b} \ \mathbf{n}) \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen} \theta & -\text{cos} \theta \\ 0 & \text{cos} \theta & \text{sen} \theta \end{pmatrix} + (\mathbf{t} \ \mathbf{b} \ \mathbf{n}) \frac{d\theta}{ds} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{cos} \theta & \text{sen} \theta \\ 0 & -\text{sen} \theta & \text{cos} \theta \end{pmatrix} = \frac{d}{ds} (\mathbf{t} \ \mathbf{G} \ \mathbf{N}),$$

multiplicando y simplificando llegamos a que

$$(\mathbf{t} \ \mathbf{b} \ \mathbf{n}) \begin{pmatrix} 0 & -k \text{sen} \theta & k \text{cos} \theta \\ k & -\tau \text{cos} \theta + \frac{d\theta}{ds} \text{cos} \theta & -\tau \text{sen} \theta + \frac{d\theta}{ds} \text{sen} \theta \\ 0 & \tau \text{sen} \theta - \frac{d\theta}{ds} \text{sen} \theta & -\tau \text{cos} \theta + \frac{d\theta}{ds} \text{cos} \theta \end{pmatrix} = \frac{d}{ds} (\mathbf{t} \ \mathbf{G} \ \mathbf{N})$$

Sustituimos (A.3) en la igualdad anterior para expresar la derivada del marco de Darboux en términos del marco (en reposo respecto del marco α) formado por los vectores $\mathbf{t}, \mathbf{G}, \mathbf{N}$.

$$(\mathbf{t} \ \mathbf{G} \ \mathbf{N}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen} \theta & \text{cos} \theta \\ 0 & -\text{cos} \theta & \text{sen} \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -k \text{sen} \theta & k \text{cos} \theta \\ k & -\tau \text{cos} \theta + \frac{d\theta}{ds} \text{cos} \theta & -\tau \text{sen} \theta + \frac{d\theta}{ds} \text{sen} \theta \\ 0 & \tau \text{sen} \theta - \frac{d\theta}{ds} \text{sen} \theta & -\tau \text{cos} \theta + \frac{d\theta}{ds} \text{cos} \theta \end{pmatrix} = \frac{d}{ds} (\mathbf{t} \ \mathbf{G} \ \mathbf{N})$$

B. Teoremas del índice de Poincaré y de Gauss-Bonnet para superficies compactas

En este apéndice veremos cómo se puede globalizar el teorema de Gauss-Bonnet que vimos en la sección 4.16. Lo haremos a través del teorema del índice de Poincaré⁹² y para llegar a él introduciremos los siguientes conceptos:

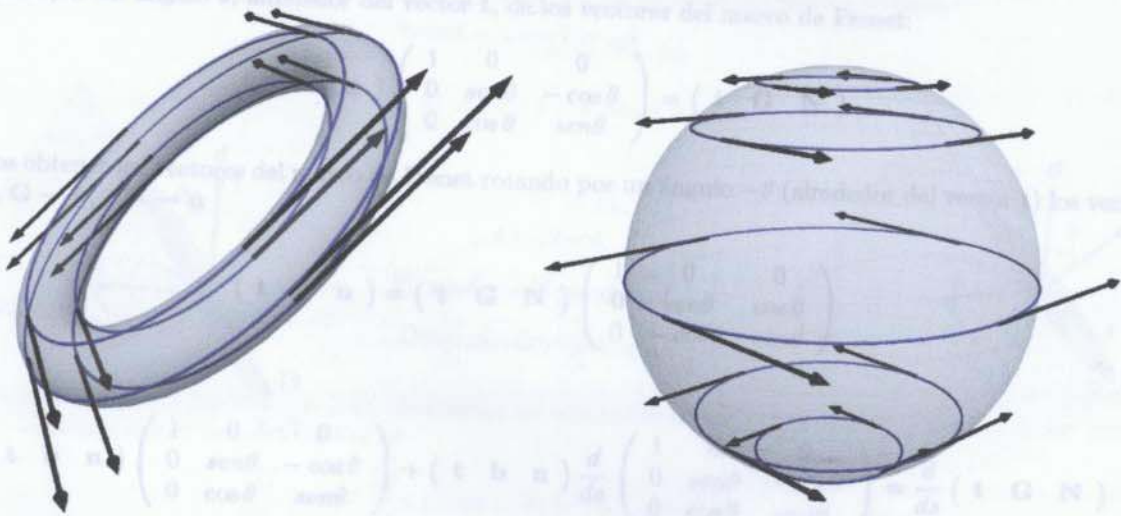
1. Campos en superficies.
2. Índice de campos vectoriales a lo largo de curvas en el plano.
3. Índice de un punto singular de un campo en el plano.
4. Índice de campos vectoriales en superficies.
5. Índice de un punto singular en superficies.

B.1. Campos vectoriales y su índice

Campos vectoriales

Definición 1 Cada punto P en la superficie S tiene su plano tangente $T_P S$; la elección en cada punto P de un vector $v_P \in T_P S$ es un **campo vectorial tangente en S** (Véase campo en el toro en la siguiente figura).

Un campo tiene asociado un sistema de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son curvas (que viven en S), cuyo vector velocidad coincide con el vector del campo en cada momento.



Los puntos donde el campo se anula, es decir, los puntos P donde el vector $v_P = 0$, son importantes pues influyen en su comportamiento global; éstos son llamados puntos singulares (polo norte y sur del campo en la esfera en la figura anterior). Resulta que hay un vínculo entre la forma topológica de una superficie y los puntos singulares de cualquier campo definido en ella, a través de la suma de sus índices (propiedad que veremos a continuación). La forma topológica de una superficie (por ejemplo, un toro o una esfera) impone características que todo campo (diferenciable) definido en S debe cumplir. Visto al revés, esto quiere decir que no puede entrar cualquier campo en una superficie S , es como una especie de derecho de admisión que pone la superficie a los campos. Por ejemplo, veremos que la esfera rechaza a todo campo que no se anule, es decir, no podemos definir en ella un campo que no se anule (el campo en la esfera de la figura anterior se anula en dos puntos). A este resultado se le conoce como el teorema del índice de Poincaré y la manera en que lo abordaremos será a través del teorema de Gauss-Bonnet.

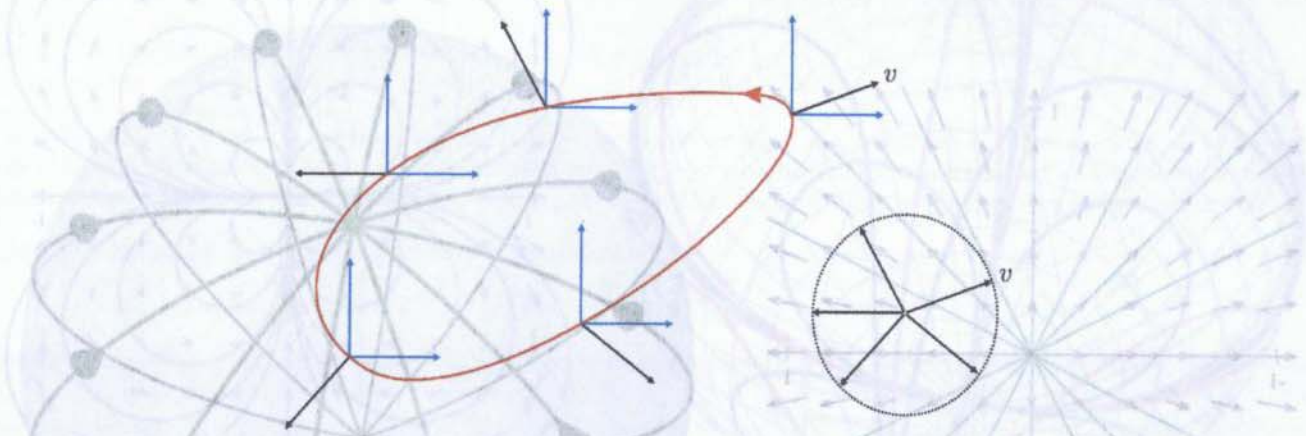
Empecemos por introducir el concepto de índice de Poincaré. Definiremos el índice de un campo a lo largo de una curva y el índice de un punto singular de un campo. Lo haremos primero en el plano y luego en superficies.

Índice de campos vectoriales a lo largo de curvas

Sea $\gamma = \gamma(s) : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva suave por tramos, parametrizada a longitud de arco y que sea homeomorfa a una circunferencia. Sea v_1 un campo vectorial diferenciable en \mathbb{R}^2 que no se anula a lo largo de γ . Transportemos paralelamente nuestro marco de referencia

⁹²Poincaré, Jules Henri (1854 - 1912), matemático francés.

a lo largo de la curva (marco azul en la siguiente figura) hasta darle una vuelta, en cada punto del recorrido nos encontramos con un vector del campo (negro en la figura). Si nos imaginamos dentro de este sistema de referencia veremos que el vector del campo gira en torno a nosotros describiendo una curva cerrada. En la siguiente figura vemos que el vector del campo gira en contra de las manecillas cuando recorremos la curva en el sentido indicado y describe una circunferencia ya que el campo tiene longitud constante.



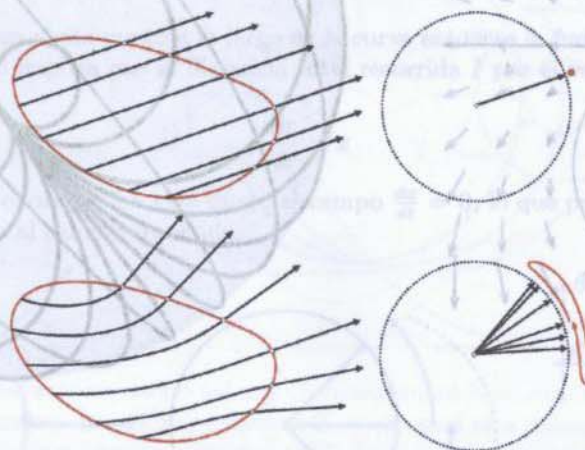
El concepto de índice de una curva mide cuánto ha girado el campo, es decir, la distancia angular recorrida, al darle una vuelta a γ . Para recoger sólo la información de la dirección del campo en cada punto, podemos tomar un nuevo campo sobre γ , normalizando el anterior, es decir

$$v_\gamma = \frac{v|_\gamma}{\|v|_\gamma\|}$$

Otra forma de ver la variación de la dirección de los vectores v_γ (equivalente a la de viajar en un sistema de referencia paralelo a lo largo de la curva) es trasladarlos paralelamente a un punto, por ejemplo el origen. De esta manera a cada punto de γ le corresponde un punto en la circunferencia unitaria S^1 , por lo que, al dar una vuelta en γ generamos un movimiento $v(s)$ en S^1 (una función indicatriz del campo, análoga a la función indicatriz de las tangentes que vimos en curvas). Analicemos un poco este movimiento. Podemos considerar la función $\theta(s)$ del ángulo θ del vector del campo con respecto al camino recorrido s a lo largo de la curva γ . La derivada $\frac{d\theta}{ds}$ es la rapidez angular con la que gira el campo cuando viajamos sobre γ . Notemos que si la curva γ es suave y el campo v_γ es el campo de velocidades de γ entonces $\frac{d\theta}{ds}$ es la curvatura de γ en cada punto.

Ejemplo 2 Un campo con índice cero.

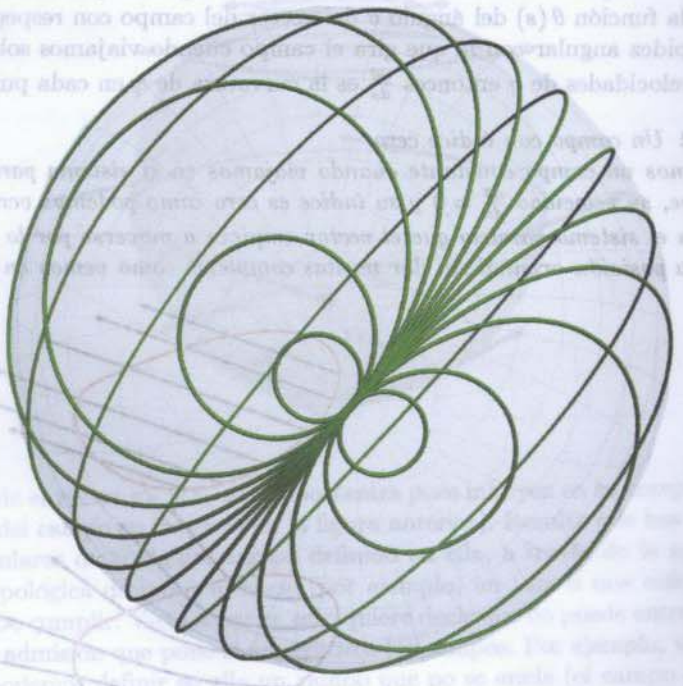
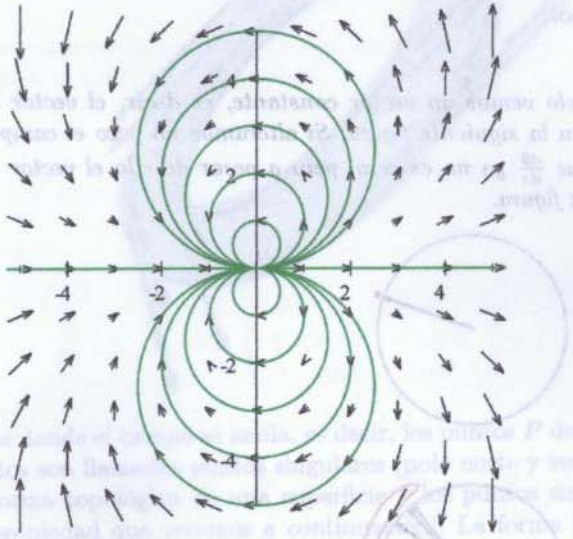
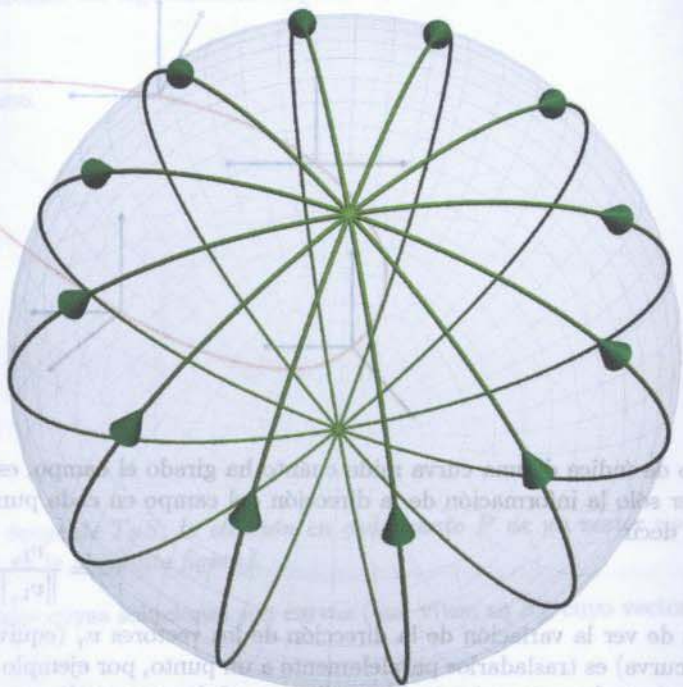
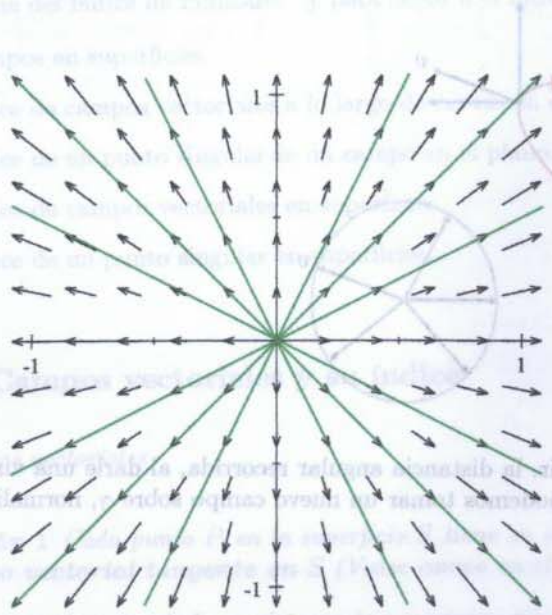
Si tenemos un campo constante cuando viajamos en el sistema paralelo vemos un vector constante, es decir, el vector del campo no se mueve, su velocidad $\frac{d\theta}{ds} = 0$ y su índice es cero como podemos ver en la siguiente figura. Si alteramos un poco el campo veremos al viajar en el sistema paralelo que el vector empieza a moverse por lo que $\frac{d\theta}{ds}$ ya no es cero, pero a pesar de ello el vector del campo regresa a su posición original sin dar vueltas completas como vemos en la figura.

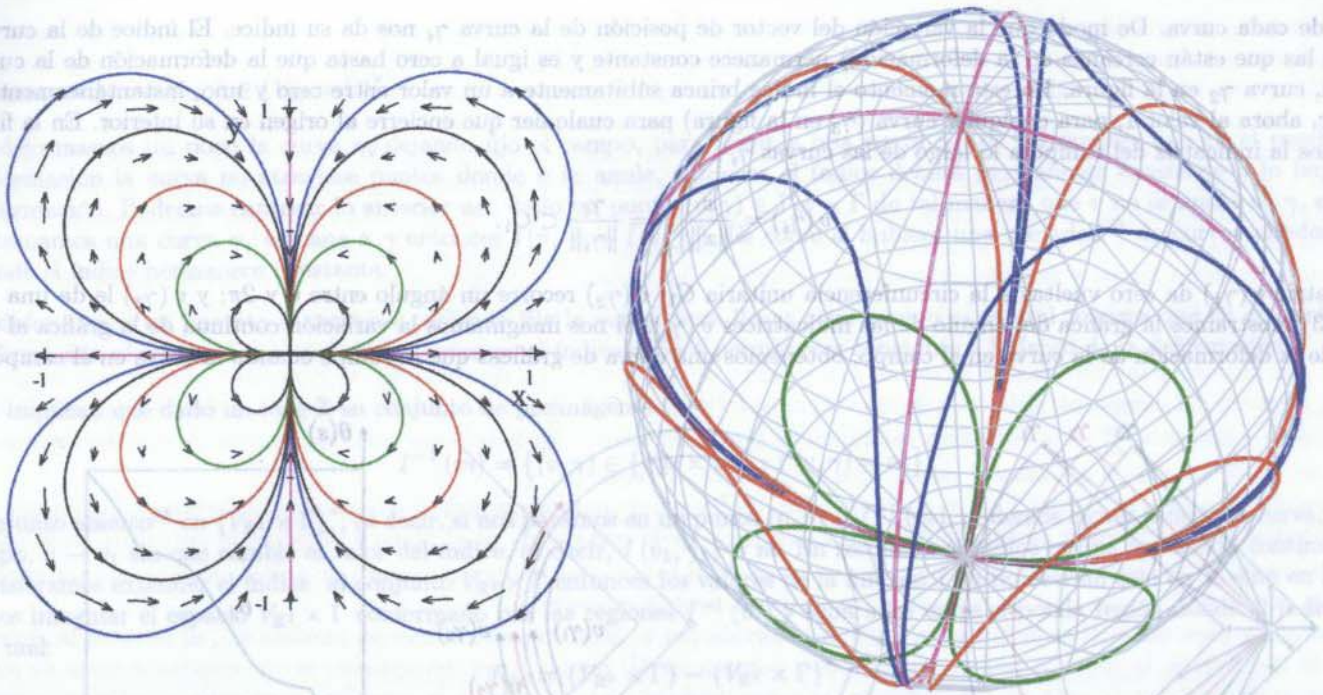


Ejemplo 3 Campos asociados a la ecuación $\frac{dz}{dt} = z^n$

Tomemos ahora S^1 como nuestra curva γ (supondremos que la recorremos a rapidez unitaria) y el campo que determina la función de variable compleja $f(z) = z$, es decir, la ecuación diferencial compleja (con tiempo real) $\frac{dz}{dt} = z$. El campo es un nodo repulsor y las soluciones son líneas rectas que se alejan del 0 (ver la siguiente figura). El índice del campo a lo largo de S^1 es uno y la rapidez con la que vemos que se mueve el vector del campo cuando viajamos a lo largo de S^1 en el sistema paralelo es $\frac{d\theta}{ds} = 1$. Si tomamos $\frac{dz}{dt} = z^2$ obtendremos un campo cuyas soluciones mostramos en la siguiente figura. El índice de este campo a lo largo de S^1 es 2 y la velocidad con que gira el vector del campo es $\frac{d\theta}{ds} = 2$. También mostramos las soluciones de los campos $\frac{dz}{dt} = z^3$ y $\frac{dz}{dt} = z^4$ cuyos índices a lo

largo de S^1 son 3 y 4 respectivamente, la rapidez angular es $\frac{d\theta}{ds} = 3$ y $\frac{d\theta}{ds} = 4$, respectivamente. En general el campo $\frac{dz}{dt} = z^n$ es un campo que tiene índice n a lo largo de S^1 y gira con una rapidez angular constante $\frac{d\theta}{ds} = n$. Los campos anteriores (a partir de $n = 3$) inducen campos en la esfera de Riemann que generan puntos singulares en el polo norte (ver la siguiente figura). Si los dibujamos en el plano obtenemos campos con índices negativos: $-1, -2, \dots, n-2$.





Ya con algunos ejemplos en mente pasemos a la definición del concepto de índice de un campo vectorial a lo largo de una curva γ . El vector del campo es el mismo al inicio y al final del viaje a lo largo de γ , $v_{\gamma(0)} = v_{\gamma(l)}$, de modo que el movimiento en S^1 empieza y acaba en el mismo punto

$$v(0) = v(l)$$

Lo anterior implica que la distancia angular recorrida es un múltiplo entero de 2π , es decir

$$\theta(l) - \theta(0) = \int_0^l \frac{d\theta}{ds} ds = 2\pi I \text{ con } I \in \mathbb{Z}.$$

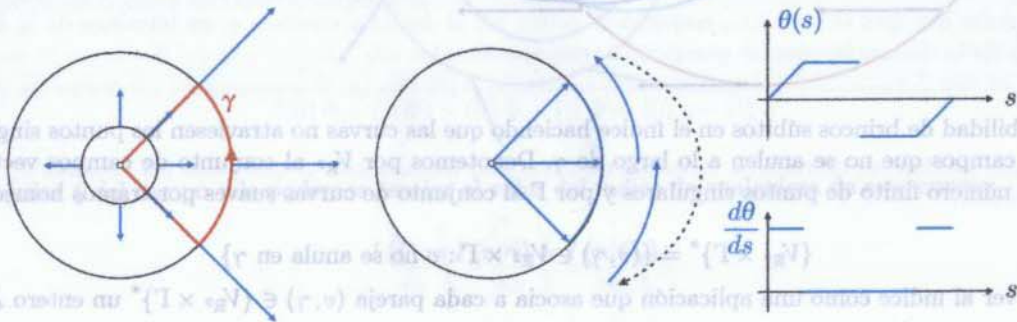
Definición 4 Al número I , que depende del campo y de la curva, se le llama el índice de la curva γ respecto al campo v

$$I(v, \gamma) = I = \frac{\theta(l) - \theta(0)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{d\theta}{ds} ds.$$

Notamos que si el campo v se anula en algún punto a lo largo de la curva entonces la función $\theta(s)$ puede volverse discontinua como podemos ver en la siguiente figura. Esto implica que la distancia total recorrida I por el vector del campo puede dejar de ser entera. En la figura mostramos el campo

$$\frac{dx}{dt} = x$$

en \mathbb{R}^2 y una curva γ (en rojo) que toca el origen. En este punto el campo $\frac{dx}{dt} = 0$, lo que produce una discontinuidad en la gráfica del ángulo del vector velocidad con respecto al camino recorrido.

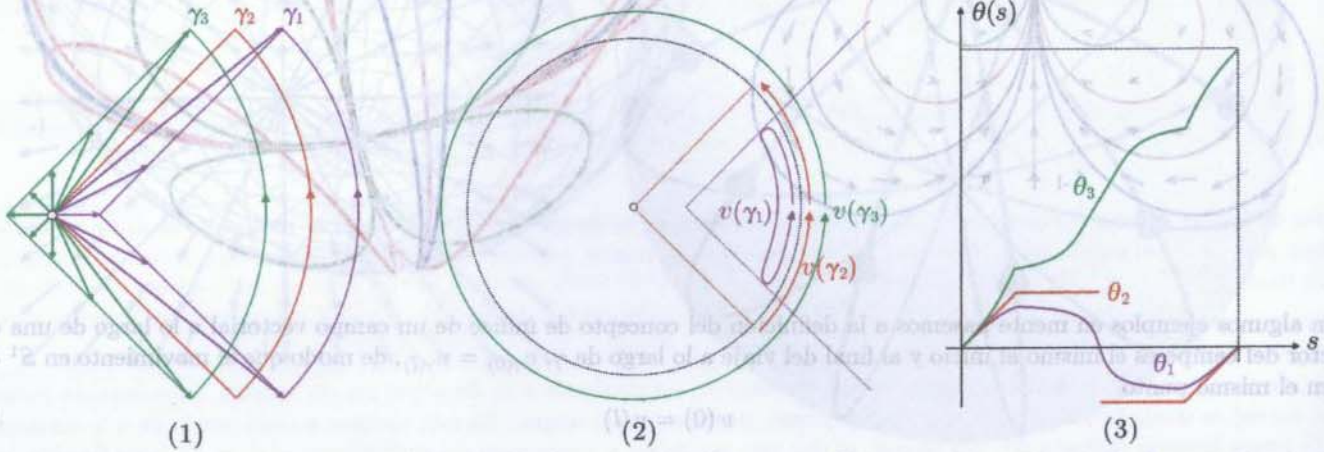


Además si deformamos una curva de manera que pase por un punto singular de un campo el índice puede cambiar súbitamente al atravesar dicho punto. En la siguiente mostramos tres momentos ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$) de la deformación de una curva en el campo $\frac{dx}{dt} = x$. En la figura (1) ilustramos los vectores de posición de las curvas γ_i . Cómo $\frac{dx}{dt} = x$, estos vectores son iguales a los vectores del campo a

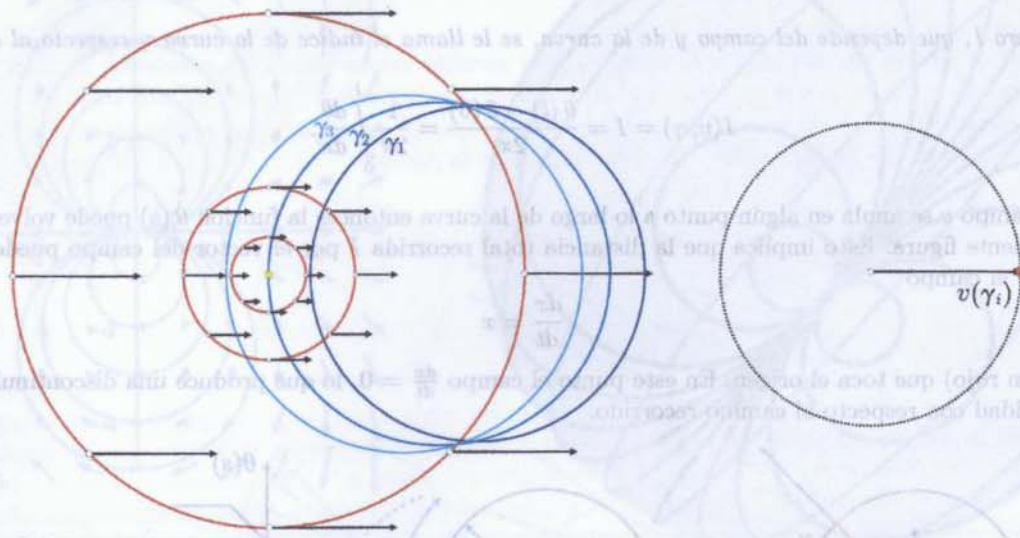
lo largo de cada curva. De modo que la variación del vector de posición de la curva γ_i nos da su índice. El índice de la curva γ_1 (y de todas las que están cercanas en la deformación) permanece constante y es igual a cero hasta que la deformación de la curva toca al origen, curva γ_2 en la figura. En este momento el índice brinca súbitamente a un valor entre cero y uno, instantáneamente vuelve a brincar, ahora al valor 1, para cualquier curva (γ_3 en la figura) para cualquier que encierre al origen en su interior. En la figura (2) mostramos la indicatriz del campo a lo largo de las curvas γ_i

$$v(\gamma_i) = \frac{x}{\|x\|} \Big|_{\gamma_i} = \frac{\gamma_i}{\|\gamma_i\|} \subset C_1.$$

La indicatriz $v(\gamma_1)$ da cero vueltas a la circunferencia unitaria C_1 ; $v(\gamma_2)$ recorre un ángulo entre 0 y 2π ; y $v(\gamma_3)$ le da una vuelta a C_1 . En (3) mostramos la gráfica del ángulo de las indicatrices $v(\gamma_i)$. Si nos imaginamos la variación continua de la gráfica al correr el tiempo de la deformación de la curva en el campo, obtenemos una curva de gráficas que se rompe cuando la curva en el campo toca al origen.



También puede suceder que el índice no brinque súbitamente cuando la curva atraviese un punto singular de un campo. En la siguiente figura consideramos un campo con una dirección horizontal constante, cuya longitud disminuye conforme nos acercamos al origen (punto amarillo). El índice a lo largo de cualquier curva es cero. De modo que no habrá brinco cuando la curva de la deformación pase por el origen.



Podemos evitar la posibilidad de brinco súbitos en el índice haciendo que las curvas no atraviesen los puntos singulares de los campos, es decir, considerando campos que no se anulen a lo largo de γ . Denotemos por $V_{\mathbb{R}^2}$ al conjunto de campos vectoriales diferenciables definidos en \mathbb{R}^2 con un número finito de puntos singulares y por Γ al conjunto de curvas suaves por tramos homeomorfas a un disco en \mathbb{R}^2 . Sea

$$\{V_{\mathbb{R}^2} \times \Gamma\}^* = \{(v, \gamma) \in V_{\mathbb{R}^2} \times \Gamma : v \text{ no se anula en } \gamma\}$$

Entonces podemos ver al índice como una aplicación que asocia a cada pareja $(v, \gamma) \in \{V_{\mathbb{R}^2} \times \Gamma\}^*$ un entero I :

$$I : \{V_{\mathbb{R}^2} \times \Gamma\}^* \rightarrow \mathbb{Z}$$

El índice se preserva bajo pequeñas deformaciones

Tomemos un punto $(v, \gamma) \in \{V_{\mathbb{R}^2} \times \Gamma\}^*$.

1. Si deformamos un poco la curva γ , dejando fijo el campo, para llegar a una curva γ_1 , de tal manera que en el camino de la deformación la curva no atraviese puntos donde v se anule, entonces el índice deberá permanecer constante a lo largo de la deformación. Podemos expresar lo anterior así: dado un punto $(v, \gamma) \in V_{\mathbb{R}^2} \times \Gamma$ de tal manera que v no se anula en γ , entonces, si tomamos una curva γ_1 cercana a γ entonces $I(v, \gamma) = I(v, \gamma_1)$. Es como si hubiera una vecindad⁹³ de curvas alrededor de γ donde el índice permanece constante.
2. Si deformamos un poquito el campo v , dejando fija la curva, para llegar a un campo v_1 , de tal manera que en el camino de la deformación el campo no se anule en γ , entonces el índice deberá permanecer constante a lo largo de la deformación.

1 y 2 implican que dado un $m \in \mathbb{Z}$ su conjunto de preimágenes

$$I^{-1}(m) = \{(v, \gamma) \in \{V_{\mathbb{R}^2} \times \Gamma\}^* : I(v, \gamma) = m\}$$

es un conjunto abierto⁹⁴ en $\{V_{\mathbb{R}^2} \times \Gamma\}^*$, es decir, si nos paramos en un punto $(v, \gamma) \in I^{-1}(m)$, podemos mover tantito la curva, $\gamma \rightarrow \gamma_1$, y el campo, $v \rightarrow v_1$ sin que cambie el valor del índice, es decir, $I(v_1, \gamma_1) = m$. En resumen: el índice es una aplicación continua.

Si quisiéramos extender el índice al conjunto $V_{\mathbb{R}^2} \times \Gamma$ entonces los valores de la función I ya no caerían sólo en \mathbb{Z} , sino en \mathbb{R} . Y nos podríamos imaginar el espacio $V_{\mathbb{R}^2} \times \Gamma$ conformado por las regiones $I^{-1}(m)$ y separadas entre sí por la región donde el índice puede portarse mal:

$$R_M = \{V_{\mathbb{R}^2} \times \Gamma\} - \{V_{\mathbb{R}^2} \times \Gamma\}^*$$

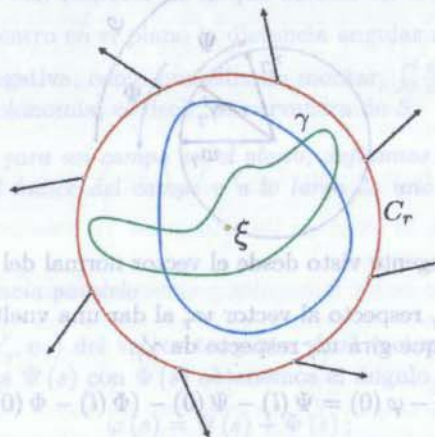
que son los puntos (v, γ) tales que el campo se anula al menos en un punto de γ .

Índice de un punto singular de un campo

Definamos el concepto que será el actor principal del teorema de Poincaré, el índice de un punto singular de un campo v . Tomemos un punto $\xi \in \mathbb{R}^2$ que sea punto singular de un campo v , es decir, $v_\xi = 0$. Como v tiene un número finito de puntos singulares existe una circunferencia de cierto radio C_r que rodea a ξ de modo que el campo no se anula a lo largo de ella y que sólo se anula en el punto ξ en su interior. Por lo anterior $(v, C_r) \in \{V_{\mathbb{R}^2} \times \Gamma\}^*$, de modo que $I(v, C_r) = m \in \mathbb{Z}$. Como el índice es una aplicación continua existe un abierto A en $\{V_{\mathbb{R}^2} \times \Gamma\}^*$, que contiene al punto (v, C_r) , en el que toma un valor constante, es decir:

$$I(v, C_r) = I(\tilde{v}, \gamma)$$

para $(\tilde{v}, \gamma) \in A$. Podemos asociar al punto singular ξ este valor, es decir, el valor del índice de cualquier punto $(\tilde{v}, \gamma) \in A$. En particular; cualquier otra curva $\gamma \in \Gamma$ que esté contenida en la región interior que determina C_r y que a su vez contenga a ξ en la región interior que determina, tendrá el mismo índice, es decir, $I(v, C_r) = I(v, \gamma)$.



Entonces al punto singular ξ del campo v le podemos asociar el valor del índice de cualquiera de esas curvas:

$$I(\xi) = I(v, \gamma) = I(v, C_r);$$

en particular el de C_r .

Índice de campos vectoriales en superficies

⁹³Podemos medir la distancia entre dos curvas γ_1 y γ_2 como $d(\gamma_1, \gamma_2) = \inf \{d(x, y) : x \in \gamma_1 \text{ y } y \in \gamma_2\}$

⁹⁴Si consideramos la topología inducida de considerar a $V_{\mathbb{R}^2}$ y a Γ como espacios métricos.

Para medir el índice $I(v, \gamma)$ de una curva y un campo en \mathbb{R}^2 vemos cuántas vueltas da el vector del campo, con respecto a un sistema de referencia paralelo, es decir, con respecto a un campo a lo largo de γ de vectores paralelos al vector e_1 . Para dar el paso a mundos 2D curvos (superficies arbitrarias) la idea del índice de una curva será la misma: ver cuántas vueltas da el vector del campo al movernos sobre la curva en cuestión. Pero ahora hay que decir cuál será nuestro sistema de referencia paralelo con respecto al cual mediremos la posición del vector del campo y diremos después de dar una vuelta a lo largo de γ cuánto ha rotado. En mundos que se curvan, en lo general, un observador en el sistema de referencia paralelo que se mueve a lo largo de γ observa que el vector del campo inicial y final no coinciden, es decir, el vector del campo no regresa a su posición original. Es la curvatura⁹⁵ gaussiana de la superficie la causante de este efecto y en \mathbb{R}^2 no lo notamos porque su curvatura es cero. Veamos cómo interviene la curvatura en la diferencia que hay entre el vector inicial y final del campo después de dar una vuelta a lo largo de γ en un sistema de referencia paralelo.

Tomemos un campo paralelo w_γ definido a lo largo de la curva γ de modo que cuando viajemos a lo largo del marco de referencia paralelo lo veamos como un vector constante. Podemos considerar el ángulo $\varphi(s) = \angle(v_\gamma, w_\gamma)$ que forma el vector del campo v_γ con w_γ como una función $\varphi(s)$ del camino recorrido s a lo largo de la curva γ . La derivada $\frac{d\varphi}{ds}$ es la rapidez angular con la que gira el campo v_γ respecto del campo paralelo w_γ cuando viajamos sobre γ . Notemos que si la curva γ es suave y el campo v_γ es el campo de velocidades de γ entonces $\frac{d\varphi}{ds}$ es la curvatura geodésica de γ en cada punto. Análogamente a lo que sucedía en el plano tenemos que si la magnitud de $\frac{d\varphi}{ds}$ es grande entonces el campo gira muy rápido al viajar por γ .

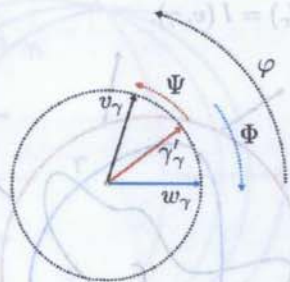
Un ejemplo de esto es el campo $f(z) = z^n$ en la esfera de Riemann (para n 's grandes) y γ un paralelo cercano al polo sur. En este caso tendríamos rapidez angular constante $\frac{d\varphi}{ds}$ pero a diferencia de lo que sucede en el plano y debido a la curvatura de la superficie, $\frac{d\varphi}{ds}$ no será igual a n . Si la magnitud de $\frac{d\varphi}{ds}$ es pequeña entonces el campo casi no gira al viajar por γ . Por ejemplo un campo constante subido a la esfera de Riemann casi no varía su dirección en la zona donde vive γ .

¿Cómo hacer para ver cuál es la distancia angular recorrida por v_γ , con respecto al campo paralelo w_γ , al recorrer la curva γ ? Lo haremos de dos formas, la primera será viendo las cosas como seres 3D desde afuera, imaginaremos que nuestro sistema de referencia será el marco de Darboux $D = \{t, G, N\}$. Veremos las cosas desde el vector normal a la superficie pues toda la película se dará en el plano tangente. Y la segunda será imaginar que viajamos a lo largo de la curva γ a bordo de un sistema de referencia paralelo. En ambos casos usaremos el campo γ'_γ para introducir a la curvatura. Sabemos por la discusión de transporte paralelo de la sección 4.13 que al viajar a lo largo de la curva γ el vector γ'_γ se mueve respecto del marco de referencia paralelo. Si vemos las cosas desde el marco de Darboux D , la rapidez angular con la que gira el sistema paralelo será $-k_G$ y si las vemos desde el sistema de referencia paralelo veremos que el sistema de referencia que determinan los vectores γ'_γ y g gira con respecto a nosotros con una rapidez angular k_G .

Viendo las cosas desde el marco de Darboux D

Podemos fijarnos en el ángulo $\Psi(s) = \angle(\gamma'_\gamma, v_\gamma)$ del vector tangente γ'_γ a γ al vector del campo v_γ ; y en el ángulo $\Phi(s) = \angle(\gamma'_\gamma, w_\gamma)$ del vector tangente a γ'_γ al vector del campo paralelo w_γ (que es un vector que se mueve respecto del sistema de referencia del TDR y que es constante en el sistema de referencia paralelo). Entonces el ángulo $\varphi(s)$ que va del vector campo paralelo al vector del campo está expresado por

$$\varphi(s) = \Psi(s) - \Phi(s);$$



Plano tangente visto desde el vector normal del TDR.

es decir, la distancia angular que gira el vector v_γ respecto al vector w_γ al dar una vuelta a γ , en términos de la distancia angular que gira v_γ respecto de w_γ y de la distancia angular que gira w_γ respecto de γ'_γ .

$$\varphi(l) - \varphi(0) = \Psi(l) - \Psi(0) - (\Phi(l) - \Phi(0))$$

Estas distancias angulares pueden ser escritas en términos de la rapidez angular con la que giran los vectores v_γ , v_γ y w_γ respecto de w_γ , γ'_γ y γ'_γ respectivamente:

$$\int_0^l \frac{d\varphi}{ds} = \int_0^l \frac{d\Psi}{ds} - \int_0^l \frac{d\Phi}{ds}$$

Por el teorema de Gauss Bonnet (sección 4.16), sabemos cuánto gira el vector del campo paralelo respecto del vector tangente a la curva cuando damos una vuelta a la curva:

⁹⁵La curvatura causará también este efecto en dimensiones mayores.

$$\Phi(l) - \Phi(0) = - \int_{R_\gamma} k_G = -2\pi + \iint_{R_\gamma} k \tag{B.1}$$

Por otro lado, las posiciones del vector del campo y del vector tangente a γ al empezar y al concluir la vuelta a lo largo de γ coinciden, es decir, $v_\gamma(0) = v_\gamma(l)$ y $\gamma'_\gamma(0) = \gamma'_\gamma(l)$. Esto implica que $\Psi(l) - \Psi(0)$ debe ser un múltiplo entero de 2π , es decir,

$$\Psi(l) - \Psi(0) = \int_0^l \frac{d\Psi}{ds} = 2\pi m, \text{ con } m \in \mathbb{Z} \tag{B.2}$$

Restando (B.1) de (B.2) obtenemos

$$\varphi(l) - \varphi(0) = \int_0^l \frac{d\varphi}{ds} = 2\pi m + 2\pi - \iint_{R_\gamma} k = 2\pi m + \int_{\gamma} k_G; \tag{B.3}$$

de donde, haciendo $I(v, \gamma) = I = 2m + 1 \in \mathbb{Z}$ llegamos a:

$$\int_0^l \frac{d\varphi}{ds} = 2\pi I - \iint_{R_\gamma} k = 2\pi(I - 1) + \int_{\gamma} k_G. \tag{B.4}$$

De la ecuación anterior llegamos a las siguientes expresiones para el índice I a lo largo de una curva γ en una superficie:

$$I(v, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^l \frac{d\varphi}{ds} + H(\gamma) \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^l \frac{d\varphi}{ds} + \iint_{R_\gamma} k \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^l \frac{d\varphi}{ds} - \int_{\gamma} k_G \right] + 1$$

donde H es la holonomía de la curva γ . La expresión anterior muestra que la distancia angular $\int_0^l \frac{d\varphi}{ds}$ recorrida por el vector del campo respecto al sistema paralelo al dar una vuelta a lo largo de γ no será entera como en \mathbb{R}^2 . Estará entre los enteros

$$\frac{1}{2\pi} \left[\int_0^l \frac{d\varphi}{ds} + \iint_{R_\gamma} k \right] \text{ y } \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^l \frac{d\varphi}{ds} - \int_{\gamma} k_G \right].$$

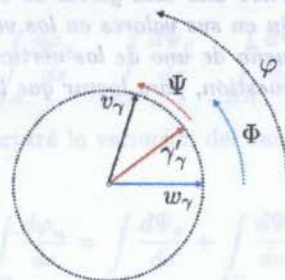
Esta expresión muestra que la distancia angular $\int_0^l \frac{d\varphi}{ds}$ recorrida por el vector del campo al dar una vuelta a lo largo de γ será múltiplo entero de 2π cuando $\iint_{R_\gamma} k = 0$, es decir, cuando adentro de la región que encierra γ no haya curvatura o haya un equilibrio entre los puntos que poseen curvatura positiva y negativa. Cuando esto no suceda habrá, como en el caso de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, un exceso o defecto con respecto de lo que ocurría en el plano. Un exceso cuando $\iint_{R_\gamma} k < 0$ y un defecto cuando $\iint_{R_\gamma} k > 0$. Por ejemplo si tenemos un centro en el plano la distancia angular recorrida será $\int_0^l \frac{d\varphi}{ds} = 2\pi$, en la esfera $\int_0^l \frac{d\varphi}{ds} < 2\pi$ y en una superficie con curvatura gaussiana negativa, como una silla de montar, $\int_0^l \frac{d\varphi}{ds} > 2\pi$. Entonces, lo que le falta o sobra a $\int_0^l \frac{d\varphi}{ds}$ para ser un múltiplo entero de 2π lo pone la holonomía, es decir, la curvatura de S .

Definición 5 Análogamente a lo que hicimos para un campo en el plano, definimos el índice de un punto singular aislado ξ , de campo vectorial v en una superficie S como el índice del campo v a lo largo de una curva γ que contenga al punto singular ξ en su región interior y a ningún otro punto singular.

Viendo las cosas desde el sistema de referencia paralelo

Podemos fijarnos en el ángulo $\Psi(s) = \angle(\gamma'_\gamma, v_\gamma)$ del vector tangente γ'_γ al vector del campo v_γ y en el ángulo $\Phi(s) = \angle(w_\gamma, \gamma'_\gamma)$ del vector paralelo w_γ al vector γ'_γ . Si sumamos $\Psi(s)$ con $\Phi(s)$ obtenemos el ángulo $\varphi(s) = \angle(w_\gamma, v_\gamma)$ que va de w_γ a v_γ

$$\varphi(s) = \Psi(s) + \Phi(s);$$



y entonces podemos expresar la distancia angular que gira v_γ respecto de w_γ al dar una vuelta a γ , en términos de las distancias angulares que giran v_γ respecto de γ'_γ y γ'_γ respecto de w_γ :

$$\varphi(l) - \varphi(0) = \Psi(l) - \Psi(0) + \Phi(l) - \Phi(0).$$

Estas distancias angulares pueden ser escritas en términos de la rapidez angular con la que giran los vectores v_γ , v'_γ y γ'_γ respecto de w_γ , γ'_γ y w_γ respectivamente:

$$\int_0^l \frac{d\varphi}{ds} = \int_0^l \frac{d\Psi}{ds} + \int_0^l \frac{d\Phi}{ds}$$

Por Gauss-Bonnet, sabemos cuánto gira γ'_γ respecto a w_γ cuando damos una vuelta a γ :

$$\Phi(l) - \Phi(0) = \int_\gamma k_G = 2\pi - \iint_\gamma k \tag{B.5}$$

Por otro lado, el observador del sistema paralelo ve que al inicio y al final del viaje a lo largo de γ el ángulo Ψ es el mismo, de donde

$$\Psi(l) - \Psi(0) = \int_0^l \frac{d\Psi}{ds} = 2\pi m, \text{ con } m \in \mathbb{Z} \tag{B.6}$$

Sumando (B.5) y (B.6) obtenemos (B.3), de donde lo demás resulta igual a 1.

B.2. Teorema del índice de Poincaré

Probaremos que la suma de los índices de un campo vectorial diferenciable, con un número finito n de puntos singulares, definido en una superficie S , compacta y orientable, es igual a la característica de Euler de la superficie.

$$\sum I_n = \chi(S)$$

La idea de la prueba se divide en dos partes:

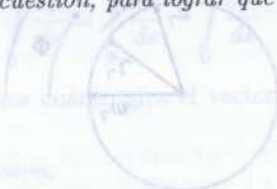
1. Ver que la suma de los índices de dos campos vectoriales cualesquiera en S tiene el mismo valor.
2. Construir un campo tal que la suma de sus índices sea la característica de Euler.
 1. Ambos campos tienen un número finito de puntos singulares en S , de modo que podemos hacer una triangulación \mathbf{T} de la superficie de tal manera que cada triángulo T_i de \mathbf{T} ($i = 1, \dots, m$) contenga a lo más un punto singular de cada campo. Así, el índice de un punto singular de alguno de los dos campos será igual al índice de dicho campo a lo largo del triángulo correspondiente. Entonces las sumas de los índices de los puntos singulares de cada campo serán iguales a la suma de los índices de cada campo a lo largo de todos los triángulos de la triangulación.

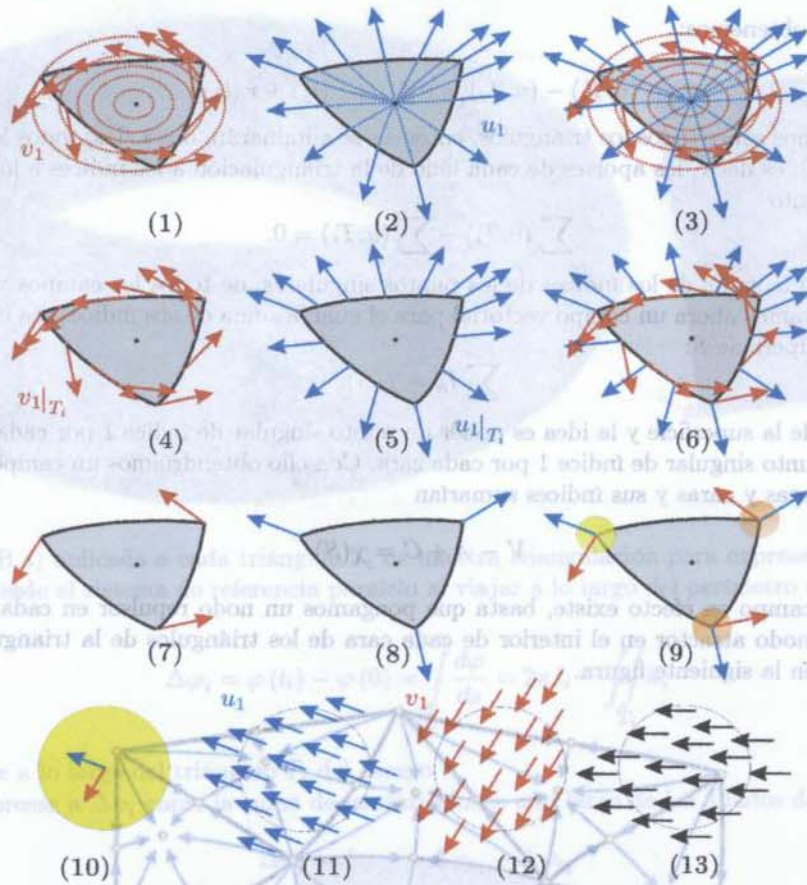
$$\sum I_k = \sum (v_1, T_i) \text{ y } \sum I_j = \sum (u_1, T_i)$$

Notamos que de los índices (v_1, T_i) , (u_1, T_i) a lo largo de los triángulos T_i , solo podrán ser distintos de cero aquellos que en su interior tengan un punto singular del campo en cuestión.

Como los puntos singulares están en el interior de los triángulos podemos escoger una vecindad suficientemente pequeña alrededor de cada vértice y deformar en el interior de éstas a los campos v_1 y u_1 , dejándolos igual fuera de ellas, hasta que coincidan en los vértices.

Ejemplo 6 En la siguiente figura tenemos un triángulo T_i que contiene un punto singular de cada campo. En las figuras (1)-(3) hemos indicado las soluciones de los campos para hacernos una idea global de ellos; en las figuras (4)-(6) restringimos los campos a los triángulos T_i , en las figuras (7)-(9) ponemos atención en sus valores en los vértices de T_i ; en las figuras (10)-(13) indicamos cómo se ven los campos en una vecindad suficientemente pequeña de uno de los vértices y mostramos un campo, en negro, al cual podemos deformar v_1 y u_1 , suficientemente cerca del vértice en cuestión, para lograr que los campos deformados coincidan en el vértice).





Así hemos obtenido otro par de campos que llamaremos v y u que tienen los mismos puntos singulares. Además como los campos son continuos y no nulos en los vértices, en el proceso de la deformación no se anulan los campos sobre T_i , por lo que los índices a lo largo de T_i de los campos iniciales v_1 y u_1 coinciden con los índices de los campos u y v , de modo que la suma de los índices también coincide:

$$\sum (v_1, T_i) = \sum (v, T_i) \text{ y } \sum (u_1, T_i) = \sum (u, T_i),$$

Mostraremos entonces que

$$\sum (v, T_i) - \sum (u, T_i) = 0.$$

Para obtener la suma de los índices de los campos v y u que aparecen en la ecuación anterior escogemos una orientación para medir ángulos y después tenemos que ver cuánto varía el ángulo de v y u respecto de un sistema de referencia paralelo al recorrer todos los triángulos T_i positivamente orientados en el primer caso y negativamente en el segundo. Una forma de medir esta variación es la siguiente: tomemos algún lado l de uno de los triángulos con vértices A y B . Este lado aportará al índice de cada uno de los campos a lo largo de dos triángulos adyacentes. En uno de ellos aportará la variación del campo v , respecto a un sistema de referencia paralelo, al ir de A a B

$$\int_{AB} \frac{d\varphi_v}{ds} = \int_{AB} \frac{d\Psi_v}{ds} + \int_{AB} \frac{d\Phi}{ds} = \int_{AB} \frac{d\Psi_v}{ds} + \int_{AB} k_G$$

y luego la variación del campo u al regresar de B a A .

$$\int_{BA} \frac{d\varphi_u}{ds} = \int_{BA} \frac{d\Psi_u}{ds} + \int_{BA} \frac{d\Phi}{ds} = \int_{BA} \frac{d\Psi_u}{ds} + \int_{BA} k_G$$

Entonces la variación total que el lado aportará es un número entero por la forma en que construimos los campos v y u :

$$\int_{AB} \frac{d\varphi_v}{ds} + \int_{BA} \frac{d\varphi_u}{ds} = \int_{AB} \frac{d\Psi_v}{ds} + \int_{BA} \frac{d\Psi_u}{ds} = r(l) \in \mathbb{Z} \tag{B.7}$$

Análogamente en el triángulo adyacente el lado l aportará la variación del campo v al ir de B a A y luego la variación del campo u al regresar de A a B , lo que da una variación total

$$\int_{BA} \frac{d\varphi_v}{ds} + \int_{AB} \frac{d\varphi_u}{ds} = \int_{BA} \frac{d\Psi_v}{ds} + \int_{AB} \frac{d\Psi_u}{ds} = -r(l) \in \mathbb{Z} \tag{B.8}$$

Entonces para cada triángulo T_i obtenemos:

$$(v, T_i) - (u, T_i) = r(l_1) + r(l_2) + r(l_3)$$

Si en la expresión anterior sumamos sobre todos los triángulos, entonces se eliminarán, dos a dos, todos los sumandos del lado derecho. Esto es así debido a (B.7) y (B.8), es decir, los aportes de cada lado de la triangulación a los índices a lo largo de un par de triángulos adyacentes se eliminan. Por lo tanto

$$\sum (v, T_i) - \sum (u, T_i) = 0. \tag{I}$$

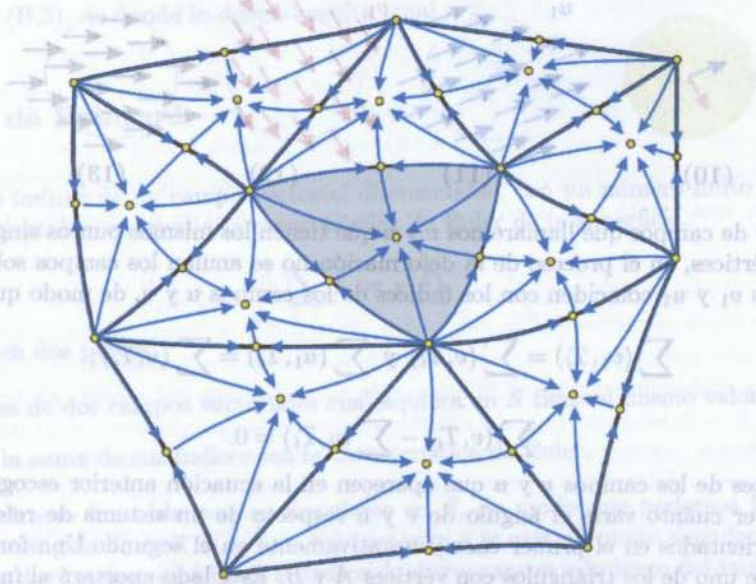
2. Ya sabemos que el valor de la suma de los índices de los puntos singulares, de todos los campos vectoriales definidos sobre una superficie, es constante. Construyamos ahora un campo vectorial para el cual la suma de sus índices sea el valor que queremos, es decir, la característica de Euler de la superficie S :

$$\sum I_n = \chi(S).$$

Ocuparemos la triangulación \mathbf{T} de la superficie y la idea es poner un punto singular de índice 1 por cada vértice, un punto singular de índice -1 por cada arista y un punto singular de índice 1 por cada cara. Con ello obtendríamos un campo con tantos puntos singulares como la suma de los vértices, aristas y caras y sus índices sumarían

$$V - A + C = \chi(S)$$

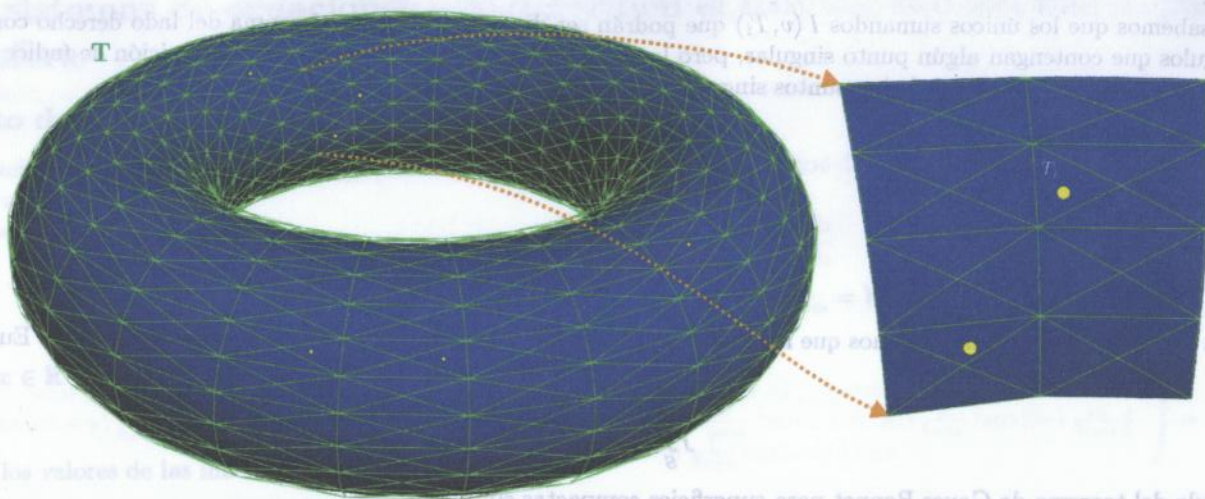
la característica de Euler. Este campo en efecto existe, basta que pongamos un nodo repulsor en cada vértice, un punto silla en los puntos medios de cada arista y nodo atractor en el interior de cada cara de los triángulos de la triangulación. Localmente el campo tiene una forma que ilustramos en la siguiente figura.



B.3. Demostración del teorema de Gauss-Bonnet (superficies compactas)

Supongamos que tenemos un campo vectorial v diferenciable con un número finito de puntos singulares (este número puede ser cero) definido sobre una superficie S compacta. Cada punto singular del campo es aislado. Podemos dar una triangulación \mathbf{T} de la superficie con un número finito de triángulos T_i ($i = 1, \dots, m$), de manera que cada punto singular quede en el interior de uno de estos triángulos (puntos amarillos en la siguiente figura).

$$(B.8) \quad \int_{\partial A} \psi \tau = \int_{\partial A} \frac{\partial \psi}{\partial b} + \int_{\partial A} \frac{\partial \psi}{\partial a} = \int_{\partial A} \frac{\partial \psi}{\partial a} + \int_{\partial A} \frac{\partial \psi}{\partial b}$$



Ahora utilizamos la fórmula (B.4) aplicada a cada triángulo T_i de nuestra triangulación para expresar la variación angular $\Delta\varphi_i$ en el vector del campo que vemos desde el sistema de referencia paralelo al viajar a lo largo del perímetro l_i de T_i

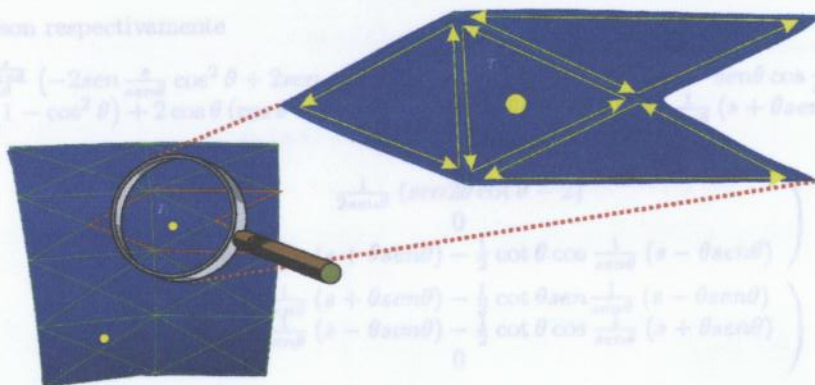
$$\Delta\varphi_i = \varphi(l_i) - \varphi(0) = \int_0^{l_i} \frac{d\varphi}{ds} = 2\pi I_i - \iint_{T_i} k, \tag{B.9}$$

donde $I_i = I(v, T_i)$ es el índice a lo largo del triángulo T_i del campo v .

Por otro lado podemos expresar a $\Delta\varphi_i$ como la suma de las variaciones a lo largo de los 3 lados del triángulo

$$\Delta\varphi_i = \Delta\varphi_{i_1} + \Delta\varphi_{i_2} + \Delta\varphi_{i_3} \tag{B.10}$$

Como cada lado de un triángulo es también lado del triángulo adyacente tenemos que, al recorrer con la misma orientación cada uno de los triángulos T_i de T pasaremos dos veces por cada lado de todo T_i , una vez en una dirección y la otra en la dirección opuesta. La variación del campo al recorrer el lado en un sentido será el negativo de la variación al recorrerlo en el sentido opuesto.



Entonces si sumamos las variaciones del campo en todos los triángulos de T_i se irán eliminando dos a dos los sumandos del lado derecho de (B.10) por lo que

$$\sum \Delta\varphi_n = 0 \tag{B.11}$$

Sustituyendo (B.9) en (B.11) tenemos que

$$\sum \iint_{RT_i} k = 2\pi \sum I_i \tag{B.12}$$

Pero el lado izquierdo de (B.12) es la suma de las integrales de la curvatura gaussiana en cada región RT_i . Como la unión de estas regiones nos da toda la superficie, la suma de las integrales sobre todas las regiones RT_i es la integral sobre toda la superficie

$$\iint_S k = 2\pi \sum I_i = 2\pi \sum I(v, T_i) \tag{B.13}$$

Por otro lado sabemos que los únicos sumandos $I(v, T_i)$ que podrán ser distintos de cero en la suma del lado derecho corresponden a aquellos triángulos que contengan algún punto singular, pero la suma de dichos sumandos es (por la definición de índice de un punto singular) igual a la suma de los índices de los puntos singulares

$$2\pi \sum I(v, T_i) = 2\pi \sum I_n. \tag{B.14}$$

Sustituyendo (B.14) en (B.13) tenemos

$$\iint_S k = 2\pi \sum I_n$$

Por el teorema del índice de Poincaré sabemos que la suma de los índices en la ecuación anterior es la característica de Euler y con ello llegamos a

$$\iint_S k = 2\pi \chi(S)$$

que es la fórmula del teorema de Gauss-Bonnet para superficies compactas sin borde.

Ahora utilizamos la fórmula (B.4) aplicada a cada triángulo T de nuestra triangulación para expresar la variación angular $\Delta\psi$ en el vector del campo que vamos desde el sistema de referencia paralelo al viajar a lo largo del contorno ∂T de T .

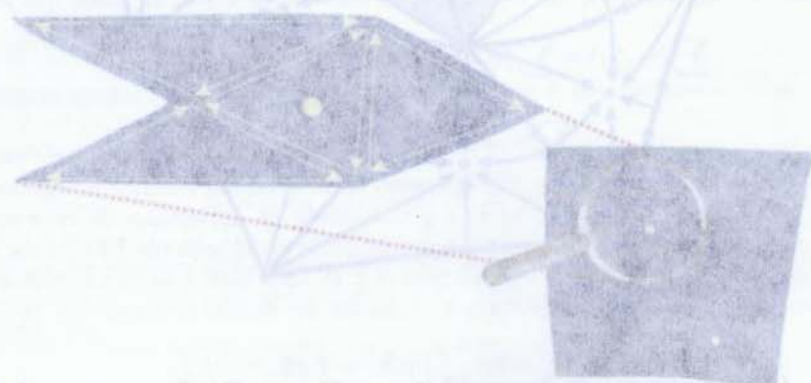
La característica de Euler. Para cada triángulo T de nuestra triangulación \mathcal{T} de la superficie S vamos a considerar un campo vectorial ψ que sea un campo de rotación en el interior de T y sea cero en el contorno ∂T .

$$\Delta\psi = \psi(l) - \psi(0) = \int_0^l \frac{d\psi}{ds} ds = \int_0^l k ds = \int_T k$$

Por otro lado podemos expresar a $\Delta\psi$ como la suma de las variaciones a lo largo de los 3 lados del triángulo T del campo ψ donde $\psi = \psi(r, \gamma)$ es el índice a lo largo del triángulo T del campo ψ .

$$\Delta\psi = \Delta\psi_{12} + \Delta\psi_{23} + \Delta\psi_{31} \tag{B.10}$$

Como cada lado de un triángulo es también lado del triángulo adyacente tenemos que al recorrer con la misma orientación cada uno de los triángulos T_i de \mathcal{T} pasaremos dos veces por cada lado de \mathcal{T} , una vez en una dirección y la otra en la dirección opuesta. La variación del campo al recorrer el lado en un sentido será el negativo de la variación al recorrerlo en el sentido opuesto.



B.3. Demostración del teorema de Gauss-Bonnet (superficies compactas)

Entonces si sumamos las variaciones del campo en todos los triángulos de \mathcal{T} se irán eliminando dos a dos los sumandos del lado derecho de (B.10) por los lados adyacentes de otros triángulos de \mathcal{T} .

Podemos considerar un campo vectorial ψ que sea un campo de rotación en el interior de T y sea cero en el contorno ∂T . La característica de Euler $\chi(S)$ de una superficie compacta S puede expresarse como $\chi(S) = \sum I_n$.

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T k = 2\pi \sum I_n \tag{B.12}$$

Para el lado izquierdo de (B.12) es la suma de las integrales de la curvatura gaussiana en cada región T_i . Como la unión de estas regiones nos da toda la superficie, la suma de las integrales sobre todas las regiones T_i es la integral sobre toda la superficie

$$\iint_S k = \sum \int_{T_i} k = \sum 2\pi I_n = 2\pi \sum I(v, T_i) \tag{B.13}$$

C. Los sistemas de ecuaciones que describen el movimiento del marco paralelo en la esfera

C.1. Visto desde el marco α

A continuación calculamos el sistema de ecuaciones mencionado en la sección 6.6 que describe el movimiento de los campos paralelos para un observador en marco α .

Llegamos en (6.36) al sistema

$$\frac{d[v]_{\alpha}}{ds} = \left[\left(\frac{d[I]_{\alpha}^D}{ds} \right) [I]_{\alpha}^D + [I]_{\alpha}^D \frac{d[I]_{\delta}^D}{ds} [I]_{\delta}^D [I]_{\alpha}^D \right] [v]_{\alpha} = W(s)[v]_{\alpha}$$

Como $[v]_{\alpha} = x \in \mathbb{R}^3$ el sistema se puede escribir así

$$\frac{dx}{ds} = W(s)x$$

sustituimos los valores de las matrices

$$\begin{aligned} \frac{d[I]_{\alpha}^D}{ds} &= \begin{pmatrix} -\frac{\text{sen} \frac{s}{\text{sen} \theta}}{\text{sen} \theta} - \left(\cos \frac{s}{\text{sen} \theta} \right) \frac{\cos \theta}{\text{sen} \theta} & \cos \frac{s}{\text{sen} \theta} & 0 \\ \frac{\cos \frac{s}{\text{sen} \theta}}{\text{sen} \theta} - \left(\text{sen} \frac{s}{\text{sen} \theta} \right) \frac{\cos \theta}{\text{sen} \theta} & \text{sen} \frac{s}{\text{sen} \theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ [I]_{\alpha}^D &= \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{\text{sen} \theta} & -\text{sen} \frac{s}{\text{sen} \theta} \cos \theta & \text{sen} \frac{s}{\text{sen} \theta} \text{sen} \theta & 0 \\ \frac{1}{2} \cos \frac{1}{\text{sen} \theta} (s - \theta \text{sen} \theta) & -\frac{1}{2} \cos \frac{1}{\text{sen} \theta} (s + \theta \text{sen} \theta) & -\cos \frac{s}{\text{sen} \theta} \text{sen} \theta & \cos \theta \\ \text{sen} \frac{s}{\text{sen} \theta} & \cos \frac{s}{\text{sen} \theta} \cos \theta & -\cos \frac{s}{\text{sen} \theta} \text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ [I]_{\delta}^D &= \begin{pmatrix} \cos(s \cot \theta) & -\text{sen}(s \cot \theta) & 0 \\ \text{sen}(s \cot \theta) & \cos(s \cot \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \frac{d[I]_{\delta}^D}{ds} &= \begin{pmatrix} -\text{sen}(s \cot \theta) \cot \theta & -\cos(s \cot \theta) \cot \theta & 0 \\ -\cos(s \cot \theta) \cot \theta & -\text{sen}(s \cot \theta) \cot \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

para obtener la matriz

$$W(s) = (W_1(s), W_2(s), W_3(s))$$

donde $W_1(s), W_2(s), W_3(s)$ son respectivamente

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{\cos \frac{s}{\text{sen} \theta}}{\text{sen} \theta} (-2 \text{sen} \frac{s}{\text{sen} \theta} \cos^2 \theta + 2 \text{sen} \frac{s}{\text{sen} \theta} + \text{sen} \theta \cos \frac{1}{\text{sen} \theta} (s + \theta \text{sen} \theta) - \text{sen} \theta \cos \frac{1}{\text{sen} \theta} (s - \theta \text{sen} \theta)) \\ \frac{1}{2 \text{sen} \theta} (2 \cos^2 \frac{s}{\text{sen} \theta} (1 - \cos^2 \theta) + 2 \cos \theta (\cos \theta - \cot \theta \text{sen} \theta) - \text{sen} \theta \text{sen} \frac{s}{\text{sen} \theta} (\cos \frac{1}{\text{sen} \theta} (s + \theta \text{sen} \theta) + \cos \frac{1}{\text{sen} \theta} (s - \theta \text{sen} \theta))) \\ -\cos \frac{s}{\text{sen} \theta} \cot \theta \text{sen} \theta \end{pmatrix} \\ W_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2 \text{sen} \theta} (\text{sen} 2\theta \cot \theta - 2) \\ 0 \\ \frac{1}{2} \cot \theta \cos \frac{1}{\text{sen} \theta} (s + \theta \text{sen} \theta) - \frac{1}{2} \cot \theta \cos \frac{1}{\text{sen} \theta} (s - \theta \text{sen} \theta) \end{pmatrix} \\ W_3 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cot \theta \text{sen} \frac{1}{\text{sen} \theta} (s + \theta \text{sen} \theta) - \frac{1}{2} \cot \theta \text{sen} \frac{1}{\text{sen} \theta} (s - \theta \text{sen} \theta) \\ \frac{1}{2} \cot \theta \cos \frac{1}{\text{sen} \theta} (s - \theta \text{sen} \theta) - \frac{1}{2} \cot \theta \cos \frac{1}{\text{sen} \theta} (s + \theta \text{sen} \theta) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así llegamos a que el sistema⁹⁶ tiene la forma

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{ds} \\ \frac{dx_2}{ds} \\ \frac{dx_3}{ds} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2 \text{sen} \theta} (2x_1 \cos \frac{s}{\text{sen} \theta} \text{sen} \frac{s}{\text{sen} \theta} \cos^2 \theta - 2x_2 + x_2 \text{sen} 2\theta \cot \theta - 2x_1 \cos \frac{s}{\text{sen} \theta} \text{sen} \frac{s}{\text{sen} \theta} + x_3 \cos \frac{s}{\text{sen} \theta} \cot \theta) \\ -\frac{1}{2 \text{sen} \theta} (2x_1 \cos^2 \frac{s}{\text{sen} \theta} (1 - \cos^2 \theta) + 2x_1 \cos \theta (\cos \theta - \cot \theta \text{sen} \theta) - x_3 \cot \theta \text{sen} \theta \cos \frac{1}{\text{sen} \theta} (s + \theta \text{sen} \theta)) \\ \frac{1}{2} x_2 \cot \theta \cos \frac{1}{\text{sen} \theta} (s + \theta \text{sen} \theta) - \frac{1}{2} x_2 \cot \theta \cos \frac{1}{\text{sen} \theta} (s - \theta \text{sen} \theta) - \frac{1}{2} x_1 \cot \theta \text{sen} \frac{1}{\text{sen} \theta} (s + \theta \text{sen} \theta) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4 \text{sen} \theta} (+x_3 \cot \theta \cos \frac{1}{\text{sen} \theta} (s - 2\theta \text{sen} \theta) + x_3 \cot \theta \cos \frac{1}{\text{sen} \theta} (s + 2\theta \text{sen} \theta) + 2x_1 \cos \frac{s}{\text{sen} \theta} \text{sen} \theta \cos \frac{1}{\text{sen} \theta} (s + \theta \text{sen} \theta)) \\ \frac{1}{2 \text{sen} \theta} (+x_3 \cot \theta \text{sen} \theta \cos \frac{1}{\text{sen} \theta} (s - \theta \text{sen} \theta) + x_1 \text{sen} \frac{s}{\text{sen} \theta} \text{sen} \theta \cos \frac{1}{\text{sen} \theta} (s + \theta \text{sen} \theta)) \\ \frac{1}{2} x_1 \cot \theta \text{sen} \frac{1}{\text{sen} \theta} (s - \theta \text{sen} \theta) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4 \text{sen} \theta} (-2x_1 \cos \frac{s}{\text{sen} \theta} \text{sen} \theta \cos \frac{1}{\text{sen} \theta} (s - \theta \text{sen} \theta)) \\ \frac{1}{2 \text{sen} \theta} (x_1 \text{sen} \frac{s}{\text{sen} \theta} \text{sen} \theta \cos \frac{1}{\text{sen} \theta} (s - \theta \text{sen} \theta)) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

⁹⁶Lo hemos partido en una suma para que quepa.

D. Equivalencia entre definiciones del corchete de Lie

A continuación daremos una prueba de la equivalencia entre la definición que dimos en la sección 7.5 del corchete de Lie de dos campos y la definición usual del corchete de Lie:

Definición 1 El corchete de Lie de la pareja de campos (X, Y) es el campo dado por

$$[X, Y]_P = (\nabla_X Y - \nabla_Y X)(P). \tag{D.1}$$

La idea será mostrar que la aceleración de la curva

$$L_P(t) = L(t) = \psi^{-t} \circ \phi^{-t} \circ \psi^t \circ \phi^t.$$

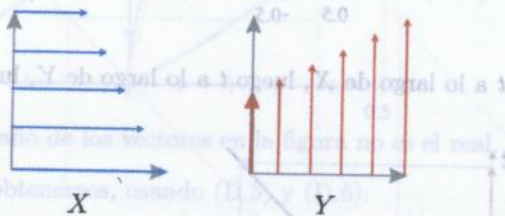
es la mitad del valor del corchete dado por la definición anterior:

$$\frac{L_P''(0)}{2} = (\nabla_X Y - \nabla_Y X)(P).$$

A lo largo de la prueba usaremos figuras con la pareja de campos

$$X = \left(-\frac{y}{2} + 1, 0\right)$$

$$Y = \left(0, \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$$



para visualizar las ideas de la prueba.

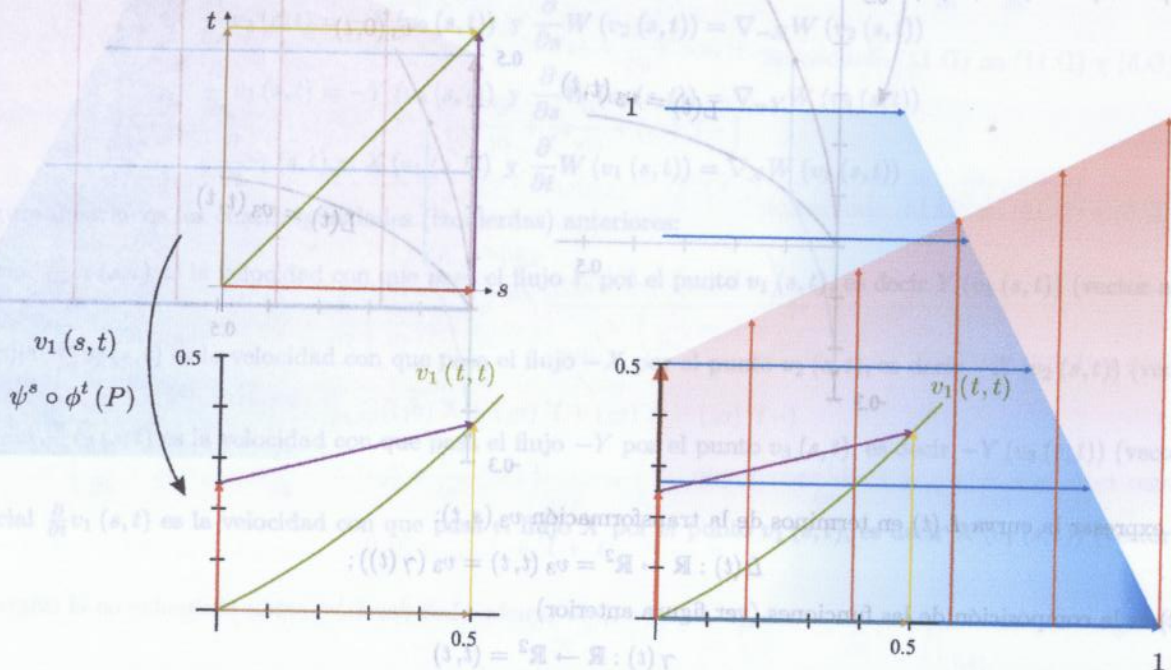
Nos interesa calcular la segunda derivada de la curva $L(t)$. Introducimos las transformaciones $v_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$v_1(s, t) = \psi^s \circ \phi^t(P)$$

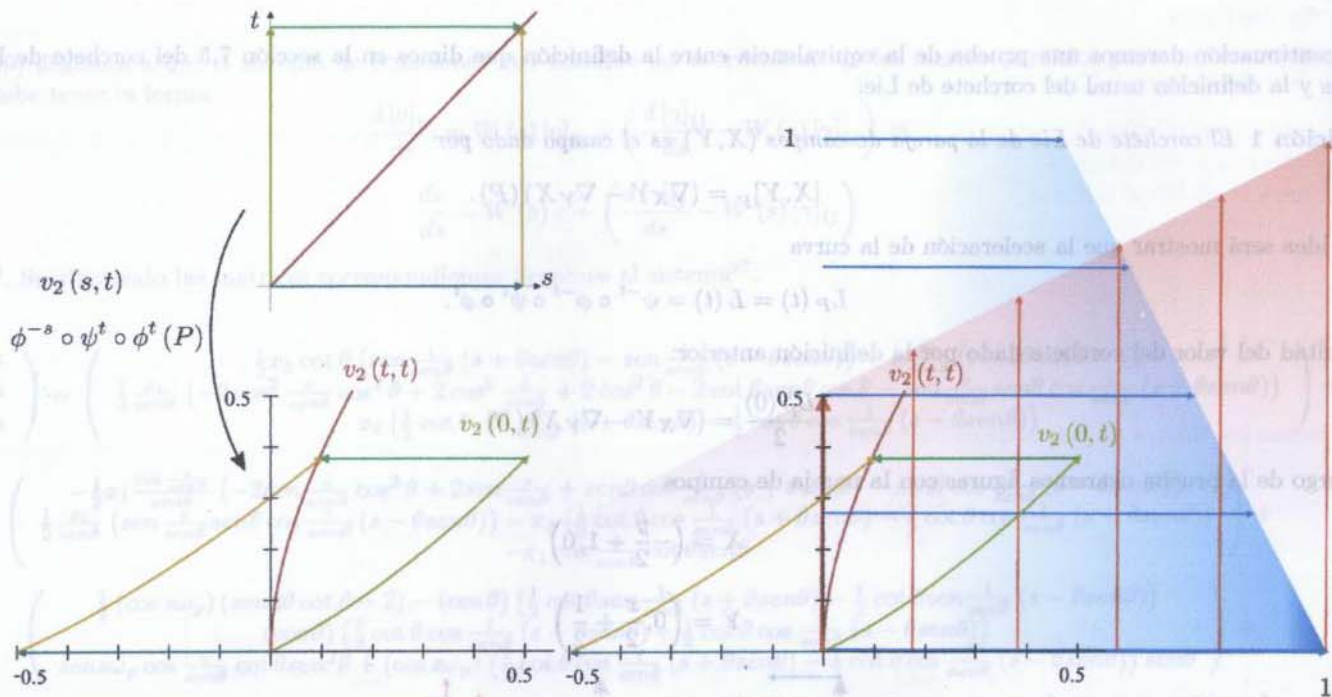
$$v_2(s, t) = \phi^{-s} \circ \psi^t \circ \phi^t(P)$$

$$v_3(s, t) = \psi^{-s} \circ \phi^{-t} \circ \psi^t \circ \phi^t(P)$$

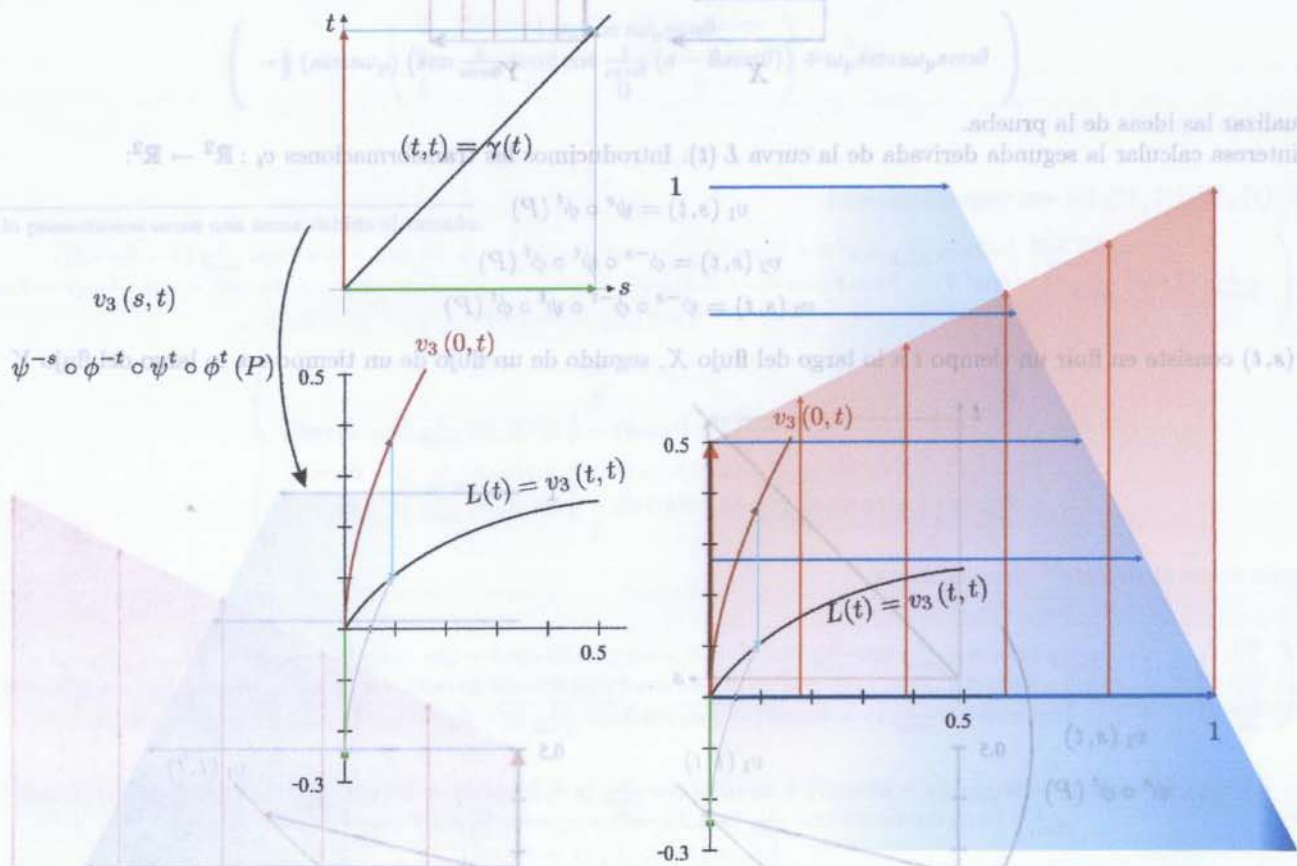
- $v_1(s, t)$ consiste en fluir un tiempo t a lo largo del flujo X , seguido de un flujo de un tiempo s a lo largo del flujo Y



2. $v_2(s, t)$ consiste en fluir un tiempo t a lo largo de X , luego t a lo largo de Y y finalmente un tiempo $-s$ a lo largo de X .



3. $v_3(s, t)$ consiste en fluir un tiempo t a lo largo de X , luego t a lo largo de Y , luego $-t$ a lo largo de X y finalmente un tiempo $-s$ a lo largo del campo Y .



Podemos expresar la curva $L(t)$ en términos de la transformación $v_3(s, t)$:

$$L(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 = v_3(t, t) = v_3(\gamma(t)); \tag{D.2}$$

es decir, $L(t)$ es la composición de las funciones (ver figura anterior)

$$\gamma(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 = (t, t)$$

$$v_3(s, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Establecemos a continuación igualdades que usaremos en el cálculo de $\frac{d^2L}{dt^2}$.

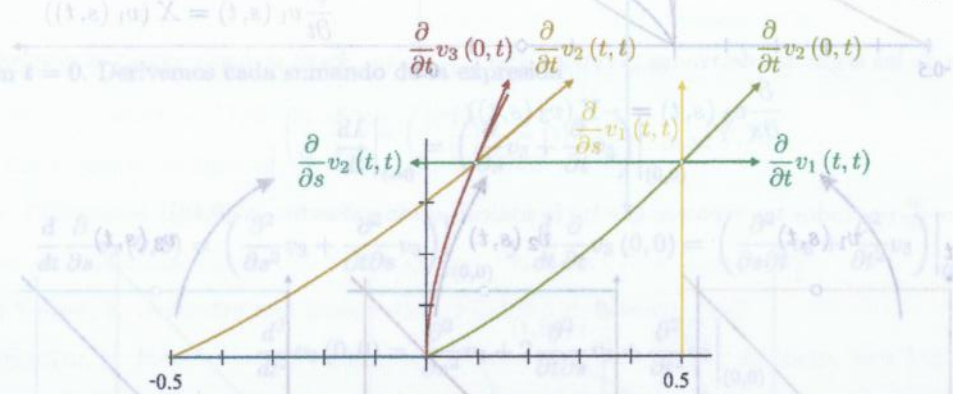
$$v_3(0, t) = v_2(t, t) = v_2(\gamma(t)) \tag{D.3}$$

$$v_2(0, t) = v_1(t, t) = v_1(\gamma(t)) \tag{D.4}$$

A partir de (D.3), (D.4), usando el hecho de que $\frac{d\gamma}{dt} = (1, 1)$ obtenemos las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial t} v_3(0, t) = \frac{d}{dt} v_2(\gamma(t)) = \left(\frac{\partial}{\partial s} v_2 \quad \frac{\partial}{\partial t} v_2 \right) \Big|_{\gamma(t)} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial s} v_2 + \frac{\partial}{\partial t} v_2 \right) \Big|_{\gamma(t)} \tag{D.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_2(0, t) = \frac{d}{dt} v_1(\gamma(t)) = \left(\frac{\partial}{\partial s} v_1 \quad \frac{\partial}{\partial t} v_1 \right) \Big|_{\gamma(t)} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial s} v_1 + \frac{\partial}{\partial t} v_1 \right) \Big|_{\gamma(t)} \tag{D.6}$$



El tamaño de los vectores en la figura no es el real.

Si evaluamos un campo vectorial W en v_3 y v_2 obtenemos, usando (D.5) y (D.6):

$$\frac{\partial}{\partial t} W \circ v_3(0, t) = \frac{d}{dt} W \circ v_2(t, t) = \frac{\partial}{\partial s} W \circ v_2 + \frac{\partial}{\partial t} W \circ v_2 \Big|_{(t,t)} ; \tag{D.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W \circ v_2(0, t) = \frac{d}{dt} W \circ v_1(t, t) = \frac{\partial}{\partial s} W \circ v_1 + \frac{\partial}{\partial t} W \circ v_1 \Big|_{(t,t)} . \tag{D.8}$$

Por otro lado tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial s} v_1(s, t) = Y(v_1(s, t)) \text{ y } \frac{\partial}{\partial s} W(v_1(s, t)) = \nabla_Y W(v_1(s, t)) \tag{D.9}$$

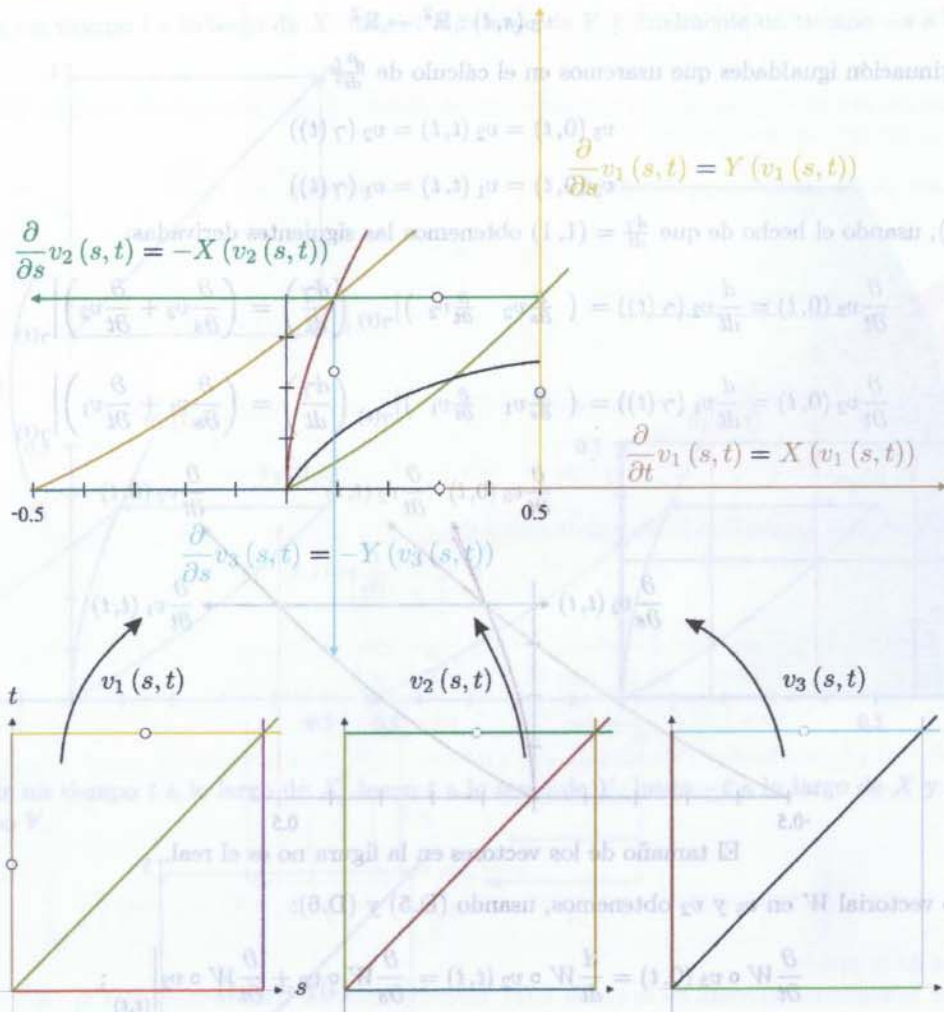
$$\frac{\partial}{\partial s} v_2(s, t) = -X(v_2(s, t)) \text{ y } \frac{\partial}{\partial s} W(v_2(s, t)) = \nabla_{-X} W(v_2(s, t)) \tag{D.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} v_3(s, t) = -Y(v_3(s, t)) \text{ y } \frac{\partial}{\partial s} W(v_3(s, t)) = \nabla_{-Y} W(v_3(s, t)) \tag{D.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_1(s, t) = X(v_1(s, t)) \text{ y } \frac{\partial}{\partial t} W(v_1(s, t)) = \nabla_X W(v_1(s, t)) \tag{D.12}$$

En la siguiente figura ilustramos las cuatro igualdades (izquierdas) anteriores:

1. D.9: La parcial $\frac{\partial}{\partial s} v_1(s, t)$ es la velocidad con que pasa el flujo Y por el punto $v_1(s, t)$, es decir $Y(v_1(s, t))$ (vector amarillo en la figura)
2. D.10: La parcial $\frac{\partial}{\partial s} v_2(s, t)$ es la velocidad con que pasa el flujo $-X$ por el punto $v_2(s, t)$, es decir $-X(v_2(s, t))$ (vector verde en la figura)
3. D.11: La parcial $\frac{\partial}{\partial s} v_3(s, t)$ es la velocidad con que pasa el flujo $-Y$ por el punto $v_3(s, t)$, es decir $-Y(v_3(s, t))$ (vector azul en la figura)
4. D.12: La parcial $\frac{\partial}{\partial t} v_1(s, t)$ es la velocidad con que pasa el flujo X por el punto $v_1(s, t)$, es decir $X(v_1(s, t))$ (vector amarillo en la figura)



Prueba. La velocidad de L

Obtengamos $\frac{dL}{dt}$ en $t = 0$ usando la regla de la cadena aplicada a (D.2):

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} v_3(\gamma(t)) = \left(\frac{\partial}{\partial s} v_3 \quad \frac{\partial}{\partial t} v_3 \right) \Big|_{\gamma(0)=(0,0)} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) \Big|_{t=0} = \left(\frac{\partial}{\partial s} v_3 + \frac{\partial}{\partial t} v_3 \right) \Big|_{(0,0)} \quad (D.13)$$

sustituyendo (D.5) y (D.11) en (D.13) obtenemos:

$$\left(-Y(v_3) + \frac{\partial}{\partial s} v_2 + \frac{\partial}{\partial t} v_2 \right) \Big|_{(0,0)} \quad (D.14)$$

sustituyendo (D.6) y (D.10) en (D.14) obtenemos:

$$\left(-Y(v_3) - X(v_2) + \frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{\partial v_1}{\partial t} \right) \Big|_{(0,0)} \quad (D.15)$$

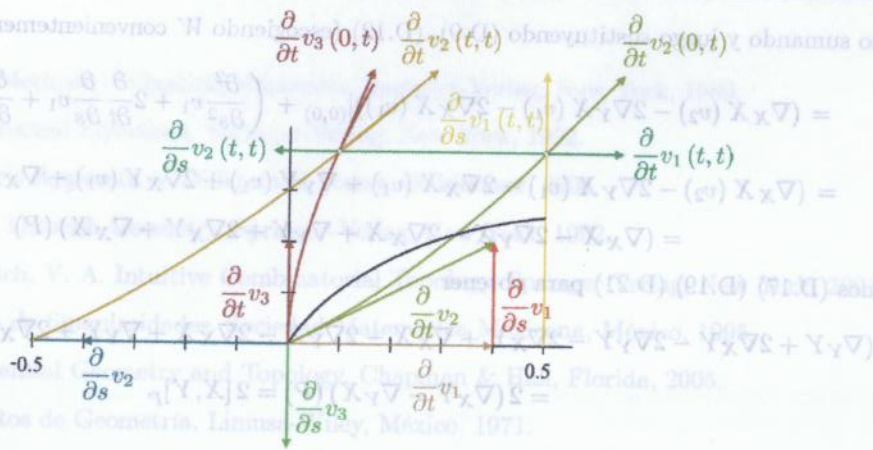
sustituimos (D.9) y (D.12) en (D.15) para obtener

$$(-Y(v_3) - X(v_2) + Y(v_1) + X(v_1)) \Big|_{(0,0)}$$

finalmente, como $v_3 = v_2 = v_1|_{(0,0)} = P$ obtenemos que

$$\frac{dL}{dt} = (-Y - X + Y + X)|_P = (0,0)$$

En la siguiente figura tenemos una interpretación geométrica de la prueba (Las parciales están evaluadas en el origen y su tamaño no es el real).



La aceleración de L

Obtengamos $\frac{d^2 L}{dt^2}$ en $t = 0$. Derivemos cada sumando de la expresión

$$\left. \frac{dL}{dt} \right|_{t=0} = \left. \left(\frac{\partial}{\partial s} v_3 + \frac{\partial}{\partial t} v_3 \right) \right|_{(0,0)}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial s} v_3(0,0) = \left. \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} v_3 + \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} v_3 \right) \right|_{(0,0)} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial t} v_3(0,0) = \left. \left(\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} v_3 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_3 \right) \right|_{(0,0)}$$

y sumemos

$$\frac{d^2}{dt^2} v_3(0,0) = \left. \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} v_3 + 2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} v_3 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_3 \right) \right|_{(0,0)} \tag{D.16}$$

Desarrollemos cada uno de los tres sumandos de la expresión anterior:

1. Sustituyendo las igualdades (D.11), haciendo $W = -Y$ en el primer sumando de (D.16) obtenemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} v_3 = \frac{\partial}{\partial s} (-Y(v_3(0,0))) = \nabla_{-Y}(-Y)(v_3(0,0)) = \nabla_Y Y(P) \tag{D.17}$$

2. Sustituyendo (D.11) en el segundo sumando de (D.16) obtenemos:

$$2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial t \partial s}(0,0) = 2 \frac{\partial}{\partial t} (-Y(v_3(0,0))) = -2 \frac{\partial}{\partial t} Y \circ v_3(0,0)$$

haciendo $W = Y$ y sustituyendo en (D.7) y luego en (D.8) obtenemos

$$2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial t \partial s}(0,0) = -2 \left(\frac{\partial}{\partial s} Y \circ v_2 + \frac{\partial}{\partial s} Y \circ v_1 + \frac{\partial}{\partial t} Y \circ v_1 \right) \Big|_{(0,0)} \tag{D.18}$$

sustituimos (D.10), (D.9) y (D.12) en (D.18)

$$-2(\nabla_{-X} Y(v_2)) - \nabla_Y Y(v_1) - \nabla_X Y(v_1) \Big|_{(0,0)} = 2\nabla_X Y(P) - 2\nabla_Y Y(P) - 2\nabla_X Y(P) \tag{D.19}$$

3. Sustituimos (D.5) en el tercer sumando de (D.16) y derivamos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} v_3(0,0) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial s} v_2 + \frac{\partial}{\partial t} v_2 \right) \Big|_{(0,0)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} v_2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} v_2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_2 \right) \Big|_{(0,0)} \tag{D.20}$$

sustituyendo (D.10) en (D.20) haciendo $W = -X$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial s} - X(v_2) + 2 \frac{\partial}{\partial t} - X(v_2) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v_2) \right) \Big|_{(0,0)} = \left(\nabla_X X(v_2) + 2 \frac{\partial}{\partial t} - X(v_2) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v_2) \right) \Big|_{(0,0)}$$

sustituyendo (D.6) y (D.8) en el segundo y tercer sumandos:

$$= \left(\nabla_X X(v_2) - 2 \left(\frac{\partial}{\partial s} X(v_1) + \frac{\partial}{\partial t} X(v_1) \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial s} v_1 + \frac{\partial}{\partial t} v_1 \right) \right) \Big|_{(0,0)}$$

derivamos el último sumando y luego sustituyendo (D.9), (D.12) (escogiendo W convenientemente) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 &= (\nabla_X X (v_2) - 2\nabla_Y X (v_1) - 2\nabla_X X (v_1))|_{(0,0)} + \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} v_1 + 2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} v_1 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_1 \right) \Big|_{(0,0)} \\
 &= (\nabla_X X (v_2) - 2\nabla_Y X (v_1) - 2\nabla_X X (v_1) + \nabla_Y Y (v_1) + 2\nabla_X Y (v_1) + \nabla_X X (v_1))|_{(0,0)} \\
 &= (\nabla_X X - 2\nabla_Y X - 2\nabla_X X + \nabla_Y Y + 2\nabla_X Y + \nabla_X X) (P)
 \end{aligned} \tag{D.21}$$

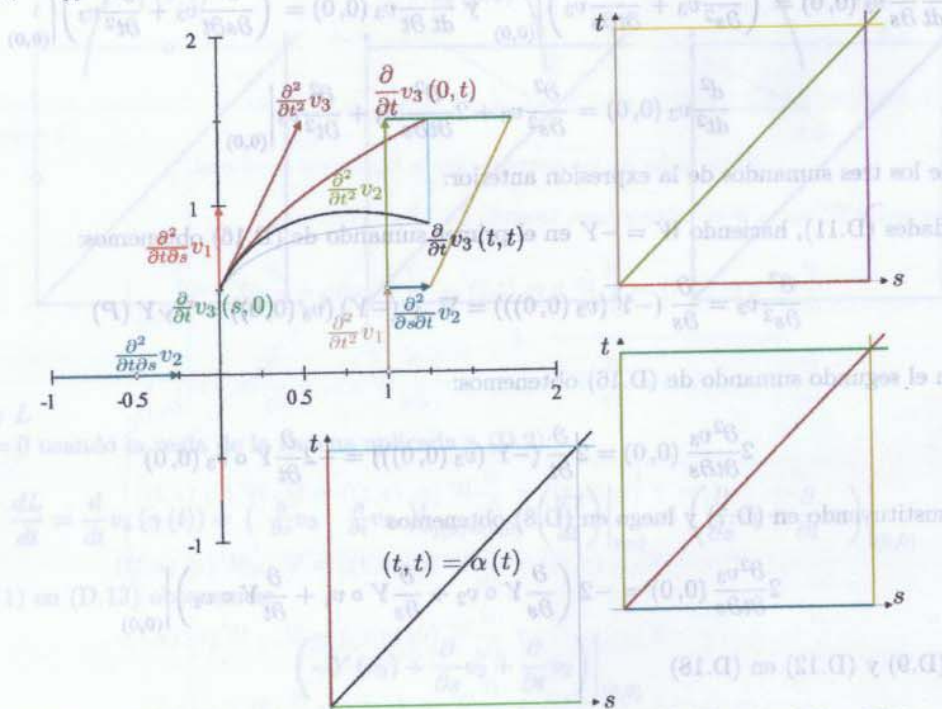
Finalmente sumemos (D.17) (D.19) (D.21) para obtener

$$\begin{aligned}
 &(\nabla_Y Y + 2\nabla_X Y - 2\nabla_Y Y - 2\nabla_X Y + \nabla_X X - 2\nabla_Y X - 2\nabla_X X + \nabla_Y Y + 2\nabla_X Y + \nabla_X X) (P) \\
 &= 2(\nabla_X Y - \nabla_Y X) (P) = 2[X, Y]_P
 \end{aligned}$$

En nuestro ejemplo varias de las segundas derivadas parciales $\frac{\partial^2}{\partial s^2} v_3$, $2\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} v_3$, $\frac{\partial^2}{\partial s^2} v_2$ se hacen cero y el corchete de Lie es

$$[X, Y]_{(0,0)} = \frac{1}{2} L''(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}, 1 \right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right);$$

en la siguiente figura $L''(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_3$ (todos los vectores que no lo indican están valuados en $(0,0)$).



Referencias

- [1] Arnold, V. I. *Mathematical Methods of classical Mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [2] Arnold, V. I. *Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [3] Bachman, David. *A Geometric Approach to Differential Forms*. Birkhäuser, 2006.
- [4] Banchoff, T. *Linear Algebra Through Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [5] Boltyanskii, V.G. y Efremovich, V. A. *Intuitive Combinatorial Topology*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [6] Bulajich, R. López, S. *Teoría de Singularidades*. Sociedad Matemática Mexicana, México, 1995.
- [7] Burns, K. y Gidea, M. *Differential Geometry and Topology*. Chapman & Hall, Florida, 2005.
- [8] Coxeter, H. S. M. *Fundamentos de Geometría*, Limusa-Wiley, México, 1971.
- [9] Do Carmo, M. *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. FC-UNAM, México, 1998.
- [10] Dodson K. y Poston. T. *Tensor Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [11] Eves H. *Estudio de las geometrias*. UTEHA, México, 1969.
- [12] Feynman, R. P. *The Feynman lectures on physics*. Addison-Wesley, 1963.
- [13] Henderson, D. W. *Differential Geometry*. Prentice Hall, New Jersey, 1998.
- [14] Hicks, N. J. *Notes on Differential Geometry*. Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1965.
- [15] Hilbert, D. Cohn-Vossen, S. *Geometry and imagination*. FC-UNAM, México, 1990.
- [16] Kobayashi, S. y Nomizu, K. *Foundations of Differential Geometry*. Interscience Publishers, New York, 1963.
- [17] Lang, S. *Algebra lineal*. Fondo Educativo Interamericano, México, 1976.
- [18] Lefschetz, S. *Lectures on differential Equations*, Princeton University Press, New Jersey, 1985.
- [19] Liusternik, L. A. *Líneas más cortas, Problemas de variaciones*. Editorial Mir, Moscú, 1985.
- [20] Mishenko, A. y Fomenko, A. *A Course of Differential Geometry and Topology*, Mir publishers, Moscow, 1988.
- [21] Misner, C. W., Thorne, K. S., y Wheeler, J. A. *Gravitation*. Freeman, San Francisco, 1973.
- [22] Morgan. F. *Riemannian Geometry a Beginner's Guide*. A K Peters, Massachusetts, 1988.
- [23] Needham, T. R. *Visual Complex Analysis*. Clarendon Press, Oxford, 1997.
- [24] Nomizu, K. *Lie Groups and Differential Geometry*. The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1956.
- [25] O'Neill, B. *Elementary Differential Geometry*. Academic Press, New York, 1966.
- [26] Ortiz, L. y Rosales E. *La historia de un empujón*. IMATE-UNAM, México, 2002.
- [27] Palmas O. A. y Reyes J. G. *Curso de geometría diferencial*. Las prensas de ciencias, México, 2005.
- [28] Palmas O. A. y Sánchez H. *Geometría Riemanniana*. Las prensas de ciencias, México, 2007.
- [29] Penrose, R. *El camino a la realidad*. Debate, España, 2006.
- [30] Pogorelov, A. V. *Geometría diferencial*. Editorial Mir, Moscú, 1977.
- [31] Prasolov, V. V. *Intuitive Topology*. Mathematical World, Vol. 4, AMS, 1995.
- [32] Quiroga, R. *Formas Diferenciales y Grupos de Lie*. CIMAT, México, 2008.
- [33] Struik, D. J. *Lectures on Classical Differential Geometry*. Dover, New York, 1988.
- [34] Spivak, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Houston, 1999.
- [35] Thorne, K. *Black Holes and Time Warps*. W. W. Norton & Company. (1995a).
- [36] Valiron, G. *The Classical Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Math SCI Press, Massachusetts, 1986.
- [37] Wardle, K. L. *Differential Geometry*. Routledge & Kegan Paul, London, 1965.
- [38] Weeks, J. R. *La Forma del Espacio*. FC-UNAM, México, 1999.