



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**POSGRADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS**

FACULTAD DE CIENCIAS

Métodos variacionales y la órbita ocho

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

JOSUÉ MELÉNDEZ SÁNCHEZ

DIRECTORA DE TESIS: DRA. MARTHA ALVAREZ RAMÍREZ

MÉXICO, D.F.

MAYO, 2009



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido

Introducción	1
1 Problema de n cuerpos	5
1.1 Soluciones periódicas del problema de n cuerpos	7
1.2 Resultados previos	10
1.2.1 Convergencia débil	12
1.2.2 Espacios reflexivos	14
1.2.3 Espacios de Sobolev	15
1.3 Métodos variacionales de minimización	17
1.4 Ecuaciones de Euler-Lagrange	20
1.5 Principio de Palais	26
1.6 El problema de n cuerpos y la condición $(NC)_\nu$	28
2 El problema de 2 cuerpos	33
2.1 Leyes de Kepler	33
2.2 Minimizando el funcional de acción	39
2.3 Acción de las órbitas Keplerianas elípticas y colineales	41
2.4 El teorema de Gordon	45
3 La órbita ocho	49
3.1 Coordenadas de Jacobi	49
3.2 El problema plano de 3 cuerpos	52
3.3 La fibración de Hopf	53
3.4 El espacio reducido	53

3.5	El problema de minimizar	55
3.6	Puntos sobre la esfera	58
3.6.1	Puntos de colisión doble	58
3.6.2	Los puntos de Lagrange	60
3.6.3	Puntos de Euler	62
3.7	Configuración de triángulo isósceles	64
3.8	Energía cinética en términos de $\dot{\xi}_1$ y $\dot{\xi}_2$	68
3.9	El potencial en términos de (ξ_1, ξ_2) y de (z_1, z_2)	70
3.10	Lema de Hsiang	72
3.11	El potencial en términos de coordenadas esféricas	73
3.12	El teorema principal	75
3.13	Estructura de la demostración del Teorema 3.5	75
3.14	Exclusión de las colisiones	76
3.15	Métrica orbital	80
3.15.1	La longitud ℓ_0 en coordenadas esféricas	83
3.16	Simetrías: Demostración de la existencia	85
Apéndices		100
A Curva equipotencial		101
A.1	Curva equipotencial en los puntos de Euler	101
A.2	Curva equipotencial en M_1	102
B Fórmula integral del ángulo de rotación		105
Referencias		109

Lista de Figuras

1.1	Solución homográfica de 3 cuerpos.	7
1.2	Configuración de Lagrange.	9
1.3	Ejemplos de coreografías simples y no simples.	9
1.4	Péndulo simple.	20
1.5	$ x(0) - x(\tau_x) \cdot \text{sen } \phi = x(0) \cdot \text{sen } \theta$	29
2.1	Órbitas solución del Problema de Kepler	37
2.2	Solución extendida con una y dos componentes, respectivamente.	44
3.1	El problema de 3 cuerpos en coordenadas de Jacobi.	50
3.2	La esfera de las formas \mathbb{S}_f^2	54
3.3	Configuración de Lagrange.	60
3.4	Triángulos con orientación positiva y negativa.	61
3.5	Orientación positiva.	62
3.6	Orientación negativa.	62
3.7	Triángulo isósceles $r_{13} = r_{23}$	65
3.8	Triángulo isósceles $r_{23} = r_{21}$	66
3.9	Meridianos correspondientes a las configuraciones isósceles.	68
3.10	Curva equipotencial $U(\theta, \varphi) = \frac{5}{\sqrt{2}}$, asociada a los puntos de Euler, dibujada en la esfera unitaria de las formas.	74
3.11	Curva equipotencial dada por la curva de nivel U_E dada en (3.13).	85
3.12	Áreas encerradas por las curvas sobre la esfera \mathbb{S}_f^2 y las correspondientes órbitas en el plano inercial.	91
3.13	<i>Shape</i> curva que inicia y termina en una configuración colineal en el ecuador.	92

3.14	$\Delta\theta$ es el ángulo formado por dos líneas rectas en el plano inercial, las cuales contienen la configuración inicial y final.	93
3.15	Órbita de la <i>figura ocho</i> , calculado con las condiciones iniciales de Carles Simó [9].	94
3.16	Órbita ocho en el espacio de configuración reducido, figura tomada de [9].	95
3.17	Reflexión de un subarco minimizador con respecto al ecuador, caso (i), y a un meridiano, caso (ii), respectivamente.	96
3.18	Reflexión de un subarco minimizador con respecto al meridiano que pasa por el punto de Euler E_3	97
3.19	Comportamiento cualitativo del momento angular $q \wedge \dot{q}$, calculado con las condiciones iniciales de Carles Simó [9].	98
3.20	Órbita ocho en el espacio de configuración reducido.	99
A.1	Gráfica de la función $U _{M_1}$	103

Introducción

En el transcurso de la historia de la Humanidad diversas culturas han interpretado y tratado de dar razones acerca del movimiento de los cuerpos. Por ejemplo, para poder medir el tiempo con los cuerpos celestes, los primeros astrónomos desarrollaron modelos empíricos con base en las regularidades observadas en el paso de los astros por el cielo. Sin embargo, fue hasta el siglo XVII en que se dio la interpretación adecuada de las causas del movimiento. Intrigado por las leyes de la caída de los cuerpos descubiertas por Galileo, por las leyes de Kepler, y por el movimiento de los astros, Isaac Newton formuló la forma clásica de la interacción gravitacional.

El problema central de la Mecánica Celeste es el estudio del problema de n cuerpos. Se puede decir que el problema de n cuerpos fue formulado por primera vez en 1687 con la publicación de los *Principia* de Newton. Es en este contexto que las leyes de la mecánica juntamente con la ley de gravitación universal permiten traducir en ecuaciones diferenciales los movimientos de los cuerpos celestes, y por lo tanto ser estudiados desde el punto de vista de un sistema dinámico. Es decir, como las soluciones de las ecuaciones diferenciales en el espacio de fases.

El problema de 2 cuerpos es completamente integrable y se conocen todas sus soluciones, las cuales son secciones cónicas. Sin embargo, el problema de n cuerpos para $n \geq 3$ es un problema abierto.

Un camino para estudiar el problema de n cuerpos es el estudio de órbitas periódicas, las cuales son importantes porque están definidas para todo tiempo t y satisfacen la condición $x(t) = x(t + T)$ para alguna $T > 0$, llamada período. La construcción de estas órbitas puede ser realizada usando el principio de mínima acción, el cual describiremos en este trabajo.

El cálculo de variaciones consiste en encontrar extremos (máximo, mínimo o punto silla) de funciones cuyos dominios están en un espacio infinito dimensional: el espacio de curvas.

La función Lagrangiana $L(x, \dot{x})$ es la diferencia de la energía cinética $\frac{1}{2}|\dot{x}|^2$ y la energía potencial $-U(x)$, y el funcional de acción $\mathcal{A}(x)$ es la integral del Lagrangiano. Denotamos por V como el espacio de configuración. Usualmente éste es definido como un subespacio de $(\mathbb{R}^2)^n$ ó $(\mathbb{R}^3)^n$ con centro de masa fijo en el origen. Introducimos el espacio de Sobolev $\mathfrak{X} = H^1([0, T], V)$ como el espacio de curvas cerradas o lazos en el espacio de configuración, las cuales tienen período mínimo \bar{T} , donde T es un número

real positivo. Luego, definimos el funcional

$$\mathcal{A} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad \mathcal{A}(x(t)) = \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t)) dt,$$

como el *funcional de acción*, donde $x : [0, T] \rightarrow V$. Luego los puntos críticos del funcional de acción dan origen a las ecuaciones de Euler–Lagrange, y como consecuencia las soluciones del problema de n cuerpos definido por $\ddot{x} = \nabla U(x)$, son el conjunto de curvas “extremales” del funcional de acción. Esto es conocido como el *principio de mínima acción*. Luego los puntos críticos del funcional de acción del espacio de trayectorias \mathfrak{X} son soluciones periódicas del problema de n cuerpos, pero posiblemente con colisiones.

El funcional de acción es *coercitivo* si toma valores infinitos cuando el momento de inercia \mathcal{I} se hace grande. Esta propiedad asegura que los mínimos absolutos del funcional sean finitos. Existen dos caminos naturales para asegurar la coercitividad y evitar que los puntos críticos no se alcancen en el infinito: restricciones topológicas (pueden ser homológicas u homotópicas) y restricciones de simetría.

Por otro lado, existen varias razones por las cuales los métodos variacionales no son muy usuales en el estudio de soluciones del problema de n cuerpos.

- El funcional de acción del problema de n cuerpos no es coercitivo, de tal forma que el mínimo puede ser alcanzado en el “infinito”.
- El mínimo puede ser alcanzado en una órbita con colisión.

Si \mathfrak{X} es un espacio de Banach reflexivo, $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$ es un subconjunto débilmente cerrado, y la acción $\mathcal{A} \not\equiv +\infty$, es semicontinua inferiormente y coercitiva, entonces el Teorema de Tonelli garantiza la existencia de minimizadores (ver [28]).

La primera utilización de este método en el problema de n cuerpos fue realizada en una nota de Poincaré que data de 1896 (ver [22]). Poincaré estudió los mínimos de la acción para el problema de 3 cuerpos en el plano con un potencial de tipo “*strong force*” (es decir, $U_\alpha = 1/|x|^\alpha$ con $\alpha \geq 2$) en una clase de homología del espacio de configuraciones módulo rotaciones. Más precisamente, él se interesó en las soluciones periódicas, de tal forma que después de un cierto tiempo T , la configuración de los 3 cuerpos es igual a la configuración inicial, salvo rotaciones.

Por el Lema de Du Boid Raimond, los puntos críticos del funcional de acción en un subconjunto $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$ son también soluciones del problema de n cuerpos, garantizando que existen suficientes “variaciones admisibles” en \mathfrak{X}_0 . Si este subconjunto tiene la propiedad de que todos los puntos críticos de $\mathcal{A}(x)$ son soluciones del problema de n cuerpos, entonces es llamado subconjunto *admissible*.

Se dice que un conjunto $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$ satisface la condición no central (NC) con índice ν si todo elemento $x \in \mathfrak{X}_0$ satisface la desigualdad

$$x(0) \cdot x(\tau_x) \leq (1 - \nu)|x(0)| \cdot |x(\tau_x)|$$

para algún $\tau_x \in (0, T]$ y $\nu \in (0, 2]$, la cual da información del ángulo formado por la posición inicial $x(0)$ y la posición después de un tiempo τ_x , $x(\tau_x)$.

Se demuestra que si \mathfrak{X}_0 es un subconjunto débilmente cerrado de \mathfrak{X} , y satisface la condición no central, entonces el funcional de acción tiene un ínfimo en \mathfrak{X}_0 .

Luego, se debe tomar un subconjunto admisible con la condición no-central, y considerar el problema de minimización del funcional de acción en este subconjunto. Con estas condiciones podremos encontrar puntos críticos del funcional de acción que resuelve el problema de los n cuerpos.

Por otro lado, si imponemos condiciones de simetría al espacio de órbitas podemos buscar soluciones periódicas con la simetría dada.

Sea ρ la representación ortogonal de algún grupo G en el subespacio \mathfrak{X} . El funcional de acción restringido al espacio de elementos ρ -invariantes tiene un conjunto de puntos críticos, llamados puntos ρ -críticos. Usando el criterio de Palais [21], si la acción $\mathcal{A}(x)$ es ρ -invariante entonces los puntos ρ -críticos son puntos críticos del funcional en todo el espacio \mathfrak{X} .

En el Capítulo 2 veremos que las órbitas periódicas en el problema de 2 cuerpos son elipses. Nos referiremos a éstas como elipses Keplerianas, dentro de las cuales se incluyen las elipses degeneradas llamadas órbitas de colisión–expulsión, las cuales son segmentos de recta con punto final en el origen. Éstas representan las soluciones con colisión del problema de 2 cuerpos. A lo largo del capítulo, se estudia el método de minimización de la acción para la búsqueda de soluciones periódicas del problema de Kepler. Es decir, buscamos soluciones periódicas de la ecuación $m\ddot{x} = \alpha \frac{x}{|x|^3}$

en \mathfrak{X} . En este caso la acción es $\mathcal{A}(x) = \int_0^T \left(\frac{m}{2} |\dot{x}(t)|^2 + \frac{\alpha}{|x(t)|} \right) dt$ y buscamos sus minimizadores en el espacio de lazos $\mathfrak{X} = H^1([0, T], \mathbb{C})$ de período T que dan k vueltas alrededor del origen. En 1977, en [16] Gordon demostró que para $k = \pm 1$, los minimizadores son exactamente las soluciones elípticas de período T y excentricidad arbitraria, mientras que si $k \neq 0, \pm 1$ los minimizadores son soluciones de tipo colisión–expulsión. La convexidad de la acción garantiza que una sucesión de órbitas con varias colisiones y expulsiones en un intervalo de tiempo T tienen una acción mayor que la asociada a una solución con una única expulsión–colisión durante el mismo período de tiempo, excluyendo con esto que los puntos críticos sean órbitas con colisión. Además, todas las elipses de período T tienen la misma acción, la cual es una función del eje mayor de la elipse, de la energía y del período. Por lo tanto hay toda una familia de minimizadores que comparten el mismo valor de la acción. En la frontera del conjunto de esta familia están las órbitas de colisión–expulsión.

Cuando $n \geq 3$ los movimientos más simples son los llamados homográficos, y son tales que la configuración no cambia con el tiempo. Si $x \in \mathbb{R}^m$ para $m = 1, 2$, ó 3 estos movimientos necesariamente son de tipo Kepleriano; si en particular la energía $\frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - U(x)$ es negativa, la solución es periódica, y cada cuerpo se mueve describiendo una elipse de igual excentricidad.

Una solución coreográfica del problema de n cuerpos es una solución periódica cuya órbita es unión de curvas, y cada una de esas curvas es una trayectoria de al menos dos cuerpos. Si existe sólo una curva, entonces todas las masas van una tras otra haciendo un lazo. En este caso la coreografía se llama *coreografía simple*.

Exceptuando la solución de triángulo equilátero Lagrangiano con masas iguales, no había sido posible dar algún ejemplo de solución coreográfica para el problema de 3 cuerpos, hasta el año 1993, en que fue descubierta la órbita en forma de figura ocho. Esta órbita fue primero encontrada numéricamente por Chris Moore [18], y posteriormente A. Chenciner y R. Montgomery [9] demostraron su existencia por métodos variacionales.

El Capítulo 3 está dedicado a estudiar la demostración de la existencia y configuración de una curva libre de colisión, la cual minimiza la acción del problema plano de 3 cuerpos con masas iguales, y además une una configuración colineal de Euler (E_3), con otra configuración isósceles (M_1) en el tiempo $\bar{T} = 12T$. Esta curva comprende un doceavo de la solución en forma de ocho. En otras palabras, imponiendo ciertas simetrías a la órbita y usando los métodos variacionales demostraremos la existencia de una solución periódica del problema plano de 3 cuerpos libre de colisiones, y por último demostraremos que la configuración de la órbita tiene la forma de ocho, donde el punto de autointersección de la curva está en el origen, y coincide con el centro de masa. A lo largo del período \bar{T} , las tres masas pasan a través de las configuraciones colineales de Euler de forma periódica, alternando con configuraciones isósceles. En resumen, damos los detalles de las demostraciones del artículo [9], complementando con técnicas proporcionadas en la tesis doctoral de Kuo-Chang Chen [5] y el artículo de Gordon [16].

Capítulo 1

Problema de n cuerpos

Consideremos n partículas de masa $m_i > 0$ moviéndose bajo la acción gravitatoria de Newton en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 con $n > 1$. Dadas posiciones y velocidades para las n partículas, calcular sus posiciones y velocidades para todo tiempo t (es decir caracterizar la totalidad de los posibles movimientos) es lo que se conoce como el *problema de n cuerpos*.

A partir de las leyes de la dinámica de Newton las ecuaciones de movimiento de las n partículas son n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden definidas en un conjunto abierto de \mathbb{R}^3 , dadas por:

$$m_k \ddot{x}_k = \frac{\partial}{\partial x_k} U(x), \quad k = 1, \dots, n \quad (1.1)$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^3$ es la posición de m_k , y

$$U(x) = U(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|},$$

es el negativo de la función potencial. Por simplicidad nos referiremos a éste simplemente como el *potencial*.

Sea $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{3n}$. El sistema (1.1) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= M^{-1}y, \\ \dot{y} &= \nabla U(x) \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde $M = \text{diag}[m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n]$ es la matriz de masas. Las ecuaciones (1.2) son llamadas ecuaciones de Hamilton de (1.1), y definen un sistema dinámico en \mathbb{R}^{6n} . Existen 10 integrales clásicas que permiten reducir la dimensión del espacio

fase a una variedad de dimensión $6n - 10$ (llamada *variedad integral*):

$$\begin{array}{ll}
\sum_{k=1}^n (m_k x_k - t y_k) & 3 \text{ componentes del centro de masa} \\
\sum_{k=1}^n y_k & 3 \text{ componentes del momento lineal} \\
\sum_{k=1}^n x_k \times y_k & 3 \text{ componentes del momento angular} \\
H = K(M^{-1}y) - U(x) & \text{integral de energía}
\end{array}$$

donde $K(\dot{x}) = K(M^{-1}y) = \frac{1}{2}y^T M^{-1}y$ es la *energía cinética*. La integral de energía $H = H(x, y)$ es llamada función Hamiltoniana de (1.1).

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el centro de masa está en el origen:

$$\sum_{k=1}^n m_k x_k = 0. \quad (1.3)$$

El *espacio de configuración* o de *posiciones* V de (1.1) es un espacio vectorial de dimensión $3(n - 1)$, el cual consta de todos los $x \in \mathbb{R}^{3n}$ que satisfacen la ecuación del centro de masa (1.3).

Sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canónica de \mathbb{R}^3 . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el vector momento angular tiene la misma dirección que \mathbf{e}_3 . Ya que el sistema (1.1) es invariante bajo rotaciones (una acción $SO(2)$ en la variedad integral) alrededor del eje \mathbf{e}_3 , la dimensión del sistema puede ser reducida a $6n - 11$ por el cociente de las simetrías de rotación. Si \mathcal{M} denota la variedad integral, la variedad integral reducida y el espacio de configuración reducido se definen como $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/SO(2)$ y $\tilde{V} = V/SO(2)$, respectivamente.

La variedad integral $\mathcal{M} = \mathcal{M}(h, \omega)$ dependiente de la energía total h y el momento angular ω es una subvariedad de dimensión $6n - 10$ del haz tangente TV en V , y $\tilde{\mathcal{M}}$ es una subvariedad $6n - 11$ dimensional de la subvariedad $T\tilde{V}$.

El problema de n cuerpos está resuelto para $n = 2$.

En el caso del problema plano de n cuerpos, tenemos 6 integrales clásicas en lugar de 10. La variedad integral reducida y espacio de configuración reducido son de dimensión $4n - 7$ y $2n - 3$, respectivamente. En particular, el problema de 2 cuerpos reducido al *problema de Kepler* es completamente integrable.

Sea $\Delta = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^3)^n : x_j = x_i \text{ para alguna } i \neq j\}$ es el *conjunto de colisión*. $\Delta \cap V$ es el conjunto de singularidades del campo vectorial en TV definido por (1.2). Al menos que se especifique otra cosa, cuando hablemos de una “solución” de (1.1) nos referiremos a soluciones sin colisión, es decir soluciones en $V \setminus \Delta$.

El problema de 2 cuerpos está completamente resuelto, porque puede ser reducido al llamado problema de Kepler, cuyas soluciones son secciones cónicas: círculos, elipses, parábolas e hipérbolas. Sin embargo el problema de 3 cuerpos ($n = 3$)

presenta una dificultad mayor que el problema de 2 cuerpos, y la comprensión de su dinámica aun está lejos de ser entendida. Muchos de los resultados obtenidos para el problema de 3 cuerpos pueden ser generalizados para $n > 3$.

Debido a la dificultad de resolver el problema de n cuerpos para $n \geq 3$, siguiendo la idea de Poincaré, un enfoque consiste en buscar y estudiar propiedades de soluciones periódicas, es decir, soluciones $x(t)$ tales que $x(t) = x(t + T)$, donde T es llamado período.

1.1 Soluciones periódicas del problema de n cuerpos

Existen dos importantes clases de soluciones periódicas : soluciones homográficas y soluciones coreográficas.

- Soluciones homográficas

Una *solución homográfica* del problema de n cuerpos es una solución donde la configuración de los n cuerpos permanece semejante para todo tiempo t . En la Figura 1.1 cada partícula se mueve sobre una órbita elíptica, en todo momento la configuración es de un triángulo equilátero, es decir, podrá variar de tamaño pero nunca de forma. Una solución homográfica es llamada *homotética* si la configuración no tiene rotación. Si una solución periódica homográfica es rígida en el sentido de que la configuración de los n cuerpos permanece congruente a su configuración inicial, entonces es llamada *equilibrio relativo*. Un equilibrio relativo es un equilibrio del sistema (1.1) en un sistema de coordenadas rotatorio. Existen movimientos homotéticos y equilibrios relativos en el problema plano de n cuerpos, así como otros movimientos homográficos, las llamadas configuraciones centrales.

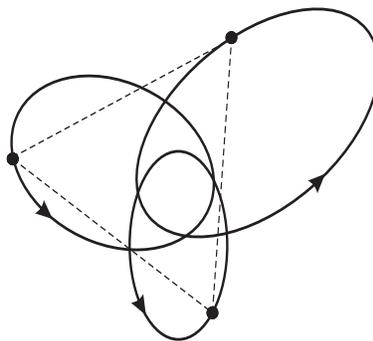


Figura 1.1: Solución homográfica de 3 cuerpos.

Definición 1.1. Se dice que n cuerpos forman una *configuración central* $x = (x_1, \dots, x_n)$ en el tiempo t , si existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda m_j x_j = \frac{\partial U}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Es decir, cuando las posiciones son proporcionales a sus velocidades. Si

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |x_i|^2$$

es el momento de inercia, se cumple

$$\lambda = \frac{-U(x)}{2\mathcal{I}(x)} < 0.$$

Equivalentemente,

$$\nabla U(x) = \lambda \nabla \mathcal{I}(x).$$

Notemos que el potencial $U(x)$ es una función homogénea de grado -1 , y se verifica que $\lambda = -\frac{U(x)}{2\mathcal{I}(x)}$, de tal forma que la anterior identidad se puede escribir como

$$2\mathcal{I}(x)\nabla U(x) + U(x)\nabla \mathcal{I}(x) = 0.$$

Luego, x es una configuración central si y sólo si es un punto crítico de $\tilde{U} := \sqrt{\mathcal{I}U}$.

La propiedad más simple que caracteriza a una configuración central es que define un movimiento homotético si las velocidades iniciales son elegidas convenientemente, por ejemplo si todas son cero. Por otro lado, notemos que \tilde{U} es una función homogénea de grado cero y es invariante bajo transformaciones ortogonales, de tal forma que dos configuraciones centrales son *equivalentes* si están relacionadas por dilataciones y transformaciones ortogonales. Como consecuencia, cuando se habla del número de configuraciones centrales, lo que significa es el número de clases de equivalencia de configuraciones centrales, o equivalentemente, el número de $O(3)$ -órbitas de configuraciones centrales en la *esfera de configuración* (o *esfera de las formas, elipsoide de masas*): $\mathbb{S} = V \cap \mathcal{I}^{-1}(1)$ donde \mathbb{S} es la $(3n - 4)$ -esfera para el problema espacial de n cuerpos y es una $(2n - 3)$ -esfera para el caso plano.

Las configuraciones centrales son importantes en mecánica celeste por varias razones. Cuando las n partículas tienden a colisión o se escapan al infinito, las posiciones de las partículas tienden a una configuración central, [25]. Además, la topología de las variedades integrales $\mathcal{M}(h, w) \subset TV$ cambia en una configuración central.

Para el problema de 3 cuerpos, existen exactamente 5 configuraciones centrales: dos triángulos equiláteros de Lagrange, y tres configuraciones colineales o de Euler.

En 1767 Euler encontró órbitas periódicas colineales, en las cuales los 3 cuerpos de masas arbitrarias se mueven a lo largo de una línea recta. Posteriormente, en 1772 Lagrange descubrió, que para el problema de 3 cuerpos, existe un equilibrio relativo en forma de triángulo equilátero, ver la Figura 1.2.

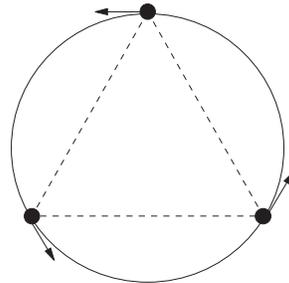


Figura 1.2: Configuración de Lagrange.

- Soluciones coreográficas

Una *solución coreográfica* (coreografía) del problema de n cuerpos es una solución periódica que es unión de curvas cerradas, cada una de las cuales es la trayectoria de al menos dos cuerpos. Si ésta es una única curva cerrada entonces la solución es llamada *coreografía simple*, ver la Figura 1.3.

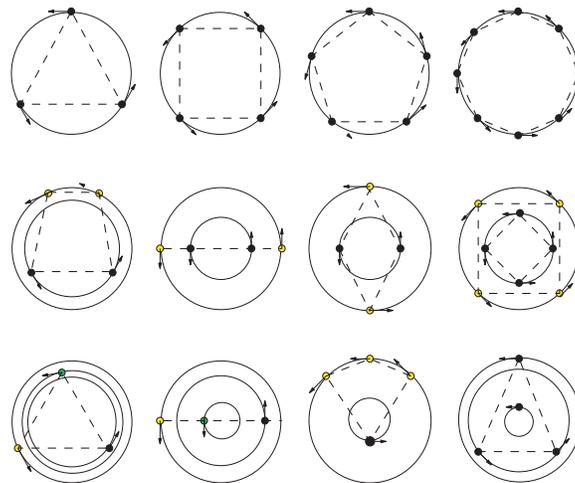


Figura 1.3: Ejemplos de coreografías simples y no simples.

Una órbita Kepleriana elíptica es una coreografía si y sólo si las dos masas son iguales. El primer ejemplo de coreografía en el problema de los 3 cuerpos es el triángulo equilátero de Lagrange con masas iguales.

1.2 Resultados previos

En esta sección presentamos algunos resultados de Análisis Funcional que son necesarios en las demostraciones de algunos resultados fundamentales para este trabajo.

Definición 1.2. Un *espacio vectorial normado* $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial (sobre un campo K , que puede ser real o complejo), equipado con una función $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ llamada *norma*, la cual cumple:

- i) $\|x\| \geq 0$ donde $x \in X$, la igualdad se cumple si y sólo si $x = 0$,
- ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para toda $x \in X$ y $\lambda \in K$,
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para toda $x, y \in X$.

Ejemplo 1.3. Espacios normados.

1. $C^0[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow K \mid f \text{ es continua en } [a, b]\}$ con $\|f\| = |f|_0 = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

2. $C^1[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow K \mid f \text{ es continuamente diferenciable en } [a, b]\}$ con

$$\|f\| \equiv |f|_1 = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

3. $C^0[a, b]$ con $\|f\| \equiv \|f\|_2 = \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{1/2}$.

Proposición 1.4. *Todo espacio vectorial normado es un espacio métrico, es decir, si $\|\cdot\|$ es la norma de X , entonces la función $d(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por $d(x, y) = \|x - y\|$ satisface:*

- i) $d(x, y) \geq 0$,
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$,
- iii) $d(x, x) = 0$,
- iv) $d(x, y) \neq 0$ si $x \neq y$,
- v) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

para todo $x, y, z \in X$

Definición 1.5. (Convergencia Fuerte) Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio vectorial normado X , *converge fuertemente* si existe un elemento $x \in X$ tal que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Se dice que x es el *límite fuerte* de $\{x_n\}$ y se denota como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, ó simplemente $x_n \rightarrow x$.

Definición 1.6. Un espacio métrico es *completo* si toda sucesión de Cauchy converge (fuertemente) en X .

Definición 1.7. Si X es un espacio vectorial normado y completo, entonces X es un *espacio de Banach*.

Ejemplo 1.8. Espacios de Banach.

1. Los espacios de funciones $C^0[a, b]$ con la norma $\|f\|_0$ y $C^1[a, b]$ con la norma $\|f\|_1$ son espacios de Banach.
2. $C^0[a, b]$ con la norma $\|f\|_0$ no es un espacio de Banach ([4], página 38).

Definición 1.9. Sea X un espacio vectorial (sobre un campo K , que puede ser real o complejo). Un *producto interior* de X es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow K$ la cual cumple:

- i) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
- ii) $\langle cx, y \rangle = c\langle x, y \rangle$,
- iii) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$,
- iv) $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0$

para todo $x, y, z \in X$ y $c \in K$.

Proposición 1.10. *Todo espacio vectorial con un producto interior define una norma dada por $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.*

Definición 1.11. Un *espacio de Hilbert* es un espacio vectorial completo con la métrica definida por el producto interior.

Observación 1.12. Cada espacio de Hilbert es un espacio de Banach con la norma inducida por el producto interior que tiene asociada el espacio de Hilbert.

Ejemplo 1.13. El espacio

$$L^2[a, b] = \{f(x) \text{ con } \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

donde la integral es tipo Lebesgue, equipado con el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$

es un espacio de Hilbert, ver [15].

Se designa por X^* al *espacio dual* de X , es decir el espacio de todos los funcionales continuos sobre X . Si X un espacio normado entonces el espacio dual X^* está equipado con la norma

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

Definición 1.14. Sean X y Y espacios de Banach. Un operador $T : X \rightarrow Y$ es *acotado* si existe una constante $c > 0$ tal que $\|T(x)\| < c\|x\|$ para toda $x \in X$.

Teorema 1.15 (Representación de Riesz). *Todo funcional lineal acotado F en un espacio de Hilbert X puede ser representado en términos del producto interior, es decir,*

$$F(x) = \langle x, v \rangle$$

donde v es único y depende de F , y tiene norma $\|v\| = \|F\|$.

Demostración. Ver la demostración en [15] página 189. □

1.2.1 Convergencia débil

En un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, hablamos de la *topología fuerte* cuando ésta es la generada por la norma del espacio $\|\cdot\|$, es decir, los abiertos son unión arbitraria de bolas abiertas de X y diremos que la topología fuerte es la topología inducida por la norma $\|\cdot\|$.

El siguiente teorema nos dice que hay pocos conjuntos compactos en espacios de dimensión infinita con la topología inducida por la norma.

Teorema 1.16 (F. Riesz). *Sea X un espacio vectorial normado equipado con la topología fuerte, tal que bola unitaria $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ es compacta. Entonces X tiene dimensión finita.*

Demostración. Ver la demostración en [4] página 92. □

Es decir, la bola unitaria B_X en un espacio de Banach de dimensión infinita nunca es compacta con la topología fuerte, así concluimos que los conjuntos cerrados y acotados, con la topología fuerte, de un espacio de Banach en general no son compactos, habremos de introducir una nueva topología en la que se cumpla esto.

Las dos topologías de mayor importancia en espacios de Banach, son la topología débil y la topología débil*, recibiendo dichos nombres por ser las topologías mas débiles que la inducida por la norma, es decir, tienen *menos cantidad de abiertos*. Estas topologías están más relacionadas con la estructura lineal.

La topología débil se puede definir en cualquier espacio vectorial normado, en cambio, la topología débil* sólo se define en los espacios duales, aunque esto último tiene como compensación que la bola unitaria en el espacio dual resulta ser débil*-compacta.

Definiremos una topología particular para un espacio normado X , denotada por $\sigma(X, X^*)$. Sea $f \in X^*$, se designa por $\varphi_f : X \rightarrow K$ a la función definida por $\varphi_f(x) = f(x)$ con $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$.

Definición 1.17. La *topología débil* sobre X , denotada por $\sigma(X, X^*)$, es la topología menos fina (con un número mínimo de abiertos) sobre X , tal que todas las aplicaciones $\{\varphi_f\}_{f \in X^*}$ son continuas.

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ converge *converge débilmente* a un elemento $x \in X$ si la sucesión converge en el espacio $(X, \sigma(X, X^*))$ y se denota por $x_n \rightharpoonup x$.

Lema 1.18. Sea $\{x_n\}$ una sucesión débilmente convergente en un espacio normado X . Entonces:

- i) El límite débil x de $\{x_n\}$ es único.
- ii) Toda subsucesión de $\{x_n\}$ converge débilmente a x .
- iii) La sucesión $\{\|x_n\|\}$ es acotada.

Demostración. Ver la demostración en [15], página 258. □

Definición 1.19. Sea Ω un subconjunto de X . Decimos que Ω es *débilmente cerrado* si para toda sucesión $\{x_n\}$ en Ω tal que $x_n \rightharpoonup x$, se cumple que $x \in \Omega$.

Si $f \in X^*$ y $x \in X$ denotaremos a $f(x)$ por $\langle f, x \rangle$.

Proposición 1.20. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X . Entonces $x_n \rightharpoonup x$ si y sólo si $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$, para toda $f \in X^*$.

Lema 1.21 (Convergencia fuerte y débil). Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio vectorial normado X , entonces se cumple lo siguiente:

i) Si $\{x_n\}$ converge fuertemente, entonces converge débilmente al mismo límite.

ii) Si $\dim X < \infty$, entonces la convergencia débil implica la convergencia fuerte.

Demostración. Ver la demostración en [15] página 259. \square

Definición 1.22. Sea X un espacio de Banach, decimos que un funcional $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ es *secuencialmente débilmente semicontinuo inferiormente*, si dada una sucesión tal que $x_n \rightarrow x$, se cumple que $F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$.

Lema 1.23. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X . Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:

i) Si $x_n \rightarrow x$ entonces $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$, es decir la norma es secuencialmente débilmente semicontinua inferiormente.

ii) Si $x_n \rightarrow x$ y $f_n \rightarrow f$ converge fuertemente en X^* (es decir, $\|f_n - f\| \rightarrow 0$), entonces $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

Demostración. Ver la demostración en [4], página 36. \square

Ahora, vamos a definir una topología particular sobre el espacio dual X^* , la cual es la topología débil*, denotada por $\sigma(X^*, X)$. Para cada $x \in X$, consideremos la aplicación $\varphi_x : X^* \rightarrow K$ definida por $\varphi_x(f) = f(x)$. Cuando x recorre a todo X , obtenemos una familia de aplicaciones $\{\varphi_x\}_{x \in X}$ continuas.

Definición 1.24. Una *topología débil**, denotada por $\sigma(X^*, X)$, es la topología menos fina (con un número mínimo de abiertos) sobre X^* de tal forma que todas las aplicaciones $\{\varphi_x\}_{x \in X}$ son continuas.

1.2.2 Espacios reflexivos

Sea X un espacio de Banach. La inyección canónica del espacio X al espacio doble dual $X^{**} = (X^*)^*$ está dada por la función i definida por $x \mapsto i(x) \in X^{**}$, donde

$$i(x)(f) = f(x) \quad \text{para toda } x \in X, f \in X^*.$$

La inyección i es lineal, y además es una isometría, véase [4].

Por otro lado, usando i siempre se puede identificar X con un subespacio de X^{**} . Decimos que X es *reflexivo* si $i(X) = X^{**}$.

Lema 1.25. Sea X un espacio de Banach. Entonces X es reflexivo si y sólo si su espacio dual X^* es reflexivo.

Teorema 1.26 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). La bola unitaria $B_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$ es compacta en la topología débil* $\sigma(X^*, X)$.

Demostración. Ver la demostración en [4] pág. 43. □

Corolario 1.27. *X es reflexivo si y sólo si su bola unitaria es compacta en la topología débil.*

Definición 1.28. Sean X y Y dos espacios de Banach. Un operador $T : X \rightarrow Y$ es *compacto* si para todo subconjunto M acotado de X , la imagen $T(M)$ es relativamente compacta, esto es, $\overline{T(M)}$ es compacto.

Proposición 1.29. *Sea X un espacio de Banach reflexivo y Y un espacio de Banach. Entonces el operador $T : X \rightarrow Y$ es compacto si y sólo si toda sucesión $\{x_n\}$ que converge débilmente a x_0 en X , $x_n \rightharpoonup x_0$, entonces $T(x_n)$ converge fuertemente a $T(x_0)$, $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$.*

Demostración. Ver la demostración en [29] pág. 467. □

Teorema 1.30 (Eberlein–Šmulian). *Sea X un espacio de Banach. Entonces toda sucesión acotada $\{x_n\}$ posee una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente en la topología $\sigma(X, X^*)$ si y sólo si X es reflexivo.*

Demostración. Ver la demostración en [4] pág. 50. □

1.2.3 Espacios de Sobolev

Definición 1.31. El *soporte de una función continua* es el complementario del mayor abierto sobre el que f se anula. Se dice que una función tiene *soporte compacto* si el conjunto donde no se anula, forma un conjunto cerrado y acotado, es decir, si

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}$$

es cerrado y acotado.

Denotamos por $C_c^k(\Omega)$ el espacio de las funciones con soporte compacto, y la k -ésima derivada continua, y equipado con la norma

$$\|f\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Ahora, consideremos $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$, y $I = (a, b)$. Definimos

$$L^p(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es Lebesgue medible y } \int_a^b |f|^p < \infty\}.$$

En general, los espacios de Sobolev $W^{1,p}(I)$ son subconjuntos de los L^p y éstos están compuestos por clases de equivalencia a través de la relación \sim , donde $u \sim v$ si y sólo si $u = v$ casi en todas partes en I .

Definición 1.32. Sea $I = (a, b)$ un intervalo acotado o no, y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$, un *espacio de Sobolev* $W^{1,p}(I)$ se define como

$$W^{1,p}(I) = \left\{ x \in L^p(I) \mid \exists y \in L^p(I) \text{ tal que } \int x\varphi' = - \int y\varphi \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

En la definición de $W^{1,p}$ se dice que φ es una *función test*.

En este trabajo utilizaremos el espacio $W^{1,2}$, es decir, con $p = 2$. Una justificación parcial de esto es lo siguiente. Consideremos el espacio $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ equipado con la norma

$$\|x\|_{1,2}^2 = \int_I (|x(t)|^2 + |\dot{x}(t)|^2) dt,$$

es decir, queremos *medir* tanto la función original como su derivada en el espacio de las funciones continuamente diferenciables en el intervalo I . Una dificultad radica en el hecho que C^1 no es un espacio Banach con la norma $\|x\|_{1,2}$. Es por ello que trabajaremos con el espacio que resulta de su completación, denotado por $H^1(I, \mathbb{R}^n)$ o simplemente por H^1 . En [1] se demuestra que $H^1(I, \mathbb{R}^n)$ es igual al espacio $W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n)$.

Proposición 1.33. *El espacio $W^{1,p}$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. El espacio $W^{1,p}$ es reflexivo ¹ para $1 < p < \infty$ y separable para $1 \leq p < \infty$. El espacio H^1 es un espacio de Hilbert separable.*

Demostración. Ver la demostración en [4], página 121. □

En otras palabras, H^1 es un espacio de Hilbert que admite una base ortonormal numerable.

Teorema 1.34 (Densidad). *Sea $u \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una sucesión $\{u_n\}$ en $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_n|_I \rightarrow u$ en $W^{1,p}(I)$.*

Demostración. Ver la demostración en [4], página 127. □

El siguiente Teorema afirma que toda función de un espacio de Sobolev $W^{1,p}(I)$ tiene un representante continuo.

Teorema 1.35. *Dado $u \in W^{1,p}(I)$, existe una función $\tilde{u} \in C^0(\bar{I})$ tal que $u = \tilde{u}$ casi en todas partes en I .*

Demostración. Ver demostración en [4] pág. 122. □

¹Esta propiedad es una ventaja *considerable* del espacio $W^{1,p}$ con respecto al espacio de funciones de clase C^1 , el cual no es reflexivo.

En ocasiones estaremos utilizando representantes continuos con la misma letra.

Como consecuencia del teorema anterior, podemos considerar la inyección $j : W^{1,p}(I) \rightarrow C^0(\bar{I})$. La topología uniforme en el espacio de funciones continuas $C^0(\bar{I})$ es la topología generada por la norma del supremo

$$\|f\|_{C^0} = \sup\{f(t) : t \in \bar{I}\},$$

donde $f \in C^0(\bar{I})$.

Teorema 1.36. *Existe una constante C (dependiente sólo de $|I| \leq \infty$) tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \text{para toda } u \in W^{1,p}(I), \quad \text{para toda } 1 \leq p \leq \infty,$$

dicho de otro modo $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ con inyección continua para todo $1 \leq p \leq \infty$. Además cuando I es acotado se verifica

(a) la inyección $W^{1,p}(I) \subset C^0(\bar{I})$ es compacta para $1 < p \leq \infty$.

(b) la inyección $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ es compacta para $1 \leq q < \infty$.

Demostración. Ver la demostración en [4], página 129. □

A partir de la Proposición 1.29 concluimos que la convergencia débil en $W^{1,p}(I)$ implica la convergencia uniforme en $C^0(\bar{I})$, es decir, si $x_n \rightharpoonup x_0$ entonces $x_n \rightarrow x_0$ con la norma del supremo. La convergencia en $C^0(\bar{I})$ se llama convergencia uniforme.

1.3 Métodos variacionales de minimización

En el caso de dimensión finita una manera de encontrar mínimos de funciones $f : \mathfrak{X} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es construir sucesiones minimizantes convergentes, o bien, acotadas y haciendo uso de la compacidad de \mathfrak{X} extraíamos subsucesiones convergentes, entonces la continuidad de f aseguraba el mínimo.

En espacios de dimensión infinita, para resolver el primer problema se toma \mathfrak{X} espacio de Banach reflexivo dotado de la topología débil para que toda sucesión acotada tenga una subsucesión convergente (Teorema de *Eberlein-Šmulian*) y para poder concluir supondremos que f es débilmente inferiormente semicontinuo en \mathfrak{X} , un concepto más débil que la continuidad.

Para asegurar la existencia de mínimos, el subespacio a elegir debe ser de tal forma que las sucesiones convergentes puedan ser minimizantes. Una condición para garantizar esto es pedir que la función f sea coercitivo en $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$.

Definición 1.37. Un funcional F en un espacio normado \mathfrak{X} , es llamado *coercitivo* en un subconjunto $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$ si $F(x) \rightarrow +\infty$, cuando $\|x\| \rightarrow +\infty$, $x \in \mathfrak{X}_0$.

Teorema 1.38. Sea \mathfrak{X} un espacio de Banach reflexivo y M un subconjunto débilmente cerrado de \mathfrak{X} . Dado un funcional $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ coercitivo y débilmente inferiormente semicontinuo en M . Entonces $f|_M$ es acotado inferiormente y alcanza su ínfimo.

Demostración. Si $f \equiv +\infty$ no hay nada que demostrar. Supongamos $f \neq +\infty$. Sean $\alpha = \inf_M f < +\infty$ y $\{x_n\}$ una sucesión minimizante en M , esto es, $f(x_n) \rightarrow \alpha$. Si $\{x_n\}$ no estuviera acotada, entonces existiría una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que $\|x_{n_k}\| \rightarrow +\infty$ y por la coercitividad tendríamos que $f(x_{n_k}) \rightarrow +\infty$ lo cual es imposible ya que $\alpha < +\infty$, por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es acotada en \mathfrak{X} . Puesto que \mathfrak{X} es reflexivo, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$ para algún $x_0 \in \mathfrak{X}$. Pero M es débilmente cerrado, por lo tanto $x_0 \in M$. Por la semicontinuidad tenemos que

$$f(x_0) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = \alpha$$

y así x_0 es un mínimo de f en M . □

Si F es un funcional definido en un subconjunto de un espacio de Banach \mathfrak{X} , y si queremos encontrar condiciones para que F tenga mínimo, necesitamos una generalización apropiada del concepto de derivada.

Definición 1.39. Sea \mathfrak{X} un espacio de Banach y $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un funcional. Supongamos que $F(x) < +\infty$. Decimos que F es *Gâteaux diferenciable* en x en la dirección de $h \in \mathfrak{X}$ si existe $L \in \mathfrak{X}^*$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(x + sh) - F(x)}{s} = L(h).$$

L se llama la *derivada de Gâteaux* en x y se denota por $\delta_x F(h) = L(h)$.

$\delta_x F(h)$ es la *variación de Gâteaux* de F en x en la dirección de h . En caso de que el límite no esté definido para toda dirección $h \in \mathfrak{X}$, se considera el subconjunto $\mathfrak{B}_x \subset \mathfrak{X}$ de direcciones donde el límite exista, llamado *espacio de variaciones admisibles*. La función $\delta F(x) : \mathfrak{B}_x \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada *variación de Gâteaux* ó *primera variación* de F en x .

Si F es Gâteaux diferenciable para todo $x \in \mathfrak{X}$, se dice que F es Gâteaux diferenciable.

Observación 1.40. Notemos que si $s \in \mathbb{R}$ es suficientemente pequeño, podemos tomar $s \rightarrow F(x + sh)$, y como consecuencia, si existe la variación de Gâteaux de F en x en la dirección de h , debemos tener

$$\delta_x F(h) = \left. \frac{d}{ds} F(x + sh) \right|_{s=0}.$$

Definición 1.41. Sea $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un funcional, y supongamos que $F(x) < +\infty$. Decimos que F es *Fréchet diferenciable* en x si existe $L \in \mathfrak{X}^*$ tal que

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

L se llama *derivada de Fréchet* de F en x y se denota por $DF(x) = L$.

La relación entre la derivada de Gâteaux y la derivada de Fréchet es la siguiente:

- Si F es Fréchet diferenciable entonces F es Gâteaux diferenciable y ambas derivadas coinciden.
- Si F es Gâteaux diferenciable y la derivada de Gâteaux $\delta F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}^*$ es continua, entonces F es Fréchet diferenciable.

Ahora vamos a generalizar estos conceptos a espacios de Banach, de tal forma que podamos dar la condición necesaria para la existencia de un máximo o un mínimo local de F en $x \in \mathfrak{X}$

$$DF(x) = F'(x) = 0 \tag{1.4}$$

cuando F es Gâteaux diferenciable en x . Cualquier $x \in \mathfrak{X}$ que satisface la condición (1.4) se llama *punto crítico* de F , y el correspondiente número $F(x)$ se llama *valor crítico*.

Si $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$ es un subespacio de \mathfrak{X} tal que $x_0 \in \mathfrak{X}_0$ y $DF(x_0) = 0$ como un funcional lineal en $T_x \mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X}_0$, entonces decimos que x_0 es un *punto crítico de F en \mathfrak{X}_0* .

El teorema de representación de Fréchet–Riesz garantiza la siguiente definición.

Definición 1.42. Si \mathfrak{X} es un espacio de Hilbert con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{X}}$ y F Gâteaux diferenciable entonces definimos el *gradiente* de F en x_0 , como el único elemento de $\nabla F(x_0) \in \mathfrak{X}$ tal que

$$\langle \nabla F(x_0), h \rangle_{\mathfrak{X}} = DF(x_0)(h)$$

para todo $h \in \mathfrak{X}$.

Definición 1.43. Un conjunto C se dice *balanceado* si dado un $x \in C$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| < 1$ se tiene $\lambda x \in C$.

Proposición 1.44. Sea $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un funcional. Supongamos que F restringido a un subconjunto $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$ tiene un extremo relativo finito en $x_0 \in \mathfrak{X}_0$. Si existe un conjunto balanceado no vacío $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_{x_0}$ tal que $x_0 + \mathfrak{B} \subset \mathfrak{X}_0$, entonces

$$\delta F(x_0)(v) = 0$$

para toda $v \in \mathfrak{B}$.

Demostración. Supongamos primero que x_0 es un mínimo relativo de $F|_{\mathfrak{X}_0}$. Tenemos que $x_0 + tv \in \mathfrak{X}_0$ para $|t| < 1$ y $v \in \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_{x_0}$. Luego

$$\frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t} \geq 0$$

para $0 < t < 1$ y

$$\frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t} \leq 0$$

para $-1 < t < 0$. Tomando los límites laterales respectivos en ambas desigualdades concluimos que $\delta F(x_0)(v) \geq 0$ y $\delta F(x_0)(v) \leq 0$, por lo tanto $\delta F(x_0)(v) = 0$ para toda $v \in \mathfrak{B}$. \square

1.4 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Introduciremos el Lagrangiano y las ecuaciones de Euler-Lagrange con el siguiente sistema físico (véase por ejemplo [12]). Consideremos un péndulo moviéndose en un plano vertical en el que solo actúa la fuerza de gravedad. Este consta de una varilla de longitud l con una partícula de masa m unida al extremo inferior de la varilla.

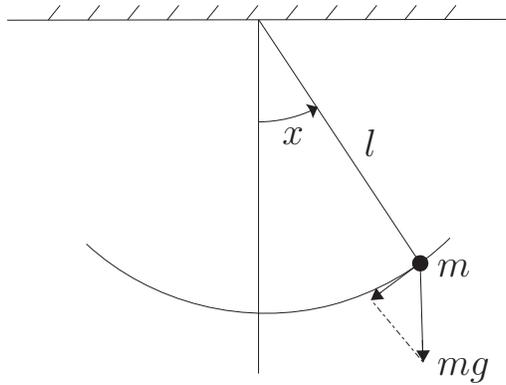


Figura 1.4: Péndulo simple.

La posición del péndulo se describe con el ángulo x que forma con la vertical medido en sentido contrario a las manecillas del reloj, como se muestra en la Figura 1.4. La componente de la fuerza gravitatoria responsable del movimiento es perpendicular a la varilla l , la cual tiene el valor de $-mg \sin x$, donde g es la constante gravitatoria. Por lo tanto, por la segunda ley de Newton, tenemos que la ecuación del movimiento es

$$m\ddot{x} = -\frac{g}{l} \sin x \tag{1.5}$$

donde $x \in \mathbb{S}^1$. \mathbb{S}^1 es llamado el *espacio de posiciones*. El *Lagrangiano*, denotado por L , asociado a la ecuación (1.5) es simplemente la diferencia entre su energía cinética, K , y su energía potencial, U , es decir,

$$L(x, \dot{x}) = K - U = \frac{m}{2} |\dot{x}|^2 + \frac{g}{l} \cos x \quad (1.6)$$

el cual está definido sobre el haz tangente $T\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ de la variedad \mathbb{S}^1 . $T\mathbb{S}^1$ es llamado *espacio de posiciones y velocidades*. Observemos que $\frac{d}{dx} L(x, \dot{x}) = -\frac{g}{l} \sin x$ y también $\frac{d}{dt} \frac{d}{d\dot{x}} L(x, \dot{x}) = \frac{d}{dt} m\dot{x} = m\ddot{x}$. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt} \frac{d}{d\dot{x}} L(x, \dot{x}) = \frac{d}{dx} L(x, \dot{x}). \quad (1.7)$$

La ecuación (1.7) es llamada la *ecuación de Euler-Lagrange* asociado al Lagrangiano (1.6). Consideremos un número $T > 0$, entonces el *funcional de acción* asociado a (1.6) es

$$F(x(t)) = \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t)) dt = \int_0^T \frac{m}{2} |\dot{x}(t)|^2 + \frac{g}{l} \cos x(t) dt.$$

El objetivo de esta sección es demostrar que los extremos relativos del funcional de acción son soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange. Es decir, si x es un mínimo ó máximo de F entonces $x = x(t)$ es solución de la ecuación de Euler-Lagrange. Iniciemos por considerar el caso general, sea $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $T > 0$ un número fijo. Entonces

$$F(x) = \int_0^T f(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (1.8)$$

donde $x \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$.

Para obtener la derivada de Gâteaux del funcional F supondremos lo siguiente

$$x \in \mathfrak{X} = H^1([0, T], \Omega), \quad f \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad (1.9)$$

donde Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y además que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x(t), \dot{x}(t), t) \in C^0([0, T], \mathbb{R}^n) \quad (1.10)$$

$$\mathfrak{B}_\epsilon = \{h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n) : h(0) = h(T), \sup_{[0, T]} |h| < \epsilon\} \quad (1.11)$$

Lema 1.45. *Sea $F, f, \mathfrak{X}, \mathfrak{B}_\epsilon$ como en (1.8), (1.9), (1.10) y (1.11). Entonces la variación de Gâteaux del funcional F en $x \in \mathfrak{X}$ en la dirección $h \in \mathfrak{B}_\epsilon$ es*

$$\delta_x F(h) = \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \phi_x(t) \right) \cdot \dot{h} dt \quad (1.12)$$

donde $\phi_x(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau) d\tau$.

Lema 1.46 (Lema de Du Bois-Reymond). Sea $\epsilon > 0$ y \mathfrak{B}_ϵ como antes, si $H \in C^0([0, T], \mathbb{R}^n)$ y

$$\int_0^T H(t) \cdot \dot{h}(t) dt = 0$$

para cualquier $h \in \mathfrak{B}_\epsilon$, entonces existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $H(t) = c$ para toda $t \in [0, T]$.

Demostración. Sea $c = \frac{1}{T} \int_0^T H(t) dt$ y $h(t) = \frac{1}{K} \int_0^t (H(\tau) - c) d\tau$. Claramente h es continuamente diferenciable cuya derivada es $\dot{h}(t) = \frac{1}{K} (H(t) - c)$ y además $h(0) = h(T) = 0$. Escojamos $K > 0$ tal que $\sup_{[0, T]} |h| < \epsilon$. Entonces $h \in \mathfrak{B}_\epsilon$ y

$$\begin{aligned} \int_0^T |H(t) - c|^2 dt &= \int_0^T (H(t) - c) \cdot (H(t) - c) dt \\ &= K \int_0^T (H(t) - c) \cdot \dot{h}(t) dt \\ &= -K \int_0^T c \cdot \dot{h}(t) dt \\ &= -K(c \cdot h(T) - c \cdot h(0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|H(t) - c|^2 = 0$ en $[0, T]$. Luego, $H(t) = c$ para toda $t \in [0, T]$. \square

Teorema 1.47. Sea $F, f, \mathfrak{X}, \mathfrak{B}_\epsilon$ como en (1.8), (1.9), (1.10) y (1.11). Supongamos que F restringido a un subconjunto \mathfrak{X}_0 de \mathfrak{X} tiene un extremo relativo en x , $x + \mathfrak{B}_\epsilon \subset \mathfrak{X}_0$ para algún $\epsilon > 0$, entonces

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x(t), \dot{x}(t), t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x(t), \dot{x}(t), t) \quad (1.13)$$

para toda $t \in [0, T]$.

La ecuación (1.13) es llamada la *ecuación de Euler-Lagrange* del funcional F .

Demostración. Sea x el extremo relativo de F restringido a \mathfrak{X}_0 . Por la Proposición 1.44 y el Lema 1.45 tenemos que

$$\delta_x F(h) = \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \phi_x(t) \right) \cdot \dot{h} dt = 0$$

para cualquier $h \in \mathfrak{B}_\epsilon$. Ahora, por el Lema 1.46, existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que para obtener $\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \phi_x(t) = c$, o equivalentemente,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau) d\tau = c$$

para cualquier $t \in [0, T]$. $\int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau) d\tau$ es diferenciable con respecto a la variable t , luego $\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t)$ también. Por lo tanto, la ecuación de arriba implica la ecuación de Euler-Lagrange (1.13). \square

Ahora consideremos el problema de n cuerpos (1.1). Sea V el espacio de configuración y

$$\mathfrak{X} = H^1([0, T], V) = W^{1,2}([0, T], V) \quad (1.14)$$

El *Lagrangiano* $L(x, \dot{x})$ de $x \in \mathfrak{X}$ está definido por

$$L(x, \dot{x}) = K(\dot{x}) + U(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k |\dot{x}_k|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (1.15)$$

donde $r_{ij} = |x_i - x_j|$. Sea $\Omega = V \setminus \Delta$, donde Δ es el conjunto de colisiones. Claramente Ω es abierto. Si $x(t) \in \Omega$ para cualquier $t \in [0, T]$ entonces L satisface (1.9) y (1.10)

El *funcional de acción* $\mathcal{A} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de (1.1) en el intervalo $[0, T]$ está definido por

$$\mathcal{A} = \int_0^T L(x, \dot{x}) dt \quad (1.16)$$

Proposición 1.48. *Las ecuaciones de Euler-Lagrange del funcional de acción (1.16) son (1.1).*

Demostración. Por el Teorema 1.47 las ecuaciones de Euler-Lagrange del funcional (1.16) son

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} L(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\partial}{\partial x_k} L(x(t), \dot{x}(t))$$

para $k = 1, 2, \dots, n$ y L es como en (1.15). Puesto que la energía cinética $K(\dot{x})$ y la energía potencial $-U(x)$ dependen únicamente de \dot{x} y x respectivamente, tenemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} K(\dot{x}) = \frac{\partial}{\partial x_k} U(x).$$

Pero

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} K(\dot{x}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} m_k |\dot{x}_k|^2 = \frac{d}{dt} m_k \dot{x}_k = m_k \ddot{x}_k,$$

luego,

$$m_k \ddot{x}_k = \frac{\partial}{\partial x_k} U(x).$$

□

Observemos que el Lagrangiano (1.15) es una función definida en el haz tangente $(x, y) \in TV = V \times \mathbb{R}^{3(n-1)}$, la cual es diferenciable excepto en $x \in \Delta$. Si $x(t) \in V \setminus \Delta$ para toda $t \in [0, T]$, entonces para algún $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, $x(t) + h(t) \in V \setminus \Delta$ para cualquier $t \in [0, T]$ y $h \in \mathfrak{B}_\epsilon$, donde

$$\mathfrak{B}_\epsilon = \{h \in C^1([0, T], V) : h(0) = h(T), \sup_{[0, T]} |h| < \epsilon\}. \quad (1.17)$$

Una consecuencia inmediata del Teorema 1.47 es el siguiente

Corolario 1.49. Sea $\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \mathfrak{B}_\epsilon$ como en (1.14), (1.16) y (1.17). Supongamos que existe un extremo relativo en x de \mathcal{A} en un subconjunto \mathfrak{X}_0 de \mathfrak{X} . Si $x + \mathfrak{B}_\epsilon \subset \mathfrak{X}_0$ y $x(t) \in V \setminus \Delta$ para toda $t \in [0, T]$, entonces $x(t)$ es una solución de (1.1).

Supongamos que \mathfrak{X}_0 es un subespacio de \mathfrak{X} y x un punto crítico de F en \mathfrak{X}_0 . Si $x + \mathfrak{B}_\epsilon \subset \mathfrak{X}_0$ entonces $x(t)$ resuelve (1.1) cuando $x(t) \in V \setminus \Delta$.

Por lo tanto, el problema de encontrar soluciones sin colisión ó mas específicamente soluciones periódicas sin colisión de (1.1) es transformado en un problema de encontrar extremos relativos del funcional de acción \mathcal{A} restringido a un subconjunto \mathfrak{X}_0 de \mathfrak{X} , véase la Observación 1.50. Por el Teorema 1.38, para mostrar la existencia de tales extremos relativos es necesario que \mathfrak{X}_0 y \mathcal{A} cumpla con

- El subconjunto \mathfrak{X}_0 sea débilmente cerrado en \mathfrak{X} ,
- el funcional \mathcal{A} sea secuencialmente débilmente inferiormente semicontinuo
- y coercitivo en \mathfrak{X}_0 .

Observación 1.50. El funcional de acción $\mathcal{A}(x) = \int_0^T L(x, \dot{x}) dt$ (asociado al problema de n cuerpos) restringido al espacio $\mathfrak{X} = H^1([0, T], V)$ ó $H^1(S_T, V)$ con $S_T := [0, T]/\{0, T\}$, no alcanza su mínimo. Para demostrar esto, observemos que $\mathcal{A}(x) > 0$ para toda $x \in \mathfrak{X}$, ahora consideremos la sucesión $(x_1^{(k)}(t), \dots, x_n^{(k)}(t)) \in (\mathbb{R}^3)^n$ definida por

$$x_i^{(k)}(t) \equiv (k \cos(2\pi i/k), k \sin(2\pi i/k), 0).$$

Esta sucesión $x^{(k)}$ es divergente y $\mathcal{A}(x^{(k)}) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow +\infty$. Luego $\inf_{\mathfrak{X}} \mathcal{A} = 0$, es decir, el ínfimo no se alcanza en \mathfrak{X} .

Para aplicar el Teorema 1.38 al sistema de ecuaciones que corresponde al problema de n cuerpos, es necesario probar la semicontinuidad débil inferior del funcional de acción correspondiente. Iniciemos con el siguiente lema.

Lema 1.51. La acción Lagrangiana es débilmente inferiormente semicontinua en \mathfrak{X} .

Demostración. Sea $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ una sucesión en \mathfrak{X} la cual converge débilmente a $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Basta considerar el caso $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(x^{(k)}) < +\infty$. Entonces, existe una subsucesión $x^{(k_l)}$ de $x^{(k)}$ tal que $c \equiv \lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{A}(x^{(k_l)}) < +\infty$. Sin pérdida de generalidad trabajaremos con la sucesión original $x^{(k)}$, es decir, supondremos que $c = \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(x^{(k)})$. Por lo tanto, la sucesión $\mathcal{A}(x^{(k)})$ está acotada por una constante $C > 0$.

Sea $r_{ij}^{(k)} := |x_i^{(k)} - x_j^{(k)}|$, entonces $r_{ij}^{(k)}$ converge uniformemente a $r_{ij} = |x_i - x_j|$, puesto que la inclusión $\mathfrak{X} \hookrightarrow C^0([0, T], V)$ es compacta (Teorema 1.36). Para cualquier par i, j , $1 \leq i < j \leq n$, la sucesión $\frac{1}{r_{ij}^{(k)}}$ es acotada en $L^1[0, T]$ puesto que $\mathcal{A}(x^{(k)})$ es acotado.

Sea $E_{ij} = \{t \in [0, T] : r_{ij}(t) \neq 0\}$. Demostraremos que E_{ij} tiene medida de Lebesgue μ completa. Supongamos lo contrario, sea $\kappa_{ij} = \mu([0, T] \setminus E_{ij}) > 0$. Sea $\epsilon_{ij} = \frac{m_i m_j \kappa_{ij}}{C}$ y $N_{ij} \in \mathbb{N}$ tal que $\|r_{ij}^{(k)} - r_{ij}\|_{C^0} < \epsilon_{ij}$ cuando $k > N_{ij}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x^{(k)}) &= \int_0^T L(x^{(k)}, \dot{x}^{(k)}) dt \\ &\geq \int_0^T \frac{m_i m_j}{r_{ij}^{(k)}} dt \\ &\geq m_i m_j \int_{[0, T] \setminus E_{ij}} \frac{1}{r_{ij}^{(k)}} dt \\ &\geq \frac{m_i m_j \kappa_{ij}}{\epsilon_{ij}} = C, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

Sobre E_{ij} la sucesión $\frac{1}{r_{ij}^{(k)}}$ converge a $\frac{1}{r_{ij}}$ puntualmente, por el Lema de Fatou

$$\int_0^T \frac{1}{r_{ij}} dt \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{1}{r_{ij}^{(k)}} dt.$$

Usando el hecho de que la norma es secuencialmente débilmente inferiormente semicontinuo (Lema 1.23) tenemos

$$\|\dot{x}_j\|_{L^2}^2 = \|x_j\|_{H^1}^2 - \|x_j\|_{L^2}^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_j^{(k)}\|_{H^1}^2 - \|x_j\|_{L^2}^2.$$

Puesto que $\|x^k - x\|_{L^2}^2 = \int_0^T (x^{(k)} - x) \cdot (x^{(k)} - x) dt$ y además por la convergencia uniforme $\|x^{(k)} - x\| \rightarrow 0$ tenemos que x^k converge a x en $L^2([0, T], V)$. Entonces

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_j^{(k)}\|_{H^1}^2 - \|x_j\|_{L^2}^2 = \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\dot{x}_j^{(k)}\|_{L^2}^2.$$

Por lo tanto,

$$\|\dot{x}_j\|_{L^2}^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\dot{x}_j^{(k)}\|_{L^2}^2.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x) &= \int_0^T \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j |\dot{x}_j|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} dt \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \|\dot{x}_j\|_{L^2}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \int_0^T \frac{m_i m_j}{r_{ij}} dt \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\dot{x}_j^{(k)}\|_{L^2}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{m_i m_j}{r_{ij}^{(k)}} dt \\
&\leq \frac{1}{2} \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n m_j \|\dot{x}_j^{(k)}\|_{L^2}^2 + \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \int_0^T \frac{m_i m_j}{r_{ij}^{(k)}} dt \\
&\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(x^k).
\end{aligned}$$

Esto demuestra el Lema. □

1.5 Principio de Palais

En esta sección relacionaremos los puntos críticos del funcional de acción (1.8) con la *simetría* de un subespacio \mathfrak{X}_0 de (1.9). Es decir, consideraremos elementos del subespacio \mathfrak{X}_0 los cuales tienen cierta *simetría* y además son puntos críticos del funcional de acción en algún subespacio de \mathfrak{X}_0 . El resultado principal de esta sección (Teorema 1.54) afirma que también son puntos críticos de \mathfrak{X}_0 . Para esto es necesario hablar de la acción de un grupo sobre un conjunto, en particular sobre una variedad diferenciable.

Definición 1.52. Sea G un grupo multiplicativo con elemento identidad e . Se dice que G *actúa* (por la izquierda) en una variedad diferenciable \mathfrak{X} cuando existe una función $\theta : G \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$, llamada *acción de G en \mathfrak{X}* que satisface

1. Para cada $g \in G$ la función $\theta_g(x) : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ dada por $\theta_g(x) = \theta(g, x)$ es un difeomorfismo y $\theta_e = Id_{\mathfrak{X}}$
2. Si $h, g \in G$ entonces $\theta_{hg} = \theta_h \circ \theta_g$

Es común denotar a $\theta(g, x)$ simplemente por gx , así tenemos que las propiedades 1 y 2 se pueden escribir como $ex = x$ y $(hg)x = h(gx)$. Una consecuencia inmediata de las propiedades es $(\theta_g)^{-1} = \theta_{g^{-1}}$.

Sea $\text{Diff}(\mathfrak{X})$ el grupo difeomorfismos de \mathfrak{X} en \mathfrak{X} con la operación composición. La función $\rho : G \rightarrow \text{Diff}(\mathfrak{X})$ dado por $\rho(g) = \theta_g$ define un homomorfismo de grupos llamado *homomorfismo inducido por θ* .

Consideremos un funcional F sobre un espacio de Banach \mathfrak{X}_0 . Supongamos que un grupo G actúa sobre \mathfrak{X}_0 a través de la acción θ . Consideremos al homomorfismo $\rho : G \rightarrow \text{Diff}(\mathfrak{X}_0)$ inducido por la acción. Tenemos la siguiente definición

Definición 1.53. Diremos que un funcional $F : \mathfrak{X}_0 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es ρ -invariante en \mathfrak{X}_0 si $F(\rho(g)x) = F(x)$ para cualquier $x \in \mathfrak{X}_0$ y para cualquier $g \in G$. El conjunto

$$\mathfrak{X}_0^\rho := \{x \in \mathfrak{X}_0 : \rho(g)x = x \text{ para toda } g \in G\}$$

es llamado ρ -invariante en \mathfrak{X}_0 . Los puntos críticos de la restricción $F|_{\mathfrak{X}_0^\rho}$ son llamados *puntos ρ -críticos* en \mathfrak{X}_0 .

\mathfrak{X}_0^ρ es un subespacio de \mathfrak{X}_0 si ρ es una representación lineal, es decir, si $\rho(g)$ es un automorfismo lineal para toda $g \in G$. Es natural preguntarse si los puntos ρ -críticos son en realidad puntos críticos del funcional F . Una respuesta parcial a esta pregunta es el siguiente Teorema el cual es un caso especial del *Principio de Simetría de Palais* ([21], pág. 23).

Teorema 1.54. Sean F, \mathfrak{X} como en (1.8) y (1.9) respectivamente. Consideremos la restricción de F en un subespacio \mathfrak{X}_0 de \mathfrak{X} . Sea G un grupo que actúa sobre \mathfrak{X}_0 a través de la representación ortogonal $\rho : G \rightarrow GL(\mathfrak{X}_0)$. ($GL(\mathfrak{X}_0)$ es el grupo de automorfismos lineales en \mathfrak{X}_0). Supongamos que F es ρ -invariante en \mathfrak{X}_0 y es Fréchet diferenciable en $x \in \mathfrak{X}_0$.

- (a) Si $x \in \mathfrak{X}_0^\rho$ es un punto ρ -crítico de F en \mathfrak{X}_0 , entonces x es un punto crítico de F en \mathfrak{X}_0 .
- (b) Sean f y \mathfrak{B}_ϵ como en (1.9), (1.11). Si $\mathfrak{X}_0 + \mathfrak{B}_\epsilon = \mathfrak{X}_0$ para algún $\epsilon > 0$, entonces un punto ρ -crítico de F en \mathfrak{X}_0 resuelve la ecuación de Euler-Lagrange (1.13).

Demostración. Por simplicidad denotaremos a la restricción de F en \mathfrak{X}_0 por F .

Iniciemos por demostrar (a). Por ser F ρ -invariante, y haciendo uso de la regla de la cadena, tenemos que F es Fréchet diferenciable en $\rho(g)x$ para cualquier $g \in G$ y su derivada es

$$DF(x) = D(F \circ \rho(g))(x) = DF(\rho(g)x) \circ \rho(g).$$

Consideremos el gradiente $\nabla F(x)$ de F en x . Entonces

$$\begin{aligned} \langle \nabla F(x), h \rangle_{H^1} &= DF(x)(h) \\ &= DF(\rho(g)x)(\rho(g)h) \\ &= \langle \nabla F(\rho(g)x), \rho(g)h \rangle_{H^1} \\ &= \langle \rho(g)^{-1} \nabla F(\rho(g)x), h \rangle_{H^1} \end{aligned}$$

para toda $g \in G, h \in \mathfrak{X}_0$. Por lo tanto $\rho(g)\nabla F(x) = \nabla F(\rho(g)x)$. Por ser x ρ -invariante, $\rho(g)\nabla F(x) = \nabla F(x)$ para toda $g \in G$. Así $\nabla F(x) \in \mathfrak{X}_0^\rho$. Puesto que x es punto ρ -crítico de F en \mathfrak{X}_0 , $\nabla F(x)h = \langle \nabla F(x), h \rangle = 0$ para cualquier $h \in \mathfrak{X}_0^\rho$, en particular para $h = \nabla F(x)$, luego $\nabla F(x) = 0$. De esta manera concluimos diciendo

que los puntos críticos de F restringida a \mathfrak{X}_0^ρ son en realidad puntos críticos de F en \mathfrak{X}_0 .

Ahora vamos a la demostración de (b). Por el inciso (a) todo punto ρ -crítico de $F|_{\mathfrak{X}_0}$ y del Teorema 1.47, x resuelve las ecuaciones de Euler-Lagrange. \square

1.6 El problema de n cuerpos y la condición $(NC)_\nu$

En esta sección mostraremos un criterio general para la existencia de mínimos.

Definición 1.55. Sea $\mathfrak{X} = H^1([0, T], V)$, el subconjunto $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$ satisface la *condición de $(NC)_\nu$* en \mathfrak{X} , $\nu \in (0, 2]$ si para toda $x \in \mathfrak{X}_0$ existe algún $\tau_x \in (0, T]$, tal que

$$x(0) \cdot x(\tau_x) \leq (1 - \nu)|x(0)| \cdot |x(\tau_x)|. \quad (1.18)$$

Es claro que la ecuación anterior es válida para $\nu \leq 0$, y falsa para $\nu > 2$ (por la desigualdad de Cauchy–Schwartz). Además, el hecho de que $\nu \in (0, 2]$ es independiente de $x \in \mathfrak{X}_0$, esto garantiza que las curvas en \mathfrak{X}_0 deben desviarse de su posición inicial en un cierto ángulo. En este sentido la ecuación (1.18) es una *condición no central*, la cual prohíbe que las curvas se muevan sólo a lo largo de la dirección central.

Teorema 1.56. Sea \mathfrak{X} , L , \mathcal{A} , \mathfrak{B}_ϵ definidas como en (1.9), (1.8) y (1.11). Supongamos que \mathfrak{X}_0 es un subconjunto débilmente cerrado de \mathfrak{X} que satisface la condición $(NC)_\nu$ para algún $\nu \in (0, 2]$, entonces \mathcal{A} es coercitivo y alcanza su mínimo en \mathfrak{X}_0 . Si además el mínimo $x \in \mathfrak{X}_0$ satisface que $x + \mathfrak{B}_\epsilon \subset \mathfrak{X}_0$ para algún $\epsilon > 0$, entonces x es solución de (1.1) siempre que $x(t) \in V \setminus \Delta$.

Demostración. Sea $x \in \mathfrak{X}_0$ y consideremos la función

$$\delta(x) := \max_{s_1, s_2 \in [0, T]} |x(s_1) - x(s_2)|.$$

Ya que \mathfrak{X}_0 satisface la condición $(NC)_\nu$, escogemos un $\tau_x \in (0, T]$ tal que se satisfaga

$$x(0) \cdot x(\tau_x) \leq (1 - \nu)|x(0)| \cdot |x(\tau_x)|.$$

Consideremos primero el caso donde $x(0) \neq 0$ y $x(\tau_x) \neq 0$. Sea θ el ángulo entre $x(0)$ y $x(\tau_x)$, $\theta \in [0, \pi]$ (ver la Figura 1.5).

Luego, $\varphi = |x(0) - x(\tau_x)| \geq |x(0)| \operatorname{sen} \theta$ y la igualdad se cumple sólo cuando $x(0) - x(\tau_x)$ es perpendicular a $x(\tau_x)$. Por hipótesis tenemos que

$$x(0) \cdot x(\tau_x) \leq (1 - \nu)|x(0)| \cdot |x(\tau_x)|,$$

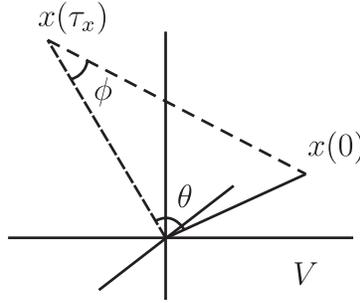


Figura 1.5: $|x(0) - x(\tau_x)| \cdot \text{sen } \phi = |x(0)| \cdot \text{sen } \theta$

o equivalentemente,

$$\frac{x(0) \cdot x(\tau_x)}{|x(0)| \cdot |x(\tau_x)|} \leq (1 - \nu).$$

Ya que $x(0) \cdot x(\tau_x) = |x(0)| \cdot |x(\tau_x)| \cos \theta$, tenemos que $\cos \theta \leq (1 - \nu)$. Realicemos el estudio en varios casos.

- Caso 1. Si $\cos \theta > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &\leq (1 - \nu)^2 \\ 1 - \text{sen}^2 \theta &\leq 1 - 2\nu + \nu^2 \\ \text{sen}^2 \theta &\geq 2\nu - \nu^2 \\ \text{sen } \theta &\geq \sqrt{\nu(2 - \nu)} := C_\nu \end{aligned}$$

Entonces $|x(0) - x(\tau_x)| = |x(0)| \text{sen } \theta \geq C_\nu |x(0)|$ y por lo tanto $|x(0) - x(\tau_x)| \geq C_\nu |x(0)|$.

- Caso 2. Si $\nu = 2$. En este caso tenemos que $\cos \theta \leq -1$, $\theta = \pi$, ya que $|\cos \theta| \leq 1$. Esto implica que $x(\tau_x)$ y $x(0)$ son paralelos, luego $x(\tau_x) = Cx(0)$, con $C < 0$. Entonces, $x(0) - x(\tau_x) = x(0) - Cx(0) = (1 - C)x(0)$, y por lo tanto $|x(0) - x(\tau_x)| = (1 - C) |x(0)| \geq |x(0)|$ pues $C < 0$.
- Caso 3. $1 \leq \nu < 2$. Esto implica que $\cos \theta \leq 1 - \nu \leq 0$ lo cual implica que $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, y se sigue que $x(\tau_x) \cdot x(0) \leq 0$. Además tenemos que $|x(0) - x(\tau_x)|^2 = |x(0)|^2 - 2x(\tau_x) \cdot x(0) + |x(\tau_x)|^2 \geq |x(0)|^2$, pero $\nu \leq 1$ con lo cual tenemos $|x(0) - x(\tau_x)| \geq |x(0)| = 1 |x(0)| \geq C_\nu |x(0)|$.
- Caso 4. $0 < \nu \leq 1$. Aquí tenemos que $0 \leq 1 - \nu$, así como $\cos \theta < 0$ con $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Ya que x es continua, podemos elegir un nuevo $\bar{\tau}_x$ tal que

$$\cos \theta > 0 \quad \text{y} \quad \cos \theta < 1 - \nu.$$

Con lo cual el resultado se sigue del Caso 1.

Observemos que si $x(0) = 0$ ó $x(\tau_x) = 0$, tenemos

$$|x(0) - x(\tau_x)| \geq |x(0)| \geq C_\nu |x(0)|.$$

En conclusión, tenemos que en cualquiera de los casos siempre se cumple:

$$|x(0) - x(\tau_x)| \geq C_\nu |x(0)|.$$

Notemos que $|x(0)| \leq \frac{|x(0) - x(\tau_x)|}{C_\nu}$, y por lo tanto para toda $t \in (0, T]$ se cumple

$$|x(t)| \leq |x(0)| + \delta(x) \leq \frac{|x(0) - x(\tau_x)|}{C_\nu} + \delta(x) \leq \left(\frac{1}{C_\nu} + 1\right) \delta(x).$$

Ahora, elevando al cuadrado e integrando, tenemos

$$\int_0^T |x(t)|^2 dt \leq \left(\frac{1}{C_\nu} + 1\right)^2 \delta(x)^2 T.$$

Por otro lado, aplicando la desigualdad de Cauchy–Schwarz obtenemos la siguiente desigualdad

$$\delta^2(x) \leq \left(\int_0^T |\dot{x}| dt\right)^2 \leq T \int_0^T |\dot{x}|^2 dt.$$

Finalmente la norma de Sobolev es acotada por la acción, pues se cumple:

$$\begin{aligned} \|x\|_{H^1}^2 &= \int_0^T |x|^2 dt + \int_0^T |\dot{x}|^2 dt \\ &\leq \left(\frac{1}{C_\nu} + 1\right)^2 \delta(x)^2 T + \int_0^T |\dot{x}|^2 dt \\ &\leq \left[\frac{1}{C_\nu} + 1\right]^2 T T \int_0^T |\dot{x}|^2 dt + \int_0^T |\dot{x}|^2 dt \\ &\leq \left[\left(\frac{1}{C_\nu} + 1\right)^2 T^2 + 1\right] \int_0^T |\dot{x}|^2 dt \\ &< \frac{2}{m} \left[\left(\frac{1}{C_\nu} + 1\right)^2 T^2 + 1\right] \mathcal{A}(x) \end{aligned}$$

donde $m = \min_i \{m_i\}$. Esto implica que sí $\|x\|_{H^1}^2 \rightarrow \infty$ entonces $\mathcal{A}(x) \rightarrow \infty$, es decir, $\mathcal{A}|_{\mathfrak{X}_0}$ es coercitivo. Entonces por el Teorema 1.38 y Lema 1.51, el funcional de acción \mathcal{A} restringido a \mathfrak{X}_0 alcanza su mínimo.

Si $x \in \mathfrak{X}_0$ es un mínimo tal que $x + \mathfrak{B}_\epsilon \subset \mathfrak{X}_0$ para alguna $\epsilon > 0$, entonces por el Corolario 1.49, x es solución de las ecuaciones (1.1) del problema de n cuerpos, siempre que $x(t) \in V \setminus \Delta$. Con esto queda demostrada la segunda parte del teorema. \square

Ejemplo 1.57. Si $V = \mathbb{C}$ y $\mathfrak{X}_0 = \{x \in \mathfrak{X} : x(0), ix(T) \in \mathbb{R}\}$, entonces \mathfrak{X}_0 es débilmente cerrado y satisface la condición $(NC)_\nu$ (escogiendo $\tau = \tau_x = T$) para todo $x \in \mathfrak{X}_0$, entonces la ecuación (1.18) se satisface con $\nu = 1$. Por el Teorema 1.56, \mathcal{A} alcanza su mínimo en \mathfrak{X}_0 y tal mínimo resuelve las ecuaciones de movimiento (1.1) si $x(t) \in V \setminus \Delta$.

Ejemplo 1.58. Sea \mathfrak{X}_1 el espacio de órbitas cerradas antisimétricas en $\mathfrak{X} = H^1([0, T], V)$, es decir

$$\mathfrak{X}_1 := \{x \in \mathfrak{X} : x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right) \text{ donde } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}\}.$$

\mathfrak{X}_1 es débilmente cerrado y satisface la condición $(NC)_2$: elegimos $\tau = \tau_x = \frac{T}{2}$, para todo $x \in \mathfrak{X}_1$, entonces la ecuación (1.18) se satisface con $\nu = 2$. Como consecuencia, el funcional de acción \mathcal{A} alcanza su mínimo en \mathfrak{X}_1 , y tal mínimo resuelve la ecuación de movimiento para el problema de n cuerpos si $x(t) \in V \setminus \Delta$.

Observación 1.59. La simetría $x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right)$ es llamada *simetría italiana* en [6] y [7] ya que ella fue introducida y estudiada por un grupo de matemáticos italianos coordinados por V. Coti Zelati, ver [11], [10] y [26].

Capítulo 2

El problema de 2 cuerpos

Newton resolvió el problema de 2 cuerpos reduciéndolo al problema de Kepler el cual es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen el movimiento de una partícula bajo la acción de atracción gravitatoria de la otra partícula fija en el origen. En otras palabras, el vector $x = x_2 - x_1$ satisface el problema de Kepler

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -\mu \frac{x}{|x|^3}$$

donde $\mu = m_1 + m_2$ y todas sus soluciones son secciones cónicas con un foco en el origen. Las soluciones periódicas son elipses, y entonces nos referimos a éstas como elipses Keplerianas, que incluyen elipses degeneradas, algunas veces llamadas órbitas de colisión-expulsión, las cuales son segmentos de líneas con un punto final en el origen. Éstas representan soluciones con colisión del problema de 2 cuerpos.

2.1 Leyes de Kepler

Consideremos el problema de 2 cuerpos con masas m_1 y m_2 . Del sistema (1.1) con $n = 2$ obtenemos las ecuaciones de movimiento del problema de 2 cuerpos

$$m_k \ddot{x}_k = \frac{\partial}{\partial x_k} U, \quad k = 1, 2$$

donde $U = \frac{m_1 m_2}{|x_1 - x_2|}$. El problema de dos cuerpos es llamado el problema de Kepler en honor a Johannes Kepler quien descubrió las tres leyes del movimiento planetario.

Al derivar el potencial U las ecuaciones de movimiento quedan de la forma

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= m_1 m_2 \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|^3} \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -m_1 m_2 \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|^3} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Consideremos el centro de masa en el origen, $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$ y tomemos el vector $x = x_1 - x_2$, relativo a las posiciones de los dos cuerpos. Por el hecho de que el centro de masa está en el origen, las posiciones de los cuerpos x_1 y x_2 quedan en términos del vector x de la siguiente manera

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}x \\x_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2}x\end{aligned}$$

Sustituyendo estas últimas ecuaciones en (2.1) obtenemos una única ecuación,

$$\ddot{x} = (m_1 + m_2)\frac{x}{|x|^3}$$

Tenemos nuestro primer resultado

Proposición 2.1. *Resolver el problema de dos cuerpos (2.1) es equivalente a resolver la ecuación*

$$m\ddot{x} = \alpha\frac{x}{|x|^3} \quad (2.2)$$

donde $x = x_1 - x_2$, y $m = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ es llamada la masa reducida y $\alpha = m_1m_2$.

De esta manera hemos convertido nuestro sistema de ecuaciones (2.1) en la ecuación (2.2), es decir, hemos reducido el problema de dos cuerpos a un problema de un cuerpo equivalente, en el que únicamente debe determinarse el movimiento de un cuerpo de masa m . Las soluciones de esta nueva ecuación son llamadas órbitas Keplerianas. Una vez que se haya obtenido una solución de (2.2) podemos encontrar los movimientos individuales de x_1 y x_2 . El Lagrangiano asociado a la ecuación (2.2) es

$$L(x, \dot{x}) = K(\dot{x}) + U(x) = \frac{m}{2}|\dot{x}|^2 + \frac{\alpha}{|x|} \quad (2.3)$$

Veamos que el movimiento de los 2 cuerpos se realiza en un plano. A partir de aquí denotaremos por \mathbf{J} el vector momento angular.

Proposición 2.2. *Las órbitas Keplerianas están en el plano perpendicular al vector momento angular.*

Demostración. El momento angular, denotado por \mathbf{J} es el producto vectorial $\mathbf{J} = x \times m\dot{x}$. Consideremos cualquier orbita Kepleriana $x(t)$. Entonces, utilizando la ecuación (2.2) tenemos

$$\frac{d}{dt}\mathbf{J} = \frac{d}{dt}x(t) \times m\dot{x}(t) = x \times m\ddot{x} = 0.$$

Por lo tanto \mathbf{J} es un vector constante. Además $\mathbf{J} \cdot x = 0$. Luego, todas las soluciones de (2.2) están contenidas en un plano perpendicular al momento angular. \square

Es posible escribir el Lagrangiano (2.3) en coordenadas polares

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\alpha}{r} \quad (2.4)$$

donde $x = re^{i\theta}$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son las siguientes

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -\frac{\alpha}{r^2}, \\ mr^2\dot{\theta} &= J \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde $J = |\mathbf{J}|$ es el momento angular (escalar).

De acuerdo a la segunda ecuación, $J = 0$ si y sólo si hay colisión ($r = 0$) o el movimiento es colineal (θ constante).

Observemos que si $J \neq 0$, entonces $\dot{\theta} \neq 0$ y como consecuencia $\theta = \theta(t)$ siempre es invertible.

A continuación enunciaremos y demostraremos las tres famosas leyes de Kepler. Las dos primeras leyes aparecieron en 1609, mientras que la tercera fue propuesta en 1619, basándose en datos obtenidos de las observaciones astronómicas del danés Tycho Brahe.

Proposición 2.3 (Segunda Ley de Kepler). *Las áreas recorridas por el radio vector x en tiempos iguales son iguales.*

Demostración. Tenemos que $mr^2\dot{\theta} = J$, por lo tanto, el área formada por el vector x en el tiempo $t_2 - t_1$ es

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}r^2(\theta)\dot{\theta}dt = \frac{J}{2m}(t_2 - t_1)$$

donde $t_1 = t(\theta_1)$ y $t_2 = t(\theta_2)$. □

Proposición 2.4 (Primera Ley de Kepler). *Los planetas se mueven en órbitas elípticas que tienen al Sol en uno de sus focos.*

Demostración. Para demostrar la primer ley de Kepler escribiremos a r en términos de θ y veremos que la ecuación es la de una cónica. Iniciemos por hacer el cambio de variable $u = \frac{1}{r}$. Considerando que $t = \theta(t)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} \\ &= -\frac{m}{J} \dot{r}. \end{aligned}$$

Derivando una vez más

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\theta^2} &= -\frac{m}{J}\ddot{r}\frac{dt}{d\theta} \\ &= -\frac{m}{J}\ddot{\theta} \\ &= -\frac{m^2}{J^2}r^2\ddot{r}.\end{aligned}$$

Ahora sumamos la segunda derivada con la función original y obtenemos la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\theta^2} + u &= -\frac{m^2}{J^2}r^2\ddot{r} + \frac{1}{r} \\ &= \frac{m^2r^2}{J^2}\left(-\ddot{r} + \frac{J^2}{m^2r^3}\right) \\ &= \frac{m^2r^2}{J^2}(-\ddot{r} + r\dot{\theta}^2) \\ &= \frac{m^2r^2}{J^2}\left(\frac{\alpha}{mr^2}\right) \\ &= \frac{m\alpha}{J^2}.\end{aligned}$$

Hemos obtenido la *ecuación de Clairaut*

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m\alpha}{J^2}, \quad (2.6)$$

cuyas soluciones son de la forma

$$u(\theta) = B \cos(\theta - \theta_0) + \frac{m\alpha}{J^2}, \quad (2.7)$$

donde B y θ_0 son constantes que quedan completamente determinadas a partir de las condiciones iniciales. Luego, r y θ están relacionados por

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (2.8)$$

donde $p = J^2/m\alpha$ y $e = BJ^2/m\alpha$, la cual es la ecuación normal de una cónica de *latus rectum* p y excentricidad e . Se trata de una elipse si $0 \leq e < 1$ (en particular de una circunferencia si $e = 0$), de una parábola si $e = 1$ y de una hipérbola si $e > 1$, ver la Figura 2.1. \square

Antes de demostrar la tercera ley de Kepler veamos qué tipo de cónica obtenemos al variar la energía total de la ecuación (2.2), denotada por H , también llamado

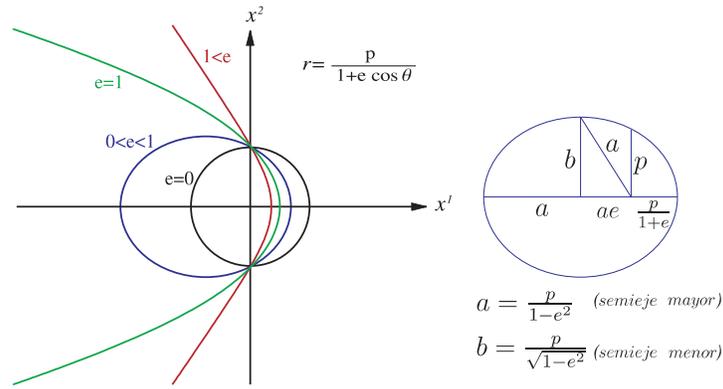


Figura 2.1: Órbitas solución del Problema de Kepler

Hamiltoniano. Para esto expresemos la energía total en términos de la excentricidad. La energía total será entonces

$$H(x, \dot{x}) = K(\dot{x}) - U(x) = \frac{m}{2} |\dot{x}|^2 - \frac{\alpha}{|x|}. \quad (2.9)$$

Usando (2.4) y (2.5) obtenemos

$$\begin{aligned} H &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{\alpha}{r} \\ &= \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{J^2}{m^2 r^2} \right) - \frac{\alpha}{r} \end{aligned} \quad (2.10)$$

En la demostración de la segunda ley de Kepler obtuvimos que $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{m}{J} \dot{r}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} H &= \frac{m}{2} \left(\frac{J^2}{m^2} \left(\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \right)^2 + \frac{J^2}{m^2 r^2} \right) - \frac{\alpha}{r} \\ &= \frac{J^2}{2m} \left(\left(\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{\alpha}{r}. \end{aligned}$$

Por último, utilizando la ecuación (2.8) y reduciendo se obtiene

$$\begin{aligned}
H &= \frac{J^2}{2m} \left(B^2 \sin^2(\theta - \theta_0) + \frac{1}{p^2} (1 + 2e \cos(\theta - \theta_0) + e^2 \cos^2(\theta - \theta_0)) \right) \\
&\quad - \frac{\alpha}{p} (1 + e \cos(\theta - \theta_0)) \\
&= \frac{J^2}{2m} \left(B^2 + \frac{1}{p^2} + \frac{2e}{p^2} \cos(\theta - \theta_0) \right) - \frac{\alpha}{p} - \alpha B \cos(\theta - \theta_0) \\
&= \frac{J^2}{2m} \left(B^2 + \frac{1}{p^2} \right) - \frac{\alpha}{p} \\
&= \frac{J^2 B^2}{2m} - \frac{m\alpha^2}{2J^2} \\
&= \frac{m\alpha^2}{2J^2} \left(\frac{B^2 J^4}{m^2 \alpha^2} - 1 \right) \\
&= \frac{m\alpha^2}{2J^2} (e^2 - 1).
\end{aligned}$$

Luego, la energía total queda expresada en términos de la excentricidad como

$$H = \frac{m\alpha^2}{2J^2} (e^2 - 1). \quad (2.11)$$

Resumimos los distintos tipos de cónicas en la siguiente tabla

<i>excentricidad</i>	<i>energía</i>	<i>órbita</i>
$e = 0$	$H = -m\alpha^2/2J^2$	circunferencia
$0 < e < 1$	$H < 0$	elipse
$e = 1$	$H = 0$	parábola
$e > 1$	$H > 0$	hipérbola

Demostremos la tercera ley de Kepler.

Proposición 2.5 (Tercera Ley de Kepler). *El cuadrado del período de revolución es proporcional al cubo del semieje mayor.*

Demostración. Supongamos que $x(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ es una órbita Kepleriana de período T . Sin pérdida de generalidad supongamos que $\theta_0 = 0$ y que $\theta(0) = 0$, esto siempre es posible eligiendo apropiadamente un sistema de coordenadas y una traslación en el tiempo. De las ecuaciones (2.5) y (2.8) obtenemos

$$\frac{JT}{2m} = \int_0^{\frac{T}{2}} r^2 \dot{\theta} dt = \int_0^\pi \frac{p^2}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta = \frac{p^2 \pi}{(1 - e^2)^{3/2}}. \quad (2.12)$$

El semieje mayor de la elipse, denotado por a , y el latús rectum están relacionados por $a = \frac{p}{1-e^2}$. Sustituyendo a $p = J^2/m\alpha$ y $1 - e^2 = -2J^2H/m\alpha^2$, véase (2.11), en la ecuación anterior y simplificando obtenemos $a = -\frac{\alpha}{2H}$.

De la ecuación (2.12) tenemos

$$T^2 = \frac{4m^2p\pi^2}{J^2} \frac{p^3}{(1-e^2)^3} = \frac{4m^2p\pi^2}{J^2} a^3 = \frac{4m\pi^2}{\alpha} a^3,$$

de donde

$$T^2 = \frac{4m\pi^2}{\alpha} a^3. \quad (2.13)$$

□

2.2 Minimizando el funcional de acción

Sea $\mathfrak{X} = H^1([0, T], \mathbb{C})$, entonces el funcional de acción asociado a (2.2) está dado por

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T \left(\frac{m}{2} |\dot{x}(t)|^2 + \frac{\alpha}{|x(t)|} \right) dt, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Proposición 2.6. *Sea $\mathfrak{X}_0 := \{x \in \mathfrak{X} : x(0), ix(T) \in \mathbb{R}\}$, entonces \mathcal{A} alcanza su mínimo en \mathfrak{X}_0 y cualquier mínimo resuelve la ecuación (2.2), donde $x \neq 0$.*

Demostración. Observemos que \mathfrak{X}_0 es un subespacio débilmente cerrado en \mathfrak{X} , esto se da por la compacidad de la inclusión $\mathfrak{X} \hookrightarrow C^0([0, T], V)$, además es cerrado en la topología débil.

Sea $x \in \mathfrak{X}_0$, y consideremos la función

$$\delta(x) = \max_{s_1, s_2 \in [0, T]} |x(s_1) - x(s_2)|.$$

Además notemos que

$$\delta(x) \geq |x(0) - x(T)| = \sqrt{|x(0)|^2 + |x(T)|^2} \geq |x(0)|.$$

Como $|x(t)| - |x(0)| \leq |x(t) - x(0)| \leq \delta(x)$, entonces

$$|x(t)| \leq |x(0)| + \delta(x) \leq 2\delta(x), \quad \text{para cualquier } t \in [0, T].$$

Elevando al cuadrado e integrando, obtenemos

$$\int_0^T |x(t)|^2 dt \leq 4\delta(x)^2 T.$$

Por otro lado, aplicamos la desigualdad de Cauchy–Schwarz a $|\dot{x} \cdot 1|$,

$$\left(\int_0^T |\dot{x} \cdot 1| \right)^2 \leq \int_0^T |\dot{x}|^2 dt \int_0^T |1|^2 dt,$$

simplificando, la desigualdad queda expresada como

$$\left(\int_0^T |\dot{x} \cdot 1| \right)^2 \leq T \int_0^T |\dot{x}|^2 dt$$

finalmente

$$\frac{1}{T} \left(\int_0^T |\dot{x} \cdot 1| \right)^2 \leq \int_0^T |\dot{x}|^2 dt.$$

Entonces

$$\int_0^T |\dot{x}|^2 dt \geq \frac{1}{T} \left(\int_0^T |\dot{x}| \right)^2 \geq \frac{\delta(x)^2}{T}.$$

Por último calculamos la norma de Sobolev

$$\|x\|_{H^1}^2 = \int_0^T |x|^2 dt + \int_0^T |\dot{x}|^2 dt \leq (4T^2 + 1) \int_0^T |\dot{x}|^2 dt \leq (4T^2 + 1) \left(\frac{2}{m} \right) \mathcal{A}(x),$$

de donde concluimos que $\mathcal{A}(x)$ restringido a \mathfrak{X}_0 es coercitivo. Por el Teorema 1.38 y Lema 1.51 tenemos que $\mathcal{A}(x)|_{\mathfrak{X}_0}$ alcanza su mínimo. Observemos que $\mathfrak{B}_\epsilon \subset \mathfrak{X}_0$ para toda $\epsilon > 0$. Ahora, por el Corolario 1.49, cualquier mínimo resuelve la ecuación (2.2) siempre que $x \neq 0$. \square

Proposición 2.7. *Sea $\mathfrak{X}_1 = \{x \in \mathfrak{X} : x(t) = -x(t + \frac{T}{2}), \text{ donde } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}\}$, entonces $\mathcal{A}(x)$ alcanza su mínimo en \mathfrak{X}_1 , y tal mínimo resuelve la ecuación (2.2), con $x \neq 0$.*

Demostración. El subespacio $\mathfrak{X}_1 \subset \mathfrak{X}$ es cerrado en las topologías fuerte y débil. Sea $x \in \mathfrak{X}_1$. Entonces $x(0) = x(T)$ y x puede extenderse a una función periódica en \mathbb{R} con la simetría italiana $x(t) = -x(t + \frac{T}{2})$, para alguna $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 &= \frac{1}{4} \left| x\left(t + \frac{T}{2}\right) - x(t) \right|^2 \leq \frac{1}{4} \left(\int_t^{t+\frac{T}{2}} |\dot{x}(\tau)|^2 d\tau \right)^2 \\ &\leq \frac{T}{8} \int_t^{t+\frac{T}{2}} |\dot{x}(\tau)|^2 d\tau = \frac{T}{16} \int_0^T |\dot{x}(\tau)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Por lo tanto al integrar con respecto de t , obtenemos

$$\int_0^T |x(t)|^2 dt \leq \frac{T^2}{16} \int_0^T |\dot{x}(t)|^2 dt,$$

la norma de Sobolev es

$$\|x\|_{H^1}^2 = \int_0^T |x|^2 dt + \int_0^T |\dot{x}|^2 dt \leq \left(\frac{T^2}{16} + 1\right) \int_0^T |\dot{x}|^2 dt \leq \left(\frac{T^2}{16} + 1\right) \left(\frac{2}{m}\right) \mathcal{A}(x).$$

Entonces el funcional de acción $\mathcal{A}(x)$ alcanza su mínimo en \mathfrak{X}_1 .

Ahora, para verificar la última afirmación de la proposición necesitamos tener en cuenta algunas cuestiones. Ya que el subespacio \mathfrak{X}_1 no contiene ningún \mathfrak{B}_ϵ , no se puede aplicar directamente el Corolario 1.49. Considérese el siguiente espacio de funciones

$$\mathfrak{X}_0 = \{x \in \mathfrak{X} : x(0) = x(T)\}.$$

Por lo tanto $\mathfrak{X}_0 + \mathfrak{B}_\epsilon = \mathfrak{X}_0$ para cualquier $\epsilon > 0$, entonces el Corolario 1.49 se puede aplicar. Obsérvese que $\mathfrak{X}_1 \subset \mathfrak{X}_0$ el cual es invariante bajo la representación ortogonal $\rho : \mathbb{Z}_2 \rightarrow GL(\mathfrak{X})$ definida como

$$\rho(1)(x(t)) := -x\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

Esto es $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_0^\rho$. El funcional \mathcal{A} no es coercitivo en \mathfrak{X}_0 , entonces necesitamos considerar los mínimos de la acción en \mathfrak{X}_1 . Tomando en cuenta que $\mathcal{A}|_{\mathfrak{X}_1}$ es ρ -invariante, la afirmación de que cualquier mínimo $x \in \mathfrak{X}_1$ resuelve la ecuación (2.2), es consecuencia del Teorema 1.54. \square

2.3 Acción de las órbitas Keplerianas elípticas y colineales

Iniciemos con algunas definiciones necesarias para los resultados del resto del capítulo.

Definición 2.8. [14] Sea C una curva cerrada y orientada, definida por $x(t)$ con $t \in [a, b]$, y sea p un punto del plano que no está en la curva. Entonces, la función $\varphi : C \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por

$$\varphi = \frac{x(t) - p}{|x(t) - p|}, \quad t \in [a, b],$$

define la aplicación que da la posición de la curva relativa al punto p . Cuando un punto en C da vuelta alrededor de la curva una vez, su punto imagen $\varphi(x(t))$ se moverá alrededor de \mathbb{S}^1 un número de veces, este número es llamado el *grado de la curva* (número de vueltas) C relativo al punto p , y denotamos esto por $\deg(x, p)$.

Definición 2.9. Si $x(t)$ es una órbita T periódica de grado k , definimos el *período mínimo* de la órbita como $\frac{T}{k}$. La órbita $\frac{T}{k}$ periódica se dice *órbita de período mínimo*.

Lema 2.10. *Sea x una órbita Kepleriana de (2.2) con período mínimo T . Entonces el funcional de acción de x es*

$$\mathcal{A}(x) = 3 \left(\frac{m\alpha^2\pi^2}{2} \right)^{1/3} T^{1/3}. \quad (2.14)$$

Demostración. Consideremos una solución elíptica Kepleriana $x(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ de (2.2). Supongamos que tiene período mínimo T . El funcional de acción de esta solución es

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \int_0^T L(x, \dot{x}) dt = \int_0^T K(\dot{x}) + U(x) dt \\ &= \int_0^T H(x, \dot{x}) + 2U(x) dt = HT + 2 \int_0^T U(x) dt, \end{aligned}$$

donde $H(x, \dot{x}) = K(\dot{x}) - U(x)$.

Ahora, calculemos esta última integral, recordando que $U(x) = \frac{\alpha}{|x|} = \frac{\alpha}{r}$,

$$\int_0^T U(x) dt = 2 \int_0^{T/2} U(x) dt = 2\alpha \int_0^{T/2} \frac{dt}{r(t)} = 2\alpha \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r\dot{r}}. \quad (2.15)$$

Para terminar de calcular la integral es conveniente introducir una variable auxiliar ψ , llamada *anomalía excéntrica*, definida implícitamente por

$$r = a(1 - e \cos \psi). \quad (2.16)$$

La variable ψ está bien definida ya que es conocido que r toma el valor mínimo en $r = a(1 - e)$ y el valor máximo en $r = a(1 + e)$, en cuyo caso estamos.

Despejando a \dot{r} de la ecuación (2.10) tenemos

$$|\dot{r}| = \sqrt{\frac{2}{m} \left(H + \frac{\alpha}{r} - \frac{J^2}{2mr^2} \right)}$$

Sustituyendo el Hamiltoniano H por $-\frac{\alpha}{2a}$, y recordando que $a = \frac{p}{1-e^2}$ y $p = \frac{J^2}{m\alpha}$ obtenemos

$$\begin{aligned} |\dot{r}| &= \sqrt{\frac{2}{m} \sqrt{-\frac{\alpha}{2a} + \frac{\alpha}{r} - \frac{p\alpha}{2r^2}}} \\ &= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2\alpha}{m} \sqrt{-\frac{r^2}{2a} + r - \frac{a(1-e^2)}{2}}} \end{aligned}$$

Por último, sustituyamos a r por $a(1 - e \cos \psi)$, y simplificando obtenemos

$$|\dot{r}| = \sqrt{\frac{\alpha}{ma}} \left(\frac{e \operatorname{sen} \psi}{1 - e \cos \psi} \right),$$

de donde

$$\frac{1}{r|\dot{r}|} dr = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \frac{1}{e \operatorname{sen} \psi} e \operatorname{sen} \psi = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}}.$$

Por lo tanto, la integral (2.15) queda expresada como

$$\int_0^T U(x) dt = 2\alpha \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r\dot{r}} = 2\alpha \int_0^\pi \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} d\psi = 2\sqrt{ma\alpha}\pi.$$

De esta manera la acción de cualquier órbita Kepleriana $x(t)$ de periodo mínimo T es

$$\mathcal{A}(x) = HT + 4\sqrt{ma\alpha}\pi$$

Finalmente, usando la tercera ley de Kepler, y $H = -\frac{\alpha}{2a}$, podemos escribir la acción en términos de m , α y T :

$$\mathcal{A}(x) = 3 \left(\frac{m\alpha^2\pi^2}{2} \right)^{1/3} T^{1/3}.$$

□

Notemos que la acción no depende de la excentricidad e de la órbita.

Observación 2.11. Sea $x = x(t)$ una órbita elíptica Kepleriana T -periódica con período mínimo $\frac{T}{k}$. Consideremos a $y = y(t)$ la órbita T -periódica definida por $y(t) = x(\frac{t}{k})$, es decir, la órbita y tiene período mínimo T y además cumplen con

$$k\mathcal{A}(x) = 3k \left(\frac{m\alpha^2\pi^2}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{T}{k} \right)^{1/3} = k^{2/3} 3 \left(\frac{m\alpha^2\pi^2}{2} \right)^{1/3} T^{1/3} = k^{2/3} \mathcal{A}(y) \geq \mathcal{A}(y).$$

Es decir, la acción de una órbita con período mínimo T es no es mayor que la acción de una órbita con período T .

Ahora consideremos las órbitas Keplerianas colineales (es decir con $J = 0$). Una *solución extendida* $x(t)$ de la ecuación de movimiento (2.2), con $t \in [0, T]$, es una curva continua cuya trayectoria es la unión de órbitas Keplerianas y el origen. Sea $E_x \subset [0, T]$ un conjunto cerrado en el cual x se anula. Por continuidad $x(t)$ inicia ó termina en colisión en cada componente de $[0, T] \setminus E_x$, de tal forma que las componentes de $x(t)$ son líneas rectas, pues las órbitas Keplerianas colisionan sólo en configuración colineal.

La Figura 2.2 muestra una solución extendida con una única componente, además de una solución extendida de dos componentes. Ésta última tiene componentes de períodos T_1 y T_2 , y el período total de la trayectoria es $T = T_1 + T_2$, la cual inicia en el punto de reposo q_1 , luego la partícula va hacia el origen, emergiendo de aquí con

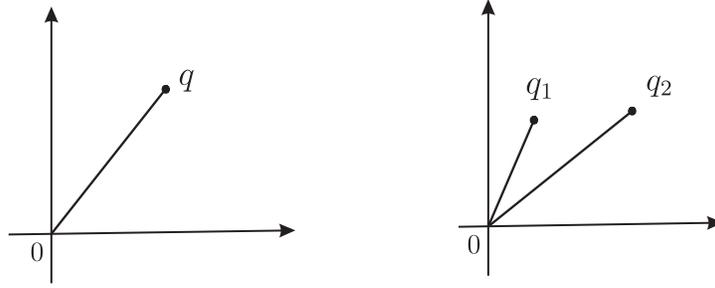


Figura 2.2: Solución extendida con una y dos componentes, respectivamente.

un ángulo arbitrario para moverse hacia el punto q_2 , donde toca la curva de velocidad cero; luego en q_2 toma camino de reversa, y la trayectoria termina en q_1 .

En este contexto, consideremos el caso de órbitas de colisión–expulsión con una única colisión, es decir tomemos las órbitas Keplerianas que inician con velocidad cero y se mueven hacia el origen hasta que ocurre una colisión en $t = \frac{T}{2}$, entonces las masas después de colisionar regresan a su posición inicial en $t = T$. Éste es un caso particular de las soluciones T periódicas extendidas para el problema de Kepler, las cuales pueden ser consideradas como órbitas elípticas degeneradas. En este caso el momento angular es cero y el eje mayor $a = |x(0)|$.

A partir de (2.13) y (2.16), la fórmula del cuadrado del período (2.13) puede ser obtenida para una de las órbitas colineales. Notemos que ésta no depende de e . Los cálculos para la acción de x son similares, esto es, ya que la colisión ocurre al tiempo $\frac{T}{2}$, definimos $\tau = \frac{T}{2}$ y por tanto $T = 2\tau$. Luego como un caso particular del Lema 2.10 tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathcal{A}(x(2\tau)) &= \frac{1}{2}3\left(\frac{m\alpha^2\pi^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(2\tau)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}3\left(\frac{m\alpha^2\pi^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{3}{2}(m\alpha^2\pi^2)^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

En [16], Gordon llama “piernas” a las componentes de las soluciones extendidas, por lo tanto éstas pueden ser órbitas de colisión–expulsión ó expulsión–colisión. Si una órbita extendida tiene k componentes con tiempos de colisión τ_i entonces el periodo total $T = \sum_{i=1}^k 2\tau_i$.

Resumimos los últimos cálculos en el siguiente lema.

Lema 2.12. *i) Sea $x(t)$ una órbita Kepleriana colineal extendida con período mínimo T , tal que satisfice*

$$x\left(\frac{T}{2}\right) = 0, \quad x(t) = x(T - t), \quad \text{para todo } t \in [0, \frac{T}{2}], \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0. \quad (2.17)$$

Entonces el funcional de acción en x está dado por (2.14).

ii) Si $\dot{x}(0) = 0$ y la órbita $x(t)$ se mueve hacia el origen hasta que ocurre una colisión en $x(\tau) = 0$, entonces

$$\int_0^\tau L(x, \dot{x}) dt = \frac{3}{2} (m\alpha^2 \pi^2)^{\frac{1}{3}} \tau^{\frac{1}{3}}.$$

Observación 2.13. Observemos que $g(t) = t^{\frac{1}{3}}$ es una función convexa para $t \in [0, \infty)$. Sea x una órbita periódica extendida del problema de Kepler, y sean t_j las longitudes de los componentes de E_x . Si la acción de x es finita y consideramos $\sum_j t_j = T$, por convexidad se cumple

$$\sum_j t_j^{\frac{1}{3}} \geq \left(\sum_j t_j \right)^{\frac{1}{3}} = T^{\frac{1}{3}}.$$

Como consecuencia la acción total satisfice

$$\begin{aligned} 3 \left(\frac{m\alpha^2 \pi^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \sum_j t_j^{\frac{1}{3}} &= 3 \left(\frac{m\alpha^2 \pi^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} T^{\frac{1}{3}} \sum_j \left(\frac{t_j}{T} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\geq 3 \left(\frac{m\alpha^2 \pi^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} T^{\frac{1}{3}} \left(\sum_j \left(\frac{t_j}{T} \right) \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 3 \left(\frac{m\alpha^2 \pi^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} T^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

En particular si x es una órbita con una única colisión tenemos que $t_1 = t_2 = \frac{T}{2}$. Luego la igualdad se cumple en la ecuación anterior si y sólo si existe sólo una colisión. En otras palabras, la acción de las soluciones periódicas extendidas del problema de Kepler de la forma (2.17) tienen una acción menor que las órbitas extendidas con más de una colisión.

2.4 El teorema de Gordon

En 1977, W. Gordon [16] demostró que los mínimos del funcional de acción \mathcal{A} en \mathfrak{X}_T para el problema de Kepler con período mínimo T , son exactamente las órbitas Keplerianas.

En esta sección vamos a redemostrar el Teorema de Gordon dado en [16] y caracterizaremos los mínimos de la acción en el espacio de las órbitas cerradas (lazos)

de grado k alrededor del origen (centro de masa). Sí $k = \pm 1$, los mínimos son exactamente las elipses de Kepler.

A pesar de que el funcional de acción \mathcal{A} no tiene mínimos en el espacio $\mathfrak{X} := H^1([0, T], \mathbb{C})$ ó $\mathfrak{X}_T := H^1(S_T, \mathbb{C})$, $S_T = [0, T]/\{0, T\}$ (ver la Observación 1.50), Gordon demostró que cualquier órbita periódica Kepleriana con período mínimo T es un mínimo local de la acción \mathcal{A} en \mathfrak{X}_T . Este resultado revolucionó la aplicación de los métodos variacionales en el estudio del problema de los n cuerpos.

En la sección anterior definimos el grado de una curva, la cual podemos considerar de forma equivalente tomando $\deg(x; a)$ como el número de vueltas que da la curva $x(t)$ alrededor del punto $a \in \mathbb{C}$.

Iniciemos por considerar el espacio de curvas cerradas (lazos) \mathfrak{X}_T en \mathfrak{X} que dan vueltas alrededor del origen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_2 &:= \{x \in \mathfrak{X}_T : x(t) \neq 0 \text{ y } \deg(x; 0) \neq 0\} \\ \mathfrak{X}_2^* &:= \mathfrak{X}_2 \cup \{x \in \mathfrak{X}_T : \mathcal{A}(x) < +\infty, x(t) = 0 \text{ para alguna } t \in [0, T]\}.\end{aligned}$$

Consideremos los siguientes espacios ya vistos en la sección anterior:

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_0 &:= \{x \in \mathfrak{X} : x(0), ix(T) \in \mathbb{R}\}, \\ \mathfrak{X}_1 &:= \{x \in \mathfrak{X} : x(t) = -x(t + \frac{T}{2}) \text{ cuando } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}\}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

El conjunto \mathfrak{X}_2 no es subespacio y no es débilmente cerrado tanto en \mathfrak{X} como en \mathfrak{X}_T .

Lema 2.14. *Sea $\mathcal{A}^c, c \in \mathbb{R}$ denota el conjunto de nivel $\mathcal{A}^{-1}((-\infty, c]) \subset \mathfrak{X}_T$ de \mathcal{A} , entonces*

- (a) $\mathcal{A}|_{\mathfrak{X}_2^*}$ es coercitivo,
- (b) \mathfrak{X}_2 es abierto en \mathfrak{X}_T ,
- (c) $\mathcal{A}^c \cap \mathfrak{X}_2^*$ es débilmente cerrado en \mathfrak{X}_T para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

Demostración. (a) Para cualquier $x \in \mathfrak{X}_2^*$, existe algún $\tau_x \in (0, T)$ tal que $x(0)$ y $x(\tau_x)$ están en dirección opuesta, es decir $x(0) \cdot x(\tau_x) = -|x(0)| \cdot |x(\tau_x)|$, por lo tanto \mathfrak{X}_2^* satisface la condición $(NC)_2$ y por el Teorema 1.56, $\mathcal{A}|_{\mathfrak{X}_2^*}$ es coercitivo.

(b) Dado que la inclusión $H^1 \hookrightarrow C^0$ es compacta, tenemos que para cualquier $x \in \mathfrak{X}_2$ podemos definir $\epsilon_x := \|x\|_{C^0}$, el cual es un número positivo y se satisface

$$\|x - y\|_{C^0} \leq C\|x - y\|_{H^1} < \epsilon_x$$

para alguna $C > 0$ independiente de x , y para cualquier y tal que $\|x - y\|_{H^1} < \frac{\epsilon_x}{C}$. Entonces $y \in \mathfrak{X}_2$ si y está en una H^1 vecindad pequeña de x .

Ahora demosremos el inciso (c). En el caso $\mathcal{A}^c \cap \mathfrak{X}_2^* = \emptyset$ el resultado es obvio. Luego, supongamos que $\mathcal{A}^c \cap \mathfrak{X}_2^* \neq \emptyset$ y sea $\{x_k\}$ una sucesión en $\mathcal{A}^c \cap \mathfrak{X}_2^*$. Ya

que $\mathcal{A}^c \cap \mathfrak{X}_2^*$ es coercitivo, obtenemos que $\{x_k\}$ es acotada, y aplicando el Teorema de Banach–Alaoglu [4], existe una subsucesión de $\{x_k\}$ que converge débilmente a $x \in \mathfrak{X}_T$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\{x_k\}$ converge débilmente a x . Notemos que como consecuencia de la compacidad de la inclusión $H^1 \hookrightarrow C^0$ se cumple $x \in \mathfrak{X}_2^*$. Por el Lema 1.51, tenemos

$$\mathcal{A}(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}(x_k) \leq c.$$

Entonces $x \in \mathcal{A}^c \cap \mathfrak{X}_2^*$, y por lo tanto se cumple $\mathcal{A}^c \cap \mathfrak{X}_2^*$ es débilmente cerrado. \square

Ahora sí, estamos en posibilidad de demostrar el Teorema de Gordon [16].

Teorema 2.15. $\mathcal{A}|_{\mathfrak{X}_2}$ alcanza sus mínimos en las órbitas elípticas Keplerianas; es decir, en las soluciones de (2.2), donde T es el período mínimo.

Demostración. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{A}^c \cap \mathfrak{X}_2^* \neq \emptyset$. Por el Lema 2.14, Lema 1.51 y el Teorema 1.38, el funcional de acción \mathcal{A} alcanza su mínimo en $\mathcal{A}^c \cap \mathfrak{X}_2^*$.

Supongamos que $x \in \mathfrak{X}_2^* \setminus \mathfrak{X}_2$ es un mínimo de \mathcal{A} en \mathfrak{X}_2^* . Por la observación 2.13 x tiene una solución extendida con una sola colisión en S_T , y ésta tiene la forma (2.17). Por el Lema 2.12, x tiene la misma acción que una órbita Kepleriana elíptica con período mínimo T . Por lo tanto $\mathcal{A}|_{\mathfrak{X}_2^*}$ (y luego $\mathcal{A}|_{\mathfrak{X}_2}$) alcanza su mínimo en \mathfrak{X}_2 . Por el Lema 2.10, estos mínimos son órbitas Keplerianas elípticas de (2.2), donde T es el período mínimo. \square

Capítulo 3

La órbita ocho

El primer ejemplo de una coreografía simple en el problema de los 3 cuerpos fue dado por J. L. Lagrange en 1772, la cual se obtiene al colocar tres cuerpos sobre los vértices de un triángulo equilátero con velocidades iniciales dadas adecuadamente.

El segundo ejemplo fue descubierto cerca de dos siglos después, y es descrito por tres masas iguales y cada una de ellas sigue un movimiento en forma de *ocho*. En 1993, C. Moore [18] la descubrió numéricamente, posteriormente la existencia de dicha órbita fue rigurosamente demostrada por A. Chenciner y R. Montgomery en 1999, [9]; su demostración está basada en métodos variacionales.

El objetivo de este capítulo es exponer en detalle los métodos usados por A. Chenciner y R. Montgomery en [9] para la construcción de la órbita ocho.

Veremos que el espacio de configuración V puede ser identificado con \mathbb{C}^2 . Además, usando la fibración de Hopf, V es transformado en el espacio de configuración reducido $\tilde{V} = V/\text{SO}(2) \cong \mathbb{C}^2/\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}^3$. Luego, tomando el momento de inercia constante, los triángulos formados por los tres cuerpos, pueden ser vistos como puntos en la esfera $\mathbb{S}_f^2 \subset \mathbb{R}^3$ llamada la *esfera de las formas* (en inglés *shape sphere*).

3.1 Coordenadas de Jacobi

Las ecuaciones de movimiento del problema de 3 cuerpos son

$$m_k \ddot{x}_k = \frac{\partial}{\partial x_k} U(x), \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^3$ es la posición de la masa m_k y

$$U(x) = U(x_1, x_2, x_3) = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}, \quad r_{ij} = |x_i - x_j|$$

es el potencial.

En el problema de n cuerpos, el *espacio de configuración*, denotado por V , se define como

$$\left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{3n} \mid \sum_{k=1}^n m_k x_k = 0 \right\}$$

el cual tiene dimensión $3n - 3$ puesto que el espacio de configuración coincide con el núcleo de la transformación lineal $\mathcal{T} : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\mathcal{T}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n m_k x_k$.

Por lo tanto, el espacio de configuración V es isomorfo a $\mathbb{R}^{3(n-1)}$. De manera análoga, si el movimiento de los n cuerpos se realiza en un plano, entonces $V \cong \mathbb{R}^{2(n-1)}$. Para el caso de tres cuerpos, $n = 3$, tenemos $V \cong \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$. La identificación del espacio de configuración, para el caso de los 3 cuerpos, se hará a través de la función de Jacobi.

Primero consideremos el caso espacial con $x_k \in \mathbb{R}^3$, con $k = 1, 2, 3$. Iniciemos por introducir las coordenadas de Jacobi, en las cuales la primera coordenada es el vector que une la masa m_1 con m_2 y la segunda coordenada es el vector que va del centro de masa de m_1 y m_2 a la masa m_3 .

Denotemos las coordenadas de Jacobi por $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^3$, las cuales formalmente están dadas por

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_2 - x_1, \\ \xi_2 &= x_3 - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_2 \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

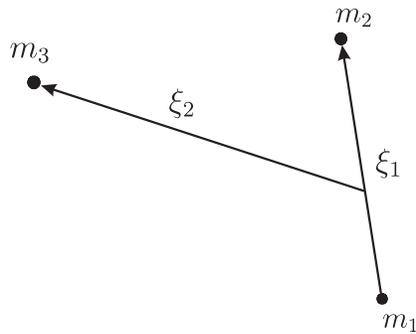


Figura 3.1: El problema de 3 cuerpos en coordenadas de Jacobi.

Las coordenadas de Jacobi definen un isomorfismo llamado *función de Jacobi*, definida como $\mathcal{J} : V \rightarrow \mathbb{R}^6$ dada por $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (\xi_1, \xi_2)$ donde $m_1 x_1 + m_2 x_2 +$

$m_3 x_3 = 0$, con inversa

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi_1 - \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \xi_2, \\ x_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi_1 - \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \xi_2, \\ x_3 &= \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \xi_2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

La energía cinética $K(\dot{x})$ se puede expresar en términos de ξ_1 y ξ_2 como

$$K(\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2) = \frac{1}{2}(M_1|\dot{\xi}_1|^2 + M_2|\dot{\xi}_2|^2)$$

donde $M_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ y $M_2 = \frac{(m_1 + m_2)m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$. De forma similar, el potencial $U(x)$ puede expresarse en términos de ξ_1 y ξ_2 tomando la forma

$$U(\xi_1, \xi_2) = \frac{m_1 m_2}{|\xi_1|} + \frac{m_1 m_3}{|\xi_2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi_1|} + \frac{m_2 m_3}{|\xi_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi_1|}.$$

Las coordenadas de Jacobi pueden ser normalizadas haciendo

$$(z_1, z_2) := (\sqrt{M_1} \xi_1, \sqrt{M_2} \xi_2), \quad (3.4)$$

de esta forma la función de Jacobi \mathcal{J} está dada por

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{M_1} (x_2 - x_1) \\ z_2 &= \sqrt{M_2} \left(x_3 - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_2 \right) \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

con inversa \mathcal{J}^{-1} dada por

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{z_1}{\sqrt{M_1}} - \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \frac{z_2}{\sqrt{M_2}}, \\ x_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{z_1}{\sqrt{M_1}} - \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \frac{z_2}{\sqrt{M_2}}, \\ x_3 &= \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \frac{z_2}{\sqrt{M_2}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Más adelante demostraremos que la función de Jacobi es una isometría. La energía cinética y el potencial en términos de z_1 y z_2 están dados por

$$\begin{aligned} K(\dot{z}_1, \dot{z}_2) &= \frac{1}{2}(|\dot{z}_1| + |\dot{z}_2|), \\ U(z_1, z_2) &= \frac{m_1 m_2 \sqrt{M_1}}{|z_1|} + \frac{m_1 m_3 \sqrt{M_2}}{|z_2 + \frac{\sqrt{M_1 M_2}}{m_2} z_1|} + \frac{m_2 m_3 \sqrt{M_2}}{|z_2 - \frac{\sqrt{M_1 M_2}}{m_2} z_1|}. \end{aligned}$$

3.2 El problema plano de 3 cuerpos

A partir de esta sección estaremos considerando el caso en que el movimiento de los 3 cuerpos se lleva a cabo en un plano, es decir $x_k \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, con $k = 1, 2, 3$. En este caso el espacio de configuración es

$$V = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = 0\}$$

y puede ser identificado con \mathbb{C}^2 a través de la función de Jacobi $\mathcal{J} : V \rightarrow \mathbb{C}^2$.

Equipamos a V con el *producto escalar total Hermitiano*. En el caso de masas iguales a uno, éste es

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^3 \bar{x}_k y_k = x \cdot y + i\omega(x, y)$$

donde $\omega(x, y)$ es el momento angular. Las partes real e imaginaria son el producto escalar total y la estructura simpléctica total, respectivamente..

Las ecuaciones (3.1) son invariantes bajo rotaciones, es decir si (x_1, x_2, x_3) es solución al problema de 3 cuerpos, entonces $(A(x_1), A(x_2), A(x_3))$ también es solución, donde $A \in \text{SO}(3)$.

A continuación introducimos el *espacio de configuración reducido*, el cual reduce en uno la dimensión de V . Para realizar esto damos una relación de equivalencia en el espacio de configuración V con ayuda del grupo de rotaciones $\text{SO}(2) \subset \text{SO}(3)$.

Iniciemos considerando al grupo de rotaciones $\text{SO}(2)$ en \mathbb{R}^2 , el cual es isomorfo al grupo unitario $U(1) = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, que consiste de todos los números complejos de módulo 1, y tal que está equipado con la multiplicación de números complejos como operación de grupo. Este isomorfismo esta dado por

$$A = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\theta) & -\text{sen}(2\pi\theta) \\ \text{sen}(2\pi\theta) & \cos(2\pi\theta) \end{pmatrix} \mapsto e^{2\pi i\theta}. \quad (3.7)$$

Ahora vamos a definir una relación de equivalencia en V . Decimos que $x = (x_1, x_2, x_3)$ está relacionado con $x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ en V , $x \sim x'$, si existe un elemento $A \in \text{SO}(2)$ tal que $Ax = x'$, es decir $A(x_k) = x'_k$ para $k = 1, 2, 3$.

El espacio de configuración reducido, denotado por \tilde{V} , es el conjunto de las clases de equivalencia de V bajo la relación \sim , es decir, $\tilde{V} = V/\sim$. En otras palabras, \tilde{V} se define como el espacio de órbitas de V donde actúa el grupo $\text{SO}(2)$, denotado por $V/\text{SO}(2)$, es decir, el espacio cociente que se obtiene con la acción $\text{SO}(2) \times V \rightarrow V$ dado por $(A, (x_1, x_2, x_3)) \mapsto (Ax_1, Ax_2, Ax_3)$.

Ahora veamos cuál es la relación de equivalencia en \mathbb{C}^2 . Usando el isomorfismo de Jacobi (3.6), así como el isomorfismo de grupos (3.7), la relación en \mathbb{C}^2 está dada de la siguiente forma: (z_1, z_2) está relacionado con (z'_1, z'_2) si existe $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que $(e^{2\pi i\theta} z_1, e^{2\pi i\theta} z_2) = e^{2\pi i\theta}(z_1, z_2) = (z'_1, z'_2)$.

3.3 La fibración de Hopf

La identificación del espacio de configuración reducido se hará con ayuda de la fibración de Hopf, la cual es un objeto matemático que fue estudiado por Hopf en 1931 [13], el cual le permitió determinar el tercer grupo de homotopía de una 2-esfera y mostró, en particular, que es un grupo no trivial, exhibiendo una aplicación adecuada de la 3-esfera a la 2-esfera. En pocas palabras podemos resumir esto diciendo que entre estas esferas existe una fibración.

La *fibración de Hopf* es la función $\mathcal{K} : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ definida por

$$\mathcal{K}(a, b, c, d) = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(ad + bc), 2(bd - ac)),$$

donde el espacio base es \mathbb{S}^2 , el espacio total \mathbb{S}^3 y la fibra es \mathbb{S}^1 .

Si hacemos $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ la fibración de Hopf en términos de números complejos esta dada por $\mathcal{K}(z_1, z_2) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2\bar{z}_1 z_2) = (u_1, u_2 + iu_3) = (u_1, u_2, u_3)$.

Ahora, verifiquemos que la función \mathcal{K} aplica la esfera \mathbb{S}^3 en \mathbb{S}^2 .

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}(z_1, z_2)|^2 &= (|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 + 4|\bar{z}_1|^2 |z_2|^2 \\ &= |z_1|^4 + 2|z_1|^2 |z_2|^2 + |z_2|^4 \\ &= (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{K}(z)$ aplica la esfera unitaria \mathbb{S}^3 de \mathbb{C}^2 en la esfera unitaria \mathbb{S}^2 en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 .

Entenderemos por *la función de Hopf* como la extensión de \mathcal{K} definida en todo \mathbb{C}^2 . Si no causa confusión continuaremos denotándola con la misma letra, es decir, $\mathcal{K} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Notemos que la función de Hopf es invariante bajo la relación \sim , es decir, si (z_1, z_2) está relacionado con (z'_1, z'_2) entonces $\mathcal{K}(z_1, z_2) = \mathcal{K}(z'_1, z'_2)$. Luego, \mathcal{K} induce una función $\bar{\mathcal{K}} : \mathbb{C}^2/\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\bar{\mathcal{K}}([z_1, z_2]) = \mathcal{K}(z_1, z_2)$, donde $[z_1, z_2]$ es una clase de equivalencia bajo esta relación. Se tiene que $\bar{\mathcal{K}}$ es un homeomorfismo.

Como consecuencia, tenemos la siguiente composición de funciones

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (z_1, z_2) \mapsto [(z_1, z_2)] \mapsto (u_1, u_2, u_3).$$

Por lo tanto, el estudio de la dinámica del problema de los 3 cuerpos en el plano, puede visualizarse como el movimiento de puntos en \mathbb{R}^3 .

3.4 El espacio reducido

Consideremos coordenadas esféricas en el espacio reducido $\tilde{V} = \mathbb{R}^3$

$$(u_1, u_2, u_3) = (r^2 \cos \varphi \cos \theta, r^2 \cos \varphi \sin \theta, r^2 \sin \varphi).$$

Las esferas de radio $r = c > 0$ son conocidas como *esferas de las formas* (en inglés *shape sphere*). A lo largo de este trabajo denotaremos por \mathbb{S}_f^2 a la 2-esfera unitaria de las formas de radio $r = 1$.

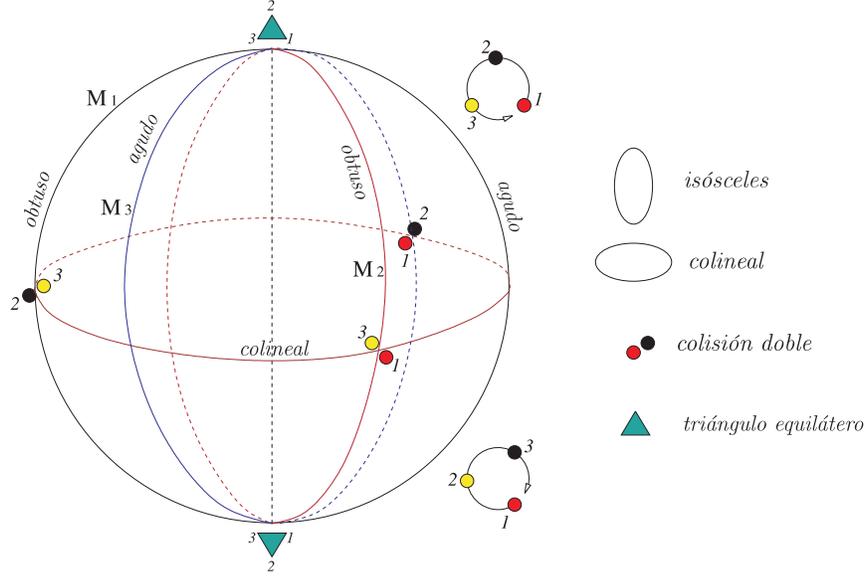


Figura 3.2: La esfera de las formas \mathbb{S}_f^2 .

La Figura 3.2 es debida a R. Moeckel [17], y relaciona las configuraciones del problema de 3 cuerpos con puntos en la esfera. En la figura, M_j representa triángulos isósceles con la j -ésima masa a igual distancia de las otras dos. Enseguida damos unas observaciones las cuales se desprenden de la descripción geométrica de los puntos en \mathbb{S}_f^2 .

- Notemos que $\frac{1}{2}u_3 = \text{Im}(\bar{z}_1 z_2) = e_3 \cdot (z_1 \wedge z_2)$, por lo tanto, $\frac{1}{2}u_3$ es el área con signo del paralelogramo generado por $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Por otro lado, el área con signo del triángulo formado por los 3 cuerpos en \mathbb{C} con vértices x_1, x_2 y x_3 es $\Delta = \frac{1}{2}e_3 \cdot (x_2 - x_1) \wedge (x_3 - x_1)$. Usando (3.2) podemos escribir esta área como $\Delta = \frac{1}{2}e_3 \cdot \xi_1 \wedge (\xi_2 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\xi_1) = \frac{1}{2}e_3 \cdot \xi_1 \wedge \xi_2$. Ahora, usando (3.4) ésta toma la forma $\Delta = \frac{1}{2}e_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{M_1 M_2}} z_1 \wedge z_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1 m_2 m_3}} e_3 \cdot (z_1 \wedge z_2)$.

Por lo tanto, el área con signo del triángulo con vértices x_1, x_2 y x_3 , en términos de u_3 está dada por la ecuación $\Delta = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1 m_2 m_3}} u_3$. En particular, $u_3 = 0$ si y sólo si la configuración es colineal. Luego, las colisiones se encuentran localizadas en el ecuador. Podemos concluir, que el área es *positiva* si y sólo si $z_1 \wedge z_2$ (ó $(x_2 - x_1) \wedge (x_3 - x_1)$) es un múltiplo positivo del área estándar formada por $e_1 \wedge e_2$.

- Los triángulos del hemisferio superior ($u_3 > 0$) con vértices (x_1, x_2, x_3) tienen orientación positiva, ó equivalentemente $(x_2 - x_1) \wedge (x_3 - x_1)$ es un múltiplo positivo del área formada por $e_1 \wedge e_2$; mientras que en el hemisferio inferior, los triángulos tienen orientación negativa.
- El polo norte ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) corresponde a la configuración de un triángulo equilátero con orientación positiva; y el polo sur ($\varphi = -\frac{\pi}{2}$) está asociado a la configuración de un triángulo con orientación negativa.

3.5 El problema de minimizar

Consideremos el problema plano de 3 cuerpos con las tres masas iguales, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. En este caso las ecuaciones de movimiento son:

$$\ddot{x}_k = \frac{\partial}{\partial x_k} U(x), \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.8)$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^2$ y $U(x) = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}}$. En este caso el espacio de configuración es

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}^2)^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

y el funcional de acción es

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^{\bar{T}} \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}} dt \quad (3.9)$$

para algún $\bar{T} > 0$. Consideremos el espacio $\mathfrak{X} = H^1(S_{\bar{T}}, V)$, donde $\bar{T} = 12T$ y $S_{\bar{T}} = [0, \bar{T}] / \{0, \bar{T}\}$. Estamos interesados en considerar trayectorias en el espacio \mathfrak{X} definidas para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$, así como aquellas soluciones periódicas que son extendibles.

A partir de ahora, denotaremos por E_i a la configuración de Euler con la i -ésima masa en medio de las otras dos, y por M_j a la configuración de triángulo isósceles con la j -ésima masa a igual distancia de las otras dos. Ahora, consideremos el problema de minimizar la acción \mathcal{A} sobre el subespacio vectorial \mathfrak{X}_0 de \mathfrak{X} , donde

$$\mathfrak{X}_0 = \{x \in \mathfrak{X} : x(0) \in E_3, x(T) \in M_1\}.$$

Para realizar ésto, iniciemos por considerar el *grupo diédrico*.

El grupo diédrico D_6 de orden 12 es el grupo de simetrías de un hexágono regular, el cual consiste de 6 rotaciones σ , por un ángulo $\frac{\pi j}{3}$ con $j = 0, 1, \dots, 5$ junto con

reflexiones τ , respecto a los 6 ejes de simetría del hexágono. El grupo diédrico lo describimos en términos de sus generadores de la siguiente forma:

$$D_6 = \langle \sigma, \tau; \tau^2 = 1, \sigma^6 = 1, \sigma\tau = \tau\sigma^{-1} \rangle$$

donde τ es una reflexión (orden 2), y σ una rotación de orden 6, tales que satisfacen $\sigma\tau\sigma = \tau$.

Ahora consideremos la representación del grupo diédrico $\rho : D_6 \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{X}_0)$, de tal forma que las acciones de los generadores del grupo diédrico en un lazo $x : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$ están definidas por las siguientes fórmulas: si $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$,

$$\begin{aligned} \rho(\sigma)(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) &= (A(x_3(t+2T)), A(x_1(t+2T)), A(x_2(t+2T))), \\ \rho(\tau)(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) &= (-x_2(-t), -x_1(-t), -x_3(-t)) \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la simetría con respecto al eje y en \mathbb{R}^2 . La norma de Sobolev y el funcional de acción \mathcal{A} se preservan bajo esta acción. De hecho, basta notar que $z, \bar{z} \in \mathbb{C}$ tienen el mismo módulo y que $|(x_1, x_2, x_3)| = |(x_i, x_j, x_k)|$ donde $i, j, k = 1, 2, 3$ son diferentes entre sí. Luego, la representación es ortogonal. Definimos el espacio ρ -invariante \mathfrak{X}_0^ρ en \mathfrak{X}_0 como

$$\mathfrak{X}_0^\rho := \{x \in \mathfrak{X}_0 : \rho(g)x = x \text{ para toda } g \in D_6\}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \rho(\sigma^2)(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) &= \rho(\sigma)(A(x_3(t+2T)), A(x_1(t+2T)), A(x_2(t+2T))) \\ &= (A^2(x_2(t+4T)), A^2(x_3(t+4T)), A^2(x_1(t+4T))) \\ &= (x_2(t+4T), x_3(t+4T), x_1(t+4T)). \end{aligned}$$

Luego, para todo $x = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathfrak{X}_0^\rho$ se sigue de la invariancia de la acción de $\rho(\sigma^2)$ la igualdad

$$(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (x_2(t+4T), x_3(t+4T), x_1(t+4T))$$

para toda $t \in \mathbb{R}$.

Proposición 3.1. *La acción \mathcal{A} toma un mínimo en \mathfrak{X}_0^ρ . Más aún, cualquier mínimo $x \in \mathfrak{X}_0^\rho$ es un punto crítico de \mathcal{A} en \mathfrak{X}_0 , y x es solución de (3.8) cuando $x(t) \in V \setminus \Delta$.*

Demostración. En \mathfrak{X}_0^ρ , usando (3.10) se tiene que el funcional de acción dado en (3.9) puede escribirse como

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}} dt.$$

De hecho, ya que $\rho(\sigma^2)x = x$ y la norma de Sobolev es preservada por ésta, fijamos $s = t - 4T$ y obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{12T} \left[\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt &= \int_0^{4T} \left[\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt + \int_{4T}^{8T} \left[\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt \\ &\quad + \int_{8T}^{12T} \left[\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt \\ &= 3 \int_0^{4T} \left[\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt. \end{aligned}$$

Por otro lado, ya que $\rho(\sigma)x = x$, hacemos $s = t - 2T$ y tenemos:

$$\begin{aligned} 3 \int_0^{4T} \left[\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt &= 3 \left(\int_0^{2T} \left[\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt + \int_{2T}^{4T} \left[\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt \right) \\ &= 6 \int_0^{2T} \left[\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt. \end{aligned}$$

Además usando el hecho $\rho(\sigma\tau)x = x$, hacemos $s = t - 2T$ para obtener

$$\begin{aligned} 6 \int_0^{2T} \left[\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt &= 6 \left(\int_0^T \left[\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt + \int_T^{2T} \left[\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt \right) \\ &= 12 \int_0^T \left[\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt. \end{aligned}$$

Como consecuencia, podemos concluir que

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt = 12 \int_0^T \left[\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + U(x) \right] dt.$$

Luego, el problema de minimizar \mathcal{A} en \mathfrak{X}_0^ρ se ha transformado en el problema de minimizar \mathfrak{X}_0 en el intervalo $[0, T]$. Sea $x \in \mathfrak{X}_0^\rho$ un minimizador de \mathcal{A} en \mathfrak{X}_0^ρ , en particular es un punto crítico. Entonces por el Teorema 1.54, x es también punto crítico de \mathcal{A} en \mathfrak{X}_0 . Notemos que el subespacio \mathfrak{X}_0 de \mathfrak{X} satisface $\mathfrak{X}_0 + \mathfrak{B}_\epsilon = \mathfrak{X}_0$ para todo $\epsilon > 0$, donde

$$\mathfrak{B}_\epsilon = \{h \in C^1([0, T]), V : h(0) = h(T) = 0, \sup_{[0, T]} |h| < \epsilon\}.$$

Luego usando el Corolario 1.49, obtenemos que $x(t)$ es solución de (3.8) cuando $x(t) \in V \setminus \Delta$. Ahora lo que hace falta es demostrar la existencia de minimizadores de la acción \mathcal{A} restringida a \mathfrak{X}_0^ρ .

Primero observemos que \mathfrak{X}_0^ρ es débilmente cerrado en \mathfrak{X} . Esto se sigue de la compacidad de la inclusión $H^1 \hookrightarrow C^0$, pues $x_n \rightharpoonup x$ entonces $x_n \rightarrow x$. Luego

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(g)x_n(t) = \rho(g)x(t)$$

donde $g \in D_6$. Además, si $x \in \mathfrak{X}_0^\rho$ es invariante por $\rho(\sigma^2)$, implica que

$$E_3 \ni (x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (x_2(4T), x_3(4T), x_1(4T))$$

tal que éste es un elemento en E_3 , y obtenemos $x_3(0) = x_1(4T) = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} x(0) \cdot x(4T) &= (x_1(0), x_2(0), x_3(0)) \cdot (x_1(4T), x_2(4T), x_3(4T)) \\ &= x_2(0) \cdot x_2(4T). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} |x(0)|^2 &= |x_1(0)|^2 + |x_2(0)|^2 = |x_2(4T)|^2 + |x_2(0)|^2 \quad \text{y} \\ |x(4T)|^2 &= |x_2(4T)|^2 + |x_3(4T)|^2 = |x_2(4T)|^2 + |x_2(0)|^2. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} x(0) \cdot x(4T) &= x_2(0) \cdot x_2(4T) \\ &\leq \frac{1}{2}(|x_2(4T)|^2 + |x_2(0)|^2) \\ &= \frac{1}{2}|x_2(0)| \cdot |x_2(4T)|. \end{aligned}$$

Como consecuencia el espacio \mathfrak{X}_0^ρ satisface la condición $(NC)_{\frac{1}{2}}$ en \mathfrak{X} . Luego por el Teorema 1.54, \mathcal{A} tiene un mínimo en \mathfrak{X}_0^ρ . \square

3.6 Puntos sobre la esfera \mathbb{S}_f^2

Una vez que hemos garantizado la existencia de una solución en \mathfrak{X}_0 , el siguiente paso es localizar los puntos en la esfera \mathbb{S}_f^2 correspondientes a los puntos de colisión dobles, puntos de Lagrange, puntos de Euler, y también a los tres tipos de triángulos isósceles. Seguiremos considerando las masas $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, y además con momento de inercia $\mathcal{I} = |x_1| + |x_2| + |x_3| = 1$. Con esta restricción garantizamos que un punto $(x_1, x_2, x_3) \in V$ corresponda a $(u_1, u_2, u_3) = \mathcal{K}(\mathcal{J}(x_1, x_2, x_3)) \in \mathbb{S}^2$, ya que la función de Jacobi \mathcal{J} es una isometría, y la función de Hopf \mathcal{K} aplica la esfera \mathbb{S}^3 en la esfera \mathbb{S}^2 .

3.6.1 Puntos de colisión doble

La función de Jacobi es la siguiente

$$\mathcal{J}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_1), \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right) \right).$$

Un punto $(x_1, x_2, x_3) \in V$ en la esfera \mathbb{S}_f^2 está dado por $\mathcal{K}(\mathcal{J}(x_1, x_1, x_3))$. Para estudiar las colisiones dobles habremos de considerar tres casos: $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$ y $x_2 = x_3$.

- $x_1 = x_2$. En este caso tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{K} \circ \mathcal{J}(x_1, x_1, x_3) &= \mathcal{K} \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}(x_3 - x_1) \right) = \left(-\frac{2}{3}|x_3 - x_1|^2, 0, 0 \right) \\ &= (-1, 0, 0).\end{aligned}$$

- $x_1 = x_3$. Aquí obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{K} \circ \mathcal{J}(x_1, x_2, x_1) &= \mathcal{K} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_1), \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 - x_2) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}|x_2 - x_1|^2 - \frac{1}{6}|x_2 - x_1|^2, -\frac{2}{\sqrt{12}}|x_2 - x_1|^2, 0 \right) \\ &= \left(\frac{1}{3}|x_2 - x_1|^2, -\frac{1}{\sqrt{3}}|x_2 - x_1|^2, 0 \right) \\ &= |x_2 - x_1|^2 \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right).\end{aligned}$$

- $x_2 = x_3$. Para este último caso tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{K} \circ \mathcal{J}(x_1, x_2, x_2) &= \mathcal{K} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_1), \frac{1}{\sqrt{6}}(x_2 - x_1) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}|x_2 - x_1|^2 - \frac{1}{6}|x_2 - x_1|^2, \frac{2}{\sqrt{12}}|x_2 - x_1|^2, 0 \right) \\ &= \left(\frac{1}{3}|x_2 - x_1|^2, \frac{1}{\sqrt{3}}|x_2 - x_1|^2, 0 \right) \\ &= |x_2 - x_1|^2 \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right).\end{aligned}$$

En resumen tenemos que las colisiones dobles donde se satisface $r_{12} = 0$, $r_{13} = 0$ y $r_{23} = 0$, vistas como puntos en la esfera, son $C_{12} = (-1, 0, 0)$, $C_{13} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$ y $C_{23} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$, respectivamente.

3.6.2 Los puntos de Lagrange

Consideremos el caso cuando el triángulo con vértices x_1 , x_2 y x_3 es equilátero. Es decir, cuando $d := |x_1 - x_2| = |x_2 - x_3| = |x_1 - x_3|$.

Ya que estamos considerando el caso en que $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, el centro de masa está en el origen, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, y además el momento de inercia es constante e igual a uno, $\mathcal{I} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = 1$, podemos concluir que $|x_1| = |x_2| = |x_3| = 1/\sqrt{3}$ y los lados del triángulo miden uno, $d = 1$. Véase la Figura 3.3.

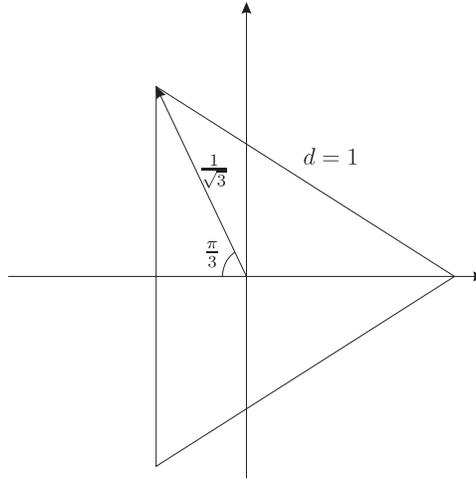


Figura 3.3: Configuración de Lagrange.

En este caso la composición de las funciones de Jacobi y Hopf está dada por

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_1), \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right) \right) = (z_1, z_2) \mapsto (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2\bar{z}_1 z_2).$$

Ahora calculemos las componentes, iniciando con $|z_1|^2 - |z_2|^2$. Por un lado tenemos que $|z_1|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_1) \right|^2 = \frac{1}{2}$, y considerando que el centro de masa está en el origen, obtenemos

$$\begin{aligned} \left| x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right| &= \left| x_3 + \frac{1}{2}x_3 \right| = \frac{3}{2}|x_3| = \sqrt{3}/2, \\ |z_2|^2 &= \left| \sqrt{2/3} \left(x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right) \right|^2 = \frac{2}{3} \left| \frac{3}{2}x_3 \right|^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Luego concluimos que $|z_1|^2 - |z_2|^2 = 0$.

El paso siguiente es encontrar el valor de $2\bar{z}_1 z_2$, para lo cual es necesario considerar dos casos, los cuales dependen de la orientación del triángulo. Sin pérdida de

generalidad, fijaremos el vértice x_1 en el eje x positivo. Consideraremos la orientación positiva del triángulo cuando la numeración de los vértices está en sentido contrario a las manecillas del reloj, y la orientación negativa cuando sea en sentido a las manecillas, véase la Figura 3.4.

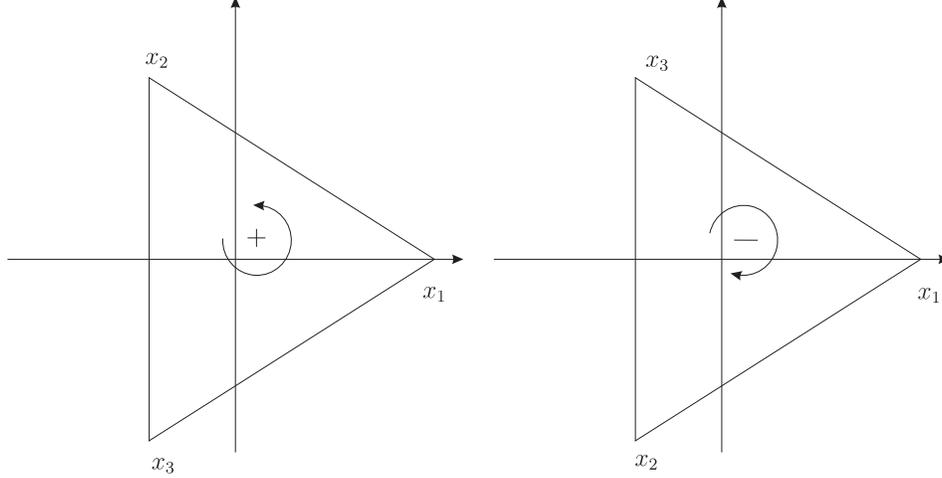


Figura 3.4: Triángulos con orientación positiva y negativa.

Al calcular $2\bar{z}_1 z_2$ obtenemos

$$\begin{aligned}
 2\bar{z}_1 z_2 &= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{x_2 - x_1}) \right) \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \left(x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right) \right) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}}(\overline{x_2 - x_1}) \left(x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}}(x_3 - x_1) \left(\frac{3}{2}x_3 \right) \\
 &= \sqrt{3}(x_3 - x_1)x_3.
 \end{aligned}$$

Consideraremos primero el caso en que el triángulo tiene orientación positiva. Ahora, con ayuda de la Figura 3.5 escribiremos los vectores x_3 y $x_3 - x_1$ en forma polar, es decir, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\varphi}$ y $x_3 - x_1 = e^{i\psi}$ donde $\varphi = \pi + \frac{\pi}{3}$ y $\psi = \pi + \frac{\pi}{6}$. Luego, $2\bar{z}_1 z_2 = \sqrt{3}(x_3 - x_1)x_3 = e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i\pi/2} = i$. Por lo tanto, cuando el triángulo equilátero $\{x_1, x_2, x_3\}$ tiene orientación positiva el punto correspondiente, denotado por L^+ , en la esfera \mathbb{S}_f^2 es $\mathcal{K}(\mathcal{J}(x_1, x_2, x_3)) = (0, 0, 1)$.

Ahora, consideremos el segundo caso, en el que consideramos que $\{x_1, x_2, x_3\}$ tiene orientación negativa. Con ayuda de la Figura 3.6 tenemos que $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\varphi}$ y $x_3 - x_1 = e^{i\psi}$ donde $\varphi = \pi - \frac{\pi}{3}$ y $\psi = \pi - \frac{\pi}{6}$. Luego, $2\bar{z}_1 z_2 = \sqrt{3}(x_3 - x_1)x_3 =$

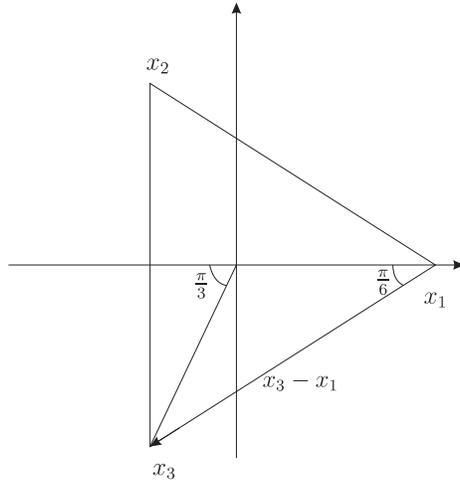


Figura 3.5: Orientación positiva.

$e^{i(\varphi+\psi)} = e^{-i\pi/2} = -i$. Por lo tanto, cuando el triángulo equilátero $\{x_1, x_2, x_3\}$ tiene orientación negativa el punto correspondiente, denotado por L^- , en la esfera \mathbb{S}_f^2 es $\mathcal{K}(\mathcal{J}(x_1, x_2, x_3)) = (0, 0, -1)$.

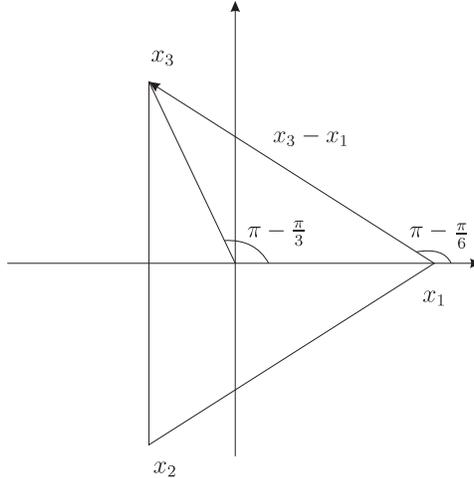


Figura 3.6: Orientación negativa.

3.6.3 Puntos de Euler

Las configuraciones colineales E_1, E_2, E_3 , en la cual una masa está en medio de las otras (en el punto medio con respecto a las otras dos masas) se llaman puntos de

Euler en \mathbb{S}^2 .

- E_1 . Consideremos $x_1 = 0$, usando la ecuación del centro de masa tenemos $x_2 + x_3 = 0$, y la composición de las funciones de Jacobi y Hopf es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K} \circ \mathcal{J}(0, x_2, x_3) &= \mathcal{K} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_2, \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x_3 - \frac{1}{2}x_2 \right) \right) \\
 &= \mathcal{K} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_2, \sqrt{\frac{2}{3}} \left(-x_2 - \frac{1}{2}x_2 \right) \right) = \mathcal{K} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_2, -\sqrt{\frac{3}{2}}x_2 \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2}|x_2|^2 - \frac{3}{2}|x_2|^2, -\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}|x_2|^2, 0 \right) = \left(-|x_2|^2, -\sqrt{3}|x_2|^2, 0 \right) \\
 &= |x_2|^2 \left(-1, -\sqrt{3}, 0 \right) \\
 &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right).
 \end{aligned}$$

- E_2 . Consideremos $x_2 = 0$, a partir de la ecuación del centro de masa tenemos $x_1 + x_3 = 0$ y

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K} \circ \mathcal{J}(x_1, 0, x_3) &= \mathcal{K} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1, \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x_3 - \frac{1}{2}x_1 \right) \right) \\
 &= \mathcal{K} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1, \sqrt{\frac{2}{3}} \left(-x_1 - \frac{1}{2}x_1 \right) \right) = \mathcal{K} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1, -\sqrt{\frac{3}{2}}x_1 \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2}|x_1|^2 - \frac{3}{2}|x_1|^2, \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}|x_1|^2, 0 \right) \\
 &= \left(-|x_1|^2, \sqrt{3}|x_1|^2, 0 \right) = |x_1|^2 \left(-1, \sqrt{3}, 0 \right) \\
 &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right).
 \end{aligned}$$

- E_3 . Por último consideremos $x_3 = 0$. A partir de la ecuación del centro de masa

tenemos $x_1 + x_2 = 0$ y

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} \circ \mathcal{J}(x_1, x_2, 0) &= \mathcal{K} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_1), -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right) \\
&= \mathcal{K} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_1), 0 \right) \\
&= \left(\frac{1}{2}|x_2 - x_1|^2, 0, 0 \right) = |x_2 - x_1|^2 \left(\frac{1}{2}, 0, 0 \right) \\
&= (1, 0, 0)
\end{aligned}$$

donde $|x_2 - x_1| = \sqrt{2}$.

3.7 Configuración de triángulo isósceles

En esta sección veremos que las configuraciones de triángulo isósceles formados por los vértices $\{x_1, x_2, x_3\}$, en la esfera \mathbb{S}_f^2 corresponden a meridianos, los cuales intersecan al ecuador en un punto de Euler y un punto de colisión doble. Podemos clasificar los posibles triángulos usando las distancias relativas, de tal forma que tres tipos de triángulos isósceles son posibles: $r_{13} = r_{23}$, $r_{21} = r_{31}$ ó $r_{12} = r_{32}$.

- $r_{13} = r_{23}$.

Para esto ubiquemos, como siempre, el origen del sistema de referencia en el centro de masa, y además el vértice x_3 estará sobre el eje horizontal positivo, veáse la Figura 3.7.

Puesto que $\bar{x}_1 = x_2$ y $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, tenemos que las coordenadas de los vértices serán $x_1 = -a + ib$, $x_2 = -a - ib$ y $x_3 = 2a$ donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Utilizando el momento de inercia veremos cuáles son los valores de a y b . Ya que $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = (a^2 + b^2) + (a^2 + b^2) + (4a^2) = 1$, por lo tanto se cumple $6a^2 + 2b^2 = 1$.

Recordemos que la composición de funciones que manda el punto (x_1, x_2, x_3) a un punto (u_1, u_2, u_3) en la esfera \mathbb{S}_f^2 está dada por

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_1), \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right) \right) = (z_1, z_2)$$

seguido de

$$(z_1, z_2) \mapsto (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2\bar{z}_1 z_2) = (u_1, u_2, u_3).$$

Veamos a que es igual $|z_1|^2 - |z_2|^2$. Consideremos cada término por separado. El primero es $|z_1|^2 = \frac{1}{2}|x_2 - x_1|^2 = \frac{1}{2}|2b|^2 = 2b^2$. Por otro lado, ya que

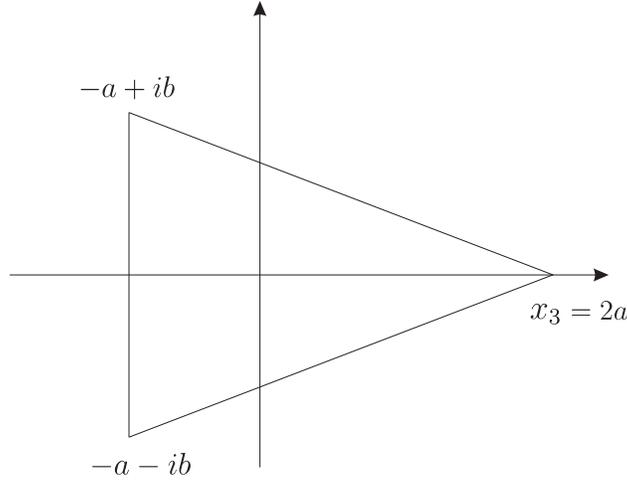


Figura 3.7: Triángulo isósceles $r_{13} = r_{23}$.

$x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = x_3 + \frac{1}{2}(x_3) = \frac{3}{2}x_3$, obtenemos que $|z_2|^2 = \frac{2}{3}|\frac{3}{2}x_3|^2 = \frac{3}{2}|x_3|^2 = 6a^2$, de donde concluimos $|z_1|^2 - |z_2|^2 = 2b^2 - 6a^2$.

A continuación escribiremos a $2\bar{z}_1 z_2$ en términos de a y b .

$$\begin{aligned}
 2\bar{z}_1 z_2 &= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{x_2 - x_1}) \right) \left(\sqrt{\frac{2}{3}}(x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)) \right) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \left(\frac{3}{2}x_3 \right) \\
 &= \sqrt{3}(x_1 - x_2)x_3 = \sqrt{3}(2ib)(2a) \\
 &= 4\sqrt{3}abi.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que la función $\mathcal{K} \circ \mathcal{J}$ en términos de a y b , cuando $r_{13} = r_{23}$, está dado por $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (2b^2 - 6a^2, 0, 4\sqrt{3}ab)$ donde $6a^2 + 2b^2 = 1$. Vamos a parametrizar esta curva, para lo cual tomamos $a = \frac{1}{\sqrt{6}} \cos \theta$ y $b = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta$. Entonces $2b^2 - 6a^2 = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = -\cos 2\theta$ y $4\sqrt{3}ab = 2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta$.

Luego, la función $\mathcal{K} \circ \mathcal{J}$ en términos de θ con la restricción $r_{13} = r_{23}$, está dada por $u = (-\cos 2\theta, 0, \sin 2\theta)$. Al evaluar esta parametrización en $\theta = 0$ obtenemos $(-1, 0, 0)$, mientras que en $\theta = \pi/2$ tenemos $(1, 0, 0)$, luego corresponde al meridiano que pasa por los polos, interseca al ecuador en el punto de Euler E_3 y en el punto de colisión C_{12} .

- $r_{23} = r_{21}$. Aquí realizaremos un análisis similar al caso anterior. Utilizando la Figura 3.8 obtenemos que $x_1 = -a - ib$, $x_2 = 2a$ y $x_3 = -a + ib$. Veamos qué

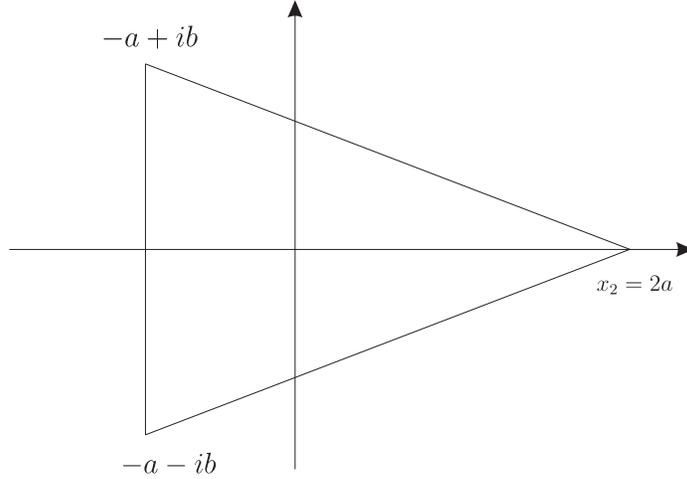


Figura 3.8: Triángulo isósceles $r_{23} = r_{21}$.

curva obtenemos en \mathbb{S}_f^2 a partir de tomar la imagen de $\mathcal{K}(\mathcal{J}(\{(x_1, x_2, x_3) : r_{23} = r_{21}\}))$. Para esto expresemos a $(|z_1|^2 - |z_2|^2, 2\bar{z}_1 z_2)$ en términos de a y b .

La primera coordenada es

$$|z_1|^2 - |z_2|^2 = \frac{1}{2}|x_2 - x_1|^2 - \frac{3}{2}|x_3|^2 = \frac{1}{2}(9a^2 + b^2) - \frac{3}{2}(a^2 + b^2) = 3a^2 - b^2$$

y la segunda es

$$\begin{aligned} 2\bar{z}_1 z_2 &= \sqrt{3}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)x_3 = \sqrt{3}(x_2 - x_3)x_3 \\ &= \sqrt{3}(3a - ib)(-a + ib) = \sqrt{3}(b^2 - 3a^2) + 4\sqrt{3}abi. \end{aligned}$$

Los triángulos isósceles que cumplen con $r_{13} = r_{23}$ vistos en \mathbb{S}_f^2 están parametrizados por $(3a^2 - b^2, \sqrt{3}(b^2 - 3a^2), 4\sqrt{3}ab)$ con $6a^2 + 2b^2 = 1$. Si parametrizamos con θ , tenemos $(\frac{1}{2} \cos 2\theta, -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta, \text{sen } 2\theta) = A_{2\pi/3}(u)$ donde $u = (-\cos 2\theta, 0, \text{sen } 2\theta)$ y

$$A_{2\pi/3} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\text{sen}(2\pi/3) & 0 \\ \text{sen}(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz de rotación de $2\pi/3$ en las dos primeras coordenadas.

Ahora, evaluando $(\frac{1}{2} \cos 2\theta, -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta, \text{sen } 2\theta)$ en $\theta = 0$, tenemos $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, mientras que en $\theta = \pi/2$ tenemos $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.

Por lo tanto la familia de triángulos isósceles que satisfacen $r_{23} = r_{21}$ representa un meridiano en \mathbb{S}_f^2 que además pasa por el punto de Euler E_2 y por el punto de colisión C_{13} .

- $r_{21} = r_{31}$. Utilizando una figura similar a las consideradas en los dos casos anteriores, obtenemos que $x_1 = 2a$, $x_2 = -a + ib$ y $x_3 = -a - ib$. Veamos qué curva obtenemos en \mathbb{S}_f^2 a partir de tomar la imagen de $\mathcal{K}(\mathcal{J}(\{(x_1, x_2, x_3) : r_{21} = r_{31}\}))$. Para esto expresemos a $(|z_1|^2 - |z_2|^2, 2\bar{z}_1 z_2)$ en términos de a y b .

La primera coordenada es

$$|z_1|^2 - |z_2|^2 = \frac{1}{2}|x_2 - x_1|^2 - \frac{3}{2}|x_3|^2 = \frac{1}{2}(9a^2 + b^2) - \frac{3}{2}(a^2 + b^2) = 3a^2 - b^2$$

y la segunda es

$$\begin{aligned} 2\bar{z}_1 z_2 &= \sqrt{3}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)x_3 = \sqrt{3}(x_3 - x_1)x_3 = \sqrt{3}(-3a - ib)(-a - ib) \\ &= \sqrt{3}(3a^2 - b^2) + 4\sqrt{3}abi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los triángulos isósceles que cumplen con $r_{13} = r_{23}$ vistos en \mathbb{S}_f^2 están dados por $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (3a^2 - b^2, \sqrt{3}(3a^2 - b^2), 4\sqrt{3}ab)$ donde $6a^2 + 2b^2 = 1$. Si introducimos la variable θ tenemos $(\frac{1}{2} \cos 2\theta, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta, \sin 2\theta) = A_{4\pi/3}(u)$ donde $u = (-\cos 2\theta, 0, \sin 2\theta)$ y

$$A_{4\pi/3} = \begin{pmatrix} \cos(4\pi/3) & -\sin(4\pi/3) & 0 \\ \sin(4\pi/3) & \cos(4\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz de rotación de $4\pi/3$ en las dos primeras coordenadas.

Ahora, evaluando $(\frac{1}{2} \cos 2\theta, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta, \sin 2\theta)$ en $\theta = 0$, tenemos $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, mientras que en $\theta = \pi/2$ tenemos $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.

Por lo tanto la familia de triángulos isósceles que satisfacen $r_{21} = r_{31}$ representa un meridiano en \mathbb{S}_f^2 que además pasa por el punto de Euler E_1 y por el punto de colisión C_{23} .

A partir de los cálculos obtenidos en la sección 3.6, podemos resumir que los puntos de colisión doble, los puntos de Euler y puntos de Lagrange en la esfera \mathbb{S}_f^2 están dados por:

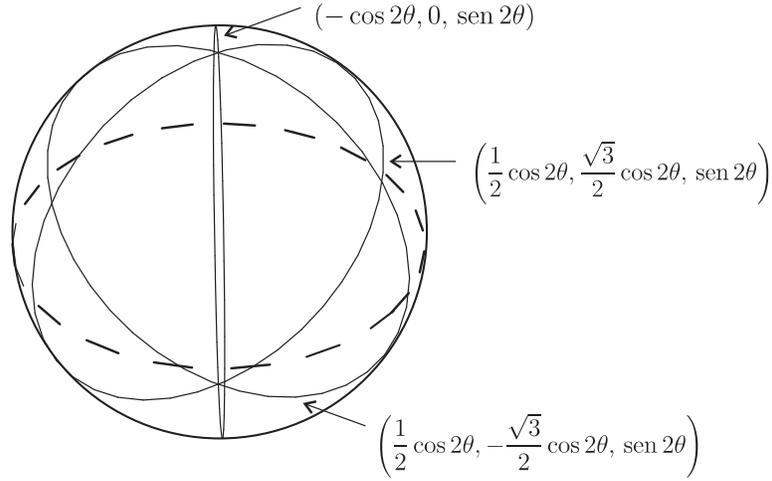


Figura 3.9: Meridianos correspondientes a las configuraciones isósceles.

•

$$\begin{aligned}
 C_{12} &= (-1, 0, 0) && \text{asociados a } r_{12} = 0 \\
 C_{23} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) && \text{asociados a } r_{23} = 0 \\
 C_{13} &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) && \text{asociados a } r_{13} = 0
 \end{aligned}$$

• Puntos de Euler

$$E_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad E_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad E_3 = (1, 0, 0)$$

• Puntos de Lagrange

$$L^+ = (0, 0, 1), \quad L^- = (0, 0, -1).$$

3.8 Energía cinética en términos de $\dot{\xi}_1$ y $\dot{\xi}_2$

La energía cinética en las coordenadas (x_1, x_2, x_3) es

$$\begin{aligned}
 K(\dot{x}_1, \dot{x}_2) &= \frac{1}{2}m_1|\dot{x}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{x}_2|^2 + \frac{1}{2}m_3|\dot{x}_3|^2 \\
 &= \frac{1}{2}m_1\langle\dot{x}_1, \dot{x}_1\rangle + \frac{1}{2}m_2\langle\dot{x}_2, \dot{x}_2\rangle + \frac{1}{2}m_3\langle\dot{x}_3, \dot{x}_3\rangle.
 \end{aligned}$$

Ahora vamos a escribir la energía cinética en términos de las coordenadas de Jacobi $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2$, para lo cual usaremos las ecuaciones (3.3). Utilizando las ecuaciones de Jacobi obtenemos

$$\begin{aligned}
K(\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2) = & \\
& \frac{1}{2}m_1 \left\langle -\frac{m_2}{m_1+m_2} \dot{\xi}_1 - \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3} \dot{\xi}_2, -\frac{m_2}{m_1+m_2} \dot{\xi}_1 - \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3} \dot{\xi}_2 \right\rangle \\
& + \frac{1}{2}m_2 \left\langle \frac{m_1}{m_1+m_2} \dot{\xi}_1 - \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3} \dot{\xi}_2, \frac{m_1}{m_1+m_2} \dot{\xi}_1 - \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3} \dot{\xi}_2 \right\rangle \\
& + \frac{1}{2}m_3 \left\langle \frac{m_1+m_2}{m_1+m_2+m_3} \dot{\xi}_2, \frac{m_1+m_2}{m_1+m_2+m_3} \dot{\xi}_2 \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2) = & \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2} \langle \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_1 \rangle + \frac{m_1 m_2 m_3}{(m_1+m_2)(m_1+m_2+m_3)} \langle \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2 \rangle \\
& + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_3^2}{(m_1+m_2+m_3)^2} \langle \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_2 \rangle + \frac{1}{2} \frac{m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2} \langle \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_1 \rangle \\
& - \frac{m_1 m_2 m_3}{(m_1+m_2)(m_1+m_2+m_3)} \langle \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2 \rangle \\
& + \frac{1}{2} \frac{m_2 m_3^2}{(m_1+m_2+m_3)^2} \langle \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_2 \rangle + \frac{1}{2} \frac{(m_1+m_2)^2 m_3}{(m_1+m_2+m_3)^2} \langle \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_2 \rangle
\end{aligned}$$

simplificando

$$\begin{aligned}
K(\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2) = & \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2} \langle \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_1 \rangle + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_3^2 + m_2 m_3^2 + m_3 (m_1+m_2)^2}{(m_1+m_2+m_3)^2} \langle \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_2 \rangle \\
= & \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 (m_1+m_2)}{(m_1+m_2)^2} |\dot{\xi}_1|^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_3^2 + m_2 m_3^2 + (m_1+m_2)^2 m_3}{(m_1+m_2+m_3)^2} |\dot{\xi}_2|^2 \\
= & \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} |\dot{\xi}_1|^2 + \frac{1}{2} \frac{(m_1+m_2+m_3)(m_1+m_2)m_3}{(m_1+m_2+m_3)^2} |\dot{\xi}_2|^2 \\
= & \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} |\dot{\xi}_1|^2 + \frac{1}{2} \frac{(m_1+m_2)m_3}{m_1+m_2+m_3} |\dot{\xi}_2|^2.
\end{aligned}$$

Haciendo $M_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ y $M_2 = \frac{(m_1+m_2)m_3}{m_1+m_2+m_3}$ obtenemos

$$K(\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2) = \frac{1}{2} (M_1 |\dot{\xi}_1|^2 + M_2 |\dot{\xi}_2|^2).$$

Observación 3.2. Utilizando un procedimiento similar a éste, podemos demostrar que $m_1 |x_1|^2 + m_2 |x_2|^2 + m_3 |x_3|^2 = M_1 |\xi_1|^2 + M_2 |\xi_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ donde $(z_1, z_2) = (\sqrt{M_1} \xi_1, \sqrt{M_2} \xi_2)$.

Luego, si asumimos que $m_1|x_1|^2 + m_2|x_2|^2 + m_3|x_3|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ y tomamos $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ concluimos

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2.$$

Por lo tanto tenemos la siguiente Proposición.

Proposición 3.3. *La función de Jacobi $\mathcal{J}(x_1, x_2, x_3) = (z_1, z_2)$ definida por*

$$\mathcal{J}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_1), \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right) \right), \quad (x_1, x_2, x_3) \in V$$

es una isometría.

Demostración. Véase la observación 3.2. □

3.9 El potencial en términos de (ξ_1, ξ_2) y de (z_1, z_2)

La energía potencial para el problema de 3 cuerpos es

$$\begin{aligned} U(x) = U(x_1, x_2, x_3) &= \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \\ &= \frac{m_1 m_2}{|x_1 - x_2|} + \frac{m_1 m_3}{|x_1 - x_3|} + \frac{m_2 m_3}{|x_2 - x_3|}. \end{aligned}$$

A partir de la primera ecuación de (3.2) tenemos que $|x_1 - x_2| = |\xi_1|$, mientras que de la primera y tercera ecuación de (3.3) obtenemos

$$\begin{aligned} |x_1 - x_3| &= \left| -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi_1 - \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \xi_2 - \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \xi_2 \right| \\ &= \left| \xi_2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi_1 \right|. \end{aligned}$$

De la segunda y tercera ecuación de (3.3) tenemos

$$\begin{aligned} |x_2 - x_3| &= \left| \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi_1 - \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \xi_2 - \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \xi_2 \right| \\ &= \left| \xi_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi_1 \right|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la energía potencial en términos de ξ_1 y ξ_2 toma la forma

$$U(\xi_1, \xi_2) = \frac{m_1 m_2}{|\xi_1|} + \frac{m_1 m_3}{\left| \xi_2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi_1 \right|} + \frac{m_2 m_3}{\left| \xi_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi_1 \right|}.$$

Ahora consideremos el cambio de coordenadas $(z_1, z_2) = (\sqrt{M_1}\xi_1, \sqrt{M_2}\xi_2)$. Expresaremos cada término del potencial $U = U(\xi_1, \xi_2)$ en función de las variables z_1 y z_2 .

Iniciemos con el primer término del potencial. Tenemos que $\xi_1 = \frac{z_1}{\sqrt{M_1}}$, luego

$$\frac{m_1 m_2}{|\xi_1|} = \frac{m_1 m_2 \sqrt{M_1}}{|z_1|}.$$

Ahora el segundo término

$$\begin{aligned} \xi_2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi_1 &= \frac{z_2}{\sqrt{M_2}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{z_1}{\sqrt{M_1}} = \frac{z_2}{\sqrt{M_2}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} z_1 \\ &= \frac{z_2}{\sqrt{M_2}} + \sqrt{\frac{m_2}{m_1(m_1 + m_2)}} z_1 = \frac{z_2}{\sqrt{M_2}} + \frac{1}{m_1} \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} z_1 \\ &= \frac{z_2}{\sqrt{M_2}} + \frac{\sqrt{M_1}}{m_1} z_1 \\ &= \frac{z_2 + \frac{\sqrt{M_1 M_2}}{m_1} z_1}{\sqrt{M_2}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{m_1 m_3}{\left| \xi_2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi_1 \right|} = \frac{m_1 m_3 \sqrt{M_2}}{\left| z_2 + \frac{\sqrt{M_1 M_2}}{m_1} z_1 \right|}$$

Por último el tercer término del potencial

$$\begin{aligned} \xi_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi_1 &= \frac{z_2}{\sqrt{M_2}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{z_1}{\sqrt{M_1}} = \frac{z_2}{\sqrt{M_2}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} z_1 \\ &= \frac{z_2}{\sqrt{M_2}} - \sqrt{\frac{m_1}{(m_1 + m_2)m_2}} z_1 = \frac{z_2}{\sqrt{M_2}} - \frac{1}{m_2} \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} z_1 \\ &= \frac{z_2}{\sqrt{M_2}} - \frac{\sqrt{M_1}}{m_2} z_1 \\ &= \frac{z_2 - \frac{\sqrt{M_1 M_2}}{m_2} z_1}{\sqrt{M_2}}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{m_2 m_3}{\left| \xi_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi_1 \right|} = \frac{m_2 m_3 \sqrt{M_2}}{\left| z_2 - \frac{\sqrt{M_1 M_2}}{m_2} z_1 \right|},$$

y como consecuencia obtenemos

$$U(z_1, z_2) = \frac{m_1 m_2 \sqrt{M_1}}{|z_1|} + \frac{m_1 m_3 \sqrt{M_2}}{\left| z_2 + \frac{\sqrt{M_1 M_2}}{m_1} z_1 \right|} + \frac{m_2 m_3 \sqrt{M_2}}{\left| z_2 - \frac{\sqrt{M_1 M_2}}{m_2} z_1 \right|}.$$

3.10 Lema de Hsiang

Usando el potencial $U = U(z_1, z_2)$ podemos expresar las distancias relativas r_{12} , r_{13} y r_{23} en términos de z_1 y z_2 . Para esto consideremos las masas iguales a la unidad, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, tenemos que las expresiones que involucran a las masas se simplifican, $\sqrt{M_1} = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\sqrt{M_2} = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Luego, las distancias entre los tres cuerpos son $r_{12} = \frac{|z_1|}{\sqrt{M_1}} = \sqrt{2}|z_1|$, $r_{13} = \frac{1}{\sqrt{M_2}} \left| z_2 + \frac{\sqrt{M_1 M_2}}{m_2} z_1 \right| = \left| (\sqrt{3/2})z_2 + (1/\sqrt{2})z_1 \right|$ y $r_{23} = \frac{1}{\sqrt{M_2}} \left| z_2 - \frac{\sqrt{M_1 M_2}}{m_2} z_1 \right| = \left| \sqrt{3/2}z_2 - (1/\sqrt{2})z_1 \right|$.

Estas tres distancias representan los lados del triángulo (tal vez degenerado) formado por los vértices x_1, x_2 y x_3 . También $(x_1, x_2, x_3) \in V$ representa un punto $u = \mathcal{K}(\mathcal{J}(x_1, x_2, x_3))$ sobre la esfera \mathbb{S}_f^2 .

El siguiente lema expresa las distancias relativas (lados de los triángulos) en términos de los puntos de colisión C_{12}, C_{13}, C_{23} y del punto $u \in \mathbb{S}_f^2$.

Lema 3.4 (Hsiang). *El punto $u = (u_1, u_2, u_3)$ en la esfera \mathbb{S}_f^2 representa un triángulo con lados $r_{12} = \sqrt{1 - C_{12} \cdot u}$, $r_{13} = \sqrt{1 - C_{13} \cdot u}$ y $r_{23} = \sqrt{1 - C_{23} \cdot u}$.*

Demostración. Primero demostraremos que $r_{12}^2 = 1 - C_{12} \cdot u$. Considerando que el punto de colisión doble $r_{12} = 0$ es $C_{12} = (-1, 0, 0)$, usando el producto punto usual en \mathbb{R}^3 obtenemos que $r_{12}^2 = 1 - (-1, 0, 0) \cdot (u_1, u_2, u_3) = 1 + u_1$. Al sustituir $r_{12} = \sqrt{2}|z_1|$ y $u_1 = |z_1|^2 - |z_2|^2$ obtenemos $2|z_1|^2 = 1 + |z_1|^2 - |z_2|^2$. Es decir $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ ó $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ ya que $\mathcal{K}(z_1, z_2) = (u_1, u_2, u_3)$ es una isometría. Entonces $r_{12}^2 = 1 - C_{12} \cdot u$ es equivalente a $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ lo cual es cierto porque $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{S}^2$.

Usando una forma similar vamos a demostrar que $r_{13}^2 = 1 - C_{13} \cdot u$ para lo cual veremos que es equivalente a $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. El punto de colisión $r_{13} = 0$ es $C_{13} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, luego $r_{13}^2 = 1 - \frac{1}{2}u_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}u_2$. Teniendo en cuenta que $r_{13} = \left| (\sqrt{3/2})z_2 + (1/\sqrt{2})z_1 \right|$, $u_1 = |z_1|^2 - |z_2|^2$ y $u_2 = 2\text{Re}(\bar{z}_1 z_2)$ obtenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
 r_{13}^2 &= 1 - (1/2)u_1 + \sqrt{3/2}u_2 \\
 &\Leftrightarrow (\sqrt{3/2}z_2 + (1/\sqrt{2})z_1)(\sqrt{3/2}\bar{z}_2 + (1/\sqrt{2})\bar{z}_1) \\
 &= 1 - (1/2)(|z_1|^2 - |z_2|^2) + (\sqrt{3}/2)(2\text{Re}(\bar{z}_1 z_2)) \\
 &\Leftrightarrow (3/2)|z_2|^2 + (1/2)|z_1|^2 + \sqrt{3}\bar{z}_1 z_2 + \sqrt{3}z_1 \bar{z}_2 \\
 &= 1 - (1/2)|z_1|^2 + (1/2)|z_2|^2 + \sqrt{3}\text{Re}(\bar{z}_1 z_2) \\
 &\Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 + \sqrt{3}\text{Re}(\bar{z}_1 z_2) \\
 &= 1 + \sqrt{3}\text{Re}(\bar{z}_1 z_2)
 \end{aligned}$$

Entonces, ahora lo que queremos demostrar es que $r_{13}^2 = 1 - C_{13} \cdot u$ es equivalente a $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, lo cual es cierto ya que $\mathcal{K}(z_1, z_2) = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{S}^2$ y \mathcal{K} es isometría.

Por último demostraremos de la misma forma que en los dos casos anteriores que $r_{23}^2 = 1 - C_{23} \cdot u$. El punto de colisión doble $r_{23} = 0$ es $C_{23} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$. Por lo tanto, $r_{23}^2 = 1 - \frac{1}{2}u_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}u_2$. Teniendo en cuenta que $r_{23} = \left|\sqrt{3/2}z_2 - (1/\sqrt{2})z_1\right|$, $u_1 = |z_1|^2 - |z_2|^2$ y $u_2 = 2\text{Re}(\bar{z}_1 z_2)$ obtenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
r_{23}^2 &= 1 - (1/2)u_1 - \sqrt{3/2}u_2 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{3/2}z_2 - (1/\sqrt{2})z_1)(\sqrt{3/2}\bar{z}_2 - (1/\sqrt{2})\bar{z}_1) \\
&= 1 - (1/2)(|z_1|^2 - |z_2|^2) - (\sqrt{3}/2)(2\text{Re}(\bar{z}_1 z_2)) \\
&\Leftrightarrow (3/2)|z_2|^2 + (1/2)|z_1|^2 - \sqrt{3}\bar{z}_1 z_2 - \sqrt{3}z_1 \bar{z}_2 \\
&= 1 - (1/2)|z_1|^2 + (1/2)|z_2|^2 - \sqrt{3}\text{Re}(\bar{z}_1 z_2) \\
&\Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 - \sqrt{3}\text{Re}(\bar{z}_1 z_2) \\
&= 1 - \sqrt{3}\text{Re}(\bar{z}_1 z_2)
\end{aligned}$$

Entonces, lo que queremos demostrar $r_{23}^2 = 1 - C_{23} \cdot u$ es equivalente a $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ lo cual se satisface. \square

3.11 El potencial en términos de coordenadas esféricas

Cuando el momento de inercia es constante, entonces podemos escribir el potencial $U = U(x)$ en términos de las coordenadas esféricas, es decir, podemos hacer $U = U(\theta, \varphi)$ donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $-2/\pi \leq \varphi \leq 2/\pi$.

Para realizar esto, iniciemos por aplicar las coordenadas de Jacobi, las cuales definen el isomorfismo isométrico $\mathcal{J}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_1), \sqrt{\frac{2}{3}}\left(x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right)\right)$ y después al tomar el cociente de rotaciones utilizamos la función de Hopf $\mathcal{K}(z_1, z_2) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2\bar{z}_1 z_2) := (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$. De esta manera tenemos la relación $\mathcal{K}(\mathcal{J}(x)) = (u_1, u_2, u_3)$.

Si consideramos el conjunto de nivel $\mathcal{I}^{-1}(1) \in V$ del momento de inercia $\mathcal{I}(x) = x \cdot x = x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_3$, tenemos que la función $\mathcal{K} \circ \mathcal{J} : \mathcal{I}^{-1}(1) \rightarrow \mathbb{S}^2$ está bien definida ya que \mathcal{J} es una isometría y \mathcal{K} aplica la esfera \mathbb{S}^3 en la esfera \mathbb{S}^2 . Ahora, al utilizar las coordenadas esféricas $(u_1, u_2, u_3) = (r^2 \cos \varphi \cos \theta, r^2 \cos \varphi \sin \theta, r^2 \sin \varphi)$

y el lema de Hsiang obtenemos $r_{12}^2 = 1 + u_1 = 1 + \cos \varphi \cos \theta$,

$$\begin{aligned} r_{13}^2 &= 1 - \frac{1}{2}u_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}u_2 \\ &= 1 - \frac{1}{2}\cos \varphi \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \varphi \sin \theta \\ &= 1 + \cos \varphi \cos \left(\theta + \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} r_{23}^2 &= 1 - \frac{1}{2}u_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}u_2 \\ &= 1 - \frac{1}{2}\cos \varphi \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \varphi \sin \theta \\ &= 1 + \cos \varphi \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Finalmente el potencial $U(x) = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}}$ queda escrito de la siguiente forma

$$U(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \theta}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos(\theta + \frac{4\pi}{3})}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}}. \quad (3.11)$$

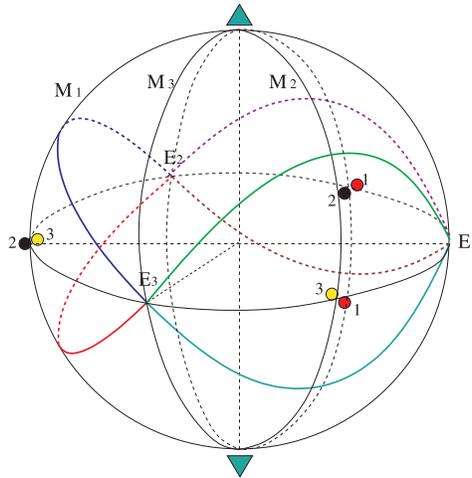


Figura 3.10: Curva equipotencial $U(\theta, \varphi) = \frac{5}{\sqrt{2}}$, asociada a los puntos de Euler, dibujada en la esfera unitaria de las formas.

La representación de la curva equipotencial en $\mathcal{I} = 1$ que une E_3 (i.e. $\varphi = \theta = 0$) y M_1 (i.e. $\theta = \frac{\pi}{3}$ ó $\theta = \frac{4\pi}{3}$) está definida por la función implícita $U(\theta, \varphi) = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

Cálculos numéricos realizados por Carles Simó (ver [9]) demuestran que la acción de una curva equipotencial en la esfera \mathbb{S}_f^2 definida por $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 = 2$ la cual se mueve de E_3 a M_1 con velocidad constante está muy cerca del mínimo de \mathcal{A} en \mathfrak{X}_0 , ver la sección 3.5.

3.12 El teorema principal

Sea \bar{T} un número real positivo. Definimos el grupo de Klein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}/\bar{T}\mathbb{Z}$ y en \mathbb{R}^2 de la siguiente forma: si σ y τ son los generadores,

$$\begin{aligned}\sigma \cdot t &= t + \frac{\bar{T}}{2}, & \tau \cdot t &= -t + \frac{\bar{T}}{2}, \\ \sigma \cdot (x, y) &= (-x, y), & \tau \cdot (x, y) &= (x, -y).\end{aligned}$$

Teorema 3.5. *Existe un lazo plano en forma de “ocho” $q : (\mathbb{R}/\bar{T}\mathbb{Z}), 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ con las siguientes propiedades:*

(i) *para cada t ,*

$$q(t) + q(t + \bar{T}/3) + q(t + 2\bar{T}/3) = 0;$$

(ii) *q es equivariante con respecto a las acciones de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}/\bar{T}\mathbb{Z}$ y en \mathbb{R}^2 definida antes:*

$$q(\sigma \cdot t) = \sigma \cdot q(t) \quad \text{y} \quad q(\tau \cdot t) = \tau \cdot q(t);$$

(iii) *el lazo $x : \mathbb{R}/\bar{T}\mathbb{Z} \rightarrow V \setminus \Delta$ definido por*

$$x(t) = (q(t + 2\bar{T}/3), q(t + \bar{T}/3), q(t))$$

es una solución \bar{T} periódica del problema plano de 3 cuerpos con masas iguales y momento angular cero.

Dedicaremos las secciones siguientes a la demostración de este teorema.

3.13 Estructura de la demostración del Teorema 3.5

(i) *El método directo.* Un doceavo de la órbita se obtiene mediante la minimización de la acción (notemos $T = \bar{T}/12$), ver la Proposición 3.1.

$$\mathcal{A} = \int_0^T \left(\frac{1}{2}K + U \right)$$

en el espacio \mathfrak{X}_0 de $H^1([0, T], V)$ que consiste de las trayectorias que inician en la configuración de Euler, digamos E_3 (m_3 en medio) de tamaño arbitrario y punto final en configuración isósceles, digamos M_1 ($r_{12} = r_{13}$), nuevamente de tamaño arbitrario. La existencia de trayectorias minimizantes es estándar. Lo principal es demostrar que dicha órbita no tiene colisión.

- (ii) *Reducción.* La energía cinética puede ser expresada como la suma de dos términos no negativos: $K = K_{\text{red}} + K_{\text{rot}}$ (Esto es la descomposición de las velocidades.) K_{red} corresponde a la métrica Riemanniana en el espacio cociente $V/\text{SO}(2)$ inducida por la métrica de K en V . Ésta es la parte de la deformación de la energía cinética, incluyendo la parte homotética.
- (iii) *Comparación con el problema de Kepler para excluir las colisiones.* En lugar de calcular la variación local de la acción, calcularemos el ínfimo de la acción de todas las trayectorias en $H^1([0, T], V)$ con colisiones. Denotemos este ínfimo por A_2 , el “2” denota dos cuerpos porque explícitamente hemos calculado A_2 por medio de un problema de dos cuerpos.

Comparamos A_2 con la acción a que ha sido cuidadosamente elegida como una “trayectoria prueba” libre de colisión en \mathfrak{X}_0 . Entonces demostramos que $A_2 > a$, teniendo como resultado que el minimizador debe estar libre de colisión.

- (iv) *Simetrías y regla del área.* El hecho de que las masas sean iguales da una fuente de simetrías asociadas al intercambio de las masas. Usando este hecho, a partir de (i) construimos otras once copias del minimizador. La fórmula de la primera variación de la acción muestra que esas copias se ajustan de forma diferenciable con la original para formar una órbita simple y periódica, en el espacio de configuración reducido (*i.e.*, módulo rotaciones), de período $12T$. Para reconstruir el movimiento en el plano inercial, es decir, en V , usamos la combinación de simetrías con la *fórmula del área* (ver [19]). Esas herramientas nos permiten deducir que el movimiento en V es periódico, y que todas las masas necesariamente se mueven sobre la misma curva en el plano inercial, satisfaciendo el grupo de simetrías de Klein descrito en el Teorema 3.5.
- (v) *Demostración de que la órbita tiene forma de “figura ocho”.* Demostramos que el momento angular de cada uno de los tres cuerpos es cero si y sólo si este cuerpo pasa por el origen. Esto implica que cada uno de los dos lóbulos que la curva forma esta estrellado, es decir, la órbita tiene forma de ocho.

3.14 Exclusión de las colisiones

Recordemos que \mathfrak{X}_0 es el subespacio de \mathfrak{X} que consiste de todas las curvas que inician en una configuración de Euler E_3 de tamaño arbitrario, y terminan en una

configuración isósceles del tipo M_1 de tamaño arbitrario. Es decir $\mathfrak{X}_0 = \{x \in \mathfrak{X} : x(0) \in E_3, x(T) \in M_1\}$.

La Proposición 3.1 garantiza la existencia de un punto crítico $x \in \mathfrak{X}_0$ del funcional de acción (3.9), y además si éste no tiene colisiones, es decir $x(t) \in V \setminus \Delta$, entonces $x = x(t)$ es solución en el problema plano de 3 cuerpos con masas iguales (3.8). En esta sección demostraremos el siguiente resultado, el cual garantiza que tal solución no tiene colisiones.

Proposición 3.6. *Una curva en \mathfrak{X}_0 que minimiza la acción*

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T \left(\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}} \right) dt$$

no tiene colisiones.

Para poder realizar la demostración de esta proposición primero requerimos demostrar algunos lemas auxiliares.

Observación 3.7. El primer punto clave es notar que la acción

$$\mathcal{A}(m_1, m_2, m_3; x) = \int_0^T \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 m_k |\dot{x}_k|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{|x_j(t) - x_i(t)|} \right) dt$$

a lo largo de la trayectoria $t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ es una función creciente para cualquier valor de las masas. Por ejemplo, si tomamos $m_1 = 0$, obtenemos

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(1, 1, 1; x) > \mathcal{A}(0, 1, 1; x).$$

El último término corresponde a la acción del problema de 2 cuerpos con masas iguales. Usaremos esta observación en el siguiente Lema.

Lema 3.8. *Si $x \in H^1([0, T], V)$ tiene una colisión, ya sea doble o triple, entonces $\mathcal{A}(x) > A_2$, donde A_2 es la acción de la solución colineal del problema de 2 cuerpos, en el cual dos masas unitarias inician en colisión y terminan con velocidad cero en el tiempo T , y el centro de masa está fijo (esto se puede decir que es la mitad de una órbita elíptica de colisión–expulsión).*

Observación 3.9. La afirmación del lema es que el ínfimo de la acción $\mathcal{A}(x)$ de todas las trayectorias con colisión en $H^1([0, T], V)$ es mayor ó igual a A_2 . Necesariamente este ínfimo es igual a A_2 . Si tomamos una sucesión x_n de trayectorias en las cuales m_2 y m_3 realizan la mitad de una órbita Kepleriana de colisión–expulsión descrita por el lema, mientras que m_1 permanece fija, y a distancia n del centro de masa de m_2 - m_3 . Vamos a tener $\mathcal{A}(x_n) \rightarrow A_2$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración del Lema 3.8. Supongamos que las masas m_2 y m_3 (y posiblemente m_1) colisionan en el tiempo $T_1 \in [0, T]$. Disminuiremos la acción de la curva haciendo la masa $m_1 = 0$. Podemos olvidarnos de la posición de la masa m_1 para esta nueva acción, y quedarnos únicamente con la acción Kepleriana del problema de 2 cuerpos, investigada por Gordon en [16]. De acuerdo con Gordon cada parte de la curva x , antes y después de T_1 , tiene una acción mayor o igual que la correspondiente al movimiento colineal de las masas m_2 y m_3 , las cuales colisionan en el tiempo T_1 , y están en reposo en los puntos finales $t = 0$ ó $t = T$. De hecho, si doblamos cada parte y las unimos entre sí, pero en direcciones opuestas, obtenemos dos trayectorias cerradas, las cuales van de colisión a colisión, una en el tiempo $2T_1$ y la otra en el tiempo $2(T - T_1)$. El mínimo absoluto del problema de colisión a colisión mostrado por Gordon es la solución de colisión–expulsión. Esta solución es proporcional a $T^{1/3}$, la cual es una función convexa de período T . A partir del trabajo de Gordon, se sigue que la convexidad implica que la acción es menor, además si reemplazamos los dos movimientos anteriores por una solución simple de colisión–expulsión que inicie y termine en colisión sin colisiones intermedias. La mitad de esta curva realiza el ínfimo de colisión en el tiempo T para el problema de Kepler. Esto termina la demostración. \square

Antes de continuar vamos a tomar la notación introducida en [8]. Definimos la función homogénea de grado cero $\tilde{U} = \sqrt{\mathcal{I}}U$, donde \mathcal{I} es el momento de inercia y U la función potencial. Notemos que los puntos críticos de \tilde{U} son puntos críticos de U restringida a la esfera $\mathcal{I} = \text{constante}$, las cuales son las *configuraciones centrales*.

Trayectorias equipotenciales prueba.

Fijemos $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0$ y $U = U_0$ donde U_0 es el valor de la función potencial para cualquiera de las configuraciones de Euler en la esfera $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0$. Visto en el espacio de configuración reducido, ésto define una curva en la 2-esfera de radio $\sqrt{\mathcal{I}_0}$. Tomemos un doceavo de esta curva en el tramo que pasa por arriba del ecuador, la cual conecta E_3 con M_1 . Esta trayectoria es recorrida con velocidad constante, de tal forma que la velocidad se elige para que tenga el punto final en el tiempo $t = T$. Esto nos da una familia de trayectorias prueba en el espacio reducido definido por $V/\text{SO}(2)$ y dependiente de \mathcal{I}_0 . Las correspondientes trayectorias en V son aquellas que tienen momento angular cero y se proyectan en éstas. Las longitudes de esas trayectorias son $\ell_0\sqrt{\mathcal{I}_0}$ donde ℓ_0 es la longitud de la trayectoria cuando $\mathcal{I}_0 = 1$, y es llamada la *longitud del equipotencial de Euler*.

El siguiente lema reduce la demostración de la Proposición 3.6 al cálculo de la longitud de ℓ_0 en la esfera de formas.

Lema 3.10. *El mínimo, denotado por a , de las acciones dadas por las trayectorias equipotenciales prueba es menor que A_2 , el ínfimo de las acciones de las órbitas de*

colisión en tiempo T , si y sólo si la longitud equipotencial de Euler ℓ_0 satisface

$$\ell_0 < \frac{\pi}{5}.$$

Demostración. La acción A_2 del Lema 3.8 es la mitad de la acción de una solución de colisión-expulsión en el problema de Kepler de período $2T$

$$A_2 = \frac{1}{2} 3 \left(\frac{\pi^2}{2^2} \right)^{1/3} (2T)^{1/3} = 3 \left(\frac{\pi^2}{2^4} \right)^{1/3} T^{1/3}.$$

Ahora, calculemos el mínimo a de las acciones de las trayectorias equipotenciales prueba. Por definición, la trayectoria prueba está contenida en la curva equipotencial de Euler en la esfera $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0$, y su velocidad es constante. Si denotamos por K_0 al cuadrado de la velocidad, entonces es el cuadrado del cociente de la longitud $\ell_0\sqrt{\mathcal{I}_0}$ y el tiempo T (distancia recorrida por unidad de tiempo), donde ℓ_0 es la longitud de la trayectoria en la esfera de radio $\mathcal{I}_0 = 1$. Por otro lado, dos veces la energía cinética es lo mismo que la velocidad de la trayectoria al cuadrado ya que la trayectoria se eligió de tal forma que $K_{rot} = 0$, y K_{red} no tiene parte homotética porque \mathcal{I} es constante. Como hemos dicho antes, U_0 es el valor de la función potencial para cualquiera de las configuraciones de Euler en la esfera de radio $\sqrt{\mathcal{I}_0}$, entonces $U_0 = \frac{\tilde{U}_E}{\sqrt{\mathcal{I}_0}}$ donde la constante $\tilde{U}_E = \frac{5}{\sqrt{2}}$ es el valor de $U(\theta, \varphi)$ en los puntos de Euler, ver Apéndice A. Luego en el cálculo de la acción $\mathcal{A}(\mathcal{I}_0)$ de la curva prueba de radio $\sqrt{\mathcal{I}_0}$ se tiene

$$\mathcal{A}(\mathcal{I}_0) = \int_0^T \left(\frac{1}{2}K + U \right) dt = \left(\frac{1}{2}K_0 + U_0 \right) T,$$

donde $K_0 = \left(\frac{\ell_0\sqrt{\mathcal{I}_0}}{T} \right)^2$ y $U_0 = \frac{\tilde{U}_E}{\sqrt{\mathcal{I}_0}}$. Como consecuencia reducimos la demostración a minimizar la función

$$\mathcal{A}(\mathcal{I}_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\ell_0\sqrt{\mathcal{I}_0}}{T} \right)^2 T + \frac{5}{\sqrt{2}\sqrt{\mathcal{I}_0}} T$$

El único punto crítico de $\mathcal{A}(\mathcal{I}_0)$ es

$$\mathcal{I}_0 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}\ell_0^2} \right)^{\frac{2}{3}} T^{\frac{4}{3}}$$

el cual corresponde a un mínimo, y la correspondiente acción es

$$a = \frac{3}{2} \left(\frac{5}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \ell_0^{\frac{2}{3}} T^{\frac{1}{3}}$$

Por último, $a < A_2$ si y sólo si

$$\frac{3}{2} \left(\frac{5}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \ell_0^{\frac{2}{3}} T^{\frac{1}{3}} < 3 \left(\frac{\pi^2}{2^4} \right)^{1/3} T^{1/3}$$

lo cual después de hacer simplificaciones toma la forma

$$\ell_0 < \frac{\pi}{5}.$$

□

3.15 Cálculo de la longitud de ℓ_0

La energía cinética puede ser expresada como la suma de dos términos no negativos: $K = K_{\text{red}} + K_{\text{rot}}$ (ésta es la descomposición de Saari). K_{red} corresponde a la métrica Riemanniana en el espacio cociente $V/\text{SO}(2)$ inducida por la métrica de K en V . Ésta es la parte de la deformación de la energía cinética, incluyendo la parte homotética. K_{rot} es la parte rotacional de la energía cinética. Dado que estamos considerando el problema plano, $K_{\text{rot}} = |\omega|^2/\mathcal{I}$ donde ω el vector momento angular.

Ahora, vamos a obtener la métrica reducida K_{red} mediante el cálculo de la distancia $d(x, y)$ entre las órbitas correspondientes a x y y en $V/\text{SO}(2)$. Como $\text{SO}(2)$ actúa por isometrías tenemos,

$$d^2(x, y) = \inf_{\theta} \sum_i |x_j - e^{i\theta} y_j|^2,$$

donde

$$\begin{aligned}
\sum_j |x_j - e^{i\theta} y_j|^2 &= \sum_{j=1}^3 (x_j - e^{i\theta} y_j) \overline{(x_j - e^{i\theta} y_j)} \\
&= \sum_{j=1}^3 (x_j \bar{x}_j - e^{-i\theta} x_j \bar{y}_j - e^{i\theta} y_j \bar{x}_j + e^{i\theta} e^{-i\theta} y_j \bar{y}_j) \\
&= x \cdot x + i\omega(x, x) - e^{-i\theta} (y \cdot x + i\omega(y, x)) \\
&\quad - e^{i\theta} (x \cdot y + i\omega(x, y)) + y \cdot y + i\omega(y, y) \\
&= x \cdot x + y \cdot y - (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) (y \cdot x + i\omega(y, x)) \\
&\quad - (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) (x \cdot y + i\omega(x, y)) \\
&= x \cdot x + y \cdot y - \cos \theta (y \cdot x + i\omega(y, x) + x \cdot y + i\omega(x, y)) \\
&\quad + i \operatorname{sen} \theta (y \cdot x + i\omega(y, x) - x \cdot y - i\omega(x, y)) \\
&= x \cdot x + y \cdot y - \cos \theta (x \cdot y - i\omega(x, y) + x \cdot y + i\omega(x, y)) \\
&\quad + i \operatorname{sen} \theta (x \cdot y + i\omega(y, x) - x \cdot y - i\omega(x, y)) \\
&= x \cdot x + y \cdot y - 2x \cdot y \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta (-i\omega(x, y) - i\omega(x, y)) \\
&= x \cdot x + y \cdot y - 2x \cdot y \cos \theta - 2i^2 \omega(x, y) \operatorname{sen} \theta \\
&= |x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y \cos \theta + 2\omega(x, y) \operatorname{sen} \theta
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$d^2(x, y) = \inf_{\theta} [|x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y \cos \theta + 2\omega(x, y) \operatorname{sen} \theta].$$

Ahora, calculamos la derivada de $d^2(x, y)$ con respecto a θ , y obtenemos que el mínimo ocurre cuando $\theta = \theta_0$ donde $x \cdot y \operatorname{sen} \theta_0 + \omega(x, y) \cos \theta_0 = 0$. Esto implica que $(x \cdot y)^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0 = \omega(x, y)^2 \cos^2 \theta_0$ y también $-\omega(x, y) \cos \theta_0 = x \cdot y \operatorname{sen} \theta_0$

Multiplicando la última ecuación por $2x \cdot y \operatorname{sen} \theta_0$ obtenemos

$$-2x \cdot y \omega(x, y) \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0 = 2(x \cdot y)^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0.$$

Utilizando la ecuación $(x \cdot y)^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0 = \omega(x, y)^2 \cos^2 \theta_0$ tenemos

$$\begin{aligned}
-2x \cdot y \omega(x, y) \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0 &= (x \cdot y)^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0 + (x \cdot y)^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0 \\
&= (x \cdot y)^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0 + \omega(x, y)^2 \cos^2 \theta_0 \\
&= (x \cdot y)^2 (1 - \cos^2 \theta_0) + \omega(x, y)^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta_0).
\end{aligned}$$

Lo cual es equivalente a

$$(x \cdot y)^2 \cos^2 \theta_0 - 2x \cdot y \omega(x, y) \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0 + \omega(x, y)^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0 = (x \cdot y)^2 + \omega(x, y)^2$$

es decir,

$$-x \cdot y \cos \theta_0 + \omega(x, y) \operatorname{sen} \theta_0 = -\sqrt{(x \cdot y)^2 + \omega(x, y)^2}.$$

Notemos que hemos elegido el signo negativo ya que la segunda derivada de $d^2(x, y)$ con respecto a θ en $\theta = \theta_0$ corresponde a un mínimo. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d^2(x, y) &= |x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y \cos \theta + 2\omega(x, y) \operatorname{sen} \theta \\ &= |x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y \cos \theta_0 + 2\omega(x, y) \operatorname{sen} \theta_0 \\ &= |x|^2 + |y|^2 - 2\sqrt{(x \cdot y)^2 + \omega(x, y)^2} \\ &= |x|^2 + |y|^2 - 2|\langle x, y \rangle| \end{aligned}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interior Hermitiano.

Ahora desarrollamos en serie de Taylor la expresión para $d^2(x, x + \varepsilon v)$ con respecto al parámetro ε alrededor de $\varepsilon = 0$ a orden 2, para lo cual consideramos $x_1 = (x_{11}, x_{12})$, $x_2 = (x_{21}, x_{22})$ y $x_3 = (x_{31}, x_{32})$ con vectores de velocidad $v_1 = (v_{11}, v_{12})$, $v_2 = (v_{21}, v_{22})$ y $v_3 = (v_{31}, v_{32})$, respectivamente. Luego

$$\begin{aligned} d^2(x, x + \varepsilon v) &= \\ &\left(v_{11}^2 + v_{12}^2 + v_{21}^2 + v_{22}^2 + v_{31}^2 + v_{32}^2 - \frac{(v_{12}x_{11} - v_{11}x_{12} + v_{22}x_{21} - v_{21}x_{22} + v_{32}x_{31} - x_{31}x_{32})^2}{x_{11}^2 + x_{12}^2 + x_{21}^2 + x_{22}^2 + x_{31}^2 + x_{32}^2} \right) \varepsilon^2 \\ &+ O(\varepsilon)^3. \end{aligned}$$

Consideremos el primer término no nulo de $d^2(x, x + \varepsilon v)$ el cual corresponde al coeficiente de ε^2 , es decir,

$$\begin{aligned} v_{11}^2 + v_{12}^2 + v_{21}^2 + v_{22}^2 + v_{31}^2 + v_{32}^2 - \frac{(v_{12}x_{11} - v_{11}x_{12} + v_{22}x_{21} - v_{21}x_{22} + v_{32}x_{31} - x_{31}x_{32})^2}{x_{11}^2 + x_{12}^2 + x_{21}^2 + x_{22}^2 + x_{31}^2 + x_{32}^2} \\ = |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 - \frac{((x_1 \wedge v_1 + x_2 \wedge v_2 + x_3 \wedge v_3) \cdot \mathbf{e}_3)^2}{|x|^2} \\ = |v|^2 - \frac{\omega(x, v)^2}{|x|^2} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ y $\omega(x, v)^2$ es la norma del vector momento angular al cuadrado.

Por otro lado, ya que las masas son iguales tenemos que $\mathcal{I} = x \cdot x$ y $2K = \dot{x} \cdot \dot{x} = |\dot{x}|^2 = |v|^2$, de donde

$$\begin{aligned} 2K &= |v|^2 = K_{\text{red}} + K_{\text{rot}} \\ &= K_{\text{red}} + \frac{\omega(x, v)^2}{\mathcal{I}} \\ &= K_{\text{red}} + \frac{\omega(x, v)^2}{|x|^2}. \end{aligned}$$

Luego, el coeficiente de ε^2 en la expresión de $d^2(x, x + \varepsilon v)$ es la energía cinética reducida $K_{\text{red}}(x, v)$ correspondiente a la descomposición $K_{\text{red}} = K - K_{\text{rot}}$. Tenemos

$$K_{\text{red}}(x, v) = |v|^2 - \frac{\omega(x, v)^2}{|x|^2}.$$

Notemos que $K_{\text{red}}(x, v) = 0$ cuando el vector velocidad v es tangente a la órbita de x , es decir, cuando v es proporcional a ix .

3.15.1 La longitud ℓ_0 en coordenadas esféricas

Es conveniente usar coordenadas esféricas definidas en la esfera de formas $\mathbb{S}_f^2 \subset \mathbb{R}^3$ definidas por

$$u_1 = r^2 \cos \varphi \cos \theta, \quad u_2 = r^2 \cos \varphi \sin \theta, \quad u_3 = r^2 \sin \varphi.$$

Luego tenemos

$$r^2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \mathcal{I},$$

lo cual justifica la elección de r .

Lema 3.11 (ver [20]). *En coordenadas esféricas la métrica cociente correspondiente a la energía cinética reducida K_{red} es*

$$ds^2 = dr^2 + \frac{r^2}{4}(\cos^2 \varphi d\theta^2 + d\varphi^2).$$

En particular la esfera \mathbb{S}_f^2 dada por $\mathcal{I} = r^2 = 1$ es isométrica a la esfera estándar de radio $1/2$, y el espacio reducido \mathbb{R}^3 es el cono sobre esta esfera, que consiste de todos los puntos a distancia 1 de colisión triple.

Demostración. Expresaremos la energía reducida K_{red} en términos de r , θ y φ . Como hemos visto, la energía reducida está dada por

$$K_{\text{red}}(x, v) = |v|^2 - \frac{\omega(x, v)^2}{|x|^2}.$$

Utilizando la función de Jacobi obtenemos

$$K_{\text{red}}(z_1, z_2) = |\dot{z}_1|^2 + |\dot{z}_2|^2 - \frac{\text{Im}^2(\bar{z}_1 \dot{z}_1 + \bar{z}_2 \dot{z}_2)}{|z_1|^2 + |z_2|^2}$$

Sabemos que función de Hopf es $\mathcal{K}(z_1, z_2) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2\bar{z}_1 z_2) = (u_1, u_2, u_3)$, donde $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ y $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$. Recordemos la relación de equivalencia en \mathbb{C}^2 para obtener el espacio reducido: z_1 está relacionado con z_2 si y sólo si $z_1 = e^{i2\pi\theta} z_2$ para algún $\theta \in \mathbb{S}^1$. Entonces, es posible definir la función \mathcal{K} sobre estas clases de equivalencias, es decir, $\mathcal{K}(z_1, z_2) = \mathcal{K}(z'_1, z'_2)$ donde (z_1, z_2) está relacionado con (z'_1, z'_2) .

Si consideramos coordenadas esféricas como fueron descritas anteriormente, entonces la función \mathcal{K} definida sobre estas clases de equivalencia es una función biyectiva con inversa $\mathcal{K}^{-1}(r, \varphi, \theta) = (z_1, z_2)$, donde

$$z_1 = \frac{r\sqrt{\cos \varphi \cos \theta + 1}}{\sqrt{2}}$$

y

$$z_2 = \frac{r\sqrt{1 - \cos \varphi \cos \theta}}{\sqrt{2}} \exp(i \arctan(\tan \varphi \csc \theta)).$$

Usando la inversa de la función \mathcal{K} sobre las $SO(2)$ -órbitas tenemos

$$K_{\text{red}}(r, \theta, \varphi) = \dot{r}^2 + \frac{r^2}{4}(\cos^2 \varphi \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)$$

□

Lema 3.12. *La longitud de la curva equipotencial de Euler satisface $\ell_0 < \pi/5$.*

Demostración. Usaremos la métrica

$$ds^2 = dr^2 + \frac{r^2}{4}(\cos^2 \varphi d\theta^2 + d\varphi^2) \quad (3.12)$$

del espacio cociente, para estimar la longitud de la curva equipotencial de Euler ℓ_0 .

La curva equipotencial asociada a los puntos colineales de Euler

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \theta}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos(\theta + \frac{4\pi}{3})}} \\ + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}} = U_E = \frac{5}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

tiene una longitud tal que podríamos cubrir dos veces el ecuador $\varphi = 0$, ver detalles en el Apéndice A. Parametricemos esta curva por la función $\varphi = \varphi(\theta)$, donde θ puede variar en un intervalo de longitud 4π , ver la Figura 3.11.

Estamos interesados en calcular la longitud ℓ_0 que es un doceavo de la longitud de la curva definida por (3.13). A partir de la ecuación (3.12) tenemos

$$\begin{aligned} \ell_0 &= \frac{1}{12} \int_0^{4\pi} ds = \frac{1}{12} \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \sqrt{\cos^2 \varphi d\theta^2 + d\varphi^2} \\ &= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \varphi d\theta^2 + \varphi'(\theta)^2 d\theta^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos^2 \varphi(\theta) + \varphi'^2(\theta)} d\theta. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Usando el método de Newton para calcular $\varphi(\theta)$ y derivando implícitamente (3.13) para obtener $\varphi'(\theta)$, y después el método del trapecio para calcular la integral (3.14), Carles Simó y Jacques Laskar lograron acotar el valor de ℓ_0 obteniendo:

$$\frac{\pi}{5.082553924511} \leq \ell_0 \leq \frac{\pi}{5.082553924509}.$$

□

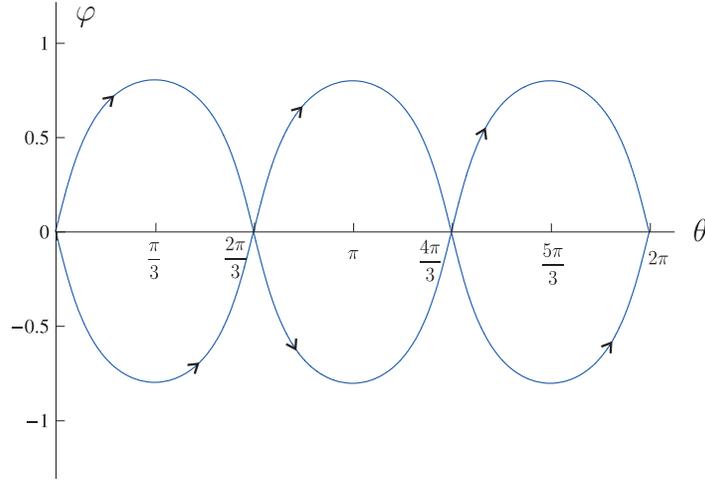


Figura 3.11: Curva equipotencial dada por la curva de nivel U_E dada en (3.13).

Nosotros hemos corroborado este cálculo usando 1000 iterados de Newton y hemos obtenido $\ell_0 < 0.617781 < \frac{\pi}{5}$.

Observación 3.13. Aquí se explica el significado de las coordenadas esféricas a partir de triángulos. Los paralelos $\varphi = \text{constante}$ en la esfera \mathbb{S}_f^2 corresponden a triángulos con la misma orientación y el mismo momento de inercia, salvo rotaciones. Necesariamente este conjunto de triángulos está caracterizado por un área común, ver [2]. Sin embargo, el área es proporcional a $\text{Im} \bar{z}_1 z_2$ que es $u_3 = \sin \varphi$, que a su vez es la función altura de la esfera. Los meridianos $\theta = \text{constante}$ en la esfera \mathbb{S}_f^2 están definidos por una relación entre los cuadrados de las distancias mutuas.

3.16 Simetrías: Demostración de la existencia de la órbita ocho

Lema 3.14. *Después de equipar con una simetría de acuerdo a la curva equipotencial de Euler en la esfera de las formas \mathbb{S}_f^2 , una órbita minimizadora x da una órbita cerrada periódica (continuando denotándola por x), con momento angular cero, la cual salvo traslación en el tiempo y del espacio de rotación, es de la forma*

$$x(t) = (q(t + 2\bar{T}/3), q(t + \bar{T}/3), q(t)),$$

descrita en el Teorema 3.5.

Realizaremos la demostración del Lema 3.14 en 4 etapas.

Etapa 1. Observemos que el arco minimizador es ortogonal a las variedades E_3 y M_1 restringiendo sus puntos finales. Esto se sigue del término límite que aparece en la fórmula de la primera variación para la acción.

- Ortogonalidad a E_3

La acción está dada por

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

y la primera variación es

$$\delta\mathcal{A}_x(h) = \int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \cdot h dt - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot h \Big|_0^T$$

Sea $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ el mínimo de la acción que inicia en E_3 y termina en M_1 . Entonces, $x(t)$ es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, y la primera variación calculada en este mínimo toma la forma

$$\delta\mathcal{A}_x(h) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot h \Big|_0^T = 0 \quad (3.15)$$

para toda $h \in C^1([0, T], V)$, donde V es el espacio de configuración. Observemos que $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$.

Por otro lado, E_3 es un espacio vectorial de dimensión 2 con la base $\{u, v\}$, donde $u = (1, 0, -1, 0, 0, 0)$ y $v = (0, 1, 0, -1, 0, 0)$. Consideremos las funciones $h_u, h_v \in C^1([0, T], V)$ definidas por $h_u(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) u$ y $h_v(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) v$. De la ecuación (3.15) tenemos que $\dot{x}(0) \cdot u = 0$ y $\dot{x}(0) \cdot v = 0$, de donde $x_1(0) = x_2(0)$.

Ahora vamos a encontrar un conjunto en el espacio de configuración reducido correspondiente a E_3 . Para esto, primero consideremos la imagen de E_3 bajo la función de Jacobi J , sea $\lambda u + \mu v \in E_3$ donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Por ser lineal J , tenemos

$$J(\lambda u + \mu v) = \lambda J(u) + \mu J(v) = \lambda(-\sqrt{2}, 0, 0, 0) + \mu(0, -\sqrt{2}, 0, 0).$$

Por lo tanto, $J(E_3) = \{(\lambda\sqrt{2}, \mu\sqrt{2}, 0, 0) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{(z_1, 0, 0) : z_1 \in \mathbb{C}\}$. Ahora, consideremos la imagen de $J(E_3)$ bajo la función de Hopf \mathcal{K} . Sea $(z_1, 0, 0) \in J(E_3)$,

$$\mathcal{K}(J(E_3)) = \{(|z_1|^2, 0, 0) : z_1 \in \mathbb{C}\}.$$

Por lo tanto, el conjunto E_3 en $V/SO(2)$ es el eje u_1 no negativo.

Por último veremos que $\dot{x}(0)$ es ortogonal a E_3 visto en $V/SO(2)$. Para esto consideremos el siguiente diagrama entre los espacios tangentes

$$T_{x(0)}V \xrightarrow{dJ_{x(0)}} T_{J(x(0))}\mathbb{C}^2 \xrightarrow{d\mathcal{K}_{J(x(0))}} T_{\mathcal{K}(J(x(0)))}V/SO(2)$$

Hemos visto que $\dot{x}(0) \in T_{x(0)}V$ y E_3 son ortogonales, ahora veremos que siguen cumpliendo con esta condición en el espacio tangente $T_{\mathcal{K}(J(x(0)))}V/SO(2)$

Para esto calculemos $dJ_{x(0)}(\dot{x}(0))$. Puesto que J es lineal, obtenemos que $\dot{z}_1 = 0$ y $\dot{z}_2 = -\sqrt{6}\dot{x}_1(0)$. Para calcular $d\mathcal{K}_{J(x(0))}$ derivemos la función de Hopf

$$d\mathcal{K}_{(z_1, z_2)} = 2 \begin{pmatrix} a & b & -c & -d \\ c & d & a & b \\ d & -c & -b & a \end{pmatrix}$$

donde $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$. Por lo tanto, $d\mathcal{K}_{J(x(0))}(\dot{z}_1, \dot{z}_2) = 4\sqrt{3}(0, \dot{x}_1(0))$ con $J(x(0)) = (-\sqrt{2}, 0, 0, 0) = (z_1, z_2)$.

Luego, el vector $d(\mathcal{K} \circ J)_{x(0)}(\dot{x}(0))$ es ortogonal al eje u_1 , es decir, es ortogonal a $\mathcal{K}(J(E_3))$.

- Ortogonalidad a M_1

Consideremos el espacio de triángulos isósceles $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : r_{12} = r_{13}\}$. Usando el hecho de que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ se demuestra que la condición $r_{12} = r_{13}$ es equivalente a $|x_2| = |x_3|$, luego $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : |x_2| = |x_3|\}$. Ahora consideremos el conjunto $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in V \setminus \{\text{Colisión triple}\} : |x_2| = |x_3|\}$, Demostraremos que M es una variedad de dimensión 3. Para esto definimos la siguiente función $f : V \setminus \{\text{Colisión triple}\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(|x_2|^2 - |x_3|^2)$, observemos que $M = f^{-1}(0)$. Veamos que 0 es un valor regular de f . Calculando el gradiente de f tenemos que $\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (0, x_2, x_3)$, por lo tanto $x = (x_1, x_2, x_3)$ es un punto regular si y sólo si x no es colisión triple, es decir $x \neq 0$. Por lo tanto, cualquier $x \in M$ es un punto regular de f , es decir, 0 es un valor regular de f . Luego, M es una variedad de dimensión 3.

Sea $x = x(T) \in M$. Calculemos el espacio tangente $T_x M$. Sabemos que $T_x M = \text{Ker } df_x$. Hagamos $x = (x_1, x_2, x_3) = (x_1(T), x_2(T), x_3(T))$. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{Ker } df_x &= \{a \in V : \nabla f(x_1, x_2, x_3)a = 0\} \\ &= \{a \in V : (0, x_2, x_3)^t(a_1, a_2, a_3)\} \\ &= \{a \in V : x_2^t a_2 + x_3^t a_3 = 0\} \\ &= \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3 : a_1 + a_2 + a_3 = 0, \quad x_2^t a_2 + x_3^t a_3 = 0\} \end{aligned}$$

donde $a = (a_1, a_2, a_3) \in V$. Consideramos el espacio tangente $T_x M$ visto desde el espacio reducido, podemos considerar que el punto $x_2 = (x_{21}, x_{22})$ está sobre el eje horizontal, y por lo tanto $x_2 = (x_{21}, 0)$, donde $x_2 \neq 0$, ya que en caso contrario tendríamos colisión triple contradiciendo el hecho de que la curva $x(t)$ es libre de colisión. Tenemos que $x_3 = e^{i\theta} x_2$, ya que $|x_2| = |x_3|$. Entonces, de la condición $x_2^t a_2 + x_3^t a_3 = 0$ obtenemos que $a_{21} + a_{32} \cos \theta + a_{32} \sin \theta = 0$. Utilizando esta última ecuación junto con $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, obtenemos una base para el espacio tangente $T_x M$ dada por $\{u, v, w\}$, donde $u = (\cos \theta - 1, 0, -\cos \theta, 0, 1, 0)$, $v = (\sin \theta, -1, -\sin \theta, 0, 0, 1)$ y $w = (0, -1, 0, 1, 0, 0)$.

Como $x(t)$ es solución de las ecuaciones de Euler Lagrange, la primera variación de la acción calculada en este mínimo queda como

$$\delta \mathcal{A}_x(h) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot h \Big|_0^T = 0$$

para toda $h \in C^1([0, T], V)$, donde V es el espacio de configuración. Para las funciones $h_u, h_v, h_w \in C([0, T], V)$ dadas por $h_u(t) = \frac{t}{T}u$, $h_v(t) = \frac{t}{T}v$ y $h_w(t) = \frac{t}{T}w$, obtenemos que

$$\dot{x} = \dot{x}(T) = \dot{x}_{12} \left(\frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta}, 1, \frac{\cos \theta - 2}{\sin \theta}, 1, \frac{-2 \cos \theta + 1}{\sin \theta}, -2 \right)$$

Calculando $J(\dot{x})$ obtenemos que

$$J(\dot{x}(T)) = \left(\frac{-3}{\sqrt{2} \sin \theta}, 0, \frac{\sqrt{3}(-2 \cos \theta + 1)}{\sqrt{2} \sin \theta}, -\sqrt{2}\sqrt{3} \right).$$

Ahora hacemos lo mismo con $x = x(T)$,

$$J(x(T)) = \frac{x_{21}}{\sqrt{2}} \left(2 + \cos \theta, \sin \theta, \sqrt{3} \cos \theta, \sqrt{3} \sin \theta \right).$$

Calculamos la diferencial de la función de Hopf en el punto $J(x(T))$,

$$d\mathcal{K}_{J(x(T))} = \sqrt{2}x_{21} \begin{pmatrix} 2 + \cos \theta & \sin \theta & -\sqrt{3} \cos \theta & -\sqrt{3} \sin \theta \\ \sqrt{3} \cos \theta & \sqrt{3} \sin \theta & 2 + \cos \theta & \sin \theta \\ \sqrt{3} \sin \theta & -\sqrt{3} \cos \theta & -\sin \theta & 2 + \cos \theta \end{pmatrix}$$

Entonces, el vector velocidad $\dot{x}(T)$ visto en el espacio reducido $V/SO(2)$, está dado por

$$d\mathcal{K}_{J(x(T))}(J(\dot{x}(T))) = (-6\dot{x}_{12}x_{21} \cot \theta, -6\sqrt{3}\dot{x}_{12}x_{21} \cot \theta, -8\sqrt{3}\dot{x}_{12}x_{21}).$$

A continuación, veremos cómo es el espacio tangente $T_x M$ visto desde el espacio de configuración. Para esto, primero consideremos la imagen de este espacio bajo la función de Jacobi, esto es, $J(T_x M) = \{\lambda J(u) + \mu J(v) + \eta J(w) : \lambda, \mu, \eta \in \mathbb{R}\}$ donde $J(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - 2 \cos \theta, 0, \sqrt{3}, 0)$, $J(v) = \frac{1}{2}(-2 \sin \theta, 1, 0, \sqrt{3})$ y $J(w) = (0, \sqrt{2}, 0, 0)$. Luego, consideremos la imagen de $J(T_x M)$ bajo la diferencial de la función de Hopf, es decir,

$$d\mathcal{K}_{J(x(T))}(J(T_x M)) = \{\lambda d\mathcal{K}_{J(x(T))}(J(u)) + \mu d\mathcal{K}_{J(x(T))}(J(v)) + \eta d\mathcal{K}_{J(x(T))}(J(w)) : \lambda, \mu, \eta \in \mathbb{R}\},$$

donde $d\mathcal{K}_{J(x(T))}(J(u)) = x_{21}(1 - 6 \cos \theta - \cos 2\theta, 2\sqrt{3}(\cos \theta + \sin^2 \theta), -\sqrt{3} \sin 2\theta)$, $d\mathcal{K}_{J(x(T))}(J(v)) = x_{21}(-6 \sin \theta - \sin 2\theta, 2\sqrt{3}(1 - \cos \theta) \sin \theta, 2\sqrt{3} \cos^2 \theta)$ y $d\mathcal{K}_{J(x(T))}(J(w)) = x_{21}(2 \sin \theta, 2\sqrt{3} \sin \theta, -2\sqrt{3} \cos \theta)$.

Por último, para demostrar que el vector velocidad $x(T)$ es ortogonal al espacio tangente $T_x M$ en el espacio reducido, es decir,

$$d\mathcal{K}_{J(x(T))}(J(\dot{x}(T))) \perp d\mathcal{K}_{J(x(T))}(J(T_x M)),$$

basta observar que,

$$\langle (-6\dot{x}_{12}x_{21} \cot \theta, -6\sqrt{3}\dot{x}_{12}x_{21} \cot \theta, -8\sqrt{3}\dot{x}_{12}x_{21}), x_{21}(1 - 6 \cos \theta - \cos 2\theta, 2\sqrt{3}(\cos \theta + \sin^2 \theta), -\sqrt{3} \sin 2\theta) \rangle = 0,$$

$$\langle (-6\dot{x}_{12}x_{21} \cot \theta, -6\sqrt{3}\dot{x}_{12}x_{21} \cot \theta, -8\sqrt{3}\dot{x}_{12}x_{21}), x_{21}(-6 \sin \theta - \sin 2\theta, 2\sqrt{3}(1 - \cos \theta) \sin \theta, 2\sqrt{3} \cos^2 \theta) \rangle = 0$$

y

$$\langle (-6\dot{x}_{12}x_{21} \cot \theta, -6\sqrt{3}\dot{x}_{12}x_{21} \cot \theta, -8\sqrt{3}\dot{x}_{12}x_{21}), x_{21}(2 \sin \theta, 2\sqrt{3} \sin \theta, -2\sqrt{3} \cos \theta) \rangle = 0$$

siempre se cumplen.

Etapa 2. Observemos que haciendo la reflexión de este arco con respecto a uno de los tres meridianos, o al ecuador, vamos a obtener otro arco que será solución minimizante, el cual tendrá la condición de punto final perturbado; es decir, con E_j y M_k en el lugar de E_3 y M_1 . Usando esas reflexiones podemos construir la curva solución completa en el espacio de configuración reducido. Ésta consiste de 12 subarcos congruentes al minimizador original. La ortogonalidad garantiza que estos son curvas diferenciables, y por tanto forman una solución.

Más precisamente, la reflexión con respecto del meridiano M_1 es una simetría de la acción reducida (por tanto de las ecuaciones), y el arco minimizador es ortogonal al meridiano en el extremo final, cuando continuamos la solución representada por el arco que pasa por el meridiano M_1 , de tal forma que el resultado es el mismo que si reflejamos sobre el meridiano, y luego invertimos el tiempo. En símbolos: $x(\bar{T}/12 + t) = s_1(x(\bar{T}/12 - t))$ donde s_1 es la reflexión con respecto al meridiano M_1 , donde $\bar{T} = 12T$ será el período de la órbita completa (T es el tiempo en que el arco minimizador toca al meridiano M_1).

La reflexión s_1 se realiza en el plano inercial de la siguiente forma: en el tiempo $T = \bar{T}/12$ el triángulo es un triángulo isósceles de tipo M_1 y entonces tiene una simetría de reflexión τ . Elegimos coordenadas en \mathbb{R}^2 tal que $\tau(x, y) = (x, -y)$, es decir, tal que la mediatriz del segmento que une m_2 y m_3 es el eje x . Sea $S_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, x_2)$ la operación de intercambio de las masas m_2 y m_3 . Entonces $s_1 = S_1 \circ \tau = \tau \circ S_1$.

Ahora tenemos una solución que va de E_3 a E_2 en el tiempo $2T = \bar{T}/6$. Por un argumento similar, al continuar el arco solución que pasa por E_2 debemos realizar una media de vuelta H_2 en E_2 e invertimos en el tiempo: $x(2T - t) = H_2(x(2T + t))$. Esta media vuelta es una simetría de la acción que es la composición de una reflexión con respecto al ecuador y una reflexión con respecto al meridiano M_2 . Esto se lleva a cabo en el plano inercial al intercambiar las masas m_1 y m_3 y entonces realizar una media vuelta inercial $\sigma \circ \tau(x, y) = (-x, -y)$ con respecto al origen.

Mediante este proceso obtenemos un arco solución de E_3 a E_1 en el tiempo $4T = \bar{T}/3$. Continuando este proceso en torno al ecuador con reflexiones o medias vueltas apropiadas construimos una curva suave en el espacio de configuración reducido el cual consiste de 12 arcos congruentes, alternadamente en parejas sobre y debajo del ecuador, para tener la misma simetría que la curva equipotencial. Ésta es una curva solución, y es \bar{T} periódica módulo rotaciones.

Etapa 3. Hemos construido la proyección de la curva solución en el espacio de configuración reducido. Ahora construiremos la curva solución completa, mostrando que es periódica en el espacio inercial, además mostrando que satisface todas las propiedades descritas en el Teorema 3.5. Esto es, haciendo uso de la regla del área para la reconstrucción de la dinámica original a partir de la dinámica reducida, así como de las simetrías de la curva.

La Figura 3.12 muestra los segmentos de la órbita en la esfera de las formas \mathbb{S}_f^2 , y nos dice cómo es la órbita reconstruida en el plano inercial.

La *regla del área* nos dice cómo se realiza el movimiento de las masas en el plano inercial, el cual está dado por la curva que representa el movimiento en la esfera de las formas \mathbb{S}_f^2 . Supongamos que la curva es cerrada. Entonces los triángulos inicial y final en el plano inercial son semejantes. El ángulo de rotación que relaciona esos dos triángulos es un múltiplo escalar de dos veces el área esférica encerrada por la *shape* curva (el área de la esfera de radio $1/2$ es π). Para la demostración de la regla

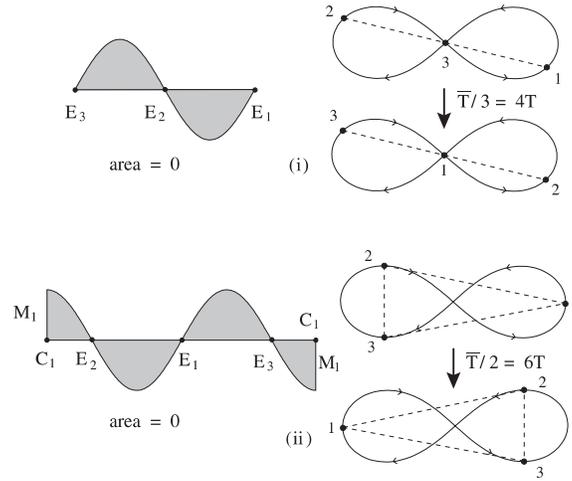


Figura 3.12: Áreas encerradas por las curvas sobre la esfera \mathbb{S}_f^2 y las correspondientes órbitas en el plano inercial.

del área, consultar [19] o el Apéndice B de esta tesis. En el caso de que la *shape* curva no fuera cerrada, ésta iniciará y terminará en el ecuador, lo cual corresponde a iniciar y terminar en configuración colineal, y para cerrarla recorreremos hacia “atrás” la curva a lo largo del ecuador desde el punto final hasta que alcance el punto inicial, ver la Figura 3.13. Posteriormente calculamos dos veces el área con signo encerrada por esta curva cerrada. Ésta es igual al ángulo formado entre dos líneas en el plano inercial, las cuales contienen la configuración inicial y final para cualquier curva con momento angular cero que cumpla con la *shape* curva dada¹, ver la Figura 3.14.

Finalmente, si la curva inicia o termina en uno de los tres triángulos isósceles (asociados a los meridianos), calculamos el ángulo entre los ejes de simetría del triángulo isósceles inicial y final, siguiendo el meridiano adecuado hacia arriba o hacia abajo del ecuador, viajando a lo largo del ecuador hasta cerrar la curva, y entonces calculamos el área encerrada por la curva cerrada que obtengamos.

El hecho de que las áreas con signo representadas en la Figura 3.12 sean iguales a cero implica que recorreremos la curva solución en la siguiente forma:

- (i) si iniciamos en la configuración de Euler E_3 y seguimos la órbita hasta un tiempo $\bar{T}/3 = 4T$, habremos de pasar por la configuración de Euler E_2 en el tiempo $2T$, de tal forma que en el tiempo $\bar{T}/3 = 4T$ llegamos a la configuración de Euler E_1 , donde las tres masas están en la misma línea como la configuración

¹Existen dos formas de cerrar la curva hasta formar un lazo, dependiendo del sentido en que se recorre el ecuador. Los dos ángulos difieren en π , el cual es dos veces el área de un hemisferio de la esfera de radio $1/2$. Esto no es problema ya que el ángulo entre dos líneas no orientadas está definido módulo π .

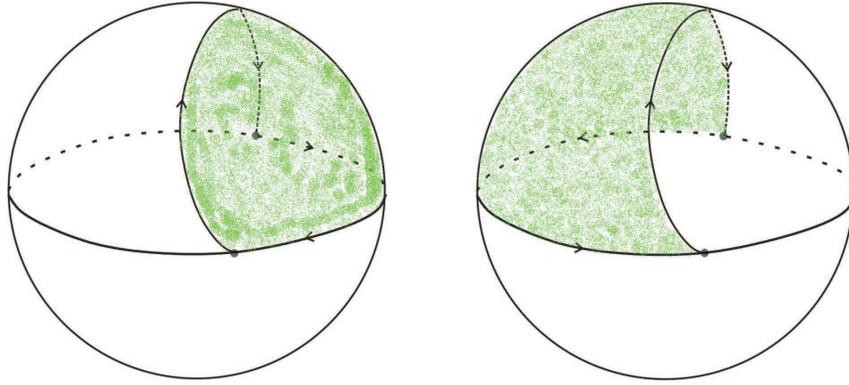


Figura 3.13: *Shape* curva que inicia y termina en una configuración colineal en el ecuador.

de Euler inicial E_3 . En otras palabras, al pasar de E_3 a E_1 no existe rotación en la línea de Euler, contrario a lo que sucede en el tiempo $2T$.

- (ii) después de un tiempo $\bar{T}/2$, una configuración isósceles regresa a ella misma, salvo reflexión, es decir, salvo el intercambio de los vértices de simetría. Como consecuencia, no existe rotación de los ejes de simetría de los triángulos.

Ahora, elegimos el origen del tiempo en $t = 0$ el cual corresponde a la configuración de Euler E_3 . Definimos $q(t) = x_3(t)$ donde $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ es la curva solución en el plano inercial (\mathbb{R}^2). La primera propiedad implica que

$$\begin{cases} q(t) = x_3(t) & \text{para } 0 \leq t \leq \bar{T}/3, \\ q(t) = x_2(t - \bar{T}/3) & \text{para } \bar{T}/3 \leq t \leq 2\bar{T}/3, \\ q(t) = x_1(t - 2\bar{T}/3) & \text{para } 2\bar{T}/3 \leq t \leq \bar{T}. \end{cases}$$

Entonces, después del tiempo $\bar{T}/3$ (respectivamente, $2\bar{T}/3$), habremos reemplazado los cuerpos m_2, m_3, m_1 por los cuerpos m_3, m_1, m_2 (respectivamente, m_1, m_2, m_3) con las mismas velocidades. Los tres cuerpos se mueven a lo largo de la misma curva cerrada $q(t)$ de período \bar{T} , donde la fase relativa de un cuerpo con respecto del otro es de $\bar{T}/3$. Luego, la simetría de Klein se sigue de manera inmediata, ver la Figura 3.15.

La Figura 3.16 muestra la órbita (continuamos llamándola x) en el espacio de configuración reducido.

Etapa 4. Sólo queda demostrar que la curva equivariante $q(t)$ que hemos construido no sólo tiene los requerimientos de simetría sino también la forma de la figura ocho sin lazos pequeños adicionales u otras características. Para esto vamos a demostrar el siguiente Lema:

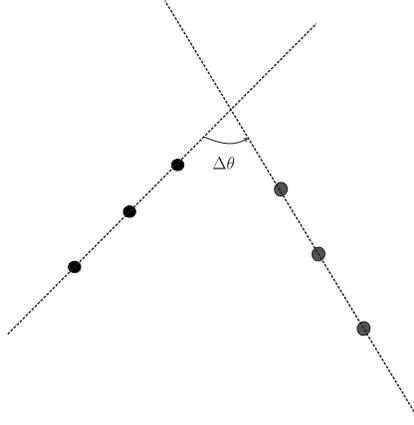


Figura 3.14: $\Delta\theta$ es el ángulo formado por dos líneas rectas en el plano inercial, las cuales contienen la configuración inicial y final.

Lema 3.15. *El momento angular $q(t) \wedge \dot{q}(t)$ no se anula en ningún $0 < t \leq \bar{T}/4$; es decir, en cualquier cuarto de curva el momento angular de la masa que traza esta curva no se anula.*

Demostración del Lema 3.15. Aquí vamos a usar el hecho de que las ecuaciones de Newton se cumplen, y de dos consecuencias de minimalidad de la curva en la esfera \mathbb{S}_f^2 .

Iniciemos por calcular la derivada de $q \wedge \dot{q}$ con respecto al tiempo. Es decir,

$$\frac{d}{dt}(q \wedge \dot{q}) = q \wedge \frac{d^2q}{dt^2}.$$

Ahora vamos a usar el hecho de que $q(t) = x_3(t)$ donde $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ cumple las ecuaciones de Newton, además usamos que el centro de masa está en el origen para todo tiempo: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Calculando obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(q \wedge \dot{q}) &= \dot{q} \wedge \dot{q} + q \wedge \frac{d^2q}{dt^2} = q \wedge \ddot{q} \\ &= (-x_1 - x_2) \wedge (-\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) \\ &= x_1 \wedge \ddot{x}_1 + x_1 \wedge \ddot{x}_2 + x_2 \wedge \ddot{x}_1 + x_2 \wedge \ddot{x}_2 \\ &= x_1 \wedge \left(\frac{x_2 - x_1}{r_{12}^3} + \frac{x_3 - x_1}{r_{13}^3} \right) + x_1 \wedge \left(\frac{x_1 - x_2}{r_{12}^3} + \frac{x_3 - x_2}{r_{23}^3} \right) + \\ &\quad x_2 \wedge \left(\frac{x_2 - x_1}{r_{12}^3} + \frac{x_3 - x_1}{r_{13}^3} \right) + x_2 \wedge \left(\frac{x_1 - x_2}{r_{12}^3} + \frac{x_3 - x_2}{r_{23}^3} \right) \end{aligned}$$

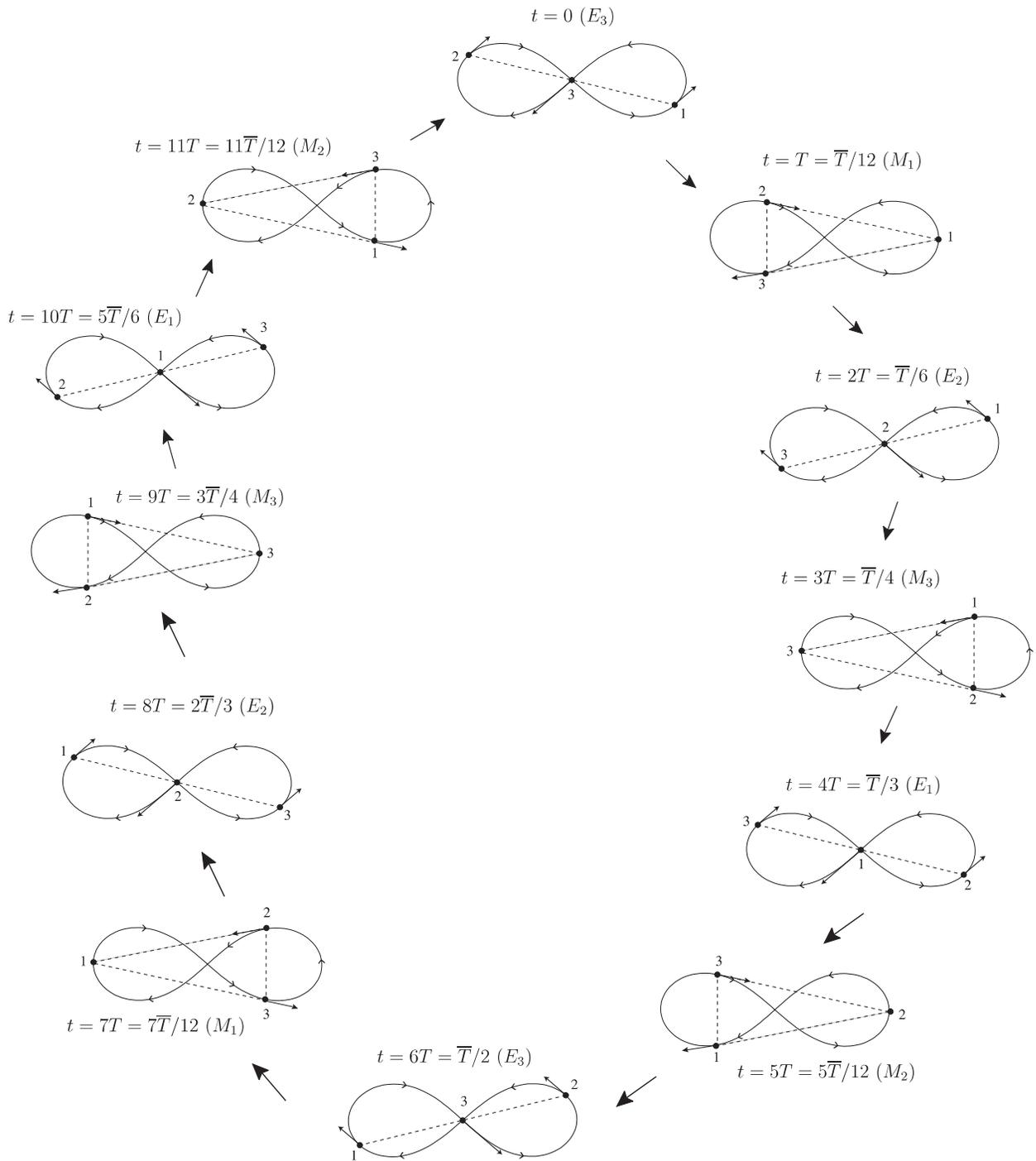


Figura 3.15: Órbita de la *figura ocho*, calculado con las condiciones iniciales de Carles Simó [9].

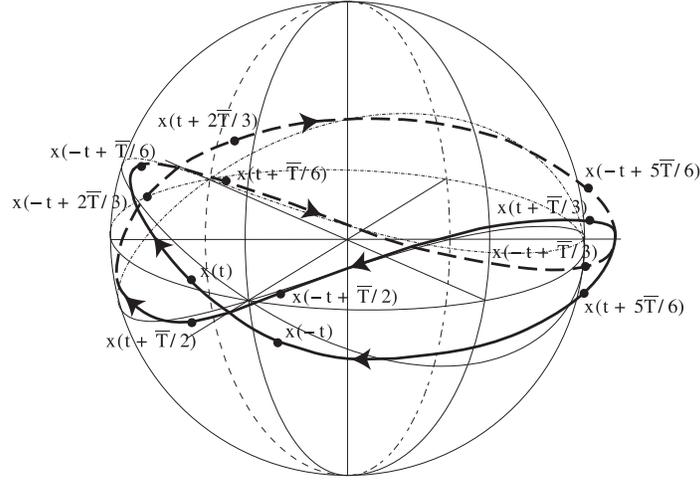


Figura 3.16: Órbita ocho en el espacio de configuración reducido, figura tomada de [9].

Al realizar la distribución y tomando en cuenta que $x_i \wedge x_i = 0$, la última expresión toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(q \wedge \dot{q}) &= \frac{x_1 \wedge x_2}{r_{12}^3} + \frac{x_1 \wedge x_3}{r_{13}^3} - \frac{x_1 \wedge x_2}{r_{12}^3} - \frac{x_1 \wedge x_2}{r_{23}^3} + \frac{x_1 \wedge x_3}{r_{23}^3} \\ &\quad - \frac{x_2 \wedge x_1}{r_{12}^3} + \frac{x_2 \wedge x_3}{r_{13}^3} - \frac{x_2 \wedge x_1}{r_{13}^3} + \frac{x_2 \wedge x_1}{r_{12}^3} + \frac{x_2 \wedge x_3}{r_{23}^3}. \end{aligned}$$

Por otro lado, usando $x_1 \wedge x_2 = -x_2 \wedge x_1$ y $x_3 = -x_1 - x_2$, obtenemos $x_1 \wedge x_3 = -x_2 \wedge x_3$ y como consecuencia

$$\frac{d}{dt}(q \wedge \dot{q}) = -\frac{x_1 \wedge x_2}{r_{23}^3} - \frac{x_2 \wedge x_1}{r_{13}^3} = \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{23}^3} \right) (x_1 \wedge x_2)$$

Además,

$$x_1 \wedge x_2 = x_1 \wedge (-x_1 - x_3) = -x_1 \wedge x_1 - x_1 \wedge x_3 = x_3 \wedge x_1.$$

Entonces obtenemos lo siguiente:

$$\frac{d}{dt}(q \wedge \dot{q}) = \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{23}^3} \right) (x_3 \wedge x_1).$$

Por lo tanto, existen sólo dos formas en que $\frac{d}{dt}(q \wedge \dot{q})$ sea cero:

- (i) x_1 y x_3 son linealmente dependientes, ó

(ii) $r_{13} = r_{23}$.

Para eliminar esas posibilidades, usamos el principio de reflexión en la esfera \mathbb{S}_f^2 . Primero, si x_1 y x_3 son linealmente dependientes, entonces la configuración de las tres masas es colineal. Entonces éste cruza el ecuador de la esfera \mathbb{S}_f^2 . Esto puede suceder para un arco minimizador solamente en un punto de Euler. Pero si éste fuera otro punto, el arco minimizador entre la configuración de Euler e Isósceles ($0 < t < \bar{T}/12$) podría derivar en dos (ó más) subarcos, uno de los cuales estaría debajo del ecuador y el otro arriba. Ahora, reflejamos uno de esos arcos en el ecuador, y dejamos el otro fijo. El arco resultante tendría la misma acción, no tendría colisiones, y conectaría una configuración de Euler con una Isósceles, y como consecuencia tendría que ser un minimizador libre de colisión. Pero este arco ya no sería analítico, contradiciendo el hecho de que los minimizadores libres de colisión corresponden a soluciones, ver la Figura 3.17.

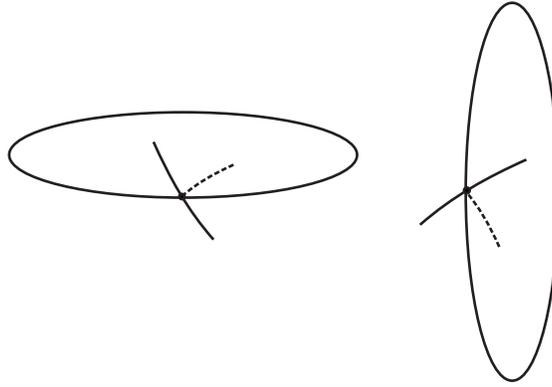


Figura 3.17: Reflexión de un subarco minimizador con respecto al ecuador, caso (i), y a un meridiano, caso (ii), respectivamente.

Lo siguiente es suponer que $r_{13}(t) = r_{23}(t)$ para algún tiempo t , con $0 < t < \bar{T}/12$. Esto implicaría que la curva ha vuelto a cruzar el meridiano isósceles M_3 pasando por el punto inicial de Euler, E_3 . Ahora, aplicamos el mismo principio de reflexión, con el meridiano que pasa por el punto de Euler E_3 tomando el papel del ecuador, ver la Figura 3.18.

Continuando con el análisis, supongamos que, como en la Figura 3.16, que el arco minimizador está en el cuarto superior izquierdo de la esfera \mathbb{S}_f^2 para $0 < t < \bar{T}/6$. En el hemisferio norte de \mathbb{S}_f^2 los triángulos están positivamente orientados, entonces $x_3 \wedge x_1 = x_1 \wedge x_2 > 0$. Además para $u_2 > 0$, el factor $\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{23}^3}$ es negativo, pues

$$r_{13}^2 - r_{23}^2 = 1 - \frac{1}{2}u_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}u_2 - \left(1 - \frac{1}{2}u_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}u_2\right) = \sqrt{3}u_2.$$

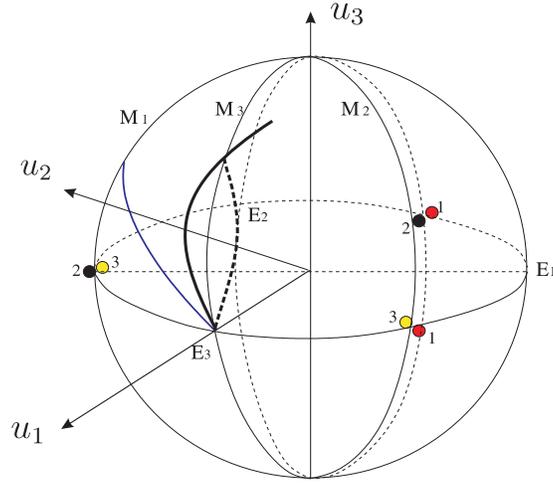


Figura 3.18: Reflexión de un subarco minimizador con respecto al meridiano que pasa por el punto de Euler E_3 .

Luego, para $0 < t < \bar{T}/6$ el momento angular $q(t) \wedge \dot{q}(t)$ es decreciente tomando valores desde 0, mientras que para $\bar{T}/6 < t < \bar{T}/4$ es creciente pues $x_3 \wedge x_1 < 0$,² ver la Figura 3.19.

Ahora, sólo hace falta hacer notar que el momento angular es negativo en $t = \bar{T}/4$, de tal forma que podemos concluir que permanece estrictamente negativo para $0 < t < \bar{T}/4$. Como consecuencia tenemos que el momento angular es estrictamente negativo para $0 < t < \bar{T}/2$ y estrictamente positivo para $\bar{T}/2 < t < \bar{T}$. \square

A partir de la solución numérica obtenida consideramos la posición de la tercera partícula $q(t) = x_3(t)$, para obtener el momento angular de ésta, la cual graficamos y hacemos notar cada tiempo t en el cual la configuración de las tres partículas x_1 , x_2 y x_3 es de tipo E_i ó M_3 , observando que esta función es periódica de período \bar{T} , ver la Figura 3.19.

Corolario 3.16. *Cada lóbulo de la órbita es la frontera de un conjunto estrellado³: el único tiempo en que $x_i \wedge \dot{x}_i$ es cero, para $i = 1, 2, 3$, es cuando x_i pasa por el origen.*

Demostración del Corolario. En coordenadas polares (r, θ) el momento angular tiene una expresión bien conocida $x_i \wedge \dot{x}_i = (r^2 \dot{\theta}) e_1 \wedge e_2$. A partir de esto se sigue que el ángulo polar $\theta(t)$ de la curva $q(t)$ decrece monótonamente en el intervalo $(0, \bar{T}/2)$

²Recordemos que un bivector en el plano es llamado positivo si es un múltiplo positivo del área estándar formada por $e_1 \wedge e_2$.

³En inglés *starshaped*. Esta propiedad significa que el segmento de recta que va del origen a cualquier punto sobre la curva está completamente contenido en el interior de la curva.

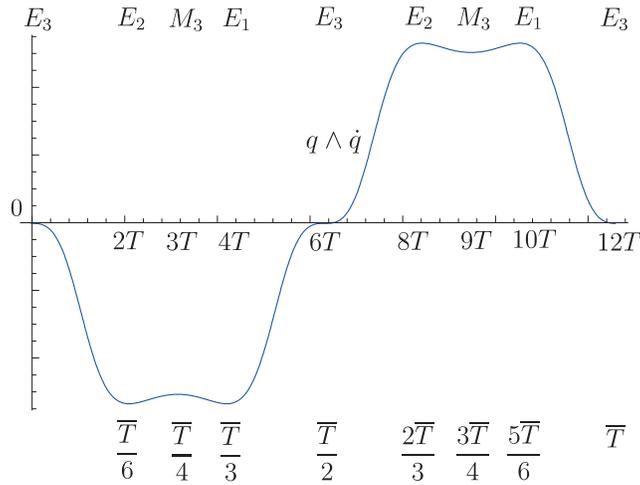


Figura 3.19: Comportamiento cualitativo del momento angular $q \wedge \dot{q}$, calculado con las condiciones iniciales de Carles Simó [9].

a partir de su valor máximo en $\theta(0)$ cuando $r(0) = 0$, hasta su valor mínimo en $\theta(\bar{T}/2) = -\theta(0)$. \square

Utilizando las condiciones iniciales dadas por Carles Simó en [9], integramos numéricamente con un Runge-Kutta de orden 4, las ecuaciones de movimiento del problema de 3 cuerpos con masas iguales en el plano. A continuación con la función de Jacobi \mathcal{J} y la función de Hopf \mathcal{K} obtenemos la curva ocho proyectada en el espacio reducido, homeomorfo a \mathbb{R}^3 . Notemos que la curva ocho obtenida se conserva muy cerca de la esfera de radio $\sqrt{2}$ con centro en el origen, es decir, el momento de inercia es aproximadamente $r^2 = 2$, donde r es el radio de esta esfera, ver la Figura 3.20.

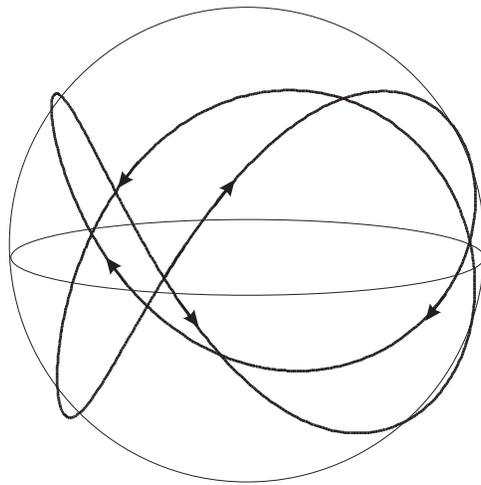


Figura 3.20: Órbita ocho en el espacio de configuración reducido.

Apéndice A

Curva equipotencial

A.1 Curva equipotencial en los puntos de Euler

El potencial en coordenadas esféricas con $r = 1$ es

$$U(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \theta}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos(\theta + \frac{4\pi}{3})}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}}.$$

Veamos el valor de ésta en los tres puntos de Euler, evaluando en el punto sobre el ecuador $\varphi = 0$:

E_i	(u_1, u_2, u_3)	$(\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi)$
E_1	$(1, 0, 0)$	$\varphi = 0, \theta = 0,$
E_2	$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$	$\varphi = 0, \theta = -\frac{2\pi}{3},$
E_3	$(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$	$\varphi = 0, \theta = \frac{2\pi}{3}.$

$$\begin{aligned} U(0, 0) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos 0 \cos 0}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos 0 \cos(0 + \frac{4\pi}{3})}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos 0 \cos(0 + \frac{2\pi}{3})}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos(\frac{4\pi}{3})}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos(\frac{2\pi}{3})}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = \frac{1 + 2 + 2}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U\left(-\frac{2\pi}{3}, 0\right) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos 0 \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos 0 \cos\left(-\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos 0 \cos\left(-\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos 0}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + 2 + 2}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{5}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos 0 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos 0 \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos 0 \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos(2\pi)}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \\
&= \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \frac{1 + 2 + 2}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{5}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

A.2 Curva equipotencial en M_1

A continuación demostraremos que el potencial U restringido al conjunto M_1 toma el valor de $\frac{5}{\sqrt{2}}$. Por el Lema de Hsiang 3.4, el potencial queda expresado como

$$U = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}} = \frac{1}{\sqrt{1 - C_{12} \cdot u}} + \frac{1}{\sqrt{1 - C_{13} \cdot u}} + \frac{1}{\sqrt{1 - C_{23} \cdot u}}$$

donde $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{S}_f^2$, $C_{12} = (-1, 0, 0)$, $C_{13} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ y $C_{23} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$. Usando el hecho de que la configuración isósceles M_1 queda parametrizada, en el esfera de formas, como $\left(\frac{1}{2} \cos 2\theta, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta, \sin 2\theta\right) = (u_1, u_2, u_3)$, obtenemos que

$u = (u_1, \sqrt{3}u_1, \sqrt{1 - 4u_1^2})$. Por lo tanto, el potencial en términos de u_1 , restringido a M_1 , está dado por

$$U|_{M_1} = \frac{2}{\sqrt{1+u_1}} + \frac{1}{\sqrt{1-2u_1}}.$$

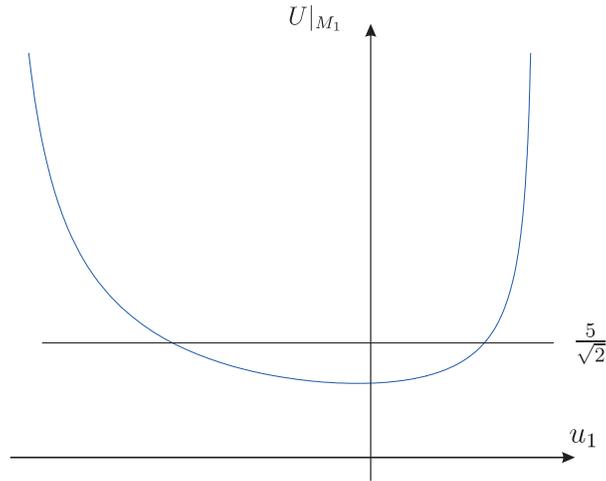


Figura A.1: Gráfica de la función $U|_{M_1}$.

Para demostrar que $U|_{M_1} = \frac{5}{\sqrt{2}}$, basta observar la gráfica de $U|_{M_1}$ con la intersección de la recta horizontal $\frac{5}{\sqrt{2}}$, ver la Figura A.1.

Apéndice B

Fórmula integral del ángulo de rotación de dos triángulos semejantes en \mathbb{S}_f^2

El espacio de configuración Q de los tres cuerpos consiste de todas las ternas de vectores $q = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ cuyo centro de masa $\mathbf{q}_a \in \mathbb{R}^3$ está en el origen: $\sum m_a \mathbf{q}_a = 0$.

En el problema de los 3 cuerpos, la configuración de las tres masas siempre forman un triángulo, de tal forma que las ecuaciones de Newton definen un sistema dinámico en el espacio de triángulos. Las formas de los triángulos (clases congruentes) son variables. Las clases de triángulos semejantes forman una 2-esfera, denotada por \mathbb{S}_f^2 , y llamada la *esfera de las formas*.

Luego, dados los triángulos inicial y final, los cuales son semejantes, ¿cuál es la rotación R , única salvo un múltiplo escalar, que relaciona esos dos triángulos?.

Sea \mathbf{J}_0 el momento angular de los planos definidos por los triángulos inicial y final. En otras palabras, $\mathbf{J}_0 = J_0 \mathbf{e}_3$ donde J_0 es la magnitud del momento angular y \mathbf{e}_3 es el vector unitario. Sean \mathbf{n}_0 y \mathbf{n}_1 los vectores normales a los planos inicial y final. Sea R_0 la rotación más pequeña en el plano \mathbf{e}_3 - \mathbf{n}_0 el cual envía \mathbf{n}_0 a \mathbf{e}_3 y R_1 a la rotación análoga en el plano \mathbf{e}_3 - \mathbf{n}_1 . Si el vector normal \mathbf{n}_i coincide con \mathbf{e}_3 entonces la rotación R_i es la identidad. Ya que R envía \mathbf{n}_0 a \mathbf{n}_1 , ésta puede ser escrita como

$$R = R_1 R_{\mathbf{J}_0} R_0$$

donde $R_{\mathbf{J}_0}$ es la rotación alrededor del eje $\mathbf{J}_0 = \mathbf{e}_3$ con un ángulo de $\Delta\theta$.

En [19], Richard Montgomery demostró que este ángulo está dado mediante la fórmula integral

$$\Delta\theta = \int_0^{t_1} \omega(t) dt + \iint_D \Omega. \quad (\text{B.1})$$

La primera integral, $\int \omega dt$ es llamada *fase dinámica*. El integrando ω representa

la velocidad angular instantánea del triángulo en movimiento $q(t)$, con respecto al eje \mathbf{J}_0 . Ésta está dada por

$$\omega(t) = \mathbf{e}_3 \cdot I(q(t))^{-1} \mathbf{J}_0$$

el cual es igual a $J_0 \mathbf{e}_3 \cdot I(q(t))^{-1} \mathbf{e}_3$. Aquí $I(q)$ es el momento de inercia del triángulo q , definido por la matriz

$$\omega \cdot I(q) \cdot \omega = \|\omega \times q\|^2$$

donde $\omega \times q = (\omega \times \mathbf{q}_1, \omega \times \mathbf{q}_2, \omega \times \mathbf{q}_3)$ denota la rotación infinitesimal del triángulo q con velocidad angular ω .

La segunda integral $\iint \Omega$ es la llamada *fase geométrica*. Ésta es la integral de la 2-forma, Ω , en el disco \bar{D} , en cierto “espacio reducido” el cual denotamos por Z . La 2-forma, Ω , es cerrada e independiente de la elección del potencial del problema de los 3 cuerpos.

En el caso del problema plano de 3 cuerpos, para la fórmula de la 2-forma Ω en Z usamos coordenadas esféricas (ϕ, θ) en las esferas $\mathbb{S}^2(\rho)$, así como coordenadas (z, θ) donde $z = \cos \phi$ es la normalización de la altura de un punto por debajo del círculo ecuatorial $\phi = \pi/2$, de tal forma que ρz es la altura usual, y $-1 \leq z \leq 1$. Esas coordenadas esféricas, junto con la trivialización de Z en el producto de las dos esferas \mathbb{S}^2 induce las coordenadas $(z_1, \theta_1, z_2, \theta_2)$ en Z . R. Montgomery en [19] también demostró que

$$\Omega = - \left\{ \frac{1}{2} d(z_1 z_2) \wedge d\theta_1 + dz_2 \wedge d\theta_2 \right\}. \quad (\text{B.2})$$

Además la coordenada de altura z_1 en la esfera de las formas es proporcional al área A del triángulo. Explícitamente

$$z_1 = 4 \sqrt{\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \frac{A}{I}}$$

donde $I = m_1 \|\mathbf{q}_1\|^2 + m_2 \|\mathbf{q}_2\|^2 + m_3 \|\mathbf{q}_3\|^2 = \|q\|^2$ es el momento de inercia polar, y también el cuadrado de la norma euclidiana en Q . Además, $A = \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) \times (\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1)$ es el área orientada del triángulo, donde \mathbf{n} es la normal al triángulo.

La coordenada de altura en las esferas fibradas es dada por

$$z_2 = \frac{1}{J_0} \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{n}$$

la cual es la componente del momento angular total normal al triángulo.

Una descripción simple del ángulo $\Delta\theta$ de rotación para dos triángulos similares es la siguiente. El integrando ω para la fase dinámica es $\frac{1}{I(t)} \mathbf{J}_0$. Para obtener la 2-forma planar, simplemente definimos $z_2 = 1$ en la fórmula (B.2) para Ω . Esta restricción

describe la inclusión del problema planar en un espacial: la normal del triángulo está alineada con el vector de momento angular. Ahora $dz_2 = 0$ y

$$\Omega = -\frac{1}{2}dz_1 \wedge d\theta_1 = \frac{1}{2} \sin \phi_1 d\phi_1 \wedge d\theta$$

es la 2-forma a integrar en la esfera de las formas \mathbb{S}_f^2 , la cual es dos veces la forma de área en la esfera \mathbb{S}^2 de radio $1/2$. En otras palabras, si consideramos que el diferencial del área es la 2-forma

$$\Omega = 2\frac{1}{4} \sin \phi d\phi \wedge d\theta$$

entonces al integrar obtenemos

$$\iint_D \Omega = 2 \iint_D \frac{1}{4} \sin \phi d\phi \wedge d\theta = 2 \text{área}(\mathbb{S}^2(1/2)) = 2\pi.$$

En [19], se demuestra que ésta es la única 2-forma esférica simétrica en la esfera, cuya integral total es 2π .

Ahora supongamos que $c = c(t)$ es una curva en $\mathbb{S}^2(\frac{1}{2})$ la cual es frontera del disco $D_c \subset \mathbb{S}^2(\frac{1}{2})$ y tal que $c(0) = c(T)$, lo cual significa que los triángulos inicial y final están relacionados entre sí por una homotecia y una rotación. Luego de (B.1) obtenemos que el ángulo de rotación para el caso planar es

$$\Delta\theta = 2 \text{área}(D_c) + \int_0^T \frac{J}{I(t)},$$

donde $I(t)$ es el momento de inercia instantáneo del triángulo y J es el momento angular constante del movimiento.

Referencias

- [1] A. Adams y J.F. Fournier, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 2003.
- [2] A. Albouy y A. Chenciner, *Le probleme des n corps et les distances mutuelles*, Invent. Math. 131 (1998), 151–184.
- [3] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer Verlag, 1978.
- [4] H. Brezis. *Análisis Funcional*. Alianza Editorial, Madrid, 1984.
- [5] Kuo-Chang Chen, *Variational methods and periodic solutions of the Newtonian N -body problem*, Tesis Doctoral, University of Minnesota, 2001.
- [6] A. Chenciner, *Action minimizing solutions of the Newtonian n -body problem: from homology to symmetry*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Beijing, 2002), 279–294, Higher Ed. Press, China, 2002.
- [7] A. Chenciner, *A simpler proof of regular polygon solutions of the N -body problem*, Phys. Lett. A 300 (2002), no. 1, 101–102.
- [8] A. Chenciner y N. Desolneux, *Minima de l'intégrale d'action et équilibres relatifs de n corps*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 326 (1998), no. 10, 1209–1212.
- [9] A. Chenciner y R. Montgomery, *A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses*, Ann. of Math. (2) 152 (2000), no. 3, 881–901.
- [10] V. Coti Zelati, *Periodic solutions for N -body type problems*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 7 (1990), no. 5, 477–492.
- [11] M. Degiovanni, F. Giannoni, A. Marino, *Dynamical systems with Newtonian type potentials*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 81 (1987), no.3, 271–277 (1988).
- [12] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 1980.

- [13] H. Hopf, *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*, Math. Ann. 104 (1931), no. 1, 637–665.
- [14] C.C. Hsiung, *A first course in differential geometry*, International Press, 1997.
- [15] E. Kreysig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, Inc. 1978.
- [16] W. B. Gordon, *A minimizing property of Keplerian orbits*, Amer. J. Math. 99 (1977), no. 5, 961–971.
- [17] R. Moeckel, *Some qualitative features of the three-body problem*, Hamiltonian dynamical systems (Boulder, CO, 1987), 1–22, Contemp. Math., 81, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988
- [18] C. Moore, *Braids in classical dynamics*, Phys. Rev. Lett. 70 (1993), no. 24, 3675–3679.
- [19] R. Montgomery, *The geometric phase of the three-body problem*, Nonlinearity 9 (1996), no. 5, 1341–1360.
- [20] R. Montgomery, *The N-body problem, the braid group, and action-minimizing periodic solutions*, Nonlinearity 11 (1998), no. 2, 363–376.
- [21] R. S. Palais, *The principle of symmetric criticality*, Comm. Math. Phys. 69 (1979), no. 1, 19–30.
- [22] H. Poincaré, *Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action*, C.R.A.S. 1896, t. 123, pp. 915–918; en Oeuvres, tome VII.
- [23] H. Pollard, *Qualitative methods in the n-body problem*, 1966 Space Mathematics (Proc. Summer Seminar, Ithaca, N.Y., 1963), Part 1 pp. 259–291 Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
- [24] H. Pollard, *Applied Mathematics: An Introduction*, Addison-Wesley, 1972.
- [25] D. G. Saari, *On the role and the properties of n-body central configurations*, Proceedings of the Sixth Conference on Mathematical Methods in Celestial Mechanics (Math. Forschungsinst., Oberwolfach, 1978), Part I. Celestial Mech. 21 (1980), no. 1, 9–20.
- [26] E. Serra y S. Terracini, *Collisionless periodic solutions to some three-body problems*, Arch. Rational Mech. Anal. 120 (1992), no. 4, 305–325.
- [27] E. L. Stiefel, y G. Scheifele. *Linear and Regular Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, 1971.

- [28] M. Struwe, *Variational Methods Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Series: *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics* , Vol. 34, Springer, 1990.
- [29] J. Tinsley Oden, Leszek F. Demkowicz, *Applied Functional Analysis*, CRC Press, 1996.
- [30] J.P. Ward, *Quaternions and Cayley Numbers*, Kluwer Ac. Publ. Dordrecht, 1997.