



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

---

---

SINTONIZACIÓN ELECTRO-ÓPTICA DE UNA CAPA  
QUIRAL NANOESTRUCTURADA CON UN DEFECTO DE  
TORSIÓN

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
**DOCTORA EN CIENCIAS (FISICA)**

PRESENTA:

LAURA OLIVA PALOMARES HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. JUAN ADRIÁN REYES CERVANTES

COMITÉ TUTORAL: DR. CARLOS IGNACIO MENDOZA RUIZ  
DR. GERARDO JORGE VÁZQUEZ FONSECA



posgrado en ciencias físicas  
u n a m

MÉXICO, D.F.

Abril del 2009



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Juan Manuel

# Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México, a sus instituciones, personal docente y administrativo. En particular, al Instituto de Física.

A DGEP, DGAPA y a CONACYT, por las becas otorgadas para la realización de mis estudios y de esta investigación.

A mis tutores: Dr. Gerardo Vázquez Fonseca y Dr. Carlos Mendoza Ruiz. Mi agradecimiento, admiración y respeto a estos investigadores, siempre cordiales, entusiastas, dedicados a la investigación y a la formación de futuros científicos.

Agradezco especialmente la oportunidad y la fortuna de haber colaborado con uno de los investigadores más creativos, entusiastas y productivos del instituto de física, mi asesor durante el posgrado, el Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes. Gracias por su ejemplo, tolerancia, y pasión por la ciencia. Agradezco la asesoría y dirección que me proporcionó, pero sobre todo su amistad.

Agradezco a mis sinodales sus valiosos comentarios y observaciones para el mejoramiento de esta tesis.

Dra. Karen Patricia Volke Sepúlveda  
Dr. Rosalío Fernando Rodríguez Zepeda  
Dr. Rubén Ramos García  
Dr. José Alberto Olivares Lecona  
Dr. Carlos Ignacio Mendoza Ruiz  
Dr. José Manuel Hernández Alcántara

A la Dra. Rocío Jáuregui, por las facilidades que me concedió al ingresar al posgrado. Agradezco la orientación y la asesoría otorgadas. Siempre amable y comprometida con su labor de investigadora y coordinadora.

Al Posgrado en Ciencias Físicas y a su coordinador el Dr. Manuel Torres Labansat, gracias por realizar con esmero tan importante labor.

A mis profesores, muchos de los cuales han sido magníficos.

A Juan Manuel Espinoza Luna por su amor, por su apoyo, por escucharme, por tantas cosas bellas. Nuestro amor hace que me parezca más luminosa la existencia.

A mi familia y amigos, que son parte importante en mi vida, gracias por todo. Es mucho lo que hemos vivido y compartido e inconmensurable lo que significa para mí.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>IV</b>
<b>1. Películas Delgadas Esculpidas STF</b>	<b>1</b>
1.1. Deposición Física de Vapor . . . . .	5
1.2. De Películas Delgadas Columnares a Esculpidas . . . . .	7
1.2.1. Películas delgadas columnares . . . . .	8
1.2.2. Mecanismo de crecimiento . . . . .	10
1.2.3. STFs primitivas con morfología nemática . . . . .	13
1.3. Películas Delgadas Esculpidas Quirales . . . . .	13
1.4. Películas Delgadas Esculpidas . . . . .	14
1.5. Aplicaciones Ópticas de las STFs . . . . .	15
1.5.1. Filtros ópticos . . . . .	15
1.5.2. Sensores ópticos de fluidos . . . . .	17
1.5.3. Displays . . . . .	17
1.5.4. Interconectores ópticos . . . . .	18
1.5.5. Modulador de pulsos ópticos . . . . .	18
1.5.6. Biochips y Biosensores . . . . .	18
<b>2. Óptica de Medios Helicoidales</b>	<b>20</b>
2.1. Fundamentos Electromagnéticos . . . . .	24
2.1.1. Modo . . . . .	26
2.1.2. Transformación de Oseen . . . . .	29
2.1.3. Matrizante . . . . .	30
2.2. Matriz de Transferencia . . . . .	31
2.2.1. Propagación axial . . . . .	32
2.3. Reflexión y Transmisión . . . . .	32
2.3.1. Ondas planas incidente, reflejada y transmitida . . . . .	33
2.3.2. Problema de valores a la frontera . . . . .	36

2.4.	Solución a la Ecuación de Propagación . . . . .	37
2.4.1.	Matrices métricas . . . . .	38
2.5.	Matriz de Transferencia y de Dispersión en un MEQ con un Defecto de Torsión . . . . .	39
2.6.	Reflexiones de Bragg . . . . .	43
2.7.	Método de la Aproximación Homogénea por Pedazos. . . . .	48
<b>3.</b>	<b>Sintonización Electro-óptica de Materiales Estructuralmente Quirales (MEQs)</b>	<b>51</b>
3.1.	Efecto Pockels . . . . .	53
3.2.	Superficie del Vector de Onda en Cristales Biaxiales . . . . .	59
3.3.	Punto Pseudo-isotrópico . . . . .	63
3.4.	Formulación Teórica . . . . .	67
3.5.	Efecto Pockels en un Material Estructuralmente Quiral . . . . .	68
3.6.	Tensor Dieléctrico de un Material Estructuralmente Quiral . . . . .	69
3.7.	Propagación de campos ópticos en un MEQ . . . . .	70
3.8.	Reflexión y Transmisión por una Capa de MEQ . . . . .	72
3.9.	Incidencia Normal . . . . .	73
3.10.	MEQs Localmente Isotrópicos . . . . .	77
3.11.	MEQs Localmente Uniaxiales . . . . .	78
3.12.	MEQs Localmente Biaxiales . . . . .	79
3.13.	Manipulación Eléctrica del Fenómeno Bragg Circular . . . . .	79
3.14.	Fenómeno Bragg Circular Eléctricamente Controlado por un Campo Eléctrico <i>cd</i> Arbitrario . . . . .	82
3.15.	Reflexión y Transmisión Eléctricamente Controlada de Luz Incidente Oblicuamente en MEQs . . . . .	85
<b>4.</b>	<b>Defectos de torsión</b>	<b>87</b>
4.1.	Singuletes . . . . .	87
4.1.1.	Muestra infinita . . . . .	88
4.1.2.	Longitud de onda del modo de defecto . . . . .	92
4.1.3.	Muestras delgadas . . . . .	94
<b>5.</b>	<b>Óptica de un MEQ con un defecto de torsión</b>	<b>99</b>
5.1.	Sistema Físico . . . . .	101
5.2.	Modo de Defecto . . . . .	101
5.3.	Transmitancia y Reflectancia . . . . .	105
5.4.	Inverso del Ancho de Línea Relativo . . . . .	110

---

<b>6. Análisis de Resultados y conclusiones</b>	<b>115</b>
<b>A. Matriz para la Ecuación (2.18)</b>	<b>119</b>
<b>B. Matriz para la Ecuación (2.25)</b>	<b>121</b>
<b>C. Matriz para la Ecuación (3.44)</b>	<b>123</b>
<b>D. Matrices para la Ecuación (3.82)</b>	<b>126</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>131</b>

---

## Resumen

Se estudian las propiedades ópticas de una película delgada esculpida (Sculptured Thin Film, STF), quiralmente nanoestructurada, con un defecto de torsión de  $90^\circ$  en el centro del bloque. El material es ortorrómbico perteneciente a la clase de simetría cristalográfica puntual  $mm2$  que presenta efecto Pockels. Para efectos de sintonización electro-óptica se aplica un campo eléctrico  $cd$  a lo largo del eje de la hélice, y se ilumina con luz monocromática, arbitrariamente polarizada que incide normal a la capa.

Por medio de las ecuaciones de Maxwell, la representación de Marcuvitz-Schwinger y la transformación de Oseen se encuentran los modos propagantes y localizados de la luz en el sistema, esto nos permite encontrar la transmitancia y reflectancia y analizar el fenómeno de Bragg circular. También, encontramos el ancho de banda del régimen de Bragg circular ( $\Delta\omega$ ), la longitud de onda del defecto ( $\lambda_d \equiv 2\pi c/\omega_d$ ), el ancho de línea ( $l_d(\omega_d)$ ) y el ángulo entre los campos electromagnéticos ( $\gamma_{em}(\omega_d)$ ) en función del campo eléctrico aplicado  $E^{cd}$  y el ángulo de inclinación del material  $\chi$ .

Encontramos una curva, en el espacio  $\chi - E^{cd}$ , en donde se anulan:  $l_d^{-1}(\omega_d)$ ,  $\Delta\omega$  y  $\gamma_{em}(\omega_d)$ ; a esta curva la llamamos pseudo-isotrópica. Esto implica que para valores de  $\chi$  y  $E^{cd}$  sobre esta curva, donde se cumplen las condiciones mencionadas: i) el transporte de ondas dentro de la muestra en la frecuencia del defecto es mucho más eficiente ya que la atenuación para el modo del defecto es nula, ii) el régimen circular de Bragg se cierra, iii) no hay pérdidas de energía en la muestra ya que  $\gamma_{em}(\omega_d) = 0$  implica un vector de Poynting nulo. La explicación a la existencia de esta curva es que aparece un punto pseudo-isotrópico para un valor del campo eléctrico aplicado, que ha deformado al elipsoide dieléctrico hasta hacerlo esférico de tal forma que los índices dieléctricos se han degenerado en uno, y por lo tanto la luz no distingue las anisotropías del medio. Así, el comportamiento óptico es similar al de un material isotrópico, y en consecuencia el régimen de Bragg circular desaparece. Este punto cambia para cada valor del ángulo de inclinación del material, por lo que se forma una curva que es el conjunto de puntos pseudo-isotrópicos.

Se encuentra que el escalamiento del inverso del ancho de línea relativo con respecto al grosor de la STF, el cual es proporcional al tiempo de permanencia fotónico en la frecuencia del defecto, se puede mejorar enormemente cuando los valores del campo eléctrico y el ángulo de inclinación de la estructura están cercanos a los que definen la curva pseudo-isotrópica. Esta sintonización da lugar a una variación dramática en el comportamiento del tiempo de permanencia fotónico en

---

el modo de defecto el cual nunca alcanza un máximo como función del grosor del material.

Debido a que otros medios anisotrópicos, como los elastómeros colestéricos y los esmécticos  $C^*$  también son susceptibles a elongar sus elipsoides dieléctricos por acción de un campo eléctrico, esperamos que en estos materiales también se observen curvas pseudo-isotrópicas en donde ópticamente probablemente muestren comportamientos inusuales.

---

## Abstract

The optical properties of a chiral sculptured thin film (STF) are studied, we considered an orthorhombic mm2 structurally chiral material, susceptible to the Pockels effect having a twist defect of  $90^0$  in the center of the film, subjected to a cd, or low frequency electric field oriented along the nonhomogeneity axis, i. e., along the chiral axis, which is illuminated with arbitrary polarized monochromatic light to normal incidence.

We set up the Maxwell equation and by means of the representation of Marcuvitz-Schwinger and the transformation of Oseen, we found the localized and propagating modes in the physical system. Thus we calculated the reflectance and transmittance and analyzed the circular Bragg phenomenon. We calculated the defect wavelength ( $\lambda_d \equiv 2\pi c/\omega_d$ ), the band width ( $\Delta\omega$ ), the line width ( $l_d(\omega_d)$ ) and the angle between the electric and magnetic fields ( $\gamma_{em}(\omega_d)$ ), as a function of the applied electric field  $E^{cd}$  and the angle of tilt  $\chi$ .

We have named the locus in the  $\chi$ - $E^{cd}$  space for which the line width  $l_d(\omega_d)$  diverges and the band width  $\Delta\omega$ , and the angle between the electric and magnetic fields  $\gamma_{em}(\omega_d)$  vanish, the pseudo-isotropic curve. This implies that in the mentioned locus, i) the transport of waves within the sample having the defect frequency is much more efficient since the attenuation for the defect mode is null, ii) the circular Bragg regime closes, iii) there are no energy leaks in the sample since  $\gamma_{em}(\omega_d)=0$  amounts to a null Poynting vector. We remark that the circular Bragg regime closes even in the absence of external electric field at a pseudo-isotropic point [12]. Moreover, upon applying the cd field, the tilt angle for which this point shows up is changed, because the dielectric ellipsoid of the SCM is rotated and stretched in agreement with the Pockels effect. This fact is responsible for the optical switching effect in the SCM recently studied [11], in which a band reflection could be electrically opened.

We found that the scaling of the inverse relative linewidth, which is proportional to the photon dwell time at the defect frequency, can be largely enhanced when the magnitudes of the field and the tilt angle of the structure are near the pseudoisotropic curve. This tuning gives rise to a dramatic variation in the behavior of the photon dwell time for the defect mode which then, never reaches a maximum as a function of the sample thickness.

We expect that this critical tuning, could be exhibited for an ample range of chiral materials like smectics C\*, cholesteric elastomers and other media.

---

# Introducción

Acerca de las tendencias en investigación y de los requerimientos en las ciencias de materiales un tema dominante que surge es el de las nanociencias y las nanotecnologías. Cuando se habla de nanoescala se hace referencia a materia en la escala de longitud de 10– a 100 *nm*, ésta exhibe características del continuo, pero las moléculas y sus agregados, si bien de tamaño pequeño, aun pueden exhibir su individualidad. Por esta razón algunos institutos en sus iniciativas de investigación se han enfocado en morfologías y en arquitecturas de materiales con al menos una dimensión más pequeña que 100 *nm*. Uno de estos temas de gran interés, con un resurgimiento a partir de la última década, es el de las películas delgadas esculpidas [1].

No obstante que las películas delgadas esculpidas se han comenzado a estudiar sistemática, científica y tecnológicamente desde hace solamente una década, un acontecimiento importante para el surgimiento del concepto de las películas delgadas esculpidas ocurrió en 1959 [2]. Aunque este evento pasó por mucho tiempo desapercibido, todo el crédito de las películas delgadas esculpidas con morfología quiral se debe a Young y Kowal [2]. Durante el crecimiento de películas delgadas de fluoruro de calcio, estos dos pioneros rotaron con velocidad constante el sustrato donde se deposita la película para crear una morfología periódica que exhibiera transmisión con actividad óptica.

Muy probablemente, ellos fueron los primeros investigadores que deliberadamente usaron la morfología de películas delgadas para producir una película delgada esculpida no trivial, con morfología completamente tridimensional.

El concepto de vacíos en películas delgadas se hizo común 12 años después. Notablemente Young y Kowal usaron esa palabra para conjeturar que la actividad óptica de una película helicoidalmente depositada se podría deber a la acción cooperativa de un arreglo helicoidalmente simétrico de cristales, crecimiento de cristales o vacíos. Además, conjeturaron que la dirección columnar podría cambiar prácticamente de forma instantánea y continua, con cambios en la posición y la orientación del sustrato. Afortunadamente, la técnica de Young-Kowal de rotar el sustrato, la morfología helicoidal observada de tal modo, y la actividad óptica en la transmisión de las películas delgadas esculpidas quirales, fue redescubierta en la última década [3, 4].

Debido a la periodicidad de esta clase de películas se presenta el fenómeno Bragg, el cual es de tipo circular, esto permite la separación entre

---

ondas planas circularmente polarizadas izquierda y derecha (CPI y CPD). El fenómeno Bragg circular tiene muchos usos, por ejemplo: filtros de polarización circular, espejos láser, filtros de banda estrecha, sensores ópticos, sintonizadores y controladores de ancho de banda. En conclusión, el estudio de películas delgadas esculpidas nanoestructuradas, en particular las que presentan una morfología quiral, son de gran interés desde el punto de vista de ciencia básica por sus espectaculares y diversos fenómenos físicos, como también por sus aplicaciones tecnológicas en una diversidad de dispositivos que aumenta rápidamente.

Los medios quirales nanoestructurados aparecen en la naturaleza como cristales líquidos colestéricos [6], sintetizados como elastómeros quirales [7] o fabricados como las películas delgadas esculpidas quirales [8]. Hace algunos años se observó un bajo umbral para la energía de activación de láseres, en las orillas de las bandas de cristales líquidos colestéricos contaminados con colorantes. Este fenómeno se propuso que estaba relacionado con una singularidad en la densidad de estados fotónicos [9].

Kopp y Genack [10] mostraron que aparece un modo de defecto de torsión en cristales líquidos colestéricos. El defecto de torsión da lugar a un pico en la transmisión cuyo inverso del ancho de línea relativo escala exponencialmente con respecto al grosor del material, para luz polarizada circularmente con la misma lateralidad<sup>1</sup> que la estructura [10]. Este inverso del ancho de línea relativo es proporcional al tiempo de permanencia fotónico en la frecuencia del defecto, de aquí que el tiempo fotónico también escala exponencialmente con respecto al grosor del material estructuralmente quiral (MEQ). Sin embargo, después de un grosor de característico del material, este valor se aproxima asintóticamente a un límite. Por otra parte, se ha observado [11] que el "band gap" (banda prohibida), en los espectros de transmitancia y reflectancia de un MEQ con propiedades electro-ópticas, se puede controlar aplicando un campo eléctrico paralelo al eje de la hélice del material. Además, se ha encontrado que el campo eléctrico abre el "band gap" aún cuando no existiera antes de aplicar el campo. Este efecto es una consecuencia de la presencia de ejes ópticos en el material localmente anisotrópico que forma la estructura quiral, lo cual origina la existencia de puntos pseudo-isotrópicos [12]. En

---

<sup>1</sup>Lateralidad se refiere al sentido de la hélice de la STF quiral. Lateralidad derecha, cuando desde el punto de vista del observador, se ve una hélice como la que forma el campo eléctrico de luz polarizada circularmente derecha al avanzar hacia el observador. Lateralidad izquierda cuando la hélice que se observa es como la que forma la luz polarizada circularmente izquierda.

---

estos puntos el elipsoide de índices dieléctricos se ha estrechado o alargado por la acción del campo eléctrico sobre un material biaxial que presenta efecto Pockels, tal que los índices se degeneran en uno y la luz no distingue las anisotropías del medio.

En el estudio presentado aquí, se propone reemplazar al cristal líquido colestérico por una STF quiral. Una ventaja que obtenemos al realizar este reemplazo es que la STF quiral se puede construir prácticamente de cualquier material. Así, se pueden construir STFs que exhiban efecto Pockels ante la presencia de campos eléctricos externos, lo que permite la posibilidad de sintonización electro-óptica. Además, los tiempos de respuesta de un sólido ( $10^{-9}$  s) [13] son mucho más rápidos que los de los cristales líquidos ( $10^{-3}$  s) [6].

Hay que mencionar que se han realizado estudios de las propiedades ópticas de MEQs con defecto de torsión que no presentan efecto Pockels y que por lo tanto no se pueden sintonizar electro-ópticamente [5, 10]. También, se han estudiado STFs quirales que presentan efecto Pockels y que por lo tanto, son sintonizables electro-ópticamente [14, 15]. Sin embargo, no se habían estudiado con un defecto de torsión, lo que origina un agujero espectral en el régimen de Bragg. Así, proponemos combinar el defecto de torsión en un MEQ con la presencia del efecto Pockels ante campos eléctricos externos, para obtener un sistema electro-óptico. Este dispositivo además de un filtro de luz circularmente polarizada, podría emplearse como un sintonizador de estado sólido en un láser, un resonador óptico, o bien como un almacenador de energía óptica.

La presente investigación es un estudio sobre las propiedades ópticas de una película delgada esculpida con estructura quiral, que presenta efecto Pockels, con un defecto de torsión de  $90^0$ , sujeta a un campo eléctrico externo  $cd$  aplicado perpendicular a la película, que se ilumina con luz arbitrariamente polarizada a incidencia normal. Cabe mencionar aquí que este sistema es uno de los casos inhomogéneos y anisotrópicos excepcionales que tiene solución analítica [5]. La STF se considera que está hecha de Niobato de Potasio. Pertenece a la clase de simetría cristalográfica puntual  $mm2$ , que es ortorrómbica y biaxial. Elegimos este material por presentar coeficientes electro-ópticos altos, por lo que requiere magnitudes de campo eléctrico aplicado menores en comparación con otros materiales.

Este estudio se presenta en seis capítulos. En el primero se da una breve introducción a los conceptos fundamentales sobre películas delgadas esculpidas. En el segundo capítulo se exponen las ecuaciones fundamentales para

---

el estudio de la óptica de películas delgadas. Se emplean las ecuaciones de Maxwell, la representación de Marcuvitz-Schwinger y la transformación de Oseen, para llegar a una ecuación de valores propios de las componentes transversales de los campos electromagnéticos, para así encontrar los modos ópticos y la matriz de transferencia, por medio del método de la aproximación homogénea por pedazos. La matriz de transferencia nos permite encontrar la matriz de dispersión. Los elementos de esta matriz son los coeficientes de transmisión y reflexión cuyas magnitudes al cuadrado son las transmitancias y reflectancias del sistema. En el tercer capítulo se presenta la teoría sobre la sintonización electro-óptica en un bloque de material estructuralmente quiral expuesto a luz monocromática que incide ya sea normalmente o con dirección arbitraria en el bloque, sujeto a un campo eléctrico aplicado a lo largo del eje de inhomogeneidad o bien de forma arbitraria. Esto nos da una referencia para el estudio aquí presentado y nos permite comprender y analizar los resultados obtenidos. En el capítulo 4, se presenta la teoría sobre la óptica de materiales quirales que presentan un defecto de torsión y los modos localizados que genera. En el capítulo 5, se presentan los resultados correspondientes a la óptica del sistema de nuestro interés, que anteriormente se ha mencionado. La reflectancia y transmitancia de la luz incidente en sus componentes co-polarizadas<sup>2</sup> y polarizadas cruzadas nos permiten analizar el fenómeno circular de Bragg. Se presentan el ancho de línea, el ancho de banda, el ángulo entre las componentes de los campos electromagnéticos y el inverso relativo del ancho de línea, el cual es proporcional al tiempo de permanencia fotónico en la frecuencia del defecto, todo esto en función del campo eléctrico cd aplicado y del ángulo de inclinación del material. También, se calcula el inverso relativo del ancho de línea como función del grosor de la STF. En el último capítulo se analizan y discuten los resultados obtenidos que nos llevan a una serie de conclusiones.

---

<sup>2</sup>Los coeficientes de transmisión y reflexión co-polarizados son aquellos para los que la polarización de la luz transmitida o reflejada coincide con la polarización de la luz incidente. En cambio, en el caso de los coeficientes polarizados cruzados, la polarización de la luz transmitida o reflejada es opuesta a la polarización de la luz incidente.

# Capítulo 1

## Películas Delgadas Esculpidas STF

Las películas delgadas esculpidas (Sculptured Thin Films, STFs) son materiales inorgánicos nanoestructurados con propiedades anisotrópicas que varían unidireccionalmente y se pueden diseñar y fabricar de una manera controlada [17] usando deposición física de vapor (Physical Vapor Deposition PVD), una técnica que tiene un siglo. La habilidad de cambiar prácticamente de forma instantánea la dirección de crecimiento del flujo de vapor incidente, conduce a un amplio espectro de formas columnares. Estas formas pueden ser

1. Bidimensionales, que van desde simples columnas inclinadas y esterillas, hasta las más complejas morfologías en forma de C y S, Fig. 1.1 [18]; o
2. Tridimensionales, incluyendo hélices simples y súper hélices, Fig. 1.2 [19].

La composición química es esencialmente ilimitada, yendo desde aislantes, semiconductores hasta metales. De las recientes investigaciones ha surgido [20, 21] que la tecnología de las STFs tiene un futuro brillante debido a que la diversidad en su composición y en sus formas hace posible que se puedan emplear en varios dispositivos tecnológicos, como por ejemplo, filtros de polarización circular, filtros de banda estrecha, sensores ópticos, sintonizadores y controladores de ancho de banda, además, la diversidad de dispositivos aumenta rápidamente.

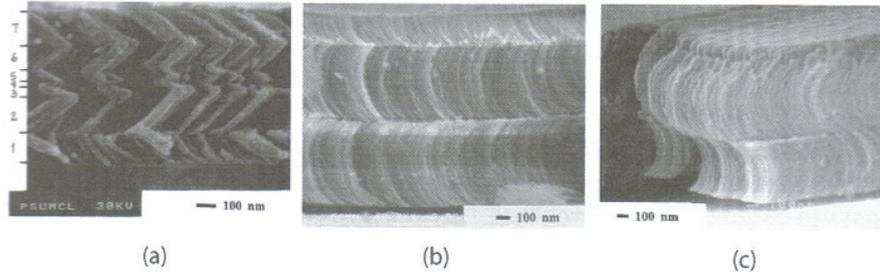


Figura 1.1: Micrografías de películas delgadas esculpidas hechas de fluoruro de magnesio ( $MgF_2$ ) con morfologías bidimensionales: (a) zigzag de 7 secciones; (b) forma de C, (c) forma de S.

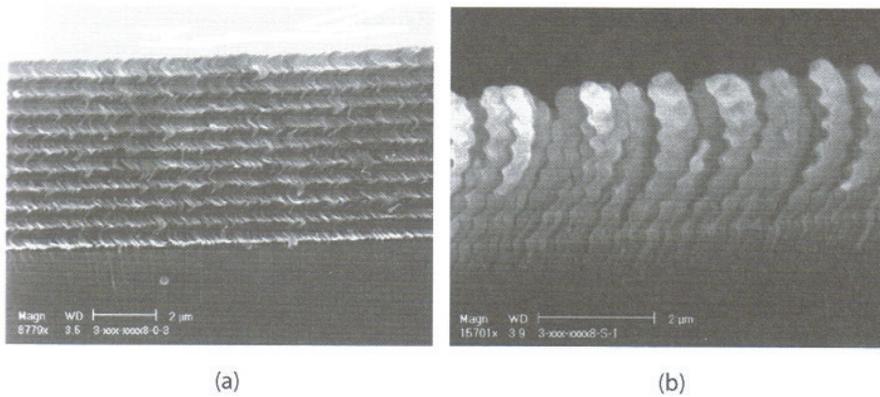


Figura 1.2: Micrografías de películas delgadas esculpidas con morfologías tridimensionales: (a) helicoidal, hecha de óxido de silicio ( $SiO_2$ ); (b) superhelicoidal, hecha de  $MgF_2$ .

---

A longitudes de onda del visible e infrarrojo, una sola sección de STF es un continuo inhomogéneo unidireccional con propiedades constitutivas anisotrópicas. Varias secciones se pueden crecer consecutivamente dentro de una multisección STF, que es posible concebir como un circuito óptico que se puede integrar con electrónica de circuitos en un chip. Debido a su porosidad, una STF puede actuar como un sensor de fluidos y también, se puede impregnar con un cristal líquido para aplicaciones de conmutación [1]. También, se han sugerido aplicaciones como capas de barreras de baja permitividad en chips electrónicos así como en celdas solares. Las aplicaciones ópticas de las STFs se comenzaron a reportar sistemáticamente en 1999, aunque se pueden encontrar casos anteriores en la literatura [2].

La periodicidad de esta clase de películas da lugar al fenómeno Bragg, el cual es de tipo circular, es decir, a incidencia normal luz circularmente polarizada de una lateralidad específica es altamente reflejada en cierto intervalo de longitud de onda, mientras que luz de lateralidad opuesta es transmitida, esto permite la separación entre ondas planas circularmente polarizadas izquierda (CPI) y derecha (CPD), Fig. 1.3. El fenómeno Bragg tiene muchos usos como filtros de polarización circular, espejos láser, filtros de paso de banda estrecha, sensores ópticos, sintonizadores y controladores de ancho de banda.

En la década de los 90s se lograron las siguientes cualidades:

- i) Se pueden construir una amplia variedad de morfologías columnares, por medio del control de dos de los ejes fundamentales de rotación del sustrato.
- ii) Es posible obtener multisecciones con diferentes morfologías columnares y/o diferentes materiales;
- iii) Existen una amplia gama de aplicaciones potenciales que se exponen al final del capítulo; y
- iv) Se pueden dirigir e interconectar la preparación, las propiedades y aplicaciones al relacionar los resultados teóricos y experimentales.

Entonces, surgió el concepto de película delgada esculpida (STFs). Las STFs son modificaciones de las películas delgadas columnares (Columnar Thin Films, CTFs) en las cuales la dirección columnar se puede cambiar de forma casi abrupta y frecuente, así como continua durante el crecimiento, a diferencia de las CTFs en las que el ángulo de inclinación de las columnas permanece constante, este ángulo se puede observar para STFs columnares en

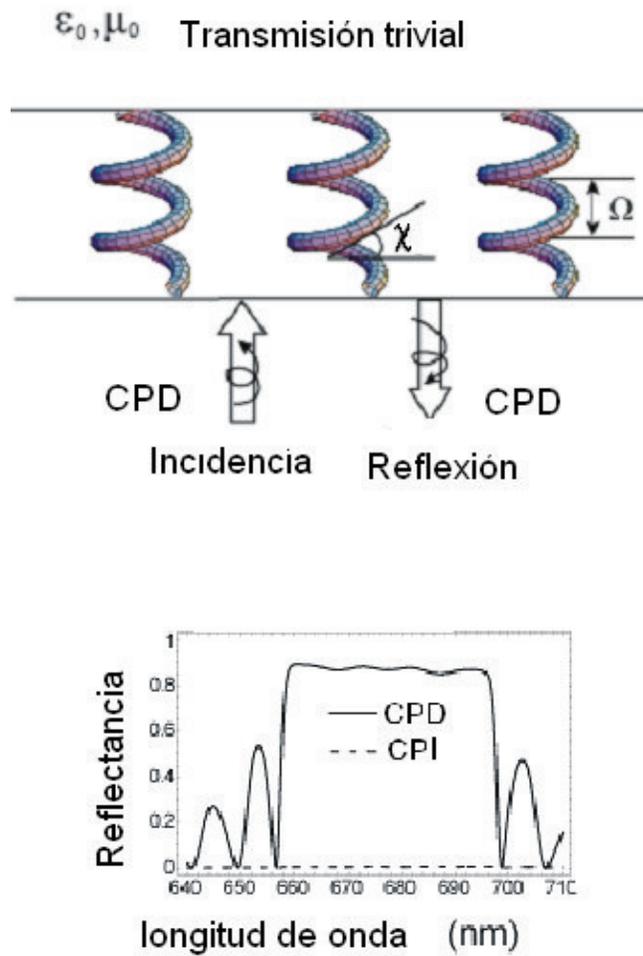


Figura 1.3: Fenómeno Bragg Circular. Hélice de lateralidad derecha. Luz polarizada circularmente derecha se refleja, mientras que luz de polarización circular izquierda se transmite.

la Fig. 1.4. Cuando una película delgada columnar se deposita oblicuamente se pueden obtener una gran variedad de morfologías de STF en nanoescala por la simple variación de dos ejes fundamentales de rotación, ya sea por separado o los dos al mismo tiempo [18]. Estos ejes fundamentales conducen a dos clases canónicas de STF:

- a) Películas delgadas esculpidas nemáticas (PDENs) y
  - b) películas delgadas de medios bi-anisotrópicos helicoidales (PDMBHs).
- Éstas se diferencian principalmente por su morfología.

Se han construido formas aun más complejas y también multisecciones, en las cuales el material o la forma se cambian de sección a sección a lo largo del eje  $z$ , perpendicular a las capas de la película [22].

## 1.1. Deposición Física de Vapor

Las morfologías PDEN incluyen las formas bidimensionales ya mencionadas: columnas inclinadas, esterillas, y zig zags así como formas más complejas en forma de C y S. Para obtenerlas se usa la técnica llamada deposición física de vapor, que se observa en la Fig. 1.4. Para obtener morfologías nemáticas el sustrato tiene que rotarse alrededor de un eje que descansa en el plano del sustrato y es perpendicular a la dirección del vapor incidente, mientras que el ángulo de incidencia del vapor,  $\chi_v$ , se varía ya sea por episodios o continuamente [18]. Para obtener morfologías helicoidales el sustrato se rota alrededor de un eje perpendicular al plano del sustrato. En la Fig. 1.4 se puede observar esquemáticamente el método de deposición física de vapor para construir STF. Se observan los ejes,  $x$ ,  $y$ , paralelos a la película, el eje  $z$ , perpendicular a ésta, el ángulo del flujo de vapor  $\chi_v$ , y el ángulo columnar  $\chi$ .

Las PDMBH, que en este caso son las que nos interesan, se fabrican al inclinar el sustrato a algún ángulo oblicuo del flujo de vapor incidente (es decir  $\chi_v < 90^\circ$ ), seguido de rotar el sustrato alrededor del eje  $z$ . Las morfologías helicoidales son el resultado de una velocidad angular constante alrededor de eje  $z$ . Al variar la velocidad angular a través de un ciclo rotacional de una forma prescrita, se obtiene una estructura helicoidal inclinada, con el ángulo de inclinación controlable. Este control se mantiene para todo ángulo de inclinación de la columna  $\chi$  (en la Fig. 1.3 se observa este ángulo para una STF quiral), arriba de su valor mínimo para un ángulo de deposición estático. Además, haciendo el ciclo rotacional  $\Delta + 360^\circ$ , donde  $\Delta \neq 0^\circ$ , es algún ángulo

## 1.1. DEPOSICIÓN FÍSICA DE VAPOR

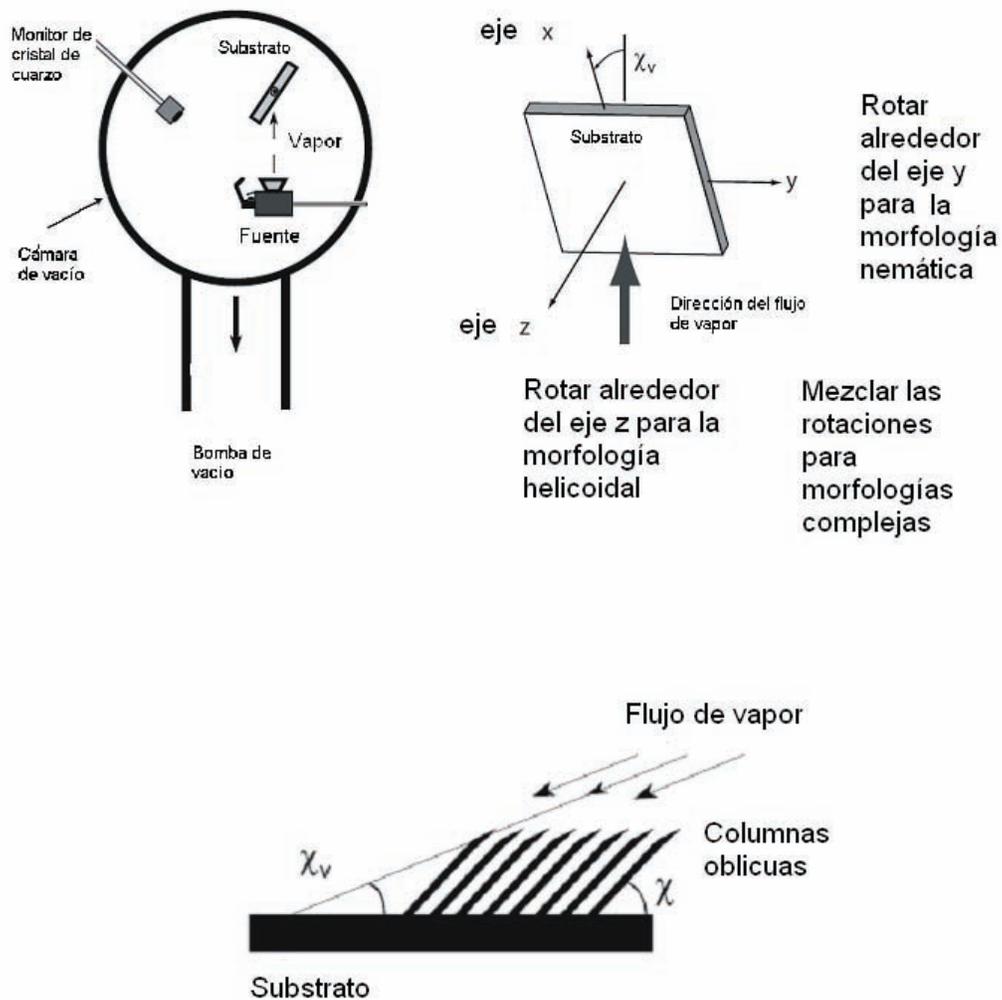


Figura 1.4: Método de Deposición Física de Vapor. Se observa el sistema de coordenadas, el ángulo de incidencia del vapor  $\chi_v$ , y el ángulo de inclinación de la columna  $\chi$ .

## 1.2. DE PELÍCULAS DELGADAS COLUMNARES A ESCULPIDAS

---

de corrimiento de fase elegido, es posible crear una amplia gama controlada de súper hélices, a derecha o izquierda. La densidad de masa como función del ancho de la película se espera que permanezca constante, ya que  $\chi_v$  es fijo para las PDMBHs cuando las columnas obtienen un diámetro en estado estacionario, en el que los átomos o agregados del material dejan de moverse para formar la STF, en la nucleación temprana y las etapas de crecimiento.

Sin embargo, el ancho de la columna de la súper hélice se incrementa con la evolución del crecimiento. En muchos estudios sobre STFs, las columnas muestran por exploración de microscopía electrónica de la sección transversal que usualmente son paralelas con diámetros de sección transversal que van de 10 a 300 *nm* y con un rango similar en las distancias de separación.

Ya que la mayoría de las aplicaciones ópticas de STFs requieren que el diámetro columnar, la distancia de separación entre las columnas, y la conectividad entre las columnas permanezcan constantes durante el crecimiento, la condición de tamaño de columna en estado estacionario tiene ventajas prácticas. Por ejemplo, cuando un ciclo de deposición STF se repite por un período múltiple en la preparación de PDMBHs ya sea por evaporación o por "sputtering"<sup>1</sup> a velocidades angulares constantes de rotación del sustrato, es importante que la última vuelta tenga el mismo paso y porosidad de todas las vueltas previas. Esta reproducibilidad morfológica conduce a, por ejemplo, un espectro de actividad óptica predecible, ya que los tamaños de las columnas y formas permiten que las STFs actúen efectivamente como continuos rotacionalmente inhomogéneos en las frecuencias ópticas [1]. Esto solamente puede ocurrir si las películas se desarrollan de los agregados iniciales en columnas paralelas no competitivas de estado estacionario dentro de una pequeña fracción del grosor total de la película, y sección transversal constante así como que la porosidad se mantenga para el resto del crecimiento de la película.

## 1.2. De Películas Delgadas Columnares a Esculpidas

A continuación recapitulamos sobre cómo se llegó al concepto de películas delgadas esculpidas, mencionando algunos modelos físicos para explicar las

---

<sup>1</sup>En la técnica de sputtering, los átomos salen despedidos del material al bombardearlo con partículas altamente energéticas y se dirigen al sustrato por medio de un colimador.

estructuras observadas, como son los mecanismos de crecimiento y el modelo de estructura de zonas. Al final del capítulo señalamos algunas aplicaciones de estos materiales, como por ejemplo, filtros ópticos, sensores, displays y biosensores.

### 1.2.1. Películas delgadas columnares

Cronológicamente como morfológicamente, es sensato comenzar con las llamadas películas delgadas columnares. El crecimiento a ángulo oblicuo de las CTFs por medio de deposición física de vapor se acredita usualmente a Kundt en 1886 [23]. A baja temperatura y presión, el material se evapora en una fuente hacia un sustrato que se mantiene a un ángulo con respecto a la dirección del flujo de vapor entrante, como se muestra en la Fig. 1.4 y los átomos que llegan se establecen sobre el sustrato para formar una película delgada. La formación de núcleos inicialmente se forma en agregados de 1 a 3  $nm$  de diámetro sobre el sustrato. Los agregados se desarrollan en columnas cónicas que se amplían y compiten mientras el espesor de la película aumenta y mientras que la temperatura de la película se mantenga por debajo de aproximadamente un tercio de su punto de fusión. Esto da como resultado un arreglo tipo fractal en cuanto a las características superficiales y una red de vacíos, o zonas de menor densidad, asociada que define estas características.

Las morfologías de la sección transversal de una película delgada de silicio hidrogenado amorfo, una película delgada de grafito pirolítico y una ágata se muestran en la Fig. 1.5. Todas estas exhiben la forma cónica común y evolución de crecimiento competitiva, la cual es característica de la situación física simple de crecimiento serial direccional sobre una superficie en la cual la unidad que se deposita (átomos para el silicio amorfo hidrogenado y el grafito pirolítico, y agregados esféricos de 300  $nm$  para la ágata) ha limitado su movilidad por la condensación.

Agregando bombardeo de iones durante la evaporación se pueden eliminar columnas, produciendo de este modo películas delgadas, densas, suaves y estables que cumplen los estrictos requerimientos para las aplicaciones basadas en láseres de películas ópticas.

Significativamente, existe un estado intermedio entre la expansión columnar y la eliminación de columnas. En este estado, la competición entre columnas vecinas se frustra en las etapas tempranas de crecimiento ( $\leq 1 \mu m$ ), y después crecen columnas estables sin señales de su forma cónica inicial. Esta morfología CTF se logra a través de niveles intermedios de bombardeo de

## 1.2. DE PELÍCULAS DELGADAS COLUMNARES A ESCULPIDAS

---

iones o simplemente al depositar las películas a ángulos oblicuos. Las columnas de estado estacionario, de lados rectos, crecen así a un ángulo controlable  $\chi \geq 25^\circ$  del substrato, mientras la dirección promedio del flujo de vapor incidente se delinea por el ángulo  $\chi_v \leq \chi$ . Estas columnas se pueden considerar como nano alambres, porque las dimensiones lineales de su sección transversal están en la nanoescala.

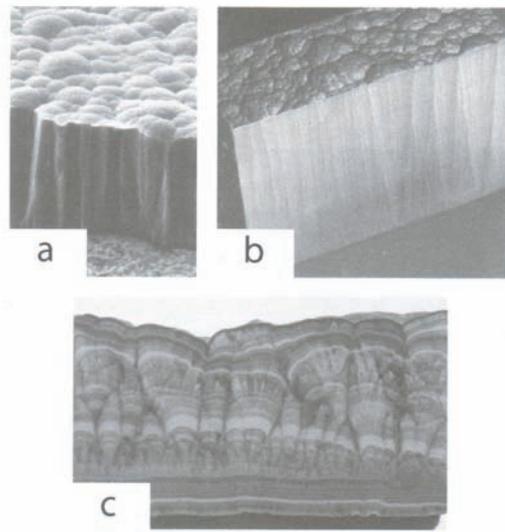


Figura 1.5: (a) Micrografía de la sección transversal de una película de  $25 \mu m$  de silicio amorfo hidrogenado preparado por deposición de vapor química a baja presión asistido por plasma. (b) Micrografía óptica de la sección transversal de una película de  $45 \mu m$  de grafito pirolítico preparado por pirolísis de fase de vapor y deposición. (c) Sección transversal de  $50 \mu m$  de una ágata. El mecanismo de deposición geológica de este mineral, aunque similar al de las películas delgadas por vapor depositado, contiene la misma física básica de deposición direccional sobre una superficie donde esencialmente no hay movimiento en la condensación

### 1.2.2. Mecanismo de crecimiento

Las películas delgadas columnares son el resultado directo del auto-ensombrecimiento<sup>2</sup> en la escala de longitud de los átomos que arriban sobre la superficie de la película en crecimiento antes de que adquieran su estado final de energía libre, llamados adátomos. Las CTFs se fabrican bajo condiciones de baja movilidad de los adátomos, donde el coeficiente de adhesión para los adátomos es esencialmente unitario y cuando el vapor llega desde una dirección específica, totalmente (es decir, en evaporación de una fuente puntual a  $10^{-5}$  Torr) o en promedio (es decir, en sputtering desde una fuente planar de  $10^{-3}$  a  $10^{-1}$  Torr). Solamente dos temas a tratar son necesarios para entender el origen de las CTFs:

- Si los adátomos que arriban forman un continuo, y así una red uniforme, o se agregan; y
- Si forman agregados, entonces, los agregados crecen independientemente o compiten por el crecimiento como las hojas de un árbol compitiendo por la luz del sol.

Extensas investigaciones han revelado que los agregados se forman con un déficit asociado de densidad en regiones en forma de panal de abeja (llamados comúnmente vacíos). Además, los agregados compiten por el crecimiento, dando lugar a columnas en formas que corresponden a leyes de potencia, que son racimos de agregados que se asemejan a una coliflor cuando se ven desde arriba de la superficie. Esto se ha visto experimentalmente y también se ha modelado por medio de agregación balística y estudios de simulación de dinámica molecular.

Por medio de deposición normal a la superficie del sustrato (es decir  $\chi_\nu = 90^\circ$ ), los adátomos llegan en trayectorias rectilíneas y forman agregados de 1 a 3 nm de tamaño. Los tamaños de estos agregados tienen una variación estadística, y los agregados más grandes tiende a capturar más de los adátomos que llegan. Pero los agregados no se hacen simplemente más grandes; más agregados de distribución de tamaños similares se crean

---

<sup>2</sup>El crecimiento competitivo de las columnas conduce a que las columnas más altas tiendan a hacer que desaparezcan las columnas colindantes al depositarse preferentemente sobre éstas los agregados o átomos que forman la STF, lo que se conoce como auto-ensombrecimiento.

## 1.2. DE PELÍCULAS DELGADAS COLUMNARES A ESCULPIDAS

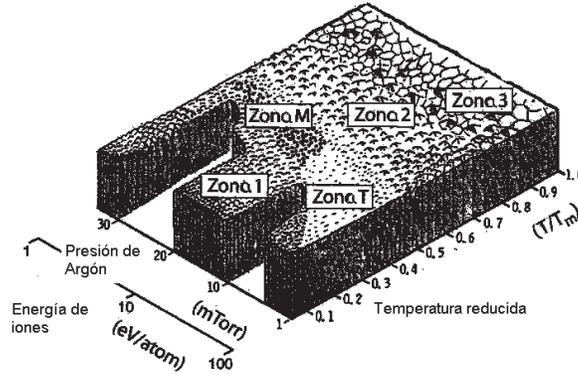


Figura 1.6: Modelo Estructural de zonas. Las variables del proceso son la temperatura reducida  $T/T_m$  ( donde  $T$  es la temperatura y  $T_m$  es el punto de fusión del material en bulto), la presión del Argón en la cámara de la deposición física de vapor, y la energía del bombardeo de iones. Las zonas 2 y 3 son irrelevantes para las STFs, ya que la alta movilidad de los adátomos elimina los efectos del auto-ensombrecimiento y el agrupamiento.

encima de los agregados formados tempranamente, estos tienden a agregarse jerárquicamente, lo cual conduce a un crecimiento columnar competitivo. Las orillas de las columnas dominantes tienen un radio de captura que se extiende detrás del perímetro de las fronteras de las columnas de agregados, haciendo la expansión estadística favorable de las columnas más altas conduce a un ensombrecimiento de las columnas colindantes. Como el área superficial superior esta virtualmente fija, al menos una columna debe contraerse por cada columna que se expande. En la ausencia de cualquier mecanismo moderador adicional, las columnas se desarrollan eventualmente para producir una morfología de superficie de tipo coliflor observable con exploración de microscopía electrónica convencional para películas más grandes que  $\sim 1 \mu m$  de grosor. Esta se ha clasificado morfológicamente como la zona 1 en el modelo de la estructura de zonas (MEZ), que se puede observar en la Fig. 1.6. Los diámetros de las columnas se expanden de acuerdo a una ley de potencias en la cual el exponente de esta ley es función de las condiciones de la deposición.

## 1.2. DE PELÍCULAS DELGADAS COLUMNARES A ESCULPIDAS

---

Las columnas pueden ser no competitivas en su evolución de crecimiento. Estas estructuras columnares paralelas constituyen la llamada morfología de palo de cerillo, ya que asemeja un montón de palillos de madera cuando se ven desde arriba y por los lados.

La versión reciente del MEZ, mostrado en la Fig. 1.6 incorpora la morfología de palos de cerillo en la zona M. Esta zona se ha observado en películas delgadas, fabricadas por la técnica de sputtering, de silicio amorfo, germanio amorfo, carburo de silicio (*SiC*), y óxido de tungsteno (*WO<sub>3</sub>*), donde el mecanismo moderador parece ser el bombardeo de iones a incidencia normal del sustrato, cerca y por arriba del umbral de sputtering ( $\sim 30$  a  $50$  eV para la mayoría de los materiales). Por debajo de tales condiciones de bombardeo de baja energía, los átomos más débilmente atados, en las orillas de los agregados y columnas, muy probablemente se envían hacia las regiones sombreadas adyacentes. Entonces, así como las superficies superiores de las columnas favorecidas llegan a ser más ásperas y más complicadas con la evolución del desarrollo, el incremento en el sputtering se da como función de  $\chi_\nu$  y conduce a la superficie superior y las orillas de las columnas a la morfología de estado estacionario característica de la zona M (Fig. 1.6). Además la morfología interior de los palos de cerillo individuales se espera que se asemeje a la morfología no competitiva de la zona de transición, llamada zona T por Thornton [24].

La morfología de palos de cerillo también aparece cuando las películas se depositan a ángulos de incidencia oblicua, especialmente cuando  $\chi_\nu$  es pequeño. Cuando  $\chi_\nu$  se incrementa, la densidad de agregados también se incrementa debido al decremento del auto-ensombrecimiento. En consecuencia, las columnas están menos separadas, y así, hay más competencia por la evolución de crecimiento. Esto sólo se ha visto en simulaciones de agregación de balística.

En una extensa revisión de estudios de modelaciones tanto experimentales como de agregación balística de CTFs depositadas oblicuamente, van Kranenburg y Lodder [25] concluyeron que los agregados elongados y las columnas generalmente apuntan en la dirección en la que llega el flujo de vapor y es una consecuencia directa del proceso de auto-ensombrecimiento adatómico; además, cuando se ve directamente por encima, la longitud del eje largo relativo al ancho del agregado se incrementa marcadamente para  $\chi_\nu < 30^\circ$ . Las columnas se separan y comienzan a crecer como cilindros no competitivos, con sección transversal elíptica debido a la anisotropía en el auto ensombrecimiento, conforme  $\chi_\nu$  se va disminuyendo. Las columnas se

separan más en la dirección de incidencia del vapor debido al incremento en el efecto de ensombrecimiento en la dirección longitudinal (paralela al plano de incidencia del vapor), mientras que el ensombrecimiento en la dirección transversal no se afecta por cambios en  $\chi_\nu$ . Esto conduce a un promedio más alto en la densidad de masa en la dirección transversal, y a una anisotropía en esta densidad que se ha explotado comercialmente en películas delgadas magnéticas.

#### 1.2.3. STFs primitivas con morfología nemática

Un evento pionero ocurrió en 1966 que eventualmente condujo a la aparición del concepto de las STFs en 1994. Mientras una CTF estaba creciendo, Nieuwenhuizen y Haanstra deliberadamente alteraron  $\chi_\nu$  para probar que la morfología columnar no puede ser el resultado del método de preparación por sí mismo [26]. El cambio resultante en  $\chi$  fue llevado a cabo mientras que el grosor de la película creció  $\sim 3 \text{ nm}$ , siendo la transición prácticamente abrupta en los regímenes del infrarrojo y el visible. Aproximadamente dos décadas después, Motohiro y Taga demostraron que  $\chi$  se puede alterar abruptamente de una forma sencilla durante el crecimiento [27], lo cual fue confirmado unos años después. Esta habilidad es la base para construir STFs con morfologías nemáticas de núcleo doblado.

Así, se construyeron las STFs primitivas con morfologías de zigzag y de patrones en forma de V. La similitud entre las CTFs y los cristales se ha notado desde hace mucho en la literatura óptica, así que las STFs primitivas con morfología nemática se pueden considerar como placas cristalinas apiladas. Esto se ha explotado inteligentemente por los diseñadores, fabricantes y se han probado en varios dispositivos ópticos. Además, ahora la bideposición tanto en serie como simultánea de las CTFs y las STFs con patrones en V, son rutinarias en la manufactura de placas onduladas para la industria automovilística.

### 1.3. Películas Delgadas Esculpidas Quirales

Otro evento importante en la aparición del concepto de STF había ocurrido ya en 1959. Aunque este evento paso por mucho tiempo inadvertido, todo el crédito por las STFs periódicas con morfología quiral se debe dar a Young y Kowal [2]. Aun sin ver la morfología anisotrópica de las CTFs

por medio de la exploración de microscopía electrónica, estos dos pioneros concientemente rotaron de forma constante el sustrato alrededor del eje z durante el crecimiento para crear películas delgadas de fluoruro de calcio con la morfología predicha para desplegar transmisión con actividad óptica. Muy probablemente, ellos fueron los primeros investigadores que deliberadamente manipularon la morfología de las películas delgadas para producir una STF no trivial, con una morfología completamente tridimensional.

El concepto de vacíos en las películas delgadas comenzo a ser común 12 años después. Notablemente, Young y Kowal [2] de hecho usaron esta palabra para conjeturar que "la actividad óptica de una película depositada helicoidalmente se puede deber a la acción cooperativa de un arreglo simétrico helicoidal de cristales, cristales creciendo o vacíos". Además, ellos conjeturaron que la dirección columnar podría cambiar virtualmente de forma instantánea y continua con cambios en la posición y la orientación del sustrato. Afortunadamente, la técnica de Young-Kowal de rotar el sustrato, la morfología helicoidal obtenida, y la actividad óptica en la transmisión de STFs quirales, fue redescubierta en la última década. Subsecuentes progresos en la fabricación y características ópticas se han llevado acabo muy rápido.

El esculpido tridimensional de morfología columnar se logra más fácilmente al rotar el sustrato alrededor de un eje normal al plano del sustrato, durante la deposición física de vapor. La densidad de flujo de vapor y la velocidad de rotación del sustrato se deben mantener a valores fijos. Bajo condiciones apropiadas, crecen columnas helicoidales con paso fijo (es decir período estructural). Estos son los análogos en estado sólido de los cristales líquidos quirales [1], y por lo tanto exhiben actividad óptica.

## 1.4. Películas Delgadas Esculpidas

Como ya se mencionó, durante los años 90s se lograron experimentalmente construir una amplia variedad de morfologías columnares, por medio del control de dos de los ejes fundamentales de rotación del sustrato, obtener multisecciones con diferentes morfologías columnares y/o diferentes materiales, además, de que existen una amplia gama de aplicaciones potenciales; y se pueden dirigir e interconectar la preparación, las propiedades y aplicaciones al relacionar los resultados teóricos y experimentales (ver pág. 3).

Sin embargo, el ancho de columna de una súper hélice se incrementa con la evolución de crecimiento. En muchos reportes sobre las STFs, las

columnas muestran por exploración de microscopía electrónica que la sección transversal aparece paralela con diámetros de sección transversal entre 10 y 300 *nm* y con un rango similar en las distancias de separación. Ya que la mayoría de las aplicaciones ópticas de las STFS requiere que el diámetro columnar, la distancia de separación entre las columnas y la conectividad entre las columnas todo permanezca constante durante el crecimiento, esta condición del tamaño de la columna en estado estacionario tiene ventajas prácticas, como que los espectros de actividad óptica sean predecibles como anteriormente se había mencionado (pág. 7).

### 1.5. Aplicaciones Ópticas de las STFS

Aunque se pronosticaron tempranamente las aplicaciones ópticas, electrónicas, acústicas, térmicas, químicas y biológicas de las STFS, el potencial de estos materiales nanoestructurados ha sido actualizado con el mayor éxito posible en la óptica lineal hasta el momento.

Varios tipos de filtros ópticos, sensores y displays con control eléctrico están en diferentes etapas de desarrollo, pero definitivamente están pasando sus etapas iniciales.

#### 1.5.1. Filtros ópticos

Las STFS quirales despliegan el fenómeno de Bragg circular en concordancia con su inhomogeneidad periódica a lo largo del eje  $z$ . Brevemente, una STF estructuralmente quiral de lateralidad derecha/izquierda de solamente unos pocos períodos de grosor refleja casi completamente ondas planas polarizadas circularmente a derecha/izquierda (CPD/CPI), con longitudes de onda en el llamado régimen de Bragg, a incidencia normal; mientras la reflexión de ondas planas CPI/CPD a incidencia normal en el mismo régimen es muy pequeña.

El ancho de banda del régimen de Bragg y el pico de reflectividad de éste primero se incrementa con el grosor de la STF quiral, y entonces se satura. Una vez que esta saturación ha ocurrido, el engrosamiento de la película tiene efectos despreciables en el espectro de reflexión. El régimen de Bragg también está marcado por una gran actividad óptica, el cual, sin embargo no escala con el grosor de la película y es también altamente dependiente de la orientación del fasor incidente de campo eléctrico [28].

Si una onda plana incide oblicuamente (es decir  $k \neq 0$ ) es posible obtener más de un régimen de Bragg, pero parece que el caso a incidencia normal es el de mayor valor en el contexto de la tecnología planar. Los mayores éxitos reportados son los siguientes:

*Filtros de polarización circular.* El fenómeno circular de Bragg se puede emplear para fabricar filtros de polarización circular. Una onda plana polarizada circularmente de una dirección (derecha o izquierda) que incide normalmente se puede reflejar casi completamente, mientras que para la otra dirección se transmite substancialmente, si la absorción es suficientemente pequeña y la película es suficientemente gruesa, lo cual se ha observado experimentalmente [29]. El régimen de Bragg se puede posicionar virtualmente a cualquier longitud de onda en el espacio libre entre los 450 y 1700 nm.

Los cálculos revelan que se pueden obtener filtros insensibles a la polarización, para las aplicaciones en espejos láser. Esto se puede obtener con una cascada de dos STFs idénticas quirales pero de dirección estructuralmente opuesta [30, 31]. Además se puede ampliar el ancho de la banda [32, 33] y las STFs quirales fuertemente entrelazadas pueden ser atractivas para la ingeniería de banda ancha [34]. Finalmente, las características dispersivas pueden permitir más de un régimen de Bragg [35].

Se ha diseñado un inversor de dirección para luz de solamente uno de los dos estados de polarización circular el cual ya se ha fabricado así como probado [36, 37]. Como el primer aparato de dos secciones de STFs reportado, este comprende una STF quiral y una CTF funcionando como una placa de mitad de onda. Básicamente, ésta casi completamente refleja, por decir, luz CPI, mientras que transmite substancialmente luz incidente CPD después de transformarla en luz CPI, en el régimen de Bragg.

*Filtros espectrales de agujero.* Se propuso una STF de dos secciones como un filtro de agujero espectral. Ambas secciones son STFs quirales de la misma dirección estructural y de grosor idéntico  $L$ . Sus períodos estructurales  $2\Omega_1$  y  $2\Omega_2$  se eligen tal que  $2L(\Omega_2^{-1} - \Omega_1^{-1}) = 1$ . Una banda de transmisión delgada o paso de banda entonces aparece para ondas planas polarizadas circularmente de la misma dirección que la de las dos secciones quirales de las STFs.

Una STF de tres secciones más robusta se propuso también como un filtro de agujero de reflexión [38]. Las secciones primera y tercera son idénticas a las de las STFs quirales, mientras que la sección intermedia delgada es una capa homogénea que actúa como un defecto de fase. Este diseño se implementó para obtener un agujero espectral de 11 nanómetros de ancho centrado en la longitud de espacio libre de 580 nm en el espectro de reflectancia.

Aun un mejor diseño llevo a estar disponible poco después, en donde la capa intermedia se eliminó, pero la STF quiral más baja se torció por  $90^0$  alrededor del eje  $z$  con respecto a la STF quiral superior. El torcimiento se efectuó satisfactoriamente para funcionar como el defecto de fase requerido [40]. Con STFs quirales mucho más gruesas en el lado del defecto de fase, los cálculos revelan que se pueden obtener agujeros espectrales ultra delgados (de 0,1  $nm$  de ancho de banda) en el espectro de transmitancia [10]; pero su funcionamiento se puede deteriorar por la atenuación dentro de las secciones gruesas. Se espera que cascadas de defectos de fase de diferentes tipos den funcionamientos más robustos en comparación con sólo un defecto [41].

### 1.5.2. Sensores ópticos de fluidos

La porosidad de las STFs los hace atractivos para la detección de concentraciones de fluidos [42, 43], porque sus propiedades de respuesta óptica deben cambiar en concordancia con la densidad del número de moléculas infiltradas. En particular, las investigaciones han mostrado que el régimen de Bragg de una STF quiral por consiguiente debe desplazarse, de tal modo que da una medida de la concentración del fluido [42]. Soporte cualitativo para este descubrimiento se da en experimentos sobre STFs húmedas y secas [44].

Además, filtros de agujeros espectrales de STFs pueden funcionar como sensores de concentración de fluidos altamente sensibles. Experimentos tanto con luz incidente polarizada circularmente como con luz no polarizada han confirmado el corrimiento al rojo de los agujeros espectrales bajo la exposición a humedad.

### 1.5.3. Displays

Los cristales líquidos se pueden controlar eléctricamente y son, por lo tanto, ampliamente usados como displays [45, 46]. Aunque las STFs, en general, no son eléctricamente controlables, se ha mostrado que la introducción de cristales líquidos nemáticos alineados dentro de las regiones vacías de las STFs quirales responden a voltajes aplicados [47].

Otra posibilidad interesante, es crecer nanotubos de carbón, (u otros materiales), por reacciones químicas con la participación de catalizadores fluidos y precursores dentro de las STFs altamente porosas. El crecimiento de los nanotubos tendría que conformarse en la estructura impuesta por el esqueleto de la STF, y el material compuesto de STF y los nanotubos que se forman

de esta manera podrían ser útiles para dispositivos de emisión.

### 1.5.4. Interconectores ópticos

La tecnología de las STF es compatible con la tecnología planar de chips electrónicos. Las STF quirales tienen el potencial de guiar simultáneamente ondas con diferentes velocidades de fase en diferentes direcciones [49, 50] y por lo tanto, podrían funcionar como interconectores ópticos, conduciendo al uso eficiente de los chips electrónicos. Además debido a la estructura helicoidal de las STFs quirales podrían resistir hendiduras verticales y fracturas. Además la micro refrigeración simultánea permitida por la porosidad de las STFs sería un bono.

### 1.5.5. Modulador de pulsos ópticos

El enorme crecimiento actual de las comunicaciones ópticas digitales ha proporcionado el ímpetu para la investigación en el dominio del tiempo en nuevos materiales. Como las STFs quirales son muy atractivas para aplicaciones ópticas, el fenómeno de Bragg circular ha sido estudiado en el dominio del tiempo. Se ha identificado un fenómeno de "pulse-bleeding" como el mecanismo subyacente, el cual puede afectar drásticamente las formas, las amplitudes y las componentes espectrales de pulsos de femtosegundos [51]. Sin embargo, pulsos rectangulares de banda estrecha pueden pasar sin pérdidas significativas de información [52]. La aplicación de las STFs para formar pulsos ópticos parece estar esperando.

### 1.5.6. Biochips y Biosensores

Las STFs están dotadas de porosidad de texturas nano dirigidas por lo que pueden funcionar como micro reactores para reacciones productoras de luminiscencia involucrando bioquímicos. La emisión de la Bioluminiscencia está limitada al ser afectada por las características del reactor. Si el reactor es una STF quiral se puede explotar su periodicidad helicoidal. Se ha demostrado teóricamente que la dirección de la estructura así como la periodicidad de las STFs quirales controlan el espectro de emisión y la intensidad, mientras que el estado de polarización de la luz emitida está fuertemente correlacionada con la dirección estructural de los filamentos fuentes embebidos [53]. Además parece posible la optimización con respecto a  $\chi_\nu$  [54, 55].

### *1.5. APLICACIONES ÓPTICAS DE LAS STFS*

---

Las STFs también pueden funcionar como biosensores en otras modalidades. Por ejemplo, se sabe que los depósitos de agua subterránea y las minas inundadas albergan bacterias anaeróbicas que reducen los metales. Una fibra óptica con su extremidad cubierta por una STF quiral hecha de óxido de hierro se podría introducir en un ambiente anaeróbico, donde las bacterias reductoras de metales reducirían la STF quiral gradualmente. Cálculos preliminares indican que resultarían corrimientos espectrales de la firma óptica de la STF quiral. Tales desplazamientos se podrían monitorear sobre la tierra para estimar la concentración bacterial.

## Capítulo 2

# Óptica de Medios Helicoidales

En este capítulo se presenta la teoría necesaria para resolver el problema de nuestro interés, el cual es encontrar los modos ópticos, propagantes y localizados en una película STF con un defecto de torsión en el centro de la capa, que presenta efecto Pockels. Para efectos de sintonización electro-óptica se aplica un campo eléctrico  $cd$  a lo largo del eje de inhomogeneidad. También, se encuentran las matrices de transferencia y dispersión, para de aquí obtener las transmitancias y las reflectancias co-polarizadas y polarizadas cruzadas.

La teoría empleada es la misma para todos los medios helicoidales, como son cristales líquidos colestéricos, elastómeros quirales o STFs quirales. Al introducir el defecto de torsión, lo que deseamos conseguir es que haya un régimen de Bragg en el espectro óptico con un agujero espectral, como se ha reportado anteriormente para el caso de materiales estructuralmente quirales (MEQs) con defecto de torsión, que no presentan efecto Pockels [10, 9]. El sistema propuesto es físicamente el mismo que un colestérico con defecto, sólo que en estado sólido. Sin embargo, las magnitudes de las constantes dieléctricas de las STFs pueden ser mayores comparadas con las de los colestéricos<sup>1</sup>, lo mismo sucede con las anisotropías<sup>2</sup>. Además, tienen diferentes respuestas a campos eléctricos externos, por ejemplo, en el caso de las STFs quirales no se puede cambiar el tamaño del paso o período de la hélice, puesto que son sólidas, pero a diferencia de los colestéricos pueden exhibir efecto Pockels.

---

<sup>1</sup>Por ejemplo, para una STF de Niobato de Potasio,  $kNbO_3$ , las constantes dieléctricas tienen valores entre  $\epsilon_{STF} \simeq 4.72 - 5.43$ , [14, 15], mientras que los valores típicos para los colestéricos  $\epsilon_{col} \simeq 2.3 - 2.5$  [10].

<sup>2</sup>La anisotropía dieléctrica es  $\epsilon_{acol} \simeq 0.2$  para los cristales líquidos coléstericos y  $\epsilon_{aSTF} \simeq 0.7$  para una STFs de Niobato de Potasio.

---

Este sistema, un MEQ con un defecto de torsión, no había sido estudiado considerando que el material es una STF quiral que al ser sólida tiene la ventaja, además de presentar efecto Pockels, de que sus tiempos de respuestas a campos eléctricos son mucho mayores, tan solo de  $10^{-9}$  s [13], comparados con un cristal líquido que es del orden de  $10^{-3}$  s [6]. En este caso, consideramos que el defecto de torsión es de  $90^\circ$ , lo que ocasiona que el agujero espectral se encuentre en el centro del régimen de Bragg como se ha reportado en las referencias [10, 5].

Este dispositivo se puede emplear como un filtro de luz circularmente polarizada, como un sintonizador de estado sólido en un láser, o bien como un sensor para medir humedad o bacterias anaeróbicas que reducen los metales, ya que se ha observado que el régimen de Bragg se recorre al azul o al rojo debido a cambios en la densidad de la STF quiral [28]. También, se ha reportado que el tiempo de permanencia fotónico en el plano del defecto, depende del grosor de la muestra [10, 5]. Este tiempo de permanencia fotónico nos da una medida del tiempo que permanece la energía fotónica almacenada en el plano del defecto, éste se puede calcular encontrando el modo del defecto y las ondas propagantes, puesto que el tiempo de permanencia es la energía almacenada en el defecto entre la potencia total de las ondas propagantes dentro del material. Por lo que el dispositivo, además, funciona como un almacenador de energía fotónica, lo que permite la disminución de la energía umbral de láseres. Por lo tanto si logramos maximizar este tiempo de permanencia podremos optimizar la disminución en la energía umbral de láseres.

Adicionalmente hemos considerado que el material con el que está construida la STF presenta efecto Pockels y por lo tanto, el tensor dieléctrico depende linealmente del campo eléctrico aplicado lo que permitirá una sintonización electro-óptica del agujero espectral, o modo del defecto, lo cual no se había investigado anteriormente, para el sistema físico propuesto. La teoría relacionada con la sintonización de los MEQs, se expone en el siguiente capítulo, aquí es importante mencionar que se habían estudiado STFs, que presentan efecto Pockels y por lo tanto son electro-ópticamente sintonizables, sin embargo éstas no incluían un defecto de torsión. La compresión del efecto Pockels, los corrimientos en los espectros ópticos y la aparición de puntos pseudo-isotrópicos, que se presentan en el siguiente capítulo, son esenciales para la interpretación de los resultados. Así, empleamos la teoría que se expone a continuación, considerando el tensor dieléctrico de referencia correspondiente al del efecto Pockels, donde las constantes dieléctricas de-

---

penden linealmente del campo eléctrico aplicado. Además, consideramos que el paso de la hélice tiene un salto de  $90^0$  en un plano que se encuentra en el centro de la capa quiral.

Es más fácil construir morfologías columnares tridimensionales esculpidas rotando el substrato alrededor de un eje normal al plano del substrato, durante la deposición física de vapor. La densidad de flujo de vapor y la velocidad de rotación del substrato se deben mantener a valores fijos. Bajo condiciones apropiadas, crecen columnas helicoidales con paso fijo (es decir, con período estructural). Estas son los análogos en estado sólido a los cristales líquidos quirales, y por lo tanto exhiben actividad óptica. No solamente se pueden rastrear todos los hechos precedentes sobre las películas delgadas esculpidas (Esculptured Thin Films) STF's hasta un artículo pionero publicado por Young y Kowal [2] en 1959, además su fundamento morfológico es transparente en un artículo de Bose en 1989 [57].

A pesar de su publicación en una revista prestigiosa, el logro de Young-Kowal permaneció en la oscuridad por más de tres décadas. Afortunadamente, la técnica de rotar el substrato, la morfología helicoidal observada, y la actividad óptica en la transmisión de las películas delgadas fabricadas se redescubrieron en la última década. Progresos subsecuentes se han llevado a cabo rápidamente en cuanto a su fabricación y características óptica.

Para estudiar la óptica de las STF's quirales empleamos las ecuaciones de Maxwell en medios. Estas ecuaciones se aplican a cualquier medio que responda a campos electromagnéticos. La forma en la que responden los medios a los campos electromagnéticos está dada por los tensores dieléctrico y de susceptibilidad magnética.

Para medios no magnéticos el tensor de susceptibilidad magnética es el tensor identidad. La gran mayoría de los materiales son no magnéticos a las longitudes de onda de la luz. Por lo tanto, en lo que sigue consideramos que el medio es no magnético.

El material a emplear, en este caso particular es el Niobato de Potasio ( $KNbO_3$ ). Se puede obtener el tensor dieléctrico del material tomando en cuenta el grupo de simetría puntual al que pertenece. En el caso del Niobato de Potasio, que es un material ortorrómbico, se considera un sistema de referencia basado en un conjunto de vectores ortonormales en las direcciones de sus tres ejes de simetría o principales, que son perpendiculares entre sí. Así, se obtiene su tensor dieléctrico diagonalizado y en ausencia de campo eléctrico. De aquí, es posible obtener el tensor dieléctrico en un sistema arbi-

---

trario y tomando en cuenta su respuesta a un campo eléctrico externo, ya que este material presenta efecto Pockels. Por lo tanto, sus constantes dieléctricas dependen linealmente del campo eléctrico y esta dependencia está dada por los coeficientes electro-ópticos. A este tensor dieléctrico, propio del material, le llamamos el tensor dieléctrico de referencia.

Debido a la helicidad y la inclinación de la STF, empleamos un sistema de referencia que rote alrededor del eje  $z$  y alrededor del eje  $y$ . En este sistema de referencia la luz que se propaga en la película, percibe al material como homogéneo. A esta transformación de coordenadas se le llama la transformación de Oseen y permite resolver las ecuaciones de propagación de los campos electromagnéticos de una forma más sencilla para incidencia normal.

La morfología de estas STFs es quiral o dada, y su tensor de permitividad relativa, tomando en cuenta lo anteriormente dicho, es  $\underline{\underline{\epsilon}}_r(z, \omega) = \underline{\underline{S}}_z(z) \cdot \underline{\underline{\epsilon}}_{ref}(\omega) \cdot \underline{\underline{S}}_z^T(z)$ , donde el tensor de rotación  $\underline{\underline{S}}_z(z)$  y el tensor de permitividad relativa de referencia  $\underline{\underline{\epsilon}}_{ref}(\omega)$  son respectivamente

$$\underline{\underline{S}}_z(z) = \mathbf{u}_z \mathbf{u}_z + (\mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y) \cos \zeta(z) + (\mathbf{u}_y \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y) \text{sen} \zeta(z), \quad (2.1)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{ref}(\omega) = \epsilon_a(\omega) \mathbf{u}_z \mathbf{u}_z + \epsilon_b(\omega) \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \epsilon_c(\omega) \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y, \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_y$ ,  $\mathbf{u}_z$  son vectores unitarios, que constituyen un sistema de coordenadas ortogonal derecho. Por ejemplo, para los materiales ortorrómbicos el sistema de referencia está formado por los ejes principales.  $\epsilon_a$ ,  $\epsilon_b$ ,  $\epsilon_c$  son las constantes dieléctricas a lo largo de las direcciones correspondientes a los vectores y  $\zeta(z)$  es una función que depende de  $z$ . En el caso de las STFs quirales  $\zeta(z) = h \frac{z}{\Omega}$ , donde  $h = 1$  para lateralidad derecha de la STF,  $h = -1$ , para izquierda y  $\Omega$  es la mitad del período de la hélice. Puesto que estas estructuras también tienen un ángulo de inclinación  $\chi$  (ver Fig. 2.1), que está relacionado con el ángulo de las moléculas o agregados que forman la STF con respecto a las capas de la película, se aplica una rotación que depende de  $\chi$ :  $\underline{\underline{S}}_y(\chi)$ .

La estructura no requiere que la inhomogeneidad sea periódica, ni que la morfología sea helicoidal. Pero cuando las STFs poseen ambas características, el análisis se simplifica considerablemente y esto da como resultado dispositivos útiles.

En este capítulo consideramos STFs quirales, cuyas columnas son nominalmente hélices perfectas de sección transversal elíptica. Los parámetros

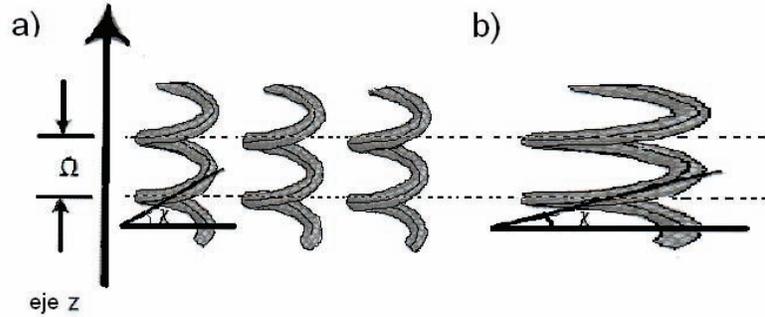


Figura 2.1: a) Parámetros estructurales en un MEQ. El período estructural  $\Omega$  y el ángulo de inclinación de las columnas  $\chi$  de una STF quiral. b) STF con diferente ángulo de inclinación y mismo período estructural.

morfológicos, son el período estructural  $\Omega$ , que es la mitad del período de la hélice y el ángulo de inclinación de las columnas  $\chi$ , que está relacionado con el ángulo que forman las moléculas o agregados de la STF con respecto a las capas. Estos parámetros se ilustran en la Fig. 2.1. Macroscópicamente, una STF quiral es un dieléctrico continuo periódicamente inhomogéneo, con su eje de inhomogeneidad paralelo al eje  $z$ . La propagación de luz en un STF quiral se describe en términos de una ecuación diferencial ordinaria matricial de  $4 \times 4$ . La periodicidad da como lugar el despliegue del fenómeno de Bragg, el cual es de tipo circular, ya que permite la discriminación entre ondas planas circularmente polarizadas a izquierda (CPI) y a derecha (CPD).

A continuación se exponen los fundamentos electromagnéticos que son las ecuaciones de Maxwell aplicadas a los medios bi-anisotrópicos helicoidales, en particular a las STFs quirales. La teoría relacionada con la óptica de las STFs se puede consultar y se encuentra con mayor extensión en la Ref. [28].

## 2.1. Fundamentos Electromagnéticos

Como se ha mencionado al principio del capítulo, empleamos la teoría que se expone a continuación, considerando el tensor dieléctrico de referencia correspondiente a un material que presenta efecto Pockels, que se expone en

## 2.1. FUNDAMENTOS ELECTROMAGNÉTICOS

---

el siguiente capítulo, donde las constantes dieléctricas dependen linealmente del campo eléctrico aplicado. Además la STF presenta un defecto de torsión lo que tendrá como resultado un agujero espectral en el centro del régimen de Bragg, como se ha reportado al tomar como sistema un material colestérico en el que incide luz a lo largo del eje de inhomogeneidad.

Las STFs quirales son ejemplos de películas delgadas de medios bi-anisotrópicos helicoidales (PDMBH). Las PDMBH tienen un tensor de permitividad relativa

$$\underline{\underline{\epsilon}}_r^{PDMBH}(z, \omega) = \underline{\underline{S}}_z(z) \cdot \widehat{\underline{\underline{S}}}_y(\chi) \cdot \underline{\underline{\epsilon}}_{ref}^0(\omega) \cdot \widehat{\underline{\underline{S}}}_y^T(\chi) \cdot \underline{\underline{S}}_z^T(z), \quad (2.3)$$

donde

$$\underline{\underline{S}}_z(z) = \mathbf{u}_z \mathbf{u}_z + (\mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y) \cos \zeta(z) + (\mathbf{u}_y \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y) \text{sen} \zeta(z), \quad (2.4)$$

es una matriz de rotación alrededor del eje  $z$ , tomando en cuenta la anisotropía a lo largo de  $z$ ,

$$\widehat{\underline{\underline{S}}}_y(\chi) = \mathbf{u}_z \mathbf{u}_z + (\mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z \mathbf{u}_z) \cos \chi + (\mathbf{u}_z \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_x \mathbf{u}_z) \text{sen} \chi, \quad (2.5)$$

es una matriz de rotación alrededor del eje  $y$ , tomando en cuenta el ángulo de inclinación  $\chi$  de la STF

y

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{ref}(\omega) = \epsilon_a(\omega) \mathbf{u}_z \mathbf{u}_z + \epsilon_b(\omega) \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \epsilon_c(\omega) \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y. \quad (2.6)$$

donde  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_y$ ,  $\mathbf{u}_z$  son vectores unitarios, que constituyen un sistema de coordenadas ortogonal derecho,  $\epsilon_a$ ,  $\epsilon_b$ ,  $\epsilon_c$  son las constantes dieléctricas a lo largo de las direcciones correspondientes a los vectores y  $\zeta(z)$  es una función que depende de  $z$  y en el caso de las STFs quirales es  $\zeta(z) = h \frac{z}{\Omega}$ .

Las STFs quirales son periódicamente inhomogéneas, y su tensor de permitividad relativa se simplifica a

$$\underline{\underline{\epsilon}}_r^{quiralSTF}(z, \omega) = \underline{\underline{S}}_z(h, \frac{z}{\Omega}) \cdot \widehat{\underline{\underline{S}}}_y(\chi) \cdot \underline{\underline{\epsilon}}_{ref}^0(\omega) \cdot \widehat{\underline{\underline{S}}}_y^T(\chi) \cdot \underline{\underline{S}}_z^T(h, \frac{z}{\Omega}), \quad (2.7)$$

donde  $\Omega$  es el período estructural de la STF y  $\underline{\underline{S}}_z$  es la matriz de rotación que está dada por

## 2.1. FUNDAMENTOS ELECTROMAGNÉTICOS

---

$$\hat{\underline{\underline{S}}}_z(h, \sigma) = \mathbf{u}_z \mathbf{u}_z + (\mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y) \cos(h\sigma) + (\mathbf{u}_y \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y) \text{sen}(h\sigma), \quad (2.8)$$

donde  $\sigma = \frac{z}{\Omega}$ , esta expresión captura la forma helicoidal de las columnas. El parámetro estructural  $h$  puede ser igual a 1 o  $-1$  para indicar uno de los dos tipos de estructura, derecha o izquierda, como se ilustra en la Fig. 2.2.

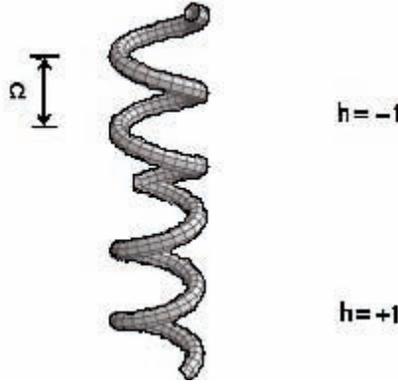


Figura 2.2: Lateralidad estructural y período de una STF quiral,  $h=1$ , para lateralidad derecha y  $h=-1$ , para lateralidad izquierda.

Así, las relaciones constitutivas en el dominio de frecuencias de una STF quiral se establecen como

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \hat{\underline{\underline{S}}}_z(h, \frac{z}{\Omega}) \cdot \hat{\underline{\underline{S}}}_y(\chi) \cdot \underline{\underline{\epsilon}}_{ref}^0(\omega) \cdot \hat{\underline{\underline{S}}}_y^T(\chi) \cdot \hat{\underline{\underline{S}}}_z^T(h, \frac{z}{\Omega}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.10)$$

que implica que las propiedades magnéticas son despreciables.

### 2.1.1. Modo

La representación espacial de Fourier

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{e}(z, \kappa, \psi, \omega) \exp[i\kappa(x \cos \psi + y \text{sen} \psi)], \quad (2.11)$$

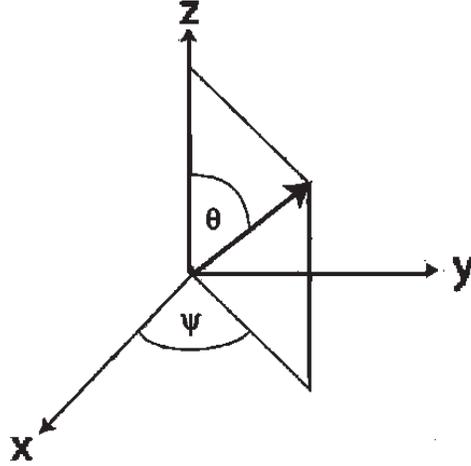


Figura 2.3: Dirección de propagación de una onda plana incidente.

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{h}(z, \kappa, \psi, \omega) \exp[i\kappa(x \cos \psi + y \operatorname{sen} \psi)], \quad (2.12)$$

de los fasores de campo electromagnético es suficientemente general, considerando ondas planas. Aquí,  $\kappa$  es el número de onda transversal y  $\psi$  es un ángulo, los dos fijados por las condiciones de incidencia. El ángulo que define la dirección de incidencia de la luz con respecto al eje  $z$ , es  $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(\kappa/\kappa_0)$ , donde  $\kappa_0 = 2\pi/\lambda$  es el número de onda de la luz, con  $\lambda$  la longitud de onda de la luz incidente; este ángulo puede ser de valor complejo para considerar ondas planas evanescentes. Los ángulos  $\theta$  y  $\psi$ , que definen la dirección de propagación de la luz incidente y su polarización, se pueden observar en la Fig. 2.3. La propagación axial se describe al establecer  $\kappa = 0$  y con  $\kappa \neq 0$  para la propagación oblicua.

La substitución de las ecuaciones (2.9)-(2.10) en los ecuaciones rotacionales de Maxwell sin fuentes

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.14)$$

## 2.1. FUNDAMENTOS ELECTROMAGNÉTICOS

---

conduce a cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias y dos ecuaciones algebraicas.

Las ecuaciones algebraicas producen [28]

$$\begin{aligned}
 e_z(z, \kappa, \psi, \omega) &= \frac{\epsilon_d(\omega)}{\epsilon_a(\omega)\epsilon_b(\omega)} \{[\epsilon_a(\omega) - \epsilon_b(\omega)] \mathbf{sen}\chi \cos\chi \\
 &\times \left[ e_x(z, \kappa, \psi, \omega) \cos\left(\frac{\pi z}{\Omega}\right) + h e_y(z, \kappa, \psi, \omega) \mathbf{sen}\left(\frac{\pi z}{\Omega}\right) \right] \\
 &+ \frac{\kappa}{\omega\epsilon_0} [h_x(z, \kappa, \psi, \omega) \mathbf{sen}\psi - h_y(z, \kappa, \psi, \omega) \cos\psi]\} \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

y

$$h_z(z, \kappa, \psi, \omega) = -\frac{\kappa}{\omega\mu_0} [e_x(z, \kappa, \psi, \omega) \mathbf{sen}\psi - e_y(z, \kappa, \psi, \omega) \cos\psi] \quad (2.16)$$

para las componentes normales de  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$ . La permitividad escalar relativa compuesta

$$\epsilon_d(\omega) = \frac{\epsilon_a(\omega)\epsilon_b(\omega)}{\epsilon_a(\omega) \cos^2\psi + \epsilon_b(\omega) \mathbf{sen}^2\psi}. \quad (2.17)$$

La eliminación de  $e_z$  y  $h_z$  de las ecuaciones diferenciales ordinarias produce el *modo*  $4 \times 4$

$$\frac{d}{dz}[\mathbf{f}(z, \kappa, \psi, \omega)] = i[\mathbf{P}(z, \kappa, \psi, \omega)][\mathbf{f}(z, \kappa, \psi, \omega)], \quad (2.18)$$

donde el vector columna  $[\mathbf{f}(z, \kappa, \psi, \omega)]$  está en términos de las componentes transversales de los campos electromagnéticos, lo que se conoce como la representación de Marcuvitz-Schwinger

$$[\mathbf{f}(z, \kappa, \psi, \omega)] = \begin{bmatrix} e_x(z, \kappa, \psi, \omega) \\ e_y(z, \kappa, \psi, \omega) \\ h_x(z, \kappa, \psi, \omega) \\ h_y(z, \kappa, \psi, \omega) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

y la matriz  $[\mathbf{P}(z, \kappa, \psi, \omega)]$  es una función de  $z$ , cuya forma explícita se encuentra en el apéndice A.

Con el fin de resolver el problema de valores a la frontera formulamos una ecuación matricial, que se estudiará con mayor detalle en la sección 2.1.3. La

## 2.1. FUNDAMENTOS ELECTROMAGNÉTICOS

---

solución a esta ecuación nos da el valor de los campos electromagnéticos en una frontera definida por un plano  $z = cte$ , en función de los campos en  $z = 0$ , por medio de una matriz. La solución general a esa ecuación se le llama el matrizante  $[\mathbf{M}(z, \kappa, \psi, \omega)]$  para el *modo* (2.18). Éste se define por medio de la ecuación de transferencia.

$$[\mathbf{f}(z, \kappa, \psi, \omega)] = [\mathbf{M}(z, \kappa, \psi, \omega)][\mathbf{f}(0, \kappa, \psi, \omega)], \quad (2.20)$$

el matrizante es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dz}[\mathbf{M}(z, \kappa, \psi, \omega)] = i[\mathbf{P}(z, \kappa, \psi, \omega)][\mathbf{M}(z, \kappa, \psi, \omega)]. \quad (2.21)$$

Solamente un valor de frontera del matrizante es necesario para determinar su unicidad, y el valor a la frontera esta dado por la ecuación (2.20) como

$$[\mathbf{M}(0, \kappa, \psi, \omega)] = [\mathbf{I}]. \quad (2.22)$$

Así, cuando  $[\mathbf{M}(z, \kappa, \psi, \omega)]$  cumple con esta última condición en  $z = 0$ , el matrizante coincide con la matriz de transferencia.

### 2.1.2. Transformación de Oseen

La ecuación (2.21) se puede resolver por varios procedimientos, algunos analíticos, otros numéricos. Pero se logra una profundidad física adicional por medio de la implementación de la transformación de Oseen. Trabajando en cristales líquidos colestéricos, Oseen sugirió en 1933 [58] la introducción de un sistema de coordenadas que se tuerce para imitar la orientación helicoidal de las moléculas. En este sistema de coordenadas espacial variable, el cristal líquido colestérico parece ser una sustancia uniaxial y homogénea para la propagación axial. La misma visualización resulta cierta para las STF's quirales. El caso en el que la inclinación de la STF  $\chi = 0$ , es idéntico al colestérico. Sin embargo, en el caso en el que  $\chi \neq 0$ , la STF parece ser una sustancia homogénea, pero el tensor dieléctrico sigue siendo biaxial, para propagación axial.

La transformación de Oseen del sistema de coordenadas consiste en la formulación de un vector columna

$$[\mathbf{f}'(z, \kappa, \psi, \omega)] = [\mathbf{B}(-z/\Omega)][\mathbf{f}(z, \kappa, \psi, \omega)], \quad (2.23)$$

donde la matriz función  $4 \times 4$  es

$$[\mathbf{B}(\sigma)] = \begin{bmatrix} \cos(\pi\sigma) & -h \operatorname{sen}(\pi\sigma) & 0 & 0 \\ h \operatorname{sen}(\pi\sigma) & \cos(\pi\sigma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\pi\sigma) & -h \operatorname{sen}(\pi\sigma) \\ 0 & 0 & h \operatorname{sen}(\pi\sigma) & \cos(\pi\sigma) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

En consecuencia, la ecuación (2.18) se transforma al *modo*  $4 \times 4$

$$\frac{d}{dz}[\mathbf{f}'(z, \kappa, \psi, \omega)] = i[\mathbf{P}'(z, \kappa, \psi, \omega)][\mathbf{f}'(z, \kappa, \psi, \omega)], \quad (2.25)$$

donde  $[\mathbf{P}'(z, \kappa, \psi, \omega)]$  es la matriz especificada en el apéndice B. El matrizante  $[\mathbf{M}'(z, \kappa, \psi, \omega)]$  para la ecuación (2.25) satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dz}[\mathbf{M}'(z, \kappa, \psi, \omega)] = i[\mathbf{P}'(z, \kappa, \psi, \omega)][\mathbf{M}'(z, \kappa, \psi, \omega)], \quad (2.26)$$

junto con la condición

$$[\mathbf{M}'(0, \kappa, \psi, \omega)] = [\mathbf{I}]. \quad (2.27)$$

### 2.1.3. Matrizante

Con la matriz  $[\mathbf{P}(z, \kappa, \psi, \omega)]$  variando con  $z$ , una solución del *modo* (2.18) es virtualmente imposible de encontrar, en general. Aun así, la ecuación (2.18) es una ecuación diferencial lineal, y una solución de la forma

$$[\mathbf{f}(L, \kappa, \psi, \omega)] = [\mathbf{M}(L, \kappa, \psi, \omega)][\mathbf{f}(0, \kappa, \psi, \omega)] \quad (2.28)$$

debe existir. La clave de la óptica de STF quirales es la determinación de la matriz de transferencia  $[\mathbf{M}(L, \kappa, \psi, \omega)]$  en una forma conveniente.

La ecuación (2.28) no es conveniente cuando la matriz de transferencia no se determina fácilmente. En su lugar, se emplea una función matricial llamada el matrizante [16].

El matrizante  $[\mathbf{M}(z, \kappa, \psi, \omega)]$  del *modo* (2.18) es la solución de la ecuación diferencial relacionada (2.21) sujeta a la condición (2.22).

La substitución de las ecuaciones (2.21) y (2.22) en la ecuación (2.18) muestra que

$$[\mathbf{f}(z, \kappa, \psi, \omega)] = [\mathbf{M}(z, \kappa, \psi, \omega)][\mathbf{f}(0, \kappa, \psi, \omega)], \quad (2.29)$$

## 2.2. MATRIZ DE TRANSFERENCIA

---

que se debe comparar con la ecuación (2.28) para notar que la matriz de transferencia es simplemente un valor especial del matrizante. Solamente se necesita un valor a la frontera del matrizante para encontrar la matriz única, y este valor a la frontera se dá por la ecuación (2.22); por lo que es más fácil resolver numéricamente la ecuación (2.21) que la ecuación (2.18).

En el caso de las STF quirales hay que hacer además algunas otras consideraciones en la búsqueda de simplificar aun más los cálculos, por ejemplo, una comparación entre las expresiones para  $[\mathbf{P}(z, \kappa, \psi, \omega)]$  y  $[\mathbf{P}'(z, \kappa, \psi, \omega)]$  (apéndice A y B respectivamente), muestra que ésta última tiene una estructura mas simple. La relativa simplicidad es muy evidente para propagación axial, porque  $[\mathbf{P}'(z, 0, \psi, \omega)]$  es independiente de  $z$  pero  $[\mathbf{P}(z, 0, \psi, \omega)]$  no lo es.

Como la propagación axial es atractiva tecnológicamente, preferimos trabajar con la ecuación (2.26) en lugar de (2.21). Una vez que  $[\mathbf{M}'(z, \kappa, \psi, \omega)]$  ha sido determinada, el cálculo de

$$[\mathbf{M}(z, \kappa, \psi, \omega)] = [\mathbf{B}(z/\Omega)][\mathbf{M}'(z, \kappa, \psi, \omega)], \quad (2.30)$$

es directo. De aquí le sigue la relación

$$[\mathbf{f}(z, \kappa, \psi, \omega)] = [\mathbf{B}(z/\Omega)][\mathbf{M}'(z, \kappa, \psi, \omega)][\mathbf{f}(0, \kappa, \psi, \omega)], \quad (2.31)$$

## 2.2. Matriz de Transferencia

La matriz de transferencia de un STF quiral de grosor  $L$  es  $[\mathbf{M}(z, \kappa, \psi, \omega)]$ , porque la relación

$$[\mathbf{f}(L, \kappa, \psi, \omega)] = [\mathbf{M}(L, \kappa, \psi, \omega)][\mathbf{f}(0, \kappa, \psi, \omega)] \quad (2.32)$$

entre los dos valores en la frontera de  $[\mathbf{f}(z, \kappa, \psi, \omega)]$  se sigue de la Ec. (2.20). La periodicidad de la STF quiral es de ayuda en el cálculo de su matriz de transferencia. Como

$$[\mathbf{P}'(z + 2m\Omega, \kappa, \psi, \omega)] = [\mathbf{P}'(z, \kappa, \psi, \omega)], \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.33)$$

el matrizante obedece el teorema de Floquet-Lyapunov [16]; por lo tanto,

### 2.3. REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN

---

$$[\mathbf{M}'(2m\Omega, \kappa, \psi, \omega)] = \{[\mathbf{M}'(2\Omega, \kappa, \psi, \omega)]\}^m, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.34)$$

El cálculo de la matriz de transferencia entonces se simplifica a

$$[\mathbf{M}(L, \kappa, \psi, \omega)] = [\mathbf{B}(L/\Omega)][\mathbf{M}'(L - 2m_L\Omega, \kappa, \psi, \omega)] \{[\mathbf{M}'(2\Omega, \kappa, \psi, \omega)]\}^{m_L}, \quad (2.35)$$

donde  $m_L$  es el entero mayor, menor o igual a  $L/2\Omega$ .

#### 2.2.1. Propagación axial

La transformación de Oseen es especialmente útil para propagación axial, ya que

$$[\mathbf{P}'(z, 0, \psi, \omega)] = \begin{bmatrix} 0 & -ih\frac{\pi}{\Omega} & 0 & \omega\mu_0 \\ ih\frac{\pi}{\Omega} & 0 & -\omega\mu_0 & 0 \\ 0 & -\omega\epsilon_0\epsilon_c(\omega) & 0 & -ih\frac{\pi}{\Omega} \\ \omega\epsilon_0\epsilon_c(\omega) & 0 & -ih\frac{\pi}{\Omega} & 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{A}'(\omega)] \quad (2.36)$$

es independiente de  $z$ . Por lo tanto, la Ec. (2.25) se simplifica a

$$\frac{d}{dz}[\mathbf{f}'(z, 0, \psi, \omega)] = i[\mathbf{A}'(\omega)][\mathbf{f}'(z, 0, \psi, \omega)], \quad (2.37)$$

la cual tiene propiedades anisotrópicas. Así, la matriz de transferencia para la propagación axial es directamente:

$$[\mathbf{M}(L, 0, \psi, \omega)] = [\mathbf{B}(L/\Omega)] \exp \{i[\mathbf{A}'(\omega)]L\}. \quad (2.38)$$

### 2.3. Reflexión y Transmisión

El problema principal para la óptica de películas delgadas, se formula para una STF quiral de grosor  $L$ . El espacio donde  $z \leq 0$  y  $z \geq L$  está vacío. Una onda plana polarizada arbitrariamente incide oblicuamente en la STF quiral desde la mitad del espacio con  $z \leq 0$ . Como resultado, hay una onda plana reflejada en la misma mitad del espacio, así como una onda plana transmitida en la mitad del espacio  $z \geq L$ . Sus amplitudes se determinan al resolver un problema de valores de frontera.

### 2.3.1. Ondas planas incidente, reflejada y transmitida

El vector de propagación de la onda plana que incide oblicuamente forma un ángulo  $\theta \in [0, \pi/2)$  con respecto al eje  $+z$ , y esta inclinado hacia el eje  $x$  en el plano  $xy$  por un ángulo  $\psi \in [0, 2\pi]$ , como se muestra en la Fig. 2.3. De acuerdo a esto, el número de onda transverso es

$$\kappa = \kappa_0 \text{sen}\theta, \quad (2.39)$$

donde  $\kappa_0 = 2\pi/\lambda$  es el número de onda, con  $\lambda$  la longitud de onda de la luz incidente. También, se pueden tomar en cuenta ondas planas evanescentes dando valores complejos del ángulo  $\theta$ .

La onda plana incidente está convencionalmente representada en términos de componentes linealmente polarizadas en la literatura en óptica. Sin embargo, para STFs quirales es más apropiada una descripción equivalente en términos de componentes de polarización circular. Por conveniencia aquí se presentan ambas componentes: lineales y circulares. Así, la onda plana incidente está delineada por los fasores

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{inc}(z) &= \left\{ \begin{array}{c} (a_s \mathbf{s} + a_p \mathbf{p}_+) e^{i\kappa_0 z \cos \theta} \\ o \\ (a_L \frac{is - \mathbf{p}_+}{\sqrt{2}} - a_R \frac{is + \mathbf{p}_+}{\sqrt{2}}) e^{i\kappa_0 z \cos \theta} \end{array} \right\} \\ \mathbf{h}_{inc}(z) &= \left\{ \begin{array}{c} \eta_0^{-1} (a_s \mathbf{p}_+ - a_p \mathbf{s}) e^{i\kappa_0 z \cos \theta} \\ o \\ -i\eta_0^{-1} (a_L \frac{is - \mathbf{p}_+}{\sqrt{2}} + a_R \frac{is + \mathbf{p}_+}{\sqrt{2}}) e^{i\kappa_0 z \cos \theta} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad z \leq 0, \quad (2.40)$$

donde  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  es la impedancia intrínseca del espacio libre;  $a_s$  y  $a_p$  son las amplitudes de las componentes polarizadas perpendicular y paralela respectivamente;  $a_L$  y  $a_R$  son las amplitudes de las componentes CPI y CPD, respectivamente; y los vectores

$$\mathbf{s} = -\mathbf{u}_x \text{sen}\psi + \mathbf{u}_y \cos \psi, \quad (2.41)$$

$$\mathbf{p}_\pm = \mp(\mathbf{u}_x \cos \psi + \mathbf{u}_y \text{sen}\psi) \cos \theta + \mathbf{u}_z \text{sen}\theta, \quad (2.42)$$

son de magnitud unitaria. Por simplicidad notacional, de aquí en adelante las dependencias sobre  $\kappa$ ,  $\psi$ , y  $\omega$  sólo se mencionarán explícitamente si es necesario.

### 2.3. REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN

---

Los fasores de campo electromagnético asociados con las ondas planas reflejadas y transmitidas, respectivamente, se expresan por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{ref}(z) &= \left\{ \begin{array}{c} (r_s \mathbf{s} + r_p \mathbf{p}_-) e^{-i\kappa_0 z \cos \theta} \\ 0 \\ (-r_L \frac{is - \mathbf{p}_-}{\sqrt{2}} + r_R \frac{is + \mathbf{p}_-}{\sqrt{2}}) e^{-i\kappa_0 z \cos \theta} \end{array} \right\} \\ \mathbf{h}_{ref}(z) &= \left\{ \begin{array}{c} \eta_0^{-1} (r_s \mathbf{p}_- - r_p \mathbf{s}) e^{-i\kappa_0 z \cos \theta} \\ 0 \\ i\eta_0^{-1} (r_L \frac{is - \mathbf{p}_-}{\sqrt{2}} + r_R \frac{is + \mathbf{p}_-}{\sqrt{2}}) e^{-i\kappa_0 z \cos \theta} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad z \leq 0, \quad (2.43)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{tra}(z) &= \left\{ \begin{array}{c} (t_s \mathbf{s} + t_p \mathbf{p}_+) e^{i\kappa_0(z-L) \cos \theta} \\ 0 \\ (t_L \frac{is - \mathbf{p}_+}{\sqrt{2}} - t_R \frac{is + \mathbf{p}_+}{\sqrt{2}}) e^{i\kappa_0(z-L) \cos \theta} \end{array} \right\} \\ \mathbf{h}_{tra}(z) &= \left\{ \begin{array}{c} \eta_0^{-1} (t_s \mathbf{p}_+ - t_p \mathbf{s}) e^{i\kappa_0(z-L) \cos \theta} \\ 0 \\ -i\eta_0^{-1} (t_L \frac{is - \mathbf{p}_+}{\sqrt{2}} + t_R \frac{is + \mathbf{p}_+}{\sqrt{2}}) e^{i\kappa_0(z-L) \cos \theta} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad z \geq L, \quad (2.44)$$

Las amplitudes  $r_{s,p}$  y  $t_{s,p}$  indican las magnitudes de las componentes polarizadas perpendicular y paralelas de las ondas planas reflejadas y transmitidas, que en general están polarizadas elípticamente. Equivalentemente, las amplitudes  $r_{L,R}$  y  $t_{L,R}$  indican las magnitudes de las componentes CPI y CPD.

Es conveniente definir los coeficientes de reflexión y transmisión. Estos aparecen como los elementos de las matrices  $2 \times 2$  en las siguientes relaciones:

$$\begin{bmatrix} r_s \\ r_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{ss} & r_{sp} \\ r_{ps} & r_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_s \\ a_p \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r_L \\ r_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{LL} & r_{LR} \\ r_{RL} & r_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_L \\ a_R \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

$$\begin{bmatrix} t_s \\ t_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{ss} & t_{sp} \\ t_{ps} & t_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_s \\ a_p \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} t_L \\ t_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{LL} & t_{LR} \\ t_{RL} & t_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_L \\ a_R \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

Los coeficientes de transmisión y reflexión co-polarizados son aquellos para los que la polarización de la luz transmitida o reflejada coincide con la de la luz incidente. En cambio, en el caso de los coeficientes polarizados

### 2.3. REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN

---

cruzados, la polarización de la luz transmitida o reflejada es opuesta a la polarización de la luz incidente. Los coeficientes co-polarizados tienen ambos subíndices idénticos, mientras que los coeficientes polarizados cruzados no. Por ejemplo,  $t_{LR}$ <sup>3</sup> es el coeficiente de transmisión para luz incidente CPD y luz CPI transmitida. Las relaciones entre los coeficientes lineales y circulares son las siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{ss} = -\frac{(r_{LL}+r_{RR})-(r_{LR}+r_{RL})}{2} \\ r_{sp} = i\frac{(r_{LL}-r_{RR})+(r_{LR}-r_{RL})}{2} \\ r_{ps} = -i\frac{(r_{LL}-r_{RR})-(r_{LR}-r_{RL})}{2} \\ r_{pp} = -\frac{(r_{LL}+r_{RR})+(r_{LR}+r_{RL})}{2} \end{array} \right\}, \quad (2.47)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{ss} = \frac{(t_{LL}+t_{RR})-(t_{LR}+t_{RL})}{2} \\ t_{sp} = -i\frac{(t_{LL}-t_{RR})+(t_{LR}-t_{RL})}{2} \\ t_{ps} = i\frac{(t_{LL}-t_{RR})-(t_{LR}-t_{RL})}{2} \\ t_{pp} = \frac{(t_{LL}+t_{RR})+(t_{LR}+t_{RL})}{2} \end{array} \right\}, \quad (2.48)$$

El cuadrado de la magnitud de un coeficiente de reflexión o transmisión es la correspondiente reflectancia o transmitancia; así,  $R_{LR} = |r_{LR}|^2$  es la reflectancia correspondiente al coeficiente de reflexión  $r_{LR}$ , y lo mismo se cumple para los demás coeficientes. El principio de conservación de energía impone las constricciones

$$\begin{aligned} R_{ss} + R_{ps} + T_{ss} + T_{ps} &\leq 1 \\ R_{pp} + R_{sp} + T_{pp} + T_{sp} &\leq 1 \\ R_{LL} + R_{RL} + T_{LL} + T_{RL} &\leq 1 \\ R_{RR} + R_{LR} + T_{RR} + T_{LR} &\leq 1 \end{aligned} \quad (2.49)$$

---

<sup>3</sup>Los subíndices  $L$  y  $R$  se deben a que son las primeras letras de las palabras inglesas "Left" y "Right".

La igualdad solamente se cumple en ausencia de disipación

### 2.3.2. Problema de valores a la frontera

Como las componentes tangenciales de  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$  y  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$  deben ser continuas a través de los planos  $z = 0$  y  $z = L$ , los valores a la frontera de  $[\mathbf{f}(0, \kappa, \psi, \omega)]$  y  $[\mathbf{f}(L, \kappa, \psi, \omega)]$  que aparecen en la Ec. (2.32) se pueden fijar por medio de las ecuaciones (2.40)-(2.44). De aquí que,

$$[\mathbf{f}(0, \kappa, \psi, \omega)] = [\mathbf{K}(\theta, \psi)] \begin{bmatrix} a_s \\ a_p \\ r_s \\ r_p \end{bmatrix} = \frac{[\mathbf{K}(\theta, \psi)]}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i(a_L - a_R) \\ -(a_L + a_R) \\ -i(r_L - r_R) \\ r_L + r_R \end{bmatrix}, \quad (2.50)$$

y

$$[\mathbf{f}(L, \kappa, \psi, \omega)] = [\mathbf{K}(\theta, \psi)] \begin{bmatrix} t_s \\ t_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{[\mathbf{K}(\theta, \psi)]}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i(t_L - t_R) \\ -(t_L + t_R) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

donde

$$[\mathbf{K}(\theta, \psi)] = \begin{bmatrix} -\mathbf{sen}\psi & -\cos\psi \cos\theta & -\mathbf{sen}\psi & \cos\psi \cos\theta \\ \cos\psi & -\mathbf{sen}\psi \cos\theta & \cos\psi & \mathbf{sen}\psi \cos\theta \\ -\eta_0^{-1} \cos\psi \cos\theta & \eta_0^{-1} \mathbf{sen}\psi & \eta_0^{-1} \cos\psi \cos\theta & \eta_0^{-1} \mathbf{sen}\psi \\ -\eta_0^{-1} \mathbf{sen}\psi \cos\theta & -\eta_0^{-1} \cos\psi & \eta_0^{-1} \mathbf{sen}\psi \cos\theta & -\eta_0^{-1} \cos\psi \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

El problema de reflexión y transmisión se reduce así a cuatro ecuaciones algebraicas lineales simultáneas establecidas en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} t_s \\ t_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{K}(\theta, \psi)]^{-1} [\mathbf{M}(L, \kappa, \psi, \omega)] [\mathbf{K}(\theta, \psi)] \begin{bmatrix} a_s \\ a_p \\ r_s \\ r_p \end{bmatrix}; \quad (2.53)$$

equivalentemente

$$\begin{bmatrix} i(t_L - t_R) \\ -(t_L + t_R) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{K}(\theta, \psi)]^{-1} [\mathbf{M}(L, \kappa, \psi, \omega)] [\mathbf{K}(\theta, \psi)] \begin{bmatrix} i(a_L - a_R) \\ -(a_L + a_R) \\ -i(r_L - r_R) \\ r_L + r_R \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Este grupo de ecuaciones se puede resolver por medio de manipulaciones estándar de matrices para calcular los coeficientes de reflexión y transmisión.

Análogamente, para el caso en el que se encuentra un defecto de torsión en el medio, se resuelve como un problema de valores a la frontera. El plano de discontinuidad en la hélice del material estructuralmente quirral (MEQ), se considera una frontera y las componentes tangenciales de los campos electromagnéticos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  deben ser continuas en esa frontera.

## 2.4. Solución a la Ecuación de Propagación

Ya que la matriz  $A'(\omega)$ , para el caso de incidencia normal en un bloque o capa de un medio helicoidal anisotrópico biaxial, de la Ec. (2.37) es independiente de  $z$ , esta ecuación de propagación admite cuatro soluciones las cuales tienen la forma de ondas planas

$$\beta^j(z) = t^j \exp(in_j z), \quad j = 1, 2 \quad (2.55)$$

en donde  $n_j$ ,  $t^j$ , son los valores propios y vectores propios de  $A'(\omega)$ , respectivamente.

El campo interno se puede representar como una superposición de los cuatro vectores propios (*representación de amplitud*), mediante

$$\beta^j(z) = t^j \exp(in_j z) = T\alpha(z) \quad (2.56)$$

en donde  $T$  es la matriz cuya  $j$ -ésima columna coincide con  $t^j$  y  $\alpha(z)$  es el cuadrivector con componentes  $a_j \exp(in_j z)$ . Obviamente,  $\alpha$  y  $\beta = T\alpha$  representan el mismo estado en dos diferentes conjuntos de vectores base. La métrica del espacio de estado se obtiene definiendo un tensor métrico  $G$  y un producto escalar  $\beta_1^\dagger G_\beta \beta_2 \equiv \alpha_1^\dagger G_\alpha \alpha_2$ , en donde  $G_\beta$  y

$$G_\alpha = T^\dagger G_\beta T \quad (2.57)$$

## 2.4. SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE PROPAGACIÓN

---

son las matrices que representan a  $G$  en los dos conjuntos de vectores base. Haciendo

$$G_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

la norma del vector de estado representa el promedio temporal de la componente  $z$  del vector de Poynting y el tensor  $G$  satisface las relaciones

$$G \equiv G^\dagger \equiv G^{-1}. \quad (2.59)$$

En un medio no disipativo, la derivada espacial  $z$  de la norma es idénticamente cero y la matriz  $G_\beta A_\beta$  es autoadjunta:

$$G_\beta H_\beta = (G_\beta A_\beta)^\dagger \equiv H_\beta^\dagger A_\beta. \quad (2.60)$$

Esta propiedad y el hecho de que la ecuación de valores propios para  $A_\beta$ , es bicuadrática, implica que los valores propios son  $n_1, n_2, n_3 = -n_1, n_4 = -n_2$ , con  $n_j$  real o puramente imaginario.

### 2.4.1. Matrices métricas

En la representación  $\alpha$ , los vectores base serán escogidos en el orden  $1^+, 2^+, 1^-, 2^-$ . Estos corresponden a los modos propios propagantes y localizados. La relación de dispersión de un MEQ proporciona la frecuencia  $\omega$  como función del número de onda  $k = 2\pi/\lambda$  de la luz incidente, donde  $\lambda$  es la longitud de onda. Los modos se observan en la relación de dispersión en la Fig. 2.4 [6].

Usando esta elección, la matriz  $G_\alpha$  está dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.61)$$

en las regiones fuera y dentro de la banda prohibida, respectivamente.

En ciertas circunstancias una elección más apropiada será el orden  $1^+, 1^-, 2^+, 2^-$ . En este caso, la matriz  $G_\alpha$  está dada por

## 2.5. MATRIZ DE TRANSFERENCIA Y DE DISPERSIÓN EN UN MEQ CON UN DEFECTO DE TORSIÓN

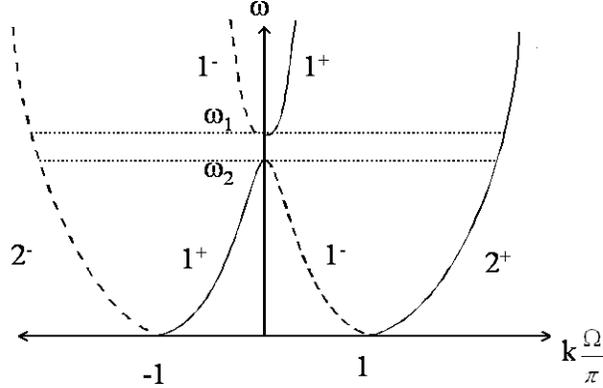


Figura 2.4: Se muestra la relación de dispersión para un material estructuralmente quiral. Se observan los modos  $1^+$ ,  $2^+$ ,  $1^-$ ,  $2^-$ . Los modos con signo menos corresponden a ondas viajando hacia la izquierda, la velocidad de grupo,  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ , es negativa. Los modos con signo positivo corresponden a modos viajando hacia la derecha. Se observa la banda prohibida entre las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

Estas matrices resumen las propiedades más importantes del producto escalar entre los vectores propios de  $A_\beta$ .

## 2.5. Matriz de Transferencia y de Dispersión en un MEQ con un Defecto de Torsión

En esta sección se presenta el formalismo de la matriz de transferencia y de dispersión. Éste se emplea generalmente en problemas con condiciones a la frontera [59]. En este caso particular el plano de discontinuidad es el plano del defecto de torsión. Se considera que el sistema de referencia siempre esta girando rígidamente conforme se avanza en el eje de inhomogeneidad del material estructuralmente quiral (MEQ).

## 2.5. MATRIZ DE TRANSFERENCIA Y DE DISPERSIÓN EN UN MEQ CON UN DEFECTO DE TORSIÓN

Nuevamente, suponemos que una onda electromagnética se propaga axialmente, a lo largo del eje de inhomogeneidad de una capa de MEQ, en la cual existe un defecto de torsión en un plano, que por simplicidad se tomará como  $z = 0$  (véase Fig. 2.5 ). El ángulo de torsión en este caso es  $\bar{\theta}$ .

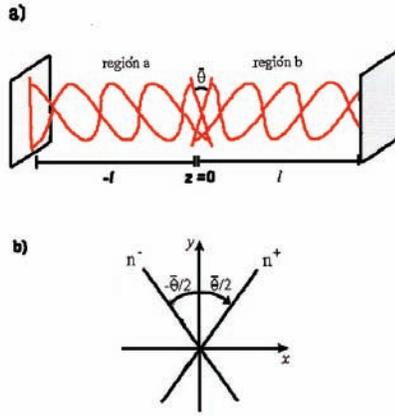


Figura 2.5: a) Una muestra con simetría helicoidal de ancho  $2l$  con un defecto de torsión en  $z = 0$ . b) Se muestra el plano del defecto perpendicular al eje  $z$ . En el caso de un colestérico la dirección del director  $\hat{n}$  cambia abruptamente de  $\hat{n}^-$  a  $\hat{n}^+$  por un ángulo de torsión  $\bar{\theta}$ . En el caso de una STF  $\bar{\theta}$  es el ángulo de salto de la hélice. El defecto forma un plano de discontinuidad en donde se debe satisfacer la continuidad de las componentes tangenciales de los campos electromagnéticos.

La solución en la región  $a$ , según la Ec. (2.56) es simplemente

$$\beta_a = T\alpha_a \quad (2.63)$$

donde  $\beta$  es el cuadrivector de los campos  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$ ,  $T$  es la matriz cuya  $j$ -ésima columna coincide con los vectores propios  $t^j$  de la matriz  $A'$  de la ecuación obtenida por medio de la representación de Marcuvitz-Schwinger y la transformación de Oseen (2.37), que tiene la forma general:  $\partial_z \bar{\psi} = ik_0 \bar{H} \bar{\psi}$ ; y  $\alpha(z)$  es el cuadrivector con componentes  $a_j \exp(in_j z)$ , donde  $n_j$  son los valores propios de la matriz  $\bar{H}$ .

Sin embargo, en la región  $b$ , debido al defecto, la solución está ahora girada por un ángulo  $\bar{\theta}$ ; aplicando una matriz de rotación a la expresión

## 2.5. MATRIZ DE TRANSFERENCIA Y DE DISPERSIÓN EN UN MEQ CON UN DEFECTO DE TORSIÓN

---

(2.56), la solución en la región  $b$  es  $\beta_b = \mathcal{R}(\bar{\theta})T\alpha_b = \exp(R\bar{\theta})T\alpha_b$ , en donde  $\mathcal{R}(\bar{\theta})$  y  $R$  se definen mediante la expresión

$$\mathcal{R}(\bar{\theta}) = \exp(R\bar{\theta}) \equiv \cos \bar{\theta} \mathbf{I}_4 + \text{sen} \bar{\theta} R, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.64)$$

donde  $\mathbf{I}_4$  es la matriz identidad de  $4 \times 4$ .

La continuidad de las componentes tangenciales de los campos electromagnéticos implica la continuidad del campo  $\beta(z)$  en el plano del defecto, es decir,

$$\beta_a(z = 0^-) = \beta_b(z = 0^+). \quad (2.65)$$

Esta condición permite obtener una expresión para las componentes  $\alpha_b$  en términos de  $\alpha_a$  como sigue

$$\alpha_b(0^-) = T^{-1}\mathcal{R}(\bar{\theta})^{-1}T\alpha_a(0^+) = T^{-1}\exp(-R\bar{\theta})T\alpha_a(0^+). \quad (2.66)$$

De la Ec. (2.66) la matriz de transferencia  $U$  se define como

$$U = T^{-1}\exp(-R\bar{\theta})T. \quad (2.67)$$

Para encontrar los elementos de  $U$  se expresa  $T^{-1}$  como una función de  $T$  usando la relación  $G_\alpha = T^\dagger G_\beta T$  y  $GT$  y las ecuaciones que definen los elementos de  $T$ ,  $G_\alpha$ ,  $G_\beta$ , del tal forma que

$$U = G_\alpha T^\dagger G_\beta \exp(-R\bar{\theta})T. \quad (2.68)$$

Si en la representación  $\alpha$ , los vectores base se escogen en el orden  $1^+$ ,  $2^+$ ,  $1^-$ ,  $2^-$ , la matriz  $G_\alpha$  viene dada por la expresión (2.61) y los elementos  $(i, j)$  de la matriz de transferencia  $U$  se pueden escribir como

$$U = \begin{pmatrix} u_{1+1+} & u_{1+2+} & u_{1+1-} & u_{1+2-} \\ u_{2+1+} & u_{2+2+} & u_{2+1-} & u_{2+2-} \\ u_{1-1+} & u_{1-2+} & u_{1-1-} & u_{1-2-} \\ u_{2-1+} & u_{2-2+} & u_{2-1-} & u_{2-2-} \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

## 2.5. MATRIZ DE TRANSFERENCIA Y DE DISPERSIÓN EN UN MEQ CON UN DEFECTO DE TORSIÓN

---

Nótese que la matriz  $U$  relaciona los coeficientes  $\alpha_\beta$ , en la región  $b$  en términos de los coeficientes  $\alpha_\alpha$ , en la región  $\alpha$ . El elemento  $(i, j)$  de  $U$  corresponde a ondas incidentes desde la región  $a$  cuando  $j = 1, 2$  y proporciona las propiedades de transmisión en la región  $b$  cuando  $i = 1, 2$ . Sin embargo, las propiedades de reflexión no se puede obtener de las componentes de  $U$  de la expresión (2.69), ya que no se tienen elementos en la región  $b$ , cuando  $i = 1, 2$ , en términos de las ondas incidentes desde la región  $a$ . Para resolver este problema se reescribe la relación (2.66) de tal modo que se obtenga una matriz de dispersión  $s$ , la cual permite escribir los coeficientes asociados con las ondas reflejadas en el plano del defecto (en ambas regiones), en términos de los coeficientes asociados con las ondas incidentes sobre el plano (en ambas regiones). El resultado de resolver (2.66) es

$$\begin{pmatrix} 1_b^+ \\ 2_b^+ \\ 1_a^- \\ 2_a^- \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} 1_a^+ \\ 2_a^+ \\ 1_b^- \\ 2_b^- \end{pmatrix}, \quad (2.70)$$

en donde  $1_b^+$  denota el modo 1 reflejado sobre el plano del defecto en la región  $b$ ;  $1_a^-$  denota el modo 1 reflejado sobre el plano del defecto en la región  $a$ ; etc. La matriz de dispersión  $S$  se puede escribir en términos de la matriz de transferencia  $U$  de la siguiente manera

$$S = (P_1 - U \cdot P_2)^{-1}(U \cdot P_1 - P_2). \quad (2.71)$$

en donde  $P_1$  y  $P_2$  son las matrices diagonales definidas como

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

respectivamente  $P_1\alpha$  y  $P_2\alpha$  representan entonces las componentes derecha e izquierda de  $\alpha$ , respectivamente. De este modo, el elemento  $(i, j)$  de  $S$  corresponde a ondas incidentes desde la izquierda cuando  $j = 1, 2$  y provee las propiedades de transmisión y reflexión de la capa cuando  $i = 1, 2$  e  $i = 3, 4$ , respectivamente. Las amplitudes al cuadrado de tales elementos dan la transmitancia y reflectancia de la capa para ondas que inciden desde la izquierda.

## 2.6. Reflexiones de Bragg

En esta sección se estudian las reflexiones de Bragg que dan lugar al fenómeno Bragg circular. La teoría que se expone a continuación se desarrolla para un material con estructura colestérica. Las STF's son los análogos en estado sólido a un cristal líquido colésterico, por lo tanto, lo que a continuación se expone describe substancialmente lo que ocurre para una STF.

Un haz de luz, de frecuencia angular  $\omega$ , se envía paralelo al eje de la hélice ( $z$ ). En una aproximación de orden cero, podemos pensar a un colestérico, o en este caso a la STF quiral como un medio casi isotrópico, con un cierto índice de refracción promedio  $\bar{n}$ . La longitud de onda óptica en el medio es entonces

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\bar{n}\omega}. \quad (2.73)$$

Podemos también definir el haz por el vector de onda  $k_0$ , dirigido a lo largo del eje  $z$ , y de magnitud  $\omega\bar{n}/c$ : ambas notaciones serán útiles.

En la siguiente aproximación, notamos que el medio no es exactamente isotrópico; las propiedades ópticas están moduladas con un período espacial  $L = \pi/q_0$ . Esto puede dar lugar a reflexiones de Bragg en principio, dado que

$$2L = m\lambda \quad (m = \text{entero}). \quad (2.74)$$

Experimentalmente, se observa una reflexión de Bragg ( $m = 1$ ). Los órdenes de reflexión más altos ( $m = 2, 3, \dots$ ) están prohibidos para incidencia normal. Las características de polarización de las ondas son también notables:

(1) La luz reflejada esta circularmente polarizada: en cualquier instante  $t$  el patrón de campo eléctrico en la onda reflejada es una hélice, idéntica en la forma a una hélice colestérica, (ver la Fig. 2.6).

(2) Si analizamos la onda incidente en dos componentes de polarizaciones circulares opuestas, encontramos que solamente una componente es fuertemente reflejada es decir, la componente para la cual el patrón de campo eléctrico instantáneo es otra vez idéntico en forma a la hélice colestérica. La otra componente se transmite sin reflexión significativa a través del bloque. Estas características se exhiben en la fig 2.7.

Todas estas propiedades se pueden explicar en términos de la amplitud de dispersión  $\alpha$  :

$$\alpha = \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{i} \quad (2.75)$$

2.6. REFLEXIONES DE BRAGG

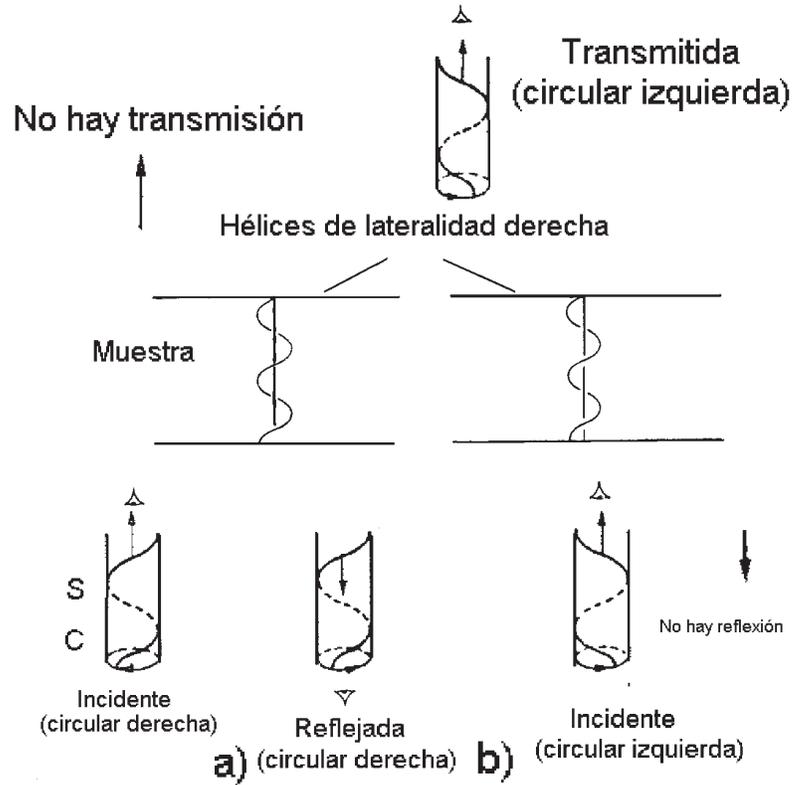


Figura 2.6: La reflexión de Bragg y la transmisión por una capa en la textura planar. Los cilindros con las hélices S representan fotografías instantáneas del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  asociado con una onda. Las flechas verticales dan la dirección de propagación. Los círculos C muestran la rotación de  $\mathbf{E}$  como se ve por un observador en un punto fijo del espacio. La onda reflejada emitida por la muestra es una imagen de la hélice colestérica, trasladada hacia abajo. Al examinar la correspondiente trayectoria proyectada de C nos damos cuenta que es circular derecha.

## 2.6. REFLEXIONES DE BRAGG

---

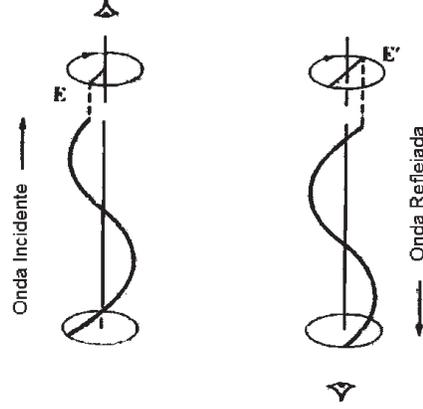


Figura 2.7: Reflexión Bragg.

donde  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{i}$  representan las polarizaciones de la onda reflejada (de vector de onda  $\mathbf{k}_1$ ) y de la onda incidente (vector de onda  $\mathbf{k}_0$ ).  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1$  es el vector de onda dispersada, y  $\epsilon(\mathbf{q})$  es la transformada de Fourier del tensor dieléctrico.

En el presente caso, los tres vectores  $\mathbf{k}_0$ ,  $\mathbf{k}_1$ , y  $\mathbf{q}$  serán paralelos a ( $z$ ). En cualquier punto  $\mathbf{r}$  un colestérico se comporta localmente como un material uniaxial: así el tensor dieléctrico se puede escribir como

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \epsilon_{\perp} \delta_{\alpha\beta} + (\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}) n_{\alpha}(\mathbf{r}) n_{\beta}(\mathbf{r}). \quad (2.76)$$

Usando la ecuación

$$\begin{aligned} n_x &= \cos \tilde{\theta} \\ n_y &= \text{sen} \tilde{\theta} \\ n_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\theta = q_0 z + \text{constante}$$

para  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  podemos encontrar  $\epsilon(\mathbf{r})$  y entonces su transformada de Fourier  $\epsilon(\mathbf{q})$ . Para  $q \neq 0$  un término constante como  $\epsilon_{\perp}$  no contribuye.

Para el caso de materiales biaxiales, como es el de las STFs, el tensor dieléctrico es diagonal en un sistema de ejes principales. En este caso, en

## 2.6. REFLEXIONES DE BRAGG

---

lugar del director tendremos una base de vectores ortonormales y el análisis siguiente se sigue cumpliendo considerando una tercera constante dieléctrica en el tensor dieléctrico, que define una segunda anisotropía del medio.

Para ilustrar el cálculo del tensor dieléctrico discutiremos la componente ( $xx$ ) en el espacio de vectores de onda, usando la transformada de Fourier

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_a \int d\mathbf{r} \cos^2(q_0) e^{iqz} \quad (2.78)$$

donde  $\epsilon_a = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$ . Escribiendo

$$\cos^2(q_0) e^{iqz} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (e^{2iq_0z} + e^{-2iq_0z}) \quad (2.79)$$

y eliminando el término constante nuevamente, vemos que la integral (2.78) se desvanece excepto cuando  $q = \pm 2q_0$ . Tomemos  $q_0 > 0$  (hélice de mano derecha). Entonces, el caso  $q = -q_0$  corresponde a  $k_1$  más grande que  $k_0$ , y está prohibido, ya que la frecuencia de la onda dispersada debe coincidir con  $\omega$ .

El caso de interés es  $q = 2q_0$ , correspondiente a  $k_0 = -k_1 = q_0$ . Esta condición es idéntica a la que se obtiene de la ecuación (2.74) con  $m = 1$ . Entonces, en el espacio recíproco la componente  $\epsilon_{xx}$ , obtenida mediante la transformada de Fourier del tensor dieléctrico, es

$$\epsilon_{xx}(2q_0) = \frac{1}{4} \epsilon_a V, \quad (2.80)$$

donde  $V$  es el volumen de la muestra.

Las otras componentes de  $\epsilon(2q_0)$  las obtenemos de manipulaciones similares: las únicas componentes distintas de cero corresponden a las polarizaciones en el plano  $xy$ , y la matriz resultante de  $2 \times 2$  es

$$\hat{\epsilon}(2q_0) = \frac{1}{4} \epsilon_a V \hat{M} \quad (2.81)$$

con

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

Omitiendo el factor constante, la polarización de la onda reflejada  $\mathbf{f}$  esta relacionada con la polarización incidente  $\mathbf{i}$  por:

## 2.6. REFLEXIONES DE BRAGG

---

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} i_x \\ i_y \end{pmatrix}, \quad (2.83)$$

o explícitamente

$$\begin{aligned} f_x &= i_x + i i_y, \\ f_y &= i i_x - i_y. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Observamos que  $f_y = -i f_x$ : la luz reflejada está circularmente polarizada. En un caso no obtenemos una onda reflejada: esto es cuando  $i_y = i i_x$ , esto define la onda transmitida en la Fig. 2.6.

Podemos también explicar por qué los órdenes de reflexiones de Bragg más altos están prohibidos, en términos de la matriz de amplitud  $\hat{M}$ .

Observemos, por ejemplo, la reflexión  $m = 2$ , la cual puede corresponder a  $q = 4q_0$ . Está se puede obtener por dispersión del estado inicial  $k_0$  para un fotón en el estado  $k_0 - 2q_0$ , seguido por una segunda dispersión de  $k_0 - 2q_0$  a  $k_0 - 4q_0$ . La matriz de amplitud para este proceso es proporcional a  $\hat{M}^2$ . Pero, de la ecuación (2.81) se puede verificar que  $\hat{M}^2 = 0$ . La prueba se puede extender a procesos de órdenes más altos involucrando más de un fotón, y también para valores más grandes de  $m$ ; las reflexiones de Bragg más altas están prohibidas para incidencia normal.

En el caso de incidencia oblicua, se observan reflexiones que cumplen con la condición geométrica:

$$2L \cos r = m\lambda, \quad (2.85)$$

donde  $r$  es el ángulo del haz refractado en la capa o bloque (que está relacionado con el ángulo de incidencia  $i$  por  $\text{sen } i = \bar{n} \text{sen } r$ ). Las diferencias principales del caso de incidencia normal son que a incidencia oblicua [60]:

- i) Se observan todos los órdenes ( $m=1, 2, 3, \dots$ ).
- ii) Las polarizaciones son elípticas.

Los ordenes de las reflexiones de Bragg, dan como resultado diferentes regímenes de Bragg, donde el régimen de orden  $m = 1$ , nos da el régimen Bragg con longitudes de onda más grandes, mientras que los ordenes más altos son bandas con longitudes de onda más bajas entre más alto es el orden.

Una discusión detallada de la propagación oblicua y sus reflexiones requiere de cálculos numéricos pesados [60]. Sin embargo, la explicación del punto i) se puede resumir como sigue, tomando como ejemplo la segunda

reflexión  $m = 2$ . La luz intermedia (de vector de onda  $\mathbf{k}_0 - 2\mathbf{q}$  es oblicua: los vectores de polarización correspondientes no están ambos en el plano  $xy$ ; solamente su proyección en este plano es el que contribuye a la amplitud; esta complicación se describe matemáticamente por un operador de proyección  $\hat{P}$ . La amplitud de segundo orden es entonces proporcional a  $\hat{M}\hat{P}\hat{M}$ , y ésta no se desvanece en general.

## 2.7. Método de la Aproximación Homogénea por Pedazos.

A continuación se describe el método de la aproximación homogénea por pedazos utilizado para calcular numéricamente la matriz de transferencia. Esta matriz a su vez nos permite encontrar la matriz de dispersión mediante la expresión 2.71, de donde se obtienen los coeficientes de reflexión y transmisión del sistema físico en estudio. El cuadrado de la magnitud de estos coeficientes son las reflectancias y transmitancia correspondientes. Este método usualmente se emplea junto con el de Berreman [61] para medios estratificados, donde las constantes dieléctricas entre una capa y la siguiente no son tan distintas entre si.

El método de la aproximación homogénea por pedazos se ha aplicado con éxito a STFs y a esmécticos quirales [62, 63]. En este método, el material, el cual es inhomogéneo a lo largo del eje  $z$ , se divide en una serie de rebanadas, o piezas perpendiculares a este eje, cada una de grosor  $\Delta z_{s1}$ . Cada rebanada se trata como si fuera homogénea con su tensor de permitividad tomado en el centro de la rebanada. En el caso de las STFs quirales, el tensor dieléctrico es una función continua de  $z$ . Puesto que las rebanadas se toman delgadas para mejorar el cálculo, la diferencia entre una tensor dieléctrico en el centro de una rebanada y en el centro de la rebanada siguiente, no es grande.

En un medio con tensor de permitividad uniforme,  $[\mathbf{P}'(\zeta, \kappa, \Omega)]$  es independiente de  $\zeta$  [64] donde a  $\zeta = \frac{\pi z}{\Omega}$  se le llama la distancia axial normalizada,  $\Omega$  es el período estructural a lo largo de  $z$ , y la solución de una ecuación diferencial ordinaria matricial de la forma

$$\frac{d}{d\zeta}[\mathbf{f}'(\zeta, \kappa, \psi)] = \frac{i\Omega}{\pi}[\mathbf{P}'(\zeta, \kappa, \Omega)] \cdot [\mathbf{f}'(\zeta, \kappa, \psi)] \quad (2.86)$$

como lo es la ecuación (2.37) se puede escribir en forma cerrada como [82]

2.7. MÉTODO DE LA APROXIMACIÓN HOMOGÉNEA POR PEDAZOS.

---

$$[\mathbf{f}'(\zeta, \kappa, \psi)] = \exp \left\{ \frac{i\Omega}{\pi} [\mathbf{P}'(\kappa, \psi)] \Delta\zeta \right\} [\mathbf{f}(\zeta, \kappa, \psi)], \quad \Delta\zeta = \zeta' - \zeta. \quad (2.87)$$

Por lo tanto, si  $\zeta_{j-1}$  representa la distancia axial normalizada del comienzo de la rebanada  $j$ -ésima y  $\Delta\zeta_{sl}$  es el grosor de la rebanada normalizada, la transferencia de los campos electromagnéticos a través de la rebanada se expresa por

$$[\mathbf{f}'(\zeta, \kappa, \psi)] = \exp \left\{ \frac{i\Omega}{\pi} [\mathbf{P}'(\zeta_{j-1} + \frac{\Delta\zeta_{sl}}{2}, \kappa, \psi)] \Delta\zeta_{sl} \right\} [\mathbf{f}(\zeta_{j-1}, \kappa, \psi)], \quad j = 1, 2, 3... \quad (2.88)$$

Denotando al matrizante que describe la propagación a través de la rebanada  $j$ -ésima por

$$[\mathbf{M}'_j(\kappa, \psi)] = \exp \left\{ \frac{i\Omega}{\pi} [\mathbf{P}'(\zeta_{j-1} + \frac{\Delta\zeta_{sl}}{2}, \kappa, \psi)] \Delta\zeta_{sl} \right\}, \quad (2.89)$$

vemos que la propagación a través de una distancia axial normalizada  $\zeta = N_{sl}\Delta\zeta_{sl}$  se describe por

$$[\mathbf{M}'(\zeta, \kappa, \psi)] \approx [\mathbf{M}'_{N_{sl}}(\kappa, \psi)] [\mathbf{M}'_{N_{sl}-1}(\kappa, \psi)] \dots [\mathbf{M}'_1(\kappa, \psi)], \quad (2.90)$$

donde el número de rebanadas  $N_{sl}$  debe ser adecuada para una solución convergente. Cabe mencionar aquí, que las matrices de transferencia en cada rebanada se diagonalizan en el método de Berreman, mientras que en el método de la aproximación homogénea a pedazos no.

Para ejecutar el calculo de  $[\mathbf{M}'(\zeta, \kappa, \psi)]$  por medio de (2.90), la matriz exponencial en (2.89) se debe determinar. Ahora, como

$$\begin{aligned} & \exp \left( \frac{i\Omega}{\pi} [\mathbf{P}'(\zeta_{j-1} + \frac{\Delta\zeta_{sl}}{2}, \kappa, \psi)] \Delta\zeta_{sl} \right) \\ &= [\mathbf{I}] + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{i\Omega}{\pi} \Delta\zeta_{sl} \right)^n [\mathbf{P}'(\zeta_{j-1} + \frac{\Delta\zeta_{sl}}{2}, \kappa, \psi)]^n \end{aligned} \quad (2.91)$$

es una serie infinita, la suma de matrices en el lado derecho de (2.91) se calcula término por término. Siguiendo a Venugopal y Lakhtakia [62], la suma se detiene en el valor de  $n$  para el cual los cambios en todos los elementos de la suma de matrices es menor o igual a una parte en  $10^{12}$ . Hay que notar que el lado izquierdo de (2.91) se puede evaluar por medio de la diagonalización de  $[\mathbf{P}'(\zeta_{j-1} + \frac{\Delta\zeta_{sl}}{2}, \kappa, \psi)]$ , siguiendo el análisis de eigenvalores de [65], dado que

## 2.7. MÉTODO DE LA APROXIMACIÓN HOMOGÉNEA POR PEDAZOS.

---

los eigenvalores no tienen otra multiplicidad geométrica más que la unidad [82].

La precisión del método de la aproximación homogénea por pedazos se controla por medio de  $\Delta\zeta_{sl}$ . Sin embargo, no hay una forma general de saber, por adelantado, que tan delgadas deben ser las rebanadas para obtener una precisión particular en el cálculo. Para obtener un grado de precisión deseado, se debe repetir el cálculo varias veces, incrementando el número de rebanadas cada vez, y observar la estabilización de las transmitancias y reflectancias. Se llevan a cabo una serie de cálculos para ver como  $\Delta\zeta_{sl}$  varía como función de los parámetros que describen la onda plana incidente y la STF quiral.

## Capítulo 3

# Sintonización Electro-óptica de Materiales Estructuralmente Quirales (MEQs)

En este capítulo se presenta la teoría relacionada con la realización y el mejoramiento del fenómeno Bragg circular debido a la aplicación de voltaje de corriente directa. Es decir el voltaje aplicado puede abrir o cerrar las bandas de transmisión o reflexión donde se presenta este fenómeno, que tiene como resultado aplicaciones de conmutación en óptica, así como aplicaciones para la reflexión de luz polarizada circularmente y la sintonización en la longitud de onda en la que este fenómeno se observa. Las posibilidades de obtener filtros más delgados y la manipulación eléctrica del fenómeno Bragg dependen de la clase cristalográfica así como también de los parámetros constitutivos del material estructuralmente quiral (MEQ).

La teoría de la sintonización electro-óptica del régimen de Bragg, que se expone en este capítulo, es para STF's quirales que presentan efecto Pockels, sin defecto de torsión. Sin embargo, la teoría es igualmente aplicable cuando el defecto está presente. El defecto de torsión de  $90^0$  genera un agujero espectral, debido al modo localizado o resonante, en el centro del régimen de Bragg circular, que se encuentra en el mismo intervalo de longitudes de onda que en el caso de que no existiera el defecto. Esto es compatible con los resultados encontrados en MEQ con un defecto de torsión de  $90^0$  (que no presentan efecto Pockels) [5, 10].

Es importante mencionar aquí, que debido al régimen de Bragg circular y al modo resonante que se presentan en las STF's quirales con un defecto de

---

torsión, éstas podrían utilizarse como filtros de polarización, sintonizadores de banda estrecha de longitudes de onda, resonadores en láseres y almacenadores de energía óptica.

Se expone el fenómeno Pockels, que nos permite sintonizar eléctricamente los espectros ópticos de transmitancia y reflectancia del sistema. Esta sintonización se debe a que los bordes del régimen de Bragg circular y la frecuencia del defecto, que se encuentra a la mitad del régimen de Bragg, dependen de las constantes dieléctricas y a su vez éstas dependen linealmente del campo eléctrico aplicado.

Todos los materiales biaxiales muestran puntos singulares en sus curvas de vector de onda, donde estas curvas se intersectan y se les llama pseudo-isotrópicos. Para valores particulares del campo eléctrico aplicado y el ángulo de inclinación del material, podemos encontrar estos puntos pseudo-isotrópicos donde el campo eléctrico ha transformado al elipsoide dieléctrico en una esfera y por lo tanto, los índices de refracción se degeneran en uno y el material se comporta como si fuera isotrópico para algunas propiedades ópticas, como por ejemplo, el régimen de Bragg se cierra en estos puntos. La teoría relacionada con el tensor dieléctrico y los puntos pseudo-isotrópicos también se exponen en este capítulo ya que es esencial para la comprensión e interpretación de los resultados.

Como anteriormente se ha mencionado el fenómeno Bragg consiste en la reflexión de luz polarizada circularmente de una lateralidad en un intervalo de onda generalmente a incidencia normal, mientras que luz de lateralidad opuesta es transmitida por el medio. Esto permite la separación entre ondas planas circularmente polarizadas izquierda (CPI) y derecha (CPD). Este fenómeno se presenta en materiales cuyas propiedades electromagnéticas constitutivas son inhomogéneas periódicamente en la dirección de propagación de la luz, con la condición de que el grosor del material sea suficientemente grande para así tener un gran número de períodos. Por lo tanto el estudio de este problema se lleva a cabo generalmente en bloques de un material helicoidal o MEQ. Éste representa un problema de condiciones a la frontera de la reflexión y transmisión de una onda plana debido al bloque, que es formulado en términos de una ecuación diferencial ordinaria matricial de  $4 \times 4$ . Este bloque de MEQ puede pertenecer localmente a una de las 20 clases de grupos de simetría puntual.

Se presentan los resultados obtenidos al considerar el material como localmente isotrópico, uniaxial o biaxial, al estar sujeto a un campo eléctrico *cd* externo a lo largo del eje de inhomogeneidad quiral.

### 3.1. EFECTO POCKELS

---

El estudio de este fenómeno también se ha llevado a cabo a considerando un campo eléctrico arbitrario, considerando incidencia oblicua, por lo que al final del capítulo se presentan los resultados más importantes en estos casos [15].

Si el material es isotrópico evidentemente el fenómeno Bragg no depende del estado de polarización de la onda que incide normalmente. El material debe ser anisotrópico para que el fenómeno Bragg discrimine entre dos estados de polarización mutuamente ortogonales [66].

La periodicidad se produce de una quiralidad estructural, es decir, una variación helicoidal de la anisotropía a lo largo de un eje fijo, en cristales líquidos colestéricos [6] y películas delgadas esculpidas quirales [67], las cuales ejemplifican a los MEQs. Estos dos tipos de MEQs son inhomogéneos continuamente en la dirección del grosor. Estos también pueden ser continuos a pedazos, como se propuso hace aproximadamente 140 años por Reusch [68] y se ha extendido recientemente por Hodgkinson y colaboradores [69]. Como la periodicidad viene de la quiralidad estructural, las ondas planas electromagnéticas con estado de polarización circular izquierda (CPI) y derecha (CPD) se reflejan y transmiten de forma diferente en el régimen de longitudes de onda del fenómeno Bragg, y entonces se llama fenómeno Bragg circular (FBC). La presencia del fenómeno Bragg por cristales líquidos colestéricos y películas delgadas esculpidas tiene como resultado la utilización de estos materiales en óptica como filtros de bloqueo de luz polarizada circularmente [6, 70].

El control del fenómeno Bragg circular es muy deseable para sintonizar el régimen de Bragg así como para aplicaciones de conmutación, es decir, abrir y cerrar las bandas de reflexión y transmisión en el régimen Bragg. Una manera de lograrlo es el uso de MEQs electro-ópticos, porque entonces es posible controlar eléctricamente el fenómeno Bragg circular.

Se ha encontrado que el efecto Pockels mejora el fenómeno Bragg circular [11, 83], tanto que podría producir este fenómeno aun si éste estuviera ausente cuando no hay un campo eléctrico  $cd$  aplicado. El voltaje  $cd$  se aplica generalmente a través del grosor del bloque del MEQ, es decir, paralelo al eje de inhomogeneidad.

### 3.1. Efecto Pockels

El efecto electro-óptico es el cambio en el índice de refracción de un material inducido por la presencia de un campo eléctrico  $cd$  ( o de baja frecuencia).

### 3.1. EFECTO POCKELS

---

En algunos materiales, el cambio en el índice de refracción depende linealmente de la magnitud del campo eléctrico aplicado. Este cambio se conoce como el efecto electro-óptico lineal o efecto Pockels. El efecto electro-óptico lineal se puede describir en términos de una polarización no lineal dada por

$$P_i(\omega) = 2 \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega = \omega + 0) E_j(\omega) E_k(0), \quad (3.1)$$

donde  $\chi_{ijk}$  es el tensor de susceptibilidad eléctrica y  $E_{j,k}$ ,  $j, k = 1, 2, 3$  son las componentes de campo eléctrico. Como el efecto electro-óptico lineal se puede describir por una susceptibilidad no lineal de segundo orden, el efecto electro-óptico lineal puede ocurrir solamente en materiales que no son centro simétricos.

En un material anisotrópico, la relación constitutiva entre los vectores de campo  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  tiene la forma

$$D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j \quad (3.2)$$

o, explícitamente

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Para un material sin pérdidas, no activo ópticamente, el tensor de permeabilidad dieléctrico  $\epsilon_{ij}$  está representado por una matriz simétrica real, la cual, por lo tanto, tiene seis elementos independientes, es decir,  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\epsilon_{zz}$ ,  $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$ ,  $\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx}$  y  $\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy}$ . Un resultado matemático general establece que cualquier matriz simétrica real se puede expresar en forma diagonal por medio de una transformación ortogonal. Físicamente, este resultado implica que existe un nuevo sistema de coordenadas  $(X, Y, Z)$  relacionado con el sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  de la ecuación (3.3) por la rotación de los ejes de coordenadas, en el cual la ecuación (3.3) tiene la forma mucho más simple

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Este nuevo sistema de coordenadas se conoce como el sistema de ejes principales, porque en éste el tensor dieléctrico se representa como una matriz diagonal.

### 3.1. EFECTO POCKELS

---

Ahora consideramos la densidad de energía por unidad de volumen

$$U = \frac{1}{8\pi} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{8\pi} \sum_j \epsilon_{ij} E_i E_j, \quad (3.5)$$

asociada con una onda propagándose a través de un medio anisotrópico. En el sistema de ejes de coordenados principales, la densidad de energía se puede representar como

$$U = \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{D_X^2}{\epsilon_{XX}} + \frac{D_Y^2}{\epsilon_{YY}} + \frac{D_Z^2}{\epsilon_{ZZ}} \right]. \quad (3.6)$$

Este resultado muestra que las superficies de densidad de energía constante en el espacio de  $\mathbf{D}$  son elipsoides. La forma de estas elipsoides se puede describir en términos de las coordenadas  $(X, Y, Z)$ . Si establecemos

$$X = \left(\frac{1}{8\pi U}\right)^{1/2} D_X, \quad Y = \left(\frac{1}{8\pi U}\right)^{1/2} D_Y, \quad Z = \left(\frac{1}{8\pi U}\right)^{1/2} D_Z, \quad (3.7)$$

la ecuación (3.6) se convierte en

$$\frac{X^2}{\epsilon_{XX}} + \frac{Y^2}{\epsilon_{YY}} + \frac{Z^2}{\epsilon_{ZZ}} = 1 \quad (3.8)$$

La superficie descrita por esta ecuación se conoce como la indicatriz óptica o el elipsoide de índices. La ecuación que describe el elipsoide de índices toma su forma más simple en el sistema de ejes principales; en otros sistemas coordenadas este elipsoide tiene una expresión general, la cual se escribe de la forma

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_1 x^2 + \left(\frac{1}{n^2}\right)_2 y^2 + \left(\frac{1}{n^2}\right)_3 z^2 + 2\left(\frac{1}{n^2}\right)_4 yz + 2\left(\frac{1}{n^2}\right)_5 xy + 2\left(\frac{1}{n^2}\right)_6 xy = 1 \quad (3.9)$$

Los coeficientes  $(1/n^2)_i$  son constantes ópticas que describen la indicatriz óptica en el nuevo sistema de coordenadas.

El elipsoide de índices se puede usar para describir las propiedades ópticas de un material anisotrópico por medio del siguiente procedimiento. Para cualquier dirección de propagación dada dentro del cristal, se construye un plano perpendicular al vector de propagación y que pasa a través del centro del elipsoide. Los ejes semimayor y semimenor de esta elipse nos dan los dos

### 3.1. EFECTO POCKELS

---

valores permitidos de índices de refracción para esta dirección de propagación particular; las orientaciones de estos ejes dan las direcciones de polarización del vector  $\mathbf{D}$  asociado con estos índices de refracción.

Después estudiaremos como la indicatriz óptica se modifica cuando el material está sujeto a un campo eléctrico constante o de baja frecuencia. Esa modificación se describe convenientemente en términos del tensor de impermeabilidad  $\eta_{ij}$  el cual está definido por la relación

$$E_i = \sum_j \eta_{ij} D_j. \quad (3.10)$$

Hay que notar que esta relación es el inverso de la que está dada por la ecuación (3.2), y por lo tanto  $\eta_{ij}$  es la matriz inversa de  $\epsilon_{ij}$ , esto es,  $\eta_{ij} = (\epsilon^{-1})_{ij}$ . Podemos expresar la indicatriz óptica en términos de los elementos del tensor de impermeabilidad notando que la densidad de energía es igual a  $U = (1/8\pi)\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = (1/8\pi)\sum_{ij} \eta_{ij} D_i D_j$  si ahora definimos las coordenadas  $x, y, z$  por medio de las relaciones  $x = D_x/(8\pi U)^{1/2}$ , etc., encontramos que la expresión para  $U$  como función de  $\mathbf{D}$  es

$$1 = \eta_{11}x^2 + \eta_{22}y^2 + \eta_{33}z^2 + 2\eta_{12}xy + 2\eta_{23}yz + 2\eta_{13}xz. \quad (3.11)$$

Por comparación de esta expresión para la indicatriz óptica con la dada por la ecuación (3.9), encontramos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n^2}\right)_1 &= \eta_{11}, & \left(\frac{1}{n^2}\right)_2 &= \eta_{22}, & \left(\frac{1}{n^2}\right)_3 &= \eta_{33}, \\ \left(\frac{1}{n^2}\right)_4 &= \eta_{23} = \eta_{32}, & \left(\frac{1}{n^2}\right)_5 &= \eta_{13} = \eta_{31}, & \left(\frac{1}{n^2}\right)_6 &= \eta_{12} = \eta_{21}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ahora asumimos que  $\eta_{ij}$  se puede expresar como una serie de potencias en las componentes de las magnitudes  $E_k$  de el campo eléctrico aplicado como

$$\eta_{ij} = \eta_{ij}^0 + \sum_k r_{ijk} E_k + \sum_{kl} s_{ijkl} E_k E_l + \dots \quad (3.13)$$

Aquí  $r_{ijk}$  es el tensor que describe el efecto electro-óptico lineal,  $s_{ijkl}$  es el tensor que describe el efecto electro-óptico cuadrático, etc. Consideramos que el medio es no disipativo, y por lo tanto, la absorción es nula. Así, el tensor de permitividad dieléctrica  $\epsilon_{ij}$  es real y simétrico, su inversa  $\eta_{ij}$  debe ser real y simétrica también, y consecuentemente el tensor electro-óptico  $r_{ijk}$  debe ser simétrico en sus primeros dos índices. Por esta razón, es conveniente

### 3.1. EFECTO POCKELS

---

representar el tensor de tercer rango  $r_{ijk}$  como una matriz bidimensional  $r_{hk}$  usando la notación contraída de acuerdo a la siguiente prescripción.

$$h = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ para } ij = 11, \\ 2 \text{ para } ij = 22, \\ 3 \text{ para } ij = 33, \\ 4 \text{ para } ij = 23, 32, \\ 5 \text{ para } ij = 13, 31, \\ 6 \text{ para } ij = 12, 21. \end{array} \right\}. \quad (3.14)$$

En términos de esta notación contraída, podemos expresar la modificación de orden más bajo de las constantes ópticas  $(1/n^2)_i$  que aparece en la expresión (3.9) para la indicatriz óptica como

$$\Delta \left( \frac{1}{n^2} \right)_i = \sum_j r_{ij} E_j, \quad (3.15)$$

donde hemos usado las ecuaciones (3.12) y (3.13). Esta relación se puede escribir explícitamente como

$$\begin{bmatrix} \Delta(1/n^2)_1 \\ \Delta(1/n^2)_2 \\ \Delta(1/n^2)_3 \\ \Delta(1/n^2)_4 \\ \Delta(1/n^2)_5 \\ \Delta(1/n^2)_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Las cantidades  $r_{ij}$  se conocen como los coeficientes electro-ópticos y dan la razón a la cual el coeficiente  $(1/n^2)_i$  cambia con el incremento de la magnitud del campo eléctrico.

El efecto electro-óptico lineal, como se mencionó al principio se desvanece para materiales que poseen simetría de inversión. Pero aún para materiales que no tienen esta simetría, donde los coeficientes no necesariamente se desvanecen, la forma de  $r_{ij}$  esta restringida por las propiedades de simetría que el material pueda poseer. Las propiedades de varios materiales electro-ópticos se resumen en la Tabla 3.1. En particular, nos interesan los coeficientes electro-ópticos del Niobato de Potasio ( $KNbO_3$ ). Puesto que ya se han hecho estudios teóricos del efecto electro-óptico sobre STFs quirales, sin defecto de torsión, tomando en cuenta que están hechas de  $KNbO_3$ , sus constantes electro-ópticas se encuentran en la referencia [14].

### 3.1. EFECTO POCKELS

Tabla 3.1. Propiedades de algunos materiales electro-ópticos [13, 14].			
Material	Grupo puntual	Coefficientes electro-ópticos ( $10^{-12} m/V$ )	Índice de refracción
Fosfato de dihidrógeno-amonio $NH_4H_2PO_4$ ( <i>ADP</i> )	$\bar{4}2m$	$r_{41} = 24.5$ $r_{63} = 8.5$	$n_o = 1.530$ $n_e = 1.483$ (a $0.5462 \mu m$ )
Fosfato de dihidrógeno-potasio $KH_2PO_4$ ( <i>KDP</i> )	$\bar{4}2m$	$r_{41} = 8.77$ $r_{63} = 10.5$	$n_o = 1.514$ $n_e = 1.472$ (a $0.5462 \mu m$ )
Fosfato de dideuterio-potasio $KE_2PO_4$ ( <i>KD*P</i> )	$\bar{4}2m$	$r_{41} = 8.8$ $r_{63} = 26.4$	$n_o = 1.508$ $n_e = 1.468$ (a $0.5461 \mu m$ )
Niobato de litio $LiNbO_3$	$3m$	$r_{13} = 9.6$ $r_{22} = 6.8$ $r_{33} = 30.9$ $r_{42} = 32.6$	$n_o = 2.3410$ $n_e = 2.2457$ (a $0.5 \mu m$ )
Tantalato de litio $LiTaO_3$	$3m$	$r_{13} = 8.4$ $r_{22} = -0.2$ $r_{33} = 30.5$ $r_{51} = 20$	$n_o = 2.176$ $n_e = 2.180$ (a $0.633 nm$ )
Titanato de bario $BaTiO_3$	$4mm$	$r_{13} = 19.5$ $r_{33} = 97$ $r_{42} = 1640$	$n_o = 2.488$ $n_e = 2.424$ (a $514 nm$ )
Niobato de estroncio-bario $Sr_{0.6}Ba_{0.4}NbO_6$ (SBN:60)	$4mm$	$r_{13} = 55$ $r_{33} = 224$ $r_{42} = 80$	$n_o = 2.367$ $n_e = 2.337$ (a $514 nm$ )
Niobato de Potasio $kNbO_3$	$mm2$	$r_{13} = 43$ $r_{23} = 6$ $r_{33} = 63.4$ $r_{42} = 450$ $r_{51} = 120$	$n_1 = 2.17$ $n_2 = 2.28$ $n_3 = 2.33$

## 3.2. Superficie del Vector de Onda en Cristales Biaxiales

Hay puntos donde las curvas de la superficie del vector de onda en cristales biaxiales se intersectan. En estos puntos de intersección, los índices de refracción del material se degeneran en uno. Por lo tanto el elipsoide dieléctrico se hace esférico. A estos puntos singulares se les llama pseudo-isotrópicos. Consideramos que la STF quiral está construida, en este caso particular, de Niobato de Potasio, que pertenece al grupo de simetría puntual cristalográfico  $mm2$ , que es ortorrómbico y biaxial. En la superficie del vector de onda de los medios biaxiales se encuentran puntos singulares donde sus constantes dieléctricas se degeneran en una, esto implica que el elipsoide dieléctrico se hace esférico. A estos puntos se les llama pseudo-isotrópicos debido a que aquí, los medios presentan características ópticas parecidas a los medios isotrópicos.

En el caso de los cristales biaxiales los tres valores principales del tensor dieléctrico  $\epsilon_{ik}$  son diferentes. Los sistemas triclinico, monoclinico y ortorrómbico son de este tipo. En los sistemas triclinicos, la posición de los ejes dieléctricos principales no está relacionada con alguna dirección cristalográfica específica; en particular, varía con la frecuencia, como todas las componentes de  $\epsilon_{ik}$ . En los cristales del sistema monoclinico, uno de los ejes dieléctricos principales está cristalográficamente fijo. Ésta coincide con el eje de simetría de  $180^0$ , o bien es perpendicular al plano de simetría. La posición de los otros dos ejes principales depende de la frecuencia. Finalmente, en los cristales del sistema ortorrómbico, la posición de los tres ejes principales está fija y deben coincidir con los tres ejes de simetría de  $180^0$  mutuamente perpendiculares. En la Fig. 3.1 se observan los sistemas cristalográficos mencionados.

El estudio de las propiedades ópticas de los cristales biaxiales involucra la consideración de la ecuación de Fresnel en su forma general, la cual es una de las ecuaciones fundamentales de la óptica de cristales:

$$\begin{aligned}
 0 = & \tilde{n}^2(\epsilon^{(x)}\tilde{n}_x^2 + \epsilon^{(y)}\tilde{n}_y^2 + \epsilon^{(z)}\tilde{n}_z^2) - \\
 & [\epsilon^{(x)}\tilde{n}_x^2(\epsilon^{(y)} + \epsilon^{(z)}) + \epsilon^{(y)}\tilde{n}_y^2(\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(z)}) + \epsilon^{(z)}\tilde{n}_z^2(\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(y)})] + \\
 & \epsilon^{(x)}\epsilon^{(y)}\epsilon^{(z)}.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

donde  $\tilde{n}_x$ ,  $\tilde{n}_y$  y  $\tilde{n}_z$  son un grupo de vectores ortonormales que se toman como sistema de referencia para medir la propagación de la luz en el sistema.

### 3.2. SUPERFICIE DEL VECTOR DE ONDA EN CRISTALES BIAXIALES

---

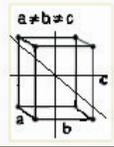
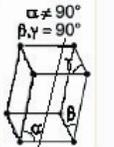
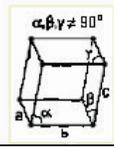
Ortorrónico	$a \neq b \neq c \neq a$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	
Monoclínico	$a \neq b \neq c \neq a$	$\alpha = \gamma = 90^\circ; \beta \neq 90^\circ$	
Triclínico	$a \neq b \neq c \neq a$	$\alpha \neq \beta \neq \gamma$ (Todos distintos de $90^\circ$ )	

Figura 3.1: En los cristales del sistema ortorrónico, la posición de los tres ejes principales está fija y deben coincidir con los tres ejes de simetría de  $180^\circ$  mutuamente perpendiculares. En los cristales del sistema monoclínico, uno de los ejes dieléctricos principales está cristalográficamente fijo. Éste coincide con el eje de simetría de  $180^\circ$ , o bien es perpendicular al plano de simetría. En los sistemas triclínicos, la posición de los ejes dieléctricos principales no está relacionada con alguna dirección cristalográfica específica.

### 3.2. SUPERFICIE DEL VECTOR DE ONDA EN CRISTALES BIAXIALES

---

Ésta determina implícitamente la relación de dispersión, es decir, la frecuencia como función del vector de onda. Los valores principales  $\epsilon_i$  son funciones de la frecuencia, y por lo tanto son, en algunos casos, las direcciones de los ejes principales del tensor  $\epsilon_{ik}$ . Para ondas monocromáticas, sin embargo,  $\omega$ , y por lo tanto, todas las  $\epsilon_i$ , son constantes dadas y la ecuación de Fresnel entonces da la magnitud del vector de onda como función de su dirección. Cuando la dirección de  $\tilde{\mathbf{n}}$  está dada, la ecuación de Fresnel es una ecuación cuadrática, para  $\tilde{\mathbf{n}}^2$ , con coeficientes reales. Por lo tanto dos diferentes magnitudes del vector de onda corresponden, en general, a cada dirección de  $\tilde{\mathbf{n}}$ .

Supongamos sin pérdida de generalidad

$$\epsilon^{(x)} < \epsilon^{(y)} < \epsilon^{(z)}. \quad (3.18)$$

Para establecer la forma de la superficie definida por la ecuación (3.17), comencemos por encontrar sus intersecciones con los planos coordenados.

Haciendo  $\tilde{n}_z = 0$  en la ecuación (3.17), encontramos que el lado derecho es el producto de dos factores:

$$(\tilde{\mathbf{n}}^2 - \epsilon^{(z)})(\epsilon^{(x)}\tilde{n}_x^2 + \epsilon^{(y)}\tilde{n}_y^2 - \epsilon^{(x)}\epsilon^{(y)}) = 0. \quad (3.19)$$

De aquí vemos que la sección del plano  $xy$  consiste en el círculo

$$\tilde{\mathbf{n}}^2 = \epsilon^{(z)} \quad (3.20)$$

y la elipse

$$\frac{\tilde{n}_x^2}{\epsilon^{(y)}} + \frac{\tilde{n}_y^2}{\epsilon^{(x)}} = 1 \quad (3.21)$$

y por la consideración (3.18) la elipse descansa dentro del círculo. Análogamente, encontramos que las secciones para los planos  $yz$  y  $xz$  se componen también de una elipse y un círculo; en el plano  $yz$  la elipse descansa fuera del círculo, y en el plano  $xz$  se intersectan. Así la superficie del vector de onda se auto intersecta, como se muestra en la Fig. 3.2, donde se dibuja un octante.

Esta superficie tiene cuatro puntos singulares de auto intersección, uno en cada cuadrante del plano  $xz$ . Los puntos singulares de una superficie cuya ecuación es  $f(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, \tilde{n}_z) = 0$  están dados cuando las tres primeras derivadas de la función  $f$  son cero. Diferenciando la ecuación (3.17), obtenemos las ecuaciones

### 3.2. SUPERFICIE DEL VECTOR DE ONDA EN CRISTALES BIAxiaLES

---

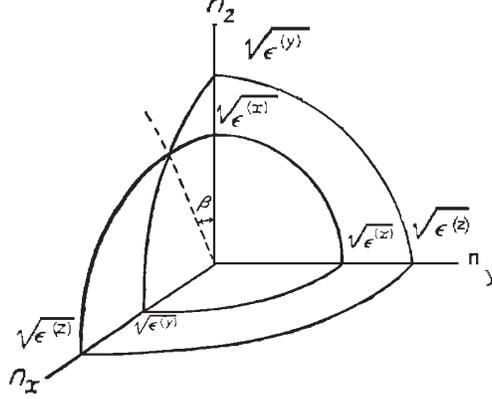


Figura 3.2: Superficie del vector de onda, se auto interseca en cuatro puntos singulares. Una intersección en cada cuadrante en el plano  $xz$ .

$$\begin{aligned}
 \tilde{n}_x [\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(y)} + \epsilon^{(z)}) - \epsilon^{(x)}\tilde{n}^2 - (\epsilon^{(x)}\tilde{n}_x^2 + \epsilon^{(y)}\tilde{n}_y^2 + \epsilon^{(z)}\tilde{n}_z^2)] &= 0, \\
 \tilde{n}_y [\epsilon^{(y)}(\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(z)}) - \epsilon^{(y)}\tilde{n}^2 - (\epsilon^{(x)}\tilde{n}_x^2 + \epsilon^{(y)}\tilde{n}_y^2 + \epsilon^{(z)}\tilde{n}_z^2)] &= 0, \\
 \tilde{n}_z [\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(x)} + \epsilon^{(y)}) - \epsilon^{(z)}\tilde{n}^2 - (\epsilon^{(x)}\tilde{n}_x^2 + \epsilon^{(y)}\tilde{n}_y^2 + \epsilon^{(z)}\tilde{n}_z^2)] &= 0;
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

que junto con la ecuación (3.17) se deben satisfacer. Como sabemos que las direcciones requeridas de  $\tilde{\mathbf{n}}$  se encuentran en el plano  $xz$ , debemos poner  $\tilde{n}_y = 0$  y de las dos ecuaciones que nos quedan obtenemos inmediatamente<sup>1</sup>

$$\tilde{n}_x^2 = \frac{\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)})}{\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(x)}}, \quad \tilde{n}_z^2 = \frac{\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)})}{\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(x)}}. \tag{3.23}$$

Las direcciones de estos vectores  $\mathbf{n}$  están inclinadas hacia el eje  $z$  a un ángulo  $\beta$  tal que

$$\frac{\tilde{n}_x}{\tilde{n}_z} = \pm \tan \beta = \pm \sqrt{\frac{\epsilon^{(z)}(\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)})}{\epsilon^{(x)}(\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)})}}. \tag{3.24}$$

Esta fórmula determina líneas en dos direcciones en el plano  $xz$ , cada una de las cuales pasa a través de dos puntos singulares opuestos y forma a un

<sup>1</sup>La solución que así se encuentra es la única solución real de las ecuaciones 3.22. Si ninguno de  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  es cero, las tres ecuaciones 3.22 son inconsistentes. Si  $n_x$  o  $n_z$  es cero las soluciones son imaginarias.

### 3.3. PUNTO PSEUDO-ISOTRÓPICO

---

ángulo  $\beta$  del eje  $z$ . A estas líneas se les llama los ejes ópticos o binormales del cristal; uno de ellos se muestra con línea punteada en la Fig. 3.2. Las direcciones de los ejes ópticos son las únicas para las que el vector de onda tiene solamente una magnitud<sup>2</sup>.

Las propiedades de la superficie de los rayos son similares. Para deducir una fórmula correspondiente a los rayos, reemplazamos  $\tilde{\mathbf{n}}$  por el vector del rayo  $\mathbf{s}$  y  $\epsilon$  por  $1/\epsilon$ . En particular hay dos ejes de rayos ópticos o biradiales, también en el plano  $xz$  y a un ángulo  $\gamma$  del eje  $z$ , donde

$$\tan \gamma = \sqrt{\frac{\epsilon^{(y)} - \epsilon^{(x)}}{\epsilon^{(z)} - \epsilon^{(y)}}} = \sqrt{\frac{\epsilon^{(x)}}{\epsilon^{(z)}}} \tan \beta. \quad (3.25)$$

ya que  $\epsilon^{(x)} < \epsilon^{(y)}$ ,  $\gamma < \beta$ .

Las direcciones de los vectores correspondientes  $\tilde{\mathbf{n}}$  y  $\mathbf{s}$  son las mismas solamente para ondas propagándose a lo largo de uno de los ejes coordenados (es decir, los ejes dieléctricos principales). Si  $\tilde{\mathbf{n}}$  se encuentra en uno e los planos coordenados,  $\mathbf{s}$  se encuentra en este plano también. Esta regla, sin embargo, está sujeta a una importante excepción para vectores de onda en la dirección de los ejes ópticos.

### 3.3. Punto Pseudo-isotrópico

En esta sección se muestra teóricamente que bajo cierta condición, la cual depende críticamente de las constantes dieléctricas principales y sus orientaciones, las propiedades ópticas experimentan cambios dramáticos. La razón por la que este comportamiento crítico aparece no se reporta comúnmente en cristales líquidos helicoidales tal vez por que su biaxialidad local es tan débil que se puede ignorar.

La geometría de la estructura se muestra en la Fig. 3.3, donde el elipsoide del tensor dieléctrico o de índices de refracción está caracterizado por los tres valores principales:  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  y  $\epsilon_3$  con sus orientaciones en el sistema  $xyz$  dados por los ángulos de Euler  $\theta'$ ,  $\phi$  y  $\psi$ . En el caso de un material perteneciente a la clase ortorrómbica, los valores principales de las constantes dieléctricas, se obtienen en un sistema de ejes principales, donde el tensor dieléctrico esta

---

<sup>2</sup>En el elipsoide de índices de difracción, Ec. 3.8, las binormales son las direcciones perpendiculares a las secciones circulares del elipsoide. Un elipsoide tiene dos de estas direcciones.

### 3.3. PUNTO PSEUDO-ISOTRÓPICO

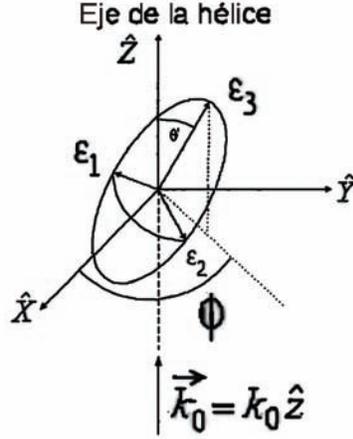


Figura 3.3: Esquema del elipsoide tensorial dieléctrico o de índice de refracción para una estructura biaxial helicoidal. La luz se propaga a lo largo del eje de la hélice

diagonalizado. El ángulo  $\theta'$  es conocido como el ángulo de inclinación, que para las STF's está relacionado con el ángulo de inclinación de las columnas  $\chi$ , mientras que el ángulo azimutal  $\phi = qz$  cambia linealmente con  $z$ , resultando en una estructura helicoidal con período espacial  $P$ , en el caso de las STF's  $P = 2\Omega$ , y con vector de onda  $q = 2\pi/P$ . Haciendo uso del método de la matriz de  $4 \times 4$ , que discutimos en la sección 2.1.2 [61], las ecuaciones de Maxwell se reducen a la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = i\kappa_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \epsilon_{xx} - \epsilon_{xz}\epsilon_{zx}/\epsilon_{zz} & 0 & \epsilon_{xy} - \epsilon_{xz}\epsilon_{zy}/\epsilon_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \epsilon_{yx} - \epsilon_{yz} - \epsilon_{zx}/\epsilon_{zz} & 0 & \epsilon_{yy} - \epsilon_{yz} - \epsilon_{zy}/\epsilon_{zz} & 0 \end{pmatrix} \Psi \quad (3.26)$$

donde  $\Psi$  es un vector columna con sus elementos las componentes transversales de los campos electromagnéticos.

El sistema de ecuaciones (3.26) es lineal con coeficientes periódicos que tienen soluciones del tipo Bloch- Lyapunov [71]. El sistema 3.26, para  $\psi = 0$ , se puede escribir como

### 3.3. PUNTO PSEUDO-ISOTRÓPICO

---

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = i\kappa_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \epsilon_a + \delta \cos 2qz & 0 & \delta \operatorname{sen} 2qz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \delta \operatorname{sen} 2qz & 0 & \epsilon_a + \delta \cos 2qz & 0 \end{pmatrix} \Psi \quad (3.27)$$

donde  $\epsilon_a = \frac{1}{2}(\epsilon_s + \epsilon_f)$  y  $\delta = \frac{1}{2}(\epsilon_s - \epsilon_f)$  representan las constantes dieléctricas promedio y la anisotropía dieléctrica del medio homogéneo. Los subíndices  $s$  y  $f$  indican los modos lentos y rápidos:  $\epsilon_f = \epsilon_2$  y  $\epsilon_s = \epsilon_1\epsilon_3/\epsilon_{zz}$  los cuales para el caso uniaxial se reduce a los modos ordinario y extraordinario. Una forma analítica de la solución se puede encontrar al transformar el sistema de ecuaciones (3.26) a un sistema con coeficientes constantes [76].

La solución general consiste de dos ondas de Bloch propagándose hacia adelante, generalmente polarizadas elípticamente con el sentido de rotación igual que la hélice para una de ellas, mientras que la otra onda tiene rotación opuesta.

Los vectores de onda están dados por las siguiente expresión [12]:

$$k_{0h,sh} = k_0 n_a \sqrt{1 + \lambda_r^2 \mp \sqrt{4\lambda_r^2 + \delta_r^2}}. \quad (3.28)$$

Donde  $\lambda_r = \lambda_0/(Pn_a)$ , donde  $P$  es el período espacial del material, se le llama la longitud reducida y  $\delta_r = -\delta/\epsilon_a$  es la anisotropía dieléctrica relativa efectiva con  $n_a = \sqrt{\epsilon_a}$  el índice refractivo promedio efectivo. Ya que usualmente  $\delta_r^2 \ll 1$  los dos eigen-modos son ondas polarizadas casi circularmente. De la ecuación (3.28) obtenemos que el modo con helicidad opuesta tiene siempre un vector de onda real, así se propaga sin atenuación. Por otra parte, el modo con la misma helicidad tiene un vector de onda imaginario puro en un rango de longitudes de onda el cual satisface

$$\sqrt{1 - |\delta_r|} < \lambda_r < \sqrt{1 + |\delta_r|}. \quad (3.29)$$

Esto define una banda de reflexión de tipo Bragg para ondas polarizadas circularmente con la misma helicidad que la del medio. El centro de la banda de reflexión ocurre en  $\lambda_r = 1$  lo cual significa que sucede cuando la longitud de onda de la luz dentro de la estructura coincide con su paso, como se espera de la difracción de Bragg. Las propiedades de la eigen-ondas de Bloch se han discutido en la Ref. [76] para ciertos casos especiales así como la solución general que se encuentra por el método de la matriz de propagación. Sin embargo, aquí nos interesamos en la ultra-sensibilidad o comportamiento

### 3.3. PUNTO PSEUDO-ISOTRÓPICO

---

crítico de las propiedades ópticas lo cual ocurre únicamente en los sistemas biaxiales.

Si la parte dependiente de  $z$  de la matriz de  $4 \times 4$  se considera como una perturbación, las soluciones no perturbadas de la Ec. (3.27) son las ondas planas  $TE$  y  $TM$  con el mismo vector de onda:  $k_0 n_a$ . Por otra parte, si consideramos una muy pequeña perturbación, donde  $0 < |\delta| \ll 1$ , podemos obtener un gran efecto dependiendo de que tan lejos esta el valor de  $\lambda_r$  de la posición del pico de reflexión de Bragg. La perturbación periódica remueve la degeneración de los eigenmodos. Para aclarar este efecto desarrollamos los vectores de onda de la Ec. (3.28) en series de potencias:

$$\begin{aligned} \kappa_{0h} &= \kappa_0 n_a \left\{ 1 + \lambda_r + \frac{\delta_r^2}{8\lambda_r(1-\lambda_r)} + \dots \right\}, \\ \kappa_{sh} &= \kappa_0 n_a \left\{ 1 - \lambda_r - \frac{\delta_r^2}{8\lambda_r(1-\lambda_r)} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para  $\lambda_r \gg 1$  y  $|\delta_r| \ll 1$  el medio se comporta como un medio isotrópico con las ondas planas  $TE$  y  $TM$  como eigen-ondas. Para  $\lambda_r \ll 1$  y  $|\delta_r| \ll 1$  el medio se comporta como un medio homogéneo anisotrópico. Pero ¿que sucede cuando tenemos una muy pequeña perturbación  $|\delta_r| \ll 1$  pero  $\lambda_r \cong 1$ ? La ecuación (3.30) muestra que en este caso el modo con la helicidad opuesta es una función suave de  $|\delta_r|$  y la cantidad de cambio relativa del vector de onda es del orden de  $\delta_r^2/8$ . Por otra parte, para el modo con la misma helicidad este cambio es  $-\delta_r^2/(8\xi)$ , donde  $\xi = 1 - \lambda_r$  es la desviación de la resonancia de Bragg. De aquí que en el centro de la banda de reflexión y dentro de una muy pequeña desviación de la condición de Bragg comparable a  $\delta_r^2$  se puede obtener un gran efecto óptico inducido por una pequeña perturbación. Bajo una perturbación muy pequeña el medio cambia de un medio ópticamente isotrópico a un medio altamente anisotrópico no uniforme con reflexión de Bragg.

Los parámetros involucrados en la determinación del punto crítico o pseudo-isotrópico se puede encontrar al establecer  $\delta = 0$ , el cual después de manipulaciones algebraicas conduce al siguiente resultado:

$$\text{sen}^2 \theta' = \frac{\epsilon_3(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_2(\epsilon_3 - \epsilon_1)}, \quad (3.31)$$

mostrando que la condición se satisface para una cierta combinación de los valores principales de las constantes dieléctricas y el ángulo de inclinación o tilt. En el caso de nuestro interés los valores principales dependen a su vez del

### 3.4. FORMULACIÓN TEÓRICA

---

ángulo de tilt y del campo eléctrico externo aplicado ya que el material presenta efecto Pockels. Hay que notar también que para un medio localmente uniaxial el único ángulo de tilt que satisface la condición (3.31) es  $\theta' = 0$ , que representa el caso trivial de la estructura uniaxial homogénea. De aquí que el punto crítico es una característica única de la biaxialidad local ( $\epsilon_2 - \epsilon_1$ ). En el punto crítico el medio es localmente biaxial y helicoidal pero ópticamente se comporta como un medio isotrópico. El punto crítico depende de la frecuencia de la luz sólo indirectamente a través de los parámetros  $\epsilon_i$  para medios muy dispersivos. Los medios helicoidales bi-anisotrópicos pueden satisfacer la condición (3.31); sin embargo, el comportamiento crítico no se reporta con frecuencia en la teoría de los cristales líquidos helicoidales relacionados, probablemente porque su biaxialidad local es usualmente débil tal que el punto crítico está cercano a la transición de fase para el estado donde  $\theta' = 0$  [12].

En la referencia [12] se muestra que con una pequeña perturbación en el medio, cuando se cumplen las condiciones dadas por (3.31), se produce un cambio de su comportamiento como medio isotrópico a un medio helicoidal que exhibe un pico de reflexión de Bragg fuerte y delgado, lo cual es debido a que la anisotropía dieléctrica efectiva está muy cercana al ángulo crítico. También, se muestra que las propiedades ópticas como la actividad óptica puede ser considerablemente mayor que en otros casos.

Este punto crítico es de interés práctico tanto desde los puntos de vista fundamental y aplicado porque pequeñas perturbaciones cerca de este punto se pueden inducir, por ejemplo, por la temperatura, la presión, o campos externos eléctricos y magnéticos. La respuesta óptica de esta perturbación se podría usar entonces como un conmutador óptico rápido, un sensor o como una técnica para estudiar las propiedades de la estructura helicoidal bianisotrópica.

## 3.4. Formulación Teórica

Estamos interesados en la reflexión y transmisión de ondas planas debido a un bloque de MEQ de grosor  $L$ . El eje de quiralidad estructural del MEQ se designa como el eje  $z$ , y el material está sujeto a un campo eléctrico  $cd$   $\mathbf{E}^{cd} = E_z^{cd} \mathbf{u}_z$ , (más adelante se estudiará el caso general donde el campo eléctrico es arbitrario, es decir, la dirección del campo no es a lo largo del eje de inhomogeneidad). Las mitades de espacio  $z \leq 0$  y  $z \geq L$  están vacías. Una onda plana polarizada arbitrariamente incide ya sea normal u oblicuamente

### 3.5. EFECTO POCKELS EN UN MATERIAL ESTRUCTURALMENTE QUIRAL

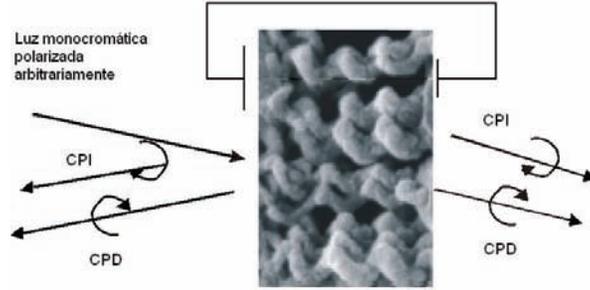


Figura 3.4: Bloque de MEQ sujeto a un campo eléctrico de baja frecuencia aplicado a lo largo del eje de la hélice, en el que incide luz monocromática.

desde la mitad del espacio  $z \leq 0$ . Como resultado, hay ondas planas reflejadas y transmitidas en las mitades de espacio  $z \leq 0$  y  $z \geq L$  respectivamente. Se debe resolver un problema de valores a la frontera para determinar los coeficientes de reflexión y transmisión, ver Fig. 3.4.

### 3.5. Efecto Pockels en un Material Estructuralmente Quiral

Para delinear las propiedades electro-ópticas del MEQ elegido, consideremos primero un material dieléctrico homogéneo (no disipativo) susceptible al efecto Pockels cuando está sujeto a un campo  $cd$   $\mathbf{E}^{cd}$ . El recíproco de la matriz de permitividad relativa óptica se reporta en la literatura usualmente como [13]

$$\bar{\epsilon}_{PE}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\epsilon_1^{(0)} + \sum_{K=1}^3 r_{1K} E_K^{cd} & \sum_{K=1}^3 r_{6K} E_K^{cd} & \sum_{K=1}^3 r_{5K} E_K^{cd} \\ \sum_{K=1}^3 r_{6K} E_K^{cd} & 1/\epsilon_2^{(0)} + \sum_{K=1}^3 r_{2K} E_K^{cd} & \sum_{K=1}^3 r_{4K} E_K^{cd} \\ \sum_{K=1}^3 r_{5K} E_K^{cd} & \sum_{K=1}^3 r_{4K} E_K^{cd} & 1/\epsilon_3^{(0)} + \sum_{K=1}^3 r_{3K} E_K^{cd} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

En el sistema de coordenadas Cartesiano principal (con ejes etiquetados como 1, 2 y 3) relevante a la estructura cristalográfica del material. Aquí  $E_{1,2,3}^{cd}$

### 3.6. TENSOR DIELÉCTRICO DE UN MATERIAL ESTRUCTURALMENTE QUIRAL

---

son las componentes Cartesianas del campo eléctrico  $cd$ ,  $\epsilon_{1,2,3}^{(0)}$  son las permitividades escalares relativas principales en el régimen óptico, mientras  $r_{JK}$  (con  $1 \leq J \leq 6$  y  $1 \leq K \leq 3$ ) son los coeficientes electro-ópticos en la notación abreviada tradicional de contracción de índices para representar tensores simétricos de segundo orden, que se han presentado en la sección 3.1 [13, 84].

Este material puede ser isotrópico, uniaxial o biaxial, dependiendo de los valores relativos de  $\epsilon_1^{(0)}$ ,  $\epsilon_2^{(0)}$ , y  $\epsilon_3^{(0)}$ . Además, este material puede pertenecer a una clase cristalográfica de grupos de simetría puntual, en concordancia con los valores relativos de los coeficientes electro-ópticos  $r_{JK}$ .

De las correcciones a primer orden en las componentes del campo eléctrico  $cd$ , obtenemos la aproximación lineal de (3.32)

$$\bar{\epsilon}_{PE} = \begin{pmatrix} \epsilon_1^{(0)}(1 - \epsilon_1^{(0)} \sum_{K=1}^3 r_{1K} E_K^{cd}) & -\epsilon_1^{(0)} \epsilon_2^{(0)} \sum_{K=1}^3 r_{6K} E_K^{cd} & -\epsilon_1^{(0)} \epsilon_3^{(0)} \sum_{K=1}^3 r_{5K} E_K^{cd} \\ -\epsilon_2^{(0)} \epsilon_1^{(0)} \sum_{K=1}^3 r_{6K} E_K^{cd} & \epsilon_2^{(0)}(1 - \epsilon_2^{(0)} \sum_{K=1}^3 r_{2K} E_K^{cd}) & -\epsilon_2^{(0)} \epsilon_3^{(0)} \sum_{K=1}^3 r_{4K} E_K^{cd} \\ -\epsilon_3^{(0)} \epsilon_1^{(0)} \sum_{K=1}^3 r_{5K} E_K^{cd} & -\epsilon_3^{(0)} \epsilon_2^{(0)} \sum_{K=1}^3 r_{4K} E_K^{cd} & \epsilon_3^{(0)}(1 - \epsilon_3^{(0)} \sum_{K=1}^3 r_{3K} E_K^{cd}) \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

### 3.6. Tensor Dieléctrico de un Material Estructuralmente Quiral

Como el MEQ electro-óptico tiene el eje  $z$  como su eje de inhomogeneidad quiral y está sujeto a un campo eléctrico  $cd$   $\mathbf{E}^{cd} = E_z^{cd} \mathbf{u}_z$ , la matriz de permitividad relativa óptica de este material, de acuerdo a lo discutido en la introducción del capítulo 2, se puede establecer como

$$\underline{\underline{\epsilon}}_r^{MEQ}(z) = \underline{\underline{S}}_z\left(\frac{h\pi z}{\Omega}\right) \cdot \underline{\underline{\hat{R}}}_y(\chi) \cdot \underline{\underline{\epsilon}}_{PE}^{(0)}(\omega) \cdot \underline{\underline{\hat{R}}}_y(\chi) \cdot \underline{\underline{S}}_z\left(\frac{h\pi z}{\Omega}\right). \quad (3.34)$$

En el caso en el que el MEQ presenta efecto Pockels,  $\underline{\underline{\epsilon}}_{PE}^{(0)}$  está especificado por (3.33).

$\underline{\underline{\hat{R}}}_y(\chi)$  es la matriz de inclinación o de "tilt"

### 3.7. PROPAGACIÓN DE CAMPOS ÓPTICOS EN UN MEQ

---

$$\widehat{\underline{R}}_y(\chi) = \begin{pmatrix} -\text{sen}\chi & 0 & \cos\chi \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos\chi & 0 & \text{sen}\chi \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

que involucra el ángulo  $\chi \in [0, \pi/2]$  con respecto al eje  $x$  en el plano  $xz$ . El uso de la matriz de rotación

$$\widehat{\underline{S}}_z(\zeta) = \begin{pmatrix} -\cos\zeta & -\text{sen}\zeta & 0 \\ \text{sen}\zeta & \cos\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

en (3.34) involucra la mitad del paso  $\Omega$  de un MEQ a lo largo del eje  $z$  y el parámetro de lateralidad  $h$ . Donde  $h = 1$  para lateralidad estructural derecha o  $h = -1$  para lateralidad izquierda. Dependiendo de las relaciones entre  $\epsilon_1^{(0)}$ ,  $\epsilon_2^{(0)}$  y  $\epsilon_3^{(0)}$ , un MEQ se puede clasificar como localmente isotrópico, localmente uniaxial o localmente biaxial, refiriéndonos como local a la simetría cristalográfica en cualquier plano  $z = \text{constante}$ .

Además para la configuración específica del campo eléctrico  $cd$ , tenemos

$$\begin{aligned} E_1^{cd} &= E_z^{cd} \cos\chi, \\ E_2^{cd} &= 0 \\ E_3^{cd} &= E_z^{cd} \text{sen}\chi, \end{aligned} \quad (3.37)$$

## 3.7. Propagación de campos ópticos en un MEQ

Las ecuaciones rotacionales de Maxwell para el MEQ están dadas por (ver Sec. 2.1)

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= i\omega\mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r}), \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) &= -i\omega\epsilon_0\epsilon^{MEQ}(z) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad 0 < z < L, \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  son las permitividad y a permeabilidad del espacio libre (es decir del vacío).

Como una onda plana incide oblicuamente en el MEQ, como se había visto en la sección 2.1.1,  $\forall z$  establecemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}(z) \exp[i\kappa(x \cos\psi + y \text{sen}\psi)], \quad (3.39)$$

### 3.7. PROPAGACIÓN DE CAMPOS ÓPTICOS EN UN MEQ

---

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}(z) \exp[i\kappa(x \cos \psi + y \operatorname{sen} \psi)] \quad (3.40)$$

donde el número de onda  $\kappa$  y el ángulo  $\psi$  están determinados por las condiciones de incidencia. La parte esencial de las ecuaciones rotacionales de Maxwell se puede establecer en términos del vector columna [85]

$$\bar{\Psi}(z) = \begin{pmatrix} e_x(z) \\ e_y(z) \\ h_x(z) \\ h_y(z) \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Dentro del MEQ, es ventajoso explotar la transformación de Oseen [85] definiendo el vector columna

$$\bar{\Psi}'(z) = \bar{M} \left( \frac{h\pi z}{\Omega} \right) \bar{\Psi}(z), \quad (3.42)$$

donde  $\bar{M}$  es la matriz unitaria de  $4 \times 4$

$$\bar{M}(\zeta) = \begin{pmatrix} \cos \zeta & \operatorname{sen} \zeta & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen} \zeta & \cos \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \zeta & \operatorname{sen} \zeta \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen} \zeta & \cos \zeta \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Siguiendo el procedimiento trazado por Lakhtakia y Weiglhofer [85], se ha establecido que  $\bar{\Psi}'(z)$  satisface la ecuación diferencial matricial ordinaria

$$\frac{d}{dz} \bar{\Psi}'(z) = i\bar{A}'(z) \cdot \bar{\Psi}'(z), \quad 0 < z < L, \quad (3.44)$$

donde la matriz  $\bar{A}'(z)$  está dada en el apéndice C. En esta matriz se definen nuevas variables,  $\alpha_{1,2,3}$ ,  $\epsilon_\eta$  y  $\delta_l$ , con  $\eta = d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, p, q, s$ , que se encuentran en el mismo apéndice y dependen del ángulo de inclinación del material, de las constante dieléctricas, del campo eléctrico externo aplicado y los coeficientes electro-ópticos.

Debido a la linealidad, la solución de la ecuación diferencial matricial ordinaria de  $4 \times 4$  (3.44) debe ser de la forma

$$\bar{\Psi}'(z_2) = U'(z_2 - z_1) \cdot \bar{\Psi}'(z_1) \quad (3.45)$$

de donde

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}'(z_2) &= \bar{M}\left(-\frac{h\pi z_2}{\Omega}\right) \cdot U'(z_2 - z_1) \cdot \bar{M}\left(\frac{h\pi z_1}{\Omega}\right) \cdot \bar{\Psi}'(z_1) \\ &= \bar{U}'(z_2 - z_1) \cdot \bar{\Psi}'(z_1), \quad 0 \leq z_1 \leq L, \quad l = 1, 2.\end{aligned}\quad (3.46)$$

Uno de los métodos para encontrar  $U'(z)$  es el metodo de aproximación homogénea a pedazos [67], que se discutió en la sección 2.7.

### 3.8. Reflexión y Transmisión por una Capa de MEQ

La onda plana incidente esta delineada por los fasores de la ecuación (2.40) donde como se ha mencionado en la sección 2.3.1  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  es la impedancia intrínseca del espacio libre;  $a_s$  y  $a_p$  son las amplitudes de las componentes polarizadas perpendicular y paralela respectivamente;  $a_L$  y  $a_R$  son las amplitudes de las componentes CPI y CPD respectivamente; y los vectores  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{p}_\pm$  están dados por las ecuaciones (2.41) y (2.42).

El vector de propagación de la onda plana incidente hace un ángulo  $\theta \in [0, 2\pi)$  con respecto al eje  $z$ , y está inclinado con respecto al eje  $x$  en el plano  $xy$  por un ángulo  $\psi \in [0, 2\pi]$ ; el vector de onda transversal es respectivamente (ver Fig. 2.3)

$$\kappa = k_0 \operatorname{sen}\theta, \quad (3.47)$$

donde  $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  es el número de onda en el espacio libre. La longitud de onda del espacio libre está denotada por  $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ .

Los fasores de campo electromagnético asociado con las ondas planas transmitidas y reflejadas, respectivamente, se expresan por las ecuaciones (2.43) y (2.44).

Las amplitudes  $r_{L,R}$  y  $t_{L,R}$  indicadas son de las componentes CPI y CPD de las ondas planas reflejadas y transmitidas, donde las dos están polarizadas elípticamente en general.

Como las componentes tangenciales de  $E$  y  $H$  deben ser continuas a través de los planos  $z = 0$  y  $L$ , los valores a la frontera de  $\bar{\Psi}(0)$  y  $\bar{\Psi}(L)$  se pueden fijar por medio de (2.40)-(2.44). De aquí que,

$$\bar{\Psi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{K}} \cdot \begin{bmatrix} i(a_L - a_R) \\ -(a_L + a_R) \\ -i(r_L - r_R) \\ r_L + r_R \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

y

$$\bar{\Psi}(L) = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{K}} \cdot \begin{bmatrix} i(t_L - t_R) \\ -(t_L + t_R) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

donde  $\bar{\mathbf{K}}$  está dada por la matriz (2.52).

El problema de reflexión-transmisión genera cuatro ecuaciones algebraicas lineales simultáneas establecidas en forma matricial como

$$\bar{\Psi}(L) = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{K}} \cdot \begin{bmatrix} i(t_L - t_R) \\ -(t_L + t_R) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{U}}(L) \cdot \bar{\mathbf{K}} \cdot \begin{bmatrix} i(a_L - a_R) \\ -(a_L + a_R) \\ -i(r_L - r_R) \\ r_L + r_R \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Este grupo de ecuaciones se puede resolver por medio de manipulaciones matriciales estándar para calcular las amplitudes de reflexión y transmisión.

Los coeficientes de reflexión y transmisión aparecen como los elementos de matrices de  $2 \times 2$  en las relaciones: (2.45) y (2.46), que como se ha mencionado anteriormente en la sección 2.3.1, los coeficientes co-polarizados tienen los dos subíndices iguales y la polarización de la luz transmitida o reflejada coincide con la polarización de la luz incidente; mientras que para los coeficientes polarizados cruzados sucede lo contrario. El cuadrado de la magnitud de un coeficiente de reflexión o transmisión es la reflectancia o transmitancia correspondiente; así,  $R_{LR} = |r_{LR}^2|$  es la reflectancia correspondiente al coeficiente de reflexión  $r_{LR}$ , y así consecutivamente.

Estos coeficientes también cumplen, como se ha mencionado, con las constricciones (2.49) del principio de conservación de la energía.

### 3.9. Incidencia Normal

Para incidencia normal, la onda electromagnética en el MEQ se propaga paralela al eje de quiralidad estructural. Así emerge un caso especial sus-

### 3.9. INCIDENCIA NORMAL

---

ceptible de análisis algebraico [14]. Entonces,  $\kappa = 0$ , y (3.44) se simplifica a

$$\frac{d}{dz}\bar{\Psi}'(z) = i\bar{A}'_{ax}(z) \cdot \bar{\Psi}'(z), \quad 0 < z < L, \quad (3.51)$$

donde la matriz

$$\bar{A}'_{ax} = \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{h\pi}{\Omega} & 0 & \omega\mu_0 \\ i\frac{h\pi}{\Omega} & 0 & -\omega\mu_0 & 0 \\ 0 & \omega\epsilon_0\epsilon_B & 0 & -i\frac{h\pi}{\Omega} \\ \omega\epsilon_0\epsilon_D & 0 & i\frac{h\pi}{\Omega} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

es independiente de  $z$ , y

$$\epsilon_B = \epsilon_2^{(0)} - \frac{\epsilon_2^{(0)}}{\epsilon_1^{(0)}}\epsilon_m, \quad (3.53)$$

$$\epsilon_D = \epsilon_d - \frac{\epsilon_2^{(0)}}{\epsilon_1^{(0)}} \left[ \epsilon_1 \cos \chi + (\epsilon_j + \epsilon_l) \frac{\text{sen}2\chi}{2} + \epsilon_k \text{sen}\chi \right], \quad (3.54)$$

$$\epsilon_E = \frac{\epsilon_2^{(0)}}{\epsilon_1^{(0)}}(\epsilon_e + \epsilon_h). \quad (3.55)$$

La solución de (3.51) por lo tanto es directa:

$$\bar{\mathbf{U}}'(z) = \exp[iz\bar{A}'_{ax}]. \quad (3.56)$$

Pero una solución más transparente se obtiene de una extensión de la transformación de Oseen. Definamos el vector columna

$$\bar{\Psi}''(z) = \bar{\mathbf{M}}(h\xi) \cdot \bar{\Psi}'(z), \quad (3.57)$$

donde

$$\xi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2h\epsilon_E}{\epsilon_D - \epsilon_B} \right). \quad (3.58)$$

Entonces, (3.51) se transforma a

$$\frac{d}{dz}\bar{\Psi}''(z) = i\bar{A}''_{ax}(z) \cdot \bar{\Psi}''(z), \quad 0 < z < L, \quad (3.59)$$

donde

### 3.9. INCIDENCIA NORMAL

---

$$\bar{A}'_{ax} = \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{h\pi}{\Omega} & 0 & \omega\mu_0 \\ i\frac{h\pi}{\Omega} & 0 & -\omega\mu_0 & 0 \\ 0 & \omega\epsilon_0\epsilon_{B\xi} & 0 & -i\frac{h\pi}{\Omega} \\ \omega\epsilon_0\epsilon_{D\xi} & 0 & i\frac{h\pi}{\Omega} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

$$\epsilon_{B\xi} = \frac{1}{2} \left[ \epsilon_B + \epsilon_D + \frac{(\epsilon_B - \epsilon_D)^2 + 4\epsilon_E^2}{\epsilon_B - \epsilon_D} \cos 2\xi \right], \quad (3.61)$$

$$\epsilon_{D\xi} = \frac{1}{2} \left[ \epsilon_B + \epsilon_D - \frac{(\epsilon_B - \epsilon_D)^2 + 4\epsilon_E^2}{\epsilon_B - \epsilon_D} \cos 2\xi \right]. \quad (3.62)$$

El cuadrante inferior izquierdo de  $\bar{A}''_{ax}$  es antidiagonal; así también sucede con el cuadrante inferior izquierdo de  $\bar{A}'_{ax}$  cuando  $E_z^{cd} = 0$ . Por lo tanto por comparación a los resultados existentes para MEQs no electro-ópticos, podemos establecer que la longitud de onda central del régimen de Bragg para incidencia normal es

$$\lambda_0^{Br} = \Omega(\sqrt{\epsilon_{B\xi}} + \sqrt{\epsilon_{D\xi}}) \quad (3.63)$$

y el ancho de banda completo a la mitad del máximo correspondiente (full-width-at-half-maximum FWHM) es

$$(\Delta\lambda_0)^{Br} = 2\Omega|\sqrt{\epsilon_{B\xi}} - \sqrt{\epsilon_{D\xi}}| \quad (3.64)$$

con la suposición de que la disipación en el MEQ es despreciablemente pequeña y la dispersión en la propiedades constitutivas se pueden ignorar [86].

De las correcciones a segundo orden en términos tales como  $r_{41}E_z^{cd}$ , obtenemos

$$\epsilon_{B\xi}^{1/2} \approx \sqrt{\epsilon_2^{(0)}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_m}{\epsilon_1^{(0)}} - \frac{1}{8} \left( \frac{\epsilon_m}{\epsilon_1^{(0)}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_m}{\epsilon_1^{(0)}} \right)^2 \frac{(\epsilon_e + \epsilon_h)^2}{\epsilon_2^{(0)}(\epsilon_2^{(0)} - \epsilon_d)} \right], \quad (3.65)$$

$$\epsilon_{D\xi}^{1/2} \approx \sqrt{\epsilon_d} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_D - \epsilon_d}{\epsilon_d} - \frac{1}{8} \left( \frac{\epsilon_D - \epsilon_d}{\epsilon_d} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_m}{\epsilon_1^{(0)}} \right)^2 \frac{(\epsilon_e + \epsilon_h)^2}{\epsilon_d(\epsilon_2^{(0)} - \epsilon_d)} \right], \quad (3.66)$$

### 3.9. INCIDENCIA NORMAL

---

Esto nos permite la delineación del efecto de la clasificación cristalográfica local (que es capturada por los coeficientes electro-ópticos  $r_{JK}$ ) en el régimen de Bragg.

Como ejemplo, las expresiones anteriores se pueden establecer como

$$\epsilon_{B\xi}^{1/2} \approx \sqrt{\epsilon_2^{(0)}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \epsilon_2^{(0)} E_z^{cd} r_{21} - \frac{1}{8} \left( \epsilon_2^{(0)} E_z^{cd} r_{21} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_2^{(0)}}{\epsilon_2^{(0)} - \epsilon_3^{(0)}} \left( \epsilon_3^{(0)} E_z^{cd} r_{41} \right)^2 \right], \quad (3.67)$$

$$\epsilon_{D\xi}^{1/2} \approx \sqrt{\epsilon_3^{(0)}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \epsilon_3^{(0)} E_z^{cd} r_{31} - \frac{1}{8} \left( \epsilon_3^{(0)} E_z^{cd} r_{31} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_3^{(0)}}{\epsilon_2^{(0)} - \epsilon_3^{(0)}} \left( \epsilon_2^{(0)} E_z^{cd} r_{41} \right)^2 \right], \quad (3.68)$$

cuando  $\chi = 0$ . Para  $\chi = \pi/2$ , obtenemos

$$\epsilon_{B\xi}^{1/2} \approx \sqrt{\epsilon_2^{(0)}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \epsilon_2^{(0)} E_z^{cd} r_{23} - \frac{1}{8} \left( \epsilon_2^{(0)} E_z^{cd} r_{23} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_2^{(0)}}{\epsilon_2^{(0)} - \epsilon_1^{(0)}} \left( \epsilon_1^{(0)} E_z^{cd} r_{63} \right)^2 \right], \quad (3.69)$$

$$\epsilon_{D\xi}^{1/2} \approx \sqrt{\epsilon_1^{(0)}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \epsilon_1^{(0)} E_z^{cd} r_{13} - \frac{1}{8} \left( \epsilon_1^{(0)} E_z^{cd} r_{13} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_1^{(0)}}{\epsilon_2^{(0)} - \epsilon_1^{(0)}} \left( \epsilon_1^{(0)} E_z^{cd} r_{63} \right)^2 \right], \quad (3.70)$$

Las ecuaciones (3.69) y (3.70) no se cumplen para MEQ localmente uniaxiales (es decir cuando  $\epsilon_1^{(0)} = \epsilon_2^{(0)}$  [83]). Los análisis revelan que cuando  $\chi = \pi/2$  y  $\epsilon_1^{(0)} = \epsilon_2^{(0)}$  tenemos

$$\begin{aligned} \epsilon_{B\xi}^{1/2} &\approx \sqrt{\epsilon_1^{(0)}} \left[ 1 + \frac{1}{4} \epsilon_1^{(0)} E_z^{cd} [\beta(r_{13} - r_{23}) - (r_{13} + r_{23})] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{32} [\epsilon_1^{(0)} E_z^{cd} [\beta(r_{13} - r_{23}) - (r_{13} + r_{23})]]^2 \right], \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{D\xi}^{1/2} &\approx \sqrt{\epsilon_1^{(0)}} \left[ 1 - \frac{1}{4} \epsilon_1^{(0)} E_z^{cd} [\beta(r_{13} - r_{23}) + (r_{13} + r_{23})] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{32} [\epsilon_1^{(0)} E_z^{cd} [\beta(r_{13} - r_{23}) + (r_{13} + r_{23})]]^2 \right], \end{aligned} \quad (3.72)$$

### 3.10. MEQS LOCALMENTE ISOTRÓPICOS

---

donde

$$\beta = \left[ 1 + \left( \frac{2r_{63}}{r_{12} - r_{23}} \right) \right]^2 \quad (3.73)$$

De acuerdo con esto, el ancho de banda FWHM del régimen de Bragg resulta ser proporcional a la magnitud del campo eléctrico  $cd$

$$(\Delta\lambda_0)^{Br} = 2\Omega(\epsilon_1^{(0)})^{3/2} |\beta E_z^{cd}(r_{13} - r_{23}) \left[ 1 + \frac{1}{4}\epsilon_1^{(0)} E_z^{cd}(r_{13} + r_{23}) \right] | \quad (3.74)$$

La ecuación (3.74) indica que el régimen de Bragg se desvanece para incidencia normal sobre un MEQ localmente uniaxial, no electro-óptico con  $\chi = \pi/2$ , pero se puede generar por la aplicación apropiada de un campo eléctrico  $cd$  si el MEQ es electro-óptico. Esta es la generalización de un resultado obtenido previamente para MEQs con simetría de grupo puntual local  $\bar{4}2m$  [83]. Obviamente, esta conclusión se puede explotar para aplicaciones de conmutación en óptica, encendiendo o apagando un estado de polarización elegido.

Las declaraciones precedentes también se pueden aplicar a MEQ, localmente biaxiales de la siguiente manera. Suponer que

$$\chi = \tan^{-1} \left[ \left( \frac{\epsilon_1^{(0)}}{\epsilon_3^{(0)}} \right) \left( \frac{\epsilon_2^{(0)} - \epsilon_3^{(0)}}{\epsilon_1^{(0)} - \epsilon_2^{(0)}} \right) \right]. \quad (3.75)$$

Entonces,  $\epsilon_d = \epsilon_2^{(0)}$  por virtud de (3.75). Para MEQs no electro-ópticos, la ecuación (3.75) define el punto pseudo-isotrópico [12]: el régimen de Bragg para incidencia normal se desvanece, como se puede observar al sustituir (3.61) y (3.62) en (3.64), estableciendo  $E_z^{cd} = 0$  en la expresión resultante, y haciendo uso de (3.75) a partir de entonces. Sin embargo el régimen de Bragg se puede restaurar por la aplicación del campo  $E_z^{cd}$ , dado que el MEQ es electro-óptico; el ancho de banda del régimen de Bragg se puede así controlar eléctricamente.

### 3.10. MEQs Localmente Isotrópicos

Los MEQ localmente isotrópicos se caracterizan porque  $\epsilon_1^{(0)} = \epsilon_2^{(0)} = \epsilon_3^{(0)}$ , y por lo tanto, no presentan el fenómeno Bragg circular en ausencia de un

### 3.11. MEQS LOCALMENTE UNIAXIALES

---

campo eléctrico  $cd$ . Sin embargo, los materiales electro-ópticos de las clases cristalográficas  $\bar{4}3m$  y  $23$  tienen  $r_{41} = r_{52} = r_{63} \neq 0$  con todos los otros  $r_{JK} \equiv 0$  y por lo tanto, pueden exhibir el fenómeno Bragg circular cuando  $E_z^{cd} \neq 0$ .

Análisis de la matriz  $\bar{A}'_{ax}$ , Ec. 3.60, revela que la aplicación de  $E_z^{cd}$  sería infructuosa en la exhibición del fenómeno Bragg circular para incidencia normal (es decir,  $\theta = 0^\circ$ ), si  $\chi = 45^\circ$ ; pero será más (o igualmente) efectivo para  $\chi = 0^\circ$  y  $\chi = 90^\circ$ .

Como  $\bar{A}'_{ax}$  es continua analíticamente con respecto de  $\kappa$  esto sugiere que lo establecido anteriormente sería substancialmente verdadero aun para incidencia oblicua, al menos para valores pequeños y moderados de  $\theta$ ; lo cual se ha confirmado computacionalmente [14].

Las reflectancias y transmitancias polarizadas cruzadas en el régimen de Bragg se pueden reducir por varias técnicas de acoplamiento de impedancias, y por lo tanto, el bloque de MEQ puede funcionar como un filtro eléctricamente conmutable de rechazo para ondas planas incidentes de la misma lateralidad que el MEQ.

Se conoce de muchos estudios en películas delgadas esculpidas quirales así como en cristales líquidos colestéricos que el FBC primero se profundiza y después se satura cuando el grosor normalizado  $L/\Omega$  se incrementa [67]. Por lo tanto incrementos posteriores del grosor mas allá de cierto valor de  $L/\Omega$  es infructuoso. La misma conclusión debe cumplirse para un MEQ electro-óptico si  $E_z^{cd}$  se mantuviera fijo. También, se ha encontrado que aún un incremento en  $E_z^{cd}$  para un valor fijo de  $L/2\Omega$  podría volver a disminuir la reflectancia cuando el objetivo es maximizarla.

Similarmente, con frecuencia se aplican altos voltajes a películas electro-ópticas. Aunque para crear campos eléctricos que son dos órdenes de magnitud más pequeños la posibilidad de falla existe, esto dependerá significativamente del tiempo en el que el voltaje  $cd$  se mantenga encendido.

### 3.11. MEQs Localmente Uniaxiales

Los materiales localmente uniaxiales se caracterizan por tener  $\epsilon_1^{(0)} = \epsilon_2^{(0)} \neq \epsilon_3^{(0)}$ . Los cristales de 13 clases divididos en las familias trigonal, tetragonal y hexagonal pueden exhibir el efecto Pockels [13]. El Niobato de Litio y el Fosfato de Potasio di-hidrogenado son quizás los materiales electro-ópticos mejor conocidos, pero también existen huéspedes de otros materiales con

propiedades similares.

Los MEQ localmente uniaxiales exhiben el fenómeno Bragg circular aun en ausencia de un campo eléctrico. El régimen de Bragg exhibe un corrimiento al azul cuando  $\cos \theta$  decrece, esto es a incidencia oblicua.

Así hay dos formas de mejorar el FBC para el uso en filtros de rechazo de luz polarizada circularmente. El primero es el uso de capas más gruesas de MEQ, es decir, las razones  $L/2\Omega$  son grandes. La segunda es el uso de  $V_{cd}$  mayores.

### 3.12. MEQs Localmente Biaxiales

Los MEQs localmente biaxiales se caracterizan por tener  $\epsilon_1^{(0)} \neq \epsilon_2^{(0)} \neq \epsilon_3^{(0)}$ . Cristales de 5 clases separados en las familias ortorrómbicas, monoclinicas y triclínicas pueden exhibir el efecto Pockels. El Niobato de Potasio y el Niobato de sodio y bario son materiales biaxiales electro-ópticos bien conocidos. Al igual que sus contrapartes localmente uniaxiales, los MEQ localmente biaxiales generalmente exhiben el fenómeno Bragg circular aun si  $E_z^{cd} = 0$  o no. Se observa que la aplicación de un voltaje  $cd$  es eficaz en el mejoramiento del FBC, abre bandas de reflexión y transmisión del fenómeno Bragg circular aun cuando no existen en ausencia de campo eléctrico, desarrollando este fenómeno, lo que da como resultado que se puedan usar filtros más delgados como en el caso de materiales uniaxiales.

Cuando  $E_z^{cd} = 0$ , los MEQ localmente biaxiales pueden poseer un punto pseudo-isotrópico definido por (3.75) cuya influencia se ve mejor para incidencia normal.

### 3.13. Manipulación Eléctrica del Fenómeno Bragg Circular

Estudios en MEQ muestran que no solamente hay un corrimiento al azul del fenómeno Bragg circular cuando  $\cos \theta$  decrece sino que también hay una disminución en el ancho de línea [62].

En el contexto de la manipulación del fenómeno Bragg circular por la aplicación de un campo eléctrico  $cd$ , las cantidades más importantes son la longitud de onda central  $\lambda_0^{Br}$  y el ancho de banda FWHM  $(\Delta\lambda_0)^{Br}$  del

### 3.13. MANIPULACIÓN ELÉCTRICA DEL FENÓMENO BRAGG CIRCULAR

---

régimen de Bragg para incidencia normal, que están definidas en (3.63) y (3.64). Hay que notar que

$$\lambda_0^{Br}|_{E_z^{cd}=0} = \Omega \left( \sqrt{\epsilon_2^{(0)}} + \sqrt{\epsilon_d} \right) \quad (3.76)$$

y

$$(\Delta\lambda_0)^{Br}|_{E_z^{cd}=0} = 2\Omega \left| \sqrt{\epsilon_2^{(0)}} - \sqrt{\epsilon_d} \right| \quad (3.77)$$

estas expresiones indican que si el efecto Pockels no se explota, entonces

- i) Materiales quiralmente estructurados localmente isotropicos no exhiben el fenómeno Bragg circular (FBC) para toda  $\chi$ .
- ii) MEQs localmente uniaxiales no exhiben el FBC si  $\chi = 90^\circ$ , y
- iii) MEQs localmente biaxiales no exhiben el FBC si satisface la condición pseudo-isotrópica

Cabe mencionar que  $\epsilon_E$ ,  $\epsilon_B$  y  $\epsilon_D$  (Ver apéndice C) varían linealmente con  $E_z^{cd}$ . Entonces, a segundo orden en  $E_z^{cd}$  tenemos

$$\sqrt{\epsilon_{B\xi}} \approx \sqrt{\epsilon_2^{(0)}} + f_1(r_{21}, r_{23}, \chi)E_z^{cd} + f_2(r_{21}, r_{23}, r_{41}, r_{43}, r_{61}, r_{63}, \chi)(E_z^{cd})^2 \quad (3.78)$$

y

$$\sqrt{\epsilon_{D\xi}} \approx \sqrt{\epsilon_d} + f_3(r_{11}, r_{13}, r_{31}, r_{33}, r_{51}, r_{53}, \chi)E_z^{cd} + f_4(r_{11}, r_{13}, r_{31}, r_{33}, r_{41}, r_{43}, r_{51}, r_{53}, r_{61}, r_{63}, \chi)(E_z^{cd})^2 \quad (3.79)$$

donde  $f_1$  a  $f_4$  son funciones de los coeficientes electro-ópticos identificados y del ángulo de inclinación o tilt. La substitución de las expresiones anteriores en (3.63) conduce así a los siguientes cinco enunciados, para las 20 clases de simetría local:

(A) Para ambas clases de MEQs localmente isotrópicos, el corrimiento de  $\lambda_0^{Br}$  no depende de  $E_z^{cd}$  pero si de  $(E_z^{cd})^2$ .

(B) Para cuatro clases de MEQs localmente uniaxiales, el corrimiento de  $\lambda_0^{Br}$  no depende de  $E_z^{cd}$  pero si de  $(E_z^{cd})^2$ . Las cuatro clases son tetragonal 422, tetragonal  $\bar{4}2m$ , hexagonal 622 y hexagonal  $\bar{6}m2$ .

(C) Para las nueve clases restantes de MEQs localmente uniaxiales, el corrimiento de  $\lambda_0^{Br}$  depende tanto de  $E_z^{cd}$  como de  $(E_z^{cd})^2$

### 3.13. MANIPULACIÓN ELÉCTRICA DEL FENÓMENO BRAGG CIRCULAR

---

(D) Para tres clases de MEQs localmente biaxiales, el corrimiento de  $\lambda_0^{Br}$  no depende de  $E_z^{cd}$  pero si de  $(E_z^{cd})^2$ . Las cuatro clases son ortorrómbicas 222, monoclinicas 2, y monoclinicas  $m$

(E) Para las dos clases restantes de MEQs localmente biaxiales, el corrimiento de  $\lambda_0^{Br}$  depende tanto de  $E_z^{cd}$  como de  $(E_z^{cd})^2$ .

Los enunciados (A)-(E) para un corrimiento en la longitud de onda central  $\lambda_0^{Br}$  bajo la aplicación de un voltaje  $cd$  también se cumplen para el cambio corriente en el ancho de banda  $(\Delta\lambda_0)^{Br}$  FWHM.

Por lo tanto, las longitudes de onda centrales del régimen de Bragg de MEQs de 11 clases cristalográficas locales se correrán, y los anchos de banda FWHM de los mismos cambiarán, bajo la aplicación de voltajes  $cd$  moderados; mientras los de las 9 clases cristalográficas locales restantes requerirán la aplicación de voltajes  $cd$  más altos para presentar corrimiento. Además el régimen de Bragg se recorre al rojo o al azul, dependiendo del signo de  $E_z^{cd}$ , para las 11 clases cristalográficas locales; pero los corrimientos de los regímenes de Bragg serán insensibles al signo de  $E_z^{cd}$ , para las nueve clases cristalográficas locales restantes [15].

El efecto del ángulo de inclinación o tilt  $\chi$  sobre el ancho de banda FWHM del régimen de Bragg para incidencia normal se modifica bastante por la aplicación de  $E_z^{cd}$ . Los enunciados (i)-(iii) para MEQs se remplazan como sigue: Cuando  $E_z^{cd} \neq 0$ ,

- I. Localmente isotrópicos no exhiben el FBC solamente si  $\chi = 45^\circ$
- II. Localmente uniaxiales no exhiben el FBC si  $\chi = 90^\circ$ , si las clases cristalográficas locales no son tetragonal  $\bar{4}$  o tetragonal  $\bar{4}2m$ ; y
- III. Localmente biaxiales exhiben el FBC aun si  $\chi$  satisface la condición pseudoisotrópica (3.75).

Cuando  $\chi = 0^\circ$ , el centro de la longitud de onda del régimen de Bragg no se recorre para las siguientes clases cristalográficas locales: tetragonal  $4mm$ , hexagonal  $6mm$ , hexagonal  $\bar{6}m2$ , trigonal  $3m$ , y ortogonal  $mm2$ . Asimismo cuando  $\chi = 90^\circ$ , la longitud de onda central del régimen de Bragg no se recorre para las siguientes clases cristalográficas: tetragonal  $422$ , hexagonal  $622$ , hexagonal  $\bar{6}$ , hexagonal  $\bar{6}m2$  y trigonal  $32$ . Hay que notar que estos resultados son teóricos. Experimentalmente no se puede realizar una STF con  $\chi = 0$ , mientras que  $\chi = 90^\circ$  se obtiene mediante la técnica de deposición física de vapor, al aplicar el flujo de vapor del material a incidencia normal a las capas de la STF.

### 3.14. Fenómeno Bragg Circular Eléctricamente Controlado por un Campo Eléctrico $cd$ Arbitrario

En esta sección se considera un material estructuralmente quiral, al que se aplica un campo eléctrico  $cd$  arbitrario oblicuo a la dirección del eje de inhomogeneidad. Se analiza como se controla eléctricamente el fenómeno Bragg circular en este sistema. Hay que notar que los resultados presentados en esta sección son teóricos reportados en [15]. El caso que nos interesa es el de la aplicación de campo eléctrico normal a la STF, sin embargo, el caso más general nos permitirá tener una visión completa del control electro-óptico.

La exploración numérica de la solución del problema de valores a la frontera de la reflexión y transmisión de una onda plana, debido a una capa de un MEQ electro-óptico, indica que la exhibición del fenómeno Bragg circular por el MEQ, se puede controlar no solamente por el signo y la magnitud de un campo eléctrico  $cd$ , sino también por su orientación en relación al eje de inhomogeneidad helicoidal del MEQ. Así, se amplía la posibilidad de control eléctrico de filtros de polarización circular.

En esta sección se generaliza la teoría de la sección anterior a la aplicación de un campo eléctrico  $cd$  orientado arbitrariamente con el objetivo de controlar el fenómeno Bragg circular. La ecuación diferencial ordinaria matricial entonces se vuelve más complicada aun si la onda plana incide normalmente. Sin embargo, la exhibición del fenómeno Bragg circular no está en duda, en general, ya que ésta depende solamente de la quiralidad estructural del MEQ.

En este caso el campo eléctrico se establece como

$$\begin{pmatrix} E_1^{cd}(z) \\ E_2^{cd}(z) \\ E_3^{cd}(z) \end{pmatrix} = \bar{R}_y(\chi) \cdot \bar{S}_z \left( -\frac{h\pi z}{\Omega} \right) \cdot \mathbf{E}^{cd} \quad (3.80)$$

donde sin pérdida de generalidad podemos elegir

$$\mathbf{E}^{cd} = E^{cd}(\mathbf{u}_x \cos \chi_{cd} + \mathbf{u}_z \text{sen} \chi_{cd}), \quad \chi_{cd} \in [0, \pi/2], \quad (3.81)$$

el caso uniaxial se obtiene para  $\chi_{cd} = \pi/2$ .

Aquí nuevamente los campos electromagnéticos propagantes, en el vector columna  $\bar{\Psi}'(z)$  cumplen con la ecuación diferencial matricial ordinaria (3.44), donde la descomposición

3.14. FENÓMENO BRAGG CIRCULAR ELÉCTRICAMENTE  
CONTROLADO POR UN CAMPO ELÉCTRICO CD ARBITRARIO

---

$$\bar{A}(z) = \bar{A}'_0(u) + \bar{A}'_s(u) \text{sen} \chi_{cd} + \left[ \bar{A}'_{cs}(u) \text{sen} \left( \frac{h\pi z}{\Omega} \right) + \bar{A}'_{cc}(u) \cos \left( \frac{h\pi z}{\Omega} \right) \right] \cos \chi_{cd} \quad (3.82)$$

clarifica el significado de la orientación de  $\mathbf{E}^{cd}$ , y es correcto a primer orden en el campo eléctrico.

Las cantidades que aparecen en el lado derecho de la ecuación (3.82) aparecen explícitamente en el apéndice D.

Con respecto a la orientación de  $\mathbf{E}^{cd}$ , el lado derecho de (3.82) se puede dividir en tres partes. La primera parte es indiferente a  $\mathbf{E}^{cd}$  y por lo tanto, a  $\chi_{cd}$ , el segundo término muestra una mayor ventaja para campos eléctricos cd axiales (es decir, cuando  $\chi_{cd} = 90^\circ$ ), mientras que el tercer término es más efectivo para campos eléctricos cd transversales (es decir, cuando  $\chi_{cd} = 0^\circ$ ).

Cuando se consideran los efectos de la tercera parte de la ecuación (3.82), así, como la interacción de la segunda y tercera parte, debemos tener en mente que el número de variables para un estudio paramétrico completo es grande. Estas variables incluyen la isotropía, uniaxialidad o biaxialidad local. Éstas están determinadas por los valores relativos de  $\epsilon_{1,2,3}^{(0)}$ ; el grupo de simetría puntual local, de los cuales hay 20 clases, determinadas por los coeficientes electro-ópticos  $r_{JK}$ ; los dos ángulos de incidencia  $\theta$  y  $\psi$ , el ángulo  $\chi$  de inclinación o "tilt", la mitad de paso  $\Omega$ , el grosor normalizado  $L/\Omega$  y el ángulo  $\chi_{cd}$ . Tenemos muchas variables involucradas. Por lo tanto, debido a los resultados de MEQs sujetos a campos eléctricos aplicados a través del eje de inhomogeneidad, ahora los estudios, en el caso de la aplicación de un campo eléctrico externo, se enfocan en MEQs localmente biaxiales. Estos materiales pueden presentar coeficientes electro-ópticos altos, por lo que requieren magnitudes de campo eléctrico cd aplicado menores en comparación con otros materiales.

Eligiendo particularmente la clase ortorrómbica  $mm2$ , las permitividades escalares relativas y los coeficientes electro-ópticos para el Niobato de Potasio, ver Tabla 3.1. Además como la incidencia normal es la condición más común para aparatos ópticos planares, ( $\theta = 0^\circ$ ). Como el efecto de  $\psi$  no es significativo en la exhibición del fenómeno Bragg circular [14], se establece  $\psi = 0^\circ$ .

Se observa que abajo de un valor del campo eléctrico cd oblicuamente aplicado no hay un efecto sobre el FBC. Sin embargo, si el campo eléctrico

### 3.14. FENÓMENO BRAGG CIRCULAR ELÉCTRICAMENTE CONTROLADO POR UN CAMPO ELÉCTRICO $CD$ ARBITRARIO

---

es suficientemente fuerte ( $\sim 10^9 Vm^{-1}$ ) se observa un cambio en el fenómeno Bragg circular con la aplicación del campo eléctrico externo oblicuamente aplicado. Por ejemplo, para  $E^{cd} = 0,67 \times 10^9 Vm^{-1}$ . La longitud de onda central del régimen de Bragg es  $649 \text{ nm}$  y el ancho de onda ( ancho total a la mitad del máximo) es  $69 \text{ nm}$  mientras que para  $\chi_{cd} = 0^0$  el centro de longitud de onda del régimen de Bragg es  $667 \text{ nm}$  y el ancho de banda son  $40 \text{ nm}$ . Además, el valor del pico de  $R_{RR}$  disminuye alrededor del  $10\%$  cuando  $\chi_{cd}$  cambia de  $90^0$  a  $0^0$  [14].

La situación cambia significativamente cuando el signo de  $E^{cd}$  se altera. En este caso la longitud de onda central del régimen de Bragg es  $688 \text{ nm}$  y el ancho de banda es de  $15 \text{ nm}$  para  $\chi_{cd} = 90^0$ , pero para  $\chi_{cd} = 0^0$  las cantidades correspondientes permanecen iguales es decir a  $667 \text{ nm}$  y  $40 \text{ nm}$ . Además el valor del pico para  $R_{RR}$  se incrementa alrededor del  $600\%$  cuando  $\chi_{cd}$  cambia de  $90^0$  a  $0^0$ . Así, el FBC es afectado dramáticamente por el signo de  $E^{cd}$  como por la orientación del ángulo  $\chi_{cd}$ .

Cuando se aplica un campo eléctrico de la magnitud mencionada a un MEQ con  $\chi = 45^0$  se observa un corrimiento al azul, de aproximadamente  $100 \text{ nm}$  cuando  $\chi_{cd}$  cambia de  $90^0$  a  $0^0$ . Además, el ancho de banda se ve afectado grandemente por el valor de  $\chi_{cd}$  y por el signo de  $E_{cd}$ , de hecho, el FBC se desvanece para valores de  $\chi_{cd}$  en la vecindad de  $50^0$ . Así, la exhibición del FBC está en dos diferentes rangos de  $\chi_{cd}$ , (comparando con el caso en el que  $\chi = 90^0$ ) que no se traslapan pero que están muy próximos entre si.

También, pueden aparecer otros tipos de fenómeno Bragg en las características de respuesta espectral. Por ejemplo, se puede observar altos valores en  $R_{RL}$  y  $R_{LR}$  que es el funcionamiento de un espejo normal o bien en un cierto régimen espectral se puede observar el funcionamiento de un espejo quiralmente estructural de lateralidad derecha, es decir se presentan valores altos de  $R_{RR}$  y valores bajos de  $R_{LL}$ .

Así, la exhibición el FBC por un MEQ electro-óptico se puede controlar no solamente por el signo y la magnitud de un campo eléctrico  $cd$ , sino también por su orientación en relación al eje de inhomogeneidad quiral. Varios estudios numéricos confirman que, estos resultados que son validos para incidencia normal, también lo son para incidencia oblicua [14]. Así, la posibilidad de control eléctrico de filtros de polarización circular se reafirma y se extiende en esta sección.

### 3.15. Reflexión y Transmisión Eléctricamente Controlada de Luz Incidente Oblicuamente en MEQs

Se ha encontrado que el régimen de Bragg se puede controlar por medio de un campo eléctrico de baja frecuencia. Aún más sorprendente, a primera vista, se ha encontrado que el efecto Pockels crea un régimen de Bragg aun cuando las propiedades del MEQ son tales que tal régimen no existiría en la ausencia del campo eléctrico de baja frecuencia. Este efecto se puede explicar por una generalización de la transformación de Oseen [11]. Claramente, la naturaleza electro-óptica de un MEQ se puede explotar para conmutación óptica.

Un MEQ no electro-óptico se puede sintonizar por medio del ángulo de incidencia de la luz, rotando alrededor de la dirección de la onda incidente. Entonces, la propagación dentro del MEQ no es paralela al eje de inhomogeneidad, y el régimen de Bragg generalmente experimenta un corrimiento al azul.

Para incidencia oblicua se observan resultados similares que para incidencia normal, para ángulos de  $\theta$  de hasta  $\sim 45^\circ$  o aun a ángulos mayores.

Para incidencia oblicua, se ha estimado la longitud de onda central del régimen de Bragg como

$$\lambda_{mid}^{Br} = \frac{h}{2} (\epsilon_u^{1/2} + \epsilon_v^{1/2}) \cos^{1/2} \theta, \quad (3.83)$$

donde

$$\epsilon_u = \frac{1}{2} \left[ \epsilon_1^{(0)} + \epsilon_d + \frac{(\epsilon_1^{(0)} - \epsilon_d)^2 + 4\epsilon_e^{(2)}}{\epsilon_1^{(0)} - \epsilon_d} \cos 2\varphi \right], \quad (3.84)$$

$$\epsilon_v = \frac{1}{2} \left[ \epsilon_1^{(0)} + \epsilon_d - \frac{(\epsilon_1^{(0)} - \epsilon_d)^2 + 4\epsilon_e^{(2)}}{\epsilon_1^{(0)} - \epsilon_d} \cos 2\varphi \right], \quad (3.85)$$

y

$$\varphi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2h\epsilon_e}{\epsilon_d - \epsilon_1^{(0)}} \right). \quad (3.86)$$

### 3.15. REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN ELÉCTRICAMENTE CONTROLADA DE LUZ INCIDENTE OBLICUAMENTE EN MEQS

---

donde la definición de las variables  $\epsilon_d$ ,  $\epsilon_e$ , se encuentran en el apéndice C.

Esto indica un corrimiento al azul cuando se incrementa  $\theta$ , para  $\theta \leq 30^\circ$ . Para valores mayores de  $\theta$  se estima la expresión

$$\lambda_{mid}^{Br} = \frac{h}{2} (\epsilon_u^{1/2} + \epsilon_v^{1/2}) F(\theta), \quad (3.87)$$

con  $F(\theta)$  una función a determinar.

Además se ha encontrado que el ángulo  $\phi$  afecta significativamente las reflectancias y transmitancias, pero no subvierte el régimen de Bragg [11]. También, se ha encontrado que para incidencia oblicua, el efecto Pockels mejora el fenómeno Bragg circular aun en las condiciones en las que se presenta el punto pseudo-isotrópico en el material.

Cuando se aplican voltajes cd más altos se observa que el fenómeno de Bragg se desarrolla: el régimen de Bragg se ensancha y tanto  $R_{RR}$  como  $T_{LL}$  se incrementan.

Por último, se ha observado que la disipación en MEQs da como resultado una disminución en las transmitancias y reflectancias, que aumenta cuando la disipación se incrementa, mientras que la manifestación del fenómeno de Bragg circular disminuye grandemente en los espectros de transmitancia, aunque la manifestación en los espectros de reflectancia se ven menos afectados [67].

# Capítulo 4

## Defectos de torsión

Como se mostró en el capítulo 2, en el régimen lineal se tienen soluciones exactas para una onda electromagnética que se propaga axialmente en un medio con simetría helicoidal. Particularmente, la forma de las soluciones obtenidas es útil para su aplicación en sistemas en los cuales se deban satisfacer condiciones a la frontera debido a la presencia de un plano de discontinuidad perpendicular a la dirección de propagación; esto es, la representación de Marcuvitz-Schwinger permite plantear y analizar de manera directa el problema de una onda electromagnética transversal propagándose en la dirección  $z$ , la cual debe satisfacer condiciones a la frontera tangenciales a un plano de discontinuidad  $xy$  en un punto  $z_0$ . En este capítulo se estudia la propagación axial de una onda electromagnética con longitud de onda  $\lambda_0$  en una muestra con simetría helicoidal, en la cual hay un *defecto de torsión*, que se pueden ver como un plano de discontinuidad, ver Fig. 4.1.

En este capítulo se discuten las propiedades ópticas de muestras con sólo un defecto de torsión, ecuaciones exactas para el *modo del defecto* y para las matrices de transferencia y dispersión del plano del defecto.

### 4.1. Singuletes

Considérese una muestra con simetría helicoidal entre los planos  $z = -\ell$  y  $z = +\ell$  con sólo un defecto de torsión en  $z = 0$ , el cual divide la muestra en dos regiones:  $a$  para  $z < 0$  y  $b$  para  $z > 0$  (Fig. 2.5).

Las principales propiedades del modo de defecto de este sistema se han encontrado numéricamente en las refs. [5, 77, 78, 79]. Sin embargo, aquí se

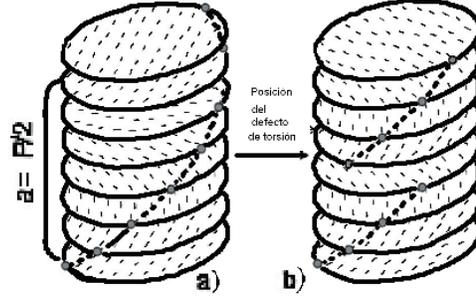


Figura 4.1: a) Estructura sin modificar. b) Esquema de un defecto de torsión en un medio helicoidal, con paso  $P$  y período  $a$ . El defecto se puede generar de la siguiente manera: *i*) se considera una muestra helicoidal sin defectos entre planos ortogonales al eje de la hélice (eje  $z$ ); *ii*) enseguida se corta la muestra de manera que se obtengan dos capas entre planos paralelos; y *iii*) se gira cualquier capa con respecto a la precedente un cierto ángulo  $\bar{\theta}$  a lo largo del eje común.

atacará el problema analíticamente mediante el análisis de ecuaciones exactas, las cuales permitirán verificar tales propiedades y tener una visión más profunda de la física del problema.

#### 4.1.1. Muestra infinita

Considérese una estructura infinita, es decir, se toma el límite  $l \rightarrow \infty$ . La solución más general para este sistema es una combinación lineal de las soluciones previamente encontradas en Ec. (2.56). Esta se puede escribir como

$$\Theta(z) = \begin{cases} \sum_{j=1}^4 c_j^a \beta^j(z) = \sum_{j=1}^4 c_j^a t^j \exp(in_j z), & z < 0 \\ \sum_{j=1}^4 c_j^b \beta^j(z) = \sum_{j=1}^4 c_j^b t^j \exp(in_j z), & z > 0 \end{cases} . \quad (4.1)$$

Haciendo referencia a la Sec. 2.4.1, es necesario señalar que particularmente en el presente capítulo, en la representación  $\alpha$ , los vectores base serán escogidos en el orden  $1^+$ ,  $2^+$ ,  $1^-$ ,  $2^-$ . Debido a que se está considerando una longitud de onda  $\lambda_0$  dentro de la banda prohibida, las ondas propias  $1^\pm$  representan ondas evanescentes, ya que sus correspondientes valores propios  $\pm n_1$

#### 4.1. SINGULETES

son imaginarios puros y, por lo tanto, los factores exponenciales de la expresión (2.56) son reales. Los vectores propios  $t_a^j$  y  $t_b^j$  se pueden obtener en dos diferentes sistemas de referencia  $a$  y  $b$  cuyos ejes  $y_a, y_b$  hacen un ángulo  $\bar{\theta}$  (ver Fig. 4.3 en Sec. 4.1.2). En un sistema de referencia con el eje  $y$  como el bisector de  $y_a, y_b$ , tales vectores se obtienen aplicando la matriz de rotación  $\mathcal{R}(-\bar{\theta}/2)$  y  $\mathcal{R}(\bar{\theta}/2)$  a los vectores  $t^j$ .

Las matrices  $T_a$  y  $T_b$  correspondientes están dadas por

$$T_a = \mathcal{R}(-\phi)T, \quad T_b = \mathcal{R}(\phi)T, \quad (4.2)$$

en donde  $\phi = \bar{\theta}/2$  y  $T$  fué definida previamente en la expresión (2.56).

En el límite cuando el ancho de la muestra  $\ell \rightarrow \infty$  los factores exponenciales de la primera componente de  $\alpha_a = T_a^{-1}\beta_a$  y de la tercera componente de  $\alpha_b = T_b^{-1}\beta_b$  (correspondiendo a los modos  $1^+$  en la región  $a$  y  $1^-$  en la región  $b$ ), divergen cuando  $z$  tiende a  $-\infty$  y  $+\infty$ , respectivamente. Por lo tanto, sus amplitudes deben ser cero (ver Fig. 4.2).

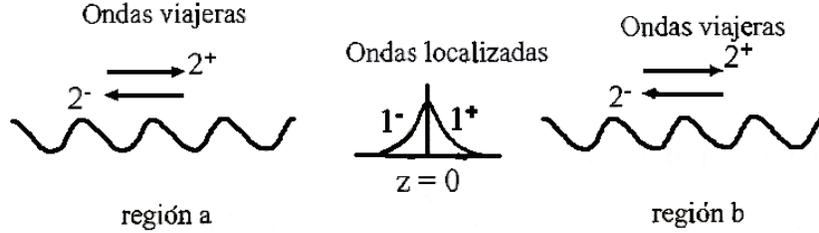


Figura 4.2: Un defecto de torsión en  $z = 0$ . La muestra es infinita, es decir, en el límite cuando  $l \rightarrow \infty$ . Se muestran los modos que existen en cada lado del plano del defecto. Nótese que los modos  $1^+$  en la región  $a$  y  $1^-$  en la región  $b$  divergen cuando  $z$  tiende a  $-\infty$  y  $+\infty$ , respectivamente; y por lo tanto, sus amplitudes deben ser nulas.

La continuidad tangencial de los vectores  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$  (sistema de referencia del laboratorio) en  $z = 0$  proporciona cuatro ecuaciones homogéneas para las seis componentes. Sin pérdida de generalidad, se puede hacer igual a 1 la amplitud del modo  $1^-$  en  $z = 0^-$ . Las amplitudes de los modos  $2^\pm$  en  $z = 0^-$  y  $z = 0^+$  se puede expresar fácilmente como una función de la amplitud  $s$  del

#### 4.1. SINGULETES

---

modo  $1^+$  en  $z = 0^+$ , y el campo interno más general se puede escribir como una combinación lineal de las soluciones correspondientes a  $s = \pm 1$ . Para cada uno de tales valores, los vectores de amplitud  $\alpha_a(s)$  y  $\alpha_b(s)$  tienen componentes  $(0, A^+(s), 1, A^-(s))$  y  $(s, B^+(s), 0, B^-(s))$ , respectivamente, donde:

$$\begin{aligned} A^\pm(s) &= a'(s) \pm ia''(s), \\ B_b^\pm(s) &= sA_a^\mp(s), \end{aligned} \quad (4.3)$$

con

$$\begin{aligned} a'(s) &= -\frac{c_2}{a_c c_1} \frac{2\tilde{\lambda}^2 \epsilon_m + \epsilon_{\parallel} u_1}{2\tilde{\lambda}^2 \epsilon_m + \epsilon_{\parallel} u_2} \left[ \frac{in_1 \tilde{\lambda} u \epsilon_m (\cot \phi)^s s}{2\tilde{\lambda}^2 \epsilon_m + \epsilon_{\parallel} u_1} + \frac{u_2}{2} \right] \\ a''(s) &= \frac{c_2}{a_c c_1} \frac{2\tilde{\lambda}^2 \epsilon_m + \epsilon_{\parallel} u_1}{4\tilde{\lambda} \epsilon_m n_2} \left[ u (\tan \phi)^s s - \frac{2in_1 \tilde{\lambda} \epsilon_m u_1}{2\tilde{\lambda}^2 \epsilon_m + \epsilon_{\parallel} u_1} \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde  $\tilde{\lambda} = \lambda/p$ , con  $\lambda$  la longitud de onda,  $p$  el paso del MEQ con  $p = 2\Omega$  para el caso de la STF.

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{4\epsilon_m \mu_m \tilde{\lambda}^2 + a_c^2}; \quad u_{1,2} = a_c \mp u, \\ c_k &= \left| 4n_k \left( u_k \epsilon_{\parallel} + 2\tilde{\lambda}^2 \epsilon_m \right) \right|^{-1/2}, \quad (k = 1, 2), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$a_c = \frac{\epsilon_{\parallel} \mu_{\perp} - \epsilon_{\perp} \mu_{\parallel}}{2}. \quad (4.6)$$

donde  $\epsilon_m = \frac{\epsilon_{\parallel} + \epsilon_{\perp}}{2}$ ,  $\mu_m = \frac{\mu_{\parallel} + \mu_{\perp}}{2}$  y  $n_k$  son los valores propios de  $A'(\omega)$  (ver Ec. 2.36), que nos dan las soluciones de los modos, Ec. (2.55); donde  $\epsilon_{\parallel}$  es la constante dieléctrica paralela eje de las moléculas, en el caso del colestérico es la dirección del director y  $\epsilon_{\perp}$  es la constante dieléctrica perpendicular. En el caso no magnético  $\mu_{\parallel} = \mu_{\perp} = \mu_0$ , la susceptibilidad magnética del vacío. Los resultados siguientes se cumplen para un material uniaxial, que es el caso mejor estudiado, sin embargo, como se verá en el siguiente capítulo también se cumplen para el caso de un material biaxial.

En cada lado del plano del defecto, las amplitudes  $A^\pm$  y  $B^\pm$ , relacionadas a los modos  $2^\pm$ , tienen el mismo módulo  $m = \sqrt{a'^2 + a''^2}$ . Entonces, su superposición es una onda estacionaria. Esta onda está linealmente polarizada

#### 4.1. SINGULETES

---

y oscilante(*no localizada*), mientras que los modos  $1^\pm$  definen una onda estacionaria *localizada* en la cual la amplitud de los campos dependen de la coordenada de propagación  $z$  como  $\exp(-|z|/\ell_d)$ , en donde

$$\ell_d = 1/|n_1| \quad (4.7)$$

será definido como el ancho de línea del modo.

Un análisis de estas amplitudes, muestra que para  $s = 1$ , la razón

$$\rho(\tilde{\lambda}) = 1/2m^2 \quad (4.8)$$

entre las amplitudes al cuadrado de las componentes localizada y no localizada en el plano del defecto, dependen fuertemente del valor  $\tilde{\lambda}$  y alcanza un máximo muy pronunciado a un valor bien definido  $\tilde{\lambda}_d$  de  $\tilde{\lambda}$ . De este modo, se define un modo de defecto *cuasilocalizado*, que tiene la estructura de un singulete en el cual las componentes localizadas o evanescentes  $1^-$  y  $1^+$  son las que dominan debido a que tienen una amplitud mucho mayor que las otras. El hecho de que el modo de defecto en un medio con simetría helicoidal con un defecto de torsión no es un *modo localizado* en el sentido estricto, ya que éste contiene una pequeña componente no localizada, se mostró primero en la Ref. [80] para ondas acústicas y se extendió para ondas electromagnéticas en las refs. [5, 78, 79]. Algunas dudas acerca de la existencia de una componente no localizada, se expresan en la Ref. [81], debido a que no hay evidencia de esta componente en la región  $b$  cuando el modo de defecto es excitado por ondas que inciden desde la izquierda sobre una muestra infinita. La ausencia de tal componente será explicada en la próxima subsección. A continuación se hacen algunos comentarios sobre el uso de las soluciones encontradas.

i) Siempre es posible encontrar una combinación lineal de las dos soluciones en la cual el modo  $2^-$  no existe en  $b$  y el modo  $2^+$  tiene amplitud unitaria en  $a$  (en  $z = 0^-$ ). Ya que ese último modo es el único que incide sobre el plano del defecto, las amplitudes de los otros cuatro modos, coinciden con cuatro de los 16 elementos de la matriz de dispersión  $S$  del plano del defecto. En la Sec. 4.1.2, se definirá la frecuencia del defecto usando esta propiedad. En la Sec. 4.1.3 se definirá la matriz de dispersión con una diferente consideración.

ii) Las soluciones encontradas aquí, definen dos de los cuatro modos propios encontrados para campos electromagnéticos propagándose en muestras finitas. Las otras dos se pueden encontrar considerando también a los modos que han sido despreciados ( $1^+$  en  $a$  y  $1^-$  en  $b$ ). En muestras infinitas (con

#### 4.1. SINGULETES

---

$l \gg l_d$ ), se pueden escoger tales modos como modos independientes. Son diferentes de cero solamente cerca de las fronteras de la muestra (modos propios de frontera). Sin embargo, en muestras delgadas, tales modos no son modos propios, ya que es imposible satisfacer las condiciones de continuidad en el plano del defecto sin considerar los otros modos.

iii) El campo interno generado por ondas externas, es la superposición de los cuatro modos, los cuales en muestras infinitas tienen la estructura simple definida en (ii).

#### 4.1.2. Longitud de onda del modo de defecto

En la Ref. [77], el autor muestra que la longitud del modo de defecto  $\tilde{\lambda}_d$  viene dado aproximadamente por la expresión:

$$\tilde{\lambda}_d = \tilde{\lambda}_m + \tilde{\lambda}_a \cos \bar{\theta}. \quad (4.9)$$

$$\text{donde } \tilde{\lambda}_m = \frac{\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2}{2}, \tilde{\lambda}_a = \frac{\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1}{2}, \tilde{\lambda}_1 = \sqrt{\epsilon_{||} \mu_{||}}, \tilde{\lambda}_2 = \sqrt{\epsilon_{\perp} \mu_{\perp}}.$$

De particular interés es el caso cuando el defecto de torsión  $\bar{\theta} = 90^\circ$ , que implica  $\tilde{\lambda}_d = \tilde{\lambda}_m$ , es decir, la longitud del defecto aparece en la mitad del régimen de Bragg. En el siguiente capítulo, encontramos el mismo resultado para el MEQ con un defecto de torsión de  $90^\circ$ .

Esta ecuación es exacta sólo cuando  $a_c = 0$ , cuando  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$  son paralelos. En efecto, en este caso particular es posible satisfacer la continuidad de las componentes tangenciales de los campos  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$  considerando sólo los modos  $1^-$  en  $a$  y  $1^+$  en  $b$ . La posibilidad de satisfacer cuatro relaciones con sólo dos parámetros libres se debe al hecho de que la continuidad de  $\mathbf{e}$  implica la continuidad de  $\mathbf{h}$  (se recuerda que tales vectores son paralelos cuando  $a_c = 0$ ). La Fig. 4.3a muestra que  $\mathbf{e}^+$  y  $\mathbf{e}^-$  coinciden cuando ellos son paralelos al eje  $y$ , el cual es el bisector del ángulo de torsión  $\bar{\theta}$ . Esto sucede en un valor bien definido  $\tilde{\lambda}_c$  de  $\tilde{\lambda}$ , y el cual se relaciona con el ángulo  $\phi = \bar{\theta}/2$  mediante  $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_m + \tilde{\lambda}_a \cos \bar{\theta}$ , con  $\tilde{\lambda} = \lambda/p$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz y  $p$  es el paso del MEQ. Entonces, la Ec. (4.9) define el valor exacto de la frecuencia de defecto. En conclusion, el modo de defecto está localizado en el sentido estricto y su frecuencia se define perfectamente cuando  $a_c = 0$ .

La Fig. 4.3b ilustra el hecho de que para  $a_c \neq 0$  los vectores  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$  ya no son paralelos durante su rotación. Esto corresponde al caso en que  $s = 1$  (en el caso  $s = -1$  los vectores  $\mathbf{e}^-$ ,  $\mathbf{h}^-$  permanecen sin cambio, mientras que  $\mathbf{e}^+$ ,  $\mathbf{h}^+$  tienen direcciones opuestas). Obviamente, no existe ningún valor de  $\tilde{\lambda}$

#### 4.1. SINGULETES

---

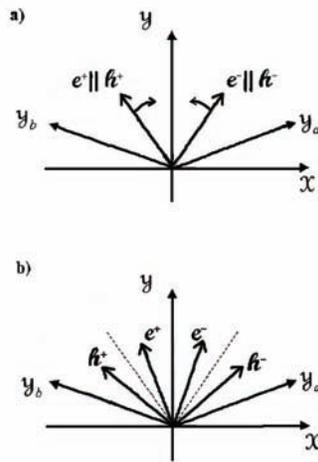


Figura 4.3: Rotación de los vectores  $(\mathbf{e}^+, \mathbf{h}^+)$  and  $(\mathbf{e}^-, \mathbf{h}^-)$  de los modos  $1^+$  y  $1^-$  para  $a_c = 0$  (Fig. a) y  $a_c \neq 0$  (Fig. b). Los vectores  $(\mathbf{e}^-, \mathbf{h}^-)$  están a lo largo del eje  $y_a$  y  $(\mathbf{e}^+, \mathbf{h}^+)$  a lo largo del eje  $y_b$  para  $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_2$ . Cuando  $\tilde{\lambda}$  decrece, ellos rotan hacia el eje  $y$  manteniéndose paralelos solo cuando  $a_c = 0$ . Para  $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_d$  los vectores  $(\mathbf{e}^-, \mathbf{h}^-)$  coinciden con  $(\mathbf{e}^+, \mathbf{h}^+)$  y se encuentran a lo largo del eje  $y$  en la Fig. a. En la Fig. b tales vectores nunca coinciden pero para  $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_d$  sus bisectores se encuentran paralelos al eje  $y$ . Se hace hincapié en que el ángulo entre  $y_a$  y  $y_b$ , es el ángulo de torsión  $\bar{\theta}$  y tienen como bisector al eje  $y$ .

#### 4.1. SINGULETES

---

para el cual  $\mathbf{e}^+$  coincide con  $\mathbf{e}^-$  y  $\mathbf{h}^+$  coincide con  $\mathbf{h}^-$ . La solución encontrada en la Sec. 4.1.1 se obtuvo agregando a los modos  $1^\pm$  una combinación lineal de los modos  $2^\pm$ , tal que los vectores  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$  fueran paralelos, y a lo largo del eje  $y$ , y desfasados por  $\pm\pi/2$  (para  $s = -1$  ellos son paralelos al eje  $x$ ). La figura sugiere también que el valor mínimo de los coeficientes  $A^\pm$  y  $B^\pm$  se obtiene cuando los bisectores de los campos  $(\mathbf{e}^+, \mathbf{h}^+)$  y  $(\mathbf{e}^-, \mathbf{h}^-)$  (líneas punteadas) coinciden con el eje  $y$ , generando de este modo un máximo para la función  $\rho(\tilde{\lambda})$  definida en (4.8). Valores aproximados para  $\tilde{\lambda}_d$  y para  $\rho(\tilde{\lambda})$  se obtuvieron en la Ref. [5] usando argumentos similares.

Ahora se define el valor exacto de  $\tilde{\lambda}_d$  para  $a_c \neq 0$  considerando una propiedad interesante de los defectos de torsión primeramente encontrada en forma numérica por Kopp y Genack [10]: para  $\lambda = \tilde{\lambda}_d$  el plano del defecto refleja totalmente los modos  $2^\pm$ . Para tomar en cuenta esta consideración, basta tomar la solución definida en el punto (i) de la Sec. 4.1.1, correspondiente a un campo en el cual el modo  $1^-$  no existe en  $b$ , y se busca el valor  $\tilde{\lambda}_d$  de  $\tilde{\lambda}$  para el cual, la amplitud del modo  $1^+$  en  $b$  sea igual a cero. Cálculos directos proveen la siguiente relación entre  $\bar{\theta}$  y  $\lambda_d$

$$\bar{\theta} = \cot^{-1} \left[ \frac{i}{2} \left( \frac{u_2 (u_1 \varepsilon_{\parallel} + 2\varepsilon_m \tilde{\lambda}_d^2)}{4n_1 u \varepsilon_m \tilde{\lambda}_d} - \frac{2n_1 u_1 \varepsilon_m \tilde{\lambda}_d}{u (u_1 \varepsilon_{\parallel} + 2\varepsilon_m \tilde{\lambda}_d^2)} \right) \right] + m\pi, \quad (4.10)$$

en donde  $m$  es un entero, ya que  $\bar{\theta}$  se define módulo  $\pi$ .

Este último caso solo se menciona por completez, ya que encontramos que en el MEQ con defecto los campos  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$  son paralelos en el plano del defecto y por lo tanto,  $a_c = 0$ . Este resultado se presenta en el siguiente capítulo. Esto implica que, como se ha dicho anteriormente (ver Ec. (4.9)), cuando el defecto de torsión es de  $90^\circ$  la longitud de onda del defecto aparece justo a la mitad del régimen de Bragg.

#### 4.1.3. Muestras delgadas

Cuando el grosor  $2l$  de la muestra es comparable con la longitud de atenuación  $l_d$  de los modos  $1^\pm$ , todas las ondas pueden alcanzar el plano del defecto (ver Fig. 4.4).

Así, es imposible definir todos los elementos de la matriz de dispersión usando las soluciones dadas por Ecs. (4.3, 4.4) en donde sólo tres de los

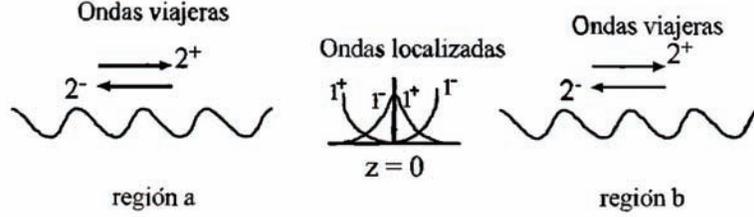


Figura 4.4: Un defecto de torsión en  $z = 0$ . En este caso la muestra es finita y todos los modos existen en cada lado del plano del defecto.

cuatro modos son considerados. De acuerdo al procedimiento mostrado en la Sec. 2.5, se considera la *matriz de transferencia* (o *propagador*)  $U$ , la cual se define implícitamente por la ecuación  $\alpha_b(0^+) = U\alpha_a(0^-)$ . Tomando en cuenta la Ec. (4.2), la relación  $\beta = T\alpha$ , y la continuidad de  $\beta(z)$  en el plano del defecto, en  $z = 0$ , se obtiene:

$$U = U(0^+, 0^-) = T^{-1} \exp(-R\bar{\theta})T \equiv \cos \bar{\theta} \mathbf{I}_4 - \sin \bar{\theta} R_S, \quad (4.11)$$

con

$$R_S = T^{-1}RT.$$

La matriz de rotación  $R_S$  es similar a la matriz  $R$  definida en Ec.(2.64). Entonces:  $R_S^{-1} = -R_S$  y su determinante es igual a 1. Al igual que el procedimiento seguido en la Sec. 2.5, para encontrar los elementos de  $R_S$  se expresa  $T^{-1}$  como una función de  $T$  usando la relación  $G_\alpha = T^\dagger G_\beta T$  de la Sec. 2.4 y las ecuaciones que definen los elementos de  $T, G_\alpha, G_\beta$  (ver Sec. 2.4.1). Cálculos directos conducen a<sup>1</sup>

$$R_S = \begin{pmatrix} -r_1 & -r_5^* & -r_3 & -r_5 \\ ir_5^* & ir_2 & ir_5 & ir_4 \\ r_3 & r_5 & r_1 & r_5^* \\ -ir_5 & -ir_4 & -ir_5^* & -ir_2 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

<sup>1</sup>Recuérdese que los vectores base que se escogen en el presente capítulo están en el orden  $1^+, 2^+, 1^-, 2^-$ , de tal modo que la expresión usada para  $G_\alpha$  viene dada por la expresión (2.61)

#### 4.1. SINGULETES

---

en donde las cantidades  $r_j$  ( $j = 1, \dots, 5$ ) son

$$\begin{aligned} r_{1,3} &= 2\tilde{\lambda}c_1^2[(2\tilde{\lambda}^2\varepsilon_m + u_1\varepsilon_{\parallel})(u_2 - 2\varepsilon_{\parallel}\mu_m) \mp 2n_1^2u_1\varepsilon_m], \\ r_{2,4} &= 2\tilde{\lambda}c_2^2[(2\tilde{\lambda}^2\varepsilon_m + u_2\varepsilon_{\parallel})(u_1 - 2\varepsilon_{\parallel}\mu_m) \mp 2n_2^2u_2\varepsilon_m], \\ r_5 &= 4\tilde{\lambda}c_1c_2a_c \left( \varepsilon_{\parallel}(a_c - \varepsilon_{\parallel}\mu_m) + \varepsilon_m(\tilde{\lambda}^2 + n_1n_2) \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

y satisfacen la relación  $r_3^2 + r_4^2 = r_1^2 + r_2^2$ .

El procedimiento para calcular la matriz de dispersión  $S$  a partir de  $U$  se discutió en la Sec. 2.5. Es conveniente escribir la matriz  $U$  de  $4 \times 4$  como

$$U = \begin{pmatrix} U_{ff} & U_{fb} \\ U_{bf} & U_{bb} \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

en donde  $f$  y  $b$  indican a la derecha e izquierda,<sup>2</sup> respectivamente, y considerar también la matriz  $U^{-1} \equiv \cos\bar{\theta}\mathbf{I} + \text{sen}\bar{\theta}R_S$ . La matriz  $S_{ff}$  de  $2 \times 2$  es la inversa de  $(U^{-1})_{ff}$ , y que está dada por

$$(U^{-1})_{ff} = \begin{pmatrix} \cos\bar{\theta} - r_1\text{sen}\bar{\theta} & -r_5^* \\ ir_5^* & \cos\bar{\theta} + ir_2\text{sen}\bar{\theta} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Como ya se ha mencionado, para  $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_d$  el modo  $2^+$  se refleja totalmente en el plano del defecto. Esto significa que el elemento  $(2, 2)$  de  $S$ , el cual coincide con el elemento  $(2, 2)$  de  $S_{ff}$ , es igual a cero. Es fácil mostrar que este elemento es cero cuando el elemento  $(1, 1)$  de su matriz inversa  $(U^{-1})_{ff}$ , dada por Ec.(4.15), es cero. Entonces, la cantidad  $\tilde{\lambda}_d$  se define implícitamente por la siguiente ecuación

$$\bar{\theta} = \cot^{-1} \left[ r_1(\tilde{\lambda}_d) \right] + m\pi, \quad (4.16)$$

la cual es completamene equivalente a la Ec. (4.10).

El procedimiento usado aquí para obtener la longitud de onda del defecto  $\tilde{\lambda}_d$  haciendo igual a cero el elemento  $(2, 2)$  de la matriz de dispersión  $S$  merece algunos comentarios importantes. Para la definición de  $\tilde{\lambda}_d$  es razonable considerar las propiedades de dispersión de la muestra, debido a que las curvas definidas como  $f_{ij}(\tilde{\lambda}) = |S_{ij}(\tilde{\lambda})|^2$ , en donde  $S_{ij}$  son los elementos

---

<sup>2</sup>los subíndices  $f$  y  $b$  se deben a que son las primeras letras de las palabras "forward" y "backward"

#### 4.1. SINGULETES

---

de la matriz de dispersión, muestran máximos o mínimos sólo en la presencia de los defectos. La definición de  $\tilde{\lambda}_d$  es obvia si y sólo si todos los máximos y mínimos coinciden en el mismo valor  $\tilde{\lambda}$ . Un análisis numérico muestra que esto no es el caso en general y no es fácil tener una idea intuitiva del origen de la diferencia entre la posición de los dos diferentes picos. De hecho, para definir la matriz  $S$ , se debe calcular primero la matriz de transferencia  $U$ , cuyos elementos dependen muy suavemente de  $\tilde{\lambda}$  aún en la presencia del defecto. Aquí se igualó a cero el elemento  $(1, 1)$  de la matriz de transferencia inversa que viene dada por la expresión (4.15). En este caso, las cantidades  $f_{ij}$  que dan las transmitancias del plano del defecto son

$$\begin{aligned} f_{11} &= (\cos^2 \bar{\theta} + r_2^2 \text{sen}^2 \bar{\theta}) / |r_5|^4, \\ f_{12} &= f_{21} = 1 / |r_5|^2, \\ f_{22} &= 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

La cantidad  $r_5$  definida en la Ec. (4.13), contiene el factor  $a_c$ . Así, las cantidades  $f_{11}$ ,  $f_{12}$ ,  $f_{21}$  divergen cuando  $a_c$  tiende a cero. En este caso la frecuencia del defecto se define sin ambigüedad debido a que las funciones  $f_{ij}(\tilde{\lambda})$ , finitas por definición, son ahora proporcionales a la función de Dirac  $\delta(\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_d)$ . En el caso general  $a_c \neq 0$  los valles y crestas de las funciones  $f_{ij}(\tilde{\lambda})$  tienen un ancho finito y sus máximos y mínimos no coinciden en un mismo valor  $\tilde{\lambda}$ , aunque la diferencia entre tales valores sea pequeña cuando el módulo de  $a_c$  lo sea también. Para valores típicos de los parámetros de anisotropía, las diferencias son tan pequeñas que se puede escoger uno de estos valores como una posible definición de  $\tilde{\lambda}_d$ . Aquí se escogió el mínimo de la componente  $f_{22}$  debido a que ésta se define por una ecuación más simple. En conclusión, la frecuencia del defecto se puede definir exactamente, sin ninguna ambigüedad, sólo cuando  $a_c = 0$ , y en muestras reales, se define de manera muy exacta debido a que  $a_c$  es un parámetro pequeño. Cuando el defecto de torsión es de  $90^\circ$ , la frecuencia del defecto se encuentra en el centro del régimen de Bragg. Este resultado es compatible con el que se encuentra en el siguiente capítulo, para el sistema que estudiamos.

Aquí se consideró la matriz de dispersión del plano del defecto para las ondas propias *internas*. El interés del presente análisis puede parecer puramente académico, debido a que en experimentos sólo se consideran muestras finitas y ondas *externas*. Obviamente los máximos y mínimos de tales curvas

#### 4.1. SINGULETES

---

coinciden en una longitud de onda bien definida sólo cuando  $a_c = 0$ . Este hecho confirma el papel principal que ocupa el parámetro  $a_c$  en las propiedades ópticas de muestras con defectos de torsión.

La reflectancia y transmitancia de la muestra se definen a través de la matriz de dispersión de la muestra completa. Las curvas que proporcionan estas cantidades dependiendo de  $\lambda$  para diferentes valores de  $l, \bar{\theta}, a_c$  y para los diferentes estados de polarización se han encontrado numéricamente en las refs. [5, 10, 77] y no serán reportadas en la presente tesis. Cabe señalar que tales curvas muestran máximos o mínimos  $\tilde{\lambda} \approx \tilde{\lambda}_d$ , cuyo ancho espectral  $\Delta\omega$  es igual a  $\tau^{-1}$ , donde  $\tau$  es el tiempo de decaimiento del modo de defecto. Cuando  $l \gg l_d$ , con  $l_d$  la longitud de atenuación de los modos  $1^\pm$ ,  $\tau$  prácticamente es independiente de  $l$ , pero depende fuertemente de  $a_c$ , ya que la energía almacenada por el modo de defecto puede escapar solamente debido a la presencia de la componente no localizada. Para  $a_c = 0$  tal componente desaparece,  $\tau$  tiende a infinito y  $\Delta\omega$  tiende a cero.

## Capítulo 5

# Óptica de un MEQ con un defecto de torsión

En los capítulos previos se ha establecido la teoría necesaria para estudiar la óptica de las películas delgadas quirales con un defecto de torsión y su sintonización electro-óptica. Se ha dicho que anteriormente se han estudiado ópticamente MEQs, como son los cristales líquidos colestéricos, que presentan un defecto de torsión de  $90^0$  en el centro. Esto produce un agujero espectral en el centro del régimen de Bragg, en los espectros de transmitancia y reflectancia. Sin embargo, los colestéricos no presentan efecto Pockels, por lo que solamente se pueden sintonizar eléctricamente en pequeños rangos, ya que el tamaño del período o paso de la hélice cambia levemente en presencia de campos eléctricos, lo que cambia el rango de longitudes de onda en el que se observa el régimen de Bragg.

Por otra parte, se han estudiado STF's quirales que presentan efecto Pockels al exponerlas a campos eléctricos externos y que, por lo tanto, son eléctricamente sintonizables. Sin embargo, no se habían estudiado en el caso en el que la STF presenta un defecto de torsión. Por lo tanto, estudiamos una STF que presenta efecto Pockels, con un defecto de torsión de  $90^0$  en el centro de la película. Esto, como se había mencionado anteriormente, produce un modo localizado o resonante en el plano del defecto, que se observa como un agujero espectral en el centro del régimen de Bragg. Puesto que las constantes dieléctricas del material dependen del campo eléctrico aplicado, debido al efecto Pockels y además, las frecuencias en los bordes del régimen dependen de las constantes dieléctricas, podríamos sintonizar el régimen de Bragg y la longitud de onda del defecto por la acción de un campo eléctrico

---

externo. Este sistema físico tiene diversas aplicaciones: filtros de polarización, sintonizadores de banda estrecha de longitudes de onda, almacenadores de energía óptica y resonadores ópticos en láseres.

En este capítulo empleamos la representación de Marcuviz-Schwinger junto con la transformación de Oseen que se han revisado en el capítulo 2, para derivar una ecuación diferencial ordinaria matricial de  $4 \times 4$  para la propagación electromagnética dentro del medio estructuralmente quiral, con un defecto de torsión de  $90^\circ$  en el centro. Para efectos de sintonización electro-óptica aplicamos un campo eléctrico externo de corriente directa a lo largo del eje de inhomogeneidad del material, que llamamos eje  $z$ , ver Fig. 5.1. Se ilumina al sistema con luz monocromática, arbitrariamente polarizada que incide normalmente, es decir, en la dirección del eje  $z$ . Así, encontramos los modos ópticos (modos propagantes y localizados ó de defecto) dentro del sistema. A partir de estos modos encontramos el tiempo de permanencia fotónico en el plano del defecto que es la energía almacenada en el modo localizado entre la potencia total de las ondas propagantes. Éste nos da una medida del tiempo que permanece la energía almacenada en el plano del defecto.

Por medio de la aproximación homogénea por pedazos que se expuso en la sección 2.7, encontramos la matriz de transferencia, y mediante la expresión 2.71, en la sección 2.5, encontramos la matriz de dispersión. Los elementos de esta matriz son los coeficientes de reflexión y transmisión del sistema. El cuadrado de la magnitud de estos coeficientes nos da las reflectancias y transmitancias como función de la longitud de onda de la luz  $\lambda$ , del ángulo de inclinación de la STF quiral  $\chi$  y del campo eléctrico  $cd$  aplicado  $E^{cd}$ , que son variables que se pueden manipular experimentalmente.

Analizamos el fenómeno Bragg observado y encontramos la longitud de onda del defecto, que es la longitud de onda central del agujero espectral, en el centro del régimen de Bragg; encontramos el ancho de línea del modo de defecto, el ancho de banda del régimen de Bragg y el ángulo entre las componentes del campo eléctrico y magnético, todo esto en función del ángulo de inclinación del material  $\chi$ , y de la magnitud del campo eléctrico  $E^{cd}$ . También, encontramos el inverso del ancho de línea relativo,  $\tau\omega_d$ , que es proporcional al tiempo de permanencia fotónico  $\tau$ , en la frecuencia del defecto  $\omega_d$ , que nos da una medida del tiempo en el que permanece la energía almacenada en el modo localizado. El inverso del ancho de línea relativo es un tiempo de permanencia fotónico en unidades adimensionales y se grafica en función del ángulo de inclinación del material  $\chi$ , de la magnitud del campo

## 5.1. SISTEMA FÍSICO

---

eléctrico  $E^{cd}$  y del ancho de la STF quiral  $l$ , para ver si existe una región en el espacio  $E^{cd} - \chi$  y  $l - \chi$  en el que este tiempo es mayor. Esto último es importante porque se ha encontrado que al aumentar el tiempo de permanencia fotónico disminuye el umbral de energía de activación de láseres [10]. Por lo tanto, este sistema se puede emplear como resonador óptico y almacenador de energía óptica en láseres con bajos umbrales de energía de activación.

### 5.1. Sistema Físico

Consideramos un material estructuralmente quiral no disipativo, en este caso una película delgada esculpida quiral con un defecto de torsión de  $90^\circ$ , construida de Niobato de Potasio ( $kNbO_3$ ), un material ortorrómbico que pertenece a la clase  $mm2$ , una de las 20 clases de grupos de simetría cristalográficas puntuales locales existentes. Elegimos este material porque presenta efecto Pockels (discutido en la sección 3.1), ante la presencia de campos eléctricos externos y tiene coeficientes electro-ópticos relativamente grandes. Por lo tanto, requiere magnitudes de campo eléctrico  $cd$  menores para sintonizar eléctricamente los espectros ópticos [14, 15], en comparación con otros materiales. La película se ilumina con luz monocromática arbitrariamente polarizada a incidencia normal, es decir propagándose en la dirección del eje helicoidal  $z$ .

Para efectos de sintonización electro-óptica de sus espectros de transmitancia y reflectancia, se aplica un campo eléctrico de corriente directa,  $cd$ , a lo largo del eje de inhomogeneidad o quiralidad,  $z$ , ver fig 5.1.

### 5.2. Modo de Defecto

Estamos interesados en la reflexión y transmisión de ondas planas debido a un bloque de MEQ de grosor  $L$ . El eje de quiralidad estructural del MEQ está designado como el eje  $z$  y el MEQ está sujeto a un campo eléctrico de corriente directa,  $E^{cd}$ . Los espacios entre  $z \leq 0$  y  $z \geq L$  están vacíos. Una onda plana polarizada arbitrariamente incide normalmente sobre el MEQ desde la mitad del espacio  $z \leq 0$ . Como resultado hay ondas planas reflejadas y transmitidas en los espacios:  $z \leq 0$  y  $z \geq L$ , respectivamente. Así, debemos resolver un problema de valores a la frontera para determinar los coeficientes de reflexión y transmisión.

## 5.2. MODO DE DEFECTO

---

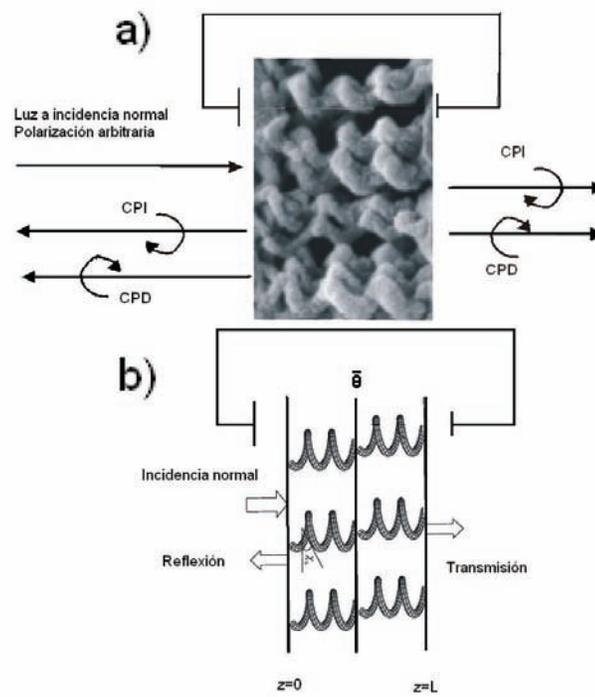


Figura 5.1: a) Bloque de material estructuralmente quiral con un defecto de torsión de  $90^0$  a la mitad del bloque, sujeto a un campo eléctrico de corriente directa, aplicado a lo largo del eje de inhomogeneidad. Se ilumina al sistema con luz monocromática a incidencia normal. b) esquema del sistema donde se muestra el defecto de torsión.

## 5.2. MODO DE DEFECTO

---

Las ondas incidentes se consideran con polarización arbitraria, son las que se han mencionado en capítulos anteriores, Ec. (2.40).

El MEQ, en este caso particular, es una película delgada compuesta de un material ortorrómbico que pertenece a la clase cristalográfica de simetría puntual  $mm2$ . Este material presenta efecto Pockels bajo la acción de un campo eléctrico aplicado. Sus propiedades electro-ópticas están dadas en términos del recíproco de la matriz de permitividad relativa  $\bar{\epsilon}_{ij}^{-1}$ . Ésta se puede expandir en series de potencias del campo eléctrico aplicado  $E_k^{cd}$  como

$$\bar{\epsilon}_j^{-1} = \bar{\epsilon}_j^{-1(0)} + r_{jk} E_k^{cd} + \dots, \quad (5.1)$$

tal y como se ha explicado en la sección 3.1, ver Ec. (3.13), por lo tanto, queda en términos de los coeficientes electro-ópticos  $r_{jk}$ , que tienen diferentes valores para cada material específico. En este caso los coeficientes a emplear son los del Niobato de Potasio ( $KNbO_3$ ), este material posee valores relativamente grandes de los coeficientes electro-ópticos que dan respuestas ópticas mayores en presencia de campos eléctricos externos. Puesto que el eje de quiralidad y por lo tanto, de inhomogeneidad del MEQ, es el eje  $z$ , la matriz de permitividad relativa sólo depende del eje  $z$  y se puede escribir como (ver la Ec. (3.34) en la sección 3.6)

$$\bar{\epsilon}^{SCM}(z) = \bar{S}_z(hpz) \bar{R}_y(\chi) \bar{\epsilon} \bar{R}_y(\chi) \bar{S}_z(-hpz), \quad (5.2)$$

donde  $p = \pi/\Omega$ , con  $\Omega$  la mitad del período del MEQ y donde  $h$  es el parámetro de lateralidad,  $h = 1$  para un MEQ de lateralidad derecha y  $h = -1$  para lateralidad izquierda.  $\bar{R}_y(\chi)$  es la matriz de inclinación que es una rotación involucrando el ángulo de inclinación del material,  $\chi \in [0, \pi/2]$  con respecto al eje  $x$  en el plano  $x - z$ . El uso de la matriz de rotación  $\bar{S}_z$  en la matriz de permitividad relativa  $\bar{\epsilon}^{SCM}$  involucra la mitad del paso  $\Omega$  del MEQ a lo largo del eje  $z$ . La aplicación de estas rotaciones simultáneas nos permite colocarnos en un marco de referencia donde el material se observa localmente homogéneo. Así, podemos resolver las ecuaciones de Maxwell con relativa facilidad.

El campo eléctrico está aplicado a lo largo del eje de inhomogeneidad, es decir el eje  $z$ , por lo tanto, éste se puede escribir como en la Ec. (3.37).

Usando el formalismo de Marcuviz-Schwinger, explicado en la sección 2.1.1, las ecuaciones de Maxwell se reducen a encontrar las soluciones a los campos transversales. Consideramos, como es usual, que la luz incidente es monocromática, de frecuencia  $\omega$  y que incide normalmente en la capa de

## 5.2. MODO DE DEFECTO

---

MEQ a lo largo del eje  $z$ . Así, los campos ópticos se propagan axialmente y sólo dependen de  $z$ . Los campos electromagnéticos dentro del material se pueden representar por el siguiente vector

$$\bar{\psi}(z) \equiv (e_x(z), e_y(z), h_x(z), h_y(z))^T, \quad (5.3)$$

donde  $e_x(z)$ ,  $e_y(z)$ ,  $h_x(z)$  y  $h_y(z)$  son las componentes transversales de los campos electromagnéticos. Aplicando la transformación de Oseen, a los campos electromagnéticos y al tensor dieléctrico, como se explica en la sección 2.1.2, encontramos que  $\bar{\psi}(z)$  satisface la siguiente ecuación diferencial

$$d\bar{\psi}(z)/dz = i\bar{A}\bar{\psi}(z) \quad (5.4)$$

donde  $\bar{A}$  está dada por

$$\bar{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -ip & 0 & \omega\mu_o \\ ip & 0 & -\omega\mu_o & 0 \\ -\omega\epsilon_o\epsilon_E & -\omega\epsilon_o\epsilon_B & 0 & -ip \\ \omega\epsilon_o\epsilon_D & \omega\epsilon_o\epsilon_E & ip & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

aquí  $\mu_o$  y  $\epsilon_o$  son la permitividad magnética y eléctrica del vacío, mientras que  $\epsilon_B$ ,  $\epsilon_D$  y  $\epsilon_E$ , están dadas por las ecuaciones 3.53, 3.54 y 3.55. Las longitudes de onda de los bordes del régimen se obtienen a partir de las siguientes expresiones

$$\epsilon_{B\xi} = \frac{1}{2} \left[ \epsilon_B + \epsilon_D + \frac{(\epsilon_B - \epsilon_D)^2 + 4\epsilon_E^2}{\epsilon_B - \epsilon_D} \cos 2\xi \right],$$

$$\epsilon_{D\xi} = \frac{1}{2} \left[ \epsilon_B + \epsilon_D - \frac{(\epsilon_B - \epsilon_D)^2 + 4\epsilon_E^2}{\epsilon_B - \epsilon_D} \cos 2\xi \right].$$

que coinciden con las Ecs.(3.61) y (3.62). Así, podemos calcular la longitud de onda del modo de defecto  $\lambda_d$  en el centro del régimen (ver Ec. 3.63).

Nótese que  $\bar{A}$  es independiente de  $z$ . Así, los eigenvalores de  $\bar{A}$  nos permiten determinar los números de onda de los modos dentro de la STF quiral

$$k_{\pm}^2 \equiv p^2 + \frac{(\epsilon_D + \epsilon_B)}{2} \mu_o \epsilon_o \omega^2 \pm \frac{\omega}{2} \sqrt{\mu_o \epsilon_o (8p^2(\epsilon_D + \epsilon_B) + \mu_o \epsilon_o \omega^2 (4\epsilon_E^2 + (\epsilon_B - \epsilon_D)^2))}. \quad (5.6)$$

### 5.3. TRANSMITANCIA Y REFLECTANCIA

---

Los modos ópticos dentro de la STF, considerado campos monocromáticos son (recordando lo que se expuso en la sección 2.4, ver ecuación 2.55):

$$\psi = e^{i(\omega t - (\pm k_{\pm})z)}. \quad (5.7)$$

Los modos cuyos eigenvalores son  $\pm k_{-}$  muestran una brecha de banda o "band gap" para  $\omega$  en el intervalo definido por las frecuencias en donde los números de onda  $\pm k_{-}$  son imaginarios puros esto es cuando

$$\omega_j^2 \equiv p^2 \frac{\epsilon_B + \epsilon_D - (-1)^j \sqrt{4\epsilon_E^2 + (\epsilon_B - \epsilon_D)^2}}{2\mu_0 \epsilon_o (\epsilon_B \epsilon_D - \epsilon_E^2)}, \quad (j = 1, 2) \quad (5.8)$$

y sus eigenvectores son ondas polarizadas linealmente y evanescentes.

Por otra parte los modos cuyos eigenvalores son  $\pm k_{+}$  son reales y las ondas siempre están propagándose y son elípticamente polarizadas.

Se ha mencionado en la sección 4.1, y en la referencia [5], que en una estructura helicoidal con una discontinuidad de salto o de torsión, la amplitud de los modos evanescentes es mucho mayor que la de las ondas propagantes en la frecuencia del defecto  $\omega_d$ . En este caso el modo de defecto tiene aproximadamente el perfil

$$\exp(-|z|/l_d). \quad (5.9)$$

donde  $l_d = 1/k_{+}$  es el ancho de línea del modo de defecto.

## 5.3. Transmitancia y Reflectancia

Una vez encontrados los modos de los campos electromagnéticos dentro de la STF, usamos el método de la aproximación homogénea a pedazos, que se ha expuesto con anterioridad en la sección 2.7 para encontrar la matriz de transferencia. A partir de ésta obtenemos la matriz de dispersión por medio de la Ec. 2.71. Los elementos de esta última son los coeficientes de transmisión y reflexión y sus magnitudes al cuadrado son las reflectancias y transmitancias del sistema.

En la Fig. 5.2, se observa la transmitancia y reflectancia para luz circularmente polarizada derecha, al incidir luz CPD. Observamos que se presenta el fenómeno Bragg circular entre las longitud de onda aproximadamente en el rango de  $6.7$  a  $6.9 \times 10^{-7}m$ , es decir, luz circularmente polarizada derecha se refleja casi en su totalidad para una STF quiral de lateralidad derecha.

### 5.3. TRANSMITANCIA Y REFLECTANCIA

---

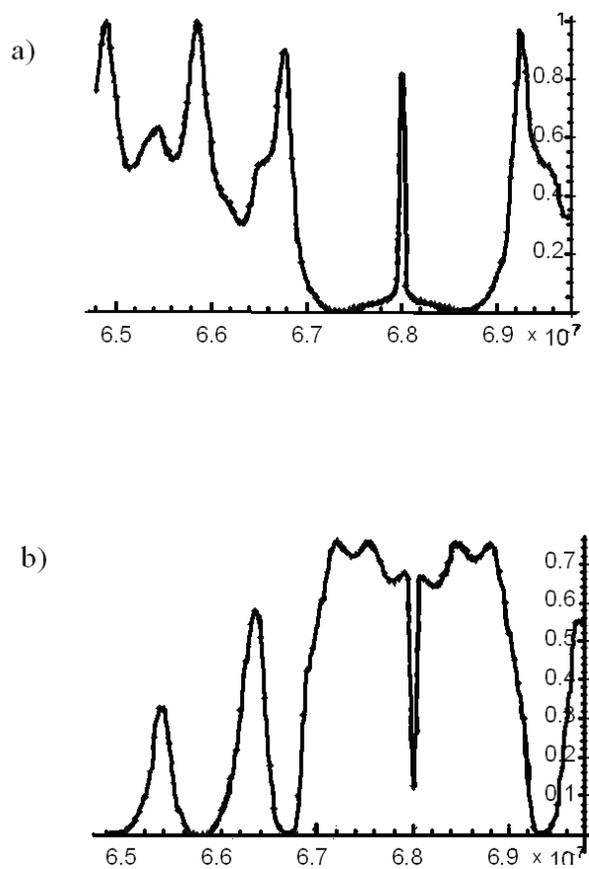


Figura 5.2: a) Transmitancia y b) Reflectancia para luz circularmente polarizada derecha al incidir en una STF con hélice derecha, con  $\chi = 0$ , aplicando un campo eléctrico de  $2 \times 10^9$  V/m.

### 5.3. TRANSMITANCIA Y REFLECTANCIA

---

También, se observa un agujero espectral centrado en la longitud de onda  $\lambda_d = 6.8 \times 10^{-7} m$  para valores de  $\chi = 0$  del ángulo de inclinación y  $E^{cd} = 2 \times 10^9 V/m$  para el campo eléctrico aplicado. Es decir, luz polarizada circularmente derecha, se transmite, para un rango estrecho de longitudes de onda alrededor de  $\lambda_d$ . El agujero espectral, generado por el defecto de torsión de  $90^\circ$ , se sitúa en la longitud de onda central del régimen de Bragg (ver Fig. 5.2), que coincide con resultados presentados previamente en las referencias [10, 5] y con la teoría expuesta en la Sec. 4.1.2. Se menciona aquí que el fenómeno Bragg circular esta presente para un amplio rango de valores de campo eléctrico  $\sim E^{cd} \in [0, 4] \times 10^9 V/m$ . Sin embargo, se ha usado el valor mencionado para ejemplificar el fenómeno debido a que se observa gráficamente con mayor claridad.

Sean  $\omega_1$  y  $\omega_2$  las frecuencias de los bordes del régimen de Bragg, entonces, la frecuencia central del régimen y del modo localizado, o frecuencia del defecto es

$$\omega_d \equiv (\omega_1 + \omega_2)/2, \quad (5.10)$$

mientras que el ancho de banda es la diferencia entre las frecuencias de los bordes

$$\Delta\omega \equiv \omega_1 - \omega_2. \quad (5.11)$$

Observamos en la Fig. 5.3 que la longitud de onda del defecto se puede sintonizar en longitudes de onda que van desde aproximadamente  $630 \text{ nm}$  a  $730 \text{ nm}$ , que corresponde a un rango del espectro óptico en el color rojo. Se observa que la longitud de onda del defecto se recorre al rojo cuando aumentamos el campo eléctrico externo para valores del ángulo de inclinación del defecto en el intervalo de  $[0.3, 0.9] \text{ rad}$ , mientras que se recorre al azul para los demás ángulos.

Además, encontramos el ángulo  $\gamma_{em}(\omega_d)$  entre los campos eléctrico y magnético del modo localizado, en la frecuencia del defecto, los cuales se encuentran de las componentes de los eigenvectores y eigenvalores correspondientes de la matriz 5.5.

La Fig. 5.4, muestra  $l_d^{-1}(\omega_d)$ ,  $\Delta\omega$ , y  $\gamma_{em}(\omega_d)$  graficados en diferentes escalas versus  $\chi$  y el campo eléctrico aplicado  $E^{cd}$ . Se observa que hay una región geométrica en el espacio  $\chi - E^{cd}$  para la cual el ancho de línea  $l_d(\omega_d)$  diverge, en la frecuencia del defecto, mientras que  $l_d^{-1}(\omega_d)$  y  $\Delta\omega$  y  $\gamma_{em}(\omega_d)$  se desvanecen.

### 5.3. TRANSMITANCIA Y REFLECTANCIA

---

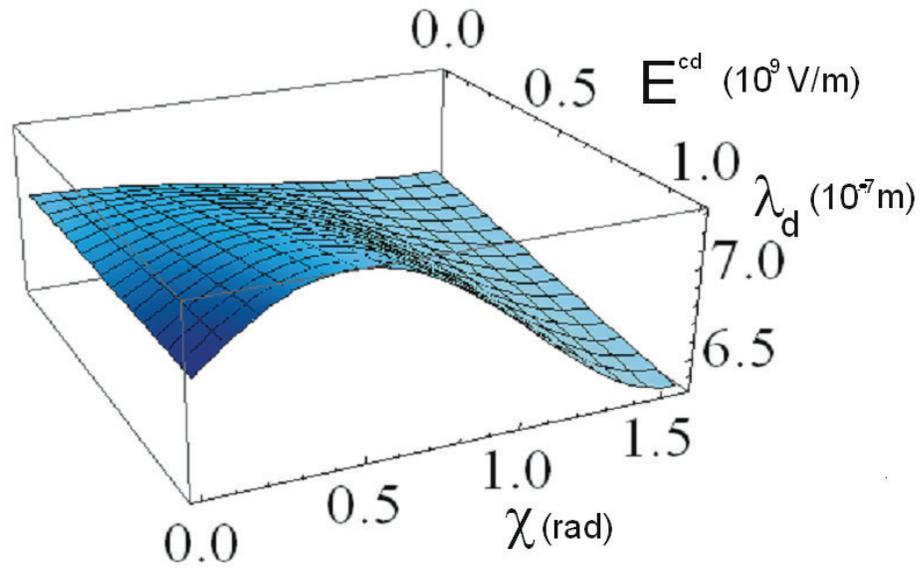


Figura 5.3: Longitud de onda del defecto  $\lambda_d$  vs  $\chi$  y  $E^{cd}$ , y para una capa o bloque de MEQ localmente biaxial cuya clase cristalografica es ortorrómbica  $mm2$ . Otros parámetros son:  $\epsilon_1^{(0)} = 4,72$ ,  $\epsilon_2^{(0)} = 5,20$ , y  $\epsilon_3^{(0)} = 5,43$ ,  $r_{13} = 43 \times 10^{-12} mV^{-1}$ ,  $r_{23} = 6 \times 10^{-12} mV^{-1}$ ,  $r_{33} = 63,4 \times 10^{-12} mV^{-1}$ ,  $r_{42} = 450 \times 10^{-12} mV^{-1}$ ,  $r_{51} = 120 \times 10^{-12} mV^{-1}$ , para otros  $r_{JK} = 0$ .

### 5.3. TRANSMITANCIA Y REFLECTANCIA

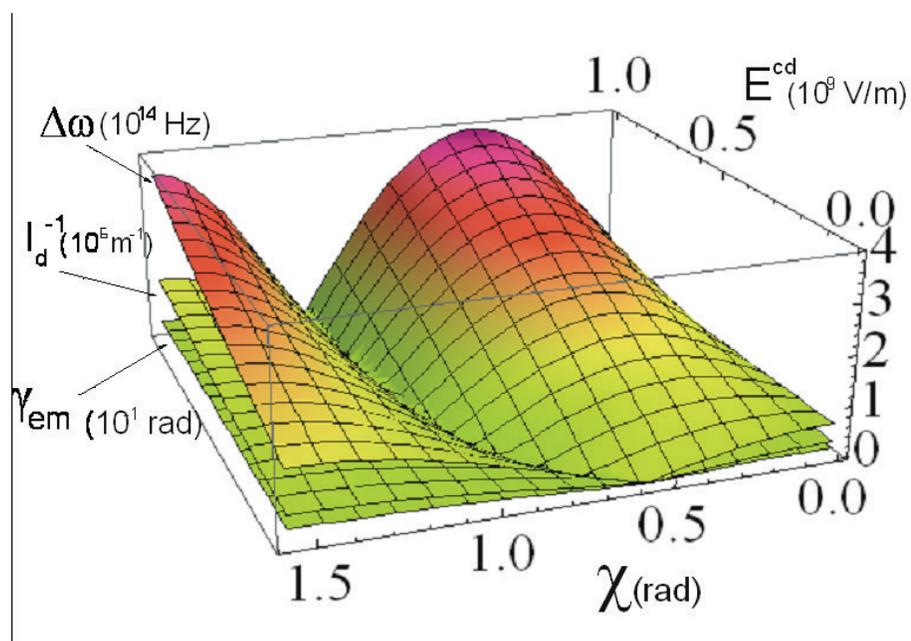


Figura 5.4: Ancho de línea  $l_d^{-1}(\omega_d)$ , ancho de banda  $\Delta\omega$  y el ángulo entre los campos magnético y eléctrico  $\gamma_{em}(\omega_d)$  para los modos evanescentes vs  $\chi$  and  $E^{cd}$  para el mismo material que la Fig. 5.3.

## 5.4. Inverso del Ancho de Línea Relativo

El tiempo de permanencia fotónico  $\tau$  está dado por la razón entre la energía electromagnética almacenada en la muestra y la potencia total de las ondas salientes.

Despreciando la contribución de las ondas propagantes en la energía almacenada,  $\tau(l)$  está dado por

$$\tau(l) \equiv \frac{l_d}{4c} \sqrt{(\epsilon_1^{(0)} + \epsilon_2^{(0)} + \epsilon_3^{(0)})/3} \frac{1 - \exp(-2l/l_d)}{\text{sen}^2(\gamma_{em}/2) + \exp(-2l/l_d)}, \quad (5.12)$$

donde  $l$  es el ancho de la STF quiral. Nótese que el tiempo de permanencia también depende de la frecuencia  $\omega$  y del ángulo de inclinación de la STF quiral  $\chi$ , mediante  $\gamma_{em}$ . El valor asintótico de  $\tau(l)$  para una STF muy grande es

$$\tau(\infty) = (l_d/(4c \text{sen}^2(\gamma_{em}/2))) \sqrt{(\epsilon_1^{(0)} + \epsilon_2^{(0)} + \epsilon_3^{(0)})/3}. \quad (5.13)$$

Sin embargo, si se sintoniza al MEQ sobre la curva pseudo-isotrópica,  $\tau(l)$  se reduce a

$$\tau(l) = (l/2c) \sqrt{(\epsilon_1^{(0)} + \epsilon_2^{(0)} + \epsilon_3^{(0)})/3} \quad (5.14)$$

el cual ahora depende proporcionalmente del grosor de la muestra y de aquí que nunca alcanza un máximo como ocurre para los puntos fuera de la curva pseudo-isotrópica mencionada. Por lo tanto, el tiempo de vida fotónico se puede prolongar sin límite al hacer cada vez más grande el grosor de la muestra  $l$ . El inverso del ancho de línea relativo se define como  $\tau\omega_d$ , donde  $\tau$  es el tiempo de permanencia fotónico y  $\omega_d$  es la frecuencia del defecto.

Se observa en la Fig. 5.5 que el inverso del ancho de línea relativo  $\tau\omega_d$  escala exponencialmente con el grosor de la muestra, para un ángulo de inclinación de la STF  $\chi = 45^\circ$ , sin aplicar campo eléctrico. Después de un valor del ancho  $l$  de la STF,  $\tau\omega_d$  se aproxima asintóticamente a un valor límite y ya no crece al aumentar  $l$ . Esto concuerda con estudios reportados para MEQs con defecto de torsión que no presentan efecto Pockels [10, 5]. El inverso del ancho de línea relativo tiene el mismo comportamiento para valores del ángulo de inclinación de la STF y del campo eléctrico externo fuera de la curva pseudo-isotrópica. Sin embargo, para valores de  $\chi$  y  $E^{cd}$  sobre la curva,  $\tau\omega_d$  no tiene un valor máximo como función del ancho de la muestra (Ec. 5.14).

#### 5.4. INVERSO DEL ANCHO DE LÍNEA RELATIVO

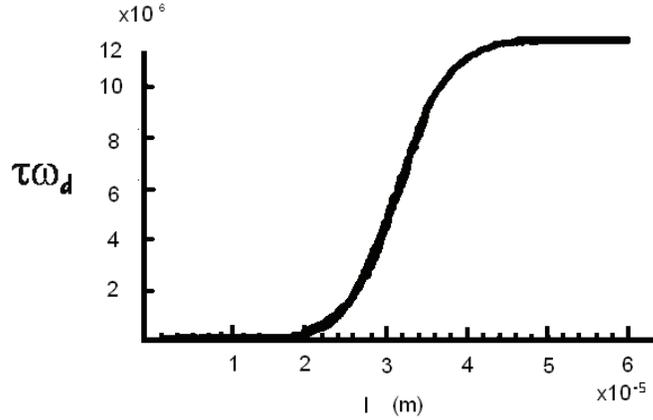


Figura 5.5: Se muestra el inverso del ancho de línea relativo, a un ángulo de inclinación de  $45^\circ$  de la STF quiral, sin aplicar campo eléctrico externo. Para el mismo material que la Fig. 5.3, con los mismos parámetros.

La Fig. 5.6 muestra el inverso del ancho de línea relativo  $\tau(l)\omega_d$  (que como se ha mencionado anteriormente es proporcional al tiempo de permanencia fotónico), contra  $\chi$  y  $E^{cd}$ , para el valor de  $l = 10^{-4}m$ . Hay que notar que junto a la curva pseudo-isotrópica hay dos cordilleras que la rodean. Sobre estas curvas el valor de  $\tau(l)\omega_d$  es  $\tau(l)\omega_d \sim 10^7$ , mientras que para el resto del plano  $\chi - E^{cd}$  el valor de  $\tau(l)\omega_d$  ha alcanzado su valor asintótico  $\tau(l)\omega_d \sim 10^6$ .

La Fig. 5.7 muestra  $\tau\omega_d$  contra el grosor de la muestra  $l$  y  $\chi$  para un valor fijo del campo eléctrico aplicado  $E^{cd} = 0.5 \times 10^9 V/m$ . Se observa como las dos cordilleras alrededor de la curva pseudo-isotrópica incrementan su amplitud y se acercan entre si al incrementar  $l$ , mientras que para los demás puntos del plano  $l - \chi$  permanece a un valor más bajo de  $10^6$ . Encontramos numéricamente que para valores grandes de  $l$  las dos cordilleras se fusionan en una.

Por último, la densidad de estados fotónicos  $D$  en la frecuencia del defecto se obtiene a partir de [87]

$$D(\omega_d) \equiv l \partial k_1(\omega_d) / \partial \omega \quad (5.15)$$

En la gráfica 5.4, se observa que la velocidad de grupo  $Vg(\omega_d) = \partial \omega(\omega_d) / \partial k_1$ ,

#### 5.4. INVERSO DEL ANCHO DE LÍNEA RELATIVO

---

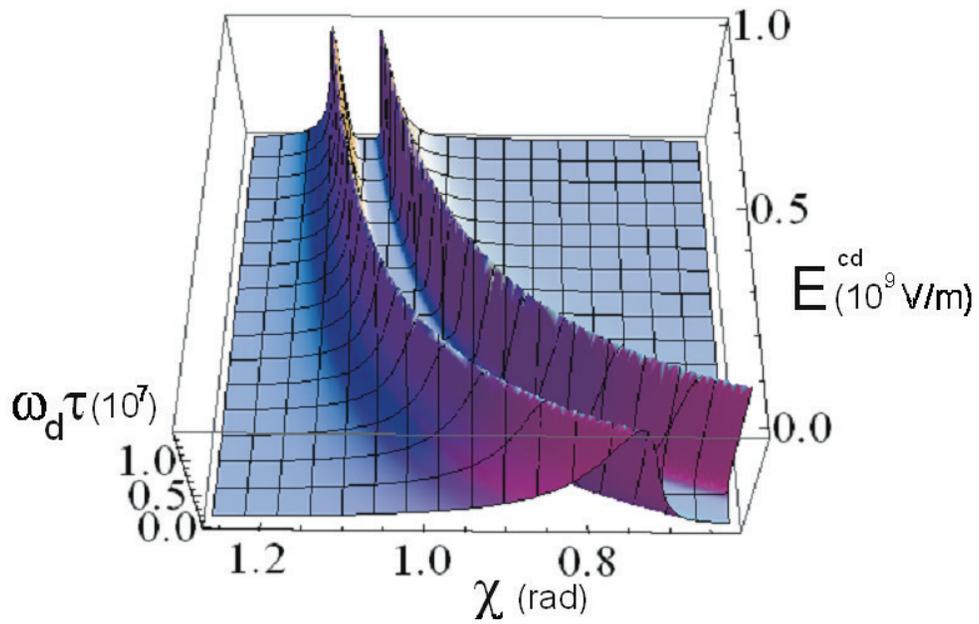


Figura 5.6: Inverso relativo del ancho de línea  $\tau\omega_d$  como función de  $\chi$  y  $E^{cd}$  para  $l = 10^{-4}m$  para el mismo material que la Fig. 5.3

5.4. INVERSO DEL ANCHO DE LÍNEA RELATIVO

---

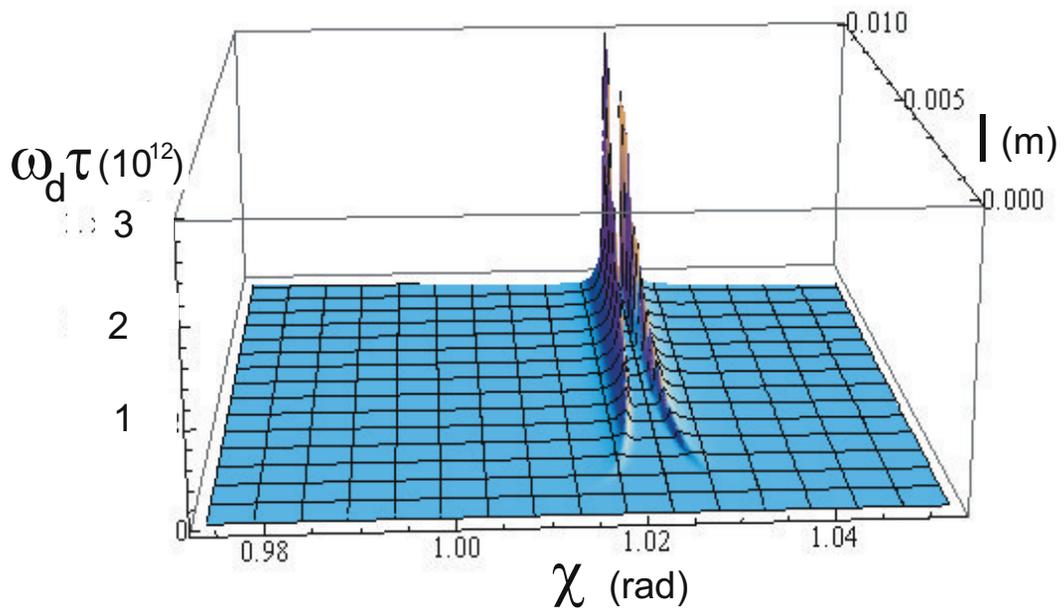
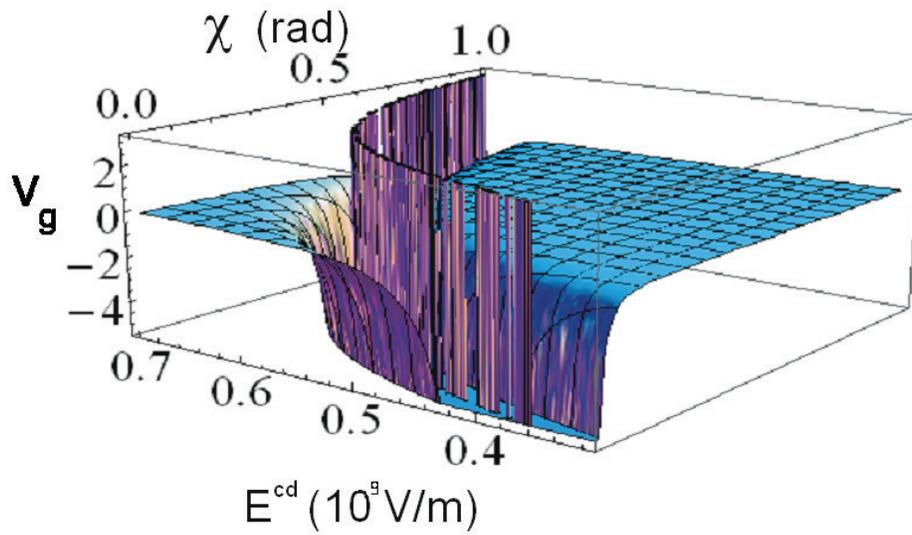


Figura 5.7:  $\tau\omega_d$  vs  $l(m)$  y  $\chi$ .

#### 5.4. INVERSO DEL ANCHO DE LÍNEA RELATIVO

---

varía mucho cerca de la curva pseudo-isotrópica, sin embargo, el cálculo analítico revela que sobre esta curva la velocidad de grupo es nula lo cual implica que la densidad de estados fotónicos  $D(\omega_d)$  diverge.



# Capítulo 6

## Análisis de Resultados y conclusiones

El sistema físico que estudiamos es una película delgada esculpida (STF) con estructura quiral, con un defecto de torsión de  $90^\circ$  en el centro de la muestra. Consideramos que la STF está construida de Niobato de Potasio que pertenece a la clase de simetría de grupo puntual cristalográfica  $mm2$ , que exhibe efecto Pockels. Para efectos de control electro-óptico se aplica un campo eléctrico externo de corriente directa a lo largo del eje de inhomogeneidad. El sistema se ilumina a incidencia normal con luz monocromática, polarizada arbitrariamente.

Por medio de las ecuaciones de Maxwell, la transformación de Oseen y la representación de Markuvitz-Schwinger encontramos los modos ópticos dentro de la STF con defecto. Esto nos permite obtener el tiempo de permanencia fotónico, que es la energía almacenada en el modo localizado entre la potencia total de las ondas propagantes. También, encontramos las matrices de transferencia y de dispersión del sistema. Los elementos de la matriz de dispersión son los coeficientes de transmisión y reflexión y sus magnitudes al cuadrado las reflectancias y transmitancias en términos de la longitud de onda  $\lambda$ , el ángulo de inclinación  $\chi$  y el campo eléctrico  $cd$  aplicado  $E^{cd}$ . Analizamos los espectros de reflectancia y transmitancia.

Observamos en los espectros ópticos un régimen de Bragg circular, es decir luz circularmente polarizada derecha se refleja casi en su totalidad al incidir luz CPD, para una STF quiral de lateralidad derecha. El régimen de Bragg se presenta aproximadamente en un rango de magnitudes de campo eléctrico  $E^{cd} \in [0, 4] \times 10^9 \text{ V/m}$ . En particular considerando que el ángulo

---

de inclinación de la STF es de  $0^0$  y  $E^{cd} = 2 \times 10^9 V/m$ , este régimen se encuentra entre 670 y 690  $nm$ . Se observa un agujero espectral correspondiente al modo del defecto en la mitad del régimen de Bragg debido a que el defecto es de  $90^0$ . Esto concuerda con lo reportado en estudios previos [5, 10]. Este agujero espectral se genera debido a modos ópticos localizados o resonantes dentro del material. Así, este dispositivo además de un filtro de luz circularmente polarizada, se podría emplear como un sintonizador de banda estrecha de longitudes de onda en un láser, un resonador óptico, o bien como un almacenador de energía óptica.

Se observa en la Fig. 5.3 que la longitud de onda del defecto  $\lambda_d$  se puede sintonizar en longitudes de onda que van de 630  $nm$  a 730  $nm$ , que es un rango del espectro óptico que corresponde al color rojo. Además se observa que la longitud de onda del modo del defecto se recorre hacia el rojo al incrementar el valor del campo eléctrico aplicado  $E^{cd}$  para valores del ángulo de inclinación en el intervalo de  $[0.3, 0.9]$   $rad$ , mientras que se recorre al azul para otros ángulos al aumentar el campo eléctrico. Esto nos permite la posibilidad de sintonizar eléctricamente el régimen del fenómeno Bragg circular y el modo del defecto.

Al lugar geométrico donde el inverso de ancho de línea  $l_d^{-1}$ , el ancho de banda del régimen circular de Bragg  $\Delta\omega$  y el ángulo  $\gamma_e(\omega_d)$  entre las componentes del campo eléctrico y el campo magnético se hacen cero, lo llamamos curva pseudo-isotrópica. Los puntos pseudo-isotrópicos, son valores particulares del ángulo de inclinación de la STF  $\chi$  y del campo eléctrico externo aplicado  $E^{cd}$  donde aparecen las características mencionadas. En estos puntos y en sus alrededores, los sistemas se comportan como si fueran isotrópicos en algunas de sus propiedades ópticas, por ejemplo, el régimen Bragg circular desaparece. Sin embargo, también se puede observar un incremento en la respuesta óptica como se menciona en la Ref. [12].

La explicación de la aparición de puntos pseudo-isotrópicos es que el elipsoide dieléctrico se elonga o se estrecha bajo la acción del campo eléctrico externo debido al efecto Pockels, puesto que las constantes dieléctricas dependen linealmente del campo eléctrico. Así, para un valor particular del campo eléctrico aplicado y del ángulo de inclinación de la STF, el elipsoide se convierte en una esfera y, por lo tanto, las constantes dieléctricas se degeneran en una sola. Por lo tanto, el material se comporta ópticamente como si fuera isotrópico y el régimen de Bragg circular desaparece. Para estos valores particulares, del campo eléctrico  $E^{cd}$  y el ángulo de inclinación  $\chi$  de la STF, la luz se propaga sin distinguir las anisotropías del medio. Al cambiar el va-

---

lor de  $\chi$  cambia el valor de  $E^{cd}$ , para el cual el tensor dieléctrico es esférico, por lo tanto, el punto pseudo-isotrópico va cambiando, lo que da lugar a la formación de una curva que es el conjunto de puntos pseudo-isotrópicos. Hay que enfatizar que el régimen de Bragg se cierra aún en la ausencia del campo eléctrico externo en el punto pseudo-isotrópico.

El hecho de que sobre la curva pseudo-isotrópica  $l_d^{-1}$ ,  $\gamma_e(\omega_d)$  y  $E^{cd}$  sean cero tiene diferentes implicaciones:

i) El transporte de ondas dentro de la muestra en la frecuencia de defecto es mucho más eficiente ya que el inverso del ancho de línea del modo de defecto es cero y por lo tanto la atenuación es nula.

ii)  $\Delta\omega$  cero implica que el régimen de Bragg se cierra, a incidencia normal.

iii) No hay pérdidas de energía en la muestra ya que  $\gamma_{em} = 0$  implica que los campos eléctricos y magnéticos son paralelos y por lo tanto el vector de Poynting, que representa la potencia por unidad de área por unidad de tiempo es nulo.

Alrededor de la curva pseudo-isotrópica se observan dos cordilleras donde el inverso del ancho de línea relativo  $\tau\omega_d$ , que es proporcional al tiempo de permanencia fotónico  $\tau$ , en la frecuencia del defecto  $\omega_d$ , es 10 veces mayor que en los demás puntos en el plano  $\chi - E^{cd}$  (Fig. 5.6), para un valor del ancho de la STF  $l = 10^{-4}m$ . Algo similar ocurre al graficar el inverso del ancho de línea relativo como función del ancho de la STF  $l$  y el ángulo de inclinación  $\chi$ , para un valor de  $E^{cd} = 0.5 \times 10^9 V/m$ . Sobre la curva pseudo-isotrópica, el valor del inverso del ancho de línea relativo, en este caso, alcanza valores de hasta  $10^{12}$ , mientras que en los demás puntos del espacio  $l - \chi$  este valor es  $10^6$ . Estas dos cordilleras se acercan una con otra al incrementar el valor de  $l$  hasta fundirse en una. Por lo tanto, encontramos que alrededor de las curvas pseudo-isotrópicas se logran tiempos de permanencia fotónicos mayores, lo que podría permitir la disminución de la energía umbral de activación de láseres [10].

Por lo tanto, el modo de defecto se puede sintonizar por medio del campo eléctrico y el ángulo de inclinación del MEQ, donde la propagación de las ondas en la muestra, en la frecuencia del defecto es extremadamente eficiente ya que la atenuación para el modo de defecto es muy pequeña, y las pérdidas de energía en el sistema son despreciables debido a un vector de Poynting cero. Estos hechos soportan el siguiente resultado principal: alrededor de la curva pseudo-isotrópica el tiempo de permanencia fotónico se alarga versus el grosor de la muestra sin límite, el cual es un resultado opuesto al comportamiento reportado en estudios anteriores [10], donde el tiempo de

---

permanencia fotónico escalaba exponencialmente y tendía asintóticamente a un valor límite en función del grosor de la muestra. También, se observa que hay una singularidad en la densidad de estados fotónicos sobre la curva pseudo-isotrópica. Es importante mencionar que aumentos en el tiempo de vida fotónico y singularidades en la densidad de estados fotónicos se han relacionado con la reducción de la energía umbral de activación de láseres [10, 9].

Enfatizamos que para valores de  $\chi$  y  $E^{cd}$  fuera de la curva pseudo-isotrópica, el inverso del ancho de línea relativo escala exponencialmente con respecto al grosor del material estructuralmente quiral (MEQ). Sin embargo, después de un grosor característico del material, este valor se aproxima asintóticamente a un límite como se había encontrado en estudios previos para MEQ con defecto de torsión que no muestran efecto Pockels [10, 5]. Sin embargo, el escalamiento del inverso del ancho de línea relativo con respecto al grosor de la STF, que es proporcional al tiempo de permanencia fotónico en la frecuencia del defecto, se puede mejorar enormemente cuando los valores del campo eléctrico y el ángulo de inclinación de la estructura están cercanos a los que definen la curva pseudo-isotrópica. Esta sintonización da lugar a una variación dramática en el comportamiento del tiempo de permanencia fotónico en el modo de defecto el cual nunca alcanza un máximo como función del grosor del material.

Puesto que los cristales líquidos como los esmécticos  $C^*$  y los elastómeros colestéricos poseen elipsoides dieléctricos susceptibles a ser deformados por un campo eléctrico externo, esperamos que se encuentren curvas pseudo-isotrópicas en donde sus propiedades ópticas presenten comportamientos inusuales.

# Apéndice A

## Matriz para la Ecuación (2.18)

La propagación de luz monocromática que incide oblicuamente y con polarización arbitraria en una STF quiral se puede encontrar por medio de la siguiente ecuación de los campos electromagnéticos transversales

$$\frac{d}{dz}[\mathbf{f}(z, \kappa, \psi, \omega)] = i[\mathbf{P}(z, \kappa, \psi, \omega)][\mathbf{f}(z, \kappa, \psi, \omega)], \quad (\text{A.1})$$

donde

$$[\mathbf{f}(z, \kappa, \psi, \omega)] = \begin{bmatrix} e_x(z, \kappa, \psi, \omega) \\ e_y(z, \kappa, \psi, \omega) \\ h_x(z, \kappa, \psi, \omega) \\ h_y(z, \kappa, \psi, \omega) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

aquí  $z$  está en la dirección del eje de la hélice,  $\kappa$  es el número de onda,  $\psi$  es el ángulo de incidencia de la luz con respecto a eje  $x$  y  $\omega$  es la frecuencia de la luz.

La matriz  $[\mathbf{P}(z, \kappa, \psi, \omega)]$  está dada en términos de la mitad del paso  $\Omega$ , de la inclinación  $\chi$  del MEQ y de las constantes dieléctricas, que a su vez dependen de  $\omega$ ,

---


$$\begin{aligned}
& [\mathbf{P}(z, \kappa, \psi, \omega)] = \\
& \left[ \begin{array}{cccc} 0 & & 0 & \\ & 0 & & \\ h\epsilon_0[\epsilon_c(\omega) - \epsilon_d(\omega)] \cos(\frac{\pi z}{\Omega}) \text{sen}(\frac{\pi z}{\Omega}) & -\epsilon_0[\epsilon_c(\omega) \cos^2(\frac{\pi z}{\Omega}) + \epsilon_d(\omega) \text{sen}^2(\frac{\pi z}{\Omega})] & 0 & 0 \\ \epsilon_0[\epsilon_c(\omega) \cos^2(\frac{\pi z}{\Omega}) + \epsilon_d(\omega) \text{sen}^2(\frac{\pi z}{\Omega})] & -h\epsilon_0[\epsilon_c(\omega) - \epsilon_d(\omega)] \cos(\frac{\pi z}{\Omega}) \text{sen}(\frac{\pi z}{\Omega}) & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} 0 \\ \mu_0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\
& + \kappa \frac{\epsilon_d(\omega)[\epsilon_a(\omega) - \epsilon_b(\omega)]}{\epsilon_a(\omega)\epsilon_b(\omega)} \frac{\text{sen}2\chi}{2} \\
& \left[ \begin{array}{cccc} \cos(\frac{\pi z}{\Omega}) \cos \psi & h \text{sen}(\frac{\pi z}{\Omega}) \cos \psi & 0 & 0 \\ \cos(\frac{\pi z}{\Omega}) \text{sen} \psi & h \text{sen}(\frac{\pi z}{\Omega}) \text{sen} \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \text{sen}(\frac{\pi z}{\Omega}) \text{sen} \psi & -h \text{sen}(\frac{\pi z}{\Omega}) \cos \psi \\ 0 & 0 & -\cos(\frac{\pi z}{\Omega}) \text{sen} \psi & \cos(\frac{\pi z}{\Omega}) \cos \psi \end{array} \right] \\
& + \frac{\kappa^2}{\omega \epsilon_0} \frac{\epsilon_d(\omega)}{\epsilon_a(\omega)\epsilon_b(\omega)} \\
& \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \cos \psi \text{sen} \psi & -\cos^2 \psi \\ 0 & 0 & \text{sen}^2 \psi & -\cos \psi \text{sen} \psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \\
& \frac{\kappa^2}{\omega \mu_0} \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \psi \text{sen} \psi & \cos^2 \psi & 0 & 0 \\ -\text{sen}^2 \psi & \cos \psi \text{sen} \psi & 0 & 0 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

(A.3)

## Apéndice B

### Matriz para la Ecuación (2.25)

Al aplicar la transformación de Oseen al sistema de coordenadas, que consiste en la formulación del vector columna  $[\mathbf{f}'(z, \kappa, \psi, \omega)] = [\mathbf{B}(-z/\Omega)][\mathbf{f}(z, \kappa, \psi, \omega)]$ ,

donde la matriz función  $4 \times 4$  es

$$[\mathbf{B}(\sigma)] = \begin{bmatrix} \cos(\pi\sigma) & -h \operatorname{sen}(\pi\sigma) & 0 & 0 \\ h \operatorname{sen}(\pi\sigma) & \cos(\pi\sigma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\pi\sigma) & -h \operatorname{sen}(\pi\sigma) \\ 0 & 0 & h \operatorname{sen}(\pi\sigma) & \cos(\pi\sigma) \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

La ecuación (2.18) se transforma al *modo*  $4 \times 4$

$$\frac{d}{dz}[\mathbf{f}'(z, \kappa, \psi, \omega)] = i[\mathbf{P}'(z, \kappa, \psi, \omega)][\mathbf{f}'(z, \kappa, \psi, \omega)], \quad (\text{B.2})$$

donde la matriz  $[\mathbf{P}'(z, \kappa, \psi, \omega)]$  tiene una estructura más simple que la que

se encuentra en el apéndice A

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{P}'(z, \kappa, \psi, \omega)] = \\
& \begin{bmatrix} 0 & -ih\frac{\pi}{\Omega} & 0 & \omega\mu_0 \\ ih\frac{\pi}{\Omega} & 0 & -\omega\mu_0 & 0 \\ 0 & -\omega\epsilon_0\epsilon_c(\omega) & 0 & -ih\frac{\pi}{\Omega} \\ \omega\epsilon_0\epsilon_c(\omega) & 0 & ih\frac{\pi}{\Omega} & 0 \end{bmatrix} \\
& + \kappa \frac{\epsilon_d[\epsilon_a(\omega) - \epsilon_b(\omega)]}{\epsilon_a(\omega)\epsilon_b(\omega)} \frac{\text{sen}2\chi}{2} \\
& \begin{bmatrix} \cos\left(h\frac{\pi}{\Omega} - \psi\right) & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\left(h\frac{\pi}{\Omega} - \psi\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen}\left(h\frac{\pi}{\Omega} - \psi\right) & \cos\left(h\frac{\pi}{\Omega} - \psi\right) \end{bmatrix} \\
& \frac{\kappa^2}{\omega\epsilon_0} \frac{\epsilon_d(\omega)}{\epsilon_a(\omega)\epsilon_b(\omega)} \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\cos\left(h\frac{\pi}{\Omega} - \psi\right) \text{sen}\left(h\frac{\pi}{\Omega} - \psi\right) & -\cos^2\left(h\frac{\pi}{\Omega} - \psi\right) \\ 0 & 0 & \text{sen}^2\left(h\frac{\pi}{\Omega} - \psi\right) & \cos\left(h\frac{\pi}{\Omega} - \psi\right) \text{sen}\left(h\frac{\pi}{\Omega} - \psi\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& + \frac{\kappa^2}{\omega\mu_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\left(h\frac{\pi}{\Omega} - \psi\right) \text{sen}\left(h\frac{\pi}{\Omega} - \psi\right) & \cos^2\left(h\frac{\pi}{\Omega} - \psi\right) & 0 & 0 \\ -\text{sen}^2\left(h\frac{\pi}{\Omega} - \psi\right) & -\cos\left(h\frac{\pi}{\Omega} - \psi\right) \text{sen}\left(h\frac{\pi}{\Omega} - \psi\right) & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \tag{B.3}
\end{aligned}$$

## Apéndice C

### Matriz para la Ecuación (3.44)

Para encontrar los campo ópticos dentro de un material estructuralmente quiral seguimos el procedimiento trazado por Lakhtakia y Weiglhofer [85], se ha establecido que la matriz columna  $\bar{\Psi}'(z)$ , que tiene como elementos las componentes transversales de los campos electromagnéticos, satisface la ecuación diferencial matricial ordinaria

$$\frac{d}{dz}\bar{\Psi}'(z) = i\bar{A}'(z) \cdot \bar{\Psi}'(z), \quad 0 < z < L, \quad (\text{C.1})$$

donde la matriz  $\bar{A}'(z)$  está dada por la siguiente expresión que es correcta a primer orden en  $E_z^{cd}$ .

---


$$\begin{aligned}
A'(z) = & \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{h\pi}{\Omega} & 0 & \omega\mu_0 \\ i\frac{h\pi}{\Omega} & 0 & -\omega\mu_0 & 0 \\ 0 & \omega\epsilon_0\epsilon_2^{(0)} & 0 & -i\frac{h\pi}{\Omega} \\ \omega\epsilon_0\epsilon_d & 0 & i\frac{h\pi}{\Omega} & 0 \end{pmatrix} \\
& + \kappa\alpha_3 \begin{pmatrix} \cos u & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen}u & \cos u \end{pmatrix} \\
& + \frac{\kappa^2}{\omega\epsilon_0} \frac{\epsilon_d}{\epsilon_1^{(0)}\epsilon_3^{(0)}} \left( 1 + \frac{\alpha_2}{\epsilon_1^{(0)}\epsilon_3^{(0)}} \right) \\
& \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\text{sen}u \cos u & -\cos^2 u \\ 0 & 0 & \text{sen}^2 u & \text{sen}u \cos u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& + \frac{\kappa^2}{\omega\mu_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}u \cos u & \cos^2 u & 0 & 0 \\ -\text{sen}^2 u & -\text{sen}u \cos u & 0 & 0 \end{pmatrix} - \omega\epsilon_0 \frac{\epsilon_2^{(0)}}{\epsilon_1^{(0)}} \\
& \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon_e + \epsilon_h & -\epsilon_m & 0 & 0 \\ \epsilon_1 \cos \chi + (\epsilon_j + \epsilon_l) \frac{\text{sen}2\chi}{2} + \epsilon_k \text{sen}\chi & -(\epsilon_e + \epsilon_h) \text{sen}u \cos u & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& + \kappa \frac{\epsilon_2^{(0)}}{\epsilon_1^{(0)}\epsilon_3^{(0)}}
\end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1 \cos u}{\epsilon_1^{(0)}} & -(\epsilon_f + \epsilon_g) \cos u & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_1 \text{sen}u}{\epsilon_1^{(0)}} & (\epsilon_f + \epsilon_g) \text{sen}u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\epsilon_f + \epsilon_g) \text{sen}u & (\epsilon_f + \epsilon_g) \cos u \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha_1 \text{sen}u}{\epsilon_1^{(0)}} & -\frac{\alpha_1 \cos u}{\epsilon_1^{(0)}} \end{pmatrix} \tag{C.3}$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \epsilon_1^{(0)} \epsilon_j \cos^2 \chi - \epsilon_3^{(0)} \epsilon_l \text{sen}^2 \chi + \epsilon_1^{(0)} \epsilon_k \cos \chi - \epsilon_3^{(0)} \epsilon_t \text{sen} \chi, \\
\alpha_2 &= \left( \epsilon_1^{(0)} \epsilon_n + \epsilon_3^{(0)} \epsilon_p \right) \cos \chi + \left( \epsilon_1^{(0)} \epsilon_s + \epsilon_3^{(0)} \epsilon_q \right) \text{sen} \chi, \\
\alpha_3 &= \epsilon_d \text{sen} 2\chi \frac{(\epsilon_1^{(0)} - \epsilon_3^{(0)})}{2\epsilon_1^{(0)} \epsilon_3^{(0)}} \\
\epsilon_d &= \frac{\epsilon_1^{(0)} \epsilon_3^{(0)}}{\epsilon_1^{(0)} \cos^2 \chi + \epsilon_3^{(0)} \text{sen}^2 \chi}, \\
\epsilon_e &= E_z^{cd} \epsilon_1^{(0)} \epsilon_d (r_{41} \cos^2 \chi - r_{63} \text{sen}^2 \chi), \\
\epsilon_f &= E_z^{cd} \epsilon_d \text{sen} \chi \cos \chi (r_{41} \epsilon_3^{(0)} + r_{63} \epsilon_1^{(0)}), \\
\epsilon_g &= E_z^{cd} \epsilon_d (r_{43} \epsilon_3^{(0)} \text{sen}^2 \chi + r_{61} \epsilon_1^{(0)} \cos^2 \chi), \\
\epsilon_h &= E_z^{cd} \epsilon_1^{(0)} \epsilon_d \text{sen} \chi \cos \chi (r_{43} - r_{61}), \\
\epsilon_l &= E_z^{cd} \frac{\epsilon_1^{(0)}}{\epsilon_2^{(0)}} \epsilon_d^2 (r_{31} \cos^2 \chi - r_{53} \text{sen}^2 \chi), \\
\epsilon_j &= E_z^{cd} \frac{\epsilon_1^{(0)}}{\epsilon_2^{(0)}} \epsilon_d^2 \text{sen} \chi (r_{11} - r_{53}), \\
\epsilon_k &= E_z^{cd} \frac{\epsilon_1^{(0)}}{\epsilon_2^{(0)}} \epsilon_d^2 (r_{13} \text{sen}^2 \chi - r_{15} \cos^2 \chi), \\
\epsilon_l &= E_z^{cd} \frac{\epsilon_1^{(0)}}{\epsilon_2^{(0)}} \epsilon_d^2 \cos \chi (r_{33} - r_{51}), \\
\epsilon_m &= E_z^{cd} \epsilon_1^{(0)} \epsilon_2^{(0)} (r_{21} \cos \chi + r_{23} \text{sen} \chi), \\
\epsilon_n &= E_z^{cd} \epsilon_d^{(0)} (r_{53} \epsilon_3^{(0)} \text{sen}^2 \chi + r_{11} \epsilon_1^{(0)} \cos^2 \chi), \\
\epsilon_p &= E_z^{cd} \epsilon_d^{(0)} \text{sen}^2 \chi (r_{31} \epsilon_3^{(0)} + r_{53} \epsilon_1^{(0)}), \\
\epsilon_q &= E_z^{cd} \epsilon_d^{(0)} (r_{33} \epsilon_3^{(0)} \text{sen}^2 \chi + r_{51} \epsilon_1^{(0)} \cos^2 \chi), \\
\epsilon_s &= E_z^{cd} \epsilon_d^{(0)} \cos^2 \chi (r_{51} \epsilon_3^{(0)} + r_{13} \epsilon_1^{(0)}), \\
u &= \frac{h\pi z}{\Omega} - \phi,
\end{aligned} \tag{C.4}$$

## Apéndice D

### Matrices para la Ecuación (3.82)

Para un material estructuralmente quiral donde se aplica un campo eléctrico arbitrario, se obtiene la ecuación

$$\frac{d}{dz}\bar{\Psi}'(z) = i\bar{A}'(z) \cdot \bar{\Psi}'(z), \quad 0 < z < L, \quad (\text{D.1})$$

como en el caso en el que se aplica un campo eléctrico a lo largo del eje de inhomogeneidad, pero ahora la matriz  $\mathbf{A}'(z)$  tiene una forma más compleja y se puede expandir en varios elementos que dependen de la magnitud del campo eléctrico aplicado, de la siguiente forma

$$\bar{A}'(z) = \bar{A}'_0(u) + \bar{A}'_s(u) \operatorname{sen}\chi_{cd} + \quad (\text{D.2})$$

$$\left[ \bar{A}'_{cs}(u) \operatorname{sen}\left(\frac{h\pi z}{\Omega}\right) + \bar{A}'_{cc}(u) \cos\left(\frac{h\pi z}{\Omega}\right) \right] \cos\chi_{cd}, \quad (\text{D.3})$$

con las matrices  $\bar{A}'_0(u)$ ,  $\bar{A}'_s(u)$ ... dadas por

$$\bar{A}'_0(u) = \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{h\pi}{\Omega} & 0 & \omega\mu_0 \\ i\frac{h\pi}{\Omega} & 0 & -\omega\mu_0 & 0 \\ 0 & -\omega\epsilon_0\epsilon_2^{(0)} & 0 & -i\frac{h\pi}{\Omega} \\ \omega\epsilon_0\epsilon_d & 0 & i\frac{h\pi}{\Omega} & 0 \end{pmatrix} + \kappa\alpha_3\bar{C}'_1(u) + \frac{\kappa^2\epsilon_d}{\omega\epsilon_0\epsilon_1^{(0)}\epsilon_3^{(0)}}\bar{C}'_3(u) - \frac{\kappa^2}{\omega\mu_0}\bar{C}'_4(u), \quad (\text{D.4})$$

---


$$\begin{aligned}
\bar{A}'_s(u) = & -\omega\epsilon_0 \frac{\epsilon_2^{(0)}}{\epsilon_1^{(0)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon_e + \epsilon_h & -\epsilon_m & 0 & 0 \\ \epsilon_i \cos \chi + (\epsilon_j + \epsilon_l) \frac{\text{sen}2\chi}{2} + \epsilon_k \text{sen}\chi & -(\epsilon_e + \epsilon_h) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& + \kappa \frac{\epsilon_2^{(0)}}{\epsilon_1^{(0)} \epsilon_3^{(0)}} \left[ -\frac{\alpha_1}{\epsilon_1^{(0)}} \bar{C}'_1(u) + (\epsilon_f + \epsilon_g) \bar{C}'_2(u) \right] \\
& + \frac{\kappa^2}{\omega\epsilon_0} \left( \frac{\epsilon_d}{\epsilon_1^{(0)} \epsilon_3^{(0)}} \right) \frac{\alpha_2}{\epsilon_d} \bar{C}'_3(u), \tag{D.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{A}'_{cs}(u) = & \omega\epsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta_c & E^{cd}(\epsilon_2^{(0)})^2 r_{22} & 0 & 0 \\ \delta_l & \delta_c & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& + \frac{\kappa}{\epsilon_1^{(0)} \epsilon_3^{(0)}} [\delta_j \epsilon_d \bar{C}'_1(u) + \delta_d \epsilon_2^{(0)} \bar{C}'_2(u)] \\
& + \frac{\kappa^2}{\omega\epsilon_0} \left( \frac{\epsilon_d}{\epsilon_1^{(0)} \epsilon_3^{(0)}} \right)^0 \delta_k \bar{C}'_3(u), \tag{D.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{A}'_{cc}(u) = & \omega\epsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\delta_e - \delta_h) & \delta_l & 0 & 0 \\ \delta_m & \delta_e - \delta_h & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\
& \frac{\kappa}{\epsilon_1^{(0)} \epsilon_3^{(0)}} [\delta_n \epsilon_d \bar{C}'_1(u) + (\delta_f - \delta_g) \epsilon_2^{(0)} \bar{C}'_2(u)] + \\
& \frac{\kappa^2}{\omega\epsilon_0} \left( \frac{\epsilon_d}{\epsilon_1^{(0)} \epsilon_3^{(0)}} \right) \delta_p \bar{C}'_3(u),
\end{aligned}$$

---


$$\bar{C}'_1(u) = \begin{pmatrix} \cos u & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen}u & \cos u \end{pmatrix}, \quad (\text{D.7})$$

$$\bar{C}'_2(u) = \begin{pmatrix} 0 & -\cos u & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen}u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen}u & \cos u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.8})$$

$$\bar{C}'_3(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\text{sen}u \cos u & \cos^2 u \\ 0 & 0 & \text{sen}^2 u & \text{sen}u \cos u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.9})$$

$$\bar{C}'_4(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}u \cos u & -\cos^2 u & 0 & 0 \\ \text{sen}^2 u & \text{sen}u \cos u & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.10})$$

---


$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \epsilon_1^{(0)} \epsilon_j \cos^2 \chi - \epsilon_3^{(0)} \epsilon_l \mathbf{sen}^2 \chi + \epsilon_1^{(0)} \epsilon_k \cos \chi - \epsilon_3^{(0)} \epsilon_i \mathbf{sen} \chi, \\
\alpha_2 &= \left( \epsilon_1^{(0)} \epsilon_n + \epsilon_3^{(0)} \epsilon_p \right) \cos \chi + \left( \epsilon_1^{(0)} \epsilon_s + \epsilon_3^{(0)} \epsilon_q \right) \mathbf{sen} \chi, \\
\alpha_3 &= \epsilon_d \mathbf{sen} 2\chi \frac{(\epsilon_1^{(0)} - \epsilon_3^{(0)})}{2\epsilon_1^{(0)} \epsilon_3^{(0)}} \\
\epsilon_d &= \frac{\epsilon_1^{(0)} \epsilon_3^{(0)}}{\epsilon_1^{(0)} \cos^2 \chi + \epsilon_3^{(0)} \mathbf{sen}^2 \chi}, \\
\epsilon_e &= E^{cd} \epsilon_1^{(0)} \epsilon_d (r_{41} \cos^2 \chi - r_{63} \mathbf{sen}^2 \chi), \\
\epsilon_f &= E^{cd} \epsilon_d \mathbf{sen} \chi \cos \chi (r_{41} \epsilon_3^{(0)} + r_{63} \epsilon_1^{(0)}), \\
\epsilon_g &= E^{cd} \epsilon_d (r_{43} \epsilon_3^{(0)} \mathbf{sen}^2 \chi + r_{61} \epsilon_1^{(0)} \cos^2 \chi), \\
\epsilon_h &= E^{cd} \epsilon_1^{(0)} \epsilon_d \mathbf{sen} \chi \cos \chi (r_{43} - r_{61}), \\
\epsilon_l &= E^{cd} \frac{\epsilon_1^{(0)}}{\epsilon_2^{(0)}} \epsilon_d^2 (r_{31} \cos^2 \chi - r_{53} \mathbf{sen}^2 \chi), \\
\epsilon_j &= E^{cd} \frac{\epsilon_1^{(0)}}{\epsilon_2^{(0)}} \epsilon_d^2 \mathbf{sen} \chi (r_{11} - r_{53}), \\
\epsilon_k &= E^{cd} \frac{\epsilon_1^{(0)}}{\epsilon_2^{(0)}} \epsilon_d^2 (r_{13} \mathbf{sen}^2 \chi - r_{15} \cos^2 \chi), \\
\epsilon_l &= E^{cd} \frac{\epsilon_1^{(0)}}{\epsilon_2^{(0)}} \epsilon_d^2 \cos \chi (r_{33} - r_{51}), \\
\epsilon_m &= E^{cd} \epsilon_1^{(0)} \epsilon_2^{(0)} (r_{21} \cos \chi + r_{23} \mathbf{sen} \chi), \\
\epsilon_n &= E^{cd} \epsilon_d^{(0)} (r_{53} \epsilon_3^{(0)} \mathbf{sen}^2 \chi + r_{11} \epsilon_1^{(0)} \cos^2 \chi), \\
\epsilon_p &= E^{cd} \epsilon_d^{(0)} \mathbf{sen}^2 \chi (r_{31} \epsilon_3^{(0)} + r_{53} \epsilon_1^{(0)}), \\
\epsilon_q &= E^{cd} \epsilon_d^{(0)} (r_{33} \epsilon_3^{(0)} \mathbf{sen}^2 \chi + r_{51} \epsilon_1^{(0)} \cos^2 \chi), \\
\epsilon_s &= E^{cd} \epsilon_d^{(0)} \cos^2 \chi (r_{51} \epsilon_3^{(0)} + r_{13} \epsilon_1^{(0)}), \\
\delta_l &= E^{cd} \epsilon_d^2 [ \mathbf{sen} \chi (r_{52} \cos \chi - r_{12} \mathbf{sen} \chi) +
\end{aligned} \tag{D.11}$$

---


$$\begin{aligned}
& \cos \chi (r_{52} \text{sen} \chi - r_{32} \cos \chi)], \\
\delta_j &= E^{cd} \epsilon_d [\epsilon_1^{(0)} \cos \chi (r_{52} \cos \chi - r_{12} \text{sen} \chi) - \\
& \quad \epsilon_3^{(0)} \text{sen} \chi (r_{52} \text{sen} \chi - r_{32} \cos \chi)], \\
\delta_k &= E^{cd} [\epsilon_1^{(0)} \cos \chi (r_{52} \epsilon_3^{(0)} \text{sen} \chi + r_{12} \epsilon_1^{(0)} \cos \chi) + \\
& \quad \epsilon_3^{(0)} \text{sen} \chi (r_{52} \epsilon_1^{(0)} \cos \chi r_{32} \epsilon_3^{(0)} \text{sen} \chi)], \\
\delta_l &= E^{cd} (\epsilon_2^{(0)})^2 (r_{23} \cos \chi - r_{21} \text{sen} \chi), \\
\delta_m &= E^{cd} \epsilon_d^2 [\text{sen}^2 \chi (r_{11} \text{sen} \chi - r_{13} \cos \chi) + \\
& \quad \cos^2 \chi (r_{31} \text{sen} \chi - r_{33} \cos \chi) - \\
& \quad 2 \text{sen} \chi \cos \chi (r_{51} \text{sen} \chi - r_{53} \cos \chi)], \\
\delta_n &= E^{cd} \epsilon_d [\text{sen}^2 \chi \cos \chi (r_{11} \epsilon_1^{(0)} - r_{31} \epsilon_3^{(0)}) - \\
& \quad \text{sen} \chi \cos^2 \chi (r_{13} \epsilon_1^{(0)} - r_{33} \epsilon_3^{(0)}) \\
& \quad - (r_{51} \text{sen} \chi - r_{53} \cos \chi) (\epsilon_1^{(0)} \cos^2 \chi - \epsilon_3^{(0)} \text{sen}^2 \chi)], \\
\delta_p &= -E^{cd} [(\epsilon_1^{(0)} \cos \chi)^2 (r_{11} \text{sen} \chi - r_{13} \cos \chi) + \\
& \quad (\epsilon_3^{(0)} \text{sen} \chi)^2 (r_{31} \text{sen} \chi - r_{33} \cos \chi) + \\
& \quad 2 \epsilon_1^{(0)} \epsilon_3^{(0)} \text{sen} \chi \cos \chi (r_{51} \text{sen} \chi - r_{53} \cos \chi)], \\
& \quad u = \frac{h\pi z}{\Omega} - \phi,
\end{aligned}$$

# Bibliografía

- [1] A. Lakhtakia and R. Messier, Sculptured thin films-I. *Concepts, Mater Res Innovat* **1** (1997), 145-148.
- [2] N. O. Young and J. Kowal, Optically active fluorite films, *Nature* **183** (1959), 104-105.
- [3] K. Robbie, M. J. Brett and A. Lakhtakia, First thin film realization of a helicoidal bianisotropic medium, *J Vac Sci Technol A* **13** (1995), 2991-2993.
- [4] K. Robbie, M. J. Brett and A. Lakhtakia, Chiral sculptured thin films, *Nature* **384** (1996), 616.
- [5] M. Becchi, S. Ponti, J. A. Reyes. and C. Oldano. Defect modes in helical photonic crystals: An analytic approach. *Phys. Rev. B.* **70**, 033103, (2004).
- [6] P.G. de Gennes, J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, second ed., Clarendon Press, Oxford, UK, 1993 (Chapter 6).
- [7] M. Warner and E. M. terentjev. *Liquid Crystal Elastomers* (Oxford University Press, Oxford, UK, 2003), Chap. 9.
- [8] A. Lakhtakia, R. Messier, M. J. Brett and K. Robbie, *Innovations Mater. Res.* **1**. 165 (1996).
- [9] V. I. Kopp, B. Fan, H. K. M. Vithana, and A. Z. Genack, Low-threshold lasing at the edge of a photonic stop band in cholesteric liquid crystals, *Opt. Lett* **23**, 1707 (1988).
- [10] V. I. Kopp and A. Z. Genack, Twist defect in chiral photonic structures, *Phys Rev Lett* **89** 33901 (2002).

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [11] J.A. Reyes, A. Lakhtakia, Electrically controlled reflection and transmission of obliquely incident light by structurally chiral materials, *Opt. Commun.* **266** (2006) 565–573.
- [12] I. Abdulhalim, Point of ultra-sensitivity to perturbations for axial propagation in helicoidal bianisotropic structures, *Europhys. Lett.* **48** (1999) 177–181.
- [13] R.W. Boyd, *Nonlinear Optics*, Academic Press, London, UK, 1992 (Chapter 10).
- [14] A. Lakhtakia, J.A. Reyes, Theory of electrically controlled exhibition of circular Bragg phenomenon by an obliquely excited structurally chiral material—Part 1: Axial cd electric field. *Optik*, **119** (2008) 253-268.
- [15] A. Lakhtakia and A. Reyes. Theory of electrically controlled exhibition of circular Bragg phenomenon by an obliquely excited structurally chiral material – Part 2: Arbitrary cd electric field. *Optick* **119** (2008) 269-275.
- [16] V. A. Yakubovich and V. M. Starzhinskii, *Linear differential equations with periodic coefficients*, Wiley, New York, NY, USA, 1975.
- [17] National Research Council, *Condensed-Matter and materials physics: Basic research for tomorrow's technology*, National Academy Press, Washington, D. C., USA, 1999.
- [18] R. Messier, T. Gehrke, C. Frankel, V. C. Venugopal, W. Otaño, and A. Lakhtakia, Engineered sculptured nematic thin films, *J Vac Sci Technol A* 15 (1997), 2148-2152.
- [19] R. Messier, P. sunal, and V. C. Venugopal, Evolution of sculptured thin films, *Engineered nanostructural films and materials* (A. Lakhtakia and R. F. Messier, eds), Proc SPIE 3790, SPIE, Bellingham, WA, USA, 1999, 133-141.
- [20] A. Lakhtakia and R. F. Messier (es), Proceedings of SPIE 3790: *Engineered nanostructural films and materials*, SPIE, Bellingham, WA, USA, 1999.
- [21] A. Lakhtakia, W. S. Wiglhofer, and R. F. Messier (eds) Proceedings of SPIE 4097: Complex mediums, SPIE, Bellingham, WA, USA, 2000.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [22] I. J. Hodgkinson, Q. H. Wu, K. E. Thorn, A. Lakhtakia, and M. W. MacCall, Spacerless circular-polarization spectral-hole filters using chiral sculptured thin films: theory and experiment, *Opt Commun* **184** (2000), 57-66.
- [23] A. Kundt, Ueber Doppelbrechung des Lichtes in Metallschichten, welche durch Zerstäuben einer Kathode hergestellt sind, *Ann Phys Chem Lpz* **27** (1886), 59-71
- [24] J. A. Thornton, High rate thick film growth, *Annu Rev Mater Sci* **7** (1977), 239-260.
- [25] H. van Kranenburg and C Lodder, Tailoring growth and local composition by oblique-incidence deposition: a review and new experimental data, *Mater Sci Engg R* **11** (1994), 295-354.
- [26] J. M. Nieuwenhuizen and H. B. Haanstra, Microfractography of thin films, *Philips Tech Rev* **27** (1966), 87-91
- [27] T. Motohiro and Y. Taga, Thin film retardation plate by oblique deposition, *Appl Opt* **28** (1989), 2466-2482.
- [28] A. Lakhtakia and R. Messier, *Sculptured thin films, Nanoengineered Morphology and Optics*, SPIE press, Washington USA. (2004).
- [29] Q. Wu, I. J. Hodgkinson, and A. Lakhtakia, Circular polarization filters made of chiral sculptured thin films: experimental and simulation results, *Opt Engg* **39** (2000), 1863-1868.
- [30] A. Lakhtakia and V. C. Venugopal, Dielectric thin-film helicoidal bianisotropic medium bilayers as tunable polarization-independent laser mirrors and notch filters, *Microw Opt Technol Lett* **17** (1998), 135-140.
- [31] A. Lakhtakia and I. J. Hodgkinson, Spectral response of dielectric thin-film helicoidal bianisotropic medium bilayer, *Opt Commun* **167** (1999), 191-200.
- [32] A. Lakhtakia, Stepwise chirping of chiral sculptured thin films for Bragg bandwidth enhancement, *Microw Opt Technol Lett* **42** (2004), 135-138.

- [33] F. Chiadini and A. Lakhtakia, Design of wideband circular-polarization filters made of chiral sculptured thin films, *Microw Opt Technol Lett* **42** (2004), 135-138.
- [34] A. Lakhtakia, Axial excitation of tightly interlaced chiral sculptured thin films: "Averaged" circular Bragg phenomenon, *Optik* **112** (2001), 119-124.
- [35] J. Wang, A. Lakhtakia, and J. B. Geddes III, Multiple Bragg regimes exhibited by a chiral sculptured thin film half-space on axial excitation, *Optik* **113** (2002), 213-221.
- [36] A. Lakhtakia, Dielectric sculptured thin films for polarization-discriminatory handedness-inversion of circularly polarized light, *Opt Engg* **38** (1999), 1596-1602.
- [37] I. J. Hodgkinson, A. Lakhtakia, and Q. H. Wu, Experimental realization of sculptured-thin-film polarization-discriminatory light-handedness inverters, *Opt Engg* **39** (2000), 2831-2834.
- [38] M. W. McCall and A. Lakhtakia, Polarization-dependent narrowband spectral filtering by chiral sculptured thin films, *J Modern Opt* **47** (2000), 743-755.
- [39] V. C. Venugopal and A. Lakhtakia, On optical rotation and ellipticity transformation by axially excited slabs of dielectric thin-film helical bianisotropic mediums (TFHBMs), *Int J Appl Electromag Mech* **9** (1998), 201-210
- [40] I. J. Hodgkinson and Q. H. Wu, K. E. Thorn, A. Lakhtakia, and M. W. McCall, Spacerless circular-polarization spectral-hole filters using chiral sculptured thin films: theory and experiment, *Opt Commun* **184** (2000), 57-66.
- [41] I. J. Hodgkinson, Q. H. Wu, L. De Silva, M. Arnold, M. W. McCall, and A. Lakhtakia, Supermodes of chiral photonic filters with combined twist and layer defects, *Phys Rev Lett* **91** (2003), 223903.
- [42] A. Lakhtakia, On determining gas concentrations using thin-film helical bianisotropic medium bilayers, *Sens Actuat B: Chem* **52** (1998), 243-250.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [43] E. Ertekin and A. Lakhtakia, Sculptured thin film Solc filters for optical sensing of gas concentration, *Eur Phys J Appl Phys* **5** (1999), 45-50.
- [44] I. J. Hodgkinson, Q. h. Wu, and K. M. McGrath, Moisture adsoption effects in biaxial and chiral optical thin film coatings, *Engineered nanostructural films and materials* (A. Lakhtakia and R. F. Messier, eds), Proc SPIE 3790, SPIE, Bellinghan, WA, USA, 1992.
- [45] S. D. Jacobs (ed), Selected papers on liquid crystals for optics, SPIE, Bellinghan, WA, USA, 1992.
- [46] H. Kawamoto, The history of liquid-crystal displays, *Proc IEEE* **90** (2002), 460-500.
- [47] J. C. Sit, D. J. Broer, and M. J. Brett, Liquid crystal alignment and switching in porous chiral thin films, *Adv Mater* **12** (2000), 371-373.
- [48] R. Vajtai, B. Q. Wei, Z. J. Zhang, Y. Jung, G. Ramanath, and P. M. Ajayan, Building carbon nanotubes and their smart architectures, *Smart Mater Struct* **11** (2002) 61
- [49] A. Lakhtakia, Towards sculptured thin films (STFs) as optical interconnects, *Optik* **110** (1999), 289-293.
- [50] E. Ertekin and A. Lakhtakia, Optical interconnects realizable with thin-film helicoidal bianisotropic mediums, *Proc Roy Soc Lond A* **457** (2001), 817-836.
- [51] J. B. Geddes III and A. Lakhtakia, Reflection and transmission of optical narrow-exte nt pulses by axially excited chiral sculptured thin films, *Eur Phys J Appl Phys* **13** (2001), 3-14; corrections: **16** (2001), 247.
- [52] J. B. Geddes III and A. Lakhtakia, Pulse-coded information transmission across an axially excited chiral sculptured thin film in Bragg regime, *Microw Opt Technol Lett* **28** (2001). 59-62.
- [53] A. Lakhtakia, On bioluminescent emission from chiral sculptured thin films, *Opt Commun* **188** (2001), 313-320.
- [54] A. Lakhtakia, Local inclination angle: a key structural factor in emission from chiral sculptured thin films, *Opt Commun* **202** (2002), 103-112; correction:203 (2002), 447.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [55] A. Lakhtakia, Pseudo-isotropic and maximum-bandwidth points for axially excited chiral sculptured thin films, *Microw Opt Technol Lett* **34** (2002), 367-371.
- [56] R. Messier and A. Lakhtakia, Sculptured thin films-II. Experiments and applications, *Mater Res Innovat* **2** (1999), 217-222.
- [57] J. C. Bose, On the rotation of plane of polarisation of electric waves by a twisted structure, *Proc Roy Soc Lond* **63** (1898) 146-152.
- [58] C. W. Oseen, The theory of liquid crystals, *J Chem Soc Faraday Trans II* **29** (1933), 883-899.
- [59] C. Altman y K. Sucky, *Reciprocity, Spatial Mapping and Time Reversal in Electromagnetics*, ( Kluwer Academic Publishers, Dordrecht The Netherlands, 1991).
- [60] D. W. Berreman and T. J. Scheffer *Mol. Cryst. liquid Cryst.* **11**, 395 (1970).
- [61] D. W. Berreman, *J. Opt. Soc. Am.*, **62** (1972) 502.
- [62] V.C. Venugopal, A. Lakhtakia, Electromagnetic planewave response characteristics of non-axially excited slabs of dielectric thin-film helicoidal bianisotropic mediums, *Proc. R. Soc. London A* **456** (2000) 125–161.
- [63] I. Abdulhalim, R. Weil, L. Benguigui, *Liq. Cryst.* **1** (1986) 155.
- [64] A. Lakhtakia, W. S. Weighlhofer, *Microw. Opt. Tehcnol. Lett.* **6** (1993) 804.
- [65] M. Schubert, *Phys. Rev. B* **53** (1996) 4265.
- [66] I. J. Hodgkinson, Q.h. Wu, *Birefringent Thin Films and Polarizing Elements*, World Scientific, Singapore, 1997.
- [67] A. Lakhtakia, R. Messier, *Sculptured Thin Films: Nanoengineered Morphology and Optics*, SPIE Press, Bellingham, WA, USA, 2005 (Chapter 9).

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [68] E. Reusch, Untersuchung über Glimmercombinationen, *Ann. Phys. Chem. Leipzig* **138** (1869) 628–638.
- [69] I. J. Hodgkinson, A. Lakhtakia, Q. H. Wu, L. De Silva, M.W. McCall, Ambichiral, equichiral and finely chiral layered structures, *Opt. Commun.* **239** (2004) 353–358.
- [70] S.D. Jacobs (Ed.), *Selected Papers on Liquid Crystals for Optics*, SPIE Optical Engineering Press, Bellingham, WA, USA, 1992.
- [71] V. A. Belyakov, *Diffraction Optics of Complex-Structured Periodic Media* (Springer, New York) 1992.
- [72] A. Lakhtakia and M. McCall, Sculptured thin films as ultranarrow-bandpass circular-polarization filters, *Opt Commun* **168** (1999), 457-465.
- [73] A. Lakhtakia and W. S. Weiglhofer, Further results on light propagation in helicoidal bianisotropic mediums: oblique propagation, *Proc Roy Soc Lond A* **453** (1997), 93-105; correction: **454** (1998), 3275
- [74] A. Lakhtakia, R. Messier, M. J. Brett, and K. Robbie, Sculptured thin films (STFs) for optical, chemical and biological applications, *Innovat Mater Res* **1** (1996), 165-176
- [75] V. C. Venugopal and A. Lakhtakia, Sculptured thin films: conception, optical properties and applications, *Electromagnetic fields in unconventional materials and structures* ( O. N. Singh and A. Lakhtakia, eds), Wiley New York, NY, USA, 2000.
- [76] I. Abdulhalim, *Opt. Commun.*, **64** (1987) 443.
- [77] J. Schmidtke y W. Stille, *Eur. Phys. J.* **E 12**, 553 (2003).
- [78] C. Oldano, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 259401 (2003).
- [79] J. Schmidtke, W. Stille y H. Finkelmann, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 83902 (2003).
- [80] C. Oldano, J. A. Reyes y S. Ponti, *Phys. Rev. E* **67**, 056624 (2003).
- [81] C. Oldano, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 259401 (2003).

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [82] H. Hochstadt, *Differential Equations: A Modern Approach*, Dover Press, New York, NY, 1975 (sección 2.5).
- [83] J.A. Reyes, A. Lakhtakia, Electrically controlled optical bandgap in a structurally chiral material, *Opt. Commun.* **259** (2006) 164–173.
- [84] B.A. Auld, *Acoustic Fields and Waves in Solids*, vol. 1, Krieger, Malabar, FL, USA, 1990.
- [85] A. Lakhtakia, W.S. Weiglhofer, Further results on light propagation in helicoidal bianisotropic mediums: oblique propagation, *Proc. R. Soc. London A* **453** (1997) 93–105 (correction: 454 (1998) 3275).
- [86] V.C. Venugopal, A. Lakhtakia, On absorption by nonaxially excited slabs of dielectric thin-film helicoidal bianisotropic mediums, *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* **10** (2000) 173–184.
- [87] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics*, Saunder, Philadelphia, 1976 (Chap. 8).
- [88] Laura O. Palomares and Juan A. Reyes. Electro-Optically Tuned Defect Mode in Structurally Chiral Materials". *Applied Physics Letters.* **93**, 181909, 2008.

# Electro-optically tuned defect mode in structurally chiral materials

Laura O. Palomares<sup>1</sup> and Juan Adrián Reyes

Física Química, Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 20-364, C.P. 01000, México D.F., México

(Received 8 May 2008; accepted 18 October 2008; published online 6 November 2008)

We considered an orthorhombic  $mm2$  structurally chiral material, susceptible to the Pockels effect having a twist defect and subjected to a dc electric field oriented along the nonhomogeneity axis. We found that its localized mode can be tuned and the scaling of the inverse relative linewidth can be largely enhanced when the magnitudes of the field and the tilt angle of the structure are near the pseudoisotropic curve. This tuning gives rise to a dramatic variation in the behavior of the photon dwell time for the defect mode, which never reaches a maximum by increasing the sample thickness. © 2008 American Institute of Physics. [DOI: 10.1063/1.3020715]

Structurally chiral media appear in nature as cholesteric liquid crystals,<sup>1</sup> synthesized as chiral elastomers,<sup>2</sup> or fabricated by oblique-angle deposition on a rotating substrate.<sup>3</sup> Some years ago, low threshold lasing was observed at the band edges of dye doped cholesteric liquid crystals. This phenomenon was proposed to be related to a singularity in the density of photonic states.<sup>4</sup>

Kopp and Genack<sup>5</sup> showed that a twist defect mode in structurally chiral materials (SCMs) presents an anomalous crossover in propagation. The twist defect gives rise to a peak in transmission whose inverse relative linewidth scales exponentially for circularly polarized light with the same handedness as the structure.<sup>5</sup> This inverse relative linewidth is proportional to the photon dwell time at the defect frequency; hence the dwell time also scales exponentially. However, after a crossover thickness of the sample, its value asymptotically approaches a bound. On the other hand, it has been shown<sup>6</sup> that the band gap and transmittance of a SCM with linear electro-optic properties can be controlled by applying a dc electric field parallel to the helix axis. Furthermore, the dc electric field was found to switch on the band gap even if the band gap was absent when the dc electric field was not applied. This effect is a consequence of the presence of optical axes in the locally anisotropic material forming the chiral structure, which in turn originates the existence of pseudoisotropic points.<sup>7</sup>

In this letter we show that the linewidth associated with the defect mode in a SCM diverges when the structure tilt angle is electrically tuned near a pseudoisotropic curve due to the Pockels effect. This critical tuning leads to a tremendous change in the scaling of the photon dwell time of the defect mode, which does not present a crossover thickness and then always increases as a function of the thickness sample.

The electro-optic properties of a nondissipative homogeneous dielectric material are given in terms of the reciprocal of the optical relative permittivity matrix  $\bar{\epsilon}_j^{-1}$ . This can be expanded as a power series of the applied field  $E_k^{\text{dc}}$  as  $\bar{\epsilon}_j^{-1} = \bar{\epsilon}_j^{-1(0)} + r_{jk} E_k^{\text{dc}} + \dots$ ,<sup>8</sup> where  $r_{jk}$  (with  $1 \leq j \leq 6$  and  $1 \leq k \leq 6$ ) are the linear electro-optical coefficients. This medium can be isotropic, uniaxial, or biaxial, depending on the relative

values of the dielectric constants in the principal axes denoted by  $\epsilon_1^{(0)}$ ,  $\epsilon_2^{(0)}$ , and  $\epsilon_3^{(0)}$ .

We set the  $z$ -axis as the axis of chirality of the SCM slab, which is subjected to a normally applied dc electric field along this direction,  $\mathbf{E}^{\text{dc}} = E^{\text{dc}} \hat{z}$ . The optical relative permittivity matrix can be written as  $\bar{\epsilon}^{\text{SCM}}(z) = \bar{S}_z^{-1}(h\rho z) \bar{R}_s(\chi) \bar{\epsilon} \bar{R}_s(\chi) \bar{S}_z(-h\rho z)$ , where  $\rho = \pi/\Omega$  and the handedness parameter  $h = 1$  for a right-handed SCM. The tilt matrix  $\bar{R}_s(\chi)$  is a rotation involving the tilt angle  $\chi \in [0, \pi/2]$  with respect to the  $x$ -axis in the  $x$ - $z$  plane. The use of the rotation matrix  $\bar{S}_z$  in  $\bar{\epsilon}^{\text{SCM}}$  involves the half-pitch  $\Omega$  of the SCM along the  $z$ -axis. Maxwell equations for the selected SCM and the normally incident monochromatic plane wave of frequency  $\omega$  are only  $z$ -dependent. Hence, they can be solved in terms of  $\bar{\psi}(z) \equiv [e_x(z), e_y(z), h_x(z), h_y(z)]^T$ , where  $e_x(z)$ ,  $e_y(z)$ ,  $h_x(z)$ , and  $h_y(z)$  are the transverse components of the electromagnetic fields. Using the Oseen transformation and following a very well known procedure,<sup>6</sup> it can be established that  $\bar{\psi}(z)$  satisfies  $d\bar{\psi}(z)/dz = i\bar{A}\bar{\psi}(z)$ , where  $\bar{A}$  is given by

$$\bar{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -ip & 0 & \omega\mu_x \\ ip & 0 & -\omega\mu_x & 0 \\ -\omega\epsilon_x\epsilon_E & -\omega\epsilon_x\epsilon_B & 0 & -ip \\ \omega\epsilon_x\epsilon_D & \omega\epsilon_x\epsilon_E & ip & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Here  $\mu_x$  and  $\epsilon_x$  are the magnetic permeability and dielectric permittivity of vacuum, whereas  $\epsilon_B$ ,  $\epsilon_D$ , and  $\epsilon_E$  are given in Ref. 9. Notice that  $\bar{A}$  is  $z$ -independent. Thus, the eigenvalues of  $\bar{A}$  allow us to determine the wave numbers,

$$k_z^2 \equiv \rho^2 + \frac{(\epsilon_D + \epsilon_B)}{2} \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \pm \frac{\omega}{2} \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \{8\rho^2(\epsilon_D + \epsilon_B) + \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 [\Delta\epsilon_E^2 + (\epsilon_B - \epsilon_D)^2]\}}. \quad (2)$$

The modes whose eigenvalues are  $\pm k_z$  show a band gap for  $\omega$  within the interval defined by

<sup>1</sup>Electronic mail: lpaloma@lycos.com.

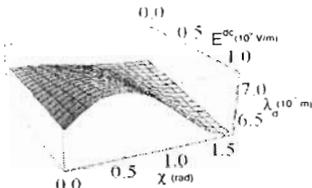


FIG. 1. Defect wavelength  $\lambda_d$  vs  $\chi$  and  $E^{dc}$  for a locally biaxial SCM slab whose crystallographic class is orthorhombic  $mmm2$ . Other parameters are  $\epsilon_1^{(0)}=4.72$ ,  $\epsilon_2^{(0)}=5.20$ , and  $\epsilon_3^{(0)}=5.43$ ,  $r_{11}=43 \times 10^{-12}$  mV $^{-1}$ ,  $r_{21}=6 \times 10^{-12}$  mV $^{-1}$ ,  $r_{31}=63.4 \times 10^{-12}$  mV $^{-1}$ ,  $r_{12}=450 \times 10^{-12}$  mV $^{-1}$ , and  $r_{31}=120 \times 10^{-12}$  mV $^{-1}$ ; all other  $r_{jk}=0$ .

$$\omega_j^2 \equiv \rho^2 \frac{\epsilon_{jj} + \epsilon_{jj} - (-1)^j 4\epsilon_E^2 + (\epsilon_{jj} - \epsilon_{jj})^2}{2\mu_0 \epsilon_{jj} (\epsilon_{jj} \epsilon_{jj} - \epsilon_E^2)} \quad (j=1,2), \quad (3)$$

where  $\pm k_{\pm}$  are pure imaginary and their corresponding eigenvectors are evanescent and linearly polarized waves. Complementarily, the modes whose eigenvalues are  $\pm k_{\pm}$  are always propagating and elliptically polarized. It was shown<sup>10</sup> that in a helix structure with a jump discontinuity, the amplitude of the evanescent modes is much larger than that of the propagating ones at the defect frequency  $\omega_d$ , and the defect mode has approximately the profile  $\exp(-|z|/l_d)$ , whose linewidth is  $l_d \equiv 1/k_{\pm}(\omega_d)$ . If the twist angle is  $\pi/2$ , the peak generated by this defect is situated at the central wavelength of the Bragg regime,<sup>11</sup>  $\omega_d \equiv (\omega_1 + \omega_2)/2$ , whose bandwidth is  $\Delta\omega \equiv \omega_1 - \omega_2$ . Additionally, the angle  $\gamma_{cm}(\omega_d)$  between the electric and magnetic fields of the evanescent modes at the defect frequency can be easily found from the components of their corresponding eigenvectors.

The dwell time  $\tau$  of this defect mode is given by the ratio between the electromagnetic energy stored by the sample and the total power of the outgoing waves. By neglecting the contribution of the propagating waves to the stored energy,<sup>12</sup>  $\tau(l)$  is given by

$$\tau(l) \equiv \frac{l_d}{4c} \frac{\sqrt{(\epsilon_1^{(0)} + \epsilon_2^{(0)} + \epsilon_3^{(0)})/3}}{\sin^2(\gamma_{cm}/2) + \exp(-2l/l_d)}, \quad (4)$$

whose asymptotic value for a very large sample is  $\tau(\infty) = \{l_d/[4c \sin^2(\gamma_{cm}/2)]\} \sqrt{(\epsilon_1^{(0)} + \epsilon_2^{(0)} + \epsilon_3^{(0)})/3}$ . If, however, the SCM is tuned on the pseudoisotropic curve,  $\tau(l)$  reduces to  $\tau(l) = (l/2c) \sqrt{(\epsilon_1^{(0)} + \epsilon_2^{(0)} + \epsilon_3^{(0)})/3}$ , which now depends proportionally on the sample thickness and hence never gets

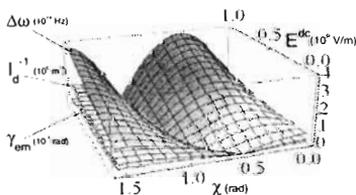


FIG. 2. Linewidth  $\Gamma_d^1(\omega_d)$ , band width  $\Delta\omega$ , and angle between the magnetic and electric field  $\gamma_{cm}(\omega_d)$  for the evanescent mode vs  $\chi$  and  $E^{dc}$  for the same material as Fig. 1.

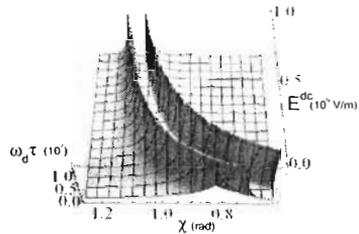


FIG. 3. Inverse relative linewidth  $\tau\omega_d$  as a function of  $\chi$  and  $E^{dc}$  for  $l=10^{-1}$  m and the same material parameters as Fig. 1.

bounded as it occurs for a point outside of the mentioned curve. Hence, the photon dwell time can be prolonged without limit by enlarging the sample thickness  $l$ .

Figure 1 shows for an orthorhombic  $mmm2$  SCM the defect wavelength  $\lambda_d \equiv 2\pi c/\omega_d$  versus the tilt angle  $\chi$  and dc electric field  $E^{dc}$ . Note that  $\lambda_d$  redshifts by enlarging  $E^{dc}$  for values of  $\chi$  in the interval  $[0.3, 0.9]$ , while it blueshifts for other angles. It allows us the possibility of electrically tuning the defect mode.

Figure 2 presents  $\Gamma_d^1(\omega_d)$ ,  $\Delta\omega$ , and  $\gamma_{cm}(\omega_d)$  plotted in different scales versus  $\chi$  and  $E^{dc}$ . We can observe that there is a locus in the  $\chi$ - $E^{dc}$  space for which  $l_d(\omega_d)$  diverges and  $\Delta\omega$  and  $\gamma_{cm}(\omega_d)$  vanish. This implies that in the mentioned locus, (i) the transport of waves within the sample having the defect frequency is much more efficient since the attenuation for the defect mode is null, (ii) the circular Bragg regime closes, and (iii) there are no energy leaks in the sample since  $\gamma_{cm}=0$  amounts to a null Poynting vector. We remark that the circular Bragg regime closes even in the absence of external electric field at a pseudoisotropic point.<sup>7</sup> Moreover, upon applying the dc field, the tilt angle for which this point shows up is changed, because the dielectric ellipsoid of the SCM is rotated and stretched in agreement with the Pockels effect. This fact is responsible for the optical switching effect in the SCM recently studied,<sup>6</sup> in which a band reflection could be electrically opened. We shall call this curve in the  $\chi$ - $E^{dc}$  space, where  $\Gamma_d^1(\omega_d)$ ,  $\Delta\omega$ , and  $\gamma_{cm}(\omega_d)$  are null, the pseudoisotropic curve.

Figure 3 displays the inverse relative linewidth  $\tau(l)\omega_d$  against  $\chi$  and  $E^{dc}$ . Notice that besides two sharp protrusions surrounding the pseudoisotropic curve, where  $\tau\omega_d \sim 10^7$  for this  $l$ -value,  $\tau\omega_d$  has reached its asymptotic value  $\tau\omega_d \sim 10^6$ . Figure 4 depicts  $\tau\omega_d$  versus the sample thickness  $l$  and  $\chi$  for  $E^{dc}=0.5 \times 10^9$  V/m and shows how the sharp prominences increase their amplitude and get nearer each other by enlarging  $l$ , whereas the other points in the  $l$ - $\chi$  plane remain at the smaller value of  $\tau\omega_d \sim 10^6$ . Further calculations show that

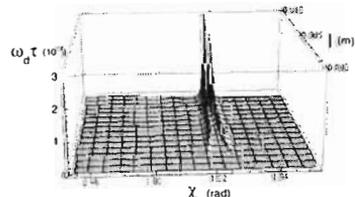


FIG. 4.  $\tau\omega_d$  vs  $l(m)$  and  $\chi$ .

the mentioned protrusions merge for larger  $l$  values. Finally, the density of photonic states  $D$  at the defect frequency  $D(\omega_d) \equiv l \partial k_1(\omega_d) / \partial \omega$  can be analytically obtained from Eq. (2). It is easy to show that  $D(\omega_d)$  diverges at the pseudoisotropic curve.

In summary, we have considered an orthorhombic  $mm2$  having a  $\pi/2$  plane discontinuity on its helix, submitted to a dc field along the axis of nonhomogeneity. We have demonstrated that around a pseudoisotropic curve, the photon dwell time lengthens versus the sample thickness without bound, opposes the behavior reported in previous papers,<sup>5</sup> and the density of photonic states diverges there. We expect that this critical tuning could be exhibited for an ample range of chiral materials such as smectics C\*, cholesteric elastomers, and other media.

<sup>1</sup>P. G. de Gennes and J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals* (Clarendon, Oxford, UK, 1993), Chap. 6.

<sup>2</sup>M. Warner and E. M. Terentjev, *Liquid Crystal Elastomers* (Oxford University Press, Oxford, UK, 2003), Chap. 9.

<sup>3</sup>A. Lakhtakia, R. Messier, M. J. Brett, and K. Robbie, *Innovations Mater. Res.* **1**, 165 (1996).

<sup>4</sup>V. I. Kopp, B. Fan, H. K. M. Vithana, and A. Z. Genack, *Opt. Lett.* **23**, 1707 (1998).

<sup>5</sup>V. I. Kopp and A. Z. Genack, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 033901 (2002).

<sup>6</sup>J. Adrian Reyes and A. Lakhtakia, *Opt. Commun.* **266**, 565 (2006).

<sup>7</sup>I. Abdulhalim, *Europhys. Lett.* **48**, 177 (1999).

<sup>8</sup>R. W. Boyd, *Nonlinear Optics* (Academic, London, UK, 1992), Chap. 10.

<sup>9</sup>A. Lakhtakia and J. A. Reyes, *Optik (Int. J. Light Elec. Opt.)* **119**, 253 (2008).

<sup>10</sup>M. Becchi, S. Ponti, J. A. Reyes, and C. Oldano, *Phys. Rev. B* **70**, 033103 (2004).

<sup>11</sup>M. Dixit and A. Lakhtakia, *Opt. Commun.* **281**, 4812 (2008).