



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

Un Modelo de Riesgo con Reclamos Intercambiables

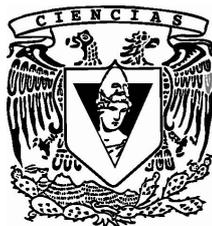
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

Ramiro Francois Martín del Campo



**DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Ramsés H. Mena Chávez
2009**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

**Francois
Martín del Campo
Ramiro
54 21 85 25
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
301847841**

2. Datos del tutor

**Dr
Ramsés Humberto
Mena
Chávez**

3. Datos del sinodal 1

**Dr.
Luis Antonio
Rincón
Solís**

4. Datos del sinodal 2

**Act.
Jaime
Vázquez
Alamilla**

5. Datos del sinodal 3

**Dra.
Eliane Regina
Rodrigues**

6. Datos del sinodal 4

**Dr.
Gerónimo Francisco
Uribe
Bravo**

7. Datos del trabajo escrito

**Un Modelo de Riesgo con Reclamos Intercambiables
58 p
2009**

A mis padres.

Agradecimientos:

Agradezco a Ramsés Mena por la oportunidad que me brindó de trabajar con él sobre diversos temas actuales de la teoría estadística.

Agradezco a mis sinodales por sus comentarios y sugerencias.

Índice general

1. Preliminares	7
1.1. Procesos de renovación	7
1.1.1. Conteo de renovaciones	7
1.2. Proceso Poisson	10
1.2.1. La intensidad de un proceso Poisson.	13
1.3. Variantes del proceso Poisson	15
1.3.1. Proceso Poisson mezclado	15
1.3.2. Procesos de Cox	16
2. Teoría del riesgo clásica	18
2.1. Proceso compuesto ordinario	18
2.1.1. Magnitud de orden del modelo de Sparre-Anderson	19
2.2. Probabilidad de ruina	21
2.2.1. Cálculo de la probabilidad de ruina para montos exponenciales	25
2.2.2. Probabilidad de ruina a horizonte finito	26
3. El proceso compuesto intercambiable	27
3.1. Sucesiones intercambiables	27
3.1.1. Construcción de sucesiones intercambiables con marginal dada	32

3.2. El modelo intercambiable.	36
3.3. Estimación del proceso	38
3.3.1. El paradigma bayesiano	38
3.3.2. Cálculo de los estimadores bayesianos	40
3.3.3. Inferencia bayesiana para el modelo intercambiable	41
3.4. Ruina del modelo intercambiable	46
4. Aplicación	50
4.1. Modelo clásico	50
4.2. Modelo intercambiable	52
4.3. Probabilidad de ruina	53
4.4. Marginales GIG	54

Introducción

El objetivo de esta tesis es presentar una generalización del proceso Poisson compuesto, así como una de sus aplicaciones más importantes: la teoría del riesgo para seguros de no-vida. El modelo de riesgo clásico captura dos fenómenos independientes: la distribución en el tiempo de los reclamos recibidos por una aseguradora y el monto de dichos reclamos. El primero se trata de forma natural con los llamados procesos de renovación; que modelan el arribo de sucesos aproximando el tiempo que pasa entre ellos por variables independientes, no negativas, idénticamente distribuidas. A cada proceso de renovación se le puede asociar un proceso de conteo: si $(W_i)_{i \geq 1}$ es una sucesión de tiempos íter arribo, entonces el tiempo de arribo del n -ésimo suceso queda dado por

$$T_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n \quad n \geq 1.$$

Así, el número de sucesos ocurridos hasta el tiempo t es simplemente

$$N_t = \# \{n \geq 1 : T_n \leq t\}.$$

El segundo fenómeno se modela simplemente mediante una sucesión de variables aleatorias no negativas (X_i) , pues se asume que los reclamos siempre tienen valor positivo e implican una pérdida para la aseguradora. El siguiente paso es calcular, mediante una suma, la pérdida total de una aseguradora hasta un tiempo dado.

$$S_t = \sum_{i=0}^{N_t} X_i \tag{1}$$

Si $f(t)$ denota los ingresos de la aseguradora entonces la reserva de la aseguradora al tiempo t está dada por:

$$R_t = f(t) - S_t.$$

Hay dos problemas principales que atañen a la teoría del riesgo: uno es asignar precios razonables a las primas que la compañía deberá cobrar a los usuarios para poder cubrir los gastos de los siniestros que se presenten. Para esto es necesario hacer un análisis de la magnitud de orden de S_t , que representa la evolución de las pérdidas de la aseguradora.

El otro problema es estimar la probabilidad de ruina de una compañía,

$$\Pr(\inf\{t > 0 : R_t = 0\} < \infty).$$

Éste resulta ser de gran dificultad y ha sido estudiado mediante diversas herramientas.

El modelo clásico de riesgo, cuyas bases fueron sentadas por Filip Lundberg en 1903, adopta al proceso Poisson como proceso de conteo. Una sucesión independiente e idénticamente distribuida como sucesión de montos y una función lineal ct con $c > 0$ como función de ingresos. Un proceso definido por (1) con un proceso de conteo Poisson y una sucesión de variables idénticamente distribuidas, no negativas e independientes se llama proceso Poisson compuesto. Aunque este proceso es matemáticamente muy manejable, en muchos casos sus hipótesis son demasiado restrictivas y no se satisfacen en la práctica.

Las generalizaciones para este modelo parten en tres direcciones: la especialización de la función de ingresos $f(t)$, la elección de un proceso de conteo distinto (Bening & Korolev , 2002) y la flexibilidad en las hipótesis de la sucesión de montos de los reclamos. En esta tesis se trabajará sobre la tercera línea, cambiando la hipótesis de independencia por una mucho menos restrictiva de *intercambiabilidad*. Esta alternativa permite dar una estructura de dependencia a la sucesión de montos, a la vez de ser matemáticamente tratable.

Como parte del trabajo, se elaboró un programa en lenguaje R¹ para simular la probabilidad de ruina de los modelos, así como para hacer la estimación de los

¹<http://www.r-project.org>

parámetros. Si desea el código contacte al autor².

Resumen

Capítulo 1 Se definen los procesos de renovación y se dan algunas propiedades con vista en el proceso Poisson y el cálculo de la probabilidad de ruina. Se construirá el proceso Poisson y se mencionarán algunas de sus generalizaciones.

Capítulo 2 Se define el proceso Poisson compuesto y se presentan los principales resultados del modelo de riesgo clásico.

Capítulo 3 Se presentan los preliminares de sucesiones intercambiables y teorema de Bruno de Finetti. Se procede a definir el *proceso compuesto intercambiable* y se dan algunas de sus propiedades básicas. Se desarrolla la inferencia estadística para este proceso.

Capítulo 4 Se evalúa el desempeño del modelo aplicado a datos reales.

²email: ramiro.francois@gmail.com

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Procesos de renovación

Los procesos de renovación, los cuales modelan la ocurrencia de sucesos que arriban en tiempos aleatorios, aparecen en una gran cantidad de problemas de probabilidad aplicada, así como de la teoría de procesos estocásticos. El término *renovación* se refiere al hecho de que el proceso se renueva cada vez que ocurre un suceso, es decir; los tiempos íter arribo forman una sucesión $(W_i)_{i \geq 1}$ de variables aleatorias independientes, no negativas e idénticamente distribuidas. Así, llamamos tiempos de arribo a las variables aleatorias definidas por

$$T_0 = 0, \quad T_n = W_1 + \cdots + W_n \quad n \geq 1.$$

Será de interés estudiar a la sucesión de renovaciones $(T_n)_{n \geq 0}$, por ejemplo, calcular su esperanza y varianza o encontrar su comportamiento asintótico.

1.1.1. Conteo de renovaciones

Cada proceso de renovación induce un proceso N_t que cuenta el número de sucesos ocurridos hasta un tiempo dado.

$$N_t = \#\{n \geq 0 : T_n \leq t\} = \sum_{n=1}^{\infty} I_{[0,t]}(S_n)$$

La función $t \rightsquigarrow EN_t$, llamada función de renovación, será de gran ayuda en el estudio de la teoría de renovación y se denotará por $U(t)$.

Proposición 1.1. *Si F es la función de distribución de W_1 entonces*

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t).$$

Demostración. Recordemos que $F^{n*}(t)$ denota la *convolución* de F consigo misma n veces, definiendo $F^{0*}(t) = I_{[0,\infty)}(t)$. Por ser W_1 no negativa entonces F está concentrada en \mathbb{R}^+ y sabemos que $F^{n*}(t)$ es la función de distribución de $W_1 + \dots + W_n$. Por lo tanto

$$U(t) := \mathbb{E} \sum_{n=0}^{\infty} I_{[0,t]}(T_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(T_n \leq t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t).$$

■

A continuación se enuncian dos resultados sobre el comportamiento asintótico del proceso $N(t)$.

Teorema 1.1. *Sea N_t un proceso de conteo inducido por un proceso de renovación $(W_i)_{i \geq 0}$.*

Si $\lambda^{-1} = EW_1 < \infty$, entonces

1. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \lambda \quad c.s.$
2. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{t} = \lambda \quad c.s.$

Demostración.

1. Notemos la siguiente identidad entre eventos:

$$\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Podemos escribir entonces la siguiente desigualdad:

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{T_{N_t+1}}{N_t+1} \frac{N_t+1}{N_t}$$

Pero por la Ley Fuerte de los Grandes Números

$$\frac{T_n}{n} = \frac{W_1 + \cdots + W_n}{n} \rightarrow \lambda^{-1} \quad \text{c.s.}$$

Como $N_t \rightarrow \infty$ c.s. entonces

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \rightarrow \lambda^{-1} \quad \text{c.s.}$$

Substituyendo en la desigualdad anterior se obtiene el resultado deseado.

2. Por el resultado anterior y mediante una aplicación directa del lema de Fatou obtenemos:

$$\lambda = \mathbb{E} \left[\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} \right] \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}N_t}{t}$$

Resta entonces mostrar que $\limsup \mathbb{E}N_t/t \leq \lambda$ para terminar la demostración. Para usar un argumento de tiempos de paro, necesitaremos truncar el proceso de conteo. Para todo $b > 0$ definamos

$$W_i^{(b)} = \min(W_i, b), \quad T_i^{(b)} = W_1^{(b)} + \cdots + W_i^{(b)}.$$

Claramente $T_n^{(b)} \leq T_n$ y por lo tanto $N_t^{(b)} \geq N_t$, donde $N_t^{(b)}$ es el proceso de conteo inducido por $T_n^{(b)}$. Por lo tanto

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}N_t}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}N_t^{(b)}}{t}$$

Ciertamente $N_t^{(b)}$ es un tiempo de paro con esperanza finita con respecto a la filtración inducida por $(W_i^{(b)})$, ya que $T_{N_t^{(b)}}^{(b)} = W_1^{(b)} + \cdots + W_{N_t^{(b)}}^{(b)} \leq t$ y por lo tanto

$$\{N_t + 1 = n\} = \left\{ T_{n-1}^{(b)} \leq t < T_n^{(b)} \right\} \in \sigma(W_i : i = 1, \dots, n).$$

Ahora usando la identidad de Wald's (Resnick , 1992, Cap. 1) obtenemos

$$\mathbb{E} \left[T_{N_t^{(b)}+1}^{(b)} \right] = \mathbb{E} \left[N_t^{(b)} + 1 \right] \mathbb{E}W_1^{(b)}.$$

Por lo tanto

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{EN_t}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{T_{N_t}^{(b)}}{tEW_1^{(b)}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{tEW_1^{(b)}} = \frac{1}{EW_1^{(b)}}.$$

Por último mediante convergencia monótona con respecto a b obtenemos el resultado deseado, notando que

$$EW_1^{(b)} = E[\min(b, W_1)] \uparrow EW_1.$$

■

Esto quiere decir que cuando el tiempo es grande el proceso de conteo se comporta aproximadamente linealmente.

1.2. Proceso Poisson

El proceso Poisson es un proceso estocástico a tiempo continuo que es parte de la familia de procesos de conteo. Este tipo de procesos cuentan el número de sucesos ocurridos hasta un tiempo dado, es decir;

$$N_t(\omega) = \# \{i \geq 1 : T_i(\omega) \leq t\} \quad (1.1)$$

donde T_i son las variables aleatorias que denotan el tiempo de arribo del i -ésimo suceso.

El proceso Poisson ha sido ampliamente utilizado en probabilidad aplicada debido a sus atractivas propiedades matemáticas. Por ejemplo, sus distribuciones finito dimensionales pueden ser calculadas explícitamente. En particular,

$$\Pr \{N_t = n\} = \text{Po}(n \mid \lambda t)$$

donde $\text{Po}(n \mid \lambda t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ es la función de densidad de una variable Poisson con media λt . Esto hace que los cálculos para este proceso sean relativamente fáciles y directos. Veamos como construir un proceso con estas características a partir

de una sucesión de renovaciones; definamos una sucesión $(W_i)_{i \geq 1}$ de tiempos íter arribo con distribución exponencial de parámetro λ y al igual que en la sección anterior definamos los tiempos de arribo como

$$T_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n. \quad (1.2)$$

Después sólo utilicemos la ecuación (1.1) para definir el proceso de conteo deseado. Obsérvese que a diferencia de como se hacía en la sección anterior, no se está contando el suceso del tiempo cero.

Teorema 1.2. *El proceso de conteo definido por (1.1) mediante (1.2) con $(W_i)_{i \geq 1}$ una sucesión iid de variables exponencial de parámetro λ , cumple con las siguientes propiedades:*

1. $N_0 = 0$ casi seguramente y tiene trayectorias $t \rightsquigarrow N_t(\omega)$ continuas por la derecha.
2. N_t tiene distribución Poisson con parámetro λt .
3. El proceso tiene incrementos independientes y estacionarios: para cualesquiera $t_i, i = 0, \dots, n$ y cualquier $n \geq 1$ tales que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ los incrementos $N_{t_i} - N_{t_{i-1}}$ son independientes y tienen distribución $Po(\lambda(t_i - t_{i-1}))$.

A un proceso que cumple con estas tres características se le llama proceso Poisson homogéneo; se puede probar que cualquier proceso Poisson homogéneo se construye como se hizo en el teorema.

Demostración.

1. Tenemos por definición que $T_1 \leq T_2 \leq \dots$ y $T_1 = W_1$, por lo que $T_1 \sim Exp(\lambda)$
y

$$\Pr(\#\{i \geq 1 : T_i \leq 0\} > 0) \leq \Pr(T_1 = 0) = 0$$

como se quería. Las trayectorias continuas por la derecha son consecuencia directa de la definición de proceso de conteo (1.1) y de que $\Pr\{W_i = 0\} = 0$ para toda i .

2. Notemos que

$$\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}.$$

Como $W_i \sim \text{Ga}(1, \lambda)$ y la suma de variables Gamma independientes se distribuye Gamma, entonces

$$T_n \sim \text{Ga}(n, \lambda).$$

Además n es natural, por lo que $\Gamma(n) = (n-1)!$ e integrando por partes $n-1$ veces obtenemos:

$$\begin{aligned} \Pr(T_n \leq t) &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t x^{n-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= -e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} \int_0^t x^{n-2} e^{-\lambda x} dx \\ &\quad \vdots \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \Pr(N_t = n) &= \Pr(T_n \leq t) - \Pr(T_{n+1} \leq t) \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, N_t se distribuye $\text{Po}(\lambda t)$.

3. Demostraciones de esta propiedad requieren ya sea un trabajo relativamente largo y minucioso, o desarrollar más herramientas teóricas sobre los procesos de puntos. Se pueden consultar dos demostraciones conceptualmente diferentes en Mikosch (2004, Cap. 2) o en Kingman (1993).

■

Una consecuencia directa de la construcción anterior, es que con probabilidad 1 este tipo de procesos no pueden tener saltos de más de una unidad ya que $\Pr(W_i = 0) = 0$ y por lo tanto $\Pr(T_{i-1} = T_i) = 0$. Otro resultado que nos

será de utilidad posteriormente, es que la sucesión de tiempos de arribo crece aproximadamente como n/λ y por lo tanto no tiene puntos límites. Esto se muestra fácilmente usando la ley fuerte de los grandes números, ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n W_i}{n} = EW_1 = \frac{1}{\lambda} \quad \text{c.s.}$$

1.2.1. La intensidad de un proceso Poisson.

A continuación se adoptará una notación que será útil para trabajar con los incrementos de una función cualquiera ϕ .

$$\phi(s, t] := \phi(t) - \phi(s)$$

Del teorema 1.2 se obtiene inmediatamente la media de un proceso Poisson homogéneo en un tiempo dado, así como la de sus incrementos.

$$EN_t = \lambda t, \quad EN_{(s,t]} = \lambda(t - s) \quad s < t.$$

La propiedad de homogeneidad toma su nombre del hecho de que $EN_{(s,t]} = EN_{(s+h,t+h]}$ para cualquier $h > 0$; es decir que el número esperado de sucesos en un intervalo de tiempo sólo depende del tamaño del intervalo. En particular el número esperado de sucesos en una unidad de tiempo es λ , lo cual es llamado la intensidad del proceso homogéneo.

En un intento por usar este proceso para modelar algún fenómeno, la propiedad de homogeneidad pudiera ser una limitación. Quizá el problema que estamos tratando obedezca intuitivamente a un proceso de conteo para el cual la media de sus incrementos dependiera también de la posición en el tiempo; lo que podría llamarse un proceso Poisson no homogéneo. De forma más precisa, lo que se busca es modificar la tercera propiedad del proceso Poisson homogéneo para que los incrementos sean independientes pero no necesariamente estacionarios. Para esto se introduce la noción de función de media. Un proceso Poisson general cumple las tres propiedades del teorema anterior, salvo que

$$N_{(s,t]} \sim \text{Po}(\mu(s, t]) \quad s < t,$$

donde por razones obvias la función de media μ debe ser no decreciente, continua por la derecha y anclada en el cero.

Para el caso homogéneo, la función de media es una función lineal $t \rightsquigarrow \lambda t$ con $\lambda \geq 0$. Este tipo de funciones son un caso muy sencillo de una medida absolutamente continua; de hecho

$$\mu(s, t] = \int_s^t \lambda dx.$$

En general, una medida absolutamente continua en \mathbb{R}^+ sirve como función de media, y tiene la siguiente representación:

$$\mu(s, t] = \int_s^t \lambda(x) dx \quad (1.3)$$

donde λ es una función medible no negativa que se llama función de intensidad.

Por fortuna, existe una estrecha relación entre el proceso Poisson homogéneo y el no homogéneo. El siguiente teorema nos dice que un proceso no homogéneo es un proceso homogéneo bajo un cambio de tiempo determinista.

Teorema 1.3. *Sea μ la función de media de un proceso Poisson N y sea \tilde{N} un proceso Poisson homogéneo de intensidad 1.*

1. *El proceso $(\tilde{N}_{\mu(t)})_{t \geq 0}$ es de Poisson y tiene función de media μ .*
2. *Si μ es continua, creciente y $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = \infty$ entonces $(N_{\mu^{-1}(t)})_{t \geq 0}$ es un proceso Poisson homogéneo.*

Nótese que una función con las características descritas en la segunda afirmación puede ser construida mediante (1.3) usando una función de intensidad $\lambda(x) \geq 0$ para casi todo $x \geq 0$.

Demostración.

1. Definamos $\hat{N}_t = \tilde{N}_{\mu(t)}$ para todo $t \geq 0$. Se mostrará que $(\hat{N}_t)_{t \geq 0}$ es un proceso Poisson con función de media μ . Como tanto $t \rightsquigarrow \tilde{N}_t$ como μ están ancladas en cero y son continuas por la derecha; $\hat{N}_0 = \tilde{N}_0 = 0$ y

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \hat{N}_{t+s} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \tilde{N}_{\mu(t+s)} = \tilde{N}_{\mu(t)} = \hat{N}_t.$$

El resto de las propiedades se derivan inmediatamente del hecho de que \tilde{N} es un proceso Poisson homogéneo.

2. Definamos $\hat{N}_t = N_{\mu^{-1}(t)}$ para todo $t \geq 0$. Que $\hat{N}_0 = 0$ y tenga trayectorias continuas por la derecha es inmediato pues μ^{-1} es creciente, continua y anclada en el cero. El resto de la prueba es obvia utilizando las propiedades del proceso Poisson N .

■

Nótese que como $N_t \sim \text{Po}(\mu(t))$ entonces $\text{Var}(N_t) = \text{EN}_t = \mu(t)$.

1.3. Variantes del proceso Poisson

Para modelar la distribución en el tiempo de los reclamos recibidos por una aseguradora, nos puede ser útil conocer algunas generalizaciones del proceso Poisson que mantengan como espacio de estados a la semi recta real.

1.3.1. Proceso Poisson mezclado

Se vio anteriormente que mediante un cambio de tiempo determinista, se puede obtener un proceso no homogéneo a partir de uno homogéneo. El proceso Poisson mezclado introduce algo de azar a ese cambio de tiempo haciendo un escalamiento aleatorio de la función de media.

Definición 1. Sea \tilde{N} un proceso Poisson homogéneo de intensidad 1, μ una función de media y θ una variable aleatoria con $\Pr(\theta > 0) = 1$ independiente de \tilde{N} . Se dice que el proceso definido por

$$N_t(\omega) = \tilde{N}_{\theta(\omega)\mu(t)}(\omega) \quad t \geq 0, \omega \in \Omega$$

es un proceso Poisson mezclado con variable de mezcla θ .

Se puede interpretar a este proceso, como uno que modela fenómenos para los que cada realización es la de un proceso Poisson con función de media $\theta(\omega)\mu(t)$ para

alguna ω fija. En el contexto de los seguros, $\theta(\omega)$ podría ser una medida de uno o más factores que afecten la cartera de aseguro, como por ejemplo el estado de salud de un cliente. Un modelo de riesgo que involucra este tipo de proceso de conteo se puede consultar en Grandell (1991).

Calculemos la función de media de un proceso con variable de mezcla θ ,

$$EN_t = E\tilde{N}_{\theta\mu(t)} = E \left[E \left(\tilde{N}_{\theta\mu(t)} \mid \theta \right) \right] = E(\theta\mu(t)) = E\theta \cdot \mu(t)$$

la cual es similar a la de un proceso Poisson e incluso coincide con la de éste cuando $E\theta = 1$. Sin embargo $\text{Var}(N_t) \neq EN_t$ ya que, suponiendo que $\text{Var}(\theta) < \infty$ y $\mu(t) > 0$,

$$\begin{aligned} \text{Var}(N_t) &= E[\text{Var}(N_t \mid \theta)] + \text{Var}[E(N_t \mid \theta)] \\ &= E[\theta\mu(t)] + \text{Var}[\theta\mu(t)] \\ &= EN_t \left(1 + \frac{\text{Var}(\theta)}{E\theta} \mu(t) \right) \\ &> EN_t. \end{aligned}$$

Esta es la llamada *propiedad de sobredispersión*, e implica entre otras cosas que dado un tiempo fijo t , N_t no tiene distribución Poisson. Otra diferencia importante que se tiene con respecto al proceso Poisson es que los incrementos no son necesariamente independientes. De hecho, cuando μ es lineal, se puede probar que los incrementos son *intercambiables* (Gerber, 1981); una noción que será explorada en capítulos posteriores.

Si tuviéramos una sola realización de un proceso Poisson mezclado, no la podríamos distinguir de la de un proceso Poisson con función de media $\theta(\omega)\mu(t)$ para algún ω fijo. Sin embargo, conforme la muestra crece, la propiedad de sobre dispersión se hace evidente, aún cuando $E\theta = 1$. La figura 1.1 ilustra este fenómeno.

1.3.2. Procesos de Cox

Siguiendo en la misma dirección, podemos ahora estudiar un proceso Poisson homogéneo bajo un cambio de tiempo completamente aleatorio. Sea \tilde{N}_t un proceso

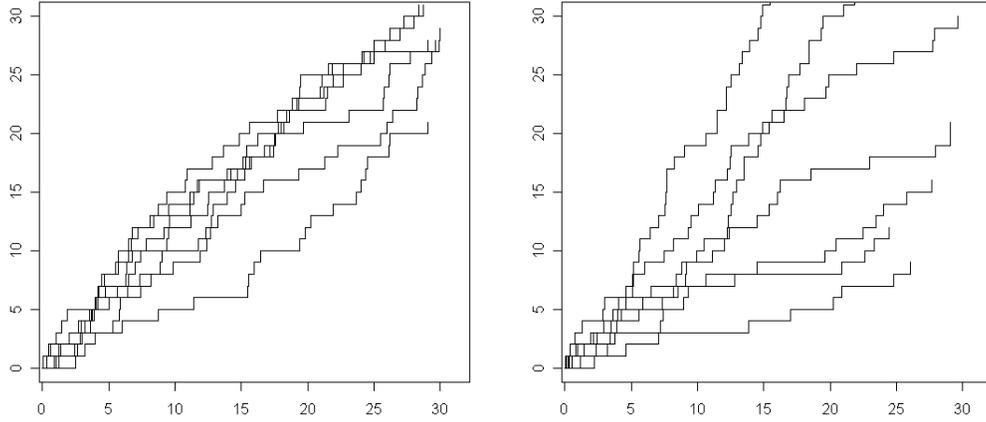


Figura 1.1: Del lado izquierdo se muestran siete realizaciones aleatorias de un proceso Poisson de intensidad uno. Del lado derecho, siete realizaciones aleatorias de un proceso Poisson mezclado con misma función de media.

Poisson con intensidad 1, y sea $\lambda(t)$ un proceso estocástico independiente de \tilde{N} con trayectorias no decrecientes y tal que $\lambda(0) = 0$. El proceso definido por

$$N_t = \tilde{N}_{\lambda(t)}$$

es llamado proceso de Cox.

Al igual que el proceso Poisson mezclado, que es un caso particular, este proceso también tiene la propiedad de sobredispersión, pues $EN_t = E \left[E \left(\tilde{N}_{\lambda(t)} \mid \lambda(t) \right) \right] = E\lambda(t)$ y

$$\begin{aligned} \text{Var}(N_t) &= E [\text{Var}(N_t \mid \lambda(t))] + \text{Var} [E (N_t \mid \lambda(t))] \\ &= E [\lambda(t)] + \text{Var} [\lambda(t)] \\ &> EN_t. \end{aligned}$$

Generalizaciones del modelo de riesgo clásico usando procesos de Cox pueden ser consultadas en Bening & Korolev (2002).

Capítulo 2

Teoría del riesgo clásica

2.1. Proceso compuesto ordinario

El siguiente paso en nuestra tarea de modelar la dinámica financiera de una aseguradora, es tomar en cuenta el monto de los reclamos que ésta recibe. Si N_t es un proceso de conteo que modela el arribo de dichos reclamos, entonces las pérdidas de la compañía están dadas por

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

donde (X_i) es una sucesión de variables aleatorias positivas independientes idénticamente distribuidas que representa el monto de los reclamos. Por simplicidad se hace la suposición de que la intensidad de llegada de los reclamos es independiente del monto de éstos, permitiendo una interpretación directa de los saltos en las trayectorias del proceso. Este modelo tiene aplicaciones no sólo en el contexto del seguro, sino también en áreas de la física y la ingeniería.

Cuando N_t es un proceso Poisson homogéneo, (S_t) toma el nombre de *proceso Poisson compuesto* mientras que, en general, cuando N_t es un proceso de renovación, S_t es llamado *modelo de Sparre-Anderson*.

2.1.1. Magnitud de orden del modelo de Sparre-Anderson

Proposición 2.1. *Sea S_t un proceso definido por (2.1) con N_t un proceso inducido por una sucesión de renovación (W_i) . Entonces*

1. $ES_t = EN_t EX_1$
2. $Var(S_t) = EN_t Var(X_1) + Var(N_t)(EX_1)^2$
3. $Cov(S_u, S_v) = Var(S_{u \wedge v})$

Demostración.

1. Debido a que (X_i) es independiente de N_t

$$ES_t = E \left[E \left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i \mid N_t \right) \right] = E [N_t EX_1] = EN_t EX_1$$

- 2.

$$\begin{aligned} Var(S_t) &= E [Var(S_t \mid N_t)] + Var [E(S_t \mid N_t)] \\ &= E \left[\sum_{i=1}^{N_t} Var(X_1 \mid N_t) \right] + Var [N_t EX_1] \\ &= E [N_t Var(X_1 \mid N_t)] + Var [N_t EX_1] \\ &= EN_t Var(X_1) + Var(N_t)(EX_1)^2. \end{aligned}$$

3. Sin pérdida de generalidad supongamos $u < v$. Entonces

$$E(S_u S_v) = E(S_u S_u) + ES_u E(S_v - S_u) \quad y,$$

$$ES_u ES_v = ES_u ES_u + ES_u E(S_v - S_u).$$

Así,

$$Cov(S_u, S_v) = E(S_u S_v) - ES_u ES_v = ES_u^2 - (ES_u)^2 = Var(S_u)$$

■

En particular, cuando N_t es un proceso Poisson homogéneo con intensidad $\lambda > 0$, se tiene que $ES_t = \lambda t EX_1$ ya que $EN_t = \lambda t$, por lo que la magnitud del proceso Poisson compuesto crece en promedio de forma lineal. En el caso general, donde N_t es un proceso de conteo inducido por la sucesión de renovación (W_i) , no siempre es posible encontrar una expresión elemental para EN_t ; sin embargo podemos obtener algunas conclusiones sobre el comportamiento asintótico de ES_t recordando el teorema (1.1) que afirma que si $\lambda^{-1} = EW_1 < \infty$ entonces $EN_t/t \rightarrow \lambda$ cuando $t \rightarrow \infty$. Dicho de otra forma, $EN_t = \lambda t + o(t)$ cuando t es grande, luego

$$ES_t = \lambda t EX_1(1 + o(t)), \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Por lo que S_t tiene la tendencia a crecer linealmente cuando t es suficientemente grande.

Para tener una idea más clara del orden de magnitud de S_t hace falta examinar la función $\text{Var}(S_t)$. Consideremos primero el caso en que N_t es Poisson homogéneo con intensidad λ , entonces

$$\text{Var}(S_t) = \lambda t [\text{Var}(X_1) + (EX_1)^2] = \lambda t E(X_1^2).$$

Para el caso general se puede probar de manera similar a como se hizo para la función de media, que cuando t es suficientemente grande $\text{Var}(S_t)$ crece aproximadamente linealmente:

$$\text{Var}(S_t) = \lambda t [\text{Var}(X_1) + \text{Var}(W_1)\lambda^2(EX_1)^2] (1 + o(t)). \quad (2.3)$$

Conociendo la magnitud de orden del modelo de Sparre-Anderson, se puede abordar el problema de calcular una prima que cubra las pérdidas descritas por el proceso compuesto S . Si se denota por $p(t)$ a las ganancias generadas por las primas hasta el tiempo t , uno desearía que se satisficiera lo siguiente:

$$p(t) > ES_t, \quad t \geq 0. \quad (2.4)$$

Ya que para el modelo de Sparre-Anderson se tiene que $ES_t = EW_1^{-1}EX_1t(1+o(t))$ cuando t es suficientemente grande, una forma de lograr la relación (2.4), sería

definir $p(t)$ mediante

$$p(t) = (1 + \rho) \frac{EX_1}{EW_1} t$$

donde ρ es un número positivo llamado *sobreprima de seguridad*. Ésta es la llamada *condición de beneficio neto*.

Aunque esto es un buen inicio para establecer un régimen de ingresos, la ecuación (2.4) no da gran información sobre la probabilidad de que el fondo de reserva de una aseguradora se agote. La siguiente sección trata este problema.

2.2. Probabilidad de ruina

Ya se vio que una función de ingresos lineal $p(t) = rt$ con $r > 0$ suficientemente grande puede dominar a la función de media del proceso Poisson compuesto y conforme $t \rightarrow \infty$ dominar también a la del modelo de Sparre-Anderson. Se procede a investigar la probabilidad de que una aseguradora se arruine, dependiendo de su fondo de reserva inicial u . Si denotamos por Z_t al fondo de reserva en cada instante $t \geq 0$, tenemos que

$$Z_t = u + rt - S_t.$$

Las trayectorias de Z_t crecen linealmente con intensidad r en cada intervalo (T_{i-1}, T_i) y sufren una caída de tamaño X_i en cada tiempo de arribo T_i del proceso de conteo N_t (Ver Figura 2.1).

Si ocurre una acumulación atípica de reclamos, o el monto de algún reclamo es demasiado alto, el proceso Z_t puede tomar valores negativos, representando la ruina de la compañía. Así, el momento de ruina es el tiempo de paro dado por

$$T_R = \inf\{t > 0 : Z_t < 0\}$$

y la probabilidad de ruina con reserva inicial u está dada por $\psi(u) = \Pr(T_R < \infty | Z_0 = u)$.

Consideremos ahora la probabilidad de que una compañía con reserva inicial u nunca se arruine $\varphi(u) = 1 - \psi(u)$. Que no ocurra la ruina es equivalente a decir

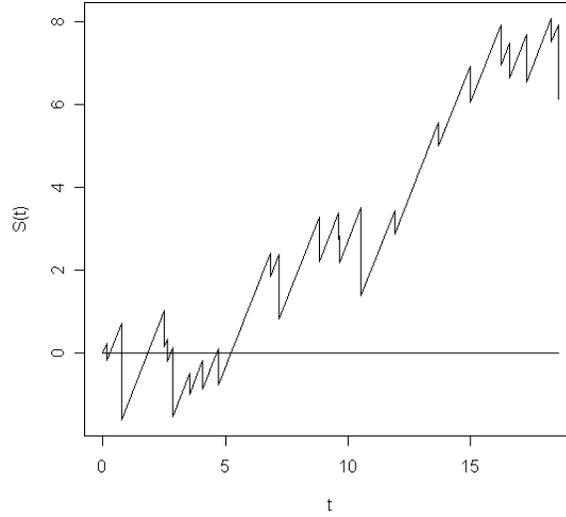


Figura 2.1: Realización de un modelo de riesgo.

que

$$S_{T_1} \leq rT_1 + u$$

y que para todo $t \geq T_1$

$$S_t - S_{T_1} \leq u - X_1 + rt.$$

Por lo que,

$$\varphi(u) = E(\Pr(S_t - S_{T_1} \leq u - X_1 + rt | T_1, X_1))$$

Pero ya que por construcción $S_t - S_{T_1}$ es independiente de S_{T_1} , dado T_1 , el evento $\{S_t - S_{T_1} \leq u - X_1 + rt, t \geq T_1\}$ es equivalente a $\{S_t \leq u + rT_1 - X_1 + rt, t \geq 0\}$ cuya probabilidad es justamente $\varphi(u + rT_1 - X_1)$. Por lo tanto $\varphi(u) = E(\varphi(u + rT_1 - X_1))$ y como X_1 es independiente de T_1 ,

$$\varphi(u) = \int_0^\infty \int_0^{u+rt} \varphi(u + rt - x) F_{X_1}(dx) F_{T_1}(dt). \quad (2.5)$$

En el caso en el que el proceso de renovación (T_i) sea un proceso Poisson homogéneo

de intensidad λ obtenemos

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^{u+rt} \varphi(u+rt-x) F_{X_1}(dx) dt \\ &= \frac{\lambda}{r} e^{\lambda u/r} \int_u^\infty e^{-\lambda w/r} \int_0^w \varphi(w-x) F_{X_1}(dx) dw\end{aligned}\quad (2.6)$$

haciendo el cambio de variable $w = u + rt$.

Si suponemos la existencia de una densidad para X_1 entonces la función $g(w) = \int_0^w \varphi(w-x) F_{X_1}(dx)$ es continua; por lo tanto $\varphi(u)$ dada por la ecuación (2.6) es diferenciable y

$$\varphi'(u) = \frac{\lambda}{r} \varphi(u) - \frac{\lambda}{r} \int_0^u \varphi(u-x) F_{X_1}(dx).\quad (2.7)$$

Si ahora integramos la ecuación anterior sobre $(0, t)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\varphi(t) - \varphi(0) - \frac{\lambda}{r} \int_0^t \varphi(u) du &= \frac{\lambda}{r} \int_0^t \int_0^u \varphi(u-x)(1-F_{X_1})(dx) du \\ &= \frac{\lambda}{r} \int_0^t \left[\varphi(u-x)(1-F_{X_1})(x) \Big|_0^u + \int_0^u \varphi'(u-x)(1-F_{X_1})(x) dx \right] du \\ &= \frac{\lambda}{r} \int_0^t \left[\varphi(0)(1-F_{X_1})(u) - \varphi(u) + \int_0^u \varphi'(u-x)(1-F_{X_1})(x) dx \right] du\end{aligned}$$

recordando que $X_1 \geq 0$ y por lo tanto $F_{X_1}(0) = 0$.

Ahora, ya que el integrando $\varphi'(u-x)F_{X_1}(x)$ es positivo, cambiamos el orden de integración obteniendo

$$\begin{aligned}\varphi(t) - \varphi(0) &= \\ &= \frac{\lambda}{r} \varphi(0) \int_0^t (1-F_{X_1})(u) + \frac{\lambda}{r} \int_0^t [\varphi(t-x) - \varphi(0)] (1-F_{X_1})(x) dx \\ &= \frac{\lambda}{r} \int_0^t \varphi(t-x)(1-F_{X_1})(x) dx.\end{aligned}$$

o bien,

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\lambda}{r} \int_0^t \varphi(t-x)(1-F_{X_1})(x) dx$$

Ahora notemos que

$$\varphi(\infty) = \varphi(0) + \frac{\lambda}{r} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \varphi(t-x)(1-F_{X_1})(x)dx.$$

Como la probabilidad de no ruina $\varphi(u)$ es una función creciente, entonces aplicando el teorema de convergencia monótona a la ecuación anterior obtenemos:

$$\varphi(\infty) = \varphi(0) + \frac{\lambda}{r} \varphi(\infty) \int_0^\infty 1 - F_{X_1}(x)dx = \varphi(0) + \frac{\lambda}{r} \varphi(\infty) EX_1, \quad (2.8)$$

la última igualdad se debe a que integrando por partes,

$$\int_0^\infty 1 - F_{X_1}(x)dx = x(1 - F_{X_1}(x)) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty x f_{X_1}(x)dx = EX_1.$$

Si suponemos que se cumple la condición de beneficio neto $r = (1 + \rho)\lambda EX_1$ con $\rho > 0$, tenemos que $\varphi(\infty) = 1$. Esto se debe a que por la ley fuerte de los grandes números $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_t}{t} = r - \lambda EX_1 > 0$ y por lo tanto existe un tiempo $T < \infty$ para el que $Z_t > 0$ para toda $t \geq T$. Como $S_T < \infty$ entonces una reserva inicial infinita no se puede agotar y $\psi(\infty) = 0$. Así, la ecuación (2.8) se convierte en

$$1 = (1 - \psi(0)) + \frac{\lambda}{r} EX_1.$$

Obteniendo finalmente

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \rho}.$$

Notemos que la probabilidad de ruina tiende a cero cuando la sobreprima de seguridad ρ crece, aun cuando la compañía no cuenta con una reserva inicial. Sin embargo, una sobreprima alta afectaría directamente la demanda del servicio de seguro y por lo tanto no es de interés práctico. Nos gustaría en cambio conocer el valor de $\psi(u)$ para toda reserva inicial positiva u . Este es un problema complicado y se ha resuelto para muy pocas elecciones de la distribución del monto de los reclamos (Grandell , 1991).

2.2.1. Cálculo de la probabilidad de ruina para montos exponenciales

En el contexto anterior, asumamos que $X_1 \sim \text{Exp}(\theta)$ es decir, que el monto de los reclamos se distribuye de manera exponencial con parámetro θ . Buscamos calcular la probabilidad de ruina $\psi(u)$ para toda $u > 0$. Para ello utilicemos la ecuación (2.7) tomando en cuenta que la función de distribución de X_1 es $F(x) = 1 - e^{-\theta x}$.

$$\begin{aligned}\varphi'(u) &= \frac{\lambda}{r}\varphi(u) - \frac{\lambda\theta}{r} \int_0^u \varphi(u-x)e^{-\theta x} dx. \\ &= \frac{\lambda}{r}\varphi(u) - \frac{\lambda\theta}{r} \int_0^u \varphi(x)e^{-\theta(u-x)} dx.\end{aligned}$$

Aplicando diferenciación bajo el signo de integral obtenemos

$$\begin{aligned}\varphi''(u) &= \frac{\lambda}{r}\varphi'(u) - \frac{\lambda\theta}{r}\varphi(u) + \theta \left(\frac{\lambda}{r}\varphi(u) - \varphi'(u) \right) \\ &= \left(\frac{\lambda}{r} - \theta \right) \varphi'(u) = \left(\frac{\lambda - r\theta}{r} \right) \varphi'(u) \\ &= -\frac{\theta\rho}{(1+\rho)}\varphi'(u)\end{aligned}$$

ya que $r = (1 + \rho)\lambda/\theta$ con $\rho > 0$.

Esta ecuación se resuelve directamente proponiendo una solución de la forma $e^{q(u)}$, de modo que

$$\varphi(u) = C_1 + C_2 \exp \left\{ -\frac{\theta\rho u}{(1+\rho)} \right\}.$$

Las constantes se encuentran recordando que ya se habían obtenido las expresiones $\varphi(\infty) = 1$ y $\varphi(0) = 1 - (1 + \rho)^{-1}$. Entonces

$$\begin{aligned}C_1 &= \varphi(\infty) = 1 \\ C_2 &= \varphi(0) - 1 = -\frac{1}{1+\rho}.\end{aligned}$$

Haciendo los cálculos pertinentes y denotando por μ a la media $EX_1 = 1/\theta$, se

sigue que

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \rho} \exp \left\{ -\frac{\rho u}{\mu(1 + \rho)} \right\}. \quad (2.9)$$

2.2.2. Probabilidad de ruina a horizonte finito

De interés práctico es calcular la probabilidad de que una compañía se arruine en un intervalo de tiempo finito, es decir: calcular

$$\psi(u, T) = \Pr(\inf_{0 \leq t < T} \{Z_t < 0\} < T | Z_0 = u).$$

Ya que resolver este problema de forma analítica es aún más complicado que calcular $\psi(u)$ en este trabajo se abordará mediante la simulación computacional.

Es importante notar que $\psi(u, T)$ es monótona creciente en ambas entradas y que $\psi(u, T) \rightarrow \varphi(u)$ cuando $T \rightarrow \infty$. De hecho, ya que el proceso de riesgo Z_t tiende a infinito, existe un $T_0 < \infty$ tal que $\psi(u, t) = \psi(u)$ para todo $t > T_0$, por lo que podríamos obtener una aproximación de $\psi(u)$ estimando T_0 y posteriormente simulando $\psi(u, T_0)$. Sean T_1, \dots, T_n los tiempos de ruina de n realizaciones independientes del modelo de riesgo; entonces $\hat{T}_0 = \max\{T_1, \dots, T_n\}$ es un estimador razonable para T_0 . La distribución límite de \hat{T}_0 es un problema clásico de la teoría de valores extremos, sin embargo, no se abundará más sobre este vasto campo.

Capítulo 3

El proceso compuesto intercambiable

En este capítulo se propone una generalización natural del proceso compuesto $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ de forma que las variables X_i sigan siendo idénticamente distribuidas pero que exista la posibilidad de dependencia entre ellas. Para esta tarea se presentará el concepto de *intercambiabilidad*, el cual es parte central en los fundamentos de la teoría estadística (consultar por ejemplo Schervish , 1995). Nos ocuparemos también de la estimación de este nuevo proceso, para poder posteriormente encajarlo a datos reales.

3.1. Sucesiones intercambiables

Una colección finita X_1, X_2, \dots, X_n de variables aleatorias es intercambiable, si su distribución es invariante bajo permutaciones; es decir,

$$F(x_1, \dots, x_n) = F(x_{\Pi(1)}, \dots, x_{\Pi(n)})$$

donde Π es una permutación de $\{1, 2, \dots, n\}$. Se dice que una sucesión de variables aleatorias es intercambiable si cada subcolección finita es intercambiable. En particular, las sucesiones independientes son intercambiables.

Nótese que si X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias intercambiables, entonces tienen la misma distribución marginal.

$$\begin{aligned} F_{X_1}(x_1) &= \lim_{x_2, \dots, x_n \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ &= \lim_{x_2, \dots, x_n \rightarrow \infty} F(x_j, \dots, x_1, \dots, x_n) = F_{X_j}(x_1) \end{aligned}$$

En general se puede probar, con el método anterior, que (X_1, \dots, X_m) es igual en distribución a $(X_{j_1}, \dots, X_{j_m})$ para cualquier $m \in \{1, \dots, n\}$. Un tratado amplio sobre intercambiabilidad y algunas de sus aplicaciones se puede encontrar en Aldous (1983).

Existe una importante relación entre intercambiabilidad e independencia condicional: Supongamos por ejemplo que X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias condicionalmente independientes dado un parámetro Θ . Si suponemos la existencia de densidades, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_N) &= \int f(x_1, \dots, x_N | \theta) dF(\theta) \\ &= \int \prod_i f(x_i | \theta) dF(\theta) \end{aligned} \quad (3.1)$$

por lo que la colección es claramente intercambiable. Nos encontraremos con esta fórmula más adelante, al estudiar el paradigma bayesiano.

Aunque no todas las colecciones intercambiables son condicionalmente independientes en el caso de las sucesiones infinitas, esta condición es necesaria además de suficiente. Este resultado es conocido como teorema de *de Finetti*. La caracterización de las colecciones intercambiables finitas no será estudiada en este trabajo; el lector interesado puede consultar Schervish (1995) o Aldous (1983).

Con el objetivo de enunciar el teorema en su forma general es necesario introducir algo de notación formal. Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$. Ahora consideremos \mathcal{P} , el conjunto de todas las medidas de probabilidad definidas sobre el espacio de Borel $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Necesitaremos convertir a \mathcal{P} en un espacio de probabilidad para poder trabajar con él. En particular, sería natural pedir que las *funciones de evaluación* $g_B : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas para cada $B \in \mathcal{B}$ por $g_B(P) = P(B)$, fueran medibles. Para esto definamos Σ como la σ -álgebra generada por los conjuntos $A_{B,t} = \{P \in \mathcal{P} : P(B) \leq t\}$ con $B \in \mathcal{B}$ y $t \in [0, 1]$. De particular importancia será

la distribución empírica de $(X_i)_{i=1}^n$, la cual se define como:

$$F_n : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n) \rightarrow (\mathcal{P}, \Sigma)$$

$$F_n(X_1 \times \cdots \times X_n) = t \rightsquigarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, t]} X_i$$

Es fácil ver que para cada $\omega \in \Omega$ fijo, el lado derecho de la última expresión corresponde a una función de distribución. Ya que existe una biyección entre las funciones de distribución y las medidas de probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ el mapeo F_n está bien definido. A continuación se omitirá en la notación la dependencia sobre (X_i) y se escribirá simplemente $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, t]} X_i$.

Proposición 3.1. *El mapeo $F_n : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n) \rightarrow (\mathcal{P}, \Sigma)$ definido anteriormente es medible.*

Demostración. En esta prueba utilizaremos la misma nomenclatura para denotar una función de distribución y la medida de probabilidad que ésta induce. Queremos probar que $F_n^{-1}(\{P \in \mathcal{P} : P(B) \leq t\})$ pertenece a \mathcal{B}^n para cada $B \in \mathcal{B}$. Esto es equivalente a probar que, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$A_x = F_n^{-1}(\{F \in \mathcal{P} : F(x) \leq t\})$$

pertenece a \mathcal{B}^n . Notemos que debido a que, para ω fija, $F_n(\omega)$ es siempre una función escalonada creciente con n saltos,

$$A_x = \left\{ X_1 \times \cdots \times X_n : \frac{\#\{i : X_i \leq x\}}{n} \leq t \right\}.$$

Sea $m = \max\{i \in \mathbb{Z}^+ : i/n \leq t\}$ y $\Xi = \{C \subset \{1, \dots, n\} : \#C \leq m\}$. Ahora para cada $C \in \Xi$ definamos

$$A_C = \{X_1 \times \cdots \times X_n : X_i \leq x \text{ si } i \in C \text{ y } X_i > x \text{ si } i \notin C\}.$$

$A_C \in \mathcal{B}^n$ por ser la intersección de dos boreleanos. Por lo tanto

$$\bigcup_{C \in \Xi} A_C = A \in \mathcal{B}^n,$$

ya que Ξ es finito. ■

Un mapeo medible con contradominio (\mathcal{P}, Σ) es llamado *medida aleatoria*. Por lo tanto la distribución empírica F_n es una medida aleatoria para cada n . Ahora podemos definir la siguiente noción:

Sea Y una variable aleatoria y \mathcal{G} una σ -álgebra. Una *distribución condicional* de Y dado \mathcal{G} es una medida aleatoria G tal que

$$G(\cdot, A) = \Pr(Y \in A \mid \mathcal{G}) \quad \text{c.s.} \quad A \in \mathcal{B}.$$

Es fácil probar que las distribuciones condicionales siempre existen y son únicas en el sentido casi seguro (Fristedt & Gray, 1997, Cap. 21). Además, satisfacen la siguiente propiedad fundamental:

$$E(h(X, Y) \mid \mathcal{G}) = \int h(X, y)G(\cdot, dy), \quad X \in \mathcal{G}, \quad h(X, Y) \text{ integrable.} \quad (3.2)$$

Ahora estamos en condiciones de enunciar el teorema.

Teorema 3.1 (de Finetti). *Sea $X = (X_i)_{i=1}^\infty$ una sucesión intercambiable de variables aleatorias. Entonces existe una medida aleatoria G sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ tal que $G^\infty = G \times G \times \dots$ es la distribución condicional de X , dado $\sigma(G)$. Además, G es única casi seguramente y $F_n(t) \rightarrow G(-\infty, t]$ c.s. para toda t .*

Nos referiremos a G como la medida de de Finetti. Distintas demostraciones de este teorema se pueden encontrar en Kingman (1978), Schervish (1995, Cap. 1) o Fristedt & Gray (1997, Cap. 27). Conviene sin embargo hacer algunos comentarios para hacer más clara la lectura del enunciado.

Usando la notación del teorema 3.1, consideremos al evento $A = A_1 \times \dots \times A_n \times \mathbb{R}^\infty \in \mathcal{B}^\infty$. Sabemos entonces que $G^\infty(\cdot, A) = \Pr(X \in A \mid G)$, pero también $G^\infty(\cdot, A) = \prod_{i=1}^n G(\cdot, A_i)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Pr(X \in A) &= E[\Pr(X \in A \mid G)] \\ &= \int_{\mathcal{P}} \prod_{i=1}^n P(A_i)G(dP). \end{aligned}$$

En otras palabras, $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ es i.i.d. con distribución P , dado que $G = P$. En particular: $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ es condicionalmente independiente dado G .

Varios resultados para sucesiones i.i.d. se pueden adaptar a sucesiones intercambiables condicionando sobre la medida de de Finetti. Ejemplo de esto es la ley fuerte de los grandes números.

Teorema 3.2. *Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión intercambiable con $E|X_1| < \infty$. Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = E\{X_1 \mid G\} \quad \text{c.s.} \quad (3.3)$$

donde G es la medida de de Finetti.

Demostración. Denotemos por $m(F)$ a la media de una distribución F . Es decir:

$$m(F) = \int x F(dx).$$

Ya que $E|X_1| < \infty$ y $X_1 \mid G \sim G$, entonces para casi toda $\omega \in \Omega$,

$$\int |x| G(\omega, dx) < \infty.$$

Por lo tanto, como $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ es condicionalmente independiente dado G , la ley fuerte de los grandes números asegura que

$$\Pr \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow m(G) \mid G \right) = 1 \quad \text{c.s.}$$

El resultado deseado se obtiene tomando la esperanza, y notando que

$$m(G) = \int x G(\cdot, dx) = E\{X_1 \mid G\},$$

por la propiedad fundamental (3.2). ■

3.1.1. Construcción de sucesiones intercambiables con marginal dada

Nos interesa construir sucesiones intercambiables $X = X_1, X_2, \dots$ con una distribución marginal específica F , con el objetivo de modelar el monto de los reclamos recibidos por una aseguradora. Como vimos anteriormente, para construir una sucesión intercambiable es suficiente construir una sucesión condicionalmente independiente e idénticamente distribuida. Esto siempre es posible en general (Fristedt & Gray, 1997, Cap. 22) pero la existencia de densidades nos hará más fácil la tarea. Para este propósito, se hará uso de una variable latente Z con respecto a la cual se definirá la sucesión condicionalmente independiente $X_i | Z$. Si $f(x)$ es la densidad de la distribución deseada entonces buscamos una Z tal que

$$f(x) = \int f(x | z) f_Z(z) dz. \quad (3.4)$$

Para definir $f(x | z)$ de tal forma que se satisfaga la ecuación anterior, podemos utilizar la fórmula de Bayes

$$f(x | z) = \frac{f(z | x) f(x)}{\int f(z | x) f(x) dx}. \quad (3.5)$$

Así,

$$\begin{aligned} \int f(x | z) f_Z(z) dz &= \int f(z | x) f(x) dz \\ &= f(x). \end{aligned}$$

como se buscaba.

Esto muestra que se pueden construir distintas sucesiones intercambiables con las mismas marginales variando la elección de $f(z | x)$ en la ecuación (3.5), dándonos la posibilidad de generar una amplia gama de estructuras de dependencia.

El método anterior también nos da una forma de simular una muestra aleatoria de tamaño n de una sucesión intercambiable de variables tal que $X_i \sim f(\cdot)$. Simplemente se genera una realización z de Z y posteriormente n realizaciones de $X_i \sim f(\cdot | z)$.

Proposición 3.2. *Sea (X_i) una sucesión intercambiable con distribución marginal*

F construida utilizando el método recién propuesto. Sea Z la variable latente y digamos que $Z \sim G$, de modo que $X_i | Z \sim G$ es una sucesión independiente. Entonces

$$E[G] = F.$$

Demostración. Sea A un conjunto medible y supongamos que g es la densidad de Z . Entonces

$$\begin{aligned} E[G(A)] &= \int \left(\int_A f(x | z) dx \right) g(z) dz \\ &= \int_A \int f(x | z) g(z) dz dx \\ &= \int_A f(x) dx = F(A). \end{aligned}$$

■

Ejemplo 1. Queremos definir una sucesión intercambiable de variables con distribución marginal $\text{Ga}(a, b)$. Supongamos que $f(z | x) = \text{Ga}(z | c, x)$ con $c > 0$. Entonces

$$f_Z(z) = \int \text{Ga}(z | c, x) \text{Ga}(x | a, b) dx = \frac{\Gamma(a+c)}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \frac{z^{c-1} b^a}{(b+z)^{(a+c)}} \quad (3.6)$$

y de la ecuación (3.5) obtenemos que

$$\begin{aligned} f(x | z) &\propto x^c \exp\{-zx\} y^{a-1} \exp\{-by\} \\ &\propto x^{(a+c)-1} \exp\{-(z+b)x\}. \end{aligned}$$

La última expresión corresponde al núcleo de una distribución $\text{Ga}(a+c, b+z)$, por lo que si definimos variables aleatorias X_i tales que $X_i | Z$ son independientes y tienen distribución condicional $\text{Ga}(a+c, b+z)$ obtendremos una sucesión intercambiable de variables idénticamente distribuidas $\text{Ga}(a, b)$.

Construyamos ahora un modelo intercambiable con una variable latente discreta. Sea $f(z | x) = \text{Po}(z | cx)$ con $c > 0$. Entonces Z tiene una distribución mezclada

Poisson Gamma

$$f_Z(z) = \int \text{Po}(z | cx) \text{Ga}(x | a, b) dx = \frac{\Gamma(z+a)}{z! \Gamma(a)} (b+c)^{z+a} b^a c^z I_{\mathbb{N}}(z)$$

y por ecuación (3.5)

$$\begin{aligned} f(x | z) &\propto (e^{-cx} x^z) (x^{a-1} e^{-bx}) \\ &\propto e^{-x(b+c)} x^{(z+a)-1} \\ &= \text{Ga}(a+z, b+c). \end{aligned}$$

Nótese como la distribución condicional varía dependiendo de la elección de la variable latente.

Ejemplo 2. Con el fin de tratar de ajustar el modelo a datos reales nos pudiera ser de utilidad una familia paramétrica más robusta para modelar las distribuciones marginales. La distribución *Gausiana Inversa Generalizada* (GIG) fue popularizada por Barndorff-Nielsen con el objetivo de construir una mezcla normal de media-varianza llamada distribución *Hiperbólica Generalizada*. Su función de densidad está dada por

$$\text{GIG}(x | \lambda, \chi, \psi) = \frac{\left(\frac{\psi}{\chi}\right)^{\lambda/2}}{2K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} x^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\chi x^{-1} + \psi x)\right\}, \quad x > 0,$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, K_{λ} es la función de Bessel modificada del tercer tipo¹ con índice λ y

$$\begin{cases} \chi \geq 0, \psi > 0 & \text{si } \lambda > 0, \\ \chi > 0, \psi > 0 & \text{si } \lambda = 0, \\ \chi > 0, \psi \geq 0 & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

Esta distribución se conjuga con la Normal de la siguiente manera:

¹Su definición y propiedades pueden consultarse en Abramowitz & Stegun (1992).

Sea $f(z | x) = N(\mu + \gamma x, \sigma x)$ con $\sigma > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
 f(x | z) &\propto f(z | x)f(x) \\
 &\propto N(z | \mu + \gamma x, \sigma x) \text{GIG}(x | \lambda, \chi, \psi) \\
 &\propto x^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(z - \mu - \gamma x)^2}{2\sigma x} \right\} x^{\lambda-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\chi}{x} + \psi x \right) \right\} \\
 &\propto x^{(\lambda - \frac{1}{2}) - 1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} \left(\chi + \frac{(z - \mu)^2}{\sigma} \right) + x \left(\psi + \frac{\gamma^2}{\sigma} \right) \right] \right\} \\
 &= \text{GIG} \left(x \mid \lambda - 1/2, \chi + \frac{(z - \mu)^2}{\sigma}, \psi + \frac{\gamma^2}{\sigma} \right).
 \end{aligned}$$

Z tiene entonces distribución Hiperbólica Generalizada con densidad

$$\begin{aligned}
 \text{GH}(z | \lambda, \chi, \psi, \mu, \gamma, \sigma) &= \frac{\left(\frac{\psi}{\chi} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \left(\psi + \frac{\gamma^2}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2} - \lambda}}{\sqrt{2\pi\sigma} \text{K}_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} \\
 &\quad \cdot \frac{\text{K}_{\lambda - \frac{1}{2}} \left(\sqrt{\left(\chi + \frac{(z - \mu)^2}{\sigma} \right) \left(\psi + \frac{\gamma^2}{\sigma} \right)} \right) e^{\frac{\gamma(z - \mu)}{\sigma}}}{\left(\sqrt{\left(\chi + \frac{(z - \mu)^2}{\sigma} \right) \left(\psi + \frac{\gamma^2}{\sigma} \right)} \right)^{\frac{1}{2} - \lambda}}.
 \end{aligned}$$

Ver Barndorff-Nielsen (1977).

Con el fin de facilitar la estimación de una sucesión intercambiable con estas características, se podrían fijar algunos de los parámetros de la variable latente; por ejemplo hacer $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ de modo que la dependencia quede regulada solamente por $\gamma > 0$.

Existen dos casos límite importantes de la distribución GIG. Uno es cuando $\lambda > 0$ y $\chi \downarrow 0$, para el cual

$$\text{GIG}(x | \lambda, 0, \psi) = \text{Ga}(x | \lambda, \psi/2).$$

El otro es cuando $\lambda < 0$ y $\psi \downarrow 0$, en donde

$$\text{GIG}(x | \lambda, \chi, 0) = \text{Iga}(x | -\lambda, \chi/2),$$

donde Iga denota a la distribución Gamma inversa.

Una prueba de estos resultados se puede encontrar en Eberlein & Hammerstein (2004).

3.2. El modelo intercambiable.

Sabiendo cómo definir sucesiones intercambiables con distribución marginal dada, se puede definir un proceso $S_t = \sum_i^{N_t} X_i$ donde N_t es un proceso de conteo y X_1, X_2, \dots una sucesión intercambiable independiente de N_t . Es inmediato que el proceso Poisson compuesto es un caso particular de este nuevo proceso. Investiguemos algunas de sus propiedades básicas.

Proposición 3.3. *Sea S_t un proceso compuesto intercambiable y supongamos que la sucesión de montos (X_i) tiene distribución marginal fija con segundo momento finito. Entonces*

1. $ES_t = EN_t EX_1$
2. $Var(S_t) = EN_t VarX_1 + VarN_t(EX_1)^2 + (EN_t)^2 Cov(X_i, X_j)$
3. $Cov(S_u, S_v) = EN_u EN_v Cov(X_i, X_j) + EN_{u \wedge v} Var(X_i) + Var(N_{u \wedge v})(EX_i)^2$

Demostración.

1. La deducción de esta fórmula es idéntica a la del caso clásico.

$$ES_t = E \left\{ E \left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i \middle| N_t \right) \right\} = EN_t EX_1.$$

2. Por el teorema de de Finetti podemos suponer que existe G tal que (X_i) es idénticamente distribuida y condicionalmente independiente con $X_i | G \sim G$. Así, usando la proposición 2.1 tenemos que

$$Var(S_t | G) = EN_t Var(X_i) + Var(N_t)(EX_i)^2$$

y

$$E(S_t | G) = EN_t E(X_i | G).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\text{Var}(S_t) &= \text{E}\{\text{Var}(S_t | G)\} + \text{Var}\{\text{E}(S_t | G)\} \\ &= \text{E}N_t \text{Var}X_1 + \text{Var}N_t(\text{E}X_1)^2 + (\text{E}N_t)^2 \text{Var}\{\text{E}(X_1 | G)\}.\end{aligned}$$

Por último, utilizando el hecho de que $\text{E}(X_i | G) \sim \text{E}(X_1 | G)$, vemos que

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \text{Cov}\{\text{E}(X_i | G), \text{E}(X_j | G)\} = \text{Var}\{\text{E}(X_i | G)\}. \quad (3.7)$$

Luego

$$\text{Var}(S_t) = \text{E}N_t \text{Var}X_i + \text{Var}N_t(\text{E}X_i)^2 + (\text{E}N_t)^2 \text{Cov}(X_i, X_j).$$

3.

$$\begin{aligned}\text{Cov}(S_u, S_v) &= \text{Cov}\{\text{E}(S_u | G), \text{E}(S_v | G)\} + \text{E}\{\text{Cov}(S_u, S_v | G)\} \\ &= \text{Cov}\{\text{E}N_u \text{E}(X_i | G), \text{E}N_v \text{E}(X_j | G)\} + \text{E}\{\text{Var}(S_{u \wedge v} | G)\} \\ &= \text{E}N_u \text{E}N_v \text{Cov}(X_i, X_j) + \text{E}N_{u \wedge v} \text{Var}(X_i) + \text{Var}(N_{u \wedge v})(\text{E}X_i)^2\end{aligned}$$

■

En particular cuando N_t es un proceso Poisson homogéneo con intensidad λ se tiene que $\text{Var}(S_t) = \lambda t \text{E}X_1^2 + \lambda^2 t^2 \text{Cov}(X_i, X_j)$ y $\text{Cov}(S_u, S_v) = \lambda^2 uv \text{Cov}(X_i, X_j) + \lambda(u \wedge v) \text{E}X_i^2$. En el caso en que N_t esté inducido por un proceso de renovación (W_i) se pueden obtener resultados asintóticos análogos a (2.2) y (2.3) para la función de media y varianza. Comparemos con la proposición 2.1 y notemos que la media del proceso compuesto intercambiable coincide con la del ordinario y por lo tanto la condición de beneficio neto sigue vigente. Sin embargo, la ecuación (3.7) muestra que variables que provengan de una sucesión intercambiable infinita tienen covarianza positiva y por lo tanto la varianza del nuevo proceso es mayor que la del proceso compuesto ordinario. Veremos que este hecho repercutirá en la probabilidad de ruina del proceso compuesto intercambiable.

Ejemplo 3. Sea S_t un proceso compuesto intercambiable con N_t un proceso Poisson homogéneo de intensidad λ y (X_i) una sucesión intercambiable con marginales

$Ga(a, b)$ como se construyó anteriormente. Se tiene entonces que

$$ES_t = \frac{a}{b}\lambda t,$$

$$\text{Var}(S_t) = \frac{a(a+1)}{b^2}\lambda t + \frac{ak}{b^2(b+c)}\lambda^2 t^2$$

y

$$\text{Cov}(S_t, S_s) = \frac{a(a+1)}{b^2}\lambda t + \frac{ak}{b^2(b+k)}\lambda^2 ts \quad (3.8)$$

3.3. Estimación del proceso

3.3.1. El paradigma bayesiano

Los métodos bayesianos constituyen un paradigma para la inferencia estadística y la teoría de decisiones basado solamente en los axiomas de la teoría probabilística. Esto contrasta con la estadística clásica (o frecuentista) en cuya practica se hacen suposiciones sin una justificación rigurosa, por ejemplo: la existencia de un parámetro desconocido pero fijo con respecto al cual la distribución de una secuencia de experimentos queda determinada. En el contexto bayesiano, todos los parámetros no observables constituyen cantidades aleatorias. En el caso de sucesiones intercambiables, la medida de de Finetti, representa este parámetro y justifica su existencia.

Sin embargo, la distribución del parámetro, digamos Θ , es desconocida mientras se tenga un número finito de observaciones. Por lo tanto, en la práctica, uno se ve obligado a conjeturar una distribución previa $\pi(\theta)$, que represente el conocimiento u opinión sobre su posible valor, antes de realizar el experimento. Esto formaliza la idea de una hipótesis científica, y es una de las razones por la que los métodos bayesianos son aplicados con tanta frecuencia en variedad de situaciones. La influencia que esta distribución tendrá sobre la estimación final del parámetro, dependerá de qué tan concentrada o dispersa sea.

El siguiente paso es aprender de la experiencia obtenida al realizar el experimento. Para esto es necesario definir la distribución del modelo $L(D | \theta)$, que mide la

probabilidad relativa de que el experimento arroje los datos D , dado Θ toma el valor θ .

Mediante la fórmula de Bayes, se obtiene entonces la distribución posterior

$$\pi(\theta | D) = \frac{L(D | \theta)\pi(\theta)}{\int L(D | \theta)\pi(\theta)d\theta}. \quad (3.9)$$

que representa una revisión de la opinión que teníamos sobre Θ una vez efectuado el experimento. La distribución posterior incluye toda la información actual sobre Θ por lo que sólo es cuestión de analizarla para sacar información sobre el problema que tenemos en mano. Este análisis incluye por ejemplo una estimación puntual, que se hace mediante alguna medida de tendencia central de la distribución posterior, como por ejemplo la media o la moda en caso de ser única.

Existe un análogo bayesiano a los intervalos de confianza de la inferencia clásica. Un intervalo para θ con $100(1 - \alpha)\%$ de credibilidad es una pareja (l, u) tal que

$$P(l < \theta < u) = \int_l^u \pi(\theta | D)d\theta = 1 - \alpha.$$

En general se buscará el intervalo de longitud menor y densidad máxima.

Otra característica importante del análisis bayesiano es la posibilidad de obtener una distribución predictiva para una observación futura. Para esto se propone un nuevo modelo $g(y | \theta)$ que no tiene por qué coincidir con $L(D | \theta)$. La distribución predictiva queda dada por

$$f(y | D) = \int g(y | \theta)\pi(\theta | D)d\theta$$

y representa nuestra apuesta sobre el resultado que arrojará el experimento al volver a realizarlo.

Dos referencias generales para el estudio de la estadística bayesiana son Bernardo & Smith (1994) y Klugman (1992), en el contexto actuarial.

3.3.2. Cálculo de los estimadores bayesianos

En la mayoría de los casos, la información que se busca obtener sobre un parámetro Θ a través de un estudio Bayesiano, involucra operaciones del tipo

$$E[h(\theta) | D] = \int h(\theta)\pi(\theta | D)d\theta, \quad (3.10)$$

donde $\pi(\theta | D)$ es la distribución posterior con respecto a los datos D dada por la ecuación (3.5). Ya que en muchas ocasiones $\pi(\theta | D)$ puede tener una forma muy compleja o conocerse únicamente módulo una constante, resolver (3.10) analíticamente es rara vez posible. Incluso aplicar métodos numéricos deterministas puede ser una tarea en extremo complicada y computacionalmente costosa, en especial cuando θ es multidimensional.

Los métodos de *Monte Carlo* son entonces la alternativa más usada. Con este enfoque, el problema se convierte en obtener una muestra $X_1, X_2, \dots \sim \pi(\theta | D)$ de la distribución posterior para luego, con base en el teorema ergódico, aproximar $E[h(\theta) | D]$ mediante

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i).$$

Se han desarrollado una gran variedad de métodos para realizar esta tarea cuyo rendimiento depende de cada caso en particular (ver por ejemplo Chen *et al.*, 2000). Sin embargo algunos han ganado popularidad debido a la amplia aplicabilidad y relativamente buen desempeño.

Tal es el caso del esquema de muestreo de Gibbs, que permite simular indirectamente una muestra de la distribución posterior $\pi(\theta | D)$ cuando el parámetro $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$ es multidimensional.

Algoritmo 1. *Esquema de Muestro de Gibbs.*

1. Escoger un punto de inicio arbitrario $\theta_0 = (\theta_{1,0}, \theta_{2,0}, \dots, \theta_{d,0})$ y fijar $i = 0$.

2. Generar θ_{i+1} de la manera siguiente:

- Generar $\theta_{1,i+1} \sim \pi(\theta_1 | \theta_{2,i}, \theta_{3,i}, \dots, \theta_{d,i}, D)$;

- Generar $\theta_{2,i+1} \sim \pi(\theta_2 \mid \theta_{1,i+1}, \theta_{3,i}, \dots, \theta_{d,i}, D)$;
-
- Generar $\theta_{d,i+1} \sim \pi(\theta_d \mid \theta_{1,i+1}, \theta_{2,i+1}, \dots, \theta_{d-1,i+1}, D)$

3. Fijar $i = i + 1$, y regresar al paso anterior.

Bajo ciertas condiciones bastante generales dadas en Gelfand & Smith (1990), la sucesión (θ_i) es una cadena de Markov ergódica y aperiódica con distribución estacionaria $\pi(\theta \mid D)$. Por lo tanto, con k suficientemente grande, $\{\theta_i : i \geq k\}$ es aproximadamente una muestra (dependiente) de $\pi(\theta \mid D)$, sin importar qué punto inicial θ_0 se haya elegido.

Nótese que la densidad condicional $\pi(\theta_j \mid \theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \dots, \theta_d, D)$ puede ser obtenida mediante

$$\begin{aligned} \pi(\theta_j \mid \theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \dots, \theta_d, D) &\propto f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d, D) \\ &\propto L(D \mid \theta_1, \dots, \theta_d) \pi(\theta_1, \dots, \theta_d). \end{aligned}$$

Por lo tanto, en el caso de que los parámetros fueran previamente independientes *i.e.* $\pi(\theta_1, \dots, \theta_d) = \pi(\theta_1) \cdots \pi(\theta_d)$, se tendría que

$$\pi(\theta_j \mid \theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \dots, \theta_d, D) \propto L(D \mid \theta_1, \dots, \theta_d) \pi(\theta_j). \quad (3.11)$$

Debido a que la constante de proporcionalidad de la ecuación anterior es difícil de calcular, los métodos más factibles para generar muestras con las distribuciones condicionales deseadas son los de rechazo. Por ejemplo, cuando el logaritmo de $\pi(\theta_j \mid \dots)$ es cóncavo, el *muestreo de rechazo adaptable* (Gilks & Wilks, 1992), es una buena alternativa al método de rechazo estándar. O bien, si no lo es, se puede usar una generalización llamada *muestreo de rechazo adaptable con Metropolis* (ARMS por sus siglas en inglés) propuesto por Gilks *et al.* (1995).

3.3.3. Inferencia bayesiana para el modelo intercambiable

En una realización práctica del modelo hasta un tiempo fijo t , obtendríamos el número de sucesos ocurridos hasta ese tiempo $N_t = n$, así como observaciones de

X_1 hasta X_n . Como N_t es independiente de X_1, X_2, \dots podemos hacer la inferencia de sus parámetros de manera separada.

Si suponemos que el proceso de conteo responde a un proceso de renovación (W_i) entonces nos encontramos con la clásica tarea de estimar una sucesión independiente idénticamente distribuida. Por ejemplo, si N_t es un proceso Poisson con parámetro λ , entonces $W_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ y la función de verosimilitud está dada por

$$\begin{aligned} L(\mathbf{w} \mid \lambda) &= \prod_{i=1}^n \text{Exp}(w_i \mid \lambda) \\ &= \lambda^n \exp \left\{ -\lambda \sum_{i=1}^n w_i \right\} \\ &= \lambda^n \exp \{-n\lambda\bar{w}\}. \end{aligned}$$

Podemos obtener fácilmente el estimador máximo verosímil $\hat{\lambda} = 1/\bar{w}$ maximizando $\ln f(\mathbf{w} \mid \lambda) = n \ln \lambda - n\lambda\bar{w}$. Supongamos que la distribución previa $\pi(\lambda)$ es una $Ga(a, b)$. Entonces la distribución posterior queda dada por

$$\begin{aligned} \pi(\lambda \mid \mathbf{w}) &\propto f(\mathbf{w} \mid \lambda)\pi(\lambda) \\ &\propto \left(\lambda^n e^{-n\lambda\bar{w}} \right) \left(\lambda^{a-1} e^{-b\lambda} \right) \\ &\propto \lambda^{a+n-1} \exp \{-\lambda(n\bar{w} + b)\} \end{aligned}$$

Por lo que la distribución posterior es una $Ga(a+n, b+n\bar{w})$. El estimador de Bayes para λ es la media de la distribución posterior $(a+n)/(b+n\bar{w})$. Nótese que por la ley fuerte de los grandes números

$$\frac{a+n}{b+n\bar{w}} \xrightarrow{c.s.} \lambda \quad n \rightarrow \infty.$$

Otra alternativa es suponer que observamos el número de reclamos que recibe la aseguradora anualmente ($t = 1, 2, \dots, m$) y que éstos son independientes. El modelo para el número de reclamaciones en m años es

$$L(\mathbf{n} \mid \theta) = \prod_{j=1}^m f(n_j \mid \theta) = e^{-m\theta} \frac{\theta^{\sum n_j}}{\prod n_j!}$$

Supongamos que la distribución previa es $\text{Ga}(a, b)$ y calculemos la distribución posterior:

$$\pi(\theta \mid \mathbf{n}) \propto \left(e^{-m\theta} \frac{\theta^{\sum n_j}}{\prod n_j!} \right) \left(b^a \frac{\theta^{a-1} e^{-b\theta}}{\Gamma(a)} \right) \propto \theta^{a+\sum n_j-1} e^{-\theta(m+b)}.$$

La última expresión es el núcleo de una Gamma con parámetros $a + \sum n_j$ y $m + b$. El estimador de Bayes para θ es la media posterior $(a + \sum n_j) / (b + m)$ que se puede reescribir como

$$\frac{a + m\bar{\mathbf{n}}}{b + m}.$$

Notemos cómo, cuando el número de años observados m aumenta, el estimador se aproxima a la media muestral de N_t que a su vez converge a λ .

Procedamos con la estimación de la sucesión de montos. Suponiendo que ésta fue generada mediante el método presentado anteriormente; sabemos que existe una variable latente $Z \sim g(z \mid \xi)$ tal que la sucesión es condicionalmente independiente con respecto a ella y $X_i \sim f(x \mid z)$. Esto implica que para generar una muestra x_1, x_2, \dots, x_n se debe haber fijado $Z = z$, por lo que si se quiere estimar ξ se necesitan varias muestras de x_i 's. Supongamos entonces que realizamos m observaciones independientes del proceso, obteniendo así $N_t^j = n_j$ para $j = 1, \dots, m$ y t fijo. Denotemos por $\mathbf{X}_j = (X_{1,j}, \dots, X_{n_j,j})$ el vector de reclamos para la j -ésima realización. Así, la función de verosimilitud para (θ, ξ) queda dada por

$$f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \mid \theta, \xi) = \prod_{j=1}^m f(\mathbf{x}_j \mid \theta, \xi) \quad (3.12)$$

con

$$f(\mathbf{x}_j \mid \theta, \xi) = f(x_{1,j}, \dots, x_{n_j,j} \mid \theta, \xi) = \int \left\{ \prod_{i=1}^{n_j} f(x_{i,j} \mid z_j) \right\} g(z_j \mid \xi) dz_j \quad (3.13)$$

Recordemos que $g(z_j \mid \xi)$ puede ser obtenida mediante

$$g(z \mid \xi) = \int f(z \mid x) f(x \mid \theta) dy.$$

Teóricamente, podríamos continuar con la inferencia simplemente sustituyendo

esta función de verosimilitud (3.12) en la ecuación (3.9), sin embargo, en la mayoría de los casos la integral en la ecuación (3.13) no tiene solución analítica.

Notemos que si de alguna forma pudiéramos observar el valor de Z en cada realización del proceso de modo que obtuviéramos una muestra $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)$, la función de verosimilitud tendría una forma relativamente simple:

$$f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{z} \mid \theta, \xi) = \prod_{j=1}^m f(\mathbf{x}_j, z_j \mid \theta, \xi)$$

con

$$f(\mathbf{x}_j, z_j \mid \theta, \xi) = f(x_{1,j}, \dots, x_{n_j,j} \mid z_j, \theta) f(z_j \mid \xi) = \left\{ \prod_{i=1}^{n_j} f(x_{i,j} \mid z_j, \theta) \right\} f(z_j \mid \xi). \quad (3.14)$$

La distribución posterior de (θ, ξ) quedaría dada por:

$$\pi(\theta, \xi \mid \mathbf{x}, \mathbf{z}) \propto f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{z} \mid \theta, \xi) \pi(\theta, \xi).$$

Ya que en la práctica es imposible observar directamente los valores de Z , podríamos de alguna forma simular una muestra z_1, \dots, z_m para luego utilizar el procedimiento anterior. Debido a la información con la que contamos, una buena forma de hacer esto es utilizar el esquema de muestreo de Gibbs. Simplemente tratamos a z_1, \dots, z_m como parámetros desconocidos del modelo, y utilizamos la ecuación (3.11) para encontrar $\pi(\theta \mid \xi, \mathbf{z}, \mathbf{x})$ y $\pi(\xi \mid \theta, \mathbf{z}, \mathbf{x})$. Por último, obtenemos $\pi(z_j \mid \xi, \theta, \mathbf{x})$ para cada $j = 1 \dots m$ mediante

$$\pi(z_j \mid \dots) \propto \pi(\mathbf{x}_j, z_j \mid \theta, \xi)$$

y la ecuación (3.14).

Esto se ilustrará en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4. Con el objetivo de analizar la eficacia de los métodos de estimación propuestos, se se usarán para recuperar los parámetros de una muestra conocida. Utilizando la construcción del ejemplo 1 generemos una muestra intercambiable con marginales $\text{Ga}(1, 1)$ y una variable latente Z tal que $f(z \mid x, c) = \text{Ga}(10, x)$.

Para proceder con cualquiera de los dos métodos de estimación propuestos es necesario calcular $\prod_{i=1}^{n_j} f(x_{ij} | z_j, a, b, c)$, donde $n_j = 10$.

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n_j} f(x_{ij} | z_j, a, b, c) &= \prod_{i=1}^{10} \text{Ga}(x_{ij} | a + c, b + z_j) \\ &= \frac{(b + z_j)^{10(a+c)}}{\Gamma(a + c)^{10}} \left(\prod_{i=1}^{10} x_{ij}^{a+c-1} \right) \exp \left\{ -(b + z) \sum_i x_{ij} \right\}. \end{aligned}$$

Ya que la integral de la ecuación (3.13) resulta poco tratable, adoptaremos el segundo enfoque propuesto, donde cada z_j se agrega al esquema de muestreo de Gibbs como cantidad no observada. Ya que $f(z_j | \dots) \propto f(\mathbf{x}_j, z_j | a, b, c)$, para cada j necesitaremos simular

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_j, z_j | a, b, c) &= \left\{ \prod_{i=1}^{10} f(x_{ij} | z_j, a, b, c) \right\} f(z_j | c) \\ &= \frac{(b + z_j)^{9(a+c)}}{\Gamma(a + c)^9} \frac{z_j^{c-1} b^a}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \exp \left\{ -(b + z) \sum_i x_{ij} \right\} \prod_{i=1}^{10} x_{ij}^{a+c-1}. \end{aligned}$$

Debido a la necesidad de generar j realizaciones de esta distribución en cada paso del esquema de muestreo de Gibbs, el tiempo de computación aumenta considerablemente al usar este acercamiento para hacer la estimación.

Posteriormente obtenemos las distribuciones condicionales de cada parámetro:

$$\begin{aligned} \pi(a | \mathbf{x}_j, \mathbf{z}, b, c) &\propto \pi(a, \lambda_a, \gamma_a) f(\mathbf{x}_j, \mathbf{z}, a, b, c) \\ &\propto \pi(a, \lambda_a, \gamma_a) \prod_{j=1}^{1000} \left\{ \prod_{i=1}^{10} f(x_{i,j} | z_j, \theta) \right\} f(z_j | \xi) \\ &\propto \pi(a, \lambda_a, \gamma_a) \prod_{j=1}^{1000} \frac{(b + z_j)^{9(a+c)}}{\Gamma(a + c)^9} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \prod_{i=1}^{10} x_{ij}^{a+c-1}. \end{aligned}$$

Análogamente

$$\pi(b | \mathbf{x}_j, \mathbf{z}, a, c) \propto \pi(b, \lambda_b, \gamma_b) \prod_{j=1}^{1000} (b + z_j)^{9(a+c)} b^a \exp \left\{ -(b + z) \sum_i x_{ij} \right\}.$$

$$\pi(c \mid \mathbf{x}_j, \mathbf{z}, a, b) \propto \pi(c, \lambda_c, \gamma_c) \prod_{j=1}^{1000} \frac{(b + z_j)^{9(a+c)} z_j^{c-1}}{\Gamma(a+c)^9 \Gamma(c)} \prod_{i=1}^{10} x_{ij}^{a+c-1}.$$

Ya que estas distribuciones son complicadas y en general no cóncavas en la escala logarítmica, la simulación se implementó mediante el método ARMS mencionado anteriormente. Se usará una distribución previa relativamente plana $\text{Ga}(\theta \mid 0.1, 0.1)$ para cada parámetro y puntos iniciales uniformemente distribuidos entre 0 y 15.

La muestra consiste en 1000 realizaciones de Z y 10 realizaciones de $X \mid z$ para cada realización z de Z . El esquema de muestreo resultó converger rápidamente, pues con sólo 1000 iteraciones los estimadores bayesianos obtenidos tomando los último 800 valores fueron:

$$\hat{a} = 1.04 \quad \hat{b} = 1.04 \quad \hat{c} = 9.91$$

Estos resultados se pueden comparar con el método estándar, el cual arrojó

$$\hat{a} = 0.96 \quad \hat{b} = 0.94.$$

3.4. Ruina del modelo intercambiable

Como era de esperarse, la probabilidad de ruina del modelo intercambiable es difícil de tratar analíticamente. Sin embargo, se puede estimar mediante simulación computacional de manera análoga al caso clásico, tomando en cuenta la construcción de sucesiones intercambiables que fue presentada. Mediante dicho método se compararon ambos modelos con diferentes marginales y diversas estructuras de dependencia. Empíricamente no se pudo encontrar alguna regla para saber cómo se desempeñará cualitativamente la probabilidad de ruina de un modelo intercambiable en función del modelo clásico con marginales correspondientes. Sin embargo se observó que $\psi(u)$ decrece, con respecto a u , con mayor lentitud en el caso intercambiable. Así, se conjetura que para u grande la probabilidad de ruina será mayor para este modelo que para el clásico.

Ejemplo 5. Existe un caso particular interesante en el que se puede usar la fórmula (2.9) referente al modelo de riesgo clásico con montos exponenciales, para calcular numéricamente la probabilidad de ruina del modelo intercambiable.

Usando que $r = (1 + \rho)\lambda EX_1$, obtenemos a partir de la ecuación (2.9), la siguiente expresión:

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{r\theta} \exp \left\{ u \frac{\lambda - \theta r}{r} \right\}$$

donde $1/\theta = EX_1$.

Recordemos que usando una variable latente Z tal que $Z | X \sim \text{Ga}(c, x)$ podemos construir una sucesión intercambiable con marginales $X \sim \text{Ga}(a, b)$ mediante una sucesión i.i.d. $X_i | Z \sim \text{Ga}(a + c, b + z)$. Suponiendo que $a < 1$, tomemos $c = 1 - a$ de modo que $X_i | Z \sim \text{Exp}(b + z)$, y por lo tanto podamos obtener la probabilidad de ruina condicional mediante la ecuación anterior. Así

$$\psi(u) | Z = \frac{\lambda}{r(b+z)} \exp \left\{ \frac{\lambda u}{r} - u(b+z) \right\} \quad (3.15)$$

siempre y cuando $r > \lambda/(b+z)$. Tomando la esperanza obtenemos

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{r} e^{\lambda u/r} \int_0^\infty \frac{f(z)}{b+z} e^{-u(b+z)} dz.$$

Aunque esta última expresión no se puede reducir a términos elementales, la integral anterior es tratable numéricamente.

Nos gustaría comparar esta probabilidad de ruina con la del modelo clásico correspondiente. Para esto se utilizará una formula que aproxima la probabilidad de ruina cuando ρ es pequeño (Bening & Korolev, 2002). Supongamos que $EX_1^3 < \infty$, entonces

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho} \exp \left\{ \frac{2\rho u EX_1}{(1+\rho) EX_1^2} \right\} \left[1 - \frac{\rho}{1+\rho} \left(\frac{2\mu EX_1^3}{3(EX_1^2)^2} - 1 \right) \right] + o(\rho).$$

Calculemos ambas aproximaciones para el caso $a = 0.9$, $b = 1$ y $\lambda = 1$. Necesitamos una ρ pequeña para que la aproximación funcione, pero también necesitamos que $r = 0.9 \cdot (1 + \rho) > 1$ para que la ecuación (3.15) tenga sentido. Tomemos entonces $r = 1.01$ de manera que $\rho = 0.12$, los resultados se muestran en la figura 3.1.

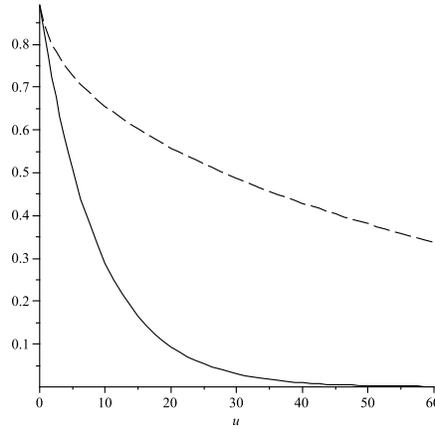


Figura 3.1: Probabilidad de ruina para el modelo intercambiable y el modelo clásico (línea punteada y línea sólida respectivamente) con parámetros $a = 0.9$, $b = 1$, $c = 0.1$, $\rho = 0.12$

Hay una clara diferencia entre la probabilidad de ruina de ambos modelos, específicamente; la del modelo clásico decae con mayor rapidez conforme crece el capital inicial. Parece, sin embargo, que la probabilidad de ruina es la misma para ambos modelos cuando la reserva inicial es nula. Esto se puede probar rigurosamente como se muestra a continuación.

Consideremos el modelo clásico, y la fórmula obtenida para $\psi(0)$ en la sección 2.2. Recordando que $r = (1 + \rho)\lambda EX_1$, se obtiene

$$\psi(0) = \frac{\lambda EX_1}{r}.$$

Por lo tanto, en este ejemplo particular, para el modelo clásico se tiene,

$$\psi(0) = \frac{\lambda a}{rb}.$$

Ahora exploremos $\psi(0)$ para el modelo intercambiable. Por el desarrollo anterior

$$\psi(0) | Z = \frac{\lambda}{r(b+z)}.$$

Tomando la esperanza y recordando la ecuación (3.6) para la densidad de Z ,

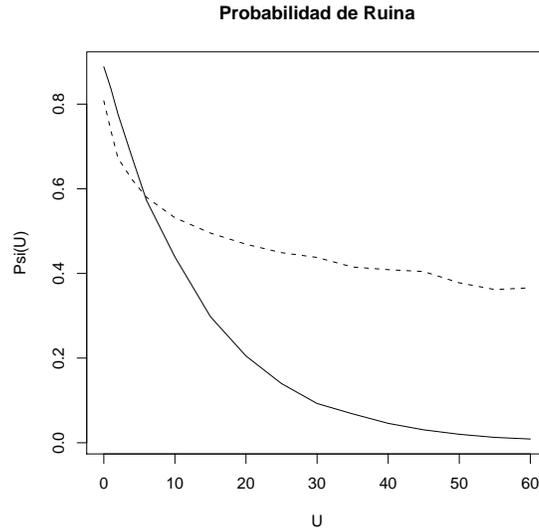


Figura 3.2: Probabilidad de ruina para el modelo intercambiable y el modelo clásico (línea punteada y línea sólida respectivamente) con parámetros $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, $\rho = 0.12$

obtenemos

$$\psi(0) = \frac{\lambda}{r} \frac{b^a}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)} \int_0^\infty \frac{z^{-a}}{(b+z)^2} dz.$$

Esta última integral puede ser resuelta mediante técnicas estándar de Análisis Complejo, para finalmente mostrar que

$$\psi(0) = \frac{\lambda a}{r b},$$

justo como en el caso clásico.

La propiedad anterior propiedad no es cierta en general, aún para modelos con la misma estructura de dependencia pero $a \geq 1$. La figura 3.2 muestra un ejemplo en el que las probabilidades de ruina se cruzan en un punto $u > 0$.

Capítulo 4

Aplicación

A modo de ilustración se llevará a cabo la estimación de ambos modelos con base en datos reales¹. Estos constan de 2167 reclamos recolectados del año 1980 al 1990 por la aseguradora Copenhagen Reinsurance y comprenden las pérdidas nacionales más costosas provocadas por incendio. Los montos fueron puestos a valor constante y están expresados en millones de Coronas Danesas de 1985.

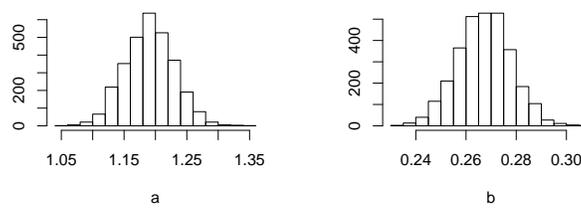
4.1. Modelo clásico

La estimación del modelo clásico se lleva a cabo de forma directa, considerando el agregado de los reclamos como una sucesión independiente de variables aleatorias. Se usará un modelo $Ga(a, b)$ con distribuciones previas no informativas: $\pi(a) = 1$ para el parámetro de forma y $\pi(b) = 1/b$ para el parámetro de intensidad, de manera que toda la información posterior quede dada por la función de verosimilitud.

La figura 4.1 muestra que el esquema de muestreo de Gibbs converge rápidamente para ambos parámetros. Se descartaron entonces los 1000 primeros valores y se usaron el resto como la muestra de cada parámetro, obteniendo los siguientes histogramas para las distribuciones posteriores:

¹Estos se pueden descargar en <http://www.ma.hw.ac.uk/mcneil/data.html>

Figura 4.1: Muestras arrojadas por el esquema de gibbs.



Si se usa la media como estimador de Bayes se tiene entonces que

$$\hat{a} = 1.19 \quad \hat{b} = 0.26$$

4.2. Modelo intercambiable

Ya que se cuenta con una sola realización del proceso y se necesitan por lo menos dos para poder explotar la dependencia inducida por la intercambiabilidad; se adoptará un enfoque diferente para hacer la estimación del modelo intercambiable. Consideremos el desempeño de la aseguradora anualmente, suponiendo así que contamos con 11 realizaciones de un mismo proceso. Esta división no es demasiado arbitraria, pues el efecto de las estaciones sobre los fenómenos cubiertos es equivalente para cada realización. Los datos tampoco evidencian una deriva ascendente como la que se observaría en un contexto más general, debido al incremento de los bienes asegurados al pasar de los años.

Con este enfoque, encajemos el modelo con marginales $\text{Ga}(a, b)$ y variable latente Z tal que $Z \mid X \sim \text{Ga}(c, x)$ como se hizo en el ejemplo 4, sólo que usando distribuciones previas planas $\pi(a) = \pi(c) = 1$ y $\pi(b) = 1/b$. Los estimados obtenidos son:

$$\hat{a} = 0.88 \quad \hat{b} = 0.20 \quad \hat{c} = 0.48$$

La figura 4.2 muestra los histogramas para cada parámetro.

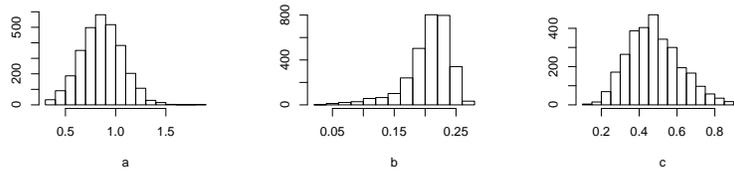


Figura 4.2: Histogramas de los estimados obtenidos por el método intercambiable.

Vale la pena notar que ambas estimaciones dan un valor similar para la media de los reclamos: 4.29 para el caso intercambiable y 4.45 para el independiente. Sin embargo la varianza en el caso intercambiable es mayor: 21.24 contra 16.66 estimada por el modelo independiente. La correlación de la sucesión de montos en el caso intercambiable queda dada por

$$\text{Corr}(X_i, X_j) = \frac{\hat{c}}{\hat{a} + \hat{c} + 1} = 0.20$$

Por último, realicemos la estimación del proceso de conteo. Debido a la división anual que se hizo del proceso, se usará el segundo método propuesto en la sección 3.3.3. La intensidad del proceso Poisson resulta ser

$$\hat{\lambda} = 149.63$$

4.3. Probabilidad de ruina

La forma más natural de usar la información capturada en ambos modelos es calcular la probabilidad de ruina a horizonte de un año. La figura 4.3 muestra el estimado de Monte Carlo basado en 50 000 iteraciones para ambos modelos, con una sobreprima de seguridad $\rho = 0.5$.

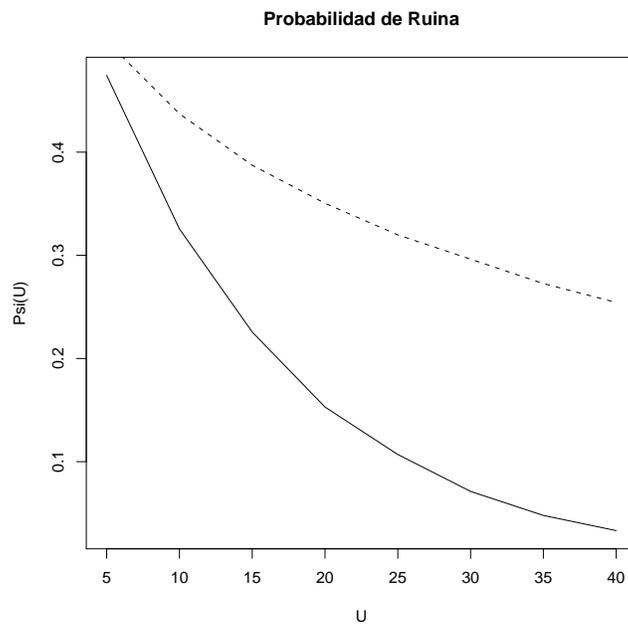


Figura 4.3: Probabilidad de ruina del modelo intercambiable con parámetros $\hat{a} = 0.88$, $\hat{b} = 0.20$, $\hat{c} = 0.48$ (línea punteada) y probabilidad de ruina para el modelo independiente con parámetros $\hat{a} = 1.19$, $\hat{b} = 0.26$ (línea sólida). La intensidad de arribo de los reclamos es $\lambda = 149.63$ y la sobreprima de seguridad es $\rho = 0.5$.

Ya que en ambos modelos se hace la suposición de que cada año es independiente de

los anteriores, la compañía puede evaluar la probabilidad de arruinarse el siguiente año dependiendo de su fondo de reserva, y así ajustar la sobreprima de seguridad para mitigar el riesgo. El análisis anterior muestra que la probabilidad de ruina puede aumentar considerablemente si se supone una estructura de dependencia sobre el monto de los reclamos.

4.4. Marginales GIG

A modo de comparación haremos la estimación de los modelos clásico e intercambiable con marginales GIG. Esta familia de distribuciones es más robusta y tiene la posibilidad de modelar colas semi-pesadas así que a priori el modelo promete tener una mejor bondad de ajuste que el de marginales Gamma. La metodología de estimación es análoga a la presentada en el ejemplo anterior.

Para el caso clásico se obtuvo:

$$\hat{\lambda} = -2.20 \quad \hat{\chi} = 9.54 \quad \hat{\psi} = 0$$

Es decir; se obtuvo el caso límite correspondiente a una Gamma inversa $Iga(2.20, 4.75)$, que es también la distribución particular dentro de la familia GIG que permite las colas más pesadas. Con estos parámetros la media estimada es 3.97 y la varianza 79.00. Estos resultados son consistentes con otros estudios hechos sobre este tipo de datos y sugiere la posibilidad de usar distribuciones con colas aún más pesadas como la Pareto generalizada (Ver McNeil , 1996).

La estimación del modelo intercambiable arroja:

$$\hat{\lambda} = -1.60 \quad \hat{\chi} = 8.56 \quad \hat{\psi} = 0 \quad \hat{\mu} = -1.73 \quad \hat{\gamma} = 0.01$$

lo cual exhibe una media de 7.13 y una varianza infinita.

En la figura 4.4 se muestra una comparación de la probabilidad de ruina para ambos modelos. Este análisis muestra que los resultados pueden variar significativamente dependiendo del método de estimación usado y por lo tanto hay que evitar a toda costa simplificaciones no justificadas dentro del modelo empleado.

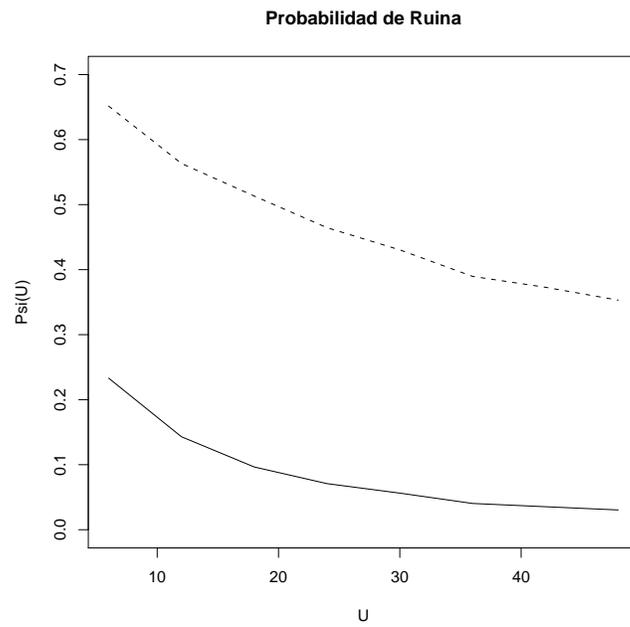


Figura 4.4: Probabilidad de ruina para los modelos intercambiable y clásico estimados anteriormente con una sobreprima de seguridad $\rho = 1$ (línea punteada y línea sólida respectivamente).

Conclusiones

En este trabajo se presentó un nuevo método para modelar riesgo en el contexto de los seguros de no-vida. La ventaja de este modelo es que permite la existencia de dependencia entre el monto de los reclamos mientras que se mantiene flexible en cuanto a la distribución de arribo de éstos.

Se presentó un método para construir modelos de este tipo con distribuciones marginales dadas para el monto de los reclamos, así como una forma general de hacer la estimación. Existe la posibilidad de tratar la sucesión de montos de manera no paramétrica como se presenta en Mena & Nieto-Barajas (2008). Aunque la probabilidad de ruina para este modelo es poco tratable analíticamente, la estimación mediante métodos de Monte Carlo es directa y eficiente.

El análisis comparativo entre el modelo clásico de riesgo y la generalización, propuesta mostró mediante casos particulares que el nuevo modelo admite mayor flexibilidad. Esto sugiere la posibilidad de modelar mayor variedad de situaciones prácticas. Existen varias líneas de desarrollo a seguir en el futuro. Por ejemplo, investigar la probabilidad de ruina para el modelo intercambiable con un proceso de conteo distinto al Poisson homogéneo. Se podría también explorar la posibilidad de dependencia entre los montos y el arribo de los reclamos. Elaborar métodos bayesianos para hacer la inferencia de procesos de riesgo individuales. Esto fue investigado analíticamente por Daboni (1974), sin embargo, los métodos de estimación mediante herramientas computacionales propuestos en este trabajo, podrían facilitar esta tarea y ampliar su aplicabilidad.

Bibliografía

- Abramowitz M. & Stegun I. A. (Eds) (1992). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. New York: Dover Publications Inc. Reprint of the 1972 edition.
- Aldous D. J. (1983) *Echangeability and related topics*. contenido en: *École d'été de probabilités de Saint-Flour XIII - 1983* Springer-Verlag.
- Barndorff-Nielsen O. E. (1977) *Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size*. Proceedings of the Royal Society. London A. 353, 401-419.
- Bening E. V. & Korolev V. Y. (2002) *Generalized Poisson models and their applications in insurance and finance*. VSP.
- Bernardo J. M. and Smith A. F. M. (1994) *Bayesian Theory*. Chichester: Wiley.
- Casella & George (1992) *Explaining the Gibbs sampler*. American Statistician. v46. 167-174.
- Daboni L. (1974) *Some models of inference in the risk theory from a bayesian viewpoint*. ASTIN bulletin.
- Chen M. Shao Q. & Ibrahim J. (2000) *Monte Carlo methods in Bayesian computation*. Springer Series in Statistics.
- Chow Y. S. & Teincher H. (1997) *Probability theory 3rd ed.* Springer Texts in Statistics.
- Eberlein E. & Hammerstein E. A. (2004) *Generalized hyperbolic and inverse Gaussian distributions: limiting cases and approximation processes*. Seminar on

- stochastic analysis, random fields and applications IV, progress in probability, vol. 58, Birkhauser, pp. 221-264.
- Fristedt B. & Gray L. (1997) *A modern approach to Probability theory*. Birkhauser Verlag.
- Gelfand A. E. & Smith A. F. M. (1990) *Sampling based approaches to calculating marginal densities*. Journal of the American Statistical Association 85, 398-409.
- Gerber, H. U. (1981) *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. Hübner Foundation, University of Pennsylvania, Philadelphia.
- Gilks W. R., Best N. G., Tan K. K. C. *Adaptive rejection Metropolis sampling within Gibbs sampling* Applied Statistics, Vol. 44, No. 4 (1995), pp. 455-472.
- Gilks W. R. & Wild (1992) *Adaptive rejection sampling for Gibbs sampling*. Applied Statistics. v41 i2. 337-348.
- Grandell J. (1991) *Aspects of risk theory*. Springer Series in Statistics.
- Kingman J. F. C. (1978) *Uses of exchangeability*. The Annals of Probability, Vol. 6, No. 2, pp. 183-197
- Kingman J. F. C. (1993) *Poisson processes*. Clarendon Press.
- Klugman S. A. (1992) *Bayesian Statistics in Actuarial Science*. Springer.
- Lundberg F. (1903) *Aproximerad framställning av sannolikhetsfunktionen. Aterförsäkring av kollektivrisker*. Akad. Afhandling. Almqvist och Wiksell, Upsala.
- McNeil A. J. (1996) *Estimating the tails of loss severity distributions using extreme value theory*. ASTIN bulletin.
- Mena R. H. & Nieto-Barajas L. E. (2008) *Exchangeable claim sizes in a compound Poisson type process*. En revisión.
- Mikosch T. (2004) *Non-life insurance mathematics: an introduction with stochastic processes* Springer-Verlag.
- Resnick S. I. (1992) *Adventures in stochastic processes*. Birkhauser.
- Schervish M. J. (1995) *Theory of statistics*. Springer.