UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

FUNCIONES INDUCIDAS ENTRE HIPERESPACIOS DE CONTINUOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

P R E S E N T A

M. en C. JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS: DR. SERGIO MACÍAS ÁLVAREZ

MÉXICO, D.F. **JUNIO, 2009**

Funciones Inducidas entre Hiperespacios de Continuos

Javier Enrique Camargo García

2009

A mi Padre

Agradecimientos

Con aprecio agradezco al Dr. Sergio Macías Álvarez por su asesoría en la realización de este trabajo, pero sobre todo agradezco su amistad y respeto.

Agradezco a la Universidad Industrial de Santander, a la Dirección General de Estudiantes de Posgrado (DGEP-UNAM) y al Instituto de Matemáticas de la UNAM, por su apoyo durante la realización de mis estudios.

Agradezco a mi familia, Maria Cecilia, Carolina y Hernando.

Al Dr. Sam Nadler Jr., agradezco sus valiosos comentarios y sugerencias en parte de la realización de este trabajo.

Agradezco a mi esposa por ser la mejor compañera.

Índice general

INTRODUCCIÓN

En topología, como en cualquier rama de las matemáticas, estudiamos propiedades o características de los espacios, relacionándolos con espacios conocidos. Por la estructura de espacio topológico, es adecuado usar las funciones continuas para relacionar estos espacios. Por esta razón, son una herramienta indispensable para el desarrollo de la topología.

Este trabajo pertenece a una rama de la topología conocida como la teoría de los continuos y sus hiperespacios. Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y diferente del vacío. Como es conocido, la imagen bajo una función continua de un continuo es un continuo. Sin embargo, algunas propiedades no se preservan simplemente con la continuidad de la función, por ejemplo, la imagen continua de un arco (un espacio homeomorfo al intervalo $[0, 1]$), no es necesariamente un arco. Observemos el siguiente teorema que tomamos de [37, Proposición 8.22, pág.129]:

Teorema 0.1. *Sean Y un continuo no degenerado y $f : [0, 1] \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si f es tal que $f^{-1}(y)$ es conexo, para cada punto $y \in Y$, entonces Y es un arco.*

Con este teorema mostramos que si la función satisface una condición adicional, entonces la propiedad de ser un arco es preservada. Las funciones que satisfacen la condición dada en el Teorema 0.1 son conocidas como monótonas, como veremos más adelante.

Han sido definidas una gran cantidad de funciones entre continuos, en algunos casos, por el interés de encontrar condiciones sobre la función para que preserve alguna propiedad topológica. En otros, simplemente por estudiar clases de funciones que, en su momento, cumplían alguna condición interesante.

Muchos autores, entre los que destacamos: K. Borsuk, J. J. Charatonik, A. Emeryk, J. Grispolakis, Z. Horbanowicz, R. Molski, S. B. Nadler, E. D. Tymchatyn, A. D. Wallace y G. Whyburn, han dedicado parte de su trabajo al estudio de funciones entre continuos, pero sin duda, el profesor T. Maćkowiak, en [34], realizó el más completo e interesante trabajo que se haya desarrollado sobre el tema.

Como es conocido, dada una función entre espacios topológicos, es posible definir nuevas funciones que dependen de la función original. Para ilustrar mejor esto, miremos dos ejemplos sencillos:

1. Dada una función continua $f : X \to Y$ y $A \subset X$, podemos definir la *función restricción,* $\widehat{f} = f|_A$ como $\widehat{f}(a) = f(a)$, para cada $a \in A$.

2. Dada una función continua $f : X \to Y$ y $n \in \mathbb{N}$, podemos definir $\widehat{f} : X^n \to Y^n$ por $\widehat{f}((x_1, x_2, ..., x_n)) = (f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n))$, para cualquier punto $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n$.

En cada uno de los enunciados anteriores, podemos preguntarnos: ¿Será que si f satisface alguna propiedad, por ejemplo ser: un homeomorfismo, abierta, cerrada, monótona, etc., entonces esta propiedad también la tiene $\widehat{f}$ y viceversa? En el presente escrito abordaremos un problema de este estilo, usando los hiperespacios de continuos, como mostramos a continuación:

Dados un continuo X y un entero positivo n, es posible definir los hiperespacios $2^X, C_n(X)$ y $HS_n(X)$ (ver Definiciones 1.18 y 1.20). Además, dada una función continua entre continuos $f : X \to Y$, se definen las funciones inducidas $2^f : 2^X \to 2^Y, C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$ y $HS_n(f) : HS_n(X) \to HS_n(Y)$ (ver Definiciones 1.47, 1.49 y 1.52).

Estas funciones $2^f, C_n(f)$ y $HS_n(f)$, definidas a partir de una función dada f, son el eje de nuestra investigación.

Supongamos que $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son clases de funciones entre continuos. Un problema general es encontrar todas las relaciones entre las siguientes cuatro afirmaciones:

(1) $2^f \in \mathcal{A}$;

(2) $C_n(f) \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$;

(3) $HS_n(f) \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}$;

(4) $f \in \mathcal{D}$.

De una manera más particular, podemos suponer que $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{D}$. Además de mostrar ejemplos, en los casos donde una implicación no sea cierta, podemos preguntarnos qué condiciones deben cumplir los espacios, para que la implicación se tenga.

En este trabajo presentaremos relaciones entre (1), (2), (3) y (4), usando las siguientes clases de funciones entre continuos: homeomorfismos, monótonas, abiertas, ligeras, OM, confluentes, semiconfluentes, débilmente confluentes, seudoconfluentes, empalmantes, semiabiertas, casimonótonas y débilmente monótonas. Se han publicado algunas investigaciones relacionadas con este problema: [8], [9], [10], [13], [14], [15], [20], [21], [22], [23], [28], [30] y [45].

Para presentar los avances que obtuvimos en relación a este problema general, dividimos el presente escrito en cuatro capítulos, distribuidos de la siguiente forma:

El Capítulo 1 contiene la notación y los conceptos básicos necesarios para el desarrollo de nuestro trabajo.

En el Capítulo 2, presentamos la mayor parte de relaciones entre (1), (2), (3) y (4) en referencia a las funciones que mencionamos anteriormente. Empezamos probando que (2) implica (3) para una gran cantidad de funciones entre continuos, cuando $\mathcal{B} = \mathcal{C}$. Además, planteamos algunas preguntas que surgen de manera natural de los resultados que presentamos.

El Capítulo 3, contiene una solución completa al problema, cuando $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{D}$ es la clase de las funciones ligeras. También, estudiamos con gran detalle cuándo, el hecho de que alguna función inducida $2^f, C_n(f)$ o $HS_n(f)$ sea ligera, implique que f sea un homeomorfismo.

Finalmente en el Capítulo 4, mostramos algunas relaciones entorno al problema usando las funciones abiertas y semiabiertas. También, mostramos condiciones, sobre f o sobre los espacios, para que alguna función inducida $C_n(f)$ o $HS_n(f)$ sea abierta. Terminamos este trabajo, presentando una familia de λ-dendroides tal que si X es un λ-dendroide de esta familia y $f : X \to Y$ es cualquier función continua tal que $C(f)$ es abierta, entonces f es un homeomorfismo.

Aunque tenemos aún, preguntas en referencia con las relaciones entre las funciones inducidas y las trece clases de funciones que nos propusimos estudiar al iniciar este trabajo, consideramos que se alcanzaron avances importantes que contribuirán al desarrollo de la investigación entorno a las funciones inducidas entre hiperespacios de continuos.

Como resultado de nuestra investigación escribimos cuatro artículos ([3], [4], [5] y [6]). Además, en este trabajo presentamos resultados que no se encuentran en ninguna de estas referencias, por mencionar los mas importantes están las Proposiciones 4.8, 4.12, 4.14 y el Teorema 4.21.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos definiciones y resultados básicos de la topología general, particularmente de la teoría de la continuos y sus hiperespacios. Algunas demostraciones las omitiremos por ser muy conocidas y en otros casos, por tratarse de pruebas muy elaboradas o donde es necesario incluir conceptos que no son muy relevantes para el desarrollo de este trabajo. En los casos donde no incluyamos una demostración, daremos una referencia donde pueda ser consultada.

1.1. Notación

Empezamos introduciendo la simbología que, aunque es muy usada en libros de topología general, es importante tener en cuenta:

- $\mathbb{N}$: El conjunto de enteros positivos;
- S^1 : La circunferencia de radio uno en el plano complejo;

- $A \setminus B$: Es la diferencia entre dos subconjuntos de un espacio X;
- $A \subset B$: A es un subconjunto de B (puede suceder que $A = B$);
- $A \subsetneq B$: A es un subconjunto diferente de B;
- $f|_A$: Es la restricción de una función f a un subespacio A de su dominio;
- $\text{ínf}, \sup, \text{máx}, \text{mín}$: Indican el ínfimo, supremo, máximo y mínimo de un conjunto, respectivamente;
- (X, d) : Es un espacio métrico X, con métrica d;
- $B_d(x, r)$: Es la bola abierta en el espacio métrico (X, d), de radio el número real mayor que cero r y con centro el punto x en X;
- $Int_X(A)$: Es el interior del conjunto A con respecto al espacio X;
- $Cl_X(A)$: Es la cerradura del conjunto A con respecto al espacio X;

Algunos otros símbolos que usaremos, que requieren una definición, los introduciremos en su momento.

1.2. Continuos

En esta sección, introduciremos los conceptos de la teoría de los continuos que serán necesarios para afrontar los objetivos que nos propusimos desarrollar.

1.2.1. Definiciones

A continuación, definiremos una clase especial de espacios métricos, llamados continuos, sobre los cuales desarrollaremos este trabajo. Además, mostraremos algunas propiedades de los continuos.

Definición 1.1. Un *continuo* es un espacio métrico conexo, compacto y diferente del vacío. Un *subcontinuo* es un continuo contenido en algún espacio métrico.

Con el siguiente teorema mostraremos una manera, muy usada para construir continuos con condiciones o propiedades interesantes, a partir de continuos muy simples.

Teorema 1.2. *Sean Z un espacio métrico compacto y $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subcontinuos de Z tales que $X_{n+1} \subset X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $X = \cap_{n=1}^{\infty} X_n$, entonces X es un subcontinuo de Z.*

Demostración. Sea $X = \cap_{n=1}^{\infty} X_n$, donde $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subcontinuos de un espacio métrico compacto Z, tales que $X_{n+1} \subset X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que X es un subconjunto cerrado diferente del vacío de Z. De esta manera, X es compacto. Supongamos que existen dos subconjuntos cerrados y disyuntos A y B de Z, tales que $X = A \cup B$. Probemos que $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$. Como Z es un espacio métrico, existen dos abiertos disyuntos U y V de Z, tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Como $X = \cap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U \cup V$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_N \subset U \cup V$, por [37, Proposición 1.7, pág.6]. Ahora, por la hipótesis, X_N es conexo; así, $X_N \subset U$ o $X_N \subset V$. Supongamos que $X_N \subset U$. Como $X \subset X_N$, $X \subset U$ y $B = \emptyset$. Con esto concluimos que X es conexo. De esta manera, X es un subcontinuo de Z. $\square$

Definición 1.3. Sea X un continuo. Diremos que X es *localmente conexo en un punto x de X*, si X tiene una base local de abiertos conexos en el punto x. Diremos que X es *localmente conexo* si es localmente conexo en todos sus puntos. Además, un continuo X se llama *hereditariamente localmente conexo* si todo subcontinuo es localmente conexo.

Definición 1.4. Sea X un continuo, diremos que X es *unicoherente* si siempre que $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos de X, se tiene que $A \cap B$ es conexo. Además, diremos que X es *hereditariamente unicoherente* si cualquier subcontinuo es unicoherente.

Los espacios $[0,1]^2$ y $[0,1]$ son ejemplos de continuos localmente conexos y unicoherentes, sin embargo, aunque $[0,1]$ es hereditariamente localmente conexo y hereditariamente unicoherente, es fácil ver que el cuadrado $[0,1]^2$ no es hereditariamente localmente conexo ni hereditariamente unicoherente.

Definición 1.5. Sea X un continuo. Diremos que X es un *dendroide* si X es arcoconexo y hereditariamente unicoherente. Si, además, X es localmente conexo, lo llamaremos una *dendrita.*

Observación 1.6. Como es conocido, todo subcontinuo de una dendrita es una dendrita. Así, toda dendrita es un continuo hereditariamente localmente conexo [37, Corolario 10.5, pág.167].

Definición 1.7. Dado un dendroide X, a un punto p en X lo llamaremos un *punto de ramificación*, si X contiene un triodo simple con vértice p. Un dendroide con un único punto de ramificación es llamado *abanico.*

El siguiente resultado es conocido como el *Teorema del cable cortado* y una demostración puede ser consultada en [37, Teorema 5.2, pág.72].

Teorema 1.8. *Sea X un espacio métrico compacto y sean A y B cerrados en X. Si no existe un subconjunto conexo que intersecte a A y B, entonces $X = X_1 \cup X_2$, donde X_1 y X_2 son cerrados disyuntos tales que $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$.*

El siguiente resultado es una consecuencia del conocido Teorema de golpes en la frontera cuya prueba puede ser consultada en [37, Corolario 5.5, pág.74].

Teorema 1.9. *Sea X un continuo no degenerado. Si A es un subcontinuo de X y U es un subconjunto abierto de X tal que $A \subset U$, entonces existe un subcontinuo B de X tal que $A \subsetneq B \subset U$.*

1.2.2. Límites inversos de continuos

Como mostraremos en la prueba del Teorema 1.12, los límites inversos de continuos pueden ser vistos como un caso particular del Teorema 1.2.

El siguiente resultado, es un muy conocido teorema en topología general [37, Teorema 2.1, pág.18].

Teorema 1.10. *El producto a lo mas numerable de continuos es un continuo.*

A continuación, presentaremos las definiciones y propiedades básicas de los límites inversos de continuos. Recomendamos consultar [24], para encontrar información relacionada con este tema, donde se encontrarán de forma detallada ejemplos que permitirán aclarar lo presentado en esta sección.

Definición 1.11. Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\varphi_n^{n+1} : X_{n+1} \to X_n$ una función continua. La doble sucesión $\{X_n, \varphi_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

la llamaremos *sucesión inversa.* Además, si $\{X_n, \varphi_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa, definimos el *límite inverso de* $\{X_n, \varphi_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, denotada por $\varprojlim\{X_n, \varphi_n^{n+1}\}$ o simplemente X_∞, por:

$$X_\infty = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : \varphi_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}.$$

Escribiremos φ_n para referirnos a $\pi_n|_{X_\infty} : X_\infty \to X_n$, donde π_n es la proyección natural del espacio producto $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ en X_n.

En la prueba del siguiente teorema, podemos ver la relación del límite inverso con el Teorema 1.2.

Teorema 1.12. *Si* $\{X_n, \varphi_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión inversa entonces* X_∞ *es un continuo.*

Demostración. Sea $\{X_n, \varphi_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa con límite inverso X_∞. Como $X_\infty \subset \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, X_∞ es un espacio métrico. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definamos:

$$S_m = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : \varphi_k^{k+1}(x_{k+1}) = x_k, 1 \leq k < m\}.$$

Probemos primero las siguientes afirmaciones:

(1) S_m es homeomorfo a $\prod_{n=m}^{\infty} X_n$ para cada $m \in \mathbb{N}$;

(2) $S_{m+1} \subset S_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$;

(3) $X_\infty = \cap_{m=1}^{\infty} S_m$.

(1) Sea $f : S_m \to \prod_{n=m}^{\infty} X_n$ definida por $f(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{x_n\}_{n=m}^{\infty}$. Como $\pi_k \circ f$ es continua para cada $k \geq m$, f es continua. Por otra parte,

definimos $g : \prod_{n=m}^{\infty} X_n \to S_m$ por $g(\{x_n\}_{n=m}^{\infty}) = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde:

$$z_n = \begin{cases} \varphi_n^m(x_m), & \text{si } n < m; \\ x_n, & \text{si } n \geq m, \end{cases}$$

y $\varphi_n^m = \varphi_n^{n+1} \circ \varphi_{n+1}^{n+2} \circ ... \circ \varphi_{m-1}^m$. Como $\pi_k \circ g$ es continua para cada $k \in \mathbb{N}$, g es continua. Es fácil ver que $f^{-1} = g$, de esta forma f es un homeomorfismo.

(2) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in S_{m+1}$. Por definición, $\varphi_k^{k+1}(x_{k+1}) = x_k$, siempre que $1 \leq k < m+1$. Así, $\varphi_k^{k+1}(x_{k+1}) = x_k$, siempre que $1 \leq k < m$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in S_m$. Luego, $S_{m+1} \subset S_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

(3) Claramente, $X_\infty \subset \cap_{m=1}^{\infty} S_m$. Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \cap_{m=1}^{\infty} S_m$ y $k \in \mathbb{N}$. Así, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in S_k$ y, por la definición de S_k, $\varphi_{k-1}^k(x_k) = x_{k-1}$. Como k fue arbitrario, $\varphi_l^{l+1}(x_{l+1}) = x_l$ para todo $l \in \mathbb{N}$ y concluimos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X_\infty$.

Por el Teorema 1.10, S_m es un continuo para cada $m \in \mathbb{N}$. Con esto tenemos que X_∞ es un continuo, por el Teorema 1.2. □

Las demostraciones de los teoremas y las proposiciones que presentamos a continuación, pueden ser consultados en el Capítulo 2 de [31].

Teorema 1.13. *Sea $\{X_n, \varphi_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos con límite inverso X_∞. Si Y es un subconjunto propio y cerrado de X_∞, entonces existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $\varphi_m(Y) \neq X_m$ para cada $m \geq N$.*

Con el siguiente teorema, mostramos condiciones que se preservan al tomar la operación de límite inverso.

Teorema 1.14. *Sea* $\{X_n, \varphi_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa de continuos, donde* φ_n^{n+1} *es suprayectiva, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *con límite inverso* X_∞. *Entonces:*

(1) Si X_n *es localmente conexo y* φ_n^{n+1} *es monótona (ver Definición 1.40), para cada* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* X_∞ *es localmente conexo;*

(2) Si X_n *es unicoherente, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* X_∞ *es unicoherente;*

(3) Si X_n *es hereditariamente unicoherente, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* X_∞ *es hereditariamente unicoherente.*

Los siguientes dos resultados nos permiten definir funciones continuas y suprayectivas entre límites inversos de continuos.

Teorema 1.15. *Sean* $\{X_n, \varphi_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{Y_n, \psi_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *sucesiones inversas, con límites inversos* X_∞ *y* Y_∞, *respectivamente. Si para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existe una función continua* $f_n : X_n \to Y_n$ *tal que* $f_n \circ \varphi_n^{n+1} = \psi_n^{n+1} \circ f_{n+1}$, *entonces existe una función continua* $f : X_\infty \to Y_\infty$ *tal que* $\psi_n \circ f = f_n \circ \varphi_n$.

Proposición 1.16. *Sean* $\{X_n, \varphi_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{Y_n, \psi_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *sucesiones inversas, con límites inversos* X_∞ *y* Y_∞, *respectivamente. Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *sea* $f_n : X_n \to Y_n$ *una función continua tal que* $f_n \circ \varphi_n^{n+1} = \psi_n^{n+1} \circ f_{n+1}$. *Si para cada* $n \in \mathbb{N}$, f_n *es suprayectiva, entonces* f *es suprayectiva, donde* $f : X_\infty \to Y_\infty$ *es tal que* $\psi_n \circ f = f_n \circ \varphi_n$.

1.3. Hiperespacios de continuos

En esta sección definiremos los hiperespacios que estudiaremos en este trabajo.

Definición 1.17. Dado un espacio topológico X, un *hiperespacio* de X es una colección de subconjuntos de X con alguna condición específica.

En esta sección, definimos y desarrollamos brevemente algunas propiedades de los hiperespacios de continuos.

1.3.1. Definiciones

Dado un continuo, definiremos algunos hiperespacios y los dotaremos de una métrica.

Definición 1.18. Sea (X, d) un continuo. Definamos los siguientes hiperespacios de X:

1. $2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y diferente del vacío}\}$;

2. $C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}, n \in \mathbb{N}$;

3. $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}, n \in \mathbb{N}$.

Para cada A y B en 2^X, definimos $H : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$, por:

$$H(A, B) = \text{ínf}\{r > 0 : A \subset N_d(r, B) \text{ y } B \subset N_d(r, A)\},$$

donde $N_d(s, E) = \{x \in X : d(x, e) < s \text{ para algún } e \in E\}$, para $s > 0$ y $E \in 2^X$. Como mostraremos en el Teorema 1.19, H es una métrica para el hiperespacio 2^X y es conocida como la *métrica de Hausdorff.*

Teorema 1.19. *Sea X un continuo. Entonces $(2^X, H)$ es un espacio métrico.*

Demostración. De la definición de H, es sencillo probar que $H(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$ y tambien que $H(A, B) = H(B, A)$ para cualesquiera A y B

en 2^X. Probemos que se cumple la desigualdad del triángulo. Sean A, B y C puntos de 2^X. Mostremos que:

$$H(A,B) \leq H(A,C) + H(C,B).$$

Sea $\delta > 0$, por la definición de H, tenemos:

$$A \subset N_d(H(A,C) + \tfrac{\delta}{2}, C) \text{ y } C \subset N_d(H(C,B) + \tfrac{\delta}{2}, B). \tag{1.1}$$

Sea $a \in A$, por (1.1), existe $c \in C$ tal que $d(a,c) < H(A,C) + \frac{\delta}{2}$. Además, de nuevo por (1.1), existe $b \in B$ tal que $d(c,b) < H(C,B) + \frac{\delta}{2}$. Aplicando la desigualdad del triángulo de d tenemos que:

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) < H(A,C) + H(C,B) + \delta.$$

Ahora, como a fue un punto arbitrario de A tenemos:

$$A \subset N_d(H(A,C) + H(C,B) + \delta, B). \tag{1.2}$$

Un argumento similar muestra:

$$B \subset N_d(H(A,C) + H(C,B) + \delta, A). \tag{1.3}$$

De esta manera, por (1.2) y (1.3), $H(A,B) < H(A,C) + H(C,B) + \delta$. Como δ fue arbitrario, concluimos que $H(A,B) \leq H(A,C) + H(C,B)$. Así, H es una métrica de 2^X. $\square$

Los conjuntos $C_n(X)$ y $F_n(X)$ los tomaremos como subespacios de 2^X, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.20. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, definimos el *n-ésimo hiperespacio de suspensión de X,* que denotaremos por $HS_n(X)$, como el espacio cociente:

$$HS_n(X) = C_n(X)/F_n(X).$$

Notemos que $HS_n(X)$ no satisface la definición de hiperespacio dada en 1.17, sin embargo, lo llamaremos de esta forma de acuerdo a la definición dada en [29, pág.127]. Escribiremos q_X^n, para denotar la función cociente $q_X^n : C_n(X) \to HS_n(X)$. Además, denotemos F_X^n al punto $q_X^n(F_n(X))$ en $HS_n(X)$.

La siguiente observación simple la usaremos con mucha frecuencia en el desarrollo de este trabajo.

Observación 1.21. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $q_X^n|_{C_n(X)\setminus F_n(X)}$ es un homeomorfismo entre $C_n(X) \setminus F_n(X)$ y $HS_n(X) \setminus \{F_X^n\}$.

En lo sucesivo escribiremos, para cuando $n = 1$, $C(X), HS(X), F_X$ y q_X, en lugar de $C_1(X), HS_1(X), F_X^1$ y q_X^1, respectivamente.

Definición 1.22. Consideremos la colección de subconjuntos de 2^X :

$$\beta = \{\langle U_1, U_2, ..., U_l\rangle : Int_X(U_i) = U_i \text{ para cada } i\},$$

donde $\langle U_1, U_2, ..., U_l\rangle = \{A \in 2^X : A \subset \cup_{i=1}^l U_i$ y $A \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i\}$. Es fácil probar que β forma una base de alguna topología sobre 2^X. La topología generada por β se conoce como la *topología de Vietoris* [23, Teorema 1.2, pág.3].

Notación 1.23. *Escribiremos* $\langle U_1, U_2, ..., U_l\rangle_n$ *en lugar de* $\langle U_1, U_2, ..., U_l\rangle \cap C_n(X)$, *para denotar un abierto básico de la topología de Vietoris en* $C_n(X)$.

La siguiente proposición es muy conocida en la teoría de los hiperespacios de continuos [23, Teorema 3.2, pág.18].

Proposición 1.24. *Sea* X *un continuo. Entonces la topología de Vietoris es equivalente a la topología generada por la métrica de Hausdorff.*

Observación 1.25. Notemos que si $U_1, U_2, ..., U_l$ son abiertos de X, entonces:

$$\langle U_1, U_2, ..., U_l\rangle = \langle U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_l\rangle \cap \langle X, U_1\rangle \cap \langle X, U_2\rangle \cap ... \cap \langle X, U_l\rangle.$$

Con esto, la colección:

$$\varsigma = \{\langle U\rangle : U \text{ es abierto en } X\} \cup \{\langle X, V\rangle : V \text{ es abierto en } X\},$$

es una subbase de la topología de Vietoris (ver [17, Problema 3J, pág.163]).

Con la Observación 1.25 y usando el Teorema de la subbase de Alexander [42, 17S, pág.129], es sencillo demostrar el siguiente teorema (ver [26, Teorema 1, pág.45]).

Teorema 1.26. *Sea X un espacio métrico. Entonces X is compacto si y sólo si 2^X es compacto.*

1.3.2. Propiedades de los hiperespacios

Como mostramos en el Teorema 1.26, el hiperespacio 2^X, de un continuo X, es compacto. En esta sección, presentaremos otras propiedades de los hiperespacios $2^X, C_n(X)$ y $HS_n(X)$.

Definición 1.27. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Un *arco de orden* α en 2^X o $C_n(X)$, es un arco tal que para cualesquiera dos puntos distintos A y B en α, tenemos que $A \subset B$ o $B \subset A$.

Una prueba del siguiente teorema puede ser consultada en [39, Teorema 1.8, pág.46].

Teorema 1.28. *Sean X un continuo y A y B dos puntos en 2^X. Entonces existe un arco de orden de A a B en 2^X si y sólo si $A \subsetneq B$ y cada componente de B intersecta a A.*

Como una consecuencia del Teorema 1.28 tenemos el siguiente resultado; una prueba puede ser consultada en [13, Proposición 3, pág.784].

Teorema 1.29. *Sea X un continuo. Si α es un arco de orden de A a B en 2^X y $A \in C_n(X)$ para algún entero positivo n, entonces α es un arco en $C_n(X)$.*

Como consecuencia de los Teoremas 1.28, 1.29 y, además, como $HS_n(X) = q_X^n(C_n(X))$, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.30. *Si X es un continuo, entonces $2^X, C_n(X)$ y $HS_n(X)$ son arcoconexos.*

Observación 1.31. Notemos que 2^X es un continuo, pues del Teorema 1.30 se sigue la conexidad de 2^X y, usando los Teoremas 1.19 y 1.26, tenemos que 2^X es un espacio métrico compacto. Además, no es difícil probar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_n(X)$ es un subconjunto cerrado de 2^X, por tanto, compacto y, así, $C_n(X)$ es un continuo, por el Teorema 1.30. Como $HS_n(X) = q_X^n(C_n(X))$, donde q_X^n es una función continua, tenemos que el hiperespacio $HS_n(X)$ es un continuo, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.32. *Sea X un continuo. Si $\mathcal{A}$ es un subconjunto cerrado y no vacío de 2^X, entonces $\cup\mathcal{A} \in 2^X$.*

Demostración. Claramente, $\cup\mathcal{A}$ es diferente del vacío; luego, es suficiente probar que $\cup\mathcal{A}$ es cerrado en X. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sucesión en $\cup\mathcal{A}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Probemos que $x \in \cup\mathcal{A}$.

Tomemos $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $x_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{A}$ es compacto, existe una subsusección $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{k\to\infty} A_{n_k} = A$ para algún $A \in \mathcal{A}$. Claramente, $x \in A$. Así, $\cup\mathcal{A}$ es cerrado en X. Con lo que concluimos que $\cup\mathcal{A} \in 2^X$. □

El siguiente lema nos será de gran utilidad más adelante. La demostración que mostraremos fue tomada de [20, Lema 3.1, pág.241].

Lema 1.33. *Sea X un continuo. Si $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de 2^X y $A \in \mathcal{A}$, entonces cada componente de $\cup\mathcal{A}$ intersecta a A.*

Demostración. Sean $\mathcal{A}$ un subcontinuo de 2^X y $A \in \mathcal{A}$. Por la Proposición 1.32, $\cup\mathcal{A}$ es compacto. Supongamos que existe una componente C de $\cup\mathcal{A}$ tal que $C \cap A = \emptyset$. Entonces $\cup\mathcal{A} = D \cup E$, donde D y E son cerrados disyuntos en X, tales que $A \subset D$ y $C \subset E$, por el Teorema 1.8. Definamos:

$$\mathcal{D} = \langle D \rangle \cap \mathcal{A} \quad \text{y} \quad \mathcal{E} = \langle E, X \rangle \cap \mathcal{A}.$$

Es fácil verificar que $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ son cerrados disyuntos en 2^X y $\mathcal{A} = \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$. Pero esto contradice la conexidad de $\mathcal{A}$. □

El siguiente teorema es una consecuencia del Lema 1.33.

Teorema 1.34. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de $C_n(X)$, entonces $\cup\mathcal{A}$ es un punto de $C_n(X)$.*

Definición 1.35. Sea X un continuo. Una *función de Whitney* para 2^X (respectivamente, para $C_n(X)$), es una función continua $\mu : 2^X \to [0,1]$ (respectivamente, $\mu : C_n(X) \to [0,1]$) tal que satisface las siguientes dos condiciones:

1. Para cada $A, B \in 2^X$ (respectivamente, $A, B \in C_n(X)$), donde $A \subsetneq B$, se tiene que $\mu(A) < \mu(B)$;

2. $\mu(A) = 0$ si y sólo si $A \in F_1(X)$.

Una prueba del siguiente importante teorema puede ser consultada en [23, Teorema 13.4, pág.107].

Teorema 1.36. *Si X es un continuo, entonces existe una función de Whitney para cualquier hiperespacio de X.*

1.3.3. Convergencia en hiperespacios

A continuación describiremos la convergencia en el hiperespacio 2^X en términos de la topología de X.

Definición 1.37. Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X. Definimos el *límite inferior de* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, que denotaremos por $\liminf A_n$, y el *límite superior de* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, que denotamos por $\limsup A_n$, de la siguiente manera:

1. $\liminf A_n = \{x \in X :$ para cualquier abierto U de X con $x \in U$, tenemos que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para todo n excepto un número finito de índices$\}$;

2. $\limsup A_n = \{x \in X :$ para cualquier abierto U de X con $x \in U$, tenemos que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para un número infinito de índices$\}$.

Además, diremos que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, para algún $A \subset X$, si $\liminf A_n = \limsup A_n = A$.

Una prueba del siguiente teorema puede ser consultada en [23, Teorema 4.7, pág.25].

Teorema 1.38. *Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X. Entonces $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A con la métrica de Hausdorff en 2^X si y sólo si $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ en el sentido de la Definición 1.37.*

Observación 1.39. Notemos que de la Definición 1.37, tenemos que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$, para cualquier sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en 2^X. Así que, si queremos probar que una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A, es suficiente probar que $\limsup A_n \subset A$ y $A \subset \liminf A_n$. Además, es conocido que los conjuntos $\liminf A_n$ y $\limsup A_n$ siempre existen y son cerrados en X [23, Ejercicio 4.12, pág.27].

Se puede consultar [23] o [31] para más información acerca de hiperespacios de continuos.

1.4. Funciones continuas entre continuos

El profesor T. Maćkowiak en [34], recopiló y estudió diferentes aspectos relacionados con diferentes clases de funciones entre continuos. A continuación, basados en este artículo (y para algunos casos particulares en [9] y [45]), mostraremos algunas definiciones de funciones entre continuos que discutiremos en el desarrollo del presente escrito.

Definición 1.40. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva definida entre continuos. Diremos que f es:

1. un *homeomorfismo* si f es inyectiva.

2. *abierta* si la imagen de cualquier subconjunto abierto en X es abierto en Y.

3. *semiabierta* si para cualquier abierto no vacío U de X, $Int_Y(f(U)) \neq \emptyset$.
4. *monótona* si la imagen inversa de cualquier subconjunto conexo de Y es conexa.
5. OM si existen, una función abierta g y una función monótona h, tales que $f = g \circ h$.
6. *confluente* si para cualquier subcontinuo Q de Y y para cualquier componente D de $f^{-1}(Q)$, $f(D) = Q$.
7. *semiconfluente* si para cualquier subcontinuo Q de Y y para cualesquiera dos componentes C y D de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(C) \subset f(D)$ o $f(D) \subset f(C)$.
8. *débilmente confluente* si para cualquier subcontinuo Q de Y, existe una componente C de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C) = Q$.
9. *seudoconfluente* si para cualquier subcontinuo irreducible Q de Y, existe una componente C de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C) = Q$.
10. *empalmante* si para cada subcontinuo Q de Y y para cualesquiera dos componentes C y D de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(C) \cap f(D) \neq \emptyset$.
11. *casimonótona* si para cualquier subcontinuo con interior no vacío Q de Y, $f^{-1}(Q)$ tiene a lo más un número finito de componentes y, si D es una componente de $f^{-1}(Q)$, se tiene $f(D) = Q$.
12. *débilmente monótona* si para cualquier subcontinuo con interior no vacío Q de Y, si D es una componente de $f^{-1}(Q)$, $f(D) = Q$.

Definición 1.41. Sea $f : X \to Y$ una función continua definida entre continuos. Diremos que f es *ligera* si $f^{-1}(f(x))$ es un totalmente disconexo para cualquier punto x en X.

Observación 1.42. La funciones ligeras, a diferencia de las demás clases de funciones, no son necesariamente suprayectivas.

Con el siguiente diagrama, el cual citaremos frecuentemente, mostramos todas las relaciones que se tienen entre las funciones definidas anteriormente.

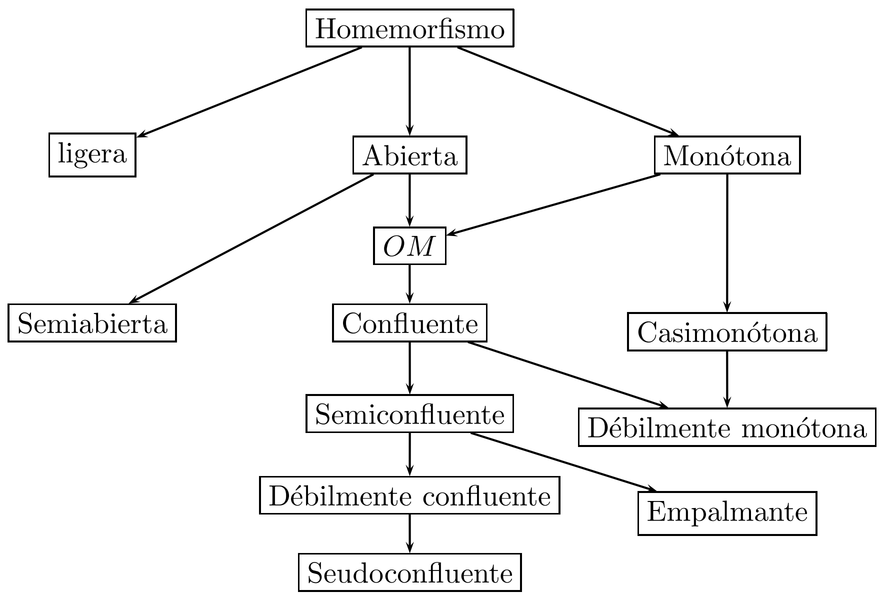

Diagrama I

Además, en [34], podemos encontrar ejemplos donde las implicaciones inversas del Diagrama I, no se tienen.

Con los siguientes teoremas mostramos algunas relaciones adicionales conocidas entre estas clases de funciones. Una prueba del Teorema 1.43, puede ser consultada en [34, (6.5), pág.51].

Teorema 1.43. *Si $f : X \to Y$ es una función débilmente monótona, donde Y es arcoconexo, entonces f es empalmante.*

En [20, Teorema 7.3, pág.248], podemos encontrar una demostración del siguiente teorema.

Teorema 1.44. *Si $f : X \to Y$ es una función débilmente monótona, donde Y es localmente conexo, entonces f es confluente.*

El siguiente resultado puede ser encontrado en [41, Teorema 2.1, pág.137].

Teorema 1.45. *Si $f : X \to Y$ es una función débilmente monótona, donde X es localmente conexo, entonces f es casimonótona.*

Por el Diagrama I y los Teoremas 1.44 y 1.45, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.46. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos, donde X es localmente conexo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) f es confluente;

(2) f es débilmente monótona;

(3) f es casimonótona.

1.5. Funciones inducidas

Terminaremos este capítulo con las definiciones de las funciones inducidas entre hiperespacios de continuos y algunas propiedades que satisfacen estas funciones.

Definición 1.47. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Definimos $2^f : 2^X \to 2^Y$, que llamaremos *la función inducida entre los hiperespacios* 2^X *y* 2^Y, por $2^f(A) = f(A)$ para cada $A \in 2^X$.

Proposición 1.48. *Sea* $f : X \to Y$ *una función continua y suprayectiva entre continuos. Entonces* 2^f *es continua y suprayectiva.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. De la Observación 1.25, es suficiente probar que $(2^f)^{-1}(\langle U \rangle) = \langle f^{-1}(U) \rangle$ y $(2^f)^{-1}(\langle Y, V \rangle) = \langle X, f^{-1}(V) \rangle$, para cualesquiera abiertos U y V en Y.

Probemos primero que $(2^f)^{-1}(\langle U \rangle) = \langle f^{-1}(U) \rangle$. Sea $A \in (2^f)^{-1}(\langle U \rangle)$. Entonces $2^f(A) \in \langle U \rangle$. Luego, por la definición de $\langle U \rangle$, $f(A) \subset U$. De esta manera, $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(U)$ y $A \in \langle f^{-1}(U) \rangle$. Recíprocamente, si $A \in \langle f^{-1}(U) \rangle$, entonces $A \subset f^{-1}(U)$ y $f(A) \subset U$. Con esto tenemos que $2^f(A) \in \langle U \rangle$ y $A \in (2^f)^{-1}(\langle U \rangle)$.

Mostremos que $(2^f)^{-1}(\langle Y, V \rangle) = \langle X, f^{-1}(V) \rangle$. Si $A \in (2^f)^{-1}(\langle Y, V \rangle)$, entonces $2^f(A) \in \langle Y, V \rangle$. Luego, $f(A) \cap V \neq \emptyset$. De donde se sigue que $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ y $A \in \langle X, f^{-1}(V) \rangle$. De manera similar, si $A \in \langle X, f^{-1}(V) \rangle$, entonces $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Consecuentemente, $f(A) \cap V \neq \emptyset$. Con lo que concluimos que $2^f(A) \in \langle Y, V \rangle$ y $A \in (2^f)^{-1}(\langle Y, V \rangle)$.

Finalmente, sea $B \in 2^Y$. Claramente, $f^{-1}(B) \in 2^X$ y $2^f(f^{-1}(B)) = B$. Luego 2^f es suprayectiva. $\square$

Definición 1.49. Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$, llamada *la función inducida entre los* n*-ésimos hiperespacios* $C_n(X)$ *y* $C_n(Y)$, por $C_n(f) = 2^f|_{C_n(X)}$.

Claramente, $C_n(f)$ está bien definida y es continua. Si $n = 1$, escribiremos $C(f)$ en lugar de $C_1(f)$. El siguiente ejemplo muestra que $C(f)$ no es necesariamente suprayectiva, aunque tomemos una función f suprayectiva.

Ejemplo 1.50. *Sea $f : [0,1] \to S^1$ definida por $f(x) = e^{2\pi xi}$. Tomemos $B = \{e^{2\pi xi} \in S^1 : -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}\}$. Sean $A_1 = [0, \frac{1}{4}]$ y $A_2 = [\frac{3}{4}, 1]$. Claramente, $B \in C(S^1)$ y $f^{-1}(B) = A_1 \cup A_2$. Notemos que $f(A_1) \neq B$ y $f(A_2) \neq B$, luego $C(f)$ no es suprayectiva.*

Con la misma idea presentada en el Ejemplo 1.50, es fácil mostrar que esta función f es tal que $C_n(f)$ no es suprayectiva, para ninguna $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.51. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $C_n(f)$ es suprayectiva si y sólo si f es débilmente confluente.*

Demostración. Supongamos primero que $C_n(f)$ es suprayectiva. Sea B un subcontinuo de Y. Si $B = Y$, entonces $f(X) = Y$ y la prueba queda completa. Luego, supongamos que $B \neq Y$. Sean $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ puntos diferentes de $Y \setminus B$. Claramente, $B \cup \{y_1, y_2, ..., y_{n-1}\} \in C_n(Y) \setminus C_{n-1}(Y)$. Como $C_n(f)$ es suprayectiva y $C_n(f)(C_{n-1}(X)) \subset C_{n-1}(Y)$, existe $A \in C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)$ tal que $C_n(f)(A) = B \cup \{y_1, y_2, ..., y_{n-1}\}$. De esta forma, existe una componente A_0 de A tal que $f(A_0) = B$ y f es débilmente confluente.

Recíprocamente, tomemos f débilmente confluente y sea $B \in C_n(Y)$. Escribamos $B = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k$, donde B_i es una componente de B, para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$ y alguna $k \leq n$. Como f es débilmente confluente, para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$, existe un subcontinuo A_i de X tal que $f(A_i) = B_i$. Luego, si definimos $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$, entonces $A \in C_n(X)$ y tenemos que $C_n(f)(A) = B$. Con lo que concluimos que $C_n(f)$ es suprayectiva. $\square$

La siguiente función inducida fue definida en [30, pág.145].

Definición 1.52. Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Definimos $HS_n(f) : HS_n(X) \to HS_n(Y)$, llamada *la función inducida entre los n-ésimos hiperespacios de suspensión $HS_n(X)$ y $HS_n(Y)$*, por:

$$HS_n(f)(A) = \begin{cases} q_Y^n(C_n(f)((q_X^n)^{-1}(A))), & \text{si } A \neq F_X^n; \\ F_Y^n, & \text{si } A = F_X^n. \end{cases}$$

Observemos que $HS_n(f)$ es continua, por [16, (4.3), pág.126].

Observación 1.53. La función inducida $HS_n(f)$ fue definida de forma tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[r, "C_n(f)"] \arrow[d, "q_X^n"'] & C_n(Y) \arrow[d, "q_Y^n"] \\ HS_n(X) \arrow[r, "HS_n(f)"'] & HS_n(Y) \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

es conmutativo. Cuando $n = 1$, escribiremos $HS(f)$, en lugar de $HS_1(f)$.

De manera similar a la prueba de la Proposición 1.51, podemos probar el siguiente resultado, sin embargo, una demostración puede ser consultada en [30, Corolario 3.3, pág.146].

Proposición 1.54. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Entonces f es débilmente confluente si y sólo si $HS_n(f)$ es suprayectiva.*

A continuación mostraremos algunas relaciones entre las funciones 2^f, $C_n(f), HS_n(f)$ y f, cuando alguna es un homeomorfismo.

Proposición 1.55. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Si 2^f es un homeomorfismo, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Notemos primero que f es suprayectiva. Sea $y \in Y$. Como 2^f es un homeomorfismo, existe un punto A en 2^X tal que $f(A) = \{y\}$. Así, si $x \in A$, tenemos que $f(x) = y$ y f es suprayectiva.

Ahora, supongamos que existen dos puntos diferentes x_1 y x_2 en X tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Observemos que $\{x_1\}$ y $\{x_2\}$ son puntos distintos de 2^X y $2^f(\{x_1\}) = 2^f(\{x_2\}) = \{f(x_1)\}$. Pero esto contradice que 2^f sea un homeomorfismo. De esta manera f es una función biyectiva definida entre continuos y, por tanto, un homeomorfismo. $\square$

La siguiente proposición se sigue de un argumento similar al usado en la Proposición 1.55.

Proposición 1.56. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si $C_n(f)$ es un homeomorfismo, entonces f es un homeomorfismo.*

El siguiente teorema muestra la primera relación entre las funciones 2^f, $C_n(f), HS_n(f)$ y f.

Teorema 1.57. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) 2^f *es un homeomorfismo;*

(2) $C_n(f)$ *es un homeomorfismo, para cualquier* $n \in \mathbb{N}$;

(3) $HS_n(f)$ *es un homeomorfismo, para cualquier* $n \in \mathbb{N}$;

(4) f *es un homeomorfismo.*

Demostración. Probemos (*1*) implica (*2*). Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos tal que 2^f es un homeomorfismo. Notemos que como $C_n(f) = 2^f|_{C_n(X)}$, $C_n(f)$ es una función biyectiva definida entre continuos. Además, $C_n(f)$ es suprayectiva por las Proposiciones 1.51 y 1.55. Claramente, $C_n(f)$ es cerrada. Así, $C_n(f)$ es un homeomorfismo. Si aplicamos la Proposición 1.56, tenemos que (*2*) implica (*4*). La afirmación (*4*) implica (*1*), se sigue de [39, Teorema 0.52, pág.22]. En [30, Teorema 3.4, pág.146] se demuestra que (*2*) y (*3*) son equivalentes, con lo que nuestro teorema queda probado. $\square$

Capítulo 2

Funciones Inducidas

Como mencionamos en la introducción, uno de los objetivos de esta tesis es, dada una clase $\mathcal{A}$ de funciones entre continuos, estudiar las relaciones entre los siguientes cuatro enunciados:

(1) $2^f \in \mathcal{A}$;

(2) $C_n(f) \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$;

(3) $HS_n(f) \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$;

(4) $f \in \mathcal{A}$.

En este capítulo desarrollamos la mayor parte de este objetivo. Analizamos estas relaciones usando las funciones definidas en la Sección 1.4, con excepción de las funciones ligeras, abiertas y semiabiertas, que estudiaremos con mayor profundidad en los capítulos siguientes.

Este capítulo lo dividimos en cuatro secciones. En la Sección 2.1, presentamos el resultado principal de este capítulo, Teorema 2.9, donde mostramos que si $\mathcal{A}$ es una de las siguientes clases de funciones: monótonas, OM, confluentes, semiconfluentes, débilmente confluentes, seudoconfluentes, casimonótonas, débilmente monótonas o empalmantes, tenemos que si $C_n(f) \in \mathcal{A}$, entonces $HS_n(f) \in \mathcal{A}$. La Sección 2.2, la dedicamos a estudiar las funciones monótonas y OM. En la Sección 2.3, presentamos una gran cantidad de resultados en relación a las clases de funciones que contienen las funciones confluentes; es decir, funciones confluentes, semiconfluentes, débilmente confluentes, seudoconfluentes y empalmantes. Finalmente, los resultados en relación con las funciones casimonótonas y débilmente monótonas los presentaremos en la Sección 2.4.

Durante el desarrollo del presente capítulo, mostraremos preguntas que surgieron durante la elaboración de este trabajo. Además, por no hacer muy extenso este escrito, sólo mostraremos las demostraciones que fueron resultado de nuestra investigación.

2.1. Si $C_n(f) \in \mathcal{A}$ entonces $HS_n(f) \in \mathcal{A}$

La siguiente definición la tomamos de [34, Sección 5, pág.29].

Definición 2.1. Sea $\mathcal{A}$ una clase de funciones entre continuos. Diremos que $\mathcal{A}$ tiene la *propiedad de composición* si para cualesquiera dos funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ que están en $\mathcal{A}$, tenemos que $g \circ f$ pertenece a $\mathcal{A}$.

Observación 2.2. En [34, Sección 5, pág.29], podemos encontrar resultados donde se muestra que las funciones monótonas, OM, confluentes, débilmente confluentes, seudoconfluentes y casimonótonas, tienen la propiedad de composición.

Existen dos funciones entre continuos f y g tales que f es casimonótona, g es abierta (por tanto f y g son débilmente monótonas, ver Diagrama I en el Capítulo 1) y $g \circ f$ no es débilmente monótona [34, Ejemplo 5.9, pág.31]. Con la siguiente proposición mostramos una condición suficiente para que la función $g \circ f$ sea débilmente monótona.

Proposición 2.3. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas entre continuos. Si f es débilmente monótona y g es monótona, entonces $g \circ f$ es débilmente monótona.*

Demostración. Sea Q un subcontinuo con interior no vacío de Z. Sea D una componente de $(g \circ f)^{-1}(Q) = f^{-1}(g^{-1}(Q))$. Como g es monótona, $g^{-1}(Q)$ es un subcontinuo de Y. Claramente, $Int_Y(g^{-1}(Q)) \neq \emptyset$. Además, como f es débilmente monótona, $f(D) = g^{-1}(Q)$. Con lo que concluimos que $g(f(D)) = Q$. Así, $g \circ f$ es débilmente monótona. $\square$

La Proposición 2.3 será suficiente para la prueba del teorema principal de esta sección, sin embargo, el lector puede darse cuenta de que, en realidad, con un argumento similar al dado en la prueba de la Proposición 2.3, puede probarse que si f es débilmente monótona y g casimonótona, entonces $g \circ f$ es débilmente monótona.

Con el siguiente ejemplo, mostramos que las funciones semiconfluentes y empalmantes, no tienen la propiedad de composición.

Ejemplo 2.4. *Definamos f y $g : [0,1] \to [0,1]$ por:*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{8} - \frac{t}{2}, & si\ 0 \leq t \leq \frac{1}{4}; \\ 1 - |4t - 2|, & si\ \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}; \\ 3t - \frac{9}{4}, & si\ \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad y \quad g(t) = 1 - |2t - 1|.$$

Es fácil verificar que g es abierta, f es semiconfluente (por tanto, f y g son semiconfluentes y empalmantes) y que $g \circ f$ no es empalmante, por consiguiente, no es semiconfluente (ver Figura 2.1).

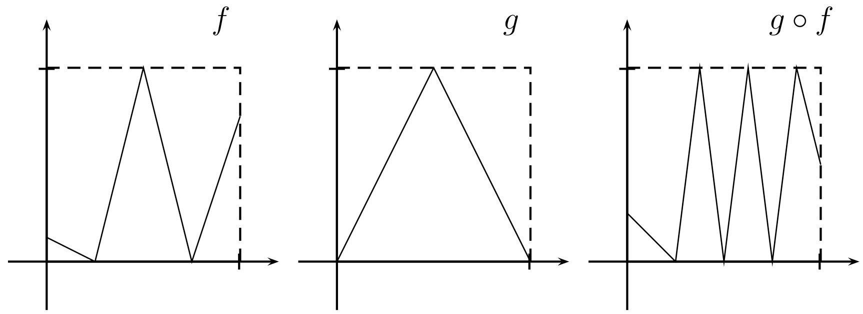

Figura 2.1

Usando las funciones definidas en la Sección 1.4 y observando el Diagrama I, puede verse que las siguientes dos proposiciones no pueden ser mejoradas.

Proposición 2.5. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas entre continuos. Si f es semiconfluente y g es monótona, entonces $g \circ f$ es semiconfluente.*

Demostración. Sean Q un subcontinuo de Z y D y E componentes de $(g \circ f)^{-1}(Q)$. Como g es monótona, $g^{-1}(Q)$ es un subcontinuo de Y. De esto, D y E son componentes de $f^{-1}(g^{-1}(Q))$. Así, $f(D) \subset f(E)$ o $f(E) \subset f(D)$, pues f es semiconfluente. Fácilmente se sigue que $g(f(D)) \subset g(f(E))$ o $g(f(E)) \subset g(f(D))$. Con lo que concluimos que $g \circ f$ es semiconfluente. □

Usando el mismo argumento, es sencillo probar la siguiente proposición.

Proposición 2.6. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas entre continuos. Si f es empalmante y g es monótona, entonces $g \circ f$ es empalmante.*

Otro concepto que usaremos en esta sección, es la propiedad del factor.

Definición 2.7. Dada una clase de funciones entre continuos $\mathcal{A}$, decimos que $\mathcal{A}$ tiene la *propiedad del factor* si siempre que $g \circ f$ está en $\mathcal{A}$, entonces g también pertenece a $\mathcal{A}$.

Observación 2.8. Por [34, Sección 5, pág.29], es conocido que las funciones monótonas, OM, confluentes, semiconfluentes, débilmente confluentes, seudoconfluentes, casimonótonas, débilmente monótonas y empalmantes, tienen la propiedad del factor.

El siguiente teorema es el resultado más importante que presentamos en este capítulo.

Teorema 2.9. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{A}$ es alguna de las siguientes clases de funciones: monótonas, OM, confluentes, semiconfluentes, débilmente confluentes, seudoconfluentes, casimonótonas, débilmente monótonas o empalmantes, entonces tenemos:*

$$\text{Si } C_n(f) \in \mathcal{A}, \text{ entonces } HS_n(f) \in \mathcal{A}.$$

Demostración. Sabemos, por la definición de $HS_n(f)$, que:

$$q_Y^n \circ C_n(f) = HS_n(f) \circ q_X^n,$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Ahora, como q_Y^n es monótona, $q_Y^n \in \mathcal{A}$, para cualquier $\mathcal{A}$, ver Diagrama I. Por las Proposiciones 2.3, 2.5, 2.6 y la propiedad de composición para las demás clases de funciones, $q_Y^n \circ C_n(f) \in \mathcal{A}$. De esta manera, $HS_n(f) \circ q_X^n \in \mathcal{A}$. Finalmente, usando la propiedad del factor para estas clases de funciones, concluimos que $HS_n(f) \in \mathcal{A}$ y nuestra prueba queda completa. $\square$

Observación 2.10. Notemos que q_Y^n no es una función ni ligera ni abierta. De esta forma, el argumento usado en la prueba del Teorema 2.9 no puede ser usado ni para las funciones ligeras ni abiertas.

En el Capítulo 3 mostraremos que, la implicación dada en el Teorema 2.9, también es válida para la clase de funciones ligeras. Por otra parte, en el Capítulo 4, presentaremos una función f, tal que $C(f)$ es abierta pero $HS(f)$ no es abierta.

2.2. Funciones monótonas y OM

Con respecto a las funciones monótonas, es conocido el siguiente teorema (ver [20, Teorema 3.2, pág.241] y [28, Teorema 6.3, pág.1056]):

Teorema 2.11. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) 2^f es monótona;

(2) $C_n(f)$ es monótona, para cualquier $n \in \mathbb{N}$;

(3) $HS_n(f)$ es monótona, para cualquier $n \in \mathbb{N}$;

(4) f es monótona.

Luego, para el caso de las funciones monótonas, al igual que para los homeomorfismos (ver Teorema 1.57), el problema está resuelto completamente.

En relación a las funciones OM, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.12. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Dadas las siguientes afirmaciones:*

(1) 2^f *es OM;*

(2) $C_n(f)$ *es OM, para cualquier* $n \in \mathbb{N}$;

(3) $HS_n(f)$ *es OM, para cualquier* $n \in \mathbb{N}$;

(4) f *es OM.*

Entonces (1) y (4) son equivalentes, (2) implica (3) y (2) implica (4)

Demostración. La afirmación; (*1*) y (*4*) son equivalentes, se sigue de [20, Teorema 5.2, pág.244]. El Teorema 2.9, nos da (*2*) implica (*3*). Finalmente, (*2*) implica (*4*) es por [13, Teorema 15, pág.788]. □

La siguiente proposición es consecuencia de [13, Teorema 18, pág.791].

Proposición 2.13. *Sean* $f : X \to Y$ *una función continua entre continuos y* $n \geq 3$. *Si* $C_n(f)$ *es una función OM, entonces* f *es monótona.*

Observación 2.14. Como $f(t) = 1 - |2t - 1|$ es una función abierta, f es OM, pero $C_n(f)$ no lo es, para ninguna $n \geq 3$, por la Proposición 2.13.

Para cuando $n \in \{1, 2\}$, conocemos la siguiente proposición (ver [13, Teorema 14, pág.788] y [20, Teorema 5.2, pág.244]):

Proposición 2.15. *Sean* $f : X \to Y$ *una función continua entre continuos y* $n \in \{1, 2\}$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. 2^f *es OM;*
2. $C_n(f)$ *es OM, para cualquier* $n \in \mathbb{N}$;
3. f *es OM.*

Naturalmente, surgen las siguientes preguntas:

Pregunta 2.16. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. ¿Si $HS_n(f)$ es OM, entonces es f (o $C_n(f)$) OM? De una forma mas particular: ¿Si $HS_n(f)$ es OM donde $n \in \{1, 2\}$, entonces es f OM?*

2.3. Funciones confluentes

En [7], el Profesor J. J. Charatonik definió las funciones confluentes, mostrando una clase de funciones entre continuos que preserva $\lambda-$dendroides (continuo hereditariamente unicoherente y hereditariamente descomponible).

En esta sección, estudiaremos a las funciones confluentes, semiconfluentes, débilmente confluentes, seudoconfluentes y empalmantes.

Definición 2.17. Dado un continuo Z y $n \in \mathbb{N}$. Definimos $\sigma_Z : C(C_n(Z)) \to C_n(Z)$ por:

$$\sigma_Z(\mathcal{A}) = \cup\mathcal{A}$$

para cada $\mathcal{A} \in C(C_n(Z))$.

Observación 2.18. Por el Teorema 1.34, σ_Z está bien definida. Además, σ_Z es continua, por [39, Lema 1.48, pág.78].

Con la siguiente proposición mostramos una propiedad de la función σ definida anteriormente.

Proposición 2.19. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Entonces el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} C(C_n(X)) \arrow[r, "C(C_n(f))"] \arrow[d, "\sigma_X"'] & C(C_n(Y)) \arrow[d, "\sigma_Y"] \\ C_n(X) \arrow[r, "C_n(f)"'] & C_n(Y) \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

es conmutativo.

Demostración. Sea $\mathcal{A} \in C(C_n(X))$. Notemos que:

$$\sigma_Y(C(C_n(f))(\mathcal{A})) = \cup(C_n(f)(\mathcal{A})) = \cup\{f(A) : A \in \mathcal{A}\}; \text{ y}$$
$$C_n(f)(\sigma_X(\mathcal{A})) = C_n(f)(\cup\mathcal{A}) = f(\cup\mathcal{A}).$$

Es fácil probar que $\cup\{f(A) : A \in \mathcal{A}\} = f(\cup\mathcal{A})$. De esta manera, $\sigma_Y \circ C(C_n(f)) = C_n(f) \circ \sigma_X$ y nuestra proposición queda probada. □

2.3.1. Confluentes, semiconfluentes y empalmantes

Una prueba de la siguiente proposición, puede ser consultada en [14, Proposición 2.11, pág.111].

Proposición 2.20. *Si $f : X \to Y$ es una función suprayectiva definida entre continuos tal que f no es confluente, entonces existen un subcontinuo L de Y y una componente C de $f^{-1}(L)$ tales que $f(C)$ es un subcontinuo propio no degenerado de L.*

En la prueba que mostramos a continuación, usamos una idea similar a la dada en la demostración de [14, Proposición 2.11, pág.111].

Proposición 2.21. *Si $f : X \to Y$ es una función suprayectiva definida entre continuos tal que f no es empalmante, entonces existen un subcontinuo*

L de Y y dos componentes D y E de $f^{-1}(L)$ tales que $f(D)$ y $f(E)$ son no degenerados y $f(D) \cap f(E) = \emptyset$.

Demostración. Como f no es empalmante, existen un subcontinuo L' de Y y dos componentes D' y E' de $f^{-1}(L')$ tales que $f(D') \cap f(E') = \emptyset$. Supongamos que $f(D') = \{p\}$, para algún punto $p \in Y$. Claramente, $D' \cap f^{-1}(f(E')) = \emptyset$. Así, por el Teorema 1.8, existen cerrados disyuntos F_1 y F_2 en X tales que:

$$f^{-1}(L') \subset F_1 \cup F_2, D' \subset F_1 \text{ y } f^{-1}(f(E')) \subset F_2.$$

Sean U_1 y U_2 abiertos disyuntos de X, tales que $F_1 \subset U_1$ y $F_2 \subset U_2$. Así:

$$f^{-1}(L') \subset U_1 \cup U_2, D' \subset U_1 \text{ y } f^{-1}(f(E')) \subset U_2. \tag{2.2}$$

Sea $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de abiertos en Y tal que $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcap\{V_n : n \in \mathbb{N}\} = L'$.

Como $\bigcap\{V_n : n \in \mathbb{N}\} = L'$, por (2.2), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-1}(\overline{V_{n_0}}) \subset U_1 \cup U_2$. Ahora, por el Teorema 1.9, existe un subcontinuo D'' de $f^{-1}(V_{n_0})$ tal que $D' \subsetneq D''$. Como $D_1 \subset U_1$, $D'' \subset U_1$. Tomemos $L = L' \cup f(D'')$ y sea D una componente de $f^{-1}(L)$ tal que $D'' \subset D$. Como $f(D'') \subset f(D)$ y $f(D'')$ no es degenerado, tenemos que $f(D)$ no es degenerado. Notemos que $L \subset \overline{V_{n_0}}$. Así, $D \subset U_1$. Con lo que concluimos que $D \cap f^{-1}(f(E')) = \emptyset$ y $f(D) \cap f(E') = \emptyset$.

Finalmente, si $f(E')$ es degenerado, repetimos el argumento anterior y nuestra prueba queda completa. □

Corolario 2.22. *Si $f : X \to Y$ es una función suprayectiva definida entre continuos tal que f no es semiconfluente, entonces existen un subcontinuo L de Y y dos componentes D y E de $f^{-1}(L)$ tales que $f(D) \not\subseteq f(E)$, $f(E) \not\subseteq f(D)$ y $f(D)$ y $f(E)$ no son degenerados.*

Demostración. Como f no es semiconfluente, existen, un subcontinuo L' de Y y dos componentes D' y E' de $f^{-1}(L')$ tales que $f(D') \nsubseteq f(E')$ y $f(E') \nsubseteq f(D')$. Si $f(D')$ o $f(E')$ es degenerado, entonces $f(D') \cap f(E') = \emptyset$. Así, f no es empalmante y, por la Proposición 2.21, existen un subcontinuo L en Y y dos componentes D y E de $f^{-1}(L)$ tales que $f(D)$ y $f(E)$ no son degenerados y $f(D) \cap f(E) = \emptyset$. Con lo que tenemos que $f(D) \nsubseteq f(E)$ y $f(E) \nsubseteq f(D)$. $\square$

El siguiente teorema nos será de mucha utilidad en esta sección.

Teorema 2.23. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si $C_n(f)$ es empalmante, entonces f es confluente.*

Demostración. Supongamos que f no es confluente. Usando la Proposición 2.20, existen un subcontinuo L de Y y una componente D de $f^{-1}(L)$ tales que $f(D)$ no es degenerado y $f(D) \neq L$.

Sea $p \in L \setminus f(D)$. Por el Teorema 1.28, existe un arco de orden $\mathcal{L}_1$ en $C(Y)$, de $\{p\}$ a L. También, existe un arco de orden $\mathcal{L}_2$ en $C(Y)$, de $f(D)$ a L. Denotemos $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup F_1(L)$ y definamos:

$$\mathcal{K} = \{\{y_1, y_2, ..., y_{n-1}\} \cup A : A \in \mathcal{L}\}, \tag{2.3}$$

donde $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ son puntos diferentes de $Y \setminus L$. Claramente, $\mathcal{K}$ es un subcontinuo de $C_n(Y)$.

Sea P_i una componente de $f^{-1}(y_i)$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Sean $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ las componentes de $C_n(f)^{-1}(\mathcal{K})$ tales que $P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_{n-1} \cup D \in \mathcal{D}$ y $\{P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_{n-1} \cup P : P \in F_1(D)\} \subset \mathcal{E}$.

Notemos que $C_n(f)(\cup\mathcal{D}) \subset \{y_1, y_2, ..., y_{n-1}\} \cup L$ (ver Proposición 2.19). Con esto, podemos escribir $\cup\mathcal{D} = Q_1 \cup Q_2 \cup ...Q_{n-1} \cup E$, donde Q_i es un subconjunto conexo de $f^{-1}(y_i)$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, y $E \subset f^{-1}(L)$.

Ahora, por el Lema 1.33, cada componente de $\cup\mathcal{D}$ intersecta a $P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_{n-1} \cup D$. Como $P_1, P_2, ..., P_{n-1}$ y D son componentes de $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2), ..., f^{-1}(y_{n-1})$ y $f^{-1}(L)$, respectivamente, $Q_i \subset P_i$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, y $E \subset D$. Así, $\cup\mathcal{D} = P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_{n-1} \cup D$.

Sea $R \in \mathcal{D}$. Entonces $R = R_1 \cup R_2 \cup ... \cup R_{n-1} \cup D'$, donde $R_i \subset P_i$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, y $D' \subset D$. Con esto, $f(D') \subset L \setminus \{p\}$. Por (2.3), $C_n(f)(R) \in \{\{y_1, y_2, ..., y_{n-1}\} \cup A : A \in \mathcal{L}_2 \cup F_1(L)\}$.

Notemos que $\{\{y_1, y_2, ..., y_{n-1}\} \cup A : A \in \mathcal{L}_2\}$ y $\{\{y_1, y_2, ..., y_{n-1}\} \cup A : A \in F_1(L)\}$ son subconjuntos cerrados de $\mathcal{K}$ y:

$$\{\{y_1, y_2, ..., y_{n-1}\} \cup A : A \in \mathcal{L}_2\} \cap \{\{y_1, y_2, ..., y_{n-1}\} \cup A : A \in F_1(L)\} = \emptyset. \quad (2.4)$$

Como $C_n(f)(\mathcal{D})$ es conexo y:

$$\{y_1, y_2, ..., y_{n-1}\} \cup f(D) \in C_n(f)(\mathcal{D}) \cap \{\{y_1, y_2, ..., y_{n-1}\} \cup A : A \in \mathcal{L}_2\},$$

tenemos que $C_n(f)(R) \in \{\{y_1, y_2, ..., y_{n-1}\} \cup A : A \in \mathcal{L}_2\}$. Con lo que concluimos que $C_n(f)(\mathcal{D}) \subset \{\{y_1, y_2, ..., y_{n-1}\} \cup A : A \in \mathcal{L}_2\}$.

De manera similar probamos que:

$$C_n(f)(\mathcal{E}) \subset \{\{y_1, y_2, ..., y_{n-1}\} \cup A : A \in F_1(L)\}.$$

Así, por (2.4), $C_n(f)(\mathcal{D}) \cap C_n(f)(\mathcal{E}) = \emptyset$. De donde $C_n(f)$ no es empalmante.

$\square$

Como consecuencia del Teorema 2.23 y usando las relaciones presentadas en el Diagrama I, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.24. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Entonces:*

1. *Si $C_n(f)$ es confluente, entonces f es confluente;*
2. *Si $C_n(f)$ es semiconfluente, entonces f es semiconfluente;*
3. *Si $C_n(f)$ es empalmante, entonces f es empalmante.*

Como el análogo al Teorema 2.23, con relación a la función inducida entre los n-ésimos hiperespacios de suspensión $HS_n(f)$, tenemos:

Teorema 2.25. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si $HS_n(f)$ es empalmante, entonces f es confluente.*

Demostración. Supongamos que f no es confluente. Usando la Proposición 2.20, existen un subcontinuo L de Y y una componente D de $f^{-1}(L)$ tales que $f(D)$ no es degenerado y $f(D) \neq L$. Consideremos independientemente los casos $n = 1$ y $n \geq 2$.

(1) $n = 1$. Sea $p \in L \setminus f(D)$. Por el Teorema 1.28, existen arcos de orden $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{R}_2$ en $C(Y)$, de $f(D)$ a L y de $\{p\}$ a L, respectivamente.

Sea $\mu : C(L) \to [0, 1]$ una función de Whitney (ver Teorema 1.36). Para cada $t \in [0, \mu(f(D))]$, definamos $\{E_t\} = \mu^{-1}(t) \cap \mathcal{R}_2$. Tomemos $0 < t_0 < \mu(f(D))$ tal que $E_{t_0} \cap f(D) = \emptyset$. Sea $\mathcal{L}_2$ un arco de orden en $C(Y)$, de E_{t_0} a L. Definamos $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mu^{-1}(t_0)$. Además, $\mu^{-1}(t_0)$ es un subcontinuo de $C(L)$, por [39, Teorema 14.2, pág.310]. Notemos que

$\mathcal{L}_1 \cap \mu^{-1}(t_0) = \emptyset$ y $\mathcal{L}_2 \cap \mu^{-1}(t_0) = \{E_{t_0}\}$. Con esto, $\mathcal{L}$ es un subcontinuo de $C(Y)$. Además, es importante que observemos que $\mathcal{L} \cap F_1(Y) = \emptyset$.

Como $\mu(f(D)) > t_0$, existe un subcontinuo D_0 de D tal que $\mu(f(D_0)) = t_0$. Así, $f(D_0) \subset L \setminus \{p\}$. Sean $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ las componentes de $C(f)^{-1}(\mathcal{L})$ tales que $D \in \mathcal{D}$ y $D_0 \in \mathcal{E}$.

Probemos que $C(f)(\mathcal{D}) = \{f(D)\}$. Por la Proposición 2.19, $f(\cup\mathcal{D}) \subset L$. Como $D \subset \cup\mathcal{D}$ y cada componente de $\cup\mathcal{D}$ intersecta a D (ver Lema 1.33), tenemos que $\cup\mathcal{D}$ es conexo. Además, como D es una componente de $f^{-1}(L)$, tenemos que $\cup\mathcal{D} = D$. Sea $E \in \mathcal{D}$. Entonces $E \subset D$. De la definición de $\mathcal{L}$, sigue que $f(E) = f(D)$ o $f(E) \in \mu^{-1}(t_0)$. Supongamos que $f(E) \in \mu^{-1}(t_0)$. Como tenemos que $C(f)(\mathcal{D})$ es conexo y $f(D) \in C(f)(\mathcal{D})$, podemos asegurar que $E_{t_0} \in C(f)(\mathcal{D})$, pues E_{t_0} es un punto de corte de $\mathcal{L}$. Pero esto es una contradicción, pues, $\cup\mathcal{D} = D$ y $E_{t_0} \subset L \setminus f(D)$. De esto, $f(E) = f(D)$ y $C(f)(\mathcal{D}) = \{f(D)\}$. Similarmente, $f(\cup\mathcal{E}) \subset L$ y, como $D_0 \subset \cup\mathcal{E}$, $f(\cup\mathcal{E}) \subset f(D) \subset L \setminus E_{t_0}$. Ahora, sea $E \in \mathcal{E}$. Entonces $f(E) \in \mathcal{L}_1$ o $f(E) \in \mu^{-1}(t_0)$. Supongamos que $f(E) \in \mathcal{L}_1$. Como $D_0 \in \mathcal{E}$, entonces $C(f)(\mathcal{E}) \cap \mu^{-1}(t_0) \neq \emptyset$. De esta manera, por la definición de $\mathcal{L}$, $E_{t_0} \in C(f)(\mathcal{E})$. Pero esto contradice que $f(\cup\mathcal{E}) \subset L \setminus E_{t_0}$. Así, $f(E) \in \mu^{-1}(t_0)$. Por consiguiente, $C(f)(\mathcal{E}) \subset \mu^{-1}(t_0)$. Así, $C(f)(\mathcal{D}) \cap C(f)(\mathcal{E}) = \emptyset$. Como $\mathcal{L} \cap F_1(Y) = \emptyset$, $q_X(\mathcal{D})$ y $q_X(\mathcal{E})$ son componentes de $HS(f)^{-1}(q_Y(\mathcal{L}))$. Además:

$$HS(f)(q_X(\mathcal{D})) \cap HS(f)(q_X(\mathcal{E})) = \emptyset;$$

lo cual implica que $HS(f)$ no es empalmante.

(2) $n \geq 2$. Sea $p \in L \setminus f(D)$. Por el Teorema 1.28, existen arcos de orden $\mathcal{L}_1$

y $\mathcal{L}_2$ en $C(Y)$, de $\{p\}$ a L y de $f(D)$ a L, respectivamente. Definamos $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup F_1(Y)$. Sean $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ puntos diferentes de $Y \setminus L$. Por el Teorema 1.9, existe un subcontinuo Q de Y tal que $\{y_1\} \subsetneq Q \subset Y \setminus (L \cup \{y_2, ..., y_{n-1}\})$. Definamos:

$$\mathcal{K} = \{Q \cup \{y_2, ..., y_{n-1}\} \cup A : A \in \mathcal{L}\}.$$

Claramente, $\mathcal{K}$ es un subcontinuo de $C_n(Y)$. Además, $\mathcal{K} \cap F_n(Y) = \emptyset$. Como $HS_n(f)$ es empalmante, $HS_n(f)$ es suprayectiva (ver Definición 1.40). Con lo que f es débilmente confluente. Así, existe una componente R de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(R) = Q$. Sea P_i una componente de $f^{-1}(y_i)$ para cada $i \in \{2, 3, ..., n-1\}$. Sean $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ las componentes de $C_n(f)^{-1}(\mathcal{K})$ tal que $R \cup P_2 \cup ... \cup P_{n-1} \cup D \in \mathcal{D}$ y $\{R \cup P_2 \cup ... \cup P_{n-1} \cup E : E \in F_1(D)\} \subset \mathcal{E}$. De manera similar a como se hizo en la prueba del Teorema 2.23, podemos verificar que $C_n(f)(\mathcal{D}) \cap C_n(f)(\mathcal{E}) = \emptyset$. Notemos que, $q_X^n(\mathcal{D})$ y $q_X^n(\mathcal{E})$ son componentes de $HS_n(f)^{-1}(q_Y^n(\mathcal{K}))$. De donde tenemos que:

$$HS_n(f)(q_X^n(\mathcal{D})) \cap HS_n(f)(q_X^n(\mathcal{E})) = \emptyset.$$

Con lo que concluimos que $HS_n(f)$ no es empalmante.

De (1) y (2), nuestra prueba queda completa. $\square$

Ahora, por el Teorema 2.25, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.26. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Entonces:*

(1) Si $HS_n(f)$ es confluente, entonces f es confluente;

(2) Si $HS_n(f)$ *es semiconfluente, entonces* f *es semiconfluente;*

(3) Si $HS_n(f)$ *es empalmante, entonces* f *es empalmante.*

Con respecto a las funciones semiconfluentes y empalmantes, sólo conocemos las relaciones enunciadas en el siguiente teorema.

Teorema 2.27. *Sea* $f : X \to Y$ *una función continua entre continuos. Dadas las siguientes afirmaciones:*

(1) 2^f *es semiconfluente (empalmante);*

(2) $C_n(f)$ *es semiconfluente (empalmante), para cada* $n \in \mathbb{N}$;

(3) $HS_n(f)$ *es semiconfluente (empalmante), para cada* $n \in \mathbb{N}$;

(4) f *es semiconfluente (empalmante).*

Entonces (1) implica (4), (2) implica (3) y (3) implica (4)

Demostración. La afirmación (*1*) implica (*4*) es una consecuencia de [14, Teorema 4.20, pág.142]. Las otras dos implicaciones se siguen de los Teoremas 2.9 y 2.26. □

En [14, Ejemplo 4.24, pág.143], se muestra una función continua f, confluente, tal que ni $C(f)$ ni 2^f son empalmantes, de esta forma sabemos que existe una función semiconfluente y, por tanto, empalmante tal que $C(f)$ y 2^f no son empalmantes y, por tanto, no son semiconfluentes.

Pregunta 2.28. *Si* $f : X \to Y$ *es una función continua entre continuos y* $n \in \mathbb{N}$, *entonces:*

(1) ¿Si f es semiconfluente (empalmante), entonces es $HS_n(f)$ semiconfluente (empalmante)?

(2) ¿Si $HS_n(f)$ es semiconfluente (empalmante), entonces es $C_n(f)$ semiconfluente (empalmante)?

(3) ¿Si $HS_n(f)$ es semiconfluente (empalmante), entonces es 2^f semiconfluente (empalmante)? y viceversa?

(4) ¿Si $C_n(f)$ es semiconfluente (empalmante), entonces es 2^f semiconfluente (empalmante)? y viceversa?

Con el siguiente teorema mostramos las relaciones en referencia a las funciones confluentes.

Teorema 2.29. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Dadas las siguientes afirmaciones:*

(1) 2^f es confluente;

(2) $C_n(f)$ es confluente, para cada $n \in \mathbb{N}$;

(3) $HS_n(f)$ es confluente, para cada $n \in \mathbb{N}$;

(4) f es confluente.

Entonces (1) implica (4), (2) implica (3) y (3) implica (4).

Demostración. Con [20, Teorema 6.3, pág.246] tenemos (*1*) implica (*4*). Por el Teorema 2.9, mostramos que (*2*) implica (*3*). Finalmente, (*3*) implica (*4*) es consecuencia del Teorema 2.26. $\square$

Un conocido ejemplo, dado por H. Hosokawa en [20, Ejemplo, pág.247], presenta una función confluente f, tal que $C(f)$ y 2^f no son confluentes. Una muy detallada explicación de este ejemplo puede ser consultada en [1, pág.89]. Además, [23, Ejercicio 77.34, pág.387] define una función f tal que f y $C(f)$ son confluentes, pero 2^f no es confluente.

Una pregunta que ha sido propuesta, desde hace algunos años, por diferentes autores es la siguiente (ver [23, pág.381] o [14, pág.144]):

Pregunta 2.30. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. ¿Si 2^f es confluente, entonces es $C(f)$ confluente?*

Por supuesto, la Pregunta 2.30 puede ser reformulada de la siguiente forma:

Pregunta 2.31. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. ¿Si 2^f es confluente, entonces es $C_n(f)$ (o $HS_n(f)$) confluente?*

Una prueba del siguiente teorema puede ser consultada en [13, Teorema 18, pág.791].

Teorema 2.32. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \geq 3$. Si $C_n(f)$ es confluente, entonces f es monótona.*

La idea de la prueba de [13, Teorema 18, pág.791], la usamos para probar el siguiente resultado.

Teorema 2.33. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \geq 3$. Si $HS_n(f)$ es confluente, entonces f es monótona.*

Demostración. Supongamos que f no es monótona. Es sencillo probar la siguiente afirmación:

Afirmación. *Si $f : X \to Y$ no es monótona, entonces existe un subcontinuo no degenerado Q de Y tal que $f^{-1}(Q)$ no es conexo.* $(*)$

Por la Afirmación $(*)$, existe un subcontinuo no degenerado Q de Y tal que $f^{-1}(Q)$ no es conexo. Sean D y E dos componentes diferentes de $f^{-1}(Q)$. Sea $p \in Y \setminus Q$. Por el Teorema 1.9, existe un subcontinuo P de Y tal que $\{p\} \subsetneq P \subset Y \setminus Q$. Definamos:

$$\mathcal{K} = \{A \cup Q : A \in C_{n-1}(P)\}.$$

Claramente, $\mathcal{K}$ es un subcontinuo de $C_n(Y)$. Sea R una componente de $f^{-1}(P)$. Notemos que f es confluente, por el Teorema 2.26. De esto, tenemos que $f(R) = P$.

Sea $\mathcal{D}$ una componente de $C_n(f)^{-1}(\mathcal{K})$ tal que $D \cup E \cup R \in \mathcal{D}$. Sabemos que $\cup\mathcal{D} \in C_n(X)$, por el Teorema 1.34. Como $D \cup E \cup R \subset \cup\mathcal{D}$, existe una componente J de $\cup\mathcal{D}$ tal que $D \subset J$. Por la Proposición 2.19, $f(J) \subset P \cup Q$. De esta forma, como tenemos que $f(J)$ es conexo y $f(J) \cap Q \neq \emptyset$, podemos afirmar que $f(J) \subset Q$. Así, $D = J$ pues, D es una componente de $f^{-1}(Q)$. De lo que concluimos que D es una componente de $\cup\mathcal{D}$. De la misma manera es posible probar que E es una componente de $\cup\mathcal{D}$.

Ahora, si $A \in \mathcal{D}$, entonces cada componente de $\cup\mathcal{D}$ intersecta a A (ver Lema 1.33). Con esto tenemos que $f(A)$ tiene a lo más $n-2$ componentes en P. Así, $C_n(f)(\mathcal{D}) \subset \{A \cup Q : A \in C_{n-2}(P)\}$ y $C_n(f)(\mathcal{D}) \neq \mathcal{K}$. Notemos que $\mathcal{K} \cap F_n(Y) = \emptyset$. Luego, $q_X^n(\mathcal{D})$ es una componente de $HS_n(f)^{-1}(q_Y^n(\mathcal{K}))$ tal que $HS_n(f)(q_X^n(\mathcal{D})) \neq q_Y^n(\mathcal{K})$. Con lo que $HS_n(f)$ no es confluente. $\square$

Notemos la siguiente interesante proposición.

Proposición 2.34. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \geq 3$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) f es monótona;

(2) $HS_n(f)$ es monótona;

(3) $C_n(f)$ es monótona;

(4) $C_n(f)$ es confluente;

(5) $HS_n(f)$ es confluente.

Demostración. (*1*) implica (*2*) y (*2*) implica (*3*), se siguen del Teorema 2.11. El Diagrama I, nos da (*3*) implica (*4*). La afirmación (*4*) implica (*5*) es consecuencia del Teorema 2.9. Finalmente, (*5*) implica (*1*) se sigue del Teorema 2.33. □

2.3.2. Funciones confluentes sobre localmente conexos

Como mencionamos anteriormente, existe una función continua f entre continuos tal que f es confluente y $C(f)$ no es confluente.

Con el siguiente resultado, que es una consecuencia de [28, Teorema 3.4, pág.1051] y [20, Teorema 6.3, pág.246], mostramos una condición para que f sea confluente si y sólo si $C_n(f)$ es confluente, si $n \in \{1, 2\}$.

Teorema 2.35. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos, donde Y es localmente conexo y $n \in \{1, 2\}$. Entonces f es confluente si y sólo si $C_n(f)$ es confluente.*

En el siguiente ejemplo, mostramos una función continua f definida entre continuos localmente conexos, tal que f es abierta, por tanto, confluente, y $C_n(f)$ no es confluente para ninguna $n \geq 3$. Además, veremos que $C_n(f)$ no es empalmante para ninguna $n \geq 3$.

Ejemplo 2.36. *Sea* $f : [0,1] \to [0,1]$ *la función definida por:*

$$f(t) = 1 - |2t - 1|.$$

Claramente, f *es abierta y confluente. Definamos:*

$$L_t = \begin{cases} A_t \cup B_t, & si\ t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ C_t \cup D_t, & si\ t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

para cada $t \in [0,1]$*, donde* $A_t = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4} - \frac{t}{6}]$, $B_t = [\frac{t}{6} + \frac{3}{4}, \frac{11}{12}]$, $C_t = [\frac{t}{3} + \frac{1}{3}, \frac{t}{6} + \frac{7}{12}]$ *y* $D_t = [\frac{11}{12} - \frac{t}{6}, 1 - \frac{t}{6}]$.

Notemos que $A_{1/2} \cup B_{1/2} = C_{1/2} \cup D_{1/2} = [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{5}{6}, \frac{11}{12}]$, $L_0 = [\frac{1}{2}, \frac{11}{12}]$, $L_1 = [\frac{2}{3}, \frac{5}{6}]$ *y* $L_t \in C_2([0,1]) \setminus C_1([0,1])$ *para cada* $t \in (0,1)$.

Sea $\mathcal{L} = \{L_t : t \in [0,1]\}$. *Observemos que* $\mathcal{L}$ *es un arco en* $C_2([0,1])$. *Ver la Figura 2.2.*

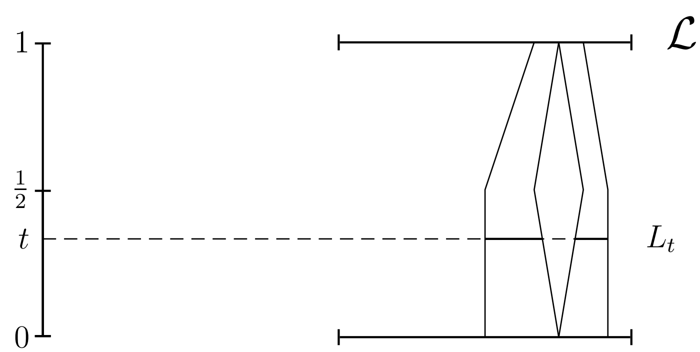

Figura 2.2

Definamos $\mathcal{K} = \{L \cup \{0\} : L \in \mathcal{L}\}$. *Claramente,* $\mathcal{K}$ *es un subcontinuo de* $C_3([0,1])$. *Sean* $\mathcal{D}$ *y* $\mathcal{E}$ *las componentes de* $C_3(f)^{-1}(\mathcal{K})$ *tales que* $\{0,1\} \cup [\frac{1}{4}, \frac{11}{24}] \in \mathcal{D}$ *y* $\{0,1\} \cup [\frac{1}{3}, \frac{5}{12}] \in \mathcal{E}$.

Observemos que, $C_3(f)(\mathcal{D}) = \{\{0\} \cup [\frac{1}{2}, \frac{11}{12}]\}$ *y* $C_3(f)(\mathcal{E}) = \{\{0\} \cup [\frac{2}{3}, \frac{5}{6}]\}$. *De esto se sigue que* $C_3(f)$ *no es empalmante. Usando una idea similar, podemos probar que* $C_n(f)$ *no es empalmante para ninguna* $n \geq 4$.

Observación 2.37. Notemos que con el Ejemplo 2.36, además, mostramos una función semiconfluente y empalmante f, tal que $C_n(f)$ no es semiconfluente ni empalmante para ninguna $n \geq 3$.

De la Observación 2.37, nos queda la siguiente pregunta:

Pregunta 2.38. *Sea* $f : X \to Y$ *una función continua entre continuos. ¿Si* f *es semiconfluente (o empalmante), entonces es* $C_2(f)$ *semiconfluente (o empalmante)?*

2.3.3. Débilmente confluentes y seudoconfluentes

Las funciones débilmente confluentes se introducen naturalmente como una condición necesaria y suficiente sobre la función f, para que la función inducida $C_n(f)$ sea suprayectiva, como mostramos en la Proposición 1.51.

Notemos que si $C_n(f)$ o $HS_n(f)$ son seudoconfluentes para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces, por la Definición 1.40, $C_n(f)$ y $HS_n(f)$ son suprayectivas. Con esto concluimos que f es débilmente confluente, usando las Proposiciones 1.51 y 1.54. Así, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.39. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si $C_n(f)$ es seudoconfluente (o $HS_n(f)$ es seudoconfluente), entonces f es débilmente confluente.*

Un resultado similar para la función inducida 2^f lo enunciamos a continuación. Una prueba puede ser consultada en [14, Teorema 7.2, pág.151].

Teorema 2.40. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Si 2^f es seudoconfluente, entonces f es débilmente confluente.*

Usando los Teoremas 2.9, 2.39 y 2.40, además, como toda función débilmente confluente es seudoconfluente (ver Diagrama I), tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.41. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Dadas las siguientes afirmaciones:*

(1) 2^f es débilmente confluente (seudoconfluente);

(2) $C_n(f)$ es débilmente confluente (seudoconfluente);

(3) $HS_n(f)$ es débilmente confluente (seudoconfluente);

(4) f es débilmente confluente (seudoconfluente).

Entonces (1) implica (4), (2) implica (3) y (3) implica (4).

Observación 2.42. En [14, Ejemplo 6.6, pág.148], se define la función $f : [0, 1] \to S^1$ dada por $f(t) = e^{4\pi it}$. Claramente, f es débilmente confluente. En [14, Ejemplo 6.6, pág.148] se demuestra que ni 2^f ni $C(f)$ son seudoconfluentes. Usando un argumento similar, no es difícil probar que $HS_n(f)$ no es seudoconfluente para ninguna $n \in \mathbb{N}$.

2.4. Casimonótonas y débilmente monótonas

El siguiente resultado nos será de utilidad en esta sección.

Proposición 2.43. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos, $n \in \mathbb{N}$ y K un subcontinuo de Y. Si L es una componente de $f^{-1}(K)$, entonces $C_n(L)$ es una componente de $C_n(f)^{-1}(C_n(K))$.*

Demostración. Sean K un subcontinuo de Y y L una componente de $f^{-1}(K)$. Si $A \in C_n(L)$, entonces $f(A) \subset K$ y $f(A)$ tiene a lo más n componentes, así $C_n(f)(C_n(L)) \subset C_n(K)$.

Ahora, supongamos que existe un subcontinuo $\mathcal{L}$ de $C_n(X)$ tal que $C_n(L) \subset \mathcal{L}$ y $C_n(f)(\mathcal{L}) \subset C_n(K)$. Notemos que $f(\cup\mathcal{L}) \subset K$, por la Proposición 2.19. Además, cada componente de $\cup\mathcal{L}$ intersecta a L, por el Lema 1.33. Con lo que tenemos que $\cup\mathcal{L}$ es conexo. Como L es una componente de $f^{-1}(K)$, $L = \cup\mathcal{L}$. Con lo que concluimos que $\mathcal{L} = C_n(L)$. $\square$

Con el siguiente teorema mostramos que si $C_n(f)$ es casimonótona entonces f también lo es.

Teorema 2.44. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$ es casimonótona, entonces f es casimonótona.*

Demostración. Supongamos que $C_n(f)$ es casimonótona. Sea K un subcontinuo de Y tal que $Int_Y(K) \neq \emptyset$. Claramente, $\langle Int_Y(K)\rangle_n \subset C_n(K)$ y de esto, $C_n(K)$ es un subcontinuo con interior no vacío de $C_n(Y)$. Por hipótesis:

$$C_n(f)^{-1}(C_n(K)) = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup ... \cup \mathcal{L}_m,$$

donde cada $\mathcal{L}_i$ es una componente de $C_n(f)^{-1}(C_n(K))$ y $C_n(f)(\mathcal{L}_i) = C_n(K)$.

Sea L una componente de $f^{-1}(K)$. Por la Proposición 2.43, $C_n(L)$ es una componente de $C_n(f)^{-1}(C_n(K))$. De esta manera, cada componente de $f^{-1}(K)$ determina una componente de $C_n(f)^{-1}(C_n(K))$. Con lo que $f^{-1}(K)$ tiene a lo más m componentes y, como $C_n(f)(C_n(L)) = C_n(K), f(L) = K$. Así, f es casimonótona. $\square$

Usando un argumento similar al que mostramos en la prueba del Teorema 2.44, no es difícil probar el siguiente resultado.

Teorema 2.45. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$ es débilmente monótona, entonces f es débilmente monótona.*

A continuación mostraremos una función casimonótona y, por tanto, débilmente monótona tal que $C_n(f)$ no es débilmente monótona. Así, $C_n(f)$ no es casimonótona, para ninguna $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.46. *Sea $X = Cl_{\mathbb{R}^2}\{(x, y) : 0 < x \leq 1, y = \text{sen}(1/x)\}$. Definamos $Y = X/\{(0, -1), (0, 1)\}$. Sea $f : X \to Y$ la función cociente. Observemos la Figura 2.3.*

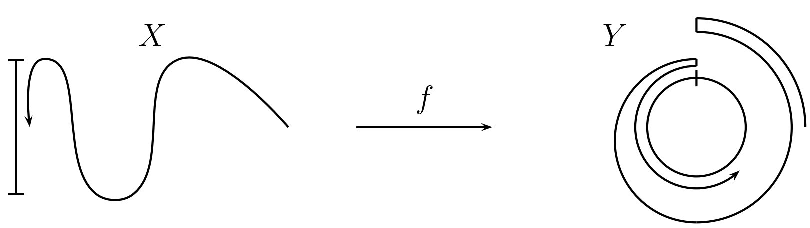

Figura 2.3

No es difícil probar que f es casimonótona y, así, débilmente monótona. Observemos que f no es una función débilmente confluente. De esta forma, $C_n(f)$ no es suprayectiva, por la Proposición 1.51. Luego, de la Definición 1.40, tenemos que $C_n(f)$ no es débilmente monótona, para ninguna $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.47. *Sea $f : X \to Y$ una función continua definida entre continuos. Dados los siguientes enunciados:*

(1) 2^f es casimonótona (débilmente monótona);

(2) $C_n(f)$ es casimonótona (débilmente monótona), para cada $n \in \mathbb{N}$;

(3) $HS_n(f)$ es casimonótona (débilmente monótona), para cada $n \in \mathbb{N}$;

(4) f es casimonótona (débilmente monótona).

Entonces (1) implica (4), (2) implica (3) y (2) implica (4).

Demostración. La afirmación (*1*) implica (*4*), se sigue de [20, Teorema 7.3, pág.248]. El Teorema 2.9 nos da (*2*) implica (*3*). Los Teoremas 2.44 y 2.45 prueban (*2*) implica (*4*). $\square$

Notemos que en el Ejemplo 2.46, mostramos una función continua f que satisface (*4*) pero no (*2*) ni (*3*) en el Teorema 2.47. Luego, tenemos las siguientes preguntas naturales:

Pregunta 2.48. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. ¿Si f es casimonótona (débilmente monótona), entonces es 2^f casimonótona (débilmente monótona, respectivamente)?*

Pregunta 2.49. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. ¿Si $HS_n(f)$ es casimonótona (débilmente monótona), entonces es 2^f (o $C_n(f)$) casimonótona (débilmente monótona, respectivamente)? Además, ¿si 2^f es casimonótona (débilmente monótona), entonces es $HS_n(f)$ casimonótona (débilmente monótona, respectivamente)?*

Pregunta 2.50. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. ¿Qué relación hay entre los siguientes enunciados?*

1. *2^f es casimonótona (débilmente monótona);*

2. *$C_n(f)$ es casimonótona (débilmente monótona), para cada $n \in \mathbb{N}$.*

2.4.1. Relaciones adicionales en localmente conexos

Como vimos anteriormente, si f es casimonótona o débilmente monótona, esto no implica que $C_n(f)$ sea casimonótona o débilmente monótona, respectivamente. A continuación, probaremos que esta implicación es cierta si Y es localmente conexo y $n \in \{1, 2\}$.

Teorema 2.51. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos, donde Y es localmente conexo, y $n \in \{1, 2\}$. Entonces f es casimonótona (débilmente monótona) si y sólo si $C_n(f)$ es casimonótona (débilmente monótona, respectivamente).*

Demostración. Supongamos que f es débilmente monótona y Y localmente conexo. Por el Teorema 1.44, f es confluente. Además, usando el Teorema 2.35, tenemos que $C_n(f)$ es confluente. Así, $C_n(f)$ es débilmente monótona.

Luego, supongamos que f es casimonótona y Y localmente conexo. Sea $\mathcal{L}$ un subcontinuo de $C_n(Y)$ tal que $Int_{C_n(Y)}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$. Sean $L \in Int(\mathcal{L})$ y $\epsilon > 0$ tal que $B_H(L, \epsilon) \subset \mathcal{L}$. Supongamos que $L = L_1 \cup L_2$ donde L_1 y L_2 son las componentes de L (es posible que $L_1 = L_2$). Sean $y_1 \in L_1$ y $y_2 \in L_2$. Como Y es localmente conexo, existen dos subcontinuos V_1 y V_2 de Y tales que $y_i \in Int(V_i)$ y $diám(V_i) < \frac{\epsilon}{3}$ para $i \in \{1, 2\}$. Notemos que, $L \cup V_1 \cup V_2 \in C_2(Y)$ y $H(L \cup V_1 \cup V_2, L) < \epsilon$. Con lo que tenemos, $L \cup V_1 \cup V_2 \in \mathcal{L}$. Ahora, como f es casimonótona, $f^{-1}(V_1 \cup L_1) = \cup_{i=1}^{p} N_i$ y $f^{-1}(V_2 \cup L_2) = \cup_{i=1}^{q} R_i$, donde $N_1, N_2, ..., N_p$ son las componentes de $f^{-1}(V_1 \cup L_1)$, $R_1, R_2, ..., R_q$ son las componentes de $f^{-1}(V_2 \cup L_2)$, $f(N_1) = f(N_2) = ... = f(N_p) = V_1 \cup L_1$ y $f(R_1) = f(R_2) = ... = f(R_q) = V_2 \cup L_2$.

Sea $\mathcal{K}$ una componente de $C_n(f)^{-1}(\mathcal{L})$. Sabemos que f es confluente, por el Diagrama I y por el Teorema 1.44. Entonces, $C_n(f)$ es confluente (ver Teorema 2.35) y $C_n(f)(\mathcal{K}) = \mathcal{L}$. Con lo que existe un $K \in \mathcal{K}$ tal que $f(K) = L \cup V_1 \cup V_2$. Observemos que $f^{-1}(L \cup V_1 \cup V_2) = f^{-1}(V_1 \cup L_1) \cup f^{-1}(V_2 \cup L_2) = (\cup_{i=1}^{p} N_i) \cup (\cup_{i=1}^{q} R_i)$. De esta forma, existen $k \in \{1, 2, ..., p\}$ y $l \in \{1, 2, ..., q\}$ tales que $K \subset N_k \cup R_l$, y cada componente de $N_k \cup R_l$ intersecta a K. Luego, existe un arco de orden α de K a $N_k \cup R_l$, por el Teorema 1.28. Claramente $C_n(f)(\alpha) \subset \mathcal{L}$. Así, $N_k \cup R_l \in \mathcal{K}$. Con esto concluimos que $C_n(f)^{-1}(\mathcal{L})$ tiene a lo más pq componentes. Así, $C_n(f)$ es casimonótona.

Las implicaciones restantes se siguen del Teorema 2.47. $\square$

El siguiente ejemplo muestra una función f entre continuos localmente conexos, tal que f es casimonótona, por tanto, débilmente monótona y $C_n(f)$ no es débilmente monótona (no es casi monótona), para ninguna $n \geq 3$.

Ejemplo 2.52. *Tomemos $f : [0,1] \to [0,1]$, dada por:*

$$f(t) = 1 - |2t - 1|.$$

Claramente, f es casimonótona. Supongamos que $C_n(f)$ es débilmente monótona. Como $C_n([0,1])$ es localmente conexo, para cada $n \geq 3$, tenemos que $C_n(f)$ es confluente, por el Teorema 1.46. Aplicando el Teorema 2.32, tenemos que f es monótona, pero esto claramente es una contradicción. Luego $C_n(f)$ no es débilmente monótona.

Corolario 2.53. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si $C_n(f)$ es débilmente monótona, entonces f es confluente.*

Demostración. Por el Teorema 1.30, $C_n(Y)$ es arcoconexo, luego, por el Teorema 1.43 tenemos que $C_n(f)$ es empalmante. Así, f es confluente, por el Teorema 2.23. □

Como toda función casimonótona es débilmente monótona, es inmediata la prueba del siguiente resultado, por el Corolario 2.53.

Corolario 2.54. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si $C_n(f)$ es casimonótona, entonces f es confluente.*

Corolario 2.55. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos, donde Y es localmente conexo y $n \in \{1, 2\}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $C_n(f)$ es confluente;

(2) $C_n(f)$ es débilmente monótona;

(3) f *es débilmente monótona;*

(4) f *es confluente.*

Demostración. Como toda función confluente es débilmente monótona, tenemos (*1*) implica (*2*); (*2*) implica (*3*) se sigue del Teorema 2.47. Como Y es localmente conexo, (*3*) implica (*4*), por el Teorema 1.44. Finalmente, (*4*) implica (*1*) es consecuencia del Teorema 2.35. □

Capítulo 3

Funciones Ligeras

Si f es una función no constante y diferenciable en una región R, entonces f no es constante sobre ningún subcontinuo no degenerado en R. [44, (4.1) pág.75].

La anterior afirmación, es un conocido teorema del análisis complejo. Una función tal que no es constante en ningún continuo no degenerado es conocida en topología como *ligera,* como puede observarse en la Definición 1.41. Como el anterior teorema, podemos encontrar aplicaciones útiles de las funciones ligeras en matemáticas, particularmente en topología. Por esta razón, dedicaremos este capítulo al estudio de esta clase de funciones y las relaciones con las funciones inducidas entre hiperespacios de continuos.

3.1. Relaciones generales

En esta sección mostraremos relaciones, sin ninguna condición sobre los espacios ni sobre las funciones, entre las funciones inducidas definidas entre hiperespacios de continuos, usando las funciones ligeras.

Empezaremos este capítulo con un resultado que se sigue de la definición de función ligera y las definiciones de las funciones inducidas $C_n(f)$ y $HS_n(f)$.

Proposición 3.1. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *f es ligera;*

(2) $C_n(f)^{-1}(F_n(Y)) = F_n(X)$;

(3) $HS_n(f)^{-1}(F_Y^n) = \{F_X^n\}$.

La siguiente simple proposición nos será de utilidad más adelante.

Proposición 3.2. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Si f es ligera y monótona, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Por la definición de función monótona, f es suprayectiva (ver Definición 1.40). Sea $y \in Y$. Como f es ligera, $f^{-1}(y)$ es totalmente disconexo. Por otra parte, sabemos que f es monótona, luego el conjunto $f^{-1}(y)$ es conexo. Por lo anterior, $f^{-1}(y)$ es un punto y f es inyectiva. Así, f es una función biyectiva entre continuos, luego f es un homeomorfismo. $\square$

Usando la definición de función ligera, es inmediata la prueba del siguiente teorema.

Teorema 3.3. *Si $f : X \to Y$ es una función ligera, entonces toda restricción de f sigue siendo ligera, i.e., para todo subconjunto A de X, $f|_A : A \to Y$ es una función ligera.*

El siguiente teorema, probado por J. Fugate y S. Nadler Jr., puede ser encontrado en [39, (1.212.3) pág.158] y lo usaremos con frecuencia en el desarrollo del presente capítulo.

Teorema 3.4. *Sea $f : X \to Y$ una función continua definida entre continuos. Entonces $C(f)$ es ligera si y sólo si siempre que se tengan dos subcontinuos A y B de X, con $A \subsetneq B$, se tiene que $f(A) \subsetneq f(B)$.*

La prueba del teorema anterior puede ser fácilmente generalizada a la función inducida $C_n(f)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, como mostramos a continuación.

Teorema 3.5. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $C_n(f)$ es ligera si y sólo si siempre que se tengan dos puntos A y B de $C_n(X)$, con $A \subsetneq B$ y cada componente de B intersecta a A, se tiene que $f(A) \subsetneq f(B)$.*

Demostración. Supongamos primero que existen elementos A y B de $C_n(X)$ tales que $A \subsetneq B$, cada componente de B intersecta a A y $f(A) = f(B)$. Usando el Teorema 1.28, existe un arco de orden α de A a B en 2^X. Como $A \in C_n(X)$, entonces α es un arco en $C_n(X)$, por el Teorema 1.29. Claramente, $C_n(f)(\alpha) = \{f(A)\}$. De esta manera tenemos que $C_n(f)$ no es una función ligera.

Supongamos ahora que $C_n(f)$ no es ligera, entonces existe un subcontinuo no degenerado $\mathcal{A}$ de $C_n(X)$ tal que $C_n(f)(\mathcal{A}) = \{D\}$ para algún $D \in C_n(Y)$. Por el Teorema 1.34, $\cup\mathcal{A} \in C_n(X)$. Como $\mathcal{A}$ es no degenerado, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \neq \cup\mathcal{A}$. De esta manera, cada componente de $\cup\mathcal{A}$ intersecta a A y $A \subsetneq \cup\mathcal{A}$, por el Lema 1.33. Claramente, $f(A) = f(\cup\mathcal{A}) = D$ y la prueba queda completa. $\square$

Con un argumento similar es posible probar el siguiente resultado; por esta razón no escribiremos una demostración, sin embargo, puede ser consultada en [9, (3.6) pág.183].

Teorema 3.6. *Sea $f : X \to Y$ una función continua definida entre continuos. Entonces 2^f es ligera si y sólo si siempre que se tengan dos elementos A y B de 2^X, con $A \subsetneq B$ y cada componente de B intersecta a A, se tiene que $f(A) \subsetneq f(B)$.*

Con el siguiente teorema mostramos las primeras relaciones, con respecto a las funciones ligeras, entre $2^f, C_n(f)$ y f.

Teorema 3.7. *Sea $f : X \to Y$ una función continua definida entre continuos. Dados los siguientes enunciados:*

(1) 2^f es ligera;

(2) $C_n(f)$ es ligera para algún entero positivo n;

(3) f es ligera.

Entonces (1) implica (2) y (2) implica (3).

Demostración. Notemos que como $C_n(f) = 2^f|_{C_n(X)}$, $C_n(f)$ es ligera, por el Teorema 3.3. Con lo que se sigue que (*1*) implica (*2*).

Ahora, supongamos que f no es ligera. Sea A un subcontinuo no degenerado A de X tal que $f(A) = \{y\}$ para algún $y \in Y$. Sea $a \in A$. Claramente $\{a\} \subsetneq A$ y $f(\{a\}) = f(A)$. Luego por el Teorema 3.5, $C_n(f)$ no es ligera. Así, (*2*) implica (*3*) y nuestra prueba queda completa. □

Con los siguientes dos ejemplos, mostramos que las implicaciones inversas a las presentadas en el Teorema 3.7, no son ciertas.

Ejemplo 3.8. *Existe una función ligera entre continuos f tal que $C(f)$ no es ligera.*

Sea $f : [-1,1] \to [0,1]$ definida por $f(x) = |x|$. Claramente, f es una función ligera. Ahora, tomemos los subcontinuos $[-1,0]$ y $[-1,1]$ de $[0,1]$. Observemos que, $[-1,0] \subsetneq [-1,1]$ y $f([-1,0]) = f([-1,1]) = [0,1]$. De esta manera $C(f)$ no es una función ligera, por el Teorema 3.4.

Ejemplo 3.9. *Existe una función continua entre continuos f tal que $C(f)$ es ligera, pero 2^f no es ligera.*

Sean $A = Cl_{\mathbb{R}^2}(\{(x, \mathrm{sen}(1/x)) : 0 < x \leq 1\})$ y $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2,0) + (-x,y) \in A\}$. Notemos que, como $A \cap B = \{(1, \mathrm{sen}(1))\}$, $X = A \cup B$ es un subcontinuo de $\mathbb{R}^2$. Ahora definamos la relación de equivalencia R sobre X por:

$$(x_0,y_0)R(x_1,y_1) \text{ si y sólo si } (x_0,y_0) = (x_1,y_1) \text{ o } (x_0,x_1 \in \{0,2\} \text{ y } y_0 = y_1).$$

Tomemos la función cociente f de X sobre X/R. Mirar la Figura 3.1.

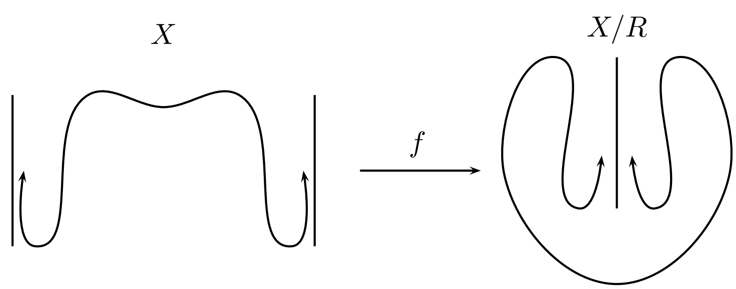

Figura 3.1

Usando el Teorema 3.4, es sencillo verificar que $C(f)$ *es ligera. Además, tomando* $P = \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(2, 0)\}$ *y* $Q = \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(2, y) : -1 \leq y \leq 1\}$, *se tiene que* P *y* Q *son puntos en* 2^X. *Además,* $P \subsetneq Q$, *cada componente de* Q *intersecta a* P *y* $f(P) = f(Q)$. *De esta manera,* 2^f *no es ligera por el Teorema 3.6.*

Observación 3.10. Notemos que en el Ejemplo 3.9, los puntos P y Q en 2^X en realidad son puntos de $C_2(X)$, así, por el Teorema 3.5, la función f es un ejemplo donde $C(f)$ es ligera, pero $C_2(f)$ no es ligera.

Teorema 3.11. *Sean* $f : X \to Y$ *una función continua entre continuos y* $n \geq 2$. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) Para cualesquiera dos subcontinuos no degenerados y disyuntos P *y* Q *de* X, *se tiene que* $f(P) \setminus f(Q) \neq \emptyset$ *y* $f(Q) \setminus f(P) \neq \emptyset$;

(2) $C_n(f)$ *es ligera.*

Demostración. Supongamos que f satisface (*1*). Probemos que $C_n(f)$ es ligera. Sean A y B puntos en $C_n(X)$ tales que $A \subsetneq B$ y cada componente de B intersecta a A. Sean $A_1, A_2, ..., A_m$ subcontinuos disyuntos de X tales que $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$ para alguna $m \leq n$. Como $A \subsetneq B$, podemos suponer que $A_1 \subsetneq B_1$ para alguna componente B_1 de B. Probemos que $f(B_1) \setminus f(A) \neq \emptyset$.

Para esto, hagamos una construcción inductiva. Probemos primero que $f(B_1) \setminus f(A_1) \neq \emptyset$. Como $A_1 \subsetneq B_1$, por el Teorema 1.9, existe un subcontinuo no degenerado L_1 de $B_1 \setminus A_1$. Claramente, $L_1 \cap A_1 = \emptyset$. Como f satisface (*1*), $f(L_1) \setminus f(A_1) \neq \emptyset$. De esta manera, $f(B_1) \setminus f(A_1) \neq \emptyset$.

Ahora supongamos que, para alguna k, $f(B_1) \setminus f(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) \neq \emptyset$ y probemos que $f(B_1) \setminus f(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1}) \neq \emptyset$.

Mostremos que:

$$B_1 \setminus (f^{-1}(f(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k)) \cup A_{k+1}) \neq \emptyset. \tag{3.1}$$

Supongamos que $B_1 \subset f^{-1}(f(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k)) \cup A_{k+1}$. Como $A_1 \subsetneq B_1$, B_1 es conexo y cada uno de los A_i, con $1 \leq i \leq k+1$, es una componente de A, tenemos que $B_1 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{k+1}) \neq \emptyset$. Luego, por el Teorema 1.9, existe un subcontinuo no degenerado K de $B_1 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{k+1})$. Recuerde que como $B_1 \subset f^{-1}(f(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k)) \cup A_{k+1}$, luego tenemos:

$$K \subset f^{-1}(f(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k)) \setminus (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k). \tag{3.2}$$

Con esto, es claro que:

$$K = (f^{-1}(f(A_1)) \cap K) \cup (f^{-1}(f(A_2)) \cap K) \cup ... \cup (f^{-1}(f(A_k)) \cap K). \tag{3.3}$$

Notemos ahora que si $i \in \{1, 2, ..., k\}$, entonces $f^{-1}(f(A_i)) \cap K$ es cerrado y totalmente disconexo, pues, claramente $f^{-1}(f(A_i)) \cap K$ es cerrado y si tuviera una componente no degenerada R, entonces por (3.2), $R \cap A_i = \emptyset$. Pero R y A_i contradicen la condición (*1*). De esta forma, $f^{-1}(f(A_i)) \cap K$ es cerrado y totalmente disconexo para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Así, por el [38, Teorema 4.7, pág.22], $f^{-1}(f(A_i)) \cap K$ es de dimensión 0 para cada $1 \leq i \leq k$. Pero esto contradice [38, Teorema 5.2, pág.26] y (3.3), pues la unión finita de conjuntos cerrados de dimensión 0 tiene dimensión 0 y K es un continuo no degenerado. Con esto concluimos (3.1).

Finalmente, usando nuevamente el Teorema 1.9, existe un subcontinuo no degenerado L_k de $B_1 \setminus (f^{-1}(f(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k)) \cup A_{k+1})$. Claramente, $f(L_k) \cap f(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = \emptyset$ y, como $L_k \cap A_{k+1} = \emptyset$, por la condición (*1*) tenemos que $f(L_k) \setminus f(A_{k+1}) \neq \emptyset$. De esta manera, concluimos que

$f(L_k) \setminus f(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1}) \neq \emptyset$. Como $f(L_k) \subset f(B_1)$, tenemos:

$$f(B_1) \setminus f(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1}) \neq \emptyset.$$

Así, por inducción, $f(B_1) \setminus f(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m) \neq \emptyset$ y $f(B_1) \setminus f(A) \neq \emptyset$. Como $B_1 \subset B$, tenemos que $f(A) \subsetneq f(B)$. Luego, usando el Teorema 3.5, $C_n(f)$ es una función ligera.

Supongamos ahora que existen dos subcontinuos no degenerados A y B de X, tales que $A \cap B = \emptyset$ y $f(A) \subset f(B)$, i.e., $f(A) \setminus f(B) = \emptyset$. Sea $a \in A$ y definamos $P = \{a\} \cup B$ y $Q = A \cup B$. Claramente, P y Q están en $C_n(X)$, con $n \geq 2$. Además, $P \subsetneq Q$, cada componente de Q intersecta a P y $f(P) = f(Q)$. Aplicando el Teorema 3.5, concluimos que $C_n(f)$ no es ligera. De la misma forma concluimos que $C_n(f)$ no es ligera cuando $f(B) \setminus f(A) = \emptyset$. $\square$

Corolario 3.12. *Sean $f : X \to Y$ una función continua definida entre continuos y dos enteros n y m mayores o iguales a 2. Entonces $C_n(f)$ es ligera si y sólo si $C_m(f)$ es ligera.*

Con el Corolario 3.12, el Teorema 3.7 lo podemos refinar como sigue:

Teorema 3.13. *Sea $f : X \to Y$ una función continua definida entre continuos. Dados los siguientes enunciados:*

(1) 2^f es ligera;

(2) $C_n(f)$ es ligera para cualquier entero $n \geq 2$;

(3) $C(f)$ es ligera;

(4) f es ligera.

Entonces (1) implica (2), (2) implica (3) y (3) implica (4).

Demostración. Por el Teorema 3.7, tenemos (*1*) implica (*2*) y (*3*) implica (*4*). Luego, sólo debemos probar que (*2*) implica (*3*). Usando el Teorema 3.3, tenemos que, como $C(f) = C_n(f)|_{C(X)}$, entonces $C(f)$ es ligera y la prueba queda completa. □

Observación 3.14. En el Ejemplo 3.9, definimos una función f tal que $C(f)$ es ligera, pero f no satisface la condición (*1*) del Teorema 3.11. Así, $C_n(f)$ no es ligera para ninguna $n \geq 2$.

En el siguiente resultado, definimos una función continua f tal que $C_n(f)$ es ligera para cualquier entero positivo n, pero 2^f no es ligera. El ejemplo mostrado en el siguiente teorema es una modificación de [9, Ejemplo 5.2, pág.188]. Además, consideramos importante resaltar que el siguiente ejemplo da una respuesta negativa a [9, Pregunta 5.1, pág.188], mostrando una función continua f definida entre continuos arcoconexos tal que $C(f)$ es ligera, pero 2^f no es ligera.

Teorema 3.15. *Existe una función continua f definida entre continuos arcoconexos, tal que $C_n(f)$ es ligera, para cada $n \in \mathbb{N}$, y 2^f no es ligera.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor y tomemos $\mathcal{C} \times [0,1]$. Sea ρ la función de Cantor definida de $\mathcal{C}$ sobre $[0,1]$, como muestra la Figura 3.2 (para detalles de ρ ver [19, pág.131]):

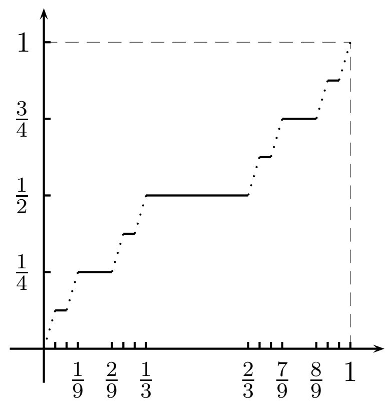

Figura 3.2: Función de Cantor $\rho : \mathcal{C} \twoheadrightarrow [0,1]$.

Usando ρ, definamos la relación de equivalencia R sobre $\mathcal{C} \times [0,1]$ por:

$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \text{ si y sólo si } (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ o}$$
$$(y_1 = y_2 = 1 \text{ y } \rho(x_1) = \rho(x_2)).$$

Sea $X = (\mathcal{C} \times [0,1])/R$. Similarmente, definimos $Y = (\mathcal{C} \times [0,1])/R'$ donde R' es definida por:

$$(x_1, y_1)R'(x_2, y_2) \text{ si y sólo si } (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ o}$$
$$(y_1, y_2 \in \{0,1\} \text{ y } \rho(x_1) = \rho(x_2)).$$

Notemos que $R \subset R'$. Denotemos por q_R y $q_{R'}$ a las funciones cociente de $\mathcal{C} \times [0,1]$ sobre X y sobre Y, respectivamente.

Sea f la función cociente de X sobre Y. La Figura 3.3, muestra una idea de cómo está definida la función f.

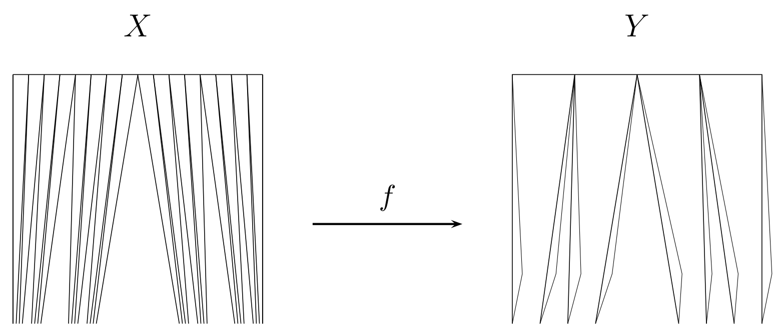

Figura 3.3: $f : \mathcal{C} \times [0,1]/R \twoheadrightarrow \mathcal{C} \times [0,1]/R'$.

Observemos que $f|_{X\setminus q_X(\mathcal{C}\times\{0\})}$ es una biyección. Con esta observación y usando el Teorema 3.11, es sencillo probar que $C_n(f)$ es ligera para cualquier entero $n \geq 2$ y, por el Teorema 3.13, $C(f)$ es también ligera. Ahora, definamos $A = (C \times \{0\}) \cup \{(\frac{1}{4}, 1)\}$ y $B = (C \times \{0\}) \cup q_R(\{(x, 1) : x \in C\})$. Claramente, A y B están en 2^X, $A \subsetneq B$, cada componente de B intersecta a A y $f(A) = f(B)$. De esta manera, usando el Teorema 3.6, 2^f no es una función ligera. $\square$

Teorema 3.16. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $C_n(f)$ es ligera si y sólo si $HS_n(f)$ es ligera.*

Demostración. Supongamos que $HS_n(f)$ no es ligera. Entonces existe un subcontinuo no degenerado $\mathcal{A}$ de $HS_n(X)$ tal que $HS_n(f)(\mathcal{A}) = \{\chi\}$ para algún $\chi \in HS_n(Y)$. Por el Teorema 1.9, existe un subcontinuo no degenerado $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A} \setminus \{F_X^n\}$. Claramente, $HS_n(f)(\mathcal{B}) = \{\chi\}$. Consideremos dos casos:

1. $\chi = F_Y^n$. Sea $\lambda \in \mathcal{B}$. Usando la Observación 1.21, $(q_X^n)^{-1}(\lambda) \in C_n(X) \setminus F_n(X)$ y $C_n(f)((q_X^n)^{-1}(\lambda)) \in F_n(Y)$. Para cada componente L_i de $(q_X^n)^{-1}(\lambda)$, sea $x_i \in L_i$. Supongamos que $(q_X^n)^{-1}(\lambda)$ tiene k componentes. Notemos que $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subsetneq (q_X^n)^{-1}(\lambda)$, cada componente

de $(q_X^n)^{-1}(\lambda)$ intersecta a $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ y $C_n(f)(\{x_1, x_2, ..., x_k\}) = C_n(f)((q_X^n)^{-1}(\lambda))$.

Esto implica que $C_n(f)$ no es ligera, por el Teorema 3.5.

2. $\chi \neq F_Y^n$. Usando la Observación 1.21, $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{B})$ es un subcontinuo no degenerado de $C_n(X)$, $(q_Y^n)^{-1}(\chi) \in C_n(Y)$ y $C_n(f)((q_X^n)^{-1}(\mathcal{B})) = (q_Y^n)^{-1}(\chi)$ (ver el Diagrama 1.4). Luego $C_n(f)$ no es ligera.

Supongamos ahora que $C_n(f)$ no es ligera. Por el Teorema 3.5, existen A y B en $C_n(X)$ tales que $A \subsetneq B$, cada componente de B intersecta a A y $f(A) = f(B)$. Por el Teorema 1.9, podemos suponer que $A \notin F_n(X)$. Sea α un arco de orden en $C_n(X)$ de A a B. Claramente, $\alpha \cap F_n(X) = \emptyset$ y $C_n(f)(\alpha) = \{f(A)\}$. Luego, por la Observación 1.21, $q_X^n(\alpha)$ es un subcontinuo no degenerado de $HS_n(X)$ y $HS_n(f)(q_X^n(\alpha)) = \{q_Y^n(f(A))\}$. De esta manera, $HS_n(f)$ no es ligera y nuestra prueba queda completa. □

Los Teoremas 3.13 y 3.16 implican la siguiente proposición:

Proposición 3.17. *Sea $f : X \to Y$ una función continua definida entre continuos. Dados los siguientes enunciados:*

(1) 2^f es ligera;

(2) $HS_n(f)$ es ligera para algún entero $n \geq 2$;

(3) $HS(f)$ es ligera;

(4) f es ligera.

Entonces (1) implica (2), (2) implica (3) y (3) implica (4).

3.1.1. Tabla de resumen

Con la siguiente tabla, hacemos referencia a las relaciones que estudiamos en esta sección entre las funciones $f, C_n(f), HS_n(f)$ y 2^f.

$2^f \Rightarrow C_n(f)$	$C_n(f) \Rightarrow HS_n(f)$	$HS_n(f) \Rightarrow f$
✓ Teorema 3.7	✓ Teorema 3.16	✓ Proposición 3.17
$2^f \Rightarrow HS_n(f)$	$C_n(f) \Rightarrow f$	$2^f \Rightarrow f$
✓ Proposición 3.17	✓ Teorema 3.7	✓ Teorema 3.7
$f \Rightarrow HS_n(f)$	$HS_n(f) \Rightarrow C_n(f)$	$C_n(f) \Rightarrow 2^f$
$\times$ Ejemplo 3.8	✓ Teorema 3.16	$\times$ Teorema 3.15
$HS_n(f) \Rightarrow 2^f$	$f \Rightarrow C_n(f)$	$f \Rightarrow 2^f$
$\times$ Teorema 3.15	$\times$ Ejemplo 3.8	$\times$ Ejemplo 3.8

3.2. Funciones ligeras y suprayectivas

Es importante resaltar que en el Ejemplo 3.9 y en el Teorema 3.15, mostramos funciones que no son débilmente confluentes, por consiguiente $C_n(f)$ no es suprayectiva para ninguna $n \in \mathbb{N}$ (ver la Proposición 1.51). En esta sección, vamos a probar que tomar la función inducida $C_n(f)$ ligera y suprayectiva, para cada $n \geq 2$, es sólo posible si f es un homeomorfismo.

La siguiente proposición, aunque simple de demostrar, nos será de utilidad en la prueba del primer resultado importante de esta sección.

Proposición 3.18. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos tal que existe $y \in Y$ con $f^{-1}(y)$ disconexo. Si P y Q son componentes diferentes de $f^{-1}(y)$, entonces existe un abierto W de Y tal que $y \in W$ y P y Q pertenecen a componentes diferentes de $f^{-1}(W)$.*

Demostración. Probemos primero que, para algún entero positivo n, $f^{-1}(Cl_Y(B(y, \frac{1}{n})))$ contiene a P y Q en componentes diferentes.

Supongamos que para cada entero positivo n, $f^{-1}(Cl_Y(B(y, \frac{1}{n})))$ contiene a P y Q en la misma componente. Sea R_n la componente de $f^{-1}(Cl_Y(B(y, \frac{1}{n})))$ tal que $P \cup Q \subset R_n$. Claramente, $R_n \in C(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por la compacidad de $C(X)$, existe una subsucesión $\{n_k\}$ de $\mathbb{N}$ tal que $\lim_{k\to\infty} R_{n_k} = R$ para algún R en $C(X)$. Notemos que $f(R_{n_k}) \subset Cl_Y(B(y, \frac{1}{n_k}))$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Así, por continuidad de $C(f)$, $C(f)(R) = \{y\}$. Por otra parte, como $P \cup Q \subset R_n$ y $R_{n+1} \subset R_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $P \cup Q \subset R$. Con lo que contradecimos nuestra hipótesis que P y Q pertenecen a componentes diferentes de $f^{-1}(y)$. Por lo que existe un entero positivo n_0 tal que P y Q pertenecen a componentes diferentes de $f^{-1}(Cl_Y(B(y, \frac{1}{n_0})))$.

Finalmente, tomando $W = B(y, \frac{1}{n_0})$, como $f^{-1}(W) \subset f^{-1}(Cl_Y(B(y, \frac{1}{n_0})))$ entonces P y Q pertenecen a componentes diferentes de $f^{-1}(W)$. $\square$

A continuación, presentamos el teorema mas importante en esta sección.

Teorema 3.19. *Sean $f : X \to Y$ una función débilmente confluente entre continuos y $n \geq 2$. Si $C_n(f)$ es ligera, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Notemos que, f es una función ligera, por el Teorema 3.13. Usando la Proposición 3.2, es suficiente probar que f es monótona.

Supongamos que f no es monótona. Sea $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y)$ es disconexo. Sean x_1 y x_2 puntos diferentes de $f^{-1}(y)$. Como f es ligera, $\{x_1\}$ y $\{x_2\}$ son componentes de $f^{-1}(y)$. Por la Proposición 3.18, existe un abierto W de Y tal que x_1 y x_2 pertenecen a componentes diferentes de $f^{-1}(W)$ y $y \in W$.

Sean P_1 y P_2 subcontinuos no degenerados de $f^{-1}(W)$, tales que $x_1 \in P_1$ y $x_2 \in P_2$ (ver Teorema 1.9). Sea $K = f(P_1) \cup f(P_2)$. Como $y \in f(P_1) \cap f(P_2)$, K es un subcontinuo de Y y $K \subset W$. Ahora, como f es débilmente confluente, existe un subcontinuo Q de X tal que $f(Q) = K$. Observemos que, como P_1 y P_2 están en componentes diferentes de $f^{-1}(W)$, tenemos que $P_1 \cap Q = \emptyset$ o $P_2 \cap Q = \emptyset$. Claramente, $f(P_1) \subset f(Q)$ y $f(P_2) \subset f(Q)$. De esta forma, si $P_1 \cap Q = \emptyset$ entonces $f(Q) \setminus f(P_1) = \emptyset$ y, por el Teorema 3.11, $C_n(f)$ no es ligera, para ninguna $n \geq 2$. Así, f es monótona. De la misma forma si $P_2 \cap Q = \emptyset$. □

Notemos el siguiente simple, pero interesante, corolario.

Corolario 3.20. *Sea $f : X \to Y$ una función débilmente confluente entre continuos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) 2^f *es ligera;*

(2) $HS_n(f)$ *es ligera, para cada* $n \geq 2$*;*

(3) $C_n(f)$ *es ligera, para cada* $n \geq 2$*;*

(4) f *es un homeomorfismo.*

Demostración. La Proposición 3.17 muestra (*1*) implica (*2*). Además, (*2*) implica (*3*) es consecuencia del Teorema 3.16. También, (*3*) implica (*4*) la da el Teorema 3.19. Finalmente, la afirmación (*4*) implica (*1*) se sigue del Teorema 1.57. □

Con el siguiente ejemplo mostramos una función f débilmente confluente, tal que $C(f)$ es ligera y f no es un homeomorfismo, luego tenemos que el

Teorema 3.19 (ni el Corolario 3.20) no es válido cuando $n = 1$. Este ejemplo lo tomamos de [9, Ejemplo 4.5, pág.187].

Teorema 3.21. *Existe una función débilmente confluente f definida entre continuos, tal que $C(f)$ es ligera, pero f no es monótona.*

Demostración. Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, la circunferencia unitaria en el plano complejo $\mathbb{C}$. Tomemos Σ_3, conocido como *el solenoide triádico,* definido como:

$$\Sigma_3 = \varprojlim\{S_n, \varphi_n^{n+1}\},$$

donde $S_n = S^1$ y $\varphi_n^{n+1}(z) = z^3$ para cada $z \in S^1$ y $n \in \mathbb{N}$. Ahora definamos $f : \Sigma_3 \to \Sigma_3$ por:

$$f(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{z_n^2\}_{n=1}^{\infty}.$$

Notemos que, si $f_n : S^1 \to S^1$ está definida por $f_n(z) = z^2$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces f está definida de acuerdo a las condiciones del Teorema 1.15. Así, f es una función continua.

Mostremos primero que, para cualquier $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Sigma_3$, se tiene que $|f^{-1}(\{y_n\}_{n=1}^{\infty})| = 2$. Claramente, $f_n(z) = z^2$ es suprayectiva para cada $n \in \mathbb{N}$, luego f es suprayectiva, por el Teorema 1.16. Con esto, tenemos que $f^{-1}(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}) \neq \emptyset$, para cualquier punto $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Σ_3.

Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ puntos de $f^{-1}(\{y_n\}_{n=1}^{\infty})$ tales que $x_1 = z_1$. Probemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Supongamos que para alguna $k \in \mathbb{N}$, $x_k = z_k$. Por la definición de f, sabemos que:

$$x_k^2 = z_k^2 = y_k \text{ y } x_{k+1}^2 = z_{k+1}^2 = y_{k+1}. \tag{3.4}$$

Con (3.4), tenemos que $x_{k+1} = z_{k+1}$ o $x_{k+1} = -z_{k+1}$. Supongamos que $x_{k+1} = -z_{k+1}$. Por otra parte, por la definición de Σ_3, tenemos que:

$$x_{k+1}^3 = x_k \text{ y } z_{k+1}^3 = z_k. \tag{3.5}$$

Reemplazando $x_{k+1} = -z_{k+1}$ en (3.5), concluimos que $x_k = -z_k$, lo que contradice nuestra hipótesis. Así, $x_{k+1} = z_{k+1}$ y, de una manera inductiva, tenemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Como existen exactamente dos puntos a y b en S^1 tales que $a^2 = b^2 = y_1$, tenemos que $|f^{-1}(\{y_n\}_{n=1}^{\infty})| \leq 2$. Ahora, si tomamos $a \in S^1$ tal que $a^2 = y_1$, no es difícil probar que existe un único punto $z_2 \in S^1$ tal que $z_2^2 = y_2$ y $z_2^3 = a$. Así, inductivamente, podemos encontrar un único punto $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Sigma_3$ tal que $z_1 = a$ y $f(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. De manera similar si tomamos $b \in S^1$. Con lo anterior, concluimos que, $|f^{-1}(\{y_n\}_{n=1}^{\infty})| = 2$ para cualquier $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Sigma_3$. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es tal que $f(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, escribiremos $f^{-1}(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{-x_n\}_{n=1}^{\infty}\}$.

Mostremos ahora que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Sigma_3$, entonces no existe un subcontinuo propio L de Σ_3 tal que $\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{-x_n\}_{n=1}^{\infty}\} \subset L$. Supongamos que existen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Sigma_3$ y un subcontinuo propio L de Σ_3, tales que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{-x_n\}_{n=1}^{\infty}$ son puntos de L. Por el Teorema 1.13, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $\varphi_m(L) \neq S^1$ para todo $m \geq N$. Por nuestra suposición, $\{x_{N+1}, -x_{N+1}\} \subset \varphi_{N+1}(L)$. Notemos que $\varphi_{N+1}(L)$ es un subcontinuo de S^1 tal que contiene dos puntos opuestos. De esta manera, $(\varphi_{N+1}(L))^3 = S^1$. Pero, por la definición de Σ_3, $(\varphi_{N+1}(L))^3 = \varphi_N(L) = S^1$. Con lo que contradecimos la selección de N. De esta manera, para cualquier $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Sigma_3$, no existe un subcontinuo propio L de Σ_3 tal que $\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{-x_n\}_{n=1}^{\infty}\} \subset L$.

Definamos $h : \Sigma_3 \to \Sigma_3$ por $h(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{-x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Es fácil demostrar que h es un homeomorfismo. Si A es un subcontinuo propio de Σ_3, $h(A) \cap A = \emptyset$, por el párrafo anterior. De esta manera, $C(f)^{-1}(\Sigma_3) = \Sigma_3$ y, si $A \neq \Sigma_3$, entonces:

$$C(f)^{-1}(C(f)(A)) = \{A, h(A)\}.$$

Con esto concluimos que $C(f)$ es una función ligera.

Finalmente, probemos que $C(f)$ es suprayectiva (f es débilmente confluente). No es difícil probar lo siguiente (ver [31, Teorema 2.3.4, pág.102]):

1. Para cualquier par de funciones l y s, $C(l \circ s) = C(l) \circ C(s)$.

2. Si $\{X_n, \varphi_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa, entonces:

   $$\{C(X_n), C(\varphi_n^{n+1})\}_{n=1}^{\infty}$$

   es tambien una sucesión inversa.

3. Si X_∞ es el límite inverso de $\{X_n, \varphi_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, entonces $C(X_\infty)$ es homeomorfo al límite inverso de $\{C(X_n), C(\varphi_n^{n+1})\}_{n=1}^{\infty}$.

Notemos que, como $f_n(z) = z^2$ es una función débilmente confluente, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $C(f_n)$ es una función suprayectiva, para cada $n \in \mathbb{N}$. Nuevamente, usando el Teorema 1.16 y las afirmaciones enunciadas anteriormente, tenemos que $C(f)$ es suprayectiva, como queríamos. $\square$

La función f definida en el Teorema 3.21, en realidad es una función tal que $C(f)$ es abierta, como probaremos en el siguiente capítulo. Es importante resaltar que, por el Teorema 3.19, $C_n(f)$ no es una función ligera, para ninguna $n \geq 2$. Por consiguiente, 2^f no es ligera, por el Teorema 3.13.

3.3. Ligeras sobre espacios particulares

En esta parte, estudiaremos cuándo el hecho de que alguna función inducida sea ligera implica que la función original sea un homeomorfismo; cambiando la hipótesis de ser f débilmente confluente usada en el Teorema 3.19, por condiciones sobre los espacios.

Proposición 3.22. *Sean X un continuo arcoconexo y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $C_n(f)$ *es ligera, para alguna* $n \geq 2$;

(2) $C(f)$ *es ligera.*

Demostración. La afirmación (*1*) implica (*2*), se sigue del Teorema 3.13.

Supongamos ahora que $C_n(f)$ no es ligera, para alguna $n \geq 2$. Usando el Teorema 3.11, existen dos subcontinuos, no degenerados y disyuntos P y Q de X tales que $f(P) \subset f(Q)$. Sea α un arco entre un punto en P y otro en Q tal que $|\alpha \cap P| = 1$. Definamos $A = \alpha \cup Q$ y $B = P \cup \alpha \cup Q$. Claramente, A y B son subcontinuos de X. Como P es no degenerado, $A \subsetneq B$. Notemos que $f(A) = f(B)$; luego, por el Teorema 3.4, $C(f)$ no es ligera. □

Con el Teorema 3.19 y la Proposición 3.22, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.23. *Sean X un continuo arcoconexo y $f : X \to Y$ una función débilmente confluente. Si $C(f)$ es ligera, entonces f es un homeomorfismo.*

Observemos que, si tomamos $f : [0,1] \to S^1$ definida por $f(x) = e^{2\pi x i}$, es fácil verificar que $C(f)$ es ligera (ver el Teorema 3.4). Claramente, f está definida entre continuos arcoconexos y no es un homeomorfismo.

Definición 3.24. Sean X un continuo y α un arco en X con puntos finales a y b. Diremos que α es un *arco libre* si $\alpha \setminus \{a, b\}$ es un abierto en X.

Proposición 3.25. *Sea $f : [0, 1] \to Y$ una función continua tal que Y es una dendrita con solamente un número finito de puntos de ramificación. Si $C(f)$ es ligera, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Probemos que f es monótona. Supongamos que existen dos puntos diferentes a y b de $[0, 1]$ tales que $f(a) = f(b)$. Como f es ligera (ver Teorema 3.7), $\{a\}$ y $\{b\}$ son componentes de $f^{-1}(f(a))$. Supongamos que $a < b$. Notemos que $f([a, b])$ es una subdendrita no degenerada de Y, por [37, Corolario 10.6, pág.167].

Sea $c \in [a, b]$ tal que $f(c)$ es un punto final de $f([a, b])$ y $f(c) \neq f(a)$. Como Y tiene sólo un número finito de puntos de ramificación, existe un punto $y_0 \in Y$ tal que el arco de y_0 a $f(c)$, que denotaremos por β, es un arco libre en Y tal que $\beta \subset f([a, c]) \cap f([c, b])$. Sea $t_0 = \text{máx}\{f^{-1}(y_0) \cap [a, c]\}$. Es fácil probar que $f([t_0, c]) = \beta$. Así, $[c, b] \subsetneq [t_0, b]$ y $f([c, b]) = f([x_0, b])$. De esta manera, $C(f)$ no es ligera, por el Teorema 3.4. Con lo que podemos concluir que f es un homeomorfismo, por la Proposición 3.2. $\square$

Teorema 3.26. *Sea $f : X \to Y$ una función continua definida entre continuos, donde X es arcoconexo y Y es un dendroide con solamente un número finito de puntos de ramificación. Si $C(f)$ es ligera, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Usando la Proposición 3.2 y el Teorema 3.7, es suficiente probar que f es monótona. Supogamos que existen dos puntos diferentes a y b de X tales que $f(a) = f(b)$. Sea α un arco en X que contiene los puntos a y b. Por el Teorema 3.3, $C(f)|_{C(\alpha)}$ es ligera. Es fácil probar que $C(f)|_{C(\alpha)} = C(f|_\alpha)$. Con esto, tenemos que $f|_\alpha$ es un homeomorfismo, por la Proposición 3.25. Pero esto contradice que $f(a) = f(b)$, ya que a y b están en α. Así, f es monótona y nuestro teorema queda probado. $\square$

Con el siguiente teorema presentamos una equivalencia, en relación a las funciones ligeras, entre las funciones inducidas $2^f, HS_n(f)$ y $C_n(f)$.

Teorema 3.27. *Sea $f : X \to Y$ una función continua definida entre continuos, donde X es arcoconexo y Y es un dendroide con sólo un número finito de puntos de ramificación. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) 2^f es ligera;

(2) $HS_n(f)$ es ligera, para cada $n \in \mathbb{N}$;

(3) $C_n(f)$ es ligera, para cada $n \in \mathbb{N}$;

(4) f es un homeomorfismo.

Demostración. (*1*) implica (*2*) es consecuencia de la Proposición 3.17. (*2*) implica (*3*) se sigue del Teorema 3.16. Ahora, si $C_k(f)$ es ligera, para alguna $k \in \mathbb{N}$, entonces $C(f)$ es ligera, por el Teorema 3.13. De esto, tenemos que, por el Teorema 3.26, f es un homeomorfismo y concluimos que (*3*) implica (*4*). Finalmente, el Teorema 1.57 nos da que (*4*) implica (*1*) y nuestra prueba queda completa. $\square$

A continuación, mostraremos un resultado, donde damos una función f definida de $[0,1]$ sobre una dendrita tal que 2^f es ligera y f no es un homeomorfismo; es decir, la condición "con solamente un número finito de puntos de ramificación,"dada en la Proposición 3.25, no puede ser quitada.

Teorema 3.28. *Existe una función continua $f : [0,1] \to X$, donde X es una dendrita, tal que 2^f es ligera y f no es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $X_1 = \{(x,0) : -1 \leq x \leq 1\}$. Definamos $f_1 : [0,1] \to X_1$ que satisfaga las siguientes condiciones:

1. $f_1(0) = f_1(1) = (-1,0)$ y $f_1(\frac{1}{2}) = (1,0)$;

2. $f_1|_{[0,\frac{1}{2}]}$ y $f_1|_{[\frac{1}{2},1]}$ son homeomorfismos.

Tomemos ahora, $X_2 = X_1 \cup J_{11}$, donde $J_{11} = \{(0,y) : -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$; es decir, J_{11} es un arco donde su punto medio divide en dos partes iguales el arco X_1 y la medida de J_{11} es la mitad de la medida del arco X_1. Notemos que X_2 tiene cuatro arcos libres maximales. Dividamos $[0,1]$ en ocho partes iguales; es decir, $\{[\frac{i}{8}, \frac{i+1}{8}] : i \in \{0,1,...,7\}\}$, y definamos una función suprayectiva $f_2 : [0,1] \to X_2$ tal que:

1. $f_2(0) = f_2(1) = (-1,0)$ y $f_2(\frac{1}{2}) = (1,0)$.

2. $f_2|_{[\frac{i}{8},\frac{i+1}{8}]}$ es un homeomorfismo de $[\frac{i}{8}, \frac{i+1}{8}]$ sobre algún arco libre maximal de X_2, para cualquier $i \in \{0,1,...,7\}$; hacemos esto en sentido contrario a las manecillas del reloj.

La Figura 3.4 puede aclarar la definición de f_2.

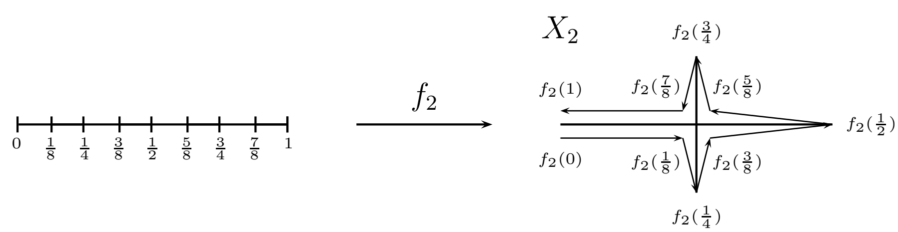

Figura 3.4

Es importante resaltar que si $f_2(t)$ es un punto final de X_2 diferente de $(-1,0)$, entonces $f_2^{-1}(f_2(t)) = \{t\}$.

Hagamos un paso más. Sea $X_3 = X_2 \cup (J_{21} \cup J_{22} \cup J_{23} \cup J_{24})$, donde J_{2i} es un arco, el cual su punto medio divide en dos partes iguales algún arco libre maximal de X_2 y la medida de J_{2i} es la mitad de la medida del arco libre maximal que intersecta, para cada $i \in \{1,2,3,4\}$. La dendrita X_3 tiene dieciséis arcos libres maximales. Dividiendo $[0,1]$ en treinta y dos partes iguales; es decir, $\{[\frac{i}{32}, \frac{i+1}{32}] : i \in \{0,1,...,31\}\}$, definimos una función suprayectiva $f_3 : [0,1] \to X_3$ tal que:

1. $f_3(\frac{i}{8}) = f_2(\frac{i}{8})$ para cada $i \in \{0,1,...,8\}$;

2. $f|_{[\frac{i}{32},\frac{i+1}{32}]}$ es un homeomorfismo de $[\frac{i}{32}, \frac{i+1}{32}]$ sobre un arco libre maximal de X_3, para cada $i \in \{0,1,...,31\}$. Hacemos esto en sentido contrario a las manecillas del reloj (ver Figura 3.5).

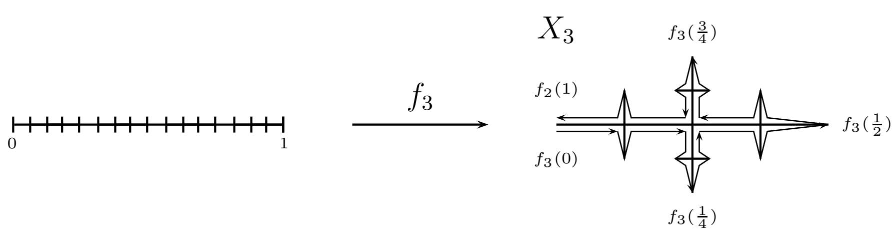

Figura 3.5

Continuando inductivamente, supongamos que tenemos definida una dendrita X_{n-1} y una función continua y suprayectiva $f_{n-1} : [0,1] \to X_{n-1}$, tales que X_{n-1} tiene 4^{n-2} arcos libres maximales y $f_{n-1}|_{[\frac{i}{2(4^{n-2})},\frac{i+1}{2(4^{n-2})}]}$ es un homeomorfismo de $[\frac{i}{2(4^{n-2})}, \frac{i+1}{2(4^{n-2})}]$ sobre algún arco libre maximal de X_{n-1}, para cada $i \in \{0,1,...,2(4^{n-2})-1\}$. Sea $X_n = X_{n-1} \cup \{J_{n-1,i} : 1 \leq i \leq 4^{n-2}\}$, donde $J_{n-1,i}$ es un arco que intersecta en el punto medio a algún arco libre maximal de X_{n-1}, en su punto medio y $J_{n-1,i}$ mide la mitad de la medida del arco libre que intersecta, para cada $i =\in \{1, 2, ..., 4^{n-2}\}$. Dividamos $[0, 1]$ en $2(4^{n-1})$ partes iguales; es decir, $\{[\frac{i}{2(4^{n-1})}, \frac{i+1}{2(4^{n-1})}] : 0 \leq i \leq 2(4^{n-1}) - 1\}$ y definamos una función suprayectiva $f_n : [0, 1] \to X_n$ tal que:

1. $f_n(\frac{i}{2(4^{n-2})}) = f_{n-1}(\frac{i}{2(4^{n-2})})$, para cada $i \in \{0, 1, ..., 2(4^{n-2})\}$;

2. $f_n|_{[\frac{i}{2(4^{n-1})}, \frac{i+1}{2(4^{n-1})}]}$ es un homeomorfismo de $[\frac{i}{2(4^{n-1})}, \frac{i+1}{2(4^{n-1})}]$ sobre algún arco libre maximal de X_n, para cada $i \in \{0, 1, ..., 2(4^{n-1})-1\}$; hacemos esto en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Es importante resaltar que, para cualquier intervalo $[\frac{i}{4^{n-1}}, \frac{i+1}{4^{n-1}}]$ donde $i \in \{0, 1, ..., 4^{n-1} - 1\}$, existe un punto $t \in [\frac{i}{4^{n-1}}, \frac{i+1}{4^{n-1}}]$ tal que $f_n(t)$ es un punto final de X_n. De esta manera, $f_n^{-1}(f_n(t)) = \{t\}$. Por otra parte, si $f_k(t)$ es un punto final de X_k, entonces $f_m(t) = f_k(t)$ para todo $m > k$ y $f_m(t)$ es un punto final de X_m.

Sea $X = \varprojlim\{X_n, \phi_n^{n+1}\}$, donde $\phi_{n-1}^n : X_n \to X_{n-1}$ esta definida por:

$$\phi_{n-1}^n(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \notin J_{n-1,i}; \\ p_i, & \text{si } x \in J_{n-1,i}. \end{cases}$$

Donde $\{p_i\} = J_{n-1,i} \cap X_{n-1}$. Recuerde que $X_n = X_{n-1} \cup \{J_{n-1i} : 1 \leq i \leq 4^{n-2}\}$. Con la siguiente figura mostramos cómo está definida ϕ_2^3.

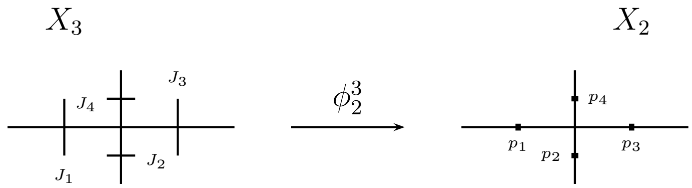

Figura 3.6

Como ϕ_n^{n+1} es monótona y X_n es hereditariamente unicoherente, para cada $n \in \mathbb{N}$, X es una dendrita, por el Teorema 1.14. Sea $I = \varprojlim\{[0,1]_n, \varphi_n^{n+1}\}$, donde $[0,1]_n = [0,1]$ y $\varphi_n^{n+1} : [0,1] \to [0,1]$ es definida tal que $\phi_n^{n+1} \circ f_{n+1} = f_n \circ \varphi_n^{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Es fácil verificar que φ_n^{n+1} es monótona, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, I es localmente conexo, por el Teorema 1.14. Es conocido que el único continuo localmente conexo que es límite inverso de arcos es el arco. De esta manera, I es homeomorfo a $[0,1]$.

Sea $f : I \to X$ definida por $f(\{t_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{f_n(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$. La función f es suprayectiva y continua, por el Teorema 1.15 y la Proposición 1.16. Claramente, f no es un homeomorfismo.

Afirmación. *El conjunto* $\{t \in I : f^{-1}(f(t)) = \{t\}\}$ *es denso en* I. $(*)$

Sea U un abierto de I. Entonces existe un entero positivo n tal que $[\frac{i}{4^{n-1}}, \frac{i+1}{4^{n-1}}] \subset U$ para algún $i \in \{0, 1, ..., 4^{n-1} - 1\}$. De esta manera, existe un punto $t \in [\frac{i}{4^{n-1}}, \frac{i+1}{4^{n-1}}]$ tal que $f_k(t) = f_n(t)$ y $f_k(t)$ es un punto final de X_k, para cada $k \geq n$. Además, $f_k^{-1}(f_k(t)) = \{t\}$ para todo $k \geq n$. Así, $f^{-1}(f(t)) = \{t\}$ y la prueba de la Afirmación $(*)$ queda completa.

Finalmente, mostremos que 2^f es ligera. Sean A y B puntos de 2^I tales que $A \subsetneq B$ y cada componente de B intersecta a A. Es fácil probar que existe un abierto U de I tal que $U \subset B \setminus A$. Por la Afirmación $(*)$, existe un $t \in U$ tal que $f^{-1}(f(t)) = \{t\}$. De esta manera, $f(t) \in f(B) \setminus f(A)$. Así, $f(A) \subsetneq f(B)$ y 2^f es ligera, por el Teorema 3.6. $\square$

Observación 3.29. Es importante resaltar que la función f definida en el Ejemplo 3.28, es una función continua tal que f no es débilmente confluente, $C_n(f)$ es ligera para cualquier entero positivo n y f no es un homeomorfismo.

3.4. Funciones simples

Las funciones simples fueron definidas en [2, pág.84].

Definición 3.30. Una función continua $f : X \to Y$ definida entre continuos se dice *simple*, si $|f^{-1}(y)| \leq 2$, para cualquier $y \in Y$.

Es importante resaltar que cualquier función simple es ligera. La función f, definida en el Teorema 3.21, es simple, donde además, $C(f)$ es simple (por tanto ligera), pero, $C_n(f)$ no es ligera, para ninguna $n \geq 2$. Notemos además que, la función definida en el Teorema 3.15, tiene la característica de que $|f^{-1}(y)| \leq 3$ para cualquier $y \in Y$. Luego es natural preguntarse lo siguiente: ¿Existe una función simple f, tal que $C_n(f)$ sea ligera, para cualquier entero positivo n, tal que 2^f no sea ligera?

El siguiente teorema da respuesta negativa a esta pregunta.

Teorema 3.31. *Sea $f : X \to Y$ una función simple. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) 2^f es ligera;

(2) $C_n(f)$ es ligera para cada $n \geq 2$;

(3) $HS_n(f)$ *es ligera para cada* $n \geq 2$.

Demostración. Notemos que, por los Teoremas 3.7 y 3.16, es suficiente demostrar que (*2*) implica (*1*). Supongamos que 2^f no es ligera. Entonces existen dos puntos A y B de 2^X tales que $A \subsetneq B$, cada componente de B intersecta a A y $f(A) = f(B)$ (ver Teorema 3.6).

Sea B_0 una componente de B tal que $B_0 \setminus A \neq \emptyset$. Por el Teorema 1.9, existe un subcontinuo no degenerado D de $B_0 \setminus A$. Como f es simple, f es ligera y $f(D)$ es un subcontinuo no degenerado de Y. Observemos que, como $f(A) = f(B)$ y $f(D) \subset f(B)$, tenemos que $f(D) \subset f(A)$. Sea $E = f^{-1}(f(D)) \cap A$. Claramente, $f(E) = f(D)$.

Probemos ahora que E es conexo. Supongamos que E no es conexo. Entonces $E = F_1 \cup F_2$, donde $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ y F_1 y F_2 son cerrados en E (por tanto cerrados en X). De esta manera, $f(D) = f(F_1) \cup f(F_2)$. Como $f(D)$ es conexo, existen $x_1 \in F_1$ y $x_2 \in F_2$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Pero, como f es simple, $x_1 \in D$ o $x_2 \in D$. Esto contradice que $A \cap D = \emptyset$. Luego E es conexo.

Finalmente, E y D son subcontinuos no degenerados tales que $E \cap D = \emptyset$ y $f(E) \subset f(D)$. Así, por el Teorema 3.11, $C_n(f)$ no es ligera para ninguna $n \geq 2$, de esta manera completamos nuestra prueba. $\square$

El siguiente corolario es una consecuencia de la Proposición 3.22 y los Teoremas 3.16 y 3.31.

Corolario 3.32. *Sea* $f : X \to Y$ *una función simple definida entre continuos arcoconexos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) 2^f *es ligera;*

(2) $C_n(f)$ *es ligera para cada* $n \in \mathbb{N}$;

(3) $HS_n(f)$ *es ligera para cada* $n \in \mathbb{N}$.

3.5. Resultados adicionales

En esta sección, presentaremos algunos teoremas en relación con los continuos indescomponibles y hereditariamente indescomponibles, así como resultados que nos dan información de cuándo la función inducida $C(C(f))$ es ligera. Además, mostraremos algunas preguntas relacionadas al tema abordado en este capítulo.

Proposición 3.33. *Sea* $f : X \to Y$ *una función continua y suprayectiva definida entre continuos, donde* Y *es un continuo indescomponible. Si* $C(f)$ *es ligera, entonces* X *es indescomponible.*

Demostración. Supongamos que existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Claramente, $Y = f(A) \cup f(B)$. Pero, como Y es indescomponible, $Y = f(A)$ o $Y = f(B)$. Supongamos que $Y = f(A)$. Notemos que $A \subsetneq X$ y $f(A) = f(X)$. Así, $C(f)$ no es ligera, por el Teorema 3.4. De la misma manera si $Y = f(B)$. □

La prueba de la siguiente proposición, es similar a la demostración dada para la Proposición 3.33.

Proposición 3.34. *Sea* $f : X \to Y$ *una función continua definida entre continuos, donde* Y *es un continuo hereditariamente indescomponible. Si* $C(f)$ *es ligera, entonces* X *es hereditariamente indescomponible.*

Demostración. Sea Z un subcontinuo de X y supongamos que $Z = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos propios de Z. Claramente, $f(Z)$ es un subcontinuo de Y y $f(Z) = f(A) \cup f(B)$. Como Y es hereditariamente indescomponible, $f(Z) = f(A)$ o $f(Z) = f(B)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f(Z) = f(A)$. Así, $A \subsetneq Z$ y $f(A) = f(Z)$. Luego $C(f)$ no es ligera, por el Teorema 3.4. □

La prueba del siguiente lema fue tomada de [20, (6.1) pág.245].

Lema 3.35. *Sea $f : X \to Y$ una función confluente entre continuos. Entonces:*

(1) Si α es un arco de 2^Y y β es una componente de $(2^f)^{-1}(\alpha)$, entonces $2^f(\beta) = \alpha$.

(2) Si α es un arco de $C(Y)$ y β es una componente de $(C(f))^{-1}(\alpha)$, entonces $C(f)(\beta) = \alpha$.

Demostración. Probemos (*1*) y de la misma forma se puede demostrar (*2*). Sean α un arco en 2^Y y β una componente de $(2^f)^{-1}(\alpha)$. Sea $\rho : [0,1] \to \alpha$ un homeomorfismo. Supongamos que $\rho(0) \in 2^f(\beta)$. Probemos que $\rho(1) \in 2^f(\beta)$. Supongamos que $\rho(1) \notin 2^f(\beta)$. Luego, por el Teorema 1.8, existen dos cerrados disyuntos X_1 y X_2 de X tales que $(2^f)^{-1}(\alpha) = X_1 \cup X_2$ donde $\beta \subset X_1$ y $(2^f)^{-1}(\rho(1)) \subset X_2$. Definamos:

$$t_0 = \sup\{t \in [0,1] : \rho(t) \in 2^f(X_1)\}.$$

Claramente, $t_0 < 1$ y, como X_1 es compacto, existe un punto K de X_1 tal que $2^f(K) = \rho(t_0)$. Ahora, tomemos:

$$M = \bigcup\{C : C \text{ es componente de } f^{-1}(\rho(t_0)) \text{ y } C \cap K \neq \emptyset\}.$$

Notemos que existe un arco de orden de K a M (ver Teorema 1.28). Luego, $M \in X_0$. Para cada $t \in [t_0, 1]$, definamos:

$$M_t = \bigcup \{D : D \text{ es una componente de } f^{-1}(\cup\rho([t_0, t])) \text{ y } D \cap M \neq \emptyset\}.$$

Como f es confluente, la imagen de cada componente de M_t va de manera suprayectiva en una componente de $\cup\rho([t_0, t])$. Sea $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $[t_0, 1]$ tal que $t_n > t_{n+1}$ y $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$. Tomemos $K_n = f^{-1}(\rho(t_n)) \cap M_{t_n}$. De nuevo como f es confluente, $f(K_n) = \rho(t_n)$. Así, $K_n \in (2^f)^{-1}(\rho(t_n))$. Además, observemos que cada componente de M_{t_n} intersecta a K_n, por el Lema 1.33. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\lim_{n\to\infty} K_n = K_0$ para algún $K_0 \in 2^X$. Pero, $K_0 \subset \cap_{n=1}^{\infty} M_{t_n} = M$ y cada componente de M intersecta a K_0. De esta forma, existe un arco de orden de K_0 a M, luego $K_0 \in X_0$. Por otra parte, $K_n \in X_1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero esto contradice que X_1 y X_2 son cerrados disyuntos. Así, $\rho(1) \in 2^f(\beta)$.

Finalmente, si $\rho(0) \notin 2^f(\beta)$ un argumento similar al párrafo anterior, nos da una contradicción. Luego $\rho(0) \in 2^f(\beta)$ y $\rho(1) \in 2^f(\beta)$. Así, $2^f(\beta) = \alpha$. $\square$

Con el siguiente teorema mostramos una relación con respecto a la función inducida $C(C(f))$.

Teorema 3.36. *Sea $f : X \to Y$ una función confluente. Si $C(C(f))$ es ligera, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Como f es confluente, f es débilmente confluente. Luego, es suficiente probar que $C_k(f)$ es ligera para alguna $k \geq 2$, por el Teorema 3.19.

Sean A_0 y B subcontinuos no degenerados tales que $A_0 \cap B = \emptyset$. Supongamos que $f(A_0) \subset f(B)$. Notemos que $C(f)$ es ligera, por el Teorema 3.7.

Luego, por el Teorema 1.9, existe un subcontinuo no degenerado A de X tal que $A \subsetneq A_0$ y $f(A) \subsetneq f(B)$. Sea D la componente de $f^{-1}(f(B))$ tal que $A \subset D$. Como f es confluente, $f(D) = f(B)$. Observemos que si $D \cap B \neq \emptyset$, como D es una componente, entonces $B \subsetneq D$. Pero esto contradice que $C(f)$ es ligera, por el Teorema 3.4. Así, $D \cap B = \emptyset$.

Sea γ un arco de orden en $C(X)$ de A a D. Como f es ligera (ver Teorema 3.7), es fácil ver que $\lambda = C(f)(\gamma)$ es también un arco (de orden) en $C(Y)$. Sea ζ la componente de $(C(f))^{-1}(\lambda)$ tal que $B \in \zeta$. Por el Lema 3.35, $C(f)(\gamma) = C(f)(\zeta)$. Con lo que si $\gamma \subsetneq \zeta$, contradecimos que $C(C(f))$ es ligera, por el Teorema 3.4. Luego, supongamos que $\gamma \cap \zeta = \emptyset$. Notemos que $C(X)$ es arcoconexo, γ y ζ son subcontinuos no degenerados de $C(X)$ y $C(C(f))(\gamma) = C(C(f))(\zeta)$. Con esto concluimos que $C(C(f))$ no es ligera, por el Teorema 3.11 y la Proposición 3.22.

Así, $f(A) \setminus f(B) \neq \emptyset$ y como $f(A) \subset f(A_0)$, $f(A_0) \setminus f(B) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $C_k(f)$ es ligera, para cada $k \geq 2$, por el Teorema 3.11. □

Corolario 3.37. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, donde Y es hereditariamente indescomponible. Si $C(C(f))$ es ligera, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Notemos que f es confluente, por [34, (6.11) pág.53]. Así, usando el Teorema 3.36, la prueba queda completa. □

Observación 3.38. Si tomamos $f : [0, 1] \to S^1$ definida por $f(x) = e^{2\pi i x}$. Es fácil ver que $C(f)|_{C(X)\setminus\{\{0\},\{1\}\}}$ es una biyección. Con esto, no es difícil probar que si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son subcontinuos de $C(X)$ tal que $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}$, entonces $C(f)(\mathcal{A}) \subsetneq C(f)(\mathcal{B})$. Con lo que tenemos un ejemplo de una función f, tal que $C(C(f))$ es ligera, pero f no es débilmente confluente. Así, f no es un homeomorfismo.

3.6. Preguntas

A continuación presentamos algunas preguntas que surgieron en el desarrollo de los resultados obtenidos en este capítulo. Empecemos con una pregunta general.

1. ¿Dada una función continua definida entre continuos $f : X \to Y$, qué condición o condiciones, sobre los espacios X o Y, o sobre la función f, son necesarias para que siempre que la función inducida $C(f)$ sea ligera (o $C_n(f)$, o 2^f), implique que f sea un homeomorfismo?

El Teorema 3.21, muestra una función continua f definida entre continuos indescomponibles tal que $C(f)$ es ligera y ni $C_n(f)$ ni 2^f son ligeras para ninguna $n \geq 2$. Además, f no es un homeomorfismo. Con lo que aparecen las siguientes preguntas:

2. ¿Existe una función continua entre continuos indescomponibles f tal que $C_n(f)$ sea ligera para $n \geq 2$ y f no sea un homeomorfismo?

3. ¿Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos hereditariamente indescomponibles. Si $C(f)$ el ligera (o $C_n(f)$, o 2^f), entonces es f un homeomorfismo?

Del comentario que aparece en el párrafo que sigue el Corolario 3.37, nos preguntamos lo siguiente:

4. ¿Sea $f : X \to Y$ una función débilmente confluente definida entre continuos. Si $C(C(f))$ es ligera, entonces es f un homeomorfismo?

Capítulo 4

Funciones Abiertas

Desde principios del siglo XX, existen resultados muy importantes en topología donde las funciones abiertas están involucradas. La definición de función abierta surge naturalmente de la noción de continuidad. Recordemos que una función continua $f : X \to Y$ definida entre espacios topológicos es llamada *abierta,* si $f(U)$ es un abierto para cualquier abierto U en X. De esta forma, las funciones abiertas han sido de gran interés para investigadores de las matemáticas y son estudiadas en cualquier curso básico de topología general.

En este capítulo, estudiaremos condiciones para que una de las funciones inducidas $2^f, C_n(f)$ o $HS_n(f)$, sea abierta. Además, estudiaremos las relaciones entre estas funciones inducidas como lo hemos venido haciendo en el desarrollo de este trabajo.

Este capítulo lo dividimos en cuatro secciones: En la Sección 4.1 mostramos resultados que involucran relaciones entre las funciones inducidas de acuerdo con el problema que estamos estudiando. La Sección 4.2 muestra algunos resultados interesantes cuando la función esta definida entre continuos localmente conexos. Las funciones semiabiertas las estudiamos en la Sección 4.3. Finalmente, en la Sección 4.4 mostramos una familia de λ-dendroides que cumplen la propiedad que si la función f es definida de un elemento de esta familia y es tal que la función inducida $C(f)$ es abierta, entonces f es un homeomorfismo.

4.1. Relaciones generales

El primer teorema que presentamos, es atribuido a Samuel Eilenberg y lo usaremos frecuentemente en el desarrollo del presente capítulo.

Teorema 4.1. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios métricos. Entonces f es abierta si y sólo si $\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$, para cualquier sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Y tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.*

Demostración. Supongamos que f es abierta. Sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Y tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, para algún $y \in Y$. Por la continuidad de f, tenemos que $\limsup f^{-1}(y_n) \subset f^{-1}(y)$. Luego, es suficiente probar que $f^{-1}(y) \subset \liminf f^{-1}(y_n)$ (ver Observación 1.39).

Sean $x \in f^{-1}(y)$ y U un abierto en X tal que $x \in U$. Como f es abierta, $f(U)$ es un abierto en Y, donde claramente, $y \in f(U)$. Como $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $y_n \in f(U)$ para cualquier $n \geq n_0$. Así, $f^{-1}(y_n) \cap U \neq \emptyset$ para cualquier $n \geq n_0$. De esta manera, $x \in \liminf f^{-1}(y_n)$ y $f^{-1}(y) \subset \liminf f^{-1}(y_n)$. Con esto tenemos que $\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$.

Ahora, supongamos que f no es abierta. Sea U un abierto en X, tal que $f(U)$ no es abierto en Y. Sea $y \in f(U)$ tal que para cualquier $r > 0$, tenemos que $B(y,r)\cap(Y\setminus f(U))\neq\emptyset$. De esto, existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $Y\setminus f(U)$, tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Sea $x\in U$ tal que $f(x)=y$. Claramente:

$$x\in f^{-1}(y)\setminus \liminf f^{-1}(y_n).$$

Con lo que nuestra prueba queda completa. □

El siguiente teorema es otra caracterización de las funciones abiertas, la cual, se sigue fácilmente del Teorema 4.1.

Teorema 4.2. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Entonces f es abierta si y sólo si para cualquier sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Y tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, para algún punto $y\in Y$, y para cualquier punto $x\in f^{-1}(y)$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $f(x_n)=y_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos primero que f es abierta. Sean $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Y y y en Y, tales que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Sea $x\in f^{-1}(y)$. Usando el Teorema 4.1, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y).$$

Sea $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de abiertos en X tal que $x\in U_m$, $U_{m+1}\subset U_m$, para cada $m\in\mathbb{N}$, y $\bigcap_{m=1}^{\infty} U_m=\{x\}$. Como $x\in\liminf f^{-1}(y_n)$, tenemos que para cada $m\in\mathbb{N}$, existe $k_m\in\mathbb{N}$ tal que $U_m\cap f^{-1}(y_n)\neq\emptyset$ para cualquier $n\geq k_m$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $k_j<k_l$, siempre que $j<l$. Definamos la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que:

(1) $x_n\in f^{-1}(y_n)$ si $n<k_1$;

(2) $x_n\in f^{-1}(y_n)\cap U_m$ si $k_m\leq n<k_{m+1}$.

Claramente, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $f(x_n) = y_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

La implicación inversa es una consecuencia fácil del Teorema 4.1. $\square$

Definición 4.3. Una función $f : X \to Y$ definida entre espacios topológicos, es llamada *interior en un punto p en X*, si para cualquier abierto U de X tal que $p \in U$, se tiene que $f(p) \in Int_Y(f(U))$.

Teorema 4.4. *Sea $f : X \to Y$ una función continua. Entonces f es abierta si y sólo si f es interior en todo punto de X.*

Demostración. Por definición, fácilmente se sigue que toda función abierta es interior en cada uno de los puntos de X. Luego supongamos que f es interior en todos los puntos de X y probemos que f es abierta. Sea U un abierto de X y probemos que $f(U)$ es abierto de Y. Sea $y \in f(U)$ y tomemos $x \in U$ tal que $f(x) = y$. Como f es interior en x, $y \in Int_Y(f(U))$. Como y fue un punto arbitrario, $f(U) = Int_Y(f(U))$ y f es una función abierta. $\square$

La prueba del siguiente teorema la tomamos de [20, (4.3) pág.243].

Teorema 4.5. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Entonces f es abierta si y sólo si 2^f es abierta.*

Demostración. Supongamos primero que f es abierta. Sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^Y tal que $\lim_{n\to\infty} B_n = B$, para algún $B \in 2^Y$. Como 2^f es continua, tenemos que:

$$\limsup (2^f)^{-1}(B_n) \subset (2^f)^{-1}(B).$$

Luego, probemos que $(2^f)^{-1}(B) \subset \liminf (2^f)^{-1}(B_n)$. Sean $A \in (2^f)^{-1}(B)$ y $U_1, U_2, ..., U_{n-1}$ y U_n abiertos en X tales que $A \in \langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle$. Ahora, como X es un continuo, existen abiertos $V_1, V_2, ..., V_n$ en X tales que $A \in$

$\langle V_1, V_2, ..., V_n\rangle$ y $Cl_X(V_i) \subset U_i$, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Como f es abierta, $\langle f(V_1), f(V_2), ..., f(V_n)\rangle$ es un abierto en 2^Y y $B \in \langle f(V_1), f(V_2), ..., f(V_n)\rangle$. Además, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_n \in \langle f(V_1), f(V_2), ..., f(V_n)\rangle$ para cualquiera $n \geq n_0$. Definamos $A_n = f^{-1}(B_n) \cap (\cup_{i=1}^{n} Cl_X(V_i))$. Es sencillo ver que $A_n \in (2^f)^{-1}(B_n) \cap \langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle$. De esta forma $A \in \liminf (2^f)^{-1}(B_n)$. Así, $(2^f)^{-1}(B) = \lim_{n\to\infty}(2^f)^{-1}(B_n)$ y 2^f es abierta, por el Teorema 4.1.

Supongamos ahora que 2^f es abierta. Sean U un abierto en X y $x \in U$. Claramente, $\langle U\rangle$ es abierto en 2^X y $\{x\} \in \langle U\rangle$. Como 2^f es abierta, $2^f(\langle U\rangle)$ es abierto. Además, notemos que $2^f(\langle U\rangle) = \langle f(U)\rangle$ y $\{f(x)\} \in \langle f(U)\rangle$. Así, $f(x) \in Int_Y(f(U))$. Como x fue un punto arbitrario, $f(U)$ es abierto en Y y f es una función abierta. $\square$

El mismo argumento mostrado en la segunda parte de la prueba del Teorema 4.5, nos permite demostrar la siguiente proposición.

Proposición 4.6. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si $C_n(f)$ es abierta, entonces f es abierta.*

El siguiente ejemplo muestra que el inverso de la Proposición 4.6 no es cierto.

Ejemplo 4.7. *Sea $f : [-1, 1] \to [0, 1]$ definida por $f(x) = |x|$. Observemos que f es una función abierta. Tomemos $U_1 = [-1, -\frac{1}{3}), U_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $U_3 = (\frac{1}{3}, 1]$. Notemos que $[0, 1] \in C(f)(\langle U_1, U_2, U_3\rangle_1)$ pero, para cualquier δ, con $0 < \delta < \frac{1}{3}$, podemos tomar $[\frac{\delta}{2}, 1] \in C([0, 1])$.*

Claramente, $H([0, 1], [\frac{\delta}{2}, 1]) < \delta$ y no existe un punto en $D \in \langle U_1, U_2, U_3\rangle_1 \cap C([0, 1])$ tal que $f(D) = [\frac{\delta}{2}, 1]$. Así, $[0, 1]$ no es un punto in-

terior de $C(f)(\langle U_1, U_2, U_3\rangle_1)$ *y* $C(f)$ *no es abierta. Usando un argumento similar, es fácil mostrar que* $C_n(f)$ *no es abierta, para ninguna* $n \in \mathbb{N}$.

En relación a la función inducida $HS_n(f)$ tenemos lo siguiente:

Proposición 4.8. *Sean* $f : X \to Y$ *una función continua entre continuos y* $n \in \mathbb{N}$. *Si* $HS_n(f)$ *es abierta, entonces* f *es ligera.*

Demostración. Supongamos que existe un continuo no degenerado A de X, tal que $f(A) \in F_1(Y)$. Es decir; existe $A \in C_n(X)\backslash F_n(X)$ tal que $C_n(f)(A) \in F_n(Y)$ (ver Proposición 3.1).

Sean $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesiones en $C_n(Y) \setminus F_n(Y)$, tales que:

$$\lim_{k\to\infty} D_k = \{d\} \text{ y } \lim_{k\to\infty} E_k = \{e\},$$

donde d y e son dos puntos diferentes de Y. Definamos la sucesión $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $C_n(Y)$ por:

$$L_k = \begin{cases} D_{(k+1)/2}, & \text{si } k \text{ es impar;} \\ E_{k/2}, & \text{si } k \text{ es par.} \end{cases}$$

Notemos que $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión divergente en $C_n(Y)$ tal que $\{L_k\}_{k=1}^{\infty} \cap F_n(Y) = \emptyset$. Observemos que, $\{q_Y^n(L_k)\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente en $HS_n(Y)$ a F_Y^n.

Como $HS_n(f)$ es una función abierta y $HS_n(f)(q_X^n(A)) = F_Y^n$ (ver Definición 1.52), tenemos que $q_X^n(A) \in \liminf (HS_n(f))^{-1}(q_Y^n(L_k))$, por el Teorema 4.1. Así, podemos definir una sucesión $\{\chi_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $HS_n(X) \setminus \{F_X^n\}$ tal que:

1. $\lim_{k\to\infty} \chi_n = q_X^n(A)$;

2. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\chi_{2k-1} \in (HS_n(f))^{-1}(q_Y^n(L_m))$ para algún m impar y $\chi_{2k} \in (HS_n(f))^{-1}(q_Y^n(L_l))$ para algún l par.

Como $\{\chi_k\}_{k=1}^{\infty} \cap \{F_X^n\} = \emptyset$ y $q_X^n|_{C_n(X)\setminus F_n(X)}$ es un homeomorfismo (ver Observación 1.21), tenemos que $\{(q_X^n)^{-1}(\chi_k)\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C_n(X)$ convergente a A. Por continuidad de $C_n(f)$, tenemos que:

$$\lim_{k\to\infty} C_n(f)((q_X^n)^{-1}(\chi_k)) = C_n(f)(A).$$

Notemos que, por la construcción de $\{\chi_k\}_{k=1}^{\infty}$, podemos decir que:

$$|\{C_n(f)((q_X^n)^{-1}(\chi_k))\}_{k=1}^{\infty} \cap \{D_k\}_{k=1}^{\infty}| = \infty \text{ y}$$
$$|\{C_n(f)((q_X^n)^{-1}(\chi_k))\}_{k=1}^{\infty} \cap \{E_k\}_{k=1}^{\infty}| = \infty.$$

Pero esto contradice la convergencia de $\{C_n(f)((q_X^n)^{-1}(\chi_k))\}_{k=1}^{\infty}$. Con esto concluimos que no existe un punto $A \in C_n(X) \setminus F_n(X)$ tal que $C_n(f)(A) \in F_n(Y)$. Así, f es ligera, por la Proposición 3.1. $\square$

Una prueba de la siguiente proposición puede ser consultada en [12, Corolario 19, pág.73].

Proposición 4.9. *Sea Y un continuo. Si $f : [0,1] \times Y \to [0,1]$ es la proyección natural; es decir, $f(t,y) = t$ para cada $(t,y) \in [0,1] \times Y$, entonces $C(f)$ es una función abierta.*

Observación 4.10. Notemos que si Y es un continuo no degenerado, entonces la función proyección $f : [0,1] \times Y \to [0,1]$ es una función continua entre continuos tal que $C(f)$ es abierta, por la Proposición 4.9. Pero, observemos que f no es una función ligera. De esta forma, $HS(f)$ no es abierta, por la Proposición 4.8. Así, existe una función continua f definida entre continuos tal que $C(f)$ es abierta y $HS(f)$ no es una función abierta.

Tenemos la siguiente pregunta:

Pregunta 4.11. *Sean Y un continuo y $n \geq 2$. ¿Si $f : [0,1] \times Y \to [0,1]$ es la proyección natural, entonces es $C_n(f)$ abierta?*

Notemos que si la respuesta de la Pregunta 4.11 es afirmativa, entonces, por la Observación 4.10, tendríamos una función continua f definida entre continuos tal que $C_n(f)$ es abierta y $HS_n(f)$ no es una función abierta, para ninguna $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 4.12. *Sean $f : X \to Y$ una función ligera entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si $C_n(f)$ es abierta, entonces $HS_n(f)$ es abierta.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un abierto de $HS_n(X)$. Consideremos los siguientes casos:

1. $\mathcal{U} \cap \{F_X^n\} = \emptyset$. Como f es ligera y las restricciones $q_X^n|_{C_n(X)\setminus F_n(X)}$ y $q_Y^n|_{C_n(Y)\setminus F_n(Y)}$ son homeomorfismos, tenemos que $HS_n(f)(\mathcal{U})$ y $C_n(f)((q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}))$ son homeomorfos. Así, como $C_n(f)$ es una función abierta, tenemos que $HS_n(f)(\mathcal{U})$ es un conjunto abierto en $HS_n(Y)$.

2. $F_X^n \in \mathcal{U}$. Notemos que, $(q_X^n)^{-1}(\mathcal{U})$ es un abierto de $C_n(X)$ que contiene a $F_n(X)$. Como $C_n(f)$ es abierta, $C_n(f)((q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}))$ es abierto de $C_n(Y)$. Además, $F_n(Y) \subset C_n(f)((q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}))$. De donde $C_n(f)((q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}))$ es un abierto saturado; es decir, es unión de elementos de la descomposición. Por tanto, $q_Y^n(C_n(f)((q_X^n)^{-1}(\mathcal{U})))$ es abierto de $HS_n(Y)$. De esta manera, por la Definición 1.52, tenemos que:

$$HS_n(f)(\mathcal{U}) = q_Y^n(C_n(f)((q_X^n)^{-1}(\mathcal{U}))).$$

   Con esto concluimos que $HS_n(f)(\mathcal{U})$ es un conjunto abierto en $HS_n(Y)$.

Por lo anterior, $HS_n(f)$ es una función abierta y nuestra prueba queda completa. $\square$

El siguiente resultado muestra una función f tal que $HS(f)$ es abierta (ver [15, Ejemplo 3, pág.3730]). Se puede pensar que el ejemplo que mostramos en el siguiente teorema es muy elaborado, sin embargo como veremos en el desarrollo del presente capítulo, encontrar una función continua f tal que $HS(f)$ sea abierta y f no sea un homeomorfismo, no es una tarea fácil.

Teorema 4.13. *Existe una función continua f entre continuos tal que $HS(f)$ es abierta y f no es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea f la función continua de, y sobre, el solenoide triádico Σ_3, definida en el Teorema 3.21. Recordemos que si $f_n : S^1 \to S^1$ está definida por $f_n(z) = z^2$ para cualquiera $n \in \mathbb{N}$, entonces $f : \Sigma_3 \to \Sigma_3$ se define por:

$$f(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{f_n(z_n)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Probemos que $C(f)$ es interior en todo punto de $C(\Sigma_3)$ y, por el Teorema 4.4, tendremos que $C(f)$ es abierta.

Denotemos por φ_n a $\pi_n|_{\Sigma_3}$, donde $\pi_n : \prod_{n=1}^{\infty} S_n^1 \to S^1$ es la n-ésima proyección. Sea $P \in C(\Sigma_3)$ tal que $P \neq \Sigma_3$. Como P es un subcontinuo propio de Σ_3, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_{n-1}(P)$ es un subcontinuo propio de S^1, por el Teorema 1.13. De esta forma, $\varphi_n(P)$ es un arco de longitud menor a $\frac{2\pi}{3}$. Sea U_n un arco abierto en S^1 tal que $\varphi_n(P) \subset U_n$ y la longitud de U_n es menor que $\frac{2\pi}{3}$. Entonces $\varphi_n^{-1}(U_n)$ es un abierto de Σ_3 que contiene a P.

Afirmación. *La función $C(f)|_{\varphi_n^{-1}(U_n)} : \varphi_n^{-1}(U_n) \to C(f)(\varphi_n^{-1}(U_n))$ es un homeomorfismo.*

Sean A y B puntos en $\varphi_n^{-1}(U_n)$ tales que $C(f)(A) = C(f)(B)$. Recordemos que, en el Teorema 3.21, probamos que $C(f)$ es una función ligera, en particular, que $C(f)$ es una función simple y $C(f)^{-1}(C(f)(A)) = \{A, h(A)\}$, donde $h : \Sigma_3 \to \Sigma_3$ es el homeomorfismo definido por $h(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{-x_n\}_{n=1}^{\infty}$, para cada $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Sigma_3$. Supongamos que $B = h(A)$. Entonces $\varphi_n(h(A))$ y $\varphi_n(A)$ estan en U_n. Pero esto contradice que la longitud de U_n es menor a $\frac{2\pi}{3}$. Por lo tanto, $A = B$ y $C(f)|_{\varphi_n^{-1}(U_n)}$ es inyectiva. Claramente, $C(f)|_{\varphi_n^{-1}(U_n)} : \varphi_n^{-1}(U_n) \to C(f)(\varphi_n^{-1}(U_n))$ es suprayectiva. Por tanto, es una biyección. Además, es sencillo verificar que es una función cerrada, de esta manera, es un homeomorfismo.

Ahora, es fácil ver que $C(f)(\varphi_n^{-1}(U_n)) = \varphi_n^{-1}(f_n(U_n))$. Como f_n es una función abierta, $C(f)(\varphi_n^{-1}(U_n))$ es un conjunto abierto de Σ_3. Claramente, $C(f)(P) \in C(f)(\varphi_n^{-1}(U_n))$. Como $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\varphi_n^{-1}(V_n) | V_n$ es un abierto de $S^1\}$ forma una base de Σ_3, por [31, Proposición 2.1.9, pág.72], podemos concluir que $C(f)$ es interior en cualquier punto $A \in C(\Sigma_3) \setminus \{\Sigma_3\}$.

Probemos que $C(f)$ es interior en Σ_3. Definamos $\mathcal{V}_n = C(\varphi_n)^{-1}(S^1)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\{\mathcal{V}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base local de vecindades (cerradas) de Σ_3 en $C(\Sigma_3)$. Luego, es suficiente probar que $\mathcal{V}_{n+1} \subset C(f)(\mathcal{V}_n)$. Sea $A \in \mathcal{V}_{n+1}$ y sea $B \in C(\Sigma_3)$ tal que $f(B) = A$. Como:

$$f_{n+1}(\varphi_{n+1}(B)) = \varphi_{n+1}(f(B)) = \varphi_{n+1}(A) = S^1, \tag{4.1}$$

sabemos que $\varphi_{n+1}(B)$ es un arco de longitud mayor o igual a π, o, $\varphi_{n+1}(B) = S^1$. En cualquier caso $\varphi_n(B) = S^1$ y $B \in \mathcal{V}_n$. Así, $A \in C(f)(\mathcal{V}_n)$ y $C(f)$ es interior en todo punto de $C(\Sigma_3)$.

La función f es ligera y $C(f)$ es abierta. Así, por la Proposición 4.12, $HS(f)$ es abierta como queríamos. □

Con la siguiente proposición mostramos que para que $HS_n(f)$ sea abierta, para alguna $n \geq 3$, f tiene que ser un homeomorfismo.

Proposición 4.14. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \geq 3$. Si $HS_n(f)$ es abierta, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Como $HS_n(f)$ es abierta, $HS_n(f)$ es confluente. Así, f es monótona, por el Teorema 2.33. Por otra parte, f es ligera, por el Teorema 4.21. Como toda función monótona y ligera entre continuos es un homeomorfismo (ver Proposición 3.2), nuestra prueba queda completa. $\square$

Pregunta 4.15. *¿Existe una función continua entre continuos $f : X \to Y$ tal que $C_n(f)$ sea abierta, para alguna $n \geq 3$, y f no sea un homeomorfismo?*

Corolario 4.16. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \geq 3$. Si $HS_n(f)$ es abierta, entonces f y $C_n(f)$ son abiertas.*

El siguiente lema, lo usaremos para probar que siempre que $HS_n(f)$ sea abierta, para $n \in \{1, 2\}$, tenemos que f es también una función abierta.

Lema 4.17. *Sean $f : X \to Y$ una función ligera definida entre continuos y U un abierto en X. Si $q \in f(U)$ tal que $q \notin Int_Y(f(U))$, entonces existen una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y \setminus f(U)$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = q$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, un subcontinuo E_n tal que $z_n \in E_n$ y $\lim_{n\to\infty} E_n = E_0$, para algún subcontinuo no degenerado E_0 de $f(U)$. Además, si f es confluente, entonces existe un subcontinuo D de U tal que $f(D) = E_0$.*

Demostración. Sean U un abierto en X y $p \in U$ tal que $f(p) = q$, donde $q \notin Int_Y(f(U))$. Por el Teorema 1.9, existe un subcontinuo no degenerado A

de X tal que $p \in A \subset U$. Como f es ligera, $f(A)$ no es degenerado. Notemos que $q \in f(A)$.

Sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $Y \setminus f(U)$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = q$. Tomemos ahora $m \in \mathbb{N}$ y B_{nm} la componente de $Cl_Y(B_d(y_n, \frac{1}{m}))$ tal que $y_n \in B_{nm}$. Por [37, Teorema 5.4, pág.73], $\frac{1}{m} \leq diám(B_{nm}) \leq \frac{2}{m}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\lim_{n\to\infty} B_{nm} = B_m$ para algún subcontinuo B_m de Y. Observemos que $q \in B_m$ y:

$$\frac{1}{m} \leq diám(B_m) \leq \frac{2}{m} \text{ para cada } m \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Observemos que, como $q \in f(A) \cap B_m$, $f(A) \cap B_m \neq \emptyset$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Consideremos dos casos:

(1) Existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $B_m \subset f(U)$ para cada $m \geq k$. Sea $m_0 \geq k$. De esta manera, $\{B_{nm_0}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(Y)$ tal que $y_n \in B_{nm_0}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} B_{nm_0} = B_{m_0}$ donde B_{m_0} es un subcontinuo no degenerado de $f(U)$ (ver (4.2)).

(2) Existe una subsucesión $\{B_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ tal que $B_{m_k} \cap (Y \setminus f(U)) \neq \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Sea $z_k \in B_{m_k} \cap (Y \setminus f(U))$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Es importante resaltar que $diám(B_{m_k}) \leq \frac{2}{m_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ (4.2). Por consiguiente, como $q \in B_{m_k}$ para cualquier k, $\lim_{k\to\infty} B_{m_k} = \{q\} \subset f(A)$. De esta manera, $\lim_{k\to\infty} z_k = q$. Tomemos $E_k = B_{m_k} \cup f(A)$. Claramente, E_k es un continuo y $\lim_{k\to\infty} E_k = f(A)$. Con lo que tenemos que $f(A)$ es un subcontinuo no degenerado de $f(U)$.

Finalmente, supongamos que f es confluente. Notemos que en el Caso (2), como A es un subcontinuo de U, nuestra prueba esta completa. Luego, supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $B_m \subset f(U)$ para cada $m \geq k$ (Caso (1)). Sea D_m una componente de $f^{-1}(B_m)$ tal que $p \in D_m$. Como f es ligera, $\{p\}$ es una componente de $f^{-1}(q)$. Además, $\lim_{m\to\infty} D_m = \{p\}$, pues $\lim_{m\to\infty} B_m = \{q\}$ (ver (4.2)). Con esto se sigue que existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $D_l \subset U$, por [43, Teorema 7.2, pág.12]. Como f es confluente, $f(D_l) = B_l$. Además, B_l es un subcontinuo no degenerado de $f(U)$ y $\lim_{n\to\infty} B_{nl} = B_l$, donde $y_n \in B_{nl}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Si la función inducida $HS_m(f)$ es abierta, con $m \in \{1, 2\}$, no sabemos si f puede ser un homeomorfismo, como mostramos para $m \geq 3$ en la Proposición 4.14, sin embargo, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.18. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $m \in \{1, 2\}$. Si $HS_m(f)$ es abierta, entonces f es abierta.*

Demostración. Supongamos que f no es abierta. Sea U un abierto de X tal que $f(U)$ no es abierto en Y. Así, existe $p \in U$ tal que $f(p) \notin Int_Y(f(U))$. Como $HS_m(f)$ es abierta, f es ligera y confluente (ver Proposición 4.8 y Teorema 2.29, respectivamente). Aplicando el Lema 4.17, existen una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y \setminus f(U)$, tal que $\lim_{n\to\infty} z_n = f(p)$, y subcontinuos E_n, tales que $z_n \in E_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} E_n = E_0$, donde E_0 es un subcontinuo no degenerado de $f(U)$. Además, como f es confluente, existe un subcontinuo A de U tal que $f(A) = E_0$.

Sean q_1 y q_2 en A tales que $f(q_1) \neq f(q_2) \neq f(p)$ y $f(q_1) \neq f(p)$. Sean V_1, V_2 y W abiertos disyuntos dos a dos en X tales que $(V_1 \cup V_2 \cup W) \subset U$, $p \in W$ y $q_i \in V_i$, para $i \in \{1, 2\}$. Denotemos $\mathcal{U} = \langle V_1, V_2, W, U\rangle_m$. Claramente, $A \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \cap F_m(X) = \emptyset$. De esta forma, $C_m(f)(A) = E_0 \in C_m(f)(\mathcal{U})$.

Como $z_n \notin f(U)$, $E_n \notin C_m(f)(\mathcal{U})$ para ninguna $n \in \mathbb{N}$. Así, $C_m(f)(\mathcal{U})$ no es abierta. Observemos que, como $\mathcal{U} \cap F_m(X) = \emptyset$ y f es ligera, tenemos que $C_m(f)(\mathcal{U}) \cap F_m(Y) = \emptyset$, por la Proposición 3.1. Por la Observación 1.21, $q_X^m(\mathcal{U})$ es abierto en $HS_m(X)$ y $HS_m(f)(q_X^m(\mathcal{U}))$ es homeomorfo a $C_m(f)(\mathcal{U})$. Con lo que concluimos que $HS_m(f)$ no es abierta. $\square$

Observación 4.19. En el Teorema 4.13, definimos una función continua f entre continuos, tal que $HS(f)$ es abierta y f no es un homeomorfismo, pero no conocemos una función f tal que $HS_2(f)$ sea abierta y f no sea un homeomorfismo.

El siguiente corolario es consecuencia del Corolario 4.16 y el Teorema 4.18.

Corolario 4.20. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si $HS_n(f)$ es abierta, entonces f es abierta.*

Con el siguiente resultado mostramos una caracterización de cuándo la función inducida $HS_n(f)$ es abierta.

Teorema 4.21. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $C_n(f)$ es abierta y f es ligera si y sólo si $HS_n(f)$ es abierta.*

Demostración. Notemos que si $C_n(f)$ es abierta y f es ligera, entonces $HS_n(f)$ es abierta, por la Proposición 4.12. También, si $HS_n(f)$ es abierta, entonces f es ligera, por la Proposición 4.8. Además, si $HS_n(f)$ es abierta, con $n \geq 3$, entonces $C_n(f)$ es abierta, por el Corolario 4.16. Así, es suficiente demostrar que si $HS_n(f)$ es abierta, entonces $C_n(f)$ es abierta, para $n \in \{1, 2\}$.

Sean $n \in \{1, 2\}$ y $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión en $C_n(Y)$ tal que $\lim_{m\to\infty} B_m = B$, para algún $B \in C_n(Y)$. Sea $A \in C_n(f)^{-1}(B)$. Probemos que existe una sucesión $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ en $C_n(X)$ tal que $\lim_{m\to\infty} A_m = A$ y $C_n(f)(A_m) = B_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Consideremos dos casos:

(1) $B \notin F_n(Y)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{B_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C_n(Y) \setminus F_n(Y)$. Claramente, $\lim_{m\to\infty} q_Y^n(B_m) = q_Y^n(B)$ y $q_X^n(A) \in HS_n(f)^{-1}(q_Y^n(B))$. Así, como $HS_n(f)$ es abierta, existe una sucesión $\{\chi_m\}_{m=1}^{\infty}$ en $HS_n(X)$ tal que $\lim_{m\to\infty} \chi_m = q_X^n(A)$ y $HS_n(f)(\chi_m) = q_Y^n(B_m)$, para cualquier $m \in \mathbb{N}$, por el Teorema 4.4. De la Observación 1.21, es fácil ver que, si tomamos $A_m = (q_X^n)^{-1}(\chi_m)$, para cada $m \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge a A y $C_n(f)(A_m) = B_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

(2) $B \in F_n(Y)$. Supongamos que $B = \{b_1, b_2\}$, donde b_1 y b_2 son puntos de Y (es posible que $b_1 = b_2$). Escribiremos $B_m = B_{m1} \cup B_{m2}$, donde B_{m1} y B_{m2} son las componentes de B_m, para cada $m \in \mathbb{N}$. Definamos la sucesión $\{\{b_{m1}, b_{m2}\}\}_{m=1}^{\infty}$ en $F_n(Y)$ tal que $b_{mi} \in B_{mi}$ y $\lim_{m\to\infty} b_{mi} = b_i$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Como $HS_n(f)$ es abierta, f es abierta y ligera (ver Corolario 4.20 y Proposición 4.8, respectivamente). Así, como $A \in C_n(f)^{-1}(B)$ y $B \in F_n(Y)$, tenemos que $A \in F_n(X)$. Supongamos que $A = \{a_1, a_2\}$, donde a_1 y a_2 son puntos de X, $f(a_1) = b_1$ y $f(a_2) = b_2$. Usando el Teorema 4.4, podemos garantizar que existen sucesiones $\{a_{m1}\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{a_{m2}\}_{m=1}^{\infty}$ en X tales que $\lim_{m\to\infty} a_{mi} = a_i$ y $f(a_{mi}) = b_{mi}$, para cada $m \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, 2\}$. Ahora, sea A_{mi} la componente de $f^{-1}(B_{mi})$ tal que $a_{mi} \in A_{mi}$. Definamos $A_m = A_{m1} \cup A_{m2}$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Como f es abierta, f es confluente (ver Diagrama I). De esto, $f(A_{mi}) = B_{mi}$ y $f(A_m) = B_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

Finalmente, probemos que $\lim_{m\to\infty} A_m = A$. Notemos que si $\{A_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión convergente de $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$, entonces $A \subset \lim_{k\to\infty} A_{m_k}$, pues, $\{a_{m1}, a_{m2}\} \subset A_m$ y $\lim_{m\to\infty}\{a_{m1}, a_{m2}\} = A$. Tomemos $\lim_{k\to\infty} A_{m_k} = A_0$ y supongamos que $A \subsetneq A_0$. Claramente $A_0 \in C_n(X) \setminus F_n(X)$, pues cada componente de A_0 intersecta a A. Por la continuidad de $C_n(f)$, tenemos que:

$$C_n(f)(A_0) = \lim_{k\to\infty} C_n(f)(A_{m_k}) = \lim_{k\to\infty} B_{m_k} = B.$$

De esto concluimos que $f(A_0) = B$, pero esto contradice que f es ligera, pues $B \in F_n(Y)$ (ver Proposición 3.1). Así, $\lim_{k\to\infty} A_{m_k} = A$ para cualquier subsucesión $\{A_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$. Con lo que concluimos que $\lim_{m\to\infty} A_m = A$.

Por (1) y (2), existe una sucesión $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ en $C_n(X)$ tal que $\lim_{m\to\infty} A_m = A$ y $C_n(f)(A_m) = B_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Así, la función inducida $C_n(f)$ es abierta, para cualquier $n \in \{1, 2\}$, por el Teorema 4.2. Con lo que nuestra prueba queda completa. $\square$

El siguiente teorema resume los resultados mostrados hasta el momento en este capítulo.

Teorema 4.22. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Dadas las siguientes afirmaciones:*

(1) 2^f es abierta;

(2) $C_n(f)$ es abierta, $n \in \mathbb{N}$;

(3) $HS_n(f)$ es abierta, $n \in \mathbb{N}$;

(4) f es abierta.

Entonces (1) y (4) son equivalentes, (3) implica (2) y (2) implica (4). Además, si f es ligera, entonces (2) y (3) son equivalentes.

Demostración. La equivalencia entre (*1*) y (*4*) se sigue del Teorema 4.5. El Teorema 4.21, nos da (*3*) implica (*2*). La afirmación (*2*) implica (*4*) la tenemos por la Proposición 4.6. Finalmente, si f es ligera, entonces (*2*) y (*3*) son equivalentes, por el Teorema 4.21. □

4.2. Abiertas entre localmente conexos

Empezaremos esta sección con un teorema de [15, Teorema 1, pág.3729].

Teorema 4.23. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos, donde X es localmente conexo. Si $C(f)$ es abierta, entonces f es monótona.*

Demostración. Supongamos que f no es una función monótona. Sea z un punto en Y tal que $f^{-1}(z)$ no es conexo (ver Definición 1.40). Sean p y q puntos en diferentes componentes de $f^{-1}(z)$. Como Y es localmente conexo y f es una función continua, tenemos que existe un subcontinuo Z de Y, tal que $z \in Int_Y(Z)$ y p y q están en diferentes componentes de $f^{-1}(Z)$. Sean P y Q las componentes de $f^{-1}(Z)$ tales que $p \in P$ y $q \in Q$. Notemos que, como las componentes de un abierto son abiertas en un localmente conexo (ver [26, Teorema 4, pág.230]), $p \in Int_X(P)$ y $q \in Int_X(Q)$. Sea $\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \subset P$ y $B(q, \delta) \subset Q$. Sea $\mathcal{L}$ un arco de orden en $C(Y)$ de $\{z\}$ a Y, pasando por Z (ver Teorema 1.28).

Como $\mathcal{L}$ es un arco de orden, $\mathcal{L}$ es un conjunto ordenado con la relación de inclusión. Sea $R = \sup\{L \in \mathcal{L} : f^{-1}(L)$ tiene a p y q en diferentes componentes$\}$. No es difícil probar que $f^{-1}(R)$ tiene a p y q en la misma componente. Sea E la componente de $f^{-1}(R)$ que contiene a p y q. Como $C(f)$ es abierta, f es abierta, por la Proposición 4.6, y, por tanto, f es confluente (ver Diagrama I). Así, $f(E) = R$. Sea $\mathcal{A} = \{L \in \mathcal{L} : L \subsetneq R\}$. Claramente, $R \in Cl_{C(Y)}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{A}$ y, si $A \in \mathcal{A}$, entonces $f^{-1}(A)$ tiene a p y q en diferentes componentes.

Probemos que $C(f)(B_H(E, \delta))$ no es abierto en $C(Y)$. Supongamos que $C(f)(B_H(E, \delta))$ es abierto. Sea $K \in B_H(E, \delta)$ tal que $f(K) \in \mathcal{A}$. Como p y q están en E y $H(K, E) < \delta$, tenemos que $P \cap K \neq \emptyset$ y $Q \cap K \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $Z \subsetneq f(K)$. Con esto tenemos que $P \cup K \cup Q = K$ es un continuo, donde p y q pertenecen a K y $f(K) \in \mathcal{A}$. Pero esto contradice la definición de $\mathcal{A}$. Así, $C(f)(B_H(E, \delta))$ no es abierto y, con esto, contradecimos nuestra hipótesis. $\square$

Proposición 4.24. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos, donde X es localmente conexo. Si $HS(f)$ es abierta, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Supongamos que $HS(f)$ es abierta. Luego, $C(f)$ es abierta, por el Teorema 4.21. Con esto, f es monótona, por el Teorema 4.23. Por otra parte, f es ligera, por el Teorema 4.21. Así, f es monótona y ligera, por consiguiente, f es un homeomorfismo, por la Proposición 3.2. $\square$

Claramente, de las Proposiciones 4.14 y 4.24, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.25. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos, donde X es localmente conexo, y $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$. La función inducida $HS_n(f)$ es abierta si y sólo si f es un homeomorfismo.*

De manera natural, tenemos la siguiente pregunta:

Pregunta 4.26. *¿Existe una función continua f definida entre continuos localmente conexos tal que $HS_2(f)$ sea abierta y f no sea un homeomorfismo?*

La siguiente proposición, la tomamos de [15, Corolario 2, pág.3730].

Proposición 4.27. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos, donde X es hereditariamente localmente conexo. Si $C(f)$ es abierta, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Probemos que f es ligera. Sean y un punto en Y y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Como $C(f)$ es abierta, f es abierta, por la Proposición 4.6. De esta manera, por el Teorema 4.1, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y).$$

Notemos que f es monótona, por el Teorema 4.23. Luego, si $f^{-1}(y)$ es un continuo no degenerado, entonces $f^{-1}(y)$ es un continuo de convergencia. Pero esto contradice que X sea hereditariamente localmente conexo, por [37, Teorema 10.4, pág.167]. Como y fue un punto arbitrario de Y, f es una función ligera y nuestra prueba queda completa, por la Proposición 3.2. □

Corolario 4.28. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos, donde X es una dendrita. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $HS(f)$ *es abierta;*

(2) $C(f)$ *es abierta;*

(3) f *es un homeomorfismo.*

Demostración. (*1*) implica (*2*), se sigue del Teorema 4.21. Supongamos que $C(f)$ es abierta. Notemos que como X es una dendrita, X es hereditariamente localmente conexo (ver Observación 1.6). Así, f es un homeomorfismo, por la Proposición 4.27, y tenemos (*2*) implica (*3*). Finalmente, si f es un homeomorfismo, entonces $HS(f)$ es un homeomorfismo, por el Teorema 1.57. Luego, (*3*) implica (*1*) es consecuencia del Diagrama I. $\square$

Por el Teorema 4.23 sabemos que si $C(f)$ es abierta, donde el dominio de la función f es localmente conexo, entonces f es monótona. Además, sabemos que si el dominio es hereditariamente localmente conexo, entonces f es un homeomorfismo, por la Proposición 4.27. En [12, Pregunta 4, pág.68] se plantea la siguiente pregunta:

Pregunta 4.29. *¿Qué continuo localmente conexo* X, *tiene la propiedad que si* $C(f)$ *es abierta, para alguna función continua* $f : X \to Y$, *entonces* f *es un homeomorfismo?*

Notemos que por la Proposición 4.24, la respuesta a la Pregunta 4.29 es afirmativa, si cambiamos la función inducida $C(f)$ por $HS(f)$. Así, por el Teorema 4.21, resolver la Pregunta 4.29 es equivalente a dar solución a la siguiente pregunta:

Pregunta 4.30. *¿Qué continuo localmente conexo X, tiene la propiedad que si $C(f)$ es abierta, para alguna función continua $f : X \to Y$, entonces f es ligera?*

4.3. Funciones semiabiertas

Las funciones semiabiertas están definidas en [45]. De la Definición 1.40 se sigue que cualquier función abierta es semiabierta, como mostramos en el Diagrama I. Es sencillo ver que la función $f : [-1, 2] \to [0, 2]$ definida por $f(x) = |x|$, es una función semiabierta que no es abierta.

En [45, Teorema A, pág.24] se puede encontrar una demostración de la siguiente proposición.

Proposición 4.31. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Dados los siguientes enunciados:*

(1) 2^f es semiabierta;

(2) $C(f)$ es semiabierta;

(3) f es semiabierta.

Entonces (1) y (3) son equivalentes y (2) implica (3).

Observación 4.32. Notemos que en la función $f : [-1, 1] \to [0, 1]$ definida por $f(x) = |x|$, en el Ejemplo 4.7, el abierto que definimos $\langle U_1, U_2, U_3 \rangle_1$ es tal que $Int_{C(Y)}(C(f)(\langle U_1, U_2, U_3 \rangle_1)) = \emptyset$. Así, existe una función abierta, por tanto semiabierta, tal que $C(f)$ no es semiabierta.

La siguiente definición es similar a la Definición 4.3.

Definición 4.33. Una función continua $f : X \to Y$ entre espacios topológicos es llamada *semiinterior en un punto x de X* si para cualquier abierto U que contiene a x, existe un punto $z \in U$ tal que $f(z) \in Int_Y(f(U))$.

El siguiente teorema nos da una caracterización de las funciones semiabiertas.

Teorema 4.34. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Entonces f es semiabierta si y sólo si f es semiinterior en todo punto de X.*

Demostración. Supongamos primero que f es semiabierta. Sean $x \in X$ y U un abierto en X tal que $x \in U$. Como f es semiabierta, $Int_Y(f(U)) \neq \emptyset$. Tomemos $y \in Int_Y(f(U)) \subset f(U)$. Así, existe un $z \in U$ tal que $f(z) = y$ y f es semiinterior en x. Como x fue arbitrario, f es semiinterior en todo punto de X.

Ahora, supongamos que f es semiinterior en todo punto de X. Sean U un abierto en X y $x \in U$. Como f es semiinterior en x existe un punto $z \in U$, tal que $f(z) \in Int_Y(f(U))$. Así, $Int_Y(f(U)) \neq \emptyset$ y f es semiabierta. $\square$

En [45, Pregunta, pág.26] se encuentra la siguiente pregunta:

Pregunta 4.35. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. ¿Si $C(f)$ es semiabierta, entonces es f una función abierta?*

Dados X un continuo y $p \in X$, en la escritura del siguiente resultado utilizaremos la siguiente notación:

$$C_p(X) = \{A \in C(X) : p \in A\}.$$

Es sencillo demostrar que $C_p(X)$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$, para cualesquiera X y p.

Con el siguiente teorema presentamos una función que da una respuesta negativa a la Pregunta 4.35.

Teorema 4.36. *Existe una función continua f definida de un triodo simple en un arco, tal que $C(f)$ es semiabierta y f no es abierta.*

Demostración. Sean $X_1 = \{(x,y) : y = -x + \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}\}$, $X_2 = \{(x,y) : y = x - \frac{1}{2}, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$ y $X_3 = \{(x,0) : \frac{1}{2} \leq x \leq 1\}$. Definamos:

$$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3.$$

Sea $f : X \to [0,1]$ definida por $f(x,y) = x$. Ver la Figura 4.1.

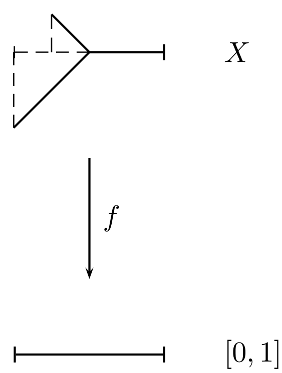

Figura 4.1

Claramente, f no es una función abierta. Probemos que $C(f)$ es semiinterior en todo punto de $C(X)$ y, usando el Teorema 4.34, tendremos que $C(f)$ es semiabierta.

Sea $A \in C(X)$. Consideremos dos casos:

(1) $(\frac{1}{2}, 0) \notin A$. Como $A \notin C_{(1/2,0)}(X)$ y $C_{(1/2,0)}(X)$ es cerrado, entonces existe $r > 0$ tal que $B_H(A,r) \cap C_{(1/2,0)}(X) = \emptyset$. Supongamos que

$A \subset X_1$. Sean $D \in B_H(A, r)$ y $s > 0$ tales que $B_H(D, s) \subset B_H(A, r)$ y $B_H(D, s) \cap C_{(1/4,1/4)}(X) = \emptyset$. Probemos que:

$$B_H(f(D), \tfrac{s}{2}) \subset C(f)(B_H(A, r)). \tag{4.3}$$

Sea $E \in B_H(f(D), \frac{s}{2})$. Notemos que:

$$B_H(f(D), \tfrac{s}{2}) \cap (C_{1/4}([0, 1]) \cup C_{1/2}([0, 1])) = \emptyset.$$

De lo anterior, $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\} \cap E = \emptyset$. Así, $f^{-1}(E) \cap X_1$ es un conexo, tal que $f(f^{-1}(E) \cap X_1) = E$. Ahora, por la definición de f, tenemos que $H(f^{-1}(E) \cap X_1, D) \leq 2H(E, f(D)) < s$. Con esto, $f^{-1}(E) \cap X_1 \in B_H(D, s) \subset B_H(A, r)$ y $E \in C(f)(B_H(A, r))$. Así, probamos (4.3) y $C(f)(D) \in Int_{C([0,1])}(C(f)(B_H(A, r)))$. Con un argumento similar, mostramos la misma conclusión si $A \subset X_2$ o $A \subset X_3$.

(2) $(\frac{1}{2}, 0) \in A$. Sea $r > 0$. Definamos $D_0 = A \cup Cl_X(B_d((\frac{1}{2}, 0), \frac{r}{3}))$. Notemos que $D_0 \in C(X)$ y $H(A, D_0) \leq \frac{r}{3}$. Sean $D \in B_H(D_0, \frac{r}{6})$ y $s > 0$ tales que $B_H(D, s) \subset B_H(D_0, \frac{r}{6})$ y $B_H(D, s) \cap C_{(1/4,1/4)}(X) = \emptyset$. Observemos que $(\frac{1}{2}, 0) \in K$ para cada $K \in B_H(D, s)$. Probemos que:

$$B_H(f(D), \tfrac{s}{2}) \subset C(f)(B_H(A, r)). \tag{4.4}$$

Sean x_1, x_2 y x_3 puntos en $[0, 1]$ tales que:

$$\begin{aligned} D = \{(x, y) : y = -x + \tfrac{1}{2}, x_1 \leq x \leq \tfrac{1}{2}\} \cup \\ \cup \{(x, y) : y = x - \tfrac{1}{2}, x_2 \leq x \leq \tfrac{1}{2}\} \cup \{(x, 0) : \tfrac{1}{2} \leq x \leq x_3\}. \end{aligned}$$

Notemos que, por la construcción, $\frac{1}{4} + \frac{s}{2} \leq x_1 < \frac{1}{2}$, $x_2 < \frac{1}{2}$ y $x_3 > \frac{1}{2}$. Además, $f(D) = [\text{mín}\{x_1, x_2\}, x_3]$.

Supongamos primero que $x_1 = \text{mín}\{x_1, x_2\}$. Observemos que $\frac{1}{4} \notin K$ para cada $K \in B_H(f(D), \frac{s}{2})$. Sean $E \in B_H(f(D), \frac{s}{2})$ y y_1 y y_2 puntos en $[0,1]$ tales que $E = [y_1, y_2]$, definamos:

$$E_0 = \{(x,y) : y = -x + \tfrac{1}{2}, y_1 \leq x \leq \tfrac{1}{2}\} \cup$$
$$\cup \{(x,y) : y = x - \tfrac{1}{2}, \text{máx}\{x_2, y_1\} \leq x \leq \tfrac{1}{2}\} \cup \{(x,0) : \tfrac{1}{2} \leq x \leq y_2\}.$$

Claramente, $f(E_0) = E$. Como $H(f(D), E) < \frac{s}{2}$, $H(E_0, D) < s$. De esta manera, $E_0 \in B_H(D, s) \subset B_H(D_0, \frac{r}{6})$ y $H(E_0, A) \leq H(E_0, D_0) + H(D_0, A) \leq \frac{r}{6} + \frac{r}{3} < r$. Así, $E_0 \in B_H(A, r)$ y $E \in C(f)(B_H(A, r))$.

Ahora, si $x_2 = \text{mín}\{x_1, x_2\}$. Definimos:

$$E_0 = \{(x,y) : y = -x + \tfrac{1}{2}, \text{máx}\{x_1, y_1\} \leq x \leq \tfrac{1}{2}\} \cup$$
$$\cup \{(x,y) : y = x - \tfrac{1}{2}, y_1 \leq x \leq \tfrac{1}{2}\} \cup \{(x,0) : \tfrac{1}{2} \leq x \leq y_2\}.$$

De manera similar a como hicimos en el caso cuando $x_1 = \text{mín}\{x_1, x_2\}$, concluimos que $f(E_0) = E$, $E_0 \in B_H(A, r)$ y $E \in C(f)(B_H(A, r))$. De esta manera, probamos (4.4) y $C(f)(D) \in Int_{C([0,1])}(C(f)(B_H(A, r)))$.

Con lo anterior, tenemos que $C(f)$ es semiinterior en todo punto de $C(X)$ y nuestra prueba queda completa. $\square$

Usando el argumento de la prueba dada para la Proposición 4.31, en [45], no es difícil probar el siguiente resultado.

Teorema 4.37. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Si $C_n(f)$ es semiabierta, entonces f es semiabierta.*

Por la definición, sabemos que la función cociente $q_X^n : C_n(X) \to HS_n(X)$ es monótona y no es abierta, para cualesquiera continuo X y $n \in \mathbb{N}$. En la siguiente proposición mostraremos que q_X^n es semiabierta.

Proposición 4.38. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces la función cociente $q_X^n : C_n(X) \to HS_n(X)$ es semiabierta.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un abierto en $C_n(X)$. Como $Cl_{C_n(X)}(C_n(X) \setminus F_n(X)) = C_n(X)$ y $F_n(X)$ es cerrado en $C_n(X)$, entonces existe un abierto $\mathcal{V}$ de $C_n(X)$ tal que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \setminus F_n(X)$. De esta forma, por la Observación 1.21, $q_X^n(\mathcal{V})$ es un subconjunto abierto de $HS_n(X)$ y, claramente, $q_X^n(\mathcal{V}) \subset q_X^n(\mathcal{U})$. Así, $Int_{HS_n(X)}(q_X^n(\mathcal{U})) \neq \emptyset$. $\square$

Observación 4.39. Es fácil probar que la clase de las funciones semiabiertas tienen la propiedad de composición y la propiedad del factor (ver Definiciones 2.1 y 2.7).

La observación anterior la usaremos en el siguiente resultado, para probar una relación entre las funciones inducidas $C_n(f)$ y $HS_n(f)$.

Teorema 4.40. *Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $C_n(f)$ es semiabierta si y sólo si $HS_n(f)$ es semiabierta.*

Demostración. Supongamos primero que $C_n(f)$ es semiabierta. Por la Proposición 4.38 y la Observación 4.39, $q_Y^n \circ C_n(f)$ es semiabierta. Como $q_Y^n \circ C_n(f) = HS_n(f) \circ q_X^n$, tenemos que $HS_n(f)$ es semiabierta, por la propiedad del factor (Observación 4.39).

Ahora, supongamos que $HS_n(f)$ es semiabierta. Sea $\mathcal{U}$ abierto de $C_n(X)$. Como $Cl_{C_n(X)}(C_n(X) \setminus F_n(X)) = C_n(X)$ y $F_n(X)$ es cerrado en $C_n(X)$, existe un subconjunto abierto $\mathcal{V}$ de $C_n(X)$ tal que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \setminus F_n(X)$. Notemos que

$q^n_X(\mathcal{V})$ es abierto en $HS_n(X)$, por la Observación 1.21. De lo anterior, como $HS_n(f)$ es semiabierta, tenemos que $Int_{HS_n(Y)}(HS_n(f)(q^n_X(\mathcal{V}))) \neq \emptyset$. De esta forma, existe un abierto no vacío $\mathcal{W}$ de $HS_n(Y)$ tal que $\mathcal{W} \subset Int_{HS_n(Y)}(HS_n(f)(q^n_X(\mathcal{V}))) \setminus \{F^n_Y\}$. Además, como $q^n_Y|_{C_n(Y)\setminus F_n(Y)}$ es un homeomorfismo, $(q^n_Y)^{-1}(\mathcal{W}) \subset C_n(f)(\mathcal{U})$ y nuestra prueba queda completa. □

Con el siguiente corolario, que se sigue de la Proposición 4.31 y los Teoremas 4.37 y 4.40, resumimos los resultados obtenidos en relación a las funciones semiabiertas.

Corolario 4.41. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Dados los siguientes enunciados:*

(1) 2^f es semiabierta;

(2) $C_n(f)$ es semiabierta, $n \in \mathbb{N}$;

(3) $HS_n(f)$ es semiabierta, $n \in \mathbb{N}$;

(4) f es semiabierta.

Entonces (1) y (4) son equivalentes, (2) y (3) son equivalentes y (2) implica (4).

4.3.1. Funciones semiabiertas en $[0,1]$ o S^1

En esta sección mostraremos que si $f : X \to Y$ es una función continua entre continuos, donde X es un arco o una curva cerrada simple y $C(f)$ es semiabierta, entonces f tiene que ser un homeomorfismo.

Con los primeros dos resultados de esta sección, mostramos que si f está definida entre arcos o entre curvas cerradas simples, y es tal que la función inducida $C(f)$ es semiabierta, entonces f es monótona.

Proposición 4.42. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Si $C(f)$ es semiabierta, entonces f es monótona.*

Demostración. Supongamos que f no es monótona. Sea $z \in Y$ tal que $f^{-1}(z)$ no es conexo. Sean p y q puntos en diferentes componentes de $f^{-1}(z)$. Supongamos que $p < q$. Notemos que, $f([p,q])$ no es degenerado. Como $f([p,q])$ es un intervalo, existe un punto y en $f([p,q])$, que no lo corta, tal que $y \neq z$. Sea $x \in [p,q]$ tal que $f(x) = y$. Sean V_1 y V_2 abiertos disyuntos de $[0,1]$ tales que $z \in V_1$ y $y \in V_2$. Como $[0,1]$ es localmente conexo, podemos tomar tres abiertos y conexos U_1, U_2 y U_3 de $[0,1]$ tales que:

(1) $p \in U_1, q \in U_3$, $x \in U_2 \setminus (U_1 \cup U_3)$ y $U_1 \cap U_3 = \emptyset$;

(2) $[p,q] \subset U_1 \cup U_2 \cup U_3$;

(3) $f(U_1)$ y $f(U_3)$ están contenidos en V_1.

Notemos que $[p,q] \in \langle U_1, U_2, U_3\rangle_1$ y, si $A \in \langle U_1, U_2, U_3\rangle_1$, entonces $x \in A$. Además, $f(A \setminus [p,q]) \subset V_1$, por (1), (2) y (3). Con esto, y no es un punto de corte de $f(A)$.

Probemos que $Int_{C([0,1])}(C(f)(\langle U_1, U_2, U_3\rangle_1)) = \emptyset$. Sean $B \in \langle U_1, U_2, U_3\rangle_1$ y $\epsilon > 0$. Sabemos que f es semiabierta, por la Proposición 4.31. Como $U_1 \cap U_3 = \emptyset$ y $B \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1,3\}$, tenemos que $Int_{[0,1]}(B) \neq \emptyset$. Así, $f(B)$ no es degenerado. Tomemos $D = f(B) \setminus (y - \frac{\epsilon}{2}, y + \frac{\epsilon}{2})$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\frac{\epsilon}{2}$ es menor que el diámetro de $f(B)$. Con lo que se sigue que, como y es un punto que no corta a $f(B)$, D es un continuo diferente del vacío de $[0,1]$. De lo que, como $y \notin D$, D no es un punto de $C(f)(\langle U_1, U_2, U_3\rangle_1)$ y, claramente, $H(f(B), D) < \epsilon$. Así, $Int_{C([0,1])}(C(f)(\langle U_1, U_2, U_3\rangle_1)) = \emptyset$ y $C(f)$ no es semiabierta. $\square$

Proposición 4.43. *Sea $f : S^1 \to S^1$ una función continua. Si $C(f)$ es semiabierta, entonces f es monótona.*

Demostración. De manera similar a la prueba anterior, supongamos que f no es monótona. Sea $z \in Y$ tal que $f^{-1}(z)$ no es conexo. Sean p y q puntos en diferentes componentes de $f^{-1}(z)$. Sea $\widehat{pq}$ un arco en S^1 con puntos extremos p y q. Consideremos dos casos:

(1) $f(\widehat{pq})$ es un subcontinuo propio de S^1. Usando el mismo argumento que mostramos en la prueba de la Proposición 4.42, podemos encontrar un abierto diferente del vacío $\langle U_1, U_2, U_3\rangle_1$ tal que:

$$Int_{C(S^1)}(C(f)(\langle U_1, U_2, U_3\rangle_1)) = \emptyset.$$

(2) $f(\widehat{pq}) = S^1$. Sea U un abierto propio de S^1 tal que $\widehat{pq} \subset U$. Sean V y W abiertos $U \setminus \widehat{pq}$ tales que $\langle U, V, W\rangle_1 \neq \emptyset$ y, si $A \in \langle U, V, W\rangle_1$, entonces $\widehat{pq} \subset A$.

Así, $C(f)(\langle U, V, W\rangle_1) = \{S^1\}$ e $Int_{C(S^1)}(C(f)(\langle U, V, W\rangle_1)) = \emptyset$.

De (1) y (2) concluimos que $C(f)$ no es semiabierta y nuestra prueba queda completa. $\square$

Con el siguiente teorema mostramos que la función inducida $C(f)$ es semiabierta, donde f está definida entre arcos o entre curvas cerradas simples, sólo es posible si f es un homeomorfismo.

Teorema 4.44. *Sea* $f : X \to X$ *una función continua, donde* X *es un intervalo o una curva cerrada simple. Si* $C(f)$ *es semiabierta, entonces* f *es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $f : X \to X$ una función continua tal que $C(f)$ es semiabierta. Observemos que f es semiabierta, por la Proposición 4.31. Además, f es monótona, por las Proposiciones 4.42 y 4.43. Sea $y \in X$. Como f es monótona, $f^{-1}(y)$ es conexo. Observemos que $f^{-1}(y)$ es degenerado, pues, en caso contrario, existiría un abierto $U \subset f^{-1}(y)$ y, de esto, $Int_Y(f(U)) = \emptyset$, pero esto contradice que f es semiabierta. Con lo que concluimos que f es ligera. Así, f es un homeomorfismo, por la Proposición 3.2. $\square$

El siguiente corolario es una clara consecuencia de los Teoremas 4.40 y 4.44.

Corolario 4.45. *Sea* $f : X \to X$ *una función continua, donde* X *es un intervalo o una curva cerrada simple. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $C(f)$ *es semiabierta;*

(2) $HS(f)$ *es semiabierta;*

(3) f *es un homeomorfismo.*

A continuación, mostraremos que el Corolario 4.45 lo podemos mejorar cambiando el codominio de la función por un espacio arbitrario. Para esto, necesitaremos la siguiente definición:

Definición 4.46. Un continuo X es llamado un *triodo* si existe un subcontinuo Z de X tal que $X \setminus Z$ es la unión de tres subconjuntos no vacíos y separados dos a dos en X. Un *triodo simple* es la unión de tres arcos, los cuales, sólo tienen en común un único punto final. Además, a un continuo X lo llamaremos *atriódico* si X no contiene un triodo.

Proposición 4.47. *Sea $f : [0,1] \to Y$ una función continua. Si $C(f)$ es semiabierta, entonces Y es atriódico.*

Demostración. Sea $f : [0,1] \to Y$ una función continua, tal que $C(f)$ es semiabierta. Notemos que Y es localmente conexo [37, Teorema 8.18, pág.128]. Así, es suficiente probar que Y no contiene un triodo simple. Supongamos lo contrario. Sea T un triodo simple en Y. Como $C(f)$ es suprayectiva, por la Definición 1.40, existe un subcontinuo A de $[0,1]$ tal que $f(A) = T$. Sean a_1 y a_2 puntos de $[0,1]$ tales que $A = [a_1, a_2]$. Como T tiene tres puntos que no son de corte, existe un punto x_0 en $[0,1]$ tal que $f(x_0)$ no es un punto de corte de T y $a_1 < x_0 < a_2$. Sean b_1 y b_2 puntos en $[0,1]$ tales que $a_1 < b_1 < x_0 < b_2 < a_2$. Sea $r > 0$ tal que $B_d(b_i, r) \cap \{a_i, x_0\} = \emptyset$ para cada $i \in \{1,2\}$.

Probemos que $C(f)(B_H([b_1,b_2], r))$ tiene interior vacío. Sea $B \in B_H([b_1,b_2], r)$. Observemos que $B \subset [a_1,a_2]$ y que $x_0 \in B$. De esta forma, $f(x_0)$ es un punto que no corta a $f(B)$. Sea $\epsilon > 0$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $D = f(B) \setminus B_d(f(x_0), \frac{\epsilon}{2})$ es un subcontinuo diferente del vacío en T. Claramente, $H(D, f(B)) < \epsilon$. Como $f(x_0) \notin D$, $D \notin C(f)(B_H([b_1,b_2], r))$.

Finalmente, por el parágrafo anterior tenemos que:

$$Int_{C(Y)}(C(f)(B_H([b_1,b_2], r))) = \emptyset,$$

pero esto contradice nuestra hipótesis que $C(f)$ es semiabierta. Así, Y es un continuo atriódico. $\square$

Usando el mismo argumento que mostramos en la demostración de la Proposición 4.47, es sencillo probar lo siguiente:

Proposición 4.48. *Sea $f : S^1 \to Y$ una función continua. Si $C(f)$ es semiabierta, entonces Y es atriódico.*

Notemos el siguiente resultado:

Proposición 4.49. *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(1) No existe una función $f : S^1 \to [0,1]$ tal que $C(f)$ sea semiabierta.

(2) No existe una función $f : [0,1] \to S^1$ tal que $C(f)$ sea semiabierta.

Demostración. Probemos independientemente:

(1) Supongamos primero que $f : S^1 \to [0,1]$ es una función continua tal que $C(f)$ es semiabierta. Sean z y w puntos en S^1 tales que $z \in f^{-1}(0)$ y $w \in f^{-1}(1)$. Denotemos por $\widehat{zw}$ a un arco en S^1 con puntos extremos z y w. Claramente $f(\widehat{zw}) = [0,1]$. Sea A un arco en S^1 tal que $\widehat{zw} \subset A$ y $\{z,w\} \subset Int_{S^1}(A)$. Es fácil ver que existe un $r > 0$ tal que si $B \in B_H(A,r)$, entonces $\widehat{zw} \subset B$. Así, $C(f)(B_H(A,r)) = \{[0,1]\}$. Con lo que concluimos que $C(f)$ no es semiabierta.

(2) Supongamos que $f : [0,1] \to S^1$ es tal que $C(f)$ es semiabierta. Probemos que existe un subcontinuo D en el abierto $(0,1)$ tal que $f(D) = S^1$. Como $f([0,1]) = S^1$, existen dos puntos a_0 y a_1 en $(0,1)$ tales que

$A = f([a_0, a_1])$, donde A es un subcontinuo propio y no degenerado de S^1. Sean z_0 y z_1 dos puntos diferentes en A tales que:

$$\{z_0, z_1\} \cap \{f(0), f(1)\} = \emptyset. \tag{4.5}$$

Sea B un arco en S^1, donde z_0 y z_1 son los puntos de no corte de B, y tal que $A \cup B = S^1$. Como $C(f)$ es suprayectiva (ver Definición 1.40), existe un subcontinuo B_0 de $[0,1]$ tal que $f(B_0) = B$. Sean x_0 y x_1 puntos en B_0 tales que $f(x_0) = z_0$ y $f(x_1) = z_1$. Supongamos que $x_0 < x_1$. Notemos que $[x_0, x_1] \subset (0,1)$, por (4.5). Además, observemos que $f([x_0, x_1]) = B$. Sea $D = [\text{mín}\{x_0, a_0\}, \text{máx}\{x_1, a_1\}]$. Claramente, D es un subcontinuo de $(0,1)$. Como $[a_0, a_1] \cup [x_0, x_1] \subset D$, tenemos que $f(D) = S^1$.

Finalmente, tomemos r un número positivo tal que:

$$r < \text{mín}\{\text{mín}\{D\}, 1 - \text{máx}\{D\}\}.$$

Sea $B_H([0,1], r)$. Notemos que si $E \in B_H([0,1], r)$ entonces $D \subset E$. Así:

$$C(f)(B_H([0,1], r)) = \{S^1\}.$$

Con lo que concluimos que $Int_{C(S^1)}(C(f)(B_H([0,1], r))) = \emptyset$ y $C(f)$ no es semiabierta.

$\square$

Corolario 4.50. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Entonces:*

(1) Si $X = [0,1]$ y $C(f)$ es semiabierta, entonces Y es un arco.

(2) Si $X = S^1$ y $C(f)$ es semiabierta, entonces Y es una curva cerrada simple.

Demostración. Haremos la prueba de (*1*) y de manera similar se prueba (*2*). Sea $f : [0,1] \to Y$ una función continua tal que $C(f)$ es semiabierta. Entonces Y es atriódico, por la Proposición 4.47. Así, Y es un arco o una curva cerrada simple, por [37, Ejercicio 8.40(b), pág.135]. Con lo que concluimos que Y es un arco, por la Proposición 4.49. $\square$

Con los Corolarios 4.45 y 4.50, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.51. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, donde X es un arco o una curva cerrada simple. Si $C(f)$ es semiabierta, entonces f es un homeomorfismo.*

4.4. Resultados adicionales

Empezaremos esta sección con una proposición que, aunque es solamente válida para las funciones semiabiertas, nos será de utilidad en esta parte de nuestro trabajo.

Proposición 4.52. *Sea $f : X \to Y$ una función semiabierta entre continuos. Si U es un abierto diferente del vacío en X, entonces $f|_{Cl_X(U)}$ es semiabierta.*

Demostración. Sean $f : X \to Y$ una función semiabierta y U un abierto diferente del vacío en X. Sea W un abierto no vacío en $Cl_X(U)$. Entonces existe un abierto V de X, tal que $W = V \cap Cl_X(U)$. De esta forma, $V \cap U$ es un abierto no vacío en X. Así, $f(V \cap U)$ tiene interior no vacío e $Int_Y(f(V \cap U)) \subset f|_{Cl_X(U)}(W)$. Con lo que concluimos que $f|_{Cl_X(U)}$ es semiabierta. $\square$

A continuación, un *rayo* será un espacio topológico homeomorfo al intervalo $[0, \infty)$.

Teorema 4.53. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos, donde $X = R \cup K$, R es un rayo y $K = Cl_X(R) \setminus R$. Si $C(f)$ es semiabierta. Entonces $Y = R' \cup K'$, $f|_R$ es un homeomorfismo entre R y R' y $K' = Cl_Y(R') \setminus R'$.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función continua que satisface las hipótesis del teorema. Haremos la demostración en cuatro partes:

Afirmación 1. $f|_R$ *es monótona.*

Supongamos que existe $y \in Y$ tal que $f|_R^{-1}(y)$ no es conexo. Sean p y q puntos en diferentes componentes de $f|_R^{-1}(y)$. Sea U un subconjunto abierto y conexo de X tal que $p, q \in U$ y $Cl_X(U)$ es un arco en R. Notemos que $C(f)|_{Cl_{C(X)}(\langle U \rangle_1)}$ es semiabierta, por la Proposición 4.52.

Probemos que $Cl_{C(X)}(\langle U \rangle_1) = C(Cl_X(U))$. Sea $A \in Cl_{C(X)}(\langle U \rangle_1)$. Entonces, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\langle U \rangle_1$ tal que $\lim_{n \to \infty} A_n = A$. Así, $A \subset Cl_X(U)$ y $A \in C(Cl_X(U))$. Ahora, sean $A \in C(Cl_X(U))$ y $r > 0$. Como U es conexo y $Cl_X(U)$ es un arco, existe un subcontinuo B de U tal que $H(A, B) < r$. Con lo que tenemos que $B_H(A, r) \cap \langle U \rangle_1 \neq \emptyset$. Así, $A \in Cl_{C(X)}(\langle U \rangle_1)$.

Observemos ahora que si $A \in C(Cl_X(U))$, entonces:

$$C(f|_{Cl_X(U)})(A) = f(A) = C(f)|_{Cl_{C(X)}(\langle U \rangle_1)}(A).$$

Con lo que $C(f|_{Cl_X(U)})$ es semiabierta. Como $Cl_X(U)$ es un arco, $f|_{Cl_X(U)}$ es un homeomorfismo, por el Corolario 4.51. Pero esto contradice el hecho que $p, q \in Cl_X(U)$ y $f(p) = f(q)$. De esta manera, $f|_R$ es monótona.

Afirmación 2. $f|_R$ *es inyectiva.*

Sea $x \in R$. Como $f|_R$ es monótona, $f|_R^{-1}(f(x))$ es un subcontinuo de R. Ahora, si $f|_R^{-1}(f(x))$ no es degenerado, entonces $Int_X(f|_R^{-1}(f(x))) \neq \emptyset$. Pero esto implica que f no es semiabierta, contradiciendo la Proposición 4.31. Con lo que tenemos que $f|_R^{-1}(f(x)) = \{x\}$. Así, $f|_R$ es inyectiva.

Afirmación 3. $f(K) \subset Y \setminus f(R)$.

Sea $R' = f(R)$. Supongamos que $f(K) \cap R' \neq \emptyset$. Como R es un rayo, identificamos a R con $[0, \infty)$. Primero, probemos que si $w \in R$ y $f(w) \in f(K)$, entonces existe $w_0 \in R$ tal que $w < w_0$ y $f(w_0) \notin f(K)$. Supongamos que $f([w, \infty)) \subset f(K)$ para algún $w \in R$, con $f(w) \in f(K)$. Sean U un abierto en $[w, \infty)$ tal que $Cl_X(U) \cap K = \emptyset$ y $y \in f(U)$. Así, $y \in f(K)$. Sea $x \in K$ tal que $f(x) = y$. Como $K = Cl_X(R) \setminus R$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R \setminus Cl_X(U)$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Además, como $f|_R$ es inyectiva, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \cap f(U) = \emptyset$. Con lo que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$ y $y \notin Int_Y(f(U))$. Como tomamos un punto $y \in f(U)$ arbitrario, $Int_Y(f(U)) = \emptyset$. Esto contradice que f es semiabierta, por la Proposición 4.31. Con lo que tenemos que si existe $w \in R$ tal que $f(w) \in f(K)$, entonces existe un $w_0 \in R$ tal que $w < w_0$ y $f(w_0) \notin f(K)$.

Ahora, sean $f(w_1)$ y $f(w_2)$ puntos diferentes de $R' \setminus f(K)$. Supongamos que $w_1 < w_2$ y $f([0, w_1]) \cap f(K) \neq \emptyset$. Sea $Q = f([0, w_1]) \cup f([w_2, \infty) \cup K)$. Claramente, Q es un continuo. Notemos que, como $f(w_1)$ y $f(w_2)$ no están en $f(K)$, existe $z \in (w_1, w_2)$ tal que $f(z) \notin f(K)$, i.e., $Q \neq Y$. Además, como f es débilmente confluente (ver Proposición 1.51), existe $L \in C(X)$ tal que $f(L) = Q$. Como $f|_R$ es inyectiva y $w_1, w_2 \notin K$, tenemos que $w_1, w_2 \in L$. De lo anterior, $[w_1, w_2] \subset L$. Así, $f(L) = Y$. Pero esto contradice que $Q \neq Y$. De esta forma, $f(K) \cap R' = \emptyset$.

Tomemos $K' = f(K)$. Claramente, $K' = Cl_Y(R') \setminus R'$ y $Y = R' \cup K'$.

Afirmación 4. *$f|_R$ es un homeomorfismo entre R y R'.*

Como $f|_R$ es una biyección entre R y R', es suficiente probar que $f|_R$ es cerrada. Sea A un subconjunto cerrado de R. Así, existe un cerrado B de X tal que $A = B \cap R$. Mostremos que $f|_R(A) = f(B) \cap R'$, i.e. mostremos que $f|_R(A)$ es cerrado R'. Claramente, $f(A) = f(B \cap R) \subset f(B) \cap R'$.

Sea $y \in f(B) \cap R'$. Como $f|_R$ es una biyección entre R y R' y $f(K) \cap R' = \emptyset$ (ver Afirmaciones 2 y 3), tenemos que existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Así, $x \in B \cap R$ y $y \in f(A)$. De lo que concluimos que $f|_R(A) = f(B) \cap R'$.

Con lo anterior, nuestra prueba queda completa. □

Como toda función abierta es semiabierta (ver Diagrama I), el siguiente corolario se sigue del Teorema 4.53

Corolario 4.54. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos, donde $X = R \cup K$, R es un rayo y $K = Cl_X(R) \setminus R$. Si $C(f)$ es abierta, entonces $Y = R' \cup K'$, $f|_R$ es un homeomorfismo entre R y R', y $K' = Cl_Y(R') \setminus R'$.*

Proposición 4.55. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos, donde $X = R \cup K$, R es un rayo y $K = Cl_X(R) \setminus R$. Si $C(f)$ es abierta, entonces $C(f|_K)$ es también abierta.*

Demostración. Observemos que, por el Corolario 4.54, $C(f)^{-1}(C(K')) = C(K)$. Así, $C(f)|_{C(K)}$ es abierta [37, Lema 13.13, pág.284]. Es fácil probar que $C(f|_K) = C(f)|_{C(K)}$. Con lo que concluimos que $C(f|_K)$ es abierta. □

Teorema 4.56. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos, donde $X = R \cup K$, R es un rayo, $K = Cl_X(R) \setminus R$ y K es localmente conexo. Si $C(f)$ es abierta, entonces f es monótona.*

Demostración. Por el Corolario 4.54, sabemos que $Y = R' \cup K'$, donde R' es homeomorfo a R, y $K' = Cl_Y(R') \setminus R'$. También, $C(f|_K)$ es abierta, por la Proposición 4.55. Así, como K es localmente conexo, $f|_K$ es monótona, por el Teorema 4.23. Con lo que tenemos que $f^{-1}(y)$ es conexo, para cada $y \in Y$, pues, $f^{-1}(R') \cap f^{-1}(K') = \emptyset$. Por lo que concluimos que f es monótona. □

En [12, Pregunta 10, pág.71] se plantea la siguiente pregunta:

Pregunta 4.57. *Sean X un continuo hereditariamente unicoherente y hereditariamente descomponible (λ-dendroide) y $f : X \to Y$ una función continua. ¿Si $C(f)$ es abierta, entonces es f un homeomorfismo?*

De una manera más particular:

Pregunta 4.58. *Sea X un dendroide y $f : X \to Y$ una función continua. ¿Si $C(f)$ es abierta, entonces es f un homeomorfismo?*

En relación a la Pregunta 4.58 sabemos, hasta el momento en este trabajo, que si X es hereditariamente localmente conexo, entonces la respuesta es afirmativa, por la Proposición 4.27. Además, en [12, Teorema 9, pág.70] podemos encontrar un prueba del siguiente teorema, el cual nos acerca un poco más a la respuesta de la Pregunta 4.58.

Teorema 4.59. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, donde X es un abanico. Si $C(f)$ es abierta, entonces f es un homeomorfismo.*

Hasta ahora sólo se conoce, en la literatura, respuestas parciales a la Pregunta 4.57 cuando X es un dendroide. Con el siguiente teorema mostramos una respuesta parcial a la Pregunta 4.57 cuando X es un λ-dendroide y no un dendroide.

Teorema 4.60. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos, donde $X = R \cup K$, R es un rayo, $K = Cl_X(R) \setminus R$ y K es hereditariamente localmente conexo o un abanico. Si $C(f)$ es abierta, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Sabemos que $Y = R' \cup K'$, donde $f|_R$ es un homeomorfismo entre R y R', y $K' = Cl_Y(R') \setminus R'$, por el Corolario 4.54. También, $C(f|_K)$ es abierta, por la Proposición 4.55. Así, $f|_K$ es un homeomorfismo, por la Proposición 4.27 y el Teorema 4.59. Finalmente, como $f^{-1}(R') \cap f^{-1}(K') = \emptyset$, concluimos que f es un homeomorfismo. □

Corolario 4.61. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos, donde $X = R \cup K$, R es un rayo, $K = Cl_X(R) \setminus R$ y K es localmente conexo. Si $HS(f)$ es abierta, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Notemos que f es ligera y $C(f)$ es abierta, por el Teorema 4.21. De esto se sigue que f es monótona, por el Teorema 4.56. Así, f es monótona y ligera, por tanto, un homeomorfismo, por la Proposición 3.2. □

Corolario 4.62. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos, donde $X = R \cup K$, R es un rayo, $K = Cl_X(R) \setminus R$ y K es un abanico. Si $HS(f)$ es abierta, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Sabemos que $C(f)$ es abierta, por el Teorema 4.21. Así, la prueba se sigue del Teorema 4.60. □

Por el Teorema 4.13, existe una función continua f entre continuos, tal que $HS(f)$ es abierta y f no es un homeomorfismo. Aparte de este ejemplo, no conocemos otra función con esta característica.

Pregunta 4.63. *¿Qué continuo X tiene la propiedad que si $f : X \to Y$ es tal que $HS(f)$ sea abierta, entonces f sea un homeomorfismo?*

Definición 4.64. Sea X un continuo. Diremos que X esta en la clase W, y escribiremos $X \in Clase(W)$, si para cualquier continuo Y y cualquier función suprayectiva $f : Y \to X$, tenemos que f es débilmente confluente.

Una demostración del siguiente teorema puede ser encontrada en [40, Teorema, pág.294].

Teorema 4.65. *Sea X un continuo. Entonces $X \in Clase(W)$ si y sólo si toda compactación Y del rayo $[0, \infty)$ con residuo X tiene la propiedad que $C(Y)$ es una compactación de $C([0, \infty))$.*

Como un inverso al Teorema 4.53, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.66. *Sean $X \in Clase(W)$ y Y un continuo. Si $f : R \cup X \to R' \cup Y$ es una función suprayectiva entre continuos, donde R es un rayo, $X = Cl_{R\cup X}(R) \setminus R$, $f|_R$ es un homeomorfismo entre R y R' y $R' \cap f(X) = \emptyset$, entonces $C(f)$ es semiabierta.*

Demostración. Probemos que $C(f)$ es semiinterior en cada punto de $C(R \cup X)$. Sea $A \in C(R \cup X)$. Consideremos dos casos:

(1) $A \subset R$. Sea $\mathcal{U}$ un abierto de $C(R \cup X)$ tal que $\mathcal{U} \cap C(X) = \emptyset$. Como $f|_R$ es un homeomorfismo entre R y R' y $f(R) \cap f(X) = \emptyset$, tenemos

que $C(f)(\mathcal{U}) = C(f|_R)(\mathcal{U})$. De esta manera, $C(f)(\mathcal{U})$ es abierto y $C(f)$ es semiinterior en A.

(2) $A \cap X \neq \emptyset$. Como $X \in Clase(W)$, $C(R \cup X)$ es una compactación de $C(R)$, por el Teorema 4.65. De esto, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(R)$, tal que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ (independientemente de que si $A \subset X$ o $X \subset A$). Sea $\mathcal{U}$ un abierto de $C(R\cup X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$. Así, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A_k \in \mathcal{U}$. Con lo que podemos garantizar que existe un abierto $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{V} \cap C(X) = \emptyset$ y $A_k \in \mathcal{V}$. De esta forma, $C(f)(\mathcal{V})$ es un abierto y $C(f)(\mathcal{V}) \subset C(f)(\mathcal{U})$. Además, $f(A_k) \in Int_{C(R'\cup Y)}(C(f)(\mathcal{U}))$ y $C(f)$ es semiinterior en A.

Por (1) y (2), $C(f)$ es semiinterior en cada punto de $C(R \cup X)$. Así, $C(f)$ es semiabierta, por el Teorema 4.34. $\square$

Con el siguiente ejemplo, mostramos que la Proposición 4.55 y el Teorema 4.56 no son válidos si cambiamos la hipótesis que la función inducida $C(f)$ sea abierta, por semiabierta.

Ejemplo 4.67. *Sean* $R = \{(t, \mathrm{sen}(\frac{1}{t})) : 0 < t \leq 1\}$ *y* $X = \{0\} \times [-1, 1]$. *Definamos* $f(x, y) = (x, |y|)$ *para cada punto* $(x, y) \in R \cup X$. *Por el Teorema 4.66, la función inducida* $C(f)$ *es semiabierta. Notemos que* $C(f|_X)$ *no es semiabierta, por el Corolario 4.51, y* f *no es monótona. Así, existe una función continua* $f : X \to Y$ *entre continuos, donde* $X = R \cup K$, R *es un rayo y* $K = Cl_X(R) \setminus K$, *tal que* $C(f)$ *es semiabierta, pero* $C(f|_K)$ *no es semiabierta y* f *no es monótona.*

Bibliografía

[1] F. Barragán, *Funciones inducidas entre hiperespacios de continuos,* Tesis de Maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla-México, 2007.

[2] K. Borsuk y R. Molski, *On a class of continuous mappings,* Fund. Math., 45 (1958), 84-98.

[3] J. Camargo, *On the semi-open induced mappings,* Topology Proc., 32 (2008), 145-152.

[4] J. Camargo, *Openness of induced maps and homeomorphisms,* por aparecer en Houston J. Math.

[5] J. Camargo, *Some relationships between induced mappings,* por aparecer en Topology Appl.

[6] J. Camargo, *Lightness of induced maps and homeomorphisms,* manuscrito.

[7] J. J. Charatonik, *Confluent mappings and unicoherence of continua*, Fund. Math., 56 (1964), 213-220.

[8] J. J. Charatonik, *Recent results on induced mappings between hyperspaces of continua*, Topology Proc., 22 (1997), 103-122.

[9] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Lightness of induced mappings,* Tsukuba J. Math., 22 (1998), 179-192.

[10] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Inducible mappings between hyperspaces,* Bull. Polish Acad. Sci. Math., 46 (1998), 5-9.

[11] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Limit properties of induced mappings,* Topology Appl., 100 (2000), 103-118.

[12] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik y A. Illanes, *Openness of induced mappings,* Topology Appl., 98 (1999), 67-80.

[13] J. J. Charatonik, A. Illanes y S. Macías, *Induced mappings on the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X,* Houston J. Math., 28 (2002), 781-805.

[14] W. J. Charatonik, *Arc approximation property and confluence of induced mappings,* Rocky Mountain J. Math., 28 (1998), 107-154.

[15] W. J. Charatonik, *Openness and monotoneity of induced mappings,* Proc. Amer. Math. Soc., 127 (1999), 3729-3731.

[16] J. Dugundji, *Topology,* Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[17] R. Engelking, *Outline of general topology,* North-Holland Publishing Company-Amsterdam, 1968.

[18] R. Escobedo, M. López y S. Macías, *On the hyperspace suspension of a continuum,* Topology Appl., 138 (1999), 109-124.

[19] J. G. Hocking y G. S. Young, *Topology,* Dover Publications, New York, 1988.

[20] H. Hosokawa, *Induced mappings on hyperspaces*, Tsukuba J. Math., 21 (1997), 239-250.

[21] H. Hosokawa, *Induced mappings on hyperspaces, II*, Tsukuba J. Math., 21 (1997), 773-783.

[22] A. Illanes, *The openness of induced mappings on hyperspaces,* Colloq. Math., 74 (1997), 219-224.

[23] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances,* Pure and Applied Mathematics, Vol. 216, Marcel Dekker, New York, 1999.

[24] W. T. Ingram, *Inverse Limits,* Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N° 15, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2000.

[25] K. Kuratowski, *Topology,* Vol I, Academic Press, New York, N. Y., 1966.

[26] K. Kuratowski, *Topology,* Vol II, Academic Press, New York, N. Y., 1968.

[27] A. Lelek y D. R. Read, *Compositions of confluent mappings and some other classes of functions,* Colloq. Math., 29 (1974), 101-112.

[28] M. de J. López y S. Macías, *Induced maps on n-fold hyperspaces,* Houston J. Math., 33 (2007), 1047-1057.

[29] S. Macías, *On the n-fold hyperspace suspension of continua*, Topology Appl., 138 (2004), 125-138.

[30] S. Macías, *Induced maps on n-fold hyperspace suspensions,* Topology Proc., 28 (2004), 143-152.

[31] S. Macías, *Topics on Continua,* Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[32] S. Macías, *On the n-fold hyperspace suspension of continua, II*, Glasnik Mat. (61), 41 (2006), 335-343.

[33] S. Macías y S. Nadler, Jr., *Absolute n-fold hyperspace suspensions,* Colloq. Math., 105 (2006), 221-231.

[34] T. Maćkowiak, *Continuous mappings on continua,* Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), 158 (1979), 1-95.

[35] S. Nadler, Jr., *A fixed point theorem for hyperspace suspensions*, Houston J. Math., 5 (1979), 125-132.

[36] S. Nadler, Jr., *Induced universal maps and some hyperspaces with the fixed point property,* Proc. Amer. Math. Soc., 100 (1987), 749-754.

[37] S. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An Introduction,* Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[38] S. Nadler, Jr., *Dimension Theory: An Introduction with Exercises,* Aportaciones Matemáticas. Serie Textos N° 18. Sociedad Matemática Mexicana, México, 2002.

[39] S. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets. A Text with Research Questions,* Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N° 33, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2006.

[40] C. W. Proctor, *A characterization of absolutely C*-smooth continua,* Proc. Amer. Math. Soc., 92 (1984), 193-296.

[41] A. D. Wallace, *Quasi-monotone transformations,* Duke Math. J., 7 (1940), 136-145.

[42] S. Willard, *General Topology,* Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 1998.

[43] G. T. Whyburn, *Analytic Topology,* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1942.

[44] G. T. Whyburn, *Topological Analysis,* Princeton Math. Series., Princeton, New Jersey, Princeton University, 1958.

[45] H. Xianjiu, Z. Fanping y Z. Gengrong, *Semi-openness and Almost-openness of Induced Mappings,* Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B., 20(1) (2005), 21-26.