



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

APROXIMACIÓN PERTURBATIVA
PARA TEORÍAS DE ORDEN SUPERIOR
EN LA FORMULACIÓN HAMILTONIANA

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN CIENCIAS (FÍSICA)
PRESENTA: ANA AURELIA AVILEZ LÓPEZ



posgrado en ciencias físicas
u n a m

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER

COMITÉ TUTORAL: DR. LUIS F. URRUTIA RÍOS
DR. ANTONIO GARCÍA ZENTENO

CIUDAD DE MÉXICO

2009



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres: Margarita y Pop.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se introduce el concepto de grupo, que es una estructura algebraica fundamental en matemáticas. Un grupo es un conjunto no vacío G con una operación binaria \cdot que cumple con las propiedades de asociatividad, existencia de elemento neutro y existencia de inversos. Estas propiedades permiten estudiar las simetrías y las transformaciones de los objetos matemáticos.

El primer ejemplo de grupo que se estudia es el grupo de simetrías de un objeto geométrico. Si G es el grupo de simetrías de un objeto, entonces G actúa sobre el objeto, lo que significa que cada elemento de G transforma el objeto en sí mismo. Esta acción puede ser descrita mediante una representación matricial. Si n es el número de dimensiones del objeto, entonces la representación matricial es una matriz $n \times n$ con coeficientes en un cuerpo K . El grupo de simetrías G es un subgrupo del grupo general lineal $GL(n, K)$.

El segundo ejemplo de grupo que se estudia es el grupo de permutaciones. Si S_n es el grupo de permutaciones de n elementos, entonces S_n actúa sobre el conjunto de n elementos. Esta acción puede ser descrita mediante una representación matricial. Si n es el número de elementos, entonces la representación matricial es una matriz $n \times n$ con coeficientes en un cuerpo K .

El presente trabajo tiene como objetivo principal analizar el impacto de la implementación de un sistema de gestión de la calidad (SGC) en una empresa manufacturera. Para ello, se ha diseñado un estudio de caso que permite observar de primera mano los cambios organizacionales y operativos que se producen al adoptar este tipo de herramientas. El estudio se divide en tres partes principales: primero, se describe el contexto de la empresa y el estado de sus procesos antes de la implementación; segundo, se detallan los aspectos clave del SGC implementado, incluyendo los estándares adoptados y los roles asignados; y finalmente, se evalúan los resultados obtenidos tras un periodo de implementación, considerando tanto los aspectos cuantitativos como cualitativos. Este análisis busca identificar las mejores prácticas y los desafíos que surgen durante el proceso de implementación, así como las estrategias utilizadas para superarlos.

Además, se exploran las percepciones de los empleados y la dirección sobre el SGC, así como el nivel de compromiso y la cultura de calidad que se ha desarrollado. Los datos recopilados se analizan a la luz de la literatura existente sobre SGC, buscando validar o refutar las hipótesis planteadas al inicio del estudio. El resultado final del trabajo es un informe que ofrece una visión integral del proceso de implementación y sus consecuencias, sirviendo como referencia para otras organizaciones que estén considerando adoptar un SGC.

El estudio se estructura de la siguiente manera: el primer capítulo presenta el contexto de la investigación, incluyendo la descripción de la empresa y el problema que motiva el estudio. El segundo capítulo describe el SGC implementado, detallando los estándares, los procedimientos y los roles involucrados. El tercer capítulo presenta los resultados de la implementación, analizando los cambios observados en los procesos y en el comportamiento de los empleados. El cuarto capítulo discute las conclusiones del estudio y las recomendaciones para futuras implementaciones. Finalmente, se incluye un apéndice con los documentos clave del SGC implementado.

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación más amplio que busca comprender el impacto de las herramientas de gestión de la calidad en diferentes contextos organizacionales. Los resultados de este estudio serán compartidos con la comunidad académica y profesional a través de publicaciones y conferencias. Se espera que este análisis contribuya al conocimiento sobre cómo implementar exitosamente un SGC en una empresa manufacturera.

... () ...

... () ...

... () ...

... () ...

... () ...

... () ...

... () ...

... () ...

... () ...

... () ...

... () ...

... () ...

... () ...

... () ...

... () ...

... () ...

... () ...

... () ...

... () ...

... () ...

... de la teoría de la relatividad general, que describe la gravedad como la curvatura del espacio-tiempo. Esta teoría predice que la luz se desvía al pasar cerca de un objeto masivo, un efecto que fue confirmado experimentalmente durante un eclipse solar en 1919. Este descubrimiento marcó el inicio de la cosmología moderna y la comprensión de que el universo no es estático, sino que está en constante expansión.

... de la expansión del universo, que se descubrió al observar que las galaxias se alejan de nosotros a velocidades que aumentan con la distancia. Este descubrimiento, realizado por Edwin Hubble en 1929, llevó a la formulación del modelo del Big Bang, que describe el origen y la evolución del universo desde un estado inicial de alta densidad y temperatura.

... de la evolución del universo, que se describe mediante el modelo del Big Bang. Este modelo predice que el universo comenzó hace unos 13.800 millones de años en un estado de alta densidad y temperatura, y se ha estado expandiendo y enfriando desde entonces. Este modelo ha sido respaldado por una gran cantidad de evidencia observacional, como la radiación cósmica de fondo y la distribución de galaxias.

... de la evolución del universo, que se describe mediante el modelo del Big Bang. Este modelo predice que el universo comenzó hace unos 13.800 millones de años en un estado de alta densidad y temperatura, y se ha estado expandiendo y enfriando desde entonces. Este modelo ha sido respaldado por una gran cantidad de evidencia observacional, como la radiación cósmica de fondo y la distribución de galaxias. ¹(C_p) ²

... de la evolución del universo, que se describe mediante el modelo del Big Bang. Este modelo predice que el universo comenzó hace unos 13.800 millones de años en un estado de alta densidad y temperatura, y se ha estado expandiendo y enfriando desde entonces. Este modelo ha sido respaldado por una gran cantidad de evidencia observacional, como la radiación cósmica de fondo y la distribución de galaxias.

¹que a lo largo de la tesis llamaremos "perturbativas"

²ver apéndice B

... () ... ()

3

 C_p C_p

... ()

... (), ... ()

... (+)

³Tal procedimiento se conoce como fijación de la norma

$(EMCS_3)$,
 QED_3
 $(EMCS_1)$ $EMCS_3$
 (\dots) ,
 $EMCS_3$
 (\dots)
 QED_3

Capítulo 2

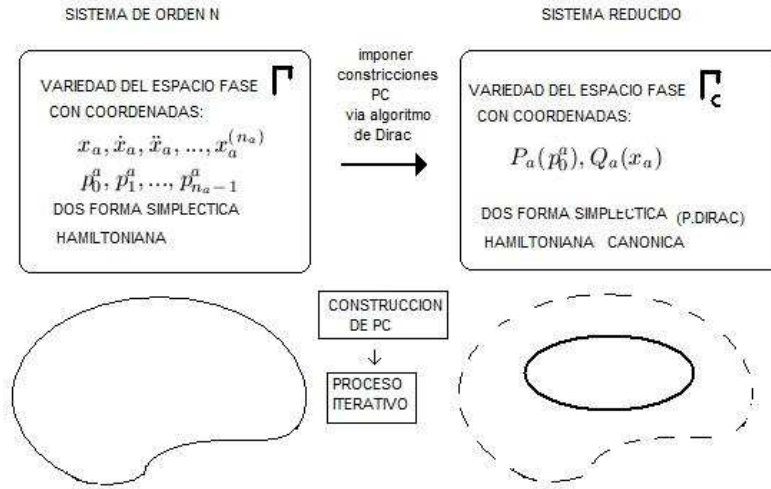
Aproximación Perturbativa en la Formulación Hamiltoniana: Caso No Singular

Consideramos un sistema hamiltoniano con n grados de libertad, descrito por la función de Hamilton $H(q, p)$ en las variables canónicas (q, p) . Suponemos que el sistema puede separarse en partes no perturbadas y perturbadas, de modo que la función de Hamilton se escribe como $H(q, p) = H_0(q, p) + \epsilon H_1(q, p) + \epsilon^2 H_2(q, p) + \dots$, donde ϵ es un parámetro pequeño que mide la intensidad de la perturbación. El primer término H_0 representa el sistema no perturbado, que es integrable y sus soluciones se describen mediante las acciones I y los ángulos θ . Las acciones I son invariantes adiabáticas y se conservan en el tiempo. Las variables canónicas se expresan como $q = q(I, \theta)$ y $p = p(I, \theta)$.

El segundo término H_1 representa la perturbación de primer orden. La función de Hamilton total H puede ser escrita en términos de las acciones I y los ángulos θ como $H(I, \theta) = H_0(I) + \epsilon H_1(I, \theta) + \epsilon^2 H_2(I, \theta) + \dots$. La función de Hamilton H_0 depende solo de las acciones I , mientras que H_1 y H_2 dependen también de los ángulos θ . La función de Hamilton H_0 se puede escribir como $H_0(I) = \sum_{s=1}^n p_s^2 / 2m_s + V(q)$, donde p_s es el momento canónico conjugado a q_s , m_s es la masa de la partícula s , y $V(q)$ es el potencial. La función de Hamilton H_1 se puede escribir como $H_1(I, \theta) = \sum_{s=1}^n p_s^2 / 2m_s + V(q) + \epsilon H_1(I, \theta)$.

El tercer término H_2 representa la perturbación de segundo orden. La función de Hamilton total H puede ser escrita en términos de las acciones I y los ángulos θ como $H(I, \theta) = H_0(I) + \epsilon H_1(I, \theta) + \epsilon^2 H_2(I, \theta) + \dots$. La función de Hamilton H_0 depende solo de las acciones I , mientras que H_1 y H_2 dependen también de los ángulos θ . La función de Hamilton H_0 se puede escribir como $H_0(I) = \sum_{s=1}^n p_s^2 / 2m_s + V(q)$, donde p_s es el momento canónico conjugado a q_s , m_s es la masa de la partícula s , y $V(q)$ es el potencial. La función de Hamilton H_1 se puede escribir como $H_1(I, \theta) = \sum_{s=1}^n p_s^2 / 2m_s + V(q) + \epsilon H_1(I, \theta)$.

La función de Hamilton H_2 se puede escribir como $H_2(I, \theta) = \sum_{s=1}^n p_s^2 / 2m_s + V(q) + \epsilon H_1(I, \theta) + \epsilon^2 H_2(I, \theta)$. La función de Hamilton H_2 depende de las acciones I y los ángulos θ . La función de Hamilton H_2 se puede escribir como $H_2(I, \theta) = \sum_{s=1}^n p_s^2 / 2m_s + V(q) + \epsilon H_1(I, \theta) + \epsilon^2 H_2(I, \theta)$.



$\Gamma_c = \{ (x_a, \dot{x}_a, \ddot{x}_a, \dots, x_a^{(n_a)}, P_0^a, P_1^a, \dots, P_{n_a-1}^a) \in \Gamma \mid P_a(P_0^a) = Q_a(x_a) \}$

$C_p = \{ (x_a, \dot{x}_a, \ddot{x}_a, \dots, x_a^{(n_a)}, P_0^a, P_1^a, \dots, P_{n_a-1}^a) \in \Gamma_c \mid P_a(P_0^a) = Q_a(x_a) \}$

2.1. Ejemplo Ilustrativo: Oscilador de Pais-Uhlenbeck

Consideramos el sistema de partículas de Pais-Uhlenbeck en un campo gravitatorio homogéneo. El lagrangiano de este sistema es

$$L = \frac{1}{2} \dot{z}^2 - \frac{\omega^2 z^2}{2} - \gamma z^2. \quad (2.1)$$

donde z es la posición de la partícula y \dot{z} su velocidad.

$$z \rightarrow z_0$$

$$\dot{z} \rightarrow z_1.$$

El hamiltoniano de este sistema es

$$H = \frac{z_1^2}{2} + \frac{\omega^2 z_0^2}{2} + \gamma z_0^2.$$

El hamiltoniano de este sistema es una función de las variables z_0 y z_1 .

$$P = \frac{\partial L}{\partial z_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} \right) = z_1 - \gamma G, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} = -\gamma \dot{z}_1. \quad (2.3)$$

donde G es una constante.

$$\gamma G(z_0, z_1, \dot{z}_1, z_0^{(3)}) \equiv \frac{d}{dt}.$$

El hamiltoniano de este sistema es una función de las variables z_0 y z_1 .

$$H = P z_1 + \dot{z}_1(z_0, z_1) - L(z_0, z_1, \dot{z}_1(z_0, z_1)) \quad (2.4)$$

$$P z_1 = \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^2}{\gamma} + \frac{\omega^2 z_0^2}{2}.$$

$$\dot{z}_1 = z_1 \quad (2.5)$$

$$\dot{z}_1 = -\frac{1}{\gamma}, \tag{...}$$

$$\dot{P} = -\omega^2 z_0, \tag{...}$$

$$\dot{z}_1 = -P + z_1. \tag{...}$$

$$\dots z_1 \dots \tag{...}$$

$$\gamma(\omega^2 z_0 - \dots). \tag{...}$$

$$\dots z_1 \dots z_0 - P \dots \gamma \dots$$

$$\dot{P} = -\omega^2 z_0, \\ -P + z_1$$

$$\dots \tag{...}$$

$$\dots$$

$$X_n \rightarrow \dots - n \\ X^{(k)}_n \rightarrow \frac{d^k X}{d\tau^k} \dots - n,$$

$$X \dots, z_1. \\ \dots O(\gamma^0) \dots z_1 \dots P \dots z_1 \dots P \\ z_1 \dots 0 \dots P \\ \dots 0 \dots$$

$$\dots \sqrt{\gamma} \dots \sqrt{\gamma} \dots$$

$$z_1 = P + \dots$$

$$\gamma\omega^2 z_0 - \gamma(\gamma\omega^2)z_1 + \gamma^2 \dots \quad (4)$$

$$\dots = \gamma\omega^2 z_0.$$

$$z_{11} = P + \dots + \frac{d}{dt}(\gamma\omega^2 z_0) + \gamma\omega^2 z_{10}.$$

$$\dots = \gamma\omega^2 z_{11} - \omega^2 \dots - (\omega^2)^2 \gamma z_0$$

$$\dots = (\omega^2)^2 \dots - (\omega^2)^3 \gamma z_0 \quad (5)$$

$$\dots = \gamma\omega^2 z_0 + \alpha \dots + \gamma^2 \dots \quad (4)$$

$$\dots = \gamma\omega^2 z_0 + \gamma\omega^2 \dots + \gamma^2 \dots \quad (4)$$

$$\dots = (\omega^2)^2 \dots - k-1,$$

$$z_{1n} = \gamma\omega^2 z_0 + \gamma\omega^2 z_{1n-1} + (\gamma\omega^2)^2 z_{1n-2} + \dots + \alpha_n z_0, \tag{3.1}$$

• • •

$$\begin{aligned} \alpha_{k < 1} &= \dots, \\ \alpha_1 &= \gamma\omega^2, \\ &\dots \\ \alpha_n &= \gamma\omega^2 + \gamma\omega^2 \alpha_{n-1} + (\gamma\omega^2)^2 \alpha_{n-2}. \end{aligned}$$

$$z_{1n} = P + \dots + z_{1n-1} \tag{3.2}$$

$$z_{1n} = P + \dots + z_{1n-1}. \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} z_{1n} &= \gamma\omega^2 z_0 + \gamma\omega^2 z_{1n-1} + (\gamma\omega^2)^2 z_{1n-2} + \dots + \alpha_n z_0 \\ &= \gamma\omega^2 z_0 + \gamma\omega^2 (P + \dots + z_{1n-2}) + (\gamma\omega^2)^2 (P + \dots + z_{1n-3}) + \dots + \alpha_n z_0 \\ &= \gamma\omega^2 z_0 + \gamma\omega^2 P + \dots + \gamma\omega^2 z_{1n-2} + (\gamma\omega^2)^2 P + \dots + (\gamma\omega^2)^2 z_{1n-3} + \dots + \alpha_n z_0 \\ &= z_0 + \dots + n \end{aligned}$$

$$z_{1n} = (\dots + \alpha_n)P. \tag{3.4}$$

$$\dots$$

$$\begin{aligned} z_{12} &= \gamma\omega^2 z_0 + \gamma\omega^2 z_{11} + \gamma\omega^2 z_{10}^{(4)} \\ &= \gamma\omega^2 (\dots + \gamma\omega^2) z_0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

•

$$\begin{aligned} z_{12} &= P + \dots + z_{12} \\ &= P + \frac{d}{dt} (\dots) \\ &= (\dots + \gamma\omega^2 + (\gamma\omega^2)^2)P. \end{aligned}$$

2.1.1. Construcción de la Teoría Reducida

Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencias...

C_p

$$\psi_n = -z_n, \quad (2.1)$$

$$\phi_n = z_1 - z_n. \quad (2.2)$$

$$\{\psi_n, \phi_n\} \approx \{-z_n, z_1 - z_n\} \quad (2.3)$$

$$= +\{z_n, z_1\}. \quad (2.4)$$

Primer Orden

C_p

$$\psi_1^1 = -\gamma\omega^2 z_0 \quad (2.5)$$

$$\psi_1^2 = z_1 - (\gamma + \gamma\omega^2)P. \quad (2.6)$$

C_p

$$\{A, B\}_{(1)} \approx \{A, B\} - \{A, \psi_1^I\} C^{IJ} \{\psi_1^J, B\}, \quad (2.7)$$

$$(c_{ij}^{(1)}) = (\{\psi_1^i, \psi_1^j\}),$$

$$(c_{(1)}^{ij}) = (c_{ij}^{(1)})^{-1}$$

c_{ij}

$$\{\psi^1, \psi^2\} = \gamma + \gamma\omega^2 + O(\gamma^2)$$

¹i.e. aquel subespacio del espacio fase subyacente definido por las constricciones de segunda clase

$$(c_{ij}^{(1)}) = \begin{pmatrix} & - + \gamma\omega^2 \\ - \gamma\omega^2 & \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

$$d \wedge dz_1 + dP \wedge dz_0. \quad (1.2)$$

$$C_p = \int_1 (\{P, z_0\}_{(1)}) dP \wedge dz_0. \quad (1.3)$$

$$\{P, z_0\}_D = - \gamma\omega^2.$$

$$x = (- \gamma\omega^2)z_0, \quad (1.4)$$

$$p = P. \quad (1.5)$$

$$H_1 = \frac{p^2}{2} + (+ \gamma\omega^2) \frac{\omega^2 x^2}{2}. \quad (1.6)$$

$$(\varpi_1)^2 = \omega^2 (+ \gamma\omega^2). \quad (1.7)$$

Segundo Orden

$$\psi_2^1 = - \gamma\omega^2 (+ \gamma\omega^2) z_0, \quad (1.8)$$

$$\psi_2^2 = z_1 - (+ \gamma\omega^2 + (\gamma\omega^2)^2) P. \quad (1.9)$$

$$\{A, B\}_{(2)} \approx \{A, B\} - \{A, \psi_1^I\} c^{IJ} \{\psi_1^J, B\}, \quad (1.10)$$

$$(c_{ij}^{(2)}) = \{\psi_2^i, \psi_2^j\},$$

$$(c_{(2)}^{ij}) = (c_{ij}^{(2)})^{-1}$$

$$\{\psi_2^1, \psi_2^2\} = +\gamma\omega^2 + (\gamma\omega^2)^2 + O(\gamma^3).$$

$$\int_{(2)} (\{P, z_0\}_{(2)}) dP \wedge dz_0 = \int_{(2)} (-\gamma\omega^2 - (\gamma\omega^2)^2) dP \wedge dz_0. \quad (2.1)$$

$$x = (-\gamma\omega^2 - (\gamma\omega^2)^2)z_0, \quad (2.2)$$

$$p = P. \quad (2.3)$$

$$H_2 = \frac{-(\gamma\omega^2)^2}{2} p^2 + \frac{\omega^2}{2} (-\gamma\omega^2 - (\gamma\omega^2)^2) x^2. \quad (2.4)$$

$$(\varpi_2)^2 = \omega_1^2 + \gamma\omega^2 + (\gamma\omega^2)^2. \quad (2.5)$$

2.1.2. Correspondencia del Modelo de PU con un Sistema de Osciladores Acoplados

$$L \quad \frac{M\dot{y}^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{K}{2}y^2 - \frac{k}{2}(x-y)^2,$$

$$m\ddot{x} + k(x-y) = 0 \quad (2.1.2.1)$$

$$M\ddot{y} + Ky - k(x-y) = 0 \quad (2.1.2.2)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{M} & -\frac{K+k}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\omega_{\pm}^2 = \left\{ \frac{k}{m} + \frac{K+k}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{m} + \frac{K+k}{M}\right)^2 - \frac{Kk}{Mm}} \right\}$$

$$x^{(4)} + \left(\frac{k}{m} + \frac{K+k}{M}\right)x + \frac{Kk}{Mm}x = 0 \quad (2.1.2.3)$$

$$x + \frac{Kk}{Mk + mk + mK}x + \frac{Mm}{Mk + mk + mK}x^{(4)} = 0 \quad (2.1.2.4)$$

$$\omega_+^2 + \omega_-^2 = \frac{k}{m} + \frac{k+K}{M},$$

$$\omega_+^2 \omega_-^2 = \frac{Kk}{Mm}.$$

$$L_1 = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - (\omega_+^2 + \omega_-^2) \frac{x^2}{2} + \omega_+^2 \omega_-^2 \frac{x^4}{4}, \quad (2.1)$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \left(\frac{\omega_+^2 \omega_-^2}{\omega_+^2 + \omega_-^2} \right) x - \left(\frac{\omega_+^2 + \omega_-^2}{\omega_+^2 + \omega_-^2} \right) \frac{x^2}{2}. \quad (2.2)$$

$$\gamma = \frac{1}{\omega_+^2 + \omega_-^2},$$

$$\omega^2 = \frac{\omega_+^2 \omega_-^2}{\omega_+^2 + \omega_-^2}.$$

Para $\omega_+^2 \approx \omega_-^2 \approx \omega^2$, se tiene $\gamma \approx \frac{1}{2\omega^2}$.

$$\omega_+^2 \approx \omega^2 + (\gamma \omega^2)^{\frac{1}{2}} - 1,$$

$$\omega_-^2 \approx \frac{\omega^2}{\gamma} + (\gamma \omega^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Para $\omega_+^2 \approx \omega^2 \ll \frac{\omega^2}{\gamma}$, se tiene $\omega_-^2 \approx \frac{\omega^2}{\gamma}$.

$$\omega_- \approx \frac{\omega}{\sqrt{\gamma}},$$

$$\omega_+ \approx \omega^2 (\gamma + \gamma \omega^2 + (\gamma \omega^2)^2 + O(\alpha^3)). \quad (2.3)$$

En el caso de $\omega_+^2 \approx \omega^2 \ll \frac{\omega^2}{\gamma}$, se tiene $\omega_-^2 \approx \frac{\omega^2}{\gamma}$. En el caso de $\omega_+^2 \approx \frac{\omega^2}{\gamma} \ll \omega^2$, se tiene $\omega_-^2 \approx \omega^2$. En el caso de $\omega_+^2 \approx \frac{\omega^2}{\gamma} \approx \omega^2$, se tiene $\omega_-^2 \approx \frac{\omega^2}{\gamma}$.

En el caso de $\omega_+^2 \approx \omega^2 \ll \frac{\omega^2}{\gamma}$, se tiene $\omega_-^2 \approx \frac{\omega^2}{\gamma}$.

²por ejemplo: $k \ll K$

2.2. Generalización del Método: Caso No Singular

n

$L(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) \rightarrow L(q^0, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^{n-1})$ ⁵

$$q = f^{(0)}(q, \dot{q}). \quad (2.1)$$

f^0

$q = \dot{q} = \alpha$

g

$$q + m^2 \dot{q} + g \sum_{n=0}^N \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \frac{\partial V}{\partial q^{(n)}} = 0$$

q

$n = g$

$q, \dot{q}^{n-1}, \dots, q^{(n)}$

q, \dot{q}

⁴Una breve descripción operacional se presenta en el apéndice B

⁵ver la formulación canónica para TOS en el apéndice B

Consideremos el sistema de ecuaciones de Hamilton de primer orden

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$
 donde $H(q, p)$ es la función hamiltoniana. Si (q^0, p^0) es un punto en el espacio de fase, entonces la solución del sistema con condiciones iniciales $(q(0), p(0)) = (q^0, p^0)$ puede ser escrita como

$$(q(t), p(t)) = (q^0, p^0) + \int_0^t \left(\frac{\partial H}{\partial p}(q(s), p(s)), -\frac{\partial H}{\partial q}(q(s), p(s)) \right) ds$$
 donde $(q(s), p(s))$ es la solución del sistema con condiciones iniciales $(q(0), p(0)) = (q^0, p^0)$. Si H es una función convexa en p , entonces el sistema de ecuaciones de Hamilton de primer orden es un sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange. En este caso, la solución del sistema con condiciones iniciales $(q(0), p(0)) = (q^0, p^0)$ puede ser escrita como

$$q(t) = q^0 + \int_0^t \frac{\partial L}{\partial p}(q(s), p(s)) ds$$
 donde $L(q, p) = H(q, p) - p \cdot \dot{q}$ es la función lagrangiana. Si L es una función convexa en p , entonces el sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange es un sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange. En este caso, la solución del sistema con condiciones iniciales $(q(0), p(0)) = (q^0, p^0)$ puede ser escrita como

$$q(t) = q^0 + \int_0^t \frac{\partial L}{\partial p}(q(s), p(s)) ds$$

Si H es una función convexa en p , entonces el sistema de ecuaciones de Hamilton de primer orden es un sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange. En este caso, la solución del sistema con condiciones iniciales $(q(0), p(0)) = (q^0, p^0)$ puede ser escrita como

$$q(t) = q^0 + \int_0^t \frac{\partial L}{\partial p}(q(s), p(s)) ds$$
 donde $L(q, p) = H(q, p) - p \cdot \dot{q}$ es la función lagrangiana. Si L es una función convexa en p , entonces el sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange es un sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange. En este caso, la solución del sistema con condiciones iniciales $(q(0), p(0)) = (q^0, p^0)$ puede ser escrita como

$$q(t) = q^0 + \int_0^t \frac{\partial L}{\partial p}(q(s), p(s)) ds$$

Si H es una función convexa en p , entonces el sistema de ecuaciones de Hamilton de primer orden es un sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange. En este caso, la solución del sistema con condiciones iniciales $(q(0), p(0)) = (q^0, p^0)$ puede ser escrita como

$$q(t) = q^0 + \int_0^t \frac{\partial L}{\partial p}(q(s), p(s)) ds$$
 donde $L(q, p) = H(q, p) - p \cdot \dot{q}$ es la función lagrangiana. Si L es una función convexa en p , entonces el sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange es un sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange. En este caso, la solución del sistema con condiciones iniciales $(q(0), p(0)) = (q^0, p^0)$ puede ser escrita como

$$q(t) = q^0 + \int_0^t \frac{\partial L}{\partial p}(q(s), p(s)) ds$$

⁶las usuales ecuaciones de Hamilton de primer orden

$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p^k} = q^{k+1}$

$$H = \sum_{s=0}^{n-2} p_s q^{s+1} + H(q^r, p_r). \quad (2.1)$$

$H = -\frac{1}{2}(q^0)^2 + \frac{\omega^2}{2}(q^0)^2 + \alpha V(q^s, p_{n-1})$

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p^k} = q^{k+1} \quad (2.2)$$

$\dot{q}^{n-1} = \frac{\partial H}{\partial p_{n-1}} = \alpha \frac{\partial V}{\partial p_{n-1}}$

$$\dot{q}^{n-1} = \frac{\partial H}{\partial p_{n-1}} = \alpha \frac{\partial V}{\partial p_{n-1}}. \quad (2.3)$$

$\dot{p}_0 = -\omega^2 q^0 - \alpha \frac{\partial V}{\partial q^0}$

$$\dot{p}_0 = -\omega^2 q^0 - \alpha \frac{\partial V}{\partial q^0}, \quad (2.4)$$

$$\dot{p}_1 = -p_0 + q^1 - \alpha \frac{\partial V}{\partial q^1} \quad (2.5)$$

$$\dot{p}_s = -p_{s-1} - \alpha \frac{\partial V}{\partial q^s} \quad (2.6)$$

$s = 1, \dots, n-1$

$\alpha = \dots$

(\dots)

$$p_{s-1} = \dot{p}_s - \alpha \frac{\partial V}{\partial q^s}. \quad (1)$$

(\dots)

(\dots)

$$p_s = \alpha \sum_{k=s}^{n-2} (-)^{k-s+1} \left(\frac{d}{dt} \right)^k \frac{\partial V}{\partial q^{k+1}} \quad (2)$$

$s = \dots, n-1$

$O(\alpha^0)$

q^{n-1}

$$-p_0 + q^1 = \alpha \sum_{k=0}^{n-2} (-)^k \left(\frac{d}{dt} \right)^k \frac{\partial V}{\partial q^{k+1}}, \quad (3)$$

$O(\alpha^0)$

$$p_{n-1} = f^a(q^s, \dot{q}^{n-1}) = \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^{n-1}}. \quad (4)$$

V

2.2.1. Constricciones Perturbativas

Consideramos el sistema de ecuaciones de movimiento en las variables q^1, q^2, \dots, q^{n-1} y p_0, p_1, \dots, p_{n-1} en el orden de potencia α^M :

$$\phi_s^M = q^s - \frac{M}{s}(q^0, p_0) \quad (2.2.1)$$

$$\psi_s^M = p_s - \frac{M}{s}(q^0, p_0) \quad (2.2.2)$$

$s = 1, \dots, n-1$.

El hamiltoniano H se desarrolla en potencias de α^M :

$$H = H^0 + \alpha^M H^M + \dots \quad (2.2.3)$$

$$\phi_1^0 = q^1 - p_0 \quad (2.2.4)$$

El hamiltoniano H^0 en las variables (q^1, p_0) es:

$$H^0 = \frac{1}{2} \dot{q}^1 + \omega^2 q^0 \quad (2.2.5)$$

El hamiltoniano H^M en las variables $(q^1, q^2, \dots, p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ es:

$$H^M = \frac{0}{2} - \omega^2 q^0 \quad (2.2.6)$$

Para $s > 2$, el hamiltoniano H^s en las variables $(q^1, p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ es:

$$\begin{aligned} H^s &= \frac{d}{dt} \frac{0}{s-1} \\ &= \frac{\partial}{\partial q} \frac{0}{s-1} \dot{q} + \frac{\partial}{\partial p_0} \frac{0}{s-1} \dot{p}_0 \\ &= \frac{\partial}{\partial q} \frac{0}{s-1} + \frac{\partial}{\partial p_0} \frac{0}{s-1} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

El hamiltoniano H^0 en las variables $(q^2, p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ es:

$$\phi_2^0 = q^2 + \omega^2 q^0 \quad (2.2.8)$$

$$\phi_3^0 = q^3 - \omega^2 p_0 \quad (2.2.9)$$

...

$$\phi_{2n}^0 = q^2 + (-\omega^2)^n q^0 \quad (2.2.10)$$

$$\phi_{2n+1}^0 = q^3 + (-\omega^2)^n p_0 \quad (2.2.11)$$

$$\frac{0}{s} = \begin{cases} (-\omega^2)^s q & s \leq n \\ (-\omega^2)^s p_0 & s \geq n+1 \end{cases} \quad (2.2.12)$$

$$q_{-1}^1 = p_0 + \alpha \sum_{k=0}^{n-2} (-)^k \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k \frac{\partial V}{\partial q^{k+1}} \right]_0.$$

$$q_{-s}^1 = p_0 + \alpha \sum_{k=0}^{n-2} (-)^k \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k \frac{\partial V}{\partial q^{k+1}} \right]_0.$$

$$q_{-s}^1 = p_0 + \alpha \sum_{k=0}^{n-2} (-)^k \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k \frac{\partial V}{\partial q^{k+1}} \right]_0.$$

$$q_{-s}^1 = p_0 + \alpha \sum_{k=0}^{n-2} (-)^k \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k \frac{\partial V}{\partial q^{k+1}} \right]_0.$$

$$s = 1, \dots, n-1.$$

$$q_{-s}^1 = p_0 + \alpha \sum_{k=0}^{n-2} (-)^k \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k \frac{\partial V}{\partial q^{k+1}} \right]_0.$$

$$q_{-s}^1 = p_0 + \alpha \sum_{k=0}^{n-2} (-)^k \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k \frac{\partial V}{\partial q^{k+1}} \right]_0.$$

$$q_{-s}^1 = p_0 + \alpha \sum_{k=0}^{n-2} (-)^k \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k \frac{\partial V}{\partial q^{k+1}} \right]_0.$$

$$q_{-s}^1 = p_0 + \alpha \sum_{k=0}^{n-2} (-)^k \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k \frac{\partial V}{\partial q^{k+1}} \right]_0.$$

$$q_{-s}^1 = p_0 + \alpha \sum_{k=0}^{n-2} (-)^k \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k \frac{\partial V}{\partial q^{k+1}} \right]_0.$$

$$s = 1, \dots, n-1.$$

$$q_{-n-1}^1 = p_0 + \alpha \sum_{k=0}^{n-2} (-)^k \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k \frac{\partial V}{\partial q^{k+1}} \right]_0.$$

... $s > 1$...

$$q_s^s \sim \left[\frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}} \right]_M$$

$O(\alpha^M)$... C_p^M ... $\{c_I\}$...

$$\{\psi_s^M, \phi_s^M\} = + \{c_s^M, c_s^M\} + O(\alpha^M)$$

...

... C_p^M ... C_p^M ... C_p^M ... $q^0 = p_0$...

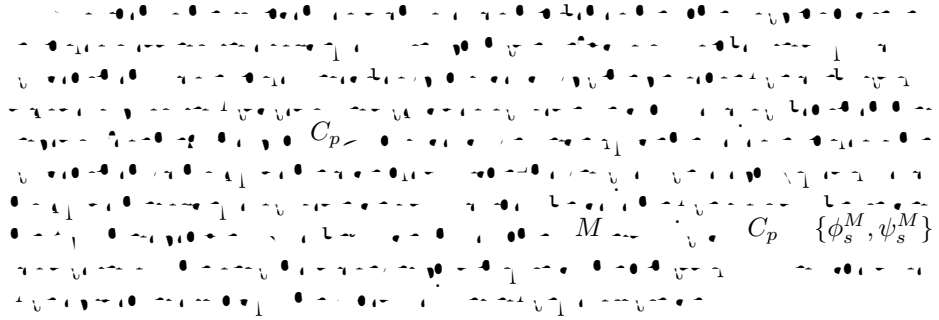
$$\{A, B\}_D \approx \{A, B\} - \{A, c_I\} C^{IJ} \{c_J, B\}, \quad ()$$

...

$$C = (\{c_I, c_J\})^{-1}$$

...

2.3. Proceso de Reducción



Capítulo 3

Aproximación Perturbativa: Caso Singular

Consideramos el problema de valores en los límites

$$L_q(q^0, \dots, q^{n-1}, q^{n-1})$$

$$H = \frac{\partial^2 L_q}{\partial q^{n-1} \partial q^{n-1}}$$

Sea K el conjunto

$$p_s = \pi^s(q, p), \quad (3.1)$$

donde p_s es la componente s -ésima de p .

$$P_k,$$

$$k = 1, \dots, K.$$

¹Ver apéndice A

3.1. Constricciones Perturbativas

Consideremos un sistema de partículas interactuantes en un espacio de fases (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . El hamiltoniano total puede escribirse como la suma de un hamiltoniano no perturbado H_0 y un hamiltoniano de perturbación H_1 :

$$H = H_0 + H_1.$$
 El hamiltoniano no perturbado H_0 describe un sistema de partículas libres, mientras que H_1 describe las interacciones entre ellas. El hamiltoniano H_0 puede escribirse como:

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}_{\mathbf{k}}^2 + \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{q}_{\mathbf{k}}^2 \right),$$
 donde $\mathbf{q}_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{p}_{\mathbf{k}}$ son los operadores de posición y momento en el espacio de momentos \mathbf{k} . El hamiltoniano de perturbación H_1 puede escribirse como:

$$H_1 = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_2} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_3},$$
 donde $V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}$ es el potencial de interacción entre tres partículas. El hamiltoniano total H puede escribirse como:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}_{\mathbf{k}}^2 + \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{q}_{\mathbf{k}}^2 \right) + \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_2} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_3}.$$

El hamiltoniano H_0 puede escribirse como la suma de hamiltonianos de partículas individuales:

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}_{\mathbf{k}}^2 + \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{q}_{\mathbf{k}}^2 \right) = \sum_{\mathbf{k}} H_{\mathbf{k}},$$
 donde $H_{\mathbf{k}}$ es el hamiltoniano de una partícula individual en el espacio de momentos \mathbf{k} . El hamiltoniano de perturbación H_1 puede escribirse como la suma de hamiltonianos de interacción entre tres partículas:

$$H_1 = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_2} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_3} = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} H_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3},$$
 donde $H_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}$ es el hamiltoniano de interacción entre tres partículas en el espacio de momentos $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$. El hamiltoniano total H puede escribirse como la suma de hamiltonianos de partículas individuales y hamiltonianos de interacción:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} H_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} H_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}.$$

$$\gamma(V_A, V_B) = \{A, B\}_D.$$

Consideremos un sistema de partículas interactuantes en un espacio de fases (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . El hamiltoniano total puede escribirse como la suma de un hamiltoniano no perturbado H_0 y un hamiltoniano de perturbación H_1 :

$$H = H_0 + H_1.$$
 El hamiltoniano no perturbado H_0 describe un sistema de partículas libres, mientras que H_1 describe las interacciones entre ellas. El hamiltoniano H_0 puede escribirse como:

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}_{\mathbf{k}}^2 + \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{q}_{\mathbf{k}}^2 \right),$$
 donde $\mathbf{q}_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{p}_{\mathbf{k}}$ son los operadores de posición y momento en el espacio de momentos \mathbf{k} . El hamiltoniano de perturbación H_1 puede escribirse como:

$$H_1 = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_2} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_3},$$
 donde $V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}$ es el potencial de interacción entre tres partículas. El hamiltoniano total H puede escribirse como:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}_{\mathbf{k}}^2 + \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{q}_{\mathbf{k}}^2 \right) + \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_2} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_3}.$$

$$\{A, H_c\}_D = \dots$$

Consideremos un sistema de partículas interactuantes en un espacio de fases (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . El hamiltoniano total puede escribirse como la suma de un hamiltoniano no perturbado H_0 y un hamiltoniano de perturbación H_1 :

$$H = H_0 + H_1.$$
 El hamiltoniano no perturbado H_0 describe un sistema de partículas libres, mientras que H_1 describe las interacciones entre ellas. El hamiltoniano H_0 puede escribirse como:

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}_{\mathbf{k}}^2 + \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{q}_{\mathbf{k}}^2 \right),$$
 donde $\mathbf{q}_{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{p}_{\mathbf{k}}$ son los operadores de posición y momento en el espacio de momentos \mathbf{k} . El hamiltoniano de perturbación H_1 puede escribirse como:

$$H_1 = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_2} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_3},$$
 donde $V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}$ es el potencial de interacción entre tres partículas. El hamiltoniano total H puede escribirse como:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}_{\mathbf{k}}^2 + \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{q}_{\mathbf{k}}^2 \right) + \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_2} \mathbf{q}_{\mathbf{k}_3}.$$

$$\psi_n^M \rightarrow {}^n(P^n), \quad (1)$$

$$(Q_m, P^m) \quad m = 1, \dots, M \quad D$$

$$\begin{aligned} \dot{P}^m &\approx \{P^m, H_c\}_D, \\ \dot{Q}_m &\approx \{Q_m, H_c\}_D, \end{aligned}$$

$$m = 1, \dots, M.$$

$$M$$

$$X \equiv \begin{pmatrix} Q_m \\ P^m \end{pmatrix},$$

$$m = 1, \dots, M.$$

$$\dot{X} \approx \{\cdot, H_c\}_D X \quad (2)$$

$$\{\cdot, H_c\}_D = O\left(\frac{\partial}{\partial Q_m}, \frac{\partial}{\partial P^m}\right) \quad (3)$$

$$H_c = \{Q_1, \dots, Q_M\} \quad D$$

$$Q_k = q^s$$

$$\begin{aligned} x^{(s)} &= q^s \\ x &= \{Q, P\} \\ (x) &= \{Q, P\} \end{aligned}$$

$$(Q, P).$$

$$(M -)$$

$$(Q_k, P_k)$$

$$k = 1, \dots, M.$$

$$(\dot{Q}, \dot{P}) \approx \{ \cdot, H_c \}_D(Q, P, Q, P) \quad (3.1)$$

$$(\dot{Q}, \dot{P}) \approx \{ \cdot, H_c \}_D(Q, P, Q, P). \quad (3.2)$$

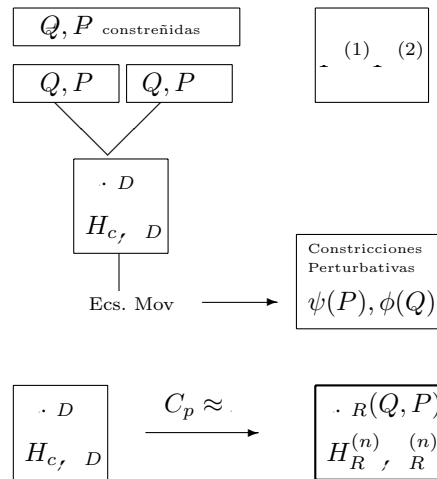
$$\dot{P} = f_2 \left(Q, \left(\frac{d}{dt} \right)^n (Q, P) \right). \quad (3.3)$$

$$\dot{P} = f_1 \left(Q, \left(\frac{d}{dt} \right)^n (Q, P) \right). \quad (3.4)$$

$$\psi_k^R = P^k - \varphi_k^R(Q, P), \quad (3.5)$$

$$\phi_k^R = Q_k - \chi_k^R(Q, P). \quad (3.6)$$

3.2. Proceso de Reducción



Capítulo 4

Ejemplos

4.1. Caso Singular de Norma: Pais y Uhlenbeck Reparametrizado

A continuación, a partir de la teoría PU, construiremos una nueva teoría reparametrizando PU, es decir, postulando al tiempo t como grado de libertad en vez de parámetro. Esta parametrización de t por un lado, no aumenta el número de grados de libertad, sin embargo, aumenta el número de variables. Esto se traduce en que esta nueva teoría tendrá constricciones. La acción de PUR tiene una nueva simetría: invariación bajo reparametrizaciones $\tau \rightarrow \tau'$, la cual no es otra cosa que una simetría de norma generada por las constricciones de primera clase. En esencia, la dinámica de PUR es la misma que la de PU, sin embargo, el enfoque de la dinámica en ambos casos es esencialmente diferente: mientras que en PU la dinámica se genera por un principio variacional, en PUR ocurre via transformaciones de norma. Se dice que este tipo de teorías tienen grados de libertad no dinámicos.

En esta sección someteremos a PUR al método perturbativo hamiltoniano. Será un ejemplo sencillo que ilustra la generalización del método perturbativo para teorías de orden superior singulares con constricciones de primera clase (i.e. con invariancia de norma). Es un modelo sencillo con invariancia bajo parametrizaciones. La idea es por un lado ilustrar como reducir este tipo de teorías sin destruir la invariancia de norma, y por otro checar la consistencia del método en este caso simple, esto es, obtener una teoría reducida con la simetría de norma esperada, es decir, la misma que tendría PU reducida al ser reparametrizada.

Reparametrización de PU

Partamos de la acción para PU

$$\int dt \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 - \frac{\omega^2}{2} z^2 - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right)^2 \right\}. \quad (4.1)$$

Proponemos una parametrización arbitraria de $t = t(\tau)$ (Cuando $t = \tau$ obtenemos el caso no parametrizado). Todas coordenadas del espacio tangente del espacio de configuración pueden parametrizarse con τ . Para hacer tal cambio basta usar el teorema de la función implícita y la regla de la cadena

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{\dot{z}}{\dot{t}}.$$

Donde

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{d\tau}.$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{\dot{t}} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{z}}{\dot{t}} \right) = \frac{1}{\dot{t}^2} \left(\ddot{z} - \ddot{t} \frac{\dot{z}}{\dot{t}} \right).$$

Así, la acción en términos del nuevo parámetro τ es

$$\int d\tau \dot{t} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{z}}{\dot{t}} \right)^2 - \frac{\omega^2}{2} z^2 - \frac{\gamma}{2\dot{t}^4} \left(\ddot{z} - \ddot{t} \frac{\dot{z}}{\dot{t}} \right)^2 \right\} = \int d\tau L_R. \quad (4.2)$$

Entonces, la lagrangiana correspondiente a la teoría parametrizada con τ es

$$L_R = \frac{1}{2\dot{t}} \dot{z}^2 - \frac{1}{2} \omega^2 z^2 \dot{t} - \frac{\gamma}{2\dot{t}^3} \left(\ddot{z} - \ddot{t} \frac{\dot{z}}{\dot{t}} \right)^2. \quad (4.3)$$

Esta lagrangiana corresponde a una teoría es de orden dos (en derivadas) con dos variables z y t . Su espacio de configuración tiene coordenadas generalizadas (t, \dot{t}, z, \dot{z}) . Es facil demostrar que S_R es invariante bajo parametrizaciones $\tau \rightarrow \tau'$.

4.1.1. Formulación Canónica

Los momentos canónicos conjugados asociados a (t, \dot{t}, z, \dot{z}) ¹ respectivamente según el formalismo de Ostrogradsky son²

$$P_t \equiv \frac{\partial L_R}{\partial \dot{t}} - \frac{d\Pi_t}{d\tau} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{z}}{\dot{t}} \right)^2 - \frac{\gamma^2}{2} z^2 - \gamma G_t, \quad (4.4)$$

$$\Pi_t \equiv \frac{\partial L_R}{\partial \ddot{t}} = \frac{\gamma}{\dot{t}^3} \left(\ddot{z} - \ddot{t} \frac{\dot{z}}{\dot{t}} \right) \left(\frac{\dot{z}}{\dot{t}} \right), \quad (4.5)$$

$$P_z \equiv \frac{\partial L_R}{\partial \dot{z}} - \frac{d\Pi_z}{d\tau} = \frac{\dot{z}}{\dot{t}} + \gamma G_z, \quad (4.6)$$

$$\Pi_z \equiv \frac{\partial L_R}{\partial \ddot{z}} = -\frac{\gamma}{\dot{t}^3} \left(\ddot{z} - \ddot{t} \frac{\dot{z}}{\dot{t}} \right). \quad (4.7)$$

¹A partir de este ejemplo omitiremos el uso de la notación $q = q_0, \dot{q} = q_1$, bajo el entendimiento de que tanto las variables q (en este caso z y t) y sus derivadas son coordenadas del espacio fase.

²Analogamente al caso de PU P y Π denotan momentos conjugados de las variables q y \dot{q} respectivamente.

donde

$$G_t = -\frac{3}{2} \frac{1}{t^4} \left(\ddot{z} - \dot{t} \frac{\dot{z}}{t} \right)^2 + \frac{1}{t^3} \left(\ddot{z} - \dot{t} \frac{\dot{z}}{t} \right) \left(\frac{\dot{t}\dot{z}}{t^2} \right) + \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{1}{t^3} \left(\ddot{z} - \dot{t} \frac{\dot{z}}{t} \right) \left(\frac{\dot{z}}{t} \right) \right\},$$

$$G_z = \frac{1}{t^3} \left(\ddot{z} - \dot{t} \frac{\dot{z}}{t} \right) \left(\frac{\dot{t}}{t} \right) + \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{1}{t^3} \left(\ddot{z} - \dot{t} \frac{\dot{z}}{t} \right) \right\}.$$

Estamos interesados en construir la formulación hamiltoniana para este sistema, entonces es preciso despejar las segundas derivadas \ddot{z} y \ddot{t} de las ecuaciones (4.7) y (4.5) en términos de las variables $(z, t, \dot{z}, \dot{t}, \Pi_t, \Pi_z, P_z, P_t)$ las cuales en principio serían las coordenadas del espacio fase, si sucediera que

$$\det \left(\frac{\partial^2 L_R}{\partial \Pi_x \partial \Pi_y} \right) \neq 0$$

$$x, y = t, z.$$

Sin embargo, en este caso el determinante es nulo. El rango del sistema es 1, por lo tanto, no podemos despejar todas las aceleraciones. Por otro existe una constricción primaria

$$\Phi_1 = \Pi_t + \Pi_z \frac{\dot{z}}{t}. \quad (4.8)$$

La hamiltoniana canónica correspondiente es

$$H_c = P_z \dot{z} + P_t \dot{t} - \frac{t^3 \Pi_z^2}{2\gamma} - \frac{1}{2} \frac{\dot{z}^2}{t} + \frac{\omega^2}{2} z^2 t. \quad (4.9)$$

Es interesante observar que a diferencia de que la hamiltoniana de sistemas invariantes bajo reparametrizaciones de orden uno en derivadas es fuertemente nula, en este caso de orden dos H_c no lo es fuertemente.

Fuera de la superficie de constricción Γ_c^1 (definida por la constricción primaria), es decir en el espacio extendido la hamiltoniana total es

$$H = H_c + \lambda \Phi_1. \quad (4.10)$$

λ es un multiplicador de Lagrange y, por el momento es un parámetro a determinar. La evolución en Γ_c está dada por

$$\frac{dg}{d\tau} \approx \{g, H_c\} + \lambda \{g, \Phi_1\}. \quad (4.11)$$

La condición de consistencia para Φ_1 es

$$\{\Phi_1, H_c\} + \lambda \{\Phi_1, \Phi_1\} \approx 0,$$

$$\{\Phi_1, H_c\} \approx H_c.$$

Por lo tanto, hay una constricción secundaria

$$\Phi_2 = H_c \approx 0.$$

El hamiltoniano canónico del sistema es debilmente nulo, recuperando así la propiedad de teorías invariantes bajo reparámetrizaciones ³. Una variación $\tau \rightarrow \tau'$ en el parámetro sólo afecta al multiplicador de Lagrange en el hamiltoniano total, el cual es indeterminado de todos modos. Ésto implica que la teoría hamiltoniana también es invariante!!⁴

Por otro lado, la condición de consistencia sobre Φ_2

$$\dot{\Phi}_2 = \{H_c, H_c\} + \lambda\{\Phi_2, \Phi_1\} = \Phi_2 \approx 0 \Rightarrow \{\Phi_2, \Phi_1\} \approx 0$$

implica que Φ_1 y Φ_2 son constricciones de primera clase. En el espacio extendido, el hamiltoniano que describe la dinámica es

$$H = \Phi_2 + \lambda\Phi_1 \quad (4.12)$$

es una combinación lineal de las constricciones de primera clase, por lo tanto es generadora de transformaciones de norma. Las ecuaciones de movimiento son justamente tales transformaciones, con los paréntesis de Poisson y λ indeterminada.

$$\ddot{z} \approx \{\dot{z}, \Phi_2 + \lambda\Phi_1\} = -\frac{\dot{t}^3 \Pi_z}{\gamma} + \lambda \frac{\dot{z}}{\dot{t}}, \quad (4.13)$$

$$\ddot{t} \approx \{\dot{t}, \Phi_2 + \lambda\Phi_1\} = \lambda\{\dot{t}, \Pi_t\} = \lambda,$$

$$\dot{P}_z \approx \{P_z, H\} = -\omega^2 z \dot{t},$$

$$\dot{P}_t \approx 0,$$

$$\dot{\Pi}_z \approx \{\Pi_z, H\} = -P_z + \frac{\dot{z}}{\dot{t}} - \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} \Pi_z,$$

$$\dot{\Pi}_t \approx \{\Pi_t, H\} = -P_t - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{z}}{\dot{t}}\right)^2 - \frac{\omega^2}{2} z^2 + \dot{t} \Pi_z \frac{\dot{z}}{\dot{t}^2}.$$

Esta teoría de Pais y Uhlenbeck reparametrizada en un inicio tiene como variables a $t, P_t, \dot{t}, \Pi_t, z, P_z, \dot{z}$ y Π_z , es decir, el espacio extendido tiene dimensión $D = 8$. La existencia de constricciones de primera clase implica que algunas de

³apéndice D de [23]

⁴esto es algo muy alentador de las teorías invariantes bajo reparámetrizaciones en el contexto de campos pues su formulación hamiltoniana es covariante.

esas variables no son grados de libertad. Son dos constricciones de ese tipo, por lo tanto, el número de grados de libertad es $D - 4 = 4$, como es de esperarse, pues esta teoría debe tener los mismos grados de libertad que la teoría de PU ordinaria. Para comprobar que ambas tienen los mismos grados de libertad, compararemos la acción de PU y PUR

$$A_{pur} = \int d\tau \left\{ \Pi_z \ddot{z} + \Pi_t \dot{t} + P_z \dot{z} + P_t \dot{t} - \Phi_1 - \lambda \Phi_2 \right\}. \quad (4.14)$$

Si se hacen fuertes Φ_1 y Φ_2 , se satisfacen las igualdades

$$\begin{aligned} \Pi_t &= -\frac{\dot{z}}{t} \Pi_z. \\ \dot{t} P_t &= -P_z \dot{z} - \frac{\Pi_z^2 t^3}{2\gamma} - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \frac{\dot{z}^2}{t} - \omega_1^2 \omega_2^2 z^2 \dot{t}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.14)

$$A_{pur} = \int d\tau \left\{ \Pi_z \left(\ddot{z} - \dot{t} \frac{\dot{z}}{t} \right) + P_z \dot{z} - \left(P_z \dot{z} + \frac{\Pi_z^2 t^3}{2\gamma} + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \frac{\dot{z}^2}{t} + \omega_1^2 \omega_2^2 z^2 \dot{t} \right) \right\}.$$

Recordemos que

$$\ddot{z} = \frac{d^2 z}{d\tau^2}.$$

Como función de t

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{t^2} \left(\ddot{z} - \dot{t} \frac{\dot{z}}{t} \right).$$

Entonces

$$A_{pur} = \int d\tau \left\{ \Pi_z t^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + P_z t \frac{dz}{dt} \right\} \quad (4.15)$$

$$- \dot{t} \left(P_z \frac{dz}{dt} + \frac{\Pi_z^2 t^2}{2\gamma} + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 z^2 \right) \right\}. \quad (4.16)$$

$$(4.17)$$

En la teoría de PU sin reparametrizar, el momento conjugado de $\frac{dz}{dt}$ esta dado por

$$\Pi = \gamma \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\gamma}{t^2} \left(\ddot{z} - \dot{t} \frac{\dot{z}}{t} \right) = \dot{t} \Pi_z,$$

entonces

$$A_{pur} = \int d\tau \dot{t} \left\{ \Pi \frac{d^2 z}{dt^2} + P \frac{dz}{dt} \right\} \quad (4.18)$$

$$- \left(P \frac{dz}{dt} + \frac{\Pi^2}{2\gamma} + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 z^2 \right) \right\} \quad (4.19)$$

$$= \int dt \left\{ \Pi \frac{d^2 z}{dt^2} + P \frac{dz}{dt} - H_{PU} \right\} = A_{pu}. \quad (4.20)$$

En suma si se hacen fuertes las constricciones, la acción del oscilador reparametrizado es la misma que la del oscilador de Pais y Uhlenbeck ordinario. El haber introducido al tiempo como coordenada no agrega grados de libertad extra y la descripción debe ser la misma, ésto se muestra en la anterior demostración.

4.1.2. Aproximación Perturbativa

El procedimiento de reducción a orden n de PUR, requiere de dos operaciones: por un lado construir a partir de las ecuaciones de evolución disponibles, las C_p . Y por otro, dado que PUR es una teoría singular, los Π 's no son todos independientes, están relacionados por las constricciones, entonces el proceso iterativo para encontrar C_p solo podrá realizarse para uno de los Π 's, elegimos a Π_z . Por otro lado, queremos eliminar a Π_t también, por lo cual es preciso hacer fuertes algunas de las constricciones, en este caso Φ_1 para obtener $[\Pi_t]$.

Proceso Iterativo

Las fórmulas de recurrencia obtenidas de las ecuaciones de movimiento

$$[\Pi_z]_{n+1} = -\frac{\gamma}{\dot{t}^2} \left\{ -\omega^2 z \dot{t} + [\ddot{\Pi}_z]_n + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{t}}{\dot{t}} [\Pi_z]_n \right) \right\}, \quad (4.21)$$

y

$$[P_z]_{n+1} = \frac{\dot{z}}{\dot{t}} + \gamma [G_z]_n \quad (4.22)$$

$$[P_t]_{n+1} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{z}}{\dot{t}} \right)^2 - \frac{\gamma^2}{2} z^2 - \gamma [G_t]_n. \quad (4.23)$$

De (4.22) y (4.23) vemos que no es posible tener una aproximación para \dot{t} y \dot{z} simultáneamente, esto se debe a Φ_2 , por el momento esto no nos impide aproximar G_t y G_z , tras lo cual encontramos las constricciones perturbativas "inversas"⁵. A Π_t no le corresponde hasta ahora ninguna aproximación $[\Pi_t]_n$ obtenida independientemente de las ecuaciones de movimiento, sin embargo, para eliminarla de la descripción seleccionamos a Φ_1 como su correspondiente elemento en C_p .

$$\begin{aligned} \psi_z &= \Pi_z - [\Pi_z]_n, \\ \psi_t &= \Phi_1, \\ \phi_z^{(n)} &= P_z - [P_z]_n, \\ \phi_t^{(n)} &= P_t - [P_t]_n. \end{aligned}$$

⁵i.e. generalmente la constricción perturbativa ϕ es una sustitución para \dot{z} en función de las variables x y P_x , sin embargo, (4.22) y (4.23) definen una relación implícita $\dot{x} \rightarrow P_x$, $x = z, t$, por lo tanto es equivalente.

Teoría Reducida**Orden Cero**

$$[\Pi_z]_0 = 0, \quad (4.24)$$

$$[\Pi_t]_0 = 0, \quad (4.25)$$

$$[P_z]_0 = \frac{\dot{z}}{\dot{t}}, \quad (4.26)$$

$$[P_t]_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{z}}{\dot{t}} \right)^2 - \frac{\omega^2 z^2}{2}. \quad (4.27)$$

Vemos que $[P_z]_0$ y $[P_t]_0$ no son independientes, están relacionados por la condición

$$[P_t]_0 + \frac{[P_z]_0^2}{2} + \frac{\omega^2 z^2}{2} \approx 0. \quad (4.28)$$

Dentro de las C_p , las constricciones ϕ juegan el papel de la relación que existe entre velocidades generalizadas y momentos canónicos conjugados, por lo anterior, una de las dos velocidades no podrá escribirse en términos de su correspondiente momento. O en otras palabras, en la teoría reducida existe una restricción que relaciona los momentos conjugados.

$$\psi_z^{(0)} = \Pi_z, \quad (4.29)$$

$$\psi_t^{(0)} = \Pi_t \quad (4.30)$$

$$\phi_z^{(0)} = P_z - \frac{\dot{z}}{\dot{t}}, \quad (4.31)$$

$$\phi_t^{(0)} = P_t - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{z}}{\dot{t}} \right)^2 - \frac{\omega^2 z^2}{2}. \quad (4.32)$$

Recordemos que las C_p se hacen fuertes, lo cual inmediatamente implica que exista la siguiente restricción primaria

$$\tilde{\Phi}^{(0)} = P_t + \frac{P_z^2}{2} + \frac{\omega^2 z^2}{2}. \quad (4.33)$$

El hamiltoniano canónico es cero en la superficie de restricción primaria, por lo que $\tilde{\Phi}^{(0)}$ es de primera clase. En el espacio extendido la dinámica del sistema esta descrita por

$$H^{(0)} = \lambda \tilde{\Phi}^{(0)}. \quad (4.34)$$

λ es un multiplicador de Lagrange indeterminado. Las ecuaciones de Hamilton que se derivan de la transformación de norma generada por H . Por otro lado, los paréntesis de Poisson de la teoría subyacente se modifican después de la

aproximación. En su lugar tenemos los paréntesis de Dirac asociados a C_p . Resulta largo y árido describir el procedimiento para encontrar en este ejemplo dichos paréntesis a cada orden en γ . Por ahora nos reservaremos de mostrar el procedimiento a orden cero

$$\begin{aligned}\{z, P_z\}_{(0)} &= 1, \\ \{t, P_t\}_{(0)} &= 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Omega^{(0)} = dP_z \wedge dz + dP_t \wedge dt. \quad (4.35)$$

Cabe señalar que no se ha impuesto ninguna condición de norma, Φ_2 sigue siendo de primera clase. A los paréntesis de Dirac definidos por C_p les corresponde a una dos forma degenerada debido a la libertad de norma generada por Φ_2 . Si impusieramos una norma $\xi = t - f(\tau)$, $\Phi^{(0)}$ sería de segunda clase. Por otro lado, P_t sería constante, en tal caso el segundo término de $\Omega^{(0)}$ sería nulo y entonces correspondería a la forma simpléctica de un oscilador armónico ordinario. De hecho, si se fijara la norma $\xi = t - \tau$ obtendríamos justamente la teoría de PU reducida de orden cero.

Primer Orden

De las fórmulas de recurrencia (4.21), (4.22) y (4.23)

$$[\Pi_z]_1 = \gamma \omega^2 \frac{z}{t}. \quad (4.36)$$

Seleccionamos a Φ_1 como parte de C_p para reescribir a Π_t , la cual es una variable constreñida

$$\Phi_1 \rightarrow \psi_t^{(1)},$$

lo cual implica

$$[\Pi_t]_1 = -[\Pi_z]_1 \frac{\dot{z}}{t} = -\gamma \omega^2 \frac{z}{t} [P_z]_0. \quad (4.37)$$

Por lo tanto, la C_p asociada a Π_z es

$$\psi_z^{(1)} = \Pi_z - \gamma \omega^2 \frac{z}{t}. \quad (4.38)$$

Por otro lado

$$[P_z]_1 = \frac{\dot{z}}{t} + \gamma [G_z]_0,$$

$$[P_t]_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{z}}{t} \right)^2 - \frac{\omega^2 z^2}{2} - \gamma [G_t]_0.$$

Donde después de hacer la sustitución

$$\frac{1}{t^3} \left(\ddot{z} - t \frac{\dot{z}}{t} \right) = -\frac{\Pi_z}{\gamma} \rightarrow -\omega^2 \frac{z}{t}.$$

derivada de las constricciones y las definiciones de los momentos, se tiene que

$$[G_z]_0 = -\omega^2 \frac{\dot{z}}{t}$$

y

$$[G_t]_0 = \omega^2 \left(\frac{\omega^2 z^2}{2} + \left(\frac{\dot{z}}{t} \right)^2 \right).$$

Con lo anterior, finalmente obtenemos las ϕ de C_p

$$\phi_z^{(1)} = P_z - (1 - \gamma\omega^2) \frac{\dot{z}}{t} \quad (4.39)$$

$$\phi_t^{(1)} = P_t + (1 - 2\gamma\omega^2) \left(\frac{\dot{z}}{t} \right)^2 + (1 - \gamma\omega^2) \frac{\omega^2 z^2}{2}. \quad (4.40)$$

$[P_z]_1$ y $[P_t]_1$ no son independientes. De (4.39) se ve que estan relacionadas de la siguiente manera

$$[P_t]_1 = -\frac{1}{2}[P_z]_1^2 - (1 - \gamma\omega^2)\omega^2 \frac{z^2}{2}.$$

Después de hacer fuertes (4.39) se ve que hay una constricción primaria

$$\Phi_1^{(1)} = P_t + \frac{1}{2}P_z^2 + (1 - \gamma\omega^2)\omega^2 \frac{z^2}{2}. \quad (4.41)$$

Debido a la existencia de (4.41) no es posible despejar a alguna de las velocidades \dot{t} o \dot{z} en función de sus respectivos momentos canónicos. Una de ellas jugará el papel de coordenada del espacio fase como multiplicador de Lagrange. En este caso conviene despejar a \dot{z} y dejar a \dot{t} como multiplicador el Lagrange. Al hacer el cálculo explícito bajo las constricciones fuertes, el hamiltoniano canónico es

$$H_c^{(1)} = t\Phi_1^{(1)}. \quad (4.42)$$

Cómo era esperado, el hamiltoniano canónico es debilmente nulo.

La teoría reducida que hemos obtenido es singular (y de norma), por haber libertad de norma no existe propiamente una forma simpléctica aún. Sin embargo, las constricciones perturbativas son de segunda clase y tiene paréntesis de Dirac asociados. Si bien las ecuaciones de movimiento a este nivel no forman, localmente, un campo vectorial hamiltoniano, es decir, el sistema de ecuaciones de movimiento no son necesariamente las ecuaciones de Hamilton; éstas son generadas por la dos forma pre-simpléctica asociada con los paréntesis de Dirac formados con las constricciones de segunda clase C_p .

En primer lugar los paéntesis de Dirac se deteminan por los paréntesis de Poisson de $\{\phi_t, \phi_z, \psi_z, \psi_t = \Phi_1\}$. Para la coordenadas independientes del espacio reducido, les corresponden los párentesis de Dirac a primer orden siguientes

$$\begin{aligned}\{z, P_z\}_{(1)} &= (1 - \gamma\omega^2), \\ \{t, P_t\}_{(1)} &= 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la forma simpléctica en ese espacio es

$$\Omega^{(1)} = (1 - \gamma\omega^2)dP_z \wedge dz + dP_t \wedge dt. \quad (4.43)$$

Bajo un cambio de coordenadas no canónico

$$p = P_z \quad (4.44)$$

$$x = (1 - \gamma\omega^2)z \quad (4.45)$$

$$p_t = P_t \quad (4.46)$$

$$t' = t. \quad (4.47)$$

En estas coordenadas

$$\Omega^{(1)} = dp \wedge dx + dp_t \wedge t.$$

Si se impusiera la condición de norma $\xi = t - \tau$, el segundo término de $\Omega^{(1)}$ se anula y se obtiene la forma simpléctica la teoría de PU reducida a primer orden en γ . Es decir, aquella del oscilador armónico con frecuencia ϖ_2 a orden uno en a .

4.2. Caso Singular de Segunda Clase: Teoría de Maxwell-Chern-Simons de Orden Superior en 1d ($EMCS_1$)

En los próximos dos capítulos haremos la aproximación perturbativa para dos teorías singulares particulares: Una teoría vectorial de Chern-Simons en $(0+1)$ dimensiones discreta y la teoría de Maxwell con términos adicionales de Chern-Simons de orden superior en $(2+1)$ dimensiones ($EMCS_3$). La primera ilustra el procedimiento en el caso de una teoría discreta singular de segunda clase y la segunda el de una teoría de campos de norma (de primera clase). Además de ser casos ilustrativos, se trata de teorías realistas de interés físico, útiles en la descripción de fenómenos planares. $EMCS_1$ es interesante como una teoría sencilla no conmutativa y su estudio es herramienta para entender ciertas propiedades de otras teorías conmutativas más complejas.

En principio, las extensiones de Chern-Simons de orden superior son interesantes pues introducen efectos dinámicos a la teoría libre y topológica⁶. Sin embargo, como teoría de orden superior, presenta predicciones físicamente inconsistentes (por ejemplo, el propagador tiene un polo negativo [28]). A pesar de ello, algo de información físicamente valiosa puede obtenerse si reducimos I_{EMCS} mediante la aproximación perturbativa que aquí proponemos. Más allá de simplemente desechar los grados de libertad de orden superior, es posible introducir sus efectos proyectando el espacio fase subyacente a un espacio reducido mediante la aproximación perturbativa. Así a partir de la estructura canónica aproximada es posible realizar una cuantización aceptable físicamente. Antes de abordar a la teoría de campos de Chern-Simons más realista, resulta clarificante trabajar con la versión $EMCS_1$ más simple, pues la estructura de norma de sus grados de libertad de orden superior es la misma que en la teoría de campos $EMCS_3$ salvo de dificultades técnicas debidas a la invariancia de norma de la electrodinámica. Con la noción que brinda este paso previo, en siguiente capítulo se analiza formalmente la teoría de campo en $(2+1)$.

Primero construiremos la formulación canónica a partir de la cual podremos aplicar el método, al final obtendremos una teoría reducida en la formulación de Hamilton-Dirac sin grados de libertad de orden superior. La teoría reducida tendrá como hamiltoniana la misma que la electrodinámica clásica en la norma de Coulomb, sin embargo, correcciones a la forma simpléctica son introducidas por las extensiones I_{ECS} .

⁶Revisar Apéndice C en donde se presentan los antecedentes y motivaciones de las teorías de Chern-Simons

4.2.1. Formulación Canónica

Con la intención de construir la extensión de orden superior de Chern-Simons para un campo vectorial parametrizado en el espacio tiempo (1+0) sin la estructura de norma de aquel en (2+1), observamos (C.5)⁷ y reescribimos su versión en (0+1) dimensiones tras sustituir las derivadas parciales respecto de los parámetros espacio temporales por una derivada ordinaria respecto del tiempo y eliminar la componente cero del campo, la cual tomamos como espuria en analogía con electrodinámica

$$I_{ECS}^{(0+1)} \equiv \int dt \, 2\alpha \ddot{x}^i \epsilon^{ij} \dot{x}^j.$$

Donde

$$x^i \in \mathfrak{R}^2 \quad (4.48)$$

$$A_{ij} = A_{ji} \quad (4.49)$$

$$\epsilon^{ij} \rightarrow \text{Levi Civita}. \quad (4.50)$$

La teoría análoga de Maxwell libre parametrizada en (0+1), corresponde a un oscilador armónico en 2 dimensiones

$$I_0 = \int dt \frac{1}{2} \left\{ (\dot{x}^i)^2 - \frac{1}{2} x^i A^{ij} x^j \right\}.$$

La correspondiente EMCS análoga entonces estaría descrita por la siguiente lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^i)^2 - \frac{1}{2} x^i A^{ij} x^j - 2\alpha \ddot{x}^i \epsilon^{ij} \dot{x}^j. \quad (4.51)$$

Plantearémos como primero la formulación canónica de la teoría en el espacio fase. Los momentos conjugados se definen, según el formalismo de Ostrogradsky, como

$$p_1^k = -2\alpha \epsilon^{kj} \dot{x}^j \quad (4.52)$$

$$p_0^k = \dot{x}^k - 2\alpha \epsilon^{ik} \ddot{x}^i. \quad (4.53)$$

Recordemos que las velocidades juegan el papel de coordenadas. Al hacer la transformada de Legendre para ir de la formulación lagrangiana a la hamiltoniana, sólo es necesario despejar las derivadas de orden dos en términos de los momentos conjugados y las coordenadas. De las anteriores definiciones y teniendo en mente lo anterior hay dos contricciones primarias

$$\Phi^k = p_1^k + 2\alpha \epsilon^{kj} \dot{x}^j. \quad (4.54)$$

$$k = 1, 2.$$

⁷referimos al lector al último apéndice

El hamiltoniano canónico resulta ser

$$H_c = p_0^k \dot{x}^k - \frac{1}{2}(\dot{x}^i)^2 + \frac{1}{2}x^i A^{ij} x^j. \quad (4.55)$$

Las condiciones de consistencia de (4.54) dan lugar a las siguientes ecuaciones para los multiplicadores de Lagrange

$$\dot{\Phi}^k \approx \{\Phi^k, H_c\} + \lambda_j \{\Phi^k, \Phi^j\} \approx 0,$$

donde

$$\{\Phi^k, H_c\} \approx -p_0^k + \dot{x}^k,$$

$$c_{kj} \equiv \{\Phi^k, \Phi^j\} = -4\alpha \epsilon^{kj} = -4\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

Φ^k son constricciones de segunda clase, los multiplicadores de Lagrange correspondientes, por lo tanto, pueden ser determinados a partir de las ecuaciones de consistencia

$$\Rightarrow \lambda_k = \frac{\epsilon^{ik}}{4\alpha} (\dot{x}^i - p_0^i).$$

Lo anterior corrobora que las aceleraciones son los multiplicadores de Lagrange en consistencia con (4.52). Los paréntesis de Dirac pueden formarse a partir de (4.108)

$$\{A, B\}_D \equiv \{A, B\} - \{A, \Phi_i\} c_{ij}^{-1} \{\Phi_j, B\}, \quad (4.57)$$

donde

$$c^{-1} = \frac{1}{4\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los paréntesis de Dirac fundamentales son

$$\begin{aligned} \{x^i, x^j\}_D &= 0 \\ \{x^i, p_0^j\}_D &= \delta^{ij} \\ \{p_0^i, p_0^j\}_D &= 0 \\ \{\dot{x}^i, \dot{x}^j\}_D &= c_{ij}^{-1} \\ \{\dot{x}^i, p_1^j\}_D &= \delta^{ij} + 2\alpha c_{in}^{-1} \epsilon^{nj} \\ \{p_1^i, p_1^j\}_D &= 4\alpha^2 \epsilon^{in} \epsilon^{jm} c_{nm}^{-1} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Es interesante notar lo siguiente: de las ecuaciones (4.58) vemos que las velocidades tienen paréntesis de Dirac distinto de cero lo cual implica que al cuantizar la teoría tendremos no conmutatividad entre ellas aun a pesar de que las coordenadas conmuten. En otras palabras, mientras que las coordenadas

pueden medirse simultaneamente con probabilidad uno, las velocidades no son observables compatibles.

Para construir las contricciones suplementarias necesitamos las ecuaciones de movimiento fundamentales generadas por el hamiltoniano canónico y los paréntesis de Dirac. Ellas están dadas por

$$\dot{p}_0^k = -A^{ik} x_i \quad (4.59)$$

$$\ddot{x}_k = \frac{\epsilon^{ik}}{4\alpha} (\dot{x}^i - p_0^i). \quad (4.60)$$

La ecuación \dot{A}_i se satisface idénticamente, \ddot{A}_k son justamente los multiplicadores de Lagrange y \dot{p}_1^k están relacionados con \ddot{A}_k por las constricciones, por lo tanto generan ecuaciones dependientes a las anteriores.

4.2.2. Aproximación Perturbativa

En primer lugar, no todas las variables de orden superior son independientes, de hecho estan relacionadas por las constricciones. Por lo tanto, para algunas de ellas no habrá ecuaciones dinamicas independientes de las cuales generar las constricciones suplementarias para reducir la teoría. En este caso, las constricciones deben clasificarse como parte de C_p , esto es $\Phi^k \rightarrow \psi^k$. De las ecuaciones fundamentales

$$p_0^k = \dot{x}^k - 2\alpha\epsilon^{ik}\ddot{x}_i$$

A orden más bajo en α (4.59)

$$[p_0^k]_0 = \dot{x}^k \quad [\ddot{x}_k]_0 = [p_0^k]_0 = -A^{ik} x_i \quad (4.61)$$

A primer orden en α

$$\begin{aligned} [p_0^k]_1 &= \dot{x}^k - 2\alpha\epsilon^{ik}[\ddot{x}_i]_0 \\ &= \dot{x}^k - 2\alpha\epsilon^{ik}A^{si}x_s. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Por lo tanto las constricciones perturbativas son

$$\begin{aligned} \psi^{k0} &= [\Phi^k]_0 = p_1^k, \\ \phi^{k0} &= p_0^k - \dot{x}^k. \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \psi^{k1} &= \Phi^k = p_1^k + 2\alpha\epsilon^{kj}\dot{x}^j, \\ \phi^{k1} &= p_0^k - \dot{x}^k + 2\alpha\epsilon^{kj}x^j. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Los hamiltonianos reducidos son iguales a orden cero y a primer orden

$$H_R^{(0,1)} = \frac{1}{2}(p_0^k)^2 + x_i A^{ij} x_j. \quad (4.65)$$

Lo cual ingenuamente haría parecer que la descripción no se ve afectada por el término de orden superior. Sin embargo, los paréntesis de Dirac son diferentes en cada caso

$$\{A, B\}_{(0,1)} = \{A, B\} - \{A, \Upsilon_I\} C_{(0,1)}^{ij} \{\Upsilon_J, B\}$$

Donde

$$C_{(0,1)} \equiv \begin{pmatrix} \{\psi^{i(0,1)}, \psi^{j(0,1)}\} & \{\psi^{i(0,1)}, \phi^{j(0,1)}\} \\ \{\phi^{i(0,1)}, \psi^{j(0,1)}\} & \{\phi^{i(0,1)}, \phi^{j(0,1)}\} \end{pmatrix},$$

explícitamente, a cada orden

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & \delta^{ij} \\ -\delta^{ij} & 0 \end{pmatrix}$$

a orden cero y

$$C_1 = \begin{pmatrix} -4\alpha\epsilon^{ij} & \delta^{ij} + 2\alpha\epsilon^{ij} \\ -\delta^{ij} - 2\alpha\epsilon^{ij} & 2\alpha(A^{is}\epsilon^{ik} - A^{ik}\epsilon^{is}) \end{pmatrix}$$

a orden 1 en α . Por lo tanto la dinámica sí sufre correcciones a través de la forma simpléctica.

4.3. Caso Singular Primera Clase: $EMCS_3$ en la Norma de Coulomb

En esta sección retomaremos la teoría de campos de norma abelianas de Maxwell en (2+1) dimensiones más realista. En relación al modelo simplificado, además de introducir infinitos no numerables grados de libertad, aparece la complicación de la invariancia de norma. Sin embargo, en esencia el resultado final es bastante similar, en este caso sólo aparecen complicaciones técnicas que hay que resolver.

$$I_{EMCS} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + a\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial^\nu A_\alpha \partial_\nu F_{\beta\gamma} \right\} \quad (4.66)$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu = 0, 1, 2$$

En este sistema los grados de libertad son los campos y sus velocidades pues la densidad lagrangiana depende de las aceleraciones. En esta teoría relativista, más allá de seguir el procedimiento de Ostrogradsky, la definición de los momentos conjugados tiene que hacerse via el teorema de Noether. Tras imponer la simetría de Poincaré, se obtiene la correspondiente corriente conservada. En particular nos interesan los generadores de traslaciones espaciales y temporales con el objetivo de definir apropiadamente los momentos canónicos. Referiremos al interesado en los detalles de la deducción al apéndice A

$$\Pi^\mu \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_\mu} - 2\partial_k \frac{\partial L}{\partial \partial_k \dot{A}_\mu} - \partial_0 \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_\mu}.$$

Explicitamente para $\mu = 0$,

$$\Pi^0 = 6a\epsilon^{ij} \partial_i \dot{A}_j, \quad (4.67)$$

para $\mu = k = 1, 2$

$$\Pi^k = -F^{0k} + 4a\epsilon^{jk} (\ddot{A}_j - \nabla^2 A_j) - 6a\epsilon^{jk} \partial_j \dot{A}^0. \quad (4.68)$$

En el lado derecho de la ecuación (4.67) no aparecen segundas derivadas respecto del tiempo de los campos A_μ , por lo tanto se trata de una restricción primaria:

$$\phi^1 = \Pi_0 + 6a\epsilon^{ij} \partial_i \dot{A}_j. \quad (4.69)$$

Los momentos canónicos conjugados para las derivadas temporales de los campos, están dados por

$$\tilde{\Pi}^\mu \equiv \frac{\delta L}{\delta \partial_0^2 A_\mu} = 2a\epsilon^{\alpha 0\mu} \dot{A}_\alpha.$$

En estas ecuaciones no aparecen segundas derivadas de los campos, por lo que dan lugar a restricciones primarias. Para $\mu = 0$

$$\phi^2 = \tilde{\Pi}^0, \quad (4.70)$$

para $\mu = k$

$$\tilde{\phi}^k = \tilde{\Pi}^k + 2a\epsilon^{ik} \dot{A}_i \quad (4.71)$$

4.3.1. Hamiltoniana Canónica

La transformada de Legendre de la lagrangiana, consistente con las constricciones, corresponde a la hamiltoniana canónica del sistema y esta dada por

$$H_c = \Pi_k \dot{A}^k + \frac{1}{2}(\dot{A}_i - \partial_i A_0)(\dot{A}^i - \partial^i A^0) + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} \quad (4.72)$$

$$+ 2a\epsilon^{ij} \left(\dot{A}_0 \partial_i \dot{A}_j + \partial_k A_i \partial^k \dot{A}_j - 2\partial_k A_0 \partial^k \partial_i A_j \right). \quad (4.73)$$

4.3.2. Ecuaciones de Consistencia y Constricciones Secundarias

La hamiltoniana canónica y la hamiltoniana extendida son debilmente iguales en la superficie de constricción Γ_c definida por las constricciones primarias, fuera de esa superficie estan relacionados de la siguiente manera

$$H_T = H_c + \lambda_1 \tilde{\phi}^1 + \lambda_2 \tilde{\phi}^2 + \vartheta_1 \phi^1 + \vartheta_2 \phi^2. \quad (4.74)$$

Al conjunto de constricciones primarias las denotaremos por el conjunto $\Phi = \{\Phi^I\} = \{\tilde{\phi}^1, \tilde{\phi}^2, \phi^1, \phi^2\}$.

$$\Phi_1 = \tilde{\Pi}^1 - 2a\dot{A}_2, \quad (4.75)$$

$$\Phi_2 = \tilde{\Pi}^2 + 2a\dot{A}_1, \quad (4.76)$$

$$\Phi_3 = \Pi_0 - 6a\epsilon^{ij}\partial_i \dot{A}_j, \quad (4.77)$$

$$\Phi_4 = \tilde{\Pi}^0. \quad (4.78)$$

Al conjunto de multiplicadores de Lagrange los denotamos

$$\mu = \{\mu^I\} = \{\lambda^1, \lambda^2, \vartheta^1, \vartheta^2\}.$$

La evolución de una función A de las coordenadas del espacio fase, consistente con las constricciones, esta dada por

$$\dot{A} \approx \{A, H_c\} + \mu^I \{A, \Phi_I\}. \quad (4.79)$$

Todas las constricciones deben satisfacerse a todo tiempo, lo cual impone las condiciones de consistencia (CC) siguientes

$$\dot{\Phi}^I \approx \{H_c, \Phi_I\} + \lambda^J \{\Phi_I, \Phi_J\} \approx 0, \quad (4.80)$$

$$I, J = 1, \dots, 4.$$

Explícitamente, tras calcular los respectivos paréntesis de Poisson y evaluar en la superficie de constricción se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{\Phi}_1 \\ \dot{\Phi}_2 \\ \dot{\Phi}_3 \\ \dot{\Phi}_4 \end{pmatrix} = \int d^2x d^2y \delta_{xy} \left\{ 4a \begin{pmatrix} 0 & -4a & -6a\partial_2 & 0 \\ 4a & 0 & 6a\partial_1 & 0 \\ 6a\partial_2 & -6a\partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \\ \mu^3 \\ \mu^4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ h^3 \\ h^4 \end{pmatrix} \right\} \approx 0. \quad (4.81)$$

Donde

$$h^1 = \{\Phi_1(x), H_c(y)\} \approx \delta_{xy}(-\Pi^1 - F^{01} - 2a(\partial_2 \dot{A}_0 - \nabla^2 A_2)) \quad (4.82)$$

$$h^2 = \{\Phi_2(x), H_c(y)\} \approx \delta_{xy}(-\Pi^2 - F^{02} + 2a(\partial_1 \dot{A}_0 - \nabla^2 A_1))$$

$$h^3 = \{\Phi_3(x), H_c(y)\} \approx \delta_{xy}(\partial_i F^{i0} - 4a\epsilon^{ij}\nabla^2 \partial_i A_j)$$

$$h^4 = \{\phi^1(x), H_c(y)\} \approx \delta_{xy}(-2a\epsilon^{ij}\partial_i \dot{A}_j - \nabla^2 A_2).$$

El sistema tiene rango 2. Sus vectores nulos están dados por

$$\{v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\partial_1 \\ -\frac{3}{2}\partial_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

Al multiplicar por la izquierda v_1 y v_2 por (4.81) se encuentran constricciones secundarias

$$\chi_1(x) = \int d^2y h^4 = -2a\epsilon^{ij}\partial_i \dot{A}_j, \quad (4.83)$$

$$\chi_2(x) = \int d^2y (h^3 - \frac{3}{2}\partial_k h^k) = \Xi_1 - \frac{3}{2}\Xi_2 \quad k = 1, 2. \quad (4.84)$$

Donde se han definido por separado

$$\Xi_1 \approx \int d^2y h^3 = \partial_i F^{i0} - 4a\epsilon^{ij}\nabla^2 \partial_i A_j$$

y

$$\Xi_2 \approx \int d^2y \partial_k h^k = -\partial_i \Pi^i - \partial_i F^{i0} + 2a\epsilon^{ij}\nabla^2 \partial_i A_j$$

por conveniencia, pues como mostraremos más tarde ambas por separado son debilmente nulas.

Al imponerle CC tenemos por un lado que

$$\{\chi_1, H_c\} + \mu^J \{\chi, \Phi_J\} \approx 2a\epsilon^{ij}\partial_i \lambda_j \approx 0.$$

Por otro lado, Ξ_1 y Ξ_2 satisfacen la misma ecuación de consistencia

$$-\nabla^2 \mu^1 - \partial_k \mu^k \approx 0 \quad k = 1, 2. \quad (4.85)$$

Cualquier combinación lineal de Ξ_1 y Ξ_2 tiene como condición de consistencia la misma ecuación (4.85). Note que χ_2 es justamente una combinación lineal de ellas. En este punto el sistema que forman las ecuaciones de consistencia es

$$\begin{pmatrix} \dot{\Phi}_1 \\ \dot{\Phi}_2 \\ \dot{\Phi}_3 \\ \dot{\Phi}_4 \\ \dot{\chi}_1 \\ \dot{\chi}_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & -4a & -6a\partial_2 & 0 \\ 4a & 0 & 6a\partial_1 & 0 \\ 6a\partial_2 & -6a\partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a\partial_2 & -2a\partial_1 & 0 & 0 \\ -\partial_1 & -\partial_2 & -\nabla^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \\ \mu^3 \\ \mu^4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \frac{3}{2}\partial_k h^k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx 0. \quad (4.86)$$

Aparece un nuevo vector nulo

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo cual implica que hay una nueva constricción

$$\Xi_2 \approx 0$$

ya vimos que Ξ_2 tiene la misma ecuación de consistencia que χ_2 , por lo tanto no existen más constricciones secundarias.

Del conjunto de constricciones puede escojerse un subconjunto que dé lugar a ecuaciones de consistencia independientes. Antes de hacerlo cabe notar que por ser Ξ_2 una constricción entonces Ξ_1 también lo es y por tener ecuaciones de consistencia iguales podemos libremente elegir por conveniencia Ξ_1 y la única combinación lineal de primera clase

$$\Xi = \Xi_1 - \Xi_2 = \partial_i \Pi^i - 2a\epsilon^{ij} \nabla^2 \partial_i A_j. \quad (4.87)$$

Cabe notar que χ_1 y Φ_3 tienen la misma CC, por lo que desechamos a una de ellas. El sistema de ecuaciones para los multiplicadores de Lagrange μ son las mismas si en vez de χ_2 tomamos Ξ_1 y Ξ . En suma, el conjunto de constricciones restante es

$$\{\Phi^1, \Phi^2, \Phi_3, \Xi_1\} \rightarrow 2^\circ \text{ clase} \quad (4.88)$$

$$\{\Phi_4, \Xi\} \rightarrow 1^\circ \text{ clase.} \quad (4.89)$$

Escritas explícitamente, donde ζ es etiqueta para las constricciones de segunda clase mientras que Ψ etiqueta a las de primera clase

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \tilde{\Pi}^1 - 2a\dot{A}_2, \\ \zeta_2 &= \tilde{\Pi}^2 + 2a\dot{A}_1, \\ \zeta_3 &= \Pi_0 - 6a\epsilon^{ij} \partial_i \dot{A}_j, \\ \zeta_4 &= \partial_i F^{i0} - 4a\epsilon^{ij} \nabla^2 \partial_i A_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \tilde{\Pi}^0 \\ \Psi_2 &= \partial_i \Pi^i - 2a\epsilon^{ij} \nabla^2 \partial_i A_j. \end{aligned}$$

Las cuales obedecen el siguiente álgebra

$$\{\Psi_1(x), \Psi_2(x)\} = -\frac{\partial \Psi_2}{\partial \dot{A}_0} \approx 0$$

$$\begin{aligned}
\{\zeta_k(x), \zeta_s(y)\} &= \{\tilde{\Pi}^k + \epsilon^{ik} 2a \dot{A}_i, \tilde{\Pi}^s + \epsilon^{js} 2a \dot{A}_j\} = -4a\epsilon^{ks} \delta(x, y) \\
\{\zeta_k(x), \zeta_3(y)\} &= \{\tilde{\Pi}^k + \epsilon^{ik} 2a \dot{A}_i, \Pi_0 - 6a\epsilon^{ij} \partial_i \dot{A}_j\} = 0 \\
\{\zeta_k(x), \zeta_4(y)\} &= \{\tilde{\Pi}^k + \epsilon^{ik} 2a \dot{A}_i, \partial_j F^{j0} - 4a\epsilon^{ij} \nabla^2 \partial_i A_j\} = -\partial^k \delta(x, y)
\end{aligned}$$

$$k = 1, 2$$

$$\{\zeta_3(x), \zeta_4(y)\} = \{\Pi_0 - 6a\epsilon^{ij} \partial_i \dot{A}_j, \partial_j F^{j0} - 4a\epsilon^{ij} \nabla^2 \partial_i A_j\} = 0.$$

4.3.3. Reducción del Espacio Fase

Conteo de los Grados de Libertad

Se tienen 4 constricciones primarias y 2 secundarias independientes, de las cuales 4 son de segunda clase: $\{\zeta_I\} = \{\Phi_{1,2,3}, \Xi_1\}$ y dos de primera clase $\{\Psi_I\} = \{\Phi_4, \Xi\}$. De las 12 coordenadas del espacio fase extendidas, en total hay

$$N = 12 - 4 - 2 \times 2 = 4$$

coordenadas del espacio reducido independientes, es decir 2 grados de libertad de configuración.

Fijación de la Norma

Es natural sugerir como condición de norma a la condición de Coulomb

$$\zeta = \partial_i A^i. \quad (4.90)$$

La forma de Ψ_2 sugiere que así se proponga. Hemos visto que A_0 no es un grado de libertad⁸, por ello nos interesa eliminarla de entre las variables dinámicas. Para ese fin, en Ξ_1 podemos despejarla al mismo tiempo que usar ζ

$$\nabla^2(A_0 + 4a\epsilon^{ij} \partial_i A_j) \approx 0 \quad (4.91)$$

Si bien no es cierto que $A_0 \approx -4aC \int dy \frac{\nabla^2 \epsilon^{ij} \partial_i A_j}{|x-y|}$ ⁹ para A, existe una transformación de norma $A_\mu^* = A_\mu + \partial_\mu \theta$ tal que si es cierto para A^* . Asumamos que dicha transformación se ha realizado. Entonces podemos eliminar a A_0 en términos de las otras variables canónicas usando (4.91), es decir, resolver la ecuación de Laplace

$$A_0 \approx -4aC \int dy \frac{\nabla^2 \epsilon^{ij} \partial_i A_j}{|x-y|}. \quad (4.92)$$

⁸no tiene ecuación dinámica

⁹ $C = \frac{1}{2\pi}$ asociada con la función de Green de ∇^2 en el plano.

Espacio Reducido

Hemos eliminado a A_0 de la descripción, nos interesa describir la dinámica a partir de las variables dinámicas restantes sometidas a las constricciones naturales del sistema y también a la condición de norma. Después de hacer la sustitución, las constricciones ζ_3 Y Ψ_1 se vuelven irrelevantes en virtud de que generan transformaciones sobre cantidades no físicas (A_0, \dot{A}_0 y sus canónicos conjugados

$$\begin{aligned}\zeta_3 &= \Pi_0 + \frac{3}{2}\dot{A}_0 \approx \Pi_0, \\ \Psi_1 &= \tilde{\Pi}_0.\end{aligned}$$

Por otro lado, ζ_4 se hace fuertemente nula al hacer la sustitución de A_0 . Restan $\{\zeta_k^*, \Psi_2^*, \zeta^*\}$ ($k = 1, 2$)¹⁰. El hamiltoniano canónico que describe al sistema en términos de las variables físicas, es

$$\begin{aligned}H_c^* &= \int dx \left\{ \Pi_k \dot{A}^k + \frac{(\dot{A}_i)^2}{2} + \frac{F_{ij}F^{ij}}{4} + 2a\epsilon^{ij}\partial_k A_i \partial^k \dot{A}_j \right. \\ &\quad \left. + 24a^2(\partial_i \epsilon^{mn} \partial_m A_n)^2 \right\}.\end{aligned}\quad (4.93)$$

Al fijar la norma, todas las constricciones se han vuelto de segunda clase. Al nuevo conjunto lo denotaremos $\{\xi_I\}_{I=1,\dots,4} = \{\zeta^1, \Psi_2, \zeta^2, \zeta\}$. En el espacio reducido, no todas las variables dinámicas A_i, \dot{A}_i, Π_i y $\tilde{\Pi}_i$ son independientes. Éstas están sujetas a constricciones entonces no podemos calcular los paréntesis de Poisson correspondientes como si fueran independientes, estos paréntesis corresponden a los paréntesis de Dirac asociados a las constricciones ξ , caracterizados por la matriz

$$(C_{IJ}(x, y)) \equiv (\{\xi_I(x), \xi_J(y)\}) = \delta_{xy} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nabla^2 \\ 4a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cuya inversa es

$$(C^{IJ}(x, y)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\delta_{xy}}{4a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G(x, y) \\ -\frac{\delta_{xy}}{4a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G(x, y) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donde

$$\nabla^2 G(x, y) = \delta(x, y)$$

es la función de Green del operador Laplaciano. Los que hubieran sido los paréntesis de Poisson entre dos distintas funciones A y B de las coordenadas

¹⁰el asterísco denota que A_0 ha sido sustituido, en adelante lo omitiremos

de Γ están dados por los paréntesis de Dirac en Γ_c debido a la existencia de las constricciones

$$\{A, B\}_D \equiv \{A, B\} - \{A, \xi_I\} C^{IJ} \{\xi_J, B\}. \quad (4.94)$$

Las constricciones reducen la dimensión del espacio fase por lo que las coordenadas del espacio extendido en el subespacio reducido no son independientes. Para que la forma simpléctica sea no degenerada hay que escribirla en términos de coordenadas independientes, en este caso elegimos

$$\{c_i\}_{i=1,\dots,4} = \{A_1, \dot{A}_1, \Pi_1, \tilde{\Pi}_1\}$$

Calculando explícitamente según (4.94), los paréntesis fundamentales están dados por

$$(\{c_i(x), c_j(y)\}_D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_{xy} + \partial_1 G_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \delta_{xy} \\ -\delta_{xy} - \partial_1 G_{xy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \delta_{xy} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La existencia de constricciones en el espacio fase extendido da lugar a un subespacio fase. Los paréntesis de Poisson en este subespacio se modifican debido a las constricciones, por lo que la forma simpléctica que genera correctamente la evolución y las simetrías son los paréntesis de Dirac. Aunque para estas coordenadas del espacio reducido se esperaría tuvieran los mismos paréntesis de Poisson que en el espacio extendido por no estar constreñidos, sus paréntesis se modifican por el hecho de que las otras coordenadas sí lo están.

4.3.4. Evolución

En este punto, se tienen todos los elementos necesarios para describir la dinámica del sistema: coordenadas para el espacio fase físico

$$\{\theta_I\}_{I=1,\dots,8} \equiv \{A_i, \dot{A}_i, \Pi^i, \tilde{\Pi}^i\};$$

el espacio fase reducido Γ_c ; los paréntesis de Dirac y la generadora de la H_c . De esta manera cualquier observable evoluciona como sigue

$$\delta F(\theta_I) \approx \{F, H_c\}_D \delta t. \quad (4.95)$$

Por consistencia y completez es conveniente calcular las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\dot{\theta}_I \approx \{\theta_I, H_c\}_D$$

es decir:

$$\dot{A}_i \approx \dot{A}_i, \quad (4.96)$$

$$\ddot{A}_i \approx \frac{\epsilon_{ki}}{4a} h^{k*} = -\frac{\epsilon_{ki}}{4a} (\Pi^k + \dot{A}^k) + \frac{1}{2} \nabla^2 A_i, \quad (4.97)$$

$$\dot{\Pi}^k \approx \partial_i F^{ik} - 2a\epsilon^{ik} \nabla^2 \dot{A}_i + 48a^2 \epsilon^{ik} \partial_i (\epsilon^{mn} \nabla^2 \partial_m A_n), \quad (4.98)$$

$$\dot{\Pi}^k \approx -\frac{\Pi^k}{2} - \frac{\dot{A}^k}{2} - a\epsilon^{ik} \nabla^2 A_i. \quad (4.99)$$

4.3.5. Aproximación Perturbativa

En esta sección reduciremos, mediante el método propuesto en esta tesis, la teoría extendida de Maxwell-Chern-Simons que aparecería en una acción efectiva tras calcular diagramas de Feynman anómalos. Esperamos obtener una versión MCS con correcciones al término de orden más bajo, provenientes los grados de libertad clásicos de orden superior. Desde otra óptica, la teoría reducida es una versión localizada de la teoría efectiva de orden superior.

Primero haremos la reducción del modelo simplificado.

4.3.6. Proceso Iterativo

De las ecuaciones (4.96-4.99) sólo las dos primeras son independientes. Siguiendo el esquema de la sección 2 del segundo capítulo, a partir de ellas las relaciones de recurrencia para construir las constricciones suplementarias son

$$[\dot{A}^k]_n = -\Pi^k + 2a\epsilon^{ik}(-2[\dot{\Pi}_i]_{n-1} - \nabla^2 A_i), \quad (4.100)$$

$$[\dot{\Pi}^k]_n = \partial_i F^{ik} - 2a\epsilon^{ik}\nabla^2[A_i]_{n-1}. \quad (4.101)$$

A orden cero

$$[\dot{A}^k]_0 = -\Pi^k,$$

por lo tanto

$$\phi_i(x)^0 = \Pi_i + \dot{A}_i, \quad (4.102)$$

y

$$[\dot{\Pi}^k]_0 = \partial_i F^{ik}.$$

La cual será necesaria para sustituir las derivadas de orden mayor o igual a 2 en (4.100) y (4.101) a orden 1.

En este caso, $\dot{\Pi}$ no son variables dinámicas en cuanto a que están restringidas, por lo tanto, tomaremos $\tilde{\phi}$ como parte de C_p

$$\psi_k^0 \equiv [\tilde{\phi}_k]_0 = \tilde{\Pi}_k. \quad (4.103)$$

Imponiendo como fuertes (4.102) y (4.103), trivialmente se obtiene electrodinámica en la norma de Coulomb de orden 1 usual. Note que (4.102) establece la relación usual entre las derivadas temporales de los campos y sus momentos conjugados.

A primer orden

$$[\dot{A}^k]_1 = -\Pi^k - 2a\epsilon^{ik}\nabla^2 A_i$$

entonces

$$\phi_k^1 \equiv \dot{A}_k + \Pi_k + 2a\epsilon_{ik}\nabla^2 A^i. \quad (4.104)$$

Por otro lado, $\tilde{\phi}^k$ forman parte de C_p

$$\psi_k^1 \equiv \tilde{\phi}^k \quad (4.105)$$

4.3.7. Reducción de la Teoría

Ahora sólo constreñiremos la evolución a la subvariedad reducida Γ_r definida por C_p y las constricciones subyacentes¹¹. Haremos $\{\Upsilon\} \equiv \{\xi\} \cup C_p = \{\psi^k, \phi^k, \psi^*, \zeta^*\}$ fuertes.

El hamiltoniano canónico asociado es

$$H_r^{(1)} = -\frac{1}{2}\Pi_k\Pi^k + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - 2a\epsilon^{ij}\Pi_i\nabla^2 A_j. \quad (4.106)$$

La evolución una función arbitraria de las variables del espacio fase subyacente es

$$\dot{A} \approx \{A, H_r^{(1)}\} + a_k\{A, \Upsilon_k\}. \quad (4.107)$$

Las ecuaciones de consistencia de las constricciones estan codificadas en la siguiente matriz

$$C_{IJ} \equiv \{\Upsilon_I, \Upsilon_J\} = \delta_{xy} \begin{pmatrix} 4a\epsilon^{ij} & -\delta^{ij} & 0 \\ \delta^{ij} & -4a\epsilon^{ij}\nabla^2 & \Sigma_1 \\ 0 & -\Sigma_1 & \Sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (4.108)$$

donde

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 4a\nabla^2\partial_2 & \partial_1 \\ -4a\nabla^2\partial_1 & \partial_2 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla^2 \\ \nabla^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

C_{IJ} es invertible por lo tanto pueden construirse los paréntesis de Dirac correspondientes.

En esta teoría reducida A_i y Π_i juegan el papel de coordenadas no independientes de la variedad reducida y no necesariamente son coordenadas canónicas conjugadas en cuanto a que

$$\begin{aligned} \{A_i, A_j\}_{(1)} &= 0, \\ \{A_i, \Pi_j\}_{(1)} &= \eta_{ij}, \\ \{\Pi_i, \Pi_j\} &= \pi_{ij}. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Donde

$$\eta = -\nabla^2 \begin{pmatrix} \partial_1^2 & \partial_1\partial_2 \\ \partial_1\partial_2 & \partial_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 2a\nabla^2 \\ -2a\nabla^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hemos visto en la sección anterior que las coordenadas independientes del espacio subyacente eran c_i , en las cuales escribimos la forma simpléctica de la teoría subyacente. Tras hacer la reducción, la dimensión del espacio fase disminuye a 2 pues los grados de libertad de orden superior fueron removidos. Para

¹¹o dicho de otra forma, se constreñirá Γ_c a Γ_r imponiendo C_p

este espacio fase reducido pueden elegirse como coordenadas independientes a $\{\tilde{c}_j\}_{j=1,2} = \{A_1, \Pi^1\}$ y en términos de ellas los paréntesis de Dirac fundamentales son

$$\{\tilde{c}_i(x), \tilde{c}_j(y)\} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{xy} - \partial_1^2 G(x, y) \\ -\delta_{xy} + \partial_1^2 G(x, y) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.110)$$

Donde $G(x, y)$ es la función de Green del operador Laplaciano.

Por lo tanto, finalmente se tiene una teoría de orden uno ordinaria constituida por el espacio fase reducido, la forma simpléctica reducida y la generadora de evolución temporal H_r . Cabe remarcar ciertos detalles en este punto, en primer lugar, las coordenadas en las que está escrita la hamiltoniana no son las fundamentales y entonces no son independientes, sin embargo, esto no es un problema pues contamos con los paréntesis de Dirac, con los cuales pueden calcularse todas las variaciones sobre el espacio fase reducido en términos de coordenadas no independientes. Por otro lado, en coordenadas fundamentales, si bien la forma simpléctica no tiene la forma canónica ordinaria (de Poisson), el teorema de Darboux aplica en este caso, por lo tanto existe una transformación no canónica de las coordenadas fundamentales en las cuales la forma simpléctica es la canónica. En general, si un sistema tiene hamiltoniana independiente del tiempo, la energía es la generadora de la evolución si la forma simpléctica tiene la forma canónica. En este caso, la forma simpléctica no tiene tal forma, por lo tanto, la hamiltoniana no corresponde necesariamente a la energía, sin embargo, la estructura de forma simpléctica es muy similar a la canónica, es fácil intuir que el cambio de coordenadas de Darboux es de la forma

$$A_1(x) \rightarrow (\delta_{xy} + \partial_1^2 G(x, y))A_1(y)$$

el cual es algo parecido a un reescalamiento en versión local.

En tales coordenadas la hamiltoniana reducida corresponde a la energía del sistema. En ellas Π_1 queda intacto, por lo que el término cinético también. A_2 no es una coordenada independiente sin embargo esta relacionada con A_1 “linealmente” por la constricción de Coulomb, entonces bajo el cambio de Darboux también es “reescalada”. La hamiltoniana en esas coordenadas es positiva, claro, bajo la suposición de que a es pequeño. En realidad no nos interesa realizar tal cambio de coordenadas, simplemente hacer notar que el espectro clásico de la teoría reducida es positivo como esperábamos.

Capítulo 5

Conclusiones y Discusión

El método propuesto por primera vez por Eliezer y posteriormente modificado por Cheng-Ho consiste esencialmente en sustituir las derivadas de orden superior de una sistema de orden N en términos de la variable de configuración y de su primera derivada. Tal sustitución está determinada por las ecuaciones de Euler-Lagrange de la teoría a orden cero en el parámetro de la perturbación y mediante un proceso iterativo de las ecuaciones a todo orden, se obtienen las sustituciones a un orden deseado.

Por lo tanto, al hacer la sustitución se obtiene una teoría que tiene como variables dinámicas a la variable de configuración y su primera derivada; entonces la dimensión del espacio de configuración disminuye. Sin embargo, a diferencia de una teoría de orden uno ordinaria, la formulación hamiltoniana de esta teoría no se obtiene mediante el procedimiento usual puesto que la forma simpléctica se modifica por la sustitución, esto trae como consecuencia que la relación entre las formulaciones hamiltoniana y lagrangiana no sea una transformada de Legendre. Cheng-Ho resuelven la dificultad haciendo un cambio de variable de configuración tal que la relación sea justamente la usual transformada de Legendre. Si bien esta medida resuelve en la práctica las cosas, resulta poco elegante y algo confusa.

La idea aquí propuesta fue replantear el proceso en otro orden a fin de ganar claridad y orden. Para el caso no singular, la relación entre las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana de la teoría de orden superior inicial está determinada por la forma simpléctica canónica, por lo tanto, la vía para pasar de una a otra formulación es la transformada de Legendre. Aquí proponemos que en vez de hacer el cambio de coordenadas de Cheng-Ho siguiente a la aproximación, proponemos partir de la formulación hamiltoniana antes de reducir la teoría para evitar tal cambio de coordenadas. A su vez en esta formulación la dinámica de los grados de libertad clásicos es muy clara geoméricamente y es un punto de partida para la cuantización subsecuente.

El precio a pagar por trabajar en la formulación hamiltoniana es que las sustituciones de las variables de orden superior no son tan obvias. Hay más variables de configuración del espacio fase y las ecuaciones son necesariamente acopladas, esto dificulta enormemente generar de manera sistemática y general las sustituciones. Sin embargo, esta dificultad puede ser resuelta si en vez de buscar sustituciones pensamos en ciertas constricciones del espacio subyacente. En lugar de tener sustituciones de las derivadas de orden superior buscamos relaciones entre las coordenadas del espacio fase tales que definan un subespacio fase donde sólo yazcan las variables canónicas de orden más bajo y sean consistentes con las ecuaciones de movimiento subyacentes. Una vez determinadas tales constricciones el proceso de reducción es bien conocido, elegante y convencionalmente interpretable: el algoritmo de Dirac. Un punto interesante a remarcar de nuestro método es que se hace muy claro por qué la teoría aproximada tiene menos grados de libertad que la teoría original. Los grados de libertad adicionales de la teoría de orden superior se eliminan por las constricciones perturbativas.

La formulación de Dirac es la formulación hamiltoniana generalizada a sistemas singulares. Para estas teorías la descripción en esta formulación es sistemática a nivel clásico y es la premisa para ser cuantizadas posteriormente. Partiendo de ella el método de reducción se visualiza de manera sumamente simple. Basta aplicar el algoritmo de Dirac tomando como conjunto de constricciones la unión del conjunto de constricciones originales definitorias del sistema subyacente y C_p , las cuales son una versión perturbativa de las ecuaciones de movimiento.

Debido a que las constricciones perturbativas se construyen usando las ecuaciones de movimiento, si existe simetría de norma, en general, las ecuaciones de movimiento contienen parámetros indeterminados. En ese caso hay dos opciones: 1.- fijar la norma, para determinar los parámetros o bien 2.- admitir parámetros libres en las constricciones suplementarias, reducir la teoría subyacente de manera que en la teoría reducida resulta tener simetría de norma debido a la presencia de variables no físicas. Dentro de los ejemplos que presentamos en la tesis, la primera opción se sigue en el último ejemplo del capítulo 4. Se reduce $EMCS_3$ en donde primero se impone la condición de norma de Coulomb y a partir de los bien definidos paréntesis de Dirac se construye C_p , al aplicar el algoritmo nuevamente siguiendo el mecanismo del método, se obtiene una teoría aproximada (ó reducida) sin libertad de norma. La segunda opción se sigue en el ejemplo del oscilador de Pais-Uhlenbeck reparametrizado PUR (capítulo 3) cuya dinámica está descrita por transformaciones de norma, de manera que las constricciones perturbativas dependen de las variables no físicas. La teoría reducida resulta ser también una teoría de norma en la cual las variables no físicas están directamente relacionadas con los parámetros subyacentes indeterminados. Lo interesante de este ejemplo es que cuando se compara con el ejemplo del oscilador de Pais-Uhlenbeck (PU), resulta que la teoría PUR reducida contiene la misma física que la teoría PU reducida, la

primera es la versión reparametrizada de la segunda a orden cero y primer orden. Por lo tanto el mecanismo de reducción propuesto, en este sencillo caso no altera la física si se elige fijar la norma antes o después de aplicarlo.

Más allá de cuestiones técnicas, nuestro interés ha estado puesto desde el inicio en la teoría reducida resultante como aproximación a la teoría de orden superior. La motivación de generar esta aproximación es la posibilidad de extraer predicciones físicamente aceptables de las teorías de orden superior. Aunque en este trabajo no podemos concluir genéricamente que las predicciones de la teoría reducida son válidas en el límite de baja energías, el resultado en el caso de Pais y Uhlenbeck nos invita a pensar que para teorías de campos con perturbaciones de orden superior esta interpretación es válida. En este sentido, dos casos de especial interés a estudiar son la extensión de orden cuártico del modelo de Einstein Hilbert para la gravedad y la electrodinámica extendida de Podolsky, así como otras teorías efectivas de campos. En estos casos, creemos que la teoría reducida proporcionaría una estructura clásica aproximada de la teoría inicial a partir de la cual es posible cuantizar y obtener predicciones sensatas sin usar un principio de superselección. En este panorama, el método perturbativo aquí propuesto motiva una gama de cuestiones a investigar en la posteridad:

- Recordemos que el introducir derivadas temporales de mayor orden implica que el número de grados de libertad aumenta. Estos grados de libertad generalmente son los que ocasionan problemas. En teoría de cuerdas por ejemplo, la no causalidad tiene que ver directamente con los grados de libertad de orden superior que introduce la no localidad de la teoría. Por otro lado, sin embargo, el introducirlos alivia otros problemas como la no renormalizabilidad. En este panorama las teorías de orden superior o no locales que aparecen comúnmente en la física moderna pueden construirse las correspondientes teorías reducidas, las cuales si bien han perdido su carácter de orden superior pueden tener correcciones (de orden 1 en las derivadas temporales) más allá del orden cero en el parámetro de perturbación. Por lo tanto, el método perturbativo puede proveer de correcciones a las teorías sin introducir los grados de libertad asociados con energías negativas y estados fantasmas. Recientemente se ha usado la gravedad de cuarto orden como aplicación en cosmología en el intento de resolver el problema de singularidad del Big Bang [35]. En estos trabajos se ignoran los grados de libertad de orden superior por lo cual no aparecen fantasmas y al parecer la singularidad en el Big Bang de la gravedad de orden 1 se resuelve. Sin embargo los grados de libertad de orden superior formalmente aparecen al introducir derivadas. Una posible manera de abordar el problema es construyendo una teoría reducida con correcciones a la gravedad de orden 1 que tampoco tiene fantasmas y contiene correcciones debidas a grados de libertad presentes en la gravedad de cuarto orden.
- Usualmente los términos con derivadas temporales de orden superior en teorías de campos convencionales se toman como términos de interacción.

La manera de calcular cantidades de interés como funciones de correlación o la acción cuántica es mediante la expansión perturbativa de las mismas usando la medida de integración de la teoría libre como la medida de integración de la teoría interactuante. Sin embargo, formalmente esto no es del todo correcto, la perturbación de orden superior afecta toda la estructura canónica de la teoría. A diferencia de las perturbaciones usuales, su presencia afecta no sólo a la acción sino el número de grados de libertad y la medida de integración. De cierta forma, al hacer la expansión perturbativa, habría que considerar el cambio en la medida. Creemos que en esto el método ayudaría, si se parte de la teoría reducida al hacer la expansión perturbativa.

- Cabe señalar que este procedimiento está pensado únicamente a nivel clásico. Si bien la estructura canónica clásica es la base para construir la teoría cuántica elevando a operadores a las coordenadas y momentos canónicos, el ordenamiento de estos en la acción determina la forma explícita de C_p . Lo anterior significa que distintos ordenamientos dan lugar a distintos generadores en la teoría reducida. Por otra parte C_p es construido sin tomar en cuenta fluctuaciones cuánticas de los grados de libertad de orden superior. Una forma de introducir estas fluctuaciones es integrar, en la funcional generatriz, las variables de orden superior y así obtener una teoría efectiva, la cual correspondería a la teoría aproximada. Este problema va más allá de este trabajo y si se resolviera consistentemente, la teoría resultante estaría mejor en principio tendría más información cuántica que la teoría reducida clásica. Sin embargo hasta ahora la funcional generatriz para las TOS no es del todo entendida ni manejable. Una razón física por la que consideramos que la estructura canónica de la teoría reducida es buen punto de partida para cuantizar es que las fluctuaciones cuánticas de los grados de libertad de orden superior asociados con los fantasmas son poco probables (se puede asumir incluso que son irrealizables), las que más nos importan son las fluctuaciones de grados de libertad accesibles los cuales son los grados de libertad de la teoría reducida.

Apéndice A

Teorías de Orden Superior

A.1. Formulación Lagrangiana

Considere el problema variacional de encontrar la curva $x(t)$ que minimice la acción siguiente

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) \quad (\text{A.1})$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=0}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x^{(k)}} \right) \delta x^{(k)} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial L}{\partial x^{(n)}} \right) \delta x \quad (\text{A.3})$$

$$+ \sum_{m=0}^{n-1} \left(\sum_{k=m}^n \left(\frac{d}{dt} \right)^{k-m} \frac{\partial L}{\partial x^{(k)}} \right) \delta x^{(m)} \quad (\text{A.4})$$

Para resolver completamente (A.2), la variación tendrá que realizarse sobre curvas con valores de $x^{(k)}(t_1)$, $k = 0, \dots, n-1$ y $x^{(k)}(t_2)$, $k = 0, \dots, n-1$ fijos, lo cual quiere decir que hay n grados de libertad. Equivalentemente: para resolver completamente las ecuaciones de movimiento que minimizan la acción, es necesario especificar $2n$ condiciones iniciales. Entonces el problema queda resuelto por la curva que satisface ecuación diferencial siguiente

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial L}{\partial x^{(n)}} = 0 \quad (\text{A.5})$$

$x^{(k)}$, $k = 0, \dots, n$ tienen que considerarse funciones independientes en el argumento de la lagrangiana. Por lo anterior, el espacio de configuración de estos sistemas tiene como coordenadas a las primeras $n-1$ derivadas y como velocidades a las n -ésima derivada.

Por otro lado, los términos de superficie se proponen como los momentos conjugados, por estar mutiplicando a las uno formas asociadas a la base del espacio tangente

$$p_m \equiv \sum_{k=m}^n \left(-\frac{d}{dt} \right)^{k-m} \frac{\partial L}{\partial x^{(k)}} \quad (\text{A.6})$$

A.2. Formulación Hamiltoniana

Construir la formulación hamiltoniana consiste en describir el problema variacional en el espacio cotangente de la variedad de configuración, es decir reescribir la acción como funcional de las curvas en el espacio cotangente. El espacio tangente de los sistemas de orden superior tiene dimensión n entonces su espacio cotangente tendría dimensión $2n$. Este espacio cotangente o espacio fase tiene como coordenadas a $x^{(k)}$ y sus respectivos momentos conjugados p_k $k = 0, \dots, n-1$. Usualmente la forma de asociar elementos del espacio tangente con elementos del espacio cotangente se hace a traves de una dos forma simpléctica tal que la generadora de la evolución temporal coincida con la transformada de Legendre de la lagrangiana. Ostrogradsky, en el caso de teorías de orden superior, hizo por primera vez este análisis, el cual será brevemente presentado en esta sección.

Considerese un sistema descrito por una función lagrangiana que depende de la n -ésima derivada de $x(t)$

$$L = L(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) \quad (\text{A.7})$$

donde

$$x^{(r)} = \frac{d^r x}{dt^r}, \quad (r = 1, \dots, n)$$

Ostrodrasky propone a $x^{(r)}$, $r = 0, \dots, n-1$ como coordenadas indendependientes

$$x^{(s)} \rightarrow q^s$$

$$s = 0, \dots, n-1.$$

E impone, mediante multiplicadores de Lagrange λ , la condición de que son derivadas sucesivamente las unas de las otras

$$L(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) \rightarrow L_q(q^0, \dots, q^{n-1}, \dot{q}^{n-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}),$$

donde

$$L_q \equiv L + \sum_{m=0}^{n-2} \lambda_m (\dot{q}^m - q^{m+1}). \quad (\text{A.8})$$

Así que en estas coordenadas, la teoría es de orden 1 y λ son multiplicadores de Lagrange. Los momentos conjugados asociados a q^s están definidos por

$$\begin{aligned} p_s &= \frac{\partial L_q}{\partial \dot{q}^s} = \lambda_s \\ s &= 0, \dots, n-2 \end{aligned}$$

y

$$p_{n-1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{n-1}}. \quad (\text{A.9})$$

De las ecuaciones de Euler Lagrange puede recuperarse la expresión (A.6) de los momentos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_q}{\partial \dot{q}^s} \right) - \frac{\partial L_q}{\partial q^s} &= 0 \\ \frac{d}{dt} p_s &= \frac{\partial L_q}{\partial q^s} = \frac{\partial L}{\partial q^s} - \lambda_{s-1} \\ p_{s-1} &= \frac{\partial L}{\partial q^s} - \frac{dp_s}{dt} \end{aligned}$$

Esta última ecuación es una definición iterativa de los momentos, si partimos de la definición (A.9) obtenemos (A.6) y además se han determinado los multiplicadores de Lagrange en L_q . Por otro lado, los momentos p_s son sólo variables auxiliares (pues sus canónicas conjugadas aparecen en el lagrangiano como coordenadas y no como velocidades), sólo p_{n-1} son sustituidos en el lugar de la velocidad \dot{q}^{n-1} . Por lo tanto, la matriz hessiana de L_q se define como:

$$H = \frac{\partial^2 L_q}{\partial^2 \dot{q}^{n-1}}$$

A.2.1. Caso No Singular

En este caso es posible invertir la relación H para obtener

$$\dot{q}^{n-1} = f^{n-1}(q^r, p_r) \quad (\text{A.10})$$

$$r = 0, \dots, n-1$$

y así la hamiltoniana queda definida como

$$H = \sum_{s=0}^{n-2} p_s q^{s+1} + p_{n-1} f^{n-1}(q^r, p_{n-1}) - L_q(q^r, f^{n-1}) \quad (\text{A.11})$$

$$= \sum_{s=0}^{n-2} (p_s - \lambda_m) + p_{n-1} f^{n-1} - L + \sum_{s=0}^{k, n-2} \lambda_m q^{m+1} \quad (\text{A.12})$$

$$= \sum_{s=0}^{n-2} p_m q^{m+1} + p_{n-1} f^{n-1} - L \quad (\text{A.13})$$

$$= \sum_{s=0}^{k, n-2} p_m q^{m+1} + \tilde{H}. \quad (\text{A.14})$$

Las ecuaciones de movimiento, están dadas por

$$\dot{q}^r = \frac{\partial H}{\partial p_r} = q^{r+1} \quad (\text{A.15})$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q^r} = -p_{r-1} - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q^r} \quad (\text{A.16})$$

$$r = 0, \dots, n-1 \quad (\text{A.17})$$

Las cuales reproducen exactamente las ecuaciones de Euler Lagrange, por lo tanto minimizan la acción. La forma simpléctica que corresponde a los paréntesis de Poisson es la usual

$$\Omega = \sum_{k=0}^{n-1} dp_k \wedge dq^k \quad (\text{A.18})$$

A.2.2. Caso Singular

En este $H = 0$ por lo tanto no es posible invertir la relación entre P_{n-1} y \dot{q}^{n-1} , en este caso la definición de p_{n-1} da lugar a una restricción primaria

$$\tilde{\phi} = p_{n-1} - G(q^s, p_s). \quad (\text{A.19})$$

$$s = 0, \dots, n-2$$

Por otro lado, aunque los momentos de menor orden que $n-1$ no tengan que sustituirse en lugar de la derivada de su conjugada canónica, su definición (A.6) puede dar lugar a más restricciones

$$\phi_s = p_{s < n-1} - F_s = 0 \quad (\text{A.20})$$

Denotamos al conjunto de restricciones primarias por $\Phi_I = \{\tilde{\phi}, \phi^s\}$. Éstas reducen el número de coordenadas independientes del espacio fase y definen una subvariedad Γ_c de menor dimensión.

En la definición usual del hamiltoniano (A.11) \dot{q}^{n-1} pueden ser sustituidas en términos de p_{n-1} , en este caso tal cosa no es posible por lo tanto \dot{q}^{n-1} aparecerá en el hamiltoniano jugando el papel de coordenada del espacio fase extendido.

$$H = \sum_{s=0}^{n-2} p_s q^{s+1} + p_{n-1} \dot{q}^{n-1} - L \quad (\text{A.21})$$

Por otro lado, de la ecuación (A.19) y de la definición de p_{n-1}^a se tiene que

$$H = H_c(q_b, p^b) + \sum_I \lambda_I \Phi^I \quad (\text{A.22})$$

El último término está presente para implementar las restricciones Φ_I a través de las ecuaciones de movimiento de los multiplicadores de Lagrange λ_I al resolver

el problema variacional. En la notaci3n convencional, en que \approx denota una "igualdad debil" cuando se satisface una igualdad bajo las constringciones Φ_I .¹

$$H \approx H_c$$

Por lo tanto, las derivadas de mayor orden son multiplicadores de Lagrange. La restricci3n de H a Γ_c se define como la hamiltoniana can3nica H_c la cual est1 definida sin arbitrariedad. En Γ_c la evoluci3n de una cantidad $A(q, p)$ est1 determinada por

$$\dot{A} \approx \{A, H_c\} + \lambda^I \{A, \Phi_I\}. \quad (\text{A.23})$$

Las constringciones deben ser satisfechas a todo tiempo, por lo tanto deben satisfacer las llamadas condiciones de consistencia (CC)

$$\dot{\Phi}^I \approx \{\Phi^I, H_c\} + \lambda^J \{\Phi^I, \tilde{\phi}_J\} \approx 0. \quad (\text{A.24})$$

De estas condiciones, surge un sistema lineal de ecuaciones para los multiplicadores λ_i codificado por la siguiente matriz

$$C_{IJ} \equiv (\{\Phi_I, \Phi_J\}). \quad (\text{A.25})$$

Si el determinante de C_{IJ} es no nulo, entonces los multiplicadores de Lagrange quedan bien determinados. Si el determinante es nulo, aparecer1n constringciones secundarias χ . El conjunto de constringciones primarias Φ junto con el de constringciones secundarias χ definen la subvariedad Γ'_c . Por otro lado de las condiciones de consistencia de Φ y χ pueden generarse nuevas constringciones secundarias. Este proceso termina cuando las condiciones de consistencia se satisfacen id1nticamente, de manera que no surgen nuevas constringciones. En este punto, se tienen k constringciones primarias Φ y k' constringciones secundarias χ independientes, denotamos al conjunto de ellas por Σ . El sistema lineal para λ esta codificado por la matriz

$$C'_{IJ} = \{\Sigma_K, \Phi_J\} \quad (\text{A.26})$$

su rango es evidentemente menor o igual que el rango de C_{IJ} .

Dirac dentro de su algoritmo, gener3 un lenguaje con el que es muy facil saber cuantos de los λ pueden ser determinados. Por un lado, defini3 cantidades de primera clase como aquellas cuyos par1ntesis de Poisson con todas las constringciones es debilmente nulo. As1 los multiplicadores de Lagrange asociados a constringciones de primera clase no pueden ser determinados. Por otro lado se definen las constringciones de segunda clase como aquellas para las que existe al menos otra constringci3n con la tenga par1ntesis de Poisson no nulos. Es claro que el n1mero de constringciones de segunda clase es par.

Se demuestra que los multiplicadores de Lagrange asociados a constringciones de segunda clase quedan bien determinados. Sin embargo, los asociados a las constringciones de primera clase quedan como par1metros libres dentro de las

¹para proundizar en detalles ver Sundermeyer

ecuaciones dinámicas (A.23). Las generadoras de transformaciones sobre esos parámetros libres son precisamente las constricciones de primera clase. La libertad de que tales multiplicadores sean arbitrarios se asocia con la llamada libertad de norma². Las observables físicas se definen como aquellas funciones del espacio fase que son invariantes de norma, esto es que conmutan con las constricciones de primera clase.

Paréntesis de Dirac

La evolución del sistema se lleva a cabo en la subvariedad Γ_c definida por Σ formado por constricciones de primera y segunda clase. Sin embargo, sólo nos interesa saber como evolucionan observables físicas, es decir aquellas invariantes de norma. En virtud de lo anterior, definimos nuestra subvariedad de restricción a partir de las constricciones de segunda clase $\Sigma' = \zeta_{I=1,\dots,m}$; por lo tanto dada una observable A

$$\dot{A} \approx \{A, H_c\} + \lambda^J \{A, \zeta_J\}. \quad (\text{A.27})$$

A su vez, ζ_I satisfacen (CC), por lo tanto

$$\begin{aligned} \lambda_J \{\zeta_I, \zeta_J\} = -\{\zeta_I, H_c\} &\Rightarrow \lambda_K \approx -[\{\zeta_K, \zeta_I\}]^{-1} \{\zeta_I, H_c\} \\ \Rightarrow \dot{A} \approx \{A, H_c\} - \{A, \zeta_J\} [\{\zeta_J, \zeta_I\}]^{-1} \{\zeta_I, H_c\} &\equiv \{A, H_c\}_D. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Definimos

$$\begin{aligned} C^{IJ} &\equiv [\{\zeta_J, \zeta_I\}]^{-1}, \\ I, J &= 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Los paréntesis de Dirac se definen como

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \zeta_I\} C^{IJ} \zeta_J, B \quad (\text{A.29})$$

para dos observables A y B .

A.3. Teoría de Campos de Segundo Orden

Considerese una teoría cuyo lagrangiano depende de un conjunto de campos $\{\psi^A(x_\mu)\}_{A=1,\dots,N}$ y de sus primeras y segundas derivadas parciales respecto a las coordenadas del espacio-tiempo $\{\partial_\mu \psi^A\}, \{\partial_\mu \partial_\nu \psi^A\}$.

$$S[\psi] = \int_{\Omega} d^D x L(\psi, \partial\psi, \partial^2\psi) \quad (\text{A.30})$$

Sea transformación generada por un grupo continuo de transformaciones G

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad (\text{A.31})$$

$$\psi^A(x) \rightarrow \tilde{\psi}^A(\tilde{x}) = \psi^A(x) + \delta\psi^A(x) \quad (\text{A.32})$$

²para mayor detalle y una demostración formal ver [22-24]

La variación total de ψ^A puede expresarse en términos de la variación local

$$\tilde{\delta}\psi^A(x) = \psi^{\tilde{A}}(x) - \psi^A(x)$$

$$\delta\psi^A(x) = \tilde{\delta}\psi^A(x) + (\partial_\alpha\psi^A)\delta x^\alpha$$

La variación de (A.30) debido (A.31)

$$\delta S = \int_\Omega d^D x \left[\frac{\delta L}{\delta\psi^a} \delta\psi^A + \frac{\delta L}{\delta\partial_\mu\psi^a} \partial_\mu\delta\psi^A \right] \quad (\text{A.33})$$

$$+ \frac{\delta L}{\delta\partial_\nu\partial_\mu\psi^a} \partial_\nu\partial_\mu\delta\psi^A + \partial_\mu(\delta x^\mu L) \quad (\text{A.34})$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se derivan del principio de Hamilton $\delta S = 0$ con $\delta x^\mu = 0$ y $[\delta\psi^A]_{d\Omega} = 0$ ($d\Omega \rightarrow$ frontera de Ω). Después de integrar por partes

$$\frac{\delta L}{\delta\psi^A} - \partial_\mu \left(\frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu)} \right) + \partial_\nu\partial_\mu \left(\frac{L}{\delta(\partial_\nu\partial_\mu\psi^A)} \right) = 0 \quad (\text{A.35})$$

El teorema de Noether se sigue de (A.33) bajo la hipótesis de que G es un grupo de simetría. Para construir la dinamica espacio temporal, nos concentraremos en el grupo de Poincaré

$$\delta x^\mu = \Gamma_\nu^\mu x^\nu + a^\mu \quad (\text{A.36})$$

$$\delta\psi^a = \frac{1}{2}(I^{\mu\nu})_B^A \Gamma_{\mu\nu}\psi^B. \quad (\text{A.37})$$

Después de un cálculo largo y directo se obtiene la carga conservada

$$G = - \int_\sigma d\sigma_\mu T^{\mu\nu} a_\nu - \frac{1}{2} \int_\sigma d\sigma_\mu (T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu) \Gamma_{\nu\rho} = -a^\mu P_\mu - \frac{1}{2} \Gamma^{\mu\nu} J_{\mu\nu}. \quad (\text{A.38})$$

El tensor de energía momento asociado

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\psi^A \frac{\delta L}{\delta(\partial^\nu\psi^A)} - \eta_{\mu\nu} L \quad (\text{A.39})$$

$$+ 2\partial_\mu\psi^A \partial_\lambda \left[\frac{\delta L}{\delta(\partial^\nu\partial_\lambda\psi^A)} \right] - \partial_\alpha \left[\partial_\mu\psi^A \frac{\delta L}{\delta(\partial^\nu\partial_\alpha\psi^A)} \right] \quad (\text{A.40})$$

$$- \partial_\lambda(\Delta_{\mu\nu}^\lambda + \omega_{\mu\nu}^\lambda) \quad (\text{A.41})$$

habiendo usado la notación siguiente

$$\left[\frac{\partial L}{\delta(\partial_\mu\psi^A)} - \partial_\nu \left(\frac{\partial L}{\delta(\partial_\mu\partial_\nu\psi^A)} \right) \right] \frac{1}{2} (I^{\alpha\beta})_A^B \psi^A \Gamma_{\alpha\beta} \equiv \Delta^{\alpha\beta\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}$$

$$\frac{\partial L}{\delta(\partial_\mu\partial_\nu\psi^A)} \frac{1}{2} (I^{\alpha\beta})_A^B \psi^A \Gamma_{\alpha\beta} \equiv \omega^{\mu\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta} \quad (\text{A.42})$$

Tomando σ como aquella tal que $x_0 = t = \text{const}$ se obtienen las siguientes expresiones para la hmailtoniana y los momentos de los campos:

$$P_i = \int d^D x \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^A} - 2\partial_k \frac{\partial L}{\partial(\partial_k \dot{\psi}^A)} - \partial_0 \frac{\partial L}{\partial \ddot{\psi}^A} \right] \partial_i \psi^A + \frac{\partial L}{\partial \ddot{\psi}^A} \partial_i \dot{\psi}^A \right\} \quad (\text{A.43})$$

$$H = \int d^D x \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^A} - 2\partial_k \frac{\partial L}{\partial(\partial_k \dot{\psi}^A)} - \partial_0 \frac{\partial L}{\partial \ddot{\psi}^A} \right] \dot{\psi}^A \right. \quad (\text{A.44})$$

$$\left. + \frac{\partial L}{\partial \ddot{\psi}^A} \ddot{\psi}^A - L \right\} \quad (\text{A.45})$$

El término de superficie al variar la acción es justamente P_i donde los respectivos factores de las variaciones de ψ y $\dot{\psi}$ corresponden a los momentos canónicos conjugados

$$\tilde{\Pi}_A = \int d^D x \left[\frac{\partial L}{\partial \ddot{\psi}^A} \right] \quad (\text{A.46})$$

$$\Pi_A = \int d^D x \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^A} - 2\partial_k \frac{\partial L}{\partial(\partial_k \dot{\psi}^A)} - \partial_0 \frac{\partial L}{\partial \ddot{\psi}^A} \right] \quad (\text{A.47})$$

De las definiciones de los momentos generalizados, puede construirse el formalismo hamiltoniano en un espacio fase generalizado con los pares de coordenadas canónicas independientes (ψ^A, Π_A) y $(\phi^A \equiv \dot{\psi}^A, \tilde{\Pi}_A)$. Con paréntesis de Poisson generalizados

$$\{F, G\} = \int d^{D-1} \left(\left[\frac{\delta F}{\delta \psi^A} \frac{\delta G}{\delta \Pi_A} - \frac{\delta F}{\delta \Pi_A} \frac{\delta G}{\delta \psi^A} \right] \right. \quad (\text{A.48})$$

$$\left. + \left[\frac{\delta F}{\delta \phi^A} \frac{\delta G}{\delta \tilde{\Pi}_A} - \frac{\delta F}{\delta \tilde{\Pi}_A} \frac{\delta G}{\delta \phi^A} \right] S \right) \quad (\text{A.49})$$

Los paréntesis de Poisson fundamentales son

$$\{\pi_A(x), \psi^B(y)\} = -\delta_A^B \delta^{(D-1)}(x-y) \quad (\text{A.50})$$

$$\{\tilde{\pi}_A(x), \phi^B(y)\} = -\delta_A^B \delta^{(D-1)}(x-y) \quad (\text{A.51})$$

La Hessiana, similarmente a como vimos en la anterior sección es

$$H_{AB} = \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta \ddot{\psi}^A \delta \ddot{\psi}^B} \quad (\text{A.52})$$

A partir de estas nociones, el algoritmo de Dirac para teorías de campos singulares de orden dos es idéntico al que se plantea en la subsección anterior cuando si se generaliza a más grados de libertad discretos $q \rightarrow q_a$. Para sistemas con número de grados de libertad continuo, el índice a pertenece a una variedad con dimension infinita no numerable. En ese caso la generalización de los sistemas discretos es más o menos directa salvo que el caracter continuo de los índices introduce sutilezas técnicas en la formulación, como por ejemplo las condiciones en la frontera y la introducción de densidades.

Apéndice B

Método Perturbativo de Cheng-Ho-Yeh

Considere la siguiente acción para una teoría en (0+1) dimensiones

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{m^2}{2}q^2 - gV(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(N)}).$$

Bajo la variación de la acción las ecuaciones de movimiento son

$$EOM \equiv \ddot{q} + m^2q + g \sum_{n=0}^N \left(\frac{d}{dt}\right)^n \frac{\partial V}{\partial q^{(n)}} = 0 \quad (B.1)$$

La aproximación a orden más bajo está dada por

$$q^{(n)} \approx \begin{cases} (-m^2)^{\frac{n}{2}} q & (n = \text{par}) \\ (-m^2)^{\frac{n-1}{2}} \dot{q} & (n = \text{impar}). \end{cases}$$

Los términos de superficie que definen a los momentos son

$$\Pi_0 \delta q + \Pi_1 \delta \dot{q} = (\dot{q} - g\xi_0) \delta q - g\xi_1 \delta \dot{q} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

donde

$$\xi_0 = \sum_{k=0} \sum_{n=2k+1} (-m^2)^k \left(-\frac{d}{dt}\right)^{n-2k-1} \frac{\partial V}{\partial q^{(n)}}, \quad (B.2)$$

$$\xi_1 = \sum_{k=0} \sum_{n=2k+2} (-m^2)^k \left(-\frac{d}{dt}\right)^{n-2k-2} \frac{\partial V}{\partial q^{(n)}}. \quad (B.3)$$

La forma simpléctica está dada por

$$\Omega = d\Pi_0 \wedge dq + d\Pi_1 \wedge d\dot{q} = (-1 + g \frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}} - g \frac{\partial \xi_1}{\partial q}) dq \wedge d\dot{q}.$$

Cambiando las variables tal que

$$\Omega = dp \wedge dx$$

El hamiltoniano

$$H = \Pi_0 \dot{q} + \Pi_1 \ddot{q} - L = \frac{1}{2} p^2 + \frac{m^2}{2} x^2 + g \tilde{V}(x, p)$$

donde $\tilde{V}(x, p) = V(x, p, -m^2 x, \dots)$. Para correcciones más precisas, se iteran

EOM hasta cierto orden en g . En general se encuentran todas las $q^{(k)}$ como funciones de q y \dot{q} y se sigue el mismo procedimiento enumerado en los párrafos de arriba.

Apéndice C

Términos de Chern-Simons

C.1. Antecedentes

En las últimas décadas, los términos topológicos de Chern-Simons han sido propuestos como términos de masa en teorías de campos de norma en el espacio tiempo con dimensión impar. Una fuerte motivación para hacer ésto es que la presencia de estos términos no altera la simetría de norma como usualmente sucede al agregar términos de masa convencionales (el término de Proca por ejemplo). Se ha encontrado que estos modelos de norma topológicos masivos presentan, en casos particulares, propiedades físicamente interesantes [33]. A nivel cuántico el término topológico de masa introduce un umbral infrarrojo para las teorías superrenormalizables, por lo que el término topológico de masa sugiere una cura para el problema de divergencias infrarrojas de las teorías de norma vectoriales [29].

Matemáticamente hablando, los términos topológicos están íntimamente relacionados con las clases secundarias características de Chern-Simons [28], éstas a su vez se obtienen de los invariantes de Pontryagin en dimensión par los cuales gobiernan la estructura topológica de las teorías de norma en 4 dimensiones [27]. Como se muestra en [32], el término de Chern-Pontryagin es una derivada total en la variedad de dimensión par, por lo tanto, si es agregado a la acción del campo de norma, al variar la acción la dinámica no será caracterizada de ningun modo por este término, sino solamente contribuirá en las condiciones de frontera que caracterizan la topología de la teoría en cuestión y en la estructura de norma, por ello ser estas densidades son irrelevantes en dimension par, sin embargo a partir de estos términos de Chern Pontryagin, se derivan los términos de Chern Simons en una subvariedad de dimension menor impar, los cuales no son derivadas totales. Estas densidades son independientes de la métrica y por ello son invariantes topológicos independientes de propiedades geométricas locales de la variedad.

En física estas cantidades aparecen típicamente en la electrodinámica cuántica sin simetría de paridad en 4 dimensiones. Al calcular diagramas de Feynman anómalos se obtienen las llamadas anomalías axiales las cuales involucran la densidad de Chern- Pontryagin. Ésta puede ser reescrita como la cuatridivergencia de un cuadvivector construido a partir de conexiones. Como ya dijimos, aunque esta densidad es de secundaria importancia en 4 dimensiones, recientemente, en física ha habido gran interés en su versión en 3 dimensiones, principalmente para analizar una gran variedad de procesos físicos planares (Efecto Hall, Superconductividad a alta temperatura crítica, movimiento en presencia de vórtices)[30][31].

A continuación se planteará el problema variacional para los campos involucrados en una teoría de Chern Simons a partir de las definiciones geométricas básicas de la variedad. Más tarde nos concentraremos en extensiones de ellos con derivadas de orden superior, las cuales son igualmente importantes en el contexto de teorías efectivas que describen la dinámica de los campos de norma.

C.2. Términos de Chern Simons

Sea $A = A_\mu^a T_a dx^\mu$ el potencial vectorial¹ de una teoría de norma con un grupo de norma G con generadores T^a . La acción de Chern-Simons se define como

$$I_{CS}[A] = \int_M Tr \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$F[A] = dA + A \wedge A = 0$$

Estas ecuaciones se interpretan en términos matemáticos como que A es una conexión plana y en términos físicos que la intensidad de campo es nula. Ésto no necesariamente significa que A sea trivial: si M no es simplemente conexo aun el potencial con F nula puede dar lugar a fases de Aharonov-Bohm a lo largo de lazos no contraíbles como es el caso del grupo de Poincare ($ISO(2,1)$), el cual es doblemente conexo. Cuando $G = ISO(2,1)$ se demuestra que el formalismo de primer orden de la relatividad general, es una teoría de Chern Simons donde A es la conexión del grupo. La posibilidad de intercambiar el complicado grupo de difeomorfismos por un grupo de transformaciones de norma mucho más simple que se deriva de la teoría topológica, es de las principales razones por las cuales la cuantización de la gravedad en $(2+1)$ dimensiones es relativamente directa.

Por otro lado, los términos de Chern Simons se obtienen de los invariantes de Pontryagin en dimensión par los cuales gobiernan la estructura topológica de las teorías de norma en 4 dimensiones [27]. En este trabajo nos interesa la teoría de norma abeliana,² en cuyo caso la anomalía es

¹o conexión vectorial de un grupo de parámetro continuo G

²donde $G = U(1)$

$$A_{(4)} = \frac{1}{2} \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (\text{C.1})$$

Donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor de intensidad de campo y

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}.$$

También existe una anomalía en la teoría de norma abeliana en 2 dimensiones

$$A_{(2)} = \tilde{F} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (\text{C.2})$$

Estas anomalías se distinguen como densidades pues después de la integración en la correspondiente variedad M producen el invariante de norma de Chern-Pontryagin. Notese que (C.1) y (C.2) son covariantes, dando lugar a escalares de mundo³ después de la integración, por tal motivo se les llama topológicos⁴. Las anomalías son 4 formas y 2 formas en 2 y 4 dimensiones, respectivamente. Éstas son cerradas y pueden ser presentadas como formas exactas, por lo tanto son la derivada exterior de la forma de Chern-Simons, la cual es una 3 forma y una 1 forma respectivamente. Mientras que las formas de Chern-Pontryagin y las de Chern-Simons están definidas en variedades de dimension par N , en general; es natural restringir la última a una subvariedad de dimension $N - 1$ impar. Lo anterior es posible gracias a que si se fija el valor de un índice en el tensor de Levi Civita en \tilde{F} , la dependencia en tal índice desaparece en el resto de los factores. Tal reducción da lugar a los términos de Chern Simons siguientes

$$\epsilon^{ijk}(A_i \partial_j A_k) \quad (\text{C.3})$$

en $3d$ y

$$A_1 \quad (\text{C.4})$$

en $1d$.

Las integrales en la correspondiente variedad de las anteriores densidades se han conocido en física y matemáticas desde hace tiempo. Si en (C.3), A_i representa el potencial vectorial electromagnético, el término de Chern Simons corresponde al campo magnético y la integral define la “helicidad magnética” $\int d^3r A \cdot B$ la cual es una medida de la interacción entre las líneas de flujo magnético. Si A_i se identifica con el vector de velocidad de un fluido v_i , entonces $\epsilon^{ijk} \partial_j v_k$ corresponde a la vorticidad y su integral la “vorticidad cinética”.

³no se requiere de la métrica

⁴independientes de propiedades locales y geométricas de la variedad

C.3. Términos de Chern Simons de Orden Superior

Las densidades de Chern-Pontryagin aparecen usualmente, en el contexto de teoría de campos. En electrodinámica, al computar diagramas de Feynman anómalos. Si quisieramos construir una descripción general de algún campo de norma, en la que efectos de acoplamiento con campos a otras escalas energéticas sean introducidos por la integración de fermiones pesados en correcciones radiativas, sería preciso partir de un lagrangiano efectivo con todos los términos que las simetrías de la teoría permita construir. En los parámetros de la teoría efectiva se introducen los efectos de la física “pesada” subyacente. Si la teoría subyacente no tuviera la restricción de ser simétrica bajo paridad, en principio \tilde{F} podría aparecer en los acoplamientos y por lo tanto anomalías en el lagrangiano efectivo. En la acción efectiva de QED_3 , la acción de Chern-Simons de orden 1 aparece naturalmente porque el término de masa del electrón viola paridad en $D=3$. Extensiones del término de Chern-Simons con derivadas de orden superior aparecen también en la acción efectiva en la expansión en serie de $\frac{\partial}{m}$. Entonces es natural considerar estas extensiones. Las derivadas adicionales deben ser de orden par (para conservar la violación de paridad) siendo las extensiones de orden más bajo las menos suprimidas debido a que las dimensiones se ajustan por factores de $\frac{1}{M}$ con M la masa de los fermiones pesados. De hecho, sólo existe una de dichas extensiones [28], ésta es

$$I_{ECS} \approx \int d^3x \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial^\mu A_\alpha \partial_\mu \partial_\beta A_\gamma. \quad (C.5)$$

En [28] se describen las excitaciones en teorías que contienen I_{ECS} , más la acción de Maxwell (EMCS). Se encuentran dos partículas: una no masiva y una masiva con norma negativa (fantasma). Si se considera I_{EMCS} más una teoría gravitacional, las derivadas de orden superior son necesarias para generar una dependencia de la métrica, en contraste con el carácter topológico del término de Chern Simons de orden 1, éste da lugar a un tensor de energía momento que contribuye explícitamente a la energía de EMCS en términos de los dos grados de libertad mencionados. En el caso de la gravedad, las nuevas contribuciones a la energía debidas a la perturbación I_{ECS} se deben a su carácter de orden superior. Por si solo I_{CS} no contribuye a la energía pues es topológico.

Como vimos en los primeros capítulos de esta tesis, las teorías de orden superior tienen tantos grados de libertad como el orden de las derivadas. Por lo que las extensiones de Chern-Simons de orden superior no sólo cambian la estructura de la teoría sino cambian también el número de excitaciones o grados de libertad y por consiguiente las observables como la energía. Por otro lado, las derivadas extra en tales extensiones dependen de la métrica

$$\partial_\mu \partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu.$$

Esta dependencia es la que elimina su carácter topológico. A pesar de ello, la invariancia de norma se mantiene⁵ y también la covarianza de Lorentz⁶.

⁵Hasta un término de superficie que se elimina si los campos están debidamente normalizados.

⁶Si bien no es topológico, la estructura de Chern-Simons dentro de las derivadas sigue siendo y la dependencia de la métrica es introducida covariantemente

Bibliografía

- [1] Ostrogradsky M., Mem. Acad. St. Petersburg, 1 (1850)385
- [2] D. A. Eliezer and R. P. Woodard, “The Problem of Nonlocality in String Theory,” Nucl. Phys. B **325**, 389 (1989).
- [3] P. Havas, Gen. Relativ. Gravit. 8,631(1977)
- [4] F. Bopp, Ann. Phys(Liepzig)38 (1940)345
- [5] B. Podolsky, “A Generalized Electrodynamics Part I-Non-Quantum,” Phys. Rev. **62**, 68 (1942).
- [6] A. Pais and G. E. Uhlenbeck, “On Field theories with nonlocalized action,” Phys. Rev. **79**, 145 (1950).
- [7] ”Quantum Theory of Gravity”, D.G. Boulware, Hilger, Bristol, 1984.
- [8] D. G. Boulware and S. Deser, “Canonical Analysis Of The Fermion Sector In Higher Derivative Supergravity,” Phys. Rev. D **30**, 707 (1984).
- [9] M. Baker, L. Carson, J. S. Ball and F. Zachariasen, “Color Confinement And Long Distance Color Fields In QCD,” Nucl. Phys. B **229**, 456 (1983).
- [10] W.Heisenberg, Nucl. Phys. 4(1957)532
- [11] N. G. Stephen ”On The Ostrogradsky Instability for High Order Derivative Theories and Pseudo Mechanical Energy” Journal of Sound and Vibrations 310 (2008)729 ,
- [12] R. P. Woodard, “Avoiding dark energy with 1/R modifications of gravity,” Lect. Notes Phys. **720**, 403 (2007) [arXiv:astro-ph/0601672].
- [13] E.T. Whittaker, A treatise on Analytical dynamics of particles and rigid bodies, Cambridge University press, Cambridge (1937) p,265-267
- [14] X. Gracia, J. M. Pons and N. Roman-Roy, “Higher Order Lagrangian Systems: Geometric Structures, Dynamics And Constraints,” J. Math. Phys. **32**, 2744 (1991).

- [15] M. C. Bertin, B. M. Pimentel and P. J. Pompeia, “Hamilton-Jacobi approach for first order actions and theories with higher derivatives,” *Annals Phys.* **323**, 527 (2008) [arXiv:hep-th/0701262].
- [16] B. M. Pimentel and R. G. Teixeira, “Hamilton-Jacobi formulation for singular systems with second order Lagrangians,” *Nuovo Cim. B* **111**, 841 (1996) [arXiv:hep-th/9512099].
- [17] E. M. Rabei, E. H. Hasan and H. B. Ghassib, “Hamilton-Jacobi Treatment Of Constrained Systems With Second-Order Lagrangians,” *Int. J. Theor. Phys.* **43**, 1073 (2004).
- [18] T.D.Lee, *Phys. Rev.* **95**, 1329 (1954)
- [19] V. Vñesterensko, “.A theory for transverse vibrations of Timoshenko beam”, *PMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **57**(1993)669
- [20] C. M. Bender and P. D. Mannheim, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 110402 (2008) [arXiv:0706.0207 [hep-th]].
- [21] T. C. Cheng, P. M. Ho and M. C. Yeh, “Perturbative Approach to Higher Derivative and Nonlocal Theories,” *Nucl. Phys. B* **625**, 151 (2002) [arXiv:hep-th/0111160].
- [22] S. Deser and R. Jackiw, “Higher derivative Chern-Simons extensions,” *Phys. Lett. B* **451**, 73 (1999) [arXiv:hep-th/9901125].
- [23] Kurt Sundermeyer, ”Lecture Notes in Physics. Constriant Dynamics”, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1982
- [24] M.Henneaux, C. Teitelboim, ”Quantization of Gauge Systems”, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1992
- [25] E. C. G. Sudarshan, N. Mukunda, Çlassical Dynamics: a Modern Perspective”, Wiley, New York, 1974.
- [26] Steven Carlip, ”QUANTUM GRAVITY IN (2+1) DIMENSIONS”,Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1ed.
- [27] E. R. Bezerra de Mello, “COMMENT ON: ’TOPOLOGICALLY MASSIVE GAUGE THEORIES’,” *Annals Phys.* **185**, 401 (1988).
- [28] S. Deser and R. Jackiw, “Higher derivative Chern-Simons extensions,” *Phys. Lett. B* **451**, 73 (1999) [arXiv:hep-th/9901125].
- [29] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, “Three-Dimensional Massive Gauge Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **48**, 975 (1982).
- [30] R. Jackiw, V. P.Ñair, S. Y. Pi and A. P. Polychronakos, “Perfect fluid theory and its extensions,” *J. Phys. A* **37**, R327 (2004).

- [31] R. Jackiw, V. P. Nair and S. Y. Pi, “Chern-Simons reduction and non-Abelian fluid mechanics,” *Phys. Rev. D* **62**, 085018 (2000) [arXiv:hep-th/0004084].
- [32] R. Jackiw, “S. S. Chern and Chern-Simons terms,” <http://www.slac.stanford.edu/spires/find/hep/www?irn=7434545> SPIRES entry *Prepared for 23rd International Conference of Differential Geometric Methods in Theoretical Physics, Tianjin, China, 20-26 Aug 2005*
- [33] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, “Topologically massive gauge theories,” *Annals Phys.* **140**, 372 (1982) [Erratum-ibid. **185**, 406.1988 APNYA,281,409 (1988 APNYA,281,409-449.2000)].
- [34] S. W. Hawking and T. Hertog, “Living with Ghosts,” *Phys. Rev. D* **65**, 103515 (2002) [arXiv:hep-th/0107088].
- [35] T. Biswas, A. Mazumdar, W. Seigel, “Bouncing Universes in String-Inspired Gravity,” arXiv:hep-th/0508194(2005).