Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Mejora de la toma de decisiones de inversión mediante Opciones Reales

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
ACTUARIO

PRESENTA:

ADOLFO MARTÍN SOTELO LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN I. JOSÉ ANTONIO CLIMENT HERNÁNDEZ

2009

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
    Sotelo
    López
    Adolfo Martín
    56 77 80 86
    Universidad Nacional Autónoma de México
    Facultad de Ciencias
    Actuaría
    300856167

2. Datos del tutor
    M en I
    Climent
    Hernández
    José Antonio

3. Datos del sinodal 1
    M en C
    Cano
    Garcés
    Jesús Agustín

4. Datos del sinodal 2
    Act
    Silva
    Haro
    José Luis

5. Datos del sinodal 3
    L en C
    Dueñas
    Zapata
    David

6. Datos del sinodal 4
    Act
    Valdés
    Michell
    María Aurora

7. Datos del trabajo escrito
    Mejora de la toma de decisiones de inversión mediante Opciones Reales
    103 p
    2009

Llamáronle los Flamencos *Opsie*, derivado del verbo latino *Optio Optionis*, que significa elección, por quedar a elección del que lo da, el poder pedir o entregar la partida al que lo recibe... pues desea el que desembolsa el premio elegir lo que más convenga, y en falta siempre puede dejar de elegir lo que desea.

Confusión de Confusiones

JOSÉ DE LA VEGA, 1688.

Índice general

Resumen

Analizar el método binomial y el método *Black & Scholes* para valuar Opciones Reales y mostrar las ventajas que se tienen al utilizar este instrumento de administración de riesgo en la toma de decisiones de inversión.

Introducción

Hoy en día, como parte de la economía mexicana, las empresas del país deben hacer uso de mejores técnicas y estrategias de inversión, en aras de un desarrollo económico sustentable.

El objetivo de este trabajo es proponer un producto financiero derivado, como lo son las opciones reales, como una herramienta en la toma de decisiones de inversión y adoptarlas hacia una filosofía empresarial nueva a fin de capitalizar la incertidumbre a través de inversiones estratégicas, de contratos, y de utilización de los mercados financieros. Lo anterior, basado en la premisa de aprovechar la incertidumbre para proteger dichas inversiones estratégicas de efectos adversos.

La incertidumbre y el riesgo suscitan las inquietudes que quitan el sueño a los directivos, y el método de las opciones reales proporciona un marco de trabajo que indica cómo se pueden organizar las inversiones para resolver estas inquietudes.

El presente trabajo, en su primera parte, desarrolla los elementos del Mercado Mexicano de Derivados (MexDer), abarcando los antecedentes, los participantes, la forma de operación, los productos y la cámara de compensación, así como los conceptos básicos de la teoría del interés.

En la segunda parte, se desarrolla el tema de opciones reales, desde la definición, diferentes opciones en el mercado, estrategias de inversión y los métodos tradicionales de inversión contra el de las opciones reales. Esto como un marco referencial a la aplicación de las opciones reales en la vida empresarial mexicana, haciendo hincapié en las ventajas de adoptar esta herramienta en las decisiones de inversión.

Por último, se propone el método binomial de Ross Cox & Rubenstein como método para la valuación de las opciones reales. Desarrollando así el modelo matemático y estableciendo las limitantes que tiene este método. Del mismo modo, se desarrolla la fórmula de Black & Scholes y se muestra la convergencia del método binomial con ésta.

Finalmente, se establecen aplicaciones prácticas en las que se hace evidencia del gran aporte y gama de posibles estrategias de las opciones reales a inversiones de la vida diaria.

Objetivos

Desarrollar los elementos del Mercado Mexicano de Derivados y los conceptos básicos de la teoría del interés. Desarrollar el método binomial y el método Black & Scholes para valuar Opciones Reales y mostrar las ventajas de su uso en la toma de decisiones de inversión. Mostrar el gran aporte de las Opciones Reales como herramienta de administración de riesgo, hacia una nueva visión de la incertidumbre en las decisiones de inversión.

Hipótesis

Con el análisis e incorporación de nuevas estrategias en la toma de decisiones de inversión haciendo uso de Opciones Reales, el directivo de una empresa es capaz de optimar sus inversiones, minimizando el riesgo y protegiendo la inversión de efectos adversos mediante este instrumento de administración de riesgo.

Capítulo 1

Mercado Mexicano de Derivados

1.1. Antecedentes

Se cree que los derivados en México tienen sus orígenes durante la época precolombina, sin embargo es hasta 1977 cuando surge el primer producto derivado mexicano, "el petrobono", el cual fue un bono emitido por el gobierno federal cuyo precio dependía fundamentalmente del precio del petróleo y del tipo de cambio peso–dólar.

La historia de los productos derivados mexicanos se encuentra dividida en mercados nacionales y extranjeros debido a que la mayoría de los productos derivados sobre valores subyacentes mexicanos, surgen y comienzan a negociarse fuera de los mercados nacionales.

En 1983 se negocian por primera vez en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), los futuros sobre acciones, constituyéndose de esta forma como el primer derivado operado en un mercado organizado mexicano, pero en 1985 la Asociación Mexicana de Intermediarios Bursátiles (AMIB) y la BMV elaboran el primer proyecto para un mercado de opciones.

El año 1987 es de la inauguración formal de las primeras operaciones extrabursátiles denominadas coberturas cambiarias, o forwards sobre el tipo de cambio con una regulación especial del Banco de México.

En 1991 tienen lugar las primeras operaciones extrabursátiles de opciones sobre acciones mexicanas en Estados Unidos, constituyéndose de esta forma el primer derivado mexicano que formalmente se opera en un mercado extrabursátil fuera de México. En este mismo año se contrata a una consultora para realizar conjuntamente con la AMIB, la BMV y la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV) un estudio de viabilidad para la implementación de opciones sobre acciones.

En 1992 se realiza la primera emisión de títulos opcionales (warrants) listados sobre acciones de Teléfonos de México (TELMEX) por la casa de bolsa Accival; un año después la casa de bolsa Operadora de Bolsa lleva a cabo la primera emisión de títulos opcionales sobre el Índice de Precios y Cotizaciones de la BMV (IPC). En este mismo año las casa de bolsa Ábaco y Accival emiten los primeros títulos opcionales híbridos.

Durante 1994 la casa de bolsa Abaco emite el primer título opcional sobre una canasta de acciones del sector construcción y se autoriza el presupuesto a la BMV para la creación del mercado de derivados.

En 1995 se reanudan en el Chicago Mercantile Exchange (CME) los futuros (y opciones de futuros) del peso. En 1996 la CNBV publica las reglas para el establecimiento de un mercado de opciones y futuros cotizados en Bolsa. Este mismo año en el CME se inician operaciones sobre futuros y opciones sobre Bradies y sobre el IPC.

En 1997 en el CME se inician por primera vez fuera de México, operaciones sobre futuros de CETES y TIIE. En este mismo año la Comisión Nacional Bancaria y de Valores publica las normas de carácter prudencial a las que habrán de sujetarse los participantes en el establecimiento de un mercado de futuros y opciones cotizadas en la Bolsa. A fines de 1998, inicia operaciones sólo para sus socios la primera Bolsa de derivados en México denominada Mexder sobre futuros del dólar americano.

En abril de 1999 se inician en el Mexder operaciones por cuenta de terceros futuros del dólar, así como operaciones sobre el futuro del IPC de la BMV, y en Mayo de 1999, se inician en el Mexder operaciones sobre futuros de CETES a 91 días y sobre futuros de TIIE a 28 días. En julio de 1999 se inician en el Mexder operaciones sobre futuros de emisoras de renta variable tales como Telmex L, Gcarso, Cemex C, Femsa D, Banacci O y GFBO. A mediados del 2000 el Mexder cambia su mecánica operativa de un mercado de "viva voz" a un mercado electrónico.

La tabla siguiente resume los principales eventos que caracterizan la historia de los derivados sobre valores subyacentes nacionales:

Fecha	Evento
1977	Primera emisión de petrobonos.
1978–82	Futuros del peso en el CME.
1983	Futuros sobre acciones en la BMV.
1985	Proyecto ante el Consejo de la BMV para la creación del mercado de opciones.
1986	Futuros de petrobonos en la BMV.
1987	Suspensión de futuros de acciones y petrobonos. Inicio de las coberturas cambiarias.
1990	Emisión de Bradies con derechos de valor de recuperación.
1991	Opciones sobre acciones mexicanas en EUA en mercados OTC. Estudio de factibilidad de opciones sobre acciones por BMV, AMCB y CNV.
1992	Autorización de CNV de emisión de títulos opcionales en BMV. 1a Emisión de warrants de Telmex hecha por Acciones y Valores.
1993	Primer warrant sobre el IPC de la BMV emitido por Serfín. Primeros warrants con rendimientos topados (bull y bear spread). Títulos sobre el INPC emitidos por Invex.
1994	Autorización de presupuesto por la BMV para mercado de derivados.
1995	Operación de futuros del peso (y opciones de futuros) reanudados en CME.
1996	Publicación de las reglas de derivados registrados en Bolsa. Futuros (y opciones sobre futuros) sobre Bradies y sobre IPC en CME.
1997	Futuros sobre CETES y TIIE en CME. Marco de regulación prudencial de los mercados de derivados autorizados por la CNBV.
1998	Inicio de operaciones del MexDer solo para socios liquidadores.
1999	Inicio de operaciones por cuenta de terceros en el MexDer. Inicio de operaciones de futuros de CETES a 91 días. TIIE a 28 días, Telmex L, Gcarso, Cemex C, Femsa D, Banacci O y GFBO.
2000	Cambio de mecánica operativa del MexDer de viva voz a electrónico.

Tabla 1.1: Principales eventos de los productos derivados en México

El inicio de operaciones del Mercado Mexicano de Derivados constituye uno de los avances más significativos en el proceso de desarrollo en internacionalización del Sistema Financiero Mexicano.

El esfuerzo constante de la Bolsa Mexicana de Valores, la AMIB y la S.D. Indeval[1], permitió el desarrollo de la arquitectura operativa, legal y de sistemas necesaria para el cumplimiento de los requisitos jurídicos, operativos, tecnológicos y prudenciales, establecidos de manera conjunta por la SHCP, la CNBV y el BANXICO.

La importancia de que el mercado mexicano, a pesar de ser un mercado emergente, cuente con productos derivados, cotizados en una bolsa, ha sido destacada por organismos financieros internacionales quienes han recomendado el establecimiento de mercados de productos derivados listados para promover esquemas de estabilidad macroeconómica y facilitar el control de riesgos en intermediaros financieros y entidades económicas.

1.2. Creación del Mercado Mexicano de Derivados (MexDer)

La creación del mercado de derivados listados, inició en 1994 cuando la BMV y la S.D. Indeval asumieron el compromiso de crear este mercado. La BMV financió el proyecto de crear la bolsa de opciones y futuros que se denomina MexDer, Mercado Mexicano de Derivados, S.A. de C.V.

Por su parte Indeval tomó la responsabilidad de promover la creación de la Cámara de Compensación de derivados que se denomina Asigna, Compensación y Liquidación, establecida como un fideicomiso de administración y pago, realizando las erogaciones correspondientes desde 1994 hasta las fechas de constitución de las empresas.

[1] Institución privada que cuenta con la autorización de acuerdo a la Ley, para operar como Depósito Central de Valores, proporcionando los servicios de custodia y administración de valores, operación nacional, operación internacional y sistemas de información.

MexDer y Asigna iniciaron operaciones el 15 de diciembre de 1998 con la participación de cuatro socios liquidadores: Banamex, Bancomer, BBV e Inverlat, quienes constituyeron fideicomisos de administración y pago para participar en el mercado de derivados.

MexDer es la bolsa de futuros y de opciones, la cual provee las instalaciones y servicios necesarios para cotizar y negociar contratos estandarizados de futuros y de opciones.

En relación con esto se debe precisar que la única relación que existe entre la bolsa de derivados (MexDer) y la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), es que el MexDer celebra contratos de futuros sobre indicadores de la BMV como por ejemplo el Índice de Precios y Cotizaciones y sobre paquetes de acciones de las empresas más bursátiles que cotizan en la BMV.

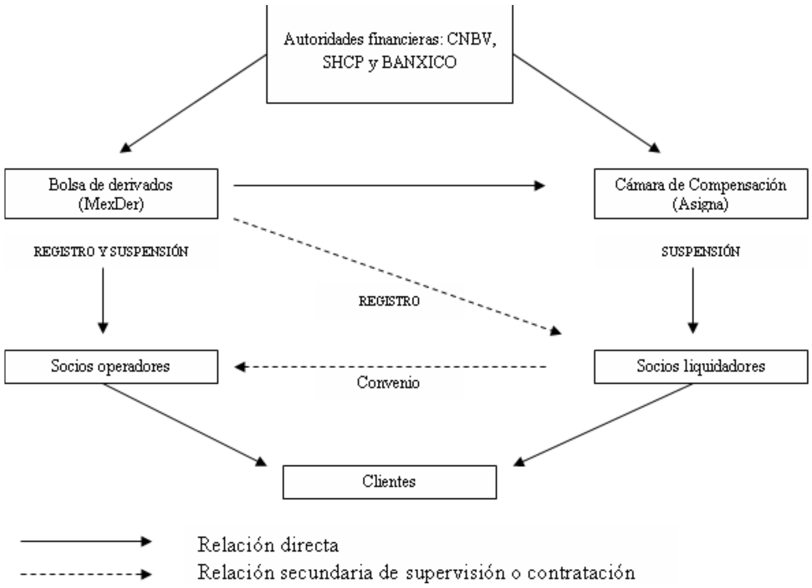
1.3. Participantes y estructura del MexDer

El mercado estandarizado de futuros y opciones se integra por cuatro tipos de instituciones que son:

- La Bolsa de Futuros y Opciones (MexDer).
- La Cámara de Compensación (ASIGNA).
- Los socios liquidadores (SL).
- Los socios operadores (SO).

El MexDer está encargado de vigilar a sus SO y a ASIGNA, los SO tienen a los operadores de piso (ejecutivos que acuerdan las operaciones) como empleados mientras que ASIGNA está encargada de vigilar y regular a sus SL (encargadas de pagar y cobrar las diferencias de precio).

Entre las autoridades está la Comisión Nacional Bancaria y de Valores que supervisa al MexDer y aprueba las reglas que emita, contando con la facultad discrecional de regular e inspeccionar todo el mercado, así mismo el Banco de México y la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, también son autoridades financieras.



Gráfica 1.1: Estructura del MexDer.

1.4. Forma de operación

MexDer inició su operación electrónica el día lunes 8 de mayo de 2000 con SENTRA DERIVADOS, el cual es un sistema desarrollado específicamente para la ejecución de operaciones de futuros.

A partir del lanzamiento del mercado (15 de diciembre de 1998) y hasta la fecha anterior se negociaba a "viva voz" en el piso de remates construido específicamente para la negociación de futuros.

La operación de futuros sigue las leyes de la oferta y la demanda, es decir, a mayor demanda, hay aumento en el precio.

El Sistema Electrónico de Negociación, Transacción, Registro y Asignación (SENTRA DERIVADOS) es un mecanismo que sustituyó la operación a viva voz, por otra remota, totalmente automatizada y a tiempo real. A través de SENTRA DERIVADOS es posible registrar posturas de venta y compra, realizar operaciones de cruce, operaciones de autoentrada y operaciones al precio de liquidación, así como, realizar el monitoreo de las posturas introducidas al sistema, dimensionar la profundidad del mercado e identificar operaciones de cruce y autoentrada.

Así mismo, el SENTRA DERIVADOS permite obtener información en línea y transmitirla de la misma forma hacia el Sistema Integral de Valores Automatizado (SIVA) desde donde se difunde hacia todo el sistema financiero.

1.5. Productos financieros derivados más importantes

Los productos derivados son instrumentos de cobertura cuyo valor depende del precio de otro activo, que es empleado como valor de referencia (acciones, índices, tasas de interés y divisas).

Los productos derivados por subyacente se pueden clasificar en:

1. Financieros: Tasas de interés, inflación, valores cotizados en bolsa, etc.
2. No financieros: Oro, plata, maíz, petróleo, etc., generalmente bienes clásicos llamados también mercancías (commodities).

El objetivo primordial de los derivados financieros, es que sirven para cubrir o eliminar riesgos financieros y disminuir la incertidumbre o inseguridad económica, que prevalece en épocas en donde la economía de un país no es estable.

Por el volumen negociado, entre los productos derivados más importantes, resaltan las opciones, los futuros, los forwards y los swaps.

El objetivo de las operaciones de cobertura es de cubrirse contra la exposición a los riesgos de variación de precios en materia prima, tasas de interés o tipos de cambio.

La función económica principal de un instrumento derivado es proporcionar formas para controlar el riesgo.

1.5.1. Forwards

Una manera distinta de cubrirse contra los movimientos de los tipos de cambio es a través de los contratos adelantados o Forwards. En este tipo de contratos se puede o no requerir un depósito de buena fe, esto depende del banco, cliente y transacción particular. Los contratos adelantados generalmente se limitan a plazos de 30, 60, 90 o 180 días aunque también los hay a 5 o 10 años. Comúnmente los contratos adelantados que ofrecen los bancos se realizan como parte de sus operaciones de divisas al contado.

Este tipo de contrato no solo se aplica a tipos de cambio, al igual que los futuros pueden aplicarse a tasas de interés y precios de materias primas.

1.5.2. Futuros

Los futuros son contratos que obligan a las partes a comprar y vender el activo de referencia a un precio y en una fecha futura determinada. Las variaciones entre el precio de mercado diario y el precio de negociación se liquidan diariamente. En la negociación de estos elementos ambas partes se obligan a cumplir con el contrato.

La historia de los futuros es muy antigua ya que podrían llamarse "descendientes" de los mercados a plazos, en otras palabras de contratación con entrega diferida.

Su nacimiento se relaciona con productos agrícolas y materias primas ya que de esta manera los compradores se protegían de la fluctuación de los precios e incluso garantizaban el suministro en situaciones de alto riesgo.

En 1513 en Ripio (Girona), se concertó el primer negocio jurídico de futuros sobre rebaños y cosechas según el archivo de la corona de Aragón.

En 1515 en la villa de Bisecas (Huesca), se celebró otro contrato del mismo tipo sobre leña y terneros.

El primer caso conocido de un mercado de futuro organizado, fue en Japón, en 1600 empieza su nacimiento originado por la necesidad de los señores feudales de dinero líquido y para 1730 ya contaban con un mercado que reunía las características de un mercado de futuros:

- Contratos de duración limitada.
- La calidad de arroz permisible en cada periodo era acordada de antemano.
- No se podía acarrear la posición contratada al contrato siguiente.
- Todas las transacciones debían liquidarse a través de una "cámara de compensación".

- Todos los participantes estaban obligados a establecer líneas de crédito con la cámara de compensación de su elección.
- Todos los contratos de cierta duración estaban estandarizados.

Aunque cerró, tuvieron la necesidad de reabrirlo, debido a que había servido para estabilizar el precio del arroz.

La historia de los futuros modernos comenzó a principios del siglo XIX, Chicago se convirtió en el centro del comercio de granos de Estados Unidos de Norteamérica gracias a los futuros.

En 1848 se estableció el Chicago Board of Trade con el fin de estabilizar la cantidad y calidad del grano de referencia y en 1865 se negociaron los primeros contratos de futuros estandarizados.

Para asegurar el cumplimiento de las partes se instituyó la cámara de compensación (Clearing House), esta institución tomó el papel de comprador frente a cada vendedor y viceversa. Desde ese momento los compradores y vendedores de contratos no se preocupaban por el riesgo crediticio de su contraparte ya que legalmente, la parte contraria es siempre la cámara de compensación.

Desde el establecimiento de la cámara de compensación en todas las bolsas de futuros del mundo, ningún participante ha perdido dinero en su posición por incumplimiento de contrato, ni siquiera durante la depresión económica de los años 30.

La bursatilización de los contratos de futuros de mercancías se dio gracias a la cámara de compensación.

En el entendido de que los tipos de cambio y tasas de interés son sólo precios, se empezó a desarrollar la idea de comercializar contratos de futuro sobre estos activos.

La cámara de compensación tiene el poder de garantizar las operaciones pactadas en el piso de negociación ya que disponen de los márgenes de depósito, basadas en las posiciones abiertas de sus clientes. Los márgenes necesarios en los futuros están entre un 5 % y un 15 % del valor nominal del contrato, y se tienen dos tipos de márgenes: inicial y de mantenimiento.

Por margen inicial se entiende la cantidad inicial de dinero que se deposita por el contrato y hay tres formas distintas de deposito: en efectivo, en obligaciones gubernamentales (como CETES), y en valores de empresas de alta rentabilidad.

Por margen de mantenimiento se entiende las cantidades de dinero sucesivas que se tendrán que ir depositando en caso de pérdidas, es decir, en caso de que la cotización se mueva en sentido contrario a la posición.

En otras palabras, el comprador del futuro debe ir añadiendo dinero en la medida en la que la cotización del índice baje y el vendedor del futuro cuando la cotización del índice suba.

Algunos de los contratos de futuros de más uso son:

- Futuro del dólar.
- Futuro de Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio a 28 días (TIIE).
- Futuro del CETE a 91 días.
- Futuros sobre el Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores (IPC).
- Futuro sobre acciones.

1.5.3. Diferencia entre Forwards y Futuros

Los futuros son establecidos y sus reglas determinadas en bolsa, son contratos estandarizados, se compran y venden a través de un mercado y el contrato de futuro es respaldado por una cámara de compensación.

El forward se realiza de forma privada entre dos partes que determinan las características básicas del contrato (tipo de producto, precio, fecha y modo de liquidación), en otras palabras son contratos que no son estandarizados y no se realizan a través de ningún mercado, tienen diferente riesgo de incumplimiento debido a que el contrato adelantado no está respaldado por una cámara de compensación.

El forward es muy usado para cubrir necesidades específicas ya que se tratan de contratos hechos a la medida, la credibilidad del proveedor de un contrato adelantado debe ser valorada ya que no existe garantía de cumplimiento.

1.5.4. Warrants

Los títulos opcionales (Warrants) son una derivación de las opciones de compra, es decir, su valor de referencia son series de empresas de alta rentabilidad (AAA) o índices de precios. Las ventajas del uso de este tipo de instrumentos al igual que los futuros son el apalancamiento financiero.

Un título opcional otorga a su tenedor el derecho pero no la obligación de comprar una acción o canasta de acciones a un precio establecido durante un determinado tiempo.

1.5.5. Swaps

Un swap se define como un acuerdo contractual en el que por escrito dos partes llamadas contrapartes acuerdan hacer pagos periódicos entre sí.

El acuerdo de swap contiene una especificación acerca de las monedas que se han de intercambiar (pueden no ser las mismas), la tasa de interés aplicable a cada una (fija o flotante), el programa en el que se deben hacer los pagos y cualquier otro tipo de disposiciones orientadas a normar la relación entre las partes.

El más común es el llamado tasa fija por tasa flotante, la primera contraparte acuerda hacer pagos a tasa fija a la segunda, en cambio ésta se compromete a realizar pagos a tasa flotante a la primera. La tasa fija se llama cupón swap, los pagos son las ramas o extremos del swap. Estos pagos se calculan sobre la base de cantidades hipotéticas de activos subyacentes llamadas nocionales, si toman estos la forma de sumas de dinero los llaman principales nocionales. Estos normalmente no se intercambian, si los pagos de las contrapartes se realizan al mismo tiempo ya en la misma moneda, entonces sólo se intercambia el interés diferencial entre las dos contrapartes.

Surgieron en 1979, siendo los primeros, los swaps de divisas, son una modificación de las estructuras ya existentes de los llamados préstamos“back to back”, con el fin de evitar la rigidez de los controles sobre el flujo de capital y mediante la eliminación del riesgo principal (la inestabilidad), surgió un instrumento superior que junto con otros productos financieros motivó a los mercados de mercancías. Después de la introducción de los swaps sobre divisas surgieron los swaps de tasa de interés, año más tarde se presentaron los swaps sobre mercancías y luego los swaps sobre acciones y valores.

Más recientemente, los ingenieros financieros han propuesto extender el modelo básico del swap para cubrir riesgos variados desde seguros hasta riesgos asociados a ciclos de negocios. A través de este instrumento se pueden reducir costos financieros y riesgos en los precios, entre otras ventajas.

1.5.6. Opciones

Una opción es un contrato estandarizado, en el cual el comprador, mediante el pago de la prima[2], adquiere del vendedor el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender el bien subyacente al precio pactado en la fecha futura y el vendedor se obliga a vender o comprar, según corresponda, el activo subyacente al precio convenido. El comprador puede ejercer dicho derecho, según se haya acordado en el contrato respectivo.

En el siglo VI a.C., la posibilidad de una abundante cosecha de aceitunas motivó a Tales de Mileto a reservar el uso exclusivo de las prensas locales. En este caso el bien subyacente del contrato fue el pago por el alquiler de las prensas[3].

Existen referencias en escritos Aristotélicos quien haciendo frente a las críticas de comerciantes griegos utilizó opciones sobre aceites de oliva y basándose en predicciones meteorológicas demostró que era posible aplicar procesos científicos en las prácticas comerciales. Otras culturas como los Fenicios y los Romanos también los utilizaron.

En el siglo XVII los comerciantes del mercado holandés de tulipanes, frente a la demanda del producto y la precariedad del transporte se vieron en la necesidad de asegurar sus transacciones a través de opciones, gracias a la gran demanda, el precio de los tulipanes subió y con ello hubo inversionistas que especularon con la seguridad de que el precio subiera, pero el mercado se colapsó por falta de control y organización.

[2]Precio por medio del cual, los compradores obtienen el derecho, pero no la obligación de comprar o vender el bien subyacente de acuerdo a lo estipulado en los contratos.
Climent Hernández José Antonio, Análisis teórico práctico para la valuación de opciones. UNAM 2001.

[3]Climent Hernández José Antonio, Valuación de opciones. UNAM. Vínculos matemáticos No. 38. 2005.

Se atribuye a un escocés, John Law, haber ideado la primera operación de opciones moderna. Adquirió el derecho de comprar acciones de la Compañía de las Indias Occidentales, que manejaba las relaciones comerciales entre Francia y Luisiana, en 1717. Para convencer de la seriedad de su oferta, abonó 40,000 libras esterlinas en concepto de prima. Al ejercer la opción, obtiene la exclusividad de cobrar todas las gabelas que pertenecían al gobierno francés[4].

En 1973 es cuando apareció en Estados Unidos de Norteamérica un mercado de opciones sobre acciones comerciadas en bolsa. Cuando en abril de ese año el Chicago Board of Trade, crea el Chicago Board Options Exchange, una bolsa especializada en este tipo de operaciones; en 1975 se negociaban opciones en The American Stock Exchange y en The Philadelphia Stock Exchange.

Tipo de los contratos

Los contratos de opciones otorgan a los poseedores el derecho, pero no la obligación de comprar o vender el bien subyacente, lo cual es la característica que define el tipo de los contratos.

Opción de compra

Contrato estandarizado, en el cual el comprador adquiere el derecho, pero no la obligación, de comprar el bien subyacente al precio pactado en la fecha futura y el vendedor se obliga a vender el activo subyacente al precio convenido.

Opción de venta

Contrato estandarizado, en el cual el comprador adquiere el derecho, pero no la obligación, de vender el bien subyacente al precio pactado en la fecha futura y el vendedor se obliga a comprar el activo subyacente al precio convenido.

[4]Verchik Ana, Derivados Financieros y de Productos. Una visión más completa de los negocios. 2000. ISBN 950-537-531-X. Macchi Grupo Editor S.A.

Estilo de los contratos

La fecha futura determina el periodo o fecha en la que los contratos tienen validez. El ejercicio de una opción en la fecha de vencimiento o antes de ésta es la característica que define el estilo de los contratos.

Opción americana

Contrato estandarizado, en el cual el comprador adquiere del vendedor el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender el bien subyacente al precio pactado en el periodo hábil comprendido entre el momento de negociar el contrato y la fecha de vencimiento, mientras el vendedor se obliga a vender o comprar, según corresponda, el activo subyacente al precio convenido.

Opción europea

Contrato estandarizado, en el cual el comprador adquiere del vendedor el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender el bien subyacente al precio pactado solo en la fecha de vencimiento y el vendedor se obliga a vender o comprar, según corresponda, el activo subyacente al precio convenido.

Forma de liquidación de los contratos

Al emitir contratos de opciones, emisores y compradores acuerdan el derecho de recibir o entregar, según corresponda, el bien subyacente o solo la diferencia entre el precio pactado y el precio del bien subyacente en el mercado. Esta característica determina la forma de liquidación al ejercer los contratos.

Opción de ejercicio en efectivo

Especificación en los contratos de opciones, cuya liquidación no requiere la entrega física del valor de referencia.

Los poseedores de contratos de compra, tienen el derecho a recibir el pago resultado de la diferencia entre el precio del bien subyacente en el mercado al momento de ejercer las opciones y el precio pactado. Los poseedores de contratos de venta, tienen derecho a recibir el pago resultado de la diferencia entre el precio pactado y el precio del bien subyacente en el mercado al momento de ejercer las opciones.

Opción de ejercicio en especie

Especificación en los contratos de opciones, cuya liquidación implica la entrega física del valor de referencia.

Los poseedores de los contratos tienen el derecho de recibir o entregar físicamente, según corresponda, el bien subyacente al ejercer su derecho.

Emisión de los contratos

La emisión de los contratos está determinada por la posesión del bien subyacente por parte de los emisores de contratos de opciones, para hacer frente a sus obligaciones ante los poseedores.

Opción cubierta

Los emisores de los contratos poseen físicamente el bien subyacente para cumplir con sus obligaciones ante los poseedores cuando se ha convenido el ejercicio en especie.

Opción descubierta

Los emisores de los contratos no poseen físicamente el bien subyacente para cumplir con sus obligaciones ante los poseedores cuando se ha convenido el ejercicio en especie.

Principales tipos de opciones

De acuerdo al bien subyacente, los principales tipos de opciones son:

Opciones sobre acciones

Mediante estos contratos se adquiere el derecho de comprar o vender un determinado número de acciones a un precio establecido. La mayor utilidad de este tipo de opciones, además de cubrirse de las posibles fluctuaciones en el mercado, es la realización de operaciones de inversión.

Opciones sobre divisas

Se adquiere el derecho de comprar o vender alguna moneda a un tipo de cambio dado. En el CME se comercian, entre otros, con opciones en libra esterlina, dólar canadiense ó yen japonés.

Opciones sobre índices

Se adquiere el derecho de dar o tomar *n*–veces el índice. Por ejemplo: 100 veces el IPC. En el CME encontramos opciones en el Índice Nikkei o el IPC mexicano.

Opciones sobre futuros

Se adquiere una posición larga (Call) o corta (Put) en un contrato de futuros. En el CME se comercian opciones sobre futuros en ganado vivo, Índice Nikkei, dólares canadienses o la tasa LIBOR mensual, entre otros.

Opciones exóticas

Entre éstas están las opciones Asiáticas que se valúan sobre el precio promedio del bien, las de tipo Bermudas, que sólo son ejercibles en ciertos días, opciones sobre futuros, opciones con barrera, opciones binarias y opciones sobre opciones, entre otras.

Opciones reales

Son contratos de opción sobre determinados activos reales o mercancías. Cuando se habla acerca del análisis de opciones reales (u opciones reales, simplemente), se entiende el intento de aplicar la metodología de las opciones financieras a la gestión de activos reales, esto es, a la valoración de inversiones productivas o empresariales. Pero ello no es factible o sólo lo es parcialmente, y de ahí que hayan tenido que desarrollarse métodos alternativos.

La valuación de opciones reales es un proceso por el cual un activo real o tangible, puede ser valuado en forma coherente cuando existe flexibilidad, o potencial para las opciones. La teoría de las opciones reales es una teoría prometedora (con un desarrollo incipiente) todavía.

La incorporación de las opciones reales en los proyectos de inversión es el tema de este trabajo, por lo que se desarrolla posteriormente.

1.6. Objetivos de los mercados de opciones y futuros

- Estabilizar el mercado proporcionando cobertura a los agentes económicos contra fluctuaciones.
- Lograr encarar las posiciones de los operadores según el nivel de riesgo en que se encuentran cómodos.
- Mantener mercados libres, equitativos y transparentes, fiscalizando las operaciones realizadas, las actividades de sus miembros y penalizando infractores.
- Al señalar el futuro de los precios, exhibir el sentimiento del mercado respecto de su tendencia, de tal forma que los productores puedan comercializar el bien en distintos meses según sus necesidades y conveniencia.

1.7. Cámara de compensación

1.7.1. ASIGNA. Compensación y liquidación

Es un Fideicomiso de administración y pago constituido en 1998 en BBVA Bancomer, con el objeto de compensar y liquidar las operaciones de productos derivados realizadas en MexDer. Sus fideicomitentes son los principales Grupos Financieros del país; Banamex Citigroup, BBVA Bancomer, Scotiabank Inverlat, Santander-Serfin, así como el Instituto para el Depósito de Valores S.D. Indeval.

1.7.2. Asigna como fideicomiso

Como Asigna, compensación y liquidación se constituye como un fideicomiso, se considera pertinente mencionar los puntos básicos en cuanto a fideicomisos se refiere. La Ley General de Títulos y Operaciones de Crédito (LGTOC), en su capítulo V establece el estatuto legal del fideicomiso, en dicha ley se pueden enumerar tres figuras de las cuales se dan a conocer sus atributos:

Fideicomitente

Las personas físicas o jurídicas que tengan la capacidad necesaria para hacer la afectación de bienes que el fideicomiso implica y las autoridades judiciales o administrativas competentes, cuando se trate de bienes cuya conservación, administración, liquidación, reparto o enajenación correspondan a dichas autoridades o a las personas que éstas designen (Art. 349).

Fideicomisarios

Las personas físicas o jurídicas que tengan la capacidad necesaria para recibir el provecho que el fideicomiso implica (Art. 348).

Fiduciario

El fideicomitente destina ciertos bienes a un fin lícito determinado, a través de un fideicomiso, encomienda la realización de este fin a una institución fiduciaria. Sólo pueden ser fiduciarias las instituciones expresamente autorizadas para ello en la Ley General de Instituciones de Crédito (Art. 346 y 350).

El fideicomiso es un servicio de intermediación profesional y ofrece al público permanencia, discreción, seguridad y responsabilidad, así como transparencia en el manejo de fondos, prestación de servicios, etc. En el fideicomiso rige la autonomía y libertad de las partes de obligarse en la forma y términos que deseen con las limitaciones de licitud y buenas costumbres. Por esto el fideicomiso tiene la versatilidad y flexibilidad para alcanzar los objetos que se propongan las partes.

En este caso, el fideicomiso tiene por objeto y fin la aplicación de sumas de dinero, lo que es la finalidad del fideicomiso y por lo tanto a una inversión productiva que evidencia la relación del fideicomiso con el mercado de valores.

En cuanto a futuros, la cámara de compensación brinda los servicios siguientes:

- Actuar como contraparte de cada una de las partes, compradoras y vendedoras.
- Garantizar la integridad financiera del mercado de futuros a través de:
  - Mantener un sistema de márgenes.
  - Realizar la compensación de las cuentas ganadoras y perdedoras cada día.
  - Efectuar la valoración de las posiciones de futuros (realizar el mark to market).
  - Facilitar la entrega y el proceso de liquidación.

1.7.3. Márgenes

La Cámara de Compensación puede garantizar las operaciones pactadas en el piso de la negociación porque disponen de los márgenes de depósito basados en las posiciones de sus clientes; estos márgenes actúan como salvaguarda para asegurar el cumplimiento de sus miembros en las posiciones abiertas de sus clientes. Los márgenes requeridos en los Futuros corresponden a un porcentaje entre el 5 y 15 % del valor nominal del contrato. Así pues, se tienen dos tipos básicos de márgenes: inicial y de mantenimiento.

Margen inicial

Es el depósito en dinero que un corredor realiza en la Cámara de Compensación para colocar a una orden de compra de un contrato de futuros y puede ser de tres formas distintas: en efectivo, en obligaciones gubernamentales (por ejemplo CETES) o en valores de empresas de alta rentabilidad. En general, la Cámara de compensación hace coincidir el margen inicial con la pérdida máxima que puede tener una posición en uno o dos días.

Margen de mantenimiento

El margen de mantenimiento se define como el margen mínimo establecido para poder operar en el mercado. Cuando los precios de los futuros comienzan a moverse, el margen inicial carece de sentido y se utilizan los denominados márgenes de variación, los cuales son cargos y abonos que se realizan a la cuenta de acuerdo con los movimientos del precio. Es una regla generalmente aceptada que el margen de mantenimiento requiera de $\frac{3}{4}$ partes del pago inicial. Cuando las pérdidas resultantes de los movimientos de los precios reduzcan la cuenta por debajo del margen de mantenimiento, el corredor avisa a su cliente para que realice un depósito y reestablezca su cuenta al nivel del margen inicial, a esto se le denomina llamada de margen. En periodos de alta volatilidad o de alto riesgo, la Cámara de Compensación puede exigir depósitos adicionales de margen, denominados llamadas de margen de variación.

1.7.4. Autorregulación de Asigna

Las reglas y disposiciones gubernamentales le otorgan a Asigna la facultad de supervisión, dictaminación y sanción de las entidades con quienes interactúa. Es decir, Asigna desarrolla una serie de actividades orientadas a mantener la integridad financiera y operativa de sus socios, clientes y de sí misma.

Entre las principales actividades que realiza Asigna se pueden enumerar las siguientes:

- Monitorear el comportamiento del mercado de forma permanente.
- Monitorear las posiciones abiertas y posiciones límite.
- Supervisar la liquidación diaria y al vencimiento.
- Vigilar el cumplimiento de manuales y reglamentos internos.

Las actividades mencionadas tienen el fin de evitar la concentración de posiciones abiertas que lleguen a ser de alto riesgo para el mercado en su conjunto.

También desarrolla otras actividades con el fin de prevenir quebrantos de socios y clientes:

- Monitorear la suficiencia de recursos de sus socios operadores y clientes.
- Realizar simulaciones de movimientos extremos de precios para cada cuenta abierta del mercado, y por supuesto las actividades con el objeto de mantener la integridad financiera del mercado:
    - Determinar las aportaciones mínimas.
    - Monitorear la suficiencia de las aportaciones iniciales mínimas.

Capítulo 2

Teoría del interés

La teoría del interés está basada en la premisa de que el dinero tiene un valor a través del tiempo. El valor del dinero en el tiempo es proyectar flujos de carácter equivalente al capital inicial invertido en un periodo de tiempo con una tasa o factor de interés determinado en cada lapso medido. El capital necesita moverse, por lo que se llama monto esperado para una determinada operación financiera o valor futuro.

2.1. Valor futuro

Se refiere al monto que llega una inversión a lo largo de algún tiempo, a una tasa de interés dada. Dicho de otra manera, el valor futuro es el valor en efectivo de una inversión en algún momento en el futuro.

2.2. Inversiones de un periodo

Al suponer que se invierten \$100 en una cuenta de ahorros que paga el 10 % de interés anual. La cantidad que se tiene dentro de un año es de \$110; éstos son iguales a su capital original de \$100 más los \$10 de intereses que se ganan. Entonces se dice que \$110 es el valor futuro de \$100 invertidos a un año al 10 %.

En términos generales, si se invierte a un periodo, con una tasa de interés i, la inversión crece a $(1+i)$ por cada unidad monetaria invertida. En este ejemplo, i es 10 %, y la inversión crece a $1+0.10=\$1.10$ por cada peso invertido. En este caso, si se invierten \$100, se termina con $\$100(1.10)=\$110$.

2.3. Inversiones de más de un periodo

Siguiendo el mismo ejemplo de la inversión de \$100 y dejando la totalidad de los \$110, al cabo del premier año, en el banco, se gana $\$110(0.10)=\$11$ de interés durante el segundo año, y se tiene un total de $\$110+\$11=\$121$. Estos \$121 son el valor futuro de \$100 dentro de dos años al 10 %. Esta inversión es bajo un interés compuesto, el cual gana tanto del capital inicial como de los intereses reinvertidos a partir de periodos anteriores, y obedece a la fórmula siguiente:

$$\mathrm{VF}=C(1+i)^{T}$$

$$\text{Valor Futuro}=\$100(1+0.10)^{2}$$

$$\text{Valor Futuro}=\$100(1.10)^{2}=\$100(1.21)$$

$$\text{Valor Futuro}=\$121$$

Donde C es el capital inicial, i la tasa de interés y T el número de periodos a invertir. Por otro lado, bajo un interés simple, el interés no es reinvertido y por lo tanto los intereses se ganan en cada periodo sólo del capital original.

$$\mathrm{VF}=C(1+iT)$$

$$\text{Valor Futuro}=\$100\,[1+0.10(2)]$$

$$\text{Valor Futuro}=\$100(1+0.20)=\$100(1.20)$$

$$\text{Valor Futuro}=\$120$$

2.4. Valor Presente

El valor del dinero no está dado solamente por el monto del mismo, sino también por el momento en el que se recibe o se gasta, de tal manera que la programación en el tiempo de los flujos de efectivo que se espera recibir o desembolsar determinan la decisión de los individuos de consumir o invertir en el presente.

El proceso de evaluar en el presente derechos y/o obligaciones futuras es conocido como el proceso de descuento. Ya que el valor presente de un flujo de efectivo futuro siempre es menor que el valor en el futuro. Dicho esto, se tienen entonces diferentes factores de descuento para cada tipo de interés. En interés compuesto el factor de descuento es $\mathrm{VP} = \frac{1}{(1+i)^T} = (1+i)^{-T}$; para el caso de interés simple es $\mathrm{VP} = \frac{1}{(1+iT)} = (1+iT)^{-1}$.

2.5. Capitalización continua

Algunas veces los periodos de capitalización no solo ocurren una vez al año, sino que pueden ocurrir con mayor frecuencia.

Por ejemplo, una inversión que paga una tasa de interés de 10 % "capitalizable semestralmente", significa que \$1,000 valen $\$1,000(1.05) = \ \$1,050$ después de seis meses en el banco, y $\$1,050(1.05) = \$1,102.50$ al final del año. La riqueza que se tiene al final del año puede expresarse de la forma siguiente:

$$\$1,000\left(1+\frac{0.10}{2}\right)^2 = \$1,000(1.05)^2 = \$1,102.50$$

Mediante una capitalización anual, los \$1,000 originales siguen siendo la base de la inversión para la totalidad del año. Bajo una capitalización semestral, los \$1,000 son la base de la inversión tan sólo para los primeros seis meses. La base de la inversión durante los segundos seis meses es de \$1,050; entonces, se obtienen intereses sobre intereses en la capitalización semestral.

Dicho de una manera más general, el valor futuro de una inversión capitalizable *m* veces al año es:

$$\mathrm{VF} = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^m$$

Análogamente, el valor presente de una inversión capitalizable m veces al año se expresa de la forma siguiente:

$$\mathrm{VP} = \frac{C}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^m} = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-m}$$

Donde C es el capital inicial e i es la tasa de interés anual establecida, que es la tasa de interés anual sin considerar los procesos de capitalización.

Para una inversión durante uno o más años (T), las expresiones cambian a:

$$\mathrm{VF} = C\left(i+\frac{i}{m}\right)^{mT}$$

$$\mathrm{VP} = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mT}$$

El planteamiento anterior muestra que la capitalización puede realizarse más de una vez al año. Se puede capitalizar por periodos semestrales, trimestrales, mensuales, diarios, por hora, por minuto, o aún más frecuentes. El límite sería realizar la capitalización cada instante infinitesimal; esto se conoce como capitalización continua. El valor futuro y valor presente de una inversión a T años bajo una capitalización continua se expresa[1]:

$$\mathrm{VF} = C \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mT} = Ce^{i_\infty T}$$

$$\mathrm{VP} = C \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mT} = Ce^{-i_\infty T}$$

Donde $i_\infty = m\ln(1+i)$

[1]Ross Stephen, Westerfield Randolph, Jaffe Jeffrey. Finanzas Corporativas p.74. 7a Edición. 2005. ISBN 970-10-4654-2. McGraw-Hill Interamericana.

2.6. Valuación directa y decisiones de Inversión

La mayoría de las decisiones de inversión requieren una valuación comparativa de las salidas de efectivo necesarias para adquirir recursos productivos y de las futuras entradas de efectivo esperadas que representan la remuneración económica de la inversión. La mayoría de las decisiones de inversión implican una selección entre oportunidades alternas de inversión.

Cuando se calcula el valor presente de recibos y desembolsos futuros, se está reflejando automáticamente en las cifras evaluadas, la posibilidad de obtener un ingreso estándar, esto es, una utilidad sobre la inversión. El valor presente calculado a la tasa i de interés, es una cantidad tal que, invertida para que genere los flujos netos de efectivo esperados, produzca un rendimiento de $i\% = i * 100$ sobre la inversión. Este hecho permite utilizar a los valores presentes de dos o más propuestas de inversión, como un medio indirecto válido de comparar el importe de los flujos futuros de ingresos provenientes de cada propuesta.

2.7. Valor Presente Neto

Para evaluar los méritos de una proposición de inversión, se puede comparar el valor de los gastos requeridos con el valor de los beneficios futuros. Debido a que las salidas y entradas están típicamente dispersas en el tiempo, la manera lógica para visualizar estos eventos económicos en un determinado instante del tiempo, consiste en calcular el valor presente neto (VPN) al momento de la decisión.

Este método consiste en calcular el VPN a una tasa de interés dada, de todas las entradas esperadas de la inversión y de todas las salidas requeridas. El exceso del valor presente de los recibos sobre el valor presente de las salidas se conoce como valor presente neto de la proposición de inversión. Esta cantidad puede ser positiva o negativa. Un VPN positivo, significa que la proposición de inversión tiene una tasa de rédito mayor que la tasa de descuento escogida; si el VPN es negativo se obtiene una tasa de rédito menor que la tasa escogida. Un VPN igual a cero, a la tasa de descuento escogida, indica que la compañía puede pedir dinero prestado a esa tasa de interés, hacer la inversión, y obtener de las entradas de la inversión exactamente lo suficiente para liquidar el préstamo y el interés. En otras palabras, un VPN igual a cero indica que la tasa de rédito de la ganancia y la tasa de descuento escogida son idénticas.

Es evidente que la selección de una tasa de interés adecuada es crucial para el método del VPN, ya que una proposición de inversión dada puede tener un VPN positivo o negativo dependiendo de la tasa de interés usada para descontar los flujos de efectivo. En general, la tasa de interés escogida debe ser la mínima tasa de rendimiento que la compañía considera aceptable para un inversión, dado el riesgo que implica. En el límite, esta tasa mínima debe ser el costo de capital, que se define como el costo de obtener los fondos necesarios para la inversión, ya sea mediante préstamos, inversión adicional de capital o reteniendo ganancias.

El Valor Presente Neto (VPN) es el Valor Presente menos los pasivos, donde el Valor Presente es obtenido al descontar los beneficios futuros al costo de oportunidad. Una interpretación del VPN es que indica por cuánto se verá incrementada la riqueza en virtud de adoptar una inversión.

Capítulo 3

Opciones Reales

La incertidumbre es la aleatoriedad o casualidad del entorno externo. Por ello, se debe inferir qué cosas diferentes a las esperadas pueden ocurrir cuando se enfrenta a la previsión de un flujo de efectivo.

Al basarse en este concepto, las opciones reales son de gran importancia en la previsión y desarrollo de inversiones, ya que son oportunidades de modificar proyectos a medida que el futuro se revela.

De igual forma, la visión tradicional de la valuación de empresas o proyectos de inversión considera únicamente los flujos de caja directamente generados o a generar por ésta. Este enfoque puede subestimar el valor de las empresas y proyectos al no considerar cuestiones como:

- La realización de proyectos de inversión que supongan la adquisición de oportunidades de crecimiento futuro en mercados relacionados. En la literatura financiera, estas oportunidades de crecimiento se denominan opciones de crecimiento y opciones de aprendizaje.

- En que un proyecto de inversión incorpore opciones reales de flexibilidad como opciones de intercambio (insumos o materias primas) u opciones de salida o desinversión.

3.1. Las Opciones Reales más comunes en la empresa

Las opciones reales que puedan encontrarse en la realidad de las empresas se pueden agrupar en tres grupos:

1. Diferir / Aprendizaje,
2. Inversión / Crecimiento,
3. Desinversión / Disminución.

A pesar de estar separadas en grupos, en muchos casos estas opciones están interrelacionadas.

3.1.1. Opciones de Diferir / Aprendizaje

Las opciones de diferir proporcionan al propietario de un proyecto la posibilidad de aplazar la realización durante un plazo determinado. Esto permite reducir la incertidumbre asociada al proyecto. A veces a cambio de un costo determinado se puede obtener información sobre un producto y/o mercado. Estas opciones son mejor conocidas como opciones de estudiar.

La opciones de estudiar retrasan la inversión hasta que se tenga más información o se esté adquiriendo.

3.1.2. Opciones de Inversión / Crecimiento

Las opciones de crecimiento asociadas a un proyecto permiten, en determinados plazos, adquirir una parte adicional al mismo a cambio de una inversión incremental. Estas opciones pueden ser de aumento o de alcance (apalancarse en el proyecto para utilizar recursos en otro mercado relacionado).

$$\text{Inversión / Crecimiento} = \begin{cases} \text{Aumentar} \\ \text{Intercambiar} \\ \text{Alcanzar} \end{cases}$$

Aumentar

Las empresas bien posicionadas pueden crecer mediante una inversión secuencial mientras el mercado crece.

Intercambiar

Una opción flexible para cambiar de productos, modos de operación, o procesos tomando en cuenta un cambio del precio del subyacente o de las entradas o salidas con el objetivo de generar un mayor rendimiento en la inversión.

Alcanzar

Invirtiendo en activos propios de una industria permitiendo a una compañía entrar en otra industria a bajo costo. Enlazar y apalancar.

3.1.3. Opciones de Desinversión / Disminución

Por otra parte, las opciones de desinversión ó disminución proporcionan la flexibilidad de reducir el tamaño de la inversión y/o abandonarla en determinados momentos de la vida del proyecto a cambio de un costo bajo de desinversión o abandono.

$$\text{Desinversión / Disminución} = \begin{cases} \text{Disminuir} \\ \text{Intercambiar} \\ \text{Abandonar} \end{cases}$$

Disminuir

Disminuir o anular parte del desarrollo del proyecto si una nueva información está cambiando las expectativas de rentabilidad.

Intercambiar

Una opción flexible para cambiar de productos, modos de operación, o procesos tomando en cuenta un cambio del precio del subyacente o de las entradas o salidas con el objetivo de limitar las pérdidas del proyecto.

Abandonar

Limitar las actuaciones o abandonar las operaciones en una industria relacionada cuando no existan otras oportunidades potenciales de negocio.

Existen manuales que optan por plantear la posibilidad de adaptar la metodología de valuación de opciones financieras para valuar opciones reales utilizando la analogía de las variables siguientes:

Opción de compra sobre acción	Opción Real
Precio del bien subyacente	Valor Presente (Cash-Flow esperados)
Precio ejercicio	Costo inversión
Vencimiento	Plazo hasta que la oportunidad desaparece
Incertidumbre bien subyacente	Incertidumbre valor proyecto
Tipo de interés libre de riesgo	Tipo de interés libre de riesgo

Tabla 3.1: Diferencia entre una Opción Financiera y una Opción Real

Estos manuales proponen valuar una opción real por el método de Black & Scholes, lo que significa que la aplicación sin más de un modelo de valoración de opciones financieras para estimar el valor de las opciones reales presenta a veces deficiencias, algunas de ellas son las siguientes:

- Los activos reales producen flujos de caja negativos como gastos de mantenimiento, impuestos, etc., que no están considerados en los modelos de valuación de opciones financieras.
- Existe un importante riesgo de base al aplicar los modelos de valuación. Así, ciertos modelos de valuación se basan en la existencia de carteras perfectas de réplica, esto es, con correlación unitaria con la opción. En el mundo de los activos reales, las carteras de réplica están normalmente muy correlacionadas pero no perfectamente con el valor de la opción.

- Las opciones reales tienen riesgos que no se valoran en los mercados financieros y en consecuencia en los modelos de valuación de opciones financieras, como por ejemplo el riesgo de fallo en el desarrollo de una tecnología determinada.

3.2. Creación de oportunidades mediante la incertidumbre

Los directivos se anticipan y responden a la incertidumbre cuando realizan modificaciones a la mitad de un proceso, abandonan proyectos, o incorporan infinidad de revisiones en los proyectos. En el lenguaje de las opciones reales, los directivos están tomando decisiones contingentes (decisiones para invertir o desinvertir que dependen del curso de los acontecimientos).

Hoy en día los mercados exigen la toma de decisiones estratégicas de inversión en entornos muy inciertos (cuando la dimensión del mercado, los plazos, los costos de desarrollo o los movimientos de la competencia simplemente no se conocen). Las circunstancias apelan al miedo y a la precaución, y la frustración ante los instrumentos disponibles sólo consigue poner de manifiesto la sensación de ir a ciegas. Como existe una brecha muy amplia entre lo que los directivos quieren hacer y la utilidad de los instrumentos de los que disponen para hacerlo, generalmente los directivos toman decisiones sin basarse en un análisis cuantitativo.

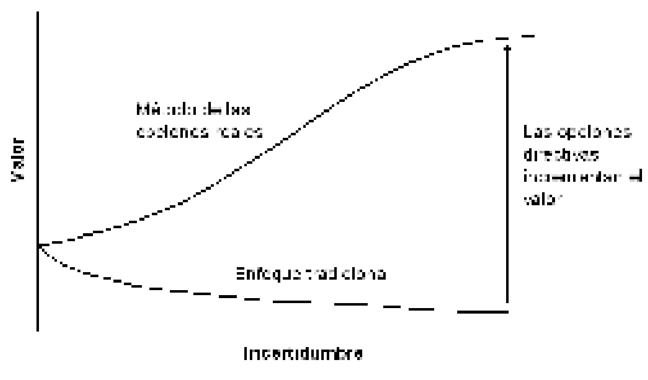
Dentro de la práctica actual hay dos rasgos que destacan como problemas significativos. El primer problema es que algunos instrumentos requieren una previsión de flujos de caja futuros. Como en el análisis sólo se utiliza una única previsión, ésta es aleatoria. ¿Se trata de una proyección excesivamente optimista del defensor de un proyecto? ¿Cuál es la tasa de crecimiento y el margen de beneficio supuestos en la previsión? Frecuentemente, los directivos consideran la previsión como una realidad, creando la ilusión de certeza en relación a los números. Para compensarlo, algunas compañías tratan de ampliar el análisis a una serie de previsiones o escenarios. Estos esfuerzos parecen rigurosos para sus autores pero arbitrarios para otros. Tanto en el caso de un solo escenario como en el de varios escenarios, la previsión de flujos de caja se convierte en una cuestión subjetiva.

El segundo problema de los instrumentos más utilizados es que las decisiones futuras de inversión están determinadas desde un principio. Los directivos actualizan y revisan los planes de inversión, pero el análisis, tal como está estructurado por la mayoría de los instrumentos, sólo incluye el plan inicial. El mundo cambia, pero su modelo no. A medida que la brecha entre los instrumentos y la realidad se va haciendo más grande, los instrumentos se van descartando, y las decisiones importantes se toman en función de "consideraciones estratégicas" y "carisma directivo".

3.3. Gestión de inversiones estratégicas

Una vez que la forma de pensar de un directivo incluye explícitamente la incertidumbre, se produce un cambio de todo el marco del proceso para la toma de decisiones. La gráfica 3.1 ilustra uno de los cambios más importantes en la manera de razonar a partir del método de las opciones reales: la incertidumbre crea oportunidades.

Los directivos deben recibir la incertidumbre con los brazos abiertos, no tenerle miedo. Al replantear inversiones estratégicas, los directivos deben intentar considerar sus mercados teniendo en cuenta el origen, la trayectoria y la evolución de la incertidumbre; determinar el grado de exposición de sus inversiones (cómo los acontecimientos externos se traducen en beneficios y pérdidas), y después responder posicionando sus inversiones de tal forma que puedan sacar el máximo provecho de la incertidumbre.

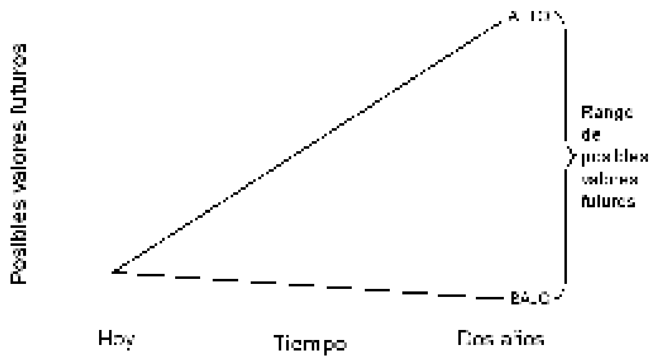


Gráfica 3.1: La incertidumbre aumenta el valor.

3.4. Resolución de la incertidumbre

Cuando una decisión futura depende del origen de la incertidumbre, a los directivos les preocupa el abanico de resultados posibles que puede provocar la variable incierta llegado el momento de tener que tomar la decisión. La clave está en el nexo entre el tiempo y la incertidumbre. La gráfica 3.2 introduce una imagen del cono de la incertidumbre. La figura ilustra cómo se puede responder a una pregunta muy directa. Suponiendo que el valor actual de una compañía es de un millón de dólares, ¿qué posibles valores puede tener la compañía dentro de dos años?

El punto izquierdo del cono muestra el valor actual de la empresa y a medida que se avanza hacia el futuro, el abanico de posibles resultados se amplía cada vez más. El cono apunta hacia arriba, reflejando la expectativa de que el valor de la empresa va creciendo a lo largo de los dos años.

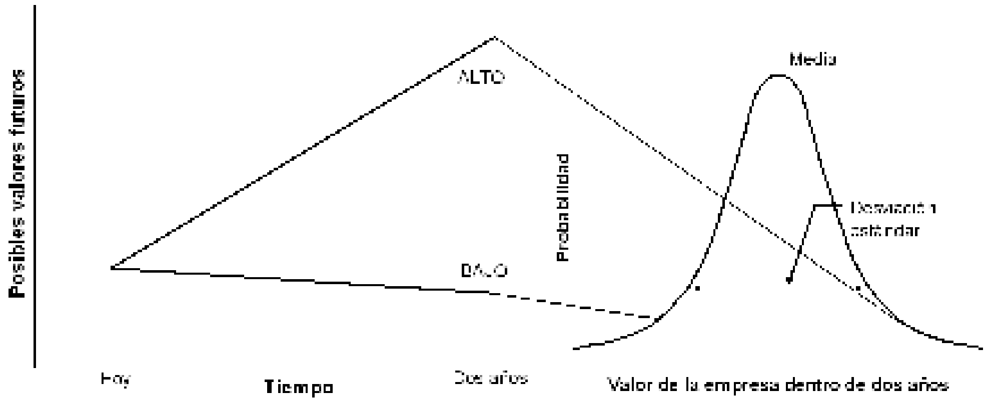


Gráfica 3.2: Cono de la incertidumbre.

Esta gráfica representa de qué forma puede evolucionar el valor con el transcurso del tiempo. En este ejemplo el rango de incertidumbre aumenta con el horizonte temporal. La tasa de rentabilidad positiva esperada para los dos próximos años hace que el cono tenga una inclinación ascendente.

Nada de esto tiene que ver con la magia. Simplemente se trata de aplicar el sentido común. El trabajo de un directivo consiste en prever, no en profetizar. La previsión acepta que en cualquier momento puede haber múltiples resultados posibles. El directivo se tiene que convencer de que si cree en la incertidumbre, podrá tomar decisiones mejores.

A medida que el valor de la empresa va evolucionando, o cambiando con el transcurso del tiempo, la probabilidad de alcanzar los valores más altos o más bajos marcados por el cono es cada vez menor. La gráfica 3.3 ilustra de qué forma la evolución de una variable aleatoria a lo largo del tiempo está relacionada con la distribución de los resultados al final del horizonte temporal. Tal como ilustra la parte derecha de la gráfica 3.3, dentro de dos años la probabilidad de que el valor de la empresa se encuentre en la mitad del rango es mayor. Muchas inversiones estratégicas van acompañadas de una serie de opciones, que tienen puntos de decisión en el interior del cono de la incertidumbre, antes de que el cono termine en el plazo de decisión de la opción final. Para cada punto de decisión interior, la distribución de los resultados para esa fecha se puede encontrar "cercenando" la parte restante del cono de la incertidumbre.



Gráfica 3.3: Dos puntos de vista de la resolución de la incertidumbre.

Durante los dos años, se espera que el valor de la empresa aumente en cierta medida. Hay incertidumbre en relación a la tasa de crecimiento real para cada año, y ésta se mide por la volatilidad, por la desviación estándar (medida del rango de resultados. La volatilidad se suele expresar en términos anuales) de la tasa de rentabilidad esperada.

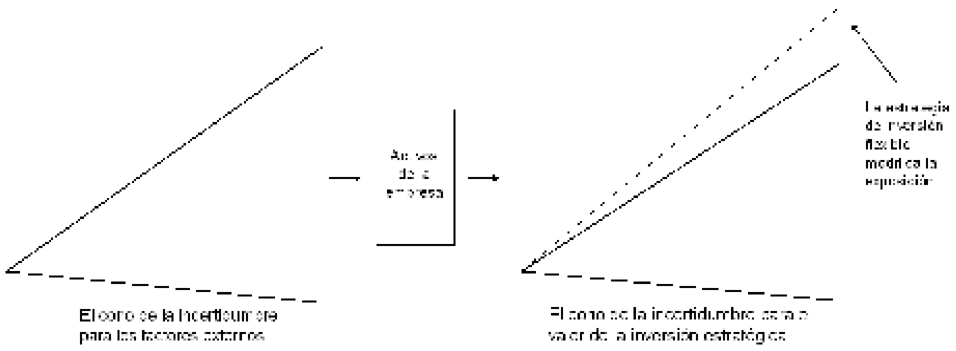
El método de las opciones reales introduce los efectos del tiempo y de la incertidumbre en el proceso de valoración y de toma de decisiones, por lo que naturalmente se concentra en la volatilidad, el grado de incertidumbre en relación a las tasas de crecimiento.

El valor de la opción está en función de la volatilidad en cuestión. He aquí dos ejemplos en donde se hace evidente la dependencia de los valores de la opción respecto a la volatilidad:

- Opción para la compra de acciones. El valor del contrato de opciones para la compra de acciones depende de la incertidumbre del precio de la acción, que se puede estimar como la desviación estándar de la rentabilidad de la acción.

- Una opción para construir un estacionamiento en un edificio de oficinas. El valor de la opción depende del valor del espacio de oficinas en el mercado local y de su volatilidad, que se puede estimar como la desviación estándar de la rentabilidad de una sociedad de inversiones inmobiliarias.

La gráfica 3.4 ilustra cómo la incertidumbre externa afecta a los activos de la empresa. La exposición, o sensibilidad, de los activos determina la magnitud y la forma de la incertidumbre para el valor de la inversión estratégica. A medida que en la inversión se van identificando y gestionando las opciones reales, el cono de la incertidumbre generado por los activos de la empresa se hace más vertical, aumentando el valor esperado de la inversión estratégica. La gráfica 3.4 pone de manifiesto cómo se puede utilizar el método de las opciones reales para modificar (pero no necesariamente eliminar) la exposición de los activos e incrementar el valor de las opciones reales que éstos contienen.



Gráfica 3.4: Las OR modifican la exposición a la incertidumbre externa.

3.5. Consecuencias de decisiones de inversión contingentes

Los directivos utilizan las opciones intuitivamente, como por ejemplo cuando aplazan la realización de un programa de inversión hasta que conocen los resultados de un proyecto piloto. La decisión de completar o no dicho programa es una decisión de inversión contingente, una decisión que depende de un resultado incierto. Es muy difícil valorar oportunidades de inversión que contienen decisiones contingentes futuras, pero se puede hacer mediante el método de valuación de opciones reales.

3.6. Cuándo utilizar Opciones Reales

El método de las opciones reales no siempre es necesario. Algunas decisiones no son complicadas (la inversión es o bien increíblemente valiosa o un auténtico desastre, y el análisis de las opciones reales no va a cambiar este resultado). Muchas decisiones entran dentro de un área que requiere un alto nivel de razonamiento y el método de las opciones reales puede ser en estos casos de gran utilidad.

Los instrumentos tradicionales funcionan muy bien cuando no hay ninguna opción, o cuando hay opciones pero la incertidumbre es muy baja. Los instrumentos tradicionales valoran correctamente las empresas calificadas como "vacas de dinero" (aquellas empresas cuyo flujo de caja es prácticamente constante o ligeramente inferior año tras año sin realizar ninguna inversión adicional) y aquellos productos que no tienen oportunidades de continuidad.

A pesar de que la incertidumbre está en todas partes, las consecuencias de la incertidumbre para algunos proyectos son lo suficientemente insignificantes como para poder ser ignoradas. Por ejemplo, la decisión de cerrar una planta de producción podría ser obvia, a pesar de haber cierta incertidumbre en relación a las consecuencias con respecto a los impuestos locales.

Es preciso aplicar un análisis de opciones reales en las siguientes situaciones:

- En el caso de una decisión de inversión contingente. Ningún otro método puede valuar correctamente este tipo de oportunidad.
- Cuando la incertidumbre es lo suficientemente importante como para que merezca la pena esperar a tener más información, evitando el tener que lamentarse por haber realizado inversiones irreversibles.
- Cuando parece que el valor se basa más en posibilidades de opciones de crecimiento que en el flujo de caja del momento.
- Cuando la incertidumbre es lo suficientemente importante coma para tener en cuenta la flexibilidad. Sólo el método de las opciones reales puede valuar correctamente inversiones en flexibilidad.
- Cuando se vayan a realizar actualizaciones de proyectos y correcciones de estrategias en el propio proceso de desarrollo de las mismas.

3.7. Estrategias de inversión

Algunas inversiones estratégicas comunes desde la perspectiva de las opciones reales son las siguientes.

3.7.1. Inversiones irreversibles

Las inversiones irreversibles requieren un buen análisis porque, una vez adjudicados los activos, ya no se puede modificar la inversión sin perder gran parte de su valor. Normalmente las inversiones irreversibles se suelen manejar aplazando un proyecto hasta que se consigue resolver una parte importante de la incertidumbre o bien descomponiendo la inversión en varias etapas. Por ejemplo, la irreversibilidad en la construcción de plantas de energía nuclear se debe a los costos de construcción y a la responsabilidad de hacerse cargo y tratar adecuadamente los vertidos. La opción de detener la construcción se puede utilizar para evitar la responsabilidad de hacerse cargo de los vertidos si viene garantizada por nueva información.

El valor de una inversión irreversible y de todas sus opciones asociadas es mucho mayor que el que reconocen los instrumentos de valoración tradicionales porque las opciones truncan las pérdidas. Los directivos que utilizan el método de las opciones reales realizarán más inversiones irreversibles, pero por fases más reducidas, y después de haber esperado la resolución de ciertas incertidumbres.

Riesgo y tiempo son las dos caras opuestas de la misma moneda, de modo que si el mañana no existe, no existe el riesgo. El tiempo transforma el riesgo, y la naturaleza del riesgo está determinada por el horizonte del tiempo: el futuro es el terreno de juego. El tiempo es más importante cuando las decisiones son irreversibles. Y muchas decisiones irreversibles se tienen que tomar en base a una información incompleta. La irreversibilidad domina las decisiones de todo tipo, desde las que implican decidir entre tomar el metro o un taxi, hasta las que implican construir una fábrica de automóviles en Brasil, cambiar de trabajo o declarar la guerra.

3.7.2. Inversiones flexibles

Las inversiones flexibles incorporan opciones al diseño inicial. Los equipos de producción flexibles permiten cambiar fácilmente una línea de producción en función de los productos; la opción de cambio forma parte de la inversión. Las opciones flexibles se pueden comprar con dicho equipo o bien se pueden crear mediante la inversión interna, como las prácticas de formación laboral de los fabricantes de automóviles japoneses, que permiten pasar rápidamente de un modelo a otro en la línea de producción.

Las compañías también pueden invertir para obtener flexibilidad en la dimensión del tiempo. Las oportunidades para acelerar la inversión pueden tener mucho valor cuando los que llegan antes son quienes ganan los mercados. Las oportunidades de desacelerar tienen valor cuando una parte importante de la incertidumbre se resuelve a lo largo del proceso de inversión, como por ejemplo en el caso de tener que esperar para ver qué política tecnológica va a ser adoptada por la mayoría.

Es difícil abordar el tema de la flexibilidad con los instrumentos de valoración tradicionales porque el valor de cambiar depende de su estatus actual. Una vez que haya cambiado, el valor de cambiar depende de su nuevo estatus y de las opciones de cambio que proporcione ese nuevo estatus. Los instrumentos tradicionales no pueden tener en cuenta el desarrollo de todas estas interdependencias.

Los directivos que utilicen el método de las opciones reales pueden elegir mejor entre las posibles alternativas para conseguir así flexibilidad (equipo, contratos u operaciones internas).

3.7.3. Inversiones con seguros

Las inversiones con seguros reducen la exposición a la incertidumbre. Invertir en un exceso de capacidad garantiza que el producto no se va a agotar si la demanda se dispara, pero con un costo o prima: el costo marginal de construir y desarrollar la capacidad por encima de las necesidades de producción inmediatas. En una planta la utilización de equipo estándar en lugar de un equipo hecho a la medida de las necesidades de la misma crea un seguro. Si hay que cerrar la planta, el equipo estándar tiene más posibilidades de poder ser recuperado.

Lo asegurado sólo se recupera en el caso de determinados resultados, por lo que los instrumentos tradicionales que demuestran la misma recuperación en todos los resultados no pueden valuar el riesgo del seguro. (El seguro tiene una función de retorno truncada, pero los instrumentos tradicionales sólo incorporan funciones de retorno lineales.) Los directivos que utilicen el método de las opciones reales pueden valuar el seguro y comprobar en qué caso el valor es superior al costo. Comprar estos seguros del riesgo modificando los activos reales o los contratos a largo plazo puede tener un costo muy elevado.

3.7.4. Inversiones modulares

Las inversiones modulares crean opciones a través del diseño del producto. Cada módulo se diferencia específicamente de los demás, siendo posible cambiar y revaluar cada uno de ellos independientemente. Un producto modular se puede considerar como una cartera de opciones a revaluar. Los diseños modulares también se pueden utilizar para preservar una opción flexible, como por ejemplo cuando el diseño de un elemento en particular se deja abierto hasta el último minuto. El método de las opciones reales pone de manifiesto las contrapartidas relacionadas con los diseños modulares, hay que valorar si compensa afrontar los elevados costos de desarrollo de la estructura modular con tal de obtener las opciones creadas por los mismos.

3.7.5. Inversiones plataforma

Las inversiones plataforma o en proyectos crean valiosas oportunidades de inversión contingentes derivadas de las mismas. La inversión en I+D es la clásica inversión plataforma o inversión en un proyecto porque su valor depende de los productos que lanza la empresa (a partir de esa investigación), de la continuidad de su desarrollo o comerciables en el mercado. Una inversión inicial en diseño modular es una inversión plataforma que puede llevar a tener oportunidades derivadas de revaluar determinados módulos específicos. Los directivos que utilicen el método de las opciones reales aumentan sus inversiones plataforma, algunas veces en una cantidad significativa, porque los instrumentos tradicionales de valuación subvalúan considerablemente este tipo de inversiones.

3.7.6. Inversiones de aprendizaje

Las inversiones de aprendizaje se realizan para obtener información que de otro modo es imposible lograr. Por ejemplo, la prospección petrolífera constituye una inversión de aprendizaje porque genera información geológica. Esta información no se logra sin la inversión en la prospección. Las inversiones de aprendizaje se utilizan en industrias que deben hacer frente a diversos tipos de incertidumbre, y su valor está determinado por el resultado simultáneo de todas las fuentes. Por ejemplo, el valor de una inversión en una prospección petrolífera depende de la nueva información geológica y de la evolución de los precios del petróleo. Si los precios del petróleo caen, los datos geológicos positivos tienen mucho menos valor. Los directivos que utilicen el método de las opciones reales también las abandonan rápidamente si es necesario.

3.7.7. Opciones Reales contra los métodos tradicionales

La intención del presente trabajo es mostrar que el uso del método de las opciones reales cambia la forma de pensar o la forma de considerar las consecuencias de la incertidumbre. Utilizando este método para adoptar una postura frente a una inversión estratégica, se obtienen ideas para otras inversiones sin tocar una sola cifra. El método de las opciones reales se convierte en un marco de referencia, que permite reinterpretar las medidas y los análisis existentes.

Un ejemplo de este cambio en el marco de referencia tiene que ver con la naturaleza del riesgo. En el método de las opciones reales, el punto central es el riesgo total, todo el abanico de resultados posibles. Con los instrumentos financieros tradicionales, como el análisis del Valor Presente Neto, el tipo de descuento se ajusta en función del riesgo inherente a la actividad de la inversión estratégica. Este riesgo forma parte del riesgo total y es la correlación existente entre el valor de un activo y un sistema económico más amplio. Por ejemplo, el riesgo sistemático en la expansión de una planta química es la correlación existente entre el valor de la planta y un índice del mercado de valores más amplio, más general, como el índice S&P 500 o el IBEX. Muchos directivos, frustrados con estos métodos de valuación de riesgos tan incompletos, responden con un aumento de su tasa de actualización. Esta respuesta lleva implícitos dos tipos de problemas: los instrumentos tradicionales no hacen que los directivos piensen en lo que realmente tienen que pensar, y los ajustes que realizan aumentan la subjetividad de los resultados. Por el contrario, el método de las opciones reales toma como punto central el riesgo total, que considera la totalidad de los resultados que preocupan a los directivos.

Capítulo 4

Métodos de Valuación

A continuación se presenta el marco teórico así como las hipótesis del modelo para desarrollar y analizar el método binomial de Ross Cox & Rubenstein para la valuación de opciones. Posteriormente se expone brevemente el método de Black & Scholes para el mismo fin y la convergencia del método binomial a éste.

4.1. Factores de influencia sobre el monto de la prima

De acuerdo a las características de las opciones, existen métodos que permiten calcular el valor de los contratos de opciones, para lo cual se consideran los factores siguientes y su influencia en el precio de las opciones.

4.2. Factores exógenos

Son los que se determinan por el mercado y son ajenos a las características específicas de los contratos.

4.2.1. Precio subyacente

Es el precio actual del bien subyacente en el mercado. El cambio en el precio del bien subyacente en el mercado tiene influencia marcada en el precio de las opciones debido a que el flujo de efectivo depende directamente de la diferencia entre el precio subyacente y el precio pactado en los contratos.

4.2.2. Volatilidad Subyacente

Representa el potencial que posee el bien subyacente para experimentar cambios dentro de cierto periodo.

El aumento en la probabilidad de cambio en el precio subyacente genera el aumento en el precio de las opciones debido a que a mayor volatilidad, la probabilidad de cambio, durante su vigencia, es mayor, incrementando el riesgo de pérdida para los emisores, mientras que los poseedores suponen alguna probabilidad mayor de ejercer los contratos y obtener beneficios.

Considerando a M_i y a R_i como el precio del subyacente y el rendimiento en el instante i respectivamente, la volatilidad histórica en el intervalo $[i-1, i]$ se representa mediante la ecuación siguiente:

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} R_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} R_i\right)^2\right]}$$

Donde $P_r = \frac{M_i}{M_{i-1}}$ y $R = ln(P_r) = ln\left(\frac{M_i}{M_{i-1}}\right)$.

Entonces, la volatilidad subyacente durante el periodo de estudio t es:

$$\sigma = \hat{s}\sqrt{t}$$

Donde t está en función del intervalo $[i-1, i]$. De tal modo que si éste es mensual y se requiere calcular la volatilidad anual, entonces $t = 12$.

4.2.3. Tasa de interés libre de riesgo

Es el rendimiento que proporciona alguna inversión ausente de riesgo. En nuestro país, los poseedores de Certificados de la Tesorería (CETE) tienen una inversión libre de riesgo porque el Gobierno ampara y da garantía del título a los poseedores.

4.3. Factores endógenos

Se refieren a las características específicas de los contratos, esto es, son las características que los contratos aportan.

4.3.1. Fecha de vencimiento

Es el día hábil en que expira el plazo de los contratos conforme a las condiciones generales de contratación.

Las opciones son bienes que se deprecian a través del tiempo, por lo cual, entre mayor sea el plazo hasta la fecha de vencimiento, más son las oportunidades de que los contratos americanos se ejerzan y generen beneficios a los poseedores, por lo cual, las opciones americanas son más valiosas cuando el plazo hasta la fecha de vencimiento aumenta.

Las opciones europeas no necesariamente son más valiosas cuando el plazo hasta la fecha de vencimiento aumenta, sin embargo ya que las opciones se deprecian con el paso del tiempo y solo pueden ejercerse en la fecha de vencimiento, el tiempo influye en el costo de las opciones. En el caso donde no se esperan cambios debidos a algún evento conocido en la fecha o periodo específico dentro de la vigencia de los contratos, las opciones europeas también son más valiosas cuando el plazo hasta la fecha de vencimiento aumenta.

4.3.2. Precio de liquidación

Es el precio de referencia por unidad de activo subyacente y con base en el cual se realiza la liquidación de los contratos en la fecha de vencimiento.

Las opciones de compra decrecen en valor, asintóticamente hasta cero, conforme el precio de liquidación aumenta y aumentan en valor conforme el precio de liquidación disminuye.

Las opciones de venta aumentan su valor conforme el precio de liquidación aumenta y decrecen en valor, asintóticamente hasta cero, conforme el precio de liquidación disminuye.

4.4. Hipótesis del método de valuación

La valuación mediante el enfoque en el que obtener beneficios por la compra y/o venta de activos sin asumir algún riesgo debe ser considerada para evitar oportunidades de las cuales pueden tomar ventaja algunos participantes del mercado.

Considerando que los participantes del mercado están conscientes y preparados para aprovechar las ventajas en las oportunidades de arbitraje[1], se consideran las hipótesis siguientes:

1. No existen impuestos y/o costos de transacción.
2. Se presta y se toma prestado a la misma tasa de interés libre de riesgo.
3. Todos los activos son completamente divisibles.
4. Se puede emitir, sin límite, contratos al descubierto.
5. Las transacciones se pueden realizar simultáneamente sin influir en el mercado.

Si estas hipótesis no se respetan, los inversionistas pueden obtener beneficios sin riesgo comprando el bien subyacente y vendiendo las opciones de compra o emitiendo opciones de venta e invirtiendo los ingresos a la tasa de interés libre de riesgo.

Se debe suponer que la tasa de interés libre de riesgo es positiva, de otra forma es preferible no invertir.

[1] En el mercado de opciones, el arbitraje implica una estrategia que combina la compra de un contrato que se considera subyacente y la venta de otro considerado sobrevaluado, ambos vinculados a dos activos subyacentes relacionados; esperando obtener un beneficio libre de riesgo. Glosario del MexDer.

Se propone la notación siguiente:

M	Precio subyacente
σ	Volatilidad subyacente
i	Tasa de interés libre de riesgo
T	Tiempo de vigencia
t	Tiempo transcurrido
T - t	Tiempo remanente
S	Precio de liquidación
c	Valor de la opción europea de compra
p	Valor de la opción europea de venta
C	Valor de la opción americana de compra
P	Valor de la opción americana de venta

4.5. Valor intrínseco

Relación entre el precio subyacente y el precio de liquidación. Es el máximo entre cero y el valor de las opciones si éstas fueran ejercidas inmediatamente.

Es el valor de liquidación que tienen los contratos en algún momento dado.

Valor intrínseco de las opciones de compra:

$$I_c = \text{máx}\{M - S, 0\}$$

Valor intrínseco de las opciones de venta:

$$I_p = \text{máx}\{S - M, 0\}$$

4.6. Valor extrínseco

Diferencia entre el valor de las opciones y el valor intrínseco, también es conocido como valor en el tiempo. El valor extrínseco está determinado por la diferencia entre la curva del valor de los contratos y la curva del valor intrínseco.

4.7. Variable aleatoria

Es la relación donde a cada punto en el espacio muestra[2] le corresponde un resultado numérico, se define esta relación como una función en el espacio muestra. Esta función es conocida como variable aleatoria, variable estocástica, función aleatoria o función estocástica. El término función aleatoria es más apropiado ya que la variable independiente es un punto en el espacio muestra.

$$X : \omega \in \Omega \rightarrow \Re$$

4.8. Distribución Bernoulli

Son ensayos repetidos e independientes en los que sólo hay dos resultados posibles en cada ensayo y sus probabilidades son las mismas en todos los ensayos.

Al realizar el experimento donde a cada evento se le denomina ensayo, cada ensayo tiene una probabilidad de éxito o de fracaso asociada. En ocasiones la probabilidad no cambia de una prueba a la siguiente. A estas pruebas se les llama independientes y se conocen como pruebas *Bernoulli*, quien las investigó a finales del siglo XVII.

Se denota p y q a las dos probabilidades, donde p es la probabilidad de éxito y q la probabilidad de fracaso. Por definición p y q son positivos y complementarios. Esto es, $p+q=1$. La variable aleatoria X se distribuye *Bernoulli*, si solo si, la función de densidad está dada por:

$$f_X(x,p) = P(X=x) = \begin{cases} p^x q^{1-x} & x = 0,1 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

Donde $0 \leq p \leq 1$.

[2]Conjunto que consiste en todos los resultados de un experimento aleatorio y cada uno de los resultados se denomina punto muestra. Cada resultado posible del experimento queda completamente descrito por un y solamente un punto muestra.
Feller William, Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones. Volumen I. Primera edición. ISBN 968-18-0721-9. Editorial Limusa.

El espacio muestra de n ensayos *Bernoulli* contiene 2^n puntos de n símbolos p y q, donde cada punto representa el resultado posible del experimento.

Como los ensayos son independientes, las probabilidades se multiplican. En otras palabras, la probabilidad de obtener k éxitos de n ensayos es:

$$\underbrace{pp\cdots p}_{k}\underbrace{qq\cdots q}_{n-k} = p^k q^{n-k}$$

4.9. Distribución Binomial

Es el número total de éxitos obtenidos en la sucesión de n ensayos *Bernoulli*, al margen del orden en que se presenten.

El número de éxitos puede ser $0,1,2,...,n$ y el primer problema consiste en determinar las probabilidades correspondientes. El evento de n ensayos donde resultan k éxitos y $n-k$ fracasos, puede ocurrir del mismo número de maneras que se distribuyen k veces p en n ensayos. Esto es, el evento contiene a todas las combinaciones de n ensayos, donde se tienen k éxitos y $n-k$ fracasos.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Y por definición, cada punto tiene probabilidad $p^k q^{n-k}$.

Sea $b(k,n,p)$ la probabilidad de que al realizar n ensayos *Bernoulli*, con probabilidad p de obtener éxito y $q = 1-p$ de obtener fracaso, se logren k éxitos y $n-k$ fracasos.

La variable aleatoria X se distribuye Binomial, si solo si, la función de densidad está dada por:

$$f_X(x,n,p) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & x = 0,1,\ldots,n \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

4.10. El precio subyacente como proceso estocástico

Los activos financieros siguen procesos estocásticos de variable continua y tiempo continuo.

La expresión proceso estocástico se usa cuando se introduce el parámetro de tiempo, donde el desarrollo futuro depende únicamente del estado actual y no del histórico ni de la forma en la que se haya alcanzado el estado actual del proceso. Los procesos estocásticos son familias de variables aleatorias $\{T_n | 0 \leq n\}$ y pueden definirse de tiempo continuo o discreto.

En los procesos estocásticos sólo intervienen cierta cantidad numerable de estados y dependen del parámetro tiempo, esto es, los cambios ocurren en épocas fijas $t = 0, 1, 2,$.... De aquí que la variable cuyo valor evoluciona a través del tiempo en forma aleatoria sigue un proceso estocástico.

El punto n en el espacio parametral T, donde para cada $n \in N$, T_n es un punto en el espacio de estados M, siendo M_t la posición en el instante t. El registro de estas trayectorias se conoce como realización del proceso.

Los activos financieros siguen un proceso estocástico de variable discreta, ya que los cambios a través de la jornada de operaciones son en pesos o en centavos, sin embargo son tratados como variable continua para que el análisis sea más versátil.

El proceso tiene un parámetro de tiempo discreto ya que el cambio es de referencia diaria, esto es, los activos tienen precios al cierre, sin embargo los precios varían aún durante el cierre del mercado, esto se observa ya que los precios al cierre son, por lo regular, diferentes a los de apertura, motivo por el cual el parámetro tiempo es considerado como continuo.

4.11. Caminata aleatoria simple

El proceso estocástico como la trayectoria del precio subyacente a través del tiempo.

Sea $n = 0$ y el precio subyacente M, cuando el tiempo transcurre hasta que $n = 1$, el precio subyacente puede aumentar o dismuniur. Sean $0 < d < 1 < a$, entonces si $n = 1$, el precio subyacente aumenta de M a Ma o disminuye de M a Md. Para los aumentos del precio subyacente existe la probabilidad asociada π, mientras que para las disminuciones del precio subyacente existe la probabilidad asociada $\theta = 1 - \pi$.

Sea X_n el estado de pérdidas y ganancias del precio subyacente en el n-ésimo periodo, esto es, el movimiento del precio subyacente del estado T_{n-1} al T_n. Con probabilidad π de aumentar y $\theta = 1 - \pi$ de disminuir, entonces, el rendimiento del bien subyacente en el n-ésimo periodo es $\sum_{k=1}^{n} X_k$, donde las X_k son variables aleatorias mutuamente independientes y con la misma distribución. De esta forma, el estado de resultados y la evolución del precio subyacente es la secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con probabilidades $\pi = P(X_n = Ma^x d^{n-x-1}(a-1))$ y $\theta = P(X_n = Ma^x d^{n-x-1}(d-1))$ de aumentar o dismunuir respectivamente. Donde $0 \leq x \leq n$ y $T_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Si el precio subyacente termina con valor de mercado nulo, entonces $T_n = 0$.

Por lo tanto el proceso estocástico $\{T_n \,|\, 0 \leq n\}$ es llamado caminata aleatoria simple.

El proceso $T_n^M = T_n + M$ es la caminata aleatoria simple con precio subyacente inicial M, esto es, cuando X_n es la trayectoria del bien subyacente en el n-ésimo periodo, entonces $T_0^M = M_0$ es el precio subyacente en el periodo inicial y $T_n^M = M_n$ es el precio subyacente en el periodo n.

Partiendo de T_0^M, el precio subyacente es multiplicado en cada ocasión que aumenta o disminuye y suponiendo que x es el número de ocasiones que el precio subyacente aumenta durante los n periodos, entonces, en el n-ésimo periodo el precio subyacente es Mad^{n-x}.

Recordando el número de combinaciones de x incrementos en n periodos que puede tener el precuo subyacente para alcanzar el valor y en el periodo n se tiene que:

$$f_X(x,n,\pi) = P(T_n^M = M_n) = \begin{cases} \binom{n}{x}\pi^x\theta^{n-x} & x = 0,1,\ldots,n \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

Por lo tanto, el precio subyacente puede aproximarse mediante el proceso Binomial de periodos discretos.

4.12. Método binomial

Supone que al final de cada periodo el precio subyacente (*M*) puede tener solo dos posibles valores derivados del valor anterior. A esta hipótesis se le llama supuesto binomial.

El método está basado en la suma finita de variables aleatorias binomiales independientes e idénticamente distribuidas empleadas en los procesos de caminatas aleatorias. El precio subyacente futuro es modelado mediante el proceso estocástico, el cual considera la volatilidad subyacente. Ya modelado el precio subyacente futuro, para conocer el precio de las opciones se emplea la programación dinámica estocástica y por medio del principio de *Bellman* se resuelve el problema de maximizar el flujo de efectivo en valor presente.

Para representar las trayectorias posibles que puede seguir el precio subyacente, el método considera la no existencia de oportunidades de arbitraje para ningún inversionista y las hipótesis siguientes:

1. No se consideran diferenciales entre los precios de compra y venta, comisiones, impuestos y costos de operación.

2. Los bienes subyacentes son divisibles, esto es, se pueden comprar y vender cualquier cantidad real de todo bien subyacente.

3. Se pueden comprar o vender bienes subyacentes al descubierto, esto es, se pueden comprar y vender los bienes subyacentes sin poseerlos.

4. No se consideran depósitos de garantía en la compra y venta de opciones al descubierto.

5. La tasa de interés libre de riesgo se aplica de igual forma a los deudores y acreedores.

6. Pueden realizarse las operaciones simultáneamente.

7. Las operaciones no afectan el comportamiento del mercado.

8. El precio subyacente evoluciona como un proceso binomial.

9. El bien subyacente no otorga dividendos durante el periodo de vigencia.

4.13. Método binomial de un periodo

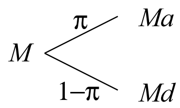
Al final del periodo se tienen dos posibles valores del precio subyacente.

Sea un bien subyacente con precio de mercado M, una opción europea de compra con valor c emitida sobre el bien subyacente y T el tiempo de vigencia de la opción. Durante este periodo el precio subyacente puede variar, pero en la fecha de vencimiento aumenta a Ma con probabilidad π o disminuye a Md con probabilidad θ = 1 - π, donde $0 < d < 1 < a$.

Al modelar el precio subyacente se obtienen los dos resultados siguientes:

1. Si el precio subyacente aumenta a Ma, entonces el valor de la opción en la fecha de vencimiento es $c_1^a = \text{máx}\{Ma - S, 0\}$.
2. Si el precio subyacente disminuye a Md, entonces el valor de la opción en la fecha de vencimiento es $c_1^d = \text{máx}\{Md - S, 0\}$.

El precio subyacente modelado como un proceso binomial se muestra en la gráfica siguiente:



Gráfica 4.1: Árbol binomial del precio subyacente de un periodo

Se conoce el valor de la opción en la fecha de vencimiento, para conocer el valor presente es necesario crear una opción europea de compra sintética.

La opción sintética es la cartera que consta de:

1. La posición larga de Δ bienes subyacentes objeto de la cobertura.
2. La posición corta de la opción idéntica a la que se desea valuar.

Para conocer el valor presente de la opción se debe conocer el valor de Δ que mantiene a la cartera libre de riesgo, esto es, la cartera debe redituar la tasa de interés libre de riesgo.

En la fecha de vencimiento se tienen las dos situaciones siguientes:

1. Si aumenta el precio subyacente a Ma, entonces el valor de la cartera en la fecha de vencimiento es $Ma\Delta - c_1^a$.

2. Si disminuye el precio subyacente a Md, entonces el valor de la cartera en la fecha de vencimiento es $Md\Delta - c_1^d$.

Se desea que la cartera tenga el valor equivalente a lo que paga la opción sintética en la fecha de vencimiento, entonces, al aumentar o disminuir el precio subyacente, el valor de la cartera debe ser el mismo. Por lo que:

$$Ma\Delta - c_1^a = Md\Delta - c_1^d \Rightarrow \Delta(Ma - Md) = c_1^a - c_1^d$$

Por lo tanto:

$$\Delta = \frac{c_1^a - c_1^d}{Ma - Md} \tag{4.1}$$

El número de activos que debe tener la cartera para estar libre de riesgo y la razón de cambio en el precio de la opción con respecto al cambio en el precio subyacente es Δ.

Cuando el precio subyacente aumenta, el valor presente de la cartera es $(Ma\Delta - c_1^a)e^{-iT}$, mientras que el día de la emisión el valor de la opción sintética es $M\Delta - c$. Entonces:

$$M\Delta - c = (Ma\Delta - c_1^a)e^{-iT}$$

Por lo cual:

$$c = M\Delta - (Ma\Delta - c_1^a)e^{-iT} \tag{4.2}$$

Sustituyendo (4.1) en (4.2) se obtiene el desarrollo siguiente:

$$c = M\left(\frac{c_1^a - c_1^d}{Ma - Md}\right) - \left[Ma\left(\frac{c_1^a - c_1^d}{Ma - Md}\right) - c_1^a\right]e^{-iT}$$

$$c = \frac{c_1^a - c_1^d}{a - d} + \left[\frac{ac_1^d - dc_1^a}{a - d}\right]e^{-iT}$$

Por lo tanto:

$$c = \left[\frac{c_1^a(e^{-iT} - d) + c_1^d(a - e^{-iT})}{a - d} \right] e^{-iT} \tag{4.3}$$

Este resultado es independiente de la probabilidad de ocurrencia de los movimientos en el precio subyacente.

4.13.1. Valuación en el mundo neutral al riesgo

Si π es la probabilidad de que el precio subyacente aumente, entonces el rendimiento esperado por la inversión del bien subyacente es equivalente a la tasa de interés libre de riesgo. Principio general para la valuación de opciones.

El precio subyacente esperado en el instante T está dado por:

$$E(M_T) = Ma\pi + Md(1 - \pi) \tag{4.4}$$

El rendimiento esperado del bien subyacente durante periodo T es quivalente a la tasa de interés libre de riesgo. Por lo cual el valor esperado del precio subyacente al final del periodo T es Me^{iT}. Entonces:

$$E(M_T) = Me^{iT} \tag{4.5}$$

Al igualar (4.4) y (4.5) se obtiene lo siguiente:

$$e^{iT} = a\pi + d(1 - \pi) \tag{4.6}$$

Por lo tanto:

$$\pi = \frac{e^{iT} - d}{a - d} \tag{4.7}$$

$$\theta = 1 - \pi = \frac{a - e^{iT}}{a - d} \tag{4.8}$$

Ya que $0 \leq \pi \leq 1 \Rightarrow 0 \leq e^{iT} - d \leq a - d \Rightarrow d \leq e^{iT} \leq a$.

Las probabilidades π y θ son martingalas o probabilidades neutrales al riesgo. Por lo cual, al sustituir (4.7) y (4.8) en (4.3) se obtiene que el valor de la opción europea de compra es:

$$c = [c_1^a \pi + c_1^d (1 - \pi)] e^{-iT} \tag{4.9}$$

El proceso estocástico supuesto para modelar el precio subyacente implica que la varianza del cambio proporcional en el precio subyacente durante el periodo T es $\sigma^2 T$.

Debido a que $Var(M_T) = E(M_T^2) - E^2(M_T)$, se desarrolla lo siguiente:

$$\sigma^2 T = E[(a\pi + d(1-\pi))^2] - E^2[a\pi + d(1-\pi)]$$
$$\sigma^2 T = (a^2 - 2ad + d^2)\pi(1-\pi)$$

Por lo cual:

$$\sigma^2 T = (a-d)^2 \pi (1-\pi) \tag{4.10}$$

Sea $u = e^{iT}$. Entonces al sustituir u en (4.7) y (4.8) se obtiene:

$$\pi = \frac{u-d}{a-d} \tag{4.11}$$

$$\theta = 1 - \pi = \frac{a-u}{a-d} \tag{4.12}$$

Y al sustituir (4.11) y (4.12) en (4.10) se obtiene:

$$\sigma^2 T = (u-d)(a-u) \tag{4.13}$$

Se tiene un sistema de dos ecuaciones (4.6) y (4.13) y tres incógnitas: π, a y d. Por lo cual al anexar una tercera restricción, $ad = 1$, propuesta por *Cox, Ross & Rubinstein* se obtienen a y d mediante la aproximación siguiente.

Sean $a = e^{\sigma\sqrt{T}}$ y $d = e^{-\sigma\sqrt{T}}$, entonces al expresar a y d mediante series de Taylor, ecuación (4.14) y al expresar $u = e^{iT}$ mediante la ecuaución (4.15):

$$f(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^k f^k(0)}{k!} \tag{4.14}$$

$$f(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k f^k(0)}{k!} \tag{4.15}$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} a = {} & \frac{\sigma^0}{0!}\left[e^{\sigma\sqrt{T}}\right]_{\sigma=0} + \frac{\sigma^1}{1!}\left[e^{\sigma\sqrt{T}}\sqrt{T}\right]_{\sigma=0} + \frac{\sigma^2}{2!}\left[e^{\sigma\sqrt{T}}T\right]_{\sigma=0} + \\ & \frac{\sigma^3}{3!}\left[e^{\sigma\sqrt{T}}T^{\frac{3}{2}}\right]_{\sigma=0} + \frac{\sigma^4}{4!}\left[e^{\sigma\sqrt{T}}T^2\right]_{\sigma=0} + \ldots \\ = {} & 1 + \sigma\sqrt{T} + \sigma^2\frac{T}{2} + \sigma^3\frac{T^{\frac{3}{2}}}{6} + \sigma^4\frac{T^2}{24} + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d = {} & \frac{\sigma^0}{0!}\left[e^{\sigma\sqrt{T}}\right]_{\sigma=0} - \frac{\sigma^1}{1!}\left[e^{\sigma\sqrt{T}}\sqrt{T}\right]_{\sigma=0} + \frac{\sigma^2}{2!}\left[e^{\sigma\sqrt{T}}T\right]_{\sigma=0} - \\ & \frac{\sigma^3}{3!}\left[e^{\sigma\sqrt{T}}T^{\frac{3}{2}}\right]_{\sigma=0} + \frac{\sigma^4}{4!}\left[e^{\sigma\sqrt{T}}T^2\right]_{\sigma=0} - \ldots \\ = {} & 1 - \sigma\sqrt{T} + \sigma^2\frac{T}{2} - \sigma^3\frac{T^{\frac{3}{2}}}{6} + \sigma^4\frac{T^2}{24} - \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{iT} = {} & \frac{T^0}{0!}\left[e^{iT}\right]_{T=0} + \frac{T^1}{1!}\left[e^{iT}i\right]_{T=0} + \frac{T^2}{2!}\left[e^{iT}i^2\right]_{T=0} + \\ & \frac{T^3}{3!}\left[e^{iT}i^3\right]_{T=0} + \frac{T^4}{4!}\left[e^{iT}i^4\right]_{T=0} + \ldots \\ = {} & 1 + iT + \frac{i^2T^2}{2} + \frac{i^3T^3}{6} + \frac{i^4T^4}{24} + \ldots \end{aligned}$$

De tal forma que al ignorar los términos de orden mayor que T (orden 1), se obtienen los resultados siguientes:

$$
\begin{aligned}
a &= 1+\sigma\sqrt{T}+\sigma^2\frac{T}{2} \\
d &= 1-\sigma\sqrt{T}+\sigma^2\frac{T}{2} \\
e^{iT} &= 1+iT
\end{aligned}
$$

Los cuales satisfacen el sistema de ecuaciones (4.6), (4.13) y $ad = 1$ al ignorar los términos de orden mayor que T, por lo tanto:

$$a = e^{\sigma\sqrt{T}} \tag{4.16}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{T}} \tag{4.17}$$

El método binomial para valuar opciones sigue el principio de la programación dinámica o ecuación de *Bellman* (maximizando el flujo de efectivo o payoff en valor presente), en el que se conoce el valor de la opción en la fecha de vencimiento y este valor es el que determina el valor presente del contrato mediante el algoritmo de inducción regresiva.

4.13.2. Principio de Bellman

La decisión es óptima si las decisiones del futuro constituyen la decisión óptima basándose en las decisiones precedentes. Al usar el principio de la programación dinámica[3] o ecuación de *Bellman* para maximizar el flujo de efectivo en valor presente en el horizonte finito $[0,t]$, se resuelve:

[3] Técnica matemática que se utiliza para resolver problemas de optimización basada en la secuencia de decisiones que cumplen con el principio de *Bellman* y tiene una definición recursiva de la solución. Sea $U(X^{\Delta}(t))$ la función de utilidad en el instante t, $X_k(t)$ la ganancia en el periodo t en el estado k, $\Delta = \{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_t\}$ la estrategia óptima en el periodo $[0,t]$ y Δ_i la estrategia óptima en el periodo $[i-1,i)$, entonces la función de valor en el periodo t es:

$$V(t,x) = \sup_{\Delta} E\left[U\left(X^{\Delta}(t+1)\right)|X_k(t)\right]$$

$$\sup_{\Delta} E\left[U\left(X^{\Delta}(t)\right)\right]$$

Sea $V(t,x)$ la función de valor (utilidad indirecta) y $X(t)$ el valor máximo de la ganancia, de tal forma que:

$$V(t,x) = \sup_{\Delta_{t+1}} E\left[U\left(X^{\Delta_{t+1}}(t)\right)|X(t)\right]$$

Entonces el principío de la programación dinámica se expresa mediante la ecuación siguiente:

$$V(t,x) = \sup_{\Delta_{t+1}} E\left[V\left(t+1, X^{\Delta_{t+1}}(t+1)\right)|X(t)\right]$$

El principio de la programación dinámica reduce problemas multiperiodo a problemas de un periodo usando el algoritmo de inducción regresiva. Modelando el precio subyacente como en la gráfica 4.1 y empleando el algoritmo de inducción regresiva se tiene lo siguiente:

$$V(0,x) = \sup_{\Delta_1} E\left[V\left(1, X^{\Delta_1}(1)\right)|X(0)\right]$$

Considerar la notación siguiente:

X_0	Riqueza en el periodo inicial
X_1^a	Ganancia cuando el precio subyacente incrementa de M_0 a M_1^a
X_1^d	Ganancia cuando el precio subyacente disminuye de M_0 a M_1^d

Entonces:

$$V_0 = \sup_{\Delta_1} E\left[\sup_{\Delta_1} E\left[U\left(X_1^{\Delta_1}\right)\right]|X_0\right]$$

$$V_0 = M_0\Delta_1 + (V_1^a - M_1^a\Delta_1)e^{-iT}$$

$$V_0 = \left[V_1^a\pi + V_1^d(1-\pi)\right]e^{-iT} \tag{4.18}$$

4.14. Método binomial de n periodos

Se tienen los siguientes supuestos:

1. Supone que al final de cada periodo el precio subyacente puede tener solo dos posibles valores, por lo que al dividir el tiempo de vencimiento T en n periodos de igual duración.
   Entonces existen $n+1$ posibles valores en el precio subyacente y $n+1$ payoffs en la fecha de vencimiento.
2. El modelo supone que la tasa de interés libre de riesgo es constante.

Sea un bien subyacente con precio de mercado M, una opción europea con valor c, emitida sobre el bien subyacente y tiempo de vencimiento T dividido en dos periodos de igual duración.

En el momento de emitir la opción el precio subyacente es M, entonces $T_0^M = M$ y el valor de la opción es $T_0^c = c$.

Al término del primer periodo el precio subyacente evoluciona siguiendo el proceso Binomial, por tanto aumenta de M a Ma con probabilidad π o disminuye de M a Md con probabilidad $\theta = 1 - \pi$, donde $0 < d < 1 < a$.

Sea T_1^M el precio subyacente al final del primer periodo, entonces:

1. Si el precio subyacente aumenta, entonces $T_1^M = M_1^a = Ma$.
2. Si el precio subyacente disminuye, entonces $T_1^M = M_1^d = Md$.

Sea T_1^c el precio de la opción al final del primer periodo. Entonces:

1. Si el precio subyacente aumenta, entonces $V_1^a = c_1^a$.
2. Si el precio subyacente disminuye, entonces $V_1^d = c_1^d$.

Donde $c_1^a = \text{máx}\{Ma - S, 0\}$ y $c_1^d = \text{máx}\{Md - S, 0\}$.

Por lo que al finalizar el primer periodo se tienen dos precios subyacentes posibles y en consecuencia dos precios de la opción.

Al considerar el caso donde el precio subyacente es $M_1^a = Ma$, entonces al término del segundo periodo el precio subyacente evoluciona siguiendo el proceso Binomial.

Por lo tanto el precio subyacente aumenta de Ma a Ma^2 con probabilidad π o disminuye de Ma a Mad con probabilidad $\theta = 1 - \pi$.

Análogamente a T_1^M, sea T_2^M el precio subyacente al final del segundo periodo, dado que al final del primer periodo el precio subyacente es Ma. Entonces:

1. Si el precio subyacente aumenta, entonces $T_2^M = M_2^{a_2} = Ma^2$.
2. Si el precio subyacente disminuye, entonces $T_2^M = M_2^{ad} = Mad$.

Sea T_2^c el precio de la opción al final del segundo periodo, dado que al final del primer periodo el precio subyacentes es Ma. Entonces:

1. Si el precio subyacente aumenta, entonces $V_2^{a_2} = c_2^{a_2}$.
2. Si el precio subyacente disminuye, entonces $V_2^{ad} = c_2^{ad}$.

Donde $c_2^{a_2} = \text{máx}\left\{Ma^2 - S, 0\right\}$ y $c_2^{ad} = \text{máx}\{Mad - S, 0\}$.

Al considerar el caso donde el precio subyacente es Md, entonces al término del segundo periodo el precio subyacente evoluciona siguiendo el proceso Binomial.

Por lo tanto el precio subyacente aumenta de Md a Mda con probabilidad π o disminuye de Md a Md^2 con probabilidad $\theta = 1 - \pi$.

Sea T_2^M el precio subyacente al final del segundo periodo, dado que al final del primer periodo el precio subyacente es Md. Entonces:

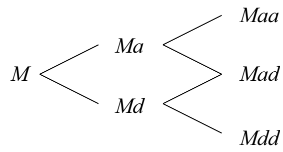
1. Si el precio subyacente aumenta, entonces $T_2^M = M_2^{da} = Mda$.
2. Si el precio subyacente disminuye, entonces $T_2^M = M_2^{d_2} = Md^2$.

Sea T_2^c el precio de la opción al final del segundo periodo, dado que al final del primer periodo el precio subyacente es Md. Entonces:

1. Si el precio subyacente aumenta, entonces $V_2^{da} = c_2^{da}$.
2. Si el precio subyacente disminuye, entonces $V_2^{d_2} = c_2^{d_2}$.

Donde $c_2^{da} = \text{máx}\{Mda - S, 0\}$ y $c_2^{d_2} = \text{máx}\left\{Md^2 - S, 0\right\}$.

La gráfica siguiente representa la evolución del precio subyacente durante los dos periodos en los que se ha dividido el tiempo de vigencia.



Gráfica 4.2: Árbol binomial del precio subyacente de dos periodos

Al modelar el precio subyacente como en el árbol binomial de la gráfica 4.1 y empleando el algoritmo de inducción regresiva se tiene lo siguiente:

$$V_1^a = \sup_{\Delta_2} E\left[V_2^a | X_1\right]$$

Entonces:

$$V_1^a = M_1^a \Delta_2 + (V_2^{a_2} - M_2^{a_2} \Delta_2) e^{-i\delta T}$$

$$V_1^a = \left[V_2^{a_2} \pi + V_2^{ad}(1-\pi)\right] e^{-i\delta T}$$

Se conoce el valor de la opción en la fecha de vencimiento, entonces para conocer el valor $V_1^a = c_1^a$ al final del primer periodo cuando el precio subyacente es $M_1^a = Ma$ es necesario crear una opción europea de compra sintética.

La opción sintética es la cartera que consta de:

1. La posición larga de Δ bienes subyacentes objeto de la cobertura.
2. La posición corta de la opción idéntica a la que se desea evaluar.

Se debe conocer el valor de Δ que mantiene a la cartera libre de riesgo para conocer el valor de la opción c_1^a al final del primer periodo, en otras palabras, la cartera debe redituar la tasa de interés libre de riesgo.

Sea VC_T el valor de la cartera en la fecha de vencimiento, entonces:

$$VC_T = \begin{cases} Ma^2\Delta - c_2^{a_2} & \text{Si el precio subyacente aumenta de } Ma \text{ a } Ma^2 \\ Mad\Delta - c_2^{ad} & \text{Si el precio subyacente disminuye de } Ma \text{ a } Mad \end{cases}$$

Dado que se desea que la cartera tenga el valor equivalente a lo que paga la opción sintética en la fecha de vencimiento, y que el valor de la cartera debe ser el mismo al aumentar o disminuir el precio subyacente, entonces:

$$Ma^2\Delta - c_2^{a_2} = Mad\Delta - c_2^{ad} \Rightarrow \Delta(Ma^2 - Mad) = c_2^{a_2} - c_2^{ad}$$

Por lo tanto:

$$\Delta = \frac{c_2^{a_2} - c_2^{ad}}{a(Ma - Md)} \tag{4.19}$$

De aquí se afirma que Δ es el número de activos que debe tener la cartera para estar libre de riesgo y la razón de cambio en el precio de la opción con respecto al cambio en el precio subyacente.

El tiempo de vencimiento de la opción está dividido en dos periodos de igual duración con longitud δ. Donde $\delta = \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$.

Al suponer que el precio subyacente aumenta en la fecha de vencimiento dado que al finalizar el primer periodo el precio subyacente es Ma, entonces el valor presente de la cartera es $(Ma^2\Delta - c_2^{a_2})e^{-i\delta T}$, mientras que al finalizar el primer periodo el valor de la opción sintética es $Ma\Delta - c_1^a$. De esto se tiene que $Ma\Delta - c_1^a = (Ma^2\Delta - c_2^{a_2})e^{-i\delta T}$. Por lo cual:

$$c_1^a = Ma\Delta - (Ma^2\Delta - c_2^{a_2})e^{-i\delta T} \tag{4.20}$$

Sustituyendo (4.19) en (4.20) se obtiene:

$$c_1^a = \frac{c_2^{a_2} - c_2^{ad}}{a-d} - \left[\frac{dc_2^{a_2} - ac_2^{ad}}{a-d}\right] e^{-i\delta T}$$

Por lo tanto:

$$c_1^a = \left[\frac{c_2^{a_2}(e^{i\delta T} - d) + c_2^{ad}(a - e^{i\delta T})}{a-d}\right] e^{-i\delta T} \tag{4.21}$$

Este resultado es independiente de la probabilidad de ocurrencia de los movimientos en el precio subyacente. Dado que $E(M_T) = Me^{i\delta T} = Ma\pi + Md(1-\pi)$, entonces:

$$e^{i\delta T} = a\pi + d(1-\pi) \tag{4.22}$$

Por lo que:

$$\pi = \frac{e^{i\delta T} - d}{a - d} \tag{4.23}$$

$$\theta = 1 - \pi = \frac{a - e^{i\delta T}}{a - d} \tag{4.24}$$

Ya que $0 \leq \pi \leq 1 \Rightarrow 0 \leq e^{i\delta T} - d \leq a - d \Rightarrow d \leq e^{i\delta T} \leq a$.

Las probabilidades π y θ son martingalas o probabilidades neutrales al riesgo. Entonces, al sustituir (4.23) y (4.24) en (4.21) se obtiene que el valor de la opción europea de compra sintética c_1^a es:

$$c_1^a = \left[c_2^{a_2}\pi + c_2^{ad}(1-\pi)\right] e^{-i\delta T} \tag{4.25}$$

Donde $c_2^{a_2} = \text{máx}\left\{Ma^2 - S, 0\right\}$ y $c_2^{ad} = \text{máx}\left\{Mad - S, 0\right\}$.

Análogamente al periodo T, el proceso estocástico supuesto para modelar el precio subyacente implica que la varianza del cambio proporcional en el precio subyacente durante el periodo δT es $\sigma^2 \delta T$.

Ya que $var(M_t) = E(M_T^2) - E^2(M_T)$ se tiene que:

$$\sigma^2 \delta T = (a-d)^2 \pi(1-\pi) \tag{4.26}$$

Al realizar el cambio de variable $u = e^{i\delta T}$ y sustituir u en (4.23) y (4.24) se obtiene:

$$\pi = \frac{u - d}{a - d} \tag{4.27}$$

$$\theta = 1 - \pi = \frac{a-u}{a-d} \tag{4.28}$$

Entonces al sustituir en (4.26) se obtiene:

$$\sigma^2 \delta T = (u-d)(a-u) \tag{4.29}$$

De forma análoga al periodo T, se tiene un sistema de dos ecuaciones (4.22) y (4.29) y tres incógnitas: π, a y d. Por lo cual al anexar una tercera restricción, $ad = 1$, propuesta por *Cox, Ross & Rubinstein* se obtienen a y d mediante la aproximación siguiente.

Sea $a = e^{\sigma\sqrt{\delta T}}$ y $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta T}}$, entonces al realizar el mismo procedimiento como en el caso de un periodo mediante series de Taylor, se obtiene:

$$a = 1 + \sigma\sqrt{\delta T} + \sigma^2 \frac{\delta T}{2} + \sigma^3 \frac{(\delta T)^{\frac{3}{2}}}{6} + \sigma^4 \frac{(\delta T)^2}{24} + \ldots$$

$$d = 1 - \sigma\sqrt{\delta T} + \sigma^2 \frac{\delta T}{2} - \sigma^3 \frac{(\delta T)^{\frac{3}{2}}}{6} + \sigma^4 \frac{(\delta T)^2}{24} - \ldots$$

$$e^{i\delta T} = 1 + i\delta T + \frac{i^2(\delta T)^2}{2} + \frac{i^3(\delta T)^3}{6} + \frac{i^4(\delta T)^4}{24} + \ldots$$

De tal forma que al ignorar los términos de orden mayor que δT (orden 1), se obtienen los resultados siguientes:

$$a = 1 + \sigma\sqrt{\delta T} + \sigma^2 \frac{\delta T}{2}$$

$$d = 1 - \sigma\sqrt{\delta T} + \sigma^2 \frac{\delta T}{2}$$

$$e^{i\delta T} = 1 + i\delta T$$

Los cuales satisfacen el sistema de ecuaciones (4.22), (4.29) y $ad = 1$ al ignorar los términos de orden mayor que δT, por lo tanto:

$$a = e^{\sigma\sqrt{\delta T}} \tag{4.30}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta T}} \tag{4.31}$$

El valor de c_d está en función de c_1^a y de c_1^d. Para calcular c_d se emplea el alrgoritmo de inducción regresiva mediante la ecuación (4.18) para n periodos.

De esta forma, se tiene que:

$$V_1^d = \left[V_2^{da}\pi + V_2^{d_2}(1-\pi)\right]e^{-i\delta T}$$

Se conoce el valor de la opción en la fecha de vencimiento, entonces para conocer el valor de $V_1^d = c_1^d$ al final del primer periodo cuando el precio subyacente es $M_1^d = Md$, se calcula:

$$\Delta = \frac{c_2^{da} - c_2^{d_2}}{d(Ma - Md)}$$

Al suponer que el precio subyacente aumenta en la fecha de vencimiento dado que al finalizar el primer periodo el precio subyacente es Md, entonces el valor presente de la cartera es $(Mda\Delta - c_2^{da})e^{-i\delta T}$, mientras que al finalizar el primer periodo el valor de la opción sintética es $Md\Delta - c_1^d$. De esto se tiene que $Md\Delta - c_1^d = (Mda\Delta - c_2^{da})e^{-i\delta T}$. Por lo cual:

$$c_1^d = \left[c_2^{da}\pi + c_2^{d_2}(1-\pi)\right]e^{-i\delta T} \tag{4.32}$$

Del mismo modo, empleando el algoritmo de inducción regresiva mediante la ecuación (4.18) para n periodos, se calcula:

$$V_0 = \left[V_1^a\pi + V_1^d(1-\pi)\right]e^{-i\delta T}$$

Se conoce el valor de la opción al término del primer periodo, entonces para conocer el valor de c en el periodo inicial cuando el precio subyacente es M, se tiene:

$$c = \left[c_1^a \pi + c_1^d (1-\pi)\right] e^{-i\delta T} \tag{4.33}$$

Al sustituir (4.25) y (4.32) en (4.33) se obtiene:

$$c = \left[c_2^{a_2} \pi^2 + 2c_2^{ad} \pi (1-\pi) + c_2^{d_2} (1-\pi)^2\right] e^{-i\delta T}$$

Dado que:

$$c_2^{a_2} = \text{máx}\left\{Ma^2 - S, 0\right\}$$
$$c_2^{ad} = \text{máx}\left\{Mad - S, 0\right\}$$
$$c_2^{d_2} = \text{máx}\left\{Md^2 - S, 0\right\}$$

Entonces:

$$c = \left[\text{máx}\left\{Ma^2 - S, 0\right\} \pi^2 + 2\text{máx}\left\{Mad - S, 0\right\} \pi\theta + \text{máx}\left\{Md^2 - S, 0\right\} \theta^2\right] e^{-iT}$$

Por lo tanto:

$$c = \left[\sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} \pi^k (1-\pi)^{2-k} \text{máx}\left\{Ma^k d^{2-k}, 0\right\}\right] e^{-iT}$$

Al generalizar el método para n periodos, se divide el tiempo de vigencia en n periodos de igual duración con longitud δ. De tal forma que $\delta = \frac{1}{n}$.

Con este resultado, se puede generalizar el método para valuar la opción en los n+1 estados al finalizar el n-ésimo periodo y conocer el precio de la opción en el periodo inicial mediante el principio de inducción regresiva.

4.14.1. Valuación de opciones europeas de compra

Bajo la hipótesis de valuación en el mundo neutral al riesgo, entonces hay dos formas para valuar opciones europeas de compra:

1. Calular de forma recursiva el valor de la opción al término de cada periodo.

$$V_{\eta}^{a_k d_{n-k}} = \begin{cases} \left[V_{\eta+1}^{a_{k+1} d_{\eta-k}} \pi + V_{\eta+1}^{a_k d_{\eta-k+1}} \theta\right] e^{-i\delta T} & 0 \leq k \leq \eta < n \\ V_{\eta}^{a_k d_{\eta-k}} = \text{máx}\left\{Ma^k d^{\eta-k} - S, 0\right\} & 0 \leq k \leq \eta = n \end{cases}$$

2. Calcular mediante la fórmula general el valor de la opción.

$$c = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi^k \theta^{n-k} c_n^{a_k d_{n-k}}\right] e^{-iT} \tag{4.34}$$

Donde:

$\delta = \frac{1}{n}$, $a = e^{\sigma\sqrt{\delta T}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta T}}$, $\pi = \frac{e^{i\delta T} - d}{a-d}$ y $\theta = 1 - \pi = \frac{a - e^{i\delta T}}{a-d}$. Con la condición $0 < d < 1 < e^{i\delta T} \leq a$.

4.14.2. Valuación de opciones europeas de venta

Análogamente, se puede valuar la opción europea de venta en los n+1 estados al final del n-ésimo periodo y mediante el principio de inducción regresiva conocer el precio de la opción en el periodo inicial. De aquí, se tiene:

$V_n^{a_k d_{n-k}} = p_n^{a_k d_{n-k}} = \text{máx}\left\{S - Ma^k d^{n-k}, 0\right\}$, donde $k = 0 \ldots n$.

Del mismo modo que las opciones europeas de compra, bajo la hipótesis de valuación en el mundo neutral al riesgo, entonces hay dos formas para valuar opciones europeas de venta:

1. Calular de forma recursiva el valor de la opción al término de cada periodo.

$$V_{\eta}^{a_k d_{n-k}} = \begin{cases} \left[V_{\eta+1}^{a_{k+1} d_{\eta-k}} \pi + V_{\eta+1}^{a_k d_{\eta-k+1}} \theta\right] e^{-i\delta T} & 0 \leq k \leq \eta < n \\ V_{\eta}^{a_k d_{\eta-k}} = \text{máx}\left\{S - Ma^k d^{\eta-k}, 0\right\} & 0 \leq k \leq \eta = n \end{cases}$$

2. Calcular mediante la fórmula general el valor de la opción.

$$p = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi^k \theta^{n-k} p_n^{a_k d_{n-k}} \right] e^{-iT}$$

Donde:

$\delta = \frac{1}{n}$, $a = e^{\sigma\sqrt{\delta T}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta T}}$, $\pi = \frac{e^{i\delta T}-d}{a-d}$ y $\theta = 1 - \pi = \frac{a-e^{i\delta T}}{a-d}$. Con la condición $0 < d < 1 < e^{i\delta T} \leq a$.

En la primera forma para valuar tanto las opciones europeas de compra como las de venta, es necesario calcular el valor intrínseco en los n+1 periodos al término del n-ésimo periodo, del tal forma que a partir de este punto se obtenga recursivamente el valor de la opción.

En la segunda forma para valuar tanto las opciones europeas de compra como las de venta, es necesario calcular el valor intrínseco de los n+1 periodos al término del n-ésimo periodo e ingresar estos valores a la fórmula general, para que, junto con las combinaciones y probabilidades asociadas y la suma de éstas en valor presente, se obtenga el valor de la opción.

4.14.3. Valuación de opciones americanas de compra

Los poseedores de opciones americanas tienen el derecho de comprar o vender el bien subyacente en cualquier día hábil antes de la fecha de vencimiento, por lo cual es necesario considerar el flujo de efectivo por el ejercicio anticipado de los contratos.

El precio subyacente se modela como el proceso Binomial de igual manera que con las opciones europeas, sin embargo al emplear el algoritmo de inducción regresiva, en cada estado se analiza el ejercicio anticipado de los contratos.

Al emplear el algoritmo de inducción regresiva se tiene que:

$$V(t,x) = \sup_{\Delta_{t+1}} E\left[U\left(X^{\Delta_{t+1}}(t+1) \middle| X(t) \right] \right.$$

$$V_t^{a_t d_{n-t}} = \text{máx}\left\{ V_t^{a_t d_{n-t}}, \sup_{\Delta_{t+1}} E\left[V_{t+1}^{a_{t+1} d_{n-t}} | X_t \right] \right\}$$

Al considerar el flujo de efectivo por el ejercicio anticipado, se obtiene:

$$V_t^{a_t d_{n-t}} = \text{máx}\left\{V_t^{a_t d_{n-t}}, \left[V_{t+1}^{a_{t+1} d_{n-t}}\pi + V_{t+1}^{a_t d_{n-t+1}}\theta\right] e^{-i\delta T}\right\}$$

Debido a que no es óptimo ejercer anticipadamente las opciones americanas de compra, entonces hay dos formas para valuarlas:

1. Calcular de forma recursiva el valor de la opción al término de cada periodo.

$$V_\eta^{a_k d_{n-k}} = \begin{cases} \text{máx}\left\{V_\eta^{a_k d_{\eta-k}}, \left[V_{\eta+1}^{a_{k+1} d_{\eta-k}}\pi + V_{\eta+1}^{a_k d_{\eta-k+1}}\theta\right] e^{-i\delta T}\right\} & 0 \leq k \leq \eta < n \\ V_\eta^{a_k d_{\eta-k}} = \text{máx}\left\{Ma^k d^{\eta-k} - S, 0\right\} & 0 \leq k \leq \eta = n \end{cases}$$

2. Calcular mediante la fórmula general el valor de la opción.

$$C = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi^k \theta^{n-k} C_n^{a_k d_{n-k}}\right] e^{-iT}$$

4.14.4. Valuación de opciones americanas de venta

Debido a que en algunos casos es óptimo ejercer anticipadamente las opciones americanas de venta, para valuarlas es necesario calcular de forma recursiva el valor de la opción al término de cada periodo.

Al considerar el flujo de efectivo por el ejercicio anticipado, se obtiene:

$$V_\eta^{a_k d_{n-k}} = \begin{cases} \text{máx}\left\{V_\eta^{a_k d_{\eta-k}}, \left[V_{\eta+1}^{a_{k+1} d_{\eta-k}}\pi + V_{\eta+1}^{a_k d_{\eta-k+1}}\theta\right] e^{-i\delta T}\right\} & 0 \leq k \leq \eta < n \\ V_\eta^{a_k d_{\eta-k}} = \text{máx}\left\{S - Ma^k d^{\eta-k}, 0\right\} & 0 \leq k \leq \eta = n \end{cases}$$

4.15. Método Black & Scholes

El método de Black & Scholes considera las siguientes hipótesis:

1. El precio subyacente sigue el proceso general de *Itô*[4] representado por:

$$dM = \mu M dt + \sigma M dZ \tag{4.35}$$

2. No se consideran comisiones, impuestos ni costos de operación.
3. Los bienes subyacentes son divisibles.
4. Los bienes subyacentes no otorgan dividendos durante el preiodo de vigencia.
5. La tasa de interés libre de riesgo i es constante durante el preiodo de vigencia.
6. No existen oportunidades de arbitraje libres de riesgo.

El valor actual de una cartera que elimina el riesgo ante los movimientos aleatorios en el precio subyacente constituida por la posición corta de la opción con valor $f(t,M)$ y la posición larga de la derivada parcial de la función $f(t,M)$ con respecto al precio subyacente en bienes subyacentes objeto de la cobertura es:

$$\Psi = -f(t,M) + M\frac{\partial f(t,M)}{\partial M}$$

[4] Si X_t sigue el proceso general de *Itô* $dX_t = \mu(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t$; donde B_t es un proceso estocástico con trayectorias continuas (movimiento *Browniano*), y la función $f(t,x):\ [0,T]X\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ es contínuamente diferenciable en el primer argumento (t) y dos veces contínuamente diferenciable en el segundo argumento (x) para toda $0 \leq t \leq T$, entonces la forma diferencial de la fórmula de *Itô* es:

$$df(t,x) = \left[\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + \mu\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}\right]dt + \sigma\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}dB_t$$

Por la forma diferencial de la fórmula de *Itô* y durante el periodo dt, el cambio en el valor de la cartera es:

$$df(t,M) = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mu M \frac{\partial f}{\partial M} + \frac{\sigma^2 M^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial M^2}\right] dt + \sigma M \frac{\partial f}{\partial M} dZ \tag{4.36}$$

Dado que el precio subyacente se distribuye Lognornal[5] , al incorporar la tasa de interés libre de riesgo en lugar de la constante μ en (4.35), se tiene:

$$M_T = M_t e^{\left(i - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dZ} \tag{4.37}$$

Si $f(t,M)$ es la función de densidad en el mundo neutral al riesgo, se tiene:

$$c = e^{-i(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \text{máx}\{M_T - S, 0\} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du$$

Haciendo $\varepsilon = i - \frac{\sigma^2}{2}$ y $\delta t = T - t$ y considerando a $\Omega = \frac{\ln(S) - \mu}{\sigma}$ como la variable estandarizada, se tiene:

$$c = e^{-i\delta t} \int_{\Omega}^{\infty} M_T \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du - S e^{-i\delta t} \int_{\Omega}^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du$$

Al aplicar la propiedad de simetría de una función con distribución Normal y sustituyendo $\varepsilon \delta t$ en (4.37), se tiene:

[5] La variable aleatoria X se distribuye Lognormal, si la variable aleatoria $Y = \ln(X)$ se distribuye Normal.
La variable aleatoria X tiene distribución Lognormal, si su función de densidad es la siguiente:

$$f_X(x, \mu_Y, \sigma_Y^2) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{(\ln(x) - \mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}}}{x\sigma_Y\sqrt{2\pi}} & 0 < x \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

El precio subyacente con distribución Lognormal se puede expresar de la forma siguiente:

$$M_T = M_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma dZ}$$

$$c = M_t \int_{-\infty}^{-\Omega} \frac{e^{-i\delta t + \varepsilon\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}u - \frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du - Se^{-i\delta t}N(-\Omega)$$

$$c = M_t \int_{-\infty}^{-\Omega} \frac{e^{-\frac{\left(u-\sigma\sqrt{\delta t}\right)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du - Se^{-i\delta t}N(-\Omega)$$

De aquí, por propiedades de la función de distribución Normal, se afirma lo siguiente:

$$c = M_t N\left(-\Omega + \sigma\sqrt{\delta t}\right) - Se^{-i\delta t}N(-\Omega)$$

Sea $d_1 = -\Omega + \sigma\sqrt{\delta t}$ y $d_2 = -\Omega$ entonces:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{M_t}{S}\right) + \left(i + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{M_t}{S}\right) + \left(i - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Por lo tanto:

$$c = M_t N(d_1) - Se^{-i(T-t)}N(d_2)$$

Esta es la fórmula de Black & Scholes para valuar opciones de compra. Al emplear la paridad compra venta,[6] se llega a la expresión para valuar opciones de venta:

$$p = Se^{-i(T-t)}N(-d_2) - M_t N(-d_1)$$

[6]Relación existente entre los contratos de compra y venta. $c = p + M - Se^{-i(T-t)}$; $p = c + Se^{-i(T-t)} - M$.

4.16. Convergencia del método Binomial al método Black & Scholes

Sea w el número entero mínimo de movimientos del precio subyacente para que las opciones se encuentren dentro de dinero[7].

La función de distribución del método Binomial complementario es:

$$B(w,n.\pi) = \sum_{k=w}^{n} \binom{n}{k} \pi^k \theta^{n-k} \tag{4.38}$$

Para que las opciones europeas de compra se encuentren dentro de dinero se debe cumplir la condición $Ma^w d^{n-w} > S$. Por lo tanto:

$$w > \frac{\ln\left(\frac{S}{Md^n}\right)}{\ln\left(\frac{a}{d}\right)} \tag{4.39}$$

Al considerar (4.39) en la ecuación (4.34), se tiene:

$$c = \left[\sum_{k=w}^{n} \binom{n}{k} \pi^k \theta^{n-k} \left\{Ma^k d^{n-k} - S\right\}\right] e^{-iT}$$

Por tanto:

$$c = M \sum_{k=w}^{n} \binom{n}{k} (a\pi)^k (d\theta)^{n-k} e^{-iT} - Se^{-iT} \sum_{k=w}^{n} \binom{n}{k} \pi^k \theta^{n-k} \tag{4.40}$$

Sean $\hat{\pi} = a\pi e^{-iT}$ y $\hat{\theta} = d\theta e^{-iT}$, entonces al sustituir $\hat{\pi}$ y $\hat{\theta}$ en la ecuación (4.40) se tiene:

$$c = M \sum_{k=w}^{n} \binom{n}{k} \hat{\pi}^k \hat{\theta}^{n-k} - Se^{-iT} \sum_{k=w}^{n} \binom{n}{k} \pi^k \theta^{n-k}$$

[7]Opción que otorga ganancias netas a los poseedores. Opción de compra donde el precio del bien subyacente en el mercado es mayor que el precio pactado. Opción de venta donde el precio del bien subyacente en el mercado es menor que el precio pactado.

Por medio de la definición de la función de distribución del método Binomial complementario, ecuación (4.38), se llega a la siguiente expresión:

$$c = MB(w,n,\hat{\pi}) - Se^{-iT}B(w,n,\pi) \tag{4.41}$$

Mediante la paridad compra venta $p = c + Se^{-iT} - M$, se llega a la expresión de la opción de venta:

$$p = MB(w,n,\hat{\pi}) - Se^{-iT}B(w,n,\pi) + Se^{-iT} - M$$

Por lo tanto:

$$p = Se^{-iT}\left[1 - B(w,n,\pi)\right] - M\left[1 - B(w,n,\hat{\pi})\right] \tag{4.42}$$

El método binomial puede ser extendido a una forma de tiempo continua, dividiéndo su vida, T años, en subintervalos cada vez más pequeños, δT ($\delta = \frac{1}{n}$), donde δT tiende a cero (n tiende a infinito).

Si se compara el modelo Binomial y el de Black & Scholes, se necesitarían comparar los términos de probabilidad de la función de distribucuón normal $N(d_1)$ y $N(d_2)$, con los términos del modelo binomial complementario.

Sea R_T la tasa de crecimiento del precio subyacente:

$$R_T = \ln\left(\frac{M_n}{M_0}\right) \Rightarrow R = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)$$

Entonces:

$$E\left[R\right] = \frac{n}{T}\left[\pi\ln(a) + \theta\ln(d)\right]$$

Por lo cual, la tasa instantánea de crecimiento esperada es:

$$\mu = \frac{1}{\delta T}\left[\pi\ln(a) + \theta\ln(d)\right] \tag{4.43}$$

Y la varianza de R en el periodo δT es:

$$\mathrm{Var}[R] = \frac{1}{T^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[\ln(X_i)] = \frac{\pi\theta}{T\delta T}\ln^2\left(\frac{a}{d}\right)$$

Por lo tanto, la varianza anual de R es:

$$\sigma^2 = \frac{\pi\theta}{\delta T}\ln^2\left(\frac{a}{d}\right) \tag{4.44}$$

Sea a y d el incremento y decremento en el precio subyacente respectivamente, entonces:

$$a = \tilde{a}e^{i\delta T}; d = \tilde{d}e^{i\delta T}$$

Al sustituir estas variables en la ecuación (4.22) se obtiene:

$$e^{i\delta T} = \tilde{a}e^{i\delta T}\pi + \tilde{d}e^{i\delta T}\theta \Rightarrow 1 = \tilde{a}\pi + \tilde{d}\theta$$

Sea ρ el parámetro de apertura del método Binomial, entonces:

$$\frac{a}{d} = e^{2\rho\sqrt{\delta T}} \tag{4.45}$$

Al sustituir este resultado en (4.44) se tiene:

$$\sigma^2 = 4\pi\theta\rho^2 \tag{4.46}$$

Por lo cual se obtiene un sistema de dos ecuaciones entre $1 = \pi + \theta$ y $\sigma^2 = 4\pi\theta\rho^2$. De aquí se obtiene la expresión para π y θ siguiente:

$$\pi = \theta = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}}\right) \tag{4.47}$$

Al despejar las variables a y d de (4.22) y de (4.45) y sustituirlas en (4.43) se obtiene:

$$\mu = i + \frac{(\pi - \theta)\rho}{\sqrt{\delta T}} - \frac{1}{\delta T}\ln\left(\pi e^{\rho\sqrt{\delta T}} + \theta e^{-\rho\sqrt{\delta T}}\right) \qquad (4.48)$$

Al tomar (4.47) y (4.48) cuando $\rho = \sigma$ se obtiene que $\pi = \theta = \frac{1}{2}$, por lo cual:

$$\mu = i - \frac{1}{\delta T}\ln\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\delta T}} + e^{-\sigma\sqrt{\delta T}}}{2}\right)$$

Aplicando este resultado, se obtiene:

$$\mu = \lim_{n\to\infty} E\left[R\right] = i - \lim_{\delta T\to\, 0} \frac{1}{\delta T}\ln\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\delta T}} + e^{-\sigma\sqrt{\delta T}}}{2}\right)$$

Al aplicar la regla de L´Hôpital se obtiene:

$$\mu = i - \frac{\sigma^2}{2}$$

Tomando en cuenta (4.47) cuando $\rho = \sigma$, entonces $\pi = \theta = \frac{1}{2}$, condiciones que satisfacen (4.46).

Sea Y_i^n el conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de tal forma que:

$$Y_i^n = \frac{1}{T}\ln(X_i)$$

Entonces:

$$\mu = i - \frac{\sigma^2}{2}; \sigma_n^2 = \frac{\sigma^2}{T}$$

Sea la variable aleatoria:

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i^n$$

Entonces:

1. La variable aleatoria Z_n converge en probabilidad a la variable aleatoria Normal con media $n\mu_n$ y varianza $n\sigma_n^2$.
2. La variable aleatoria Z_n converge en distribución a la variable aleatoria Normal con media μ y varianza σ^2.

En otras palablas, debido a que $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{M_t}{S}\right)+\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, se tiene:

$$B(w,n,\hat{\pi}) \xrightarrow{d} N\left(\ln(S) - \mu(T-t), \sigma^2 T\right)$$

$$B(w,n,\hat{\pi}) \xrightarrow{p} N(d_1)$$

Los términos convergen en el límite, a medida que el número de nodos por periodo aumenta.

Dicho esto, y empleando las ecuaciones (4.41) y (4.42), se obtiene:

$$c = MN(d_1) - Se^{-iT}N(d_2)$$

$$p = Se^{-iT}N(-d_2) - MN(-d_1)$$

Mediante este análisis, se llega a la fórmula de Black & Scholes para opciones de compra (c) y opciones de venta (p) a partir del modelo Binomial.

Capítulo 5

Aplicaciones prácticas

En este capítulo, se proponen situaciones con diferentes fuentes de incertidumbre, en las que cualquier empresa puede encontrarse. Mostrando así el aporte que tiene la metodología de las opciones reales en la toma de decisiones de inversión.

En todos los casos, el precio de la opción se encontró por medio del método binomial. Sin embargo, la fórmula de Black & Scholes también puede ser usada para este cálculo.

5.1. Opción de abandonar

Si se tiene el derecho, mas no la obligación de eliminar o librarse de un activo riesgoso a un precio predeterminado, se está en presencia de lo que es llamado una opción de abandono.

Las opciones de abandono son importantes en investigación, exploración y desarrollo de recursos naturales, y en el desarrollo de nuevos productos. En muchas inversiones, existe una fuerte e inecesaria tendencia a aferrarse a un programa o estrategia de inversión por demasiado tiempo.

El análisis de las opciones de abandono, no sólo provee a los directivos de un estimado del valor de abandono óptimo, sino también indica cuándo debe de ser implementado el abandono.

Para ilustrar la valuación de una opción de abandono, se propone el ejemplo siguiente:

Se asume que el valor presente del proyecto es de $\$1,000$, que la volatilidad es del 12 % ($\sigma = 0.12$) y que el año se divide en cuatro periodos ($T = \frac{1}{4}$). De igual forma se asume que el proyecto no paga dividendos y que la tasa libre de riesgo es de 5 % ($i = 0.05$). Así mismo, el proyecto se puede abandonar en cualquier momento vendiéndolo por $900, dicha cantidad es el precio de ejercicio ($S = 900$).

Se calculan las variables a, d, π y θ para desarrollar el modelo:

$$a = e^{\sigma\sqrt{T}} = e^{0.12\sqrt{\frac{1}{4}}} = 1.06184$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{T}} = e^{-0.12\sqrt{\frac{1}{4}}} = 0.94176$$

$$\pi = \frac{e^{iT} - d}{a - d} = \frac{e^{0.05(\frac{1}{4})} - 0.94176}{1.06184 - 0.94176} = 0.5898$$

$$\theta = \frac{a - e^{iT}}{a - d} = 1 - \pi = 1 - 0.5904 = 0.4102$$

		D
	B	$Ma^2 = 1,127.50$
A	$Ma = 1,061.84$	E
$M = 1,000$	C	$Mad = 1,000$
	$Md = 941.76$	F
		$Md^2 = 886.92$

Gráfica 5.1: Valor del bien subyacente.

La solución para el proyecto tomando en cuenta la flexibilidad de poder abandonarlo en cualquier momento vendiéndolo en $900 es mostrado en la gráfica 5.3.

El problema se resuelve empezando al final del árbol con los nodos finales (D, E y F) y después trabajando hacia atrás a través de este mismo. Por ejemplo, el rendimiento del bien subyacente en los nodos finales excede el precio de ejercicio de $900 en cada estado excepto en el "estado F". El rendimiento en los nodos finales es el valor intrínseco de la opción de venta (como fue visto en el capitulo anterior). Es decir, $I_{p_{abandonar}} = \text{máx}\{S - M, 0\}$.

Por lo tanto, se tiene el rendimiento y la decisión en los nodos finales como se ilustra en la tabla siguiente:

Nodo	Rendimiento	Decisión
D	$P_{a^2} = \text{máx}\left\{S - Ma^2, 0\right\} = \text{máx}\left\{900 - 1,127.50, 0\right\} = 0$	Continuar
E	$P_{ad} = \text{máx}\left\{S - Mad, 0\right\} = \text{máx}\left\{900 - 1,000, 0\right\} = 0$	Continuar
F	$P_{d^2} = \text{máx}\left\{S - Md^2, 0\right\} = \text{máx}\left\{900 - 886.92, 0\right\} = 13.08$	Abandonar

En el nodo F, se puede ejercer la opción de abandonar debido a que el precio de mercado del subyacente es menor que el precio de ejercicio. Por lo tanto, la opción de abandono es muy útil en el estado F.

Para saber si es conveniente ejercer anticipadamente, es decir, en los nodos anteriores (A, B, C), es necesario analizar el valor intrínseco en cada nodo junto con el precio de la opción en ese nodo (precio recursivo de la opción).

En otras palabras, se debe tomar en cuenta el siguiente análisis para establecer el criterio para el ejercicio anticipado de la opción:

$$\text{Decisión} = \begin{cases} \text{Ejercer} & I_{p_{A,B,C}} > P_{a,d,0} \geq 0 \\ \text{Continuar} & I_{p_{A,B,C}} \leq P_{a,d,0} \end{cases} \tag{5.1}$$

Como fue visto en el capítulo anterior, el precio de la opción resulta de analizar el máximo entre el valor intríseco de determinado nodo y el valor de la prima que resulta del principio de inducción regresiva aplicado a dicho nodo (prima recursiva), llevando a cabo los cálculos de manera recursiva. Es decir:

Nodo	I_p	Prima Recursiva	Análisis	Decisión
B	$\text{máx}\left\{900 - 1,061.84, 0\right\}$	$[0\pi + 0\theta]\, e^{-iT}$	$I_{pB} = P_B$	Continuar
	0	0		
C	$\text{máx}\left\{900 - 941.76, 0\right\}$	$[0\pi + 13.08\theta]\, e^{-iT}$	$I_{pC} < P_C$	Continuar
	0	5.29		
A	$\text{máx}\left\{900 - 1,000, 0\right\}$	$[0\pi + 5.29\theta]\, e^{-iT}$	$I_{pA} < P_0$	Continuar
	0	2.14		

El valor intrínseco en ninguno de los nodos A, B ó C es mayor que el valor de la opción obtenido de manera recursiva. Es por esta razón que no es conveniente ejercer la opción anticipadamente.

Los cálculos previos se expresan a continuación:

$$P_a = [P_{a^2}\pi + P_{ad}\theta]\,e^{-iT} = [0(.5898) + 0(.4102)]\,e^{-0.05(\frac{1}{4})} = 0$$
$$P_d = [P_{ad}\pi + P_{d^2}\theta]\,e^{-iT} = [0(.5898) + 13.08(.4102)]\,e^{-0.05(\frac{1}{4})} = 5.29$$
$$P_0 = [P_a\pi + P_d\theta]\,e^{-iT} = [0(.5898) + 5.29(.4102)]\,e^{-0.05(\frac{1}{4})} = 2.14$$

Por lo tanto:

$P_{a^2} = 0$		
	$P_a = 0$	
$P_{ad} = 0$		$P_0 = 2.14$
	$P_d = 5.29$	
$P_{d^2} = 13.08$		

Gráfica 5.2: Precio de la opción de abandono (P_0).

De esta forma se obtiene el precio de la opción de abandono $P_0 = \$2.14$.

La gráfica 5.3 muestra el árbol de decisión para la opción de abandonar.

		D
	B	Continuar
A	Continuar	E
Continuar	C	Continuar
	Continuar	F
		Abandonar

Gráfica 5.3: Árbol de decisión de la opción de abandono.

5.2. Opción de disminuir

El derecho de vender o deshacerse de cierta capacidad, reduciendo el nivel o la escala de operaciones, es una opción que se denomina opción de disminuir.

Para ilustrar la valuación de dicha opción, se propone el mismo bien subyacente riesgoso que el ejemplo anterior como se ilustra en la gráfica 5.1.

Sin embargo, se introduce la opción de disminuir el nivel de operaciones (y por consiguiente su valor) al 50 % vendiendo bienes (planta y equipo) por \$450 ($S = 450$) después de impuestos.

El rendimiento en los nodos finales y la decisión entre continuar o contraer, se aprecia en la siguiente tabla:

Nodo	Rendimiento	Decisión
D	$\text{máx}\left\{450 - 0.5Ma^2, 0\right\} = \text{máx}\{-113.75, 0\} = 0$	Continuar
E	$\text{máx}\{450 - 0.5Mad, 0\} = \text{máx}\{-50, 0\} = 0$	Continuar
F	$\text{máx}\left\{450 - 0.5Md^2, 0\right\} = \text{máx}\{6.54, 0\} = 6.54$	Disminuir

El rendimiento o valor intrínseco se toma como $I_p = \text{máx}\{450 - 0.5M, 0\}$ en cada nodo, ya que se necesita saber si el 50 % del bien subyacente en cada estado es mayor que la ganancia proveniente de la venta de planta y equipo por \$450. No obstante, se sigue la definición de valor intrínseco para una opción de venta $I_{p_{disminuir}} = \text{máx}\{S - M, 0\}$.

A continuación se realiza el análisis para determinar si es conveniente el ejercicio anticipado de la opción utilizando el criterio de la ecuación (5.1), así como el cálculo de la prima recursiva en cada nodo:

Nodo	I_p	Prima Recursiva	Análisis	Decisión
B	$\text{máx}\{450 - 0.5(1,061.84), 0\}$	$[0\pi + 0\theta]\, e^{-iT}$	$I_{pB} = P_B$	Continuar
	0	0		
C	$\text{máx}\{450 - 0.5(941.76), 0\}$	$[0\pi + 6.54\theta]\, e^{-iT}$	$I_{pC} < P_C$	Continuar
	0	2.65		
A	$\text{máx}\{450 - 0.5(1,000), 0\}$	$[0\pi + 2.65\theta]\, e^{-iT}$	$I_{pA} < P_0$	Continuar
	0	1.07		

El valor intrínseco en ninguno de los nodos A, B ó C es mayor que el valor de la opción obtenido de manera recursiva. Es por esta razón que no es conveniente ejercer la opción anticipadamente.

Los cálculos previos se expresan a continuación:

$$P_a = [P_{a^2}\pi + P_{ad}\theta]\, e^{-iT} = [0(.5898) + 0(.4102)]\, e^{-0.05(\frac{1}{4})} = 0$$
$$P_d = [P_{ad}\pi + P_{d^2}\theta]\, e^{-iT} = [0(.5898) + 6.54(.4102)]\, e^{-0.05(\frac{1}{4})} = 2.65$$
$$P_0 = [P_a\pi + P_d\theta]\, e^{-iT} = [0(.5898) + 2.65(.4102)]\, e^{-0.05(\frac{1}{4})} = 1.07$$

Por lo tanto:

$P_{a^2} = 0$		
	$P_a = 0$	
$P_{ad} = 0$		$P_0 = 1.07$
	$P_d = 2.65$	
$P_{d^2} = 6.54$		

Gráfica 5.4: Precio de la opción de disminuir (P_0).

De esta forma se obtiene el precio de la opción de disminuir $P_0 = \$1.07$.

La gráfica 5.5 muestra el árbol de decisión para la opción de disminuir.

		D
	B	Continuar
A	Continuar	E
Continuar	C	Continuar
	Continuar	F
		Disminuir

Gráfica 5.5: Árbol de decisión de la opción de disminuir.

5.3. Opción de aumentar

Si un proyecto resulta mejor de lo esperado, muchas veces se desea invertir en expandir o aumentarlo. La inversión extra es el precio de ejercicio de la opción de aumentar. Para ilustrar la valuación de esta opción, se propone el mismo bien subyacente como se ilustra en la gráfica 5.1, la cual se presenta a continuación:

		D
	B	$Ma^2 = 1,127.50$
A	$Ma = 1,061.84$	E
$M = 1,000$	C	$Mad = 1,000$
	$Md = 941.76$	F
		$Md^2 = 886.92$

De esta forma se introduce la opción de aumentar a un costo de \$100 ($S = 100$), por un beneficio que incrementa el valor de las operaciones al 10%. A pesar de que el árbol de movimientos del bien subyacente permanece igual, el nuevo árbol de decisión se muestra en la gráfica 5.7.

La tabla siguiente muestra el rendimiento y la decisión en los nodos finales:

Nodo	Rendimiento	Decisión
D	$\text{máx}\left\{0.1Ma^2 - 100, 0\right\} = \text{máx}\{12.75, 0\} = 12.75$	Aumentar
E	$\text{máx}\{0.1Mad - 100, 0\} = \text{máx}\{0, 0\} = 0$	Continuar
F	$\text{máx}\left\{0.1Md^2 - 100, 0\right\} = \text{máx}\{-11.308, 0\} = 0$	Continuar

El rendimiento o valor intrínseco se toma como $I_{c_{aumentar}} = \text{máx}\{0.1M - 100, 0\}$ en cada nodo, ya que se necesita saber si el rendimiento de la inversión (0.1M) menos lo que cuesta invertir (\$100) es mayor que cero.

No obstante, se sigue la definición de valor intrínseco para una opción de compra $I_c = \text{máx}\{M - S, 0\}$, sólo que en esta ocasión se considera el rendimiento que genera ésta (10%).

A continuación se realiza el análisis para determinar si es conveniente el ejercicio anticipado de la opción utilizando el criterio de la ecuación (5.1), así como el cálculo de la prima recursiva en cada nodo:

Nodo	I_p	Prima Recursiva	Análisis	Decisión
B	$\text{máx}\{0.1(1,061.84)-100,0\}$	$[12.75\pi+0\theta]\,e^{-iT}$	$I_{cB}<C_B$	Continuar
	6.18	7.43		
C	$\text{máx}\{0.1(941.76)-100,0\}$	$[0\pi+0\theta]\,e^{-iT}$	$I_{cC}<C_C$	Continuar
	0	0		
A	$\text{máx}\{0.1(1,000)-100,0\}$	$[7.43\pi+0\theta]\,e^{-iT}$	$I_{cA}<C_0$	Continuar
	0	4.33		

El valor intrínseco en ninguno de los nodos A, B ó C es mayor que el valor de la opción obtenido de manera recursiva. Es por esta razón que no es conveniente ejercer la opción anticipadamente.

Los cálculos previos se expresan a continuación:

$$C_a=[C_{a^2}\pi+C_{ad}\theta]\,e^{-iT}=[12.75(.5898)+0(.4102)]\,e^{-0.05(\frac{1}{4})}=7.43$$
$$C_d=[C_{ad}\pi+C_{d^2}\theta]\,e^{-iT}=[0(.5898)+0(.4102)]\,e^{-0.05(\frac{1}{4})}=0$$
$$C_0=[C_a\pi+C_d\theta]\,e^{-iT}=[7.43(.5898)+0(.4102)]\,e^{-0.05(\frac{1}{4})}=4.33$$

Por lo tanto:

$C_{a^2}=12.75$		
	$C_a=7.43$	
$C_{ad}=0$		$C_0=4.33$
	$C_d=0$	
$C_{d^2}=0$		

Gráfica 5.6: Precio de la opción de aumentar (C_0).

De esta forma se obtiene el precio de la opción de aumentar $C_0=\$4.33$.

La gráfica 5.7 muestra el árbol de decisión para la opción de aumentar.

		D
	B	Aumentar
A	Continuar	E
Continuar	C	Continuar
	Continuar	F
		Continuar

Gráfica 5.7: Árbol de decisión de la opción de aumentar.

5.4. Valuación de combinaciones de opciones

Se propone considerar un proyecto que permite ejercer cualquiera de las tres opciones vistas en cualquier nodo de decisión, es decir:

1. Una opción de venta, la opción de abandonar el proyecto por un salvamento de \$900.
2. Una opción de venta, para disminuir el nivel o la escala de operaciones al 50 % vendiéndo los bienes por \$450.
3. Una opción de compra, que permite aumentar el nivel de las operaciones al 10 % a un costo de \$100.

El movimiento del bien subyacente permanece igual que en la gráfica 5.1. Sin embargo, el árbol de decisión, como se muestra en la gráfica 5.9, contiene en cada nodo todas las opciones posibles (abandonar, disminuir y aumentar) para esta combinación.

Como se desarrolló anteriormente, el precio de la combinación de estas opciones se encontrará primeramente analizando la decisión óptima y su rendimiento correspondiente en los nodos finales:

$$I = \text{máx}\,\{\text{Abandonar, Disminuir, Aumentar, } 0\}$$
$$I = \text{máx}\,\{S-M, S-0.5M, 0.1M-S\}$$

Nodo	Rendimiento	Decisión
D	$\text{máx}\,\{900-1127.5, 450-.5(1127.5), .1(1127.5)-100, 0\}$ $\text{máx}\,\{0, 0, 12.75, 0\} = 12.75$	Aumentar
E	$\text{máx}\,\{900-1000, 450-0.5(1000), 0.1(1000)-100, 0\}$ $\text{máx}\,\{0, 0, 0, 0\} = 0$	Continuar
F	$\text{máx}\,\{900-886.92, 450-.5(886.92), .1(886.92)-100, 0\}$ $\text{máx}\,\{13.08, 6.54, 0, 0\} = 13.08$	Abandonar

Se evalúa el valor intrínseco en los nodos finales (D, E, F) y la decisión que resulta con mayor rendimiento es la óptima.

La posibilidad de ejercer de forma anticipada (en los nodos A, B y C) fue desarrollada en los ejemplos anteriores, y en ninguna de las tres opciones era conveniente ejercer de esta forma. Por ello, y dado que la combinación de opciones que en este caso se maneja está en función de cada una de las opciones independientes, no es necesario realizar este análisis. De antemano es sabido, que no conviene ejercer antes de la fecha de vencimiento.

A continuación se realizan los cálculos para encontrar el precio de la combinación de opciones mediante el principio de inducción regresiva:

$$Z_a = [Z_{a^2}\pi + Z_{ad}\theta]\, e^{-iT} = [12.75(.5898) + 0(.4102)]e^{-0.05(\frac{1}{4})} = 7.43$$
$$Z_d = [Z_{ad}\pi + Z_{d^2}\theta]\, e^{-iT} = [0(.5898) + 13.08(.4102)]e^{-0.05(\frac{1}{4})} = 5.30$$
$$Z_0 = [Z_a\pi + Z_d\theta]\, e^{-iT} = [7.43(.5898) + 5.30(.4102)]e^{-0.05(\frac{1}{4})} = 6.47$$

Por lo tanto:

$Z_{a^2} = 12.75$		
	$Z_a = 7.43$	
$Z_{ad} = 0$		$Z_0 = 6.47$
	$Z_d = 5.30$	
$Z_{d^2} = 13.08$		

Gráfica 5.8: Precio de la combinación de opciones (Z_0).

La gráfica 5.9 muestra el árbol de decisión para la combinación de opciones:

		D
	B	Aumentar
A	Continuar	E
Continuar	C	Continuar
	Continuar	F
		Abandonar

Gráfica 5.9: Árbol de decisión de la combinación de opciones.

El árbol de decisión tiene un aporte significativo, ya que un proyecto con varias opciones simultáneas de cierto bien subyacente se puede evaluar de manera más sencilla.

Los siguientes valores de las opciones por separado y de la combinación de opciones simultáneas permiten obtener algunas conclusiones:

Valor de la opción de abandonar	\$2.14
Valor de la opción de disminuir	\$1.07
Valor de la opción de aumentar	\$4.33
Valor de la combinación de opciones	\$6.47

Mientras que es cierto que la simple suma de los precios de las tres opciones por separado no es igual al valor de la combinación de ellas, se debe ver con más detalle y notar que la opción de disminuir nunca fue utilizada en la combinación; en otras palabras, no tuvo valor en la combinación porque fue dominada por las otras dos opciones. Existen casos en donde la opción de disminuir tiene un mayor aporte y deja de ser dominada, sin embargo este fue tan sólo un caso particular.

Por lo tanto, el valor de la combinación, \$6.47 es igual a la suma de los precios de las otras dos opciones, dígase la opción de abandonar y la opción de aumentar. La suma de estos precios es $\$2.14 + \$4.33 = \$6.47$.

5.5. Variante de la opción de abandonar

Se han expuesto los casos de tres opciones (abandonar, disminuir y aumentar) y la combinación de ellas, en los cuales el ejercicio de la opción es únicamente conveniente en la fecha de vencimiento.

Sin embargo, esto no siempre es de esta manera en la práctica, de forma tal que a continuación se presenta una variante de la opción de abandonar para mostrar la valuación de una opción cuyo ejercicio es conveniente antes de la fecha de vencimiento.

Se propone el ejemplo de la opción de abandonar con las mismas especificaciones y características. El único cambio es el valor presente del proyecto, el cual en lugar de ser de $\$1,000$, se propone uno de \$910. Las demás variables permanecen constantes como en el ejemplo ya desarrollado.

El movimiento del bien subyacente se presenta en la gráfica 5.10:

		D
	B	$Ma^2 = 1,026.02$
A	$Ma = 966.27$	E
$M = 910$	C	$Mad = 910$
	$Md = 857.01$	F
		$Md^2 = 807.10$

Gráfica 5.10: Valor del bien subyacente.

La solución para el proyecto tomando en cuenta la flexibilidad de poder abandonarlo en cualquier momento vendiéndolo en \$900 es mostrado en la gráfica 5.12.

Como se ha desarrollado con anterioridad, el problema se resuelve empezando al final del árbol con los nodos finales (D, E y F) y después trabajando hacia atrás a través de este mismo.

Por lo tanto, se tiene el rendimiento y la decisión en los nodos finales como se ilustra en la tabla siguiente:

Nodo	Rendimiento	Decisión
D	$P_{a^2} = \text{máx}\left\{S - Ma^2, 0\right\} = \text{máx}\left\{900 - 1,026.02, 0\right\} = 0$	Continuar
E	$P_{ad} = \text{máx}\left\{S - Mad, 0\right\} = \text{máx}\left\{900 - 910, 0\right\} = 0$	Continuar
F	$P_{d^2} = \text{máx}\left\{S - Md^2, 0\right\} = \text{máx}\left\{900 - 807.10, 0\right\} = 92.90$	Abandonar

En el nodo F, la opción de abandonar se ejerce debido a que el precio de mercado es menor que el precio de ejercicio. Sin embargo, se analiza si es conveniente ejercer anticipadamente mediante el criterio de la ecuación 5.1 y el principio de inducción regresiva:

Nodo	I_p	Prima Recursiva	Análisis	Decisión
B	$\text{máx}\left\{900 - 966.27, 0\right\}$	$\left[0\pi + 0\theta\right] e^{-iT}$	$I_{pB} = P_B$	Continuar
	0	0		
C	$\text{máx}\left\{900 - 857.01, 0\right\}$	$\left[0\pi + 92.90\theta\right] e^{-iT}$	$I_{pC} > P_C$	**Ejercer**
	42.99	37.64		
A	$\text{máx}\left\{900 - 910, 0\right\}$	$\left[0\pi + 42.99\theta\right] e^{-iT}$	$I_{pA} < P_0$	Continuar
	0	17.42		

En este caso, el valor itrínseco del nodo C es mayor que el valor de la opción obtenido de manera recursiva. Por esta razón es conveniente ejercer anticipadamente la opción en el nodo C.

Los cálculos previos se expresan a continuación:

$$P_a = [P_{a^2}\pi + P_{ad}\theta]\,e^{-iT} = [0(.5898) + 0(.4102)]\,e^{-0.05(\frac{1}{4})} = 0$$
$$P_d = \text{máx}\{S - Md, 0\} = \text{máx}\{900 - 857.01, 0\} = 42.99$$
$$P_0 = [P_a\pi + P_d\theta]\,e^{-iT} = [0(.5898) + 42.99(.4102)]\,e^{-0.05(\frac{1}{4})} = 17.42$$

A diferencia de los ejemplos anteriores, en donde el valor intrínseco de los nodos A, B o C no fue mayor que la prima recursiva en el nodo correspondiente y bastaba con calcular el precio de la opción mediante el principio de inducción recursiva, en este caso si hay un nodo el cual tiene un valor intrínseco mayor a la prima recursiva en dicho nodo. Debido a que el valor que se debe tomar en cuenta, como se expuso en el capítulo anterior, es el máximo entre éstos dos, es suficiente mostrar el cálculo del valor intrínseco en el nodo C para continuar con la valuación de la opción.

Por lo tanto:

$P_{a^2} = 0$		
	$P_a = 0$	
$P_{ad} = 0$		$P_0 = 17.42$
	$P_d = 42.99$	
$P_{d^2} = 92.90$		

Gráfica 5.11: Precio de la opción de abandono (P_0).

De esta forma se obtiene el precio de la opción de abandono $P_0 = \$17.42$.

		D
	B	Continuar
A	Continuar	E
Continuar	C	Continuar
	Abandonar	F
		Abandonar

Gráfica 5.12: Árbol de decisión de la opción de abandono.

Es así como se presenta la valuación del caso práctico en donde es conveniente ejercer la opción antes de la fecha de vencimiento. Por otro lado, es de mencionar que el hecho que se tenga la oportunidad y sea conveniente ejercer la opción anticipadamente, incrementa el precio de la opción.

Capítulo 6

Conclusiones

La intención de este trabajo es mostrar el aporte de una nueva "filosofía" de inversión, la de las opciones reales. Es por esta razón que se desarrolló de manera introductoria la historia, los conceptos básicos, los métodos de valuación y las aplicaciones prácticas. El tema queda abierto al lector en caso de que quiera profundizar en él, desde otros métodos de valuación como lo es la simulación Monte Carlo, hasta desarrollar aplicaciones más complejas donde intervengan varias fuentes de invertidumbre como la opción de intercambiar, donde se cambia el uso de una tecnología (X) a otra (Y) y viceversa, por ejemplo.

De forma análoga a una cobertura de riesgos, las opciones son el mejor instrumento para tomar posiciones especulativas ante una previsión de evolución de precios. Dentro de esta especulación con opciones, los errores de previsión no suponen graves pérdidas, ya que las opciones no se ejercen y el único quebranto que se asume es la prima pagada.

A pesar del gran aporte que tienen en diferentes exposiciones al riesgo e incertidumbre, las opciones reales tienen menos de 40 años de desarrollo tanto en el mercado como en la investigación. La mayoría de directivos y tomadores de decisión, no conocen este instrumento de administración de riesgo, y aquellos que tienen conocimiento de él se limitan a hacer uso de opciones sencillas. Por esta razón, el presente trabajo intenta poner en evidencia esta realidad, exhortando a las empresas a considerar las opciones reales como una referencia confiable y un parámetro excelente para desarrollar estrategias contra la incertidumbre que les permita mejorar las decisiones de inversión y de esta forma, contribuir a la estabilidad y desarrollo del país.

El desarrollo de este trabajo hizo que surgiera en mí un mayor interés por el análisis y la elaboración de estrategias más complejas a fin de implementar planes que se ajusten a las necesidades de las empresas, de tal forma que a través de este instrumento de administración de riesgo se de un cambio significativo en el sector empresarial.

Del mismo modo, descubrí que las opciones reales no sólo tienen un gran aporte en las estrategias de inversión, sino que, ante la previsión de un escenario desfavorable, también pueden limitar las pérdidas del proyecto.

Espero que esta tesis sea un catalizador para impulsar la creación de una comunidad de los que han utilizado y de los que quieran utilizar el método de las opciones reales para mejorar las estrategias en la toma de decisiones de inversión en un mundo lleno de incertidumbre.

Índice de gráficas

Índice de cuadros

Bibliografía

Amram Martha, Kulatilaka Nalin.
Opciones reales : Evaluación de inversiones en un mundo incierto.
Primera Edición. Barcelona: Gestión 2000, 2000. ISBN 84-8088-402-9.

Amram Martha, Kulatilaka Nalin.
Real options: Managing strategic investment in an uncertain world.
Boston, Mass.: Harvard Business School Press, 1999. ISBN 0875848451.

Brealey Richard A.
Principios de finanzas corporativas.
Madrid. McGraw-Hill Interamericana. 2006. ISBN 8448146212.

Brealey Richard A., Myers Stewart C.
Principios de finanzas corporativas
Séptima Edición. 2003. ISBN 0-07-246766-5 / 84-481-2156-2. McGraw Hill/Interamericana de España.

Climent Hernández José Antonio.
Vínculos Matemáticos No. 38.
Facultad de Ciencias, 2005.

Climent Hernández José Antonio.
Sistema de Información Electrónica para Valuación de Opciones.
Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería, 2004.

Copeland Thomas E, Antikarov Vladimir.
Real options: A practitioner´s guide.
New York: Texere, 2003. ISBN 1-58799-186-1.

De la Fuente Herrero David.
Las opciones reales en la decisión de inversión. Propuesta y aplicación de un modelo de valoración al caso de una multinacional española.
Universidad de Valladolid, Facultad de ciencias económicas y empresariales. 1999.

Feller William.
Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones.
1a Edición. 1983. ISBN 968-18-0721-9. QA273 F3714 V.1. Editorial Limusa.

Lamothe Fernández Prosper, Pérez Somalo Miguel.
Opciones financieras y productos estructurados.
Segunda Edición 2003. ISBN 84-481-3926-7. McGraw-Hill Interamericana de España.

Mascareñas Juan.
El método binomial de valoración de opciones.
Universidad Complutense de Madrid. 2000.

Meigs Walter B, Johnson Charles E, Keller Thomas F.
Valor presente.
México: McGraw-Hill, 1970.

Moel Alberto, Tufano Peter
When are real options exercised? An empirical study of mine closings.
Harvard Business School and NBER. 2000.

Página electrónica del Mercado Mexicano de Derivados.
http://www.mexder.com.mx. 12 de noviembre de 2008.

Roman Steven.
Introduction to the mathematics of finance: from risk management to options pricing.
New York. Springer. 2004. ISBN 0387213759.

Ross Stephen A.
Fundamentos de finanzas corporativas.
México. McGraw-Hill Interamericana. 2006. ISBN 970-10-5634-5. HG4026 R6818 2006.

Ross Stephen A., Westerfield Randolph W., Jaffe Jeffrey.
Finanzas corporativas.
7a Edición. 2005. ISBN 970-10-4654-2. HG4026 R6718 2005. México.
McGraw-Hill Interamericana.

Sierra G. Jaime H.
Opciones reales para las decisiones de inversión: aspectos introductivos.
Pontificia Universidad Javierana. 2001.

Stephen A. Ross, Randolph W. Westerfield, Bradford D. Jordan.
Fundamentos de finazas corporativas
Quinta edición. 2001. ISBN 970-10-2842-2. McGraw Hill Companies, Inc.
(HG4026 R6818 2001)

Trigeorgis Lenos.
Real options: Managerial flexibility and strategy in resource allocation.
Cambridge, Massachusetts: MIT, 1996. ISBN 026220102X. (HG4028.C4 T75 1996)

Verchik Ana.
Derivados Financieros y de Productos. Una visión más completa de los negocios.
Macchi Grupo Editor S.A. 2000. ISBN 950-537-531-X.

Wang Tao.
Real Options "in" Projects and Systems design – Identification of Options and Solution for Path Dependecy.
Massachusetts Institute of Technology. 2005.