



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

LA CATEGORIA DERIVADA DE ALGEBRAS CON CARCAJ GRADUABLE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRA EN CIENCIAS

P R E S E N T A

NORMA LILIANA SOTELO GARCIA

DIRECTOR DE TESIS: DR. RAYMUNDO BAUTISTA RAMOS

MÉXICO, D.F.

ABRIL, 2009



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido

Agradecimientos	5
Presentación	7
1. La Categoría de Complejos	11
1.1. La categoría de complejos $C(A)$	11
1.2. Sucesiones exactas	19
1.3. Bicomplejos	23
2. E-sucesiones y Categoría Homotópica	29
2.1. E -sucesiones en $C(A)$	29
2.2. Categoría homotópica y Ext_C	37
2.3. E -proyectivos y E -inyectivos	46
2.4. La categoría homotópica como categoría estable	55
3. Categorías Trianguladas	63
3.1. Categorías trianguladas y funtores t -exactos	63
3.2. La categoría triangulada $K(A)$	76
4. La Categoría de Fracciones	97
4.1. Límites de funtores	97
4.2. Construcción de la categoría de fracciones B_Σ	106
4.3. Aditividad y propiedad universal de B_Σ	119
5. La Categoría Derivada de Módulos	127
5.1. Módulos, homología y cuasi-isomorfismos	127
5.2. q -proyectivos y cuasi-isomorfismos	140
5.3. La categoría derivada es triangulada	155
5.4. Encaje de $A\text{-Mod}$ en $D(A\text{-Mod})$, y Ext_A^i	164

6. El Algebra de Carcaj	179
6.1. Algebras de carcaj y representaciones	179
6.2. Algebras de carcaj y módulos graduados	184
6.3. Algebras cuadráticas y duales cuadráticos	196
6.4. Peso, $A\text{-Mod}^+$ y resoluciones proyectivas	212
6.5. $A\text{-Mod}^-$ y corresoluciones inyectivas	219
7. Dualidad de Koszul	231
7.1. El funtor de Koszul $\mathbf{f}: A^! \text{-Mod} \rightarrow C(A\text{-Mod})$	231
7.2. El funtor de Koszul $\mathbf{f}^c: C(A^! \text{-Mod}) \rightarrow C(A\text{-Mod})$	244
7.3. El funtor de Koszul $\mathbf{f}^K: K(A^! \text{-Mod}) \rightarrow K(A\text{-Mod})$	250
7.4. El funtor de Koszul $\mathbf{f}^D: D^!(A^! \text{-Mod}) \rightarrow D(A\text{-Mod})$	261
7.5. Algebras propias de Koszul	277
7.6. Observaciones varias	297
Índice	305
Referencias	309

Agradecimientos

Al Dr. Raymundo Bautista, director de esta tesis, por la claridad que siempre tuvo sobre el camino que debíamos seguir, y por la certeza de que lograríamos nuestro objetivo. Por su generosidad para compartir sus ideas. Ha sido un guía excepcional para mí, y con noble actitud me dió autonomía y libertad al escribir este trabajo. Con la paciencia y amabilidad que lo caracterizan me enseñó todo lo que se de este tema, a pesar de que más de una vez tuvo que repetir un argumento o buscar maneras más sencillas de hacerme entender. No pocas veces quedé maravillada por su ingenio al resolver los problemas que se nos iban presentando, y siempre me devolvía a mi trabajo con ganas de aprender más.

Estoy en deuda con el Dr. Leonardo Salmerón, quien le concedió tiempo e interés a este proyecto con una generosidad incomparable. El realizó lecturas cuidadosísimas de cada párrafo de esta tesis, lo cual le permitió señalar atinadamente innumerables inconsistencias y omisiones en mis argumentos, que yo nunca hubiera podido descubrir. Siempre con la sutileza y amabilidad propias de su persona.

Agradezco profundamente a los Dres. Roberto Martínez, Octavio Mendoza y Gerardo Raggi por sus valiosas y siempre acertadas sugerencias y correcciones que le dieron forma a este escrito.

También agradezco el apoyo material que me brindó el IMATE Morelia, a través de su biblioteca, equipo de cómputo e instalaciones, además (y principalmente), por la educación de calidad que recibí de sus profesores en la maestría.

Al CONACYT por los recursos financieros que me fueron otorgados durante mis estudios, que me permitieron dedicarme de tiempo completo a ellos.

Presentación

La categoría derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ de una categoría abeliana \mathcal{A} es el análogo algebraico de la categoría homotópica de espacios topológicos. Nosotros obtenemos $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ de la categoría $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ de complejos con entradas en \mathcal{A} en dos pasos. Primero construimos la categoría cociente $K(\mathcal{A})$, identificando los morfismos entre complejos que son homotópicos. Luego “localizamos” la categoría $K(\mathcal{A})$ construyendo una nueva categoría (de fracciones), que llamamos $K(\mathcal{A})_\Sigma$, para Σ un sistema de cuasi-isomorfismos de $K(\mathcal{A})$. Localizar $K(\mathcal{A})$ es enriquecer su clase de morfismos con inversos para los cuasi-isomorfismos de Σ . Es a esta localización a la que hemos de llamar la categoría derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Si \mathcal{C} es una categoría pequeña, siempre existen las localizaciones \mathcal{C}_Σ (añadiendo los inversos a la presentación por generadores y relaciones de \mathcal{C} , ver capítulo 10 de [?]). Además, \mathcal{C}_Σ también existe cuando Σ es un conjunto. Por otro lado, cuando la clase Σ no es un conjunto, la existencia de localizaciones es un delicado problema de teoría de conjuntos.

Exceptuando el texto [?], que esboza la solución de este problema, es interesante notar que las referencias estándar lo ignoran. Algunos seguidores de Grothendieck evitan la dificultad imaginando la existencia de un universo más grande en el cual \mathcal{C} es pequeña y construyen la localización en ese universo. A pesar de todo, el hecho de que \mathcal{C}_Σ exista o no en nuestro universo es importante para otras escuelas de pensamiento. En particular para los topólogos, quienes necesitan localizar respecto a teorías de homología.

En esta tesis consideramos un caso especial, en el cual la localización \mathcal{C}_Σ puede ser construída en nuestro universo. Esto pasa cuando Σ es un “sistema multiplicativo localmente pequeño a la izquierda”. Tratamos el caso particular cuando Σ es la clase de cuasi-isomorfismos en la categoría homotópica $K(\mathcal{A})$, para \mathcal{A} una categoría de módulos, y probamos que Σ es localmente pequeño a la izquierda en este caso. Esto prueba que la categoría derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ existe (en nuestro universo). Además, probamos que $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ tiene una estructura triangulada.

La segunda parte de esta tesis está inspirada en la primera sección del artículo de Beilinson, Ginzburg y Soergel ([?]) aparecido en 1996.

Nosotros probamos detalladamente un caso particular de un teorema análogo al teorema principal de esa sección. En su artículo, los autores dan un isomorfismo entre un par de subcategorías de categorías derivadas de A -módulos, cuando A es un álgebra de Koszul.

Para enunciar el teorema de Beilinson, Ginzburg y Soergel necesitamos la siguiente definición:

Definición 0.1. Sea $R = \bigoplus_{j \geq 0} R_j$ un anillo graduado (positivamente).

- Denotamos por $\mathcal{C}^\downarrow(R)$ la subcategoría plena de complejos de R -módulos graduados tales que, si $\dot{X} = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un complejo en $\mathcal{C}^\downarrow(R)$, entonces existen enteros l y t tales que $X^i = 0$ si $i < l$ y $X_j^i = 0$ si $i + j > t$. De manera dual, $\mathcal{C}^\uparrow(R)$ es la subcategoría plena de complejos de R -módulos graduados $\dot{X} = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tales que existen enteros l y t con $X^i = 0$ si $i > l$ y $X_j^i = 0$ si $i + j < t$.
- Sea $\mathcal{D}(R)$ la categoría derivada de R -módulos. Denotemos por $\mathcal{D}^\downarrow(R)$ la subcategoría plena de $\mathcal{D}(R)$ cuyos objetos son los de $\mathcal{C}^\downarrow(R)$, y por $\mathcal{D}^\uparrow(R)$ la subcategoría plena de $\mathcal{D}(R)$ cuyos objetos son los de $\mathcal{C}^\uparrow(R)$.

Las álgebras de Koszul son álgebras graduadas positivamente. En el artículo [?] se consideran álgebras de Koszul donde la dimensión de cada R_j es finita, para $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y tal que R_0 es semisimple.

El teorema afirma lo siguiente:

Teorema 0.2 (Beilinson-Ginzburg-Soergel). Sea A un álgebra graduada de Koszul y A^\dagger su dual, entonces son equivalentes las categorías:

$$\mathcal{D}^\uparrow(A^\dagger) \cong \mathcal{D}^\downarrow(A).$$

En este trabajo, consideramos álgebras de Koszul donde $R_0 \cong k \times \cdots \times k$. Se sabe que un álgebra A de este tipo se puede representar como un álgebra de carcaj con relaciones $A = kQ/I$, donde Q es un carcaj finito e I es un ideal generado por caminos de longitud dos (ideal cuadrático).

Para estudiar los A -módulos graduados introducimos un carcaj $Q^\mathbb{Z}$ e $I^\mathbb{Z}$ un ideal cuadrático en $kQ^\mathbb{Z}$ que definimos a continuación:

Definición 0.3. Dado un carcaj Q , tenemos el carcaj infinito $Q^\mathbb{Z}$ cuyo conjunto de vértices es $(Q^\mathbb{Z})_0 = Q_0 \times \mathbb{Z} = \{(x, i) \mid x \in Q_0, i \in \mathbb{Z}\}$, y para cada flecha $x \xrightarrow{\alpha} y$ en Q_1 , entonces $(x, i) \xrightarrow{(\alpha, i)} (y, i + 1)$ es una flecha en $(Q^\mathbb{Z})_1$.

Para I un ideal admisible de kQ , sea $R = kQ^{\mathbb{Z}}/I^{\mathbb{Z}}$ un cociente del álgebra de carcaj $kQ^{\mathbb{Z}}$ por un ideal homogéneo $I^{\mathbb{Z}}$ (definición (??)). R es una k -álgebra graduada (positivamente). Nosotros probamos que, para un carcaj Q , las categorías de kQ/I -módulos graduados y de $kQ^{\mathbb{Z}}/I^{\mathbb{Z}}$ -módulos son equivalentes (proposiciones (??) y (??)). Además, pensamos a los R -módulos como representaciones del carcaj $Q^{\mathbb{Z}}$ (definición (??), teorema (??) y proposición (??)).

Definición 0.4. Sea $A^{\mathbb{Z}} = kQ^{\mathbb{Z}}/I^{\mathbb{Z}}$, y $A^{\mathbb{Z}!} := k(Q^{\mathbb{Z}})^{\text{op}}/(I^{\mathbb{Z}})^!$ su dual (definición (??)), entonces, para $R = A^{\mathbb{Z}}, A^{\mathbb{Z}!}$:

- Denotamos por $\mathcal{C}^{\downarrow}(R)$ la subcategoría plena de complejos de R -módulos tales que, si $\dot{X} = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un complejo en $\mathcal{C}^{\downarrow}(R)$, entonces existen enteros l y t tales que $X^i = 0$ si $i < l$ y $e_z X^i = 0$ si $i + p(z) > t$, donde $p(z)$ denota el peso del vértice z en el carcaj $Q^{\mathbb{Z}}$. Análogamente, $\mathcal{C}^{\uparrow}(R)$ es la subcategoría plena de complejos de R -módulos $\dot{X} = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tales que existen enteros l y t con $X^i = 0$ si $i > l$ y $e_z X^i = 0$ si $i + p(z) < t$.
- Si $\mathcal{D}(R)$ es la categoría derivada de R -módulos, denotamos por $\mathcal{D}^{\downarrow}(R)$ la subcategoría plena de $\mathcal{D}(R)$ cuyos objetos son los de $\mathcal{C}^{\downarrow}(R)$, y por $\mathcal{D}^{\uparrow}(R)$ la subcategoría plena de $\mathcal{D}(R)$ cuyos objetos son los de $\mathcal{C}^{\uparrow}(R)$.

El teorema que se prueba en este trabajo es el siguiente:

Teorema 0.5. Sean $A^{\mathbb{Z}} = kQ^{\mathbb{Z}}/I^{\mathbb{Z}}$ y su dual $A^{\mathbb{Z}!} = k(Q^{\mathbb{Z}})^{\text{op}}/(I^{\mathbb{Z}})^!$. Entonces, son equivalentes:

$$\mathcal{D}^{\downarrow}(A^{\mathbb{Z}!}) \cong \mathcal{D}^{\uparrow}(A^{\mathbb{Z}}).$$

Nuestro acercamiento para probar el teorema (??) es distinto de la manera en que los autores de [?] prueban el teorema (??), porque, al probar que las categorías de kQ/I -módulos graduados y de $kQ^{\mathbb{Z}}/I^{\mathbb{Z}}$ -módulos son equivalentes, tenemos la ventaja de poder usar las técnicas que se tienen en teoría de módulos sin hacer distinciones por trabajar con módulos graduados (como ocurre en el artículo [?]). Además, (aunque no lo hacemos en el presente trabajo) las mismas técnicas que usamos para probar que $\mathcal{D}^{\downarrow}(A^{\mathbb{Z}!}) \cong \mathcal{D}^{\uparrow}(A^{\mathbb{Z}})$, permitirían probar que $\mathcal{D}^{\uparrow}(A^{\mathbb{Z}!}) \cong \mathcal{D}^{\downarrow}(A^{\mathbb{Z}})$.

Uno de los objetivos de esta tesis fue introducirnos en el estudio de las categorías derivadas. Otro fue el de hacer alcanzables para el lector no especializado algunos de los resultados del artículo [?]. Con este fin, hemos tratado de desarrollar el tema escribiendo todos los resultados necesarios para hacerlo autocontenido, y siempre tratando de que los argumentos sean

sencillos y elementales. Se requiere del lector sólo conocimientos básicos de teoría de categorías y de módulos.

Al principio de cada capítulo damos un pequeño resumen de lo que ahí tratamos.

Capítulo 1

La Categoría de Complejos

Dedicaremos este capítulo al repaso de nociones básicas de teoría de categorías.

El resultado principal de este capítulo es la prueba de que la categoría de complejos $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ es abeliana si \mathcal{A} es una categoría abeliana.

Al final del capítulo hablamos de bicomplejos y del complejo total. Estas nociones nos servirán en el último capítulo, cuando probemos el análogo del teorema del artículo [?].

1.1. La categoría de complejos $\mathcal{C}(\mathcal{A})$

Recordemos que un objeto 0 de una categoría \mathcal{C} es un objeto *cero* si para cualquier objeto $A \in \mathcal{C}$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, 0)$ y $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, A)$ consisten de un solo elemento ($0_{A,0}$ y $0_{0,A}$ respectivamente). Si 0 y $0'$ son objetos cero, entonces existe un único isomorfismo $0_{0,0'}: 0 \rightarrow 0'$. Si A, B son objetos de \mathcal{C} , definimos el morfismo cero de A en B , $0_{A,B}$ como la composición $0_{0,B}0_{A,0}$.

Definición 1.1. Una categoría \mathcal{C} es llamada *aditiva* si satisface las siguientes condiciones:

1. \mathcal{C} tiene un objeto cero.
2. $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ es un grupo abeliano para cualesquier par de objetos A, B en \mathcal{C} .
3. Para cada terna de objetos A, B, C en \mathcal{C} , f, f_1, f_2 en $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, y g, g_1, g_2 en $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, se tiene

$$\begin{aligned}(g_1 + g_2)f &= g_1f + g_2f & y \\ g(f_1 + f_2) &= gf_1 + gf_2.\end{aligned}$$

4. \mathcal{C} tiene coproductos finitos.

Cuando una categoría tiene objeto cero, tiene sentido hablar de núcleos y conúcleos. Precisemos estas definiciones:

Definición 1.2. Sea $g: E \rightarrow Y$. Decimos que $u: X \rightarrow E$ es un núcleo de g (y lo denotamos por $u = \ker g$) si:

- $gu = 0$, y
- Si $u': X' \rightarrow E$ es tal que $gu' = 0$, entonces existe un único morfismo $s: X' \rightarrow X$ tal que $us = u'$ en el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & X' & & \\ & & \downarrow u' & & \\ X & \xrightarrow{u} & E & \xrightarrow{g} & Y. \\ & \nearrow s & & & \end{array}$$

De manera dual (invirtiendo todas las flechas), tenemos la definición de conúcleo (que denotamos por cok).

Es fácil ver que todo núcleo es monomorfismo (y, dualmente, todo conúcleo es epimorfismo).

Definición 1.3. Una categoría \mathcal{C} se dice abeliana si es una categoría aditiva con las siguientes propiedades adicionales:

- Cada morfismo en \mathcal{C} tiene núcleo y conúcleo.
- Cada monomorfismo es núcleo de su conúcleo, cada epimorfismo es conúcleo de su núcleo.
- Cada morfismo f se factoriza como $f = me$ con m monomorfismo y e epimorfismo en \mathcal{C} .

Definición 1.4. Sea \mathcal{A} una categoría abeliana. Definimos $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ la categoría cuyos objetos son: $\dot{X} = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, con X^i objeto en \mathcal{A} , y $d_X^i: X^i \rightarrow X^{i+1}$ un morfismo de objetos en \mathcal{A} (llamado morfismo diferencial) tal que $d_X^{i+1}d_X^i = 0$, para cada $i \in \mathbb{Z}$. A los objetos de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ se les llama complejos. Sean los complejos \dot{X} y \dot{Y} . Un morfismo de complejos $\dot{f}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ es una sucesión de morfismos $\dot{f} = (f^i: X^i \rightarrow Y^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de \mathcal{A} , tal que para todo $i \in \mathbb{Z}$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X^i & \xrightarrow{f^i} & Y^i \\ d_X^i \downarrow & & \downarrow d_Y^i \\ X^{i+1} & \xrightarrow{f^{i+1}} & Y^{i+1}. \end{array}$$

Por definición, la composición $f\dot{g} = (f^i)_{i \in \mathbb{Z}}(g^i)_{i \in \mathbb{Z}} = (f^i \cdot g^i)_{i \in \mathbb{Z}}$. A $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ le llamamos la categoría de complejos.

Fijemos $l \in \mathbb{Z}$. Denotaremos por $\dot{X}[l] = (X^{i+l}, (-1)^l d_X^{i+l})_{i \in \mathbb{Z}}$ el complejo cuya i -ésima entrada es X^{i+l} y cuyo i -ésimo morfismo diferencial es $d_{\dot{X}[l]}^i = (-1)^l d_X^{i+l}$.

Notemos que \dot{f} es monomorfismo si, para cada $i \in \mathbb{Z}$, f^i lo es. De igual manera, \dot{f} es epimorfismo si cada f^i , para $i \in \mathbb{Z}$, es epimorfismo.

Sea \dot{X} un complejo en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Un subcomplejo \dot{Y} de \dot{X} es un monomorfismo $\dot{\sigma}: \dot{Y} \rightarrow \dot{X}$.

Antes de probar la afirmación principal de esta sección, recordemos la definición de coproducto y su propiedad universal. Probaremos, además, una proposición y los corolarios que nos serán útiles en la demostración de tal afirmación.

Definición 1.5. Sea $\{Z_i\}_{i \in J}$ una familia de objetos en una categoría \mathcal{C} . Un coproducto de $\{Z_i\}_{i \in J}$ es un objeto de \mathcal{C} (que denotaremos por $\coprod_{i \in J} Z_i$) junto con una familia de morfismos $\{\sigma_i: Z_i \rightarrow \coprod_{i \in J} Z_i\}_{i \in J}$ tal que para cualquier otra familia $\{f_i: Z_i \rightarrow Y\}_{i \in J}$ existe un único morfismo $f: \coprod_{i \in J} Z_i \rightarrow Y$ en \mathcal{C} que hace conmutar el siguiente diagrama, para todo $i \in J$,

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in J} Z_i & \xrightarrow{f} & Y \\ \sigma_i \uparrow & \nearrow f_i & \\ Z_i & & \end{array} .$$

El morfismo $\sigma_i: Z_i \rightarrow \coprod_{i \in J} Z_i$ se llama la i -ésima inyección.

Proposición 1.6. Sea $\{\dot{X}_s\}_{s \in J}$ una familia de complejos en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tal que para cada $i \in \mathbb{Z}$ el coproducto $\coprod_{s \in J} X_s^i$ existe. Entonces $\coprod_{s \in J} \dot{X}_s$ (el coproducto de $\{\dot{X}_s\}_{s \in J}$) existe. La s -ésima inyección $\dot{\sigma}_s: \dot{X}_s \rightarrow \coprod_{s \in J} \dot{X}_s$ es $\{\sigma_s^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, donde $\sigma_s^i: X_s^i \rightarrow \coprod_{s \in J} X_s^i$ es la s -ésima inyección del coproducto $\coprod_{s \in J} X_s^i$, para $s \in J$.

DEMOSTRACIÓN. Sea el complejo \dot{Z} tal que $Z^i := \coprod_{s \in J} X_s^i$. Definimos a continuación la colección de morfismos $d_Z^i: Z^i \rightarrow Z^{i+1}$ de la siguiente

manera: Para cada $s \in J$, se tiene:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{s \in J} X_s^i & \xrightarrow{d_Z^i} & \coprod_{s \in J} X_s^{i+1} \\ \sigma_s^i \uparrow & \nearrow \sigma_s^{i+1} d_{X_s}^i & \uparrow \sigma_s^{i+1} \\ X_s^i & \xrightarrow{d_{X_s}^i} & X_s^{i+1}, \end{array}$$

con σ_s^i la inyección canónica, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Luego, d_Z^i existe y es el único tal que $d_Z^i \sigma_s^i = \sigma_s^{i+1} d_{X_s}^i$, por la propiedad universal del coproducto para la familia $\{X_s^i\}_{s \in J}$ en \mathcal{A} . Ahora veamos que $d_Z^{i+1} d_Z^i = 0$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \coprod_{s \in J} X_s^i & \xrightarrow{d_Z^i} & \coprod_{s \in J} X_s^{i+1} & \xrightarrow{d_Z^{i+1}} & \coprod_{s \in J} X_s^{i+2} \\ \sigma_s^i \uparrow & & \uparrow \sigma_s^{i+1} & & \uparrow \sigma_s^{i+2} \\ X_s^i & \xrightarrow{d_{X_s}^i} & X_s^{i+1} & \xrightarrow{d_{X_s}^{i+1}} & X_s^{i+2}. \end{array}$$

Luego, $d_Z^{i+1} d_Z^i \sigma_s^i = d_Z^{i+1} \sigma_s^{i+1} d_{X_s}^i = \sigma_s^{i+2} d_{X_s}^{i+1} d_{X_s}^i = 0$, para cada $s \in J$. Por la propiedad universal del coproducto $\coprod_{s \in J} X_s^i$, se sigue que $d_Z^{i+1} d_Z^i = 0$.

Entonces $\dot{Z} = (Z^i, d_Z^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un complejo y se tiene la propiedad universal del coproducto. En efecto, dada la familia $\{\dot{f}_s: \dot{X}_s \rightarrow \dot{Y}\}$, existe un único morfismo \dot{f} que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{s \in J} \dot{X}_s & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{Y} \\ \dot{\sigma}_s \uparrow & \nearrow \dot{f}_s & \\ \dot{X}_s & & \end{array}$$

Por la propiedad universal del coproducto $\coprod_{s \in J} X_s^i$ en la categoría \mathcal{A} , para cada $i \in \mathbb{Z}$ se tiene la existencia de un único morfismo f^i tal que $f^i \sigma_s^i = f_s^i$ en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{s \in J} X_s^i & \xrightarrow{f^i} & Y^i \\ \sigma_s^i \uparrow & \nearrow f_s^i & \\ X_s^i & & \end{array}$$

Luego, definamos $f := (f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Veamos que f es un morfismo de complejos:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{s \in J} X_s^i & \xrightarrow{d_Z^i} & \coprod_{s \in J} X_s^{i+1} \\ f^i \downarrow & & \downarrow f^{i+1} \\ Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1}. \end{array} \quad (1.1)$$

Para que (??) conmute basta ver que conmuta el cuadrado exterior en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X_s^i & \xrightarrow{d_{X_s}^i} & X_s^{i+1} \\ \downarrow \sigma_s^i & & \downarrow \sigma_s^{i+1} \\ \coprod_{s \in J} X_s^i & \xrightarrow{d_Z^i} & \coprod_{s \in J} X_s^{i+1} \\ \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} \\ Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1}, \end{array} \quad \begin{array}{c} f_s^i \curvearrowright \\ f_s^{i+1} \curvearrowleft \end{array}$$

donde $f^i \sigma_s^i = f_s^i$ y $f^{i+1} \sigma_s^{i+1} = f_s^{i+1}$. El cuadrado exterior conmuta porque f_s es morfismo del complejo \dot{X}_s en el complejo \dot{Y} . Luego, tenemos que (??) conmuta. Entonces vale la proposición. \square

Corolario 1.7. *En $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ existen los coproductos finitos.*

Corolario 1.8. *Si en \mathcal{A} existen los coproductos arbitrarios, entonces en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ existen los coproductos arbitrarios.*

Corolario 1.9. *Si $\{\dot{X}_s\}_{s \in J}$ es una familia de complejos en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tal que para cada $i \in \mathbb{Z}$ el conjunto de índices s tales que $X_s^i \neq 0$ es finito, entonces existe el coproducto de $\{\dot{X}_s\}_{s \in J}$ en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.*

Observemos que, dado un coproducto $\coprod_{i \in I} X_i$ finito, entonces, además del conjunto de morfismos $\{\sigma_i: X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i\}_{i \in I}$ (que llamamos inyecciones), también tenemos el conjunto de morfismos $\{\pi_i: \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ (las proyecciones), con las siguientes propiedades:

a) $\pi_i \sigma_i = 1_{X_i}$, para cada $i \in I$.

b) $\pi_i \sigma_j = 0$, si $i \neq j$.

c) $\sum_{i \in I} \sigma_i \pi_i = 1_{\coprod X_i}$.

De hecho, estas propiedades definen al coproducto finito, como se prueba (por ejemplo) en [?].

Afirmación 1.10. Si \mathcal{A} es una categoría abeliana, entonces $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ también es una categoría abeliana.

DEMOSTRACIÓN. Sean \dot{X} y \dot{Y} dos complejos y $\dot{\alpha}, \dot{\beta} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{X}, \dot{Y})$. Entonces, conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X^i & \xrightarrow{\alpha^i + \beta^i} & Y^i \\ d_X^i \downarrow & & \downarrow d_Y^i \\ X^{i+1} & \xrightarrow{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1}} & Y^{i+1}. \end{array}$$

Luego, definamos la suma de los morfismos $\dot{\alpha} + \dot{\beta} = (\alpha^i + \beta^i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Es claro que con el morfismo $0_{\dot{X}, \dot{Y}} = (0: X^i \rightarrow Y^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ y por como se ha definido la suma de morfismos, se tiene que el grupo $(\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{X}, \dot{Y}), +, 0_{\dot{X}, \dot{Y}})$ es abeliano, para cualesquiera \dot{X}, \dot{Y} en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. De hecho, tenemos las primeras tres condiciones de la definición de categoría aditiva. La existencia de coproductos en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ se tiene por los corolarios anteriores. Luego, $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ es una categoría aditiva.

Sean los complejos \dot{X}, \dot{Y} y f un morfismo entre ellos. Entonces se tiene $f^i: X^i \rightarrow Y^i$, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Sea $\alpha^i: K^i \rightarrow X^i$ el núcleo de f^i (este existe porque \mathcal{A} es abeliana). Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} K^i & \xrightarrow{\alpha^i} & X^i & \xrightarrow{f^i} & Y^i \\ & & d_X^i \downarrow & & \downarrow d_Y^i \\ K^{i+1} & \xrightarrow{\alpha^{i+1}} & X^{i+1} & \xrightarrow{f^{i+1}} & Y^{i+1}, \end{array}$$

para cada $i \in \mathbb{Z}$. Notemos que como f es morfismo de \dot{X} en \dot{Y} , para cada $i \in \mathbb{Z}$:

$$d_Y^i f^i \alpha^i = f^{i+1} d_X^i \alpha^i.$$

Además, $f^i \alpha^i = 0$, entonces $f^{i+1} d_X^i \alpha^i = 0$. Puesto que α^{i+1} es núcleo de f^{i+1} (en la categoría abeliana \mathcal{A}), existe un único morfismo $d_K^i: K^i \rightarrow K^{i+1}$ en \mathcal{A} , tal que para cada $i \in \mathbb{Z}$:

$$d_X^i \alpha^i = \alpha^{i+1} d_K^i.$$

Es claro que $\alpha^{i+2}d_K^{i+1}d_K^i = d_X^{i+1}d_X^i\alpha^i = 0$, porque por construcción de los morfismos d_K^i , los cuadrados conmutan y \dot{X} es un complejo. Ya que α^{i+2} es monomorfismo, se tiene que $d_K^{i+1}d_K^i = 0$. Por lo tanto $\dot{K} := (K^i, d_K^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un complejo y $\dot{\alpha} := (\alpha^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es morfismo de complejos.

Veamos que $\dot{\alpha}$ es un núcleo. Sean \dot{Z} un complejo y $\dot{u}: \dot{Z} \rightarrow \dot{X}$ un morfismo de complejos tal que $\dot{f}\dot{u} = 0$, luego, para cada $i \in \mathbb{Z}$ se tiene el siguiente diagrama en \mathcal{A} , con $f^i u^i = 0$:

$$\begin{array}{ccccc} & & Z^i & & \\ & & \downarrow u^i & & \\ K^i & \xrightarrow{\alpha^i} & X^i & \xrightarrow{f^i} & Y^i. \end{array}$$

Como α^i es núcleo en \mathcal{A} , entonces existe $\lambda^i: Z^i \rightarrow K^i$ tal que $\alpha^i \lambda^i = u^i$. Probemos que $\dot{\lambda} = (\lambda^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un morfismo de complejos, es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Z^i & \xrightarrow{d_Z^i} & Z^{i+1} \\ \lambda^i \downarrow & & \downarrow \lambda^{i+1} \\ K^i & \xrightarrow{d_K^i} & K^{i+1}. \end{array} \tag{1.2}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \alpha^{i+1}(\lambda^{i+1}d_Z^i - d_K^i\lambda^i) &= \alpha^{i+1}\lambda^{i+1}d_Z^i - \alpha^{i+1}d_K^i\lambda^i \\ &= u^{i+1}d_Z^i - d_X^i\alpha^i\lambda^i \\ &= u^{i+1}d_Z^i - d_X^i u^i = 0. \end{aligned}$$

Esta última igualdad se da porque \dot{u} es morfismo de complejos. Como α^{i+1} es monomorfismo en \mathcal{A} , se tiene que $\lambda^{i+1}d_Z^i - d_K^i\lambda^i = 0$ y (??) conmuta. De manera análoga se prueba la existencia del conúcleo en la categoría de los complejos, que coincide con el conúcleo de \mathcal{A} en cada nivel i .

Probemos ahora que todo monomorfismo es núcleo de su conúcleo. Sea $\dot{f}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ un monomorfismo. Sean $\dot{\eta}: \dot{Y} \rightarrow \dot{C}$ el conúcleo de \dot{f} , y $\dot{\sigma}: \dot{K} \rightarrow \dot{Y}$ el núcleo de $\dot{\eta}$. Como $\dot{\eta}\dot{f} = 0$, por la propiedad universal del núcleo de $\dot{\eta}$ (que es $\dot{\sigma}$), tenemos que existe un único morfismo $\dot{u}: \dot{X} \rightarrow \dot{K}$ con $\dot{\sigma}\dot{u} = \dot{f}$.

$$\begin{array}{ccccc} \dot{X} & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{Y} & \xrightarrow{\dot{\eta}} & \dot{C} \\ \dot{u} \downarrow & \nearrow \dot{\sigma} & & & \\ \dot{K} & & & & \end{array} .$$

Como $\eta^i: Y^i \rightarrow C^i$ es conúcleo del monomorfismo $f^i: X^i \rightarrow Y^i$ de \mathcal{A} y $\sigma^i: K^i \rightarrow Y^i$ es el núcleo de η^i , por ser \mathcal{A} abeliana, existe $\varphi_i: X^i \rightarrow K^i$ isomorfismo de \mathcal{A} tal que $X^i \xrightarrow{f^i} Y^i$ conmuta (pues f^i, σ^i son ambos

$$\begin{array}{ccc} X^i & \xrightarrow{f^i} & Y^i \\ \varphi_i \downarrow & \nearrow \sigma^i & \\ K^i & & \end{array}$$

núcleos de η^i). Además, tal morfismo φ_i es único (por definición de núcleo). Luego, $\varphi_i = u^i$ es isomorfismo. Entonces, el morfismo $\dot{u}: \dot{X} \rightarrow \dot{K}$ es isomorfismo, y \dot{f} es un núcleo de $\dot{\eta}$ en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Dualmente se verifica que cada epimorfismo es conúcleo de su núcleo.

Sea $\dot{f}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ un morfismo de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Sea $\dot{\sigma}: \dot{K} \rightarrow \dot{X}$ el núcleo de \dot{f} y sea $\dot{e}: \dot{X} \rightarrow \dot{C}$ el conúcleo de $\dot{\sigma}$. Como $\dot{f}\dot{\sigma} = 0$ y \dot{e} es conúcleo de $\dot{\sigma}$, existe $\dot{m}: \dot{C} \rightarrow \dot{Y}$ morfismo en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tal que $\dot{m}\dot{e} = \dot{f}$ con \dot{e} epimorfismo. Queremos ver que \dot{m} es monomorfismo, en el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccccc} \dot{K} & \xrightarrow{\dot{\sigma}} & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{Y} \\ & & \searrow \dot{e} & & \nearrow \dot{m} \\ & & \dot{C} & & \end{array} \quad (1.3)$$

Como \mathcal{A} es abeliana, para cada $i \in \mathbb{Z}$ hay una factorización $f^i = m_1^i e_1^i$, donde $e_1^i: X^i \rightarrow C_1^i$ es epimorfismo y $m_1^i: C_1^i \rightarrow Y^i$ es monomorfismo. Entonces, todo núcleo de e_1^i es núcleo de $m_1^i e_1^i$, y viceversa. Luego, $\sigma^i = \ker f^i = \ker m_1^i e_1^i \cong \ker e_1^i$. Como e_1^i es epimorfismo y \mathcal{A} es abeliana, $e^i = \text{cok } \sigma^i = \text{cok } \ker e_1^i \cong e_1^i$. Entonces, existe un isomorfismo $\psi^i: C^i \rightarrow C_1^i$ en \mathcal{A} tal que $\psi^i e^i = e_1^i$. Tenemos el siguiente diagrama en \mathcal{A} :

$$\begin{array}{ccccc} K^i & \xrightarrow{\sigma^i} & X^i & \xrightarrow{f^i} & Y^i \\ & & \searrow e^i & & \nearrow m^i \\ & & C^i & & \\ & & \downarrow \psi^i & & \\ & & C_1^i & & \end{array}$$

donde, $m^i e^i = f^i = m_1^i e_1^i = m_1^i \psi^i e^i$. Pero e^i es epimorfismo, entonces, $m^i = m_1^i \psi^i$ es composición de monomorfismos, luego, también es monomorfismo. Luego, en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ se tiene la factorización de $\dot{f} = \dot{m}\dot{e}$ con \dot{m} monomorfismo y \dot{e} epimorfismo. Se sigue que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ es una categoría abeliana. \square

1.2. Sucesiones exactas

Definición 1.11. Sea \mathcal{A} una categoría abeliana.

1. Si $f: X \rightarrow Y$ es un morfismo de \mathcal{A} , entonces $\text{Im} f$ (la imagen de f) es el subobjeto de Y definido (hasta isomorfismo) como $\ker \text{cok} f$.
2. Una sucesión de morfismos $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ en \mathcal{A} se dice exacta en Y si y sólo si $\text{Im} f$ y $\ker g$ son isomorfos como subobjetos de Y .
3. Una sucesión $\cdots \rightarrow X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$ de morfismos en \mathcal{A} se llama exacta si y sólo si $X_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1}$ es exacta en X_i para cada i .

Tenemos el siguiente resultado cuya prueba puede consultarse en el capítulo VIII.3 de [?].

Proposición 1.12. Si \mathcal{A} es una categoría abeliana y $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ son morfismos de \mathcal{A} , entonces,

1. $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$ es exacta si y sólo si f es monomorfismo.
2. $Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ es exacta si y sólo si g es epimorfismo.
3. $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ es exacta si y sólo si f es núcleo de g .
4. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ es exacta si y sólo si g es conúcleo de f .
5. $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ es exacta si y sólo si f es núcleo de g y g es conúcleo de f .

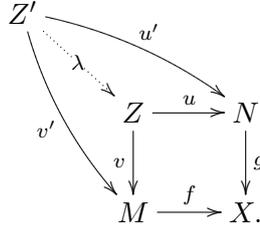
Definición 1.13. Sean los morfismos $M \xrightarrow{f} X$ y $N \xrightarrow{g} X$. Un (diagrama) pullback para $\{f, g\}$ es un diagrama conmutativo: $Z \xrightarrow{u} N$, tal

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{u} & N \\ v \downarrow & & \downarrow g \\ M & \xrightarrow{f} & X, \end{array}$$

que para cualquier otro cuadrado conmutativo $Z' \xrightarrow{u'} N$, existe un único

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{u'} & N \\ v' \downarrow & & \downarrow g \\ M & \xrightarrow{f} & X, \end{array}$$

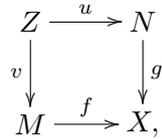
morfismo $\lambda: Z' \rightarrow Z$ que hace conmutar los triángulos en el diagrama:



En este caso decimos que $\{v, u\}$ es un pullback de $\{f, g\}$.

Dualizando esta definición obtenemos la de *pushout*.

Observación 1.14. Sea el cuadrado conmutativo

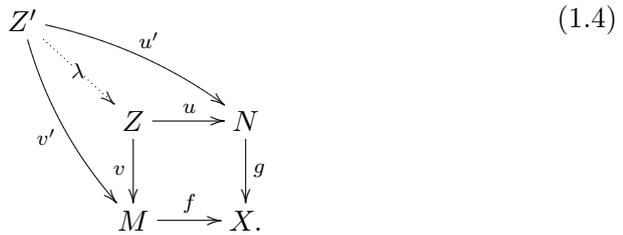


en una categoría abeliana. Entonces $\{v, u\}$ es un pullback de $\{f, g\}$ si y sólo si la sucesión

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}} M \oplus N \xrightarrow{(f, -g)} X,$$

es exacta.

DEMOSTRACIÓN. Emplearemos la proposición anterior. Supongamos que $\{v, u\}$ es un pullback de $\{f, g\}$. Mostraremos que $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ es núcleo de $(f, -g)$. Sea $\begin{pmatrix} v' \\ u' \end{pmatrix}: Z' \rightarrow M \oplus N$, tal que $(f, -g) \begin{pmatrix} v' \\ u' \end{pmatrix} = fv' - gu' = 0$. Luego, conmuta el cuadrado exterior en el diagrama siguiente:



De ahí la existencia de un único morfismo $\lambda: Z' \rightarrow Z$, tal que $v\lambda = v'$ y $u\lambda = u'$. Es decir, $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} v' \\ u' \end{pmatrix}$.

Recíprocamente, dados Z', v' y u' tales que conmuta el cuadrado exterior en el diagrama (??), se tiene el morfismo $\begin{pmatrix} v' \\ u' \end{pmatrix}: Z' \rightarrow M \oplus N$ tal que

$(f, -g) \begin{pmatrix} v' \\ u' \end{pmatrix} = fv' - gu' = 0$. Puesto que $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ es núcleo de $(f, -g)$, entonces existe un único morfismo $\lambda: Z' \rightarrow Z$ tal que $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} v' \\ u' \end{pmatrix}$. Entonces, $v\lambda = v'$ y $u\lambda = u'$. Luego, $\{v, u\}$ es un pullback de $\{f, g\}$. \square

Corolario 1.15. *En toda categoría abeliana \mathcal{A} existen los pullbacks.*

DEMOSTRACIÓN. Si $t: L \rightarrow Y$ y $g: E \rightarrow Y$ son morfismos de \mathcal{A} , existe el núcleo del morfismo $(g, -t): E \oplus L \rightarrow Y$. Este núcleo es un morfismo de la forma $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}: K \rightarrow E \oplus L$. Luego, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} E \oplus L \xrightarrow{(g, -t)} Y$$

en \mathcal{A} y, en consecuencia, el pullback:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\beta} & L \\ \alpha \downarrow & & \downarrow t \\ E & \xrightarrow{g} & Y. \end{array}$$

\square

Observación 1.16. *En la categoría abeliana $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tenemos:*

1. Dada la sucesión $\dot{X} \xrightarrow{\dot{f}} \dot{Y} \xrightarrow{\dot{g}} \dot{Z}$ en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, esta es una sucesión exacta en \dot{Y} si y sólo si la sucesión $X^i \xrightarrow{f^i} Y^i \xrightarrow{g^i} Z^i$ en \mathcal{A} es exacta en Y^i para todo $i \in \mathbb{Z}$.

2. Dado el cuadrado $\begin{array}{ccc} \dot{K} & \xrightarrow{\dot{\beta}} & \dot{L} \\ \dot{\alpha} \downarrow & & \downarrow \dot{t} \\ \dot{E} & \xrightarrow{\dot{g}} & \dot{Y}, \end{array}$ en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, este es un pullback en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$

$$\begin{array}{ccc} \dot{K} & \xrightarrow{\dot{\beta}} & \dot{L} \\ \dot{\alpha} \downarrow & & \downarrow \dot{t} \\ \dot{E} & \xrightarrow{\dot{g}} & \dot{Y}, \end{array}$$

si y sólo si $K^i \xrightarrow{\beta^i} L^i$ es un pullback en \mathcal{A} para cada $i \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccc} K^i & \xrightarrow{\beta^i} & L^i \\ \alpha^i \downarrow & & \downarrow t^i \\ E^i & \xrightarrow{g^i} & Y^i \end{array}$$

Proposición 1.17. Dado el morfismo $t: L \rightarrow Y$ en \mathcal{A} (abeliana) y una sucesión exacta $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y \rightarrow 0$ en \mathcal{A} , tenemos un diagrama conmutativo en \mathcal{A} :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u} & K & \xrightarrow{v} & L & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow s & & \downarrow t & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & Y & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

con renglones exactos, donde el cuadrado derecho es un pullback.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{s, v\}$ pullback de $\{g, t\}$. Puesto que $gf = 0$ y también tenemos el morfismo cero de X en L , por las propiedades del pullback, tenemos que existe un único morfismo $u: X \rightarrow K$, tal que $su = f$ y $vu = 0$. Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & L \\ & \searrow 0 & & & \downarrow t \\ & \xrightarrow{u} & K & \xrightarrow{v} & L \\ & \searrow f & \downarrow s & & \downarrow t \\ & & E & \xrightarrow{g} & Y. \end{array}$$

Probemos que u es un núcleo de v . Sean Z y $\alpha: Z \rightarrow K$ tal que $v\alpha = 0$, entonces $0 = tv\alpha = gs\alpha$. Puesto que f es núcleo de g , existe un único morfismo $h: Z \rightarrow X$ tal que $s\alpha = fh$. Veamos que $uh = \alpha$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} s(uh - \alpha) &= suh - s\alpha = fh - s\alpha = 0 & \text{y, además} \\ v(uh - \alpha) &= vuh - v\alpha = 0. \end{aligned}$$

Luego, $uh = \alpha$. Si $h': Z \rightarrow X$ es otro morfismo tal que $uh' = \alpha$, tenemos $fh = s\alpha = suh' = fh'$. Pero f es monomorfismo, luego $h = h'$ y h era única. Por lo tanto, u es núcleo de v . Así, $0 \rightarrow X \xrightarrow{u} K \xrightarrow{v} L$ es exacta en \mathcal{A} . Luego, tenemos en \mathcal{A} el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u} & K & \xrightarrow{v} & L & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow s & & \downarrow t & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & Y & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Como g es epimorfismo, tenemos que v también lo es (se prueba, por ejemplo, en [?], capítulo VIII, proposición 4.2). Por lo tanto, se tiene el diagrama

conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha : & 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u} & K & \xrightarrow{v} & L & \longrightarrow & 0 \\ & & & \parallel & & \downarrow s & & \downarrow t & & \\ \beta : & 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & Y & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

□

Abusando de la notación, diremos que α es un pullback de β . Procediendo análogamente, dada $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en cualquier categoría abeliana y un morfismo $s: X \rightarrow M$, podemos construir una sucesión exacta a partir del pushout de $\{s, f\}$. Todo esto vale, en particular, para la categoría de complejos $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, si \mathcal{A} es abeliana.

1.3. Bicomplejos

Sea \mathcal{A} una categoría aditiva con coproductos arbitrarios.

Definición 1.18. Un bicomplejo \ddot{Y} sobre \mathcal{A} es una colección de objetos $\{Y^{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$ y morfismos $\{d^{i,j}: Y^{i,j} \rightarrow Y^{i,j+1}\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$, $\{\delta^{i,j}: Y^{i,j} \rightarrow Y^{i+1,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$ (llamados diferenciales) en \mathcal{A} , tales que $d^{i,j+1}d^{i,j} = 0$, $\delta^{i+1,j}\delta^{i,j} = 0$ y $\delta^{i,j+1}d^{i,j} + d^{i+1,j}\delta^{i,j} = 0$ para cada $i, j \in \mathbb{Z}$.

Se puede visualizar como un diagrama infinito de cuadrados anticonmutativos:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \dots & \longrightarrow & Y^{i-1,j+1} & \xrightarrow{\delta^{i-1,j+1}} & Y^{i,j+1} & \xrightarrow{\delta^{i,j+1}} & Y^{i+1,j+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \uparrow d^{i-1,j} & & \uparrow d^{i,j} & & \uparrow d^{i+1,j} & & \\ \dots & \longrightarrow & Y^{i-1,j} & \xrightarrow{\delta^{i-1,j}} & Y^{i,j} & \xrightarrow{\delta^{i,j}} & Y^{i+1,j} & \longrightarrow & \dots \\ & & \uparrow d^{i-1,j-1} & & \uparrow d^{i,j-1} & & \uparrow d^{i+1,j-1} & & \\ \dots & \longrightarrow & Y^{i-1,j-1} & \xrightarrow{\delta^{i-1,j-1}} & Y^{i,j-1} & \xrightarrow{\delta^{i,j-1}} & Y^{i+1,j-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

Un morfismo de bicomplejos $\ddot{f}: \ddot{Y} \rightarrow \ddot{Z}$ es una colección $\{f^{i,j}: Y^{i,j} \rightarrow Z^{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$, de morfismos en \mathcal{A} que conmutan con las diferenciales. Es decir,

se tienen diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} Y^{i,j+1} & \xrightarrow{f^{i,j+1}} & Z^{i,j+1} \\ d_Y^{i,j} \uparrow & & \uparrow d_Z^{i,j} \\ Y^{i,j} & \xrightarrow{f^{i,j}} & Z^{i,j} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y^{i+1,j} & \xrightarrow{f^{i+1,j}} & Z^{i+1,j} \\ \delta_Y^{i,j} \uparrow & & \uparrow \delta_Z^{i,j} \\ Y^{i,j} & \xrightarrow{f^{i,j}} & Z^{i,j} \end{array}$$

para cada $i, j \in \mathbb{Z}$.

Tenemos la categoría de bicomplejos $\text{Bi}\mathcal{C}(\mathcal{A})$, donde la composición está dada por $\{f^{i,j}\} \cdot \{g^{i,j}\} = \{f^{i,j} \cdot g^{i,j}\}$.

Afirmación 1.19. *Si \mathcal{A} es una categoría abeliana, entonces $\text{Bi}\mathcal{C}(\mathcal{A})$ también lo es.*

DEMOSTRACIÓN. La prueba de esto es análoga a la de (??). \square

A partir de un bicomplejo \ddot{Y} podemos definir un complejo, el *complejo total de \ddot{Y}* , $\text{Tot}(\ddot{Y})$. Este tiene s -ésima entrada

$$\text{Tot}(\ddot{Y})^s = \coprod_{i+j=s} Y^{i,j}.$$

Para ver su s -ésimo morfismo diferencial, hagamos $\dot{T} := \text{Tot}(\ddot{Y})$. Por las propiedades del coproducto, existe un único morfismo d_T^s en \mathcal{A} que hace conmutar:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i+j=s} Y^{i,j} & \xrightarrow{d_T^s} & \coprod_{i+j=s+1} Y^{i,j} \\ \sigma_{i,j}^s \uparrow & & \uparrow (\sigma_{i,j+1}^{s+1}, \sigma_{i+1,j}^{s+1}) \\ Y^{i,j} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} d^{i,j} \\ \delta^{i,j} \end{pmatrix}} & Y^{i,j+1} \oplus Y^{i+1,j}, \end{array}$$

para cada $i + j = s$. Esto es:

$$d_T^s \sigma_{i,j}^s = \sigma_{i,j+1}^{s+1} d^{i,j} + \sigma_{i+1,j}^{s+1} \delta^{i,j}.$$

De ahí que:

$$\begin{aligned} d_T^{s+1} d_T^s \sigma_{i,j}^s &= d_T^{s+1} \sigma_{i,j+1}^{s+1} d^{i,j} + d_T^{s+1} \sigma_{i+1,j}^{s+1} \delta^{i,j} \\ &= (\sigma_{i,j+2}^{s+2} d^{i,j+1} + \sigma_{i+1,j+1}^{s+2} \delta^{i,j+1}) d^{i,j} \\ &\quad + (\sigma_{i+1,j+1}^{s+2} d^{i+1,j} + \sigma_{i+2,j}^{s+2} \delta^{i+1,j}) \delta^{i,j} \\ &= \sigma_{i+1,j+1}^{s+2} \delta^{i,j+1} d^{i,j} + \sigma_{i+1,j+1}^{s+2} d^{i+1,j} \delta^{i,j} \\ &= \sigma_{i+1,j+1}^{s+2} (d^{i+1,j} \delta^{i,j} + \delta^{i,j+1} d^{i,j}) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d_T^{s+1}d_T^s = 0$. Entonces, $(\text{Tot}(\ddot{Y})^s, d_T^s)_{s \in \mathbb{Z}}$ es un complejo con entradas en \mathcal{A} .

Sea $\ddot{f}: \ddot{Y} \rightarrow \ddot{Z}$ un morfismo de bicomplejos, entonces tenemos una familia de morfismos $f^{i,j}: Y^{i,j} \rightarrow Z^{i,j}$. Por la propiedad universal del coproducto

$\coprod_{i+j=s} Y^{i,j}$, existe un único morfismo f^s que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \text{Tot}(\ddot{Y})^s = \coprod_{i+j=s} Y^{i,j} & \xrightarrow{f^s} & \coprod_{i+j=s} Z^{i,j} = \text{Tot}(\ddot{Z})^s \\ \sigma_{i,j}^s \uparrow & & \uparrow \bar{\sigma}_{i,j}^s \\ Y^{i,j} & \xrightarrow{f^{i,j}} & Z^{i,j} \end{array}$$

esto pasa para cada i, j tales que $i + j = s \in \mathbb{Z}$. Consideremos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i+j=s} Y^{i,j} & \xrightarrow{f^s} & \coprod_{i+j=s} Z^{i,j} \\ d_{TY}^s \downarrow & & \downarrow d_{TZ}^s \\ \coprod_{i+j=s+1} Y^{i,j} & \xrightarrow{f^{s+1}} & \coprod_{i+j=s+1} Z^{i,j} \end{array}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} (f^{s+1}d_{TY}^s - d_{TZ}^s f^s)\sigma_{i,j}^s &= f^{s+1}d_{TY}^s \sigma_{i,j}^s - d_{TZ}^s f^s \sigma_{i,j}^s \\ &= f^{s+1}(\sigma_{i,j+1}^{s+1} d_Y^{i,j} + \sigma_{i+1,j}^{s+1} \delta_Y^{i,j}) - d_{TZ}^s \bar{\sigma}_{i,j}^s f^{i,j} \\ &= f^{s+1} \sigma_{i,j+1}^{s+1} d_Y^{i,j} + f^{s+1} \sigma_{i+1,j}^{s+1} \delta_Y^{i,j} \\ &\quad - (\bar{\sigma}_{i,j+1}^{s+1} d_Z^{i,j} + \bar{\sigma}_{i+1,j}^{s+1} \delta_Z^{i,j}) f^{i,j} \\ &= \bar{\sigma}_{i,j+1}^{s+1} f^{i,j+1} d_Y^{i,j} + \bar{\sigma}_{i+1,j}^{s+1} f^{i+1,j} \delta_Y^{i,j} \\ &\quad - \bar{\sigma}_{i,j+1}^{s+1} d_Z^{i,j} f^{i,j} - \bar{\sigma}_{i+1,j}^{s+1} \delta_Z^{i,j} f^{i,j} = 0, \end{aligned}$$

para todo $i + j = s$. Luego, $f^{s+1}d_{TY}^s - d_{TZ}^s f^s = 0$. Por lo tanto,

$$\text{Tot}(\ddot{f}) = (f^s: \coprod_{i+j=s} Y^{i,j} \rightarrow \coprod_{i+j=s} Z^{i,j})_{s \in \mathbb{Z}}$$

es un morfismo de complejos.

Lema 1.20. *El funtor $\text{Tot}: \text{Bi}\mathcal{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A})$ es exacto (ver definición (??)).*

DEMOSTRACIÓN. Sea $0 \rightarrow \ddot{M} \xrightarrow{\ddot{u}} \ddot{E} \xrightarrow{\ddot{v}} \ddot{N} \rightarrow 0$ una sucesión exacta en $\text{Bi}\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Entonces, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$, se tiene que la sucesión

$$0 \rightarrow M^{ij} \xrightarrow{u^{ij}} E^{ij} \xrightarrow{v^{ij}} N^{ij} \rightarrow 0$$

es exacta en \mathcal{A} . Luego, para cada $s \in \mathbb{Z}$ tenemos que la sucesión:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \coprod_{i+j=s} M^{ij} & \xrightarrow{\coprod u^{ij}} & \coprod_{i+j=s} E^{ij} & \xrightarrow{\coprod v^{ij}} & \coprod_{i+j=s} N^{ij} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \text{Tot}(\ddot{M})^s & \xrightarrow{\text{Tot}(\ddot{u})^s} & \text{Tot}(\ddot{E})^s & \xrightarrow{\text{Tot}(\ddot{v})^s} & \text{Tot}(\ddot{N})^s \longrightarrow 0, \end{array}$$

es exacta. Así, $0 \longrightarrow \text{Tot}(\ddot{M}) \xrightarrow{\text{Tot}(\ddot{u})} \text{Tot}(\ddot{E}) \xrightarrow{\text{Tot}(\ddot{v})} \text{Tot}(\ddot{N}) \longrightarrow 0$ es exacta y Tot es un functor exacto. \square

Lema 1.21. *El functor $\text{Tot}: \text{Bi}\mathcal{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A})$ conmuta con coproductos (ver definición (??)).*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{\ddot{X}_s\}_{s \in T}$ una familia de bicomplejos. Debemos mostrar que el morfismo ψ dado por la propiedad universal del coproducto $\coprod_s \text{Tot}(\ddot{X}_s)$, y que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \coprod_s \text{Tot}(\ddot{X}_s) & \xrightarrow{\psi} & \text{Tot}(\coprod_s \ddot{X}_s) \\ \sigma_{\text{Tot}(\ddot{X}_s)} \uparrow & \nearrow & \text{Tot}(\sigma_{\ddot{X}_s}) \\ \text{Tot}(\ddot{X}_s) & & \end{array}$$

es isomorfismo. Aquí, $\lambda_{\ddot{X}_s}: \ddot{X}_s \rightarrow \coprod_s \ddot{X}_s$ y $\lambda_{\text{Tot}(\ddot{X}_s)}: \text{Tot}(\ddot{X}_s) \rightarrow \coprod_s \text{Tot}(\ddot{X}_s)$ son las inyecciones en $\text{Bi}\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Para cada bicomplejo \ddot{X}_s tenemos las familias de diferenciales: $\{d_s^{ij}: X_s^{ij} \rightarrow X_s^{i+1j}\}$ y $\{\delta_s^{ij}: X_s^{ij} \rightarrow X_s^{i+1j}\}$. Tenemos familias de inyecciones que hacen conmutar el siguiente diagrama, donde ϕ^n es un isomorfismo en \mathcal{A} :

$$\begin{array}{ccc} [\text{Tot}(\coprod_s \ddot{X}_s)]^n & = & \coprod_{i+j=n} \coprod_s X_s^{ij} \xrightarrow{\phi^n} \coprod_s \coprod_{i+j=n} X_s^{ij} = \coprod_s [\text{Tot}(\ddot{X}_s)]^n \\ \lambda_{\coprod_s X_s^{ij}}^n \uparrow & & \uparrow \lambda_{\coprod_{i+j=n} X_s^{ij}}^s \\ \coprod_s X_s^{ij} & & \coprod_{i+j=n} X_s^{ij} \\ \lambda_{X_s^{ij}}^s \uparrow & & \uparrow \lambda_{X_s^{ij}}^n \\ X_s^{ij} & \xlongequal{\quad\quad\quad} & X_s^{ij} \end{array}$$

la existencia de ϕ^n se tiene por la propiedad universal en \mathcal{A} de los coproductos $\coprod_s X_s^{ij}$ y $\coprod_{i+j=n} \coprod_s X_s^{ij}$. Luego, tenemos que:

$$\phi^n \lambda^n_{\coprod_s X_s^{ij}} \lambda^s_{X_s^{ij}} = \lambda^s_{\coprod_{i+j=n} X_s^{ij}} \lambda^n_{X_s^{ij}}. \quad (1.5)$$

Veremos que $\hat{\phi} := (\phi^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es un morfismo de complejos. Sean d^n y \hat{d}^n las n -ésimas diferenciales de los complejos $\text{Tot}(\coprod_s \check{X}_s)$ y $\coprod_s \text{Tot}(\check{X}_s)$ respectivamente. Entonces, para $i + j = n$ conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} X_s^{ij} & \xrightarrow{\lambda^s_{X_s^{ij}}} & \coprod_s X_s^{ij} & \xrightarrow{\lambda^n_{\coprod_s X_s^{ij}}} & \coprod_{i+j=n} \coprod_s X_s^{ij} \\ \left(\begin{array}{c} d_s^{ij} \\ \delta_s^{ij} \end{array} \right) \downarrow & & \left(\begin{array}{c} \coprod_s d_s^{ij} \\ \coprod_s \delta_s^{ij} \end{array} \right) \downarrow & & \downarrow d^n \\ X_s^{ij+1} \oplus X_s^{i+1j} & \xrightarrow{\left(\begin{array}{cc} \lambda^s_{X_s^{ij+1}} & 0 \\ 0 & \lambda^s_{X_s^{i+1j}} \end{array} \right)} & \coprod_s X_s^{ij+1} \oplus \coprod_s X_s^{i+1j} & \xrightarrow{\left(\begin{array}{cc} \lambda^{n+1}_{\coprod_s X_s^{ij+1}} & \lambda^{n+1}_{\coprod_s X_s^{i+1j}} \end{array} \right)} & \coprod_{i+1=j+1} \coprod_s X_s^{ij} \end{array}$$

Luego,

$$d^n \lambda^n_{\coprod_s X_s^{ij}} \lambda^s_{X_s^{ij}} = \lambda^{n+1}_{\coprod_s X_s^{i+1j}} \lambda^s_{X_s^{i+1j}} \delta_s^{ij} + \lambda^{n+1}_{\coprod_s X_s^{ij+1}} \lambda^s_{X_s^{ij+1}} d_s^{ij}.$$

Entonces, usando la ecuación (??),

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} d^n \lambda^n_{\coprod_s X_s^{ij}} \lambda^s_{X_s^{ij}} &= \phi^{n+1} [\lambda^{n+1}_{\coprod_s X_s^{i+1j}} \lambda^s_{X_s^{i+1j}} \delta_s^{ij} + \lambda^{n+1}_{\coprod_s X_s^{ij+1}} \lambda^s_{X_s^{ij+1}} d_s^{ij}] \\ &= \lambda^s_{\coprod_{i+j=n+1} X_s^{i+1j}} \lambda^{n+1}_{X_s^{i+1j}} \delta_s^{ij} + \lambda^s_{\coprod_{i+j=n+1} X_s^{ij+1}} \lambda^{n+1}_{X_s^{ij+1}} d_s^{ij}. \end{aligned}$$

Por otro lado, para $i + j = n$, conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} X_s^{ij} & \xrightarrow{\lambda^n_{X_s^{ij}}} & \coprod_{i+j=n} X_s^{ij} & \xrightarrow{\lambda^s_{\coprod_{i+j=n} X_s^{ij}}} & \coprod_s \coprod_{i+j=n} X_s^{ij} \\ \left(\begin{array}{c} d_s^{ij} \\ \delta_s^{ij} \end{array} \right) \downarrow & & d_{\text{Tot}(\check{X}_s)}^n \downarrow & & \downarrow \hat{d}^n \\ X_s^{ij+1} \oplus X_s^{i+1j} & \xrightarrow{\left(\begin{array}{cc} \lambda^{n+1}_{X_s^{ij+1}} & \lambda^{n+1}_{X_s^{i+1j}} \end{array} \right)} & \coprod_{i+j=n+1} X_s^{ij} & \xrightarrow{\lambda^s_{\coprod_{i+j=n+1} X_s^{ij}}} & \coprod_s \coprod_{i+j=n+1} X_s^{ij} \end{array}$$

Luego,

$$\hat{d}^n \lambda^s_{\coprod_{i+j=n} X_s^{ij}} \lambda^n_{X_s^{ij}} = \lambda^s_{\coprod_{i+j=n+1} X_s^{ij}} [\lambda^{n+1}_{X_s^{ij+1}} d_s^{ij} + \lambda^{n+1}_{X_s^{i+1j}} \delta_s^{i+1j}].$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \hat{d}^n \phi^n \lambda^n \prod_s X_s^{ij} &= \hat{d}^n \lambda^s \prod_{i+j=n} X_s^{ij} \lambda^n \prod_s X_s^{ij} \\ &= \lambda^s \prod_{i+j=n+1} X_s^{ij} [\lambda^{n+1} \delta_s^{ij} + \lambda^{n+1} d_s^{ij}]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\hat{d}^n \phi^n = \phi^{n+1} d^n$, para cada $n \in \mathbb{Z}$ y se tiene que $\hat{\phi}$ es un morfismo de complejos. No es difícil ver que, por la propiedad universal del coproducto en \mathcal{A} , $\hat{\phi}\psi$ y $\psi\hat{\phi}$ son identidades. Luego, $\hat{\psi}$ es isomorfismo y el funtor total conmuta con coproductos. \square

Capítulo 2

\mathcal{E} -sucesiones y Categoría Homotópica

Las \mathcal{E} -sucesiones son sucesiones exactas cortas localmente triviales que le dan una estructura exacta a la categoría $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ de complejos. Aquí probamos que la noción de \mathcal{E} -inyectivo es igual a la de \mathcal{E} -proyectivo. Además, para el caso de $\mathcal{A} = A\text{-Mod}$, en el capítulo 5 probaremos que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tiene suficientes proyectivos, aún cuando A carece de unidad, luego $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ es una categoría de Frobenius.

En este capítulo obtenemos el isomorfismo que hay entre los grupos $\text{Ext}_{\mathcal{C}}(\dot{Y}, \dot{X})$ (de \mathcal{E} -sucesiones) y $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1])$ de las clases de morfismos en $K(\mathcal{A})$ de \dot{Y} a $\dot{X}[1]$, para $K(\mathcal{A})$ la categoría homotópica. Este es esencial para construir los triángulos en $K(\mathcal{A})$ en el siguiente capítulo.

2.1. \mathcal{E} -sucesiones en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$

Definición 2.1. Una sucesión exacta localmente trivial de complejos es

una sucesión exacta $0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{f}} \dot{E} \xrightarrow{\dot{g}} \dot{Y} \longrightarrow 0$ de complejos tal que

para cada $i \in \mathbb{Z}$ la sucesión $0 \longrightarrow X^i \xrightarrow{f^i} E^i \xrightarrow{g^i} Y^i \longrightarrow 0$ es la trivial (se divide). A una tal sucesión le llamaremos \mathcal{E} -sucesión.

Lema 2.2. Si $\dot{f}: \dot{X} \rightarrow \dot{E}$ y $\dot{g}: \dot{E} \rightarrow \dot{Y}$ son morfismos de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, son equivalentes:

1. $0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{f}} \dot{E} \xrightarrow{\dot{g}} \dot{Y} \longrightarrow 0$ es una \mathcal{E} -sucesión.

2. f^i es sección, para todo $i \in \mathbb{Z}$, y $\dot{g} = \text{cok } f$.

3. g^i es retracción, para todo $i \in \mathbb{Z}$, y $f = \ker \dot{g}$.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que **1** implica **2**. Por otro lado, si vale **2**, entonces \dot{f} es monomorfismo en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Entonces, $\dot{f} = \ker \text{cok} \dot{f} = \ker \dot{g}$. Luego, por la proposición (??), tenemos **1**. La demostración de que **1** es equivalente a **3** es dual. \square

Se tiene la siguiente propiedad:

Sea $0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{f}} \dot{E} \xrightarrow{\dot{g}} \dot{Y} \longrightarrow 0$ una \mathcal{E} -sucesión y sea el morfismo $\dot{v}: \dot{Z} \rightarrow \dot{Y}$. Hemos visto que existe el pullback de $\{\dot{g}, \dot{v}\}$ (proposición (??)) y que este se extiende a una sucesión exacta tal que en el siguiente diagrama los cuadrados conmutan:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{h}} & \dot{F} & \xrightarrow{\dot{k}} & \dot{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \dot{u} & & \downarrow \dot{v} & & \\ 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{E} & \xrightarrow{\dot{g}} & \dot{Y} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Veamos que $0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{h}} \dot{F} \xrightarrow{\dot{k}} \dot{Z} \longrightarrow 0$ también es una \mathcal{E} -sucesión.

Para cada $i \in \mathbb{Z}$ se tiene:

$$\begin{array}{l} \beta^i : \quad 0 \longrightarrow X^i \xrightarrow{h^i} F^i \xrightarrow{k^i} Z^i \longrightarrow 0 \\ \quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \downarrow u^i \quad \quad \quad \downarrow v^i \\ \alpha^i : \quad 0 \longrightarrow X^i \xrightarrow{f^i} E^i \xrightarrow{g^i} Y^i \longrightarrow 0, \end{array}$$

como α^i se divide, entonces f^i es sección, luego existe $\sigma^i: E^i \rightarrow X^i$ tal que $\sigma^i f^i = 1_{X^i}$. Entonces $\sigma^i u^i: F^i \rightarrow X^i$ y se tiene $\sigma^i u^i h^i = \sigma^i f^i = 1_{X^i}$, luego h^i es sección y la sucesión β^i se divide para cada $i \in \mathbb{Z}$. Luego, el pullback de una \mathcal{E} -sucesión se extiende a una \mathcal{E} -sucesión. Se tiene el mismo resultado para pushouts.

Lema 2.3 (Lema del 5). *Sea el siguiente un diagrama conmutativo en la categoría abeliana \mathcal{A} , con renglones exactos:*

$$\begin{array}{ccccccccc} X_1 & \xrightarrow{h_1} & X_2 & \xrightarrow{h_2} & X_3 & \xrightarrow{h_3} & X_4 & \xrightarrow{h_4} & X_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ Y_1 & \xrightarrow{t_1} & Y_2 & \xrightarrow{t_2} & Y_3 & \xrightarrow{t_3} & Y_4 & \xrightarrow{t_4} & Y_5. \end{array}$$

Si f_1, f_2, f_4, f_5 son isomorfismos, entonces f_3 también lo es.

También se tiene esta versión del lema anterior:

Lema 2.4 (Lema del 5). *Sea el siguiente un diagrama conmutativo en la categoría abeliana \mathcal{A} , con renglones exactos:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{u_1} & Y_1 & \xrightarrow{v_1} & Z_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & X_2 & \xrightarrow{u_2} & Y_2 & \xrightarrow{v_2} & Z_2 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

1. Si f y h son monomorfismos, entonces g también es monomorfismo.
2. Si f y h son epimorfismos, entonces g también es epimorfismo.
3. Si f y h son isomorfismos, entonces g también es isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Ambas demostraciones pueden consultarse en [?] capítulo VIII, sección 4.

Definición 2.5. *Diremos que las \mathcal{E} -sucesiones:*

$$\alpha : \quad 0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{f}} \dot{E} \xrightarrow{\dot{g}} \dot{Y} \longrightarrow 0$$

$$\beta : \quad 0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{h}} \dot{F} \xrightarrow{\dot{k}} \dot{Y} \longrightarrow 0$$

son equivalentes (y lo denotamos por $\alpha \sim \beta$) si existe $\dot{s} : \dot{E} \rightarrow \dot{F}$, morfismo que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{E} & \xrightarrow{\dot{g}} & \dot{Y} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \dot{s} & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{h}} & \dot{F} & \xrightarrow{\dot{k}} & \dot{Y} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

En este caso \dot{s} resulta isomorfismo, por el lema del 5 aplicado en la categoría abeliana $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Observación 2.6. *Dado el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{h}} & \dot{F} & \xrightarrow{\dot{k}} & \dot{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \dot{m} & & \downarrow \dot{n} & & \\ 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{E} & \xrightarrow{\dot{g}} & \dot{Y} & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

cuyos renglones son \mathcal{E} -sucesiones, se tiene que el cuadrado derecho es un pullback y la \mathcal{E} -sucesión del renglón superior es equivalente a la construída con cualquier pullback de $\{\dot{g}, \dot{n}\}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\beta: 0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{u}} \dot{K} \xrightarrow{\dot{v}} \dot{Z} \longrightarrow 0$ es la extensión dada por el pullback de $\{\dot{g}, \dot{n}\}$. Luego, conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{u}} & \dot{K} & \xrightarrow{\dot{v}} & \dot{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \dot{t} & & \downarrow \dot{n} & & \\ 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{E} & \xrightarrow{\dot{g}} & \dot{Y} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Basta probar que existe un morfismo $\dot{s}: \dot{F} \rightarrow \dot{K}$, tal que $\dot{s}\dot{h} = \dot{u}$ y $\dot{v}\dot{s} = \dot{k}$ en el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{h}} & \dot{F} & \xrightarrow{\dot{k}} & \dot{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \dot{s} & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{u}} & \dot{K} & \xrightarrow{\dot{v}} & \dot{Z} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Como $\dot{F} \xrightarrow{\dot{k}} \dot{Z}$ conmuta, la propiedad universal para el pullback $\{\dot{t}, \dot{v}\}$

$$\begin{array}{ccc} \dot{F} & \xrightarrow{\dot{k}} & \dot{Z} \\ \downarrow \dot{m} & & \downarrow \dot{n} \\ \dot{E} & \xrightarrow{\dot{g}} & \dot{Y} \end{array}$$

nos dice que existe un único morfismo de complejos $\dot{s}: \dot{F} \rightarrow \dot{K}$, tal que $\dot{v}\dot{s} = \dot{k}$ y $\dot{t}\dot{s} = \dot{m}$. Además,

$$\begin{aligned} \dot{t}(\dot{s}\dot{h} - \dot{u}) &= \dot{t}\dot{s}\dot{h} - \dot{t}\dot{u} = \dot{m}\dot{h} - \dot{t}\dot{u} = \dot{f} - \dot{f} = 0, \text{ y} \\ \dot{v}(\dot{s}\dot{h} - \dot{u}) &= \dot{v}\dot{s}\dot{h} - \dot{v}\dot{u} = \dot{k}\dot{h} - \dot{v}\dot{u} = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Luego, $\dot{s}\dot{h} = \dot{u}$ y se tiene lo observado. \square

Observación 2.7. Sean los morfismos de complejos \dot{u}_1, \dot{u}_2 y \dot{u}_3 tales que conmuta el diagrama siguiente con renglones \mathcal{E} -sucesiones

$$\begin{array}{ccccccccc} x: & 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{E} & \xrightarrow{\dot{g}} & \dot{Y} & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow \dot{u}_1 & & \downarrow \dot{u}_2 & & \downarrow \dot{u}_3 & & \\ x_1: & 0 & \longrightarrow & \dot{X}_1 & \xrightarrow{\dot{f}_1} & \dot{E}_1 & \xrightarrow{\dot{g}_1} & \dot{Y}_1 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Entonces existe una factorización del morfismo \dot{u}_2 tal que en el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 x : & 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{E} & \xrightarrow{\dot{g}} & \dot{Y} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \dot{u}_1 \downarrow & & \lambda \downarrow & & \parallel & & \\
 y : & 0 & \longrightarrow & \dot{X}_1 & \xrightarrow{\dot{s}} & \dot{F} & \xrightarrow{\dot{t}} & \dot{Y} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \parallel & & \mu \downarrow & & \dot{u}_3 \downarrow & & \\
 x_1 : & 0 & \longrightarrow & \dot{X}_1 & \xrightarrow{\dot{f}_1} & \dot{E}_1 & \xrightarrow{\dot{g}_1} & \dot{Y}_1 & \longrightarrow & 0,
 \end{array}$$

la \mathcal{E} -sucesión y es pushout de x y a la vez es equivalente al pullback de x_1 .

DEMOSTRACIÓN. Dada la extensión x y el morfismo \dot{u}_1 , obtenemos el pushout de $\{\dot{u}_1, \dot{f}\}$ y extendemos a una sucesión exacta que llamamos y . Luego, tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 x : & 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{E} & \xrightarrow{\dot{g}} & \dot{Y} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \dot{u}_1 \downarrow & & \lambda \downarrow & & \parallel & & \\
 y : & 0 & \longrightarrow & \dot{X}_1 & \xrightarrow{\dot{s}} & \dot{F} & \xrightarrow{\dot{t}} & \dot{Y} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \parallel & & \mu \downarrow & & \dot{u}_3 \downarrow & & \\
 & 0 & \longrightarrow & \dot{X}_1 & \xrightarrow{\dot{f}_1} & \dot{E}_1 & \xrightarrow{\dot{g}_1} & \dot{Y}_1 & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

Basta mostrar que existe $\dot{\mu}$ tal que los cuadrados que se forman conmutan, pues esto implica que $\{\dot{\mu}, \dot{t}\}$ es pullback de $\{\dot{g}_1, \dot{u}_3\}$. Por las propiedades del pushout, y como $\dot{u}_2 \dot{f} = \dot{f}_1 \dot{u}_1$, entonces existe un único morfismo $\dot{\mu}: \dot{F} \rightarrow \dot{E}_1$ tal que $\dot{\mu} \dot{\lambda} = \dot{u}_2$ y $\dot{\mu} \dot{s} = \dot{f}_1$. Por otro lado, vemos que $\dot{u}_3 \dot{t} \dot{\lambda} = \dot{u}_3 \dot{g} = \dot{g}_1 \dot{u}_2 = \dot{g}_1 \dot{\mu} \dot{\lambda}$. Además, $\dot{u}_3 \dot{t} \dot{s} = 0 = \dot{g}_1 \dot{f}_1 = \dot{g}_1 \dot{\mu} \dot{s}$. Por lo tanto, por la unicidad en la propiedad universal del pushout, $\dot{u}_3 \dot{t} = \dot{g}_1 \dot{\mu}$. \square

Es claro que, dados \dot{X}, \dot{Y} en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, \sim define una relación de equivalencia en la clase de todas las \mathcal{E} -sucesiones del complejo \dot{X} por el complejo \dot{Y} . Además, si x es una \mathcal{E} -sucesión de \dot{X} por \dot{Y} , denotaremos por $[x]$ su clase de equivalencia respecto a \sim .

Definición 2.8. Llamaremos $\mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{Y}, \dot{X})$ a la clase de todas las \mathcal{E} -sucesiones de \dot{X} por \dot{Y} módulo la relación de equivalencia dada por \sim .

Observemos que $\mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{Y}, \dot{X})$ tiene estructura de grupo abeliano, con operación la suma de Baer.

Lema 2.9. Sean \dot{X}, \dot{Y} en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Entonces, cada \dot{B} en $\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1])$ determina una \mathcal{E} -sucesión

$$\varphi_{\dot{B}} : 0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{\sigma}} \dot{E} \xrightarrow{\dot{\pi}} \dot{Y} \longrightarrow 0$$

donde, para cada $i \in \mathbb{Z}$,

1. $E^i = X^i \oplus Y^i$.

2. $d_E^i = \begin{pmatrix} d_X^i & B^i \\ 0 & d_Y^i \end{pmatrix}$.

3. $\sigma^i = \begin{pmatrix} 1_{X^i} \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. $\pi^i = (0, 1_{Y^i})$.

Y recíprocamente, una \mathcal{E} -sucesión

$$0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{\sigma}} \dot{E} \xrightarrow{\dot{\pi}} \dot{Y} \longrightarrow 0$$

que satisface, para cada $i \in \mathbb{Z}$ las condiciones (1), (3) y (4) anteriores, es tal que su i -ésimo morfismo diferencial es como en (2), y determina un morfismo de complejos $\dot{B} := (B^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ en $\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1])$.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que \dot{E} es un complejo, pues, al ser \dot{B} un morfismo de complejos, conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Y^i & \xrightarrow{B^i} & X[1]^i \\ d_Y^i \downarrow & & \downarrow -d_X^{i+1} \\ Y^{i+1} & \xrightarrow{B^{i+1}} & X[1]^{i+1}. \end{array}$$

Entonces, se tiene la condición:

$$d_X^{i+1} B^i + B^{i+1} d_Y^i = 0, \quad (2.1)$$

que implica que

$$\begin{pmatrix} d_X^{i+1} & B^{i+1} \\ 0 & d_Y^{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_X^i & B^i \\ 0 & d_Y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_X^{i+1} d_X^i & d_X^{i+1} B^i + B^{i+1} d_Y^i \\ 0 & d_Y^{i+1} d_Y^i \end{pmatrix} = 0.$$

Claramente los morfismos $\dot{\sigma}$ y $\dot{\pi}$ son de complejos, pues conmutan con las diferenciales. Además, en cada $i \in \mathbb{Z}$, σ^i es una sección y π^i es una retracción,

de ahí que, localmente $\varphi_{\dot{B}}$ se divide. No es difícil ver que $\dot{\sigma} = \ker \dot{\pi}$, luego, por el lema (??), $\varphi_{\dot{B}}$ es una \mathcal{E} -sucesión.

Para el recíproco, notemos que el i -ésimo morfismo diferencial del complejo \dot{E} debe hacer conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X^i & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{X^i} \\ 0 \end{pmatrix}} & X^i \oplus Y^i & \xrightarrow{(0 \ 1_{Y^i})} & Y^i \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d_X^i & & \downarrow d_E^i = \begin{pmatrix} A^i & B^i \\ C^i & D^i \end{pmatrix} & & \downarrow d_Y^i \\ 0 & \longrightarrow & X^{i+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{X^{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix}} & X^{i+1} \oplus Y^{i+1} & \xrightarrow{(0, 1_{Y^{i+1}})} & Y^{i+1} \longrightarrow 0, \end{array}$$

luego, se debe tener $\begin{pmatrix} A^i & B^i \\ C^i & D^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_X^i & B^i \\ 0 & d_Y^i \end{pmatrix}$, para algún morfismo $B^i: Y^i \rightarrow X^{i+1}$ en \mathcal{A} , para cada $i \in \mathbb{Z}$. También se debe cumplir que:

$$0 = \begin{pmatrix} d_X^{i+1} & B^{i+1} \\ 0 & d_Y^{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_X^i & B^i \\ 0 & d_Y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_X^{i+1} d_X^i & d_X^{i+1} B^i + B^{i+1} d_Y^i \\ 0 & d_Y^{i+1} d_Y^i \end{pmatrix}.$$

Luego, se tiene la condición:

$$d_X^{i+1} B^i + B^{i+1} d_Y^i = 0,$$

que nos dice que $\dot{B} := (B^i)_{i \in \mathbb{Z}}: \dot{Y} \rightarrow \dot{X}[1]$ es un morfismo de complejos. \square

Lema 2.10. Sean \dot{X}, \dot{Y} en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, consideremos la función

$$\begin{array}{ccc} \Psi: \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1]) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{C}}(\dot{Y}, \dot{X}) \\ \dot{h} & \mapsto & [\varphi_{\dot{h}}] \end{array}$$

(donde $\varphi_{\dot{h}}$ es la definida en el lema (??)). Entonces Ψ es suprayectiva: Si

$x: 0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{f} \dot{E} \xrightarrow{g} \dot{Y} \longrightarrow 0$ es una \mathcal{E} -sucesión, para cada $i \in \mathbb{Z}$

existen morfismos σ^i y τ^i tales que: $0 \longrightarrow X^i \xleftarrow{\sigma^i} E^i \xleftarrow{\tau^i} Y^i \longrightarrow 0$, y

se cumple que $\sigma^i f^i = 1_{X^i}$, $g^i \tau^i = 1_{Y^i}$ y $1_{E^i} = f^i \sigma^i + \tau^i g^i$. Entonces

$$\dot{h} := (\sigma^{i+1} d_E^i \tau^i)_{i \in \mathbb{Z}}$$

está en $\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1])$ y satisface que $\Psi(\dot{h}) = [x]$.

DEMOSTRACIÓN. Dada la \mathcal{E} -sucesión x , para cada $i \in \mathbb{Z}$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X^i & \xrightarrow{f^i} & E^i & \xrightarrow{g^i} & Y^i \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} \sigma^i \\ g^i \end{pmatrix} & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & X^i & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{X^i} \\ 0 \end{pmatrix}} & X^i \oplus Y^i & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1_{Y^i} \end{pmatrix}} & Y^i \longrightarrow 0, \end{array}$$

luego, por el lema (??), $s^i := \begin{pmatrix} \sigma^i \\ g^i \end{pmatrix}$ es un isomorfismo en \mathcal{A} . Tenemos una nueva \mathcal{E} -sucesión

$$\underline{x} : 0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{f}} \dot{E} \xrightarrow{\dot{g}} \dot{Y} \longrightarrow 0,$$

definida por: $\underline{E}^i := X^i \oplus Y^i$, $d_{\underline{E}}^i = s^{i+1} d_E^i (s^i)^{-1}$, $\underline{f}^i = \begin{pmatrix} 1_{X^i} \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\underline{g}^i = (0, 1_{Y^i})$, para cada $i \in \mathbb{Z}$, tal que $x \sim \underline{x}$. Por el recíproco del lema (??), la diferencial $d_{\underline{E}}^i$ es de la forma $\begin{pmatrix} d_X^i & h^i \\ 0 & d_Y^i \end{pmatrix} : X^i \oplus Y^i \rightarrow X^{i+1} \oplus Y^{i+1}$, con $h^i : Y^i \rightarrow X^{i+1}$; recordemos que es precisamente el morfismo h^i el que induce el morfismo de complejos de \dot{Y} en $\dot{X}[1]$ correspondiente a la \mathcal{E} -sucesión \underline{x} . Puesto que la inversa de $s^i = \begin{pmatrix} \sigma^i \\ g^i \end{pmatrix}$ es $(s^i)^{-1} = (f^i, \tau^i)$, por definición de $d_{\underline{E}}^i$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d_X^i & h^i \\ 0 & d_Y^i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sigma^{i+1} \\ g^{i+1} \end{pmatrix} d_E^i (f^i, \tau^i) = \begin{pmatrix} \sigma^{i+1} \\ g^{i+1} \end{pmatrix} (d_E^i f^i, d_E^i \tau^i) \\ &= \begin{pmatrix} \sigma^{i+1} f^{i+1} d_X^i & \sigma^{i+1} d_E^i \tau^i \\ g^{i+1} f^{i+1} d_X^i & g^{i+1} d_E^i \tau^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_X^i & \sigma^{i+1} d_E^i \tau^i \\ 0 & d_Y^i g^i \tau^i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_X^i & \sigma^{i+1} d_E^i \tau^i \\ 0 & d_Y^i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h^i := \sigma^{i+1} d_E^i \tau^i \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y^i, X^{i+1})$ define un morfismo de complejos $\dot{h} := (h^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ en $\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1])$.

Tenemos que Ψ es sobreyectiva, pues $\Psi(\dot{h}) = [\underline{x}] = [x]$. \square

De lo anterior se desprende que $\mathcal{E}xt_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{X}, \dot{Y})$ es un conjunto.

Proposición 2.11. *Sean \dot{X}, \dot{Y} en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. El conjunto $\mathcal{E}xt_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X})$ admite la siguiente estructura natural de grupo. Si $[x], [y]$ están en $\mathcal{E}xt_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X})$, se define la suma como sigue: Dadas las \mathcal{E} -sucesiones*

$$\begin{array}{l} x : 0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{f}_1} \dot{E}_1 \xrightarrow{\dot{g}_1} \dot{Y} \longrightarrow 0 \\ y : 0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{f}_2} \dot{E}_2 \xrightarrow{\dot{g}_2} \dot{Y} \longrightarrow 0, \end{array}$$

tenemos la \mathcal{E} -sucesión:

$$x \oplus y : 0 \longrightarrow \dot{X} \oplus \dot{X} \xrightarrow{f_1 \oplus f_2} \dot{E}_1 \oplus \dot{E}_2 \xrightarrow{g_1 \oplus g_2} \dot{Y} \oplus \dot{Y} \longrightarrow 0,$$

a la cual calculamos su pullback respecto al morfismo diagonal $\Delta := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \dot{Y} \rightarrow \dot{Y} \oplus \dot{Y}$:

$$(x \oplus y)\Delta : \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \dot{X} \oplus \dot{X} & \longrightarrow & \dot{F} & \longrightarrow & \dot{Y} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \Delta \\ x \oplus y : & 0 & \longrightarrow & \dot{X} \oplus \dot{X} & \longrightarrow & \dot{E}_1 \oplus \dot{E}_2 & \longrightarrow \dot{Y} \oplus \dot{Y} \longrightarrow 0, \end{array}$$

luego calculamos el pushout de $(x \oplus y)\Delta$ con respecto al morfismo codiagonal $\nabla := (1, 1) : \dot{X} \oplus \dot{X} \rightarrow \dot{X}$:

$$(x \oplus y)\Delta : \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \dot{X} \oplus \dot{X} & \longrightarrow & \dot{F} & \longrightarrow & \dot{Y} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \nabla & & \downarrow & & \parallel \\ \nabla(x \oplus y)\Delta : & 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \longrightarrow & \dot{E} & \longrightarrow \dot{Y} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Definimos $[x] + [y] = [\nabla(x \oplus y)\Delta]$. El neutro aditivo es $[t]$, donde t es la sucesión trivial $0 \longrightarrow \dot{X} \longrightarrow \dot{X} \oplus \dot{Y} \longrightarrow \dot{Y} \longrightarrow 0$.

2.2. Categoría homotópica y $\mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}$

Definición 2.12. Sean $\alpha, \beta : \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$, morfismos de complejos en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Decimos que α es homotópico a β (y lo denotamos por $\alpha \sim_h \beta$) si hay una familia de morfismos $\{s_i : X^i \rightarrow Y^{i-1}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ en \mathcal{A} tales que:

$$\alpha^i - \beta^i = s_{i+1}d_X^i + d_Y^{i-1}s_i,$$

para cada $i \in \mathbb{Z}$. En un diagrama, los morfismos se ven así:

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{X} : & \cdots & \longrightarrow & X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \\ \alpha \downarrow \parallel \beta & & & \alpha^{i-1} \downarrow \parallel \beta^{i-1} & \swarrow s_i & \alpha^i \downarrow \parallel \beta^i & \swarrow s_{i+1} & \alpha^{i+1} \downarrow \parallel \beta^{i+1} & & \\ \dot{Y} : & \cdots & \longrightarrow & Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

A la familia $\{s_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ se le llama homotopía.

Observación 2.13. La relación de homotopía (\sim_h) es una relación de equivalencia en $\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{X}, \dot{Y})$, para cada pareja de complejos \dot{X}, \dot{Y} .

Lema 2.14. Sean \dot{X}, \dot{Y} en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ y \dot{B} en $\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1])$, entonces $\varphi_{\dot{B}}$ (del lema (??)) es equivalente a la \mathcal{E} -sucesión trivial

$$t: 0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{\dot{X}} \\ 0 \end{pmatrix}} \dot{X} \oplus \dot{Y} \xrightarrow{(0, 1_{\dot{Y}})} \dot{Y} \longrightarrow 0$$

si y sólo si \dot{B} es homotópico a cero.

DEMOSTRACIÓN. Usando la notación del lema (??), tenemos que $\varphi_{\dot{B}}$ es equivalente a la \mathcal{E} -sucesión trivial t si y sólo si existe un morfismo $\dot{\alpha}: \dot{E} \rightarrow \dot{X} \oplus \dot{Y}$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi_{\dot{B}}: & 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{\sigma}} & \dot{E} & \xrightarrow{\dot{\pi}} & \dot{Y} & \longrightarrow & 0 \\ & & & \parallel & & \downarrow \dot{\alpha} & & \parallel & & \\ t: & 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{\dot{X}} \\ 0 \end{pmatrix}} & \dot{X} \oplus \dot{Y} & \xrightarrow{(0, 1_{\dot{Y}})} & \dot{Y} & \longrightarrow & 0. \end{array} \quad (2.2)$$

Luego, para cada $i \in \mathbb{Z}$ tenemos:

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi_{\dot{B}}^i: & 0 & \longrightarrow & X^i & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{X^i} \\ 0 \end{pmatrix}} & X^i \oplus Y^i & \xrightarrow{(0, 1_{Y^i})} & Y^i & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow d_X^i & & \downarrow \begin{pmatrix} d_X^i & B^i \\ 0 & d_Y^i \end{pmatrix} & & \downarrow d_Y^i & & \\ \varphi_{\dot{B}}^{i+1}: & 0 & \longrightarrow & X^{i+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{X^{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix}} & X^{i+1} \oplus Y^{i+1} & \xrightarrow{(0, 1_{Y^{i+1}})} & Y^{i+1} & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

con $\dot{B} = (B^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ el morfismo correspondiente a $\varphi_{\dot{B}}$ en $\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1])$. Por otro lado, para t tenemos:

$$\begin{array}{ccccccc} t^i: & 0 & \longrightarrow & X^i & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{X^i} \\ 0 \end{pmatrix}} & X^i \oplus Y^i & \xrightarrow{(0, 1_{Y^i})} & Y^i & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow d_X^i & & \downarrow \begin{pmatrix} d_X^i & 0 \\ 0 & d_Y^i \end{pmatrix} & & \downarrow d_Y^i & & \\ t^{i+1}: & 0 & \longrightarrow & X^{i+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{X^{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix}} & X^{i+1} \oplus Y^{i+1} & \xrightarrow{(0, 1_{Y^{i+1}})} & Y^{i+1} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

El morfismo $\dot{\alpha}$ es tal que, para cada $i \in \mathbb{Z}$ conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} \varphi_{\dot{B}}^i : & 0 & \longrightarrow & X^i & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{X^i} \\ 0 \end{pmatrix}} & X^i \oplus Y^i & \xrightarrow{(0, 1_{Y^i})} & Y^i & \longrightarrow & 0 \\ & & & \parallel & & \downarrow \alpha^i = \begin{pmatrix} \alpha_1^i & \alpha_2^i \\ \alpha_3^i & \alpha_4^i \end{pmatrix} & & \parallel & & \\ t^i : & 0 & \longrightarrow & X^i & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{X^i} \\ 0 \end{pmatrix}} & X^i \oplus Y^i & \xrightarrow{(0, 1_{Y^i})} & Y^i & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Luego, se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. $\alpha^i \begin{pmatrix} 1_{X^i} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{X^i} \\ 0 \end{pmatrix}$,
2. $(0, 1_{Y^i}) \alpha^i = (0, 1_{Y^i})$,
3. $\begin{pmatrix} d_X^i & 0 \\ 0 & d_Y^i \end{pmatrix} \alpha^i = \alpha^{i+1} \begin{pmatrix} d_X^i & B^i \\ 0 & d_Y^i \end{pmatrix}$.

Las condiciones (1) y (2) hacen que los cuadrados conmuten en el diagrama (??), y la condición (3) hace que $\dot{\alpha}$ sea un morfismo de complejos. De la condición (1) obtenemos que $\alpha_1^i = 1_{X^i}$ y $\alpha_3^i = 0$. Luego, (2) nos dice que $\alpha_4^i = 1_{Y^i}$. Estas condiciones en (3) implican que $\dot{\alpha}$ existe si y sólo si $d_X^i \alpha_2^i = B^i + \alpha_2^{i+1} d_Y^i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Es decir, $\varphi_{\dot{B}}$ es equivalente a t si y sólo si existe una familia de morfismos $(\alpha_2^i : Y^i \rightarrow X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$\begin{aligned} B^i &= d_X^i \alpha_2^i - \alpha_2^{i+1} d_Y^i \\ &= (-d_X^i)(-\alpha_2^i) + (-\alpha_2^{i+1})d_Y^i, \end{aligned}$$

para cada $i \in \mathbb{Z}$. Esto se traduce a que en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Y^{i-1} & \xrightarrow{B^{i-1}} & X[1]^{i-1} \\ d_Y^{i-1} \downarrow & \nearrow -\alpha_2^i & \downarrow -d_X^i \\ Y^i & \xrightarrow{B^i} & X[1]^i \\ d_Y^i \downarrow & \nearrow -\alpha_2^{i+1} & \downarrow -d_X^{i+1} \\ Y^{i+1} & \xrightarrow{B^{i+1}} & X[1]^{i+1}, \end{array}$$

\dot{B} sea homotópica a cero. □

Proposición 2.15. $\Psi: \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1]) \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{Y}, \dot{X})$ es un homomorfismo de grupos y su núcleo es el conjunto de morfismos que son homotópicos a 0 en $\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1])$. Sea π la proyección natural en el siguiente diagrama. Luego, por el primer teorema de isomorfismo para grupos, existe $\hat{\Psi}$ isomorfismo tal que conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1]) & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{Y}, \dot{X}) \\ \pi \downarrow & \nearrow \hat{\Psi} & \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1]) / \ker \Psi & & \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Por los lemas (??) y (??); además, no es muy difícil ver que Ψ es un homomorfismo de grupos. \square

Definición 2.16. Sea $K(\mathcal{A})$ la categoría cociente de los complejos módulo la relación de homotopía. Los objetos de $K(\mathcal{A})$ son los mismos de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, pero los morfismos son las clases: $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{X}, \dot{Y}) = \frac{\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{X}, \dot{Y})}{Z(\dot{X}, \dot{Y})}$, donde $Z(\dot{X}, \dot{Y})$ es el subgrupo de $\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{X}, \dot{Y})$ formado por los morfismos homotópicos a cero. Dados los morfismos de complejos \dot{f} y \dot{g} tales que $\dot{g}\dot{f}$ tiene sentido, entonces definimos la composición de sus clases en $K(\mathcal{A})$ como $\dot{g} \cdot \dot{f} = \dot{g} \cdot \dot{f}$. A $K(\mathcal{A})$ le llamaremos la categoría homotópica.

Observación 2.17. Veamos que es válida la definición que dimos de la composición de morfismos en $K(\mathcal{A})$: Sean $\dot{f}_1 \sim_h \dot{f}$ y $\dot{g}_1 \sim_h \dot{g}$. Existen familias de morfismos $\{s_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ y $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ en \mathcal{A} ,

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{X} : & \cdots & \longrightarrow & X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \\ f \downarrow \parallel f_1 & & & f^{i-1} \downarrow \parallel f_1^{i-1} & \swarrow s_i & f^i \downarrow \parallel f_1^i & \swarrow s_{i+1} & f^{i+1} \downarrow \parallel f_1^{i+1} & & \\ \dot{Y} : & \cdots & \longrightarrow & Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \\ \dot{g} \downarrow \parallel g_1 & & & g^{i-1} \downarrow \parallel g_1^{i-1} & \swarrow t_i & g^i \downarrow \parallel g_1^i & \swarrow t_{i+1} & g^{i+1} \downarrow \parallel g_1^{i+1} & & \\ \dot{Z} : & \cdots & \longrightarrow & Z^{i-1} & \xrightarrow{d_Z^{i-1}} & Z^i & \xrightarrow{d_Z^i} & Z^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

tales que $f_1^i - f^i = s^{i+1} d_X^i + d_Y^{i-1} s^i$ y $g_1^i - g^i = t^{i+1} d_Y^i + d_Z^{i-1} t^i$. Luego,

$$\begin{aligned} g_1^i f_1^i - g^i f^i &= g_1^i s^{i+1} d_X^i + g_1^i d_Y^{i-1} s^i, & y \\ g_1^i f^i - g^i f^i &= t^{i+1} d_Y^i f^i + d_Z^{i-1} t^i f^i, \end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned} g_1^i f_1^i - g^i f^i &= g_1^i s^{i+1} d_X^i + g_1^i d_Y^{i-1} s^i + t^{i+1} d_Y^i f^i + d_Z^{i-1} t^i f^i \\ &= (g_1^i s^{i+1} + t^{i+1} f^{i+1}) d_X^i + d_Z^{i-1} (g_1^{i-1} s^i + t^i f^i). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{g_1^{i-1} s_i + t^i f^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ es una homotopía y tenemos $\dot{g}_1 \dot{f}_1 \sim_h \dot{g} \dot{f}$.

Con esta nueva notación, la proposición (??) prueba que:

Teorema 2.18. Sean los complejos \dot{X} y \dot{Y} en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, entonces $\mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{Y}, \dot{X})$ es isomorfo a $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1])$.

Más aún, se prueba que los funtores $\mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(-, \dot{X})$ y $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(-, \dot{X}[1])$ son isomorfos. Recordemos que:

Definición 2.19. Un functor F de una categoría \mathcal{C} a una categoría \mathcal{D} consiste de:

- Una regla de asociación que asigna a cada objeto de \mathcal{C} , un objeto de \mathcal{D} .
- Una regla de asociación que asigna a cada morfismo f en $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ un morfismo $F(f)$ en $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$.

Esta regla satisface que $F(1_X) = 1_{F(X)}$, para todo X objeto de \mathcal{C} , y, en el caso de un functor covariante, $F(fg) = F(f)F(g)$, o bien, $F(fg) = F(g)F(f)$ para los morfismos f, g (cuya composición tiene sentido) en \mathcal{C} y decimos que el functor es contravariante.

Un functor se dice *fiel* si para todos los objetos X, Y en \mathcal{C} la función $F_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ es inyectiva. Se dice *pleno* si ésta es sobreyectiva. Si \mathcal{C} y \mathcal{D} son aditivas, el functor F se llama *aditivo* si $F_{X,Y}$ es morfismo de grupos. Cuando hablemos de funtores entre categorías aditivas nos referiremos a funtores aditivos. Además, un functor se dice *exacto* si la imagen de una sucesión exacta es también una sucesión exacta.

Definición 2.20. Sea $T: K(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{A})$ el functor dado por:

$$\begin{array}{ccc} T: K(\mathcal{A}) & \longrightarrow & K(\mathcal{A}) \\ \dot{X} & & \dot{X}[1] \\ \dot{f} \downarrow & \longmapsto & \downarrow \dot{f}[1] \\ \dot{Y} & & \dot{Y}[1], \end{array}$$

donde $\underline{f}[1]$ denota la clase del morfismo $\dot{f}[1]$ cuya i -ésima entrada es f^{i+1} . Notemos que T está bien definido en morfismos, pues si \dot{f} es homotópico a \dot{g} , entonces $\dot{f}[1]$ es homotópico a $\dot{g}[1]$. Luego, T es un funtor covariante, con inverso dado por: $T^{-1}\dot{X} = \dot{X}[-1]$ y $T^{-1}\underline{f} = \underline{f}[-1]$. Entonces T es un automorfismo de $K(\mathcal{A})$.

Definición 2.21. Sean F, G funtores de \mathcal{C} en \mathcal{D} . Un morfismo de funtores (covariantes) $\varphi: F \rightarrow G$ es una familia de morfismos $\{\varphi_X: F(X) \rightarrow G(X)\}_{X \in \text{Obj } \mathcal{C}}$ en \mathcal{D} tal que para todo $f: X \rightarrow Y$ en \mathcal{C} conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & G(Y). \end{array}$$

También se le llama comúnmente transformación natural.

Un morfismo de funtores $\varphi: F \rightarrow G$ será isomorfismo si cada φ_X lo es, para cada objeto X de \mathcal{C} .

Observación 2.22. 1. Los funtores $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(-, \dot{X}[1])$ y $\mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(-, \dot{X})$ son isomorfos para todo complejo \dot{X} .

2. Este isomorfismo también es natural en la segunda entrada.

DEMOSTRACIÓN. 1. Ya hemos visto que $\hat{\Psi}$ es isomorfismo para cada complejo \dot{Y} (teorema (??); para notación, ver lema (??) y proposición (??)). Sólo falta probar que dado $\dot{u}: \dot{Y}_1 \rightarrow \dot{Y}$ conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1]) & \xrightarrow{\hat{\Psi}} & \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{Y}, \dot{X}) \\ \dot{u}^* \downarrow & & \downarrow \mathcal{E}xt(\dot{u}, 1) \\ \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Y}_1, \dot{X}[1]) & \xrightarrow{\hat{\Psi}} & \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{Y}_1, \dot{X}). \end{array} \quad (2.3)$$

Sea $\dot{h} \in \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1])$ y \dot{h} uno de sus representantes. \dot{h} determina la \mathcal{E} -sucesión $x = \varphi_{\dot{h}}$. Aplicar $\mathcal{E}xt(\dot{u}, 1)$ a $[x]$ es sacar el pullback de x por \dot{u} (que denotaremos por $x\dot{u}$) y tomar su clase $[x\dot{u}]$. Luego, tenemos el siguiente diagrama de cuadrados conmutativos:

$$\begin{array}{ccccccc} x\dot{u}: & 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \longrightarrow & \dot{F} & \longrightarrow & \dot{Y}_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \dot{u} & & \\ x: & 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \longrightarrow & \dot{E} & \longrightarrow & \dot{Y} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Por otro lado, tenemos que ver que la \mathcal{E} -sucesión $\varphi_{\dot{h}\dot{u}}$ que determina $\dot{u}^*(\dot{h}) = \dot{h}\dot{u}$ es equivalente a $x\dot{u}$. La \mathcal{E} -sucesión que determina $\dot{h}\dot{u}$ es tal que en cada $i \in \mathbb{Z}$ se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X^i & \longrightarrow & X^i \oplus Y_1^i & \longrightarrow & Y_1^i \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d_X^i & & \downarrow \begin{pmatrix} d_X^i & h^i u^i \\ 0 & d_{Y_1}^i \end{pmatrix} & & \downarrow d_{Y_1}^i \\ 0 & \longrightarrow & X^{i+1} & \longrightarrow & X^{i+1} \oplus Y_1^{i+1} & \longrightarrow & Y_1^{i+1} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Sea el complejo $\dot{G} = (X^i \oplus Y_1^i, \begin{pmatrix} d_X^i & h^i u^i \\ 0 & d_{Y_1}^i \end{pmatrix})_{i \in \mathbb{Z}}$. Luego, basta ver que existe $\dot{\lambda}$ que hace conmutar:

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi(\dot{h}\dot{u}): & 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \longrightarrow & \dot{G} & \longrightarrow & \dot{Y}_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & & \parallel & & \downarrow \dot{\lambda} & & \downarrow \dot{u} & & \\ x: & 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \longrightarrow & \dot{E} & \longrightarrow & \dot{Y} & \longrightarrow & 0, \end{array} \quad (2.4)$$

esto implicaría (por (??)) que $\varphi(\dot{h}\dot{u})$ es equivalente a $x\dot{u}$. Luego, tendríamos la conmutatividad del cuadro (??).

Sea $\lambda^i = \begin{pmatrix} 1_{X^i} & 0 \\ 0 & u^i \end{pmatrix}$, entonces:

$$\begin{array}{ccc} X^i \oplus Y_1^i & \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_X^i & h^i u^i \\ 0 & d_{Y_1}^i \end{pmatrix}} & X^{i+1} \oplus Y_1^{i+1} \\ \begin{pmatrix} 1_{X^i} & 0 \\ 0 & u^i \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 1_{X^{i+1}} & 0 \\ 0 & u^{i+1} \end{pmatrix} \\ X^i \oplus Y^i & \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_X^i & h^i \\ 0 & d_Y^i \end{pmatrix}} & X^{i+1} \oplus Y^{i+1} \end{array}$$

conmuta puesto que \dot{u} es morfismo de complejos. Para ver que los cuadrados en (??) conmutan, basta notar que para cada $i \in \mathbb{Z}$ tenemos la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X^i & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{X^i} \\ 0 \end{pmatrix}} & X^i \oplus Y_1^i & \xrightarrow{(0, 1_{Y_1^i})} & Y_1^i \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} 1_{X^i} & 0 \\ 0 & u^i \end{pmatrix} & & \downarrow u^i \\ 0 & \longrightarrow & X^i & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{X^i} \\ 0 \end{pmatrix}} & X^i \oplus Y^i & \xrightarrow{(0, 1_{Y^i})} & Y^i \longrightarrow 0. \end{array}$$

Luego, la transformación es natural en la primer entrada.

2. Sea $\dot{v}: \dot{X} \rightarrow \dot{X}_1$. Probaremos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1]) & \xrightarrow{\hat{\Psi}} & \mathcal{E}xt_{\mathcal{E}}(\dot{Y}, \dot{X}) \\ \dot{v}[1]* \downarrow & & \downarrow \mathcal{E}xt(1, \dot{v}) \\ \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}_1[1]) & \xrightarrow{\hat{\Psi}} & \mathcal{E}xt_{\mathcal{E}}(\dot{Y}, \dot{X}_1). \end{array}$$

Sea la clase $\dot{h} \in \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1])$ con \dot{h} un representante. Tenemos $\hat{\Psi}(\dot{h}) = [\varphi_{\dot{h}}]$. Sea $y := \varphi_{\dot{h}}$. Aplicar $\mathcal{E}xt(1, \dot{v})$ a $[y]$ es obtener su pushout por \dot{v} , extender a una \mathcal{E} -sucesión (que denotaremos por $\dot{v}y$) y tomar su clase $[\dot{v}y]$ en $\mathcal{E}xt_{\mathcal{E}}(\dot{Y}, \dot{X}_1)$. Luego, tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} y: & 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \longrightarrow & \dot{E} & \longrightarrow & \dot{Y} & \longrightarrow & 0 \\ & & & \dot{v} \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ \dot{v}y: & 0 & \longrightarrow & \dot{X}_1 & \longrightarrow & \dot{F} & \longrightarrow & \dot{Y} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Debemos probar la última igualdad en la siguiente expresión:

$$\hat{\Psi}(\dot{v}[1]*(\dot{h})) = \hat{\Psi}(\dot{v}[1]\dot{h}) = [\varphi_{\dot{v}[1]\dot{h}}] = [\dot{v}y].$$

Basta probar que existe μ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} y: & 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \longrightarrow & \dot{E} & \longrightarrow & \dot{Y} & \longrightarrow & 0 & (2.5) \\ & & & \dot{v} \downarrow & & \mu \downarrow \dots & & \parallel & & \\ \varphi_{\dot{v}[1]\dot{h}}: & 0 & \longrightarrow & \dot{X}_1 & \longrightarrow & \dot{G} & \longrightarrow & \dot{Y} & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

donde $G^i := X_1^i \oplus Y^i$ y $d_G^i = \begin{pmatrix} d_{X_1}^i & v^{i+1}h^i \\ 0 & d_Y^i \end{pmatrix}$, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Esto implicaría que $\varphi_{\dot{v}[1]\dot{h}}$ es equivalente al pushout de y que es $\dot{v}y$.

Sea $\mu^i := \begin{pmatrix} v^i & 0 \\ 0 & 1_{Y^i} \end{pmatrix}$. Puesto que \dot{v} es un morfismo de complejos, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X^i \oplus Y^i & \xrightarrow{d_E^i = \begin{pmatrix} d_X^i & h^i \\ 0 & d_Y^i \end{pmatrix}} & X^{i+1} \oplus Y^{i+1} \\ \begin{pmatrix} v^i & 0 \\ 0 & 1_{Y^i} \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} v^{i+1} & 0 \\ 0 & 1_{Y^{i+1}} \end{pmatrix} \\ X_1^i \oplus Y^i & \xrightarrow{d_G^i = \begin{pmatrix} d_{X_1}^i & v^{i+1}h^i \\ 0 & d_Y^i \end{pmatrix}} & X_1^{i+1} \oplus Y^{i+1}, \end{array}$$

entonces $\dot{\mu} := (\mu^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es de complejos. También, para cada $i \in \mathbb{Z}$ conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X^i & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{X^i} \\ 0 \end{pmatrix}} & X^i \oplus Y^i & \xrightarrow{(0, 1_{Y^i})} & Y^i \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow v^i & & \downarrow \begin{pmatrix} v^i & 0 \\ 0 & 1_{Y^i} \end{pmatrix} & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & X_1^i & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{X_1^i} \\ 0 \end{pmatrix}} & X_1^i \oplus Y^i & \xrightarrow{(0, 1_{Y^i})} & Y^i \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Luego, (??) conmuta y se tiene la naturalidad en la segunda entrada. \square

Proposición 2.23. Sean los morfismos de complejos \dot{u}_1, \dot{u}_2 y \dot{u}_3 que hacen conmutar el siguiente diagrama de \mathcal{E} -sucesiones en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$,

$$\begin{array}{ccccccc}
 x: & 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{f} & \dot{E} & \xrightarrow{g} & \dot{Y} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow \dot{u}_1 & & \downarrow \dot{u}_2 & & \downarrow \dot{u}_3 & & \\
 x_1: & 0 & \longrightarrow & \dot{X}_1 & \xrightarrow{f_1} & \dot{E}_1 & \xrightarrow{g_1} & \dot{Y}_1 & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

Luego,

$$\begin{array}{ccc}
 \dot{Y} & \xrightarrow{h} & \dot{X}[1] \\
 \dot{u}_3 \downarrow & & \downarrow \dot{u}_1[1] \\
 \dot{Y}_1 & \xrightarrow{h_1} & \dot{X}_1[1]
 \end{array}$$

conmuta módulo homotopía, para \dot{h} y \dot{h}_1 representantes de los morfismos correspondientes a x y x_1 respectivamente, por los isomorfismos $\mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{Y}, \dot{X}) \cong \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1])$ y $\mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{Y}_1, \dot{X}_1) \cong \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Y}_1, \dot{X}_1[1])$.

DEMOSTRACIÓN. Existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 x: & 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{f} & \dot{E} & \xrightarrow{g} & \dot{Y} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow \dot{u}_1 & & \downarrow \lambda & & \parallel & & \\
 y: & 0 & \longrightarrow & \dot{X}_1 & \xrightarrow{s} & \dot{F} & \xrightarrow{i} & \dot{Y} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \parallel & & \downarrow \mu & & \downarrow \dot{u}_3 & & \\
 x_1: & 0 & \longrightarrow & \dot{X}_1 & \xrightarrow{f_1} & \dot{E}_1 & \xrightarrow{g_1} & \dot{Y}_1 & \longrightarrow & 0,
 \end{array}$$

con $\dot{u}_2 = \mu\lambda$, donde la extensión y es pushout de x y a la vez es pull-back de x_1 (observación (??)). Además, por el isomorfismo que hay entre los funtores $\mathcal{E}xt_{\mathcal{E}}(-, \dot{Z})$ y $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(-, \dot{Z}[1])$ (observación (??)), tenemos la conmutatividad de este diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E}xt_{\mathcal{E}}(\dot{Y}, \dot{X}) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1]) \\
 \mathcal{E}xt(1_{\dot{Y}}, \dot{u}_1) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(1_{\dot{Y}}, \dot{u}_1[1]) \\
 \mathcal{E}xt_{\mathcal{E}}(\dot{Y}, \dot{X}_1) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}_1[1]) \\
 \mathcal{E}xt(\dot{u}_3, 1_{\dot{X}_1}) \uparrow & & \uparrow \text{Hom}(\dot{u}_3, 1_{\dot{X}_1[1]}) \\
 \mathcal{E}xt_{\mathcal{E}}(\dot{Y}_1, \dot{X}_1) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Y}_1, \dot{X}_1[1]),
 \end{array}$$

lo cual nos dice que,

$$\begin{array}{ccc}
 [x] & \dashrightarrow & \underline{h} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 [y] & \dashrightarrow & \underline{\dot{u}_1[1]h} = \underline{\dot{h}_1\dot{u}_3} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 [x_1] & \dashrightarrow & \underline{\dot{h}_1}
 \end{array}$$

luego, en $K(\mathcal{A})$:

$$\underline{\dot{u}_1[1]h} = \underline{\dot{h}_1\dot{u}_3},$$

y se tiene la proposición. \square

Observación 2.24. Sean X y Y objetos en \mathcal{A} , \underline{X} y \underline{Y} sus complejos concentrados en grado cero, entonces

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{A})}(\underline{X}, \underline{Y}) \cong \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\underline{X}, \underline{Y}).$$

2.3. \mathcal{E} -proyectivos y \mathcal{E} -inyectivos

Definición 2.25. Decimos que el complejo \dot{W} es

1. \mathcal{E} -proyectivo si para toda \mathcal{E} -sucesión $0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{f}} \dot{E} \xrightarrow{\dot{g}} \dot{Y} \longrightarrow 0$, dado $\dot{s} : \dot{W} \rightarrow \dot{Y}$, existe un morfismo de complejos $\dot{t} : \dot{W} \rightarrow \dot{E}$ tal que $\dot{g}\dot{t} = \dot{s}$.

2. \mathcal{E} -inyectivo si para toda \mathcal{E} -sucesión $0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{f} \dot{E} \xrightarrow{g} \dot{Y} \longrightarrow 0$,
 dado $\dot{s} : \dot{X} \rightarrow \dot{W}$, existe un morfismo de complejos $\dot{t} : \dot{E} \rightarrow \dot{W}$ tal que
 $\dot{t} \dot{f} = \dot{s}$.

Sabemos que para una \mathcal{E} -sucesión $0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{f} \dot{E} \xrightarrow{g} \dot{Y} \longrightarrow 0$ y para todo complejo \dot{W} las sucesiones

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{X}) \xrightarrow{\text{Hom}(1, f)} \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{E}) \xrightarrow{\text{Hom}(1, g)} \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Y}) \longrightarrow 0 \quad (2.6)$$

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{W}) \xrightarrow{\text{Hom}(g, 1)} \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{E}, \dot{W}) \xrightarrow{\text{Hom}(f, 1)} \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{X}, \dot{W}) \longrightarrow 0 \quad (2.7)$$

son exactas izquierdas.

Luego, \dot{W} es \mathcal{E} -proyectivo si y sólo si la sucesión (??) es siempre exacta, es decir, si y sólo si $\text{Hom}(1, g)$ es un epimorfismo. Análogamente, \dot{W} es \mathcal{E} -inyectivo si y sólo si la sucesión (??) es siempre exacta, es decir, si y sólo si $\text{Hom}(f, 1)$ es un epimorfismo.

Definición 2.26. Sea \mathcal{A} una categoría arbitraria. La categoría graduada $\text{Grad}(\mathcal{A})$ tiene por objetos las sucesiones $(X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, con cada X^i en \mathcal{A} ; además, dados dos objetos $X = (X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $Y = (Y^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ en $\text{Grad}(\mathcal{A})$, un morfismo $f : X \rightarrow Y$ es una sucesión de morfismos $(f^i : X^i \rightarrow Y^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de \mathcal{A} . El producto de morfismos se obtiene componiendo puntualmente.

Observación 2.27. Si \mathcal{A} es abeliana, la categoría $\text{Grad}(\mathcal{A})$ puede identificarse con una subcategoría de la de complejos $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. En efecto, a cada objeto $(X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de la categoría graduada le asociamos el complejo $(X^i, 0)_{i \in \mathbb{Z}}$ cuyas diferenciales son todas cero, entonces tenemos un funtor fiel y pleno de $\text{Grad}(\mathcal{A})$ en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Observación 2.28. Si \mathcal{A} es abeliana con coproductos arbitrarios, podemos definir un funtor $F : \text{Grad}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ tal que: Si $X = (X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $F(X) = \coprod_{i \in \mathbb{Z}} X^i$; y si $f = (f^i)_{i \in \mathbb{Z}} : X \rightarrow Y$, entonces $F(f)$ es el único morfismo en \mathcal{A} que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in \mathbb{Z}} X^i & \xrightarrow{F(f)} & \coprod_{i \in \mathbb{Z}} Y^i \\ \sigma_X^i \uparrow & & \sigma_Y^i \uparrow \\ X^i & \xrightarrow{f^i} & Y^i, \end{array}$$

para cada $i \in \mathbb{Z}$ (este existe por la propiedad universal del coproducto). Notemos que F es un funtor (aditivo) fiel, lo cual nos permite identificar la categoría $\text{Grad}(\mathcal{A})$ con la categoría imagen bajo F .

Definición 2.29. Sea \mathcal{A} una categoría aditiva.

1. Definiremos un funtor $\mathcal{J}: \text{Grad}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A})$ como sigue: Si $X = (X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $\mathcal{J}(X)$ es el complejo tal que

$$\mathcal{J}(X)^s := X^s \oplus X^{s-1}$$

$$d_{\mathcal{J}(X)}^s := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{X^s} & 0 \end{pmatrix}$$

(es inmediato que $\mathcal{J}(X)$ es un complejo). Si $f = (f^i)_{i \in \mathbb{Z}}: X \rightarrow Y$ es un morfismo en $\text{Grad}(\mathcal{A})$, entonces

$$\mathcal{J}(f) := \left(\begin{pmatrix} f^i & 0 \\ 0 & f^{i-1} \end{pmatrix} \right)_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Claramente \mathcal{J} es un funtor.

2. El funtor olvidadizo

$$\mathcal{O}: \mathcal{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Grad}(\mathcal{A})$$

envía cada complejo $\dot{X} = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ en $\mathcal{O}(\dot{X}) = (X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ y cada morfismo de complejos $\dot{f} = (f^i)_{i \in \mathbb{Z}}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ en $\mathcal{O}(\dot{f}) = (f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

3. Consideraremos también la composición

$$\mathcal{C}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathcal{O}} \text{Grad}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathcal{J}} \mathcal{C}(\mathcal{A}),$$

que denotaremos por la misma letra \mathcal{J} .

Observación 2.30. Sean los complejos \dot{X} y $\mathcal{J}(W)$ en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, con $W \in \text{Grad}(\mathcal{A})$. Veamos cómo es un morfismo α de $\mathcal{J}(W)$ en \dot{X} : tenemos $\alpha^i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i)$ y conmuta, para todo $i \in \mathbb{Z}$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} W^i \oplus W^{i-1} & \xrightarrow{(\alpha_1^i, \alpha_2^i)} & X^i \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{W^i} & 0 \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow d_X^i \\ W^{i+1} \oplus W^i & \xrightarrow{(\alpha_1^{i+1}, \alpha_2^{i+1})} & X^{i+1}. \end{array}$$

Entonces, $(\alpha_2^{i+1}, 0) = (\alpha_1^{i+1}, \alpha_2^{i+1}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{W^i} & 0 \end{pmatrix} = d_X^i(\alpha_1^i, \alpha_2^i) = (d_X^i \alpha_1^i, d_X^i \alpha_2^i)$.
Luego, para cada $i \in \mathbb{Z}$,

$$\alpha^i = (\alpha_1^i, d_X^{i-1} \alpha_1^{i-1}), \quad (2.8)$$

con α_1^i un morfismo de W^i en X^i en \mathcal{A} .

Ahora, sea β un morfismo de \dot{X} en $\mathcal{J}(W)$, luego, para todo $i \in \mathbb{Z}$ conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X^i & \xrightarrow{\beta^i = \begin{pmatrix} \beta_1^i \\ \beta_2^i \end{pmatrix}} & W^i \oplus W^{i-1} \\ d_X^i \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{W^i} & 0 \end{pmatrix} \\ X^{i+1} & \xrightarrow{\beta^{i+1} = \begin{pmatrix} \beta_1^{i+1} \\ \beta_2^{i+1} \end{pmatrix}} & W^{i+1} \oplus W^i. \end{array}$$

Entonces, $\begin{pmatrix} \beta_1^{i+1} d_X^i \\ \beta_2^{i+1} d_X^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1^{i+1} \\ \beta_2^{i+1} \end{pmatrix} d_X^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{W^i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1^i \\ \beta_2^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1^i \end{pmatrix}$. Luego, para cada $i \in \mathbb{Z}$,

$$\beta^i = \begin{pmatrix} \beta_2^{i+1} d_X^i \\ \beta_2^i \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

donde β_2^i es un morfismo de X^i en W^{i-1} en \mathcal{A} .

Definición 2.31. Un par de funtores $L: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}$ y $R: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$ se dicen adjuntos si hay una familia de biyecciones

$$\delta_{A,B}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(L(A), B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{G}}(A, R(B)),$$

para todo $A \in \mathcal{G}$, $B \in \mathcal{C}$, las cuales son naturales en A y B en el sentido de que, para todo morfismo $f: A \rightarrow A'$ en \mathcal{G} y $g: B \rightarrow B'$ en \mathcal{C} se tiene que

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(L(A'), B) & \xrightarrow{L(f)^*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(L(A), B) & \xrightarrow{g^*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(L(A), B') \\ \downarrow \delta_{A',B} & & \downarrow \delta_{A,B} & & \downarrow \delta_{A,B'} \\ \text{Hom}_{\mathcal{G}}(A', R(B)) & \xrightarrow{f^*} & \text{Hom}_{\mathcal{G}}(A, R(B)) & \xrightarrow{R(g)^*} & \text{Hom}_{\mathcal{G}}(A, R(B')) \end{array}$$

es un diagrama conmutativo. En este caso decimos que L es adjunto izquierdo de R y que R es adjunto derecho de L . Si L y R son funtores aditivos, se pide, además, que $\delta_{A,B}$ sea isomorfismo, para todo A, B .

Proposición 2.32. *El funtor $\mathcal{J}: \mathcal{G}rad(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A})$ es adjunto izquierdo del funtor olvidadizo \mathcal{O} , y adjunto derecho del funtor $\mathcal{O}[1]$ (que es composición del olvidadizo con el funtor que traslada por $[1]$).*

DEMOSTRACIÓN. Debemos probar que tenemos isomorfismos

$$\delta_{W, \dot{X}}: \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\mathcal{J}(W), \dot{X}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{G}rad(\mathcal{A})}(W, \mathcal{O}(\dot{X})),$$

naturales para todo $W = (W^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ en $\mathcal{G}rad(\mathcal{A})$ y para todo \dot{X} en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Dado un morfismo $\dot{\alpha}: \mathcal{J}(W) \rightarrow \dot{X}$, hemos visto que $\alpha^i = (\alpha_1^i, d_X^{i-1} \alpha_1^{i-1})$ para $\alpha_1^i: W^i \rightarrow X^i$ (ecuación ??). Entonces, definamos $\delta_{W, \dot{X}}(\dot{\alpha}) = (\alpha_1^i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Por otro lado, dado $(\alpha^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ un morfismo de $(W^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ en $\mathcal{O}(\dot{X})$ definimos $h^i = (\alpha^i, d_X^{i-1} \alpha^{i-1})$ y entonces $\dot{h} := (h^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un morfismo de complejos de $\mathcal{J}(W)$ en \dot{X} . Luego, $\delta_{W, \dot{X}}$ es biyectivo, para todo W en $\mathcal{G}rad(\mathcal{A})$ y para todo \dot{X} en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Es fácil ver que $\delta_{W, \dot{X}}$ es morfismo de grupos.

Veamos ahora que $\delta_{W, \dot{X}}$ es natural en W . Sea $f: (W^i)_{i \in \mathbb{Z}} \rightarrow (Z^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ un morfismo en la categoría graduada. Queremos probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\mathcal{J}((Z^i)_{i \in \mathbb{Z}}), \dot{X}) & \xrightarrow{\mathcal{J}(f)^*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\mathcal{J}((W^i)_{i \in \mathbb{Z}}), \dot{X}) & (2.10) \\ \downarrow \delta_{(Z^i), \dot{X}} & & \downarrow \delta_{(W^i), \dot{X}} & \\ \text{Hom}_{\mathcal{G}rad(\mathcal{A})}((Z^i)_{i \in \mathbb{Z}}, \mathcal{O}(\dot{X})) & \xrightarrow{f^*} & \text{Hom}_{\mathcal{G}rad(\mathcal{A})}((W^i)_{i \in \mathbb{Z}}, \mathcal{O}(\dot{X})). & \end{array}$$

Dado $\dot{\beta} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\mathcal{J}((Z^i)_{i \in \mathbb{Z}}), \dot{X})$, se tiene que $\dot{\beta} = (\beta_1^i, d_X^{i-1} \beta_1^{i-1})$. Por un lado, $\delta_{(Z^i), \dot{X}}$ lo mapea a $(\beta_1^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, luego $f^*((\beta_1^i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (\beta_1^i f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Por otro lado, $\mathcal{J}(f)^*$ aplicado a $(\beta_1^i, d_X^{i-1} \beta_1^{i-1})$ nos da $(\beta_1^i f^i, d_X^{i-1} \beta_1^{i-1} f^{i-1})$ y $\delta_{(W^i), \dot{X}}$ envía este elemento en $(\beta_1^i f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Entonces, el diagrama (??) conmuta y $\delta_{W, \dot{X}}$ es natural en W .

Sea $\dot{g}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Mostraremos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\mathcal{J}((W^i)_{i \in \mathbb{Z}}), \dot{X}) & \xrightarrow{\dot{g}_*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\mathcal{J}((W^i)_{i \in \mathbb{Z}}), \dot{Y}) & (2.11) \\ \downarrow \delta_{(W^i), \dot{X}} & & \downarrow \delta_{(W^i), \dot{Y}} & \\ \text{Hom}_{\mathcal{G}rad(\mathcal{A})}((W^i)_{i \in \mathbb{Z}}, \mathcal{O}(\dot{X})) & \xrightarrow{\mathcal{O}(\dot{g})_*} & \text{Hom}_{\mathcal{G}rad(\mathcal{A})}((W^i)_{i \in \mathbb{Z}}, \mathcal{O}(\dot{Y})). & \end{array}$$

Sea $\dot{\alpha} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\mathcal{J}((W^i)_{i \in \mathbb{Z}}), \dot{X})$. Entonces, $\dot{\alpha} = (\alpha_1^i, d_X^{i-1} \alpha_1^{i-1})$. Por un lado, $\delta_{(W^i), \dot{X}}$ envía $\dot{\alpha}$ a $(\alpha_1^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, luego $\mathcal{O}(\dot{g})_*((\alpha_1^i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (g^i \alpha_1^i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Por otro lado, \dot{g}_* aplicado a $\dot{\alpha}$ nos da el morfismo $\dot{g}\dot{\alpha} = (g^i \alpha^i)_{i \in \mathbb{Z}} = (g^i \alpha_1^i, g^i d_X^{i-1} \alpha_1^{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}$

y $\delta_{(W^i),\dot{Y}}$ lo envía a $(g^i \alpha_1^i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Entonces, el diagrama (??) conmuta y $\delta_{W,\dot{X}}$ es natural en \dot{X} .

Probemos ahora que \mathcal{J} es adjunto derecho de $\mathcal{O}[1]$. Para esto debemos probar que tenemos isomorfismos:

$$\delta_{\dot{X},W}: \text{Hom}_{\mathcal{G}rad(\mathcal{A})}(\mathcal{O}[1](\dot{X}), (W^i)_{i \in \mathbb{Z}}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{X}, \mathcal{J}((W^i)_{i \in \mathbb{Z}})),$$

naturales para todo $W = (W^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ en $\mathcal{G}rad(\mathcal{A})$ y para todo \dot{X} en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Sea $\alpha: \dot{X} \rightarrow \mathcal{J}((W^i)_{i \in \mathbb{Z}})$, entonces $\alpha^i = \begin{pmatrix} \alpha_1^{i+1} d_X^i \\ \alpha_1^i \end{pmatrix}$ para $\alpha_1^i: X^i \rightarrow W^{i-1}$. Entonces definamos $\delta'_{\dot{X},W}(\alpha) = (\alpha_1^{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$. Recíprocamente, dado $(\alpha_1^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ un morfismo de $(X^{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ en $(W^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, definimos $\delta_{\dot{X},W}((\alpha_1^i)_{i \in \mathbb{Z}}) = \begin{pmatrix} \alpha_1^i d_X^i \\ \alpha_1^{i-1} \end{pmatrix}_{i \in \mathbb{Z}}$. Luego, $\delta_{\dot{X},W}$ es un morfismo biyectivo con inverso $\delta'_{\dot{X},W}$. Es fácil ver que $\delta_{\dot{X},W}$ es morfismo de grupos.

Sea $f: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Mostraremos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{G}rad(\mathcal{A})}(\mathcal{O}[1](\dot{Y}), (W^i)_{i \in \mathbb{Z}}) & \xrightarrow{\mathcal{O}[1](f)^*} & \text{Hom}_{\mathcal{G}rad(\mathcal{A})}(\mathcal{O}[1](\dot{X}), (W^i)_{i \in \mathbb{Z}}) \\ \downarrow \delta_{\dot{Y},(W^i)} & & \downarrow \delta_{\dot{X},(W^i)} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \mathcal{J}((W^i)_{i \in \mathbb{Z}})) & \xrightarrow{f^*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{X}, \mathcal{J}((W^i)_{i \in \mathbb{Z}})). \end{array} \quad (2.12)$$

Notemos que $\mathcal{O}[1](\dot{Y}) = (Y^{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$. Sea $(g^i)_{i \in \mathbb{Z}}: (Y^{i+1})_{i \in \mathbb{Z}} \rightarrow (W^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ un morfismo en $\mathcal{G}rad(\mathcal{A})$. Entonces $\delta_{\dot{Y},W}((g^i)_{i \in \mathbb{Z}}) = \begin{pmatrix} g^i d_Y^i \\ g^{i-1} \end{pmatrix}_{i \in \mathbb{Z}}$; aplicándole f^* tenemos $\begin{pmatrix} g^i d_Y^i f^i \\ g^{i-1} f^i \end{pmatrix}_{i \in \mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} g^i f^{i+1} d_X^i \\ g^{i-1} f^i \end{pmatrix}_{i \in \mathbb{Z}}$, porque f es morfismo de complejos. Por otro lado, $(\mathcal{O}[1](f))^*((g^i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (g^i f^{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$, y $\delta_{\dot{X},W}((g^i f^{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}) = \begin{pmatrix} g^i f^{i+1} d_X^i \\ g^{i-1} f^i \end{pmatrix}_{i \in \mathbb{Z}}$. Entonces, el diagrama (??) conmuta. Luego, $\delta_{\dot{X},W}$ es natural en \dot{X} .

Veamos ahora que es natural en (W^i) . Sea $(h^i)_{i \in \mathbb{Z}}: (W^i)_{i \in \mathbb{Z}} \rightarrow (Z^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ en la categoría graduada. Probemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{G}rad(\mathcal{A})}(\mathcal{O}[1](\dot{X}), (W^i)_{i \in \mathbb{Z}}) & \xrightarrow{(h^i)_{i \in \mathbb{Z}}^*} & \text{Hom}_{\mathcal{G}rad(\mathcal{A})}(\mathcal{O}[1](\dot{X}), (Z^i)_{i \in \mathbb{Z}}) \\ \downarrow \delta_{\dot{X},(W^i)} & & \downarrow \delta_{\dot{X},(Z^i)} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{X}, \mathcal{J}((W^i)_{i \in \mathbb{Z}})) & \xrightarrow{\mathcal{J}((h^i)_{i \in \mathbb{Z}})^*} & \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{X}, \mathcal{J}((Z^i)_{i \in \mathbb{Z}})). \end{array} \quad (2.13)$$

Sea $(\alpha^i)_{i \in \mathbb{Z}}: (X^{i+1})_{i \in \mathbb{Z}} \rightarrow (W^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ en $\mathcal{G}rad(\mathcal{A})$. Luego, $((h^i)_{i \in \mathbb{Z}})_* ((\alpha^i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (h^i \alpha^i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Entonces, se tiene $\delta_{\dot{X}, (Z^i)}((h^i \alpha^i)_{i \in \mathbb{Z}}) = \begin{pmatrix} h^i \alpha^i d_X^i \\ h^{i-1} \alpha^{i-1} \end{pmatrix}_{i \in \mathbb{Z}}$. Por otro lado, $\delta_{\dot{X}, W}((\alpha^i)_{i \in \mathbb{Z}}) = \begin{pmatrix} \alpha^i d_X^i \\ \alpha^{i-1} \end{pmatrix}_{i \in \mathbb{Z}}$. Por lo tanto, $\mathcal{J}((h^i)_{i \in \mathbb{Z}})_* \left(\begin{pmatrix} \alpha^i d_X^i \\ \alpha^{i-1} \end{pmatrix}_{i \in \mathbb{Z}} \right) = \begin{pmatrix} h^i & 0 \\ 0 & h^{i-1} \end{pmatrix}_* \begin{pmatrix} \alpha^i d_X^i \\ \alpha^{i-1} \end{pmatrix}_{i \in \mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} h^i \alpha^i d_X^i \\ h^{i-1} \alpha^{i-1} \end{pmatrix}_{i \in \mathbb{Z}}$, entonces, el diagrama (??) conmuta. Luego, \mathcal{J} es adjunto derecho de $\mathcal{O}[1]$. \square

Proposición 2.33. *El complejo $\mathcal{J}(\dot{W})$ es \mathcal{E} -proyectivo y \mathcal{E} -inyectivo para todo complejo \dot{W} .*

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{f} \dot{E} \xrightarrow{g} \dot{Y} \longrightarrow 0 \quad (2.14)$$

una \mathcal{E} -sucesión. Debemos probar que la siguiente sucesión:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{A})}(\mathcal{J}(\dot{W}), \dot{X}) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{A})}(\mathcal{J}(\dot{W}), \dot{E}) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{A})}(\mathcal{J}(\dot{W}), \dot{Y}) \longrightarrow 0,$$

es exacta por la derecha, entonces tendremos que $\mathcal{J}(\dot{W})$ es \mathcal{E} -proyectivo. Por la proposición (??), tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{A})}(\mathcal{J}(\dot{W}), \dot{X}) & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{A})}(\mathcal{J}(\dot{W}), \dot{E}) & \xrightarrow{g_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{A})}(\mathcal{J}(\dot{W}), \dot{Y}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}rad(\mathcal{A})}((W^i)_{i \in \mathbb{Z}}, \mathcal{O}(\dot{X})) & \xrightarrow{\mathcal{O}(f)_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}rad(\mathcal{A})}((W^i)_{i \in \mathbb{Z}}, \mathcal{O}(\dot{E})) & \xrightarrow{\mathcal{O}(g)_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}rad(\mathcal{A})}((W^i)_{i \in \mathbb{Z}}, \mathcal{O}(\dot{Y})), \end{array}$$

luego, basta probar que $\mathcal{O}(g)_*$ es epimorfismo. Sea $(\alpha^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ un morfismo en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}rad(\mathcal{A})}((W^i)_{i \in \mathbb{Z}}, \mathcal{O}(\dot{Y}))$. Para cada $i \in \mathbb{Z}$ la sucesión (??) se divide. Luego, existen morfismos $\tau^i: Y^i \rightarrow E^i$ tales que $g^i \tau^i = 1_{Y^i}$. Además, $\tau^i \alpha^i: W^i \rightarrow E^i$, luego, $(\tau^i \alpha^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ está en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}rad(\mathcal{A})}((W^i)_{i \in \mathbb{Z}}, \mathcal{O}(\dot{E}))$. Por lo tanto, $\mathcal{J}(\dot{W})$ es \mathcal{E} -proyectivo. La prueba de que es inyectivo es análoga. \square

Proposición 2.34. *Dado un complejo \dot{X} se tiene la \mathcal{E} -sucesión:*

$$0 \longrightarrow \dot{X}[-1] \xrightarrow{\sigma} \mathcal{J}(\dot{X}) \xrightarrow{\rho} \dot{X} \longrightarrow 0,$$

con $\sigma^s = \begin{pmatrix} -d_X^{s-1} \\ 1_{X^{s-1}} \end{pmatrix}$ y $\rho^s = (1, d_X^{s-1})$, para cada $s \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN. Con la notación de la proposición (??), tenemos isomorfismos tales que:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{A})}(\dot{X}[-1], \mathcal{J}((X^i)_{i \in \mathbb{Z}})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}_{\mathrm{grad}(\mathcal{A})}}((X^i)_{i \in \mathbb{Z}}, (X^i)_{i \in \mathbb{Z}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{A})}(\mathcal{J}((X^i)_{i \in \mathbb{Z}}), \dot{X})$$

$$\dot{\sigma} := \left(\begin{pmatrix} d_{X[-1]}^i \\ 1 \end{pmatrix} \right)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (1_{X^i})_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto \dot{\rho} := ((1, d_X^{i-1}))_{i \in \mathbb{Z}}$$

(notemos que $d_{X[-1]}^i = -d_X^{i-1}$). Probemos que la sucesión

$$0 \longrightarrow \dot{X}[-1] \xrightarrow{\dot{\sigma}} \mathcal{J}(\dot{X}) \xrightarrow{\dot{\rho}} \dot{X} \longrightarrow 0 \quad (2.15)$$

es exacta. Sea \dot{f} tal que el producto $\dot{\sigma}\dot{f}$ tiene sentido y $\dot{\sigma}\dot{f} = 0$. Entonces para cada $i \in \mathbb{Z}$:

$$\sigma^i f^i = \begin{pmatrix} -d_X^{i-1} \\ 1 \end{pmatrix} f^i = \begin{pmatrix} -d_X^{i-1} f^i \\ f^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de ahí que cada $f^i = 0$, entonces $\dot{f} = 0$ y, por lo tanto, $\dot{\sigma}$ es monomorfismo. Análogamente, si para algún \dot{g} tal que el producto $\dot{g}\dot{\rho}$ tiene sentido, se tiene $\dot{g}\dot{\rho} = 0$, entonces

$$g^i \rho^i = g^i (1, d_X^{i-1}) = (g^i, g^i d_X^{i-1}) = (0, 0),$$

por lo tanto, $g^i = 0$, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Luego, $\dot{g} = 0$ y se tiene que $\dot{\rho}$ es epimorfismo.

Es claro que $\dot{\rho}\dot{\sigma} = 0$. Para ver que $\dot{\sigma} = \ker \dot{\rho}$, basta ver que $\sigma^s = \ker \rho^s$, para $s \in \mathbb{Z}$. Supongamos que, en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} Y^s & & \begin{pmatrix} \lambda^s \\ \mu^s \end{pmatrix} & & \\ \mu^s \downarrow & \searrow & & & \\ X^{s-1} & \xrightarrow{\sigma^s} & X^s \oplus X^{s-1} & \xrightarrow{\rho^s} & X^s, \end{array}$$

$\rho^s \begin{pmatrix} \lambda^s \\ \mu^s \end{pmatrix} = 0$. Luego,

$$0 = \rho^s \begin{pmatrix} \lambda^s \\ \mu^s \end{pmatrix} = (1_{X^s}, d_X^{s-1}) \begin{pmatrix} \lambda^s \\ \mu^s \end{pmatrix} = \lambda^s + d_X^{s-1} \mu^s.$$

Entonces,

$$\sigma^s \mu^s = \begin{pmatrix} -d_X^{s-1} \\ 1_{X^{s-1}} \end{pmatrix} \mu^s = \begin{pmatrix} \lambda^s \\ \mu^s \end{pmatrix}.$$

Esto es, el triángulo conmuta. La unicidad del morfismo μ^s se sigue de que σ^s es monomorfismo. Es fácil ver que $\dot{\mu} = (\mu^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es de complejos. Luego, $\dot{\sigma} = \ker \dot{\rho}$.

Como $(1_{X^s}, d_X^{s-1}) \begin{pmatrix} 1_{X^s} \\ 0 \end{pmatrix} = 1_{X^s}$, ρ^s es retracción. Luego, por el lema (??), la sucesión (??) es \mathcal{E} -sucesión. \square

Corolario 2.35. Si \dot{X} es un complejo, se tiene la \mathcal{E} -sucesión

$$0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{u} \mathcal{J}(\dot{X}[1]) \xrightarrow{v} \dot{X}[1] \longrightarrow 0,$$

donde $u^s = \begin{pmatrix} d_X^s \\ 1_{X^s} \end{pmatrix}$ y $v^s = (1_{X^{s+1}}, -d_X^s)$, para cada $s \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN. Aplicamos la proposición (??) al complejo $\dot{X}[1]$ para obtener la \mathcal{E} -sucesión

$$x : 0 \longrightarrow \dot{X}[1][-1] \xrightarrow{\sigma} \mathcal{J}(\dot{X}[1]) \xrightarrow{\rho} \dot{X}[1] \longrightarrow 0,$$

donde $\sigma^s = \begin{pmatrix} -d_{\dot{X}[1]}^{s-1} \\ 1_{\dot{X}[1]^{s-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_X^s \\ 1_{X^s} \end{pmatrix}$; $\rho^s = (1_{\dot{X}[1]^s}, d_{\dot{X}[1]}^{s-1}) = (1_{X^{s+1}}, -d_X^s)$, para cada $s \in \mathbb{Z}$. Además,

$$\begin{aligned} \dot{X}[1]^s &= X^{s+1}; \\ (\dot{X}[1])[-1]^s &= \dot{X}[1]^{s-1} = X^s; \\ \mathcal{J}(\dot{X}[1])^s &= (\dot{X}[1])^s \oplus (\dot{X}[1])^{s-1} = X^{s+1} \oplus X^s. \end{aligned}$$

Luego, la \mathcal{E} -sucesión x en el nivel s es:

$$0 \longrightarrow X^s \xrightarrow{u^s} X^{s+1} \oplus X^s \xrightarrow{v^s} X^{s+1} \longrightarrow 0.$$

□

Observación 2.36. El morfismo que le corresponde a la sucesión

$$0 \longrightarrow \dot{X}[-1] \xrightarrow{\sigma} \mathcal{J}(\dot{X}) \xrightarrow{\rho} \dot{X} \longrightarrow 0,$$

por el isomorfismo $\mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{X}, \dot{X}[-1]) \cong \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{X}, \dot{X})$ (teorema (??)), es la identidad.

DEMOSTRACIÓN. Por definición tenemos:

$$\begin{aligned} d^i_{\mathcal{J}(\dot{X})} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{X^i} & 0 \end{pmatrix} : X^i \oplus X^{i-1} \rightarrow X^{i+1} \oplus X^i, \\ \sigma^i &= \begin{pmatrix} d_{\dot{X}[-1]}^i \\ 1_{X^{i-1}} \end{pmatrix} : X^{i-1} \rightarrow X^i \oplus X^{i-1}, \\ \rho^i &= (1_{X^i}, d_X^{i-1}) : X^i \oplus X^{i-1} \rightarrow X^i. \end{aligned}$$

Consideremos $\pi^i = (0, 1_{X^{i-1}}) : X^i \oplus X^{i-1} \rightarrow X^{i-1}$, una inversa izquierda de σ^i y $\tau^i = \begin{pmatrix} 1_{X^i} \\ 0 \end{pmatrix} : X^i \rightarrow X^i \oplus X^{i-1}$, una inversa derecha de ρ^i . Sea \dot{w} el

morfismo que le corresponde a la \mathcal{E} -sucesión dada en $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{X}, \dot{X})$. Por el lema (??),

$$w^i = \pi^{i+1} d^i_{\mathcal{J}(\dot{X})} \tau^i = 1_{X^i}.$$

Luego, $\dot{w} = 1_{\dot{X}}$. □

Proposición 2.37. *Sea \dot{W} un complejo \mathcal{E} -proyectivo, entonces \dot{W} es sumando directo de $\mathcal{J}(\dot{W})$. Análogamente, si \dot{W} es un complejo \mathcal{E} -inyectivo, entonces \dot{W} es sumando directo de $\mathcal{J}(\dot{W}[1])$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición (??), dado \dot{W} complejo arbitrario existe una \mathcal{E} -sucesión $0 \longrightarrow \dot{W}[-1] \xrightarrow{f} \mathcal{J}(\dot{W}) \xrightarrow{g} \dot{W} \longrightarrow 0$. Pero \dot{W} es \mathcal{E} -proyectivo, entonces existe $\dot{\sigma}: \dot{W} \rightarrow \mathcal{J}(\dot{W})$ tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \dot{W} & & \\
 & & & & \swarrow & \downarrow & \\
 & & & & \dot{\sigma} & 1_{\dot{W}} & \\
 0 & \longrightarrow & \dot{W}[-1] & \xrightarrow{f} & \mathcal{J}(\dot{W}) & \xrightarrow{g} & \dot{W} \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Como $g\dot{\sigma} = 1_{\dot{W}}$, entonces \dot{W} es sumando directo de $\mathcal{J}(\dot{W})$. □

Observación 2.38. *Sea \dot{W} complejo \mathcal{E} -proyectivo. Las proposiciones (??) y (??) dicen que \dot{W} es \mathcal{E} -inyectivo. Análogamente, si \dot{W} es \mathcal{E} -inyectivo, las mismas proposiciones dicen que \dot{W} es \mathcal{E} -proyectivo. Es decir, en la categoría de complejos la noción de \mathcal{E} -proyectivo y \mathcal{E} -inyectivo es la misma.*

2.4. La categoría homotópica como categoría estable

La categoría cociente de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ por el ideal formado por los morfismos que se factorizan por \mathcal{E} -proyectivos se llama la categoría estable de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. El resultado siguiente dice que esta construcción coincide con la categoría homotópica. En el resto de la sección derivaremos algunas propiedades de $K(\mathcal{A})$ usando esta descripción.

Proposición 2.39. *Sea $\dot{f}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ un morfismo de complejos, entonces \dot{f} es homotópico a cero si y sólo si existe un complejo \dot{T} que es \mathcal{E} -proyectivo (luego, es \mathcal{E} -inyectivo) y morfismos de complejos $\dot{u}: \dot{X} \rightarrow \dot{T}$ y $\dot{v}: \dot{T} \rightarrow \dot{Y}$, tales que $\dot{f} = \dot{v}\dot{u}$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es homotópica a cero. Luego, existe $\{s^i: X^i \rightarrow Y^{i-1}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ familia de morfismos en \mathcal{A} tal que $f^i = s^{i+1}d_X^i + d_Y^{i-1}s^i$. Para el complejo \dot{Y} , la proposición (??) nos dice que $\mathcal{J}(\dot{Y})$ es \mathcal{E} -proyectivo y \mathcal{E} -inyectivo. Definamos los morfismos $\dot{u}: \dot{X} \rightarrow \mathcal{J}(\dot{Y})$ y $\dot{v}: \mathcal{J}(\dot{Y}) \rightarrow \dot{Y}$ por $u^i = \begin{pmatrix} s^{i+1}d_X^i \\ s^i \end{pmatrix}$ y $v^i = (1, d_Y^{i-1})$ respectivamente (observación (??)). Es claro que \dot{u} y \dot{v} son morfismos de complejos, es decir, que conmutan los cuadrados en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \\ \begin{pmatrix} s^{i+1}d_X^i \\ s^i \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} s^{i+2}d_X^{i+1} \\ s^{i+1} \end{pmatrix} \\ Y^i \oplus Y^{i-1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y^i} & 0 \end{pmatrix}} & Y^{i+1} \oplus Y^i \\ \begin{pmatrix} 1, d_Y^{i-1} \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 1, d_Y^i \end{pmatrix} \\ Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1}. \end{array}$$

Además, $v^i u^i = (1, d_Y^{i-1}) \begin{pmatrix} s^{i+1}d_X^i \\ s^i \end{pmatrix} = s^{i+1}d_X^i + d_Y^{i-1}s^i = f^i$. Por lo tanto, $\dot{f} = \dot{v}\dot{u}$.

Recíprocamente, supongamos ahora que \dot{f} se factoriza a través del \mathcal{E} -proyectivo \dot{T} y que conmuta

$$\begin{array}{ccc} \dot{X} & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{Y} \\ & \searrow \dot{u} & \nearrow \dot{v} \\ & \dot{T} & \end{array} .$$

Hemos observado que \dot{T} es sumando directo de $\mathcal{J}(\dot{T})$ (por ser \mathcal{E} -proyectivo).

Luego, tenemos los morfismos de complejos $\dot{\sigma}$ y $\dot{\tau}$ tales que $\dot{T} \begin{matrix} \xrightarrow{\dot{\sigma}} \\ \xleftarrow{\dot{\tau}} \end{matrix} \mathcal{J}(\dot{T})$

y $\dot{\tau}\dot{\sigma} = 1_{\dot{T}}$. Entonces, $\dot{f} = \dot{v}\dot{u} = \dot{v}1_{\dot{T}}\dot{u} = (\dot{v}\dot{\tau})(\dot{\sigma}\dot{u})$. Así que, sin perder generalidad podemos suponer que \dot{T} es de la forma $\mathcal{J}(\dot{W})$, para algún \dot{W} . Consideremos las familias de morfismos $\{h^i: X^i \rightarrow W^{i-1}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ y $\{k^i: W^i \rightarrow Y^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, en \mathcal{A} tales que $v^i = (k^i, d_Y^{i-1}k^{i-1})$ y $u^i = \begin{pmatrix} h^{i+1}d_X^i \\ h^i \end{pmatrix}$, para $i \in \mathbb{Z}$ (ver observación (??)). Luego,

$$f^i = v^i u^i = (k^i, d_Y^{i-1}k^{i-1}) \begin{pmatrix} h^{i+1}d_X^i \\ h^i \end{pmatrix} = (k^i h^{i+1})d_X^i + d_Y^{i-1}(k^{i-1}h^i).$$

Entonces, la familia $\{k^{i-1}h^i: X^i \rightarrow Y^{i-1}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ nos dice que f es homotópico a cero. \square

Observación 2.40. Si $f: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ es un morfismo de complejos que se factoriza por un \mathcal{E} -inyectivo, entonces f se factoriza por $\mathcal{I}(\dot{X}[1])$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f = \dot{s}\dot{r}$ con $\dot{r}: \dot{X} \rightarrow \dot{W}$, $\dot{s}: \dot{W} \rightarrow \dot{Y}$ y \dot{W} \mathcal{E} -inyectivo. Tenemos la \mathcal{E} -sucesión del corolario (??) y el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{u}} & \mathcal{I}(\dot{X}[1]) & \xrightarrow{\dot{v}} & \dot{X}[1] \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \dot{r} & & \swarrow \dot{t} & & \\
 & & \dot{W} & & & & \\
 & & \downarrow \dot{s} & & & & \\
 & & \dot{Y} & & & &
 \end{array} ,$$

donde \dot{t} es un morfismo tal que $\dot{t}\dot{u} = \dot{r}$, que existe porque \dot{W} es \mathcal{E} -inyectivo. Luego, $f = \dot{s}\dot{r} = \dot{s}\dot{t}\dot{u}$. \square

Proposición 2.41. Sea $0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{f}} \dot{E} \xrightarrow{\dot{g}} \dot{Y} \longrightarrow 0$ una \mathcal{E} -sucesión y \dot{W} un complejo. Entonces se cumple que

$$\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{X}) \xrightarrow{\dot{f}^*} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{E}) \xrightarrow{\dot{g}^*} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Y})$$

es exacta. También se tiene que:

$$\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{W}) \xrightarrow{\dot{g}_*} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{E}, \dot{W}) \xrightarrow{\dot{f}_*} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{X}, \dot{W})$$

es exacta.

DEMOSTRACIÓN. Claramente, $\dot{g}^*\dot{f}^* = (\dot{g}\dot{f})^* = (\dot{0})^* = \underline{0}^* = 0$. Por lo tanto, $\text{Im}\dot{f}^* \subseteq \ker\dot{g}^*$. Sea $\dot{s} \in \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{E})$ tal que $\dot{g}^*(\dot{s}) = 0$ y sea \dot{s} un representante de esa clase. Entonces, $\text{Hom}(1, \dot{g})(\dot{s}) = 0$, es decir, $\dot{g}\dot{s}$ es homotópico a cero y se factoriza a través de un complejo \dot{T} que es \mathcal{E} -proyectivo. Se tiene

$$\begin{array}{ccccc}
 \dot{W} & \xrightarrow{\dot{s}} & \dot{E} & \xrightarrow{\dot{g}} & \dot{Y} \\
 & \searrow \dot{u} & & \nearrow \dot{v} & \\
 & & \dot{T} & &
 \end{array} , \quad \text{con } \dot{g}\dot{s} = \dot{v}\dot{u}.$$

Como \dot{T} es \mathcal{E} -proyectivo, implica que existe $\dot{\lambda}: \dot{T} \rightarrow \dot{E}$ tal que $\dot{g}\dot{\lambda} = \dot{v}$. Luego, $\dot{g}(\dot{s} - \dot{\lambda}\dot{u}) = 0$, con $\dot{s} - \dot{\lambda}\dot{u} \in \text{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{E})$. Como \dot{f} es núcleo de \dot{g} , existe un único morfismo $\dot{t} \in \text{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{E})$ tal que $\dot{f}\dot{t} = \dot{s} - \dot{\lambda}\dot{u}$. Pero $\dot{\lambda}\dot{u}$ es homotópico a cero. Luego, $\underline{f}^*(\dot{t}) = \dot{s}$, y tenemos que $\ker \underline{g}^* \subseteq \text{Im} \underline{f}^*$. \square

Proposición 2.42. Sea $0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{f}} \dot{E} \xrightarrow{\dot{g}} \dot{Y} \longrightarrow 0$ una \mathcal{E} -sucesión y $\dot{h}: \dot{W} \rightarrow \dot{Y}$ un morfismo de complejos que es homotópico a cero. Entonces el pullback de $\{\dot{g}, \dot{h}\}$ es equivalente a la \mathcal{E} -sucesión trivial de \dot{Y} por \dot{X} .

DEMOSTRACIÓN. Como \dot{h} es homotópico a cero, entonces existe \dot{T} que es \mathcal{E} -proyectivo y morfismos $\dot{u}: \dot{W} \rightarrow \dot{T}$ y $\dot{v}: \dot{T} \rightarrow \dot{Y}$ tales que $\dot{v}\dot{u} = \dot{h}$. Como \dot{T} es \mathcal{E} -proyectivo implica que existe $\dot{\lambda}: \dot{T} \rightarrow \dot{E}$ tal que $\dot{g}\dot{\lambda} = \dot{v}$. Luego, en el siguiente diagrama tenemos el morfismo de complejos $(\dot{f}, \dot{\lambda}\dot{u})$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{\dot{X}} \\ 0 \end{pmatrix}} & \dot{X} \oplus \dot{W} & \xrightarrow{(0, 1_{\dot{W}})} & \dot{W} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow (\dot{f}, \dot{\lambda}\dot{u}) & & \swarrow \dot{u} & & \downarrow \dot{h} \\
 & & & & & & \dot{T} & & \\
 & & & & & & \swarrow \dot{\lambda} & & \searrow \dot{v} \\
 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{E} & \xrightarrow{\dot{g}} & \dot{Y} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Basta probar que $(\dot{f}, \dot{\lambda}\dot{u})$ hace conmutar los cuadrados, entonces tendremos que $0 \longrightarrow \dot{X} \longrightarrow \dot{X} \oplus \dot{W} \longrightarrow \dot{W} \longrightarrow 0$ (la extensión trivial) es equivalente a la extensión dada por el pullback de $\{\dot{g}, \dot{h}\}$, luego, el pullback es cero. En efecto, $\dot{g}(\dot{f}, \dot{\lambda}\dot{u}) = (\dot{g}\dot{f}, \dot{g}\dot{\lambda}\dot{u}) = (0, \dot{h}) = \dot{h}(0, 1_{\dot{W}})$. Por lo tanto, se tiene la proposición. \square

Proposición 2.43. Dada la \mathcal{E} -sucesión $0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{f}} \dot{E} \xrightarrow{\dot{g}} \dot{Y} \longrightarrow 0$ hay una sucesión exacta larga:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{X}[-1]) & \xrightarrow{\dot{f}^{[-1]*}} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{E}[-1]) & \xrightarrow{\dot{g}^{[-1]*}} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Y}[-1]) & \\
 & \xrightarrow{\delta^{-1}} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{X}) & \xrightarrow{\dot{f}^*} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{E}) & \xrightarrow{\dot{g}^*} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Y}) \\
 & & & & & & \\
 & \xrightarrow{\delta} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{X}[1]) & \xrightarrow{\dot{f}^{[1]*}} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{E}[1]) & \xrightarrow{\dot{g}^{[1]*}} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Y}[1]) \cdots
 \end{array}$$

para cada \dot{W} complejo arbitrario en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Además, el morfismo δ es natural.

DEMOSTRACIÓN. Para cada complejo \dot{W} , tenemos la sucesión exacta:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{X}) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{E}) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Y}) \xrightarrow{\varphi} \\ \longrightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{W}, \dot{X}) \xrightarrow{\mathcal{E}xt(1, f)} \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{W}, \dot{E}) \xrightarrow{\mathcal{E}xt(1, g)} \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{W}, \dot{Y}), \end{aligned}$$

donde $\varphi(\dot{h})$ es la clase de la \mathcal{E} -sucesión que se obtiene a partir del pullback de $\{\dot{g}, \dot{h}\}$. Además, $\mathcal{E}xt(1, \dot{f})$ aplicado a una extensión de \dot{X} por \dot{W} es la extensión que se obtiene a partir del pushout de \dot{f} . Por otro lado, tenemos:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{X}) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{E}) & \xrightarrow{g^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Y}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{W}, \dot{X}) \cdots \\ \rho_2 \downarrow & & \rho_1 \downarrow & & \rho \downarrow & \nearrow \hat{\varphi} & \\ \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{X}) & \xrightarrow{\underline{f}^*} & \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{E}) & \xrightarrow{\underline{g}^*} & \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Y}) & & \end{array} \quad (2.16)$$

donde ρ , ρ_1 y ρ_2 son las proyecciones naturales de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Z})$ en $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Z})$, para $\dot{Z} = \dot{Y}, \dot{E}, \dot{X}$ respectivamente y \underline{f}^* , \underline{g}^* son los morfismos que inducen. Recordemos que el kernel de ρ son los morfismos homotópicos a cero. Por otro lado, para que exista el morfismo $\hat{\varphi}$ basta que $\varphi(\ker \rho) = 0$, pero esto es cierto por la proposición (??).

Entonces tenemos la siguiente sucesión. Probemos que ésta es exacta:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{X}) \xrightarrow{\underline{f}^*} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{E}) \xrightarrow{\underline{g}^*} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Y}) \xrightarrow{\hat{\varphi}} \\ \longrightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{W}, \dot{X}) \xrightarrow{\mathcal{E}xt(1, \underline{f})} \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{W}, \dot{E}) \xrightarrow{\mathcal{E}xt(1, \underline{g})} \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{W}, \dot{Y}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Por la proposición (??) tenemos exactitud en el término $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{E})$. Probemos la exactitud en $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Y})$. Sea \dot{h} representante de la clase $\dot{h} \in \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{E})$. Luego, $\rho_1(\dot{h}) = \dot{h}$. Además, $0 = \varphi(\dot{g}^*(\dot{h})) = \hat{\varphi}\rho\dot{g}^*(\dot{h}) = \hat{\varphi}\underline{g}^*\rho_1(\dot{h}) = \hat{\varphi}\underline{g}^*(\dot{h})$. Entonces, la imagen de \underline{g}^* está contenida en el núcleo de $\hat{\varphi}$.

Sea $\underline{a} \in \ker \hat{\varphi}$, representada por $a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Y})$ tal que $\rho(a) = \underline{a}$ y $\varphi(a) = 0$. Por la exactitud en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Y})$, existe $c \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{E})$ tal que $\dot{g}^*(c) = a$. Entonces, $\underline{a} = \rho\dot{g}^*(c) = \underline{g}^*\rho_1(c)$, es decir, \underline{a} está en la imagen de \underline{g}^* (ver diagrama (??)).

Sea $\hat{h} \in \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Y})$, representado por $\dot{h} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Y})$. Luego, $\rho(\dot{h}) = \hat{h}$. Luego $0 = \mathcal{E}xt(1, \dot{f})(\varphi(\dot{h})) = \mathcal{E}xt(1, \dot{f})(\hat{\varphi}\rho(\dot{h})) = \mathcal{E}xt(1, \dot{f})(\hat{\varphi}(\hat{h}))$ y el núcleo de $\mathcal{E}xt(1, \dot{f})$ contiene a la imagen de $\hat{\varphi}$.

Sea $z \in \ker \mathcal{E}xt(1, \dot{f})$, luego, por la exactitud en el renglón superior del diagrama (??), tenemos que $z = \varphi(\dot{h})$ con $\dot{h} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Y})$, entonces $z = \hat{\varphi}(\rho(\dot{h}))$ y se tiene que el núcleo de $\mathcal{E}xt(1, \dot{f})$ está contenido en la imagen de $\hat{\varphi}$. Luego, tenemos la exactitud en $\mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{W}, \dot{X})$, y, además, la exactitud del diagrama (??).

Por otro lado, también tenemos, por la observación (??) el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Y}) & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{W}, \dot{X}) & \xrightarrow{\mathcal{E}xt(1, \dot{f})} & \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{W}, \dot{E}) & \xrightarrow{\mathcal{E}xt(1, \dot{g})} & \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{W}, \dot{Y}) \\ & \searrow \delta & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ & & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{X}[1]) & \xrightarrow{\hat{f}[1]^*} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{E}[1]) & \xrightarrow{\hat{g}[1]^*} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Y}[1]) \end{array}$$

De ahí que:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{X}[-1]) & \xrightarrow{\hat{f}[-1]^*} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{E}[-1]) & \xrightarrow{\hat{g}[-1]^*} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Y}[-1]) & & \\ \xrightarrow{\delta^{-1}} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{X}) & \xrightarrow{\hat{f}^*} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{E}) & \xrightarrow{\hat{g}^*} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Y}) & \\ \xrightarrow{\delta} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{X}[1]) & \xrightarrow{\hat{f}[1]^*} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{E}[1]) & \xrightarrow{\hat{g}[1]^*} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{W}, \dot{Y}[1]) \cdots & \end{array}$$

es una sucesión exacta. \square

Afirmación 2.44. *Supongamos que en \mathcal{A} existen los coproductos arbitrarios. Sea $\{Z_s\}_{s \in J}$ una familia de complejos en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Entonces, para cualquier complejo \dot{X} se tiene que*

$$\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}\left(\coprod_{s \in J} Z_s, \dot{X}\right) \cong \prod_{s \in J} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(Z_s, \dot{X}).$$

DEMOSTRACIÓN. Dado un morfismo \dot{f} en $\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}\left(\coprod_{s \in J} Z_s, \dot{X}\right)$, existe una familia $\{f_s := \dot{f}\lambda_s: Z_s \rightarrow \dot{X}\}_{s \in J}$ contenida en $\prod_{s \in J} \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(Z_s, \dot{X})$, para λ_s la inyección canónica de Z_s en $\prod_{s \in J} Z_s$. Además, dada una familia de morfismos $\{f_s: Z_s \rightarrow \dot{X}\}_{s \in J}$, por la propiedad universal del coproducto $\prod_{s \in J} Z_s$, existe un único morfismo $\dot{f}: \prod_{s \in J} Z_s \rightarrow \dot{X}$ tal que $\dot{f}\lambda_s = f_s$ para cada

$s \in J$. Estas asignaciones están en correspondencia biunívoca precisamente por la propiedad universal del coproducto. Luego, se tiene el isomorfismo $\psi: \text{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{A})}(\coprod_{s \in J} Z_s, \dot{X}) \cong \prod_{s \in J} \text{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{A})}(Z_s, \dot{X})$ tal que $\psi(\dot{f}) = \{\dot{f}\lambda_s\}_{s \in J}$.

Supongamos que un morfismo $\dot{f} \in \text{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{A})}(\coprod_{s \in J} Z_s, \dot{X})$ se factoriza a través de un \mathcal{E} -proyectivo Q . Entonces cada morfismo $\dot{f}\lambda_s$ también se factoriza a través de Q . Luego, en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{A})}(\coprod_{s \in J} Z_s, \dot{X}) & \xrightarrow{\psi} & \prod_{s \in J} \text{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{A})}(Z_s, \dot{X}) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \eta := \prod \rho_s \\ \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\coprod_{s \in J} Z_s, \dot{X}) & \xrightarrow{\alpha} & \prod_{s \in J} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(Z_s, \dot{X}), \end{array}$$

como $\ker \rho \subseteq \ker \eta\psi$, entonces existe α tal que $\eta\psi = \alpha\rho$. Como $\eta\psi$ es epimorfismo, entonces α también lo es. Veamos que α es monomorfismo. Supongamos que $\alpha(\bar{f}) = 0$ para algún $\bar{f} \in \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\coprod_{s \in J} Z_s, \dot{X})$. Por otro lado, existe $\dot{f} \in \text{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{A})}(\coprod_{s \in J} Z_s, \dot{X})$ tal que $\rho(\dot{f}) = \bar{f}$. Entonces $0 = \alpha(\bar{f}) = \alpha\rho(\dot{f}) = \eta\psi(\dot{f}) = \eta\{\dot{f}\lambda_s\}_{s \in J} = \{\rho_s(\dot{f}\lambda_s)\}_{s \in J}$. Por lo tanto, cada $\dot{f}\lambda_s$ es homotópico a cero. Luego, cada $\dot{f}\lambda_s$ se factoriza a través de un \mathcal{E} -proyectivo, digamos T_s . Entonces se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{s \in J} Z_s & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{X} \\ \lambda_s \uparrow & \nearrow \dot{f}\lambda_s & \uparrow v_s \\ Z_s & \xrightarrow{u_s} & T_s. \end{array}$$

Además, por la propiedad universal del coproducto para $\coprod_{s \in J} Z_s$ y para $\coprod_{s \in J} T_s$ se tiene la existencia y unicidad de los morfismos μ y v tales que también conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} \coprod_{s \in J} Z_s & \xrightarrow{\mu} & \coprod_{s \in J} T_s & \xrightarrow{v} & \dot{X} \\ \lambda_s \uparrow & & \sigma_s \uparrow & \nearrow v_s & \\ Z_s & \xrightarrow{u_s} & T_s & & \end{array}$$

Como $\dot{f}\lambda_s = v_s u_s$, entonces $v\mu = \dot{f}$ por la unicidad en la propiedad universal del coproducto para $\coprod_{s \in J} Z_s$. Luego, \dot{f} se factoriza a través del \mathcal{E} -proyectivo

$\coprod_{s \in J} T_s$. Por lo tanto, $\bar{f} = 0$. Luego, es válida la afirmación. \square

Corolario 2.45. Si $\{\sigma_s: Z_s \rightarrow \coprod_{s \in J} Z_s\}$ es coproducto de $\{Z_s\}_{s \in J}$ en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, entonces $\{\underline{\sigma}_s: Z_s \rightarrow \coprod_{s \in J} Z_s\}$ es coproducto de $\{Z_s\}_{s \in J}$ en $K(\mathcal{A})$.

Capítulo 3

Categorías Trianguladas

En la primera sección introduciremos el concepto de triángulos. Estos son el análogo de las sucesiones exactas cortas en categorías abelianas. Las categorías trianguladas no serán, en general, abelianas (aunque sí aditivas), es por eso que no podemos aplicar la definición usual de exactitud. Hablaremos de funtores t -exactos entre categorías trianguladas. Estos son funtores que respetan la estructura triangulada al conmutar con las traslaciones y enviar triángulos en triángulos. Tenemos un lema que nos permite obtener subcategorías trianguladas y una proposición que nos da condiciones para que un functor entre categorías trianguladas sea una equivalencia de categorías. Estos resultados serán muy útiles en el capítulo 7.

En la segunda sección probaremos que la categoría homotópica de complejos es triangulada.

3.1. Categorías trianguladas y funtores t -exactos

Recordemos algunas nociones básicas. En lo que sigue, sea \mathcal{C} una categoría aditiva y T un automorfismo de \mathcal{C} , luego, existe el functor inverso T^{-1} . Abusando de la notación, escribiremos TX para denotar $T(X)$, Tf para $T(f)$, etc.

Definición 3.1. 1. Un séxtuple t en \mathcal{C} es una colección de objetos y morfismos (X, Y, Z, u, v, w) de \mathcal{C} tales que $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$.

2. Sean los séxtuples (X, Y, Z, u, v, w) y (X', Y', Z', u', v', w') . Un morfismo de séxtuples es una terna de morfismos (h_1, h_2, h_3) tales que el

siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \downarrow Th_1 \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX'. \end{array}$$

El morfismo (h_1, h_2, h_3) es un isomorfismo si h_1, h_2 y h_3 lo son.

Definición 3.2. Una clase \mathcal{J} de séxtuples en \mathcal{C} se dice que es una triangulación de \mathcal{C} si cumple los siguientes axiomas:

TR1 (a) Si $t = (X, Y, Z, u, v, w)$ está en \mathcal{J} y $t' = (X', Y', Z', u', v', w')$ es isomorfo a t , entonces también t' está en \mathcal{J} .

(b) El séxtuple $(X, X, 0, 1_X, 0, 0)$ está en \mathcal{J} , para todo X en \mathcal{C} .

(c) Para cada morfismo $u: X \rightarrow Y$ en \mathcal{C} , existe (X, Y, Z, u, v, w) en \mathcal{J} .

TR2 (X, Y, Z, u, v, w) está en \mathcal{J} si y sólo si $(Y, Z, TX, v, w, -Tu)$ también está en \mathcal{J} .

TR3 Si $t = (X, Y, Z, u, v, w)$ y $t' = (X', Y', Z', u', v', w')$ están en \mathcal{J} , y h_1, h_2 son tales que conmuta $X \xrightarrow{u} Y$ entonces existe $h_3: Z \rightarrow Z'$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow h_1 & \downarrow h_2 \\ & X' & \xrightarrow{u'} Y' \end{array}$$

tal que (h_1, h_2, h_3) es un morfismo de t en t' .

TR4 (Axioma del octaedro) Sean (X, Y, Z', u, i, i') , (Y, Z, X', v, j, j') y (X, Z, Y', vu, k, k') elementos de \mathcal{J} . Luego, existen morfismos f y g tales que $(Z', Y', X', f, g, (Ti)j')$ está en \mathcal{J} y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} T^{-1}Y' & \xrightarrow{T^{-1}k'} & X & \xlongequal{\quad} & X & & \\ T^{-1}g \downarrow & & \downarrow u & & \downarrow vu & & \\ T^{-1}X' & \xrightarrow{T^{-1}j'} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{j} & X' \xrightarrow{j'} TY \\ & & \downarrow i & & \downarrow k & & \parallel & \downarrow Ti \\ & & Z' & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y' & \xrightarrow{\quad g \quad} & X' & \xrightarrow{(Ti)j'} TZ' \\ & & \downarrow i' & & \downarrow k' & & & \\ & & TX & \xlongequal{\quad} & TX & & & \end{array}$$

En este caso decimos que la terna $(\mathcal{C}, T, \mathcal{J})$ es una categoría triangulada con funtor de traslación T y triangulación \mathcal{J} . A los séptuples en \mathcal{J} se les llama triángulos.

Proposición 3.3. *Sea \mathcal{T} una categoría triangulada y (X, Y, Z, u, v, w) un triángulo en \mathcal{T} . Entonces $vu = 0$ y $wv = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Usando el axioma TR1(b) tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{1_X} & X & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & TX \\ 1_X \downarrow & & u \downarrow & & s \downarrow & & \downarrow 1_{TX} \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX, \end{array}$$

el primer cuadrado del diagrama conmuta, luego, por el axioma TR3 existe el morfismo s que hace conmutar el resto del diagrama. Entonces $0 = s0 = vu$.

Por el axioma TR2, el triángulo $(Y, Z, TX, v, w, -Tu)$ está en \mathcal{T} , entonces por el argumento del párrafo anterior existe el morfismo t en el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{1_Y} & Y & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & TY \\ 1_Y \downarrow & & v \downarrow & & t \downarrow & & \downarrow 1_{TY} \\ Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX & \xrightarrow{-Tu} & TY, \end{array}$$

además este conmuta, luego, $0 = t0 = wv$. De hecho, el mismo argumento prueba que $(Tu)w = 0$ y también $-uT^{-1}w = 0$. \square

Proposición 3.4. *Sea \mathcal{T} una categoría triangulada con funtor traslación T . Sea $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ un triángulo en \mathcal{T} . Entonces, para cada W en \mathcal{T} las sucesiones:*

$$\cdots \text{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X) \xrightarrow{u^*} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Y) \xrightarrow{v^*} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Z) \xrightarrow{w^*} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(W, TX) \xrightarrow{(Tu)^*} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(W, TY) \cdots$$

y

$$\cdots \text{Hom}_{\mathcal{T}}(TX, W) \xrightarrow{w^*} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, W) \xrightarrow{v^*} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, W) \xrightarrow{u^*} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, W) \xrightarrow{(T^{-1}u)^*} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T^{-1}Z, W) \cdots$$

son exactas.

DEMOSTRACIÓN. Por el axioma TR1 de la definición de categoría triangulada, se tiene que: $W \xrightarrow{1} W \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} TW$ es un triángulo en \mathcal{T} . Entonces el axioma TR2 nos dice que

$$W \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} TW \xrightarrow{-1} TW$$

también es un triángulo en \mathcal{T} . También por este axioma tenemos que

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY$$

es un triángulo en \mathcal{T} . Probemos la exactitud en el término $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Y)$ de la primera sucesión. Por la proposición (??), tenemos que $vu = 0$, luego, $0 = (vu)_* = v_*u_*$ e $\text{Im}u_* \subseteq \ker v_*$. Sea $g \in \ker v_*$, entonces $vg = 0$ y se tiene:

$$\begin{array}{ccccccc} W & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & TW & \xrightarrow{-1} & TW \\ g \downarrow & & \downarrow 0 & & \downarrow f' & & \downarrow Tg \\ Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX & \xrightarrow{-Tu} & TY. \end{array}$$

El axioma TR3 nos da la existencia de f' que hace conmutar el diagrama. Entonces $Tg = Tu \cdot f'$. Sea $f := T^{-1}f'$, entonces $Tf = f'$ y $Tg = T(uf)$. Como T es automorfismo, $g = uf = u_*(f)$. Por lo tanto, $\ker v_* \subseteq \text{Im}u_*$, y se tiene la exactitud en $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Y)$.

Aplicando el argumento anterior al triángulo

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY,$$

obtenemos la exactitud de la sucesión en $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Z)$.

Tenemos el siguiente isomorfismo de séxtuples:

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \xrightarrow{w} & TX & \xrightarrow{-Tu} & TY & \xrightarrow{-Tv} & TZ \\ -1 \downarrow & & \downarrow -1 & & \downarrow 1 & & \downarrow T(-1) \\ Z & \xrightarrow{w} & TX & \xrightarrow{-Tu} & TY & \xrightarrow{-Tv} & TZ. \end{array}$$

Como el primer renglón es un triángulo, por TR1, también el segundo lo es. Usando nuevamente el argumento anterior, se tiene la exactitud en $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(W, TX)$. Es claro que este argumento vale para todos los términos de la sucesión.

Para la segunda sucesión: El axioma TR2 nos dice que

$$0 \xrightarrow{0} W \xrightarrow{-1} W \xrightarrow{0} 0$$

es un triángulo en \mathcal{T} . Probemos la exactitud en el término $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, W)$. Por la proposición (??), tenemos que $wv = 0$, luego, $\text{Im}w^* \subseteq \ker v^*$. Sea $g \in \ker v^*$, entonces $gv = 0$ y se tiene el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX & \xrightarrow{-Tu} & TY \\ 0 \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f & & \downarrow 0 \\ 0 & \xrightarrow{0} & W & \xrightarrow{-1} & W & \xrightarrow{0} & 0. \end{array}$$

Luego, f existe por el axioma TR3 y es tal que $g = fw = w^*(f)$. Entonces, $\ker v^* \subseteq \text{Im} w^*$, de ahí la exactitud en $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, W)$.

La exactitud en $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, W)$ se prueba con el mismo argumento aplicado al triángulo $T^{-1}X \xrightarrow{T^{-1}w} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$.

En el diagrama siguiente tenemos un isomorfismo de séxtuples:

$$\begin{array}{ccccccc} T^{-1}Z & \xrightarrow{-T^{-1}v} & T^{-1}X & \xrightarrow{-T^{-1}w} & X & \xrightarrow{u} & Y \\ \downarrow 1 & & \downarrow -1 & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 \\ T^{-1}Z & \xrightarrow{T^{-1}v} & T^{-1}X & \xrightarrow{T^{-1}w} & X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

Como el renglón superior es un triángulo, el renglón inferior también lo es, y aplicándole a este el argumento anterior, obtenemos la exactitud de la segunda sucesión en el término $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, W)$. \square

Definición 3.5. Sean \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 categorías trianguladas, con respectivos funtores traslación T_1 y T_2 . Decimos que un funtor aditivo $F: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ es t -exacto si:

- a) Los funtores FT_1 y T_2F son isomorfos (es decir, existe una familia $\{\varphi_M: FT_1M \rightarrow T_2FM\}_{M \in \text{Ob}\mathcal{T}_1}$ de isomorfismos naturales en M), y
- b) Si $\Delta: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T_1X$ es un triángulo en \mathcal{T}_1 , entonces $F(\Delta): FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \xrightarrow{\varphi_X Fh} T_2FX$ es un triángulo en \mathcal{T}_2 .

Sean $F, G: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ funtores t -exactos. Luego, existen los isomorfismos de funtores $\varphi: FT_1 \rightarrow T_2F$ y $\psi: GT_1 \rightarrow T_2G$. Un morfismo de funtores t -exactos es una transformación natural $\alpha: F \rightarrow G$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} FT_1 & \xrightarrow{\alpha_{T_1}} & GT_1 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ T_2F & \xrightarrow{T_2\alpha} & T_2G \end{array}$$

conmuta.

Observación 3.6. Si $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ y $H: \mathcal{T}' \rightarrow \mathcal{T}''$ son funtores t -exactos, entonces HF es un funtor t -exacto.

DEMOSTRACIÓN. Sean T , T' , y T'' los funtores traslación de las categorías trianguladas \mathcal{T} , \mathcal{T}' , y \mathcal{T}'' respectivamente. Como F y H son funtores t -exactos, existen los isomorfismos de funtores:

$$\begin{aligned}\varphi: FT &\longrightarrow T'F, \\ \beta: HT' &\longrightarrow T''H.\end{aligned}$$

Para cada $f: a \rightarrow b$ en \mathcal{T} , tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} HFTa & \xrightarrow{H\varphi_a} & HT'Fa & \xrightarrow{\beta_{Fa}} & T''HFa \\ HFTf \downarrow & & \downarrow HT'Ff & & \downarrow T''HFf \\ HFTb & \xrightarrow{H\varphi_b} & HT'Fb & \xrightarrow{\beta_{Fb}} & T''HFb.\end{array}$$

El cuadro de la izquierda conmuta porque φ es natural en a pues F es t -exacto; el cuadro de la derecha conmuta por la naturalidad de β en Fa por ser H t -exacto. Si definimos $\theta := (\beta F)(H\varphi)$ como la familia de isomorfismos

$$\{\theta_a := \beta_{Fa} \cdot H\varphi_a: HFTa \rightarrow T''HFa\}_{a \in \mathcal{T}},$$

tenemos que, para cada $f: a \rightarrow b$ conmuta:

$$\begin{array}{ccc} (HFT)a & \xrightarrow{\theta_a} & (T''HF)a \\ (HFT)f \downarrow & & \downarrow (T''HF)f \\ (HFT)b & \xrightarrow{\theta_b} & (T''HF)b.\end{array}$$

Luego, $\theta: HFT \rightarrow T''HF$ es un isomorfismo de funtores. Además, es claro que HF envía triángulos de \mathcal{T} en triángulos de \mathcal{T}'' . Entonces, HF es un funtor t -exacto. \square

Observación 3.7. Sean los funtores t -exactos

$$\mathcal{T}_1 \xrightarrow{L} \mathcal{T} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{T}' \xrightarrow{H} \mathcal{T}_2,$$

y $\eta: F \rightarrow G$ un morfismo de funtores t -exactos. Sea $\{\eta_a: Fa \rightarrow Ga\}_{a \in \mathcal{T}}$ la familia de morfismos naturales que existe por ser η un morfismo de funtores. Definiendo $H\eta := \{H\eta_a: HFa \rightarrow HGa\}_{a \in \mathcal{T}}$ y $\eta L := \{\eta L_a: FL_a \rightarrow GL_a\}_{a \in \mathcal{T}}$ tenemos que $H\eta: HF \rightarrow HG$ y $\eta L: FL \rightarrow GL$ son morfismos de funtores t -exactos. Si η es isomorfismo, también lo son $H\eta$ y ηL .

DEMOSTRACIÓN. Sean $T_1, T, T',$ y T_2 los funtores traslación de las categorías trianguladas $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}, \mathcal{T}',$ y \mathcal{T}_2 respectivamente. Como L, F, G y H son funtores t -exactos, existen transformaciones naturales que son isomorfismos:

$$\begin{aligned}\alpha: LT_1 &\longrightarrow TL, \\ \varphi: FT &\longrightarrow T'F, \\ \psi: GT &\longrightarrow T'G, \\ \beta: HT' &\longrightarrow T_2H.\end{aligned}$$

Por la observación anterior, HF y HG son funtores t -exactos, es decir, existen familias de isomorfismos naturales

$$\begin{aligned}\theta^F &:= \{\beta_{Fa} \cdot H\varphi_a: HFTa \rightarrow T_2HFa\}_{a \in \mathcal{T}}, \\ \theta^G &:= \{\beta_{Ga} \cdot H\psi_a: HGTa \rightarrow T_2HGa\}_{a \in \mathcal{T}}.\end{aligned}$$

Para cada $f: a \rightarrow b$, por la naturalidad de η , el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}Fa & \xrightarrow{\eta_a} & Ga \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ Fb & \xrightarrow{\eta_b} & Gb.\end{array}$$

Aplicando el funtor H a este diagrama sigue siendo conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}HFa & \xrightarrow{H\eta_a} & HGa \\ HFf \downarrow & & \downarrow HGf \\ HFb & \xrightarrow{H\eta_b} & HGb.\end{array}$$

Luego, $\{H\eta_a: HFa \rightarrow HGa\}_{a \in \mathcal{T}}$ es una familia de transformaciones naturales en a . Es claro que, si η es isomorfismo (esto es, η_a es isomorfismo para cada $a \in \mathcal{T}$), entonces también $H\eta$ es isomorfismo. Para ver que $H\eta$ es un morfismo de funtores t -exactos, sólo resta probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}HFT & \xrightarrow{H\eta T} & HGT \\ \theta^F \downarrow & & \downarrow \theta^G \\ T_2HF & \xrightarrow{T_2H\eta} & T_2HG.\end{array}$$

Puesto que η es morfismo de funtores t -exactos, tenemos que conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}HFT & \xrightarrow{H\eta T} & HGT \\ H\varphi \downarrow & & \downarrow H\psi \\ HT'F & \xrightarrow{HT'\eta} & HT'G.\end{array}$$

Luego, también conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
HFT & \xrightarrow{H\eta T} & HGT \\
H\varphi \downarrow & & \downarrow H\psi \\
HT'F & \xrightarrow{HT'\eta} & HT'G \\
\beta F \downarrow & & \downarrow \beta G \\
T_2HF & \xrightarrow{T_2H\eta} & T_2HG.
\end{array}$$

La prueba de que ηL es un morfismo de funtores t -exactos de FL en GL es análoga. \square

Corolario 3.8. Sean \mathcal{T} y \mathcal{T}_1 categorías trianguladas con respectivos funtores traslación T y T_1 . Si $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_1$ es un funtor t -exacto, con isomorfismo $\alpha: FT \rightarrow T_1F$, entonces existe un isomorfismo de funtores t -exactos:

$$T_1^{-1}F \xrightarrow{T_1^{-1}\alpha T^{-1}} FT^{-1},$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos el siguiente diagrama de funtores t -exactos:

$$\mathcal{T} \xrightarrow{T^{-1}} \mathcal{T} \xrightarrow[T_1F]{FT} \mathcal{T}_1 \xrightarrow{T_1^{-1}} \mathcal{T}_1,$$

y $\alpha: FT \rightarrow T_1F$ un isomorfismo de funtores t -exactos. Por la observación anterior, tenemos que αT^{-1} es un isomorfismo de funtores t -exactos. De nuevo usando tal observación, con $H = T_1^{-1}$ y $\eta = \alpha T^{-1}$, tenemos que $T_1^{-1}\alpha T^{-1}$ es un isomorfismo de funtores t -exactos. \square

Proposición 3.9. Sea $F: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ un funtor t -exacto entre las categorías trianguladas \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 , cuyos respectivos funtores traslación son T_1 y T_2 . Dados X y Y objetos en \mathcal{T}_1 se tiene que,

$$F_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{T}_1}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}_2}(FX, FY)$$

es un isomorfismo si y sólo si:

$$F_{T_1X, T_1Y}: \text{Hom}_{\mathcal{T}_1}(T_1X, T_1Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}_2}(FT_1X, FT_1Y)$$

es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Como F es t -exacto, se tiene el isomorfismo de funtores $\alpha: FT_1 \rightarrow T_2F$. Por (??), también $T_2^{-1}\alpha T_1^{-1}: T_2^{-1}F \rightarrow FT_1^{-1}$, es un isomorfismo de funtores. Basta probar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_1}(X, Y) & \xrightarrow{F_{X,Y}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_2}(FX, FY) \\
 T_1 \downarrow \cong & & \cong \uparrow \mathrm{Hom}(1, (T_2^{-1}\alpha T_1^{-1})_{T_1Y}) \\
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_1}(T_1X, T_1Y) & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_2}(FX, T_2^{-1}FT_1Y) \\
 F_{T_1X, T_1Y} \downarrow & & \cong \uparrow T_2^{-1} \\
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_2}(FT_1X, FT_1Y) & \xrightarrow[\cong]{\mathrm{Hom}(\alpha_X^{-1}, 1)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_2}(T_2FX, FT_1Y).
 \end{array}$$

Notemos que $(T_2^{-1}\alpha T_1^{-1})_{T_1Y} = T_2^{-1}\alpha_Y$. Sea $g: X \rightarrow Y$ en \mathcal{T}_1 . Entonces:

$$\begin{aligned}
 \mathrm{Hom}(1, T_2^{-1}\alpha_Y)T_2^{-1}[\mathrm{Hom}(\alpha_X^{-1}, 1)(FT_1g)] &= T_2^{-1}(\alpha_Y)T_2^{-1}(FT_1g \cdot \alpha_X^{-1}) \\
 &= T_2^{-1}(\alpha_Y \cdot FT_1g \cdot \alpha_X^{-1}).
 \end{aligned}$$

Por otro lado, la naturalidad del morfismo α nos dice que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 T_2FX & \xrightarrow{\alpha_X^{-1}} & FT_1X \\
 T_2Fg \downarrow & & \downarrow FT_1g \\
 T_2FY & \xrightarrow{\alpha_Y^{-1}} & FT_1Y.
 \end{array}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 \mathrm{Hom}(1, T_2^{-1}\alpha_Y)T_2^{-1}[\mathrm{Hom}(\alpha_X^{-1}, 1)(FT_1g)] &= T_2^{-1}(\alpha_Y \alpha_Y^{-1} T_2Fg) \\
 &= Fg.
 \end{aligned}$$

Luego, el diagrama conmuta y se tiene la proposición. \square

Definición 3.10. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada, con funtor traslación T , y \mathcal{T}' una subcategoría plena de \mathcal{T} que contiene al objeto cero. Decimos que \mathcal{T}' es una subcategoría triangulada si:

- (i) Dado X un objeto en \mathcal{T}' , tanto TX como $T^{-1}X$ están en \mathcal{T}' .
- (ii) Dados X y Y objetos en \mathcal{T}' , para cada $u: X \rightarrow Y$ existe un triángulo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ con Z en \mathcal{T}' .

(iii) Si X, Y son objetos en \mathcal{T}' , entonces $X \oplus Y$ está en \mathcal{T}' .

Observación 3.11. Si \mathcal{T}' es una subcategoría triangulada de la categoría triangulada \mathcal{T} con clase de triángulos Δ , entonces \mathcal{T}' es una categoría triangulada con clase de triángulos Δ' , donde el séxtuple de \mathcal{T}' : (X, Y, Z, u, v, w) está en Δ' si y sólo si es un triángulo en Δ .

Definición 3.12. Sean las categorías \mathcal{T} y \mathcal{T}_1 y $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_1$ un funtor. Supongamos que para cada familia $\{Z_i\}_{i \in J}$ en \mathcal{T} tal que $\coprod_{i \in J} Z_i$ está en \mathcal{T} y $\coprod_{i \in J} FZ_i$ está en \mathcal{T}_1 , se tiene que el morfismo ψ dado por la propiedad universal del coproducto $\coprod_{i \in J} FZ_i$ y que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in J} FZ_i & \xrightarrow{\psi} & F(\coprod_{i \in J} Z_i) \\ \sigma_{FZ_i} \uparrow & \nearrow F\sigma_{Z_i} & \\ FZ_i & & \end{array}$$

(donde σ_{Z_i} y σ_{FZ_i} son las inyecciones canónicas) es un isomorfismo, entonces decimos que F conmuta con coproductos.

Lema 3.13. Sean \mathcal{T} y \mathcal{T}_1 categorías trianguladas con respectivos funtores traslación T, T_1 y $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_1$ un funtor t -exacto. Sea S una colección de objetos de \mathcal{T} que es cerrada bajo traslaciones. Dados X, Y en \mathcal{T} , recordemos la notación $F_{X,Y}$ para el morfismo $F: \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}_1}(FX, FY)$. Sean

$$S_1 := \{X \in \mathcal{T} \mid F_{X,Y} \text{ es isomorfismo } \forall Y \in S\},$$

$$S_2 := \{Y \in \mathcal{T} \mid F_{X,Y} \text{ es isomorfismo } \forall X \in S\}.$$

Sea $j \in \{1, 2\}$. Sea \mathcal{U}_j la subcategoría plena de \mathcal{T} cuyos objetos son los de S_j . Entonces \mathcal{U}_j es una subcategoría triangulada de \mathcal{T} .

Además, si F conmuta con coproductos y se tiene que $\{Z_i\}_{i \in J}$ está en \mathcal{U}_1 con $\coprod_{i \in J} Z_i$ en \mathcal{T} y $\coprod_{i \in J} FZ_i$ en \mathcal{T}_1 , entonces $\coprod_{i \in J} Z_i$ está en \mathcal{U}_1 .

DEMOSTRACIÓN. Probemos que \mathcal{U}_1 es subcategoría triangulada de \mathcal{T} . Sea $X \in S_1$. Entonces, para todo $Y \in S$ se tiene que $F_{X,Y}$ es un isomorfismo. Puesto que S es cerrado bajo traslaciones, $T^{-1}Y \in S$, así que $F_{X, T^{-1}Y}$ es isomorfismo. Por la proposición (??) esto pasa si y sólo si $F_{TX, TT^{-1}Y}$ es isomorfismo, es decir, $F_{TX, Y}$ es isomorfismo, para todo $Y \in S$. Por lo tanto, TX está en \mathcal{U}_1 .

Por otro lado, para todo $Y \in S$ se tiene que $F_{X, TY}$ es un isomorfismo, esto es, $F_{TT^{-1}X, TY}$ es isomorfismo. Por (??) esto pasa si y sólo si $F_{T^{-1}X, Y}$ es isomorfismo, para todo $Y \in S$. Luego, $T^{-1}X$ está en \mathcal{U}_1 .

Sea $f: X \rightarrow Y$ en \mathcal{U}_1 y $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ su correspondiente triángulo en \mathcal{T} . Entonces, $FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \xrightarrow{\alpha_X Fh} T_1FX$ es un triángulo en \mathcal{T}_1 (para $\alpha_X: FTX \rightarrow T_1FX$ el isomorfismo dado porque F es t -exacto). Sea $W \in S$. Luego, son exactos los renglones superior e inferior del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(TY, W) & \xrightarrow{(Tf)_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(TX, W) & \xrightarrow{h_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, W) & \xrightarrow{g_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, W) & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, W) \\
 \cong \downarrow F_{TY, W} & & \cong \downarrow F_{TX, W} & & \downarrow F_{Z, W} & & \cong \downarrow F_{Y, W} & & \cong \downarrow F_{X, W} \\
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(FTY, FW) & \xrightarrow{(FTf)_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(FTX, FW) & \xrightarrow{F_{Z, W}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(FZ, FW) & \xrightarrow{(Fg)_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(FY, FW) & \xrightarrow{(Ff)_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(FX, FW) \\
 \cong \downarrow (\alpha_Y^{-1})_* & & \cong \downarrow (\alpha_X^{-1})_* & & \downarrow (Fh)_* & & \downarrow (Fg)_* & & \downarrow (Ff)_* \\
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T_1FY, FW) & \xrightarrow{(T_1Ff)_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T_1FX, FW) & \xrightarrow{(\alpha_X Fh)_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(FZ, FW) & \xrightarrow{(Fg)_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(FY, FW) & \xrightarrow{(Ff)_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(FX, FW)
 \end{array}$$

Por la naturalidad de la familia $\{\alpha_X\}_{X \in \mathcal{T}}$, tenemos que es conmutativo el siguiente cuadrado:

$$\begin{array}{ccc}
 T_1FX & \xrightarrow{\alpha_X^{-1}} & FTX \\
 T_1Ff \downarrow & & \downarrow FTf \\
 T_1FY & \xrightarrow{\alpha_Y^{-1}} & FTY
 \end{array}$$

Entonces, el diagrama superior es conmutativo. Como todos los morfismos verticales son isomorfismos, el Lema del 5 nos dice que $F_{Z, W}$ es isomorfismo. Por lo tanto, Z está en \mathcal{U}_1 .

Sean X_1, X_2 en \mathcal{U}_1 . Entonces, para cada $Y \in S$, $F_{X_i, Y}$ es isomorfismo para $i = 1, 2$. Luego, tenemos la cadena de isomorfismos (cuya composición coincide con $F_{\oplus X_i, Y}$):

$$\begin{aligned}
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}\left(\bigoplus_{i=1}^2 X_i, Y\right) &\xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i=1}^2 \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_i, Y) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i=1}^2 \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_1}(FX_i, FY) \\
 &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_1}\left(\bigoplus_{i=1}^2 FX_i, FY\right) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_1}\left(F\left(\bigoplus_{i=1}^2 X_i\right), FY\right).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $X_1 \oplus X_2$ está en \mathcal{U}_1 y se tiene que \mathcal{U}_1 es una subcategoría triangulada de \mathcal{T} .

La prueba de que \mathcal{U}_2 es una subcategoría triangulada de \mathcal{T} usa argumentos duales a los que hemos dado para \mathcal{U}_1 .

Supongamos ahora que F conmuta con coproductos y que $\{Z_i\}_{i \in J}$ está en \mathcal{U}_1 con $\coprod_{i \in J} Z_i$ en \mathcal{T} y $\coprod_{i \in J} FZ_i$ en \mathcal{T}_1 . Por hipótesis $F\sigma_{Z_i} = \psi\sigma_{FZ_i}$, donde σ_{Z_i}

y σ_{FZ_i} son las inyecciones canónicas, y ψ , dado por la propiedad universal del coproducto, es un isomorfismo. Sea $Y \in \mathcal{S}$. Basta probar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}\left(\coprod_{i \in J} Z_i, Y\right) & \xrightarrow[\cong]{(\sigma_{Z_i})_*} & \prod_{i \in J} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Z_i, Y) \\
 \downarrow F_{\coprod Z_i, Y} & & \cong \downarrow (F_{Z_i, Y}) \\
 & & \prod_{i \in J} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_1}(FZ_i, FY) \\
 & & \cong \uparrow (\sigma_{FZ_i})_* \\
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_1}(F(\coprod_{i \in J} Z_i), FY) & \xrightarrow[\cong]{\psi_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_1}\left(\prod_{i \in J} FZ_i, FY\right).
 \end{array}$$

Sea $f: \coprod Z_i \rightarrow Y$ en \mathcal{T} . Entonces:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{FZ_i})_*(\psi)_*F_{\coprod Z_i, Y}(f) &= (F(f)\psi\sigma_{FZ_i})_* = (F(f)F(\sigma_{Z_i}))_* = (F(f\sigma_{Z_i}))_* \\
 &= (F_{Z_i, Y})_*((\sigma_{Z_i})_*(f)).
 \end{aligned}$$

Entonces el diagrama conmuta y se tiene que $F_{\coprod Z_i, Y}$ es un isomorfismo. \square

Lema 3.14. *Sean \mathcal{T} y \mathcal{T}_1 categorías trianguladas. Sea $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_1$ un funtor pleno y t -exacto. Sea \mathcal{V} la subcategoría plena de \mathcal{T}_1 formada por los objetos que son isomorfos a imágenes del funtor F . Entonces, \mathcal{V} es una subcategoría triangulada de \mathcal{T}_1 .*

DEMOSTRACIÓN. Por definición, \mathcal{V} es cerrada bajo isomorfismos. Sea $Y \in \mathcal{V}$, entonces $Y \cong F(X)$, para algún $X \in \mathcal{T}$. Luego,

$$T_1 Y \cong T_1 F(X) \cong FT(X),$$

por lo tanto, $T_1 Y$ está en \mathcal{V} . Además

$$T_1^{-1} Y \cong T_1^{-1} F(X) \cong FT^{-1}(X),$$

por lo tanto, $T_1^{-1} Y$ también está en \mathcal{V} .

Sean $Y_1, Y_2 \in \mathcal{V}$, $Y_1 \cong F(X_1)$, $Y_2 \cong F(X_2)$ para $X_1, X_2 \in \mathcal{T}$. Se tiene

$$Y_1 \oplus Y_2 \cong F(X_1) \oplus F(X_2) \cong F(X_1 \oplus X_2).$$

Luego, $Y_1 \oplus Y_2 \in \mathcal{V}$.

Sea $Y_1 \xrightarrow{f} Y_2$ en \mathcal{V} . Entonces $Y_1 \cong F(X_1)$, $Y_2 \cong F(X_2)$ para $X_1, X_2 \in \mathcal{T}$. Así que existe f' que hace conmutar

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{f} & Y_2 \\ \uparrow \cong & & \downarrow \cong \\ F(X_1) & \xrightarrow{f'} & F(X_2) \end{array}$$

mo F es pleno, $f' = F(u)$, para algún $u \in \mathcal{T}$. Luego, existe un triángulo $X_1 \xrightarrow{u} X_2 \xrightarrow{v} X_3 \xrightarrow{w} TX_1$ en \mathcal{T} . Como el functor F es t -exacto, $FX_1 \xrightarrow{Fu} FX_2 \xrightarrow{Fv} FX_3 \xrightarrow{\alpha_{X_1} Fw} T_1FX_1$ es un triángulo en \mathcal{T}_1 . Sea el triángulo $Y_1 \xrightarrow{f} Y_2 \xrightarrow{g} Y_3 \xrightarrow{h} T_1Y_1$ correspondiente a f en \mathcal{T}_1 . Luego, en el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} Y_1 & \xrightarrow{f} & Y_2 & \xrightarrow{g} & Y_3 & \xrightarrow{h} & T_1Y_1 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow s & & \downarrow \cong \\ FX_1 & \xrightarrow{Fu} & FX_2 & \xrightarrow{Fv} & FX_3 & \xrightarrow{\alpha_{X_1} Fw} & T_1FX_1 \end{array}$$

existe el morfismo s (por el axioma (TR3)). Además, es un isomorfismo. Por lo tanto, Y_3 está en \mathcal{V} . \square

En el lema anterior observemos que, si F conmuta con coproductos y tanto en \mathcal{T} como en \mathcal{T}_1 existen los coproductos arbitrarios, entonces \mathcal{V} es cerrado bajo coproductos arbitrarios.

Definición 3.15. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada. Una colección de objetos \mathcal{Z} en \mathcal{T} se dice un sistema de generadores de \mathcal{T} si ésta última es la subcategoría triangulada más pequeña, cerrada bajo isomorfismos, que contiene a \mathcal{Z} .

Proposición 3.16. Sean \mathcal{T} y \mathcal{T}_1 categorías trianguladas con respectivos funtores traslación T y T_1 . Sea $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_1$ un functor t -exacto, tal que para un sistema de generadores \mathcal{Z} de \mathcal{T} se tiene que, $F_{Z_1, T^i Z_2}$ es un isomorfismo para todo $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Entonces F es un functor fiel y pleno.

Además, si la colección de imágenes del sistema de generadores $F(\mathcal{Z})$ es un sistema de generadores para \mathcal{T}_1 , entonces F también es denso.

DEMOSTRACIÓN. Sea $S = \{T^i Z \mid Z \in \mathcal{Z}, i \in \mathbb{Z}\}$. Entonces \mathcal{Z} está en S , el cual es cerrado bajo traslaciones, por construcción. Como en el enunciado del lema (??), sean

$$S_1 := \{X \in \mathcal{T} \mid F_{X,Y} \text{ es isomorfismo } \forall Y \in S\},$$

$$S_2 := \{Y \in \mathcal{T} \mid F_{X,Y} \text{ es isomorfismo } \forall X \in S\}.$$

Sea \mathcal{U}_1 la subcategoría plena de \mathcal{T} cuyos objetos están en S_1 . Entonces \mathcal{U}_1 es triangulada (por el lema (??)), pero además \mathcal{Z} está en \mathcal{U}_1 , luego, $\mathcal{U}_1 = \mathcal{T}$. Por lo tanto, $F_{X,T^i Z}$ es un isomorfismo para todo $X \in \mathcal{T}$, para todo Z en \mathcal{Z} y para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Ahora sea $S = \mathcal{T}$, y \mathcal{U}_2 la subcategoría plena de \mathcal{T} cuyos objetos están en S_2 . Por el lema (??) \mathcal{U}_2 es subcategoría triangulada de \mathcal{T} . Además, \mathcal{U}_2 contiene a \mathcal{Z} , luego, $\mathcal{U}_2 = \mathcal{T}$. Por lo tanto, F es fiel y pleno.

Supongamos ahora que $F(\mathcal{Z})$ es un sistema de generadores para \mathcal{T}_1 . Sea \mathcal{V} la subcategoría plena de \mathcal{T}_1 de los objetos Y tales que $Y \cong F(X)$ para $X \in \mathcal{T}$. Entonces $F(\mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{V}$; pero \mathcal{V} es triangulada, por el lema (??), luego, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{V}$. Por lo tanto, F es denso. \square

3.2. La categoría triangulada $K(\mathcal{A})$

En esta sección probaremos que la categoría homotópica $K(\mathcal{A})$ es triangulada con el funtor T definido en (??) su automorfismo de traslación.

Definición 3.17. Decimos que el séxtuple $(Z_1, Z_2, Z_3, h_1, h_2, h_3)$ en $K(\mathcal{A})$ es un triángulo si es isomorfo a un séxtuple $(\dot{X}, \dot{E}, \dot{Y}, \underline{\dot{f}}, \underline{\dot{g}}, \underline{\dot{h}})$ en $K(\mathcal{A})$ con

$0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\underline{\dot{f}}} \dot{E} \xrightarrow{\underline{\dot{g}}} \dot{Y} \longrightarrow 0$ una \mathcal{E} -sucesión (para $\underline{\dot{f}}$ y $\underline{\dot{g}}$ representantes de las clases $\underline{\dot{f}}$ y $\underline{\dot{g}}$ respectivamente) y $\underline{\dot{h}}$ su morfismo correspondiente en $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1])$ dado por el isomorfismo que hay entre $\mathcal{E}xt_{\mathcal{E}}(\dot{Y}, \dot{X})$ y $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{X}[1])$ (teorema (??)). Un séxtuple $(\dot{X}, \dot{E}, \dot{Y}, \underline{\dot{f}}, \underline{\dot{g}}, \underline{\dot{h}})$ en $K(\mathcal{A})$ con estas características será llamado canónico.

Denotaremos por \mathcal{J}_K la clase de los triángulos en $K(\mathcal{A})$.

Observación 3.18. Si el séxtuple $t = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$ es un triángulo en \mathcal{J}_K y $t' = (\dot{X}', \dot{Y}', \dot{Z}', \dot{u}', \dot{v}', \dot{w}')$ es un séxtuple isomorfo a t . Entonces t' también está en \mathcal{J}_K .

DEMOSTRACIÓN. Por definición, tenemos que t es isomorfo a un séxtuple $(\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1, \underline{\dot{f}}, \underline{\dot{g}}, \underline{\dot{h}})$ en $K(\mathcal{A})$ con $0 \longrightarrow \dot{X}_1 \xrightarrow{\underline{\dot{f}}} \dot{E}_1 \xrightarrow{\underline{\dot{g}}} \dot{Y}_1 \longrightarrow 0$ una \mathcal{E} -sucesión (para $\underline{\dot{f}}$ y $\underline{\dot{g}}$ representantes de las clases $\underline{\dot{f}}$ y $\underline{\dot{g}}$ respectivamente) y $\underline{\dot{h}}$ su morfismo correspondiente en $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Y}_1, \dot{X}_1[1])$. Luego, también se tiene que t' es isomorfo a $(\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1, \underline{\dot{f}}, \underline{\dot{g}}, \underline{\dot{h}})$. Por lo tanto, t' está en \mathcal{J}_K . \square

Lema 3.19. *Sea el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \dot{M} & \xrightarrow{\dot{u}} & \dot{E} & \xrightarrow{\dot{v}} & \dot{N} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \dot{w} & & \\ 0 & \longrightarrow & \dot{M} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{J}(\dot{M}[1]) & \xrightarrow{\rho} & \dot{M}[1] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con renglones \mathcal{E} -sucesiones y donde el segundo renglón es la \mathcal{E} -sucesión canónica construída en (??), entonces:

$$\dot{M} \xrightarrow{\dot{u}} \dot{E} \xrightarrow{\dot{v}} \dot{N} \xrightarrow{\dot{w}} \dot{M}[1]$$

es un triángulo en $K(\mathcal{A})$.

DEMOSTRACIÓN. Por la observación (??), conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{N}, \dot{M}[1]) & \xrightarrow{\hat{\Psi}_{\dot{N}}} & \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{N}, \dot{M}) \\ \uparrow \underline{\dot{w}}^* & & \uparrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{w}, 1) \\ \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{M}[1], \dot{M}[1]) & \xrightarrow{\hat{\Psi}_{\dot{M}[1]}} & \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{M}[1], \dot{M}). \end{array}$$

Sea x la clase de \mathcal{E} -sucesiones en $\mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{N}, \dot{M})$ representada por el primer renglón del enunciado y sea y la clase en $\mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{M}[1], \dot{M})$ que corresponde al segundo renglón. Por la observación (??), tenemos:

$$\begin{aligned} x &= \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{w}, 1)(y) = \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{w}, 1)\hat{\Psi}_{\dot{M}[1]}(1_{\dot{M}[1]}) \\ &= \hat{\Psi}_{\dot{N}}\underline{\dot{w}}^*(1_{\dot{M}[1]}) = \hat{\Psi}_{\dot{N}}(\dot{w}). \end{aligned}$$

□

Lema 3.20. *Sean los morfismos $\dot{f}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ y $\dot{u}: \dot{X} \rightarrow \dot{T}$ en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, con \dot{T} un complejo \mathcal{E} -proyectivo. Entonces,*

1. El morfismo $\begin{pmatrix} \dot{f} \\ \dot{u} \end{pmatrix}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y} \oplus \dot{T}$ es homotópico a $\begin{pmatrix} \dot{f} \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Si \dot{f} es un isomorfismo, entonces $\begin{pmatrix} \dot{f} \\ 0 \end{pmatrix}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y} \oplus \dot{T}$ es un isomorfismo en $K(\mathcal{A})$.

DEMOSTRACIÓN. 1. Basta probar que $\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{u} \end{pmatrix}$ (es decir, la diferencia entre $\begin{pmatrix} \dot{f} \\ \dot{u} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \dot{f} \\ 0 \end{pmatrix}$) es homotópico a cero. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \dot{X} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{u} \end{pmatrix}} & \dot{Y} \oplus \dot{T} \\ & \searrow \begin{pmatrix} \dot{u} \end{pmatrix} & \nearrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{\dot{T}} \end{pmatrix} \\ & & \dot{T} \end{array}$$

Por la proposición (??), $\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{u} \end{pmatrix}$ es homotópico a cero.

2. Tenemos que $\dot{X} \xrightleftharpoons[\begin{pmatrix} \dot{f}^{-1}, 0 \end{pmatrix}]{\begin{pmatrix} \dot{f} \\ 0 \end{pmatrix}} \dot{Y} \oplus \dot{T}$, y $\begin{pmatrix} \dot{f} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{f}^{-1}, 0 \end{pmatrix} = 1_{\dot{X}}$. Por otro lado, $\begin{pmatrix} \dot{f} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{f}^{-1}, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{\dot{Y}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Para ver que $\begin{pmatrix} 1_{\dot{Y}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es homotópico a la identidad, basta ver que la diferencia $\begin{pmatrix} 1_{\dot{Y}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1_{\dot{Y}} & 0 \\ 0 & 1_{\dot{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1_{\dot{T}} \end{pmatrix}$ es homotópica a cero. El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \dot{Y} \oplus \dot{T} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1_{\dot{T}} \end{pmatrix}} & \dot{Y} \oplus \dot{T} \\ & \searrow \begin{pmatrix} 0, 1_{\dot{T}} \end{pmatrix} & \nearrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1_{\dot{T}} \end{pmatrix} \\ & & \dot{T} \end{array}$$

es decir, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1_{\dot{T}} \end{pmatrix}$ se factoriza a través del \mathcal{E} -proyectivo \dot{T} . Por (??), $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1_{\dot{T}} \end{pmatrix}$ es homotópico a cero. Por lo tanto, la clase de homotopía de $\begin{pmatrix} 1_{\dot{Y}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la identidad en $\dot{Y} \oplus \dot{T}$ en la categoría $K(\mathcal{A})$. Entonces, la clase de homotopía de $\begin{pmatrix} 1_{\dot{Y}} \\ 0 \end{pmatrix}$ es isomorfismo en $K(\mathcal{A})$. \square

Definición 3.21. Sea $\dot{f}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Llamamos cono de \dot{f} al complejo $\text{Con}_{\dot{f}} = (Y^i \oplus X^{i+1}, d_C^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, cuyo i -ésimo morfismo diferencial es $d_C^i = \begin{pmatrix} d_Y^i & f^{i+1} \\ 0 & -d_X^{i+1} \end{pmatrix}$.

Lema 3.22. Dado un morfismo $\dot{f}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, tenemos la \mathcal{E} -sucesión

$$0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{s}_f} \dot{Y} \oplus \mathcal{I}(\dot{X}[1]) \xrightarrow{\dot{p}_f} \text{Con}_{-\dot{f}} \longrightarrow 0,$$

donde

$$s_f^i = \begin{pmatrix} f^i \\ d_X^i \\ 1_{X^i} \end{pmatrix} : X^i \rightarrow Y^i \oplus X^{i+1} \oplus X^i,$$

y

$$p_f^i = \begin{pmatrix} 1_{Y^i} & 0 & -f^i \\ 0 & 1_{X^{i+1}} & -d_X^i \end{pmatrix} : Y^i \oplus X^{i+1} \oplus X^i \rightarrow Y^i \oplus X^{i+1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\dot{u} : \dot{X} \rightarrow \mathcal{J}(\dot{X}[1])$ el morfismo en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ definido en (??). Definimos $\dot{s}_f = \begin{pmatrix} \dot{f} \\ \dot{u} \end{pmatrix} : \dot{X} \rightarrow \dot{Y} \oplus \mathcal{J}(\dot{X}[1])$, es claro que \dot{s}_f es un morfismo de complejos, pues \dot{f} y \dot{u} lo son. También \dot{p}_f es un morfismo de complejos, porque conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Y^i \oplus X^{i+1} \oplus X^i & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{Y^i} & 0 & -f^i \\ 0 & 1_{X^{i+1}} & -d_X^i \end{pmatrix}} & Y^i \oplus X^{i+1} = \text{Con}_{-f}^i \\ \downarrow d_{Y \oplus \mathcal{J}(X[1])}^i = \begin{pmatrix} d_Y^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{X^{i+1}} & 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} d_Y^i & -f^{i+1} \\ 0 & -d_X^{i+1} \end{pmatrix} = d_{C_f}^i \\ Y^{i+1} \oplus X^{i+2} \oplus X^{i+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{Y^{i+1}} & 0 & -f^{i+1} \\ 0 & 1_{X^{i+2}} & -d_X^{i+1} \end{pmatrix}} & Y^{i+1} \oplus X^{i+2} = \text{Con}_{-f}^{i+1}. \end{array}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1_{Y^{i+1}} & 0 & -f^{i+1} \\ 0 & 1_{X^{i+2}} & -d_X^{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_Y^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{X^{i+1}} & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d_Y^i & -f^{i+1} & 0 \\ 0 & -d_X^{i+1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_Y^i & -f^{i+1} & -d_Y^i f^i + f^{i+1} d_X^i \\ 0 & -d_X^{i+1} & d_X^{i+1} d_X^i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_Y^i & -f^{i+1} \\ 0 & -d_X^{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{Y^i} & 0 & -f^i \\ 0 & 1_{X^{i+1}} & -d_X^i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

s_f^i es monomorfismo porque $(0 \ 0 \ 1_{X^i}) \begin{pmatrix} f^i \\ d_X^i \\ 1_{X^i} \end{pmatrix} = 1_{X^i}$; p_f^i es retracción, pues

$$\begin{pmatrix} 1_{Y^i} & 0 & -f^i \\ 0 & 1_{X^{i+1}} & -d_X^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{Y^i} & 0 \\ 0 & 1_{X^{i+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{Y^i} & 0 \\ 0 & 1_{X^{i+1}} \end{pmatrix}. \text{ También es claro que } \dot{p}_f \dot{s}_f = 0.$$

Si tenemos un morfismo $\dot{\alpha}$ en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tal que $\dot{p}_f \dot{\alpha} = 0$, esto es, para cada $i \in \mathbb{Z}$, $\alpha^i = \begin{pmatrix} \alpha_1^i \\ \alpha_2^i \\ \alpha_3^i \end{pmatrix}$ en \mathcal{A} y se tiene:

$$\begin{array}{ccc} Z^i & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha_1^i \\ \alpha_2^i \\ \alpha_3^i \end{pmatrix}} & \\ & \searrow & \\ X^i & \xrightarrow{s_f^i} Y^i \oplus X^{i+1} \oplus X^i & \xrightarrow{p_f^i} Y^i \oplus X^{i+1}, \end{array}$$

$$0 = p_f^i \alpha^i = \begin{pmatrix} 1_{Y^i} & 0 & -f^i \\ 0 & 1_{X^{i+1}} & -d_X^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^i \\ \alpha_2^i \\ \alpha_3^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^i - f^i \alpha_3^i \\ \alpha_2^i - d_X^i \alpha_3^i \end{pmatrix},$$

obtenemos que $\alpha_1^i = f^i \alpha_3^i$ y $\alpha_2^i = d_X^i \alpha_3^i$. Luego, $\alpha_3^i: Z^i \rightarrow X^i$ satisface

$$\begin{pmatrix} f^i \\ d_X^i \\ 1_{X^i} \end{pmatrix} \alpha_3^i = \begin{pmatrix} f^i \alpha_3^i \\ d_X^i \alpha_3^i \\ \alpha_3^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^i \\ \alpha_2^i \\ \alpha_3^i \end{pmatrix}$$

y es el único morfismo que lo hace pues s_f^i es monomorfismo. Se sigue que $s_f^i = \ker p_f^i$. Entonces $\dot{s}_f = \ker \dot{p}_f$. Luego,

$$0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{s}_f} \dot{Y} \oplus \mathcal{J}(\dot{X}[1]) \xrightarrow{\dot{p}_f} \text{Con}_{-f} \longrightarrow 0,$$

es una \mathcal{E} -sucesión, por el lema (??). \square

Proposición 3.23. *Dado un morfismo $\dot{f}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, podemos construir el séxtuple $\dot{X} \xrightarrow{\dot{f}} \dot{Y} \xrightarrow{\alpha(-\dot{f})} \text{Con}_{-f} \xrightarrow{\beta(-\dot{f})} \dot{X}[1]$, donde $\alpha(-\dot{f}): \dot{Y} \rightarrow \text{Con}_{-f}$ y $\beta(-\dot{f}): \text{Con}_{-f} \rightarrow \dot{X}[1]$ son los morfismos en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ definidos por $\alpha(-f)^i = \begin{pmatrix} 1_{Y^i} \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\beta(-f)^i = (0, 1_{X^{i+1}})$. Este resulta ser un triángulo de \mathcal{J}_K .*

DEMOSTRACIÓN. Usando el lema (??), tenemos la \mathcal{E} -sucesión

$$0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{s}_f} \dot{Y} \oplus \mathcal{J}(\dot{X}[1]) \xrightarrow{\dot{p}_f} \text{Con}_{-f} \longrightarrow 0,$$

donde

$$s_f^i = \begin{pmatrix} f^i \\ d_X^i \\ 1_{X^i} \end{pmatrix}: X^i \rightarrow Y^i \oplus X^{i+1} \oplus X^i,$$

y

$$p_f^i = \begin{pmatrix} 1_{Y^i} & 0 & -f^i \\ 0 & 1_{X^{i+1}} & -d_X^i \end{pmatrix}: Y^i \oplus X^{i+1} \oplus X^i \rightarrow Y^i \oplus X^{i+1}.$$

Sea \dot{h} el morfismo que le corresponde en $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\text{Con}_{-f}, \dot{X}[1])$. Por el lema (??), para conocer un representante \dot{h} del morfismo \dot{h} debemos calcular primero σ^i y τ^i tales que

$$0 \longrightarrow X^i \xleftarrow[\sigma^i]{\begin{pmatrix} f^i \\ d_X^i \\ 1_{X^i} \end{pmatrix}} Y^i \oplus X^{i+1} \oplus X^i \xleftarrow[\tau^i]{\begin{pmatrix} 1_{Y^i} & 0 & -f^i \\ 0 & 1_{X^{i+1}} & -d_X^i \end{pmatrix}} Y^i \oplus X^{i+1} \longrightarrow 0$$

con $\sigma^i \begin{pmatrix} f^i \\ d_X^i \\ 1_{X^i} \end{pmatrix} = 1_{X^i} \text{ y } \begin{pmatrix} 1_{Y^i} & 0 & -f^i \\ 0 & 1_{X^{i+1}} & -d_X^i \end{pmatrix} \tau^i = 1_{Y^i \oplus X^{i+1}}$. Luego, $\sigma^i := (0, 0, 1_{X^i})$ y $\tau^i := \begin{pmatrix} 1_{Y^i} & 0 \\ 0 & 1_{X^{i+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ cumplen estas condiciones. Entonces los morfismos:

$$\begin{aligned} h^i &= (0, 0, 1_{X^{i+1}}) \begin{pmatrix} d_Y^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{X^{i+1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{Y^i} & 0 \\ 0 & 1_{X^{i+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (0, 0, 1_{X^{i+1}}) \begin{pmatrix} d_Y^i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{X^{i+1}} \end{pmatrix} = (0, 1_{X^{i+1}}), \end{aligned}$$

definen un morfismo $\dot{h} := (h^i)_{i \in \mathbb{Z}} : \text{Con}_{-f} \rightarrow \dot{X}[1]$. Para los i -ésimos morfismos $\alpha(-\dot{f})^i = \begin{pmatrix} 1_{Y^i} \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\beta(-\dot{f})^i = (0, 1_{X^{i+1}})$, tenemos el diagrama en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccccccc} t : & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{Y} & \xrightarrow{\alpha(-\dot{f})} & \text{Con}_{-f} & \xrightarrow{\beta(-\dot{f})} & \dot{X}[1] \\ & \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} 1_Y \\ 0 \end{pmatrix} & & \parallel & & \parallel \\ t' : & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{s}_f} & \dot{Y} \oplus \mathcal{J}(\dot{X}[1]) & \xrightarrow{\dot{p}_f} & \text{Con}_{-f} & \xrightarrow{\dot{h}} & \dot{X}[1]. \end{array}$$

Es claro que, en cada entrada $i \in \mathbb{Z}$ el cuadro del centro y el de la derecha conmutan. Por el lema (??), \dot{s}_f es homotópico a $\begin{pmatrix} \dot{f} \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces el cuadro de la izquierda también conmuta. Además, $\begin{pmatrix} 1_Y \\ 0 \end{pmatrix}$ es un isomorfismo en $K(\mathcal{A})$ (también por el lema (??)). Luego, en la categoría homotópica tenemos un isomorfismo de séxtuples y, como t' es un triángulo en $K(\mathcal{A})$, entonces t también lo es (por observación (??)). \square

Proposición 3.24. Sean los triángulos Δ y Δ_1 en \mathcal{J}_K y \dot{u}_1, \dot{u}_2 morfismos en $K(\mathcal{A})$ tales que conmuta el cuadrado en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta : & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{E} & \xrightarrow{\dot{g}} & \dot{Y} & \xrightarrow{\dot{h}} & \dot{X}[1] \\ & \downarrow \dot{u}_1 & & \downarrow \dot{u}_2 & & & & \\ \Delta_1 : & \dot{X}_1 & \xrightarrow{\dot{f}_1} & \dot{E}_1 & \xrightarrow{\dot{g}_1} & \dot{Y}_1 & \xrightarrow{\dot{h}_1} & \dot{X}_1[1]. \end{array}$$

Luego, existe $\dot{u}_3 : \dot{Y} \rightarrow \dot{Y}_1$ tal que, si \dot{u}_3 denota su clase, entonces se tiene que $(\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3)$ es un morfismo de Δ en Δ_1 .

DEMOSTRACIÓN. Sean \dot{u}_1 y \dot{u}_2 representantes de \dot{u}_1 y \dot{u}_2 respectivamente. Luego, $\dot{f}_1 \dot{u}_1 = \dot{u}_2 \dot{f} + \dot{v}$, con \dot{v} homotópico a cero. Como Δ y Δ_1

son triángulos, sin perder generalidad podemos suponer que las sucesiones

$$0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{f}} \dot{E} \xrightarrow{\dot{g}} \dot{Y} \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad 0 \longrightarrow \dot{X}_1 \xrightarrow{\dot{f}_1} \dot{E}_1 \xrightarrow{\dot{g}_1} \dot{Y}_1 \longrightarrow 0$$

son \mathcal{E} -sucesiones. Tenemos:

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{E} \\ & \searrow \dot{s} & & \swarrow \dot{\rho} \\ & & \dot{T} & \\ & \downarrow \dot{u}_1 & & \downarrow \dot{u}_2 \\ & \dot{X}_1 & \xrightarrow{\dot{f}_1} & \dot{E}_1, \end{array}$$

con \dot{T} un complejo \mathcal{E} -inyectivo y $\dot{v} = \dot{t}\dot{s}$, de ahí la existencia de $\dot{\rho}$ tal que $\dot{\rho}\dot{f} = \dot{s}$. Entonces, $\dot{f}_1\dot{u}_1 = \dot{u}_2\dot{f} + \dot{t}\dot{\rho}\dot{f} = (\dot{u}_2 + \dot{t}\dot{\rho})\dot{f}$ con $\dot{t}\dot{\rho}$ homotópico a cero. Así que, sin perder generalidad, cambiando \dot{u}_2 por $\dot{u}_2 + \dot{t}\dot{\rho}$ si fuera necesario,

podemos suponer que el diagrama $\dot{X} \xrightarrow{\dot{f}} \dot{E}$ conmuta en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

$$\begin{array}{ccc} \dot{X} & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{E} \\ \downarrow \dot{u}_1 & & \downarrow \dot{u}_2 \\ \dot{X}_1 & \xrightarrow{\dot{f}_1} & \dot{E}_1, \end{array}$$

Como estamos suponiendo que tanto $0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{f}} \dot{E} \xrightarrow{\dot{g}} \dot{Y} \longrightarrow 0$ como $0 \longrightarrow \dot{X}_1 \xrightarrow{\dot{f}_1} \dot{E}_1 \xrightarrow{\dot{g}_1} \dot{Y}_1 \longrightarrow 0$ son \mathcal{E} -sucesiones, tenemos que $0 = \dot{g}_1\dot{f}_1\dot{u}_1 = \dot{g}_1\dot{u}_2\dot{f}$, usando que $\dot{g} = \text{cok } \dot{f}$ existe un morfismo $\dot{u}_3: \dot{Y} \longrightarrow \dot{Y}_1$,

tal que $\dot{E} \xrightarrow{\dot{g}} \dot{Y}$ conmuta. Luego, usando la proposición (??) se de-

$$\begin{array}{ccc} \dot{E} & \xrightarrow{\dot{g}} & \dot{Y} \\ \downarrow \dot{u}_2 & & \downarrow \dot{u}_3 \\ \dot{E}_1 & \xrightarrow{\dot{g}_1} & \dot{Y}_1, \end{array}$$

muestra lo afirmado. \square

Lema 3.25. *Sea $f: X \rightarrow Y$ un morfismo en una categoría arbitraria \mathcal{C} . Entonces, f es un isomorfismo si y sólo si $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \xrightarrow{\text{Hom}(-, f)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$ es un isomorfismo de funtores.*

DEMOSTRACIÓN. La suficiencia es clara. Para ver la necesidad, sea en particular el isomorfismo $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \xrightarrow{\text{Hom}(1_Y, f)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y)$. Como éste es sobreyectivo, existe $h: Y \rightarrow X$ tal que $(\text{Hom}(1_Y, f))(h) = fh = 1_Y$.

Luego, f tiene inversa derecha. Por otro lado, también tenemos el isomorfismo $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \xrightarrow{\text{Hom}(1_X, f)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Como $(\text{Hom}(1_X, f))(hf) = fhf = f$ y también $(\text{Hom}(1_X, f))(1_X) = f$, entonces (por la inyectividad), $hf = 1_X$. Por lo tanto, f es un isomorfismo. \square

Proposición 3.26. Sean los siguientes triángulos y morfismos en $K(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta : & \dot{X} & \xrightarrow{\underline{f}} & \dot{E} & \xrightarrow{\underline{g}} & \dot{Y} & \xrightarrow{\underline{h}} & \dot{X}[1] \\ & \downarrow \underline{u}_1 & & \downarrow \underline{u}_2 & & \downarrow \underline{u}_3 & & \downarrow \underline{u}_1[1] \\ \Delta_1 : & \dot{X}_1 & \xrightarrow{\underline{f}_1} & \dot{E}_1 & \xrightarrow{\underline{g}_1} & \dot{Y}_1 & \xrightarrow{\underline{h}_1} & \dot{X}_1[1]. \end{array}$$

Si \underline{u}_1 y \underline{u}_2 son isomorfismos, entonces \underline{u}_3 también es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\underline{f}} \dot{E} \xrightarrow{\underline{g}} \dot{Y} \longrightarrow 0$ y $0 \longrightarrow \dot{X}_1 \xrightarrow{\underline{f}_1} \dot{E}_1 \xrightarrow{\underline{g}_1} \dot{Y}_1 \longrightarrow 0$ son \mathcal{E} -sucesiones. Por (??) se tiene exactitud en las sucesiones y conmutatividad en el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(-, \dot{X}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(-, \dot{E}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(-, \dot{Y}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(-, \dot{X}[1]) \cdots \\ \downarrow \text{Hom}(-, \underline{u}_1) & & \downarrow \text{Hom}(-, \underline{u}_2) & & \downarrow \text{Hom}(-, \underline{u}_3) & & \downarrow \text{Hom}(-, \underline{u}_1[1]) \\ \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(-, \dot{X}_1) & \longrightarrow & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(-, \dot{E}_1) & \longrightarrow & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(-, \dot{Y}_1) & \longrightarrow & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(-, \dot{X}_1[1]) \cdots \end{array}$$

Por el Lema del 5, $\text{Hom}(-, \underline{u}_3): \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(-, \dot{Y}) \longrightarrow \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(-, \dot{Y}_1)$ es un isomorfismo. Entonces, el lema (??) (para $\mathcal{C} = K(\mathcal{A})$) nos dice que \underline{u}_3 es un isomorfismo. \square

Corolario 3.27. Un séxtuple $\dot{X}_1 \xrightarrow{\underline{f}_1} \dot{Y}_1 \xrightarrow{\underline{g}} \dot{Z}_1 \xrightarrow{\underline{h}_1} \dot{X}_1[1]$ en $K(\mathcal{A})$ es un triángulo si y sólo si es isomorfo a un séxtuple de la forma

$$\dot{X} \xrightarrow{\underline{f}} \dot{Y} \xrightarrow{\alpha(-\underline{f})} \text{Con}_{-\underline{f}} \xrightarrow{\beta(-\underline{f})} \dot{X}[1]$$

(el construido con el cono de $-\underline{f}$ de la proposición (??)), para \underline{f} en \underline{f} .

Observación 3.28. Dado $\underline{f}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ un morfismo en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, el siguiente:

$$\dot{Y} \xrightarrow{\alpha(-\underline{f})} \text{Con}_{-\underline{f}} \xrightarrow{\beta(-\underline{f})} \dot{X}[1] \xrightarrow{-\underline{f}[1]} \dot{Y}[1]$$

es un triángulo canónico en $K(\mathcal{A})$.

DEMOSTRACIÓN. En la proposición (??), definimos los morfismos $\alpha(-\dot{f})$ y $\beta(-\dot{f})$ en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ por $\alpha(-\dot{f})^i = \begin{pmatrix} 1_{Y^i} \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\beta(-\dot{f})^i = (0, 1_{X^{i+1}})$. Luego, es claro que $y: 0 \longrightarrow \dot{Y} \xrightarrow{\alpha(-\dot{f})} \text{Con}_{-f} \xrightarrow{\beta(-\dot{f})} \dot{X}[1] \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta. Para cada $i \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$0 \longrightarrow Y^i \xrightleftharpoons[\begin{pmatrix} 1_{Y^i}, 0 \end{pmatrix}]{\begin{pmatrix} 1_{Y^i} \\ 0 \end{pmatrix}} Y^i \oplus X^{i+1} \xrightleftharpoons[\begin{pmatrix} 0 \\ 1_{X^{i+1}} \end{pmatrix}]{(0, 1_{X^{i+1}})} X^{i+1} \longrightarrow 0,$$

es decir, localmente y se divide, luego, es \mathcal{E} -sucesión. Además, tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} Y^i & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{Y^i} \\ 0 \end{pmatrix}} & Y^i \oplus X^{i+1} & \xrightarrow{(0, 1_{X^{i+1}})} & X^{i+1} \\ d_Y^i \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} d_Y^i & -f^{i+1} \\ 0 & -d_X^{i+1} \end{pmatrix} & & \downarrow -d_X^{i+1} \\ Y^{i+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{Y^{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix}} & Y^{i+1} \oplus X^{i+2} & \xrightarrow{(0, 1_{X^{i+2}})} & X^{i+2}, \end{array} \quad (3.1)$$

aplicando los lemas (??) y (??), el morfismo que le corresponde a y es $-\dot{f}[1]: \dot{X}[1] \longrightarrow \dot{Y}[1]$. Luego, $\dot{Y} \xrightarrow{\alpha(-\dot{f})} \text{Con}_{-f} \xrightarrow{\beta(-\dot{f})} \dot{X}[1] \xrightarrow{-\dot{f}[1]} \dot{Y}[1]$ satisface la definición de triángulo canónico en $K(\mathcal{A})$. \square

Observación 3.29. *Un séxtuple $t_1 = (\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1, \underline{f}_1, \underline{g}_1, \underline{h}_1)$ es un triángulo en $K(\mathcal{A})$ si y sólo si es isomorfo a*

$$\dot{X} \xrightarrow{\alpha(\dot{h}[-1])} \text{Con}_{\dot{h}[-1]} \xrightarrow{\beta(\dot{h}[-1])} \dot{Z} \xrightarrow{\underline{h}} \dot{X}[1],$$

para algún $\dot{h} \in \underline{\dot{h}}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que t_1 es un triángulo en $K(\mathcal{A})$, entonces es isomorfo a un triángulo canónico $t = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \underline{f}, \underline{g}, \underline{h})$. Sea \dot{h} un representante del morfismo $\underline{\dot{h}}$ que le corresponde a la clase de la \mathcal{E} -sucesión: $x := (0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\underline{f}} \dot{Y} \xrightarrow{\underline{g}} \dot{Z} \longrightarrow 0)$. Por el lema (??), las \mathcal{E} -sucesiones x y $0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\alpha(\dot{h}[-1])} \text{Con}_{\dot{h}[-1]} \xrightarrow{\beta(\dot{h}[-1])} \dot{Z} \longrightarrow 0$ determinan el mismo

morfismo \dot{h} en $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Z}, \dot{X}[1])$, entonces, por el teorema (??) son equivalentes, es decir, existe un isomorfismo de complejos $\dot{u}: \dot{Y} \rightarrow \text{Con}_{\dot{h}[-1]}$ tal que $\dot{u}\dot{f} = \alpha(\dot{h}[-1])$ y $\dot{g} = \beta(\dot{h}[-1])\dot{u}$. Luego, conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dot{X}_1 & \xrightarrow{\dot{f}_1} & \dot{Y}_1 & \xrightarrow{\dot{g}_1} & \dot{Z}_1 & \xrightarrow{\dot{h}_1} & \dot{X}_1[1] \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 \dot{X} & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{Y} & \xrightarrow{\dot{g}} & \dot{Z} & \xrightarrow{\dot{h}} & \dot{X}[1] \\
 \parallel & & \downarrow \cong \dot{u} & & \parallel & & \parallel \\
 \dot{X} & \xrightarrow{\alpha(\dot{h}[-1])} & \text{Con}_{\dot{h}[-1]} & \xrightarrow{\beta(\dot{h}[-1])} & \dot{Z} & \xrightarrow{\dot{h}} & \dot{X}[1].
 \end{array}$$

□

Proposición 3.30. \mathcal{J}_K es una triangulación de $K(\mathcal{A})$.

DEMOSTRACIÓN. Veremos que se satisfacen los axiomas de la definición (??).

TR1 1. Se probó en la observación (??).

2. Para cada \dot{X} tenemos la \mathcal{E} -sucesión $0 \rightarrow \dot{X} \rightarrow \dot{X} \oplus 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0$ trivial. Luego, el morfismo que le corresponde en $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(0, \dot{X}[1])$ es el cero. Tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dot{X} & \xrightarrow{1_{\dot{X}}} & \dot{X} & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & \dot{X}[1] \\
 \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} 1_{\dot{X}} \\ 0 \end{pmatrix} & & \parallel & & \parallel \\
 \dot{X} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{\dot{X}} \\ 0 \end{pmatrix}} & \dot{X} \oplus 0 & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & \dot{X}[1],
 \end{array}$$

con $\begin{pmatrix} 1_{\dot{X}} \\ 0 \end{pmatrix}$ isomorfismo, luego, $\dot{X} \xrightarrow{1_{\dot{X}}} \dot{X} \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \dot{X}[1]$ (es decir, el séxtuple $(\dot{X}, \dot{X}, 0, 1_{\dot{X}}, 0, 0)$) está en \mathcal{J}_K para todo complejo \dot{X} .

3. Dado un morfismo $\dot{u}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ en $K(\mathcal{A})$, por la proposición (??) podemos completar a $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$ en \mathcal{J}_K .

TR2 Sea $\dot{X} \xrightarrow{\dot{f}} \dot{Y} \xrightarrow{\dot{g}} \dot{Z} \xrightarrow{\dot{h}} \dot{X}[1]$ en \mathcal{J}_K . Por el corolario (??),

tenemos el siguiente isomorfismo:

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{X} & \xrightarrow{\underline{f}} & \dot{Y} & \xrightarrow{\underline{g}} & \dot{Z} & \xrightarrow{\underline{h}} & \dot{X}[1] \\ \downarrow \cong \underline{u}_1 & & \downarrow \cong \underline{u}_2 & & \downarrow \cong \underline{u}_3 & & \downarrow \cong \underline{u}_1[1] \\ \dot{X}_1 & \xrightarrow{\underline{f}_1} & \dot{Y}_1 & \xrightarrow{\underline{\alpha}(-\dot{f}_1)} & \text{Con}_{-\dot{f}_1} & \xrightarrow{\underline{\beta}(-\dot{f}_1)} & \dot{X}_1[1], \end{array}$$

para $\dot{f}_1 \in \underline{f}_1$. Por la observación (??), si \dot{f}_1 es un representante de la clase \underline{f}_1 , entonces $\dot{Y}_1 \xrightarrow{\underline{\alpha}(-\dot{f}_1)} \text{Con}_{-\dot{f}_1} \xrightarrow{\underline{\beta}(-\dot{f}_1)} \dot{X}_1[1] \xrightarrow{-\underline{f}_1[1]} \dot{Y}_1[1]$ está en \mathcal{J}_K . Además, es claro el isomorfismo:

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{Y} & \xrightarrow{\underline{g}} & \dot{Z} & \xrightarrow{\underline{h}} & \dot{X}[1] & \xrightarrow{-\underline{f}[1]} & \dot{Y}[1] \\ \downarrow \cong \underline{u}_2 & & \downarrow \cong \underline{u}_3 & & \downarrow \cong \underline{u}_1[1] & & \downarrow \cong \underline{u}_2[1] \\ \dot{Y}_1 & \xrightarrow{\underline{\alpha}(-\dot{f}_1)} & \text{Con}_{-\dot{f}_1} & \xrightarrow{\underline{\beta}(-\dot{f}_1)} & \dot{X}_1[1] & \xrightarrow{-\underline{f}_1[1]} & \dot{Y}_1[1]. \end{array}$$

Para el recíproco, supongamos que

$$\dot{Y} \xrightarrow{\underline{g}} \dot{Z} \xrightarrow{\underline{h}} \dot{X}[1] \xrightarrow{-\underline{f}[1]} \dot{Y}[1],$$

está en \mathcal{J}_K . Por la observación (??) tenemos el siguiente isomorfismo:

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{Y} & \xrightarrow{\underline{g}} & \dot{Z} & \xrightarrow{\underline{h}} & \dot{X}[1] & \xrightarrow{-\underline{f}[1]} & \dot{Y}[1] \\ \downarrow \cong \underline{u}_1 & & \downarrow \cong \underline{u}_2 & & \downarrow \cong \underline{u}_3 & & \downarrow \cong \underline{u}_1[1] \\ \dot{Y}_1 & \xrightarrow{\underline{\alpha}(-\dot{f}_1)} & \text{Con}_{-\dot{f}_1} & \xrightarrow{\underline{\beta}(-\dot{f}_1)} & \dot{X}_1[1] & \xrightarrow{-\underline{f}_1[1]} & \dot{Y}_1[1]. \end{array}$$

Por otro lado, dado el morfismo \dot{f}_1 , por el corolario (??) tenemos que

$$\dot{X}_1 \xrightarrow{\underline{f}_1} \dot{Y}_1 \xrightarrow{\underline{\alpha}(-\dot{f}_1)} \text{Con}_{-\dot{f}_1} \xrightarrow{\underline{\beta}(-\dot{f}_1)} \dot{X}_1[1]$$

es un triángulo en $K(\mathcal{A})$. Además, se tiene el siguiente isomorfismo de sextuples,

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{X} & \xrightarrow{\underline{f}} & \dot{Y} & \xrightarrow{\underline{g}} & \dot{Z} & \xrightarrow{\underline{h}} & \dot{X}[1] \\ \downarrow \cong \underline{u}_3[-1] & & \downarrow \cong \underline{u}_1 & & \downarrow \cong \underline{u}_2 & & \downarrow \cong \underline{u}_3 \\ \dot{X}_1 & \xrightarrow{\underline{f}_1} & \dot{Y}_1 & \xrightarrow{\underline{\alpha}(-\dot{f}_1)} & \text{Con}_{-\dot{f}_1} & \xrightarrow{\underline{\beta}(-\dot{f}_1)} & \dot{X}_1[1]. \end{array}$$

Por lo tanto, $\dot{X} \xrightarrow{\underline{f}} \dot{Y} \xrightarrow{\underline{g}} \dot{Z} \xrightarrow{\underline{h}} \dot{X}[1]$ está en \mathcal{J}_K .

TR3 Probado en la proposición (??).

TR4 Sean los triángulos $t_1 = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}', \underline{u}, \underline{i}, \underline{i}')$, $t_2 = (\dot{Y}, \dot{Z}, \dot{X}', \underline{v}, \underline{j}, \underline{j}')$ y $t_3 = (\dot{X}, \dot{Z}, \dot{Y}', \underline{v}\underline{u}, \underline{k}, \underline{k}')$ en \mathcal{J}_K . Probaremos que existen morfismos \underline{f} y \underline{g} tales que $(\dot{Z}', \dot{Y}', \dot{X}', \underline{f}, \underline{g}, \underline{i}[1]\underline{j}')$ es un triángulo y el diagrama completado conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dot{Y}'[-1] & \xrightarrow{\underline{k}'[-1]} & \dot{X} & \xlongequal{\quad} & \dot{X} & & \\
 \downarrow \underline{g}[-1] & & \downarrow \underline{u} & & \downarrow \underline{v}\underline{u} & & \\
 \dot{X}'[-1] & \xrightarrow{\underline{j}'[-1]} & \dot{Y} & \xrightarrow{\underline{v}} & \dot{Z} & \xrightarrow{\underline{j}} & \dot{X}' \xrightarrow{\underline{j}'} \dot{Y}[1] \\
 & & \downarrow \underline{i} & & \downarrow \underline{k} & & \parallel & \downarrow \underline{i}[1] \\
 & & \dot{Z}' & \xrightarrow{\underline{f}} & \dot{Y}' & \xrightarrow{\underline{g}} & \dot{X}' & \xrightarrow{(\underline{i}[1])\underline{j}'} \dot{Z}'[1] \\
 & & \downarrow \underline{i}' & & \downarrow \underline{k}' & & & \\
 & & \dot{X}[1] & \xlongequal{\quad} & \dot{X}[1] & & &
 \end{array} \tag{3.2}$$

Supongamos primero que t_1 , t_2 y t_3 son triángulos canónicos. Después abordaremos el caso general. En particular, $0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\underline{u}} \dot{Y} \longrightarrow \dot{Z}' \longrightarrow 0$ y $0 \longrightarrow \dot{Y} \xrightarrow{\underline{v}} \dot{Z} \longrightarrow \dot{X}' \longrightarrow 0$ son \mathcal{E} -sucesiones. Luego, para cada $t \in \mathbb{Z}$ existen $\sigma^t: Y^t \rightarrow X^t$ y $\tau^t: Z^t \rightarrow Y^t$ tales que $\sigma^t u^t = 1_{X^t}$ y $\tau^t v^t = 1_{Y^t}$. Entonces: $1_{X^t} = \sigma^t u^t = \sigma^t \tau^t v^t u^t$, por lo tanto, $\underline{v}\underline{u}: \dot{X} \rightarrow \dot{Z}$ es un monomorfismo que se divide localmente. Tomando su conúcleo, tenemos que $0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\underline{v}\underline{u}} \dot{Z} \xrightarrow{\underline{e}} \dot{W} \longrightarrow 0$ es una \mathcal{E} -sucesión (por lema (??)) y con \underline{h} su morfismo correspondiente, podemos completar a un triángulo $\dot{X} \xrightarrow{\underline{v}\underline{u}} \dot{Z} \xrightarrow{\underline{e}} \dot{W} \xrightarrow{\underline{h}} \dot{X}[1]$ que resulta isomorfo a $(\dot{X}, \dot{Z}, \dot{Y}', \underline{v}\underline{u}, \underline{k}, \underline{k}')$ por las proposiciones (??) y (??). Como t_1 y t_3 son canónicos, tenemos el diagrama conmutativo en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$

$$\begin{array}{ccccc}
 \dot{X} & \xrightarrow{\underline{u}} & \dot{Y} & \xrightarrow{\underline{i}} & \dot{Z}' \\
 \parallel & & \downarrow \underline{v} & & \downarrow \underline{f} \\
 \dot{X} & \xrightarrow{\underline{v}\underline{u}} & \dot{Z} & \xrightarrow{\underline{k}} & \dot{Y}'
 \end{array}$$

con renglones \mathcal{E} -sucesiones, donde existe \underline{f} porque \underline{i} es conúcleo de \underline{u} y

$k\dot{v}\dot{u} = 0$. Entonces, por (??) tenemos el morfismo de triángulos:

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{X} & \xrightarrow{\dot{u}} & \dot{Y} & \xrightarrow{\dot{i}} & \dot{Z}' & \xrightarrow{\dot{i}'} & \dot{X}[1] \\ \parallel & & \downarrow \dot{v} & & \downarrow \dot{f} & & \parallel \\ \dot{X} & \xrightarrow{\dot{v}\dot{u}} & \dot{Z} & \xrightarrow{\dot{k}} & \dot{Y}' & \xrightarrow{\dot{k}'} & \dot{X}[1]. \end{array}$$

Además, por la observación (??) el par $\{\dot{v}, \dot{i}\}$ es pullback de $\{\dot{k}, \dot{f}\}$. Entonces, (??) implica que la sucesión $0 \longrightarrow \dot{Y} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{i} \end{pmatrix}} \dot{Z} \oplus \dot{Z}' \xrightarrow{\begin{pmatrix} \dot{k} & -\dot{f} \end{pmatrix}} \dot{Y}'$ es exacta. Tenemos el diagrama conmutativo con renglones \mathcal{E} -sucesiones siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} \dot{Y} & \xrightarrow{\dot{i}} & \dot{Z}' & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow \dot{v} & & \downarrow \dot{f} & & \parallel \\ \dot{Z} & \xrightarrow{\dot{k}} & \dot{Y}' & \xrightarrow{0} & 0, \end{array}$$

y, por lo tanto, el primer cuadro es un pushout. Ahora veamos que \dot{f} es un monomorfismo. Si $\dot{h}: \dot{U}' \rightarrow \dot{Z}'$ satisface $\dot{f}\dot{h} = 0$, entonces $\begin{pmatrix} \dot{k} & -\dot{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{h} \end{pmatrix} = 0$. Luego, existe $\dot{h}': \dot{U}' \rightarrow \dot{Y}$ tal que conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} & \dot{U}' & & & \\ & \downarrow \dot{h}' & \searrow \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{h} \end{pmatrix} & & \\ 0 & \longrightarrow & \dot{Y} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{i} \end{pmatrix}} & \dot{Z} \oplus \dot{Z}' \xrightarrow{\begin{pmatrix} \dot{k} & -\dot{f} \end{pmatrix}} \dot{Y}' \end{array}$$

Luego, $\begin{pmatrix} \dot{v}\dot{h}' \\ \dot{i}\dot{h}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{i} \end{pmatrix} \dot{h}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{h} \end{pmatrix}$, y se tiene $\dot{v}\dot{h}' = 0$. Pero \dot{v} es monomorfismo, por lo tanto, $\dot{h}' = 0$. Entonces, $\dot{h} = 0$ y \dot{f} es monomorfismo. Estamos suponiendo que $0 \longrightarrow \dot{Y} \xrightarrow{\dot{v}} \dot{Z} \xrightarrow{\dot{j}} \dot{X}' \longrightarrow 0$ es \mathcal{E} -sucesión, entonces podemos extender $\{\dot{k}, \dot{f}\}$ (el pushout de $\{\dot{v}, \dot{i}\}$) a una \mathcal{E} -sucesión

$$0 \longrightarrow \dot{Z}' \xrightarrow{\dot{f}} \dot{Y}' \xrightarrow{\dot{g}} \dot{X} \longrightarrow 0$$

(de ahí la existencia de \dot{g}). Además, conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \dot{Y} & \xrightarrow{\dot{v}} & \dot{Z} & \xrightarrow{\dot{j}} & \dot{X}' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \dot{i} & & \downarrow \dot{k} & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \dot{Z}' & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{Y}' & \xrightarrow{\dot{g}} & \dot{X}' \longrightarrow 0, \end{array}$$

usando el resultado dual de la proposición (??). Por otro lado, el lema (??) nos da la existencia de un morfismo $l: \dot{X}' \rightarrow \dot{Z}'[1]$, y la proposición (??) hace que conmute el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{Y} & \xrightarrow{\dot{v}} & \dot{Z} & \xrightarrow{\dot{j}} & \dot{X}' & \xrightarrow{\dot{j}'} & \dot{Y}[1] \\ \dot{i} \downarrow & & \downarrow \dot{k} & & \parallel & & \downarrow \dot{i}[1] \\ \dot{Z}' & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{Y}' & \xrightarrow{\dot{g}} & \dot{X}' & \xrightarrow{\dot{l}} & \dot{Z}'[1], \end{array}$$

con el segundo renglón en \mathcal{J}_K . Por lo tanto, $\dot{l} = \dot{i}[1]\dot{j}'$. Además, como en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{X} & \xrightarrow{\dot{v}\dot{u}} & \dot{Z} & \xrightarrow{\dot{k}} & \dot{Y}' & \xrightarrow{\dot{k}'} & \dot{X}[1] \\ \dot{u} \downarrow & & \parallel & & \downarrow \dot{g} & & \downarrow \dot{j}' \\ \dot{Y} & \xrightarrow{\dot{v}} & \dot{Z} & \xrightarrow{\dot{j}} & \dot{X}' & \xrightarrow{\dot{j}'} & \dot{Y}[1], \end{array}$$

conmutan los dos primeros cuadrados, la proposición (??) nos dice que también conmuta el tercero con el morfismo $\dot{u}[1]$. De este último se tiene la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} \dot{Y}'[-1] & \xrightarrow{\dot{k}'[-1]} & \dot{X} \\ \dot{g}[-1] \downarrow & & \downarrow \dot{u} \\ \dot{X}'[-1] & \xrightarrow{\dot{j}'[-1]} & \dot{Y} \end{array}$$

(al trasladar todo -1). Luego, vale TR4 si t_1, t_2 y t_3 son triángulos canónicos.

Ahora supongamos que t_1, t_2 y t_3 no son canónicos. Por definición de triángulo en \mathcal{J}_K , $t_1 = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}', \dot{u}, \dot{i}, \dot{i}')$ es isomorfo a un triángulo canónico $r_1 = (\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}', \dot{a}, \dot{m}, \dot{m}')$, mediante el isomorfismo $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Esto es, conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} t_1 = & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{u}} & \dot{Y} & \xrightarrow{\dot{i}} & \dot{Z}' & \xrightarrow{\dot{i}'} & \dot{X}[1] \\ & \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \downarrow \alpha_1[1] \\ r_1 = & \dot{A} & \xrightarrow{\dot{a}} & \dot{B} & \xrightarrow{\dot{m}} & \dot{C}' & \xrightarrow{\dot{m}'} & \dot{A}[1]. \end{array} \quad (3.3)$$

Para el triángulo $t_2 = (\dot{Y}, \dot{Z}, \dot{X}', \dot{v}, \dot{j}, \dot{j}')$, como α_2 es un isomorfismo, existe α_2^{-1} y tenemos el morfismo $\dot{B} \xrightarrow{\dot{v}\alpha_2^{-1}} \dot{Z}$ en $K(\mathcal{A})$. Sea \dot{h} un representante de

la clase $\underline{\nu}\alpha_2^{-1}$. Por el lema (??), tenemos una \mathcal{E} -sucesión

$$x: 0 \longrightarrow \dot{B} \xrightarrow{s_h} \dot{Z} \oplus \mathcal{J}(B[1]) \xrightarrow{\dot{n}} \dot{A}' \longrightarrow 0,$$

para \dot{A}' un conúcleo de $\dot{Z} \oplus \mathcal{J}(B[1])$ y $(s_h)^i = \begin{pmatrix} h^i \\ d_B^i \\ 1_{B^i} \end{pmatrix}$. Por el lema (??), s_h es homotópico a $\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}$. Sea \dot{n}' el morfismo que le corresponde a x , $\underline{\dot{b}}$ la clase de s_h y $C := \dot{Z} \oplus \mathcal{J}(B[1])$. Entonces $r_2 := \dot{B} \xrightarrow{\underline{\dot{b}}} \dot{C} \xrightarrow{\dot{n}} \dot{A}' \xrightarrow{\dot{n}'} \dot{B}[1]$ es un triángulo canónico y tenemos el diagrama:

$$t_2 = \begin{array}{ccccccc} \dot{Y} & \xrightarrow{\underline{\dot{v}}} & \dot{Z} & \xrightarrow{\dot{j}} & \dot{X}' & \xrightarrow{\dot{j}'} & \dot{Y}[1] \\ \alpha_2 \downarrow & & \beta_2 \downarrow & & \beta_3 \downarrow \cdots & & \downarrow \alpha_2[1] \\ r_2 = \dot{B} & \xrightarrow{\underline{\dot{b}}} & \dot{C} & \xrightarrow{\dot{n}} & \dot{A}' & \xrightarrow{\dot{n}'} & \dot{B}[1], \end{array} \quad (3.4)$$

donde β_2 es la clase del morfismo $\begin{pmatrix} 1_Z \\ 0 \end{pmatrix}$, luego, β_2 es un isomorfismo en $K(\mathcal{A})$ (lema (??)). Es claro que el cuadro a la izquierda conmuta porque:

$$\underline{\dot{b}} = \underline{s_h} = \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} = \beta_2 \underline{h} = \beta_2 \underline{\nu}\alpha_2^{-1}.$$

Luego, por la proposición (??), existe un morfismo β_3 que hace conmutar los otros dos cuadros. Por la proposición (??) β_3 también es un isomorfismo. Por lo tanto, el diagrama (??) conmuta y t_2 es isomorfo al triángulo canónico r_2 mediante el isomorfismo $(\alpha_2, \beta_2, \beta_3)$.

Podemos elegir un par de monomorfismos $\underline{\dot{a}}$ y $\underline{\dot{b}}$ en la clase de $\underline{\dot{a}}$ y $\underline{\dot{b}}$ respectivamente, tales que a^i y b^i son secciones, para cada $i \in \mathbb{Z}$ (pues r_1 y r_2 son triángulos canónicos). Sea $\underline{\dot{p}}$ un conúcleo de $\underline{\dot{b}\dot{a}}$ y $\underline{\dot{p}'}$ el morfismo que le corresponde a $0 \longrightarrow \dot{A} \xrightarrow{\underline{\dot{b}\dot{a}}} \dot{C} \xrightarrow{\underline{\dot{p}}} \dot{B}' \longrightarrow 0$. Tenemos el siguiente diagrama,

$$t_3 = \begin{array}{ccccccc} \dot{X} & \xrightarrow{\underline{\dot{v}\dot{u}}} & \dot{Z} & \xrightarrow{\dot{k}} & \dot{Y}' & \xrightarrow{\dot{k}'} & \dot{X}[1] \\ \alpha_1 \downarrow & & \beta_2 \downarrow & & \gamma_3 \downarrow \cdots & & \downarrow \alpha_1[1] \\ r_3 = \dot{A} & \xrightarrow{\underline{\dot{b}\dot{a}}} & \dot{C} & \xrightarrow{\underline{\dot{p}}} & \dot{B}' & \xrightarrow{\underline{\dot{p}'}} & \dot{A}[1], \end{array} \quad (3.5)$$

donde el cuadro de la izquierda conmuta por la conmutatividad de (??) y (??). Luego, por la proposición (??), existe un morfismo γ_3 que hace conmutar los otros dos cuadros. Por la proposición (??) γ_3 también es un

isomorfismo. Por lo tanto, el diagrama (??) conmuta y t_3 es isomorfo al triángulo canónico r_3 mediante el isomorfismo $(\alpha_1, \beta_2, \gamma_3)$.

Aplicando el axioma TR4 a los triángulos canónicos r_1, r_2 y r_3 , tenemos la existencia los morfismos $\underline{\dot{s}}$ y $\underline{\dot{w}}$ tales que $(\dot{C}', \dot{B}', \dot{A}', \underline{\dot{s}}, \underline{\dot{w}}, \underline{\dot{m}}[1], \underline{\dot{n}}')$ es un triángulo y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \dot{B}'[-1] & \xrightarrow{\underline{\dot{p}}'[-1]} & \dot{A} & \xlongequal{\quad} & \dot{A} & & & & \\
 \downarrow \underline{\dot{w}}[-1] & & \downarrow \underline{\dot{a}} & & \downarrow \underline{\dot{b}\dot{a}} & & & & \\
 \dot{A}'[-1] & \xrightarrow{\underline{\dot{n}}'[-1]} & \dot{B} & \xrightarrow{\underline{\dot{b}}} & \dot{C} & \xrightarrow{\underline{\dot{n}}} & \dot{A}' & \xrightarrow{\underline{\dot{n}}'} & \dot{B}[1] \\
 & & \downarrow \underline{\dot{m}} & & \downarrow \underline{\dot{p}} & & \parallel & & \downarrow \underline{\dot{m}}[1] \\
 & & \dot{C}' & \xrightarrow{\underline{\dot{s}}} & \dot{B}' & \xrightarrow{\underline{\dot{w}}} & \dot{A}' & \xrightarrow{(\underline{\dot{m}}[1])\underline{\dot{n}}'} & \dot{C}'[1] \\
 & & \downarrow \underline{\dot{m}}' & & \downarrow \underline{\dot{p}}' & & & & \\
 & & \dot{A}[1] & \xlongequal{\quad} & \dot{A}[1] & & & &
 \end{array} \tag{3.6}$$

Veamos que existen morfismos $\underline{\dot{f}}$ y $\underline{\dot{g}}$ en $K(\mathcal{A})$ tales que $(\dot{Z}', \dot{Y}', \dot{X}', \underline{\dot{f}}, \underline{\dot{g}}, \underline{\dot{i}}[1], \underline{\dot{j}}')$ es un triángulo y el diagrama (??) conmuta. Sean:

$$\underline{\dot{f}} := \gamma_3^{-1} \underline{\dot{s}} \alpha_3, \quad \text{y} \quad \underline{\dot{g}} := \beta_3^{-1} \underline{\dot{w}} \gamma_3. \tag{3.7}$$

Entonces,

$$\underline{\dot{f}} \underline{\dot{i}} = \gamma_3^{-1} \underline{\dot{s}} \alpha_3 \underline{\dot{i}} = \gamma_3^{-1} \underline{\dot{s}} \underline{\dot{m}} \alpha_2 = \gamma_3^{-1} \underline{\dot{p}} \alpha_2 = \underline{\dot{k}} \underline{\dot{v}},$$

por la conmutatividad de los diagramas (??), (??), (??) y (??).

$$\underline{\dot{g}} \underline{\dot{k}} = \beta_3^{-1} \underline{\dot{w}} \gamma_3 \underline{\dot{k}} = \beta_3^{-1} \underline{\dot{w}} \underline{\dot{p}} \beta_2 = \beta_3^{-1} \underline{\dot{n}} \beta_2 = \underline{\dot{j}},$$

por la conmutatividad de los diagramas (??), (??) y (??).

$$\underline{\dot{i}}' = \alpha_1^{-1}[1] \underline{\dot{m}}' \alpha_3 = \alpha_1^{-1}[1] \underline{\dot{p}}' \underline{\dot{s}} \alpha_3 = \underline{\dot{k}}' \gamma_3^{-1} \underline{\dot{s}} \alpha_3 = \underline{\dot{k}}' \underline{\dot{f}},$$

por la conmutatividad de los diagramas (??), (??) y (??). Además, tenemos los diagramas:

$$\begin{array}{ccccc}
 \dot{Y}'[-1] & \xrightarrow{\underline{\dot{g}}[-1]} & \dot{X}'[-1] & \xrightarrow{\underline{\dot{j}}'[-1]} & \dot{Y} \\
 \downarrow \gamma_3[-1] & & \downarrow \beta_3[-1] & & \downarrow \alpha_2 \\
 \dot{B}'[-1] & \xrightarrow{\underline{\dot{w}}[-1]} & \dot{A}'[-1] & \xrightarrow{\underline{\dot{n}}'[-1]} & \dot{B}
 \end{array}$$

que conmuta por (??) y (??), y

$$\begin{array}{ccccc} \dot{Y}'[-1] & \xrightarrow{\dot{k}'[-1]} & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{u}} & \dot{Y} \\ \gamma_3[-1] \downarrow & & \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow \\ \dot{B}'[-1] & \xrightarrow{\dot{p}'[-1]} & \dot{A} & \xrightarrow{\dot{a}} & \dot{B}, \end{array}$$

que conmuta por (??) y (??). De este par de diagramas y de (??) obtenemos que:

$$\dot{j}'[-1]\dot{g}'[-1] = \alpha_2^{-1}\dot{n}'[-1]\dot{w}'[-1]\gamma_3[-1] = \alpha_2^{-1}\dot{a}\dot{p}'[-1]\gamma_3[-1] = \dot{u}\dot{k}'[-1],$$

y se tiene la conmutatividad del diagrama (??). Finalmente, tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{Z}' & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{Y}' & \xrightarrow{\dot{g}} & \dot{X}' & \xrightarrow{\dot{i}[1]\dot{j}'} & \dot{Z}'[1] \\ \alpha_3 \downarrow & & \gamma_3 \downarrow & & \beta_3 \downarrow & & \alpha_3[1] \downarrow \\ \dot{C}' & \xrightarrow{\dot{s}} & \dot{B}' & \xrightarrow{\dot{w}} & \dot{A}' & \xrightarrow{\dot{m}[1]\dot{n}'} & \dot{C}'[1], \end{array}$$

donde el cuadro de la izquierda y el del centro conmutan por la definición de \dot{f} y \dot{g} , y para el cuadro de la derecha tenemos la cadena de igualdades:

$$\alpha_3[1]\dot{i}[1]\dot{j}' = \dot{m}[1]\alpha_2[1]\dot{j}' = \dot{m}[1]\dot{n}'\beta_3,$$

por la conmutatividad de los diagramas (??), (??). Como el renglón inferior de este diagrama es un triángulo y $(\alpha_3, \gamma_3, \beta_3)$ es un isomorfismo, por el axioma TR1, se tiene que $\dot{Z}' \xrightarrow{\dot{f}} \dot{Y}' \xrightarrow{\dot{g}} \dot{X}' \xrightarrow{\dot{i}[1]\dot{j}'} \dot{Z}'[1]$ está en \mathcal{J}_K . \square

Definición 3.31. Sea $(\mathcal{C}, T, \mathcal{J})$ una categoría triangulada. Definimos la clase $\mathcal{J}' = \{(X, Y, Z, u, v, w) \mid (X, Y, Z, u, v, -w) \in \mathcal{J}\}$.

Afirmación 3.32. Supongamos que $(\mathcal{C}, T, \mathcal{J})$ es una categoría triangulada, entonces $(\mathcal{C}, T, \mathcal{J}')$ también lo es.

DEMOSTRACIÓN. Veamos que \mathcal{J}' satisface la definición (??).

TR1 1. Sea $t = (X, Y, Z, u, v, w)$ en \mathcal{J}' y supongamos que es isomorfo a $t_1 = (X_1, Y_1, Z_1, u_1, v_1, w_1)$ entonces existe (h_1, h_2, h_3) terna de isomorfismos

tales que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow & & \downarrow Th_1 \\ X_1 & \xrightarrow{u_1} & Y_1 & \xrightarrow{v_1} & Z_1 & \xrightarrow{w_1} & TX_1. \end{array}$$

Por otro lado, $t \in \mathcal{J}'$ implica que $t' = (X, Y, Z, u, v, -w)$ está en \mathcal{J} . Luego,

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{-w} & TX \\ h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow & & \downarrow Th_1 \\ X_1 & \xrightarrow{u_1} & Y_1 & \xrightarrow{v_1} & Z_1 & \xrightarrow{-w_1} & TX_1 \end{array}$$

también conmuta, y como (h_1, h_2, h_3) es isomorfismo, se tiene que $t'_1 = (X_1, Y_1, Z_1, u_1, v_1, -w_1)$ está en \mathcal{J} . Entonces t_1 está en \mathcal{J}' .

2. El séxtuple $(X, X, 0, 1_X, 0, -0)$ está en \mathcal{J} , para todo X en \mathcal{C} , es decir, $(X, X, 0, 1_X, 0, 0)$ está en \mathcal{J}' para todo X en \mathcal{C} .

3. Sea el morfismo $u: X \rightarrow Y$ en \mathcal{C} , luego, existe (X, Y, Z, u, v, w) en \mathcal{J} (por axioma TR1 en \mathcal{J}). Sea $w' = -w$, entonces (X, Y, Z, u, v, w') está en \mathcal{J}' y se tiene el primer axioma.

TR2 Sea (X, Y, Z, u, v, w) en \mathcal{J}' , entonces $(X, Y, Z, u, v, -w)$ está en \mathcal{J} . Luego, $(Y, Z, TX, v, -w, -Tu)$ está en \mathcal{J} . Notemos que en el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} t: & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{-w} & TX & \xrightarrow{-Tu} & TY \\ & \parallel & & \parallel & & \downarrow -1_{TX} & & \parallel \\ t_1: & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX & \xrightarrow{Tu} & TY \end{array}$$

-1_{TX} es isomorfismo y los cuadrados conmutan. Por lo tanto, t y t_1 son isomorfos, luego t_1 también está en \mathcal{J} , lo cual implica que $(Y, Z, TX, v, w, -Tu)$ está en \mathcal{J}' . Recíprocamente, supongamos que $(Y, Z, TX, v, w, -Tu)$ está en \mathcal{J}' . Luego, (Y, Z, TX, v, w, Tu) está en \mathcal{J} , entonces $(X, Y, Z, -u, v, w)$ está en \mathcal{J} (por axioma TR2 en \mathcal{J}). Además,

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{-u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \parallel & & \downarrow -1_Y & & \downarrow -1_Z & & \parallel \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{-w} & TX \end{array}$$

conmuta y los séxtuples son isomorfos. Entonces, $(X, Y, Z, u, v, -w)$ está en \mathcal{J} , lo cual implica que (X, Y, Z, u, v, w) está en \mathcal{J}' .

TR3 Sean $t = (X, Y, Z, u, v, w)$ y $t_1 = (X_1, Y_1, Z_1, u_1, v_1, w_1)$ en \mathcal{J}' y morfismos h_1, h_2 tales que conmuta $X \xrightarrow{u} Y$ entonces existe h_3 tal que

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 \\ X_1 & \xrightarrow{u_1} & Y_1 \end{array}$$

(h_1, h_2, h_3) es morfismo de $(X, Y, Z, u, v, -w)$ en $(X_1, Y_1, Z_1, u_1, v_1, -w_1)$. Luego, este mismo morfismo h_3 hace conmutar al digrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow & & \downarrow Th_1 \\ X_1 & \xrightarrow{u_1} & Y_1 & \xrightarrow{v_1} & Z_1 & \xrightarrow{w_1} & TX_1 \end{array}$$

Es decir, existe h_3 tal que (h_1, h_2, h_3) es morfismo de t en t_1 .

TR4 Sean (X, Y, Z', u, i, i') , (Y, Z, X', v, j, j') y (X, Z, Y', vu, k, k') elementos de \mathcal{J}' . Luego, como \mathcal{J} es triangulada, existen morfismos f y g tales que $(Z', Y', X', f, g, -(Ti)j')$ está en \mathcal{J} y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccc} T^{-1}Y' & \xrightarrow{-T^{-1}k'} & X & \xlongequal{\quad} & X & & & & \\ T^{-1}g \downarrow & & u \downarrow & & \downarrow vu & & & & \\ T^{-1}X' & \xrightarrow{-T^{-1}j'} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{j} & X' & \xrightarrow{-j'} & TY \\ & & i \downarrow & & \downarrow k & & \parallel & & \downarrow Ti \\ & & Z' & \xrightarrow{f} & Y' & \xrightarrow{g} & X' & \xrightarrow{-(Ti)j'} & TZ' \\ & & -i' \downarrow & & \downarrow -k' & & & & \\ & & TX & \xlongequal{\quad} & TX & & & & \end{array}$$

Luego, para estos mismos f y g es claro que $(Z', Y', X', f, g, (Ti)j')$ está en \mathcal{J}' y que conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} T^{-1}Y' & \xrightarrow{T^{-1}k'} & X & \xlongequal{\quad} & X & & & & \\ T^{-1}g \downarrow & & u \downarrow & & \downarrow vu & & & & \\ T^{-1}X' & \xrightarrow{T^{-1}j'} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{j} & X' & \xrightarrow{j'} & TY \\ & & i \downarrow & & \downarrow k & & \parallel & & \downarrow Ti \\ & & Z' & \xrightarrow{f} & Y' & \xrightarrow{g} & X' & \xrightarrow{(Ti)j'} & TZ' \\ & & i' \downarrow & & \downarrow k' & & & & \\ & & TX & \xlongequal{\quad} & TX & & & & \end{array}$$

Luego, se tiene que \mathcal{T}' también es una triangulación de \mathcal{C} . \square

Proposición 3.33. *Si $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$ es una categoría triangulada, entonces el funtor traslación $T: (\mathcal{C}, T, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathcal{C}, T, \mathcal{T}')$ es t -exacto. Luego, las categorías trianguladas $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$ y $(\mathcal{C}, T, \mathcal{T}')$ son esencialmente iguales.*

DEMOSTRACIÓN. El primer inciso de la definición de funtor t -exacto es claro. Sea $t: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ un triángulo en \mathcal{T} . Aplicando tres veces iteradamente el axioma TR2 a t tenemos que

$$TX \xrightarrow{-Tf} TY \xrightarrow{-Tg} TZ \xrightarrow{-Th} T^2X$$

es un triángulo en \mathcal{T} . Además, tenemos el isomorfismo de séxtuples:

$$\begin{array}{ccccccc} TX & \xrightarrow{-Tf} & TY & \xrightarrow{-Tg} & TZ & \xrightarrow{-Th} & T^2X \\ 1 \downarrow & & \downarrow -1 & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 \\ TX & \xrightarrow{Tf} & TY & \xrightarrow{Tg} & TZ & \xrightarrow{-Th} & T^2X. \end{array}$$

luego, el renglón inferior es triángulo en \mathcal{T}' , por el axioma TR1. \square

Definición 3.34. *Sea $\mathcal{J}'_K = \{(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \underline{\dot{f}}, \underline{\dot{g}}, \underline{\dot{h}}) \mid (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \underline{\dot{f}}, \underline{\dot{g}}, -\underline{\dot{h}}) \in \mathcal{J}_K\}$.*

En el caso de la categoría homotópica $K(\mathcal{A})$, vimos (corolario (??)) que dado el triángulo $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \underline{\dot{f}}, \underline{\dot{g}}, \underline{\dot{h}})$ en \mathcal{J}_K , se tiene que este es isomorfo a $(\dot{X}, \dot{Y}, \text{Con}(-\dot{f}), \underline{\dot{f}}, \underline{\alpha}(-\dot{f}), \underline{\beta}(-\dot{f}))$, el construido con el cono de $-\dot{f}$. Sin embargo, históricamente lo que se usa es el cono de \dot{f} . Entonces, conviene probar que $(\dot{X}, \dot{Y}, \text{Con}(\dot{f}), \underline{\dot{f}}, \underline{\alpha}(\dot{f}), \underline{\beta}(\dot{f}))$ es un triángulo en \mathcal{J}'_K y tomaremos \mathcal{J}'_K en lugar de \mathcal{J}_K .

Observación 3.35. *La afirmación (??) nos dice que \mathcal{J}'_K también es una triangulación de $K(\mathcal{A})$.*

Por la proposición (??), $(\dot{X}, \dot{Y}, \text{Con}_{-\dot{f}}, \underline{\dot{f}}, \underline{\alpha}(-\dot{f}), \underline{\beta}(-\dot{f}))$ está en \mathcal{J}_K , entonces, $(\dot{X}, \dot{Y}, \text{Con}_{-\dot{f}}, \underline{\dot{f}}, \underline{\alpha}(-\dot{f}), -\underline{\beta}(-\dot{f}))$, está en \mathcal{J}'_K . Probemos que en el siguiente diagrama existe un morfismo de complejos $\dot{\lambda}$ que hace conmutar los siguientes cuadrados en $K(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{X} & \xrightarrow{\underline{\dot{f}}} & \dot{Y} & \xrightarrow{\underline{\alpha}(-\dot{f})} & \text{Con}_{-\dot{f}} & \xrightarrow{-\underline{\beta}(-\dot{f})} & \dot{X}[1] \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \dot{\lambda} & & \parallel \\ \dot{X} & \xrightarrow{\underline{\dot{f}}} & \dot{Y} & \xrightarrow{\underline{\alpha}(\dot{f})} & \text{Con}_{\dot{f}} & \xrightarrow{\underline{\beta}(\dot{f})} & \dot{X}[1]. \end{array} \quad (3.8)$$

Notemos que $\underline{\alpha}(-f) = \underline{\alpha}(f)$ y que $\underline{\beta}(-f) = \underline{\beta}(f)$ (ver proposición (??)). Además, el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Y^i \oplus X^{i+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_Y^i & -f^{i+1} \\ 0 & -d_X^{i+1} \end{pmatrix}} & Y^{i+1} \oplus X^{i+2} \\ \begin{pmatrix} 1_{Y^i} & 0 \\ 0 & -1_{X^{i+1}} \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 1_{Y^{i+1}} & 0 \\ 0 & -1_{X^{i+2}} \end{pmatrix} \\ Y^i \oplus X^{i+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_Y^i & f^{i+1} \\ 0 & -d_X^{i+1} \end{pmatrix}} & Y^{i+1} \oplus X^{i+2} \end{array}$$

conmuta. Por lo tanto, definiendo $\dot{\lambda}$ con i -ésima entrada $\begin{pmatrix} 1_{Y^i} & 0 \\ 0 & -1_{X^{i+1}} \end{pmatrix}$ se prueba que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} Y^i & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{Y^i} \\ 0 \end{pmatrix}} & Y^i \oplus X^{i+1} & \xrightarrow{-(0, 1_{X^{i+1}})} & X^{i+1} \\ \parallel & & \begin{pmatrix} 1_{Y^i} & 0 \\ 0 & -1_{X^{i+1}} \end{pmatrix} \downarrow & & \parallel \\ Y^i & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{Y^i} \\ 0 \end{pmatrix}} & Y^i \oplus X^{i+1} & \xrightarrow{(0, 1_{X^{i+1}})} & X^{i+1}. \end{array}$$

Luego, tenemos un isomorfismo de \mathcal{E} -sucesiones en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccccc} \dot{Y} & \xrightarrow{\alpha(-f)} & \text{Con}_{-f} & \xrightarrow{-\beta(-f)} & \dot{X}[1] \\ \parallel & & \downarrow \dot{\lambda} & & \parallel \\ \dot{Y} & \xrightarrow{\alpha(f)} & \text{Con}_f & \xrightarrow{\beta(f)} & \dot{X}[1], \end{array} \quad (3.9)$$

y se tiene la equivalencia de los séxtuples en el diagrama (??). Concluimos

que $\dot{X} \xrightarrow{\dot{f}} \dot{Y} \xrightarrow{\alpha(f)} \text{Con}(f) \xrightarrow{\beta(f)} \dot{X}[1]$ está en \mathcal{J}'_K .

En el presente trabajo usaremos \mathcal{J}'_K .

Capítulo 4

La Categoría de Fracciones

Nuestro objetivo en este capítulo es obtener la categoría de fracciones \mathcal{B}_Σ . Partiendo de una categoría aditiva \mathcal{B} y una clase Σ de morfismos de \mathcal{B} que es un sistema multiplicativo localmente pequeño a la izquierda, construiremos una nueva categoría (de fracciones) que llamamos \mathcal{B}_Σ . A este proceso se le llama “localización”, y en cierta manera es un proceso parecido al de construir los números racionales a partir de los enteros, porque lo que hacemos es añadir a \mathcal{B} inversos de los elementos de Σ , para obtener \mathcal{B}_Σ .

Hacemos énfasis en la necesidad de que el sistema Σ sea localmente pequeño a la izquierda, de esta manera se prueba que \mathcal{B}_Σ es realmente una categoría. Cabe destacar que el enfoque que damos a la construcción de la categoría de fracciones \mathcal{B}_Σ es distinto al que por lo general se encuentra en la literatura existente, donde no se da la debida importancia al hecho de que Σ debe ser localmente pequeño a la izquierda.

4.1. Límites de funtores

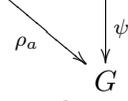
Definición 4.1. Sean \mathcal{D} una categoría, Ab la categoría de grupos abelianos y $F: \mathcal{D} \rightarrow Ab$ un funtor contravariante. El Límite (directo) de F consiste de: un grupo abeliano H y una colección de morfismos $\{\delta_a: F(a) \rightarrow H\}_{a \in \text{Ob}\mathcal{D}}$,

tales que para todo $f: a \rightarrow b$ en \mathcal{D} el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \xrightarrow{\delta_a} & H \\ F(f) \uparrow & \nearrow \delta_b & \\ F(b) & & \end{array}$$

conmuta, es decir, $\delta_a F(f) = \delta_b$. Además, si existe otro grupo abeliano G y una familia $\{\rho_a: F(a) \rightarrow G\}_{a \in \text{Ob}\mathcal{D}}$ tal que $\rho_a F(f) = \rho_b$, para todo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(a, b)$, entonces existe un único morfismo $\psi: H \rightarrow G$ de grupos tal

que $F(a) \xrightarrow{\delta_a} H$ conmuta, para todo $a \in \mathcal{D}$. Si el límite existe es único



hasta isomorfismo. Denotamos el límite de F por $\varinjlim F = H$.

Definición 4.2. Una categoría \mathcal{D} es pequeña si la colección de los objetos de \mathcal{D} es un conjunto.

Proposición 4.3. Sea \mathcal{D} una categoría pequeña y $F: \mathcal{D} \rightarrow Ab$ un funtor contravariante, entonces el límite de F existe.

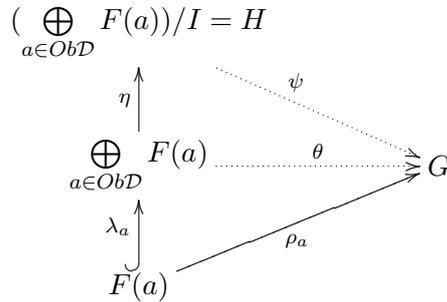
DEMOSTRACIÓN. Tenemos que el coproducto $\bigoplus_{a \in Ob\mathcal{D}} F(a)$ es un grupo abeliano (porque \mathcal{D} es pequeña). Para cada a en los objetos de \mathcal{D} tenemos el morfismo inclusión $\lambda_a: F(a) \hookrightarrow \bigoplus_{a \in Ob\mathcal{D}} F(a)$. Sean $f: a \rightarrow b$ y $x \in F(b)$. Definamos $V_{f,x} = \lambda_b(x) - \lambda_a(F(f)(x))$, y sea $I = \{ \sum_{\text{finita}} V_{f,x} \}$. Luego, I es un subgrupo de $\bigoplus_{a \in Ob\mathcal{D}} F(a)$. Sea $H := (\bigoplus_{a \in Ob\mathcal{D}} F(a))/I$. Entonces, tenemos los morfismos de grupos:

$$F(a) \xhookrightarrow{\lambda_a} \bigoplus_{a \in Ob\mathcal{D}} F(a) \xrightarrow{\eta} H,$$

donde η es la proyección natural. Definamos $\delta_a := \eta\lambda_a$. Probaremos que el grupo H y la familia $\{\delta_a\}_{a \in Ob\mathcal{D}}$ son el límite de F . Sea $f: a \rightarrow b$, entonces para cada $x \in F(b)$ tenemos:

$$(\delta_b - \delta_a F(f))(x) = (\eta\lambda_b - \eta\lambda_a F(f))(x) = \eta(\lambda_b - \lambda_a F(f))(x) = \eta(V_{f,x}) = 0,$$

porque $V_{f,x} \in I$. Luego, $\delta_b = \delta_a F(f)$ para cada f . Ahora supongamos que existe otro grupo abeliano G y una familia $\{\rho_a: F(a) \rightarrow G\}_{a \in Ob\mathcal{D}}$ tal que $\rho_a F(f) = \rho_b$ para cada $f: a \rightarrow b$. Luego, en el diagrama



existe el morfismo θ y es el único tal que $\theta\lambda_a = \rho_a$, por la propiedad universal del coproducto. Para probar que existe un morfismo de grupos de H en G que hace conmutar el diagrama basta probar que $\ker \eta \subseteq \ker \theta$, es decir, que $\theta(I) = 0$, además, es suficiente probarlo en los generadores de I . Sea $f: a \rightarrow b$ y $x \in F(b)$. Luego,

$$\theta(V_{f,x}) = \theta\lambda_b(x) - \theta\lambda_a(F(f)(x)) = \rho_b(x) - \rho_a(F(f)(x)) = \rho_b(x) - \rho_b(x) = 0.$$

Por lo tanto, existe un morfismo de grupos $\psi: H \rightarrow G$ tal que $\psi\eta = \theta$, luego, $\psi\delta_a = \psi\eta\lambda_a = \theta\lambda_a = \rho_a$. Sólo nos resta probar que el morfismo ψ es único. Supongamos que existe otro morfismo de grupos ψ' tal que $\psi'\delta_a = \rho_a$ para todo $a \in \mathcal{D}$. En particular, $\psi'\eta = \theta$, pero también $\psi\eta = \theta$, entonces $(\psi' - \psi)\eta = 0$. Como η es epimorfismo, entonces $\psi' - \psi = 0$. Por lo tanto, $\psi' = \psi$ y H es el límite de F . \square

Definición 4.4. Una categoría \mathcal{D} se llama filtrante si cumple que:

- a) Dados a, b objetos de \mathcal{D} , existe un objeto c en \mathcal{D} y morfismos $\lambda: c \rightarrow a$ y $\mu: c \rightarrow b$.
- b) Dados los morfismos $f, g: a \rightarrow b$, existe $\lambda: c \rightarrow a$ tal que $f\lambda = g\lambda$.

Observación 4.5. Sea \mathcal{D} una categoría filtrante. Entonces:

1. Si $\{a_i\}_{i=1}^n$ es una sucesión de objetos en \mathcal{D} , entonces existe un objeto z en \mathcal{D} y morfismos $\lambda_i: z \rightarrow a_i$, para $i \in \{1, \dots, n\}$.
2. Si $\{f_i\}_{i=1}^n$ es una sucesión de morfismos paralelos en \mathcal{D} (esto es, que comparten dominio y codominio), entonces existe un morfismo h de \mathcal{D} tal que $f_u h = f_v h$, para todo $u, v \in \{1, \dots, n\}$.
3. Si $\{f_i\}_{i=1}^n$ es una sucesión de morfismos de \mathcal{D} que inician en el objeto z , entonces existe $h: z' \rightarrow z$ en \mathcal{D} tal que cualesquiera dos términos $f_u h, f_v h$ de la familia $\{f_i h\}_{i=1}^n$, que son paralelos, coinciden.

DEMOSTRACIÓN. 1. Es claro.

2. Supongamos que $f_i: z \rightarrow x$ para cada i . Hagamos inducción sobre n : Si $n = 2$, el resultado se sigue de la definición (??,b). Sea $n > 2$ y supongamos que el resultado vale para $n - 1$. Entonces existe $h_{n-1}: z'_{n-1} \rightarrow z$ tal que $f_1 h_{n-1} = f_j h_{n-1}$, para cada $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Como $f_1 h_{n-1}$ y $f_n h_{n-1}$ son paralelos, existe $h'_n: z'_n \rightarrow z'_{n-1}$ en \mathcal{D} tal que $f_1 h_{n-1} h'_n = f_n h_{n-1} h'_n$. Luego, $h_n := h_{n-1} h'_n$ es el morfismo deseado.

3. Sea l el número de codominios distintos w_1, \dots, w_l de la familia de morfismos f_1, \dots, f_n . Para cada $t \in \{1, \dots, l\}$, tenemos la subfamilia $\{f_j\}_{j \in J_t}$ de $\{f_i\}_{i=1}^n$ determinada por los morfismos f_j que terminan en w_t . Luego, $\{1, \dots, n\} = J_1 \overset{+}{\cup} \dots \overset{+}{\cup} J_l$. Por el inciso 2, hay un morfismo $h_1: z_1 \rightarrow z$ tal que $f_u h_1 = f_v h_1$ para todo $u, v \in J_1$. Supongamos que hemos definido $h_{l-1}: z_{l-1} \rightarrow z$ en \mathcal{D} tal que $f_u h_{l-1} = f_v h_{l-1}$ para cada $u, v \in J_t$ y cada $t \in \{1, \dots, l-1\}$. Como $\{f_i h_{l-1}\}_{i \in J_l}$ son paralelos, existe $h'_l: z_l \rightarrow z_{l-1}$ tal que $f_u h_{l-1} h'_l = f_v h_{l-1} h'_l$ para cada $u, v \in J_l$. Luego, si tomamos $h_l := h_{l-1} h'_l$, obtenemos $f_u h_l = f_v h_l$, para cada $u, v \in J_t$ y cada $t \in \{1, \dots, l\}$. Luego, $h_l: z_l \rightarrow z$ es el morfismo buscado. \square

Proposición 4.6. Sean \mathcal{D} una categoría pequeña y filtrante y un funtor contravariante $F: \mathcal{D} \rightarrow Ab$. Luego,

1. Si x está en el límite de F , entonces $x = \delta_a(y)$, para algún a en \mathcal{D} y algún y en $F(a)$.
2. Si para algún y en $F(a)$ se tiene que $\delta_a(y) = 0$, entonces existe un morfismo $f: c \rightarrow a$ tal que $F(f)(y) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Al demostrar (??) vimos que $\varinjlim F = \bigoplus_{c \in \text{Ob } \mathcal{D}} F(c)/I$ con $I = \{ \sum_{\text{finita}} V_{f,x} \}$ donde, para $f: d \rightarrow c$ y $x \in F(c)$ se tiene $V_{f,x} = \lambda_c(x) - \lambda_d(F(f)(x))$. Además, la familia de morfismos $\{\delta_a\}_{a \in \text{Ob } \mathcal{D}}$ del límite es tal que $\delta_a = \eta \lambda_a$ con $F(a) \xrightarrow{\lambda_a} \bigoplus_{c \in \text{Ob } \mathcal{D}} F(c) \xrightarrow{\eta} \bigoplus_{c \in \text{Ob } \mathcal{D}} F(c)/I$.

1. Sea $x \in \varinjlim F$, entonces $x = \eta(\sum_{i=1}^n \lambda_{a_i}(y_i))$ con $y_i \in F(a_i)$. Luego, $x = \sum_{i=1}^n \eta \lambda_{a_i}(y_i) = \sum_{i=1}^n \delta_{a_i}(y_i)$. Por la observación (??), existe a en los objetos de \mathcal{D} y un conjunto de morfismos $\{f_i: a \rightarrow a_i\}$. Entonces, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} F(a_i) & \xrightarrow{\delta_{a_i}} & \varinjlim F \\ F(f_i) \downarrow & \nearrow \delta_a & \\ F(a) & & \end{array},$$

es decir, $\delta_a F(f_i) = \delta_{a_i}$. Luego, $x = \sum_{i=1}^n \delta_a F(f_i)(y_i) = \delta_a [\sum_{i=1}^n F(f_i)(y_i)]$ ya

que δ_a es morfismo de grupos. Entonces, con $y = \sum_{i=1}^n F(f_i)(y_i)$ se tiene la afirmación 1.

2. Supongamos que para algún $y \in F(x)$ se tiene $\delta_x(y) = 0$. Entonces $\eta\lambda_x(y) = 0$, lo cual nos dice que $\lambda_x(y)$ está en I . Luego $\lambda_x(y) = \sum_{i=1}^n V_i$, con cada $V_i = \lambda_{z_i}(F(f_i)(a_i)) - \lambda_{x_i}(a_i)$, para $f_i: z_i \rightarrow x_i$ y $a_i \in F(x_i)$. Por la observación (??), dados los objetos z_1, \dots, z_n, x existe z' y morfismos $h'_i: z' \rightarrow z_i$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ y $h': z' \rightarrow x$. La sucesión de morfismos con dominio z' :

$$h'_1, \dots, h'_n, f_1 h'_1, \dots, f_n h'_n, h',$$

puede componerse con un morfismo $h'': z \rightarrow z'$ en \mathcal{D} para obtener, escribiendo $h := h' h''$ y $h_i := h'_i h''_i$, la sucesión

$$h_1, \dots, h_n, f_1 h_1, \dots, f_n h_n, h,$$

tal que cualesquiera dos términos paralelos coinciden. Como $h: z \rightarrow x$, entonces $F(h): F(x) \rightarrow F(z)$ y si definimos $W_0 := \lambda_z(F(h)(y)) - \lambda_x(y)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \lambda_z(F(h)(y)) &= \lambda_z(F(h)(y)) - \lambda_x(y) + \lambda_x(y) \\ &= W_0 + \sum_{i=1}^n V_i. \end{aligned}$$

Recordemos que: $z \xrightarrow{h_i} z_i \xrightarrow{f_i} x_i$, luego $F(z) \xleftarrow{F(h_i)} F(z_i) \xleftarrow{F(f_i)} F(x_i)$. Entonces:

$$\begin{aligned} V_i &= \lambda_{z_i}(F(f_i)(a_i)) - \lambda_{x_i}(a_i) \\ &= -\lambda_z(F(h_i)F(f_i)(a_i)) + \lambda_{z_i}(F(f_i)(a_i)) + \lambda_z(F(f_i h_i)(a_i)) - \lambda_{x_i}(a_i) \\ &= \lambda_z(F(h_i)F(f_i)(-a_i)) - \lambda_{z_i}(F(f_i)(-a_i)) + \lambda_z(F(f_i h_i)(a_i)) - \lambda_{x_i}(a_i). \end{aligned}$$

Renombremos como sigue:

$$\begin{aligned} u_0 &:= h, & b_0 &:= y, \\ u_i &:= h_i, & b_i &:= F(f_i)(-a_i), \quad \text{si } i \in \{1, \dots, n\}; \\ u_{n+i} &:= f_i h_i, & b_{n+i} &:= a_i, \quad \text{si } i \in \{1, \dots, n\}; \end{aligned}$$

w_j denota al codominio de u_j , para $j \in \{0, \dots, 2n\}$; y $W_j := \lambda_z(F(u_j)(b_j)) - \lambda_{w_j}(b_j)$. Hemos probado que:

$$\lambda_z(F(h)(y)) = W_0 + \sum_{i=1}^n (W_i + W_{n+i}).$$

Luego, $\lambda_z(F(h)(y)) = \sum_{j=0}^{2n} W_j$. Podemos suponer que w_1, \dots, w_l son los objetos que son distintos y $\alpha(s) := \{j \mid w_j = w_s\}$, para $s \in l$. Entonces $\lambda_z(F(h)(y)) = \sum_{s=1}^l (\sum_{j \in \alpha(s)} W_j) = \sum_{s=1}^l \hat{W}_s$, donde $\hat{W}_s := \sum_{j \in \alpha(s)} W_j = \sum_{j \in \alpha(s)} \lambda_z(F(u_j)(b_j)) - \lambda_{w_s}(b_j)$. Pero $u_j = u_s$, para todo $j \in \alpha(s)$. Luego, $\hat{W}_s = \lambda_z(F(u_s)(\sum_{j \in \alpha(s)} b_j)) - \lambda_{w_s}(\sum_{j \in \alpha(s)} b_j)$. Entonces para $c_s := \sum_{j \in \alpha(s)} b_j$, se tiene que $\lambda_z(F(h)(y)) = \sum_{s=1}^l (\lambda_z F(u_s)(c_s) - \lambda_{w_s}(c_s))$, con todos los w_s distintos entre sí. Tenemos dos casos:
Supongamos que $w_s \neq z$, para todo $s \in l$; entonces

$$\lambda_z(F(h)(y)) - \sum_{s=1}^l \lambda_z F(u_s)(c_s) + \sum_{s=1}^l \lambda_{w_s}(c_s) = 0,$$

como son distintas coordenadas, $\lambda_{w_s}(c_s) = 0$ implica que $c_s = 0$, entonces $F(u_s)(c_s) = 0$, y también $\lambda_z(F(h)(y)) = 0$. Pero λ_z es la inclusión, entonces $F(h)(y) = 0$.

Ahora supongamos que $w_s = z$, para algún $s \in l$. Sin perder generalidad, $s = 1$. Entonces tenemos $\lambda_{w_s}(c_s) = 0$ para $s = 2, \dots, l$. Luego, $c_2 = \dots = c_l = 0$, lo cual implica que $\lambda_z(F(h)(y)) - F(u_1)(c_1) + c_1 = 0$. Como λ_z es monomorfismo, $F(h)(y) = F(u_1)(c_1) - c_1$. Por otro lado, tanto el morfismo u_1 como 1_z van de z en w_1 . Como la categoría \mathcal{D} es filtrante, entonces existe un morfismo $\mu: c \rightarrow z$ tal que $u_1 \mu = \mu$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F(h\mu)(y) &= F(\mu)F(h)(y) = F(\mu)(F(u_1)(c_1)) - F(\mu)(c_1) \\ &= F(u_1\mu)(c_1) - F(\mu)(c_1) = 0. \end{aligned}$$

Luego, en el primer caso el morfismo $f := h$ y en el segundo caso $f := h\mu$ cumplen con lo afirmado. \square

Proposición 4.7. *Sea \mathcal{D} una categoría filtrante y sea \mathcal{C} una subcategoría plena y pequeña de \mathcal{D} . Supongamos que para cada objeto $d \in \mathcal{D}$ existe un morfismo $c \rightarrow d$ con $c \in \mathcal{C}$. Entonces, si $F: \mathcal{D} \rightarrow Ab$ es un funtor contravariante, el límite de F existe.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que \mathcal{C} también es filtrante. En efecto, dados c_1, c_2 objetos en $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, existe $d \in \mathcal{D}$ y morfismos $d \xrightarrow{\lambda'} c_1$, $d \xrightarrow{\mu'} c_2$. Entonces existe $c \xrightarrow{\alpha} d$, con $c \in \mathcal{C}$. Luego, $\lambda := \lambda' \alpha$ y $\mu := \mu' \alpha$ son

morfismos de c en c_1 y c_2 respectivamente. Como \mathcal{C} es plena, λ y μ son morfismos de \mathcal{C} . Por otro lado, dados los morfismos $a \xrightarrow[f]{g} b$ en $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, existe un morfismo $d \xrightarrow{\lambda'} a$ en \mathcal{D} tal que $f\lambda' = g\lambda'$. Sea $c \xrightarrow{\alpha} d$, con $c \in \mathcal{C}$. Luego, $\lambda := \lambda'\alpha$ está en \mathcal{C} y es tal que $f\lambda = g\lambda$. Por lo tanto, \mathcal{C} es filtrante.

Sea G la restricción del funtor F a \mathcal{C} . Entonces el límite de G existe porque \mathcal{C} es pequeña. Sean $\varinjlim G = H$ y $\{\delta'_c: G(c) \rightarrow H\}_{c \in \mathcal{C}}$ el límite de G . Entonces, para cada $g: c_1 \rightarrow c_2$ en \mathcal{C} , conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G(c_1) & \xrightarrow{\delta'_{c_1}} & H \\ G(g) \uparrow & \nearrow \delta'_{c_2} & \\ G(c_2) & & \end{array} .$$

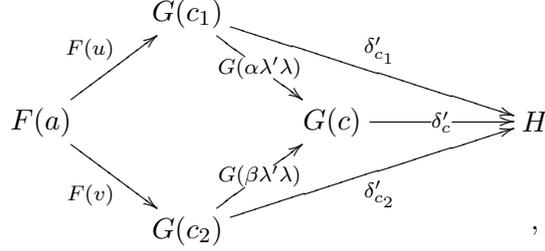
Sea $a \in \mathcal{D}$, entonces existe $c \xrightarrow{u} a$, con $c \in \mathcal{C}$. Luego, tenemos los morfismos $F(a) \xrightarrow{F(u)} F(c) = G(c) \xrightarrow{\delta'_c} H$. Definimos

$$\delta_a = \delta'_c F(u).$$

Veamos que esta definición no depende de c ni de u . Supongamos que tenemos morfismos $c_1 \xrightarrow{u} a$ y $c_2 \xrightarrow{v} a$, con $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$. Como \mathcal{C} es filtrante, existen morfismos $\tilde{c} \xrightarrow{\alpha} c_1$ y $\tilde{c} \xrightarrow{\beta} c_2$ con $\tilde{c} \in \mathcal{C}$. Luego, tenemos los morfismos $\tilde{c} \xrightarrow[u\alpha]{v\beta} a$. Como \mathcal{D} es filtrante, existe $d \xrightarrow{\lambda'} \tilde{c}$ tal que $u\alpha\lambda' = v\beta\lambda'$. Entonces existe $c \xrightarrow{\lambda} d$ con $c \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, $u\alpha\lambda'\lambda = v\beta\lambda'\lambda$. Aplicamos F al cuadrado conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & c_1 & \\ \alpha\lambda'\lambda \nearrow & & \searrow u \\ c & & a \\ \beta\lambda'\lambda \searrow & & \nearrow v \\ & c_2 & \end{array} ,$$

para obtener el siguiente diagrama conmutativo:

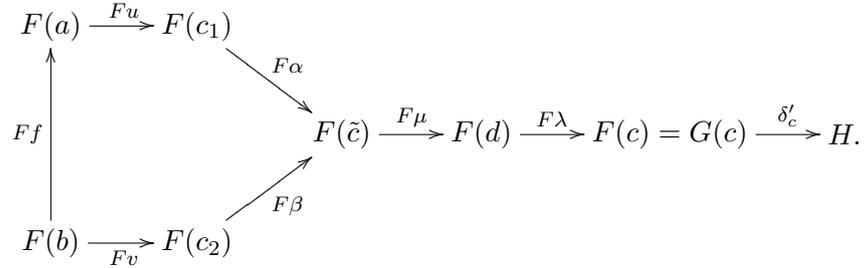


por propiedades del límite de G . Además, tenemos que $\delta'_{c_1} = \delta'_c G(\alpha\lambda') = \delta'_c F(\alpha\lambda')$ y también $\delta'_{c_2} = \delta'_c G(\beta\lambda') = \delta'_c F(\beta\lambda')$. Luego,

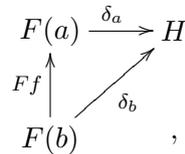
$$\delta'_{c_1} F(u) = \delta'_c G(\alpha\lambda') F(u) = \delta'_c G(\beta\lambda') F(v) = \delta'_{c_2} F(v).$$

Por lo tanto, δ_a no depende de la elección de c ni de u .

Sea $a \xrightarrow{f} b$ en \mathcal{D} . Existen morfismos $c_1 \xrightarrow{u} a$ y $c_2 \xrightarrow{v} b$, con $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$. Como \mathcal{C} es filtrante, existen morfismos $\tilde{c} \xrightarrow{\alpha} c_1$ y $\tilde{c} \xrightarrow{\beta} c_2$ en \mathcal{C} . Entonces tenemos los morfismos $\tilde{c} \xrightarrow[\nu\beta]{fu\alpha} b$. Como \mathcal{D} es filtrante, existe $d \xrightarrow{\mu} \tilde{c}$ tal que $(fu\alpha)\mu = (\nu\beta)\mu$. Además, existe $c \xrightarrow{\lambda} d$, con $c \in \mathcal{C}$. Luego, $(fu\alpha)\mu\lambda = (\nu\beta)\mu\lambda$ y es conmutativo:



Entonces $\delta_a = \delta'_c F(u\alpha\mu\lambda)$ y $\delta_b = \delta'_c F(v\beta\mu\lambda)$ y se tiene que,



es conmutativo.

Supongamos que existe otro grupo abeliano J y una familia $\{\rho_a: F(a) \rightarrow J\}_{a \in \mathcal{D}}$ tales que, para cada $f: a \rightarrow b$, $F(a) \xrightarrow{\rho_a} J$ conmuta. Sea $a \in \mathcal{D}$,

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \xrightarrow{\rho_a} & J \\ Ff \uparrow & \nearrow \rho_b & \\ F(b) & & \end{array}$$

entonces existe $c \xrightarrow{g} a$, con $c \in \mathcal{C}$. Se tiene el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} F(c) = G(c) & \xrightarrow{\delta'_c} & H \\ Fg \uparrow & \searrow \rho_c & \downarrow \psi \\ F(a) & \xrightarrow{\rho_a} & J, \end{array}$$

donde ψ existe por la propiedad universal del límite de G , y es tal que $\psi\delta'_c = \rho_c$. Además, $\rho_c Fg = \rho_a$. Por lo tanto, $\rho_a = \rho_c Fg = \psi\delta'_c Fg = \psi\delta_a$. Como $\delta'_c = \delta_c$, para $c \in \mathcal{C}$, se tiene la unicidad de ψ . Podemos concluir que el límite de F existe. \square

Corolario 4.8. *Sea \mathcal{D} una categoría filtrante y sea \mathcal{C} una subcategoría plena y pequeña de \mathcal{D} . Supongamos que para cada objeto $d \in \mathcal{D}$ existe $c \rightarrow d$ con $c \in \mathcal{C}$. Sea $F: \mathcal{D} \rightarrow Ab$ un funtor contravariante. Luego:*

1. Si x está en el límite de F , entonces $x = \delta_a(w)$, para algún a en \mathcal{D} y algún w en $F(a)$.
2. Si para algún w en $F(a)$ se tiene que $\delta_a(w) = 0$, entonces existe un morfismo $f: b \rightarrow a$ tal que $F(f)(w) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Mantenemos la notación de la demostración de (??). La primera afirmación se sigue inmediatamente de la proposición (??): $\varinjlim F = H = \varinjlim G$, luego $x = \delta'_c(w)$ con $c \in \mathcal{C}$ y $w \in G(c)$. Pero, $\delta'_c = \delta_c$ y $G(c) = F(c)$. Para la segunda afirmación, supongamos que para algún $w \in F(a)$, con $a \in \mathcal{D}$, se tiene $\delta_a(w) = 0$. Como $a \in \mathcal{D}$, existen $c \in \mathcal{C}$ y $h: c \rightarrow a$. Entonces, en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \xrightarrow{\delta_a} & \varinjlim F \\ F(h) \downarrow & \nearrow \delta_c & \\ F(c) = G(c) & & \end{array},$$

se tiene $\delta_c F(h) = \delta_a$. Por lo tanto, $0 = \delta_a(w) = \delta_c(F(h)[w])$. Pero $F(h)[w]$ está en $G(c)$, entonces, usando el inciso 2 de la proposición (??) se tiene que existe $f_1: b \rightarrow c$ en \mathcal{C} tal que

$$0 = (G(f_1))(F(h)[w]) = (F(f_1))(F(h)[w]) = F(hf_1)[w].$$

Es decir, $f := hf_1: b \rightarrow a$ cumple lo que afirma el corolario. □

4.2. Construcción de la categoría de fracciones \mathcal{B}_Σ

Definición 4.9. Sea \mathcal{C} una categoría arbitraria y Σ una clase de morfismos en \mathcal{C} . Para X y Y objetos de \mathcal{C} , denotamos por $\Sigma_{X,Y}$ al conjunto de morfismos de X en Y contenidos en Σ . Decimos que Σ es un sistema multiplicativo en \mathcal{C} si, para cada X, Y, Z objetos de \mathcal{C} se cumple que:

- M1** (a) Dados s en $\Sigma_{X,Y}$, t en $\Sigma_{Y,Z}$, entonces ts está en $\Sigma_{X,Z}$.
 (b) 1_X está en $\Sigma_{X,X}$.

- M2** (a) Dados $u: X \rightarrow Y$ y s en $\Sigma_{Z,Y}$, entonces existen $v: W \rightarrow Z$ y t en $\Sigma_{W,X}$ tales que conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{v} & Z \\ \downarrow t & & \downarrow s \\ X & \xrightarrow{u} & Y. \end{array}$$

- (b) Dados $u: Y \rightarrow X$ y s en $\Sigma_{Y,Z}$, entonces existen $v: Z \rightarrow W$ y t en $\Sigma_{X,W}$ tales que conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{v} & Z \\ \uparrow t & & \uparrow s \\ X & \xleftarrow{u} & Y. \end{array}$$

- M3** Sean $u, v: X \rightarrow Y$. Entonces, existe s en $\Sigma_{Y,W'}$ tal que $su = sv$ si y sólo si existe t en $\Sigma_{W,X}$ tal que $ut = vt$.

Observación 4.10. Sea \mathcal{B} una categoría y Σ un sistema multiplicativo en \mathcal{B} . Para cada X en los objetos de \mathcal{B} construiremos una nueva categoría \mathcal{D}_X , cuyos objetos son los morfismos $u: Z \rightarrow X$ que están en Σ . Para u y v en los objetos de \mathcal{D}_X un morfismo $f: u \rightarrow v$ es uno tal que hace conmutar el siguiente diagrama en \mathcal{B} :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{u} & X \\ f \downarrow & \nearrow v & \\ Z' & & \end{array},$$

la composición en \mathcal{D}_X está dada por la de \mathcal{B} . Además, la categoría \mathcal{D}_X es filtrante.

DEMOSTRACIÓN. Claramente, \mathcal{D}_X es una categoría. Veamos que \mathcal{D}_X es filtrante. Sean u y v objetos de \mathcal{D}_X . En particular v pertenece al sistema multiplicativo Σ . El axioma M2 nos dice que existen morfismos $\lambda \in \Sigma$ y μ tales que conmuta

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\lambda} & Z \\ \mu \downarrow & & \downarrow u \\ Z' & \xrightarrow{v} & X, \end{array}$$

entonces $u\lambda = v\mu$. Los morfismos u y λ están en Σ , luego $w := u\lambda$ está en los objetos de \mathcal{D}_X . El diagrama anterior muestra claramente que λ es un morfismo de w en u y que μ es un morfismo de w en v . Para mostrar la segunda parte de la definición de categoría filtrante, sean f y g un par de morfismos de u en v . Entonces en

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{u} & X \\ f \downarrow & \parallel g & \nearrow v \\ Z' & & \end{array},$$

se tiene $vf = u = vg$. Como $v \in \Sigma$, el axioma M3 para sistemas multiplicativos nos dice que existe $t \in \Sigma$ tal que $gt = ft$. \square

Definición 4.11. Sea \mathcal{B} una categoría arbitraria y Σ un sistema multiplicativo en \mathcal{B} . Decimos que Σ es localmente pequeño a la izquierda si, para cada objeto X en \mathcal{B} existe un conjunto \mathcal{F}_X de objetos de \mathcal{B} tal que para cualquier elemento s de $\Sigma_{W,X}$ existe un morfismo $\lambda: Z \rightarrow W$ con $Z \in \mathcal{F}_X$ y la composición $Z \xrightarrow{\lambda} W \xrightarrow{s} X$ en Σ .

Proposición 4.12. Sea \mathcal{B} una categoría y Σ un sistema multiplicativo en \mathcal{B} localmente pequeño a la izquierda. Sea X un objeto de \mathcal{B} y \mathcal{D}_X como en la observación (??). Sea \mathcal{C}_X la subcategoría plena de \mathcal{D}_X cuyos objetos son morfismos $v: W \rightarrow X$ en Σ con $W \in \mathcal{F}_X$. Entonces:

1. \mathcal{C}_X es pequeña; y
2. Si $d \in \mathcal{D}_X$, entonces existe $f: c \rightarrow d$ con $c \in \mathcal{C}_X$.

DEMOSTRACIÓN. 1. \mathcal{C}_X es pequeña, porque

$$\text{Ob } \mathcal{C}_X = \bigcup_{W \in \mathcal{F}_X} \Sigma_{W,X}.$$

2. Sea $d := (W \xrightarrow{u} X)$ en \mathcal{D}_X . Como Σ es localmente pequeño a la izquierda, entonces existe $Z \xrightarrow{\lambda} W$ tal que $u\lambda$ está en Σ con $Z \in \mathcal{F}_X$. Luego, $c := (Z \xrightarrow{u\lambda} X)$ está en \mathcal{C}_X y λ es un morfismo de c en d . \square

Sea \mathcal{B} una categoría aditiva y Σ un sistema multiplicativo en \mathcal{B} localmente pequeño a la izquierda. En lo que sigue, construiremos la localización de \mathcal{B} por Σ , que será denotada por \mathcal{B}_Σ y probaremos que \mathcal{B}_Σ es una categoría aditiva. Para empezar, los objetos de \mathcal{B}_Σ , son los mismos que los de \mathcal{B} . Definiremos a continuación sus morfismos: Sean X, Y objetos de \mathcal{B} , arbitrarios pero fijos. Denotaremos por $\mathcal{B}(X, Y)$ el grupo de los morfismos de X en Y en \mathcal{B} . Sea \mathcal{D}_X la categoría definida en la observación (??) y $\mathcal{C}_X \subseteq \mathcal{D}_X$ la subcategoría plena de \mathcal{D}_X como en la proposición (??). Luego, tenemos que $\mathcal{C}_X \subseteq \mathcal{D}_X$ es pequeña y \mathcal{D}_X es filtrante. Además, para cada $d \in \mathcal{D}_X$ existe $f: c \rightarrow d$ con $c \in \mathcal{C}_X$.

Definimos el funtor contravariante $G_{X,Y}$ de \mathcal{D}_X en Ab , la categoría de grupos abelianos, como sigue:

$$G_{X,Y}: \mathcal{D}_X \longrightarrow Ab$$

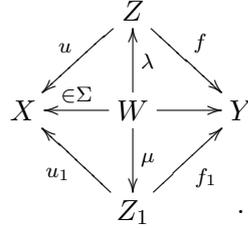
$$\begin{array}{ccc} u & & \mathcal{B}(Z, Y) \\ f \downarrow & \longmapsto & \uparrow \mathcal{B}(f, 1) \\ v & & \mathcal{B}(Z', Y), \end{array}$$

para $u: Z \rightarrow X$ y $v: Z' \rightarrow X$ elementos de \mathcal{D}_X . $G_{X,Y}$ está bien definido porque \mathcal{B} es aditiva. Por la proposición (??), existe el límite de $G_{X,Y}$, es decir, hay un grupo abeliano $\mathcal{B}_\Sigma(X, Y) := \varinjlim G_{X,Y}$ y una familia de morfismos $\{\delta_c: G_{X,Y}(c) \rightarrow \mathcal{B}_\Sigma(X, Y)\}_{c \in \text{Ob } \mathcal{D}_X}$ tales que, para cada $f: u \rightarrow v$ en \mathcal{D}_X conmuta el diagrama:

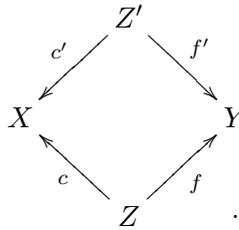
$$\begin{array}{ccc} G_{X,Y}(u) & \xrightarrow{\delta_u} & \mathcal{B}_\Sigma(X, Y) \\ G_{X,Y}(f) \uparrow & \nearrow \delta_v & \\ G_{X,Y}(v) & & \end{array} .$$

Sea $\delta_c(f)$ un elemento de $\mathcal{B}_\Sigma(X, Y)$. Nos preguntamos: qué condiciones se necesitan para que $\delta_c(f) = \delta_{c'}(f')$?

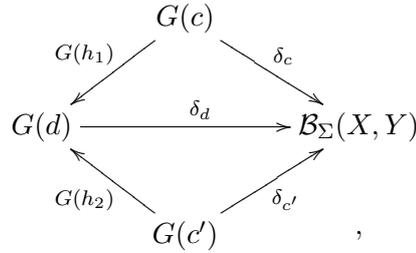
Lema 4.13. *Con la notación anterior, $\delta_u(f) = \delta_{u_1}(f_1)$ si y sólo si existe un objeto W y morfismos $\lambda: W \rightarrow Z$, $\mu: W \rightarrow Z_1$ tales que $u_1\mu = u\lambda \in \Sigma$ y $f_1\mu = f\lambda$, visualizados en el diagrama siguiente:*



DEMOSTRACIÓN. Por simplicidad, denotaremos a $G_{X,Y}$ simplemente por G . Supongamos $c': Z' \rightarrow X$ y $c: Z \rightarrow X$. Sean $f \in G(c) = \mathcal{B}(Z, Y)$ y $f' \in G(c') = \mathcal{B}(Z', Y)$ tales que $\delta_c(f) = \delta_{c'}(f')$. Entonces se tiene el diagrama:



Como \mathcal{D}_X es filtrante, dados $c, c' \in \mathcal{D}_X$ existe $d \in \mathcal{D}_X$ y morfismos $h_1: d \rightarrow c$ y $h_2: d \rightarrow c'$. Entonces en el siguiente diagrama

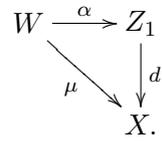


conmutan los triángulos por propiedades del límite de G . Luego, puesto que $f \in G(c)$ y $f' \in G(c')$ tenemos:

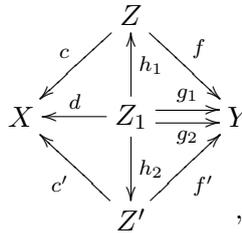
$$\delta_d[G(h_2)(f')] = \delta_{c'}(f') = \delta_c(f) = \delta_d[G(h_1)(f)].$$

Sean $g_1 := G(h_1)(f) = fh_1$ y $g_2 := G(h_2)(f') = f'h_2$, luego $g_1, g_2 \in G(d)$ y $\delta_d(g_1 - g_2) = 0$, entonces existe un morfismo $\mu \xrightarrow{\alpha} d$ en \mathcal{D}_X tal

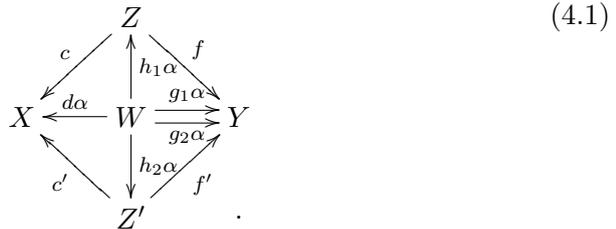
que $G(\alpha)(g_1 - g_2) = 0$, por el corolario (??). Es decir, tengo el diagrama conmutativo:



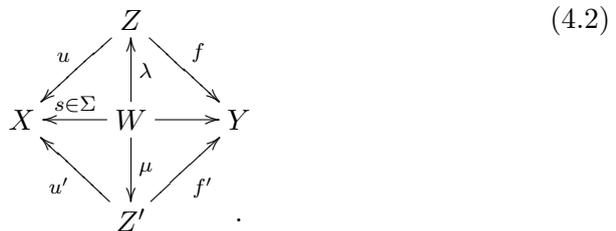
Además $g_1 - g_2 \in G(d) = \mathcal{B}(Z_1, Y)$. Se tiene $(g_1 - g_2)\alpha = G(\alpha)(g_1 - g_2) = 0$, entonces $g_1\alpha = g_2\alpha$. Luego, se tiene el diagrama conmutativo:



y también:

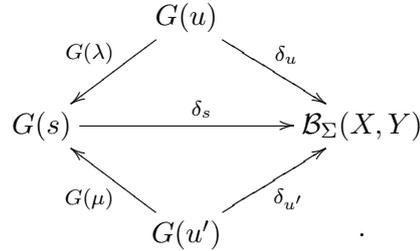


Entonces el morfismo $d\alpha = ch_1\alpha = c'h_2\alpha$ está en Σ y $fh_1\alpha = g_1\alpha = g_2\alpha = f'h_2\alpha$. Luego $\delta_{c'}(f') = \delta_c(f)$ implica que existe un diagrama conmutativo como en (??). Recíprocamente, supongamos que tenemos el siguiente diagrama conmutativo con u, s, u' en Σ :



Como $u \in \Sigma$, entonces λ es un morfismo de \mathcal{D}_X de s en u . También tenemos

el morfismo μ de s en u' . Entonces, conmuta el diagrama:



Tenemos $f \in G(u)$, $f' \in G(u')$, $G(\lambda)(f) = f\lambda$ y $G(\mu)(f') = f'\mu$. Luego, se tiene

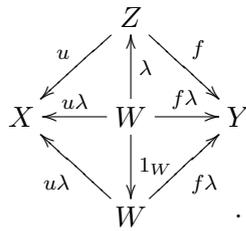
$$\begin{aligned}
 \delta_u(f) &= \delta_s(G(\lambda)(f)) = \delta_s(f\lambda) \\
 \delta_{u'}(f') &= \delta_s(G(\mu)(f')) = \delta_s(f'\mu)
 \end{aligned}$$

pero $f\lambda = f'\mu$ por hipótesis, luego, $\delta_u(f) = \delta_{u'}(f')$. □

De ahí se desprende la siguiente propiedad:

Afirmación 4.14. *Si $u, u\lambda \in \Sigma$, entonces $\delta_{u\lambda}(f\lambda) = \delta_u(f)$.*

DEMOSTRACIÓN. Esto ocurre porque tenemos el diagrama conmutativo:

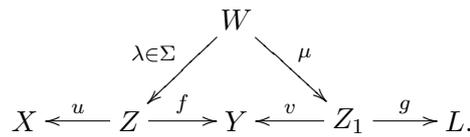


□

Sean X, Y, L objetos de \mathcal{B} . Definiremos un producto (composición) de morfismos de \mathcal{B}_Σ . Sean $\delta_u(f) \in \mathcal{B}_\Sigma(X, Y)$ y $\delta_v(g) \in \mathcal{B}_\Sigma(Y, L)$. Entonces tenemos en \mathcal{B} :

$$X \xleftarrow{u \in \Sigma} Z \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{v \in \Sigma} Z_1 \xrightarrow{g} L.$$

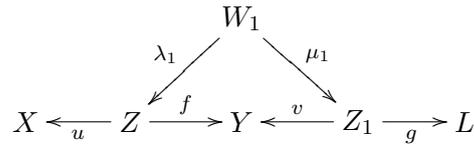
Como Σ es un sistema multiplicativo de \mathcal{B} , el axioma M2 nos dice que existe el objeto W y morfismos $\lambda \in \Sigma$ y μ tales que el diagrama conmuta:



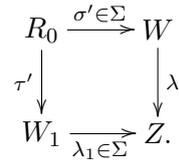
De ahí que se ocurra definir $\delta_v(g)\delta_u(f) := \delta_{u\lambda}(g\mu)$. Veamos que esta elección es válida, es decir, probemos:

Afirmación 4.15. *La definición del párrafo anterior no depende del diagrama ni de los representantes de las clases $\delta_u(f)$ y $\delta_v(g)$.*

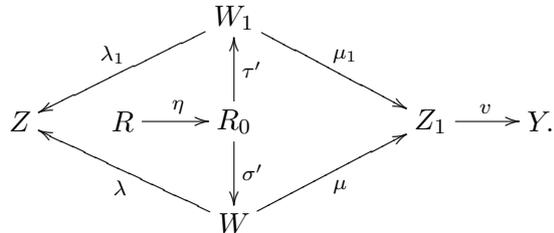
DEMOSTRACIÓN. Supongamos que tenemos otro diagrama conmutativo:



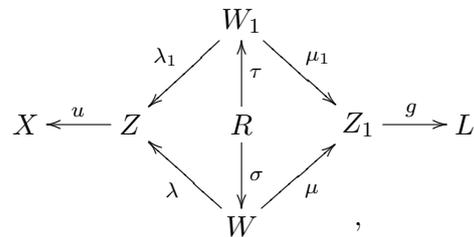
con $\lambda_1 \in \Sigma$ y $v\mu_1 = f\lambda_1$. Probaremos que $\delta_{u\lambda}(g\mu) = \delta_{u\lambda_1}(g\mu_1)$. Por el axioma M2 de la definición de sistema multiplicativo, existe un cuadrado conmutativo:



Además, $v\mu_1\tau' = f\lambda_1\tau' = f\lambda\sigma' = v\mu\sigma'$. Como $v \in \Sigma$, el axioma M3 de sistemas multiplicativos nos dice que existe $\eta \in \Sigma(R, R_0)$ (para algún objeto R) tal que $\mu_1\tau'\eta = \mu\sigma'\eta$. Luego, existe el diagrama:



Así que tenemos un diagrama:



con $\sigma \in \Sigma$, $\lambda\sigma = \lambda_1\tau$ y $\mu\sigma = \mu_1\tau$. Notemos que $u\lambda\sigma \in \Sigma$ porque u , λ y σ están en Σ . Entonces, por la afirmación (??), tenemos:

$$\delta_{u\lambda}(g\mu) = \delta_{u\lambda\sigma}(g\mu\sigma) = \delta_{u\lambda_1\tau}(g\mu_1\tau) = \delta_{u\lambda_1}(g\mu_1).$$

Por lo tanto, el producto no depende del cuadrado elegido.

Veamos ahora que tampoco depende del representante $\delta_v(g)$. Supongamos que $\delta_v(g) = \delta_{v_1}(g_1)$, entonces, por el lema (??), existen W_1 , σ y τ tales que

$$\begin{array}{ccccc} & & Z_1 & & \\ & v \swarrow & \uparrow \sigma & \searrow g & \\ Y & \xleftarrow{\in \Sigma} & W_1 & \xrightarrow{\quad} & L \\ & \swarrow v_1 & \downarrow \tau & \searrow g_1 & \\ & & Z'_1 & & \end{array}, \tag{4.3}$$

conmuta y $v_1\tau \in \Sigma$. Luego, por el axioma M2 de sistemas multiplicativos, existen W_2 , ρ_1 y ρ_2 , con $\rho_2 \in \Sigma$, tales que conmutan los cuadrados:

$$\begin{array}{ccccc} W_2 & \xrightarrow{\rho_1} & W_1 & \xrightarrow{\sigma} & Z_1 \\ \downarrow \rho_2 & & \downarrow \tau & & \downarrow g \\ & & Z'_1 & \xrightarrow{g_1} & L \\ & & \downarrow v_1 & & \\ X & \xleftarrow{u} & Z & \xrightarrow{f} & Y \end{array}, \tag{4.4}$$

además, $u\rho_2 \in \Sigma$. Entonces

$$\delta_{v_1}(g_1)\delta_u(f) = \delta_{u\rho_2}(g_1\tau\rho_1) = \delta_{u\rho_2}(g\sigma\rho_1).$$

Por otro lado, también conmuta el cuadrado:

$$\begin{array}{ccc} W_2 & \xrightarrow{\sigma\rho_1} & Z_1 \\ \rho_2 \downarrow & & \downarrow v \\ Z & \xrightarrow{f} & Y \end{array},$$

porque $v\sigma\rho_1 = v_1\tau\rho_1 = f\rho_2$ usando la conmutatividad de los diagramas (??) y (??). Luego, conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} & & W_2 & & & & \\ & \rho_2 \swarrow & & \searrow \sigma\rho_1 & & & \\ X & \xleftarrow{u} & Z & \xrightarrow{f} & Y & \xleftarrow{v} & Z_1 \xrightarrow{g} L \end{array}$$

y se tiene,

$$\delta_v(g)\delta_u(f) = \delta_{u\rho_2}(g\sigma\rho_1) = \delta_{v_1}(g_1)\delta_u(f).$$

Finalmente, supongamos que $\delta_u(f) = \delta_{u_1}(f_1)$. Entonces,

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & u \swarrow & \uparrow \sigma & \searrow f & \\ X & \xleftarrow{\in \Sigma} & W & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & u_1 \swarrow & \downarrow \tau & \searrow f_1 & \\ & & Z'_1 & & \end{array},$$

conmuta y $u\sigma \in \Sigma$. Luego, por el axioma M2 de sistemas multiplicativos, existen W_1 , $\rho_1 \in \Sigma$ y ρ_2 tales que conmuta el cuadrado:

$$\begin{array}{ccccccc} & & W & \xleftarrow{\rho_1 \in \Sigma} & W_1 & & \\ & & \downarrow \sigma & & \downarrow \rho_2 & & \\ X & \xleftarrow{u} & Z & \xrightarrow{f} & Y & \xleftarrow{v} & Z_1 \xrightarrow{g} L. \end{array}$$

Entonces,

$$\delta_v(g)\delta_u(f) = \delta_{u\sigma\rho_1}(g\rho_2) = \delta_{u_1\tau\rho_1}(g\rho_2).$$

Por otro lado, en el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & W_1 & & \\ & & & & \swarrow \tau\rho_1 & \searrow \rho_2 & \\ X & \xleftarrow{u_1} & Z'_1 & \xrightarrow{f_1} & Y & \xleftarrow{v} & Z_1 \xrightarrow{g} L, \end{array}$$

el cuadrado conmuta porque $f_1\tau\rho_1 = f\sigma\rho_1 = v\rho_2$. Luego, se tiene,

$$\delta_v(g)\delta_{u_1}(f_1) = \delta_{u_1\tau\rho_1}(g\rho_2) = \delta_v(g)\delta_u(f),$$

y notemos que $u_1\tau\rho_1 \in \Sigma$ porque ρ_1 lo está y la composición $u_1\tau = u\sigma$ está en Σ . \square

Hemos visto que la composición de morfismos está bien definida en la categoría \mathcal{B}_Σ .

Observación 4.16. 1. Para $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow L$ en \mathcal{B} se tiene que

$$\delta_{1_Y}(g)\delta_{1_X}(f) = \delta_{1_X}(gf).$$

2. El morfismo $\delta_{1_W}(1_W)$ es la identidad en $\mathcal{B}_\Sigma(W, W)$ para cada W en \mathcal{B}_Σ .
3. Si $u \in \Sigma_{X,Z}$, entonces $\delta_u(u) = \delta_{1_Z}(1_Z)$.
4. Sea $u \in \Sigma_{X,Z}$, entonces $\delta_u(1_X)$ y $\delta_{1_X}(u)$ son inversos.
5. Dados los morfismos $u: Z \rightarrow X \in \Sigma$ y $f: Z \rightarrow Y$, el morfismo $\delta_u(f)$ se puede escribir como el producto:

$$\delta_u(f) = \delta_{1_Z}(f)\delta_u(1_Z).$$

6. Sean los morfismos $\delta_{u_1}(f_1)$ y $\delta_{u_2}(f_2)$ en $\mathcal{B}_\Sigma(X, Y)$, entonces existe $v \in \Sigma$ tal que $\delta_{u_1}(f_1) = \delta_v(g_1)$ y $\delta_{u_2}(f_2) = \delta_v(g_2)$. Es decir, dadas dos fracciones de X en Y podemos encontrar un denominador común. En consecuencia, vale la fórmula:

$$\delta_{u_1}(f_1) + \delta_{u_2}(f_2) = \delta_v(g_1 + g_2).$$

DEMOSTRACIÓN. 1. Se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & 1_X \swarrow & & \searrow f & \\ X & \xleftarrow{1_X} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xleftarrow{1_Y} & Y & \xrightarrow{g} & L. \end{array}$$

2. Sea $\delta_u(f) \in \mathcal{B}_\Sigma(X, Y)$. Se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & u \swarrow & & \searrow 1_Z & \\ X & \xleftarrow{1_X} & X & \xrightarrow{1_X} & X & \xleftarrow{u} & Z & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

De ahí que,

$$\delta_u(f)\delta_{1_X}(1_X) = \delta_u(f).$$

También es cierto que conmuta

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & 1_Z \swarrow & & \searrow f & \\ X & \xleftarrow{u} & Z & \xrightarrow{f} & Y & \xleftarrow{1_Y} & Y & \xrightarrow{1_Y} & Y \end{array}$$

Luego,

$$\delta_{1_Y}(1_Y)\delta_u(f) = \delta_u(f).$$

3. Si $u: X \rightarrow Z$ está en Σ , tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & u \swarrow & & \searrow u & \\ Z & \xleftarrow{1_Z} & Z & \xrightarrow{1_Z} & Z & \xleftarrow{1_Z} & Z & \xrightarrow{1_Z} & Z. \end{array}$$

Luego, $\delta_u(u) = \delta_{1_Z}(1_Z)\delta_{1_Z}(1_Z) = \delta_{1_Z}(1_Z)$.

4. Se tienen los diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & 1_X \swarrow & & \searrow 1_X & \\ X & \xleftarrow{1_X} & X & \xrightarrow{u} & Z & \xleftarrow{u} & X & \xrightarrow{1_X} & X, \end{array}$$

y también

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & 1_X \swarrow & & \searrow 1_X & \\ Z & \xleftarrow{u} & X & \xrightarrow{1_X} & X & \xleftarrow{1_X} & X & \xrightarrow{u} & Z. \end{array}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \delta_u(1_X)\delta_{1_X}(u) &= \delta_{1_X}(1_X), \quad \text{y, por otro lado,} \\ \delta_{1_X}(u)\delta_u(1_X) &= \delta_u(u) = \delta_{1_Z}(1_Z). \end{aligned}$$

5. Se tiene el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & 1_Z \swarrow & & \searrow 1_Z & \\ X & \xleftarrow{u} & Z & \xrightarrow{1_Z} & Z & \xleftarrow{1_Z} & Z & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

6. Como u_2 está en Σ , el axioma M2 para sistemas multiplicativos nos dice que existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & \xleftarrow{\lambda \in \Sigma} & W \\ u_1 \downarrow & & \downarrow \mu \\ X & \xleftarrow{u_2 \in \Sigma} & Z_2. \end{array} \tag{4.5}$$

El producto $u_1\lambda$ está en Σ , porque ambos morfismos lo están. Entonces, para $v := u_1\lambda$ y $g_1 := f_1\lambda$ el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z_1 & & \\
 & u_1 \nearrow & \uparrow \lambda & \searrow f_1 & \\
 X & \xleftarrow{u_1\lambda} & W & \xrightarrow{g_1} & Y \\
 & v \searrow & \downarrow 1_W & \nearrow g_1 & \\
 & & W & &
 \end{array} ,$$

luego, $\delta_{u_1}(f_1) = \delta_v(g_1)$. Análogamente, como (??) conmuta, entonces $u_2\mu = u_1\lambda = v$, y definiendo $g_2 := f_2\mu$, se tiene que

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z_2 & & \\
 & u_2 \nearrow & \uparrow \mu & \searrow f_2 & \\
 X & \xleftarrow{u_2\mu} & W & \xrightarrow{g_2} & Y \\
 & v \searrow & \downarrow 1_W & \nearrow g_2 & \\
 & & W & &
 \end{array}$$

conmuta, luego, $\delta_{u_2}(f_2) = \delta_v(g_2)$. □

Probemos que el producto que hemos definido es asociativo.

Afirmación 4.17. Sean los morfismos $\delta_u(f) \in \mathcal{B}_\Sigma(X, Y)$, $\delta_v(g) \in \mathcal{B}_\Sigma(Y, L)$ y $\delta_w(h) \in \mathcal{B}_\Sigma(L, M)$. Entonces,

$$\delta_w(h)[\delta_v(g)\delta_u(f)] = [\delta_w(h)\delta_v(g)]\delta_u(f).$$

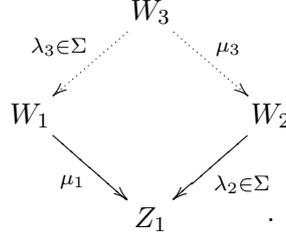
DEMOSTRACIÓN. Para el producto $\delta_v(g)\delta_u(f)$ tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & W_1 & & & & \\
 & \lambda_1 \in \Sigma \nearrow & & \searrow \mu_1 & & & \\
 X & \xleftarrow{u} Z & \xrightarrow{f} Y & \xleftarrow{v} Z_1 & \xrightarrow{g} L, & &
 \end{array}$$

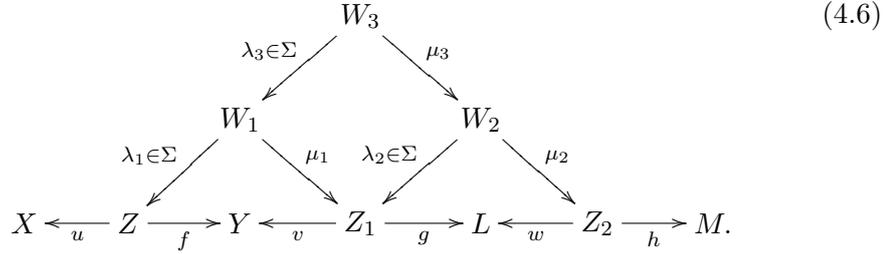
entonces $\delta_v(g)\delta_u(f) = \delta_{u\lambda_1}(g\mu_1)$. Por otro lado,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & W_2 & & & & \\
 & \lambda_2 \in \Sigma \nearrow & & \searrow \mu_2 & & & \\
 Y & \xleftarrow{v} Z_1 & \xrightarrow{g} L & \xleftarrow{w} Z_2 & \xrightarrow{h} M, & &
 \end{array}$$

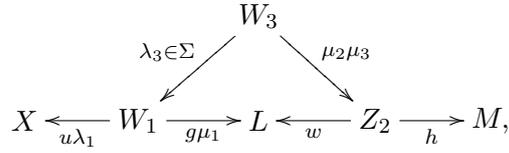
luego, $\delta_w(h)\delta_v(g) = \delta_{v\lambda_2}(h\mu_2)$. Puesto que λ_2 es un elemento de Σ , puedo completar a un cuadrado conmutativo como el siguiente:



Es decir, tengo el siguiente diagrama donde todos los cuadrados conmutan:



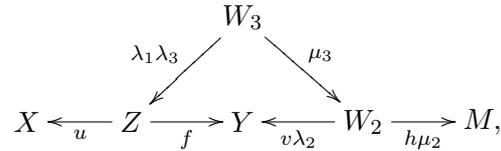
De ahí que, conmuta el diagrama:



en consecuencia,

$$\delta_w(h)[\delta_v(g)\delta_u(f)] = \delta_w(h)\delta_{u\lambda_1}(g\mu_1) = \delta_{u\lambda_1\lambda_3}(h\mu_2\mu_3).$$

Por otro lado, también del diagrama (??) tenemos la conmutatividad de



y por consecuencia tenemos,

$$[\delta_w(h)\delta_v(g)]\delta_u(f) = \delta_{v\lambda_2}(h\mu_2)\delta_u(f) = \delta_{u\lambda_1\lambda_3}(h\mu_2\mu_3).$$

□

De manera que, efectivamente, \mathcal{B}_Σ es una categoría.

4.3. Aditividad y propiedad universal de \mathcal{B}_Σ

Sea \mathcal{B} una categoría aditiva y Σ un sistema multiplicativo localmente pequeño a la izquierda en \mathcal{B} . Sea \mathcal{B}_Σ la categoría de fracciones asociada que construimos en la sección anterior. Ahora queremos probar que \mathcal{B}_Σ es una categoría aditiva (definición (??))

Definamos el objeto cero de \mathcal{B}_Σ . Sea 0 el objeto cero de \mathcal{B} . Luego, $0 \in \mathcal{B}_\Sigma$ también. Dado $A \in \mathcal{B}_\Sigma$, sea $\delta_{1_A}(0)$ el morfismo en $\text{Hom}_{\mathcal{B}_\Sigma}(A, 0)$, determinado por el diagrama $A \xleftarrow{1} A \xrightarrow{0} 0$. Luego, para cualquier otro morfismo $\delta_s(0)$ en $\text{Hom}_{\mathcal{B}_\Sigma}(A, 0)$, determinado por el diagrama $A \xleftarrow{s \in \Sigma} W \xrightarrow{0} 0$ se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & \\
 & \nearrow 1 & \uparrow s & \searrow 0 & \\
 & A & W & & 0 \\
 & \xleftarrow{s \in \Sigma} & & & \\
 & \nwarrow s & \downarrow 1 & \nearrow 0 & \\
 & & W & & .
 \end{array}$$

Entonces, $\delta_1(0) = \delta_s(0)$. Luego, $\delta_1(0)$ es el único elemento en $\text{Hom}_{\mathcal{B}_\Sigma}(A, 0)$.

Por otro lado, para $A \in \mathcal{B}_\Sigma$, sea $\delta_{1_0}(0)$ el morfismo en $\text{Hom}_{\mathcal{B}_\Sigma}(0, A)$ determinado por el diagrama $0 \xleftarrow{1_0} 0 \xrightarrow{0} A$. Entonces, para cualquier otro morfismo en $\text{Hom}_{\mathcal{B}_\Sigma}(0, A)$, determinado por un diagrama $0 \xleftarrow{s \in \Sigma} W \xrightarrow{f} A$, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & \\
 & \nearrow 1_0 & \uparrow 1_0 & \searrow 0 & \\
 & 0 & 0 & & A \\
 & \xleftarrow{1_0 \in \Sigma} & & & \\
 & \nwarrow s & \downarrow 0 & \nearrow f & \\
 & & W & & .
 \end{array}$$

Por lo tanto, $\delta_{1_0}(0) = \delta_s(f)$. Entonces, $\delta_{1_0}(0)$ es el único elemento en $\text{Hom}_{\mathcal{B}_\Sigma}(0, A)$. Luego, \mathcal{B}_Σ tiene objeto cero (éste coincide con el objeto cero de \mathcal{B}).

Ya sabemos que cada $\mathcal{B}_\Sigma(X, Y)$ es un grupo abeliano, porque lo hemos definido como el límite de un funtor.

Veamos que el producto distribuye a la suma. Sean una terna de objetos $X, Y, L \in \mathcal{B}_\Sigma$, los morfismos $\delta_u(f) \in \mathcal{B}_\Sigma(X, Y)$ y $l_1, l_2 \in \mathcal{B}_\Sigma(Y, L)$. Por la

observación (??), podemos suponer que $l_1 = \delta_v(g_1)$ y $l_2 = \delta_v(g_2)$. Entonces $l_1 + l_2 = \delta_v(g_1) + \delta_v(g_2) = \delta_v(g_1 + g_2)$ (porque δ_v es un morfismo de grupos abelianos). Luego, tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & W & & \\ & \swarrow^{\lambda \in \Sigma} & & \searrow_{\mu} & \\ X & \xleftarrow{u \in \Sigma} & Z & \xrightarrow{f} & Y & \xleftarrow{v \in \Sigma} & Z' & \xrightarrow{g_1 + g_2} & L. \end{array}$$

Y se tiene,

$$\begin{aligned} (l_1 + l_2)\delta_u(f) &= \delta_v(g_1 + g_2)\delta_u(f) = \delta_{u\lambda}((g_1 + g_2)\mu) \\ &= \delta_{u\lambda}(g_1\mu + g_2\mu) = \delta_{u\lambda}(g_1\mu) + \delta_{u\lambda}(g_2\mu) \\ &= \delta_v(g_1)\delta_u(f) + \delta_v(g_2)\delta_u(f) = l_1\delta_u(f) + l_2\delta_u(f). \end{aligned}$$

(porque \mathcal{B} es aditiva y $\delta_{u\lambda}$ es morfismo de grupos).

Sean ahora los morfismos $l_1, l_2 \in \mathcal{B}_\Sigma(X, Y)$, $\delta_v(g) \in \mathcal{B}_\Sigma(Y, L)$. Como antes, podemos suponer que $l_1 = \delta_u(f_1)$ y $l_2 = \delta_u(f_2)$. Así que $l_1 + l_2 = \delta_u(f_1 + f_2)$. Veamos primero el caso $v = 1_Y$, entonces

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \swarrow^{1_X} & \uparrow^s & \searrow^f & \\ X & \xleftarrow{s \in \Sigma} & W & \xrightarrow{0} & Y \\ & \swarrow^s & \downarrow^{1_W} & \searrow^0 & \\ & & W & & \end{array} .$$

Y se tiene,

$$\begin{aligned} \delta_v(g)(l_1 + l_2) &= \delta_{1_Y}(g)\delta_u(f_1 + f_2) = \delta_u(g(f_1 + f_2)) \\ &= \delta_u(gf_1 + gf_2) = \delta_u(gf_1) + \delta_u(gf_2) \\ &= \delta_{1_Y}(g)\delta_u(f_1) + \delta_{1_Y}(g)\delta_u(f_2) \\ &= \delta_{1_Y}(g)(l_1) + \delta_{1_Y}(g)(l_2), \end{aligned}$$

en este caso vale la distributividad.

Luego, si $g = 1_L$ y $v \in \Sigma_{L, Y}$, tenemos

$$\delta_{1_L}(v)[\delta_v(1_L)(l_1) + \delta_v(1_L)(l_2)] = \delta_{1_L}(v)\delta_v(1_L)(l_1) + \delta_{1_L}(v)\delta_v(1_L)(l_2) = l_1 + l_2,$$

entonces

$$\begin{aligned} \delta_v(1_L)(l_1 + l_2) &= \delta_v(1_L)[\delta_{1_L}(v)(\delta_v(1_L)(l_1) + \delta_v(1_L)(l_2))] \\ &= \delta_v(1_L)(l_1) + \delta_v(1_L)(l_2). \end{aligned}$$

Es decir, también vale la distributividad si $g = 1_L$.

Volvamos ahora al caso general, en el cual:

$$X \xleftarrow{u} Z \xrightarrow{f_1} Y \xleftarrow{v} W \xrightarrow{g} L.$$

De la observación (??) tenemos que $\delta_v(g) = \delta_{1_W}(g)\delta_v(1_W)$. Luego,

$$\begin{aligned} \delta_v(g)(l_1 + l_2) &= \delta_{1_W}(g)[\delta_v(1_W)(l_1 + l_2)] \\ &= \delta_{1_W}(g)[\delta_v(1_W)(l_1) + \delta_v(1_W)(l_2)] \\ &= \delta_{1_W}(g)\delta_v(1_W)(l_1) + \delta_{1_W}(g)\delta_v(1_W)(l_2) \\ &= \delta_v(g)(l_1) + \delta_v(g)(l_2). \end{aligned}$$

y vale la distributividad.

Antes de probar que en \mathcal{B}_Σ hay coproductos finitos, definiremos el *funtor localización*.

Veamos que la siguiente correspondencia

$$\begin{array}{ccc} Q: \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B}_\Sigma \\ X & & X \\ f \downarrow & \longmapsto & \downarrow \delta_{1_X}(f) \\ Y & & Y \end{array}$$

es un funtor aditivo. En efecto, por (??),

$$\begin{aligned} Q(gf) &= \delta_{1_X}(gf) = \delta_{1_Y}(g)\delta_{1_X}(f) = Q(g)Q(f), \\ Q(1_X) &= \delta_{1_X}(1_X) = 1_{Q(X)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, Q es un funtor entre las categorías \mathcal{B} y \mathcal{B}_Σ . Además, para f_1, f_2 morfismos en $\mathcal{B}(X, Y)$,

$$Q(f_1 + f_2) = \delta_{1_X}(f_1 + f_2) = \delta_{1_X}(f_1) + \delta_{1_X}(f_2) = Q(f_1) + Q(f_2),$$

luego, Q es aditivo. Observemos que, dado $\lambda: X \rightarrow Y$ con $\lambda \in \Sigma$, entonces $Q(\lambda) = \delta_{1_X}(\lambda)$ que implica un diagrama: $X \xleftarrow{1} X \xrightarrow{\lambda} Y$, pero también tiene sentido escribir $Y \xleftarrow{\lambda} X \xrightarrow{1} X$ que corresponde al morfismo $\delta_\lambda(1_X)$. Además, hemos visto (observación (??)) que $\delta_{1_X}(\lambda)$ y $\delta_\lambda(1_X)$ son inversos. Por lo tanto, $Q(\lambda)$ es un isomorfismo en \mathcal{B}_Σ para todo $\lambda \in \Sigma$.

Esta propiedad es universal para el funtor Q en el sentido de que cualquier otro funtor que la tenga se factoriza por Q . Esto lo probamos en la siguiente:

Proposición 4.18. *Sea \mathcal{B} una categoría aditiva, Σ un sistema multiplicativo en \mathcal{B} localmente pequeño a la izquierda y Q el funtor definido en el párrafo anterior. Si $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ es un funtor aditivo tal que para todo $\lambda \in \Sigma$, $G(\lambda)$ es isomorfismo, entonces existe un único funtor aditivo $H: \mathcal{B}_\Sigma \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $HQ = G$.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $Ob\mathcal{B} = Ob\mathcal{B}_\Sigma$, y queremos definir H que haga conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{Q} & \mathcal{B}_\Sigma \\ & \searrow G & \downarrow H \\ & & \mathcal{C}, \end{array}$$

entonces $H(X) := G(X)$, para cada $X \in Ob\mathcal{B}_\Sigma$. Sea $\delta_u(f)$ un morfismo en $\mathcal{B}_\Sigma(X, Y)$. Como $u \in \Sigma$, existe $G(u)^{-1}$. Definimos $H(\delta_u(f)) = G(f)G(u)^{-1}$. Veamos que H está bien definido. Supongamos que $\delta_u(f) = \delta_{u_1}(f_1)$, luego tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & u & \nearrow & f & \\ & & X & & Y \\ & \in \Sigma & \longleftarrow W & \longrightarrow & \\ & & \downarrow \mu & & \\ & u_1 & \searrow & f_1 & \\ & & Z_1 & & \end{array} .$$

Como u , u_1 y $u\lambda = u_1\mu$ están en Σ , entonces existen $G(u)^{-1}$, $G(u_1)^{-1}$, $G(u\lambda)^{-1}$ y $G(u_1\mu)^{-1}$. Luego,

$$\begin{array}{lcl} G(u\lambda) = G(u)G(\lambda) & & G(u_1\mu) = G(u_1)G(\mu) \\ G(u)^{-1}G(u\lambda) = G(\lambda) & \text{y} & G(u_1)^{-1}G(u_1\mu) = G(\mu) \\ G(u)^{-1} = G(\lambda)G(u\lambda)^{-1} & & G(u_1)^{-1} = G(\mu)G(u_1\mu)^{-1}. \end{array}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} G(f)G(u)^{-1} &= G(f)G(\lambda)G(u\lambda)^{-1} = G(f\lambda)G(u\lambda)^{-1} \\ &= G(f_1\mu)G(u_1\mu)^{-1} = G(f_1)G(\mu)G(u_1\mu)^{-1} \\ &= G(f_1)G(u_1)^{-1}. \end{aligned}$$

Luego, H está bien definido. Probemos ahora que H es un funtor: Sean $\delta_u(f)$ y $\delta_v(g)$ morfismos en \mathcal{B}_Σ que se pueden componer. Para el producto

$\delta_v(g)\delta_u(f)$ tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & W & & \\ & \swarrow^{\lambda \in \Sigma} & & \searrow_{\mu} & \\ X & \xleftarrow{u} & Z & \xrightarrow{f} & Y & \xleftarrow{v} & Z' & \xrightarrow{g} & L, \end{array}$$

de ahí que:

$$H(\delta_v(g)\delta_u(f)) = H(\delta_{u\lambda}(g\mu)) = G(g\mu)G(u\lambda)^{-1}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} H(\delta_v(g))H(\delta_u(f)) &= G(g)G(v)^{-1}G(f)G(u)^{-1} = G(g)G(\mu)G(\lambda)^{-1}G(u)^{-1} \\ &= G(g\mu)G(u\lambda)^{-1}. \end{aligned}$$

Además, para la identidad se tiene que:

$$H(\delta_{1_X}(1_X)) = G(1_X)G(1_X)^{-1} = 1_{G(X)}1_{G(X)} = 1_{G(X)} = 1_{H(X)}.$$

Por lo tanto, H es funtor. Veamos que es aditivo. Sean l_1, l_2 morfismos en $\mathcal{B}_\Sigma(X, Y)$. Luego, sin perder generalidad $l_1 = \delta_u(f_1)$ y $l_2 = \delta_u(f_2)$. Así que:

$$\begin{aligned} H(l_1 + l_2) &= H(\delta_u(f_1) + \delta_u(f_2)) = H(\delta_u(f_1 + f_2)) \\ &= G(f_1 + f_2)G(u)^{-1} = G(f_1)G(u)^{-1} + G(f_2)G(u)^{-1} \\ &= H(l_1) + H(l_2). \end{aligned}$$

Ahora supongamos que existe un funtor aditivo $H_1: \mathcal{B}_\Sigma \rightarrow \mathcal{C}$ tal que conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{Q} & \mathcal{B}_\Sigma \\ & \searrow G & \downarrow H_1 \\ & & \mathcal{C}, \end{array}$$

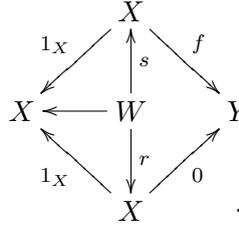
entonces también $H_1(X) = G(X) = H(X)$ para cada $X \in \mathcal{Ob}\mathcal{B}_\Sigma$. Sea $\delta_u(f)$ un morfismo en $\mathcal{B}_\Sigma(X, Y)$. Hemos visto que $\delta_u(f) = \delta_{1_Z}(f)\delta_u(1_Z)$ (si se tiene $X \xleftarrow{u} Z \xrightarrow{f} Y$), y, además $\delta_u(1_Z) = (\delta_{1_Z}(u))^{-1}$ (observación (??)). Luego, $\delta_u(f) = \delta_{1_Z}(f)\delta_u(1_Z) = \delta_{1_Z}(f)(\delta_{1_Z}(u))^{-1} = Q(f)Q(u)^{-1}$. Entonces,

$$\begin{aligned} H_1(\delta_u(f)) &= H_1(Q(f)Q(u)^{-1}) = H_1Q(f)H_1Q(u)^{-1} \\ &= G(f)G(u)^{-1} = H(\delta_u(f)), \end{aligned}$$

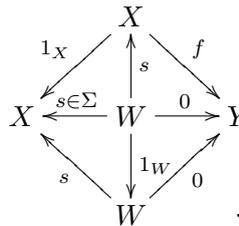
luego, H es el único funtor con esa propiedad. \square

Observación 4.19. Sea $f: X \rightarrow Y$ un morfismo en \mathcal{B} , Q el funtor localización en \mathcal{B}_Σ . Entonces $Q(f) = 0$ si y sólo si existe $s: W \rightarrow X$ en Σ tal que $fs = 0$, equivalentemente, si y sólo si existe $t: Y \rightarrow W_1$ en Σ tal que $tf = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $Q(f) = 0$, entonces $\delta_{1_X}(f) = \delta_{1_X}(0)$. Por el lema (??), existen W , s y r tales que $1_X s = s$ está en Σ y conmuta el diagrama:



Luego, $fs = 0r = 0$. Recíprocamente, si existe $s: W \rightarrow X$ en Σ tal que $fs = 0$, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:



Luego, $Q(f) = \delta_{1_X}(f) = \delta_s(0) = 0$. La segunda equivalencia se tiene por el axioma M3 para el sistema multiplicativo Σ . En efecto, dados los morfismos $X \xrightarrow[0]{f} Y$, entonces existe $s \in \Sigma$ tal que $fs = 0s = 0$, si y sólo si existe $t \in \Sigma$ tal que $tf = t0 = 0$. □

Observación 4.20. El funtor $Q: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_\Sigma$ envía los elementos de Σ en isomorfismos. Luego, dado $u \in \Sigma$, existe $Q(u)^{-1}$. Sea el morfismo de \mathcal{B}_Σ representado por el diagrama $X \xleftarrow{u} Z \xrightarrow{f} Y$. El morfismo $Q(u)^{-1} \in \mathcal{B}_\Sigma$ está representado por el diagrama $X \xleftarrow{u} Z \xrightarrow{1} Y$ y el morfismo $Q(f)$ por $Z \xleftarrow{1} Z \xrightarrow{f} Y$. Luego, por el inciso (5) de la observación (??), es claro que el morfismo $X \xrightarrow{Q(f)Q(u)^{-1}} Y$ está representado por el diagrama $X \xleftarrow{u} Z \xrightarrow{f} Y$ en \mathcal{B}_Σ . Nos conviene ver los morfismos en \mathcal{B}_Σ de esta

forma. Luego, al hablar de un morfismo $\delta: X \rightarrow Y$ en \mathcal{B}_Σ , asumiremos que $\delta = Q(f)Q(u)^{-1}$, para $u \in \Sigma$ y f en \mathcal{B} .

Observación 4.21. Sea δ un morfismo en \mathcal{B}_Σ . Hemos visto que podemos escribir a δ como $Q(f)Q(u)^{-1}$ con $u \in \Sigma$. Notemos que también podemos escribir este morfismo como $Q(v)^{-1}Q(g)$ con $v \in \Sigma$. A este tipo de escritura se le llama fracción izquierda.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos morfismos $X \xleftarrow{u} Z \xrightarrow{f} Y$. Usando la propiedad M2(b) de la definición (??) para el sistema multiplicativo Σ , podemos completar a un cuadrado conmutativo en \mathcal{B} :

$$\begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{v \in \Sigma} & Y \\ g \uparrow & & \uparrow f \\ X & \xleftarrow{u \in \Sigma} & Z \end{array}$$

Luego, $Q(g)Q(u) = Q(v)Q(f)$. Así que $Q(v)^{-1}Q(g) = Q(f)Q(u)^{-1}$. \square

Observación 4.22. Si \mathcal{B} es aditiva, entonces \mathcal{B}_Σ también lo es.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$, con I finito, un conjunto de objetos en \mathcal{B}_Σ . Como los objetos de \mathcal{B}_Σ son los mismos de \mathcal{B} , entonces en \mathcal{B} tengo la familia de inclusiones $\{\lambda_i: X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i\}$ y de proyecciones $\{\pi_i: \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ tales que

$$\begin{aligned} \pi_i \lambda_i &= 1_{X_i}, & \pi_i \lambda_j &= 0 \quad \text{si } i \neq j \text{ y} \\ \sum_{i \in I} \lambda_i \pi_i &= 1_{\coprod X_i}. \end{aligned}$$

Entonces en \mathcal{B}_Σ tengo las familias de morfismos: $\{Q(\lambda_i): X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i\}_{i \in I}$ y $\{Q(\pi_i): \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i\}_{i \in I}$. Probemos que cumplen las propiedades del coproducto.

$$Q(\pi_i)Q(\lambda_i) = Q(\pi_i \lambda_i) = Q(1_{X_i}) = 1_{Q(X_i)}.$$

Si $i \neq j$,

$$Q(\pi_j)Q(\lambda_i) = Q(\pi_j \lambda_i) = Q(0) = 0.$$

Además,

$$\sum_{i \in I} Q(\lambda_i)Q(\pi_i) = \sum_{i \in I} Q(\lambda_i \pi_i) = Q\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \pi_i\right) = Q(1_{\coprod X_i}) = 1_{Q(\coprod X_i)}.$$

Por lo tanto, $\{Q(\lambda_i)\}_{i \in I}$ y $\{Q(\pi_i)\}_{i \in I}$ son las inclusiones y las proyecciones para $Q(\coprod_{i \in I} X_i) = \coprod_{i \in I} X_i$ en \mathcal{B}_Σ y se tiene el coproducto en \mathcal{B}_Σ . \square

Definición 4.23. Sea \mathcal{B} una categoría aditiva, Σ un sistema multiplicativo de morfismos de \mathcal{B} . Una localización de \mathcal{B} con respecto a Σ es una categoría aditiva \mathcal{B}_Σ junto con un funtor aditivo $Q: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_\Sigma$ tal que:

1. Las categorías \mathcal{B} y \mathcal{B}_Σ tienen los mismos objetos.
2. Si un morfismo u está en Σ , entonces $Q(u)$ es un isomorfismo.
3. Si existe otro funtor aditivo $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $G(u)$ es isomorfismo para todo u en Σ , entonces existe un único funtor aditivo $H: \mathcal{B}_\Sigma \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $HQ = G$ (luego, \mathcal{B}_Σ es única hasta equivalencia).

En este caso decimos que Q es el funtor localización del sistema Σ .

En conclusión, en esta sección hemos probado que:

Teorema 4.24. Toda categoría aditiva \mathcal{B} con un sistema multiplicativo Σ de morfismos de \mathcal{B} localmente pequeño a la izquierda admite una localización

$$Q: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_\Sigma.$$

Capítulo 5

La Categoría Derivada de Módulos

A partir de ahora nos concentraremos en el caso de que la categoría \mathcal{A} sea la de A -módulos izquierdos. En este capítulo obtenemos la categoría derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Ya hemos dado los primeros pasos en esta dirección. En efecto, partiendo de la categoría $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ de complejos con entradas en \mathcal{A} (para \mathcal{A} una categoría abeliana arbitraria), hemos construido la categoría cociente $K(\mathcal{A})$, identificando los morfismos que son homotópicos, y vimos que $K(\mathcal{A})$ es aditiva. En el capítulo anterior aprendimos a construir, partiendo de una categoría aditiva \mathcal{B} y una clase de morfismos Σ que es localmente pequeña a la izquierda, su categoría de fracciones \mathcal{B}_Σ . Lo que hacemos ahora es definir los cuasi-isomorfismos de $K(\mathcal{A})$ y probar que la clase Σ de los cuasi-isomorfismos es localmente pequeña a la izquierda. Esto nos permite hablar de la categoría derivada de A -módulos: $\mathcal{D}(\mathcal{A}) := K(\mathcal{A})_\Sigma$.

5.1. Módulos, homología y cuasi-isomorfismos

Definición 5.1. *Sea k un campo. Entonces:*

1. *Una k -álgebra A es un anillo (asociativo y posiblemente sin elemento identidad) que tiene además una estructura de k -espacio vectorial y satisface, para cada $a, b \in A$ y $\lambda \in k$,*

$$a(\lambda b) = \lambda(ab) = (\lambda a)b.$$

2. *Un sistema completo de idempotentes ortogonales $\{e_x\}_{x \in T}$ para la k -álgebra A es una familia de elementos idempotentes e_x de A tales que:*

a) $e_x e_y = 0$, para cada $x, y \in T$ con $x \neq y$.

b) $A = \bigoplus_{x,y \in T} e_y A e_x$.

3. Una k -álgebra con idempotentes \underline{A} es una pareja $\underline{A} = (A, \{e_x\}_{x \in T})$, donde A es una k -álgebra y $\{e_x\}_{x \in T}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales de A .

Definición 5.2. Si A es una k -álgebra entonces:

1. Un A -módulo (izquierdo) M es un k -espacio vectorial M provisto de una aplicación bilineal $\mu: A \times M \rightarrow M$ (la acción de A sobre M). Escribiremos $\mu(a, m) = am$, para cada $a \in A, m \in M$, y requeriremos, además, que $a(bm) = (ab)m$, para cada $a, b \in A, m \in M$.
2. Un morfismo $f: M \rightarrow N$ del A -módulo M en el A -módulo N es una función k -lineal tal que $f(am) = af(m)$, para cada $a \in A$ y $m \in M$.
3. La categoría $A\text{-Mod}$ tiene por objetos los A -módulos izquierdos y conjuntos de morfismos $\text{Hom}_A(M, N)$ formados por los morfismos de A -módulos de M en N . La composición en $A\text{-Mod}$ es la composición de funciones.

Observación 5.3. $A\text{-Mod}$ es una categoría abeliana con coproductos arbitrarios y supondremos conocidas las nociones y construcciones básicas de la Teoría de Módulos para k -álgebras (posiblemente sin uno).

Definición 5.4. Si $\underline{A} = (A, \{e_x\}_{x \in T})$ es una k -álgebra con idempotentes, entonces:

1. Un \underline{A} -módulo (izquierdo) M es un A -módulo tal que $M = \bigoplus_{x \in T} e_x M$ (una descomposición en suma directa de subespacios vectoriales).
2. $\underline{A}\text{-Mod}$ denota la subcategoría plena de $A\text{-Mod}$ formada por los \underline{A} -módulos.

Observación 5.5. Si \underline{A} es una k -álgebra con idempotentes y $M \in \underline{A}\text{-Mod}$, entonces $m = \sum_{x \in T} e_x m$, para cada $m \in M$. En efecto, si $m = \sum_{x \in T} e_x m_x$ con $m_x \in M$ cero para casi todo $x \in T$, tenemos que

$$e_y m = e_y \left(\sum_{x \in T} e_x m_x \right) = \sum_{x \in T} e_y e_x m_x = e_y m_y,$$

para cada $y \in T$.

Similarmente, cada $a \in A$ tiene la forma

$$a = \sum_{y \in T} e_y a = \sum_{x \in T} a e_x = \sum_{x, y \in T} e_y a e_x.$$

Observación 5.6. Si \underline{A} es una k -álgebra con idempotentes, el funtor inclusión $E: \underline{A}\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ tiene un inverso izquierdo $?_0: A\text{-Mod} \rightarrow \underline{A}\text{-Mod}$ definido por $M_0 := \sum_{x \in T} e_x M$ y si $f \in \text{Hom}_A(M, N)$, $f_0: M_0 \rightarrow N_0$ es la restricción de f en $\underline{A}\text{-Mod}$.

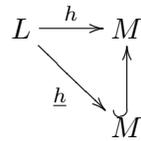
Es fácil mostrar las siguientes proposiciones:

Proposición 5.7. Sea \underline{A} una k -álgebra con idempotentes. Entonces:

1. Los monomorfismos (respectivamente, epimorfismos) en $\underline{A}\text{-Mod}$ son los morfismos inyectivos (respectivamente, suprayectivos).
2. Si $g: N \rightarrow M$ es un monomorfismo en $A\text{-Mod}$ con $M \in \underline{A}\text{-Mod}$, entonces $N \in \underline{A}\text{-Mod}$.
3. Si $f: M \rightarrow N$ es un epimorfismo en $A\text{-Mod}$ con $M \in \underline{A}\text{-Mod}$, entonces $N \in \underline{A}\text{-Mod}$.
4. Si $0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta en la categoría $A\text{-Mod}$ con $M, N \in \underline{A}\text{-Mod}$, entonces $E \in \underline{A}\text{-Mod}$.
5. $\underline{A}\text{-Mod}$ es una subcategoría de $A\text{-Mod}$ cerrada bajo la formación de coproductos (aunque, en general, no es cerrada bajo la formación de productos).
6. $\underline{A}\text{-Mod}$ es una categoría abeliana con coproductos.

Proposición 5.8. Sea $\underline{A} = (A, \{e_x\}_{x \in T})$ una k -álgebra con idempotentes. Si M es un A -módulo, entonces:

1. $\underline{M} := \bigoplus_{x \in T} e_x M$ es un A -submódulo de M . Además, $\underline{M} = M$ si y sólo si $M \in \underline{A}\text{-Mod}$.
2. Sea el morfismo $h: L \rightarrow M$ con L en $\underline{A}\text{-Mod}$, entonces $h(L) \subseteq \underline{M}$. Esto es, existe $\underline{h} \in \underline{A}\text{-Mod}$ que hace conmutar el diagrama:



3. Sea la familia $\{L_i\}_{i \in I}$ en $\underline{A}\text{-Mod}$, entonces $\underline{\prod_{i \in I} L_i} := \bigoplus_{x \in T} e_x(\prod_{i \in I} L_i)$ es su producto en $\underline{A}\text{-Mod}$.
4. Sea la familia $\{L_i\}_{i \in I}$ en $\underline{A}\text{-Mod}$, entonces $\prod_{i \in I} L_i \subseteq \underline{\prod_{i \in I} L_i}$.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos únicamente el tercer inciso. Sea Y un \underline{A} -módulo y $\{g_i: Y \rightarrow L_i\}_{i \in I}$ una familia de morfismos en $\underline{A}\text{-Mod}$. Por la propiedad universal del producto $\prod_{i \in I} L_i$ en $A\text{-Mod}$, existe $\hat{g}: Y \rightarrow \prod_{i \in I} L_i$ tal que, para $p_i: \prod_{i \in I} L_i \rightarrow L_i$ la i -ésima proyección, se tiene $p_i \hat{g} = g_i$, para cada $i \in I$. El siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{\hat{g}} & \prod_{i \in I} L_i \\
 \searrow g & & \nearrow \sigma \\
 & \underline{\prod_{i \in I} L_i} & \\
 \swarrow g_i & & \searrow p_i \\
 & L_i &
 \end{array}$$

donde la existencia de σ y de g se tiene por los incisos **1** y **2** respectivamente. Sea $\pi_i := p_i \sigma$, para cada $i \in I$. Probemos la unicidad de g . Supongamos que existe $g': Y \rightarrow \underline{\prod_{i \in I} L_i}$ y que también $\pi_i g' = g_i$, para cada $i \in I$. Entonces, $p_i \sigma g = \pi_i g = \pi_i g' = p_i \sigma g'$; luego, $\sigma g = \sigma g'$, porque cada p_i es una proyección. Además, σ es monomorfismo, luego, $g = g'$. Por lo tanto, $\underline{\prod_{i \in I} L_i}$ es el producto de $\{L_i\}_{i \in I}$ en $\underline{A}\text{-Mod}$ y $\{\pi_i\}_{i \in I}$ son sus proyecciones. \square

Observación 5.9. Si A es una k -álgebra con identidad 1 , que admite una descomposición $1 = \sum_{i=1}^n e_i$ en suma de idempotentes ortogonales, entonces

$$(A, \{e_i\}_{i=1}^n)\text{-Mod} = (A, 1)\text{-Mod}.$$

En adelante trabajaremos siempre con una k -álgebra con idempotentes $(A, \{e_x\}_{x \in T})$, la cual, por simplicidad, denotaremos como A .

Lema 5.10. Una sucesión $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ de morfismos en $\underline{A}\text{-Mod}$ es exacta, en el sentido usual, si y sólo si para todo $x \in T$ la sucesión de espacios vectoriales $0 \longrightarrow e_x M \xrightarrow{f_x} e_x E \xrightarrow{g_x} e_x N \longrightarrow 0$ es exacta para f_x y g_x las restricciones de f y g a $e_x M$ y a $e_x E$ respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, f_x es monomorfismo, por ser restricción de f . Además, para todo $e_x m \in e_x M$ se tiene $g_x f_x(e_x m) = g_x(f(e_x m)) = g(f(e_x m)) = 0$, entonces la imagen de f_x está contenida en el núcleo de g_x . Por otro lado, si $e_x l$ está en el núcleo de g_x , entonces $0 = g_x(e_x l) = g(e_x l)$. Luego, $e_x l = f(m)$, para algún $m \in M$. Por lo tanto, $e_x l = e_x^2 l = e_x f(m) = f(e_x m) = f_x(e_x m)$, entonces el núcleo de g_x está contenido en la imagen de f_x . Finalmente, sea $n = e_x n_1 \in e_x N$, entonces $n_1 = g(l)$ para algún $l \in L$. Luego, $n = e_x n_1 = e_x g(l) = g(e_x l) = g_x(e_x l)$.

Recíprocamente, supongamos que $f(m) = 0$ para $m = \sum_{i=0}^n e_{x_i} m_i$, entonces $0 = \sum_{i=0}^n e_{x_i} f(m_i) = \sum_{i=0}^n e_{x_i} f_{x_i}(m_i)$. Multiplicando por e_{x_j} tenemos $e_{x_j} f_{x_j}(m_j) = 0$, para cada x_j . Luego, $f_{x_j}(m_j) = 0$; así que cada $m_j = 0$. Por otro lado, $g f(m) = \sum_{i=0}^n e_{x_i} g f(m_i) = \sum_{i=0}^n e_{x_i} g_{x_i} f_{x_i}(m_i) = 0$. Sea $l = \sum_{i=0}^n e_{x_i} l_i$ en $\ker g$. Por lo tanto, $\sum_{i=0}^n e_{x_i} g_{x_i} l_i = 0$. Multiplicando por e_{x_i} a la izquierda, vemos que cada $g_{x_i}(l_i)$ es cero. Por lo tanto, $l_i = f_{x_i}(m_i)$ para $m_i \in e_{x_i} M$, para cada $i = 0, \dots, n$. Luego, $l = \sum_{i=0}^n e_{x_i} f_{x_i}(m_i) = f(\sum_{i=0}^n e_{x_i} m_i)$. Finalmente, sea $n = \sum_{i=0}^n e_{x_i} n_i \in N$. Entonces $n = \sum_{i=0}^n e_{x_i} g_{x_i}(l_i) = g(\sum_{i=0}^n e_{x_i} l_i)$. \square

Afirmación 5.11. *Sea M un A -módulo izquierdo y e un idempotente en A . Entonces el mapeo $\psi: \text{Hom}_A(Ae, M) \rightarrow eM$, dado por $\psi(f) = f(e)$ es un isomorfismo de grupos abelianos que es natural en M .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\psi(f) = 0$. Luego, $f(ae) = af(e) = a0 = 0$, para todo $a \in A$. Entonces $f = 0$. Sea $m \in eM$, luego, $m = em_1$, para algún $m_1 \in M$. Así $em = e^2 m_1 = em_1 = m$. Definimos un morfismo $g: Ae \rightarrow M$ tal que $g(ae) = aem$, entonces $g \in \text{Hom}_A(Ae, M)$. Además, $\psi(g) = g(e) = em = m$. Luego, ψ es un isomorfismo. Veamos que ψ es natural en la variable M . En efecto, sean M y N un par de A -módulos y $h: M \rightarrow N$ un morfismo de A -módulos. Como $h(eM) \subseteq eN$, si denotamos por h_e la restricción de h a eM , entonces el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_A(Ae, M) & \xrightarrow{\psi_M} & eM \\ h^* \downarrow & & \downarrow h_e \\ \text{Hom}_A(Ae, N) & \xrightarrow{\psi_N} & eN, \end{array} \quad (5.1)$$

conmuta. □

Proposición 5.12. *El A -módulo izquierdo Ae_x es proyectivo, para todo $x \in T$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de A -módulos. Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow e_x M \xrightarrow{f_x} e_x L \xrightarrow{g_x} e_x N \longrightarrow 0 \tag{5.2}$$

de grupos abelianos también es exacta, para cada $x \in T$. Además, la conmutatividad de (??) nos permite concluir que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & e_x M & \xrightarrow{f_x} & e_x L & \xrightarrow{g_x} & e_x N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(Ae_x, M) & \xrightarrow{f_*} & \text{Hom}_A(Ae_x, L) & \xrightarrow{g_*} & \text{Hom}_A(Ae_x, N) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Por lo tanto, el renglón inferior es exacto. Luego, Ae_x es proyectivo, para todo $x \in T$. □

Proposición 5.13. *Para cada A -módulo M existe un epimorfismo $f: P \rightarrow M$ con P proyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la familia de funciones $\{f_m: Ae_x \rightarrow e_x M\}_{m \in e_x M}$ definidas por $f_m(e_x) = m$. Tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{m \in e_x M} (Ae_x)_m & \xrightarrow{f_x} & e_x M \\ \lambda_m \uparrow & \nearrow f_m & \\ Ae_x & & \end{array},$$

donde f_x existe por la propiedad universal del coproducto y es la única tal que $f_x \lambda_m = f_m$, para todo $m \in e_x M$. Entonces $m = f_m(e_x) = f_x \lambda_m(e_x)$. De esta manera cada elemento de $e_x M$ es imagen de f_x , luego, cada elemento de $e_x M$ está cubierto por f_x . Como cada Ae_x es proyectivo (proposición (??)), entonces $P_x := \bigoplus_{m \in e_x M} (Ae_x)_m$ también es proyectivo. En el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{x \in T} P_x & \xrightarrow{f} & M \\ \lambda_{P_x} \uparrow & \nearrow f_x & \\ P_x & & \end{array},$$

el morfismo f existe y es único por la propiedad universal del coproducto y es un epimorfismo porque $M = \sum_{x \in T} e_x M$. Además, $\bigoplus_{x \in T} P_x$ es proyectivo por ser suma de proyectivos. \square

Sea \mathcal{A} una categoría abeliana. Si para cada objeto $M \in \mathcal{A}$ existe un epimorfismo $f: P \rightarrow M$ con P proyectivo, entonces decimos que \mathcal{A} tiene suficientes proyectivos. En este caso, hemos probado que $\underline{A}\text{-Mod}$ tiene suficientes proyectivos.

Definición 5.14. Sea M un A -módulo izquierdo. Definimos el complejo concentrado en M (de grado 0) como $\underline{M} = (\dots, 0, M, 0, \dots)$ con M en la entrada cero y sus morfismos diferenciales iguales a cero. Sea $l \in \mathbb{Z}$. El complejo concentrado en M de grado l es $\underline{M}[-l] = (\underline{M}^{i-l}, (-1)^{-l} d_{\underline{M}}^{i-l})_{i \in \mathbb{Z}} = (\dots, 0, M, 0, \dots)$ el complejo cuya única entrada no cero ocurre cuando $i = l$ (luego, M está en el lugar l) y cuyos morfismos diferenciales son todos cero.

Definición 5.15. Sea $i \in \mathbb{Z}$, y recordemos nuestra suposición: $\mathcal{A} = \underline{A}\text{-Mod}$.

1. Sea $\dot{X}: \dots \rightarrow X^{i-1} \xrightarrow{d_X^{i-1}} X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \rightarrow \dots$ un complejo en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Si $Z^i(\dot{X}) := \ker d_X^i$ y $B^i(\dot{X}) := \text{Im} d_X^{i-1}$, definimos el i -ésimo módulo de cohomología $H^i(\dot{X}) := Z^i(\dot{X})/B^i(\dot{X})$.
2. Sea $\dot{f}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ un morfismo de complejos. Es claro que, en el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & B^i(\dot{X}) \subseteq Z^i(\dot{X}) & \hookrightarrow & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \\
 \downarrow f^{i-1} & & \downarrow & & \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} \\
 Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & B^i(\dot{Y}) \subseteq Z^i(\dot{Y}) & \hookrightarrow & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1}
 \end{array}$$

la restricción del morfismo f^i a $Z^i(\dot{X})$ y a $B^i(\dot{X})$ nos induce morfismos con codominios $Z^i(\dot{Y})$ y $B^i(\dot{Y})$ respectivamente. Luego, \dot{f} induce un morfismo $\overline{f^i}$ de A -módulos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc}
 H^i(\dot{X}) = Z^i(\dot{X})/B^i(\dot{X}) & \xrightarrow{\overline{f^i}} & Z^i(\dot{Y})/B^i(\dot{Y}) = H^i(\dot{Y}) \\
 \bar{x} & \mapsto & f^i(x).
 \end{array}$$

3. Definimos el i -ésimo functor cohomológico $H^i: \mathcal{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ como sigue: Para un complejo \dot{X} en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, $H^i(\dot{X})$ es su i -ésimo módulo de

cohomología; y dado el morfismo de complejos $f: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$, entonces $H^i(\dot{f}) = f^i$, el morfismo inducido por \dot{f} del inciso (2). Es claro que H^i es un funtor aditivo. Además, el homomorfismo conectivo es un morfismo de funtores de H^i en H^{i+1} , luego, es natural.

Observemos que $Z^0(\dot{X}[n]) = Z^n(\dot{X})$ y que $B^0(\dot{X}[n]) = B^n(\dot{X})$, entonces $H^0(\dot{X}[n]) = H^n(\dot{X})$.

Observación 5.16. Como $H^i(\dot{f}) = 0$ para cada morfismo \dot{f} homotópico a cero, tenemos funtores cohomológicos \underline{H}^i que hacen conmutar:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{H^i} & \mathcal{A} \\ \rho \downarrow & \nearrow \underline{H}^i & \\ K(\mathcal{A}) & & . \end{array}$$

Por simplicidad, denotaremos a \underline{H}^i también por H^i .

Proposición 5.17. Si M es un A -módulo proyectivo, entonces, para $\underline{M}[-i]$ su complejo concentrado en grado i , se tiene el isomorfismo de grupos:

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\underline{M}[-i], \dot{X}) \cong \mathrm{Hom}_A(M, H^i(\dot{X})),$$

para todo complejo \dot{X} , y para todo $i \in \mathbb{Z}$. Además, es natural en \dot{X} , es decir, para cada $\dot{q}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ en $K(\mathcal{A})$ conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\underline{M}[-i], \dot{X}) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_A(M, H^i(\dot{X})) \\ \dot{q}_* \downarrow & & \downarrow H^i(\dot{q}) \\ \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\underline{M}[-i], \dot{Y}) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_A(M, H^i(\dot{Y})) \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\dot{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\underline{M}[-i], \dot{X})$. Entonces conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow f^i & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Puesto que $d_X^i f^i = 0$, se tiene que $\mathrm{Im} f^i \subseteq \ker d_X^i = Z^i(\dot{X})$, luego f^i es un morfismo de M en $Z^i(\dot{X})$. Sea $\pi: Z^i(\dot{X}) \rightarrow H^i(\dot{X})$ la proyección natural. Entonces tenemos los morfismos

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\underline{M}[-i], \dot{X}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}_A(M, Z^i(\dot{X})) & \xrightarrow{\pi^*} & \mathrm{Hom}_A(M, H^i(\dot{X})) \\ \dot{f} & \mapsto & f^i & \mapsto & \pi f^i. \end{array}$$

Supongamos que $\dot{f} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\underline{M}[-i], \dot{X})$ es homotópico a cero. Entonces existe un morfismo $s^i: M \rightarrow X^{i-1}$ tal que $f^i = d_X^{i-1} s^i$. Entonces conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & M & & & & \\
 & \swarrow s^i & \downarrow f^i & & & & \\
 X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & B^i(\dot{X}) & \hookrightarrow & Z^i(\dot{X}) & \xrightarrow{\pi} & H^i(\dot{X}) \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & X^i & & & &
 \end{array}$$

y se tiene que

$$\pi_* \varphi(\dot{f}) = \pi_*(f^i) = \pi f^i = \pi d_X^{i-1} s^i = 0 s^i = 0.$$

Por lo tanto, si $\rho: \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\underline{M}[-i], \dot{X}) \rightarrow \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\underline{M}[-i], \dot{X})$ es la proyección natural, entonces $\ker \rho \subseteq \ker \pi_*$. Esto nos induce un morfismo ξ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\underline{M}[-i], \dot{X}) & \xrightarrow{\pi_* \varphi} & \text{Hom}_A(M, H^i(\dot{X})) \\
 \rho \downarrow & \nearrow \xi & \\
 \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\underline{M}[-i], \dot{X}) & &
 \end{array}$$

Veamos que ξ es un monomorfismo. Supongamos que $\xi(\bar{f}) = 0$ para algún \bar{f} en $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\underline{M}[-i], \dot{X})$. Puesto que existe $\dot{f} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\underline{M}[-i], \dot{X})$ tal que $\rho(\dot{f}) = \bar{f}$, entonces $\xi \rho(\dot{f}) = \xi(\bar{f}) = 0$. Por otro lado, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow B^i(\dot{X}) \xrightarrow{\sigma} Z^i(\dot{X}) \xrightarrow{\pi} H^i(\dot{X}) \longrightarrow 0,$$

que nos induce la exactitud en la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M, B^i(\dot{X})) \xrightarrow{\sigma_*} \text{Hom}_A(M, Z^i(\dot{X})) \xrightarrow{\pi_*} \text{Hom}_A(M, H^i(\dot{X})).$$

Como $\xi \rho(\dot{f}) = 0$, entonces $0 = \pi_* \varphi(\dot{f}) = \pi_* f^i$. Es decir, $f^i \in \ker \pi_* = \text{Im} \sigma_*$. Entonces existe $h^i \in \text{Hom}_A(M, B^i(\dot{X}))$ tal que $\sigma h^i = f^i$. Además, como M es proyectivo, existe $t^i: M \rightarrow X^{i-1}$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & & M \\
 & \swarrow t^i & \downarrow h^i \\
 X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & B^i(\dot{X}) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

y se tiene $f^i = \sigma h^i = \sigma d_X^{i-1} t^i$. Luego, f es homotópico a cero, y esto implica que $\bar{f} = 0$. Probemos que ξ es un epimorfismo. Sea $g \in \text{Hom}_A(M, H^i(\dot{X}))$. Puesto que M es proyectivo, existe \hat{g} que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & \swarrow \hat{g} & \downarrow g & & \\ Z^i(\dot{X}) & \xrightarrow{\pi} & H^i(\dot{X}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow s^i & & & & \\ X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} & & \end{array} \quad .$$

Sea $f^i := s^i \hat{g}$, con s^i la inclusión. Entonces $d_X^i f^i = d_X^i s^i \hat{g} = 0 \hat{g} = 0$. Luego, $\dot{f} := (\dots, 0, f^i, 0, \dots)$ es un morfismo de complejos de $\underline{M}[-i]$ en \dot{X} y es tal que

$$\xi \rho(\dot{f}) = \pi_* \varphi(\dot{f}) = \pi \hat{g} = g.$$

Por lo tanto, ξ es un isomorfismo. No es difícil ver que el último cuadro del enunciado conmuta. \square

Proposición 5.18. *Sea el triángulo $\dot{X} \xrightarrow{f} \dot{Y} \xrightarrow{g} \dot{Z} \xrightarrow{h} \dot{X}[1]$ en $K(\mathcal{A})$, entonces tenemos la sucesión exacta larga:*

$$\dots H^0(\dot{X}) \xrightarrow{H^0(f)} H^0(\dot{Y}) \xrightarrow{H^0(g)} H^0(\dot{Z}) \xrightarrow{H^0(h)} H^1(\dot{X}) \xrightarrow{H^1(f)} H^1(\dot{Y}) \xrightarrow{H^1(g)} \dots$$

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición (??), para cada $x \in T$, tenemos la sucesión exacta:

$$\dots \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\underline{Ae}_x, \dot{X}) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\underline{Ae}_x, \dot{Y}) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\underline{Ae}_x, \dot{Z}) \xrightarrow{h^*} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\underline{Ae}_x, \dot{X}[1]) \xrightarrow{f^{[1]*}} \dots$$

Notemos que $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\underline{Ae}_x, \dot{X}[i]) \cong \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\underline{Ae}_x[-i], \dot{X})$. Además, puesto que Ae_x es proyectivo como A -módulo, tenemos que

$$\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\underline{Ae}_x[-i], \dot{X}) \cong \text{Hom}_A(Ae_x, H^i(\dot{X})) \cong e_x H^i(\dot{X}),$$

para todo complejo \dot{X} , para cada $i \in \mathbb{Z}$ (por la proposición (??) y la afirmación (??)). Luego, por la naturalidad de los isomorfismos involucrados, obtenemos que

$$\dots e_x H^0(\dot{X}) \xrightarrow{H^0(f)_x} e_x H^0(\dot{Y}) \xrightarrow{H^0(g)_x} e_x H^0(\dot{Z}) \xrightarrow{H^0(h)_x} e_x H^1(\dot{X}) \xrightarrow{H^1(f)_x} \dots,$$

es exacta para cada $x \in T$. Por lo tanto, es exacta

$$\dots H^0(\dot{X}) \xrightarrow{H^0(\dot{f})} H^0(\dot{Y}) \xrightarrow{H^0(\dot{g})} H^0(\dot{Z}) \xrightarrow{H^0(\dot{h})} H^1(\dot{X}) \xrightarrow{H^1(\dot{f})} H^1(\dot{Y}) \xrightarrow{H^1(\dot{g})} \dots$$

□

Definición 5.19. Sea $\underline{f}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ un morfismo en $K(\mathcal{A})$. Decimos que \underline{f} es un cuasi-isomorfismo si, para todo $i \in \mathbb{Z}$, $H^i(\underline{f}): H^i(\dot{X}) \rightarrow H^i(\dot{Y})$ es un isomorfismo.

Ejemplo 5.20. Sea M un A -módulo y (\dot{P}, η) una resolución proyectiva de M (definición (??)). Es decir, $P^i = 0$, para $i \geq 1$, y se tiene una sucesión

$$\dots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{d_P^{-1}} P^0 \xrightarrow{\eta} M \longrightarrow 0 \tag{5.3}$$

que es exacta. Entonces el siguiente diagrama (que induce el morfismo η) conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & P^{-2} & \xrightarrow{d_P^{-2}} & P^{-1} & \xrightarrow{d_P^{-1}} & P^0 & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & \dots \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow \eta & & \downarrow 0 & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{d_M^{-1}} & M & \xrightarrow{d_M^0} & 0 & \xrightarrow{0} & \dots \end{array}$$

y tenemos un morfismo de complejos $\dot{\eta} = (\dots, 0, \eta, 0, \dots): \dot{P} \rightarrow \underline{M}$. Además, conmutan los diagramas:

$$\begin{array}{ccc} \ker d_P^0 & \xlongequal{\quad} & P^0 \xrightarrow{d_P^0} 0 \\ \downarrow \eta_1 & & \downarrow \eta \\ \ker d_M^0 & \xlongequal{\quad} & M \xrightarrow{d_M^0} 0, \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccccc} \ker \eta = \text{Im} d_P^{-1} & \longrightarrow & \ker d_P^0 & \xrightarrow{\pi} & H^0(\dot{P}) \\ \downarrow & & \downarrow \eta_1 & & \downarrow H^0(\dot{\eta}) \\ 0 = \text{Im} d_M^{-1} & \longrightarrow & \ker d_M^0 & \longrightarrow & H^0(\underline{M}), \end{array}$$

Luego, $H^0(\dot{\eta})$ es el isomorfismo que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} P^0 & \xrightarrow{\eta_1} & M \\ \downarrow & \nearrow H^0(\dot{\eta}) & \\ P^0 / \ker \eta & & \cdot \end{array}$$

Por otro lado, para $i \in \mathbb{Z} - \{0\}$ se tiene $H^i(\dot{P}) = 0$ por la exactitud de (??). Luego, la clase de homotopía del morfismo de complejos $\dot{\eta} = (\dots, 0, \eta, 0, \dots)$ determinado por η , es un cuasi-isomorfismo.

Proposición 5.21. Sea $\dot{f}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ un morfismo de complejos. \underline{f} es un cuasi-isomorfismo si y sólo si $H^i(\text{Con}_{\dot{f}}) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\dot{X} \xrightarrow{\dot{f}} \dot{Y} \xrightarrow{\alpha(\dot{f})} \text{Con}_{\dot{f}} \xrightarrow{\beta(\dot{f})} \dot{X}[1]$ el triángulo que determina \dot{f} en $K(\mathcal{A})$ (observaciones al final del capítulo 3). Por la proposición (??), la sucesión

$$\dots \longrightarrow H^i(\dot{X}) \xrightarrow{H^i(\dot{f})} H^i(\dot{Y}) \xrightarrow{H^i(\alpha(\dot{f}))} H^i(\text{Con}_{\dot{f}}) \xrightarrow{H^i(\beta(\dot{f}))} H^{i+1}(\dot{X}) \xrightarrow{H^{i+1}(\dot{f})} H^{i+1}(\dot{Y}) \longrightarrow \dots$$

es exacta. Luego, de la sucesión anterior tenemos que $H^i(\text{Con}_{\dot{f}}) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $H^i(\dot{f})$ es un isomorfismo para todo $i \in \mathbb{Z}$. \square

Corolario 5.22. Dado un triángulo en $K(\mathcal{A})$:

$$\dot{X} \xrightarrow{\dot{f}} \dot{Y} \xrightarrow{\dot{g}} \dot{Z} \xrightarrow{\dot{h}} \dot{X}[1],$$

\underline{f} es un cuasi-isomorfismo si y sólo si $H^i(\dot{Z}) = 0$, para cada $i \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN. Por el corolario (??), teniendo en mente la observación (??). \square

Proposición 5.23. Sean (X, Y, Z, u, v, w) y $(X_1, Y_1, Z_1, u_1, v_1, w_1)$ un par de triángulos en la categoría homotópica $K(\mathcal{A})$ y (f, g, h) un morfismo entre ellos. Si f y g son cuasi-isomorfismos, entonces h también lo es.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & f[1] \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{u_1} & Y_1 & \xrightarrow{v_1} & Z_1 & \xrightarrow{w_1} & X_1[1]. \end{array}$$

De ahí que, usando que f y g son cuasi-isomorfismos y la proposición (??), tenemos el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc} H^i(X) & \longrightarrow & H^i(Y) & \longrightarrow & H^i(Z) & \longrightarrow & H^{i+1}(X) & \longrightarrow & H^{i+1}(Y) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H^i(X_1) & \longrightarrow & H^i(Y_1) & \longrightarrow & H^i(Z_1) & \longrightarrow & H^{i+1}(X_1) & \longrightarrow & H^{i+1}(Y_1); \end{array}$$

este conmuta, en cada $i \in \mathbb{Z}$, por la naturalidad del funtor cohomológico. Por el lema del 5, se tiene que $H^i(h)$ es isomorfismo, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Luego h es un cuasi-isomorfismo. \square

Proposición 5.24. *La familia de cuasi-isomorfismos en $K(\mathcal{A})$ es un sistema multiplicativo (definición (??)).*

DEMOSTRACIÓN. Sea Σ la familia de cuasi-isomorfismos en $K(\mathcal{A})$.

M1 (a) Sean $f \in \Sigma_{X,Y}$ y $g \in \Sigma_{Y,Z}$, entonces para cada $i \in \mathbb{Z}$, $H^i(f)$ y $H^i(g)$ son isomorfismos. Luego, $H^i(g)H^i(f) = H^i(gf)$ es un isomorfismo por ser composición de isomorfismos. Por lo tanto, $gf: X \rightarrow Z$ es un cuasi-isomorfismo, es decir, está en $\Sigma_{X,Z}$.

(b) Dado $X \in K(\mathcal{A})$, 1_X induce el morfismo identidad $H^i(1_X) = 1_{H^i(X)}$, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Luego 1_X es un cuasi-isomorfismo.

M2 (a) Sean los morfismos λ en $\Sigma_{Z_1,Y}$ y $\mu: Z_2 \rightarrow Y$. Tenemos el triángulo $Z_1 \xrightarrow{\lambda} Y \xrightarrow{f} \text{Con}_\lambda \xrightarrow{g} Z_1[1]$ en $K(\mathcal{A})$ (proposición (??)). Por otro lado, dado el morfismo $f\mu: Z_2 \rightarrow \text{Con}_\lambda$, completamos a un triángulo: $Z_2 \xrightarrow{f\mu} \text{Con}_\lambda \xrightarrow{u} \text{Con}_{f\mu} \xrightarrow{v} Z_2[1]$ en $K(\mathcal{A})$. Luego, también es triángulo: $\text{Con}_{f\mu}[-1] \xrightarrow{-v[-1]} Z_2 \xrightarrow{f\mu} \text{Con}_\lambda \xrightarrow{u} \text{Con}_{f\mu}$. Además, el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta_1: & & \text{Con}_{f\mu}[-1] & \xrightarrow{-v[-1]} & Z_2 & \xrightarrow{f\mu} & \text{Con}_\lambda & \xrightarrow{u} & \text{Con}_{f\mu} \\ & & \downarrow r[-1] & & \downarrow \mu & & \parallel & & \downarrow r \\ \Delta_2: & & Z_1 & \xrightarrow{\lambda} & Y & \xrightarrow{f} & \text{Con}_\lambda & \xrightarrow{g} & Z_1[1] \end{array}$$

conmuta, donde r existe por el axioma de triangulación TR3 al trasladar los triángulos Δ_1 y Δ_2 , luego, también existe $r[-1]$. Como λ está en Σ , se tiene $H^i(\text{Con}_\lambda) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Entonces, $s := -v[-1]$ es un cuasi-isomorfismo y definiendo $t := r[-1]$, se tiene que $\text{Con}_{f\mu}[-1] \xrightarrow{s} Z_2$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow \mu & \\ \text{Con}_{f\mu}[-1] & \xrightarrow{s} & Z_2 \\ \downarrow t & & \downarrow \mu \\ Z_1 & \xrightarrow{\lambda} & Y \end{array}$$

conmuta.

(b) Para el dual, sean λ en Σ_{Y,Z_1} y $\mu: Y \rightarrow Z_2$. Se tienen los triángulos $Y \xrightarrow{\lambda} Z_1 \xrightarrow{f} \text{Con}_\lambda \xrightarrow{g} Y[1]$ y $\text{Con}_\lambda[-1] \xrightarrow{-g[-1]} Y \xrightarrow{\lambda} Z_1 \xrightarrow{f} \text{Con}_\lambda$.

Para $-\mu g[-1]$ tenemos el triángulo: $\text{Con}_\lambda[-1] \xrightarrow{-\mu g[-1]} Z_2 \xrightarrow{-s} W \xrightarrow{-r} \text{Con}_\lambda$.

Así, por los axiomas de triangulación existe un morfismo t que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Con}_\lambda[-1] & \xrightarrow{-g[-1]} & Y & \xrightarrow{\lambda} & Z_1 & \xrightarrow{f} & \mathrm{Con}_\lambda \\ \parallel & & \downarrow \mu & & \downarrow t & & \parallel \\ \mathrm{Con}_\lambda[-1] & \xrightarrow{-\mu g[-1]} & Z_2 & \xrightarrow{s} & W & \xrightarrow{r} & \mathrm{Con}_\lambda \end{array}$$

como λ está en Σ , $H^i(\mathrm{Con}_\lambda) = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Entonces, s es un cuasi-isomorfismo y además $Y \xrightarrow{\lambda} Z_1$ conmuta.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\lambda} & Z_1 \\ \mu \downarrow & & \downarrow t \\ Z_2 & \xrightarrow{s} & W \end{array}$$

M3 Sean los morfismos $X \xrightarrow[f]{g} Y$ en $K(\mathcal{A})$. Supongamos que existe $s \in \Sigma_{Y, Z_1}$ tal que $sf = sg$. Mostraremos que existe $t \in \Sigma_{Z_2, X}$ tal que $ft = gt$. Dado s , tenemos el triángulo: $Y \xrightarrow{s} Z_1 \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Con}_s \xrightarrow{\beta} Y[1]$, y su trasladado $\mathrm{Con}_s[-1] \xrightarrow{-\beta[-1]} Y \xrightarrow{s} Z_1 \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Con}_s$. Puesto que $s(f - g) = 0$ y usando la exactitud de la primera sucesión en (??), con $W = X$, tenemos la existencia del morfismo $\lambda: X \rightarrow \mathrm{Con}_s[-1]$ tal que $-\beta[-1]\lambda = f - g$. Fijémonos en el triángulo que λ genera: $X \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Con}_s[-1] \xrightarrow{r} \mathrm{Con}_\lambda \xrightarrow{-t[1]} X[1]$; trasladando obtenemos $\mathrm{Con}_\lambda[-1] \xrightarrow{t} X \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Con}_s[-1] \xrightarrow{r} \mathrm{Con}_\lambda$. Como s es un cuasi-isomorfismo, entonces $H^i(\mathrm{Con}_s) = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Luego, también se tiene que $H^i(\mathrm{Con}_s[-1]) = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, t es un cuasi-isomorfismo. Además, $(f - g)t = (-\beta[-1]\lambda)t = 0$, porque $\lambda t = 0$. Por lo tanto, definiendo $Z_2 := \mathrm{Con}_\lambda[-1]$ tenemos $t: Z_2 \rightarrow X \in \Sigma$ tal que $ft = gt$. La prueba del recíproco es análoga. \square

5.2. q -proyectivos y cuasi-isomorfismos

La construcción que hacemos en esta sección nos permitirá probar que el sistema multiplicativo de los cuasi-isomorfismos en $K(\mathcal{A})$, para $\mathcal{A} = A\text{-Mod}$, es localmente pequeño a la izquierda (definición (??)).

Lema 5.25. *Dado \dot{X} un complejo de A -módulos, existe un morfismo de complejos $\dot{q}: \dot{V} \rightarrow \dot{X}$, donde \dot{V} es un complejo de A -módulos proyectivos y*

diferenciales cero, tal que la composición:

$$\dot{Z}(\dot{V}) \xrightarrow{\dot{q}} \dot{Z}(\dot{X}) \xrightarrow{\dot{\pi}} \dot{H}(\dot{X}),$$

es un epimorfismo (donde $\dot{Z}(\dot{X})$ es el complejo cuya i -ésima entrada es $Z^i(\dot{X}) = \ker d_X^i$ y su i -ésima diferencial es d_X^i restringida a $Z^i(\dot{X})$, que es cero; análogamente para $\dot{Z}(\dot{V})$).

DEMOSTRACIÓN. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, tomamos una cubierta proyectiva del A -módulo $H^i(\dot{X})$, $\rho^i: V^i \rightarrow H^i(\dot{X})$. Como V^i es proyectivo, para cada $i \in \mathbb{Z}$, existe \hat{q}^i que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & V^i & \\ \hat{q}^i \swarrow & \downarrow \rho^i & \\ Z^i(\dot{X}) & \xrightarrow{\pi^i} & H^i(\dot{X}) \longrightarrow 0, \end{array} \tag{5.4}$$

(donde π^i es la proyección natural). Sea $\sigma^i: Z^i(\dot{X}) \rightarrow X^i$ la inyección canónica. Definimos el complejo $\dot{V} := (V^i, 0)_{i \in \mathbb{Z}}$ y el morfismo $\dot{q} := (\sigma^i \hat{q}^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de \dot{V} en \dot{X} , el cual es de complejos ya que conmutan los cuadrados en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V^i & \xrightarrow{d_V^i=0} & V^{i+1} \\ \downarrow \hat{q}^i & & \downarrow \hat{q}^{i+1} \\ Z^i(\dot{X}) & \xrightarrow{d_X^i=0} & Z^{i+1}(\dot{X}) \\ \downarrow \sigma^i & & \downarrow \sigma^{i+1} \\ X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \end{array} \begin{array}{l} q^i \\ \\ \\ q^{i+1} \end{array}$$

□

Proposición 5.26. Dado \dot{X} un complejo de A -módulos, existe una sucesión de complejos de A -módulos proyectivos $0 = \dot{P}_0 \subseteq \dot{P}_1 \subseteq \dots \subseteq \dot{P}_t \subseteq \dots$ con las siguientes propiedades:

(P1) Para cada $j \in \mathbb{N}$ existe un morfismo de complejos $\dot{\eta}_j: \dot{P}_j \rightarrow \dot{X}$, tal que

$$\begin{array}{ccc} \dot{P}_{j-1} & \xrightarrow{\dot{\sigma}_{j-1}} & \dot{P}_j \\ & \searrow \dot{\eta}_{j-1} & \swarrow \dot{\eta}_j \\ & & \dot{X} \end{array}$$

conmuta, donde $\dot{\sigma}_{j-1}$ denota la inclusión.

(P2) Para cada $j \in \mathbb{N}$, hay una \mathcal{E} -sucesión

$$0 \longrightarrow \dot{P}_{j-1} \xrightarrow{\dot{\sigma}_{j-1}} \dot{P}_j \longrightarrow \dot{V}_{j-1} \longrightarrow 0,$$

donde \dot{V}_{j-1} es un complejo de A -módulos proyectivos con diferenciales cero.

(P3) Para cada $j \in \mathbb{N}$, si $x \in Z^s(\dot{P}_{j-1})$ y $\dot{\eta}_{j-1}(x) \in B^s(\dot{X})$, entonces existe $y \in P_j^{s-1}$ tal que $d_{\dot{P}_j}^{s-1}(y) = x$.

(P4) La composición $\dot{Z}(\dot{P}_1) \xrightarrow{\dot{\eta}_1} \dot{Z}(\dot{X}) \xrightarrow{\dot{\pi}} \dot{H}(\dot{X})$ es un epimorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Construiremos tal sucesión por inducción. Definimos \dot{P}_0 como el complejo cero y $\dot{\eta}_0: \dot{P}_0 \rightarrow \dot{X}$ como el morfismo cero. Por el lema anterior, existe un morfismo $\dot{\eta}_1: \dot{P}_1 \rightarrow \dot{X}$ de complejos, donde \dot{P}_1 es un complejo de A -módulos proyectivos con diferenciales cero, tal que se cumple la propiedad (P4). Claramente, valen las propiedades (P1), (P2) y (P3) para $j = 1$ ($\dot{V}_0 := \dot{P}_1$). Supongamos construída la colección de complejos de A -módulos proyectivos $\dot{P}_0, \dot{P}_1, \dots, \dot{P}_t$ y morfismos $\dot{\eta}_0, \dots, \dot{\eta}_t$ que cumplen las propiedades (P1), (P2), (P3), para todo $j = 1, \dots, t$. Construiremos el complejo \dot{P}_{t+1} que contiene a \dot{P}_t como subcomplejo y un morfismo de complejos $\dot{\eta}_{t+1}: \dot{P}_{t+1} \rightarrow \dot{X}$, tal que valen las propiedades (P1), (P2) y (P3) para $j = t + 1$.

Para cada $i \in \mathbb{Z}$, definimos:

$$T_t^i := (\dot{\eta}_t^{i+1})^{-1}(B^{i+1}(\dot{X})) \cap Z^{i+1}(\dot{P}_t).$$

Luego, $\dot{T}_t = (T_t^i, 0)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un subcomplejo de $\dot{P}_t[1]$. Sea $\dot{s}: \dot{T}_t \rightarrow \dot{P}_t[1]$ la inclusión. Si aplicamos el lema anterior al complejo \dot{T}_t , obtenemos un morfismo $\dot{q}_t: \dot{V}_t \rightarrow \dot{T}_t$, donde \dot{V}_t es un complejo de A -módulos proyectivos y diferenciales cero. Luego, podemos considerar el morfismo composición $\dot{\lambda}_t := \dot{s}_t \dot{q}_t \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{V}_t, \dot{P}_t[1])$. Luego, por el lema (??), tenemos una \mathcal{E} -sucesión:

$$0 \longrightarrow \dot{P}_t \xrightarrow{\dot{\sigma}_t} \dot{P}_{t+1} \xrightarrow{\dot{\pi}_t} \dot{V}_t \longrightarrow 0, \quad (5.5)$$

con $P_{t+1}^i = P_t^i \oplus V_t^i$, $d_{P_{t+1}}^i = \begin{pmatrix} d_{P_t}^i & \lambda_t^i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_t^i = \begin{pmatrix} 1_{P_t^i} \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\pi_t^i = (0, 1_{V_t^i})$. Tenemos verificada la propiedad (P2). Para construir $\dot{\eta}_{t+1}$, notemos que el morfismo

$\hat{\eta}_t[1]$ se restringe a un morfismo $\hat{\beta}_t$ en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \dot{T}_t & \xrightarrow{\dot{s}_t} & \dot{P}_t[1] \\ \dot{\beta}_t \downarrow & & \downarrow \hat{\eta}_t[1] \\ \dot{B}(\dot{X})[1] & \xrightarrow{\dot{\sigma}[1]} & \dot{X}[1], \end{array}$$

donde $\dot{\sigma}: \dot{B}(\dot{X}) \rightarrow \dot{X}$ es la inclusión. Como cada V_t^i es proyectivo, tenemos que existe un morfismo $\mu_{t,i}$ tal que conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & & V_t^i \\ & \swarrow \mu_{t,i} & \downarrow (\beta_t q_t)^i \\ X^i & \xrightarrow{d_X^i} & B^{i+1}(\dot{X}) \longrightarrow 0, \end{array} \quad (5.6)$$

donde \hat{d}_X^i denota la restricción del morfismo diferencial d_X^i a su imagen. Definimos $\eta_{t+1}^i := (\eta_t^i, \mu_{t,i}): P_t^i \oplus V_t^i \rightarrow X^i$. Del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} P_t^i \oplus V_t^i & \xrightarrow{(\eta_t^i, \mu_{t,i})} & X^i \\ \left(\begin{array}{cc} d_{P_t}^i & \lambda_t^i \\ 0 & 0 \end{array} \right) \downarrow & & \downarrow d_X^i \\ P_t^{i+1} \oplus V_t^{i+1} & \xrightarrow{(\eta_t^{i+1}, \mu_{t,i+1})} & X^{i+1}, \end{array}$$

se tiene

$$\begin{aligned} d_X^i(\eta_t^i, \mu_{t,i}) &= (d_X^i \eta_t^i, d_X^i \mu_{t,i}) = (d_X^i \eta_t^i, \sigma^{i+1} \hat{d}_X^i \mu_{t,i}) = (d_X^i \eta_t^i, \sigma^{i+1} \beta_t^i q_t^i) \\ &= (d_X^i \eta_t^i, \eta_t^{i+1} s_t^i q_t^i) = (\eta_t^{i+1} d_{P_t}^i, \eta_t^{i+1} \lambda_t^i) = (\eta_t^{i+1}, \mu_{t,i+1}) \begin{pmatrix} d_{P_t}^i & \lambda_t^i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

usando la ecuación (??) y que $\hat{\eta}_t$ es un morfismo de complejos por hipótesis de inducción. Entonces $\hat{\eta}_{t+1}$ es de complejos y además cumple la propiedad (P1) por construcción. Para la propiedad (P3), sea $x \in Z^s(\dot{P}_t)$ tal que $\eta_t^s(x) \in B^s(\dot{X})$. Luego, $x \in T_t^{s-1}$. Por lo tanto, existe $z \in V_t^{s-1}$ tal que $\lambda_t^{s-1}(z) = x$. Sea $y := \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}$ un elemento de $P_t^{s-1} \oplus V_t^{s-1} = P_{t+1}^{s-1}$. Entonces

$$d_{P_{t+1}}^{s-1}(y) = \begin{pmatrix} d_{P_t}^{s-1} & \lambda_t^{s-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_t^{s-1}(z) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},$$

y este elemento se identifica con x . La propiedad (P4) ya se tenía por construcción. Hemos probado así que dado un complejo \dot{X} existe una sucesión de complejos de módulos proyectivos que cumplen las cuatro propiedades enunciadas. \square

Definición 5.27. Definiremos ahora un complejo \dot{P} de A -módulos proyectivos que contiene a cada \dot{P}_t como subcomplejo y tal que $\cup_{t \in \mathbb{N}} \dot{P}_t = \dot{P}$. Puesto que:

$$\begin{aligned} P_1^i &= P_0^i \oplus V_0^i = V_0^i \\ P_2^i &= P_1^i \oplus V_1^i = V_0^i \oplus V_1^i \\ &\vdots \\ P_t^i &= P_{t-1}^i \oplus V_{t-1}^i = \bigoplus_{j=0}^{t-1} V_j^i \\ &\vdots \end{aligned}$$

entonces definimos $P^i := \bigoplus_{j=0}^{\infty} V_j^i$. Para cada $t \in \mathbb{N}$, tenemos una inclusión

$\tau_t: P_t^i \rightarrow P^i$. Sean $t \leq s$, si denotamos por $u_{t,s}^i: P_t^i \rightarrow P_s^i$ la inclusión, entonces tenemos que $\tau_s u_{t,s}^i = \tau_t$. Por lo tanto, identificando a P_t^i con su imagen en P^i tenemos que $P_t^i \subseteq P^i$ para $t \leq s$ y es claro que $P^i = \cup_{t \in \mathbb{N}} P_t^i$. Ahora definamos la i -ésima diferencial $d_P^i: P^i \rightarrow P^{i+1}$. Sea $x \in P^i$, entonces $x \in P_t^i$ para algún $t \in \mathbb{N}$, así que pondremos $d_P^i(x) = d_{P_t^i}^i(x)$. Está bien definida porque si $x \in P_s^i$ para algún $s \neq t$ entonces $s \leq t$ ó $t \leq s$. En el primer caso, \dot{P}_s es un subcomplejo de \dot{P}_t . En el segundo caso, \dot{P}_t es un subcomplejo de \dot{P}_s , luego, en ambos casos $d_{P_t^i}^i(x) = d_{P_s^i}^i(x)$. Por lo tanto d_P^i está bien definida. Además es claro que $d_P^{i+1} d_P^i = 0$. Así que $\dot{P} := (P^i, d_P^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un complejo que contiene a cada \dot{P}_t como subcomplejo y

$$\dot{P} = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} \dot{P}_t. \quad (5.7)$$

Ahora definiremos un morfismo de complejos $\eta: \dot{P} \rightarrow \dot{X}$. Para $x \in P^i$, $x \in P_t^i$ para alguna $t \in \mathbb{N}$. Entonces ponemos $\eta^i(x) = \eta_t^i(x)$. La propiedad (P1) hace que $\eta^i: P^i \rightarrow X^i$ esté bien definida. Además, η es de complejos porque cada η_t lo es.

Proposición 5.28. La clase del morfismo $\eta: \dot{P} \rightarrow \dot{X}$ en $K(\mathcal{A})$, es un cuasi-isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $i \in \mathbb{Z}$, probemos que cada η^i induce un isomorfismo $\underline{\eta}^i: H^i(\dot{P}) \rightarrow H^i(\dot{X})$. Por (P4) de la proposición (??), es un epimorfismo el renglón del diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & Z^i(\dot{P}) & & \\ & \nearrow \tau_1 & \downarrow \eta^i & & \\ Z^i(\dot{P}_1) = P_1^i & \xrightarrow{\eta_1^i} & Z^i(\dot{X}) & \xrightarrow{\pi^i} & Z^i(\dot{X})/B^i(\dot{X}). \end{array}$$

Luego, la composición

$$Z^i(\dot{P}) \xrightarrow{\eta^i} Z^i(\dot{X}) \xrightarrow{\pi^i} Z^i(\dot{X})/B^i(\dot{X})$$

es un epimorfismo. Además, por definición de $\underline{\eta}^i = H^i(\underline{\eta})$, conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Z^i(\dot{P}) & \xrightarrow{\eta^i} & Z^i(\dot{X}) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \pi^i \\ Z^i(\dot{P})/B^i(\dot{P}) & \xrightarrow{\underline{\eta}^i} & Z^i(\dot{X})/B^i(\dot{X}), \end{array}$$

Tenemos que $\underline{\eta}^i$ es un epimorfismo. Veamos ahora que $\underline{\eta}^i$ es inyectivo. Supongamos que $\underline{\eta}^i(\bar{z}) = 0$ para $\bar{z} \in H^i(\dot{P})$. Sea z representante de la clase \bar{z} luego, $z \in Z^i(\dot{P}_t)$ para algún $t \in \mathbb{N}$. Además, $\eta_t^i(z) = \eta^i(z) \in B^i(\dot{X})$. Por lo tanto, la propiedad P3 nos dice que existe $y \in P_{t+1}^{i-1}$ tal que $d_{P_{t+1}}^{i-1}(y) = z$, entonces $z = d_P^{i-1}(y) \in B^i(\dot{P})$. Por lo tanto, $\bar{z} = 0$. \square

Observación 5.29. *Tenemos una definición análoga a (??), para una familia de complejos cuyas entradas no necesariamente son módulos proyectivos. Sea $\{\dot{M}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una familia de complejos tal que $0 = \dot{M}_0 \subseteq \dot{M}_1 \subseteq \dot{M}_2 \subseteq \dots \subseteq \dot{M}_j \subseteq \dot{M}_{j+1} \subseteq \dots$. Definimos $M^i := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j^i$. Además, definimos el morfismo $d_M^i: M^i \rightarrow M^{i+1}$ como sigue: Dado $x \in M^i$, entonces $x \in M_t^i$ para algún $t \in \mathbb{N}$, así que pondremos $d_M^i(x) := d_{M_t}^i(x)$. El morfismo d_M^i está bien definido porque si $x \in M_s^i$ para algún $s \neq t$ entonces $s \leq t$ ó $t \leq s$. En el primer caso, \dot{M}_s es un subcomplejo de \dot{M}_t . En el segundo caso, \dot{M}_t es un subcomplejo de \dot{M}_s , luego, en ambos casos $d_{M_t}^i(x) = d_{M_s}^i(x)$. Además es claro que $d_M^{i+1}d_M^i = 0$. Así que $\dot{M} := (M^i, d_M^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un complejo que contiene a cada M_t como subcomplejo y*

$$\dot{M} = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} \dot{M}_t.$$

Proposición 5.30. *Para una familia de complejos $\{\dot{M}_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ que define un complejo \dot{M} como en la observación (??) existe una sucesión exacta:*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{M}_s \longrightarrow \bigoplus_{t \in \mathbb{N}} \dot{M}_t \longrightarrow \dot{M} \longrightarrow 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\dot{M}_s \xrightarrow{\lambda_s} \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{M}_s$ la inclusión canónica. Por otro lado, sea $\dot{M}_s \xrightarrow{u_{s,s+1}} \dot{M}_{s+1}$ el morfismo inclusión. Para cada $s \in \mathbb{N}$, tenemos el morfismo $\phi_s := \lambda_s - \lambda_{s+1}u_{s,s+1}: \dot{M}_s \rightarrow \bigoplus_{t \in \mathbb{N}} \dot{M}_t$. Luego, por la propiedad universal del coproducto, existe un único morfismo $\dot{\phi}$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{M}_s & \xrightarrow{\dot{\phi}} & \bigoplus_{t \in \mathbb{N}} \dot{M}_t \\ \lambda_s \uparrow & \nearrow \phi_s & \\ \dot{M}_s & & \end{array} .$$

También tenemos la familia de inclusiones $\tau_t: \dot{M}_t \rightarrow \dot{M}$, luego, existe un único morfismo $\dot{\psi}$ que hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{t \in \mathbb{N}} \dot{M}_t & \xrightarrow{\dot{\psi}} & \dot{M} \\ \lambda_t \uparrow & \nearrow \tau_t & \\ \dot{M}_t & & \end{array} .$$

Probemos que la sucesión en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{M}_s \xrightarrow{\dot{\phi}} \bigoplus_{t \in \mathbb{N}} \dot{M}_t \xrightarrow{\dot{\psi}} \dot{M} \longrightarrow 0 \quad (5.8)$$

es exacta. Para esto veamos primero cuál es el efecto de $\dot{\phi}$ en un elemento $(0, \dots, 0, x_j, 0, \dots) \in \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{M}_s$,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(0, \dots, 0, x_j, 0, \dots) &= \dot{\phi}\lambda_j(x_j) = \phi_j(x_j) = \lambda_j(x_j) - \lambda_{j+1}u_{j,j+1}(x_j) \\ &= (0, \dots, 0, x_j, 0, 0, \dots) - (0, \dots, 0, 0, x_j, 0, \dots) \\ &= (0, \dots, 0, x_j, -x_j, 0, \dots). \end{aligned}$$

Luego, para un elemento típico $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots) \in \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{M}_s$ se tiene que

$$\dot{\phi}(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots) = (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}, -x_n, 0, \dots).$$

Por otro lado, para $(y_1, y_2, \dots, y_n, 0, \dots) \in \bigoplus_{t \in \mathbb{N}} \dot{M}_t$ se tiene que

$$\dot{\psi}(y_1, y_2, \dots, y_n, 0, \dots) = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n.$$

Veamos que $\dot{\phi}$ es un monomorfismo. Sea $\dot{\phi}(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots) = 0$, luego $(x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}, -x_n, 0, \dots) = (0, 0, \dots)$. Entonces $x_1 = 0$, lo cual implica $x_2 = 0, \dots, x_n = 0$. Así que $\dot{\phi}$ es un monomorfismo. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots) \in \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{M}_s$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{\psi}\dot{\phi}(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots) &= \dot{\psi}(x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}, -x_n, 0, \dots) \\ &= x_1 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1} - x_n = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, la imagen de $\dot{\phi}$ está contenida en el núcleo de $\dot{\psi}$. Para la otra contención, sea $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$ tal que $\dot{\psi}(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots) = 0$, es decir $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} &\dot{\phi}(x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_n, 0, \dots) \\ &= (x_1, x_1 + x_2 - x_1, \dots, x_1 + \dots + x_n - x_1 - \dots - x_{n-1}, -x_1 - \dots - x_n, 0, \dots) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots). \end{aligned}$$

Concluimos que $\text{Im } \dot{\phi} = \ker \dot{\psi}$.

Recordemos que $\dot{M} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \dot{M}_j$, luego, si $y \in \dot{M}$, entonces $y \in \dot{M}_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\dot{\psi}(0, \dots, 0, y, 0, \dots) = y$, así, se tiene que $\dot{\psi}$ es un epimorfismo. Por lo tanto, la sucesión (??) es exacta. \square

Proposición 5.31. *En el caso de un complejo \dot{P} como en la definición (??), se tiene un triángulo canónico:*

$$\bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{P}_s \xrightarrow{\dot{\phi}} \bigoplus_{t \in \mathbb{N}} \dot{P}_t \xrightarrow{\dot{\psi}} \dot{P} \xrightarrow{w} [\bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{P}_s][1]$$

en la categoría $K(\mathcal{A})$.

DEMOSTRACIÓN. En la proposición (??), definimos un par de morfismos $\dot{\phi}, \dot{\psi}$ tales que la sucesión:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{P}_s \xrightarrow{\dot{\phi}} \bigoplus_{t \in \mathbb{N}} \dot{P}_t \xrightarrow{\dot{\psi}} \dot{P} \longrightarrow 0 \quad (5.9)$$

es exacta. Además, es localmente trivial, porque en cada $i \in \mathbb{Z}$ se tiene la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} P_s^i \xrightarrow{\phi^i} \bigoplus_{t \in \mathbb{N}} P_t^i \xrightarrow{\psi^i} P^i \longrightarrow 0 \quad (5.10)$$

porque cada P^i es proyectivo, luego la sucesión (??) se divide. Sea \underline{h} el morfismo en $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{P}, \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{P}_s[1]) \cong \mathcal{E}xt_{\mathcal{E}}(\dot{P}, \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{P}_s)$ correspondiente a la \mathcal{E} -sucesión (??). Entonces,

$$\bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{P}_s \xrightarrow{\dot{\phi}} \bigoplus_{t \in \mathbb{N}} \dot{P}_t \xrightarrow{\dot{\psi}} \dot{P} \xrightarrow{-\dot{h}} [\bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{P}_s][1]$$

es un triángulo en $K(\mathcal{A})$. □

Definición 5.32. Un objeto \dot{C} en $K(\mathcal{A})$ se llama acíclico si $H^i(\dot{C}) = 0$ para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Observemos que, si \dot{C} es acíclico, entonces $\dot{C}[i]$ también es acíclico para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Observación 5.33. La proposición (??) dice que un morfismo $\underline{f} \in K(\mathcal{A})$ es un cuasi-isomorfismo si y sólo si el cono que determina es acíclico.

Definición 5.34. Un complejo $\dot{X} \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ se dice q -proyectivo si para cada complejo acíclico \dot{C} se tiene que $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{X}, \dot{C}) = 0$.

Proposición 5.35. Sea \dot{Q} un complejo de A -módulos proyectivos tal que existe $i \in \mathbb{Z}$ con $Q^j = 0$ para cada $j > i$. Entonces, \dot{Q} es q -proyectivo.

DEMOSTRACIÓN. Sea \dot{X} un complejo acíclico y $\dot{h}: \dot{Q} \rightarrow \dot{X}$ un morfismo en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Probaremos que \dot{h} es homotópico a cero. Tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & Q^{i-2} & \xrightarrow{d_Q^{i-2}} & Q^{i-1} & \xrightarrow{d_Q^{i-1}} & Q^i & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow h^{i-2} & \swarrow s^{i-1} & \downarrow h^{i-1} & \swarrow s^i & \downarrow h^i & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & X^{i-2} & \xrightarrow{d_X^{i-2}} & X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & & & \searrow d_X^{i-1} & \swarrow & \downarrow & & & & \\ & & & & & & \ker d_X^i & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

Como $d_X^i h^i = 0$, $\text{Im} h^i \subseteq \ker d_X^i = \text{Im} d_X^{i-1}$. Además, Q^i es proyectivo, y tenemos el epimorfismo $d_X^{i-1}: X^{i-1} \rightarrow \ker d_X^i$. Luego, existe un morfismo $s^i: Q^i \rightarrow X^{i-1}$ tal que $d_X^{i-1} s^i = h^i$.

Supongamos que existe $s^{i-r+1}: Q^{i-r+1} \rightarrow X^{i-r}$ tal que

$$h^{i-r+1} = d_X^{i-r} s^{i-r+1} + s^{i-r+2} d_Q^{i-r+1}.$$

Haciendo inducción sobre r , tenemos que $h^{i-r} - s^{i-r+1} d_Q^{i-r}$ es un morfismo de Q^{i-r} en X^{i-r} tal que

$$\begin{aligned} d_X^{i-r} (h^{i-r} - s^{i-r+1} d_Q^{i-r}) &= d_X^{i-r} h^{i-r} - d_X^{i-r} s^{i-r+1} d_Q^{i-r} \\ &= d_X^{i-r} h^{i-r} - (h^{i-r+1} - s^{i-r+2} d_Q^{i-r+1}) d_Q^{i-r} \\ &= d_X^{i-r} h^{i-r} - h^{i-r+1} d_Q^{i-r} = 0. \end{aligned}$$

Luego, $\text{Im}(h^{i-r} - s^{i-r+1} d_Q^{i-r}) \subseteq \ker d_X^{i-r} = \text{Im} d_X^{i-r-1}$. Como Q^{i-r} es proyectivo, existe $s^{i-r}: Q^{i-r} \rightarrow X^{i-r-1}$ tal que $d_X^{i-r-1} s^{i-r} = h^{i-r} - s^{i-r+1} d_Q^{i-r}$, es decir,

$$h^{i-r} = d_X^{i-r-1} s^{i-r} + s^{i-r+1} d_Q^{i-r}.$$

Por lo tanto, existe la homotopía $\{s^j: Q^j \rightarrow X^{j-1}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ que hace a \dot{h} homotópico a cero. Luego, $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Q}, \dot{X}) = 0$ y \dot{Q} es q -proyectivo. \square

Corolario 5.36. *Sea \dot{Q} un complejo de A -módulos proyectivos tal que existe $i \in \mathbb{Z}$ con $Q^j = 0$ para cada $j > i$. Si además \dot{Q} es acíclico, entonces $1_{\dot{Q}}$ se factoriza a través de un complejo \mathcal{E} -proyectivo-inyectivo.*

Proposición 5.37. *Sea $0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{u}} \dot{E} \xrightarrow{\dot{v}} \dot{Y} \longrightarrow 0$ una \mathcal{E} -sucesión tal que \dot{X} y \dot{Y} son q -proyectivos, entonces \dot{E} también es q -proyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea \dot{C} complejo acíclico. En la categoría homotópica tenemos el triángulo:

$$\dot{X} \xrightarrow{\dot{u}} \dot{E} \xrightarrow{\dot{v}} \dot{Y} \xrightarrow{\dot{h}} \dot{X}[1].$$

Por la proposición (??), tenemos la sucesión exacta

$$0 = \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{C}) \xrightarrow{\dot{v}^*} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{E}, \dot{C}) \xrightarrow{\dot{u}^*} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{X}, \dot{C}) = 0.$$

Luego, tenemos que $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{E}, \dot{C}) = 0$. \square

Proposición 5.38. *Si M es un A -módulo proyectivo, entonces $\underline{M}[-i]$, su complejo concentrado en grado i , es q -proyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea \dot{X} un complejo acíclico, entonces, por la proposición (??),

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\underline{M}[-i], \dot{X}) \cong \mathrm{Hom}_A(M, H^i(\dot{X})) \cong \mathrm{Hom}_A(M, 0) = 0.$$

□

Lema 5.39. *Si $\{\dot{M}_j\}_{j \in J}$ es una familia de complejos q -proyectivos, entonces $M := \coprod_{j \in J} \dot{M}_j$ es q -proyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea \dot{X} un complejo acíclico. Luego, por la afirmación (??), se tiene

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{M}, \dot{X}) = \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\coprod_{j \in J} \dot{M}_j, \dot{X}) \cong \prod_{j \in J} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{M}_j, \dot{X}) \cong 0.$$

□

Corolario 5.40. *Si \dot{M} es un complejo de proyectivos de diferencial cero, entonces es q -proyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Observemos que podemos escribir $\dot{M} \cong \coprod_{j \in \mathbb{Z}} \dot{N}_j$, con cada \dot{N}_j un complejo concentrado en grado j , y $N_j^j = M^j$ es proyectivo. El resultado se sigue al aplicar lema (??). □

Estos resultados, nos permiten probar que:

Proposición 5.41. *El complejo \dot{P} de la definición (??) es q -proyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos primero, por inducción, que cada complejo \dot{P}_i es q -proyectivo. Se tiene que \dot{P}_1 es q -proyectivo, por el corolario (??). Supongamos que \dot{P}_t es q -proyectivo. Se tiene la sucesión exacta de la propiedad (P2), donde \dot{V}_t es q -proyectivo por ser un complejo de A -módulos proyectivos y diferenciales cero, por construcción. Luego, se tiene que \dot{P}_n es q -proyectivo para todo $n \in \mathbb{N}$, por la proposición (??). Finalmente, si \dot{X} es un complejo acíclico, de la proposición (??) se obtiene la sucesión exacta:

$$\dots \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}([\bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{P}_s][1], \dot{X}) \xrightarrow{\dot{h}^*} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{P}, \dot{X}) \xrightarrow{\dot{\psi}^*} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\bigoplus_{t \in \mathbb{N}} \dot{P}_t, \dot{X}) \dots,$$

además,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}([\bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{P}_s][1], \dot{X}) &\cong \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}([\bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{P}_s], \dot{X}[-1]) \\ &\cong \prod_{s \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{P}_s, \dot{X}[-1]) = 0, \end{aligned}$$

y también

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\bigoplus_{t \in \mathbb{N}} \dot{P}_t, \dot{X}) \cong \prod_{t \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{P}_t, \dot{X}) = 0.$$

Entonces $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{P}, \dot{X}) = 0$, y, por lo tanto, \dot{P} es q -proyectivo. \square

Sea $K(\mathcal{A})_q$ la subcategoría plena de $K(\mathcal{A})$ cuyos objetos son los complejos de $K(\mathcal{A})$ que son q -proyectivos.

Proposición 5.42. $K(\mathcal{A})_q$ es una subcategoría triangulada de $K(\mathcal{A})$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{X}, \dot{Y}) \cong \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{X}[i], \dot{Y}[i])$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Luego, dados \dot{X} y \dot{Y} complejos en $K(\mathcal{A})_q$, y \dot{C} un complejo acíclico, se tiene

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{X}[1], \dot{C}) \cong \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{X}, \dot{C}[-1]) = 0,$$

y también

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{X}[-1], \dot{C}) \cong \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{X}, \dot{C}[1]) = 0.$$

Por lo tanto, $\dot{X}[1]$ y $\dot{X}[-1]$ están en $K(\mathcal{A})_q$. Por otro lado,

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{X} \oplus \dot{Y}, \dot{C}) \cong \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{X}, \dot{C}) \oplus \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{C}) \cong 0.$$

Por lo tanto, $\dot{X} \oplus \dot{Y}$ está en $K(\mathcal{A})_q$. Sea $\dot{f}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ un morfismo en $K(\mathcal{A})_q$ y $\dot{X} \xrightarrow{\dot{f}} \dot{Y} \xrightarrow{\dot{g}} \dot{Z} \xrightarrow{\dot{h}} \dot{X}[1]$ su triángulo correspondiente en $K(\mathcal{A})$. Por la proposición (??), es exacta la siguiente sucesión:

$$0 = \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{X}[1], \dot{C}) \xrightarrow{\dot{h}^*} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Z}, \dot{C}) \xrightarrow{\dot{g}^*} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Y}, \dot{C}) = 0.$$

Luego, $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{Z}, \dot{C}) = 0$. Por lo tanto, \dot{Z} está en $K(\mathcal{A})_q$. \square

Recordemos que, dado un complejo X , existe un complejo q -proyectivo P_X y un cuasi-isomorfismo $\eta_X: P_X \rightarrow X$. Esto nos permite definir el siguiente funtor: Sea $p: K(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{A})$ tal que $p(X) = P_X$. Sea $u: X \rightarrow Y$ en

$K(\mathcal{A})$. Para definir $p(u)$, notemos que, dado Y y su cuasi-isomorfismo η_Y , tenemos el triángulo $\text{Con}_{\eta_Y}[-1] \xrightarrow{\tau} P_Y \xrightarrow{\eta_Y} Y \xrightarrow{\lambda} \text{Con}_{\eta_Y}$ en $K(\mathcal{A})$. Como η_Y es un cuasi-isomorfismo, Con_{η_Y} es acíclico. Por lo tanto, $\lambda u \eta_X = 0$ en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} P_X & \xrightarrow{\eta_X} & X \\ \vdots \downarrow v & & \downarrow u \\ P_Y & \xrightarrow{\eta_Y} & Y \xrightarrow{\lambda} \text{Con}_{\eta_Y}. \end{array}$$

Luego, por la exactitud de la sucesión:

$$\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(P_X, \text{Con}_{\eta_Y}[-1]) \xrightarrow{\tau_*} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(P_X, P_Y) \xrightarrow{\eta_{Y*}}$$

$$\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(P_X, Y) \xrightarrow{\lambda_*} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(P_X, \text{Con}_{\eta_Y}) = 0;$$

η_{Y*} es un epimorfismo, así que existe $v: P_X \rightarrow P_Y$ tal que $\eta_Y v = u \eta_X$. Además v es único con esta propiedad. En efecto, supongamos que hubiera otro morfismo v_1 tal que $\eta_Y v_1 = u \eta_X$. Entonces $\eta_Y(v - v_1) = 0$, lo cual implica que existe $\mu: P_X \rightarrow \text{Con}_{\eta_Y}[-1]$ tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & P_X & \\ \mu \swarrow & & \downarrow v-v_1 \\ \text{Con}_{\eta_Y}[-1] & \xrightarrow{\tau} & P_Y \end{array}$$

Como $\text{Con}_{\eta_Y}[-1]$ es acíclico, entonces $\mu = 0$ en $K(\mathcal{A})$ y se tiene $v = v_1$. Luego, definimos $p(u) := v$. Es evidente (por la manera en que lo construimos) que $p: K(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{A})_q$ es un funtor. Además, si $u: X \rightarrow Y$ es un cuasi-isomorfismo, puesto que

$$\begin{array}{ccc} P_X & \xrightarrow{\eta_X} & X \\ p(u) \downarrow & & \downarrow u \\ P_Y & \xrightarrow{\eta_Y} & Y \end{array}$$

conmuta en $K(\mathcal{A})$, al aplicar el i -ésimo funtor cohomológico H^i , obtenemos un cuadro conmutativo de isomorfismos. Luego, $p(u)$ es un cuasi-isomorfismo también y, por lo tanto, $Q(p(u))$ es invertible en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Por la propiedad

universal del functor localización Q , se sigue que hay un functor $p_{\mathcal{D}}$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{A}) & \xrightarrow{p} & K(\mathcal{A}) \\ Q \downarrow & & \downarrow Q \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{p_{\mathcal{D}}} & \mathcal{D}(\mathcal{A}). \end{array}$$

También existe la definición dual de q -proyectivo:

Definición 5.43. Un complejo $\dot{X} \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ se dice q -inyectivo si para cada complejo acíclico \dot{C} se tiene que $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{C}, \dot{X}) = 0$.

Proposición 5.44. Sea \dot{Q} un complejo de A -módulos inyectivos tal que existe $i \in \mathbb{Z}$ con $Q^j = 0$ para cada $j < i$. Entonces \dot{Q} es q -inyectivo.

DEMOSTRACIÓN. Sea \dot{X} un complejo acíclico y $\dot{h}: \dot{X} \rightarrow \dot{Q}$. Probemos que \dot{h} es homotópico a cero. Tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} & \xrightarrow{d_X^{i+1}} & X^{i+2} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow h^i & & \downarrow h^{i+1} & & \downarrow h^{i+2} & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Q^i & \xrightarrow{d_Q^i} & Q^{i+1} & \xrightarrow{d_Q^{i+1}} & Q^{i+2} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

(Dotted arrows in the original image indicate commutativity: $s^{i+1}: X^{i+1} \rightarrow Q^i$ and $s^{i+2}: X^{i+2} \rightarrow Q^{i+1}$.)

Como $h^i d_X^{i-1} = 0$, entonces $\text{Im} d_X^{i-1} \subseteq \ker h^i$. Además, $\ker d_X^i = \text{Im} d_X^{i-1}$, luego, tenemos la existencia de un morfismo $\hat{s}^{i+1}: \text{Im} d_X^i \rightarrow Q^i$ tal que $\hat{s}^{i+1} d_X^i = h^i$. Como Q^i es inyectivo, entonces \hat{s}^{i+1} se extiende a un morfismo $s^{i+1}: X^{i+1} \rightarrow Q^i$ tal que $s^{i+1} d_X^i = h^i$ (ver diagrama anterior).

Hagamos la prueba por inducción. Supongamos que para un entero $t \geq i + 1$ existe un morfismo $s^t: X^t \rightarrow Q^{t-1}$ tal que $h^{t-1} = s^t d_X^{t-1} + d_Q^{t-2} s^{t-1}$. Por otro lado, tenemos que $h^t d_X^{t-1} = d_Q^{t-1} h^{t-1}$. Luego, $h^t d_X^{t-1} = d_Q^{t-1} (s^t d_X^{t-1} + d_Q^{t-2} s^{t-1}) = d_Q^{t-1} s^t d_X^{t-1}$. Por lo tanto, $(h^t - d_Q^{t-1} s^t) d_X^{t-1} = 0$. Es decir, $\ker d_X^t = \text{Im} d_X^{t-1} \subseteq \ker (h^t - d_Q^{t-1} s^t)$. Luego, existe un morfismo $\hat{s}^{t+1}: \text{Im} d_X^t \rightarrow Q^t$ tal que $\hat{s}^{t+1} d_X^t = h^t - d_Q^{t-1} s^t$; este se extiende a un morfismo $s^{t+1}: X^{t+1} \rightarrow Q^t$ tal que $s^{t+1} d_X^t = h^t - d_Q^{t-1} s^t$, porque Q^t es inyectivo. La familia $\{s^{i+l}: X^{i+l} \rightarrow Q^{i+l-1}\}_{l \in \mathbb{N}}$ atestigua que \dot{h} es homotópico a cero, de ahí que \dot{Q} es q -inyectivo. \square

Proposición 5.45. Sea \dot{X} un complejo q -inyectivo y $\dot{s}: \dot{X} \rightarrow \dot{Z}$ un cuasi-isomorfismo, entonces existe $\dot{t}: \dot{Z} \rightarrow \dot{X}$ tal que $\dot{t}\dot{s} = 1_{\dot{X}}$.

DEMOSTRACIÓN. El siguiente es triángulo en $K(\mathcal{A})$:

$$\text{Con}_{\dot{s}}[-1] \xrightarrow{\dot{h}} \dot{X} \xrightarrow{\dot{s}} \dot{Z} \xrightarrow{\dot{g}} \text{Con}_{\dot{s}}.$$

Como \dot{s} es un cuasi-isomorfismo, entonces el cono de \dot{s} es acíclico, luego, también $\text{Con}_{\dot{s}}[-1]$ es acíclico, así que $\dot{h} = 0$ en $K(\mathcal{A})$. Tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \text{Con}_{\dot{s}}[-1] & \xrightarrow{0} & \dot{X} \xrightarrow{\dot{s}} \dot{Z} \\ & & \parallel \swarrow \dot{t} \\ & & \dot{X} \end{array},$$

donde \dot{t} existe y hace conmutar el diagrama por la exactitud de la segunda sucesión en la proposición (??), con $W = \dot{X}$. \square

Recapitulemos. Hemos probado que, dado \dot{X} un objeto en $K(\mathcal{A})$, existe un complejo \dot{P}_X que es q -proyectivo y un cuasi-isomorfismo $\dot{\eta}_X: \dot{P}_X \rightarrow \dot{X}$. Luego, para cada objeto \dot{X} en $K(\mathcal{A})$ escojamos un cuasi-isomorfismo $\dot{\eta}_X: \dot{P}_X \rightarrow \dot{X}$ y sea \mathcal{F}_X la familia consistente del único objeto \dot{P}_X . Veamos que \mathcal{F}_X satisface la definición (??), con respecto a Σ la familia de cuasi-isomorfismos de $K(\mathcal{A})$. En efecto, sea $\dot{u}: \dot{W} \rightarrow \dot{X}$ un cuasi-isomorfismo de $K(\mathcal{A})$. El morfismo \dot{u} es base de un triángulo Δ (axioma TR1 de categorías trianguladas), y, por el corolario (??) y la equivalencia de las sucesiones en el diagrama (??), página (??), sin perder generalidad, Δ es de la forma:

$\Delta: \dot{W} \xrightarrow{\dot{u}} \dot{X} \xrightarrow{\dot{v}} \text{Con}_{\dot{u}} \xrightarrow{\dot{w}} \dot{W}[1]$. Como \dot{u} es un cuasi-isomorfismo, entonces $\text{Con}_{\dot{u}}$ es acíclico (observación (??)). Luego, $\dot{v}\dot{\eta}_X = 0$ en $K(\mathcal{A})$ (porque \dot{P}_X es q -proyectivo). Además, tenemos la exactitud de la sucesión (proposición (??)):

$$\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{P}_X, \dot{W}) \xrightarrow{\dot{u}^*} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{P}_X, \dot{X}) \xrightarrow{\dot{v}^*} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{P}_X, \text{Con}_{\dot{u}}) = 0.$$

Entonces $\dot{\eta}_X \in \ker \dot{v}^* = \text{Im} \dot{u}^*$, así que existe $\dot{\lambda}: \dot{P}_X \rightarrow \dot{W}$ tal que $\dot{u}\dot{\lambda} = \dot{\eta}_X$, que es un cuasi-isomorfismo. Luego, hemos probado que:

Proposición 5.46. *El sistema multiplicativo de los cuasi-isomorfismos en $K(\mathcal{A})$ es localmente pequeño a la izquierda.*

Entonces podemos hablar de la categoría de fracciones $K(\mathcal{A})_\Sigma$, para el caso de $\mathcal{A} = A\text{-Mod}$.

La categoría derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ es, por definición, $K(\mathcal{A})_\Sigma$.

5.3. La categoría derivada es triangulada

Observemos que $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ es aditiva, sin embargo no es abeliana, es por eso que no definimos sucesiones exactas ahí. A pesar de esto, $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ tiene una estructura triangulada, como veremos a continuación.

Sea T el funtor traslación en $K(\mathcal{A})$ y Q el funtor localización de $K(\mathcal{A})$ en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Entonces $QT: K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ es un funtor que envía cuasi-isomorfismos en isomorfismos. Luego, por la propiedad universal de Q , existe un único funtor $T_{\mathcal{D}}$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{A}) & \xrightarrow{T} & K(\mathcal{A}) \\ Q \downarrow & & \downarrow Q \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{T_{\mathcal{D}}} & \mathcal{D}(\mathcal{A}). \end{array}$$

Recordemos que Q fija los objetos. Luego, para un objeto $X \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $T_{\mathcal{D}}(X) = T(X) = X[1]$. Por otro lado, tenemos el funtor $S: K(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{A})$, con $S(X) = X[-1]$. También se tiene que QS manda cuasi-isomorfismos en isomorfismos. Por lo tanto, existe $S_{\mathcal{D}}: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $QS = S_{\mathcal{D}}Q$. Además,

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{A}) & \xrightarrow{ST=1_{K(\mathcal{A})}} & K(\mathcal{A}) \\ Q \downarrow & & \downarrow Q \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{S_{\mathcal{D}}T_{\mathcal{D}}} & \mathcal{D}(\mathcal{A}), \end{array}$$

y $Q = S_{\mathcal{D}}T_{\mathcal{D}}Q$. Pero también $1_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$ hace que $Q = 1_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}Q$, luego, por la propiedad universal de Q , $S_{\mathcal{D}}T_{\mathcal{D}} = 1_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$. Análogamente, $T_{\mathcal{D}}S_{\mathcal{D}} = 1_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$. Luego, $T_{\mathcal{D}}$ es un automorfismo.

Definición 5.47. Decimos que el séxtuple $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ es un triángulo en la categoría derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, si es isomorfo a la imagen de un triángulo en $K(\mathcal{A})$ (bajo el funtor localización Q). Un triángulo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ es canónico en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ si y sólo si es imagen bajo Q , de un triángulo en $K(\mathcal{A})$.

Sean los séxtuples (X, Y, Z, u, v, w) y (X', Y', Z', u', v', w') en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Como antes, un morfismo de séxtuples es una terna de morfismos $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) \in$

$\mathcal{D}(\mathcal{A})$ que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \downarrow \delta_1 & & \downarrow \delta_2 & & \downarrow \delta_3 & & \downarrow T_{\mathcal{D}}\delta_1 \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1]. \end{array}$$

El morfismo $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ es un isomorfismo si δ_1, δ_2 y δ_3 lo son.

Por definición, el functor localización Q envía triángulos de $K(\mathcal{A})$ en triángulos de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Sea el séxtuple $t = (X, Y, Z, u, v, w)$. Denotamos por $Q(t)$ la imagen de t bajo el functor Q , esto es, $Q(t) := (X, Y, Z, Q(u), Q(v), Q(w))$.

Proposición 5.48. *La categoría derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ es triangulada.*

DEMOSTRACIÓN. Probemos que se satisface la definición (??).

TR1 (a) Sea t un triángulo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ y supongamos que t es isomorfo al séxtuple t_1 . Por definición de triángulo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, t es isomorfo a $Q(t')$, donde t' es un triángulo en $K(\mathcal{A})$. Luego, t_1 es isomorfo a $Q(t')$, de donde t_1 es un triángulo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

(b) El séxtuple $t = (X, X, 0, 1_X, 0, 0)$ es un triángulo de $K(\mathcal{A})$ para todo X en $\text{Ob}K(\mathcal{A})$. Luego, $Q(t) = (X, X, 0, \delta_{1_X}(1_X), 0, 0)$ es un triángulo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

(c) Sea el morfismo $\delta: X \rightarrow Y$ en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, entonces $\delta = Q(f)Q(u)^{-1}$ (observación ??). Luego, para algún Z tenemos $X \xleftarrow{Q(u)} Z \xrightarrow{Q(f)} Y$ con $u \in \Sigma$, y f en $K(\mathcal{A})$. Dado f en $K(\mathcal{A})$ podemos completar a un triángulo en $K(\mathcal{A})$ como el siguiente:

$$t' : \quad Z \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W \xrightarrow{h} Z[1].$$

Luego, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} Q(t') : & Z & \xrightarrow{Q(f)} & Y & \xrightarrow{Q(g)} & W & \xrightarrow{Q(h)} & Z[1] \\ & \downarrow Q(u) & & \downarrow Q(1_Y) & & \downarrow Q(1_W) & & \downarrow T_{\mathcal{D}}Q(u) \\ t : & X & \xrightarrow{Q(f)Q(u)^{-1}} & Y & \xrightarrow{Q(g)} & W & \xrightarrow{[T_{\mathcal{D}}Q(u)]Q(h)} & X[1] \end{array}$$

conmuta en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Además, $Q(u)$ y $T_{\mathcal{D}}Q(u)$ son isomorfismos porque $u \in \Sigma$. Luego, t es isomorfo a $Q(t')$, lo cual implica que t es un triángulo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, con base $Q(f)Q(u)^{-1} = \delta$.

TR2 Sea $t = (X, Y, Z, u, v, w)$ un triángulo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Probaremos que $t_1 = (Y, Z, X[1], v, w, -T_{\mathcal{D}}u)$ es un triángulo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Tenemos que t es isomorfo a $Q(t')$, para $t' = (X', Y', Z', u', v', w')$ un triángulo en $K(\mathcal{A})$. Luego, existe un isomorfismo $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 t : & X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\
 & \delta_1 \downarrow & & \downarrow \delta_2 & & \downarrow \delta_3 & & \downarrow T_{\mathcal{D}}\delta_1 \\
 Q(t') : & X' & \xrightarrow{Q(u')} & Y' & \xrightarrow{Q(v')} & Z' & \xrightarrow{Q(w')} & X'[1].
 \end{array} \tag{5.11}$$

Por otro lado, $t'_1 = (Y', Z', X'[1], v', w', -u'[1])$ es triángulo en $K(\mathcal{A})$. Tenemos el diagrama en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 t_1 : & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] & \xrightarrow{-T_{\mathcal{D}}u} & Y[1] \\
 & \delta_2 \downarrow & & \downarrow \delta_3 & & \downarrow T_{\mathcal{D}}\delta_1 & & \downarrow T_{\mathcal{D}}\delta_2 \\
 Q(t'_1) : & Y' & \xrightarrow{Q(v')} & Z' & \xrightarrow{Q(w')} & X'[1] & \xrightarrow{-QT(u')} & Y'[1],
 \end{array}$$

donde sólo falta que el cuadrado de la derecha conmute para que tengamos un morfismo de t_1 en $Q(t'_1)$, que es isomorfismo, porque δ_2, δ_3 y $T_{\mathcal{D}}\delta_1$ lo son. Del diagrama (??) tenemos que $Q(u') = \delta_2 u \delta_1^{-1}$, de donde

$$-QT(u') = -T_{\mathcal{D}}Q(u') = T_{\mathcal{D}}(\delta_2(-u)\delta_1^{-1}) = T_{\mathcal{D}}(\delta_2)(-T_{\mathcal{D}}(u))T_{\mathcal{D}}(\delta_1)^{-1},$$

y, por tanto

$$-QT(u')T_{\mathcal{D}}(\delta_1) = T_{\mathcal{D}}(\delta_2)(-T_{\mathcal{D}}(u)).$$

Luego, t_1 es un triángulo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Recíprocamente, si $t_1 = (Y, Z, X[1], v, w, -T_{\mathcal{D}}(u))$ es un triángulo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, entonces t_1 es isomorfo a $Q(t'_1)$, para $t'_1 = (Y', Z', X'[1], v', w', -u'[1])$ un triángulo en $K(\mathcal{A})$. Se tiene el isomorfismo siguiente en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 t_1 : & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] & \xrightarrow{-T_{\mathcal{D}}(u)} & Y[1] \\
 & \delta_1 \downarrow & & \downarrow \delta_2 & & \downarrow \delta_3 & & \downarrow T_{\mathcal{D}}(\delta_1) \\
 Q(t'_1) : & Y' & \xrightarrow{Q(v')} & Z' & \xrightarrow{Q(w')} & X'[1] & \xrightarrow{-QT(u')} & Y'[1].
 \end{array}$$

Luego, $-T_{\mathcal{D}}(\delta_1)T_{\mathcal{D}}(u) = -QT(u')\delta_3 = -T_{\mathcal{D}}Q(u')\delta_3 = -T_{\mathcal{D}}[Q(u')T_{\mathcal{D}}^{-1}(\delta_3)]$. Entonces $\delta_1 u = Q(u')T_{\mathcal{D}}^{-1}(\delta_3)$. Como t'_1 es un triángulo en $K(\mathcal{A})$, esto im-

plica que $t' = (X', Y', Z', u', v', w')$ es un triángulo en $K(\mathcal{A})$. En el diagrama:

$$t : \begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ T_{\mathcal{D}}^{-1}(\delta_3) \downarrow & & \downarrow \delta_1 & & \downarrow \delta_2 & & \downarrow \delta_3 \\ Q(t') : X' & \xrightarrow{Q(u')} & Y' & \xrightarrow{Q(v')} & Z' & \xrightarrow{Q(w')} & X'[1], \end{array}$$

los cuadrados conmutan. Además, δ_1 , δ_2 y δ_3 son isomorfismos en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, luego t es isomorfo a $Q(t')$. Por lo tanto, t es un triángulo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

TR3 Sean $t' = (X', Y', Z', u', v', w')$ y $t'_1 = (X'_1, Y'_1, Z'_1, u'_1, v'_1, w'_1)$ un par de triángulos en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Luego, son isomorfos a $Q(t)$ y $Q(t_1)$ respectivamente, para $t = (X, Y, Z, u, v, w)$ y $t_1 = (X_1, Y_1, Z_1, u_1, v_1, w_1)$ triángulos en $K(\mathcal{A})$. Sean $\delta'_1: X' \rightarrow X'_1$ y $\delta'_2: Y' \rightarrow Y'_1$ morfismos en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ tales que

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u'} & Y' \\ \downarrow \delta'_1 & & \downarrow \delta'_2 \\ X'_1 & \xrightarrow{u'_1} & Y'_1, \end{array} \text{ conmuta. Tenemos el diagrama conmutativo en } \mathcal{D}(\mathcal{A}):$$

$$\begin{array}{ccccccc} Q(t) : & X & \xrightarrow{Q(u)} & Y & \xrightarrow{Q(v)} & Z & \xrightarrow{Q(w)} & X[1] \\ & a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow & & \downarrow T_{\mathcal{D}} a \\ t' : & X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \\ & \delta'_1 \downarrow & & \delta'_2 \downarrow & & & & \\ t'_1 : & X'_1 & \xrightarrow{u'_1} & Y'_1 & \xrightarrow{v'_1} & Z'_1 & \xrightarrow{w'_1} & X'_1[1] \\ & a_1 \downarrow & & b_1 \downarrow & & c_1 \downarrow & & \downarrow T_{\mathcal{D}} a_1 \\ Q(t_1) : & X_1 & \xrightarrow{Q(u_1)} & Y_1 & \xrightarrow{Q(v_1)} & Z_1 & \xrightarrow{Q(w_1)} & X_1[1], \end{array}$$

con a, b, c, a_1, b_1, c_1 isomorfismos y donde la existencia de $\delta_3: Z \rightarrow Z_1$ en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} Q(t) : & X & \xrightarrow{Q(u)} & Y & \xrightarrow{Q(v)} & Z & \xrightarrow{Q(w)} & X[1] \\ & a_1 \delta'_1 a \downarrow & & b_1 \delta'_2 b \downarrow & & \delta_3 \downarrow & & \downarrow T_{\mathcal{D}}(a_1 \delta'_1 a) \\ Q(t_1) : & X_1 & \xrightarrow{Q(u_1)} & Y_1 & \xrightarrow{Q(v_1)} & Z_1 & \xrightarrow{Q(w_1)} & X_1[1], \end{array}$$

implica que $\delta'_3 := c_1^{-1}\delta_3c^{-1}$ hace conmutar

$$\begin{array}{ccccccc}
 t' : & X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \\
 & \delta'_1 \downarrow & & \delta'_2 \downarrow & & \delta'_3 \downarrow & & \downarrow T_{\mathcal{D}}\delta'_1 \\
 t'_1 : & X'_1 & \xrightarrow{u'_1} & Y'_1 & \xrightarrow{v'_1} & Z'_1 & \xrightarrow{w'_1} & X'_1[1].
 \end{array} \tag{5.12}$$

Luego, sean $\delta_1: X \rightarrow X_1$ y $\delta_2: Y \rightarrow Y_1$ morfismos en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ tales que

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{Q(u)} & Y \\
 \delta_1 \downarrow & & \downarrow \delta_2 \\
 X_1 & \xrightarrow{Q(u_1)} & Y_1,
 \end{array}$$

gamos $\delta_1 = Q(f)Q(s)^{-1}$ y $\delta_2 = Q(p)^{-1}Q(g)$, con s y p en Σ . En $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 X_1 & \xleftarrow{Q(f)} & U & \xrightarrow{Q(s)} & X \\
 Q(u_1) \downarrow & & & & \downarrow Q(u) \\
 Y_1 & \xrightarrow{Q(p)} & W & \xleftarrow{Q(g)} & Y.
 \end{array} \tag{5.13}$$

Luego, en la categoría homotópica tenemos el siguiente diagrama, cuyos renglones son todos triángulos en $K(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 t : & X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\
 & \uparrow s & & \parallel & & \uparrow h_1 & & \uparrow s[1] \\
 & U & \xrightarrow{us} & Y & \xrightarrow{\alpha_1} & \text{Con}_{us} & \xrightarrow{\beta_1} & U[1] \\
 & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h_2 & & \downarrow f[1] \\
 & X_1 & \xrightarrow{pu_1} & W & \xrightarrow{\alpha_2} & \text{Con}_{pu_1} & \xrightarrow{\beta_2} & X_1[1] \\
 & \parallel & & \uparrow p & & \uparrow h_3 & & \parallel \\
 t_1 : & X_1 & \xrightarrow{u_1} & Y_1 & \xrightarrow{v_1} & Z_1 & \xrightarrow{w_1} & X_1[1].
 \end{array} \tag{5.14}$$

Del diagrama (??) podemos ver que

$$\begin{array}{ll}
 Q(p)^{-1}Q(g)Q(u) = Q(u_1)Q(f)Q(s)^{-1}, & \text{luego,} \\
 Q(g)Q(u)Q(s) = Q(p)Q(u_1)Q(f), & \text{es decir,} \\
 Q(gus) = Q(pu_1f). &
 \end{array}$$

Por la observación (??), esto implica que existe un morfismo $V \xrightarrow{r} U$ en Σ tal que $gusr = pu_1fr$. Luego,

$$\delta_1 = Q(f)Q(s)^{-1} = Q(f)Q(r)Q(r)^{-1}Q(s)^{-1} = Q(fr)Q(sr)^{-1}.$$

Así que, sin perder generalidad, supongamos $gus = pu_1f$. Por TR3 en $K(\mathcal{A})$, existen morfismos h_1, h_2, h_3 en $K(\mathcal{A})$ que hacen conmutar el diagrama (??). Usando la proposición (??), para los cuasi-isomorfismos $s, 1_Y, 1_{X_1}$ y p , resulta que h_1 y h_3 también lo son. En $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, tenemos el diagrama:

$$Q(t) : \begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{Q(u)} & Y & \xrightarrow{Q(v)} & Z & \xrightarrow{Q(w)} & X[1] \\ Q(s)^{-1} \downarrow & & \parallel & & Q(h_1)^{-1} \downarrow & & T_{\mathcal{D}}(Q(s)^{-1}) \downarrow \\ U & \xrightarrow{Q(us)} & Y & \xrightarrow{Q(\alpha_1)} & \text{Con}_{us} & \xrightarrow{Q(\beta_1)} & U[1] \\ Q(f) \downarrow & & Q(g) \downarrow & & Q(h_2) \downarrow & & T_{\mathcal{D}}(Q(f)) \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{Q(pu_1)} & W & \xrightarrow{Q(\alpha_2)} & \text{Con}_{pu_1} & \xrightarrow{Q(\beta_2)} & X_1[1] \\ \parallel & & Q(p)^{-1} \downarrow & & Q(h_3)^{-1} \downarrow & & \parallel \\ Q(t_1) : X_1 & \xrightarrow{Q(u_1)} & Y_1 & \xrightarrow{Q(v_1)} & Z_1 & \xrightarrow{Q(w_1)} & X_1[1]. \end{array}$$

Se puede ver fácilmente que este conmuta. Luego, dados los morfismos δ_1 y δ_2 existe $\delta_3 := Q(h_3)^{-1}Q(h_2)Q(h_1)^{-1}$ en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ es morfismo de t en t_1 .

TR4 Sean los triángulos: $t_1 = (X, Y, Z', u, i, i')$, $t_2 = (Y, Z, X', v, j, j')$ y $t_3 = (X, Z, Y', vu, k, k')$ en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Por definición, t_1 es isomorfo a un triángulo canónico en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$: $r_1 := (A, B, C', a, m, m')$. Esto es, conmuta el diagrama:

$$t_1 = \begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{i} & Z' & \xrightarrow{i'} & X[1] \\ \alpha_1 \downarrow \cong & & \cong \downarrow \alpha_2 & & \cong \downarrow \alpha_3 & & \cong \downarrow T_{\mathcal{D}}\alpha_1 \\ r_1 = A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{m} & C' & \xrightarrow{m'} & A[1], \end{array} \quad (5.15)$$

y $r_1 = Q(\hat{r}_1)$, para $\hat{r}_1 = A \xrightarrow{c} B \xrightarrow{q} C' \xrightarrow{q'} A[1]$, un triángulo en $K(\mathcal{A})$.

Como α_2 es un isomorfismo, existe α_2^{-1} en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Por la observación (??), existe un par de morfismos r, s en $K(\mathcal{A})$, con s cuasi-isomorfismo, tales que

conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{v\alpha_2^{-1}} & Z \\
 & \searrow Q(r) & \swarrow Q(s) \\
 & & C.
 \end{array} \tag{5.16}$$

Como $K(\mathcal{A})$ es triangulada (proposición (??)), por el axioma TR1 dado el morfismo $r: B \rightarrow C$ podemos completar a un triángulo en $K(\mathcal{A})$: $\widehat{r}_2 = B \xrightarrow{r} C \xrightarrow{w} A' \xrightarrow{w'} B[1]$. Luego, su imagen bajo Q es un triángulo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Sean $b := Q(r)$, $n := Q(w)$, $n' := Q(w')$ y $\beta_2 := Q(s)$. Se tiene el siguiente diagrama en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 t_2 = & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{j} & X' & \xrightarrow{j'} & Y[1] \\
 & \alpha_2 \downarrow \cong & & \cong \downarrow \beta_2 & & \downarrow \beta_3 & & \cong \downarrow T_{\mathcal{D}}\alpha_2 \\
 r_2 = & B & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{n} & A' & \xrightarrow{n'} & B[1],
 \end{array} \tag{5.17}$$

El cuadro a la izquierda conmuta por (??). Luego, por el axioma TR3 de esta proposición, se tiene la existencia de β_3 que hace conmutar el siguiente diagrama y, además, es un isomorfismo. Entonces t_2 es isomorfo al triángulo canónico r_2 , mediante el isomorfismo $(\alpha_2, \beta_2, \beta_3)$.

Como $a = Q(c)$ y $b = Q(r)$. Por el axioma TR1 en $K(\mathcal{A})$, podemos completar el morfismo rc al triángulo: $\widehat{r}_3 = A \xrightarrow{rc} C \xrightarrow{z} B' \xrightarrow{z'} A[1]$, en $K(\mathcal{A})$. Luego, su imagen bajo Q es un triángulo canónico en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Sean $p := Q(z)$ y $p' := Q(z')$. Tenemos el siguiente diagrama en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 t_3 = & X & \xrightarrow{vu} & Z & \xrightarrow{k} & Y' & \xrightarrow{k'} & X[1] \\
 & \alpha_1 \downarrow \cong & & \cong \downarrow \beta_2 & & \downarrow \gamma_3 & & \cong \downarrow T_{\mathcal{D}}\alpha_1 \\
 r_3 = & A & \xrightarrow{ba} & C & \xrightarrow{p} & B' & \xrightarrow{p'} & A[1],
 \end{array} \tag{5.18}$$

por el axioma TR3 de esta proposición, existe γ_3 que hace conmutar el diagrama y, además, es un isomorfismo. Entonces t_3 es isomorfo al triángulo canónico r_3 , mediante el isomorfismo $(\alpha_1, \beta_2, \gamma_3)$.

Primero probemos TR4 para los triángulos canónicos r_1 , r_2 y r_3 . Por TR4 en $K(\mathcal{A})$ para los triángulos \widehat{r}_1 , \widehat{r}_2 y \widehat{r}_3 , existen los morfismos d y e que

hacen conmutar el siguiente diagrama en $K(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 B'[-1] & \xrightarrow{z'[-1]} & A & \xlongequal{\quad} & A & & & & \\
 e[-1] \downarrow & & \downarrow c & & \downarrow rc & & & & \\
 A'[-1] & \xrightarrow{w'[-1]} & B & \xrightarrow{r} & C & \xrightarrow{w} & A' & \xrightarrow{w'} & B[1] \\
 & & \downarrow q & & \downarrow z & & \parallel & & \downarrow q[1] \\
 & & C' & \xrightarrow{d} & B' & \xrightarrow{e} & A' & \xrightarrow{q[1]w'} & C'[1] \\
 & & \downarrow q' & & \downarrow z' & & & & \\
 & & A[1] & \xlongequal{\quad} & A[1] & & & &
 \end{array}$$

y, además, $C' \xrightarrow{d} B' \xrightarrow{e} A' \xrightarrow{q[1]w'} C'[1]$ es un triángulo en $K(\mathcal{A})$. Aplicando el functor localización Q al diagrama anterior obtenemos el siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 B'[-1] & \xrightarrow{T_{\mathcal{D}}^{-1}p'} & A & \xlongequal{\quad} & A & & & & \\
 T_{\mathcal{D}}^{-1}Qe \downarrow & & \downarrow a & & \downarrow ba & & & & \\
 A'[-1] & \xrightarrow{T_{\mathcal{D}}^{-1}n'} & B & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{n} & A' & \xrightarrow{n'} & B[1] \\
 & & \downarrow m & & \downarrow p & & \parallel & & \downarrow T_{\mathcal{D}}m \\
 & & C' & \xrightarrow{Q(d)} & B' & \xrightarrow{Q(e)} & A' & \xrightarrow{(T_{\mathcal{D}}m)n'} & C'[1] \\
 & & \downarrow m' & & \downarrow p' & & & & \\
 & & A[1] & \xlongequal{\quad} & A[1] & & & &
 \end{array} \tag{5.19}$$

y este diagrama también es conmutativo, porque Q es un functor. Además, $C' \xrightarrow{Qd} B' \xrightarrow{Qe} A' \xrightarrow{(T_{\mathcal{D}}m)n'} C'[1]$ es un triángulo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ por ser imagen de un triángulo en $K(\mathcal{A})$. Luego, hemos probado TR4 en el caso canónico.

Veremos que también vale TR4 para los triángulos t_1, t_2, t_3 con los que comenzamos. Esto es, probaremos que existen morfismos f y g en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ tales que $(Z', Y', X', f, g, (T_{\mathcal{D}}i)j')$ es un triángulo y el siguiente diagrama

conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 Y'[-1] & \xrightarrow{T_{\mathcal{D}}^{-1}k'} & X & \xlongequal{\quad} & X & & \\
 T_{\mathcal{D}}^{-1}g \downarrow & & u \downarrow & & \downarrow vu & & \\
 X'[-1] & \xrightarrow{T_{\mathcal{D}}^{-1}j'} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{j} & X' \xrightarrow{j'} Y[1] \\
 & & i \downarrow & & \downarrow k & & \parallel & \downarrow T_{\mathcal{D}}i \\
 & & Z' & \xrightarrow{f} & Y' & \xrightarrow{g} & X' & \xrightarrow{(T_{\mathcal{D}}i)j'} Z'[1] \\
 & & i' \downarrow & & \downarrow k' & & & \\
 & & X[1] & \xlongequal{\quad} & X[1] & & &
 \end{array} \tag{5.20}$$

Definimos:

$$\underline{f} := \gamma_3^{-1}(Qd)\alpha_3, \quad y \quad \underline{g} := \beta_3^{-1}(Qe)\gamma_3. \tag{5.21}$$

Entonces,

$$fi = \gamma_3^{-1}(Qd)\alpha_3i = \gamma_3^{-1}(Qd)m\alpha_2 = \gamma_3^{-1}pb\alpha_2 = \gamma_3^{-1}p\beta_2v = kv,$$

por la conmutatividad de los diagramas (??), (??), (??) y (??).

$$gk = \beta_3^{-1}(Qe)\gamma_3k = \beta_3^{-1}(Qe)p\beta_2 = \beta_3^{-1}n\beta_2 = j,$$

por la conmutatividad de los diagramas (??), (??) y (??).

$$i' = (T_{\mathcal{D}}\alpha_1)^{-1}m'\alpha_3 = (T_{\mathcal{D}}\alpha_1)^{-1}p'(Qd)\alpha_3 = k'\gamma_3^{-1}(Qd)\alpha_3 = k'f,$$

por la conmutatividad de los diagramas (??), (??) y (??). Además, tenemos los diagramas:

$$\begin{array}{ccccc}
 Y'[-1] & \xrightarrow{T_{\mathcal{D}}^{-1}g} & X'[-1] & \xrightarrow{T_{\mathcal{D}}^{-1}j'} & Y \\
 \gamma_3[-1] \downarrow & & \beta_3[-1] \downarrow & & \alpha_2 \downarrow \\
 B'[-1] & \xrightarrow{T_{\mathcal{D}}^{-1}Qe} & A'[-1] & \xrightarrow{T_{\mathcal{D}}^{-1}n'} & B,
 \end{array}$$

que conmuta por (??) y (??), y

$$\begin{array}{ccccc}
 Y'[-1] & \xrightarrow{T_{\mathcal{D}}^{-1}k'} & X & \xrightarrow{u} & Y \\
 \gamma_3[-1] \downarrow & & \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow \\
 B'[-1] & \xrightarrow{T_{\mathcal{D}}^{-1}p'} & A & \xrightarrow{a} & B,
 \end{array}$$

que conmuta por (??) y (??). De este par de diagramas y de (??) obtenemos que:

$$T_{\mathcal{D}}^{-1}j'T_{\mathcal{D}}^{-1}g = \alpha_2^{-1}T_{\mathcal{D}}^{-1}n'T_{\mathcal{D}}^{-1}Qe\gamma_3[-1] = \alpha_2^{-1}aT_{\mathcal{D}}^{-1}p'\gamma_3[-1] = uT_{\mathcal{D}}^{-1}k',$$

y se tiene la conmutatividad del diagrama (??).

Finalmente, tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} Z' & \xrightarrow{f} & Y' & \xrightarrow{g} & X' & \xrightarrow{(T_{\mathcal{D}}i)j'} & Z'[1] \\ \alpha_3 \downarrow & & \gamma_3 \downarrow & & \beta_3 \downarrow & & \downarrow T_{\mathcal{D}}\alpha_3 \\ C' & \xrightarrow{Qd} & B' & \xrightarrow{Qe} & A' & \xrightarrow{(T_{\mathcal{D}}m)n'} & C'[1], \end{array}$$

donde el cuadro de la izquierda y el del centro conmutan por la definición de f y g , y para el cuadro de la derecha tenemos la cadena de igualdades:

$$T_{\mathcal{D}}\alpha_3 T_{\mathcal{D}}i j' = T_{\mathcal{D}}m T_{\mathcal{D}}\alpha_2 j' = T_{\mathcal{D}}m n' \beta_3,$$

por la conmutatividad de los diagramas (??), (??). Como el renglón inferior de este diagrama es un triángulo y $(\alpha_3, \gamma_3, \beta_3)$ es un isomorfismo, por el axioma TR1, se tiene que $Z' \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} X' \xrightarrow{(T_{\mathcal{D}}i)j'} Z'[1]$ es un triángulo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. \square

5.4. Encaje de $A\text{-Mod}$ en $\mathcal{D}(A\text{-Mod})$, y $\mathcal{E}xt_A^i$

A continuación probaremos una proposición que nos permite trabajar, en cierto caso, con morfismos en la categoría homotópica en vez de morfismos en la categoría derivada.

Proposición 5.49. *Sean X un complejo q -proyectivo y Y un complejo arbitrario. Entonces,*

$$Q: \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, Y)$$

es un isomorfismo, donde Q es el funtor localización.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, Y)$ tal que $Q(f) = 0$. Por la observación (??), existe $\lambda: W \rightarrow X$ en Σ tal que $f\lambda = 0$. Construyamos un triángulo con base λ :

$$W \xrightarrow{\lambda} X \xrightarrow{t} \text{Con}_{\lambda} \xrightarrow{\beta} W[1].$$

Como $\lambda \in \Sigma$, entonces Con_λ es acíclico. Además, tenemos la exactitud de la sucesión:

$$\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\text{Con}_\lambda, Y) \xrightarrow{t^*} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, Y) \xrightarrow{\lambda^*} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(W, Y).$$

Entonces $f \in \ker \lambda^* = \text{Im} t^*$, así que existe $s \in \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\text{Con}_\lambda, Y)$ tal que $st = f$. Pero $t = 0$, porque X es q -proyectivo y Con_λ es acíclico. Entonces $f = 0$ y Q es un monomorfismo. Ahora veamos que Q es un epimorfismo. Sea el morfismo δ en $\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, Y)$ determinado por el diagrama

$$X \xleftarrow{u} Z \xrightarrow{f} Y, \text{ con } u \in \Sigma. \text{ Se tiene el triángulo:}$$

$$Z \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} \text{Con}_u \xrightarrow{w} Z[1],$$

Como $u \in \Sigma$, entonces Con_u es acíclico. Además, X es q -proyectivo, luego $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, \text{Con}_u) = 0$. Entonces, en la sucesión exacta:

$$\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, Z) \xrightarrow{u^*} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, X) \xrightarrow{v^*} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, \text{Con}_u) = 0,$$

u^* es un epimorfismo. Entonces existe $t \in \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, Z)$ tal que $ut = 1_X$. Por lo tanto, $Q(ut) = Q(u)Q(t) = 1_X$, de ahí que $Q(t) = Q(u)^{-1}$. Entonces $\delta = Q(f)Q(u)^{-1} = Q(f)Q(t) = Q(ft)$. \square

Por la observación (??), también el dual de esta proposición es cierto:

Proposición 5.50. *Sea X un complejo arbitrario y Y un complejo q -inyectivo. Entonces,*

$$Q: \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, Y)$$

es un isomorfismo, para Q el funtor localización.

Observación 5.51. *Para cada $n \in \mathbb{Z}$, el n -ésimo funtor de cohomología $H^n: K(\mathcal{A}) \rightarrow A\text{-Mod}$ induce un funtor $\bar{H}^n: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow A\text{-Mod}$.*

DEMOSTRACIÓN. El funtor H^n envía cuasi-isomorfismos en isomorfismos. Por la propiedad universal del funtor localización Q , H^n se factoriza a través de Q . Por lo tanto, existe un morfismo $\bar{H}^n: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow A\text{-Mod}$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{A}) & \xrightarrow{H^n} & A\text{-Mod} \\ Q \downarrow & \nearrow \bar{H}^n & \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}) & & \end{array} .$$

□

Observación 5.52. Si $Q(u)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, entonces, $\bar{H}^n(Q(u))$ es un isomorfismo en $A\text{-Mod}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, $H^n(u)$ también es un isomorfismo, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Luego, u es un cuasi-isomorfismo.

Definición 5.53. Sea M un A -módulo y \dot{X}_M un complejo tal que $X_M^i = 0$ para cada $i > 0$. Si la sucesión

$$\dots \longrightarrow X_M^{-2} \xrightarrow{d_X^{-2}} X_M^{-1} \xrightarrow{d_X^{-1}} X_M^0 \xrightarrow{\eta_M} M \longrightarrow 0 \dots$$

es exacta, entonces (\dot{X}_M, η_M) se dice que es una resolución de M . Si cada X_M^i es proyectivo, entonces (\dot{X}_M, η_M) es una resolución proyectiva de M . Si el morfismo η_M se sobreentiende, entonces, abusando de la notación escribiremos simplemente \dot{X}_M para denotar una resolución de M .

Dualizando esta definición, obtenemos la de corresolución inyectiva.

Lema 5.54. Para cada $M \in A\text{-Mod}$ existe al menos una resolución proyectiva de M .

DEMOSTRACIÓN. Sea $P^0 \xrightarrow{\eta} M$ un epimorfismo con P^0 proyectivo (proposición (??)). Entonces la sucesión $0 \longrightarrow \ker \eta \xrightarrow{\sigma^0} P^0 \xrightarrow{\eta} M \longrightarrow 0$ es exacta. Sea el epimorfismo $P^{-1} \xrightarrow{\rho^{-1}} \ker \eta$ con P^{-1} proyectivo. Definimos $d_P^{-1} := \sigma^0 \rho^{-1}$, de ahí que la sucesión $P^{-1} \xrightarrow{d_P^{-1}} P^0 \xrightarrow{\eta} M \longrightarrow 0$ sea exacta. Iterando este proceso obtenemos una sucesión exacta

$$\dots \longrightarrow P^{-2} \xrightarrow{d_P^{-2}} P^{-1} \xrightarrow{d_P^{-1}} P^0 \xrightarrow{\eta} M \longrightarrow 0 \dots$$

donde cada P^{-i} es proyectivo. □

El siguiente teorema es un resultado clásico de álgebra homológica, su demostración puede consultarse, por ejemplo, en [?].

Teorema 5.55. Sean (\dot{P}_M, η_M) una resolución proyectiva del A -módulo M , (\dot{X}_N, η_N) una resolución (no necesariamente proyectiva) del A -módulo N y $f: M \rightarrow N$ un morfismo de A -módulos. Entonces f induce un morfismo $\bar{f}: \dot{P}_M \rightarrow \dot{X}_N$ de complejos tal que $f\eta_M = \eta_N \bar{f}^0$. Además, \bar{f} es único hasta homotopía.

A un morfismo \bar{f} inducido por f se le suele llamar “un levantamiento de f ”, y al teorema anterior se le llama “teorema del levantamiento” o, “teorema de la comparación”.

También es válido el recíproco de este teorema:

Proposición 5.56. *Sean (\dot{P}_M, η_M) una resolución proyectiva del A -módulo M y (\dot{X}_N, η_N) una resolución del A -módulo N . Sea $\dot{h}: \dot{P}_M \rightarrow \dot{X}_N$ un morfismo de complejos. Entonces \dot{h} induce un único morfismo $f: M \rightarrow N$ de A -módulos tal que $f\eta_M = \eta_N h^0$.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos el siguiente diagrama con renglones exactos en $A\text{-Mod}$:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_M^{-1} & \xrightarrow{d_P^{-1}} & P_M^0 & \xrightarrow{\eta_M} & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow h^{-1} & & \downarrow h^0 & & \downarrow f \\ \cdots & \longrightarrow & X_N^{-1} & \xrightarrow{d_X^{-1}} & X_N^0 & \xrightarrow{\eta_N} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

Por la proposición (??), η_M es conúcleo de d_P^{-1} , y, puesto que $\eta_N h^0 d_P^{-1} = \eta_N d_X^{-1} h^{-1} = 0$, entonces existe $f: M \rightarrow N$ tal que $f\eta_M = \eta_N h^0$. Además, si existe $f_1: M \rightarrow N$ tal que $f_1\eta_M = \eta_N h^0$, entonces $(f - f_1)\eta_M = 0$, y como η_M es epimorfismo, $f = f_1$. \square

El siguiente resultado también es clásico en la teoría del álgebra homológica. Omitiremos su demostración que puede consultarse en [?].

Lema 5.57. *Sea $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $A\text{-Mod}$ y (\dot{P}_M, η_M) , (\dot{P}_L, η_L) resoluciones proyectivas de M y L respectivamente. Entonces existe una resolución proyectiva (\dot{P}_N, η_N) de N y levantamientos $\bar{f}: \dot{P}_M \rightarrow \dot{P}_N$ y $\bar{g}: \dot{P}_N \rightarrow \dot{P}_L$ de f y g respectivamente tales que*

$$\dot{x}: 0 \longrightarrow \dot{P}_M \xrightarrow{\bar{f}} \dot{P}_N \xrightarrow{\bar{g}} \dot{P}_L \longrightarrow 0,$$

es una sucesión exacta de complejos y $\eta_N \bar{f}^0 = f\eta_M$, $\eta_L \bar{g}^0 = g\eta_N$. Luego, \dot{x} es una \mathcal{E} -sucesión en $K(\mathcal{A})$.

También tenemos el dual de este lema:

Lema 5.58. *Sea $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $A\text{-Mod}$ y (\dot{I}_M, σ_M) , (\dot{I}_L, σ_L) corresoluciones inyectivas de M y L respectivamente. Entonces existe una corresolución inyectiva (\dot{I}_N, σ_N) de N y*

levantamientos $\bar{f}: \dot{I}_M \rightarrow \dot{I}_N$ y $\bar{g}: \dot{I}_N \rightarrow \dot{I}_L$ de f y g respectivamente tales que

$$0 \longrightarrow \dot{I}_M \xrightarrow{\bar{f}} \dot{I}_N \xrightarrow{\bar{g}} \dot{I}_L \longrightarrow 0,$$

es una sucesión exacta de complejos.

Definición 5.59. Sea M en $A\text{-Mod}$ y \dot{P} una resolución proyectiva de M . Consideremos el funtor aditivo $F := \text{Hom}_A(-, N): A\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$. Aplicando F a \dot{P} obtenemos el complejo:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(P^0, N) \xrightarrow{(d_P^{-1})^*} \text{Hom}_A(P^{-1}, N) \xrightarrow{(d_P^{-2})^*} \dots$$

$$\text{Hom}_A(P^{-i+1}, N) \xrightarrow{(d_P^{-i})^*} \text{Hom}_A(P^{-i}, N) \xrightarrow{(d_P^{-i-1})^*} \text{Hom}_A(P^{-i-1}, N) \dots$$

Definimos

$$\text{Ext}_A^i(M, N) := H^{-i}(F\dot{P}) = \ker(d_P^{-i-1})^* / \text{Im}(d_P^{-i})^*,$$

la $-i$ -ésima cohomología del complejo $F\dot{P}$, para todo $i \geq 0$. Para $i = 0$, tenemos

$$\text{Hom}_A(M, N) \cong \ker(d_P^{-1})^* \cong H^0(F\dot{P}) = \text{Ext}_A^0(M, N).$$

Lema 5.60. Sean $M, N \in A\text{-Mod}$ y sean \dot{P}_M y \dot{P}_N sus correspondientes resoluciones proyectivas. Entonces, hay un isomorfismo:

$$\psi: \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{P}_M, \dot{P}_N) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(M, N).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\xi: 0 \longrightarrow \dot{P}_N \xrightarrow{f} \dot{E} \xrightarrow{g} \dot{P}_M \longrightarrow 0$ una \mathcal{E} -sucesión. Si $i > 0$, entonces $P_N^i = 0$ y $P_M^i = 0$, luego, $E^i = 0$. Si $i \leq 0$, cada sucesión $0 \longrightarrow P_N^i \xrightarrow{f^i} E^i \xrightarrow{g^i} P_M^i \longrightarrow 0$ se divide, porque P_M^i es proyectivo, entonces $E^i \cong P_N^i \oplus P_M^i$, de ahí que cada E^i sea proyectivo. Por otro lado, en las cohomologías se tiene $H^i(\dot{P}_N) = 0 = H^i(\dot{P}_M)$, para todo $i \neq 0$. Si $i = 0$, hay isomorfismos $\alpha_N: H^0(\dot{P}_N) \rightarrow N$ y $\alpha_M: H^0(\dot{P}_M) \rightarrow M$. Por (??), se tiene la sucesión exacta:

$$N \cong H^0(\dot{P}_N) \xrightarrow{H^0 f} H^0(\dot{E}) \xrightarrow{H^0 g} H^0(\dot{P}_M) \cong M.$$

Sea $\psi(\xi)$ la clase en $\text{Ext}_A^1(M, N)$ representada por:

$$x: \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{u} H^0(\dot{E}) \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0.$$

Esta definición no depende del representante de la clase tomado. En efecto, sea $0 \longrightarrow \dot{P}_N \xrightarrow{f'} \dot{E}' \xrightarrow{g'} \dot{P}_M \longrightarrow 0$ una \mathcal{E} -sucesión equivalente a ξ . Luego, tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \dot{P}_N & \xrightarrow{f} & \dot{E} & \xrightarrow{g} & \dot{P}_M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \tau & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \dot{P}_N & \xrightarrow{f'} & \dot{E}' & \xrightarrow{g'} & \dot{P}_M & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

y al aplicar el funtor H^0 obtenemos:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\dot{P}_N) & \xrightarrow{H^0(f)} & H^0(\dot{E}) & \xrightarrow{H^0(g)} & H^0(\dot{P}_M) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow H^0(\tau) & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & H^0(\dot{P}_N) & \xrightarrow{H^0(f')} & H^0(\dot{E}') & \xrightarrow{H^0(g')} & H^0(\dot{P}_M) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

por lo tanto, es conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} x: & 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{u} & H^0(\dot{E}) & \xrightarrow{v} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & & \parallel & & \downarrow H^0(\tau) & & \parallel & & \\ x': & 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{u'} & H^0(\dot{E}') & \xrightarrow{v'} & M & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

es decir, las extensiones x y x' son equivalentes. Luego, ψ está bien definida. Para ver que el morfismo ψ es inyectivo, consideramos el isomorfismo $\Psi: \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{P}_M, \dot{P}_N[1]) \longrightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{E}}(\dot{P}_M, \dot{P}_N)$. Supongamos que $\Psi(-w) = \xi$ y que $x := \psi(\xi)$ se divide. Sea $x: 0 \longrightarrow N \xrightarrow{u} H^0(\dot{E}) \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0$, entonces, existe un morfismo $s: M \rightarrow H^0(\dot{E})$ tal que $vs = 1_M$. Tal morfismo s se levanta a uno de complejos $\dot{s}: \dot{P}_M \rightarrow \dot{E}$, con $s\eta_M = \eta_E s^0$. Por otro lado, el morfismo $\dot{g}\dot{s}: \dot{P}_M \rightarrow \dot{P}_M$ levanta a $vs = 1_M$. Luego, $\dot{g}\dot{s}$ es homotópico a la identidad en \dot{P}_M . Tenemos los siguientes triángulos en $K(\mathcal{A})$ y el morfismo entre ellos:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \xrightarrow{0} & \dot{P}_M & \xrightarrow{1} & \dot{P}_M & \xrightarrow{0} & 0 & & \\ \downarrow 0 & & \downarrow \dot{s} & & \parallel & & \downarrow 0 & & \\ \dot{P}_N & \xrightarrow{f} & \dot{E} & \xrightarrow{g} & \dot{P}_M & \xrightarrow{w} & \dot{P}_N[1] & & \end{array}$$

Por lo tanto, $w = 0$ en $K(\mathcal{A})$, luego $\xi = \Psi(-w)$ es equivalente a la \mathcal{E} -sucesión trivial.

Veamos que ψ es suprayectiva. Sea $x: 0 \longrightarrow N \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0$ una sucesión en $\text{Ext}_A^1(M, N)$. Luego, el lema (??) dice que hay una \mathcal{E} -sucesión de resoluciones proyectivas $\xi: 0 \longrightarrow \dot{P}_N \xrightarrow{f} \dot{P}_L \xrightarrow{g} \dot{P}_M \longrightarrow 0$, para \dot{f} y \dot{g} levantamientos de u y v respectivamente. Como conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\dot{P}_N) & \xrightarrow{H^0(\dot{f})} & H^0(\dot{P}_L) & \xrightarrow{H^0(\dot{g})} & H^0(\dot{P}_M) \longrightarrow 0 \\ & & \alpha_N \downarrow & & \downarrow \alpha_L & & \downarrow \alpha_M \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{u} & L & \xrightarrow{v} & M \longrightarrow 0, \end{array}$$

entonces $\psi(\xi) = x$.

Probemos que ψ es un morfismo de grupos. Usaremos la siguiente notación, dado $\dot{h}: \dot{P}_N \rightarrow \dot{P}_{N'}$ un morfismo de complejos, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} P_N^0 & \xrightarrow{\eta_N} & N & & \\ & \searrow p_N & \downarrow \alpha_N & & \\ & & H^0(\dot{P}_N) & & \\ & & \downarrow H^0(\dot{h}) & & \\ & & H^0(\dot{P}_{N'}) & & \\ & \swarrow p_{N'} & \downarrow \alpha_{N'} & & \\ P_{N'}^0 & \xrightarrow{\eta_{N'}} & N' & & \end{array}$$

donde p_N y $p_{N'}$ son proyecciones canónicas. Notemos que, si $\nabla: \dot{P}_N \oplus \dot{P}_N \rightarrow \dot{P}_N$ y $\Delta: \dot{P}_M \rightarrow \dot{P}_M \oplus \dot{P}_M$ son los morfismos codiagonal y diagonal de complejos, entonces $\underline{\nabla}: N \oplus N \rightarrow N$ y $\underline{\Delta}: M \rightarrow M \oplus M$ son los morfismos codiagonal y diagonal de módulos (ver proposición (??), ahí definimos la suma de \mathcal{E} -sucesiones). Sea $[\xi] \in \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{P}_M, \dot{P}_N)$. Si $\dot{h}: \dot{P}_N \rightarrow \dot{P}_{N'}$ es un morfismo de complejos, tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \xi: & \dot{P}_N & \xrightarrow{\dot{f}} & \dot{E} & \xrightarrow{\dot{g}} & \dot{P}_M \\ & \dot{h} \downarrow & & \downarrow \dot{t} & & \parallel \\ \dot{h}\xi: & \dot{P}_{N'} & \xrightarrow{\dot{f}'} & \dot{E}' & \xrightarrow{\dot{g}'} & \dot{P}_M \end{array}$$

donde $\dot{h}\xi$ es pushout de ξ . La conmutatividad del diagrama anterior determina la conmutatividad del siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} \psi(\xi): & N & \xrightarrow{u} & H^0(\dot{E}) & \xrightarrow{v} & M \\ & \alpha_N \uparrow & & \parallel & & \uparrow \alpha_M \\ & H^0(\dot{P}_N) & \xrightarrow{H^0(f)} & H^0(\dot{E}) & \xrightarrow{H^0(g)} & H^0(\dot{P}_M) \\ & H^0(h) \downarrow & & \downarrow H^0(i) & & \parallel \\ & H^0(\dot{P}_{N'}) & \xrightarrow{H^0(f')} & H^0(\dot{E}') & \xrightarrow{H^0(g')} & H^0(\dot{P}_M) \\ & \alpha_{N'} \downarrow & & \parallel & & \downarrow \alpha_M \\ \psi(\dot{h}\xi): & N' & \xrightarrow{u'} & H^0(\dot{E}') & \xrightarrow{v'} & M. \end{array}$$

Entonces, conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} \psi(\xi): & N & \xrightarrow{u} & H^0(\dot{E}) & \xrightarrow{v} & M \\ & \downarrow h & & \downarrow H^0(i) & & \parallel \\ \psi(\dot{h}\xi): & N' & \xrightarrow{u'} & H^0(\dot{E}') & \xrightarrow{v'} & M, \end{array}$$

lo cual nos dice que $\psi(\dot{h}\xi)$ es pushout de $\psi(\xi)$ por el morfismo h . Es decir,

$$h\psi(\xi) = \psi(\dot{h}\xi).$$

Similarmente se muestra que si $\dot{g}: \dot{P}_{M'} \rightarrow \dot{P}_M$ es un morfismo de complejos, entonces vale la fórmula:

$$\psi(\xi)\dot{g} = \psi(\xi\dot{g}).$$

Este par de fórmulas nos permiten probar que:

$$\begin{aligned} \psi(\xi + \xi') &= \psi(\nabla(\xi \oplus \xi')\Delta) = \nabla\psi(\xi \oplus \xi')\Delta \\ &= \nabla(\psi(\xi) \oplus \psi(\xi'))\Delta = \psi(\xi) + \psi(\xi'). \end{aligned}$$

□

Proposición 5.61. Para $\mathcal{A} := A\text{-Mod}$, tenemos el funtor “concentrar en grado 0” definido como sigue:

$$\begin{array}{ccc} E: \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathcal{A}) \\ & & \begin{array}{ccc} M & & \underline{M} \\ f \downarrow & \longmapsto & \downarrow f \\ N & & \underline{N}, \end{array} \end{array}$$

donde $\dot{f} := (\dots, 0, f, 0, \dots)$ tiene al morfismo f en grado cero. También tenemos el funtor proyección canónica $\pi: \mathcal{C}(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{A})$ y el funtor localización $Q: K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Consideremos el funtor composición

$$G := Q\pi E: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Afirmamos que el funtor G es fiel y pleno. Por otro lado, dados M y N A -módulos, existe un isomorfismo

$$\Phi_{M,N}: \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(\underline{M}, \underline{N}[1]) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(M, N).$$

DEMOSTRACIÓN. Dado $f: M \rightarrow N$ en $A\text{-Mod}$, daremos primero una descripción de $G(f)$ en términos de las resoluciones proyectivas de M y N . Tenemos las resoluciones proyectivas \dot{P}_M y \dot{P}_N de M y N respectivamente, es decir, las sucesiones:

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow P_M^{-2} \xrightarrow{d_{P_M}^{-2}} P_M^{-1} \xrightarrow{d_{P_M}^{-1}} P_M^0 \xrightarrow{\eta_M} M \longrightarrow 0 \dots \\ \dots &\longrightarrow P_N^{-2} \xrightarrow{d_{P_N}^{-2}} P_N^{-1} \xrightarrow{d_{P_N}^{-1}} P_N^0 \xrightarrow{\eta_N} N \longrightarrow 0 \dots \end{aligned}$$

son exactas. Definimos los morfismos

$$\dot{\eta}_M = (\dots, 0, \eta_M, 0, \dots), \quad \dot{\eta}_N = (\dots, 0, \eta_N, 0, \dots), \quad \dot{f} = (\dots, 0, f, 0, \dots),$$

cuya única entrada que podría ser distinta de cero está en el lugar cero. Es claro que

$$\dot{\eta}_M: \dot{P}_M \longrightarrow \underline{M}, \quad \dot{\eta}_N: \dot{P}_N \longrightarrow \underline{N} \quad \text{y} \quad \dot{f}: \underline{M} \longrightarrow \underline{N},$$

son morfismos de complejos. Por el teorema de la comparación (??), f se levanta a un morfismo único (hasta homotopía) \hat{f} de \dot{P}_M en \dot{P}_N , tal que

$$\begin{array}{ccc} P_M^0 & \xrightarrow{\eta_M} & M \\ \downarrow \hat{f}^0 & & \downarrow f \\ P_N^0 & \xrightarrow{\eta_N} & N \end{array} \text{ conmuta. Luego, es claro que conmuta}$$

$$\begin{array}{ccc} \dot{P}_M & \xrightarrow{\hat{f}} & \dot{P}_N \\ \downarrow \dot{\eta}_M & & \downarrow \dot{\eta}_N \\ \underline{M} & \xrightarrow{f} & \underline{N}, \end{array} \tag{5.22}$$

en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, porque, si $i \neq 0$, tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} P_M^i & \xrightarrow{\hat{f}^i} & P_N^i \\ \downarrow 0 & & \downarrow 0 \\ 0 & \xrightarrow{0} & 0, \end{array}$$

y si $i = 0$, entonces, $P_M^0 \xrightarrow{\hat{f}^0} P_N^0$ conmuta porque \hat{f} levanta a f .

$$\begin{array}{ccc} P_M^0 & \xrightarrow{\hat{f}^0} & P_N^0 \\ \downarrow \eta_M & & \downarrow \eta_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Aplicamos $Q\pi$ al diagrama (??) para obtener que, en la categoría derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, también conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \dot{P}_M & \xrightarrow{Q\pi(\hat{f})} & \dot{P}_N \\ Q\pi(\dot{\eta}_M) \downarrow & & \downarrow Q\pi(\dot{\eta}_N) \\ \underline{M} & \xrightarrow{Q\pi(\hat{f})} & \underline{N}. \end{array}$$

Como $\pi\dot{\eta}_M$ y $\pi\dot{\eta}_N$ son cuasi-isomorfismos (ver (??)), entonces $Q\pi(\dot{\eta}_M)$ y $Q\pi(\dot{\eta}_N)$ son isomorfismos en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Así que

$$G(f) := Q\pi(\hat{f}) = Q\pi(\dot{\eta}_N)Q\pi(\hat{f})Q\pi(\dot{\eta}_M)^{-1},$$

para \hat{f} un levantamiento de f y, como $\pi\hat{f}$ es único en $K(\mathcal{A})$ (pues los levantamientos de f son homotópicos), entonces $G(f)$ está bien definido.

Veamos que G es fiel. Supongamos que $G(f) = 0$, entonces tenemos que $0 = G(f) = Q\pi(\dot{\eta}_N)Q\pi(\hat{f})Q\pi(\dot{\eta}_M)^{-1}$. Por lo tanto, $Q\pi(\hat{f}) = 0$. Por la proposición (??), \dot{P}_M es q -proyectivo. Usando (??), resulta que $\pi\hat{f} = 0$. Por lo tanto, \hat{f} es homotópico al morfismo cero $0: \dot{P}_M \rightarrow \dot{P}_N$ de complejos. De ahí que existe un morfismo $t: P_M^0 \rightarrow P_N^{-1}$ tal que $\hat{f}^0 = d_{P_N}^{-1}t$. Por lo tanto, $f\eta_M = \eta_N\hat{f}^0 = \eta_N d_{P_N}^{-1}t = 0t = 0$, como η_M es epimorfismo, tenemos que $f = 0$.

Para ver que G es pleno, sea $g: \underline{M} \rightarrow \underline{N}$ un morfismo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Tenemos el diagrama conmutativo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccc} \dot{P}_M & \xrightarrow{Q\pi(\dot{\eta}_N)^{-1}gQ\pi(\dot{\eta}_M)} & \dot{P}_N \\ Q\pi(\dot{\eta}_M) \downarrow & & \downarrow Q\pi(\dot{\eta}_N) \\ \underline{M} & \xrightarrow{g} & \underline{N}. \end{array}$$

Por la proposición (??), \dot{P}_M es q -proyectivo. Luego, (??) implica que $Q\pi(\dot{\eta}_N)^{-1}gQ\pi(\dot{\eta}_M) = Q(\bar{h})$, para un morfismo $\bar{h} = \pi\dot{h}: \dot{P}_M \rightarrow \dot{P}_N$ en $K(\mathcal{A})$. Entonces $g =$

$Q\pi(\dot{\eta}_N)Q\pi(\dot{h})Q\pi(\dot{\eta}_M)^{-1}$. Luego, por la proposición (??), a \dot{h} le corresponde un único morfismo $f: M \rightarrow N$ tal que $f\eta_M = \eta_N h^0$. Además, $G(f) = Q\pi(\dot{\eta}_N)Q\pi(\dot{h})Q\pi(\dot{\eta}_M)^{-1} = g$. Luego, hemos probado que G es fiel y pleno.

Sea φ el isomorfismo entre $\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(\underline{M}, \underline{N}[1])$ y $\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(\dot{P}_M, \dot{P}_N[1])$ (pues $\dot{P}_M \xrightarrow[\cong]{Q\pi(\dot{\eta}_M)} \underline{M}$ y $\dot{P}_N \xrightarrow[\cong]{Q\pi(\dot{\eta}_N)} \underline{N}$ en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, ver ejemplo (??)). Este isomorfismo envía $\delta \in \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(\underline{M}, \underline{N}[1])$ en $Q\pi(\dot{\eta}_N[1])^{-1}\delta Q\pi(\dot{\eta}_M)$. Por el teorema (??), la proposición (??) y el lema (??), tenemos la cadena de isomorfismos:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(\dot{P}_M, \dot{P}_N[1]) & \xleftarrow[\cong]{Q} & \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{P}_M, \dot{P}_N[1]) & \xrightarrow[\cong]{\hat{\Psi}} & \mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{P}_M, \dot{P}_N) \\ \uparrow \cong \varphi & & & & \cong \downarrow \psi \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(\underline{M}, \underline{N}[1]) & & & & \text{Ext}_A^1(M, N). \end{array}$$

Luego, para cada pareja de módulos M, N , tenemos que $\Phi_{M,N} := \psi\hat{\Psi}Q^{-1}\varphi$ es un isomorfismo de grupos. □

En particular, la proposición anterior muestra que la categoría $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ no es trivial.

Proposición 5.62. *Sea $0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\dot{u}} \dot{E} \xrightarrow{\dot{v}} \dot{Y} \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de complejos, entonces existe un triángulo $\dot{X} \xrightarrow{Q\dot{u}} \dot{E} \xrightarrow{Q\dot{v}} \dot{Y} \xrightarrow{w} \dot{X}[1]$ en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.*

DEMOSTRACIÓN. En la demostración del lema (??) vimos que dado el morfismo \dot{u} , tenemos la \mathcal{E} -sucesión:

$$0 \longrightarrow \dot{X} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\sigma} \end{pmatrix}} \dot{E} \oplus \dot{T} \xrightarrow{(\dot{g}, \dot{t})} \dot{Z} \longrightarrow 0 \tag{5.23}$$

donde \dot{T} es un complejo \mathcal{E} -proyectivo y (\dot{g}, \dot{t}) es conúcleo de $\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\sigma} \end{pmatrix}$. En particular, (??) es una sucesión exacta de complejos en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Luego, tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\sigma} \end{pmatrix}} & \dot{E} \oplus \dot{T} & \xrightarrow{(\dot{g}, \dot{t})} & \dot{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow (1, 0) & & \downarrow \lambda & & \\ 0 & \longrightarrow & \dot{X} & \xrightarrow{\dot{u}} & \dot{E} & \xrightarrow{\dot{v}} & \dot{Y} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

El cuadrado de la izquierda conmuta, entonces $\dot{\nu}(1, 0) \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\sigma} \end{pmatrix} = \dot{\nu}\dot{u} = 0$, y puesto que (\dot{g}, \dot{t}) es conúcleo de $\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\sigma} \end{pmatrix}$, entonces existe un único morfismo $\dot{\lambda}: \dot{Z} \rightarrow \dot{Y}$ que hace conmutar el cuadrado a la derecha. Tomando la sucesión larga de homología para ambas sucesiones exactas y el morfismo entre ellas tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & H^i(\dot{X}) & \xrightarrow{H^i \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\sigma} \end{pmatrix}} & H^i(\dot{E} \oplus \dot{T}) & \xrightarrow{H^i(\dot{g}, \dot{t})} & H^i(\dot{Z}) & \xrightarrow{\delta} & H^{i+1}(\dot{X}) & \xrightarrow{H^{i+1} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\sigma} \end{pmatrix}} & H^{i+1}(\dot{E} \oplus \dot{T}) & \dots \\ & \parallel & & \downarrow H^i(1, 0) & & \downarrow H^i \dot{\lambda} & & \parallel & & \downarrow H^{i+1}(1, 0) & \\ \dots & H^i(\dot{X}) & \xrightarrow{H^i \dot{u}} & H^i(\dot{E}) & \xrightarrow{H^i \dot{\nu}} & H^i(\dot{Y}) & \xrightarrow{\delta'} & H^{i+1}(\dot{X}) & \xrightarrow{H^{i+1} \dot{u}} & H^{i+1}(\dot{E}) & \dots \end{array}$$

donde δ y δ' son los morfismos conexión. Este diagrama es conmutativo, por la naturalidad del funtor cohomológico. H^n induce un funtor \hat{H}^n en la categoría homotópica $K(\mathcal{A})$. Luego, es conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \hat{H}^i(\dot{X}) & \xrightarrow{\hat{H}^i \dot{u}} & \hat{H}^i(\dot{E}) & \xrightarrow{\hat{H}^i(\dot{g}, \dot{t})} & \hat{H}^i(\dot{Z}) & \xrightarrow{\delta} & \hat{H}^{i+1}(\dot{X}) & \xrightarrow{\hat{H}^{i+1} \dot{u}} & \hat{H}^{i+1}(\dot{E}) & \dots \\ & \parallel & & \parallel & & \downarrow \hat{H}^i \dot{\lambda} & & \parallel & & \parallel & \\ \dots & \hat{H}^i(\dot{X}) & \xrightarrow{\hat{H}^i \dot{u}} & \hat{H}^i(\dot{E}) & \xrightarrow{\hat{H}^i \dot{\nu}} & \hat{H}^i(\dot{Y}) & \xrightarrow{\delta'} & \hat{H}^{i+1}(\dot{X}) & \xrightarrow{\hat{H}^{i+1} \dot{u}} & \hat{H}^{i+1}(\dot{E}) & \dots \end{array}$$

El lema del 5 nos dice que $\hat{H}^i \dot{\lambda}$ es un isomorfismo para todo $i \in \mathbb{Z}$, por lo tanto, $\dot{\lambda}$ es un cuasi-isomorfismo. Entonces $Q\dot{\lambda}$ es un isomorfismo. Sea $-h$ el morfismo que le corresponde a la \mathcal{E} -sucesión (??) por el teorema (??). Entonces tenemos el siguiente diagrama en $K(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{X} & \xrightarrow{\dot{u}} & \dot{E} & \xrightarrow{(\dot{g}, \dot{t})} & \dot{Z} & \xrightarrow{h} & \dot{X}[1] \\ 1_{\dot{X}} \downarrow & & \downarrow 1_{\dot{E}} & & \downarrow \dot{\lambda} & & \downarrow 1_{\dot{X}[1]} \\ \dot{X} & \xrightarrow{\dot{u}} & \dot{E} & \xrightarrow{\dot{\nu}} & \dot{Y} & & \dot{X}[1], \end{array}$$

donde el primer renglón es un triángulo. En la categoría derivada tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{X} & \xrightarrow{Q\dot{u}} & \dot{E} & \xrightarrow{Q(\dot{g}, \dot{t})} & \dot{Z} & \xrightarrow{Q(h)} & \dot{X}[1] \\ Q(1_{\dot{X}}) \downarrow & & \downarrow Q(1_{\dot{E}}) & & \downarrow Q\dot{\lambda} & & \downarrow T_{\mathcal{D}}Q(1_{\dot{X}}) \\ \dot{X} & \xrightarrow{Q\dot{u}} & \dot{E} & \xrightarrow{Q\dot{\nu}} & \dot{Y} & \xrightarrow{Qh(Q\dot{\lambda})^{-1}} & \dot{X}[1]. \end{array}$$

Por lo tanto, con $w = Qh(Q\dot{\lambda})^{-1}$,

$$\dot{X} \xrightarrow{Q\dot{u}} \dot{E} \xrightarrow{Q\dot{\nu}} \dot{Y} \xrightarrow{w} \dot{X}[1]$$

es un triángulo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. □

Proposición 5.63. *Sea el siguiente diagrama en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$:*

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{X} & \xrightarrow{f} & \dot{Y} & \xrightarrow{g} & \dot{Z} & \xrightarrow{h} & \dot{X}[1] \\ \delta_1 \downarrow \cong & & \delta_2 \downarrow \cong & & & & \\ \dot{J}_1 & & \dot{J}_2 & & & & \end{array}$$

tal que el primer renglón es un triángulo, \dot{J}_1 y \dot{J}_2 son complejos de inyectivos y \dot{J}_2 es, además, q -inyectivo. Entonces, \dot{Z} es isomorfo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ a un complejo de inyectivos.

DEMOSTRACIÓN. Sea el morfismo $\delta_2 f \delta_1^{-1}: \dot{J}_1 \rightarrow \dot{J}_2$. Por la proposición (??), existe un único morfismo $u: \dot{J}_1 \rightarrow \dot{J}_2$ en $K(\mathcal{A})$ tal que $Q(u) = \delta_2 f \delta_1^{-1}$. Luego, tenemos un triángulo $t: \dot{J}_1 \xrightarrow{u} \dot{J}_2 \xrightarrow{v} \text{Con}_u \xrightarrow{w} \dot{J}_1[1]$ en la categoría homotópica. Las entradas de Con_u son módulos inyectivos, pues son sumas finitas de entradas de \dot{J}_2 y de $\dot{J}_1[1]$. La imagen de t bajo el funtor localización Q es un triángulo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, y, usando que ésta es triangulada, existe un morfismo $\delta_3: \dot{Z} \rightarrow \text{Con}_u$ en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{X} & \xrightarrow{f} & \dot{Y} & \xrightarrow{g} & \dot{Z} & \xrightarrow{h} & \dot{X}[1] \\ \delta_1 \downarrow \cong & & \delta_2 \downarrow \cong & & \delta_3 \downarrow & & T_{\mathcal{D}} \delta_1 \downarrow \cong \\ \dot{J}_1 & \xrightarrow{Qu} & \dot{J}_2 & \xrightarrow{Qv} & \text{Con}_u & \xrightarrow{Qw} & \dot{J}_1[1]. \end{array}$$

Por la proposición (??) en su versión para una categoría triangulada arbitraria (que se prueba con el argumento de (??) usando (??) en lugar de (??)), δ_3 es isomorfismo. Por lo tanto, \dot{Z} es isomorfo en $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ al complejo de inyectivos Con_u . □

Proposición 5.64. *Para cada M, N en $A\text{-Mod}$ y para todo $i \geq 0$ se tiene el isomorfismo*

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(\underline{M}, \underline{N}[i]) \cong \text{Ext}_A^i(M, N).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea \dot{P} una resolución proyectiva de M . Tenemos los isomorfismos:

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(\underline{M}, \underline{N}[i]) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(\dot{P}, \underline{N}[i]) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{P}, \underline{N}[i]).$$

Aplicando el funtor $\text{Hom}_A(-, N)$ a \dot{P} obtenemos el complejo:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(P^0, N) \xrightarrow{(d_P^{-1})^*} \text{Hom}_A(P^{-1}, N) \xrightarrow{(d_P^{-2})^*} \dots$$

$$\text{Hom}_A(P^{-i+1}, N) \xrightarrow{(d_P^{-i})^*} \text{Hom}_A(P^{-i}, N) \xrightarrow{(d_P^{-i-1})^*} \text{Hom}_A(P^{-i-1}, N) \dots$$

Sea $\dot{h}: \dot{P} \rightarrow \underline{N}[i]$ un morfismo en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, luego, $\dot{h} = (\dots, 0, h, 0, \dots)$, con h en el lugar $-i$. Entonces conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & P^{-i-1} & \xrightarrow{d_P^{-i-1}} & P^{-i} & \xrightarrow{d_P^{-i}} & P^{-i+1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow h & & \downarrow 0 \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \dots \end{array}$$

Tenemos que $hd_P^{-i-1} = 0$, es decir, $(d_P^{-i-1})^*(\dot{h}) = 0$. Esto pasa si y sólo si \dot{h} está en $\ker(d_P^{-i-1})^*$. Luego, $\text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(\dot{P}, \underline{N}[i]) = \ker(d_P^{-i-1})^*$.

Por otro lado, \dot{h} es homotópico a cero si y sólo si existe $s: P^{-i+1} \rightarrow N$ tal que $sd_P^{-i} = h$, esto ocurre si y sólo si \dot{h} está en $\text{Im}(d_P^{-i})^*$. Esto es, $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{P}, \underline{N}[i]) \cong \ker(d_P^{-i-1})^* / \text{Im}(d_P^{-i})^*$. Luego, $\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(\underline{M}, \underline{N}[i]) \cong \text{Ext}_A^i(M, N)$. \square

Proposición 5.65. Sean \underline{M} y \underline{N} complejos concentrados, y sea $i < 0$. Entonces, $\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(\underline{M}, \underline{N}[i]) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sean \dot{P}_M y \dot{P}_N resoluciones proyectivas de M y N respectivamente. Sea $\dot{h}: \dot{P}_M \rightarrow \dot{P}_N[i]$ un morfismo de complejos. Entonces conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dot{P}_M : & \dots & \longrightarrow & P_M^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & P_M^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \dots \\ & & & \downarrow h^{-1} & & \downarrow h^0 & & \downarrow 0 & & & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 \\ \dot{P}_N[i] : & \dots & \longrightarrow & P_N^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & P_N^i & \xrightarrow{d^i} & P_N^{i+1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P_N^0 & \longrightarrow & 0 \dots \end{array}$$

Luego, es claro que también conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dot{P}_M : & \dots & \longrightarrow & P_M^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & P_M^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \dots \\ & & & \downarrow h^{-1} & & \downarrow h^0 & & \downarrow 0 & & & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 \\ \dot{P} : & \dots & \longrightarrow & P_N^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & P_N^i & \xrightarrow{d^i} & P_N^{i+1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P_N^0 & \xrightarrow{\eta} & N \dots \end{array}$$

Por lo tanto, \dot{h} también es un morfismo de \dot{P}_M en el complejo \dot{P} que es acíclico, entonces por la proposición (??), \dot{h} es homotópico a cero y se tiene

$$0 = \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\dot{P}_M, \dot{P}_N[i]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(\dot{P}_M, \dot{P}_N[i]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(\underline{M}, \underline{N}[i]).$$

□

Capítulo 6

El Algebra de Carcaj

La serie de proposiciones que probamos en este capítulo prepara el camino para la demostración del teorema principal de esta segunda etapa de la tesis: el teorema (??) que es análogo al de Beilinson, Ginzburg y Soergel. Para estudiar los A -módulos graduados introducimos un carcaj $Q^{\mathbb{Z}}$ (definición (??) y [?]), e $I^{\mathbb{Z}}$ un ideal cuadrático en $kQ^{\mathbb{Z}}$ (definición (??)). $kQ^{\mathbb{Z}}$ es una k -álgebra graduada (positivamente). En las proposiciones (??) y (??) probamos que, para un carcaj Q , las categorías de kQ/I -módulos graduados y de $kQ^{\mathbb{Z}}/I^{\mathbb{Z}}$ -módulos son equivalentes. Probamos la existencia de cubiertas proyectivas para módulos en $A\text{-Mod}^+$, y de envolventes inyectivas para módulos en $A\text{-Mod}^-$ (definición (??)). Luego, tenemos resoluciones proyectivas y corresoluciones inyectivas de módulos en esos casos.

6.1. Algebras de carcaj y representaciones

Definición 6.1. 1. *Un carcaj Q es una gráfica orientada que consta de un conjunto de vértices Q_0 y un conjunto de flechas Q_1 . Si Q_0 y Q_1 son finitos, decimos que Q es finito, de lo contrario, Q es infinito.*

2. *Denotamos por $i \xrightarrow{\alpha} j$ la flecha α que inicia en el vértice i y termina en el vértice j .*

3. *Un carcaj Q es localmente finito si en cada vértice el número de flechas que entran y el número de flechas que salen es finito.*

4. *Un camino dirigido (de longitud $n \geq 1$) del vértice i al vértice j es una sucesión de vértices y flechas $(j|\alpha_n, \dots, \alpha_1|i)$, que también se denota por $\alpha_n \dots \alpha_1$, donde cada α_t termina donde α_{t+1} comienza. Tenemos*

también, para cada vértice i , el camino dirigido trivial $e_i = (i||i)$ de longitud cero.

Proposición 6.2. Sea Q un carcaj. Denotaremos por kQ el k -espacio vectorial con base el conjunto de todos los caminos dirigidos del carcaj Q (incluso los triviales). Definamos un producto en los elementos de la base de la siguiente forma:

$$(l|\beta_m, \dots, \beta_1|h)(j|\alpha_n, \dots, \alpha_1|i) = \begin{cases} 0, & \text{si } h \neq j \\ (l|\beta_m, \dots, \beta_1, \alpha_n, \dots, \alpha_1|i), & \text{si } h = j. \end{cases}$$

Esta definición del producto de caminos se extiende de manera única a todo kQ por bilinealidad. Entonces, kQ es una k -álgebra con idempotentes $\{e_i\}_{i \in Q_0}$ y tenemos $\underline{kQ} = (kQ, \{e_i\}_{i \in Q_0})$. Además, la familia $\{e_i\}_{i \in Q_0}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales (definición (??)).

DEMOSTRACIÓN. En efecto, se cumple que

$$a(\gamma_1\gamma_2) = (a\gamma_1)\gamma_2 = \gamma_1(a\gamma_2)$$

para todo $a \in k$ y $\gamma_1, \gamma_2 \in kQ$. Además, si Q es finito, $1 = \sum_{i \in Q_0} e_i$ en kQ .

Si Q es infinito, entonces no hay unidad en kQ . La asociatividad en kQ se sigue de la asociatividad del producto de caminos dirigidos.

Observemos que, $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ (la delta de Kronecker) para toda pareja e_i, e_j de caminos triviales. Además, es fácil ver que $kQ = \bigoplus_{i, j \in Q_0} e_j kQ e_i$. \square

Definición 6.3. Sea Q un carcaj, le llamaremos a \underline{kQ} el álgebra de carcaj asociada a Q .

Definición 6.4. Una k -representación del carcaj Q , es una pareja

$$V = (\{V_i\}_{i \in Q_0}, \{V_\alpha\}_{\alpha \in Q_1}),$$

donde $\{V_i\}_{i \in Q_0}$ es una familia de k -espacios vectoriales (uno por cada vértice i de Q_0), y $\{V_\alpha\}_{\alpha \in Q_1}$ es una familia de k -transformaciones lineales (una por cada flecha α de Q_1), tal que, si $i \xrightarrow{\alpha} j$, entonces $V_i \xrightarrow{V_\alpha} V_j$. Sean $V = (\{V_i\}_{i \in Q_0}, \{V_\alpha\}_{\alpha \in Q_1})$ y $W = (\{W_i\}_{i \in Q_0}, \{W_\alpha\}_{\alpha \in Q_1})$ un par de k -representaciones de Q . Un morfismo de representaciones ϕ de V en W es una familia de transformaciones lineales $\phi = \{\phi_i: V_i \rightarrow W_i\}_{i \in Q_0}$ tal que,

para cada $i \xrightarrow{\alpha} j$ en Q_1 , conmuta el cuadrado:

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{V_\alpha} & V_j \\ \phi_i \downarrow & & \downarrow \phi_j \\ W_i & \xrightarrow{W_\alpha} & W_j. \end{array}$$

Si $V \xrightarrow{\phi} W \xrightarrow{\psi} Z$ son morfismos de representaciones, entonces definir el producto $\psi\phi := \{\psi_i\phi_i\}_{i \in Q_0}$ (la composición puntual), nos da un morfismo de representaciones. Denotaremos por $\text{Rep}_k(Q)$ la categoría de k -representaciones de Q cuyos objetos son las k -representaciones de Q y los morfismos son los de k -representaciones.

Consideremos la categoría de \underline{kQ} -módulos en el sentido del capítulo 5. Obsérvese que si M es un \underline{kQ} -módulo, entonces M es un k -espacio vectorial.

El siguiente teorema es muy importante porque nos permite ver a los \underline{kQ} -módulos como representaciones del carcaj Q . La demostración nos dice exactamente cómo dar ese paso.

Teorema 6.5. *Dado un carcaj Q , la categoría de \underline{kQ} -módulos izquierdos es equivalente a la de k -representaciones de Q .*

DEMOSTRACIÓN. Daremos un funtor $F: \text{Rep}_k(Q) \rightarrow \underline{kQ}\text{-Mod}$ como sigue: Sea $V = (\{V_i\}_{i \in Q_0}, \{V_\alpha\}_{\alpha \in Q_1})$, una k -representación. Definimos el k -espacio vectorial $F(V) := \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$. Por simplicidad, pensaremos a $F(V)$ como

una suma directa interna, es decir, $V_i \subseteq F(V)$, para $i \in Q_0$. Definamos una acción de \underline{kQ} en $\bigoplus_{i \in Q_0} V_i$: Sean $v = v_{j_1} + \cdots + v_{j_t}$, con $v_{j_m} \in V_{j_m}$, un elemento de $\bigoplus_{i \in Q_0} V_i$ y γ un camino dirigido en Q . Si $\gamma = e_a$ es el camino trivial en el vértice a , entonces:

$$e_a v = \begin{cases} 0, & \text{si } a \neq j_m, \text{ para todo } j_m, \\ v_a, & \text{si } a = j_m, \text{ para algún } j_m. \end{cases}$$

Si γ no es trivial, entonces es una sucesión de flechas $\gamma = \alpha_t \dots \alpha_1$. Supongamos que γ va del vértice a en el vértice b , luego

$$\gamma v = \begin{cases} 0, & \text{si } a \neq j_m, \text{ para todo } j_m, \\ V_{\alpha_t} \dots V_{\alpha_1}(v_a) & \text{si } a = j_m, \text{ para algún } j_m. \end{cases}$$

Esta acción se extiende a las combinaciones lineales de caminos, y nos permite (haciendo verificaciones rutinarias) probar que $\bigoplus_{i \in Q_0} V_i$ es un kQ -módulo. Obsérvese que $V_i = e_i F(V)$, y entonces $F(V) = \bigoplus_{i \in Q_0} e_i F(V)$. Luego, F está bien definida en objetos. Ahora definamos F en morfismos. Sea $f = \{f^i\}_{i \in Q_0} : V \rightarrow W$ un morfismo de representaciones. Sean λ_{V_i} y λ_{W_i} inclusiones en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 V \longmapsto & \bigoplus_{i \in Q_0} V_i & \xleftarrow{\lambda_{V_i}} V_i \\
 \downarrow f & \downarrow F(f) & \downarrow f^i \\
 W \longmapsto & \bigoplus_{i \in Q_0} W_i & \xleftarrow{\lambda_{W_i}} W_i
 \end{array}$$

Por la propiedad universal del coproducto $\bigoplus_{i \in Q_0} V_i$, la función lineal $F(f)$ existe y es la única tal que, para todo $i \in Q_0$, $F(f)\lambda_{V_i} = \lambda_{W_i}f^i$. Como estamos pensando a $F(V)$ como suma directa interna de los espacios V_i , tenemos $F(f)(v_i) = f^i(v_i)$, para $i \in Q_0$. Además, $F(f)$ es de kQ -módulos. En efecto, basta probar que $F(f)(zv) = zF(f)(v)$ para z un camino trivial o una flecha, luego haciendo inducción en la longitud, se tiene para cualquier camino y por linealidad se extiende a todo elemento de kQ . Sea $v = \sum_s v_s \in F(V)$, con $v_s \in V_s$, luego $e_i v = v_i$. Entonces

$$F(f)(e_i v) = F(f)(v_i) = f^i(v_i) = e_i \sum_s f^s(v_s) = e_i F(f)(v).$$

Además, si $i \xrightarrow{\alpha} j$, entonces $\alpha v = \alpha(\sum_s v_s) = V_\alpha(v_i)$. Luego,

$$F(f)(\alpha v) = F(f)(V_\alpha(v_i)) = f^j(V_\alpha(v_i)) = W_\alpha f^i(v_i).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 \alpha F(f)(v) &= \alpha F(f)[\sum_s v_s] = \alpha \sum_s f^s(v_s) = W_\alpha(f^i(v_i)) \\
 &= F(f)(\alpha v).
 \end{aligned}$$

Sea ahora $z = \gamma$ un camino arbitrario. Por inducción sobre la longitud de γ , si ésta es uno, γ es una flecha y ya probamos que $\gamma F(f)(v) = F(f)(\gamma v)$.

Supongamos que la longitud de γ es mayor que uno, entonces $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ con γ_1 y γ_2 de longitud menor a la de γ . Luego, usando la hipótesis de inducción:

$$F(f)(\gamma v) = F(f)[\gamma_1(\gamma_2 v)] = \gamma_1 F(f)[\gamma_2 v] = \gamma_1 \gamma_2 F(f)(v) = \gamma F(f)(v).$$

Esta propiedad se extiende por linealidad para $z = \sum_s c_s \gamma_s$ en kQ . Por lo tanto, F está bien definido en morfismos. Además, por la forma en que lo definimos, usando la propiedad universal del coproducto, se tiene que F es un funtor.

Ahora, demos un funtor $G: kQ\text{-Mod} \rightarrow \text{Rep}_k(Q)$ que sea inverso de F . Sea M un kQ -módulo. A cada vértice i en Q_0 le asignamos el k -espacio vectorial $M_i := e_i M$ y a cada flecha $\alpha: i \rightarrow j$ en Q_1 el morfismo multiplicar por α que denotamos por M_α . Es claro que M_α es una k -transformación lineal que va de M_i en M_j . Entonces definimos $G(M) = (\{M_i\}_{i \in Q_0}, \{M_\alpha\}_{\alpha \in Q_1})$. Sea $f: M \rightarrow N$ un morfismo de kQ -módulos. Sea f_i la restricción de f a M_i . Este morfismo tiene imagen contenida en N_i . Veamos que $(f_i)_{i \in Q_0}$ es un morfismo de la representación $G(M)$ en $G(N)$. Esto lo tenemos al probar que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{f_i} & N_i \\ M_\alpha \downarrow & & \downarrow N_\alpha \\ M_j & \xrightarrow{f_j} & N_j. \end{array}$$

Esto es cierto porque f es un morfismo de kQ -módulos. Además, es claro que G es un funtor y que $GF \cong 1_{\text{Rep}_k(Q)}$ y $FG \cong 1_{kQ\text{-Mod}}$. \square

Debido a esta equivalencia, no haremos distinción entre un kQ -módulo y su respectiva k -representación de Q . En adelante usaremos el término que mejor convenga en cada caso.

Por simplicidad, a menudo denotaremos la k -álgebra con idempotentes kQ por \underline{kQ} .

Definición 6.6. Sea \mathcal{F}^i el k -subespacio vectorial de kQ generado por los caminos de longitud mayor o igual que i , para $i \in \mathbb{N}$.

Observemos que \mathcal{F}^i es un ideal.

Definición 6.7. Sea I un ideal de kQ . Decimos que I es admisible si está contenido en \mathcal{F}^2 .

Notemos que, si I es un ideal admisible de kQ , el anillo cociente kQ/I es una k -álgebra con idempotentes $\{e_i + I\}_{i \in Q_0}$. La categoría $kQ/I\text{-Mod}$ puede identificarse con la subcategoría plena de $kQ\text{-Mod}$ cuyos objetos son los kQ -módulos M que son anulados por I (es decir, $IM = 0$). Podemos hacer esto mediante el funtor canónico $E: kQ/I\text{-Mod} \rightarrow kQ\text{-Mod}$, que es fiel y pleno, y cuya imagen son precisamente los kQ -módulos que son anulados por I .

En adelante, será útil la siguiente notación: Si $V = (\{V_i\}_{i \in Q_0}, \{V_\alpha\}_{\alpha \in Q_1})$ es una k -representación del carcaj Q y γ es un camino dirigido de Q (con longitud ≥ 1), entonces $V_\gamma := V_{\alpha_l} \cdots V_{\alpha_2} V_{\alpha_1}$, donde $\gamma = \alpha_l \cdots \alpha_2 \alpha_1$ es la presentación del camino γ como producto de flechas.

Proposición 6.8. *Sea I un ideal admisible de kQ , denotamos por $\text{Rep}_k(Q, I)$ la subcategoría plena de $\text{Rep}_k(Q)$ cuyos objetos son las representaciones $V = (\{V_i\}_{i \in Q_0}, \{V_\alpha\}_{\alpha \in Q_1})$ tales que, para cada $x = \sum c_u \gamma_u \in I \subseteq kQ$, se tiene $\sum c_u V_{\gamma_u} = 0$. El funtor F que nos da la equivalencia de categorías en el teorema (??) se restringe a una equivalencia de categorías entre $\text{Rep}_k(Q, I)$ y $kQ/I\text{-Mod}$.*

6.2. Algebras de carcaj y módulos graduados

Definición 6.9. *Sea A una k -álgebra. Decimos que A es una k -álgebra graduada (sobre los enteros) si se cumple que:*

$$i) A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i, \text{ donde cada } A^i \text{ es un } k\text{-subespacio vectorial de } A.$$

$$ii) \text{ Si } a \in A^i \text{ y } b \in A^j, \text{ entonces } ab \in A^{i+j}.$$

A los elementos de A^i se les llama homogéneos (de grado i).

Una k -álgebra con idempotentes $\underline{A} = (A, \{e_i\}_{i \in P})$ se llama graduada si y sólo si A lo es y $e_i \in A^0$, para todo $i \in P$.

Definición 6.10. *Sea A una k -álgebra graduada. Entonces:*

a) *Un A -módulo izquierdo M se dice graduado si:*

$$i) M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^i, \text{ con cada } M^i \text{ un } k\text{-subespacio vectorial de } M.$$

$$ii) \text{ Si } a \in M^i \text{ y } m \in M^j, \text{ entonces } am \in M^{i+j}.$$

A los elementos de M^i se les llama homogéneos (de grado i).

De manera análoga se definen los A -módulos derechos graduados.

b) Un morfismo $f: M \rightarrow N$ de módulos graduados se dice graduado si $f(M^i) \subseteq N^i$.

La categoría graduada de A -módulos $A\text{-Grad}$ es aquella que tiene por objetos a los A -módulos (izquierdos) graduados y cuyos morfismos son los graduados (ver definición (??), observación (??) y observación (??)).

En adelante, sea A una k -álgebra graduada.

Definición 6.11. Un ideal I de A se llama homogéneo si siempre que $\sum_{i=1}^n x_i \in I$ con x_1, \dots, x_n elementos homogéneos de A de grados distintos, tenemos que $x_1, \dots, x_n \in I$.

Proposición 6.12. Sea I un ideal homogéneo de A , entonces A/I es una k -álgebra graduada.

DEMOSTRACIÓN. Sea $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$ y $\varphi: A \twoheadrightarrow A/I$ la proyección natural. Afirmamos que $A/I = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \varphi(A^i)$ y que ésta es una graduación de A/I . Es claro que $A/I = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \varphi(A^i)$. Veamos que esta suma es directa: Supongamos que $0 = \varphi(a_1) + \dots + \varphi(a_s)$ con $a_j \in A^{t(j)}$, para alguna función inyectiva t . Entonces $0 = \varphi(a_1 + \dots + a_s)$. Luego, $a_1 + \dots + a_s$ está en I homogéneo. Por lo tanto, cada a_i está en I . Luego, $\varphi(a_1) = \dots = \varphi(a_s) = 0$. Además es claro que, si $x \in \varphi(A^i)$, $y \in \varphi(A^j)$, entonces $x = \varphi(a)$ y $y = \varphi(b)$ para algunos $a \in A^i$ y $b \in A^j$. Así, $xy = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab)$ está en $\varphi(A^{i+j})$. Si $\{e_i\}_{i \in Q_0}$ es el sistema completo de idempotentes ortogonales de A , sea $\bar{e}_i = \varphi(e_i)$, entonces $\{\bar{e}_i\}_{i \in Q_0}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales de A/I . \square

Afirmación 6.13. Sea I un ideal de A . I es homogéneo si y sólo si está generado por un conjunto de elementos homogéneos.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $j \in \mathbb{Z}$, definamos $I^j := I \cap A^j$. Este es un conjunto de elementos homogéneos. Sea $X = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} I^j$. Afirmamos que X genera I . En efecto, veamos que cualquier elemento a de I es suma de elementos en X . Sea $a = a_1 + \dots + a_s$ con $a_j \in A^{t(j)}$ un elemento de I . Como éste es homogéneo, cada a_j está en I . Por lo tanto, cada a_j está en $I^{t(j)} \subseteq X$. Para el recíproco supongamos que I está generado por un conjunto X de elementos homogéneos de A . Sea $a \in I$, con $a = a_1 + \dots + a_s$ para $a_j \in A^{t(j)}$. Por otro lado, como X genera I , tenemos $a = \alpha_1 x_1 \beta_1 + \dots + \alpha_r x_r \beta_r$, con cada

$x_i \in X$ y $\alpha_i, \beta_i \in A$. Entonces $\alpha_i = \alpha_i^1 + \cdots + \alpha_i^{f(i)}$ y $\beta_i = \beta_i^1 + \cdots + \beta_i^{g(i)}$, como suma de elementos homogéneos, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$. Entonces $\sum a_i = a = \sum \alpha_j^m x_j \beta_j^n$ y cada sumando es homogéneo y está en I . \square

Ejemplo 6.14. Sea Q un carcaj, entonces kQ es un álgebra graduada. En efecto, definamos: $(kQ)^m = 0$ si $m < 0$ y si $m \geq 0$, entonces $(kQ)^m$ es el k -espacio vectorial generado por los caminos dirigidos de longitud m . Así, si $t \in kQ$ es un elemento homogéneo de grado m , entonces t es combinación lineal de caminos de longitud m .

Luego, siempre que I sea un ideal admisible generado por elementos homogéneos, tendremos que $A = kQ/I$ es un álgebra graduada con un sistema completo de idempotentes ortogonales.

Sea $A = kQ/I$ con I ideal homogéneo. Tenemos dos categorías: $A\text{-Mod}$ y $A\text{-Grad}$, la categoría de A -módulos izquierdos graduados. Observemos que $A\text{-Grad}$ está contenida en $A\text{-Mod}$, pero no de manera plena.

Definición 6.15. Sea Q un carcaj. Definimos un nuevo carcaj $Q^{\mathbb{Z}}$ cuyo conjunto de vértices es $(Q^{\mathbb{Z}})_0 = Q_0 \times \mathbb{Z} = \{(x, i) \mid x \in Q_0, i \in \mathbb{Z}\}$ y para cada flecha $x \xrightarrow{\alpha} y$ en Q_1 , entonces $(x, i) \xrightarrow{(\alpha, i)} (y, i+1)$ es una flecha en $(Q^{\mathbb{Z}})_1$.

Observación 6.16. Si Q es un carcaj finito, tenemos:

1. $Q^{\mathbb{Z}}$ es infinito, pero localmente finito (definición (??)). Se sigue que, para cada $n \in \mathbb{N}$, y cada vértice $\bar{x} \in Q^{\mathbb{Z}}$, el número de caminos dirigidos de longitud n que salen de \bar{x} es finito.
2. Si en $Q^{\mathbb{Z}}$ hay un camino dirigido γ de (x, i) en (y, j) , entonces $j > i$ y el camino γ tiene longitud $j - i$. En efecto, si en $Q^{\mathbb{Z}}$ hay una flecha de (w, r) en (z, s) , tenemos necesariamente $s = r + 1$.
2. De (1) y (2) obtenemos que, dado cualquier par de vértices \bar{x}, \bar{y} de $Q^{\mathbb{Z}}$, el conjunto de caminos dirigidos de \bar{x} en \bar{y} es finito. Luego, el conjunto de vértices por los que pasan dichos caminos, que denotaremos por $[\bar{x}, \bar{y}]$, es finito. A esta propiedad se le llama intervalo finito.

Ejemplo 6.17. Tenemos los siguientes ejemplos de carcajes:

1. $Q = A_n$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \xrightarrow{\alpha_1} & \cdot & \xrightarrow{\alpha_2} & \cdot & \cdots & \cdot & \xrightarrow{\alpha_n} & \cdot \\ x_1 & & x_2 & & x_3 & & \dots & & x_n & & x_{n+1} \end{array}$$

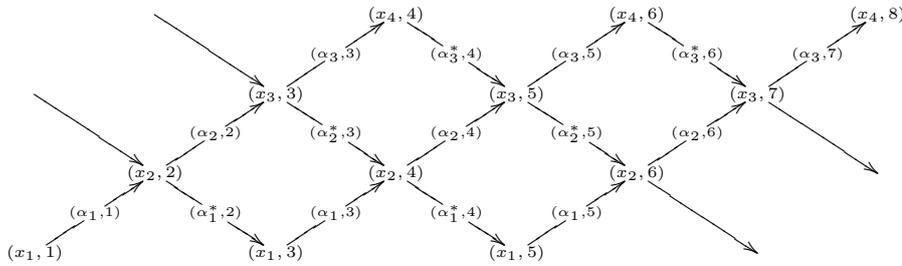
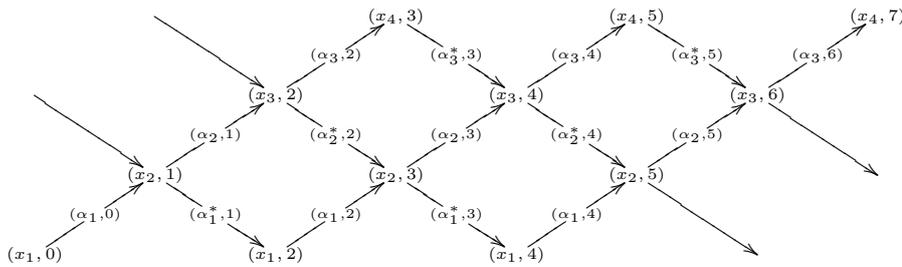
En este caso, $Q^{\mathbb{Z}} = (A_n)^{\mathbb{Z}}$ es el siguiente carcaj:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \vdots & & & \\
 (x_1, -1) & \xrightarrow{(\alpha_1, -1)} & (x_2, 0) & \xrightarrow{(\alpha_2, 0)} & (x_3, 1) & \cdots & (x_n, n-2) \xrightarrow{(\alpha_n, n-2)} (x_{n+1}, n-1) \\
 & & & & & & \\
 (x_1, 0) & \xrightarrow{(\alpha_1, 0)} & (x_2, 1) & \xrightarrow{(\alpha_2, 1)} & (x_3, 2) & \cdots & (x_n, n-1) \xrightarrow{(\alpha_n, n-1)} (x_{n+1}, n) \\
 & & & & & & \\
 (x_1, 1) & \xrightarrow{(\alpha_1, 1)} & (x_2, 2) & \xrightarrow{(\alpha_2, 2)} & (x_3, 3) & \cdots & (x_n, n) \xrightarrow{(\alpha_n, n)} (x_{n+1}, n+1) \\
 & & & & & & \vdots
 \end{array}$$

2. $Q = \overline{A}_n$,

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_1 & \xrightarrow{\alpha_1^*} & x_2 & \xrightarrow{\alpha_2^*} & x_3 & \cdots & x_n \xrightarrow{\alpha_n^*} x_{n+1} \\
 \xrightarrow{\alpha_1} & & \xrightarrow{\alpha_2} & & & & \xrightarrow{\alpha_n}
 \end{array}$$

Si $n = 3$, tenemos que $Q^{\mathbb{Z}} = \overline{A}_3^{\mathbb{Z}}$ es la unión del siguiente par de gráficas:



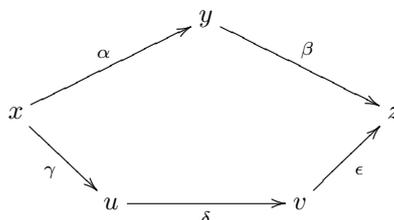
3. Sea Q el siguiente carcaj:

$$\alpha \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \circlearrowleft \end{array} x \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \circlearrowleft \end{array} \beta$$

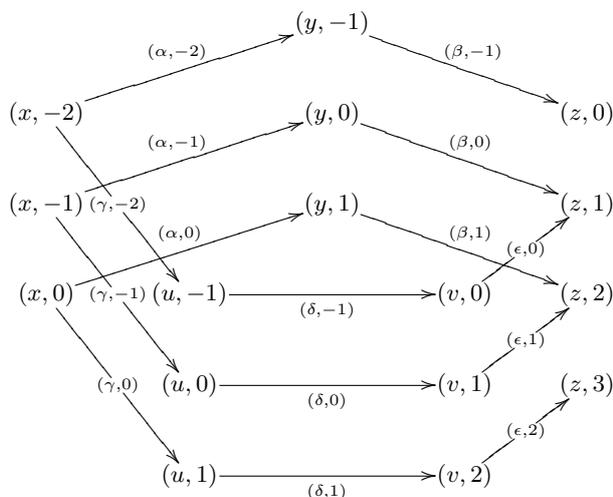
tal que $\beta\alpha = \alpha\beta$. Entonces $Q^{\mathbb{Z}}$ se visualiza de la siguiente manera:

$$\cdots \begin{array}{ccccccc}
 (x, 0) & \xrightarrow{(\alpha, 0)} & (x, 1) & \xrightarrow{(\alpha, 1)} & (x, 2) & \xrightarrow{(\alpha, 2)} & (x, 3) & \cdots \\
 & & \xrightarrow{(\beta, 0)} & & \xrightarrow{(\beta, 1)} & & \xrightarrow{(\beta, 2)} &
 \end{array} \cdots$$

4. Si Q es el siguiente carcaj:



entonces $Q^{\mathbb{Z}}$ se ve como:



Proposición 6.18. Sea Q un carcaj. Las categorías $kQ^{\mathbb{Z}}\text{-Mod}$ y $kQ\text{-Grad}$ son equivalentes.

DEMOSTRACIÓN. Veamos que existe un funtor $F: kQ^{\mathbb{Z}}\text{-Mod} \rightarrow kQ\text{-Grad}$ que es fiel, pleno y denso. Si M es una k -representación de $Q^{\mathbb{Z}}$, definimos el kQ -módulo izquierdo $F(M) = \bigoplus_{x \in Q_0} F(M)_x$, con cada $F(M)_x = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_{x,i}$. Si $\alpha: x \rightarrow y$ es una flecha de Q , entonces $F(M)_\alpha: F(M)_x \rightarrow F(M)_y$ está dado por

$$F(M)_\alpha: \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_{x,i} \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_{y,i}$$

$$\sum m_{x,i} \mapsto \sum M_{\alpha,i}(m_{x,i}).$$

Sean M y N un par de k -representaciones de $Q^{\mathbb{Z}}$ y $f: M \rightarrow N$ un morfismo entre ellas (luego, $f = (f_{x,i}: M_{x,i} \rightarrow N_{x,i})_{(x,i) \in Q_0^{\mathbb{Z}}}$). Entonces tenemos el

siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 M_{x,i} \hookrightarrow & \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_{x,i} \hookrightarrow & \bigoplus_{x \in Q_0} F(M)_x & & (6.1) \\
 \downarrow f_{x,i} & \downarrow F(f)_x & \downarrow F(f) & & \\
 N_{x,i} \hookrightarrow & \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} N_{x,i} \hookrightarrow & \bigoplus_{x \in Q_0} F(N)_x & &
 \end{array}$$

donde la propiedad universal del coproducto $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_{x,i}$ implica la existencia y unicidad de $F(f)_x$, y ésta, a su vez, la de $F(f)$. Es claro que $F(f)$ es un morfismo de kQ -módulos izquierdos. Además, de su definición también es claro que F es un funtor. Veamos que $F(M)$ es un kQ -módulo graduado. Se tiene que $F(M) = \bigoplus_{x \in Q_0} (\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_{x,i})$. Definimos una graduación de la siguiente manera: $F(M)^t = \bigoplus_{x \in Q_0} M_{x,t}$. Es claro que $F(M) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} F(M)^t$ y que cada $F(M)^t$ es un k -subespacio vectorial de $F(M)$. En la graduación que dimos a kQ los caminos triviales son de grado 0 y las flechas son de grado 1. Basta probar entonces que, dado $m \in F(M)^t$, $e_x m$ está en $F(M)^t$ y αm está en $F(M)^{t+1}$ para e_x camino trivial y α una flecha. Sea $m = m_{x_0,t} + \cdots + m_{x_s,t}$ en $F(M)^t$, con $x_0, \dots, x_s \in Q_0$ distintos. Si $x \neq x_i$ para $i \in s$, entonces $e_x m = 0$. En otro caso $e_x m = m_{x,t}$ y en ambos casos $e_x m$ está en $F(M)^t$. Sea $\alpha: x \rightarrow y$, si $x \neq x_i$ para $i \in s$, entonces $\alpha m = 0$. De lo contrario, $\alpha m = M_{\alpha,t}(m_{x,t})$ está en $M_{y,t+1}$, luego, αm está en $F(M)^{t+1}$. Además, $F(f)$ es un morfismo de módulos graduados. En efecto, sea $m = m_{x_0,t} + \cdots + m_{x_s,t}$ en $F(M)^t$. Se tiene $F(f)(m) = f_{x_0,t}(m_{x_0,t}) + \cdots + f_{x_s,t}(m_{x_s,t})$ en $N_{x_0,t} \oplus \cdots \oplus N_{x_s,t} \subseteq F(N)^t$. Luego, F es un funtor de $kQ^{\mathbb{Z}}\text{-Mod}$ en $kQ\text{-Grad}$.

Probemos ahora que F es fiel, supongamos $F(f) = 0$. Sea $m = p_{x_0} + p_{x_1} + \cdots + p_{x_r}$ en $\bigoplus_{x \in Q_0} F(M)_x$, con cada $p_{x_t} \in F(M)_{x_t} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_{x_t,i}$. Por lo tanto, $p_{x_t} = m_{x_t,i_0} + m_{x_t,i_1} + \cdots + m_{x_t,i_s}$. Sin perder generalidad, y para no hacer más complicada la notación, podemos suponer que

$$\begin{aligned}
 m = & m_{x_0,i_0} + m_{x_0,i_1} + \cdots + m_{x_0,i_s} \\
 & + m_{x_1,i_0} + m_{x_1,i_1} + \cdots + m_{x_1,i_s} \\
 & \vdots \\
 & + m_{x_r,i_0} + m_{x_r,i_1} + \cdots + m_{x_r,i_s}.
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 0 = F(f)(m) = & f_{x_0, i_0}(m_{x_0, i_0}) + \cdots + f_{x_0, i_s}(m_{x_0, i_s}) \\
 & + f_{x_1, i_0}(m_{x_1, i_0}) + \cdots + f_{x_1, i_s}(m_{x_1, i_s}) \\
 & \vdots \\
 & + f_{x_r, i_0}(m_{x_r, i_0}) + \cdots + f_{x_r, i_s}(m_{x_r, i_s}),
 \end{aligned}$$

donde cada $f_{x_u, i_v}(m_{x_u, i_v})$ está en N_{x_u, i_v} . Luego, cada $f_{x_u, i_v}(m_{x_u, i_v}) = 0$, para todo m . Luego, cada $f_{x_u, i_v} = 0$. Por lo tanto, $f = 0$.

Veamos que F es pleno: Sea $u: F(M) \rightarrow F(N)$ un morfismo de kQ -módulos graduados. Entonces $u(F(M)^i) \subseteq F(N)^i$, así que u se restringe a morfismos que van de $F(M)^i = \bigoplus_{x \in Q_0} M_{x, i}$ a $F(N)^i = \bigoplus_{x \in Q_0} N_{x, i}$. Llamémosle u^i a la restricción de u a $F(M)^i$. Como $M_{x, i} = e_x F(M)^i$ en cada $x \in Q_0$ tenemos:

$$u^i(M_{x, i}) = u^i(e_x F(M)^i) = e_x u^i(F(M)^i) \subseteq e_x F(N)^i = N_{x, i}.$$

Así que u^i se restringe, a su vez, a morfismos de los espacios vectoriales $M_{x, i}$ a los espacios vectoriales $N_{x, i}$. Es decir, u da lugar a transformaciones lineales $u_{x, i}: M_{x, i} \rightarrow N_{x, i}$. Sea $\hat{u} := (u_{x, i})_{(x, i) \in Q_0^{\mathbb{Z}}}$. Probemos que $\hat{u}: M \rightarrow N$ es un morfismo de representaciones de $Q^{\mathbb{Z}}$. Sea $(\alpha, i): (x, i) \rightarrow (y, i+1)$ una flecha en $Q^{\mathbb{Z}}$. Veamos que conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 M_{x, i} & \xrightarrow{M_{\alpha, i}} & M_{y, i+1} \\
 u_{x, i} \downarrow & & \downarrow u_{y, i+1} \\
 N_{x, i} & \xrightarrow{N_{\alpha, i}} & N_{y, i+1}.
 \end{array}$$

Sea $m \in M_{x, i}$, entonces

$$u_{y, i+1} M_{\alpha, i}(m) = u_{y, i+1}(\alpha, i)m = u_{y, i+1} \alpha m = \alpha u_{x, i}(m) = N_{\alpha, i} u_{x, i}(m).$$

Luego, $\hat{u} \in \text{Hom}_{kQ^{\mathbb{Z}}}(M, N)$, y, además, $F(\hat{u}) = u$.

Para ver que es denso, tomemos M un kQ -módulo graduado. Por ser kQ -módulo, $M = \bigoplus_{x \in Q_0} e_x M$. Por otro lado, M es graduado y tenemos

$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^i$ con cada M^i un k -subespacio vectorial. Entonces, se tiene que $M^i = \bigoplus_{x \in Q_0} e_x M^i$ ($e_x M^i \subseteq M^i$ porque e_x es de grado 0 y M^i de grado

i). Buscamos una k -representación de $Q^{\mathbb{Z}}$ cuya imagen bajo F sea isomorfa a M . Definimos $M_{x, i} = e_x M^i$, y si $\alpha: x \rightarrow y$ es una flecha, entonces

$M_{\alpha,i}: M_{x,i} \rightarrow M_{y,i+1}$ es el morfismo multiplicar por α . Así, dado m en $M_{x,i}$ se tiene que m es de grado i , luego, $M_{\alpha,i}(m) = \alpha m = e_y \alpha m$ es de grado $i+1$ y está en $e_y M^{i+1} = M_{y,i+1}$. Además, $F(\{M_{x,i}\}, \{M_{\alpha,i}\}) = M$ y se tiene que F es denso. \square

Lema 6.19. Sea A una k -álgebra con idempotentes $\{e_x\}_{x \in P}$ y sea I un ideal de A . Entonces,

$$1. I = \bigoplus_{x,y \in P} e_y I e_x.$$

2. Si el conjunto G genera a I , también lo hace el conjunto $\bigcup_{x,y \in P} e_y G e_x$.

DEMOSTRACIÓN. 1. Como I es un ideal de A , $\sum_{x,y \in P} e_y I e_x \subseteq I$. Por hipótesis, $A = \bigoplus_{x,y \in P} e_y A e_x$. Luego, si $a \in I \subseteq A$, tenemos $a = \sum_{i=1}^n e_{y_i} a_i e_{x_i}$, con las parejas $(x_i, y_i) \in P \times P$ distintas. Entonces, $e_{y_i} a_i e_{x_i} = e_{y_i} a e_{x_i} \in I$ y, por lo tanto, $a \in \sum_{x,y \in P} e_y I e_x$. Finalmente, $I = \bigoplus_{x,y \in P} e_y I e_x$ porque $A = \bigoplus_{x,y \in P} e_y A e_x$.

2. Supongamos $I = \langle G \rangle$. Como I es un ideal, $\langle \bigcup_{x,y \in P} e_y G e_x \rangle \subseteq I$. Si $d \in I$, entonces $d = \sum a_s g_s b_s$ con $g_s \in G$ y $a_s, b_s \in A = \bigoplus_{x,y \in P} e_y A e_x$. Luego, para cada s tomemos $a_s = \sum_{i \in F_s} e_{y_i} a_s^i e_{x_i}$ y $b_s = \sum_{j \in H_s} e_{y_j} b_s^j e_{x_j}$. Así,

$$d = \sum_{s,i,j} e_{y_i} a_s^i e_{x_i} g_s e_{y_j} b_s^j e_{x_j} \in \langle \bigcup_{x,y \in P} e_y G e_x \rangle.$$

\square

Proposición 6.20. Sea Q un carcaj e I un ideal de kQ . Entonces, I es homogéneo si y sólo si para todo x, y en Q_0 , $e_y I e_x$ está generado (como k -espacio vectorial) por elementos de la forma $\sum_{u=1}^n c_u \gamma_u$, con cada γ_u un camino de x a y y todos estos de la misma longitud.

DEMOSTRACIÓN. Si I es homogéneo, está generado por un conjunto G de elementos homogéneos. Por el segundo inciso del lema anterior, $\bigcup_{x,y \in Q_0} e_y G e_x$

también genera a I . Como kQ tiene por base los caminos dirigidos,

$$\hat{G} := \{ \delta e_y g e_x \gamma \mid g \in G; x, y \in Q_0; \gamma, \delta \text{ caminos dirigidos} \}$$

es un conjunto de elementos homogéneos de I , que lo generan como k -espacio vectorial. Cada elemento no nulo $\delta e_y g e_x \gamma$ de \hat{G} es una combinación k -lineal de caminos dirigidos que inician donde lo hace γ y terminan donde lo hace δ . Se sigue que cada $e_t I e_z$ está generado como k -espacio vectorial por $e_t \hat{G} e_z$ (cuyos elementos tienen la forma deseada).

Para el recíproco, por el primer inciso del lema anterior, $I = \bigoplus_{x,y \in Q_0} e_y I e_x$ estaría generado por elementos homogéneos (incluso como k -espacio vectorial). Así, I es un ideal homogéneo. \square

Definición 6.21. Sean dos carcajes $Q = (Q_0, Q_1)$ y $Q' = (Q'_0, Q'_1)$. Un morfismo de carcajes $f: Q \rightarrow Q'$ es una pareja de funciones $f = (f_0, f_1)$, donde $f_0: Q_0 \rightarrow Q'_0$ y $f_1: Q_1 \rightarrow Q'_1$ tal que $f_1(\alpha): f_0(i) \rightarrow f_0(j)$ en Q'_1 siempre que $\alpha: i \rightarrow j$ en Q_0 . Por simplicidad, omitiremos los subíndices de las funciones.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} Q^{\mathbb{Z}} & & (x, i) \xrightarrow{(\alpha, i)} (y, i + 1) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ Q & & x \xrightarrow{\alpha} y. \end{array}$$

Aquí, π es un morfismo de carcajes sobreyectivo. Dado un vértice (x, i) , este morfismo π establece una biyección entre el conjunto de flechas que salen de (x, i) (y que llamamos $A_{(x,i)}^+$) y el de las que salen de x (A_x^+). También determina π una biyección entre el conjunto de flechas que llegan a (x, i) ($A_{(x,i)}^-$) y el conjunto de las que llegan a x (A_x^-). Sin embargo, fijando un vértice (x, i) , no hay una biyección entre los conjuntos de flechas que entran y salen de tal vértice y los de su respectivo vértice x (asignado por π).

Definición 6.22. Una cubierta de carcajes es un morfismo de carcajes $\pi: \tilde{Q} \rightarrow Q$ que es sobreyectivo y tal que, para cada $z \in \tilde{Q}_0$ induce biyecciones entre los conjuntos A_z^+ y $A_{\pi z}^+$, y A_z^- y $A_{\pi z}^-$ respectivamente.

Observación 6.23. Sea $\pi: \tilde{Q} \rightarrow Q$ una cubierta de carcajes. Dado un camino γ en Q que inicia (respectivamente, termina) en $x \in Q_0$ y un vértice $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$, existe un único camino $\tilde{\gamma}$ que inicia (termina) en \tilde{x} tal que

$\pi(\tilde{\gamma}) = \gamma$. Tal camino $\tilde{\gamma}$ se denomina un levantamiento de γ . La prueba de este hecho es por inducción en la longitud del camino γ .

En el caso de la cubierta $\pi: Q^{\mathbb{Z}} \rightarrow Q$, si

$$\gamma = [x_0 \xrightarrow{\alpha_0} x_1 \xrightarrow{\alpha_1} x_2 \cdots x_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} x_n]$$

es un camino orientado de Q y $j \in \mathbb{Z}$,

$$\tilde{\gamma} = [(x_0, j) \xrightarrow{(\alpha_0, j)} (x_1, j+1) \xrightarrow{(\alpha_1, j+1)} (x_2, j+2) \cdots (x_{n-1}, j+n-1) \xrightarrow{(\alpha_{n-1}, j+n-1)} (x_n, j+n),]$$

es el único levantamiento de γ que inicia en (x_0, j) . El camino $\tilde{\gamma}$, de longitud n inicia en (x_0, j) y termina en $(x_n, j+n)$.

Definición 6.24. Sea Q un carcaj e I un ideal homogéneo de kQ . Sea $G_{x,y}^n$ el conjunto de elementos de I de la forma $\rho = \sum_{u=1}^m c_u \gamma_u$, donde todos los caminos γ_u son dirigidos de x en y y tienen la misma longitud n , y sea $G := \bigcup_{\substack{x,y \in Q_0 \\ n \in \mathbb{N}}} G_{x,y}^n$. Si $\rho = \sum_{u=1}^m c_u \gamma_u \in G_{x,y}^n$ y $j \in \mathbb{Z}$, cada γ_u tiene un levantamiento $\tilde{\gamma}_u$ en $Q^{\mathbb{Z}}$, de longitud n , que inicia en (x, j) y termina en $(y, j+n)$. Luego, $\tilde{\rho} := \sum_{u=1}^m c_u \tilde{\gamma}_u \in e_{(y, j+n)} kQ^{\mathbb{Z}} e_{(x, j)}$. Por definición, $I^{\mathbb{Z}}$ es el ideal de $kQ^{\mathbb{Z}}$ generado por el conjunto de elementos homogéneos $\tilde{G} := \{\tilde{\rho} \mid \rho \in G\}$. Así, $I^{\mathbb{Z}}$ es un ideal homogéneo de $kQ^{\mathbb{Z}}$.

Observación 6.25. En la construcción anterior podemos sustituir a G por cualquier T de la forma $T = \bigcup_{\substack{x,y \in Q_0 \\ n \in \mathbb{N}}} T_{x,y}^n$, con $T_{x,y}^n \subseteq G_{x,y}^n$ tal que cada $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_{x,y}^n$ genera a $e_y I e_x$ como k -espacio vectorial. Luego, $I^{\mathbb{Z}}$ no depende del sistema especial de generadores que se elija para su construcción.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos temporalmente por $I_G^{\mathbb{Z}}$ al ideal construido en la definición anterior usando G , y por $I_T^{\mathbb{Z}}$ al ideal construido como en la definición anterior usando T en lugar de G . Es claro que $I_T^{\mathbb{Z}} \subseteq I_G^{\mathbb{Z}}$. Veamos que también vale la otra inclusión. Bastará ver que los generadores de $I_G^{\mathbb{Z}}$ pertenecen a $I_T^{\mathbb{Z}}$. Sea $\tilde{\rho} = \sum_{u=1}^m c_u \tilde{\gamma}_u$, que inicia en (x, j) , donde $\rho = \sum c_u \gamma_u \in G_{x,y}^n$ como en la definición anterior. Por hipótesis, $\rho = \sum_{s=1}^t d_s \rho_s$, para algunos $d_s \in k$ y $\rho_s \in T_{x,y}^n$. Consideremos las combinaciones $\tilde{\rho}_s$ en $e_{(y, j+n)} kQ^{\mathbb{Z}} e_{(x, j)}$

que levantan a ρ_s , para cada $s = 1, \dots, t$. Luego, $\tilde{\rho} = \sum d_s \tilde{\rho}_s \in I_T^{\mathbb{Z}}$. \square

Observación 6.26. *Todo morfismo $\pi: \tilde{Q} \rightarrow Q$ de carcajes induce un morfismo de k -espacios vectoriales $k(\pi): k\tilde{Q} \rightarrow kQ$, determinado por $k(\pi)(e_x) = e_{\pi x}$, para $x \in \tilde{Q}_0$, y $k(\pi)(\alpha) = \pi\alpha$, para cada $\alpha \in \tilde{Q}_1$. En efecto, si $\alpha_n \dots \alpha_1$ es un camino dirigido de longitud $n \geq 2$ de \tilde{Q} , definimos $k(\pi)(\alpha_n \dots \alpha_1) = \pi(\alpha_n) \dots \pi(\alpha_1)$, y luego, extendemos $k(\pi)$ a todo $k\tilde{Q}$ por linealidad.*

En general, $k(\pi)$ no es morfismo de k -álgebras, aunque sí satisface que $k(\pi)(\rho_2 \rho_1) = k(\pi)(\rho_2)k(\pi)(\rho_1)$, siempre que $\rho_1 \in e_j kQ e_i$ y $\rho_2 \in e_t kQ e_j$, para $i, j, t \in Q_0$.

Proposición 6.27. *El morfismo $\pi: A^{\mathbb{Z}} e_{(x,i)} \rightarrow Ae_x$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, para todo $x \in Q_0$, para cada $i \in \mathbb{Z}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in Q_0$, y $\tilde{x} \in Q_0^{\mathbb{Z}}$ tal que $\pi(\tilde{x}) = x$. Es claro que $k(\pi)$ (el morfismo definido en la observación (??)), induce un isomorfismo de espacios vectoriales:

$$kQ^{\mathbb{Z}} e_{\tilde{x}} \xrightarrow[\cong]{k(\pi)} kQ e_x$$

por las observaciones (??) y (??).

Sea $y \in Q_0$. Probemos que $\bigoplus_{\tilde{y} \in \pi^{-1}(y)} e_{\tilde{y}} A^{\mathbb{Z}} e_{\tilde{x}}$ es isomorfo, como k -espacio vectorial, a $e_y A e_x$, de aquí se seguirá que $A^{\mathbb{Z}} e_{\tilde{x}} = \bigoplus_{y \in Q_0} \bigoplus_{\tilde{y} \in \pi^{-1}(y)} e_{\tilde{y}} A^{\mathbb{Z}} e_{\tilde{x}} \cong$

$\bigoplus_{y \in Q_0} e_y A e_x = A e_x$. Dado $k(\pi)$ el morfismo definido en la observación (??),

veamos que $k(\pi)(\bigoplus_{\tilde{y} \in \pi^{-1}(y)} e_{\tilde{y}} I^{\mathbb{Z}} e_{\tilde{x}}) \subseteq e_y I e_x$. Sea \tilde{G} como en la definición (??).

Entonces,

$$\tilde{\rho} = \sum_i \left(\sum_r a_r^i \tilde{\delta}_r^i \right) \left(\sum_s c_s^i \tilde{\gamma}_s^i \right) \left(\sum_t b_t^i \tilde{\eta}_t^i \right)$$

donde $\sum_s c_s^i \tilde{\gamma}_s^i$ está en \tilde{G} , $\sum_r a_r^i \tilde{\delta}_r^i$ y $\sum_t b_t^i \tilde{\eta}_t^i$ están en $kQ^{\mathbb{Z}}$, y cada camino $\tilde{\eta}_t^i$ comienza en \tilde{x} . Podemos reordenar los términos en esta suma según la longitud de los caminos que se forman:

$$\tilde{\rho} = \sum_n \left[\sum_{i,r,s,t} a_r^i c_s^i b_t^i \tilde{\delta}_r^i \tilde{\gamma}_s^i \tilde{\eta}_t^i \right].$$

Ahora supongamos que $\tilde{\rho}$ está en $\bigoplus_{\pi(\tilde{y})=y} e_{\tilde{y}} I^{\mathbb{Z}} e_{\tilde{x}}$, luego, cada camino $\tilde{\delta}_r^i \tilde{\gamma}_s^i \tilde{\eta}_t^i$

va de \tilde{x} en \tilde{y} y su longitud es n . Luego,

$$k\pi(\tilde{\rho}) = \sum_n \left[\sum_{i,r,s,t} a_r^i c_s^i b_t^i \delta_r^i \gamma_s^i \eta_t^i \right]$$

y $\delta_r^i \gamma_s^i \eta_t^i$ es un camino de x en y de longitud n . Cada componente homogénea $\sum_{i,r,s,t} a_r^i c_s^i b_t^i \delta_r^i \gamma_s^i \eta_t^i$ está en $e_y I e_x$, luego, $k\pi(\tilde{\rho})$ está en G , entonces

$k\pi(\tilde{\rho})$ está en $e_y I e_x$.

Luego, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\pi(\tilde{y})=y} e_{\tilde{y}} I^{\mathbb{Z}} e_{\tilde{x}} & \xrightarrow{k(\pi)|} & e_y I e_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{\pi(\tilde{y})=y} e_{\tilde{y}} kQ^{\mathbb{Z}} e_{\tilde{x}} & \xrightarrow{k(\pi)} & e_y kQ e_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{\pi(\tilde{y})=y} e_{\tilde{y}} A^{\mathbb{Z}} e_{\tilde{x}} & \longrightarrow & e_y A e_x, \end{array}$$

donde $k(\pi)|$ denota la restricción de $k\pi$.

Además, φ es sobreyectiva porque $e_y I e_x$ está generado por elementos homogéneos $\rho = \sum_i c_u \gamma_u$, que se levantan en $\tilde{\rho} = \sum_i c_u \tilde{\gamma}_u$ que son homogéneos en $e_{\tilde{y}} I^{\mathbb{Z}} e_{\tilde{x}}$. □

Proposición 6.28. *Sea Q un carcaj e I un ideal admisible y homogéneo de kQ . Consideremos las k -álgebras graduadas con idempotentes $A = kQ/I$ y $A^{\mathbb{Z}} = kQ^{\mathbb{Z}}/I^{\mathbb{Z}}$. Entonces las categorías $A^{\mathbb{Z}}\text{-Mod}$ y $A\text{-Grad}$ son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición (??), tenemos una equivalencia de categorías:

$$F: \underline{kQ^{\mathbb{Z}}}\text{-Mod} \longrightarrow \underline{kQ}\text{-Grad}.$$

Teniendo en mente la proposición (??) y la definición de F , queremos ver que dado $M \in \underline{kQ^{\mathbb{Z}}}\text{-Mod}$, $I^{\mathbb{Z}}M = 0$ equivale a que $IF(M) = 0$. Esto es equivalente a ver que $e_{(y,j)} I^{\mathbb{Z}} e_{(x,i)} M = 0$, para cada $x, y \in Q_0$ e $i, j \in \mathbb{Z}$ ocurre si y sólo si $e_y I e_x F(M) = 0$, para cada $x, y \in Q_0$. Si G y \tilde{G} son conjuntos generadores de I y de $I^{\mathbb{Z}}$ como en la definición (??), lo anterior equivale a ver que $\tilde{G}_{(x,i)(y,j)} M = 0$, para cada $x, y \in Q_0$ e $i, j \in \mathbb{Z}$, si y

sólo si $G_{x,y}F(M) = 0$, para cada $x, y \in Q_0$. Sea $\rho = \sum_{u=1}^t c_u \gamma_u \in G_{x,y}$. Para cada $i \in \mathbb{Z}$ y $u \in \{1, \dots, t\}$, sea $\tilde{\gamma}_u^i$ el levantamiento de γ_u en $Q^{\mathbb{Z}}$ que inicia en (x, i) . Pongamos, $\tilde{\rho}^i := \sum_{u=1}^t c_u \tilde{\gamma}_u^i$ para $i \in \mathbb{Z}$. Luego, bastará probar que para cada $\rho \in G_{x,y}$ se tiene que: $\tilde{\rho}^i M = 0$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, si y sólo si $\rho F(M) = 0$. Para ello tomemos $m \in F(M)_x = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_{x,i}$. Luego, $m = \sum_{i \in \mathbb{Z}} m_{x,i}$ con $m_{x,i} \in M_{x,i}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 \rho \cdot m &= \left(\sum_u c_u \gamma_u \right) \cdot m \\
 &= \sum_u c_u F(M)_{\gamma_u}(m) \\
 &= \sum_u c_u F(M)_{\gamma_u} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} m_{x,i} \right) \\
 &= \sum_u c_u \sum_{i \in \mathbb{Z}} M_{\tilde{\gamma}_u^i}(m_{x,i}) \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sum_u c_u M_{\tilde{\gamma}_u^i}(m_{x,i}) \right) \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tilde{\rho}^i m_{x,i} \in \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} M_{y,j} = F(M)_y,
 \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $\rho m = 0$ si y sólo si $\tilde{\rho}^i m_{x,i} = 0$, para cada $i \in \mathbb{Z}$. \square

6.3. Algebras cuadráticas y duales cuadráticos

Definición 6.29. Sea kQ un álgebra de carcaj e I un ideal de kQ . Entonces, I se dice un ideal cuadrático si está generado por $I_2 := (kQ)^2 \cap I$; es decir, I está generado como ideal por un conjunto R de combinaciones lineales de la forma $\sum_{u=1}^n c_u \gamma_u$, con cada γ_u un camino de longitud dos de x en y .

Definición 6.30. Una k -álgebra cuadrática A es una k -álgebra de la forma kQ/I , para Q un carcaj e I un ideal cuadrático de kQ .

Notemos que I es un ideal admisible y homogéneo de kQ . En consecuencia, $A = kQ/I$ es una k -álgebra graduada con idempotentes.

Observación 6.31. Si $A = kQ/I$ es una k -álgebra cuadrática, también lo es $A^{\mathbb{Z}} = kQ^{\mathbb{Z}}/I^{\mathbb{Z}}$.

Estamos interesados en k -álgebras cuadráticas.

Definición 6.32. Si S es una k -álgebra y V un S - S -bimódulo, podemos considerar:

$$\begin{aligned} V^{\otimes 0} &:= S \\ V^{\otimes 1} &:= V \\ V^{\otimes n} &:= V \otimes_S \cdots \otimes_S V \text{ } n \text{ veces, para } n \geq 2, \end{aligned}$$

y formar $T_S(V) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} V^{\otimes i}$, el álgebra tensorial de V sobre S , cuyo producto está determinado por los isomorfismos canónicos $V^{\otimes n} \otimes_S V^{\otimes m} \longrightarrow V^{\otimes(n+m)}$.

Obtenemos que $T_S(V)$ es una k -álgebra graduada.

Proposición 6.33. Sea Q un carcaj y $S := \bigoplus_{x \in Q_0} ke_x$ la k -subálgebra de kQ generada por los caminos triviales de Q . Sea $V := \bigoplus_{\alpha \in Q_1} S\alpha S$ el S - S -subbimódulo de kQ generado por las flechas de Q . Entonces, hay un isomorfismo de k -álgebras graduadas:

$$\theta: kQ \longrightarrow T_S(V).$$

En particular, $\mathcal{F}^n = \theta^{-1}(V^{\otimes n})$, para $n \geq 1$. Más adelante utilizaremos esta realización de kQ .

Definición 6.34. Si \underline{S} es una k -álgebra con idempotentes $\{e_x\}_{x \in P}$, un \underline{S} - \underline{S} -bimódulo es un \underline{S} -módulo izquierdo M que, al mismo tiempo es un \underline{S} -módulo derecho y satisface que $(am)b = a(mb)$, para cada $a, b \in \underline{S}$ y $m \in M$. Luego, $M = \bigoplus_{y \in P} e_y M$ y $M = \bigoplus_{x \in P} M e_x$, ó equivalentemente, $M = \bigoplus_{x, y \in P} e_y M e_x$.

Definición 6.35. Dada una k -álgebra con idempotentes $\underline{A} = (A, \{e_x\}_{x \in P})$, llamaremos la subálgebra trivial de \underline{A} a $\underline{S} = \bigoplus_{x \in P} ke_x$. En este caso, A es un \underline{S} - \underline{S} -bimódulo.

Una k -álgebra es trivial, si coincide con su subálgebra trivial.

Observación 6.36. Si \underline{S} es una k -álgebra con idempotentes $\{e_x\}_{x \in P}$ y V es un \underline{S} - \underline{S} -bimódulo, entonces $V^* := \text{Hom}_{\underline{S}}(V, \underline{S})$ es un S - S -bimódulo con:

$$\begin{aligned} (hs)(v) &= h(sv) \\ (sh)(v) &= sh(v), \end{aligned}$$

para $h \in V^*$, $s \in \underline{S}$ y $v \in V$. Sin embargo, en general V^* no es un \underline{S} - \underline{S} -bimódulo.

DEMOSTRACIÓN. Las verificaciones son rutinarias. Veamos sólo que:

$$V^* = \bigoplus_{x,y \in P} e_y V^* e_x$$

no se cumple en general. Sea $\underline{S} = (S, \{e_x\}_{x \in P})$ cualquier k -álgebra con familia infinita de idempotentes. Veamos que $S^* = \text{Hom}_S(S, S_S)$ no satisface lo anterior. Veremos que, de hecho,

$$\bigoplus_{x \in P} S^* e_x \subsetneq S^* \supsetneq \bigoplus_{y \in P} e_y S^*.$$

En efecto, sea $h := 1_S \in S^*$. Si tuvieramos $h = \sum_{i=1}^n h_i e_{x_i}$, con $h_i \in S^*$, entonces para $s \in S$, $s = h(s) = \sum_{i=1}^n h_i e_{x_i}(s) = \sum_{i=1}^n h_i(e_{x_i} s)$. Luego, si $s = e_z$ con $z \notin \{x_1, \dots, x_n\}$, obtenemos $e_z = \sum_{i=1}^n h_i(e_{x_i} e_z) = 0$: una contradicción. Luego, $h \notin \bigoplus_{x \in P} S^* e_x$. Además, si tuviéramos $h = \sum_{j=1}^m e_{y_j} h'_j$, con $h'_j \in S^*$, entonces para $s \in S$, $s = h(s) = \sum_{j=1}^m e_{y_j} h'_j(s) \in \bigoplus_{j=1}^m e_{y_j} S$. Esto último es falso para $s = e_z$, si $z \notin \{y_1, \dots, y_m\}$. \square

Recordemos la definición de base dual.

Definición 6.37. Si S es una k -álgebra y V es un S -módulo derecho, definimos $V^* := \text{Hom}_S(V_S, S_S)$. Una base dual para V_S es una familia $\{(v_i, h_i)\}_{i \in I}$ tal que:

- (1) $v_i \in V$ y $h_i \in V^*$ para cada $i \in I$.
- (2) Dado $v \in V$, $h_i(v) = 0$ para casi todo $i \in I$.
- (3) Para cada $v \in V$, $v = \sum_{i \in I} v_i h_i(v)$.

Proposición 6.38. Sea $\underline{S} = (S, \{e_x\}_{x \in P})$ una k -álgebra con idempotentes trivial y sea H un \underline{S} - \underline{S} -bimódulo. Entonces, H_S tiene una base dual.

DEMOSTRACIÓN. Para cada x, y en P escogemos una k -base $T_{y,x}$ de $e_y H e_x$. Luego, $T := \bigcup_{x,y \in P} T_{y,x}$ es una k -base de H . Si $t \in T_{y,x}$, definimos

$\hat{t}: H \rightarrow S$ como la única función lineal tal que, para $h \in T$ satisface:

$$\hat{t}(h) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \neq h, \\ e_x, & \text{si } t = h. \end{cases}$$

Probemos que cada \hat{t} es morfismo de S -módulos derechos. Para ver que $\hat{t}(h \cdot s) = \hat{t}(h) \cdot s$, para cada $h \in H$, $s \in S$, basta probarlo en los generadores de S , porque la propiedad se extiende por bilinealidad (notemos que \hat{t} es k -lineal por definición). Así, basta suponer que $s = e_w$, para $w \in P$. Sea $h \in H$. También podemos suponer que $h \in T$, porque si $h = \sum c_i t_i$, con $t_i \in T$, tendríamos:

$$\begin{aligned}\hat{t}(hs) &= \hat{t}((\sum c_i t_i)e_w) = \sum c_i \hat{t}(t_i e_w) = \sum c_i \hat{t}(t_i) e_w \\ &= \hat{t}(\sum c_i t_i) e_w = \hat{t}(h) s.\end{aligned}$$

Así, si $t' \in {}_u T_z$ y $w \in P$, queremos ver que $\hat{t}(t' e_w) = \hat{t}(t') e_w$. Tenemos 4 casos:

1. Si $w = z$ y $t \neq t'$, $\hat{t}(t' e_w) = \hat{t}(t') = 0 = \hat{t}(t') e_w$.
2. Si $w = z$ y $t = t'$, $\hat{t}(t' e_w) = \hat{t}(t') = e_x = e_x^2 = \hat{t}(t') e_w$.
3. Si $w \neq z$ y $t \neq t'$, $\hat{t}(t' e_w) = \hat{t}(0) = 0 = \hat{t}(t') e_w$.
4. Si $w \neq z$ y $t = t'$, $\hat{t}(t' e_w) = \hat{t}(0) = 0 = e_x e_w = \hat{t}(t') e_w$.

Por lo tanto, \hat{t} es de S -módulos derechos.

Por otro lado, sean t_0 en $T_{y,x}$ y $h = \sum_{t \in T} t c_t$, elementos de H , entonces

$$\hat{t}_0(h) = \sum_{t \in T} \hat{t}_0(t) c_t = e_x c_{t_0}.$$

Como sólo hay finitos coeficientes c_t no nulos en la expresión de h , tenemos $\hat{t}_0(h) = 0$ para casi todo $t_0 \in T$. Entonces, para cada $h \in H$ se tiene

$$h = \sum_{t \in T} t \hat{t}(h).$$

Por lo tanto, H tiene la base dual $\{(t, \hat{t})\}_{t \in T}$. □

Corolario 6.39. *En particular, $V = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} S \alpha S$ es un \underline{S} - \underline{S} -bimódulo. Entonces $\{(\alpha, \hat{\alpha})\}_{\alpha \in Q_1}$ es base dual de V , definiendo, para cada $\alpha: x \rightarrow y$ en Q_1 el morfismo*

$$\hat{\alpha}(\beta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \beta \neq \alpha, \\ e_x, & \text{si } \beta = \alpha. \end{cases}$$

Observación 6.40. Sea $\alpha: x \rightarrow y$ en Q_1 , entonces

$$\hat{\alpha} = e_x \hat{\alpha} e_y, \quad (6.2)$$

DEMOSTRACIÓN. Dado γ en Q_1 , se tiene

$$\begin{aligned} e_x \hat{\alpha} e_y(\gamma) &= e_x \hat{\alpha}(e_y \gamma) \neq 0, \quad \text{sólo si } y \text{ es final de } \gamma, \text{ en tal caso:} \\ &= e_x \hat{\alpha}(\gamma) \neq 0, \quad \text{sólo si } \gamma = \alpha, \text{ en este caso:} \\ &= e_x e_x = e_x = \hat{\alpha}(\gamma). \end{aligned}$$

□

Definición 6.41. Dado un carcaj Q , si tomamos S y V como en la proposición (??), y V^* como en (??), definimos:

$$V_0^* := \bigoplus_{x,y \in Q_0} e_x V^* e_y.$$

Observemos que V_0^* es un S - S -sub-bimódulo de V^* y que V_0^* es un \underline{S} - \underline{S} -bimódulo.

Lema 6.42. Supongamos que Q es un carcaj localmente finito. Si $\alpha \in Q_1$, sea $\hat{\alpha}: V_0^* \rightarrow S$ tal que $\hat{\alpha}(h) = h(\alpha)$, para $h \in V_0^*$. Entonces, $\{\hat{\alpha}, \hat{\alpha}\}_{\alpha \in Q_1}$ es una base dual del S -módulo izquierdo V_0^* . Es decir, $\hat{\alpha} \in V_0^*$, $\hat{\alpha} \in {}^*(V_0^*) = \text{Hom}_S(V_0^*, {}_S S)$ y, para cada $h \in V_0^*$, se tiene $h = \sum_{\alpha \in Q_1} \hat{\alpha}(h) \hat{\alpha}$.

DEMOSTRACIÓN. Veamos que V_0^* está generado por el conjunto $\{\hat{\beta}\}_{\beta \in Q_1}$. Sea $h \in V_0^* = \bigoplus_{x,y \in Q_0} e_x V^* e_y$ un generador, es decir, $h = e_x t e_y$, luego, $e_x h e_y = h$. Sea $v \in V$, entonces, por el corolario (??), $v = \sum_{\beta \in Q_1} \beta \hat{\beta}(v)$. Luego,

$$h(v) = h\left(\sum_{\beta \in Q_1} \beta \hat{\beta}(v)\right) = \sum_{\beta \in Q_1} h(\beta \hat{\beta}(v)) = \sum_{\beta \in Q_1} h(\beta) \hat{\beta}(v),$$

pero $h(\beta) = e_x h e_y(\beta) = e_x h(e_y \beta)$ es distinto de 0 sólo si y es el final de β , y hay un número finito de tales flechas. Por lo tanto, $h(v)$ es una suma finita. Entonces,

$$h = \sum_{\beta: z \rightarrow y} h(\beta) \hat{\beta}.$$

□

Definición 6.43. Sea Q un carcaj,

1. El carcaj opuesto Q^{op} tiene conjunto de vértices $Q_0^{\text{op}} = Q_0$ y hay una flecha $i \xrightarrow{\alpha^{\text{op}}} j$ en Q_1^{op} si y sólo si hay una flecha $j \xrightarrow{\alpha} i$ en Q_1 .
2. Sean $S = \bigoplus_{x \in Q_0} ke_x$ la k -subálgebra trivial de kQ^{op} y $W = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} S\alpha^{\text{op}}S$ el sub-bimódulo de kQ^{op} generado por sus flechas.

Afirmación 6.44. Si Q es un carcaj localmente finito, W y V_0^* son isomorfos como S - S -bimódulos.

DEMOSTRACIÓN. Sea el morfismo $\delta: W \rightarrow V_0^*$ definido como sigue: $\delta(\sum_{\alpha \in Q_1} \lambda_\alpha \alpha^{\text{op}}) = \sum_{\alpha \in Q_1} \lambda_\alpha \hat{\alpha}$, para λ_α en k . Supongamos que $\delta(\sum_{\alpha \in Q_1} \lambda_\alpha \alpha^{\text{op}}) = 0$. Para todo $v \in V$ se tendrá $\sum_{\alpha \in Q_1} \lambda_\alpha \hat{\alpha}(v) = 0$. En particular, si $v = \alpha \in Q_1$, con $\alpha: x \rightarrow y$, se tiene $0 = \lambda_\alpha \hat{\alpha}(\alpha) = \lambda_\alpha e_x$, luego $\lambda_\alpha = 0$ para cada $\alpha \in Q_1$. Entonces $\sum_{\alpha \in Q_1} \lambda_\alpha \alpha^{\text{op}} = 0$ y δ es inyectiva. Veamos que δ es morfismo de S - S -bimódulos. Por su definición, tenemos que δ es lineal. Sin perder generalidad, sean $s = e_z$ y $w = \beta^{\text{op}}$ generadores de S y W respectivamente, con $\beta: x \rightarrow y$ en Q_1 . Supongamos $sw \neq 0$, esto pasa si y sólo si $z = x$. Entonces

$$\delta(sw) = \delta(e_x \beta^{\text{op}}) = \delta(\beta^{\text{op}}) = \hat{\beta} = e_x \hat{\beta} e_y = e_x \hat{\beta} = e_x \delta(\beta^{\text{op}}) = s\delta(w).$$

Por el contrario, $sw = 0$ si y sólo si $z \neq x$, entonces $\delta(sw) = 0$ y, en este caso,

$$s\delta(w) = e_z \delta(\beta^{\text{op}}) = e_z \hat{\beta} = e_z(e_x \hat{\beta} e_y) = 0.$$

De ahí que δ es morfismo de S -módulos izquierdos. De manera similar se prueba que δ es morfismo de S -módulos derechos. Además, es sobreyectivo, porque

$$V_0^* = \sum_{\alpha \in Q_1} S\hat{\alpha} \subseteq \text{Im}\delta.$$

□

Proposición 6.45. Si Q es localmente finito, los \underline{S} - \underline{S} -bimódulos $V_0^* \otimes_S V_0^*$ y $(V \otimes_S V)_0^*$ son isomorfos.

DEMOSTRACIÓN. Primero veamos que hay un morfismo de $V^* \otimes V^*$ en $(V \otimes V)^*$. Sea $\hat{\psi}: V^* \times V^* \rightarrow (V \otimes V)^*$, con $\hat{\psi}(h_1, h_2)(v \otimes w) = h_1(h_2(v)w)$.

Se demuestra que $\hat{\psi}(h_1, h_2)$ está bien definida puesto que está inducida por la función $(v, w) \mapsto h_1(h_2(v)w)$ que es S -balanceada. Es decir, $\hat{\psi}(h_1, h_2)(v_1 + v_2, w_1 + w_2) = \sum_{i,j=1,2} \hat{\psi}(h_1, h_2)(v_i, w_j)$, y $\hat{\psi}(h_1, h_2)(vs, w) = \hat{\psi}(h_1, h_2)(v, sw)$.

Así, tenemos la función lineal $\hat{\psi}(h_1, h_2): V \otimes_S V \rightarrow S$. Probemos que $\hat{\psi}(h_1, h_2)$ es un morfismo de S -módulos derechos:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(h_1, h_2)((v \otimes w)s) &= \hat{\psi}(h_1, h_2)(v \otimes ws) = h_1(h_2(v)ws) \\ &= h_1(h_2(v)w \cdot s) = h_1(h_2(v)w) \cdot s \\ &= \hat{\psi}(h_1, h_2)(v, w) \cdot s. \end{aligned}$$

Ahora veamos que $\hat{\psi}$ es S -balanceado:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(h_1 + h_2, f_1 + f_2)(v \otimes w) &= (h_1 + h_2)((f_1 + f_2)(v)w) \\ &= (h_1 + h_2)(f_1(v)w + f_2(v)w) \\ &= h_1(f_1(v)w + f_2(v)w) + h_2(f_1(v)w + f_2(v)w) \\ &= h_1(f_1(v)w) + h_1(f_2(v)w) \\ &\quad + h_2(f_1(v)w) + h_2(f_2(v)w) \\ &= \sum_{i,j=1,2} \hat{\psi}(h_i, f_j)(v \otimes w). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(h_1, s \cdot h_2)(v \otimes w) &= h_1(s \cdot h_2(v)w) \\ &= h_1(sh_2(v)w) \\ &= (h_1 \cdot s)(h_2(v)w) \\ &= \hat{\psi}(h_1 \cdot s, h_2)(v \otimes w). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\hat{\psi}$ induce un único morfismo $\psi: V^* \otimes_S V^* \rightarrow (V \otimes_S V)^*$, tal que

$$\psi(h_1 \otimes h_2)(v \otimes w) = h_1(h_2(v)w).$$

ψ es morfismo de S - S -bimódulos:

$$\begin{aligned} \psi(sh_1 \otimes h_2)(v \otimes w) &= sh_1(h_2(v)w) = s\psi(h_1 \otimes h_2)(v \otimes w) \\ \psi(h_1 \otimes h_2s)(v \otimes w) &= h_1(h_2s(v)w) = h_1(h_2(sv)w) \\ &= \psi(h_1 \otimes h_2)(sv \otimes w) = \psi(h_1 \otimes h_2)s(v \otimes w). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\psi(sh_1 \otimes h_2) = s\psi(h_1 \otimes h_2)$ y $\psi(h_1 \otimes h_2s) = \psi(h_1 \otimes h_2)s$, para $s \in S$, $v, w \in V$.

Ahora bien, $\psi(V_0^* \otimes V_0^*) \subseteq (V \otimes V)_0^*$. En efecto, sea $(e_x h e_y) \otimes (e_z g e_w)$ un generador en $V_0^* \otimes V_0^* \subseteq V^* \otimes V^*$, luego:

$$\begin{aligned} [\psi((e_x h e_y) \otimes (e_z g e_w))](v_1 \otimes v_2) &= e_x h e_y (e_z g e_w (v_1) v_2) \\ &= e_x h (e_y e_z g (e_w v_1) v_2), \end{aligned}$$

porque h y g están en $\text{Hom}_S(V, S)$. Sea $T := \psi((e_x h e_y) \otimes (e_z g e_w))$. Entonces

$$\begin{aligned} e_x T e_w (v_1 \otimes v_2) &= e_x T (e_w v_1 \otimes v_2) \\ &= e_x (e_x h (e_y e_z g (e_w e_w v_1) v_2)) \\ &= e_x h (e_y e_z g (e_w v_1) v_2) \\ &= T (v_1 \otimes v_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $e_x T e_w = T$, lo cual nos dice que T está en $(V \otimes V)_0^*$.

Tengamos presente que el corolario (??) nos describe una base dual de V . Ahora estamos listos para definir un morfismo $\rho: (V \otimes V)_0^* \rightarrow V_0^* \otimes_S V_0^*$ y probar que es el inverso de la restricción de ψ a $V_0^* \otimes_S V_0^*$. Sea $h \in (V \otimes V)_0^*$ un generador, es decir, $h = e_y t e_x$ y se tiene $e_y h e_x = h$ evidentemente. Definimos

$$\rho(h) = \sum_{\alpha, \beta \in Q_1} h(\alpha \otimes \beta) (\hat{\beta} \otimes \hat{\alpha}),$$

veamos que esta definición es válida probando que es finita. Tenemos que $h(\alpha \otimes \beta) = e_y h e_x (\alpha \otimes \beta) = e_y h (e_x \alpha \otimes \beta) \neq 0$ sólo si α termina en x . Pero hay un número finito de flechas que terminan en x , pues Q es localmente finito. Entonces

$$\rho(h) = \sum_{\substack{\alpha: z \rightarrow x \\ z \in Q_0}} h(\alpha \otimes \beta) (\hat{\beta} \otimes \hat{\alpha}),$$

pero $e_x \alpha e_z \otimes \beta = e_x \alpha \otimes e_z \beta \neq 0$ sólo si z es final de β . Como Q es localmente finito hay un número finito de tales α y β . Luego, $\rho(h)$ es una suma finita. Tenemos que:

$$\begin{array}{ccccc} V_0^* \otimes_S V_0^* & \xrightarrow{\psi} & (V \otimes V)_0^* & \xrightarrow{\rho} & V_0^* \otimes_S V_0^* \\ g_1 \otimes g_2 & \mapsto & [v \otimes w \xrightarrow{f} g_1(g_2(v)w)] & \mapsto & \sum_{\alpha, \beta \in Q_1} f(\alpha \otimes \beta) \hat{\beta} \otimes \hat{\alpha}. \end{array}$$

Sean $v = \sum_{\alpha \in Q_1} \alpha \hat{\alpha}(v)$, $w = \sum_{\beta \in Q_1} \beta \hat{\beta}(w)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 \psi\rho(f)(v \otimes w) &= \psi\left[\sum_{\alpha, \beta \in Q_1} f(\alpha \otimes \beta) \hat{\beta} \otimes \hat{\alpha}\right](v \otimes w) \\
 &= \sum_{\alpha, \beta \in Q_1} f(\alpha \otimes \beta) \hat{\beta}(\hat{\alpha}(v)w) \\
 &= \sum_{\alpha, \beta \in Q_1} f(\alpha \otimes \beta \hat{\beta}(\hat{\alpha}(v)w)) \\
 &= \sum_{\alpha \in Q_1} f\left(\alpha \otimes \sum_{\beta \in Q_1} \beta(\hat{\beta}(\hat{\alpha}(v)w))\right) \\
 &= \sum_{\alpha \in Q_1} f(\alpha \otimes \hat{\alpha}(v)w) \\
 &= \sum_{\alpha \in Q_1} f(\alpha \hat{\alpha}(v) \otimes w) \\
 &= f\left(\sum_{\alpha \in Q_1} \alpha \hat{\alpha}(v) \otimes w\right) \\
 &= f(v \otimes w).
 \end{aligned}$$

Luego, $\psi\rho = 1$. Por otro lado, notemos que para todo $g_u \in V^*$:

$$\begin{aligned}
 g_u(v) &= g_u\left(\sum_{\alpha \in Q_1} \alpha \hat{\alpha}(v)\right) = \sum_{\alpha \in Q_1} g_u(\alpha \hat{\alpha}(v)) \\
 &= \sum_{\alpha \in Q_1} g_u(\alpha) \hat{\alpha}(v),
 \end{aligned}$$

de ahí que, $g_u = \sum_{\alpha \in Q_1} g_u(\alpha) \hat{\alpha}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 \rho\psi(g_1 \otimes g_2) &= \sum_{\alpha, \beta \in Q_1} [\psi(g_1 \otimes g_2)](\alpha \otimes \beta) \hat{\beta} \otimes \hat{\alpha} \\
 &= \sum_{\alpha, \beta \in Q_1} [g_1(g_2(\alpha)\beta)] \hat{\beta} \otimes \hat{\alpha} \\
 &= \sum_{\alpha, \beta \in Q_1} [g_1 \cdot g_2(\alpha)](\beta) \hat{\beta} \otimes \hat{\alpha} \\
 &= \sum_{\alpha \in Q_1} g_1 \cdot g_2(\alpha) \otimes \hat{\alpha} \\
 &= g_1 \otimes \sum_{\alpha \in Q_1} g_2(\alpha) \hat{\alpha} \\
 &= g_1 \otimes g_2.
 \end{aligned}$$

Entonces $\rho\psi = 1$ y se tiene la proposición. □

Observación 6.46. De igual manera, es fácil ver que $\{\sigma \otimes \tau, \psi(\hat{\tau} \otimes \hat{\sigma})\}_{\sigma, \tau \in Q_1}$ es base dual para $V \otimes V$.

Definición 6.47. Sea $A = kQ/I$ una k -álgebra cuadrática con carcaj Q localmente finito. En particular, por la afirmación anterior y la proposición (??), tenemos los isomorfismos:

$$W \otimes_S W \xrightarrow{\sim} V_0^* \otimes_S V_0^* \xrightarrow{\sim} (V \otimes_S V)_0^*$$

Sea $R := (kQ)^2 \cap I$, podemos suponer $R \subseteq V \otimes_S V$, por la proposición (??). Definimos $R^\perp := \{f \in (V \otimes_S V)_0^* \mid f(R) = 0\}$. Sea entonces R_1^\perp la imagen inversa de R^\perp en $V_0^* \otimes_S V_0^*$ y, a su vez, $R^!$ la imagen inversa de R_1^\perp en $W \otimes_S W$ bajo estos isomorfismos. Sea $I^!$ el ideal en kQ^{op} generado por $R^!$, en este caso, $I^!$ es un ideal cuadrático. Definimos el álgebra dual cuadrática de la k -álgebra $A = kQ/I$ como

$$A^! = kQ^{\text{op}}/I^!.$$

Tenemos las proyecciones canónicas:

$$\eta_A: kQ \rightarrow kQ/I \quad \text{y} \quad \eta_{A^!}: kQ^{\text{op}} \rightarrow kQ^{\text{op}}/I^!.$$

Proposición 6.48. Sea $A = kQ/I$ una k -álgebra cuadrática, donde Q es localmente finito. Entonces, el isomorfismo natural $(Q^{\text{op}})^{\text{op}} \rightarrow Q$ que identifica cada $(\alpha^{\text{op}})^{\text{op}}$ con α , para $\alpha \in Q_1$, induce un isomorfismo canónico:

$$(A^!)^! \cong A.$$

DEMOSTRACIÓN. **1.** Recordemos que, si $U \leq k^n$ y

$$\begin{aligned} \bullet: k^n \times k^n &\longrightarrow k \\ (\lambda, \mu) &\longmapsto \lambda \cdot \mu = \sum_{\gamma=1}^n \lambda_\gamma \mu_\gamma \end{aligned}$$

es la forma bilineal simétrica no degenerada canónica,

$$U^\perp := \{\lambda \in k^n \mid \lambda \cdot \mu = 0, \text{ para cada } \mu \text{ en } U\} \leq k^n$$

y $U = (U^\perp)^\perp$.

2. Si A es una k -álgebra cuadrática, $A = kQ/I$, con Q localmente finito y $I = \langle R \rangle$, donde $e_y R e_x$ consiste de combinaciones lineales de caminos dirigidos de longitud dos para cada $x, y \in Q_0$.

Sea \mathcal{P}^2 el subespacio de kQ con base los caminos dirigidos de longitud dos. Entonces, si $\tilde{R}_{x,y} := e_y I e_x \cap e_y \mathcal{P}^2 e_x$, $\tilde{R} := \bigcup_{x,y \in Q_0} \tilde{R}_{x,y}$ es un conjunto generador de I (en el mismo sentido que la R de antes, pues $R \subseteq \tilde{R}$ y $\tilde{R} \subseteq \langle R \rangle$, como k -espacio vectorial).

Sea $\Gamma_{x,y}$ el conjunto de caminos dirigidos de x en y de longitud dos, luego, $e_y \mathcal{P}^2 e_x = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} k\gamma$. Sea $n = |\Gamma_{x,y}| = \dim e_y \mathcal{P}^2 e_x$. Tenemos que $\tilde{R}_{x,y} \leq e_y \mathcal{P}^2 e_x$, y podemos considerar el subespacio de coordenadas asociado:

$$U_{x,y} := \{ \lambda = \{ \lambda_\gamma \}_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} \in k^n \mid \sum_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} \lambda_\gamma \gamma \in \tilde{R}_{x,y} \} \leq k^n$$

(sin perder generalidad, $R = \tilde{R}$ ya era maximal).

Para construir $R^!$ (y $A^!$) usamos los isomorfismos:

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathcal{P}^{\text{op}})^2 & \longleftrightarrow & W \otimes W & \longleftrightarrow & V_0^* \otimes V_0^* & \longleftrightarrow & (V \otimes V)_0^* \\ & & \underline{R}^! & & \underline{R}^! & & \underline{R}^\perp \\ \rho' := \sum_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} \lambda_\gamma \gamma^{\text{op}} & \longmapsto & \sum_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} \lambda_\gamma \alpha_\gamma^{\text{op}} \otimes \beta_\gamma^{\text{op}} & \longmapsto & \sum_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} \lambda_\gamma \hat{\alpha}_\gamma \otimes \hat{\beta}_\gamma & \longmapsto & \psi \left(\sum_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} \lambda_\gamma \hat{\alpha}_\gamma \otimes \hat{\beta}_\gamma \right) \end{array}$$

donde $\gamma = \beta_\gamma \alpha_\gamma = (x \xrightarrow{\alpha_\gamma} \cdot \xrightarrow{\beta_\gamma} y)$, $\gamma^{\text{op}} = \alpha_\gamma^{\text{op}} \beta_\gamma^{\text{op}} = (y \xrightarrow{\beta_\gamma^{\text{op}}} \cdot \xrightarrow{\alpha_\gamma^{\text{op}}} x)$.
Luego,

$$\begin{aligned} \rho' \in e_x R^! e_y & \iff \sum_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} \lambda_\gamma \alpha_\gamma^{\text{op}} \otimes \beta_\gamma^{\text{op}} \in e_x \underline{R}^! e_y \\ & \iff \sum_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} \lambda_\gamma \hat{\alpha}_\gamma \otimes \hat{\beta}_\gamma \in e_x \underline{R}^! e_y \\ & \iff \varphi := \sum_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} \lambda_\gamma \psi(\hat{\alpha}_\gamma \otimes \hat{\beta}_\gamma) \in e_x \underline{R}^\perp e_y \\ & \iff \begin{cases} \varphi = e_x \varphi e_y \\ \varphi(\rho) = 0, \quad \forall \rho \in R \\ \text{(Si } \rho \in e_w R e_z, \text{ entonces} \\ \varphi(\rho) = (e_x \varphi e_y)(e_w \rho e_z) = e_x \varphi(e_y e_w \rho e_z) e_z = 0 \\ \text{ si } w \neq y \text{ ó } z \neq x) \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} \varphi = e_x \varphi e_y \\ \varphi(\rho) = 0, \quad \forall \rho \in e_y R e_x. \end{cases} \end{aligned}$$

Para entender bien $\varphi(\rho)$, estudiemos, dados dos caminos $\beta\alpha$ y $\delta\gamma$ orien-

tados de longitud dos de x en y , el símbolo:

$$\begin{aligned}\Delta_{\beta\alpha,\delta\gamma} &:= \psi(\hat{\alpha} \otimes \hat{\beta})[\delta \otimes \gamma] \in S \\ &= \hat{\alpha}(\hat{\beta}(\delta)\gamma) \\ &= \hat{\alpha}(e_{s(\beta)}\gamma) \text{ si } \beta = \delta, 0 \text{ en otro caso;} \\ &= \hat{\alpha}(\gamma) \\ &= e_{s(\alpha)} \text{ si } \gamma = \alpha, 0 \text{ en otro caso;}\end{aligned}$$

Luego,

$$\Delta_{\beta\alpha,\delta\gamma} = \begin{cases} 0, & \text{si } \beta\alpha \neq \delta\gamma \\ e_x, & \text{si } \beta\alpha = \delta\gamma. \end{cases}$$

Entonces, para $\varphi = e_x \varphi e_y = \psi(\sum \lambda_\gamma \hat{\alpha}_\gamma \otimes \hat{\beta}_\gamma)$, si $\rho \in e_y R e_x$ y $\rho = \sum_{\delta \in \Gamma_{x,y}} \mu_\delta \beta_\delta \alpha_\delta$,

con cada $\delta = (x \xrightarrow{\alpha_\delta} \cdot \xrightarrow{\beta_\delta} y)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\varphi(\rho) = 0 \iff 0 &= \sum_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} \lambda_\gamma \psi(\hat{\alpha}_\gamma \otimes \hat{\beta}_\gamma) \left[\sum_{\delta \in \Gamma_{x,y}} \mu_\delta \beta_\delta \otimes \alpha_\delta \right] \\ &= \sum_{\gamma, \delta \in \Gamma_{x,y}} \lambda_\gamma \mu_\delta \psi(\hat{\alpha}_\gamma \otimes \hat{\beta}_\gamma) [\beta_\delta \otimes \alpha_\delta] \\ &= \sum_{\gamma, \delta \in \Gamma_{x,y}} \lambda_\gamma \mu_\delta \Delta_{\gamma,\delta} \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} \lambda_\gamma \mu_\gamma e_x.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\varphi(\rho) = 0 &\iff \sum_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} \lambda_\gamma \mu_\gamma = 0, \text{ para toda } \sum_{\delta \in \Gamma_{x,y}} \mu_\delta \beta_\delta \alpha_\delta \in e_y R e_x \\ &\iff \lambda \in U_{x,y}^\perp.\end{aligned}$$

Así,

$$e_x R^\perp e_y = \left\{ \sum_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} \lambda_\gamma \gamma^{\text{op}} \mid \lambda \in U_{x,y}^\perp \right\}.$$

Entonces,

$$e_y R^{\perp\perp} e_x = \left\{ \sum_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} \lambda'_\gamma \gamma \mid \lambda' \in (U_{x,y}^\perp)^\perp = U_{x,y} \right\} = e_y R e_x.$$

Esto muestra que $(A^\perp)^\perp = A$. □

Afirmación 6.49. Sean kQ , $S = \bigoplus_{x \in Q_0} k e_x$, H un \underline{S} - \underline{S} -bimódulo. Entonces, existe un morfismo lineal $\psi: H \otimes_S H^* \rightarrow \text{Hom}_S(H_S, H_S)$ de S - S -bimódulos que es inyectivo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\widehat{\psi}: H \times H^* \rightarrow \text{Hom}_S(H_S, H_S)$ tal que $\widehat{\psi}(h, u)(v) = hu(v)$, para $(h, u) \in H \times H^*$. Claramente, $\widehat{\psi}(h, u)$ es un morfismo de S -módulos derechos. Probemos que $\widehat{\psi}$ es S -balanceada:

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}[(h_1 + h_2, u_1 + u_2)](v) &= (h_1 + h_2)[(u_1 + u_2)(v)] \\ &= (h_1 + h_2)[u_1(v) + u_2(v)] \\ &= h_1u_1(v) + h_1u_2(v) + h_2u_1(v) + h_2u_2(v) \\ &= \sum_{i,j=1,2} \widehat{\psi}[(h_i, u_j)](v), \end{aligned}$$

además, para cada $s \in S$:

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}[(h \cdot s, u)](v) &= (h \cdot s)u(v) = h(su(v)) = h(s \cdot u(v)) \\ &= h(s \cdot u)(v) = \widehat{\psi}[(h, s \cdot u)](v). \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe el morfismo lineal $\psi: H \otimes_S H^* \rightarrow \text{Hom}_S(H, H)$ tal que, para cada generador $h \otimes u$ de $H \otimes_S H^*$, se tiene $\psi[h \otimes u](v) = hu(v)$, para cada $v \in H$. Antes de probar que ψ es un monomorfismo, recordemos primero que: Existe una base dual para el S -módulo derecho H , $\{(\gamma, \hat{\gamma})\}_{\gamma \in T}$, donde $T = \bigcup_{x,y} T_{x,y}$ y $T_{x,y}$ es base de $e_x H e_y$. Sea $z \in H \otimes_S H^*$, $z = \sum_i h_i \otimes u_i$, con $h_i = \sum_{\gamma \in T} \gamma \hat{\gamma}(h_i)$. Como $\hat{\gamma}(h_i) \in S$, se tiene que

$$z = \sum_i \sum_{\gamma \in T} \gamma \otimes \hat{\gamma}(h_i) u_i = \sum_{\gamma \in T} \gamma \otimes u_\gamma,$$

con $u_\gamma = \sum_i \hat{\gamma}(h_i) u_i \in H^*$. Si $\psi(z) = 0$, entonces para cada $v \in H$,

$$0 = \psi(z)(v) = \psi\left(\sum_{\gamma \in T} \gamma \otimes u_\gamma\right)(v) = \sum_{\gamma \in T} \psi(\gamma \otimes u_\gamma)(v) = \sum_{\gamma \in T} \gamma u_\gamma(v).$$

En particular, para cada camino trivial e_x y $v \in H e_x$, tenemos:

$$0 = \sum_{\gamma \in T} \gamma u_\gamma(v) = \sum_{\gamma \in T} \gamma u_\gamma(v) e_x,$$

porque $u_\gamma(v) = u_\gamma(v e_x) = u_\gamma(v) e_x$, ya que cada e_x es idempotente. Por otro lado, $u_\gamma(v) e_x$ está en $S e_x = \left(\bigoplus_{y \in Q_0} k e_y \right) e_x = k e_x$. Por lo tanto, existe $c_x^\gamma \in k$ tal que $u_\gamma(v) e_x = c_x^\gamma e_x = e_x c_x^\gamma$. Luego,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\gamma \in T} \gamma e_x c_x^\gamma = \sum_{\gamma: x \rightarrow w} \gamma c_x^\gamma \\ &= \sum_{\gamma \in T_{w,x}} e_w \gamma c_x^\gamma = \sum_{\gamma \in T_{w,x}} \gamma c_x^\gamma, \end{aligned}$$

es un elemento de $e_w H e_x$. Por la independencia lineal, cada $c_x^\gamma = 0$, luego, $u_\gamma(v) = u_\gamma(v)e_x = 0$. Luego, $u_\gamma(H e_x) = 0$, para todo $x \in Q_0$. Así que $u_\gamma = 0$, lo cual nos dice que $z = 0$. \square

Observación 6.50. Sea H un \underline{S} - \underline{S} -bimódulo con $\dim_k e_x H$ ó $\dim_k H e_y$ finitas. Entonces, $\dim e_x H e_y$ es finita, porque $e_x H e_y$ es un subespacio vectorial de $e_x H = \bigoplus_{y \in Q_0} e_x H e_y$ y también de $H e_y = \bigoplus_{x \in Q_0} e_x H e_y$.

Esto nos dice también que dado x existe un número finito de vértices y tales que $e_x H e_y \neq 0$; y que dada y existe un número finito de vértices x tales que $e_x H e_y \neq 0$.

Notemos que $\{e_x \gamma \mid \gamma \in T \text{ y } e_x \gamma \neq 0\}$ es una base para el espacio $e_x H$ de dimensión finita. Luego, el número de básicas γ tales que $e_x \gamma$ es distinto de cero es finito. Si $e_x \gamma \neq 0$, con $\gamma \in e_x H e_z$, $\hat{\gamma} \in e_z H^* e_x$. Luego, $\hat{\gamma} e_y = 0$, a menos que $z = y$. Así,

$$\sum_{\gamma \in T} e_x \gamma \otimes \hat{\gamma} e_y = \sum_{\gamma \in T_{y,x}} e_x \gamma \otimes \hat{\gamma} e_y$$

es una suma finita.

Proposición 6.51. En el contexto de la observación anterior, sean $(\gamma, \hat{\gamma})_{\gamma \in T}$ y $(\delta, \hat{\delta})_{\delta \in T'}$ un par de bases duales de H , obtenidas de la misma forma, como en la proposición (??) a partir de k -bases de $e_x H e_y$. Entonces, para cada x, y en P ,

$$\sum_{\gamma \in T} e_x \gamma \otimes \hat{\gamma} e_y = \sum_{\delta \in T'} e_x \delta \otimes \hat{\delta} e_y.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $x \neq y$, ambas sumas son cero. Consideremos el caso $x = y$. Sean $\rho := \sum_{\gamma} e_x \gamma \otimes \hat{\gamma} e_x$ y $\sigma := \sum_{\delta} e_x \delta \otimes \hat{\delta} e_x$, ambas sumas están en $H \otimes_s H^*$. Sea ψ el morfismo inyectivo definido en (??). Si $h \in T$, entonces,

$$\begin{aligned} \psi(\rho)(h) &= \sum_{\gamma} \psi(e_x \gamma \otimes \hat{\gamma} e_x)(h) \\ &= \sum_{e_x \gamma \neq 0} \gamma \cdot (\hat{\gamma}(h)) = \begin{cases} h, & \text{si } \gamma = h, \\ 0, & \text{si } \gamma \neq h. \end{cases} \end{aligned}$$

Tenemos que $H = e_x H \oplus \bigoplus_{z \neq x} e_z H$. Entonces, $\psi(\rho)$ es la identidad en $e_x H$ y es cero en $\bigoplus_{z \neq x} e_z H$. También pasa esto mismo para $\psi(\sigma)$. Como ψ es inyectivo, $\sigma = \rho$. \square

Proposición 6.52. *Sea Q un carcaj localmente finito. Sean S y V como en la proposición (??) y W como en la definición (??). Si $\gamma = \beta\alpha$ es un camino de longitud dos en Q , entonces $\gamma^{\text{op}} = \alpha^{\text{op}}\beta^{\text{op}}$ es un camino de longitud dos en Q^{op} . Luego, podemos pensar que $\gamma \otimes \gamma^{\text{op}}$ está en $(V \otimes_S V) \otimes_S (W \otimes_S W)$. Sea T el conjunto de caminos de Q de longitud dos. Entonces, para cada $x \in Q_0$, se tiene que*

$$\sum_{\gamma \in T} \gamma \otimes \gamma^{\text{op}} e_x \in R \otimes_S (W \otimes_S W) \oplus (V \otimes_S V) \otimes_S R^\perp.$$

DEMOSTRACIÓN. $V \otimes_S V$ es un \underline{S} - \underline{S} -bimódulo. La colección de caminos de x en y en Q que tienen longitud dos provee de una k -base para cada $e_x V \otimes_S V e_y$, por la demostración de la proposición (??). A partir de ésta podemos completar a una base dual $(\gamma, \hat{\gamma})_{\gamma \in T}$ de $V \otimes_S V$.

Construyamos otra base para el espacio: Sea $T''_{x,y}$ una k -base del espacio $e_x R e_y$ para cada x, y en Q_0 , $R \subseteq V \otimes_S V$. Esta base se puede completar a una base $T'_{x,y}$ de $e_x V \otimes_S V e_y$. De nuevo, por (??), podemos construir una base dual $(\delta, \hat{\delta})$, con $\delta \in T' := \bigcup_{x,y \in Q_0} T'_{x,y}$. Sea $T'' := \bigcup_{x,y \in Q_0} T''_{x,y}$. Luego, como Q es localmente finito, podemos aplicar la proposición (??) a $H = V \otimes_S V$ y, para todo $x \in Q_0$, se tiene que:

$$\sum_{\gamma \in T} (\gamma \otimes \hat{\gamma}) e_x = \sum_{\delta \in T'} (\delta \otimes \hat{\delta}) e_x = \sum_{\delta \in T''} (\delta \otimes \hat{\delta}) e_x + \sum_{\delta \in T' \setminus T''} (\delta \otimes \hat{\delta}) e_x$$

está en $R \otimes_S W \otimes_S W + V \otimes_S V \otimes_S R^\perp$. Luego, hemos probado que $\sum_{\gamma \in T} (\gamma \otimes \hat{\gamma}) e_x$ está en $R \otimes_S (V \otimes_S V)_0^* + V \otimes_S V \otimes_S R^\perp$. Pero la suma $\sum_{\gamma \in T} (\gamma \otimes \hat{\gamma}) e_x$ está en $V \otimes_S V \otimes_S (V \otimes_S V)_0^*$. Además, tenemos la cadena de isomorfismos:

$$V \otimes_S V \otimes_S (V \otimes_S V)_0^* \xrightarrow{\sim} V \otimes_S V \otimes_S V_0^* \otimes_S V_0^* \xrightarrow{\sim} V \otimes_S V \otimes_S (W \otimes_S W)$$

veamos que $\gamma \otimes \hat{\gamma}$ es enviado a $\gamma \otimes \gamma^{\text{op}}$. Sea ψ el isomorfismo de $V_0^* \otimes_S V_0^*$ en $(V \otimes_S V)_0^*$ definido en (??). Sea x el vértice donde inicia la flecha α y u donde inicia la flecha β . Entonces, si σ, τ son flechas de Q ,

$$\psi(\hat{\alpha} \otimes \hat{\beta})(\sigma \otimes \tau) = \hat{\alpha}(\hat{\beta}(\sigma)\tau) = \begin{cases} 0, & \text{si } \sigma \neq \beta, \\ \hat{\alpha}(e_u \tau), & \text{si } \sigma = \beta. \end{cases}$$

Pero,

$$\hat{\alpha}(e_u\tau) = \begin{cases} 0, & \text{si } \tau \neq \alpha, \\ e_x, & \text{si } \tau = \alpha. \end{cases}$$

Luego, $\psi(\hat{\alpha} \otimes \hat{\beta})(\sigma \otimes \tau)$ es distinto de cero si y sólo si $\alpha \otimes \beta = \sigma \otimes \tau$, y, en este caso, $\psi(\hat{\alpha} \otimes \hat{\beta})(\sigma \otimes \tau) = e_x$. Luego, $\psi(\gamma) = \hat{\gamma}$ para todo $\gamma \in T$. Por lo tanto, $\gamma \otimes \hat{\gamma}$ es enviado a $\gamma \otimes \gamma^{\text{op}}$ y, de hecho, $\sum_{\gamma \in T} (\gamma \otimes \hat{\gamma})e_x$ es enviado a

$$\sum_{\gamma \in T} (\gamma \otimes \gamma^{\text{op}})e_x. \quad \square$$

Observación 6.53. Para cada $M \in A^!-\text{Mod}$ y $m \in M$, tenemos un morfismo

$$\begin{aligned} \varphi_m: (V \otimes_s V) \otimes_s (W \otimes_s W) &\longrightarrow A \otimes_s M \\ \sum c_u \lambda_u \otimes \sum d_u \mu_u &\mapsto \eta_A(\sum c_u \lambda_u) \otimes \eta_{A^!}(\sum d_u \mu_u) \cdot m. \end{aligned}$$

donde $\eta_A: kQ \rightarrow kQ/I$ y $\eta_{A^!}: kQ^{\text{op}} \rightarrow kQ^{\text{op}}/I^!$ son las proyecciones canónicas.

DEMOSTRACIÓN. Sea $m \in M$. Definimos

$$\begin{aligned} \varphi: (V \otimes_s V) \times (W \otimes_s W) &\longrightarrow A \otimes_s M \\ (\sum c_u \lambda_u, \sum d_u \mu_u) &\mapsto \eta_A(\sum c_u \lambda_u) \otimes \eta_{A^!}(\sum d_u \mu_u) \cdot m, \end{aligned}$$

para $\sum c_u \lambda_u$ una combinación lineal de caminos de longitud 2, y $\sum d_u \mu_u$ una combinación lineal de caminos de longitud 2 en el álgebra opuesta. El morfismo φ es claramente bilineal y también S -balanceado. Luego, existe un morfismo φ_m . \square

Observación 6.54. En el contexto de la observación anterior, si T es el conjunto de caminos de Q de longitud dos, tenemos para cada $m \in e_x M$,

$$\varphi_m\left(\sum_{\gamma \in T} \gamma \otimes \gamma^{\text{op}} e_x\right) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición (??), tenemos que $\sum_{\gamma} \gamma \otimes \gamma^{\text{op}} = \sum r_i \otimes t_i + \sum u_j \otimes r'_j$, con $r_i \in R$, $t_i \in W \otimes W$, $r'_j \in R^!$, $u_j \in V \otimes V$. Luego,

$$\begin{aligned} \varphi_m\left(\sum_{\gamma \in T} \gamma \otimes \gamma^{\text{op}}\right) &= \varphi_m\left(\sum r_i \otimes t_i + \sum u_j \otimes r'_j\right) \\ &= \sum \eta_A(r_i) \otimes \eta_{A^!}(t_i) \cdot m + \sum \eta_A(u_j) \otimes \eta_{A^!}(r'_j) m \\ &= 0, \end{aligned}$$

porque $\eta_A(r_i) = 0$ y también $\eta_{A^!}(r'_j) = 0$. \square

6.4. Peso, $A\text{-Mod}^+$ y resoluciones proyectivas

Definición 6.55. Sea Q un carcaj. El carcaj Q' tiene, por definición, vértices $Q'_0 = Q_0$ y, para cada flecha $i \xrightarrow{\alpha} j$ en Q_1 , tenemos en Q' exactamente dos flechas: $i \xrightarrow{\alpha} j$ y $j \xrightarrow{\alpha^{-1}} i$. Por definición, un paseo de longitud $n \geq 1$ de Q del vértice i al vértice j es un camino dirigido $\alpha_n^{\tau_n} \dots \alpha_1^{\tau_1}$ de i en j de Q' , con $\tau_t \in \{1, -1\}$ y α_t en Q_1 .

Definición 6.56. Sea Q un carcaj y $\mathcal{W} = \mathcal{W}(Q)$ el conjunto de paseos de Q . Definimos la función peso de Q , $p = p_Q: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{Z}$ como sigue:

1. Si $\alpha \in Q_1$, entonces el peso de la flecha α es $p(\alpha) = 1$ y $p(\alpha^{-1}) = -1$;
2. Si $w = \alpha_n^{\tau_n} \dots \alpha_1^{\tau_1}$ es un paseo de longitud $n \geq 1$ (con $\tau_t \in \{1, -1\}$ y cada α_t flecha en Q_1), entonces el peso del paseo w es $p(w) = \tau_n + \dots + \tau_1$.

Observación 6.57. Si w y w' son paseos tales que ww' es paseo, entonces

$$p(ww') = p(w) + p(w').$$

Observación 6.58. Sea Q un carcaj. Entonces los paseos de x en x tienen peso cero, para todo $x \in Q_0$ si y sólo si los paseos de x a y tienen todos el mismo peso, para cada y en Q_0 .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que hay dos paseos w_1 y w_2 de x a y , con $w_1 = \alpha_n^{\tau_n} \dots \alpha_1^{\tau_1}$ y $w_2 = \beta_m^{\sigma_m} \dots \beta_1^{\sigma_1}$. Entonces $w = \beta_1^{-\sigma_1} \dots \beta_m^{-\sigma_m} \alpha_n^{\tau_n} \dots \alpha_1^{\tau_1}$ es un paseo de x a x , por lo tanto, debe tener peso cero. Luego,

$$\begin{aligned} 0 &= p(\beta_1^{-\sigma_1} \dots \alpha_1^{\tau_1}) \\ &= -\sigma_1 + \dots + (-\sigma_m) + \tau_n + \dots + \tau_1 \\ &= -p(w_2) + p(w_1). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $p(w_1) = p(w_2)$. □

Definición 6.59. Sea Q un carcaj conexo (esto es, dados dos vértices $x, y \in Q_0$, siempre hay un paseo de x a y). Supongamos que los paseos de x en x tienen peso cero. Sea $x_0 \in Q_0$ fijo. Dado $x \in Q_0$, siempre hay un paseo de x_0 a x , por conexidad. Decimos que el peso del vértice x es el peso de cualquier paseo de x_0 a x . Lo denotaremos por $p(x)$.

Observación 6.60. Si Q es un carcaj finito y \tilde{Q} es una componente conexa de $Q^{\mathbb{Z}}$, \tilde{Q} satisface la condición de que los paseos de x en x tienen peso cero y, por lo tanto, tiene sentido hablar del peso de cada vértice $(x, i) \in \tilde{Q}$. Entonces, el conjunto

$$\tilde{Q}_0(n) := \{(x, i) \in \tilde{Q}_0 \mid p(x, i) = n\}$$

es finito, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea (x_0, i_0) el vértice de \tilde{Q}_0 que hemos fijado para definir el peso en cada vértice. Sea $(x, i) \in \tilde{Q}_0(n)$. Luego, hay un paseo $w = \alpha_n^{\tau_n} \cdots \alpha_1^{\tau_1}$ de (x_0, i_0) en (x, i) con $n = p(w) = \tau_n + \cdots + \tau_1$. Sabemos que (x_0, i_0) es el inicio de la flecha $\alpha_1^{\tau_1}$ en \tilde{Q}_1 . Sea (x_j, i_j) el término de la flecha $\alpha_j^{\tau_j}$ en \tilde{Q}_1 , para $j \in \{1, \dots, n\}$. Así, $(x_n, i_n) = (x, i)$. Notemos que $i_{j+1} = i_j + \tau_j$ para $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Luego,

$$\begin{aligned} i &= i_{n-1} + \tau_n = i_{n-2} + \tau_{n-1} + \tau_n = \cdots \\ &= i_0 + \tau_1 + \cdots + \tau_n. \end{aligned}$$

Esto es, $n = p(x, i) = i - i_0$ ó, equivalentemente, $i = n + i_0$. Se sigue que $\tilde{Q}_0(n) \subseteq Q_0 \times \{n + i_0\}$ es finito. \square

Definición 6.61. 1. Un carcaj Q es propio si y sólo si satisface que

- (a) Q es localmente finito,
- (b) Q es conexo,
- (c) los paseos de x a x tienen peso cero, para todo $x \in Q_0$, y
- (d) si $(Q_0)_r$ denota el conjunto de vértices cuyo peso es r , entonces $(Q_0)_r$ es finito para todo $r \in \mathbb{Z}$.

2. Una k -álgebra A es propia si y sólo si $A = kQ/I$ es una k -álgebra con Q propio e I admisible.

Observación 6.62. Se sabe que si $\{Q_i\}_{i \in I}$ son las componentes conexas de Q , $A = kQ/I$, $A_i = kQ_i/I_i$, donde I_i es el ideal de kQ restringido a kQ_i , entonces $A\text{-Mod} \cong \coprod_{i \in I} A_i\text{-Mod}$. Luego, la observación (??) nos dice que para entender $kQ^{\mathbb{Z}}/I^{\mathbb{Z}}$ con Q finito, basta estudiar las álgebras propias.

En adelante trabajaremos únicamente con álgebras propias.

Observación 6.63. Si A es un álgebra cuadrática propia, entonces su dual cuadrática $A^!$ (definición (??)) también es un álgebra propia.

Definición 6.64. Dada la categoría $A\text{-Mod}$ de A -módulos izquierdos, denotamos por $A\text{-Mod}^-$ la subcategoría plena de $A\text{-Mod}$ de los módulos M tales que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que, para cada $x \in Q_0$ con $p(x) > n$, se tiene $e_x M = 0$. Análogamente, $A\text{-Mod}^+$ es la subcategoría plena de $A\text{-Mod}$ tal que para cada uno de sus módulos M existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que, para cada $x \in Q_0$ con $p(x) < n$, se tiene $e_x M = 0$.

Ejemplo 6.65. Para todo e_x camino trivial, Ae_x está en $A\text{-Mod}^+$. En efecto, sea $P := Ae_x$ y $y \in Q_0$ tal que $e_y P = e_y Ae_x \neq 0$ y $y \neq x$, luego, como $A = kQ/I$, existe un camino no trivial δ de Q que inicia en x y termina en y . Entonces, y tiene mayor peso que x . Tenemos que los elementos de $e_y P = e_y Ae_x$ tienen peso mayor o igual al de x . Luego, $n = p(x)$ funciona en la definición.

Proposición 6.66. $A\text{-Mod}^+$ es una subcategoría abeliana de $A\text{-Mod}$, cerrada bajo submódulos, cocientes y extensiones, es decir:

- (a) Si $g: N \rightarrow M$ es monomorfismo en $A\text{-Mod}$ y M está en $A\text{-Mod}^+$, entonces N está en $A\text{-Mod}^+$.
- (b) Si $f: M \rightarrow N$ es epimorfismo en $A\text{-Mod}$ y M está en $A\text{-Mod}^+$, entonces N está en $A\text{-Mod}^+$.
- (c) Si la sucesión $0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$ es exacta y M, N están en $A\text{-Mod}^+$, entonces E está en $A\text{-Mod}^+$.

Definición 6.67. $A\text{-Mod}^b := A\text{-Mod}^+ \cap A\text{-Mod}^-$, y se llama la categoría acotada de A -módulos.

Notemos también que $A\text{-Mod}^b$ y $A\text{-Mod}^-$ tienen las propiedades antes enunciadas para $A\text{-Mod}^+$.

Definición 6.68. Sea $M \in A\text{-Mod}$. El radical del módulo M es la intersección de sus submódulos propios maximales y, si estos no existen, entonces es M . Denotamos el radical de M por $\text{rad}M$.

Definición 6.69. Sean M un A -módulo y P un A -módulo proyectivo. Entonces $f: P \rightarrow M$ es una cubierta proyectiva si f es un epimorfismo y $\ker f \subseteq \text{rad}P$.

Probaremos que en $A\text{-Mod}^+$ existen las cubiertas proyectivas.

Observación 6.70. Sean $M \in A\text{-Mod}$ y $m \in M$. Entonces, $m \in \text{rad}M$ si y sólo si para todo morfismo $\varphi: M \rightarrow S$ (donde S es un A -módulo simple, es decir, $0 \neq S$ y $0, S$ son sus únicos submódulos) se tiene $\varphi(m) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $m \in \text{rad}M$ y $\varphi: M \rightarrow S$, para S simple. Si $\varphi \neq 0$, entonces φ es un epimorfismo, luego $M/\ker \varphi \cong S$ simple. Por el teorema de la correspondencia, $\ker \varphi$ es un A -submódulo maximal de M . Por lo tanto, $m \in \ker \varphi$ y $\varphi(m) = 0$. Para el recíproco, sea $B \subsetneq M$ maximal (si no existe entonces $\text{rad}M = M$, lo cual implica que $m \in \text{rad}M$ y terminamos). Entonces en la proyección natural $\varphi: B \rightarrow M/B$, se tiene que M/B es simple. Pero $\varphi(m) = 0$, entonces $m \in B$, para cada B maximal. Por lo tanto, $m \in \text{rad}M$. \square

Corolario 6.71. 1. Si $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ en $A\text{-Mod}$, entonces

$$\text{rad}M = \bigoplus_{i \in I} \text{rad}M_i.$$

2. Si $f: M \rightarrow N$ es un morfismo de A -módulos, entonces

$$f(\text{rad}M) \subseteq \text{rad}N.$$

3. Si $f: M \rightarrow N$ es un epimorfismo de A -módulos y $\ker f \subseteq \text{rad}M$, entonces

$$f(\text{rad}M) = \text{rad}N.$$

En particular, si $L \subseteq \text{rad}M$, $\text{rad}(M/L) = \text{rad}M/L$.

DEMOSTRACIÓN. (1) y (2) se derivan fácilmente de la observación (??). Para (3), la hipótesis nos dice que para cada A -módulo simple S , hay una biyección $\text{Hom}_A(M, S) \rightarrow \text{Hom}_A(N, S)$ que envía cada h en \bar{h} tal que conmuta

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & S \\ f \downarrow & \nearrow \bar{h} & \\ N & & \end{array} .$$

De allí se sigue el resultado. \square

Proposición 6.72. Si M es un A -módulo y N es un submódulo tal que M/N es semisimple (es decir, es suma de simples), entonces $\text{rad}M \subseteq N$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \text{rad}M$ y \underline{x} su clase en M/N . Si $\underline{x} \neq 0$ (es decir, $x \notin N$), entonces existe $g_i: M/N \rightarrow S_i$ tal que $g_i(\underline{x}) \neq 0$. Por lo tanto, si $\pi: M \rightarrow M/N$ es la proyección natural, se tiene $g_i\pi(x) \neq 0$. Luego, x no pertenece a $\text{rad}M$, lo cual es una contradicción. \square

Observación 6.73. Si S es un A -módulo simple, entonces $\alpha S = 0$ para cada flecha α de Q .

DEMOSTRACIÓN. Sea $i \xrightarrow{\alpha} j$ una flecha, entonces $A\alpha S$ es un submódulo de S . Por lo tanto, $A\alpha S = 0$ ó $A\alpha S = S$. En el primer caso, $e_j\alpha S = \alpha S = 0$ y se prueba lo afirmado. Veamos que el segundo caso no ocurre. Por contradicción, supongamos que $A\alpha S = S$, entonces existe $s \in S$ tal que $\alpha s \neq 0$, entonces $\alpha s = \sum_t e_i\gamma_t\alpha s_t$ con $e_i s_t \in S = A\alpha S$. Por lo tanto, $e_i s_t = \sum_t e_i\gamma_t\alpha s_t$, con cada $e_i\gamma_t\alpha$ camino de i en i , lo cual es una contradicción. \square

Observación 6.74. Los \underline{A} -módulos simples son (hasta isomorfismo) las representaciones S_x , con $x \in Q_0$, definidas por: $[S_x]_x = ke_x$ y $[S_x]_y = 0$ para todo $y \neq x$; $[S_x]_\alpha = 0$ para toda $\alpha \in Q_1$. Además, $Ae_x/\text{rad}(Ae_x) \cong S_x$ para todo $x \in Q_0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea M un \underline{A} -módulo simple. Luego, existe $x \in Q_0$ tal que $e_x M \neq 0$. Sea $0 \neq m \in e_x M$ y consideremos el morfismo $\varphi: S_x \rightarrow M$ determinado por $\varphi(e_x) = m$. Veamos que φ es, en efecto, un morfismo. Sea $\alpha: y \rightarrow z \in Q_1$. Si $y \neq x$, $[S_x]_y = 0$ y $M_\alpha\varphi_y = 0 = \varphi_x S_\alpha$. Por la observación (??), $M_\alpha\varphi_x = 0 = \varphi_z S_\alpha$. Como φ es inyectivo y M es simple, $S_x \cong \varphi(S_x) = M$.

Para la segunda afirmación notemos que, si $x \in Q_0$,

$$N_x := \bigoplus_{p(y) > p(x)} e_y Ae_x \subseteq Ae_x$$

es un submódulo tal que $Ae_x/N_x \cong S_x$. Luego, N_x es el único submódulo maximal de Ae_x y $N_x = \text{rad}(Ae_x)$. \square

En carcajes infinitos puede ocurrir que $\text{rad}M = M$. Por ejemplo, si el carcaj Q es:

$$Q = \cdots \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdots,$$

y el módulo M tiene la siguiente representación:

$$M = \cdots \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k \cdots,$$

entonces $\text{rad}M = M$. Sin embargo, esto no ocurre en $A\text{-Mod}^+$.

Afirmación 6.75. Si $M \neq 0$ está en $A\text{-Mod}^+$, entonces el radical de M está contenido propiamente en M .

DEMOSTRACIÓN. Existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que para todo y con $p(y) < i$, se tiene $e_y M = 0$. Luego, $M = \bigoplus_{p(x) \geq i} e_x M$ es distinto de cero. Probemos que $N := \bigoplus_{p(z) \geq i+1} e_z M$ es un submódulo de M . Si $m \in e_z M$ y tenemos un camino dirigido $\gamma: z \rightarrow w$ de Q , entonces $\gamma m \in e_w M$ y $p(z) \geq i+1$, lo cual implica que $p(w) \geq i+1$. Notemos que el módulo cociente $\bar{M} := M/N$ es isomorfo al módulo semisimple $\bigoplus_{p(x)=i} e_x \bar{M}$. Por lo tanto, $\text{rad} M \subseteq N \subsetneq M$. \square

Proposición 6.76 (Lema de Nakayama). *Sea $M \in A\text{-Mod}^+$. Si L un submódulo de M es tal que $L + \text{rad} M = M$, entonces $L = M$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\eta: M \rightarrow M/L$ la proyección canónica, por el corolario (??) inciso 2, tenemos que $\eta(\text{rad} M) \subseteq \text{rad}(M/L)$. Sea $m \in M$, entonces $m = l + x$, con $l \in L$ y $x \in \text{rad} M$. Entonces $\eta(m) = \eta(x)$, porque $\eta(l) = 0$. Luego, $\eta(m) \in \eta(\text{rad} M)$, esto es, $\text{Im} \eta = M/L \subseteq \eta(\text{rad} M) \subseteq \text{rad}(M/L)$. Entonces $M/L = \text{rad}(M/L)$. Como $M \in A\text{-Mod}^+$, también $M/L \in A\text{-Mod}^+$, luego $M/L = 0$, lo cual implica $L = M$. \square

Definición 6.77. *Sea M un A -módulo. El soclo de M es el submódulo de M formado por la suma de los simples de M . Lo denotamos por*

$$\text{soc} M = \sum_{\substack{S \leq M \\ S \text{ simple}}} S.$$

Observación 6.78. *Sea M un A -módulo. Un elemento $m \in M$ está en el soclo de M si y sólo si $\alpha m = 0$ para toda α flecha del carcaj Q .*

DEMOSTRACIÓN. En la observación (??) probamos que si S es un submódulo simple de M , entonces $\alpha S = 0$, para todo $\alpha \in Q_1$.

Para el recíproco, sea $m \in M$ tal que, para todo $\alpha \in Q_1$ se tiene $\alpha m = 0$. Supongamos $m = e_1 m + \cdots + e_l m$, con e_1, \dots, e_l distintos. Notemos que cada sumando de m tiene la misma propiedad de ser anulado por las flechas. En efecto, sea $\alpha \in Q_1$, entonces $\alpha e_i m = 0 m = 0$ si α no inicia en i , y si α inicia en i , entonces $\alpha e_i m = \alpha m = 0$. Luego, basta ver que cada $e_i m$ está en el soclo de M . Tenemos que $A e_i m = k e_i m$, el cual tiene dimensión uno como k -espacio vectorial y es un A -módulo simple, por lo tanto, $e_i m$ está en el soclo de M . \square

Lema 6.79. *Si $M \neq 0$ está en $A\text{-Mod}^+$, entonces $M/\text{rad}M$ es semisimple.*

DEMOSTRACIÓN. $M/\text{rad}M$ es semisimple si y sólo si $\text{soc}(M/\text{rad}M) = M/\text{rad}M$. Por la observación (??), esto equivale a que $\alpha(M/\text{rad}M) = 0$ para cada flecha α de Q . Sea α una tal flecha, veamos que $\alpha M \subseteq \text{rad}M$. Para ello basta ver que $\alpha M \subseteq N$, para cada submódulo maximal N de M . Pero si $N \leq M$ es maximal, M/N es simple y $\alpha(M/N) = 0$ por (??). Luego, $\alpha M \subseteq N$. \square

Proposición 6.80. *En $A\text{-Mod}^+$ existen las cubiertas proyectivas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $M \in A\text{-Mod}^+$ y $\pi: M \rightarrow M/\text{rad}M$ la proyección natural. Si S_x es la representación simple de A en el vértice x , por la observación (??) tenemos una cubierta proyectiva $Ae_x \rightarrow S_x$. Luego, existe una cubierta proyectiva $h: \coprod_{i \in I} Ae_i \rightarrow \coprod_{i \in I} S_i$, para cada A -módulo semisimple $\coprod_{i \in I} S_i$. Entonces existe η que hace conmutar:

$$\begin{array}{ccc}
 & \coprod_{i \in I} Ae_i & \\
 \eta \swarrow & & \downarrow h \\
 M & \xrightarrow{\pi} & M/\text{rad}M \cong \coprod_{i \in I} S_i
 \end{array}$$

Hay un tal isomorfismo por el lema (??). Se tiene que $M \cong \text{Im}\eta + \ker \pi = \text{Im}\eta + \text{rad}M$. Luego, por el Lema de Nakayama, $\text{Im}\eta = M$. Así que η es un epimorfismo. Además, $\ker \eta \subseteq \text{rad}(\coprod_{i \in I} Ae_i)$. Por lo tanto, η es cubierta proyectiva minimal de M y se tiene $\coprod_{i \in I} Ae_i \in A\text{-Mod}^+$. \square

Corolario 6.81. *Dado $M \in A\text{-Mod}^+$ podemos construir una resolución proyectiva de M .*

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{array}{ccccc}
 P_M^{-1} & & & P_M^0 & \xrightarrow{\eta_M} & M & \longrightarrow & 0. \\
 & \searrow & & \nearrow & & & & \\
 & & \ker \eta_M & & & & &
 \end{array}$$

Si $M \in A\text{-Mod}^+$, entonces el complejo:

$$\dot{R}_M : \cdots \longrightarrow P_M^{-2} \longrightarrow P_M^{-1} \longrightarrow P_M^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

es una resolución proyectiva de M . \square

6.5. $A\text{-Mod}^-$ y corresoluciones inyectivas

En adelante, cuando hablemos de producto tensorial sobre el campo k , para no complicar la notación, evitaremos escribir el subíndice k . Mantendremos nuestras hipótesis sobre Q y $A = kQ/I$ de la sección anterior. Estudiemos los kQ -módulos inyectivos.

Definición 6.82. Sea a un vértice de Q_0 fijo. Sea la k -representación ${}_aI$ definida por los espacios vectoriales ${}_aI_x = \bigoplus_{\rho \in \Gamma_{x,a}} k\rho$, donde $\Gamma_{x,a}$ es el conjunto de caminos dirigidos de Q de x en a , para cada $x \in Q_0$; y , para $\alpha: x \rightarrow y$ en Q_1 tenemos las transformaciones lineales: ${}_aI_\alpha: {}_aI_x = \bigoplus_{\rho \in \Gamma_{x,a}} k\rho \longrightarrow {}_aI_y =$

$\bigoplus_{\sigma \in \Gamma_{y,a}} k\sigma$, tales que

$${}_aI_\alpha(\rho) = \begin{cases} \sigma, & \text{si } \sigma\alpha = \rho, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Veremos más adelante que ${}_aI$ es inyectivo.

Proposición 6.83. Sean M una k -representación de Q y V un k -espacio vectorial. Para cada vértice a en Q_0 , existe un isomorfismo lineal:

$$\phi_M: \text{Hom}_{kQ}(M, {}_aI \otimes V) \longrightarrow \text{Hom}_k(M_a, V),$$

que es natural en M .

DEMOSTRACIÓN. Recordemos cuál es la estructura de kQ -módulo de ${}_aI \otimes V$. Dado $\alpha \in kQ$ su acción en un generador de ${}_aI \otimes V$ es

$$\alpha(\rho \otimes v) = \alpha\rho \otimes v.$$

Ahora veamos a ${}_aI \otimes V$ como k -representación. Entonces, si $x \in Q_0$,

$$({}_aI \otimes V)_x = e_x({}_aI \otimes V) = e_x({}_aI) \otimes V = {}_aI_x \otimes V = \bigoplus_{\rho \in \Gamma_{x,a}} k\rho \otimes V.$$

Luego, $({}_aI \otimes V)_a = ke_a \otimes V$, pues Q no tiene ciclos orientados, salvo el trivial. Sea $\rho = \alpha_n \cdots \alpha_1$ un camino dirigido de x en a . La transformación lineal

$$({}_aI \otimes V)_\rho: ({}_aI \otimes V)_x \rightarrow ({}_aI \otimes V)_a,$$

definida por $({}_aI \otimes V)_\rho = ({}_aI \otimes V)_{\alpha_n} \cdots ({}_aI \otimes V)_{\alpha_1}$ satisface:

$$({}_aI \otimes V)_\rho(\sigma \otimes v) = \begin{cases} e_a \otimes v, & \text{si } \sigma = \rho, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $h: M \rightarrow {}_aI \otimes V$ un morfismo de representaciones. Definimos $\phi_M(h)$ como la composición de los siguientes morfismos:

$$M_a \xrightarrow{h_a} ({}_aI \otimes V)_a = ke_a \otimes V \cong k \otimes V \cong V.$$

Supongamos que $\phi_M(h) = 0$, entonces el morfismo $h_a: M_a \rightarrow ke_a \otimes V$ es cero. Para algún otro vértice x tenemos:

$$h_x: M_x \longrightarrow ({}_aI \otimes V)_x = \bigoplus_{\rho \in \Gamma_{x,a}} k\rho \otimes V.$$

Si $h_x \neq 0$, hay al menos un camino no trivial ρ de x en a . Para cada $\rho \in \Gamma_{x,a}$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo (pues h es un morfismo de representaciones):

$$\begin{array}{ccc} M_a & \xrightarrow{h_a=0} & ke_a \otimes V \\ M_\rho \uparrow & & \uparrow ({}_aI \otimes V)_\rho \\ M_x & \xrightarrow{h_x} & \bigoplus_{\sigma \in \Gamma_{x,a}} k\sigma \otimes V. \end{array}$$

Sea $m \in M_x$ y supongamos que $h_x(m) = \sum_{\sigma \in \Gamma_{x,a}} \sigma \otimes v_\sigma$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= h_a M_\rho(m) = ({}_aI \otimes V)_\rho(h_x(m)) \\ &= ({}_aI \otimes V)_\rho(\sum \sigma \otimes v_\sigma) \\ &= e_a \otimes v_\rho. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $v_\rho = 0$, para cada ρ . Luego, $h_x = 0$, esto nos dice que $h = 0$ y que ϕ_M es un morfismo inyectivo.

Sea $h: M_a \rightarrow V$ una función lineal. Queremos encontrar un morfismo $g: M \rightarrow {}_aI \otimes V$ tal que $\phi_M(g) = h$. Definamos

$$\begin{aligned} g_a: M_a &\longrightarrow ({}_aI \otimes V)_a = ke_a \otimes V \\ m &\mapsto e_a \otimes h(m), \end{aligned}$$

y, para otros vértices $x \neq a$ en Q_0 ,

$$\begin{aligned} g_x: M_x &\longrightarrow ({}_aI \otimes V)_x = \bigoplus_{\sigma \in \Gamma_{x,a}} k\sigma \otimes V \\ m &\mapsto \sum_{\sigma} \sigma \otimes h(M_{\sigma}(m)). \end{aligned}$$

Luego, tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M_a & \xrightarrow{g_a} & ke_a \otimes V \\ M_{\rho} \uparrow & & \uparrow ({}_aI \otimes V)_{\rho} \\ M_x & \xrightarrow{g_x} & \bigoplus_{\sigma \in \Gamma_{x,a}} k\sigma \otimes V. \end{array}$$

Entonces, si $m \in M_x$,

$$g_a M_{\rho}(m) = e_a \otimes h(M_{\rho}(m)) = ({}_aI \otimes V)_{\rho} g_x(m).$$

Si $\alpha: x \rightarrow y$ es una flecha de Q , donde $a \notin \{x, y\}$, también conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M_y & \xrightarrow{g_y} & \bigoplus_{\sigma \in \Gamma_{y,a}} k\sigma \otimes V \\ M_{\alpha} \uparrow & & \uparrow ({}_aI \otimes V)_{\alpha} \\ M_x & \xrightarrow{g_x} & \bigoplus_{\rho \in \Gamma_{x,a}} k\rho \otimes V, \end{array}$$

porque, si $m \in M_x$, entonces:

$$\begin{aligned} g_y M_{\alpha}(m) &= \sum_{\sigma} \sigma \otimes h(\sigma \alpha m) \\ &= ({}_aI \otimes V)_{\alpha} (\sum_{\rho} \rho \otimes h(\rho m)) \\ &= ({}_aI \otimes V)_{\alpha} g_x(m). \end{aligned}$$

Ahora analicemos el caso de una flecha $\alpha: a \rightarrow y \neq a$ en Q : Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M_a & \xrightarrow{g_a} & ke_a \otimes V \\ M_{\alpha} \downarrow & & \downarrow ({}_aI \otimes V)_{\alpha} \\ M_y & \xrightarrow{g_y} & \bigoplus_{\sigma \in \Gamma_{y,a}} k\sigma \otimes V. \end{array}$$

Si hubiera un camino σ de y en a , entonces $\sigma\alpha$ sería un ciclo orientado de a en a , pero no hay tales caminos en Q , por lo tanto no existe tal sigma, es decir, $\bigoplus_{\sigma \in \Gamma_{y,a}} k\sigma \otimes V = 0$. Luego, es claro que conmuta el diagrama en este caso. Por lo tanto, ϕ_M es epimorfismo.

Veamos que es natural, sea $h: M' \rightarrow M$, se tiene:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{kQ}(M, {}_aI \otimes V) & \xrightarrow{\phi_M} & \text{Hom}_k(M_a, V) \\ \text{Hom}(h, 1) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(h_a, 1_V) \\ \text{Hom}_{kQ}(M', {}_aI \otimes V) & \xrightarrow{\phi_{M'}} & \text{Hom}_k(M'_a, V). \end{array}$$

Sea $u: M \rightarrow {}_aI \otimes V$ un morfismo de kQ -módulos, entonces $\phi_M(u)$ es la composición de los siguientes morfismos:

$$M_a \xrightarrow{u_a} ({}_aI \otimes V)_a = ke_a \otimes V \xrightarrow{\cong} k \otimes V \xrightarrow{\cong} V.$$

Tenemos que $u_a(m) = e_a \otimes \phi_M(u)(m)$, para todo $m \in M_a$. De hecho, si $u_a(m) = e_a \otimes v$, para algún $v \in V$, tenemos que $\phi_M(u)(m) = v$. Por otro lado, si $m' \in M'_a$, $\phi_{M'}(\text{Hom}(h, 1)(u))(m') = \phi_{M'}(uh)(m')$ y también,

$$e_a \otimes \phi_{M'}(uh)(m') = (uh)_a(m') = (u_a)(h_a(m')) = e_a \otimes \phi_M(u)(h_a(m')).$$

Por lo tanto, $\phi_{M'}(uh)(m') = \phi_M(u)h_a(m')$. Luego, el cuadrado conmuta y ϕ_M es natural. \square

Proposición 6.84. *Si $a \in Q_0$ y V es un k -espacio vectorial, entonces ${}_aI \otimes V$ es inyectivo como kQ -módulo y como kQ -módulo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $0 \rightarrow M \xrightarrow{s} E \xrightarrow{t} N \rightarrow 0$ una sucesión exacta de kQ -módulos. Entonces

$$0 \rightarrow M_a \xrightarrow{s_a} E_a \xrightarrow{t_a} N_a \rightarrow 0,$$

es una sucesión exacta de k -espacios vectoriales. Luego, se divide, esto es, existe $\sigma_a: E_a \rightarrow M_a$ tal que $\sigma_a s_a = 1_{M_a}$. Por la proposición anterior, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow & \text{Hom}_{kQ}(N, {}_aI \otimes_k V) & \xrightarrow{t^*} & \text{Hom}_{kQ}(E, {}_aI \otimes_k V) & \xrightarrow{s^*} & \text{Hom}_{kQ}(M, {}_aI \otimes_k V) \\ & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 \longrightarrow & \text{Hom}_k(N_a, V) & \xrightarrow{t_a^*} & \text{Hom}_k(E_a, V) & \xrightarrow{s_a^*} & \text{Hom}_k(M_a, V), \end{array}$$

luego, basta probar que s_a^* es un epimorfismo. Entonces, $(\sigma_a s_a)^* = s_a^* \sigma_a^* = 1$ y s_a^* es una retracción. Por lo tanto, s^* es un epimorfismo y ${}_a I \otimes V$ es inyectivo. \square

Corolario 6.85. *Para cada $a \in Q_0$, ${}_a I$ es inyectivo en $\underline{kQ}\text{-Mod}$ y en $kQ\text{-Mod}$.*

DEMOSTRACIÓN. Haciendo $V = k$ en la proposición anterior, tenemos que ${}_a I \otimes k$ es inyectivo, luego ${}_a I \cong {}_a I \otimes k$ es inyectivo. \square

Necesitamos conocer los inyectivos en $kQ/I\text{-Mod}$. Si M está en $kQ\text{-Mod}$ (respectivamente en $kQ\text{-Mod}$), recordemos que M es un $\underline{kQ/I}$ -módulo (respectivamente kQ/I -módulo) si y sólo si $IM = 0$.

Definición 6.86. *Sea L un kQ -módulo. Definimos:*

$$L^I := \{l \in L \mid Il = 0\}.$$

Este es un submódulo de L y es el más grande submódulo L' de L tal que $IL' = 0$.

Afirmación 6.87. *Si L es inyectivo como kQ -módulo (respectivamente como \underline{kQ} -módulo), entonces L^I es inyectivo como kQ/I -módulo (respectivamente como $\underline{kQ/I}$ -módulo).*

DEMOSTRACIÓN. Sean $0 \longrightarrow M \xrightarrow{s} E \xrightarrow{t} N \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de kQ/I -módulos y $h: M \rightarrow L^I$ un morfismo. Para $\sigma: L^I \rightarrow L$ la inclusión canónica, tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{s} & E & \xrightarrow{t} & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow h & & \swarrow v & & \\ & & L^I & & & \searrow u & \\ & & \downarrow \sigma & & & & \\ & & L & & & & \end{array} .$$

Donde u existe porque L es inyectivo, y es tal que $us = \sigma h$. Por otro lado, I anula a E , luego, I anula a $u(E)$. Entonces, $u(E)$ está en L^I . Así, podemos definir un morfismo $v: E \rightarrow L^I$. Se tiene $\sigma v s = us = \sigma h$. Como σ es monomorfismo, se tiene que $vs = h$. Por lo tanto, L^I es inyectivo en $kQ/I\text{-Mod}$. \square

Proposición 6.88. Para cada kQ -módulo L y cada k -espacio vectorial V , se tiene: $(L \otimes V)^I = L^I \otimes V$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{v_j\}_{j \in J}$ una base de V y m en $L \otimes V = \coprod_{j \in J} L \otimes kv_j$. Luego, $m = \sum h_j \otimes v_j$, con cada h_j en L . Se tiene que $m \in (L \otimes V)^I$ si y sólo si, para cada $t \in I$, $0 = tm = \sum th_j \otimes v_j$, si y sólo si $th_j = 0$, si y sólo si, $h_j \in L^I$. □

Corolario 6.89. ${}_x I^I \otimes V$ y ${}_x I^I$ son inyectivos como $\overline{kQ/I}$ -módulos y como kQ/I -módulos, para cada $x \in Q_0$ y $V \in k\text{-Mod}$.

El álgebra que nos interesa en este estudio es kQ/I , para kQ/I un álgebra propia y Q un carcaj propio. En adelante, cuando hablemos de A -módulos inyectivos nos referiremos a los $\overline{kQ/I}$ -módulos inyectivos, que sin temor a confusión denotaremos por ${}_x I \otimes \overline{V_x}$ como antes denotabamos a los kQ -módulos inyectivos, en lugar de la notación ${}_x I^I \otimes V_x$ que veníamos usando.

En carcajes infinitos puede ocurrir que $\text{soc}M = 0$ para un módulo $M \neq 0$. Por ejemplo, si el carcaj Q es:

$$Q = \cdots \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdots,$$

y el módulo M tiene la siguiente representación:

$$M = \cdots \longrightarrow k \xrightarrow{1_k} k \xrightarrow{1_k} k \cdots,$$

entonces $\text{soc}M = 0$. Sin embargo, esto no ocurre en $A\text{-Mod}^-$.

Proposición 6.90. Sea $0 \neq M \in A\text{-Mod}^-$, entonces $\text{soc}M \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $M_z = 0$ si $p(z) > t$. Supongamos que $M_x \neq 0$ y $p(x) = t$. Sea $m \in M_x - \{0\}$ y veamos, usando (??), que $m \in \text{soc}M$. Sea γ una flecha en Q de y en z . Si $y \neq x$, $\gamma M_x = 0$ pues $M_x = e_x M$. Si $y = x$, entonces $\gamma m \in M_z = 0$ porque $p(z) = p(x) + 1 = t + 1$. Por lo tanto, $\gamma m = 0$. □

Proposición 6.91. Si $M, N \in A\text{-Mod}^-$ y $u: M \rightarrow N$ es un morfismo, entonces:

- (a) La imagen bajo u del socio de M está contenida en el socio de N .

(b) u es monomorfismo si y sólo si la restricción de u al soclo de M es monomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $m \in \text{soc}M$, entonces para cada flecha γ se tiene que $\gamma u(m) = u(\gamma m) = 0$. Luego, $u(m)$ está en el soclo de N .

La suficiencia es clara. Para ver la necesidad, supongamos que la restricción u' de u al soclo de M es monomorfismo y el núcleo de u es distinto de cero. Luego, $\text{soc}(\ker u) \neq 0$, porque $\ker u \in A\text{-Mod}^-$. Tenemos que $\text{soc}(\ker u) \subseteq \text{soc}M$ y, además $\text{soc}(\ker u) \subseteq \ker u$.

$$\ker(u') = \text{soc}M \cap \ker u = \text{soc}(\ker u) \neq 0,$$

lo cual es una contradicción. \square

Observación 6.92. El soclo de ${}_aI$ es el simple en el vértice a , que también es el soclo de ${}_aI^I$. Esto es:

$$\text{soc}_a I = S_a,$$

y

$$\text{soc}_a I^I = S_a.$$

Además, ${}_aI^I$ es inescindible.

DEMOSTRACIÓN. Por la definición (??) y la observación (??), tenemos que

$$\text{soc}_a I = \sum_{\substack{S \leqslant_a I \\ S \text{ simple}}} S = \sum_{\substack{S_x \leqslant_a I \\ p(x) \leqslant p(a)}} S_x = \sum_{\substack{S_x \leqslant_a I \\ p(x) \leqslant p(a)}} ke_x.$$

Sea $w \in \text{soc}_a I$, entonces $w = \sum_u c_u e_u$. Sea $y \xrightarrow{\alpha} z$ una flecha en Q . Por la observación (??):

$$0 = \alpha w = \sum_u c_u \alpha e_u = c_y \alpha,$$

luego, $p(y) \leqslant p(a)$ y $p(z) > p(a)$. Por lo tanto, $y=a$. Entonces, $w = c_a e_a$. Por lo tanto, $\text{soc}_a I \subseteq S_a$. Así que $\text{soc}_a I = S_a$.

Por otro lado, si $w \in \text{soc}_a I$, como I está generado por caminos de longitud mayor o igual que 2, entonces $Iw = 0$. Por lo tanto, $\text{soc}_a I \subseteq {}_aI^I$. En particular, ${}_aI^I \neq 0$. Por la proposición (??), $\text{soc}_a I^I = \text{soc}_a I = S_a$.

Por último, si ${}_aI^I = L_1 \oplus L_2$ en $A\text{-Mod}^-$, entonces

$$S_a = \text{soc}_a I^I = \text{soc}L_1 \oplus \text{soc}L_2,$$

luego, $\text{soc}L_1 = 0$ ó $\text{soc}L_2 = 0$. Por la proposición (??), $L_1 = 0$ ó $L_2 = 0$. \square

En la siguiente proposición nos referimos a kQ/I o a $\underline{kQ/I}$ (aunque el producto en $kQ/I\text{-Mod}$ y $\underline{kQ/I}\text{-Mod}$ no sea el mismo, ver proposición (??)).

Proposición 6.93. *Sea $\{I_j\}_{j \in J}$ una familia de kQ/I -módulos inyectivos. Entonces el producto $\prod_{j \in J} I_j$ es kQ/I -inyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $u: M \rightarrow E$ un monomorfismo y $\varphi: M \rightarrow \prod_{j \in J} I_j$ un morfismo de A -módulos. Sea $\eta_j: \prod_{j \in J} I_j \rightarrow I_j$ la proyección canónica para cada $j \in J$. Como cada I_j es inyectivo, existe ψ_j tal que en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & E \\
 & & \downarrow \varphi & \nearrow \rho & \\
 & & \prod_{j \in J} I_j & & \\
 & & \downarrow \eta_j & \searrow \psi_j & \\
 & & I_j & &
 \end{array}$$

$\psi_j u = \eta_j \varphi$, para cada $j \in J$. Por la propiedad universal del producto $\prod_{j \in J} I_j$ tenemos que existe un único morfismo $\rho: E \rightarrow \prod_{j \in J} I_j$ tal que $\eta_j \rho = \psi_j$ para cada $j \in J$, entonces $\eta_j \rho u = \psi_j u = \eta_j \varphi$. Por lo tanto, $\rho u = \varphi$. \square

Proposición 6.94. *Sea $\{xI \otimes V_x\}_{x \in J}$ una familia de kQ/I -módulos inyectivos y $t \in \mathbb{Z}$ fijo. Entonces el coproducto $\coprod_{p(x) \leq t} xI \otimes V_x$ es $\underline{kQ/I}$ -inyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $u: M \rightarrow E$ monomorfismo y $\varphi: M \rightarrow \prod_{p(x) \leq t} xI \otimes V_x$ un morfismo de $\underline{kQ/I}$ -módulos. Sea $\sigma: \prod_{p(x) \leq t} xI \otimes V_x \rightarrow \prod_{p(x) \leq t} xI \otimes V_x$ la inclusión canónica. Por la proposición anterior existe un único morfismo $\psi: E \rightarrow \prod_{p(x) \leq t} xI \otimes V_x$ tal que $u\psi = \sigma\varphi$. Probemos que $\text{Im}\psi \subseteq \prod_{p(x) \leq t} xI \otimes V_x$. Sea $m \in E = \prod_{z \in Q_0} e_z E$, con $m = m_{z_1} + \dots + m_{z_l}$ y cada $m_{z_i} \in e_{z_i} E$. Luego, existen enteros a, b tales que $a \leq p(z_i) \leq b$ para el peso de cada z_i . Si

$\psi(m) \neq 0$, entonces existe z tal que $0 \neq e_z \psi(m) = \psi(e_z m)$. Lo cual implica que $e_z m \neq 0$. Por lo tanto, $a \leq p(z) \leq b$.

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{u} & E \\
 & & \downarrow \varphi & & \nearrow \psi \\
 & & \prod_{p(x) \leq t} xI \otimes V_x & & \\
 & & \downarrow \sigma & & \\
 & & \prod_{p(x) \leq t} xI \otimes V_x & &
 \end{array}$$

Sea $\eta_x: \prod_{p(x) \leq t} xI \otimes V_x \rightarrow xI \otimes V_x$ la x -ésima proyección canónica. Luego, $\eta_x \psi(m) \neq 0$ para algún x . Pero $\eta_x \psi(m) \in xI \otimes V_x = \prod_{z \in Q_0} (xI \otimes V_x)_z$. Entonces existe $z_0 \in Q_0$ tal que $0 \neq e_{z_0} \eta_x \psi(m) = \eta_x \psi(e_{z_0} m)$, de ahí que $e_{z_0} m \neq 0$. Por lo tanto, $a \leq p(z_0) \leq b$. También $e_{z_0}(xI \otimes V_x) = xI_{z_0} \otimes V_x \neq 0$, pero esto sólo pasa cuando hay un camino de z_0 a x y en tal caso, $p(z_0) \leq p(x)$. Entonces $a \leq p(x) \leq t$. Además, por hipótesis el carcaj Q es tal que, para cada $i \in \mathbb{Z}$, el conjunto $\{x \mid p(x) = i\}$ es finito, pues Q es propio (definición (??)). Por lo tanto, el conjunto de vértices x tales que $\eta_x \psi(m) \neq 0$ es finito. Así que $\eta_x \psi(m) = 0$ para casi todo x con $p(x) \leq t$. Por lo tanto, $\psi(m) \in \prod_{p(x) \leq t} xI \otimes V_x$. \square

Proposición 6.95. Si $M \in kQ/I\text{-Mod}$ y $V \in k\text{-Mod}$, para cada $a \in Q_0$ hay un isomorfismo lineal

$$\phi_M: \text{Hom}_{kQ/I}(M, {}_a I^I \otimes V) \rightarrow \text{Hom}_k(M_a, V),$$

que es natural en M .

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la proposición (??), pues I anula a M y a ${}_a I^I \otimes V$, luego, tenemos:

$$\text{Hom}_{kQ/I}(M, {}_a I^I \otimes V) = \text{Hom}_{kQ}(M, {}_a I^I \otimes V) \cong \text{Hom}_{kQ}(M, {}_a I \otimes V),$$

donde el isomorfismo está inducido por la inclusión $i: {}_a I^I \otimes V \rightarrow {}_a I \otimes V$. \square

Proposición 6.96. Sea $0 \neq M \in A\text{-Mod}^-$. Entonces existe un monomorfismo $\varphi: M \rightarrow \prod_{p(x) \leq t} xI \otimes V_x$ tal que $\varphi(\text{soc}M) = \text{soc}(\prod_{p(x) \leq t} xI \otimes V_x)$.

DEMOSTRACIÓN. Como $M \in A\text{-Mod}^-$, entonces $\text{soc}M \neq 0$. Tenemos que $\text{soc}M = \coprod_{z \in Q_0} e_z(\text{soc}M)$. Sea $z \in Q_0$ arbitrario pero fijo y sean V_z el k -espacio vectorial $e_z(\text{soc}M)$ y \bar{V}_z la sub-representación $e_z(\text{soc}M)$ de M .

Consideremos el morfismo de representaciones $\bar{\sigma}_z := \phi_{\bar{V}_z}^{-1}(1_{V_z}): \bar{V}_z \rightarrow {}_zI^I \otimes V_z$, dado por la proposición (??). Luego, $\bar{\sigma}_z(v) = e_z \otimes v$, para $v \in e_z \bar{V}_z$. Así, $\bar{\sigma}_z$ es un monomorfismo de representaciones y $\bar{\sigma}_z(V_z) = {}_zI \otimes V_z$. Como $M \in A\text{-Mod}^-$, existe un entero t tal que $M_w = 0$ si $p(w) > t$. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{p(z) \leq t} e_z(\text{soc}M) & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & \coprod_{p(z) \leq t} {}_zI \otimes V_z \\ \downarrow & \nearrow \varphi & \\ M & & \end{array}$$

donde $\bar{\sigma}$ existe por la propiedad universal del coproducto $\coprod_{p(z) \leq t} e_z(\text{soc}M)$ y es un monomorfismo porque cada $\bar{\sigma}_z$ lo es. Además, $\coprod_{p(z) \leq t} {}_zI \otimes V_z$ es inyectivo, entonces existe φ que hace conmutar el diagrama y se tiene que la restricción de φ al socio de M es σ y, por lo tanto, es monomorfismo. Luego, φ es monomorfismo. Tenemos que $\varphi(\text{soc}M) = \text{soc}(\coprod_{p(z) \leq t} {}_zI \otimes V_z)$. \square

Observación 6.97. $\coprod_{p(z) \leq t} {}_zI \otimes V_z$ está en $A\text{-Mod}^-$. En efecto, si w es tal que $p(w) > t$, entonces

$$e_w(\coprod_{p(z) \leq t} {}_zI \otimes V_z) = \coprod_{p(z) \leq t} {}_zI_w \otimes V_z = 0$$

porque cada ${}_zI_w = 0$.

Corolario 6.98. Dado M en $A\text{-Mod}^-$ existe una corresolución inyectiva de M .

DEMOSTRACIÓN. Sea $\sigma_M: M \rightarrow I^1$ una envolvente inyectiva de M , es decir, σ_M es monomorfismo y $\text{soc}M \cong \text{soc}I^1$. Luego, sea λ_1 la envolvente inyectiva de $I^1/\sigma_M(M)$, tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{\sigma_M} & I^1 & \xrightarrow{\delta^1 = \lambda_1 \pi_1} & I^2 & \xrightarrow{\delta^2 = \lambda_2 \pi_2} & I^3 \dots \\ & & \searrow \pi_1 & & \nearrow \lambda_1 & \searrow \pi_2 & \nearrow \lambda_2 \\ & & I^1/\sigma_M(M) & & I^2/\delta^1(I^1) & & \end{array}$$

Continuando con este proceso inductivamente obtenemos que el complejo:

$$\dot{I}_M : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\sigma_M} I^1 \xrightarrow{\delta^1} I^2 \xrightarrow{\delta^2} \dots$$

es una corresolución inyectiva de M .

□

Capítulo 7

Dualidad de Koszul

En este capítulo probamos un teorema análogo al que aparece en el artículo [?]. En la proposición (??) construiremos un funtor de la categoría de $A^!$ -módulos a la de complejos de A -módulos proyectivos que es fiel, pleno y exacto. En un siguiente paso extenderemos la definición de este funtor a uno de la categoría de complejos de $A^!$ -módulos a la de complejos de A -módulos proyectivos. Después probaremos que éste induce un funtor exacto entre las categorías homotópicas, luego entre un par de subcategorías plenas de ellas y, finalmente, en sus derivadas, donde es un funtor de categorías trianguladas.

Como en el capítulo anterior, $A = kQ/I$, con I un ideal admisible y cuadrático de kQ , Q localmente finito y conexo, además, los paseos de x en x tienen peso cero y $Q(i)$ es finito para todo $i \in \mathbb{Z}$. Así, A es propia y cuadrática.

7.1. El funtor de Koszul $f: A^!-\text{Mod} \rightarrow \mathcal{C}(A-\text{Mod})$

Sea $\mathcal{C}(A-\text{Proy})$ la subcategoría plena de $\mathcal{C}(A-\text{Mod})$ de complejos de A -módulos proyectivos. Además, sea \mathcal{F} el ideal de A generado por las flechas de Q .

Notación. De aquí en adelante, denotaremos el peso en el carcaj Q por p y el peso en el carcaj Q^{op} por q , con respecto al mismo punto fijo en $Q_0 = Q_0^{\text{op}}$. Notemos que, entonces, $-p = q$. Además, para enfatizar que consideramos un vértice x de Q en Q^{op} , lo denotaremos por x^{op} . Luego, $q(x^{\text{op}}) = -p(x)$.

Lema 7.1. Sean V, W un par de k -espacios vectoriales y $\{v_1, \dots, v_n\}$ un

conjunto linealmente independiente en V . Supongamos que $0 = \sum_{i=1}^n v_i \otimes w \in V \otimes_k W$, entonces $w = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Si \mathcal{B} es una k -base de V que extiende a $\{v_1, \dots, v_n\}$ y \mathcal{B}' es una k -base de W , entonces $\{v \otimes w' \mid v \in \mathcal{B}, w' \in \mathcal{B}'\}$ es una k -base de $V \otimes_k W$. En efecto,

$$\begin{aligned} V \otimes_k W &= \left(\bigoplus_{v \in \mathcal{B}} kv \right) \otimes_k \left(\bigoplus_{w' \in \mathcal{B}'} kw' \right) \\ &= \bigoplus_{\substack{v \in \mathcal{B} \\ w' \in \mathcal{B}'}} kv \otimes kw' = \bigoplus_{\substack{v \in \mathcal{B} \\ w' \in \mathcal{B}'}} k(v \otimes w') \end{aligned}$$

Luego, si $w = \sum_j \lambda_j w'_j$, entonces $0 = \sum_{i=1}^n v_i \otimes w = \sum_{i,j} \lambda_j v_i \otimes w'_j$, por lo tanto, $\lambda_j = 0$ para todo j . \square

Proposición 7.2. *Existe un funtor \mathbf{f} de $A^1\text{-Mod}$ en $\mathcal{C}(A\text{-Proy})$ que es fiel, pleno y exacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $S_i := \bigoplus_{q(x^{\text{op}})=i} ke_{x^{\text{op}}} = \bigoplus_{-p(x)=i} ke_x$. Esta es una k -subálgebra de $S^{\text{op}} = S$, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Además S_i es claramente un ideal de S^{op} . Dado M un A^1 -módulo, tenemos

$$\begin{aligned} A \otimes_S S_i M &= A \otimes_S \prod_{-p(x)=i} ke_x M \cong \prod_{-p(x)=i} A \otimes_S e_x M \\ &\cong \prod_{-p(x)=i} Ae_x \otimes_k e_x M \cong \prod_{-p(x)=i} Ae_x \otimes_k \prod_k \\ &\cong \prod_{-p(x)=i} \prod_k Ae_x \otimes_k k \cong \prod_{-p(x)=i} \prod Ae_x. \end{aligned}$$

Como Ae_x es proyectivo, entonces $A \otimes_S S_i M$ es un A -módulo proyectivo. Tenemos $S_i M = \prod_{-p(x)=i} e_x M$. Por otro lado, sea $\tilde{d}_{fM}^i : A \times S_i M \rightarrow A \otimes_S S_{i+1} M$ la función tal que $\tilde{d}_{fM}^i(a, m) = \sum_{\gamma \in Q_1} a\gamma \otimes \gamma^{\text{op}} m$, para $i \in \mathbb{Z}$, $a \in A$, $m \in S_i M$. Veamos que está bien definida. Supongamos que $m = \sum_{-p(z)=i} e_z m$, entonces, se tiene $\gamma^{\text{op}} m = \sum_{-p(z)=i} \gamma^{\text{op}} e_z m$ (no cero sólo para un número finito de flechas

$\gamma \in Q_1$). Supongamos $x \xrightarrow{\gamma} y$ en Q_1 , entonces $y \xrightarrow{\gamma^{\text{op}}} x$ está en Q_1^{op} y

$\gamma^{\text{op}}m = \gamma^{\text{op}}e_y m$. Si el peso de y en Q^{op} es i , entonces el peso de x (en Q^{op}) es $i + 1$, es decir, $-p(y) = i$ y $-p(x) = i + 1$, entonces $\gamma^{\text{op}}m = e_x \gamma^{\text{op}}e_y m$ es un elemento de $S_{i+1}M$. La función \tilde{d}_{fM}^i claramente es bilineal. Probemos que \tilde{d}_{fM}^i es S -balanceado. Sea e_z un generador de S , $a = \sum_{y \in Q_0} ae_y \in A =$

$$\bigoplus_{y \in Q_0} Ae_y, m = \sum_{-p(x)=i} e_x m \in \bigoplus_{-p(x)=i} e_x M. \text{ Luego:}$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{fM}^i(ae_z, m) &= \sum_{\gamma \in Q_1} ae_z \gamma \otimes \gamma^{\text{op}}m \\ &= \sum_{y \in Q_0} \sum_{-p(x)=i} \sum_{\gamma \in Q_1} ae_y e_z \gamma \otimes \gamma^{\text{op}}e_x m \\ &= \sum_{-p(x)=i} \sum_{\gamma \in Q_1} ae_z \gamma \otimes \gamma^{\text{op}}e_x m \\ &= \sum_{\substack{\gamma: w \rightarrow z \\ -p(z)=i}} ae_z \gamma \otimes \gamma^{\text{op}}e_z m \\ &= \sum_{y \in Q_0} \sum_{-p(x)=i} \sum_{\gamma \in Q_1} ae_y \gamma \otimes \gamma^{\text{op}}e_z e_x m \\ &= \sum_{\gamma \in Q_1} a \gamma \otimes \gamma^{\text{op}}e_z m = \tilde{d}_{fM}^i(a, e_z m). \end{aligned}$$

Luego, tengo morfismos de A -módulos $d_{fM}^i: A \otimes_S S_i M \rightarrow A \otimes_S S_{i+1} M$, para cada $i \in \mathbb{Z}$ tales que $d_{fM}^i(a, m) = \sum_{\gamma \in Q_1} a \gamma \otimes \gamma^{\text{op}}m$.

Probemos que $d_{fM}^{i+1} d_{fM}^i = 0$. Dado un generador $a \otimes m$ del A -módulo $A \otimes_S S_i M$, podemos tomar uno de la forma $e_z \otimes e_z m$ y se tiene:

$$\begin{aligned} d_{fM}^{i+1} d_{fM}^i(e_z \otimes e_z m) &= d_{fM}^{i+1} \left(\sum_{\gamma \in Q_1} e_z \gamma \otimes \gamma^{\text{op}}e_z m \right) \\ &= \sum_{\gamma, \rho \in Q_1} e_z \gamma \rho \otimes \rho^{\text{op}} \gamma^{\text{op}} e_z m \\ &= e_z \left(\sum_{\gamma, \rho \in Q_1} \gamma \rho \otimes \rho^{\text{op}} \gamma^{\text{op}} \right) e_z m \\ &= e_z \varphi_{e_z m} \left(\sum_{\gamma, \rho \in Q_1} \gamma \otimes \rho \otimes \rho^{\text{op}} \otimes \gamma^{\text{op}} e_z \right) = 0, \end{aligned}$$

por las observaciones (??) y (??). Luego, dado un $A^!$ -módulo izquierdo M , definimos el complejo

$$\mathbf{f}(M) := (A \otimes_S S_i M, d_{fM}^i)_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Hemos visto que éste es un complejo de A -módulos proyectivos. Demos una regla de asociación para los morfismos de $A^!$ -Mod. Sea $h: M \rightarrow N$ un

morfismo de A^1 -módulos. Como $S^{\text{op}} \subseteq A^1$, en particular, h es un morfismo de S -módulos. Luego, $h(S_i M) = S_i h(M) \subseteq S_i N$. Es decir, h induce un morfismo de S -módulos, $h^i: S_i M \rightarrow S_i N$, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Entonces $1 \otimes h^i: \mathbf{f}(M)^i \rightarrow \mathbf{f}(N)^i$. Probemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_S S_i M & \xrightarrow{d_{\mathbf{f}M}^i} & A \otimes_S S_{i+1} M \\ \downarrow 1 \otimes h^i & & \downarrow 1 \otimes h^{i+1} \\ A \otimes_S S_i N & \xrightarrow{d_{\mathbf{f}N}^i} & A \otimes_S S_{i+1} N. \end{array}$$

Sea $a \otimes m$ un generador en $A \otimes_S S_i M$. Entonces,

$$(1 \otimes h^{i+1})(d_{\mathbf{f}M}^i(a \otimes m)) = (1 \otimes h^{i+1})\left(\sum_{\gamma \in Q_1} a\gamma \otimes \gamma^{\text{op}} m\right) = \sum_{\gamma \in Q_1} a\gamma \otimes h(\gamma^{\text{op}} m),$$

y, por otro lado,

$$d_{\mathbf{f}N}^i((1 \otimes h^i)(a \otimes m)) = d_{\mathbf{f}N}^i(a \otimes h(m)) = \sum_{\gamma \in Q_1} a\gamma \otimes \gamma^{\text{op}} h(m).$$

Pero $\gamma^{\text{op}} h(m) = h(\gamma^{\text{op}} m)$ porque h es un morfismo de A^1 -módulos. Por lo tanto, $\mathbf{f}(h) := (1 \otimes h^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un morfismo de complejos. Además, claramente \mathbf{f} es un funtor.

Veamos que \mathbf{f} es exacto. Sea $0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} L \longrightarrow 0$ exacta en $A^1\text{-Mod}$. Por el lema (??), $0 \longrightarrow e_x M \xrightarrow{u_x} e_x N \xrightarrow{v_x} e_x L \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta. Luego, conmuta el siguiente diagrama y es exacto el primer renglón,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{-p(x)=i} e_x M & \xrightarrow{(u_x)_i} & \bigoplus_{-p(x)=i} e_x N & \xrightarrow{(v_x)_i} & \bigoplus_{-p(x)=i} e_x L \longrightarrow 0 & (7.1) \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & \\ 0 & \longrightarrow & S_i M & \xrightarrow{u^i} & S_i N & \xrightarrow{v^i} & S_i L \longrightarrow 0. \end{array}$$

Así, el segundo renglón es una sucesión exacta de S -módulos. Como S es semisimple, este segundo renglón se divide. Al tensorizar:

$$0 \longrightarrow A \otimes_S S_i M \xrightarrow{1 \otimes u^i} A \otimes_S S_i N \xrightarrow{1 \otimes v^i} A \otimes_S S_i L \longrightarrow 0$$

se divide, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto,

$$0 \longrightarrow \mathbf{f}(M) \xrightarrow{\mathbf{f}(u)} \mathbf{f}(N) \xrightarrow{\mathbf{f}(v)} \mathbf{f}(L) \longrightarrow 0$$

es una \mathcal{E} -sucesión en $\mathcal{C}(A-\text{Mod})$.

Además, \mathbf{f} es fiel y pleno, como se prueba a continuación:

Recordemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(M)^i &= A \otimes_S S_i M = A \otimes_S \coprod_{-p(x)=i} e_x M \\ &\cong \coprod_{-p(x)=i} A \otimes_S e_x M \cong \coprod_{-p(x)=i} A e_x \otimes_k e_x M. \end{aligned}$$

Sea $h: M \rightarrow N$ morfismo en $A^!-\text{Mod}$. Entonces se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{f}(M)^i \cong \coprod_{-p(x)=i} A e_x \otimes_k e_x M & & \\ \mathbf{f}(h)^i \downarrow & & \downarrow (1 \otimes h_x) \\ \mathbf{f}(N)^i \cong \coprod_{-p(x)=i} A e_x \otimes_k e_x N. & & \end{array}$$

Supongamos que $\mathbf{f}(h) = 0$, luego, también $(1 \otimes h_x) = 0$. Entonces, para cada $m \in e_x M$, se tiene

$$0 = (1 \otimes h)(e_x \otimes m) = e_x \otimes h(m),$$

que es un elemento de $A e_x \otimes_k e_x N$. Por lema (??), $h(m) = 0$. Luego, $h = 0$

y \mathbf{f} es fiel.

Para ver que \mathbf{f} es pleno: Sea $g: \mathbf{f}(M) \rightarrow \mathbf{f}(N)$ un morfismo de complejos. Entonces, para cada $i \in \mathbb{Z}$ y x tal que $-p(x) = i$, tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{f}(M)^i \cong \coprod_{-p(x)=i} A e_x \otimes_k e_x M \supseteq k e_x \otimes_k e_x M \cong k \otimes_k e_x M \cong e_x M & & & & & & \\ g^i \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbf{f}(N)^i \cong \coprod_{-p(x)=i} A e_x \otimes_k e_x N \supseteq k e_x \otimes_k e_x N \cong k \otimes_k e_x N \cong e_x N, & & & & & & \end{array}$$

pues cada g^i es un morfismo de A -módulos. Luego, si $m \in e_x M$, entonces

$$g^i(e_x \otimes m) = g^i(e_x(e_x \otimes m)) = e_x g^i(e_x \otimes m)$$

es un elemento en $ke_x \otimes_k e_x N$, porque $g^i(e_x \otimes m)$ está en $\coprod_{-p(y)=i} e_x A e_y \otimes_k e_y N$,

donde

$$e_x A e_y = \begin{cases} ke_x, & \text{si } y = x, \\ 0, & \text{si } y \neq x. \end{cases}$$

Esto último se debe a que, si $x \neq y$ y $e_x A e_y \neq 0$, entonces hay un camino en Q de y en x ; luego, $p(x) > p(y)$ y $-p(y) \neq i$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $g^i(e_x \otimes m) \in ke_x \otimes_k e_x N$. Luego, g^i induce una aplicación $ke_x \otimes_k e_x M \rightarrow ke_x \otimes_k e_x N$, y ésta a su vez induce una aplicación $g_x^i: e_x M \rightarrow e_x N$, para cada $x \in Q_0$ con $-p(x) = i$. Luego, para $m \in e_x M$ se tiene:

$$\begin{array}{ccccc} m & \longrightarrow & 1 \otimes m & \longrightarrow & e_x \otimes m \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ & & & & g^i(e_x \otimes m) \\ & & & & \parallel \\ g_x^i(m) & \longrightarrow & 1 \otimes g_x^i(m) & \longrightarrow & e_x \otimes g_x^i(m). \end{array}$$

Además, $g^i(ae_x \otimes m) = ag^i(e_x \otimes m) = a(e_x \otimes g_x^i(m))$. Consideremos la función $\bar{g}: M = \bigoplus_{x \in Q_0} e_x M \xrightarrow{(g_x)} \bigoplus_{x \in Q_0} e_x N = N$, donde $g_x := g_x^i$ si $-p(x) = i$. Veremos que $\bar{g} \in \text{Hom}_{A^i}(M, N)$. Bastará ver que $\bar{g}(\alpha^{\text{op}}m) = \alpha^{\text{op}}\bar{g}(m)$ para cada flecha $\alpha \in Q_1$ y $m \in M$. Fijemos $y \xrightarrow{\hat{\alpha}} x$ en Q_1 y sea $m \in e_x M$. Sea $i := -p(x)$. Como \hat{g} es de complejos, tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{f}(M)^i & \xrightarrow{d_{\mathbf{f}M}^i} & \mathbf{f}(M)^{i+1} \\ g^i \downarrow & & \downarrow g^{i+1} \\ \mathbf{f}(N)^i & \xrightarrow{d_{\mathbf{f}N}^i} & \mathbf{f}(N)^{i+1}. \end{array}$$

Entonces, como $-p(x) = i$,

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{f}N}^i g^i(e_x \otimes m) &= d_{\mathbf{f}N}^i(e_x \otimes g_x^i(m)) = \sum_{\alpha \in Q_1} e_x \alpha \otimes \alpha^{\text{op}} g_x^i(m) \\ &= \sum_{\alpha: z \rightarrow x} \alpha \otimes \alpha^{\text{op}} \bar{g}(m). \end{aligned}$$

Por otro lado, esto es igual a

$$\begin{aligned} g^{i+1}d_{fM}^i(e_x \otimes m) &= g^{i+1}\left(\sum_{\alpha \in Q_1} e_x \alpha \otimes \alpha^{\text{op}}m\right) \\ &= g^{i+1}\left(\sum_{\alpha: z \rightarrow x} e_x \alpha \otimes \alpha^{\text{op}}m\right) \\ &= g^{i+1}\left(\sum_{\alpha: z \rightarrow x} e_x \alpha e_z \otimes \alpha^{\text{op}}m\right) \\ &= \sum_{\alpha: z \rightarrow x} e_x \alpha e_z \otimes g_z^{i+1}(\alpha^{\text{op}}m). \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que $\sum_{\alpha: z \rightarrow x} \alpha \otimes [\alpha^{\text{op}}\bar{g}(m) - \bar{g}(\alpha^{\text{op}}m)] = 0$, que es un elemento de $\sum_{\alpha: z \rightarrow x} k e_x \alpha e_z \otimes_k e_z N = \bigoplus_{\alpha: z \rightarrow x} [k\alpha \otimes_k e_z N]$ porque $\{\alpha\}_{\alpha \in Q_1}$ es linealmente independiente en A . Luego, para cada tal α se tiene que

$$\alpha \otimes [\bar{g}(\alpha^{\text{op}}m) - \alpha^{\text{op}}\bar{g}(m)] = 0.$$

Aplicando el lema (??) a $\alpha = \hat{\alpha}$, tenemos que $\bar{g}(\hat{\alpha}^{\text{op}}m) = \hat{\alpha}^{\text{op}}\bar{g}(m)$. Por lo tanto, \bar{g} es un morfismo de A -módulos tal que $f(\bar{g}) = (g^i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Luego, f es pleno. \square

Proposición 7.3. *El funtor f definido en (??) conmuta con coproductos (definición ??).*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{M_t\}_{t \in J}$ una familia de A^1 -módulos. Sean

$$\begin{aligned} \tau_t: M_t &\rightarrow \coprod_t M_t \\ \dot{\lambda}_t: f(M_t) &\rightarrow \coprod_t f(M_t) \end{aligned}$$

las inyecciones canónicas, para cada $t \in J$. Luego, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \coprod_t f(M_t) & \xrightarrow{\dot{\Psi}} & f(\coprod_t M_t) \\ \dot{\lambda}_t \uparrow & \nearrow f(\tau_t) & \\ f(M_t) & & \end{array}$$

donde la existencia y unicidad de $\dot{\Psi}$ se tiene por la propiedad universal del coproducto en $\mathcal{C}(A\text{-Mod})$. Debemos mostrar que $\dot{\Psi}$ es un isomorfismo. Esto es, que Ψ^i es un isomorfismo, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Tenemos el siguiente

diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_t A \otimes_S S_i M_t = \coprod_t \mathbf{f}(M_t)^i & \xrightarrow{\Psi^i} & \mathbf{f}(\coprod_t M_t)^i = A \otimes_S S_i(\coprod_t M_t) \\ & \nearrow \mathbf{f}(\tau_t)^i & \\ & \lambda_t^i \uparrow & \\ & A \otimes_S S_i M_t = \mathbf{f}(M_t)^i, & \end{array}$$

Basta probar que la composición:

$$\coprod_t A \otimes_S S_i M_t \xrightarrow{\Psi^i} A \otimes_S S_i(\coprod_t M_t) = A \otimes_S (\coprod_t S_i M_t) \xrightarrow{\cong} \coprod_t A \otimes_S S_i M_t,$$

es la identidad. \square

Definición 7.4. 1. Sea $\dot{P} := (P^i, d_P^i)$ un complejo de A -módulos proyectivos. Decimos que \dot{P} es un complejo radical si $\text{Im}d_P^i \subseteq \text{rad}P^{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

2. Denotamos por $R\mathcal{C}(A\text{-Proy})$ la subcategoría plena de la de complejos, cuyos objetos son los complejos radicales de A -módulos proyectivos.

Observación 7.5. Dado $M \in A^1\text{-Mod}$, $\mathbf{f}(M)$ es un complejo radical.

DEMOSTRACIÓN. $\mathbf{f}M^i = A \otimes_S S_i M \xrightarrow{d^i} A \otimes_S S_{i+1} M = \mathbf{f}M^{i+1}$. Probemos que $\text{Im}d^i \subseteq \text{rad}(A \otimes_S S_{i+1} M)$. Vimos que $A \otimes_S S_i M \cong \coprod_{-p(x)=i} A e_x \otimes e_x M$.

Probemos que el radical de $A e_{x_t} \otimes e_{x_t} M$ es $\mathcal{F}e_{x_t} \otimes e_{x_t} M$. Tenemos que $\text{rad}(A e_x) = \mathcal{F}e_x = \mathcal{F}A e_x$. Entonces,

$$\text{rad}\left(\bigoplus A e_x\right) = \bigoplus \text{rad}(A e_x) = \bigoplus \mathcal{F}A e_x = \mathcal{F}\left(\bigoplus A e_x\right).$$

Por lo tanto, para cada i ,

$$\text{rad}\left(A \otimes_S S_i M\right) = \mathcal{F}\left(A \otimes_S S_i M\right) = \mathcal{F}A \otimes_S S_i M = \mathcal{F} \otimes_S S_i M.$$

Luego, para $a \otimes m$ un básico en $A \otimes_S S_i M$, tenemos que

$$d^i(a \otimes m) = \sum_{\rho \in Q_1} a\rho \otimes \rho^{\text{op}} m \in \mathcal{F} \otimes_S S_{i+1} M = \text{rad}\left(A \otimes_S S_{i+1} M\right),$$

porque $a\rho$ está en el ideal que generan las flechas. \square

Luego, tenemos que $\mathbf{f}: A^1\text{-Mod} \rightarrow R\mathcal{C}(A\text{-Proy})$.

Proposición 7.6. *El complejo \dot{P} es radical si y sólo si \dot{P} no tiene sumandos directos de la forma:*

$$\dot{Q}: \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow Q \xrightarrow{1} Q \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots,$$

con $Q \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Por contradicción, supongamos que \dot{P} es un complejo radical y que contiene un sumando directo de la forma:

$$\dot{Q}: \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow Q \xrightarrow{1} Q \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Luego, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{Q}: & \dots & 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{1} & Q & \longrightarrow & 0 & \dots \\ \dot{\sigma} \downarrow & & \downarrow 0 & & \downarrow \sigma^i & & \downarrow \sigma^{i+1} & & \downarrow 0 & \\ \dot{P}: & \dots & P^{i-1} & \xrightarrow{d_P^{i-1}} & P^i & \xrightarrow{d_P^i} & P^{i+1} & \xrightarrow{d_P^{i+1}} & P^{i+2} & \dots \end{array},$$

donde Q es sumando de P^i y de P^{i+1} . Además, $\dot{\sigma}$ tiene inverso izquierdo. Sin perder generalidad tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{1} & Q \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ P_1^i \oplus Q & \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_P^i & \\ A & B \\ C & D \end{pmatrix}} & P_1^{i+1} \oplus Q. \end{array}$$

Luego, $B = 0$ y $D = 1_Q$. Por otro lado,

$$\text{rad}(P^{i+1}) \cong \text{rad}(P_1^{i+1} \oplus Q) \cong \text{rad}(P_1^{i+1}) \oplus \text{rad}(Q).$$

Si $Q \neq 0$, entonces $\text{rad}Q \neq Q$. En este caso, existe $q \in Q$ tal que $q \notin \text{rad}(Q)$. Luego, $d_P^i \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$. Entonces, $\text{Im}d_P^i \not\subseteq \text{rad}P^{i+1}$, lo cual implicaría que \dot{P} no es radical y se tiene una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que \dot{P} no es radical, es decir, para alguna $i \in \mathbb{Z}$, $\text{Im}d_P^i \subsetneq \text{rad}P^{i+1}$. Si $\pi: P^{i+1} \rightarrow P^{i+1}/\text{rad}P^{i+1}$ es la proyección canónica, entonces $\pi d_P^i \neq 0$. Tenemos que $P^{i+1}/\text{rad}P^{i+1}$ es semisimple, entonces existe un módulo simple S tal que si $\eta: P^{i+1}/\text{rad}P^{i+1} \rightarrow S$ es la proyección canónica, entonces $\eta \pi d_P^i \neq 0$. Luego, $\eta \pi d_P^i$ es un epimorfismo, y también $\eta \pi$ es un epimorfismo.

Sea $\eta_S: P_S \rightarrow S$ un epimorfismo con P_S un módulo proyectivo. Puesto que $\eta\pi d_P^i$ es un epimorfismo y P_S es proyectivo, entonces existe $\lambda_S: P_S \rightarrow P^i$, tal que $\eta\pi d_P^i \lambda_S = \eta_S$. Usando ahora que η_S es epimorfismo y que P^{i+1} es proyectivo, tenemos que existe $\rho_S: P^{i+1} \rightarrow P_S$ tal que $\eta_S \rho_S = \eta\pi$. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 P_S & \xlongequal{\quad} & P_S & & & & \\
 \lambda_S \updownarrow & \rho_S d_P^i & \rho_S \updownarrow & d_P^i \lambda_S & & \eta_S & \\
 P^i & \xrightarrow{d_P^i} & P^{i+1} & \xrightarrow{\pi} & P^{i+1}/\text{rad}P^{i+1} & \xrightarrow{\eta} & S.
 \end{array}$$

Tenemos que $\eta_S \rho_S d_P^i \lambda_S = \eta_S$, y $\rho_S d_P^i \lambda_S$ es un morfismo no cero de P_S en P_S . Supongamos que S es el A -módulo simple en el vértice x . Entonces, $\text{End}_A(P_S) \cong \text{Hom}_A(Ae_x, Ae_x) \cong e_x Ae_x \cong k$, luego, los morfismos no cero son invertibles y $t\rho_S d_P^i \lambda_S = 1_{P_S}$, para cierto $t \in k$. Luego, P_S es sumando directo de P^i y de P^{i+1} . Tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dot{P}_S : & \dots & 0 & \longrightarrow & P_S & \xrightarrow{1} & P_S & \longrightarrow & 0 & \dots \\
 & & \downarrow 0 & & \downarrow t\lambda_S & & \downarrow td_P^i \lambda_S & & \downarrow 0 & \\
 \dot{P} : & \dots & P^{i-1} & \xrightarrow{d_P^{i-1}} & P^i & \xrightarrow{d_P^i} & P^{i+1} & \xrightarrow{d_P^{i+1}} & P^{i+2} & \dots
 \end{array}$$

donde, $\dot{\lambda} := (\dots, 0, t\lambda_S, td_P^i \lambda_S, 0, \dots)$ es un morfismo de complejos de \dot{P}_S en \dot{P} .

Notemos que $\dot{P}_S = \mathcal{J}(P_S[-i])$, luego, es \mathcal{E} -inyectivo (proposición (??)). Además, $\dot{\lambda}$ es monomorfismo. Luego, para la \mathcal{E} -sucesión:

$$0 \longrightarrow \dot{P}_S \xrightarrow{\dot{\lambda}} \dot{P} \longrightarrow \text{cok}\dot{\lambda} \longrightarrow 0,$$

existe $\dot{h}: \dot{P} \rightarrow \dot{P}_S$, tal que $\dot{h}\dot{\lambda} = 1_{\dot{P}_S}$. Por lo tanto, \dot{P}_S es un sumando directo de \dot{P} . □

Proposición 7.7. *En $\mathcal{R}\mathcal{C}(A\text{-Proy})$ las resoluciones proyectivas minimales de los \underline{A} -módulos simples y sus trasladados son inyectivos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $0 \longrightarrow \dot{M} \xrightarrow{f} \dot{E} \xrightarrow{g} \dot{N} \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathcal{R}\mathcal{C}(A\text{-Proy})$. Para S un \underline{A} -módulo simple sea (\dot{P}, η) una resolución proyectiva minimal de S y \dot{h} un morfismo de \dot{M} en \dot{P} . Tenemos el

diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dot{P} : & & \cdots & \longrightarrow & P^{-2} & \xrightarrow{d_P^{-2}} & P^{-1} & \xrightarrow{d_P^{-1}} & P^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & \downarrow 0 & & \downarrow d_P^{-1} & & \parallel & & & & \\ \mathcal{J}(P^0)[1] : & & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P^0 & \xrightarrow{1} & P^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots, \end{array}$$

y le llamamos $\dot{\lambda}$ al morfismo definido en este diagrama. Luego, tenemos los morfismos: $\dot{M} \xrightarrow{\dot{h}} \dot{P} \xrightarrow{\dot{\lambda}} \mathcal{J}(P^0)[1]$. Como $\mathcal{J}(P^0)[1]$ es inyectivo (proposición (??)), existe un morfismo $\dot{\mu}: \dot{E} \rightarrow \mathcal{J}(P^0)[1]$ tal que $\dot{\mu}\dot{f} = \dot{\lambda}\dot{h}$. Entonces, tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dot{E} : & \cdots & \longrightarrow & E^{-2} & \xrightarrow{d_E^{-2}} & E^{-1} & \xrightarrow{d_E^{-1}} & E^0 & \xrightarrow{d_E^0} & E^1 & \longrightarrow & \cdots \\ & & & \downarrow \nu^{-2} & & \downarrow \nu^{-1} & & \downarrow \mu^0 & & \downarrow 0 & & \\ \dot{Q} : & \cdots & \longrightarrow & P^{-2} & \xrightarrow{d_P^{-2}} & P^{-1} & \xrightarrow{d_P^{-1}} & P^0 & \xrightarrow{\eta} & S & \longrightarrow & \cdots \\ & & & \downarrow 0 & & \downarrow d_P^{-1} & & \parallel & & \downarrow 0 & & \\ \mathcal{J}(P^0)[1] : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P^0 & \xrightarrow{1} & P^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Como \dot{E} es un complejo radical, $\text{Im}d_E^{-1} \subseteq \text{rad}E^0$. Además, $\mu^0(\text{rad}E^0) \subseteq \text{rad}(P^0)$, que, a su vez, está contenido en $\ker \eta$. Luego, si $x \in E^{-1}$, entonces $\eta\mu^0 d_E^{-1}(x) = 0$. \dot{Q} es una sucesión exacta, es decir, d_P^{-1} es núcleo de η . Luego, por la propiedad universal de los núcleos, existe un único morfismo $\nu^{-1}: E^{-1} \rightarrow P^{-1}$ tal que $d_P^{-1}\nu^{-1} = \mu^0 d_E^{-1}$. Por inducción en este razonamiento se prueba la existencia de un único morfismo $\nu^{-2}: E^{-2} \rightarrow P^{-2}$, tal que $d_P^{-2}\nu^{-2} = \nu^{-1}d_E^{-2}$. Definimos $\nu^0 := \mu^0$. Sea $\dot{\nu} := (\cdots, \nu^{-2}, \nu^{-1}, \nu^0, 0, \cdots)$. Podemos pensar el morfismo $\dot{\nu}$ como $\dot{\nu}: \dot{E} \rightarrow \dot{Q}$, o bien, $\dot{\nu}: \dot{E} \rightarrow \dot{P}$. En ambos casos $\dot{\nu}$ es un morfismo de complejos. Como $\mu^0 d_E^{-1} = \mu^{-1}$ (pues $\dot{\mu}$ es de complejos) y, por otro lado, $\mu^0 d_E^{-1} = d_P^{-1}\nu^{-1}$, tenemos que $\mu^{-1} = d_P^{-1}\nu^{-1}$. Por lo tanto, $\dot{\lambda}\dot{\nu} = \dot{\mu}$. Además, teníamos que $\dot{\mu}\dot{f} = \dot{\lambda}\dot{h}$, entonces $\dot{\lambda}\dot{\nu}\dot{f} = \dot{\lambda}\dot{h}$, es decir, $\dot{\lambda}(\dot{h} - \dot{\nu}\dot{f}) = 0$. El morfismo $\dot{h} - \dot{\nu}\dot{f}$ va de \dot{M} a \dot{P} , y tenemos el

diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \dot{M}: & \dots & \longrightarrow & M^{-2} & \xrightarrow{d_M^{-2}} & M^{-1} & \xrightarrow{d_M^{-1}} & M^0 & \xrightarrow{d_M^0} & M^1 & \longrightarrow & \dots \\
 \downarrow \scriptstyle{h-\dot{\nu}f} & & & \downarrow \scriptstyle{(h-\dot{\nu}f)^{-2}} & & \downarrow \scriptstyle{(h-\dot{\nu}f)^{-1}} & & \downarrow \scriptstyle{(h-\dot{\nu}f)^0} & & \downarrow \scriptstyle{0} & & \\
 \dot{P}: & \dots & \longrightarrow & P^{-2} & \xrightarrow{d_P^{-2}} & P^{-1} & \xrightarrow{d_P^{-1}} & P^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
 \downarrow \scriptstyle{\lambda} & & & \downarrow \scriptstyle{0} & & \downarrow \scriptstyle{d_P^{-1}} & & \parallel & & \downarrow \scriptstyle{0} & & \\
 \mathcal{J}(\underline{P}^0)[1]: & \dots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & P^0 & \xrightarrow{1} & P^0 & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Probemos que $\dot{h} - \dot{\nu}f$ es homotópico a cero. Del diagrama anterior vemos, en particular, que $1(\dot{h} - \dot{\nu}f)^0 = 0$, luego $(\dot{h} - \dot{\nu}f)^0 = 0$. Sean los morfismos $t_0 := 0: M^1 \rightarrow P^0$ y $t_{-1} := 0: M^0 \rightarrow P^{-1}$. Tenemos que $d_P^{-1}(\dot{h} - \dot{\nu}f)^{-1} = 0$ y que d_P^{-2} es un núcleo de d_P^{-1} , ya que \dot{P} es exacto en todos sus términos excepto en P^0 . Luego, por la propiedad universal de los núcleos, existe un morfismo $t_{-2}: M^{-1} \rightarrow P^{-2}$ tal que $(\dot{h} - \dot{\nu}f)^{-1} = d_P^{-2}t_{-2}$, luego, se tiene que $(\dot{h} - \dot{\nu}f)^{-1} = d_P^{-2}t_{-2} + t_{-1}d_M^{-1}$.

Razonemos inductivamente: Supongamos que existe una familia de morfismos $\{t_{-i}\}_{i=0}^s$ tales que $t_{-i}: M^{-i+1} \rightarrow P^{-i}$ y, para todo $i \in \{1, \dots, s\}$,

$$(\dot{h} - \dot{\nu}f)^{-i+1} = d_P^{-i}t_{-i} + t_{-i+1}d_M^{-i+1}. \quad (7.2)$$

Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \dot{M}: & \dots & M^{-(s+1)} & \xrightarrow{d_M^{-(s+1)}} & M^{-s} & \xrightarrow{d_M^{-s}} & M^{-(s-1)} & \xrightarrow{d_M^{-(s-1)}} & \dots \\
 \downarrow \scriptstyle{(h-\dot{\nu}f)^{-(s+1)}} & & \downarrow & \swarrow \scriptstyle{t_{-(s+1)}} & \downarrow \scriptstyle{(h-\dot{\nu}f)^{-s}} & \swarrow \scriptstyle{t_{-s}} & \downarrow \scriptstyle{(h-\dot{\nu}f)^{-(s-1)}} & \swarrow \scriptstyle{t_{-(s-1)}} & & & \\
 \dot{P}: & \dots & P^{-(s+1)} & \xrightarrow{d_P^{-(s+1)}} & P^{-s} & \xrightarrow{d_P^{-s}} & P^{-(s-1)} & \xrightarrow{d_P^{-(s-1)}} & \dots
 \end{array}$$

Notemos que para el morfismo $(\dot{h} - \dot{\nu}f)^{-s} - t_{-s}d_M^{-s}: M^{-s} \rightarrow P^{-s}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 d_P^{-s}[(\dot{h} - \dot{\nu}f)^{-s} - t_{-s}d_M^{-s}] &= d_P^{-s}(\dot{h} - \dot{\nu}f)^{-s} - d_P^{-s}t_{-s}d_M^{-s} \\
 &= (\dot{h} - \dot{\nu}f)^{-s+1}d_M^{-s} - d_P^{-s}t_{-s}d_M^{-s} = 0,
 \end{aligned}$$

usando que $\dot{h} - \dot{\nu}f$ es un morfismo de complejos y la ecuación (??), con $i = s$. Como d_P^{-s-1} es un núcleo de d_P^{-s} , por la propiedad universal de los núcleos, existe un morfismo $t_{-(s+1)}: M^{-s} \rightarrow P^{-s-1}$ tal que $(\dot{h} - \dot{\nu}f)^{-s} = d_P^{-(s+1)}t_{-(s+1)} + t_{-s}d_M^{-s}$. Por lo tanto, la familia $\{t_{-i}\}_{i=0}^\infty$ prueba que $\dot{h} - \dot{\nu}f$

es homotópico a cero. Es decir, $\dot{h} - \dot{\nu}f$ se factoriza a través de un proyectivo-inyectivo T , y se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \dot{M} & \xrightarrow{\dot{h} - \dot{\nu}f} & \dot{P} \\ & \searrow \dot{\sigma} & \nearrow \dot{\rho} \\ & T & . \end{array}$$

Como T es inyectivo, existe $\dot{\xi}: \dot{E} \rightarrow T$ tal que $\dot{\xi}f = \dot{\sigma}$. Por lo tanto, $\dot{h} - \dot{\nu}f = \dot{\rho}\dot{\sigma} = \dot{\rho}\dot{\xi}f$, entonces $\dot{h} = \dot{\nu}f + \dot{\rho}\dot{\xi}f = (\dot{\nu} + \dot{\rho}\dot{\xi})f$. Es decir, \dot{h} se factoriza a través de f . Por lo tanto, \dot{P} es inyectivo.

Para cada $u \in \mathbb{Z}$, la traslación

$$\begin{array}{ccc} T_u: R\mathcal{C}(A-\text{Proy}) & \longrightarrow & R\mathcal{C}(A-\text{Proy}) \\ & & \begin{array}{ccc} \dot{P}_1 & & \dot{P}_1[u] \\ \dot{g} \downarrow & \longmapsto & \downarrow \dot{g}[u] \\ \dot{P}_2 & & \dot{P}_2[u], \end{array} \end{array}$$

determina un automorfismo de categorías que, claramente, preserva inyectividad. □

Proposición 7.8. *Si $M \in A^!-\text{Mod}$ es tal que $\dot{P} \cong f(M)[u]$, donde \dot{P} es una resolución proyectiva minimal de algún módulo simple S , entonces M es inyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Por contradicción. Supongamos que M no es inyectivo, entonces existe en $A^!-\text{Mod}$ una sucesión exacta no trivial

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{s} E \xrightarrow{t} L \longrightarrow 0. \tag{7.3}$$

Como el funtor f es exacto, entonces

$$0 \longrightarrow f(M) \xrightarrow{f(s)} f(E) \xrightarrow{f(t)} f(L) \longrightarrow 0 \tag{7.4}$$

es exacta. Pero $f(M) \cong \dot{P}[-u]$, que es inyectivo por la proposición (??). Luego, la sucesión (??) se divide, así que existe un morfismo $h: f(E) \rightarrow f(M)$ tal que $hf(s) = 1_{f(M)}$. Como f es un funtor pleno, $h = f(\sigma)$ para algún $\sigma: E \rightarrow M$. Por lo tanto, $f(\sigma s) = f(\sigma)f(s) = 1_{f(M)} = f(1_M)$, y, como f es fiel, entonces $\sigma s = 1$, lo cual contradice la suposición de que (??) fuera no trivial. Por lo tanto, M es inyectivo. □

Proposición 7.9. *Sea S_x el A -módulo simple en el vértice x y sea \dot{P} una resolución proyectiva minimal de S_x . Entonces \dot{P} es inescindible en $\mathcal{C}(A\text{-Mod})$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\dot{P} = \dot{W}_1 \oplus \dot{W}_2$. Entonces, tanto \dot{P} como \dot{W}_1 y \dot{W}_2 están en $\mathcal{C}(A\text{-Mod})$. Además, la homología en el lugar cero de \dot{P} es: $H^0(\dot{P}) = S_x = H^0(\dot{W}_1) \oplus H^0(\dot{W}_2)$. Entonces podemos suponer que $H^0(\dot{W}_1) = S_x$ y que $H^0(\dot{W}_2) = 0$. Además, $0 = H^i(\dot{P}) = H^i(\dot{W}_1) \oplus H^i(\dot{W}_2)$, para $i \neq 0$. Luego, $H^i(\dot{W}_2) = 0$, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, \dot{W}_2 es un complejo acíclico de proyectivos. Por la proposición (??) la identidad en \dot{W}_2 es homotópica a cero, de ahí que \dot{W}_2 sea isomorfo a un complejo \mathcal{E} -proyectivo-inyectivo J . Luego, \dot{W}_2 es isomorfo a un coproducto $\coprod_{i \in L} \dot{J}_i(Q_i)$,

donde cada $\dot{J}_i(Q_i) = \dots 0 \longrightarrow Q_i \xrightarrow{1} Q_i \longrightarrow 0 \dots$ es el complejo que tiene a Q_i en los lugares i e $i + 1$.

Si $\dot{W}_2 \neq 0$, entonces existe un $i \in L$ tal que $\dot{J}_i(Q_i)$ es sumando directo de \dot{P} . Pero \dot{P} es radical (por ser minimal), luego, no tiene sumandos directos de la forma $\dot{J}_i(Q_i)$ (proposición (??)). Por lo tanto, \dot{P} es inescindible. \square

7.2. El funtor de Koszul $f^c: \mathcal{C}(A^1\text{-Mod}) \rightarrow \mathcal{C}(A\text{-Mod})$

En la proposición (??) definimos un funtor $f: A^1\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{C}(A\text{-Proy})$ que es fiel, pleno y exacto. Ahora queremos extender este funtor a uno de $\mathcal{C}(A^1\text{-Mod})$ en $\mathcal{C}(A\text{-Mod})$.

Para la siguiente definición, recordemos las nociones de bicomplejo y de complejo total (página ??).

Definición 7.10. *Sea $\dot{M} = (M^i, d_M^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ un complejo en $\mathcal{C}(A^1\text{-Mod})$, defi-*

tenemos el siguiente bicomplejo de A -módulos que denotamos por $\widehat{\mathbf{f}}(\dot{M})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & (7.5) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & A \otimes S_{i+1}M^j & \xrightarrow{1 \otimes d_M^{i+1,j}} & A \otimes S_{i+1}M^{j+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow (-1)^j d_{\mathbf{f}M^j}^i & & \uparrow (-1)^{j+1} d_{\mathbf{f}M^{j+1}}^i & & \\
 \cdots & \longrightarrow & A \otimes S_i M^j & \xrightarrow{1 \otimes d_M^{i,j}} & A \otimes S_i M^{j+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow (-1)^j d_{\mathbf{f}M^j}^{i-1} & & \uparrow (-1)^{j+1} d_{\mathbf{f}M^{j+1}}^{i-1} & & \\
 \cdots & \longrightarrow & A \otimes S_{i-1}M^j & \xrightarrow{1 \otimes d_M^{i-1,j}} & A \otimes S_{i-1}M^{j+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

donde el morfismo $d_M^{i,j}$ al que nos referimos denota restricciones del j -ésimo morfismo diferencial del complejo M y, además, para un generador $a \otimes m$, se tiene que $d_{\mathbf{f}M^j}^i(a \otimes m) = \sum_{\gamma} a\gamma \otimes \gamma^{\text{op}}m$ (y se verifica que, efectivamente, anticonmutan los cuadros). Así,

$$\widehat{\mathbf{f}}(\dot{M}) = (\mathbf{f}(M^j)^i)_{i,j \in \mathbb{Z}} = ((A \bigotimes_S S_i M^j), (1 \otimes d_M^{i,j}), ((-1)^j d_{\mathbf{f}M^j}^i))_{i,j \in \mathbb{Z}}.$$

Para un morfismo de complejos $\dot{u}: \dot{M} \rightarrow \dot{N}$, tenemos el morfismo de bicomplejos $\widehat{\mathbf{f}}(\dot{u}): \widehat{\mathbf{f}}(\dot{M}) \rightarrow \widehat{\mathbf{f}}(\dot{N})$ definido por:

$$\widehat{\mathbf{f}}(\dot{u})^{i,j} := (\mathbf{f}u^i)^j: \mathbf{f}(M^i)^j \rightarrow \mathbf{f}(N^i)^j,$$

para $i, j \in \mathbb{Z}$.

Lema 7.11. $\widehat{\mathbf{f}}: \mathcal{C}(A^!-\text{Mod}) \rightarrow \text{Bi}\mathcal{C}(A-\text{Mod})$ es un funtor exacto que conmuta con coproductos.

DEMOSTRACIÓN. 1. Veamos que $\widehat{\mathbf{f}}$ es un funtor. Sean \dot{u} y \dot{v} un par de morfismos de complejos tales que $\dot{v}\dot{u}$ tiene sentido. Entonces,

$$\begin{aligned}
 (\widehat{\mathbf{f}}(\dot{v}\dot{u}))^{ij} &= (\mathbf{f}(\dot{v}\dot{u})^i)^j && \text{por definición,} \\
 &= (\mathbf{f}(v^i u^i))^j = (\mathbf{f}v^i \mathbf{f}u^i)^j && \text{porque } \mathbf{f} \text{ es un funtor,} \\
 &= (\mathbf{f}v^i)^j (\mathbf{f}u^i)^j = (\widehat{\mathbf{f}}(\dot{v}))^{ij} (\widehat{\mathbf{f}}(\dot{u}))^{ij},
 \end{aligned}$$

y, para cada complejo \dot{M} ,

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathbf{f}}(1_{\dot{M}}))^{ij} &= (\mathbf{f}(1_{\dot{M}})^i)^j && \text{por definición,} \\ &= (\mathbf{f}(1_{M^i}))^j = (1_{\mathbf{f}M^i})^j && \text{porque } \mathbf{f} \text{ es un functor,} \\ &= (1_{(\mathbf{f}M^i)^j}) = 1_{(\widehat{\mathbf{f}}\dot{M})^{ij}} \\ &= (1_{\widehat{\mathbf{f}}\dot{M}})^{ij}. \end{aligned}$$

2. Veamos que $\widehat{\mathbf{f}}$ es exacto. Sea $0 \longrightarrow \dot{M} \xrightarrow{u} \dot{E} \xrightarrow{v} \dot{N} \longrightarrow 0$ una \mathcal{E} -sucesión en $\mathcal{C}(A^1\text{-Mod})$. Entonces, para todo $i \in \mathbb{Z}$, se tiene que la sucesión

$$0 \longrightarrow M^i \xrightarrow{u^i} E^i \xrightarrow{v^i} N^i \longrightarrow 0$$

es exacta en $A^1\text{-Mod}$ y se divide. Como \mathbf{f} es exacto, entonces

$$0 \longrightarrow \mathbf{f}M^i \xrightarrow{\mathbf{f}u^i} \mathbf{f}E^i \xrightarrow{\mathbf{f}v^i} \mathbf{f}N^i \longrightarrow 0$$

es exacta en $\mathcal{C}(A\text{-Proy})$. Luego, la sucesión

$$0 \longrightarrow (\mathbf{f}M^i)^j \xrightarrow{(\mathbf{f}u^i)^j} (\mathbf{f}E^i)^j \xrightarrow{(\mathbf{f}v^i)^j} (\mathbf{f}N^i)^j \longrightarrow 0$$

es exacta de A -módulos proyectivos (así que se divide) para cada $j \in \mathbb{Z}$.

3. Probemos que $\widehat{\mathbf{f}}$ conmuta con coproductos. Sea $\{\dot{X}_s\}_{s \in T}$ una familia de complejos de A^1 -módulos. Como el functor $\mathbf{f}: A^1\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{C}(A^1\text{-Mod})$ conmuta con coproductos (proposición (??)), existe una familia $\{\rho_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ de isomorfismos de complejos tales que, fijando $i \in \mathbb{Z}$, para cada $s \in T$ conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_s \mathbf{f}(X_s^i) & \xrightarrow[\cong]{\rho_i} & \mathbf{f}(\coprod_s X_s^i) \\ \lambda_{s,i} \uparrow & \nearrow \mathbf{f}(\sigma_s^i) & \\ \mathbf{f}(X_s^i) & & \end{array}$$

donde $\sigma_s^i: X_s^i \rightarrow \coprod_s X_s^i$ y $\lambda_{s,i}$ son las inyecciones canónicas. Fijando $i \in \mathbb{Z}$, veamos el diagrama anterior en la entrada j :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_s [\mathbf{f}(X_s^i)]^j & \xrightarrow{\rho_i^j} & [\mathbf{f}(\coprod_s X_s^i)]^j \\ \lambda_{s,i}^j \uparrow & \nearrow [\mathbf{f}(\sigma_s^i)]^j & \\ \mathbf{f}(X_s^i)^j & & \end{array} .$$

Sea $d^{ij}: \coprod_s \mathbf{f}(X_s^i)^j \rightarrow \coprod_s \mathbf{f}(X_s^{i+1})^j$ diferencial del bicomplejo $\coprod_s \mathbf{f}(\dot{X}_s)$. En el siguiente diagrama el cuadrado a la izquierda conmuta por definición de la diferencial d^{ij} :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{f}(X_s^i)^j & \xrightarrow{\lambda_{s,i}^j} & \coprod_s \mathbf{f}(X_s^i)^j & \xrightarrow{\rho_i^j} & [\mathbf{f}(\coprod_s X_s^i)]^j \\ \downarrow (\mathbf{f}d_{X_s^i}^i)^j & & \downarrow d^{ij} & & \downarrow [\mathbf{f}(d_{\coprod_s \dot{X}_s}^i)]^j \\ \mathbf{f}(X_s^{i+1})^j & \xrightarrow{\lambda_{s,i+1}^j} & \coprod_s \mathbf{f}(X_s^{i+1})^j & \xrightarrow{\rho_{i+1}^j} & [\mathbf{f}(\coprod_s X_s^{i+1})]^j \end{array}$$

Probemos la conmutatividad del cuadrado derecho:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(d_{\coprod_s \dot{X}_s}^i)^j \rho_i^j \lambda_{s,i}^j &= \mathbf{f}(d_{\coprod_s \dot{X}_s}^i)^j \mathbf{f}(\sigma_s^i)^j = \mathbf{f}(d_{\coprod_s \dot{X}_s}^i \sigma_s^i)^j \\ &= \mathbf{f}(\sigma_s^{i+1} d_{X_s^i}^i)^j = \mathbf{f}(\sigma_s^{i+1})^j \mathbf{f}(d_{X_s^i}^i)^j \\ &= \rho_{i+1}^j \lambda_{s,i+1}^j \mathbf{f}(d_{X_s^i}^i)^j. \end{aligned}$$

De manera análoga se prueba la conmutatividad del siguiente cuadrado para la diferencial $\delta^{ij}: \coprod_s \mathbf{f}(X_s^i)^j \rightarrow \coprod_s \mathbf{f}(X_s^i)^{j+1}$:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_s \mathbf{f}(X_s^i)^j & \xrightarrow{\rho_i^j} & [\mathbf{f}(\coprod_s X_s^i)]^j \\ \downarrow \delta^{ij} & & \downarrow [\mathbf{f}(d_{\coprod_s \dot{X}_s}^i)]^j \\ \coprod_s \mathbf{f}(X_s^i)^{j+1} & \xrightarrow{\rho_i^{j+1}} & [\mathbf{f}(\coprod_s X_s^i)]^{j+1}. \end{array}$$

Luego, $\check{\psi} := \{\rho_i^j\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$, es un isomorfismo de bicomplejos:

$$\check{\psi}: \coprod_s \widehat{\mathbf{f}}(\dot{X}_s) \longrightarrow \widehat{\mathbf{f}}(\coprod_s \dot{X}_s)$$

□

Definición 7.12. Definimos el funtor

$$\mathbf{f}^c: \mathcal{C}(A^1\text{-Mod}) \longrightarrow \mathcal{C}(A\text{-Mod})$$

como la composición:

$$\mathcal{C}(A^1\text{-Mod}) \xrightarrow{\widehat{\mathbf{f}}} \text{Bi}\mathcal{C}(A\text{-Mod}) \xrightarrow{\text{Tot}} \mathcal{C}(A\text{-Mod}).$$

Con frecuencia, denotamos también con \mathbf{f}^c la restricción $\mathbf{f}^c: \mathcal{C}(A^1\text{-Mod}) \rightarrow \mathcal{C}(A\text{-Proy})$.

Lema 7.13. $f^c: \mathcal{C}(A^1\text{-Mod}) \rightarrow \mathcal{C}(A\text{-Proy})$ es un funtor exacto que conmuta con coproductos.

DEMOSTRACIÓN. Por definición, f^c es la composición de los funtores:

$$\mathcal{C}(A^1\text{-Mod}) \xrightarrow{\widehat{f}} \text{Bi}\mathcal{C}(A\text{-Mod}) \xrightarrow{\text{Tot}} \mathcal{C}(A\text{-Mod}).$$

Por los lemas (??), (??) y (??), tenemos que \widehat{f} y Tot son funtores exactos que conmutan con coproductos. Además, es claro que la composición de funtores exactos es un funtor exacto y que la composición de funtores que conmutan con coproductos también conmuta con coproductos. \square

Observación 7.14. El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A^1\text{-Mod} & \xrightarrow{f} & \mathcal{C}(A\text{-Proy}) \\ E \downarrow & & \parallel \\ \mathcal{C}(A^1\text{-Mod}) & \xrightarrow{f^c} & \mathcal{C}(A\text{-Proy}), \end{array}$$

donde E es el funtor que envía cada A^1 -módulo en su complejo concentrado \underline{M} .

DEMOSTRACIÓN. Sea M un A^1 -módulo. Tenemos su complejo concentrado,

$$\underline{M} = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

luego, el bicomplejo $\widehat{f}(\underline{M})$, se visualiza así:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A \otimes_S S_{i+1}M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \cdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & & & & (-1)^0 d_{fM}^i & & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A \otimes_S S_i M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \cdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & & & & (-1)^0 d_{fM}^{i-1} & & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A \otimes_S S_{i-1}M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \cdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Por definición, $\mathbf{f}^c(\underline{M}) = \text{Tot}(\widehat{\mathbf{f}}(\underline{M}))$ es el complejo:

$$\cdots \longrightarrow \coprod_{i+j=n-1} A \otimes_S S_i \underline{M}^j \xrightarrow{d_T^{n-1}} \coprod_{i+j=n} A \otimes_S S_i \underline{M}^j \xrightarrow{d_T^n} \coprod_{i+j=n+1} A \otimes_S S_i \underline{M}^j \longrightarrow \cdots,$$

donde d_T^i es la i -ésima diferencial del complejo total. Como, exceptuando la columna $j = 0$, todas las entradas son cero en el bicomplejo $\widehat{\mathbf{f}}(\underline{M})$, entonces $\text{Tot}(\widehat{\mathbf{f}}(\underline{M}))$ es el complejo:

$$\cdots \longrightarrow A \otimes_S S_{i-1} M \xrightarrow{d_{\mathbf{f}M}^{i-1}} A \otimes_S S_i M \xrightarrow{d_{\mathbf{f}M}^i} A \otimes_S S_{i+1} M \longrightarrow \cdots$$

que es, precisamente, la definición de $\mathbf{f}M$. Por lo tanto,

$$\mathbf{f}^c(E(M)) = \mathbf{f}^c(\underline{M}) = \text{Tot}(\widehat{\mathbf{f}}(\underline{M})) \cong \mathbf{f}(M).$$

□

Observación 7.15. *El funtor \mathbf{f}^c conmuta con las traslaciones.*

DEMOSTRACIÓN. Dado \dot{M} en $\mathcal{C}(A^!-\text{Mod})$ tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^c(\dot{M}) &= \text{Tot}(\widehat{\mathbf{f}}(\dot{M})) \\ &= \text{Tot}([(fM^j)^i, (1 \otimes d_M^{i,j}), ((-1)^j d_{\mathbf{f}M^j}^i)]_{i,j \in \mathbb{Z}}) =: \dot{T} \\ \mathbf{f}^c(\dot{M}[1]) &= \text{Tot}(\widehat{\mathbf{f}}(\dot{M}[1])) \\ &= \text{Tot}([(fM^{j+1})^i, (1 \otimes d_{\dot{M}[1]}^{i,j+1}), ((-1)^{j+1} d_{\mathbf{f}M^{j+1}}^i)]_{i,j \in \mathbb{Z}}) =: \dot{T}_1 \end{aligned}$$

Luego, se tiene:

$$(\dot{T})^s = \bigoplus_{i+j=s} (fM^j)^i,$$

y por otro lado:

$$(\dot{T}_1)^s = \bigoplus_{i+j+1=s} (fM^{j+1})^i,$$

luego,

$$(\dot{T}[1])^s = \bigoplus_{i+j=s+1} (fM^j)^i = \bigoplus_{i+j+1=s} (fM^{j+1})^i = (\dot{T}_1)^s,$$

Por lo tanto, $\mathbf{f}^c(\dot{M}[1]) = \mathbf{f}^c(\dot{M}[1])$.

□

7.3. El funtor de Koszul $f^K: K(A^1\text{-Mod}) \rightarrow K(A\text{-Mod})$

Proposición 7.16. *El funtor f^c induce otro funtor f^K entre las categorías homotópicas de $K(A^1\text{-Mod})$ y $K(A\text{-Mod})$ tal que si π y ρ son las proyecciones canónicas, conmuta el diagrama siguiente:*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(A^1\text{-Mod}) & \xrightarrow{f^c} & \mathcal{C}(A\text{-Mod}) \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \rho \\
 K(A^1\text{-Mod}) & \xrightarrow{f^K} & K(A\text{-Mod}).
 \end{array}$$

Además, f^K conmuta con las traslaciones.

DEMOSTRACIÓN. Para mostrar la existencia de f^K , basta probar que para un morfismo \dot{u} en $\mathcal{C}(A^1\text{-Mod})$ homotópico a cero, se tiene que $f^c(\dot{u})$ en $\mathcal{C}(A\text{-Mod})$ también es homotópico a cero. Sea \dot{u} un morfismo homotópico a cero en $\mathcal{C}(A^1\text{-Mod})$. Luego, \dot{u} se factoriza a través de un \mathcal{E} -proyectivo \dot{N} en $\mathcal{C}(A^1\text{-Mod})$. Por la observación (??), podemos suponer que \dot{N} es de la forma $\mathcal{J}(\dot{Z})$. Entonces, \dot{N} es suma de complejos en $\mathcal{C}(A^1\text{-Mod})$ de la forma:

$$\dot{J}_i(M) : \quad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{1_M} M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

en las entradas i e $i+1$, con $M \in A^1\text{-Mod}$. Sea $\dot{J}_i(M)$ uno de estos complejos. Denotemos por \dot{L} el complejo fM . Sea \ddot{L} el bicomplejo $\widehat{f}(\dot{J}_i(M))$, el cual tiene las mismas entradas que el complejo \dot{L} en las columnas i e $i+1$, pero las diferenciales tienen signo alterado por el factor $(-1)^i$ ó $(-1)^{i+1}$ respectivamente. Es decir, el bicomplejo \ddot{L} se ve así:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & L^{i,j+1} & \xrightarrow{1} & L^{i+1,j+1} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & (-1)^i d_L^j & & & & (-1)^{i+1} d_L^j & & \\
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & L^{i,j} & \xrightarrow{1} & L^{i+1,j} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & (-1)^i d_L^{j-1} & & & & (-1)^{i+1} d_L^{j-1} & & \\
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & L^{i,j-1} & \xrightarrow{1} & L^{i+1,j-1} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

Luego, es claro que:

$$L^{u,v} = \begin{cases} 0 & \text{si } u \neq i, i+1, \\ L^v, & \text{si } u = i, \text{ ó } u = i+1. \end{cases}$$

Sea el complejo $\dot{T} := \text{Tot}(\ddot{L}) = \text{Tot}(\widehat{\mathbf{f}}(\dot{J}_i(M))) = \mathbf{f}^c(\dot{J}_i(M))$. Luego,

$$\begin{aligned} T^s &= \bigoplus_{u+v=s} L^{u,v} = L^{i+1,s-(i+1)} \oplus L^{i,s-i} \\ &= L^{s-i-1} \oplus L^{s-i} = (\mathbf{f}M)^{s-i-1} \oplus (\mathbf{f}M)^{s-i}. \end{aligned}$$

Además, teniendo en mente la definición de la diferencial de $\text{Tot}(\ddot{L})$,

$$d_T^s = \begin{pmatrix} (-1)^{i+1} d_{\mathbf{f}M}^{s-i-1} & 1 \\ 0 & (-1)^i d_{\mathbf{f}M}^{s-i} \end{pmatrix} : L^{i+1,s-(i+1)} \oplus L^{i,s-i} \rightarrow L^{i+1,s-i} \oplus L^{i,s-i+1}.$$

Queremos ver que $\mathbf{f}^c(\dot{J}_i(M)) = 0$. Por (??) tenemos que

$$\mathbf{f}^c(\dot{J}_{i+1}(M)) = \mathbf{f}^c(\dot{J}_i(M)[1]) \cong \mathbf{f}^c(\dot{J}_i(M))[1],$$

entonces, podemos suponer que i es impar.

Recordemos que el cono del morfismo identidad en $\mathbf{f}M[-i-1]$ es (definición (??)):

$$\text{Con}_1 = (\mathbf{f}M^{s-i-1} \oplus \mathbf{f}M^{s-i}, d_c^s)_{s \in \mathbb{Z}},$$

con $d_c^s = \begin{pmatrix} d_{\mathbf{f}M}^{s-i-1} & 1 \\ 0 & -d_{\mathbf{f}M}^{s-i} \end{pmatrix}$. Luego, es claro que $\dot{T} = \text{Con}_{1_{\mathbf{f}M[-i-1]}}$. Entonces, tenemos el siguiente diagrama de triángulos en la categoría homotópica $K(A-\text{Mod})$:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{f}M[-i-1] & \xrightarrow{1} & \mathbf{f}M[-i-1] & \longrightarrow & \text{Con}_1 & \longrightarrow & \mathbf{f}M[-i] \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \gamma & & \parallel \\ \mathbf{f}M[-i-1] & \xrightarrow{1} & \mathbf{f}M[-i-1] & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbf{f}M[-i]. \end{array}$$

Por la proposición (??) existe el morfismo γ que hace conmutar el diagrama y por (??) γ es isomorfismo. Luego, $\mathbf{f}^c(\dot{J}_i(M)) = \dot{T} \cong \text{Con}_1$ es isomorfo a 0 en la categoría homotópica $K(A-\text{Mod})$. Entonces, para el \mathcal{E} -proyectivo \dot{N} se tiene:

$$\mathbf{f}^c(\dot{N}) \cong \mathbf{f}^c(\coprod \dot{J}_i(M)) \cong \coprod \mathbf{f}^c(\dot{J}_i(M)) \cong 0,$$

en la homotópica. Es decir, \mathbf{f}^c envía \dot{N} a cero en la categoría homotópica $K(A-\text{Proy})$. Entonces, $\mathbf{f}^c(\dot{u})$ es homotópico a cero en $\mathcal{C}(A-\text{Mod})$. \square

Observación 7.17. *Dados X y Y en $A^1\text{-Mod}$, se tiene que*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}(A)}(\mathbf{f}(X), \mathbf{f}(Y)) = \text{Hom}_{K(A)}(\mathbf{f}(X), \mathbf{f}(Y)).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\hat{h} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(A)}(\mathbf{f}X, \mathbf{f}Y)$ un morfismo homotópico a cero. Luego, existe una familia de morfismos: $\{t_i: (\mathbf{f}X)^i \rightarrow (\mathbf{f}Y)^{i-1}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$h^i = d_{\mathbf{f}Y}^{i-1}t_i + t_{i+1}d_{\mathbf{f}X}^i.$$

Además, tenemos familias de isomorfismos $\{\varphi_i: (\mathbf{f}X)^i \rightarrow \coprod_{q(x)=i} Ae_x \otimes e_x X\}_{i \in \mathbb{Z}}$ y $\{\psi_i: (\mathbf{f}Y)^i \rightarrow \coprod_{q(y)=i} Ae_y \otimes e_y Y\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Luego, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 (\mathbf{f}X)^i & \xrightarrow{d_{\mathbf{f}X}^i} & & & (\mathbf{f}X)^{i+1} \\
 \downarrow \varphi_i & \searrow & & & \downarrow \varphi_{i+1} \\
 \coprod_{q(x)=i} Ae_x \otimes e_x X & \xrightarrow{d_1^i} & \coprod_{q(z)=i+1} Ae_z \otimes e_z X & & \\
 \downarrow \hat{h}^i & \swarrow \hat{t}_{i+1} & & & \downarrow \hat{h}^{i+1} \\
 \coprod_{q(y)=i} Ae_y \otimes e_y Y & \xrightarrow{d_2^i} & \coprod_{q(w)=i+1} Ae_w \otimes e_w Y & & \\
 \downarrow \psi_i & \swarrow & & & \downarrow \psi_{i+1} \\
 (\mathbf{f}Y)^i & \xrightarrow{d_{\mathbf{f}Y}^i} & & & (\mathbf{f}Y)^{i+1} \\
 \downarrow h^i & & & & \downarrow h^{i+1}
 \end{array}$$

donde definimos

$$\begin{aligned}
 \hat{h}^i &:= \psi_i h^i \varphi_i^{-1} \\
 d_1^i &:= \varphi_{i+1} d_{\mathbf{f}X}^i \varphi_i^{-1} \\
 d_2^i &:= \psi_{i+1} d_{\mathbf{f}Y}^i \psi_i^{-1} \\
 \hat{t}_i &:= \psi_{i-1} t_i \varphi_i^{-1}.
 \end{aligned}$$

Luego, es claro que

$$\begin{aligned}
 h^i &= d_{\mathbf{f}Y}^{i-1}t_i + t_{i+1}d_{\mathbf{f}X}^i \\
 &= \psi_i^{-1}d_2^{i-1}\psi_{i-1}\psi_{i-1}^{-1}\hat{t}_i\varphi_i + \psi_i^{-1}\hat{t}_{i+1}\varphi_{i+1}\varphi_{i+1}^{-1}d_1^i\varphi_i \\
 &= \psi_i^{-1}[d_2^{i-1}\hat{t}_i + \hat{t}_{i+1}d_1^i]\varphi_i,
 \end{aligned}$$

esto es, $\hat{h}^i = d_2^{i-1}\hat{t}_i + \hat{t}_{i+1}d_1^i$.

Si \hat{h} no fuera cero, entonces existiría al menos un morfismo $h^r: (\mathbf{f}X)^r \rightarrow (\mathbf{f}Y)^r$ no nulo, luego, \hat{h}^r no es cero. Tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{q(x)=r} Ae_x \otimes e_x X & \xrightarrow{d_1^r} & \coprod_{q(z)=r+1} Ae_z \otimes e_z X \\
 \hat{t}_r \swarrow & \downarrow \hat{h}^r & \nwarrow \hat{t}_{r+1} \\
 \coprod_{q(a)=r-1} Ae_a \otimes e_a Y & \xrightarrow{d_2^{r-1}} & \coprod_{q(y)=r} Ae_y \otimes e_y Y.
 \end{array}$$

Supongamos que $\hat{t}_{r+1}d_1^r \neq 0$, entonces, tanto d_1^r como \hat{t}_{r+1} no son cero. Además, al menos un sumando de $\coprod_{q(x)=r} Ae_x \otimes e_x X$, $\coprod_{q(y)=r} Ae_y \otimes e_y Y$ y

$\coprod_{q(z)=r+1} Ae_z \otimes e_z X$, es no cero, esto es, existen vértices x_0, y_0 y z_0 de pesos r, r y $r+1$ respectivamente y morfismos no cero de Ae_{x_0} en Ae_{z_0} , de Ae_{z_0} en Ae_{y_0} y de Ae_{x_0} en Ae_{y_0} . Por la proposición (??), esto implica que existe un camino de z_0 en x_0 , otro de y_0 en z_0 y uno de y_0 en x_0 . Como x_0 y y_0 tienen el mismo peso, el camino de y_0 a x_0 es el trivial, luego, tendríamos un ciclo orientado de z_0 en z_0 , lo cual es imposible. Por lo tanto, $\hat{t}_{r+1}d_1^r = 0$.

Con el mismo argumento, si $d_2^{r-1}\hat{t}_r \neq 0$, entonces existirían vértices x_1, y_1 y a_1 de pesos r, r y $r-1$ respectivamente y morfismos no cero de Ae_{x_1} en Ae_{a_1} , otro de Ae_{a_1} en Ae_{y_1} y uno más de Ae_{x_1} en Ae_{y_1} . Esto es, existiría un camino de a_1 en x_1 , otro de y_1 en a_1 y uno de y_1 en x_1 . Como x_1 y y_1 tienen el mismo peso, $x_1 = y_1$, luego, tendríamos un ciclo orientado en a_1 , lo cual no ocurre en el carcaj Q . Por lo tanto, $d_2^{r-1}\hat{t}_r = 0$.

Entonces, $\hat{h}^r = 0$, lo cual implica que $h^r = 0$, una contradicción. Por lo tanto, $\hat{h} = 0$. \square

Observación 7.18. *El funtor f^K conmuta con coproductos.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que $f^c(\dot{X}) = f^K(\dot{X})$, para todo complejo \dot{X} . Por el lema (??), f^c conmuta con coproductos, esto es, dada una familia $\{\dot{X}_i\}_{i \in I}$ de complejos, existe un morfismo de complejos invertible $\varphi: \coprod_{i \in I} f^c(\dot{X}_i) \rightarrow f^c(\coprod_{i \in I} \dot{X}_i)$. Luego, si denotamos por $\underline{\varphi}$ la clase de φ en la categoría homotópica $K(A-\text{Mod})$, tenemos que existe φ^{-1} tal que $\underline{\varphi}\varphi^{-1} = \underline{1}$, entonces $\underline{\varphi}: \coprod_{i \in I} f^K(\dot{X}_i) \rightarrow f^K(\coprod_{i \in I} \dot{X}_i)$ es invertible. \square

Proposición 7.19. Sea $L_1 \xrightarrow{\bar{u}} L_2 \xrightarrow{\bar{v}} L_3 \xrightarrow{\bar{w}} L_1[1]$ un triángulo en $K(A^1\text{-Mod})$. Entonces, $\mathbf{f}^K L_1 \xrightarrow{\mathbf{f}^K \bar{u}} \mathbf{f}^K L_2 \xrightarrow{\mathbf{f}^K \bar{v}} \mathbf{f}^K L_3 \xrightarrow{\mathbf{f}^K \bar{w}} \mathbf{f}^K L_1[1]$ es un triángulo en $K(A\text{-Mod})$.

DEMOSTRACIÓN. Sean u y v un par de morfismos en $\mathcal{C}(A^1\text{-Mod})$, representantes de las clases \bar{u} y \bar{v} respectivamente. Podemos suponer que la sucesión $0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{u} L_2 \xrightarrow{v} L_3 \longrightarrow 0$ es una \mathcal{E} -sucesión. Por otro lado, también $0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\alpha} J \xrightarrow{\beta} L_1[1] \longrightarrow 0$, es una \mathcal{E} -sucesión, con J un complejo \mathcal{E} -inyectivo (corolario (??)). Luego, existe $\lambda: L_2 \rightarrow J$ tal que $\lambda u = \alpha$. Entonces, existe $\mu: L_3 \rightarrow L_1[1]$, tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L_1 & \xrightarrow{u} & L_2 & \xrightarrow{v} & L_3 \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \lambda & & \downarrow \mu \\ 0 & \longrightarrow & L_1 & \xrightarrow{\alpha} & J & \xrightarrow{\beta} & L_1[1] \longrightarrow 0. \end{array}$$

Por el lema (??), tenemos que es un triángulo el primer renglón del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta' : L_1 & \xrightarrow{u} & L_2 & \xrightarrow{v} & L_3 & \xrightarrow{\mu} & L_1[1] \\ & \parallel & \parallel & & \downarrow \cong & & \parallel \\ \Delta : L_1 & \xrightarrow{u} & L_2 & \xrightarrow{v} & L_3 & \xrightarrow{w} & L_1[1]. \end{array}$$

El morfismo de Δ' en Δ existe por la proposición (??) y es isomorfismo por (??). Si aplicamos \mathbf{f}^c y \mathbf{f}^K respectivamente a los diagramas anteriores, obtenemos el diagrama conmutativo con renglones exactos (porque \mathbf{f}^c es exacto):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{f}^c L_1 & \xrightarrow{\mathbf{f}^c u} & \mathbf{f}^c L_2 & \xrightarrow{\mathbf{f}^c v} & \mathbf{f}^c L_3 \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \mathbf{f}^c \lambda & & \downarrow \mathbf{f}^c \mu \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{f}^c L_1 & \xrightarrow{\mathbf{f}^c \alpha} & \mathbf{f}^c J & \xrightarrow{\mathbf{f}^c \beta} & \mathbf{f}^c L_1[1] \longrightarrow 0, \end{array}$$

y el isomorfismo de séxtuples:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{f}^K L_1 & \xrightarrow{\mathbf{f}^K u} & \mathbf{f}^K L_2 & \xrightarrow{\mathbf{f}^K v} & \mathbf{f}^K L_3 & \xrightarrow{\mathbf{f}^K \mu} & \mathbf{f}^K L_1[1] \\ & \parallel & \parallel & & \downarrow \cong & & \parallel \\ \mathbf{f}^K L_1 & \xrightarrow{\mathbf{f}^K u} & \mathbf{f}^K L_2 & \xrightarrow{\mathbf{f}^K v} & \mathbf{f}^K L_3 & \xrightarrow{\mathbf{f}^K w} & \mathbf{f}^K L_1[1]. \end{array}$$

Por el lema (??), el primer renglón del último diagrama es un triángulo, y entonces el segundo renglón (isomorfo al primero) también lo es. \square

Tenemos, para \hat{Q} y Q funtores localización (definición (??)):

$$\begin{array}{ccc} K(A^!-\text{Mod}) & \xrightarrow{f^K} & K(A-\text{Mod}) \\ \hat{Q} \downarrow & & \downarrow Q \\ \mathcal{D}(A^!-\text{Mod}) & & \mathcal{D}(A-\text{Mod}). \end{array}$$

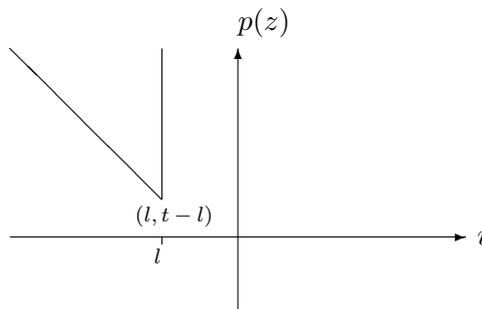
Dado un cuasi-isomorfismo u en $K(A^!-\text{Mod})$, si $Qf^K(u)$ fuera isomorfismo, por la propiedad universal de \hat{Q} podríamos definir un único funtor entre las categorías derivadas. Pero esto no ocurre. Sin embargo, hay una subcategoría de $K(A^!-\text{Mod})$ donde sí ocurre, y podremos definir un funtor entre las correspondientes categorías derivadas.

Muchas de las definiciones y enunciados que probaremos de aquí en adelante son válidos para las álgebras A y $A^!$, sin embargo, probaremos sólo lo necesario para llegar a nuestra meta de este capítulo: el teorema (??).

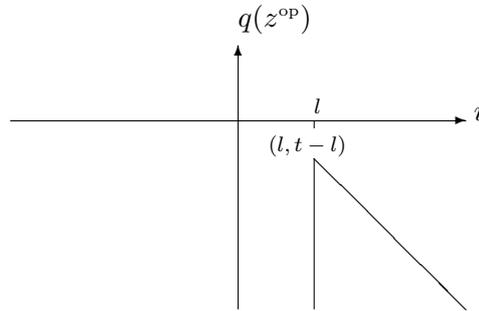
Definición 7.20. Sea $\mathcal{C}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$ la subcategoría plena de complejos de $A^!$ -módulos tales que, si $\dot{X} = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un complejo en $\mathcal{C}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$, entonces existen enteros l y t tales que $X^i = 0$ si $i < l$ y $X_z^i = 0$ si $i + q(z^{\text{op}}) > t$, donde $q(z^{\text{op}})$ denota el peso del vértice z^{op} en Q^{op} . Recordemos que $q(z^{\text{op}}) = -p(z)$.

De manera dual, $\mathcal{C}^\uparrow(A-\text{Mod})$ es la subcategoría plena de complejos de A -módulos $\dot{X} = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tales que existen enteros l y t con $X^i = 0$ si $i > l$ y $X_z^i = 0$ si $i + p(z) < t$.

Sea \dot{X} un complejo en la categoría $\mathcal{C}^\uparrow(A-\text{Mod})$. Las entradas no cero de este complejo se pueden visualizar en la región triangular trazada a continuación:



Análogamente, si \dot{X} está en $\mathcal{C}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$, entonces las entradas no cero de este complejo se pueden visualizar en la región triangular:



Lema 7.21. $\mathcal{C}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$ y $\mathcal{C}^\uparrow(A-\text{Mod})$ son subcategorías abelianas de $\mathcal{C}(A^!-\text{Mod})$ y de $\mathcal{C}(A-\text{Mod})$ respectivamente, cerradas bajo submódulos y cocientes. Es decir,

- (a) Si $\dot{g}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ es un monomorfismo en $\mathcal{C}(A^!-\text{Mod})$ (respectivamente, en $\mathcal{C}(A-\text{Mod})$) y \dot{Y} está en $\mathcal{C}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$ (ó bien, $\mathcal{C}^\uparrow(A-\text{Mod})$), entonces \dot{X} también está en $\mathcal{C}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$ ($\mathcal{C}^\uparrow(A-\text{Mod})$).
- (b) Si $\dot{h}: \dot{Y} \rightarrow \dot{X}$ es un epimorfismo en $\mathcal{C}(A^!-\text{Mod})$ (respectivamente, en $\mathcal{C}(A-\text{Mod})$) y \dot{Y} está en $\mathcal{C}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$ (ó bien, $\mathcal{C}^\uparrow(A-\text{Mod})$), entonces \dot{X} también está en $\mathcal{C}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$ ($\mathcal{C}^\uparrow(A-\text{Mod})$).

DEMOSTRACIÓN. (a) Sea $\dot{g}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ un monomorfismo en $\mathcal{C}(A^!-\text{Mod})$ con $\dot{Y} \in \mathcal{C}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$, entonces existen enteros l, t tales que $Y^i = 0$ para todo $i < l$ y $Y_x^i = 0$ si $i + q(x^{\text{op}}) > t$. Como $g^i: X^i \rightarrow Y^i$ es un monomorfismo para todo $i \in \mathbb{Z}$, se tiene que $X^i = 0$ para todo $i < l$. Además, $g_x^i: X_x^i \rightarrow Y_x^i$ también es un monomorfismo para todo $i \in \mathbb{Z}$, $x \in Q_0$, por ser restricción de g^i . Entonces, $X_x^i = 0$ para todo $i + q(x^{\text{op}}) > t$. Luego, la pareja de enteros l, t atestigua que \dot{X} está en $\mathcal{C}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$.

(b) Se prueba de manera análoga al inciso anterior. \square

Lema 7.22. El funtor f^c envía $\mathcal{C}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$ en $\mathcal{C}^\uparrow(A-\text{Mod})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea \dot{X} un complejo en $\mathcal{C}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$. Luego, existen enteros l y t tales que $X^i = 0$ si $i < l$ y $X_z^i = 0$ si $i + q(z^{\text{op}}) > t$, es decir, $i - p(z) > t$. Por otro lado, la entrada s del complejo $f^c(\dot{X})$ es:

$f^c(\dot{X})^s \cong \coprod_{\substack{x \in Q_0 \\ i_x - p(x) = s}} Ae_x \otimes X_x^{i_x}$ (notemos que i_x depende del vértice x). Sea

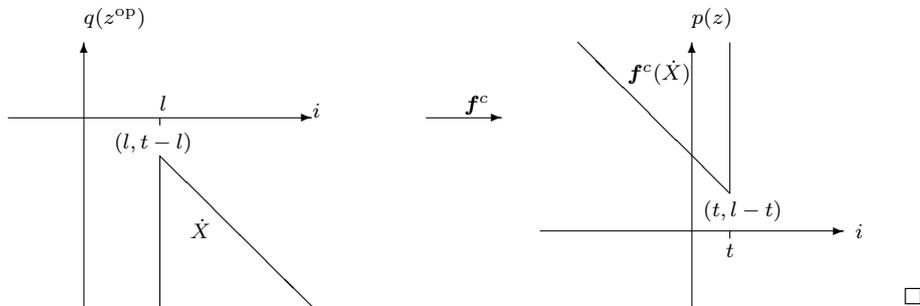
$s \in \mathbb{Z}$ con $s > t$, entonces, para cada $x \in Q_0$ existe i_x tal que $i_x - p(x) = s$, luego $i_x - p(x) > t$, así que $X_x^{i_x} = 0$ para cada $x \in Q_0$. Por lo tanto, $f^c(\dot{X})^s = 0$.

Sea $z \in Q_0$, y supongamos que $s + p(z) < l$. Tenemos que $e_z f^c(\dot{X})^s = \coprod_{\substack{x \in Q_0 \\ i_x - p(x) = s}} e_z Ae_x \otimes X_x^{i_x}$. Probaremos que cada término del coproducto es cero.

Tenemos tres casos:

- a) Si $p(x) \geq p(z)$ y $x \neq z$, entonces no hay caminos de x a z y se tiene $e_z Ae_x = 0$, luego $e_z Ae_x \otimes X_x^{i_x} = 0$.
- b) Si $x = z$, luego en el término $e_z Ae_z \otimes X_z^{i_z}$ tenemos que $i_z - p(z) = s$, entonces $i_z = s + p(z) < l$ por hipótesis, entonces $X_z^{i_z} = 0$ y se tiene $e_z Ae_z \otimes X_z^{i_z} = 0$.
- c) Si $p(x) < p(z)$, entonces $i_x = s + p(x) < s + p(z) = i_z < l$. Por lo tanto, $X_x^{i_x} = 0$ y $e_z Ae_x \otimes X_x^{i_x} = 0$ para cada x tal que $p(x) < p(z)$.

Entonces, $e_z f^c(\dot{X})^s = 0$ si $s + p(z) < l$. Tenemos lo siguiente:



Definición 7.23. Sea $K^\downarrow(A^!-\text{Mod})$ la subcategoría plena de $K(A^!-\text{Mod})$ cuyos objetos son los complejos en $\mathcal{C}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$. Además, $K^\uparrow(A-\text{Mod})$ denotará la subcategoría plena de $K(A-\text{Mod})$ cuyos objetos son los complejos en $\mathcal{C}^\uparrow(A-\text{Mod})$.

Afirmación 7.24. La categoría $K^\downarrow(A^!-\text{Mod})$ es una subcategoría triangulada de $K(A^!-\text{Mod})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea \dot{X} un complejo en $K^\downarrow(A^1\text{-Mod})$. Luego, existen enteros l y t tales que $X^i = 0$ si $i < l$ y $X_z^i = 0$ si $i + q(z^{\text{op}}) > t$. Es claro que $\dot{X}[1]$ también está en $K^\downarrow(A^1\text{-Mod})$, $l' := l + 1$ y $t' = t$ lo atestiguan. Para $\dot{X}[-1]$ definimos $l'' := l$ y $t'' = t - 1$, luego $\dot{X}[-1]$ está en $K^\downarrow(A^1\text{-Mod})$. Por lo tanto, esta categoría es cerrada bajo traslaciones. Sean \dot{X}_1 y \dot{X}_2 un par de complejos en $K^\downarrow(A^1\text{-Mod})$. Sean l_1, t_1, l_2, t_2 los respectivos enteros a los que da lugar la definición. Entonces $l = \text{mínimo}\{l_1, l_2\}$ y $t = \text{máximo}\{t_1, t_2\}$ hacen que $\dot{X}_1 \oplus \dot{X}_2$ esté en $K^\downarrow(A^1\text{-Mod})$. Sea $u: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ un morfismo en $K^\downarrow(A^1\text{-Mod})$. El triángulo que u genera en $K(A^1\text{-Mod})$ es isomorfo al triángulo $\dot{X} \xrightarrow{u} \dot{Y} \xrightarrow{\alpha} \text{Con}_u \xrightarrow{\beta} \dot{X}[1]$. Pero el cono de u está en $K^\downarrow(A^1\text{-Mod})$, como puede verse teniendo en mente su definición (??) y el argumento empleado para ver que la categoría $K^\downarrow(A^1\text{-Mod})$ resulta estable bajo sumas finitas. Luego, el triángulo $\dot{X} \xrightarrow{u} \dot{Y} \xrightarrow{\alpha} \text{Con}_u \xrightarrow{\beta} \dot{X}[1]$ está en $K^\downarrow(A^1\text{-Mod})$. \square

Denotaremos también por f^K la restricción de f^K a $K^\downarrow(A^1\text{-Mod})$.

Afirmación 7.25. *El funtor $f^K: K^\downarrow(A^1\text{-Mod}) \rightarrow K(A\text{-Mod})$ envía complejos acíclicos en complejos acíclicos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea \dot{X} un acíclico en $\mathcal{C}^\downarrow(A^1\text{-Mod})$. Entonces existen enteros l y t tales que $X^i = 0$ si $i < l$ y $e_z X^i = 0$ si $i - p(z) > t$. Como \dot{X} es acíclico, entonces la siguiente sucesión es exacta:

$$\dots \longrightarrow X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} X^{i+2} \longrightarrow \dots$$

Luego, también la siguiente sucesión es exacta:

$$\dots \longrightarrow e_x X^i \xrightarrow{d_X^i} e_x X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} e_x X^{i+2} \longrightarrow \dots$$

Tensorizar sobre un campo preserva la exactitud de una sucesión:

$$\dots \longrightarrow Ae_x \otimes_k e_x X^i \xrightarrow{1 \otimes d_X^i} Ae_x \otimes_k e_x X^{i+1} \xrightarrow{1 \otimes d_X^{i+1}} Ae_x \otimes_k e_x X^{i+2} \longrightarrow \dots$$

Finalmente, sumando tenemos:

$$\dots \longrightarrow \coprod_{\substack{x \in Q_0 \\ -p(x)=s}} Ae_x \otimes_k e_x X^i \xrightarrow{(1 \otimes d_X^i)} \coprod_{\substack{x \in Q_0 \\ -p(x)=s}} Ae_x \otimes_k e_x X^{i+1} \xrightarrow{(1 \otimes d_X^{i+1})} \dots$$

Por lo tanto, es exacta

$$R^s : \dots \longrightarrow \mathbf{f}(X^i)^s \xrightarrow{\mathbf{f}(d_{X^i})^s} \mathbf{f}(X^{i+1})^s \xrightarrow{\mathbf{f}(d_{X^{i+1}})^s} \mathbf{f}(X^{i+2})^s \longrightarrow \dots$$

Probemos que $\mathbf{f}^c(\dot{X})$ es acíclico. $\mathbf{f}(X^i)^s \cong \coprod_{\substack{x \in Q_0 \\ -p(x)=s}} Ae_x \otimes_k e_x X^i = 0$ si $i < l$

ó, si $i - p(x) > t$. Luego, tenemos el bicomplejo $\ddot{Z} := \widehat{\mathbf{f}}(\dot{X})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbf{f}(X^l)^{t-l} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbf{f}(X^l)^{t-l-1} & \longrightarrow & \mathbf{f}(X^{l+1})^{t-l-1} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbf{f}(X^l)^{t-l-2} & \longrightarrow & \mathbf{f}(X^{l+1})^{t-l-2} & \longrightarrow & \mathbf{f}(X^{l+2})^{t-l-2} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

cuyos renglones R^s son complejos acíclicos, pues, como vimos antes, \mathbf{f} es exacto. Por definición, $\mathbf{f}^K(\dot{X}) = \text{Tot} \ddot{Z}$. Sea \ddot{Z}_0 el sub-bicomplejo de \ddot{Z} cuyo único renglón posiblemente distinto de cero es $\dots 0 \longrightarrow \mathbf{f}(X^l)^{t-l} \longrightarrow 0 \dots$. Pero R^{t-l} es exacto y entonces $\mathbf{f}(X^l)^{t-l} = 0$. Luego, $\text{Tot}(\ddot{Z}_0)$ es el complejo cero y, por lo tanto, $\text{Tot}(\ddot{Z}_0)$ es acíclico. Sea \ddot{Z}_i el sub-bicomplejo de \ddot{Z} de la

forma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbf{f}(X^l)^{t-l} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbf{f}(X^l)^{t-l-i} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbf{f}(X^{l+i})^{t-l-i} & \longrightarrow & 0 \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & 0 \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

Probemos, por inducción, que cada complejo $\text{Tot}(\ddot{Z}_i)$ es acíclico. Puesto que $\mathbf{f}(X^l)^{t-l} = 0$, $\text{Tot}(\ddot{Z}_1)$ es isomorfo a

$$\cdots 0 \longrightarrow \mathbf{f}(X^l)^{t-l-1} \xrightarrow{\cong} \mathbf{f}(X^{l+1})^{t-l-1} \longrightarrow 0 \cdots,$$

luego, $\text{Tot}(\ddot{Z}_1)$ es una sucesión exacta y por lo tanto, $\text{Tot}(\ddot{Z}_1)$ es acíclico.

Supongamos que $\text{Tot}(\ddot{Z}_i)$ es acíclico. Tenemos la \mathcal{E} -sucesión:

$$0 \longrightarrow \ddot{Z}_i \xrightarrow{\ddot{\sigma}_i} \ddot{Z}_{i+1} \xrightarrow{\ddot{\pi}_i} \ddot{Z}_{i+1}/\ddot{Z}_i \longrightarrow 0,$$

donde $\ddot{\sigma}_i$ y $\ddot{\pi}_i$ son la inyección y la proyección canónicas. Luego,

$$0 \longrightarrow \text{Tot}(\ddot{Z}_i) \xrightarrow{\text{Tot}\ddot{\sigma}_i} \text{Tot}(\ddot{Z}_{i+1}) \xrightarrow{\text{Tot}\ddot{\pi}_i} \text{Tot}(\ddot{Z}_{i+1}/\ddot{Z}_i) \longrightarrow 0,$$

es exacta, por el lema (??). Además, $\ddot{Z}_{i+1}/\ddot{Z}_i$ es isomorfo al bicomplejo cuyo único renglón posiblemente no nulo es la sucesión exacta:

$$\cdots 0 \longrightarrow \mathbf{f}(X^l)^{t-l-i} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{f}(X^{l+i})^{t-l-i} \longrightarrow 0 \cdots$$

y tenemos que $\text{Tot}(\ddot{Z}_{i+1}/\ddot{Z}_i)$ es isomorfo a esta última sucesión exacta. Luego, $\text{Tot}(\ddot{Z}_{i+1}/\ddot{Z}_i)$ es acíclico. De ahí que $\text{Tot}(\ddot{Z}_{i+1})$ también lo sea. Además,

notemos que $\ddot{Z} = \bigcup_{i \geq 0} \ddot{Z}_i$. Luego, también $\text{Tot}(\ddot{Z}) = \bigcup_{i \geq 0} \text{Tot}(\ddot{Z}_i)$. Puesto que $\text{Tot}(\ddot{Z}_i)$ es acíclico, obtenemos que $\text{Tot}(\ddot{Z})$ es acíclico. \square

Proposición 7.26. *El funtor f^K envía cuasi-isomorfismos de $K^{\downarrow}(A^1\text{-Mod})$ en cuasi-isomorfismos de $K(A\text{-Proy})$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $u: X \rightarrow Y$ un cuasi-isomorfismo en la categoría $K^{\downarrow}(A^1\text{-Mod})$. Por el corolario (??) y por la afirmación (??), en el triángulo que determina $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} X[1]$, Z es acíclico. Además, f^K envía triángulos en triángulos, entonces

$$f^K(X) \xrightarrow{f^K(u)} f^K(Y) \xrightarrow{f^K(\alpha)} f^K(Z) \xrightarrow{f^K(\beta)} f^K(X[1])$$

es un triángulo. Pero $f^K(Z)$ es acíclico, luego, nuevamente por el corolario (??), $f^K(u)$ es un cuasi-isomorfismo. \square

7.4. El funtor de Koszul $f^{\mathcal{D}}: \mathcal{D}^{\downarrow}(A^1\text{-Mod}) \rightarrow \mathcal{D}(A\text{-Mod})$

Definición 7.27. *Sea M un A -módulo (o bien, un A^1 -módulo). El soporte de M es el conjunto de vértices x en Q_0 tal que $e_x M \neq 0$ ($e_x \circ p M \neq 0$). Lo denotamos por $\text{sop}M$.*

Definición 7.28. *Sea $K^{b,I}(A^1\text{-Mod})$ la subcategoría plena de $K(A^1\text{-Mod})$ cuyos objetos son los complejos finitos cuyas entradas son A^1 -módulos inyectivos de soclos de soporte finito de la forma: $\prod_{x \in Q_0} xI \otimes V_x$, con $V_x = 0$ para casi todo $x \in Q_0$.*

Observación 7.29. *Los objetos de $K^{b,I}(A^1\text{-Mod})$ son q -inyectivos (por la proposición (??)).*

Proposición 7.30. *$K^{b,I}(A^1\text{-Mod})$ es una subcategoría triangulada de la categoría homotópica $K(A^1\text{-Mod})$.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que, si $\dot{X} \in K^{b,I}(A^1\text{-Mod})$, entonces $\dot{X}[1]$ y $\dot{X}[-1]$ también están en $K^{b,I}(A^1\text{-Mod})$. Sea \dot{Y} también en $K^{b,I}(A^1\text{-Mod})$. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, $X^i = \prod_{x \in Q_0} xI \otimes V_{x,i}$ y $Y^i = \prod_{x \in Q_0} xI \otimes W_{x,i}$. Luego, $X^i \oplus Y^i = \prod_{x \in Q_0} xI \otimes (V_{x,i} \oplus W_{x,i})$, donde $V_{x,i}$ y $W_{x,i}$ son k -espacios vectoriales

de dimensión mayor o igual que cero y casi todos son cero. Por lo tanto, $\dot{X} \oplus \dot{Y}$ está en $K^{b,I}(A^1\text{-Mod})$. Además, si $\dot{u}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ es un morfismo en $K^{b,I}(A^1\text{-Mod})$, el complejo cono de \dot{u} tiene i -ésima entrada:

$$\begin{aligned} \text{Con}_{\dot{u}}^i &= Y^i \oplus X^{i+1} = \coprod_{x \in Q_0} xI \otimes W_{x,i} \oplus \coprod_{x \in Q_0} xI \otimes V_{x,i+1} \\ &= \coprod_{x \in Q_0} xI \otimes (W_{x,i} \oplus V_{x,i+1}), \end{aligned}$$

con $W_{x,i} = 0$ y $V_{x,i+1} = 0$ para casi todo $x \in Q_0$. Luego, para el triángulo

$$\dot{X} \xrightarrow{\dot{u}} \dot{Y} \xrightarrow{\alpha} \text{Con}_{\dot{u}} \xrightarrow{\beta} \dot{X}[1],$$

en $K(A^1\text{-Mod})$, se tiene que $\text{Con}_{\dot{u}} \in K^{b,I}(A^1\text{-Mod})$. \square

Proposición 7.31. *Se tiene $K^{b,I}(A^1\text{-Mod}) \subseteq K^\downarrow(A^1\text{-Mod})$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\dot{M} \in K^{b,I}(A^1\text{-Mod})$. Luego, \dot{M} tiene la forma:

$$\dots 0 \longrightarrow M^l = \coprod_{x \in T_l} xI \otimes V_x^l \longrightarrow \dots \longrightarrow M^s = \coprod_{x \in T_s} xI \otimes V_x^s \longrightarrow 0 \dots$$

Es claro que $M^i = 0$ si $i < l$. Sea $T := \bigcup_{i \in [l,s]} T_i$, que es un conjunto finito, y sea $m := \max\{q(x) \mid x \in T\}$, donde q es la función peso en Q^{op} . Luego, si $w \in Q_0$ tiene peso $q(w) > m$, obtenemos:

$$e_w M^i = e_w \left(\coprod_{x \in T_i} xI \otimes V_x^i \right) = \coprod_{x \in T_i} xI_w \otimes V_x^i = 0,$$

pues si $xI_w \neq 0$, hay un camino orientado de w en x en Q^{op} , y así: $q(w) < q(x) \leq m < q(w)$, una contradicción. De modo que, $M_w^i = 0$ si $i + q(w) > t := m + s$, pues $i + q(w) > t$ equivale a $q(w) > t - i \geq t - s = m$. \square

Definición 7.32. *Sea $\mathcal{D}^{b,I}(A^1\text{-Mod})$ la subcategoría plena de $\mathcal{D}(A^1\text{-Mod})$ cuyos objetos son los de $K^{b,I}(A^1\text{-Mod})$.*

Lema 7.33. *$\mathcal{D}^{b,I}(A^1\text{-Mod})$ es una subcategoría triangulada de $\mathcal{D}(A^1\text{-Mod})$.*

DEMOSTRACIÓN. Dados \dot{X} y \dot{Y} en $\mathcal{D}^{b,I}(A^1\text{-Mod})$, es claro que $\dot{X}[1]$, $\dot{X}[-1]$ y $\dot{X} \oplus \dot{Y}$ también están en $\mathcal{D}^{b,I}(A^1\text{-Mod})$, que tiene los mismos objetos que la categoría triangulada $K^{b,I}(A^1\text{-Mod})$. Sea $\delta: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ un morfismo

en $\mathcal{D}^{b,I}(A^!-\text{Mod})$. Por la observación (??), \dot{Y} es q -inyectivo, entonces por la proposición (??), existe un único morfismo \underline{u} en $K(A^!-\text{Mod})$ tal que $\hat{Q}\underline{u} = \delta$, para \hat{Q} el funtor localización de $K(A^!-\text{Mod})$. Tenemos el siguiente triángulo en $K(A^!-\text{Mod})$:

$$\dot{X} \xrightarrow{\underline{u}} \dot{Y} \xrightarrow{\alpha} \text{Con}_u \xrightarrow{\beta} \dot{X}[1],$$

donde Con_u está en $K^{b,I}(A^!-\text{Mod})$ (ver demostración de (??)), para u un representante de la clase \underline{u} . Luego, aplicando el funtor localización \hat{Q} , obtenemos el siguiente triángulo en $\mathcal{D}(A^!-\text{Mod})$:

$$\dot{X} \xrightarrow{\delta} \dot{Y} \xrightarrow{\hat{Q}\alpha} \text{Con}_u \xrightarrow{\hat{Q}\beta} \dot{X}[1].$$

□

Definición 7.34. Sea $\mathcal{D}^{\downarrow}(A^!-\text{Mod})$ la subcategoría plena de $\mathcal{D}(A^!-\text{Mod})$ cuyos objetos son los de $\mathcal{C}^{\downarrow}(A^!-\text{Mod})$ y $\mathcal{D}^{\uparrow}(A-\text{Mod})$ la subcategoría plena de $\mathcal{D}(A-\text{Mod})$ cuyos objetos son los de $\mathcal{C}^{\uparrow}(A-\text{Mod})$.

Corolario 7.35. Se tiene $\mathcal{D}^{b,I}(A^!-\text{Mod}) \subseteq \mathcal{D}^{\downarrow}(A^!-\text{Mod})$ (por la proposición (??)).

Definición 7.36. Si $M \in A-\text{Mod}^+$ (definición (??)), existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $e_x M = 0$ si $p(x) < a$. En este caso decimos que $M \in A-\text{Mod}^{\geq a}$. De manera similar, si $M \in A^!-\text{Mod}^-$, existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $e_x M = 0$ si $q(x) > a$, entonces decimos que $M \in A^!-\text{Mod}^{\leq a}$.

Lema 7.37. Sea $M \in A^!-\text{Mod}^{\leq a}$, entonces M tiene una envolvente inyectiva $M \xrightarrow{u} J_M$ tal que J_M está en $A^!-\text{Mod}^{\leq a}$ y $J_M/\text{Im } u$ está en $A^!-\text{Mod}^{\leq a-1}$.

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición (??), el $A^!$ -módulo M tiene una envolvente inyectiva $M \xrightarrow{u} J_M$ tal que el soclo de M y el soclo de J_M son isomorfos mediante la restricción del morfismo u . En esta proposición vimos que J_M es isomorfo al coproducto $\coprod_{q(x^{\text{op}}) \leq a} xI \otimes V_x$ que es inyectivo

como $A^!$ -módulo. Además, por la observación (??) $e_w J_M = 0$ si $q(w^{\text{op}}) > a$, luego, J_M está en $A^!-\text{Mod}^{\leq a}$.

El $A^!$ -módulo $J_M/\text{Im } u$ está en $A^!-\text{Mod}^{\leq a}$, pues J_M lo está. Sea $y \in Q_0$ tal que $q(y^{\text{op}}) = a$. Sea $\underline{m} \in e_y(J_M/\text{Im } u)$. Podemos suponer que $m \in e_y J_M$.

Para toda flecha α , se tiene $\alpha m = 0$, luego, $m \in \text{soc} J_M$. El morfismo u nos da un isomorfismo entre los soclos, así que $m = u(m_0)$, para algún m_0 en $\text{soc} M$. Entonces, m está en la imagen de u , luego, $\underline{m} = 0$. Por lo tanto, $J_M/\text{Im } u$ está en $A^1\text{-Mod}^{\leq a-1}$. \square

Definición 7.38. Para cada pareja de enteros l, a , definimos

$$\nabla_{l,a} := \{\dot{Z} \in \mathcal{C}^\uparrow(A\text{-Mod}) \mid Z^i = 0 \text{ si } i > l \text{ y, } Z_x^i = 0 \text{ si } p(x) < a + l - i\}.$$

De manera análoga, definimos

$$\Delta_{l,a} := \{\dot{Z} \in \mathcal{C}^\downarrow(A^1\text{-Mod}) \mid Z^i = 0 \text{ si } i < l \text{ y, } Z_x^i = 0 \text{ si } q(x^{\text{op}}) > a + l - i\}.$$

Observación 7.39. $\mathcal{C}^\uparrow(A\text{-Mod}) = \bigcup_{l,a \in \mathbb{Z}} \nabla_{l,a}$ y $\mathcal{C}^\downarrow(A^1\text{-Mod}) = \bigcup_{l,a \in \mathbb{Z}} \Delta_{l,a}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea \dot{W} un complejo en $\mathcal{C}^\uparrow(A\text{-Mod})$, entonces existen enteros l y t tales que $W^i = 0$ si $i > l$ y $W_x^i = 0$ si $i + p(x) < t$. Sea $a = t - l$. Luego, \dot{W} está en $\nabla_{l,a}$ y vale la primera igualdad. Similarmente se verifica la segunda igualdad. \square

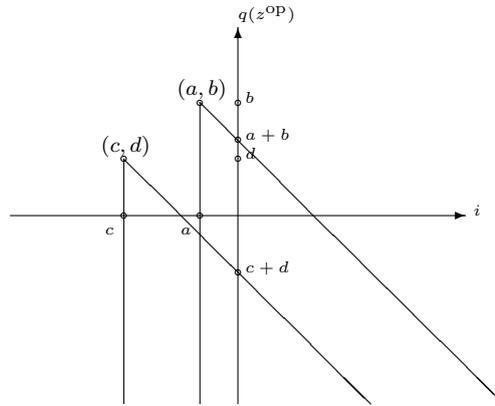
Lema 7.40. Sea $M \in A^1\text{-Mod}^{\leq a}$ e \dot{I} una corresolución inyectiva minimal de M , entonces \dot{I} está en $\Delta_{0,a}$. Así, \underline{M} es isomorfo en $\mathcal{D}(A^1\text{-Mod})$ a un complejo \dot{I} en $\mathcal{D}^\downarrow(A^1\text{-Mod})$.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \longrightarrow \dots$ es una sucesión exacta. Veamos que el A^1 -módulo I^n está en $A^1\text{-Mod}^{\leq a-n}$. Por inducción sobre n : Si $n = 0$, por el lema anterior (??), I^0 está en $A^1\text{-Mod}^{\leq a}$ y, además, $I^0/\text{Im } u$ está en $A^1\text{-Mod}^{\leq a-1}$, luego, por la observación (??), I^1 (que es envolvente inyectiva de $I^0/\text{Im } u$) también está en $A^1\text{-Mod}^{\leq a-1}$. Supongamos que I^{n-1} está en $A^1\text{-Mod}^{\leq a-(n-1)}$. El módulo I^{n-1} se construyó como una envolvente inyectiva de $I^{n-2}/\text{Im } d^{n-3}$, esto es, existe un monomorfismo $u^{n-2}: I^{n-2}/\text{Im } d^{n-3} \rightarrow I^{n-1}$. Por el lema anterior, $I^{n-1}/\text{Im } u^{n-2}$ está en $A^1\text{-Mod}^{\leq a-n}$. Notemos que $\text{Im } u^{n-2} = \text{Im } d^{n-2}$. Entonces, $I^{n-1}/\text{Im } d^{n-2}$ está en $A^1\text{-Mod}^{\leq a-n}$, luego, su envolvente inyectiva I^n también está en $A^1\text{-Mod}^{\leq a-n}$. \square

Lema 7.41. 1. Sean \dot{X}, \dot{Y} en $\mathcal{C}^\downarrow(A^1\text{-Mod})$, con $\dot{X} \in \Delta_{a,b}$ y $\dot{Y} \in \Delta_{c,d}$. Sean $\alpha := \min\{a, c\}$, $t := \max\{a + b, c + d\}$ y $\beta := t - \alpha$. Entonces, $\dot{X} \oplus \dot{Y}$ está en $\Delta_{\alpha,\beta}$.

2. Sean \dot{X}, \dot{Y} en $\mathcal{C}^{\uparrow}(A\text{-Mod})$, con $\dot{X} \in \nabla_{a,b}$ y $\dot{Y} \in \nabla_{c,d}$. Sean $\alpha := \max\{a, c\}$, $t := \min\{a + b, c + d\}$ y $\beta := t - \alpha$. Entonces, $\dot{X} \oplus \dot{Y}$ está en $\nabla_{\alpha, \beta}$.

DEMOSTRACIÓN. 1. Por definición (ver (??)), tenemos que $X^i = 0$ para todo $i < a$ y $Y^i = 0$ para todo $i < c$, luego, $X^i \oplus Y^i = 0$ para todo $i < \min\{a, c\} = \alpha$. Además, $X_{x^{\text{op}}}^i = 0$ si $q(x^{\text{op}}) > a + b - i$ y $Y_{x^{\text{op}}}^i = 0$ si $q(x^{\text{op}}) > c + d - i$. Luego, $X_{x^{\text{op}}}^i \oplus Y_{x^{\text{op}}}^i = (\dot{X} \oplus \dot{Y})_{x^{\text{op}}}^i = 0$ si $i + q(x^{\text{op}}) > \max\{a + b, c + d\} = t$, entonces, $\dot{X} \oplus \dot{Y} \in \Delta_{\alpha, \beta}$ (ver definición (??) y figura a continuación).



2. Se prueba de manera análoga al primer inciso. □

Corolario 7.42. 1. Sea $\dot{u}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ un morfismo en $\mathcal{C}^{\downarrow}(A^1\text{-Mod})$. Entonces, $\text{Con}_{\dot{u}}$ también está en $\mathcal{C}^{\downarrow}(A^1\text{-Mod})$. Más aún, si \dot{Y} y $\dot{X}[1]$ están en $\Delta_{a,b}$, entonces el complejo $\text{Con}_{\dot{u}}$ también está en $\Delta_{a,b}$.

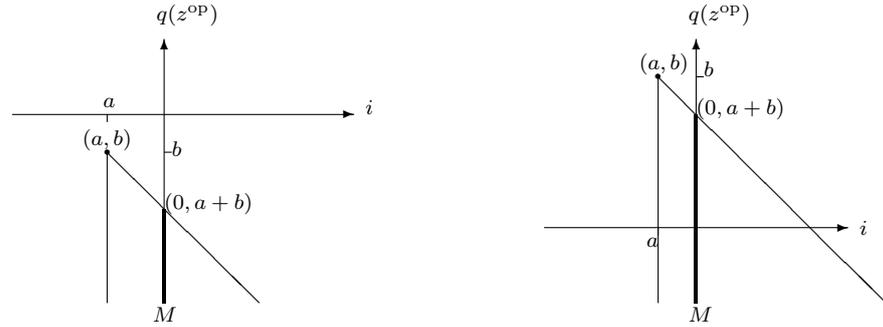
2. Sea $\dot{u}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ un morfismo con \dot{X}, \dot{Y} en $\mathcal{C}^{\uparrow}(A\text{-Mod})$. Entonces, $\text{Con}_{\dot{u}}$ también está en $\mathcal{C}^{\uparrow}(A\text{-Mod})$. Más aún, si \dot{Y} y $\dot{X}[1]$ están en $\nabla_{a,b}$, entonces el complejo $\text{Con}_{\dot{u}}$ también está en $\nabla_{a,b}$.

DEMOSTRACIÓN. Por definición, la i -ésima entrada del cono de \dot{u} es $Y^i \oplus X^{i+1}$, y razonando como en el lema anterior. □

Proposición 7.43. Sea \dot{M} un complejo finito en $\Delta_{a,b}$, entonces \dot{M} es isomorfo en $\mathcal{D}(A^1\text{-Mod})$ a un complejo de inyectivos \dot{J} en $\Delta_{a,b}$.

DEMOSTRACIÓN. Probemos esta proposición por inducción sobre el número de entradas no cero de \dot{M} . Supongamos que $\dot{M} = \underline{M}$ es un complejo

concentrado en grado cero, entonces tenemos que $a \leq 0$ y $e_x M = 0$ si $q(x^{\text{op}}) > a + b$ (ver definición (??) y la siguiente figura). Luego, M está en $A^!-\text{Mod}^{\leq a+b}$, y, por el lema (??), \underline{M} es isomorfo en la categoría derivada a un complejo \dot{J} de inyectivos en $\Delta_{0,a+b}$. Entonces, $\underline{M} \cong \dot{J} \in \Delta_{0,a+b} \subseteq \Delta_{a,b}$, y se tiene la proposición por dicho lema.



Supongamos que $\dot{M} = \underline{M}[-c]$, un complejo concentrado en grado c ; luego, su única entrada distinta de cero es $(\underline{M}[-c])^c = M$. Como $\dot{M} \in \Delta_{a,b}$, entonces, $c \geq a$ y $e_x(\underline{M}[-c])^c = 0$ si $q(x^{\text{op}}) > a + b - c$ (definición (??)). Tenemos que $\dot{M} = \underline{M}[-c] \in \Delta_{c,a+b-c} \subseteq \Delta_{a,b}$, porque $a - c \leq 0$. Luego, $\dot{M}[c] \cong \underline{M} \in \Delta_{0,a+b-c}$ es un complejo concentrado en grado cero. Aplicando el argumento anterior, \underline{M} es isomorfo en la categoría derivada a \dot{J} , un complejo de inyectivos en $\Delta_{0,a+b-c}$. Entonces, $\dot{M} \cong \dot{J}[-c] \in \Delta_{c,a+b-c} \subseteq \Delta_{a,b}$.

Supongamos cierta la proposición para complejos de tamaño menor o igual a n . Sea $\dot{M} = \dots 0 \rightarrow M^a \rightarrow M^{a+1} \dots \rightarrow M^{a+n} \rightarrow 0 \dots$ un complejo en $\Delta_{a,b}$ de tamaño $n+1$. Sea $\underline{M}^{a+n}[-a-n]$ el complejo concentrado en grado $a+n$. Definimos $\dot{M}_{\hat{n}} := \dots 0 \rightarrow M^a \dots \rightarrow M^{a+n-1} \rightarrow 0 \dots$. Entonces tenemos la sucesión exacta de complejos:

$$0 \longrightarrow \underline{M}^{a+n}[-a-n] \xrightarrow{\dot{\sigma}} \dot{M} \xrightarrow{\dot{\rho}} \dot{M}_{\hat{n}} \longrightarrow 0.$$

Luego, (por la proposición (??) y trasladando) el triángulo en $\mathcal{D}(A^!-\text{Mod})$:

$$\dot{M}_{\hat{n}}[-1] \xrightarrow{w} \underline{M}^{a+n}[-a-n] \xrightarrow{\hat{Q}\dot{\sigma}} \dot{M} \xrightarrow{\hat{Q}\dot{\rho}} \dot{M}_{\hat{n}}.$$

Por hipótesis de inducción, existen los isomorfismos $\dot{M}_{\hat{n}}[-1] \xrightarrow{\cong} \dot{J}_{\hat{n}}$ y $\underline{M}^{a+n}[-a-n] \xrightarrow{\cong} \dot{J}_{a+n}$, con $\dot{J}_{\hat{n}}[1]$ y \dot{J}_{a+n} complejos de inyectivos en $\Delta_{a,b}$; además, ambos son q -inyectivos (proposición (??)). Luego, por la prueba de

la proposición (??), existe un isomorfismo $\delta_3: \dot{M} \rightarrow \dot{J}$ en $\mathcal{D}(A^!-\text{Mod})$, que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dot{M}_{\hat{n}}[-1] & \xrightarrow{w} & M^{a+n}[-a-n] & \xrightarrow{\hat{Q}\hat{g}} & \dot{M} & \xrightarrow{\hat{Q}\hat{p}} & \dot{M}_{\hat{n}} \\
 \delta_1 \downarrow \cong & & \delta_2 \downarrow \cong & & \delta_3 \downarrow \cong & & T_{\mathcal{D}}\delta_1 \downarrow \cong \\
 \dot{J}_{\hat{n}} & \xrightarrow{\hat{Q}r} & \dot{J}_{a+n} & \xrightarrow{\hat{Q}g} & \dot{J} & \xrightarrow{\hat{Q}h} & \dot{J}_{\hat{n}}[1].
 \end{array}$$

para $\dot{J} = \text{Con}_r$. Por el corolario (??), \dot{J} está en $\Delta_{a,b}$, además, es claro que las entradas de \dot{J} son módulos inyectivos. \square

Lema 7.44. Sea \dot{M} un complejo en $\mathcal{C}^{\downarrow}(A^!-\text{Mod})$, $n \in \mathbb{Z}$, y \dot{N} el complejo definido como:

$$(N^j)_x := \begin{cases} M_x^j & \text{si } q(x) > n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y cada diferencial d_N^j es la restricción de d_M^j . Entonces \dot{N} es un subcomplejo de \dot{M} que es finito con módulos de soporte finito. Además, si $\dot{M} \in \Delta_{a,b}$, entonces $\dot{N} \in \Delta_{a,b}$.

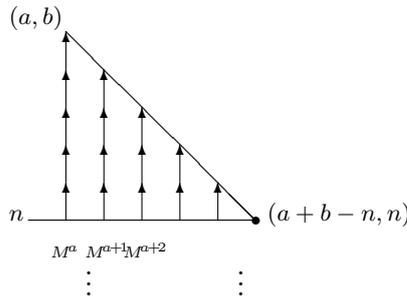
DEMOSTRACIÓN. Existen enteros a, b tales que \dot{M} está en $\Delta_{a,b}$, esto es, $M^i = 0$ si $i < a$ y $M_x^i = 0$ si $q(x) > a + b - i$.

Si $i < a$, entonces

$$(N^i)_x = \begin{cases} M_x^i = 0 & \text{si } q(x) > n, \text{ porque } M^i = 0, \\ 0 & \text{si } q(x) \leq n, \text{ por definición,} \end{cases}$$

por lo tanto, $N^i = 0$ si $i < a$.

Supongamos $n \leq b$. Tenemos el siguiente diagrama:



Si $i > a + b - n$, entonces $n > a + b - i$.

$$(N^i)_x = \begin{cases} M_x^i = 0 & \text{si } q(x) > n, \text{ porque entonces } q(x) > a + b - i, \\ 0 & \text{si } q(x) \leq n, \text{ por definici3n,} \end{cases}$$

por lo tanto, $N^i = 0$ si $i > a + b - n$.

Luego, N^i es posiblemente no cero s3lo si i est3 en el intervalo $[a, a + b - n]$, y se tiene que \dot{N} es finito.

Ahora veamos que cada N^i es de soporte finito. Sea i_0 en el intervalo $[a, a + b - n]$; luego, i_0 es de la forma $i_0 = a + t$, con $t \in [0, b - n]$, entonces, $b - t \in [n, b]$. Tenemos que $N_x^{i_0} = 0$ si $q(x) \leq n$, por definici3n, y si $q(x) > a + b - i_0 = a + b - (a + t) = b - t \geq n$, entonces $N_x^{i_0} = M_x^{i_0} = 0$, por lo tanto, $N_x^{i_0}$ es (posiblemente) no cero s3lo si $n < q(x) \leq b - t = a + b - i_0$. Adem3s, fijando un peso $q(x)$, hay un n3mero finito de v3rtices con peso $q(x)$, por lo tanto, el soporte de N^{i_0} es finito.

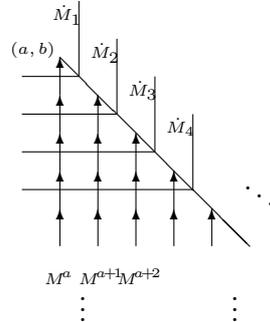
Ahora supongamos que $n > b$. Ya vimos que $N^i = 0$ si $i < a$. Si $i \geq a$, entonces $a - i \leq 0$. Por lo tanto, $n > b > a + b - i$. Si $q(x) \geq n$, entonces $N_x^i = M_x^i = 0$. Luego, $\dot{N} = 0$ si $n > b$. \square

Lema 7.45. Si \dot{M} es un complejo en $\mathcal{C}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$, hay una familia $\{\dot{M}_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ de subcomplejos de \dot{M} tales que:

1. \dot{M}_t es un complejo finito de m3dulos de soporte finito para cada $t \in \mathbb{N}$.
2. Hay un tri3ngulo en $\mathcal{D}(A^!-\text{Mod})$:

$$\bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{M}_s \longrightarrow \bigoplus_{t \in \mathbb{N}} \dot{M}_t \longrightarrow \dot{M} \longrightarrow \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{M}_s[1].$$

DEMOSTRACI3N. Existen enteros a y b tales que $\dot{M} \in \Delta_{a,b}$. Podemos visualizar las posibles entradas no cero del complejo \dot{M} en la siguiente figura, adem3s, vamos a definir una familia de subcomplejos $\{\dot{M}_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ de \dot{M} de la siguiente manera:



$$(M_t^j)_x := \begin{cases} M_x^i & \text{si } q(x) > b - t, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además, $d_{M_t}^j$ es la restricción de d_M^j .

Aplicando el lema (??) a cada complejo \dot{M}_t , tenemos que éste es un complejo finito de módulos de soporte finito y está en $\Delta_{a,b}$. Notemos que $\dot{M} = \cup_{t \in \mathbb{N}} \dot{M}_t$, y que \dot{M} cumple con la definición de la observación (??). Luego, por la proposición (??), se tiene la sucesión exacta en $\mathcal{C}(A^!-\text{Mod})$:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{M}_s \xrightarrow{\phi} \bigoplus_{t \in \mathbb{N}} \dot{M}_t \xrightarrow{\psi} \dot{M} \longrightarrow 0, \text{ y (por la proposición (??)), el triángulo en } \mathcal{D}(A^!-\text{Mod}):$$

$$\bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{M}_s \xrightarrow{\hat{Q}\phi} \bigoplus_{t \in \mathbb{N}} \dot{M}_t \xrightarrow{\hat{Q}\psi} \dot{M} \xrightarrow{w} \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{M}_s[1].$$

□

Proposición 7.46. *Sea \dot{M} un complejo en $\mathcal{C}^{\downarrow}(A^!-\text{Mod})$, entonces \dot{M} es isomorfo en la categoría derivada $\mathcal{D}(A^!-\text{Mod})$ a un complejo de inyectivos en $\mathcal{D}^{\downarrow}(A^!-\text{Mod})$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\dot{M} \in \Delta_{a,b}$, por el lema (??), tenemos el triángulo en $\mathcal{D}(A^!-\text{Mod})$:

$$\bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{M}_s \xrightarrow{\hat{Q}\phi} \bigoplus_{t \in \mathbb{N}} \dot{M}_t \xrightarrow{\hat{Q}\psi} \dot{M} \xrightarrow{w} \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \dot{M}_s[1].$$

Además, para cada $t \in \mathbb{N}$, \dot{M}_t es un complejo finito que está en $\Delta_{a,b}$, entonces \dot{M}_t es isomorfo en la categoría derivada a un complejo de inyectivos \dot{J}_t en $\Delta_{a,b}$ (proposición (??)). Todas las entradas de los complejos \dot{J}_i tienen pesos acotados por b . Luego, por (??), tenemos que $\coprod_{i \in \mathbb{N}} \dot{J}_i$ es un complejo de inyectivos y, además, $(\coprod \dot{J}_i)^s = \coprod J_i^s = 0$ si $s < a$. Luego, por la proposición (??), $\coprod \dot{J}_i$ es q -inyectivo. Entonces, por la proposición (??), \dot{M} es isomorfo en la categoría derivada a un complejo de inyectivos $\dot{J} = \text{Con}_u$, para $u: \coprod_{s \in \mathbb{N}} \dot{J}_s \rightarrow \coprod_{t \in \mathbb{N}} \dot{J}_t$ morfismo en $\mathcal{C}(A^1\text{-Mod})$. De hecho, también se tiene que $\coprod \dot{J}_i$ está en $\Delta_{a,b}$, así que $\coprod \dot{J}_i[1]$ está en $\Delta_{a-1,b}$. Entonces, por el corolario (??), \dot{J} está en $\Delta_{a-1,b+1}$, luego, en $\mathcal{D}^\downarrow(A^1\text{-Mod})$. \square

Proposición 7.47. $\mathcal{D}^\downarrow(A^1\text{-Mod})$ es una subcategoría triangulada de la categoría derivada $\mathcal{D}(A^1\text{-Mod})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea \dot{X} en $\mathcal{D}^\downarrow(A^1\text{-Mod})$, entonces $\dot{X} \in \Delta_{a,b}$ para alguna pareja de enteros a, b . Luego, es claro que $\dot{X}[1]$ está en $\Delta_{a-1,b}$ y que $\dot{X}[-1]$ está en $\Delta_{a+1,b}$. Esto es, $\dot{X}[1]$ y $\dot{X}[-1]$ están en $\mathcal{D}^\downarrow(A^1\text{-Mod})$. Sea $\dot{Y} \in \Delta_{c,d} \subseteq \mathcal{D}^\downarrow(A^1\text{-Mod})$. Por el lema (??), $\dot{X} \oplus \dot{Y}$ está en $\mathcal{C}^\downarrow(A^1\text{-Mod})$, luego en $\mathcal{D}^\downarrow(A^1\text{-Mod})$.

Sea $\delta \in \text{Hom}_{\mathcal{D}(A^1)}(\dot{X}, \dot{Y})$. Por la proposición (??), se tiene el isomorfismo $\dot{Y} \xrightarrow[\cong]{\gamma} \dot{J}$ en $\mathcal{D}(A^1\text{-Mod})$, para \dot{J} un complejo de inyectivos en $\mathcal{D}^\downarrow(A^1\text{-Mod})$. Supongamos que $\dot{J} \in \Delta_{e,f}$. Por la proposición (??), \dot{J} es q -inyectivo, luego (proposición (??)), existe un único morfismo \underline{u} en la categoría homotópica $K(A^1\text{-Mod})$ tal que $\hat{Q}\underline{u} = \gamma\delta$ (para \hat{Q} el funtor localización). Sea $\dot{X} \xrightarrow{\underline{u}} \dot{J} \xrightarrow{\underline{v}} \text{Con}_u \xrightarrow{\underline{w}} \dot{X}[1]$ el triángulo en $K(A^1\text{-Mod})$ generado por \underline{u} . Por el corolario (??), el cono de u está en $\mathcal{D}^\downarrow(A^1\text{-Mod})$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{D}(A^1\text{-Mod})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dot{X} & \xrightarrow{\delta} & \dot{Y} & \xrightarrow{\hat{Q}v\gamma} & \text{Con}_u & \xrightarrow{\hat{Q}w} & \dot{X}[1] \\
 1_{\dot{X}} \downarrow & & \gamma \downarrow \cong & & \downarrow 1_{\text{Con}_u} & & \downarrow T_{\mathcal{D}}(1_{\dot{X}}) \\
 \dot{X} & \xrightarrow{\gamma\delta} & \dot{J} & \xrightarrow{\hat{Q}v} & \text{Con}_u & \xrightarrow{\hat{Q}w} & \dot{X}[1],
 \end{array}$$

cuyo renglón inferior es un triángulo, luego el superior también lo es. Por lo tanto, $\mathcal{D}^\downarrow(A^1\text{-Mod})$ es una subcategoría triangulada de $\mathcal{D}(A^1\text{-Mod})$. \square

Lema 7.48. *Sea M en $A\text{-Mod}^{\geq a}$ y \dot{P} una resolución proyectiva minimal de M , entonces, \dot{P} está en $\nabla_{0,a}$. Así, \underline{M} es isomorfo en $\mathcal{D}(A\text{-Mod})$ a un complejo \dot{P} en $\mathcal{D}^{\downarrow}(A\text{-Mod})$.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $M/\text{rad}M = \coprod_{p(x) \geq a} S_x \otimes V_x^0$. Por otro lado, $\text{rad}Ae_x = \mathcal{F}e_x \in A\text{-Mod}^{\geq p(x)+1}$ (pues $e_y \mathcal{F}e_x \neq 0$ implica que hay un camino dirigido de x en y y entonces $p(y) \geq p(x) + 1$, luego, $p(y) < p(x) + 1$ implica que $e_y \mathcal{F}e_x = 0$). Luego, se tiene que $\text{rad}M \in A\text{-Mod}^{\geq a+1}$.

Sea $P^0 = \coprod_{p(x) \geq a} Ae_x \otimes V_x^0 \xrightarrow{\eta^0} M$ una cubierta proyectiva de M ; P^0 está en $A\text{-Mod}^{\geq a}$. Por el argumento anterior, $\text{rad}P^0 \in A\text{-Mod}^{\geq a+1}$. Además, $\ker \eta^0 \subseteq \text{rad}P^0$. Sea $P^{-1} = \coprod_{p(x) \geq a+1} Ae_x \otimes V_x^{-1} \xrightarrow{\eta^{-1}} \ker \eta^0$ una cubierta proyectiva de $\ker \eta^0$, entonces P^{-1} está en $A\text{-Mod}^{\geq a+1}$. Razonando de manera inductiva obtenemos que P^{-n} está en $A\text{-Mod}^{\geq a+n}$, luego, $\dot{P} = \dots \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow 0 \dots$ está en $\nabla_{0,a}$. \square

Proposición 7.49. *Sea \dot{M} un complejo en $\mathcal{C}^{\downarrow}(A\text{-Mod})$, entonces existe \dot{P} un complejo de A -módulos proyectivos en $\mathcal{C}^{\downarrow}(A\text{-Mod})$ tal que $\dot{P} \cong \dot{M}$ en la categoría derivada $\mathcal{D}(A\text{-Mod})$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\dot{M} = \dots \longrightarrow M^{l-1} \longrightarrow M^l \longrightarrow 0 \dots$ un complejo en $\nabla_{l,a}$. Definimos la siguiente familia de subcomplejos de \dot{M} :

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{Z}_0 = & & \dots 0 \longrightarrow & M^l \longrightarrow & 0 \dots & & \\ \dot{Z}_1 = & & \dots 0 \longrightarrow & M^{l-1} \longrightarrow & M^l \longrightarrow & 0 \dots & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ \dot{Z}_n = & & \dots 0 \longrightarrow & M^{l-n} \longrightarrow & \dots \longrightarrow & M^l \longrightarrow & 0 \dots \\ & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

Luego, $\dot{M} = \cup_{i \geq 0} \dot{Z}_i$ y tenemos sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \dot{Z}_{i-1} \xrightarrow{\dot{\sigma}_i} \dot{Z}_i \xrightarrow{\dot{\rho}_i} \dot{L}_{i-1} \longrightarrow 0$$

donde $\dot{L}_{i-1} = \dot{Z}_i / \dot{Z}_{i-1}$ es isomorfo al complejo concentrado \underline{M}^{l-i} en grado $l-i$ y $\dot{\sigma}_i$ y $\dot{\rho}_i$ son la inyección y la proyección canónicas respectivamente.

Estas sucesiones exactas dan origen a triángulos en la categoría derivada:

$$\dot{Z}_{i-1} \xrightarrow{Q(\dot{\sigma}_i)} \dot{Z}_i \xrightarrow{Q(\dot{\rho}_i)} \dot{L}_i \xrightarrow{w} \dot{Z}_{i-1}[1].$$

Probemos, por inducción, que cada subcomplejo \dot{Z}_i es isomorfo en la categoría derivada a uno de proyectivos $\dot{W}_i \in \nabla_{l,a}$. El módulo M^l está en $A\text{-Mod}^{\geq a}$. Luego, por el lema (??), el complejo concentrado \underline{M}^l es isomorfo a un complejo de proyectivos \dot{W}_0 en $\nabla_{0,a}$. Además, $\dot{W}_0[-l]$ está en $\nabla_{l,a}$. Entonces, tenemos los siguientes isomorfismos en la derivada:

$$\dot{Z}_0 \cong (\underline{M}^l)[-l] \cong \dot{W}_0[-l].$$

Supongamos que $\dot{Z}_i \cong \dot{W}_i$, donde este último es un complejo de proyectivos en $\nabla_{l,a}$. Notemos que el módulo M^{l-i-1} está en $A\text{-Mod}^{\geq a+i+1}$. Luego, el complejo concentrado \underline{M}^{l-i-1} está en $\nabla_{l-i-1, a+i+1}$. Luego, es claro que también está en $\nabla_{l,a}$ (recordemos que $i \in \mathbb{N}$). Por inducción, $\dot{L}_i \cong \dot{H}_i$ un complejo de proyectivos en $\nabla_{l,a}$. Tenemos los siguientes triángulos en $\mathcal{D}(A\text{-Mod})$:

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{L}_i[-1] & \longrightarrow & \dot{Z}_i & \longrightarrow & \dot{Z}_{i+1} & \longrightarrow & \dot{L}_i \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \dot{H}_i[-1] & \xrightarrow{Qu_i} & \dot{W}_i & \longrightarrow & \text{Con}_{u_i} & \longrightarrow & \dot{H}_i, \end{array}$$

entonces \dot{Z}_{i+1} es isomorfo al complejo cono de u_i que, por el corolario (??), está en $\nabla_{l,a}$. Luego, \dot{Z}_{i+1} es isomorfo a un complejo de proyectivos que está en $\nabla_{l,a}$. Tenemos que

$$\coprod_{i \geq 0} \dot{Z}_i \cong \coprod_{i \geq 0} \dot{W}_i.$$

Usando la proposición (??), tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \coprod_{i \geq 0} \dot{Z}_i \longrightarrow \coprod_{j \geq 0} \dot{Z}_j \longrightarrow \dot{M} \longrightarrow 0.$$

Luego, un triángulo en la derivada:

$$\begin{array}{ccccccc} \coprod_{i \geq 0} \dot{Z}_i & \longrightarrow & \coprod_{j \geq 0} \dot{Z}_j & \longrightarrow & \dot{M} & \longrightarrow & \coprod_{i \geq 0} \dot{Z}_i[1] \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \coprod_{i \geq 0} \dot{W}_i & \xrightarrow{Q\dot{v}} & \coprod_{j \geq 0} \dot{W}_i & \longrightarrow & \text{Con}_{\dot{v}} & \longrightarrow & \coprod_{i \geq 0} \dot{W}_i[1]. \end{array}$$

Donde \dot{M} es isomorfo al complejo cono de \dot{v} , entonces, por el corolario (??), \dot{M} es isomorfo a un complejo de proyectivos que está en $\nabla_{l+1, a-1}$. \square

Proposición 7.50. $\mathcal{D}^{\uparrow}(A-\text{Mod})$ es una subcategoría triangulada de la categoría derivada $\mathcal{D}(A-\text{Mod})$.

DEMOSTRACIÓN. Es dual de la demostración de la proposición (??). \square

Observación 7.51. Sea $\delta: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ un morfismo en $\mathcal{D}^{\downarrow}(A^!-\text{Mod})$, si denotamos por \hat{Q} el funtor localización de $K(A^!-\text{Mod})$ en $\mathcal{D}^{\downarrow}(A^!-\text{Mod})$, entonces δ tiene una representación

$$\dot{X} \xrightarrow{\hat{Q}u} \dot{J} \xleftarrow{\hat{Q}t} \dot{Y},$$

donde t es un cuasi-isomorfismo y \dot{J} es un complejo q -inyectivo en la subcategoría $\mathcal{D}^{\downarrow}(A^!-\text{Mod})$. Además, $u: \dot{X} \rightarrow \dot{J}$ está determinado de manera única por δ , \dot{J} y t . También t está determinado por \dot{J} y un isomorfismo $h: \dot{Y} \rightarrow \dot{J}$ en $\mathcal{D}^{\downarrow}(A^!-\text{Mod})$.

DEMOSTRACIÓN. Por la observación (??), dado δ en $\mathcal{D}(A^!-\text{Mod})$, existen morfismos g y s en $K(A^!-\text{Mod})$, tales que $\dot{X} \xrightarrow{\hat{Q}g} \dot{L} \xleftarrow{\hat{Q}s} \dot{Y}$ es una representación del morfismo δ como fracción izquierda en $\mathcal{D}(A^!-\text{Mod})$ (luego, s es un cuasi-isomorfismo y $\delta = \hat{Q}s^{-1}\hat{Q}g$. Notemos que \dot{L} no necesariamente está en $\mathcal{D}^{\downarrow}(A^!-\text{Mod})$.

Por la proposición (??), podemos elegir un isomorfismo $h: \dot{Y} \rightarrow \dot{J}$ en la categoría derivada, con \dot{J} un complejo de inyectivos en $K^{\downarrow}(A^!-\text{Mod})$. Por la proposición (??), \dot{J} es q -inyectivo. Luego (proposición (??)), existe un único morfismo $t: \dot{Y} \rightarrow \dot{J}$ en $K(A^!-\text{Mod})$ tal que $\hat{Q}t = h$. Luego, t es un cuasi-isomorfismo (observación (??)). En $K(A^!-\text{Mod})$ tenemos el siguiente diagrama, cuyo renglón superior es un triángulo y donde el complejo \dot{W} es acíclico (observación (??)):

$$\begin{array}{ccccc} \dot{W} & \xrightarrow{l} & \dot{Y} & \xrightarrow{s} & \dot{L} & \longrightarrow & \dot{W}[1] \\ & & \downarrow t & \swarrow r & & & \\ & & \dot{J} & & & & \end{array},$$

luego, $tl = 0$ en $K(A^!-\text{Mod})$; la existencia de r tal que $rs = t$, se tiene al aplicar la proposición (??) al triángulo anterior. Para H^i el i -ésimo funtor

de cohomología, tenemos que $H^i(r)H^i(s) = H^i(t)$, y, puesto que s y t son cuasi-isomorfismos, $H^i(r) = H^i(t)H^i(s)^{-1}$ es un isomorfismo, para cada $i \in \mathbb{Z}$, entonces r es un cuasi-isomorfismo. Sea $u := rg$, tenemos la siguiente representación de δ :

$$\dot{X} \xrightarrow{\hat{Q}u} \dot{J} \xleftarrow{\hat{Q}t} \dot{Y},$$

y es única puesto que, si $u_1: \dot{X} \rightarrow \dot{J}$ es otro morfismo tal que

$$\dot{X} \xrightarrow{\hat{Q}u_1} \dot{J} \xleftarrow{\hat{Q}t} \dot{Y},$$

es otra representación de δ , entonces $\hat{Q}t^{-1}\hat{Q}u_1 = \hat{Q}t^{-1}\hat{Q}u$, esto es, $\hat{Q}(u_1 - u) = 0$. Como \dot{J} es q -inyectivo, aplicando la proposición (??), tenemos que $u_1 - u = 0$. \square

En lo que sigue, supondremos que hemos fijado \dot{J} y h como antes para cada $\dot{Y} \in \mathcal{D}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$. Así, cada $\delta: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ tiene una representación “única”: $\delta = \hat{Q}t^{-1}\hat{Q}u$.

Definición 7.52. Sea Q el funtor localización de $K(A-\text{Mod})$ en $\mathcal{D}(A-\text{Mod})$ y \hat{Q} el funtor localización de $K(A^!-\text{Mod})$ en $\mathcal{D}(A^!-\text{Mod})$. Sea h un morfismo en $\mathcal{D}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$. Por la observación (??), h tiene una representación única $\dot{X} \xrightarrow{\hat{Q}u} \dot{J} \xleftarrow{\hat{Q}t} \dot{Y}$, para t un cuasi-isomorfismo y \dot{J} un complejo q -inyectivo en $\mathcal{D}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$. Se tiene que $f^K(t)$ es un cuasi-isomorfismo en $K(A-\text{Mod})$ (proposición (??)). Sea $f^\mathcal{D}$ el funtor definido como sigue:

$$f^\mathcal{D}: \mathcal{D}^\downarrow(A^!-\text{Mod}) \longrightarrow \mathcal{D}(A-\text{Mod})$$

$$\begin{array}{ccc} \dot{X} & & f^K \dot{X} \\ h \downarrow & \longmapsto & \downarrow Q(f^K(t))^{-1}Q(f^K(u)) \\ \dot{Y} & & f^K \dot{Y}. \end{array}$$

Proposición 7.53. El funtor $f^\mathcal{D}: \mathcal{D}^\downarrow(A^!-\text{Mod}) \rightarrow \mathcal{D}(A-\text{Mod})$ conmuta con coproductos.

DEMOSTRACIÓN. Probemos primero que, en efecto, $f^\mathcal{D}$ es un funtor. Sean h_1 y h_2 un par de morfismos en $\mathcal{D}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$ tales que la composición h_2h_1 tiene sentido. Por la observación (??), h_1 y h_2 tienen representaciones únicas $\dot{X} \xrightarrow{\hat{Q}u_1} \dot{J}_1 \xleftarrow{\hat{Q}t_1} \dot{Y}$, y $\dot{Y} \xrightarrow{\hat{Q}u_2} \dot{J}_2 \xleftarrow{\hat{Q}t_2} \dot{Z}$, donde t_1 y t_2 son cuasi-isomorfismos y \dot{J}_1 y \dot{J}_2 son complejos q -inyectivos en $\mathcal{D}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$. Como

los cuasi-isomorfismos son un sistema multiplicativo, existen morfismos s y r en la categoría homotópica, con r cuasi-isomorfismo, tales que conmuta el siguiente diagrama en $K(A^!-\text{Mod})$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \dot{W} & & \\ & s \nearrow & & \nwarrow r & \\ \dot{X} & \xrightarrow{u_1} & \dot{J}_1 & \xleftarrow{t_1} & \dot{Y} & \xrightarrow{u_2} & \dot{J}_2 & \xleftarrow{t_2} & \dot{Z}. \end{array}$$

Luego, $(\hat{Q}r)^{-1}\hat{Q}s\hat{Q}t_1 = \hat{Q}u_2$. Además, J_2 es q -inyectivo, usando (??), se tiene que $(\hat{Q}r)^{-1}\hat{Q}s = \hat{Q}v$, para un único morfismo $v: \dot{J}_1 \rightarrow \dot{J}_2$. Por lo tanto, $Q(vt_1) = Q(v)Q(t_1) = Q(r)^{-1}Q(s)Q(t_1) = Q(u_2)$. Esto es, $\hat{Q}(vt_1) = \hat{Q}u_2$. Nuevamente, por (??), $vt_1 = u_2$. Así, $f^K v f^K t_1 = f^K u_2$, por lo tanto, $Q f^K v Q f^K t_1 = Q f^K u_2$. Por otro lado, $h_2 h_1 = (\hat{Q}t_2)^{-1}(\hat{Q}r)^{-1}\hat{Q}s\hat{Q}u_1 = (\hat{Q}t_2)^{-1}\hat{Q}v\hat{Q}u_1 = (\hat{Q}t_2)^{-1}\hat{Q}(vu_1)$ es la representación única de $h_2 h_1$. Entonces,

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{D}}(h_2 h_1) &= Q(f^K t_2)^{-1}Q(f^K(vu_1)) \\ &= Q(f^K t_2)^{-1}Q(f^K(u_2))Q(f^K t_1)^{-1}Q(f^K(u_1)) \\ &= f^{\mathcal{D}}(h_2) f^{\mathcal{D}}(h_1). \end{aligned}$$

Además, si $\dot{Y} \in \mathcal{D}^{\downarrow}(A^!-\text{Mod})$ y $h = Qt: \dot{Y} \rightarrow \dot{J}$ es el isomorfismo que hemos fijado para \dot{Y} con \dot{J} complejo q -inyectivo en $\mathcal{D}^{\downarrow}(A^!-\text{Mod})$, entonces $\dot{Y} \xrightarrow{Qt} \dot{J} \xleftarrow{Qt} \dot{Y}$ es la representación única de $1_{\dot{Y}}$. Luego,

$$f^{\mathcal{D}}(1_{\dot{Y}}) = Q f^K(t)^{-1} Q f^K(t) = 1_{f^K \dot{Y}}.$$

En objetos el funtor $f^{\mathcal{D}}$ coincide con f^K , el cual conmuta con coproductos (observación ??). Luego, para una familia $\{\dot{X}_i\}_{i \in I}$ de complejos, existe un isomorfismo $\underline{\varphi}: \coprod_{i \in I} f^K(\dot{X}_i) \rightarrow f^K(\coprod_{i \in I} \dot{X}_i)$ en la categoría homotópica $K(A-\text{Mod})$. Luego, $Q\underline{\varphi}$ es un isomorfismo en la categoría derivada $\mathcal{D}(A-\text{Mod})$, esto es, $Q\underline{\varphi}: \coprod_{i \in I} f^{\mathcal{D}}(\dot{X}_i) \rightarrow f^{\mathcal{D}}(\coprod_{i \in I} \dot{X}_i)$ es un isomorfismo. \square

Observación 7.54. *El símbolo $|$ después de un funtor denota la restricción del funtor que le antecede. Afirmamos que el cuadro inferior del siguiente*

diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 A^1\text{-Mod}^- & \xrightarrow{\mathbf{f}|} & \mathcal{C}^\uparrow(A\text{-Mod}) \\
 E| \downarrow & & \parallel \\
 \mathcal{C}^\downarrow(A^1\text{-Mod}) & \xrightarrow{\mathbf{f}^c|} & \mathcal{C}^\uparrow(A\text{-Mod}) \\
 \pi| \downarrow & & \downarrow \rho| \\
 K^\downarrow(A^1\text{-Mod}) & \xrightarrow{\mathbf{f}^K} & K^\uparrow(A\text{-Mod}) \\
 \hat{Q}| \downarrow & & \downarrow Q| \\
 \mathcal{D}^\downarrow(A^1\text{-Mod}) & \xrightarrow{\mathbf{f}^\mathcal{D}} & \mathcal{D}^\uparrow(A\text{-Mod}),
 \end{array}$$

donde E es el funtor que envía cada A^1 -módulo en su complejo concentrado en grado cero, π y ρ son las proyecciones módulo homotopía de sus respectivas categorías de complejos, \hat{Q} es el funtor localización de $K(A^1\text{-Mod})$ y Q el funtor localización de $K(A\text{-Mod})$. Esto nos dice que el funtor $\mathbf{f}^\mathcal{D}$ esencialmente extiende la restricción de \mathbf{f} a $A^1\text{-Mod}^-$.

DEMOSTRACIÓN. Por la observación (??) y la proposición (??) el cuadro superior y el de enmedio conmutan en el diagrama anterior, además, $\text{Hom}_{A^1}(M, N) \xrightarrow[\cong]{\pi E} \text{Hom}_{K(A^1)}(\underline{M}, \underline{N})$. Entonces, por la observación (??),

basta probar que $\mathbf{f}^\mathcal{D}\hat{Q}| \pi| E| = Q| \rho| \mathbf{f}|$. Sea $M \xrightarrow{h} N$ un morfismo en $A^1\text{-Mod}^-$ (definición (??)). Por el corolario (??), existen \dot{I}_M e \dot{I}_N , corresoluciones inyectivas minimales de M y N respectivamente. Luego, por el lema (??), la proposición (??) y la observación (??), existen los cuasi-isomorfismos $\underline{M} \xrightarrow{\eta_1} \dot{I}_M$ y $\underline{N} \xrightarrow{\eta_2} \dot{I}_N$. Sea $\underline{h} := \pi E(h)$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{D}(A^1\text{-Mod})$:

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{M} & \xrightarrow{\hat{Q}\eta_1} & \dot{I}_M \\
 \hat{Q}\underline{h} \downarrow & & \downarrow \hat{Q}\eta_2\hat{Q}\underline{h}(\hat{Q}\eta_1)^{-1} \\
 \underline{N} & \xrightarrow{\hat{Q}\eta_2} & \dot{I}_N.
 \end{array}$$

Por la observación (??), tenemos que el morfismo $\hat{Q}\underline{h}$ se puede escribir de manera única (fijando \dot{I}_N y η_2) así:

$$\underline{M} \xrightarrow{\hat{Q}\eta_2\hat{Q}\underline{h}} \dot{I}_N \xleftarrow{\hat{Q}\eta_2} \underline{N},$$

Luego, por la definición (??), la proposición (??) y la observación (??), para $X = M$ ó $X = N$ tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\hat{Q}\pi E(X)) &= \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\underline{X}) := Q\mathbf{f}^K(\underline{X}) \\ &= Q\mathbf{f}^K\pi E(X) = Q\rho\mathbf{f}^c(E(X)) \\ &= Q\rho\mathbf{f}(X). \end{aligned}$$

Para el morfismo h se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\hat{Q}\pi E(h)) &= \mathbf{f}^{\mathcal{D}}\hat{Q}(\underline{h}) := (Q\mathbf{f}^K\eta_2)^{-1}Q\mathbf{f}^K(\eta_2\underline{h}) \\ &= Q\mathbf{f}^K(\underline{h}) = Q\mathbf{f}^K\pi E(h) = Q\rho\mathbf{f}^c E(h) \\ &= Q\rho\mathbf{f}(h). \end{aligned}$$

□

7.5. Algebras propias de Koszul

En esta sección supondremos que A es un álgebra propia de Koszul (ver definición siguiente). Luego, el funtor de Koszul

$$\mathbf{f}^{\mathcal{D}}: \mathcal{D}^{\downarrow}(A^{\downarrow}\text{-Mod}) \longrightarrow \mathcal{D}^{\uparrow}(A\text{-Mod}),$$

resultará ser una equivalencia de categorías trianguladas.

Definición 7.55. *Sea A un álgebra cuadrática y propia. Decimos que A es un álgebra propia de Koszul si para cada módulo simple S , si \dot{P}_S es una resolución proyectiva minimal de S , se tiene que $\dot{P}_S \cong \mathbf{f}(M)[u]$, en la categoría derivada $\mathcal{D}(A\text{-Mod})$, para \mathbf{f} el funtor definido en la proposición (??), algún $u \in \mathbb{Z}$ y algún $M \in A^{\downarrow}\text{-Mod}$.*

Proposición 7.56. *Sea S_x el simple en el vértice x , y sea \dot{P} una resolución proyectiva minimal de S_x . Entonces \dot{P} es isomorfo en la categoría derivada $\mathcal{D}(A\text{-Mod})$ a $\mathbf{f}({}_x I)[-p(x)]$, donde ${}_x I$ es el inyectivo en x .*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $\dot{P} \cong \mathbf{f}(M)[u]$ en $\mathcal{D}(A\text{-Mod})$, para algún A^{\downarrow} -módulo M y algún entero u , por ser A de Koszul (definición (??)). Supongamos que $M \cong M_1 \oplus M_2$, entonces $\mathbf{f}(M)[u] \cong \mathbf{f}(M_1)[u] \oplus \mathbf{f}(M_2)[u] \cong \dot{P}$. Pero \dot{P} es inescindible por la proposición (??), luego podemos suponer $\mathbf{f}(M_2)[u] = 0$. Como \mathbf{f} es fiel y pleno, entonces $M_2 = 0$. Por lo tanto, M es inescindible. Además, $M \in A^{\downarrow}\text{-Mod}^-$. En efecto, tenemos que $\mathbf{f}(M)^v = 0$ si $v > u$, esto es, $\prod_{-p(y)=v} Ae_y \otimes e_y M = 0$ si $v > u$. Entonces $e_y M = 0$ para

todo $y \in Q_0$ tal que $-p(y) = v > u$. Es decir, $e_y M = 0$, para todo $y \in Q_0$ tal que $-p(y) > u$, luego $M \in A^1\text{-Mod}^-$.

$$\text{Tenemos que } Ae_x = P^0 = \dot{P}[-u]^u \cong \mathbf{f}[M]^u \cong \coprod_{-p(y)=u} Ae_y \otimes e_y M.$$

Entonces $\dim M_x = 1$ y $M_y = 0$ si $y \neq x$, luego $-p(x) = u$.

$M_x \subseteq \text{soc} M$, por tanto, S_x es sumando directo del soclo de M . Pero M es inyectivo (proposición (??)), entonces M es una envolvente inyectiva de su soclo. Luego, ${}_x I$ es sumando directo de M . Hemos visto que M es inescindible, entonces $M \cong {}_x I$. Por lo tanto, $\dot{P} \cong \mathbf{f}({}_x I)[-p(x)]$. \square

Lema 7.57. *La familia $\{ {}_x I \otimes V_x \}_{x \in Q_0}$ constituye un sistema de generadores para $\mathcal{D}^{b,I}(A^1\text{-Mod})$.*

DEMOSTRACIÓN. (Ver definición (??)). Sea \mathcal{T} una subcategoría triangulada de $\mathcal{D}^{b,I}(A^1\text{-Mod})$, cerrada bajo isomorfismos y que contiene a la familia $\{ {}_x I \otimes V_x \}_{x \in Q_0}$. Debemos probar que $\mathcal{T} = \mathcal{D}^{b,I}(A^1\text{-Mod})$, esto lo haremos por inducción en el número de entradas no cero de un complejo en $\mathcal{D}^{b,I}(A^1\text{-Mod})$. Para un complejo concentrado $\coprod_{x \in Q_0} {}_x I \otimes V_x \cong \coprod_{x \in Q_0} \underline{{}_x I \otimes V_x}$, y como $V_x = 0$ para casi todo $x \in Q_0$, entonces es claro que $\coprod_{x \in Q_0} {}_x I \otimes V_x$ es un complejo en \mathcal{T} pues es isomorfo a un coproducto finito de elementos de $\{ {}_x I \otimes V_x \}_{x \in Q_0}$. Supongamos que \mathcal{T} contiene los complejos de tamaño n en $\mathcal{D}^{b,I}(A^1\text{-Mod})$. Sea

$$\dot{M} := \dots 0 \longrightarrow M^a \longrightarrow M^{a+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow M^{a+n} \longrightarrow 0 \dots$$

un complejo de tamaño $n + 1$ en $\mathcal{D}^{b,I}(A^1\text{-Mod})$. Definimos los complejos:

$$\begin{aligned} \dot{M}_{\hat{a}} &:= \dots 0 \longrightarrow M^{a+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow M^{a+n} \longrightarrow 0 \dots, \\ \underline{M}^a[-a] &:= \dots 0 \longrightarrow M^a \longrightarrow 0 \dots \end{aligned}$$

Tenemos la sucesión exacta: $0 \longrightarrow \dot{M}_{\hat{a}} \xrightarrow{\hat{\sigma}} \dot{M} \xrightarrow{\hat{\rho}} \underline{M}^a[-a] \longrightarrow 0$, en $\mathcal{C}(A^1\text{-Mod})$ y el correspondiente triángulo en $\mathcal{D}(A^1\text{-Mod})$:

$$\dot{M}_{\hat{a}} \xrightarrow{\hat{Q}\hat{\sigma}} \dot{M} \xrightarrow{\hat{Q}\hat{\rho}} \underline{M}^a[-a] \xrightarrow{w} \dot{M}_{\hat{a}}[1],$$

luego, su trasladado también es un triángulo en $\mathcal{D}(A^1\text{-Mod})$:

$$\underline{M}^a[-a-1] \xrightarrow{-T_{\mathcal{D}}^{-1}w} \dot{M}_{\hat{a}} \xrightarrow{\hat{Q}\hat{\sigma}} \dot{M} \xrightarrow{\hat{Q}\hat{\rho}} \underline{M}^a[-a].$$

$\underline{M}^a[-a-1]$ y $\dot{M}_{\hat{a}}$ están en \mathcal{T} , por hipótesis de inducción. Además, por definición de subcategoría triangulada, \mathcal{T} es una subcategoría plena de $\mathcal{D}^{b,I}(A^!-\text{Mod})$, la cual a su vez es plena en $\mathcal{D}(A^!-\text{Mod})$, por lo tanto, el morfismo $-T_{\mathcal{D}}^{-1}w$ está en \mathcal{T} , entonces, podemos completar a un triángulo:

$$\underline{M}^a[-a-1] \xrightarrow{-T_{\mathcal{D}}^{-1}w} \dot{M}_{\hat{a}} \xrightarrow{h} \dot{Z} \xrightarrow{k} \underline{M}^a[-a],$$

con \dot{Z} en \mathcal{T} . Por los axiomas de triangulación, tenemos el siguiente isomorfismo de triángulos,

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{M}^a[-a-1] & \xrightarrow{-T_{\mathcal{D}}^{-1}w} & \dot{M}_{\hat{a}} & \xrightarrow{\hat{Q}\hat{\alpha}} & \dot{M} & \xrightarrow{\hat{Q}\hat{\rho}} & \underline{M}^a[-a] \\ \downarrow 1_{\underline{M}^a[-a-1]} & & \downarrow 1_{\dot{M}_{\hat{a}}} & & \downarrow \cong s & & \downarrow T_{\mathcal{D}}(1_{\underline{M}^a[-a-1]}) \\ \underline{M}^a[-a-1] & \xrightarrow{-T_{\mathcal{D}}^{-1}w} & \dot{M}_{\hat{a}} & \xrightarrow{h} & \dot{Z} & \xrightarrow{k} & \underline{M}^a[-a], \end{array}$$

como \mathcal{T} es cerrada bajo isomorfismos, tenemos que \dot{M} está en \mathcal{T} . Por lo tanto, $\mathcal{D}^{b,I}(A^!-\text{Mod}) = \mathcal{T}$. \square

Lema 7.58. *Sea S_x el simple en el vértice x , \dot{P} una resolución proyectiva minimal de S_x . Si el módulo proyectivo inescindible Ae_z es sumando directo de P^{-l} , entonces $l = p(z) - p(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición (??) tenemos que $\dot{P} = \mathbf{f}(M)[-p(x)]$, para M un inyectivo. Entonces,

$$P^{-l} = \mathbf{f}(M)^{-l-p(x)} = \coprod_{-p(y)=-l-p(x)} Ae_y \otimes M_y.$$

Luego, Ae_z es uno de estos sumandos de P^{-l} , entonces $-p(z) = -l - p(x)$. \square

Proposición 7.59. *Sean S_x y S_y los A -módulos simples en los vértices x y y respectivamente. Si $\text{Ext}_A^l(S_x, S_y) \neq 0$, entonces $l = p(y) - p(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. Por (??), las resoluciones proyectivas $\dot{P}_x \xrightarrow{\eta_x} \underline{S}_x$ y $\dot{P}_y \xrightarrow{\eta_y} \underline{S}_y$ son cuasi-isomorfismos (que inducen isomorfismos en $\mathcal{D}(A-\text{Mod})$). Por la proposición (??), \dot{P}_x es q -proyectivo. Entonces, por (??) y (??), tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Ext}_A^l(S_x, S_y) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\underline{S}_x, \underline{S}_y[l]) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\dot{P}_x, \dot{P}_y[l]) \\ &\cong \text{Hom}_{K(A)}(\dot{P}_x, \dot{P}_y[l]) \cong \text{Hom}_{K(A)}(\dot{P}_x[-l], \dot{P}_y). \end{aligned}$$

Sea $\dot{h} \neq 0$ un morfismo en $\text{Hom}_{K(A)}(\dot{P}_x[-l], \dot{P}_y)$. Tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{P}_x[-l] : & \cdots & P_x^{-l-1} & \xrightarrow{d_{P_x}^{-l-1}} & P_x^{-l} & \xrightarrow{d_{P_x}^{-l}} & \cdots \\ & & & & \downarrow h^0 & & \\ \dot{P}_y : & \cdots & P_y^{-1} & \xrightarrow{d_{P_y}^{-1}} & P_y^0 & \longrightarrow & 0 \cdots \\ & & & & & \searrow \eta_y & \\ & & & & & & S_y. \end{array}$$

Como $d_{P_x}^{-l}$ es conúcleo de $d_{P_x}^{-l-1}$, si $\eta_y h^0 = 0$, entonces existe el morfismo λ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{P}_x[-l] : & \cdots & P_x^{-l-1} & \xrightarrow{d_{P_x}^{-l-1}} & P_x^{-l} & \xrightarrow{d_{P_x}^{-l}} & P_x^{-l+1} \xrightarrow{d_{P_x}^{-l+1}} P_x^{-l+2} \cdots \\ & & \downarrow h^{-1} & & \downarrow h^0 & & \downarrow \lambda \\ (\dot{P}_y, \eta_y) : & \cdots & P_y^{-1} & \xrightarrow{d_{P_y}^{-1}} & P_y^0 & \xrightarrow{\eta_y} & S_y \longrightarrow 0 \cdots \end{array}$$

Se tiene un morfismo de complejos $(\cdots, h^{-1}, h^0, \lambda, 0, \cdots) : \dot{P}_x[-l] \rightarrow (\dot{P}_y, \eta_y)$, pero $\dot{P}_x[-l]$ es q -proyectivo y (\dot{P}_y, η_y) es un complejo acíclico. Así que, el morfismo $(\cdots, h^{-1}, h^0, \lambda, 0, \cdots)$ es homotópico a cero, esto es, existe una familia $\{t^i : P_x^i \rightarrow P_y^{i+l-1}, \text{ si } i \leq -l+1, t^{-l+2} : P_x^{-l+2} \rightarrow S_y\}$ tal que $h^i = d_{P_y}^{i+l-1} t^i + t^{i-1} d_{P_x}^i$ y $\lambda = \eta_y t^{-l+1} + t^{-l+2} d_{P_x}^{-l+1}$. Es claro que, redefiniendo el morfismo $t^{-l+2} = 0 : P_x^{-l+2} \rightarrow 0$ la familia $\{t^i : P_x^i \rightarrow P_y^{i+l-1}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ es tal que \dot{h} es homotópico a cero. Pero estamos suponiendo $\dot{h} \neq 0$, por lo tanto, $\eta_y h^0 \neq 0$.

Como S_y es simple, $\eta_y h^0$ es un epimorfismo. Además, $S_y \cong P_y^0 / \text{rad} P_y^0$. Sea $m \in P_y^0$, entonces existe $x \in P_x^{-l}$ tal que $\eta_y(m) = \eta_y h^0(x)$, esto es, $m - h^0(x)$ está en el radical de P_y^0 . Luego, $m = h^0(x) + y$, con $y \in \text{rad} P_y^0$. De ahí que $h^0(P_x^{-l}) + \text{rad} P_y^0 = P_y^0$. Entonces, por el lema de Nakayama, $h^0(P_x^{-l}) = P_y^0$, y se tiene que h^0 es un epimorfismo. Pero P_y^0 es proyectivo, entonces existe un morfismo $\alpha : P_y^0 \rightarrow P_x^{-l}$ tal que $h^0 \alpha = 1$. Por lo tanto, P_y^0 es sumando directo de P_x^{-l} . Pero $P_y^0 = Ae_y$, entonces el lema (??) nos dice que $l = p(y) - p(x)$. \square

Lema 7.60. Sean X, Y en $A^!-\text{Mod}$, con Y un módulo inyectivo, entonces

$$\mathbf{f}_{\underline{X}, \underline{Y}}^{\mathcal{D}} : \text{Hom}_{\mathcal{D}(A^!)}(\underline{X}, \underline{Y}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^{\mathcal{D}} \underline{X}, \mathbf{f}^{\mathcal{D}} \underline{Y})$$

es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Tengamos en mente el siguiente diagrama conmutativo (por la observación (??)):

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{Hom}_{A^!}(X, Y) & \xrightarrow{\mathbf{f}_{X,Y}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(A)}(\mathbf{f}X, \mathbf{f}Y) & (7.6) \\
 \downarrow E & & \parallel & \\
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(A^!)}(\underline{X}, \underline{Y}) & \xrightarrow{\mathbf{f}_{\underline{X},\underline{Y}}^c} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(A)}(\mathbf{f}^c \underline{X}, \mathbf{f}^c \underline{Y}) & \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \rho & \\
 \mathrm{Hom}_{K(A^!)}(\underline{X}, \underline{Y}) & \xrightarrow{\mathbf{f}_{\underline{X},\underline{Y}}^K} & \mathrm{Hom}_{K(A)}(\mathbf{f}^K \underline{X}, \mathbf{f}^K \underline{Y}) & \\
 \downarrow \hat{Q} & & \downarrow Q & \\
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(A^!)}(\underline{X}, \underline{Y}) & \xrightarrow{\mathbf{f}_{\underline{X},\underline{Y}}^{\mathcal{D}}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^{\mathcal{D}} \underline{X}, \mathbf{f}^{\mathcal{D}} \underline{Y}), &
 \end{array}$$

Veamos que $\mathbf{f}_{\underline{X},\underline{Y}}^{\mathcal{D}}$ es un monomorfismo: Sea $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(A^!)}(\underline{X}, \underline{Y})$ tal que $\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\alpha) = 0$. Por (??), (??) y (??), tenemos que:

$$\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\underline{X}) = \mathbf{f}^K(\underline{X}) = \mathbf{f}^c(\underline{X}) = \mathbf{f}(X) \quad (7.7)$$

Pero $\mathbf{f}(X)$ es un complejo de proyectivos (proposición (??)), y por (??), $\mathbf{f}(X)$ es q -proyectivo. Luego, (proposición (??)) existe un único morfismo v en $\mathrm{Hom}_{K(A)}(\mathbf{f}^{\mathcal{D}} \underline{X}, \mathbf{f}^{\mathcal{D}} \underline{Y})$ tal que $Q(v) = 0$. Como $Q(0) = 0$, entonces $v = 0$. La observación (??) nos dice que v está en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(A)}(\mathbf{f}^{\mathcal{D}} \underline{X}, \mathbf{f}^{\mathcal{D}} \underline{Y})$ que es igual a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(A)}(\mathbf{f}(X), \mathbf{f}(Y))$ por la ecuación (??). Además, \mathbf{f} es fiel y pleno (proposición (??)). Luego, existe un único morfismo $h \in \mathrm{Hom}_{A^!}(X, Y)$ tal que $\mathbf{f}(h) = 0$, por lo tanto, $h = 0$.

Por otro lado, como \underline{Y} es q -inyectivo (proposición (??)), entonces la proposición (??) nos dice que existe un único morfismo $u \in \mathrm{Hom}_{K(A^!)}(\underline{X}, \underline{Y})$ tal que $\hat{Q}(u) = \alpha$, para \hat{Q} el funtor localización. Por la observación (??), u está en $\mathrm{Hom}_{A^!}(X, Y)$. Como el diagrama (??) conmuta, entonces $\mathbf{f}^K \pi E(u) = \mathbf{f}(u) = 0$. Por lo tanto, $u = 0$. Entonces, $\alpha = 0$ y $\mathbf{f}_{\underline{X},\underline{Y}}^{\mathcal{D}}$ es un monomorfismo.

Sea δ un morfismo en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^{\mathcal{D}} \underline{X}, \mathbf{f}^{\mathcal{D}} \underline{Y})$. Como $\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\underline{X})$ es q -proyectivo, existe un único morfismo $v \in \mathrm{Hom}_{K(A)}(\mathbf{f}(X), \mathbf{f}(Y))$ tal que $Qv = \delta$. Tenemos que $\mathrm{Hom}_{K(A)}(\mathbf{f}(X), \mathbf{f}(Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(A)}(\mathbf{f}(X), \mathbf{f}(Y))$. Además, \mathbf{f} es fiel y pleno por la proposición (??), entonces existe un único morfismo $h \in \mathrm{Hom}_{A^!}(X, Y)$ tal que $\mathbf{f}(h) = v$. Como el diagrama (??) conmuta,

$$\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\hat{Q}\pi E(h)) = Q\rho\mathbf{f}(h) = Qv = \delta.$$

Luego, $\mathbf{f}_{\underline{X}, \underline{Y}}^{\mathcal{D}}$ es sobreyectivo. \square

Proposición 7.61. *El funtor restricción de $\mathbf{f}^{\mathcal{D}}$ a $\mathcal{D}^{b,I}(A^!-\text{Mod})$ es fiel y pleno.*

DEMOSTRACIÓN. La familia $\{\underline{x}I \otimes \underline{V}_x\}_{x \in Q_0}$ es un sistema de generadores para $\mathcal{D}^{b,I}(A^!-\text{Mod})$ (lema (??)). Por la proposición (??), basta probar que $\mathbf{f}_{Z_1, Z_2[l]}^{\mathcal{D}}$ es un isomorfismo, para todo Z_1, Z_2 en $\{\underline{x}I \otimes \underline{V}_x\}_{x \in Q_0}$ y para cada $l \in \mathbb{Z}$. Por la observación (??), $\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\underline{M}) = \mathbf{f}(M)$ para el complejo concentrado \underline{M} , si $M \in A-\text{Mod}^-$. Además, \mathbf{f} es fiel y pleno (proposición (??)). Como A es de Koszul, entonces $\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\underline{x}I) = \mathbf{f}(\underline{x}I) \cong S_x[p(x)]$ en $\mathcal{D}(A-\text{Mod})$. Sean $X = \underline{x}I \otimes \underline{V}_x$ y $Y = \underline{y}I \otimes \underline{V}_y$ y \underline{X} y \underline{Y} los complejos concentrados de X y Y respectivamente. Es claro que X y Y están en $A^!-\text{Mod}^-$.

Veamos primero que si $l \neq 0$, entonces el dominio es cero. Si $l > 0$, entonces por (??) y como Y es inyectivo, tenemos que:

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(A^!)}(\underline{X}, \underline{Y}[l]) \cong \text{Ext}_{A^!}^l(X, Y) = 0.$$

Si $l < 0$, entonces por la proposición (??),

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(A^!)}(\underline{X}, \underline{Y}[l]) = 0.$$

Ahora probemos que si $l \neq 0$, entonces también el codominio es cero. Supongamos que $0 \neq \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^{\mathcal{D}} \underline{X}, \mathbf{f}^{\mathcal{D}} \underline{Y}[l])$.

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^{\mathcal{D}} \underline{X}, \mathbf{f}^{\mathcal{D}} \underline{Y}[l]) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\underline{S}_x \otimes \underline{V}_x[p(x)], \underline{S}_y \otimes \underline{V}_y[p(y)][l]) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\underline{S}_x \otimes \underline{V}_x, \underline{S}_y \otimes \underline{V}_y[p(y) - p(x) + l]). \end{aligned}$$

Si $p(y) - p(x) + l < 0$, entonces $\text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\underline{S}_x \otimes \underline{V}_x, \underline{S}_y \otimes \underline{V}_y[p(y) - p(x) + l]) = 0$ por la proposición (??), pero no es el caso. Entonces podemos suponer que $t := p(y) - p(x) + l \geq 0$. Luego,

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\underline{S}_x \otimes \underline{V}_x, \underline{S}_y \otimes \underline{V}_y[t]) \cong \text{Ext}_A^t(S_x \otimes V_x, S_y \otimes V_y) \neq 0.$$

Sea \dot{P}_{S_x} una resolución proyectiva de S_x . Entonces,

$$\dot{P}_{S_x} \otimes V_x := \cdots P_{S_x}^{-t} \otimes V_x \longrightarrow \cdots P_{S_x}^0 \otimes V_x \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva de $S_x \otimes V_x$. Entonces, $\text{Ext}_A^t(S_x \otimes V_x, S_y \otimes V_y) := H^{-t}(\text{Hom}_A(\dot{P}_{S_x} \otimes V_x, S_y \otimes V_y))$. En particular, $\text{Hom}_A(P_{S_x}^{-t} \otimes V_x, S_y \otimes V_y) \neq 0$.

Como $P_{S_x}^{-t} \otimes V_x = \coprod_{i \in I} P_{S_x}^{-t}$ y $S_y \otimes V_y = \coprod_{j \in J} S_y$, tenemos un morfismo no cero $h: \coprod_{i \in I} P_{S_x}^{-t} \rightarrow \coprod_{j \in J} S_y$, luego, para algún par de índices i, j , tenemos que la siguiente composición no es cero:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I} P_{S_x}^{-t} & \xrightarrow{h} & \coprod_{j \in J} S_y \\ \sigma_i \uparrow & & \downarrow \rho_j \\ P_{S_x}^{-t} & & S_y, \end{array}$$

para σ_i la inclusión y ρ_j la proyección canónicas, Como S_y es simple, $\rho_j h \sigma_i$ es un epimorfismo. Además, $S_y \cong Ae_y / \text{rad} Ae_y$. Sea $\eta: Ae_y \rightarrow S_y$ la proyección.

$$\begin{array}{ccc} & P_{S_x}^{-t} & \\ \lambda \swarrow & \downarrow \rho_j h \sigma_i & \\ Ae_y & \xrightarrow{\eta} & S_y \end{array}$$

Como $P_{S_x}^{-t}$ es proyectivo, existe un morfismo $\lambda: P_{S_x}^{-t} \rightarrow Ae_y$ tal que $\eta\lambda = \rho_j h \sigma_i$. Veamos que λ es un epimorfismo. Sea $m \in Ae_y$, entonces existe $x \in P_{S_x}^{-t}$ tal que $\eta(m) = \rho_j h \sigma_i(x) = \eta\lambda(x)$, esto es, $m - \lambda(x)$ está en el radical de Ae_y . Luego, $m = \lambda(x) + y$, con $y \in \text{rad} Ae_y$. De ahí que $\text{Im} \lambda + \text{rad} Ae_y = Ae_y$. Entonces, por el lema de Nakayama, $\text{Im} \lambda = Ae_y$, y se tiene que λ es un epimorfismo. Como Ae_y es proyectivo, entonces existe un morfismo $\alpha: Ae_y \rightarrow P_{S_x}^{-t}$ tal que $\lambda\alpha = 1$. Por lo tanto, Ae_y es sumando directo de $P_{S_x}^{-t}$. Entonces el lema (??) nos dice que $t = p(y) - p(x)$, esto es, $l = 0$.

Si $l = 0$, entonces por el lema (??) $f_{\underline{X}, \underline{Y}}^{\mathcal{D}}$ es un isomorfismo. Entonces, $f_{\underline{X}, \underline{Y}[l]}^{\mathcal{D}}$ es un isomorfismo para todo $\underline{X}, \underline{Y} \in \{xI \otimes V_x\}_{x \in Q_0}$ y para cada $l \in \mathbb{Z}$. \square

Definición 7.62. Sea $\mathcal{D}_s^\perp(A^!-\text{Mod})$ la subcategoría plena de $\mathcal{D}^\perp(A^!-\text{Mod})$ cuyos objetos son isomorfos a complejos finitos de módulos de soporte finito.

Definición 7.63. 1. Sea M un $A^!$ -módulo. Denotamos por :

$$t_{\geq n}(M) := \sum_{q(y) \geq n} M_y,$$

éste es un submódulo de M . Si $u: M \rightarrow N$, entonces definimos

$$t_{\geq n}(u) := u|_{t_{\geq n}(M)}: t_{\geq n}(M) \rightarrow t_{\geq n}(N).$$

2. Sea

$$t_{\leq n}(M) := M/t_{\geq n+1}(M).$$

Luego, para cada $n \in \mathbb{Z}$ tenemos la sucesión exacta de módulos:

$$0 \longrightarrow t_{\geq n}(M) \xrightarrow{\sigma} M \xrightarrow{\rho} t_{\leq n-1}(M) \longrightarrow 0,$$

para σ y ρ la inyección y la proyección canónicas respectivamente.

Definición 7.64. Sea \dot{X} un complejo en $\mathcal{C}(A^1\text{-Mod})$. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, sea $d_X^i: X^i \rightarrow X^{i+1}$ el i -ésimo morfismo diferencial; puesto que su restricción $d_X^i|_{t_{\geq n-1}(X^i)}$ a $t_{\geq n-1}(X^i)$ tiene imagen contenida en $t_{\geq n-1}(X^{i+1})$, se induce un morfismo $\hat{d}_X^i: t_{\geq n-1}(X^i) \rightarrow t_{\geq n-1}(X^{i+1})$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. De hecho, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} t_{\geq n}(\dot{X}) := & \cdots & t_{\geq n}(X^a) & \xrightarrow{d_X^a|} & t_{\geq n}(X^{a+1}) & \xrightarrow{d_X^{a+1}|} & \cdots & t_{\geq n}(X^l) & \xrightarrow{d_X^l|} & \cdots \\ & & \sigma^a \downarrow & & \sigma^{a+1} \downarrow & & & \sigma^l \downarrow & & \\ \dot{X} := & \cdots & X^a & \xrightarrow{d_X^a} & X^{a+1} & \xrightarrow{d_X^{a+1}} & \cdots & X^l & \xrightarrow{d_X^l} & \cdots \\ & & \rho^a \downarrow & & \rho^{a+1} \downarrow & & & \rho^l \downarrow & & \\ t_{\leq n-1}(\dot{X}) := & \cdots & t_{\leq n-1}(X^a) & \xrightarrow{\hat{d}_X^a} & t_{\leq n-1}(X^{a+1}) & \xrightarrow{\hat{d}_X^{a+1}} & \cdots & t_{\leq n-1}(X^l) & \xrightarrow{\hat{d}_X^l} & \cdots \end{array}$$

Luego, tenemos la sucesión exacta de complejos:

$$0 \longrightarrow t_{\geq n}(\dot{X}) \xrightarrow{\hat{\sigma}} \dot{X} \xrightarrow{\hat{\rho}} t_{\leq n-1}(\dot{X}) \longrightarrow 0$$

donde $\hat{\sigma}$ y $\hat{\rho}$ son la inyección y la proyección canónicas.

Observación 7.65. Si \dot{X} está en $C^{\downarrow}(A^1\text{-Mod})$, por el lema (??), tenemos que $t_{\geq n}(\dot{X})$ es un complejo finito de módulos de soporte finito, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 7.66. Decimos que un complejo \dot{X} tiene cohomología acotada si existen enteros $a \leq b$ tales que $H^i(\dot{X}) = 0$ para todo $i < a$ y $H^i(\dot{X}) = 0$ para todo $i > b$.

Proposición 7.67. Sea \dot{J} un complejo en $\mathcal{C}^{\downarrow}(A^1\text{-Mod})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) \dot{J} tiene cohomología acotada y cada $H^i(\dot{J})$ es un A^1 -módulo de soporte finito.

(b) Existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $t_{\leq m}(\dot{J})$ es acíclico.

(c) \dot{J} está en $\mathcal{D}_s^\downarrow(A^!-\text{Mod})$.

DEMOSTRACIÓN. (a) \Rightarrow (b) Sean $a \leq b$ enteros tales que $H^i(\dot{J}) = 0$ para todo $i < a$ y $H^i(\dot{J}) = 0$ para todo $i > b$. Tenemos que el conjunto

$$\text{sop}H(\dot{J}) := \bigcup_{i=a}^b \{y \in Q_0 \mid e_y H^i(\dot{J}) \neq 0\},$$

es finito. Sea

$$m_0 := \min\{q(y) \mid y \in \text{sop}H(\dot{J})\}.$$

Sea $m = m_0 - 1$. Probemos que $t_{\leq m}(\dot{J})$ es acíclico. Tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow t_{\geq m+1}(\dot{J}) \xrightarrow{\dot{\sigma}} \dot{J} \xrightarrow{\dot{\rho}} t_{\leq m}(\dot{J}) \longrightarrow 0,$$

donde $\dot{\sigma}$ y $\dot{\rho}$ son la inyección y la proyección canónicas respectivamente. Probemos que $\dot{\sigma}$ es un cuasi-isomorfismo, es decir, que para cada $i \in \mathbb{Z}$, $H^i(\dot{\sigma}): H^i(t_{\geq m+1}(\dot{J})) \rightarrow H^i(\dot{J})$ es un isomorfismo. Esto pasa si y sólo si $[H^i(\dot{\sigma})]_y: [H^i(t_{\geq m+1}(\dot{J}))]_y \rightarrow [H^i(\dot{J})]_y$ es un isomorfismo para todo $y \in Q_0$. Notemos que $[t_{\geq m+1}(\dot{J})]^i := t_{\geq m+1}(J^i) = \sum_{q(x) \geq m+1} J_x^i$, para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Si $y \in Q_0$ es tal que $q(y) \leq m$, entonces $H^i(\dot{J})_y = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, porque $m < m_0$. Por otro lado, también $[t_{\geq m+1}(J^i)]_y = \sum_{q(x) \geq m+1} J_x^i = 0$ en

este caso, y se tiene el isomorfismo.

Supongamos que y es tal que $q(y) > m$, en tal caso tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} [t_{\geq m+1}(J^{i-1})]_y = [\sum_{q(x) \geq m+1} J_x^{i-1}]_y = J_y^{i-1} & \xrightarrow{\sigma_y^{i-1}} & J_y^{i-1} \\ & & \downarrow (d_J^{i-1})_y \\ [t_{\geq m+1}(J^i)]_y = [\sum_{q(x) \geq m+1} J_x^i]_y = J_y^i & \xrightarrow{\sigma_y^i} & J_y^i \\ & & \downarrow (d_J^i)_y \\ [t_{\geq m+1}(J^{i+1})]_y = [\sum_{q(x) \geq m+1} J_x^{i+1}]_y = J_y^{i+1} & \xrightarrow{\sigma_y^{i+1}} & J_y^{i+1} \end{array}$$

donde d_J^i denota la restricción de la diferencial d_J^i . Luego, es claro que $[H^i(t_{\geq m+1}(\dot{J}))]_y = [H^i(\dot{J})]_y$, para cada $q(y) > m$.

(b) \Rightarrow (c) Supongamos que $t_{\leq m}(\dot{J})$ es acíclico. Tenemos la sucesión exacta de complejos:

$$0 \longrightarrow t_{\geq m+1}(\dot{J}) \xrightarrow{\dot{\sigma}} \dot{J} \xrightarrow{\dot{\rho}} t_{\leq m}(\dot{J}) \longrightarrow 0$$

donde $\dot{\sigma}$ y $\dot{\rho}$ son la inyección y la proyección canónicas. Por la proposición (??), tenemos el siguiente triángulo en $\mathcal{D}(A^1\text{-Mod})$:

$$t_{\geq m+1}(\dot{J}) \xrightarrow{Q\dot{\sigma}} \dot{J} \xrightarrow{Q\dot{\rho}} t_{\leq m}(\dot{J}) \xrightarrow{h} t_{\geq m+1}(\dot{J})[1],$$

y éste es, por definición, isomorfo a la imagen de un triángulo en $K(A^1\text{-Mod})$, esto es, tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} t_{\geq m+1}(\dot{J}) & \xrightarrow{Q\dot{\sigma}} & \dot{J} & \xrightarrow{Q\dot{\rho}} & t_{\leq m}(\dot{J}) & \xrightarrow{h} & t_{\geq m+1}(\dot{J})[1] \\ \delta_1 \uparrow \cong & & \delta_2 \uparrow \cong & & \delta_3 \uparrow \cong & & T_{\mathcal{D}}\delta_1 \uparrow \cong \\ \dot{X} & \xrightarrow{Qu} & \dot{Y} & \xrightarrow{Qv} & \dot{Z} & \xrightarrow{Qw} & \dot{X}[1], \end{array}$$

donde $\dot{X} \xrightarrow{u} \dot{Y} \xrightarrow{v} \dot{Z} \xrightarrow{w} \dot{X}[1]$ es un triángulo en $K(A^1\text{-Mod})$. Como $t_{\leq m}(\dot{J})$ es acíclico y δ_3 es un isomorfismo, entonces \dot{Z} también es acíclico. Por el corolario (??), tenemos que u es un cuasi-isomorfismo. Así que Qu es un isomorfismo, y entonces $Q\dot{\sigma} = \delta_2 Qu \delta_1^{-1}$ también es un isomorfismo. Por lo tanto, \dot{J} es isomorfo a $t_{\geq m+1}(\dot{J})$, que es un complejo finito de A^1 -módulos de soporte finito, por el lema (??). Entonces \dot{J} está en $\mathcal{D}_s^{\downarrow}(A^1\text{-Mod})$.

(c) \Rightarrow (a) Supongamos que \dot{J} está en $\mathcal{D}_s^{\downarrow}(A^1\text{-Mod})$. Entonces, \dot{J} es isomorfo en $\mathcal{D}^{\downarrow}(A^1\text{-Mod})$ a un complejo finito

$$\dot{X} = \dots 0 \longrightarrow X^a \longrightarrow \dots \longrightarrow X^b \longrightarrow 0 \dots,$$

de A^1 -módulos de soporte finito. Es claro que \dot{X} tiene cohomología acotada, pues $H^i(\dot{X}) = 0$ para todo $i < a$ y $H^i(\dot{X}) = 0$ para todo $i > b$. Como cada X^i tiene soporte finito, $e_y(\ker d_X^i)/e_y(\text{Im}d_X^{i-1}) = e_y(\ker d_X^i/\text{Im}d_X^{i-1}) = e_y H^i(\dot{X})$ es distinto de cero sólo para un número finito de vértices $y \in Q_0$, es decir, cada $H^i(\dot{X})$ tiene soporte finito.

Como \dot{X} es isomorfo a \dot{J} , entonces $H^i(\dot{X}) \cong H^i(\dot{J})$ como A^1 -módulos, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Luego, la cohomología de \dot{J} es acotada y cada $H^i(\dot{J})$ tiene soporte finito. □

Proposición 7.68. (a) $\mathcal{D}_s^\perp(A^!-\text{Mod})$ es una categoría triangulada.

(b) $\mathcal{D}_s^\perp(A^!-\text{Mod})$ está generada por la familia $\{S_x \otimes V_x[m]\}_{x \in Q_0, m \in \mathbb{Z}}$.

DEMOSTRACIÓN. (a) Es claro que $\mathcal{D}_s^\perp(A^!-\text{Mod})$ es cerrada bajo traslaciones y coproductos finitos. Sean \dot{X}, \dot{Y} en $\mathcal{D}_s^\perp(A^!-\text{Mod})$ y $\delta: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ un morfismo entre ellos. Por definición, existen isomorfismos en $\mathcal{D}^\perp(A^!-\text{Mod})$: $\dot{X} \xrightarrow{\alpha_1} \dot{F}_1$ y $\dot{Y} \xrightarrow{\alpha_2} \dot{F}_2$, con \dot{F}_1 y \dot{F}_2 un par de complejos finitos de $A^!$ -módulos de soporte finito. Por la proposición (??), existen isomorfismos en $\mathcal{D}^\perp(A^!-\text{Mod})$: $\dot{F}_1 \xrightarrow{\beta_1} \dot{I}_1$ y $\dot{F}_2 \xrightarrow{\beta_2} \dot{I}_2$, con \dot{I}_1 e \dot{I}_2 complejos de inyectivos en $\mathcal{C}^\perp(A^!-\text{Mod})$. Entonces, \dot{I}_1 e \dot{I}_2 también están en $\mathcal{D}_s^\perp(A^!-\text{Mod})$. Sea $\delta_1 := \beta_2 \alpha_2 \delta \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1}$ un morfismo de \dot{I}_1 en \dot{I}_2 . Como \dot{I}_2 es q -inyectivo, $\delta_1 = \hat{Q}\underline{u}$, con \underline{u} en la categoría homotópica $K(A^!-\text{Mod})$. Luego, el siguiente es un triángulo en $K(A^!-\text{Mod})$:

$$\dot{I}_1 \xrightarrow{\underline{u}} \dot{I}_2 \xrightarrow{\underline{v}} \text{Con}_u \xrightarrow{\underline{w}} \dot{I}_1[1].$$

Por la proposición (??), la siguiente sucesión es exacta:

$$\dots H^i(\dot{I}_1) \xrightarrow{H^i \underline{u}} H^i(\dot{I}_2) \xrightarrow{H^i \underline{v}} H^i(\text{Con}_u) \xrightarrow{H^i \underline{w}} H^{i+1}(\dot{I}_1) \dots \quad (7.8)$$

Por la proposición (??) aplicado a \dot{I}_1 e \dot{I}_2 , tenemos que existe un par de enteros $a \leq b$ tales que $H^i(\dot{I}_1) = 0$ y $H^i(\dot{I}_2) = 0$ para todo $i < a$ y para todo $i > b$. Luego, usando la exactitud de la sucesión (??), es claro que $H^i(\text{Con}_u) = 0$ si $i < a - 1$ ó si $i > b$.

La proposición (??) nos dice, además, que $H^i(\dot{I}_1)$ y $H^i(\dot{I}_2)$ son de soporte finito, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Para cada $i \in \{a, \dots, b\}$, definimos los módulos: $L^i := \text{Im} H^i(\underline{v}) = \ker H^i(\underline{w})$ y $T^i := \text{Im} H^i(\underline{w}) = \ker H^{i+1}(\underline{u})$. L^i es de soporte finito por ser imagen del módulo $H^i(\dot{I}_2)$, que es de soporte finito. T^i es de soporte finito por ser submódulo del módulo $H^{i+1}(\dot{I}_1)$, que es de soporte finito. Luego, tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow L^i \longrightarrow H^i(\text{Con}_u) \longrightarrow T^i \longrightarrow 0.$$

Luego, para cada $x \in Q_0$, $0 \longrightarrow e_x L^i \longrightarrow e_x H^i(\text{Con}_u) \longrightarrow e_x T^i \longrightarrow 0$, es una sucesión exacta de k -espacios vectoriales, y tenemos que $e_x L^i = 0$ y $e_x T^i = 0$ para casi todo $x \in Q_0$. Por lo tanto, $H^i(\text{Con}_u)$ también es

de soporte finito. Luego, por la proposición (??), Con_u también está en $\mathcal{D}_s^\perp(A^1\text{-Mod})$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{D}(A^1\text{-Mod})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dot{X} & \xrightarrow{\delta} & \dot{Y} & \xrightarrow{\hat{Q}_v \beta_2 \alpha_2} & \text{Con}_u & \xrightarrow{(T_{\mathcal{D}} \beta_1 \alpha_1)^{-1} \hat{Q}_w} & \dot{X}[1] \\
 \beta_1 \alpha_1 \downarrow \cong & & \beta_2 \alpha_2 \downarrow \cong & & \parallel & & \cong \downarrow T_{\mathcal{D}} \beta_1 \alpha_1 \\
 \dot{I}_1 & \xrightarrow{\hat{Q}_u} & \dot{I}_2 & \xrightarrow{\hat{Q}_v} & \text{Con}_u & \xrightarrow{\hat{Q}_w} & \dot{I}_1[1],
 \end{array}$$

Luego, el renglón superior es un triángulo tal que Con_u está en $\mathcal{D}_s^\perp(A^1\text{-Mod})$.

(b) Sea \mathcal{T} la subcategoría triangular generada por $\{S_x \otimes V_x\}_{x \in Q_0}$. Sea \dot{X} un objeto en $\mathcal{D}_s(A^1\text{-Mod})$, luego, \dot{X} es isomorfo a un complejo finito \dot{M} de A^1 -módulos de soporte finito.

Supongamos primero que \dot{M} es un complejo concentrado en grado i . Luego, $\dot{M} = \underline{M}[-i]$, donde M es un A^1 -módulo de soporte finito n . Hagamos inducción en la cardinalidad del soporte. Si ésta es 1, entonces $M = e_{x^{\text{op}}} M = \coprod S_{x^{\text{op}}} \cong S_{x^{\text{op}}} \otimes V_x$ y $\underline{M}[-i] = S_{x^{\text{op}}} \otimes V_x[-i]$ está en \mathcal{T} .

Supongamos que el resultado es cierto cuando la cardinalidad del soporte es $n - 1$. Sea c el máximo del conjunto $\{q(x^{\text{op}}) \mid x^{\text{op}} \in \text{sop} M\}$ (existe, pues $\text{sop} M$ es finito). Sea $z^{\text{op}} \in \text{sop} M$ tal que $q(z^{\text{op}}) = c$. Sea L el A^1 -módulo cuya representación es tal que $L_{z^{\text{op}}} = M_{z^{\text{op}}}$ y es cero en los demás vértices. Entonces, la cardinalidad de $\text{sop} L$ es 1 y vale la proposición, esto es, $\underline{L}[-i]$ está en \mathcal{T} . Por otro lado, $\text{sop}(M/L) = \text{sop} M - \{z^{\text{op}}\}$. Luego, por hipótesis de inducción, $\underline{M/L}[-i]$ también está en \mathcal{T} . Tenemos la sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow \underline{L}[-i] \xrightarrow{\sigma} \underline{M}[-i] \xrightarrow{\rho} \underline{M/L}[-i] \longrightarrow 0,$$

luego, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \underline{M/L}[-i-1] & \xrightarrow{w} & \underline{L}[-i] & \xrightarrow{\hat{Q}_\sigma} & \underline{M}[-i] & \xrightarrow{\hat{Q}_\rho} & \underline{M/L}[-i] \\
 \parallel & & \parallel & & \cong \downarrow & & \parallel \\
 \underline{M/L}[-i-1] & \xrightarrow{w} & \underline{L}[-i] & \longrightarrow & \dot{N} & \longrightarrow & \underline{M/L}[-i],
 \end{array}$$

donde el renglón superior es un triángulo en $\mathcal{D}^\perp(A^1\text{-Mod})$ y el renglón inferior es un triángulo en \mathcal{T} . Luego, $\underline{M}[-i]$ es isomorfo en $\mathcal{D}(A^1\text{-Mod})$ a un objeto en \mathcal{T} . Como \mathcal{T} es cerrada bajo traslaciones e isomorfismos, \underline{M} está en \mathcal{T} .

Supongamos ahora que

$$\dot{M} = \dots 0 \longrightarrow M^a \longrightarrow \dots \longrightarrow M^{a+n} \longrightarrow 0 \dots,$$

es un complejo finito de tamaño $n + 1$ de A^1 -módulos de soporte finito. Supongamos válido el lema para complejos con, a lo más, n entradas no cero. Sean los complejos finitos:

$$\dot{M}_{\hat{a}} = \dots 0 \longrightarrow M^{a+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow M^{a+n} \longrightarrow 0 \dots$$

y $\underline{M}^a[-a]$ el complejo concentrado en grado a , con entrada M^a . Tenemos la sucesión exacta de complejos:

$$0 \longrightarrow \dot{M}_{\hat{a}} \xrightarrow{\hat{\sigma}} \dot{M} \xrightarrow{\hat{\rho}} \underline{M}^a[-a] \longrightarrow 0,$$

para $\hat{\sigma}$ y $\hat{\rho}$ la inyección y la proyección canónica respectivamente. Luego, el siguiente es un triángulo en la categoría derivada $\mathcal{D}(A^1\text{-Mod})$:

$$\underline{M}^a[-a-1] \xrightarrow{h} \dot{M}_{\hat{a}} \xrightarrow{\hat{Q}(\hat{\sigma})} \dot{M} \xrightarrow{\hat{Q}(\hat{\rho})} \underline{M}^a[-a].$$

Tenemos el siguiente diagrama, donde el renglón superior es un triángulo en $\mathcal{D}^\downarrow(A^1\text{-Mod})$ y el inferior es un triángulo en \mathcal{T} :

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{M}^a[-a-1] & \xrightarrow{h} & \dot{M}_{\hat{a}} & \xrightarrow{\hat{Q}(\hat{\sigma})} & \dot{M} & \xrightarrow{\hat{Q}(\hat{\rho})} & \underline{M}^a[-a] \\ & & \parallel & & \downarrow \cong \delta & & \parallel \\ \underline{M}^a[-a-1] & \xrightarrow{h} & \dot{M}_{\hat{a}} & \xrightarrow{\delta \hat{Q}(\hat{\sigma})} & \dot{Y} & \xrightarrow{\hat{Q}(\hat{\rho})\delta^{-1}} & \underline{M}^a[-a]. \end{array}$$

Por el axioma TR3 de categorías trianguladas, existe el morfismo δ que hace conmutar el diagrama y, además, es un isomorfismo. Luego, hemos probado que existe \dot{Y} en \mathcal{T} tal que $\dot{M} \cong \dot{Y}$. Por lo tanto, $\mathcal{D}_s^\downarrow(A^1\text{-Mod}) \subseteq \mathcal{T}$. Como $\mathcal{D}_s^\downarrow(A^1\text{-Mod})$ es triangulada, cerrada bajo isomorfismos y contiene a la familia $\{\underline{S}_x \otimes V_x\}_{x \in Q_0}$, entonces $\mathcal{D}_s^\downarrow(A^1\text{-Mod}) = \mathcal{T}$. \square

Proposición 7.69. *Dado un complejo*

$$\dot{W} = \dots \longrightarrow W^i \longrightarrow W^{i+1} \longrightarrow \dots,$$

definimos el complejo:

$$\dot{W}_{\geq m} := \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow W^m \longrightarrow W^{m+1} \dots \longrightarrow W^{m+i} \longrightarrow \dots$$

Sea \dot{M} un complejo finito de $A^!$ -módulos de soporte finito y supongamos que \dot{W} es un complejo de $A^!$ -módulos inyectivos en $\mathcal{C}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$. Entonces existe un entero m_0 tal que para toda $m \geq m_0$,

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(A^!)}(\dot{M}, \dot{W}_{\geq m}) = 0,$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^c(\dot{M}), \mathbf{f}^c(\dot{W}_{\geq m})) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Es claro que existe un entero l tal que para todo $i \in \mathbb{Z}$ y para toda x^{op} en el soporte de M^i , tenemos $l < q(x^{\text{op}})$. Supongamos que $\dot{W} \in \Delta_{a,b}$. Seleccionemos un entero s tal que

$$b - s < l.$$

Sea $m_0 = a + s$ y $m \geq m_0$. Tenemos que \dot{W} y también $\dot{W}_{\geq m}$ son q -inyectivos (proposición (??)), entonces

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(A^!)}(\dot{M}, \dot{W}_{\geq m}) \cong \text{Hom}_{K(A^!)}(\dot{M}, \dot{W}_{\geq m}),$$

si éste no es cero, entonces existe un morfismo $0 \neq \dot{h}: \dot{M} \rightarrow \dot{W}_{\geq m}$. Luego, hay un morfismo no nulo $h_x^u: M_{x^{\text{op}}}^u \rightarrow (W_{\geq m}^u)_{x^{\text{op}}}$. Como $M_{x^{\text{op}}}^u \neq 0$, tenemos $u = a + t$, con $t \geq 0$. Como $(W_{\geq m}^u)_{x^{\text{op}}} \neq 0$, tenemos $u \geq m \geq m_0 = a + s$. Luego, $t \geq s$, como $\dot{W} \in \Delta_{a,b}$, tenemos que $W^{a+t} \in A^!-\text{Mod}^{\leq b-t}$, pero $0 \neq (W_{\geq m}^u)_{x^{\text{op}}} = W_{x^{\text{op}}}^{a+t}$. Así que $q(x^{\text{op}}) \leq b - t \leq b - s < l$, lo cual implica que $M_{x^{\text{op}}}^u = 0$, una contradicción. Por lo tanto, $\text{Hom}_{\mathcal{D}(A^!)}(\dot{M}, \dot{W}_{\geq m}) = 0$.

Para la segunda afirmación, tenemos que $\mathbf{f}^c(\dot{M})$ es un complejo de proyectivos en $\mathcal{C}^\uparrow(A-\text{Mod})$ (lema (??)), por lo tanto es q -proyectivo (proposición (??)), luego:

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^c(\dot{M}), \mathbf{f}^c(\dot{W}_{\geq m})) \cong \text{Hom}_{K(A)}(\mathbf{f}^c(\dot{M}), \mathbf{f}^c(\dot{W}_{\geq m})).$$

Si lo que afirmamos fuera falso, tendríamos un morfismo distinto de cero en $K(A-\text{Mod})$: $\dot{h}: \mathbf{f}^c(\dot{M}) \rightarrow \mathbf{f}^c(\dot{W}_{\geq m})$. Luego, existiría un morfismo de complejos $0 \neq \dot{h}: \mathbf{f}^c(\dot{M}) \rightarrow \mathbf{f}^c(\dot{W}_{\geq m})$. Esto implica la existencia de un morfismo no cero $h^r: (\mathbf{f}^c(\dot{M}))^r \rightarrow (\mathbf{f}^c(\dot{W}_{\geq m}))^r$, es decir,

$$0 \neq h^r: \coprod_{-p(x)+j=r} Ae_x \otimes M_{x^{\text{op}}}^j \longrightarrow \coprod_{-p(y)+j=r} Ae_y \otimes (W_{\geq m}^j)_{y^{\text{op}}}.$$

Entonces, para alguna pareja $j_1 = r + p(x)$, $j_2 = r + p(y)$ es distinto de cero el siguiente morfismo:

$$Ae_x \otimes M_{x^{\text{op}}}^{j_1} \xrightarrow{\hat{h}^r} Ae_y \otimes (W_{\geq m}^{j_2})_{y^{\text{op}}},$$

para \hat{h}^r la restricción de h^r al sumando $Ae_x \otimes M_{x^{\text{op}}}^{j_1}$. En particular, $M_{x^{\text{op}}}^{j_1}$ y $(W_{\geq m}^{j_2})_{y^{\text{op}}}$ son distintos de cero. Luego, $j_2 = a + t$, para algún $t \geq 0$, entonces $W_{\geq m}^{j_2}$ está en $A^1\text{-Mod}^{\leq b-t}$, por lo tanto, $q(y^{\text{op}}) \leq b - t$. Por otro lado, $j_2 \geq m$, entonces, $a + t \geq m \geq m_0 = a + s$, esto es, $t \geq s$. Así que $q(y^{\text{op}}) \leq b - s < l$. Además, $\hat{h}^r \neq 0$ nos dice que hay un morfismo de A -módulos no cero de Ae_x en Ae_y ; por la afirmación (??) hay un camino orientado de y en x . Entonces $p(x) \geq p(y)$, es decir, $q(x^{\text{op}}) \leq q(y^{\text{op}}) < l$, una contradicción. Esto prueba nuestro resultado. \square

Observación 7.70. Para el simple $S_{x^{\text{op}}}$ tenemos que

$$\mathbf{f}(S_{x^{\text{op}}})^u \cong \prod_{\substack{z \in Q_0 \\ q(z)=u}} Ae_z \otimes e_z S_{x^{\text{op}}} \cong \begin{cases} 0, & \text{si } u \neq q(x), \\ Ae_x, & \text{si } u = q(x). \end{cases}$$

Luego,

$$\mathbf{f}(S_{x^{\text{op}}})[q(x^{\text{op}})] \cong Ae_x.$$

Proposición 7.71. Para todo $x, y \in Q_0$ y $m \in \mathbb{Z}$, se tiene un isomorfismo:

$$\mathbf{f}^{\mathcal{D}} : \text{Hom}_{\mathcal{D}(A^1)}(S_x \otimes V_{x,y}I \otimes V_y[m]) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^c(S_x) \otimes V_x, \mathbf{f}^c({}_y I) \otimes V_y[m]).$$

DEMOSTRACIÓN. Si $m < 0$, entonces $\text{Hom}_{\mathcal{D}(A^1)}(S_x \otimes V_{x,y}I \otimes V_y[m]) = 0$ y también $\text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^c(S_x) \otimes V_x, \mathbf{f}^c({}_y I) \otimes V_y[m]) = 0$ por la proposición (??).

Supongamos que $m \geq 0$. Para el dominio, por la proposición (??), tenemos el isomorfismo

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(A^1)}(S_x \otimes V_{x,y}I \otimes V_y[m]) \cong \text{Ext}_{A^1}^m(S_x \otimes V_{x,y}I \otimes V_y),$$

éste es cero si $m > 0$, pues ${}_y I \otimes V_y$ es inyectivo. Para el codominio, como $\mathbf{f}^c(S_x) \otimes V_x$ es q -proyectivo y por la observación (??), tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^c(S_x) \otimes V_x, \mathbf{f}^c({}_y I) \otimes V_y[m]) &\cong \text{Hom}_{K(A)}(\mathbf{f}^c(S_x) \otimes V_x, \mathbf{f}^c({}_y I) \otimes V_y[m]) \\ &\cong \text{Hom}_{K(A)}(Ae_x \otimes V_x[p(x)], S_y \otimes V_y[p(y) + m]). \end{aligned}$$

Si este último no es cero, tendríamos un morfismo de complejos no nulo: $h: Ae_x \otimes V_x[p(x)] \rightarrow S_y \otimes V_y[p(y) + m]$; luego, un morfismo de complejos no nulo $g: Ae_x[p(x)] \rightarrow S_y[p(y) + m]$. Por lo tanto, $p(x) = p(y) + m$. En este caso, tendríamos un morfismo no cero de Ae_x en S_y , esto implica $x = y$ y entonces $m = 0$.

Si $m = 0$, por el lema (??), $\mathbf{f}_{S_x \otimes V_x, {}_y I \otimes V_y}^{\mathcal{D}}$ es un isomorfismo. \square

Lema 7.72. Sea S la familia en $\mathcal{D}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$ de los objetos de la forma ${}_x I \otimes V_x[m]$, con $x \in Q_0$, V_x un k -espacio vectorial y $m \in \mathbb{Z}$. Sea

$$S_1 := \{ \dot{X} \in \mathcal{D}^\downarrow(A^!-\text{Mod}) \mid \mathbf{f}_{\dot{X}, \dot{Y}}^{\mathcal{D}} \text{ es isomorfismo } \forall \dot{Y} \in S, \}$$

donde $\mathbf{f}_{\dot{X}, \dot{Y}}^{\mathcal{D}}$ denota $\mathbf{f}^{\mathcal{D}} : \text{Hom}_{\mathcal{D}(A^!)}(\dot{X}, \dot{Y}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^{\mathcal{D}} \dot{X}, \mathbf{f}^{\mathcal{D}} \dot{Y})$. Sea \mathcal{U}_1 la subcategoría plena de $\mathcal{D}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$ cuyos objetos son los de S_1 . Entonces, \mathcal{U}_1 es una subcategoría triangulada de $\mathcal{D}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$ que contiene a $\mathcal{D}_s^\downarrow(A^!-\text{Mod})$.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que S es cerrada bajo traslaciones y, por la proposición (??), S_1 contiene a los objetos $\underline{S}_{x^{\text{op}}} \otimes V_x$, para todo $x \in Q_0$, por lo tanto, S_1 contiene a los objetos $\underline{S}_{x^{\text{op}}} \otimes V_x[-m]$, para todo $m \in \mathbb{Z}$. Luego, \mathcal{U}_1 , que es triangulada por el lema (??), contiene a la categoría triangulada que genera la familia $\{\underline{S}_{x^{\text{op}}} \otimes V_x[n]\}_{x \in Q_0, n \in \mathbb{Z}}$, porque ésta es la subcategoría triangulada más pequeña cerrada bajo isomorfismos, que contiene esta familia (definición ??). Por la proposición (??), \mathcal{U}_1 contiene a $\mathcal{D}_s^\downarrow(A^!-\text{Mod})$. \square

Lema 7.73. Sea $S = \mathcal{D}_s^\downarrow(A^!-\text{Mod})$ y

$$S_2 := \{ \dot{Y} \in \mathcal{D}^\downarrow(A^!-\text{Mod}) \mid \mathbf{f}_{\dot{X}, \dot{Y}}^{\mathcal{D}} \text{ es isomorfismo } \forall \dot{X} \in S, \}$$

donde $\mathbf{f}_{\dot{X}, \dot{Y}}^{\mathcal{D}}$ denota $\mathbf{f}^{\mathcal{D}} : \text{Hom}_{\mathcal{D}(A^!)}(\dot{X}, \dot{Y}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^{\mathcal{D}} \dot{X}, \mathbf{f}^{\mathcal{D}} \dot{Y})$. Sea \mathcal{U}_2 la subcategoría plena de $\mathcal{D}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$ cuyos objetos son los de S_2 . Entonces, $\mathcal{U}_2 = \mathcal{D}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$.

DEMOSTRACIÓN. Por el lema (??), el conjunto de los objetos de la forma ${}_x I \otimes V_x[m]$ son generadores de la subcategoría triangular $\mathcal{D}^{b,I}(A^!-\text{Mod})$. Luego, por el lema (??), esta última subcategoría está contenida en \mathcal{U}_2 .

Probemos que si \dot{M} es un complejo finito de módulos de soporte finito y \dot{Y} está en $\mathcal{D}^\downarrow(A^!-\text{Mod})$, entonces $\mathbf{f}_{\dot{M}, \dot{Y}}^{\mathcal{D}}$ es un isomorfismo. Por la proposición (??), podemos suponer que \dot{Y} es un complejo de inyectivos.

Por la proposición (??), existe un entero m_0 tal que

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(A^!)}(\dot{N}, \dot{Y}_{\geq m}) = 0,$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^c(\dot{N}), \mathbf{f}^c(\dot{Y}_{\geq m})) = 0;$$

donde $\dot{N} = \dot{M}$ ó $\dot{N} = \dot{M}[-1]$, y para toda $m \geq m_0$.

Los siguientes son triángulos en $\mathcal{D}^\downarrow(A^\dagger\text{-Mod})$ y en $\mathcal{D}^\uparrow(A\text{-Mod})$, respectivamente:

$$(t_1): \dot{Y}_{\geq m+1} \longrightarrow \dot{Y} \xrightarrow{i} \dot{Y}_{\leq m} \longrightarrow \dot{Y}_{\geq m+1}[1],$$

$$(t_2): \mathbf{f}^\mathcal{D}\dot{Y}_{\geq m+1} \longrightarrow \mathbf{f}^\mathcal{D}\dot{Y} \xrightarrow{\mathbf{f}^\mathcal{D}i} \mathbf{f}^\mathcal{D}\dot{Y}_{\leq m} \longrightarrow \mathbf{f}^\mathcal{D}\dot{Y}_{\geq m+1}[1].$$

Tomando $m \geq m_0$ obtenemos:

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(A^\dagger)}(\dot{M}, \dot{Y}_{\geq m+1}) = 0,$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(A^\dagger)}(\dot{M}, \dot{Y}_{\geq m+1}[1]) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}(A^\dagger)}(\dot{M}[-1], \dot{Y}_{\geq m+1}) = 0,$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{M}), \mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{Y}_{\geq m+1})) = 0,$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{M}), \mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{Y}_{\geq m+1}[1])) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{M})[-1], \mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{Y}_{\geq m+1})) = 0.$$

Aplicando $\text{Hom}_{\mathcal{D}(A^\dagger)}(\dot{M}, -)$ al triángulo (t_1) obtenemos, por (??), el isomorfismo:

$$\text{Hom}(1, i): \text{Hom}_{\mathcal{D}(A^\dagger)}(\dot{M}, \dot{Y}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(A^\dagger)}(\dot{M}, \dot{Y}_{\leq m}).$$

Aplicando $\text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{M}), -)$ al triángulo (t_2) , obtenemos el isomorfismo:

$$\text{Hom}(1, \mathbf{f}^\mathcal{D}(i)): \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{M}), \mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{Y})) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{M}), \mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{Y}_{\leq m})).$$

Observemos que $\dot{Y}_{\leq m}$ es un complejo finito de inyectivos con soclo de soporte finito, luego, este complejo está en \mathcal{U}_2 . Entonces, el funtor $\mathbf{f}^\mathcal{D}$ induce un isomorfismo:

$$\mathbf{f}^\mathcal{D}: \text{Hom}_{\mathcal{D}(A^\dagger)}(\dot{M}, \dot{Y}_{\leq m}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{M}), \mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{Y}_{\leq m})).$$

Consideremos ahora el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}(A^\dagger)}(\dot{M}, \dot{Y}) & \xrightarrow{\text{Hom}(1, i)} & \text{Hom}_{\mathcal{D}(A^\dagger)}(\dot{M}, \dot{Y}_{\leq m}) \\ \mathbf{f}^\mathcal{D} \downarrow & & \downarrow \mathbf{f}^\mathcal{D} \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{M}), \mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{Y})) & \xrightarrow{\text{Hom}(1, \mathbf{f}^\mathcal{D}(i))} & \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{M}), \mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{Y}_{\leq m})). \end{array}$$

De aquí se deduce que el morfismo

$$\mathbf{f}^\mathcal{D}: \text{Hom}_{\mathcal{D}(A^\dagger)}(\dot{M}, \dot{Y}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(\mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{M}), \mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{Y})),$$

es un isomorfismo. \square

Lema 7.74.

$$\mathbf{f}^{\mathcal{D}} : \mathcal{D}^{\downarrow}(A^{\downarrow}\text{-Mod}) \longrightarrow \mathcal{D}^{\uparrow}(A\text{-Mod})$$

es un funtor fiel y pleno.

DEMOSTRACIÓN. Sea $S := \mathcal{D}^{\downarrow}(A^{\downarrow}\text{-Mod})$. Definimos:

$$S_1 := \{\dot{X} \in \mathcal{D}^{\downarrow}(A^{\downarrow}\text{-Mod}) \mid \mathbf{f}_{\dot{X}, \dot{Y}}^{\mathcal{D}} \text{ es isomorfismo } \forall \dot{Y} \in S.\}$$

Sea \mathcal{U}_1 la subcategoría plena de $\mathcal{D}^{\downarrow}(A^{\downarrow}\text{-Mod})$ cuyos objetos son los de S_1 . Probaremos que $\mathcal{U}_1 = \mathcal{D}^{\downarrow}(A^{\downarrow}\text{-Mod})$.

Sea \dot{W} un complejo en $\mathcal{D}^{\downarrow}(A^{\downarrow}\text{-Mod})$, por el lema (??), existe un triángulo en $\mathcal{D}^{\downarrow}(A^{\downarrow}\text{-Mod})$:

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \dot{Z}_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \dot{Z}_i \longrightarrow \dot{W} \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \dot{Z}_i[1],$$

con cada \dot{Z}_i complejo finito de módulos de soporte finito y $\bigoplus \dot{Z}_i \in \mathcal{D}^{\downarrow}(A^{\downarrow}\text{-Mod})$. Por el lema (??), $\dot{Z}_i \in S_1$, y por la segunda parte del lema (??), se tiene que $\bigoplus \dot{Z}_i \in S_1$. Como \mathcal{U}_1 es triangulada, $\dot{W} \in \mathcal{U}_1$ y $\mathbf{f}^{\mathcal{D}} : \text{Hom}_{\mathcal{D}^{\downarrow}(A^{\downarrow})}(\dot{W}, \dot{V}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^{\downarrow}(A^{\downarrow})}(\mathbf{f}^{\mathcal{D}}\dot{W}, \mathbf{f}^{\mathcal{D}}\dot{V})$ es un isomorfismo, para todo $\dot{V} \in \mathcal{D}^{\downarrow}(A^{\downarrow}\text{-Mod})$. \square

Proposición 7.75. Sea P un proyectivo en $A\text{-Mod}^{\geq a}$, entonces existe un complejo \dot{W} en $\Delta_{a, -a}$ tal que $\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{W}) \cong \underline{P}$.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $P \cong \bigoplus_{x \in T} Ae_x \otimes V_x$ tal que $x \in T$ implica que $p(x) \geq a$.

Por la observación (??), para cada y en Q_0 , tenemos $\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(S_y) = Ae_y[p(y)]$, así que $\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\underline{S_y} \otimes V_y[q(y)]) \cong \underline{Ae_y} \otimes V_y$. El complejo $\dot{W} := \bigoplus_{x \in T} \underline{S_x} \otimes V_x[q(x)]$ está en $\Delta_{a, -a}$. En efecto, para un entero i :

$$W^i = \left(\bigoplus_{x \in T} \underline{S_x} \otimes V_x[q(x)] \right)^i = \bigoplus_{\substack{x \in T, \\ p(x)=i}} S_x \otimes V_x.$$

Luego, $W_z^i \neq 0$ si y sólo si $z \in T$ y $p(z) = i$. Por lo tanto, si $i < a$, $W^i = 0$. Además, si $q(z) > -i$ (ó, equivalentemente $p(z) > i$), tenemos $W_z^i = 0$. Así, $\dot{W} \in \Delta_{a, -a}$. Claramente, $\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{W}) \cong \underline{P}$. \square

Lema 7.76. *Sea \dot{Z} un complejo de proyectivos en $\mathcal{D}^\uparrow(A\text{-Mod})$, entonces existen enteros a, b y una familia $\{\dot{Z}_i\}_{i \geq 0}$ de subcomplejos finitos de proyectivos de \dot{Z} , tales que $\bigcup_{i \geq 0} \dot{Z}_i = \dot{Z}$ y, para cada $i \in \mathbb{N}$, \dot{Z}_i es de la forma $\dot{Z}_i \cong \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{W}_i)$, para algún $\dot{W}_i \in \Delta_{a,b}$.*

DEMOSTRACIÓN. El complejo \dot{Z} tiene la forma:

$$\dots P^{l-i} \longrightarrow P^{l-i+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P^{l-1} \longrightarrow P^l \longrightarrow 0 \dots,$$

con $P^{l-i} \in A\text{-Mod}^{\geq c+i}$, para algún entero fijo c .

Para $i \geq 0$, consideremos \dot{Z}_i el subcomplejo de \dot{Z} siguiente:

$$\dots 0 \longrightarrow P^{l-i} \longrightarrow P^{l-i+1} \longrightarrow \dots P^{l-1} \longrightarrow P^l \longrightarrow 0 \dots$$

Para cada $i \geq 1$, tenemos un triángulo de la forma:

$$\dot{Z}_{i-1} \longrightarrow \dot{Z}_i \longrightarrow \underline{P}^{l-i}[-l+i] \longrightarrow \dot{Z}_{i-1}[1].$$

Probemos por inducción que, para $i \geq 0$, $\dot{Z}_i \cong \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{W}_i)$, con $\dot{W}_i \in \Delta_{a,b}$, y $a = c+l$ y $b = -c$.

Para $i = 0$, $\dot{Z}_0 = \underline{P}^l[-l]$. Aquí, $P^l \in A\text{-Mod}^{\geq c}$. Por la proposición (??), existe un complejo $\dot{T}_0 \in \Delta_{c,-c}$ tal que $\underline{P}^l \cong \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{T}_0)$, por lo tanto $\dot{Z}_0 \cong \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{T}_0[-l])$ y $\dot{W}_0 = \dot{T}_0[-l] \in \Delta_{c+l,-c}$.

Supongamos cierto lo afirmado para $i - 1$. Como antes, por la proposición (??),

$$\underline{P}^{l-i} \cong \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{T}_i)$$

con $\dot{T}_i \in \Delta_{c+i,-c-i}$, así que

$$\underline{P}^{l-i}[-l+i] \cong \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{W}_i)$$

con $\dot{W}_i = \dot{T}_i[-l+i] \in \Delta_{c+l,-c-i} \subseteq \Delta_{c+l,-c}$, y esta última contención se da porque $i \geq 0$, entonces $-c-i \leq -c$.

De aquí se sigue nuestro resultado. \square

A continuación probaremos un análogo del Teorema de Beilinson-Ginzburg-Soergel. En el artículo [?], los autores prueban que para A un álgebra de Koszul son equivalentes las categorías:

$$\mathcal{D}^\uparrow(A^! \text{-Mod}) \cong \mathcal{D}^\downarrow(A \text{-Mod}).$$

Nosotros probamos que:

Teorema 7.77. *Si A es un álgebra propia de Koszul, entonces el funtor*

$$\mathbf{f}^{\mathcal{D}} : \mathcal{D}^{\perp}(A^{\perp}\text{-Mod}) \longrightarrow \mathcal{D}^{\uparrow}(A\text{-Mod})$$

es una equivalencia de categorías trianguladas.

DEMOSTRACIÓN. Por el lema (??), basta probar que el funtor $\mathbf{f}^{\mathcal{D}}$ es denso. Sea \dot{Z} en $\mathcal{D}^{\uparrow}(A\text{-Mod})$. Por la proposición (??), podemos suponer que \dot{Z} es un complejo de proyectivos. Por el lema anterior y por la proposición (??), tenemos un triángulo:

$$\bigoplus_{i \geq 0} \dot{Z}_i \xrightarrow{v} \bigoplus_{j \geq 0} \dot{Z}_j \longrightarrow \dot{Z} \longrightarrow \bigoplus_{i \geq 0} \dot{Z}_i[1],$$

con cada $\dot{Z}_i \cong \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{W}_i)$, y $\dot{W}_i \in \Delta_{a,b}$, para un par de enteros fijos a, b .

Entonces $\bigoplus_{i \geq 0} \dot{Z}_i \cong \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\bigoplus_{i \geq 0} \dot{W}_i)$, y $\bigoplus_{i \geq 0} \dot{W}_i \in \Delta_{a,b}$. La composición

$$u = [\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\bigoplus_{i \geq 0} \dot{W}_i) \cong \bigoplus_{i \geq 0} \dot{Z}_i \xrightarrow{v} \bigoplus_{j \geq 0} \dot{Z}_j \cong \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\bigoplus_{j \geq 0} \dot{W}_j)]$$

determina un morfismo $\omega : \bigoplus_{i \geq 0} \dot{W}_i \rightarrow \bigoplus_{j \geq 0} \dot{W}_j$ en $\text{Hom}_{\mathcal{D}(A^{\perp})}(\bigoplus_{i \geq 0} \dot{W}_i, \bigoplus_{j \geq 0} \dot{W}_j)$, con $\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\omega) = u$, por el lema (??). Como $\mathcal{D}^{\perp}(A^{\perp}\text{-Mod})$ es triangulada, tenemos un triángulo

$$\bigoplus_{i \geq 0} \dot{W}_i \xrightarrow{\omega} \bigoplus_{j \geq 0} \dot{W}_j \longrightarrow \dot{W} \longrightarrow \bigoplus_{i \geq 0} \dot{W}_i[1].$$

Luego, conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \bigoplus_{i \geq 0} \dot{Z}_i & \longrightarrow & \bigoplus_{j \geq 0} \dot{Z}_j & \longrightarrow & \dot{Z} & \longrightarrow & \bigoplus_{i \geq 0} \dot{Z}_i[1] \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\bigoplus_{i \geq 0} \dot{W}_i) & \longrightarrow & \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\bigoplus_{j \geq 0} \dot{W}_j) & \longrightarrow & \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{W}) & \longrightarrow & \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\bigoplus_{i \geq 0} \dot{W}_i[1]), \end{array}$$

y resulta $\mathbf{f}^{\mathcal{D}}$ denso. □

7.6. Observaciones varias

Dedicamos esta sección a la prueba de algunos hechos interesantes que surgieron en la búsqueda de la prueba del teorema (??).

Proposición 7.78. 1. Sea M un A -módulo de soporte finito, entonces \underline{M} es isomorfo en la categoría derivada $\mathcal{D}(A\text{-Mod})$ a un complejo $\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{Z})$, para \dot{Z} en $\mathcal{D}^{b,I}(A^1\text{-Mod})$.

2. Sea \dot{X} un complejo finito de A -módulos de soporte finito, entonces \dot{X} es isomorfo en la categoría derivada $\mathcal{D}(A\text{-Mod})$ a un complejo $\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{Z})$, para \dot{Z} en $\mathcal{D}^{b,I}(A^1\text{-Mod})$.

DEMOSTRACIÓN. 1. Por inducción en la cardinalidad del soporte. Si $|\text{sop}M| = 1$, entonces $M \cong S_x \otimes V$. Como A es de Koszul, por (??) tenemos que $\underline{S_x} \cong \mathbf{f}({}_xI)[u] = \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\underline{{}_xI})[u] = \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\underline{{}_xI}[u])$. Luego, $\underline{M} \cong \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\underline{{}_xI} \otimes V)[u]$. Supongamos el resultado cierto para A -módulos N con soporte de cardinalidad $|\text{sop}N| = n - 1$ y que M es un A -módulo con $|\text{sop}M| = n$. Sea c el máximo de los pesos de los vértices en el soporte de M . Sea $z \in \text{sop}M$ tal que $p(z) = c$. Sea L el A -módulo cuya representación es $L_z = M_z$ y $L_x = 0$ para todo $x \neq z$. Entonces, $|\text{sop}L| = 1$ y vale la proposición para L . Como z tiene peso maximal, L es sub-representación de M . Además, $\text{sop}(M/L) = \text{sop}M - \{z\}$. Luego, el resultado es cierto para M/L . Tenemos la sucesión exacta $0 \longrightarrow \underline{L} \xrightarrow{\sigma} \underline{M} \xrightarrow{\rho} \underline{M/L} \longrightarrow 0$ y, por la proposición (??), el triángulo en $\mathcal{D}(A)$: $\underline{L} \xrightarrow{Q(\sigma)} \underline{M} \xrightarrow{Q(\rho)} \underline{M/L} \xrightarrow{w} \underline{L}[1]$. Usando la hipótesis de inducción, tenemos el diagrama en $\mathcal{D}(A\text{-Mod})$:

$$\begin{array}{ccc} \underline{M/L}[-1] & \xrightarrow{T_{\mathcal{D}}^{-1}(w)} & \underline{L} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathbf{f}^{\mathcal{D}}\dot{Z}_1 & \xrightarrow{h} & \mathbf{f}^{\mathcal{D}}\dot{Z}_2, \end{array}$$

donde \dot{Z}_1 y \dot{Z}_2 son complejos finitos en $\mathcal{D}^{b,I}(A^1\text{-Mod})$. Como $\mathbf{f}^{\mathcal{D}}$ es fiel y pleno en $\mathcal{D}^{b,I}(A^1\text{-Mod})$ (proposición (??)), entonces $h = \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(g)$ para algún $g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}(A^1)}(Z_1, Z_2)$. Pero Z_2 es q -inyectivo, luego (proposición (??)) podemos pensar a g en la categoría homotópica. Tenemos un triángulo en $K(A^1\text{-Mod})$: $Z_1 \xrightarrow{g} Z_2 \longrightarrow \text{Con}_g \longrightarrow Z_1[1]$, para g un representante

de la clase \underline{g} . Notemos que el cono de g también está en $\mathcal{D}^{b,I}(A^!-\text{Mod})$. Entonces se tiene el diagrama en $\mathcal{D}(A-\text{Mod})$:

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{M/L}[-1] & \xrightarrow{T_{\mathcal{D}}^{-1}(w)} & \underline{L} & \longrightarrow & \underline{M} & \longrightarrow & \underline{M/L} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \delta & & \downarrow \cong \\ \mathbf{f}^{\mathcal{D}} Z_1 & \xrightarrow{h} & \mathbf{f}^{\mathcal{D}} Z_2 & \longrightarrow & \mathbf{f}^{\mathcal{D}} \text{Con}_g & \longrightarrow & \mathbf{f}^{\mathcal{D}} Z_2[1]. \end{array}$$

Luego, por los axiomas de triangulación se tiene el morfismo δ que hace conmutar el diagrama y resulta que δ es, además, un isomorfismo. Por lo tanto, $\underline{M} \cong \mathbf{f}^{\mathcal{D}} \text{Con}_g$.

2. Por inducción en la longitud del complejo \dot{X} . Si $\dot{X} = \underline{X}[-i]$ es un complejo concentrado en grado i , tenemos que X es un A -módulo de soporte finito y el resultado se sigue del primer inciso de esta proposición.

Supongamos válida la proposición para complejos con (a lo más) n entradas no cero y que

$$\dot{X} = \dots 0 \longrightarrow X^a \longrightarrow X^{a+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X^{a+n} \longrightarrow 0 \dots$$

Sean los complejos finitos:

$$\dot{X}_{\hat{a}} = \dots 0 \longrightarrow X^{a+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X^{a+n} \longrightarrow 0 \dots$$

y $\underline{X}^a[-a]$ el complejo de X^a concentrado en grado a . Tenemos la sucesión exacta de complejos:

$$0 \longrightarrow \dot{X}_{\hat{a}} \xrightarrow{\dot{\sigma}} \dot{X} \xrightarrow{\dot{\rho}} \underline{X}^a[-a] \longrightarrow 0,$$

para $\dot{\sigma}$ y $\dot{\rho}$ la inyección y la proyección canónica respectivamente. El siguiente es un triángulo en $\mathcal{D}(A-\text{Mod})$:

$$\dot{X}_{\hat{a}} \xrightarrow{Q(\dot{\sigma})} \dot{X} \xrightarrow{Q(\dot{\rho})} \underline{X}^a[-a] \xrightarrow{w} \dot{X}_{\hat{a}}[1].$$

Por hipótesis de inducción, tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \underline{X}^a[-a-1] & \xrightarrow{T_{\mathcal{D}}^{-1}(w)} & \dot{X}_{\hat{a}} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathbf{f}^{\mathcal{D}} Z_1 & \xrightarrow{h} & \mathbf{f}^{\mathcal{D}} Z_2, \end{array}$$

para Z_1 y Z_2 complejos en $\mathcal{D}^{b,I}(A^1\text{-Mod})$. Pero, por (??), $\mathbf{f}^{\mathcal{D}}$ es fiel y pleno en $\mathcal{D}^{b,I}(A^1\text{-Mod})$, entonces $h = \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(g)$ para algún $g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}(A^1)}(Z_1, Z_2)$. Podemos pensar a g en $K(A^1\text{-Mod})$, porque Z_2 es q -inyectivo, luego tenemos el triángulo $Z_1 \xrightarrow{g} Z_2 \longrightarrow \text{Con}_g \longrightarrow Z_1[1]$, en $K(A^1\text{-Mod})$. Entonces en $\mathcal{D}(A\text{-Mod})$ tenemos que:

$$\begin{array}{ccccccc} X^a[-a-1] & \longrightarrow & \dot{X}_{\hat{a}} & \xrightarrow{Q(\hat{a})} & \dot{X} & \xrightarrow{\hat{p}} & X^a[-a] \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & & & \downarrow \cong \\ \mathbf{f}^{\mathcal{D}} Z_1 & \xrightarrow{h} & \mathbf{f}^{\mathcal{D}} Z_2 & \longrightarrow & \mathbf{f}^{\mathcal{D}} \text{Con}_g & \longrightarrow & \mathbf{f}^{\mathcal{D}} Z_1[1]. \end{array}$$

Además, el cono de g también es un complejo finito de A^1 -módulos inyectivos de soclo de soporte finito y se tiene que $\dot{X} \cong \mathbf{f}^{\mathcal{D}} \text{Con}_g$. \square

Definición 7.79. Sea $\mathcal{D}_s^{\uparrow}(A\text{-Mod})$ la subcategoría plena de $\mathcal{D}^{\uparrow}(A\text{-Mod})$ cuyos objetos son isomorfos a complejos finitos de módulos de soporte finito.

Proposición 7.80. Sea \mathcal{V} la subcategoría plena de $\mathcal{D}(A\text{-Mod})$ cuyos objetos son isomorfos a imágenes, bajo el funtor $\mathbf{f}^{\mathcal{D}}$, de objetos en $\mathcal{D}^{b,I}(A^1\text{-Mod})$. Entonces, $\mathcal{D}_s^{\uparrow}(A\text{-Mod}) \subseteq \mathcal{V}$.

DEMOSTRACIÓN. El segundo inciso de la proposición (??) nos dice que los objetos en $\mathcal{D}_s^{\uparrow}(A\text{-Mod})$ son isomorfos a imágenes bajo $\mathbf{f}^{\mathcal{D}}$ de elementos de $\mathcal{D}^{b,I}(A^1\text{-Mod})$. \square

Notemos que las definiciones (??) y (??) se pueden enunciar también para A -módulos. En este contexto, la observación (??) y la proposición (??) tienen su análogo, como se prueba a continuación:

Observación 7.81. Si \dot{X} está en $C^{\uparrow}(A\text{-Mod})$, entonces $t_{\leq n}(\dot{X})$ es un complejo finito de módulos de soporte finito, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN. Existen enteros a, b tales que \dot{X} está en $\nabla_{a,b}$, esto es, $X^i = 0$ si $i > a$ y $X_x^i = 0$ si $p(x) < a + b - i$. Tenemos que

$$[t_{\leq n}(\dot{X})]^i = t_{\leq n}(X^i) = \frac{X^i}{\sum_{p(z) > n} X_z^i}.$$

Si $n < b$, entonces para todo $x \in Q_0$, $p(x) \geq b > n$, luego, $\sum_{p(x) > n} X_x^i = X^i$ y

se tiene que $t_{\leq n}(\dot{X})^i = 0$, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Esto es, $t_{\leq n}(\dot{X})$ es el complejo cero si $n < b$, y éste es finito de módulos de soporte finito.

Sea $n \geq b$. Si $i < a + b - n$, entonces $n < a + b - i$, luego

$$[t_{\leq n}(\dot{X})]_y^i = \frac{X_y^i}{\left(\sum_{p(z) > n} X_z^i\right)_y} = \begin{cases} 0 & \text{si } p(y) \leq n, \text{ porque } X_y^i = 0, \\ \frac{X_y^i}{X_y^i} = 0 & \text{si } p(y) > n. \end{cases}$$

Por otro lado, si $i > a$, entonces $X^i = 0$ y también $\sum_{p(z) > n} X_z^i = 0$, por lo tanto, $t_{\leq n}(\dot{X})^i = 0$. Luego, $t_{\leq n}(\dot{X})$ es finito, y sus entradas que pueden ser distintas de cero están en el intervalo $[a + b - n, a]$.

Ahora veamos que cada $t_{\leq n}(\dot{X})^i$ es de soporte finito. Sea i_0 en el intervalo $[a + b - n, a]$. Si $y \in Q_0$ es tal que $p(y) < a + b - i_0$, entonces $X_y^{i_0} = 0$, luego, también $\left(\sum_{p(z) > n} X_z^{i_0}\right)_y = 0$, así que $t_{\leq n}(\dot{X})_y^{i_0} = 0$. Si $p(y) > n$, entonces $t_{\leq n}(\dot{X})_y^{i_0} = X_y^{i_0}/X_y^{i_0} = 0$. Entonces, las posibles entradas no cero de $t_{\leq n}(\dot{X})_y^{i_0}$ están en el intervalo $a + b - i_0 \leq p(y) \leq a$. Además, fijando un peso $p(x)$, hay un número finito de vértices con peso $p(x)$, por lo tanto, el soporte de cada $t_{\leq n}(\dot{X})^{i_0}$ es finito. \square

Proposición 7.82. *Sea \dot{X} un complejo en $\mathcal{C}^\uparrow(A\text{-Mod})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) \dot{X} tiene cohomología acotada y cada $H^i(\dot{X})$ es un A -módulo de soporte finito.
- (2) Existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $t_{\geq m}(\dot{X})$ es acíclico.
- (3) \dot{X} está en $\mathcal{D}_s^\uparrow(A\text{-Mod})$.

DEMOSTRACIÓN. (1) \Rightarrow (2) Sean $a \leq b$ enteros tales que $H^i(\dot{X}) = 0$ para todo $i < a$ y $H^i(\dot{X}) = 0$ para todo $i > b$. El conjunto

$$\text{sop}H(\dot{X}) := \bigcup_{i=a}^b \{y \in Q_0 \mid e_y H^i(\dot{X}) \neq 0\},$$

es finito. Sea

$$m_0 := \max\{p(y) \mid y \in \text{sop}H(\dot{X})\}.$$

Sea $m = m_0 + 1$. Probemos que $t_{\geq m}(\dot{X})$ es acíclico. Tenemos que:

$$[t_{\geq m}(\dot{X})]_y^i = \left(\sum_{p(z) \geq m} X_z^i\right)_y = \begin{cases} 0 & \text{si } p(y) < m, \\ X_y^i & \text{si } p(y) \geq m. \end{cases}$$

Luego, si $p(y) < m$, entonces $H^i(t_{\geq m}(\dot{X}))_y = 0$. Por otro lado, si $p(y) \geq m$, entonces $y \notin \text{sop}H(\dot{X})$, por lo tanto $H^i(\dot{X})_y = 0$, para toda $i \in \mathbb{Z}$. Entonces, tenemos la sucesión exacta en el término i , para cada $i \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{ccccc} X_y^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X_y^i & \xrightarrow{d_X^i} & X_y^{i+1} \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ (t_{\geq m}(\dot{X}))_y^{i-1} & \longrightarrow & (t_{\geq m}(\dot{X}))_y^i & \longrightarrow & (t_{\geq m}(\dot{X}))_y^{i+1}, \end{array}$$

esto es, también $H^i(t_{\geq m}(\dot{X}))_y = 0$ para $p(y) \geq m$.

(b) \Rightarrow (c) Supongamos que $t_{\geq m}(\dot{X})$ es acíclico. Tenemos la sucesión exacta de complejos:

$$0 \longrightarrow t_{\geq m}(\dot{X}) \xrightarrow{\dot{\sigma}} \dot{X} \xrightarrow{\dot{\rho}} t_{\leq m-1}(\dot{X}) \longrightarrow 0$$

donde $\dot{\sigma}$ y $\dot{\rho}$ son la inyección y la proyección canónicas. Por la proposición (??), y por axioma TR2 de categorías trianguladas, tenemos el siguiente triángulo en $\mathcal{D}(A\text{-Mod})$:

$$\dot{X} \xrightarrow{Q\dot{\rho}} t_{\leq m-1}(\dot{X}) \xrightarrow{w} t_{\geq m}(\dot{X})[1] \xrightarrow{T_{\mathcal{D}}Q\dot{\sigma}} \dot{X}[1],$$

y éste es, por definición, isomorfo a la imagen de un triángulo en $K(A\text{-Mod})$, esto es, tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{X} & \xrightarrow{Q\dot{\rho}} & t_{\leq m-1}(\dot{X}) & \xrightarrow{w} & t_{\geq m}(\dot{X})[1] & \xrightarrow{T_{\mathcal{D}}Q\dot{\sigma}} & \dot{X}[1] \\ \delta_1 \uparrow \cong & & \delta_2 \uparrow \cong & & \delta_3 \uparrow \cong & & T_{\mathcal{D}}\delta_1 \uparrow \cong \\ \dot{B} & \xrightarrow{Qb} & \dot{C} & \xrightarrow{Qc} & \dot{A}[1] & \xrightarrow{T_{\mathcal{D}}Qa} & \dot{B}[1], \end{array}$$

donde $\dot{B} \xrightarrow{b} \dot{C} \xrightarrow{c} \dot{A}[1] \xrightarrow{a[1]} \dot{B}[1]$ es un triángulo en $K(A\text{-Mod})$. Como $t_{\geq m}(\dot{X})$ es acíclico y δ_3 es un isomorfismo, entonces $\dot{A}[1]$ también es acíclico. Por el corolario (??), tenemos que b es un cuasi-isomorfismo. Así que Qb es un isomorfismo, y entonces $Q\dot{\rho} = \delta_2 Qb \delta_1^{-1}$ también es un isomorfismo. Por lo tanto, \dot{X} es isomorfo a $t_{\leq m-1}(\dot{X})$, que es un complejo finito de A -módulos de soporte finito, por la observación (??). Entonces, \dot{X} está en $\mathcal{D}_s^{\uparrow}(A\text{-Mod})$.

(c) \Rightarrow (a) Supongamos que \dot{X} está en $\mathcal{D}_s^\dagger(A\text{-Mod})$. Entonces, \dot{X} es isomorfo en $\mathcal{D}^\dagger(A\text{-Mod})$ a un complejo finito

$$\dot{M} = \dots 0 \longrightarrow M^a \longrightarrow \dots \longrightarrow M^b \longrightarrow 0 \dots,$$

de A -módulos de soporte finito. Es claro que \dot{M} tiene cohomología acotada, pues $H^i(\dot{M}) = 0$ para todo $i < a$ y $H^i(\dot{M}) = 0$ para todo $i > b$. Como cada M^i tiene soporte finito, $e_y(\ker d_M^i)/e_y(\text{Im}d_M^{i-1}) = e_y(\ker d_M^i/\text{Im}d_M^{i-1}) = e_y H^i(\dot{M})$ es distinto de cero sólo para un número finito de vértices $y \in Q_0$, es decir, cada $H^i(\dot{M})$ tiene soporte finito.

Como \dot{M} es isomorfo a \dot{X} , entonces $H^i(\dot{M}) \cong H^i(\dot{X})$ como A -módulos, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Luego, la cohomología de \dot{X} es acotada y cada $H^i(\dot{X})$ tiene soporte finito. \square

Observación 7.83. *La categoría $\mathcal{D}_s^\dagger(A\text{-Mod})$ es triangulada.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que $\mathcal{D}_s^\dagger(A\text{-Mod})$ es cerrada bajo traslaciones y coproductos finitos. Sean \dot{X}, \dot{Y} en $\mathcal{D}_s^\dagger(A\text{-Mod})$ y $\delta: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$ un morfismo entre ellos. Por definición, existen isomorfismos en $\mathcal{D}^\dagger(A\text{-Mod})$: $\dot{X} \xrightarrow{\alpha_1} \dot{F}_1$ y $\dot{Y} \xrightarrow{\alpha_2} \dot{F}_2$, con \dot{F}_1 y \dot{F}_2 un par de complejos finitos de A -módulos de soporte finito. Por la proposición (??), existen isomorfismos en $\mathcal{D}^\dagger(A\text{-Mod})$: $\dot{F}_1 \xrightarrow{\beta_1} \dot{P}_1$ y $\dot{F}_2 \xrightarrow{\beta_2} \dot{P}_2$, donde \dot{P}_1 y \dot{P}_2 son complejos de proyectivos en $\mathcal{C}^\dagger(A\text{-Mod})$. Entonces, \dot{P}_1 y \dot{P}_2 también están en $\mathcal{D}_s^\dagger(A\text{-Mod})$. Sea $\delta_1 := \beta_2 \alpha_2 \delta \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1}$ un morfismo de \dot{P}_1 en \dot{P}_2 . Como \dot{P}_1 es q -proyectivo, $\delta_1 = Q\underline{u}$, con \underline{u} en la categoría homotópica $K(A\text{-Mod})$. Luego, el siguiente es un triángulo en $K(A\text{-Mod})$:

$$\dot{P}_1 \xrightarrow{\underline{u}} \dot{P}_2 \xrightarrow{\underline{v}} \text{Con}_u \xrightarrow{\underline{w}} \dot{P}_1[1].$$

Por la proposición (??), la siguiente sucesión es exacta:

$$\dots H^i(\dot{P}_1) \xrightarrow{H^i \underline{u}} H^i(\dot{P}_2) \xrightarrow{H^i \underline{v}} H^i(\text{Con}_u) \xrightarrow{H^i \underline{w}} H^{i+1}(\dot{P}_1) \xrightarrow{H^{i+1} \underline{u}} H^{i+1}(\dot{P}_2) \dots \quad (7.9)$$

Por la proposición (??) aplicado a \dot{P}_1 y \dot{P}_2 , tenemos que existe un par de enteros $a \leq b$ tales que $H^i(\dot{P}_1) = 0$ y $H^i(\dot{P}_2) = 0$ para todo $i < a$ y para todo $i > b$. Luego, usando la exactitud de la sucesión (??), es claro que $H^i(\text{Con}_u) = 0$ si $i < a - 1$ ó si $i > b$.

La proposición (??) nos dice, además, que $H^i(\dot{P}_1)$ y $H^i(\dot{P}_2)$ son de soporte finito, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Para cada $i \in \{a, \dots, b\}$, definimos los módulos: $L^i := \text{Im}H^i(\underline{v}) = \ker H^i(\underline{w})$ y $T^i := \text{Im}H^i(\underline{w}) = \ker H^{i+1}(\underline{u})$. L^i es de soporte finito por ser imagen del módulo $H^i(\dot{P}_2)$, que es de soporte finito. T^i es de soporte finito por ser submódulo de $H^{i+1}(\dot{P}_1)$, que es de soporte finito. Luego, tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow L^i \longrightarrow H^i(\text{Con}_u) \longrightarrow T^i \longrightarrow 0.$$

Para cada $x \in Q_0$, $0 \longrightarrow e_x L^i \longrightarrow e_x H^i(\text{Con}_u) \longrightarrow e_x T^i \longrightarrow 0$, es una sucesión exacta de k -espacios vectoriales, y tenemos que $e_x L^i = 0$ y $e_x T^i = 0$ para casi todo $x \in Q_0$. Por lo tanto, $H^i(\text{Con}_u)$ también es de soporte finito. Luego, por la proposición (??), Con_u también está en $\mathcal{D}_s^\uparrow(A\text{-Mod})$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{D}(A\text{-Mod})$:

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{X} & \xrightarrow{\delta} & \dot{Y} & \xrightarrow{Q\underline{v}\beta_2\alpha_2} & \text{Con}_u & \xrightarrow{(T_{\mathcal{D}}\beta_1\alpha_1)^{-1}Q\underline{w}} & \dot{X}[1] \\ \beta_1\alpha_1 \downarrow \cong & & \beta_2\alpha_2 \downarrow \cong & & \parallel & & \cong \downarrow T_{\mathcal{D}}\beta_1\alpha_1 \\ \dot{P}_1 & \xrightarrow{Q\underline{u}} & \dot{P}_2 & \xrightarrow{Q\underline{v}} & \text{Con}_u & \xrightarrow{Q\underline{w}} & \dot{P}_1[1], \end{array}$$

Entonces, el renglón superior es un triángulo tal que Con_u está en $\mathcal{D}_s^\uparrow(A\text{-Mod})$. Luego, $\mathcal{D}_s^\uparrow(A\text{-Mod})$ es una subcategoría triangulada de $\mathcal{D}(A\text{-Mod})$. \square

Observación 7.84. Para cada $x \in Q_0$, existe $\dot{Z} \in \mathcal{D}^{b,I}(A^!\text{-Mod})$ inescindible tal que $\mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{Z}) \cong \underline{Ae}_x \in \mathcal{D}_s^\uparrow(A\text{-Mod})$.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que estamos trabajando con un álgebra $A = kQ^\mathbb{Z}/I^\mathbb{Z}$. Por la proposición (??) tenemos que $kQ^\mathbb{Z}e_{(x,i)}/I^\mathbb{Z}$ es isomorfo como k -espacio vectorial a kQe_x/I , para todo vértice $x \in Q_0$, y para cada $i \in \mathbb{Z}$. Además, kQe_x/I es de dimensión finita sobre k , luego, también la dimensión de $kQ^\mathbb{Z}e_{(x,i)}/I^\mathbb{Z}$ es finita para todo vértice (x,i) de $Q_0^\mathbb{Z}$. En particular, el soporte de cada proyectivo Ae_z es finito.

Tenemos que \underline{Ae}_x está en $\mathcal{D}_s^\uparrow(A\text{-Mod})$. Luego, por (??), existe \dot{Z} en $\mathcal{D}^{b,I}(A^!\text{-Mod})$ tal que

$$\mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{Z}) \cong \underline{Ae}_x.$$

Entonces, \dot{Z} es inescindible, de lo contrario: $\dot{Z} \cong \dot{Z}_1 \oplus \dot{Z}_2$, con $\dot{Z}_1 \neq 0$ y $\dot{Z}_2 \neq 0$. Entonces: $\mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{Z}) \cong \mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{Z}_1) \oplus \mathbf{f}^\mathcal{D}(\dot{Z}_2) \cong \underline{Ae}_x$. Para las cohomologías tenemos $H^0(\underline{Ae}_x) = Ae_x$ y $H^i(\underline{Ae}_x) = 0$ para todo $i \neq 0$. Por

lo tanto, $H^i(\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{Z}_1) \oplus \mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{Z}_2)) = H^i(\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{Z}_1)) \oplus H^i(\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{Z}_2)) = 0$ para todo $i \neq 0$. Luego, $H^i(\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{Z}_1)) = 0$ y $H^i(\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{Z}_2)) = 0$ para todo $i \neq 0$, y $H^0(\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{Z}_1)) \oplus H^0(\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{Z}_2)) = Ae_x$ que es inescindible. Supongamos que $H^0(\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{Z}_1)) = Ae_x$. Entonces $H^0(\mathbf{f}^{\mathcal{D}}(\dot{Z}_2)) = 0$ y se tiene que $\mathbf{f}^c(\dot{Z}_2)$ es un complejo acíclico de proyectivos que está en $\mathcal{D}^\uparrow(A\text{-Mod})$, por (??). Por lo tanto, el corolario (??) nos dice que $\mathbf{f}(\dot{Z}_2) = 0$ en la categoría homotópica. Como $\mathbf{f}^{\mathcal{D}}$ es fiel y pleno, entonces, $\dot{Z}_2 = 0$, una contradicción. \square

Índice

- A -*Grad*, 185, 186
- A -Mod⁺, 214
- A -Mod⁻, 214
- A -Mod^{≥*a*}, 263
- A -Mod^{≤*a*}, 263
- $K^\downarrow(A^\dagger\text{-Mod})$, 257
- $K^\uparrow(A\text{-Mod})$, 257
- $K^{b,I}(A^\dagger\text{-Mod})$, 261
- $Q^{\mathbb{Z}}$, 186
- V_0^* , 200
- $\mathcal{C}^\downarrow(A^\dagger\text{-Mod})$, 255
- $\mathcal{C}^\uparrow(A\text{-Mod})$, 255
- $\mathcal{D}^\downarrow(A^\dagger\text{-Mod})$, 263
- $\mathcal{D}_s^\downarrow(A^\dagger\text{-Mod})$, 283
- $\mathcal{D}^\uparrow(A\text{-Mod})$, 263
- $\mathcal{D}_s^\uparrow(A\text{-Mod})$, 299
- $\mathcal{D}^{b,I}(A^\dagger\text{-Mod})$, 262
- $\Delta_{l,a}$, 264
- $\mathcal{E}xt_{\mathcal{C}}(\dot{Y}, \dot{X})$, 33, 41
- \mathcal{E} -sucesión, 29, 30, 57, 76
- \mathcal{J}_K , 76
- $\mathbf{f}^{\mathcal{D}}$, 274
- \mathcal{F}^i , 183
- $\nabla_{l,a}$, 264
- q -inyectivo, 153
- q -proyectivo, 148
- álgebra
 - cuadrática, 196
 - de carcaj, 180
 - dual cuadrática, 205
 - graduada, 184
 - propia, 213
 - propia de Koszul, 277
- acíclico, 148
- base dual, 198
- bicomplejo, 23
- camino, 179
 - longitud de un, 179
- carcaj, 179
 - álgebra de, 180
 - finito, 179
 - infinito, 179
 - localmente finito, 179, 186
 - opuesto, 201
 - propio, 213
- categoría
 - abeliana, 12, 16
 - acotada de A -módulos, 214
 - aditiva, 11
 - de bicomplejos, 24
 - de complejos, 12
 - de módulos graduados, 186, 188
 - de representaciones, 180, 181
 - derivada, 154, 156
 - filtrante, 99
 - graduada, 47
 - homotópica, 40, 95
 - pequeña, 98
 - triangulada, 65
- cohomología, 133

- acotada, 284
- complejo, 12
 - \mathcal{E} -inyectivo, 47, 52, 55
 - \mathcal{E} -proyectivo, 46, 47, 52, 55
 - q -inyectivo, 153
 - q -proyectivo, 148
 - concentrado, 133
 - total, 24
- conúcleo, 12
- cono, 78, 95, 148
- coproducto, 13, 16, 60
- cuasi-isomorfismo, 137, 138, 144, 148
- cubierta de carcajes, 192
- diagrama
 - pullback, 19, 20, 30, 32, 33, 58
 - pushout, 20, 23, 33
- elemento homogéneo, 184, 185
- extensiones equivalentes, 31
- flecha, 179
- funtor, 41
 - t -exacto, 67
 - de cohomología, 133
 - aditivo, 41
 - adjunto, 49
 - contravariante, 41
 - covariante, 41
 - exacto, 41
 - fiel, 41
 - límite de un, 97, 98, 100, 105
 - localización, 121, 122, 126
 - pleno, 41
 - que conmuta con coproductos, 72
- ideal
 - admisibles, 183
 - cuadrático, 196
 - homogéneo, 185
- imagen, 19
- intervalo finito, 186
- límite de un funtor, 97, 98, 100, 105, 119
- lema de Nakayama, 217
- localización, 121, 122, 126
- localmente pequeño a la izquierda, 107, 140, 154
- módulo
 - graduado, 184
 - simple, 214
- morfismo
 - de bicomplejos, 23
 - de carcajes, 192
 - de complejos, 12
 - de funtores, 42
 - de funtores t -exactos, 67
 - de módulos graduados, 185
 - de representaciones, 180
 - de séxtuples, 63, 155
 - diferencial, 12
- núcleo, 12
- objeto cero, 11
- paseo, 212
- peso
 - de un paseo, 212
 - de un vértice, 212
 - de una flecha, 212
- pullback, 19
- pushout, 20
- radical, 214
- resolución, 166
 - proyectiva, 137, 166
- séxtuple, 63
- sistema
 - de generadores, 75

- multiplicativo, 106, 139
- soclo, 217
- soporte de un módulo, 261
- subcategoría triangulada, 71
- subcomplejo, 13
- sucesión
 - \mathcal{E} , 29, 30, 57, 76
 - exacta, 19
 - exacta localmente trivial, 29
- transformación natural, 42
- traslación, 65
- triángulo, 65, 76, 155
 - canónico, 76
- triangulación, 64
- vértice, 179

Referencias

- [1] R. Bautista y S. Liu. *The Bounded Derived Category of an Algebra with Radical Squared Zero*. Preprint, 2008.
- [2] A. Beilinson, V. Ginzburg y W. Soergel. Koszul duality patterns in representation theory. *Journal of the American Mathematical Society*, 9(2):473–527, 1996.
- [3] S.I. Gelfand y Yu. I. Manin. *Methods of Homological Algebra*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003.
- [4] N. Jacobson. *Basic Algebra II*. W.H. Freeman and Company, New York, 1989.
- [5] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [6] C. A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, 1994.