

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

EXISTENCIA Y ESTABILIDAD DE ONDAS SOLITARIAS
RELATIVISTAS EN PLASMAS

Tesis presentada al
Posgrado de Ciencias Físicas de la UNAM
como requisito para la obtención del grado de

Maestría en Física

por
Marco Antonio Maza Palacios

dirigida por
José Julio Emilio Herrera Velázquez

Ciudad Universitaria
2009



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco de forma muy especial a mi asesor, el Dr. José Julio Emilio Herrera Velázquez, por su enorme apoyo y gran paciencia hacia mí en el tiempo que he trabajado con él.

También quiero expresar mi admiración, respeto y enorme agradecimiento a la máxima casa de estudios que representa una oportunidad para miles de mexicanos para llegar a una gran meta como lo es obtener un título universitario, gracias UNAM.

Y en especial un agradecimiento a FENOMECC por haberme apoyado económicamente para la realización de esta tesis mediante los proyectos del CONACyT G25427-E y U47899-F.

Índice general

1. Introducción	7
2. Formulación Lagrangiana y cantidades conservadas	11
2.1. El Lagrangiano y las ecuaciones del modelo	12
2.2. Cantidades conservadas para el caso unidimensional	16
2.3. Existencia de soluciones de onda solitaria	17
2.4. Soluciones analíticas aproximadas	20
3. Resultados numéricos	23
3.1. Resultados numéricos del modelo simplificado: Integración de la ecuación (2.44)	23
3.2. Resultados numéricos del modelo completo: Integración de las ecuaciones (2.37) a (2.41)	26
4. Radiación	39
5. Conclusiones	55
 I Apéndices	 57
A. Teorema de Noether	59
B. Programas de integración numérica	63
C. Ecuaciones de Euler-Lagrange	73
C.1. Ecuaciones de evolución	73
C.2. Ecuaciones perturbadas	76

Capítulo 1

Introducción

A partir de los recientes avances en el desarrollo de la tecnología láser, se han llegado a producir pulsos de luz de muy corta duración, en el orden de picosegundos hasta femtosegundos, e intensidades por arriba de 10^{20} W/cm^2 . La interacción de esos pulsos con el plasma, puede tener un gran número de aplicaciones, como la aceleración de partículas y fotones [1], el enfocamiento de la radiación en plasmas, la generación de plasma en campos débiles e intensos y absorción resonante, y el confinamiento inercial para la fusión nuclear controlada. Por ello, es necesario comprender los fenómenos no lineales que deben ser considerados en la física de la interacción cuando la velocidad de oscilación del plasma v_{osc} es mayor que la velocidad de la luz c , ($v_{osc} > c$, donde la velocidad de oscilación, $v_{osc} = eE/m\omega$, es una medida de la intensidad del campo eléctrico, siendo e y m la carga y la masa del electrón, E campo eléctrico, y ω la frecuencia de la onda).

El propósito de este trabajo es proponer un método para el estudio de la propagación de ondas con polarización circular en un modelo de plasma no magnetizado de dos fluidos, en el que el movimiento de los iones y los electrones pueden ser relativistas en la dirección longitudinal, considerando que además dicho plasma tiene una temperatura finita. En particular se estudiará la posibilidad de la existencia de ondas solitarias acotadas en infinito, conocidas como “solitones brillantes”.

Algunos de los primeros autores en estudiar este tipo de problema para plasmas fríos fueron Akhiezer y Polovin [2], bajo la aproximación de que la masa de los iones m_i es mucho mayor que la de los electrones m_e ($m_e/m_i \ll 1$), lo cual restringe el problema a plasmas débilmente relativistas. Esirkepov *et al.* [3, 4] demostraron analíticamente la existencia de solitones estacionarios

para plasmas fríos, cuya amplitud depende de la frecuencia con una cota máxima. Mientras que en plasmas subdensos (aquellos cuya frecuencia de plasma es menor que la de la onda) no se tienen soluciones no cuasineutras de una sola joroba, en plasmas superdensos (caso opuesto al de los subdensos) se pueden presentar. Por otra parte, cuando se incluye la dinámica de los iones se encuentra que no existen soluciones para $\beta = v/c \leq \sqrt{m_e/m_i}$ [5]. Sin embargo, éstas se recuperan para $\beta > \sqrt{m_e/m_i}$, de modo que no existe una conexión entre las soluciones estacionarias y las soluciones en movimiento.

Kaw *et al.* [6] encontraron soluciones exactas unidimensionales para pulsos de luz modulados acoplados a ondas en plasmas fríos, suponiendo que el fenómeno es principalmente debido al movimiento de los iones (frecuencias bajas), encontrando soluciones con forma de onda envolvente, así como trenes de onda. Los pulsos solitarios consisten en ondas de luz atrapadas en depresiones de densidad del plasma generadas autoconsistentemente. Poornakala *et al.* estudiaron el modelo de dos fluidos para plasmas fríos [7] y calientes [8], suponiendo en el último caso que sólo los electrones son relativistas. Presentaron dos casos; el de frecuencias bajas en el cual se toma en cuenta la dinámica de los iones, y el de frecuencias altas para el cual sólo es relevante la dinámica de los electrones. Sus resultados se pueden resumir de la siguiente forma: cuando $\beta \leq \sqrt{m_e/m_i}$, existen dos intervalos en los que los solitones brillantes pueden existir, estos son soluciones cuya característica es que la intensidad del pulso es máxima en el centro y tiende a cero hacia infinito; uno de velocidades bajas, para el que la onda es atrapada en una región en la cual los iones y electrones son expulsados, y otro de velocidades altas, para el cual los electrones son acumulados en el máximo del solitón. La región intermedia, por otra parte, permite la existencia de solitones oscuros, que consisten en soluciones cuya intensidad no es acotada hacia el infinito.

Anteriormente, Farina *et al.* [9] demostraron la existencia de estos solitones oscuros para velocidades bajas, en el caso de plasmas fríos, pero la contribución de Poornakala *et al.* consiste en demostrar que al considerar efectos térmicos se encuentra un límite inferior. Puesto que en este caso el plasma es cuasineutro, el potencial se obtiene de las ecuaciones de movimiento, y la ecuación de Poisson no juega un papel importante. Una situación diferente es aquella en la que $\beta > \sqrt{m_e/m_i}$, ya que en tal caso los electrones responden más rápidamente que los iones, y se pierde la cuasineutralidad. Cuando se tiene este tipo de propagación en plasmas subdensos, la velocidad de propagación puede aproximarse a la de la luz, mientras que cuando se da

en plasmas superdensos, la propagación es mucho menor. La diferencia entre este caso y el anterior es que ahora el potencial es definido por la ecuación de Poisson, aunque cabe señalar que al hacerlo tomaron un modelo de un fluido. Para el caso de amplitudes pequeñas se encuentra que los efectos térmicos son irrelevantes, y se recupera el caso de Kaw *et al.* [6]

Los principales efectos no lineales que se crean en la propagación de estos pulsos en el plasma son fenómenos relativistas. Uno de ellos es la variación de la masa del electrón al ser acelerado, y las perturbaciones en la densidad electrónica, que ocurren debido a la fuerza ponderomotriz dada por la radiación de los campos. Estos dos últimos efectos cambian la constante dieléctrica del plasma, y dan como resultado que al propagarse las ondas electromagnéticas, se acoplen sus componentes transversal y longitudinal. Varios autores se han dedicado a estudiar dicho acoplamiento. Por ejemplo Esirkepov *et al.* [3][4] obtienen una solución analítica exacta, cuando las ondas tienen una velocidad de propagación cero.

Posteriormente se vio que las soluciones que obtuvieron Esirkepov *et al.*, eran particulares de una clase más general, obtenidas anteriormente por Kozlov [5] y Kaw [6] por medio de análisis numérico o aproximaciones, donde la velocidad de propagación no está restringida. También se vio que las aproximaciones de Esirkepov *et al.*, particularmente sobre la hipótesis de un plasma frío (esto consiste en suponer que los iones carecen de movimiento y forman un fluido de fondo) dejan de ser válidas cuando la velocidad de propagación de la onda se acerca a cero, ya que los efectos térmicos de los iones y de los electrones se convierten en un efecto importante cuando β se aproxima a $\sqrt{m_e/m_i}$. A partir de este punto se empezaron a cuestionar las soluciones de Esirkepov *et al.* Kozlov [5] eliminó esta hipótesis, empleando las ecuaciones de un plasma frío, tomando en cuenta el movimiento de los iones. De este modo, encontró que no es posible la existencia de ondas electromagnéticas para velocidades por debajo de $c\sqrt{m_e/m_i}$. Estos últimos resultados fueron extendidos por Farina [9], quien encontró que para el caso en el que β es menor que $\sqrt{m_e/m_i}$, existen solitones oscuros.

Posteriormente, Poornakala *et al.* [7] ponen nuevamente los resultados anteriores en tela de juicio, debido a que encuentran un nuevo régimen de propagación para los solitones brillantes por debajo de la velocidad ion-acústica, siendo este régimen prohibido para los solitones oscuros. Trabajos posteriores se han enfocado al estudio de estos solitones en medios cuasineutros y con intensidades muy pequeñas [8].

El propósito de este trabajo es estudiar la existencia y estabilidad de ondas solitarias en un plasma de dos fluidos mediante la formulación lagrangiana del sistema, permitiendo la inclusión de efectos térmicos. Se inicia con la revisión del lagrangiano del sistema propuesto, y a partir de él se estudian las ecuaciones de Euler Lagrange resultantes, así como las ecuaciones de conservación obtenidas a partir del Teorema de Noether. Al hacerlo, se verifica la consistencia con trabajos anteriores, los cuales son casos particulares del presentado aquí. Una vez obtenidas las ecuaciones de evolución del sistema, se resuelven para el caso de pequeñas amplitudes, y numéricamente para el caso más general, encontrando las condiciones necesarias para la existencia de ondas solitarias. Finalmente, se analiza la estabilidad de las soluciones a partir de métodos perturbativos.

Capítulo 2

Formulación Lagrangiana y cantidades conservadas

En este capítulo se plantea el lagrangiano que describe a un sistema de plasma constituido por dos especies, a través del modelo de dos fluidos relativistas, que incluyen efectos térmicos asociados a ambas especies. Este se escoge de tal modo que se reproduzcan las ecuaciones del modelo de dos fluidos, semejantes a las obtenidas por Poornakala *et al.* [8], con la finalidad de comparar sus resultados en ciertos límites. Se ha encontrado que el lagrangiano propuesto por Chen y Sudan [10] para plasmas relativistas fríos, fundamentado en el empleo de potenciales de Clebsh [11] es adecuado para este propósito, con las modificaciones necesarias para extenderlo a plasmas calientes. Brizard [12] ha realizado una revisión adecuada sobre el tema, para plasmas fríos, incluyendo la obtención de cantidades conservadas a través del teorema de Noether. A partir del lagrangiano, se derivan las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange correspondientes, para obtener así las ya conocidas ecuaciones de movimiento del modelo de dos fluidos, que en este caso incluyen los correspondientes efectos térmicos de cada especie. La ventaja de poder derivar las cantidades conservadas permitirá obtener resultados sobre las ondas solitarias no presentados en otros trabajos sobre el tema. Por otra parte, el considerar a ambas especies como relativistas permite extender el problema al de plasmas de electrones y positrones, al igualar las masas de las partículas en ambas especies.

2.1. El Lagrangiano y las ecuaciones del modelo

Con objeto de facilitar la comparación de resultados, la nomenclatura empleada en este trabajo es semejante a la empleada por Poornakala *et al.* en [7] y [8]. El sistema de unidades empleado es el cgs.

La siguiente expresión es una de las formas posibles para la densidad lagrangiana, en donde se han añadido los últimos dos términos representan los efectos térmicos de cada una de las especies. Puesto que en este trabajo se considerarán únicamente iones y electrones, se emplearán los subíndices i y e para indicar cada especie:

$$L = \frac{1}{8\pi}(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2) - n_e \left[\frac{\partial \psi_e}{\partial t} + (\gamma_e - 1)m_e c^2 \right] + e(n_e - n_i)\phi - n_i \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + (\gamma_i - 1)m_i c^2 \right] - m_e v_{Te}^2 \Gamma_e (n_e \ln n_e - n_e) - m_i v_{Ti}^2 \Gamma_i (n_i \ln n_i - n_i) \quad , \quad (2.1)$$

v_{Ti} es la velocidad térmica de la especie i , $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ representa a los campos eléctricos y magnético respectivamente, dados por

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} ; \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad , \quad (2.2)$$

en donde ϕ y $\mathbf{A}$ son los potenciales escalar y vectorial respectivamente. Las densidades de electrones y de iones n_e y n_i están normalizadas a la densidad homogénea de fondo n_0 ; m_e y m_i sus masas en reposo; Γ_e y Γ_i son los cocientes de los calores específicos de cada una de las especies, y los términos en los cuales aparecen representa el efecto térmico asociado a un gradiente de presión. Si se tratara de un plasma de electrones y positrones, bastaría tomar $m_i = m_e = m$, pero en este trabajo se considerará siempre que $m_i \gg m_e$. En el lagrangiano aparecen también los potenciales de Clebsch para electrones e iones ψ_e y ψ_i , definidos como funciones cuyos gradientes definen los momentos canónicos. Así pues, si $\alpha = e, i$, dependiendo de cada especie, se tiene que [10] [11] ,

$$\mathbf{P}_\alpha = m_\alpha \gamma_\alpha \mathbf{v}_\alpha + \frac{q_\alpha \mathbf{A}}{c} = \nabla \psi_\alpha \quad , \quad (2.3)$$

en donde $\mathbf{v}_\alpha$ es la velocidad de cada especie y q_α es la carga del electrón $-e$ cuando $\alpha = e$ y $+Ze$, cuando $\alpha = i$. Por simplicidad se elige $Z = 1$ en este trabajo. Los factores relativistas γ_α se definen en forma convencional por medio de la expresión relativista

$$\gamma_\alpha = \left(1 - \frac{\mathbf{v}_\alpha^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad (2.4)$$

que en términos de los potenciales de Clebsch se pueden reescribir como

$$\gamma_\alpha = \left(1 + \left|\nabla\psi_\alpha - \frac{q_\alpha \mathbf{A}}{c}\right|^2 / (m_\alpha c)^2\right)^{1/2}. \quad (2.5)$$

El siguiente paso consiste en obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al lagrangiano. Para ello se toman las variaciones sobre cada una de las funciones que contiene el lagrangiano. Al hacer la variación sobre los potenciales ψ_α , y se cambia la función velocidad por este potencial para cada una de las especies.

Por ejemplo, de la variación de los potenciales ψ_e y ψ_i , se desprenden las ecuaciones de conservación para el número de electrones e iones

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0 \quad (2.6)$$

y

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) = 0. \quad (2.7)$$

De la variación de la densidad de electrones n_e se obtiene

$$-\frac{\partial \psi_e}{\partial t} - (\gamma_e - 1)m_e c^2 + e\phi - m_e v_e^2 \Gamma_e \ln n_e = 0. \quad (2.8)$$

Tomando el gradiente se encuentra la ecuación de conservación de momento para los electrones:

$$\frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t} = \nabla [e\phi - (\gamma_e - 1)m_e c^2 - m_e v_e^2 \Gamma_e \ln n_e]. \quad (2.9)$$

Equivalentemente se obtiene la ecuación de conservación para el momento para los iones. Primero se toma la variación con respecto a la densidad iónica n_i , obteniendo

$$-\frac{\partial \psi_i}{\partial t} - (\gamma_i - 1)m_i c^2 - e\phi - m_i v_i^2 \Gamma_i \ln n_i = 0 \quad , \quad (2.10)$$

y aplicando el gradiente, se encuentra

$$\frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial t} = \nabla [-e\phi - (\gamma_i - 1)m_i c^2 - m_i v_i^2 \Gamma_i \ln n_i] \quad . \quad (2.11)$$

En forma análoga, realizando la variación con respecto al potencial escalar ϕ , se obtiene la ecuación de onda con fuentes para dicho potencial

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 4\pi e(n_e - n_i) \quad , \quad (2.12)$$

y de la variación con respecto al potencial vectorial $\mathbf{A}$, se obtiene la ecuación de onda correspondiente a éste:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} e(n_e \mathbf{v}_e - n_i \mathbf{v}_i) \quad (2.13)$$

Para nuestro propósito será más adecuado trabajar con un lagrangiano adimensional, obtenido de escalar la ecuación (2.1) de la siguiente forma: El tiempo se normaliza de acuerdo a la frecuencia del plasma de los electrones $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi n_e e^2 / m_e}$, la longitud con la profundidad de penetración c/ω_{pe} , las densidades con la densidad homogénea de fondo n_o , los potenciales escalar y vectorial por medio de $\phi \rightarrow e\phi/m_e c^2$ y $\mathbf{A} \rightarrow e\mathbf{A}/m_e c^2$, mientras las temperaturas son normalizadas por $m_e c^2$. Tomando esta normalización, la densidad lagrangiana adquiere la forma

$$L = \frac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2) - n_e \left[\frac{\partial \psi_e}{\partial t} + (\gamma_e - 1) \right] + (n_e - n_i)\phi - n_i \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \frac{1}{a}(\gamma_i - 1) \right] - \vartheta_e \Gamma_e (n_e \ln n_e - n_e) - \vartheta_i \Gamma_i (n_i \ln n_i - n_i) \quad , \quad (2.14)$$

en donde a es el cociente entre las masas de los electrones y los iones m_e/m_i . Asimismo, las expresiones adimensionales de las funciones γ_e y γ_i quedan como $\gamma_e = (1 + |\nabla \psi_e - \mathbf{A}|^2)^{1/2}$ y $\gamma_i = (1 + a^2 |\nabla \psi_i + \mathbf{A}|^2)^{1/2}$, y ϑ_j corresponde al cuadrado de la velocidad térmica normalizada de la especie j .

Para estudiar la existencia de ondas solitarias circularmente polarizadas, acopladas a desplazamientos longitudinales de las partículas, se proponen

potenciales de la forma $\phi = \phi(x, t)$, y $\mathbf{A} = A_y(x, t)\hat{\mathbf{e}}_y + A_z(x, t)\hat{\mathbf{e}}_z$, de modo que la onda tiene amplitud en las direcciones y y z , y se propaga en la dirección x . Esta aproximación unidimensional se hace bajo la suposición de que la variación de la amplitud en la dirección transversal es pequeña en comparación con la que se tiene en la dirección longitudinal, lo que se justifica siempre que el tamaño de la onda solitaria que se desea estudiar sea mucho menor que el tamaño L del punto en el que incide el láser ($c/\omega_p \ll L$). Por ejemplo; para un laser de femtosegundos con una intensidad de 10^{16} W/cm², el tamaño típico del punto de incidencia es de $20 - 30 \mu m$, mientras que c/ω_p para un plasma de densidad crítica es $\approx 0,15 \mu m$, lo que justifica la aproximación unidimensional bajo estas condiciones. Así, se puede escribir

$$E^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_z}{\partial t}\right)^2, \quad (2.15)$$

y

$$B^2 = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)^2. \quad (2.16)$$

En estas condiciones, se pueden descomponer las velocidades en su componente longitudinal $\mathbf{v}_{\alpha\parallel}$ y transversal $\mathbf{v}_{\alpha\perp}$ de modo que, de acuerdo con la conservación de momento canónico, la componente transversal se puede tomar como

$$\mathbf{v}_{\alpha\perp} = \frac{\mathbf{A}}{\gamma_\alpha}, \quad (2.17)$$

ya que por hipótesis el potencial vectorial es perpendicular a la propagación de la onda. Substituyendo en (2.4), y definiendo $\beta_\alpha \equiv v_{\alpha\parallel}/c$, se tiene entonces

$$\gamma_e = \sqrt{\frac{1 + |A|^2}{1 - \beta_e^2}}, \quad \gamma_i = \sqrt{\frac{1 + a^2 |A|^2}{1 - \beta_i^2}}. \quad (2.18)$$

Bajo estas condiciones las ecuaciones de conservación de momento (2.9) y (2.11) quedan

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v_{e\parallel} \frac{\partial}{\partial x}\right] (\gamma_e v_{e\parallel}) = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{2\gamma_e} \frac{\partial A^2}{\partial x} - v_e^2 \Gamma_e \frac{\partial}{\partial x} \ln n_e, \quad (2.19)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v_{i\parallel} \frac{\partial}{\partial x}\right] (\gamma_i v_{i\parallel}) = -a \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{a}{2\gamma_i} \frac{\partial A^2}{\partial x} - a v_i^2 \Gamma_i \frac{\partial}{\partial x} \ln n_i, \quad (2.20)$$

mientras que las ecuaciones para los potenciales escalar y vectorial (2.13) se reducen a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 4\pi e(n_e - n_i) \quad , \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = (n_e v_{e\perp} - n_i v_{i\perp}) \quad . \quad (2.22)$$

Cabe mencionar que las ecuaciones (2.17) a (2.22), junto con la versión unidimensional de (2.6) y (2.7) se reducen al modelo propuesto en la Ref [8], cuando se supone que los iones son no relativistas ($\gamma_i \rightarrow 1$), y su respuesta transversal es despreciable ($\mathbf{v}_{i\perp} \approx 0$).

2.2. Cantidades conservadas para el caso unidimensional

Empleando el modelo anteriormente expuesto, se puede encontrar del lagrangiano (2.14) las siguientes cantidades conservadas, a partir del teorema de Noether (ver Apéndice A).

De este modo se encuentran las integrales de conservación de número de electrones e iones,

$$N_e = \int n_e dx dt \quad , \quad N_i = \int n_i dx dt \quad . \quad (2.23)$$

de momento

$$P = \int \left[n_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + n_e \frac{\partial \psi_e}{\partial x} - \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) \right] dx dt \quad , \quad (2.24)$$

y de energía

$$\begin{aligned} H = \int \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_z}{\partial t} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + n_e(\gamma_e - 1) + n_i(\gamma_i - 1)/a + (n_i - n_e)\phi \right. \\ \left. - \vartheta_e \Gamma_e(n_e \ln n_e - n_e) - \vartheta_i \Gamma_i(n_i \ln n_i - n_i) \right\} dx dt \quad . \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.3. Existencia de soluciones de onda solitaria

Esta sección tiene como objetivo principal buscar una forma simplificada del lagrangiano, que contenga las soluciones de onda solitaria para el modelo de dos fluidos, bajo la aproximación unidimensional expuesta en la sección anterior. Para ello se propone un ansatz o función de prueba para la forma de la solución, o en otras palabras la forma de la onda. Dicha función consta de dos partes; la envolvente y la portadora. La evolución de la función de prueba estará regida por las ecuaciones de Euler obtenidas del lagrangiano.

El método aquí planteado ha sido empleado por Kath y Smyth, para el estudio de la radiación de un solitón cuya evolución es descrita por la ecuación no lineal de Schrödinger [13], así como las pérdidas por radiación debidas a interacción entre pulsos en fibras ópticas birrefringentes [14]. Más recientemente se ha empleado para calcular la radiación de un solitón de Davydov en un medio inhomogéneo [15]. En el caso mostrado a continuación se ignora el efecto de la radiación. Para empezar, se muestra que es posible recuperar los resultados obtenidos previamente por Poornakala *et al.* [8], para el caso en el que los iones son no relativistas ($\beta_i \ll 1$, $\beta_e = \beta$) y el problema es débilmente relativista.

Puesto que nos interesa encontrar soluciones de tipo onda viajera con velocidad β , se toma un sistema de coordenadas $\xi = x - \beta t$ y $\tau = t$, y se propone para las componentes del potencial vectorial $\mathbf{A}$ un ansatz de la forma

$$A_y = Re^{i\Theta}e^{-i\Lambda} + R^*e^{-i\Theta}e^{i\Lambda} \quad , \quad (2.26)$$

$$A_z = iRe^{i\Theta}e^{-i\Lambda} - iR^*e^{-i\Theta}e^{i\Lambda} \quad , \quad (2.27)$$

en donde $R = R(\xi)$, $\Lambda = \Lambda(\tau)$ y $\Theta = \Theta(\xi)$ son funciones libres. Obsérvese que β , la velocidad de propagación de la onda es independiente de β_e y β_i . La función R^* representa el complejo conjugado de la función R .

Al substituir el ansatz en el lagrangiano (2.14), éste toma la forma

$$L = \frac{1}{2} \left(4R_\xi^2(\beta^2 - 1) + 4R^2(\beta^2 - 1)\Theta_\xi^2 - 8R^2\beta\Theta_\xi\Lambda_\tau + 4R^2\Lambda_\tau^2 + \phi_\tau^2 \right) + (n_e - n_i)\phi$$

$$\begin{aligned}
 & -(n_i \ln n_i - n_i) \vartheta_i \Gamma_i - n_i \left((-\psi_{i,\xi} \beta + ((1 + a^2(4R^2 + \psi_{i,\xi}^2))^{1/2} - 1)/a) \right. \\
 & \left. -(n_e \ln n_e - n_e) \vartheta_e \Gamma_e - n_e \left(-\psi_{e,\xi} \beta + ((1 + 4R^2 + \psi_{e,\xi}^2)^{1/2} - 1) \right) \right) . \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

Los subíndices ξ y τ representan las derivadas con respecto a las nuevas variables. Este lagrangiano permitirá encontrar las ecuaciones para los parámetros de las funciones de prueba, que determinarán la forma de la onda viajera.

De la variación de la función Θ , se obtiene la ecuación para los parámetros

$$\left(R^2(\beta^2 - 1)\Theta_\xi + R^2\beta\Lambda_\tau \right)_\xi = 0 \quad , \quad (2.29)$$

la cual se puede integrar inmediatamente obteniendo

$$R^2\Theta_\xi = \frac{R^2\beta\Lambda_\tau}{1 - \beta^2} + \frac{Q}{1 - \beta^2} \quad , \quad (2.30)$$

donde Q es una constante de integración. Esta expresión es exactamente la ecuación (11) de la Ref.[8] obtenida por Poornakala *et al.*, derivada de la ecuación de onda para el potencial vectorial (2.22). En dicho artículo se hace notar que Q debe ser cero si se desea que la solución sea acotada en infinito, ya que de lo contrario, la onda siempre acarrearía un flujo de energía hacia ese límite. Así, las soluciones con $Q = 0$ corresponden a los llamados *solitones brillantes*, mientras que aquellas con $Q \neq 0$ corresponden a soluciones no acotadas, conocidas como *solitones oscuros*.

Una segunda ecuación diferencial, se obtiene tomando la correspondiente ecuación de Euler-Lagrange para la función Λ

$$\left(R^2\beta\Theta_\xi + R^2\Lambda_\tau \right)_\xi = 0 \quad , \quad (2.31)$$

que también puede integrarse de forma directa. Para que estas dos últimas ecuaciones diferenciales sean consistentes, se requiere que las funciones Θ_ξ y Λ_τ sean constantes y su valor lo determinan las ecuaciones anteriores. Así, se puede tomar $\Lambda = \lambda\tau$, en donde λ es una constante. Por el momento no es de importancia el valor de estas constantes, sólo así deben recordarse y de que no necesariamente son iguales.

De la ecuación de Euler-Lagrange para el potencial ϕ , (2.12) se obtiene la ecuación de Poisson

$$\phi_{\xi\xi} = n_e - n_i \quad . \quad (2.32)$$

Ahora, de las ecuaciones de Euler para las densidades de iones n_i y de electrones n_e se encuentra que

$$-\phi - \vartheta_i \Gamma_i \ln n_i + \beta \psi_{i,\xi} + (1 - (1 + a^2(4R^2 + \psi_{i,\xi}^2))^{1/2})/a = 0 \quad , \quad (2.33)$$

$$\phi - \vartheta_e \Gamma_e \ln n_e + \beta \psi_{e,\xi} + 1 - (1 + 4R^2 + \psi_{e,\xi}^2)^{1/2} = 0 \quad , \quad (2.34)$$

y de las variaciones para los potenciales ψ_i y ψ_e ,

$$-\beta + \frac{a\psi_{i,\xi}}{(1 + a^2(4R^2 + \psi_{i,\xi}^2))^{1/2}} = 0 \quad , \quad (2.35)$$

$$-\beta + \frac{\psi_{e,\xi}}{(1 + 4R^2 + \psi_{e,\xi}^2)^{1/2}} = 0 \quad . \quad (2.36)$$

De la variación de R se obtiene la ecuación para la amplitud del potencial, con lo cual se cierra el conjunto de ecuaciones para el sistema propuesto:

$$R_{\xi\xi} = -\frac{R}{1 - \beta^2} \left(\frac{\lambda^2}{1 - \beta^2} - \frac{n_e}{\gamma_e} - \frac{an_i}{\gamma_i} \right) \quad . \quad (2.37)$$

Esta última ecuación, en la cual se acoplan el campo electromagnético y la densidad del plasma fue obtenida por Poornakala *et al.* a partir de la ecuación de onda para el potencial vectorial (2.22), bajo la suposición de que $a \rightarrow 0$. La diferencia fundamental entre dicho modelo y el de este trabajo, reside en el empleo de los potenciales de Clebsch en vez de velocidades de las ambas especies.

De (2.35) y (2.36) se obtienen

$$\psi_{i,\xi} = \frac{\beta(1 + 4a^2R^2)^{1/2}}{a(1 - \beta^2)^{1/2}} \quad , \quad (2.38)$$

$$\psi_{e,\xi} = \frac{\beta(1 + 4R^2)^{1/2}}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \quad , \quad (2.39)$$

mientras que substituyendo estas últimas en (2.33) y (2.34) se llega a

$$a\vartheta_i\Gamma_i \ln n_i = -a\phi - (1 - \beta^2)^{1/2}(1 + 4a^2R^2)^{1/2} + 1 \quad , \quad (2.40)$$

$$\vartheta_e\Gamma_e \ln n_e = \phi - (1 - \beta^2)^{1/2}(1 + 4R^2)^{1/2} + 1 \quad . \quad (2.41)$$

Las soluciones de onda solitaria buscadas deben de satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales (2.37) a (2.39), teniendo como condiciones las ecuaciones algebraicas (2.40) y (2.41).

2.4. Soluciones analíticas aproximadas

Si se consideran oscilaciones de frecuencia baja, de modo que el plasma se puede considerar aproximadamente cuasineutro (amplitudes pequeñas en la desviación de la densidad de electrones), y amplitudes pequeñas en R , es posible obtener soluciones analíticas. Para ello se supone que la densidad de los iones y de los electrones se desvía ligeramente del equilibrio mientras el sistema se mantiene cuasineutro ($n_i \approx n_e = 1 + \delta$, en donde $\delta \ll 1$), suposición que posteriormente se confirma bajo otro esquema. Eliminando ϕ de las ecuaciones (2.40) y (2.41), se obtiene

$$\ln(n_e^{\vartheta_e\Gamma_e} n_i^{\vartheta_i\Gamma_i}) = (\vartheta_e\Gamma_e + \vartheta_i\Gamma_i) \ln(1 + \delta) = 1 + \frac{1}{a} - \left[\frac{\gamma_i}{a}(1 - \beta_i^2)^{1/2} + \gamma_e(1 - \beta_e^2)^{1/2} \right] (1 - \beta^2)^{1/2}, \quad (2.42)$$

en donde se ha empleado (2.18) para reescribir el resultado en términos de las velocidades. Desarrollando $\ln(1 + \delta)$ se encuentra

$$\delta = \frac{(1 + a) \left[\left(1 - (1 - \beta^2)^{1/2} \right) - 2aR^2 (1 - \beta^2)^{1/2} \right]}{a(\vartheta_e\Gamma_e + \vartheta_i\Gamma_i)}, \quad (2.43)$$

que, al substituir en (2.37) se puede escribir una ecuación para R como

$$R_{\xi\xi} + a_0(\lambda, \beta, a)R + a_1(\beta, a)R^3 = 0, \quad (2.44)$$

en donde

$$a_0(\lambda, \beta, a) = \frac{1}{1 - \beta^2} \left[\frac{\lambda^2}{1 - \beta^2} - (1 + a) (1 - \beta^2)^{1/2} \left(1 + \frac{(1 - (1 - \beta^2)^{1/2})}{a(\vartheta_e \Gamma_e + \vartheta_i \Gamma_i)} \right) \right] \quad (2.45)$$

y

$$a_1(\beta, a) = \frac{2}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \left[1 + a^3 + \frac{(1 + a) (1 - (1 - \beta^2)^{1/2})}{a(\vartheta_e \Gamma_e + \vartheta_i \Gamma_i)} + \frac{(1 + a) (1 - \beta^2)^{1/2}}{(\vartheta_e \Gamma_e + \vartheta_i \Gamma_i)} \right] \quad (2.46)$$

son funciones que no dependen de la variable ξ , de modo que se pueden tomar como constantes para λ , β y a dadas, notese que en este esquema no se restringen los valores de ninguna de las velocidades.

La ecuación de la onda (2.44) tiene la forma de la segunda ley de Newton para una pseudopartícula, en donde el primer término figura como la fuerza sobre la pseudopartícula y los dos últimos términos como menos el gradiente de un potencial. Este potencial es conocido como el potencial de Sagdeev[9], y su estudio determina el tipo de solución, dependiendo de los signos de a_0 y a_1 , que como es bien conocido, corresponde a ondas solitarias. De este modo se encuentra que si $a_0 < 0$ y $a_1 > 0$, se obtienen soluciones de onda solitaria brillante de la forma

$$R = \left(\frac{2|a_0|}{a_1} \right)^{1/2} \text{sech} \left(\sqrt{|a_0|} \xi \right), \quad (2.47)$$

mientras que si por el contrario $a_0 > 0$ y $a_1 < 0$, se obtienen soluciones de onda solitaria oscura de la forma

$$R = \left(\frac{2a_0}{|a_1|} \right)^{1/2} \tanh \left(\sqrt{\frac{a_0}{2}} \xi \right). \quad (2.48)$$

Puede verse con los resultados obtenidos, que este modelo solo predice solitones brillantes dado que de la propia naturaleza de a_1 siempre va a tener signo positivo, la única limitante la da $a_0 < 0$ que impone una restricción sobre λ . En efecto, de $a_0 < 0$ se encuentra que $\lambda^2 < (1 - \beta^2)^{3/2} \left(1 + a + \frac{(1+a)(1-(1-\beta^2)^{1/2})}{a(\vartheta_e \Gamma_e + \vartheta_i \Gamma_i)} \right)$, que restringe los valores posibles para que se presente la onda solitaria brillante.

En lo que sigue de este trabajo se estudiará solamente la solución de solitón brillante, como se aclarará al inicio del siguiente capítulo.

Capítulo 3

Resultados numéricos

En esta sección se exponen los resultados obtenidos del estudio numérico del modelo simplificado, en el que se toman únicamente los electrones como relativistas, tal como fue propuesto por Poornakala *et al.* [8], y del modelo completo, buscando similitudes y remarcando las diferencias sustanciales entre los resultados de ambos casos. Asimismo, se comparan los resultados obtenidos para el modelo simplificado con los que obtienen Poornakala *et al.* por un procedimiento diferente. El estudio numérico se realiza integrando la ecuación (2.44), por medio del método de integración de Runge-Kutta de cuarto orden, para el caso del modelo simplificado y el sistema de ecuaciones (2.37) a (2.41) en el modelo completo. En el Apéndice B se muestran los códigos en C empleados en la obtención de los resultados.

3.1. Resultados numéricos del modelo simplificado: Integración de la ecuación (2.44)

Para integrar esta ecuación es necesario dar valores a los parámetros a_0 y a_1 , que dependen de otros como la velocidad de propagación de la onda β , del parámetro λ dados por las (2.45) y (2.46), y del cociente a entre las masas del electrón y de los iones. El estudio se concretó a hallar los valores de los parámetros a_0 y a_1 para los cuales se produce una solución tipo solitón, procediendo de la siguiente forma: Fijando la magnitud de la amplitud, que en este caso se eligió el valor de 0,01, para satisfacer la condición de una amplitud pequeña, se dio primeramente un valor a la velocidad de propagación de la onda para encontrar el valor correspondiente del parámetro $a_1(\beta, a)$.

Posteriormente se corre el programa hasta encontrar un valor de $a_0(\lambda, \beta, a)$ para el cual se obtiene una solución de tipo onda solitaria. Se pudo observar que para cada valor de a_0 sólo hay un valor correspondiente de a_1 para los cuales se encuentra un solitón. Una vez encontrados los valores de a_0 y a_1 , se calcula el valor correspondiente de λ con ayuda de la ecuación (2.45). Cabe aclarar que únicamente se buscaron soluciones con un sólo máximo, aunque en principio es posible encontrar soluciones con más de un máximo.

Este procedimiento se puede repetir las veces que sean necesarias para encontrar los valores correspondientes de β y λ para hallar la solución buscada. En la Tabla I se muestran algunos valores asignados al parámetro β y los valores encontrados para a_1 , a_0 y λ . Sólo se muestran algunos valores de ellos, dado que únicamente se pretende comparar estos resultados numéricos con los resultados analíticos mostrados en la sección anterior.

Entre los principales resultados que se obtienen del estudio numérico se destacan los siguientes:

1. La obtención de ondas solitarias está limitada a ciertos conjuntos de valores de los parámetros a_1 , a_0 ; es decir, para cada valor de $a_1(> 0)$ sólo existe un valor de a_0 para el cual se puede obtener el solitón. También cabe mencionar que las soluciones son muy sensibles a pequeños cambios de los parámetros, lo que se ve reflejado en el número de cifras significativas de la Tabla I.

2. Las ondas solitarias se producen únicamente en plasmas subdensos, como se puede apreciar en la última columna de la Tabla I, en donde aparece el cociente entre la frecuencia ω y aquella del plasma ω_p donde $w = 1/(1 - \beta^2)$

β	a_1	a_0	λ	ω/ω_p
0.98033	5002.022	-0.2501007	1.94542	34.870
0.98271	5231.358	-0.2615677	1.85067	28.530

Tabla I. Valores de β , a_0 , a_1 y λ para los cuales es posible encontrar soluciones de onda solitaria con un máximo en el origen, al integrar numéricamente.

La forma de las soluciones numéricas encontradas se muestra en las figuras (3.1) y (3.2), para R vs. $\xi (= x - \beta t)$, para los valores de β de la Tabla I. Así mismo, en cada una de las ellas se muestra el resultado analítico para una comparación entre ambos casos.

Otra conclusión importante para esta sección es que en términos generales los resultados obtenidos sobre el comportamiento de las ondas solitarias concuerdan en gran medida con los resultados publicados por Poornakala *et al.*, dado que en ambos casos se integra numericamente la misma ecuación, siendo que en este trabajo los resultados se obtienen por un método completamente diferente.

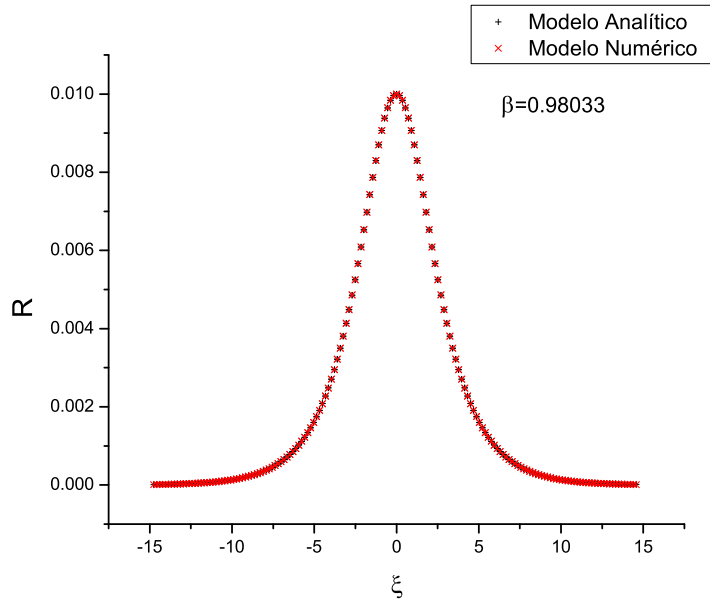


Figura 3.1: Solitón correspondiente a $\beta = 0,98033$

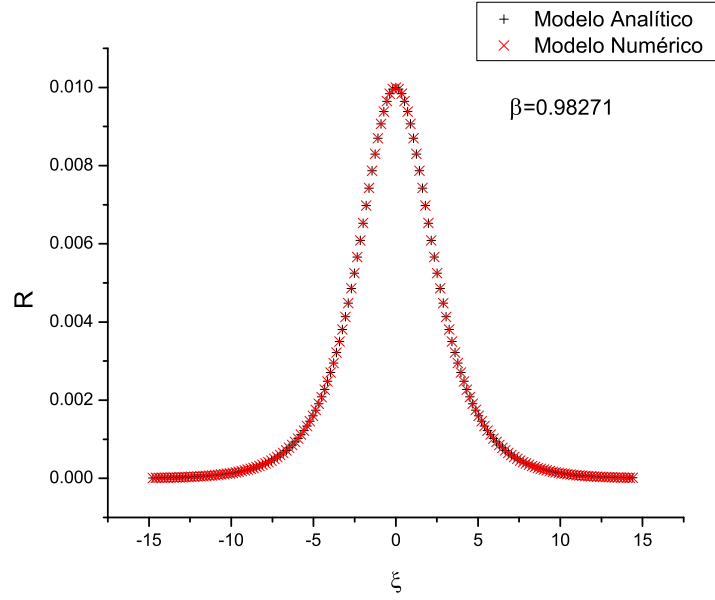


Figura 3.2: Solitón correspondiente a $\beta = 0,98271$

3.2. Resultados numéricos del modelo completo: Integración de las ecuaciones (2.37) a (2.41)

Para encontrar soluciones del modelo completo se deben resolver las ecuaciones diferenciales (2.37), (2.38) y (2.39) en conjunto con las ecuaciones (2.40) y (2.41), que son ecuaciones algebraicas que se acoplan al sistema, pudiendo entenderse a estas ultimas como condiciones impuestas a las ecuaciones diferenciales. Como en el caso del modelo anterior, el sistema de ecuaciones depende de los parámetros β y λ . Además, se establecerán las mismas condiciones iniciales para correr el programa. El procedimiento para encontrar el tipo de soluciones requeridas es similar al empleado en el caso de la sección anterior; es decir, se fija una velocidad de propagación de la onda y se corre el programa hasta encontrar el valor del parámetro λ . Este procedimiento se repite para varios valores de la velocidad de propagación. Los

resultados encontrados se muestran en la Tabla II.

Los principales resultados que se obtienen son los siguientes:

1. Se encuentran soluciones acotadas para cualquier valor de la velocidad de propagación, al igual que en el caso simplificado.
2. Al igual que en el caso simplificado, para cada valor en la velocidad de propagación sólo se encuentra un valor del parámetro λ , siendo importante las cifras significativas de estos dos parámetros.
3. También se coincide con el caso simplificado en que las soluciones acotadas se producen únicamente en plasmas subdensos, esto se puede ver con ayuda de la Tabla II observando el cociente entre la frecuencia ω y la del plasma ω_p .

β	λ	ω/ω_p
1×10^{-4}	1.41417818	1.4141
5×10^{-4}	1.41417800	1.4141
1×10^{-3}	1.41417747	1.4141
5×10^{-3}	1.41416050	1.4141
1×10^{-2}	1.41410747	1.4142
5×10^{-2}	1.41240935	1.4159
0.1	1.40708952	1.4213
0.2	1.38560598	1.4433
0.3	1.34904000	1.4824
0.4	1.296115699	1.5429
0.5	1.224714213	1.6329
0.6	1.131342521	1.7677
0.7	1.00992540	1.9802
0.8	0.848506862	2.3569
0.9	0.61642590	3.2443

Tabla II. Valores de β y λ para los cuales es posible encontrar soluciones de onda solitaria con un máximo en el origen, al integrar numéricamente.

Las siguientes gráficas muestran algunos de los resultados numéricos obtenidos para este modelo, teniendo en consideración las mismas condiciones iniciales para el programa del modelo simplificado. En estas gráficas se muestra R vs. ξ , y se observa cómo al aumentar la velocidad de la onda disminuye su anchura de una manera más evidente que en el caso del modelo simplificado.

Otra cantidad que se observó en las interacciones numéricas fueron la densidad iónica y la electrónica, por lo cual se puede decir que existen pequeñas fluctuaciones de estas alrededor de la cuasineutralidad ($n_i = n_e = 1$), y por ello no se hace gran referencia a estas cantidades más adelante.

Entre los resultados más importantes de esta sección, se puede resaltar la gran diferencia entre los resultados de este modelo y el simplificado, y por lo mismo con resultados de Poornakala *et al.*, en cuanto a los valores de los parámetros y las condiciones para obtener las ondas solitarias. Por ello habría que reconsiderar las formulaciones para pequeñas amplitudes en las cuales se basan los modelos.

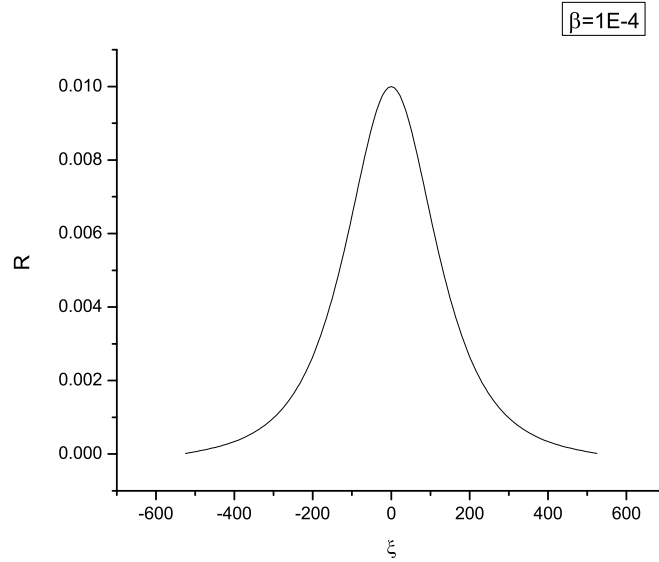
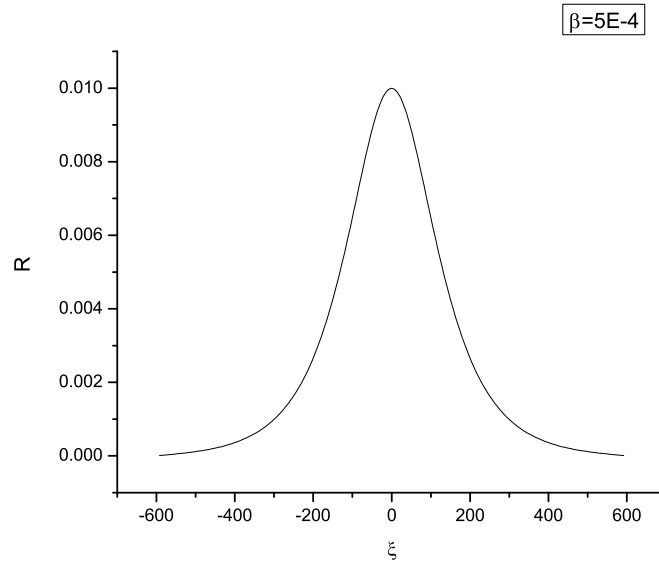
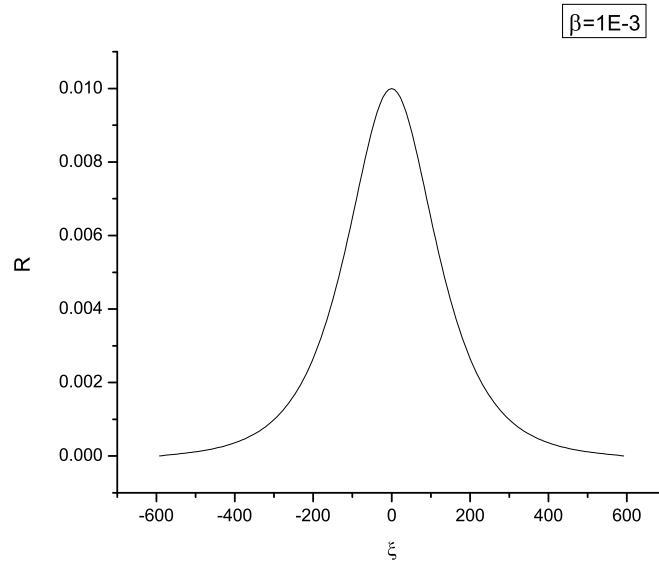
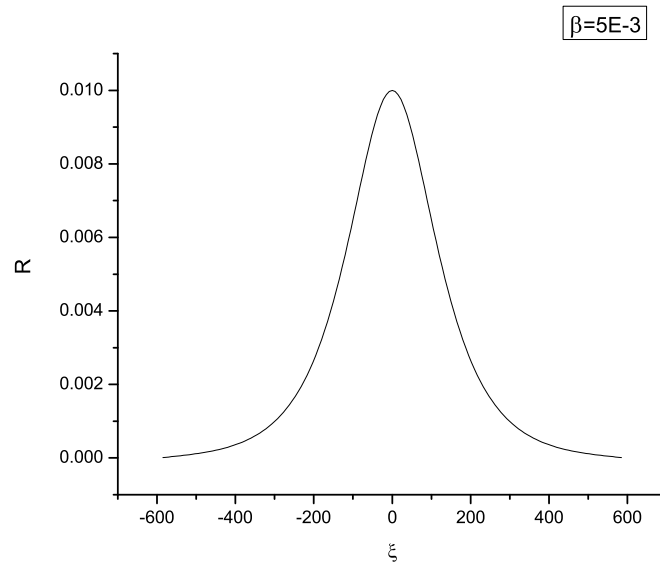
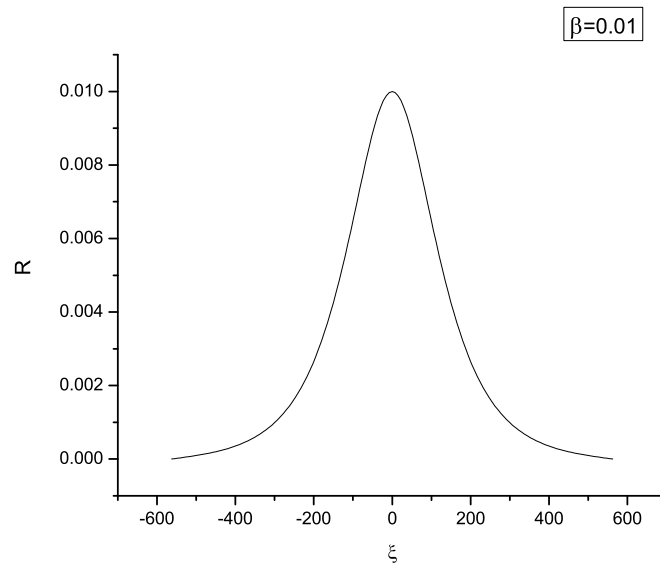
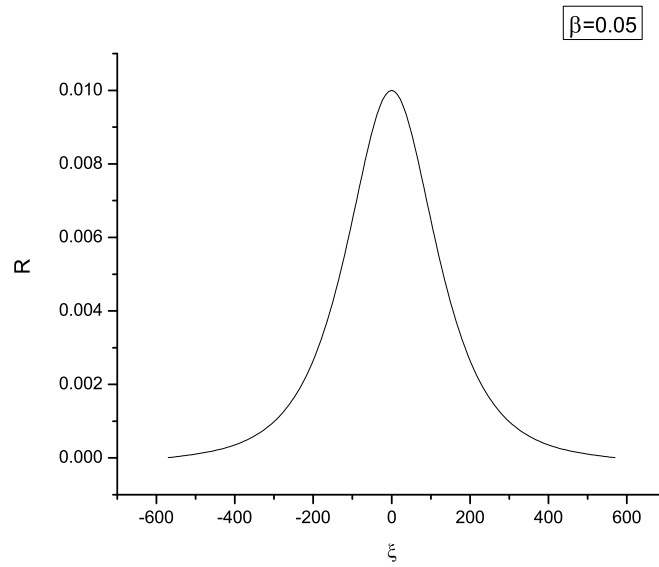
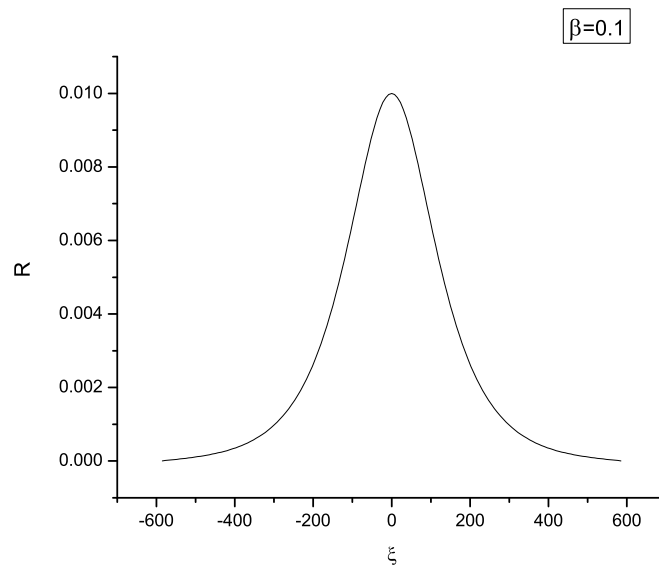
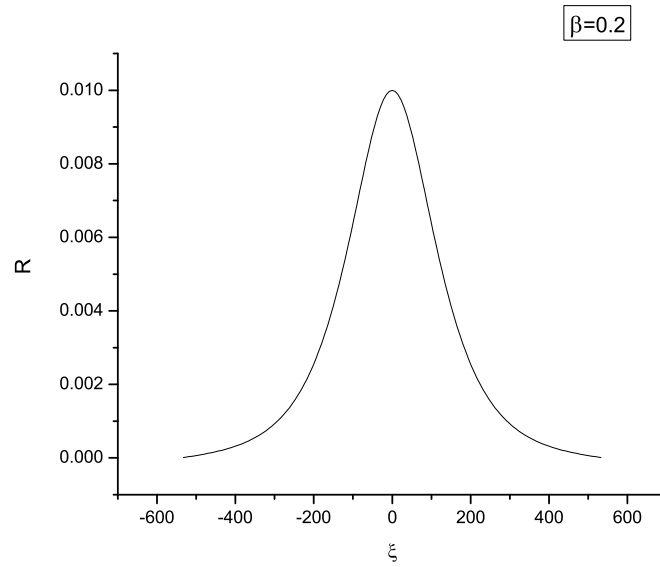
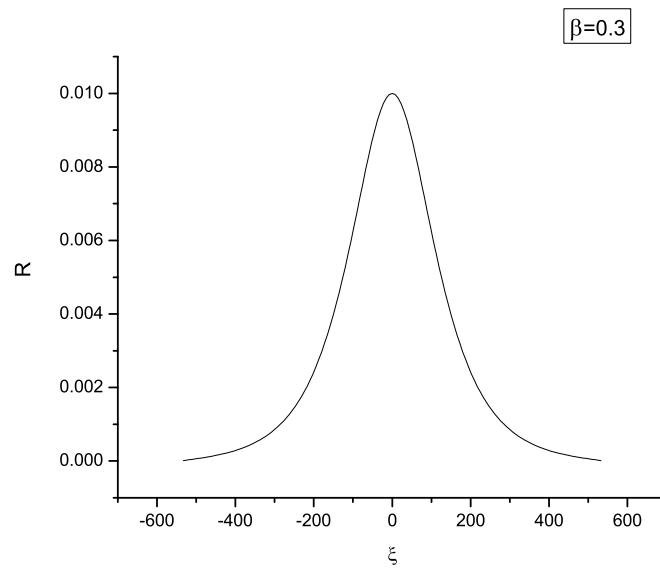


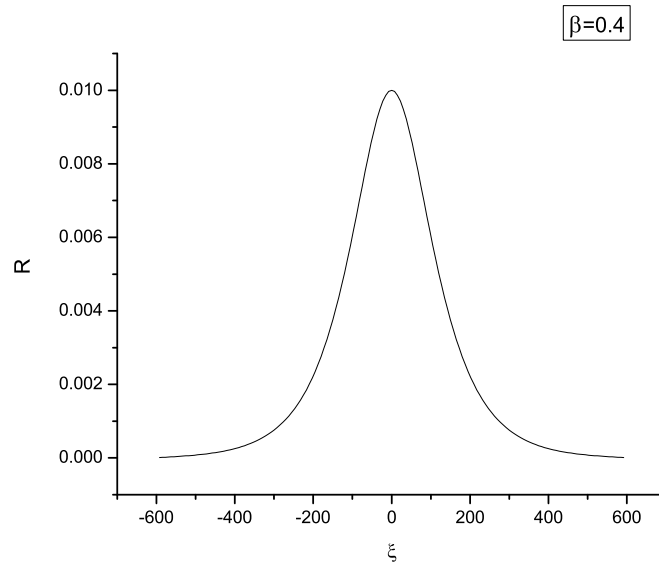
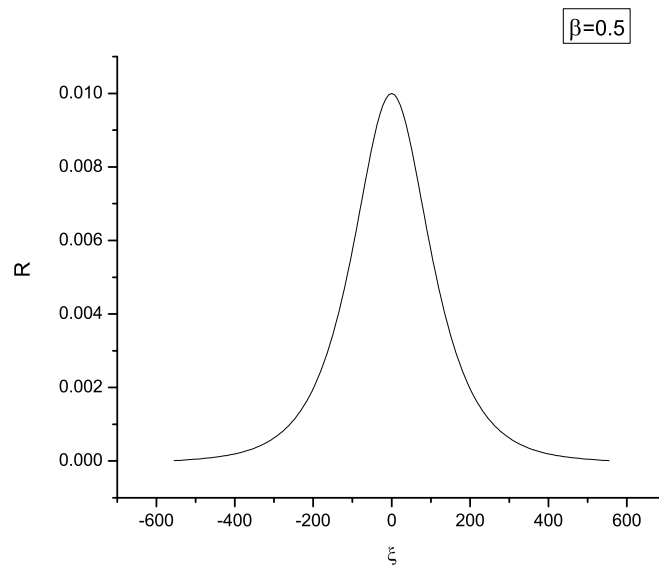
Figura 3.3: Solitón correspondiente a $\beta = 1 \times 10^{-4}$

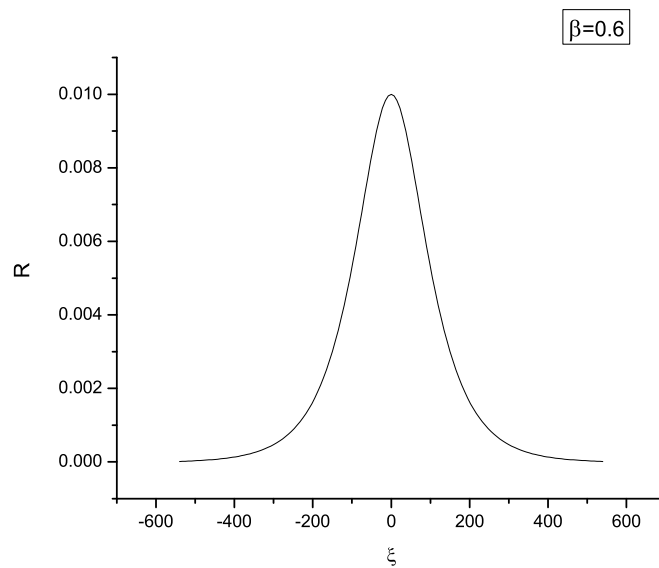
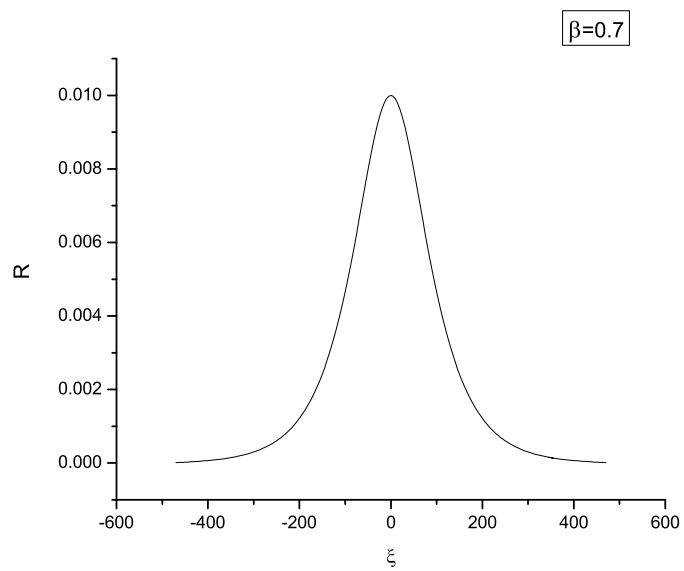
Figura 3.4: Solitón correspondiente a $\beta = 5 \times 10^{-4}$ Figura 3.5: Solitón correspondiente a $\beta = 1 \times 10^{-3}$

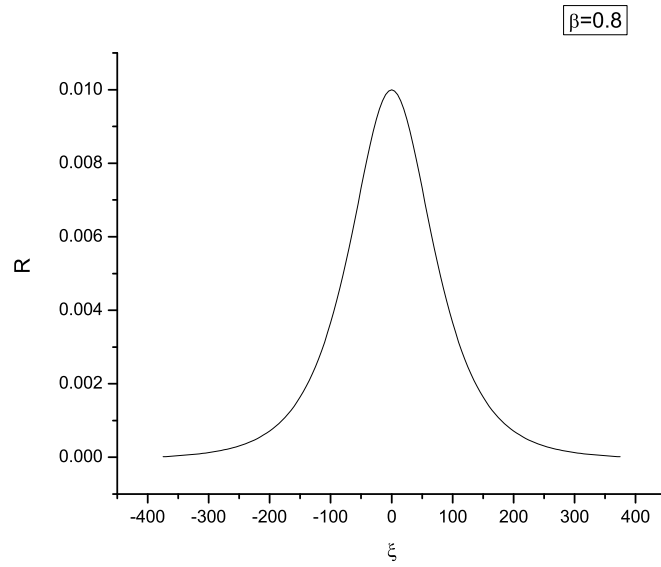
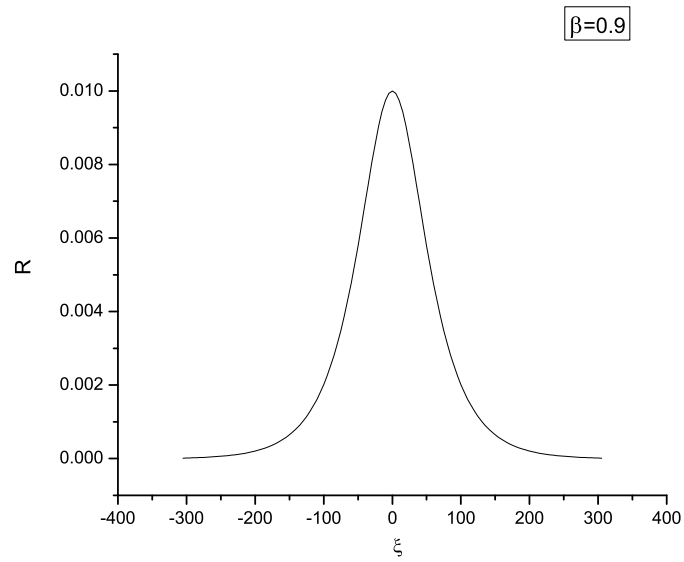
Figura 3.6: Solitón correspondiente a $\beta = 5 \times 10^{-3}$ Figura 3.7: Solitón correspondiente a $\beta = 0,01$

Figura 3.8: Solitón correspondiente a $\beta = 0,05$ Figura 3.9: Solitón correspondiente a $\beta = 0,1$

Figura 3.10: Solitón correspondiente a $\beta = 0,2$ Figura 3.11: Solitón correspondiente a $\beta = 0,3$

Figura 3.12: Solitón correspondiente a $\beta = 0,4$ Figura 3.13: Solitón correspondiente a $\beta = 0,5$

Figura 3.14: Solitón correspondiente a $\beta = 0,6$ Figura 3.15: Solitón correspondiente a $\beta = 0,7$

Figura 3.16: Solitón correspondiente a $\beta = 0,8$ Figura 3.17: Solitón correspondiente a $\beta = 0,9$

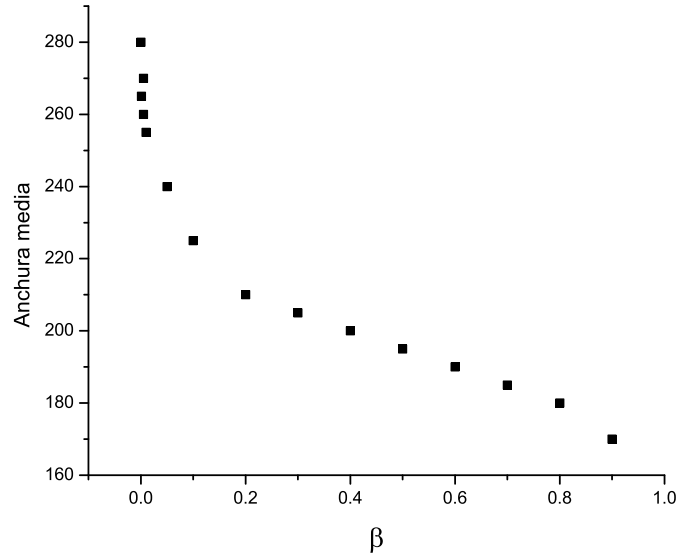
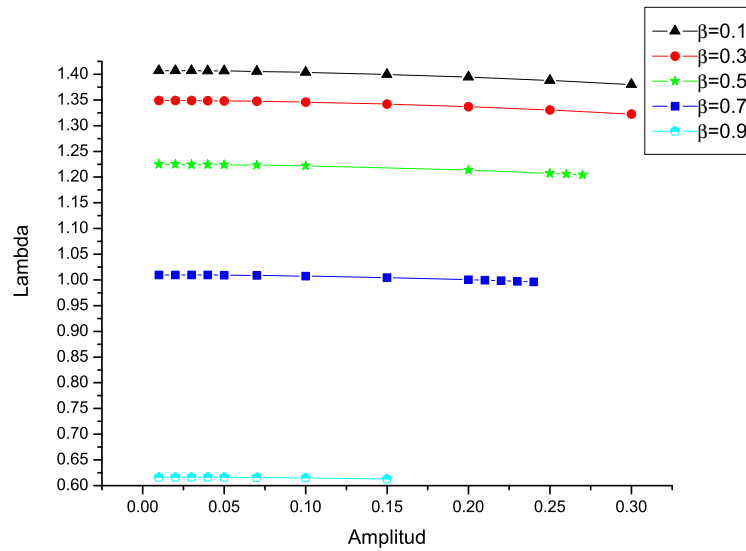


Figura 3.18: Ancho medio de la onda vs velocidad

Figura 3.19: Comportamiento de λ con respecto a la amplitud.

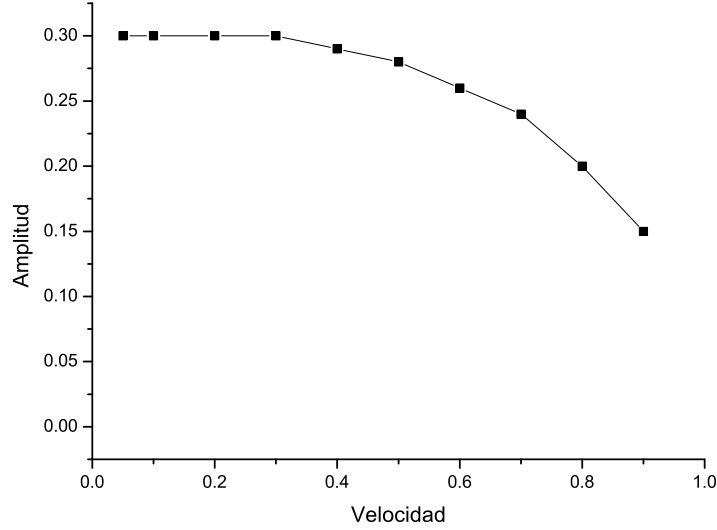


Figura 3.20: Gráfica de la región en donde se producen las ondas solitarias en función de la velocidad.

En la figura (3.18) se muestra el comportamiento del ancho medio de la onda en función de la velocidad, pudiendose observar que mientras mayor es la velocidad de la onda, más angosta es esta.

Queda por describir los resultados obtenidos cuando se buscan soluciones acotadas para amplitudes mayores. El procedimiento es el mismo al señalado anteriormente, fijando la amplitud en el máximo y la velocidad de propagación β . De esta forma se obtiene una tabla para la amplitud máxima de la onda y del parámetro λ para el cual es posible encontrar la onda acotada. Este procedimiento se sigue para $\beta = 0,05, 0,1, 0,02, \dots, 0,9$, para las cuales fue posible encontrar soluciones acotadas. La figura (3.19) muestra el comportamiento del parámetro λ con respecto a la amplitud para diferentes velocidades.

La curva mostrada en la figura (3.20) limita la región de los valores para los cuales es posible encontrar soluciones acotadas de un sólo máximo, siendo los valores bajo la curva los permitidos. Para obtener esta gráfica se tomaron los valores máximos de la amplitud de las tablas de amplitud y el parámetro λ mencionadas en el párrafo anterior. Con ayuda de esta curva se infiere el comportamiento de la máxima amplitud de la onda solitaria con respecto a la velocidad de propagación, y se puede observar que para velocidades pequeñas la amplitud máxima es constante. Sin embargo, para valores mayores de la velocidad, la amplitud permitida disminuye.

De lo anterior se puede concluir que el comportamiento de las ondas solitarias encontradas con el modelo completo es muy similar al caso del modelo simplificado. Sin embargo, el modelo completo se puede emplear para el estudio numérico de amplitudes grandes. Cabe mencionar, que la generación de la onda solitaria está restringida a su propagación en plasmas subdensos.

Capítulo 4

Radiación

Este capítulo se divide en dos partes, en la primera se estudia la estabilidad de una onda solitaria partiendo de la solución analítica encontrada para pequeñas amplitudes (2.47), y posteriormente se estudia la radiación generada por ondas tipo solitón. Para ello se emplea la formulación lagrangiana planteada en el Capítulo 2.

Para el estudio de la estabilidad de la onda solitaria se toma una función con una forma analítica semejante, pero tal que no necesariamente se cumplan las relaciones entre los parámetros encontradas en el Capítulo 2. Además, a esta función ahora se le ha añadido un término en forma de onda plana, que representa la radiación de la onda. Las componentes del potencial vectorial adquieren la forma:

$$A_y = (R\text{sech}[w(x - \eta)] + ig)e^{i\kappa(x-\eta)}e^{-i\Lambda} + cc \quad , \quad (4.1)$$

$$A_z = i(R\text{sech}[w(x - \eta)] + ig)e^{i\kappa(x-\eta)}e^{-i\Lambda} + cc \quad , \quad (4.2)$$

en donde R, g, w, η, κ y Λ son funciones arbitrarias que dependen únicamente del tiempo. Para obtener la forma en que evoluciona el término de radiación, se supondrá que se tiene una emisión de radiación adiabática, en el sentido de que el tiempo característico de oscilación de la misma es más corto que el de la deformación de la onda solitaria. Por ello se puede suponer que la radiación emitida está representada por una onda plana, que se desarrolla en forma de un escalón de altura g y ancho l en los extremos de la onda

solitaria, mientras que ésta se sigue representando por los primeros términos de las ecuaciones (4.1) y (4.2). Del mismo modo que se ha propuesto una forma analítica para el potencial vectorial, tomada de los resultados previos, se deben de proponer soluciones a las otras cantidades que aparecen en el lagrangiano, ya que de no hacerlo se tendría nuevamente un sistema de ecuaciones diferenciales a resolver, siendo que el objetivo es encontrar una expresión para la radiación. Por ello, se proponen las siguientes relaciones, siguiendo la forma de las ecuaciones (2.42), (2.43), (2.32), (2.38) y (2.39),

$$n_e = 1 + n_{e1} \text{sech}^2[w(x - z)] \quad , \quad (4.3)$$

$$n_i = 1 + n_{i1} \text{sech}^2[w(x - z)] \quad , \quad (4.4)$$

$$\phi_{\xi\xi} = \phi_1 \text{sech}^2[w(x - z)] \quad , \quad (4.5)$$

$$\psi_i = \psi_{i1} \tanh[w(x - z)] \quad , \quad (4.6)$$

$$\psi_e = \psi_{e1} \tanh[w(x - z)] \quad , \quad (4.7)$$

en donde n_{e1} , n_{i1} , ϕ_1 , ψ_{i1} y ψ_{e1} son funciones que dependen del tiempo. Introduciendo estas expresiones en la densidad lagrangiana (2.14) e integrando de $(-\infty, \infty)$ respecto a la coordenada x , se obtiene

$$\begin{aligned} L = & -\frac{8R^2}{w} + \frac{4R_t^2}{w} - \frac{4R^2w}{3} - \frac{4RR_t w_t}{w^2} - \frac{4R^2 w_t^2 \eta^2}{3w} + 2R^2 w_t^2 \left(\frac{12 + \pi^2}{18w^3} + \frac{2\eta^2}{3w} \right) + \\ & \frac{4R^2 w \eta_t}{3} + \frac{4\pi g \kappa R_t \eta_t}{w} - \frac{4\pi R g_t \kappa \eta_t}{w} - \frac{4\pi a g \kappa \eta_t w_t}{w^2} - \frac{4R^2 \kappa^2 (1 - \eta_t^2)}{w} - \frac{4\pi R g \kappa_t \eta_t}{w} - \\ & \frac{4a^2 \kappa_t^2 \eta_t^2}{w} + 2R^2 \kappa_t^2 \left(\frac{\pi^3}{4w^3} + \frac{2\eta_t^2}{w} \right) - \frac{4\pi g R_t \Lambda_t}{w} + \frac{4\pi g_t R \Lambda_t}{w} + \frac{4\pi g R w_t \Lambda_t}{w^2} - \frac{8a^2 \kappa \eta_t \Lambda_t}{w} + \\ & \frac{4R^2 \Lambda_t^2}{w} - 4g^2 l - 2g^2 \kappa^2 l^2 (1 - \eta_t^2) + 4g^2 l \kappa \kappa_t \eta \eta_t + 2g^2 l \kappa_t^2 \eta^2 - 4g^2 l \kappa \eta_t \Lambda_t - 4g^2 l \kappa_t \eta \Lambda_t + \\ & 2g^2 l \Lambda_t^2 + (2\eta_t - 1)(\psi_e + \psi_i) - \frac{8R^2(n_{i1} - n_{e1})}{3w} - \frac{2(\psi_e n_{e1} + \psi_i n_{i1})}{3w} + \frac{4\eta_t(\psi_e n_{e1} + \psi_i n_{i1})}{3w} + \end{aligned}$$

$$\frac{(\Gamma_i n_{i1} + \Gamma_e n_{e1})}{w} \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{4(n_{i1} - n_{e1})\phi_1}{3} + \frac{8w\phi_1^2}{15}, \quad (4.8)$$

donde el subíndice t representa la derivada con respecto al tiempo. Por medio de este lagrangiano se puede estudiar el desarrollo de una onda solitaria de amplitud, así como la radiación emitida.

Enseguida se encontrarán las ecuaciones Euler-Lagrange correspondientes a las funciones que contiene este lagrangiano y se expondrán las consecuencias de tener una onda solitaria. Para ello hay que recordar que este tipo de onda tiene como característica que las funciones R , w , y κ son constantes, así como también $\eta_\tau = \beta$, y $\Lambda_\tau = \lambda$. Entonces, de la ecuación de Euler-Lagrange de la función κ se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[-\frac{4Rg\pi\eta_t}{w} - \frac{8R^2\eta^2\kappa_t}{w} + \frac{4R^2\kappa_t}{w} \left(\frac{\pi^3}{4w^2} + \frac{2\eta^2}{w} \right) + 4g^2l\eta\eta_t\kappa + 4g^2l\eta^2\kappa_t - 4g^2l\eta\Lambda_t \right] \\ &= \frac{4\pi gR_t\eta_t}{w} - \frac{4\pi Rg_t\eta_t}{w} - \frac{4\pi Rgw_t\eta_t}{w^2} - \frac{8R^2\kappa}{w} + \frac{8R^2\kappa\eta_t^2}{w} + \frac{8R^2\eta_t\Lambda_t}{w} - 4g^2l\kappa + 4g^2l\kappa\eta_t^2 \\ & \quad + 4g^2l\kappa_t\eta\eta_t - 4g^2l\eta_t\Lambda_t. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Tomando como hipótesis que la solución de esta ecuación tiene la forma de onda solitaria, es decir cumple con las condiciones de solitón, a excepción de que $g \neq 0$, esta ecuación se reduce a

$$\kappa = \frac{\eta_t\Lambda_t}{1 - \eta_t^2},$$

que se puede identificar con la ecuación (2.30) con $Q = 0$. Enseguida, de la ecuación de Euler-Lagrange para la función Λ se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left[-\frac{4\pi R_tg}{w} + \frac{4\pi Rg_t}{w} + \frac{4\pi Rgw_t}{w^2} - \frac{8R^2\kappa\eta_t}{w} + \frac{8R^2\Lambda_t}{w} - 4g^2l\kappa\eta_t - 4g^2l\kappa_t\eta + 4g^2l\Lambda_t \right] = 0. \quad (4.10)$$

Sustituyendo el valor encontrado del parámetro κ , esta ecuación se reduce a una ecuación diferencial para g de la forma

$$g_t = Cg^2,$$

donde C es una constante que depende de los parámetros constantes del solitón. Las dos posibles soluciones de esta ecuación son

$$g = -\frac{1}{C(t + t_0)}$$

o

$$g = 0 \quad .$$

Por lo tanto, se llega a la conclusión de que en caso de tener como solución del sistema una onda solitaria, se tiene alguna de las dos siguientes posibilidades; la primera es que si existe radiación, esta decae muy rápidamente, inversamente proporcional al tiempo transcurrido desde la generación de ésta, o la segunda posibilidad es que nunca se produzca radiación. En cualquiera de los dos casos se obtiene que la onda solitaria es una solución estable para este sistema.

Por otra parte, de las variaciones para los parámetros n_{i1} y n_{e1} se obtienen

$$\frac{2(2\eta_t - 1)\psi_{e1}}{3} - \frac{8R^2}{3w} + \frac{\Gamma_e}{w} \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4\phi_1}{3w} = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{2(2\eta_t - 1)\psi_{i1}}{3} - \frac{8R^2}{3w} + \frac{\Gamma_i}{w} \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{4\phi_1}{3w} = 0, \quad (4.12)$$

en donde ya se introdujeron las condiciones de estabilidad de la onda. De las variaciones para ϕ_0 y ϕ_1 se obtienen los siguiente resultados, de los cuales se puede inferir que una condición para que se obtenga una onda solitaria es la cuasineutralidad del plasma, reafirmando uno de los resultados que se obtienen con el estudio numérico, en el sentido de que los iones generan la onda solitaria y los electrones, de menor masa, los siguen manteniendo así la cuasineutralidad del medio:

$$n_{i1} = n_{e1}, \quad (4.13)$$

Para la variación de η se obtiene la siguiente ecuación, la cual hace referencia a la energía del solitón y se asocia las pérdidas por la emisión de radiación.

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[\frac{8R^2 w \eta_t}{3} + \frac{4R_t g \pi \kappa}{w} - \frac{4R g_t \pi \kappa}{w} - \frac{4a R \pi \kappa w_t}{w^2} + \frac{8R^2 \kappa^2 \eta_t}{w} - \frac{4R g \pi \kappa_t}{w} + \frac{8R^2 \kappa \Lambda_t}{w} \right. \\
& \quad \left. + 4g^2 l \kappa^2 \eta_t + 4g^2 l \eta \kappa \kappa_t + 4g^2 l \kappa \Lambda_t + 2(\psi_e + \psi_i) + \frac{4(n_{1e} \psi_e + n_{1i} \psi_i)}{3} \right] \\
& = 4g^2 l \kappa \kappa_t \eta_t + 4g^2 l \kappa_t^2 \eta + 4g^2 l \kappa_t \Lambda_t \quad . \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Introduciendo las condiciones que cumple un solitón, ésta ecuación se reduce a

$$\psi_{i1} = -\psi_{e1} \quad . \quad (4.15)$$

Así mismo, de las variaciones de R y g , se obtienen respectivamente

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[\frac{8R_t}{w} - \frac{4R w_t}{w^2} + \frac{4\pi g \eta_t \kappa}{w} - \frac{4\pi g \Lambda_t}{w} \right] = -\frac{16R}{w} - \frac{8R w}{3} - \frac{4R_t w_t}{w^2} - \frac{8R w_t^2 \eta^2}{3w} \\
& + \frac{4R w_t^2}{w} \left(\frac{12 + \pi^2}{18w^2} + \frac{2\eta^2}{3} \right) + \frac{8R w \eta_t^2}{3} - \frac{4\pi g_t \kappa \eta_t}{w} - \frac{4\pi g \kappa \eta_t w_t}{w^2} - \frac{8R \kappa^2}{w} + \frac{8R \kappa^2 \eta_t^2}{w} \\
& - \frac{4\pi g \kappa_t \eta_t}{w} - \frac{8a \kappa_t^2 \eta^2}{w} + \frac{4R \kappa_t^2}{w} \left(\frac{\pi^3}{4w^2} + 2\eta^2 \right) + \frac{4\pi g_t \Lambda_t}{w} + \frac{4\pi g \kappa \Lambda_t w_t}{w^2} - \frac{16R \kappa \Lambda_t \eta_t}{w} \\
& + \frac{8R \Lambda_t^2}{w} - \frac{16R(n_{1e} + n_{1i})}{3w} \quad (4.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[\frac{4\pi R \Lambda_t}{w} - \frac{4\pi R \kappa \eta_t}{w} \right] = \frac{4\pi R_t \kappa \eta_t}{w} - \frac{4\pi R \kappa \eta_t w_t}{w^2} - \frac{4\pi R \eta_t \kappa_t}{w} - \frac{4\pi R_t \Lambda_t}{w} + \frac{4\pi R w_t \Lambda_t}{w^2} \\
& - 8gl - 4gl \kappa^2 + 4gl \kappa_t^2 \eta_t^2 + 8gl \kappa \kappa_t \eta \eta_t + 4gl \kappa_t^2 \eta^2 - 8gl \kappa \eta_t \Lambda_t - 8gl \eta \kappa_t \Lambda_t + 4gl \Lambda_t^2 \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Siendo estas dos últimas expresiones fundamentales para encontrar el parámetro l , que corresponde al ancho de la radiación.

$$l = \frac{3\pi^2 R^2 (1 - 2\eta_t^2)^2 \Lambda_t}{(6w + w^3(1 - \eta_t^2)^2 + 6w\eta_t^2(1 - 2\Lambda_t^2)^2 - 3w\Lambda_t^2)(2 - \Lambda_t^2 + 2\eta_t^2(2\Lambda_t^2 - 1))}$$

Por otro lado, lo más destacable de las ecuaciones que se obtienen de la variación de R , w , ψ_{i1} y ψ_{e1} es la dependencia que tienen las funciones w , Λ_t , ψ_{i1} y ψ_{e1} con respecto a la velocidad de propagación de la onda. Esta dependencia se muestra en las ecuaciones

$$\psi_{i1} = -\psi_{e1} = \frac{3\eta_t}{2w} \quad , \quad (4.18)$$

$$\Lambda_t = \sqrt{\frac{(16R^2 - 3\eta_t^2)(1 - \eta_t^2)}{8R(1 - 2\eta_t^2)}} \quad , \quad (4.19)$$

$$w = \sqrt{\frac{3(3 - 32R^2)\eta_t^2(1 - \eta_t^2)}{8R(1 - \eta_t^2)(1 - 2\eta_t^2)}} \quad . \quad (4.20)$$

La forma explícita de todas las ecuaciones de Euler-Lagrange que se obtienen de las respectivas variaciones de cada uno de los parámetros, se muestran en la primera sección del Apéndice C. Este conjunto de ecuaciones diferenciales, como se mencionó anteriormente, resulta muy importante cuando se pretende realizar un estudio sobre la evolución e interacción de una onda tipo solitón con su radiación. Este se puede realizar buscando otras posibles soluciones aparte de la ya manejada, cuya conclusión fue la estabilidad de la onda solitaria.

Enseguida se muestra la forma que adquieren las cantidades conservadas, energía y momento respectivamente, para este sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} & \left[\frac{4R^2(1 + a + \kappa^2(1 + \eta_t^2))}{w} + \frac{4R^2\Lambda_t(\Lambda_t - 2\kappa\eta_t)}{w} + \frac{R^2((12 + \pi^2)w_t^2 + 3\pi^2\kappa_t^2)}{9w^3} \right. \\ & \left. + \frac{4R_t(R_tw - R w_t)}{w^2} + \frac{4R^2w(1 + \eta_t^2)}{3} - \frac{4Rg\pi(w_t\eta_t\kappa + w\eta_t\kappa_t - w_t\Lambda_t)}{w^2} + 2g_t^2l \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4\pi(R_t g - R g_t)(\Lambda_t - \kappa \eta_t)}{w} + 4g^2 l(\eta \kappa_t(\eta_t \kappa - \Lambda_t) - \eta_t \kappa \Lambda_t) - 4g^2 \kappa_t l^2(\eta_t \kappa + \eta \kappa_t - \Lambda_t) \\
& + 2g^2 l(1 + a + \kappa^2(1 + \eta_t^2) + \eta^2 \kappa_t^2 + \Lambda_t^2) + \frac{7g^2 \kappa_t^2 l^3}{6} + \frac{64(n_i^2 \vartheta_i \Gamma_i + n_e^2 \vartheta_e \Gamma_e)}{21w} \\
& - \frac{32R^2(an_i + n_e)}{15w} - \frac{4((2m - 9\eta_t)\psi_i n_i + (2 - 9\eta_t)\psi_e n_e)}{15} - \frac{16\phi_1(n_i - n_e)}{15w} \\
& + \psi_e + a\psi_i - \frac{8w\phi_1^2}{15} \Big] = 0 \quad . \quad (4.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[\frac{4\pi\kappa(R_t g - R g_t)}{w} - \frac{4\pi R g(\kappa w_t + \kappa_t w)}{w^2} + 8R^2 \left(\frac{w\eta_t}{3} + \frac{\kappa^2 \eta_t}{w} - \frac{\kappa \Lambda_t}{w} \right) \right. \\
& \left. + 4g^2 \kappa l(\kappa \eta_t - \Lambda_t) 2(\psi_e + \psi_i) + \frac{4}{3}(\psi_e n_e + \psi_i n_i) \right] = 0 \quad . \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Para obtener estas expresiones se utilizaron las ecuaciones (2.24) y (2.25) sustituyendo las funciones de prueba (4.1) a (4.7) e integrado sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ en la variable x . Estas ecuaciones complementan al sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange del sistema, y sirven para validar un código que pretenda encontrar soluciones numéricas del sistema, además de que serán usadas más adelante en este capítulo.

A continuación se hallarán otras soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales, para comprender un poco más la interacción de una onda no solitaria, que no corresponde a la solución exacta, con su radiación. Debido a la complejidad del sistema de ecuaciones diferenciales, se consideran desviaciones pequeñas de la forma ya conocida del solitón. Por tanto, se tomarán como referencia las ecuaciones (4.1) a (4.7), en donde los parámetros presentes en éstas varían poco de los respectivos parámetros de la onda solitaria.

Para simplificar el cálculo se harán las siguientes hipótesis; primero sólo los parámetros de la onda R , g , w , Λ , η y κ cambian, mientras que los otros parámetros que aparecen en las ecuaciones mencionadas no cambian, esto se justifica debido a que los resultados numéricos obtenidos en el capítulo anterior mostraron que la variación de éstos es pequeña. Además, se puede suponer que los parámetros varían alrededor del valor correspondiente al solitón, y el valor de éste lo constituye el del solitón más una pequeña variación

de éste. Así por ejemplo, para el caso de la amplitud de la onda se puede formular como $R = R_0 + R_1$, donde R_0 representa el correspondiente al solitón, mientras que R_1 es una variación que se supondrá que debe de cumplir con $R_1 \ll R_0$.

Al aplicar estas hipótesis al sistema de ecuaciones que aparecen en la primera parte del Apéndice C y desarrollando, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales para los nuevos parámetros (R_1 , g_1 , w_1 , Λ_1 , η_1 y κ_1), en donde las otras cantidades que aparecen son constantes. Este nuevo sistema de ecuaciones se muestra en la segunda sección del Apéndice C, en donde se realizó una linealización sobre los nuevos parámetros, de acuerdo a la segunda hipótesis.

A través de una manipulación algebraica este conjunto de ecuaciones se puede reescribir de la siguiente forma, en donde los coeficientes ζ_i dependen de los parámetros del solitón que son constantes

$$g_{1t} = \zeta_1 a_1 + \zeta_2 \kappa_1 + \zeta_3 w \quad , \quad (4.23)$$

$$a_{1t} = \zeta_4 g_1 \quad , \quad (4.24)$$

$$\kappa_{1t} = \zeta_5 g_1 \quad , \quad (4.25)$$

$$w_{1t} = \zeta_6 g_1 \quad , \quad (4.26)$$

$$\eta_{1t} = \zeta_7 g_1 \quad , \quad (4.27)$$

$$\Lambda_{1t} = \zeta_8 g_1 \quad . \quad (4.28)$$

La forma de los coeficientes ζ_i también se muestran en la segunda parte del Apéndice C. Estas ecuaciones describen la evolución de una onda y la forma en que ésta radía. En especial la ecuación (4.26) pone de manifiesto la dependencia de la radiación emitida y la velocidad de la onda, si la onda radía la velocidad disminuye y por ello se frena. Esta aceleración se encuentra por medio de la ecuación

$$\eta_{1tt} = \zeta_7 g_t \quad , \quad (4.29)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se encuentra que la solución más general para la función g_1 es

$$g_1 = g_{10}(e^{\zeta t} - e^{-\zeta t}) \quad , \quad (4.30)$$

en donde $g_{10} = \frac{\zeta_1 a_{10} + \zeta_2 \kappa_{10} + \zeta_3 w_{10}}{\zeta}$ y $\zeta = \sqrt[3]{\zeta_1 \zeta_4 + \zeta_2 \zeta_5 + \zeta_3 \zeta_6}$, que dependen de las condiciones iniciales a_{10} , κ_{10} y w_{10} , y se ha supuesto que la onda inicialmente no tiene radiación ($g_1|_{t=0} = 0$). De esta expresión para g_1 se deduce que nunca se va a emitir radiación en los casos $g_{10} = 0$ o $\zeta = 0$. Esta primera condición se obtiene en el caso particular en que $a_{10} = \kappa_{10} = w_{10} = 0$, que corresponde a la solución de onda solitaria, de lo que se deduce nuevamente que la onda solitaria es una onda estable. Para la segunda condición es muy difícil de deducir el caso correspondiente por la complejidad de la ecuación de ζ . Por otro lado, se puede considerar el caso en el que la onda generada inicie emitiendo radiación, es decir ($g_1|_{t=0} \neq 0$) y por tanto se tiene como solución de g_1

$$g_1 = g_{10}e^{\zeta_a t} + g_{11}e^{\zeta_b t} \quad , \quad (4.31)$$

donde ζ_a y ζ_b son las soluciones de la ecuación $\zeta = \pm \sqrt[3]{\zeta_1 \zeta_4 + \zeta_2 \zeta_5 + \zeta_3 \zeta_6}$, donde g_{10} y g_{11} son constantes de integración. Para determinar si una onda con estas características puede evolucionar a una onda solitaria, se deben determinar los valores de ζ_a y ζ_b , siendo que éstos dependen de los parámetros del solitón, lo cual indica que dependiendo del tipo de la onda y su aproximación al solitón, ésta podrá o no evolucionar a uno de ellos por medio de la emisión de radiación. Para ello se requiere que la parte real de ζ_1 y ζ_2 sea negativa.

Dada la complejidad para determinar si una onda puede o no decaer a un solitón analíticamente con estas herramientas, sólo se pueden mencionar algunos de estos casos, los cuales tienen como característica común, que al existir una desviación sobre alguno de los parámetros de la onda con respecto al valor del solitón, y siendo que ésta tienda a cero, la radiación hace que los otros parámetros se reajusten de tal forma que decaen a los correspondientes valores del solitón, pudiéndose crear así una onda solitaria. Un ejemplo de ello es el siguiente caso, si la desviación de la amplitud tiene una forma

$$R_{1t} = R_{10}e^{-\alpha t} \quad , \quad (4.32)$$

con $\alpha > 0$, por lo cual se tendría una radiación de la forma

$$g_1 = \frac{-\alpha R_{10}e^{-\alpha t}}{\zeta_4} \quad , \quad (4.33)$$

y por lo tanto las otras desviaciones de los parámetros quedarían como

$$\kappa_1 = -\frac{\alpha R_{10}\zeta_5 e^{-\alpha t}}{\zeta_4} \quad , \quad (4.34)$$

$$w_1 = -\frac{\alpha R_{10}\zeta_6 e^{-\alpha t}}{\zeta_4} \quad , \quad (4.35)$$

$$\eta_1 = -\frac{\alpha R_{10}\zeta_7 e^{-\alpha t}}{\zeta_4} \quad , \quad (4.36)$$

$$\Lambda_1 = -\frac{\alpha R_{10}\zeta_8 e^{-\alpha t}}{\zeta_4} \quad , \quad (4.37)$$

observando que también estas variaciones tienden a cero.

Siguiendo con este mismo ejemplo de una onda solitaria perturbada, enseguida se muestra el análisis de las cantidades conservadas, número de partículas, momento y energía. Para ello, se toma la forma de estas cantidades definida por las ecuaciones (2.23), (2.24) y (2.25). De la conservación del número de partículas se obtienen las condiciones

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{n_{e1}}{w_0} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{n_{i1}}{w_0} \right) = 0 \quad , \quad (4.38)$$

y dado que w_0 es constante, también deberán serlo las cantidades n_{e1}, n_{i1} , indicando esto que al paso de la onda solitaria se modifica el estado del equilibrio del medio por medio de las ecuaciones (4.3) y (4.4). Sin embargo, la emisión de la radiación no conlleva una evacuación de partículas.

En el caso de la conservación del momento, la situación se complica, ya que al tomar la ecuación de conservación de momento (2.24) e introducir la forma propuesta para la onda que es acompañada por la radiación, ecuaciones (4.1)

y (4.2), se obtiene una ecuación que está compuesta por varios términos que describen el momento de la interacción. Por sencillez en el análisis primero se muestran éstos. Primeramente se tiene el término que se refiere al momento de la onda solitaria

$$P_0 = \frac{8R_0^2 w_0 \eta_{0t}}{3} + \frac{8R_0^2 \kappa_0^2 \eta_{0t}}{w_0} - \frac{8R_0^2 \kappa_0 \Lambda_{0t}}{w_0} + 2\psi_e + 2\psi_i + \frac{4\psi_e n_{1e}}{3} + \frac{4\psi_i n_{1i}}{3} \quad . \quad (4.39)$$

La siguiente ecuación se refiere al momento de la superposición de la onda y su perturbación, en donde sólo se han considerado términos de primer orden, así como en los siguientes términos del momento

$$P_1 = \frac{16R_0 R_1 w_0 \eta_{0t}}{3} + \frac{8R_0^2 w_1 \eta_{0t}}{3} + \frac{8R_0^2 w_0 \eta_{1t}}{3} + \frac{16R_0 R_1 \kappa_0^2 \eta_{0t}}{w_0} - \frac{8R_0^2 \kappa_0^2 \eta_{0t} w_1}{w_0^2} + \frac{8R_0^2 \kappa_0^2 \eta_{1t}}{w_0} \\ + \frac{16R_0^2 \kappa_0 \kappa_1 \eta_{0t}}{w_0} - \frac{16R_0 R_1 \kappa_0 \Lambda_{0t}}{w_0} + \frac{8R_0^2 \kappa_0 w_1 \Lambda_{0t}}{w_0^2} - \frac{8R_0^2 \kappa_1 \Lambda_{0t}}{w_0} - \frac{8R_0^2 \kappa_0 \Lambda_{1t}}{w_0} \quad . \quad (4.40)$$

El siguiente término se refiere al momento en que se lleva a cabo la interacción onda radiación

$$P_{int} = -\frac{4\pi R_0 \kappa_0 g_{1t}}{w_0} \quad , \quad (4.41)$$

y por último se tiene el momento que lleva la onda radiada

$$P_{rad} = 4g^2 l (\eta_{0t} \kappa_{0t} - \kappa_0 \Lambda_{0t}) \quad . \quad (4.42)$$

Con ayuda de estos términos, la conservación de momento adquiere la forma

$$P_0 + P_1 + P_{int} + P_{rad} = P_{total} \quad . \quad (4.43)$$

Si a cada uno de estos términos se introduce la forma de la perturbación dada por la ecuación (4.31) como un ejemplo particular, la forma en que evolucionan cada uno de estos términos se muestra en las siguientes figuras.

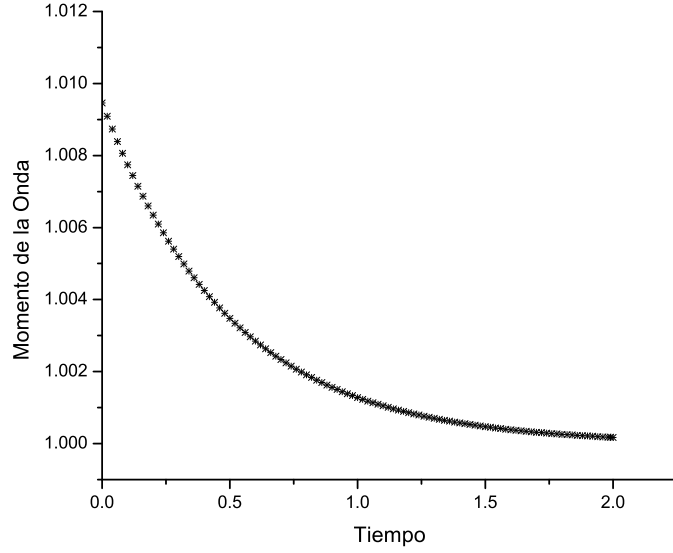


Figura 4.1: Momento de la onda

La Figura (4.1) muestra el momento de la onda como función del tiempo (P_0 y P_1), en donde se puede observar que éste decae desde un valor inicial, que consta del momento de la onda solitaria y la perturbación juntos, hasta un momento final, que sólo consiste en la parte del momento del solitón. La figura (4.2) muestra el momento de la interacción de la onda y la radiación en función del tiempo (P_{int}). En esta figura se ve que inicialmente esta cantidad tiene un máximo y decae a cero con el tiempo, con la indicación de que la interacción se va haciendo más pequeña con el tiempo. En consecuencia, la radiación se va separando de la onda; y por último la Figura (4.3) muestra el momento transferido a la radiación por parte de la onda (P_{rad}), que parte inicialmente de cero hasta que se adquiere el exceso de momento de la onda.

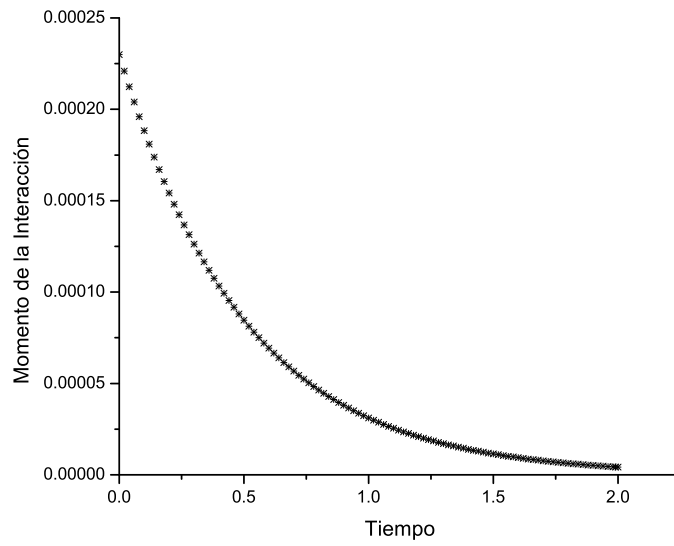


Figura 4.2: Momento de interacción

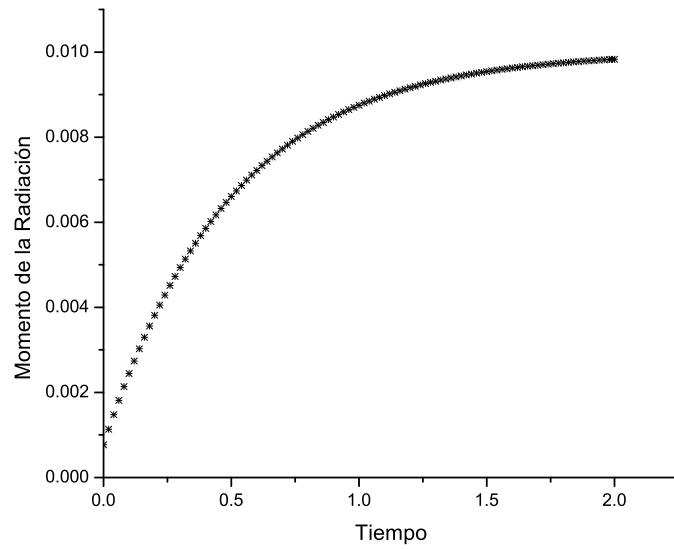


Figura 4.3: Momento de la radiación

Un análisis equivalente se puede hacer para la energía del sistema, y por ello se identificarán las correspondientes partes de la energía que conforman la energía total. Como primer término se tiene a la energía de la onda solitaria

$$\begin{aligned}
 E_0 = & \frac{4R_0^2(1+a)}{w_0} + \frac{4R_0^2w_0}{3} + \frac{4R_0^2w_0\eta_{0t}^2}{3} + \frac{4R_0^2\kappa_0^2(1+\eta_{0t}^2)}{w_0} - \frac{8R_0^2\kappa_0\eta_{0t}\Lambda_{0t}}{w_0} + \frac{4R_0^2\Lambda_{0t}^2}{w_0} \\
 & - \frac{32R_0^2(n_e + an_i)}{15w_0} - \frac{8(n_e\psi_e + an_i\psi_i)}{15} + \frac{12\eta_{0t}(n_e\psi_e + n_i\psi_i)}{5} + \frac{64(n_e^2\vartheta_e\Gamma_e + n_i^2\vartheta_i\Gamma_i)}{21w_0} \\
 & + \psi_e + a\psi_i - \frac{16\phi_1(n_i - n_e)}{15w_0} - \frac{8w_0\phi_1^2}{15}, \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

Como segundo término se tiene la energía de la superposición de la onda solitaria y la perturbación

$$\begin{aligned}
 E_1 = & \frac{8R_0R_1(1+a)}{w_0} - \frac{4R_0^2w_1(1+a)}{w_0^2} + \frac{8R_0R_1w_0}{3} + \frac{4R_0^2w_1}{3} + \frac{8R_0R_1w_0\eta_{0t}^2}{3} + \\
 & \frac{4R_0^2w_1\eta_{0t}^2}{3} + \frac{8R_0^2w_0\eta_{0t}\eta_{1t}}{3} + \frac{8R_0R_1\kappa_0^2(1+\eta_{0t}^2)}{w_0} - \frac{4R_0^2\kappa_0^2w_1(1+\eta_{0t}^2)}{w_0^2} + \frac{8R_0^2\kappa_0^2\eta_{0t}\eta_{1t}}{w_0} \\
 & + \frac{8R_0^2\kappa_0\kappa_1(1+\eta_{0t}^2)}{w_0} + \frac{4R_0^2\kappa_0^2(1+\eta_{0t}^2)}{w_0} - \frac{16R_0R_1\kappa_0\eta_{0t}\Lambda_{0t}}{w_0} + \frac{8R_0^2\kappa_0\eta_{0t}w_1\Lambda_{0t}}{w_0^2} - \\
 & \frac{8R_0^2\kappa_0\eta_{1t}\Lambda_{0t}}{w_0} - \frac{8R_0^2\kappa_1\eta_{0t}\Lambda_{0t}}{w_0} - \frac{8R_0^2\kappa_0\eta_{0t}\Lambda_{1t}}{w_0} + \frac{8R_0R_1\Lambda_{0t}^2}{w_0} - \frac{4R_0^2\Lambda_{0t}^2w_1}{w_0^2} + \frac{8R_0^2\Lambda_{0t}\Lambda_{1t}}{w_0} \\
 & - \frac{64R_0R_1(n_e + an_i)}{15w_0} + \frac{32R_0^2w_1(n_e + an_i)}{15w_0^2} + \frac{12\eta_{1t}(n_e\psi_e + n_i\psi_i)}{5} + \frac{16\phi_1w_1(n_i - n_e)}{15w_0^2} \\
 & - \frac{64w_1(n_e^2\vartheta_e\Gamma_e + n_i^2\vartheta_i\Gamma_i)}{21w_0^2}, \quad (4.45)
 \end{aligned}$$

mientras que la energía asociada a la interacción de la onda y la radiación es de la forma

$$E_{int} = \frac{4R_0\pi g_t(\Lambda_{0t} - \kappa_0\eta_{0t})}{w_0}. \quad (4.46)$$

Por último, la energía que se emite en forma de radiación está dada por

$$E_{rad} = 2g^2l(1+a) + 2g_t^2l + 2g^2l(1+\eta_{0t}^2) + 2g^2l(\Lambda_{0t} - 2\kappa_0\eta_{0t}^2)\Lambda_{0t} \quad , \quad (4.47)$$

quedando la ecuación de conservación de la forma

$$E_0 + E_1 + E_{int} + E_{rad} = E_{total} \quad . \quad (4.48)$$

Las siguientes figuras muestran la forma en que evolucionan las cantidades de energía para el caso especial determinado por la perturbación (4.31). En la Figura (4.4) se muestra la evolución de la energía de la onda que consiste en $E_0 + E_1$. En ésta se ve como la onda perturbada va perdiendo energía mientras evoluciona; mientras la Figura (4.5) muestra la evolución de la energía de interacción de la onda y la radiación (E_{int}), pudiéndose observar en ésta que la energía de la onda se transmite a través de la interacción y termina en la onda radiada (E_{rad}), como se puede observar en la Figura (4.6).

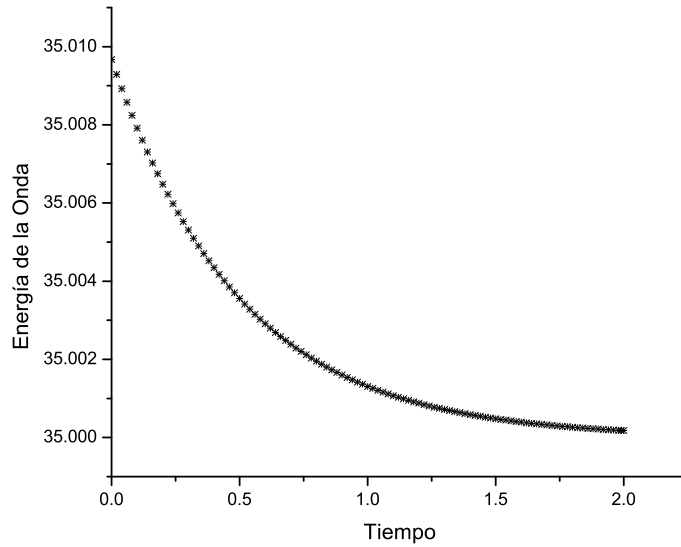


Figura 4.4: Energía de la onda

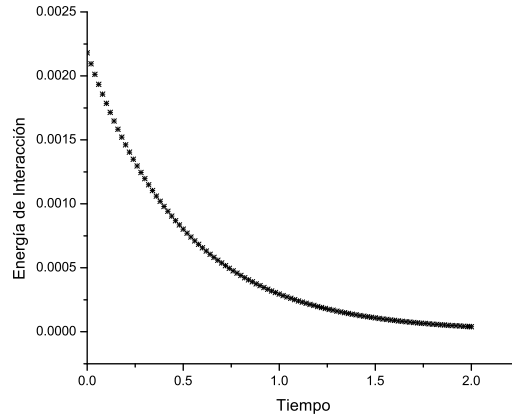


Figura 4.5: Energía de interacción

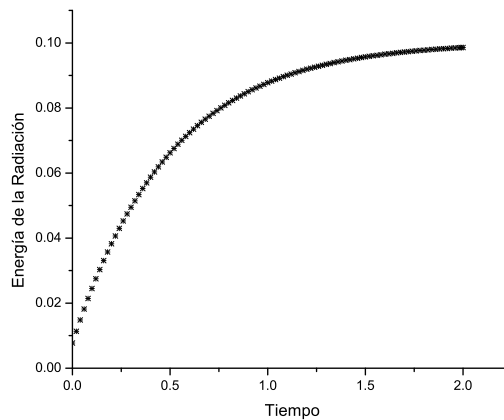


Figura 4.6: Energía de la radiación

Como conclusión de este capítulo, se pueden mencionar que se encontraron las ecuaciones diferenciales que rigen la evolución de los parámetros del solitón, y de ellas la estabilidad de la onda solitaria, así como las condiciones que debe cumplir una onda para que ésta decaiga a un solitón. Además, se aplican las ecuaciones encontradas para el estudio de una onda solitaria que muestra una perturbación, en donde se muestra el uso de las cantidades conservadas para el estudio de la emisión de radiación.

Capítulo 5

Conclusiones

Se presentó la formulación relativista de un modelo de dos fluidos para un plasma en el cual se incluyen los efectos térmicos de ambas especies, a través del formalismo lagrangiano. Posteriormente, se dedujeron las ecuaciones de movimiento del sistema y la forma para las cantidades conservadas, con ayuda de las ecuaciones de Euler-Lagrange y del teorema de Noether.

Posteriormente, con ayuda del mismo formalismo y del método variacional se obtuvieron las ecuaciones que rigen a varios tipos de soluciones, entre ellas las tipo onda solitaria, que busca generalizar los resultados ya obtenidos para pequeñas amplitudes. Tomando la aproximación para pequeñas amplitudes como un límite en el que es posible obtener soluciones analíticas, se empleó para probar soluciones numéricas. Esto permitió contar con un método numérico que permitió resolver el caso general.

Para el caso de pequeñas amplitudes se obtuvieron los siguientes resultados:

En cuanto a la parte analítica, se logró obtener la ecuación conocida como ecuación no lineal de Schrödinger y sus soluciones, que consisten en los conocidos solitones brillantes y los solitones oscuros, siendo de interés en este trabajo sólo los primeros. Los resultados numéricos mostraron la coincidencia esperada con los analíticos. Entre los puntos más destacables de este estudio numérico están: 1. El ancho de la onda esta relacionada con la velocidad de propagación de ésta; mientras más rápida sea la onda, más angosta tenderá a ser. 2. La generación de ondas solitarias está limitada a su propagación en plasmas subdensos. 3. La cuasineutralidad del plasma es importante, siendo la onda solitaria de origen ión-acústico.

El sistema completo de ecuaciones sólo se pudo estudiar en forma numérica, debido a la complejidad de éstas. Sin embargo, se pudieron encontrar resultados importantes: 1. La onda solitaria se puede obtener para cualquier velocidad de propagación. 2. La amplitud de una onda solitaria no puede ser arbitrariamente grande, sino que la amplitud máxima depende de la velocidad de propagación. 3. El ancho de la onda, también depende de la velocidad; mientras mayor sea la velocidad de la onda más angosta tiene a ser. 4. La generación de la onda solitaria, también, está limitada a su propagación en plasmas subdensos. 5. Es importante la cuasineutralidad del plasma, del mismo modo que en el modelo anterior.

Entre los dos modelos no hubo notables diferencias. Sin embargo, se pudo concluir que el modelo simplificado funciona correctamente para pequeñas amplitudes, sin tener la limitante de pequeñas velocidades.

Por último, se mostró la estabilidad de las ondas solitarias a través de un principio variacional y se encontraron condiciones para que una onda ligeramente desviada de una solución de solitón evolucione a una onda solitaria por medio de la emisión de radiación, siendo una de sus principales consecuencias su desaceleración.

Parte I

Apéndices

Apéndice A

Teorema de Noether

En este Apéndice se deducen la forma de las ecuaciones de conservación de este sistema por medio del teorema de Noether, usadas para la obtención de las ecuaciones (2.23),(2.24) y (2.25).

La esencia del teorema de Noether que consiste en la obtención de las cantidades conservadas de un sistema a través de las simetrías que presenta el problema. Para la deducción de la forma de las cantidades conservadas que se ocuparon es este trabajo, sólo basta considerar las transformaciones de las coordenadas en la forma

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \Lambda_i^\mu a^i. \quad (\text{A.1})$$

en donde Λ_i^μ es una matriz de rotación en el espacio tiempo, y a^i es un desplazamiento infinitesimal de x^i . Calculando la variación de la función acción cuando se realiza ésta transformación, esta adquiere la forma

$$\begin{aligned} \delta S = S' - S &= \int_V' L'(x') d^4 x' - \int_V L(x) d^4 x = \\ &= \int_V' (L'(x') - L(x')) d^4 x' + \int_V' L(x') d^4 x' - \int_V L(x) d^4 x = \\ &= \int_V [L'(x) - L(x)] d^4 x + \int_V [L(x) + (\partial L(x)/\partial x^\mu) \Lambda_i^\mu a^i] d^4 x - \int_V (L(x)) d^4 x = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

en donde la variación de la densidad lagrangiana L se puede escribir como

$$\begin{aligned}\delta L = L'(x) - L(x) &= \left[\frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha} \delta \psi_\alpha + \frac{\partial L}{\partial (\partial \psi_\alpha / \partial x^\mu)} \delta \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^\mu} \right) \right] \\ &= \frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^\mu} \Lambda_i^\mu a^i + \frac{\partial L}{\partial (\partial \psi_\alpha / \partial x^\mu)} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^\eta} \Lambda_i^\eta a^i \right).\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

Empleando la ecuación de Euler para eliminar $\partial L / \partial \psi_\alpha$,

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial \psi_\alpha / \partial x^\mu)} \right), \quad (\text{A.4})$$

y sustituyendo todo en la ecuación A.2, se obtiene

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial \psi_\alpha / \partial x^\mu)} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^\eta} \Lambda_i^\eta - L \Lambda_i^\mu \right] a^i d^4 x = 0. \quad (\text{A.5})$$

Como el desplazamiento a^i es arbitrario, la cantidad que se encuentra dentro del paréntesis debe ser siempre una constante. A esta cantidad se le conoce comúnmente como el tensor de energía momento. Para obtener las ecuaciones de conservación con respecto a variaciones del tiempo, se toma $\mu = t = 0$, que corresponde a una conservación temporal, para el caso de la energía se debe de tomar además $i = 0$ y para componentes del momento $i = k \neq 0$. Con esto la expresión para la energía y el momento son:

$$H = P^0 = \int d^3 x \left[\sum \pi_i \phi_{i,t} - L \right] \quad (\text{A.6})$$

$$P^k = \int d^3 x \sum \pi_i \partial^k \phi_i \quad (\text{A.7})$$

donde $\pi_i = \partial \psi_i / \partial x^t$. Para calcular estas cantidades para el lagrangiano de la ecuación (2.1), primeramente se calculan las cantidades π_i , obteniendo que éstas tienen la siguiente forma

$$\pi_{A_i} = \frac{\partial L}{\partial(\partial A_i/\partial t)} = E_i , \quad (\text{A.8})$$

$$\pi_{\psi_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial(\partial\psi_\alpha/\partial t)} = -n_\alpha , \quad (\text{A.9})$$

en donde el subíndice i indica las componentes espaciales y α las especies del plasma. Por medio de estos momentos generalizados y la expresión deducida para H , ésta adquiere la forma

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left[\sum E_i \frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum (-n_\alpha) \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} - L \right] \\ &= \int d^3x \left[\left(\frac{\partial A_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_z}{\partial t} \right)^2 - n_e \frac{\partial \psi_e}{\partial t} - n_i \frac{\partial \psi_i}{\partial t} - L \right] , \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

donde la última igualdad surge del hecho de que la onda sólo tiene componentes y, z , mientras que las funciones presentes en el lagrangiano sólo dependen de la coordenada x y t . De forma análoga, se obtiene para la conservación del momento

$$\begin{aligned} P^k &= \int d^3x \left[\sum E_i \frac{\partial A_i}{\partial x_k} + \sum (-n_\alpha) \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_k} \right] \\ &= \int d^3x \left[\left(\frac{\partial A_y}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial A_z}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - n_e \frac{\partial \psi_e}{\partial x} - n_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right] . \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Apéndice B

Programas de integración numérica

En este Apéndice se muestran los programas utilizados para obtener los resultados numéricos para los dos modelos estudiados en este trabajo. Primeramente se muestra el programa que corresponde al modelo aproximado, y posteriormente el programa correspondiente al modelo completo. Ambos programas se realizaron en Visual C 6.0 en su versión para Windows. El método numérico que se utilizó para llevar acabo los programas que aquí se presentan fue el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

El objetivo de este primer programa es el de crear un código para integrar numéricamente la ecuación (2.44), que contiene dos parámetros libres (a_0 y a_1) que corresponden a las condiciones del sistema. Para encontrar estos parámetros se necesita que el usuario introduzca un valor para la velocidad de propagación de la onda β , y sea obteniendo así un cierto valor para el parámetro a_1 de la ecuación (2.46). Con este valor, se prosigue a encontrar el valor de a_1 , para el cual se obtiene la onda solitaria haciendo correr el programa repetidas veces. Posteriormente, se obtiene el valor de λ por medio de la ecuación (2.45) correspondiente a la onda solitaria. De esta forma se facilita el encontrar los parámetros β , λ de la ecuación diferencial, en lugar de incorporar las ecuaciones (2.45) y (2.46) al programa.

```
// Programa para el modelo simplificado //

include <stdio.h>

int i;

double ro , r1 , r2 , k1 , k2 , k3 , l1 , l2 , l3 , k5 , h , k4 , a , b , r , l4 , l5 ;

double m, ro , al , beta , lam ;

main ()

{ /*Valores asignados a las constantes de la ecuación (2.44)*/}

m=0.00057; al=4e-4; beta=8e-1; lam=0.1;

b=10.51891; beta=9e-1; a=-5.259454e-4;

b=5231.358; a=-2.615677e-1;

r=1e-2, r1=0.0, h=1e-6; i=0;

{ /*Ciclo que calcula los incrementos de la variable R*/}

for ( i=0; i <=650000000; i++)

k1=h*r1 ;

l1=h*(-a*r-b*r*r*r );

k2=h*( r1+0.5*l1 );

l2=h*(-a*( r+0.5*k1)-b*( r+0.5*k1)*( r+0.5*k1)*( r+0.5*k1 ));

k3=h*( r1+0.5*l2 );

l3=h*(-a*( r+0.5*k2)-b*( r+0.5*k2)*( r+0.5*k2)*( r+0.5*k2 ));
```

```
k4=h*(r1+0.5*l3);  
l4=h*(-a*(r+k3)-b*(r+k3)*(r+k3)*(r+k3));  
k5=(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;  
l5=(l1+2*l2+2*l3+l4)/6;  
  
        { /* Cálculo del nuevo valor de R */}  
  
r=r+k5;  
  
        { /* Cálculo del nuevo valor de R' */}  
  
r1=r1+l5;  
  
if(i 5000000 == 0)  
  
    // printf("e\t e\t f\n",r,r1,i*h);  
  
return 0;
```

El propósito de este segundo programa es el de integrar las ecuaciones diferenciales (2.35), (2.36) y (2.37) al mismo tiempo que se deben de satisfacer las ecuaciones algebraicas (2.38) y (2.39). Por ello en la parte principal del programa se integran las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones algebraicas se calculaban en cada paso por medio de subrutinas. Para correr este programa el usuario debe ingresar un valor para la velocidad de propagación, y corriendo este varias veces se encuentra el valor de Λ , para el cual el programa genera una onda solitaria.

```
        // Programa para el modelo completo //
```



```
include <stdio.h>
```

```
include <math.h>

int i;

double r , k1 , k2 , k3 , l1 , l2 , l3 , k5 , h , k4 , l4 , l5 , phi , phi1 ;

double r1 , beta , ni , ne , gammae , gammai , a2 , pi , lam , kp4 , lp4 ;

double kp3 , lp3 , kp2 , lp2 , lp1 , kp1 , m , kp5 , lp5 , ve , vi ;

double fne1 (double fphi , double fr , double fve );

double fni1 (double flphi , double flr , double fvi );

main ()

{Valores asignados a las constantes que aparecen en las ecuaciones (2.35) a (2.39)}

r=1e-2 , m=0.000568 , h=5e-5 , i=0;

phi=0 , phi1=0 , r1=0;

gammae=4e-4 , gammai=4e-4;

beta=9e-1 , lam=0.6164259 , ne=1 , ni=1 , ve=0 , vi=0;

for ( i=0; i <=14000000; i++)

{Cálculo de los incrementos de las variables presentes en las ecuaciones (2.35) a (2.39)}

    { /* Primer incremento */ }

kp1=h*phi1 ;

ne=fne1 ( phi , r , ve );

ni=fni1 ( phi , r , vi );
```

```
// printf("e\ t e\n",ne,ni);

lp1=h*(ne-ni);

ve=beta*(1-1/ne);

vi=beta*(1-1/ni);

// printf("e\ t e\n",ve,vi);

k1=h*r1;

l1=lam*lam/(1-beta*beta)-ne*pow((1-ve*ve)/(1+4*r*r),0.5);

l1=-h*r*(l1-ni*pow((1-vi*vi)/(1+4*m*m*r*r),0.5))/(1-beta*beta);

// printf("e\ t e\n",k1,l1);

{ /* Segundo incremento */ }

r=r+0.5*k1;

r1=r1+0.5*l1;

phi=phi+0.5*kp1;

phi1=phi1+0.5*lp1;

ne=fne1(phi,r,ve);

ni=fni1(phi,r,vi);

kp2=h*phi1;

lp2=h*(ne-ni);

ve=beta*(1-1/ne);
```

```

vi=beta*(1-1/ni);

k2=h*r1;

l2=lam*lam/(1-beta*beta)-ne*pow((1-ve*ve)/(1+4*r*r),0.5);

l2=-h*r*(l2-ni*pow((1-vi*vi)/(1+4*m*m*r*r),0.5)) /

    (1-beta*beta);

r=r-0.5*k1;

r1=r1-0.5*l1;

phi=phi-0.5*kp1;

phi1=phi1-0.5*lp1;

                                { /* Tercer incremento */ }

r=r+0.5*k2;

r1=r1+0.5*l2;

phi=phi+0.5*kp2;

phi1=phi1+0.5*lp2;

ne=fne1(phi,r,ve);

ni=fni1(phi,r,vi);

kp3=h*phi1;

lp3=h*(ne-ni);

ve=beta*(1-1/ne);

```

```
vi=beta*(1-1/ni);

k3=h*r1;

l3=lam*lam/(1-beta*beta)-ne*pow((1-ve*ve)/(1+4*r*r),0.5);

l3=-h*r*(l3-ni*pow((1-vi*vi)/(1+4*m*m*r*r),0.5)) /

    (1-beta*beta);

r=r-0.5*k2;

r1=r1-0.5*l2;

phi=phi-0.5*kp2;

phi1=phi1-0.5*lp2;

                                { /* Cuarto incremento */ }

r=r+k3;

r1=r1+l3;

phi=phi+kp3;

phi1=phi1+lp3;

ne=fne1(phi,r,ve);

ni=fni1(phi,r,vi);

kp4=h*phi1;

lp4=h*(ne-ni);

ve=beta*(1-1/ne);
```

$vi = \text{beta} * (1 - 1/ni);$

$k4 = h * r1;$

$l4 = \text{lam} * \text{lam} / (1 - \text{beta} * \text{beta}) - ne * \text{pow}((1 - ve * ve) /$
 $(1 + 4 * r * r), 0.5);$

$l4 = -h * r * (l4 - ni * \text{pow}((1 - vi * vi) / (1 + 4 * m * m * r * r), 0.5)) /$
 $(1 - \text{beta} * \text{beta});$

$r = r - k3;$

$r1 = r1 - l3;$

$\text{phi} = \text{phi} - kp3;$

$\text{phi1} = \text{phi1} - lp3;$

$k5 = (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6;$

$l5 = (l1 + 2 * l2 + 2 * l3 + l4) / 6;$

$kp5 = (kp1 + 2 * kp2 + 2 * kp3 + kp4) / 6;$

$lp5 = (lp1 + 2 * lp2 + 2 * lp3 + lp4) / 6;$

{ /* Cálculo de los nuevos valores de las variables en base a los incrementos */ }

$r = r + k5;$

$r1 = r1 + l5;$

$\text{phi} = \text{phi} + kp5;$

$\text{phi1} = \text{phi1} + lp5;$

```
if(i 150000 == 0)

// printf("e\t e\t f\n",r,ne,i*h);

// printf("e\t e\n",ne,ni);

// printf("e\t e\n",ve,vi);

return 0;

        { /* Subrutina para calcular la densidad electrónica */ }

double fne1(double fphi,double fr,double fve)

include <stdio.h>

include <math.h>

double beta,fne,gammae,z,z1,m1;

int j;

gammae=4e-4; beta=1e-4; z1=0.40008e-3; m1=0.000568;

fne=1;

// printf("e\t e\n",fve,fr);

for(j=0;j<=5;j++) { \ }

z=1-fphi+sqrt((1+4*fr*fr)/(1-fve*fve))*(beta*fve-1);

fne=z1*exp(z)/gammae;

fve=beta*(1-1/fne);

// printf("e\t e\n",z,fphi);
```

```

// printf("e\t e\n",fve,fne);

// printf("e\t e\n",fve,fne);

return (fne);

    { /* Subrutina para calcular la densidad iónica */ }

double fni1(double f1phi,double f1r,double fvi) { \ }

include <stdio.h>

include <math.h>

double beta,fni,gammai,w,w1,m1;

int k;

gammai=4e-4; beta=1e-4; m1=0.000568; w1=0.4e-3;

fni=3;

for(k=0;k<=5;k++)

w=1-m1*f1phi+sqrt((1+4*m1*m1*f1r*f1r) /

(1-fvi*fvi))*(beta*fvi-1);

fni=w1*exp(w)/gammai;

fvi=beta*(1-1/fni);

// printf("e\t e\n",fvi,fni);

return (fni);

```

Apéndice C

Ecuaciones de Euler-Lagrange

C.1. Ecuaciones de evolución

En este apéndice se muestran las ecuaciones de Euler-Lagrange de los parámetros de la onda que se obtienen del lagrangiano (4.8), y posteriormente las ecuaciones de los parámetros perturbados que se obtienen de las primeras.

Primeramente, de las ecuaciones de los parámetros, se encuentra de la variación de n_{i1}

$$\frac{2(2\eta_t - 1)\psi_{e1}}{3} - \frac{8R^2}{3w} + \frac{\Gamma_e}{w} \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4\phi_1}{3w} = 0, \quad (\text{C.1})$$

la siguiente ecuación para la variación de n_{e1} ,

$$\frac{2(2\eta_t - 1)\psi_{i1}}{3} - \frac{8R^2}{3w} + \frac{\Gamma_i}{w} \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{4\phi_1}{3w} = 0, \quad (\text{C.2})$$

que es muy similar a la anterior.

Las ecuaciones de ϕ_0 y ϕ_1 son respectivamente

$$\frac{2n_{e1}}{w} - \frac{2n_{i1}}{w} = 0 \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{4n_{e1}}{3w} - \frac{4n_{i1}}{3w} + \frac{16w\phi_1}{15} = 0 \quad (\text{C.4})$$

De la variación de R se encuentra

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\frac{8R_t}{w} - \frac{4Rw_t}{w^2} + \frac{4\pi g\eta_t\kappa}{w} - \frac{4\pi g\Lambda_t}{w} \right] &= -\frac{16R}{w} - \frac{8Rw}{3} - \frac{4R_t w_t}{w^2} - \frac{8Rw_t^2\eta^2}{3w} \\
&+ \frac{4Rw_t^2}{w} \left(\frac{12 + \pi^2}{18w^2} + \frac{2\eta^2}{3} \right) + \frac{8Rw\eta_t^2}{3} - \frac{4\pi g_t\kappa\eta_t}{w} - \frac{4\pi g\kappa\eta_t w_t}{w^2} - \frac{8R\kappa^2}{w} + \frac{8R\kappa^2\eta_t^2}{w} \\
&- \frac{4\pi g\kappa_t\eta_t}{w} - \frac{8a\kappa_t^2\eta^2}{w} + \frac{4R\kappa_t^2}{w} \left(\frac{\pi^3}{4w^2} + 2\eta^2 \right) + \frac{4\pi g_t\Lambda_t}{w} + \frac{4\pi g\kappa\Lambda_t w_t}{w^2} - \frac{16R\kappa\Lambda_t\eta_t}{w} \\
&+ \frac{8R\Lambda_t^2}{w} - \frac{16R(n_{1e} + n_{1i})}{3w} \tag{C.5}
\end{aligned}$$

la ecuación del parámetro η

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\frac{8R^2 w\eta_t}{3} + \frac{4\pi R_t g\kappa}{w} - \frac{4\pi R g_t\kappa}{w} - \frac{4\pi a R\kappa w_t}{w^2} + \frac{8R^2 \kappa^2 \eta_t}{w} - \frac{4\pi R g\kappa_t}{w} + \frac{8R^2 \kappa\Lambda_t}{w} \right. \\
\left. + 4g^2 l\kappa^2 \eta_t + 4g^2 l\eta\kappa\kappa_t - 4g^2 l\kappa\Lambda_t + 2(\psi_e + \psi_i) + \frac{4(n_{1e}\psi_e + n_{1i}\psi_i)}{3} \right] \\
= 4g^2 l\kappa\kappa_t\eta_t + 4g^2 l\kappa_t^2\eta - 4g^2 l\kappa_t\Lambda_t. \tag{C.6}
\end{aligned}$$

de la ecuación de Euler para w se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\frac{8R^2 w_t}{3w^3} - \frac{4RR_t\pi}{w^2} + \frac{2R^2 w_t\pi^2}{9w^3} - \frac{4Rg\pi(\kappa\eta_t + \Lambda_t)}{w^2} \right] &= \frac{8R^2}{w^2} - \frac{4R^2}{3} - \frac{4R_t^2}{w^2} \\
&+ \frac{8RR_t\pi w_t}{w^3} - \frac{4R^2 w_t^2}{w^4} - \frac{R^2 \pi^2 w_t^2}{3w^4} + \frac{4R^2 \eta_t^2}{3} - \frac{4\pi(\kappa\eta_t + \Lambda_t)(gR_t - Rg_t)}{w^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8\pi R g w_t (\kappa \eta_t + \Lambda_t)}{w^3} - \frac{R^2 \pi^2 \kappa_t^2}{w^4} + \frac{4R^2 \kappa^2 (1 - \eta_t^2)}{w^2} + \frac{4\pi R g \kappa_t \eta_t}{w^2} - \frac{4R^2 \Lambda_t (2\kappa \eta_t + \Lambda_t)}{w^2} \\
& - \frac{2(\psi_{e1}^2 + \psi_{i1}^2)}{3} + \frac{8R^2 (n_{e1} + n_{i1})}{3w^2} + \frac{4g^2 (n_{e1} + n_{i1})}{w^2} - \frac{8(n_{e1} \psi_{e1}^2 + n_{i1} \psi_{i1}^2)}{15} + \frac{8\phi_1^2}{15} \\
& + \frac{(n_{e1} \vartheta_e \Gamma_e + n_{i1} \vartheta_i \Gamma_i) (\frac{\pi}{2} - 2)}{w^2} + \frac{49(n_{e1}^2 \vartheta_e \Gamma_e + n_{i1}^2 \vartheta_i \Gamma_i)}{50} - \frac{(4\phi_1 + 6\phi_o)(n_{e1} - n_{i1})}{3w^2}
\end{aligned} \tag{C.7}$$

del parámetro κ queda

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[-\frac{4R g \pi \eta_t}{w} - \frac{8R^2 \eta^2 \kappa_t}{w} + \frac{4R^2 \kappa_t}{w} \left(\frac{\pi^3}{4w^2} + \frac{2\eta^2}{w} \right) + 4g^2 l \eta \eta_t \kappa + 4g^2 l \eta^2 \kappa_t - 4g^2 l \eta \Lambda_t \right] \\
& = \frac{4\pi g R_t \eta_t}{w} - \frac{4\pi R g_t \eta_t}{w} - \frac{4\pi R g w_t \eta_t}{w^2} - \frac{8R^2 \kappa}{w} + \frac{8R^2 \kappa \eta_t^2}{w} + \frac{8R^2 \eta_t \Lambda_t}{w} - 4g^2 l \kappa + 4g^2 l \kappa \eta_t^2 \\
& \quad + 4g^2 l \kappa_t \eta \eta_t - 4g^2 l \eta_t \Lambda_t.
\end{aligned} \tag{C.8}$$

de g ,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[\frac{4\pi R \Lambda_t}{w} - \frac{4\pi R \kappa \eta_t}{w} \right] = \frac{4\pi R_t \kappa \eta_t}{w} - \frac{4\pi R \kappa \eta_t w_t}{w^2} - \frac{4\pi R \eta_t \kappa_t}{w} - \frac{4\pi R_t \Lambda_t}{w} + \frac{4\pi R w_t \Lambda_t}{w^2} \\
& - 8gl - 4gl\kappa^2 + 4gl\kappa^2 \eta_t^2 + 8gl\kappa \kappa_t \eta \eta_t + 4gl\kappa_t^2 \eta^2 - 8gl\kappa \eta_t \Lambda_t - 8gl\eta \kappa_t \Lambda_t + 4gl\Lambda_t^2
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Por último, de la variación de Λ se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left[-\frac{4\pi R_t g}{w} + \frac{4\pi R g_t}{w} + \frac{4\pi R g w_t}{w^2} - \frac{8R^2 \kappa \eta_t}{w} + \frac{8R^2 \Lambda_t}{w} - 4g^2 l \kappa \eta_t - 4g^2 l \kappa_t \eta + 4g^2 l \Lambda_t \right] = 0. \tag{C.10}$$

Este sistema de ecuaciones sirve para el estudio del desarrollo y la evolución de la onda, así como de la interacción de ésta con la radiación emitida en caso de existir, pero debido a la complejidad de este sistema de ecuaciones solo se pueden estudiar algunos casos relativamente simples.

C.2. Ecuaciones perturbadas

El siguiente sistema ecuaciones describen el desarrollo de la perturbación realizada sobre los parámetros de la onda solitaria. Para su estudio también se requieren las condiciones entre los parámetros de la onda solitaria.

De la ecuación de Λ , (C.10)

$$\begin{aligned} & -\frac{4\pi a_0 g_{1tt}}{w_0} + \frac{16a_0 a_{1t} \eta_{0t} \kappa_0}{w_0} - \frac{8a_0^2 w_{1t} \eta_{0t} \kappa_0}{w_0^2} + \frac{8a_0^2 \eta_{1tt} \kappa_0}{w_0} + \frac{8a_0^2 \eta_{0t} \kappa_{1t}}{w_0} + \frac{16a_0 a_1 \Lambda_{0t}}{w_0} \\ & - \frac{8a_0^2 w_{1t} \Lambda_{0t}}{w_0^2} + \frac{8a_0^2 \Lambda_{1tt}}{w_0} + 8g_1 g_{1t} \eta_{0t} \kappa_0 l + 8g_1 g_{1t} \Lambda_{0t} l = 0, \end{aligned} \quad (C.11)$$

de la ecuación de κ , (C.8)

$$\begin{aligned} & -\frac{4a_0 g_{1t} \pi \eta_{0t}}{w_0} + \frac{2a_0^2 \kappa_{1tt} \pi^2}{3w_0^3} + 8g_1 g_{1t} l \eta_0 \eta_{0t} \kappa_0 + 8g_1 g_{1t} l \eta_0 \Lambda_{0t} = -\frac{4\pi g_{1t} a_0 \eta_{0t}}{w_0} \\ & -\frac{16a_0 a_1 \kappa_0}{w_0} + \frac{8a_0^2 w_{1t} \kappa_0}{w_0^2} + \frac{16a_0 a_1 \kappa_0 \eta_{0t}^2}{w_0} - \frac{8a_0^2 w_{1t} \kappa_0 \eta_{0t}^2}{w_0^2} + \frac{16a_0^2 \kappa_0 \eta_{0t} \eta_{1t}}{w_0} - \frac{8a_0^2 \kappa_1}{w_0} \\ & -\frac{8a_0^2 \kappa_1}{w_0} + \frac{8a_0^2 \kappa_1 \eta_{0t}^2}{w_0} + \frac{16a_0 a_1 \eta_{0t} \Lambda_{0t}}{w_0} - \frac{8a_0^2 w_{1t} \eta_{0t} \Lambda_{0t}}{w_0^2} + \frac{8a_0^2 \eta_{1t} \Lambda_{0t}}{w_0} + \frac{8a_0^2 \Lambda_{1t} \eta_{0t}}{w_0} \\ & -4g_1^2 \kappa_0 l + 4g_1^2 \kappa_0 \eta_{0t}^2 l + 4g_1^2 \eta_{0t} \Lambda_{0t} l, \end{aligned} \quad (C.12)$$

.de la ecuación de w , (C.7)

$$-\frac{4\pi a_0 a_{1tt}}{w_0^2} + \frac{8a_0^2 w_{1tt}}{3w_0^3} + \frac{2\pi^2 a_0^2 w_{1tt}}{9w_0^3} - \frac{4\pi a_0 g_{1t} \kappa_0 \eta_{0t}}{w_0^2} - \frac{4\pi a_0 g_{1t} \Lambda_{0t}}{w_0^2} = -\frac{8a_0 a_1}{3}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{16a_0a_1}{w_0^2} + \frac{16a_0a_1n_e}{w_0^2} + \frac{16a_0a_1n_i}{w_0^2} - \frac{16a_0^2w_1}{w_0^3} - \frac{16a_0^2w_1n_e}{3w_0^3} - \frac{16a_0^2w_1n_i}{3w_0^3} + \frac{8a_0a_1\eta_{0t}^2}{3} \\
& + \frac{8a_0^2\eta_{0t}\eta_{1t}}{3} + \frac{4\pi a_0g_{1t}\kappa_0\eta_{0t}}{w_0^2} + \frac{8a_0a_1\kappa_0^2}{w_0^2} - \frac{8a_0^2w_1\kappa_0^2}{w_0^3} - \frac{8a_0a_1\kappa_0^2\eta_{0t}^2}{w_0^2} + \frac{8a_0^2w_1\kappa_0^2\eta_{0t}^2}{w_0^3} \\
& - \frac{8a_0^2\kappa_0^2\eta_{0t}\eta_{1t}}{w_0^2} - \frac{8a_0^2\eta_{0t}^2\kappa_1\kappa_0}{w_0^2} + \frac{4\pi a_0g_{1t}\Lambda_{0t}}{w_0^2} - \frac{16a_0a_1\kappa_0\eta_{0t}\Lambda_{0t}}{w_0^2} + \frac{16a_0^2w_1\kappa_0\eta_{0t}\Lambda_{0t}}{w_0^3} \\
& + \frac{8a_0^2\kappa_1\kappa_0}{w_0^2} - \frac{8a_0^2\kappa_0\eta_{1t}\Lambda_{0t}}{w_0^2} - \frac{8a_0^2\kappa_1\eta_{0t}\Lambda_{0t}}{w_0^2} - \frac{8a_0a_1\Lambda_{0t}^2}{w_0^2} + \frac{8a_0^2w_1\Lambda_{0t}^2}{w_0^3} - \frac{8a_0^2\kappa_0\eta_{0t}\Lambda_{1t}}{w_0^2} \\
& - \frac{8a_0^2\Lambda_{0t}\Lambda_{1t}}{w_0^2} + \frac{2n_e w_1 \phi_0}{w_0^3} - \frac{2n_i w_1 \phi_0}{w_0^3} + \frac{4n_e w_1 \vartheta_e \Gamma_e}{w_0^3} - \frac{49n_e^2 w_1 \vartheta_e \Gamma_e}{25w_0^3} - \frac{\pi n_e w_1 \vartheta_e \Gamma_e}{w_0^3} \\
& + \frac{4n_i w_1 \vartheta_i \Gamma_i}{w_0^3} - \frac{49n_i^2 w_1 \vartheta_i \Gamma_i}{25w_0^3} - \frac{\pi n_i w_1 \vartheta_i \Gamma_i}{w_0^3} \quad (C.13)
\end{aligned}$$

de la ecuación de η , (C.6)

$$\begin{aligned}
& \frac{16a_0a_1w_0\eta_{0t}}{3} + \frac{8a_0^2w_1\eta_{0t}}{3} + \frac{8a_0^2w_0\eta_{1t}}{3} - \frac{4a_0g_{1t}\pi\kappa_0}{w_0} + \frac{16a_0a_1\kappa_0^2\eta_{0t}}{w_0} - \frac{8a_0^2w_1\eta_{0t}\kappa_0^2}{w_0^2} \\
& + \frac{8a_0^2\eta_{1t}\kappa_0^2}{w_0^2} + \frac{16a_0^2\eta_{0t}\kappa_0\kappa_1}{w_0} + \frac{16a_0a_1\kappa_0\Lambda_{0t}}{w_0} - \frac{8a_0^2w_1\Lambda_{0t}\kappa_0}{w_0^2} + \frac{8a_0^2\kappa_1\Lambda_{0t}}{w_0} + \frac{8a_0^2\Lambda_{1t}\kappa_0}{w_0} \\
& + 4g_1^2\eta_{0t}\kappa_0^2l + 4g_1^2\Lambda_{0t}\kappa_0l = 0 \quad (C.14)
\end{aligned}$$

de la ecuación de a , (C.5)

$$\begin{aligned}
& \frac{8a_{1tt}}{w_0} - \frac{4\pi a_0w_{1tt}}{w_0^2} + \frac{4\pi g_{1t}\kappa_0\eta_{0t}}{w_0} + \frac{4\pi g_{1t}\Lambda_{0t}}{w_0} = -\frac{16a_1}{w_0} - \frac{16a_1n_e}{3w_0} - \frac{16a_1n_i}{3w_0} - \frac{8a_1w_0}{3} \\
& - \frac{8a_0w_1}{3} + \frac{16a_0w_1}{w_0^2} + \frac{16a_0n_en_1}{3w_0^2} + \frac{16a_0n_in_1}{3w_0^2} + \frac{8a_1w_0\eta_{0t}^2}{3} + \frac{8a_0w_1\eta_{0t}^2}{3} + \frac{16a_0w_0\eta_{0t}\eta_{1t}}{3} \\
& - \frac{4\pi g_{1t}\kappa_0\eta_{0t}}{w_0} - \frac{8a_1\kappa_0^2}{w_0} + \frac{8a_0w_1\kappa_0^2}{w_0^2} + \frac{8a_1\kappa_0^2\eta_{0t}^2}{w_0} - \frac{8a_0w_1\kappa_0^2\eta_{0t}^2}{w_0^2} + \frac{16a_0\eta_{0t}\eta_{1t}\kappa_0^2}{w_0} - \frac{16a_0\kappa_0\kappa_1}{w_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4\pi g_{1t}\kappa_0\eta_{0t}}{w_0} - \frac{8a_1\kappa_0^2}{w_0} + \frac{8a_0w_1\kappa_0^2}{w_0^2} + \frac{8a_1\kappa_0^2\eta_{0t}^2}{w_0} - \frac{8a_0w_1\kappa_0^2\eta_{0t}^2}{w_0^2} + \frac{16a_0\eta_{0t}\eta_{1t}\kappa_0^2}{w_0} \\
& - \frac{16a_0\kappa_0\kappa_1}{w_0} + \frac{16a_0\kappa_0\kappa_1\eta_{0t}^2}{w_0} + \frac{8a_1\Lambda_{0t}^2}{w_0} - \frac{8a_0w_1\Lambda_{0t}^2}{w_0^2} + \frac{16a_0\kappa_0\eta_{0t}\Lambda_{1t}}{w_0} + \frac{16a_0\Lambda_{0t}\Lambda_{1t}}{w_0}
\end{aligned} \tag{C.15}$$

de la ecuación de g , (C.9)

$$\begin{aligned}
& -\frac{4\pi a_{1t}\kappa_0\eta_{0t}}{w_0} + \frac{4\pi a_0w_{1t}\kappa_0\eta_{0t}}{w_0^2} - \frac{4\pi a_0\kappa_0\eta_{1tt}}{w_0} - \frac{4\pi a_0\kappa_{1t}\eta_{0t}}{w_0} - \frac{4\pi a_{1t}\Lambda_{0t}}{w_0} + \frac{4\pi a_0w_{1t}\Lambda_{0t}}{w_0^2} \\
& - \frac{4\pi a_0\Lambda_{1tt}}{w_0} + 4g_{1tt}l = -\frac{8g_1(n_e + n_i)}{w_0} + \frac{4\pi a_{1t}\kappa_0\eta_{0t}}{w_0} - \frac{4\pi a_0w_{1t}\kappa_0\eta_{0t}}{w_0^2} - \frac{4\pi a_0\kappa_{1t}\eta_{0t}}{w_0} \\
& + \frac{4\pi a_{1t}\Lambda_{0t}}{w_0} - \frac{4\pi a_0w_{1t}\Lambda_{0t}}{w_0^2} - 8g_1l - 4g_1\kappa_0^2l + 4g_1\eta_{0t}^2\kappa_0^2l + 8g_1\eta_{0t}\kappa_0\Lambda_{0t}l + 4g_1\Lambda_{0t}^2l
\end{aligned} \tag{C.16}$$

Enseguida se muestra la forma de los coeficientes ς_i que aparecen en la linealización de las ecuaciones diferenciales de los parámetros, ecuaciones (4.22) a (4.27)

$$\begin{aligned}
\varsigma_1 &= -\frac{w_0^4(1-\eta_{0t}^2)^4(1+3\eta_{0t}^2) + 6w_0^2(1-\eta_{0t}^2)^3(3\Lambda_{0t}^2 + \eta_{0t}^2 - 1)}{3\pi w_0^2\Lambda_{0t}(1-\eta_{0t}^2)^4} \\
&+ \frac{9\Lambda_{0t}^2(2+2\eta_{0t}^4+3\Lambda_{0t}^2+\eta_{0t}^2(\Lambda_{0t}^2-4))}{3\pi w_0^2\Lambda_{0t}(1-\eta_{0t}^2)^4} \\
\varsigma_2 &= -\frac{6a_0w_0^3\Lambda_{0t}(1-\eta_{0t}^2)^3(3\eta_{0t}^2-1) - 18a_0w_0\Lambda_{0t}^3(1-\eta_{0t}^4)}{3\pi w_0^3\eta_{0t}\Lambda_{0t}(1-\eta_{0t}^2)^4} \\
\varsigma_3 &= -\frac{a_0w_0^4(1-\eta_{0t}^2)^4(1+\eta_{0t}^2) + 9a_0\Lambda_{0t}^2(2+2\eta_{0t}^4+\Lambda_{0t}^2+\eta_{0t}^2(\Lambda_{0t}^2-4))}{3\pi w_0^3\Lambda_{0t}(1-\eta_{0t}^2)^4}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{6a_0w_0^2(1-\eta_{0t}^2)^2(1+\eta_{0t}^4+\Lambda_{0t}^2+\eta_{0t}^2(\Lambda_{0t}^2-4))}{3\pi w_0^3\Lambda_{0t}(1-\eta_{0t}^2)^4}$$

$$\varsigma_4 = \frac{-18\Lambda_{0t}^2(2+2\eta_{0t}^4+\Lambda_{0t}^2+\eta_{0t}^2(\Lambda_{0t}^2-4))+6w_0^2(1-\eta_{0t}^2)^2(\eta_{0t}^4(2\Lambda_{0t}^2-9)+4\eta_{0t}^6+6\eta_{0t}^2-1))}{7\Lambda_{0t}^4(2+2\eta_{0t}^4+3\Lambda_{0t}^2+\eta_{0t}^2(\Lambda_{0t}^2-4))-9w_0^2\Lambda_{0t}^2(1-\eta_{0t}^2)^2(3\eta_{0t}^2(7\Lambda_{0t}^2+6)+\eta_{0t}^4(7\Lambda_{0t}^2-30))}$$

$$\varsigma_5 = \frac{5a_0w_0^2(1-\eta_{0t}^2)^2(1+\eta_{0t}^4+\Lambda_{0t}^2+\eta_{0t}^2(\Lambda_{0t}^2-4))+18a_0w_0\Lambda_{0t}^3(1-\eta_{0t}^4)}{3\pi w_0^3\Lambda_{0t}(1-\eta_{0t}^2)^4+a_0w_0^4(1-\eta_{0t}^2)^4}$$

$$\varsigma_6 = -\frac{3w_0\Lambda_{0t}(\Lambda_{0t}^2+2\eta_{0t}^2-2)(w_0^4(1-\eta_{0t}^2)^4(4\eta_{0t}^4+\eta_{0t}^2+1)-9\Lambda_{0t}^2(2+2\eta_{0t}^4+\Lambda_{0t}^2+\eta_{0t}^2(\Lambda_{0t}^2-4)))}{\pi(-w_0^6\eta_{0t}^2(1-\eta_{0t}^2)^7(1+2\eta_{0t}^2)+27\Lambda_{0t}^4(2+\eta_{0t}^2(\Lambda_{0t}^2-4))-9w_0^2\Lambda_{0t}^2(1-\eta_{0t}^2)^2(3\eta_{0t}^2(7\Lambda_{0t}^2+6))}$$

Como se puede observar, resulta complicado para el caso general determinar si estos valores son reales o complejos. Esto dependerá de las constantes que aquí aparecen, que representarían los valores a los cuales podría evolucionar la onda, es decir, que tan parecida sea la onda o que pequeña sea la perturbación de ésta.

Bibliografía

- [1] S.C. Wilks, J-M. Dawson, W.B. Mori, T. Katsouleas and M.E. Jones, “Photon accelerator”, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2600 (1989).
- [2] A. Akhiezer and R. Polovin, “Theory of wave motion of an electron plasma”, *Sov. Phys. JETP* **3**, 696 (1956).
- [3] T. Esirkepov, F. Kamenets, S. Bulanov and N. Naumova, “Low-frequency relativistic electromagnetic solitons in collisionless plasmas”, *JETP Letters* **68**, 36 (1998).
- [4] T.Zh. Esirkepov, K. Nishihara, S.V. Bulanov and F. Pegoraro, “Three-dimensional relativistic electromagnetic subcycle solitons”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 275002 (2002).
- [5] V. Kozlov, A. Litvak, and E. Suvorov, “Envelope solitons of relativistic strong electromagnetic waves”, *Sov. Phys. JETP*, **49**, 75 (1979).
- [6] P.K. Kaw, A. Sen, and T. Katsouleas, “Nonlinear 1D laser pulse solitons in a plasma”, *Physics Review* **68**, 3172 (1992).
- [7] S. Poornakala, A. Das, P.K. Kaw and A. Sen, “Laser envelope solitons in cold overdense plasmas”, *Physics of Plasma* **9** 1820 (2002).
- [8] S. Poornakala, A. Das, P.K. Kaw and A. Sen, “Weakly relativistic one-dimensional laser pulse envelope solitons in a warm plasma”, *Physics of Plasma* **9**, 3802 (2002).
- [9] D. Farina, and S. Bulanov “Slow electromagnetic soliton in electron-ion plasma”, *Plasma Physics Reports* **8**, 641 (2001).
- [10] X.L. Chen and R.N. Sudan, “Two dimensional self-focusing of short intense laser pulse in underdense plasma”, *Phys. Fluids B* **5**, 1336 (1993).

-
- [11] R.L. Seliger and G.B. Witham, “Variational principles in continuum mechanics”, *Proc. Roy. Soc. A* **301**, 1 (1968).
 - [12] A.J. Brizard, “A new Lagrangian formulation for laser-plasma interactions”, *Phys. Plasmas* **5**, 1110 (1998).
 - [13] W.L. Kath and N.F. Smyth, “Soliton evolution and radiation loss for the nonlinear Schrödinger equation”, *Phys. Rev. E* **51**, 1484 (1995)
 - [14] N.F. Smyth, and W.L. Kath, “Radiative losses due to pulse interaction in birefringent nonlinear optical fibers”, *Physical Review E*, **63**, 036614 (2001).
 - [15] J. Herrera, M.A. Maza, A.A. Minzoni, N.F. Smyth, and A.L. Worthy, “Davydov soliton evolution in temperature gradients driven by hyperbolic waves”, *Physica D* **191**, 156 (2004).
 - [16] M. Borghesi, S. Bulanov, D.H. Campbell, R. J. Clarke, T. Zh. Esikerpov, M. Galimberti, L.A. Gizzi, A.J. MacKinnon, N.M. Naumova, F. Pegoraro, H. Ruhl, A. Schiavi and O. Willi, “Macroscopic evidence of soliton formation in multiterawatt laser-plasma interaction”, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 135002 (2002).
 - [17] V. Saxena, A. Das, A. Sen and P.K. Kaw, “Fluid simulation studies of dynamical behavior of one-dimensional relativistic electromagnetic solitons”, *Phys. Plasmas* **13**, 032309 (2006).
 - [18] N. Tushentsov, A. Kim, F. Cattani, D. Anderson, and M. Lisak “Electromagnetic energy penetration in the self-induced transparency regime of relativistic laser-plasma interactions” *Physics Review Letter* **87**, 275002 (2001).