



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN  
INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA

CONTROL DESCENTRALIZADO PARA UN  
SISTEMA DE LINEA DE VISTA USANDO  
ACCIÓN INTEGRAL

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERIA

MAESTRÍA EN INGENIERIA ELECTRICA CONTROL

P R E S E N T A :

GABRIEL LÓPEZ DOMÍNGUEZ

TUTOR

DR. YU TANG XU

2009





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Luis Agustín Alvarez Icaza Longoría

Secretario: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

Vocal: Dr. Yu Tang Xu

1er. Suplente: Dr. Marco Arteaga Pérez

2do. Suplente: Dr. Héctor Benítez Pérez

Lugar donde se realizó la tesis:

México, D. F., Ciudad Universitaria

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Yu Tang Xu

---

**FIRMA**

## Agradecimientos

Agradezco al Dr. Yu Tang Xu por su valiosa orientación para la realización de esta tesis.

Agradezco el apoyo financiero otorgado por la UNAM por medio del proyecto PAPIIT.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado para la realización de estudios de maestría.

Agradezco al jurado por la revisión de este trabajo.

**CONTROL DESCENTRALIZADO PARA UN SISTEMA DE LÍNEA DE VISTA  
USANDO ACCIÓN INTEGRAL**

**Por: Gabriel López Domínguez**

---

# Índice general

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>8</b>
1.1. Control descentralizado . . . . .	8
1.2. Sistema de Línea de Vista . . . . .	10
1.3. Objetivo de la tesis . . . . .	11
1.4. Contribución y organización . . . . .	12
<b>2. DISEÑO DEL CONTROL DESCENTRALIZADO</b>	<b>13</b>
2.1. Introducción . . . . .	13
2.2. Diseño del control descentralizado general . . . . .	13
<b>3. DISEÑO DE SUPERFICIES DESLIZANTES</b>	<b>21</b>
3.1. Introducción . . . . .	21
3.2. Control por modo deslizante proporcional . . . . .	22
3.3. Control con acción integral aproximada . . . . .	24
3.4. Control con acción integral condicional . . . . .	27
<b>4. SISTEMA DE LÍNEA DE VISTA</b>	<b>32</b>
4.1. Introducción . . . . .	32
4.2. Descripción física . . . . .	32
4.3. Modelo matemático . . . . .	34
4.4. Propiedades importantes para el diseño . . . . .	35

4.5. Interconexiones acotadas . . . . .	36
4.6. Perturbaciones acotadas . . . . .	39
<b>5. SIMULACIONES DEL SLV</b>	<b>42</b>
5.1. Introducción . . . . .	42
5.2. Regulación del SLV . . . . .	42
5.3. Seguimiento del SLV . . . . .	47
<b>6. CONCLUSIONES</b>	<b>51</b>

## Resumen

En esta tesis se analiza una clase de Sistemas Lagrangianos interconectados completamente actuados y se propone una ley de control descentralizada usando acciones integrales basada en modos deslizantes para el cual se diseñan 3 superficies deslizantes diferentes: la primera asociada con el modo deslizante proporcional; la segunda referida a la acción integral aproximada y la tercera vinculada con la acción integral condicional. El control diseñado se aplica a un sistema interconectado llamado Sistema de Línea de Vista para el cual se logra la regulación y seguimiento de trayectorias para cada subsistema sometido a perturbaciones y verificar así su estabilidad.



---

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1. Control descentralizado

En la actualidad se encuentran muchos sistemas complejos compuestos por subsistemas interconectados entre sí mismos que se caracterizan por tener grandes dimensiones (gran escala). Algunos ejemplos son: los sistemas eléctricos de potencia (Guo et al., 2000), sistemas de navegación (Kee et al., 2004) y procesos industriales entre muchos otros.

El diseño del sistema de control para estos sistemas representa un gran reto pues los métodos de control basados en modelos multivariables que se encuentran disponibles para su aplicación a sistemas de gran escala son difíciles de llevar a cabo por dificultades en el modelado, el manejo de sensores, etc. por lo que su implementación computacional es complicada.

El control descentralizado ha sido aplicado exitosamente para diseñar sistemas de control para sistemas de gran escala dividiendo a la planta en subsistemas con base en algún criterio (funcionalidad, geometría, facilidad de implementación, etc.) donde la idea consiste en diseñar un control local para cada subsistema usando solamente las mediciones locales. Algunas de las ventajas por las cuales se aplica el control descentralizado son:

1. Capacidad de manipulación de plantas complejas interconectadas de gran dimensión.
2. Robustez ante perturbaciones e incertidumbres paramétricas.
3. Facilidad de sintonización de las leyes de control locales para sistemas de procesamiento en paralelo.
4. Flexibilidad en escalamiento y tolerancia a fallas en el funcionamiento de cada subsistema y en las interconexiones.
5. Desempeño comparable al obtenido con controles centralizados.

A parte de satisfacer una necesidad de controlar sistemas complejos, el control descentralizado también ofrece una alternativa de diseño para sistemas cuyas dimensiones no son muy elevadas. Un campo de aplicación del control descentralizado para este tipo de sistemas son los sistemas electromecánicos tales como: manipuladores, grúas y robots móviles entre otros. Comparado con otros métodos de diseño de control, el control descentralizado proporciona un diseño modular en el cual el controlador podría ser embebido dentro del sistema al que está controlando.

En este sentido, se eligió a la planta Sistema de Línea de Vista (**SLV**) como ejemplo de aplicación para el esquema del control descentralizado desarrollado en la tesis. Fundamentalmente, la planta se compone por un ensamblado de partes mecánicas como estructuras y motores en el cual puede ser montado un giróscopo o un conjunto de estos para controlar la posición y velocidad de la línea de vista que une al observador con algún objeto que se encuentra fijo o en movimiento dentro de un campo de visión dado. En la Sección 1.2 se comentan algunas de las aplicaciones del **SLV** y las estrategias de control usadas para esta planta.

## 1.2. Sistema de Línea de Vista

Para el posicionamiento de antenas, radares, vehículos, satélites, etc. cada vez adquieren mayor importancia las aplicaciones del **SLV** debido a la necesidad de seguir un objeto que puede estar fijo o en movimiento. Con base en el progreso de la tecnología óptica y el procesamiento de imágenes es posible registrar información directa del objeto a seguir, la cual, al ser procesada puede ser usada por el **SLV**; para lograr esto, el sensor detecta las condiciones físicas del objeto y la posición donde se ubica dentro de un sistema de referencia dado y así proceder a la estimación o predicción de dónde se encuentra o encontrará el objeto por vía directa o indirecta.

Por ejemplo: la resolución de los sensores hace posible obtener información del objeto cada vez más precisa como es el caso para sistemas de navegación vía computadoras usados en barcos, aviones, guiado de misiles, etc. La regulación y el seguimiento de trayectorias son fundamentales pues se estiman parámetros en línea del objeto a seguir (Masten, 2008).

Desde el punto de vista de control se han aplicado diversas técnicas para controlar al **SLV** y estabilizarlo. Por ejemplo, en el control difuso con desacoplamiento presentado en (Nie, 1997) el diseño de la ley de control está compuesta por dos partes: la primera, asociada con el sistema nominal y la segunda usada para desacoplar al sistema. También, se han utilizado sistemas de control adaptable para estos servomecanismos multivariantes no lineales logrando estimación de parámetros en tiempo real obteniendo resultados satisfactorios en el seguimiento asintótico de trayectorias (Lee et al., 1997).

A su vez, el impacto de las perturbaciones y el ruido en los sensores influye en la estabilidad de la planta tal y como se analiza en forma directa o indirecta cuando se complica la detección física del objeto (Kennedy y Kennedy, 2003), por ejemplo: en caso de niebla es necesario compensar la acción de los controladores de tal forma que sean capaces de resolver el objetivo de control (Tan et al., 2002).

Asociado a esto, el problema de estabilización de plataformas inerciales en tres ejes ha sido analizado

mediante técnicas de control por modos deslizantes (Shtessel, 1995) útiles para sistemas de navegación por lo cual su control y estabilización son necesarias. También, existen otras alternativas de control basadas en las propiedades estructurales de la parte mecánica, interacciones entre actuadores y la montura del giróscopo así como propiedades dinámicas del mismo (Hilkert, 2008).

Debido a la necesidad de que los sistemas de control sean robustos ante perturbaciones se justifica diseñar leyes de control locales robustas con la finalidad de garantizar el control y estabilidad de la planta; por ejemplo: las vibraciones provocan oscilaciones variables que afectan al **SLV** tal y como se aprecia en el regulador lineal diseñado para navegación (Haessig, 1998).

También se han hecho estudios sobre diferentes algoritmos de control referidos a orientación y estabilización del **SLV** para que siga a una referencia que en lo general es variable en el tiempo por ejemplo: cuando el **SLV** esta montado sobre una plataforma sujeta a oscilaciones continuas como lo es el caso de la navegación de barcos y su interacción con el mar (Atayde, 2007).

### 1.3. Objetivo de la tesis

El objetivo general consiste en desarrollar un esquema de control descentralizado usando acciones integrales y aplicarlo al **SLV** para el problema de regulación de posición en presencia de perturbaciones.

Específicamente, se establece primero un control descentralizado para la clase de *Sistemas Lagrangianos* completamente actuados basado en modos deslizantes en el cual se proponen tres superficies deslizantes para su incorporación en la ley de control. Luego, se aplica la ley de control propuesta al **SLV** y se comparan los resultados obtenidos con base en la respuesta del sistema.

## 1.4. Contribución y organización

La contribución de la tesis es:

1. Diseñar un control descentralizado para la clase de Sistemas Lagrangianos completamente actuados basado en modos deslizantes.
2. Aplicar el esquema de control propuesto al SLV.
3. Comparar el desempeño del esquema de control basado en las superficies deslizantes consideradas mediante simulaciones.

La tesis está organizada como sigue: En el Capítulo 2 para el diseño del control descentralizado se propone una ley de control suponiendo ciertas propiedades de la superficie deslizante. Después, en el Capítulo 3 se especifican las diferentes superficies deslizantes: la primera, asociada con el control proporcional (Tang et al., 2000); la segunda, vinculada con el integrador aproximado (desarrollado en la tesis) y la tercera referida al integrador condicional (Seshagiri y Khalil, 2005).

Por otra parte, en el Capítulo 4 se da una descripción breve del **SLV** y se enfatiza su modelo matemático subrayando sus propiedades en interconexiones y perturbaciones. El Capítulo 5 continua con las simulaciones del **SLV** y la comparación de los resultados obtenidos para la regulación y seguimiento haciendo énfasis en el comportamiento dinámico de las señales de control y de error que confirman la estabilidad de la planta en simulación. Finalmente en el Capítulo 6 se reportan las conclusiones.

---

## Capítulo 2

# DISEÑO DEL CONTROL DESCENTRALIZADO

### 2.1. Introducción

Se diseña una ley de control descentralizada para Sistemas Lagrangianos para lo cual se suponen interconexiones y perturbaciones acotadas por una función de los estados (Shi y Singh, 1992). Además, se derivan condiciones de estabilidad usando el método de Lyapunov.

### 2.2. Diseño del control descentralizado general

Considérese el sistema mecánico descrito por

$$\mathbf{M}_i(q_i)\ddot{q}_i + \mathbf{C}_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) = \tau_i \quad (2.1)$$

donde  $q_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$  representa las coordenadas generalizadas del subsistema  $i$ -ésimo  $i \in [1, N]$ ,  $N \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\mathbf{M}_i(q_i)$  es la matriz de inercia con dimensiones  $n_i \times n_i$ ,  $\mathbf{C}_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i$  es el término asociado con las fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $g_i(q_i)$  es la fuerza gravitacional y  $\tau_i$  son las fuerzas generalizadas

aplicadas a cada subsistema que son de la forma:

$$\tau_i = u_i - Z_i(q, \dot{q}) - D_i(q_i, \dot{q}_i) \quad (2.2)$$

donde  $u_i$  es el vector  $n_i$  dimensional de entradas de control,  $Z_i(q, \dot{q})$  son las interconexiones donde  $q^T = [q_1^T \ q_2^T \ \dots \ q_N^T] \in R^n$ ,  $n = \sum_{i=1}^N n_i$  y el término  $D_i(q_i, \dot{q}_i)$  contiene las perturbaciones. De la ecuación (2.2) se aprecia que la función  $D_i(q_i, \dot{q}_i)$  depende únicamente de los estados locales y que  $Z_i(q, \dot{q})$  puede depender de los estados de todos los subsistemas. Sustituyendo la ecuación (2.2) en la ecuación (2.1) se obtiene:

$$\mathbf{M}_i(q_i)\ddot{q}_i + \mathbf{C}_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) + Z_i(q, \dot{q}) + D_i(q_i, \dot{q}_i) = u_i \quad (2.3)$$

El sistema dado en la ecuación (2.3) posee las siguientes propiedades (Spong y Vidyasagar, 1989):

1. La matriz  $\mathbf{M}_i(q_i)$  es simétrica, es decir,  $\mathbf{M}_i(q_i) = \mathbf{M}_i^T(q_i)$  y positiva definida.
2.  $\dot{\mathbf{M}}_i(q_i) - 2\mathbf{C}_i(q_i, \dot{q}_i)$  es anti simétrica,  $s_i^T [\dot{\mathbf{M}}_i(q_i) - 2\mathbf{C}_i(q_i, \dot{q}_i)]s_i = 0 \ \forall s_i \in \mathfrak{R}^{n_i}$
3. La dinámica local de cada subsistema puede reescribirse en forma de parametrización lineal:

$$\mathbf{M}_i(q_i)\ddot{q}_i + \mathbf{C}_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) = Y_i(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i)\Theta_i \quad (2.4)$$

donde  $\Theta_i$  es el vector de parámetros y  $Y_i(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i)$  es el regresor, mismo que, contiene funciones conocidas y uniformemente continuas en sus argumentos.

Entonces, para diseñar la ley de control  $u_i$  del sistema dado en la ecuación (2.3) se hacen 3 suposiciones: la primera asociada con interconexiones; la segunda referida a las perturbaciones y la tercera vinculada con la superficie deslizante.

**Suposición 1.** *Las interconexiones satisfacen*

$$\|Z_i(q, \dot{q})\| \leq \sum_{j=1}^N c_{ij} Q_j \quad (2.5)$$

donde

$$Q_j = 1 + \|q_j\| + \|\dot{q}_j\| + \cdots + \|q_j\|^p + \|\dot{q}_j\|^p \quad (2.6)$$

con  $c_{ij} \geq 0$  y  $p \geq 1$ .

**Suposición 2.** *Las perturbaciones quedan acotadas como*

$$\|D_i(q_i, \dot{q}_i)\| \leq d_i Q_i \quad (2.7)$$

con  $d_i \geq 0$  y  $Q_i$  definido previamente.

Nótese que las interconexiones y las perturbaciones locales están acotadas en los estados por el polinomio  $Q$  de grado  $p$  dado en la ecuación (2.6).

Por otra parte, se asume que la señal deseada  $q_{d,i}(t) \in \mathfrak{R}^{n_i}$  para cada subsistema  $i$ -ésimo es una función suave con  $\dot{q}_{d,i}(t)$  y  $\ddot{q}_{d,i}(t)$  acotadas. El problema consiste en diseñar una ley de control descentralizada basada en modos deslizantes que dependa solo de las variables locales de cada subsistema para lograr el seguimiento de  $q_i(t)$  a  $q_{d,i}(t)$ . Para lograr lo anterior considere la superficie deslizante siguiente:

$$s = \dot{\tilde{q}}(t) + \lambda \tilde{q}(t) \quad (2.8)$$

donde el error de seguimiento es

$$\tilde{q}(t) = q(t) - q_d(t) \quad (2.9)$$

derivando

$$\dot{\tilde{q}}(t) = \dot{q}(t) - \dot{q}_d(t) \quad (2.10)$$



sustituyendo la ecuación (2.10) en la ecuación (2.8) se obtiene

$$s = \dot{q}(t) - \dot{q}_d(t) + \lambda\tilde{q}(t) \quad (2.11)$$

por lo que se establece (Slotine y Li, 1990):

$$\dot{q}_r(t) = \dot{q}_d(t) - \lambda\tilde{q}(t) \quad (2.12)$$

y con base en la ecuación (2.11) se define una variable de deslizamiento para cada subsistema como:

$$s_i = \dot{q}_i(t) - \dot{q}_{r,i}(t) \quad (2.13)$$

De la ecuación (2.12) la velocidad de referencia  $\dot{q}_r(t)$  se forma por la diferencia de la velocidad deseada  $\dot{q}_d(t)$  y el error de seguimiento  $\tilde{q}(t)$  por otra parte de la ecuación (2.13) la variable deslizante contiene información sobre el acotamiento y convergencia de  $q_i(t)$  y  $\dot{q}_i(t)$  donde el término  $\dot{q}_{r,i}(t)$  es una señal auxiliar que se definirá en el Capítulo 3. Debido a que la superficie deslizante dada en la ecuación (2.8) puede ser vista como una ecuación diferencial de primer orden en  $\tilde{q}(t)$  con entrada  $s$  se aprecia que cuando la trayectoria del sistema alcanza a la superficie en  $s = 0$  significa que  $\tilde{q}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Dadas las suposiciones anteriores y para establecer un resultado general se necesita la siguiente suposición:

**Suposición 3.** *La superficie deslizante  $s_i$  es tal que*

$$\|\tilde{q}_i(t)\| \leq \gamma_{i,1} \|s_i\| + \gamma_{i,2} \quad (2.14)$$

$$\|\dot{\tilde{q}}_i(t)\| \leq \gamma_{i,3} \|s_i\| + \gamma_{i,4} \quad (2.15)$$

existen  $\gamma_{i,1} > 0$ ,  $\gamma_{i,2} > 0$ ,  $\gamma_{i,3} > 0$  y  $\gamma_{i,4} > 0$ .

Con base en las suposiciones 1, 2 y 3 se obtiene el siguiente resultado:

**Lema 1.** Existe  $\delta_{ij} \geq 0$  tal que

$$\|Y_i(q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_{r,i}, \ddot{q}_{r,i})\theta_i - Z_i(q, \dot{q}) - D_i(q_i, \dot{q}_i)\| \leq \sum_{j=1}^N \delta_{ij} S_j \quad (2.16)$$

donde

$$Y_i(q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_{r,i}, \ddot{q}_{r,i})\theta_i = \mathbf{M}_i(q_i)\ddot{q}_{r,i} + \mathbf{C}_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_{r,i} + g_i(q_i)$$

con  $S_j$  definido como

$$S_j = 1 + \|s_j\| + \cdots + \|s_j\|^p \quad (2.17)$$

y  $p \geq 1$

*Demostración.* Se observa del lado izquierdo de la ecuación (2.16) que las interconexiones  $Z_i(q, \dot{q})$  son función de  $q$  y  $\dot{q}$  las cuales pueden o no depender de todo el estado y quedan acotadas por el polinomio  $Q_j$  de grado  $p$  dado en la ecuación (2.6). Las perturbaciones  $D_i(q_i, \dot{q}_i)$  dependen de los estados locales y quedan acotadas en  $q_i$  y  $\dot{q}_i$  de la misma forma mediante el polinomio  $Q_i$  de grado  $p$  dado en en la ecuación (2.6). El término  $Y_i(q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_{r,i}, \ddot{q}_{r,i})\theta_i$  es función de  $q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_{r,i}$  y  $\ddot{q}_{r,i}$  las cuales son funciones acotadas por el polinomio  $S_j$  de grado  $p$  dado en la ecuación (2.17) porque esta depende de la variable deslizante  $s_j$  la cual a su vez es función de  $\dot{q}_i(t)$  y  $\dot{q}_{r,i}(t)$  como se aprecia de la ecuación (2.13). Con esto, el Lema 1 queda demostrado.  $\square$

Por otra parte, considerando el lado derecho de la ecuación (2.16) se tiene:

**Lema 2.** Considérense las ecuaciones (2.13) y (2.17), entonces se cumple la desigualdad:

$$\sum_{i=1}^N \|s_i\| \sum_{j=1}^N S_j \leq N \sum_{i=1}^N \|s_i\| S_i \quad (2.18)$$

*Demostración.* Con base en la desigualdad de Chebyshev

$$\sum_{i=1}^N a_i \sum_{j=1}^N b_j \leq N \sum_{i=1}^N a_i b_i \quad (2.19)$$

para  $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N$ ,  $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_N$  de lo que puede apreciarse que  $\|s_i\| \leq \|s_j\| \Leftrightarrow S_i \leq S_j$ .

Siendo de esta manera que la afirmación hecha en el Lema 2 se cumple.  $\square$

Mediante los Lemas 1 y 2 la estabilidad y funcionamiento se resumen en el siguiente teorema:

**Teorema 1.** *Considérese el sistema interconectado dado en la ecuación (2.3) y la ley de control establecida como*

$$u_i = -\mathbf{K}_i s_i - \delta S_i \text{sgn}(s_i) \quad (2.20)$$

donde  $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_i^T > 0$ ,  $s_i$  es la superficie deslizante,  $\delta > 0$  con  $S_i$  definida en la ecuación (2.17) y  $\text{sgn}(s_i) = [\text{sgn}(s_{i,1}), \dots, \text{sgn}(s_{i,n_i})]^T$  compuesta de la función signo  $\text{sgn}(s_i)$ . Con base en las Suposiciones 1, 2 y 3 el sistema en lazo cerrado es globalmente estable en el sentido de que todas las señales son acotadas y el error de seguimiento converge exponencialmente a cero.

*Demostración.* Considerando el sistema interconectado dado en la ecuación (2.3) y haciendo uso de la variable deslizante definida en la ecuación (2.13) el sistema se escribe en términos de  $s_i$  como:

$$\mathbf{M}_i(q_i) \dot{s}_i + \mathbf{C}_i(q_i, \dot{q}_i) s_i = u_i - [Y_i(q_i, \dot{q}_i, \dot{q}_{r,i}, \ddot{q}_{r,i}) \theta_i + Z_i(q, \dot{q}) + D_i(q_i, \dot{q}_i)] \quad (2.21)$$

de tal forma que para probar su estabilidad se propone la función candidata de Lyapunov siguiente:

$$V = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} s_i^T \mathbf{M}_i s_i \quad (2.22)$$

cuya derivada es:

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^N \left\{ s_i^T \mathbf{M}_i \dot{s}_i + \frac{1}{2} s_i^T \dot{\mathbf{M}}_i s_i \right\} \quad (2.23)$$

y aplicándola al sistema de lazo cerrado dado por la ecuación (2.21) se obtiene:

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^N \left\{ s_i^T (u_i - (Y_i \theta_i + Z_i + D_i) - \mathbf{C}_i s_i) + \frac{1}{2} s_i^T \dot{\mathbf{M}}_i s_i \right\}$$

desarrollando para  $s_i^T$  por la izquierda se tiene

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^N \left\{ s_i^T u_i - s_i^T (Y_i \theta_i + Z_i + D_i) + \frac{1}{2} s_i^T (\dot{\mathbf{M}}_i - 2\mathbf{C}_i) s_i \right\}$$

y usando la propiedad 2 para el sistema dado en la ecuación (2.3) se cumple

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^N \left\{ s_i^T u_i + \left\| s_i^T (Y_i \theta_i + Z_i + D_i) \right\| \right\} \quad (2.24)$$

donde la norma es la Euclidiana y aplicando la sumatoria se obtiene

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^N s_i^T u_i + \sum_{i=1}^N \left\| s_i^T \right\| \|Y_i \theta_i + Z_i + D_i\|$$

y haciendo uso de la ecuación (2.16) del Lema 1 junto con el Lema 2 se escribe

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^N s_i^T u_i + \sum_{i=1}^N \|s_i\| \sum_{j=1}^N \delta_{i,j} S_j$$

o bien, lo anterior puede reescribirse como

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^N s_i^T u_i + \sum_{i=1}^N \|s_i\| \max_{i,j} \{\delta_{i,j}\} \sum_{j=1}^N S_j$$

y en forma compacta

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^N \left\{ s_i^T u_i + \delta S_j \|s_i\| \right\} \quad (2.25)$$

donde  $\delta = N \max_{i,j} \{\delta_{i,j}\}$ . Hecho lo anterior, si reemplazamos la ley de control  $u_i$  definida en el Teorema 1 se llega al siguiente resultado

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -s_i^T \mathbf{K}_i s_i - \delta S_i \|s_i\| + \delta S_i \|s_i\| \right\} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} s_i^T \mathbf{K}_i s_i < -\alpha V, \alpha = 2$$

por lo que se concluye que todas las señales son acotadas y el error  $s_i$  tiende a cero exponencialmente.

□

**Comentario 1:** La implementación de la ley de control como se puede observar depende solo de las variables del sistema local.

**Comentario 2:** La ley de control contiene la función  $\text{sgn}(s_i)$  que la hace discontinua. En la práctica, se puede lograr una señal de control más suave por medio de la sustitución de una función continua por ejemplo:

$$u_i = -\mathbf{K}_i s_i - (\delta S_i)^2 \frac{s_i}{\delta S_i \|s_i\| + \epsilon_i} \quad (2.26)$$

donde  $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_i^T > 0$ ,  $s_i$  es la variable deslizante y  $S_i$  queda definido por la ecuación 2.17 con parámetros  $\delta > 0$  y  $\epsilon_i > 0$  (Tang et al., 2000). El costo será un error estacionario; mismo que, es posible disminuir usando la acción integral.

---

## Capítulo 3

# DISEÑO DE SUPERFICIES DESLIZANTES

### 3.1. Introducción

En este Capítulo se proponen 3 superficies deslizantes distintas que pueden contribuir a mejorar el desempeño de la ley de control descentralizada establecida en el Capítulo 2 y como consecuencia mejorar la respuesta de cada subsistema de la planta en lo referido al transitorio y al estado estable haciendo énfasis en la acción integral. Las superficies deslizantes son las siguientes:

1. Superficie para control por modo deslizante proporcional

$$s_i = \dot{\tilde{q}}_i(t) + \lambda_i \tilde{q}_i(t) \quad (3.1)$$

donde el error de seguimiento es  $\tilde{q}_i(t) = q_i(t) - q_{d,i}(t)$  y su derivada es  $\dot{\tilde{q}}_i(t)$  con parámetro de diseño  $\lambda_i > 0$ .

2. Superficie con acción integral aproximada

$$s_i = \dot{\tilde{q}}_i(t) + \lambda_i \sigma_i \quad (3.2)$$

donde  $\sigma_i$  se definirá en la Sección 3.3 y parámetro de ajuste  $\lambda_i > 0$ .

### 3. Superficie con integrador condicional

$$s_i = \dot{\tilde{q}}_i(t) + \lambda_{1,i}\tilde{q}_i(t) + \lambda_{2,i}\sigma_i \quad (3.3)$$

donde el término  $\sigma_i$  se definirá en la Sección 3.4 con  $\lambda_{1,i} > 0$  y  $\lambda_{2,i} > 0$  arbitrarios.

En las Secciones 3.2, 3.3 y 3.4 se demuestra que las superficies deslizantes dadas en las ecuaciones 3.1, 3.2 y 3.3 satisfacen la Suposición 3 hecha en el Capítulo 2.

## 3.2. Control por modo deslizante proporcional

Con base a la definición de la variable deslizante  $s_i$  hecha en el Capítulo 2 y dada en la ecuación (2.13) se define la señal auxiliar  $\dot{q}_{r,i}(t)$  como

$$\dot{q}_{r,i}(t) = \dot{q}_{d,i}(t) - \lambda_i\tilde{q}_i(t) \quad (3.4)$$

con  $\lambda_i > 0$ . Debido a que se busca lograr la regulación de cada subsistema se establece el siguiente resultado:

**Lema 3.** *Dada la superficie deslizante  $s_i = \dot{\tilde{q}}_i(t) + \lambda_i\tilde{q}_i(t)$  para  $\lambda_i$  suficientemente grande y para el sistema dado en la ecuación (2.3) existen  $\gamma_{i,1} > 0$ ,  $\gamma_{i,2} > 0$ ,  $\gamma_{i,3} > 0$ ,  $\gamma_{i,4} > 0$  para cada subsistema tales que*

$$\|\tilde{q}_i(t)\| \leq \gamma_{i,1} \|s_i\| + \gamma_{i,2} \quad (3.5)$$

$$\|\dot{\tilde{q}}_i(t)\| \leq \gamma_{i,3} \|s_i\| + \gamma_{i,4} \quad (3.6)$$

*Demostración.* Considérese la superficie deslizante especificada como  $s_i = \dot{\tilde{q}}_i(t) + \lambda_i\tilde{q}_i(t)$  para la cual al despejar  $\lambda_i\tilde{q}_i(t)$  se obtiene  $s_i - \dot{\tilde{q}}_i(t) = \lambda_i\tilde{q}_i(t)$  después al obtener la norma Euclidiana a cada miembro

de la ecuación se tiene  $\|s_i - \dot{\tilde{q}}_i(t)\| = |\lambda_i| \|\tilde{q}_i(t)\|$  donde  $\|s_i - \dot{\tilde{q}}_i(t)\| \leq \|s_i\| + \|\dot{\tilde{q}}_i(t)\|$  por lo que

$$\lambda_i \|\tilde{q}_i(t)\| \leq \|s_i\| + \|\dot{\tilde{q}}_i(t)\| \quad (3.7)$$

Ahora, para el sistema mecánico dado en la ecuación (2.3) y considerando

$$\|\dot{\tilde{q}}_i(t)\| \leq k_1 \|\tilde{q}_i(t)\| + k_2 \quad (3.8)$$

para  $k_1 \geq 0$  y  $k_2 \geq 0$  véase (Tang et al., 2000) y (Skowronski, 1991) se sustituye  $\|\dot{\tilde{q}}_i(t)\|$  en la ecuación (3.7) de lo que se obtiene

$$\lambda_i \|\tilde{q}_i(t)\| \leq \|s_i\| + k_1 \|\tilde{q}_i(t)\| + k_2 \quad (3.9)$$

agrupando para  $\|\tilde{q}_i(t)\|$  se expresa

$$\|\tilde{q}_i(t)\| \leq \gamma_{i,1} \|s_i\| + \gamma_{i,2} \quad (3.10)$$

con

$$\gamma_{i,1} = \frac{1}{\lambda_i - k_1}$$

y

$$\gamma_{i,2} = \frac{k_2}{\lambda_i - k_1}$$

donde  $\lambda_i - k_1 > 0$  lo que implica  $\lambda_i > k_1$  por lo que la ecuación (3.5) del Lema 3 queda demostrada.

Por otra parte, considerando  $s_i = \dot{\tilde{q}}_i(t) + \lambda_i \tilde{q}_i(t)$  y despejando  $\dot{\tilde{q}}_i(t)$  y calculando la norma Euclidiana se tiene

$$\|\dot{\tilde{q}}_i(t)\| \leq \|s_i\| + |\lambda_i| \|\tilde{q}_i(t)\| \quad (3.11)$$



de tal forma que al sustituir la ecuación (3.10) en la ecuación (3.11) puede reescribirse como

$$\|\dot{\tilde{q}}_i(t)\| \leq \left(1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - k_1}\right) \|s_i\| + \frac{\lambda_i k_2}{\lambda_i - k_1}$$

o bien

$$\|\dot{\tilde{q}}_i(t)\| \leq \gamma_{i,3} \|s_i\| + \gamma_{i,4} \quad (3.12)$$

donde

$$\gamma_{i,3} = \left(1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - k_1}\right)$$

y

$$\gamma_{i,4} = \frac{\lambda_i k_2}{\lambda_i - k_1}$$

con  $\lambda_i > k_1$  quedando así la ecuación (3.6) del Lema 3 demostrada.  $\square$

### 3.3. Control con acción integral aproximada

Debido a que fue definida la variable de deslizamiento en el Capítulo 2 como  $s_i = \dot{q}_i(t) - \dot{q}_{r,i}(t)$  se procede a definir la señal auxiliar  $\dot{q}_{r,i}(t)$  de la siguiente manera

$$\dot{q}_{r,i}(t) = \dot{q}_{d,i}(t) - \lambda_i \sigma_i \quad (3.13)$$

con el parámetro  $\lambda_i > 0$  donde  $\sigma_i$  se define por

$$\sigma_i = \frac{p + b_i}{p + a_i} \tilde{q}_i(t) \quad (3.14)$$

siendo  $p = \frac{d}{dt}$  el operador derivador con  $b_i \gg a_i > 0$  y se restringe  $a_i \ll 1$ .

Observaciones:

1. La superficie definida en la ecuación (3.1) es un caso especial de la ecuación (3.14) para  $a_i = b_i$ .

2. Si  $a_i = 0$  se tiene que  $\sigma_i$  es

$$\sigma_i = \left(1 + \frac{b_i}{p}\right) \tilde{q}_i(t) \quad (3.15)$$

que contiene la acción integral.

Cuando  $0 < a_i \ll 1$  esta acción integral se logra en el rango de baja frecuencia. Dado lo expuesto anteriormente se tiene el siguiente resultado:

**Lema 4.** *Dada la superficie deslizante  $s_i = \dot{\tilde{q}}_i(t) + \lambda_i \sigma_i$  con  $\lambda_i > 0$  y suficientemente grande se cumple*

$$\|\tilde{q}_i(t)\| \leq \gamma_{i,1} \|s_i\| + \gamma_{i,2} \quad (3.16)$$

$$\|\dot{\tilde{q}}_i(t)\| \leq \gamma_{i,3} \|s_i\| + \gamma_{i,4} \quad (3.17)$$

para  $\gamma_{i,1} > 0$ ,  $\gamma_{i,2} > 0$ ,  $\gamma_{i,3} > 0$ ,  $\gamma_{i,4} > 0$ .

*Demostración.* Considérese la superficie deslizante  $s_i = \dot{\tilde{q}}_i(t) + \lambda_i \sigma_i$  al despejar  $\lambda_i \sigma_i$  se obtiene

$$\lambda_i \sigma_i = s_i - \dot{\tilde{q}}_i(t) \quad (3.18)$$

y aplicando la norma Euclidiana se escribe:

$$|\lambda_i| \|\sigma_i\| \leq \|s_i\| + \|\dot{\tilde{q}}_i(t)\| \quad (3.19)$$

considerando la ecuación (3.8) y sustituyéndola en la ecuación (3.19) se llega

$$\lambda_i \|\sigma_i\| \leq \|s_i\| + k_1 \|\tilde{q}_i(t)\| + k_2 \quad (3.20)$$

con parámetros  $k_1 \geq 0$  y  $k_2 \geq 0$  elegidos adecuadamente. Al despejar  $\tilde{q}_i(t)$  de la ecuación (3.14) y obtenido la norma inducida implica que

$$\|\tilde{q}_i(t)\| \leq \|\sigma_i\| \quad (3.21)$$

porque

$$\sup_{w \geq 0} \left| \frac{p + a_i}{p + b_i} \right| \leq 1 \quad (3.22)$$

sustituyendo  $\|\sigma_i\|$  en la ecuación (3.20) se obtiene

$$\lambda_i \|\tilde{q}_i(t)\| \leq \|s_i\| + k_1 \|\tilde{q}_i(t)\| + k_2 \quad (3.23)$$

de tal forma que agrupando para  $\|\tilde{q}_i(t)\|$  se llega

$$\|\tilde{q}_i(t)\| \leq \gamma_{i,1} \|s_i\| + \gamma_{i,2} \quad (3.24)$$

donde

$$\gamma_{i,1} = \frac{1}{\lambda_i - k_1}$$

y

$$\gamma_{i,2} = \frac{k_2}{\lambda_i - k_1}$$

donde  $\lambda_i - k_1 > 0$  lo que implica  $\lambda_i > k_1$  quedando así demostrada la ecuación (3.16) del Lema 4.

Por otra parte, de la superficie deslizante  $s_i = \dot{\tilde{q}}_i(t) + \lambda_i \sigma_i$  se despeja  $\dot{\tilde{q}}_i(t)$  y se aplica la norma Euclidiana a cada término

$$\|\dot{\tilde{q}}_i(t)\| \leq \|s_i\| + \|\lambda_i \sigma_i\| \quad (3.25)$$

de tal forma que al usar la ecuación (3.21) y sustituyéndola en la ecuación (3.25) se reescribe:

$$\|\dot{\tilde{q}}_i(t)\| \leq \|s_i\| + \lambda_i \|\tilde{q}_i(t)\| \quad (3.26)$$

retomando el resultado de la ecuación (3.24) al sustituirlo en la ecuación (3.26) y agrupando para  $\|s_i\|$  y simplificando se concluye

$$\|\dot{\tilde{q}}_i(t)\| \leq \gamma_{i,3} \|s_i\| + \gamma_{i,4} \quad (3.27)$$

donde

$$\gamma_{i,3} = \left(1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_i - k_1}\right)$$

y

$$\gamma_{i,4} = \frac{\lambda_i k_2}{\lambda_i - k_1}$$

con  $\lambda_i > k_1$  tal que la ecuación (3.17) del Lema 4 queda demostrada.  $\square$

### 3.4. Control con acción integral condicional

Para el caso del control con acción integral condicional se define la señal auxiliar  $\dot{q}_{r,i}(t)$  de la siguiente manera

$$\dot{q}_{r,i}(t) = \dot{q}_{d,i}(t) - \lambda_{1,i} \tilde{q}_i(t) - \lambda_{2,i} \sigma_i \quad (3.28)$$

sustituyendo la ecuación (3.28) en la ecuación (2.13) del Capítulo 2 se obtiene la superficie deslizante

$$s_i = \tilde{q}_i(t) + \lambda_{1,i} \tilde{q}_i(t) + \lambda_{2,i} \sigma_i \quad (3.29)$$

donde  $\tilde{q}_i(t) = q_i(t) - q_{d,i}(t)$  con parámetros  $\lambda_{1,i} > 0$  y  $\lambda_{2,i} > 0$  seleccionados de tal manera que el polinomio  $P(\lambda) = \lambda^2 - (\lambda_{2,i} + \lambda_{1,i})\lambda + \lambda_{1,i}\lambda_{2,i}$  sea Hurwitz lo cual asegura que la trayectoria del sistema alcanza a la superficie deslizante cuando  $s = 0$  y el error de seguimiento  $\tilde{q}_i(t)$  converge asintóticamente a cero (Perruquetti y Barbot, 2002). Además, se precisa que  $\sigma_i$  es usado para la acción integral condicional (Seshagiri y Khalil, 2005) definiéndose como

$$\dot{\sigma}_i = -\lambda \sigma_i + \mu \operatorname{sat}\left(\frac{s_i}{\mu}\right), \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0 \quad (3.30)$$

donde la función saturación se define por las ecuaciones (3.31) y (3.32) siguientes:

$$\operatorname{sat}\left(\frac{s_i}{\mu}\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{s_i}{\mu}\right), \quad \left|\frac{s_i}{\mu}\right| > 1 \quad (3.31)$$

$$\text{sat}\left(\frac{s_i}{\mu}\right) = \frac{s_i}{\mu}, \left| \frac{s_i}{\mu} \right| \leq 1 \quad (3.32)$$

con la función signo definida por las ecuaciones (3.33) y (3.34):

$$\text{sgn}\left(\frac{s_i}{\mu}\right) = 1, \frac{s_i}{\mu} > 0 \quad (3.33)$$

$$\text{sgn}\left(\frac{s_i}{\mu}\right) = -1, \frac{s_i}{\mu} < 0 \quad (3.34)$$

A su vez la ecuación (3.30) puede reescribirse como una ecuación diferencial de primer orden en  $\sigma_i$  dada por

$$\dot{\sigma}_i + \lambda \sigma_i = \mu \text{sat}\left(\frac{s_i}{\mu}\right) \quad (3.35)$$

donde la solución de la parte homogénea es  $\sigma_i(t) = ce^{-\lambda t}$  siendo  $c = cte$  implicando que  $\sigma_i \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por otra parte, analizando la parte no homogénea de la ecuación (3.35) y usando la definición de la función saturación dada anteriormente se analiza el caso 1:

$$\text{sat}\left(\frac{s_i}{\mu}\right) = \text{sgn}\left(\frac{s_i}{\mu}\right), \left| \frac{s_i}{\mu} \right| > 1 \quad (3.36)$$

con  $s_i > \mu$  o  $s_i < -\mu$  y para la ecuación (3.32) el caso 2:

$$\text{sat}\left(\frac{s_i}{\mu}\right) = \frac{s_i}{\mu}, \left| \frac{s_i}{\mu} \right| \leq 1 \quad (3.37)$$

con  $-\mu \leq s_i \leq \mu$ . Considerando la ecuación (3.36) con  $|s_i| > |\mu|$  se cumple

$$\text{sgn}\left(\frac{s_i}{\mu}\right) = 1, s_i > \mu \quad (3.38)$$

$$\text{sgn}\left(\frac{s_i}{\mu}\right) = -1, s_i < -\mu \quad (3.39)$$

por lo que la solución de la ecuación diferencial (3.35) conmuta entre

$$\sigma_i(t) = ce^{-\lambda t} + \frac{\mu}{\lambda}, c = cte, s_i > \mu \quad (3.40)$$

$$\sigma_i(t) = ce^{-\lambda t} - \frac{\mu}{\lambda}, \quad c = cte, \quad s_i < -\mu \quad (3.41)$$

Ahora, considerando el caso de la ecuación (3.37) para  $|s_i| \leq |\mu|$  se satisface que

$$\dot{\sigma}_i + \lambda \sigma_i = s_i$$

lo que significa que  $\sigma_i$  alcanza a la superficie en  $s_i = 0$  implicando  $\sigma_i \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  por lo que la acción integral se efectúa dentro de la capa límite en  $|s_i| \leq \mu$  tal que la ecuación (3.29) se reduce a

$$s_i = \dot{\tilde{q}}_i(t) + \lambda_{1,i} \tilde{q}_i(t) \quad (3.42)$$

Cabe precisar que la función saturación se incluye para aproximar a un control por modo deslizante continuo y reducir el efecto del *chattering* y la acción integral contribuye para mejorar la respuesta del transitorio y el estado estable para una selección adecuada de  $\lambda$  y  $\mu$  en la ecuación (3.35). Lo anterior se resume en el Lema siguiente:

**Lema 5.** *Para la superficie deslizante  $s_i = \dot{\tilde{q}}_i(t) + \lambda_{1,i} \tilde{q}_i + \lambda_{2,i} \sigma_i$  y para  $\lambda_{1,i}$  y  $\lambda_{2,i}$  suficientemente grandes se cumple*

$$\|\tilde{q}_i(t)\| \leq \gamma_{i,1} \|s_i\| + \gamma_{i,2} \quad (3.43)$$

$$\|\dot{\tilde{q}}_i(t)\| \leq \gamma_{i,3} \|s_i\| + \gamma_{i,4} \quad (3.44)$$

para  $\gamma_{i,1} > 0$ ,  $\gamma_{i,2} > 0$ ,  $\gamma_{i,3} > 0$ ,  $\gamma_{i,4} > 0$ .

*Demostración.* De la superficie deslizante dada  $s_i = \dot{\tilde{q}}_i(t) + \lambda_{1,i} \tilde{q}_i(t) + \lambda_{2,i} \sigma_i$  con  $\lambda_{1,i} > 0$  y  $\lambda_{2,i} > 0$  se reescribe como

$$s_i - \dot{\tilde{q}}_i(t) = \lambda_{1,i} \tilde{q}_i(t) + \lambda_{2,i} \sigma_i \quad (3.45)$$

aplicando la norma Euclidiana a cada miembro de la ecuación se obtiene

$$\|s_i\| + \|\dot{\tilde{q}}_i(t)\| \leq \lambda_{1,i} \|\tilde{q}_i(t)\| + \lambda_{2,i} \|\sigma_i\| \quad (3.46)$$

ahora, considerando  $\|\tilde{q}_i(t)\| \leq \|\sigma_i\|$  y usando la ecuación (3.8) se reemplazan en la ecuación (3.46) de tal forma que al agrupar y despejar para  $\|\tilde{q}_i(t)\|$  se obtiene

$$\|\tilde{q}_i(t)\| \leq \gamma_{i,1} \|\sigma_i\| + \gamma_{i,2} \quad (3.47)$$

donde

$$\gamma_{i,1} = \frac{1}{\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i} - k_1}$$

y

$$\gamma_{i,2} = \frac{k_2}{\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i} - k_1}$$

donde  $\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i} - k_1 > 0$  lo que implica que  $\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i} > k_1$  quedando así la ecuación (3.43) del Lema 5 demostrada.

Siguiendo un razonamiento semejante para demostrar la ecuación (3.44) considérese la superficie deslizante  $s_i = \dot{\tilde{q}}_i(t) + \lambda_{1,i}\tilde{q}_i(t) + \lambda_{2,i}\sigma_i$  misma que se reescribe como

$$\dot{\tilde{q}}_i(t) = s_i - \lambda_{1,i}\tilde{q}_i(t) - \lambda_{2,i}\sigma_i \quad (3.48)$$

aplicando la norma Euclidiana se obtiene

$$\|\dot{\tilde{q}}_i(t)\| \leq \|\sigma_i\| + \lambda_{1,i} \|\tilde{q}_i(t)\| + \lambda_{2,i} \|\sigma_i\| \quad (3.49)$$

usando  $\|\tilde{q}_i(t)\| \leq \|\sigma_i\|$  y sustituyendo la ecuación (3.47) en la ecuación (3.49) se tiene

$$\|\dot{\tilde{q}}_i(t)\| \leq \|\sigma_i\| + (\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i}) \left[ \left( \frac{1}{\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i} - k_1} \right) (\|\sigma_i\| + k_2) \right] \quad (3.50)$$

o bien se verifica

$$\|\dot{\tilde{q}}_i(t)\| \leq \gamma_{i,3} \|\sigma_i\| + \gamma_{i,4} \quad (3.51)$$

donde

$$\gamma_{i,3} = 1 + \frac{\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i}}{\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i} - k_1}$$

y

$$\gamma_{i,4} = \frac{k_2 (\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i})}{\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i} - k_1}$$

donde  $\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i} > k_1$  quedando así la ecuación (3.44) del Lema 5 demostrada.  $\square$



---

## Capítulo 4

# SISTEMA DE LÍNEA DE VISTA

### 4.1. Introducción

En este Capítulo se enfatiza la descripción física del **SLV** y se usa como ejemplo de aplicación para el cual se usa el control descentralizado robusto (desarrollado en la tesis) para diferentes casos de superficies deslizantes. Además, se analizan las propiedades de la planta en lo referido a las interconexiones y perturbaciones acotadas.

### 4.2. Descripción física

El **SLV** es un dispositivo útil usado ampliamente en sistemas de control y navegación de aviones, barcos, vehículos, posicionamiento de antenas, etc. Debido a sus propiedades inerciales posee la característica de mantenerse en una dirección apuntando hacia un objeto que puede estar fijo o en movimiento en presencia de perturbaciones. En la Figura 4.1 se aprecia que el **SLV** se compone principalmente por un motor 3 que está girando a alta velocidad en el eje 3 el cual es ortogonal al eje 2 en el cual está acoplado el motor 2 que tiene como función provocar el movimiento hacia adelante o hacia atrás del marco en el cual se monta el motor 3. Se observa también que el marco vertical es perpendicular a los ejes 1 y 2 de tal forma que el motor 1 provoca el movimiento del instrumento a la izquierda o derecha

en el plano horizontal. Nótese también que el eje del espejo es paralelo al eje 2 y perpendicular al eje vertical de tal forma que los rayos de luz son captados por medio de un sensor cuya información es usada por el instrumento.

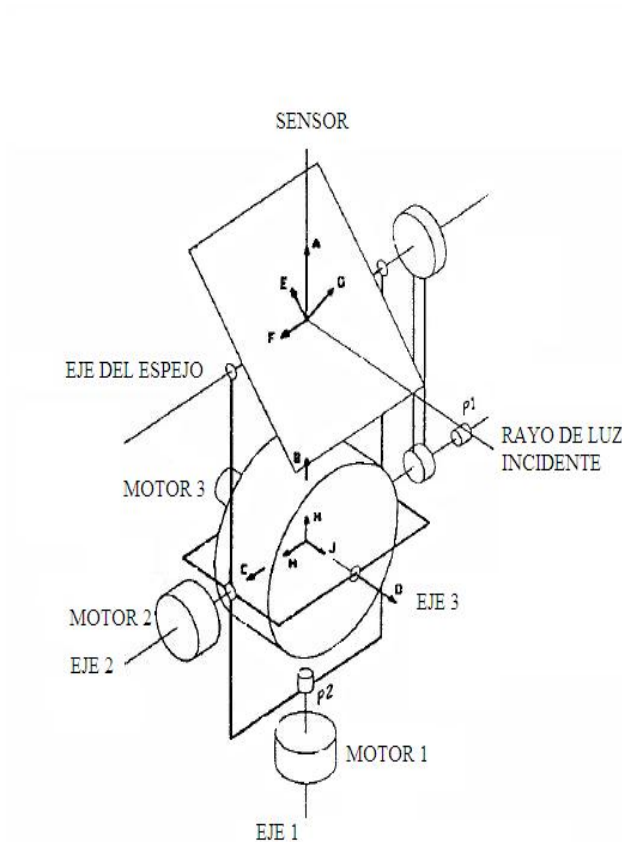


Figura 4.1: Sistema de Línea de Vista tomado de (Nie, 1997).

Desde el punto de vista de control la idea consiste en lograr que el **SLV** apunte a un objeto en todo momento en el espacio inercial para lograrlo se considera al instrumento un sistema interconectado con dos grados de libertad montado sobre una plataforma rígida y fija en la cual los efectos de la fuerza de gravedad no son considerados. Con base en esto, es necesario aplicar los torques adecuados a los motores 1 y 2 en forma simultánea para orientar y posicionar la línea de visión hacia el objeto fijo. Es importante resaltar que existen restricciones dinámicas acotadas en la relación par-velocidad de cada

actuador como medida de protección al sistema en presencia de perturbaciones acopladas causadas por el torque de los actuadores. A su vez, es posible que existan perturbaciones de origen externo como vibraciones que puedan propagarse por la estructura del sistema por tal razón es conveniente que puedan compensarse por el sistema de control.

### 4.3. Modelo matemático

El modelo matemático del **SLV** tomado de (Nie, 1997) y dado en ecuaciones de Euler-Lagrange es:

$$\mathbf{M}_1(q)\ddot{q}_1 + F_1(q, \dot{q}) + G_1(q, \dot{q}_3) = \tau_1 \quad (4.1)$$

$$\mathbf{M}_2(q)\ddot{q}_2 + F_2(q, \dot{q}) + G_2(q, \dot{q}_3) = \tau_2 \quad (4.2)$$

donde  $q = [q_1, q_2]^T$  representa posiciones angulares en los ejes 1 y 2 respectivamente y  $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2]^T$  es el correspondiente vector de velocidades. Del modelo previo se aprecia que  $M_1$  y  $M_2$  son funciones vinculadas con las inercias del sistema;  $F_1$  y  $F_2$  son términos asociados con interconexiones y  $G_1$  y  $G_2$  son funciones referidas a perturbación en particular de  $\dot{q}_3$  provocada por el tercer motor además  $\tau_1$  y  $\tau_2$  son los torques aplicados respectivamente a cada subsistema.

Tal que las funciones  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $G_1$  y  $G_2$  están dadas de la siguiente manera:

$$M_1 = A + D + (B + D + H)\cos^2 q_2 + \frac{1}{2}(E + G) + \frac{1}{2}(G - E)\sen q_2 \quad (4.3)$$

$$F_1 = -(B - D + H)\dot{q}_1 \dot{q}_2 \sen(2q_2) + \frac{1}{2}(G - E)\dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2 + J\dot{q}_1 \dot{q}_2 \sen q_2 \cos q_2 \quad (4.4)$$

$$G_1 = J\dot{q}_2 \dot{q}_3 \cos q_2 \quad (4.5)$$

$$M_2 = C + \frac{F}{4} + H \quad (4.6)$$

$$F_2 = \frac{1}{2}(B - D + H)\dot{q}_1^2 \sen(2q_2) - \frac{1}{4}(G - E)\dot{q}_1^2 \cos q_2 - J\dot{q}_1^2 \sen q_2 \cos q_2 \quad (4.7)$$

$$G_2 = -J\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_2 \quad (4.8)$$

con las inercias del sistema representadas a través de  $A, B, C, D, E, F, G, H, J$ . Donde  $A$  denota el momento de inercia del marco externo y usando como eje de rotación el eje 1;  $B, C$  y  $D$  representan los momentos de inercia del marco interno referidos a los ejes de rotación 1, 2 y 3 respectivamente;  $E, F$  y  $G$  denotan los momentos de inercia del espejo referidos a los ejes de rotación 1, 2 y 3;  $H$  y  $J$  quedan asociados con los momentos de inercia del motor 3 referidos a los ejes de rotación 1 y 3.

Cabe señalar que de las ecuaciones (4.1) y (4.2) se aprecia que existen términos que dependen de la dinámica local de cada subsistema y adicionalmente términos de interconexión razón por la cual el **SLV** puede ser controlado mediante la técnica del control descentralizado desarrollada en la tesis la cual consiste en aplicar leyes de control locales  $u_i$  a cada subsistema para lograr su regulación respectivamente y como consecuencia obtener su estabilidad en presencia de perturbaciones.

Por otra parte, obsérvese que los términos dados en las ecuaciones (4.5) y (4.8) son funciones que dependen de la velocidad en  $\dot{q}_3$  la cual se supone perturbación acoplada. Debido a que la función  $G_1 = J\dot{q}_2\dot{q}_3\cos q_2$  depende de  $q_2$  y  $\dot{q}_2$  (asociados con el Subsistema 2) se considera interconexión, pero, como depende de  $\dot{q}_3$  es también perturbación. Similarmente el término  $G_2 = -J\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_2$  es función de  $\dot{q}_3$  y depende de  $q_2$  y  $\dot{q}_1$  por lo cual puede considerarse simultáneamente interconexión y perturbación.

#### 4.4. Propiedades importantes para el diseño

Del modelo matemático que representa al **SLV** hay términos específicos: inercias del sistema, interconexiones y perturbación de tal forma que las ecuaciones tienen la estructura dada en la ecuación (2.3) referida al Capítulo 2 donde los términos  $C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i$  y  $g_i(q_i)$  son considerados nulos. Por otra parte, para controlar al **SLV** se utiliza la ley de control descentralizada dada en la ecuación (2.20) del Teorema 1 establecido en el Capítulo 2 para la cual se resalta lo siguiente:

1. Las leyes de control locales son robustas en lo referido a compensación de perturbaciones cuando son aplicadas a cada subsistema del **SLV**.
2. La sintonización de los parámetros locales de cada controlador se facilita.

En la Figura 4.2 se representa mediante un diagrama a bloques la estructura básica del esquema de control descentralizado para el **SLV** donde se observan las referencias locales *REF1* Y *REF2*, las entradas de control  $u_1$  y  $u_2$  además nótese la retroalimentación de los estados  $q_1$ ,  $\dot{q}_1$ ,  $q_2$  y  $\dot{q}_2$  disponibles de cada subsistema. Aunque no están representadas las perturbaciones se asume que existen.

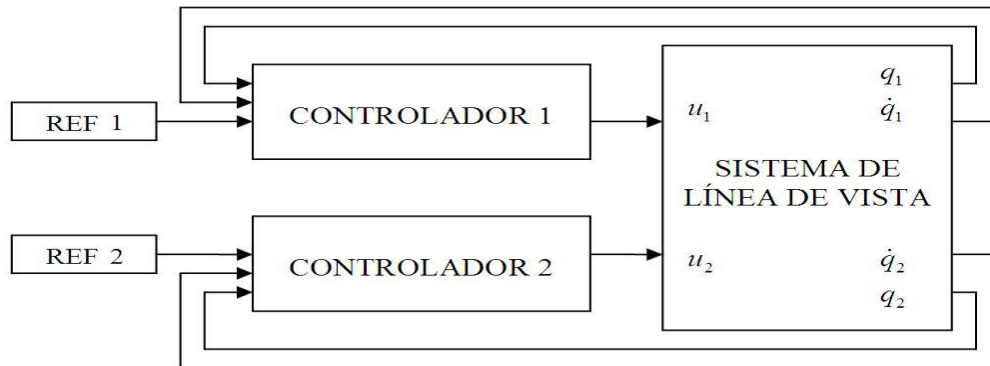


Figura 4.2: Control descentralizado para el SLV.

Las propiedades importantes para controlar al **SLV** y diseñar adecuadamente las leyes de control locales es que se suponen interconexiones y perturbaciones acotadas tal y como se estableció en las Suposiciones 1 y 2 del Capítulo 2 mismas que se verifican en las Secciones 4.5 y 4.6.

## 4.5. Interconexiones acotadas

Hecha la Suposición 1 en el Capítulo 2 se asume que las interconexiones  $Z_i(q, \dot{q})$  quedan acotadas por la expresión

$$\|Z_i(q, \dot{q})\| \leq \sum_{j=1}^N c_{ij} Q_j$$

donde  $Q_j$  es el polinomio de estados dado por

$$Q_j = 1 + \|q_j\| + \|\dot{q}_j\| + \cdots + \|q_j\|^p + \|\dot{q}_j\|^p$$

con parámetro de ajuste  $c_{ij} \geq 0$  con grado  $p \geq 1$ . Siguiendo de esta manera se probará que las funciones  $F_1$  y  $F_2$  dadas en las ecuaciones (4.4) y (4.7) quedan acotadas. Esto es, si obtenemos la norma Euclidiana del término  $F_1(q, \dot{q})$  se tiene:

$$\|F_1(q, \dot{q})\| = \left\| -(B - D + H)\dot{q}_1\dot{q}_2\text{sen}(2q_2) + \frac{1}{2}(G - E)\dot{q}_1\dot{q}_2\text{cos}q_2 + J\dot{q}_1\dot{q}_2\text{sen}q_2\text{cos}q_2 \right\| \quad (4.9)$$

debido a que las inercias del sistema pueden considerarse constantes se hacen las asignaciones siguientes:

$$k_1 = -(B - D + H)$$

$$k_2 = \frac{1}{2}(G - E)$$

$$k_3 = J$$

de tal forma que puede reescribirse

$$\|F_1(q, \dot{q})\| = \|k_1\dot{q}_1\dot{q}_2\text{sen}(2q_2) + k_2\dot{q}_1\dot{q}_2\text{cos}q_2 + k_3\dot{q}_1\dot{q}_2\text{sen}q_2\text{cos}q_2\| \quad (4.10)$$

pero se sabe que las funciones trigonométricas quedan restringidas a

$$-1 \leq \text{sen}2q_2 \leq 1$$

$$-1 \leq \text{cos}q_2 \leq 1$$

$$-1 \leq \text{sen}q_2\text{cos}q_2 \leq 1$$

factorizando  $\dot{q}_1\dot{q}_2$  conduce a

$$\|F_1(q, \dot{q})\| = \|\dot{q}_1\dot{q}_2(k_1\text{sen}2q_2 + k_2\text{cos}q_2 + k_3\text{sen}q_2\text{cos}q_2)\| \quad (4.11)$$

de tal forma que si consideramos el polinomio  $Q_j$  dado con anterioridad de grado  $p = 2$  para los casos en que  $j = 1$  y  $j = 2$  se asienta

$$Q_1 = 1 + \|q_1\| + \|\dot{q}_1\| + \|q_1\|^2 + \|\dot{q}_1\|^2 \quad (4.12)$$

$$Q_2 = 1 + \|q_2\| + \|\dot{q}_2\| + \|q_2\|^2 + \|\dot{q}_2\|^2 \quad (4.13)$$

Ahora, haciendo la suma de las ecuaciones (4.12) y (4.13) se llega

$$Q_1 + Q_2 = 2 + \|q_1\| + \|q_2\| + \|\dot{q}_1\| + \|\dot{q}_2\| + \|q_1\|^2 + \|q_2\|^2 + \|\dot{q}_1\|^2 + \|\dot{q}_2\|^2 \quad (4.14)$$

con esto el término  $F_1$  puede acotarse como

$$\|F_1(q, \dot{q})\| \leq \|\dot{q}_1\dot{q}_2(|k_1|\|\text{sen}2q_2\| + |k_2|\|\text{cos}q_2\| + |k_3|\|\text{sen}q_2\text{cos}q_2\|)\| \quad (4.15)$$

realizando las asignaciones siguientes

$$k_4 \geq |k_1|\|\text{sen}2q_2\|, \quad k_5 \geq |k_2|\|\text{cos}q_2\| \quad \text{y} \quad k_6 \geq |k_3|\|\text{sen}q_2\text{cos}q_2\|$$

y sumando  $k_7 = k_4 + k_5 + k_6$  y simplificando se tiene

$$\|F_1(q, \dot{q})\| \leq \|\dot{q}_1\dot{q}_2(k_7)\| \quad (4.16)$$

de tal forma que

$$|k_7|\|\dot{q}_1\dot{q}_2\| \leq \frac{|k_7|}{2}\|\dot{q}_1\|^2 + \frac{|k_7|}{2}\|\dot{q}_2\|^2 \quad (4.17)$$

Se cumple que

$$\frac{|k_7|}{2} \|\dot{q}_1\|^2 + \frac{|k_7|}{2} \|\dot{q}_2\|^2 \leq Q_1 + Q_2$$

eligiendo a  $c_{ij} \geq \frac{|k_7|}{2}$ . Con base en esto se concluye que el término  $F_1(q, \dot{q})$  queda acotado por el polinomio  $Q_j$  confirmándose así la Suposición 1 sobre su acotamiento. De forma análoga el término  $F_2(q, \dot{q})$  también queda acotado con base al mismo procedimiento para  $F_1(q, \dot{q})$  cumpliéndose de esta manera la Suposición 1 hecha sobre las interconexiones.

## 4.6. Perturbaciones acotadas

Con base en la Suposición 2 establecida en el Capítulo 2 se procederá a probar que las perturbaciones referidas al **SLV** quedan acotadas; esto es, considérense las funciones  $G_1 = J\dot{q}_2\dot{q}_3\cos q_2$  y  $G_2 = -J\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_2$  asociadas con la perturbación en  $\dot{q}_3$  de tal forma que los términos  $G_1$  y  $G_2$  quedan acotados por la expresión siguiente:

$$\|D_i(q_i, \dot{q}_i)\| \leq d_i Q_i \quad (4.18)$$

con  $d_i \geq 0$  y  $Q_i$  establecido como un polinomio de grado  $p$  dado por

$$Q_i = 1 + \|q_i\| + \|\dot{q}_i\| + \dots + \|q_i\|^p + \|\dot{q}_i\|^p \quad (4.19)$$

si procedemos a obtener la norma Euclidiana de los términos  $G_1$  y  $G_2$  tenemos

$$\|G_1(q, \dot{q}_3)\| = \|J\dot{q}_2\dot{q}_3\cos q_2\| \quad (4.20)$$

$$\|G_2(q, \dot{q}_3)\| = \|-J\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_2\| \quad (4.21)$$



para  $G_1$  se sabe que  $\|J\dot{q}_2\dot{q}_3\cos q_2\| \leq |J| \|\dot{q}_2\dot{q}_3\cos q_2\|$  pero la función  $\cos q_2$  está restringida al intervalo  $-1 \leq \cos q_2 \leq 1$  por lo cual puede hacerse  $\cos q_2 \leq k_1$  llegando a

$$|J| |k_1| \|\dot{q}_2\dot{q}_3\| \leq k_2 \|\dot{q}_2\dot{q}_3\| \quad (4.22)$$

donde  $|J| |k_1| = k_2$ .

Por otra parte, el término  $G_2$  puede ser reescrito como

$$\|G_2(q, \dot{q}_3)\| \leq |J| \|\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_2\|$$

donde la función  $\cos q_2$  queda restringida a  $-1 \leq \cos q_2 \leq 1$  por tal razón puede asignarse  $\cos q_2 \leq k_3$  obteniendo

$$\|G_2(q, \dot{q}_3)\| \leq |J| |k_3| \|\dot{q}_1\dot{q}_3\|$$

llegando a  $\|G_2(q, \dot{q}_3)\| \leq k_4 \|\dot{q}_1\dot{q}_3\|$  donde  $k_4 = |J| |k_3|$ .

Ahora, si consideramos el polinomio  $Q_i$  dado con anterioridad para los casos  $i = 1$  e  $i = 2$  con  $p = 2$  y para  $d_i \geq 0$  en ambos casos se tiene

$$Q_1 = 1 + \|q_1\| + \|\dot{q}_1\| + \|q_1\|^2 + \|\dot{q}_1\|^2 \quad (4.23)$$

$$Q_2 = 1 + \|q_2\| + \|\dot{q}_2\| + \|q_2\|^2 + \|\dot{q}_2\|^2 \quad (4.24)$$

y considerando el acotamiento para  $G_1$  tenemos

$$\|\dot{q}_2\dot{q}_3\| \leq \frac{|k_2|}{2} \|\dot{q}_2\|^2 + \frac{|k_2|}{2} \|\dot{q}_3\|^2 \quad (4.25)$$

y para  $G_2$  es similar

$$\|\dot{q}_1\dot{q}_3\| \leq \frac{|k_4|}{2} \|\dot{q}_1\|^2 + \frac{|k_4|}{2} \|\dot{q}_3\|^2 \quad (4.26)$$

de tal forma que se cumplen las desigualdades siguientes

$$\frac{|k_2|}{2} \|\dot{q}_2\|^2 + \frac{|k_2|}{2} \|\dot{q}_3\|^2 \leq Q_1 \quad (4.27)$$

$$\frac{|k_4|}{2} \|\dot{q}_1\|^2 + \frac{|k_4|}{2} \|\dot{q}_3\|^2 \leq Q_2 \quad (4.28)$$

porque las perturbaciones locales quedan acotadas eligiendo a  $d_1 \geq \frac{|k_2|}{2}$ ,  $d_2 \geq \frac{|k_4|}{2}$  pues  $\dot{q}_3$  se supone finita y acotada. Lo que significa que la Suposición 2 hecha sobre las perturbaciones para el **SLV** se satisface.

---

## Capítulo 5

# SIMULACIONES DEL SLV

### 5.1. Introducción

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos para la regulación y seguimiento de cada subsistema del **SLV**. Después se analizan las señales de control y finalmente se presentan las señales de error. Se hace notar que la ley de control descentralizada fue establecida en la ecuación (2.20) definida en el Capítulo 2. También, se realizaron diferentes simulaciones modificando la ley de control dada usando 3 superficies deslizantes distintas especificadas en las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3) del Capítulo 3.

### 5.2. Regulación del SLV

Debido a que el objetivo de control es lograr la regulación del **SLV** se busca que  $q_i(t) \rightarrow q_{d,i}(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  para lo cual se usa en las simulaciones la señal escalón unitario  $U(t)$  como referencia con magnitud de  $0.15 \text{ rad}$  para los Subsistemas 1 y 2 comenzando en  $0 \text{ s}$  y terminando en  $1.5 \text{ s}$ . Los datos propuestos para las inercias del **SLV** son los siguientes:  $A=0.01124$ ;  $B=0.005625$ ;  $C=0.002812$ ;  $D=0$ ;  $E=0.0009225$ ;  $F=0.00000375$ ;  $G=0$ ;  $H=0.0004162$ ;  $J=0.00027$  considerando condiciones iniciales nulas para cada subsistema. También se considera la perturbación  $\dot{q}_3 = 17 \text{ rps}$  para cada subsistema. Cabe mencionar que se usó el método numérico ode5 (Dormand-Prince) en paso fijo con tamaño de paso de

0.0001.

Para la regulación del **SLV** se aprecian en las Figuras 5.1 y 5.2 los resultados obtenidos para cada subsistema. Nótese que las señales  $q1s1$ ,  $q1s2$  y  $q1s3$  presentan comportamiento favorable donde la primer respuesta etiquetada con  $q1s1$  se obtuvo con base al control por modo deslizante proporcional; la salida  $q1s2$  es el resultado del control con acción integral aproximada y  $q1s3$  se debe al control con acción integral condicional. Dado que se usó una sola ley de control y se analizaron tres casos de superficies deslizantes los parámetros de sintonización para las ganancias de la ley de control son:  $K_1 = 1$  y  $K_2 = 1$  y  $\delta = 1$ . Por otro lado, para la primer superficie deslizante los parámetros de sintonización son  $\lambda_1 = 8$  y  $\lambda_2 = 8$ ; para la segunda superficie los parámetros son:  $\lambda_1 = 12$ ,  $\lambda_2 = 12$ ,  $a_1 = 0,9$ ,  $a_2 = 0,9$ ,  $b_1 = 4$  y  $b_2 = 4$  y para la tercer superficie se tienen  $\lambda_{1,1} = 10$ ,  $\lambda_{2,1} = 10$ ,  $\lambda_{1,2} = 10$ ,  $\lambda_{2,2} = 10$  y los parámetros de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son  $\lambda = 10$  y  $\mu = 10$ . En la Figura 5.2 se muestran las respuestas  $q2s1$ ,  $q2s2$  y  $q2s3$  para regulación mismas que se obtuvieron con los parámetros de sintonización dados previamente para la ley de control y las superficies deslizantes.

En la Figura 5.1 resalta que la señal  $q1s3$  mostrada con  $(-)$  alcanza rápidamente a la referencia de  $0.15 \text{ rad}$  obteniendo el estado estable en  $0.26 \text{ s}$  lo que significa que la acción integral condicional es satisfactoria. La señal  $q1s1$  dada el línea a trozos presenta comportamiento satisfactorio y alcanza el estado estable en  $0.34 \text{ s}$  y la respuesta  $q1s2$  dada en línea continua converge hacia el estado estable en  $0.57 \text{ s}$  lo que indica que la acción integral aproximada es buena. Los resultados obtenidos son promisorios en simulación pues muestran la estabilidad del subsistema 1 para regulación sometido a perturbación dentro de una banda de tolerancia del uno por ciento para los casos examinados.

Similarmente en la Figura 5.2 se muestran los resultados de la regulación para el Subsistema 2 donde las respuestas están etiquetadas como  $q2s1$ ,  $q2s2$  y  $q2s3$  resaltando que  $q2s3$  presenta mejor comportamiento dinámico durante el transitorio y en el estado estable, nótese que la señal alcanza el estado estable en  $0.27 \text{ s}$ . A su vez  $q2s1$  se estabiliza en  $0.34 \text{ s}$  y  $q2s2$  alcanza el estado estable en  $0.57 \text{ s}$ . Estos

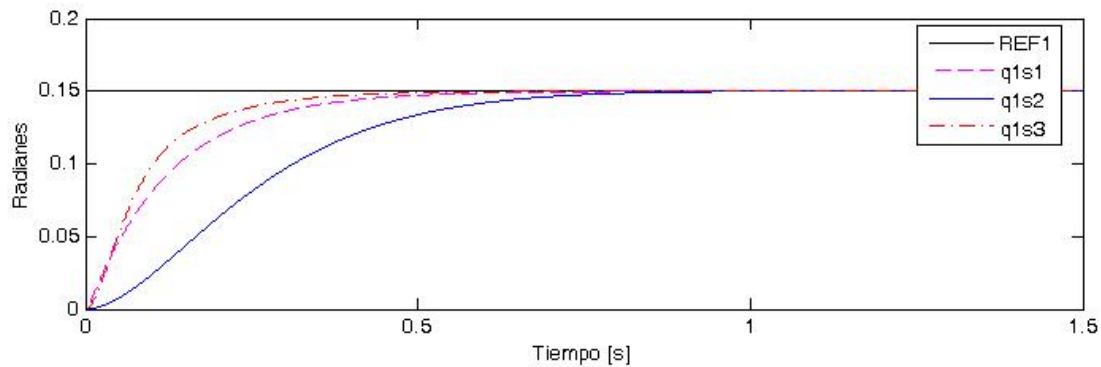


Figura 5.1: Regulación del Subsistema 1 del SLV.

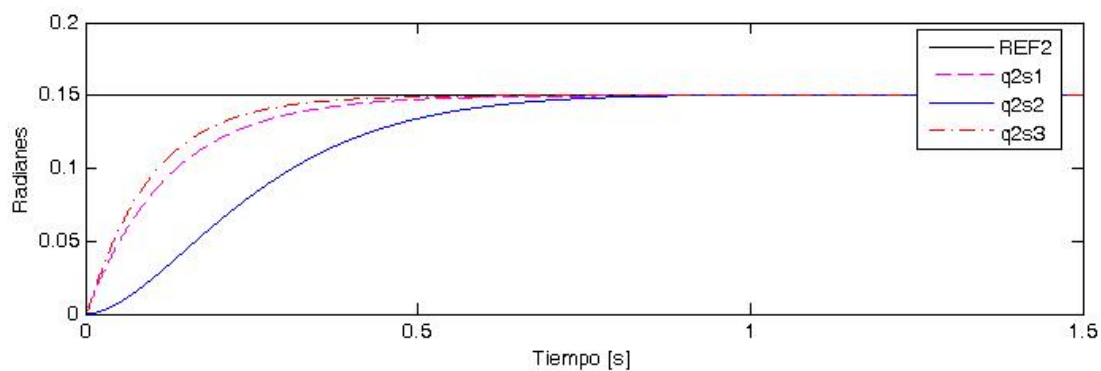


Figura 5.2: Regulación del Subsistema 2 del SLV.

resultados son satisfactorios para la regulación del Subsistema dos perturbado donde se aprecia que la acción integral en el estado estable es significativa y mas aún dentro de la banda de tolerancia del 1 por ciento para los casos expuestos.

Con base en los resultados obtenidos para la regulación del **SLV** se confirmó que las respuestas  $q1s3$  y  $q2s3$  (obtenidas mediante la ley de control basada en la acción integral condicional) se aprecia en las Figuras 5.3 y 5.4 las señales de control respectivamente. Para el caso de la Figura 5.3 la señal de control para el Subsistema 1 etiquetada con  $U1S3$  comienza con un valor inicial de  $6.25 N * m$  para descender rápidamente a una banda entre  $-1 N * m$  y  $1 N * m$  alrededor de  $0.01 s$  presentando conmutación en magnitud debido al efecto de la función signo de la ley de control y también destaca

el comportamiento de alta frecuencia lo cual se observa en todo el intervalo de tiempo. El resultado es aceptable en simulación dados los parámetros propuestos para el **SLV** lo cual es significativo en lo referido al torque que deben suministrar los actuadores.

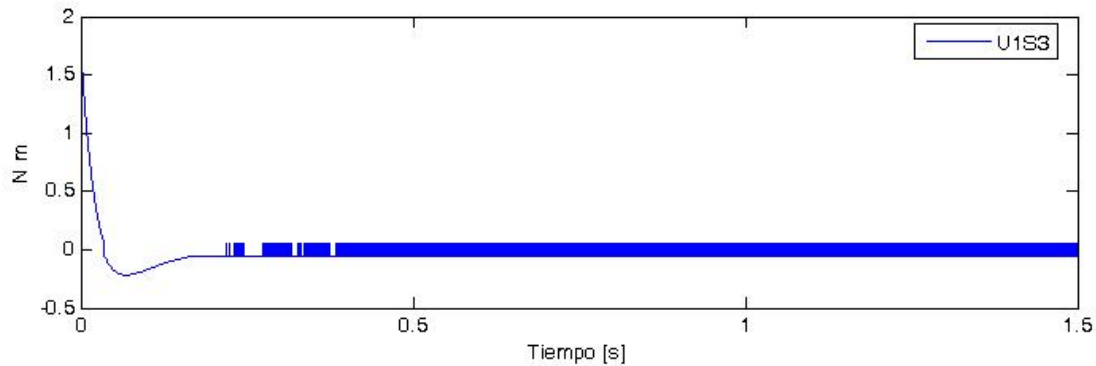


Figura 5.3: Señal de control para regulación del Subsistema 1 del SLV.

En la Figura 5.4 la señal de control  $U2S3$  para el Subsistema 2 comienza en  $6.25 N \cdot m$  para descender rápidamente a una franja de  $-1 N \cdot m$  y  $1 N \cdot m$  en  $0.002 s$  presentando comportamiento variable en magnitud y *chattering* de alta frecuencia permaneciendo así hasta los  $1.5 s$ . Lo que significa que el Subsistema 2 es estable y la compensación de la perturbación se logra por lo cual el **SLV** apunta al objetivo deseado.

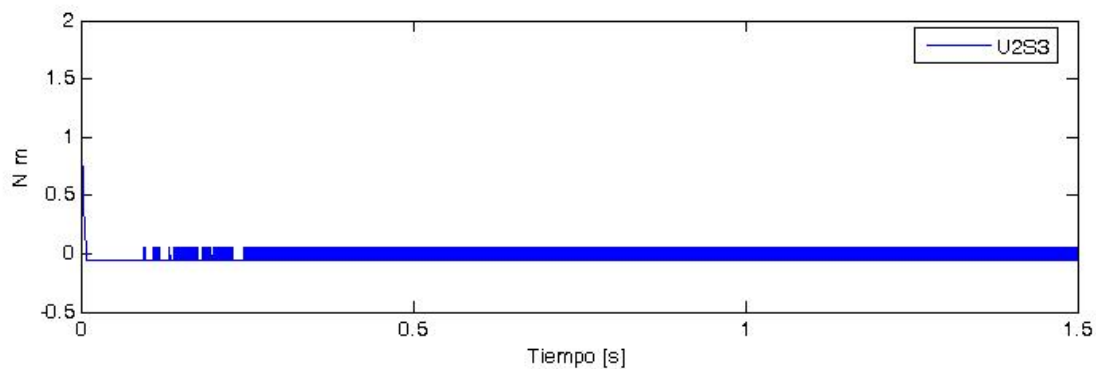


Figura 5.4: Señal de control para regulación del Subsistema 2 del SLV.

Adicionalmente, para saber el desempeño de las leyes de control propuestas con diferentes superficies deslizantes se usa la señal de error para examinar el funcionamiento del sistema interconectado. Debido a que el mejor resultado para regulación en  $0.15 \text{ rad}$  se obtuvo con la acción integral condicional se muestra en las Figuras 5.5 y 5.6 que las señales de error etiquetadas con  $E1S3$  y  $E2S3$  comienzan en  $-0.15 \text{ rad}$  y convergen rápidamente a cero alrededor de los  $0.5 \text{ s}$  cumpliéndose así el objetivo de control.

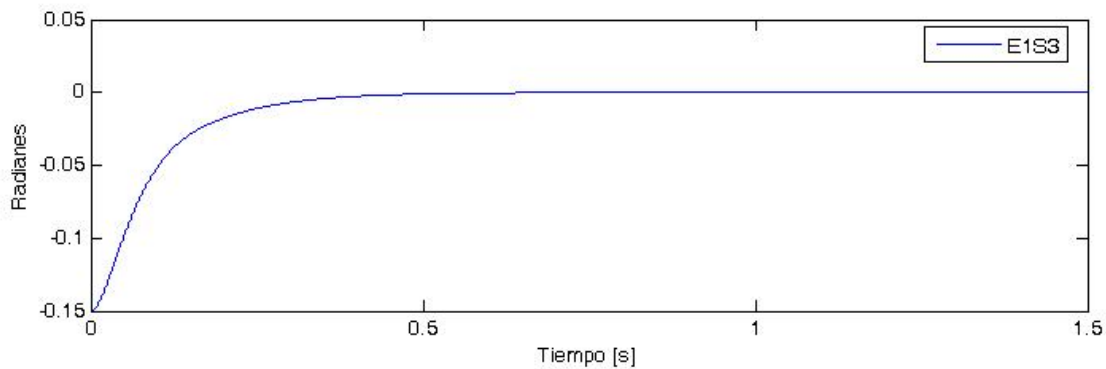


Figura 5.5: Señal de error de regulación para el Subsistema 1 del SLV.

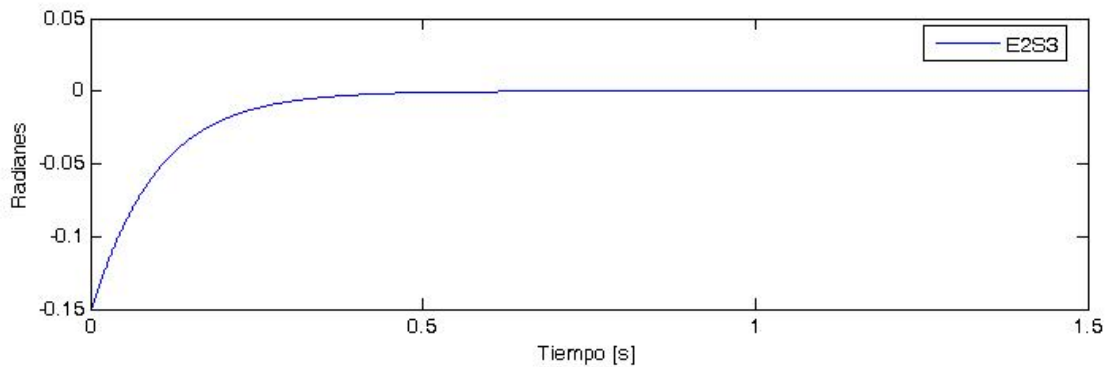


Figura 5.6: Señal de error de regulación para el Subsistema 2 del SLV.

### 5.3. Seguimiento del SLV

Dado que el **SLV** puede apuntar hacia un objeto que puede estar fijo o en movimiento se realizan simulaciones para seguimiento de trayectorias usando las mismas características y parámetros de sintonización en las leyes de control y superficies deslizantes dadas en la Sección 5.2. En la Figura 5.7 se presentan los resultados obtenidos para seguimiento usando la ley de control dada en la ecuación (2.20) junto con las superficies deslizantes establecidas en las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3). Dicho lo anterior, las trayectorias deseadas son las funciones cosenoidales siguientes:

$$q_{d,1}(t) = 0,55\cos(6,28t) \quad (5.1)$$

$$q_{d,2}(t) = 0,35\cos(9,42t) \quad (5.2)$$

para el caso del Subsistema 1 se observa que la respuesta  $q1s3$  mostrada con  $(-)$  alcanza un pico en  $0.24 \text{ rad}$  en  $0.1 \text{ s}$  para después ir acercándose cada vez mas a la trayectoria dada y se ve que no hay variaciones abruptas en el seguimiento por lo que la respuesta converge rápidamente alrededor de los  $0.5 \text{ s}$ . Por otra parte, la salida  $q1s1$  mostrada en línea a trozos presenta un máximo en  $0.19 \text{ rad}$  en  $0.1 \text{ s}$  para después seguir satisfactoriamente a la señal cosenoidal en el intervalo de tiempo dado y resalta también que alrededor de los  $0.5 \text{ s}$  el seguimiento es bueno de tal forma que para la respuesta  $q1s2$  se aprecia que existe un descenso hasta antes de los  $0.5 \text{ s}$  para después comenzar a seguir a la trayectoria dada con una aproximación satisfactoria cumpliéndose así el objetivo de control lo que significa que el Subsistema 1 es estable en presencia de perturbaciones y apunta al objeto en movimiento.

Para el caso de la Figura 5.8 se observan las trayectorias de  $q2s1$ ,  $q2s2$  y  $q2s3$  donde se muestra que  $q2s3$  presenta un máximo de  $0.1 \text{ rad}$  en  $0.06 \text{ s}$  para después ir descendiendo hasta  $-0.36 \text{ rad}$  en  $0.33 \text{ s}$  y comenzar a seguir a la trayectoria deseada aceptablemente. A su vez,  $q2s1$  presenta un máximo en  $0.08 \text{ rad}$  en  $0.06 \text{ s}$  para después seguir favorablemente a la referencia y también se observa que  $q2s2$  mostrada en línea sólida tiene un mínimo en  $-0.46 \text{ rad}$  en  $0.31 \text{ s}$  para después ascender y seguir a la referencia dada significativamente. Los resultados mostrados permiten validar en simulación el seguimiento de



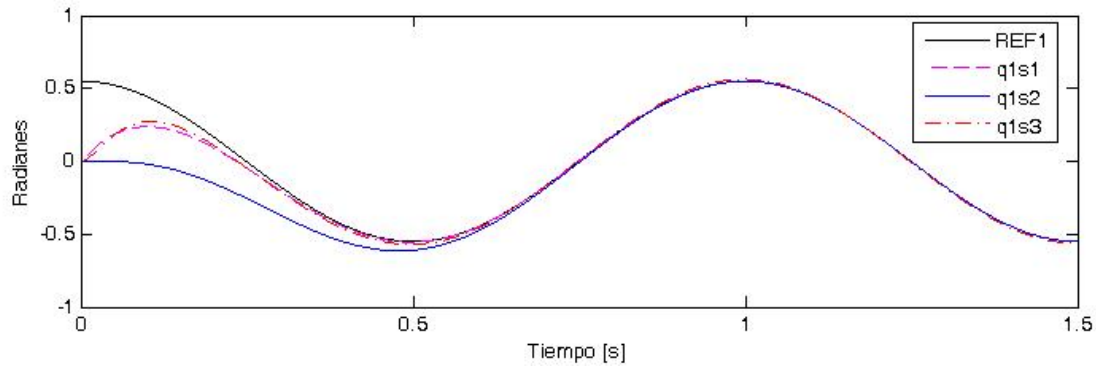


Figura 5.7: Seguimiento del Subsistema 1 del SLV.

trayectorias por lo que la ley de control descentralizada propuesta es robusta ante compensación de perturbaciones.

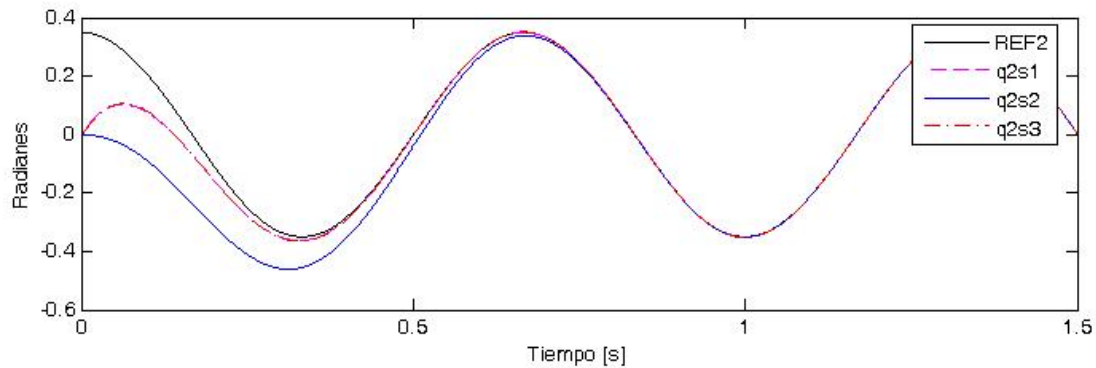


Figura 5.8: Seguimiento del Subsistema 2 del SLV.

Por otra parte, debido a que el mejor seguimiento para los Subsistemas 1 y 2 se obtuvo con el control descentralizado que incluye el diseño de la superficie deslizante 3 con la acción integral condicional (analizada en el Capítulo 3) se presentan en las Figuras 5.9 y 5.10 las señales de control respectivas para cada Subsistema del **SLV**. Para el caso de la Figura 5.9 la señal de control etiquetada con  $U1S3$  comienza en  $42.25 N * m$  para atenuarse rápidamente hasta  $-1.2 N * m$  en  $0.025 s$  para después ingresar a una banda entre  $-1 N * m$  y  $1 N * m$  después de  $0.1 s$  apreciándose además variaciones en amplitud y frecuencia originadas por la acción del control discontinuo, sin embargo, el resultado obtenido es

satisfactorio.

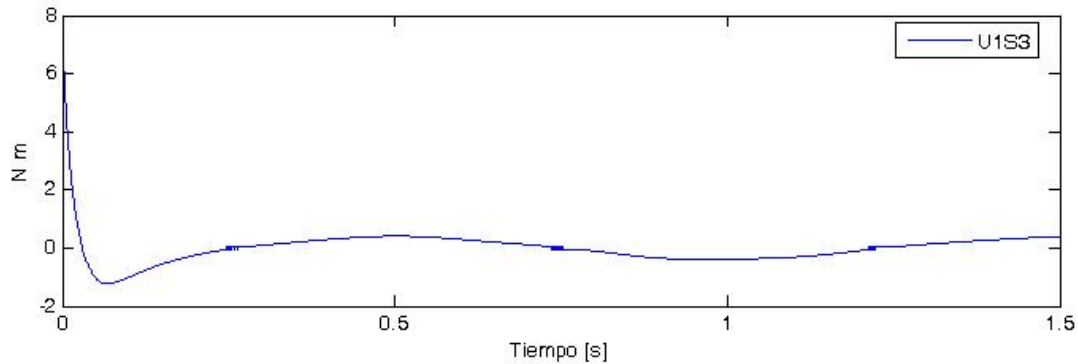


Figura 5.9: Señal de control para seguimiento del Subsistema 1 del SLV.

Para el caso de la Figura 5.10 se ve que la señal de control  $U2S3$  comienza en  $20.25 N * m$  y desciende hasta los  $-1.1 N * m$  después de los  $0.002 s$  para permanecer dentro de una banda de  $-1 N * m$  y  $1 N * m$  de tal forma que permanecen variaciones en amplitud y frecuencia generadas por la acción del control discontinuo para el tiempo de simulación dado. Es importante observar que las señales de control obtenidas para el seguimiento de trayectorias son promisorias.

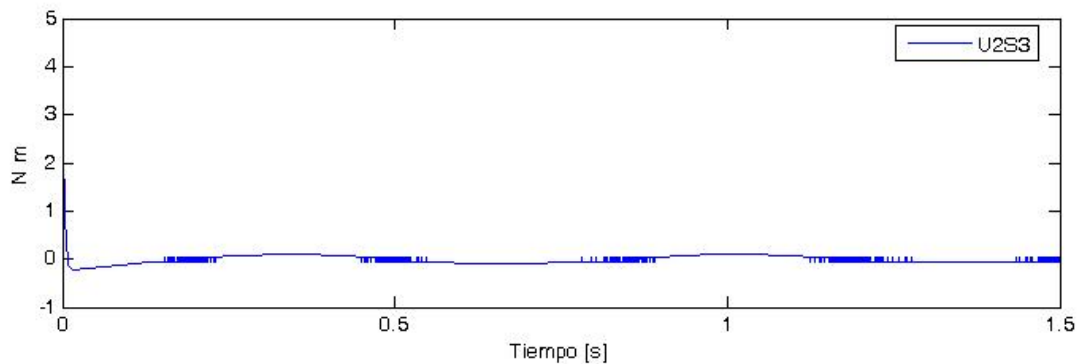


Figura 5.10: Señal de control para seguimiento del Subsistema 2 del SLV.

Dados los resultados obtenidos para el seguimiento se muestra en las Figuras 5.11 y 5.12 las señales de error respectivas. En la Figura 5.11 el error  $E1S3$  comienza en  $-0.55 rad$  y converge rápidamente

hacia cero de tal forma que después de los 0.5 s permanece en cero. Para la Figura 5.12 se ve que  $E2S3$  inicia en  $-0.35 \text{ rad}$  y alcanza el cero significativamente alrededor de los 0.5 s para después permanecer en cero para el intervalo de tiempo dado.

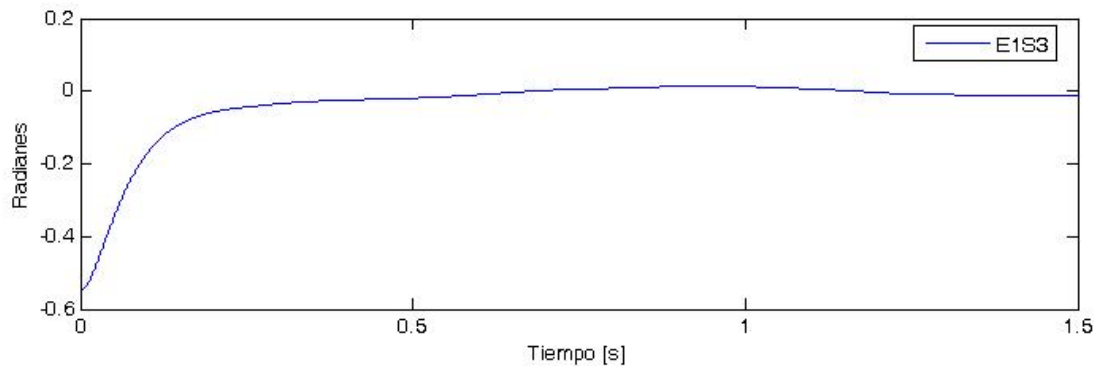


Figura 5.11: Señal de error de seguimiento del Subsistema 1 del SLV.

Por otra parte, en la Figura 5.12 resalta también un comportamiento oscilatorio mínimo en amplitud de la señal de error para  $E2S2$  entre  $-0.02 \text{ rad}$  y  $0.02 \text{ rad}$  en fracciones de tiempo muy cortas alrededor de los 0.5 s.

Cabe mencionar que debido a los resultados obtenidos en la regulación y seguimiento de trayectorias

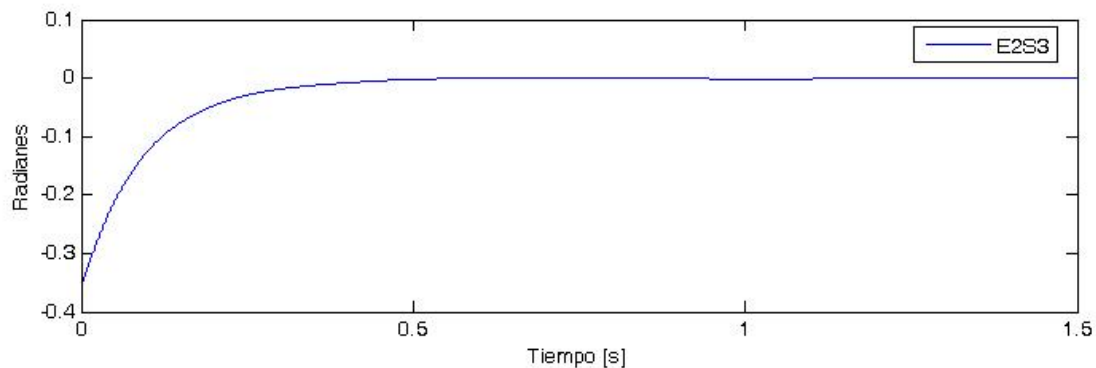


Figura 5.12: Señal de error de seguimiento del Subsistema 2 del SLV.

para el sistema interconectado dado usando la acción integral en la ley de control el sistema es estable ante presencia de perturbaciones.

---

## Capítulo 6

# CONCLUSIONES

Como conclusiones se pueden mencionar los siguientes puntos:

1. Se diseñó un control descentralizado robusto para el SLV.
2. Se analizó una ley de control y se hicieron simulaciones con tres superficies deslizantes diferentes para las cuales la superficie con acción integral condicional fué la que obtuvo mejores resultados en el transitorio y en la respuesta de estado estable para el SLV.
3. Se logró la regulación y seguimiento del SLV para apuntar hacia un objeto fijo o en movimiento en presencia de perturbaciones.

Como trabajo futuro: se puede mencionar que en el aspecto teórico se podrán extender los resultados a sistemas multiagentes con ciertas estructuras de interconexión dada. Además, en la cuestión práctica: se necesitará validar los resultados presentados en la tesis mediante experimentos.

---

# Bibliografía

- J. M. Hilkert (2008). Inertially Stabilized Platform Technology. Concepts and principles. *IEEE CONTROL SYSTEMS, MAGAZINE VOL. 28, NO. 1, FEBRUARY 2008*.
- T. H. Lee, J. H. Nie and M. W. Lee (1997). A fuzzy controller with decoupling for multivariable nonlinear servo-mechanisms, with application to real-time control of a passive line-of-sight stabilization system. *Mechatronics, Volume 7, Issue 1, February 1997, Pages 83-104*.
- Lin Shi and Sunil K. Singh (1992). Decentralized Adaptive Controller Design for Large-Scale Systems with Higher Order Interconnections. *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. 37, NO. 8, AUGUST 1992, Pages 1106-1118*.
- Michael K. Masten (2008). Inertially Stabilized Platforms for Optical Imaging Systems. *IEEE CONTROL SYSTEMS, MAGAZINE VOL. 28, NO. 1, FEBRUARY 2008*.
- Nie Junhong (1997). Fuzzy Control of Multivariable Nonlinear Servomechanisms with Explicit Decoupling Scheme. *IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS, VOL. 5, NO. 2, MAY 1997, Pages 304-311*.

Wilfrid Perruquetti and Jean Pierre Barbot (2002). Sliding Mode Control in Engineering. *Marcel Dekker, Inc. New York, 2002, Pages 14-15.*

Peter J. Kennedy, Member, IEEE, and Rhonda L. Kennedy, Member, IEEE (2003). Direct Versus Indirect Line of Sight (LOS) Stabilization. *IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY, VOL. 11, NO. 1, JANUARY 2003.*

Sridhar Seshagiri and Hassan K. Khalil (2005). Robust output feedback regulation of minimum-phase nonlinear systems using conditional integrators. *Automatica, Volume 41, Issue 1, January 2005, Pages 43-54.*

M. Spong and M. Vidyasagar (1989). Robot Dynamics and Control. *New York: Wiley, 1989.*

J. E. Slotine and W. Li (1990). Applied Nonlinear Control. *New Jersey: Prentice Hall, 1990.*

K. C. Tan, T. H. Lee, E. F. Khor and D. C. Ang (2002). Design and real-time implementation of a multivariable gyro-mirror line-of-sight stabilization platform. *Fuzzy Sets and Systems, Volume 128, Issue 1, 16 May 2002, Pages 81-93.*

David Haessig (1998). Line-of-Sight Pointing and Stabilization Control System. *THE CONTROL HANDBOOK, Pages 1326-1336.*

C. Kee, J. Kim, H. So, H. Jun, B. Parkinson and W.W. Hansen (2004). Effect of the error in line of sight unit vector on the accuracy of GPS and pseudolite navigation system. *Computers and*

*Mathematics with Applications, Volume 48, Issues 5-6, September 2004, Pages 779-787.*

Y. Tang, M. Tomizuka, G. Guerrero, and G. Montemayor (2000). Decentralized Robust Control of Mechanical Systems. *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. 45, NO. 4, APRIL 2000.*

Yi Guo, David J. Hill, Youyi Wang (2000). Nonlinear decentralized control of large-scale power systems. *Automatica, Volume 36, Issue 9, September 2000, Pages 1275-1289.*

Yuri B. Shtessel (1995). Decentralized Sliding Mode Control in Inertial Navigation Systems. *Proceedings of the American Control Conference. Seattle, Washington. June 1995.*

Sergio Atayde del Moral (2007). Análisis comparativo de algoritmos para el control de la LOS de un sensor sobre una plataforma móvil. Tesis de Maestría. UNAM. 2007.

J. M. Skowronski (1991). *Control of Nonlinear Mechanical Systems. New York: Plenum, 1991.*