UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNAS CLASES DE MÓDULOS DEFINIDAS A TRAVÉS DE CIERTAS CONDICIONES DE FINITUD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

JUAN ORENDAIN ALMADA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANCISCO FEDERICO RAGGI CÁRDENAS

2009

Índice

Introducción

En este trabajo estudiaremos algunas clases de módulos definidas a través de ciertas condiciones de finitud. Estudiaremos, entre otras cosas, qué relaciones existen entre ellas y bajo qué operaciones son cerradas.

A lo largo de este texto la palabra *módulo* denotará un módulo unital izquierdo sobre un anillo R. Supondremos que el lector está familiarizado con los conceptos de submódulos, cocientes, morfismos, sucesiones exactas, extensiones y con el Teorema de la correspondencia, así como con los conceptos de sumas directas, sumandos directos y de descomposiciones de módulos y con todo lo referente a conjuntos parcialmente ordenados o copos, subcopos, morfismos de orden, retículas, cadenas, y con el lema de Zorn. En lo referente a estos conceptos adoptaremos la notación usada por [AF] y por [F] .

En las secciones 1, 2 y 3 definiremos las condiciones de cadena, la desviación de un copo, y la dimensión de Goldie de una retícula modular respectivamente, y considerando estas condiciones sobre la retícula de submodulos de un módulo definiremos nuestros primeros objetos de estudio, a saber, la clase de todos los módulos artinianos, la clase de todos los módulos neterianos, y la clase de todos los módulos con longitud finita en la sección 1, la clase de todos los módulos con dimensión de Krull y la clase de todos los módulos con dimensión dual de Krull en la sección 2, y finalmente la clase de todos los módulos con dimensión de Goldie finita y la clase de todos los módulos con dimensión dual de Goldie finita en la sección 3. A lo largo de estas tres secciones estableceremos las relaciones que existen entre estas clases, y probaremos que cada una de ellas es cerrada bajo sumas directas finitas y bajo sumandos directos.

En la sección 4 consideraremos las condiciones de finitud definidas en las secciones anteriores ahora sobre el conjunto de sumandos directos de un módulo, definiendo así tres nuevas clases de módulos, la clase de todos los módulos con sd-dimensión de Goldie finita, la clase de todos los módulos sd-artinianos, y la clase de todos los módulos con sd-dimensión de Krull. Caracterizaremos a estas nuevas clases y probaremos que son cerradas bajo sumandos directos. Probaremos también que todas las clases definidas en las secciones 1, 2 y 3 están contenidas en la clase de todos los módulos con sd-dimensión de Goldie finita, que esta a su vez está contenida en la clase de todos los módulos sd-artinianos, y que esta última está contenida en la clase de todos los módulos con sd-dimensión de Krull. Dejaremos, sin embargo, sin contestar la pregunta de si estas dos últimas dos contenciones son propias o no.

En la sección 5 introduciremos una nueva condición de finitud, a saber, la condición de que todas las descomposiciones de un módulo se refinen en descomposiciones inescindibles finitas. Probaremos que todos los módulos sd-artinianos satisfacen esta condición y que esta condición es estrictamente más fuerte que la condición de que un módulo tenga descomposiciones inescindibles finitas, lo que probará a su vez que ni la clase de todos los módulos con sd-dimensión de Goldie finita ni la clase de todos los módulos sd-artinianos son cerradas bajo sumas directas finitas. Finalmente, probaremos que, mientras que no sabemos si existen módulos con sd-dimensión de Krull que no tengan descomposiciones inescindibles finitas, todos los módulos con sd-dimensión de Krull satisfacen una condición muy parecida a la condición de que todas sus descomposiciones se refinen en descomposiciones inescindibles finitas.

En la sección 6 estableceremos algunas relaciones entre los sumandos directos de un módulo y los idempotentes de su anillo de endomorfismos. Usaremos esto para probar, entre otras cosas, que tanto la condición de que un módulo M tenga sd-dimensión de Goldie finita como la condición de que M sea sd-artiniano están completamente determinadas por el anillo de endomorfismos $End\,(M)$ de M. Haremos esto, a fin de mantener la exposición sencilla y autocontenida, en términos elementales, es decir, sin recurrir a ningún tipo de lenguaje categórico.

En la sección 7 pondremos a la clase de todos los módulos sd-artinianos en términos de las clases de módulos definidas en las secciones 1, 2 y 3. Más precisamente, probaremos que si M es un módulo sd-artiniano y Ω es alguna de las clases de módulos definidas en las secciones 1, 2 y 3, y M tiene sumandos directos no triviales en Ω, entonces existe una descomposición $M = A \oplus B$ de M tal que $A \in \Omega$ y tal que B no tiene sumandos directos no triviales en Ω. Probaremos también que si Ω es la clase de todos los módulos que tienen longitud finita, entonces esta descomposición es única salvo por isomorfismos.

Finalmente, en la sección 8 definiremos las que llamaremos las condiciones AKS_i $(1 \leq i \leq 4)$, y probaremos que para cada $2 \leq i \leq 4$ la clase de todos los módulos con la condición AKS_1 está contenida propiamente en la clase de todos los módulos con la condición AKS_i, es decir, probaremos que mientras que la condición AKS_1 implica a cada una de las condiciones AKS_i $(2 \leq i \leq 4)$, ninguna de estas condiciones implica a la condición AKS_1. Sin embargo, probaremos que para cada $2 \leq i \leq 4$ la condición AKS_i junto con alguna de las condiciones definidas en las secciones 5 y 6 implica a la condición AKS_1. Por ejemplo, probaremos que dentro de la clase de todos los módulos con sd-dimensión de Goldie finita todas las condiciones AKS_i $(1 \leq i \leq 4)$ son equivalentes. Esto último caracterizará al complemento de la clase de todos los módulos con la condición AKS_1 dentro de la clase de todos los módulos con sd-dimensión de Goldie finita.

1. Las condiciones de cadena

En esta primera sección estudiaremos las condiciones de cadena. Definiremos los conceptos de módulo artiniano, módulo neteriano, y de la longitud de un módulo. Empezaremos con la siguiente definición.

Definición. Sea A un copo. Diremos que A tiene la condición descendente de cadena si para cada cadena descendente $a_1 \geq a_2 \geq ...$ en A existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_m = a_n$ para cada $m \geq n$, y diremos que A tiene la condición ascendente de cadena si su copo dual A^*, tiene la condición descendente de cadena.

Es claro que un copo A tiene la condición descendente (ascendente) de cadena si y sólo si todos los subconjuntos no vacios de A tienen elementos mínimos (máximos). Es claro también que si A tiene la condición descendente (ascendente) de cadena, entonces todos los subcopos de A tienen la condición descendente (ascendente) de cadena. El siguiente ejemplo prueba que en general la condición descendente (ascendente) de cadena no implica a la condición ascendente (descendente) de cadena.

Ejemplo. $\mathbb{N}$ con el orden usual tiene la condición descendente de cadena pero no tiene la condición ascendente de cadena, y entonces $\mathbb{N}$ con el orden dual al orden usual tiene la condición ascendente de cadena pero no tiene la condición descendente de cadena.

Diremos que un módulo M es artiniano (neteriano) si su retícula de submódulos $\mathcal{L}(M)$, tiene la condición descendente (ascendente) de cadena. Se sigue, de la definición, que M es artiniano (neteriano) si y sólo si todos los conjuntos no vacios de submódulos de M tienen elementos mínimos (máximos). Se sigue, también de la definición, que la clase de todos los módulos artinianos (neterianos) es cerrada bajo submódulos. La siguiente proposición dice que esta clase también es cerrada bajo cocientes y extensiones, por lo que también es cerrada bajo sumas directas finitas y sumandos directos.

Proposición 1. Sean M un módulo y $N \leq M$. M es artiniano (neteriano) si y sólo si N y $\frac{M}{N}$ son artinianos (neterianos).

Demostración. Probaremos el caso artiniano. Supongamos primero que M es artiniano. Como $\mathcal{L}(N)$ es una subretícula de $\mathcal{L}(M)$ y la retícula $\mathcal{L}\left(\frac{M}{N}\right)$ es isomorfa, por el Teorema de la correspondencia, a una subretícula de $\mathcal{L}(M)$, entonces N y $\frac{M}{N}$ también son artinianos.

Supongamos ahora que N y $\frac{M}{N}$ son artinianos. Sea $M_1 \geq M_2 \geq ...$ una cadena descendente de submódulos de M. Entonces $M_1 \cap N \geq M_2 \cap N \geq ...$ es una cadena descendente desubmódulos de N y $\frac{M_1+N}{N} \geq \frac{M_2+N}{N} \geq ...$ es una cadena descendente de submódulos de $\frac{M}{N}$. Se sigue que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{M_m \cap N}{M_{m+1} \cap N} = 0 = \frac{M_m + N}{M_{m+1} + N}$ para cada $m \geq n$. Así, como las sucesiones

$$0 \to \frac{M_m \cap N}{M_{m+1} \cap N} \to \frac{M_m}{M_{m+1}} \to \frac{M_m + N}{M_{m+1} + N} \to 0$$

son exactas para cada $m \in \mathbb{N}$, entonces $M_m = M_{m+1}$ para cada $m \geq n$, de lo que se sigue que M es artiniano. El caso neteriano es análogo.

Corolario 1. Sea $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ una descomposición de un módulo M. M es artiniano (neteriano) si y sólo si M_i es artiniano (neteriano) para cada $i \in I_n$.

En general un módulo artiniano no tiene porque ser neteriano ni un módulo neteriano tiene porque ser artiniano (ej. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ y $\mathbb{Z}$ respectivamente). En lo que resta de esta sección buscaremos caracterizar a los módulos que son a su vez artinianos y neterianos. Empezaremos con la siguiente definición.

Definición. Sea M un módulo. Diremos que una cadena $M_1 \geq ... \geq M_n$ de submódulos de M es una serie de composición si $M_1 = M$, $M_n = 0$, y M_{i+1} es un submódulo máximo de M_i para cada $i \in I_{n-1}$.

Diremos que dos series de composición $M_1 \geq ... \geq M_n$ y $N_1 \geq ... \geq N_m$ de un módulo M son equivalentes si $n = m$ y existe una biyección ψ de I_n tal que $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ y $\frac{N_{\psi(i)}}{N_{\psi(i)+1}}$ son módulos isomorfos para cada $i \in I_{n-1}$.

Teorema 1. (Jordan y Hölder) Sea M un módulo. Si M tiene series de composición, entonces todas las series de composición de M son equivalentes.

Demostración. Supongamos que M tiene series de composición. Sea n la menor de las longitudes de las series de composición de M. La demostración se hará por inducción sobre n. El caso en el que $n = 1$ es trivial. Supongamos ahora que el Teorema es cierto para cada $m < n$. Sean

$$M_1 \geq M_2 \geq ... \geq M_n \text{ y } N_1 \geq N_2 \geq ... \geq N_s$$

dos series de composición de M. Supongamos que $M_2 = N_2$. Entonces, por la hipótesis de inducción, las series $M_2 \geq ... \geq M_n$ y $N_2 \geq ... \geq N_s$ son equivalentes, de lo que se sigue que las series $M_1 \geq ... \geq M_n$ y $N_1 \geq ... \geq N_s$ son equivalentes. Supongamos ahora que $M_2 \neq N_2$. Entonces, por ser M_2 y N_2 dos submódulos máximos de M, se tiene que $M_2 + N_2 = M$. De esto se sigue que $\frac{M}{M_2}$ y $\frac{N_2}{M_2 \cap N_2}$ son módulos isomorfos, y que $\frac{M}{N_2}$ y $\frac{M_2}{M_2 \cap N_2}$ son módulos isomorfos, de lo que se concluye que $M_2 \cap N_2$ es un submódulo máximo de M_2 y de N_2. Si $M_2 \cap N_2 = L_1 \geq ... \geq L_k$ es una serie de composición de $M_2 \cap N_2$ (existe tal ya que $M_2 \cap N_2 \leq M$), entonces, por la hipótesis de inducción, las series de composición

$$M_1 \geq M_2 \geq ... \geq M_n \text{ y } M_1 \geq M_2 \geq L_1 \geq ... \geq L_k$$

son equivalentes, y ya que $k+1<n$, entonces, nuevamente por la hipótesis de inducción, también las series de composición

$$N_1 \geq N_2 \geq ... \geq N_s \text{ y } N_1 \geq N_2 \geq L_1 \geq ... \geq L_k$$

son equivalentes. De esto y del hecho de que $\frac{M}{M_2}$ y $\frac{N_2}{M_2 \cap N_2}$ son módulos isomorfos, y de que $\frac{M}{N_2}$ y $\frac{M_2}{M_2 \cap N_2}$ son módulos isomorfos se sigue que las series $M_1 \geq ... \geq M_n$ y $N_i \geq ... \geq N_s$ son equivalentes. Esto concluye la demostración.

El teorema anterior nos permitirá definir la longitud de un módulo. Diremos que un módulo M tiene longitud n si M tiene series de composición de longitud $n+1$. Si $M=0$, diremos que M tiene longitud 0, y si $M \neq 0$ y M no tiene series de composición, entonces diremos que M tiene longitud infinita. Denotaremos por $\ell(M)$ a la longitud de M. La siguiente proposición caracteriza a los módulos que tienen longitud finita como los módulos que son a su vez artinianos y neterianos, y como los módulos que no tienen cadenas arbitrariamente grandes. Para precisar sobre esto último definiremos lo siguiente: Diremos que una cadena finita $a_1 \geq ... \geq a_n$ en un copo A es irreducible si $a_i \neq a_{i+1}$ para cada $i \in I_{n-1}$.

Proposición 2. Las siguientes condiciones para un módulo M son equivalentes.

1. M es artiniano y neteriano.
2. M tiene longitud finita.
3. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{L}(M)$ no tiene cadenas irreducibles de longitud mayor que n.

Más aún, si M cumple con estas condiciones, entonces $\ell(M)+1$ es la mayor de las longitudes de las cadenas irreducibles de $\mathcal{L}(M)$.

Demostración. 1⇒2 Supongamos primero que M es artiniano y neteriano. Construiremos recursivamente una cadena descendente $M_1 \geq M_2 \geq ...$ de submódulos de M tal que $M_1 = M$, y tal que M_{i+1} es un submódulo máximo de M_i para cada $i \in \mathbb{N}$ tal que $M_i \neq 0$. Sea $M_1 = M$. Supongamos ahora que hemos construido una cadena $M_1 \geq ... \geq M_m$ de submódulos de M tal que $M_i \neq 0$ para cada $i \in I_m$, y tal que M_{i+1} es un submódulo máximo de M_i para cada $i \in I_{m-1}$. Como M es neteriano y $M_m \leq M$, entonces M_m es neteriano, de lo que se sigue que M_m tiene submódulos máximos. Tomemos M_{m+1} un submódulo máximo de M_m. Sea n el menor número natural con la propiedad de que $M_m = M_n$ para cada $m \geq n$ (tal número existe ya que M es artiniano). Es claro, por la construcción de la cadena $M_1 \geq M_2 \geq ...$, que $M_1 \geq ... \geq M_n$ es una serie de composición de M.

2⇒1 Supongamos ahora que M tiene longitud finita. Probaremos, por inducción sobre $\ell(M)$, que M es artiniano y neteriano. El caso en el que $\ell(M)=1$

es trivial. Supongamos ahora que esto es cierto para cada $m < \ell(M)$. Sea $M_1 \geq ... \geq M_n$ una serie de composición de M. M_2 y $\frac{M}{M_2}$ son artinianos y neterianos ya que $\ell(M_2) < \ell(M)$ y ya que $\frac{M}{M_2}$ es un módulo simple. Se sigue, por la Proposición 3, que M es artiniano y neteriano.

2$\Rightarrow$3 Supongamos que M tiene longitud finita. Probaremos, por inducción sobre $\ell(M)$, que $\mathcal{L}(M)$ no tiene cadenas irreducibles de longitud mayor que $\ell(M)+1$. El caso en el que $\ell(M)=1$ es trivial. Supongamos ahora que esto es cierto para cada $m < \ell(M)$. Sea $M_1 \geq M_2 \geq ... \geq M_n$ una cadena irreducible en $\mathcal{L}(M)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $M_1 = M$. Sea N un submódulo máximo de M tal que $M_2 \leq N$ (tal módulo existe ya que M es neteriano). Es claro, por la construcción hecha en la primera parte de 1$\Leftrightarrow$2, que $\ell(N) = \ell(M) + 1$. Así, ya que $M_2 \geq ... \geq M_n$ es una cadena irreducible en $\mathcal{L}(N)$, se sigue, por la hipótesis de inducción, que $n \leq \ell(M) + 1$.

3$\Rightarrow$2 es trivial, y la última parte de la Proposición se probó en 2$\Rightarrow$3. Esto concluye la demostración.

De la condición 1 de la proposición anterior se sigue que la clase de todos los módulos que tienen longitud finita es cerrada bajo submódulos, cocientes, y extensiones, y por lo tanto es cerrada bajo sumas directas finitas y bajo sumandos directos. Esto prueba la primera parte del siguiente corolario. La segunda parte es una consecuencia de la definición de la longitud de un módulo.

Corolario 2. Sea $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ una descomposición de un módulo M. M tiene longitud finita si y sólo si M_i tiene longitud finita para cada $i \in I_n$. En ese caso

$$\ell(M) = \sum_{i=1}^{n} \ell(M_i).$$

2. La desviación de un copo

En esta sección generalizaremos lo hecho en la sección anterior. Definiremos la desviación de un copo, y definiremos la dimensión de Krull y la dimensión dual de Krull de un módulo.

Empezaremos definiendo recursivamente una sucesión D_α ($\alpha \in ORD \cup \{-1\}$) de clases de copos como sigue: D_{-1} será la clase de todos los copos triviales, es decir, D_{-1} será la clase de todos los copos A tales que $a \leq b$ en A implica que $a = b$. Supongamos ahora que hemos definido a D_β para cada $\beta < \alpha$. Entonces D_α será la clase de todos los copos A que cumplen con las siguientes condiciones:

1. $A \notin \bigcup\limits_{\beta < \alpha} D_\beta$.
2. Para cada cadena descendente $a_1 \geq a_2 \geq ...$ en A, se tiene que $[a_{n+1}, a_n] \in \bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$.

Es claro que $D_\alpha \cap D_\beta = \varnothing$ siempre que $\alpha \neq \beta$. Así, diremos que un copo A tiene desviación α (dev$A = \alpha$) si $A \in D_\alpha$. Se sigue, de la definición, que un copo no trivial A tiene la condición descendente de cadena si y sólo si dev$A = 0$. Probaremos a continuación que también los copos con la condición ascendente de cadena tienen desviación. Para esto necesitaremos el siguiente lema.

Lema 1. Sean A un copo y B un subcopo de A. Si A tiene desviación, entonces B tiene desviación, y dev$B \leq$dev$A$.

Demostración. La demostración se hará por inducción transfinita sobre $\alpha =$dev$A$. El caso en el que $\alpha = -1$ es trivial. Supongamos ahora que el resultado es cierto para cada $\beta < \alpha$. Si $b_1 \geq b_2 \geq ...$ una cadena descendente en B, entonces $b_1 \geq b_2 \geq ...$ es una cadena descendente en A, de lo que se sigue que casi para cada $n \in \mathbb{N}$, el intervalo $[b_{n+1}, b_n]$ en A tiene desviación menor que α. Así, como para cada $n \in \mathbb{N}$, el intervalo $[b_{n+1}, b_n]$ en B es un subcopo del intervalo $[b_{n+1}, b_n]$ en A, se sigue, por la hipótesis de inducción, que casi para todo $n \in \mathbb{N}$, el intervalo $[b_{n+1}, b_n]$ tiene desviación menor que α. De esto se sigue que B tiene desviación, y que dev$B \leq \alpha$.

Proposición 1. Sea A un copo. Si A tiene la condición ascendente de cadena, entonces A tiene desviación.

Demostración. Es fácil ver que si A tiene la condición ascendente de cadena, entonces A es isomorfo a un subcopo de un copo con la condición ascendente de cadena y con elementos menor y mayor 0 y 1. Por lo que bastará probar el resultado suponiendo que A tiene elementos menor y mayor 0 y 1.

Supongamos que A no tiene desviación. Sea a_0 un máximo en el conjunto $\{a \in A : [a, 1] \text{ no tiene desviación}\}$. Sea α_0 el ordinal más grande en el conjunto $\{\alpha \in ORD : \operatorname{dev}[a, 1] = \alpha \text{ para algún } a \in [a_0, 1]\}$. Probaremos que $\operatorname{dev}[a_0, 1] \leq \alpha_0 + 1$. Esto dará una contradicción al hecho de que A no tiene desviación.

Sea $a_1 \geq a_2 \geq ...$ una cadena descendente en $[a_0, 1]$. Si no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = a_0$, entonces, como $[a_{i+1}, a_i] \subseteq [a_{i+1}, 1]$ y $\operatorname{dev}[a_{i+1}, 1] \leq \alpha_0$ para cada $i \in \mathbb{N}$, se sigue que $\operatorname{dev}[a_{i+1}, a_i] \leq \alpha_0$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Ahora, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = a_0$, entonces $\operatorname{dev}[a_{i+1}, a_i] = -1$ para cada $i \geq n$. Así, como en cualquier caso $\operatorname{dev}[a_{i+1}, a_i] \leq \alpha_0$ casi para todo $i \in \mathbb{N}$, se sigue que $\operatorname{dev}[a_0, 1] \leq \alpha_0 + 1$. Esto concluye la demostración.

La proposición anterior prueba, entre otras cosas, que aunque un copo A y su dual A^* tengan desviación, estas no tienen porque ser iguales. El siguiente ejemplo prueba que hay copos que no tienen desviación.

Ejemplo. $\mathbb{R}$, con el orden usual, no tiene desviación.

Efectivamente. Supongamos que existe $\alpha \in ORD$ tal que $\operatorname{dev}\mathbb{R} = \alpha$. Todos los intervalos de la forma $[i-1, i]$ con $i \leq 0$, que son los intervalos que define la cadena descendente $0 < -1 < -2 < ...$ en $\mathbb{R}$, tienen subcopos isomorfos a $\mathbb{R}$. Esto implica que $\operatorname{dev}[i-1, i] \geq \alpha$ para cada $i \leq 0$. Lo que contradice el hecho de que $\operatorname{dev}\mathbb{R} = \alpha$.

Definiremos la dimensión de Krull de un módulo M como la desviación de su retícula de submódulos $\mathcal{L}(M)$, y definiremos la dimensión dual de Krull de M como la desviación de el copo dual de $\mathcal{L}(M)$. Denotaremos por $K \dim M$ y por $d.K \dim M$ a la dimensión de Krull y a la dimensión dual de Krull de M respectivamente. Es claro, de la definición, que un módulo M es artiniano (neteriano) si y sólo si $K \dim M = 0$ ($d.K \dim M = 0$), y que todos los módulos neterianos (artinianos) tienen dimensión (dual) de Krull. La siguiente proposición dice que tanto la clase de todos los módulos con dimensión de Krull como la clase de todos los módulos con dimensión dual de Krull son cerradas bajo submódulos, cocientes, y extensiones, y por lo tanto bajo sumas directas finitas y sumandos directos.

Proposición 2. Sean M un módulo y $N \leq M$.

1. M tiene dimensión de Krull si y sólo si N y $\frac{M}{N}$ tienen dimensión de Krull. En ese caso:
$$K \dim M = máx \left\{ K \dim N, K \dim \frac{M}{N} \right\}.$$
2. M tiene dimensión dual de Krull si y sólo si N y $\frac{M}{N}$ tienen dimensión dual de Krull. En ese caso:
$$d.K \dim M = máx \left\{ d.K \dim N, d.K \dim \frac{M}{N} \right\}.$$

Demostración. Probaremos 1. Supongamos que M tiene dimensión de Krull. Entonces, por un argumento análogo al del caso artiniano, N y $\frac{M}{N}$ tienen dimensión de Krull, y $K\dim M \geq \textit{máx}\left\{K\dim N, K\dim \frac{M}{N}\right\}$.

Supongamos ahora que N y $\frac{M}{N}$ tienen dimensión de Krull. Probaremos por inducción transfinita sobre $\alpha = \textit{máx}\left\{K\dim N, K\dim \frac{M}{N}\right\}$, que M tiene dimensión de Krull, y que $K\dim M \leq \alpha$. El caso en el que $\alpha = -1$ es trivial. Supongamos ahora que esto es cierto para cada $\beta < \alpha$. Sea $M_1 \geq M_2 \geq ...$ una cadena descendente de submódulos de M. Entonces $M_1 \cap N \geq M_2 \cap N \geq ...$ es una cadena descendente de submódulos de N, y $\frac{M_1+N}{N} \geq \frac{M_2+N}{N} \geq ...$ es una cadena descendente de submódulos de $\frac{M}{N}$. Se sigue que $\frac{M_n \cap N}{M_{n+1}\cap N}$ y $\frac{M_n+N}{M_{n+1}+N}$ tienen dimensión de Krull menor que α casi para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, ya que al igual que en el caso artiniano las sucesiones

$$0 \to \frac{M_n \cap N}{M_{n+1} \cap N} \to \frac{M_n}{M_{n+1}} \to \frac{M_n + N}{M_{n+1} + N} \to 0$$

son exactas para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue, por la hipótesis de inducción, que $\frac{M_n}{M_{n+1}}$ tiene dimensión de Krull menor que α casi para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, M tiene dimensión de Krull, y $K\dim M \leq \alpha$. Esto demuestra 1. La demostración de 2 es análoga.

Corolario 1. Sea $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ una descomposición de un módulo M.

1. M tiene dimensión de Krull si y sólo si M_i tiene dimensión de Krull para cada $i \in I_n$. En ese caso:

$$K\dim M = \textit{máx}\left\{K\dim M_i : i \in I_n\right\}.$$

2. M tiene dimensión dual deKrull si y sólo si M_i tiene dimensión dual de Krull para cada $i \in I_n$. En ese caso:

$$d.K\dim M = \textit{máx}\left\{d.K\dim M_i : i \in I_n\right\}.$$

3. La dimensión de Goldie de una retícula

En esta sección definiremos la dimensión de Goldie de una retícula, la dimensión de Goldie de un módulo y la dimensión dual de Goldie de un módulo. Enunciaremos el Teorema de Grzeszczuck y Puczylowski y probaremos que tanto la clase de todos los módulos con dimensión de Krull como la clase de todos los módulos con dimensión dual de Krull están contenidas en la clase de todos los módulos con dimensión de Goldie finita. Empezaremos con algunas definiciones.

Diremos que un subconjunto finito $\{a_1, ..., a_n\}$, de una retícula L con elementos menor y mayor 0 y 1, es independiente si para cada $i \in I_n$, $a_i \neq 0$ y $a_i \wedge \left(\bigvee_{j\neq i} a_j\right) = 0$. En general, diremos que $A \subseteq L$ es independiente si todos los subconjuntos finitos de A son independientes.

Definición. Sean L una retícula con 0 y 1, y $\aleph$ un cardinal. Diremos que L tiene dimensión de Goldie $\aleph$ si $\aleph$ es la mayor de las cardinalidades de los subconjuntos independientes de L.

Diremos que una retícula L es modular si $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$ para cualesquiera $a, b, c \in L$, con $c \leq a$. Estaremos interesados principalmente en estudiar la dimensión de Goldie de una retícula modular L con elementos menor y mayor 0 y 1. Para hacer esto necesitaremos las siguientes definiciones: Diremos que $a \in L$ es esencial en L ($a \in_e L$) si $a \wedge b \neq 0$ para cada $b \in L \setminus \{0\}$. Si $a, b \in L$ son tales que $a \in_e [0, b]$, entonces diremos que a es esencial en b. Diremos que L es una retícula uniforme si para cada $a \in L \setminus \{0\}$ se tiene que $a \in_e L$. Finalmente, si $a \in L$ es tal que el intervalo $[0, a]$ es una subretícula uniforme de L, entonces diremos que a es un elemento uniforme de L. El siguiente teorema caracteriza a la dimensión de Goldie de una retícula modular que no tiene subconjuntos independientes infinitos. Una demostración de este resultado se puede encontrar en el apéndice.

Teorema 1. (Grzeszczuk y Puczylowski) Las siguientes condiciones para una retícula modular L con 0 y 1 son equivalentes.

1. L tiene dimensión de Goldie finita.
2. L no tiene subconjuntos independientes infinitos.
3. Existe $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq L$, independiente, con $\bigvee_{i=1}^{n} a_i \in_e L$, y tal que a_i es uniforme para cada $i \in I_n$.
4. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que L no tiene subconjuntos independientes de cardinalidad mayor que n.
5. Si $a_1 \leq a_2 \leq ...$ es una cadena ascendente en L, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que a_N es esencial en a_n para cada $n \geq N$.

Más aún, si L cumple con las condiciones del Teorema y $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq L$ es tal que $\bigvee_{i=1}^{n} a_i \in_e L$, y tal que a_i es uniforme para cada $i \in I_n$, entonces la dimensión de Goldie de L es igual a n.

Ahora, es fácil ver que la retícula de submódulos de un módulo es una retícula modular. A lo largo de esta y de las siguientes secciones, nos referiremos a este resultado como la ley modular. Definiremos la dimensión de Goldie de un módulo M, que denotaremos por $G\dim M$, como la dimensión de Goldie de su retícula de submódulos $\mathcal{L}(M)$. Notemos que los subconjuntos independientes de $\mathcal{L}(M)$ son precisamente los conjuntos independientes de submódulos de M en el sentido usual, es decir $\{M_1, ..., M_n\} \subseteq \mathcal{L}(M)$ es independiente si y sólo si $\sum_{i=1}^{n} M_i = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \leq M$. De esta observación, de la definición anterior, y del Teorema 1 se sigue que tanto todos los módulos artinianos como todos los módulos neterianos tienen dimensión de Goldie finita. La siguiente proposición generaliza esto.

Proposición 2. Sea M un módulo. Si M tiene dimensión de Krull o dimensión dual de Krull, entonces M tiene dimensión de Goldie finita.

Demostración. Supongamos que M tiene dimensión de Goldie infinita. Entonces existen $N \leq M$ y $N = \bigoplus_A N_\alpha$ una descomposición de N tal que A es un conjunto infinito. Supongamos que $A = \mathbb{Q}$. Entonces la función $x \mapsto \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Q}: \alpha \leq x} N_\alpha$ define un monomorfismo de orden de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{L}(M)$. Así, M no podría tener ni dimensión de Krull, ni dimensión dual de Krull, pues si M tuviera dimensión de Krull, entonces $\mathbb{R}$ tendría desviación, y si M tuviera dimensión dual de Krull, entonces $\mathbb{R}^*$ tendría desviación, lo que implicaria, ya que $\mathbb{R}^*$ y $\mathbb{R}$ son copos isomorfos, que $\mathbb{R}$ tiene desviación.

Así, tanto la clase de todos los módulos con dimensión de Krull, como la clase de todos los módulos con dimensión dual de Krull están contenidas en la clase de todos los módulos con dimensión de Goldie finita. Esta contención es propia, ya que ningún módulo con dimensión de Goldie finita que tenga cocientes con dimensión de Goldie infinita (ej. $\mathbb{Q}$) tiene dimensión de Krull ni dimensión dual de Krull.

Ahora, es fácil ver que una retícula L es modular si y sólo si su retícula dual L^* es modular. Así, definiremos la dimensión dual de Goldie de un módulo M, que denotaremos por $\text{codim}M$, como la dimensión de Goldie de $\mathcal{L}(M)^*$. Diremos que un submódulo propio N de M es superfluo en M si $N \in_e \mathcal{L}(M)^*$. Se sigue, de la condición 4 del Teorema 1 y del Teorema de la correspondencia, que M tiene dimensión dual de Goldie finita si y sólo si para cada cadena descendente $M_1 \geq M_2 \geq ...$ de submódulos de M existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{M_m}{M_{m+1}}$ es un submódulo superfluo de $\frac{M}{M_{m+1}}$ para cada $m \geq n$. De esto se sigue que todos los módulos artinianos tienen dimensión dual de Goldie finita. El siguiente ejemplo prueba que existen módulos neterianos que no tienen dimensión dual de Goldie finita.

Ejemplo. El $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$ tiene dimensión dual de Goldie infinita.

Efectivamente, si $\mathbb{P}$ es el conjunto de todos los números primos, entonces el conjunto $\{p\mathbb{Z} : p \in \mathbb{P}\}$ es un subconjunto infinito de $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$, independiente en $\mathcal{L}(\mathbb{Z})^*$.

Es fácil ver que tanto la clase de todos los módulos con dimensión de Goldie finita como la clase de todos los módulos con dimensión dual de Goldie finita son cerradas bajo sumas directas finitas y bajo sumandos directos. Esto es la primera parte de los dos incisos de la siguiente proposición. La segunda parte se sigue fácilmente de las definiciones correspondientes.

Proposición 3. Sea $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ una descomposición de un módulo M.

1. M tiene dimensión de Goldie finita si y sólo si M_i tiene dimensión de Goldie finita para cada $i \in I_n$. En ese caso:

$$G\dim M = \sum_{i=1}^{n} G\dim M_i.$$

2. M tiene dimensión dual de Goldie finita si y sólo si M_i tiene dimensión dual de Goldie finita para cada $i \in I_n$. En ese caso:

$$\text{codim} M = \sum_{i=1}^{n} \text{codim} M_i.$$

.

4. Otras condiciones de finitud

En esta sección generalizaremos lo hecho en las secciones anteriores. Estudiaremos tres nuevas clases de módulos, a saber, la clase de todos los módulos con sd-dimensión de Krull, la clase de todos los módulos sd-artinianos, y la clase de todos los módulos con sd-dimensión de Goldie finita. Estudiaremos, entre otras cosas, las relaciones que existen entre ellas, y probaremos que todas estas clases tienen propiamente contenidas a cada una de las clases definidas en las secciones 1, 2 y 3.

A lo largo de esta, y de las siguientes secciones, denotaremos por $S(M)$ al conjunto de todos los sumandos directos del módulo M, y pensaremos siempre en $S(M)$ como en un subcopo de la retícula de submódulos $\mathcal{L}(M)$ de M. La siguiente proposición dice que a diferencia de $\mathcal{L}(M)$, $S(M)$ tiene desviación si y sólo si su copo dual $S(M)^*$ tiene desviación, y que en ese caso, estas son iguales.

Proposición 1. Sea M un módulo. $S(M)$ tiene desviación si y sólo si $S(M)^*$ tiene desviación. En ese caso:

$$\text{dev} S(M) = \text{dev} S(M)^*$$

Demostración. Supongamos que $S(M)$ tiene desviación α. Probaremos por inducción transfinita sobre α, que $S(M)^*$ también tiene desviación y que $\text{dev} S(M)^* \leq \alpha$. El caso en el que $\alpha = -1$ es trivial. Supongamos ahora que esto es cierto para cada $\beta < \alpha$. Sea $M_1 \leq M_2 \leq ...$ una cadena ascendente en $S(M)$ (e.d. una cadena descendente en $S(M)^*$). Construiremos recursivamente una cadena descendente $N_1 \geq N_2 \geq ...$ en $S(M)$ tal que $M = M_n \oplus N_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Haremos N_1 de manera que $M = M_1 \oplus N_1$. Supongamos ahora que para algún $n \in \mathbb{N}$ hemos construido una cadena descendente $N_1 \geq N_2 \geq ... \geq N_n$ en $S(M)$ tal que $M = M_i \oplus N_i$ para cada $i \in I_n$. Es claro, por la ley modular, que $M_{n+1} = M_n \oplus (M_{n+1} \cap N_n)$. Así, $M_{n+1} \cap N_n$ es un sumando directo de M, que a su vez es un submódulo de N_n. De esto se sigue que $M_{n+1} \cap N_n$ es un sumando directo de N_n. Haremos N_{n+1} de manera que $N_n = (M_{n+1} \cap N_n) \oplus N_{n+1}$. Es claro que $M = M_{n+1} \oplus N_{n+1}$.

Por como se construyó la cadena $N_1 \geq N_2 \geq ...$, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$, los módulos $\frac{M_{n+1}}{M_n}$, $M_{n+1} \cap N_n$, y $\frac{N_n}{N_{n+1}}$ son módulos isomorfos, de lo que se sigue que $S\left(\frac{M_{n+1}}{M_n}\right)$ y $S\left(\frac{N_n}{N_{n+1}}\right)$ son copos isomorfos para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero como $\text{dev} S(M) = \alpha$, entonces $\text{dev} S\left(\frac{N_n}{N_{n+1}}\right) < \alpha$ casi para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\text{dev} S\left(\frac{M_{n+1}}{M_n}\right) < \alpha$ casi para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, de la hipótesis de inducción, se tiene que $\text{dev} S\left(\frac{M_{n+1}}{M_n}\right)^* < \alpha$ casi para todo $n \in \mathbb{N}$. De esto, y del hecho de que para cualesquiera dos sumandos directos N y L de M tales que $N \leq L$ se tiene que el intervalo $[N, L]$ en $S(M)$ es isomorfo a $S\left(\frac{L}{N}\right)$ y que el intervalo

$[L,N]$ en $S(M)^*$ es isomorfo a $S\left(\frac{N}{L}\right)^*$, se sigue que $S(M)^*$ tiene desviación, y que dev$S(M)^* \leq \alpha$.

Análogamente se prueba que si $S(M)^*$ tiene desviación, entonces $S(M)$ tiene desviación, y que dev$S(M) \leq$dev$S(M)^*$. Esto concluye la demostración.

Definiremos la *sd*-dimensión de Krull de un módulo M, que denotaremos por $sd.K\dim M$, como la desviación de $S(M)$. Así, la proposición anterior dice que M tiene *sd*-dimensión de Krull si y sólo si $S(M)^*$ tiene desviación, y que en este caso $sd.K\dim M = \text{dev}S(M)^*$. Otra consecuencia de la Proposición 1 es el hecho de que las condiciones de cadena siempre son equivalentes sobre el conjunto de sumandos directos $S(M)$ de un módulo M. La siguiente proposición dice que estas condiciones son equivalentes a la condición de que $S(M)$ no tenga subconjuntos independientes infinitos de $\mathcal{L}(M)$.

Proposición 2. Las siguientes condiciones para un módulo M son equivalentes.

1. $S(M)$ no tiene subconjuntos infinitos independientes en $\mathcal{L}(M)$.
2. $S(M)$ tiene la condición ascendente de cadena.
3. $S(M)$ tiene la condición descendente de cadena.
4. $sd.K\dim M = 0$.

Demostración. Las condiciones 2, 3 y 4 son equivalentes por la Proposición 1. Bastará probar entonces, que estas condiciones son equivalentes a la condición 1. Esto lo haremos probando que las condiciones 1 y 2 son equivalentes.

Supongamos primero que $S(M)$ tiene cadenas ascendentes infinitas. Sea $M_1 \leq M_2 \leq ...$ una cadena ascendente infinita en $S(M)$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ hacemos M_n' de manera que $M_{n+1} = M_n \oplus M_n'$, entonces el conjunto $\{M_n' : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto infinito de $S(M)$, independiente en $\mathcal{L}(M)$.

Supongamos ahora que $S(M)$ tiene subconjuntos infinitos independientes en $\mathcal{L}(M)$. Sea $\{M_i : i \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto infinito de $S(M)$, independiente en $\mathcal{L}(M)$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ hacemos $M_n' = \bigoplus_{i=1}^n M_i$, entonces la cadena $M_1' \leq M_2' \leq ...$ es una cadena ascendente infinita en $S(M)$. Así, las condiciones 1 y 2 son equivalentes. Esto concluye la demostración.

Diremos que un módulo M es *sd*-artiniano si M satisface las condiciones de la proposición anterior. Es fácil ver que cada una de las clases de módulos definidas en la secciónes anteriores están propiamente contenidas en la clase de todos los módulos *sd*-artinianos, y que esta última está a su vez contenida en la clase de todos los módulos con *sd*-dimensión de Krull. No sabemos sin embrgo, si esta última contención es propia o no.

Ahora, en el sentido de la condición 1 de la proposición anterior, la condición de que un módulo M sea *sd*-artiniano generaliza naturalmente a la condición de que M tenga dimensión de Goldie finita. Sin embargo no podemos, en base a la proposición anterior, asociarles invariantes finitos a los módulos *sd*-artinianos que generalicen naturalmente a la dimensión de Goldie de los módulos con dimensión de Goldie finita. La siguiente definición nos permitirá resolver este problema para una subclase de la clase de todos los módulos *sd*-artinianos.

Definición. Sean M un módulo y $\aleph$ un cardinal. Diremos que $\aleph$ es la *sd*-dimensión de Goldie de M si $\aleph$ es la mayor de las cardinalidades de los subconjuntos de $S(M)$, que son independientes en $\mathcal{L}(M)$. Si existe, denotaremos por $sd.G\dim M$ a la *sd*-dimensión de Goldie de M.

Estaremos interesados principalmente en los módulos con *sd*-dimensión de Goldie finita. Es claro que la clase de todos los módulos con *sd*-dimensión de Goldie finita es una subclase de la clase de todos los módulos *sd*-artinianos. No sabemos sin embargo, si existen módulos *sd*-artinianos que no tengan *sd*-dimensión de Goldie finita. La siguiente proposición caracteriza a los módulos con *sd*-dimensión de Goldie finita.

Proposición 3. Las siguientes condiciones para un módulo M son equivalentes.

1. M tiene *sd*-dimensión de Goldie finita.
2. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que M no tiene descomposiciones de cardinalidad mayor que n.
3. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $S(M)$ no tiene cadenas irreducibles de longitud mayor que n.
4. Existen morfismos de orden de $S(M)$ en $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Más aún, si M cumple con las condiciones anteriores, entonces $sd.G\dim M$ es la mayor de las cardinalidades de las descomposiciones de M y la mayor de las longitudes de las cadenas irreducibles en $S(M)$.

Demostración. La equivalencia 1⇔2 es trivial.

2⇔3 Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos primero que M no tiene descomposiciones de cardinalidad mayor que n. Sea $M_1 \geq ... \geq M_m$ una cadena irreducible en $S(M)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $M_1 = M$. Si para cada $i \in I_{m-1}$ hacemos M_i' de manera que $M_i = M_{i+1} \oplus M_i'$, y hacemos $M_m' = M_m$, entonces $M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i'$ es una descomposición de M de cardinalidad m, de lo que se sigue que $m \leq n$.

Supongamos ahora que $S(M)$ no tiene cadenas irreducibles de longitud mayor que n. Sea $M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i$ una descomposición de M. Si para cada $i \in I_m$ hacemos $M_i' = \bigoplus_{j=1}^{i} M_j$, entonces $M_1' \geq ... \geq M_m'$ es una cadena irreducible en $S(M)$ de longitud m, de lo que se sigue que $m \leq n$.

1⇒4 Supongamos que M tiene sd-dimensión de Goldie finita. Entonces claramente todos los sumandos directos de M tienen sd-dimensión de Goldie finita. Así, podemos definir una función $sd.G\dim\_:S(M) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada sumando directo N de M le asocie su sd-dimensión de Goldie. La función $sd.G\dim\_$ así definida es un morfismo de orden de $S(M)$ en $\mathbb{N} \cup \{0\}$

4⇒2 Supongamos ahora que existen morfismos de orden de $S(M)$ en $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Sea $\alpha : S(M) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ un morfismo de orden. Probaremos por inducción sobre $\alpha(M)$, que todas las descomposiciones de M tienen cardinalidad menor o igual que $\alpha(M)$. El caso en el que $\alpha(M) = 0$ es trivial. Supongamos que esto es cierto para cada $0 \leq k \leq \alpha(M)$. Sea $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ una descomposición de M. $\alpha(M) \geq \alpha\left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i\right)+1$, y por la hipótesis de inducción $\alpha\left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i\right) \geq n-1$. Por lo que $\alpha(M) \geq n$. Así, M no tiene descomposiciones de cardinalidad mayor que $\alpha(M)$.

La última parte de la Proposición se sigue de 2⇔3, 1⇒4, y 4⇒2.

Si un módulo M tiene dimensión de Goldie finita o dimensión dual de Goldie finita, entonces para cada descomposición $M = N \oplus L$ de M se tienen las igualdades $G\dim M = G\dim N + G\dim L$ y $\text{codim}M = \text{codim}N + \text{codim}L$ respectivamente. Se sigue que en este caso las funciones $G\dim\_ : S(M) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\text{codim}\_:S(M) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada sumando directo de M le asocian su dimensión de Goldie y su dimensión dual de Goldie respectivamente, definen morfismos de orden de $S(M)$ en $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Esto implica, por la condición 4 de la proposición anterior, que las clases de módulos definidas en las secciones 1, 2 y 3 están contenidas en la clase de todos los módulos con sd-dimensión de Goldie finita. Es fácil ver que todas estas contenciones son propias.

Finalmente, si M tiene dimensión de Goldie finita, dimensión dual de Goldie finita, o longitud finita, entonces se cumple la siguiente desigualdad:

$$sd.G\dim M \leq \textit{mín}\{G\dim M, \text{codim}M, \ell(M)\}.$$

Más generalmente, si M tiene sd-dimensión de Goldie finita y $\mathcal{F}$ es el conjunto de todos los morfismos de orden de $S(M)$ en $\mathbb{N}\cup\{0\}$, ordenado en términos de las imágenes de sus elementos (e.d. $\alpha \leq \beta$ si y sólo si $\alpha(N) \leq \beta(N)$ para cada $N \in S(M)$), entonces $\mathcal{F}$ es un conjunto bien ordenado, y el morfismo $sd.G\dim\_$ definido en la proposición anterior es el elemento menor de $\mathcal{F}$.

5. Descomposiciones inescindibles finitas

En esta sección estudiaremos los tipos de descomposiciones que admiten los módulos con las condiciones de finitud definidas en la sección anterior. Empezaremos con el siguiente lema.

Lema 1. Sea M un módulo. Si M es sd-artiniano, entonces M tiene descomposiciones inescindibles finitas.

Demostración. Sea $\Im$ el conjunto de todos los sumandos directos de M que tienen descomposiciones inescindibles finitas. Como $S(M)$ tiene las condiciones de cadena, entonces $\Im$ tiene elementos máximos. Sea M' un máximo en $\Im$. Supongamos que $M' \neq M$. Si $M = M' \oplus N$, entonces $N \neq 0$, y como $N \in S(M)$, entonces $S(N)$ también tiene las condiciones de cadena. Sea N' un elemento máximo de $S(N) \setminus \{N\}$. Si $N = N' \oplus N''$, entonces $N'' \neq 0$ y N'' es inscindible. Así, $M' \oplus N''$ es un sumando directo de M que tiene descomposiciones inescindibles, y que tiene a M' como sumando directo propio. Esto contradice la maximalidad de M' en $\Im$.

Del lema anterior se sigue que todos los módulos con sd-dimensión de Goldie finita tienen descomposiciones inescindibles finitas. Más aún, si un módulo M tiene sd-dimensión de Goldie finita, entonces $sd.G\dim M$ es la cardinalidad de alguna descomposición inescindible de M. La siguiente proposición caracteriza a los módulos con sd-dimenasión de Goldie finita tales que todas sus descomposiciones inescindibles tienen la misma cardinalidad.

Proposición 1. Sea M un módulo con sd-dimensión de Goldie finita. Todas las descomposiciones inescindibles de M tienen la misma cardinalidad si y sólo si para cada descomposición $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ de M se tiene la igualdad

$$sd.G\dim M = \sum_{i=1}^{n} sd.G\dim M_i.$$

Demostración. Supongamos primero que todas las descomposiciones inescindibles de M tienen la misma cardinalidad. Esto implica que $sd.G\dim M$ es la cardinalidad de cualquier descomposición inescindible de M. Sea $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ una descomposición de M, y para cada $i \in I_n$ sea $M_i = \bigoplus_{j=1}^{n_i} M_{i_j}$ una descomposición inescindible de M_i tal que $sd.G\dim M_i = n_i$. La descomposición $M = \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\bigoplus_{j=1}^{n_i} M_{i_j} \right)$ es una descomposición inescindible de M de cardinalidad $\sum_{i=1}^{n} sd.G\dim M_i$, de lo que se sigue que $sd.G\dim M = \sum_{i=1}^{n} sd.G\dim M_i$.

Supongamos ahora que para cada descomposición $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ de M se tiene la igualdad $sd.G\dim M = \sum_{i=1}^{n} sd.G\dim M_i$. Probaremos que todas las descomposiciones inescindibles de M tienen cardinalidad $sd.G\dim M$. Sea $M = \bigoplus_{i=1}^{m} N_i$ una descomposición inescindible de M. Como N_i es inescindible para cada $i \in I_m$, entonces $sd.G\dim N_i = 1$ para cada $i \in I_m$. Así

$$m = \sum_{i=1}^{m} sd.G\dim N_i = sd.G\dim M.$$

Esto concluye la demostración.

A continuación probaremos que los módulos sd-artinianos cumplen una condición más fuerte que la condición dada por la Proposición 1. Para hacer esto necesitaremos la siguiente definición.

Definición. Sean $M = \bigoplus_A M_\alpha$ y $M = \bigoplus_B N_\beta$ dos descomposiciones de un módulo M. Diremos que $M = \bigoplus_A M_\alpha$ se refina en $M = \bigoplus_B N_\beta$ si existen descomposiciones $M_\alpha = \bigoplus_{C_\alpha} M_{\alpha_\gamma}$ de M_α para cada $\alpha \in A$ tales que las descompociciones $M = \bigoplus_B N_\beta$ y $M = \bigoplus_A \left(\bigoplus_{C_\alpha} M_{\alpha_\gamma}\right)$ de M son iguales.

La siguiente proposición dice que si un módulo es sd-artiniano, entonces; no solo tiene descomposiciones inescindibles finitas, si no que todas sus descomposiciones se refinan en descomposiciones inescindibles finitas. Notemos que una descomposición $M = \bigoplus_A M_\alpha$ de un módulo M se refina en una descomposición inescindíble finita de M si y sólo si A es un conjunto finito y M_α tiene descomposiciones inescindibles finitas para cada $\alpha \in A$.

Proposición 2. Sea M un módulo. Si M es sd-artiniano, entonces todas las descomposiciones de M se refinan en descomposiciones inescidibles finitas.

Demostración. Supongamos que M es sd-artiniano. Sea $M = \bigoplus_A M_\alpha$ una descomposición de M. El conjunto A es finito ya que $S(M)$ no tiene subconjuntos independientes infinitos, y como M_α es sd-artiniano para cada $\alpha \in A$, entonces M_α tiene descomposiciones inescindibles para cada $\alpha \in A$. Se sigue, de la observación hecha anteriormente, que la descomposición $M = \bigoplus_A M_\alpha$ de M se refina en alguna descomposición inescindible finita de M. Esto concluye la demostración.

La siguiente Proposición nos permitirá construir un ejemplo que pruebe que la condición descrita en la Proposición anterior es estrictamente más fuerte que la condición dada en el Lema 1. Una demostración de este resultado se puede encontrar en [FH cor. 5.6.] .

Proposición 3. Para cada submonoide aditivo D de $\mathbb{N}$ existen un anillo R y un R-módulo M tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ el R-módulo M^n tiene descomposiciones inescindibles finitas si y sólo si $n \in D$.

Ejemplo. Existen módulos con descomposiciones inescindibles finitas, pero tales que no todas sus descomposiciones se refinan en descomposiciones inescindibles finitas.

Efectivamente, si en la proposición anterior hacemos $D = 2\mathbb{N}$, entonces existen un anillo R y un R-módulo M tales que el R-módulo M^2 tiene descomposiciones inescindibles finitas, mientras que el R-módulo M no tiene descomposiciones inescindibles finitas. Así, M^2 es un módulo con descomposiciones inescindibles finitas, que también tiene descomposiciones que no se refinan en descomposiciones inescindibles finitas.

Observación. El ejemplo anterior prueba también que, a diferencia de las clases de módulos definidas en las secciones 1, 2 y 3, ni la clase de todos los módulos sd-artinianos, ni la clase de todos los módulos con sd-dimesión de Goldie finita, ni la clase de todos los módulos tales que todas sus descomposiciones se refinan en descomposiciones inescindibles finitas, a pesar de ser cerradas bajo sumandos directos, son cerradas bajo sumas directas finitas.

En lo que resta de esta sección estudiaremos los tipos de descomposiciones que admiten los módulos con sd-dimensión de Krull. La siguiente proposición dice que si un módulo M tiene sd-dimensión de Krull, entonces M cumple con una condición que se acerca a la condición de que todas sus descomposiciones se refinen en descomposiciones inescindibles finitas

Proposición 4. Sea M un módulo. Si M tiene sd-dimensión de Krull, entonces todas las descomposiciones de M son finitas y todos los sumandos directos no triviales de M tienen sumandos directos inescindibles no triviales.

Demostración. Supongamos que M tiene sd-dimensión de Krull. Supongamos también que M tiene descomposiciones infinitas. Sea $M = \bigoplus_A M_\alpha$ una descomposición infinita de M. Supongamos, como en la poroposición 2 de la sección 3, que $A = \mathbb{Q}$. Entonces la función $x \mapsto \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Q}:\alpha\leq x} M_\alpha$ define un monomorfismo de orden de $\mathbb{R}$ en $S(M)$, de lo que se sigue que $\mathbb{R}$ tiene desviación. Una contradicción.

Ahora, si $sd.K\dim = \alpha$, entonces probaremos por inducción transfinita sobre α, que todos los sumandos directos no triviales de M tienen sumandos directos inescindibles no triviales. El caso en el que $\alpha = -1$ es trivial. Supongamos ahora que esto es cierto para cada $\beta < \alpha$. Sea M_1 un sumando directo no trivial de M. Supongamos que existe una cadena descendente $M_1 \geq M_2 \geq ...$ en $S(M)$ tal que M_{i+1} es un sumando directo propio de M_i para cada $i \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\text{dev}S\left(\frac{M_n}{M_{n+1}}\right) < \alpha$. Como $\frac{M_n}{M_{n+1}}$ es un sumando directo no trivial de M, que por la hipótesis de inducción, tiene sumandos directos inescindibles no triviales, se sigue que M_1 tiene sumandos directos inescindibles no triviales. Esto concluye la demostración.

Finalmente, si un módulo M no es sd-artiniano, entonces M tiene sumandos directos con descomposiciones de cardinalidad arbitrariamente grande. La siguiente proposición dice que si además M tiene sd-dimensión de Krull, entonces M tiene sumandos directos con descomposiciones inescindibles de cardinalidad arbitrariamente grande.

Proposición 5. Sea M un módulo con sd-dimensión de Krull. Si $sd.K\dim M$ es mayor o igual que 1, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un sumando directo N de M tal que N tiene descomposiciones inescindibles de cardinalidad n.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probaremos por inducción transfinita sobre $\alpha = sd.K\dim M$, que M tiene sumandos directos con descomposiciones inescindibles de cardinalidad n. Supongamos primero que $\alpha = 1$. Sea $M_1 \geq M_2 \geq ...$ una cadena descendente en $S(M)$ tal que M_{i+1} es un sumando directo propio de M_i para cada $i \in \mathbb{N}$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{dev} S\left(\frac{M_m}{M_{m+1}}\right) \leq 0$ para cada $m \geq k$. Como $\frac{M_m}{M_{m+1}}$ tiene descomposiciones inescindibles para cada $m \geq k$, entonces $\bigoplus_{i=1}^{n} \frac{M_{k+i}}{M_{k+i+1}}$ es un sumando directo de M, que tiene sumandos directos con descomposiciones inescindibles de cardinalidad n.

Supongamos ahora que $\alpha > 1$ y que la proposición es cierta para cada $\beta < \alpha$. Si $M_1 \geq M_2 \geq ...$ una cadena descendente en $S(M)$ tal que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \operatorname{dev} S\left(\frac{M_k}{M_{k+1}}\right) < \alpha$, entonces $\frac{M_k}{M_{k+1}}$ es un sumando directo de M, que por la hipótesis de inducción tiene sumandos directos con descomposiciones inescindibles de cardinalidad n. Esto concluye la demostración.

6. Anillos de endomorfismos

En esta sección estudiaremos las relaciones que existen entre los sumandos directos de un módulo y los idempotentes en su anillo de endomorfismos. Usaremos esto para probar que la condición de que un módulo M tenga *sd*-dimensión de Goldie finita, así como la condición de que M sea *sd*-artiniano están completamente determinadas por el anillo de endomorfismos $End\,(M)$ de M. Empezaremos con el siguiente lema.

Lema 1. Si N y K son submódulos de un módulo M, entonces $M = N \oplus K$ si y sólo si existe un endomorfismo idempotente e de M tal que $\operatorname{Im} e = N$ y $\ker e = K$.

Demostración. Supongamos que $M = N \oplus K$. Entonces cada elemento m de M tiene una expresión única de la forma $m = n + k$, con $n \in N$ y $k \in K$. Así, si $e : M \to M$ es tal que $e\,(n + k) = n$ para cualesquiera $n \in N$ y $k \in K$, entonces e es un endomorfismo idempotente de M tal que $\operatorname{Im} e = N$ y $\ker e = K$.

Supongamos ahora que existe un endomorfismo idempotente e de M tal que $\operatorname{Im} e = N$ y $\ker e = K$. Entonces $N \cap K = \{0\}$ ya que si $m \in N \cap K$, existe $m' \in M$ tal que $e\,(m') = m$, de lo que se sigue que $m = e^2\,(m') = e\,(m) = 0$. Tenemos también que $M = N + K$ ya que $m = e\,(m) + (m - e\,(m))$ para cada $m \in M$. Esto concluye la demostración.

Si $M = N \oplus K$ es una descomposición de un módulo M y e es el endomorfismo de M tal que $e\,(n + k) = n$ para cualesquiera $n \in N$ y $k \in K$, entonces es claro que e es el único endomorfismo idempotente de M tal que $\operatorname{Im} e = N$ y $\ker e = K$. Llamaremos a e, el endomorfismo idempotente de N con respecto a K.

Diremos que dos elementos idempotentes e y f de un anillo R son ortogonales si $ef = 0 = fe$, y diremos que un conjunto de idempotentes ortogonales $\{e_1, ..., e_n\}$ en R es completo si $\sum_{i=1}^{n} e_i = 1$. La siguiente proposición generaliza lo hecho en el lema anterior.

Proposición 1. Sea M un módulo. Si $M_1, ..., M_n$ son submódulos de módulo M, entonces $M = \bigoplus_{I=1}^{n} M_i$ si y sólo si existe un conjunto completo de idempotentes ortogonales $\{e_1, ..., e_n\}$ en $End\,(M)$ tal que $\operatorname{Im} e_i = M_i$ para cada $i \in I_n$.

Demostración. Supongamos primero que $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$. Si e_i es el endomorfismo idempotente de M_i con respecto a $\bigoplus_{j \neq i} M_j$ para cada $i \in I_n$, entonces el conjunto $\{e_1, ..., e_n\}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales en $End\,(M)$ tal que $\operatorname{Im} e_i = M_i$ para cada $i \in I_n$.

Supongamos ahora que existe un conjunto completo de idempotentes ortogonales $\{e_1, ..., e_n\}$ en $End\,(M)$ tal que $\operatorname{Im} e_i = M_i$ para cada $i \in I_n$. Entonces $\ker e_i = \sum_{j \neq i} M_j$ para cada $i \in I_n$. Así, para cada $i \in I_n$, $M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j \right) = 0$ ya que si $m \in M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j \right)$, entonces existe $m' \in M$ tal que $e_i\,(m') = m$, de lo que se sigue que $m = e_i^2\,(m') = e\,(m) = 0$. Ahora, como $id_M = \sum_{i=1}^{n} e_i$, entonces tenemos también que $M = \sum_{i=1}^{n} M_i$. Esto concluye la demostración.

Ahora, si $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ es una descomposición de un módulo M y e_i es el endomorfismo idempotente de M_i con respecto al sumando directo $\bigoplus_{j \neq i} M_j$ de M para cada $i \in I_n$, entonces es claro que $\{e_1, ..., e_n\}$ es el único conjunto completo de idempotentes ortogonales en $End\,(M)$ tal que $\operatorname{Im} e_i = M_i$ para cada $i \in I_n$. También llamaremos a e_i el endomorfismo idempotente de M_i con respecto a la descomposición $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$. La siguiente proposición dice que la condición de que un módulo M tenga sd-dimensión de Goldie finita está completamente determinada por su anillo de endomorfismos.

Proposición 2. Sea M un módulo. Si $E = End\,(M)$ es el anillo de endomorfismos de M, entonces las siguientes condiciones para M son equivalentes.

1. M tiene sd-dimensión de Goldie finita.

2. El E-módulo izquierdo ${}_E E$ tiene sd-dimensión de Goldie finita.

3. El E-módulo derecho E_E tiene sd-dimensión de Goldie finita.

4. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que E no tiene subconjuntos de idempotentes ortogonales de cardinalidad mayor que n.

Más aún, si M cumple con las condiciones de la Proposición, entonces $sd.G \dim M = sd.G \dim_E E = sd.G \dim E_E$, y este número es la mayor de las cardinalidades de los subconjuntos de idempotentes ortogonales de E.

Demostración. Es fácil ver que cada subconjunto finito de idempotentes ortogonales de un anillo R está contenido en un conjunto completo de idempotentes ortogonales de R. La demostración se sigue de esto junto con la Proposición 1 y junto con el hecho de que los anillos $End\,({}_E E)$ y $End\,(E_E)$ son isomorfos a E.

La siguiente proposición dice ahora que la condición de que un módulo sea sd-artiniano está completamente determinada por su anillo de endomorfismos. Su demostración es análoga a la demostración de la proposición anterior.

Proposición 3. Sea M un módulo. Si $E = End\,(M)$ es el anillo de endomorfismos de M, entonces las siguientes condiciones para M son equivalentes.

1. M es sd-artiniano.
2. El E-módulo izquierdo ${}_EE$ es sd-artiniano.
3. El E-módulo derecho E_E es sd-artiniano.
4. E no tiene subconjuntos infinitos de idempotentes ortogonales.

Un argumento análogo al usado en [FH, Teo. 2.1] probaría fácilmente que también la propiedad de que un módulo M tenga sd-dimensión de Krull está completamente determinada por el anillo de endomorfismos $End\,(M)$ de M. Hemos decidido sin embargo, no incluir este resultado ya que no hemos podido encontrar una demostración sencilla en términos elementales. De cualquier manera presentaremos a continuación una versión débil de este resultado. Notemos antes que si e es un endomorfismo idempotente de M, entonces la función $\Psi : eEnd\,(M)\,e \to End\,(ime)$ tal que $\Psi\,(efe)\,(e\,(m)) = ef(e\,(m))$ para cualesquiera $f \in End\,(M)$ y $m \in M$, define un isomorfismo de anillos entre $eEnd\,(M)\,e$ y $End\,(ime)$.

Proposición 4. Sea M un módulo. Si $E = End\,(M)$ es el anillo de endomorfismos de M, y suponemos que tanto M como el E-módulo izquierdo ${}_EE$ tienen sd-dimensión de Krull, entonces:

$$sd.K\dim M = \ sd.K\dim_E E.$$

Demostración. Probaremos por inducción transfinita sobre $\alpha = sd.K\dim M$ que $\alpha \leq sd.K\dim_E E$. El caso en el que $\alpha = -1$ es trivial. Supongamos ahora que esto es cierto para cada $\beta < \alpha$. Sea $M_0 \geq M_1 \geq ...$ una cadena descendente en $S\,(M)$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ sean N_i y N_i' tales que $M_{i-1} = N_i' \oplus M_i$ y $M = N_i \oplus N_i' \oplus M_i$, y sean e_i y e_i' los endomorfismos idempotentes de M_i y N_i' con respecto esta última descomposición de M. Como $\operatorname{Im} e_i = M_i$, $\operatorname{Im} e_i' = N_i'$, y $M_i \leq M_{i-1}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces $Ee_i \leq Ee_{i-1}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Ahora, la cadena descendente $Ee_1 \geq Ee_2 \geq ...$ en $S\,({}_EE)$ es tal que para cada $i \in \mathbb{N}$ los anillos $End\left(\frac{Ee_i}{Ee_{i+1}}\right)$ y $End\left(\frac{M_i}{M_{i+1}}\right)$ son isomorfos al anillo $e_{i+1}'Ee_{i+1}'$. Se sigue, por la hipótesis de inducción, que $\operatorname{dev}S\left(\frac{M_i}{M_{i+1}}\right) < \operatorname{dev}S\,({}_EE)$ casi para cada $i \in \mathbb{N}$, de lo que se concluye que $\alpha \leq sd.K\dim_E E$.

Análogamente se prueba que $sd.K\dim_E E \leq sd.K\dim M$. Esto concluye la demostración.

7. Descomposiciones en términos de algunas clases de módulos

En esta sección estudiaremos los tipos de descomposiciones que admite un módulo *sd*-artiniano con respecto a clases de módulos cerradas bajo sumas directas finitas. Empezaremos con la siguiente proposición.

Proposición 1. Sean M un módulo y Ω una clase de módulos cerrada bajo sumas directas finitas. Si $S(M) \cap \Omega$ tiene elementos máximos, entonces existe una descomposición $M = A \oplus B$ de M tal que $A \in \Omega$, y tal que B no tiene sumandos directos no triviales en Ω.

Demostración. Supongamos que $S(M) \cap \Omega$ tiene elementos máximos. Sean A un máximo en $S(M) \cap \Omega$ y B tal que $M = A \oplus B$. Supongamos que B tiene sumandos directos no triviales en Ω. Si L es un sumando directo no trivial de B tal que $L \in \Omega$, entonces A es un sumando directo propio de $A \oplus L$, y $A \oplus L \in S(M) \cap \Omega$. Esto contradice el hecho de que A sea máximo en $S(M) \cap \Omega$. Así, $M = A \oplus B$ es una descomposición de M tal que $A \in \Omega$, y tal que B no tiene sumandos directos en Ω. Esto concluye la demostración.

El siguiente corolario dice que si M es un módulo *sd*-artiniano y Ω es una clase de módulos cerrada bajo sumas directas finitas tal que $S(M) \cap \Omega \neq \varnothing$, entonces M admite una descomposiciones como la descomposición dada en la proposición anterior. En particular, si M es un módulo *sd*-artiniano y Ω es alguna de las clases de módulos definidas en las secciones 1, 2 y 3, entonces existe una descomposición $M = A \oplus B$ de M tal que $A \in \Omega$ y tal que B no tiene sumandos directos no triviales en Ω, es decir, cada módulo *sd*-artiniano se puede poner en términos de cada una de las clases de módulos definidas en las secciones 1, 2 y 3.

Corolario 1. Sean M un módulo *sd*-artiniano y Ω una clase de módulos cerrada bajo sumas directas finitas. Si $S(M) \cap \Omega \neq \varnothing$, entonces existe una descomposición $M = A \oplus B$ de M tal que $A \in \Omega$ y tal que B no tiene sumandos directos no triviales en Ω.

Diremos que dos descomposiciones $M = \bigoplus_A M_\alpha$ y $M = \bigoplus_B N_\beta$ de un módulo M son isomorfas si existe una biyección $\psi : A \to B$ tal que para cada $\alpha \in A$, M_α y $N_{\psi(\alpha)}$ son módulos isomorfos. A continuación buscaremos dar condiciones sobre la clase de módulos cerrada bajo sumas directas finitas Ω, que garanticen que la descomposicióne dada por el corolario anterior sea única salvo por isomorfismos. Empezaremos con la siguiente definición.

Definición. Sea R un anillo. Diremos que R es local si para cualesquiera $a_1, a_2 \in R$ tales que $a_1 + a_2 \in U(R)$, existe $i \in \{1, 2\}$ tal que $a_i \in U(R)$.

Es fácil ver, de la definición anterior, que los anillos locales no tienen idempotentes no triviales, de lo que se sigue que si el anillo de endomorfismos $End\,(M)$ de un módulo M es local, entonces M es un módulo inescindible. En [F, Teo 2.8] se caracterizan a los módulos con anillos de endomorfismos locales. En la siguiente proposición probaremos parte de este resultado.

Proposición 2. Sean $M = N \oplus L \oplus K$ y $M = M_1 \oplus M_2 \oplus K$ dos descomposiciones de un módulo M. Si $End\,(N)$ es un anillo local, entonces existen $i \in \{1, 2\}$ y M_i' un sumando directo de M_i tales que $M = N \oplus M_i' \oplus M_j \oplus K$, con $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$.

Para demostrar esta proposición necesitaremos el siguiente Lema.

Lema 1. Sean M un módulo y $L \leq M$. Si $M = N \oplus K$ es una descomposición de M, y e es el endomorfismo idempotente de K con respecto a esta descomposición, entonces $M = N \oplus L$ si y sólo si la restricción de e a L es un isomorfismo entre L y K.

Demostración. Si e es el endomorfismo idempotente de K con respecto a la descomposición $M = N \oplus K$, entonces $\ker e = N$. Se sigue que $N \cap L = \{0\}$ si y sólo si la restricción de e a L es un monomofismo. Ahora, $M = N + L$ si y sólo si $K \leq N + L$. Pero $K \leq N + L$ si y sólo si la imagen de la restricción de e a L es igual a K. Esto concluye la demostración.

Demostración de la Proposición 2. Sean e_1, e_2 y k los endomorfismos idempotentes de M_1, M_2 y K con respecto a la descomposición $M = M_1 \oplus M_2 \oplus K$ de M. Si e es el endomorfismo idempotente de N con respecto a la descomposición $M = N \oplus L \oplus K$ de M, entonces $eEnd\,(M)\,e$ es un anillo local con e como uno. Como $e_1 + e_2 + k = id_M$ y $eke = 0$ (N y K aparecen en la descomposición $M = N \oplus L \oplus K$ de M), entonces $e = ee_1e + ee_2e$. Se sigue que existe $i \in \{1, 2\}$ tal que $ee_ie \in U\,(eEnd\,(M)\,e)$. Sea f el inverso de ee_ie en $eEnd\,(M)\,e$. Entonces $ef = fe = efe = f$ y $fe_i = e_if = e$. e_ife_i es un endomorfismo idempotente de M ya que $(e_ife_i)^2 = e_i(fe_i)fe_i = e_ife_i$. Así

$$M = \operatorname{Im} e_ife_i \oplus \ker e_ife_i.$$

Ahora, si $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$, entonces $M_j \oplus K = \ker e_i \leq \ker e_ife_i$. Se sigue, por la ley modular, que $\ker e_ife_i = (\ker e_ife_i \cap M_i) \oplus M_j \oplus K$. Así, si $M_i' = \ker e_ife_i \cap M_i$, entonces M_i' es un sumando directo de M_i tal que

$$M = \operatorname{Im} e_ife_i \oplus M_i' \oplus M_j \oplus K$$

y e_ife_i es el endomorfismo idempotente de $\operatorname{Im} e_ife_i$ con respecto a esta descomposición. La restricción de e_ife_i a N es un monomorfismo ya que $e_ife_ie = (e_ie)f(ee_ie)$ es una composición de monomorfismos en N, y $e_ife_i\,(N) = \operatorname{Im} e_ife_i$ ya que $\operatorname{Im}\,(e_ife_i)^2 = e_ife_i\,(\operatorname{Im} fe_i) \subseteq e_ife_i\,(N)$. Así, por el Lema 8.3 se tiene que $M = N \oplus M_i' \oplus M_j \oplus K$. Esto concluye la demostración.

Corolario 2. Sean $M = N \oplus L \oplus K$ y $M = (\bigoplus_{i=1}^{n} M_i) \oplus K$ dos descomposiciones de un módulo M. Si $End\,(N)$ es un anillo local, entonces existen $i \in I_n$ y M_i' sumando directo de M_i tales que $M = N \oplus M_i' \oplus \left(\bigoplus_{j \neq i} M_j\right)$.

Proposición 3. Sean M un módulo *sd*-artiniano y Ω una clase de módulos con las siguientes propiedades:

1. Ω es cerrada bajo sumas directas finitas.

2. Ω es cerrada bajo sumandos directos.

3. Para cada $N \in \Omega$ inescindible, se tiene que $End\,(N)$ es un anillo local.

Si $S\,(M) \cap \Omega \neq \varnothing$, entonces existe una descomposición $M = A \oplus B$ de M, única salvo por isomorfismos, tal que $A \in \Omega$ y tal que B no tiene sumandos directos no triviales en Ω.

Demostración. Supongamos que $S\,(M) \cap \Omega \neq \varnothing$. Por el Corolario 1, existe una descomposición $M = A \oplus B$ tal que $A \in \Omega$ y tal que B no tiene sumandos directos no triviales en Ω. Probaremos que esta descomposición es única salvo por isomorfismos. Sea $M = A' \oplus B'$ otra descomposición de M tal que $A' \in \Omega$ y tal que B' no tiene sumandos directos no triviales en Ω. $S\,(A)$ y $S\,(A')$ tienen las condiciones de cadena. Entonces A y A' tienen descomposiciones inescindibles finitas. Sean $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ una descomposición inescindible de A y $A' = \bigoplus_{j=1}^{m} A_j'$ una descomposición inescindible de A'. $A_i \in \Omega$ para cada $i \in I_n$ y $A_j' \in \Omega$ para cada $j \in I_m$. Así, $End\,(A_i)$ es un anillo local para cada $i \in I_n$ y $End\,(A_j')$ es un anillo local para cada $j \in I_m$. Supongamos que $m \geq n$. Como B' no tiene sumandos directos no triviales en Ω y A_j' es inescindible para cada $j \in I_m$, entonces, por el Corolario 2, existe $j_1 \in I_m$ tal que

$$M = A_1 \oplus \left(\bigoplus_{j \neq j_1} A_j'\right) \oplus B'.$$

Así, por un argumento de inducción (usando el Corolario 2, n veces) se sigue que existe un subconjunto I de I_m, de cardinalidad n tal que

$$M = (\bigoplus_{i=1}^{n} A_i) \oplus \left(\bigoplus_{I_n \setminus I} A_j'\right) \oplus B'.$$

Ahora, como B no tiene sumandos directos no triviales en Ω, entonces, nuevamente por el Corolario 2 se sigue que $I = \varnothing$. Así, $m = n$ y

$$(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i) \oplus B' = M = (\bigoplus_{i=1}^{n} A_i') \oplus B'.$$

Se sigue, por el Lema 1, que las descomposiciones $M = A \oplus B$ y $M = A' \oplus B'$ de M, son isomorfas. Esto concluye la demostración.

Dedicaremos el resto de esta sección a probar que la clase de todos los módulos que tienen longitud finita satisface las condiciones de la proposición anterior.

Sabemos que la clase de todos los módulos que tienen longitud finita es cerrada bajo sumas directas finitas y bajo sumandos directos. Así, bastará probar que el anillo de endomorfismos de cualquier módulo inescindible que tiene longitud finita es un anillo local. Empezaremos con el siguiente lema.

Lema 2. Sean M un módulo y $f \in End(M)$.

1. Si M es artiniano, entonces existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $M = \operatorname{Im} f^k + \ker f^k$ para cada $k \geq a$.

2. Si M es neteriano, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 = \operatorname{Im} f^k \cap \ker f^k$ para cada $k \geq n$.

Demostración. Probaremos 1. Si suponemos que M es artiniano, entonces existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{Im} f^a = \operatorname{Im} f^s$ para cada $s \geq a$, en particular, si $k \geq a$ se tiene la igualdad $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{2k}$. Así, si $x \in M$ y $k \geq a$, entonces existe $y \in M$ tal que $f^k(x) = f^{2k}(y)$, de lo que se sigue que $x = f^k(y) + \left(x - f^k(y)\right)$ es un elemento de $\operatorname{Im} f^k + \ker f^k$. De esto se concluye que $M = \operatorname{Im} f^k + \ker f^k$. Análogamente se prueba 2.

El siguiente corolario es una consecuencia fácil del Lema anterior.

Corolario 3. Sean M un módulo y $f \in End(M)$. Si M tiene longitud finita, entonces para cada $k \geq \ell(M)$ se tiene la siguiente igualdad:

$$M = \operatorname{Im} f^k \oplus \ker f^k.$$

Lema 3. Sean M un módulo y $f \in End(M)$. Si M es inescindible y tiene longitud finita, entonces las siguientes condiciones para f son equivalentes.

1. f es un monomorfismo.

2. f es un epimorfismo.

3. f es un isomorfismo.

4. f no es nilpotente.

Demostración. Las condiciones 1, 2 y 3 son equivalentes por el Lema 2 y la condición 3 claramente implica a la condición 4. Así, bastará probar que la condición 4 implica a estas condiciones, pero esto se sigue del corolario anterior.

Proposición 4. Sea M un módulo. Si M es inescindible y tiene longitud finita, entonces el anillo de endomorfismos $End\,(M)$ de M es un anillo local.

Demstración. Supongamos que M es inescindible y que tiene longitud finita. Sean $f, g \in End\,(M)$ tales que $f + g$ es un isomofismo. Entonces existe $h \in End\,(M)$ tal que $(f+g)\,h = id_M$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que g no es un isomorfismo. Entonces gh tampoco es un isomorfismo, y por el Lema anterior existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(gh)^n = 0$. De esto se sigue la igualdad:

$$id_M - (gh)^n = (id_M - gh)\left(\sum_{i=0}^{n-1}(gh)^i\right) = id_M.$$

que implica, nuevamente por el Lema anterior, que $id_M - gh = fh$ es un isomorfismo. De esto último se sigue, aplicando nuevamente el Lema 3, que f es un isomorfismo. Esto concluye la demostración.

Corolario 4. Sea M un módulo. Si M es *sd*-artiniano, entonces existe una descomposición $M = A \oplus B$ de M, única salvo por isomorfismos, tal que A tiene longitud finita, y tal que B no tiene sumandos directos no triviales que tengan longitud finita.

Corolario 5. Sea M un módulo.

1. Si M es neteriano, entonces existe una descomposición $M = A \oplus B$ de M, única salvo por isomorfismos, tal que A es artiniano y tal que B no tiene sumandos directos artinianos no triviales.

2. Si M es artiniano, entonces existe una descomposición $M = A \oplus B$ de M, única salvo por isomorfismos, tal que A es neteriano y tal que B no tiene sumandos directos neterianos no triviales.

8. Las condiciones $\mathbf{AKS}_i$

En esta última sección presentaremos algunas aplicaciones de lo hecho en las secciones anteriores. Definiremos las que llamaremos las condiciones AKS_i, y probaremos que, dentro de ciertas clases de módulos definidas en las secciones anteriores, algunas de estas condiciones son equivalentes. Empezaremos con la siguiente definición.

Definición. Sea M un módulo.

1. Diremos que M tiene la condición AKS_1 si M tiene un número finito de descomposiciones salvo por isomorfismos.
2. Diremos que M tiene la condición AKS_2 si M tiene un número finito de descomposiciones inescindibles salvo por isomorfismos.
3. Diremos que M tiene la condición AKS_3 si M tiene un número finito de sumandos directos salvo por isomorfismos.
4. Diremos que M tiene la condición AKS_4 si M tiene un número finito de sumandos directos inescindibles salvo por isomorfismos.

Es claro, de la definición anterior, que para cada $i \in I_4$ la condición AKS_1 implica a la condición AKS_i. El siguiente ejemplo prueba que ni la condición AKS_2, ni la condición AKS_4 implican a la condición AKS_1. En [FH, Ej. 3.3] se puede encontrar un módulo con la condición AKS_3, pero sin la condición AKS_1.

Ejemplo. El $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_2^{(\mathbb{N})}$ tiene las condiciones AKS_2 y AKS_4, pero no tiene la condición AKS_1.

Efectivamente, $\mathbb{Z}_2^{(\mathbb{N})}$, por ser un módulo semisimple, tiene una sola descomposición inescindible salvo por isomorfismos y todos sus sumandos directos inescindibles son isomorfos a $\mathbb{Z}_2$, pero el conjunto de todas las decomposiciones de la forma $\mathbb{Z}_2^{(\mathbb{N})} = \mathbb{Z}_2^n \oplus \mathbb{Z}_2^{(\mathbb{N}\setminus\{n\})}$, con $n \in \mathbb{N}$ es un conjunto infinito de descomposiciones de $\mathbb{Z}_2^{(\mathbb{N})}$ no isomorfas dos a dos. Así, $\mathbb{Z}_2^{(\mathbb{N})}$ tiene las condiciones AKS_2 y AKS_4, pero no tiene la condición AKS_1.

A continuación probaremos que dentro de ciertas clases de módulos definidas en las secciones anteriores algunas de las condiciones AKS_i implican a la condición AKS_1. Empezaremos con la siguiente proposición.

Proposición 1. Sea M un módulo. Si todas las descomposiciones de M se refinan en descomposiciones inescindibles finitas y M tiene la condición AKS_2, entonces M tiene la condición AKS_1.

Demostración. Supongamos que todas las descomposiciones de M se refinan en descomposiciones inescindibles finitas y que M tiene la condición AKS_2. Si $M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i$ es una descomposición inescindible de M, entonces hay p_m descomposiciones de M que se refinan en la descomposición $M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i$, donde p_m es el número de particiones de I_m. Así, si $\left\{ M = \bigoplus_{j=1}^{m_i} M_{i_j} : j \in I_n \right\}$ es un conjunto de representantes de las clases de isomorfismo de las descomposiciones inescindibles de M, entonces no hay más de $p_{m_1} \cdots p_{m_n}$ descomposiciones de M que se refinen en alguna de las descomposiciones $M = \bigoplus_{j=1}^{m_i} M_{i_j}$ de M. Pero como todas las descomposiciones de M se refinan en alguna descomposición isomorfa a alguna de las descomposiciones $M = \bigoplus_{j=1}^{m_i} M_{i_j}$ de M, entonces M no tiene más de $p_{m_1} \cdots p_{m_n}$ descomposiciones salvo por isomorfismos. Esto concluye la demostración.

La siguiente proposición dice que, si a demás de que todas las descomposiciones de un módulo M se refinen en descomposiciones inescindibles finitas, tenemos que M es *sd*-artiniano, entonces la condición AKS_3 implica a la condición $\mathrm{AKS}_!$ en M. Para probar este resultado necesitaremos primero el siguiente lema.

Lema. Sea M un módulo. Si M es *sd*-artiniano, entonces no existen N y N' sumandos directos de M tales que N' es un sumando directo propio de N isomorfo a N.

Demostración. Supongamos que existen N y N' sumandos directos de M tales que N' es un sumando directo propio de N isomorfo a N. Entonces podemos construir, recursivamente, una cadena descendente $N_1 \geq N_2 \geq ...$ en $S(M)$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, N_{i+1} es un sumando directo propio de N_i isomorfo a N_i. Construida así, la cadena $N_1 \geq N_2 \geq ...$ es una cadena descendente infinita en $S(M)$. Esto contradice el hecho de que M sea *sd*-artiniano.

Proposición 2. Sea M un módulo. Si M es *sd*-artiniano y M tiene la condición AKS_3, entonces M tiene la condición AKS_1.

Demostración. Supongamos que M es *sd*-artiniano y que M tiene la condición AKS_3. Por el Lema anterior no existen N y N' sumandos directos de M tales que N' es un sumando directo propio de N isomorfo a N. Así, si M tiene n sumandos directos salvo por isomorfismos, entonces M no tiene descomposiciones de cardinalidad mayor que n, ya que si existiera una descomposición $M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i$ de M, con $m > n$, entonces el conjunto $\left\{ M = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i : k \leq m \right\}$ sería un conjunto de más de n sumandos directos de M no isomorfos dos a dos. Esto claramente implica que M no tiene más de $\sum_{i=1}^{n} n^i$ descomposiciones salvo por isomorfismo, y esto concluye la demostración.

El siguiente resultado dice que dentro de la clase de todos los módulos con *sd*-dimensión de Goldie finita la condición AKS_4 implica a la condición AKS_1. Esto, por lo hecho en las proposiciones anteriores, implicará que dentro de la clase de todos los módulos con *sd*-dimensión de Goldie finita, todas las condiciones AKS_i sean equivalentes.

Proposición 3. Sea M un módulo. Si M tiene *sd*-dimensión de Goldie finita y M tiene la condición AKS_4, entonces M tiene la condición AKS_1.

Demostración. Supongamos que M tiene *sd*-dimensión de Goldie finita y que M tiene la condición AKS_4. Si $sd.G\dim M = n$ y M tiene m sumandos directos inescindibles salvo por isomorfismos, entonces M no tiene más de $\sum_{i=1}^{n} m^i$ descomposiciones inescindibles salvo por isomorfismos. Así, M tiene *sd*-dimensión de Goldie finita y M tiene la condición AKS_3. Se sigue, por la Proposición 2, que M tiene la condición AKS_1.

Corolario. Sea M un módulo. Si M tiene *sd*-dimensión de Goldie finita, entonces las condiciones AKS_i, con $i \in I_4$, son equivalentes sobre M.

Finalizaremos esta última sección con la siguiente observación. Notemos antes que la clase de todos los módulos con la condición AKS_1 es una subclase de la clase de todos los módulos con *sd*-dimensión de Goldie finita.

Observación. El corolario anterior caracteriza al complemento de la clase de todos los módulos con la condición AKS_1 dentro de la clase de todos los módulos con *sd*-dimensión de Goldie finita. De acuerdo con lo hecho en [FH, Sec. 4.] este complemento es no vacio. Más aun, en [FH, Ej. 4.2.] se prueba que existen módulos neterianos y módulos con dimensión dual de Goldie finita que no tienen la condición AKS_1, mientras que en [FH, Ej. 2.4.] se prueba que todos los módulos artinianos tienen la condición AKS_1. Esto contrasta con lo hecho en el Corolario 5 de la sección anterior ya que mientras que en este corolario se prueba que la clase de todos los módulos artinianos y la clase de todos los módulos neterianos están fuertemente relacionadas, el resultado mencionado anteriormente prueba que estas dos clases son muy distintas, ya que mientras que existen módulos neterianos que no tienen ninguna de las condiciones AKS_i, todos los módulos artinianos tienen la condición AKS_1.

Apéndice:
Demostración del teorema de Grzeszczuk y Puczylowski

A lo largo de esta sección L denotará una retícula modular con elementos menor y mayor 0 y 1. Probaremos el siguiente teorema.

Teorema (Grzeszczuk y Puczylowski) Las siguientes condiciones para L son equivalentes.

1. L no tiene subconjuntos independientes infinitos.
2. Existe $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq L$ independiente, con $\bigvee_{i=1}^{n} a_i \in_e L$, y tal que a_i es uniforme para cada $i \in I_n$
3. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que L no tiene subconjuntos independientes de cardinalidad mayor que n
4. Si $a_1 \leq a_2 \leq ...$ es una cadena ascendente en L, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que a_N es esencial en a_n para cada $n \geq N$

Más aún. Si L cumple con las condiciones del Teorema y $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq L$ es tal que $\bigvee_{i=1}^{n} a_i \in_e L$, y tal que a_i es uniforme para cada $i \in I_n$, entonces n es la mayor de las cardinalidades de los subconjuntos independientes de L.

Para probar este resultado necesitaremos antes algunos lemas técnicos.

Lema 1. Sea A es un subconjunto finito e independiente de L. Si $B, C \subseteq A$ son tales que $B \cap C = \varnothing$, entonces $(\bigvee_B x) \wedge (\bigvee_C y) = 0$.

Demostración. La demostración se hará por inducción sobre $|B|$. El caso en el que $|B| = 1$ es trivial. Supongamos ahora que el lema es cierto para cada $n < |B|$. Sea $b \in B$. Si $B' = B \setminus \{b\}$ y $a = (\bigvee_B x) \wedge (\bigvee_C y)$, entonces probaremos que $a \leq b$ y que $a \leq \bigvee_{B'} x$.

Del hecho de que $b \leq a \vee b$ se sigue que

$$(a \vee b) \wedge [(\bigvee_{B'} x) \vee b] = [(a \vee b) \wedge \bigvee_{B'} x] \vee b.$$

Tenemos también que

$$(a \vee b) \wedge (\bigvee_{B'} x) \leq (\bigvee_{C \cup \{b\}} y) \wedge (\bigvee_{B'} x)$$

y que por hipótesis de inducción, el segundo lado de esta desigualdad es igual a 0. De esto y del hecho de que $a \leq (a \vee b) \wedge [(\bigvee_{B'} x) \vee b]$ se sigue que $a \leq b$.

Ahora, de la desigualdad $\bigvee_{B'} x \leq \bigvee_{B'} (x \vee a)$ se sigue que

$$[\bigvee_{B'} (x \vee a)] \wedge [(\bigvee_{B'} x) \vee b] = [(\bigvee_{B'} (x \vee a)) \wedge b] \vee (\bigvee_{B'} x)$$

y tenemos también que

$$(\bigvee_{B'} (x \vee a)) \wedge b \leq (\bigvee_{B' \cup C} x) \wedge b$$

y que el último lado de esta desigualdad es igual a 0 pues A es independiente. De esto y del hecho de que $a \leq [\bigvee_{B'} (x \vee a)] \wedge [(\bigvee_{B'} x) \vee b]$ se sigue la desigualdad $a \leq \bigvee_{B'} x$.

Así, $a \leq b$ y $a \leq \bigvee_{B'} x$, por lo que $a \leq b \wedge (\bigvee_{B'} x) = 0$. Esto concluye la demostración.

Lema 2. Sea A un subconjunto independiente de L. Si $a \in L \setminus \{0\}$ es tal que $a \wedge (\bigvee_B x) = 0$ para cada subconjunto finito B de A, entonces $A \cup \{a\}$ es un subconjunto independiente de L

Demostración. Probaremos que todos los subconjuntos finitos de $A \cup \{a\}$ son independientes. Esto es claro para los subconjuntos finitos de A. Así, probaremos que si $B \subseteq A$ es finito, entonces $B \cup \{a\}$ es independiente. Sabemos que $a \wedge (\bigvee_B x) = 0$, por lo que bastará probar que

$$b \wedge [(\bigvee_{B'} x) \vee a] = 0$$

para cada $b \in B$, con $B' = B \setminus \{b\}$.

Sean $b \in B$ y $B' = B \setminus \{b\}$. De la desigualdad $b \leq (\bigvee_B x)$ se sigue que

$$b \wedge [(b \bigvee_{B'} x) \vee a] = b \wedge (\bigvee_B x) \wedge [(\bigvee_{B'} x) \vee a]$$

y de la desigualdad $\bigvee_{B'} x \leq \bigvee_B x$ se sigue que

$$(\bigvee_B x) \wedge [(\bigvee_{B'} x) \vee a] = [(\bigvee_B x) \wedge a] \vee (\bigvee_{B'} x)\,.$$

Así, como $(\bigvee_B x) \wedge a = 0$, entonces $b \wedge [(\bigvee_{B'} x) \vee a] = b \wedge (\bigvee_{B'} x) = 0$. Esto concluye la demostración.

La demostración del siguiente lema es trivial.

Lema 3. Sean $a, b, c \in L$. Si a es esencial en b y b es esencial en c, entonces a es esencial en c.

Lema 4. Sean $a, a', b, b' \in L$. Si $a \wedge b = 0$, a' es esencial en a y b' es esencial en b, entonces $a' \vee b'$ es esencial en $a \vee b$.

Demostración. El caso en el que alguno de los cuatro elementos a, a', b y b' de L es igual a 0 es trivial, por lo que supondremos que $a, a', b, b' \in L \setminus \{0\}$.

Probaremos que $a' \vee b$ es esencial en $a \vee b$, y que $a' \vee b'$ es esencial en $a' \vee b$. Supongamos que existe $x \leq a \vee b$ con $x \neq 0$ tal que $x \wedge (a' \vee b) = 0$. Como el conjunto $\{a', b\}$ es independiente entonces, por el Lema 2, también el conjunto $\{a', b, x\}$ es independiente, de lo que se sigue que $a' \wedge (b \vee x) = 0$. De esto se sigue, ya que a' es esencial en a, que $a \wedge (b \vee x) = 0$. Así, nuevamente por el Lema 2, el conjunto$\{a, b, x\}$ es independiente, y esto implica que $x \wedge (a \vee b) = 0$. De esto y del hecho de que $x \leq a \vee b$ se sigue que $x = 0$. Una contradicción. Así, $a' \vee b$ es esencial en $a \vee b$. Análogamente se prueba que $a' \vee b'$ es esencial en $a' \vee b$. El resultado se sigue del Lema 3.

Corolario 1. Sean $a_1, a_1', ..., a_n, a_n' \in L$. Si $\{a_1, ...a_n\}$ es independiente y a_i' es esencial en a_i para cada $i \in I_n$, entonces $\bigvee_{i=1}^n a_i'$ es esencial en $\bigvee_{i=1}^n a_i$.

Lema 5. Si L no tiene subconjuntos independientes infinitos,entonces para cada $a \in L$, existe $b \in L$ uniforme, tal que $b \leq a$.

Demostración. Supongamos que existe $a \in L$ tal que $[0, a]$ no tiene elementos uniformes. Construiremos recursivamente una cadena ascendente $A_1 \leq A_2 \leq ...$ de subconjuntos independientes $A_n = \{a_1, ..., a_n\}$ de $[0, a]$ tales que $\bigvee_{i=1}^n a_i$ no es esencial en a para ningún $n \in \mathbb{N}$. Como a no es uniforme, entonces existe $a_1 \in [0, a]$ tal que a_1 no es esencial en a. Haremos $A_1 = \{a_1\}$. Supongamos ahora que $A_{n-1} = \{a_1, ..., a_{n-1}\}$ ha sido construido para algún $n \in \mathbb{N}$. Como $\bigvee_{i=1}^{n-1} a_i$ no es esencial en a, entonces existe $b \in [0, a]$ tal que $b \wedge \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} a_i\right) = 0$. Ahora, como b no es uniforme, existe $a_n \in [0, b]$ tal que a_n no es esencial en b. Haremos $A_n = A_{n-1} \cup \{a_n\}$. Claramente A_n es independiente. Probaremos ahora que $\bigvee_{i=1}^n a_i$ no es esencial en a. Si $c \in [0, b]$, con $c \neq 0$ es tal que $a_n \wedge c = 0$, entonces $c \wedge (\bigvee_{i=1}^n a_i) = 0$ pues $c \wedge (\bigvee_{i=1}^n a_i) = c \wedge \left(b \wedge \left[\left(\bigvee_{i=1}^{n-1} a_i\right) \vee a_n\right]\right)$ ya que $c \leq b$, y $c \wedge \left(b \wedge \left[\left(\bigvee_{i=1}^{n-1} a_i\right) \vee a_n\right]\right) = c \wedge \left(\left[b \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n-1} a_i\right)\right] \vee a_n\right)$ pues $a_n \leq b$. Pero como $b \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n-1} a_i\right) = 0$, entonces $c \wedge (\bigvee_{i=1}^n a_i) = 0$. Así, $\bigvee_{i=1}^n a_i$ no es esencial en a.

Es claro así, que $\bigcup_{\mathbb{N}} A_n$ es un subconjunto independiente infinito de L. Una contradicción.

Demostración del Teorema. 1⇒2 Supongamos que L no tiene subconjuntos independientes infinitos. Sea $\Im$ el conjunto de todos los subconjuntos independientes de L que solo tienen elementos uniformes. Por el Lema 5, $\Im \neq \varnothing$. Así, por el Lema de Zorn, existe $\{a_1, ..., a_n\}$ máximo en $\Im$. Probaremos que $\bigvee_{i=1}^n a_i \in_e L$. Si no fuera así, por el Lema 5, existiria $a \in L \setminus \{0\}$ uniforme, tal que $(\bigvee_{i=1}^n a_i) \wedge a = 0$. Esto implicaria, por el Lema 2, que $\{a_1, ..., a_n, a\} \in \Im$, contradiciendo la maximalidad de $\{a_1, ..., a_n\}$ en $\Im$. Así, $\{a_1, ..., a_n\}$ es un subconjunto independiente de L, con $\bigvee_{i=1}^n a_i \in_e L$ tal que a_i es uniforme para cada $i \in I_n$.

2⇒3 Sea $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq L$ independiente, con $\bigvee_{i=1}^{n} a_i \in_e L$, y tal que a_i es uniforme para cada $i \in I_n$. Supongamos que existe $\{b_1, ..., b_m\} \subseteq L$ independiente, con $m > n$. Construiremos recursivamente una sucesión de parejas de conjuntos $A_k \subseteq \{a_1, ..., a_n\}$ y $B_k \subseteq \{b_1, ..., b_m\}$ $(0 \leq k \leq n)$ tales que $|A_k| = k$, $|B_k| = m - k$, $A_k \cap B_k = \varnothing$ y $A_k \cup B_k$ es independiente para cada $0 \leq k \leq n$. Haremos $A_0 = \varnothing$ y $B_0 = \{b_1, ..., b_m\}$. Supongamos ahora que A_k y B_k han sido construidos para algún $0 \leq k < n$. Si $b \in B_k$ y $c = \bigvee_{A_k \cup B_k \setminus \{b\}} x$, entonces existe $a \in A_k$ tal que $c \wedge a = 0$. Si no fuera así, entonces, por el Corolario 1, $\bigvee_{i=1}^{n} (c \wedge a_i)$ seria esencial en $\bigvee_{i=1}^{n} a_i$, pues a_i es uniforme para cada $i \in I_n$. Pero como $\bigvee_{i=1}^{n} a_i \in_e L$ y $\bigvee_{i=1}^{n} (c \wedge a_i) \leq c$, entonces c seria esencial en L, lo cual es imposible ya que $c \wedge b = 0$. Así, haremos $A_{k+1} = A_k \cup \{a\}$ y $B_{k+1} = B_k \setminus \{b\}$.

Ahora, $A_n = \{a_1, ..., a_n\}$ y $B_n \neq \varnothing$ ya que $|B_n| = m - n > 0$. Así, si $b \in B_n$, entonces $(\bigvee_{i=1}^{n} a_i) \wedge b = 0$, contradiciendo el hecho de que $\bigvee_{i=1}^{n} a_i$ es esencial en L.

3⇒4 Sea $a_1 \leq a_2 \leq ...$ una cadena ascendente en L tal que para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $n \geq N$ tal que a_N no es esencial en a_n. Construiremos recursivamente un subconjunto independiente infinito $\{b_i : i \in \mathbb{N}\}$ de L. Sea $a_{s_1} \leq a_{s_2} \leq ...$ una subcadena de $a_1 \leq a_2 \leq ...$ tal que a_{s_i} no es esencial en $a_{s_{i+1}}$ para ningún $i \in \mathbb{N}$. Haremos $b_1 = a_{s_1}$. Si suponemos ahora que hemos definido a b_n para algún $n \in \mathbb{N}$ de manera que $b_n \leq a_{s_n}$, entonces b_{n+1} será un elemento de $\left[0, a_{s_{n+1}}\right]$ tal que $a_{s_n} \wedge b_{n+1} = 0$. Claramente $\{b_i : i \in \mathbb{N}\}$ construido así es un subconjunto independiente infinito de L.

4⇒1 Sea $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto independiente infinito de L. Si hacemos $b_n = \bigvee_{i=1}^{n} a_i$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la cadena $b_1 \leq b_2 \leq ...$ en L es tal que para cada $N \in \mathbb{N}$, existe $n \geq N$ tal que a_N no es esencial en a_n.

La última parte del teorema fue probada en 2⇒3.

Bibliografia

- [AF] Anderson Frank W. y Fuller Kent R., *Rings and Categories of Modules,* Springer-Verlag, 1991.
- [F] Facchini Alberto, *Module Theory, Endomorphism rings and direct sum decompositions in some classes of modules,* Birkhäuser Verlag, 1998.
- [FH] Facchini Alberto y Herbera Dolors, "*Modules with only finitely many direct sum decompositions up to isomorphism",* Irish Mathematical Society Bulletin 50, pag. 51-69, 2003.