



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

---

---

TRANSICIONES DE FASE EN CONDENSADOS  
DE BOSE-EINSTEIN DE DOS MODOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRA EN CIENCIAS (FISICA)

PRESENTA:

CITLALI PÉREZ CAMPOS

DIRECTOR DE TESIS: DR. RAMÓN LÓPEZ PEÑA

COMITÉ TUTORAL: DRA. ROCÍO JÁUREGUI RENAUD

DR. OCTAVIO CASTAÑOS GARZA

**pcf**

posgrado en ciencias físicas  
u n a m

MÉXICO, D.F. FEBRERO 2009



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Para M.C.C.G, J.L.H.R y F.M.S.*

# Resumen

Mucho tiempo antes de que cualquier realización experimental fuera posible, A. Einstein y S. Bose predijeron que cuando un gas diluido de átomos bosónicos es enfriado por debajo de una temperatura crítica, una fracción grande de estos átomos se condensa en el estado cuántico más bajo [1, 2]. A esta temperatura, los bosones sufren una transición de fase cuántica y se convierten en lo que comúnmente se conoce como *Condensado de Bose-Einstein (BEC)*: una nube coherente en la cual todos los átomos ocupan el estado base en forma macroscópica. Este comportamiento es una consecuencia directa de la estadística cuántica, es decir, cuando la longitud de onda térmica (longitud de onda de De Broglie) de las partículas es comparable a su separación, entonces su indistinguibilidad se vuelve crucial.

Aunque ya se habían observado Condensados de Bose-Einstein en sistemas superfluidos y superconductores [3, 4], su producción experimental con gases atómicos diluidos no se había logrado. Las técnicas necesarias para realizar tal hazaña han sido desarrolladas sólo en años recientes, y no fue sino hasta 1995 que M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman y E. A. Cornell [5], haciendo uso de un gas diluido de átomos de rubidio y trampas magneto-ópticas, lograron observar Condensados de Bose-Einstein en dicho tipo de sistemas por primera vez. Casi simultáneamente, K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn y W. Ketterle [6] observaron el mismo fenómeno usando un gas diluido de átomos de sodio. Esto marcó un punto de referencia en la historia de la física experimental, y desde entonces varios sistemas han sido utilizados para estudiar Condensados de Bose-Einstein y sus propiedades de coherencia. En 1996, C.J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist, E. A. Cornell y C. E. Wieman [7] al traslapar dos Condensados de Bose-Einstein produjeron el primer condensado de dos modos.

En este trabajo se utiliza un modelo simple en segunda cuantización que describe un condensado de Bose-Einstein de dos modos [8]. Este modelo se reescribe en términos de los generadores de un álgebra  $SU(2)$  [9], y por medio del formalismo de estados coherentes [10] y de la teoría de catástrofes [11] se encuentran las transiciones de fase cuánticas y se investiga la relación entre éstas y los puntos de bifurcación del modelo semiclásico correspondiente [12, 13, 14]. Para ello, se calcula el valor esperado del Hamiltoniano con respecto a los estados coherentes y se encuentran los puntos críticos que lo minimizan. Posteriormente, haciendo el análisis de la matriz Hessiana, se encuentran las regiones de estabilidad del sistema, las cuales están determinadas por la separatriz en el espacio de parámetros. Además, en este espacio se han estudiado las siguientes observables: energía mínima, cocientes de diferencias de energía, composición de la función de onda del estado base, valores esperados de los operadores de momento angular y sus cuadrados, distribución de Husimi y su segundo momento, coeficientes de compresión y la entropía de enredamiento para dos particiones diferentes. Se muestra que el comportamiento de las observables mencionadas se vuelve crítico a lo largo de la separatriz, siendo cualitativamente similar en cada una de las regiones fuera de ella.

Los objetivos principales son los siguientes:

1. Mostrar que la teoría de catástrofes junto con el formalismo de estados coherentes son útiles para encontrar las transiciones de fase y propiedades de estabilidad de modelos escritos en términos de los generadores de un álgebra  $SU(2)$ . En particular para la descripción de un condensado de Bose-Einstein de dos modos.
2. Estudiar el comportamiento de diferentes observables en las regiones de estabilidad del modelo, entre las que destacan la población relativa, los coeficientes de compresión y la distribución de probabilidad de ocupación relativa.
3. Determinar las correlaciones existentes entre la entropía de enredamiento (en dos diferentes particiones), el comportamiento de la función de Husimi y su segundo momento con las transiciones de fase.

# Índice

Resumen . . . . .	V
<b>Índice</b>	<b>VII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Transiciones de fase cuánticas . . . . .	1
1.1.1. Sistemas de qubits interactuantes . . . . .	3
1.1.2. Condensados de Bose-Einstein . . . . .	6
1.2. Teoría de catástrofes . . . . .	10
1.2.1. Una aplicación sencilla . . . . .	11
<b>2. El Hamiltoniano modelo</b>	<b>15</b>
2.1. Obtención del Hamiltoniano . . . . .	15
2.2. Estados coherentes de $SU(2)$ . . . . .	19
2.3. Límite clásico . . . . .	21
2.3.1. Principio variacional dependiente del tiempo . . . . .	21
2.4. El Hamiltoniano modelo en la representación de Bargmann . . . . .	23
2.4.1. Cambio a variables angulares . . . . .	25
<b>3. Análisis de estabilidad</b>	<b>31</b>
3.1. Separatriz del sistema en el espacio de parámetros . . . . .	31

3.1.1. Caso $a = 0$ . . . . .	31
3.1.2. Caso $b = 0$ . . . . .	41
3.1.3. Caso $c = 0$ . . . . .	45
3.2. Cálculo de los valores esperados de observables . . . . .	50
3.2.1. Caso $a = 0$ . . . . .	51
3.2.2. Caso $b = 0$ . . . . .	63
3.2.3. Caso $c = 0$ . . . . .	67
<b>4. Análisis cuántico</b>	<b>71</b>
4.1. Caso $a=0$ . . . . .	72
4.2. Caso $b=0$ . . . . .	124
4.3. Caso $c=0$ . . . . .	137
4.4. Caso general . . . . .	157
<b>5. Conclusiones</b>	<b>181</b>
<b>A. Cerradura para los estados coherentes de <math>SU(2)</math></b>	<b>187</b>
<b>B. Ecuaciones de movimiento</b>	<b>190</b>
B.1. Integrales de trayectoria . . . . .	190
<b>C. Segundo momento de la función de Husimi</b>	<b>195</b>
<b>D. Programas de Mathematica</b>	<b>199</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>209</b>

# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se discutirán los conceptos fundamentales que permitirán entender el sistema que se estudia, seguir el desarrollo de este trabajo y entender la interpretación de los resultados encontrados. Las secciones sobre las transiciones de fase, sistemas de qubits interactuantes y condensados de Bose-Einstein están basadas en el trabajo de Sadchev [15]. La tercera sección presenta una breve discusión de la teoría de catástrofes [11].

### 1.1. Transiciones de fase cuánticas

El concepto de fase proviene de la Termodinámica y la Física Estadística y se define como un estado homogéneo del sistema en estudio. Por lo tanto, una transición de fase corresponde al paso entre dos estados homogéneos diferentes del sistema. En la vida cotidiana presenciamos a menudo transiciones de fase cuyo ejemplo más común es el del agua que a temperatura ambiente y condiciones normales de presión es un líquido, pero si la temperatura aumenta hasta rebasar los  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  se transforma en vapor, un gas, mientras que si la temperatura disminuye por debajo de los  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  se transformará en hielo, un sólido. Este tipo de fenómenos son tan familiares para nosotros que casi nunca pensamos que se trata de procesos complicados cuya descripción teórica sólo pudo ser desarrollada hasta mediados del siglo veinte.

Las transiciones de fase pueden explicarse por el equilibrio existente entre la energía interna y la entropía del sistema. Según la termodinámica, los sistemas en equilibrio térmico buscan minimizar la energía libre  $F = E - TS$ , donde  $T$  es la temperatura. La energía interna está determinada por las interacciones entre las



moléculas mientras que la entropía es proporcional al logaritmo del número de arreglos microscópicos posibles de las moléculas para una energía y un volumen dados.

En el caso del agua es claro que la entropía es mayor cuando es un líquido mientras que es mínima en el estado sólido cuando se tiene un arreglo cristalino que minimiza la energía, por lo tanto, cuando  $T$  es pequeña  $F$  es mínima en el estado sólido mientras que cuando la temperatura crece, las contribuciones de la entropía son más significativas y la energía libre  $F$  se minimiza en el estado líquido. Las energías libres del agua líquida y sólida se cruzan cuando  $T = 0^\circ\text{C}$ , la temperatura a la cual ocurre la transición de fase.

Dependiendo de las condiciones experimentales, las transiciones de fase pueden ser de diferentes tipos. Por ejemplo, si tenemos agua a una presión constante de una atmósfera y elevamos la temperatura, al cruzar la curva de coexistencia la densidad del sistema cambia bruscamente de  $1\text{ g/cm}^3$  (la densidad del agua) a  $0.001\text{ g/cm}^3$  (la densidad del vapor). Este proceso describe una transición de fase de primer orden, pues la densidad, que es la primera derivada del potencial termodinámico, presenta una discontinuidad. Sin embargo, si ahora cambiamos presión y temperatura de manera que el sistema permanezca todo el tiempo sobre la curva de coexistencia, durante todo el proceso el sistema está formado por dos fases hasta que se llega al extremo de la curva de coexistencia (punto crítico) donde el sistema se transforma en una sola fase. Este tipo de transiciones de fase se conoce como transiciones de segundo orden porque en este caso la densidad del sistema varía de manera continua, sin embargo, la segunda derivada del potencial termodinámico, el coeficiente de expansión térmica, presenta discontinuidad. Por lo tanto, el orden de la transición de fase está determinado por el orden de la primera derivada del potencial termodinámico que presenta discontinuidad en la temperatura de transición. Esta clasificación de las transiciones de fase es conocida como clasificación de Ehrenfest.

Los fenómenos que se han descrito hasta ahora corresponden a las transiciones de fase conocidas en general como térmicas, que se producen debido a la importancia que adquiere la entropía en determinar la fase de un sistema cuando la temperatura se incrementa. Sin embargo, las transiciones de fase ocurren en la naturaleza en una gran variedad de sistemas y bajo un amplio rango de condiciones. Por ejemplo, la transición del hierro de paramagnético a ferromagnético ocurre alrededor de los 1000 K, la transición del helio líquido a un superfluido a 2.2 K y la condensación de Bose-Einstein a  $10^{-7}$  K. Es decir, las transiciones de fase son un fenómeno muy general, asociado con las propiedades básicas de los sistemas de muchos cuerpos.

En este trabajo estamos interesados en las transiciones de fase cuánticas que son de un tipo muy diferente a las térmicas. Tales transiciones ocurren a temperatura

de cero absoluto  $T = 0$  K, donde la termodinámica nos dice que el sistema debe encontrarse en el estado de mínima energía. Por ejemplo, en el caso del agua puede suponerse que existe un arreglo cristalino que minimiza la interacción molecular y por tanto todas las moléculas permanecen en su sitio correspondiente de la red, pero entonces no parecería haber la posibilidad de una transición de fase en este estado. Sin embargo, este modelo no es compatible con las leyes de la mecánica cuántica pues viola el principio de incertidumbre de Heisenberg, de manera que determinar el estado base del sistema es una tarea delicada pues deben optimizarse las energías cinética y potencial de manera que se mantenga la consistencia con el principio de incertidumbre lo cual implica que, al menos en principio, más de una fase es posible aún a  $T = 0$  K y las transiciones entre éstas son necesariamente transiciones de fase cuánticas.

La diferencia básica entre estas transiciones de fase y las térmicas es que la maximización de la entropía requerida cuando  $T > 0$  K ha sido ahora remplazada por las fluctuaciones cuánticas requeridas por el principio de incertidumbre.

Aunque pareciera que estas transiciones de fase son sólo abstracciones teóricas sin ninguna aplicación práctica debido a la dificultad que presenta enfriar un sistema cerca del cero absoluto, en las últimas décadas se ha mostrado que estas transiciones dejan huellas características en las propiedades físicas de los materiales cuando  $T > 0$  K y que podrían ser visibles aún a temperatura ambiente, por lo tanto, si se quiere un entendimiento completo de las propiedades físicas de algunos materiales deben considerarse las relaciones de las fases cuando  $T > 0$  K con los diferentes estados base y las correspondientes transiciones cuánticas.

### 1.1.1. Sistemas de qubits interactuantes

Consideremos un sistema cuántico sencillo, un conjunto de *qubits* interactuando. Un qubit es el grado de libertad cuántico más simple, consiste de un sistema que sólo puede encontrarse en dos estados cuánticos que se denotan como  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$ , siendo el ejemplo clásico de un qubit los estados de espín de un electrón. Según el principio de superposición de la mecánica cuántica el estado más general de un qubit está dado por

$$|\Psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle, \quad (1.1.1)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son números complejos arbitrarios tales que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . De particular interés son las combinaciones en las cuales  $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$  y  $\alpha = -\beta = 1/\sqrt{2}$  y que

denotaremos como

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle), \quad |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle), \quad (1.1.2)$$

es decir, la probabilidad de encontrar al sistema en uno de sus dos estados posibles es la misma. Estos estados tienen la propiedad de tener momento magnético apuntando en la dirección positiva del eje  $x$  en el primer caso y en la dirección negativa para el segundo caso; a su vez estos dos nuevos estados pueden usarse como base para expresar el estado de un sistema de dos niveles o qubit. Por lo tanto, el estado  $|\Psi\rangle$  puede verse como un estado que fluctúa entre los estados arriba y abajo o como un estado que fluctúa entre los estados derecha  $|\rightarrow\rangle$  e izquierda  $|\leftarrow\rangle$ .

El acoplamiento entre los qubits del sistema se describe por medio de un Hamiltoniano que es la representación cuántica de la energía por lo que debe constar de dos términos, uno correspondiente a la energía cinética y uno a la energía potencial, de manera análoga a lo que ocurre en el caso térmico; sin embargo, debe recordarse que en este caso  $T = 0$  K, por lo tanto, lo que nos interesa es encontrar el estado de energía más bajo.

El Hamiltoniano más simple para este sistema corresponde a

$$H = H_z + g H_x, \quad (1.1.3)$$

donde  $g$  es un parámetro adimensional que podemos ajustar para llevar los qubits a través de la transición de fase cuántica y que juega un papel similar al de la temperatura en el caso de la energía libre. Si consideramos como base la representación con proyección del momento angular bien definida en la dirección  $z$  ( $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ ), entonces el término  $H_z$  puede pensarse como una energía potencial que determina la configuración del momento magnético en la dirección  $z$  que minimiza la energía mientras que el término  $H_x$  representaría una energía cinética cuya forma es muy sencilla debido a que cada qubit sólo tiene dos estados posibles por lo que el único "movimiento" posible es girar (flip) entre los estados arriba y abajo y es  $H_x$  el que introduce este giro o tunelaje entre los dos estados. Una característica fundamental de este Hamiltoniano es que los papeles entre la energía cinética y la potencial se intercambian si cambiamos a la base  $\{|\rightarrow\rangle, |\leftarrow\rangle\}$ , sin embargo, existe un único estado base que tiene ambas interpretaciones.

El término  $H_z$  surge de la interacción dipolar entre los qubits. Cada momento magnético  $M_z$  produce un campo dipolar magnético y este campo tiende a alinear a los otros momentos magnéticos de forma paralela a él. Estas interacciones dipolares

son optimizadas por un arreglo ferromagnético de los  $M_z$ , es decir, el estado base es

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle &= \cdots |\uparrow\rangle_{j_1} |\uparrow\rangle_{j_2} |\uparrow\rangle_{j_3} |\uparrow\rangle_{j_4} |\uparrow\rangle_{j_5} \cdots, \\ &\quad o \\ |\downarrow\rangle &= \cdots |\downarrow\rangle_{j_1} |\downarrow\rangle_{j_2} |\downarrow\rangle_{j_3} |\downarrow\rangle_{j_4} |\downarrow\rangle_{j_5} \cdots, \end{aligned}$$

donde las etiquetas  $j_j$  corresponden a cada uno de los qubits. La elección de  $|\uparrow\rangle$  o  $|\downarrow\rangle$  depende de las condiciones experimentales externas, aquí se considerará como estado base  $|\uparrow\rangle$ . Entonces en el caso en que  $g \ll 1$  éste es el estado base y no es perturbado por tunelaje entre los estados, es decir, en este caso no se presentan transiciones de fase. Cuando  $g \gg 1$  el estado está determinado enteramente por la optimización del tunelaje y esto ocurre cuando se tiene la misma probabilidad de encontrarse en el estado arriba o abajo. Puede escogerse una fase arbitraria en nuestra definición de los estados de los qubits de modo que el tunelaje sea preferente hacia el estado derecha  $|\rightarrow\rangle_j$  para toda  $j$ , de esta manera un tunelaje grande hará que todos los qubits apunten en la dirección derecha. Esto sugiere una implementación práctica para variar el valor de  $g$  aplicando un campo magnético en la dirección transversal al eje  $Z$ . Así, cuando se tiene  $g \rightarrow \infty$  es claro que el estado base de  $H$  debe ser un producto de estados derechos

$$|\Rightarrow\rangle \equiv \cdots |\rightarrow\rangle_{j_1} |\rightarrow\rangle_{j_2} |\rightarrow\rangle_{j_3} |\rightarrow\rangle_{j_4} |\rightarrow\rangle_{j_5} \cdots; \quad (1.1.4)$$

es muy importante notar que este estado no puede escribirse como una combinación lineal de  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$ , es decir,

$$|\Rightarrow\rangle \neq \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle),$$

y es justamente esta propiedad la que permite la aparición de transiciones de fase cuánticas no triviales.

Entonces, cuando  $g \ll 1$  el estado base del sistema de qubits corresponde a  $|\uparrow\rangle$  cuya propiedad más importante es que el valor esperado de la proyección del momento angular a lo largo del eje  $Z$ ,  $\langle M_z \rangle$ , es diferente de cero. Se esperaría que  $\langle M_z \rangle$  evolucionara como una función continua del parámetro  $g$ . Sin embargo, cuando  $g$  es muy grande, pero finito, el estado base corresponde a  $|\Rightarrow\rangle$  cuyo valor esperado de  $M_z$  es estrictamente cero y que es imposible conectar de manera suave con  $|\uparrow\rangle$ , por lo tanto, debe existir una singularidad al menos para una  $g = g_c$  donde el valor esperado de  $M_z$  se anula por primera vez. Es exactamente este punto donde ocurre la

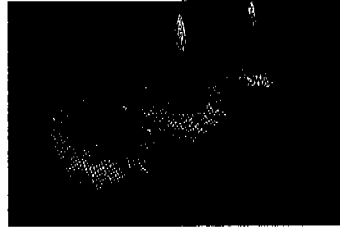
transición de fase cuántica. Para el caso que estamos considerando, es el punto donde desaparece el comportamiento ferromagnético y se llega a un estado paramagnético. En un sentido realista, el estado base del sistema de muchos qubits para  $g < g_c$  es similar y está suavemente conectado al estado  $|\uparrow\rangle$  mientras que para  $g > g_c$  existe también una correspondencia similar con el estado  $|\Rightarrow\rangle$ . Únicamente en  $g = g_c$  se obtiene un estado “crítico”, en un complejo y enredado arreglo de los qubits.

### 1.1.2. Condensados de Bose-Einstein

En 1924 Satyendra Nath Bose escribió a Einstein pidiendo su ayuda para la publicación de un artículo en el que mostraba que la ley de distribución de Planck para los fotones podía derivarse de primeros principios [1]. Con base en estas ideas, Einstein predijo que en un sistema de partículas que obedecen la estadística de Bose y cuyo número total se conserva, debería existir una temperatura por debajo de la cual una fracción de las partículas se “condensa” en el mismo estado [2]. Este fenómeno es conocido como condensación de Bose-Einstein.

A temperatura ambiente, un gas está formado de partículas que se desplazan rápidamente y que pueden visualizarse como bolas de billar clásicas que colisionan ocasionalmente entre ellas y con las paredes del recipiente que las contiene. Cuando la temperatura decrece, los átomos disminuyen su velocidad y sus características cuánticas se vuelven más significativas. Como sabemos cada átomo con energía térmica promedio  $k_B T$  puede representarse como una onda cuya longitud de onda se define como  $\lambda_B = ((2\pi\hbar)^2/m_0 k_B T)^{1/2}$ ; entonces es claro que cuando la temperatura disminuye la longitud de onda aumenta. Esto tiene consecuencias dramáticas cuando el valor de la longitud de onda se vuelve comparable con la separación promedio entre las partículas ( $d \propto \rho^{-1/3}$ ). Entonces podemos pensar a los átomos ocupando estados cuánticos específicos que se extienden a largo de todo el volumen del contenedor. Si las partículas que conforman el gas son bosones, un número arbitrario de ellas puede ocupar cualquier estado. Cuando la energía es suficientemente pequeña todas las partículas tienden a ocupar su estado base, que por tratarse de partículas indistinguibles es el mismo para todas ellas, formando así un condensado de Bose-Einstein (BEC). En la Fig.1.1 se muestra la distribución de velocidades característica de un condensado de Bose-Einstein.

Así cuando un conjunto de bosones es enfriado a una temperatura por debajo de la temperatura crítica todas las partículas alcanzarán el mismo estado y formarán un BEC, esto es cierto aún si existen fuertes interacciones repulsivas entre las partículas que forman el condensado, lo cual disminuye el número de partículas en el condensado



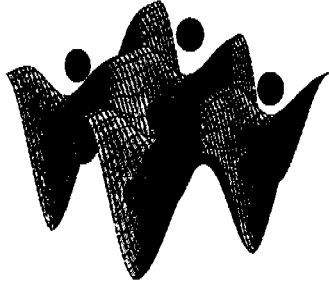
**Figura 1.1:** Distribución de velocidad de los átomos de rubidio (Rb), después de que son liberados de una trampa a muy baja temperatura [5]. La gráfica de la izquierda corresponde a  $T=400$  nK, la central a  $T=200$  nK y la derecha a  $T=50$  nK. El pico que presentan las dos últimas corresponde a velocidad cero y es característico de un BEC.

pero no lo aniquila por completo y de esta manera todo el sistema permanece como un superfluido perfecto. Surge entonces la pregunta: ¿es posible encontrar transiciones de fase en este sistema que pareciera tan estable?

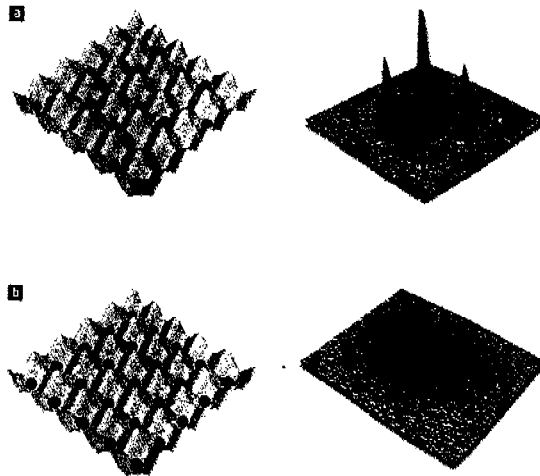
La clave de la formación de un condensado de Bose-Einstein es que algunos de los átomos son libres de moverse a lo largo de todo el sistema en el mismo estado cuántico. Esto sugiere que si fuera posible interrumpir el movimiento de los átomos por un conjunto de barreras microscópicas sería posible destruir el estado superfluido del condensado y alcanzar un nuevo estado base. La implementación de esta idea ha sido posible en años recientes aplicando un potencial periódico de barreras dentro de la trampa en la cual se forma el condensado. Se conforma de un arreglo de sitios en los cuales las partículas disminuyen su energía potencial y tienen que ir por encima de una barrera para moverse entre estos sitios. En la Fig.1.2 se muestra un modelo de estas redes.

Cuando el potencial es débil, se observa un pequeño pero significativo cambio en el estado del sistema, al medir la distribución de velocidades de uno de estos sistemas se encontró la distribución mostrada en la Fig.1.3. Puede observarse que existe un gran pico cerca de la velocidad cero, de igual manera que en la distribución de velocidades para el condensado; Fig.1.1, sin embargo, existen otros picos alrededor de éste, mostrando que la red actúa como una rejilla de difracción. Es decir, la forma del condensado se ha ajustado a la forma del potencial periódico pero aparte de eso el condensado mantiene su integridad.

Supongamos que los átomos sólo pueden ocupar un estado cuántico en cada mínimo del potencial (sitio), lo cual es de hecho una muy buena aproximación a la realidad. Si el átomo  $n$  ocupa el  $j$ -ésimo sitio del potencial denotaremos este estado como  $|j\rangle_n$ . Entonces cada partícula del condensado ocupará exactamente el mismo



**Figura 1.2:** Simulación de una red óptica. Estas redes son formadas por la interferencia de haces láser viajando en direcciones opuestas. El potencial periódico resultante puede usarse para atrapar átomos como se muestra. Figura tomada de [www.physics.umd.edu](http://www.physics.umd.edu).



**Figura 1.3:** En (a) el BEC se halla en un estado superfluido, los átomos que lo forman pueden ser descritos como una onda macroscópica. Cuando este condensado es liberado del potencial aparecen patrones de interferencia debido a la coherencia de fase entre las funciones de onda atómicas en diferentes sitios de la red óptica. En este caso, la fase de la onda macroscópica está bien definida pero el número de átomos en cada sitio fluctúa. En (b) se presenta el otro caso límite, esto es un potencial periódico muy fuerte que produce un aislante. En este caso cada sitio de la red tiene un número de átomos fijo pero la fase es incierta, por ello no puede observarse interferencia cuando las partículas son liberadas del potencial [16].

estado que será una superposición de los estados en cada pozo. El estado final puede escribirse como el producto tensorial de los estados posibles en cada pozo que pueden ocupar los átomos

$$|BEC\rangle \propto (|j_1\rangle_1 + |j_2\rangle_1 + |j_3\rangle_1 \cdots) \otimes (|j_1\rangle_2 + |j_2\rangle_2 + |j_3\rangle_2 \cdots) \\ \otimes (|j_1\rangle_3 + |j_2\rangle_3 + |j_3\rangle_3 \cdots) \cdots$$

Al expandir estos productos puede observarse que el número de partículas en cada sitio fluctúa considerablemente, esto quiere decir que las partículas son capaces de fluir a través del sistema con facilidad. Este comportamiento es la clave de la superfluididad del condensado. Sin embargo, si la intensidad del potencial periódico se incrementa (Fig.1.3) existe un valor tal que hay una transición de fase cuántica después de la cual la superfluididad desaparece, pues el tunelaje entre mínimos cercanos se suprime. Esto combinado con las interacciones repulsivas entre las partículas en el mismo pozo de potencial suprime fuertemente las fluctuaciones en el estado cuántico.

Un estado ideal sin fluctuaciones, es aquél en el que cada sitio  $j_i$  tiene exactamente una de las partículas en todos los términos y se escribe como

$$|I\rangle \propto |j_1\rangle_1 |j_2\rangle_2 |j_3\rangle_3 \cdots + |j_1\rangle_1 |j_2\rangle_3 |j_3\rangle_2 \cdots \\ + |j_1\rangle_2 |j_2\rangle_1 |j_3\rangle_3 \cdots + |j_1\rangle_2 |j_2\rangle_3 |j_3\rangle_1 \cdots \\ + |j_1\rangle_3 |j_2\rangle_2 |j_3\rangle_1 \cdots + |j_1\rangle_3 |j_2\rangle_1 |j_3\rangle_2 \cdots ;$$

de hecho cualquiera de estos términos es suficiente para describir la configuración de las partículas en el estado base pues las partículas son indistinguibles. Debe notarse que cada término en  $|I\rangle$  está presente en  $|BEC\rangle$  la diferencia radica en los estados que representan las fluctuaciones. La desaparición de las fluctuaciones implica que las partículas son completamente incapaces de moverse en el sistema, es decir, el sistema se ha convertido en un aislante y la transición de fase es entre un superfluido y un aislante.

En este trabajo se realiza un estudio similar al mostrado en este capítulo para un condensado de Bose-Einstein de dos modos, cuyo Hamiltoniano es función de tres parámetros que dependen de las características de las partículas que conforman el sistema. Sin embargo, se irá más allá buscando las relaciones que pueden tener estas transiciones de fase con otras observables del sistema aparte de la ya mencionada con la energía del sistema.



## 1.2. Teoría de catástrofes

La teoría de catástrofes constituye una muy buena herramienta para el estudio de las transiciones de fase, pues describe y clasifica los sistemas donde un pequeño cambio en los parámetros provoca cambios cualitativos significativos en el comportamiento del sistema. En general, la teoría de catástrofes puede usarse para clasificar cómo se modifican los puntos críticos estables cuando se varían los parámetros.

A continuación se explicarán algunos de los conceptos básicos así como el funcionamiento general de la teoría de catástrofes.

Una superficie de energía o familia de superficies de energía es una función que depende de dos conjuntos, uno de variables y otro de parámetros esenciales, esto es, no redundantes. Estas funciones generalmente tienen tres tipos de puntos. Aquellos puntos para los cuales el gradiente de la superficie de energía es diferente de cero se conocen como puntos regulares, y de ellos consiste la mayor parte de los puntos de la superficie. Los puntos para los que el gradiente vale cero son los puntos críticos y estos pueden ser de dos clases, los llamados aislados o de Morse y los degenerados o no-Morse. Para los puntos aislados el determinante de la matriz Hessiana de la función es diferente de cero y entonces el teorema de Morse garantiza la estabilidad estructural de las funciones de tal modo que perturbaciones producen únicamente cambios pequeños en la función, es decir, se preserva el tipo de los puntos críticos. Además, en estos puntos aislados, las superficies de energía pueden describirse localmente en términos de una función cuadrática, también llamada forma de Morse.

En un punto crítico degenerado la matriz Hessiana posee más de uno de sus eigenvalores iguales a cero, entonces por el lema de Thom, se tiene que en la vecindad de tal punto la función puede ser descrita como una suma de una forma cuadrática, definiendo el subespacio no-degenerado, y una parte degenerada que contiene el punto y que depende de las variables asociadas con los eigenvalores cero del Hessiano. De acuerdo al teorema de clasificación de catástrofes de Thom, la parte degenerada, puede representarse por una forma canónica llamada función catástrofe. Esta función es la suma de un germen dependiente del número de eigenvalores cero, y una perturbación universal que elimina la degeneración del punto crítico y hace a la superficie de energía estructuralmente estable. El comportamiento de la función de estado cerca del punto degenerado puede encontrarse estudiando únicamente esta segunda componente.

Cuando se tiene una familia de funciones para la que la mayoría de los puntos del espacio de parámetros son de la forma de Morse, son los puntos críticos degenerados

los que organizan las propiedades globales de la familia, es decir, dividen el espacio de parámetros en regiones donde las funciones presentan un comportamiento similar. Los puntos del espacio de parámetros que corresponden a puntos degenerados constituyen los conjuntos de bifurcación.

### 1.2.1. Una aplicación sencilla

Consideremos una función, dependiente de un parámetro  $b$  y una variable  $\theta$ , que representa la superficie de energía de un modelo simplificado de condensados de Bose-Einstein de dos modos,

$$f(b, \theta) = -\cos \theta + \frac{b}{2} \cos^2 \theta. \quad (1.2.1)$$

El Hamiltoniano general se estudiará a mayor profundidad más adelante.

El primer paso es encontrar los puntos críticos de este sistema; éstos se obtienen al resolver la ecuación

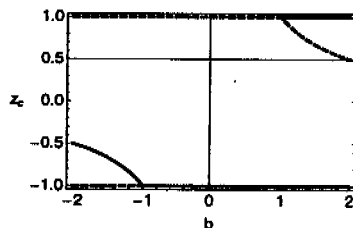
$$\frac{\partial f(b, \theta)}{\partial \theta} = 0,$$

cuyas soluciones son  $\theta_c = 0, \pi, \arccos(1/b)$ . Puede observarse que la tercera solución no existe en todo el espacio, únicamente cuando se cumple la condición  $-1 \leq 1/b \leq 1$ .

En la Fig.1.4 se grafica la zeta crítica,  $z_c = \cos \theta$ , como función de  $b$ . La línea  $z_c = 1$  corresponde a  $\theta_c = 0$ , la línea  $z_c = -1$  corresponde a  $\theta_c = \pi$  mientras que las líneas  $z_c = 1/b$  corresponden a  $\theta_c = \arccos 1/b$ . La línea punteada indica que el punto crítico es mínimo mientras que la línea sólida muestra los máximos. Se observa que hay dos puntos donde coalescen dos puntos críticos, en  $b = -1$  se trata de dos máximos y en  $b = 1$  dos mínimos.

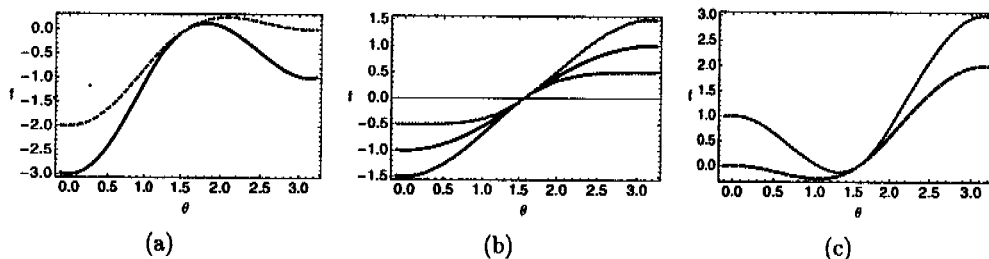
Se observa que el espacio de parámetros esta dividido en tres regiones, en cada una de las cuales la estructura de la función es la misma. Cuando  $b < -1$  la función tiene tres puntos críticos, dos de los cuales son mínimos y uno es máximo. En la región  $-1 < b < 1$  desaparece uno de los mínimos y la función presenta únicamente un mínimo y un máximo. Por último en la región  $b > 1$  nuevamente se tienen tres puntos críticos, sin embargo, ahora se trata de dos máximos y un mínimo.

La forma de  $f(b, \theta)$  se muestra como función de  $\theta$  en la Fig.1.5 donde se grafica para diferentes valores del parámetro  $b$ . En Fig.1.5(a) se muestran  $f(-2, \theta)$  (línea punteada) y  $f(-4, \theta)$  (línea sólida), puede observarse que los dos mínimos de la función se encuentran en  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$  mientras que el mínimo está en  $\theta = \arccos(1/b)$  lo que



**Figura 1.4:** En esta figura se muestra la zeta crítica,  $z_c$ , como función del parámetro  $b$ . Las líneas punteadas representan los puntos para los cuales el punto crítico es mínimo mientras que las líneas sólidas representan los máximos. Puede observarse que existen 3 regiones del espacio de parámetros en cada una de las cuales la función tiene el mismo número de puntos críticos y únicamente en los puntos  $b = -1$  y  $b = 1$  coalescen dos puntos críticos máximos y mínimos respectivamente.

corresponde con lo observado en la Fig.1.4. En la Fig.1.5(b) se muestran  $f(-1, \theta)$  (línea inferior),  $f(0, \theta)$  (línea media) y  $f(1, \theta)$  (línea superior) puede verse que el mínimo se encuentra en  $\theta = 0$  y el máximo en  $\theta = \pi$ . Por último, en la Fig.1.5(c) se grafican  $f(2, \theta)$  (línea punteada) y  $f(4, \theta)$  (línea sólida), puede observarse que la función tiene un sólo mínimo en  $\theta = \arccos(1/b)$  y dos máximos localizados en  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ .



**Figura 1.5:** En esta figura se muestra  $f(b, z)$  como función de  $\theta$  para diferentes valores del parámetro  $b$ . En (a)  $b = -2$  (línea punteada) y  $b = -4$  (línea sólida), en (b)  $b = -1$  (línea inferior),  $b = 0$  (línea media) y  $b = 1$  (línea superior) y en (c)  $b = 2$  (línea punteada) y  $b = 4$  (línea sólida).

En estas figuras se observa que mientras el valor del parámetro  $b$  se encuentre dentro de la misma región la forma de la función se preserve, sin embargo, al cambiar de región la estructura de la función es completamente diferente.

La separatriz de un sistema corresponde a los puntos en el espacio de parámetros

en los cuales coalescen dos o más puntos críticos; para esta función la separatriz está formada únicamente por los dos puntos  $b = \{-1, 1\}$ , y como ya hemos mostrado es este conjunto de puntos el que divide el espacio de parámetros según los diferentes comportamientos de la función.

En este trabajo se realiza el mismo análisis para un Hamiltoniano que modela la interacción de las partículas que forman un condensado de dos modos. Se estudiará además la relación entre la separatriz del sistema y las transiciones de fase cuánticas, así como la información que puede extraerse del comportamiento de diversas observables del sistema en las diferentes regiones de estabilidad.

## Capítulo 2

# El Hamiltoniano modelo

### 2.1. Obtención del Hamiltoniano

Se analizará la dinámica de un condensado de Bose-Einstein de  $N$  átomos en dos diferentes estados hiperfinos, modo A que representa el estado de menor energía y modo B que representa el estado de mayor energía, acoplados por tunelaje Josephson (que puede representar también una interacción con un campo de microondas o Raman), cuyo Hamiltoniano está constituido por cuatro términos [8, 9]

$$H = H_A + H_B + H_{AB} + H_{las}, \quad (2.1.1)$$

donde los primeros dos describen la evolución de los átomos en los niveles A y B, en ausencia de interacciones entre átomos en diferentes modos; el tercer término corresponde a las interacciones entre átomos en diferentes modos, y el último describe la interacción con un campo de microondas producido por un láser. Para gases diluidos, el alcance  $r_0$  de las fuerzas interatómicas es mucho más pequeño que la distancia promedio entre las partículas que está caracterizada por la densidad del gas como

$$d = (N/V)^{-\frac{1}{3}},$$

donde  $N$  denota el número de átomos y  $V$  el volumen del gas. Este hecho permite despreciar las interacciones de más de dos cuerpos entre los átomos. Adicionalmente, justifica usar, en los procesos de colisión entre dos átomos, la expresión asintótica del movimiento relativo que está determinada por su amplitud de dispersión. Esto implica que las propiedades del sistema pueden expresarse en términos de la amplitud de dispersión y no dependerá de los detalles específicos de la interacción de dos

cuerpos [17]. Además siempre se considera que para temperaturas menores que la temperatura crítica a la cual ocurre la condensación [17, 18]

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{Mk_b} \left( \frac{N}{2.612V} \right)^{\frac{2}{3}},$$

donde  $M$  determina la masa de los átomos y  $k_b$  es la constante de Boltzmann; debe ocurrir que, en promedio, la magnitud del momento  $p$ , de los átomos satisface la desigualdad [17]

$$\frac{pr_0}{\hbar} \ll 1.$$

Bajo estas condiciones, la amplitud de dispersión  $f(\theta)$ , es independiente de la energía y del ángulo de dispersión, y está determinada por la longitud de dispersión en onda  $S$ ,  $f(0)|_{E \rightarrow 0} = -a$ . Esto es así si se cumple  $|a| \ll d$ . Es importante señalar que esta última condición no se cumple en general cerca de una resonancia de Feshbach, la cual ocurre cuando la energía de un estado ligado correspondiente a un potencial interatómico es igual a la energía cinética de un par de átomos libres que colisionan. Esta condición existe raramente, pero puede satisfacerse para átomos alcalinos ultrafríos y puede inducirse por medio de un campo magnético.

En el esquema de la segunda cuantización los Hamiltonianos de interacción toman la forma siguiente [12]

$$\begin{aligned} H_\mu &= \int d^3\vec{x} \hat{\Psi}_\mu^\dagger(\vec{x}) \left( -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + \frac{1}{2} M \omega_\mu^2 x^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\pi\hbar^2 a_\mu^{sc}}{2M} \hat{\Psi}_\mu^\dagger(\vec{x}) \hat{\Psi}_\mu(\vec{x}) \right) \hat{\Psi}_\mu(\vec{x}), \\ H_{AB} &= \frac{4\pi\hbar^2 a_{AB}^{sc}}{M} \int d^3\vec{x} \hat{\Psi}_A^\dagger(\vec{x}) \hat{\Psi}_B^\dagger(\vec{x}) \hat{\Psi}_B(\vec{x}) \hat{\Psi}_A(\vec{x}), \\ H_{las} &= -\frac{\hbar\Omega}{2} \int d^3\vec{x} \left( \hat{\Psi}_B^\dagger(\vec{x}) \hat{\Psi}_A(\vec{x}) \exp(-i\Delta t) \right. \\ &\quad \left. + \hat{\Psi}_A^\dagger(\vec{x}) \hat{\Psi}_B(\vec{x}) \exp(i\Delta t) \right), \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

donde  $M$  denota la masa de los átomos y  $\mu$  los modos correspondientes. Los dos primeros términos en  $H_\mu$  describen a los átomos confinados en potenciales tipo oscilador armónico de frecuencia  $\omega_\mu$ , por lo tanto, este modelo que sirve para describir

átomos en dos niveles hiperfinos puede utilizarse también para describir átomos en dos pozos de potencial separados espacialmente. De aquí en adelante hablaremos de pozos de potencial o de niveles hiperfinos indistintamente. El tercer término del Hamiltoniano modela las interacciones entre átomos del mismo modo debidas a colisiones elásticas, éstas no modifican el número de partículas dentro de cada pozo, y están caracterizadas por la longitud de dispersión  $a_\mu^{sc}$ .  $H_{AB}$  describe las colisiones elásticas entre los átomos de pozos diferentes, y el parámetro  $a_{AB}^{sc}$  corresponde a su longitud de dispersión. Finalmente, el término  $H_{las}$  describe las transiciones Raman, con una energía  $\hbar\Omega$  inducidas por un láser desintonizado por una cantidad  $\Delta$ . Tal interacción actúa como un acoplamiento Josephson que transfiere coherentemente partículas entre ambos modos con una frecuencia de Rabi  $\Omega > 0$ .

Los operadores  $\hat{\Psi}_\mu(\vec{x})$  y  $\hat{\Psi}_\mu^\dagger(\vec{x})$  son operadores bosónicos de campo que crean y aniquilan átomos en la posición  $\vec{x}$  en el estado hiperfino de modo  $\mu$ , y cumplen con las relaciones de conmutación [17]

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}_\mu(\vec{x}), \hat{\Psi}_{\mu'}(\vec{x}')] &= [\hat{\Psi}_\mu^\dagger(\vec{x}), \hat{\Psi}_{\mu'}^\dagger(\vec{x}')] = 0, \\ [\hat{\Psi}_\mu(\vec{x}), \hat{\Psi}_{\mu'}^\dagger(\vec{x}')] &= \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta_{\mu, \mu'}. \end{aligned}$$

Escribiendo  $\hat{\Psi}_\mu(\vec{x})$  como un producto de una función real dependiente de la posición  $\vec{x}$  y un operador bosónico de aniquilación tenemos para los modos A y B:  $\hat{\Psi}_A(\vec{x}) = \hat{a} \phi_A(\vec{x})$ ,  $\hat{\Psi}_B(\vec{x}) = \hat{b} \phi_B(\vec{x})$ , y substituyendo estas definiciones en las ecuaciones (2.1.2) se obtiene [19]

$$\begin{aligned} H &= E_A \hat{a}^\dagger \hat{a} + E_B \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{W_{AA}}{2} \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 + \frac{W_{BB}}{2} \hat{b}^{\dagger 2} \hat{b}^2 \\ &+ W_{AB} \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{a} \hat{b} + \frac{1}{2} \lambda (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}), \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

donde hemos definido las energías de partícula independiente para cada uno de los modos  $\mu = A, B$  como

$$E_\mu = \int d^3\vec{x} \phi_\mu^*(\vec{x}) \left( -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + \frac{1}{2} M \omega_\mu^2 x^2 \right) \phi_\mu(\vec{x}). \quad (2.1.4)$$

En los términos tercero y cuarto de (2.1.3) aparecen los coeficientes relacionados con las colisiones elásticas entre los átomos de cada pozo de potencial

$$W_{\mu\mu} = U_\mu \int d^3\vec{x} \phi_\mu^*(\vec{x}) \phi_\mu^*(\vec{x}) \phi_\mu(\vec{x}) \phi_\mu(\vec{x}), \quad (2.1.5)$$

con  $U_\mu = \frac{4\pi\hbar^2 a_{\mu c}^2}{M}$ . Mientras que los coeficientes de los términos quinto y sexto, representando el acoplamiento Josephson, y las colisiones entre átomos de diferentes pozos están dadas por las expresiones

$$\lambda = -h\Omega \int d^3\vec{x} \left( \phi_B^*(\vec{x})\phi_A(\vec{x}) \exp(-i\Delta t) + \phi_A^*(\vec{x})\phi_B(\vec{x}) \exp(i\Delta t) \right),$$

$$W_{AB} = U_1 \int d^3\vec{x} \phi_A^*(\vec{x})\phi_B^*(\vec{x})\phi_B(\vec{x})\phi_A(\vec{x}),$$

donde  $U_1 = \frac{4\pi\hbar^2 a_{AB}^2}{M}$ . Como únicamente estamos considerando colisiones elásticas, tenemos la restricción de que el número total de partículas de nuestro sistema debe conservarse,  $\hat{N} = \hat{N}_A + \hat{N}_B$ . Debido a esto podemos reescribir nuestro hamiltoniano utilizando la realización de Jordan-Schwinger de los operadores de momento angular, i.e.,

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2}(\hat{N}_B - \hat{N}_A), \quad \hat{J}_- = \hat{a}^\dagger \hat{b}, \quad \hat{J}_+ = \hat{b}^\dagger \hat{a}, \quad (2.1.6)$$

donde  $\hat{N}_A = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  y  $\hat{N}_B = \hat{b}^\dagger \hat{b}$ . Utilizando las relaciones de conmutación de los operadores bosónicos, es inmediato demostrar que los operadores cumplen con las relaciones de conmutación de momento angular,

$$\begin{aligned} [\hat{J}_z, \hat{J}_+] &= \hat{J}_+, \\ [\hat{J}_z, \hat{J}_-] &= -\hat{J}_-, \\ [\hat{J}_+, \hat{J}_-] &= 2\hat{J}_z. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Utilizando que  $J_\pm = J_x \pm iJ_y$  y las identidades (2.1.6) en la expresión  $\hat{J}^2$ , se encuentra fácilmente que  $J = N/2$ . Entonces el Hamiltoniano puede reescribirse, usando la notación establecida en [20], en la forma siguiente

$$H = \frac{k}{2} \hat{J}_z^2 - \Delta\mu \hat{J}_z - \mathcal{E}_J \hat{J}_x, \quad (2.1.8)$$

excepto por dos constantes que tienen la forma

$$\begin{aligned} c_1 &= N \left\{ \frac{E_A}{2} + \frac{E_B}{2} - \frac{N}{4} (W_{AA} + W_{BB}) \right\}, \\ c_2 &= \frac{N^2}{8} \{W_{AA} + W_{BB} + W_{AB}\}, \end{aligned}$$



y los parámetros están definidos por las expresiones

$$\begin{aligned}\Delta\mu &= -\left[E_A - E_B + \frac{1}{2}(N-1)(W_{AA} - W_{BB})\right], \\ k &= 4(W_{AA} + W_{BB} - 2W_{AB}), \\ \mathcal{E}_J &= -\lambda.\end{aligned}\tag{2.1.9}$$

Como veremos más adelante, es conveniente renormalizar el Hamiltoniano, dividiéndolo entre  $J$ , y para tener una cantidad intensiva, es decir, que no depende del tamaño o cantidad de átomos que componen al sistema, el parámetro que multiplica a  $\hat{J}_z^2$  se divide por una  $J$  adicional, pues de otra manera este término sigue siendo dependiente del valor de  $J$ , es decir, del número de partículas. Entonces el Hamiltoniano puede escribirse como

$$\frac{\hat{H}}{J} = \frac{a}{J}\hat{J}_z + \frac{b}{J^2}\hat{J}_z^2 + \frac{c}{J}\hat{J}_x,\tag{2.1.10}$$

donde

$$a = -\Delta\mu, \quad b = \frac{Jk}{2}, \quad c = -\mathcal{E}_J.\tag{2.1.11}$$

El Hamiltoniano (2.1.10) se puede diagonalizar en la base de momento angular,  $|J, M\rangle$ , donde  $J$  denota el eigenvalor del operador  $\hat{J}^2$  y  $M$  la proyección en el eje  $Z$ . Estos estados son equivalentes a las funciones propias de dos osciladores armónicos en los modos  $A$  y  $B$  que tienen un número total de cuantos constante  $N = N_A + N_B$ . La relación entre los índices de las dos bases es la siguiente:  $J = \frac{N}{2}$  y  $M = \frac{1}{2}(N - 2N_B)$ .

## 2.2. Estados coherentes de SU(2)

La primera parte de este trabajo consiste en el análisis semiclásico de nuestro hamiltoniano [12, 13, 14] y para ello se utilizan los estados coherentes de SU(2). Estos se definen en analogía con los estados coherentes de un álgebra de Heisenberg-Weyl (HW(1)) [24], esto es, se aplica el operador de desplazamiento correspondiente al estado de mínima o máxima proyección. Estos estados no cuentan con todas las propiedades que poseen los estados coherentes de HW(1); sin embargo, siguen formando una base sobrecompleta no ortonormal del espacio de estados.

Si el álgebra  $SU(2)$  consta de los operadores  $\{J_0, J_+, J_-\}$ , los estados coherentes no-normalizados se definen como [21]

$$|\zeta\rangle = e^{\zeta \hat{J}_+} |J, -J\rangle, \quad (2.2.1)$$

donde el estado de mínimo peso está determinado por la ecuación  $J_- |J, -J\rangle = 0$ . Este estado puede escribirse haciendo uso de su desarrollo de Taylor como sigue

$$|\zeta\rangle = \sum_{n=0}^{2J} \frac{(\zeta \hat{J}_+)^n}{n!} |J, -J\rangle. \quad (2.2.2)$$

Para encontrar la acción de  $\hat{J}_+^n$  sobre  $|J, -J\rangle$  se utiliza la expresión de la acción del operador de ascenso sobre los eigenestados del momento angular

$$\hat{J}_+ |J, M\rangle = \sqrt{J(J+1) - M(M+1)} |J, M+1\rangle. \quad (2.2.3)$$

Actuando  $n$  veces con  $J_+$ , se obtiene en forma directa que

$$\hat{J}_+^n |J, -J\rangle = n! \left( \frac{2J!}{n!(2J-n)!} \right)^{\frac{1}{2}} |J, -J+n\rangle, \quad (2.2.4)$$

Substituyendo este resultado en (2.2.2), se encuentra que en el estado coherente no-normalizado está dado por

$$|\zeta\rangle = \sum_{n=0}^{2J} (\zeta)^n \binom{2J}{n}^{\frac{1}{2}} |J, -J+n\rangle. \quad (2.2.5)$$

o considerando  $-J+n = M$

$$|\zeta\rangle = \sum_{M=-J}^J (\zeta)^{J+M} \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} |J, M\rangle. \quad (2.2.6)$$

A continuación, se encuentra la representación de los operadores de momento angular en la base de estados coherentes. Para ésto es necesario determinar el traslape entre los estados coherentes no normalizados. Usando la ecuación (2.2.5) se tiene que

$$\{\zeta|\zeta'\} = \sum_{n,n'=0}^{2J} (\zeta^*)^n \sqrt{\frac{2J!}{n!(2J-n)!}} (\zeta')^{n'} \sqrt{\frac{(2J)!}{n'!(2J-n')!}} \underbrace{\langle J, -J+n' | J, -J+n \rangle}_{\delta_{-J+n', -J+n}}.$$

Por lo tanto el traslape es

$$\langle \zeta | \zeta' \rangle = (1 + \zeta' \zeta^*)^{2J}. \quad (2.2.7)$$

La normalización de los estados es ahora inmediata

$$\begin{aligned} |\zeta\rangle &= \frac{1}{(1 + |\zeta|^2)^J} e^{\zeta J_+} |J, -J\rangle, \\ &= \frac{1}{(1 + |\zeta|^2)^J} \sum_{M=-J}^J (\zeta)^{J+M} \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} |J, M\rangle. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

La relación de cerradura para estos estados normalizados está dada por la siguiente expresión (demostración en Apéndice A) [10]

$$\frac{2J+1}{4\pi} \int |\zeta\rangle \langle \zeta| \frac{d\zeta d\zeta^*}{(1 + |\zeta|^2)^2} = 1. \quad (2.2.9)$$

## 2.3. Límite clásico

A continuación, se realiza el análisis de la dinámica clásica del sistema. Para ello es necesario encontrar las ecuaciones de movimiento, ésto puede realizarse a través de un principio variacional dependiente del tiempo que permite definir una función Hamiltoniana y unos paréntesis de Poisson. A continuación se describe este método.

### 2.3.1. Principio variacional dependiente del tiempo

La ecuación de Schrödinger y su conjugada pueden obtenerse de la acción clásica [22]

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\psi, \psi^*), \text{ con } \psi = \psi(t) \text{ y } \psi^* = \psi^*(t),$$

donde  $L(\psi, \psi^*)$ , el Lagrangeano, se define como [22]

$$L = \frac{i}{2} \frac{\langle \psi | \dot{\psi} \rangle - \langle \dot{\psi} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} - \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}. \quad (2.3.1)$$

Esta forma del Lagrangeano puede obtenerse usando el formalismo de integrales de trayectoria desarrollado por Feynman, y que es presentado en el Apéndice B.1. Es

inmediato mostrar que utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\psi(t)$  y  $\psi^*(t)$  se obtienen las ecuaciones de Schrödinger

$$H|\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle, \quad \langle\psi|H = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle\psi|.$$

Para este sistema es conveniente utilizar los estados coherentes como función de prueba usando una parametrización compleja,  $|\psi\rangle = |\psi(\alpha)\rangle$ . Es decir,  $\psi$  depende explícitamente de un parámetro complejo  $\alpha$  que a su vez depende del tiempo. De esta manera, es posible expresar las derivadas temporales en términos de derivadas con respecto al parámetro  $\alpha$  como se muestra

$$\begin{aligned} |\dot{\psi}\rangle &= \frac{d}{dt} |\psi\rangle & \langle\dot{\psi}| &= \frac{d}{dt} \langle\psi| \\ &= \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} |\psi\rangle, & &= \dot{\alpha}^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \langle\psi|, \\ \Rightarrow L &= \frac{i}{2} \left\{ \frac{1}{\langle\psi|\psi\rangle} \left( \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \langle\psi|\psi\rangle - \dot{\alpha}^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \langle\psi|\psi\rangle \right) \right\} - \frac{\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}. \end{aligned}$$

Definiendo el traslape como  $\mathcal{N}(\alpha, \alpha^*) = \langle\psi|\psi\rangle$ , y la función  $\mathcal{H}(\alpha, \alpha^*) = \frac{\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$ , la ecuación anterior puede escribirse como sigue

$$L = \frac{i}{2} \left( \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \dot{\alpha}^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \ln \mathcal{N}(\alpha, \alpha^*) - \mathcal{H}(\alpha, \alpha^*).$$

Este resultado puede generalizarse fácilmente cuando el estado depende de  $n$  parámetros complejos  $|\Psi\rangle = |\Psi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\rangle$ .

Al utilizar los estados coherentes no-normalizados de  $SU(2)$  como funciones de prueba se obtiene un Lagrangeano dependiente de  $\zeta$  y  $\zeta^*$ . Sustituyendo el traslape, para estos estados  $\{\zeta|\zeta\rangle = (1 + |\zeta|^2)^{2J}$ , se tiene

$$\begin{aligned} L &= \frac{i}{2} \left( \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \dot{\zeta}^* \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \right) \ln (1 + |\zeta|^2)^{2J} - \mathcal{H}(\zeta, \zeta^*) \\ &= \frac{iJ}{1 + |\zeta|^2} (\dot{\zeta} \zeta^* - \dot{\zeta}^* \zeta) - \mathcal{H}(\zeta, \zeta^*). \end{aligned}$$

Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange [23]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \zeta} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}^*} \right) - \frac{\partial L}{\partial \zeta^*} &= 0, \end{aligned}$$

se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\frac{2iJ}{(1+|\zeta|^2)^2}\dot{\zeta}^* + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\zeta} = 0, \quad -\frac{2iJ}{(1+|\zeta|^2)^2}\dot{\zeta} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\zeta^*} = 0. \quad (2.3.2)$$

Considerando una función arbitraria dependiente de  $\zeta$  y  $\zeta^*$ , se puede calcular su derivada total con respecto al tiempo, sustituir las ecuaciones de movimiento (2.3.2) y determinar de esa manera los paréntesis de Poisson del sistema clásico correspondiente. En este caso, para dos funciones  $F(\zeta, \zeta^*)$  y  $G(\zeta, \zeta^*)$  están definidos como sigue

$$\{F, G\} = -\frac{i(1+|\zeta|^2)^2}{2J} \left( \frac{\partial F}{\partial\zeta} \frac{\partial G}{\partial\zeta^*} - \frac{\partial G}{\partial\zeta^*} \frac{\partial F}{\partial\zeta} \right), \quad (2.3.3)$$

donde el factor que aparece en esta definición se debe a la métrica del espacio correspondiente. Con estos paréntesis de Poisson se obtendrán más tarde las ecuaciones de movimiento.

## 2.4. El Hamiltoniano modelo en la representación de Bargmann

En esta sección se escribe la función Hamiltoniana  $\mathcal{H}$  en la representación de los estados coherentes de  $SU(2)$ , también conocida como representación de Bargmann. Primero se encontrará la forma de los operadores  $J_z$ ,  $J_+$  y  $J_-$ , en dicha representación calculando su acción sobre un estado arbitrario  $|\psi\rangle$ . Por ejemplo, para el operador  $\hat{J}_z$

$$\begin{aligned} \langle \zeta | \hat{J}_z | \psi \rangle &= \langle J, -J | e^{\zeta^* \hat{J}_-} \hat{J}_z | \psi \rangle, \\ &= \langle J, -J | e^{\zeta^* \hat{J}_-} \hat{J}_z e^{-\zeta^* \hat{J}_-} e^{\zeta^* \hat{J}_-} | \psi \rangle. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Utilizando la identidad de Baker-Hausdorff [24]

$$e^{\lambda\hat{A}}\hat{B}e^{-\lambda\hat{A}} = B + [A, B] + \lambda[A, [A, B]] + \frac{\lambda^2}{2!}[A, [A, [A, B]]] + \dots,$$

y las relaciones de conmutación (2.1.7) obtenemos

$$e^{\zeta^* \hat{J}_-} \hat{J}_z e^{-\zeta^* \hat{J}_-} = \hat{J}_z + \zeta^* \hat{J}_-.$$

Sustituyendo la expresión anterior en (2.4.1) tenemos

$$\begin{aligned}
 \langle \zeta | \hat{J}_z | \psi \rangle &= \langle J, -J | (\hat{J}_z + \zeta^* \hat{J}_-) e^{\zeta^* \hat{J}_-} | \psi \rangle \\
 &= \langle J, -J | (-J) e^{\zeta^* \hat{J}_-} | \psi \rangle + \zeta^* \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \langle J, -J | e^{\zeta^* \hat{J}_-} | \psi \rangle \\
 &= \left( -J + \zeta^* \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \right) \langle \zeta | \psi \rangle \\
 &= \hat{J}_z \psi(\zeta).
 \end{aligned}$$

Utilizando el mismo procedimiento puede obtenerse la forma de los operadores  $\hat{J}_+$  y  $\hat{J}_-$

$$\begin{aligned}
 \hat{J}_z &= -J + \zeta^* \frac{\partial}{\partial \zeta^*}, \\
 \hat{J}_+ &= 2\zeta^* J - (\zeta^*)^2 \frac{\partial}{\partial \zeta^*}, \\
 \hat{J}_- &= \frac{\partial}{\partial \zeta^*}.
 \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Con estas expresiones es inmediato calcular el valor esperado de las componentes del momento angular y de  $\hat{J}_z^2$ . El valor esperado  $\langle \zeta | \hat{J}_z | \zeta \rangle$ , está dado por

$$\begin{aligned}
 \langle \zeta | \hat{J}_z | \zeta \rangle &= \left( -J + \zeta^* \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \right) (1 + \zeta^* \zeta)^{2J}, \\
 &= \frac{J}{1 + \zeta^* \zeta} (\zeta^* \zeta - 1) \langle \zeta | \zeta \rangle.
 \end{aligned}$$

Entonces, en la base normalizada se tiene

$$\langle \zeta | \hat{J}_z | \zeta \rangle = J \left( \frac{|\zeta|^2 - 1}{1 + |\zeta|^2} \right).$$

Con este mismo procedimiento se obtienen los siguientes resultados

$$\begin{aligned}
 \langle \zeta | \hat{J}_y | \zeta \rangle &= \frac{iJ}{1 + |\zeta|^2} (\zeta - \zeta^*), \\
 \langle \zeta | \hat{J}_x | \zeta \rangle &= \frac{J}{1 + |\zeta|^2} (\zeta^* + \zeta), \\
 \langle \zeta | \hat{J}_z^2 | \zeta \rangle &= J^2 - \frac{4J(J - 1/2)|\zeta|^2}{(1 + |\zeta|^2)^2}.
 \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Entonces la función Hamiltoniana del sistema está dada por la siguiente expresión

$$\mathcal{H}(\zeta, \zeta^*) = a \frac{|\zeta|^2 - 1}{|\zeta|^2 + 1} + b \left\{ 1 - \frac{4(J - \frac{1}{2}) |\zeta|^2}{J(1 + |\zeta|^2)^2} \right\} + c \frac{\zeta + \zeta^*}{1 + |\zeta|^2}, \quad (2.4.4)$$

donde se considera  $\mathcal{H}(\zeta, \zeta^*) = \frac{\langle \psi | \hat{H} / J | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$ .

### 2.4.1. Cambio a variables angulares

Es conveniente trabajar con variables reales por lo que usamos [25]

$$\zeta = \tan \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, \quad (2.4.5)$$

que corresponde a la proyección estereográfica de un punto sobre la esfera  $(\theta, \phi)$  al plano complejo de la variable  $\zeta$ . Sustituyendo (2.4.5) en los valores esperados de los operadores de momento angular (2.4.3) se tiene

$$\begin{aligned} J_x &\equiv \left\langle \hat{J}_x \right\rangle_{\zeta} = J \sin \theta \cos \phi, \\ J_y &\equiv \left\langle \hat{J}_y \right\rangle_{\zeta} = J \sin \theta \sin \phi, \\ J_z &\equiv \left\langle \hat{J}_z \right\rangle_{\zeta} = -J \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Del lado izquierdo definimos las funciones de momento angular. También se cumplen las siguientes identidades

$$\begin{aligned} \frac{4|\zeta|^2}{(1 + |\zeta|^2)^2} &= \sin^2 \theta, \\ \frac{|\zeta|^2 - 1}{1 + |\zeta|^2} &= -\cos \theta, \\ \frac{\zeta + \zeta^*}{1 + |\zeta|^2} &= \sin \theta \cos \phi, \end{aligned}$$

que al ser sustituidas en la función Hamiltoniana (2.4.4) dan como resultado

$$\mathcal{H} = -a \cos \theta + b \left\{ \left( 1 - \frac{1}{2J} \right) \cos^2 \theta \right\} + c \sin \theta \cos \phi + \frac{b}{2J}. \quad (2.4.7)$$

En términos de las funciones de momento angular, la función Hamiltoniana se expresa como

$$\mathcal{H} = a \frac{J_z}{J} + b \left( 1 - \frac{1}{2J} \right) \frac{J_z^2}{J^2} + c \frac{J_x}{J} + \frac{b}{2J}. \quad (2.4.8)$$

Los paréntesis de Poisson en términos de las variables angulares se calculan sustituyendo utilizando las siguientes identidades

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} &= \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{2i\zeta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial}{\partial \zeta^*} &= \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2i\zeta^*} \frac{\partial}{\partial \phi}, \end{aligned}$$

en la ecuación (2.3.3), lo que da como resultado [26]

$$\{F, G\} = -\frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial G}{\partial \phi} - \frac{\partial F}{\partial \phi} \frac{\partial G}{\partial \theta} \right).$$

En la formulación Hamiltoniana, las ecuaciones de movimiento están determinadas por [23]

$$\dot{F} = \{F, H\},$$

si  $F$  no depende explícitamente del tiempo.

En este caso  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(J_x, J_y, J_z)$ , con la constricción  $J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = J^2$ . Utilizando los paréntesis de Poisson de las funciones de momento angular se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2b \left( 1 - \frac{1}{2J} \right) zy - ay, \\ \dot{y} &= 2b \left( 1 - \frac{1}{2J} \right) zx + ax - cz, \\ \dot{z} &= cy, \end{aligned}$$

donde definimos  $x = J_x/J$ ,  $y = J_y/J$  y  $z = J_z/J$ . Es importante señalar que, si multiplicamos la primera ecuación de la expresión anterior por  $x$ , la segunda por  $y$ , y la tercera por  $z$  y las sumamos obtenemos  $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$ , lo cual indica que se trata de una cantidad constante y sabemos que debe ser igual a 1.

Por otra parte,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\theta, \phi)$ , por lo que podemos encontrar también las ecuaciones de movimiento para las variables  $\theta$  y  $\phi$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= c \sin \phi, \\ \dot{\phi} &= -2b \left( 1 - \frac{1}{2J} \right) \cos \theta + c \cot \theta \cos \phi + a, \end{aligned}$$



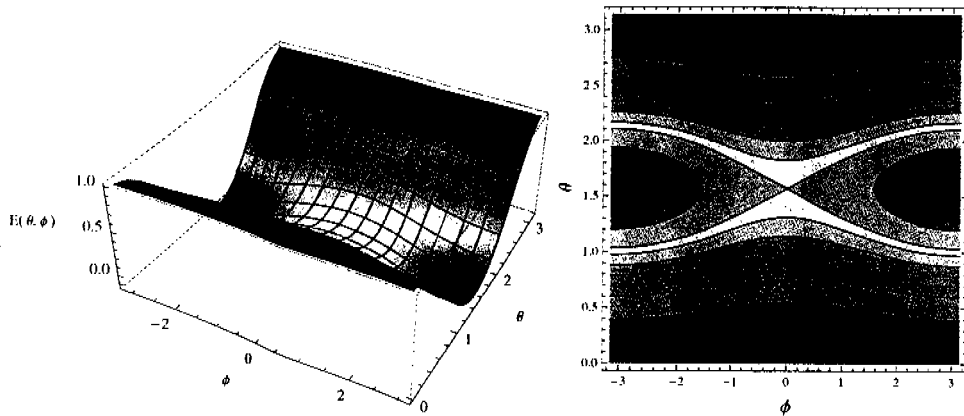
y puede observarse que cuando  $J \rightarrow \infty$ , estas expresiones se reducen a

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= c \operatorname{sen} \phi, \\ \dot{\phi} &= -2b \cos \theta + c \cot \theta \cos \phi + a.\end{aligned}$$

Estas ecuaciones pueden escribirse en forma matricial como

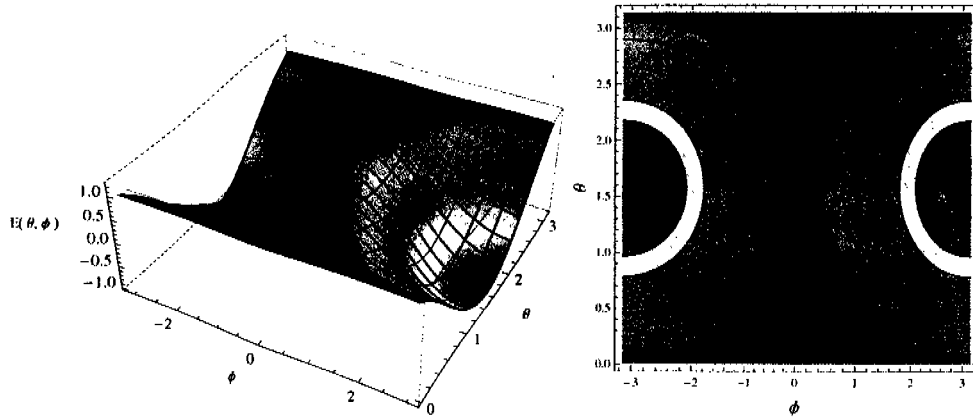
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \operatorname{sen} \phi \\ -2b \cos \theta + c \cot \theta \cos \phi + a \end{pmatrix}. \quad (2.4.9)$$

Si se considera  $a = 0$  y un valor de  $b$  fijo y diferente de cero, las ecuaciones anteriores pueden renormalizarse de manera que éstas sólo dependan de un parámetro  $\omega = \operatorname{sgn}(b) c/|b|$  con  $\operatorname{sgn}(b) = \{1 \text{ si } b > 0, -1 \text{ si } b < 0\}$ . En las siguientes figuras se muestran la superficies de energía como función de  $\theta$  y  $\phi$ , y sus correspondientes curvas de nivel, usando para los parámetros de interacción  $a = 0$ ,  $b = 1$  y  $c = 0.14$  (Fig.2.1),  $c = 1$  (Fig.2.2),  $c = 1.87$  (Fig.2.3).

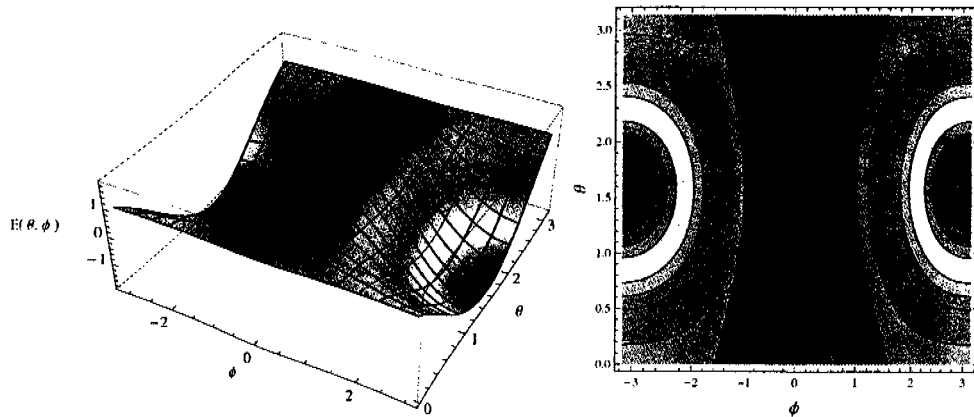


**Figura 2.1:** A la izquierda se muestra la superficie de energía como función de  $\theta$  y  $\phi$ , para  $\omega = 0.14$ . A la derecha se muestran las curvas de nivel de la superficie de energía con las energías siguientes (unidades de  $|b|$  arbitrarias):  $E = -1.3, -0.05, 0, 0.14, 0.2, 0.3, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ . La separatriz de los movimientos oscilatorios tiene una energía de 0.14. En ésta y las dos siguientes figuras, el color rojo corresponde al valor de energía más pequeño y el azul al valor más grande.

En el caso  $\omega < 1$  (Fig. 2.1), denotado por A. Micheli, et. al. [12], como régimen de acoplamiento débil, se observan modos rotacionales y oscilatorios en el sistema. En la figura puede observarse la trayectoria que separa los modos mencionados y



**Figura 2.2:** A la izquierda se muestra la superficie de energía como función de  $\theta$  y  $\phi$ , con  $\omega = 1$ . A la derecha se muestran las curvas de nivel de la superficie de energía con las energías siguientes (unidades arbitrarias):  $E = -0.9, -0.5, -0.2, .3, .7, .9, 1, 1.05, 1.12, 1.2, 1.24$ . La separatriz de los movimientos oscilatorios tiene una energía de 1.



**Figura 2.3:** A la izquierda se muestra la superficie de energía como función de  $\theta$  y  $\phi$ , con  $\omega = 1.87$ . A la derecha se muestran las curvas de nivel de la superficie de energía con las energías siguientes (unidades arbitrarias):  $E = -1.869, -1.83, -1.6, -1.4, -1.2, -.7, -.4, -.1, 0.64, 1, 1.3, 1.6, 1.8, 1.85, 1.87, 1.8735$ .

que corresponde a la curva de nivel con energía 0.14 . Los modos rotacionales varían continuamente en  $\phi$  mientras que los oscilatorios están confinados alrededor del punto

( $\theta = \pi/2, \phi = \pm\pi$ ). Para  $\omega > 1$  (Fig. 2.3), en el régimen de acoplamiento fuerte, únicamente aparecen modos oscilatorios y su movimiento en  $\phi$  está limitado. Para  $\omega = 1$  (Fig. 2.2), ocurre el acoplamiento crítico, y se observa una curva de nivel con energía 1 que separa el movimiento oscilatorio en distintas regiones. Con las ecuaciones de movimiento para las funciones de momento angular y los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  se pueden determinar los puntos estacionarios del sistema físico que corresponden a

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0, \quad \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0. \quad (2.4.10)$$

Estas condiciones para los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  determinan el conjunto de puntos estacionarios.

Si  $c$  y  $b$  son diferentes de cero se tienen los siguientes puntos

$$\begin{aligned} i) (\theta_s, \phi_s) &= (\arccos(-z_s), 0), \\ ii) (\theta_s, \phi_s) &= (\arccos(-z_s), \pi). \end{aligned}$$

Estas relaciones implican que  $y_s = 0$  y  $x_s = \pm\sqrt{1 - z_s^2}$ . La variable  $z_s$  satisface la ecuación algebraica de cuarto orden

$$z_s^4 + 2r_c z_s^3 + [r_a^2 + r_c^2 - 1]z_s^2 - 2r_c z_s - r_c^2 = 0,$$

donde se han definido los parámetros  $r_c = a/(b(2 - 1/J))$  y  $r_a = c/(b(2 - 1/J))$ .

Si  $c = 0$  se tiene una superficie de energía independiente de  $\phi$  que llamamos  $\phi$ -inestable y en este caso

$$iii) (\theta_s, \phi_s) = (\arccos(-r_c), \phi)$$

que implica  $z_s = -r_c$  y  $x_s^2 + y_s^2 = \sqrt{1 - r_c^2}$ .

Si  $a = 0$  la ecuación cuártica se simplifica, obteniéndose  $z_s = 0$  ó  $z_s = \pm\sqrt{1 - r_a^2}$  que implica

$$\begin{aligned} iv) \quad (\theta_s, \phi_s) &= (\pi/2, 0), \\ (\theta_s, \phi_s) &= (\pi/2, \pi), \\ (\theta_s, \phi_s) &= (\arcsen(r_a), 0), \\ (\theta_s, \phi_s) &= (-\arcsen(r_a), \pi). \end{aligned}$$

En la siguiente sección mostraremos que estos puntos estacionarios están relacionados con los puntos críticos de la función Hamiltoniana o superficie de energía.

# Capítulo 3

## Análisis de estabilidad

En este capítulo se analizará la estabilidad de la superficie de energía para 4 casos diferentes: tres casos donde alguno de los parámetros del Hamiltoniano es cero y el caso general donde los tres parámetros pueden ser diferentes de cero. Los tres primeros casos permiten encontrar los puntos críticos en forma analítica mientras que para el cuarto caso sólo puede hacerse de manera numérica. Es por esta razón que en este capítulo únicamente se analizan los tres primeros casos pues una vez que se encuentran los puntos críticos se puede calcular el valor esperado de cualquier observable del sistema, y esto puede hacerse de manera analítica también. El análisis semiclásico del caso general se llevará a cabo paralelamente con el estudio cuántico pues al no tener una expresión analítica sólo tiene sentido realizar comparaciones numéricas entre ambos resultados.

### 3.1. Separatriz del sistema en el espacio de parámetros

#### 3.1.1. Caso $a = 0$

Como se explicó en el Capítulo 1 los tres parámetros del Hamiltoniano están relacionados con las características de los modos del condensado. Si las longitudes de dispersión son iguales para ambos modos,  $a_A^{sc} = a_B^{sc} = a^{sc}$ , es decir,  $W_{AA} = W_{BB}$ , y las profundidades de ambos pozos de potencial son las mismas por lo que  $E_A - E_B = 0$ ,

entonces el Hamiltoniano del condensado toma la forma

$$\mathcal{H} = b \left\{ \left( 1 - \frac{1}{2J} \right) \cos^2 \theta \right\} + c \operatorname{sen} \theta \cos \phi + \frac{b}{2J}, \quad (3.1.1)$$

### Puntos críticos

Los puntos críticos de la superficie de energía ( $\mathcal{H}$ ), dada en la expresión (2.4.7), están determinados por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} &= a \operatorname{sen} \theta - 2b \left( 1 - \frac{1}{2J} \right) \cos \theta \operatorname{sen} \theta + c \cos \theta \cos \phi = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} &= -c \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi = 0. \end{aligned}$$

La solución de estas ecuaciones para el caso  $a = 0$  da lugar a los siguientes puntos críticos:

1.  $(\theta_c, \phi_c) = \left( \frac{\pi}{2}, 0 \right),$
2.  $(\theta_c, \phi_c) = \left( \frac{\pi}{2}, \pi \right),$
3.  $(\theta_c, \phi_c) = \left( \operatorname{arcsen} \left( \frac{c}{b(2-1/J)} \right), 0 \right),$
4.  $(\theta_c, \phi_c) = \left( -\operatorname{arcsen} \left( \frac{c}{b(2-1/J)} \right), \pi \right).$

Para estudiar el comportamiento de estos puntos críticos en el espacio de parámetros se hace uso de la matriz formada por las segundas derivadas de la función  $\mathcal{H}$

$$h_{ess} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \theta \partial \phi} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \theta \partial \phi} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \phi^2} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz se conoce con el nombre de matriz Hessiana y su determinante como Hessiano. El valor de este último evaluado en un punto crítico indica si se trata de un máximo cuando su valor es menor que cero, un mínimo cuando su valor es mayor que cero o un punto silla cuando su valor es igual a cero.

Puede verse que los puntos 3 y 4 tienen restricciones en el espacio de parámetros pues  $\theta \in [0, \pi]$  y en este rango  $\operatorname{sen} \theta \geq 0$ , lo que implica  $0 \leq |c|/(|b|(2-1/J)) \leq 1$ , y

por tanto estos puntos sólo existen en algunas regiones del espacio de parámetros. Es importante notar que la ecuación  $\sin \theta_c = \pm c/(b(2 - (1/J)))$ , tiene dos soluciones:  $\theta_c = \arcsen(\pm c/(b(2 - (1/J))))$  y  $\theta_c = \pi - \arcsen(\pm c/(b(2 - (1/J))))$ , por lo que la superficie de energía presenta dos puntos críticos en las regiones 3 y 4. Sin embargo, ambos ángulos producen la misma energía y el mismo valor del Hessiano por lo que su comportamiento es idéntico. Es por esta razón que a lo largo del análisis sólo nos referiremos a cuatro puntos críticos pero debe tenerse en mente que en 3 y 4 se trata de pares de puntos.

La superficie de energía evaluada en los puntos críticos da como resultado las siguientes funciones

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 &= \frac{b}{2J} + c, \\ \mathcal{H}_2 &= \frac{b}{2J} - c, \\ \mathcal{H}_3 &= b + \frac{c^2}{2b(2 - 1/J)} = \mathcal{H}_4,\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

donde  $\mathcal{H}_3$  y  $\mathcal{H}_4$  sólo son válidos en la región  $0 \leq |c| \leq |b|(2 - (1/J))$ . Como veremos más adelante estas funciones separan en forma cualitativa el comportamiento cuántico de los niveles de energía del sistema.

Como ya se ha mencionado el análisis de estabilidad se realiza a través de la matriz Hessiana, para el caso general, por la expresión [11]

$$\begin{aligned}h_{ess} &= \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \theta \partial \phi} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \theta \partial \phi} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \phi^2} \end{array} \right) \Big|_{(\theta_c, \phi_c)} \\ &= \left( \begin{array}{cc} a \cos \theta_c - b(2 - \frac{1}{J}) \cos 2\theta_c - c \sin \theta_c \cos \phi_c & -c \cos \theta_c \sin \phi_c \\ -c \cos \theta_c \sin \phi_c & -c \sin \theta_c \cos \phi_c \end{array} \right).\end{aligned}\tag{3.1.3}$$

A continuación se evalúa el Hessiano en cada uno de los puntos críticos para determinar sus características (máximo, mínimo, silla, degenerado) en el espacio de parámetros.

Para el caso  $a = 0$ , el Hessiano toma la forma

$$h_{ess} = \left( \begin{array}{cc} -b(2 - \frac{1}{J}) \cos 2\theta_c \mp c \sin \theta_c & 0 \\ 0 & \mp c \sin \theta_c \end{array} \right),$$

que es una matriz diagonal. El signo superior corresponde a  $\phi_c = 0$  mientras que el signo inferior corresponde a  $\phi_c = \pi$ .

Los resultados del análisis se muestran en la Tabla 3.1 y para cada punto crítico se ilustra su comportamiento en el espacio de parámetros en las Figs. 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4.

**Tabla 3.1:** Naturaleza y estabilidad de los puntos críticos en el caso  $a = 0$ .

Punto crítico	Tipo	Región
$(\theta_c, \phi_c) = (\pi/2, 0)$	Silla	$0 < c < b(2 - \frac{1}{J})$ $b(2 - \frac{1}{J}) < c < 0$
	Degenerado	$c = 0$ $c = b(2 - \frac{1}{J})$
	Máximo	$c > 0$ y $c > b(2 - \frac{1}{J})$
	Mínimo	$c < 0$ y $c < b(2 - \frac{1}{J})$
$(\theta_c, \phi_c) = (\pi/2, \pi)$	Silla	$0 < c < -b(2 - \frac{1}{J})$ $-b(2 - \frac{1}{J}) < c < 0$
	Degenerado	$c = 0$ $c = -b(2 - \frac{1}{J})$
	Máximo	$c < 0$ y $c < -b(2 - \frac{1}{J})$
	Mínimo	$c < 0$ y $c < b(2 - \frac{1}{J})$
$(\theta_c, \phi_c) = \left(\arcsen\left(\frac{c}{b(2-1/J)}\right), 0\right)$	$\phi$ -inestable	$c = 0$
	Degenerado	$c = b(2 - \frac{1}{J})$
	Máximo	$c > 0, b > 0$ y $c < b(2 - \frac{1}{J})$
	Mínimo	$c < 0, b < 0$ y $c > b(2 - \frac{1}{J})$
$(\theta_c, \phi_c) = \left(-\arcsen\left(\frac{c}{b(2-1/J)}\right), \pi\right)$	$\phi$ -inestable	$c = 0$
	Degenerado	$c = -b(2 - \frac{1}{J})$
	Máximo	$c < 0, b > 0$ y $c > -b(2 - \frac{1}{J})$
	Mínimo	$c > 0, b < 0$ y $c < -b(2 - \frac{1}{J})$

Cuando  $c = 0$ , se tiene una superficie de energía  $\phi$ -inestable cuyo análisis debe realizarse por separado. En este caso, se tienen tres valores críticos de  $\theta$ :  $\theta_c = 0$ ,  $\pi/2$  y  $\pi$ , para los que la primera derivada de la superficie de energía con respecto a  $\theta$  se anula. Para  $\theta_c = 0$  y  $\theta_c = \pi$ , la superficie de energía tiene el mismo valor

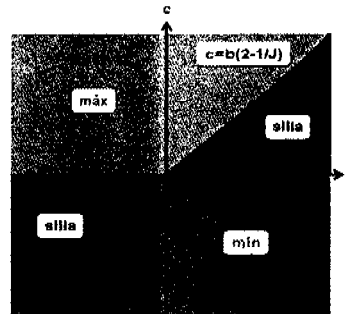


Figura 3.1: Comportamiento del punto  $(\theta_c, \phi_c) = (\pi/2, 0)$  en el espacio de parámetros. La recta  $c = 0$  corresponde a puntos críticos independientes de  $\phi$  y en la recta  $c = b(2 - \frac{1}{J})$  se tienen puntos críticos degenerados.

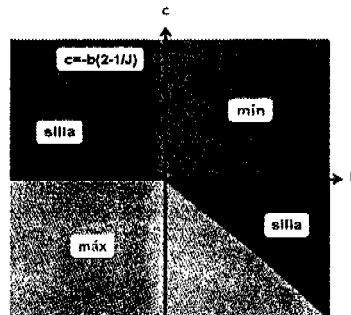
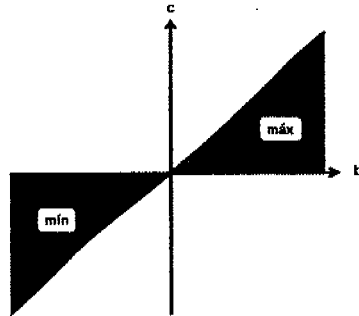


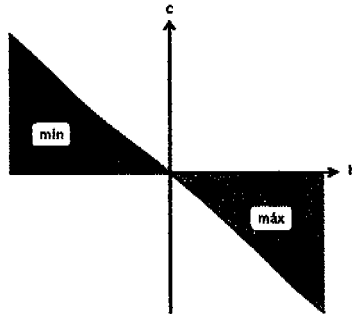
Figura 3.2: Comportamiento del punto  $(\theta_c, \phi_c) = (\pi/2, \pi)$  en el espacio de parámetros. La recta  $c = 0$  corresponde a puntos críticos independientes de  $\phi$  y la recta  $c = -b(2 - \frac{1}{J})$  está asociada a puntos críticos degenerados.

$\mathcal{H} = b$  mientras que para  $\theta_c = \pi/2$  el valor es  $\mathcal{H} = b/(2J)$ . Entonces, cuando  $b < 0$  los puntos  $\theta_c = 0$  y  $\theta_c = \pi$  son mínimos y  $\theta_c = \pi/2$  es un máximo, y cuando  $b > 0$  el punto  $\theta_c = \pi/2$  es el que corresponde a un mínimo mientras que los otros dos son máximos. La recta  $c = 0$  constituye un conjunto de Maxwell ya que el valor de la superficie de energía es el mismo en todos los puntos del círculo  $(\theta_c, \phi)$ . Y es





**Figura 3.3:** Comportamiento del punto  $\left(\arcsen\left(\frac{c}{b(2-1/J)}\right), 0\right)$  en el espacio de parámetros. La recta  $c = 0$  denota puntos críticos  $\phi$ -inestables y la recta  $c = b(2 - \frac{1}{J})$  corresponde a puntos críticos degenerados.

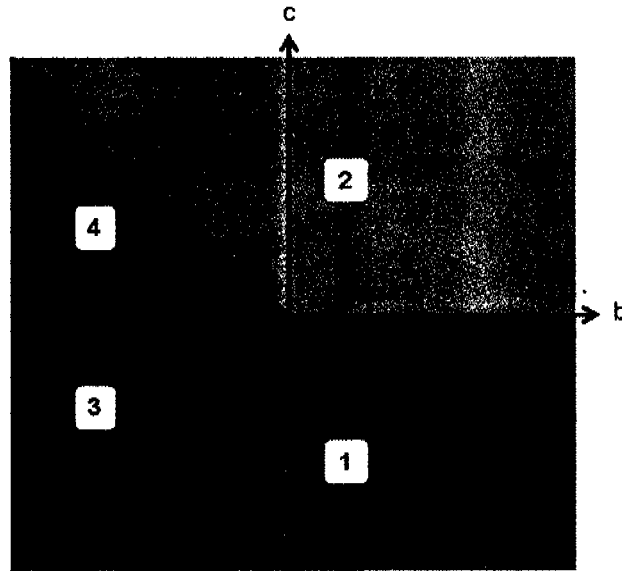


**Figura 3.4:** Comportamiento del punto  $\left(-\arcsen\left(\frac{c}{b(2-1/J)}\right), \pi\right)$  en el espacio de parámetros. La recta  $c = 0$  denota puntos críticos  $\phi$ -inestables y la recta  $c = -b(2 - \frac{1}{J})$  corresponde a puntos críticos degenerados.

importante notar que en la región de la recta que se encuentra entre las regiones 3 y 4, nuevamente se tienen dos puntos críticos que coexisten.

En la recta  $c = -b(2 - (1/J))$  con  $c > 0$ , el punto crítico mínimo  $(\theta_c, \phi_c) = (\pi/2, \pi)$  es triplemente degenerado mientras que en la recta  $c = b(2 - (1/J))$  con  $c < 0$  el

punto crítico mínimo  $(\theta_c, \phi_c) = (\pi/2, 0)$  es también triplemente degenerado. En estas dos rectas la energía vale  $\mathcal{H} = 2b - (b/(2J))$ . En la Fig. 3.5 se dibuja la distribución de los puntos mínimos en el espacio de parámetros.



**Figura 3.5:** Las líneas que separan las cuatro regiones muestran la separatriz en el espacio de parámetros  $b$  y  $c$ . En cada una de las regiones la etiqueta indica el punto crítico mínimo que domina el comportamiento del sistema.

## Orden de las transiciones de fase

En esta sección se calculará el orden de las transiciones de fase del sistema, lo que nos dará información sobre como se modifica el comportamiento de la superficie de energía al cruzar la separatriz.

Las transiciones de fase de orden cero se reflejan como discontinuidades en la superficie de energía, las de primer orden producen picos, mientras que las de segundo orden muestran cambios en la concavidad de la superficie. Este sistema sólo presenta estos tres órdenes de transición. Sin embargo, en general, pueden encontrarse transiciones de fase de cualquier orden.

El orden de una transición de fase puede obtenerse siguiendo la clasificación de Ehrenfest de las transiciones de fase clásicas [27]. Una transición de fase toma lugar entre dos ramas de puntos críticos  $p$  y  $q$ , y es de  $n$ -ésimo orden si

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left. \frac{\partial^i \mathcal{H}_p(s)}{\partial s^i} \right|_{s_0 - \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left. \frac{\partial^i \mathcal{H}_q(s)}{\partial s^i} \right|_{s_0 + \delta}, \quad (3.1.4)$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$  pero son diferentes para  $i = n$ , y se considera a los parámetros del Hamiltoniano como funciones de una variable  $s$ .

En este caso se considera al parámetro  $c$  como función de  $b$  utilizando una recta de pendiente arbitraria  $m_0$  y ordenada la origen  $c_0$ , esto es  $c = m_0 b + c_0$ . Es claro que el límite al cual tiende la variable depende de la transición que se estudie y está determinado por el cruce de esta recta con la parte de la separatriz correspondiente a la transición.

Al evaluar las superficies de energía en la recta mencionada se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\mathcal{H}_1 = \frac{b}{2J} + m_0 b + c_0, \quad \mathcal{H}_2 = \frac{b}{2J} - m_0 b - c_0, \quad \mathcal{H}_{3,4} = b + \frac{(m_0 b + c_0)^2}{2b(2 - 1/J)}.$$

Las primeras derivadas de estas expresiones con respecto al parámetro están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial b} &= \frac{1}{2J} + m_0, & \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial b} &= \frac{1}{2J} - m_0, \\ \frac{\partial \mathcal{H}_{3,4}}{\partial b} &= \frac{-c_0^2 J + b^2 [J(m_0^2 + 4) - 2]}{2b^2(2J - 1)}, \end{aligned}$$

mientras que las segundas derivadas valen

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}_1}{\partial b^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}_2}{\partial b^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}_{3,4}}{\partial b^2} = \frac{c_0^2 J}{b^3(-1 + 2J)}.$$

Utilizando estas ecuaciones puede encontrarse de manera sencilla el orden de las transiciones.

#### Transiciones entre las regiones 1 y 2

La recta que marca esta transición es  $c = 0$  para  $b > 0$ , y el punto de cruce de ambas rectas está dado por  $b_0 = -\frac{c_0}{m_0}$ ; sustituyendo en las superficies de energía se encuentra que

$$\mathcal{H}_1|_{b_0} = \mathcal{H}_2|_{b_0} = -\frac{c_0}{2Jm_0},$$

mientras que las primeras derivadas toman valores diferentes. Por lo tanto, las transiciones de fase entre las regiones 1 y 2 son de primer orden.

#### Transiciones entre las regiones 2 y 4

En este caso la recta que marca la transición es  $c = -b(2 - (1/J))$  y el punto de intersección de las rectas es  $b_0 = -\frac{c_0}{m_0 + 2 - (1/J)}$ . Al sustituir este punto en las expresiones de  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_4$ , y las de sus primeras derivadas con respecto a  $b$ , se encuentra

$$\mathcal{H}_2|_{b_0} = \mathcal{H}_4|_{b_0} = \frac{c_0(1 - 4J)}{2J(m_0 + 2) - 2},$$

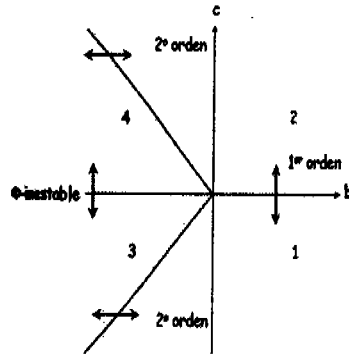
$$\left. \frac{\partial \mathcal{H}_2(b)}{\partial b} \right|_{b_0} = \left. \frac{\partial \mathcal{H}_4(b)}{\partial b} \right|_{b_0} = \frac{1}{2J} - m_0,$$

mientras que las segundas derivadas son diferentes, y por lo tanto las transiciones entre las regiones 2 y 4 son de segundo orden.

#### Transiciones entre las regiones 3 y 4

La recta que separa estas regiones es  $c = 0$  para  $b < 0$  por lo que el punto de cruce es  $b_0 = -\frac{c_0}{m_0}$ . Pero debemos recordar que en este caso las expresiones para la energía son iguales para ambos puntos críticos, por ello todas su derivadas serán iguales, es decir,

$$\lim_{b \rightarrow -\frac{c_0}{m_0}} \frac{\partial^n \mathcal{H}_3(b)}{\partial b^n} = \lim_{b \rightarrow -\frac{c_0}{m_0}} \frac{\partial^n \mathcal{H}_4(b)}{\partial b^n},$$



**Figura 3.6:** Las líneas oscuras muestran la separatriz correspondiente al caso  $a = 0$ . Las flechas dobles indican las transiciones entre las diferentes regiones, y para cada una se indica el orden de la transición.

para toda  $n$ . Esto significa que no existe realmente una transición de fase al cruzar las regiones 3 y 4, únicamente ocurre que los puntos críticos se vuelven independientes de  $\phi$ . Entonces para  $c < 0$  se tiene dos puntos críticos  $(\theta_c, 0)$  y  $(\pi - \theta_c, 0)$ , para  $c > 0$   $(\theta_c, \pi)$  y  $(\pi - \theta_c, \pi)$  y en  $c = 0$  se tiene un continuo.

### Transiciones entre las regiones 3 y 1

La transición está marcada en este caso por la recta  $c = b(2 - (1/J))$ , y el cruce de ambas rectas por  $b_0 = -\frac{c_0}{m_0 - 2 + 1/J}$ . Las expresiones de  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_3$  y las de sus primeras derivadas con respecto a  $b$  en el punto de cruce, son iguales

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1|_{b_0} &= \mathcal{H}_3|_{b_0} = \frac{c_0(1 - 4J)}{2J(m_0 - 2) + 2}, \\ \left. \frac{\partial \mathcal{H}_1(b)}{\partial b} \right|_{b_0} &= \left. \frac{\partial \mathcal{H}_3(b)}{\partial b} \right|_{b_0} = \frac{1}{2J} + m_0. \end{aligned}$$

Sin embargo, las segundas derivadas son diferentes, por lo que se tienen transiciones de segundo orden al cruzar las regiones 1 y 3.

En la Fig.3.6 se muestran las transiciones de fase y su orden correspondiente, en el espacio de parámetros, para la superficie de energía del condensado de dos modos cuando  $a = 0$ .

### 3.1.2. Caso $b = 0$

Este caso equivale a considerar  $W_{AA} + W_{BB} = 2W_{AB}$ , es decir, las propiedades de dispersión para las colisiones entre diferentes modos son iguales al promedio de las propiedades de dispersión para colisiones entre partículas en el mismo modo.

#### Puntos críticos

La superficie de energía en este caso está determinada por la expresión

$$\mathcal{H} = -a \cos \theta + c \sin \theta \cos \phi. \quad (3.1.5)$$

Para encontrar los puntos críticos se resuelve el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} &= a \sin \theta + c \cos \theta \cos \phi = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} &= -c \sin \theta \sin \phi = 0. \end{aligned}$$

Cuando  $c \neq 0$  la solución de estas ecuaciones da lugar a dos puntos críticos

$$(\theta_c, \phi_c) = (\arctan(-c/a), 0), (\arctan(c/a), \pi).$$

Estos puntos existen en todo el espacio pues no tienen constricciones. A continuación, se evalúa la superficie de energía en los puntos críticos.

Para  $(\theta_c, \phi_c) = (\arctan(-c/a), 0)$  cuando  $c > 0$ , se tiene que  $\sin \theta_c = c/\sqrt{a^2 + c^2}$  y  $\cos \theta_c = -a/\sqrt{a^2 + c^2}$ , sustituyendo en la superficie de energía

$$\mathcal{H}_1 = \sqrt{a^2 + c^2},$$

mientras que cuando  $c < 0$ ,  $\sin \theta_c = -c/\sqrt{a^2 + c^2}$  y  $\cos \theta_c = a/\sqrt{a^2 + c^2}$ , esto implica

$$\mathcal{H}_1 = -\sqrt{a^2 + c^2}.$$

Para el otro punto crítico,  $(\theta_c, \phi_c) = (\arctan(c/a), \pi)$ , cuando  $c > 0$  se tiene que  $\sin \theta_c = c/\sqrt{a^2 + c^2}$  y  $\cos \theta_c = a/\sqrt{a^2 + c^2}$ , obteniéndose para la superficie de energía

$$\mathcal{H}_2 = -\sqrt{a^2 + c^2},$$

y para  $c < 0$ ,  $\text{sen } \theta_c = -c/\sqrt{a^2 + c^2}$  y  $\text{cos } \theta_c = -a/\sqrt{a^2 + c^2}$ , que da como resultado

$$\mathcal{H}_2 = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

Entonces la expresión para la energía mínima es la siguiente

$$\mathcal{H} = -\sqrt{a^2 + c^2}. \quad (3.1.6)$$

La matriz Hessiana está definida por la expresión (3.1.3) con el parámetro  $b = 0$ . Analizando su comportamiento para el punto crítico  $(\theta_c, \phi_c) = (\arctan(c/a), 0)$ , encontramos que es diagonal y que sus elementos están dados por

$$\begin{aligned} h_{ess(1,1)} &= -\sqrt{a^2 + c^2}, & h_{ess(2,2)} &= -\sqrt{a^2 + c^2} & \text{si } c > 0, \\ h_{ess(1,1)} &= \sqrt{a^2 + c^2}, & h_{ess(2,2)} &= \sqrt{a^2 + c^2} & \text{si } c < 0. \end{aligned}$$

Esto significa que no existen puntos críticos degenerados pues los elementos del Hessiano nunca se anulan, esto es, no se tienen conjuntos de bifurcación. En la Fig.3.7 se muestra el carácter del punto crítico, mínimo para  $c < 0$  y máximo para  $c > 0$ .

Para el punto  $(\theta_c, \phi_c) = (\arctan(c/a), \pi)$  los elementos diagonales están dados por

$$\begin{aligned} h_{ess(1,1)} &= \sqrt{a^2 + c^2}, & h_{ess(2,2)} &= \sqrt{a^2 + c^2} & \text{si } c > 0, \\ h_{ess(1,1)} &= -\sqrt{a^2 + c^2}, & h_{ess(2,2)} &= \sqrt{a^2 + c^2} & \text{si } c < 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto crítico es un mínimo para  $c > 0$  y un máximo para  $c < 0$ , estas regiones están indicadas en la Fig.3.7.

Cuando  $c = 0$  se obtienen otros dos puntos críticos, éstos son  $\phi$ -inestables con  $\theta_c = 0, \pi$ .

Los resultados del análisis se muestran en la Tabla 3.2 y el comportamiento de cada punto crítico en el espacio de parámetros se ilustra en la Fig. 3.7.

En la Fig. 3.8 se indica la distribución de puntos mínimos en el espacio de parámetros.

### 3.1.3. Caso $c = 0$

Considerar  $c = 0$  ( $\lambda = 0$ ) equivale a considerar que no existe la interacción Josephson entre los dos modos, es decir, no existe tunelaje por lo que el número de partículas en cada modo permanece constante.

#### Puntos críticos

En este caso la función Hamiltoniana tiene la forma

$$\mathcal{H} = -a \cos \theta + b \left(1 - \frac{1}{2J}\right) \cos^2 \theta + \frac{b}{2J},$$

sólo depende de  $\theta$  y sus puntos críticos están determinados únicamente por una ecuación

$$\frac{d\mathcal{H}}{d\theta} = a \sin \theta - b \left(2 - \frac{1}{J}\right) \sin \theta \cos \theta = 0.$$

Al resolver esta ecuación se encuentran tres puntos críticos para esta función,  $\theta_c^{(1)} = 0$ ,  $\theta_c^{(2)} = \pi$  y  $\theta_c^{(3)} = \arccos \frac{a}{b(2 - (1/J))}$ .

El punto crítico  $\theta_c^{(3)} = \arccos(a/b(2 - (1/J)))$  solamente existe en la región del espacio de parámetros donde se cumple que  $|a| \leq |b|(2 - (1/J))$ . Evaluando la energía en los puntos críticos se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= -a + b, \\ \mathcal{H}_2 &= a + b, \\ \mathcal{H}_3 &= -\frac{a^2}{2b(2 - 1/J)} + \frac{b}{2J}. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Usando el mismo procedimiento que para el caso  $a = 0$  se realiza el análisis de estabilidad. Los resultados encontrados se muestran en la Tabla 3.3, y en la Fig. 3.9 se muestran los máximos, mínimos y puntos sillas en el espacio de parámetros para cada uno de los puntos críticos. Los puntos críticos degenerados corresponden a las líneas que separan las diferentes regiones.

En la Fig. 3.9 se observa que existe una región en la que coexisten los mínimos correspondientes a los puntos críticos  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ . En estos puntos la superficie de energía tiene la misma profundidad cuando  $a = 0$ . Cuando  $a > 0$  el punto  $\theta_c = 0$  corresponde a un mínimo global y  $\theta_c = \pi$  un mínimo local mientras que para  $a < 0$

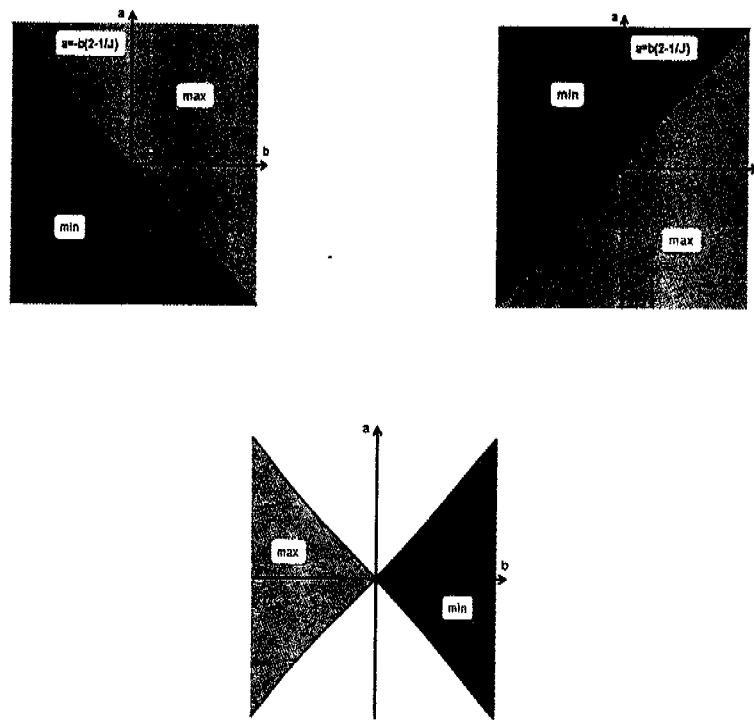


Tabla 3.3: Naturaleza y estabilidad de los puntos críticos en el caso  $c = 0$ .

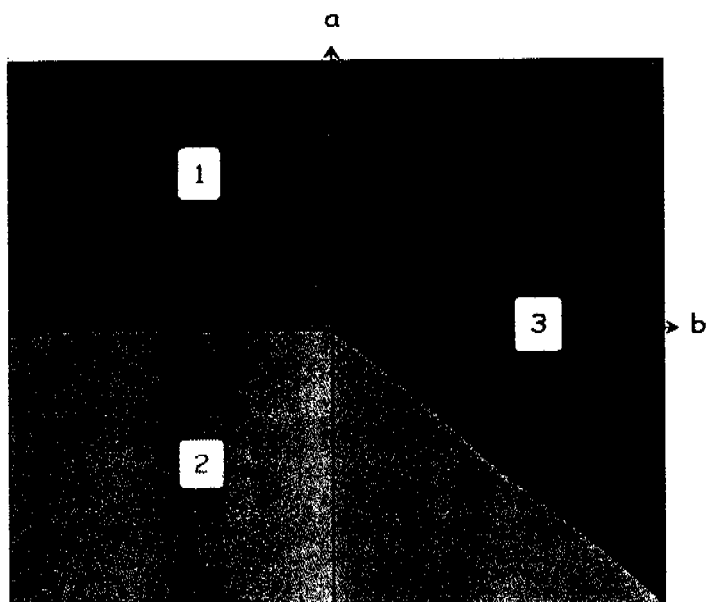
Punto crítico	Tipo	Región
$\theta_c = 0$	Degenerado	$a = b(2 - \frac{1}{J})$
	Máximo	$a < b(2 - \frac{1}{J})$
	Mínimo	$a > b(2 - \frac{1}{J})$
$\theta_c = \pi$	Degenerado	$a = -b(2 - \frac{1}{J})$
	Máximo	$a > -b(2 - \frac{1}{J})$
	Mínimo	$a < -b(2 - \frac{1}{J})$
$\theta_c = \arccos \frac{a}{b(2-1/J)}$	Degenerado	$ a  =  b (2 - \frac{1}{J})$
	Máximo	$b < 0$ y $ a  <  b (2 - \frac{1}{J})$
	Mínimo	$b > 0$ y $ a  <  b (2 - \frac{1}{J})$

se invierten los comportamientos. Entonces la recta  $a = 0$ , con  $b < 0$  es un conjunto de puntos donde la superficie de energía toma el mismo valor para ambos puntos críticos, un conjunto de Maxwell. Los puntos críticos degenerados se encuentran en las rectas  $a = \pm b(2 - (1/J))$  para  $b > 0$ .

La separatriz en el espacio de parámetros  $a$  y  $b$  está determinada por los conjuntos de bifurcación y Maxwell mencionados y son mostrados en la Fig. 3.10.



**Figura 3.9:** Caso  $c = 0$ . Las gráficas muestran la naturaleza de cada uno de los puntos críticos en el espacio de parámetros  $a$  y  $b$ . Las líneas que separan las regiones corresponden a puntos críticos degenerados o puntos críticos independientes de  $\phi$ .



**Figura 3.10:** Caso  $c = 0$ . La separatriz en el espacio de parámetros  $a$  y  $b$  está formada por las líneas que separan las diferentes regiones. En cada una de las regiones se muestra una etiqueta que indica el punto crítico mínimo que domina el comportamiento del sistema.

## Orden de las transiciones de fase

A continuación se calcula el orden de cada una de las transiciones de fase. Se considera una recta de pendiente arbitraria  $m_0$  y ordenada al origen  $a_0$ , esto es,  $a = m_0b + a_0$ , cuya variable es  $b$ .

Evaluando las energías en la recta se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\mathcal{H}_1 = -m_0b - a_0 + b, \quad \mathcal{H}_2 = m_0b + a_0 + b, \quad \mathcal{H}_3 = -\frac{(m_0b + a_0)^2}{2b(2 - 1/J)} + \frac{b}{2J}.$$

Derivando estas expresiones con respecto al parámetro  $b$ , se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial b} = -m_0 + 1, \quad \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial b} = m_0 + 1, \quad \frac{\partial \mathcal{H}_3}{\partial b} = \frac{1}{2J} - \frac{m_0(m_0b + a_0)}{b(2 - 1/J)} + \frac{(m_0b + a_0)^2}{2b^2(2 - 1/J)},$$

y las segundas derivadas

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}_1}{\partial b^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}_2}{\partial b^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}_3}{\partial b^2} = \frac{a_0^2 J}{b^3(1 - 2J)}.$$

Utilizando estas ecuaciones se calculará el orden de las transiciones de fase.

### Transiciones regiones 1 y 2

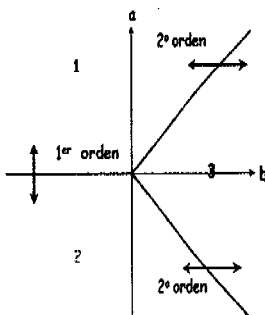
Como puede verse de la Fig. (3.10), la recta que marca la transición entre estas regiones es  $a = 0$  para  $b < 0$  y el punto de cruce de ambas rectas es  $b_0 = -a_0/m_0$ , y sustituyendo en las expresiones de  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  se encuentra que

$$\mathcal{H}_1|_{b_0} = \mathcal{H}_2|_{b_0} = -\frac{a_0}{m_0},$$

mientras que sus primeras derivadas son diferentes, es decir, la recta  $a = 0$  para  $b < 0$  corresponde a transiciones de fase de primer orden.

### Transiciones entre las regiones 2 y 3

La recta que marca esta la transición es  $a = -b(2 - (1/J))$ , y el punto de cruce entre las rectas es  $b_0 = -a_0/(m_0 + 2 - 1/J)$ . Las expresiones de  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_3$  y las de sus primeras derivadas con respecto a  $b$  evaluadas en el punto de cruce son iguales mientras que las segundas derivadas son diferentes y por lo tanto se tienen transiciones de segundo orden.



**Figura 3.11:** Las líneas oscuras forman la separatriz correspondiente al caso  $c = 0$ . Las flechas dobles indican las transiciones entre las diferentes regiones y para cada una se muestra el orden de la transición.

### Transiciones entre las regiones 3 y 1

Esta transición está marcada por la recta  $a = b(2 - (1/J))$  y el cruce de ambas rectas por  $b_0 = -a_0/(m_0 - 2 + (1/J))$ . Las expresiones de  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_3$  y las de sus primeras derivadas con respecto a  $b$  en el punto de cruce, son iguales, pero las segundas derivadas son diferentes y por lo tanto también corresponden a transiciones de segundo orden.

Finalmente, analizamos las transiciones de fase al cruzar por el origen del espacio de parámetros. Para esto consideramos la recta  $a = m_0 b$  y procediendo similarmente a los casos anteriores se encuentra que al cruzar el origen las transiciones de fase son de primer orden, excepto para las rectas de pendientes  $m_0 = \pm(2 - (1/J))$ , donde tenemos un conjunto de Maxwell.

En la Fig.3.11 se muestran todas las transiciones de fase y sus órdenes.

## 3.2. Cálculo de los valores esperados de observables

En esta sección se utiliza el principio variacional dependiente del tiempo mencionado en el capítulo anterior para obtener una aproximación a los valores espe-

rados cuánticos del sistema. Es importante señalar que todos los valores esperados serán funciones del parámetro complejo  $\zeta$  o los ángulos  $(\theta, \phi)$ , que determinan el estado coherente. Por lo tanto, podría estudiarse su evolución en una aproximación semiclásica considerando las ecuaciones clásicas de movimiento (2.4.9), y también obtenerse una aproximación a los valores esperados en el estado base del sistema cuántico sustituyendo los puntos críticos mínimos globales encontrados en la sección anterior.

### 3.2.1. Caso $a = 0$

Los estados de prueba que se utilizan son los estados coherentes. En el capítulo anterior se encontraron los valores de  $\theta$  y  $\phi$  para los puntos críticos mínimos. El espacio de parámetros está dividido en cuatro regiones en cada una de las cuales la función de prueba es diferente. En la Tabla 3.4 se muestran los parámetros que definen al estado coherente, esto es  $\zeta$  ó los ángulos  $(\theta, \phi)$ . Para simplificar la notación, se define el parámetro  $r_a = c/(b(2 - (1/J)))$  en las regiones 3 y 4. Puede observarse que en estas regiones se tienen dos valores diferentes de  $\zeta_c$ , esto es, en una misma región se tienen dos funciones de onda independientes que tienen la misma energía, es decir, se tiene degeneración.

**Tabla 3.4:** Valores de los parámetros  $\zeta$ ,  $\theta$  y  $\phi$  para el caso  $a = 0$ . Notar que  $|r_a| \leq 1$ . En la región 3 para  $\theta_c = \arcsen(r_a)$  se tiene  $0 \leq \theta_c \leq \pi/2$  mientras que para  $\theta_c = \pi - \arcsen(r_a)$  se tiene que  $\pi/2 \leq \theta_c \leq \pi$ . Algo similar ocurre en la región 4.

Región	$\theta_c$	$\phi_c$	$\zeta_c$
1	$\pi/2$	0	1
2	$\pi/2$	$\pi$	-1
3	$\arcsen(r_a)$	0	$\frac{1}{r_a}(1 - \sqrt{1 - r_a^2})$
	$\pi - \arcsen(r_a)$	0	$\frac{1}{r_a}(1 + \sqrt{1 - r_a^2})$
4	$\arcsen(-r_a)$	$\pi$	$\frac{1}{r_a}(1 - \sqrt{1 - r_a^2})$
	$\pi - \arcsen(-r_a)$	$\pi$	$\frac{1}{r_a}(1 + \sqrt{1 - r_a^2})$

## Estados Coherentes

El estado coherente de  $SU(2)$  puede escribirse en términos de una rotación por un ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $\hat{n} = (-\sin \phi, -\cos \phi, 0)$ , es decir,  $\mathcal{R}(\theta, \phi) = e^{-i\theta \hat{n} \cdot \vec{J}}$  [28] y que en términos de los operadores  $J_+$  y  $J_-$  queda como [21]

$$\mathcal{R}(\theta, \phi) = e^{\xi J_+ - \xi^* J_-},$$

con  $\xi = (\theta/2) e^{i\phi}$ . Es importante señalar que la variable compleja  $\xi$  está relacionada con la variable compleja  $\zeta$ , a través de la ecuación [21]

$$\zeta = \frac{\xi \operatorname{sen} |\xi|}{|\xi| \cos |\xi|} = \tan(\theta/2) e^{i\phi}.$$

En función de los ángulos de Euler el operador de rotación puede escribirse en la forma siguiente [28]:

$$\mathcal{R}(\theta, \phi) = e^{i\phi J_z} e^{i\theta J_y} e^{-i\phi J_z}.$$

Por lo tanto, el estado coherente está definido también por la expresión [29]

$$\begin{aligned} |\theta, \phi\rangle &= \sum_m D_{m-J}^J(-\phi, -\theta, \phi) |J, m\rangle, \\ &= \sum_m e^{i(J+m)\phi} d_{m-J}^J(-\theta) |J, m\rangle, \end{aligned}$$

donde

$$d_{m,-J}^J(-\theta) = \binom{2J}{J+m}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^{\frac{J+m}{2}} \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^{\frac{J-m}{2}}, \quad (3.2.1)$$

y utilizando esta última expresión, el estado coherente puede escribirse en forma general de la siguiente manera

$$|\zeta\rangle = \sum_{m=-J}^J e^{i(J+m)\phi} \binom{2J}{J+m}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^{\frac{J+m}{2}} \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^{\frac{J-m}{2}} |J, m\rangle. \quad (3.2.2)$$

Utilizando la información de la Tabla 3.4 y la expresión anterior se obtiene la

función de prueba para cada región,

$$\begin{aligned}
 |\zeta_c\rangle_1 &= \frac{1}{2^J} \sum_{m=-J}^J \binom{2J}{J+m}^{\frac{1}{2}} |J, m\rangle, \\
 |\zeta_c\rangle_2 &= \frac{1}{2^J} \sum_{m=-J}^J (-1)^{J+m} \binom{2J}{J+m}^{\frac{1}{2}} |J, m\rangle, \\
 |\zeta_c^\pm\rangle_3 &= \sum_{m=-J}^J \binom{2J}{J+m}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1 \mp \sqrt{1-r_a^2}}{2} \right)^{\frac{J+m}{2}} \left( \frac{1 \pm \sqrt{1-r_a^2}}{2} \right)^{\frac{J-m}{2}} |J, m\rangle, \\
 |\zeta_c^\pm\rangle_4 &= \sum_{m=-J}^J (-1)^{J+m} \binom{2J}{J+m}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1 \mp \sqrt{1-r_a^2}}{2} \right)^{\frac{J+m}{2}} \left( \frac{1 \pm \sqrt{1-r_a^2}}{2} \right)^{\frac{J-m}{2}} |J, m\rangle,
 \end{aligned}$$

en la tercera (cuarta) expresión los signos superiores a la izquierda y derecha corresponden al punto crítico  $\theta_c = \arcsen(r_a)$  ( $\theta_c = -\arcsen(r_a)$ ) mientras que los inferiores corresponden a  $\theta_c = \pi - \arcsen(r_a)$  ( $\theta_c = \pi + \arcsen(r_a)$ ).

Como ejemplo se escriben explícitamente los estados para dos y tres partículas. Si se tienen dos átomos, entonces  $J = 1$  y los estados están dados por las expresiones siguientes

$$\begin{aligned}
 |\zeta_c\rangle_1 &= \frac{1}{2} \left\{ |11\rangle + \sqrt{2}|10\rangle + |1-1\rangle \right\}, \\
 |\zeta_c\rangle_2 &= \frac{1}{2} \left\{ |11\rangle - \sqrt{2}|10\rangle + |1-1\rangle \right\}, \\
 |\zeta_c^\pm\rangle_3 &= \left( \frac{1 \mp \sqrt{1-r^2}}{2} \right) |11\rangle + \sqrt{\frac{r^2}{4}} |10\rangle + \left( \frac{1 \pm \sqrt{1-r^2}}{2} \right) |1-1\rangle, \\
 |\zeta_c^\pm\rangle_4 &= \left( \frac{1 \mp \sqrt{1-r^2}}{2} \right) |11\rangle - \sqrt{\frac{r^2}{4}} |10\rangle + \left( \frac{1 \pm \sqrt{1-r^2}}{2} \right) |1-1\rangle.
 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Estas soluciones podrán compararse en forma analítica con los correspondientes estados propios solución de la ecuación de estados estacionarios.

Una vez que se conoce el estado del sistema puede calcularse el valor esperado de cualquier observable. Los valores esperados de los operadores de momento angular para un estado coherente arbitrario están dados por las expresiones (2.4.6). Para obtener una aproximación al valor esperado con respecto al estado base del sistema cuántico se substituye en esas expresiones el valor de  $\theta_c$  y  $\phi_c$  correspondientes a cada región. En la Tabla (3.5) se muestran los resultados de substituir los puntos críticos mínimos.



Como puede observarse, el operador  $J_z$ , que mide la población relativa entre los dos modos del condensado, permite distinguir entre los dos estados independientes asociados a cada una de las regiones 3 y 4. Esto es, cada función de prueba produce un valor diferente para el valor esperado de  $J_z$ , lo que sugiere que se considere una nueva función de prueba que sea una combinación lineal de los estados coherentes con  $\zeta_1 = \tan(\theta/2)e^{i\phi}$  y  $\zeta_2 = \cot(\theta/2)e^{i\phi}$ . Después de varias pruebas se encontró que estos valores de  $\zeta$  son los que mejor reproducen los resultados cuánticos encontrados posteriormente. Más adelante estableceremos los resultados correspondientes a la combinación simétrica de estos estados.

**Tabla 3.5:** Valores esperados de los operadores de momento angular para el caso  $a = 0$ .

Región	$J_x/J$	$J_y/J$	$J_z/J$
1	1	0	0
2	-1	0	0
3	$r_a$	0	$-\sqrt{1-r_a^2}$
	$r_a$	0	$\sqrt{1-r_a^2}$
4	$-r_a$	0	$-\sqrt{1-r_a^2}$
	$-r_a$	0	$\sqrt{1-r_a^2}$

Utilizando el procedimiento indicado en la Sección 1.3, se encuentran los valores esperados de las componentes del cuadrado del operador de momento angular que toman la forma siguiente

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\hat{J}_x^2}{J^2} \right\rangle_{\zeta} &= \frac{1}{2J} + \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{1}{J} \right) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \phi, \\
 \left\langle \frac{\hat{J}_y^2}{J^2} \right\rangle_{\zeta} &= \frac{1}{2J} + \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{1}{J} \right) \text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 \phi, \\
 \left\langle \frac{\hat{J}_z^2}{J^2} \right\rangle_{\zeta} &= 1 - \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{1}{J} \right) \text{sen}^2 \theta.
 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

En la Tabla (3.6), se indican los resultados obtenidos en cada una de las regiones al sustituir los parámetros críticos. Los valores esperados de las componentes del

momento angular y sus cuadrados, mostrados en las Tablas (3.5) y (3.6) han sido divididos por  $J$  y  $J^2$ , respectivamente, para hacerlos cantidades intensivas, y poder así tomar el límite clásico ( $J \rightarrow \infty$ ).

**Tabla 3.6:** Valores esperados del cuadrado de los operadores de momento angular para el caso  $a = 0$ .

Región	$J_x^2/J^2$	$J_y^2/J^2$	$J_z^2/J^2$
1	1	$\frac{1}{2J}$	$\frac{1}{2J}$
2	1	$\frac{1}{2J}$	$\frac{1}{2J}$
3	$\frac{1}{2J} - \frac{r_a^2(1-2J)}{2J}$	$\frac{1}{2J}$	$1 + \frac{r_a^2(1-2J)}{2J}$
4	$\frac{1}{2J} - \frac{r_a^2(1-2J)}{2J}$	$\frac{1}{2J}$	$1 + \frac{r_a^2(1-2J)}{2J}$

Conociendo estos valores esperados podemos construir nuevamente los resultados para las energías mínimas en el espacio de parámetros, éstas aparecen en la Tabla (3.7).

**Tabla 3.7:** Energía en el espacio de parámetros, caso  $a = 0$ .

Región	Energía
1	$\frac{b}{2J} + c$
2	$\frac{b}{2J} - c$
3	$b + \frac{c^2}{2b(2-(1/J))}$
4	$b + \frac{c^2}{2b(2-(1/J))}$

Debido a sus relaciones de conmutación, es imposible especificar dos o más componentes de  $\vec{J}$  simultáneamente, y esto se refleja en las relaciones de incertidumbre de Heisenberg que satisfacen la siguiente desigualdad

$$(\Delta \hat{J}_x)^2 (\Delta \hat{J}_y)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle \hat{J}_z \rangle|^2,$$

donde se ha utilizado  $\hbar = 1$ . Entonces el cuadrado de las fluctuaciones normalizadas de los operadores de momento angular están dadas por las expresiones

$$\begin{aligned}(\delta J_x)^2 &= \frac{1}{2J} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi), \\(\delta J_y)^2 &= \frac{1}{2J} (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi),\end{aligned}\quad (3.2.5)$$

$$(\delta J_z)^2 = \frac{1}{2J} \sin^2 \theta, \quad (3.2.6)$$

con  $\delta J_k = \Delta J_k/J$  y  $\Delta J_k = \sqrt{\langle J_k^2 \rangle - \langle J_k \rangle^2}$ . Por lo tanto la fluctuación para la componente  $J_x/J$  del momento angular vale cero en las regiones 1 y 2, mientras que en las regiones 3 y 4 toma el valor  $\sqrt{(1 - r_a^2)/(2J)}$ . Para  $J_y/J$  la fluctuación es una constante en todo el espacio y su valor es  $\sqrt{1/(2J)}$ . Finalmente, en las regiones 1 y 2 la fluctuación para  $J_z/J$  es  $\sqrt{1/(2J)}$ , y en las regiones 3 y 4 vale  $\sqrt{r_a^2/(2J)}$ . Tomando el límite cuando  $J \rightarrow \infty$  encontramos que las fluctuaciones para las tres componentes normalizadas del momento angular valen cero, como debe ocurrir en el caso clásico.

La probabilidad de ocupación relativa de los dos modos del condensado para un estado coherente se define como  $P_{\zeta_c}(m) = |\langle J, m | \zeta_c \rangle|^2$ , el cuadrado de la norma de los coeficientes del estado, es decir,

$$P_{\zeta_c}(m) = \binom{2J}{J+m} \left( \frac{1 - \cos \theta_c}{2} \right)^{J+m} \left( \frac{1 + \cos \theta_c}{2} \right)^{J-m} \equiv |d_{m,-J}^J(-\theta_c)|^2. \quad (3.2.7)$$

La probabilidad de ocupación es una distribución binomial, por lo tanto, el valor promedio de  $m$  ( $\bar{m}$ ) y su fluctuación están dadas por las expresiones

$$\bar{m} = -J \cos \theta_c, \quad (\Delta m)^2 = (J/2)(1 - \cos^2 \theta_c), \quad (3.2.8)$$

respectivamente.

Utilizando los puntos críticos mínimos en el espacio de parámetros, indicados en la Tabla (3.4), las ocupaciones toman la forma

$$\begin{aligned}P_{1,2}(m) &= \frac{1}{2^{2J}} \binom{2J}{J+m}, \\P_{3,4}^{\pm}(m) &= \binom{2J}{J+m} \left( \frac{1 \mp \sqrt{1 - r_a^2}}{2} \right)^{J+m} \left( \frac{1 \pm \sqrt{1 - r_a^2}}{2} \right)^{J-m},\end{aligned}$$

donde los subíndices indican la región en la que es válida la expresión. En las regiones 1 y 2, la ocupación relativa es independiente de los parámetros del Hamiltoniano, y toma su valor máximo cuando  $m = 0$ , i.e., el número de átomos en cada uno de los modos del condensado es el mismo y la probabilidad vale

$$P_{1,2}(0) = \frac{(2J)!}{2^{2J}(J!)^2} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi N}},$$

donde en el último paso se tomo el límite cuando  $J \rightarrow \infty$  y se utilizó la fórmula de Stirling. En este caso  $(\Delta m)^2 = J/2$ .

En las regiones 3 y 4 la ocupación relativa depende de la razón entre el parámetro de tunelaje ( $c$ ) y las propiedades de dispersión entre todos los átomos ( $b$ ), el máximo corresponde a la proyección del momento angular más cercana al valor  $\bar{m} = \mp\sqrt{1 - \tau_a^2}J$  y su correspondiente fluctuación  $(\Delta m)^2 = (J/2)r_a^2$ .

Existe una formulación de la mecánica cuántica basada en distribuciones de cuasi-probabilidad [30], de las cuales podemos mencionar como las tres más importantes la distribución de Wigner o función W, la distribución de Glauber-Sudarshan o función P y la distribución de Husimi o función Q. Estas distribuciones contienen toda la información del sistema, por lo tanto, es importante estudiar sus propiedades y comportamiento en el espacio de parámetros del Hamiltoniano modelo considerado.

En este trabajo solamente estudiaremos la función Q de Husimi, la cual recientemente ha sido utilizada como una medida de la complejidad de los estados cuánticos. La complejidad puede clasificarse en dos tipos: la complejidad asociada a estados puros y la relacionada con un ensamble de estados cuánticos. También se ha considerado a la función Q de gran importancia en la medición de correlaciones cuánticas ó enredamiento en sistemas de muchos cuerpos [31, 32]. Si conocemos la matriz de densidad del sistema podemos calcular su función Q tomando el valor esperado con respecto a un estado coherente arbitrario  $|\xi\rangle$  [30],

$$Q_\rho(J, \theta, \phi) = \frac{2J + 1}{4\pi} \langle \xi | \rho | \xi \rangle,$$

donde  $\xi$  es un parámetro complejo tal que  $\xi = \tan(\theta/2)e^{i\phi}$ .

Cuando se tiene un estado puro  $|\psi\rangle$ , su matriz de densidad está dada por  $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ , entonces, para el estado coherente  $|\zeta_c\rangle$  la función Q está determinada por

$$Q_{\zeta_c}(\theta, \phi) = (2J + 1)/(4\pi) |\langle \xi | \zeta_c \rangle|^2,$$

que puede escribirse en la forma siguiente:

$$Q_{\zeta_c}(J, \zeta, \xi) = \frac{2J+1}{4\pi} \left[ \frac{(1 + \zeta_c \zeta^*)(1 + \zeta_c^* \xi)}{(1 + |\zeta_c|^2)(1 + |\xi|^2)} \right]^{2J}, \quad (3.2.9)$$

y que en términos de los ángulos  $\theta$ ,  $\theta_c$ ,  $\phi$  y  $\phi_c$  puede escribirse como

$$Q_{|\theta_c, \phi_c}(J, \theta, \phi) = \frac{2J+1}{4\pi} 4^{-J} \left( 1 + \cos \theta \cos \theta_c + \cos(\phi - \phi_c) \sin \theta \sin \theta_c \right)^{2J}. \quad (3.2.10)$$

Sustituyendo los valores de la Tabla (3.4), para los puntos críticos en las regiones 1 y 2 se obtiene

$$\begin{aligned} Q_1(J, \theta, \phi) &= \frac{2J+1}{4\pi} 4^{-J} \left( 1 + \cos \phi \sin \theta \right)^{2J}, \\ Q_2(J, \theta, \phi) &= \frac{2J+1}{4\pi} 4^{-J} \left( 1 - \cos \phi \sin \theta \right)^{2J}. \end{aligned}$$

En las regiones 3 y 4 se cumple que

$$\cos \theta_c = \begin{cases} \sqrt{1 - r_a^2}, \\ -\sqrt{1 - r_a^2}, \end{cases}$$

donde se toma el valor de arriba para  $\theta_c = \arcsen(r_a)$  o  $\theta_c = \arcsen(-r_a)$  y el de abajo para  $\theta_c = \pi - \arcsen(r_a)$  o  $\theta_c = \pi + \arcsen(r_a)$ . Con este resultado es inmediato evaluar las funciones  $Q$  correspondientes a los estados  $|\zeta_c^\pm\rangle_{3,4}$ , i.e.,

$$Q_{3,4}^\pm(J, \theta, \phi) = \frac{2J+1}{4\pi} 4^{-J} \left( 1 \pm \sqrt{1 - r_a^2} \cos \theta + r_a \cos \phi \sin \theta \right)^{2J}.$$

El segundo momento de la distribución de Husimi tiene propiedades similares a la entropía de Wehrl [31, 32], y su inverso es una medida de su localización ya que representa el volumen en el espacio fase ocupado por la función  $Q$ . Su definición es la siguiente:

$$M_Q^{(2)} = \frac{2J+1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \langle \theta, \phi | \rho | \theta, \phi \rangle^2. \quad (3.2.11)$$

Para el caso en el que el operador de densidad está determinado por el estado coherente puede demostrarse (ver Apéndice C) que el segundo momento vale

$$M_{Q_{|\theta_c, \phi_c}}^{(2)} = \frac{2J+1}{4J+1}. \quad (3.2.12)$$

Es conveniente renormalizar el segundo momento multiplicando por el inverso del resultado anterior, de tal manera que, para un estado coherente el segundo momento sea una constante igual a uno

$$\tilde{M}_{Q|\theta c, \phi c}^{(2)} = \frac{4J+1}{2J+1} M_{Q|\theta c, \phi c}^{(2)}$$

### Superposición simétrica de estados coherentes

Como ya se ha mencionado, en las zonas 3 y 4 existen dos funciones independientes lo cual sugiere considerar una combinación lineal de ambas como función de prueba. En principio, la combinación lineal podría ser arbitraria, sin embargo, no existe razón alguna para que una de las funciones tenga mayor probabilidad que la otra, por ello se considera una combinación en la que ambas funciones tengan el mismo peso. Esta combinación puede ser simétrica o antisimétrica, pero se necesita una función que esté bien definida en todas las regiones y esto sólo lo cumple la función simétrica. Entonces si  $\zeta_1 = \tan(\theta/2)e^{i\phi}$  y  $\zeta_2 = \cot(\theta/2)e^{i\phi}$ , la nueva función de prueba es

$$|\zeta^s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2[1 + (\text{sen } \theta)^{2J}]}} \{|\zeta_1\rangle + |\zeta_2\rangle\}, \quad (3.2.13)$$

donde  $1/\sqrt{2[1 + (\text{sen } \theta)^{2J}]}$  es el factor de normalización. En las regiones 1 y 2 este estado se reduce al estado coherente. Por tratarse de una función de prueba diferente, la función Hamiltoniana asociada es diferente también, por lo que debería repetirse el análisis de estabilidad. Sin embargo, se demostrará que en el límite clásico, es decir, cuando  $J \rightarrow \infty$ , la nueva función Hamiltoniana se reduce a la anterior y por tanto, en ese límite, es válido todo el análisis previo y pueden utilizarse los puntos críticos encontrados con el estado coherente.

Primero se encuentran los valores esperados de los operadores  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z^2$  para este nuevo estado utilizando el mismo procedimiento que se utilizó para encontrar las expresiones (2.4.3). Una vez que se conocen estos valores, puede calcularse el valor esperado de la energía que define la nueva función Hamiltoniana.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s = & \left\{ \frac{1}{2J} + \left(1 - \frac{1}{2J}\right) \cos^2 \theta \right\} \frac{b}{1 + (\text{sen } \theta)^{2J}} + \frac{(b/2J)(\text{sen } \theta)^{2J}}{1 + (\text{sen } \theta)^{2J}} \\ & + c \text{sen } \theta \cos \phi \frac{1 + (\text{sen } \theta)^{2J-2}}{1 + (\text{sen } \theta)^{2J}}. \end{aligned}$$

Sabemos que  $|\text{sen } \theta| \leq 1$ , entonces, cuando  $|\text{sen } \theta| < 1$  y  $J \rightarrow \infty$ ,  $(\text{sen } \theta)^{2J \pm n} \rightarrow 0$ , donde  $n > 0$  y está fijo. Esto implica que, en el límite clásico  $\mathcal{H}^s$  se reduce a

$$\mathcal{H}^s = \left\{ \frac{1}{2J} + \left(1 - \frac{1}{2J}\right) \cos^2 \theta \right\} b + c \text{sen } \theta \cos \phi,$$

que es igual a la expresión (3.1.1). Cuando  $|\text{sen } \theta| = 1$ , se tiene  $\theta = \pi/2$  por lo que  $\cos \theta = 0$  y  $(\text{sen } \theta)^{2J \pm n} \rightarrow 1$ , y la función queda de la forma

$$\mathcal{H}^s = \frac{b}{2J} + c \cos \phi,$$

que equivale a evaluar (3.1.1) en  $\theta = \pi/2$ . Por tanto, para todo valor de  $\theta$ , en el límite de número de partículas grande la nueva función Hamiltoniana se reduce a la anterior.

Una vez que se ha mostrado la equivalencia de ambas funciones Hamiltonianas en el límite clásico, se pueden usar los puntos críticos mínimos obtenidos en la sección anterior para calcular los valores esperados de las diferentes observables en el espacio de parámetros. Los resultados para la energía se muestran en la Tabla 3.8

**Tabla 3.8:** Energía en el espacio de parámetros, caso  $a = 0$ , para la función de onda simétrica. En la región 3 se tiene que  $0 \leq r_a \leq 1$ , mientras que en la región 4 ocurre que  $-1 \leq r_a \leq 0$ . Para considerar el caso de un número de partículas impar en la región 4 se utiliza  $|r_a|$ , ya que  $\text{sen } \theta$  siempre es positivo.

Región	Energía
1	$\frac{b}{2J} + c$
2	$\frac{b}{2J} - c$
3	$\left\{ \frac{1}{2J} + \left(1 - \frac{1}{2J}\right)(1 - r_a^2) \right\} \frac{b}{1+r_a^{2J}} + \frac{(b/2J)r_a^{2J}}{1+r_a^{2J}} + c r_a \frac{1+r_a^{2J-2}}{1+r_a^{2J}}$
4	$\left\{ \frac{1}{2J} + \left(1 - \frac{1}{2J}\right)(1 - r_a^2) \right\} \frac{b}{1+ r_a ^{2J}} + \frac{(b/2J) r_a ^{2J}}{1+ r_a ^{2J}} + c  r_a  \frac{1+ r_a ^{2J-2}}{1+ r_a ^{2J}}$

La nueva función de onda en las regiones 1 y 2 se reduce a la función original, por eso en esas regiones las funciones de onda son los mismos estados coherentes

ya encontrados y todos los valores esperados son iguales. En las regiones 3 y 4 las nuevas funciones de onda están dadas por las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}
 |\zeta_s^\pm\rangle_3 &= \sum_{m=-J}^J \frac{1}{\sqrt{2(1+r_a^{2J})}} \binom{2J}{J+m}^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{1 \mp \sqrt{1-r_a^2}}{2} \right)^{\frac{J+m}{2}} \left( \frac{1 \pm \sqrt{1-r_a^2}}{2} \right)^{\frac{J-m}{2}} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1 \pm \sqrt{1-r_a^2}}{2} \right)^{\frac{J+m}{2}} \left( \frac{1 \mp \sqrt{1-r_a^2}}{2} \right)^{\frac{J-m}{2}} \right] |J, m\rangle, \\
 |\zeta_s^\pm\rangle_4 &= \sum_{m=-J}^J \frac{(-1)^{J+m}}{\sqrt{2(1+|r_a|^{2J})}} \binom{2J}{J+m}^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{1 \mp \sqrt{1-r_a^2}}{2} \right)^{\frac{J+m}{2}} \left( \frac{1 \pm \sqrt{1-r_a^2}}{2} \right)^{\frac{J-m}{2}} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1 \pm \sqrt{1-r_a^2}}{2} \right)^{\frac{J+m}{2}} \left( \frac{1 \mp \sqrt{1-r_a^2}}{2} \right)^{\frac{J-m}{2}} \right] |J, m\rangle
 \end{aligned}$$

Conociendo las funciones de onda es inmediato calcular la ocupación relativa

$$\begin{aligned}
 P_{3,4}^{s\pm}(m) &= \frac{1}{2\{1+|r_a|^{2J}\}} \binom{2J}{J+m} \left[ \left( \frac{1 - \sqrt{1-r_a^2}}{2} \right)^{J+m} \left( \frac{1 + \sqrt{1-r_a^2}}{2} \right)^{J-m} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1 + \sqrt{1-r_a^2}}{2} \right)^{J+m} \left( \frac{1 - \sqrt{1-r_a^2}}{2} \right)^{J-m} \pm 2 \left( \frac{r_a^2}{2} \right)^J \right],
 \end{aligned}$$

que es la misma en las regiones 3 y 4. En este caso la probabilidad de ocupación es una combinación normalizada de distribuciones binomiales.

Los resultados para los valores esperados de los operadores de momento angular se muestran en la Tabla (3.9).

Las expresiones para los cuadrados de los operadores de momento angular en las regiones 3 y 4 están dadas por

$$\begin{aligned}
 J_x^2/J^2 &= \left\{ \frac{1}{2J} - \frac{r_a^2(1-2J)}{2J} \right\} \frac{1}{1+|r_a|^{2J}} + \left\{ \frac{1}{2J} - \frac{1}{2Jr_a^2}(1-2J) \right\} \frac{|r_a|^{2J}}{1+|r_a|^{2J}}, \\
 J_y^2/J^2 &= \frac{1}{2J} \frac{1}{1+|r_a|^{2J}} + \left\{ 1 + \frac{1}{2Jr_a^2}(1-2J) \right\} \frac{|r_a|^{2J}}{1+|r_a|^{2J}}, \\
 J_z^2/J^2 &= \left\{ 1 + \frac{1}{2J}r_a^2(1-2J) \right\} \frac{1}{1+|r_a|^{2J}} + \frac{1}{2J} \frac{|r_a|^{2J}}{1+|r_a|^{2J}}
 \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

de donde los cuadrados de las fluctuaciones para los valores esperados de los operadores de momento angular  $\hat{J}_y$  y  $\hat{J}_z$  se reducen a los valores esperados del cuadrado



**Tabla 3.9:** Valores esperados de los operadores de momento angular para el caso  $a = 0$  usando la función simétrica.

Región	$J_x/J$	$J_y/J$	$J_z/J$
1	1	0	0
2	-1	0	0
3	$r_a \frac{1+r_a^{2J-2}}{1+r_a^{2J}}$	0	0
4	$r_a \frac{1+ r_a ^{2J-2}}{1+ r_a ^{2J}}$	0	0

de los operadores y para el operador  $\hat{J}_x$  es

$$(\Delta J_x)^2 = \left\{ \frac{1}{2J}(1 - r_a^2) \right\} \frac{1}{1 + |r_a|^{2J}} + \left\{ \frac{1}{2J}(1 - 2J) \left( 1 - \frac{1}{r_a^2} \right) \right\} \frac{|r_a|^{2J}}{1 + |r_a|^{2J}},$$

de donde es inmediato que, tanto los valores esperados de los operadores de momento angular y sus cuadrados así como las fluctuaciones correspondientes tienden a los obtenidos para el estado coherente cuando  $J \rightarrow \infty$ .

La función  $Q$  general para el nuevo estado está dada por

$$\begin{aligned} Q^s(\xi) &= \frac{2J+1}{4\pi} \left| \frac{1}{\sqrt{2(1 + \sin^2 \theta_c)}} \{ \langle \xi | \zeta_1 \rangle + \langle \xi | \zeta_2 \rangle \} \right|, \\ &= \frac{2J+1}{8\pi(1 + \sin^2 \theta_c)} \left| \frac{(1 + \zeta_1 \xi^*)^{2J}}{(1 + |\zeta_1|^2)^J (1 + |\xi|^2)^J} + \frac{(1 + \zeta_2 \xi^*)^{2J}}{(1 + |\zeta_2|^2)^J (1 + |\xi|^2)^J} \right|, \end{aligned}$$

donde denotamos por  $(\theta_c, \phi_c)$  los ángulos sobre la esfera de Bloch de las variables  $\zeta_1$

y  $\zeta_2$ . Escribiendo  $\xi$  en términos de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  la función  $Q$  está dada por

$$\begin{aligned}
 Q^s(\theta, \phi) &= \frac{2J+1}{8\pi(1+(\sin\theta_c)^{2J})} \left| \left( \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \sqrt{\frac{1+\cos\theta_c}{2}} \right. \right. \\
 &+ \left. \left. e^{-i(\phi-\phi_c)} \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos\theta_c}{2}} \right)^{2J} \right. \\
 &+ \left( \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos\theta_c}{2}} \right. \\
 &+ \left. \left. e^{-i(\phi-\phi_c)} \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \sqrt{\frac{1+\cos\theta_c}{2}} \right)^{2J} \right|^2.
 \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Substituyendo los valores críticos de las regiones 3 y 4 se obtiene

$$\begin{aligned}
 Q_3^s &= \frac{2J+1}{8\pi(1+r_a^{2J})} \left| \left( \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-r_a^2}}{2}} + e^{-i\phi} \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-r_a^2}}{2}} \right)^{2J} \right. \\
 &+ \left. \left( \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-r_a^2}}{2}} + e^{-i\phi} \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-r_a^2}}{2}} \right)^{2J} \right|^2, \\
 Q_4^s &= \frac{2J+1}{8\pi(1+r_a^{2J})} \left| \left( \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-r_a^2}}{2}} - e^{-i\phi} \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-r_a^2}}{2}} \right)^{2J} \right. \\
 &+ \left. \left( \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-r_a^2}}{2}} - e^{-i\phi} \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-r_a^2}}{2}} \right)^{2J} \right|^2.
 \end{aligned}$$

El segundo momento para una combinación lineal arbitraria de dos estados coherentes se calcula en el Apéndice C.

### 3.2.2. Caso $b = 0$

En este caso los puntos críticos mínimos dividen al espacio de parámetros sólo en dos regiones, las cuales se hayan separadas por el eje  $a$ , en cada una de las cuales

Tabla 3.10: Valores de los parámetros  $\zeta$ ,  $\theta$  y  $\phi$  para el caso  $b = 0$ .

Región	$\theta_c$	$\phi_c$	$\zeta_c$
1	$\arctan(-c/a)$	0	$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+c^2}-a}{\sqrt{a^2+c^2}+a}}$
2	$\arctan(c/a)$	$\pi$	$-\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+c^2}-a}{\sqrt{a^2+c^2}+a}}$

la función de prueba es diferente. En la Tabla 3.10 se muestran los parámetros que definen al estado coherente.

Utilizando la expresión (3.2.2) para el estado coherente y la información de la Tabla (3.10) podemos escribir las funciones de onda en cada una de las regiones

$$\begin{aligned}
 |\zeta_c\rangle_1 &= \sum_{m=-J}^J \binom{2J}{J+m}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sqrt{a^2+c^2}-a}{2\sqrt{a^2+c^2}} \right)^{\frac{J+m}{2}} \left( \frac{\sqrt{a^2+c^2}+a}{2\sqrt{a^2+c^2}} \right)^{\frac{J-m}{2}} |J, m\rangle, \\
 |\zeta_c\rangle_2 &= \sum_{m=-J}^J (-1)^{J+m} \binom{2J}{J+m}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sqrt{a^2+c^2}-a}{2\sqrt{a^2+c^2}} \right)^{\frac{J+m}{2}} \left( \frac{\sqrt{a^2+c^2}+a}{2\sqrt{a^2+c^2}} \right)^{\frac{J-m}{2}} |J, m\rangle:
 \end{aligned}$$

A continuación se encuentra la función de onda del estado base para dos casos particulares, que más adelante podrán compararse con los resultados cuánticos. Para  $J = 1/2$  se obtiene

$$\begin{aligned}
 |\zeta_c\rangle_1 &= \left( \frac{\sqrt{a^2+c^2}+a}{2\sqrt{a^2+c^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2} - \right\rangle + \left( \frac{\sqrt{a^2+c^2}-a}{2\sqrt{a^2+c^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2} + \right\rangle, \\
 |\zeta_c\rangle_2 &= \left( \frac{\sqrt{a^2+c^2}+a}{2\sqrt{a^2+c^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2} - \right\rangle - \left( \frac{\sqrt{a^2+c^2}-a}{2\sqrt{a^2+c^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2} + \right\rangle.
 \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Para  $J = 1$  las funciones de onda son

$$|\zeta_c\rangle_1 = \left( \frac{\sqrt{a^2 + c^2} + a}{2\sqrt{a^2 + c^2}} \right) |1, -1\rangle + \left( \frac{c^2}{2(a^2 + c^2)} \right)^{\frac{1}{2}} |1, 0\rangle + \left( \frac{\sqrt{a^2 + c^2} - a}{2\sqrt{a^2 + c^2}} \right) |1, 1\rangle, \quad (3.2.17)$$

$$|\zeta_c\rangle_2 = \left( \frac{\sqrt{a^2 + c^2} + a}{2\sqrt{a^2 + c^2}} \right) |1, -1\rangle - \left( \frac{c^2}{2(a^2 + c^2)} \right)^{\frac{1}{2}} |1, 0\rangle + \left( \frac{\sqrt{a^2 + c^2} - a}{2\sqrt{a^2 + c^2}} \right) |1, 1\rangle,$$

Ahora puede calcularse el valor esperado de cualquier observable. Sustituyendo en las expresiones (2.4.6) el valor de los puntos críticos de cada región se obtienen los resultados mostrados en la Tabla 3.11 para los valores esperados de los operadores de momento angular. Usando las expresiones (3.2.4) para el cuadrado de las componentes del momento angular, es inmediato sustituir los puntos críticos y obtener los resultados mostrados en la Tabla 3.12. Los resultados obtenidos han sido divididos por  $J$  y  $J^2$ , respectivamente, para hacerlos cantidades intensivas de igual forma que en el caso  $a = 0$ .

Tabla 3.11: Valores esperados de los operadores de momento angular para el caso  $b = 0$ .

Región	$J_x/J$	$J_y/J$	$J_z/J$
1	$-\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$	0	$-\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$
2	$-\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$	0	$-\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$

Tabla 3.12: Valores esperados del cuadrado de los operadores de momento angular para el caso  $b = 0$ .

Región	$J_x^2/J^2$	$J_y^2/J^2$	$J_z^2/J^2$
1	$\frac{1}{4J} \left\{ 1 + 2J + (1 - 2J) \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \right\}$	$\frac{1}{2J}$	$\frac{1}{2J} \left\{ 1 - (1 - 2J) \frac{a^2}{a^2 + c^2} \right\}$
2	$\frac{1}{4J} \left\{ 1 + 2J + (1 - 2J) \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \right\}$	$\frac{1}{2J}$	$\frac{1}{2J} \left\{ 1 - (1 - 2J) \frac{a^2}{a^2 + c^2} \right\}$

El valor de la fluctuación para la componente  $J_x/J$  es  $a^2/[(4J)(a^2 + c^2)]$  en ambas regiones. Para  $J_y/J$  la fluctuación es una constante en todo el espacio y su valor

es  $\sqrt{1/(2J)}$ . Finalmente, la fluctuación para  $J_z/J$  es  $c^2/[(2J)(a^2 + c^2)]$ . Al tomar el límite cuando  $J \rightarrow \infty$  encontramos que las fluctuaciones para las tres componentes normalizadas del momento angular tienden a cero, como ocurre en el caso clásico.

Conociendo estos valores esperados podemos construir nuevamente las energías mínimas en el espacio de parámetros y los resultados aparecen en la Tabla (3.13).

Tabla 3.13: Energía en el espacio de parámetros, caso  $b = 0$ .

Región	Energía
1	$-\sqrt{a^2 + c^2}$
2	$-\sqrt{a^2 + c^2}$

La probabilidad de ocupación relativa entre los dos modos del condensado, que se define como  $P_{\zeta_c}(m) = |\langle J, m | \zeta_c \rangle|^2$ , tiene la forma

$$P_{\zeta_c}(m) = \binom{2J}{J+m} \left( \frac{\sqrt{a^2 + c^2} - a}{2\sqrt{a^2 + c^2}} \right)^{J+m} \left( \frac{\sqrt{a^2 + c^2} + a}{2\sqrt{a^2 + c^2}} \right)^{J-m},$$

que es una distribución binomial de la cual conocemos el valor medio del número de átomos que se encuentran en el estado excitado cuyo valor es  $\bar{m} = [-J \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}]$ , mientras que la dispersión del valor promedio de ocupación es  $(\Delta m)^2 = J(\frac{c^2}{\sqrt{a^2 + c^2}})$ .

Sustituyendo los valores de la Tabla (3.10), en la ecuación (3.2.10) se obtiene la función  $Q$ , cuya expresión es

$$Q_1(J, \theta, \phi) = \frac{2J+1}{4\pi} 4^{-J} \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cos \theta - \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cos \phi \sin \theta \right)^{2J},$$

$$Q_2(J, \theta, \phi) = \frac{2J+1}{4\pi} 4^{-J} \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cos \theta + \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cos \phi \sin \theta \right)^{2J}.$$

Por tratarse de un estado coherente el valor del segundo momento es uno en todo el espacio de parámetros.

3.2.3. Caso  $c = 0$

Los puntos críticos mínimos dividen al espacio de parámetros en tres regiones, las cuales se hayan separadas por el eje  $b$  para  $b < 0$  y por las líneas  $a = b(2 - 1/J)$  y  $a = -b(2 - 1/J)$  para  $b > 0$ . En la Tabla 3.14 se muestran los parámetros que definen al estado coherente, esto es  $\zeta$  ó el ángulo  $\theta$ , pues en este caso el Hamiltoniano es independiente de  $\phi$ .

Tabla 3.14: Valores de los parámetros  $\zeta$  y  $\theta$  para el caso  $c = 0$ . Donde definimos el parámetro  $r_c = \frac{a}{b(2-(1/J))}$ .

Región	$\theta_c$	$\zeta_c$
1	0	0
2	$\pi$	$\infty$
3	$\arccos(r_c)$	$\sqrt{\frac{1-r_c}{1+r_c}}$

Utilizando la expresión (3.2.2) para el estado coherente y la información de la Tabla (3.14) pueden escribirse las funciones de onda en cada una de las regiones

$$\begin{aligned}
 |\zeta_c\rangle_1 &= |J, -J\rangle, \\
 |\zeta_c\rangle_2 &= |J, J\rangle, \\
 |\zeta_c\rangle_3 &= \sum_{m=-J} e^{i(J+m)\phi'} \binom{2J}{J+m}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-r_c}{2}\right)^{\frac{J+m}{2}} \left(\frac{1+r_c}{2}\right)^{\frac{J-m}{2}} |J, m\rangle,
 \end{aligned}
 \tag{3.2.18}$$

donde  $r_c = \frac{a}{b(2-(1/J))}$ .

Sustituyendo en las expresiones (2.4.6) el valor de los puntos críticos de cada región se obtienen los resultados mostrados en la Tabla 3.15 para los valores esperados de los operadores de momento angular y en la Tabla 3.16 se establecen los valores esperados del cuadrado de las componentes del momento angular en las regiones 1 y 2. Para la región 3 los valores esperados de los operadores de momento angular al cuadrado

Tabla 3.15: Valores esperados de los operadores de momento angular para el caso  $c = 0$ .

Región	$J_x/J$	$J_y/J$	$J_z/J$
1	0	0	-1
2	0	0	1
3	$\cos \phi' \sqrt{1 - r_c^2}$	$\text{sen } \phi' \sqrt{1 - r_c^2}$	$-r_c$

Tabla 3.16: Valores esperados del cuadrado de los operadores de momento angular para el caso  $c = 0$  en las regiones 1 y 2.

Región	$J_x^2/J^2$	$J_y^2/J^2$	$J_z^2/J^2$
1	$\frac{1}{2J}$	$\frac{1}{2J}$	1
2	$\frac{1}{2J}$	$\frac{1}{2J}$	1

están determinados por las expresiones

$$J_x^2/J^2 = \frac{1}{2J} + \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{1}{J} \right) (1 - r_c^2) \cos^2 \phi',$$

$$J_y^2/J^2 = \frac{1}{2J} + \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{1}{J} \right) (1 - r_c^2) \text{sen}^2 \phi',$$

$$J_z^2/J^2 = 1 - \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{1}{J} \right) (1 - r_c^2).$$

La fluctuación de las componentes  $J_x/J$  y  $J_y/J$  es una constante igual a  $1/(2J)$ , en las regiones 1 y 2, mientras que en la región 3 dependen de ambos parámetros del Hamiltoniano y sus valores están dados por las expresiones

$$(\delta J_x)^2 = \frac{1}{2J} (1 - \cos^2 \phi' (1 - r_c^2)),$$

$$(\delta J_y)^2 = \frac{1}{2J} (1 - \text{sen}^2 \phi' (1 - r_c^2)).$$

Finalmente, la fluctuación para  $J_z/J$  es cero en las regiones 1 y 2, mientras que en la región 3 su valor es  $(1 - r_c^2)/(2J)$ . Al tomar el límite cuando  $J \rightarrow \infty$  encontramos que las fluctuaciones para las tres componentes normalizadas del momento angular valen cero, como debe ocurrir en el caso clásico.

Conociendo estos valores esperados podemos construir nuevamente los resultados para las energías mínimas en el espacio de parámetros y los resultados aparecen en la Tabla (3.17).

Tabla 3.17: Energía en el espacio de parámetros, caso  $c = 0$ .

Región	Energía
1	$-a + b$
2	$a + b$
3	$-\frac{a^2}{2b(2-(1/J))} + \frac{b}{2J}$

En este caso la probabilidad de ocupación vale uno en las regiones 1 y 2, y tiene la forma más sencilla, pues se encuentra en un estado de momento angular con proyección bien definida, es decir, sólo pueden estar todos los átomos abajo, región 1, o arriba, región 2. En la región 3 se tiene más de un estado posible, y la probabilidad de ocupación relativa está dada por

$$P_{\zeta_c}^3(m) = \binom{2J}{J+m} \left(\frac{1-r_c}{2}\right)^{J+m} \left(\frac{1+r_c}{2}\right)^{J-m}$$

En este caso la ocupación relativa es dependiente de ambos parámetros del Hamiltoniano en todo el espacio y el valor promedio es  $\bar{m} = -Jr_c$ , mientras que la dispersión es  $(\Delta m)^2 = J(1 - r_c^2)$ .

Sustituyendo los valores de la Tabla (3.14), en la ecuación (3.2.10) para encontrar la función  $Q$ , se obtiene

$$\begin{aligned} Q_1(J, \theta, \phi) &= \frac{2J+1}{4\pi} 4^{-J} (1 + \cos \theta)^{2J}, \\ Q_2(J, \theta, \phi) &= \frac{2J+1}{4\pi} 4^{-J} (1 - \cos \theta)^{2J}, \\ Q_3(J, \theta, \phi, \phi') &= \frac{2J+1}{4\pi} 4^{-J} \left(1 + r_c \cos \theta + \sqrt{1 - r_c^2} \cos(\phi - \phi') \sin \theta\right)^{2J}, \end{aligned} \quad (3.2.19)$$



donde  $\phi'$  es arbitraria ya que son estados  $\phi$ -inestables.

Nuevamente, el segundo momento de la función  $Q$  para el estado de prueba vale uno en todo el espacio de parámetros.

# Capítulo 4

## Análisis cuántico

En esta sección se encuentran las funciones y valores propios del Hamiltoniano modelo (2.1.10)

$$\frac{\hat{H}}{J} = \frac{a}{J} \hat{J}_z + \frac{b}{J^2} \hat{J}_z^2 + \frac{c}{J} \hat{J}_x.$$

Para encontrar las funciones propias se diagonaliza este Hamiltoniano dado en la base de momento angular, esto es [28]

$$J^2 |J, m\rangle = J(J+1) |J, m\rangle, \quad J_z |J, m\rangle = m |J, m\rangle,$$

donde se usan unidades con  $\hbar = 1$ , y la proyección del momento angular  $m$  puede tomar los valores  $-J \leq m \leq J$ . En esta base se calculan los elementos de matriz de cada uno de los operadores de momento angular, utilizando los operadores de ascenso ( $J_+ = J_x + iJ_y$ ) y descenso ( $J_- = J_x - iJ_y$ ). De esta manera se construye la matriz Hamiltoniana cuyos elementos de matriz son

$$\begin{aligned} \langle J, m_2 | \frac{\hat{H}}{J} |J, m_1\rangle &= \frac{a}{J} m_1 \delta_{m_2, m_1} + \frac{b}{J^2} m_1^2 \delta_{m_2, m_1} \\ &+ \frac{c}{J} \left( \sqrt{(J-m_1)(J+m_1+1)} \delta_{m_2, m_1+1} + \sqrt{(J+m_1)(J-m_1+1)} \delta_{m_2, m_1-1} \right). \end{aligned}$$

Las funciones propias, para un determinado número de átomos  $N = 2J$ , pueden escribirse como una combinación lineal de la base de momento angular

$$|\Psi_i\rangle = \sum_{m=-J}^J C_m^i |J, m\rangle,$$

donde  $i$  denota la  $i$ -ésima función propia, y el índice  $i = 1, 2, 3, \dots, 2J + 1$ .

La diagonalización de la matriz Hamiltoniana se realizó utilizando Mathematica. Se diseñó un programa que construye la matriz para todo valor de los parámetros, y las funciones y valores propios se encuentran utilizando una subrutina de diagonalización. En el Apéndice D se presentan los detalles del programa desarrollado.

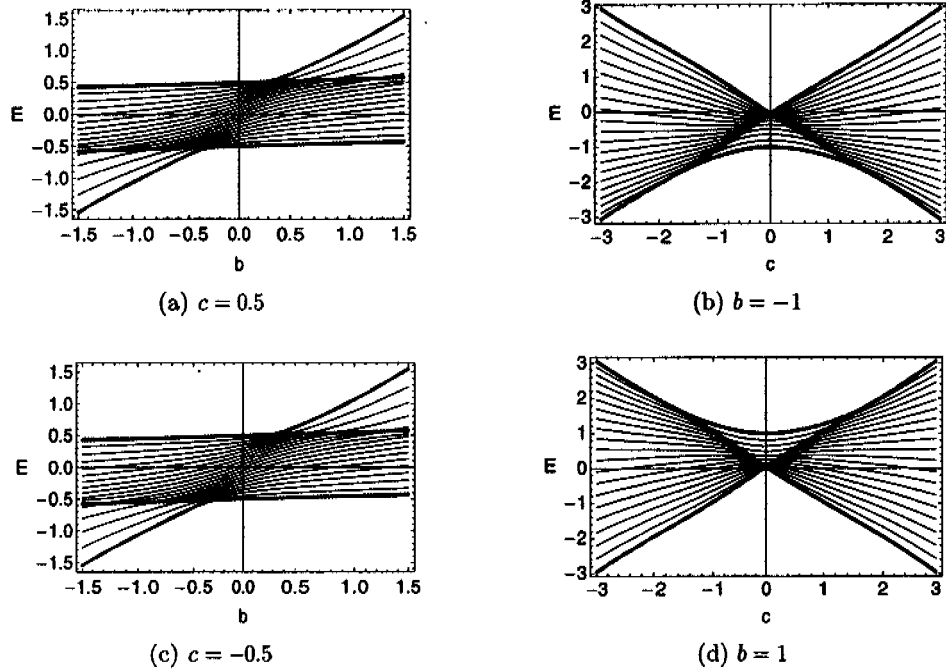
El análisis cuántico se dividirá de la misma forma que en el capítulo anterior separando su estudio en cuatro casos. Los tres primeros asociados a hacer cero cada una de las interacciones que forman el Hamiltoniano, esto es,  $a = 0$ ,  $b = 0$  y  $c = 0$ , y finalmente, se considera el caso cuando todos los parámetros son diferentes de cero.

## 4.1. Caso $a=0$

### Energía

En el capítulo anterior se calcularon los valores esperados de las diferentes observables con respecto al estado coherente de  $SU(2)$ , y se evaluaron estas expresiones en los puntos críticos. De aquí en adelante, estos valores esperados serán llamados valores esperados clásicos mientras que los valores esperados que se obtengan con respecto a los estados propios del Hamiltoniano, serán llamados valores esperados cuánticos. En particular, los valores esperados del Hamiltoniano serán energías clásicas y energías cuánticas, respectivamente.

En la Fig. 4.1 se muestran cortes del espectro de energías del Hamiltoniano como función de los parámetros  $b$  y  $c$ . Las líneas oscuras corresponden a las energías clásicas (ver (3.1.2)). Se observa que las energías clásicas dividen el espectro de energía en regiones con degeneración y sin ella, entendiéndose por degeneración a que visualmente no podemos distinguir un nivel de otro en la gráfica. Posteriormente se hace un análisis más riguroso sobre este punto. En las Figs. 4.1(a) y 4.1(c) se observa que en la parte central no hay degeneración mientras que fuera de ella existe una degeneración doble. Además, ambos valores de  $c$  producen el mismo espectro de energías, ésta es una simetría que presenta el Hamiltoniano y es equivalente a una rotación alrededor del eje  $Z$  por  $\pi$  radianes, es decir, el Hamiltoniano es invariante ante estas rotaciones. En las Figs. 4.1(b) y 4.1(d) se observa que al cambiar el signo del parámetro  $b$  produce una inversión del espectro. Las gráficas muestran que las energías clásicas reproducen bien las energías cuánticas mínimas. En estas últimas pueden observarse las transiciones de fase de primero y segundo orden en valores de



**Figura 4.1:** Espectros de energía para el caso  $a = 0$ . Para estas figuras se ha considerado  $J = 10$ , que significa  $N = 20$  partículas en el condensado. En cada una de las figuras se muestran en color oscuro las energías-clásicas correspondientes.

$b$  y  $c$  cercanos a aquellos que corresponden a la separatriz.

En las figuras, la separatriz está marcada por los puntos de intersección de dos o más energías clásicas. Las transiciones de fase para la energía cuántica mínima ocurren, para  $J$  finito, en regiones cercanas a la separatriz. Únicamente en el caso en que  $J$  tiende a infinito las transiciones ocurren exactamente sobre la separatriz. Esto es más claro para valores pequeños de  $J$ , por ejemplo, cuando  $J = 1$  la degeneración solo ocurre cuando  $b \rightarrow -\infty$ , como se mostrará más adelante.

En la Tabla 4.1 se muestran los valores de la diferencia de energías entre el primer estado excitado y el estado base (gap), que denotamos por  $G = E_1 - E_0$ , para diferentes valores de  $J$  como función de  $b$  conservando  $c = 0.5$ . El último valor de  $b$  en la tabla corresponde a la recta que constituye a la separatriz,  $b = -c/(2 - (1/J))$ . En este valor de los parámetros  $b$  y  $c$  no existe degeneración ( $G = 0$ ) para los va-

**Tabla 4.1:** Diferencia de energías del primer estado excitado y el estado base para diferentes valores de  $b$  en la región 4 conservando  $c = 0.5$ .

	$b = -1.5$	$b = -1.0$	$b = -0.5$	$b = -0.5/(2 - (1/J))$
$J = 1$	$1.5 \times 10^{-1}$	$2.1 \times 10^{-1}$	$3.1 \times 10^{-1}$	$3.1 \times 10^{-1}$
$J = 5$	$4.8 \times 10^{-7}$	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.7 \times 10^{-3}$	$3.9 \times 10^{-2}$
$J = 10$	$1.1 \times 10^{-13}$	$2.0 \times 10^{-10}$	$3.1 \times 10^{-5}$	$1.6 \times 10^{-2}$
$J = 20$	0	0	$2.7 \times 10^{-9}$	$6.7 \times 10^{-3}$
$J = 50$	0	0	0	$2.0 \times 10^{-3}$
$J = 100$	0	0	0	$8.4 \times 10^{-4}$

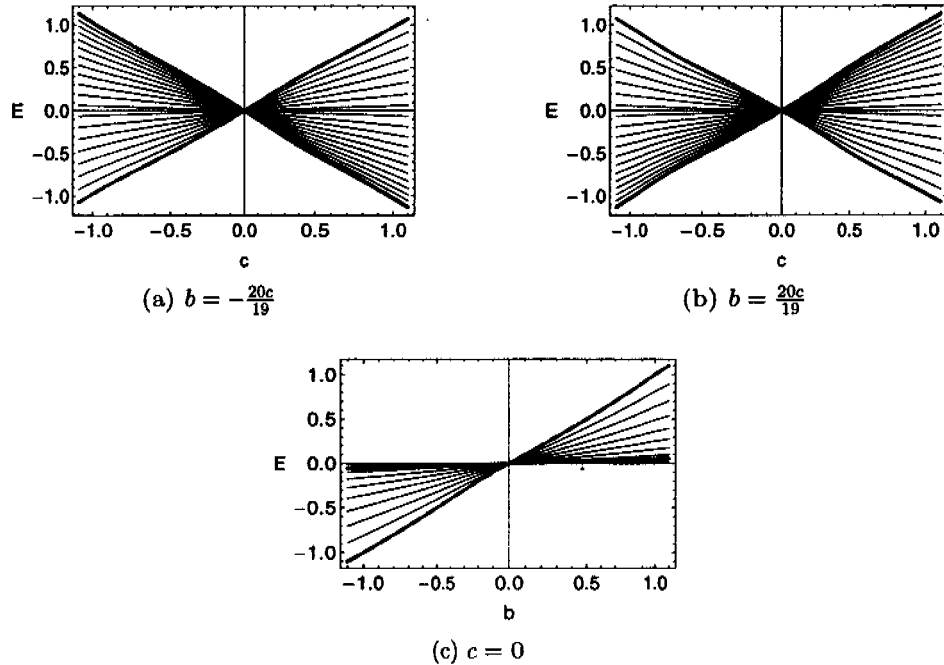
lores de  $J$  considerados en la tabla y se tiene además que para  $J$  pequeñas no hay degeneración incluso para  $b = -1.5$ . La única región donde hay degeneración para todo valor de  $J$  es la línea  $c = 0$ . Cuando  $J \rightarrow \infty$  la zona de degeneración empieza exactamente en la separatriz. Esto podremos verlo nuevamente cuando analicemos la razón de diferencias de energía.

En la Fig. 4.2 se muestran los espectros de energía para 20 átomos ( $J = 10$ ) cuando los parámetros varían sobre las líneas que forman la separatriz del sistema. Se observa que en este caso desaparece la región de degeneración, excepto en el punto no físico  $(0, 0)$ . En las tres figuras se observan transiciones de fase de primer orden en  $c = 0$ . Estas corresponden únicamente a transiciones entre las regiones 1 y 2. Además, en las Figs. 4.2(a) y 4.2(b) se observa nuevamente la simetría ante el intercambio de  $c$  con  $-c$ .

La razón entre la diferencia de energía del estado base con el primer y segundo estados excitados se denota por  $R_1$  y se define como

$$R_1 = \frac{E_1 - E_0}{E_2 - E_1}. \quad (4.1.1)$$

En la figura Fig. 4.3 se grafica  $R_1$  en función de los parámetros  $b$  y  $c$ . Esta observable presenta cambios de comportamiento drásticos al cruzar la separatriz. En particular, en las regiones 1 y 2 del espacio de parámetros, la diferencia de energía entre el estado base y el primer excitado es diferente de cero mientras que en las regiones 3

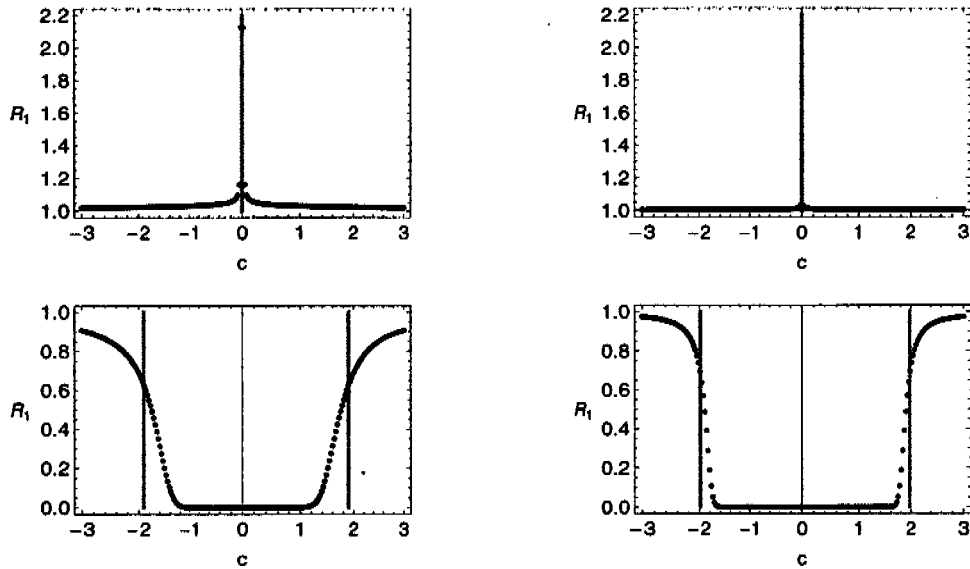


**Figura 4.2:** Espectros de energía para el caso  $a = 0$ , los parámetros varían sobre las rectas  $c = \pm b(2 - 1/J)$  si  $b < 0$  y  $c = 0$  si  $b > 0$ . Tomando  $J = 10$ .

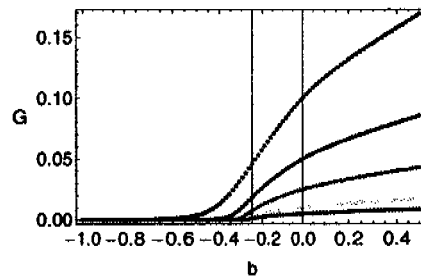
y 4 es cero o muy cercana a cero. Entonces esta razón puede usarse para determinar las regiones en el espacio de parámetros donde ocurren los cambios en la estructura del estado base del sistema, además, el cambio de comportamiento en las regiones es más pronunciado cuando el número de partículas aumenta.

Esta razón también da información acerca del valor de  $G$ , y por lo tanto de la presencia de degeneración. En la parte inferior de la Fig. 4.3 puede verse cómo el tamaño de la zona de degeneración depende del valor de  $J$ , cuando  $J = 10$  la zona en la que  $G$  es cero está más alejada de la separatriz que para  $J = 50$ . Únicamente para  $J \rightarrow \infty$  la zona de degeneración comienza justo en la separatriz. Este comportamiento de  $G$  puede observarse en la Fig. 4.4 para diferentes valores de  $J$ , la línea vertical corresponde al valor de la separatriz en el límite de número de partículas infinito.

Cuando hay degeneración, debido a la linealidad de la ecuación de Schrödinger



**Figura 4.3:** En la parte superior se grafica  $R_1$  como función de  $c$  conservando  $b = 1$ . En la parte inferior  $b = -1$ . Las figuras del lado izquierdo corresponden a  $J = 10$  y las del lado derecho a  $J = 50$ . Las líneas verticales claras marcan la separatriz para esos valores de los parámetros.



**Figura 4.4:** Gráfica de  $G = E_1 - E_0$  como función de  $b$  con  $c = 0.5$ , para diferentes valores de  $J$ . De arriba a abajo las líneas corresponden a  $J = 5, 10, 20, 50, 100$ . La línea vertical corresponde al valor de la separatriz cuando  $J \rightarrow \infty$ .

de estados estacionarios, la función de onda del estado base puede ser cualquier combinación lineal de las dos funciones propias correspondientes. Por esta razón, es conveniente utilizar una base adaptada a la simetría del problema.

El Hamiltoniano es invariante ante rotaciones por  $\pi$ -radianes a lo largo del eje- $X$ , ya que únicamente afecta al operador  $J_z$ , como puede observarse a continuación [28]

$$e^{-i\pi J_x} J_z e^{i\pi J_x} = -J_z,$$

y el Hamiltoniano depende únicamente de  $J_z^2$ . Debe recordarse que hasta ahora la base usada ha sido la de los estados de Dicke, en la cual se tienen dos estados cuyo valor absoluto de la proyección de momento angular en la dirección  $z$  es la misma. Debido a la simetría que acaba de mencionarse, no hay una razón para que uno de los estados sea más probable que el otro, por ello debe utilizarse una base en la que ambos estados tengan el mismo peso. En este caso, a diferencia del caso clásico, tenemos que reemplazar los estados de Dicke por sus combinaciones simétrica y antisimétrica que se definen de la manera siguiente:

- Simétrica:  $|m\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{2(1+\delta_{m,0})}} \{|m\rangle + |-m\rangle\}$  con  $m = 0, 1, \dots, J$
- Antisimétrica:  $|m\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|m\rangle - |-m\rangle\}$  con  $m = 1, \dots, J$

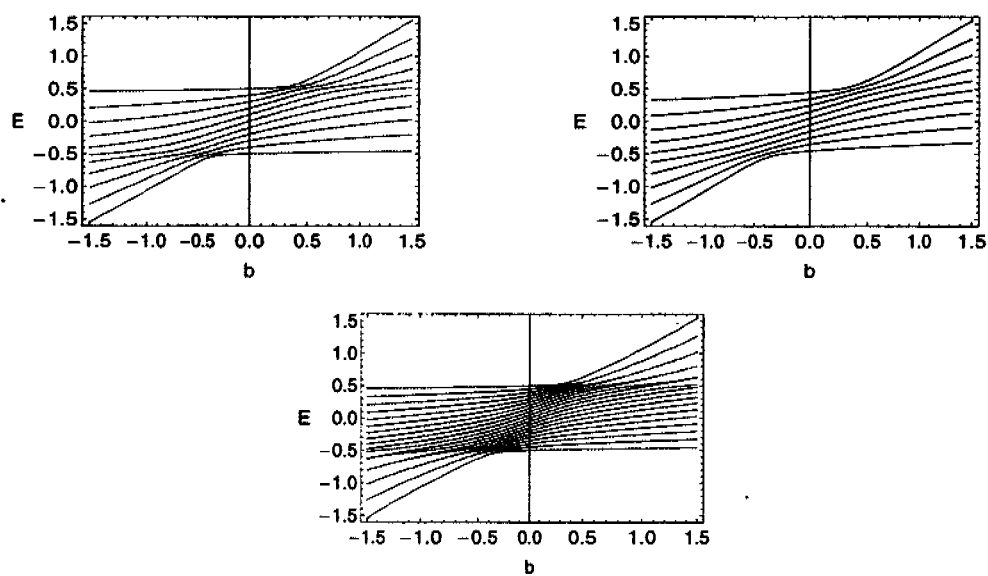
Estos dos conjuntos de vectores satisfacen las propiedades de ortonormalidad siguientes:

$$\begin{aligned} +\langle m' | m \rangle_+ &= \frac{\delta_{m',m} + \delta_{m',-m}}{\sqrt{(1 + \delta_{m',0})(1 + \delta_{m,0})}}, \\ -\langle m' | m \rangle_- &= \delta_{m',m} - \delta_{m',-m}, \\ +\langle m' | m \rangle_- &= 0. \end{aligned}$$

En esa base la matriz Hamiltoniana, en general de dimensión  $2J + 1$ , se rompe en dos bloques independientes, de dimensiones  $J + 1$  para la combinación simétrica y de dimensión  $J$  para la antisimétrica. Esta simetría nos permite considerar un mayor número de partículas, ya que se requiere diagonalizar matrices de la mitad de tamaño.

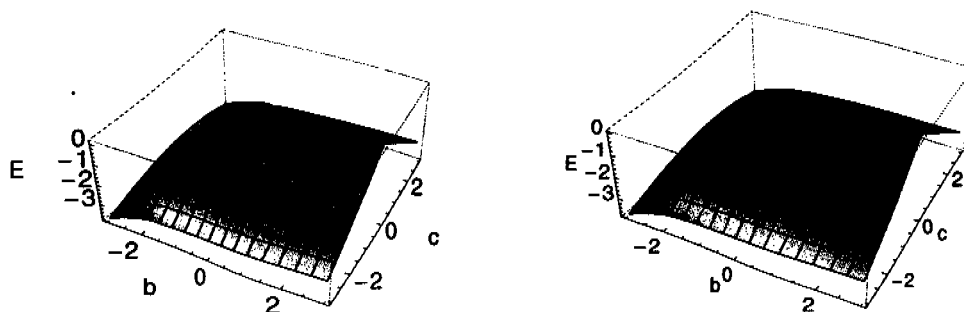
En la Fig. 4.5 se muestran los espectros de energía para  $N = 20$  partículas. Se observa que los espectros de energía para cada una de las submatrices no tienen degeneración y ésta ocurre únicamente cuando mezclamos los niveles de energía de ambas matrices. Esto implica que cada una de las submatrices da lugar a niveles de energía que presentan cruces evitados porque están asociados a la misma simetría.



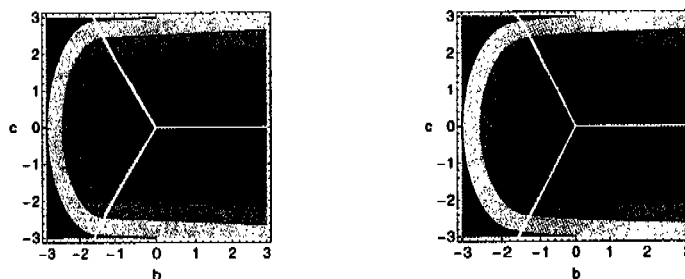


**Figura 4.5:** Se muestra el espectro de energías para 20 partículas en la nueva base. Arriba a la izquierda, aparecen los niveles de energía asociados a la combinación simétrica, y a la derecha, aparece el espectro de energía asociado a la combinación antisimétrica. Abajo se presenta la combinación de los dos espectros de energía, observándose claramente la zona de degeneración.

La comparación entre el comportamiento de la superficie de energía clásica mínima y la superficie de energía cuántica del estado base en función de los parámetros  $(b, c)$  del Hamiltoniano modelo, se muestra para  $N = 20$  partículas, en la Fig. 4.6. Ambas energías presentan el mismo comportamiento en el espacio de parámetros. En  $c = 0$  y  $b > 0$  hay una línea que marca el cambio de pendiente que existe en la superficie al cruzar la recta  $c = 0$ , recordamos que esta recta forma parte de la separatriz y que la transición de fase correspondiente es de primer orden, por ello es tan notoria pues esto implica una discontinuidad en la primera derivada de la energía. La línea que marca la transición de segundo orden no es tan obvia, pues corresponde sólo a un cambio de concavidad de la función. Sin embargo, está presente para las energías clásica y cuántica.



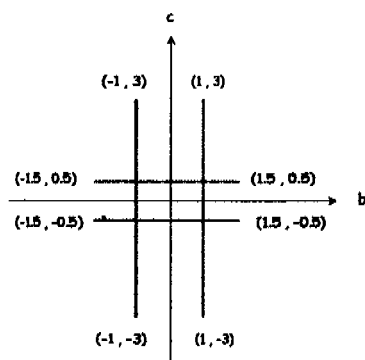
**Figura 4.6:** A la izquierda tenemos la superficie de energía clásica y a la derecha la superficie de energía cuántica en función de los parámetros  $b$  y  $c$  para  $N = 20$ .



**Figura 4.7:** Se muestran las curvas de nivel de las superficies de energía clásica (izquierda) y cuántica (derecha) en función de los parámetros  $b$  y  $c$ , junto con la separatriz del Hamiltoniano modelo (líneas blancas).

En la Fig. 4.7 se muestran las curvas de nivel de las superficies de energía junto

con la separatriz del sistema. En ambas figuras se observan dos zonas, una en la que las curvas de nivel son líneas rectas y la otra en la que son líneas curvas, y están separadas por las rectas  $c = \pm b(2 - 1/J)$  de la separatriz. Las líneas rectas son simétricas con respecto a la recta  $c = 0$ . En el caso clásico el cambio de concavidad de las curvas de nivel está determinado por la separatriz mientras que en el caso cuántico se observa un ligero corrimiento. Este corrimiento desaparece cuando  $J \gg 1$ .



**Figura 4.8:** Se muestran los cortes  $c = 0.5$ ,  $b = -1$ ,  $c = -0.5$  y  $b = 1$ , en el espacio de parámetros  $b$  y  $c$ , mediante los cuales estudiaremos el comportamiento de diferentes observables, en algunos casos como funciones de  $b$  y en otros como funciones de  $c$ .

A continuación, se muestra una serie de gráficas que corresponden a cortes en las superficies de energía, es decir, son funciones de un solo parámetro, conservando el otro constante. De aquí en adelante se utilizarán estos mismos cortes (Fig. 4.8) para observar cómo varía el comportamiento de diferentes observables en el espacio de parámetros.

La correspondencia entre las energías clásica y cuántica mejora cuando  $J$  aumenta, es decir, cuando aumenta el número de partículas. Esto se muestra en la Fig. 4.9, las gráficas del lado izquierdo corresponden a 20 partículas, mientras que las del lado derecho corresponden a 100 partículas. En ambos casos, la energía clásica está representada por la línea clara, la energía cuántica por la línea obscura y la separatriz está representada por las líneas verticales. En la Fig. 4.9(a) se fijó  $c = 0.5$ . Se observa que la correspondencia entre ambas energías es mejor a la izquierda de la separatriz. Del lado derecho de la separatriz, para 20 partículas, cuando  $b$  crece la energía clásica

se separa de la cuántica mientras que para 100 partículas, la separación desaparece. Este mismo comportamiento puede observarse en las otras gráficas. La simetría con respecto al cambio de  $c$  por  $-c$  puede observarse claramente en las Figs. 4.9(a) y 4.9(c).

En las Figs. 4.9 y 4.6 se ha mostrado que la energía clásica reproduce muy bien la energía cuántica del estado base. A continuación, se estudian las correspondientes funciones de onda, esto es, las que provienen de la diagonalización exacta y el estado coherente o la combinación simétrica de estados coherentes que se utilizan como función de prueba en el formalismo variacional.

## Traslape de estados cuánticos y semiclásicos

Primero se analiza el caso de dos partículas en el condensado ( $J = 1$ ) pues los resultados son analíticos y pueden compararse fácilmente con los resultados obtenidos en el capítulo anterior. Las energías de este sistema están dadas por las expresiones

$$E_1 = b, \quad E_2 = \frac{1}{2} (b - \sqrt{b^2 + 4c^2}), \quad E_3 = \frac{1}{2} (b + \sqrt{b^2 + 4c^2}),$$

es claro que la energía que corresponde al estado base es  $E_2$ . Puede verse de estas expresiones que la degeneración del estado base con el primer excitado, que corresponde a  $E_1$  sólo puede ocurrir si  $b \rightarrow -\infty$ . Sin embargo, sabemos que siempre existe degeneración cuando  $c = 0$  para  $b < 0$ , y de hecho, cuando el valor de  $c$  es muy pequeño, visualmente ya no se distingue la diferencia entre las energías.

La función de onda del estado base, correspondiente a la función propia asociada al valor  $E_2$ , está dada en términos de la base de Dicke por la expresión

$$\begin{aligned} |g\rangle = & \frac{r_a}{\sqrt{2r_a^2 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4r_a^2})^2}} |11\rangle - \frac{1 + \sqrt{1 + 4r_a^2}}{\sqrt{2r_a^2 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4r_a^2})^2}} |10\rangle \\ & + \frac{r_a}{\sqrt{2r_a^2 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4r_a^2})^2}} |1-1\rangle, \end{aligned}$$

donde  $r_a$  es la variable que se definió en el capítulo anterior ( $r_a = c/(b(2 - (1/J)))$ ), y que en este caso se reduce a  $r_a = c/b$ . Es inmediato encontrar la expresión del estado  $|g\rangle$  en la base simétrica

$$|g\rangle = \frac{\sqrt{2} r_a}{\sqrt{2r_a^2 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4r_a^2})^2}} |1\rangle_+ - \frac{1 + \sqrt{1 + 4r_a^2}}{\sqrt{2r_a^2 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4r_a^2})^2}} |0\rangle_+.$$

Para hacer la comparación entre la función exacta y la función de prueba se calcula el cuadrado del traslape  $|\langle \zeta_c | g \rangle|^2$ , esta cantidad se multiplica por cien para obtener el porcentaje de correlación entre los dos estados. El estado de prueba  $|\zeta_c\rangle$  está determinado por las expresiones (3.2.3). En la Fig. 4.10 se muestra el porcentaje del traslape como función de los parámetros para este ejemplo particular.

Se observa que en las regiones 1 y 2 el traslape es bueno cuando  $b$  es grande comparado con  $c$ . Esto se debe a que cuando  $c$  es pequeño, el estado de Dicke dominante en la combinación lineal es el  $|10\rangle$  que no puede ser descrito correctamente por un estado coherente. En  $c = 0$  el estado base es exactamente  $|10\rangle$ , y por esto el porcentaje de traslape toma su valor mínimo sobre esta recta y cuyo valor es 50%. En las regiones 3 y 4, el traslape es cercano al 50% que corresponde a la menor correlación del estado coherente con la solución exacta. En la región cercana a la separatriz se observa un cambio brusco en el comportamiento del porcentaje de traslape.

Este cálculo se realizó usando los estados coherentes, pero debemos recordar que en las regiones 3 y 4 el sistema presenta degeneración por lo que se propuso una combinación lineal simétrica de estados coherentes con valores sobre la esfera  $(\theta_c, \phi_c)$  y  $(\pi - \theta_c, \phi_c)$ ; a esta combinación la llamaremos estado coherente simétrico. Usando este vector de estado se calcula nuevamente el traslape y el resultado se muestra en la figura Fig. 4.11.

El traslape del estado cuántico del estado base y el estado coherente simétrico es mucho mayor que el encontrado para el estado coherente. La concordancia entre ambas funciones se incrementa notablemente en las regiones 3 y 4, y ahora el traslape es muy cercano a uno (100%) en la mayor parte del espacio de parámetros. Podemos observar también que las regiones donde el traslape es menor corresponden justo a las zonas cercanas a la separatriz, encontrándose que la aproximación clásica funciona mejor en las regiones más alejadas a la separatriz.

En las Tablas 4.2 y 4.3 se presentan los porcentajes del traslape del estado base con el estado coherente y con la combinación de estados coherentes simétrica en algunos puntos del espacio de parámetros para  $J = 10$ . La Fig. 4.12 muestra el comportamiento del traslape para  $J = 10$  como función de ambos parámetros.

En la Tabla 4.2 puede observarse que en las regiones 1 y 2 el estado coherente y el estado coherente simétrico tienen la misma correlación con la función de onda del estado base. Esto sucede porque el estado coherente simétrico se reduce al estado coherente en esas regiones. Sin embargo, en las regiones 3 y 4 es claro que el estado simétrico tiene mayor correlación con el estado cuántico del estado base, y por lo tanto es una mejor función de prueba. De hecho, justo sobre la recta  $c = 0$  con  $b < 0$

**Tabla 4.2:** Traslape de la función de onda del estado base con el estado coherente y con la combinación simétrica de estados coherentes para  $J = 10$ . Todos los traslapes se expresan en porcentajes.

$(b, c)$	Coherente (%)	Simétrico (%)
$(-1, 3)$	97.098	97.098
$(-1, 0.5)$	49.990	99.980
$(-1, 0)$	50	100
$(-1, -0.5)$	49.990	99.980
$(-1, -3)$	97.098	97.098
$(1, 3)$	99.199	99.199
$(1, 0.5)$	92.201	92.201
$(1, -0.5)$	92.201	92.201
$(1, -3)$	99.199	99.199

el estado base y la combinación simétrica de estados coherentes son iguales, como puede verse en la Tabla 4.2.

Cuando  $J = 1$  los estados propios del Hamiltoniano no presentan degeneración, excepto sobre la línea  $c = 0$ . Sin embargo, cuando  $J$  es más grande el estado base es degenerado para otros valores de los parámetros y entonces se tienen dos estados como funciones de prueba en una región más amplia del espacio, y el traslape con el estado base cuántico nos ayuda a escoger la función de prueba adecuada. Cuando se hace la separación de la base de estados de Dicke en una combinación simétrica y otra antisimétrica, se encuentra que los dos conjuntos de funciones constituyen espacios complementarios. Entonces el traslape de la función de onda antisimétrica con la combinación simétrica de estados coherentes es cero, es decir son ortogonales. Es por esta razón, que se utilizará la función de onda simétrica para evaluar los valores esperados de las observables.

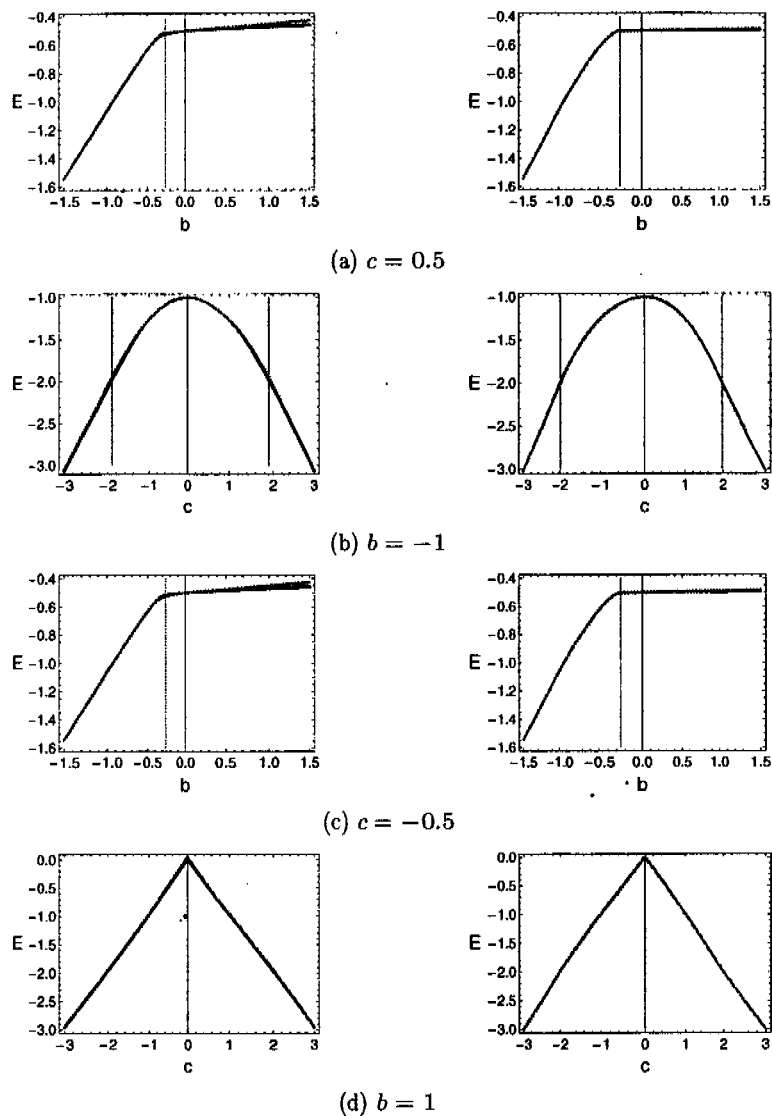
En la Tabla 4.3 se establece que sobre la separatriz el valor del traslape es constan-

**Tabla 4.3:** Traslape de la función de onda del estado base con el estado coherente y con la combinación simétrica de estados coherentes para  $J = 10$ , en puntos sobre la separatriz. Los traslapes se expresan en porcentajes.

$(b, c)$	Coherente (%)	Simétrico (%)
$(-1, \frac{19}{10})$	84.146	84.146
$(-10, 19)$	84.146	84.146
$(-1, -\frac{19}{10})$	84.146	84.146
$(-10, -19)$	84.146	84.146
$(1, 0)$	17.620	17.620
$(10, 0)$	17.620	17.620

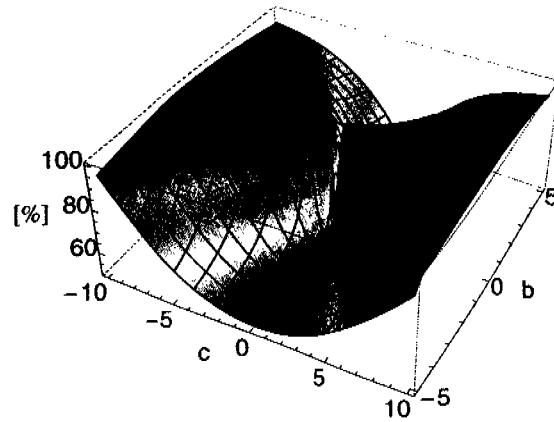
te, es decir, es independiente de los valores de los parámetros, y tiene el mismo valor tanto para la combinación simétrica como para el estado coherente. Para el estado coherente simétrico el porcentaje del traslape alcanza sus valores mínimos sobre la separatriz. Puede mostrarse que en general el estado coherente y la combinación simétrica son iguales en la separatriz, por lo tanto, sus traslapes con la solución exacta son iguales.

La Fig. 4.13 muestra el porcentaje de traslape como función de  $c$ , para valores fijos de  $b$  y tres valores de  $J$ . La línea vertical constituye la separatriz y marca claramente los cambios en el comportamiento del porcentaje de traslape. Además, es sobre la separatriz que el porcentaje del traslape es menor, es decir, en esas zonas la función de prueba simétrica se parece menos a la función de onda del estado base. Cuando el valor de  $J$  crece el porcentaje del traslape en la separatriz disminuye. En particular se indica que en la línea  $c = 0$  cuando  $b > 0$  el porcentaje de traslape incluso tiende a cero, sin embargo, en otras zonas el porcentaje del traslape aumenta.

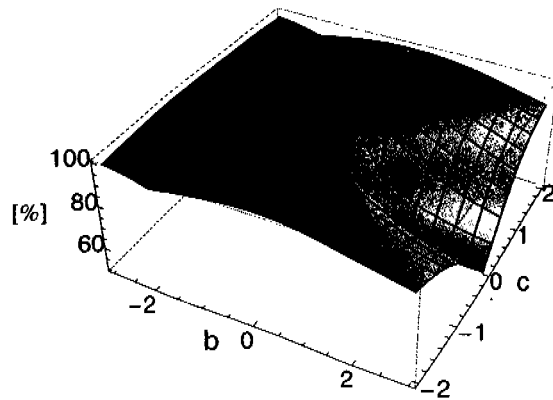


**Figura 4.9:** Cortes de las superficies de energía, clásica y cuántica a lo largo de las rectas (a)  $c = 0.5$ , (b)  $b = -1$ , (c)  $c = -0.5$  y (d)  $b = 1$  para dos valores de  $J$ . En el lado izquierdo se utilizó  $J = 10$  mientras que en el derecho  $J = 50$ . La línea oscura corresponde a la energía cuántica y la línea clara a la energía clásica. Las líneas verticales corresponden a la separtriz.





**Figura 4.10:** Porcentaje de traslape entre la función de onda del estado base y el estado coherente de prueba en el espacio de parámetros para  $J = 1$ .



**Figura 4.11:** Se muestra el porcentaje de traslape entre la función de onda del estado base y la combinación simétrica de estados coherentes en el espacio de parámetros para  $J = 1$ .

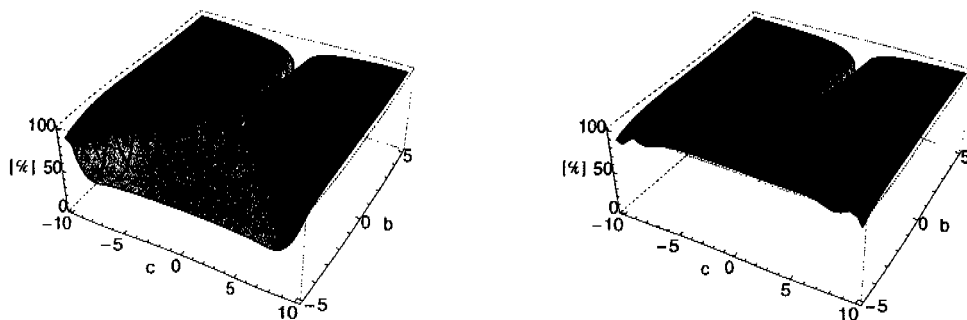
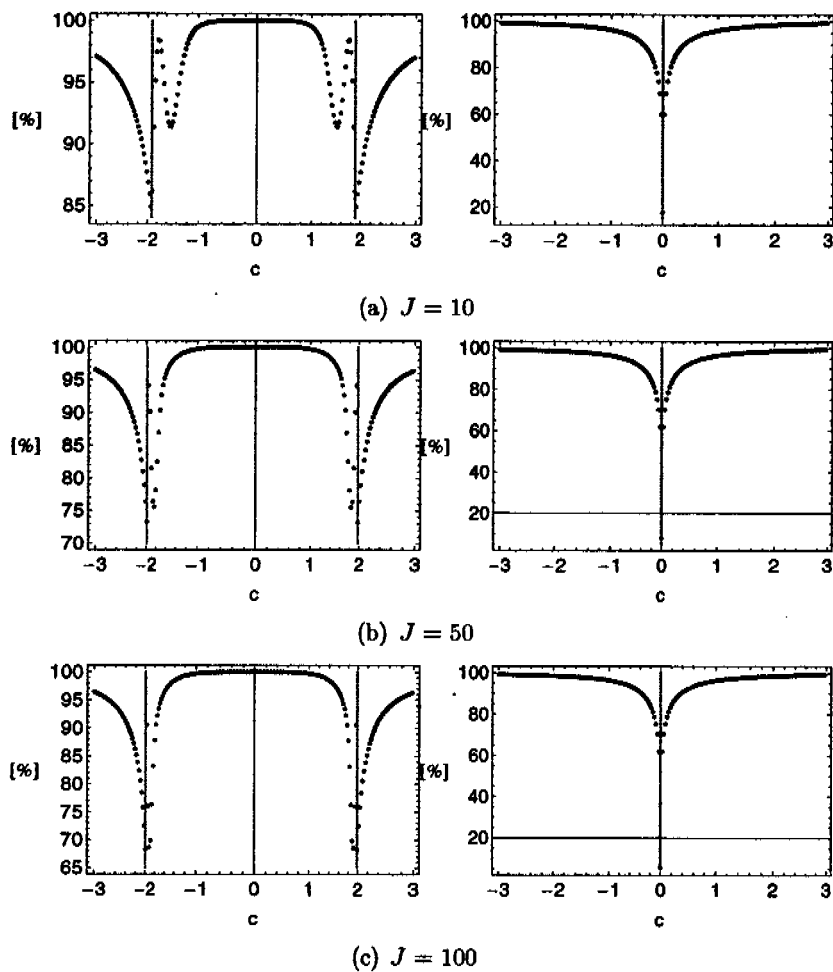


Figura 4.12: Traslape entre la función de onda del estado base y la función de prueba, del lado izquierdo el estado coherente y del lado derecho la combinación simétrica, en el espacio de parámetros para  $N = 20$  átomos.



**Figura 4.13:** Porcentaje de traslape del estado coherente simétrico con el estado base en función del parámetro  $c$ , para los casos (a)  $J = 10$ , (b)  $J = 50$  y (c)  $J = 100$ . A la izquierda se usa  $b = -1$ , a la derecha  $b = 1$ . Las líneas rectas verticales de color claro muestran la separatriz.

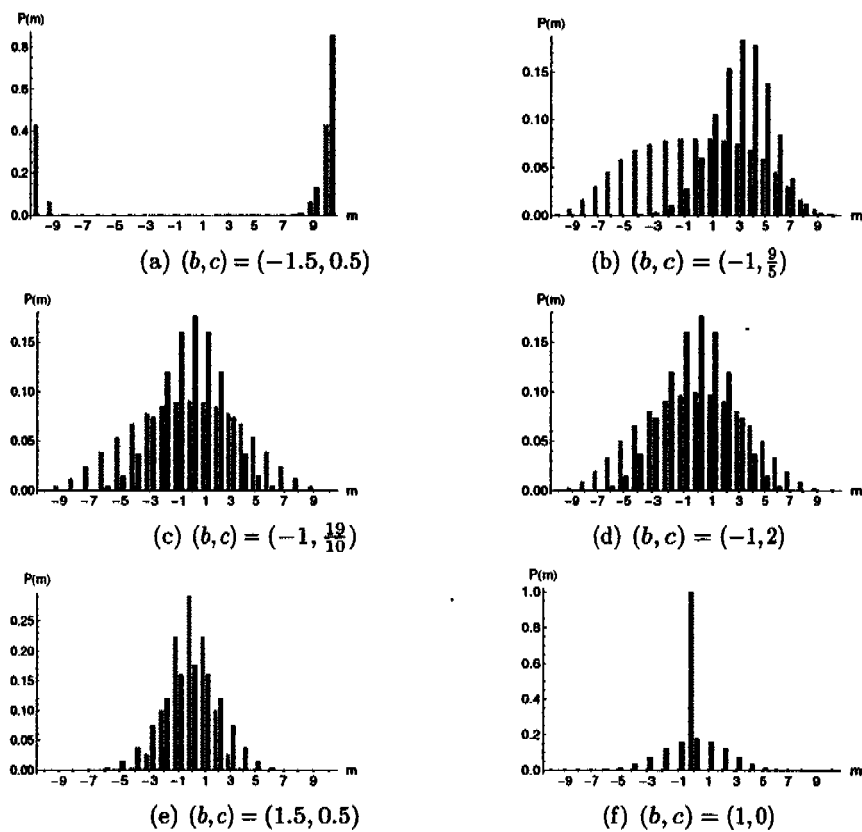
## Probabilidad de ocupación relativa

Otra forma más exigente de comparar las funciones de prueba con la solución exacta es a través del cálculo de la probabilidad de ocupación relativa cuya definición es  $P_\psi(m) = |\langle J, m | \psi \rangle|^2$ . Este número cuantifica la probabilidad de obtener un valor  $m$  al hacer una medición de la proyección de momento angular en la dirección  $z$  en un sistema descrito por la función de onda  $|\psi\rangle$ .

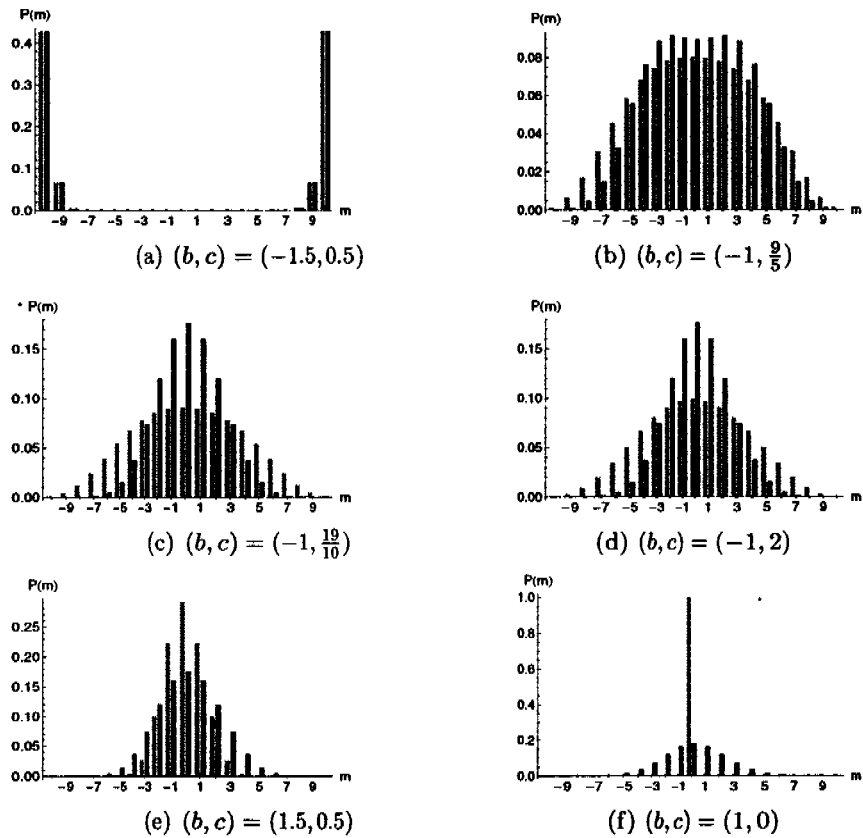
En la Fig. 4.15 se exhiben las probabilidades de ocupación relativa para la combinación simétrica de estados coherentes y la solución exacta del estado base y en la Fig. 4.14 para el estado coherente y la solución exacta del estado base. Estas figuras muestran cómo la combinación simétrica presenta una mayor correlación con el estado base que el estado coherente. Puede verse que la mayor correlación corresponde a las regiones 3 y 4 (Figs. 4.15(a) y 4.15(b)) mientras que la menor correlación corresponde a la separatriz (Figs. 4.15(c) y 4.15(f)).

En conclusión, en las regiones 1 y 2 se observa un comportamiento unimodal en la probabilidad de ocupación relativa mientras que en las zonas 3 y 4 tenemos un comportamiento bimodal, y es en la separatriz donde el estado base tiene casi todas las posibles ocupaciones del sistema de dos niveles. Este comportamiento será corroborado en el análisis que se hará de la función  $Q$ .

Se continuará con la comparación de los valores esperados de otras observables para el estado base y las funciones de prueba.



**Figura 4.14:** Probabilidad de ocupación relativa. En la figura se muestran las probabilidades de ocupación relativa de la solución exacta en color claro, y para el estado coherente en color oscuro.  $J = 10$ .



**Figura 4.15:** Probabilidad de ocupación relativa. En la figura se muestran las probabilidades de ocupación relativa de la solución exacta en color claro, y de la función de prueba simétrica en color oscuro.  $J = 10$ .

## Valores esperados de los operadores de momento angular

Como ya se ha demostrado, el estado base del Hamiltoniano es una combinación lineal de los estados simétricos, que denotamos como sigue

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{m=0}^{J+1} \alpha_m |m\rangle_+,$$

donde los parámetros  $\alpha_m$  se determinan de la diagonalización del Hamiltoniano. Entonces el valor esperado de un operador arbitrario  $\hat{O}$  está dado por

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_{\substack{m=0 \\ m'=0}}^{J+1} \alpha_{m'} \alpha_m + \langle m' | \hat{O} | m \rangle_+.$$

### Componentes del momento angular

Para las componentes del momento angular los elementos de matriz están determinados por las expresiones siguientes

$$\begin{aligned} + \langle m' | \hat{J}_x | m \rangle_+ &= \frac{C(j, m) \delta_{m', m+1} + C(j, -m) (\delta_{m', m-1} + \delta_{m', -m+1})}{2\sqrt{(1 + \delta_{m,0})(1 + \delta_{m',0})}} \\ + \langle m' | \hat{J}_y | m \rangle_+ &= 0, \\ + \langle m' | \hat{J}_z | m \rangle_+ &= 0, \end{aligned}$$

donde se define la función  $C(j, m) = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}$ , y es inmediato que los valores esperados de  $\hat{J}_y$  y  $\hat{J}_z$  son cero en esta base.

En la Tabla 3.5 están dados los valores esperados de las componentes normalizadas del momento angular con respecto al estado coherente de prueba. Encontramos que el valor de  $\hat{J}_y/J$  es siempre cero lo cual concuerda con el valor esperado cuántico. Sin embargo, para  $\hat{J}_z/J$ , en las regiones 3 y 4 del espacio de parámetros, pasa algo diferente, pues cuánticamente tienen valor cero mientras que para el estado coherente se tienen dos funciones de prueba independientes que tienen los valores  $\pm\sqrt{1-r^2}$ , dependiendo del punto crítico que se considera. En la Fig. 4.16 se grafica  $\hat{J}_z/J$  en función de los parámetros  $b$  y  $c$  para los dos estados de prueba. Se observa que en

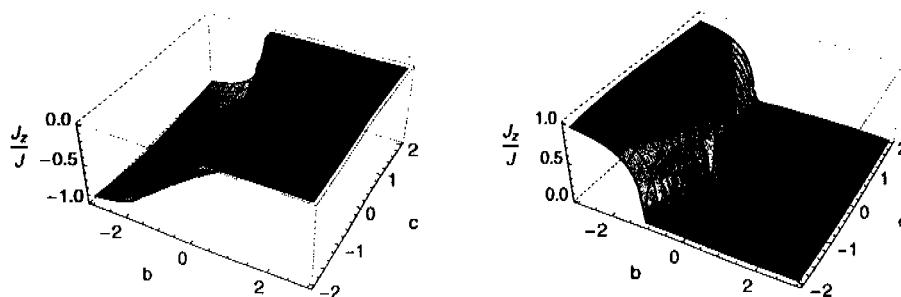


Figura 4.16: Valor esperado de  $\hat{J}_z/J$  para el estado coherente.  $J = 10$ .

ninguno de los casos el valor esperado de  $\hat{J}_z$  en el estado coherente reproduce el resultado cuántico en las zonas 3 y 4.

Ahora, si se evalúan los valores esperados para el estado simétrico, cuyas expresiones se muestran en la Tabla 3.9 del capítulo anterior, se observa que los valores de  $\hat{J}_y/J$  y  $\hat{J}_z/J$  son cero lo que concuerda con el estado cuántico.

En la Fig 4.17 se comparan los resultados del valor esperado de  $\hat{J}_x$  con respecto al estado coherente de prueba, la combinación simétrica de estados coherentes y el estado base cuántico, en función de los parámetros  $b$  y  $c$  del modelo. Se observa una correspondencia entre el resultado cuántico y la combinación simétrica de estados coherentes, mientras que el estado coherente falla en la región 4.

Para analizar con mayor detalle las diferencias entre los resultados obtenidos con las funciones de prueba y el estado cuántico, en las Figs. 4.18 y 4.19 se muestra el comportamiento del valor esperado de  $\hat{J}_x/J$ , en los cortes  $c = \pm 0.5$  en función del parámetro  $b$  y  $b = \pm 1$  en función del parámetro  $c$ , respectivamente. En todas las figuras las líneas verticales indican la separatriz.

Se observa que cuando  $b > 0$  los resultados del estado coherente y la combinación simétrica son iguales y muy parecidos al resultado cuántico; lo mismo ocurre cuando  $c < 0$ . Sin embargo, cuando  $b < 0$  y  $c > 0$  únicamente los resultados obtenidos para la combinación de estados coherentes y el estado base cuántico coinciden.



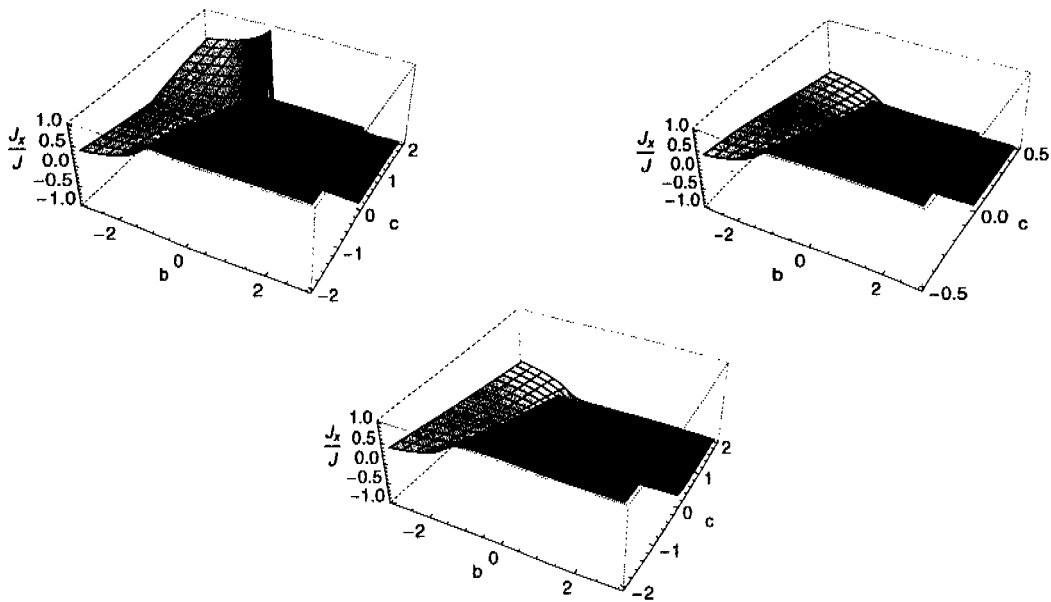


Figura 4.17: Valor esperado de  $\hat{J}_x/J$  en función de los parámetros  $b$  y  $c$  para el estado coherente, el estado simétrico y la solución exacta respectivamente.  $J = 10$ .

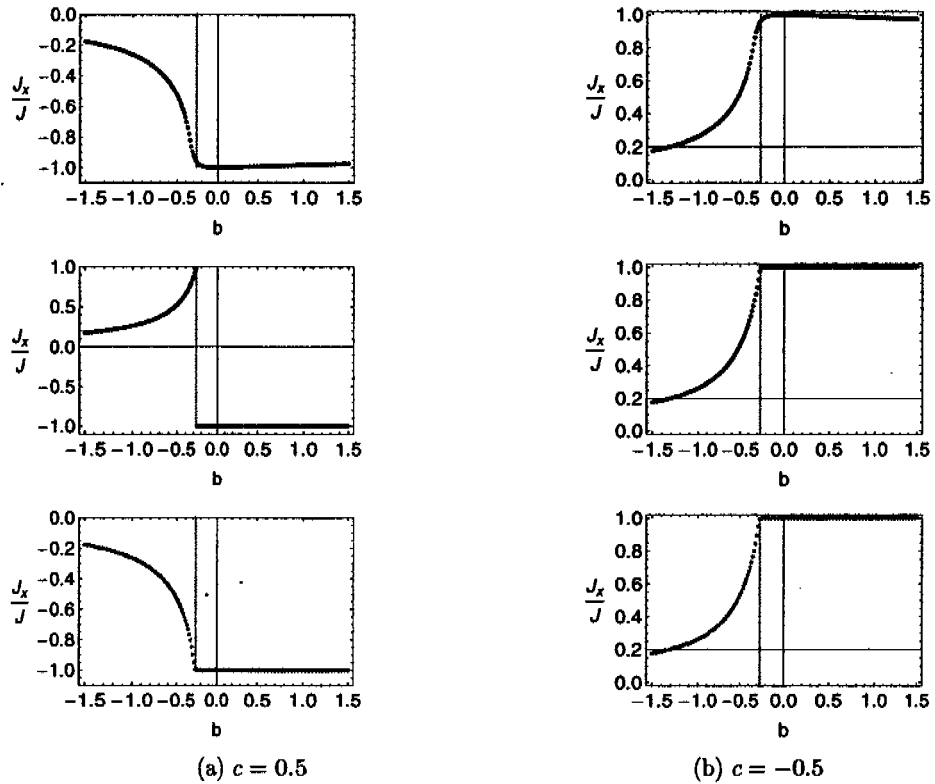
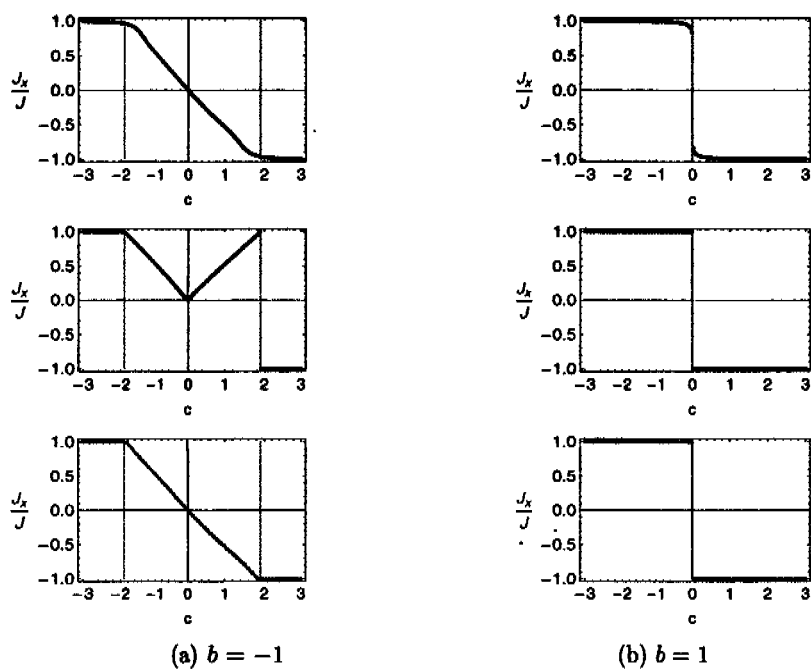


Figura 4.18: Valor esperado de  $\hat{J}_x/J$  en función del parámetro  $b$  para la solución exacta (arriba), el estado coherente (medio) y para el estado simétrico (abajo) para dos valores del parámetro  $c$ . Las líneas verticales corresponden a la separatriz para cada caso.  $N = 20$ .



**Figura 4.19:** Valor esperado de  $\hat{J}_x/J$  como función del parámetro  $c$  para la solución exacta (arriba), el estado coherente (medio) y para el estado simétrico (abajo) para dos valores del parámetro  $b$ . Las líneas verticales corresponden a la separatriz para cada caso.  $N = 20$ .

### Componentes del momento angular al cuadrado

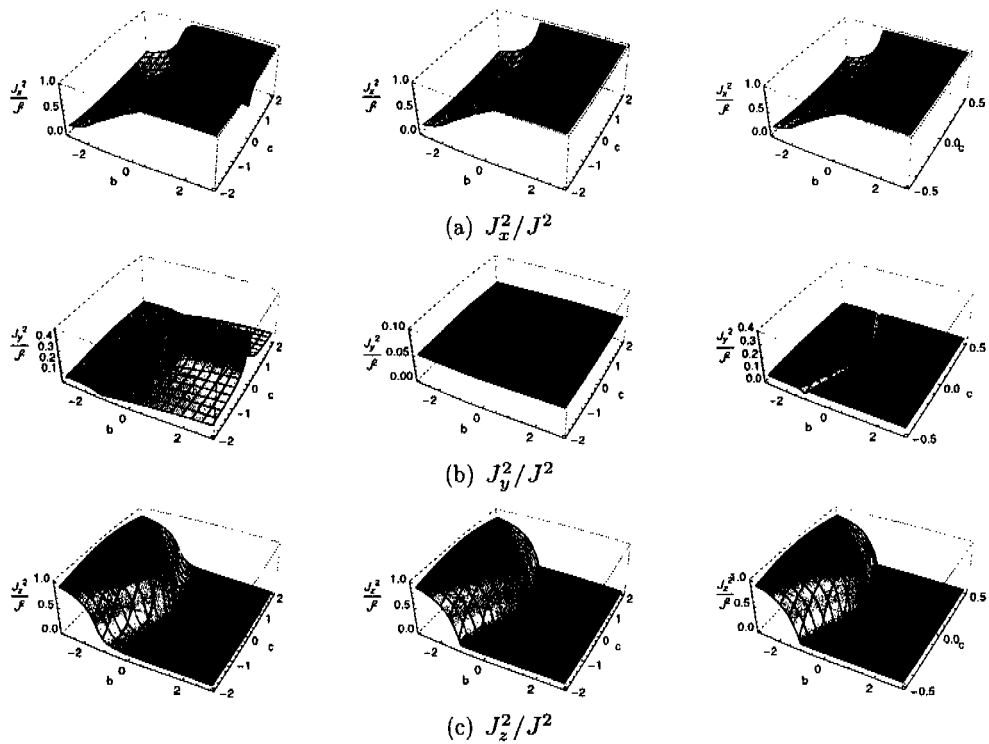
Para encontrar estos valores esperados necesitamos conocer las matrices de los operadores. Como la matriz de  $\hat{J}_x/J$  es diferente de cero, entonces para encontrar la matriz de  $\hat{J}_x^2/J^2$  sólo debe elevarse la matriz encontrada al cuadrado. Sin embargo, para encontrar las matrices de  $\hat{J}_y^2/J^2$  y  $\hat{J}_z^2/J^2$  deben calcularse los elementos de matriz en la base simétrica, estas expresiones están dadas por

$$\begin{aligned}
 + \langle m' | \hat{J}_y^2 | m \rangle_+ &= \frac{1}{4\sqrt{(1+\delta_{m,0})(1+\delta_{m',0})}} \\
 &\quad \{ (C(j,m)C(j,-m-1) + C(j,-m)C(j,m-1)) (\delta_{m',m} + \delta_{m',-m}) \\
 &\quad - C(j,m)C(j,m+1)\delta_{m',m+2} \\
 &\quad - C(j,-m)C(j,-m+1)(\delta_{m',m-2} + \delta_{m',-m+2}) \}, \\
 + \langle m' | \hat{J}_z^2 | m \rangle_+ &= \frac{m^2}{\sqrt{(1+\delta_{m',0})(1+\delta_{m,0})}} \{ \delta_{m',m} + \delta_{m',-m} \}.
 \end{aligned}$$

En la Fig. 4.20 se grafica el valor esperado del cuadrado de las componentes del momento angular para el estado base, el estado coherente y el estado coherente simétrico en función de los parámetros  $b$  y  $c$ .

Puede observarse que  $J_x^2/J^2$  y  $J_z^2/J^2$  tienen el mismo comportamiento para el estado coherente y el estado coherente simétrico, en las regiones 1 y 2 de hecho son idénticos, esto se debe a que el estado coherente simétrico en esas regiones se reduce al estado coherente, por el contrario, en la región 3 ambos estados son diferentes, sin embargo, al observar la forma de las expresiones para estos valores esperados en la Tabla 3.6 y las ecuaciones (3.2.14), observamos que estas últimas presentan el mismo comportamiento que las del estado coherente debido a que  $|r_a|^{2J}$  es muy pequeño y por ello el término que domina es el primero, que corresponde exactamente con el valor esperado para el estado coherente.

Las figuras muestran que los valores de  $J_x^2/J^2$  y  $J_z^2/J^2$  tanto del estado coherente como del estado coherente simétrico reproducen bien los resultados cuánticos, sin embargo, para  $J_y^2/J^2$  si existe una diferencia entre ambos estados. Aunque ninguno de los dos estados reproduce el comportamiento en la recta  $c = 0$  para  $b > 0$ , en la región  $b < 0$  el estado coherente simétrico sí muestra el mismo comportamiento que el estado cuántico sobre las separatrices, es decir, registra las transiciones de fase, mientras que el estado coherente no lo hace.



**Figura 4.20:** Valor esperado del cuadrado de las componentes de momento angular como funciones de  $b$  y  $c$ , para la solución exacta (izquierda), el estado coherente (medio) y el estado coherente simétrico (derecha).  $J = 10$ .

A continuación, se presenta una serie de figuras que muestran las componentes del momento angular al cuadrado como funciones del parámetro  $c$ . Como se observa en las Figs. 4.21 y 4.22, ambas funciones de prueba reproducen bien el comportamiento cuántico de las observables  $\hat{J}_x^2/J^2$  y  $\hat{J}_z^2/J^2$ . La Fig. 4.23 muestra la superficie del valor esperado de  $\hat{J}_y^2/J^2$  para el estado base cuántico y para la combinación simétrica de estados coherentes, la figura para el estado coherente corresponde a un plano de valor constante  $1/2J$ .

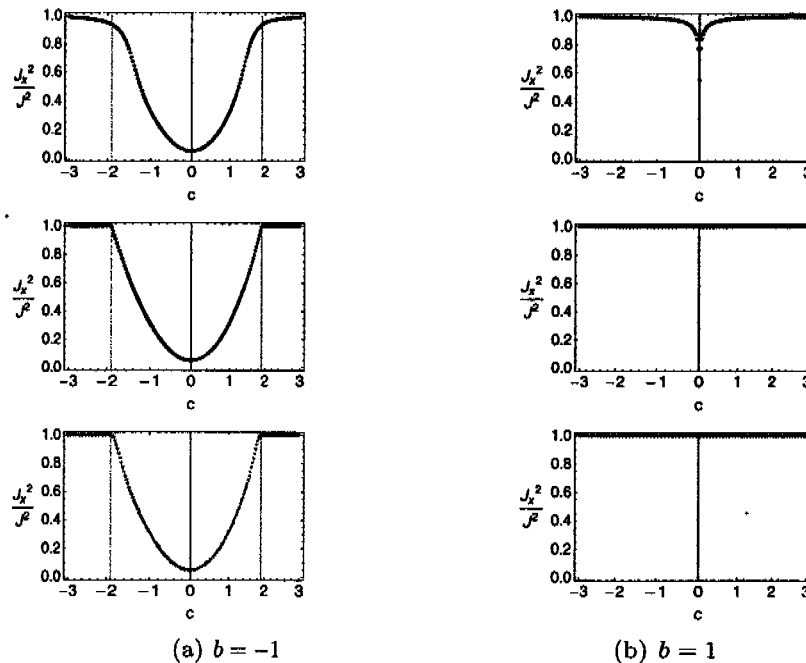
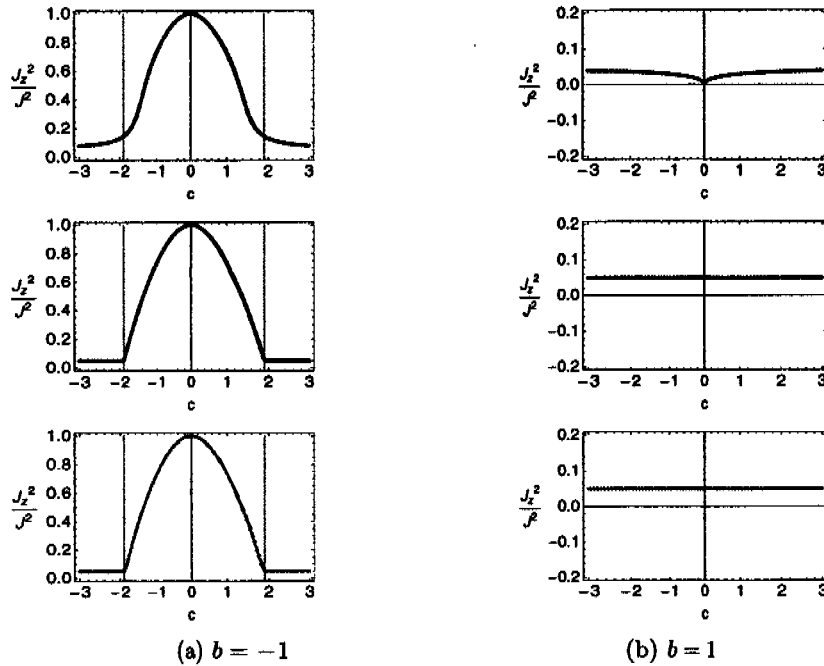


Figura 4.21: Valor esperado de  $\hat{J}_x^2/J^2$  como función del parámetro  $c$  para la solución exacta (arriba), el estado coherente (medio) y para el estado simétrico (abajo) para dos valores del parámetro  $b$ . Las líneas verticales corresponden a la separatriz para cada caso.  $J = 10$ .

En estos cortes se corrobora lo que ya se había observado en las figuras en 3D para  $J_x^2/J^2$  y  $J_z^2/J^2$ , ambas funciones de prueba presentan el mismo comportamiento y reproducen bien el comportamiento cuántico. Las mayores diferencias ocurren en las zonas cercanas a la separatriz, pues mientras para las funciones de prueba la transición entre ambas regiones es abrupto para el estado cuántico es más suave. Es importante notar que estos resultados coinciden con los obtenidos para el traslape

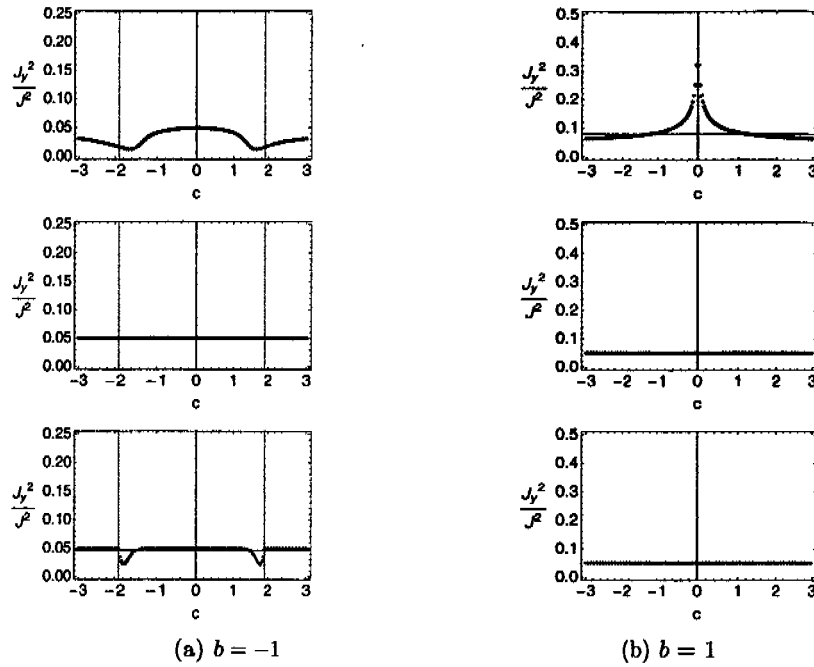


**Figura 4.22:** Valor esperado de  $\hat{J}_z^2/J^2$  como función del parámetro  $c$  para la solución exacta (arriba), el estado coherente (medio) y para el estado simétrico (abajo) para dos valores del parámetro  $b$ . Las líneas verticales corresponden a la separatriz para cada caso.  $J = 10$ .

entre el estado coherente simétrico y el estado base. Sin embargo, no puede decirse lo mismo para el estado coherente, este es un caso en el que a pesar de que las funciones de prueba no son tan parecidas pueden reproducir bien el valor esperado de ciertas observables.

En la Fig. 4.23 se muestran los cortes correspondientes a  $J_y^2/J^2$ . Estas figuras muestran que es la combinación simétrica la que mejor reproduce los resultados cuánticos, pues en la región  $b < 0$  marca las transiciones de fase, lo que no sucede con el estado coherente.

En todas las figuras puede verse que los puntos donde más fallan las funciones de prueba corresponden a la línea  $c = 0$  con  $b > 0$  lo cual coincide con los resultados obtenidos para el traslape de las funciones, es justo sobre esa línea que el valor del traslape es el mínimo en todo el espacio de parámetros.



**Figura 4.23:** Valor esperado de  $\hat{J}_y^2/J^2$  como función del parámetro  $c$  para la solución exacta (arriba), el estado coherente (medio) y para el estado simétrico (abajo) para dos valores del parámetro  $b$ . Las líneas verticales corresponden a la separatriz para cada caso.  $J = 10$ .

## Parámetros de compresión

Las siguientes observables a estudiar serán las fluctuaciones de los operadores de momento angular que se analizarán a través de los parámetros de compresión [33].

La compresión redistribuye las fluctuaciones cuánticas entre dos observables no conmutativas preservando que el producto de incertidumbre de las dispersiones sea mínimo.

Un sistema con momento angular  $\vec{J} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$  cumple con las relaciones de conmutación  $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\epsilon_{i,j,k}\hat{J}_k$ , y sus componentes tiene asociada la relación de incertidumbre  $(\Delta\hat{J}_1)^2 (\Delta\hat{J}_2)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle \hat{J}_3 \rangle|^2$ , cíclicamente, donde  $(\Delta J_k)^2 = \langle J_k^2 \rangle - \langle J_k \rangle^2$ .

Consideremos un sistema de espín  $\frac{1}{2}$ , un estado coherente de espín  $|\theta, \phi\rangle$  se de-



fine como un eigenestado de la componente del momento angular en la dirección  $\hat{n} = (-\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$ , con eigenvalor  $J$ , donde  $\theta$  y  $\phi$  denotan los ángulos polar y azimutal respectivamente. Estos estados minimizan la relación de incertidumbre con fluctuaciones igualmente distribuidas entre cualesquiera dos componentes ortogonales normales a la dirección  $(\theta, \phi)$ . Un estado coherente de espín tiene una distribución de cuasiprobabilidad (función de Husimi) isotrópica en un espacio fase esférico.

Un sistema de momento angular  $J$  puede verse como una colección de  $2J$  partículas de espín  $\frac{1}{2}$ . Un estado coherente de este sistema es equivalente a un conjunto de  $2J$  espines elementales, todos apuntando en la misma dirección promedio  $(\theta, \phi)$ . La varianza de las componentes normales a la dirección promedio es simplemente la suma de las varianzas de cada espín individual y si no existen correlaciones entre las partículas o están distribuidas aleatoriamente se tiene una función de Husimi isotrópica. Si, por el contrario, existen correlaciones cuánticas entre los espines que forman el sistema, es posible cancelar parcialmente las fluctuaciones en una dirección a expensas de incrementarlas en la dirección normal. Es éste el concepto básico de compresión de espín [33, 34]. Un estado con compresión de espín tiene una función de Husimi elíptica a diferencia de un estado coherente de espín cuya función es, como ya se ha mencionado, isotrópica.

En conclusión, un estado de espín tiene compresión sólo si una de las componentes normales al valor esperado del momento angular tiene una varianza menor que  $J/2$ . Esto puede expresarse de la siguiente manera: un estado está comprimido si el parámetro de compresión  $\xi_i$  es menor que uno, con  $\xi_i$  definido por la relación [33, 34]

$$\xi_i = \sqrt{\frac{2}{J} (\Delta \hat{J}_i)^2},$$

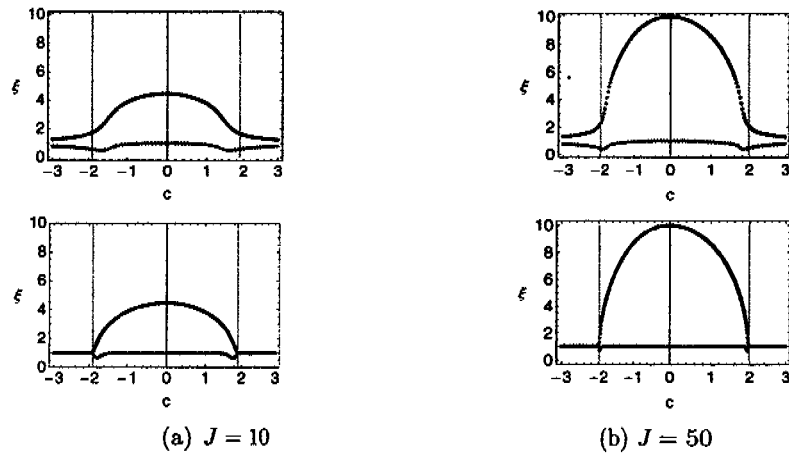
donde el subíndice  $i$  indica una dirección normal a la dirección promedio del vector de espín. Como hasta el momento se ha trabajado con parámetros intensivos, conviene definir el parámetro de compresión como

$$\xi_i = \sqrt{2J \langle \delta J_i \rangle^2}. \quad (4.1.2)$$

Para el sistema que se estudia, el valor esperado del operador  $\hat{J}_y/J$  es cero en todo el espacio para las tres funciones de onda. El valor esperado de  $\hat{J}_z/J$  para el estado base y la combinación simétrica de estados coherentes también es cero en todo el espacio, esto quiere decir que, para estos dos casos, el momento angular promedio está en la dirección  $X$  y las direcciones ortogonales son  $Y$  y  $Z$ . El caso del estado

coherente es diferente pues en las regiones 3 y 4 el valor esperado de  $\hat{J}_z/J$  es diferente de cero, por lo que la dirección  $Z$  ya no es ortogonal al momento angular. Este hecho muestra nuevamente que la combinación de estados coherentes es la que se acerca más al estado exacto.

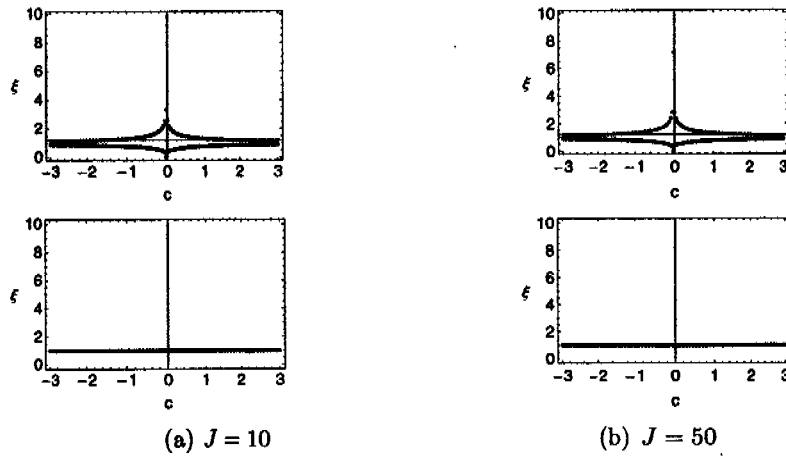
Aquí se mostrarán los parámetros de compresión para el estado base y el estado coherente simétrico en las direcciones  $Y$  y  $Z$ , que son las direcciones ortogonales al momento angular para el estado base. Se omitirán los resultados correspondientes al estado coherente debido a que, según la definición, para el estado coherente el parámetro de compresión tiene un valor constante igual a uno en las direcciones perpendiculares para todo el espacio de parámetros. Los resultados se muestran en las Figs. 4.24-4.26.



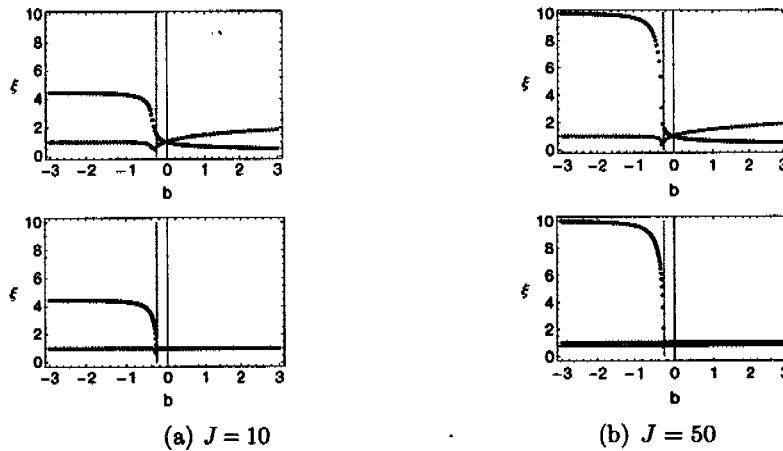
**Figura 4.24:** Parámetro de compresión para el estado base (arriba) y la combinación simétrica de estados coherentes (abajo) para  $b = -1$ . En color claro se muestra  $\xi_y$  y en color oscuro  $\xi_z$ , mientras que las líneas verticales claras corresponden a la separatriz.

Puede observarse que la forma de las funciones es básicamente la misma que para el valor esperado del operador  $\hat{J}_i^2/J^2$ , esto es lógico debido a la definición de las fluctuaciones  $\langle \Delta J_i \rangle = \sqrt{\langle J_i^2 \rangle - \langle J_i \rangle^2}$ , pues para la mayoría de los casos  $\langle \hat{J}_i \rangle = 0$ .

En las figuras puede observarse que la compresión ocurre en la dirección  $Z$  y la mayor compresión se encuentra en las regiones 3 y 4, mientras que en las regiones 1 y 2 la compresión es mínima, es decir, el estado base cuántico se asemeja mucho a un estado coherente. Esto es algo esperado pues en esas regiones la función de prueba corresponde a un estado coherente y su traslape con el estado cuántico es cercano a



**Figura 4.25:** Parámetro de compresión para el estado base (arriba) y la combinación simétrica de estados coherentes (abajo) para  $b = 1$ . En color claro se muestra  $\xi_y$  y en color oscuro  $\xi_z$ . La separatriz corresponde a  $c = 0$ .



**Figura 4.26:** Parámetro de compresión para el estado base (arriba) y la combinación simétrica de estados coherentes (abajo) para  $c = 0.5$ . En color claro se muestra  $\xi_y$  y en color oscuro  $\xi_z$ , mientras que las líneas verticales claras corresponden a la separatriz.

la unidad. Por el contrario, en las regiones 3 y 4 la compresión en la dirección  $Z$  es muy grande para el estado base por lo que el parecido con un estado coherente es mínimo, sin embargo, la combinación de estados coherentes muestra cualitativamente

la misma compresión. Puede observarse también que es justo en la zona cercana a la separatriz donde la aproximación es menor y más aún sobre la línea  $c = 0$  con  $b > 0$ .

Para las tres figuras mencionadas arriba, el lado izquierdo corresponde a un valor de  $J = 10$  mientras que en el lado derecho a  $J = 50$ . Se observa en ellas que ocurre una compresión mayor en alguna de las direcciones ortogonales al valor promedio del momento angular en la separatriz del Hamiltoniano modelo, como debe ser para cumplir las relaciones de Heisenberg. En las regiones 3 y 4 la compresión aumenta con  $J$  mientras que en las regiones 1 y 2 sucede lo contrario, la compresión se acerca cada vez más a uno, es decir, el valor correspondiente al estado coherente. Entonces estos parámetros ratifican que mientras en las regiones 1 y 2 la función del estado base se acerca más a un estado coherente, en las regiones 3 y 4 se aleja.

## Función $Q$

Como ya se ha mencionado, para encontrar la función  $Q$  de un sistema necesitamos conocer primero su matriz de densidad  $\rho$ , y sabemos que la función de onda del estado base es una combinación lineal de los estados simétricos  $|m\rangle_+$ , es decir,  $|g\rangle = \sum_{m=0}^J C_m |m\rangle_+$ . Entonces su matriz de densidad está dada por la expresión siguiente

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= |g\rangle\langle g|, \\ &= \sum_{m,m'} C_m C_{m'}^* (|m\rangle_+ \langle m'|).\end{aligned}$$

Para utilizar la definición de la función  $Q$ , es necesario encontrar el valor esperado del operador de densidad para un estado coherente

$$\langle \xi | \hat{\rho} | \xi \rangle = \sum_{m,m'} C_m C_{m'}^* (\langle \xi | m \rangle_+ \langle m' | \xi \rangle).$$

Debido a que

$$\langle \xi | m \rangle_+ = \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^J} (\xi^*)^{J+m} \binom{2J}{J+m}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1 + \delta_{m,0}}{2}},$$

obtenemos la forma de la función  $Q$  para el estado base cuántico

$$Q_{|g\rangle}(\xi) = \frac{2J+1}{4\pi} \sum_{m,m'} \frac{\sqrt{(1+\delta_{m,0})(1+\delta_{m',0})}}{2} \frac{C_m C_{m'}^*}{(1+|\xi|^2)^{2J}} \\ \times \binom{2J}{J+m}^{\frac{1}{2}} \binom{2J}{J+m'}^{\frac{1}{2}} (\xi^*)^{J+m} (\xi)^{J+m'}. \quad (4.1.3)$$

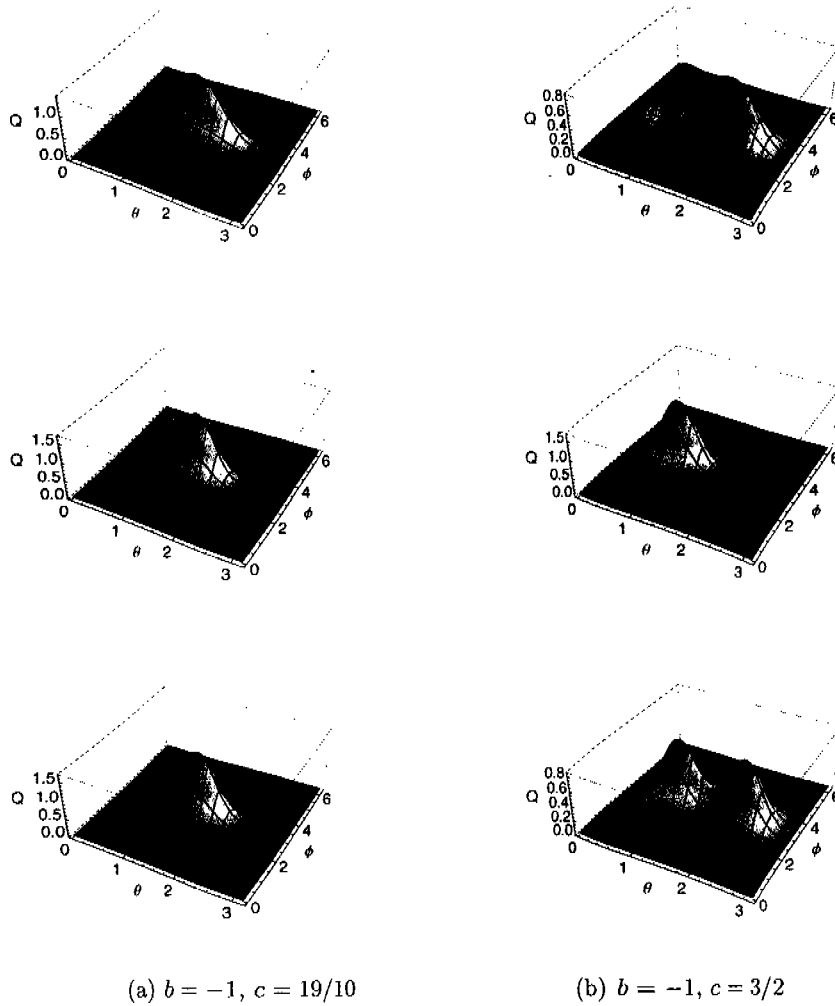
donde los coeficientes  $C_m$  se obtienen de la diagonalización del Hamiltoniano.

Utilizando las ecuaciones (4.1.3), (3.2.10) y (3.2.15) se grafica la función  $Q$  para el estado base cuántico, el estado coherente y la combinación simétrica de estados coherentes. En las Figs. 4.27-4.30 se muestran estas gráficas.

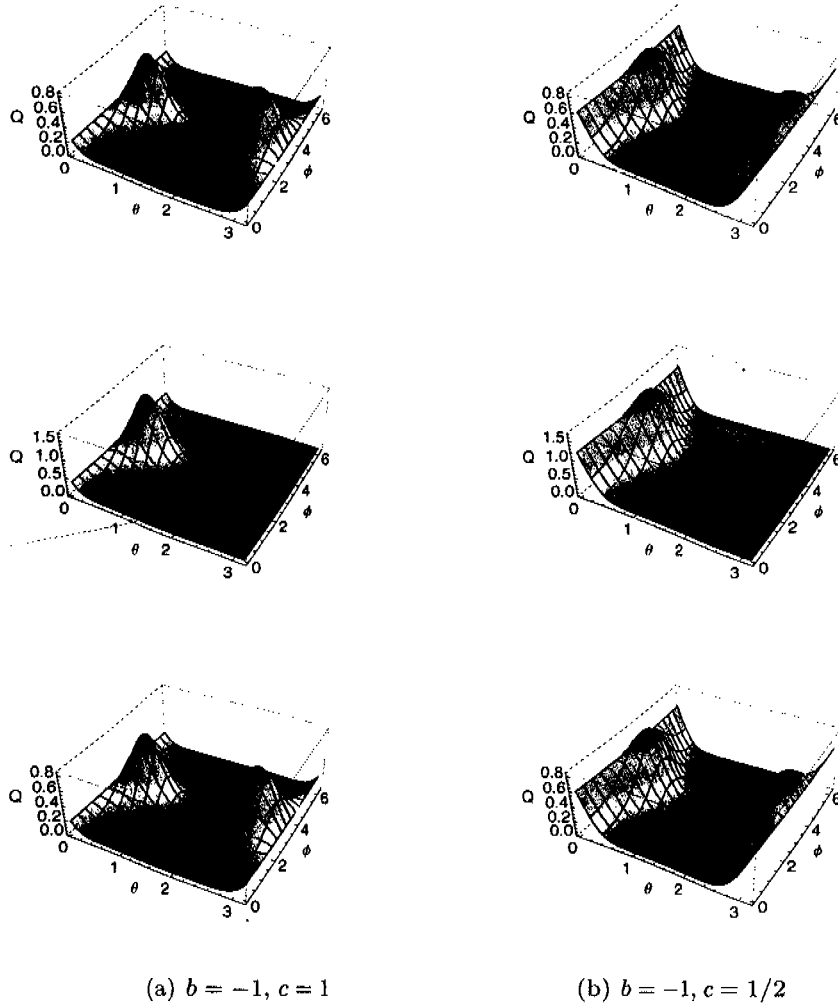
En estas figuras puede observarse cómo nuevamente, la combinación simétrica de estados coherentes reproduce mejor el comportamiento cuántico en las regiones 3 y 4, pues en las regiones 1 y 2 ambos estados coinciden.

En las regiones 1 y 2 la función  $Q$  del estado base presenta un comportamiento unimodal, como puede observarse en las Figs. 4.27(a), 4.29(b), 4.30(a)-4.30(b), y este comportamiento permanece hasta la separatriz. Una vez que se cruza la separatriz hacia las regiones 3 y 4 el comportamiento va cambiando lentamente de unimodal a bimodal, Figs. 4.27(b)-4.29(a). Este comportamiento ya se había observado en la probabilidad de ocupación relativa.

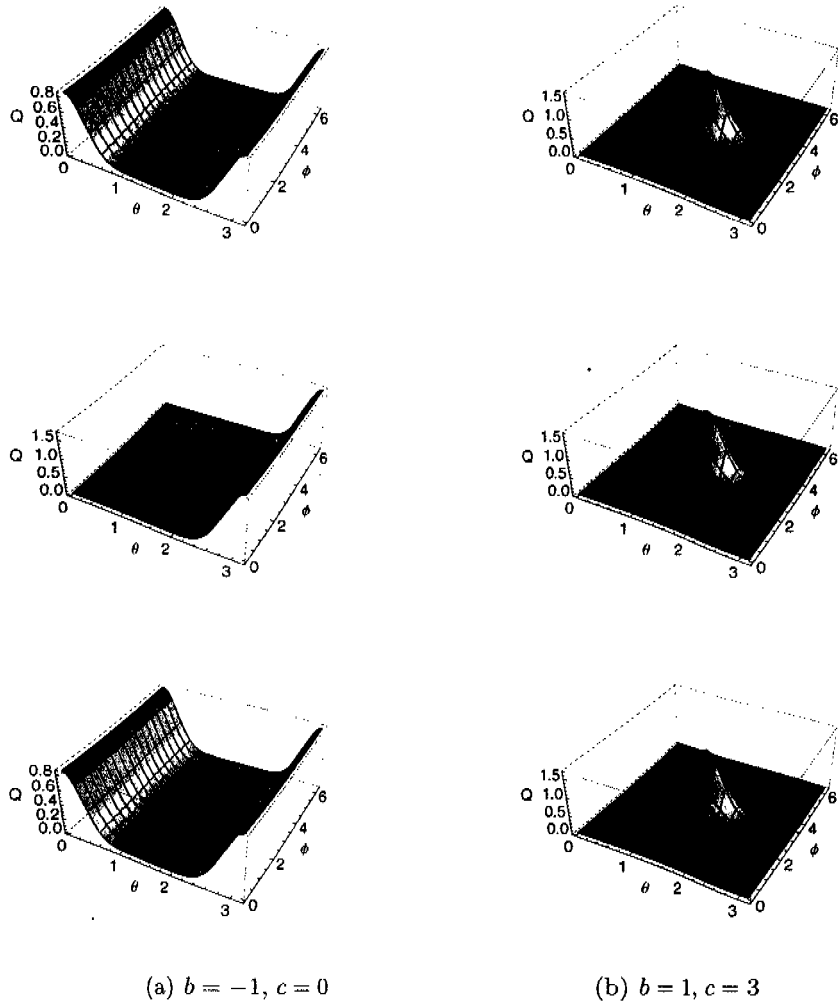
Finalmente, estas gráficas muestran cómo en las zonas en las que el traslape es menor la coincidencia entre las correspondientes funciones  $Q$  es también menor, y esto ocurre justamente en las regiones cercanas a la separatriz.



**Figura 4.27:** Función  $Q$  para el estado base (arriba), el estado coherente (medio) y la combinación simétrica de estados coherentes (abajo), para diferentes valores de los parámetros  $b$  y  $c$ .  $J = 10$ .

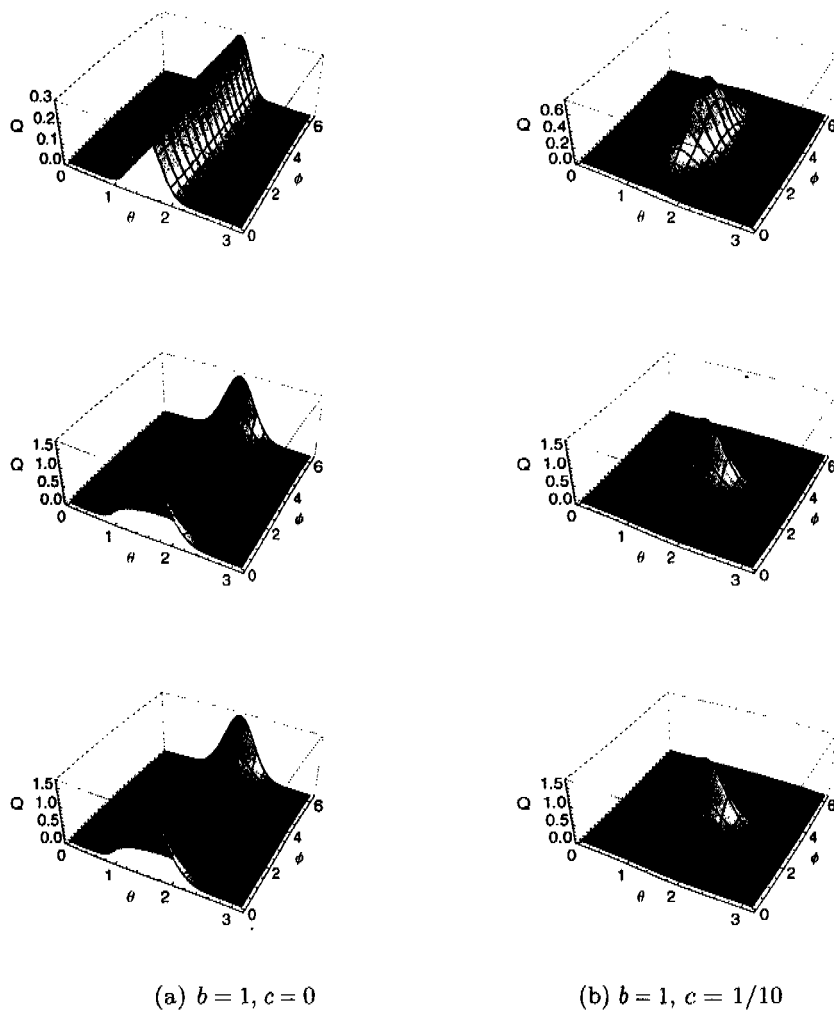


**Figura 4.28:** Función  $Q$  para el estado base (arriba), el estado coherente (medio) y la combinación simétrica de estados coherentes (abajo), para diferentes valores de los parámetros  $b$  y  $c$ .  $J = 10$ .



**Figura 4.29:** Función  $Q$  para el estado base (arriba), el estado coherente (medio) y la combinación simétrica de estados coherentes (abajo), para diferentes valores de los parámetros  $b$  y  $c$ .  $J = 10$ .





**Figura 4.30:** Función  $Q$  para el estado base (arriba), el estado coherente (medio) y la combinación simétrica de estados coherentes (abajo), para diferentes valores de los parámetros  $b$  y  $c$ .  $J = 10$ .

Ahora se encontrará el segundo momento para una combinación lineal arbitraria de estados de Dicke

$$|\Psi\rangle = \sum_{M=-J}^J C_M |J, M\rangle.$$

El traslape de este estado con un estado coherente  $|\xi\rangle$  tiene la forma

$$\langle\Psi|\xi\rangle = \sum_{M=-J}^J C_M D_{M,-J}^J(-\phi, -\theta, \phi).$$

Elevando esta cantidad al cuadrado y utilizando la serie de Clebsch-Gordan se obtiene

$$\begin{aligned} \langle\Psi|\xi\rangle^2 &= \sum_{M,M'=-J}^J C_M^* C_{M'} D_{M,-J}^J(-\phi, -\theta, \phi) D_{M',-J}^J(-\phi, -\theta, \phi), \\ &= \sum_{M,M'=-J}^J C_M^* C_{M'} D_{M+M',-2J}^{2J}(-\phi, -\theta, \phi) \langle J, M; J, M' | 2J, M+M' \rangle. \end{aligned}$$

Si multiplicamos esta cantidad por su conjugado e integramos sobre todo el espacio utilizando la propiedad  $\int d\Omega D_{m,-j}^j D_{m',-j}^j = 4\pi \delta_{m,m'} / (4j+1)$ , se encuentra

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\phi |\langle\Psi|\xi\rangle|^4 = \frac{4\pi}{4J+1} \sum_{M,N,\mu} C_M^* C_{\mu-M}^* C_N C_{\mu-N} \langle J, M; J, \mu-M | 2J, \mu \rangle \langle J, N; J, \mu-N | 2J, \mu \rangle.$$

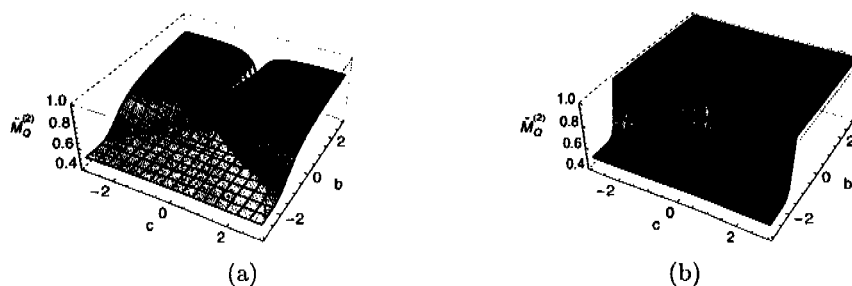
Sustituyendo este resultado en la expresión para el segundo momento se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \tilde{M}_Q^{(2)} &= \sum_{M,N,\mu} C_M^* C_{\mu-M}^* C_N C_{\mu-N} \\ &\quad \times \langle J, M; J, \mu-M | 2J, \mu \rangle \langle J, N; J, \mu-N | 2J, \mu \rangle. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Para el estado base cuántico los coeficientes  $C_m$  se obtienen de la diagonalización. En el caso  $a=0$  el estado base es una combinación lineal de los estados simétricos,  $|M\rangle_+$  por lo que la forma del segundo momento se escribe como

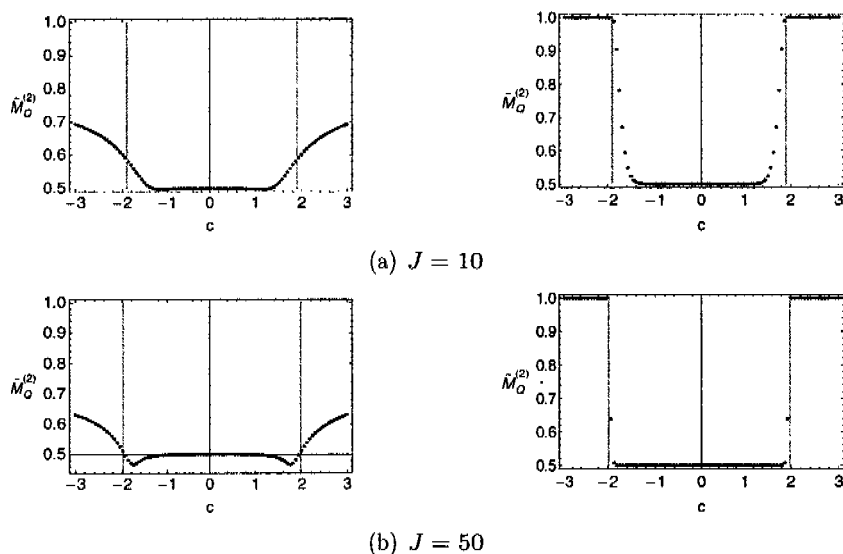
$$\tilde{M}_Q^{(2)} = \sum_{M,N,\mu} C_M^* C_{\mu-M}^* C_N C_{\mu-N} \frac{\langle J, M; J, \mu-M | 2J, \mu \rangle \langle J, N; J, \mu-N | 2J, \mu \rangle}{4\sqrt{(1+\delta_{M,0})(1+\delta_{\mu-M,0})(1+\delta_{N,0})(1+\delta_{\mu-N,0})}},$$

donde  $C_M = C_{-M}$ .



**Figura 4.31:** Segundo momento de la función  $Q$  para el estado base cuántico (izquierda) y el estado coherente simétrico (derecha) como función de los parámetros  $b$  y  $c$  para  $J = 10$ .

En la Fig. 4.31 se muestra el segundo momento de la función de Husimi como función de los parámetros  $b$  y  $c$ . Aparentemente ambas funciones son muy diferentes. Sin embargo, esto se debe únicamente a que del lado izquierdo, sobre la línea  $c = 0$  con  $b > 0$  el segundo momento para el estado base cuántico es muy pequeño y es por ello que la escala se modifica; sin embargo, cuando veamos los cortes correspondientes observaremos que en las regiones 3 y 4 la correspondencia es otra vez muy buena.

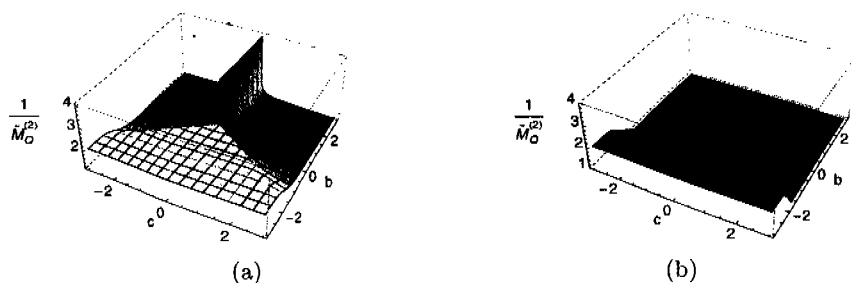


**Figura 4.32:** Segundo momento de la función  $Q$  para el estado base cuántico (izquierda) y el estado coherente simétrico (derecha) como función del parámetro  $c$  con  $b = -1$  para dos valores de  $J$ .

En la Fig. 4.32 se muestra el segundo momento como función del parámetro  $c$  en las regiones 3 y 4 con un valor de  $b = -1$ . La Fig. 4.32(a) corresponde a 20 partículas, mientras que la Fig. 4.32(b) corresponde a 100 partículas, se muestran las gráficas para el estado base cuántico a la izquierda y el estado coherente simétrico a la derecha. Se observa que en las regiones 3 y 4 ambas gráficas coinciden excepto en puntos cercanos a la separatriz y su valor en estas regiones corresponde a la mitad del valor para el estado coherente. En las regiones 1 y 2 la correspondencia no es exacta pero es también muy buena, la diferencia entre ambas es de apenas el 30 % y las zonas en las que difieren más son las líneas correspondientes a la separatriz, particularmente la línea  $c = 0$  con  $b > 0$  que es donde el traslape es menor.

Por último, la Fig. 4.32(b) muestra que cuando el número de partículas crece la transición entre las regiones se acerca más a la separatriz.

Como ya se ha mencionado anteriormente, el inverso del segundo momento indica el volumen ocupado por la función  $Q$  en el espacio de parámetros, esto quiere decir, que cuando  $J \rightarrow \infty$  el volumen ocupado por la función de Husimi del estado base cuántico tiende al doble del ocupado por un estado coherente. En la Fig 4.33 se muestra el inverso del segundo momento como función de ambos parámetros.



**Figura 4.33:** Inverso del segundo momento de la función  $Q$  para el estado base cuántico (izquierda) y el estado coherente simétrico (derecha) como función de los parámetros  $b$  y  $c$  con  $J = 10$ .

## Enredamiento

### Definición

Fue en 1935 cuando Einstein, Podolski, Rosen (EPR) y Schrödinger reconocieron por primera vez una extraña característica de la mecánica cuántica conocida con el nombre de enredamiento [35]. Éste implica la existencia de estados globales de sistemas compuestos que no pueden ser escritos como producto de estados de subsistemas individuales, y, por tanto, no se puede describir el estado de una parte del sistema sin conocer el estado total.

El enredamiento ha sido un tema muy importante en el estudio sobre los fundamentos de la mecánica cuántica, siendo asociado particularmente con no separabilidad y la violación de las desigualdades de Bell [36, 37]. Sin embargo, en años recientes ha empezado a ser visto también como un recurso potencial para el procesamiento de información. Por ejemplo, un par enredado puede ser utilizado para *teleportar* o transmitir información [38], las capacidades de una computadora cuántica residen fundamentalmente en el enredamiento. Es por esta razón que se ha convertido en una cuestión crucial poder medir el enredamiento de diferentes sistemas de la misma manera que cuantificamos otros recursos como la energía o la información [40].

El sistema enredado más sencillo es un par de qubits en un estado puro pero no factorizable. Un par de partículas de espín  $1/2$  en el estado de singulete  $1/\sqrt{2}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$  es quizás el ejemplo más familiar, sin embargo, pueden considerarse estados más generales tales como  $\alpha|\uparrow\downarrow\rangle + \beta|\downarrow\uparrow\rangle$ , que están menos enredados en general.

Se ha mostrado que para cualquier sistema bipartita en un estado puro, el enredamiento puede medirse usando la entropía de enredamiento, que se define como la entropía de Von Neumann de la matriz reducida del sistema, es decir [39, 40]

$$S_E = S_E(\rho_A) = S_E(\rho_B) = -Tr(\rho_{A(B)} \log \rho_{A(B)}), \quad (4.1.5)$$

donde  $\rho_{A(B)} = Tr_{B(A)}\rho$  es la matriz densidad reducida del sistema,  $A$  y  $B$  son las etiquetas correspondientes a cada una de las partes del sistema. La matriz reducida de un sistema bipartita se calcula tomando la traza sobre una de las dos partes del sistema, esto se conoce como traza parcial.

Se ha mostrado que si se consideran  $n$  pares, cada uno de ellos en el estado  $|\Psi\rangle$ , y entonces cada uno de los pares es separado espacialmente, es decir, conservamos un miembro de cada par y el resto es llevado lejos, si  $|\Psi\rangle$  tiene  $S_E$  ebits (cantidad de enredamiento de un sistema en un estado de Bell), los  $n$  pares pueden ser reversible-

mente convertidos por operaciones puramente locales y comunicación clásica en  $m$  pares de qubits en el estado de singulete, donde  $m/n$  tiende a  $S_E$  cuando  $n$  es grande y la fidelidad de la conversión tiende a 100%. Esto caracteriza  $S_E$  de manera única [40].

Una vez que se tiene una manera de medir el enredamiento de un sistema surge el problema de cómo utilizarla para medir el enredamiento de nuestro sistema. Los condensados de B-E son sistemas de muchas partículas, entonces cómo aplicar a este sistema la entropía de enredamiento definida para sistemas bipartitas. La forma de hacerlo es dividiendo al sistema en dos partes. Existen dos posibles maneras de separar este sistema: la primera, considerando por separado las partículas que se hallan en cada uno de los modos [41], y la segunda, aislando un número de partículas del resto [9]. A continuación se analizan ambos casos.

### Separación por modos

Los estados del Hamiltoniano pueden escribirse como combinaciones lineales de los estados de momento angular bien definido  $|J, M\rangle$  que son equivalentes a los estados  $|N - n, n\rangle$  donde  $N$  es el número total de partículas y  $n$  es el número de partículas en el modo excitado, por tanto  $N - n$  es el número de partículas en el modo más bajo, entonces una combinación lineal arbitraria de estados de Dicke

$$|\psi\rangle = \sum_M C_M |J, M\rangle,$$

puede escribirse en la base de estados con un número de partículas bien definido en cada modo, recordando que  $N_B = n$  y  $N_A = N - n$ , lo cual da como resultado

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^N c_{n-\frac{N}{2}} |N - n, n\rangle,$$

y por tanto su matriz de densidad es

$$\rho = \sum_{n, n'} c_{n-\frac{N}{2}} c_{n'-\frac{N}{2}}^* |N - n, n\rangle \langle N - n', n'|.$$

Calculando la traza parcial sobre las partículas que se hallan en el estado más bajo se obtiene la matriz reducida

$$\begin{aligned}\rho_B = \text{Tr}_A \rho &= \sum_{n, n', \bar{n}} c_{n-\frac{N}{2}} c_{n'-\frac{N}{2}}^* \delta_{\bar{n} N-n} \delta_{\bar{n} N-n'} |n\rangle \langle n'| \\ &= \sum_n \left| c_{n-\frac{N}{2}} \right|^2 |n\rangle \langle n|.\end{aligned}$$

Entonces es una matriz diagonal cuyos elementos son los coeficientes del desarrollo, esto es  $c_{n-N/2}$  o en forma equivalente  $C_M$ . Por lo tanto, se tiene la entropía de enredamiento

$$S_E = - \sum_M |C_M|^2 \ln |C_M|^2. \quad (4.1.6)$$

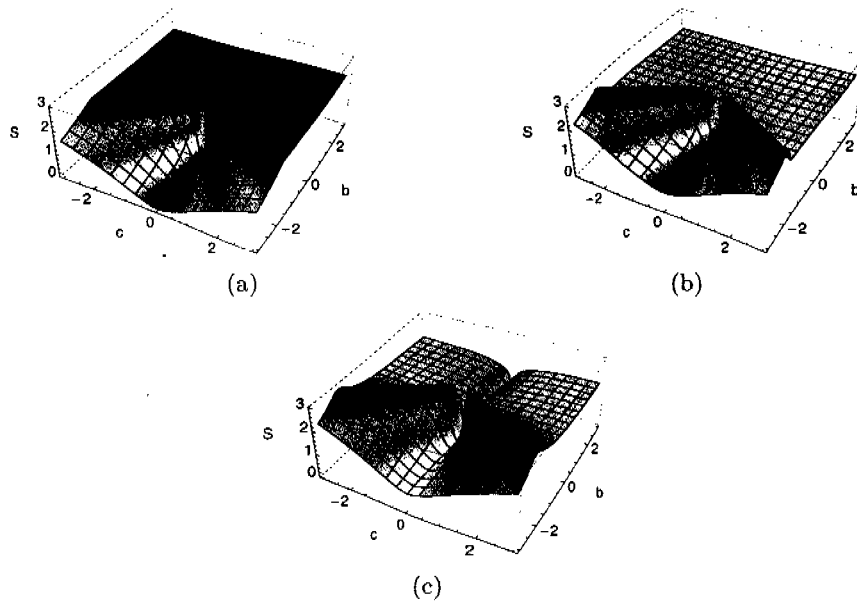
En el caso del estado base cuántico los coeficientes  $C_M^i$  se obtienen de la diagonalización del Hamiltoniano, donde agregamos el índice  $i$  para denotar el eigenestado  $i$ -ésimo de la diagonalización. Para el estado coherente de espín se obtiene

$$\begin{aligned}S_E &= - \sum_M \frac{1}{(1+|\zeta|^2)^{2J}} \binom{2J}{J+M} |\zeta|^{2(J+M)} \ln \left( \frac{1}{(1+|\zeta|^2)^{2J}} \binom{2J}{J+M} |\zeta|^{2(J+M)} \right), \\ &= - \sum_M \binom{2J}{J+M} \left( \frac{1-\cos\theta}{2} \right)^{J+M} \left( \frac{1+\cos\theta}{2} \right)^{J-M} \\ &\quad \times \ln \left( \binom{2J}{J+M} \left( \frac{1-\cos\theta}{2} \right)^{J+M} \left( \frac{1+\cos\theta}{2} \right)^{J-M} \right).\end{aligned}$$

Para el estado coherente simétrico de espín se tiene

$$\begin{aligned}S_S &= - \sum_M \binom{2J}{J+M} \left[ \left( \frac{1-\cos\theta}{2} \right)^{\frac{J+M}{2}} \left( \frac{1+\cos\theta}{2} \right)^{\frac{J-M}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1+\cos\theta}{2} \right)^{\frac{J+M}{2}} \left( \frac{1-\cos\theta}{2} \right)^{\frac{J-M}{2}} \right]^2 \\ &\quad \times \ln \left\{ \binom{2J}{J+M} \left( \frac{1-\cos\theta}{2} \right)^{\frac{J+M}{2}} \left( \frac{1+\cos\theta}{2} \right)^{\frac{J-M}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1+\cos\theta}{2} \right)^{\frac{J+M}{2}} \left( \frac{1-\cos\theta}{2} \right)^{\frac{J-M}{2}} \right\}.\end{aligned}$$

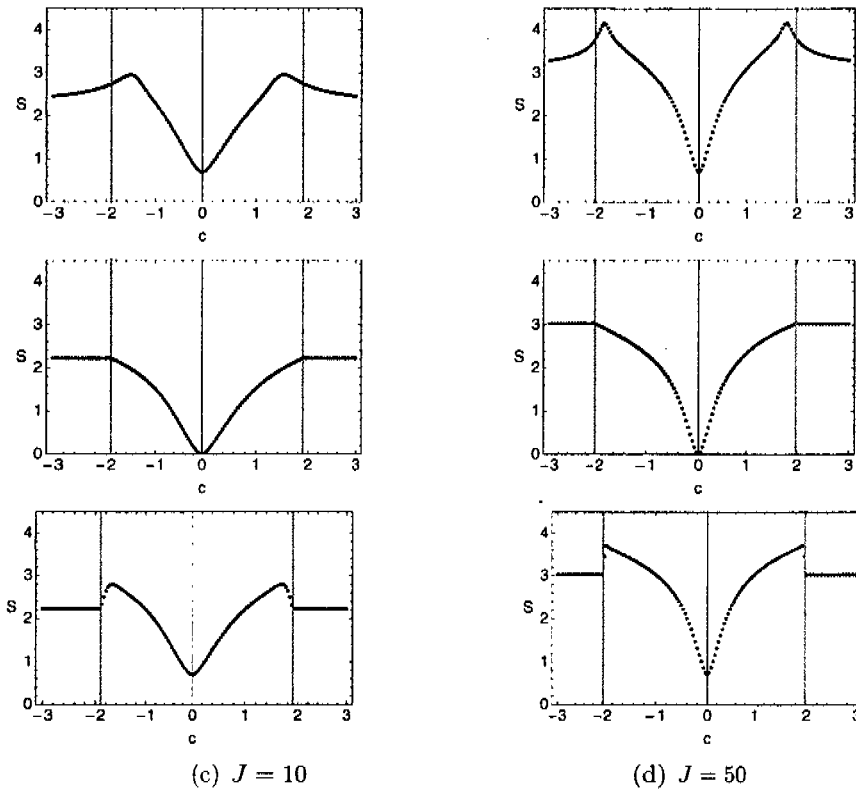
Para el estado base se eligen los  $C_M^i$ 's asociados al estado cuántico de menor energía. Para los estados coherentes tenemos que substituir  $\theta \rightarrow \theta_c$  que minimiza la superficie de energía. La Fig. 4.34 muestra la entropía de enredamiento en la partición por modos para los tres estados mencionados como función de los parámetros  $b$  y  $c$ , mientras que en la Fig. 4.35 se muestran como función de  $c$ , con  $b$  fija y dos diferentes números de partículas.



**Figura 4.34:** Entropía en la partición por modos para (a) el estado coherente, (b) el estado coherente simétrico y (c) el estado base cuántico como función de los parámetros  $b$  y  $c$ .  $J = 10$ .

Estas figuras muestran que el estado coherente simétrico reproduce mejor los resultados cuánticos para la entropía de enredamiento cuando se separa al sistema por modos. Puede verse que cuando el número de partículas aumenta, la transición en el comportamiento de la entropía de enredamiento para el estado base cuántico se va acercando al valor que tiene en la separatriz. Es importante notar que cuando  $c = 0$  y  $b < 0$  el estado coherente tiene enredamiento cero, esto se debe a que en esos puntos el estado coherente corresponde al estado puro  $|J, -J\rangle$ , es decir, todas las partículas se hallan en un solo modo mientras que el otro se encuentra vacío, por ello al separar por modos el enredamiento es cero. Sin embargo, tanto con el estado coherente simétrico como con el estado base, la entropía en esos puntos





**Figura 4.35:** Entropía en la partición por modos para el estado base cuántico (arriba), el estado coherente (medio), y el estado coherente simétrico (abajo) como función del parámetro  $c$  con  $b = -1$ .

tiene un valor diferente de cero. Esto se debe a que estos estados están enredados, más aún, el valor de su enredamiento corresponde a  $\ln(2)$  pues el estado es de la forma  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|J, M\rangle + |J, -M\rangle)$  y como puede observarse es independiente del número de partículas.

Es sobre la línea  $c = 0$  con  $b > 0$  en donde el estado coherente simétrico y el estado base cuántico difieren más. Recordemos que es sobre esta línea que el traslape de ambas funciones es menor pues el estado base cuántico corresponde al estado  $|J, 0\rangle$  que no puede ser representado apropiadamente por un estado coherente.

## Separación por cajas

Para realizar esta partición se considera a los estados  $|J, M\rangle$  como si se tratara del acoplamiento de dos momentos angulares  $j_1$  y  $j_2$  tales que  $j_1 + j_2 = J$  para que se cumpla la conservación de partículas, y  $m_1 + m_2 = M$  para que se conserve el número de partículas en cada modo lo cual se cumple trivialmente debido a las propiedades de los coeficientes de Clebsch-Gordan. En principio puede tomarse cualquier combinación de  $j_1$  y  $j_2$ , sin embargo, aquí sólo consideraremos  $j_1 = 1/2$  para el enredamiento de una partícula con el resto,  $j_1 = 1$  para dos partículas con el resto, y  $j_1 = J/2$  la mitad de las partículas con la otra mitad.

Si se tiene una combinación lineal de estados de Dicke  $|\psi\rangle = \sum_M C_M |JM\rangle$ , su matriz de densidad es

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{M, M'} C_M C_{M'}^* |J, M\rangle \langle J, M'|, \\ &= \sum_{\substack{M, M', M_1 \\ M'_1, M_2, M'_2}} C_M C_{M'}^* \langle j_1, M_1; j_2, M_2 | J, M\rangle |j_1, M_1; j_2, M_2\rangle \\ &\quad \times \langle J, M' | j_1, M'_1; j_2, M'_2\rangle \langle j_1, M'_1; j_2, M'_2|, \end{aligned}$$

donde hay índices de suma redundantes, y  $\langle j_1, M_1; j_2, M_2 | J, M\rangle$  son coeficientes de Clebsch-Gordan. Trazando sobre la parte 2 del sistema se encuentra la matriz de densidad reducida

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sum_{\substack{M, M' \\ M_1, M'_1, M_2, M'_2}} C_M C_{M'}^* \langle j_1, M_1; j_2, M_2 | J, M\rangle \langle J, M' | j_1, M'_1; j_2, M'_2\rangle \\ &\quad \times |j_1, M_1\rangle \langle j_1, M'_1| \delta_{M_2 M'_2}, \end{aligned}$$

y sus elementos de matriz están dados por

$$(\rho_1)_{\mu\mu'} = \sum_{M_2} C_{\mu+M_2} C_{\mu'+M_2}^* \langle j_1, \mu; j_2, M_2 | J, \mu + M_2\rangle \langle J, \mu' + M_2 | j_1, \mu'; j_2, M_2\rangle \quad (4.1.7)$$

Esta no es una matriz diagonal, y para encontrar la entropía de enredamiento primero debe diagonalizarse y obtenerse sus valores propios. Denotando por  $\lambda_p$  sus eigenvalores se tiene

$$S_E = - \sum_{p=0}^{2j_1} \lambda_p \ln \lambda_p,$$

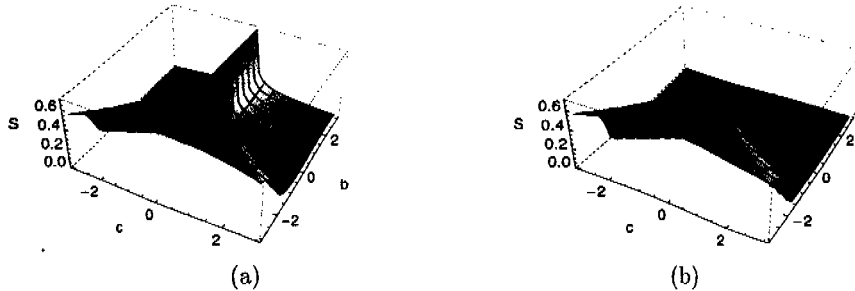
donde  $2j_1$  está indicando la dimensión de la matriz de densidad reducida. Para un estado coherente es relativamente simple mostrar que es separable en esta partición y por tanto su entropía de enredamiento es cero. A continuación se describe el procedimiento.

Si consideramos el momento angular del sistema  $\hat{J}$ , como el acoplamiento de dos momentos angulares  $\hat{j}_1$  y  $\hat{j}_2$ , que son operadores de espacios independientes por lo que  $[\hat{j}_1, \hat{j}_2] = 0$ ,  $\hat{J}_+ = \hat{j}_{1+} + \hat{j}_{2+}$ , y el estado de mínima proyección de momento angular está dado por  $|J, -J\rangle = |j_1, -j_1\rangle \otimes |j_2, -j_2\rangle$ ; sustituyendo en la definición del estado coherente (2.2.8) obtenemos

$$\begin{aligned} |\zeta\rangle &= \frac{1}{(1 + |\zeta|^2)^J} e^{\zeta \hat{j}_{1+}} e^{\zeta \hat{j}_{2+}} |j_1, -j_1\rangle \otimes |j_2, -j_2\rangle \\ &= \left\{ \frac{1}{(1 + |\zeta|^2)^{j_1}} e^{\zeta \hat{j}_{1+}} |j_1, -j_1\rangle \right\} \otimes \left\{ \frac{1}{(1 + |\zeta|^2)^{j_2}} e^{\zeta \hat{j}_{2+}} |j_2, -j_2\rangle \right\}, \end{aligned}$$

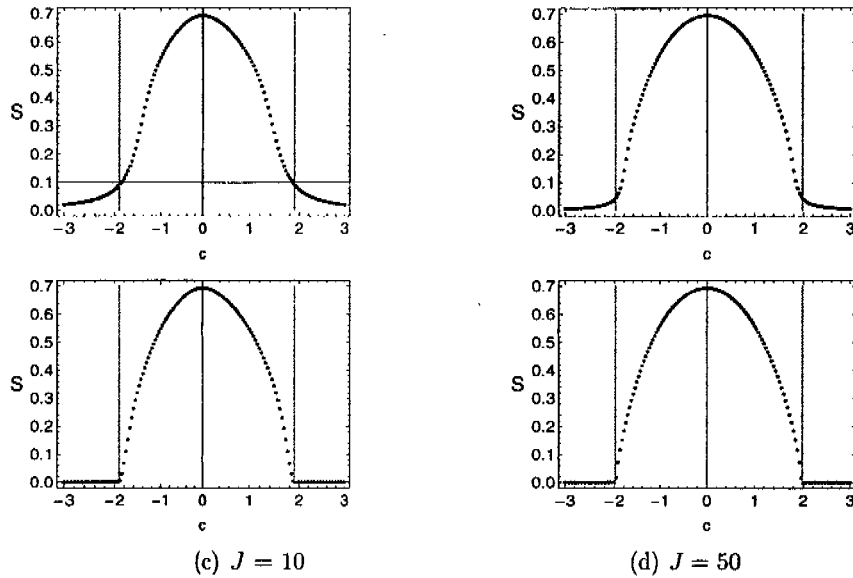
es decir, el estado coherente puede escribirse como el producto tensorial de dos estados coherentes en espacios independientes; por lo tanto, es separable y su enredamiento debe ser igual a cero.

En la Fig. 4.36 se muestra la entropía de enredamiento, para el estado base cuántico y para el estado coherente simétrico en la separación de una partícula con el resto. En estas figuras puede observarse que ambas superficies presentan el mismo com-



**Figura 4.36:** Entropía de enredamiento para (a) el estado base cuántico y (b) el estado coherente simétrico como función de los parámetros  $b$  y  $c$  con  $J = 10$ .

portamiento en las regiones 3 y 4. En las regiones 1 y 2 la aproximación del estado simétrico es buena excepto en la vecindad de la línea  $c = 0$  con  $b > 0$ , esto se debe a que, como ya se comentado anteriormente, el estado base en esta región es  $|J, 0\rangle$  que no puede aproximarse por un estado coherente.



**Figura 4.37:** Cortes a la superficie de la entropía de enredamiento de una partícula con el resto del estado base cuántico (arriba) y del estado coherente simétrico (abajo) como función del parámetro  $c$  con  $b = -1$  para dos valores de  $J$ .

Las regiones donde los estados presentan menor enredamiento corresponden a 1 y 2, excepto en la línea  $c = 0$ . Las regiones de mayor enredamiento corresponden a 3 y 4, y puede verse que el máximo enredamiento se produce sobre la línea  $c = 0$ , lo que es resultado de la forma que tiene el estado base sobre esa línea. Cuando  $b < 0$  el estado base sobre esa línea corresponde a la combinación lineal

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \{|J, -J\rangle + |J, J\rangle\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; j_2, -j_2 \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; j_2, j_2 \right\rangle \right\},$$

donde,  $j_2 = J - (1/2)$ . Puede observarse que la parte que corresponde a  $j_1 = 1/2$  es un sistema de dos niveles; es decir, sólo existe un valor de  $j_2$  tal que la suma de las proyecciones de momento angular sea  $j_1 + j_2 = J$ , esto implica que la otra parte del sistema debe comportarse también como un sistema de dos niveles y por tanto tenemos un sistema de dos qubits, y el estado base corresponde a un estado máximamente enredado de este sistema.

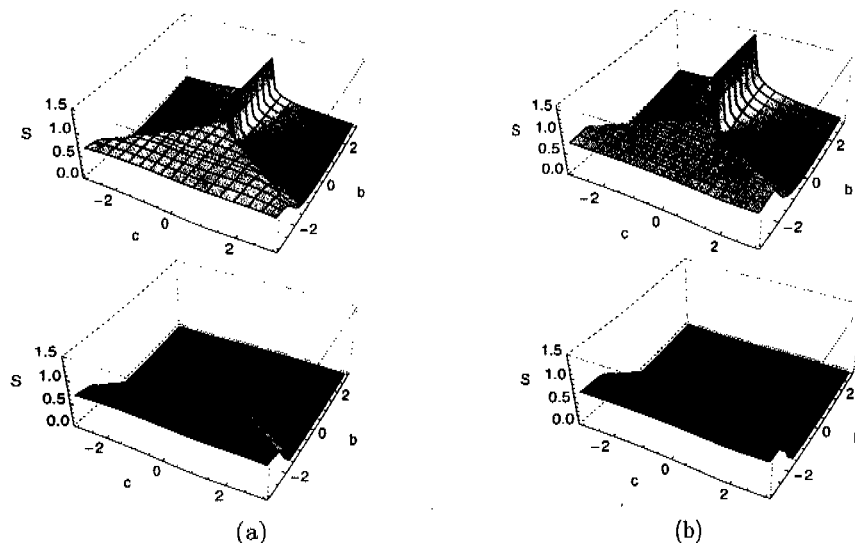
Cuando  $b > 0$  el estado base corresponde entonces al estado de Dicke de proyección

cero que puede escribirse como

$$|J, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; j_2, \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; j_2, -\frac{1}{2} \right\rangle \right\};$$

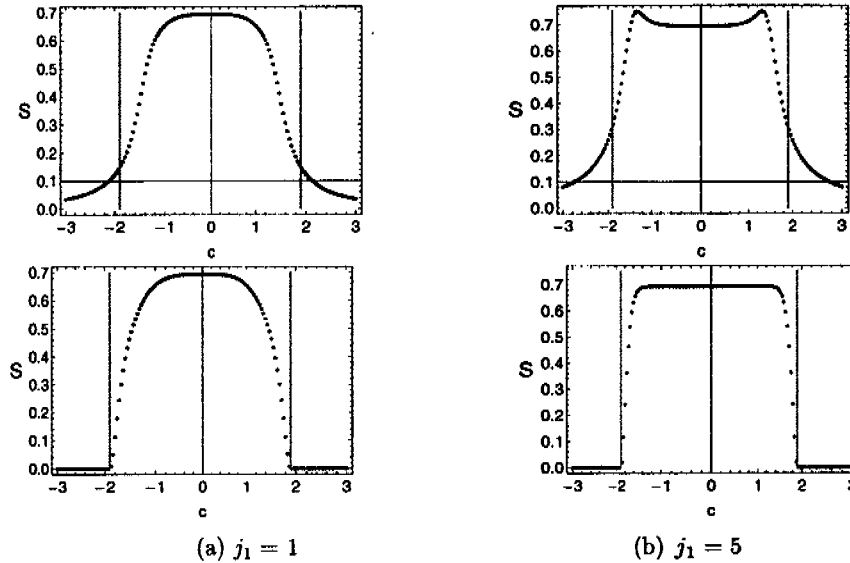
aquí se repite el caso anterior, es un sistema de dos qubits y esta combinación lineal corresponde a otro estado máximamente enredado. Ahora bien, fuera de la recta  $c = 0$  cuando  $b > 0$  el estado base es muy parecido a un estado coherente por lo que el valor de la entropía de enredamiento es muy cercano a cero y cuando  $b < 0$  el estado base tiene más componentes aparte de las de máximo y mínimo peso por lo que la combinaciones ya no tienen enredamiento máximo. Sin embargo, mientras más cercanos sean los parámetros a la línea  $c = 0$ , menor es el número de estados componentes y mayor el enredamiento del estado base correspondiente como puede observarse en la Fig. 4.37.

La Fig. 4.38 muestra la entropía de enredamiento de dos partículas con el resto para el estado base cuántico y para el estado coherente simétrico como función de los parámetros  $b$  y  $c$ . En estas figuras se observa un comportamiento similar al del



**Figura 4.38:** Entropía de enredamiento de (a) dos partículas con el resto y (b) la mitad de las partículas con la otra mitad para el estado base cuántico (arriba) y el estado coherente simétrico (abajo) en función de los parámetros  $b$  y  $c$ , con  $J = 10$ .

enredamiento para una partícula. El máximo enredamiento se presenta en la línea



**Figura 4.39:** Cortes a la superficie de la entropía de enredamiento de (a) dos partículas con el resto y (b) la mitad de las partículas con el resto para el estado base cuántico (arriba) y el estado coherente simétrico (abajo) en función del parámetro  $c$  con  $b = -1$  y  $J = 10$ .

$c = 0$ ; sin embargo en estos casos el enredamiento es mayor cuando  $b > 0$  que cuando  $b < 0$  y, para el caso de 20 partículas, es mayor también que el máximo enredamiento de dos qubits.

Cuando  $b < 0$  la función de onda del estado base en la línea  $c = 0$  es nuevamente la combinación lineal de la función de mayor y la de menor peso, por ello cuando se ha fijado el valor de  $j_1$  se tiene un sistema de dos qubits y sobre esa línea tendremos el enredamiento máximo para un sistema de dos qubits y conforme los parámetros se alejen de esa línea el enredamiento decrece debido a que la combinación lineal empieza a incluir otros estados de Dicke.

Cuando  $b > 0$  la función de onda es la misma que en el caso de una partícula  $|J, 0\rangle$ , sin embargo, como  $j_1$  es diferente de un medio existen más de dos estados posibles cuya suma de proyecciones de momento angular es cero. Veamos por ejemplo lo que sucede cuando  $j_1 = 1$ ; en este caso el estado de Dicke de proyección cero puede escribirse como combinación lineal de tres estados desacoplados

$$|J, 0\rangle = \frac{3}{\sqrt{38}} |1, -1; 9, 1\rangle + \sqrt{\frac{10}{19}} |1, 0; 9, 0\rangle + \frac{3}{\sqrt{38}} |1, 1; 9, -1\rangle;$$

por lo tanto, el sistema de dos partículas ya no es un qubit pues corresponde a un sistema de tres niveles, es por esta razón que aunque tenemos un sistema bipartita el enredamiento puede ser mayor que el enredamiento de un estado de Bell. En este caso los resultados de la entropía de enredamiento en la línea  $c = 0$  pueden aproximarse por  $\ln(2j_1 + 1)$ , que corresponde al máximo enredamiento para un sistema de  $2j_1 + 1$  niveles; sin embargo, esta aproximación es mejor para  $j_1$ s pequeñas.

Cuando  $b > 0$  ambas superficies presentan el mismo comportamiento en las regiones 3 y 4. En las regiones 1 y 2 la aproximación del estado simétrico es buena excepto en la vecindad de la línea  $c = 0$  con  $b > 0$ ; esto se debe a que, como ya se ha comentado anteriormente, el estado base en esta región es  $|J, 0\rangle$ .

En la Fig. 4.39 podemos ver que a diferencia del enredamiento de una partícula; ahora se tiene más de un punto en el que el enredamiento es máximo e igual al de dos qubits y cuando  $j_1$  crece la longitud de esta zona aumenta. Este comportamiento es reproducido por la función de onda del estado coherente simétrico cuando se tienen valores de  $j_1$  pequeños. Sin embargo, cuando  $j_1$  se acerca a  $J/2$  comienzan a aparecer dos zonas, una para cada línea de la separatriz, en las cuales el enredamiento crece. Cuando el valor de  $J$  aumenta estos puntos de máximo enredamiento se acercan más a las líneas de la separatriz y el valor máximo aumenta también.

## 4.2. Caso $b=0$

### Energía

En este caso el Hamiltoniano del sistema, que está dado por la ecuación (3.1.5), puede escribirse de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= a \frac{\hat{J}_z}{J} + c \frac{\hat{J}_x}{J}, \\
 &= \sqrt{a^2 + c^2} \left\{ \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \frac{\hat{J}_z}{J} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \frac{\hat{J}_x}{J} \right\}, \\
 &= \pm \sqrt{a^2 + c^2} \frac{\hat{n} \cdot \vec{J}}{J}, \\
 &= \pm \sqrt{a^2 + c^2} \frac{\hat{J}_n}{J},
 \end{aligned}$$

donde el signo depende del valor de  $c$ , + si  $c$  es positivo y - si  $c$  es negativo. Además se define  $\hat{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$ , con  $\theta = \arctan(\pm \frac{c}{a})$ , que concuerda con el punto crítico dado en la Tabla 3.10. El operador  $\hat{J}_n$  junto con el momento angular al cuadrado pueden diagonalizarse simultáneamente, y por tanto se satisface que

$$\begin{aligned}\hat{J}^2 |J, M\rangle_n &= J(J+1) |J, M\rangle_n, \\ \hat{J}_n |J, M\rangle_n &= M |J, M\rangle_n.\end{aligned}$$

Entonces el conjunto de eigenvectores cumple la ecuación

$$\begin{aligned}\mathcal{H} |J, M\rangle_n &= E_M |J, M\rangle_n, \\ &= \pm \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{J} M |J, M\rangle_n.\end{aligned}$$

Ahora bien, dependiendo del signo del factor  $\pm \sqrt{a^2 + c^2}/J$ , el estado base de este sistema corresponde a  $|J, -J\rangle_n$  o  $|J, J\rangle_n$  respectivamente.

Los estados  $|J, M\rangle_n$  pueden escribirse como

$$|J, M\rangle_n = \mathcal{R}_y(\theta) |J, M\rangle,$$

donde  $\mathcal{R}_y(\theta) = e^{-i\theta \hat{J}_y}$ . Usando las matrices de rotación podemos escribir finalmente los estados propios para el Hamiltoniano en forma analítica y cerrada [28]

$$|J, M\rangle_n = \sum_{M'} d_{M', M}^J(\theta) |J, M'\rangle;$$

es decir, los estados  $|J, M\rangle_n$  pueden obtenerse de los estados propios de  $\hat{J}^2$  y  $\hat{J}_z$  mediante una rotación por un ángulo  $\theta$  alrededor de  $\hat{J}_y$ , es decir,  $\hat{J}_n = e^{-i\theta \hat{J}_y} \hat{J}_z e^{i\theta \hat{J}_y}$ . El estado base está dado por la expresión

$$\begin{aligned}|J, -J\rangle_n &= \sum_{M'} d_{M', -J}^J(\theta) |J, M'\rangle \quad \text{si } c > 0, \\ |J, J\rangle_n &= \sum_{M'} d_{M', J}^J(\theta) |J, M'\rangle \quad \text{si } c < 0.\end{aligned}$$

Comparando esta expresión con (3.2.2) y recordando que

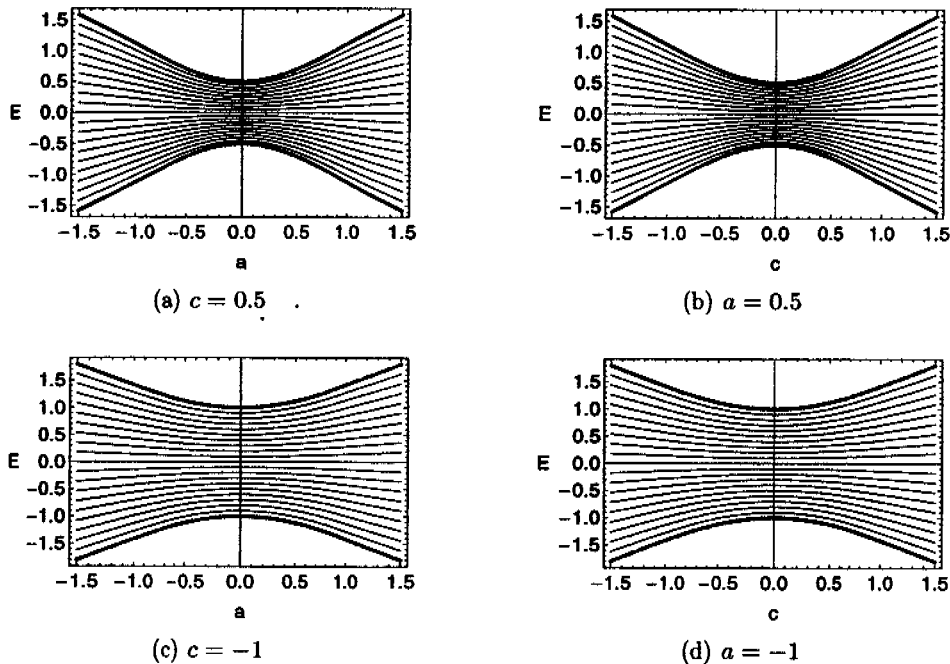
$$d_{m, m'}^J(-\theta) = (-1)^{m-m'} d_{m, m'}^J(\theta),$$

por lo que ambas expresiones coinciden cuando  $(\theta_c, \phi_c) = (-\theta, 0)$  o  $(\theta_c, \pi) = (\theta, \phi)$ . En la Tabla 3.10 puede verse que eso es justamente lo que sucede: en la región 1,  $\phi = 0$



y  $\theta_c = \arctan(-c/a) = -\theta$ , y lo contrario para  $\theta_c = \arctan(c/a) = \theta$  en la región 2 donde  $\phi = \pi$ . Entonces se ha demostrado que para este caso la función de onda del estado base coincide exactamente con la función de prueba (el estado coherente) y es por esto que sólo se mostrarán los resultados cuánticos pues los clásicos coinciden exactamente.

En la Fig. 4.40 se muestra el espectro de energía cuántico junto con las energías clásicas del sistema (3.1.6). Se exhiben los espectros de energía para algunos puntos del espacio de parámetros, escogidos especialmente para ilustrar las simetrías que presenta la energía. Se observa que esta función de energía es invariante ante el intercambio de  $a$  por  $-a$ , de  $c$  por  $-c$ , y más aún ante el intercambio de  $a$  por  $c$ . Estos resultados se deben a la forma de la energía clásica Tabla 3.13, que delimita perfectamente el comportamiento de la energía cuántica.



**Figura 4.40:** Espectros de energía para el caso  $b = 0$ . Para estas figuras se ha considerado  $J = 10$ , que significa  $N = 20$  partículas en el condensado. En cada una de las figuras se muestran en color oscuro las energías clásicas correspondientes.

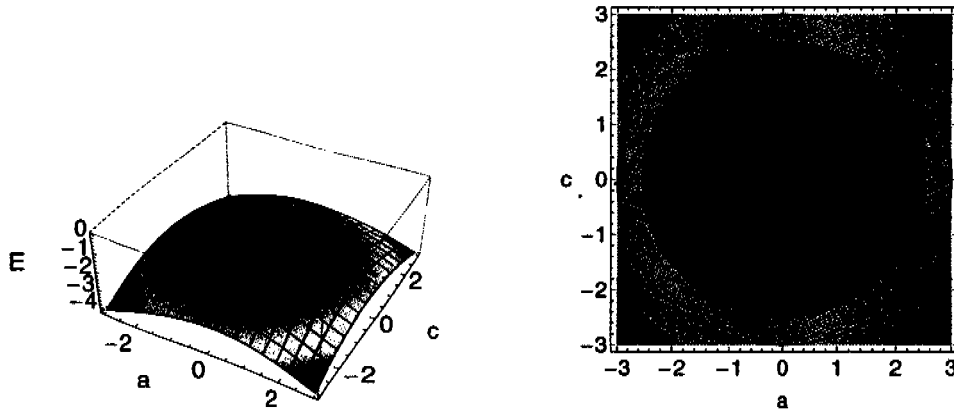
Además, puede verse que este sistema no presenta transiciones de fase o dege-

neración, resultado que concuerda con lo encontrado en el análisis de estabilidad realizado en el capítulo anterior.

Al no presentar degeneración el gap ( $G = E_1 - E_0$ ) es diferente de cero en todo el espacio. Esto es fácil de mostrar. Como ya se ha mencionado, los eigenvalores del Hamiltoniano son  $E_M = \pm M\sqrt{a^2 + c^2}/J$ ; por lo tanto, la diferencia de energía entre cualesquiera dos niveles consecutivos está dada por

$$E_{M+1} - E_M = \pm \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{J},$$

cantidad diferente de cero excepto en el punto no físico  $(a, c) = (0, 0)$  o cuando  $J \rightarrow \infty$ , en cuyo caso se tiene una infinidad de niveles con separación nula entre ellos. Para un valor dado de los parámetros, la diferencia de energía entre dos niveles consecutivos tiene un valor constante; esto implica que la razón  $R_1$  (4.1.1) también es constante en todo el espacio y su valor es 1, lo cual corrobora que no existen en este caso transiciones de fase.



**Figura 4.41:** A la izquierda tenemos la superficie de energía del estado base y a la derecha sus curvas de nivel como función de los parámetros  $a$  y  $c$ , para  $J = 10$ .

En la Fig. 4.41 se muestra el comportamiento de la superficie de energía en función de los parámetros  $a$  y  $c$  del Hamiltoniano, considerando  $N = 20$  partículas. Se observa que la superficie no tiene cambios de pendiente o en la forma de las curvas de nivel; por tanto no existen transiciones de fase. En el punto  $(a, c) = (0, 0)$  se observa un pico en las superficies de energía; sin embargo, éste no representa una transición de

fase debido a que esos valores de los parámetros corresponden a un punto no físico en el que el Hamiltoniano se anula. También pueden observarse claramente las simetrías del Hamiltoniano ante el intercambio de  $a$  por  $c$  y ante el cambio de signo de los parámetros.

Para comparar ambas funciones de onda debe calcularse el porcentaje de traslape,  $|\langle \zeta | g \rangle|^2 \times 100$ . En este caso el porcentaje de traslape es siempre 100% pues ambas funciones de onda son iguales.

Se mostrarán dos ejemplos  $J = 1/2$  y  $J = 1$ , para analizar las simetrías de las funciones de onda ante el intercambio del signo de cada uno de los parámetros. Primero  $J = 1/2$ . La función de onda del estado base para este sistema está dada por

$$|g\rangle = \left( \frac{c^2}{c^2 + (a - \sqrt{a^2 + c^2})^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2} - \right\rangle - c \left( \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2(a^2 + c^2)(a + \sqrt{a^2 + c^2})^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2} + \right\rangle.$$

Como puede observarse, la forma de esta función de onda depende fuertemente del signo del parámetro  $c$ , lo cual nos lleva a separar el espacio en las regiones  $c > 0$  (región 2), en la cual ambos términos tienen signos opuestos, y  $c < 0$  (región 1), en la cual ambos términos tienen el mismo signo. Si cada uno de los coeficientes se multiplica por un uno convenientemente escogido se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} |g\rangle &= \left( \frac{c^2}{c^2 + (a - \sqrt{a^2 + c^2})^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sqrt{a^2 + c^2} + a}{\sqrt{a^2 + c^2} + a} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2} - \right\rangle \\ &- c \left( \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2(a^2 + c^2)(a + \sqrt{a^2 + c^2})^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sqrt{a^2 + c^2} - a}{\sqrt{a^2 + c^2} - a} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2} + \right\rangle, \\ &= \left( \frac{\sqrt{a^2 + c^2} + a}{2\sqrt{a^2 + c^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2} - \right\rangle \pm \left( \frac{\sqrt{a^2 + c^2} - a}{\sqrt{a^2 + c^2} - a} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2} + \right\rangle, \end{aligned}$$

donde el signo más corresponde a la región 1 y el signo menos a la región 2, y que

concuera con el resultado obtenido en (3.2.16). Cuando  $J = 1$  el estado es

$$\begin{aligned}
 |g\rangle &= c \left( \frac{\sqrt{c^2 + (a + \sqrt{a^2 + c^2})}}{2(a^2 + c^2)} \right) |1, -1\rangle \\
 &+ \frac{(a - \sqrt{a^2 + c^2}) \sqrt{c^2 + (a + \sqrt{a^2 + c^2})}}{c\sqrt{2}(a^2 + c^2)} |1, 0\rangle \\
 &+ \left( \frac{c^2}{2\sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{c^2 + (a + \sqrt{a^2 + c^2})}} \right) |1, 1\rangle,
 \end{aligned}$$

donde el término correspondiente a  $M = 0$  depende del signo del parámetro  $c$ , y por tanto, también el estado. Multiplicando por los términos adecuados y desarrollando se obtiene finalmente

$$|g\rangle = \left( \frac{\sqrt{a^2 + c^2} + a}{2\sqrt{a^2 + c^2}} \right) |1, -1\rangle \pm \left( \frac{c^2}{2(a^2 + c^2)} \right)^{\frac{1}{2}} |1, 0\rangle + \left( \frac{\sqrt{a^2 + c^2} - a}{2\sqrt{a^2 + c^2}} \right) |1, 1\rangle,$$

donde el signo más es para la región 1 y el signo menos para la región 2, y que corresponde con lo obtenido en (3.2.17). Ahora analizaremos cuáles son las simetrías de los coeficientes con respecto al cambio de signo de  $a$  y  $c$ .

En la Tabla 4.4 se muestran las simetrías que presentan los coeficientes del estado base ante el intercambio de signo de los parámetros.

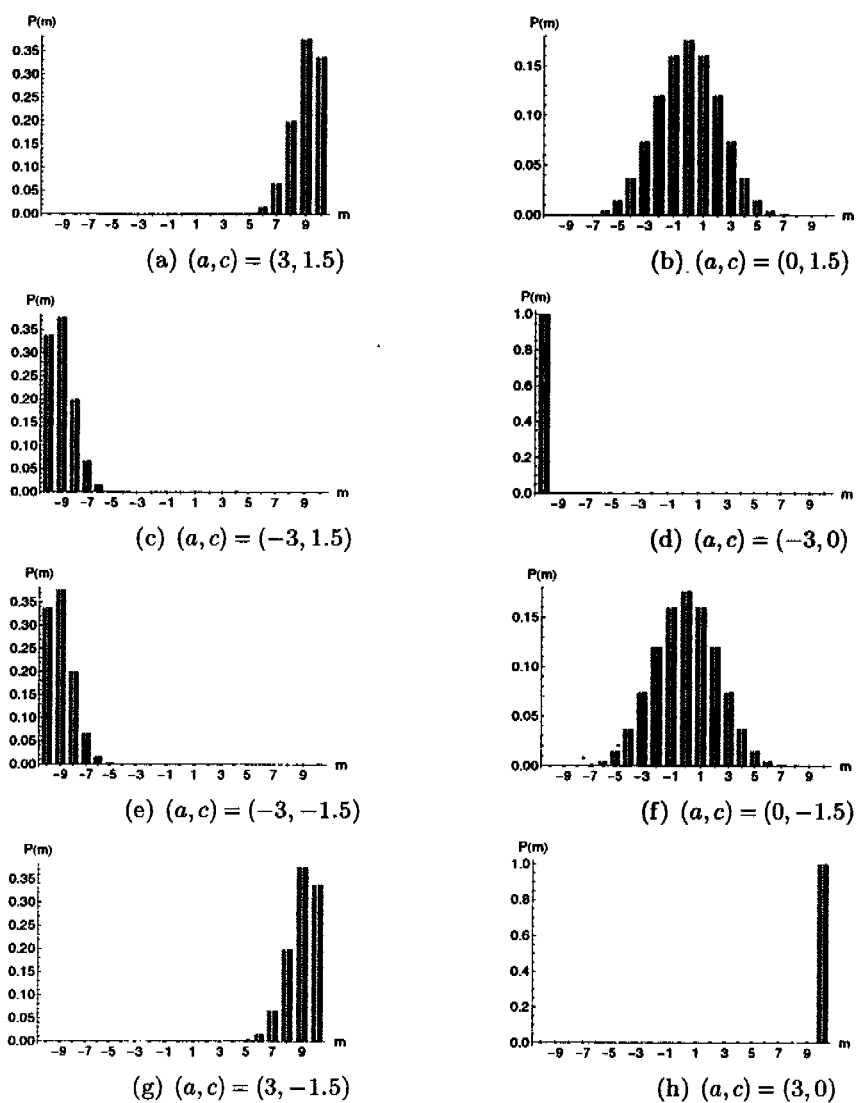
Tabla 4.4: Coeficientes del estado base para diferentes puntos en el espacio de parámetros.

$(a, c)$	$(-a, c)$	$(-a, -c)$	$(a, -c)$
$C_M$	$-C_{-M}$	$(-1)^{J-M}C_{-M}$	$(-1)^{J-M}C_M$

### Probabilidad de ocupación relativa

Únicamente en esta sección se exponen los resultados obtenidos para ambas funciones de onda, la del estado base y la del estado coherente, con la finalidad de confirmar la aseveración hecha anteriormente de que ambas funciones son iguales en este caso, pues la probabilidad de ocupación relativa nos da una comprobación muy clara de este hecho.

En la Fig. 4.42 se muestra la probabilidad de ocupación relativa de cada modo  $P_{\Psi}(m) = |\langle J, m | \psi \rangle|^2$  para ambos estados. En las gráficas puede observarse que ambos estados se corresponden exactamente en todo el espacio de parámetros. Sin embargo, los estados no tienen las mismas propiedades de simetría que las encontradas para la energía. En este caso podemos dividir el espacio con respecto a la línea  $c = 0$ , pues cuando  $c > 0$ , los estados dominantes son aquéllos con proyección negativa de momento angular, mientras que cuando  $c < 0$ , dominan los estados con proyección positiva. Esta transición entre regiones es continua en el espacio de parámetros. También se observa la simetría establecida para los coeficientes del estado base.



**Figura 4.42:** Probabilidad de ocupación relativa. En la figura se muestran las probabilidades de ocupación relativa de la solución exacta en color claro, y del estado coherente en color oscuro para  $J = 10$  y diferentes valores de los parámetros  $b$  y  $c$ .

### Componentes del momento angular y sus cuadrados

En la Fig. 4.43 se muestran los valores esperados de los operadores  $\hat{J}_x/J$  y  $\hat{J}_z/J$  en función de los parámetros  $a$  y  $c$  para el estado base del sistema. El valor esperado del operador  $\hat{J}_y/J$ , es cero en todo el espacio de parámetros (ver Tabla 3.11).

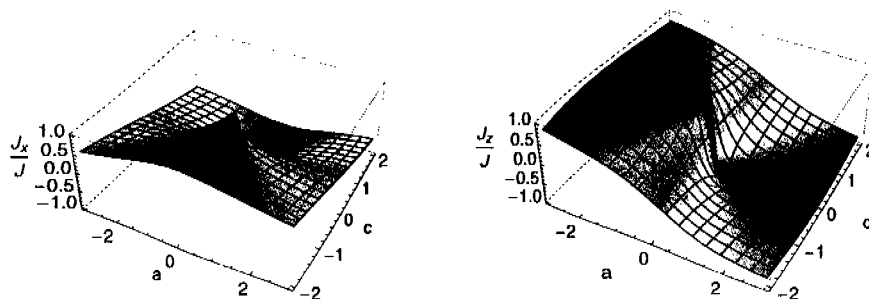


Figura 4.43: Valor esperado de  $\hat{J}_x/J$  y  $\hat{J}_z/J$  para el estado base.

Los valores esperados de los cuadrados de las componentes del momento angular aparecen en la Fig. 4.44. La gráfica de  $J_y^2/J^2$  no se muestran pues su valor en todo el espacio corresponde al valor constante  $1/2J$  (ver Tabla 3.12).

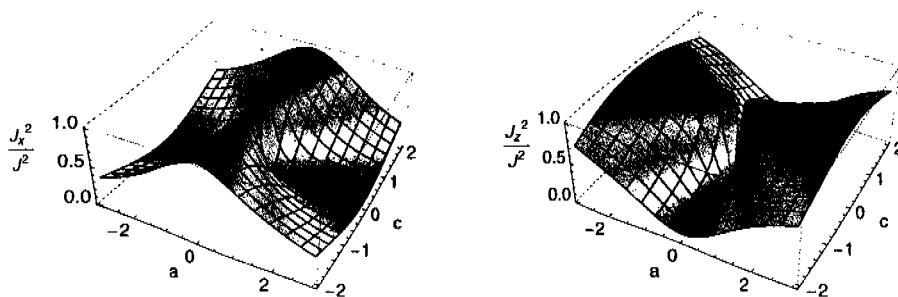


Figura 4.44: Valor esperado de  $\hat{J}_x^2/J^2$  y  $\hat{J}_z^2/J^2$  para el estado base.

Como puede observarse esta superficies tienen una variación suave y continua en todo el espacio, excepto en la vecindad del punto no físico  $(a, c) = (0, 0)$ .

## Parámetros de compresión

Las fluctuaciones de los valores esperados de momento angular se estudiarán a través de los parámetros de compresión. Para este sistema el valor esperado del operador  $\hat{J}_y/J$  es cero en todo el espacio; sin embargo, el valor esperado de  $\hat{J}_z/J$  no es cero, por lo tanto el momento angular promedio se encuentra en el plano  $(X, Z)$ , y los parámetros de compresión deben calcularse para dos direcciones perpendiculares, una de ellas es la dirección  $Y$  y la otra debe ser determinada.

El vector de momento angular promedio está dado por la siguiente expresión  $(J_x/J, J_y/J, J_z/J) = (-c/\sqrt{a^2 + c^2}, 0, -a/\sqrt{a^2 + c^2})$ , que es un vector normalizado, una dirección perpendicular es  $\hat{n}' = (-a/\sqrt{a^2 + c^2}, 0, c/\sqrt{a^2 + c^2})$ . El operador de momento angular en esa dirección es

$$\frac{\hat{J}_{n'}}{J} = \left( \frac{-a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right) \frac{\hat{J}_x}{J} + \left( \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right) \frac{\hat{J}_z}{J}.$$

De los resultados mostrados en las Tablas 3.11 y 3.12 se obtiene  $\delta J_y = 1/(2J)$ . Para encontrar la fluctuación de  $\hat{J}_{n'}/J$  se necesita conocer los valores esperados de los operadores  $\hat{J}_x \hat{J}_z/J^2$  y  $\hat{J}_z \hat{J}_x/J^2$ , pues

$$\left( \frac{\hat{J}_{n'}}{J} \right)^2 = \frac{a^2}{a^2 + c^2} \left( \frac{\hat{J}_x}{J} \right)^2 + \frac{c^2}{a^2 + c^2} \left( \frac{\hat{J}_z}{J} \right)^2 - \frac{ac}{a^2 + c^2} \left( \frac{\hat{J}_x \hat{J}_z}{J^2} + \frac{\hat{J}_z \hat{J}_x}{J^2} \right).$$

Después de algunos cálculos directos se encuentra que  $\delta J_{n'} = 1/(2J)$ . Entonces, usando la definición de los parámetros de compresión (4.1.2), se obtiene que ambos parámetros de compresión tienen valor uno, resultado esperado para un estado coherente.



## Función Q

Para este sistema la función de onda del estado base es una combinación lineal de los estados de Dicke  $|J, M\rangle$ , es decir,  $|g\rangle = \sum_{m=-J}^J C_M |J, M\rangle$ . Entonces su matriz de densidad está dada por la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= |g\rangle\langle g|, \\ &= \sum_{M, M'} C_M C_{M'}^* |J, M\rangle\langle J, M'|,\end{aligned}$$

y usando

$$\langle \xi | J, M \rangle = \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^J} \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} (\xi^*)^{J+M},$$

puede encontrarse fácilmente la expresión para la función Q, que queda de la siguiente forma

$$Q_{|g\rangle}(\xi) = \frac{2J+1}{4\pi} \sum_{M, M'} C_M C_{M'}^* \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} \binom{2J}{J+M'}^{\frac{1}{2}} \frac{(\xi^*)^{J+M} (\xi)^{J+M'}}{(1 + |\xi|^2)^{2J}},$$

donde los coeficientes  $C_M, C_{M'}$  se obtienen de la diagonalización del Hamiltoniano.

Utilizando esta ecuación se grafica la función Q para el estado base, los resultados se muestran en la Fig 4.45. En las figuras puede observarse que el comportamiento de la función Q es unimodal en todo el espacio de parámetros y únicamente varía la posición del centro de la distribución, es decir, no presenta transiciones de fase.

En este caso la función de onda corresponde a un estado coherente, por lo que el valor del segundo momento de la función Q es uno en todo el espacio de parámetros.

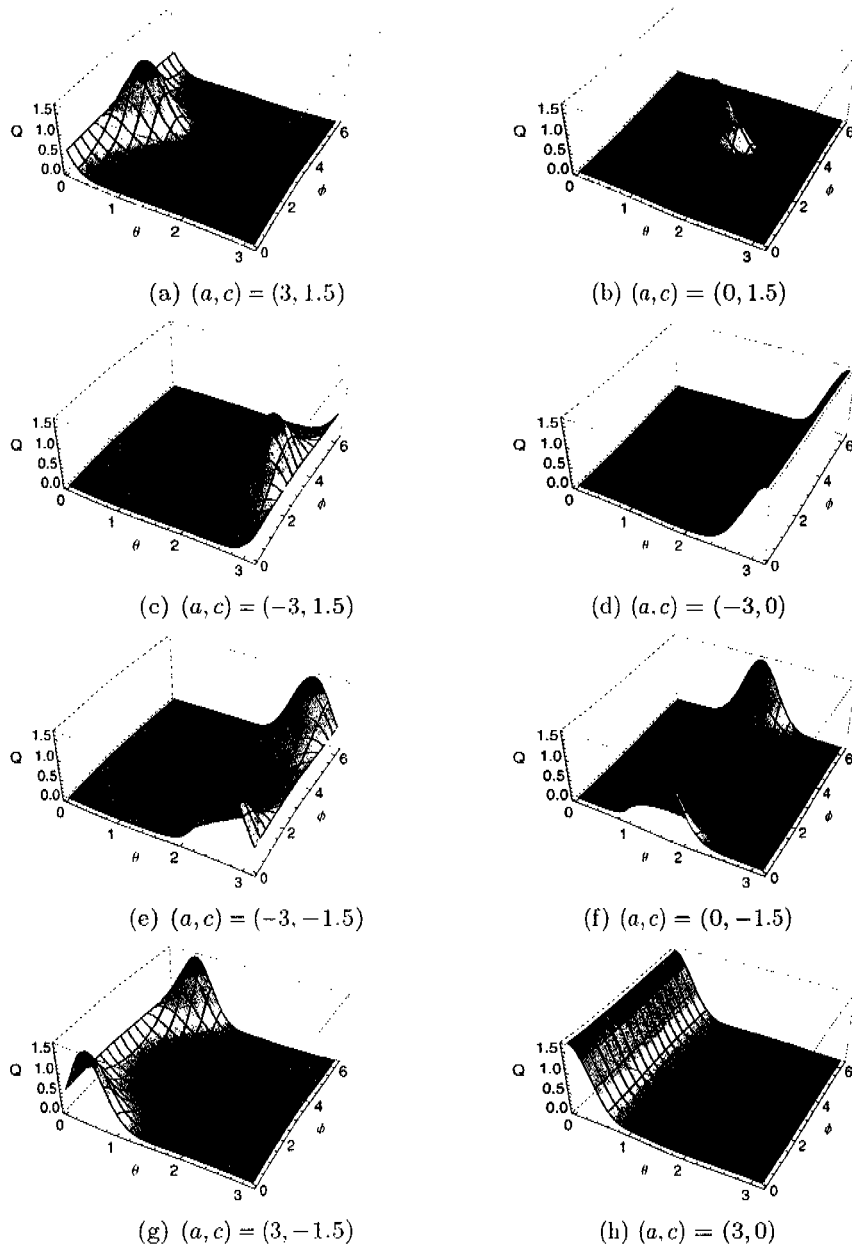


Figura 4.45: Función  $Q$  del estado base para diferentes valores de los parámetros  $a$  y  $c$  con  $J = 10$ .

## Enredamiento

En la sección anterior se demostró que la entropía de enredamiento de un estado coherente en la separación por partículas es igual a cero. También se ha demostrado que cuando el valor del parámetro  $b$  es igual a cero el estado base cuántico corresponde a un estado coherente; por lo tanto, en este caso únicamente se estudiará la separación del sistema por modos.

## Separación por modos

Recordemos que para esta división del sistema la matriz reducida es siempre una matriz diagonal por lo que la entropía de formación tiene la forma

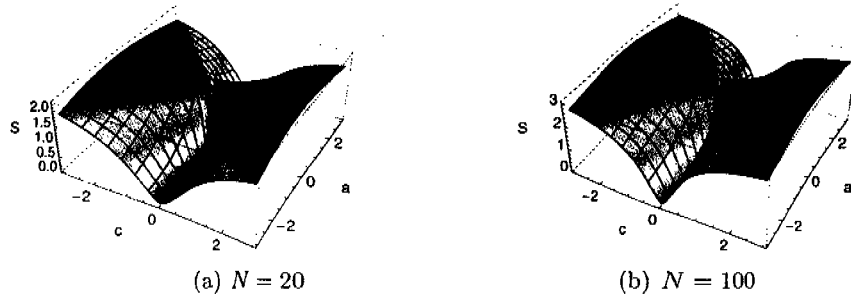
$$S_{|\psi\rangle} = - \sum_M |C_M|^2 \ln |C_M|^2, \quad (4.2.1)$$

donde  $C_M$  es el coeficiente correspondiente al estado  $|J, M\rangle$  y cuyos valores para el estado base cuántico se obtienen de la diagonalización del Hamiltoniano, mientras que para un estado coherente  $C_M = \binom{2J}{M}^{\frac{1}{2}} \zeta^{J+M} / (1 + |\zeta|^2)^J$ . Sin embargo, en este caso particular el estado base cuántico corresponde exactamente con el estado coherente; por lo tanto la forma de la entropía de ambas funciones de onda está determinada por la ecuación

$$\begin{aligned} S_{|\psi\rangle} &= - \sum_M \frac{1}{(1 + |\zeta|^2)^{2J}} \binom{2J}{J+M} |\zeta|^{2(J+M)} \ln \left( \frac{1}{(1 + |\zeta|^2)^{2J}} \binom{2J}{J+M} |\zeta|^{2(J+M)} \right), \\ &= - \sum_M \binom{2J}{J+M} \left( \frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^{J+M} \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^{J-M} \\ &\quad \times \ln \left\{ \binom{2J}{J+M} \left( \frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^{J+M} \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^{J-M} \right\}. \end{aligned}$$

La Fig. 4.46 muestra la entropía de formación en la partición por modos para el estado base como función de los parámetros  $a$  y  $c$ , para dos valores diferentes de  $J$  correspondientes a 20 y 100 partículas.

En estas figuras puede observarse que el valor de la entropía de enredamiento es prácticamente una constante excepto en regiones cercanas a la línea  $c = 0$ , que corresponde a la separatriz de este sistema. También puede verse que cuando el



**Figura 4.46:** Entropía en la partición por modos para el estado base cuántico como función de los parámetros  $a$  y  $c$  para dos valores de  $J$ .

número de partículas aumenta también lo hace el valor de la entropía, excepto en la separatriz donde siempre vale cero, esto se debe a que sobre esa línea los eigenestados de este sistema corresponden a eigenestados del operador  $\hat{J}_z$ , cuando  $c = 0$  el estado base es  $|J, -J\rangle$  si  $a > 0$  y  $|J, J\rangle$  si  $a < 0$ , y de la forma que tiene la entropía puede verse claramente que cuando se tiene un estado de Dicke como estado, la entropía de formación tiene valor cero.

### 4.3. Caso $c=0$

#### Energía

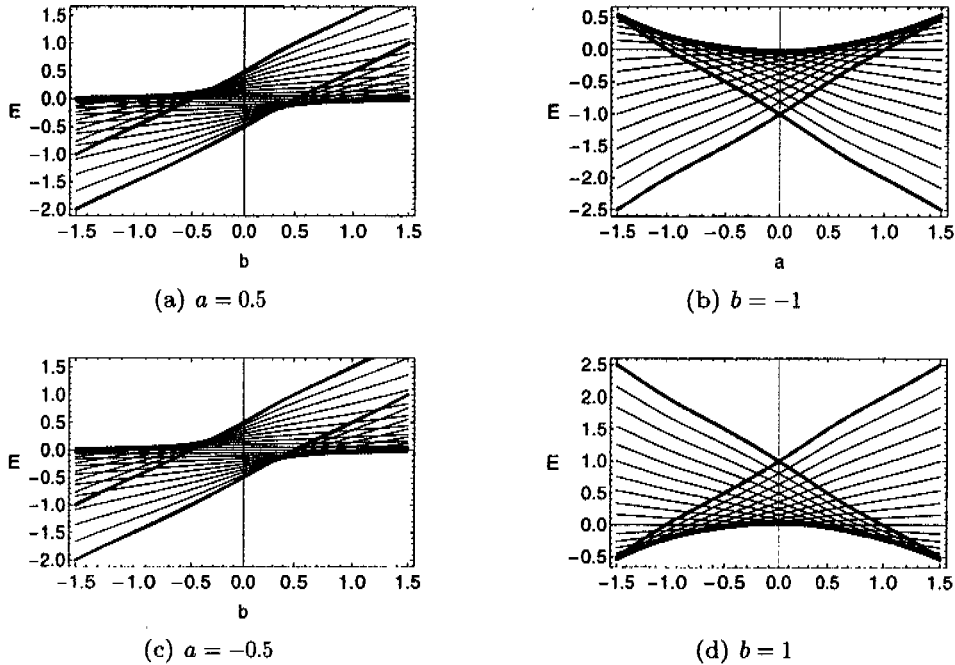
Este caso es muy interesante pues el Hamiltoniano correspondiente está dado por la expresión

$$\mathcal{H} = \frac{a}{J} \hat{J}_z + \frac{b}{J^2} \hat{J}_z^2,$$

que es diagonal en la base de eigenestados de los operadores  $\hat{J}^2$  y  $\hat{J}_z$ , por lo que la diagonalización de la matriz Hamiltoniana puede hacerse de manera analítica. El espectro de energías está dado por

$$\frac{E_M}{J} = \frac{aM}{J} + \frac{bM^2}{J^2};$$

por lo tanto, el valor de la energía del estado base depende fuertemente de la razón entre los dos parámetros.



**Figura 4.47:** Espectros de energía para el caso  $c = 0$ . Para estas figuras se ha considerado  $J = 10$ , que significa  $N = 20$  partículas en el condensado. En cada una de las figuras se muestran en color oscuro las energías clásicas correspondientes.

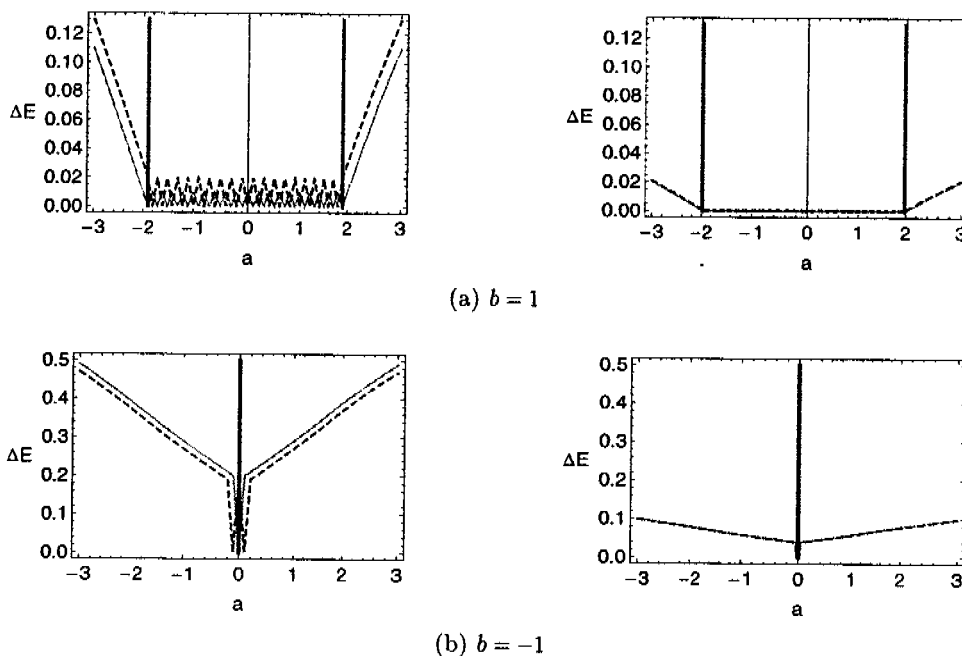
En la Fig. 4.47 se muestra el espectro de energías en función de los parámetros, para un número de partículas  $N = 20$ . También se grafican las energías clásicas (líneas gruesas), y puede observarse que el espectro de energía está dividido en forma cualitativa por las superficies de energía clásicas. Como ya se ha mostrado en el caso  $a = 0$ , las energías clásicas dividen el espectro de energía en regiones con degeneración o cuasidegeneración y sin ellas. Sin embargo, en este caso sí hay degeneración, pero esto ocurre únicamente para valores bien definidos de los parámetros.

Esto puede mostrarse fácilmente de manera analítica. Busquemos los puntos del espacio de parámetros donde  $E_M = E_{M+K}$  con  $K = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ ; esto se cumple cuando

$$b = -a \frac{J}{2M + K},$$

es decir, si se tiene un estado  $|J, M\rangle$  pueden encontrarse los puntos de intersección

con otros estados  $|J, M'\rangle$ . Cada uno de estos cruces corresponde a una transición de fase en la cual el estado pasa de un estado con proyección  $M$  a otro con proyección  $M'$ ; por lo tanto, pueden tenerse hasta  $2J - 1$  transiciones. Más adelante veremos que cuando  $J \rightarrow \infty$ , las únicas transiciones de fase que permanecen son aquellas marcadas por la separatriz.



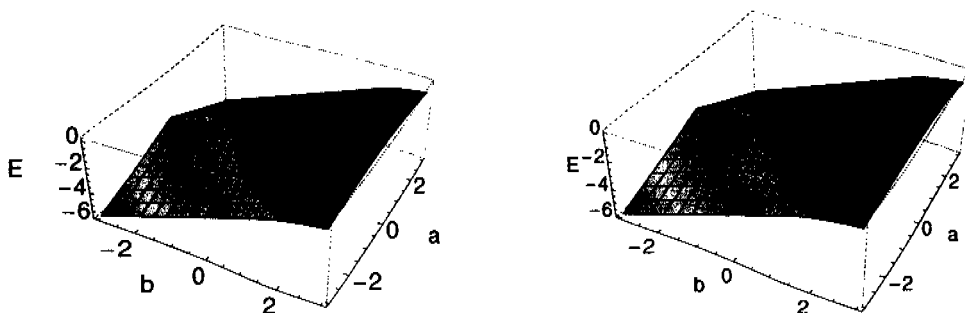
**Figura 4.48:** En las gráficas se muestran superpuestas la diferencia de energía entre el primer estado excitado y el segundo estado excitado (línea punteada) y el gap (línea sólida). Las líneas verticales gruesas corresponden a la separatriz. Las figuras del lado izquierdo corresponden a  $J = 10$  mientras que las del lado derecho a  $J = 50$ .

Ahora se analizarán dos diferencias de energía: el primer estado excitado con el estado base y el segundo estado excitado con el primer estado excitado. En este caso se ha omitido la razón  $R_1$ , pues debido a que las diferencias de energía presentan múltiples ceros (como veremos a continuación),  $R_1$  es inestable. En la Fig. 4.48 se grafican las diferencias de energía como funciones de uno de los parámetros manteniendo el otro constante, para diferentes valores de  $J$ .

En las figuras puede observarse que las líneas de la separatriz dividen las zonas de

comportamientos diferentes, limitando las zonas donde existe degeneración (región 3) de aquéllas que no tienen degeneración (regiones 1 y 2). Pueden observarse de igual manera las transiciones de fase que están marcadas por los picos que presentan las diferencias de energía y que corresponden a los puntos de cruce en los espectros de energía.

Es claro que, cuando  $J$  crece, los puntos de cruce entre dos niveles de energía consecutivos aumentan y la diferencia de energía entre ellos disminuye, por lo que cuando  $J = 50$  ambas diferencias de energía son prácticamente cero, y en el límite clásico,  $J \rightarrow \infty$ , el estado base tiende a estar degenerado en todo el espacio de parámetros.

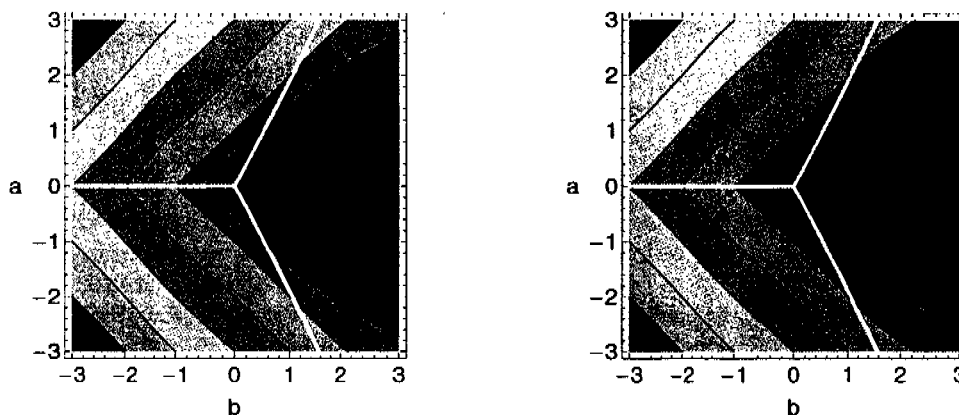


**Figura 4.49:** A la izquierda tenemos la superficie de energía clásica y a la derecha la superficie de energía cuántica en función de los parámetros  $a$  y  $b$ , para  $J = 10$ .

En la Fig. 4.49 se muestra la comparación entre el comportamiento de la superficie de energía clásica mínima y la superficie de energía cuántica del estado base, para  $N = 20$  partículas, en función de los parámetros  $(a, b)$  del Hamiltoniano.

Se observa que ambas energías presentan el mismo comportamiento en el espacio de parámetros. En  $a = 0$  y  $b < 0$  hay una línea que marca el cambio de pendiente que existe en la superficie, esta línea es parte de la separatriz y la transición de fase existente es de primer orden, es decir, existe una discontinuidad en la primera derivada de la energía. La curva que marca la transición de segundo orden no es tan obvia, pues corresponde a un cambio de concavidad de la función.

En la Fig. 4.50 se muestran las curvas de nivel de ambas superficies de energía, y sobre ellas se ha superpuesto la separatriz del sistema. En ambas superficies se observan dos zonas, una en la que las curvas de nivel son líneas rectas y la otra en la que son líneas curvas, y que se encuentran delimitadas por las rectas  $a = \pm b(2 - 1/J)$  de la separatriz. En ambos casos las líneas rectas son simétricas con respecto a la



**Figura 4.50:** Se muestran las curvas de nivel de las superficies de energía clásica (izquierda) y cuántica (derecha) en función de los parámetros  $a$  y  $b$ , junto con la separatriz del Hamiltoniano modelo (líneas blancas), para  $J = 10$ .

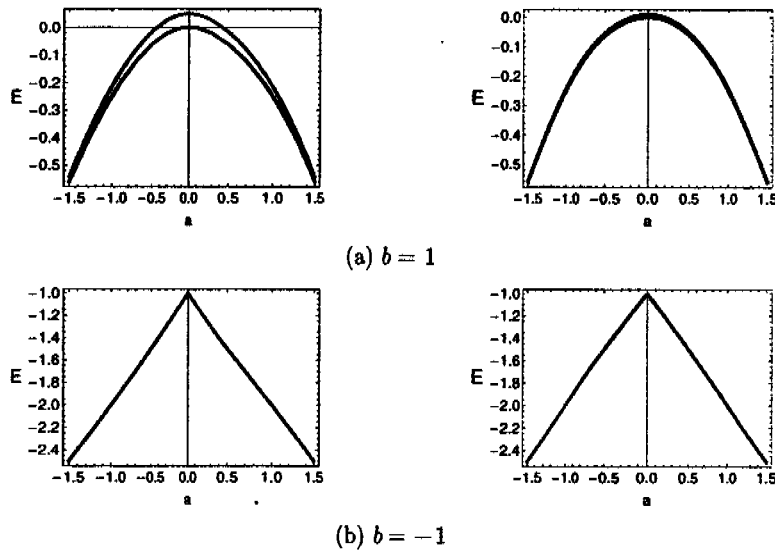
recta  $a = 0$ .

En el caso clásico puede observarse que el cambio de concavidad de las curvas de nivel es mucho menos pronunciado que en el caso cuántico. Esta diferencia debe desaparecer cuando  $J \gg 1$ ; esto se mostrará a continuación con una serie de cortes de las superficies de energía, es decir, como función de un parámetro únicamente, conservando el otro constante.

En la Fig. 4.51 se muestran dos cortes de las superficies de energía, una con el valor  $b = 1$  (arriba) y otra con valor  $b = -1$  (abajo), para dos valores de  $J$ ; las figuras del lado izquierdo corresponden a  $J = 10$ , mientras que las del lado derecho corresponden a  $J = 50$ . En este caso, sólo se muestran dos cortes pues la energía presenta una simetría ante el intercambio de  $a$  por  $-a$ . En ambos casos la energía clásica está representada por la línea clara mientras que la energía cuántica corresponde a la línea oscura.

En estas figuras puede observarse que la correspondencia entre las energías clásica y cuántica es mejor en las regiones 1 y 2 del espacio de parámetros, pues en la Fig. 4.51(b), aún cuando  $J = 10$ , no se pueden distinguir las líneas correspondientes a las dos diferentes energías; sin embargo, en la región 3, Fig. 4.51(a), cuando  $J = 10$  la diferencia entre ambas energías es muy notoria, mientras que cuando  $J$  crece esta diferencia va desapareciendo, pues la energía clásica disminuye acercándose a la





**Figura 4.51:** Cortes de las superficies de energía, clásica y cuántica, a lo largo de las rectas (a)  $b = 1$  y (b)  $b = -1$ , para dos valores de  $J$ . En el lado izquierdo se utilizó  $J = 10$  mientras que en el derecho  $J = 50$ . La línea oscura corresponde a la energía cuántica y la clara a la clásica.

energía cuántica; por tanto, cuando  $J \rightarrow \infty$  ambas energías deben coincidir en todo el espacio de parámetros.

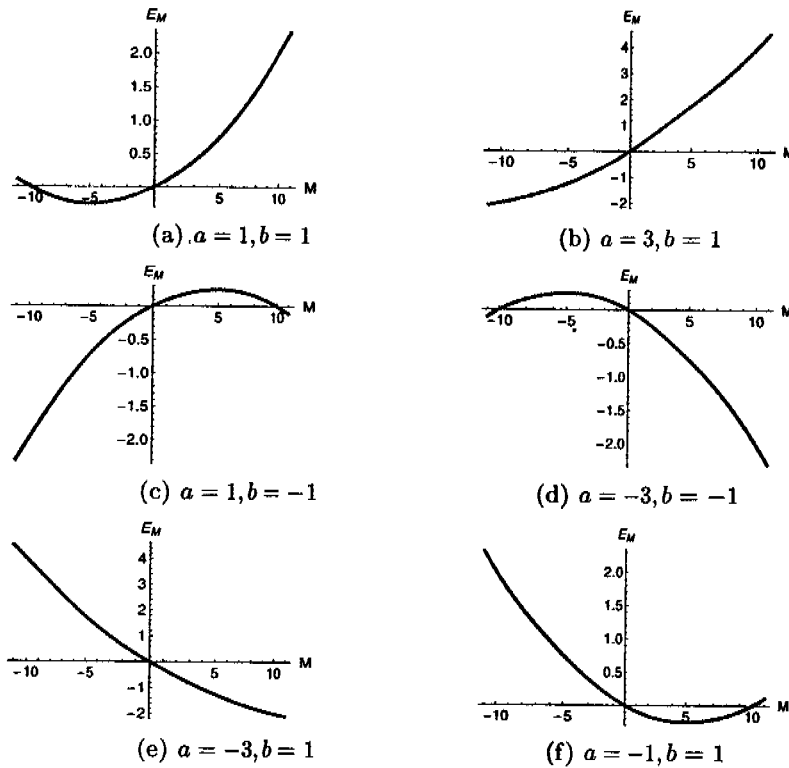
La siguiente cantidad a analizar es el porcentaje de traslape,  $|\langle \zeta | g \rangle|^2 \times 100$ , entre la función de prueba (estado coherente) y el estado cuántico. En este caso, todos los eigenestados son estados de Dicke  $|J, M\rangle$ , cuyo valor de  $M$  depende del valor de los parámetros  $a$  y  $b$ . Utilizando las ecuaciones (3.2.18), y considerando  $|g\rangle = |J, M_g\rangle$  se tiene que la norma del traslape está dada por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
 |\langle \zeta_1 | g \rangle| &= \delta_{M_g, -J}, \\
 |\langle \zeta_2 | g \rangle| &= \delta_{M_g, J}, \\
 |\langle \zeta_3 | g \rangle| &= \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-r_c}{2}\right)^{\frac{J+M}{2}} \left(\frac{1+r_c}{2}\right)^{\frac{J-M}{2}} \delta_{M_g, M},
 \end{aligned}$$

donde el parámetro  $r_c$  ( $r_c = a/b(2 - (1/J))$ ) se ha definido en el Capítulo 3.

A continuación se analiza la función de energía cuántica  $E_M$ . El comportamiento de esta función nos permite dividir el espacio de parámetros en regiones que están

separadas por las rectas  $a = 2b$  y  $a = -2b$  con  $b > 0$ , y  $a = 0$  si  $b < 0$ , y que corresponden a la separatriz cuando  $J \rightarrow \infty$ . En la Fig. 4.52 se muestra la forma de la función de energía para cada una de las diferentes regiones.



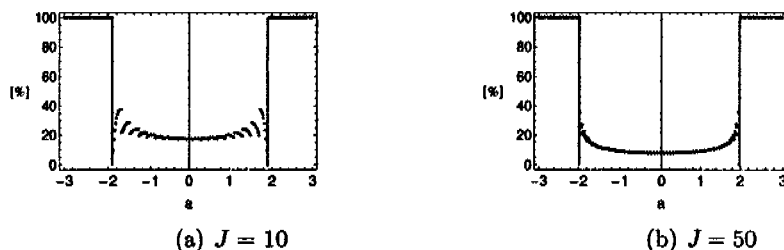
**Figura 4.52:** Forma de la energía cuántica como función de  $M$  para las diferentes regiones del espacio de parámetros.  $J = 10$ .

Como puede observarse, en cada región domina un estado diferente. En la región 1 el estado dominante es  $|J, -J\rangle$ , mientras que en la región 2 es  $|J, J\rangle$ , en la región 3, por el contrario, no se tiene un único estado dominante en toda la región sino una sucesión de estados que van desde  $|J, -J\rangle$  hasta  $|J, J\rangle$  dependiendo del valor de los parámetros, en esta región el valor dominante de  $M$  está dado por la ecuación  $M = -[(a/(2b))]J$ . Por lo tanto, en las regiones 1 y 2 el porcentaje de traslape entre el estado base y el estado coherente es 100% mientras que en la región 3 está dado

por

$$|\langle \zeta_3 | g \rangle|^2 = \binom{2J}{J+M} \left( \frac{1-r_c}{2} \right)^{J+M} \left( \frac{1+r_c}{2} \right)^{J-M} \delta_{M, -\lfloor \frac{a}{2b} \rfloor J}.$$

En la Fig. 4.53 se muestra el traslape como función de uno de los parámetros conservando el otro constante para dos valores de  $J$ . Esta figura comprueba que en



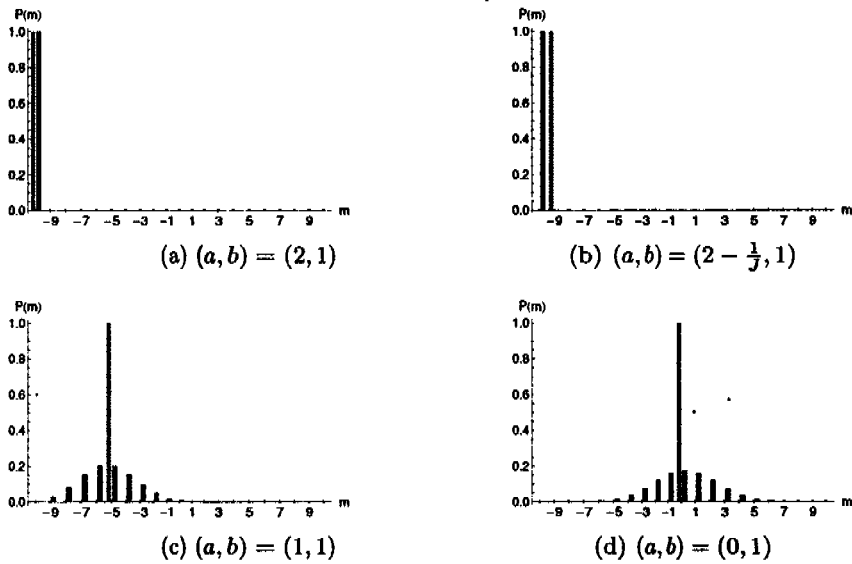
**Figura 4.53:** Se muestra el porcentaje del traslape entre la función de onda del estado base y el estado coherente de prueba en el espacio de parámetros como función de  $a$  manteniendo  $b = 1$ .

las regiones 1 y 2 el porcentaje del traslape es de 100%. En la región 3 pueden observarse, cuando  $J = 10$ , las múltiples transiciones de fase; sin embargo, es en la transición marcada por la separatriz clásica que el porcentaje es mínimo. Podemos ver que cuando  $J$  crece, las transiciones de fase intermedias se hacen mucho menos notorias hasta desaparecer prácticamente, excepto las marcadas por la separatriz. Además, cuando  $J$  crece, el valor del traslape en la región 3 tiende a cero. En la Tabla 4.5 se muestran los valores del porcentaje del traslape para algunos puntos en la región 3 con diferentes valores de  $J$ .

En la Fig. 4.54 se muestra una comparación entre la probabilidad de ocupación relativa para el estado coherente y para el estado base. En estas figuras se observa que la mayor correlación del estado coherente con el estado base se encuentra en las regiones 1 y 2 como ya se había mostrado. Puede observarse que justo sobre la separatriz el traslape es cero pues la probabilidad relativa muestra que en esos puntos el estado base tiene una transición de fase al pasar del estado  $|10, -10\rangle$  al estado  $|10, -9\rangle$ . También muestra por qué el traslape es tan malo dentro de la región 3 pues el estado coherente está compuesto de muchos estados  $|J, M\rangle$ ; es decir, la probabilidad se reparte entre más de un estado aunque el estado dominante sí corresponde al estado base. Para esta gráfica únicamente se consideraron valores de  $a$  positivos; cuando  $a < 0$ , las figuras son muy parecidas pero los estados dominantes en ese caso son los que tienen proyección de momento angular positiva.

**Tabla 4.5:** Traslape de la función de onda del estado base, para  $J = 10$ ,  $J = 50$  y  $J = 100$ , con el estado coherente en algunos puntos de la región 3.

	$(2, 1)$	$(2 - \frac{1}{J}, 1)$	$(1, 1)$	$(0, 1)$
$J = 10$	100 %	0 %	20.04 %	17.62 %
$J = 50$	100 %	0 %	9.16 %	7.96 %
$J = 100$	100 %	0 %	6.50 %	5.63 %



**Figura 4.54:** Probabilidad de ocupación relativa. En la figura se muestran las probabilidades de ocupación relativa del estado base en color claro, y del estado coherente en color oscuro.  $J = 10$ .

### Valores esperados del momento angular

En este caso, el estado base es de la forma

$$|\Psi_0\rangle = |J, M\rangle,$$

por lo tanto, el valor esperado de los elementos de matriz de un operador  $\hat{O}$  es

$$\langle \hat{O} \rangle = \langle J, M | \hat{O} | J, M \rangle.$$

Los valores esperados de los operadores de momento angular  $\hat{J}_x$  y  $\hat{J}_y$  son cero, y el de  $\hat{J}_z$  está determinado por

$$\langle J, M' | \hat{J}_z | J, M \rangle = M \delta_{M', M}.$$

En la Tabla 3.15 están dados los valores esperados de las componentes del momento angular con respecto al estado coherente de prueba. En este caso se tiene un grado de libertad pues el Hamiltoniano no depende del parámetro  $\phi$ ; esto significa que el sistema es invariante ante cualquier rotación sobre el eje  $Z$ ; sin embargo, dependiendo del valor escogido para  $\phi$  el ajuste de los valores esperados de las observables se modifica. En este caso, se escoge  $\phi = \pi/4$  con lo que  $J_y/J$  y  $J_x/J$  tienen exactamente los mismos valores en el espacio de parámetros pues según las expresiones de la Tabla 3.15 al substituir este valor de  $\phi$  en las expresiones para la región 3 se obtiene

$$J_x/J = \sqrt{1 - r_c^2} = J_y/J,$$

por lo que los valores esperados de las observables correspondientes son cero en las regiones 1 y 2, es decir, concuerdan con el valor esperado cuántico, pero difieren en la región 3. En la Fig. 4.55 se muestra la forma de  $J_x/J$  y  $J_y/J$  como funciones de los parámetros.

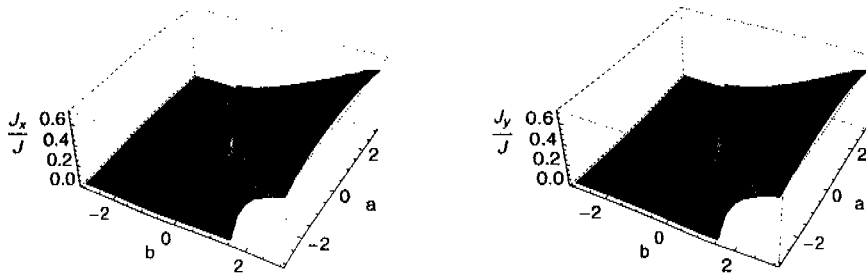
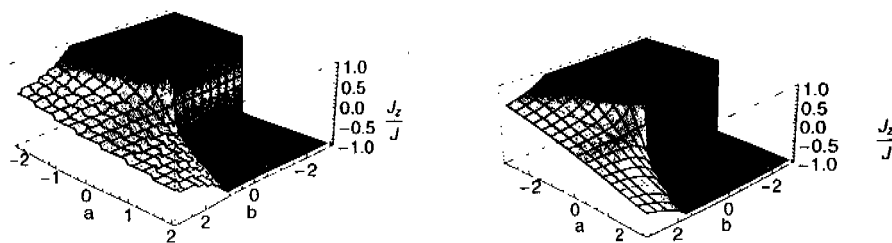


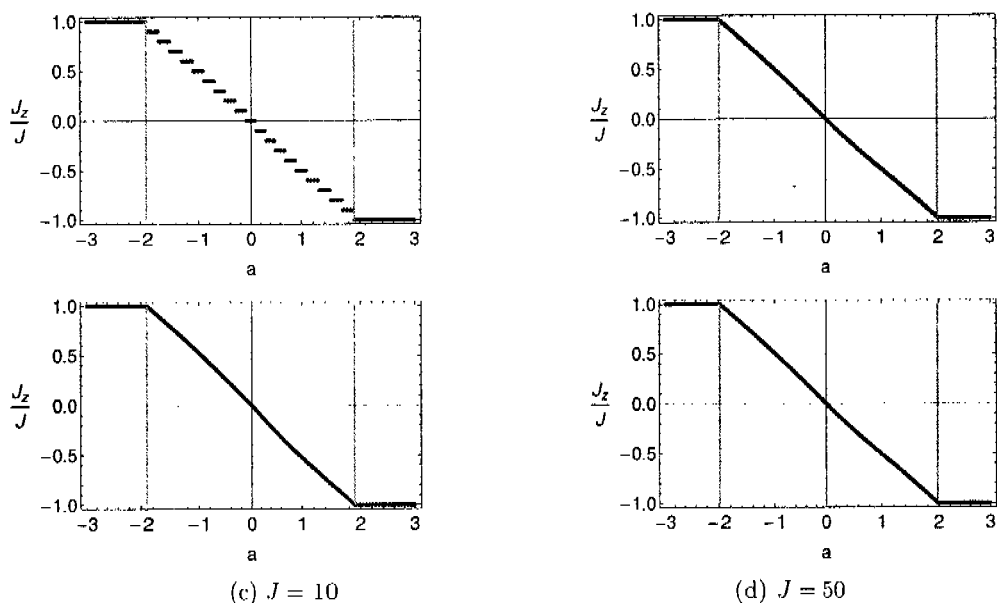
Figura 4.55: Valor esperado de  $\hat{J}_x/J$  y  $\hat{J}_y/J$  para el estado coherente.  $J = 10$ .

Es importante hacer notar que aún cuando  $J \rightarrow \infty$ , el resultado clásico no se reduce al cuántico pues su valor es  $\sqrt{(1 - a/(2b))/2}$ , es decir, es dependiente del valor de los parámetros. En la Fig. 4.56 se muestra  $J_z/J$  como función de los dos



**Figura 4.56:** Valor esperado de  $\hat{J}_z/J$  como función de  $a$  y  $b$  para el estado base (izquierda) y para el estado coherente (derecha), para  $J = 10$ .

parámetros  $a$  y  $b$ . Se observa que mientras el valor esperado de  $\hat{J}_z$  con respecto al estado coherente en la región 3 varía continua y suavemente desde  $-J$  hasta  $J$ , el correspondiente al estado cuántico muestra una serie de escalones debidos a las transiciones de fase que presenta la función de onda en esa región; esto se observa más claramente en el corte mostrado en la Fig. 4.57.



**Figura 4.57:** Valor esperado de  $\hat{J}_z/J$  en función del parámetro  $a$  para la solución exacta (arriba) y para el estado coherente (abajo). En todos los casos se consideró  $b = 1$  y  $J = 10$ . Las líneas verticales corresponden a la separatriz para cada caso.

En estas figuras se muestra el comportamiento de  $J_z/J$  y pueden apreciarse claramente las discontinuidades de la función cuando el estado base pasa de un estado con una proyección de momento angular a otro con diferente proyección, es decir, las diversas transiciones de fase. Sin embargo, cuando  $J$  crece estas discontinuidades aumentan en número, por lo que el intervalo de transición es mucho más pequeño y los escalones ya no son apreciables para valores grandes de  $J$ , es decir, el comportamiento del estado base se acerca cada vez más al del estado coherente.

Por otra parte, los resultados dentro de las regiones 1 y 2 coinciden con los del estado coherente debido a que en esas zonas ambas funciones coinciden exactamente.

### Valores esperados del cuadrado de las componentes del momento angular

Conociendo la acción de los operadores  $\hat{J}_+$  y  $\hat{J}_-$  en los estados de Dicke

$$\hat{J}_\pm |J, M\rangle = \sqrt{J(J+1) - M(M \pm 1)} |J, M \pm 1\rangle,$$

es fácil calcular los valores esperados de las componentes de momento angular:

$$\begin{aligned} \langle J, M | \frac{\hat{J}_x^2}{J^2} |J, M\rangle &= \frac{1}{2J^2} (J(J+1) - M^2), \\ \langle J, M | \frac{\hat{J}_y^2}{J^2} |J, M\rangle &= \frac{1}{2J^2} (J(J+1) - M^2), \\ \langle J, M | \frac{\hat{J}_z^2}{J^2} |J, M\rangle &= \frac{M^2}{J^2}. \end{aligned}$$

Es decir, el valor cuántico de  $J_x^2/J^2$  y el de  $J_y^2/J^2$  coinciden en todo el espacio de parámetros. Esto ocurre también en el caso clásico donde

$$\frac{J_x^2}{J^2} = \frac{1}{2J} + \frac{1}{4} \left(2 - \frac{1}{J}\right) (1 - r_c^2) = \frac{J_y^2}{J^2}.$$

En la Fig. 4.58 se grafican los valores esperados de  $\hat{J}_x^2/J$  y  $\hat{J}_y^2/J$  como funciones de los parámetros  $a$  y  $b$  para la función de prueba y el estado base.

En las regiones 1 y 2, los valores esperados clásico y cuántico coinciden exactamente, mientras que en la región 3, la forma es parecida, pero mientras que el caso clásico presenta un comportamiento continuo de variación suave, el caso cuántico tiene discontinuidades debidas a las múltiples transiciones de fase. En la Fig. 4.59 se

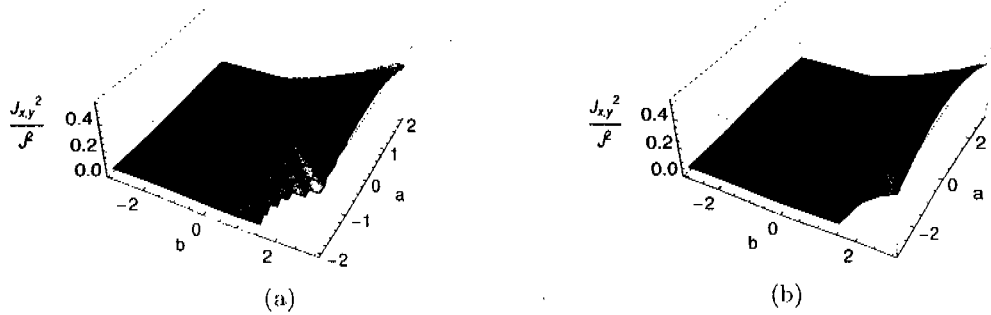


Figura 4.58: Valor esperado de  $\hat{J}_x^2/J^2$  y  $\hat{J}_y^2/J^2$  como función del  $a$  y  $b$ , para la solución exacta (a) y para el estado coherente (b), para  $J = 10$ .

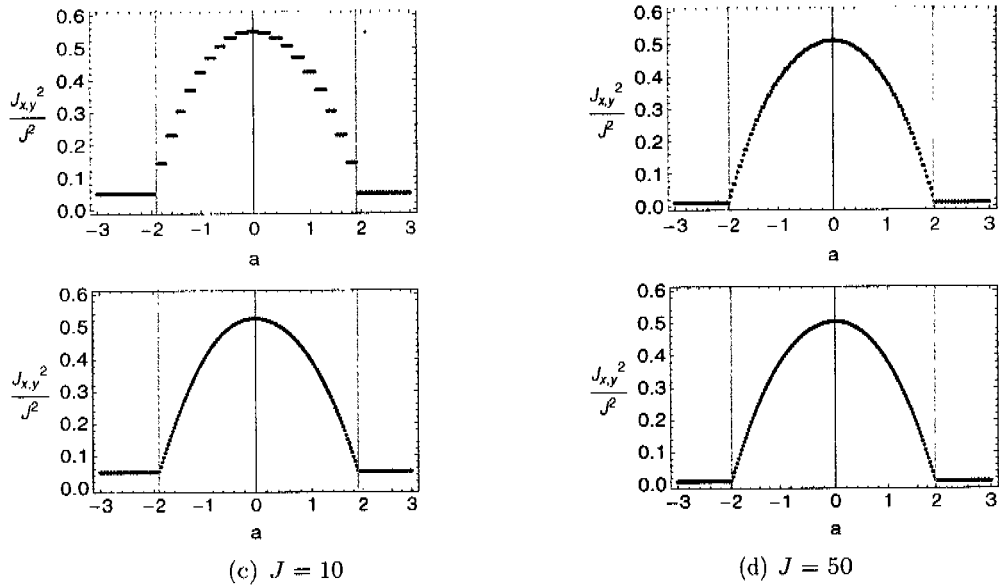


Figura 4.59: Valor esperado de  $\hat{J}_x^2/J^2$  como función del parámetro  $a$  para la solución exacta (arriba) y el estado coherente (abajo), con  $b = 1$ . Las líneas verticales corresponden a la separatriz para cada caso, con  $J = 10$ .

muestran los valores esperados como funciones de una sola variable, para dos valores diferentes de  $J$ ; en estas figuras pueden observarse nuevamente las transiciones de fase presentes en la región 3 como discontinuidades cuya envolvente es la curva clásica;



también puede apreciarse cómo al aumentar el valor de  $J$  dichas discontinuidades desaparecen.

A continuación, se muestran las figuras correspondientes al valor esperado de  $\hat{J}_z^2/J^2$ , en la Fig. 4.60 como función de ambos parámetros, y en la Fig. 4.61 como función de un solo parámetro.

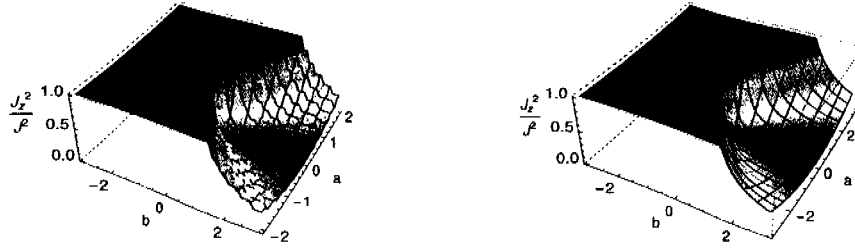


Figura 4.60: Valor esperado de  $\hat{J}_z^2/J^2$  como función de  $b$  y  $a$ , para la solución exacta (izquierda) y para el estado coherente (derecha) con  $J = 10$ .

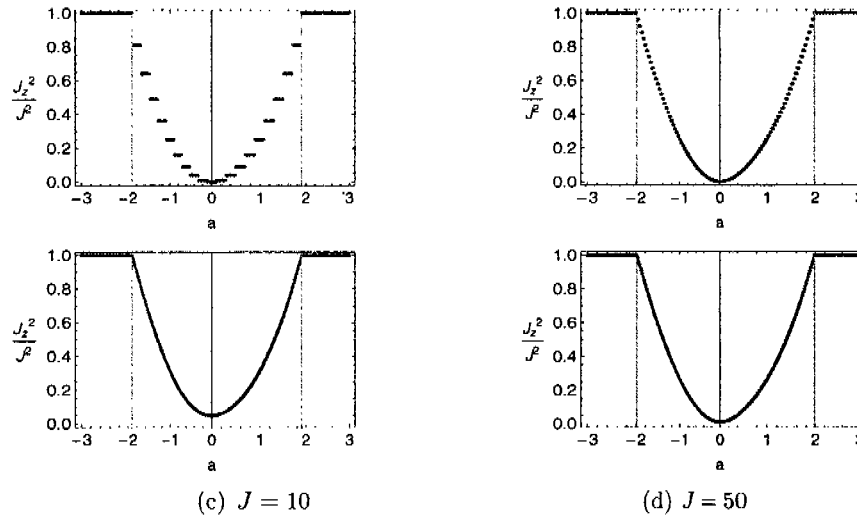


Figura 4.61: Valor esperado de  $\hat{J}_z^2/J^2$  como función del parámetro  $a$  para la solución exacta (arriba) y el estado coherente (abajo) con  $b = 1$ . Las líneas verticales corresponden a la separatriz para cada caso.

Puede observarse que el comportamiento de esta observable es básicamente igual que para las dos observables anteriores.

## Parámetros de compresión

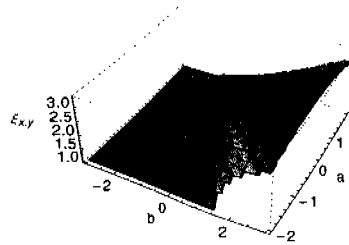
Como ya se ha argumentado antes, los parámetros de compresión de un estado coherente en cualquier dirección siempre valen uno; por lo tanto en este caso solamente los calcularemos para el estado base cuántico.

Las fluctuaciones cuánticas de las componentes del momento angular están dadas por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}(\delta J_x)^2 &= \frac{1}{2J^2}(J(J+1) - M^2), \\(\delta J_y)^2 &= \frac{1}{2J^2}(J(J+1) - M^2), \\(\delta J_z)^2 &= 0.\end{aligned}$$

En las regiones 1 y 2 donde el estado base corresponde a  $|J, -J\rangle$  y  $|J, J\rangle$ , respectivamente, el valor de la fluctuación en las direcciones  $X$  y  $Y$  es  $1/(2J)$ , mientras que en la región 3 varía desde  $1/(2J)$  hasta  $(J+1)/(2J)$ , dependiendo del valor de los parámetros  $a$  y  $b$ .

Se sabe que el momento angular promedio para el estado base apunta en la dirección  $Z$ ; por lo tanto, las dos direcciones perpendiculares para las cuales se calculan los parámetros de compresión son las direcciones  $X$  y  $Y$ . Utilizando los resultados anteriores y la definición de los parámetros de compresión (4.1.2), se obtienen los resultados mostrados en la Fig. 4.62



**Figura 4.62:** Parámetro de compresión para el estado base como función de los parámetros con  $J = 10$ .

Puede observarse que ambos parámetros de compresión tienen la misma forma y coincide a su vez con la forma del valor esperado de los operadores  $\hat{J}_{x,y}^2/J^2$ , debido a que el valor esperado de las dos componentes del momento angular vale cero.

Se dice que un estado presenta compresión si el alguno de los parámetros de compresión está por debajo del valor correspondiente a un estado coherente, es decir, si tiene un valor menor que uno. En las regiones 1 y 2 el valor de los parámetros de compresión es exactamente uno, lo cual corresponde a un estado coherente; sin embargo, en este caso ninguno de los dos parámetros de compresión es menor que uno en ningún punto del espacio de parámetros, es decir, el estado base no presenta compresión.

## Función Q

La matriz de densidad del estado base es de la forma

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= |g\rangle\langle g|, \\ &= |J, M\rangle\langle J, M|,\end{aligned}$$

por lo tanto, la expresión para  $\langle g|\xi\rangle$  es la siguiente

$$\langle J, M|\xi\rangle = e^{i(J+M)\frac{\phi}{4}} \binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^{\frac{J+M}{2}} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^{\frac{J-M}{2}},$$

y sustituyendo en la definición de la función de la función Q se obtiene

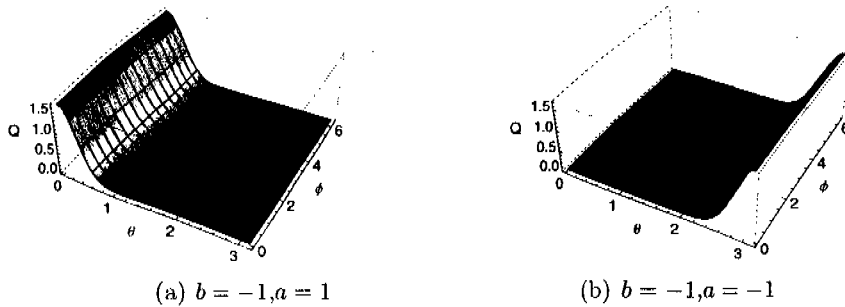
$$Q_{|J,M\rangle}(\xi) = \frac{2J+1}{4\pi} \binom{2J}{J+M} \left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^{J+M} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^{J-M}.$$

En las regiones 1 y 2 sabemos cual es el estado de Dicke que corresponde al estado base, sustituyendo estos resultados en la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned}Q_1(J, \theta, \phi) &= \frac{2J+1}{4\pi} 4^{-J} (1+\cos\theta)^{2J}, \\ Q_2(J, \theta, \phi) &= \frac{2J+1}{4\pi} 4^{-J} (1-\cos\theta)^{2J}.\end{aligned}$$

Al comparar estos resultados con los correspondientes al caso clásico (3.2.19), podemos observar que las expresiones de la función Q son exactamente las mismas, lo cual se esperaba pues sabemos que en esas dos regiones ambos estados son iguales; las gráficas de la función Q para estas dos regiones se muestran en la Fig. 4.63.

En la Fig. 4.64 se muestra la comparación entre la función Q para el estado base y para el estado coherente de prueba en la región 3, considerando diferentes valores de los parámetros.



**Figura 4.63:** Función  $Q$  para el estado base en las regiones 1 (izquierda) y 2 (derecha), con  $J = 10$ .

En estas figuras se observa la simetría que presentan las eigenfunciones ante el intercambio de  $a$  por  $-a$  en todo el espacio, y que ya se había mostrado en el porcentaje de traslape y en la población relativa.

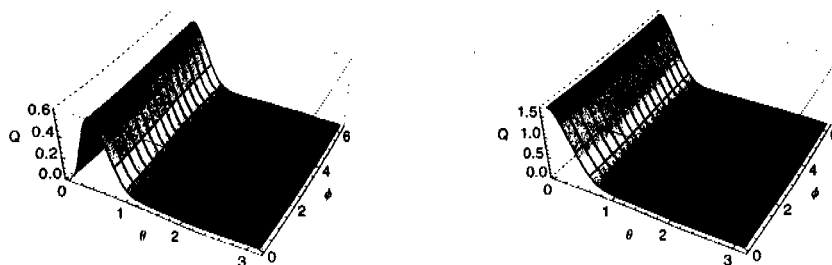
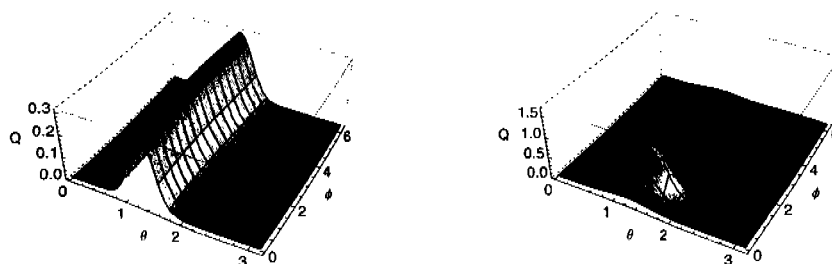
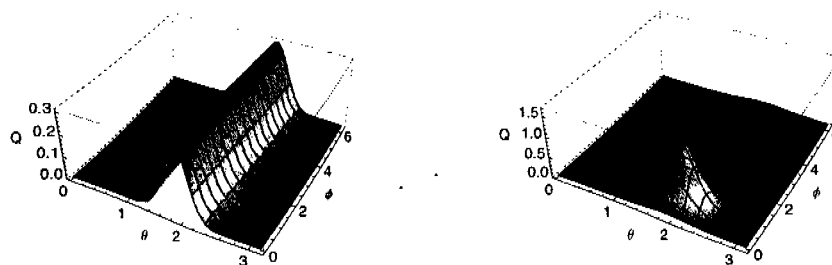
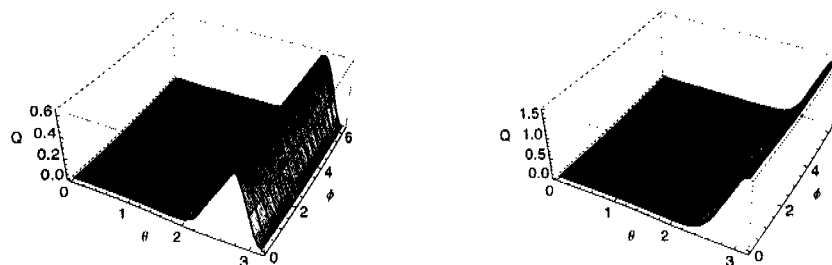
Las Figs. 4.64(a) y 4.64(d) muestran la función  $Q$  cuando los parámetros  $a$  y  $b$  se hallan sobre la separatriz del sistema. Puede observarse claramente por qué el porcentaje de traslape correspondiente es cero. Esto se debe a que el estado base cambia abruptamente del estado con proyección  $\pm 10$  al estado  $\pm 9$ , mientras que la deformación del estado clásico es mucho más suave. Puede verse también que lejos de la separatriz la función de prueba conserva la misma forma, modificándose únicamente su posición en el espacio en función del valor de los parámetros  $a$  y  $b$ .

La función  $Q$  muestra que en la región 3 el estado coherente no es una buena aproximación al estado base del sistema. Sin embargo, como ya hemos visto antes, sirve bastante bien para reproducir los valores esperados de algunas observables, en particular de la energía.

Como en este caso el estado base corresponde a un estado de Dicke, la expresión del segundo momento es muy sencilla pues sólo sobrevive un término de la expansión de estados coherentes en estados de Dicke. Utilizando que  $\langle J, M | \xi \rangle = D_{M, -J}^J$ , y la serie de Clebsch-Gordan se encuentra

$$\begin{aligned} \bar{M}_Q^{(2)} &= \langle J, M; J, M | 2J, 2M \rangle^2, \\ &= \left[ \frac{(2J)!}{(J+M)!(J-M)!} \right]^2 \frac{(2J+2M)!(2J-2M)!}{(4J)!}, \end{aligned}$$

es decir, el segundo momento de la función de Husimi es una constante que depende de la proyección  $Z$  del momento angular que tenga el estado (Fig. 4.65).

(a)  $b = 1, a = 1.9$ (b)  $b = 1, a = 0.5$ (c)  $b = 1, a = -0.5$ (d)  $b = 1, a = -1.9$ 

**Figura 4.64:** Función  $Q$  para el estado base (izquierda) y el estado coherente (derecha), en la región 3 para diferentes valores de los parámetros  $a$  y  $b$  con  $J = 10$ .

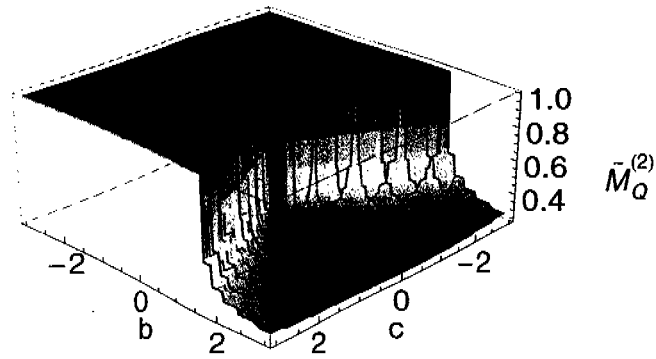


Figura 4.65: Segundo momento de la función de Husimi en función de los parámetros  $a$  y  $b$  para  $J = 10$ .

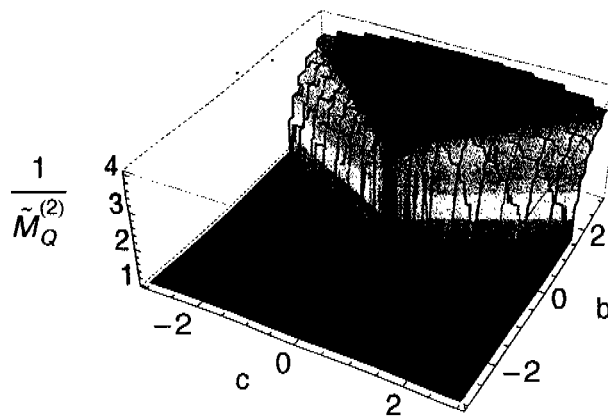


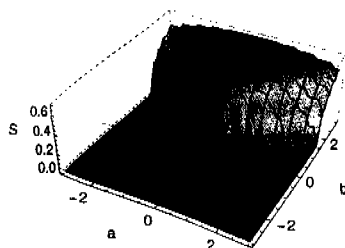
Figura 4.66: Inverso del segundo momento de la función de Husimi en función de los parámetros  $a$  y  $b$  para  $J = 10$ .

## Enredamiento

En este caso ( $c = 0$ ) los eigenestados del Hamiltoniano siempre corresponden a un estado de Dicke  $|J, M\rangle$ , cuya proyección de momento angular depende del valor de los parámetros  $a$  y  $b$ ; pero ya se ha visto que para estos estados la entropía de formación en la separación por modos es nula, por ello únicamente se analizará la separación por partículas.

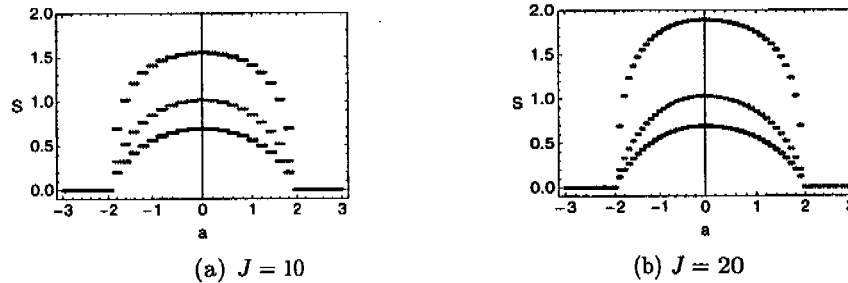
### Separación por partículas

Las eigenfunciones del Hamiltoniano corresponden a estados de Dicke,  $|J, M\rangle$ , por lo tanto, los coeficientes de su descomposición en la base desacoplada corresponden únicamente a los coeficientes de Clebsch-Gordan. En la Fig. 4.67 se muestra la entropía de formación de una partícula con el resto como función de los dos parámetros, puede observarse que los cambios en el comportamiento de la entropía se corresponden con las transiciones de fase encontradas, mientras que la primera y última transiciones de fase están marcadas por la separatriz clásica del sistema.



**Figura 4.67:** Entropía de formación de una partícula con el resto para el estado base cuántico como función de los parámetros  $a$  y  $b$ , con  $J = 10$ .

Las gráficas correspondientes al enredamiento de dos partículas y la mitad con el resto presentan una forma cualitativamente igual a la de una partícula con el resto por lo que no se muestran las gráficas como función de ambos parámetros, sin embargo en la Fig. 4.68 se muestra un corte superpuesto de las tres superficies. Como puede observarse el valor máximo del enredamiento aumenta cuando lo hace el valor de  $j_1$ . Puede observarse que cuando el número de partículas crece también lo hace el valor máximo de la entropía para dos y la mitad de las partículas con el resto, lo cual no sucede para una partícula. Esto sucede porque, como ya hemos visto en la sección correspondiente a  $a = 0$ , cuando  $j_1 = 1/2$  se separa al sistema en dos subsistemas de



**Figura 4.68:** Cortes a la superficie de la entropía de enredamiento de una partícula (línea superior), dos partículas (línea media) y la mitad de las partículas (línea inferior) con el resto, manteniendo  $b = 1$  y como función del parámetro  $a$ , para dos valores de  $J$ .

dos niveles, por lo que en esa partición el sistema corresponde a uno de dos qubits y el enredamiento máximo de un estado corresponde al de un estado de Bell.

En este caso el estado coherente de prueba no reproduce el comportamiento del enredamiento para el estado base cuántico, en general, cuando se estudia el enredamiento de funciones de onda en particiones por partículas los estados coherentes no son buenas funciones de prueba pues su enredamiento es siempre nulo.

#### 4.4. Caso general

En esta sección se consideran los tres parámetros del Hamiltoniano,  $a$ ,  $b$  y  $c$ , diferentes de cero. Esto implica mayor dificultad para resolver el caso semiclásico debido a que para encontrar los puntos críticos del sistema debe resolverse la ecuación

$$(a - 2\tilde{b}z) \sqrt{1 - z^2} = \mp c z, \quad (4.4.1)$$

donde  $\tilde{b} = b(2 - 1/J)$  y  $z = -\cos \theta$ , lo que implica resolver una ecuación cuártica. Es por esta razón que los resultados semiclásicos no pueden obtenerse de manera analítica y todo el análisis se ha realizado numéricamente. Debido a esto, en este caso, es más importante conocer las simetrías presentes en el sistema que nos permitan simplificar el problema y analizar únicamente aquellos casos no redundantes. En la Tabla 4.6 se muestra el comportamiento de la energía y de los coeficientes de los estados propios ante el cambio de signo de los diferentes parámetros.

Es importante observar que hay simetrías únicamente ante el cambio de signo de



Tabla 4.6: Simetrías del Hamiltoniano ante el cambio de signo de los parámetros.

Parámetros			Energía	Estado	Coefficientes
$a$	$b$	$c$	$E_i$	$\Psi_i$	$C_M^i$
$a$	$b$	$-c$	$E_i$	$R_z(\pi)\Psi_i$	$(-1)^{J+M}C_M^i$
$-a$	$b$	$c$	$E_i$	$R_x(\pi)\Psi_i$	$(-1)^{J+M}C_{-M}^i$
$-a$	$b$	$-c$	$E_i$	$R_y(\pi)\Psi_i$	$(-1)^{J+M}C_{-M}^i$

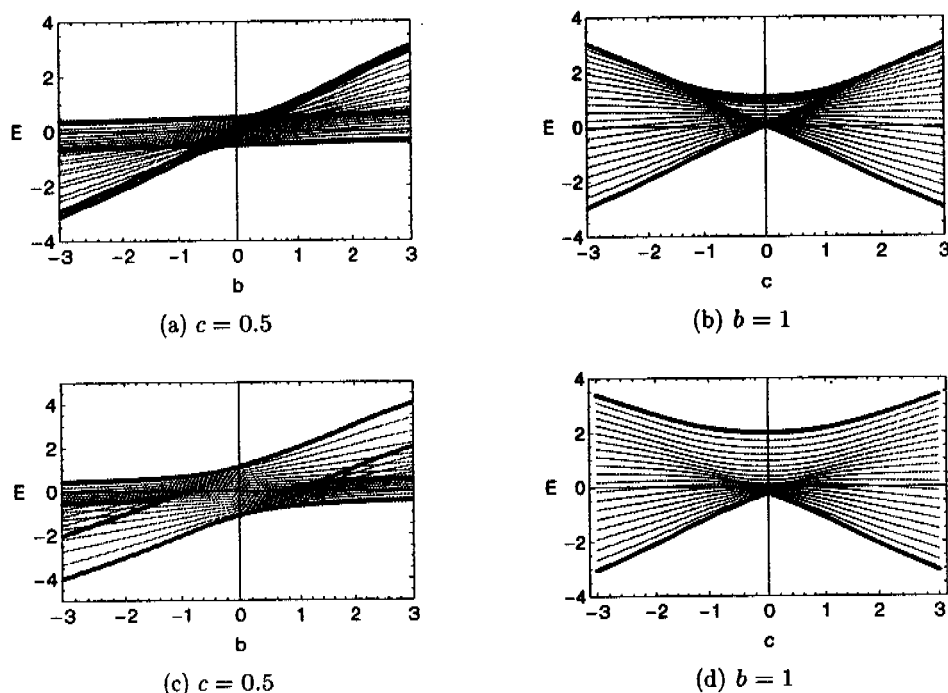
los parámetros  $a$  y  $c$  y no de  $b$ . De aquí en adelante sólo se analizarán los casos con parámetros positivos, pero a partir de éstos puede reproducirse cualquier otro caso teniendo en cuenta estas simetrías.

## Energía

Primero se determina el espectro de energías en función de los parámetros  $b$  y  $c$  del Hamiltoniano. En la Fig.4.69 se muestran los espectros de energía cuánticos junto con las energías clásicas para un número de partículas  $N = 20$ , que corresponde a un momento angular  $J = 10$ , y dos valores del parámetro restante:  $a = 0.1$  (figuras superiores) y  $a = 1$  (figuras inferiores). Puede observarse que para  $a = 0.1$  los espectros de energía son muy similares a los del caso  $a = 0$ , sin embargo, en el caso  $a = 0$  la energías se hallan degeneradas en toda la región entre las energías clásicas, en este caso las energías clásicas siguen dividiendo las regiones donde hay degeneración de aquellas donde no la hay, pero la degeneración de las funciones es únicamente puntual y las energías clásicas marcan únicamente el primer cruce de energías. Aún sobre la línea  $c = 0$  la degeneración del estado base es únicamente puntual, como veremos en el análisis del gap.

En los cortes correspondientes al parámetro  $c$  puede observarse que cuando  $a$  crece la región de degeneración del lado izquierdo se aleja del estado base y se acerca al estado más excitado, mientras que la región del lado derecho se acerca al estado base, sin embargo, debido a las simetrías del sistema podemos concluir que aún para valores grandes de  $a$ , el estado base permanece sin degeneración.

En el corte en  $b$  se observa que la zona de degeneración disminuye conforme  $a$  crece y sólo permanecen degenerados los puntos con  $c = 0$ , sin embargo, esto ocurre



**Figura 4.69:** Espectros de energía para el caso general. En (a) y (b)  $a = 0.1$ , en (c) y (d)  $a = 1$ . Para estas figuras se ha considerado  $J = 10$ , que significa  $N = 20$  partículas en el condensado. En cada una una de las figuras se muestran en color oscuro las energías clásicas correspondientes.

porque  $b = 1$  es un valor particular en el que existe degeneración, sin embargo, para otros valores de  $b$  ni siquiera en ese punto existe degeneración.

A continuación se grafica el gap como función de los parámetros  $b$  y  $c$ , Fig.4.70. La Fig.4.71 muestra una comparación del gap para ambos valores de  $a$ .

En estas figuras podemos observar que fuera de la región  $c = 0$  con  $b > 0$  el valor del gap es claramente diferente de cero, así que es únicamente en esa región donde podría existir degeneración.

En la Fig.4.72 se muestra el gap a lo largo de la línea  $c = 0$ , se observa que sobre ella existen varios puntos de degeneración que corresponden a las diversas transiciones de fase que se han encontrado en el caso  $c = 0$  y que ya han sido estudiadas.

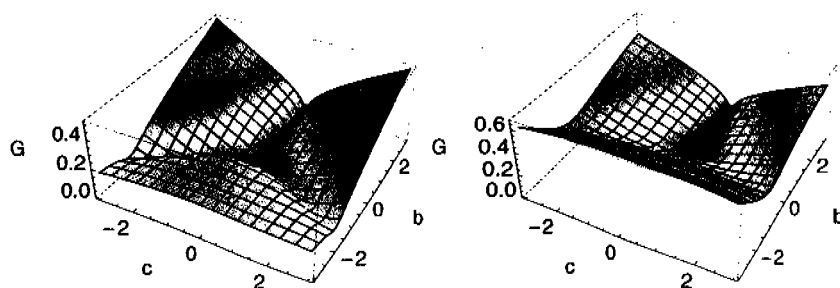


Figura 4.70: Gráfica de  $G = E_1 - E_0$  como función de  $b$  y  $c$  con  $a = 0.1$  del lado izquierdo, y  $a = 1$  del lado derecho, para  $J = 10$ .

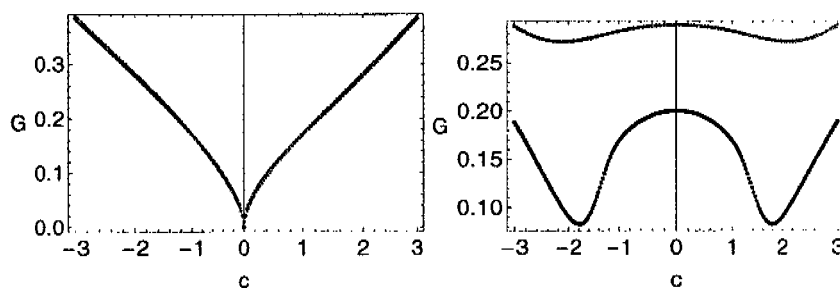


Figura 4.71: Comparación entre el gap con  $a = 0.1$ , línea oscura, y  $a = 1$  línea clara, para dos valores de  $b$ . Del lado izquierdo  $b = 1$ , del lado derecho  $b = -1$ .

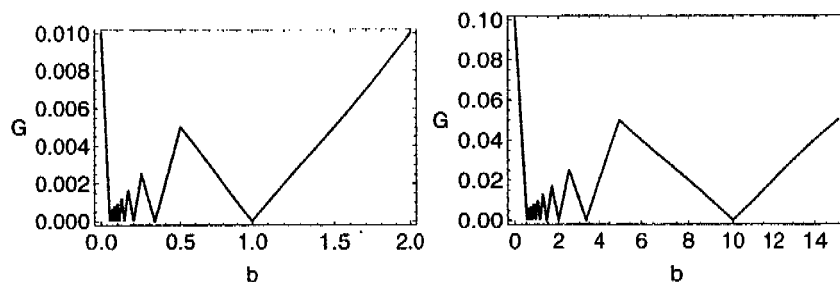
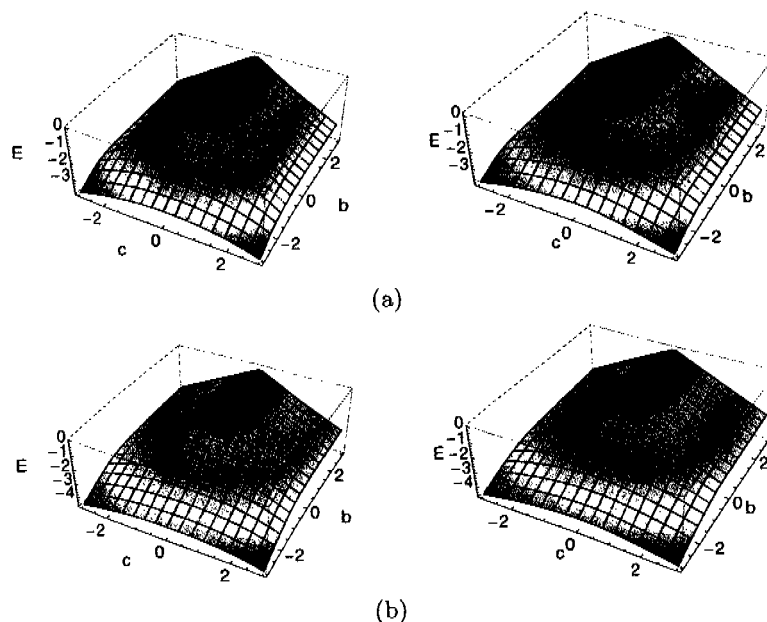


Figura 4.72: Corte del gap para  $c = 0$  con  $a = 0.1$ , lado izquierdo y  $a = 1$  lado derecho como función de  $b$ .  $J = 10$ .

La superficie de energía clásica mínima (derecha) y la superficie de energía cuántica del estado base (izquierda), en función de los parámetros ( $b$ ,  $c$ ) del Hamiltoniano modelo, se muestra en la Fig. 4.73 para  $N = 20$  partículas y dos valores del parámetro

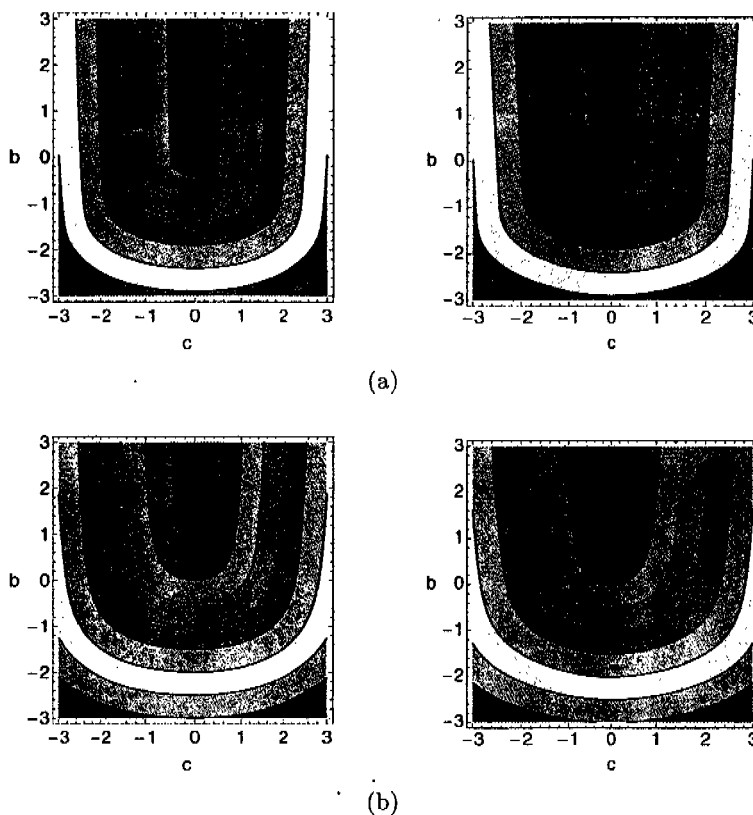
$a = 0.1, 1$ . Puede observarse que en este caso el estado coherente reproduce muy bien la energía del estado base. Aunque para valores pequeños de  $a$  aún se conserva la



**Figura 4.73:** A la izquierda se tiene la superficie de energía clásica y a la derecha la superficie de energía cuántica en función de los parámetros  $b$  y  $c$ . En (a)  $a = 0.1$  y en (b)  $a = 1$ , para ambos casos se considera  $J = 10$ .

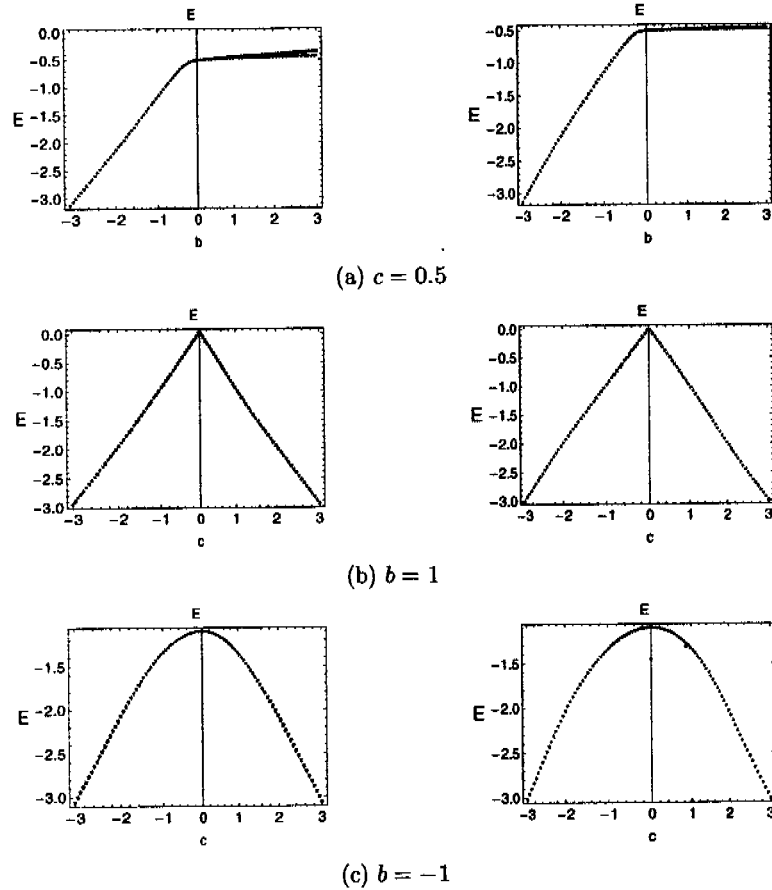
huella de la separatriz del caso  $a = 0$ , en este caso no existe un transición de fase pues los cambios son suaves y conforme  $a$  crece la superficie se suaviza más y se pierde el rastro de la separatriz. En la Fig. 4.74 se muestran las curvas de nivel de las superficies de energía. En éstas se observa que todas las curvas pertenecen a una misma familia, es decir, no se observan cambios en el comportamiento de las curvas por lo que no se aprecia la existencia de transiciones de fase cuánticas.

En la Fig. 4.75 se muestran cortes a las superficies de energía clásica en color oscuro, y cuántica en color claro para  $a = 0.1$ . Las figuras del lado izquierdo corresponden a  $J = 10$  y las del lado derecho a  $J = 50$ . Puede observarse que la correspondencia entre las energías del estado base y la del estado coherente es muy buena en todo el espacio, y que es mejor aún, cuando aumenta el número de partículas. Puede apreciarse que la forma de la superficie de energía es similar a la del caso  $a = 0$  pero se va suavizando cuando el parámetro  $a$  aumenta.

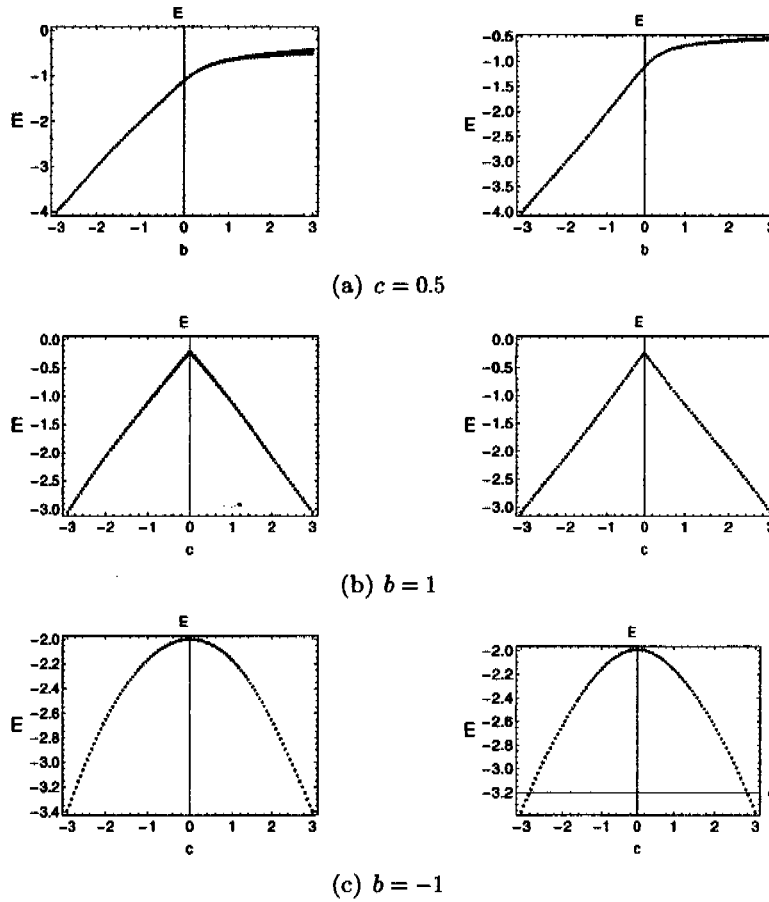


**Figura 4.74:** En la parte superior se muestran las curvas de nivel para la superficie de energía cuántica (izquierda) y clásica (derecha), correspondientes a  $a = 0.1$ , en la parte inferior  $a = 1$ .  $J = 10$ .

En Fig.4.76 se muestran cortes a las superficies de energía para  $a = 1$ . Puede apreciarse que el comportamiento es similar al caso  $a = 0.1$ , sin embargo, en este caso las líneas son mucho más suaves, es decir, se van perdiendo las huellas de las transiciones de fase del caso  $a = 0$ .



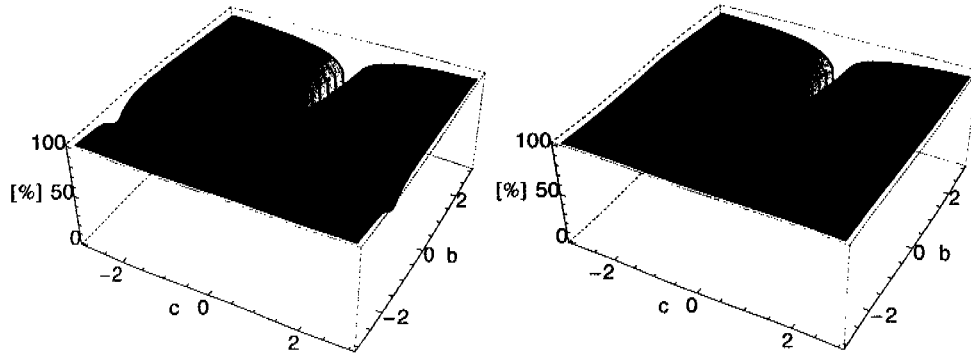
**Figura 4.75:** Cortes de las superficies de energía, clásica y cuántica, a lo largo de las rectas (a)  $c = 0.5$ , (b)  $b = 1$  y (c)  $b = -1$ , con  $a = 0.1$  y dos valores de  $J$ . En el lado izquierdo se utilizó  $J = 10$  mientras que en el derecho  $J = 50$ . La línea clara corresponde a la energía cuántica y la línea oscura a la energía clásica.



**Figura 4.76:** Cortes de las superficies de energía, clásica y cuántica, a lo largo de las rectas (a)  $c = 0.5$ , (b)  $b = 1$  y (c)  $b = -1$ , con  $a = 1$  y dos valores de  $J$ . En el lado izquierdo se utilizó  $J = 10$  mientras que en el derecho  $J = 50$ . La línea clara corresponde a la energía cuántica y la línea oscura a la energía clásica.

## Traslape de estados cuánticos y semiclásicos

En la Fig. 4.77 se muestra el traslape entre la función de onda del estado base y el estado coherente de prueba para dos valores del parámetro  $a$  y como función de  $b$  y  $c$ . Puede observarse que las regiones donde se presentan los cambios en el



**Figura 4.77:** Porcentaje de traslape entre la función de onda del estado base y el estado coherente de prueba en el espacio de parámetros, para  $a = 0.1$  del lado izquierdo, y  $a = 1$  del lado derecho. En ambos casos  $J = 10$ .

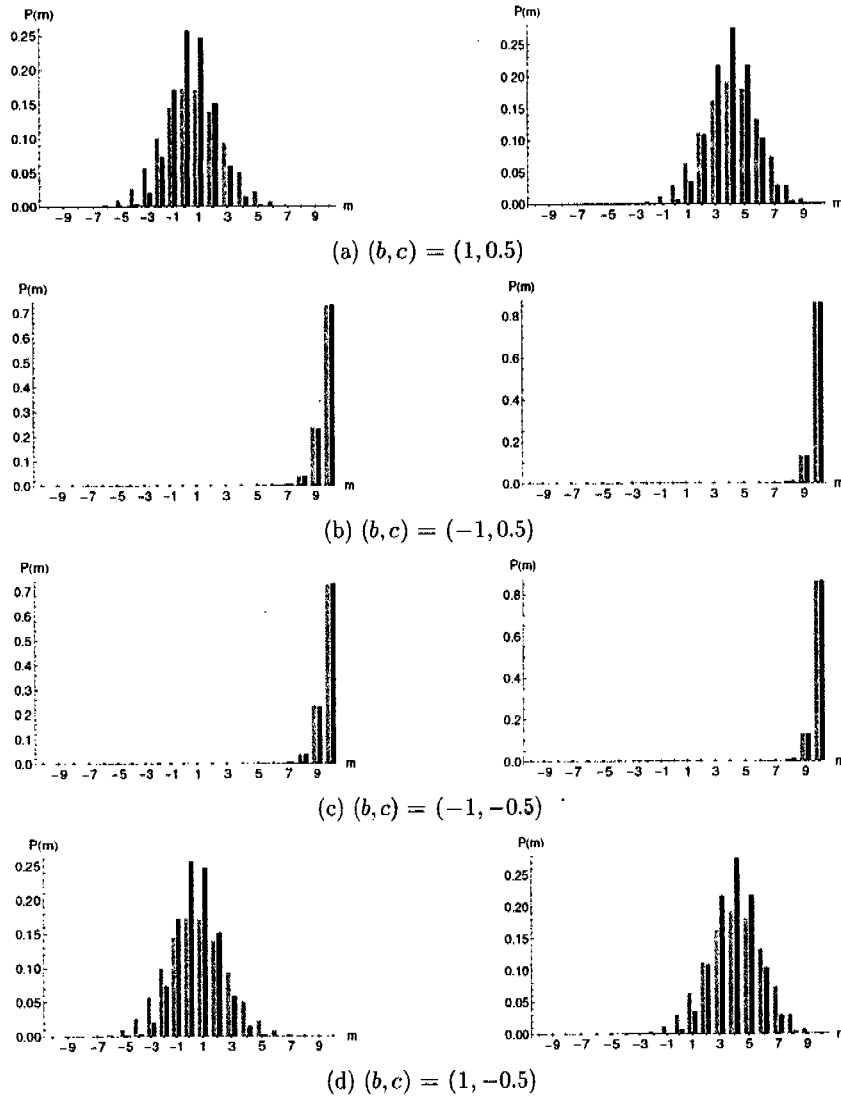
comportamiento del traslape tienen una forma similar a aquella del caso  $a = 0$ . Podemos ver que cuando  $a = 0.1$  aún puede observarse las líneas que correspondían a la separatriz del caso  $a = 0$ . Sin embargo, cuando  $a = 1$  este rastro de la separatriz va desapareciendo y la única región en la que el traslape presenta cambios drásticos en su comportamiento es la zona  $c = 0$  con  $b > 0$  donde el estado base no puede ser aproximado por un estado coherente.

### Probabilidad de ocupación relativa

La probabilidad de ocupación relativa para el estado coherente y el estado base cuántico se muestran en la Fig. 4.78 para  $a = 0.1$  del lado izquierdo y  $a = 1$  del lado derecho. Puede observarse que la probabilidad de ocupación relativa del estado coherente reproduce bastante bien la del estado cuántico.

En este caso el comportamiento de la población relativa es unimodal en todo el espacio a diferencia de lo que sucede en el caso  $a = 0$ , y al desplazarse en el espacio de parámetros sólo va cambiando el centro de la distribución. Además, cuando  $a$



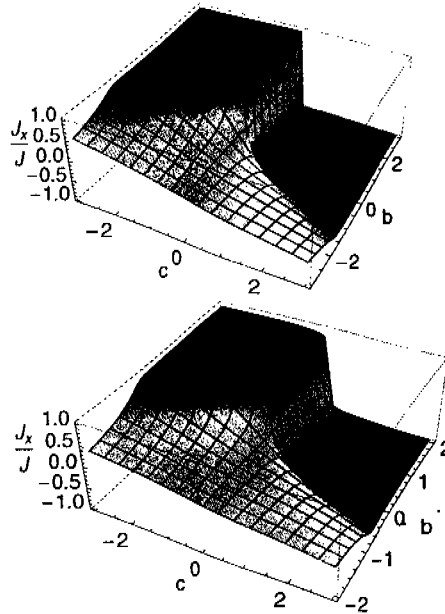


**Figura 4.78:** Probabilidades de ocupación relativa de la solución exacta en color oscuro, y del estado coherente en color claro. Las figuras del lado izquierdo corresponden a  $a = 0.1$  y las del lado derecho a  $a = 1$ .  $J = 10$ .

crece, la distribución cuántica se vuelve más simétrica acercándose más a la forma para el estado coherente.

### Valores esperados de las componentes del momento angular

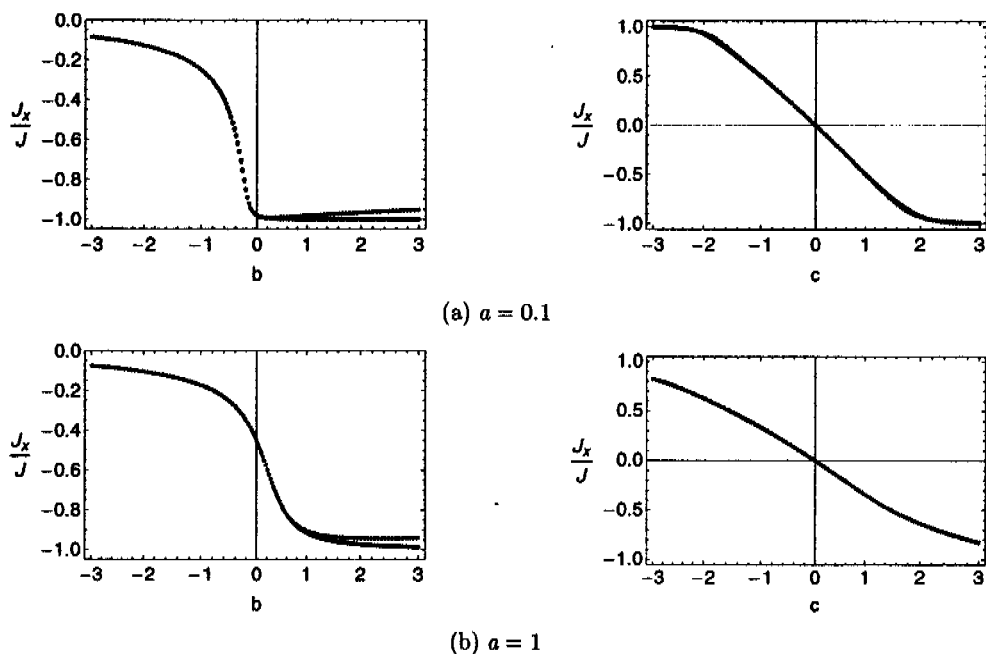
En la Fig 4.79 se muestran los resultados del valor esperado de  $\hat{J}_x/J$  con respecto al estado coherente de prueba y el estado base, en función de los parámetros  $b$  y  $c$  para  $a = 0.1$ . Los resultados para  $a = 1$  no se muestran aquí pues la forma es muy similar aunque las curvas son más suaves. Sin embargo, en Fig.4.80 se muestran cortes a las superficies para ambos valores de  $a$ .



**Figura 4.79:** Valor esperado de  $\hat{J}_x/J$  en función de los parámetros  $b$  y  $c$  con  $a = 0.1$ , para el estado coherente (lado izquierdo) y la solución exacta (lado derecho).  $J = 10$ .

Cuando el valor del parámetro  $a$  es pequeño se observa una correspondencia entre el resultado cuántico y el del estado coherente donde aún puede observarse la separatriz clásica del caso  $a = 0$ .

Sin embargo, cuando el valor del parámetro  $a$  aumenta comienzan a apreciarse las diferencias, claramente disminuye la definición de las zonas de transición y las líneas



**Figura 4.80:** Valor esperado de  $\hat{J}_x/J$  para el estado coherente (línea clara) y el estado base (línea oscura), en función de un parámetro, para dos valores de  $a$ : (a)  $a = 0.1$ , (b)  $a = 1$ . Del lado izquierdo  $c = 0.5$  y del lado derecho  $b = -1$  para  $J = 10$ .

se suavizan. También se observa cómo mejora la aproximación entre ambas funciones excepto en la zona con  $b > 0$  que es en la que las funciones tienen mayores diferencias.

No se mostrarán los resultados correspondientes a  $\hat{J}_y$  pues, como ya se ha explicado anteriormente, su valor esperado tiene un valor constante e igual a cero en todo el espacio de parámetros.

En la Fig.4.81 se muestra el valor esperado de  $\hat{J}_z/J$  como función de ambos parámetros,  $b$  y  $c$ , para  $a = 0.1$ . Mientras que en Fig.4.82 se muestran los cortes a estas superficies para dos valores del parámetro  $a$ .

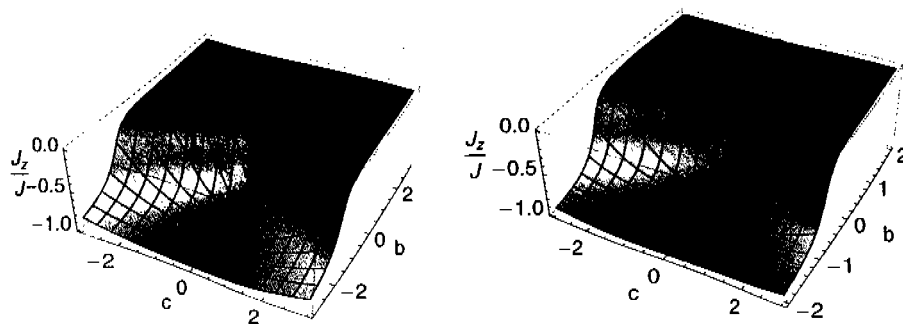


Figura 4.81: Valor esperado de  $\hat{J}_z/J$  en función de los parámetros  $b$  y  $c$  con  $a = 0.1$ , para el estado coherente (lado izquierdo) y la solución exacta (lado derecho) con  $J = 10$ .

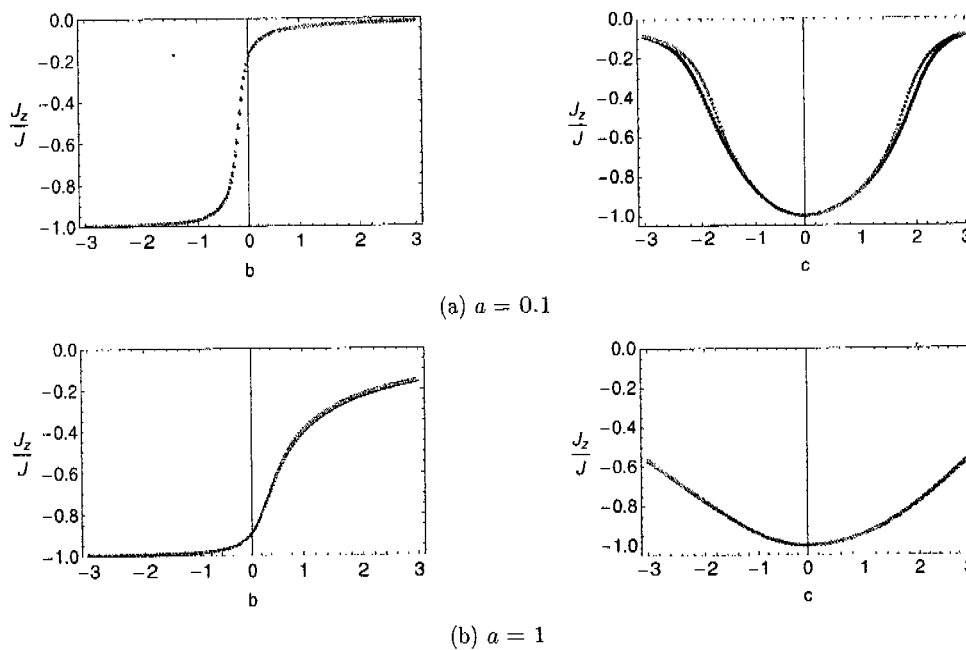
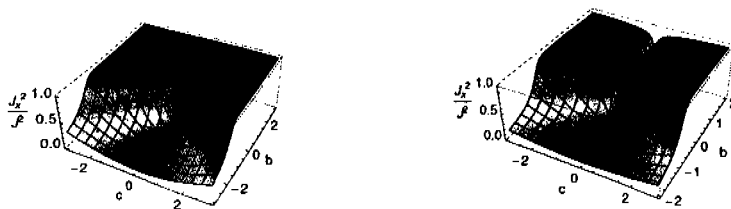


Figura 4.82: Valor esperado de  $\hat{J}_z/J$  para el estado coherente (línea clara) y el estado base (línea oscura), en función un parámetro para dos valores del parámetro  $a$ . En las figuras del lado izquierdo  $c = 0.5$  y en las del lado derecho  $b = 1$  con  $J = 10$ .

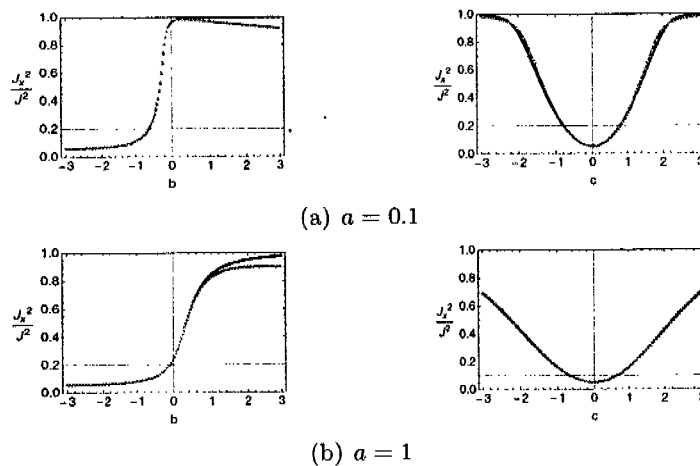
Estas figuras muestran que la aproximación del valor esperado de  $\hat{J}_z/J$  con el estado coherente es buena en todo el espacio de parámetros y donde existe un mayor ale-

jamiento entre ambas superficies corresponde nuevamente a la región con  $b > 0$ . Sin embargo, cuando  $a$  crece las funciones se suavizan y la aproximación clásica mejora con respecto a la cuántica.

Resultados similares se obtienen para los valores esperados de  $\hat{J}_x^2/J^2$  y  $\hat{J}_y^2/J^2$ , cuyas gráficas se muestran en Fig.4.83, Fig.4.85 como funciones de los parámetros  $b$  y  $c$  y sus respectivos cortes en Fig.4.84 y Fig.4.86.



**Figura 4.83:** Valor esperado de  $\hat{J}_x^2/J^2$  en función de los parámetros  $b$  y  $c$  con  $a = 0.1$ , para el estado coherente (lado izquierdo) y la solución exacta (lado derecho) para  $J = 10$ .



**Figura 4.84:** Valor esperado de  $\hat{J}_x^2/J^2$  para el estado coherente (línea clara) y el estado base (línea oscura), en función un parámetro para (a)  $a = 0.1$  y (b)  $a = 1$ . En las figuras del lado izquierdo  $c = 0.5$  y en las del lado derecho  $b = 1$  con  $J = 10$ .

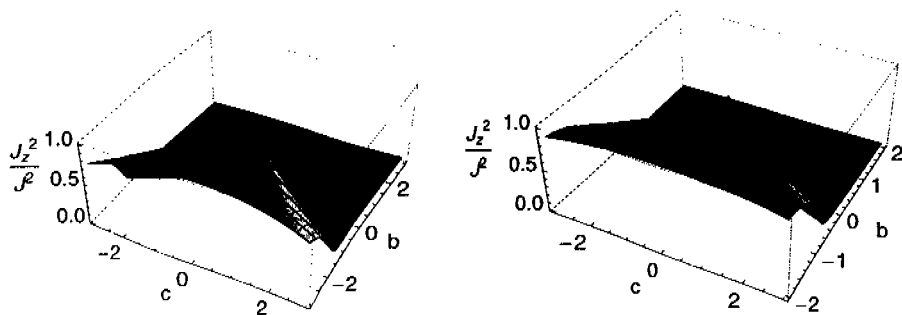


Figura 4.85: Valor esperado de  $\hat{J}_z^2/J^2$  en función de los parámetros  $b$  y  $c$  con  $a = 0.1$ , para el estado coherente (lado izquierdo) y la solución exacta (lado derecho) cuando  $J = 10$ .

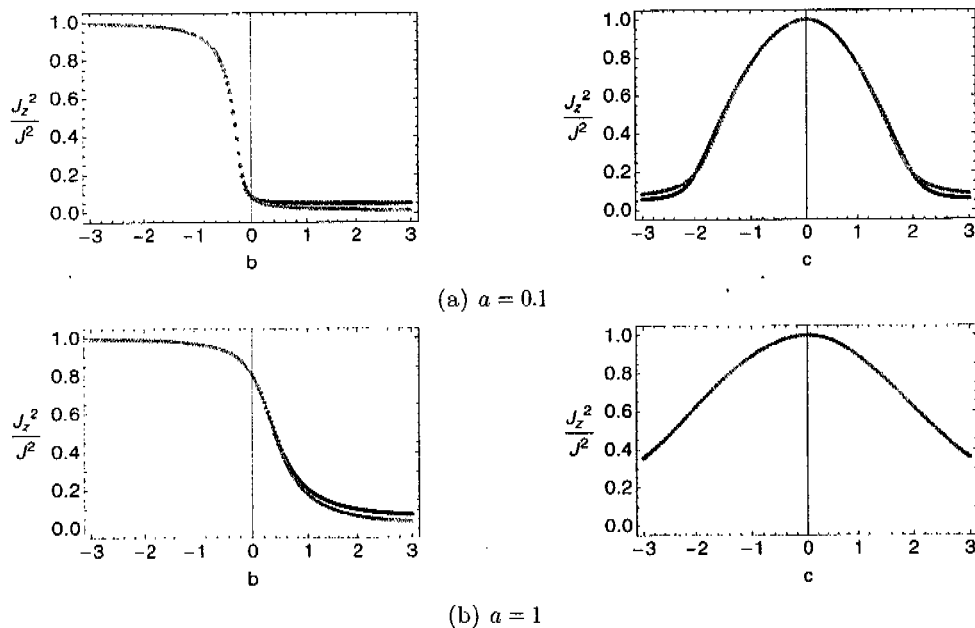


Figura 4.86: Valor esperado de  $\hat{J}_z^2/J^2$  para el estado coherente (línea clara) y el estado base (línea oscura), en función un parámetro para (a)  $a = 0.1$  y (b)  $a = 1$ . En las figuras del lado izquierdo  $c = 0.5$  y en las del lado derecho  $b = 1$  cuando  $J = 10$ .

## Función $Q$

En la Fig.4.87 se grafica la función  $Q$  para el estado coherente y el estado base cuántico para algunos puntos del espacio de parámetros.

Se observa que el comportamiento de la función  $Q$  para el estado base es muy parecida a la del estado coherente, ambas presentan una forma gaussiana cuyo centro se desplaza dependiendo del valor de los parámetros. A diferencia del caso  $a = 0$  donde la función  $Q$  cambia su comportamiento de unimodal a bimodal al cruzar las transiciones de fase, en este caso el comportamiento unimodal se preserva en todo el espacio de parámetros, lo que corresponde con lo observado para el comportamiento de la probabilidad de ocupación relativa.

Ahora, al comparar la funciones para los dos valores de  $a$  podemos observar que la diferencia entre ambas corresponde también a un desplazamiento, es decir, el centro de las funciones con  $a = 1$  se encuentra corrido, tanto en  $\theta$  como en  $\phi$ , con respecto al de la función  $Q$  para  $a = 0.1$ , sin embargo, la forma y el comportamiento de las funciones es el mismo, es decir, no dependen, al menos notablemente, del valor del parámetro  $a$ .

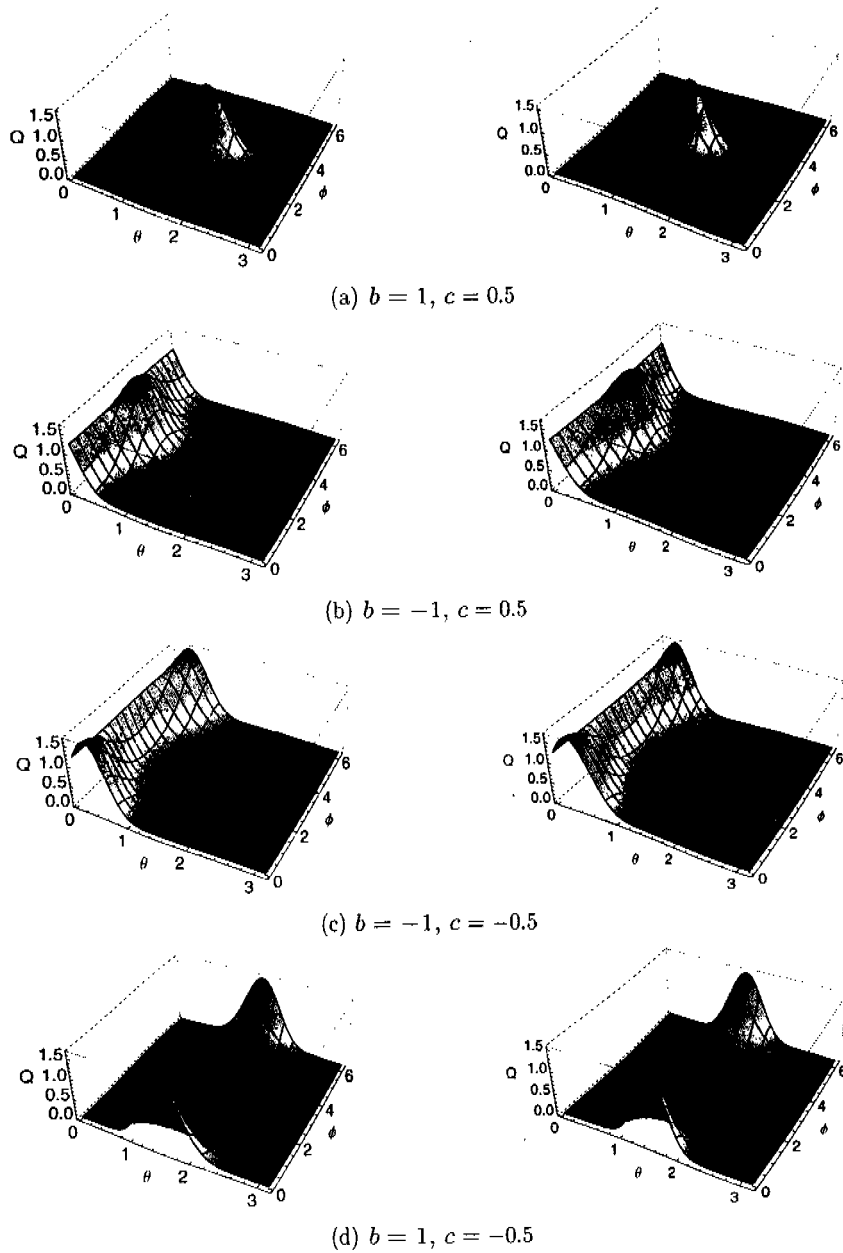
En la Fig.4.89 se muestra el segundo momento de la función de Husimi para la función de onda del estado base como función de los parámetros  $b$  y  $c$ , con dos valores diferentes del parámetro  $a$ ,  $a = 0.1$  y  $a = 1$ . No se muestra la comparación con el segundo momento para el estado coherente pues sabemos que es una función constante en todo el espacio de parámetros cuyo valor es 1. Puede apreciarse nuevamente que cuando  $a$  es pequeña aún puede observarse la influencia de la separatriz para el caso  $a = 0$ , sin que en esto signifique que el comportamiento es similar. Si observamos la Fig.4.31 veremos que en el caso  $a = 0$  existe una región para  $b < 0$  en la cual el estado coherente no es una buena aproximación, al contrario de lo que sucede en este caso, donde el estado coherente reproduce bastante bien los resultados cuánticos.

Podemos decir que, en general, el estado coherente es una buena aproximación pero va mejorando cuando el valor de  $a$  aumenta. Se observa que cuando  $a = 0.1$  los valores del segundo momento varían entre 0.85 y 1.0, lo cual quiere decir que la diferencia con el segundo momento del estado coherente es menor o igual al 15%, mientras que cuando  $a = 1$  varían entre 0.4 y 1.0, sin embargo, la región en la que el segundo momento alcanza el mínimo corresponde únicamente a la recta  $c = 0$  con  $b > 0$ , mientras que fuera de ella su valor es prácticamente igual a uno.

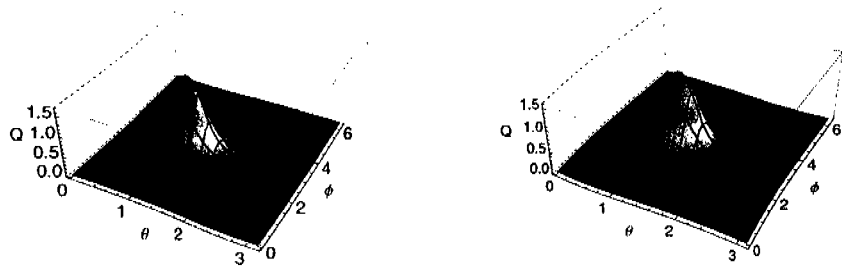
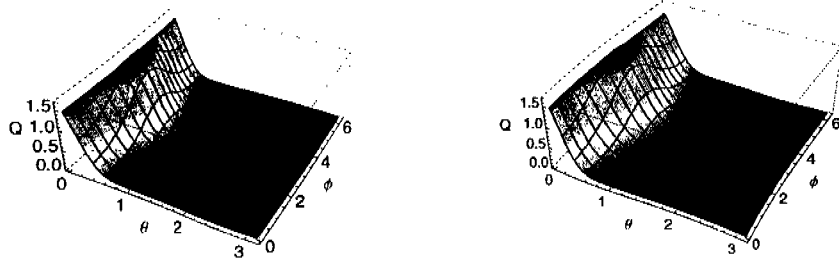
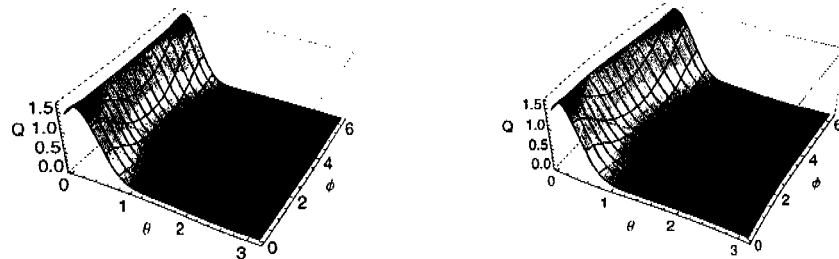
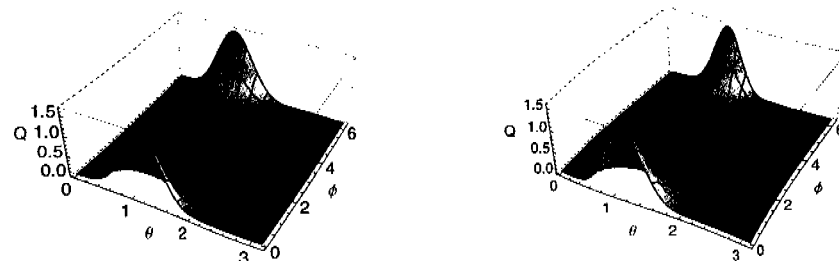
En la Fig.4.90 se muestra el inverso del segundo momento en el espacio de parámetros para el estado base del sistema. Se observa que, excepto en la región  $c = 0$  con

$b > 0$ , el volumen ocupado por la función  $Q$  es prácticamente uno, que corresponde a un estado coherente por lo que éste reproduce bien los resultados para el segundo momento excepto en esa línea. Mientras que para  $a$  pequeñas se puede observar un leve levantamiento en los puntos que corresponderían a la separatriz con  $a = 0$ , cuando  $a$  crece esto desaparece para dejar un volumen igual a uno en la mayor parte del espacio de parámetros. Es decir, la región en la que el sistema presenta menor localización se reduce únicamente a la recta  $c = 0$  con  $b > 0$ , que corresponde a la región en la cual las dos funciones de onda difieren más.

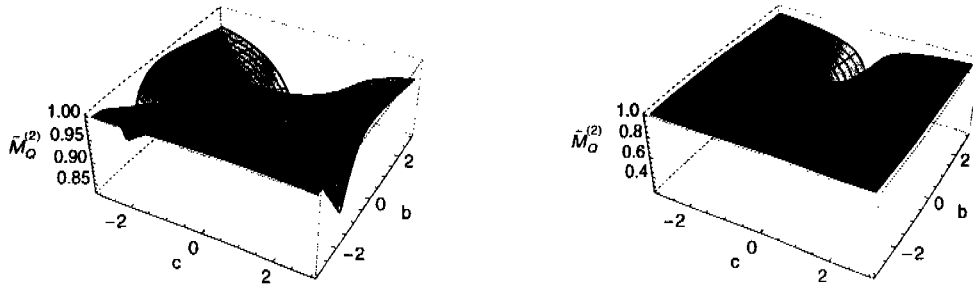




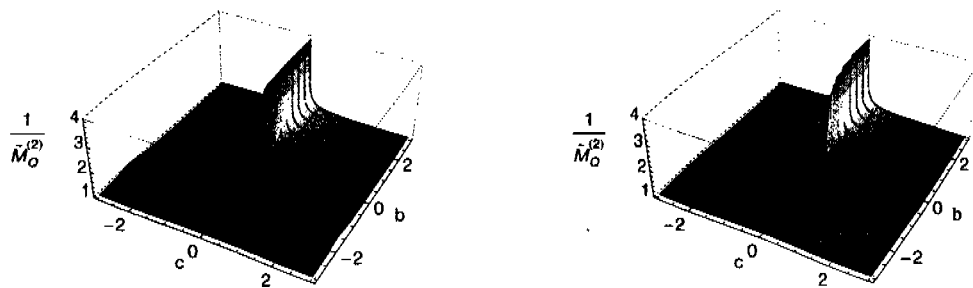
**Figura 4.87:** Función  $Q$  para el estado base (izquierda) y el estado coherente (derecha) para diferentes valores de los parámetros  $b$  y  $c$  con  $a = 0.1$  y  $J = 10$ .

(a)  $b = 1, c = 0.5$ (b)  $b = -1, c = 0.5$ (c)  $b = -1, c = -0.5$ (d)  $b = 1, c = -0.5$ 

**Figura 4.88:** Función  $Q$  para el estado base (izquierda) y el estado coherente (derecha) para diferentes valores de los parámetros  $b$  y  $c$  con  $a = 1$  y  $J = 10$ .



**Figura 4.89:** Segundo momento de la función  $Q$  para el estado base cuántico exacto con  $a = 0.1$  (izquierda) y  $a = 1$  (derecha) como función de los parámetros  $b$  y  $c$  para  $J = 10$ .

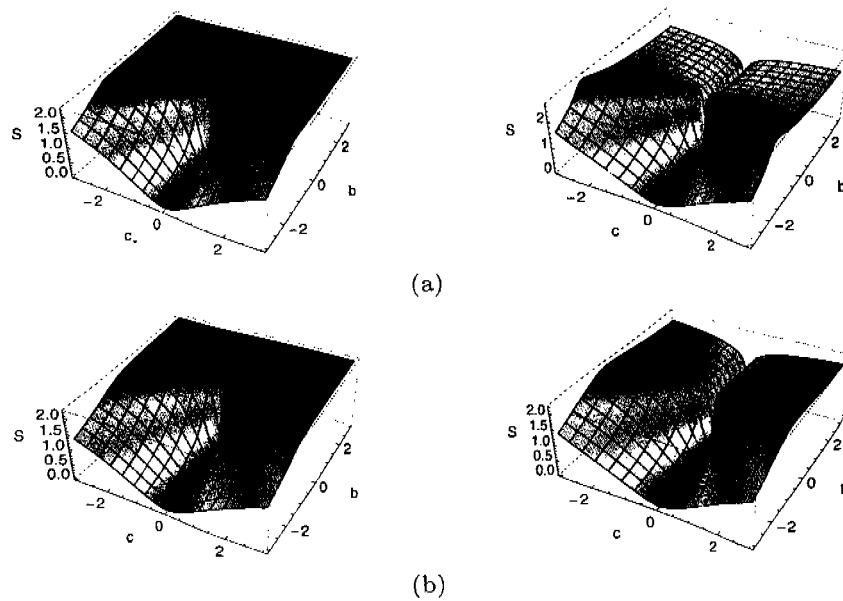


**Figura 4.90:** Inverso del segundo momento de la función  $Q$  para el estado base cuántico con  $a = 0.1$  (izquierda) y  $a = 1$  (derecha) como función de los parámetros  $b$  y  $c$ .  $J = 10$ .

## Enredamiento

### Separación por modos

La Fig. 4.91 muestra la entropía de formación en la partición por modos para las dos funciones de onda como función de los parámetros  $b$  y  $c$ .



**Figura 4.91:** Entropía en la partición por modos para (a)  $a = 0.1$  y (b)  $a = 1$ . Del lado izquierdo se muestran las gráficas correspondientes al estado coherente mientras que del lado derecho se muestran las de la función de onda del estado base para  $J = 10$ .

Vemos que las gráficas para el estado coherente conservan en general la forma obtenida para el caso  $a = 0$ , con la diferencia de que para valores pequeños de  $a$  aún se conserva la separatriz mientras que cuando  $a$  crece se va perdiendo y la zona en la que el enredamiento es menor que dos se extiende en una región más grande del espacio de parámetros.

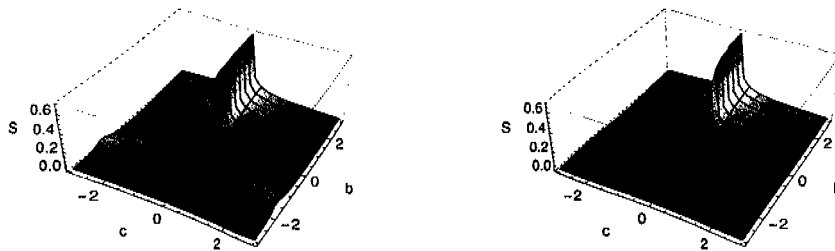
Las superficies que presentan más modificaciones son las cuánticas, en este caso la entropía máxima disminuye de 3 a 2 y aunque para valores pequeños de  $a$  se observa que ese máximo ocurre sólo sobre una región cercana a la separatriz del caso  $a = 0$  podemos ver que el comportamiento de la entropía de enredamiento se modifica

suavemente, y cuando  $a = 1$  prácticamente ha desaparecido la región crítica. De hecho puede observarse que cuando  $a$  crece el comportamiento de la entropía de enredamiento para el caso cuántico se modifica de tal manera que se va acercando más al comportamiento que presenta el estado coherente.

Otra diferencia importante con el caso  $a = 0$  se produce sobre la recta  $c = 0$  cuando  $b < 0$ . En el caso  $a = 0$  la entropía de enredamiento es constante a lo largo de toda esa recta y es diferente de cero mientras que en este caso el enredamiento sobre esa línea es igual a cero. Por tanto, podemos concluir que cuando el valor del parámetro  $a$  es diferente de cero se pierde enredamiento entre los modos, y mientras mayor es el valor de  $a$ , mayor es la pérdida.

### Separación por cajas

En este caso, la función de prueba usada es el estado coherente cuya entropía es cero en la separación por partículas, por ello sólo se mostrarán los resultados correspondientes al estado cuántico. En la Fig. 4.92 se muestra el enredamiento de una partícula con el resto como función de los parámetros  $b$  y  $c$  para dos valores del parámetro  $a$ . Podemos ver que la entropía de enredamiento es cero prácticamente



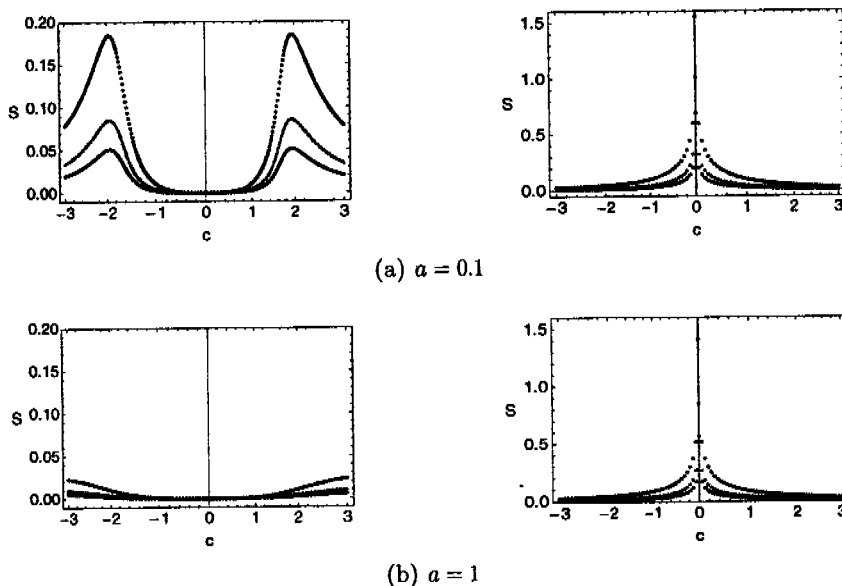
**Figura 4.92:** Entropía de enredamiento para el estado base cuántico como función de los parámetros  $b$  y  $c$ . Del lado izquierdo se muestran los resultados para  $a = 0.1$  y del lado derecho los correspondientes a  $a = 1$ .  $J = 10$

en todo el espacio de parámetros, excepto en la línea  $c = 0$  con  $b > 0$  y en algunas regiones cercanas a la separatriz del caso  $a = 0$ , pero nuevamente, cuando  $a$  crece estas zonas también van desapareciendo.

Podemos observar que cuando  $a \neq 0$ , por muy pequeño que sea su valor, se pierde la zona de enredamiento máximo que se obtenía en el caso  $a = 0$ . De lo que se puede concluir que también la entropía en la separación por cajas se pierde cuando

el parámetro  $a$  es diferente de cero y de hecho es mucho más importante la pérdida de enredamiento para esta separación que para la separación por modos.

Los resultados para el enredamiento de dos partículas con el resto y la mitad de las partículas tienen la misma forma que la de una partícula, por ello, no se muestran estas entropías como funciones de los dos parámetros. Sin embargo, en Fig. 4.93 se muestra una comparación entre dos cortes de las tres entropías de enredamiento para dos valores diferentes del parámetro  $a$ . Puede apreciarse que de la misma manera



**Figura 4.93:** Comparación de las entropías de formación para una partícula (línea inferior), dos partículas (línea media) y la mitad de las partículas (línea superior) con el resto. En las figuras del lado izquierdo  $b = -1$  mientras que en las del lado derecho  $b = 1$ .  $J = 10$ .

que para el caso  $a = 0$  la entropía de enredamiento aumenta conforme aumenta el número de partículas que se separan del resto, aunque en términos cuantitativos esta diferencia es muy pequeña. También se ve que cuando el valor de  $a$  aumenta, disminuye la entropía de enredamiento para todos los casos y que el comportamiento de la superficie se suaviza hasta desaparecer la influencia de la separatriz correspondiente al caso  $a = 0$ . En conclusión, cuando el parámetro  $a$  es diferente de cero la entropía de enredamiento del sistema disminuye prácticamente hasta cero, aún para valores pequeños, sin importar que separación del sistema se utilice.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo ha analizado el Hamiltoniano modelo para un condensado de Bose-Einstein de dos modos (2.1.10), que es función de tres parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  que dependen de las características de dispersión de las partículas que forman el condensado y de las características de los pozos de potencial que la confinan (2.1.9, 2.1.11). Se ha demostrado que la teoría de catástrofes y el formalismo de estados coherentes proveen un buen esquema para el estudio de las transiciones de fase de la superficie de energía de Hamiltonianos dependientes de operadores de momento angular. Se determina la separatriz, que corresponde a las curvas del espacio de parámetros donde el comportamiento de la superficie de energía es crítico. Sin embargo, en el Capítulo 4, donde se estudian los valores esperados de diversas observables en el espacio de parámetros, se muestra que la influencia de la separatriz va más allá de la superficie de energía y se refleja en el comportamiento de estas observables, pues también presentan un comportamiento singular en los puntos correspondientes a la separatriz.

Este método permite encontrar una función de onda de prueba analítica para el estado base del sistema en cada punto del espacio de parámetros. En el Capítulo 4 se comparan los resultados obtenidos para los valores esperados de observables calculados con el estado base exacto y con la función de prueba. Se aprecia que ésta última reproduce muy bien el comportamiento del estado cuántico excepto sobre la separatriz donde la concordancia entre ambos resultados disminuye. La fidelidad entre los estados fue determinada mediante la evaluación del porcentaje de traslape entre ambas funciones.

La separatriz permite identificar las regiones de estabilidad del espacio de pará-

metros en las que la función de prueba tiene un comportamiento similar. En estas regiones el traslape es grande y la forma de la distribución de población relativa de la función prueba y del estado base son similares en comparación con lo que sucede en la separatriz.

En cada una de las regiones de estabilidad el comportamiento de la función de onda es diferente, por ello, tanto la composición porcentual del estado base como la función de Husimi se modifican al cruzar la separatriz.

En el caso  $b = 0$  la función de prueba y la función del estado base corresponden a un estado coherente y son iguales, además no existen transiciones de fase de orden finito en la superficie de energía. En consecuencia tanto la composición porcentual como la función de Husimi no modifican su forma, aunque dependiendo del valor de los parámetros la posición del centro de la distribución se desplaza.

En el caso  $c = 0$  el estado base corresponde a un estado de Dicke, cuya proyección depende del valor de los parámetros. En este caso existen dos regiones del espacio en el que la función de prueba corresponde exactamente pero hay una tercera zona para la cual el estado base presenta muchas transiciones de fase y entonces es igual a la función de prueba únicamente puntualmente. Por ello, la concordancia entre ambas funciones en esa región no es muy buena y la forma de las funciones de Husimi son muy diferentes. Sin embargo, ambas conservan su forma al pasar las líneas de la separatriz.

Es en el caso  $a = 0$  donde estas cantidades presentan modificaciones importantes al pasar de un lado de la separatriz al otro. En la región *III* tanto la composición porcentual como la función de Husimi presentan un comportamiento bimodal, mientras que en las zonas *I* y *II* el comportamiento es claramente unimodal. También se observa que en las regiones alejadas de la separatriz la cantidad de estados que contribuyen a la composición del estado base es sólo una pequeña fracción del total mientras que justo sobre la separatriz el número de estados que contribuyen es máximo.

El caso general, todos los parámetros son diferentes de cero, esto significa que se toman en cuenta todas las posibles interacciones de un sistema de partículas en el que el número total de partículas se conserva. Sin embargo, el activar la interacción con un láser, lo que corresponde a considerar el parámetro  $a \neq 0$ , provoca que el sistema pierda muchas de las propiedades interesantes que se presentan en el caso anterior. Esto se debe a que conforme el valor de  $a$  aumenta, el estado base se aproxima más y más a un estado coherente. En particular, las transiciones de fase del estado base desaparecen. Por lo tanto, el comportamiento de la composición porcentual y de la



función de Husimi es muy igual en todo el espacio de parámetros, modificándose únicamente la posición del centro de las distribuciones de igual modo que en el caso  $b = 0$ .

Es importante hacer notar que son las transiciones de fase de segundo orden las que separan las regiones que presentan mayor modificación en el comportamiento de las funciones de ondas mientras que al cruzar una transición de primer orden las variaciones son menos importantes.

En este trabajo se analizan diversas observables del sistema, sin embargo, dos de ellas resultan de especial interés: el enredamiento y el segundo momento de la función de Husimi. La primera de ellas debido a la posibilidad de emplear estos sistemas en la transmisión y manejo de información[40], mientras que la segunda, de acuerdo a Sugita [31, 32], provee una buena medida de la localización de las partículas y presenta características similares a la entropía de Wehrl, por lo que podría asociarse con una medición del enredamiento general del sistema.

Aquí se ha calculado el enredamiento para dos diferentes particiones del sistema, pues lo que alguien observa como un estado enredado es, hasta cierto punto, una cuestión de cómo se realiza la descomposición del sistema en los diferentes subsistemas. Lo que para una persona es un estado enredado no es lo mismo que para otra si se identifican los subsistemas de manera diferente. La primera partición propuesta para este sistema fue la partición por cajas [9]. Sin embargo, en artículos posteriores se argumenta que esta separación no es físicamente realizable sin destruir el sistema, y por tanto, si se pretende usar el enredamiento como un recurso, sólo tiene sentido medir el enredamiento entre dos subsistemas físicamente separables como es el caso de la partición por modos [41].

Esta dependencia del enredamiento y la partición del sistema se muestra claramente cuando  $b = 0$ . En este caso el estado base se corresponde exactamente con el estado de prueba que es un estado coherente por lo que la entropía de enredamiento en la separación por cajas es cero. Sin embargo, al separar el sistema por modos la entropía de enredamiento es diferente de cero con un valor de aproximadamente 2 nats, para  $N = 20$  y 3 nats para  $N = 50$  átomos, es decir, a pesar de ser un estado coherente el enredamiento puede ser diferente de cero si se realiza la partición adecuada del sistema.

Cuando  $c = 0$  el estado base del sistema corresponde a un estado de Dicke cuya entropía de enredamiento, en la separación por partículas tiene valor cero mientras que en la separación por cajas depende del valor de la proyección del momento angular. Para  $M = \pm J$  vale cero y cuando  $M = 0$  su valor es máximo.

Para el caso  $a = 0$  el estado base tiene máximo enredamiento en la separación por modos en las rectas  $c = \pm(2/1/J)b$  con  $b < 0$ , es decir, sobre la separatriz de las regiones *I* y *II* con la región *III*. Sin embargo, es más estable en las regiones *I* y *II* donde el estado base del sistema es similar a un estado coherente. En contraste, en la separación por cajas el enredamiento máximo ocurre en la región *III* que es donde el estado base se asemeja a la superposición simétrica de estados coherentes.

Al considerar los tres parámetros diferentes de cero se observa una disminución notable en el enredamiento al incrementar el valor de  $a$  en ambas particiones, esto se debe a que el parámetro  $a$  rompe la degeneración del estado base del sistema por lo que éste se vuelve muy similar a un estado coherente, como se observa en el traslape de ambas funciones. Por ello, el enredamiento en la partición por modos se va acercando al de el estado de prueba que corresponde a un estado coherente cuando el valor del parámetro  $a$  crece y en la separación por cajas tiende a cero, aunque siempre se conserva un comportamiento diferente en la línea  $c = 0$  cuando  $b > 0$  pues como ya sabemos el estado cuántico es el estado  $|J, 0\rangle$  que no puede aproximarse razonablemente por un estado coherente. El enredamiento disminuye sin importar cuál sea la partición utilizada; sin embargo, la pérdida de enredamiento es más notoria para la partición por partículas.

En todos los casos se observa una correlación entre el enredamiento del sistema en la separación por cajas y su localización en el espacio fase representada por el segundo momento de la función de Husimi. Se observa que las regiones de mayor localización, es decir, donde el valor del segundo momento es cercano a uno, la correspondiente entropía de enredamiento es muy cercana a cero, mientras que en las regiones de menor localización la entropía es mayor. Por lo tanto, ambas funciones muestran comportamientos similares en las diferentes regiones del espacio de parámetros definidas por la separatriz y lo que es muy importante ambas presentan el mismo comportamiento crítico sobre la separatriz.

En resumen, se ha demostrado que la teoría de catástrofes y el formalismo de estados coherentes permiten encontrar y caracterizar las transiciones de fase cuánticas de un sistema las cuales dividen el espacio de parámetros en regiones de estabilidad en las cuales el estado de prueba que reproduce bastante bien el comportamiento del estado cuántico.

También se ha mostrado que existe una correlación entre la entropía de enredamiento en la partición por cajas y la localización del sistema. Mientras mayor enredamiento presenta el sistema menor es también su localización, es decir, mayor es el volumen ocupado por la función de onda en el espacio fase.

Finalmente, se ha encontrado que el caso  $a \neq 0$  carece de interés cuando se está estudiando el enredamiento del sistema, especialmente en la partición por cajas. Esto se debe a que cuando todas las interacciones están presentes el estado base del sistema se asemeja al de un estado coherente. Sin embargo, en la partición por modos aún existe cierta entropía aunque menor que la obtenida en el caso  $a = 0$ .

En este trabajo no se ha considerado aún la evolución temporal del sistema, ese es el siguiente paso en la investigación, lo cual nos permitirá estudiar la dinámica del sistema tanto en la aproximación semiclásica como en el caso cuántico.

## Apéndice A

### Cerradura para los estados coherentes de $SU(2)$

El grupo  $SU(2)$  está formado por los operadores de momento angular  $\hat{J}_0, \hat{J}_+, \hat{J}_-$  que cumplen con las relaciones de conmutación

$$[\hat{J}_\pm, \hat{J}_0] = \pm \hat{J}_\pm, \quad [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_0,$$

y el estado coherente no normalizado se define como

$$|\zeta\rangle = e^{\zeta \hat{J}_+} |J, -J\rangle.$$

Para encontrar la representación de los operadores de momento angular se procede como sigue:

primero se calcula  $\{\zeta | \hat{J}_- | \Psi\rangle$  para un ket arbitrario  $|\psi\rangle$

$$\begin{aligned} \{\zeta | \hat{J}_- | \Psi\rangle &= \langle J, -J | \exp(\zeta^* \hat{J}_-) \hat{J}_- | \Psi\rangle, \\ &= \langle J, -J | \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \exp(\zeta^* \hat{J}_-) | \Psi\rangle, \\ &= \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \langle J, -J | \exp(\zeta^* \hat{J}_-) | \Psi\rangle, \\ &= \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \{\zeta | \Psi\rangle. \end{aligned}$$

Ahora se considera  $\langle \Psi | \hat{J}_- | \zeta \rangle$  para un bra arbitrario  $\langle \psi |$

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{J}_- | \zeta \rangle &= \langle \psi | \hat{J}_- \exp(\zeta \hat{J}_+) | \hat{J}, -\hat{J} \rangle, \\ &= \langle \psi | \exp(\zeta \hat{J}_+) \exp(-\zeta \hat{J}_+) \hat{J}_- \exp(\zeta \hat{J}_+) | J, -J \rangle, \\ &= \langle \psi | \exp(\zeta \hat{J}_+) (\hat{J}_- - 2\zeta \hat{J}_z - \zeta^2 \hat{J}_+) | J, -J \rangle, \\ &= \left( 2J\zeta - \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \langle \psi | \zeta \rangle. \end{aligned}$$

donde el paso de la línea 2 a la 3 se realiza utilizando la fórmula  $e^{-\lambda \hat{A}} \hat{B} e^{\lambda \hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\lambda}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$  y las relaciones de conmutación de los operadores de momento angular. Realizando este mismo procedimiento para todos los operadores se obtienen las representaciones ket y bra de los operadores de momento angular

$$\begin{aligned} \hat{J}_- | \zeta \rangle &= \frac{\partial}{\partial \zeta} | \zeta \rangle, & \langle \zeta | \hat{J}_- &= \left( 2\zeta^* J - \zeta^{*2} \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \right) \langle \zeta |, \\ \hat{J}_+ | \zeta \rangle &= \left( 2\zeta J - \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) | \zeta \rangle, & \langle \zeta | \hat{J}_+ &= \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \langle \zeta |, \\ \hat{J}_0 | \zeta \rangle &= \left( -J + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) | \zeta \rangle, & \langle \zeta | \hat{J}_0 &= \left( -J + \zeta^* \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \right) \langle \zeta |. \end{aligned}$$

Como la  $\zeta$  es un parámetro continuo el operador identidad puede escribirse como sigue

$$I = \int d^2 \zeta f(\zeta, \zeta^*) | \zeta \rangle \langle \zeta |.$$

El operador identidad conmuta con todos los operadores de momento angular y esto puede expresarse de la siguiente forma

$$[I, \hat{J}_i] = \int d^2 \zeta f(\zeta, \zeta^*) \left( | \zeta \rangle \langle \zeta | \hat{J}_i - \hat{J}_i | \zeta \rangle \langle \zeta | \right) = 0.$$

En particular para  $\hat{J}_-$ , sustituyendo las expresiones encontradas arriba para  $\hat{J}_- | \zeta \rangle$  y  $\langle \zeta | \hat{J}_-$ , se obtiene

$$0 = \int d^2 \zeta f(\zeta, \zeta^*) \left( \frac{\partial}{\partial \zeta^*} | \zeta \rangle \langle \zeta | - \left( 2J\zeta - \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) | \zeta \rangle \langle \zeta | \right).$$

Suponiendo que  $f(\zeta, \zeta^*)$  es una función que se anula en la frontera, al integrar por partes la última expresión se obtiene

$$0 = \int d^2\zeta \left( -\frac{\partial}{\partial \zeta^*} f(\zeta, \zeta^*) - 2\zeta(J+1)f(\zeta, \zeta^*) - \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} f(\zeta, \zeta^*) \right) |\zeta\rangle \langle \zeta|,$$

de donde se obtiene la siguiente ecuación diferencial para  $f(\zeta, \zeta^*)$

$$-\frac{\partial}{\partial \zeta^*} f(\zeta, \zeta^*) - 2\zeta(J+1)f(\zeta, \zeta^*) - \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} f(\zeta, \zeta^*) = 0.$$

Aplicando el mismo procedimiento a  $J_0$  se encuentra la ecuación

$$\zeta^* \frac{\partial}{\partial \zeta^*} f(\zeta, \zeta^*) = \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} f(\zeta, \zeta^*).$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior se obtiene una ecuación para  $f(\zeta, \zeta^*)$  en términos de una sola variable ya sea  $\zeta$  o  $\zeta^*$ , nosotros hemos escogido resolver primero para  $\zeta$ . La ecuación a resolver es

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} f(\zeta, \zeta^*) = -\frac{2(J+1)\zeta^*}{1+\zeta^2} f(\zeta, \zeta^*),$$

cuya solución es de la forma  $f(\zeta, \zeta^*) = g(\zeta^*)(1+|\zeta|^2)^{-(J+1)}$ . Ahora bien la ecuación que resulta de  $\hat{J}_0$  dice que  $f$  es simétrica en  $\zeta$  y  $\zeta^*$  por lo que  $g(\zeta^*)$  debe ser una constante,  $\alpha$ . Para encontrar la constante se utiliza que  $I|J, m\rangle = |J, m\rangle$  por lo que

$$\langle J, -J|I|J, -J\rangle = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \alpha (1+\rho^2)^{-2(J+1)} \rho \, d\rho d\phi = 1,$$

donde  $\langle J - J|\zeta\rangle = \langle \zeta|J - J\rangle = 1$  y se ha escogido integrar en coordenadas polares,  $\zeta = \rho e^{i\phi}$ . Al realizar la integral se encuentra que  $\alpha = (2J+1)\pi$ , por lo que

$$f(\zeta, \zeta^*) = \frac{2J+1}{\pi} (1+|\zeta|^2).$$

Entonces la cerradura de los estados coherentes de  $SU(2)$  se expresa como

$$\frac{2J+1}{\pi} \int d^2\zeta (1+|\zeta|^2)^{-2(J+1)} |\zeta\rangle \langle \zeta| = I.$$

# Apéndice B

## Ecuaciones de movimiento

### B.1. Integrales de trayectoria

Las integrales de trayectoria constituyen un formalismo alternativo de la mecánica cuántica inventada por Feynman en los cuarenta. En contraste a la formulación de Schrödinger, que se apoya en la mecánica Hamiltoniana, la de Feynman está ligada al formalismo Lagrangiano.

En este apéndice se encuentra a través del formalismo de Feynman la forma del Lagrangeano de sistemas cuánticos que utilizan como funciones de prueba a los estados coherentes de  $SU(2)$ ,  $|\zeta\rangle$ . Por lo tanto tenemos

$$\langle \zeta' t' | \zeta t \rangle = \langle \zeta' | e^{-i(t'-t)H} | \zeta \rangle.$$

Dividimos el intervalo  $[t, t']$  en  $n$  pedazos, con  $\varepsilon = \frac{t'-t}{n}$ . Así, cuando se usa que  $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$  se tiene

$$\begin{aligned} \langle \zeta' t' | \zeta t \rangle &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\varepsilon \rightarrow 0)}} \langle \zeta' | (1 - i\varepsilon H)^n | \zeta \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{n-1} d\mu(\zeta_k) \left( \prod_{k=1}^n \langle \zeta_k | 1 - i\varepsilon H | \zeta_{k-1} \rangle \right), \end{aligned}$$

en donde se ha usado que  $\zeta_0 = \zeta$  y  $\zeta_n = \zeta'$ . Asimismo, se han introducido  $n - 1$

operadores identidad entre cada factor  $1 - i\varepsilon H$ . De esta manera

$$\langle \zeta' t' | \zeta t \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{n-1} d\mu(\zeta_k) \left( \prod_{k=1}^n \langle \zeta_k | \zeta_{k-1} \rangle \times \left( 1 - \frac{i\varepsilon \langle \zeta_k | H | \zeta_{k-1} \rangle}{\langle \zeta_k | \zeta_{k-1} \rangle} \right) \right). \quad (\text{B.1.1})$$

Si tomamos

$$\begin{aligned} \zeta_k &\approx \zeta_{k-1} + \Delta\zeta_k \rightarrow \text{cambio inducido por } H \\ \Rightarrow \zeta_{k-1} &\approx \zeta_k - \Delta\zeta_k, \end{aligned}$$

Encontramos la identidad

$$\begin{aligned} \ln(1 + \zeta_k^* \zeta_{k-1}) &= \ln(1 + \zeta_k^* (\zeta_k - \Delta\zeta_k)) \\ &= \ln(1 + |\zeta_k|^2 - (\Delta\zeta_k) \zeta_k^*) \\ &= \ln \left( (1 + |\zeta_k|^2) \left( 1 - \frac{\Delta\zeta_k \zeta_k^*}{1 + |\zeta_k|^2} \right) \right) \\ &= \ln(1 + |\zeta_k|^2) + \ln \left( 1 - \frac{\Delta\zeta_k \zeta_k^*}{1 + |\zeta_k|^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.1.2})$$

Por otro lado, si utilizamos el desarrollo de Taylor de  $\ln(1 - x)$  en el segundo término de la expresión anterior tenemos

$$\ln(1 + \zeta_k^* \zeta_{k-1}) \approx \ln(1 + |\zeta_k|^2) - \frac{\Delta\zeta_k \zeta_k^*}{1 + |\zeta_k|^2}. \quad (\text{B.1.3})$$

Usando

$$\begin{aligned} |\zeta_{k-1}^2|^2 &= (\zeta_k - \Delta\zeta_k) (\zeta_k^* - \Delta\zeta_k^*) \\ &\approx |\zeta_k|^2 - (\zeta_k \Delta\zeta_k^* + \zeta_k^* \Delta\zeta_k) \end{aligned} \quad (\text{B.1.4})$$

se tiene

$$\ln(1 + |\zeta_{k-1}|^2) \approx \ln(1 + |\zeta_k|^2) - \frac{\Delta\zeta_k^* \zeta_k + \Delta\zeta_k \zeta_k^*}{1 + |\zeta_k|^2}, \quad (\text{B.1.5})$$

donde nuevamente utilizamos el desarrollo en serie de Taylor de  $\ln(1 - x)$  a primer orden.

Recordando que los estados coherentes de  $SU(2)$  pueden escribirse en términos de estados no normalizados

$$|\zeta_k\rangle = \frac{1}{(1 + |\zeta_k|^2)^J} |\zeta_k\rangle,$$



se tiene

$$\begin{aligned}
 \ln \langle \zeta_k | \zeta_{k-1} \rangle &= \ln \left[ \frac{1}{(1 + |\zeta_k|^2)^J} \frac{1}{(1 + |\zeta_{k-1}|^2)^J} \times \{ \zeta_k | \zeta_{k-1} \} \right] \\
 &= \ln \left[ \frac{1}{(1 + |\zeta_k|^2)^J} \frac{1}{(1 + |\zeta_{k-1}|^2)^J} (1 + \zeta_k^* \zeta_{k-1})^{2J} \right] \\
 &= 2J \ln (1 + \zeta_k^* \zeta_{k-1}) - J \ln (1 + |\zeta_k|^2) - J \ln (1 + |\zeta_{k-1}|^2).
 \end{aligned}$$

Substituyendo los resultados (B.1.3) y (B.1.5) en la expresión anterior tenemos

$$\begin{aligned}
 \ln \langle \zeta_k | \zeta_{k-1} \rangle &\approx -2J \frac{\Delta \zeta_k \zeta_k^*}{1 + |\zeta_k|^2} + J \frac{\Delta \zeta_k^* \zeta_k + \Delta \zeta_k \zeta_k^*}{1 + |\zeta_k|^2} \\
 &= J \left( \frac{\Delta \zeta_k^* \zeta_k - \Delta \zeta_k \zeta_k^*}{1 + |\zeta_k|^2} \right).
 \end{aligned}$$

Al tomar la exponencial del último resultado y desarrollando en serie de Taylor la exponencial a primer orden, hallamos

$$\begin{aligned}
 \langle \zeta_k | \zeta_{k-1} \rangle &\approx \exp \left( J \left( \frac{\zeta_k \Delta \zeta_k^* - \zeta_k^* \Delta \zeta_k}{1 + |\zeta_k|^2} \right) \right) \\
 &\approx 1 + \frac{J}{1 + |\zeta_k|^2} (\zeta_k \Delta \zeta_k^* - \zeta_k^* \Delta \zeta_k). \quad (\text{B.1.6})
 \end{aligned}$$

Se concluye que

$$\frac{\langle \zeta_k | H | \zeta_{k-1} \rangle}{\langle \zeta_k | \zeta_{k-1} \rangle} \approx \langle \zeta_k | H | \zeta_{k-1} \rangle.$$

y

$$\prod_{k=1}^n \langle \zeta_k | \zeta_{k-1} \rangle \approx \exp \left( \sum_{k=1}^n \varepsilon \frac{J}{1 + |\zeta_k|^2} \times (\zeta_k \Delta \zeta_k^* - \zeta_k^* \Delta \zeta_k) \right).$$

Substituyendo estos resultados en (B.1.1) resulta

$$\begin{aligned}
 \langle \zeta' t' | \zeta t \rangle &\approx \lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{n-1} d\mu(\zeta_k) \times \exp \left( \sum_{k=1}^n \varepsilon \frac{J}{1 + |\zeta_k|^2} \left( \zeta_k \frac{\Delta \zeta_k^*}{\varepsilon} - \zeta_k^* \frac{\Delta \zeta_k}{\varepsilon} \right) \right) \\
 &\times \exp(-i\varepsilon \langle \zeta_k | H | \zeta_{k-1} \rangle), \quad (\text{B.1.7})
 \end{aligned}$$

donde usamos que  $1 - i\varepsilon \langle \zeta_k | H | \zeta_{k-1} \rangle \approx \exp(\langle \zeta_k | H | \zeta_{k-1} \rangle)$ .

De acuerdo la formalismo de integrales de trayectoria podemos igualar el elemento de matriz  $\langle \zeta' t' | \zeta t \rangle$  con la acción del sistema considerado, i.e.,

$$S = \int d\mu[\zeta(t)] \exp \left( i \int_t^{t'} d\bar{t} L(\zeta(\bar{t}), \dot{\zeta}(\bar{t}), \zeta^*(\bar{t}), \dot{\zeta}^*(\bar{t})) \right).$$

Al sacar el límite en (B.1.7), la suma se convierte en una integral:

$$\langle \zeta' t' | \zeta t \rangle \approx \int d\mu(\zeta(t)) \exp \left[ -\frac{J}{1+|\zeta|^2} (\zeta^* \dot{\zeta} - \dot{\zeta}^* \zeta) - i \langle \zeta | H | \zeta \rangle \right].$$

De esta forma el Lagrangeano "clásico" se define como

$$L = \frac{iJ}{1+|\zeta|^2} (\zeta^* \dot{\zeta} - \dot{\zeta}^* \zeta) - \langle \zeta | H | \zeta \rangle. \quad (\text{B.1.8})$$

Adicionalmente podemos obtener las ecuaciones de movimiento de los parámetros  $\zeta$  y  $\zeta^*$  del estado coherente de  $SU(2)$ . Recordando el principio de acción estacionaria que indica que  $\delta S = 0$ , es decir,

$$\delta S = \int_t^{t'} d\bar{t} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \zeta} \delta \zeta + \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} \delta \dot{\zeta} + \frac{\partial L}{\partial \zeta^*} \delta \zeta^* + \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}^*} \delta \dot{\zeta}^* \right\} = 0,$$

al integrar por partes las variaciones dependientes del tiempo se obtienen dos ecuaciones de Euler-Lagrange; para la variable  $\zeta$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \zeta} = 0, \quad (\text{B.1.9})$$

y la expresión conjugada para la variable  $\zeta^*$ . Al llevar a cabo las derivadas correspondientes en B.1.8, se encuentra

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} &= \frac{iJ}{1+|\zeta|^2} \zeta^*, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}^*} &= -\frac{iJ \zeta^*}{(1+|\zeta|^2)^2} (\zeta^* \dot{\zeta} - \dot{\zeta}^* \zeta) + \frac{iJ}{1+|\zeta|^2} (-\dot{\zeta}^*) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{\zeta}^*}, \end{aligned}$$

en donde se ha definido  $\mathcal{H} = \langle \zeta | H | \zeta \rangle$ . De esta manera, al sustituir las derivadas

encontradas en las condición B.1.9 se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \zeta} &= \frac{-iJ}{(1+|\zeta|^2)^2} (\dot{\zeta}^* + \zeta^{*2}\dot{\zeta}) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} \right) &= \frac{iJ}{1+|\zeta|^2} \dot{\zeta}^* - \frac{iJ}{(1+|\zeta|^2)^2} (\dot{\zeta}^* \zeta + \zeta^* \dot{\zeta}) \zeta^* \\ &= \frac{iJ}{(1+|\zeta|^2)^2} (\dot{\zeta}^* - \zeta^{*2}\dot{\zeta}),\end{aligned}$$

lo cual permite concluir

$$\frac{2iJ}{(1+|\zeta|^2)^2} \dot{\zeta}^* + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta} = 0, \quad \Rightarrow \quad \dot{\zeta}^* = \frac{(1+|\zeta|^2)^2}{2iJ} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta}. \quad (\text{B.1.10})$$

## Apéndice C

### Segundo momento de la función de Husimi

En este capítulo se encontrará el segundo momento de la función  $Q$  cuando el estado del sistema corresponde a una suma de dos estados coherentes  $|\theta_1, \phi_1\rangle$  y  $|\theta_2, \phi_2\rangle$ ,

$$|\zeta_s\rangle = \mathcal{N}(\zeta_1, \zeta_2) \{|\zeta_1\rangle + |\zeta_2\rangle\},$$

donde  $\mathcal{N}(\zeta_1, \zeta_2)$  es la constante de normalización. Recordamos que un estado coherente también puede escribirse en términos de una rotación como

$$\begin{aligned} |\xi\rangle &= \mathcal{R}(-\phi, -\theta, \phi) |J, -J\rangle, \\ &= \sum_M D_{M, -J}^J(-\phi, -\theta, \phi) |J, M\rangle, \end{aligned}$$

donde  $D_{M, -J}^J$  son las matrices de rotación y definimos  $\Omega = (-\phi, -\theta, \phi)$ . Para este estado, el segundo momento de la función  $Q$  tiene la forma siguiente

$$M^{(2)}(\zeta_c) = \frac{2J+1}{4\pi} \int \int \sin\theta_\xi d\theta_\xi d\phi_\xi |\langle \xi | \zeta_c \rangle|^4,$$

entonces, es necesario calcular  $|\langle \xi | \zeta_c \rangle|^4$ . Primero calculamos el cuadrado del traslape

$$\begin{aligned} \langle \xi | \zeta_s \rangle^2 &= [\mathcal{N}(\zeta_1, \zeta_2) (\langle \xi | \zeta_1 \rangle + \langle \xi | \zeta_2 \rangle)]^2 \\ &= \mathcal{N}^2(\zeta_1, \zeta_2) (\langle \xi | \zeta_1 \rangle^2 + 2\langle \xi | \zeta_1 \rangle \langle \xi | \zeta_2 \rangle + \langle \xi | \zeta_2 \rangle^2) \end{aligned} \quad (\text{C.0.1})$$

y usando la definición de estados coherentes en términos de las matrices de rotación se tiene

$$\langle \xi | \zeta_i \rangle = \sum_M D_{M, -J}^{J*}(\Omega_\xi) D_{M, -J}^J(\Omega_i).$$

Elevando al cuadrado la expresión anterior resulta

$$\langle \xi | \zeta_i \rangle^2 = \sum_{M, M'} D_{M, -J}^{J*}(\Omega_\xi) D_{M, -J}^J(\Omega_i) D_{M', -J}^{J*}(\Omega_\xi) D_{M', -J}^J(\Omega_i). \quad (C.0.2)$$

Consideremos el término  $I = D_{M, -J}^{J*}(\Omega_\xi) D_{M', -J}^{J*}(\Omega_\xi)$ . Usando la serie de Clebsch-Gordan

$$D_{M, -J}^{J*}(\Omega_\xi) D_{M', -J}^{J*}(\Omega_\xi) = \sum_{\lambda, \mu, \mu'} \langle J M, J M' | \lambda \mu \rangle \langle J - J, J - J | \lambda \mu' \rangle D_{\mu \mu'}^{\lambda*}(\Omega_\xi)$$

donde  $\lambda = 2J$ ,  $\mu' = -2J$ , y que  $\langle J - J, J - J | \lambda \mu' \rangle = \delta_{\lambda, 2J} \delta_{\mu', -2J}$ , se encuentra

$$I = \sum_{\mu} \langle J M, J M' | 2J \mu \rangle D_{\mu, -2J}^{2J*}(\Omega_\xi).$$

Sustituyendo esta expresión en cada uno de los productos escalares que aparecen en (C.0.1) se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \xi | \zeta_s \rangle^2 &= N^2(\zeta_1, \zeta_2) \sum_{\mu, M, M'} \langle J M, J M' | 2J \mu \rangle D_{\mu, -2J}^{2J*}(\Omega_\xi) \\ &\times \{ D_{M, -J}^J(\Omega_1) D_{M', -J}^J(\Omega_1) + D_{M, -J}^J(\Omega_2) D_{M', -J}^J(\Omega_2) + 2D_{M, -J}^J(\Omega_1) D_{M', -J}^J(\Omega_2) \}. \end{aligned}$$

En los dos primeros términos se puede utilizar nuevamente la serie de Clebsch-Gordan, junto con la ortonormalidad de los Clebsch-Gordan para hallar

$$\begin{aligned} \langle \xi | \zeta_s \rangle^2 &= N^2(\zeta_1, \zeta_2) \sum_{\mu} \{ D_{\mu, -2J}^{2J*}(\Omega_\xi) D_{\mu, -2J}^{2J}(\Omega_1) + D_{\mu, -2J}^{2J*}(\Omega_\xi) D_{\mu, -2J}^{2J}(\Omega_2) \\ &+ 2 \sum_{M, M'} \langle J M, J M' | 2J \mu \rangle D_{\mu, -2J}^{2J*}(\Omega_\xi) D_{M, -J}^J(\Omega_1) D_{M', -J}^J(\Omega_2) \}. \end{aligned}$$

Usando que  $D_{\mu, -2J}^{2J}(\omega) = e^{i(\mu+2J)\phi} d_{\mu, -2J}^{2J}(-\theta)$  la expresión se transforma en

$$\begin{aligned} \langle \xi | \zeta_s \rangle^2 &= N^2(\zeta_1, \zeta_2) \sum_{\mu} D_{\mu, -2J}^{2J*}(\Omega_\xi) \{ e^{i(\mu+2J)\phi_1} d_{\mu, -2J}^{2J}(-\theta_1) + e^{i(\mu+2J)\phi_2} d_{\mu, -2J}^{2J}(-\theta_2) \\ &+ 2 \sum_{M, M'} \langle J M, J M' | 2J \mu \rangle e^{i(M+J)\phi_1 + i(M'+J)\phi_2} d_{M, -J}^J(-\theta_1) d_{M', -J}^J(-\theta_2) \}. \end{aligned}$$

Definiendo

$$\begin{aligned} F_{\mu}^J(\theta_1, \phi_1; \theta_2, \phi_2) &= e^{i(\mu+2J)\phi_1} d_{\mu, -2J}^{2J}(-\theta_1) + e^{i(\mu+2J)\phi_2} d_{\mu, -2J}^{2J}(-\theta_2) \\ &+ 2 \sum_{M, M'} \langle J M, J M' | 2J \mu \rangle e^{i(M+J)\phi_1 + i(M'+J)\phi_2} d_{M, -J}^J(-\theta_1) d_{M', -J}^J(-\theta_2), \end{aligned}$$

el segundo momento de la función  $Q$  para una combinación de estados coherentes puede escribirse como

$$M^{(2)}(\zeta_s) = \frac{2J+1}{4\pi} |N|^4 \sum_{\mu, \mu'} \int d\Omega_\xi D_{\mu, -2J}^{2J*}(\Omega_\xi) D_{\mu', -2J}^{2J}(\Omega_\xi) \\ \times F_\mu^J(\Omega_1, \Omega_2) F_{\mu'}^{J*}(\Omega_1, \Omega_2).$$

Usando las propiedades de las matrices de rotación puede encontrarse que

$$\int d\Omega_\xi D_{\mu, -2J}^{2J*}(\Omega_\xi) D_{\mu', -2J}^{2J}(\Omega_\xi) = \frac{4\pi}{4J+1} \delta_{\mu, \mu'},$$

con lo cual podemos obtener finalmente una expresión para el segundo momento:

$$M^{(2)}(\zeta_s) = \frac{2J+1}{4J+1} |N|^4 \sum_{\mu} |F_\mu^J(\Omega_1, \Omega_2)|^2.$$

Con esta última expresión podemos calcular también el segundo momento de la función de Husimi para un estado coherente. Recordemos que el estado simétrico puede representar también un estado coherente si consideramos  $\zeta_1 = \zeta_2$  y  $N(\zeta) = 1/2$ . Entonces calculemos el valor de  $\sum_{\mu} |F_\mu^J(\Omega_1, \Omega_2)|$  para este caso.

Al considerar  $\theta_1 = \theta_2$  y  $\phi_1 = \phi_2$ , la función  $F$  se reduce a

$$F_{mu}^J(\theta, \phi; \theta, \phi) = e^{i(\mu+2J)\phi} \left( 2d_{\mu, -2J}^{2J}(-\theta) \right. \\ \left. + 2 \sum_{M, M'} \langle JM, JM' | 2J\mu \rangle d_{M, -J}^J(-\theta) d_{M', -J}^J(-\theta) \right),$$

y usando el inverso de la serie de Clebsh-Gordan obtenemos

$$F_{mu}^J(\theta, \phi; \theta, \phi) = 4e^{i(\mu+2J)\phi} d_{\mu, -2J}^{2J}(-\theta),$$

por lo que el segundo momento puede escribirse como

$$M^{(2)}(\zeta_s) = \frac{2J+1}{4J+1} \sum_{\mu} \frac{1}{16} |4e^{i(\mu+2J)\phi} d_{\mu, -2J}^{2J}(-\theta)|^2.$$

Utilizando la forma de los coeficientes  $d_{m, -J}^J$  (3.2.1) se encuentra que

$$\sum_{\mu} \frac{1}{16} |4e^{i(\mu+2J)\phi} d_{\mu, -2J}^{2J}(-\theta)|^2 = 1,$$

por lo tanto, para un estado coherente el segundo momento de la función de Husimi es

$$M^{(2)}(\zeta_s) = \frac{2J+1}{4J+1}.$$

Para la combinación de estados coherentes que se usan como función de prueba, los valores de las variables son  $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ ,  $\theta_1 = \theta$  y  $\theta_2 = \pi - \theta$ , por lo que la expresión para  $F$  es

$$\begin{aligned} F_\mu^J(\theta, \phi; \pi - \theta, \phi) &= \exp^{i(\mu+2J)\phi} \left( d_{\mu, -2J}^{2J}(-\theta) + d_{\mu, -2J}^{2J}(-(\pi - \theta)) \right) \\ &+ 2 \sum_{M, M'} \langle JM, JM' | 2J\mu \rangle d_{M, -J}^J(-\theta) d_{M', -J}^J(-(\pi - \theta)), \end{aligned}$$

y utilizando nuevamente la ecuación (3.2.1) podemos reescribir

$$\begin{aligned} F_\mu^J(\theta, \phi; \pi - \theta, \phi) &= e^{i(\mu+2J)\phi} \left( \left( \binom{4J}{2J+\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1-\cos\theta}{2} \right)^{\frac{2J+\mu}{2}} \left( \frac{1+\cos\theta}{2} \right)^{\frac{2J-\mu}{2}} \right. \\ &+ \left( \binom{4J}{2J+\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1+\cos\theta}{2} \right)^{\frac{2J+\mu}{2}} \left( \frac{1-\cos\theta}{2} \right)^{\frac{2J-\mu}{2}} \\ &+ 2 \sum_{M, M'} \langle JM, JM' | 2J\mu \rangle \quad (C.0.3) \\ &\times \left\{ \left( \binom{2J}{J+M} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1-\cos\theta}{2} \right)^{\frac{J+M}{2}} \left( \frac{1+\cos\theta}{2} \right)^{\frac{J-M}{2}} \right. \\ &\times \left. \left( \binom{2J}{J+M'} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1-\cos\theta}{2} \right)^{\frac{J+M'}{2}} \left( \frac{1+\cos\theta}{2} \right)^{\frac{J-M'}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

## Apéndice D

# Programas de Mathematica

En los tres primeros casos se encontraron en el Capítulo 3 los puntos críticos mínimos en forma analítica para la parte semiclassical. De tal manera que únicamente se tomaron las expresiones de los valores esperados de las observables como funciones de los parámetros correspondientes y se graficaron directamente en Mathematica.

Para el caso general la  $\theta_c$  debe encontrarse de forma numérica resolviendo la ecuación (4.4.1). Para esto se utiliza la siguiente rutina

```
hh[j_, a_, b_, c_, jx_, jy_, jz_, \[Lambda]_] :=  
  a jz + b ((1 - 1/(2 j)) jz^2 + 1/(2 j)) +  
  c jx + \[Lambda] (jx^2 + jy^2 + jz^2 - 1)  
  
ff = Collect[  
  Expand[4 \[Lambda]^2 (b (1 - 1/(2 j)) + \[Lambda])^2 -  
    a^2 \[Lambda]^2 -  
    c^2 (b (1 - 1/(2 j)) + \[Lambda])^2], \[Lambda]];  
  
jx[j_, a_, b_, c_, \[Lambda]_] := -c/(2 \[Lambda])  
jz[j_, a_, b_, c_, \[Lambda]_] := -a/(2 (b (1 - 1/(2 j)) + \[Lambda]))  
  
ss = Solve[ff == 0, \[Lambda]];
```

Por tratarse de una ecuación cuártica se tienen cuatro soluciones, y para encontrar los puntos críticos correspondientes a los mínimos, debe escogerse la que minimice la



energía. Además, se sabe que algunas de las soluciones pueden ser complejas y deben eliminarse. El programa siguiente escoge las soluciones reales y de ellas aquella que minimiza la energía, y de esta manera se encuentran los valores de los parámetros en los puntos críticos mínimos de la superficie de energía.

```

j = 10;
a = 0.99;
min = -3;
max = 3;
dim = 51;
step = (max - min)/dim;
bb[kb_] := min + (kb - 1) step
cc[kb_] := min + (kb - 1) step

me1 = Table[If[
  Chop[hh[j, a, bb[kb], cc[kc]],
    jx[j, a, bb[kb], cc[kc]],
    ss[[1, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}], 0,
  jz[j, a, bb[kb], cc[kc]],
  ss[[1, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}],
  ss[[1, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}]] \[Element] Reals,
Chop[hh[j, a, bb[kb], cc[kc]],
  jx[j, a, bb[kb], cc[kc]],
  ss[[1, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}], 0,
  jz[j, a, bb[kb], cc[kc]],
  ss[[1, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}],
  ss[[1, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}]]], 100
], {kb, 1, dim + 1}, {kc, 1, dim + 1}];

me2 = Table[If[
  Chop[hh[j, a, bb[kb], cc[kc]],
    jx[j, a, bb[kb], cc[kc]],
    ss[[2, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}], 0,
  jz[j, a, bb[kb], cc[kc]],
  ss[[2, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}],
  ss[[2, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}]] \[Element] Reals,

```

```

Chop[
hh[j, a, bb[kb], cc[kc],
jx[j, a, bb[kb], cc[kc],
ss[[2, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}], 0,
jz[j, a, bb[kb], cc[kc],
ss[[2, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}],
ss[[2, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}]], 100
], {kb, 1, dim + 1}, {kc, 1, dim + 1}];

me3 = Table[If[
Chop[hh[j, a, bb[kb], cc[kc],
jx[j, a, bb[kb], cc[kc],
ss[[3, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}], 0,
jz[j, a, bb[kb], cc[kc],
ss[[3, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}],
ss[[3, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}]] \[Element] Reals,
Chop[hh[j, a, bb[kb], cc[kc],
jx[j, a, bb[kb], cc[kc],
ss[[3, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}], 0,
jz[j, a, bb[kb], cc[kc],
ss[[3, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}],
ss[[3, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}]], 100
], {kb, 1, dim + 1}, {kc, 1, dim + 1}];

me4 = Table[If[
Chop[hh[j, a, bb[kb], cc[kc],
jx[j, a, bb[kb], cc[kc],
ss[[4, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}], 0,
jz[j, a, bb[kb], cc[kc],
ss[[4, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}],
ss[[4, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}]] \[Element] Reals,
Chop[hh[j, a, bb[kb], cc[kc],
jx[j, a, bb[kb], cc[kc],
ss[[4, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}], 0,
jz[j, a, bb[kb], cc[kc],
ss[[4, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]}],

```

```

      ss[[4, 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]]], 100
    ], {kb, 1, dim + 1}, {kc, 1, dim + 1}];

posmin[kb_, kc_, me1_, me2_, me3_, me4_] := Module[{tmp1, tmp2},
  tmp1 = {me1[[kb, kc]], me2[[kb, kc]], me3[[kb, kc]],
    me4[[kb, kc]]};
  tmp2 = Min[me1[[kb, kc]], me2[[kb, kc]], me3[[kb, kc]],
    me4[[kb, kc]]];
  Position[tmp1, tmp2][[1, 1]]
]

posmint =
  Table[posmin[kb, kc, me1, me2, me3, me4],
    {kb, 1, dim + 1}, {kc, 1, dim + 1}];

jzmin = Table[
  Chop[jz[j, a, bb[kb], cc[kc],
    ss[[posmint[[kb, kc]], 1, 2]] /. {b -> bb[kb], c -> cc[kc]]]
  , {kb, 1, dim + 1}, {kc, 1, dim + 1}];

thetac = Table[
  ArcCos[-jzmin[[kb, kc]]], {kb, 1, dim + 1}, {kc, 1, dim + 1}];

```

Los valores obtenidos de  $\theta_c$  se utilizan en las expresiones clásicas de los valores esperados de las observables dando el valor esperado correspondiente en la aproximación semiclásica.

Para el caso cuántico, se constuye primero la matriz Hamiltoniana. Sin embargo, debe recordarse que se usaron dos bases diferentes, la de estados de Dicke y la base con simetría definida.

### Hamiltoniano en la base de estados de Dicke

```

MEJp[j_, m2_, m1_] := (KroneckerDelta[m2, m1 + 1]
  Sqrt[(j - m1) (j + m1 + 1)])

```

```
Jp[j_] := Table[MEJp[j, m1, m2], {m1, j, -j, -1}, {m2, j, -j, -1}]
```

```
Jx[j_] := 1/2 (Jp[j] + Transpose[Jp[j]])
Jy[j_] := 1/(2 \[ImaginaryI]) (Jp[j] - Transpose[Jp[j]])
```

```
MEJz[j_, m2_, m1_] := (KroneckerDelta[m2, m1] m1)
Jz[j_] := Table[MEJz[j, m2, m1], {m1, j, -j, -1}, {m2, j, -j, -1}]
Jz2[j_] := Jz[j].Jz[j]
```

```
ham[j_, a_, b_, c_] := a/j Jz[j] + b/j^2 Jz[j].Jz[j] + c/j Jx[j]
```

Las expresiones  $MEJ_i$  son los elementos de matriz del operador  $\hat{J}_i$  en la base de estados de Dicke mientras que  $J_i$  es la forma matricial del operador, con  $J_p = J_+$ ; y  $ham$  en la matriz Hamiltoniana. Esta matriz se utilizó en los casos  $a \neq 0$ ,  $b = 0$  y  $c = 0$ .

### Hamiltoniano en la base de simetría definida

En el caso  $a = 0$  se requiere de base de simetría definida. Debe recordarse que esta base tiene dos partes, una para los estados de proyección de momento angular par y otra para los de proyección impar y esto rompe la matriz Hamiltoniana en dos bloques independientes.

```
MEJz2a[j_, m2_, m1_] := 1 + KroneckerDelta[0, m2])
(KroneckerDelta[m2, m1]
+ KroneckerDelta[m2, -m1])
```

```
MEJxa[j_, m2_, m1_] := 1/(2 \[Sqrt]((1 + KroneckerDelta[0, m1])
(1 + KroneckerDelta[0, m2])))
(Sqrt[(j - m1) (j + m1 + 1)]
KroneckerDelta[m2, m1 + 1]
+ KroneckerDelta[m2, -m1 - 1])
+ Sqrt[(j + m1) (j - m1 + 1)]
(KroneckerDelta[m2, m1 - 1]
+ KroneckerDelta[m2, -m1 + 1]) )
```

```
MEJz2b[j_, m2_, m1_] := m1^2 KroneckerDelta[m2, m1]
```

```
MEJxb[j_, m2_, m1_] := 1/2 Sqrt[(j - m1) (j + m1 + 1)]
  KroneckerDelta[m2, m1 + 1]
  + 1/2 Sqrt[(j + m1) (j - m1 + 1)]
  KroneckerDelta[m2, m1 - 1]
```

```
Jz2a[j_] := Table[MEH1a[j, m2, m1], {m1, j, 0, -1}, {m2, j, 0, -1}]
Jxa[j_] := Table[MEH2a[j, m2, m1], {m1, j, 0, -1}, {m2, j, 0, -1}]
```

```
Jz2b[j_] := Table[MEH1b[j, m2, m1], {m1, j, 1, -1}, {m2, j, 1, -1}]
Jxb[j_] := Table[MEH2b[j, m2, m1], {m1, j, 1, -1}, {m2, j, 1, -1}]
```

```
Ha[j_, b_, c_] := b/j^2 Jz2a[j] + c/j Jxa[j]
```

```
Hb[j_, b_, c_] := b/j^2 Jz2b[j] + c/j Jxb[j] m1^2
```

Nuevamente  $MEJ_i$  denota los elementos de matriz en esta base y  $J_i$  las matrices del momento angular.  $Ha$  denota la matriz Hamiltoniana que corresponde a la base par y  $Hb$  a la impar.

Para encontrar el estado base del sistema, para la base de estados de Dicke, se usa la siguiente rutina:

```
estadobase[j_, a_, b_, c_, n_] :=
Module[{eigval, eigvec, ordeigval, vector1, vector},
{eigval, eigvec} = Eigensystem[N[H[j, a, b, c]]];
ordeigval = Sort[eigval];
vector1 = eigvec[[Position[eigval, ordeigval[[n]]][[1, 1]]]];
vector = vector1/Norm[vector1]
]
```

Descripción:

Los eigenestados y eigenvectores de la matriz Hamiltoniana  $H[j, a, b, c]$  se encuentran con la subrutina Eigensystem de Mathematica. Conociendo los eigenvalores se puede crear una lista ordenada de éstos por medio de la subrutina Sort, de tal manera que el primer elemento de la lista corresponde a la energía mínima, es decir, a la energía del estado base. El siguiente elemento da la energía del primer estado excitado y así sucesivamente. Posteriormente se determina el eigenvector cuya energía correspondiente es la  $n$ -ésima en la lista ordenada de eigenvalores. Entonces, para el estado base el valor de  $n$  debe ser uno. Finalmente, se da como salida el vector normalizado.

Cuando se trabaja en la base de simetría definida la rutina que encuentra el estado base es la siguiente:

```
estadobase[j_, b_, c_, n_] :=
Module[{eigvala, eigveca, ordeigvala, eigvalb, eigvecb, ordeigvalb,
temp},
{eigvala, eigveca} = Eigensystem[N[Ha[j, b, c]]];
ordeigvala = Sort[eigvala];
{eigvalb, eigvecb} = Eigensystem[N[Hb[j, b, c]]];
ordeigvalb = Sort[eigvalb];
vectora1 = eigveca[[Position[eigvala, ordeigvala[[n]]][[1, 1]]]];
vectora = vectora1/Norm[vectora1];
vectorb1 = eigvecb[[Position[eigvalb, ordeigvalb[[n]]][[1, 1]]]];
vectorb = vectorb1/Norm[vectorb1];
temp = {{ordeigvala[[n]], ordeigvalb[[n]]}, {vectora, vectorb}};
emin = Min[temp[[1, 1]], temp[[1, 2]]];
vector = temp[[2, Position[temp, emin][[1, 2]]]]
]
```

Como en este caso, la matriz Hamiltoniana se rompe en dos bloques independientes, para encontrar el estado base del sistema total se comparan las energías de ambos estados base para determinar cuál es el estado de mínima energía.

Con el estado base del sistema se calculan los valores esperados de los operadores. Para esto debe encontrarse primero la forma matricial del operador en la base en la que se está trabajando. Para los operadores  $\hat{J}_z$ ,  $\hat{J}_x$  y  $\hat{J}_z^2$  ya se han encontrado las formas matriciales correspondientes a cada base. A continuación, se muestra cómo se grafica el valor esperado de un operador arbitrario  $\hat{O}$ .

Si  $O[j]$  es la forma matricial del operador  $\hat{O}$  en la base elegida, entonces su valor

esperado en un estado, está dado por:

```
val0[j_, estado_] := estado.0[j].estado
```

donde estado representa una función de onda, por ejemplo, la del estado base.

```
j = 10;

bmin = -2;
bmax = 2;
dimb = 71;
bstep = (bmax - bmin)/dimb ;

cmin = -2;
cmax = 2;
dimc = 81;
cstep = (cmax - cmin)/dimc ;

Tval0 =
  Table[val0[j,
    estado[j, bmin + (nb - 1) bstep, cmin + (nc - 1) cstep]], {nc,
    1, dimc + 1}, {nb, 1, dimb + 1}];
```

Este código crea una tabla de  $71 \times 81$  valores esperados de  $\hat{O}$  en función de los parámetros  $b$  y  $c$ . Finalmente para graficar estos resultados se utiliza el siguiente código

```
graf1 = ListPlot3D[Tval0,
  ColorFunction -> Function[{x, y, z}, Hue[0.7 z]],
  DataRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}},
  AxesLabel -> {"\!\(\)*
StyleBox["b", \nFontSize->14]\!\(\)*
StyleBox[" ", \nFontSize->14]\)", " ", \!\(\)*
StyleBox["c", \nFontSize->14]\)",
```

---

```
"!\(\(*FractionBox[SubscriptBox["J\", \"z\"], \"J\"]\)\      "},  
BaseStyle -> {FontFamily -> "Helvetica", FontSize -> 14}]
```

que produce como salida una gráfica tridimensional con un código de colores tal que el rojo corresponde al valor mínimo y el azul al valor máximo.



## Bibliografia

- [1] S. N. Bose, *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese*, Zeitschrift fr Physik, 26, p. 178 (1924).
- [2] A. Einstein, *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1, p. 3 (1924).
- [3] L.D. Landau, *The theory of Superfluidity of Helium III*, J. Phys., USSR, 5, pp. 7190 (1941).
- [4] L.D. Landau, *Theory of the Superfluidity of Helium II*, Physical Review, 60, pp. 356358 (1941).
- [5] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*, Science, 269, pp. 198-201 (1995).
- [6] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Bose Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*, Physical Review Letters, 75, pp. 3969-3973 (1995).
- [7] C.J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, *Production of Two Overlapping Bose-Einstein Condensates by Sympathetic Cooling*, Physical Review Letters, 78, pp. 586-589 (1997).
- [8] G.J. Milburn, J. Corney, E.M. Wright and D.F. Walls, *Quantum Dynamics of an Atomic Bose Einstein condensate in a double well potential*, Physical Review A, 55, pp. 4318-4324 (1997).
- [9] J.I. Cirac, *et al*, *Quantum superpositon states of Bose-Einstein condensates*, Physical Review A, 57, pp. 1208-1218 (1998).

- [10] Wei-Min Zhang, Da Hsuan Feng, R. Gilmore, *Coherent States: Theory and some applications*, Rev. Mod. Phys., 62, pp. 867-927 (1990).
- [11] R. Gilmore, *Catastrophe Theory for scientists and engineers*, (Wiley, New York, 1981).
- [12] A. Micheli, *et al*, *Many-particle entanglement in two-mode Bose-Einstein Condensates*, Physical Review A, 67, 013607 (2003).
- [13] O. Castaños, *et al*, *Phase transitions and accidental and degeneracy in nonlinear spin systems*, Physical Review B, 74, 012406 (2005).
- [14] O. Castaños, *et al*, *Classical and quantum phase transitions in the Lipkin-Meshkov-Glick Model*, Physical Review B, 74, 104118 (2006).
- [15] *The New Physics*. Edited by Gordon Fraser. Cambridge University Press, New York. 2006
- [16] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hnsch e I. Bloch, *Ultracold quantum gases in optical lattices*, Nature, 415, 23-30 (2002).
- [17] L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Oxford University Press, Oxford (2003).
- [18] A. J. Leggett, *et al*, *Bose-Einstein condensation in the alkali gases: some fundamental concepts*, Review of Modern Physics, 73, pp. 307-356 (2001).
- [19] D. Gordon, C. M. Savage, *Creating macroscopic quantum superpositions with Bose-Einstein condensates*, Physical Review A, 59, pp. 4623-4629 (1999).
- [20] A. P. Tonel, J. Links, A. Foester, *Quantum superposition states of Bose-Einstein condensates*, Journal of Physics A: Mathematical and General, 38, pp. 1235-1245 (2005).
- [21] F.T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore and H. Thomas, *Atomic Coherent States and Quantum Optics*, Physical Review A, 6, pp. 2211-2237 (1972).
- [22] P. Kramer and M. Saraceno, *Geometry of the Time-Dependent Variational Principle in Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [23] H. Goldstein, *Mecánica clásica*, Revert.

- [24] W.H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, Wiley, New York (1973).
- [25] H.S.M. Coxeter, *Introduction to geometry, 2n edn.*, Wiley, New York (1969).
- [26] O. Castaños, E. López-Moreno, R. López-Peña, *Shape phase transitions in algebraic nuclear models*, Rev. Mex. Fís., 49-4, pp. 15-21 (2003).
- [27] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Statistical physics*, Pergamon, London (1958).
- [28] M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York (1957).
- [29] E.P. Wigner, *Group Theory and its Applications to the quantum mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press, New York (1959).
- [30] M. Hillery, R.F. O'Connell, M.O.Scully and E.P. Wigner, *Distribution Functions in Physics: Fundamentals*, Phys. Rep., 106, pp. 121-167 (1984).
- [31] A. Sugita, *Second moment of the husimi distribution as a measure of complexity of quantum states*, Physical Review E, 65, 036205 (2002).
- [32] A. Sugita, *Moments of generalized Husimi distributions and complexity of many-body quantum states*, Journal of Physics A: Mathematical and General, 36, pp. 9081-9103, (2003).
- [33] M. Kitagawa and M. Ueda, *Squeezed Spin States*, Physical Review A, 47, pp. 5138-5143 (1993).
- [34] X. Wang, B. C. Sanders, *Spin Squeezing and pairwise entanglement for symmetric multiqubit states*, Physical Review A, 68, 012101 (2003).
- [35] E. Schrödinger, *Naturewissenschaften* 23 (1935), 807, 8223,844; traducciones aparecen en "Quantum theory and measurement", Editores J.A. Wheeler, y W.H. Zurek, Princeton University, New York, (1983).
- [36] J. S. Bell, *On the problem of hidden variables in quantum mechanics*, Rev. Mod. Phys. 38, 447 (1966).
- [37] A. Aspect et al., *Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem*, Phys. Rev. Lett. 47, 460 (1981).
- [38] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and W.K. Wootters, *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*, Phys. Rev. Lett. 70, 1895 (1993).

- 
- [39] A. Wehrl, *General Properties of entropy*, Rev. Mod. Phys., 50, pp. 221-260 (1978).
- [40] C.H. Bennett, H.J. Bernstein, S. Popescu, B. Schumacher, *Concentrating partial entanglement by local operations*, Phys. Rev. A, 53, pp. 2046-2052 (1996).
- [41] A.P. Hines, R.H. McKenzie and G.J. Milburn, *Entanglement of two-mode Bose-Einstein condensates*, Phy. Rev. A, 67, 013609 (2003).