



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE  
GRÁFICAS PARA ESTUDIANTES DE  
CIENCIAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MATEMÁTICO

PRESENTA:  
JORGE ALBERTO ROMERO SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:  
M. EN C. PATRICIA CORTÉS FLORES



2009



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional Autónoma de México.

A la Facultad de Ciencias.

A todos mis profesores, especialmente Patricia Cortés, Concha Ruiz, Paz Álvarez y Rocío Vite.

A mis padres por su apoyo.

A mis compañeros.

A Jimena y Diana por ayudarme a revisar el manuscrito.

# DEDICATORIAS

A mis padres.

A Jimena.

A mis hermanos.

A mis alumnos.

A mis compañeros del museo Universum.

# Índice general

<b>I</b>	<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>II</b>	<b>Desarrollo</b>	<b>6</b>
0.1.	Modelos Matemáticos . . . . .	7
0.2.	Modelos Matemáticos con Gráficas . . . . .	8
<b>1.</b>	<b>Gráficas</b>	<b>9</b>
1.1.	Conceptos Básicos . . . . .	9
1.2.	El Grado de un Vértice . . . . .	11
1.3.	Gráficas Isomorfas . . . . .	14
1.4.	Subgráficas . . . . .	18
1.5.	Clases de Gráficas . . . . .	20
1.6.	Matrices . . . . .	21
1.6.1.	Matriz de Adyacencia . . . . .	21
1.6.2.	Matriz de Incidencia . . . . .	23
1.7.	Caminos, Paseos, Trayectorias y Ciclos . . . . .	27
1.8.	Gráficas Conexas . . . . .	29
1.9.	Gráficas Bipartitas . . . . .	32
1.10.	Vectores de los grados de los vértices . . . . .	34
1.11.	Ejercicios . . . . .	36
<b>2.</b>	<b>Bloques y Conexidad</b>	<b>40</b>
2.1.	Bloques . . . . .	40
2.2.	Conexidad Lineal y Conexidad Puntual . . . . .	48
2.3.	Teorema de Menger . . . . .	53
2.4.	Ejercicios . . . . .	55

<b>3. Gráficas Eulerianas y Hamiltonianas</b>	<b>57</b>
3.1. El problema de los puentes de Königsberg . . . . .	57
3.1.1. Solución al problema de los Puentes de Königsberg . .	58
3.2. Gráficas Eulerianas . . . . .	59
3.3. El problema del Agente Viajero . . . . .	62
3.4. Gráficas Hamiltonianas . . . . .	62
3.5. Ejercicios . . . . .	67
<b>4. Árboles</b>	<b>73</b>
4.1. El problema de las Vías Ferroviarias . . . . .	73
4.2. Árboles . . . . .	73
4.2.1. Centros y centroides . . . . .	77
4.3. Árboles Generadores . . . . .	79
4.3.1. Algoritmo de Kruskal . . . . .	80
4.3.2. Algoritmo de Prim . . . . .	82
4.4. Ejercicios . . . . .	84
<b>5. Apareamientos</b>	<b>87</b>
5.1. El problema del baile . . . . .	87
5.2. Apareamientos . . . . .	88
5.3. Ejercicios . . . . .	95
<b>6. Algunos Juegos</b>	<b>98</b>
6.1. El problema de los Cubos Multicolores . . . . .	98
6.1.1. Ejercicios . . . . .	104
6.2. El problema del Paseo de los Caballos . . . . .	105
6.2.1. Ejercicios . . . . .	106
6.3. Las Torres de Hanoi . . . . .	107
6.3.1. Ejercicios . . . . .	110
6.4. El problema de Los Tres Caníbales y los Tres Misioneros . . .	110
6.4.1. Ejercicios . . . . .	113
<b>7. Planaridad y Coloración de Vértices</b>	<b>115</b>
7.1. El problema de los Vecinos . . . . .	115
7.2. Gráficas Planas . . . . .	117
7.3. Coloración . . . . .	123
7.4. El Problema de los Cuatro Colores . . . . .	127
7.5. Ejercicios . . . . .	130

<b>8. Gráficas Platónicas y Género</b>	<b>133</b>
8.1. Gráficas Platónicas . . . . .	133
8.2. Género de una Gráfica . . . . .	136
8.3. Ejercicios . . . . .	149

**Parte I**  
**Introducción**



El término “Gráfica” que usaremos en este material denota algo bastante diferente a las gráficas con las que estamos familiarizados de geometría analítica o de funciones. El tipo de gráficas que seguramente ha trabajado consiste en el conjunto de puntos en el plano cuyas coordenadas  $(x,y)$ , en algún sistema coordenado, satisface la ecuación para  $x$  y para  $y$ . Las gráficas que estamos a punto de estudiar son figuras geométricas que consisten de puntos, y líneas que conectan algunos de estos puntos. Es desafortunado que dos conceptos diferentes tengan el mismo nombre, pero esta terminología está tan bien establecida que sería muy difícil cambiarla. Ambigüedades similares en los nombres de algunas cosas aparecen en otros campos de las Matemáticas, y de no ser que haya algún peligro de una confusión seria, los matemáticos difícilmente cambiarían la terminología.

El primer trabajo sobre la teoría de gráficas fue escrito por el famoso matemático suizo Leonard Euler, y apareció en 1736. Desde un punto de vista matemático, la teoría de gráficas fue insignificante en un principio, ya que se le asociaba con algunos juegos de entretenimiento. Pero algunos descubrimientos recientes en matemáticas, y particularmente en sus aplicaciones, le han dado un gran impulso a la teoría de gráficas. En el siglo diecinueve las gráficas se utilizaban en circuitos eléctricos o en diagramas moleculares. Actualmente hay algunos temas en matemáticas puras donde la teoría de gráficas es una herramienta natural, pero hay muchos otros usos en conexión con preguntas altamente prácticas: apareamientos, problemas de transporte, el flujo en redes de tuberías, así como en “programación” en general. La teoría de gráficas también hace su aparición en diversos campos como la economía, la psicología y la biología. De toda la gran cantidad de acertijos matemáticos que pueden resolverse con teoría de gráficas hay uno que ha intrigado a los matemáticos durante mucho tiempo, dicho acertijo es el problema de los cuatro colores.

En matemáticas la teoría de gráficas ha sido clasificada como una rama de la topología; pero también está fuertemente relacionada con el álgebra y la teoría de matrices.

En el siguiente material nos hemos enfocado a tratar de resolver únicamente los problemas más sencillos de la teoría de gráficas, hemos seleccionado estos problemas con la intención de dar la impresión del tipo de análisis que se puede hacer por medio de las gráficas y por otro lado el tipo de problemas que se pueden resolver con dichos métodos.

# Parte II

## Desarrollo

## 0.1. Modelos Matemáticos

La ciencia, y en particular las matemáticas, nos abren un campo enorme de cosas que podemos comprender y disfrutar, y nos permiten entender mejor las cosas que están a nuestro alrededor, crear cosas nuevas y cambiar las cosas viejas que ya no funcionan. Todos los problemas de un individuo o de la sociedad se pueden resolver mejor si se atacan de una manera científica. No sólo los problemas del átomo o de los viajes espaciales, sino también los problemas diarios que se le presentan al hombre en su relación con la naturaleza, con sus compañeros o con la sociedad. Las matemáticas juegan un papel muy importante dentro de este método científico de atacar los problemas, por lo que es necesario que todo mundo desarrolle su capacidad de entender y disfrutar de las matemáticas, la forma en la que se relacionan con los problemas de la vida real y cómo ayudan a resolverlos.

En un modelo matemático, podemos representar o identificar situaciones de la vida real o problemas con un sistema matemático. Uno de los ejemplos más conocidos de esta representación es el plano Euclidiano geométrico o el plano trigonométrico, que nos da resultados útiles para describir pequeñas regiones, así como para medir distancias. Por ejemplo, el mapa de algún estado puede ser muy útil para determinar distancias entre pueblos y ciudades en un cierto estado, pero en muchos casos un mapa del mundo por ejemplo no sería tan útil para calcular distancias entre ciertas ciudades. Para indicar cuan variados pueden ser los modelos matemáticos, presentaremos algunos ejemplos.

Para propósitos de inversión, hemos construido edificios de departamentos durante los últimos tres años. En particular hace tres años construimos un edificio de 4 departamentos por \$100,000. Hace dos años construimos un edificio de 6 departamentos por \$140,000, y el año pasado hicimos un edificio de 8 departamentos por \$180,000. Ahora estamos considerando los planes de construcción para el año en curso. ¿Qué tipo de modelo matemático puede representar esta situación?

Se puede observar que en todos los casos el costo  $C$  de construir un edificio de departamentos es igual a la suma de \$20,000 y el producto del número de departamentos  $n$  por \$20,000, esto es:

$$C = 20,000 + 20,000n.$$

Para  $n = 4, 6, 8$ . Podríamos usar esta fórmula para modelar el costo de los

edificios de departamentos.

Supongamos que se deja una jarra de vino dentro de un coche y la temperatura del vino es de  $70^{\circ}\text{F}$  cuando se retira la jarra del coche. Se pone la jarra en el refrigerador cuya temperatura es de  $35^{\circ}$ . Después de 30 minutos observamos que la temperatura del vino ha descendido a  $60^{\circ}$ . ¿Qué modelo matemático representa esta situación?. En este caso debemos referirnos a una ley de física, que dice que la tasa de cambio de la temperatura  $T$  del vino es proporcional a la diferencia entre las temperaturas del vino y del refrigerador:

$$dT/dt = k(T - 35)$$

donde  $k$  es la constante de proporcionalidad y  $t$  denota el tiempo.

## 0.2. Modelos Matemáticos con Gráficas

La construcción de modelos matemáticos puede tomar muchas formas e involucrar muchas áreas de las matemáticas. Una área de las matemáticas particularmente propensa a ser modelada es la teoría de gráficas.

A continuación se presentan algunos ejemplos de situaciones y se describe la gráfica apropiada que sirve como modelo matemático. En este punto no se considerarán problemas detallados. Dejaremos la discusión de los problemas para los siguientes capítulos.

Una maestra de escuela desea hacer un mapa de su salón para su clase. La manera como construya el mapa de su salón depende de si los estudiantes son amigos entre sí o no. La clase puede ser "dibujada" por medio de una gráfica, donde los vértices representen a los alumnos y la amistad entre dos alumnos es indicada por una arista entre los vértices apropiados.

Varios pelotones de guerra son ubicados en diversas locaciones en preparación para la batalla. La comunicación está dada por telefonos de baterías. Dos pelotones se comunican directamente si están lo suficientemente cerca. Un modelo que representa esta situación puede ser una gráfica cuyos vértices representen a los pelotones, y una comunicación directa entre dos pelotones esté representada por una arista entre los vértices apropiados.

# Capítulo 1

## Gráficas

### 1.1. Conceptos Básicos

Una Gráfica  $G$  es un conjunto finito no vacío  $V$ , junto con un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos  $\{u, v\}$ . Por ejemplo una gráfica  $G$  se puede definir como el conjunto:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

junto con

$$A = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \\ \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}\}$$

En una gráfica  $G$ , nos referimos a  $V$  como el conjunto de los vértices, y a cada elemento de  $V$  le llamamos vértice (nodo, punto). El número de vértices en  $G$  es llamado el orden de  $G$ . Cada elemento de  $A$  es llamado arista (línea, arco, rama) y  $A$  es llamado el conjunto de las aristas de  $G$ . El número de aristas de  $G$  es llamado el tamaño de  $G$ . Así,  $|V|$ =orden de  $G$  y  $|A|$ =tamaño de  $G$ . El conjunto de aristas de una gráfica induce una relación simétrica e irreflexiva en el conjunto de los vértices. Si una gráfica  $G$  es definida en términos del conjunto de vértices  $V$  y la relación de  $R$  en  $V$ , entonces  $(u, v) \in R$  implica que  $(v, u) \in R$ . Es decir  $\{(u, v), (v, u)\}$  es una arista de  $G$ . Es conveniente denotar dicha arista por  $uv$  (o su equivalente  $vu$ ). El conjunto de aristas  $A$  determina completamente la relación  $R$ , así, es más recomendable describir una gráfica en términos de su conjunto de vértices y su conjunto de aristas. La

gráfica descrita anteriormente puede ser definida en términos de sus conjuntos

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

y

$$A = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_4v_5\}$$

donde el orden así como el tamaño de  $G$  es cinco. Es deseable denotar al conjunto de vértices y al conjunto de aristas de una gráfica  $G$  como  $V(G)$  y  $A(G)$  respectivamente. Esto es particularmente útil cuando estamos considerando dos o más gráficas. Como el subconjunto vacío  $\phi$  es una relación simétrica en  $V$ , se sigue que el conjunto de aristas puede ser vacío, es decir la gráfica puede no tener aristas, aunque por definición todas las gráficas tienen vértices. También es conveniente representar a las gráficas por medio de diagramas. En tal representación, dibujamos los vértices con puntos o pequeños círculos y a las aristas con segmentos de línea o curvas que unen dos puntos apropiados.

Diagramas de la gráfica  $G$  con

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

y

$$A = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5\}$$

se muestran en la siguiente figura (Figura 1-1).

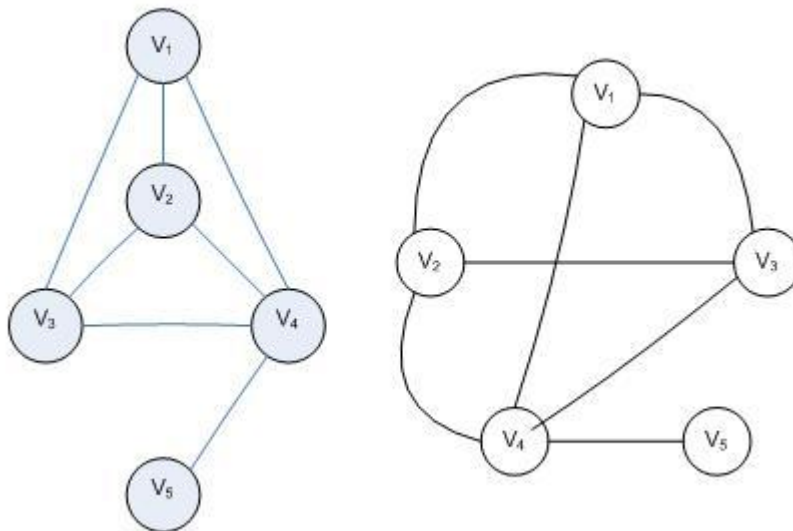


Figura 1-1

El primer diagrama utiliza solo segmentos de línea recta, mientras que el siguiente diagrama utiliza curvas. Aunque los dos diagramas parecen diferentes, contienen exactamente los mismos vértices y las mismas aristas, así que describen a la misma gráfica. Notese que en el segundo diagrama, los segmentos que representan a las aristas  $v_1v_4$ ,  $v_2v_3$ , y  $v_3v_4$  se intersectan. Esto se permite (De hecho en algunos casos es inevitable) pero no se debe confundir este punto de intersección con un vértice.

Si

$$e = uv \in A(G)$$

(es decir, si  $uv$  es una arista de la gráfica  $G$ ) entonces decimos que  $e$  une a los vértices  $u$  y  $v$ . Dos vértices  $u$  y  $v$  son adyacentes en una gráfica  $G$  si  $uv \in A(G)$ . Si  $uv \notin A(G)$ , entonces  $u$  y  $v$  son vértices no adyacentes. Si

$$e = uv \in A(G)$$

entonces  $u$  y  $v$  son cada uno incidentes con  $e$ . Si  $uv$  y  $uw$  son aristas distintas de una gráfica  $G$  (es decir  $v \neq w$ ) entonces  $uv$  y  $uw$  son aristas adyacentes. Así en la gráfica  $G$  previamente descrita  $v_1$  y  $v_3$  son adyacentes pero  $v_1$  y  $v_4$  no son adyacentes.

## 1.2. El Grado de un Vértice

**Definición 1. 1** *El número de aristas que inciden en un vértice  $v$  de una gráfica  $G$  se le llama el grado  $v$  en  $G$ . El grado de  $v$  se denota por  $grad_G v$  o simplemente  $grad v$ .*

**Definición 1. 2** *Denotaremos por  $\Delta(G)$  al grado máximo entre todos los vértices de la gráfica  $G$ , así también denotaremos por  $\delta(G)$  al grado mínimo de entre todos los vértices de la gráfica  $G$ .*

Para la gráfica de la siguiente figura (Figura 1-2)  $grad v_1 = 0$   $grad v_2 = 2$   $grad v_3 = 1$   $grad v_4 = 2$   $grad v_5 = 3$   $grad v_6 = 2$ .

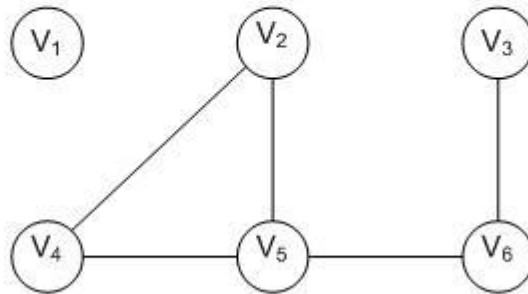


Figura 1-2

Por una  $(p, q)$ - gráfica entendemos que es una gráfica de orden  $p$  y tamaño  $q$ . La gráfica de la Figura 1-2 es una  $(6,5)$  gráfica, además observamos que la suma de los grados es 10 que en este caso es  $2q$ .

**Teorema 1. 1** *Para toda gráfica  $G$ , la suma de los grados de los vértices es igual a dos veces el número de las aristas. Así, si  $G$  es una  $(p, q)$ -gráfica con vértices  $v_1, v_2, \dots, v_p$  entonces  $\sum_{i=1}^p \text{grad}v_i = 2q$*

*dem.* Al sumar los grados de los vértices de una gráfica  $G$ , contamos cada arista dos veces, una por cada uno de los vértices en que incide la arista. •

**Definición 1. 3** *Un vértice es llamado par o impar de acuerdo a si su grado es par o impar.*

La gráfica de la siguiente figura (Figura 1-3) tiene tres vértices de grado par y cuatro vértices de grado impar.



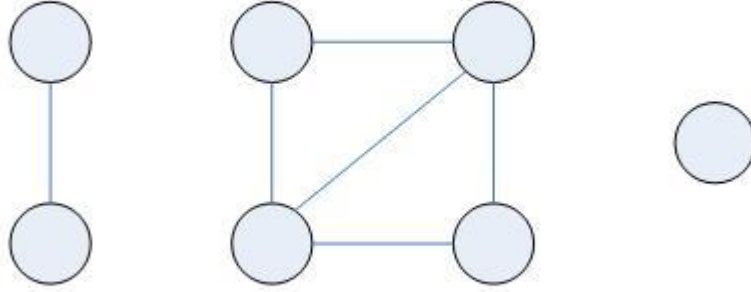


Figura 1-3

**Teorema 1. 2** *Toda gráfica contiene un número par de vértices de grado impar.*

*dem.*

Sea  $G$  una gráfica. Si  $G$  no contiene vértices impares, entonces se cumple el resultado. Suponga que  $G$  contiene  $k$  vértices impares, denotados por  $v_1, v_2, \dots, v_k$ . Si  $G$  contiene vértices pares los denotamos por  $u_1, u_2, \dots, u_n$  entonces por el Teorema 1.1  $(grad v_1 + grad v_2 + \dots + grad v_k) + (grad u_1 + grad u_2 + \dots + grad u_n) = 2q$  donde  $q$  es el número de aristas de  $G$ . Como cada uno de los números  $grad u_1, grad u_2, \dots, grad u_n$  es par entonces  $(grad u_1 + grad u_2 + \dots + grad u_n)$  también es par, así tenemos que  $(grad v_1 + grad v_2 + \dots + grad v_k) = 2q - (grad u_1 + grad u_2 + \dots + grad u_n)$  es par. Pero, cada uno de los números  $grad v_1, grad v_2, grad v_k$  es impar. Por lo tanto,  $k$  debe ser par, así  $G$  tiene un número par de vértices de grado impar. Si  $G$  no tiene vértices pares, entonces  $(grad v_1 + grad v_2 + \dots + grad v_k) = 2q$  de donde concluimos también que  $k$  es par. •

**Definición 1. 4** *Si todos los vértices de una gráfica  $G$  tienen el mismo grado  $r$ , entonces decimos que  $G$  es regular de grado  $r$  o  $r$ -regular.*

**Definición 1. 5** Una gráfica es completa si todos sus vértices son adyacentes. Se denota por  $K_p$  Observación: Una gráfica completa de orden  $p$  es  $(p-1)$ -regular.

A continuación se muestran cinco gráficas completas. (Figura 1-4).

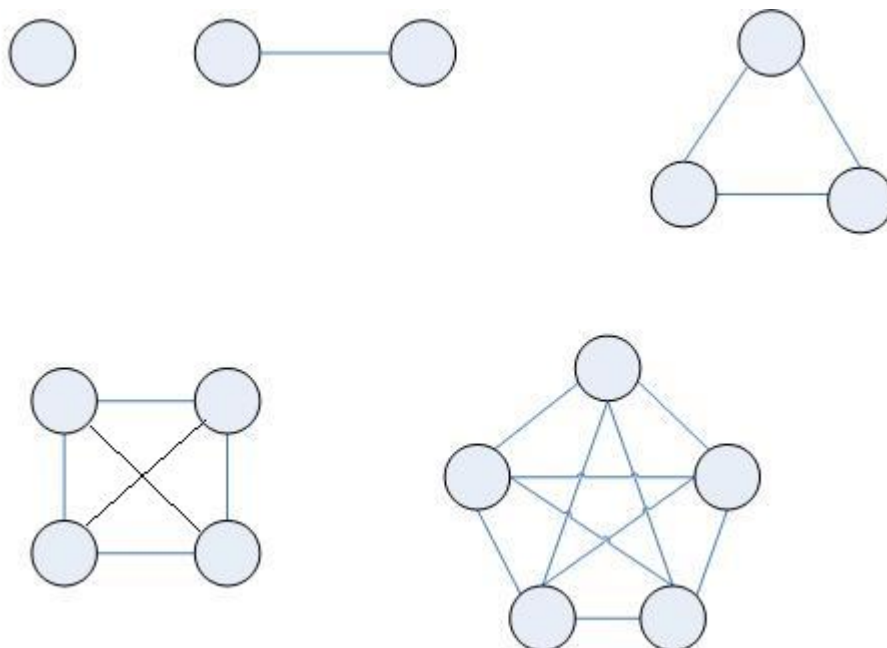


Figura 1-4

**Definición 1. 6** Sea  $G$  una gráfica de orden  $p$ . ( $p \geq 2$ ). Supongamos que  $G$  tiene al menos un vértice de grado cero. Dicho vértice es llamado un vértice aislado.

**Definición 1. 7** Sea  $G$  una gráfica. Los vértices de grado uno son llamados vértices terminales.

**Definición 1. 8** Sea  $G$  una gráfica de orden 1 y tamaño 0. Dicha gráfica es llamada una gráfica trivial y la denotaremos por  $K_1$ .

### 1.3. Gráficas Isomorfas

Podemos considerar que dos gráficas  $G_1$  y  $G_2$  que son la misma si es posible redibujar alguna de ellas, digamos  $G_2$  de tal manera que sea idéntica

a  $G_1$ . Llamaremos a este tipo de gráficas iguales "Gráficas Isomorfas". Por ejemplo las gráficas en la siguiente figura (Figura 1-9) tienen esa propiedad.

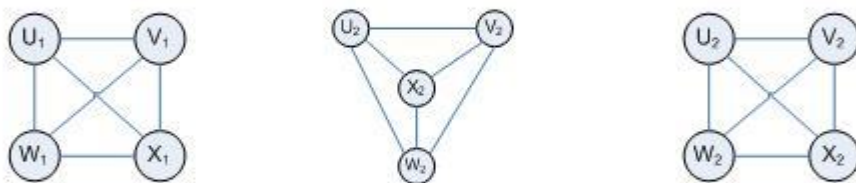


Figura 1-8

**Definición 1.9** Se dice que dos gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas, si existe una función  $\phi$  biyectiva de  $V(G_1)$  en  $V(G_2)$  que preserva adyacencias, es decir, si existe una función  $\phi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  biyectiva y tal que  $u_1$  ady  $v_1$  en  $G_1 \Leftrightarrow \phi(u_1)$  ady  $\phi(v_1)$  en  $G_2$ .

Más adelante veremos que si  $\phi$  es un isomorfismo de  $G_1$  a  $G_2$ , entonces la función inversa  $\phi^{-1}$  de  $V(G_2)$  a  $V(G_1)$  también satisface la definición de isomorfismo.

Esto implica que  $V(G_1)$  y  $V(G_2)$  tienen el mismo número de elementos; esto es  $G_1$  y  $G_2$  tienen el mismo orden. Sean  $u_1$  y  $v_1$  dos vértices de  $G_1$ , y suponga que  $\phi(u_1) = u_2$  y  $\phi(v_1) = v_2$ . Entonces  $u_1$  y  $v_1$  son adyacentes en  $G_1$  si y solo si  $u_2$  y  $v_2$  son adyacentes en  $G_2$ , o visto de otra manera,  $u_1v_1$  es una arista de  $G_1$ , si y solo si  $u_2v_2$  es una arista de  $G_2$ . Esto implica que  $G_1$  y  $G_2$  tienen el mismo tamaño.

Sin embargo, si dos gráficas tienen el mismo orden y el mismo tamaño, esto no necesariamente implica que las gráficas sean isomorfas. Por ejemplo,

las dos gráficas de la siguiente figura (Figura 1-10) tienen orden seis y tamaño nueve, pero no son isomorfas.

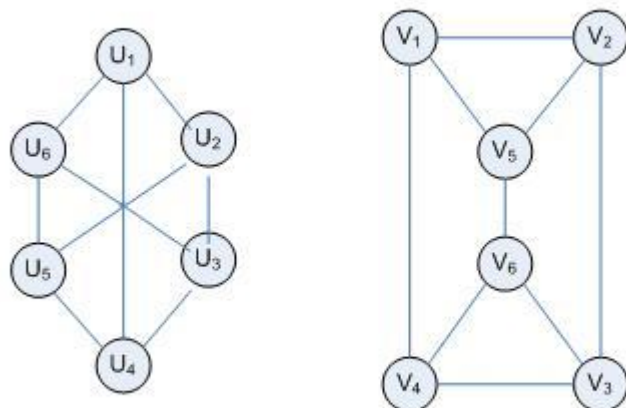


Figura 1-9

Debemos verificar que todas las funciones uno a uno de  $V(G_1)$  en  $V(G_2)$  [o de  $V(G_2)$  en  $V(G_1)$ ] no son isomorfismos, pero se puede simplificar el problema haciendo algunas observaciones. En el caso de las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  consideremos cualquier función  $\phi$  uno a uno de  $V(G_1)$  en  $V(G_2)$ . Los vértices  $v_1, v_2$  y  $v_5$  son adyacentes por parejas y,  $\phi$  debe enviar tres vértices de  $G_1$  en  $v_1, v_2$  y  $v_5$ . Si  $\phi$  es un isomorfismo, entonces dos vértices de  $G_1$  son adyacentes si y solo si los dos vértices de la imagen de  $G_2$  bajo  $\phi$  son adyacentes. Esto implica que los tres vértices de  $G_1$  cuyas imágenes son  $v_1, v_2$  y  $v_5$  también deben ser adyacentes por parejas, pero,  $G_1$  no contiene tres vértices que sean todos adyacentes por parejas. Así, no hay un isomorfismo de  $V(G_1)$  en  $V(G_2)$  y por lo tanto la gráfica  $G_1$  no es isomorfa a la gráfica  $G_2$ .

**Teorema 1. 3** *La relación “es isomorfa a ” es una relación de equivalencia en un conjunto de gráficas.*

*dem.*

(i) Reflexiva

El hecho de que la relación “es isomorfa a” es reflexiva, se sigue de inmediato. Solo necesitamos observar que si  $G$  es una gráfica y la función  $\phi : V(G) \rightarrow V(G)$  se define por  $\phi(v) = v$  para toda  $v \in V(G)$ , entonces  $\phi$  es un isomorfismo de  $G$  en  $G$ .

(ii) Simétrica

Supongamos que  $G_1$  es isomorfa a  $G_2$ , esto es supongamos que  $\phi$  es un isomorfismo de  $G_1$  a  $G_2$ . Definimos la función inversa  $\phi^{-1} : V(G_2) \rightarrow V(G_1)$  por  $\phi^{-1}(v_2) = v_1$  si  $\phi(v_1) = v_2$ . Entonces  $\phi^{-1}$  es una función uno a uno de  $V(G_2)$  en  $V(G_1)$ . Supongamos que  $u_2, v_2 \in V(G_2)$ , y  $\phi^{-1}(u_2) = u_1$  y  $\phi^{-1}(v_2) = v_1$ . Entonces  $\phi(u_1) = u_2$  y  $\phi(v_1) = v_2$ . De estas dos últimas igualdades tenemos que  $u_2$  y  $v_2$  son adyacentes si y sólo si  $\phi(u_1)$  y  $\phi(v_1)$  son adyacentes y como  $G_1$  es isomorfa a  $G_2$ , entonces  $\phi(u_1)$  y  $\phi(v_1)$  son adyacentes si y sólo si  $u_1 = \phi^{-1}(u_2)$  y  $v_1 = \phi^{-1}(v_2)$  son adyacentes. Así  $u_2$  y  $v_2$  son adyacentes si y solo si  $\phi^{-1}(u_2)$  y  $\phi^{-1}(v_2)$  son adyacentes. Esto muestra que  $G_2$  es isomorfa a  $G_1$  es una relación simétrica.

(iii) Transitiva

Supongamos que  $G_1$  es isomorfa a  $G_2$  y que  $G_2$  es isomorfa a  $G_3$ , entonces existen los isomorfismos  $\alpha : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  y  $\beta : V(G_2) \rightarrow V(G_3)$ . Considere el mapeo compuesto  $\beta \circ \alpha$ .  $\beta \circ \alpha$  es un mapeo uno a uno de  $V(G_1)$  en  $V(G_3)$ . Sean  $u_1, v_1 \in V(G_1)$ . Supongamos que  $\alpha(u_1) = u_2$  y  $\alpha(v_1) = v_2$  y además  $\beta(u_2) = u_3$  y  $\beta(v_2) = v_3$ . Como  $\alpha$  y  $\beta$  son isomorfismos  $u_1$  y  $v_1$  son adyacentes si y solo si  $\alpha(u_1) = u_2$  y  $\alpha(v_1) = v_2$  son adyacentes; y  $u_2$  y  $v_2$  son adyacentes si y solo si  $\beta(u_2) = u_3$  y  $\beta(v_2) = v_3$  son adyacentes. Así  $u_1$  y  $v_1$  son adyacentes. así  $u_1$  y  $v_1$  son adyacentes si y solo si  $u_3 = \beta(\alpha(u_1))$  y  $v_3 = \beta(\alpha(v_1))$  son adyacentes. Esto completa la prueba de que  $\beta \circ \alpha$  es un isomorfismo. Así,  $G_1$  es isomorfa a  $G_3$ . •

Una condición necesaria para que una gráfica sea isomorfa a otra se presenta a continuación.

**Teorema 1. 4** *Si  $G_1$  y  $G_2$  son gráficas isomorfas, entonces los grados de los vértices de  $G_1$  y  $G_2$  se conservan bajo el isomorfismo, es decir si  $\phi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ , entonces  $\text{grad}(v_1) = \text{grad}(\phi(v_1))$ .*

*dem.*

Como  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas, existe un isomorfismo  $\phi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ . Sea  $u$  un vértice arbitrario de  $G_1$ , y supongamos que  $\text{grad } u = n$ . Supongamos además que la imagen de  $u$  en  $G$  es  $v$ , es decir  $\phi(u) = v$ . Probaremos

que  $\text{grad } v = n$ .

Como el grado de  $u$  es  $n$  ( $\text{grad } u = n$ ), la gráfica  $G_1$  contiene  $n$  vértices  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  adyacentes a  $u$ , mientras que cualquier otro vértice de  $G_1$  no es adyacente a  $u$ . Sea  $\phi(u_i) = v_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Entonces  $v$  es adyacente a cada uno de los vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$  dado que  $\phi$  es un isomorfismo. Además estos son los únicos vértices adyacentes a  $v$ , ya que  $u$  es adyacente a  $x$  en  $G_1$  si y sólo si  $v$  es adyacente a  $\phi(x)$  en  $G_2$ . Así  $\text{grad } v = n$ . Como un vértice de  $G_1$  y su correspondiente imagen en  $G_2$  tienen el mismo grado, esto establece el teorema. •

Debemos enfatizar el hecho de que el teorema anterior da una condición necesaria para que dos gráficas sean isomorfas, pero no es una condición suficiente. Esto es, los vértices de dos gráficas pueden tener exactamente la misma sucesión de grados, pero pueden no ser isomorfas. Por otro lado, si la sucesión de los grados de los vértices de una gráfica  $G_1$  y la sucesión de los grados de los vértices de una gráfica  $G_2$  no son iguales, entonces  $G_1$  y  $G_2$  no son isomorfas.

**Definición 1. 10** *El Complemento de una gráfica simple  $G$  es una gráfica simple  $\bar{G}$  o  $G^c$  con  $V(G) = V(\bar{G})$  tal que  $a \in A(\bar{G}) \Leftrightarrow a \notin A(G)$  es decir deben tener el mismo orden y en la cual existe una arista entre dos vértices  $v$  y  $w$  en la gráfica  $\bar{G}$  si y solo si no existe arista entre  $v$  y  $w$  en la gráfica  $G$ . Obviamente el complemento de  $\bar{G}$  es  $G$ .*

**Definición 1. 11** *Una gráfica simple que es isomorfa a su complemento es llamada una gráfica autocomplementaria.*

**Teorema 1. 5** *Si  $G$  es una gráfica simple y de orden 6 entonces hay un triángulo en  $G$  o en  $\bar{G}$ . (La demostración se deja al lector).*

## 1.4. Subgráficas

**Definición 1. 12** *Sea  $G$  una gráfica. Una gráfica  $H$  es una subgráfica de  $G$  si  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $A(H) \subseteq A(G)$*

**Definición 1. 13** *Cualquier gráfica  $G'$  para la cual una gráfica  $G$  es una subgráfica es llamada una supergráfica de  $G$ .*

Si una gráfica  $F$  es isomorfa a una subgráfica  $H$  de  $G$ , entonces  $F$  también es llamada subgráfica de  $G$ . La siguiente figura (Figura 1-5) muestra una gráfica  $G$  y su subgráfica  $H$ .

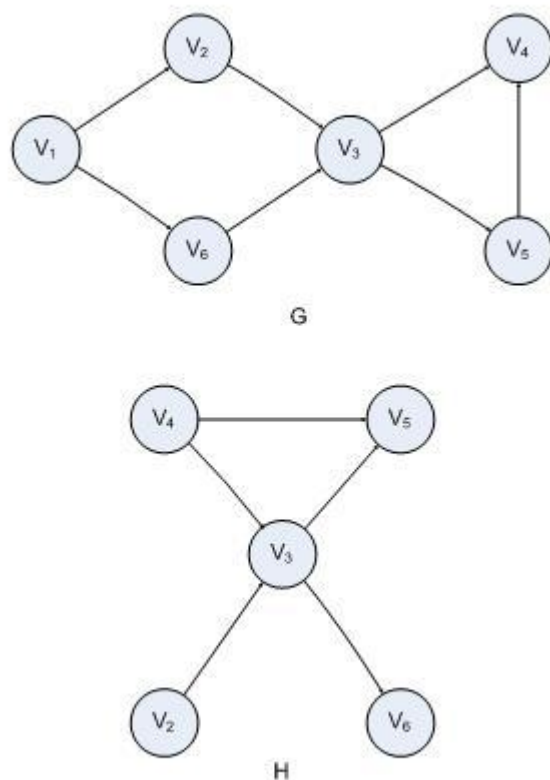


Figura 1-5

**Definición 1. 14** Una subgráfica generadora  $H$  de  $G$  es cualquier subgráfica que tenga el mismo número de vértices.

**Definición 1. 15** Una subgráfica inducida  $H$  de  $G$  es aquella que cumple que  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $A(H)$  es el conjunto de todas las aristas de  $G$  entre vértices de  $H$ .

En la siguiente figura se muestra una gráfica  $G$  junto con su subgráfica inducida  $H$  y una subgráfica no inducida  $F$ .

## 1.5. Clases de Gráficas

**Definición 1. 16** En una gráfica, si dos o más aristas unen al mismo par de vértices, se les llaman aristas múltiples.

**Definición 1. 17** Una arista que une a un vértice con si mismo se le llama lazo.

En la siguiente figura (Figura 1-7) la gráfica  $G$  tiene aristas múltiples y la gráfica  $H$  tiene un lazo.

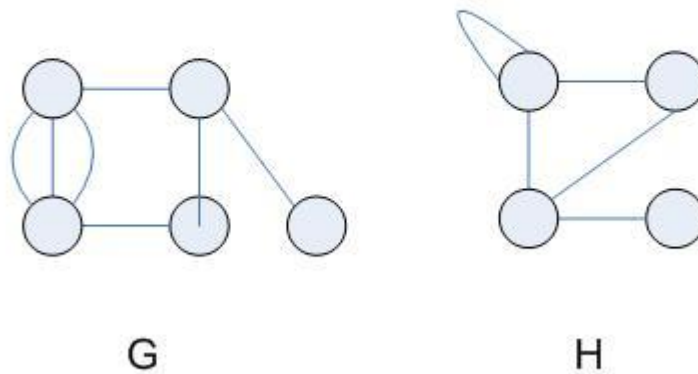


Figura 1-6

**Definición 1. 18** Un lazo contribuye solo en 1 al grado del vértice que lo contenga.

**Definición 1. 19** A una gráfica con aristas múltiples pero sin lazos se llama *Multigráfica*.

**Definición 1. 20** A una gráfica con al menos un lazo se llama *Pseudográfica*

**Definición 1. 21** Una gráfica dirigida o *digráfica* consiste de un conjunto finito no vacío de vértices  $V$  y un conjunto de pares ordenados de vértices llamados arcos. Si la pareja ordenada  $\{u, v\}$  ( o también  $(u, v)$  o  $[u, v]$ ) es un arco  $a$  , decimos que  $a$  esta dirigida de  $u$  a  $v$ .



Un ejemplo de una digráfica se muestra en la siguiente figura.(Figura 1-8).

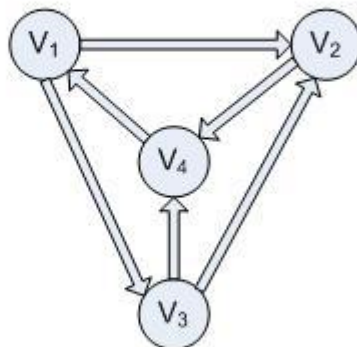


Figura 1-7

## 1.6. Matrices

Una gráfica esta completamente determinada por su conjunto de vértices y por el conocimiento de los pares de vértices que son adyacentes. Esta misma información puede ser dada en una matriz. De hecho, gran parte de la teoría de gráficas podría ser estudiada a través de las matrices. Existen ciertas ventajas en esta forma de estudio, ya que las matrices pueden servir para trabajar en una computadora y hacer una gran variedad de cálculos. Por otro lado, existen varias desventajas al representar las gráficas como matrices, ya que esto destruye el aspecto visual de las gráficas, y el reconocimiento de ciertas propiedades gráficas en matrices no es necesariamente más simple que en el diagrama de la gráfica.

### 1.6.1. Matriz de Adyacencia

**Definición 1. 22** Sea  $G$  una gráfica simple de orden  $p$  con vértices denotados por  $v_1, v_2, \dots, v_p$ . La "Matriz de Adyacencia"  $A = A(G) = [a_{ij}]$  es la

matriz de  $p \times p$  en la cual  $a_{ij} = 1$  si  $v_i$  y  $v_j$  son adyacentes y  $a_{ij} = 0$  en caso contrario. Así la matriz  $A$  es una matriz  $(0,1)$  (es decir toda entrada de  $A$  es 0 o 1); la diagonal principal de  $A$  consiste solo de 0 (es decir  $a_{ii} = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, p$ ); y  $A$  es simétrica (es decir  $a_{ij} = a_{ji}$  para  $1 \leq i \leq p$  y  $1 \leq j \leq p$ ), además la suma de cada renglón es igual al grado del vértice. En el caso de una multigráfica se agrega 1 por cada arista entre un par de vértices. En el caso de una pseudográfica se agrega 1 en la diagonal por cada lazo.

Una gráfica  $G$  y su matriz de adyacencia están dadas en la siguiente figura. (Figura 1-11).

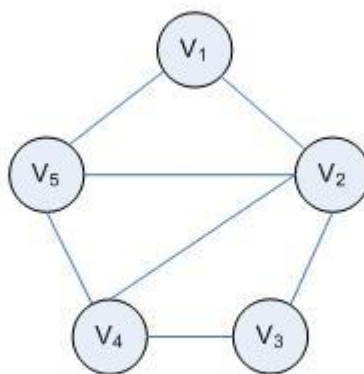


Figura 1-10

vert	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
$v_1$	0	1	0	0	1
$v_2$	1	0	1	1	1
$v_3$	0	1	0	1	0
$v_4$	0	1	1	0	1
$v_5$	1	1	0	1	0

Tabla 1

Nótese que la matriz de adyacencia de una gráfica  $G$  depende de cómo marquemos los vértices. Por ejemplo, la gráfica  $G$  de la figura anterior (Figura 1-11) se muestra de nuevo en la siguiente figura (Figura 1-12) con un marcado diferente de los vértices.

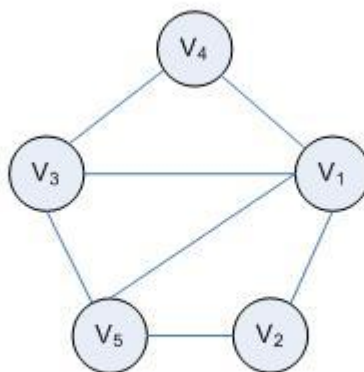


Figura 1-11

vert	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
$v_1$	0	1	1	1	1
$v_2$	1	0	0	0	1
$v_3$	1	0	0	1	1
$v_4$	1	0	1	0	0
$v_5$	1	1	1	0	0

Tabla 2

Aún cuando las matrices de las figuras anteriores son diferentes (como matrices), representan gráficas isomorfas.

### 1.6.2. Matriz de Incidencia

**Definición 1. 23** Sea  $G$  una gráfica de orden  $p$  y tamaño  $q$  tal que  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  y  $A(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ . La Matriz de Incidencia de  $B =$

$B(G) = [b_{ij}]$  es la matriz de tamaño  $p \times q$  en la cual  $b_{ij} = 1$  si  $e_j$  incide en  $b_i$ , y  $b_{ij} = 0$  en otro caso. Como en la matriz de adyacencia, la matriz de incidencia es una matriz  $(0, 1)$ . En general la matriz de incidencia no es simétrica, de hecho en general, no es una matriz cuadrada.

Cada matriz de incidencia obtenida depende de cómo marquemos los vértices y las aristas. La siguiente figura muestra un ejemplo.

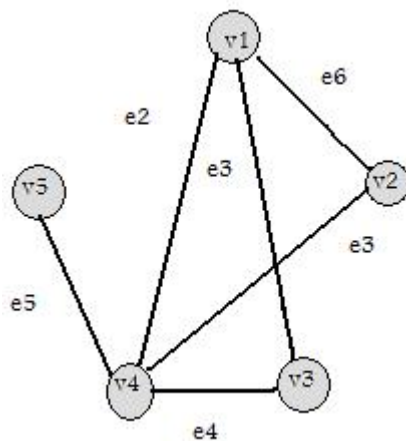


Figura 1-12

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$
$v_1$	1	1	0	0	0	1
$v_2$	0	0	1	0	0	1
$v_3$	1	0	0	1	0	0
$v_4$	0	1	1	1	1	0
$v_5$	0	0	0	0	1	0

Tabla 3

A continuación veremos ejemplos de matrices cuando se trata de una multigráfica, una pseudográfica o una digráfica.

Multigráfica

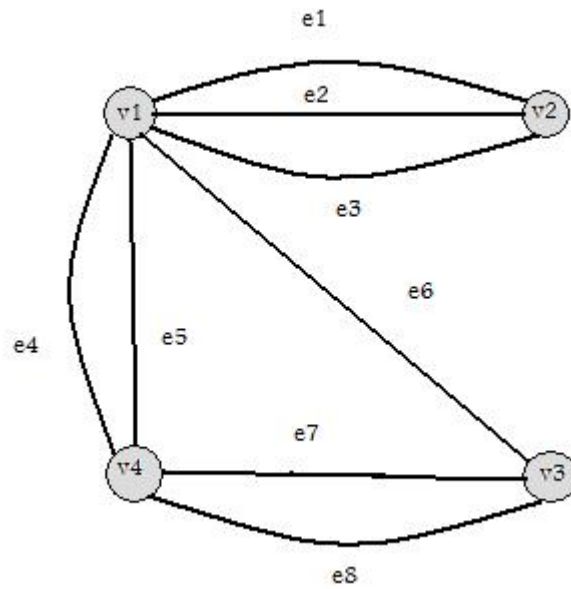


Figura 1-13a  
Matriz de Adyacencia

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$
$v_1$	0	3	1	2
$v_2$	3	0	0	0
$v_3$	1	0	0	2
$v_4$	2	0	2	0

Tabla 4

Matriz de Incidencia

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$
$v_1$	1	1	1	1	1	1	0	0
$v_2$	1	1	1	0	0	0	0	0
$v_3$	0	0	0	0	0	0	1	1
$v_4$	0	0	0	1	1	0	1	1

Tabla 5

Pseudográfica

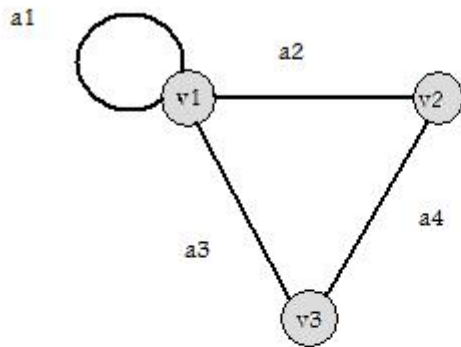


Figura 1-13b  
Matriz de Adyacencia

	$v_1$	$v_2$	$v_3$
$v_1$	1	1	1
$v_2$	1	0	1
$v_3$	1	1	0

Tabla 6

Matriz de Incidencia

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$v_1$	2	1	1	0
$v_2$	0	1	0	1
$v_3$	0	0	1	1

## 1.7. Caminos, Paseos, Trayectorias y Ciclos

**Definición 1. 24** Sean  $u$  y  $v$  dos vértices de una gráfica  $G$ . Un  $uv$  – camino en  $G$  es una sucesión alternada de vértices y aristas de  $G$ , empezando con  $u$  y terminando con  $v$ , tal que toda arista une al vértice que la precede con el siguiente.

Por ejemplo  $v_2, v_2v_3, v_3, v_3v_4, v_4, v_4v_2, v_2, v_2v_1, v_1, v_1v_5, v_5, v_5v_4, v_4, v_4v_2, v_2, v_2v_3, v_3$  es un  $v_2v_3$  – camino en la gráfica  $G$  de la figura siguiente. (Figura 1-15).

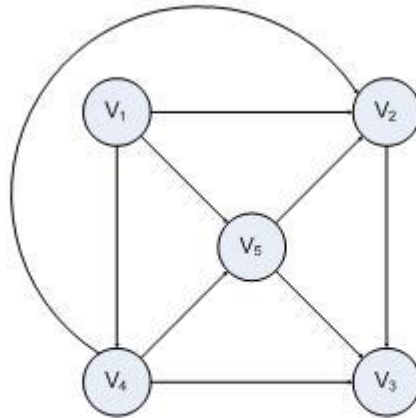


Figura 1-14

Nótese que las aristas  $v_2v_3$  y  $v_3v_4$  aparecen dos veces en el camino.

Se pueden enlistar sólo los vértices del camino, es decir el camino anteriormente descrito puede ser expresado como  $v_2, v_3, v_4, v_2, v_1, v_5, v_4, v_2, v_3$ .

**Definición 1. 25** Un  $uv$  – paseo en una gráfica es un  $uv$  – camino que no repite aristas. El camino descrito anteriormente no es un paseo, pero el camino  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_5$  es un  $v_1v_5$  –paseo de la gráfica de la figura anterior.

**Definición 1. 26** Una  $uv$  – trayectoria es un  $uv$  – camino ( $ouv$  – paseo) tal que no repite vértices.

Así en la figura anterior el camino  $v_1, v_5, v_4, v_3$  es una  $v_1v_3$  – trayectoria.

**Definición 1. 27** Un  $uv$  – paseo en el cual  $u = v$ , y que contiene al menos tres aristas es llamado Circuito. Un circuito debe terminar en el mismo vértice en que se empezó.

**Teorema 1. 6** Todo  $uv$  – paseo contiene una  $uv$  – trayectoria

**Definición 1. 28** Un circuito que no repite vértices (excepto el primero y el último) es llamado ciclo.

Por ejemplo en la gráfica de la figura anterior  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_5, v_1$  es un circuito pero no un ciclo, mientras que  $v_2, v_3, v_4, v_5, v_2$  es un ciclo (además de un circuito).

**Definición 1. 29** El número de aristas en una trayectoria con la menor cantidad de aristas posible entre dos vértices  $v$  y  $w$  de una gráfica conexa  $G$  se llama la distancia entre  $v$  y  $w$  y se denota por  $d(v, w)$ .

**Definición 1. 30** La excentricidad  $e(v)$  de un vértice  $v$  es el máximo valor de  $d(v, w)$ , donde  $w$  es cualquier vértice de la gráfica.

**Definición 1. 31** El radio  $r(G)$  de  $G$  es la excentricidad del vértice de menor excentricidad.

**Definición 1. 32** Un vértice es llamado vértice central si su excentricidad es igual al radio de la gráfica.

**Definición 1. 33** El centro  $C(G)$  de una gráfica es el conjunto de sus vértices centrales.



## 1.8. Gráficas Conexas

**Definición 1. 34** Dos vértices  $u$  y  $v$  en una gráfica  $G$  están conectados si  $u = v$  o si  $u \neq v$  y existe una  $uv$  - trayectoria en  $G$ .

**Definición 1. 35** Una gráfica  $G$  es conexa si todo par de vértices de  $G$  están conectados. En otro caso se dice que  $G$  es desconexa.

**Definición 1. 36** Una subgráfica conexa  $H$  de una gráfica  $G$  es una componente conexa (o simplemente una componente) de  $G$  si  $H = H'$  siempre que  $H'$  sea una subgráfica conexa (de  $G$ ) que contenga a  $H$ . En otras palabras una componente de una gráfica es una subgráfica conexa máxima. Una gráfica es conexa si y solo si el número de componentes es uno. En la siguiente gráfica (Figura 1-16)  $G$  tiene tres componentes.

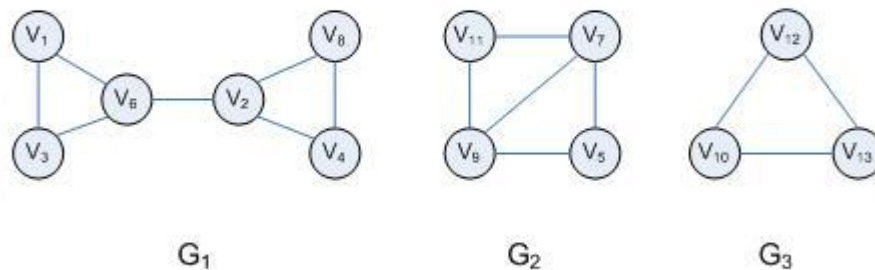


Figura 1-15

**Definición 1. 37** Sea  $G$  una gráfica, se dice que  $v$  es un vértice de corte de la gráfica  $G$  si  $C(G - v) > C(G)$ .

**Definición 1. 38** Sea  $G$  una gráfica, se dice que  $a$  es una arista de corte (o puente) de la gráfica  $G$  si  $C(G - a) > C(G)$ .

**Teorema 1. 7** Sea  $G$  una gráfica conexa. Un vértice es de corte si y solo si existe una partición de  $V(G - v)$ ,  $U$  y  $W$  de  $V(G)$ , tal que  $v$  está contenido en toda trayectoria en  $G$  que una a un vértice de  $U$  con uno de  $W$ .

*dem.*

$\Rightarrow$  Sea  $G$  una gráfica conexa y sea  $v$  un vértice de corte.  $G - v$  no es conexa y tiene al menos dos componentes conexas. Sean  $G_1, G_2, \dots, G_j$  las componentes de  $G - v$  y  $U = V(G_1)$  y  $W = V(G_2) \cup \dots \cup V(G_j)$ . Tomemos  $u \in U$  y  $w \in W$ . Estos vértices están en componentes conexas distintas de  $G - v$ , lo cual indica que en  $G - v$  no hay una  $uw$ -trayectoria. Esto implica que toda  $uw$ -trayectoria en  $G$ , contiene a  $v$  necesariamente.

$\Leftarrow$  Sea  $G$  una gráfica conexa y sean  $U$  y  $W$  subconjuntos de  $V(G)$  como en la hipótesis.  $G - v$  no puede ser conexa puesto que toda  $uw$ -trayectoria ( $u \in U$  y  $w \in W$ ) contiene a  $v$ , lo que indica que  $v$  es vértice de corte.●

**Teorema 1. 8** Una arista  $a$  de una gráfica conexa  $G$  es un puente de  $G$  si y solo si  $a$  no pertenece a ningún ciclo de  $G$ .

*dem*

$\Rightarrow$  Sea  $a$  un puente de  $G$ . Como  $C(G - a) > C(G)$  existen vértices  $u$  y  $v$  en  $V(G)$  que están conectados en  $G$  pero no en  $G - a$ . Entonces existe una  $uv$ -trayectoria en  $G$ , a la que llamaremos  $T$ , que contiene a  $a$ . Supongamos que  $a = xy$  y que  $x$  precede a  $y$  en  $T$ . En  $G - a$   $u$  está conectado a  $x$  por una parte de  $T$  y  $v$  está conectado a  $y$  por otra parte de la misma trayectoria. Si  $a$  estuviera en algún ciclo  $C$  de  $G$ ,  $x$  y  $y$  estarían conectados en  $G - a$  por la trayectoria  $C - a$ . La unión de la parte de  $T$  que une a  $x$  y a  $u$  con la trayectoria  $C - a$  con la parte de  $T$  que conecta a  $y$  con  $v$ , conecta a  $u$  y a  $v$  en  $G - a$  lo cual es una contradicción.

$\Leftarrow$  Supongamos ahora que  $a = xy$  es una arista de  $G$  que no está en algún ciclo de  $G$  y que  $a$  no es puente. Esto quiere decir que  $G - a$  es conexa y que por lo tanto existe una  $xy$ -trayectoria en  $G - a$  a la que llamaremos  $T$ . Se puede observar que la unión de  $a$  y  $T$  da un ciclo en  $G$  que contiene a  $a$ , lo cual es una contradicción.●

Definiremos ahora conceptos análogos que involucren eliminación de vértices. Si  $W$  es un conjunto de vértices en  $G = (V, A)$  la gráfica obtenida de  $G$  al eliminar los vértices que pertenecen a  $W$ , así como las aristas que inciden en los vértices de  $W$  se denota por  $G - W$ .

Si  $W$  consiste de un solo vértice  $w$ , la gráfica  $G - W$  se denota por  $G - w$ . Un conjunto  $W$  de vértices en  $G$  es llamado un conjunto separador (también

conocido como conjunto de corte) en  $G$  si  $G - W$  tiene más componentes que  $G$ . Si el conjunto separador consiste de un solo vértice  $w$ ,  $w$  se conoce como vértice de corte. El número  $\kappa(G)$  de una gráfica  $G$  es el tamaño mínimo de un conjunto separador y se le llama la conexidad puntual. Ya que una gráfica completa no tiene conjunto separador, adoptamos la convención de que  $\kappa(G)$  de una gráfica completa de orden  $n$  es  $n - 1$  para toda  $n$ . Una gráfica  $G$  se dice que es  $k$ -conexa si  $\kappa(G) \geq k$ . Así  $K_n$  es  $(n - 1)$ -conexa para toda  $n$ . Y una gráfica que no es completa es  $k$ -conexa si y solo si un conjunto separador tiene al menos  $k$  vértices. La conexidad puntual de una gráfica  $G$  es cero si y solo si es trivial o es una gráfica desconexa. Una gráfica cíclica es 2-conexa puntualmente. En la figura anterior  $v_6$  es un vértice de corte y la subgráfica  $G_1$  es 1-conexa puntualmente mientras que  $G_2$  y  $G_3$  son 2-conexas puntualmente.

En el siguiente capítulo veremos que los resultados anteriores tienen varias condiciones equivalentes con el concepto de bloque.

**Teorema 1. 9** *Toda gráfica con  $|V(G)| > 1$  tiene al menos dos vértices que no son de corte.*

*dem.*

Podemos suponer que  $G$  es conexa ya que si  $G$  es desconexa el resultado aplica para cada una de sus componentes conexas.

Sea  $G$  una gráfica conexa y  $u, v \in V(G)$  tales que su distancia sea máxima. Supongamos que  $G - u$  es desconexa. Entonces existen dos subconjuntos de  $V(G)$  que llamaremos  $U$  y  $W$ , tales que  $u$  está contenido en toda trayectoria que una a un vértice de  $U$  con uno de  $W$ . Para el vértice  $v$  hay dos posibilidades:  $v \in U$  o  $v \in W$ . Si  $v \in U$ , consideremos  $w \in W$ . Como  $u$  está contenido en toda  $wv$ -trayectoria, entonces  $d(w, v) \geq d(u, v) + 1$ , lo que contradice la elección de los vértices  $u$  y  $v$ . Lo mismo pasa si  $v \in W$ . Análogamente se demuestra que  $v$  no es de corte. •

**Teorema 1. 10** *Si una gráfica conexa  $G$  con  $|V(G)| \geq 3$  tiene un puente, entonces  $G$  tiene también un vértice de corte.*

*dem.*

Sea  $G$  una gráfica conexa con  $|V(G)| \geq 3$  y  $a \in A(G)$  un puente con extremos  $u$  y  $v$ .  $G - a$  no es conexa y tiene dos componentes conexas  $H_1$  y  $H_2$  tales que  $u \in V(H_1)$  y  $v \in V(H_2)$ . Como  $G$  es conexa con al menos tres

vértices, entonces existe  $w \in V(G - a)$ , tal que  $w \neq u, w \neq v$ . Si  $w \in V(H_1)$ , entonces en  $G - u$  no existen  $wv$ -trayectorias. Análogamente si  $w \in V(H_2)$ . Con lo cual concluimos que  $G - u$  o  $G - v$  es desconexa, es decir  $u$  o  $v$  son vértices de corte.●

**Teorema 1. 11** *Si  $G$  es una gráfica desconexa entonces  $G^c$  es una gráfica conexa.*

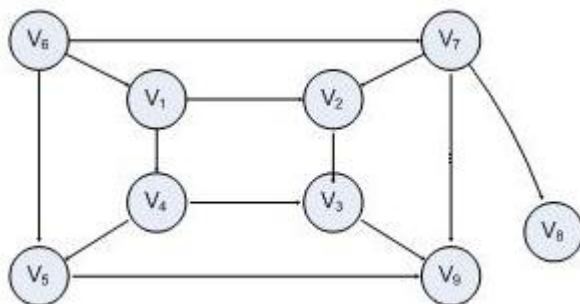
*dem.*

Sean  $u$  y  $v$  dos vértices de  $G^c$  (y desde luego también de  $G$ ). Si  $u$  y  $v$  pertenecen a distintas componentes conexas de  $G$ , entonces  $uv \in A(G^c)$ . Si  $u$  y  $v$  pertenecen a la misma componente conexa  $G_1$  en  $G$ , entonces sea  $w$  un vértice en alguna otra componente conexa  $G_2$  de  $G$ . Entonces  $uw$  y  $wv \in A(G^c)$ . Así en cualquier caso existe una  $uv$ -trayectoria en  $G^c$ , y por lo tanto  $G^c$  es conexa.●

## 1.9. Gráficas Bipartitas

**Definición 1. 39** *Una gráfica  $G$  es llamada bipartita si es posible separar al conjunto  $V$  de vértices de  $G$  en dos subconjuntos no vacíos, digamos  $V_1$  y  $V_2$ , tal que toda arista de  $G$  une a un vértice de  $V_1$  con un vértice de  $V_2$ .*

En la siguiente figura (Figura 1-17) se dibuja de manera diferente la misma gráfica para mostrar que es bipartita.



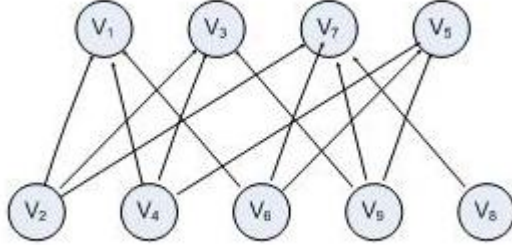


Figura 1-16

Así, para esta gráfica podemos hacer  $V_1 = \{v_1, v_4, v_5, v_8, v_9\}$  y  $V_2 = \{v_2, v_3, v_6, v_7\}$  para ver que efectivamente se trata de una gráfica bipartita.

**Teorema 1. 12** *Una gráfica no trivial es bipartita si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.*

*dem.*

$\Rightarrow$  Sea  $G$  una gráfica bipartita con partición de los vértices  $V_1$  y  $V_2$ . Sea  $C : v_1, v_2, \dots, v_k, v_1$  un ciclo de  $G$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $v_1 \in V_1$ . de esta manera  $v_2 \in V_2, v_3 \in V_1, v_4 \in V_2$ , y así podemos continuar. Esto implica que  $k = 2s$  para algún entero positivo  $s$ ; así  $C$  tiene longitud par.

$\Leftarrow$  Para el inverso es suficiente probar que toda gráfica conexa no trivial  $G$  sin ciclos impares es bipartita, ya que toda gráfica no trivial es bipartita si y sólo si cada una de sus componentes conexas no triviales es bipartita. Sea  $v \in V(G)$  y denotemos por  $V_1$  el subconjunto de  $V(G)$  que consiste de  $v$  y de todos los vértices  $u$  de  $G$  con la propiedad de que cualquier  $uv$  - trayectoria mínima de  $G$  tiene longitud par. Sea  $V_2 = V(G) - V_1$ . Ahora probaremos que la partición de  $V_1 \cup V_2$  de  $V(G)$  tiene las propiedades adecuadas para mostrar que  $G$  es bipartita.

Sean  $u$  y  $w$  elementos de  $V_1$ , y supongamos que  $uw \in A(G)$ . Entonces ni  $u$  ni  $w$  son el vértice  $v$ . Sean  $v = u_1, u_2, \dots, u_{2n+1} = u$ , con  $n \geq 1$ , y  $v = w_1, w_2, \dots, w_{2m+1} = w$ , con  $m \geq 1$ , una  $uv$  - trayectoria mínima y una  $vw$  - trayectoria mínima de  $G$  respectivamente, y supongamos que  $w'$  es un vértice que tienen en común ambas trayectorias tal que la  $w'u$ -subtrayectoria y la  $w'w$ -subtrayectoria solo tienen a  $w'$  en común. (Nótese que  $w'$  pudiera ser  $v$ ). las dos  $w'w$  subtrayectorias así determinadas son entonces  $vw'$ -trayectorias mínimas. Así existe  $i$  tal que  $w'=u_i = w_i$ . Pero por otro lado  $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{2n+1}, w_{2m+1}, w_{2m}, \dots, w_i = u_i$  es un ciclo impar de  $G$ , lo

que es una contradicción a la hipótesis. Análogamente no existen dos vértices de  $V_2$  que sean adyacentes. •

**Definición 1. 40** La gráfica bipartita completa  $K_{m,n}$  es una gráfica con  $m$  vértices en  $V_1$  y  $n$  vértices en  $V_2$  en la cual existe una arista entre cada vértice de  $V_1$  y de  $V_2$ .

**Definición 1. 41** Una gráfica  $G$  es llamada  $n$ -partita si es posible separar al conjunto  $V$  de vértices de  $G$  en  $n$  subconjuntos no vacíos, digamos  $V_1, V_2, \dots, V_n$  tal que toda arista de  $G$  une un vértice de  $V_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), con un vértice de  $V_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ),  $i \neq j$ .

**Definición 1. 42** Una gráfica  $G$  es llamada  $n$ -partita completa si cada vértice del conjunto  $V_i$  es adyacente con cada uno de los vértices del conjunto  $V_j$ , para toda ( $i \neq j$ ), ( $1 \leq i, j \leq n$ ).

## 1.10. Vectores de los grados de los vértices

**Definición 1. 43** La sucesión de grados de los vértices de una gráfica en orden no creciente se llama un vector gráfico.

**Teorema 1. 13** Sea  $v = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ \dots \ d_k]$  un vector no creciente con  $k$  (donde  $k$  es al menos 2) enteros no negativos donde ninguna componente  $d_i$  excede  $k - 1$ . Sea  $v'$  el vector obtenido de  $v$  al eliminar  $d_1$  y al restar 1 de las siguientes  $d_1$  componentes de  $v$ . Sea  $v_1$  el vector no creciente obtenido de  $v'$  al reacomodar sus componentes si es necesario. Entonces  $v$  es un vector gráfico (es decir es un vector que corresponde a una gráfica) si y solo si  $v_1$  es un vector gráfico.

*dem.*

(i) Supongamos que  $v = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ \dots \ d_k]$  es un vector gráfico. Es posible que exista más de una gráfica con el conjunto de vértices (ordenado)  $V = x_1, x_2, \dots, x_k$  tal que el grado  $x_i = d_i$ . Escogemos una gráfica  $G$  con vector de grados  $v$  tal que la suma de los grados de aquellos vértices adyacentes al primer vértice  $x_1$  sea lo más grande posible. Entonces probaremos que  $x_1$  es adyacente a los siguientes  $d_1$  vértices, empezando por  $x_2$  en el conjunto ordenado  $V$ . Supongamos que no es el caso. Así existen vértices  $x_j$  y  $x_k$  tal que (1)  $x_j$  no es adyacente a  $x_1$ , (2)  $x_k$  es adyacente a  $x_1$  y  $d_j > d_k$ . Sea

la suma de los grados de todos los vértices adyacentes a  $x_1$  en la gráfica  $G$  igual a  $d_k + t$ , donde  $t \geq 1$ . Como  $d_j > d_k$ , debe existir un vértice  $x_i$  que sea adyacente a  $x_j$ , pero que no sea adyacente a  $x_k$ . Eliminamos la arista que une a  $x_1$  con  $x_k$  y la arista que une  $x_i$  con  $x_j$ . Ahora construimos una arista que una a los vértices no adyacentes  $x_i$  y  $x_j$ . El vector de los grados de los vértices que acabamos de construir (y que llamaremos  $G'$ ) tiene el mismo vector  $v$ . En  $G'$  la suma de los grados de los vértices adyacentes a  $x_1$  en  $G$  es máximo. Así  $x_1$  es adyacente a los  $d_1$  vértices siguientes en el conjunto ordenado  $V$  que empieza en  $x_2$ . Entonces el vector  $v_1$  construido del vector  $v$  como en la hipótesis del teorema es el vector de los grados de los vértices de la gráfica  $G - x_1$ . Así  $v_1$  es un vector gráfico.

(ii) Supongamos que  $v_1$  es un vector gráfico. Por lo tanto existe una gráfica  $G_1$  de orden  $k - 1$  para la cual su vector es  $v_1$ . Ahora reetiquetaremos los vértices de  $G_1$  como  $x_2, x_3, \dots, x_k$  tal que el grado de  $x_i$  es la  $i$ -ésima componente de  $v'$ . Construimos un nuevo vértice  $x_1$  y unimos  $x_1$  con cada uno de los primeros  $d_1$  vértices en el conjunto ordenado  $[x_2, x_3, \dots, x_k]$ . La primera componente del vector de grados de la nueva gráfica  $G$  así construída es  $d_1$ , y las siguientes  $d_1$  componentes son  $d_j$ . Así las primeras  $d_1 + 1$  componentes del vector de grados de  $G$  son las mismas que las primeras  $d_1 + 1$  componentes de  $v$ . Las componentes restantes del vector de grados son las mismas que las últimas  $k - (d_1 + 1)$  componentes de  $v$ . Así el vector de grados de  $G$  es  $v$ , y es un vector gráfico. ●

Algoritmo para determinar si es que un vector es gráfico.

El vector  $v$  es un vector no creciente con entradas enteras.

Paso 0. (Inicio). El vector en cuestión es  $v$ .

Paso 1. Si el vector con  $k$  componentes tiene una componente que exceda  $k-1$ , ir al paso 5. En otro caso ir al paso 2.

Paso 2. Si el vector tiene alguna componente negativa, ir al paso 5. De otra manera ir al paso 3.

Paso 3. Si el vector es el vector cero, ir al paso 6. En otro caso ir al paso 4.

Paso 4. (Iteración). Reacomodar las componentes del vector en cuestión de tal manera que se vuelva un vector no creciente con  $d_1$  como su primera componente. eliminamos  $d_1$  del vector reacomodado, y restamos 1 a las siguientes  $d_1$  componentes del vector. El vector así construído es el nuevo vector en cuestión. Ir al paso 1.

Paso 5. El vector no corresponde a una gráfica. Ir al paso 7.

Paso 6. El vector corresponde a una gráfica. Ir al paso 7.

Paso 7. Detenerse.

Nota: El vector cero del paso 3 con  $k$  componentes corresponde a una gráfica ya que es el vector de grados de una gráfica simple con  $k$  vértices sin aristas.

Usaremos este algoritmo para determinar que el vector  $v=[5\ 4\ 4\ 3\ 3\ 3\ 2]$  es gráfico.

Iteración 1.

$$v=[5\ 4\ 4\ 3\ 3\ 3\ 2] \text{ y } v_1=[3\ 3\ 2\ 2\ 2\ 2]$$

Iteración 2.

$$v=[3\ 3\ 2\ 2\ 2\ 2] \text{ y } v_1=[2\ 2\ 2\ 1\ 1]$$

Iteración 3.

$$v=[2\ 2\ 2\ 1\ 1] \text{ y } v_1=[1\ 1\ 1\ 1]$$

Iteración 4.

$$v=[1\ 1\ 1\ 1] \text{ y } v_1=[1\ 1\ 0]$$

Iteración 5.

$$v=[1\ 1\ 0] \text{ y } v_1=[0\ 0]$$

Al final de la quinta iteración obtenemos el vector cero. Así el vector  $v$  original corresponde a una gráfica.

## 1.11. Ejercicios

1. Dibuje el diagrama de las siguientes gráficas:

$$a) V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \quad A = \{v_1v_2, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5\}$$

$$b) V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \quad A = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_5, v_3v_5\}$$

$$c) V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \quad A = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_5, v_2v_6, v_3v_5, v_3v_6, v_4v_5, v_4v_6\}$$

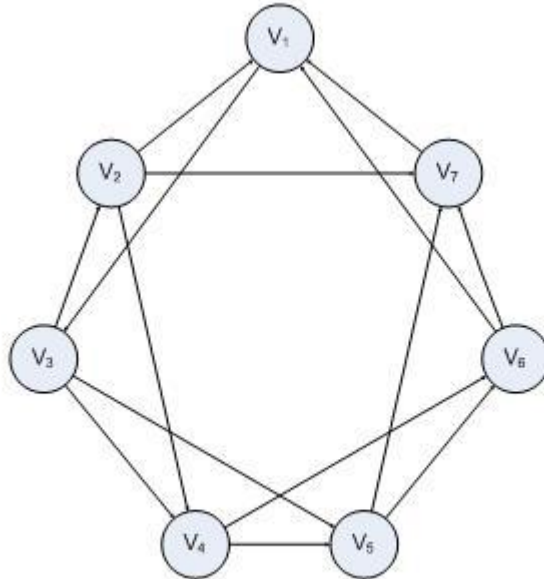
2. Dibuje el diagrama de los complementos de las gráficas del ejercicio 1.

3. Muestre que en una gráfica simple, hay al menos dos vértices del mismo grado.

4. Muestre que el complemento de una gráfica bipartita no necesariamente es una gráfica bipartita.



5. Muestre que toda gráfica simple de orden  $n$  es isomorfa a una subgráfica de la gráfica completa con  $n$  vértices.
6. Muestre que si dos gráficas  $G$  y  $G'$  son isomorfas, el orden de  $G$  es igual al orden de  $G'$  y el tamaño de  $G$  es igual al tamaño de  $G'$ .
7. Muestre que si dos gráficas  $G$  y  $G'$  son isomorfas, el grado de cada vértice se preserva bajo el isomorfismo.
8. Muestre que dos gráficas  $G$  y  $G'$  con el mismo conjunto de vértices  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y tal que el grado de cada vértice  $v_i$  es el mismo para ambas gráficas, no necesariamente son isomorfas.
9. Dé un ejemplo de dos gráficas no isomorfas pero con el mismo orden y tamaño.
10. Muestre que dos gráficas simples son isomorfas si y sólo si sus complementos son isomorfos.
11. Determine si las siguientes gráficas (Figura 1-18) son o no isomorfas.



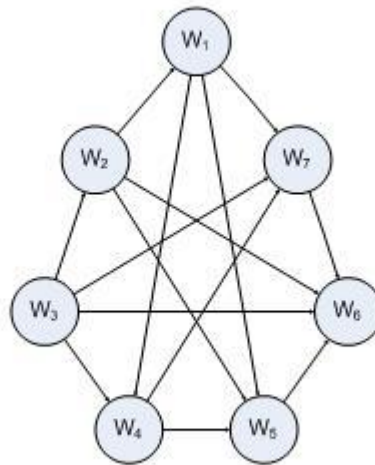
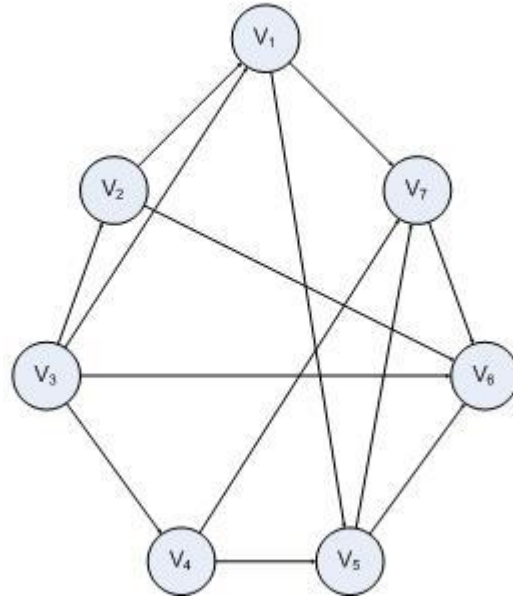


Figura 1-17

12. Encuentre todas las gráficas no isomorfas con 4 vértices y 3 aristas.
13. Encuentre todas las gráficas no isomorfas de orden 4.

14. Encuentre una gráfica autocomplementaria de orden 4.
15. Encuentre dos gráficas autocomplementarias de orden 5.
16. Encuentre el número de aristas de una gráfica completa con  $n$  vértices.
17. Muestre que el número de vértices de una gráfica autocomplementaria es  $4k$  o  $4k + 1$ , donde  $k$  es un entero positivo.
18. Encuentre el número de aristas de la gráfica completa bipartita  $K_{m,n}$ .
19. Muestre que no existe una gráfica simple con 12 vértices y 28 aristas en la cual todos los vértices son de grado 3 o 4.
20. Muestre que en cualquier grupo de 6 personas, hay tres personas que se conocen entre sí (es decir cada una de ellas conoce a las otras dos), o tres personas que no se conocen (ninguna de ellas se conoce).
21. Pruebe que en la Matriz de Adyacencia de una gráfica, la suma de las entradas en un renglón (o una columna) corresponde al grado del vértice, y que la suma de todas las entradas es dos veces el número de aristas.
22. Determine si el vector  $[5 \ 4 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 2]$  es gráfico.
23. Determine si el vector  $[6 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 3 \ 1]$  es gráfico.
24. Determine si el vector  $[5 \ 5 \ 3 \ 2 \ 1]$  es gráfico.
25. Sea  $v=[d_1 \ d_2 \dots d_n]$  y  $w=[w_n \ w_{n-1} \dots w_2 \ w_1]$ , donde  $w_i = n - 1 - d_i$ . Muestre que  $v$  es un vector gráfico si y solo si  $w$  es un vector gráfico.
26. Determine si  $[8 \ 7 \ 6 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1]$  es un vector gráfico.

# Capítulo 2

## Bloques y Conexidad

### 2.1. Bloques

A menudo encontraremos gráficas que no tienen vértices de corte. Es este tipo de gráficas las que discutiremos a continuación

**Definición 2.1** *Un bloque es una gráfica conexa no trivial sin vértices de corte.*

Las gráficas conexas no triviales que no son bloques contienen subgráficas especiales en las cuales también estamos interesados.

**Definición 2.2** *Los bloques de una gráfica  $G$  son las subgráficas máximas de  $G$  por contención con la propiedad de ser bloques, un bloque es necesariamente una subgráfica inducida, y más aún los bloques de una gráfica particionan su conjunto de aristas.*

La siguiente figura muestra una gráfica y sus bloques

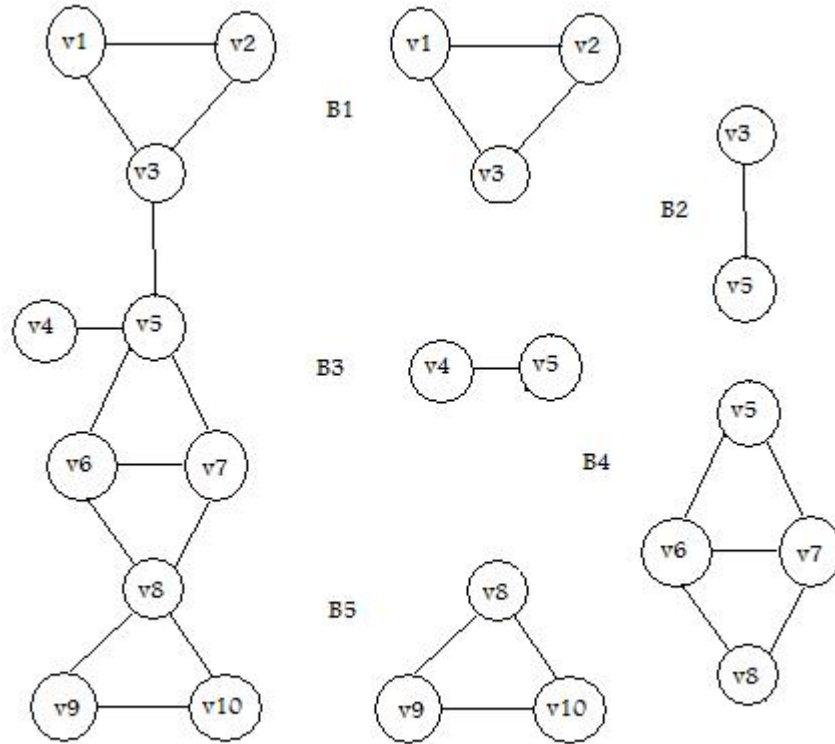


Figura 2-1

**Definición 2.3** Los bloques de una gráfica que contienen exactamente un vértice de corte de dicha gráfica se llaman bloques terminales.

**Teorema 2.1** Sea  $G$  una gráfica conexa con al menos tres vértices. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1.  $G$  es un bloque.
2. Cada par de vértices de  $G$  está en un ciclo común.
3. Dados un vértice y una arista de  $G$  existe un ciclo que contiene a ambos.
4. Cada par de aristas de  $G$  está en un ciclo común.

5. *Dados dos vértices y una arista de  $G$ , existe una trayectoria que une a los vértices que contiene a la arista.*
6. *Para cada tres vértices de  $G$ , existe una trayectoria que une a cualesquiera dos vértices que contiene al tercero.*
7. *Para cada tres vértices de  $G$ , existe una trayectoria que une a cualesquiera dos vértices que no contiene al tercero.*

*dem*

$1 \Rightarrow 2$

Sean  $u$  y  $v$  dos vértices distintos de  $G$ , y sea  $U$  el conjunto de todos los vértices diferentes de  $u$  que están en un ciclo que contiene a  $u$ . Dado que  $G$  tiene al menos tres vértices sin vértices de corte, por lo tanto no tiene puentes, así todo vértice adyacente a  $u$  está en  $U$ , por lo tanto  $U$  no es vacío.

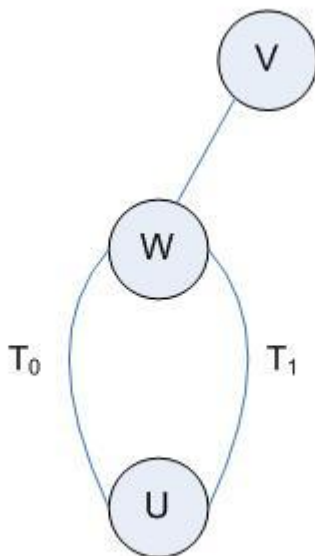


Figura 2-2.

Supongamos que  $v$  no está en  $U$ . Sea  $w$  un vértice en  $U$  para el cual la distancia entre  $w$  y  $v$  sea mínima. Sea  $T$  la  $wv$ -trayectoria más corta, y sean  $T_0$  y  $T_1$  las dos  $uw$ -trayectorias de un ciclo que contenga a  $u$  y a  $w$ . Como  $w$  no es un vértice de corte, existe una  $uw$ -trayectoria que llamaremos  $T_2$  que no contiene a  $w$ . Sea  $w'$  el vértice más cercano a  $u$  en  $T_2$  y que además

está en  $T$ , y sea  $u'$  el último vértice de la  $uw'$  subtrayectoria de  $T_2$  ya sea en  $T_0$  o  $T_1$ . Sin pérdida de generalidad, supondremos que  $u'$  está en  $T_0$ .

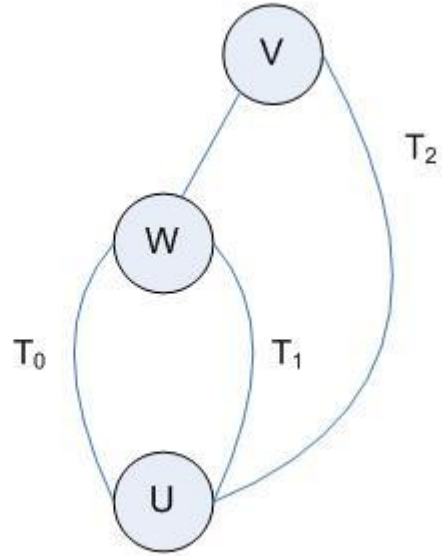


Figura 2-3.

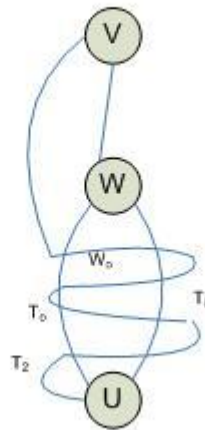


Figura 2-4.

Sea  $Q_1$  la  $uw'$ -trayectoria que consiste de la  $uw'$  subtrayectoria de  $T_0$  y de la  $u'w'$  subtrayectoria de  $T_2$ . Sea  $Q_2$  la  $uw'$  trayectoria que consiste de  $T_1$  junto con la  $ww'$  subtrayectoria de  $T$ . Así  $Q_1$  y  $Q_2$  son dos  $uw'$ -trayectorias ajenas. Juntas forman un ciclo, así  $w'$  está en  $U$ . Como  $w'$  está en la  $wv$ -trayectoria más corta, entonces  $d(w', v) < d(w, v)$ . Esto contradice nuestra elección de  $w$ , probando así que  $u$  y  $v$  están en un ciclo.

$2 \Rightarrow 3$

Sea  $u \in V(G)$  y  $a \in A(G)$ ,  $a = wv$ . Por hipótesis existe un ciclo  $C$  que contiene a  $u$  y a  $w$ . En cuanto a  $v$  hay dos posibilidades: que sea parte de los vértices del ciclo o que no sea parte del ciclo.

Si  $v \in V(C)$  obtenemos un ciclo  $C_0$  que contiene a  $u$  y a la arista  $a$  de la siguiente manera:

$$C = u, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n, w, w_1, \dots, w_{m-1}, w_m, v, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k, u$$

$$C_0 = u, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n, w, v, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k, u$$

Es decir, sustituímos la parte de  $C$  entre  $w$  y  $v$  por la arista  $a$ , como se muestra en la siguiente figura. (Figura 2-4).

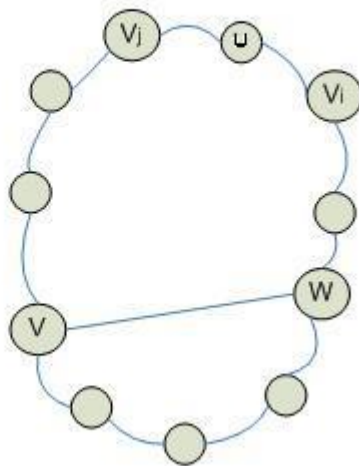


Figura 2-5.



Si  $V \notin V(C)$ , entonces la prueba es igual a la demostración anterior y podemos encontrar dos trayectorias de  $u$  a  $v$ , una de las cuales contiene a la arista  $a$ .

3  $\Rightarrow$  4

Sean  $a$  y  $b$  dos aristas de  $G$  y sean  $w$  y  $v$  los extremos de  $b$ . Por hipótesis existe un ciclo  $C_1$  que contiene a la arista  $a$  y al vértice  $w$ . Al igual que la demostración anterior, tenemos dos casos, ya sea que  $v$  esté o no esté en  $V(C_1)$ . Las demostraciones son análogas a las anteriores.

4  $\Rightarrow$  5

Cualesquiera dos vértices de  $G$  inciden en una arista cada uno, dichas aristas están en un ciclo por hipótesis. Así cualesquiera dos vértices de  $G$  están en un ciclo y además tenemos las hipótesis de 2 y de 3. Sean  $u$  y  $v$  dos vértices distintos y  $x$  una arista de  $G$ . Por la hipótesis de 3, existen el ciclo  $C_1$  que contiene a  $u$  y a  $x$  y  $C_2$  que contiene a  $v$  y a  $x$ . Si  $v$  está en  $C_1$  o  $u$  está en  $C_2$ , existe una  $uv$  – *trayectoria* que contiene a  $x$ . Así solo debemos considerar el caso en el que  $v$  no está en  $C_1$  y  $u$  no está en  $C_2$ . Empezaremos con  $u$  e iremos a lo largo de  $C_1$  hasta alcanzar el primer vértice  $w$  de  $C_2$ , después tomamos la  $wv$  – *trayectoria* en  $C_2$  que contiene a  $x$ . Este camino constituye una  $uv$  – *trayectoria* que contiene a  $x$ .

5  $\Rightarrow$  6

Sean  $u$ ,  $v$  y  $w$  vértices distintos de  $G$ , y sea  $x$  una arista que incide en  $w$ . Por 5, existe una  $uv$  – *trayectoria* que contiene a  $x$ , y por lo tanto debe contener a  $w$ .

6  $\Rightarrow$  7

Sean  $u$ ,  $v$  y  $w$  vértices distintos de  $G$ . Por 6, existe una  $uv$  – *trayectoria*  $T$  que contiene a  $v$ . Entonces la  $uv$  subtrayectoria de  $T$  no contiene a  $w$ .

7  $\Rightarrow$  1

Sabemos que para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$ , no existe algún punto que esté en toda  $uv$  – *trayectoria*. Por lo tanto  $G$  debe ser un bloque.

**Teorema 2. 2** *Dos bloques tienen a lo más un vértice en común.*

*dem.*

Asumiremos que la gráfica  $G$  es conexa. Si un vértice que pertenece a un bloque de  $G$  es eliminado, la gráfica no se vuelve disconexa. Si dos bloques  $B_1$  y  $B_2$  tienen dos vértices  $x$  y  $y$  en común, sea  $H = G - x$ . En la gráfica  $B_1$ , existe una trayectoria entre cada vértice en  $B_1$  y cada vértice en  $(B_1 \cap B_2) - x$ . Similarmente en la gráfica  $B_2$ , existe una trayectoria entre cada vértice en  $B_2$

y cada vértice en  $(B_1 \cap B_2) - x$ . Por lo tanto la unión de estos dos bloques es un bloque violando la maximalidad de dichos bloques. Si dos bloques tienen un vértice en común, dicho vértice es necesariamente un vértice de corte. •

¿Qué distingue a un vértice que tienen en común dos bloques?.

**Definición 2. 4** *Gráfica de bloques.* La gráfica de bloques de una gráfica  $G$ , (que denotaremos como  $B(G)$ ) es la gráfica cuyos vértices son los bloques de la gráfica  $G$  y dos de estos vértices son adyacentes siempre que los correspondientes bloques tengan a un vértice de corte en común.

**Definición 2. 5** *Gráfica de vértices de corte.* La gráfica de vértices de corte de una gráfica  $G$ , (que denotaremos como  $C(G)$ ) es la gráfica cuyos vértices son los vértices de corte de la gráfica  $G$ , y dichos vértices son adyacentes si los correspondientes vértices de corte están en un mismo bloque de la gráfica  $G$ . Notese que  $C(G)$  está definida para gráficas que tienen al menos un vértice de corte.

A continuación se presenta una gráfica (Figura 2-6) con su gráfica de bloques y de vértices de corte.

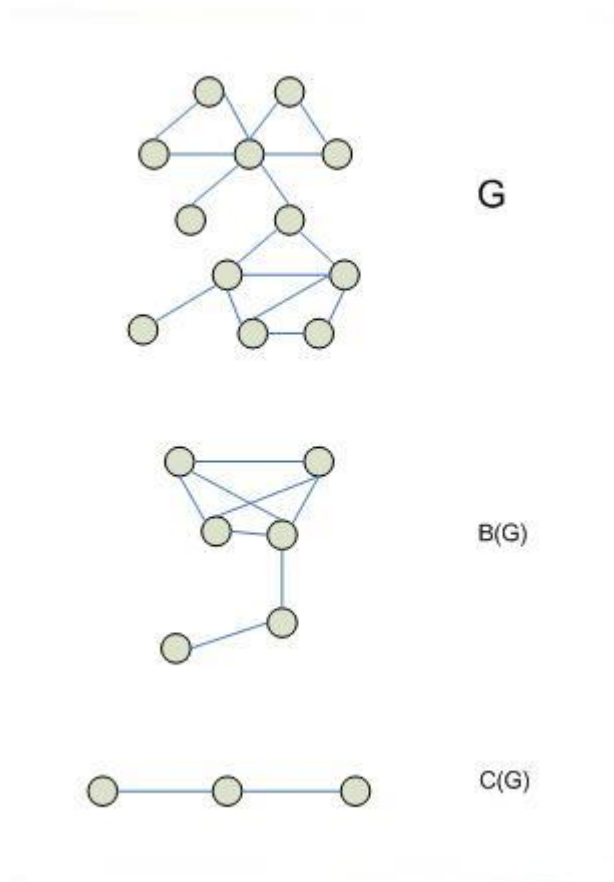


Figura 2-6

**Definición 2. 6** *Gráfica de bloques-vértices de corte. Sea  $G$  una gráfica conexa con bloques  $\{B_i\}$  y vértices de corte  $\{c_j\}$ , la gráfica de bloques-vértices de corte de  $G$ , denotado por  $bc(G)$ , es definida como la gráfica con conjunto de vértices  $\{B_i\} \cup \{c_j\}$ , de tal manera que dos vértices son adyacentes si uno corresponde a un bloque  $B_i$ , otro corresponde a un vértice de corte  $c_j$  y  $c_j$  está en  $B_i$ . Así,  $bc(G)$  es una bigráfica.*

A continuación se presenta una gráfica (Figura 2-7) con su gráfica de bloques-vértices de corte.

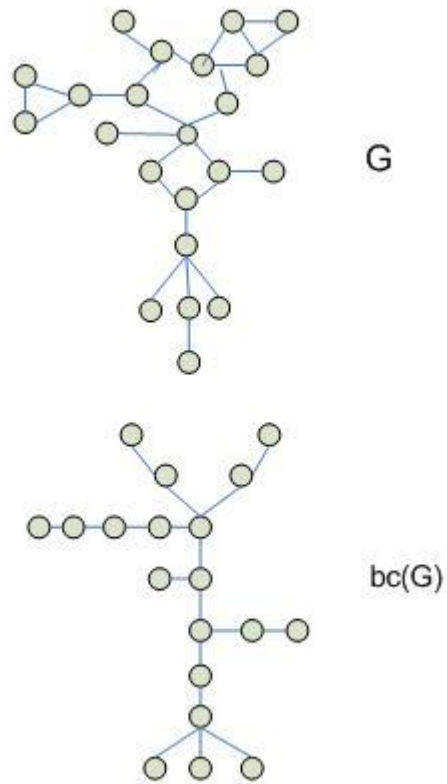


Figura 2-7

## 2.2. Conexidad Lineal y Conexidad Puntual

La conexidad de las gráficas es un área particularmente intuitiva de la teoría de gráficas y abarca los conceptos de vértice de corte, puente y bloque.

Si  $F$  es un conjunto de aristas de la gráfica  $G = (V, A)$ , la gráfica obtenida de  $G$  al eliminar las aristas que pertenecen a  $F$  se denota por  $G - F$ . Si  $F$  consiste de una sola arista  $f$ ,  $G - F$  se denota por  $G - f$ . Un conjunto  $F$  de aristas en  $G$  es llamado un corte lineal de  $G$  si  $G - F$  es desconexa, es decir  $c(G - F) > c(G)$ . Si un conjunto  $F$  que desconecta consiste de una arista, dicha arista es llamada un puente (o arista de corte) como ya se había visto.

**Definición 2. 7** *La conexidad puntual (o sólo conexidad)  $\kappa(G)$  de una gráfica  $G$  es el mínimo número de vértices cuya eliminación da como resultado una gráfica desconexa o la gráfica trivial.*

Así, por ejemplo la conexidad de una gráfica desconexa es 0, mientras que la conexidad de una gráfica conexa con un vértice de corte es 1. La gráfica completa  $K_p$  no puede aumentar el número de componentes conexas al remover cualquier cantidad de vértices, pero la gráfica trivial resulta al remover  $p - 1$  vértices, por lo tanto  $\kappa(K_p) = p - 1$ .

**Definición 2. 8** *Se dice que una gráfica  $G$  es  $n -$  conexas, con  $n \geq 1$  si  $\kappa(G) \geq n$ .*

Nótese entonces que si una gráfica no trivial es conexa entonces se dice que es  $1 -$  conexas.

**Definición 2. 9** *La conexidad lineal  $\lambda(G)$  de una gráfica  $G$  es el mínimo número de aristas cuya eliminación da como resultado una gráfica desconexa o la gráfica trivial.*

Así, por ejemplo la conexidad lineal de una gráfica desconexa es 0 al igual que para  $K_1$ , mientras que la conexidad de una gráfica conexa con un puente es 1.

**Definición 2. 10** *Se dice que una gráfica  $G$  es  $n -$  conexas linealmente , con  $n \geq 1$  si  $\lambda(G) \geq n$ .*

**Definición 2. 11** *Un conjunto  $V'$  de vértices que aumenta el número de componentes de una gráfica, se dice que es un conjunto de corte o simplemente un corte si no existe un subconjunto propio de  $V'$  que la desconecte.*

**Definición 2. 12** *Un conjunto  $A'$  de aristas que aumenta el número de componentes de una gráfica, se dice que es un conjunto lineal de corte o simplemente un corte lineal si no existe un subconjunto propio de  $A'$  que la desconecte.*

La gráfica con 13 vértices de la siguiente figura (Figura 2-8) es desconexa, ya que hay varias parejas de vértices que no están conectados. Por ejemplo el vértice  $v_2$  y  $v_5$  no está conectados. Las componentes de  $G$  son  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_3$ . El

conjunto  $\{v_1v_6, v_2v_6\}$  es un conjunto que aumenta el número de componentes pero no es un conjunto de corte. El conjunto  $\{v_{10}v_{12}, v_{10}v_{13}\}$  es un conjunto de corte. La arista  $v_2v_6$  es un puente. Como  $G$  es desconexa, su conexidad lineal es cero. La conexidad lineal de  $G_2$  es 2.

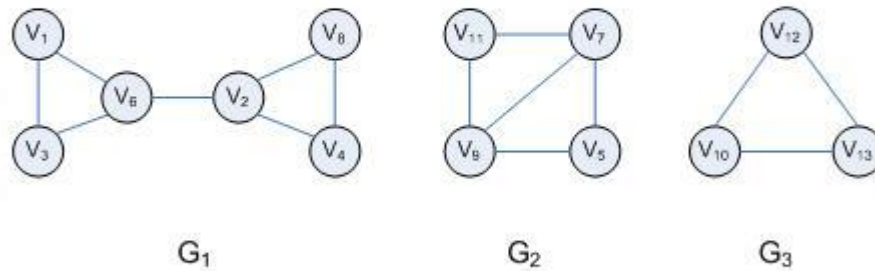


Figura 2-8

**Teorema 2. 3** Para toda gráfica  $G$ ,  $K(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

*dem.*

El conjunto de aristas que inciden en un vértice de grado mínimo es un conjunto que separa al vértice de grado mínimo de los vértices a los cuales era adyacente, así  $\lambda(G) \leq \delta(G)$ . Si  $\lambda(G)$  es cero, la gráfica es trivial o desconexa, lo cual implica que  $K(G)$  es también cero. Si  $G$  es conexa y tiene un puente  $x$ , entonces  $\lambda(G) = 1$  la gráfica  $G$  tiene un puente, lo que implica que  $K(G) = 1$  ya que  $G$  es  $K_2$  o tiene un vértice de corte en el cual incide  $x$ . Supongamos que  $\lambda(G) > 1$ . Si eliminamos  $\lambda(G) - 1$  aristas de la gráfica, obtenemos una subgráfica conexa con un puente que une dos vértices  $v$  y  $w$ . Por cada arista eliminada, podemos escoger un vértice en el cual incide la arista, distinto de  $v$  y  $w$ . Sea  $W$  el conjunto de todos los vértices así escogidos. Supongamos que la eliminación de todos los vértices en  $W$  nos da la gráfica  $G'$ . Si  $G'$  no es conexa, se sigue que  $K(G) < \lambda(G)$ . Si  $G'$  es conexa, tiene un vértice  $u$  cuya

eliminación resulta en una gráfica trivial o desconexa ya que en un incide una arista que es un puente. Así el conjunto de vértices que consiste de  $u$  y de los vértices escogidos (a lo más  $\lambda(G) - 1$ ) constituye un conjunto separador en  $G$ , lo que implica que  $K(G) \leq \lambda(G)$ .•

**Teorema 2. 4** *Una gráfica  $G$  con  $p \geq 3$  es 2-conexa si y solo si todos los vértices de  $G$  están conectados por al menos dos trayectorias internamente ajenas.*

*dem.*

⇐

Si cualesquiera dos vértices de  $G$  están conectados por al menos dos trayectorias internamente ajenas, entonces, claramente  $G$  es conexa y no tiene vértices de corte. Entonces  $G$  es 2-conexa.

⇒

Sea  $G$  una gráfica 2-conexa. La demostración será por inducción sobre la distancia  $d(u, v)$  entre  $u$  y  $v$ , y demostraremos que para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  están conectados por al menos dos trayectorias internamente ajenas.

Supongamos que  $d(u, v) = 1$ . Entonces, dado que  $G$  es 2-conexa, la arista  $uv$  no es de corte y por lo tanto está contenida en un ciclo. Se sigue entonces que  $u$  y  $v$  están conectados por dos trayectorias internamente ajenas en  $G$ .

Ahora supongamos que el teorema se cumple para cualesquiera dos vértices a distancia menor que  $k$ , y sea  $d(u, v) = k \geq 2$ . Consideremos una  $(u, v)$ -trayectoria de longitud  $k$ , y sea  $w$  el vértice que precede a  $v$  en esta trayectoria. Ya que  $d(u, w) = k - 1$ , entonces por la hipótesis de inducción sabemos que hay dos trayectorias internamente ajenas entre  $u$  y  $w$  a las que llamaremos  $P$  y  $Q$ . Además, ya que  $G$  es 2-conexa,  $G - w$  es conexa y contiene una  $(u, v)$ -trayectoria a la que llamaremos  $P'$ . Sea  $x$  el último vértice de  $P'$  que está también en  $P \cup Q$ . (Vease la figura bond 45). Dado que  $u$  está en  $P \cup Q$ , existe dicha  $x$ , no excluimos la posibilidad de que  $x = v$ .

Asumimos sin pérdida de generalidad, que  $x$  está en  $P$ . Entonces  $G$  tiene dos  $(u, v)$ -trayectorias internamente ajenas, una compuesta por la sección de  $P$  que va de  $u$  a  $x$  junto con la sección de  $P'$  que va de  $x$  a  $v$ , y la otra compuesta de  $Q$  junto con la trayectoria que va de  $w$  a  $v$ . Por lo tanto existen al menos dos  $(u, v)$ -trayectorias.•

**Corolario 1** *Si  $G$  es 2-conexa, entonces cualesquiera dos vértices están en un ciclo común.*

*dem.*

Esto se sigue inmediatamente del teorema anterior ya que dos vértices están en un ciclo en común si y solo si están conectados por dos trayectorias internamente ajenas. •

**Teorema 2. 5** *Muestre que si una gráfica simple de orden  $n$  y tamaño  $m$  tiene  $k$  componentes, entonces  $m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1)$ .*

*dem.*

El resultado se cumple aún si asumimos que cada componente es completa. Supongamos que  $H_i$  y  $H_j$  son dos componentes completas con  $n_i$  y  $n_j$  vértices, donde  $n_i \geq n_j \geq 1$ . Si reemplazamos estas dos componentes por dos gráficas completas de orden  $n_i + 1$  y  $n_j - 1$ , respectivamente, el número total de vértices permanece invariante pero el número de aristas se incrementa en  $n_i - n_j + 1$ . así el número de aristas de una gráfica simple de orden  $n$  con  $k$  componentes será máximo si hay  $k - 1$  vértices aislados y una componente completa con  $n - k + 1$  vértices y  $\frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1)$  aristas. •

**Corolario 2** *Muestre que el mínimo número de aristas necesario para asegurar que una gráfica simple sea conexa es  $m > \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ .*

*dem.*

La gráfica que consiste de dos componentes  $K_{n-1}$  y  $K_1$  es una gráfica desconexa de orden  $n$  y tamaño  $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ . Si  $m$  es el tamaño de cualquier gráfica simple de orden  $n$  y si  $m > \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1)$ , el número de sus componentes es  $k - 1$  o menor. En particular, si  $m > \frac{1}{2}(n - 2)(n - 2 + 1)$  la gráfica es conexa. Así una gráfica de orden  $n$  y tamaño  $m$  es conexa si  $m > \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ . •

**Teorema 2. 6** *Una gráfica no trivial  $G$  es  $n$ -conexa linealmente si y solo si no existe un subconjunto propio  $W$  de  $V(G)$  tal que el número de aristas que unen a  $W$  con  $V(G) - W$  es menor que  $n$ .*

*dem.*

$\Rightarrow$

Supongamos que no existe un subconjunto propio no vacío  $W$  de  $V(G)$  para el cual el número de aristas que unen a  $W$  con  $V(G) - W$  es menor que  $n$  pero que  $G$  no es  $n$ -conexa. Como  $G$  es no trivial, esto implica que existen  $k$  aristas  $0 \leq k < n$ , tal que su eliminación de  $G$  resulta en una



gráfica desconexa  $H$ . Sea  $H_1$  una componente de  $H$ . Ya que el número de aristas que unen  $V(H_1)$  y  $V(G) - V(H_1)$  es a lo más  $k$ , donde  $k < n$ , esto es una contradicción.

$\Leftarrow$  Supongamos que  $G$  es una gráfica  $n$ -conexa linealmente. Si existiera un subconjunto  $W$  de  $V(G)$  tal que las  $j$  aristas,  $j < n$ , que unen a  $W$  con  $V(G) - W$ , entonces la eliminación de estas  $j$  aristas produce una gráfica desconexa, lo cual genera una contradicción. •

**Teorema 2. 7** *Si  $G$  es una gráfica  $n$ -conexa y  $v, v_1, v_2, \dots, v_n$  son  $n + 1$  vértices distintos de  $G$ , entonces para  $i = 1, 2, \dots, n$  existen  $vv_i$  trayectorias internamente ajenas.*

*dem.*

Construimos una nueva gráfica  $H$  de  $G$  al añadir un nuevo vértice  $u$  a  $G$  junto con las aristas  $uv_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Como  $G$  es  $n$ -conexa, existen  $n$   $uv$ -trayectorias internamente ajenas en  $H$ . La restricción de estas trayectorias de  $G$  se debe a las deseadas  $vv_i$  trayectorias internamente ajenas. •

## 2.3. Teorema de Menger

**Teorema 2. 8** *El mínimo número de vértices que separan a dos vértices no adyacentes  $s$  y  $t$  es el máximo número de  $st$  - trayectorias ajenas.*

*dem.*

Es claro que si  $k$  vértices separan a  $s$  y a  $t$ , no puede haber más de  $k$   $st$  - trayectorias ajenas.

Ahora debemos demostrar que si se necesitan  $k$  vértices para separar a  $s$  de  $t$  en  $G$ , entonces existen  $k$   $st$  - trayectorias ajenas en  $G$ . Esto es claramente cierto si  $k = 1$ . Supongamos que no es cierto para  $k > 1$ . Sea  $h$  la más pequeña  $k$ , y sea  $F$  la gráfica con el mínimo número de vértices en el cual el teorema falla para  $h$ . Removemos aristas de  $F$  hasta que obtengamos a la gráfica  $G$  tal que se requieran  $h$  puntos para separar a  $s$  de  $t$  en  $G$ , pero que para toda arista  $x$  en  $G$ , solo se necesiten  $h - 1$  vértices para separar a  $s$  de  $t$  en  $G - x$ . Primero obtendremos las propiedades de esta gráfica, y después completaremos la demostración del teorema.

Por definición de  $G$ , para cada arista  $x$  de  $G$  existe un conjunto  $S(x)$  con  $h - 1$  vértices tales que separan a  $s$  de  $t$  en  $G - x$ . Ahora  $G - S(x)$  contiene

al menos una  $st$  – *trayectoria*, ya que se necesitan  $h$  puntos para separar a  $s$  de  $t$  en  $G$ . Cada una de esas  $st$  – *trayectorias* debe contener a la arista  $x = uv$  ya que no es una trayectoria en  $G - x$ . Así  $u, v \notin S(x)$  y si  $u \neq s, t$  entonces  $S(x) \cup \{u\}$  separa a  $s$  de  $t$  en  $G$ .

Si existe un vértice  $w$  adyacente a  $s$  y a  $t$  en  $G$ , entonces  $G - w$  requiere  $h - 1$  vértices para separar a  $s$  de  $t$  y por lo tanto tiene  $h - 1$   $st$  – *trayectorias* ajenas. Reemplazando a  $w$ , tenemos  $h$   $st$  – *trayectorias* ajenas en  $G$ . Así hemos probado que:

(I) No existen vértices adyacentes a ambos vértices  $s$  y  $t$  en  $G$ .

Sea  $w$  cualquier colección de  $h$  vértices que separan a  $s$  de  $t$  en  $G$ . Una  $sW$  – *trayectoria* es una trayectoria que une a  $s$  con algún  $w_i \in W$  y que no contiene algún otro punto de  $W$ . Llamemos a las colecciones de todas las  $sW$  – *trayectorias* y  $Wt$  – *trayectorias*  $P_s$  y  $P_t$  respectivamente. Entonces cada  $st$  – *trayectoria* empieza con un elemento de  $P_s$  y termina con un elemento de  $P_t$ , porque cada una de las dichas trayectorias contiene a algún vértice de  $W$ . Más aún, las trayectorias en  $P_s$  y  $P_t$  tienen solo a los vértices de  $W$  en común, dado que es claro que cada  $w_i$  está en al menos una trayectoria de cada una de las colecciones y, si algún otro vértice está en una  $sW$  y en una  $Wt$  trayectoria, entonces debe existir una  $st$  – *trayectoria* que no contenga vértices de  $W$ . Finalmente, o  $P_s - W = \{s\}$  o  $P_t - W = \{t\}$ , ya que si no,  $P_s$  más las aristas  $\{w_1t, w_2t, \dots\}$  y  $P_t$  más las aristas  $\{sw_1, sw_2, \dots\}$  son gráficas con menos vértices que  $G$  en las cuales  $s$  y  $t$  son no adyacentes y se requieren  $h$  vértices para separarlos y por lo tanto en cada una hay  $h$   $st$  – *trayectorias* ajenas. Combinando las porciones de  $sW$  y de  $Wt$  de dichas trayectorias, podemos construir  $h$   $st$  – *trayectorias* en  $G$ , y así tenemos una contradicción. Por lo tanto hemos probado que:

(II) Cualquier colección  $W$  de  $h$  vértices que separan a  $s$  de  $t$  es adyacente ya sea a  $s$  o a  $t$ .

Ahora podemos completar la prueba del teorema. Sea  $P = \{s, u_1, u_2, \dots, t\}$  una  $st$  – *trayectoria* más corta en  $G$  y sea  $u_1u_2 = x$ . Notese que por (I),  $u_2 \neq t$ . Formamos  $S(x) = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$  como anteriormente lo hicimos, separando a  $s$  y  $t$  en  $G - x$ . Por (I)  $u_1t \notin G$ , así, por (II), con  $W = S(x) \cup \{u_1\}$ ,  $sv_i \in G$ , para toda  $i$ . Así, también por (I)  $v_it \notin G$ , para toda

i. Si por el contrario escogemos  $W = S(X) \cup \{u_2\}$ , tenemos por (II) que  $su_2 \in G$ , contradiciendo el hecho de que  $P$  es una  $st$ -trayectoria más corta, y completando la prueba del teorema. •

## 2.4. Ejercicios

1. Dar una demostración por reducción al absurdo del siguiente corolario: Toda gráfica con al menos dos vértices tiene al menos dos vértices que no son de corte.
2. Determina el número máximo de vértices de corte que pueden estar en un bloque  $B$  de una gráfica conexa con  $p$  vértices,  $p \geq 3$ .
3. Sea  $G$  un bloque con  $p$  vértices,  $p \geq 3$ , y sean  $u$  y  $v$  dos vértices distintos de  $G$ . Dada una  $uv$ -trayectoria  $P$  en  $G$ . ¿Existe siempre una  $uv$ -trayectoria  $Q$  tal que  $P$  y  $Q$  sean ajenas?
4. Sea  $G$  una gráfica con cuatro bloques tal que  $V(G) = v_1, v_2, \dots, v_8$ . Supongamos que todo  $v_i$ ,  $i \leq i \leq 6$  está en un bloque exactamente y que  $v_7$  y  $v_8$  pertenecen exactamente a dos bloques. Prueba que  $G$  es disconexa.
5. Sea  $G$  una gráfica conexa con uno o más vértices de corte. Demostrar que  $G$  contiene por lo menos dos bloques terminales.
6. Sea  $G$  una gráfica conexa con al menos un vértice de corte. Demostrar que  $G$  contiene un vértice de corte con la propiedad de que, con a lo más una excepción, todos los bloques que contienen a  $v$  son bloques terminales.
7. Demostrar que si  $G$  no tiene ciclos pares, entonces todo bloque de  $G$  es  $K_2$  o un ciclo impar.
8. En los siguientes ejercicios de un ejemplo de una gráfica  $G$  que satisfaga las condiciones dadas.
  - a)  $K(G) = \lambda(G) = \delta(G)$
  - b)  $K(G) = \lambda(G) < \delta(G)$
  - c)  $K(G) < \lambda(G) = \delta(G)$

- d)*  $K(G) < \lambda(G) < \delta(G)$
9. En los siguientes ejercicios dibuje una gráfica con las siguientes características que se dan o explique porque no existe dicha gráfica.
- a)* Una gráfica con seis vértices tal que  $K(G) = \lambda(G) = 2$
  - b)* Una gráfica conexa con 11 vértices, 10 aristas y sin vértices de corte.
  - c)* Una gráfica 3-conexa con exactamente un puente.
  - d)* Una gráfica 2-conexa con 8 vértices y exactamente dos puentes.
10. En los siguientes ejercicios determine la conexidad puntual y lineal de las gráficas dadas.
- a)* La gráfica bipartita completa  $K_{4,7}$ .
  - b)* La gráfica cúbica  $Q_4$ .
  - c)* La gráfica completa  $K_{m,n}$ .
  - d)* La gráfica de Petersen.
11. Pruebe que no existe una gráfica simple 3 conexa con exactamente 7 aristas.

## Capítulo 3

# Gráficas Eulerianas y Hamiltonianas

### 3.1. El problema de los puentes de Königsberg

En el pueblo de Königsberg (ahora conocido como Kaliningrado) existían en el siglo XVIII siete puentes que atravesaban el río Pregel (llamado Pregolya en estos días). Los puentes conectaban dos islas en el río entre sí y con las orillas opuestas.

Los habitantes del pueblo se divertían con este problema: ¿Es posible atravesar los siete puentes en una caminata continua sin pasar dos veces por alguno de ellos?.

La siguiente figura (Figura 3-1) muestra un diagrama de Königsberg, con las áreas de tierra (islas y orillas) denotadas por *A*, *B*, *C* y *D*.

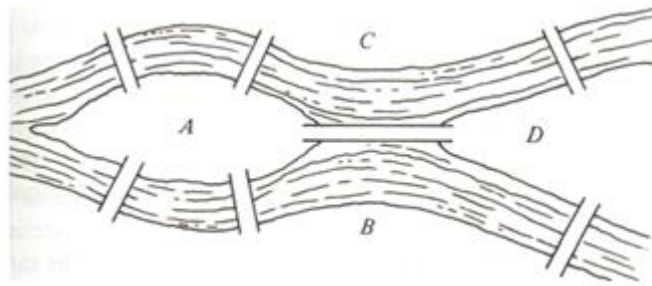


Figura 3-1

La situación en Königsberg puede ser representada por una multigráfica como se muestra en la siguiente figura.

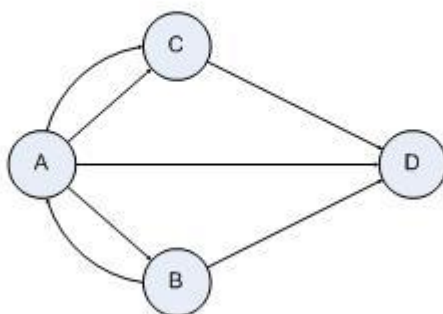


Figura 3-2

El conjunto de los vértices corresponde a las áreas de tierra y dos vértices están unidos por un número de aristas igual al número de puentes que unen las correspondientes áreas.

El problema de los puentes de Königsberg es esencialmente un problema de determinar si la multigráfica  $M$  de la figura anterior tiene un paseo (posiblemente un circuito) que contenga a todas las aristas.

Se puede usar el método de ensayo y error, y probablemente se llegaría a la conclusión de que no existe dicho paseo. Pero, ¿Cómo probamos que no existe dicho paseo?.

### 3.1.1. Solución al problema de los Puentes de Königsberg

Es decir, probaremos que la multigráfica  $M$  de la figura anterior no tiene un paseo que contenga a todas las aristas de  $M$ .

La demostración será por contradicción. Suponga que la multigráfica  $M$  de la figura anterior tiene un paseo, digamos  $P$ , tal que contiene a todas las aristas de  $M$ . Entonces  $P$  comienza en alguno de los cuatro vértices  $A$ ,

$B$ ,  $C$  o  $D$ , y termina también en uno de los cuatro vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  o  $D$  (el mismo vértice donde empezó  $P$  si  $P$  es un circuito). Al menos hay dos vértices entre  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  tal que  $P$  ni empieza ni termina en uno de estos dos vértices. Así, existe al menos un vértice entre  $B$ ,  $C$  y  $D$  tal que  $P$  ni empieza ni termina en uno de ellos. Denotemos a dicho vértice por  $v$ .

Notese que cada uno de los vértices  $B$ ,  $C$  y  $D$  son de grado 3. Así, después de que alguna arista de  $P$  entra al vértice  $v$  por vez primera y alguna arista de  $P$  sale del vértice  $v$ , hay exactamente una arista incidente en  $v$  que no pertenece aún a  $P$ . Se debe entrar a  $v$  a través de  $P$  por la arista incidente en  $v$  que no había sido usada. De cualquier manera al llegar a  $v$  por segunda vez, no tenemos aristas restantes para salir, así  $P$  debe terminar en  $v$  (esto para  $B$ ,  $C$  y  $D$  ya que se suponía que al menos uno de ellos no era vértice inicial o final), es decir no existe el paseo  $P$ , obteniendo la contradicción deseada.

El problema de los puentes de Königsberg fue inicialmente resuelto por el famoso matemático Suizo Leonhard Euler (1707-1783). El tipo de paseo visto en el problema de los puentes de Königsberg ha dado lugar, de una manera muy natural, a una clase de gráficas (de hecho multigráficas) que llevan el nombre de Euler.

## 3.2. Gráficas Eulerianas

**Definición 3.1** *Un circuito que contiene a todos los vértices y a todas las aristas de una multigráfica  $M$  es llamado un Circuito Euleriano en  $M$ . Una gráfica que contiene un circuito euleriano es llamada una Gráfica Euleriana, mientras que una multigráfica que contiene un circuito euleriano es llamada Multigráfica Euleriana.*

**Teorema 3.1** *Una multigráfica  $G$  es euleriana si y sólo si  $G$  es conexa y todo vértice de  $G$  es de grado par.*

*dem.*

$\Rightarrow$  Supongamos que  $G$  es una multigráfica euleriana. Entonces  $G$  contiene un circuito euleriano  $C$ , que empieza y termina, digamos en un vértice  $v$ . Como  $C$  contiene a todos los vértices de  $G$ , existe un paseo entre cualesquiera dos vértices (y por lo tanto una trayectoria), de tal manera,  $G$  es conexa. Ahora mostraremos que todo vértice de  $G$  es par. Primero consideraremos un vértice  $u$  diferente de  $v$ . Como  $u$  no es el primer ni el último vértice de  $C$ , cada vez que nos encontramos con  $u$  entramos por una arista y salimos por una

arista distinta; así cada vez que nos encontramos con  $u$  en  $C$  incrementamos el grado de  $u$  en dos. Así  $u$  tiene grado par. En el caso del vértice  $v$ , cada vez que nos encontramos con  $v$  excepto la primera y la última contribuyen en dos al grado, mientras que la ocurrencia inicial y final de  $v$  en  $C$  contribuye cada una en uno al grado de  $v$ . Por lo tanto, todo vértice de  $G$  es de grado par.

⇐ Supongamos que  $G$  es una multigráfica conexa y todo vértice de  $G$  es de grado par. Mostraremos ahora que  $G$  es euleriana. Escojamos un vértice  $v$  de  $G$ , y empecemos un paseo  $P$  en  $v$ . Continuamos con este paseo tanto como sea posible hasta que lleguemos a un vértice  $w$  de tal manera que las únicas aristas que incidan en  $w$  pertenezcan a  $P$ ; por lo tanto  $P$  no puede continuar, y debemos detenernos. Supondremos entonces que  $w = v$ . Para justificar esto, supongamos que  $w \neq v$ . En cada ocasión que nos encontramos con  $w$  previo a la última vez, usamos una arista para entrar a  $w$  y otra para salir. Cuando nos encontramos con  $w$  por última vez en  $P$ , solo se usa una arista para entrar. Así un número impar de aristas incidentes en  $w$  aparecen en  $P$ . Como  $w$  tiene grado par, debe haber alguna arista que incida en  $w$  que no pertenezca a  $P$ . Esto implica que  $P$  puede ser continuada y por lo tanto no termina en  $w$  (si  $w \neq v$ ). Concluimos entonces que  $w = v$ , y  $P$  es un circuito. Si el circuito  $P$  contiene a todas las aristas de  $G$ , entonces  $P$  es un circuito euleriano de  $G$  y  $G$  es una multigráfica euleriana.

Supongamos que el circuito  $P$  no contiene a todas las aristas de  $G$ . Como  $G$  es conexa, debe haber al menos un vértice  $u$  en  $P$  en el cual inciden aristas que no están en  $P$ . Quitamos de  $G$  las aristas que pertenecen a  $P$  y consideremos la multigráfica resultante  $H$ . Como  $P$  no contiene a todas las aristas de  $G$ , la multigráfica  $H$  tiene aristas. Además, en cada vértice que pertenece a  $P$  inciden un número par de aristas de  $P$ , así todo vértice de  $H$  es de grado par. Sea  $H_1$  la componente de  $H$  que contiene al vértice  $u$ . Si comenzamos un paseo  $P_1$  de  $H_1$  en  $u$  y continuamos este paseo hasta donde sea posible, entonces, como anteriormente vimos,  $P_1$  debe terminar en  $u$  (esto es,  $P_1$  debe ser un circuito). Es posible formar un circuito  $C_1$  de  $G$ , que comience y termine en  $v$ , que tenga más aristas que  $P$ . Hacemos esto al tomar el circuito  $P$  e insertarle el circuito  $P_1$  en donde concurren en  $u$ .

Si  $C_1$  contiene a todas las aristas de  $G$ , entonces  $C_1$  es un circuito euleriano y  $G$  es una multigráfica euleriana. Si  $C_1$  no contiene a todas las aristas de  $G$ , entonces podemos continuar el procedimiento hasta que finalmente encontremos un circuito euleriano de  $G$ . •



**Teorema 3. 2** *Una multigráfica  $G$  es euleriana si y solo si  $G$  es conexa y el conjunto de aristas de  $G$  puede ser partido en ciclos.*

*dem.*

$\Rightarrow$  Sea  $G$  una gráfica euleriana, y como vimos anteriormente todos sus vértices son de grado par y de grado al menos 2, de tal manera que  $G$  contiene un ciclo  $C$ . Al remover las aristas de  $C$  resulta una subgráfica  $G_1$  donde todos los vértices son de grado par. Si  $G_1$  no tiene aristas, entonces el resultado se cumple, de otra manera la repetición de este mismo argumento aplicado a  $G_1$  dará como resultado la gráfica  $G_2$ , en donde de nuevo todos los vértices son de grado par. Cuando se obtiene una gráfica  $G_n$  completamente disconexa, tenemos una partición de las aristas de  $G$  en  $n$  ciclos.

$\Leftarrow$  Sea  $C_1$  uno de los ciclos de la partición. Si  $G$  consiste solo de este ciclo, entonces claramente  $G$  es euleriana. De otra manera, existe otro ciclo  $C_2$  con un vértice  $v$  en común con  $C_1$ . El camino que comienza en  $v$  y que consiste en los ciclos  $C_1$  y  $C_2$  y en sucesión es un paseo cerrado que contiene a las aristas de los dos ciclos. Al continuar con este proceso, podemos construir un paseo cerrado que contiene a todas las aristas de  $G$ , por lo tanto  $G$  es euleriana. •

**Corolario 3** *Sea  $G$  una gráfica conexa con exactamente  $2n$  vértices de grado impar,  $n \geq 1$ . Entonces el conjunto de aristas puede ser partido en  $n$  paseos abiertos.*

*dem.*

Sean  $v_1$  y  $w_1$  dos vértices de grado impar en  $G$ . Agregamos una arista  $a_1$  que una a  $v_1$  con  $w_1$ , para formar la gráfica  $G_1$ . Entonces en  $G_1$  se forma un ciclo que incluye a los vértices  $v_1$  y  $w_1$ , ya que estos ahora son de grado par, pero eso quiere decir que tenemos un paseo abierto en  $G$ , que empieza en  $v_1$  y termina en  $w_1$ . Al eliminar este paseo abierto de la gráfica  $G$  nos queda una nueva gráfica  $H_1$  con exactamente  $2n - 2$  vértices de grado impar. Al repetir este procedimiento  $n$  veces (ya que originalmente tenemos  $2n$  vértices de grado impar) encontraremos los  $n$  paseos abiertos. •

**Corolario 4** *Sea  $G$  una gráfica conexa con exactamente 2 vértices de grado impar. Entonces  $G$  contiene un paseo abierto que contiene a todos los vértices y aristas de  $G$  (que empieza en uno de los vértices de grado impar y termina en el otro).*

*dem.*

Sean  $v$  y  $w$  los vértices de grado impar. Unimos  $v$  y  $w$  con una arista  $a$ , entonces nos queda una nueva gráfica que llamaremos  $F$  con todos sus vértices de grado par. Por lo tanto existe un paseo euleriano en  $F$ , y al eliminar de nuevo la arista  $a$  nos queda un paseo abierto que contiene a todos los vértices y aristas de  $G$ .•

### 3.3. El problema del Agente Viajero

Suponga que el territorio de un vendedor incluye varias ciudades con carreteras entre algunas de estas ciudades. Su trabajo requiere que él viaje a cada ciudad personalmente. ¿Es posible para él planear un viaje en el que regrese a la ciudad de la que partió y visite cada una de las ciudades exactamente una vez?.

Podemos representar este sistema de transporte con una gráfica  $G$  cuyos vértices correspondan a las ciudades, y que dos ciudades esten unidas por un arista si y sólo si existe una carretera entre dichas ciudades y no pase a través de alguna otra ciudad. La solución del problema depende de si  $G$  tiene un ciclo que contenga a todos los vértices de  $G$ . (En este caso solo debemos encontrar un ciclo que contenga a todos los vértices y no que contenga a todos los vértices y aristas como es en el caso de las gráficas eulerianas). De este problema surge un concepto importante.

### 3.4. Gráficas Hamiltonianas

Llamamos a una gráfica  $G$  hamiltoniana si existe un ciclo en  $G$  que contenga a todos los vértices de  $G$ . Un ciclo que contiene a todos los vértices de  $G$  es llamado un ciclo hamiltoniano. Así una gráfica hamiltoniana es una gráfica que contiene un ciclo hamiltoniano.

La gráfica  $G_1$  de la siguiente figura es hamiltoniana, mientras que  $G_2$  no es hamiltoniana. La gráfica  $G_1$  es hamiltoniana porque contiene un ciclo hamiltoniano; por ejemplo  $u_1, u_2, u_5, u_4, u_3, u_1$  es un ciclo hamiltoniano. Para poder demostrar que  $G_2$  no es hamiltoniana, daremos una demostración por contradicción. Supongamos entonces que  $G_2$  es hamiltoniana. Por lo tanto  $G_2$  contiene un ciclo hamiltoniano  $C$ .  $C$  debe contener a todos los vértices de  $G_2$ , así  $C$  contiene a  $v_2, v_3$  y  $v_4$ . Cada uno de estos vértices es de grado 2,

así  $C$  debe contener a las dos aristas incidentes en estos tres vértices. Esto significa que  $C$  debe contener a las aristas  $v_1v_2$ ,  $v_1v_3$  y  $v_1v_4$ . De cualquier manera todo ciclo debe contener sólo dos aristas incidentes en cada uno de los vértices del ciclo. Por lo tanto  $G_2$  no puede contener un ciclo hamiltoniano, lo que contradice el hecho de que  $G_2$  es hamiltoniana.

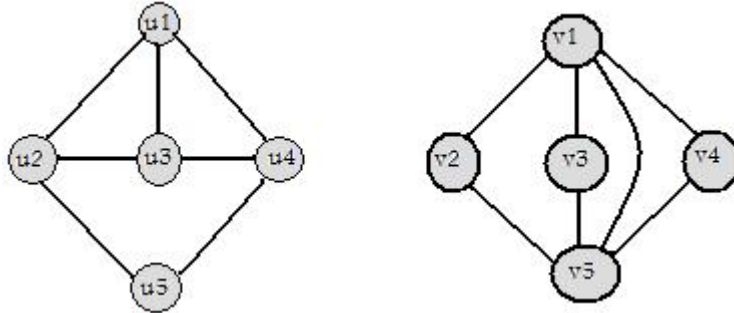


Figura 3-3

Debe ser claro que la solución al problema del agente viajero depende de si la gráfica asociada es hamiltoniana. Desafortunadamente, no se ha podido encontrar un método para demostrar qué gráficas son hamiltonianas. Cada gráfica debe ser considerada individualmente. De cualquier manera, se han podido establecer algunas condiciones para determinar que algunas gráficas son necesariamente hamiltonianas. A continuación se presenta uno de esos resultados.

**Teorema 3. 3** *Si  $G$  es una gráfica de orden  $p$  ( $p \geq 3$ ) tal que  $\text{grad } v \geq \frac{p}{2}$  para cada vértice  $v$  de  $G$ , entonces  $G$  es hamiltoniana.*

*dem.*

Si  $G$  tiene orden  $p = 3$  y  $\text{grad } v \geq \frac{3}{2}$  para todo vértice  $v$  de  $G$ , entonces  $\text{grad } v = 2$  y  $G = K_3$ . Por lo tanto el resultado es verdadero si  $p = 3$ . Ahora supondremos que  $p \geq 4$ . De todas las trayectorias en  $G$ , sea  $T$  aquella trayectoria con la mayor cantidad de vértices. Supongamos que  $T : u_1, u_2, \dots, u_k$  es esta trayectoria.

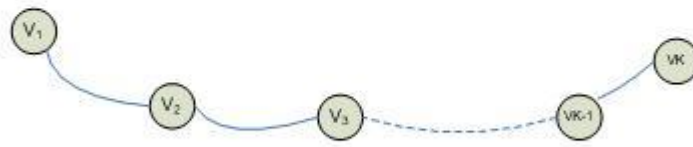


Figura 3-4

Como ninguna trayectoria en  $G$  tiene más vértices que  $T$ , todo vértice adyacente a  $u_1$  debe pertenecer a  $T$ , además todo vértice adyacente a  $u_k$  debe pertenecer a  $T$ . Como  $u_1$  es adyacente a al menos  $\frac{p}{2}$ , todos en  $T$ , se sigue que  $T$  debe tener al menos  $1 + \frac{p}{2}$  vértices.

Ahora, debe haber algún vértice  $u_i$  en  $T$ , donde  $2 \leq i \leq k$ , tal que  $u_1$  es adyacente a  $u_i$  y  $u_k$  es adyacente a  $u_{i-1}$ . Si no fuera este el caso, entonces para cada vértice  $u_i$  adyacente a  $u_1$ , el vértice  $u_{i-1}$  no sería adyacente a  $u_k$ . Pero como hay al menos  $\frac{p}{2}$  vértices  $u_i$  adyacentes a  $u_1$ , debe haber al menos  $\frac{p}{2} u_{i-1}$  vértices no adyacentes a  $u_k$ . Por lo tanto,  $\text{grad } u_k \leq (p - 1) - \frac{p}{2} < \frac{p}{2}$ , lo cual no es posible ya que  $\text{grad } u_k \geq \frac{p}{2}$ . Así existe un vértice  $u_i$  en  $T$  tal que  $u_1 u_i$  y  $u_k u_{i-1}$  son ambas aristas de  $G$ . De esto se sigue que hay un ciclo  $C : u_1, u_i, u_{i+1}, \dots, u_k, u_{i-1}, u_{i-2}, \dots, u_1$  que contiene a todos los vértices de  $T$ .

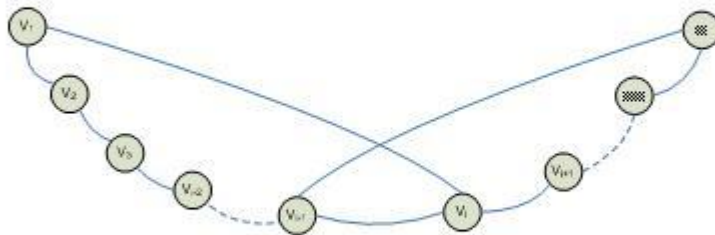


Figura 3-5

Si todos los vértices de  $G$  pertenecen a  $C$ , entonces  $G$  es un ciclo hamiltoniano y  $G$  es una gráfica hamiltoniana. Supongamos que existe un vértice  $w$  de  $G$  que no pertenece a  $C$ . Como  $C$  contiene al menos  $1 + \frac{n}{2}$  vértices, menos que los  $\frac{n}{2}$  vértices de  $G$  que no están en  $C$ . Como el  $\text{grad } w \geq \frac{n}{2}$ , el vértice  $w$  debe ser adyacente a algún vértice  $u_j$  de  $C$ . Sin embargo, la arista  $wu_j$  y el ciclo  $C$  produce una trayectoria que tiene un vértice más que  $T$ , lo cual no puede ocurrir ya que  $T$  tiene la mayor cantidad de vértices. Esta contradicción implica que  $C$  contiene a todos los vértices de  $G$ , así  $G$  es hamiltoniana. •

Mientras que la condición de que  $\text{grad } v \geq \frac{n}{2}$  para todo vértice  $v$  de una gráfica  $G$  es suficiente para que sea hamiltoniana, ciertamente no es necesaria. Por ejemplo,  $G$  puede ser un simple ciclo, en cuyo caso todo vértice es de grado dos, pero  $G$  es hamiltoniana.

Ahora mencionaremos de donde obtienen las gráficas hamiltonianas su nombre. Se dice que el famoso matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) inventó un juego que involucraba un dodecaedro regular. Hamilton etiquetó a cada uno de los vértices con nombres de ciudades conocidas. El objetivo era que el jugador viajara alrededor del mundo al encontrar una ruta redonda que incluya a cada una de las ciudades exactamente una vez, con la restricción de que es posible viajar de una ciudad a otra si existe

una arista entre los correspondientes vértices.

**Teorema 3. 4** *Una gráfica simple con  $n$  vértices ( $n \geq 2$ ) es Hamiltoniana si la suma de los grados de cualquier par de vértices no adyacentes es al menos  $n$ .*

*dem.*

Supongamos que una gráfica  $G$  con  $n$  vértices y que satisface la desigualdad no es Hamiltoniana. Así, podemos decir que es una subgráfica de la gráfica completa  $K_n$  con menos aristas. Añadimos aristas recursivamente a la gráfica uniendo vértices no adyacentes hasta que obtengamos una gráfica  $H$  tal que la adición de una arista más entre dos vértices no adyacentes en  $H$  produzca una gráfica Hamiltoniana con  $n$  vértices. Sean  $x$  y  $y$  dos vértices no adyacentes en  $H$ . Tampoco son adyacentes en  $G$ . Como la suma de los grados de los vértices  $x$  y  $y$  es al menos  $n$  en  $G$ , esta suma es también al menos  $n$  en  $H$ . Si unimos los vértices no adyacentes  $x$  y  $y$ , la gráfica resultante es Hamiltoniana. Así, en la gráfica  $H$  existe una trayectoria Hamiltoniana entre los vértices  $x$  y  $y$ . Si denotamos a  $x$  como  $v_1$  y a  $y$  como  $v_n$ , entonces la trayectoria Hamiltoniana puede ser escrita de la siguiente manera:  $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{n-1}, v_n$ . Supongamos que el grado de  $v_1$  en  $H$  es  $r$ . Si existe una arista entre  $v_1$  y  $v_i$  en esta gráfica, la existencia de una arista entre  $v_{i-1}$  y  $v_n$  implicaría que  $H$  es Hamiltoniana. Así, siempre que  $v_1$  y  $v_i$  sean adyacentes en  $H$ , los vértices  $v_{i-1}$  y  $v_n$  no lo son. Esto es cierto para  $i = 2, 3, \dots, (n - 1)$ . Por lo tanto el grado de  $v_n$  no puede exceder  $(n - 1) - r$  ya que el grado de  $v_1$  es  $r$ . Esto implica que la suma de los grados de dos vértices no adyacentes (en  $G$ ) es menos de  $n$ , lo que contradice la hipótesis. De tal manera que cualquier gráfica conexa que satisfaga la condición es Hamiltoniana.●

**Teorema 3. 5** *Sea  $G$  una gráfica simple y sean  $u$  y  $v$  vértices no adyacentes en  $G$  tales que  $\text{grad}(u) + \text{grad}(v) \geq p$ . Entonces  $G$  es Hamiltoniana si y solo si  $G + uv$  es Hamiltoniana.*

*dem.*

$\Rightarrow$ . Si  $G$  es hamiltoniana entonces claramente  $G + uv$  también lo es.

$\Leftarrow$ . Supongamos que  $G + uv$  es hamiltoniana y que  $G$  no lo es. Entonces  $\text{grad}(u) + \text{grad}(v) < p$ , lo que contradice la hipótesis.●

**Definición 3. 2** *La cerradura de  $G$  es la gráfica que se obtiene a partir de  $G$  uniendo sucesivamente parejas de vértices no adyacentes cuya suma de grados sea al menos el orden de la gráfica, hasta agotar este tipo de parejas. Denotaremos a la cerradura de  $G$  por  $C(G)$ .*

**Teorema 3. 6** *La cerradura de  $G$  está bien definida.*

*dem.*

Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas obtenidas a partir de  $G$  (de orden  $p$ ), uniendo recursivamente parejas de vértices no adyacentes cuya suma de grados sea al menos  $p$ , hasta que ya no pueda continuarse con el procedimiento. Denotaremos  $a_1, a_2, \dots, a_m$  y por  $b_1, b_2, \dots, b_n$  a las aristas añadidas secuencialmente a  $G$  para obtener  $G_1$  y  $G_2$  respectivamente. Ahora demostraremos que cada  $a_i$  es una arista de  $G_2$  y que cada  $b_j$  es una arista de  $G_1$ . Supongamos que esto no es posible, es decir sea  $a_{k+1} = uv$  la primer arista de la secuencia  $a_1, a_2, \dots, a_m$  que no es arista de  $G_2$ . Sea  $H = G + \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ . Por definición de  $G_1$  sabemos que  $\text{grad}_H(u) + \text{grad}_H(v) \geq p$ , dada la elección de  $a_{k+1}$ ,  $H$  es una subgráfica de  $G_2$  y por lo tanto  $\text{grad}_{G_2}(u) + \text{grad}_{G_2}(v) \geq p$ . Como  $u$  y  $v$  son adyacentes en  $G_2$ , lo anterior es una contradicción. Entonces toda  $a_i$  es una arista de  $G_2$  y análogamente toda  $b_j$  es una arista de  $G_1$ . Esto indica que  $G_1 = G_2$  y por lo tanto  $C(G)$  está bien definida.●

**Teorema 3. 7** *Una gráfica simple es Hamiltoniana si y solo si su cerradura es Hamiltoniana.*

*dem.*

$\Rightarrow$

Si  $G$  es hamiltoniana entonces claramente su cerradura también lo es.

$\Leftarrow$

Aplicando el teorema 3 cada vez que se añada una arista a  $G$  para la formación de su cerradura podemos determinar que si la cerradura de  $G$  es hamiltoniana entonces  $G$  es hamiltoniana.●

### 3.5. Ejercicios

1. Dé un ejemplo de una gráfica de orden 10 que sea:

a) euleriana.

- b) recorrible.
  - c) ni euleriana ni recorrible.
2. Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos gráficas eulerianas sin vértices en común. Sea  $v_1$  un vértice de  $G_1$  y sea  $v_2$  un vértice de  $G_2$ . Sea  $G$  una nueva gráfica que consiste de  $G_1$  y  $G_2$  junto con la arista  $v_1v_2$ . ¿Qué se puede decir acerca de  $G$ ?
3. a) Muestre que si  $M$  es una multigráfica recorrible, entonces una multigráfica euleriana puede ser construída de  $M$  al añadir una sola arista.
- b) ¿El resultado de a) será verdadero si se cambia la palabra multigráfica por gráfica?
- c) ¿El resultado de a) será verdadero si se cambia la palabra añadir por quitar?
4. ¿Qué propiedad especial tiene una multigráfica conexa con exactamente cuatro vértices de grado impar?
5. Determine si las siguientes gráficas son o no eulerianas o recorribles.



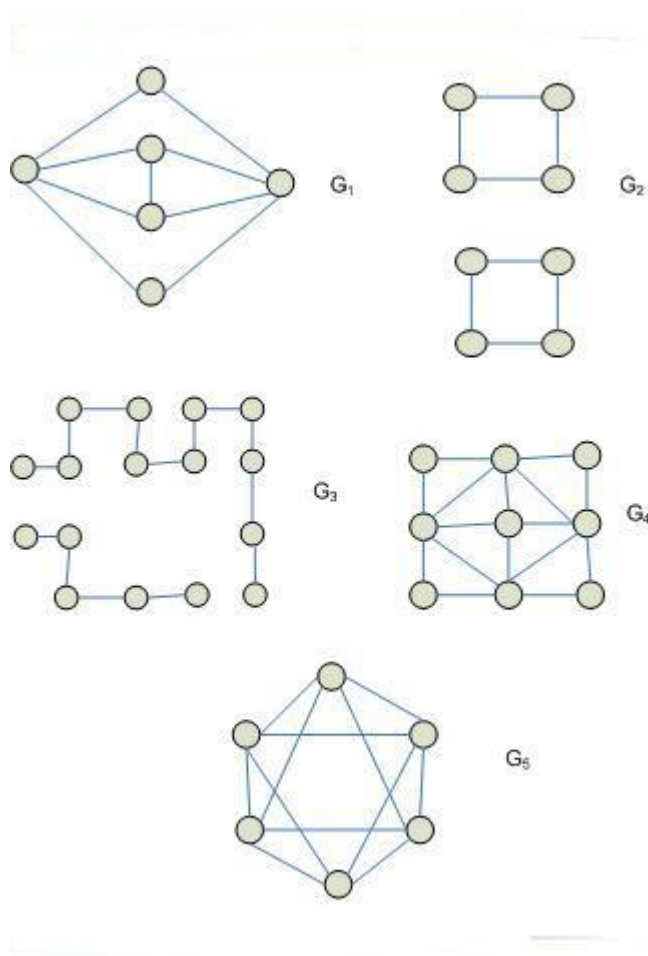


Figura 3-6

6. Determine cuales de las siguientes gráficas (Figura 3-7) son hamiltonianas.

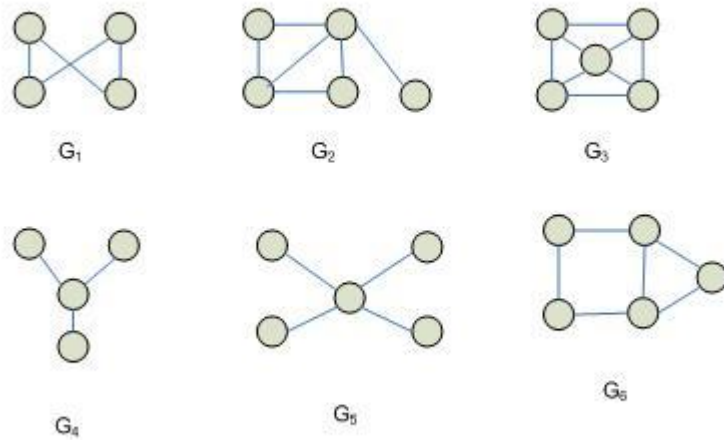


Figura 3-7

7. Dé un ejemplo de una gráfica de orden 10 que sea hamiltoniana.
8. Dé un ejemplo de una gráfica de orden 10 que no sea hamiltoniana.
9. Muestre que la gráfica de la siguiente figura (Figura 3-8) no es hamiltoniana.

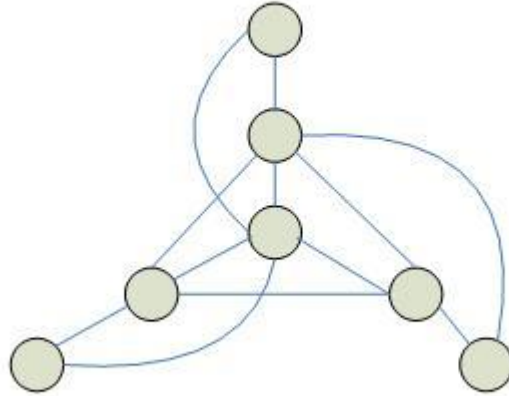


Figura 3-8

10. Muestre que la gráfica de un cubo geométrico es hamiltoniana.
11. Muestre que la gráfica de un icosaedro es hamiltoniana.
12. Muestre que el teorema demostrado anteriormente no es verdadero si reemplazamos el número  $\frac{p}{2}$  por  $\frac{p-1}{2}$ .
13. Sea  $G$  una gráfica. Una trayectoria  $T$  en  $G$  es llamada una trayectoria hamiltoniana si contiene a todos los vértices de  $G$ . Sea  $G$  una gráfica de orden  $p$  ( $p \geq 2$  tal que  $\text{grad } v \geq \frac{p-1}{2}$  para todo vértice  $v$  de  $G$ ). Pruebe que  $G$  tiene una trayectoria hamiltoniana.
14. ¿Verdadero o falso? Toda gráfica euleriana es hamiltoniana.
15. ¿Verdadero o falso? Toda gráfica hamiltoniana es euleriana.
16. Supongamos que un grupo de estudiantes asisten a una fiesta. Represente esta situación por una gráfica  $G$ , donde los vértices de  $G$  corresponden a los estudiantes en la fiesta y dos vértices de  $G$  son adyacentes si y solo si los correspondientes hombre y mujer han tenido alguna cita.

Si  $G$  es hamiltoniana, pruebe que el número de hombres en la fiesta es igual al número de mujeres.

17. Determine si la siguiente gráfica (Figura 3-9) es hamiltoniana.

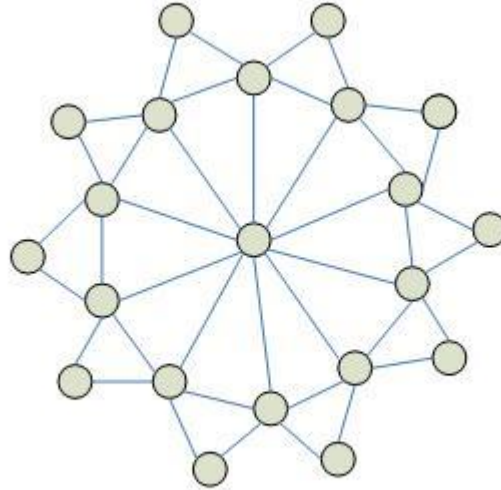


Figura 3-9

18. Demostrar que las gráficas cúbicas son hamiltonianas.

# Capítulo 4

## Árboles

### 4.1. El problema de las Vías Ferroviarias

Suponga que tenemos un conjunto de  $n$  ciudades, y deseamos construir un sistema de vías de tren que conecte dichas ciudades. Podemos suponer que conocemos el costo de construir dichas vías entre cualesquiera dos ciudades. Debido a la situación económica actual, debemos construir dicho sistema al menor costo posible (sin importar los inconvenientes que pudieran tener los pasajeros). La pregunta es: ¿Cómo se debe construir dicho sistema?

El sistema de vías ferroviarias deseado puede ser representado por una gráfica  $G$  cuyos vértices correspondan a las ciudades en cuestión y en la cual dos vértices son adyacentes si existe una vía entre dos ciudades correspondientes y ponemos una arista. Por supuesto, es necesario que  $G$  sea conexa, pero también es necesario que  $G$  no contenga ciclos, ya que si existe un ciclo en  $G$  podemos quitar una vía entre dos ciudades, (esta vía debe corresponder al ciclo) y aún así estas dos ciudades estarían conectadas, lo cual implica que el sistema de vías original no es el más barato. Así,  $G$  debe ser conexa pero no debe contener ciclos.

Antes de resolver el problema de las vías ferroviarias, debemos estudiar más a fondo el tipo de gráficas que acabamos de encontrar.

### 4.2. Árboles

**Definición 4.1** *Sea  $G$  una gráfica, se dice que  $G$  es un árbol si  $G$  es una gráfica conexa y no tiene ciclos.*

Como ya lo hemos notado toda arista de un árbol es un puente.

**Definición 4. 2** Sea  $G$  una gráfica, se dice que  $G$  es un bosque si  $G$  es una gráfica que no contiene ciclos. (Puede ser conexa o desconexa).

Así, cada componente de un bosque es un árbol. La palabra árbol es usada porque al dibujar las gráficas algunas de ellas parecen árboles.

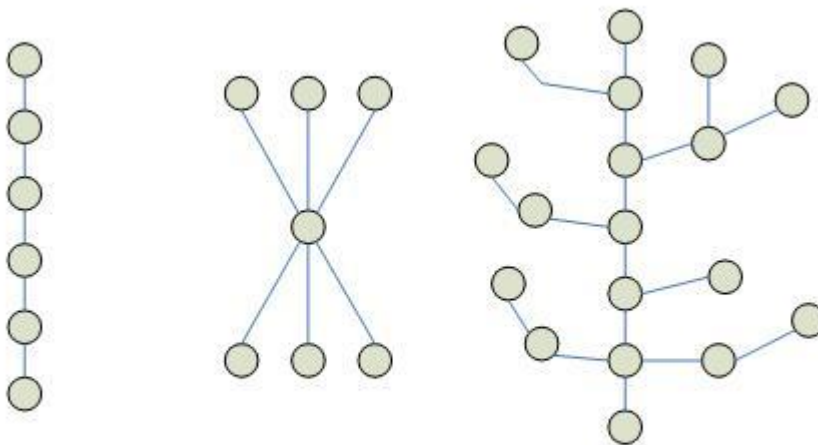


Figura 4-1

**Teorema 4. 1** Las siguientes proposiciones son equivalentes en una gráfica  $G$  con  $n$  vértices.

1.  $G$  es un árbol.
2. Existe una única trayectoria entre cualquier par de vértices en  $G$ .
3.  $G$  es conexa y toda arista de  $G$  es un puente.
4.  $G$  es conexa y tiene  $(n - 1)$  aristas.
5.  $G$  es acíclica y tiene  $(n - 1)$  aristas.
6.  $G$  es acíclica y siempre que dos vértices arbitrarios no adyacentes en  $G$  son unidos por una arista la gráfica resultante  $G'$  tiene un único ciclo.

7.  $G$  es conexa y siempre que dos vértices arbitrarios no adyacentes en  $G$  son unidos por una arista la gráfica resultante  $G'$  tiene un único ciclo.

*dem.*

$1 \Leftrightarrow 2$

Supongamos que la gráfica  $G$  es un árbol. Sean  $v$  y  $w$  cualesquiera dos vértices en  $G$ . Como  $G$  es conexa, existe una trayectoria  $T$  entre  $v$  y  $w$ . Si  $Q$  es otra trayectoria entre estos dos vértices, sea  $e = \{v_i, v_{i+1}\}$  la primer arista de  $T$  que no está en  $Q$  al ir de  $v$  a  $w$  sobre  $T$ . Sean  $W$  y  $W'$  el conjunto de vértices intermedios entre  $v_i$  y  $w$  en  $T$  y  $Q$  respectivamente. Si  $W$  y  $W'$  no tienen vértices en común, entonces tenemos un ciclo en una gráfica que es acíclica por hipótesis. Si la intersección de  $W$  y  $W'$  es no vacía, sea  $u$  el primer vértice en común al ir de  $v_i$  a  $w$  ya sea por  $T$  o por  $Q$ . En este caso también tenemos un ciclo en la gráfica. Así, existe una única trayectoria entre cualquier par de vértices en el árbol. Inversamente, sea  $G$  una gráfica en la cual exista una única trayectoria entre cualquier par de vértices. Entonces  $G$  es conexa. Supongamos que  $G$  no es un árbol. Entonces existe un ciclo  $C$  en  $G$ . Obviamente, existen dos trayectorias entre cualquier par de vértices en  $C$ , lo que contradice la hipótesis.

$1 \Leftrightarrow 3$

Si  $G$  es un árbol, entonces es conexa por definición. Sabemos que existe una única trayectoria entre cualquier par de vértices. En particular la arista  $e$  que une a los vértices  $v$  y  $w$  es la trayectoria  $T : v, e, w$ . Si se elimina  $e$ , entonces no existe trayectoria entre  $v$  y  $w$ . Así, toda arista de un árbol es un puente.

Para probar el inverso, supongamos que la gráfica conexa en la que todas las aristas son puentes no es un árbol. Sea  $G'$  la subgráfica de  $G$  obtenida al eliminar a alguna arista  $e = \{v, w\}$  que pertenece a algún ciclo  $C$  en  $G$ . Esta gráfica  $G'$  no es conexa ya que todas las aristas de  $G$  son puentes. Sean  $p$  y  $q$  dos vértices cualesquiera. Como  $G$  es conexa existe una trayectoria  $T$  entre  $p$  y  $q$  en  $G$ . Si  $e$  no es un arista de esta trayectoria  $T$ ,  $T$  es una trayectoria en  $G'$  entre  $p$  y  $q$ . Supongamos que  $e$  es una arista en  $T$ . Sea  $T_1$  la subtrayectoria de  $T$  entre  $p$  y  $v$ , y sea  $T_2$  la subtrayectoria de  $T$  entre  $w$  y  $q$ . Más aún, sea  $T'$  la única trayectoria entre  $v$  y  $w$  en el ciclo que no contiene a  $e$ . Supongamos que  $Q$  es la unión de estas tres trayectorias. Entonces  $Q$  es una trayectoria en  $G'$  entre  $p$  y  $q$ . De tal manera existe una trayectoria entre cualquier par de vértices en  $G'$ . Pero  $G'$  es una gráfica desconexa, lo cual es una contradicción.

$1 \Leftrightarrow 4$

Supongamos que  $G$  es un árbol con  $n$  vértices. Sabemos que es una gráfica conexa. Probaremos que tiene  $(n - 1)$  aristas por inducción sobre  $n$ . Si  $n = 1$ , es claramente verdadero. Supongamos que es verdadero para  $n = 1, 2, \dots, (n - 1)$ . Como cada arista es un puente, la subgráfica  $G'$  obtenida de  $G$  al eliminar una arista nos dará dos componentes que llamaremos  $G_1$  y  $G_2$  con  $n_1$  y  $n_2$  vértices respectivamente, donde  $n_1 + n_2 = n$ . Por la hipótesis de inducción, el número de aristas en ambas componentes es  $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) = (n - 2)$ . Así, el número de aristas de  $G$  es  $(n - 2) + 1 = (n - 1)$

Supongamos que una gráfica conexa  $G$  con  $n$  vértices y  $(n - 1)$  aristas no es un árbol. Entonces tiene una arista  $e$  que no es un puente. Si se elimina  $e$ , la subgráfica resultante es todavía una gráfica conexa con  $n$  vértices y  $(n - 2)$  aristas. Continuamos este proceso de localizar aristas que no son puentes y eliminarlas hasta que tengamos una subgráfica conexa con  $n$  vértices y  $(n - k)$  aristas ( $k > 1$ ) en donde toda arista sea un puente. Pero  $G'$  es un árbol, así que debe de tener  $(n - 1)$  aristas. Así  $n - 1 = n - k$ , donde  $k > 1$ . Lo cual es una contradicción.

$$1 \Leftrightarrow 5$$

Si  $G$  es un árbol con  $n$  vértices, es acíclica por definición y tiene  $(n - 1)$  aristas.

Por otro lado, consideremos una gráfica acíclica  $G$  con  $n$  vértices y  $(n - 1)$  aristas. Supongamos que  $G$  no es conexa. Llamemos a las componentes de  $G$  como  $G_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), tal que  $G_i$  tiene  $n_i$  vértices, donde  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ . Notese que toda componente  $G_i$  es un árbol con  $n_i - 1$  aristas. Así, el número total de aristas de  $G$  es  $n - k$  con  $k > 1$ . Esta contradicción establece que  $G$  es conexa. Por lo tanto  $G$  es un árbol.

$$1 \Leftrightarrow 6$$

Si  $G$  es un árbol, es conexa y acíclica. Sean  $u$  y  $v$  dos vértices no adyacentes en  $G$ . Existe una única trayectoria entre  $u$  y  $v$ . Si unimos  $u$  y  $v$  con una arista, esta arista junto con la trayectoria  $T$  crean un único ciclo en la nueva gráfica  $G'$ .

Por otro lado, supongamos que  $G$  es una gráfica acíclica en la cual  $u$  y  $v$  son cualesquiera dos vértices no adyacentes tales que la unión de dichos vértices por una arista crea un único ciclo en  $G'$ . Esto implica que existe una trayectoria en  $G$  entre  $u$  y  $v$ . Así,  $G$  es conexa y por lo tanto es un árbol.

$$1 \Leftrightarrow 7$$

Si  $G$  es un árbol, es conexa y acíclica. Si dos vértices no adyacentes son unidos por una arista, la única trayectoria  $T$  en  $G$  entre estos dos vértices más la arista forman un único ciclo.



Por otro lado, supongamos que  $G$  es conexa. No puede haber un ciclo en  $G$  ya que la gráfica  $G'$  obtenida de unir dos vértices no adyacentes tiene un ciclo único. Así  $G$  es un árbol. •

**Teorema 4. 2** *Todo árbol tiene al menos dos vértices terminales.*

*dem.*

Supongamos que los grados de los  $n$  vértices del árbol son  $d_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ . Sabemos que  $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2n - 2$ , que es el doble del número de aristas. Supongamos que hay  $r$  vértices de grado 1. Entonces hay  $n - r$  vértices de grado mayor o igual que 2. Por lo tanto  $2n - 2 = \sum d_i \geq 2(n - r) + r$ . Resolviendo  $r \geq 2$  •

### 4.2.1. Centros y centroides

La *excentricidad*  $e(v)$  de un vértice  $v$  de una gráfica conexa  $G$  es la máxima distancia entre vértices  $u$  y  $v$  para  $u$  en  $G$ . El *radio*  $r(G)$  es la excentricidad mínima. Nótese que la máxima excentricidad es el diámetro. Un vértice  $v$  es un vértice central si  $e(v) = r(G)$ , y el centro de  $G$  es el conjunto de todos los vértices centrales.

En la siguiente figura, se muestra la excentricidad de cada uno de los vértices. Este árbol tiene diámetro 7, radio 4, y el centro consiste de los vértices  $u$  y  $v$ , cada uno de ellos con excentricidad mínima 4.

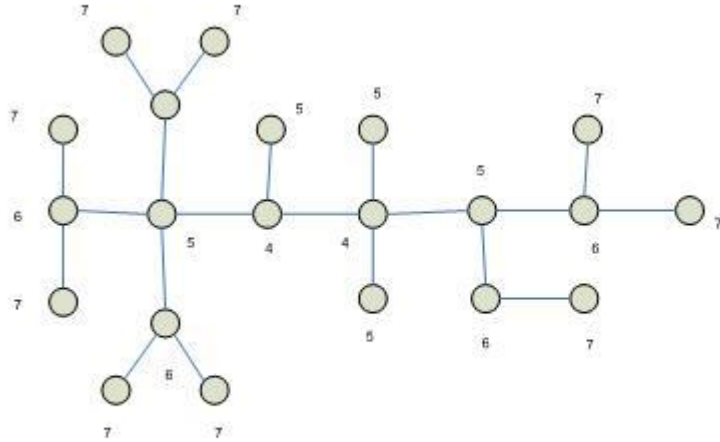


Figura 4-2

El hecho de que  $u$  y  $v$  sean adyacentes ilustra el siguiente resultado.

**Teorema 4. 3** *Todo árbol tiene un centro que consiste de un vértice o de dos vértices adyacentes.*

*dem.*

El resultado es obvio para los árboles con uno o dos vértices. Mostraremos que cualquier otro árbol  $T$  tiene los mismos vértices centrales que  $T'$  obtenido al remover todos los vértices terminales de  $T$ . Claramente la máxima de las distancias de un vértice dado  $u$  de  $T$  a cualquier otro vértice  $v$  de  $T$  ocurrirá solo cuando  $v$  es un vértice terminal.

Así, la excentricidad de cada vértice en  $T'$  será exactamente uno menos que la excentricidad para los mismos vértices en  $T$ . Así, los vértices en  $T$  que tienen excentricidad mínima en  $T$  son los mismos vértices que tienen excentricidad mínima en  $T'$ , esto es,  $T$  y  $T'$  tienen el mismo centro. Si el proceso de remover los vértices se repite, obtenemos sucesivamente árboles que tienen el mismo centro que  $T$ . Como  $T$  es finito, eventualmente obtenemos un árbol que es  $K_1$  o  $K_2$ . En cualquier caso todos los puntos de este último árbol constituyen el centro de  $T$  el cual consiste de un solo vértice o de dos vértices adyacentes.●

Una rama de un vértice  $u$  de un árbol  $T$  es un subárbol máximo que contiene a  $u$  como vértice terminal. El número de ramas de  $u$  es igual a su grado. El peso en un vértice  $u$  de  $T$  es el máximo número de aristas en cualquier rama de  $u$ . El peso de todos los vértices no terminales se muestran en la siguiente figura.

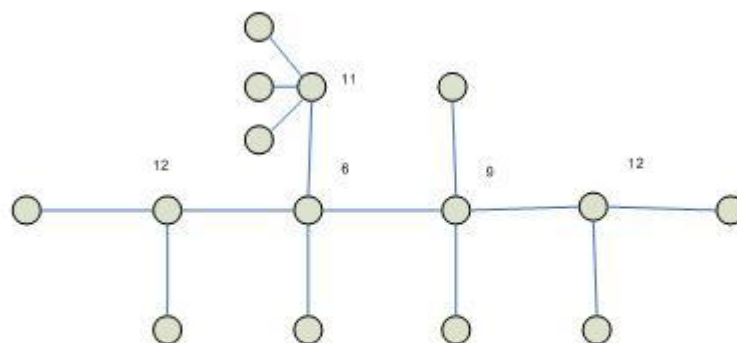


Figura 4-3

Un vértice  $v$  es llamado un vértice centroide de un árbol  $T$  si  $v$  tiene peso mínimo, y el centroide de  $T$  consiste de dichos puntos.

### 4.3. Árboles Generadores

Regresando al problema de las vías ferroviarias, supongamos que tenemos una red ferroviaria  $G$  que conecta a ciertas ciudades. Podemos construir un árbol  $T$ , tal que  $T$  sea una subgráfica de  $G$  y  $T$  contenga a todos los vértices de  $G$ . Dicho árbol es llamado un "árbol generador" de  $G$ .

**Teorema 4. 4** *Toda gráfica conexa contiene un árbol generador.*

*dem.*

Procederemos por inducción sobre el número de ciclos de  $G$ . Sea  $G$  una gráfica conexa sin ciclos, entonces  $G$  misma es un árbol generador. Sea  $G$

una gráfica conexa con un único ciclo al que llamaremos  $\gamma$ . Sea  $a \in A(G)$ .  $G - a$  es acíclica y conexa. Además,  $V(G - a) = V(G)$  y  $A(G - a) = A(G)$ , de donde concluimos que  $G - a$  es un árbol generador de  $G$ .

Supongamos que toda gráfica conexa con menos de  $n$  ciclos tiene un árbol generador. (Hipótesis de inducción).

Sea  $G$  una gráfica con  $n$  ciclos a los que llamaremos  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ . Sea  $a \in \gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $G - a$  tiene menos de  $n$  ciclos y por lo tanto tiene un árbol generador  $T$  con  $V(T) = V(G - a) = V(G)$  y  $A(T) \subseteq A(G - a) \subseteq A(G)$ . Esto significa que  $T$  también es un árbol generador de  $G$ .•

Si  $H$  es una subgráfica de una gráfica  $G$ , el peso de  $H$  es igual a la suma de los pesos de todas las aristas de  $H$ , y esto se denota por  $w(H)$ . Se dice que un árbol generador  $T$  es un árbol generador de peso mínimo en  $G$  (o árbol de peso mínimo) si  $w(T) \leq w(T')$  para cualquier árbol generador  $T'$  en  $G$ . A continuación discutiremos dos algoritmos.

### 4.3.1. Algoritmo de Kruskal

Supongamos que  $G$  es una gráfica conexa con peso en las aristas (es decir un valor numérico). Sea  $T$  una gráfica que consta únicamente de los vértices de la gráfica  $G$ .

1. Se acomodan las aristas de la gráfica en orden no decreciente respecto a sus pesos para formar una lista  $L$ .
2. Seleccionamos la primer arista de la lista  $L$ , y la agregamos a la gráfica  $T$  para formar  $T_1$ .
3. Seleccionamos a la segunda arista de la lista  $L$ , y la agregamos a  $T_1$  para formar  $T_2$ .
4. Seleccionamos a la siguiente arista en  $L$  no examinada y si no forma ciclo en  $T_{i-1}$  la incluimos para formar  $T_i$ . Si forma ciclo, pasamos a la siguiente arista de la lista.
5. Nos detenemos cuando lleguemos a  $T_{n-1}$ . Es decir cuando tengamos  $n - 1$  aristas.

Ejemplo.

Obtenga un árbol de peso mínimo de la siguiente gráfica  $G$ .

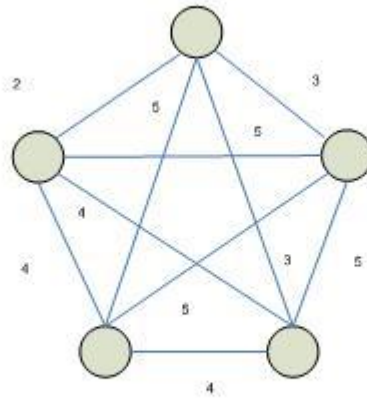


Figura 4-4

En este caso la lista  $L$  es:

1. AE 2
2. AB 3
3. AC 3
4. CE 4
5. CD 4
6. DE 4
7. AD 5
8. BC 5
9. BD 5
10. BE 5

Sea la gráfica  $T$  únicamente los 5 vértices  $A, B, C, D, E$  sin aristas.

Sea la gráfica  $T_1$  la gráfica  $T$  más la arista  $AE$ .

Sea la gráfica  $T_2$  la gráfica  $T_1$  más la arista  $AB$ .

Sea la gráfica  $T_3$  la gráfica  $T_2$  más la arista  $AC$  (ya que  $AC$  no forma ciclo con las aristas añadidas anteriormente).

Sea la gráfica  $T_4$  la gráfica  $T_3$  más la arista  $CD$  (nótese que aunque la arista  $CE$  está antes en la lista no se añade ya que formaría un ciclo con las aristas  $AE$  y  $AC$ ).

$T_4$  es una gráfica con 5 vértices y 4 aristas, por lo tanto podemos asegurar que  $T_4$  es un árbol de peso mínimo de la gráfica  $G$ .

### 4.3.2. Algoritmo de Prim

Supongamos que  $G$  es una gráfica conexa con peso en las aristas.

1. Escogemos y dibujamos cualquier vértice arbitrario.
2. Encontramos la arista de peso mínimo que une a algún vértice dibujado con un vértice no dibujado aún. Dibuje dicha arista y el correspondiente nuevo vértice.

Se repite el paso 2 hasta que todos los vértices de  $G$  estén conectados, entonces nos detenemos.

Obtenga un árbol de peso mínimo de la siguiente gráfica  $G$ .

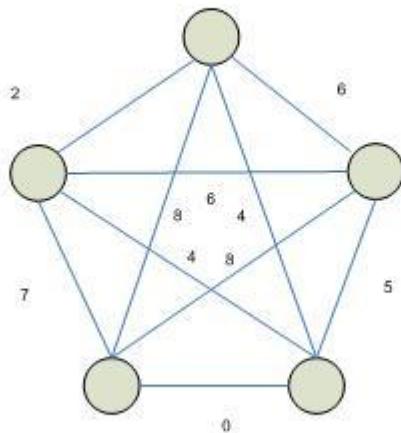


Figura 4-5

Seleccionamos y dibujamos el vértice  $A$ .

La arista de peso mínimo que incide en  $A$  es la arista  $AE$ . Dibujamos el vértice  $E$  y la arista  $AE$ .

La arista de peso mínimo que incide en  $A$  o en  $E$  (que son los vértices ya dibujados) es  $AC$  (o  $AE$ ). Dibujamos el vértice  $C$  y la arista  $AC$ .

La arista de peso mínimo que incide en  $A$ ,  $C$  o  $E$  es  $AE$ , sin embargo esta arista no se incluye ya que formaría un ciclo. Por lo tanto la siguiente arista que se incluiría sería la arista  $BC$  (junto con el vértice  $B$ ).

La siguiente arista que se incluiría sería la arista  $DE$ , ya que es la arista de peso mínimo que incide en alguno de los vértices ya dibujados y que no forma un ciclo con las aristas ya dibujadas. Esta gráfica tiene 5 vértices y 4 aristas, con todos los vértices conectados. De esta manera podemos asegurar que esta gráfica es un árbol de peso mínimo.

Debe ser claro en este punto que encontrar una solución al problema de las vías ferroviarias es equivalente a encontrar, dada una gráfica conexa  $G$  un árbol generador  $T$  cuyo valor (la suma de los valores de sus aristas) sea mínimo. Es decir, un árbol de peso mínimo.

## 4.4. Ejercicios

1. ¿Cuántos diferentes árboles (no isomorfos) hay de orden:
  - a) dos?.
  - b) tres?.
  - c) cuatro?.
  - d) cinco?.
  - e) seis?.
2. Determine cuantos árboles generadores no isomorfos hay en la siguiente gráfica.

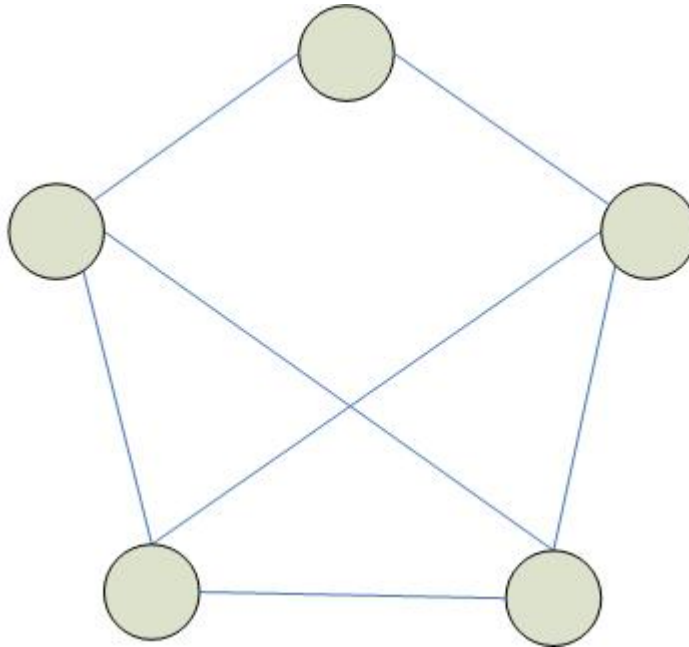


Figura 4-6

3. ¿Es posible que un árbol sea una gráfica regular? Explique
4. Si una gráfica  $G$  de orden  $p$  tiene tamaño  $q = p - 1$ , entonces ¿ $G$  es un árbol?.
5. Sea  $G$  un bosque de orden  $p$  y tamaño  $q$  con  $k$  componentes. Obtenga una expresión para  $q$  en términos de  $p$  y  $k$ .



6. Pruebe que si  $G$  es una gráfica conexa de orden  $p$  y tamaño  $q$ , entonces  $q \geq p - 1$
7. Si  $G$  es una gráfica conexa de orden  $p$  y tamaño  $q$ , tal que  $q = p - 1$ . Pruebe que  $G$  es un árbol.
8. Sea  $G$  una gráfica de orden  $p$  y tamaño  $q$ , tal que  $q \geq p \geq 3$ . Muestre que  $G$  tiene al menos un ciclo.
9. Si  $G$  es una gráfica conexa de orden  $p$  y tamaño  $q$ , tal que  $q = p - 1$ . Pruebe que si  $G$  es un bosque, entonces  $G$  es un árbol.
10. Determine un árbol generador de peso mínimo de las siguientes gráficas.

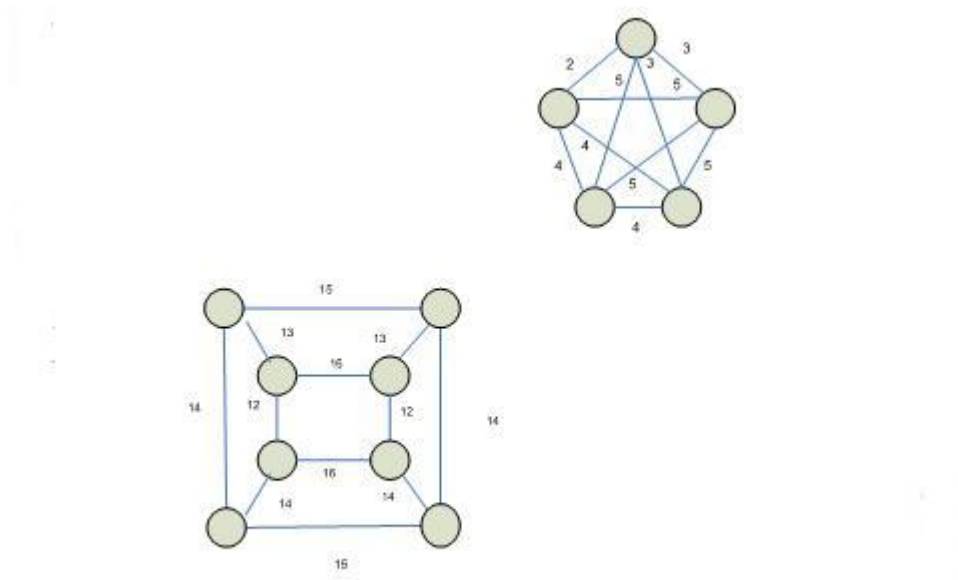


Figura 4-7

11. Muestre que una gráfica  $G$  es un árbol si es acíclica y siempre que cualesquiera dos vértices no adyacentes de  $G$  son unidos por una arista, la gráfica resultante  $G'$  tiene exactamente un ciclo.
12. Muestre que una gráfica  $G$  es un árbol si es conexa y siempre que cualesquiera dos vértices no adyacentes de  $G$  son unidos por una arista, la gráfica resultante  $G'$  tiene exactamente un ciclo.

13. Una gráfica es conexa si y sólo si contiene un árbol generador.
14. Muestre que si una gráfica es desconexa, entonces su gráfica complementaria es conexa.
15. Muestre que todo árbol de orden dos o mayor tiene al menos dos vértices terminales.
16. El centro de un árbol es un solo vértice, o un conjunto de vértices adyacentes.
17. Una trayectoria  $P$  entre dos distintos vértices en una gráfica conexa  $G$  es una trayectoria diametral si no existe alguna otra trayectoria en  $G$  cuya longitud sea mayor que la longitud de  $P$ . Muestre que toda trayectoria diametral en un árbol pasa a través de sus vértices centrales. Muestre también que el centro de un árbol puede ser localizado una vez que se ha encontrado la trayectoria diametral, es decir el centro del árbol coincide con el centro de la trayectoria diametral  $P$ .
18. Un árbol con exactamente un vértice  $v$  de grado 2 en el cual el grado de todo vértice no terminal (distinto de  $v$ ) es 3, es llamado un árbol binario, y la raíz de un árbol binario es el único vértice de grado 2. Muestre que el número de vértices de un árbol binario es impar.
19. Muestre que el número de vértices terminales en un árbol binario (con  $n$  vértices) es  $(n + 1)/2$ .

# Capítulo 5

## Apareamientos

### 5.1. El problema del baile

Una vez más estamos planeando una fiesta. Esta vez debe ser un éxito. Incluso una banda ha sido contratada y habrá baile. Durante cada número musical, queremos que la mayor cantidad de parejas posible baile. Por supuesto si queremos que todos los invitados bailen al mismo tiempo, debemos invitar al mismo número de hombres que de mujeres, sin embargo esto puede no ser posible, ni deseable. Supongamos que hay al menos el mismo número de hombres que de mujeres en una fiesta. Entonces deseamos que todas las mujeres bailen con una pareja durante cada selección musical. Esto puede no ser fácil de lograr, ya que puede pasar que cada mujer solo quiera bailar con ciertos hombres y viceversa. Por ejemplo, un hombre puede desear bailar con su esposa, pero esta idea quizá sea repugnante para ella. Así que nuestra meta es no sólo lograr que la mayor cantidad de parejas baile, sino que además dichas parejas sean compatibles.

Supongamos que tenemos un grupo de hombres y de mujeres en una fiesta, con al menos el mismo número de hombres que de mujeres. ¿Bajo qué condiciones es posible que todas las mujeres bailen con el mismo número de hombres de tal manera que cada pareja sea compatible?

Sea  $G$  una gráfica cuyos vértices representan a las personas en la fiesta, y tales que dos vértices son adyacentes si y sólo si la correspondiente pareja de baile es compatible. Es posible que todas las mujeres bailen al mismo tiempo si y sólo si  $G$  contiene una subgráfica 1-regular  $F$  tal que el número de aristas de  $F$  sea igual al número de mujeres.

## 5.2. Apareamientos

En la siguiente figura tenemos una gráfica bipartita con conjunto de vértices  $V_1 = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$  y  $V_2 = \{v_2, v_4, v_6, v_8, v_9\}$ . Sea  $U_1$  un subconjunto de  $V_1$ . Decimos que  $U_1$  es apareado con un subconjunto  $U_2$  de  $V_2$  si  $G$  contiene una subgráfica  $1$ -regular  $F$  cuyo conjunto de vértices es  $U_1 \cup U_2$ . Si  $U_1$  es apareado con  $U_2$  entonces debemos tener que  $|U_1| = |U_2|$ . La subgráfica  $F$  es llamada un apareamiento, ya que empareja un conjunto de vértices llamado  $U_1$ , con otro conjunto de vértices llamado  $U_2$ .

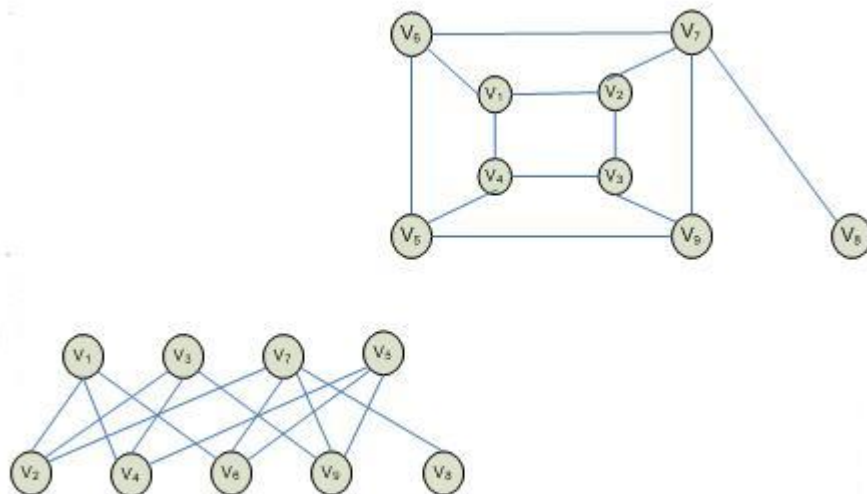


Figura 5-1

Ilustraremos este concepto con la gráfica bipartita  $G$  de la siguiente figura. Aquí tenemos que  $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ,  $V_2 = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$  y  $U_1 = \{v_1, v_3, v_4\}$ . Si hacemos  $U_2 = \{w_1, w_2, w_5\}$ , entonces vemos que  $G$  contiene una subgráfica  $F$   $1$ -regular con conjunto de vértices  $U_1 \cup U_2$ . De tal manera,  $U_1$  es apareado con  $U_2$ . Nótese que  $V_1$  también puede ser apareado con un subconjunto de  $V_2$ .

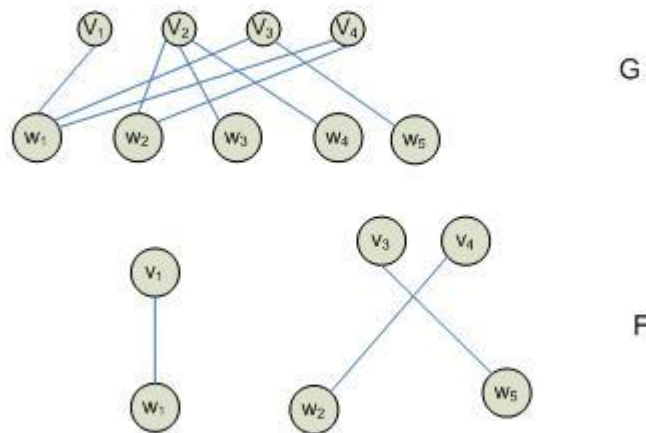


Figura 5-2

De nuevo, supongamos que  $G$  es una gráfica bipartita con su conjunto de vértices partido en  $V_1$  y  $V_2$ . Si  $W_1 \subseteq V_1$ , entonces denotamos por  $W_1^*$  a aquellos vértices de  $V_2$  que son adyacentes a al menos un vértice de  $W_1$ . La *deficiencia* de  $W_1$  en  $G$ ,  $def(W_1)$  está definida por:

$$def(W_1) = |W_1| - |W_1^*|.$$

El conjunto  $U_1 \subseteq V_1$  se dice que es *no deficiente* en  $G$  si ningún subconjunto (no vacío) de  $U_1$  tiene *deficiencia* positiva. Nótese que la deficiencia positiva para un subconjunto  $W_1$  de  $U_1$  significa que hay más vértices en  $W_1$  que vértices adyacentes a elementos de  $W_1$ ; así no es posible aparear a  $W_1$  con un subconjunto de  $V_2$ .

Cada subconjunto de  $V_1$  en la gráfica  $G$  de la figura anterior tiene *deficiencia* negativa o cero, esto es, ningún subconjunto de  $V_1$  tiene deficiencia positiva. Por lo tanto, al decir que  $V_1$  es *no deficiente* es equivalente a decir que  $V_1$  puede ser apareado con un subconjunto de  $V_2$ .

Volviendo al problema del baile, podemos ver ahora que esta situación puede ser representada por una gráfica bipartita  $G$ . Si denotamos al conjunto  $V_1$  con los vértices que corresponden a las mujeres, y con  $V_2$  los vértices que corresponden a los hombres, entonces nos preguntamos bajo que condiciones  $V_1$  puede ser apareado con un subconjunto de  $V_2$ . Ahora daremos dichas condiciones.

**Teorema 5. 1** *Sea  $G$  una gráfica bipartita cuyo conjunto de vértices está partido en los conjuntos  $V_1$  y  $V_2$  tal que toda arista de  $G$  une a un vértice de  $V_1$  con un vértice de  $V_2$ . Entonces  $V_1$  puede ser apareado con un subconjunto de  $V_2$  si y sólo si  $V_1$  es no deficiente*

Horacio ha invitado a algunos amigos a tomar un trago, a los cuales llamaremos Antonio, Bartolo, Carlos, Diego, Eduardo y Fernando. Horacio ha preparado algunos tragos previos a su llegada, pero sólo un trago de cada tipo. Los tragos son daiquiri (d), ginebra (g), martini (m), suntory (s), tequila (t), whiskey (w) y bacardi (b). Horacio le pregunta a sus amigos cuales de estos tragos prefieren y sus respuestas son: Antonio (g,s); Bartolo (g,t,w); Carlos (s,t,w); Diego (d,g,m,s); Eduardo (g,s,t,w); Fernando (g,s,t). ¿Es posible que todos los amigos de Horacio tengan algún trago que les guste?. La solución la daremos al final del capítulo.

**Definición 5. 1** *Sea  $M$  un apareamiento en  $G$ . Si  $u, v \in A(G)$  y  $uv \in M$ , diremos que  $u$  y  $v$  están apareados. Además, si  $u \in V(G)$  y  $u$  incide en alguna arista de  $M$ , diremos que  $u$  está  $M$  – saturado. En otro caso diremos que  $u$  no está  $M$  – saturado*

Una pregunta natural es si un apareamiento de cardinalidad máxima satura a todos los vértices de su gráfica. La siguiente figura (Figura 5-3) nos da la respuesta.

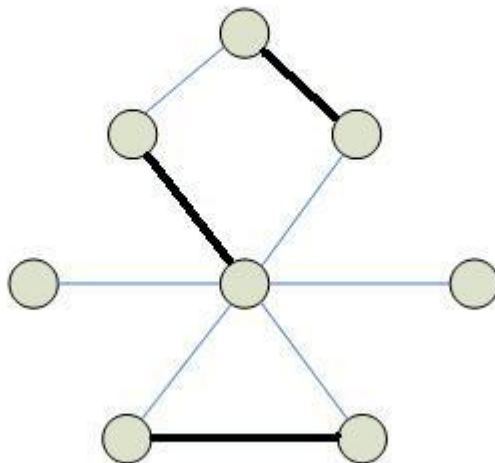


Figura 5-3

El apareamiento que se muestra no es único, pero no es posible encontrar uno de cardinalidad mayor, por lo que siempre quedan vértices sin saturar. La siguiente figura (Figura 5-4) muestra un apareamiento que satura a todos los vértices de la gráfica.

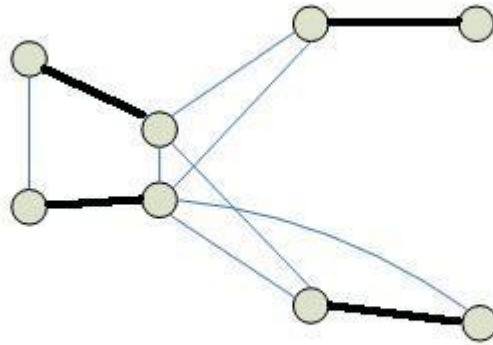


Figura 5-4

**Definición 5. 2** *Un apareamiento  $M$  en  $G$  es perfecto si cada vértice de  $G$  está  $M$  – saturado.*

Las únicas gráficas que no pueden tener algún apareamiento son aquellas que no tienen aristas, ya que una sola arista genera un apareamiento. Sin embargo, no siempre es posible encontrar un apareamiento perfecto. Si  $M$  es un apareamiento y  $|M| = k$ ,  $M$  satura exactamente a  $2k$  vértices, por lo que si  $G$  es una gráfica y  $|V(G)| = 2m + 1$  para alguna  $m$ ,  $G$  no contiene apareamientos perfectos. Claramente no basta con que la gráfica tenga un número par de vértices para que tenga un apareamiento perfecto, ya que por ejemplo puede haber vértices aislados como en la siguiente figura (Figura 5-5).

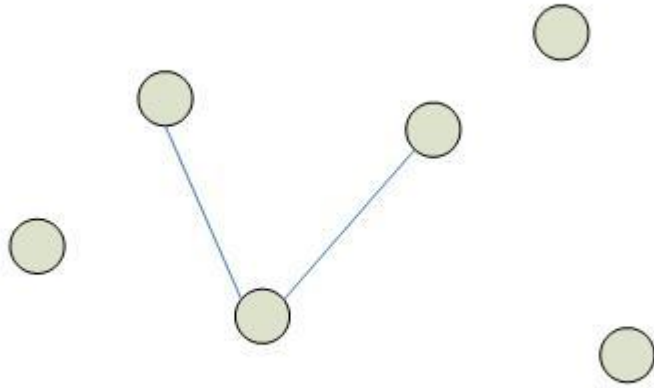


Figura 5-5  
Tampoco basta con que sea conexa como lo demuestra la siguiente figura (Figura 5-6).

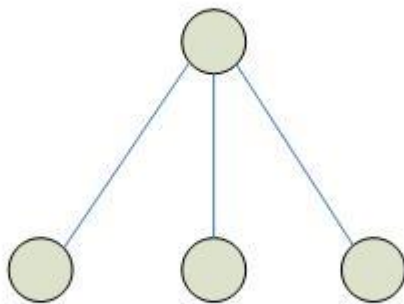


Figura 5-6



Notamos entonces que no todo apareamiento de cardinalidad máxima es perfecto, pero si que todo apareamiento perfecto es de cardinalidad máxima, ya que no existen más vértices por saturar.

**Definición 5.3** Sea  $G$  una gráfica y  $M$  un apareamiento en  $G$ . Una trayectoria  $M$  – alternada es una trayectoria en  $G$  cuyas aristas están alternadamente en  $M$  y en  $M^c$ .  $M^c$  denota al complemento de  $M$ .

Un apareamiento tiene esencialmente cuatro formas de aparecer en una trayectoria  $M$  – alternada. (Dependiendo de si la trayectoria es de longitud par o impar hay dos formas distintas para cada una).

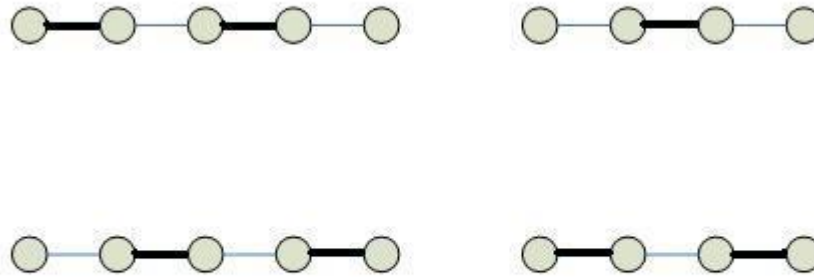


Figura 5-7

La trayectoria de longitud impar que no incluye a los vértices de los extremos es la única que permite aumentar la cardinalidad del apareamiento.

**Definición 5.4** Una trayectoria  $M$  – aumentante es una trayectoria  $M$  – alternada que empieza y termina en vértices que no están  $M$  – saturados.

Notemos que en una trayectoria  $M$  – aumentante se tiene un número par de vértices ( $2s$ ) y un número impar de aristas ( $2s - 1$ ), de las cuales  $s - 1$  están en  $M$  y  $s$  no están en  $M$ .

**Definición 5. 5** Sean  $M$  y  $M'$  dos apareamientos.  $M\Delta M' = (M - M') \cup (M' - M)$  es la diferencia simétrica de  $M$  y  $M'$ .

**Teorema 5. 2** Un apareamiento  $M$  en  $G$  es de cardinalidad máxima si y sólo si  $G$  no contiene alguna trayectoria  $M -$  aumentante.

*dem.*

$\Rightarrow$  Sea  $M$  un apareamiento en  $G$  y supongamos que  $G$  contiene una trayectoria  $M -$  aumentante  $T = v_0, v_1, \dots, v_{2m+1}$ . Definamos  $M' \subseteq A(G)$  como:  $M' = \{M \setminus \{(v_1v_2), \dots, (v_{2m-1}v_{2m})\} \cup \{(v_0v_1), (v_2v_3), \dots, (v_{2m}, v_{2m+1})\}\}$ . Por construcción  $M'$  es un apareamiento. Además,  $|M'| = |M| + 1$ , y por lo tanto  $M$  no tiene cardinalidad máxima.

$\Leftarrow$  Sea  $M^*$  un apareamiento de cardinalidad máxima en  $G$ . Entonces  $|M^*| > |M|$ . Sea  $H = M\Delta M^*$ . Si  $v \in V(H)$ ,  $gr(v) \leq 2$ , pues a lo más es incidente con una arista de  $M$  y una de  $M^*$ . Esto quiere decir que toda componente de  $H$  es un ciclo o una trayectoria. En cualquier caso, sus aristas se muestran de manera alternada una en  $M$  y la siguiente en  $M^*$ . Como  $|M^*| > |M|$ ,  $H$  contiene más aristas de  $M^*$  que de  $M$ , por lo cual, alguna componente de  $H$  que sea una trayectoria, debe empezar y terminar con aristas de  $M^*$ . Si el origen y el fin de esta trayectoria están  $M^* -$  saturados en  $H$ , como efectivamente ocurre, entonces, estos vértices no están  $M -$  saturados en  $G$  y dicha trayectoria es  $M -$  aumentante en  $G$ . •

**Teorema 5. 3** Si  $G$  es una gráfica bipartita  $k -$  regular con  $k > 0$ , entonces  $G$  tiene un apareamiento perfecto.

*dem.*

Sea  $G$  una gráfica bipartita  $k -$  regular con bipartición  $(X, Y)$ . Como  $G$  es  $k -$  regular,  $k|X| = A(G) = k|Y|$  y como  $k > 0$  tenemos que  $|X| = |Y|$ . Consideremos ahora  $S$ , un subconjunto de  $X$  y denotemos por  $A_1$  y  $A_2$  los conjuntos de aristas incidentes con  $S$  y con el conjunto de todos los vértices adyacentes a  $S$  respectivamente. (A este último conjunto lo llamaremos  $N_G(S)$ ). Por definición de  $N_G(S)$ ,  $A_1 \subseteq A_2$  y por lo tanto.  $k|N_G(S)| = |A_2| \geq |A_1| = k|S|$ . De esto se desprende que  $|N_G(S)| \geq |S|$  y por el primer teorema visto en este capítulo,  $G$  tiene un apareamiento que satura a todo vértice de  $X$ . Como  $X = Y$  y todas las aristas de  $G$  tienen un extremo en  $X$  y otro en  $Y$ , concluimos que  $M$  es perfecto. •

Volviendo al problema de Horacio y sus amigos.

La situación puede ser representada por la gráfica de la siguiente figura, donde los vértices marcados con letras minúsculas son los vértices correspondientes a las bebidas  $V_1 = \{d, g, m, s, t, w, b\}$ , así como los vértices marcados con mayúsculas corresponden a la primera letra de los nombres de los amigos de Horacio  $V_2 = \{A, B, C, D, E, F\}$ . El problema consiste en aparear el conjunto  $V_2$  con un subconjunto del conjunto  $V_1$ . Esto es posible si y solo si  $V_2$  es no deficiente.

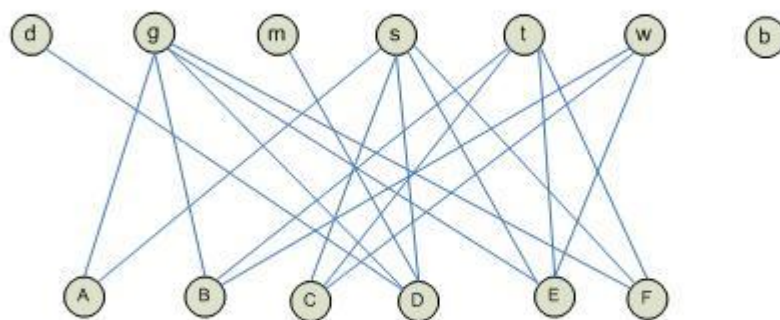


Figura 5-8

Sea  $U_2 = \{A, B, C, E, F\}$ . Entonces  $U_2^* = \{g, s, t, w\}$  y  $|U_2| - |U_2^*| = 5 - 4 = 1$ . Así  $U_2$  tiene deficiencia positiva. Por lo tanto  $V_2$  es no deficiente, lo que implica que no todos los amigos de Horacio tendrán la bebida que quieren.

### 5.3. Ejercicios

1. Encuentra el número de apareamientos perfectos diferentes de  $K_{2,n}$  y  $K_{n,n}$ .
2. Demuestra que un árbol tiene a lo más un apareamiento perfecto.
3. Para toda  $k > 1$ , encuentre un ejemplo de una gráfica  $k$ -regular simple que no tenga un apareamiento perfecto.

4. El  $n$ -cubo  $Q_n$  es la gráfica cuyos vértices son las  $n$ -adas binarias  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $(a_i = 0 \text{ o } a_i = 1, 1 \leq i \leq n)$ , y  $ab \in A(Q_n)$  si y solo si las  $n$ -adas  $a$  y  $b$  difieren exactamente en una entrada. Pruebe que  $Q_n$  tiene un apareamiento perfecto.
5. Sea  $G$  una gráfica bipartita cuyo conjunto de vértices está particionado en dos subconjuntos  $V_1$  y  $V_2$  tal que toda arista de  $G$  une a un vértice de  $V_1$  con un vértice de  $V_2$ . Si  $V_1$  puede ser apareado con un subconjunto de  $V_2$ , y  $U_1 \subseteq V_1$ ,  $U_1 \neq \phi$ , ¿Puede  $U_1$  ser apareado con un subconjunto de  $V_2$ ?
6. Hay cinco mujeres en una fiesta [Alicia (A), Barbara (B), Carmen (C), Diana (D) y Emma (E)] con seis hombres [Alberto (a), Bartolo (b), Carlos (c), Diego (d), Euclides (e) y Fernando (f)]. Las compatibilidades se muestran en la siguiente figura.

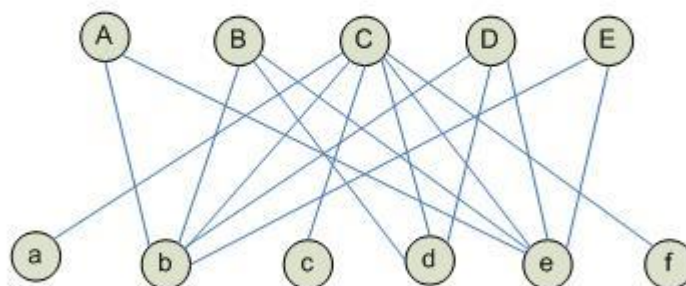


Figura 5-9

¿Es posible que todas las mujeres bailen al mismo tiempo con una pareja compatible?

7. ¿Cuántos diferentes comités de cuatro personas se pueden formar de un grupo de cinco personas?. ¿Es posible que todos los comités tengan

diferente presidente?.

# Capítulo 6

## Algunos Juegos

### 6.1. El problema de los Cubos Multicolores

El problema de los 4 cubos multicolores, una solución a "Locura instantánea".

El juego "Locura instantánea" consiste de 4 cubos, y cada una de las seis caras de los cubos están coloreadas de 4 distintos colores: rojo, blanco, verde y azul. El objetivo del juego es apilar estos cubos, uno encima de otro para formar un prisma rectangular de  $1 \times 1 \times 4$  de tal manera que cada uno de los colores aparezca en cada una de las caras del prisma.

Describiremos ahora como se representa un cubo. Cada cara  $f$  tiene una cara opuesta  $f'$ . Así el cubo de la siguiente figura puede representarse de las siguientes dos formas distintas.

Así podemos suponer que  $\alpha$  es la parte frontal del cubo y  $\alpha'$  la parte de atrás,  $\beta$  y  $\beta'$  representan los lados derecho e izquierdo; y  $\gamma$  y  $\gamma'$  representan la parte de arriba y de abajo.

Hay tres maneras de colocar el primer cubo en la parte de abajo de la torre con respecto a cual par de caras aparecen en la parte de arriba y de abajo del cubo. Las caras  $\gamma$  y  $\gamma'$  pueden estar en las posiciones de arriba y abajo (como se muestra en la figura anterior); es decir estas son las caras "enterradas". Así, las cuatro caras restantes son las visibles y las involucradas en la solución del problema. Por otro lado las caras  $\beta$  y  $\beta'$  pueden ser las "enterradas" o las caras  $\alpha$  y  $\alpha'$ . upongamos que hemos elegido la posición del primer cubo. Ahora hay 24 nuevas posibles posiciones para el segundo cubo. Por ejemplo, si la cara  $\alpha$  aparece el frente del segundo cubo, cualquiera de

las posiciones de la siguiente figura podría ocurrir. Así, hay cuatro posibles arreglos de este cubo cuando se escoge cada cara como cara frontal.

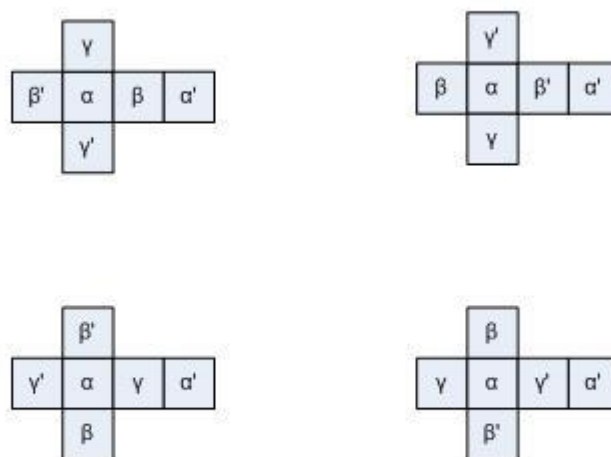


Figura 6-1

Como un cubo tiene 6 caras, hay 24 formas de posicionar el segundo cubo una vez que hayamos puesto el primer cubo. Análogamente hay 24 posiciones para el tercer cubo y 24 para el cuarto cubo. El total de arreglos distintos de los 4 cubos es  $3 \times 24 \times 24 \times 24 = 41,472$ . Por lo que una solución de ensayo y error parece poco esperanzadora. Tomemos un conjunto específico de 4 cubos como se muestran en la siguiente figura e intente encontrar una solución si es que existe. Los símbolos R, B, A, V denotan los colores rojo, blanco, azul y verde.

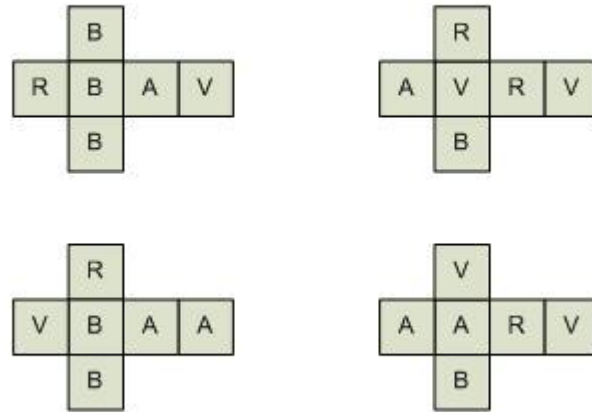


Figura 6-2

Ahora introducimos las gráficas o más precisamente las pseudográficas (es decir, se permiten lazos y aristas múltiples). Representamos a cada cubo con una pseudográfica de orden 4. Los vértices corresponden a los cuatro posibles colores. Las aristas cumplen la siguiente regla. Conectamos a los vértices  $u$  y  $v$  (no necesariamente distintos) si el color de  $u$  y el de  $v$  pertenecen a caras opuestas. De esta manera el número de aristas será igual al número de caras opuestas coloreadas (que siempre es 3) en el cubo  $u$  y  $v$ .

Por ejemplo consideremos al cubo 1. Como para cada cubo, los vértices de la pseudográfica que representan al cubo 1 son R, B, A, V. Así, dos vértices opuestos del cubo 1 están coloreados rojo y azul. R es adyacente a A en esta pseudográfica. Como el frente y la parte de atrás están coloreadas blanca y verde, B es adyacente a V. Finalmente como la parte de arriba y abajo es de color blanco, añadimos un lazo en W. La siguiente figura muestra las cuatro pseudográficas que corresponden a los cuatro cubos descritos anteriormente.



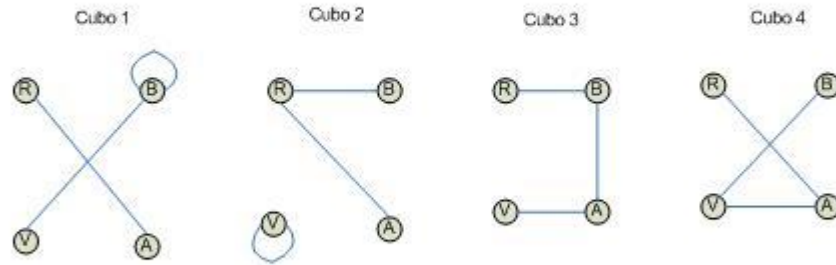


Figura 6-3

Si sobreponemos las cuatro pseudogrficas de la figura anterior obtenemos una pseudogrfica con 4 vrtices y 12 aristas. Esta nueva pseudogrfica se muestra en la siguiente figura. Cada arista esta marcada con el nmero del cubo asociado.

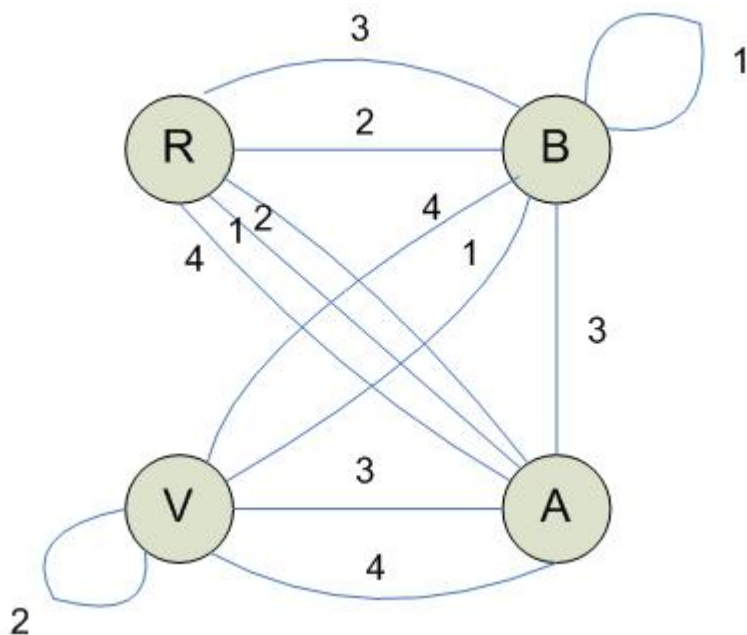


Figura 6-4

Supongamos que existe solución al problema; esto es, que podemos apilar los cuatro cubos de tal manera que los cuatro colores aparezcan en las cuatro caras del prisma. Consideremos primero el frente de este prisma (y al mismo tiempo, la parte de atrás). Cada color aparece en esta parte frontal. Si existe la solución decimos que hay una subpseudográfica  $H_1$  de la pseudográfica de la figura anterior que representa la parte frontal y trasera de este prisma.

La subpseudográfica  $H_1$  contiene cuatro aristas, con cada arista marcada con un número diferente 1,2,3,o 4. Por ejemplo la arista marcada 1 une los colores del frente y la parte de atrás del cubo. Cada vértice de  $H_1$  tiene grado dos (un lazo en un vértice contribuye en dos al grado), ya que un color aparece una vez en la parte frontal y una en la parte trasera. Así  $H_1$  es una pseudográfica 2-regular de orden 4. Similarmente los lados izquierdo y derecho de un prisma dan lugar a una pseudográfica 2-regular  $H_2$  de orden 4 que es ajena en aristas a  $H_1$  (es decir  $H_1$  y  $H_2$  no tienen aristas en común). Así el problema es determinar las dos pseudográficas  $H_1$  y  $H_2$ . En este caso en particular existen estas dos pseudográficas y se muestran en la siguiente figura.

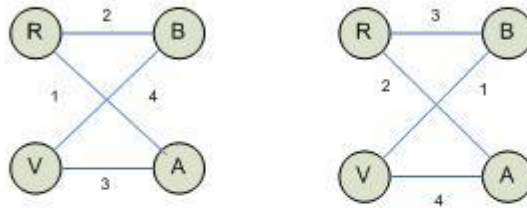


Figura 6-5

Con la ayuda de  $H_1$  y  $H_2$ , mostraremos ahora como apilar los cubos. empezamos con el primer cubo, y ponemos al color rojo en el frente y al azul atras. Ponemos verde en la izquierda y blanco en la derecha. Es conveniente considerar el tercer cubo a continuación. Colocamos el color azul en el frente y el verde atras, ademas del blanco en la izquierda y el rojo en la derecha. Regresando al segundo cubo colocamos el blanco en el frente y el rojo atras, rojo en la izquierda y el azul en la derecha. Finalmente, para el cuarto cubo ponemos el verde al frente, el blanco atras, el azul en la izquierda y el verde en la derecha.

La solución a “Locura instantánea” sugerida aún requiere cierta cantidad de trabajo. Con cada conjunto de 4 cubos debemos construir una pseudográfica de tamaño 12 y orden 4 de la manera descrita anteriormente. Una solución al problema involucra encontrar dos subpseudográficas 2-regulares ajenas en aristas. Una vez que se han encontrado estas dos pseudográficas, debemos tener cuidado en como se apilan los cubos. De cualquier manera es considerablemente más sencillo que intentar los 41,472 arreglos de los cubos.

### 6.1.1. Ejercicios

1. Muestre que la pseudográfica de la figura 7.5 no contiene 3 subpseudogr ficas 2-regulares ajenas por aristas de orden 4.
2. En la descripci3n del final del ejemplo de como apilar los cuatro cubos,  Por qué se consider3 al tercer cubo antes que al segundo cubo?
3. Resuelva "Locura Instantánea" con los siguientes cuatro cubos.

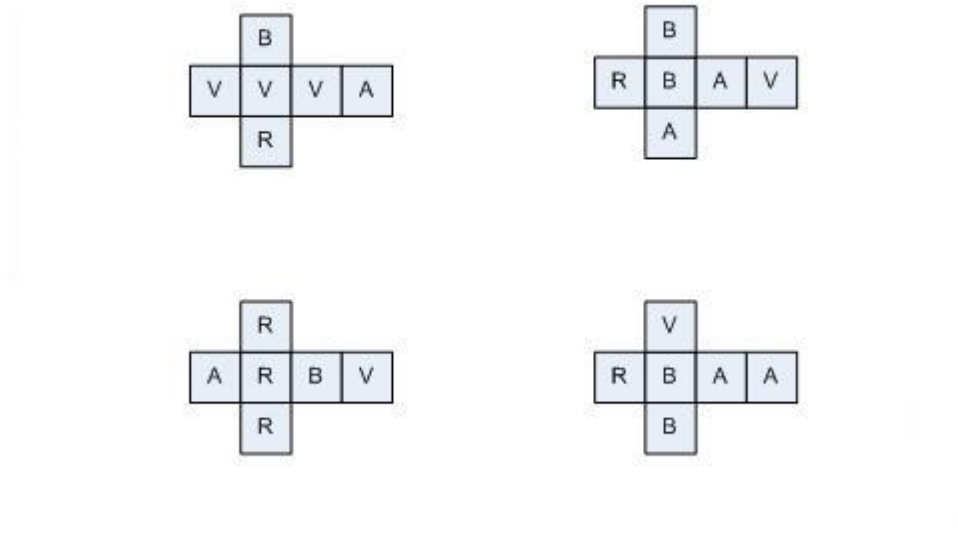


Figura 6-6

4. Resuelva "Locura Instantánea" con los siguientes cuatro cubos.

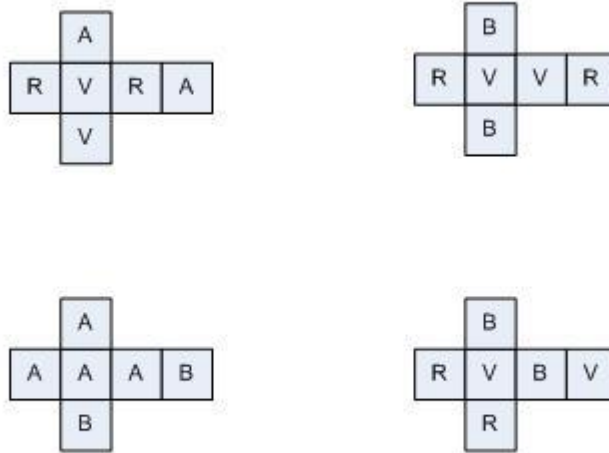


Figura 6-7

5. Muestre que es posible colorear 4 cubos con 4 colores, usando los 4 colores en cada cubo de tal manera que "Locura instantánea" no tenga solución.
6. ¿Es necesario que cada uno de los 4 colores aparezca en cada cubo para que "Locura instantánea" tenga solución?
7. ¿Es necesario que al menos tres de los cuatro colores aparezca en cada cubo para que "Locura instantánea" tenga solución?
8. ¿Es necesario que al menos dos de los cuatro colores aparezca en cada cubo para que "Locura instantánea" tenga solución?

## 6.2. El problema del Paseo de los Caballos

Consideremos el tablero estándar del ajedrez de 8 por 8, con cuadrados coloreados alternadamente de blanco y negro. Suponga que colocamos un caballo en alguna de estas 64 casillas. De acuerdo a las reglas del ajedrez, un caballo se mueve dos lugares horizontal o verticalmente y después un lugar en

dirección perpendicular. Ahora podemos plantear nuestro juego: Siguiendo las reglas del ajedrez, ¿Es posible para un caballo recorrer el tablero, pasando por cada casilla una y solo una vez y regresando a la casilla inicial?

Este problema data de tiempos de Euler. Es equivalente a determinar si cierta gráfica  $G$  es Hamiltoniana, donde los vértices  $u_i$  de  $G$  corresponden a las casillas  $S_i$  del tablero de ajedrez, y  $u_i$  y  $u_j$  son adyacentes si y solo si es posible para el caballo ir de  $S_i$  a  $S_j$  en un solo movimiento. La gráfica  $G$  tiene 64 vértices y 168 aristas, y de hecho contiene varios ciclos Hamiltonianos, uno de los cuales se muestra en la siguiente figura. Así podemos afirmar que existe solución para el problema de "El Paseo de los Caballos".

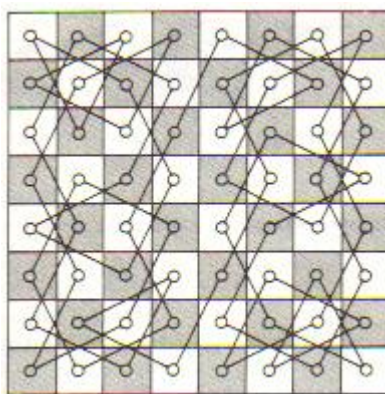


Figura 6-8

### 6.2.1. Ejercicios

1. En la gráfica  $G$  de la Figura 7.9, determine la longitud (número de aristas) mas corta que hay entre un vértice en una esquina a otro vértice en la esquina diagonalmente opuesta.
2. Demuestre si "El paseo de los caballos" se puede realizar en un tablero de 4x4.
3. Demuestre si "El paseo de los caballos" se puede realizar en un tablero de 4x5.
4. Demuestre si "El paseo de los caballos" se puede realizar en un tablero de  $n \times n$ , cuando  $n$  es impar.

### 6.3. Las Torres de Hanoi

Suponga que tenemos tres torres verticales en una base, y suponga que tenemos ocho discos circulares, cada uno con un hoyo en el centro de manera que podamos meterlos en las torres. Suponga que cada disco tiene radio distinto, y que inicialmente los colocamos en una sola torre de manera que el disco más grande quede hasta abajo, después el disco de mayor tamaño de los restantes y así sucesivamente. Este acomodo de los discos es llamado "Las Torres de Hanoi".

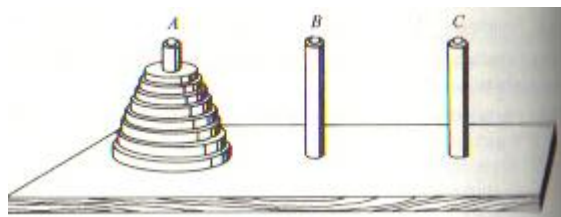


Figura 6-9

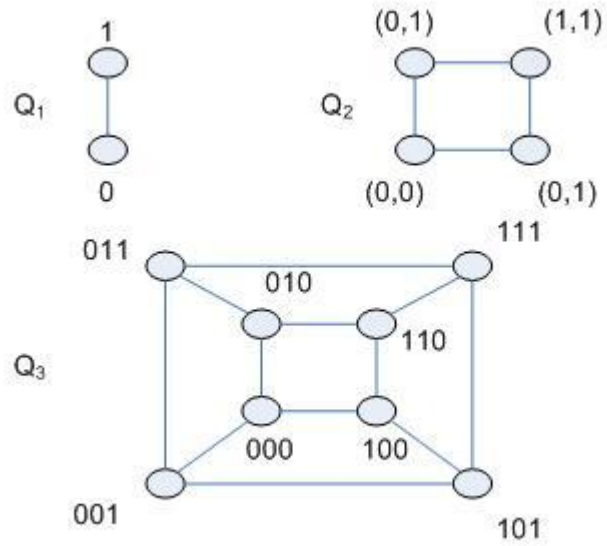
El juego consiste en pasar todos los discos de una torre a otra de tal manera que solo se puede mover un disco a la vez, y en ningún momento se puede colocar un disco grande encima de un disco pequeño.

El procedimiento para resolver este juego es tan simple para describirlo para  $n$  discos igual que para 8; así consideraremos una solución para el caso general. Supongamos que los  $n$  discos están en la torre  $A$ , y asumiremos que se requieren  $x$  movimientos para pasar los  $n - 1$  discos de arriba a la torre  $B$ , dejando al disco más grande en la torre  $A$  y dejando la torre  $C$  vacía. Ahora moveremos el disco más grande de la torre  $A$  a la  $C$ . Como antes, necesitamos  $x$  movimientos para pasar los  $n - 1$  discos de la torre  $B$  a la  $C$ , resolviendo el problema. Así nos tomo  $2x + 1$  movimientos en total. Al considerar el juego para una  $N$  pequeña, vemos que se requieren  $2^n - 1$  movimientos para resolver el juego. Así para el juego con 8 discos, se necesitan  $2^8 - 1 = 255$  movimientos.

Ahora veremos la conexión que hay entre el juego de Las Torres de Hanoi que acabamos de presentar y las gráficas Hamiltonianas. Para entender esta conexión, introduciremos una nueva clase de gráficas.

Mencionaremos la gráfica del cubo. Esta gráfica se obtiene, al representar los vértices y las aristas de un cubo en el plano. Este cubo también se conoce como el cubo de 3 dimensiones o 3-cubo. La gráfica que se le asocia es también llamada el 3 - cubo. Esta idea ha sido generalizada para el  $n$ -cubo  $Q_n$ , que es

la gráfica de orden  $2^n$  cuyos vértices están representados por  $n$  - *adas* (una secuencia de  $n$  números). Cada término de la  $n$ -ada tiene valor 0 o 1, y dos vértices en  $Q_n$  son adyacentes si y solo si las correspondientes  $n$ -adas difieren solo en un término. La siguiente figura muestra  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  y  $Q_4$ .





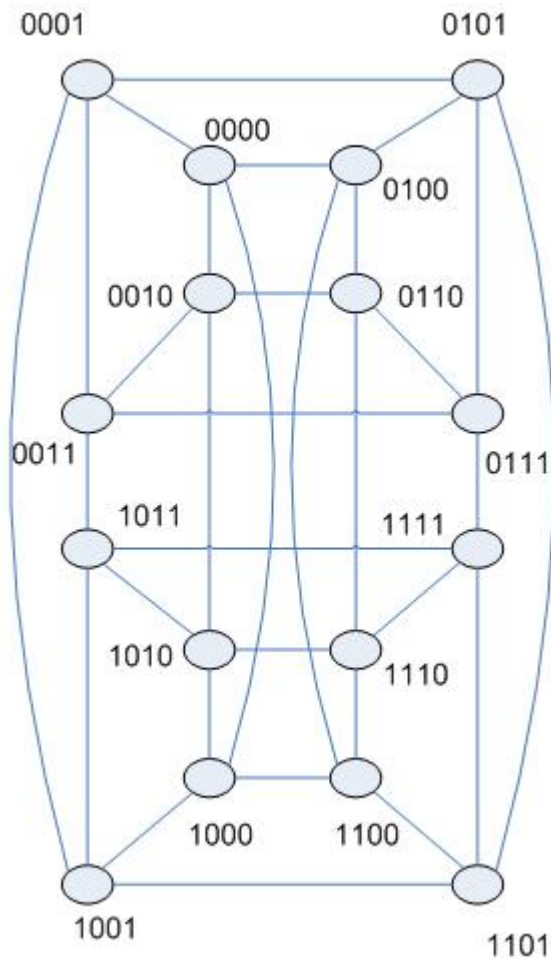


figura 6-10

Para representar una solución de las Torres de Hanoi con un  $n$ -cubo, enumeraremos los discos  $1, 2, \dots, n$  del disco más chico hasta el más grande. con cada paso de la solución, asociamos una  $n$ -ada como sigue: Sea la posición  $j$  de los discos en la solución representada por  $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ , donde  $a_{ij}$  es el número de movimientos, modulo 2 ( $1 + 1 = 0$ ), hecho por el  $i$ -ésimo disco. Resulta que la sucesión de  $n$ -adas descritas, en el orden en el que ocurren en la solución del juego, produce un ciclo Hamiltoniano en  $Q_n$ .

Ilustraremos la relación entre gráficas Hamiltonianas y las Torres de Hanoi con solo dos discos. Los pasos para la solución, junto con las parejas asociadas y  $Q_2$ , se muestran en la siguiente figura.

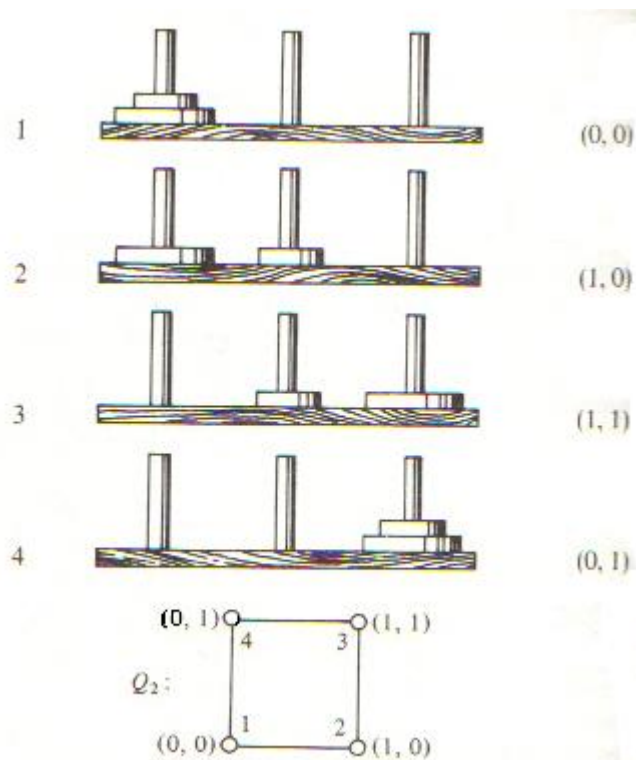


figura 6-11

### 6.3.1. Ejercicios

1. Dibuje la gráfica  $Q_5$  y marque los vértices con las 5-adas apropiadas.
2. Resuelva el problema de las Torres de Hanoi para  $n=3$ , y determine el ciclo Hamiltoniano correspondiente de  $Q_3$ .
3. Pruebe que  $Q_n$  es Hamiltoniana para  $n=2$ . (Sugerencia: Use inducción matemática).

## 6.4. El problema de Los Tres Caníbales y los Tres Misioneros

Tres caníbales y tres misioneros viajan juntos, y llegan a la orilla de un río. Los tres caníbales y los tres misioneros desean cruzar a la otra orilla del

río. El único transporte con el que cuentan es un bote en el que caben a lo más dos personas. Hay otra dificultad. En ningún momento, en ningún orilla, el número de caníbales debe ser mayor que el número de misioneros, ya que los misioneros estarían en peligro. ¿Cómo se las arreglaron para cruzar el río?

Ahora presentamos una solución con gráficas del problema. Una "posición" o un "estado", muestra la situación que ocurre en la primer orilla. Sea  $c$  el número de caníbales en la primer orilla y  $m$  el número de misioneros en la primer orilla. Así, la pareja ordenada  $(c, m)$  denota el estado del sistema en cualquier momento.

Primero haremos algunas observaciones. Notese que  $0 \leq c \leq 3$  y  $0 \leq m \leq 3$ . Así, hay 16 parejas ordenadas posibles  $(c, m)$ . De cualquier manera algunos de estos estados no están permitidos bajo las restricciones adicionales del problema. Por ejemplo, en los casos  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(3, 1)$  y  $(3, 2)$  los caníbales ganarían en número a los misioneros en la primera en la segunda orilla. Las parejas ordenadas permitidas se dan en la siguiente figura.

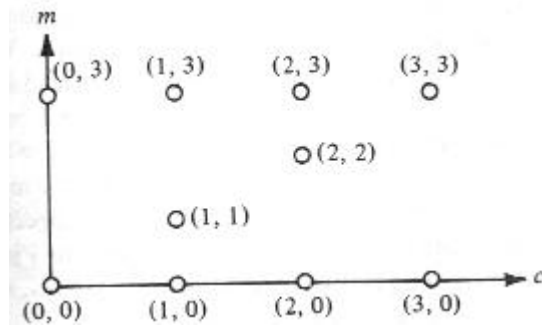


figura 6-12

Debemos ir de la pareja ordenada  $(3, 3)$  a la  $(0, 0)$ , pero debemos hacerlo de acuerdo a ciertas reglas. Si estamos en el estado  $(c_1, m_1)$  y el bote esta en la primer orilla, entonces podemos proceder a la pareja permitida  $(c_2, m_2)$  previendo que  $c_2 \leq c_1$ ,  $m_2 \leq m_1$  y  $(c_1 + m_1) - (c_2 + m_2) \leq 2$ .

Si estamos en el estado  $(c_1, m_1)$  y el bote está en la segunda orilla, entonces podemos ir a la pareja permitida  $(c_2, m_2)$  previendo que  $c_2 \geq c_1$ ,  $m_2 \geq m_1$  y  $(c_2 + m_2) - (c_1 + m_1) \leq 2$ .

Por ejemplo, si estamos en el estado  $(2, 2)$  y el bote esta en la primer orilla, entonces el siguiente estado puede ser  $(1, 1)$  o  $(2, 0)$ .

Es conveniente introducir una gráfica dirigida  $S$ . Los vértices de  $S$  corresponden a los 10 estados permitidos. Unimos  $(c_1, m_1)$  con  $(c_2, m_2)$  por un

arco positivo si podemos proceder del estado  $(c_1, m_1)$  al estado  $(c_2, m_2)$  al mover el bote de la primera a la segunda orilla. Unimos  $(c_1, m_1)$  con  $(c_2, m_2)$  por un arco negativo si podemos ir del estado  $(c_1, m_1)$  al estado  $(c_2, m_2)$  al mover el bote de la segunda a la primera orilla. La gráfica dirigida  $S^+$  que consiste de los arcos positivos de  $S$  se muestra en la siguiente figura.

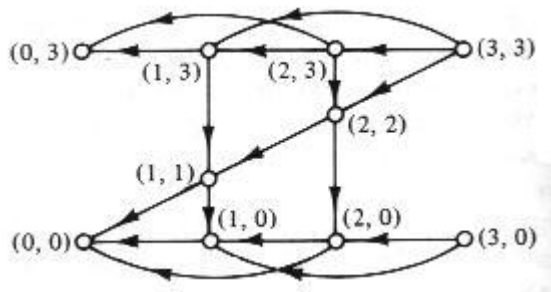


figura 6-13

Observe que existe un arco positivo de  $(c_1, m_1)$  a  $(c_2, m_2)$  si y solo si hay un arco negativo de  $(c_2, m_2)$  a  $(c_1, m_1)$ . El objeto del problema es encontrar una trayectoria dirigida en  $S$  de  $(3,3)$  a  $(0,0)$  que alterne arcos positivos y negativos. Una trayectoria se muestra en la siguiente figura.

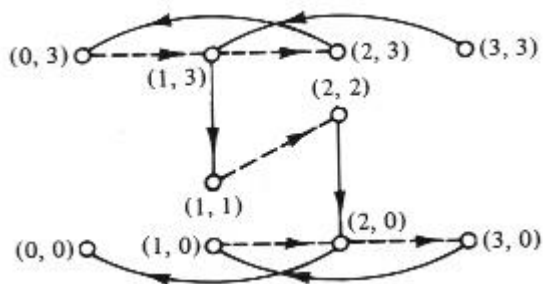


figura 6-14

La siguiente figura presenta los once cruces

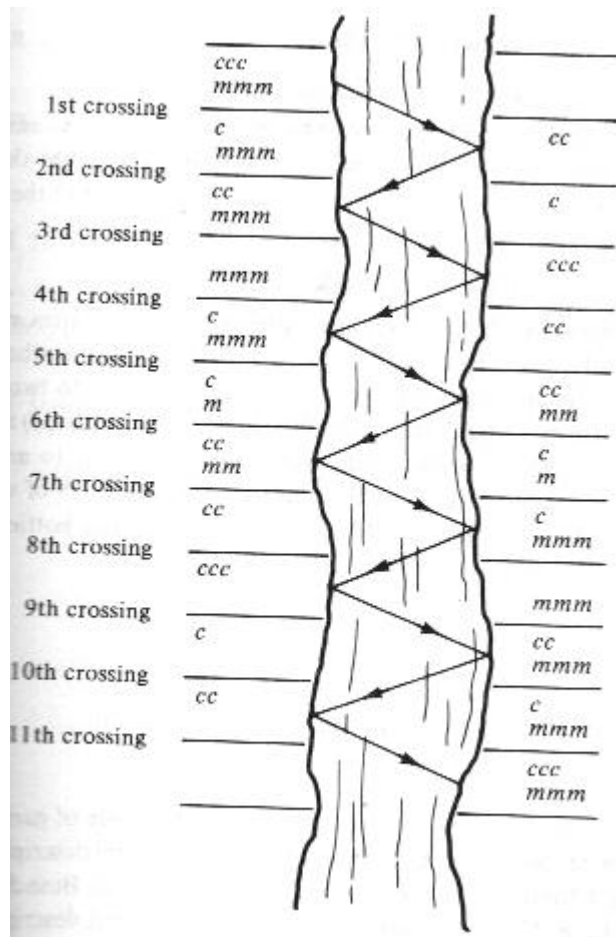


figura 6-15

mostrando el número de caníbales y el número de misioneros en cada orilla del río después de cada cruce.

### 6.4.1. Ejercicios

1. Muestre que el problema de los tres caníbales y los tres misioneros no tiene solución con menos de once cruces.
2. ¿Tiene sentido hablar del problema con cuatro caníbales y cuatro misioneros? Si es posible, explique las condiciones del problema e intente resolverlo.
3. Resuelva el problema de "Los tres esposos celosos". Tres esposas y sus

tres esposos deben llegar a una ciudad en un corvette, que es solo para dos personas. ¿Cómo deben viajar de tal manera que ninguna esposa se quede con alguno de los otros dos esposos a menos que su propio esposo esté presente?

4. Resuelva el problema de "Las botellas de vino". Tres botellas de vino tienen capacidad para 8, 5 y 3 litros respectivamente. La botella más grande se llena con vino y las otras dos están vacías. Queremos dividir el vino en dos porciones iguales usando estas botellas (que no están graduadas) y sólo estas botellas, al vertir sucesivamente de una botella a otra. El problema entonces es: ¿Cómo podemos obtener 4 litros de vino en la botella más grande y 4 litros en la botella mediana, haciendo el mínimo número de pasos?.

# Capítulo 7

## Planaridad y Coloración de Vértices

### 7.1. El problema de los Vecinos

Supongamos que tenemos tres casas y tres servicios (electricidad, gas y agua), situadas como se muestra en la siguiente figura.

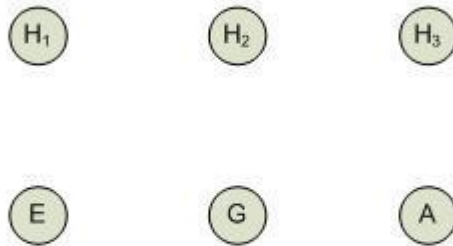


Figura 7-1

¿Es posible conectar cada uno de los tres servicios con cada una de las casas de tal manera que no se crucen las líneas de los servicios?. La siguiente figura muestra una manera en la que podemos conectar los servicios con cada casa.

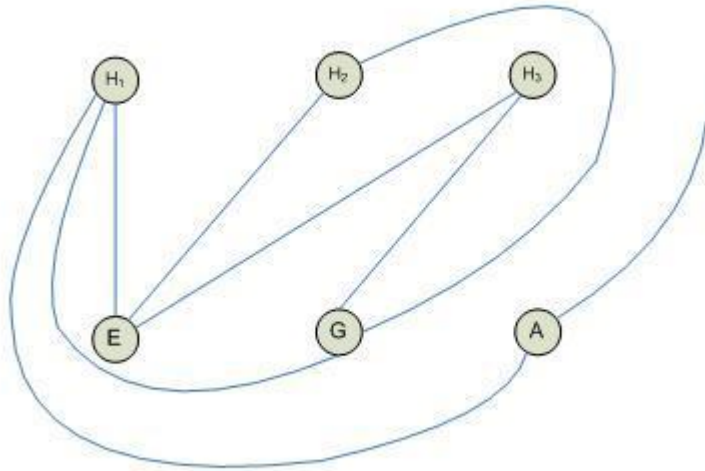


Figura 7-2

El procedimiento falla evidentemente, ya que parece que no hay manera de conectar la tercer casa con el agua sin que crucemos alguna otra línea. Esto implica que el procedimiento para conectar las casas y los servicios es incorrecto, o que no hay forma de hacerlo.

Para encontrar la solución a este problema, usaremos un argumento de teoría de gráficas. Podemos representar la situación descrita en el problema por una gráfica cuyos vértices correspondan a las casas y a los servicios, y donde una arista une dos vértices si y solo si un vértice denota una casa y otro vértice denota un servicio. Esta gráfica bipartita se denota por  $K(3,3)$ , que indica que el conjunto de vértices se divide en dos conjuntos de tres vértices cada uno y se dibujan todas las aristas permitidas. La gráfica  $K(3,3)$  se muestra en la siguiente figura.



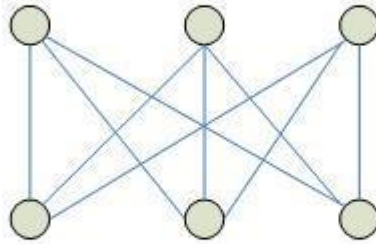


figura 7-3

El concepto que nos interesa es el de gráficas aplanables.

## 7.2. Gráficas Planas

**Definición 7. 1** *Una gráfica aplanable es una gráfica que puede ser dibujada en el plano de tal manera que las aristas no se intersecten excepto en los vértices.*

Por ejemplo la primer gráfica de la siguiente figura (Figura 7-4) está dibujada con aristas intersectadas.

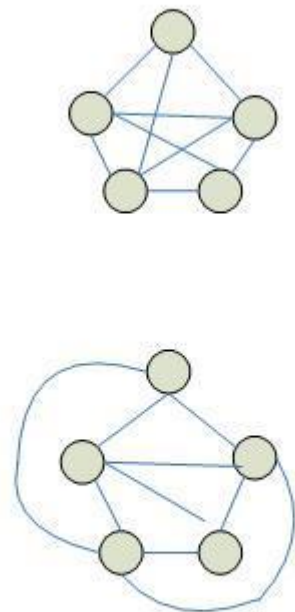


Figura 7-4

Pero la gráfica anterior es una gráfica aplanable, ya que puede ser dibujada de tal manera que no se intersecten las aristas, como se muestra en la segunda gráfica.

El problema de los vecinos puede ser replanteado en términos de la teoría de gráficas: ¿Es  $K(3, 3)$  una gráfica aplanable?. Antes de responder esta pregunta, debemos establecer algunos resultados acerca de gráficas aplanables.

**Definición 7. 2** *Una gráfica aplanable dibujada en el plano de tal manera que no se intersecten las aristas es llamada una Gráfica Plana.*

Así la primer gráfica de la figura 7-4 no es una gráfica plana pero si lo es la segunda.

**Definición 7. 3** Si  $x$  es un punto en el plano de una gráfica plana que no es un vértice, ni un punto sobre alguna arista, el conjunto de todos los puntos en el plano que pueden ser unidos por una curva con  $x$  de tal manera que no se atravesase un vértice de la gráfica o un punto de alguna arista es llamado la región de la gráfica que contiene a  $x$ .

Así, una gráfica plana  $G$  divide el plano en las regiones de  $G$ , y alrededor de estas regiones hay exactamente una región (la región exterior o infinita), cuya área no es finita. Cualquier otra región es una región interior.

**Definición 7. 4** La frontera de una región es la subgráfica formada por los vértices y las aristas que rodean la región. Si la frontera de la región exterior de una gráfica plana es un ciclo, ese ciclo es conocido como el ciclo máximo de la gráfica.

En la siguiente figura,  $G_1$  tiene tres regiones denotadas por  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ , donde  $R_3$  es la región exterior.

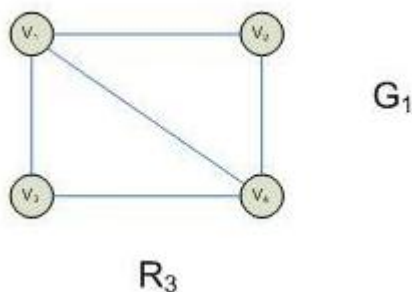


Figura 7-5

La región  $R_1$  consiste de los vértices  $v_1$ ,  $v_3$  y  $v_4$ , la región  $R_2$  consiste de  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_4$ , y la región exterior consiste de los cuatro vértices. En este caso  $p = 4$ ,  $q = 5$  y  $r = 3$  (donde  $r$  es el número de regiones). De tal manera se cumple que  $p - q + r = 2$ .

En la siguiente figura,  $G_2$  tiene una sola región, que es la región exterior  $R_1$ , delimitada por todos los vértices.

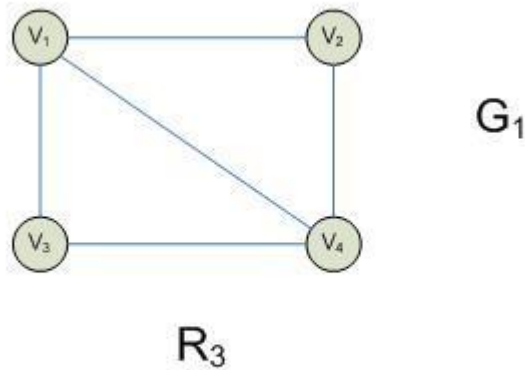


Figura 7-6

En este caso  $p = 5$ ,  $q = 4$  y  $r = 1$ , de igual manera  $p - q + r = 2$

**Teorema 7. 1** *Sea  $G$  una gráfica conexa y plana con  $p$  vértices,  $q$  aristas y  $r$  regiones, entonces  $p - q + r = 2$ . (Este teorema es llamado la Fórmula de Euler)*

*dem.*

Usaremos inducción sobre  $q$ . Si  $q = 0$  entonces  $p = 1$  y  $r = 1$ , así  $p - q + r = 1 - 0 + 1 = 2$ , y por lo tanto el resultado es verdadero.

Supongamos que el resultado es verdadero para todas las gráficas conexas y planas con  $k - 1$  aristas y sea  $G$  una gráfica conexa y plana con  $k$  aristas. Supongamos que  $G$  tiene  $p$  vértices y  $r$  regiones. Probaremos que  $p - k + r = 2$ . Si  $G$  es un árbol entonces  $p = k + 1$  y  $r = 1$ , así  $p - q + r = (k + 1) - k + 1 = 2$  y se cumple la fórmula. Si  $G$  no es un árbol, entonces  $G$  es conexa y  $G$  contiene ciclos. Sea  $e$  una arista en el ciclo de  $G$ , y consideremos la gráfica plana  $G - e$  (que también es conexa). Las dos regiones de  $G$  que inciden en  $e$  producen una región en  $G - e$ . Así  $G - e$  tiene  $p$  vértices,  $k - 1$  aristas y  $r - 1$  regiones. Podemos aplicar nuestra hipótesis de inducción para concluir que  $p - (k + 1) + (r - 1) = 2$  o  $p - k + r = 2$  que es lo que queríamos probar. •

**Teorema 7. 2** *Sea  $G$  una gráfica conexa y plana con  $p$  vértices y  $q$  aristas donde  $p \geq 3$  entonces  $q \leq 3p - 6$ .*

*dem.* Notamos primero que el resultado es verdadero para  $p = 3$ , ya que toda gráfica de orden 3 tiene a lo más tamaño 3. Así que supondremos que  $p \geq 4$ . Dibujamos la gráfica  $G$  como una gráfica plana y denotamos el número de regiones de  $G$  como  $r$ . Para cada región  $R$  de  $G$ , determinamos el número de aristas que hay en la frontera de  $R$ , y después sumamos estos números sobre todas las regiones de  $G$ . Llamamos  $N$  a este número. Ya que hay al menos tres aristas que pertenecen a la frontera de cada región, se sigue que  $N \geq 3r$ . Pero por otro lado, el número  $N$  cuenta cada arista de  $G$  una o dos veces; esto es  $N \leq 2q$ . Así  $3r \leq N \leq 2q$  o  $3r \leq 2q$ . Esto implica que  $-r \geq -\frac{2q}{3}$ . Además sabemos que  $p - q + r = 2$  así que  $p = q - r + 2$ . Por lo tanto  $p = q - r + 2 \geq q - \frac{2q}{3} + 2 = \frac{q}{3} + 2$ . Así  $p \geq \frac{q}{3} + 2$  y finalmente  $q \leq 3p - 6$ . •

Solución al problema de las tres casas y los tres servicios.

**Teorema 7. 3** *La gráfica  $K_{3,3}$  no es plana.*

*dem.*

Probaremos este resultado por contradicción. Supongamos que  $K_{3,3}$  es plana. Entonces podemos dibujar  $K_{3,3}$  como una gráfica plana con  $r$  regiones. Sumamos el número de aristas en la frontera de cada una de las  $r$  regiones de  $K_{3,3}$  y denotamos éste número por  $N$ . Como no hay aristas que unan a dos vértices del mismo subconjunto de  $K_{3,3}$ , la gráfica no contiene triángulos, así se tiene que  $N \geq 4r$ . Por otro lado  $N$  cuenta cada arista al menos dos veces, así  $N \leq 2q = 18$ . Por lo tanto  $4r \leq 18$  o  $r \leq \frac{9}{2}$ . Sabemos también que  $p - q + r = 2$ . De tal manera que  $6 - 9 + r = 2$  y entonces  $r = 5$ . Esto produce la contradicción deseada. •

Podemos darnos cuenta que no es posible conectar cada servicio con las tres casas sin que se crucen las líneas.

**Teorema 7. 4** *Toda gráfica plana  $G$  contiene un vértice  $v$  tal que  $\text{grad } v \leq 5$*

*dem.*

El resultado es obvio si  $G$  tiene seis o menos vértices. Supongamos que  $G$  es una gráfica de orden  $p$  y tamaño  $q$  donde  $p \geq 7$ . Si sumamos los grados de los vértices de  $G$ , obtenemos  $2q$ . Si todos los vértices tienen grado 6 o mayor, entonces la suma de los grados de los vértices de  $G$  es al menos  $6p$ , es decir  $2q \geq 6p$ . Por otro lado, sabemos que  $q \leq 3p - 6$ , de tal manera  $2q \leq 6p - 12$ . Esto es una contradicción. No todos los vértices pueden tener grado 6 o mayor, y por lo tanto existe un vértice  $v$  para el cual se cumple que  $\text{grad } v \leq 5$ . •

**Teorema 7. 5** *La gráfica  $K_5$  no es plana.*

*dem.*

La gráfica  $K_5$  tiene  $p = 5$  y  $q = \frac{p(p-1)}{2} = 10$ . Así  $3p - 6 = 9$ , y tenemos que  $q > 3p - 6$ . Por lo tanto  $K_5$  no es plana.●

**Definición 7. 5** *Una subdivisión de una gráfica  $G$ , es una gráfica obtenida de  $G$  al insertar vértices (de grado 2) en las aristas de  $G$ .*

En la siguiente figura la gráfica  $H$  es una subdivisión de  $G$ , mientras que la gráfica  $F$  no es una subdivisión de  $G$ .

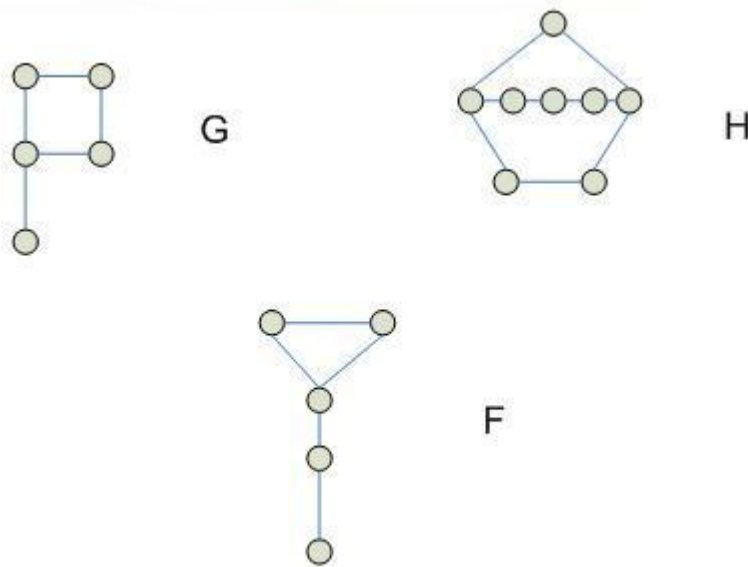


Figura 7-7

**Teorema 7. 6** *Teorema de Kuratowski.*

*Una gráfica  $G$  es plana si y sólo si  $G$  no contiene alguna subgráfica isomorfa a  $K_5$  o  $K_{3,3}$  o a alguna subdivisión de  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .*

La demostración se deja al lector.

### 7.3. Coloración

Supongamos que usted es un jefe de departamento de una universidad, y una de sus responsabilidades es acomodar los horarios de los cursos para el siguiente semestre. Si la universidad no es muy grande sería práctico que los estudiantes indicaran que cursos planean tomar. Mientras se hacen los horarios, se debe tomar en cuenta que dos cursos no estén en el mismo horario si es que un alumno planea tomar ambos cursos. Por otro lado, es conveniente hacer un horario donde se requiera el menor número de períodos de tiempo durante el día. La pregunta es: ¿Cuál es el menor número de horas que se necesitan para poder armar dicho horario?.

Mostraremos ahora como se relaciona dicho problema con la teoría de gráficas. Construimos una gráfica  $G_0$  y asociamos a cada uno de los vértices de  $G_0$  con las clases en el horario. Unimos dos vértices de  $G_0$  con una arista si y solo si un estudiante es miembro de dichas dos clases.

Ahora introduciremos un nuevo concepto de teoría de gráficas y volveremos a nuestro problema de los horarios.

**Definición 7. 6** *Por una coloración de una gráfica  $G$ , entendemos la asignación de colores (que son simplemente los elementos de algún conjunto) a los vértices de  $G$ , un color a cada vértice, de tal manera que vértices adyacentes tengan colores diferentes. Una  $n$ -coloración de  $G$  es una coloración de  $G$  que usa  $n$  colores.*

La siguiente figura muestra una 5-coloración de la gráfica  $G$ , donde los colores están denotados por números, así como una 4-coloración de la gráfica  $H$ .

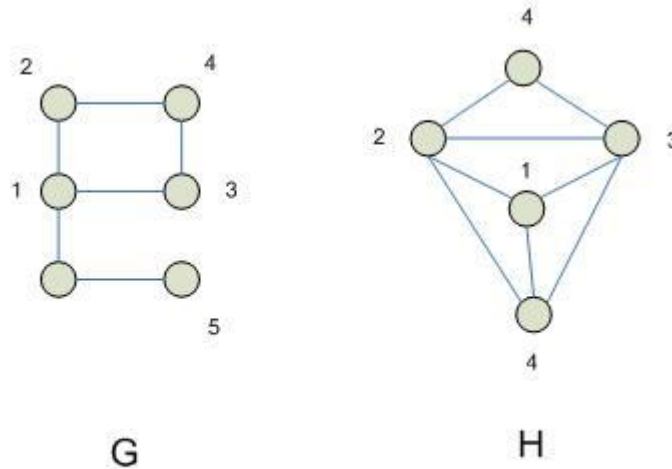


Figura 7-8

Nótese que siempre es posible dar una  $p$ -coloración de una gráfica  $G$  de orden  $p$ . Es más interesante el problema de determinar aquellos números  $n$ , con  $n < p$ , para la cual existe una  $n$ -coloración en  $G$ . Existe una 4-coloración y una 3-coloración para la gráfica  $G$  de la figura anterior, sin embargo no existe una  $n$ -coloración, con  $n \leq 4$  para la gráfica  $H$  de la figura anterior.

Ahora introduciremos el concepto mas importante de este capítulo.

**Definición 7. 7** *El número cromático de una gráfica  $G$  es el mínimo valor  $n$  para el cual existe una  $n$ -coloración en  $G$ .*

El número cromático de  $G$  está denotado por  $\chi(G)$  ( $\chi$  es la letra griega chi). Por lo tanto para las gráficas de la figura anterior  $\chi(G) = 3$  y  $\chi(H) = 4$ . Notese también que aunque hemos dado el número cromático de estas gráficas, aún no hemos dado alguna verificación de estos resultados.

Ahora probaremos que  $\chi(G) = 4$  para la gráfica  $G$  de la siguiente figura (figura 7-9).



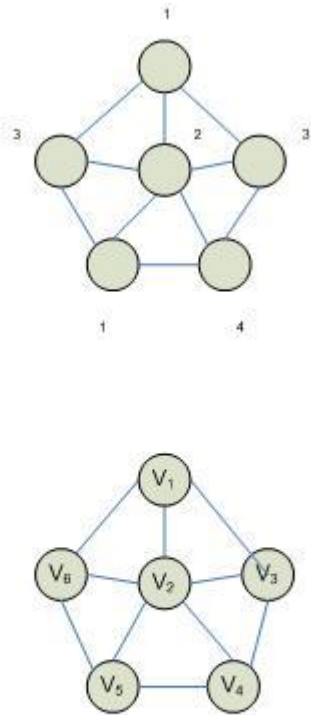


Figura 7-9

Primero, es claro que  $\chi(G) \leq 4$  dado que la figura da una 4-coloración de  $G$ . De esto se sigue que  $\chi(G) = 4$  si podemos mostrar que no existe una 3-coloración de  $G$ . Supongamos que existe una 3-coloración de  $G$ , y denotemos los colores por 1, 2 y 3. Supongamos que los vértices de  $G$  son nombrados como se muestra en la segunda gráfica de la figura anterior.

Los vértices  $v_1, v_2$  y  $v_3$  forman un triángulo, por lo tanto se requieren tres colores para colorear estos vértices. Sin pérdida de generalidad, asignamos el color 1 a  $v_1$ , el color 2 a  $v_2$  y el color 3 a  $v_3$ . Dado que  $v_4$  es adyacente a  $v_2$  y  $v_3$ , debemos asignar el color 1 a  $v_4$ . (recuerde que estamos suponiendo que solamente se requieren los colores 1, 2 y 3.) Con el mismo razonamiento, asignamos el color 3 a  $v_5$ . De cualquier manera, ahora  $v_6$  es adyacente a un

vértice de color 1, a un vértice de color 2, y a un vértice de color 3. Esto nos da una contradicción. De tal manera no existe una 3-coloración para  $G$ . Ahora regresaremos a nuestro problema de los horarios y la gráfica resultante  $G_0$ .

**Teorema 7.7** *El mínimo número de horas requeridas para nuestro horario de clases en nuestro problema es  $\chi(G_0)$*

*dem.*

Supongamos que  $\chi(G_0) = m$  y supongamos que los colores utilizados para colorear  $G_0$  son 1, 2, ...,  $m$ . Primero afirmamos que todas las clases pueden ser ordenadas en  $m$  periodos de una hora. Para poder ver esto, considerense todos los vértices coloreados con 1, y digamos, las clases correspondientes a dichos vértices. Como no hay dos vértices coloreados con 1 adyacentes, no hay dos clases correspondientes a dichos vértices contienen al mismo estudiante. Así, todas estas clases pueden ser programadas en el mismo horario. Esto es, todas las clases que corresponden a vértices del mismo color pueden programarse a la misma hora. Por lo tanto, todas las clases pueden ser programadas durante  $m$  periodos de una hora.

Ahora mostraremos que las clases no pueden ser programadas en menos de  $m$  horas. Probaremos esto por contradicción. Suponemos que podemos estructurar las clases en  $k$  periodos de una hora, donde  $k < m$ . Ahora podemos  $k$ -colorear la gráfica  $G_0$  coloreando con el mismo color todos los vértices que corresponden a las clases que son a la misma hora. Para probar que es una  $k$ -coloración permitida para  $G_0$ , considerense dos vértices adyacentes. Estos vértices corresponden a dos clases que contienen a uno o más estudiantes en común. Así, estas clases están en horarios distintos y por lo tanto los dos vértices están coloreados de forma distinta. De cualquier manera, una  $k$ -coloración de  $G_0$  produce una contradicción, dado que  $\chi(G_0) = m$ . •

El teorema anterior aparentemente soluciona nuestro problema excepto por un hecho desafortunado: regularmente, es extremadamente difícil determinar el número cromático de una gráfica. No existe alguna fórmula que determine el número cromático de una gráfica. De cualquier manera a continuación presentaremos algunos resultados relacionados con el número cromático. Denotaremos con  $\Delta(G)$  al grado máximo entre todos los vértices de una gráfica  $G$ .

**Teorema 7.8** *Para cualquier gráfica  $G$*   
 $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$ .

*dem.*

Probaremos este resultado por inducción sobre el orden  $p$  de la gráfica. Hay solo una gráfica con  $p = 1$ , llamada  $K_1$ . Ya que  $\chi(K_1) = 1$  y  $\Delta(G) = 0$ ,  $\chi(K_1) \leq 1 + \Delta(K_1) = 1 + 0$ , así el resultado se cumple para  $p = 1$ .

Supongamos que el resultado es verdadero para todas las gráficas con  $p = k - 1$  vértices, y sea  $G$  una gráfica con  $p = k$  vértices. Mostraremos ahora que existe una  $1 + \Delta(G)$ -coloración de  $G$ , lo cual implica que  $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$ . Sea  $v$  un vértice de  $G$  y consideremos la gráfica  $G - v$ . Dado que  $G - v$  tiene  $k - 1$  vértices, se sigue por la hipótesis de inducción que  $\chi(G - v) \leq 1 + \Delta(G - v)$ . Así existe una  $(1 + (\Delta(G - v)))$ -coloración de  $G - v$ . Daremos ahora dicha coloración de  $G - v$ . Hay a lo más  $\Delta(G)$  vértices adyacentes a  $v$  en  $G$ , así que no se necesitan más de  $\Delta(G)$  colores para iluminar estos vértices en  $G - v$ . Si  $\Delta(G - v) = \Delta(G)$ , entonces algún color usado para iluminar  $G - v$  está disponible para iluminar  $v$ , y tenemos entonces una  $(1 + \Delta(G))$ -coloración de  $G$ . Si  $\Delta(G - v) < \Delta(G)$ , entonces utilizamos un nuevo color para  $v$ , obteniendo una coloración de  $G$  que no requiere más de  $1 + \Delta(G)$  colores. En cualquier caso,  $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$ .•

## 7.4. El Problema de los Cuatro Colores

Para describir este problema, empezaremos con un mapa, dividido en países. Asignamos un color a cada país de tal manera que dos países adyacentes tengan asignados colores diferentes. ¿Cuál es el mínimo número de colores que se requieren para iluminar todos los países de un mapa?. Por supuesto la respuesta depende de los países y su relación geográfica. Muchos matemáticos piensan que ningún mapa, no importa que complicado sea requiere más de cuatro colores. Esto es llamado el problema de los cuatro colores.

Las personas que se dedican a hacer mapas usualmente colorean sus mapas de tal manera que los países (incluyendo al oceano como un "país") que comparten una frontera tienen colores diferentes. Dado que el costo de imprimir un mapa va de acuerdo al número de colores que se usan, naturalmente existe un interés en conocer cual es el mínimo número de colores que se necesitan para colorear cualquier mapa dado.

Este famoso problema se originó en 1852, y fue aparentemente resuelto en 1976 cuando Appel y Haken mostraron que era verdadero que todo mapa podía ser coloreado con cuatro o menos colores. Se pudiera pensar que esto

terminó con el interés sobre el problema de los cuatro colores; pero no fué el caso, dado la inusual naturaleza de la solución. Appel y Haken resolvieron el problema de los cuatro colores dividiendo el problema en aproximadamente dos mil casos, de acuerdo a los arreglos de los países en un mapa. Para determinar las posibles maneras de asignar los colores en los distintos arreglos, escribieron programas de cómputo para analizar las distintas coloraciones en cada arreglo. Después de 1200 horas de cálculos computacionales, declararon el problema resuelto.

Aún cuando la solución del problema de los cuatro colores puede ser considerada como un logro monumental, muchos matemáticos no estuvieron satisfechos con la prueba. Así, surgió un nuevo problema, ¿Existe una prueba matemática pura, sin ayuda de computadoras, que muestre que todo mapa puede ser coloreada con cuatro o menos colores?.

El problema de los cuatro colores está íntimamente relacionado con la Teoría de gráficas. A cada mapa podemos asociarle una gráfica  $G$  cuyos vértices corresponden a los países, y donde dos vértices son adyacentes si los correspondientes países son adyacentes. Necesariamente cada una de esas gráficas  $G$  es una gráfica plana. La siguiente figura muestra un mapa y su correspondiente gráfica plana. Dado que todo mapa puede ser coloreado con a lo más cuatro colores, tenemos el siguiente teorema.

El Teorema de los Cuatro colores.

**Teorema 7. 9** *Si  $G$  es una gráfica plana, entonces  $\chi(G) \leq 4$ .*

A pesar del hecho de que es extremadamente difícil demostrar el teorema de los cuatro colores, es sorprendentemente más fácil demostrar el teorema de los cinco colores. Para probar este teorema, demostraremos primero el siguiente resultado.

El Teorema de los cinco colores.

**Teorema 7. 10** *Si  $G$  es una gráfica plana, entonces  $\chi(G) \leq 5$ .*

*dem.*

La prueba es por inducción sobre el orden  $p$  de la gráfica. El resultado es obvio para  $p = 1$ .

Supongamos que todas las gráficas planas con  $p = k - 1$  tiene número cromático a lo más 5, y sea  $G$  una gráfica plana de orden  $k$ . Sabemos que  $G$  contiene un vértice  $v$  tal que  $\text{grad } v \leq 5$ . dibujamos  $G$  como una gráfica plana, y consideremos la gráfica plana  $G - v$ . Como  $G - v$  tiene orden  $k - 1$ ,

se sigue por la hipótesis de inducción que  $\chi(G - v) \leq 5$ . Esto significa que podemos dar una 5-coloración de  $G - v$ . Supongamos que damos una 5-coloración de  $G - v$ , denotada con los colores 1, 2, 3, 4 y 5. Si uno de estos colores no se usa en iluminar uno de los vértices adyacentes a  $v$ , entonces podemos asignar dicho color a  $v$ , produciendo una 5-coloración de  $G$ . Así, podemos suponer que  $\text{grad } v = 5$  y todos los cinco colores son usados para los vértices adyacentes a  $v$ .

Supongamos que  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$  son los cinco vértices adyacentes a  $v$ , arreglados ciclicamente alrededor de  $v$ , y supongamos que  $v_1$  es iluminado con el color 1,  $v_2$  con el color 2 y así sucesivamente. Ahora demostraremos que es posible recolorar ciertos vértices de  $G - v$ , incluyendo a algún vértice adyacente a  $v$ , quedando disponible un color para  $v$ . Consideremos los colores 1 y 3, y todos los vértices de  $G - v$  que han sido coloreados con 1 ó 3. Por supuesto,  $v_1$  está coloreado con 1 y  $v_3$  está coloreado con 3. En  $G - v$  puede haber o puede no haber una  $v_1 - v_3$  trayectoria cuyos vértices están coloreados con 1 ó 3. Primero consideraremos que no existe dicha trayectoria. Consideraremos todas las trayectorias que empiezan con  $v_1$  cuyos vértices estén todos coloreados con 1 ó 3. Estas trayectorias producen una subgráfica de  $G - v$ , que denotaremos por  $H$ . Necesariamente  $v_3$  no está en  $H$ ; de hecho ningún vértice adyacente a  $v_3$  está en  $H$ . Ahora intercambiaremos los colores de los vértices de  $H$ , produciendo otra 5-coloración de  $G - v$ . De cualquier manera esta 5-coloración de  $G - v$  asigna el color 3 a  $v_1$  y a  $v_3$ . Así, podemos asignar el color 1 al vértice  $v$ , produciendo una 5-coloración de  $G$ . Por lo tanto  $\chi(G) \leq 5$ .

Supongamos ahora que, existe una  $v_1 - v_3$  trayectoria  $T$  en  $G - v$ , cuyos vértices están todos coloreados con 1 ó 3. (Si intercambiamos los colores 1 y 3 de los vértices de  $H$  en este caso,  $v_1$  estaría coloreado con 3 y  $v_3$  estaría coloreado con 1, y no habría color disponible para  $v$ . Así que procederemos de distinta manera.) La trayectoria  $T$  junto con la trayectoria  $v_3, v, v_1$  produce un ciclo en  $G$  que encierra ya sea a  $v_2$  o encierra a  $v_4$  y  $v_5$ . Por lo tanto no existe una  $v_2 - v_4$  trayectoria en  $G_v$  cuyos vértices están todos coloreados con 2 o con 4. Esta trayectoria produce una subgráfica de  $G - v$  que denotaremos por  $F$ . Intercambiamos los colores de los vértices de  $F$ , produciendo una 5-coloración de  $G - v$  en el cual  $v_2$  y  $v_4$  están coloreados con 4. Así, podemos asignar el color 2 a  $v$ , dándonos una 5-coloración de  $G$ . Por lo tanto,  $\chi(G) \leq 5$ . •

## 7.5. Ejercicios

1. Dibuje las gráficas  $K(2, 3)$ ,  $K(2, 4)$ ,  $K(2, 5)$  y  $K(4, 4)$ .
2. Muestre que las siguientes gráficas son aplanables.

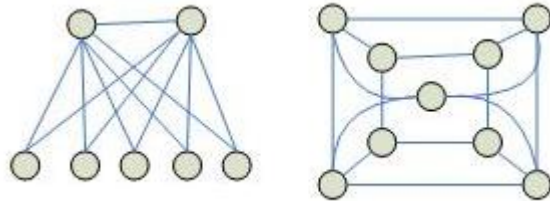


Figura 7-10

3. Para la gráfica plana de siguiente figura, determine los vértices y las aristas de la frontera de la región  $R$  y la frontera de la región exterior.

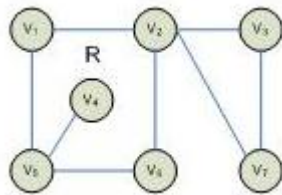


Figura 7-11

4. Sea  $G$  una gráfica aplanable conexa. Muestre que no importa como esté dibujada  $G$  como gráfica plana, siempre tendrá el mismo número de regiones.
5. La siguiente figura muestra un tetraedro y un cubo. Estos son algunos ejemplos de sólidos platónicos, que son sólidos geométricos cuyas caras son todas idénticas. Sea  $V$  el número de vértices del sólido, y sean  $A$  y  $C$  el número de aristas y el número de caras, respectivamente. Determine

Figura 7-12

$V - A + C$  para el tetraedro y el cubo. Compare esto con la fórmula de Euler.

6. De un ejemplo de una gráfica conexa aplanable para la cual se cumpla que  $q = 3p - 6$

7. De un ejemplo de una gráfica conexa aplanable para la cual se cumpla que  $q < 3p - 6$
8. Muestre que se cumple que  $q \leq 3p - 6$  aún si la gráfica es desconexa.
9. ¿Verdadero o falso?. Si  $G$  es una gráfica conexa y  $q = 3p - 6$ , entonces  $G$  es aplanable.
10. Suponga que el problema de las tres casas y los tres servicios fuera el problema de las cinco casas y los dos servicios. ¿Cuál sería la solución?. ¿Qué pasaría si fueran  $n$  casas y dos servicios?. ¿Y si fueran  $n$  casas y tres servicios?.
11. ¿Qué gráficas completas son aplanables?
12. Muestre que  $K(2, 2)$  es una subdivisión de  $K_3$ .
13. La siguiente figura muestra una gráfica famosa llamada la gráfica de Petersen. ¿Es la gráfica de Petersen aplanable?.

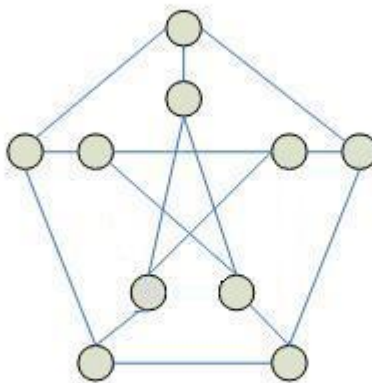


Figura 7-13

14. ¿Cuál es el número cromático de  $K_p$ ?

15. ¿Cuál es el número cromático de un ciclo?
16. ¿Cuál es el número cromático de un árbol?
17. ¿Cuál es el número cromático de  $K(3, 3)$ ,  $K(4, 4)$ ,  $K(n, n)$ ?
18. ¿Qué se puede decir acerca del número cromático de una gráfica bipartita?, ¿Cuál sería una definición natural de una gráfica bipartita?, ¿Qué se puede decir acerca del número cromático de una gráfica tripartita?, ¿Cuál es el número cromático de una gráfica  $n$  - *partita* ?
19. ¿Cuál es el número cromático de una gráfica cúbica?
20. ¿Cuál es el orden mínimo de una gráfica aplanable  $G$  para el cual  $\chi(G) = 4$ ?
21. Muestre que toda gráfica aplanable con orden al menos dos contiene al menos dos vértices cuyo grado es cinco o menos.
22. Muestre que existe una gráfica aplanable donde todos los vértices son de grado al menos cinco.
23. Muestre que  $\chi(K_5) = 5$ . ¿Contradice esto el teorema de los cuatro colores?
24. ¿Existe una gráfica no aplanable con número cromático uno?
25. ¿Existe una gráfica no aplanable con número cromático dos?
26. ¿Existe una gráfica no aplanable con número cromático tres?



# Capítulo 8

## Gráficas Platónicas y Género

### 8.1. Gráficas Platónicas

Las gráficas platónicas son interesantes de mencionar por tres razones. La primera es histórica: las cinco gráficas platónicas más interesantes se identifican con los llamados "sólidos platónicos" de las matemáticas antiguas y místicas. La segunda es heurística: la teoría de las gráficas platónicas es una espectacular advertencia a los matemáticos de qué puede suceder si sobreestimamos la tendencia de otorgar condiciones a los objetos que se estudian. Y la tercera es pedagógica: el teorema que se demuestra en este capítulo es una demostración concluyente del poder de la fórmula de Euler.

Ya hemos definido el concepto de gráfica regular, ahora definiremos el concepto de gráfica poligonal.

**Definición 8.1** *Una gráfica es poligonal si es plana, conexa, y tiene la propiedad de que cada arista es frontera de dos regiones distintas.*

**Definición 8.2** *Una gráfica es platónica si es poligonal, regular y tiene la propiedad de que todas las regiones tienen como frontera el mismo número de aristas.*

A continuación daremos algunos ejemplos de gráficas platónicas.

- Todos los ciclos  $C_n$  son platónicos. Es poligonal y regular, y cada una de sus dos regiones tiene como frontera a  $n$  aristas.

- De las gráficas completas, sólo  $K_1$ ,  $K_3$  y  $K_4$  son poligonales. Las tres son regulares.  $K_1$  tiene sólo una región, con una frontera de 0 aristas, así  $K_1$  es platónica.  $K_3$  es la misma que  $C_3$  y es platónica. Cada una de las cuatro regiones de  $K_4$  tiene como frontera a 3 aristas, así  $K_4$  es también platónica.

**Teorema 8. 1** *Si  $G$  es una gráfica platónica,  $d$  es el grado de cada vértice y  $n$  es el número de aristas en la frontera de cada región, entonces  $r = dv/n$  (donde  $v$  es el número de vértices).*

La demostración se deja al lector.

**Teorema 8. 2** *Además de  $K_1$  y las gráficas cíclicas sólo hay cinco gráficas platónicas.*

*dem.*

Sea  $G$  una gráfica platónica que no es  $K_1$  o una gráfica cíclica. Sea  $d$  el grado de cada vértice de  $G$  y sea  $n$  el número de aristas en la frontera de cada región.

Si  $d = 0$ ,  $G$  sería una gráfica platónica sin aristas, es decir  $K_1$ . Pero  $G$  no es  $K_1$ , así que  $d \neq 0$ .

Si  $d = 1$  entonces  $G$  no sería poligonal, así  $d \neq 1$ .

Si  $d = 2$  entonces  $G$  sería una gráfica cíclica, pero  $G$  no es cíclica, así  $d \neq 2$ .

Por lo tanto concluimos que  $d \geq 3$ . Nótese que  $n$ , que es el número de aristas de una región de una gráfica poligonal, es también al menos 3. Recordemos que el tamaño  $e$  de una gráfica regular es igual al número de vértices por el grado de cada vértice entre 2, es decir  $e = dv/2$ .

El resto de la prueba consiste en sustituir este resultado y el teorema anterior en la fórmula de Euler, hacer algunas manipulaciones algebraicas, e interpretar los resultados.

$G$  es plana y conexa, por lo tanto  $v + f - e = 2$ . Sabemos que  $e = dv/2$  y  $r = dv/n$ , así  $v + dv/n - dv/2 = 2$ , multiplicando ambos lados por  $2n$ , obtenemos  $2nv + 2dv - ndv = 4n$ , despejando  $v$  obtenemos  $v(2n + 2d - nd) = 4n$ ,  $v$  y  $4n$  son ambos números positivos, por lo tanto  $2n + 2d - nd$  también debe ser positivo, esto es,

$$\begin{aligned} 2n + 2d - nd &> 0 \\ -(2n + 2d - nd) &< 0 \\ nd - 2n - 2d &< 0 \end{aligned}$$

$$nd - 2n - 2d + 4 < 4$$

$$(n - 2)(d - 2) < 4$$

La última desigualdad es la más importante. Se deduce de la premisa de que estamos trabajando con gráficas platónicas distintas de  $K_1$  o de un ciclo, así la  $d$  y la  $n$  de toda gráfica platónica distinta de  $K_1$  o de un ciclo, debe satisfacer que  $(n - 2)(d - 2) < 4$ , pero esta desigualdad tiene solo cinco soluciones para  $d \geq 3$  y  $n \geq 3$ , y para cada una de estas soluciones corresponde una gráfica platónica. •

A continuación daremos la siguiente tabla.

d	n	v	e	f	nombre
3	3	4	6	4	tetraedro o $K_4$
3	4	8	12	6	hexaedro o cubo
3	5	20	30	12	dodecaedro
4	3	6	12	8	octaedro
5	3	12	30	20	icosaedro

Tabla 8

La tabla anterior se consruye de la siguiente manera. Las dos primeras columnas contienen todas las posibles combinaciones de  $d$  y  $n$  que satisfacen  $(n - 2)(d - 2) < 4$  junto con  $d \geq 3$  y  $n \geq 3$ . Una ligera reflexión mostrará que no hay más posibilidades.

Podemos obtener los valores de  $v$ , a partir de la ecuación  $v = 4n/2n + 2d - nd$  que definimos anteriormente.

Utilizando también que  $e = dv/2$  y que  $r = dv/n$  obtenemos la cuarta y la quinta columna. Para cada renglón de la tabla corresponde una y solo una de las gráficas platónicas, cuyo nombre tradicional se da en la última columna. Estas gráficas se muestran a continuación (Figura 8-1).

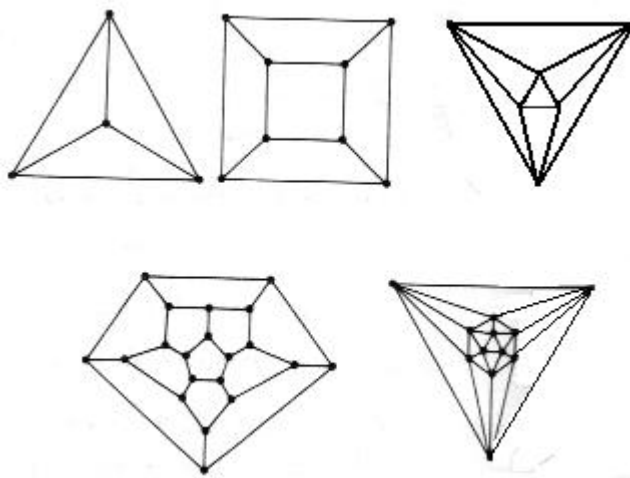


Figura 8-1

## 8.2. Género de una Gráfica

El adjetivo “plano” comprende dos condiciones. Una gráfica es plana si 1) puede ser dibujada sin cruces de aristas y 2) si puede ser dibujada en un plano. El concepto de “género” incluye la primer condición pero generaliza la segunda al considerar gráficas en otras superficies.

La siguiente figura (Figura 8-2) muestra a los primeros cuatro miembros de una familia infinita de superficies. Supondremos que dichas superficies son huecas y que no tienen grosor. Esto es, debemos pensar a  $S_0$  como una pelota de playa en lugar de una pelota de beisbol, a  $S_1$  como un tubo vacío en lugar de una dona, etc.  $S_0$  es llamado una esfera,  $S_1$  es llamado un toro de on hoyo,  $S_2$  es llamado un toro de dos hoyos,  $S_3$  es un toro de tres hoyos, etc. Los nombres de las superficies son fáciles de recordar si nos fijamos en el número de hoyos que tiene. Así  $S_{68}$  puede ser un toro con sesenta y ocho hoyos y  $S_0$  puede ser considerado un toro sin hoyos.

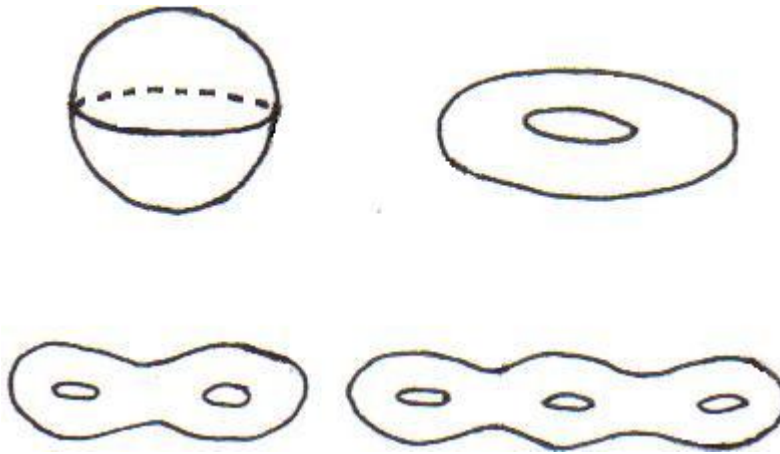


Figura 8-2

**Definición 8. 3** *El género de una gráfica que denotaremos por  $g$  es la primera superficie de la familia  $S_0, S_1, S_2, \dots$ , en la cual la gráfica puede ser dibujada sin cruces de aristas.*

Es claro que entonces todas las gráficas tienen género, es decir dada una gráfica no plana inmensamente complicada, una búsqueda sistemática de la secuencia  $S_0, S_1, S_2, \dots$  eventualmente revelará algunas superficies en las cuales puede ser dibujada  $G$  sin cruces de aristas (entonces  $g$  es la primera de dichas superficies). Más adelante probaremos que en efecto todas las gráficas tienen género, pero primero daremos un teorema y algunos conceptos.

**Teorema 8. 3** *El conjunto de todas las gráficas planas es igual al conjunto de todas las gráficas con  $g = 0$ .*

*dem.*

Para probar que dos conjuntos son iguales hay que demostrar que cada uno de ellos es subconjunto del otro. De tal manera hay dos proposiciones que establecer. “Toda gráfica plana tiene  $g = 0$ ” y “Toda gráfica con  $g = 0$  es plana”. Empezaremos probando la segunda proposición.

”Toda gráfica con  $g = 0$  es plana”. Esto es, si una gráfica puede ser dibujada en  $S_0$  sin cruces de aristas, debemos mostrar que también puede ser dibujada en un plano sin cruces de aristas. Haremos esto de la siguiente manera.

Sea  $G$  una gráfica dibujada en una esfera sin cruces de aristas. Seleccionemos a un punto de la esfera que no sea un vértice y por el cual no pasen aristas, y hacemos una punción en dicho punto. Agrandamos el agujero y aplanamos gradualmente la esfera de tal manera que la coloquemos en un plano. El resultado es la gráfica  $G$  en un plano, aún sin cruces de aristas, y rodeada por un círculo (la frontera del hoyo). Borramos el círculo y tenemos  $G$  dibujada en un plano sin cruces de aristas. El proceso se ilustra en la siguiente figura (Figura 8-3).•

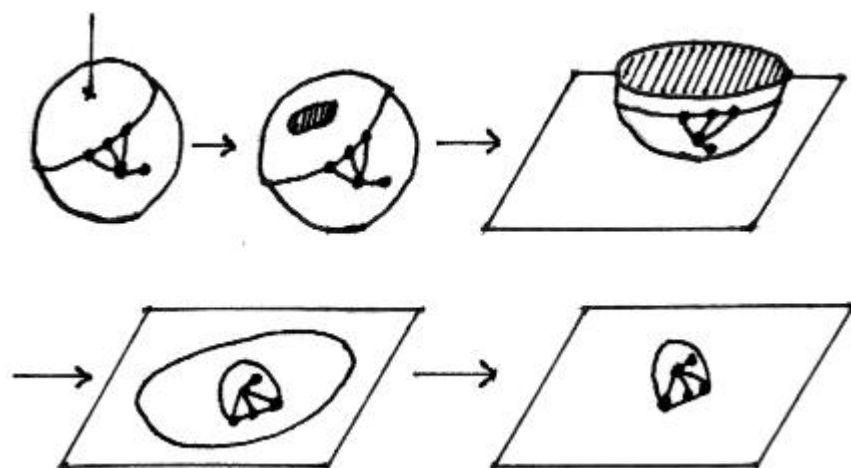


Figura 8-3

La otra mitad del teorema es "Toda gráfica plana tiene  $g = 0$ ". Esto es, si una gráfica puede ser dibujada en un plano sin cruces de aristas, debemos probar que también puede ser dibujada en  $S_0$  sin cruces de aristas. Hacemos esto con el procedimiento inverso del resultado anterior.

Sea  $G$  una gráfica dibujada en el plano sin cruces de aristas. Cortamos alrededor de la gráfica una región circular que contenga a  $G$  y doblamos dicha región de tal manera que quede un hemisferio de una esfera y finalmente en una esfera sin un punto. Llenamos dicho punto y obtenemos el dibujo de  $G$  en  $S_0$  sin cruces de aristas. Para visualizar esto se debe observar el dibujo anterior en orden inverso.

Este teorema muestra que el concepto de "planaridad" es meramente un caso especial de un concepto más general que es el "género". Las gráficas planas son aquellas gráficas con género 0.

El hecho de que las aristas puedan ir por "atrás" de la esfera puede sugerir que los cruces de aristas pueden ser evitados en una esfera cuando no pueden

ser evitados en el plano, pero el teorema demuestra que esta suposición es falsa. Sin embargo hay una diferencia entre dibujos libres de cruces de una gráfica plana en  $S_0$  y un dibujo libre de cruces de la misma gráfica en un plano, esto es, la región (o cara) infinita del dibujo en un plano pierde su individualidad en un dibujo en  $S_0$ . Dicha región se vuelve finita en extensión como el resto de las caras. Inversamente, cualquier región de la gráfica en  $S_0$  que sea puncionada para producir un dibujo plano se vuelve la región infinita del dibujo plano. Por supuesto dicha alteración no afecta los cruces de las aristas, y permanece verdadero el hecho de que las gráficas planas y las gráficas de género 0 son precisamente lo mismo.

Ejemplos:

- $K_4$  tiene  $g = 0$  ya que es plana.
- Todo  $C_n$  tiene  $g = 0$  ya que es plana.
- $K_{3,3}$  tiene  $g = 1$  ya que no es plana y por el teorema anterior no puede ser dibujada en  $S_0$  sin cruces de aristas, pero sí puede ser dibujado en  $S_1$  sin cruces de aristas. Entonces 1 es el subíndice de la primera superficie en la familia  $S_0, S_1, S_2, \dots$  en la cual puede ser dibujada  $K_{3,3}$  sin cruces de aristas.



Figura 8-4

- $K_5$  tiene  $g = 1$  por la misma razón que  $K_{3,3}$ .



Figura 8-5

**Teorema 8. 4** *Toda gráfica tiene género.*

*dem.*

Sea  $G$  cualquier gráfica. Si  $G$  es plana entonces tiene  $g = 0$ . Supongamos que  $G$  no es plana. Tomemos un dibujo de  $G$  en un plano y transfiramos el dibujo a  $S_0$ . Añadimos a  $S_0$  suficientes “asas” que servirán como puentes, y de tal manera se eliminan los cruces de aristas. (Esto se ha hecho en la figura 8-6 para cuando  $G$  es  $K_6$ ). Sea  $n$  el número de asas. El número  $n$  puede ser muy grande pero es finito, ya que una gráfica solo puede tener un número finito de aristas y por lo tanto un número finito de cruces de aristas.

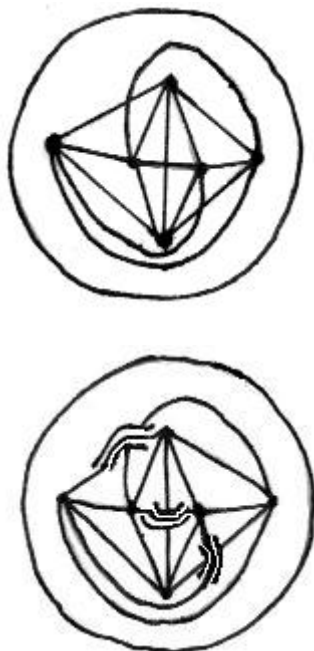


Figura 8-6

Pensemos en la superficie que consiste de  $S_0$  con  $n$  asas hechas de un material muy manejable y flexible, el cual sea libre de encoger, alargar o distorsionar pero que no podamos romper o unir consigo misma. Dicha superficie puede ser convertida en  $S_n$  y las aristas y vértices de  $G$  pueden ser arrastrados junto con una deformación continua. (La figura 8-7 muestra a  $S_0$  con tres asas).



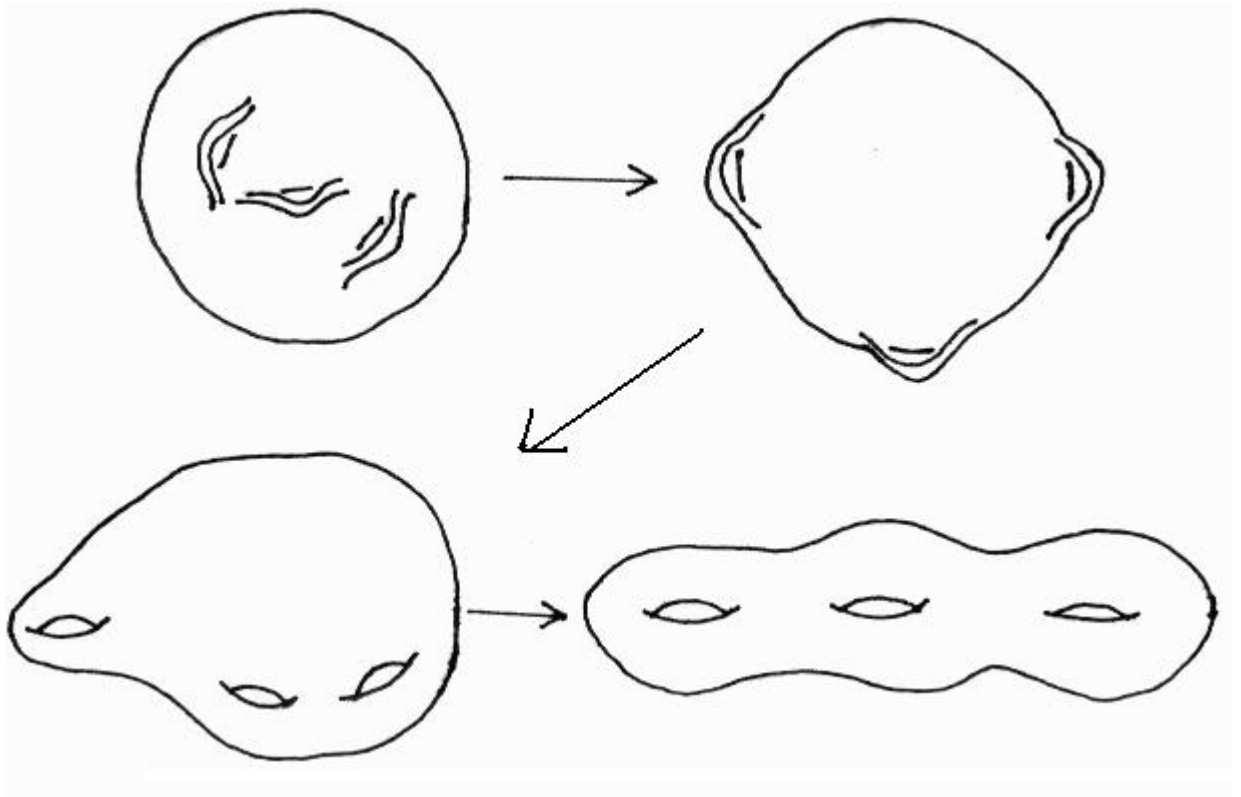


Figura 8-7

Así  $G$  puede ser dibujada en  $S_n$  sin cruces de aristas. Ya que hay al menos un miembro  $S_n$  de la secuencia de superficies  $S_0, S_1, S_2, \dots$  en la cual  $G$  puede ser dibujada sin cruces de aristas, por lo tanto debe haber un primer miembro  $S_g$ . Entonces por definición  $g$  es el género de  $G$ . •

Para poder dibujar a  $K_6$  agregando tres asas y consecuentemente el género de  $K_6$  es 1, 2 o 3 (no puede ser 0 ya que  $K_6$  no es plana). De hecho  $K_6$  tiene  $g = 1$ .

Es claro que si una gráfica específica  $G$  tiene género  $g$  divide la secuencia  $S_0, S_1, S_2, \dots$  en dos partes. La primera parte  $S_0, S_1, \dots, S_{g-1}$  que es finita y que consiste de todas las superficies de la familia en la cual no puede ser dibujada  $G$  sin cruces de aristas. La segunda parte  $S_g, S_{g+1}, \dots$  es infinita y consiste de todas las superficies en las cuales  $G$  puede ser dibujada sin cruces de aristas.

**Definición 8.4** Si una gráfica  $G$  tiene género  $g$  y ha sido dibujada en la

superficie de  $S_g$  sin cruces de aristas, entonces los vértices y las aristas de  $G$  dividen la superficie de  $S_g$  en regiones llamadas caras de  $G$ . El número de caras de una gráfica se denota por  $f$ .

Ejemplos:

- $K_{3,3}$  tiene  $f = 3$ . Las caras se enumeran en la siguiente figura.

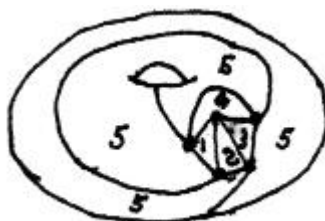


Figura 8-8

- $K_5$  tiene  $f = 5$ . Las caras se enumeran en la siguiente figura.

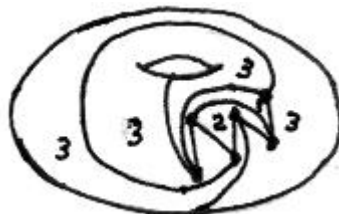


Figura 8-9

Se debe tener cuidado al contar las regiones de una gráfica no plana ya que a simple vista pudiera parecer que el número de regiones es mayor. Por ejemplo pareciera que en  $K_{3,3}$  hay más de tres regiones, la confusión puede provenir del hecho de que es un dibujo bidimensional de un objeto tridimensional. Tenemos que visualizar la parte oculta del toro lo cual puede ser difícil. Una buena regla es: si puedes ir de un lugar a otro sin dejar la superficie, cruzar una arista o pasar a través de un vértice, los dos lugares están en la misma cara.

La segunda fórmula de Euler dice que para toda gráfica conexa con género  $g$ ,  $v + f - e = 2 - 2g$ . Para gráficas planas esto se reduce a  $v + f - e = 2$ ,

que conocemos como la primera fórmula de Euler. La prueba que daremos de la segunda fórmula de Euler no estará completa, ya que estará basada en una suposición que no probaremos. A continuación daremos algunos ejemplos para hacer ver que la suposición es al menos razonable. En la siguiente figura tenemos un dibujo de  $K_5$  en  $S_1$ .

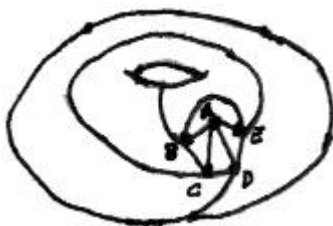


Figura 8-10

Notese que el camino  $BCDB$  va por detrás del hoyo y de regreso. En la siguiente figura los vértices y las aristas han sido reacomodados para formar un anillo perfecto del camino  $BCDB$ .

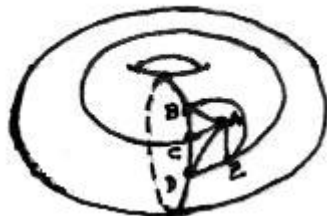
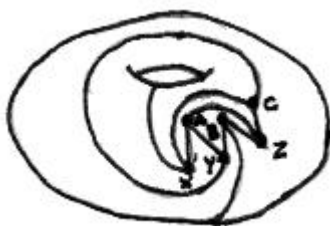


Figura 8-11

La siguiente figura es un dibujo de  $K_{3,3}$  en  $S_1$ . De nuevo hay un camino  $XAYBX$  que va por detrás del hoyo y puede ser deformado en un anillo perfecto.



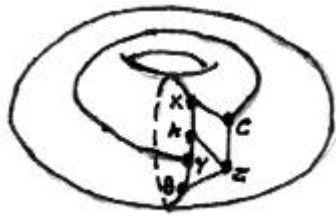


Figura 8-12

La gráfica de la siguiente figura es un ejemplo menos trivial, que tiene género 2.

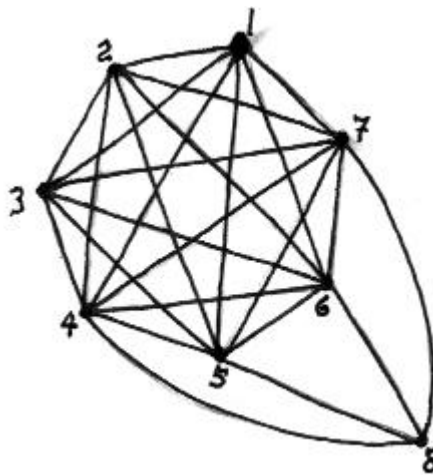


Figura 8-13

En la siguiente figura la gráfica ha sido dibujada sin cruces de aristas en  $S_2$ . Notese que hay un 2372 camino que va por detrás del primer hoyo y otro 4584 camino que va por detrás del segundo hoyo.

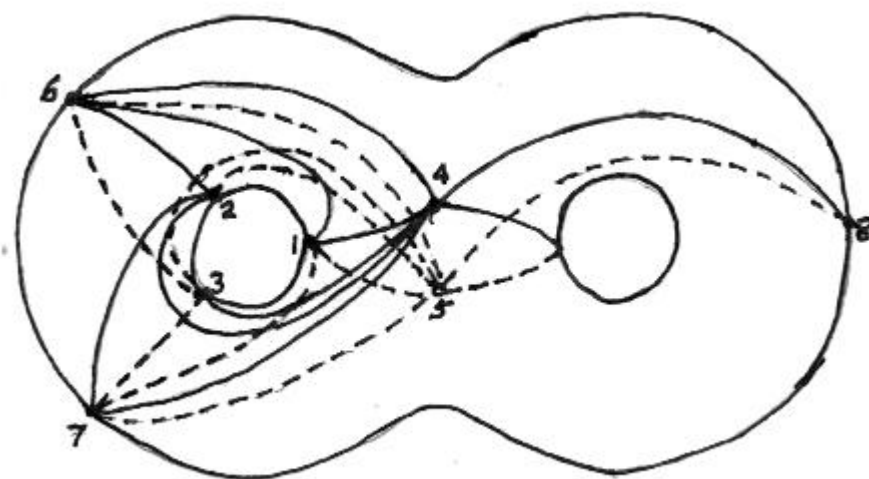


Figura 8-14

En la siguiente figura se han reacomodado los vértices y las aristas para formar anillos perfectos a partir de los caminos anteriores. Nuestra hipótesis es que un fenómeno similar ocurre para cualquier gráfica conexa.

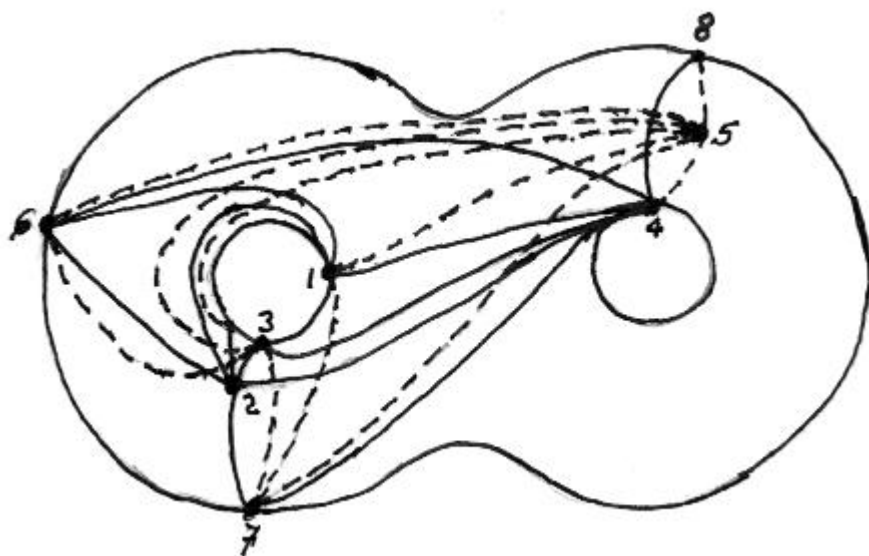


Figura 8-15

Hipótesis. Si  $G$  es una gráfica conexa con género  $g$ , entonces existe un acomodo libre de cruces de aristas de la gráfica  $G$  en  $S_g$  tal que a través de cada uno de estos  $g$  hoyos de  $S_g$  hay un anillo compuesto de vértices y aristas de  $G$ . Esta suposición es razonable. Si  $G$  tiene género  $g$  entonces no puede ser dibujada sin cruces de aristas en cualquiera de las superficies  $S_0, S_1, \dots, S_{g-1}$  que tienen menos de  $g$  hoyos, así que cada uno de los hoyos es crucial para dibujar a  $G$  sin cruces de aristas. Así, por lo menos una arista de  $G$  debe pasar a través de cada hoyo, dicha arista puede ser unida con las otras para formar un anillo a través del hoyo.

A continuación damos un ejemplo para una gráfica con género 4. Por simplicidad se han dibujado solo los anillos, se debe imaginar a los anillos como una porción de una gráfica más compleja en la superficie de  $S_4$ .



Figura 8-16

**Teorema 8. 5** *Segunda Fórmula de Euler.* Si  $G$  es conexa entonces  $v + e - f = 2 - 2g$ .

*dem.*

Sea  $G$  una gráfica conexa con género  $g$ . Entonces por nuestra hipótesis existe un dibujo sin cruces de aristas de  $G$  en  $S_g$  tal que a través de cada hoyo existe un anillo compuesto de vértices y aristas de  $G$ . Tomemos unas tijeras imaginarias y cortamos cuidadosamente cada uno de los anillos, dividiendo cada uno de los vértices y aristas del anillo en dos vértices y dos aristas. El resultado es que cada uno de los anillos originales ha sido reemplazado por dos nuevos aros, cada uno de los cuales forma la orilla de un tubo abierto.



Figura 8-17

Nótese que originalmente había  $g$  anillos y ahora hay  $2g$  aros. Cubrimos dichos aros con superficies en forma de disco. La superficie resultante, junto con el resto de vértices y aristas puede ser deformada de tal manera que nos quede  $S_0$ .

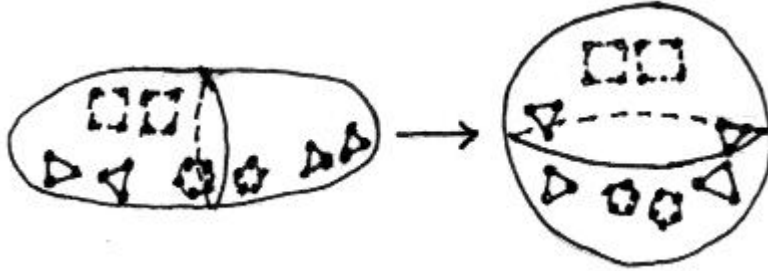


Figura 8-18

El resultado final es una nueva gráfica  $H$  dibujada en  $S_0$ . Debido al procedimiento es claro que el dibujo de  $H$  en  $S_0$  está libre de cruces, es también verdadero que  $H$  es conexa. Ya que  $H$  también es plana aplicamos la primera fórmula de Euler, y tenemos entonces que  $v_H + f_H - e_H = 2$ . Lo único que queda es relacionar el número de vértices, regiones y aristas de  $H$  en  $S_0$  a aquellas de  $G$  en  $S_g$ .

Sea  $x = v_H - v_G$ . Todos los nuevos vértices fueron creados cuando cortamos los anillos en dos aros. Dado que los anillos son gráficas cíclicas y tiene el mismo número de vértices que de aristas. De esto se sigue que  $x = e_H - e_G$ . Finalmente, ya que sólo creamos las nuevas superficies cuando cubrimos los  $2g$  aros, tenemos que  $f_H = f_G + 2g$ . Entonces

$$\begin{aligned} v_G + f_G - e_G &= (v_H - x) + (f_H - 2g) - (e_H - x) \\ &= v_H - x + f_H - 2g - e_H + x \\ &= v_H + f_H - e_H - 2g \\ &= 2 - 2g \end{aligned}$$

**Lema 1** Si una gráfica conexa  $G$  tiene  $v \geq 3$  y tiene género  $g$  entonces  $3f \leq 2e$ .

La demostración se deja al lector.

**Teorema 8. 6** Si  $G$  es una gráfica conexa con  $v \geq 3$  y género  $g$  entonces  $g \geq (1/6)e - (1/2)(v - 2)$ .

*dem.*

Por el lema sabemos que  $3f \leq 2e$ . Ya que  $G$  es conexa, se aplica la segunda fórmula de Euler y tenemos que  $v + f - e = 2 - 2g$ . Esto puede ser reescrito como  $f = -v + e + 2 - 2g$ , que al multiplicarlo por 3 nos queda  $3f = -3v + 3e + 6 - 6g$ . Combinando esto con la desigualdad anterior tenemos que  $-3v + 3e + 6 - 6g \leq 2e$ , que puede ser reescrito como  $-6g \leq -e + 3v - 6$  y al multiplicar por  $-1/6$  nos da el teorema. •

Usando este teorema podemos encontrar una cota inferior para el género de una gráfica conexa, aún si solo conocemos el número de vértices y el número de aristas.

*Ejemplo:* Sea  $G$  una gráfica conexa con 52 vértices y 201 aristas. Entonces tenemos que  $g \geq (1/6)201 - (1/2)50 = 33,5 - 25 = 8,5$ . Pero  $g$  es un entero así que podemos concluir que  $g$  es al menos 9.

**Lema 2** *Si una gráfica  $H$  con género  $g_H$  puede ser dibujada en  $S_n$  sin cruces de aristas, entonces  $g_H \leq n$ .*

**Lema 3** *Si  $H$  es una supergráfica de  $G$ , entonces  $g_H \geq g_G$ .*

**Teorema 8.7**  *$K_v$  (con  $v \geq 3$ ) tiene género  $g = (v - 3)(v - 4)/12$ .*

La idea es mostrar que  $g \geq \{(v - 3)(v - 4)\}$  y que  $g \leq \{(v - 3)(v - 4)\}$ . La primera desigualdad es sencilla de demostrar, por el contrario la segunda desigualdad es bastante difícil de probar y por cierto no fue completada hasta 1968, y ha sido estudio de varios matemáticos. Ahora probaremos la primera desigualdad.

$$\begin{aligned} g &\geq (1/6)e - (1/2)(v - 2) \\ &= (1/6)(1/2)v(v - 1) - (1/2)(v - 2) \\ &= (1/12)v(v - 1) - (6/12)(v - 2) \\ &= \{v(v - 1) - 6(v - 2)\}/12 \\ &= \{v^2 - v - 6v + 12\}/12 \\ &= \{v^2 - 7v + 12\}/12 \\ &= \{(v - 3)(v - 4)\}/12. \end{aligned}$$

•

**Corolario 5** *Si  $G$  tiene  $v \geq 3$  y género  $g$  entonces  $g \leq (v - 3)(v - 4)/12$ .*



Combinando los resultados anteriores obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 6** *Si  $G$  es conexa con  $v \geq 3$  y género  $g$  entonces  $\{(1/6)e - (1/2)(v - 2)\} \leq g \leq \{(v - 3)(v - 4)/12\}$*

Este resultado nos ayuda a estimar el género de una gráfica.

### 8.3. Ejercicios

1. Dibuje todas las gráficas conexas regulares de grado 1.
2. Muestre que una gráfica conexa de regular de grado 2 es un ciclo. Muestre con un ejemplo que si eliminamos la palabra conexa el resultado es falso.
3. Muestre que no existe una gráfica regular de orden 6 y tamaño 10.
4. Muestre que si una gráfica tiene orden impar y es regular de grado  $r$ , entonces  $r$  debe ser par.
5. Encuentre una gráfica distinta del cubo que tenga orden 8 y sea regular de grado 3.
6. Dibuje todas las gráficas regulares con seis o menos vértices (son 20 en total).
7. Haga un dibujo de  $K_6$  en  $S_1$  y cuente sus caras. Use la segunda fórmula de Euler para comprobar.
8. Haga un dibujo de  $K_7$  en  $S_1$  y cuente sus caras. Use la segunda fórmula de Euler para comprobar.
9. Haga un dibujo de  $K_8$  en  $S_2$ .

# Bibliografía

- CHARTRAND, Gary. *Introductory Graph Theory*. Nueva York: Dover Publications, Inc, 1977.
- ORE, Oystein. *Graphs and their uses*. Washington: The Mathematical Association of America, 1990.
- BERGE, Claude. *The Theory of Graphs*. London: Methuen & Co Ltd, 1962.
- HARTSFIELD, Nora. RINGEL, Gerhard. *Pearls in Graph Theory*. Nueva York: Dover Publications, Inc, 1990.
- TRUDEAU, Richard J. *Introduction to Graph Theory*. Nueva York: Dover Publications, Inc, 1993.
- ALDOUS, Joan M. WILSON, Robin J. *Graphs and Applications*. Gran Bretaña: Springer, 2000.
- BALAKRISHNAN, V.K. *Graph Theory*. Maine: McGraw Hill, 1997.
- BONDY, J. A., MURTY, U. S. R. *Graph Theory with Applications*. U.S.A.: The Macmillian Press Ltd., 1976.
- CURCÓ COBOS, María del Carmen. *Una Introduccion a la teoria de graficas: notas de clase*. México: 1989. Tesis Licenciatura (Matemático) Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ciencias.