UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Solución radial positiva para el problema de onda estacionaria

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

ARTURO CABALLERO ALTAMIRANO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. NILS-HEYE ACKERMANN

2009

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

   Caballero

   Altamirano

   Arturo

   55 38 11 82

   Universidad Nacional Autónoma de México

   Facultad de Ciencias

   Matemáticas

   300198810

2. Datos del tutor

   Dr.

   Nils-Heye

   Ackermann.

3. Datos del sinodal 1

   Dra.

   Mónica Alicia

   Clapp

   Jiménez-Labora.

4. Datos del sinodal 2

   Dr.

   Rafael René

   Del Río

   Castillo.

Hoja de datos del jurado

5. Datos del sinodal 3

   Dr.

   Sergio

   Hérnandez

   Linares.

6. Datos del sinodal 4

   Dr.

   Gustavo

   Izquierdo

   Buenrostro.

7. Datos del trabajo escrito

   Solución radial positiva para el problema de onda estacionaria

   45 p

   2009

Agradecimientos

A Nils Ackermann por su interminable paciencia, por sus explicaciones claras, por su amabilidad, por su gran calidez humana y por todas las oportunidades que me ha brindado para poder seguir adelante. Gracias Nils.

A mis padres, Alicia Altamirano y Honorato Caballero, por su comprensión, apoyo y cariño.

A mi abuelita por quererme tanto y a mis hermanos por compartir la vida conmigo.

A Pedro por su compañía, apoyo y confianza.

De la facultad a Ilan, Rafael y Marisol por todos los recuerdos que compartimos y la amistad que nos une.

A Irma Corral por darme aliento y valor.

A Carmen Arrillaga y Rafael del Río. A a mis grandes amigos: Saul, Elsa, Omar Salgado, José Luis (Batman) y Carolina.

Por último agradezco a la UNAM y a mi país por brindarme la satisfacción de terminar una carrera y de seguir adelante con mis estudios.

Mención

Como parte de mis sinodales de tesis me gustaría añadir a la Dra. Ángeles Sándoval y a la Dra. Magalí Folch, por el tiempo que le dedicaron a mi tesis así como la disposición que tuvieron por revisarla. Gracias.

Solución radial positiva para el problema de onda estacionaria

10 de marzo de 2009

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1 Problema

Consideraremos el siguiente problema

$$\left(\mathcal{P}\right) \qquad \begin{cases} -\triangle u + u &= |u|^{p-2}u, \\ \qquad\quad u &\in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

donde $N \geq 2$, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ si $N > 2$, $2^* = \infty$, si $N = 2$, y con $2 < p < 2^*$ y $H^1(\mathbb{R}^N)$ el espacio de Sobolev de las funciones u tales que tanto ellas como ∇u se encuentran en $L^2(\mathbb{R}^N)$. La norma en este espacio es

$$||u||_{H^1}^2 := \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dx.$$

El objetivo de la tesis es demostrar que este problema tiene una solución clásica, no trivial y positiva, donde las soluciones vienen dadas por los puntos críticos del funcional

$$\begin{aligned} J: \quad H^1(\mathbb{R}^N) &\to \mathbb{R} \\ J(u) &:= \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dx - \frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, dx, \end{aligned} \tag{1.1}$$

llamado el funcional de energía, el cual está bien definido debido al encaje de $H^1(\mathbb{R}^N)$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$.

1.2 Resultado principal

El resultado principal de esta tesis fue obtenido por Strauss en 1977, quien demuestra la existencia de una solución radialmente simétrica. El teorema se enuncia como sigue.

Teorema 1.1. *Existe una solución clásica, positiva y radialmente simétrica de* $\Big(\mathcal{P}\Big)$.

Para la demostración de este teorema se necesitará teoría de regularidad elíptica, para ver que la solución débil obtenida con el Teorema de Paso de Montaña es clásica, hecho que sólo se citará de [8].

La simetría en este tipo de problemas variacionales es relevante, ya que la inyección $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ no es compacta para $2 < p < 2^*$, pero si consideramos el grupo de transformaciones ortogonales, $O(N)$, encontramos que la inyección del espacio $H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N)$, de las funciones u en $H^1(\mathbb{R}^N)$ radialmente simétricas, en $L^p(\mathbb{R}^N)$ se torna compacta para $2 < p < 2^*$. Por lo cual nos apoyaremos en el *Principio de Críticalidad Simétrica*, demostrado por Palais en 1979.

Haremos uso de la variedad de Nehari para ver que la solución es de mínima energía y no cambia de signo. Finalmente para ver la positividad nos apoyaremos en el Principio Fuerte del Máximo, el cual se puede ver en [6].

1.3 Antecedentes

Ecuaciones del tipo $(\mathcal{P})$ surgen naturalmente en varios contextos de la física, por ejemplo en óptica no lineal o, en la aproximación clásica en mecánica estadística. Las soluciones de $(\mathcal{P})$ corresponden a soluciones de estado estacionario (ondas solitarias) en ecuaciones no lineales del tipo Klein-Gordon

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \triangle\varphi + \Big(a(x) + w^2\Big)\varphi - |\varphi|^{p-2}\varphi = 0, \tag{1.2}$$

y del tipo Schrödinger

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \triangle\varphi + \Big(a(x) + w\Big)\varphi - |\varphi|^{p-2}\varphi = 0,$$

donde $\varphi \equiv \varphi(t,x)$ es una función compleja definida en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$. Por ejemplo si en (1.2) buscamos soluciones de la forma onda estacionaria $\varphi = e^{iwt}u(x)$, con $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tenemos que

$$0 = (iw)^2 e^{iwt}u - e^{iwt}\triangle u + \left(a(x) + w^2\right)e^{iwt}u - |e^{iwt}u|^{p-2}e^{iwt}u,$$

que es equivalente a

$$0 = -\triangle u + a(x)u - |u|^{p-2}u.$$

Entonces obtenemos el problema modelo

$$-\triangle u + a(x)u = |u|^{p-2}u, \tag{1.3}$$

con $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 3$ y $p \in (2, 2^*)$. Ahora, si consideramos su funcional Lagrangiano asociado tenemos

$$J(u) := \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2 + a(x)u^2\right)dx - \frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u|^p\,dx,$$

que en analogía con problemas elípticos no lineales en dominios acotados es llamado (imprecisamente) la energía asociada con (1.3).

Nosotros únicamente nos enfocaremos al caso en el que $a \equiv 1$.

Capítulo 2

Preliminares

Primero daremos una serie de definiciones y demostraremos un par de resultados que necesitaremos más adelante, en los que se incluye la demostración de que el funcional de energía (1.1) se encuentra en $C^{1,1}(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$, espacio de las funciones continuas de $H^1(\mathbb{R}^N)$ en $\mathbb{R}$ que poseen primeras derivadas Lipschitz continuas localmente. Para finalizar este capítulo, después de dar la definición de solución débil y clásica, veremos que si tenemos una solución débil de $\left(\mathcal{P}\right)$ esta también es clásica.

Definición 2.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos los espacios

$$\begin{aligned} L^1_{loc}(\Omega) &:= \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \,|\, u \in L^1(K) \text{ para todo } K \subseteq \Omega \text{ compacto} \Big\} \\ C^n_c(\Omega) &:= \{ u \in C^n(\Omega) \,|\, u \,\text{tiene soporte compacto en } \Omega \}, \\ C^\infty_c(\Omega) &:= \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n_c(\Omega). \end{aligned}$$

Definición 2.2. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, y sea α un multiíndice. Entonces v es la α-ésima derivada parcial débil de u si

$$\int_\Omega u \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}\, dx \;=\; (-1)^{|\alpha|_1} \int_\Omega v\,\varphi\, dx \qquad\qquad \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega), \tag{2.1}$$

donde $|\alpha|_1 := \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k$.

Definición 2.3. Sea $p \in [1, N]$. Definimos el exponente de Sobolev por

$$p^* := \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p} & p \in [1, N) \\ \\ \infty & p = N, \end{cases}$$

y notemos que se cumplen

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \qquad y \qquad p^* > p.$$

Notación 2.4. Sea (X, d) un espacio métrico, $x \in X$, $r > 0$. Definimos

$$U_r(x) := U_r(x; X) := \{\, y \in X \mid d(x, y) < r\} \qquad \text{bola abierta,}$$

$$B_r(x) := B_r(x; X) := \{\, y \in X \mid d(x, y) \leq r\} \qquad \text{bola cerrada,}$$

$$S_r(x) := S_r(x; X) := \{\, y \in X \mid d(x, y) = r\} \qquad \text{esfera.}$$

Proposición 2.5. *Desigualdad de Interpolación.*

Sea $1 \leq p < q < r < \infty$, *tal que*

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$$

para λ *que satisface* $0 < \lambda < 1$. *Si* $u \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)$, *entonces* $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ *y*

$$||u||_{L^q} \leq ||u||_{L^p}^{\lambda} ||u||_{L^r}^{1-\lambda}.$$

Demostración. Sea λ tal que

$$\frac{\lambda q}{p} + \frac{(1-\lambda)q}{r} = 1,$$

por lo que obtenemos de la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\lambda q} |u|^{(1-\lambda)q} \, dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\lambda q \frac{p}{\lambda q}} \, dx \right)^{\frac{\lambda q}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{(1-\lambda)q \frac{r}{(1-\lambda)q}} \, dx \right)^{\frac{(1-\lambda)q}{r}} \\ &= ||u||_{L^p}^{\lambda q} \, ||u||_{L^r}^{(1-\lambda)q}. \end{aligned}$$

$\square$

Definición 2.6. Sea X un espacio normado. El espacio dual de X es el espacio de las funciones lineales continuas de X a $\mathbb{R}$, es decir

$$X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R}).$$

Además, para $L \in X'$ definimos la norma

$$||L||_{X'} := \sup \{ |Lx| : x \in X, \, ||x||_X \leq 1 \} ,$$

y como $\mathbb{R}$ es un espacio de Banach se puede ver que también lo es $(X', || \cdot ||_{X'})$.

Definición 2.7. El espacio de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$ se define como

$$H^1(\mathbb{R}^N) := \Big\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N) \Big\}$$

con el producto interno

$$(u,v)_{H^1} := \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(\nabla u \nabla v + uv \Big) \, dx$$

y la norma

$$||u||^2_{H^1} := \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla u|^2 + u^2 \Big) \, dx.$$

Este es un espacio de Hilbert.

Definición 2.8. Sea U es un subconjunto abierto de un espacio de Banach X. El funcional $J : U \to \mathbb{R}$ tiene derivada Gateaux $f \in X'$ en $u \in U$ si, para cada $h \in X$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \Big[J(u+th) - J(u) - \Big\langle f, th \Big\rangle \Big] = 0.$$

El funcional J tiene derivada Fréchet $f \in X'$ en u si

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{||h||} \Big[J(u+h) - J(u) - \Big\langle f, h \Big\rangle \Big] = 0.$$

La derivada Fréchet de J en u es denotada por $DJ(u)$. Si X es un espacio de Hilbert y J tiene derivada Fréchet en $u \in U$, el gradiente ∇J de J en u se define por

$$\Big(\nabla J(u) \, , \, h \Big)_X = \Big\langle DJ(u), \, h \Big\rangle$$

para toda $h \in X$.

Definición 2.9. Sean X un espacio métrico. Definimos los espacios

$$C^{0,1}(X,\mathbb{R}) := \{u : X \to \mathbb{R} \,|\, u \text{ es Lipschitz continua localmente}\},$$
$$C^{1,1}(X,\mathbb{R}) := \left\{u \in C^1(X) \,|\, Du \in C^{0,1}(X,\mathbb{R})\right\}.$$

Para ver que el funcional de energía J, definido en (1.1, p.1), se encuentra en $C^{1,1}(H^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$ empezaremos demostrando el siguiente lema.

Lema 2.10. *Sea $N \geq 2$ y $p \in (2,2^*)$. El funcional $\Psi\colon H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$\Psi(u) := \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\,dx, \tag{2.2}$$

cumple que $\Psi \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$ y

$$D\Psi(u)[v] = p\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uv\,dx.$$

Además $D\Psi\colon H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$ es Lipschitz continua en conjuntos acotados.

Demostración. Sean $u, v, h \in H^1(\mathbb{R}^N)$, entonces, por el teorema de Sobolev $u, v, h \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $2 \leq p < 2^*$. Definamos

$$\Lambda : H^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}^N)),\mathbb{R}) \quad \textit{por} \quad \Lambda(u)[v] := p\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uv\,dx$$

1. Demostremos que $\Lambda(u) \in \mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$ y que $\Lambda : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$ es continua. Por Hölder tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\Lambda(u)[v]\right| &= \left|p\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uv\,dx\right| \\
&\leq p\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}|u||v|\,dx \\
&= p\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}|v|\,dx \\
&\leq p\left\|\,|u|^{p-1}\right\|_{L^{\frac{p}{p-1}}}\left\|v\right\|_{L^p} \\
&= p\|\,u\|_{L^p}^{p-1}\|v\|_{L^p},
\end{aligned}$$

y por el encaje continuo de $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$

$$\Big|\Lambda(u)[v]\Big| \leq p\| u\|_{L^p}^{p-1}\|v\|_{L^p} \leq \, Cp\,\|u\|_{H^1}^{p-1}\|v\|_{H^1}.$$

Esto demuestra que, para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, la función $\Lambda(u) : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ es continua. Como $\Lambda(u)$ es lineal, se tiene que $\Lambda(u) \in \mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. Además,

$$\begin{aligned}\|\Lambda(u)\|_{\mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})} &= \sup_{v\in H^1\setminus\{0\}} \frac{|\Lambda(u)[v]|}{||v||_{H^1}} \\ &\leq \, C_1\|u\|_{H^1}^{p-1}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, Λ es continua.

2. Definimos

$$f(t) := p|t|^{p-2}t, \tag{2.3}$$

de aqui que $f'(t) = p(p-1)|t|^{p-2}$. Sean s, $t \in \mathbb{R}$, con $s < t$, por el teorema del valor existe $\lambda \in (s,t)$ tal que

$$\left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\right| = |f'(\lambda)|,$$

entonces

$$\begin{aligned}|f(t)-f(s)| &= |f'(\lambda)(t-s)| \\ &\leq \, p(p-1)\,|t-s|\,\,|\lambda|^{p-2} && \text{Por (2).} \\ &\leq p(p-1)\,|t-s|\Big(\,|t|+|s|\Big)^{p-2}.\end{aligned}$$

Para u, $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$ esto implica, junto con la desigualdad de Hölder, que

$$\begin{aligned}\Big\|f(u)-f(v)\Big\|_{L^{\frac{p}{p-1}}}^{\frac{p}{p-1}} &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(u)-f(v)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx \\ &\leq \,[\,p(p-1)]^{\frac{p}{p-1}}\int_{\mathbb{R}^N} |u-v|^{\frac{p}{p-1}}\Big(|u|+|v|\Big)^{(p-2)\frac{p}{p-1}}\,dx \\ &\leq \,[\,p(p-1)]^{\frac{p}{p-1}}\left[\int_{\mathbb{R}^N} |u-v|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p-1}}\left[\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|u|+|v|\Big)^p\,dx\right]^{\frac{p-2}{p-1}}.\end{aligned}$$

Tomando $C_0 := [\,p(p-1)]$ obtenemos

$$\begin{aligned} ||f(u)-f(v)||_{L^{\frac{p}{p-1}}} &\leq C_0||u-v||_{L^p}\Big|\Big||u|+|v|\Big|\Big|_{L^p}^{p-2} \\ &\leq C_0||u-v||_{L^p}\Big(\,||u||_{L^p}+||v||_{L^p}\Big)^{p-2}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

3. Demostremos que $\Lambda\colon H^1(\mathbb{R}^N)\to\mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$ es Lipschitz continua en conjuntos acotados de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Esto es que para cada $C_1\geq 0$ exista $C_2\geq 0$ tal que

$$||\,\Lambda(u)-\Lambda(v)\,||_{\mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})}\leq C_2||u-v||_{H^1}\qquad \text{si }\ ||u||_{H^1},||v||_{H^1}\leq C_1. \tag{2.5}$$

Primero veamos que sucede con $\Big|(\Lambda(u)-\Lambda(v))[h]\Big|$:

$$\begin{aligned} \Big|(\Lambda(u)-\Lambda(v))[h]\Big| &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|f(u)-f(v)|\,|h|\,dx \\ &\leq\ ||f(u)-f(v)||_{L^{\frac{p}{p-1}}}||h||_{L^p} && \text{Por Hölder.} \\ &\leq\ C_0||u-v||_{L^p}\Big(\,||u||_{L^p}+||v||_{L^p}\Big)^{p-2}||h||_{L^p} && \text{Por (2.4).} \\ &\leq\ C_0\,C\,||u-v||_{H^1}\Big(\,||u||_{H^1}+||v||_{H^1}\Big)^{p-2}||h||_{H^1}. \end{aligned}$$

Si elegimos

$$C_0\,C\Big(\,||u||_{H^1}+||v||_{H^1}\Big)^{p-2}\ \leq\ C_0\,C\,(2C_1)^{p-2}\ =:\ C_2,$$

tenemos

$$\begin{aligned} ||\Lambda(u)-\Lambda(v)||_{\mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})} &= \sup_{h\in H^1(\mathbb{R}^N),\,h\neq 0}\frac{\Big|(\Lambda(u)-\Lambda(v))[h]\Big|}{\|h\|_{H^1}} \\ &\leq C_2\ ||u-v||_{H^1}. \end{aligned}$$

4. Para $x\in\mathbb{R}^N$ fijo y $t\in(0,1)$ definimos la función

$$g_x(t):=|u(x)+tv(x)|^p.$$

Entonces

$$g_x'(t) = p\,|u(x)+tv(x)|^{p-2}\,[u(x)+tv(x)]\,v(x).$$

Por el teorema del valor medio existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{|g_x(t)-g_x(0)|}{|t|} &= |g_x'(\lambda t)| \\
&= p|u(x)+\lambda tv(x)|^{p-2}|u(x)+\lambda tv(x)||v(x)| \\
&= p|u(x)+\lambda tv(x)|^{p-1}|v(x)| \\
&\leq p\Big(\,|u(x)|+|v(x)|\,\Big)^{p-1}|v(x)|.
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} p|u(x)+\lambda tv(x)|^{p-1}|v(x)|\,dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} p\Big(\,|u(x)|+|v(x)|\,\Big)^{p-1}|v(x)|\,dx \\
&\leq\ p\left\|\Big(\,|u|+|v|\,\Big)^{p-1}\right\|_{L^{\frac{p}{p-1}}}\|v\|_{L^p} \\
&\leq\ p\|\,|u|+|v|\,\|_{L^p}^{p-1}\,\|v\|_{L^p} \\
&\leq\ Cp\Big(\,\|u\|_{H^1}+\|v\|_{H^1}\,\Big)^{p-1}\,\|v\|_{H^1} \\
&<\ \infty
\end{aligned}$$

ya que el encaje $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ es continuo. Entonces

$$p\Big(\,|u(x)|+|v(x)|\,\Big)^{p-1}|v(x)| \in L^1(\mathbb{R}^N). \tag{2.6}$$

5. Demostremos que $\Psi \in C^{1,1}(H^1(\mathbb{R}^N))$. Sean $u,\ v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $C_1 := \,||u||_{H^1}+||v||_{H^1}$,

y sea C_2 dado como en (2.5). Consideremos

$$\begin{aligned}
\Psi(u+v)-\Psi(u) &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(g_x(1) - g_x(0) \Big)\, dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 g_x'(t)\, dt\ dx \\
&= \int_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}^N} g_x'(t)\, dx\ dt && \text{Por (2.6, p.11) y Fubini.} \\
&= \int_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}^N} p\, |u+tv|^{p-2}(u+tv)v\, dx\ dt \\
&= \int_0^1 \Lambda(u+tv)[v]\, dt.
\end{aligned}$$

Entonces (2.5, p.10) implica

$$\begin{aligned}
|\, \Psi(u+v) - \Psi(u) - \Lambda(u)[v]\, | &= \left| \int\limits_0^1 \left(\Lambda(u+tv) - \Lambda(u)\right)[v]\, dt \right| \\
&\leq \int\limits_0^1 \|\Lambda(u+tv) - \Lambda(u)\|_{\mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})}\ \|v\|_{H^1}\, dt \\
&= \left(\int\limits_0^1 \|\Lambda(u+tv) - \Lambda(u)\|_{\mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})}\ dt \right) ||v||_{H^1} \\
&\leq C_2\, \|v\|^2 \\
&= o\Big(\, \|v\|\, \Big),
\end{aligned}$$

cuando $||v||_{H^1} \to 0$. Entonces $\Psi \in C^{1,1}(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ y $D\Psi = \Lambda$.

□

Lema 2.11. *El funcional de energía (1.1, p.1) se encuentra en* $C^{1,1}(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ *y*

$$DJ(u)[v] = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(\nabla u \nabla v\ + uv \Big)\, dx\ - \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} uv\, dx.$$

Demostración. Recordando que el funcional de energía es

$$J(u) = \frac{1}{2}\, ||u||^2_{H^1}\ - \frac{1}{p}\, \Psi(u),$$

podemos ver por el Lema 2.10, (p.8), que $\Psi(u)$ pertenece a $C^{1,1}(H^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$ y, como $H^1(\mathbb{R}^N)$ es un espacio de Hilbert la función $u \mapsto ||u||^2$ pertenece a $C^\infty(H^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$. Concluimos que

$$J \in C^{1,1}(H^1(\mathbb{R}^N),\mathbb{R}),$$

y que $DJ(u)[v]$ esta dada por

$$DJ(u)[v] = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\nabla u \nabla v + uv\Big)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} uv \, dx.$$

$\square$

Definición 2.12. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y $J : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ diferenciable. Decimos que u es un punto crítico de J si $DJ(u) = 0$.

Definición 2.13. Sea $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Entonces u es una solución débil de $\Big(\mathcal{P}\Big)$ si $\forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\Big(\nabla u, \nabla v\Big)_{L^2} + \Big(u, v\Big)_{L^2} = \int |u|^{p-2} uv \, dx,$$

es decir, si u es un punto crítico de J.

Definición 2.14. Sea $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Entonces u es una solución clásica de $\Big(\mathcal{P}\Big)$ si $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ y $-\triangle u + u = |u|^{p-2}u$.

Proposición 2.15. *u es solución débil de $\Big(\mathcal{P}\Big)$ si y sólo si u es solución clásica de $\Big(\mathcal{P}\Big)$.*

Demostración.

$\Rightarrow\rfloor$ Sea u solución débil. Por regularidad $u \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap H^2(\mathbb{R}^N)$, véase [8, Lema 1.30]. Entonces $\forall v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$:

$$\begin{aligned}\Big(-\triangle u, v\Big)_{L^2} &= \Big(\nabla u, \nabla v\Big)_{L^2} \\ &= -\Big(u, v\Big)_{L^2} + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} uv \, dx.\end{aligned}$$

Y puesto que $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$ para todo dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ vemos que $-\triangle u + u - |u|^{p-2}u = 0$. Por lo tanto u es solución clásica.

$\Leftarrow\rfloor$ Sea u solución clásica de $\Big(\mathcal{P}\Big)$, de aqui que $\forall\, v \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \Bigg(-\triangle u + u - |u|^{p-2}u, v \Bigg)_{L^2} \\ &= \Bigg(\nabla u, \nabla v \Bigg)_{L^2} + \Bigg(u - |u|^{p-2}u, v \Bigg)_{L^2} \qquad \text{Porque } u \in C^2(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Entonces u es solución débil. $\square$

Capítulo 3

Existencia

3.1 Deformación cuantitativa

Notación 3.1. Sea $J : X \to \mathbb{R}$ entonces denotamos $J^d := J^{-1}\Big(\ (-\infty, d\,]\ \Big)$.

Lema 3.2 (Deformación cuantitativa)**.** *Sea X un espacio de Hilbert, $J \in C^{1,1}(X, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$. Suponemos que:*

$$\Bigg(\forall u \in J^{-1}\Big([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]\Big)\Bigg) : ||DJ(u)|| \geq 2\varepsilon.$$

Entonces existe $\eta \in C(X, X)$ tal que:

(i) $\forall u\ \notin J^{-1}\Big([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]\Big) :\ \eta(u) = u$,

(ii) $\eta(J^{c+\varepsilon}) \subset J^{c-\varepsilon}$.

Demostración. Definamos:

$$\begin{aligned} A :&= J^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \\ B :&= J^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \\ \tau(u) :&= \frac{\operatorname{dist}(u, X \setminus A)}{\operatorname{dist}(u, X \setminus A) + \operatorname{dist}(u, B)}. \end{aligned}$$

La función τ satisface

$$\tau(u) = 1 \qquad \text{si } u \in B \text{ y} \tag{3.1}$$

$$\tau(u) = 0 \qquad \text{si } u \in X \setminus A. \tag{3.2}$$

Además τ es Lipschitz continua localmente ya que para todo $u \in X$ la $\operatorname{dist}(u, X \setminus A)$ y la $\operatorname{dist}(u, B)$ no son cero de forma simultanea y la distancia es Lipschitz continua con constante uno. Definamos el campo vectorial localmente Lipschitz continuo

$$f(u) := -\tau(u) \, \frac{\nabla J(u)}{\|\nabla J(u)\|^2} \qquad\qquad u \in A.$$

Cuando $u \in A$ tenemos que $\tau(u) \in [0,1]$ y $||\nabla J(u)|| \geq 2\varepsilon$ entonces

$$\frac{1}{\|\nabla J(u)\|} \leq \frac{1}{2\varepsilon}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} ||f(u)|| &= || - \tau(u) \, \frac{\nabla J(u)}{\|\nabla J(u)\|} \, \frac{1}{\|\nabla J(u)\|}|| \\ &\leq \frac{||\nabla J(u)||}{||\nabla J(u)||} \, \frac{1}{\|\nabla J(u)\|} \\ &\leq \frac{1}{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

es decir,

$$\|f(u)\| \leq \frac{1}{2\varepsilon} \qquad\qquad \forall u \in X.$$

Para cada $u \in X$ el problema de Cauchy, véase [3, 7],

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sigma(t,u) &= f(\sigma(t,u)), \\ \sigma(0,u) &= u, \end{aligned}$$

tiene una solución única $\sigma(\cdot, u)$ definida en $\mathbb{R}$. Mas aún, σ es continua en $\mathbb{R} \times X$, véase [3, 7]. Entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J(\sigma(t,u)) &= \left(\nabla J(\sigma(t,u))\,,\, \frac{d}{dt}\sigma(t,u)\right)_{H^1} \\
&= \Big(\nabla J(\sigma(t,u))\,,\, f(\sigma(t,u))\Big)_{H^1} \\
&= \left(\nabla J(\sigma(t,u))\,,\, -\tau(\sigma(t,u))\,\frac{\nabla J(\sigma(t,u))}{||\nabla J(\sigma(t,u))||^2}\right)_{H^1} \\
&= -\tau(\sigma(t,u))\,\frac{||\nabla J(\sigma(t,u))||^2}{||\nabla J(\sigma(t,u))||^2} \\
&= -\tau\left(\sigma(t,u)\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $J(\sigma(\,.\,,u))$ tiene las siguiente propiedades:

1. Es no-creciente, ya que τ es no negativa.
2. Si $\sigma(t,u) \in X \setminus A$, entonces

$$\frac{d}{dt}J(\sigma(t,u)) \;=\; 0.$$

Para (i) definimos $\eta : X \to X$ por

$$\eta(u) := \sigma(2\varepsilon, u).$$

Ahora sea $u \in J^{c+\varepsilon}$. Si existe $t \in [0, 2\varepsilon]$ tal que $J(\sigma(t,u)) < c-\varepsilon$, entonces $J(\sigma(2\varepsilon,u)) < c-\varepsilon$.

Si $\sigma(t,u) \in J^{-1}(\,[c-\varepsilon, c+\varepsilon]\,)$, para todo $t \in [0, 2\varepsilon]$ tenemos

$$
\begin{aligned}
J(\sigma(2\varepsilon,u)) &= J(u) \,+\, \int_0^{2\varepsilon} \frac{d}{dt}\,J(\sigma(t,u))\,dt \\
&= J(u) \,-\, \int_0^{2\varepsilon} \tau(\sigma(t,u))\,dt \\
&\le c+\varepsilon \,-\, \int_0^{2\varepsilon} 1\,dt && \text{por (3.1).} \\
&= c \,-\, \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Entonces $\eta(J^{c+\varepsilon}) \subset J^{c-\varepsilon}$. Sea $u \in X \setminus A$. Como $f \equiv 0$ en $X \setminus A$, la definición de σ implica que $\sigma(t,u) = u$ para todo $t \ge 0$, es decir, $\eta(u) = u$. $\square$

3.2 El Teorema de paso de montaña

Teorema 3.3 (Paso de Montaña)**.** *Sean X un espacio de Hilbert, $J \in \mathcal{C}^{1,1}(X, \mathbb{R})$, $e \in X$ y $r > 0$ tales que $||e|| > r$ y*

$$b := \inf_{||u||=r} J(u) > J(0) \geq J(e).$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe $u \in X$ tal que

a) $c - 2\varepsilon \leq J(u) \leq c + 2\varepsilon$,

b) $||J'(u)|| < 2\varepsilon$,

donde

$$\begin{aligned} c &:= \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \\ \Gamma &:= \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Demostración. 1. Primero veremos que

$$b \leq c \leq \max_{t\in [0,1]} J(te).$$

Sea γ en Γ. Como $\gamma(0) = 0$ y $\gamma(1) = e$ tenemos que

$$||\gamma(0)|| = 0 \quad y \quad ||\gamma(1)|| = ||e|| > r,$$

En consecuencia, como γ es continua, existe un $t_0 \in [0, 1]$ tal que $||\gamma(t_0)|| = r$. Por tanto

$$b = \inf_{||u||=r} J(u) \leq J(\gamma(t_0)) \leq \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)),$$

y entonces

$$b \leq \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) = c.$$

Definimos $\gamma_0 \in \Gamma$ por $\gamma_0(t) := te$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) &\leq \max_{t\in[0,1]} J(\gamma_0(t)) \\ &= \max_{t\in[0,1]} J(te). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$b \leq c \leq \max_{t\in[0,1]} J(te).$$

2. Demostremos el Teorema de paso de montaña por contradicción. Supongamos que no se cumple la conclusión del teorema, es decir que existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda u en $J^{-1}\Big([c-2\varepsilon,\, c+2\varepsilon]\Big)$ se cumple que $||DJ(u)|| \geq 2\varepsilon$. Como $J(0) < c$ podemos suponer que ε es suficientemente pequeña, de tal forma que

$$J(e) \leq J(0) < c - 2\varepsilon. \tag{3.4}$$

Por definición de c existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} J\Big(\gamma(t)\Big) \leq c + \varepsilon. \tag{3.5}$$

Por lo cual también

$$e \notin J^{-1}\Bigg([c-2\varepsilon,\, c+2\varepsilon]\Bigg). \tag{3.6}$$

Ahora sea η como en el Lema 3.2 de Deformación Cuantitativa, entonces definimos $\beta := \eta \circ \gamma$. Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \beta(0) &= \eta(\gamma(0)) = \eta(0) = 0 && \text{por (3.4)},\\ \beta(1) &= \eta(\gamma(1)) = \eta(e) = e && \text{por (3.6)}, \end{aligned}$$

y dado que η y γ son continuas, $\beta \in \Gamma$. Por el Lema sabemos

$$\eta(J^{c+\varepsilon}) \subset J^{c-\varepsilon}$$

y entonces

$$J\Bigg(\eta(J^{c+\varepsilon})\Bigg) \subset (-\infty, c-\varepsilon].$$

Además por (3.5), tenemos que para toda $t \in [0,1]$ se cumple $\gamma(t) \in J^{c+\varepsilon}$ y entonces

$$J\Big(\beta(t)\Big) \leq c - \varepsilon \qquad \forall\, t \in [0,1].$$

Por lo tanto

$$\max_{t\in[0,1]} J(\beta(t)) \leq c - \varepsilon,$$

lo cual es una contradicción a $\beta \in \Gamma$ y a la definición de c.

□

3.3 Principio de críticalidad simétrica

Definición 3.4. Sean $(G, \cdot)$ un grupo y τ una topología en G. Entonces $(G, \cdot, \tau)$ es un grupo topológico si y sólo si la función

$$\begin{aligned} f : G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh^{-1} \end{aligned}$$

es continua.

Definición 3.5. La acción de un grupo topológico G en un espacio normado X es un mapeo continuo

$$G \times X \rightarrow X, \ (g, u) \mapsto gu$$

tal que

$$\begin{aligned} 1 \cdot u &= u \\ (gh)u &= g(hu) \\ u &\mapsto gu \qquad \text{es lineal.} \end{aligned}$$

Definición 3.6. La acción de un grupo topológico es isométrica si

$$\|gu\| = \|u\|.$$

Definición 3.7. Sea G un grupo topológico que actúa en un espacio normado X. El espacio de puntos invariantes se define como

$$\mathrm{Fix}(G) := \{u \in X : \ gu = u, \forall g \in G\}.$$

Un conjunto $A \subset X$ es invariante si $gA \subseteq A$ para cada $g \in G$. Una función $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ es invariante si $J \circ g = J$ para cada $g \in G$. Un mapeo $f : X \rightarrow X$ es equivariante si $g \circ f = f \circ g$ para cada $g \in G$.

Proposición 3.8 (Series de Neumann)**.** *Sea E un espacio normado, y $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que $||A||_{\mathcal{L}(E)} < 1$. Entonces $I - A$ es invertible en $\mathcal{L}(E)$ y*

$$|| (I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{1 - ||A||}.$$

Demostración. Definamos la sucesión $\{A_n\}$ en $\mathcal{L}(E)$ como

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} A^k.$$

Paro todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$(I - A)A_n = I - A^{n+1}. \tag{3.7}$$

Ya que $||A^2|| \leq ||A|| \, ||A||$ por inducción vemos que para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$||A^k|| \leq ||A||^k. \tag{3.8}$$

Como $||A|| < 1$, por (3.8) tenemos que $A^k \to 0$ en $\mathcal{L}(E)$ cuando $k \to \infty$. En consecuencia, (3.7) implica que es suficiente demostrar que $\{A_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(E)$, porque en ese caso $(I - A)^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.
Dado que la serie geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||A||^k$$

converge absolutamente obtenemos que la sucesión de sumas parciales es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Por (3.8) tenemos para $m \geq n$ que

$$||A_m - A_n|| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} A^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} ||A^k|| \leq \sum_{k=n+1}^{m} ||A||^k.$$

En consecuencia $\{A_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(E)$. □

Proposición 3.9. *Sea E un Espacio de Banach, sea X el conjunto de todos los elementos invertibles en el álgebra de Banach $\mathcal{L}(E)$, entonces $(X, \circ)$ es un grupo Topológico.*

Demostración. 1. Sean $A, B \in \mathcal{L}(E)$ tales que A es invertible y $||I - BA^{-1}|| < 1$. Demostraremos que B es invertible en $\mathcal{L}(E)$ y presentaremos una fórmula para B^{-1}.

Por Series de Neumann como $||I - BA^{-1}|| < 1$ tenemos que

$$I - (I - BA^{-1}) = I - I + BA^{-1} = BA^{-1}$$

es invertible en $\mathcal{L}(E)$ y

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - ||I - BA^{-1}||} &\geq ||[I - (I - BA^{-1})]^{-1}|| \\ &= ||[I - I + BA^{-1}]^{-1}|| \\ &= ||[BA^{-1}]^{-1}||.\end{aligned}$$

Entonces $B = (BA^{-1})\,A$ es invertible como producto de dos elementos invertibles.

Ahora presentemos una fórmula para B.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(I - BA^{-1})^k &= [I - (I - BA^{-1})]^{-1} \\ &= [BA^{-1}]^{-1} \\ &= AB^{-1}.\end{aligned}$$

Entonces

$$B^{-1} = A^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(I - BA^{-1})^k.$$

2. Demostremos que X es abierto en $\mathcal{L}(E)$ y que el mapeo

$$\begin{aligned}T : X &\to X, \\ A &\mapsto A^{-1}\end{aligned}$$

de un operador a su inversa es continuo. Primero encontremos una cota para $||B^{-1} - A^{-1}||$ si $||I - BA^{-1}|| < 1$.

Tenemos que

$$\begin{aligned}||B^{-1} - A^{-1}|| &= ||B^{-1}(I - BA^{-1})|| \\ &\leq ||B^{-1}||\;||I - BA^{-1}|| \\ &= ||A^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(I - BA^{-1})^k||\;||I - BA^{-1}|| \\ &\leq ||A^{-1}||\frac{||I - BA^{-1}||}{1 - ||I - BA^{-1}||}.\end{aligned}$$

Veamos que X es abierto. Sea $A \in X$, tomemos $r := \dfrac{1}{2||A^{-1}||}$
Si $B \in U_r(A)$ tenemos que

$$||I - BA^{-1}|| \leq ||A^{-1}|| \, ||A - B|| \leq ||A^{-1}||r = \frac{1}{2} < 1$$

entonces $U_r(A) \subset X$ y por lo tanto X es abierto.

Demostremos que la inversión es continua. Sea $A \in X$, $B_n \to A$ en X y $r := \dfrac{1}{2||A^{-1}||}$. Entonces tenemos que para n suficientemente grande $B_n \in \mathcal{U}_r(A)$ y $||I - B_nA^{-1}|| \leq \dfrac{1}{2} < 1$, y usando la cota que encontramos

$$\begin{aligned} ||B_n^{-1} - A^{-1}|| &\leq ||A^{-1}|| \frac{||I - B_nA^{-1}||}{1 - ||I - B_nA^{-1}||} \\ &\leq \frac{||A^{-1}||^2 \, ||A - B_n||}{1 - ||I - B_nA^{-1}||} \\ &\leq 2\, ||A^{-1}||^2 \, ||A - B_n|| \\ &\longrightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$.

3. Sean $A, B \in X$. Demostremos que $B_nA_n^{-1} \to BA^{-1}$ si $B_n \to B$ en X y $A_n \to A$ en X. Por el inciso (2) tenemos que $A_n^{-1} \to A^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} ||B_nA_n^{-1} - BA^{-1}|| &\leq ||A_n^{-1} - A^{-1}|| \, ||B_n - B|| + ||A^{-1}|| \, ||B_n - B|| + ||B|| \, ||A_n^{-1} - A^{-1}|| \\ &\longrightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$. Por lo tanto $B_nA_n^{-1} \to BA^{-1}$.

Entonces X es un grupo topológico. □

Teorema 3.10. *(Principio de Críticalidad Simétrica, Palais, 1979). Supongamos que la acción de un grupo topológico G en un espacio de Hilbert X es isométrica. Si $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ es invariante y si u es un punto crítico de J restringido a* $\mathrm{Fix}(G)$ *entonces u es un punto crítico de J.*

Demostración. 1. Como J es invariante tenemos

$$\begin{aligned}\left\langle DJ(gu)\,,\,v\right\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{J(gu+tv)-J(gu)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{J(g\,(u+tg^{-1}v)\,)-J(gu)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{J(u+tg^{-1}v)-J(u)}{t}\\ &= \left\langle DJ(u)\,,\,g^{-1}v\right\rangle.\end{aligned}$$

2. Tenemos por una propiedad del producto interior, que para todo $u, v \in X$ se cumple

$$\begin{aligned}\Big(\nabla J(gu),\,v\Big) &= \Big(\nabla J(u),\,g^{-1}v\Big) && \text{Por el inciso anterior.}\\ &= \left\|\frac{\nabla J(u)+\,g^{-1}v}{2}\right\|^2-\left\|\frac{\nabla J(u)-\,g^{-1}v}{2}\right\|^2\\ &= \left\|g\left(\frac{\nabla J(u)+\,g^{-1}v}{2}\right)\right\|^2-\left\|g\left(\frac{\nabla J(u)-\,g^{-1}v}{2}\right)\right\|^2 && \text{Por ser isométrica.}\\ &= \left\|\frac{g\nabla J(u)+\,gg^{-1}v}{2}\right\|^2-\left\|\frac{g\nabla J(u)-\,gg^{-1}v}{2}\right\|^2\\ &= \Big(g\nabla J(u),\,gg^{-1}v\Big)\\ &= \Big(g\nabla J(u),\,v\Big).\end{aligned}$$

Entonces ∇J es equivariante.

3. Si u es un punto crítico de J restringido a $\mathrm{Fix}(G)$ entonces $\nabla J(u) \in \mathrm{Fix}(G)^{\perp}$. Además

$$g\nabla J(u) \,=\, \nabla J(gu) \,=\, \nabla J(u),$$

entonces $\nabla J(u) \in \mathrm{Fix}(G)$.

Por tanto

$$\nabla J(u) \in \mathrm{Fix}(G) \cap \mathrm{Fix}(G)^{\perp} = \{0\}\,.$$

□

3.4 Compacidad de encajes de funciones radiales

Lema 3.11 (P.L. Lions, 1984). *Sea $r > 0$ y $2 \leq q < 2^*$. Si $\{u_n\}$ es acotada en $H^1(\mathbb{R}^N)$ y si*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |u_n|^q \to 0, \quad n \to \infty,$$

entonces $u_n \to 0$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$.

Demostración. Primero consideremos el caso $N \geq 3$. Sean $s := \frac{2}{2^*}(2^* - q) + q$ y $\lambda := \frac{2}{s}$. Por lo que

$$s \in (q,\, 2^*) \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{s} = \frac{\lambda}{2^*} + \frac{1-\lambda}{q}.$$

Sea Q_r un cubo abierto contenido en $B_r(0)$. Entonces para todo $x \in \mathbb{R}^N$ la proposición 2.5, (p.6), implica

$$\begin{aligned}
||u_n||_{L^s(x+Q_r)} &\leq ||u_n||^{1-\lambda}_{L^q(x+Q_r)} ||u_n||^{\lambda}_{L^{2^*}(x+Q_r)} \\
&\leq ||u_n||^{1-\lambda}_{L^q(x+Q_r)}\, C\, ||u_n||^{\lambda}_{H^1(x+Q_r)} && \text{Por encaje de Sobolev.} \\
&= C\, ||u_n||^{1-\lambda}_{L^q(x+Q_r)} \left[\int_{x+Q_r} \left(|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2 \right) dx \right]^{\frac{1}{s}}.
\end{aligned}$$

Ahora cubrimos a $\mathbb{R}^N$ con trasladados de $\bar{Q}_r$ de tal forma que estos sólo se puedan intersectar en su frontera. Entonces existe una sucesión $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que cada trasladado se puede expresar como $x_k + \bar{Q}_r$,

$$\begin{aligned}
\left| \mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} (x_k + Q_r) \right| &= 0 && \text{y} \\
(x_l + Q_r) \cap (x_k + Q_r) &= \emptyset,
\end{aligned}$$

si $k \neq l$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u_n|^s\,dx &= \sum_k \int\limits_{(x_k+Q_r)} |u_n|^s\,dx \\
&\leq \sum_k C^s ||u_n||^{(1-\lambda)s}_{L^q(x_k+Q_r)} \left[\int\limits_{x_k+Q_r} \left(|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2 \right) dx \right] \\
&\leq \sum_k C^s \sup_{y\in\mathbb{R}^N} ||u_n||^{(1-\lambda)s}_{L^q(B_r(y))} \left[\int\limits_{x_k+Q_r} \left(|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2 \right) dx \right] \\
&= \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \left[\int\limits_{B_r(y)} |u_n|^q\,dx \right]^{\frac{(1-\lambda)s}{q}} C^s \sum_k \left[\int\limits_{x_k+Q_r} \left(|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2 \right) dx \right] \\
&= \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \left[\int\limits_{B_r(y)} |u_n|^q\,dx \right]^{\frac{(1-\lambda)s}{q}} C^s \left[\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2 \right) dx \right] \\
&\longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, ya que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2 \right) dx,$$

es acotada. Ahora sea $p \in (2, 2^*)$. Si $p \leq s$, entonces la Proposición 2.5, (p.6), con $\mu \in (0,1)$ que satisface $\frac{1}{p} = \frac{\mu}{2} + \frac{1-\mu}{s}$, implica que

$$\begin{aligned}
||u_n||_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\leq ||u_n||^{\mu}_{L^2(\mathbb{R}^N)} ||u_n||^{1-\mu}_{L^s(\mathbb{R}^N)} \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, ya que u_n es acotada en $H^1(\mathbb{R}^N)$ y en $L^2(\mathbb{R}^N)$, y $\mu < 1$. Si $p \geq s$, entonces con $\mu \in (0,1)$ que satisface $\frac{1}{p} = \frac{\mu}{s} + \frac{1-\mu}{2^*}$, se cumple

$$\begin{aligned}
||u_n||_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\leq ||u_n||^{\mu}_{L^s(\mathbb{R}^N)} ||u_n||^{1-\mu}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, ya que u_n es acotada en $H^1(\mathbb{R}^N)$ y en $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, y $\mu > 0$. Esto prueba el Lema para $N \geq 3$. En el caso $N = 2$, sea $p > 2$. Escogemos $\bar{p} > p$ y por encajes de Sobolev, $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\bar{p}}(\mathbb{R}^N)$, con inyección continua. Remplazando 2^* por $\bar{p}$ en la demostración $N \geq 3$, el resultado se obtiene de la misma manera. $\square$

Definición 3.12. Sea G un subgrupo de $O(N)$, $y \in \mathbb{R}^N$ y $r > 0$. Definimos

$$m(y, r, G) := \sup \{n \in \mathbb{N} : \exists\, g_1, ..., g_n \in G : \ j \neq k \Rightarrow B_r(g_j y) \cap B_r(g_k y) \ = \emptyset\}.$$

Definición 3.13. Decimos que $\mathbb{R}^N$ es compatible con G si, para algún $r > 0$,

$$\lim_{|y|\to\infty} m(y, r, G) = \infty.$$

Definición 3.14. Sea G un subgrupo de $O(N)$. La acción de G en $H^1(\mathbb{R}^N)$ esta definida por

$$gu(x) := u(g^{-1}x).$$

El subespacio de funciones invariantes esta definido por

$$H^1_G(\mathbb{R}^N) := \Big\{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \ gu = u\, \forall\, g \in G\Big\}.$$

Teorema 3.15. *Si $\mathbb{R}^N$ es compatible con G las siguientes inyecciones son compactas*

$$H^1_G(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 < p < 2^*.$$

Demostración. Fijemos $p \in (2, 2^*)$ y $r > 0$ como en la Definición 3.13. Tomemos $u_n \rightharpoonup 0$ en $H^1_G(\mathbb{R}^N)$, será suficiente demostrar que $u_n \to 0$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Como sucesiones que convergen débilmente son acotadas, existe $C \geq 0$ tal que $||u_n||_{H^1_G(\mathbb{R}^N)} \leq C$ para toda n. Sean $y \in \mathbb{R}^N$ y $g_i \in G$, $i = 1, 2, \dots, m(y, r, G)$, tal que $B_r(g_i\, y) \cap B_r(g_k\, y) = \emptyset$, si $i \neq k$. Entonces para toda n se obtiene

$$\begin{aligned} C \ \geq\ ||u_n||^2_{H^1} &\geq ||u_n||^2_{L^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2\, dx \\ &\geq \int_{\cup B_r(g_j y)} |u_n|^2\, dx && \text{ya que la unión es ajena,} \\ &= m(y, r, G) \int_{B_r(y)} |u_n|^2\, dx, && \text{porque } u_n \text{ es invariante.} \end{aligned}$$

Entonces para toda y en $\mathbb{R}^N$ tenemos

$$\frac{C}{m(y,r,G)} \geq \int_{B_r(y)} |u_n|^2 \, dx.$$

Tomemos $\varepsilon > 0$. Como $\mathbb{R}^N$ es compatible con G existe $R > 0$ tal que

$$\sup_{|y| \geq R} \frac{C}{m(y,r,G)} \leq \varepsilon.$$

Se sigue que

$$\sup_{|y| \geq R} \int_{B_r(y)} |u_n|^2 \leq \varepsilon,$$

para toda $n \in \mathcal{N}$. Como $u_n \rightharpoonup 0$ en $H^1_G(\mathbb{R}^N)$, el teorema de Rellich implica

$$\int_{B_{(R+r)}(0)} |u_n|^2 \, dx \to 0,$$

cuando $n \to \infty$. Entonces

$$\sup_{|y| \leq R} \int_{B_r(y)} |u_n|^2 \, dx \leq \varepsilon,$$

para n suficientemente grande. Se sigue

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u_n|^2 \, dx \leq \varepsilon,$$

para n suficientemente grande. Como ε fué arbitrario, probamos que

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_r(y)} |u_n|^2 \, dx \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Por el Lema 3.11 $u_n \to 0$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Corolario 3.16. *(P.L. Lions, 1982)*
Sea $N_j \geq 2$, $j = 1, ..., k$, $\sum_{j=1}^{k} N_j = N$ *y*

$$G := O(N_1) \times O(N_2) \times \ldots \times O(N_k).$$

Entonces las siguientes inyecciones son compactas:

$$H^1_G(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 < p < 2^*.$$

Demostración. Sea $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \ldots \times \mathbb{R}^{N_k}$. Para $r > 0$ y $x \in \mathbb{R}^N$ con $||x|| > r\sqrt{k}$, escribimos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $x_i \in \mathbb{R}^{N_i}$. Entonces

$$\begin{aligned} ||x||^2 &= \sum_{i=1}^{k} ||x_i||^2 \\ &\leq k \max_{i=1,\ldots,k} ||x_i||^2. \end{aligned}$$

Sea i_0 tal que $||x_{i_0}||^2 = \max_{i=1,\ldots,k} ||x_i||^2$, entonces $r < \frac{1}{\sqrt{k}}||x|| \leq ||x_{i_0}||$. Como $N_{i_0} \geq 2$ podemos tomarnos un subespacio $\bar{\mathcal{Y}} \subset \mathbb{R}^{N_{i_0}}$ de dimensión dos. Si $\bar{G}_0 \subset O(N_{i_0})$ es el subgrupo isomorfo a $O(2)$ que deja $\bar{\mathcal{Y}}$ invariante, entonces el subespacio

$$\mathcal{Y} = \{0\} \times \ldots \times \{0\} \times \bar{\mathcal{Y}} \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}$$

es invariante bajo $G_0 := \{I\} \times \ldots \times \{I\} \times \bar{G}_0 \times \{I\} \times \ldots \times \{I\}$. Se sigue que la cantidad de bolas abiertas de radio r disjuntas con centros en

$$gx = (x_1, \ldots, x_{i_0-1}, \bar{g}x_{i_0}, x_{i_0+1}, \ldots, x_k),$$

donde $\bar{g} \in \bar{G}_0$, es decir $g \in G_0$, es mayor o igual a $\lfloor \frac{2||x_{i_0}||}{r} \rfloor \geq \lfloor \frac{2||x||}{r\sqrt{k}} \rfloor$. Entonces cuando $||x|| \to \infty$ la cantidad de bolas abiertas disjuntas aumenta por lo que $\lim_{||x|| \to \infty} m(x, r, G) = \infty$. Entonces por el Teorema 3.15, (p.27), las inyecciones son compactas. □

Corolario 3.17. *(Strauss, 1977).*
Sea $N \geq 2$. Entonces las siguientes inyecciones son compactas:

$$H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 < p < 2^*.$$

Demostración. Es suficiente aplicar el Corolario 3.16 con $k = 1$ y $G = O(N)$. □

3.5 Existencia de una solución radialmente simétrica

Definición 3.18 (Brézis-Coron-Nirenberg, 1980)**.** Sea X un espacio de Banach, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{R}$. La función J satisface la condición $(PS)_c$ si toda sucesión $\{u_n\} \subset X$

tal que

$$J(u_n) \to c, \quad DJ(u_n) \to 0$$

contiene una subsucesión convergente.

Teorema 3.19 (Ambrosetti-Rabinowitz, 1973)**.** *Bajo las hipótesis del Teorema de Paso de Montaña 3.3, (p.18), si J satisface la condición $(PS)_c$ entonces c es un valor crítico de J.*

Demostración. Por el Teorema 3.3, (p.18), tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in X$ tal que

$$c - \frac{1}{2^{n-1}} \leq J(u_n) \leq c + \frac{1}{2^{n-1}}$$

y

$$||DJ(u_n)|| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Entonces cuando $n \to \infty$

$$J(u_n) \to c \qquad y \qquad ||DJ(u_n)|| \to 0.$$

Como J satisface $(PS)_c$, $\{u_n\}$ tiene una subsucesión convergente a $u \in X$. Pero entonces

$$J(u) = c \qquad y \qquad DJ(u) = 0,$$

porque J y DJ son continuas. $\square$

Teorema 3.20. *Si $N \geq 2$ y $2 < p < 2^*$, entonces existe una solución radialmente simétrica y clásica de $\Big(\mathcal{P}\Big)$.*

Demostración. Consideramos el funcional de energía J, como en (1.1, p.1), restringido a $H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N)$. Probaremos que J satisface las hipótesis del Teorema 3.19

1. Por el Corolario 3.17, (p.29), existe $C > 0$ tal que si $u \in H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N)$

$$||u||_{L^p} \leq C||u||_{H^1}.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}||u||^2_{H^1} - \frac{1}{p}||u||^p_{L^p} \\ &\geq \frac{1}{2}||u||^2_{H^1} - \frac{1}{p}C^p||u||^p_{H^1} \\ &= ||u||^2_{H^1}\left(\frac{1}{2} - \frac{C^p}{p}||u||^{p-2}_{H^1}\right). \end{aligned}$$

Existe $r > 0$ tal que $\frac{1}{2} - \frac{C^p}{p}r^{p-2} > 0$. En consecuencia,

$$b := \inf_{||u||=r} J(u) > 0 = J(0).$$

Sea $u \in H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N)$ con $u > 0$ en $\mathbb{R}^N$, veamos que existe un $e \in H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N)$ tal que $J(0) \geq J(e)$ y cuya norma es mayor que r.

Para $t \geq 0$.

$$\begin{aligned} J(tu) &= \frac{1}{2}||tu||^2_{H^1_0} - \frac{1}{p}||tu||^p_{L^p} \\ &= t^2\left[\frac{1}{2}||u||^2_{H^1_0} - \frac{t^{p-2}}{p}||u||^p_{L^p}\right]. \\ &\to -\infty \end{aligned}$$

cuando $t \to \infty$. Entonces existe un t tal que $e := tu$ cumple $||e|| > r$ y $J(e) \leq 0$. Por lo tanto

$$b := \inf_{||u||_{H^1}=r} J(u) > 0 = J(0) \geq J(e).$$

2. Demostremos $(\mathrm{PS})_c$ para todo c en $\mathbb{R}$. Tomemos una sucesión $\{u_n\} \subset H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\sup_n J(u_n) < \infty \quad \text{y} \quad DJ(u_n) \to 0.$$

Veamos que $||u_n||$ es acotada. Sea $d := \sup_n J(u_n)$, entonces para n suficientemente grande tenemos

$$\begin{aligned}
d+1+||u_n||_{H^1} &\geq J(u_n) - \frac{1}{p}\, DJ(u_n)\,[u_n] \\
&= J(u_n) - \frac{1}{p} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(\nabla u_n \nabla u_n + u_n u_n - |u_n|^{p-2} u_n u_n \Big)\, dx \\
&= \frac{1}{2}||\nabla u_n||^2_{L^2} + \frac{1}{2}||u_n||^2_{L^2} - \frac{1}{p}\,||u_n||^p_{L^p} \; - \frac{1}{p}\Big[\, ||\nabla u_n||^2_{L^2} + ||u_n||^2_{L^2} - ||u_n||^p_{L^p} \Big] \\
&= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right] \Big(\, ||\nabla u_n||^2_{L^2} + ||u_n||^2_{L^2} \Big) \\
&= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right] ||u_n||^2_{H^1},
\end{aligned}$$

por lo cual $||u_n||_{H^1}$ es acotada. Pasando a una subsucesión podemos suponer que $u_n \rightharpoonup u$ en $H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N)$. Como $H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ de forma compacta, por el Corolario 3.17, (p.29), si $2 < p < p^*$, tenemos que $u_n \to u$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Si definimos $f(u) := |u|^{p-2}u$ con $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, tenemos por (2.4, p.10), que $f(u_n) \to f(u)$ en $L^q(\mathbb{R}^N)$ donde $q = \frac{p}{p-1}$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\Big(\nabla J(u_n) - \nabla J(u)\,,\, u_n - u \Big)_{H^1} &= \Big(DJ(u_n) - DJ(u) \Big)\, [u_n - u] \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(\nabla u_n - \nabla u \Big)\, \nabla \Big[u_n - u \Big]\, dx \, + \int\limits_{\mathbb{R}^N} (u_n - u)\, [u_n - u]\, dx \\
&\quad - \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(f(u_n) - f(u) \Big)\, [u_n - u]\, dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n - u)\, \nabla(u_n - u)\, dx \, + \int\limits_{\mathbb{R}^N} (u_n - u)^2\, dx \\
&\quad - \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(f(u_n) - f(u) \Big)\, [u_n - u]\, dx \\
&= ||u_n - u||^2_{H^1} \, - \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(f(u_n) - f(u) \Big)\, (u_n - u)\, dx.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$||u_n - u||^2_{H^1} \, = \Big(\nabla J(u_n) - \nabla J(u)\,,\, u_n - u \Big)_{H^1} \, + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(f(u_n) - f(u) \Big)\, (u_n - u)\, dx.$$

De aqui podemos ver que

$$\Big(\nabla J(u_n) - \nabla J(u)\,,\, u_n - u\Big)_{H^1} \;\longrightarrow\; 0.$$

cuando $n \to \infty$, ya que $u_n \rightharpoonup u$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$, $||u_n||_{H^1}$ es acotada y $||\nabla J(u_n)||_{H^1} \to 0$.

Además, por la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned} |\int_{\mathbb{R}^N} \Big(f(u_n) - f(u)\Big)(u_n - u)\,dx| \;&\leq\; ||f(u_n) - f(u)||_{L^{\frac{p}{p-1}}}\;||u_n - u||_{L^p} \\ &\to\; 0, \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, $||u_n - u||_{H^1} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

3. Por el Teorema 3.3, (p.18), c es un valor crítico para J en $H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N)$. Sea $u \in H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N)$ tal que $J(u) = c$ y $DJ|_{H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N)}(u) = 0$, es decir u es un punto crítico no trivial de J restringido a $H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N)$. Entonces como J es invariante bajo la acción de $O(N)$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$ y por el Teorema 3.10, (p.23), u es un punto crítico de J en $H^1(\mathbb{R}^N)$. La Proposición 2.15, (p.13), implica que u es una solución clásica de $\Big(\mathcal{P}\Big)$.

$\square$

Capítulo 4

Positividad

4.1 Variedad de Nehari

Lema 4.1. *Sea $\mathcal{Y} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ un subespacio de dimensión finita. Entonces existe $r \geq 0$ tal que $J(v) \leq 0$ si $||v|| \geq r$.*

Demostración. Sea $v \in \mathcal{Y}$. Entonces dado que el subespacio es de dimensión finita, existe $C_1 > 0$ tal que $\forall v \in \mathcal{Y}$

$$||v||_{H^1} \leq C_1 ||v||_{L^p}.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}||v||^2_{H^1} - \frac{1}{p}||v||^p_{L^p} \\ &\leq \frac{1}{2}||v||^2_{H^1} - \frac{1}{p\,C_1^p}\,||v||^p_{H^1} \\ &= ||v||^2_{H^1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p\,C_1^p}||v||^{p-2}_{H^1}\right) \\ &\to -\infty, \end{aligned}$$

cuando $||v||_{H^1} \to \infty$. Entonces, existe $r > 0$ tal que

$$\text{si } v \in \mathcal{Y} \quad \text{y} \quad ||v|| \geq r, \qquad \text{entonces} \qquad J(v) < 0.$$

$\square$

Definición 4.2. Al conjunto

$$\mathcal{N} = \Big\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : \, DJ(u)[u] = 0 \Big\} \tag{4.1}$$

lo llamaremos la variedad de Nehari, y al conjunto de puntos críticos no triviales de J lo denotaremos por

$$\mathcal{K} = \Big\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : \, DJ(u) = 0 \Big\} .$$

Entonces se cumple que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{N}$.

Proposición 4.3. *Sea $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ la solución dada por el Teorema 3.20 (p. 30), sean*
$c_0 := J(u_0)$ y $c_J := \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u)$. Entonces

$$c_0 = c_J.$$

Demostración. 1. $\Big(\geq \Big)$ Como $u_0 \in \mathcal{K} \subseteq \mathcal{N}$, entonces

$$c_0 = J(u_0) \geq \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u).$$

2. $\Big(\leq \Big)$ Definimos $g(t) = J(tu)$ para $t \geq 0$ y una $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{t^2}{2} ||u||_{H^1}^2 - \frac{t^p}{p} ||u||_{L^p}^p \\ g'(t) &= ||u||_{H^1}^2 t - ||u||_{L^p}^p t^{p-1} \\ g''(t) &= ||u||_{H^1}^2 - (p-1) ||u||_{L^p}^p t^{p-2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ g'(0) &= 0 \\ g''(0) &= ||u||_{H^1}^2 > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $g(t)$ tiene un mínimo local en cero.

Si $g'(t) = 0$ con $t > 0$ tenemos que

$$0 \ = \ g'(t) \ = ||u||^2_{H^1}\, t - ||u||^p_{L^p}\, t^{p-1}.$$

Entonces

$$||u||^2_{H^1} \ = \ ||u||^p_{L^p} t^{p-2}$$

y luego

$$\begin{aligned} g''(t) \ &= \ ||u||^2_{H^1} - (p-1)||u||^p_{H^1} \\ &= \ ||u||^2_{H^1}\,(1-(p-1)) \\ &= \ -(p-2)\,||u||^2_{H^1} \\ &< \ 0. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} &g(0) = 0 \\ &g(t) > \ 0 \qquad \text{si } t \text{ es pequeña,} \\ &g(t) < \ 0 \qquad \text{si } t \text{ es suficientemente grande,} \end{aligned}$$

de hecho por la demostración del Teorema 3.20, (p.30) primer inciso,

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \ -\infty.$$

Entonces g tiene un único punto crítico t_u en $(0, \infty)$ y este es un máximo. Además, para $t > 0$ se cumple

$$g'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad tu \in \mathcal{N},$$

porque

$$\begin{aligned} DJ(tu)tu &= t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(\nabla(tu)\nabla u + (ut)u \Big)\, dx \ - \ t \int\limits_{\mathbb{R}^N} |tu|^{p-2}(tu)u\, dx \\ &= \ tg'(t). \end{aligned}$$

Obtenemos que

$$\begin{aligned} g'(t) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad DJ(tu)tu = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad tu \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Se sigue que para toda $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ existe un único $t_u > 0$ tal que

$$\max_{t \geq 0} J(tu) \ = \ J(t_u u) \ > \ 0; \quad t_u u \in \mathcal{N}.$$

Además,

$$\Big\{ t_u u \mid u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \Big\} = \mathcal{N}.$$

Si u esta en $\mathcal{N}$, $t_u = 1$ y

$$\max_{t \geq 0} J(tu) \ = \ J(u). \tag{4.2}$$

Por lo cual

$$\inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} J(tu) \ = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} J(t_u u) \ = \ \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u).$$

Ahora, sea $u \in \mathcal{N}$ y sea $X := [e, u]$ el espacio lineal generado por e y u, donde e es como en el Lema 4.1, (p.35). Entonces existe $r > 0$ tal que $J(v) < 0$ si $||v||_{H^1} \geq r$, con $v \in X$. Fijamos $0 < t_1 < t_2 < t_3 < 1$ y definimos $\gamma_u : [0, 1] \rightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ como sigue:

(a) De 0 a t_1, γ_u es el segmento de recta en $H^1(\mathbb{R}^N)$ que une al cero con u.

(b) De t_1 a t_2, γ_u es el segmento de recta en $H^1(\mathbb{R}^N)$ que une a u con $\dfrac{u}{||u||} r$.

(c) De t_2 a t_3, γ_u es un arco en X de radio r que une a $\dfrac{u}{||u||} r$ con $\dfrac{e}{||e||} r$.

(d) De t_3 a 1, γ_u es el segmento de recta en $H^1(\mathbb{R}^N)$ que une a $\dfrac{e}{||e||} r$ con e.

Entonces J en γ_u de 0 a t_2 es menor o igual que $J(u) = J(\gamma_u(t_1))$, ya que por (4.2), u es el máximo del mapeo $t \mapsto J(tu)$. Además, J en γ_u de t_2 a 1 es negativa, porque $||\gamma_u(t)|| = r$ para $t \in [t_2, t_3]$, y por la definición de γ_u, r y e. Además, $\gamma_u \in \Gamma$, donde Γ es como en (3.3, p.18). Entonces

$$c_0 = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J\Big(\gamma(t)\Big) \leq \max_{t\in[0,\,1]} J\Big(\gamma_u(t)\Big) \leq J(u) \qquad \forall\, u \in \mathcal{N},$$

es decir,

$$c_0 \leq \inf_{u\in\mathcal{N}} J(u).$$

□

Observamos, por la Proposición anterior, que el punto crítico u_0 de J es de mínima energía en $\mathcal{N}$.

4.2 La solución de mínima energía no cambia de signo

Definición 4.4. Sean

$$u^+(x) := \max\{u(x), 0\},$$
$$u^-(x) := \max\{-u(x), 0\}.$$

Además cumplen que $u^\pm \geq 0$ y $u = u^+ - u^-$. Se puede ver que si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ entonces tambien u^+ y u^- estan en $H^1(\mathbb{R}^N)$, la demostración puede encontrarse en [2].

Proposición 4.5. *Si $u \in \mathcal{K}$ entonces u^+, $u^- \in \mathcal{N} \cup \{0\}$.*

Demostración. Como $u \in \mathcal{K}$ y $u^+ \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} 0 =\ & DJ(u)[u^+] \\ =\ & \int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u^+ \, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} u u^+ \, dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u u^+ \, dx \\ =\ & \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(\nabla u^+\Big)^2 \, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(u^+\Big)^2 \, dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u^+|^p \, dx \\ =\ & DJ(u^+)[u^+]. \end{aligned}$$

De forma análoga, como $u \in \mathcal{K}$ y $u^- \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} 0 = \ & DJ(u)[u^-] \\ = \ & \int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u^- \, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} u u^- \, dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u u^- \, dx \\ = \ & \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u^-\right)^2 dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(u^-\right)^2 dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u^-|^p \, dx \\ = \ & DJ(u^-)[u^-]. \end{aligned}$$

Por lo tanto u^+ y u^- están en $\mathcal{N} \cup \{0\}$ □

Proposición 4.6. *Sea $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ como en la Proposición 4.3, (p.36), entonces u_0 no cambia de signo.*

Demostración.

1. Si $u \in \mathcal{N}$ entonces $u \neq 0$. Como

$$0 = DJ(u)[u] = ||u||^2_{H^1} - ||u||^p_{L^p},$$

tenemos que $||u||^2_{H^1} = ||u||^p_{L^p}$. Entonces

$$J(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) ||u||^2_{H^1} > 0,$$

ya que $p > 2$ y $u \neq 0$.

2. Ahora demostraremos que u_0 no cambia de signo, procediendo por contradicción, es decir, supongamos que $u_0^+ \neq 0$ y $u_0^- \neq 0$. Como u_0^+ y u_0^- están en $\mathcal{N}$, por la Proposición 4.3, (p.36), y u_0 es ínfimo de J en $\mathcal{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned} J(u_0^+) \geq \ & J(u_0) > 0 \qquad\qquad y \\ J(u_0^-) \geq \ & J(u_0) > 0. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$
\begin{aligned}
J(u_0) &= \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u_0|^2 + u_0^2\right)dx - \frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u_0|^p\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^N\,:\,u_0(x)\geq 0\}}\left(|\nabla u_0|^2 + u_0^2\right)dx \quad + \frac{1}{2}\int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^N\,:\,u_0(x)<0\}}\left(|\nabla u_0|^2 + u_0^2\right)dx \\
&\quad - \frac{1}{p}\int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^N\,:\,u_0(x)\geq 0\}}|u_0|^p\,dx \qquad - \frac{1}{p}\int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^N\,:\,u_0(x)<0\}}|u_0|^p\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u_0^+|^2 + (u_0^+)^2\right)dx - \frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u_0^+|^p\,dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u_0^-|^2 + (u_0^-)^2\right)dx - \frac{1}{p}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u_0^-|^p\,dx \\
&= J(u_0^+) + J(u_0^-).
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
J(u_0) &= J(u_0^+) + J(u_0^-) \\
&\geq J(u_0) + J(u_0) \\
&= 2\,J(u_0).
\end{aligned}
$$

Lo cual es una contradicción porque $J(u_0) > 0$. Entonces

$$u_0^+ = 0 \quad \text{ó} \quad u_0^- = 0,$$

es decir, u_0 no cambia de signo.

□

4.3 Solución positiva

Para demostrar el siguiente teorema haremos uso del Principio Fuerte del Máximo, el cual se puede encontrar en el Teorema 3.5 de [6].

Teorema 4.7 (Strauss, 1977)**.** *Existe una solución clásica, positiva y radialmente simétrica de* $\left(\mathcal{P}\right)$.

Demostración. Sea u_0 la solución obtenida en el Teorema 3.20 (p. 30). Verifiquemos las hipótesis del Principio Fuerte del Máximo. Como u_0 es solución de $\left(\mathcal{P}\right)$

$$\begin{aligned} 0 &= \triangle u_0 + |u_0|^{p-2}u_0 - u_0 \\ &= \left(\triangle + |u_0|^{p-2} - 1\right)[u_0] \\ &= Lu_0, \end{aligned}$$

donde $c(x) := |u_0(x)|^{p-2} - 1$, y $L := \triangle + c$ es un operador elíptico. Tomemos, por Proposición 4.6, (p.40), que $u_0 \geq 0$.

Procedamos por contradicción, es decir, supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $u_0(x_0) = 0$. Entonces $c(x_0) = -1$. Usando la continuidad de c definimos el conjunto abierto Ω como sigue:

$$\Omega := \left\{x \in \mathbb{R}^N \,|\, c(x) < 0\right\}.$$

Sea Ω_0 la componente conexa de x_0. Entonces x_0 es un punto mínimo de u_0 en Ω_0 y

$$\begin{aligned} Lu_0 &= 0 \qquad \text{en} \quad \Omega_0 \\ \left.\begin{aligned} c &< 0 \qquad \text{en} \quad \Omega_0 \\ c &\geq -1 \end{aligned}\right\} & \; c \text{ es acotado.} \end{aligned}$$

La función λ del Teorema 3.5 de [6] en nuestra situación cumple $\lambda \equiv 1$. Como $\frac{c}{\lambda}$ es acotado y x_0 es un mínimo no positivo de u_0 en Ω_0, el Principio Fuerte del Máximo implica que u_0 es constante en Ω_0. En consecuencia,

$$u_0 \equiv 0 \qquad \text{en} \quad \Omega_0,$$

y entonces

$$c \equiv -1 \qquad \text{en} \quad \Omega_0.$$

Tenemos que analizar dos casos.

Si $\partial\Omega_0 = \emptyset$ entonces $\Omega_0 = \mathbb{R}^N$ y $u_0 \equiv 0$, lo cual es una contradicción ya que u_0 no era la solución trivial.

Si $\partial\Omega_0 \neq \emptyset$ entonces $c \equiv 0$ en $\partial\Omega_0$. Que contradice la definición de Ω_0 y la continuidad de c.

Por lo tanto $u_0 > 0$. $\square$

Bibliografía

[1] Adams, Robert A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York.

[2] Ackermann, Nils-Heye, *Notas del curso: Seminario de Análisis Matemático A. Análisis Aplicado a Ecuaciones Diferenciales Parciales*, 2007.

[3] Amann, Herbert, *Ordinary differential equations: An introduction to nonlinear analysis* Berlin: De Gruyter, 1990.

[4] Bartle, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley and Sons, New York 1995.

[5] Cerami, Giovanna, *Some Nonlinear Ellipic Problems in Unbounded Domains*, Milan Journal of Mathematics 74, pp. 47-77, 2006 Birkhäuser Verlag.

[6] Gilbarg-Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 2001.

[7] Lang, Serge, *Differential and Riemannian Manifolds*, New York, Springer, 1995.

[8] Willem, Michel, *Minimax Theorems*, Birkhäuser, 1996.