



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA NATURALEZA CUÁNTICA DE LA LUZ,
ANTICORRELACIÓN EXPERIMENTAL

TESIS

que para obtener el título de:

FÍSICO

presenta:

DAMIÁN PABLO SAN ROMÁN ALERIGI

Directora de tesis: Dra. Marcela Dolores Grether González



Marzo de 2009



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

<p>1. Datos del alumno Apellido paterno Apellido materno Nombre(s) Teléfono Universidad Facultad o escuela Carrera Número de cuenta</p>	<p>1. Datos del alumno San Román Alerigi Damián Pablo +52 (1) 55 1 881 6632 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Físico 404094195</p>
<p>2. Datos del tutor Grado Apellido paterno Apellido materno Nombre(s)</p>	<p>2. Datos del tutor Doctor Grether González Marcela Dolores</p>
<p>3. Datos del sinodal 1 Grado Apellido paterno Apellido materno Nombre(s)</p>	<p>3. Datos del sinodal 1 Doctor Velázquez Aguilar Víctor Manuel</p>
<p>4. Datos del sinodal 2 Grado Apellido paterno Apellido materno Nombre(s)</p>	<p>4. Datos del sinodal 1 Doctor Hirsch Ganievich Jorge Gustavo</p>
<p>5. Datos del sinodal 3 Grado Apellido paterno Apellido materno Nombre(s)</p>	<p>5. Datos del sinodal 3 Doctor Sánchez Ake Citali</p>
<p>6. Datos del sinodal 4 Grado Apellido paterno Apellido materno Nombre(s)</p>	<p>6. Datos del sinodal 1 Doctor Reyes Esqueda Jorge Alejandro</p>
<p>7. Datos del trabajo escrito Título Subtítulo Número de páginas Año</p>	<p>7. Datos del trabajo escrito La Naturaleza Cuántica de la luz, Anticorrelación Experimental. 161 p 2009</p>

EL TRABAJO EXPERIMENTAL Y DE TESIS SE EJECUTÓ EN EL LABORATORIO DE ÓPTICA AVANZADA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, BAJO LA DIRECCIÓN DE LA DRA. MARCELA DOLORES GREYER GONZÁLEZ, INVESTIGADORA Y COORDINADORA DEL LABORATORIO DE LUMINISCENCIA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM. SE CONTÓ CON LA COLABORACIÓN Y ASESORÍA DEL DR. VÍCTOR MANUEL VELAZQUEZ AGUILAR, INVESTIGADOR Y COORDINADOR DEL LABORATORIO DE LÁSERES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM, Y DEL DR. ENRIQUE LÓPEZ MORENO, INVESTIGADOR Y COORDINADOR DEL TALLER DE ÓPTICA AVANZADA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM.

PARA LA REVISIÓN DE ESTA TESIS CONTAMOS CON LA ASESORÍA DEL DR. JORGE GUSTAVO HIRSH GANIEVICH, INVESTIGADOR DEL INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM, DE LA DRA. CITLALI SÁNCHEZ AKE, INVESTIGADORA DEL CENTRO DE CIENCIAS APLICADAS Y DESARROLLO TECNOLÓGICO, UNAM, Y DEL DR. JORGE ALEJANDRO REYES ESQUEDA, INVESTIGADOR DEL INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM.

AGRADEZCO A PAPIIT IN117008 Y PAPIME 2009 POR EL APOYO OTORGADO.

UBI DUBIUM IBI LIBERTAS

*EXISTE UNA CIUDAD AL SUR DE UNA URBE IMPOSIBLE
DONDE LAS CIENCIAS Y LAS ARTES SE VIERTEN EN LOS CRISOLES DEL ALMA,
Y LA FILOSOFÍA Y EL HUMANISMO SE ESPARCE POR EL AIRE HASTA ALCANZAR EL CIELO,
DONDE, DESCRIBIR, DESCUBRIR Y ENTENDER LA NATURALEZA ES POSIBLE, Y HASTA COTIDIANO.*

A MIS PADRES POR BRINDARME LA OPORTUNIDAD DE ESTUDIAR AQUÍ

*A MIS PROFESORES POR LLEVARME A ESE MUNDO INCONMENSURABLE DE CONOCIMIENTOS Y ASOMBROS
A LA UNAM POR CONCEDERME EL HONOR DE CONTARME ENTRE SUS HABITANTES Y EGRESADOS
A MIS AMIGOS POR LA DICHA DE COMPARTIR CON ELLOS ESTE MUNDO DE DESCUBRIMIENTO
A MI HERMANO POR SU PACIENCIA Y APOYO INCONDICIONAL*

AGRADECIMIENTOS

AGRADEZCO A MI DIRECTORA DE TESIS, LA DRA. MARCELA DOLORES GREYER GONZÁLEZ, POR SU GUÍA, CONSEJO Y APOYO EN LA ELABORACIÓN DE ESTE TRABAJO., POR RECORDARME SIEMPRE LA IMPORTANCIA DE EXPERIMENTAR EN LA FÍSICA, Y POR SU PACIENCIA Y ESmero EN TODAS LAS HORAS DE DISCUSIONES Y REVISIONES.

AL DR. VÍCTOR MANUEL VELÁZQUEZ AGUILAR, LE AGRADEZCO SU APOYO INSUSTITUIBLE, SUS SUGERENCIAS Y ENSEÑANZAS INDISPENSABLES PARA REALIZAR ESTA TESIS; Y SU ORIENTACIÓN, MUNIFICENCIA Y REFLEXIONES ENRIQUECEDORAS A LO LARGO DE LOS ÚLTIMOS AÑOS. SUS CÁTEDRAS ME ABRIERON LA PUERTA AL MUNDO DE LA ÓPTICA CUÁNTICA.

AL DR. ENRIQUE LÓPEZ MORENO, LE AGRADEZCO SUS OBSERVACIONES Y CONSEJOS ESENCIALES EN EL DESARROLLO DE ESTE TRABAJO, Y TAMBIÉN SU GUÍA, GENEROSIDAD Y APOYO A LO LARGO DE ESTOS AÑOS. . SUS CLASES MAGISTRALES ME INTRODUJERON AL UNIVERSO DE LA ÓPTICA.

AL DR. JORGE GUSTAVO HIRSCH GANIEVICH, LE AGRADEZCO SUS REFLEXIONES E INDICACIONES QUE ME PERMITIERON PERFECCIONAR ESTE TRABAJO DE TESIS. ASÍ MISMO LE AGRADEZCO SU APOYO Y CONSEJO A LO LARGO DE ESTOS TRES ÚLTIMOS AÑOS.

A LOS SINODALES LA DRA. CITLALI SÁNCHEZ AKE Y EL DR. JORGE REYES ESQUEDA, LES AGRADEZCO LAS REVISIONES E INDICACIONES QUE ME PROVEYERON DE UNA ASESORÍA VALIOSAS PARA MEJORAR ESTE TRABAJO.

A TODOS LOS MIEMBROS DEL LABORATORIO DE ÓPTICA AVANZADA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNAM, LES AGRADEZCO TODAS LAS OPORTUNIDADES QUE ME HAN BRINDADO, ASÍ COMO SU APOYO, AMISTAD, ENTREGA Y ORIENTACIÓN, LAS CUALES HAN SIDO PARTE INDISPENSABLE PARA EXPANDIR Y AHONRAR MI APRENDIZAJE.

AGRADEZCO AL DR. ARTURO OLVERA CHÁVEZ, QUIEN ME INSTRUYÓ EN LA MATEMÁTICA APLICADA. SUS CONSEJOS HAN SIDO GUÍA INVALUABLE A LO LARGO DE TODA LA CARRERA. A LA DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE LE AGRADEZCO POR ORIENTARME EN EL MUNDO DE LA FÍSICA. A LA DRA. LUCIA MEDINA LE AGRADEZCO TODOS SUS CONSEJOS Y RECOMENDACIONES A LO LARGO DE LA CARRERA.

AGRADEZCO A MIS PADRES POR HABERME BRINDADO TODAS LAS OPORTUNIDADES Y FACILIDADES A LO LARGO DE ESTOS AÑOS DE ESTUDIO. SU PACIENCIA, SU ENTREGA, SUS ENSEÑANZA Y CONSEJOS SIN LOS CUALES TODO ESTO NO SERÍA POSIBLE. AGRADEZCO A MI HERMANO POR ESA INFANCIA COMPARTIDA DESARMANDO JUGUETES Y EXPLORANDO EL MUNDO LO QUE ME INCLINO A ESTUDIAR LA NATURALEZA.

AGRADEZCO A MIS AMIGOS: CARLOS ARGAEZ, DANIELA NAREZO, ELOÍSA ZEPEDA, LEÓN MARTÍNEZ, ANTONIO ALCÁNTARA, JAVIER IÑIGUEZ, RAUL GONZÁLEZ, EDNA HERNÁNDEZ, GUSTAVO ARMENDÁRIZ, POR TODAS ESAS TARDES HACIENDO TAREAS, POR LAS DISCUSIONES Y REFLEXIONES QUE NOS HICIERON, UNA Y OTRA VEZ, REVISAR TEORÍAS PARA FINALMENTE DESCUBRIR Y ENTENDER LA FÍSICA Y LA MATEMÁTICA DEL UNIVERSO. A ELISA, ROCÍO AGUILAR, PATRICIO LÓPEZ, PABLO MEDINA, BORIS OKOLODKOV, , JOSÉ GONZÁLEZ, JAVIER SABINES Y MUCHOS OTROS, PORQUE ME ENSEÑARON OTROS UNIVERSOS QUE AMPLIARON MI APRENDIZAJE.

MI AGRADECIMIENTO A TODOS ELLOS PORQUE SU AMISTAD, SUS CONSEJOS Y SUS ENSEÑANZAS ME PERMITIERON LLEGAR AQUÍ.

Damián Pablo San Román Alerigi. Ciudad de México, Marzo de 2009.

**LA NATURALEZA CUÁNTICA DE LA LUZ,
ANTICORRELACIÓN EXPERIMENTAL**

RESUMEN

Hemos llevado a cabo un experimento cuyos resultados no pueden ser explicados bajo ninguna descripción clásica ondulatoria del campo electromagnético. Los resultados son consistentes con la descripción mecánico cuántica para un fotón que incide en un divisor de haz, por tanto el experimento prueba la existencia del fotón.

Nuestro estudio se basa en medir la función de coherencia de segundo orden, que para el caso cuántico cumple que $g^{(2)}(\tau = 0) < 1$. Calculamos la función de coherencia de segundo orden con coincidencias triples (salidas reflejada, transmitida y testigo) y dobles (salidas reflejada y transmitida).

La desigualdad entre el número de coincidencias entre las salidas del divisor de haz y las coincidencias triples es: $N_{GTR} \leq N_{TR}$. Además encontramos que ambas coincidencias pueden ser explicadas por las coincidencias accidentales u oscuras del sistema de detección y conteo de coincidencias.

Utilizando las coincidencias triples, N_{GTR} , nuestra mejor medida es $g_{GTR}^{(2)}(t_i = 0.2402s, \tau = 0) = 0.00870 \pm 1.8 \times 10^{-5}$, que viola la desigualdad clásica, $g^{(2)}(t_i, \tau = 0) \geq 1$, por 56307 desviaciones estándar. Para el caso de sustitución directa por N_{TR} la mejor medición es $g_{TR}^{(2)}(t_i = 0.2402s, \tau = 0) = 0.0436 \pm 66.48 \times 10^{-4}$ que viola la desigualdad clásica por 144 desviaciones estándar.

Para todos los casos estudiados $g^{(2)}(0) \ll 1$, por lo que podemos asegurar que el fenómeno observado es puramente mecánico cuántico. Así, probamos la existencia del fotón.

INDICE

	1	
1. Introducción		25
	2	
2. Fundamentos		31
2.1. Cuantización canónica de un campo transversal		31
2.2. Espectro de energía fotones		37
2.3. Estados de Fock		38
2.4. Momento del campo cuantizado		39
2.5. Momento angular del campo cuantizado		40
2.6. Fluctuaciones del Vacío		40
2.7. Fluctuaciones de campos promediados localmente		41
2.8. Divisor de haz		43
2.8.1. El efecto del vacío		43
2.8.2. Tratamiento cuántico de un divisor de haz		46
2.8.3. Correlación de fotones		47
	3	
3. Correlación y Grado de Coherencia		53
3.1. Primer experimento con fotones individuales el experimento de P. Grangier, G. Roger y A. Aspect		53
3.2. Función de correlación		54
3.3. Teoría semi-clásica de la foto detección		
3.3.1. Probabilidad semi-clásica de foto detección		58
3.3. Teoría semi-clásica de la foto detección		56
3.4. Detección del campo cuántico		61
3.4.1. Densidad de fotones		63
3.5. Probabilidad de foto detección conjunta		64
3.6. Probabilidad de detecciones múltiples para estado iniciales arbitrarios		65
3.7. Función de coherencia de segundo orden		67
3.7.1. Función de coherencia de segundo orden para campos clásicos		67
3.7.2. Función de coherencia de segundo orden para las salidas de un divisor de haz		70
3.7.3. Campos uní modales y función de coherencia de segundo orden para campos cuánticos		71
3.7.4. Breve paréntesis sobre bunching y antibunching		73
3.8. Una nueva mirada al experimento de Grangier <i>et al.</i>		77
	4	
4. Óptica no lineal y fenómenos relacionados		81
4.1. SPDC tipo I		81
4.2. Descripción cuántica de la conversión paramétrica descendente		84
4.2.1. Estadística de la producción de fotones		85
4.3. Cristales Beta Bario Borato (BBO)		87
	5	
5. Experimento		93
5.1. Diagrama del experimento actualizado		93
5.2. Contando coincidencias por pares		94

5.2.1. Coincidencias triples a partir de coincidencias dobles	94
5.2.2. Coincidencias pares sin <i>testigo</i>	96
5.3. Error experimental estadístico, teoría	97
5.3.1. Error experimental de la función de correlación	99
5.4. Descripción técnica de montaje del experimento	100
5.4.1. Sistema de bombeo para cristal no lineal	100
5.5. Módulos de conteo de fotones o SPCM	102
5.6. Contador de coincidencias	105
5.7. Caracterización del diseño experimental	108
5.7.1. Ruido en el SPCM	108
5.7.2. Determinación del camino de fotones infrarrojos	109
5.7.3. Error por coincidencias accidentales	111
5.7.4. Características del divisor de haz	111
5.7.5. Diseño experimental final	112
5.7.6. Posibilidad de traslape	112
5.7. Contando coincidencias por pares	
5.7.3. Error por coincidencias accidentales	111

6

6. Resultados	115
6.1. Recapitulación	115
6.2. Primeros resultados	116
6.2.1. Análisis del divisor de haz	116
6.2.2. Normalizando los datos de la primera experiencia	118
6.3. Coincidencias triples	121
6.4. Segundo orden de coherencia	124
6.4.1. <i>Diez muestras, $g_{2ti} = 7.4945s, \tau = 0$</i>	126
6.4.2. <i>Treinta y seis muestras, $g_{2ti} = 2.081s, \tau = 0$</i>	127
6.4.3. <i>Ochenta muestras, $g_{2ti} = 0.9353s, \tau = 0$</i>	128
6.4.4. <i>Mil cuatrocientos cuarenta muestras, $g_{2ti} = 0.0520s, \tau = 0$</i>	129
6.5. Conclusiones	130

7

7. Conclusiones	133
-----------------	-----

A

Apéndices	
Apéndice A. Operadores de campo	139
Apéndice B. Orden temporal y normal	139
Apéndice C. Función general de correlación	140
Apéndice D. Grado de coherencia	141
Apéndice E. Descripción y características de los sistemas de detección de diodo	142

B

7. Bibliografía	155
-----------------	-----

INTRODUCCIÓN

Introducción

La noción de la luz compuesta por partículas se remonta al siglo XI [1] cuando el naturalista arábigo Alhazen en su tratado sobre la óptica propuso que los haces de luz eran cadenas de partículas que carecían de cualquier propiedad sensible, salvo tener energía. Esta idea fue continuada por Newton, sin embargo, resultó complicado explicar fenómenos como refracción, difracción, birrefringencia, etc.; sin recurrir a la idea de la luz como una onda.

El concepto de luz como una onda adquiere formalismo matemático cuando Maxwell en 1865 [2] propone sus ya célebres ecuaciones, que dan razón de la relación entre el campo magnético y eléctrico, dando lugar a las ondas electromagnéticas. La teoría de Maxwell fue corroborada experimentalmente por Hertz en 1888 [3] al detectar ondas de radio.

Las ecuaciones de Maxwell, la teoría electromagnética y óptica clásica, suponen que la energía de la onda depende de la intensidad y no de la frecuencia. No obstante, numerosos experimentos realizados hacia fines del siglo XIX sugerían que la energía transferida a un átomo por la luz depende enteramente de la frecuencia y no de la intensidad. Por ejemplo, ciertas reacciones químicas sólo eran posibles si la luz incidente era de una frecuencia adecuada sin importar la intensidad. Otros experimentos como el efecto fotoeléctrico y la radiación de cuerpo negro apuntaban a una explicación similar.

En los albores del siglo XX, al intentar explicar la radiación de cuerpo negro, Max Plank llegó a la conclusión que la energía de cualquier sistema que absorba o emita radiación electromagnética a una frecuencia dada ν debe ser un múltiplo entero del *quantum* de energía de la radiación [4], dando lugar a la famosa relación entre energía y frecuencia de la radiación electromagnética

$$E = h\nu$$

En 1905 Einstein propone que el efecto fotoeléctrico, al igual que el equilibrio térmico entre la materia y la radiación electromagnética, requiere que la energía de los átomos o de la radiación incidente esté *cuantizada*.

Con frecuencia se presupone que el efecto fotoeléctrico es una evidencia de la cuantización del campo electromagnético. Sin embargo, el efecto fotoeléctrico puede entenderse al cuantizar los niveles de energía de los átomos y tratar a la luz incidente como una onda clásica; ésto fue demostrado por Lamb y Scully en 1960 [5]. El efecto fotoeléctrico *sugiere* que el campo eléctrico se encuentra cuantizado pero no da una prueba contundente de este fenómeno.

Así surge la idea del *fotón*, que como hemos descrito se trata del *quantum de energía electromagnética*. Término acuñado por Lewis en 1926 [6], quién propone que el *fotón* no tiene estructura interna y por tanto es indivisible. Es decir, el *fotón* es un quantum de energía de la radiación electromagnética a una frecuencia ν , donde la energía de dicho quantum, y por tanto la energía mínima del campo electromagnético a dicha frecuencia es $E = h\nu$ [7,11].

Una de las características más importantes del *fotón* es que no tiene masa pero sí transfiere momento, como fue demostrado por Compton [8] ($p = \hbar k = h/\lambda$); no tiene carga eléctrica [9], como demostró Kubychev.

A pesar de los experimentos desarrollados, hasta la década de 1970 ninguno de ellos era capaz de demostrar fehacientemente que el *fotón* existía. Todos los experimentos mostraban fenómenos cuánticos en la interacción de la luz con la materia, sin embargo, ésto no probaba la existencia del fotón pues puede desarrollarse un modelo, complejo, que en teoría permitiera reproducir los resultados medidos hasta ese momento.

Entre las décadas de 1970 y 1980 fueron propuestos y realizados diferentes experimentos que a partir de observación de correlaciones demostraron que la cuantización es una propiedad intrínseca de la luz; y que no se trata de pulsos ultra-cortos de radiación electromagnética, que no se expande al propagarse ni se divide al encontrar un divisor de haz. [10,11, 12].

Un experimento que demuestre la existencia del *fotón* debe ser tal, que la única explicación, a los resultados del experimento, requiera una descripción mecánico cuántica del campo, i.e. el *fotón* existe si el resultado de un experimento no puede ser explicado usando una teoría clásica del campo electromagnético.

Para llevar a cabo cualquiera de estos experimentos es necesario contar con una fuente cuántica de luz. Las fuentes se pueden clasificar en función de su estadística [13], es decir a partir de la desviación estándar de la distribución de número de fotones. En general existen tres posibilidades:

- Gaussiana (fuentes térmicas, parcialmente coherentes e incoherentes); $\Delta n > \sqrt{\bar{n}}$.
- Poissoniana (láseres y fuentes coherentes); $\Delta n = \sqrt{\bar{n}}$.
- Sub Poissoniana (fuentes cuánticas: cristales de conversión paramétrica descendente, centros de color, puntos cuánticos, etc.); $\Delta n < \sqrt{\bar{n}}$

Considere un haz cuya distribución temporal de fotones sea homogénea, es decir, en el que los fotones se encuentran perfectamente espaciados en intervalos Δt idénticos. Si utilizáramos un contador de fotones para saber el número de cuentas N en un tiempo T , encontraremos un valor entero determinado por:

$$N = \text{Int} \left(\frac{T}{\Delta t} \right)$$

Por lo tanto, la probabilidad $P(n)$ de observar $\bar{n} = N$ fotones con desviación estándar $\Delta n = 0$, para esta fuente, será:

$$P(n = \bar{n} = N) = 1$$

Los haces con las características anteriores se conocen como *estados de número de fotones* o *estados de Fock*, estos son las formas más puras de luz sub Poissoniana.

Una fuente de fotones individuales no es posible con una fuente Poissoniana atenuada hasta el punto en el que $\bar{n} = 1$, puesto que la probabilidad de observar 1 fotones en un tiempo T es:

$$P(n = 1) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} = \frac{1}{e}$$

Recuerde que para una fuente Poissoniana cuya $\bar{n} = 1$ la desviación estándar es $\Delta n = 1$, lo que implica que para una detección existe la posibilidad de detectar dos fotones, en otras cero y otras uno.

Lo anterior resalta la importancia de contar con fuentes no clásicas, es decir, fuentes sub Poissonianas, para demostrar la existencia del fotón.

En 1986, Grangier, Roger y Aspect realizaron un experimento en el cuál examinaron las correlaciones entre las salidas transmitida y reflejada de un divisor de haz 50/50. Citando a los experimentadores "*un fotón solo puede detectarse una vez*" [10]. Por lo tanto, si un *quantum* de luz incide en un divisor de haz, debe ser detectado a la salida transmitida o reflejada, pero no en ambas.

Grangier *et al.* midieron menos coincidencias que las predichas por la teoría clásica de la luz, violando una desigualdad clásica por trece desviaciones estándar, y demostraron que el haz incidente en el divisor de haz estaba descrito por un estado de un solo fotón [10].

Uno de los principales retos para realizar este experimento es tener un campo que realmente tenga un solo fotón que incida en el divisor de haz; un haz que en promedio contenga un solo fotón (o menos), como un estado coherente atenuado, no es suficiente [11].

Otro de los retos es asegurarse de que efectivamente se está midiendo dicho fotón, para ello hemos tomado ventaja de los adelantos tecnológicos de los últimos 22 años, desarrollamos una técnica de conteo de coincidencias triples a partir de coincidencias dobles, usamos una fuente SPDC que produce $\sim 30\,000$ pares de fotones por segundo, es decir $\sim 60\,000$ fotones por segundo.

Nuestro experimento se realizo en un tiempo de 74s y violamos la desigualdad clásica por 1830 desviaciones estándar. El experimento y los resultados son explicados por una descripción mecánico cuántica del campo que incide en un divisor de haz

FUNDAMENTOS

Cuantización del campo electromagnético transversal

Espectro de energía para el campo cuantizado

Momento del campo cuantizado

Momento angular del campo cuantizado

Fluctuaciones del vacío

Teoría cuántica y clásica de un divisor de haz

Fundamentos

El propósito de este capítulo es proporcionar un resumen sobre la teoría de la cuantización del campo electromagnético y su interacción con algunos dispositivos ópticos, como el divisor de haz.

Es importante conocer la teoría fundamental para la existencia del fotón. Para ello nos avocaremos, principalmente, a estudiar la cuantización del campo electromagnético; las fluctuaciones de energía del vacío y finalmente analizaremos el comportamiento cuántico de un divisor de haz.

2.1. Cuantización canónica de un campo transversal (Campo electromagnético en tres dimensiones) [1]

De electrodinámica sabemos que el campo electromagnético libre se puede representar por el vector transversal de potencial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ en la norma de Coulomb, que satisface la ecuación homogénea

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

Eq. 1

Y la condición de divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Eq. 2

Así, podemos reescribir el campo eléctrico y magnético en función del vector transversal de potencial

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

Eq. 3

Note que podemos expandir $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ en una base de ondas planas en una cavidad de arista L usando Fourier, obtenemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}}} \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{A}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

Eq. 4

Donde el vector de onda \mathbf{k} tiene los componentes

$$\begin{aligned}k_1 &= 2\pi n_1/L, & n_1 &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\k_2 &= 2\pi n_2/L, & n_2 &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\k_3 &= 2\pi n_3/L, & n_3 &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

Eq. 5

Dadas las condiciones sobre $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, al ser una cantidad real, debe cumplir

$$\mathcal{A}_{-\mathbf{k}}(t) = \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^*(t)$$

Eq. 6

Y de la condición de divergencia establecida en la Eq. 2 se llega a la ecuación de onda

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2\right)\mathcal{A}_{\mathbf{k}}(t) = 0, \quad \omega_{\mathbf{k}} = ck$$

Eq. 7

De lo anterior encontramos la solución general para $\mathcal{A}_{\mathbf{k}}(t)$

$$\mathcal{A}_{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{c}_{\mathbf{k}}e^{-i\omega t} + \mathbf{c}_{\mathbf{k}}^*e^{i\omega t}$$

Eq. 8

Resulta ventajoso escribir los vectores $\mathbf{c}_{\mathbf{k}}$ en una base ortogonal de tal suerte que las condiciones anteriores se cumplan automáticamente. Puesto que el campo electromagnético es una onda transversal usamos una base de dos vectores $\boldsymbol{\varepsilon}_{k1}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}_{k2}$, en general vectores complejos que representan dos estados ortogonales de polarización, que cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{ks} &= 0, (s = 1, 2) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{ks}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{ks'} &= \delta_{ss'}, (s, s' = 1, 2) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{k1} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{k2} &= \frac{\mathbf{k}}{k} = \boldsymbol{\kappa}\end{aligned}$$

Eq. 9

Que representan transversalidad, orto-normalidad y finalmente

$$\mathbf{c}_{\mathbf{k}} = \sum_{s=1}^2 \mathbf{c}_{ks} \boldsymbol{\varepsilon}_{ks}$$

Eq. 10

Dichos vectores base se pueden asociar con un vector \mathbf{k} particular, para el cual se conocen los ángulos polar θ y acimutal ϕ . Podemos escribir los vectores base que representan dos polarizaciones lineales ortogonales como

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k1} = \cos \theta \cos \phi \mathbf{x}_1 + \cos \theta \sin \phi \mathbf{y}_1 - \sin \theta \mathbf{z}_1$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k2} = -\sin \phi \mathbf{x}_1 + \cos \phi \mathbf{y}_1$$

Eq. 11

Los vectores \mathbf{x}_1 , \mathbf{y}_1 y \mathbf{z}_1 apuntan en la dirección de los ejes del sistema coordenado. Por otro lado los vectores base complejos son

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k1} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\cos \theta \cos \phi - i \sin \phi)\mathbf{x}_1 + (\cos \theta \sin \phi + i \cos \phi)\mathbf{y}_1 - \sin \theta \mathbf{z}_1]$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k2} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(i \cos \theta \cos \phi - \sin \phi)\mathbf{x}_1 + (i \cos \theta \sin \phi + \cos \phi)\mathbf{y}_1 - i \sin \theta \mathbf{z}_1]$$

Eq. 12

Que representan la polarización en la base circular derecha e izquierda respectivamente.

Si sustituimos la Eq. 10 en la Eq. 8, haciendo uso de la Eq. 4, obtenemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0^2 L^2} \sum_{\mathbf{k}, s} [\mathbf{c}_{k s} \boldsymbol{\varepsilon}_{k s} e^{-i\omega t} + \mathbf{c}_{-\mathbf{k} s}^* \boldsymbol{\varepsilon}_{-\mathbf{k} s}^* e^{i\omega t}] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \frac{1}{\varepsilon_0^2 L^2} \sum_{\mathbf{k}, s} [u_{k s}(t) \boldsymbol{\varepsilon}_{k s} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + u_{k s}^* \boldsymbol{\varepsilon}_{k s}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}]$$

Eq. 13

Donde

$$u_{k s}(t) = \mathbf{c}_{k s} e^{-i\omega t}$$

Eq. 14

La Eq. 13 es una expansión de $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ en termino del vector fundamental $\boldsymbol{\varepsilon}_{k s} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ con una amplitud compleja $u_{k s}(t)$. Cada modo esta etiquetado por un vector de onda \mathbf{k} y la polarización s . Dicho modo satisface la ecuación de Helmholtz y la amplitud satisface la ecuación dictada por la Eq. 7.

Haciendo uso de lo anterior podemos escribir las expansiones para el campo eléctrico y el magnético

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0^2 L^3} \sum_{\mathbf{k}, s} \omega [u_{\mathbf{k}s}(t) \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - u_{\mathbf{k}s}^* \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}]$$

Eq. 15

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0^2 L^3} \sum_{\mathbf{k}, s} [u_{\mathbf{k}s}(t) (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - u_{\mathbf{k}s}^* (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s})^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}]$$

Eq. 16

Para un campo confinado en un volumen L^3 , la energía está dada por el Hamiltoniano,

$$H = \frac{1}{2} \int_{L^3} \left[\varepsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right] d^3r$$

Eq. 17

Haciendo uso de las relaciones

$$\int_{L^3} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d^3r = L^3 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

$$(\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^*) \cdot (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}) = k^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} = k^2 \delta_{ss'}$$

Eq. 18

Sustituyendo de las Eq. 15 y Eq. 16 obtenemos para la energía

$$H = 2 \sum_{\mathbf{k}, s} \omega^2 [u_{\mathbf{k}s}(t)]^2$$

Nos gustaría, ahora, reescribir la energía a partir de las variables canónicas reales $q_{\mathbf{k}s}(t)$ y $p_{\mathbf{k}s}(t)$ que se definen como

$$q_{\mathbf{k}s}(t) = [u_{\mathbf{k}s}(t) + u_{\mathbf{k}s}^*(t)]$$

Eq. 19

$$p_{\mathbf{k}s}(t) = -i\omega [u_{\mathbf{k}s}(t) - u_{\mathbf{k}s}^*(t)]$$

Eq. 20

Que siguen las relaciones

$$\frac{\partial q_{\mathbf{k}s}(t)}{\partial t} = p_{\mathbf{k}s}(t)$$

Eq. 21

$$\frac{\partial p_{ks}(t)}{\partial t} = -\omega^2 q_{ks}(t)$$

Eq. 22

Así podemos escribir el Hamiltoniano en función de las variables canónicas

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k,s} [p_{ks}^2(t) + \omega^2 q_{ks}^2(t)]$$

Eq. 23

Para describir un campo electromagnético usando mecánica cuántica debemos asociar operadores en el espacio de Hilbert, para las variables dinámicas. Así las variables canónicas reales tienen operadores definidos, como $\hat{q}_{ks}(t)$ y $\hat{p}_{ks}(t)$ respectivamente; y por los postulados de la mecánica cuántica encontramos sus relaciones de conmutación

$$[\hat{q}_{ks}(t), \hat{p}_{k's'}] = i\hbar \delta_{kk'}^3 \delta_{ss'}$$

$$[\hat{q}_{ks}(t), \hat{q}_{k's'}] = 0$$

$$[\hat{p}_{ks}(t), \hat{p}_{k's'}] = 0$$

Eq. 24

Entonces el Hamiltoniano del campo cuantizado es

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{k,s} [\hat{p}_{ks}^2(t) + \omega^2 \hat{q}_{ks}^2(t)]$$

Eq. 25

En término de estos operadores canónicos podemos definir los nuevos operadores no-Hermitianos

$$\hat{a}_{ks}(t) = \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}} [\omega \hat{q}_{ks}(t) + i\hat{p}_{ks}(t)]$$

Eq. 26

$$\hat{a}_{ks}^\dagger(t) = \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}} [\omega \hat{q}_{ks}(t) - i\hat{p}_{ks}(t)]$$

Eq. 27

E invirtiendo obtenemos los operadores originales

$$\hat{q}_{ks}(t) = \left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2} [\hat{a}_{ks}(t) + \hat{a}_{ks}^\dagger(t)]$$

Eq. 28

$$\hat{p}_{ks}(t) = i \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^{1/2} [\hat{a}_{ks}^\dagger(t) - \hat{a}_{ks}(t)]$$

Eq. 29

Los nuevos operadores no Hermitianos siguen las reglas de conmutación

$$[\hat{a}_{ks}(t), \hat{a}_{k's'}^\dagger(t)] = \delta_{kk'}^3 \delta_{ss'}^3$$

$$[\hat{a}_{ks}(t), \hat{a}_{k's'}(t)] = 0$$

$$[\hat{a}_{ks}^\dagger(t), \hat{a}_{k's'}^\dagger(t)] = 0$$

Eq. 30

Sustituyendo las relaciones dadas por las Eq. 28 y Eq. 29 en la Eq. 25 obtenemos

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{ks} \hbar\omega [\hat{a}_{ks}(t)\hat{a}_{ks}^\dagger(t) + \hat{a}_{ks}^\dagger(t)\hat{a}_{ks}(t)]$$

Eq. 31

Simplificando, recordando las propiedades de conmutación, reescribimos el operador Hamiltoniano para el campo electromagnético cuantizado como

$$\hat{H} = \sum_{ks} \hbar\omega [\hat{a}_{ks}^\dagger(t)\hat{a}_{ks}(t) + \frac{1}{2}]$$

Eq. 32

La contribución $\frac{1}{2}\hbar\omega$ es la conocida contribución de orden cero, es decir que aún en el estado base hay una energía asociada. Esto tiene como consecuencia que para un conjunto dado de estados no ligados se tiene una contribución infinita a la energía. Se puede argumentar que ondas infinitamente largas no tienen sentido físico y que para todo problema real la Eq. 32 converge. Sin embargo si tenemos una onda con una frecuencia ω suficientemente grande el término $\frac{1}{2}\hbar\omega$, al sumarse sobre todo el espacio de números de onda y polarizaciones, daría una energía mayor que la de todo el universo.

El principio de correspondencia nos exige que los resultado derivados vía la mecánica cuántica concuerden con aquellos de la teoría clásica cuando la primera tiende al límite clásico, por ejemplo cuando las excitaciones se vuelven muy grandes, en el límite clásico, el termino $\frac{1}{2}\hbar\omega$ es muy

pequeño comparado con el término $\hat{a}_{ks}^\dagger(t)\hat{a}_{ks}(t)$, por lo que el Hamiltoniano en el límite clásico es

$$\hat{H}_{lim} = \sum_k \sum_s \hbar\omega \hat{a}_{ks}^\dagger \hat{a}_{ks}$$

Eq. 33

2.2. Espectro de energía; fotones

El operador Hermitiano $\hat{a}_{ks}^\dagger \hat{a}_{ks}$, producto de los operadores de creación y aniquilación, es importante y lo denotamos por \hat{n}_{ks} , el operador de número. De las relaciones de conmutación definidas en la Eq. 30 derivamos la siguiente relación

$$[\hat{a}_{ks}, \hat{n}_{k's'}] = \hat{a}_{ks} \hat{a}_{k's'}^\dagger \hat{a}_{k's'} - \hat{a}_{k's'}^\dagger \hat{a}_{k's'} \hat{a}_{ks} = [\hat{a}_{ks}, \hat{a}_{k's'}^\dagger] \hat{a}_{k's'} = \hat{a}_{ks} \delta_{kk'}^3 \delta_{ss'}$$

Eq. 34

Y análogamente

$$[\hat{a}_{k's'}^\dagger, \hat{n}_{k's'}] = -\hat{a}_{k's'}^\dagger \delta_{kk'}^3 \delta_{ss'}$$

Eq. 35

Si n_{ks} es un valor propio de \hat{n}_{ks} y el estado propio normalizado es $|n_{ks}\rangle$, entonces tenemos

$$\hat{n}_{ks} |n_{ks}\rangle = n_{ks} |n_{ks}\rangle$$

Eq. 36

Es sencillo demostrar [1,4] que al aplicar los operadores de creación o aniquilación sobre el estado propio normalizado $|n_{ks}\rangle$ se obtiene

$$\hat{a}_{ks}^\dagger |n_{ks}\rangle = (n_{ks} + 1)^{1/2} |n_{ks} + 1\rangle$$

Eq. 37

$$\hat{a}_{ks} |n_{ks}\rangle = (n_{ks})^{1/2} |n_{ks} - 1\rangle$$

Eq. 38

Note que si $|m_{ks}\rangle$ es cualquier estado propio de \hat{n}_{ks} , que pertenece al valor propio m_{ks} , tenemos para el valor del vector $\hat{a}_{ks} |m_{ks}\rangle$

$$0 \leq \langle m_{ks} | \hat{a}_{ks}^\dagger \hat{a}_{ks} | m_{ks} \rangle = m_{ks}$$

Eq. 39

Es decir que el valor más bajo posible para el valor propio será cero, esto se resume en la condición

$$\hat{a}_{ks} | 0_{ks} \rangle = 0$$

Eq. 40

2.3. Estados de Fock

Todos los operadores de número \hat{n}_{ks} forman una base completa de observables conmutables para el campo. Cada operador corresponde a modos diferentes k, s que operan en distintos sub-espacios de Hilbert. Podemos construir un vector de estado característico del campo completo al tomar el producto de los vectores de estado sobre todos los modos, es decir

$$\prod_{k,s} | n_{ks} \rangle$$

Tal estado es conocido como *Estado de Fock* del campo electromagnético y se caracteriza por el conjunto de números de ocupación $n_{k_1 s_1}, n_{k_2 s_2}, \dots$ para todos los modos. En la literatura generalmente encontramos una notación abreviada para el estado de Fock, $\{n\}$

$$|\{n\}\rangle = \prod_{k,s} | n_{ks} \rangle$$

Eq. 41

Definimos el operador total de número de fotones \hat{n} como la suma del número de fotones sobre todos los modos.

$$\hat{n}|\{n\}\rangle = \sum_{k,s} \hat{n}_{ks}|\{n\}\rangle = \left(\sum_{k,s} n_{ks} \right) |\{n\}\rangle = n|\{n\}\rangle$$

Eq. 42

Por lo tanto el estado de Fock $|\{n\}\rangle$ es un estado propio de \hat{n} y su valor propio es el número total de ocupación n .

2.4. Momento del campo cuantizado

Sabemos de electrodinámica básica que el momento lineal \mathbf{P} del campo es proporcional a la integral del vector de Poynting que se puede expresar en términos de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \int_{L^3} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) d^3r$$

Se puede probar que los operadores correspondientes a $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ son

$$\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0} \right)^{1/2} [\hat{a}_{\mathbf{k}s}(0) \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + h.c.]$$

Eq. 43

$$\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0} \right)^{1/2} [i\hat{a}_{\mathbf{k}s}(0) \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + h.c.]$$

Eq. 44

$$\widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \left(\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0} \right)^{1/2} [i\hat{a}_{\mathbf{k}s}(0) (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + h.c.]$$

Eq. 45

Por simetría encontramos

$$\widehat{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{L^3} [\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \times \widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) - \widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) \times \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)] d^3r$$

Eq. 46

Sustituyendo las expansiones para los operadores de campo electromagnético en término de los operadores de creación y aniquilación y simplificando encontramos

$$\widehat{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \hbar k (\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s} + \hat{a}_{\mathbf{k}s} \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger)$$

Eq. 47

Recordando las reglas de conmutación tenemos

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \hbar \mathbf{k} \left(\hat{n}_{\mathbf{k}s} + \frac{1}{2} \right)$$

Eq. 48

Note que hay una gran similitud entre la Eq. 48 y la Eq. 32 salvo la diferencia obvia entre ω y \mathbf{k} ambas son la misma. Dado que $\hat{\mathbf{P}}$ y \hat{H} se pueden escribir en término del operador de número, conmutan.

2.5. Momento angular del campo cuantizado

En electrodinámica clásica sabemos que el momento angular $J(\mathbf{r}_0)$ del campo electromagnético en el vacío respecto al punto \mathbf{r}_0 esta dado por la integral de la densidad de momento alrededor de \mathbf{r}_0

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}_0) = \int_{L^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] d^3r = \mathbf{J}(0) - \mathbf{r}_0 \times \mathbf{P}$$

Eq. 49

El operador de momento angular $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_0)$ debe ser Hermitiano así por simetría con la Eq. 49 podemos escribir

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{L^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times [\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \times \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) - \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) \times \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)] d^3r = \hat{\mathbf{J}}(0) - \mathbf{r}_0 \hat{\mathbf{P}}$$

Eq. 50

2.6. Fluctuaciones del Vacío

Denotemos el estado vacío por $|vac\rangle$, correspondiente al estado de menor energía. Sabemos que el valores esperados de los operadores de creación y aniquilación son cero para $|vac\rangle$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s} |vac\rangle = \langle vac | \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger = 0$$

Eq. 51

Cualquier operador de campo $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t)$, ya sea campo eléctrico, magnético o el potencial; se puede expandir en función de los operadores de creación y aniquilación

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s l(\omega) \hat{a}_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + h. c.$$

Eq. 52

Donde $l(\omega)$ es una función que varía lentamente en razón de la frecuencia. Así para $\widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t)$ se debe cumplir que

$$\langle vac | \widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t) | vac \rangle = 0$$

Eq. 53

Sin embargo el valor esperado del cuadrado del operador de campo no es cero como demostraremos a continuación. Esto implica que hay fluctuaciones del campo electromagnético aún en el estado de energía más bajo. Si usamos la expansión en modos encontramos

$$\langle vac | \widehat{\mathbf{F}}^2(\mathbf{r}, t) | vac \rangle = \frac{1}{L^3} \sum_{ks} \sum_{k's'} l(\omega) l^*(\omega) \langle vac | \hat{a}_{ks} \hat{a}_{k's'}^\dagger | vac \rangle (\boldsymbol{\epsilon}_{ks} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{k's'}^*) \times e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} - (\omega - \omega')t}$$

Eq. 54

Dado que por reglas de conmutación tenemos

$$\langle vac | \hat{a}_{ks} \hat{a}_{k's'}^\dagger | vac \rangle = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3 \delta_{ss'}$$

Eq. 55

La Eq. 54 se puede reescribir como

$$\langle vac | \widehat{\mathbf{F}}^2(\mathbf{r}, t) | vac \rangle = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s |l(\omega)|^2 = \frac{2}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} |l(\omega)|^2 \rightarrow \frac{2}{(2\pi)^3} \int |l(\omega)|^2 d^3k \neq 0$$

Eq. 56

Puesto que $\langle vac | (\Delta \widehat{\mathbf{F}})^2 | vac \rangle = \langle vac | \widehat{\mathbf{F}}^2 | vac \rangle$, donde $\Delta \widehat{\mathbf{F}} = \widehat{\mathbf{F}} - \langle \widehat{\mathbf{F}} \rangle$, la desviación estándar es distinta de cero. Esto implica que hay fluctuaciones alrededor del estado vacío.

Recordemos las relaciones establecidas en las Eq. 34 y Eq. 35, en ellas el vector de estado $\widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t)$ no conmuta con el operador de número \hat{n}_{ks} y por ende tampoco conmuta con el operador Hamiltoniano \widehat{H} . Por ello, para cualquier estado con energía definida, por ejemplo el vacío; existe una dispersión en $\widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t)$ tal que $\langle (\Delta \widehat{\mathbf{F}})^2 \rangle_{vac}$ no es cero. Debemos recordar que las variables canónicas del oscilador armónico continúan fluctuando en el estado base y cada \mathbf{k}, s modo del campo exhibe esta naturaleza cuántica

2.7. Fluctuaciones de campos promediados localmente

Sabemos que no es posible medir $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ en un punto determinado en el espacio y un instante determinado de tiempo. En general medir implica un promedio temporal sobre un punto. Al

hacerlo sobre una región finita, encontramos que las contribuciones de las frecuencias altas se integran a cero y se obtiene un resultado finito.

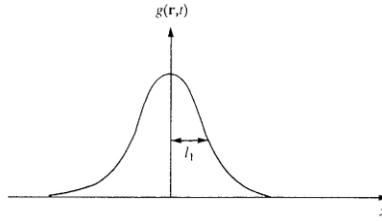


Ilustración 1. Propuesta para la variación de $g(\mathbf{r}, t)$

Sea $g(\mathbf{r}, t)$ la función promedio, tal que es cero afuera de una región pequeña del espacio-tiempo, con dimensiones lineales (l_1, l_2, l_3, t_0) . Asumimos que dicha función se encuentra normalizada

$$\int g(\mathbf{r}, t) d^3 r dt = 1$$

Eq. 57

Podemos expresar el efecto físico del campo, en su dominio de espacio tiempo, alrededor de un punto (\mathbf{r}, t) , utilizando la función $g(\mathbf{r}, t)$ y el teorema de convolución, para obtener

$$\widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t) = \int \widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t + t') g(\mathbf{r}', t') d^3 r' dt'$$

Eq. 58

La ecuación anterior puede interpretarse como un promedio local de $\widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t)$ sobre una región pequeña. Usando de la Eq. 52 encontramos que

$$\widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \left[l(\omega) \hat{a}_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \int e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - \omega t')} g(\mathbf{r}', t') d^3 r' dt' + h.c. \right]$$

Eq. 59

Observe que la integral en la Eq. 59 es la transformada de Fourier para $g(\mathbf{r}, t)$ en cuatro dimensiones, así definimos

$$G(\mathbf{k}) = \int e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - \omega t')} g(\mathbf{r}', t') d^3 r' dt', \quad \omega = ck$$

Podemos reescribir la ecuación Eq. 59 como un promedio [4], es decir que cada elemento de $\widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t)$ esta pesado por un elemento de $g(\mathbf{r}, t)$ y tenemos

$$\widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [l(\omega) \hat{a}_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} G(\mathbf{k}) + h. c.]$$

Eq. 60

Se sigue de esta ecuación que el valor esperado del vacío para $\widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t)$ es

$$\langle vac | \widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t) | vac \rangle = 0$$

Eq. 61

Análogo al desarrollo seguido para obtener la Eq. 56, tenemos

$$\langle vac | \widehat{\mathbf{F}}^2 | vac \rangle = \frac{2}{(2\pi)^3} \int |l(\omega)|^2 |G(\mathbf{k})|^2 d^3 k$$

Eq. 62

Observe, si $G(\mathbf{k})$ cae suficientemente rápido al aumentar \mathbf{k} , el valor esperador de $\widehat{\mathbf{F}}^2$ -no así el de $\widehat{\mathbf{F}}$ - es finito. Es decir que entre más suave sea la función $g(\mathbf{r}, t)$ más rápido caerá $G(\mathbf{k})$ al aumentar \mathbf{k} . Si la función promedio $g(\mathbf{r}, t)$ tiene un rango de orden ξ en cada dirección del espacio y en un rango ξ/c en el tiempo, entonces $G(\mathbf{k})$ tiene un rango de orden $1/\xi$ para cada variable $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$.

En la práctica encontramos que hay condiciones para los números de onda \mathbf{k} y la frecuencia ω , por lo que conviene tratar a $G(\mathbf{k})$ como una cantidad característica fundamental de algún tipo de filtro y $g(\mathbf{r}, t)$ derivada de $G(\mathbf{k})$.

2.8. Divisor de haz

Hemos revisado la cuantización del campo electromagnético. Es pertinente analizar el comportamiento de éste al atravesar algunos elementos ópticos, en específico nos centraremos en lo que ocurre cuando el campo cuantizado incide en un divisor de haz.

2.8.1. El efecto del vacío

Un divisor de haz o BS por sus siglas en inglés, en el que incide un campo clásico puede verse en la ilustración 2. Allí una onda v_1 incide, se transmite y refleja. Cada cara del divisor de haz puede tener distintos índices de transmisión y reflexión, denotados como r, t para la cara izquierda y r', t' para la derecha.

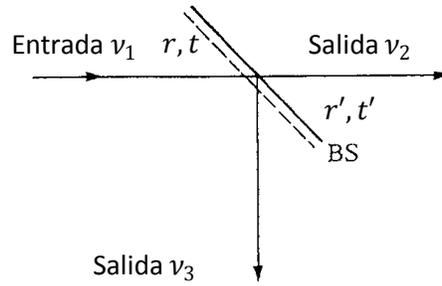


Ilustración 2. Divisor de haz con campos clásicos[4].

Descomponemos los modos entrantes y salientes en ondas planas y consideramos un solo modo incidente etiquetado 1, que al pasar a través del divisor de haz se refleja en un modo 3 y se transmite un modo 2.

Las cuatro cantidades r, t, r', t' deben satisfacer las relaciones de reciprocidad dadas por Stokes [2].

$$\begin{aligned}
 |r'| &= |r| \\
 |t'| &= |t| \\
 |r|^2 + |t|^2 &= 1 \\
 r^*t' + r't^* &= 0 \\
 r^*t + r't'^* &= 0 \\
 rt^* + r'^*t' &= 0
 \end{aligned}$$

Eq. 63

Que son derivadas siguiendo principios de conservación de energía. Podemos pensar a r, t, r', t' como elementos de una matriz de dispersión S

$$S \equiv \begin{bmatrix} t' & r \\ r' & t \end{bmatrix}$$

Eq. 64

Esta matriz da la conexión entre las dos entradas y las dos salidas del divisor.

La onda clásica incidente tiene una amplitud compleja v_1 y da lugar a la transmitida v_2 y reflejada v_3 tal que

$$\begin{aligned}
 v_2 &= tv_1 \\
 v_3 &= rv_1
 \end{aligned}$$

Eq. 65

De estas relaciones se sigue que dada la conservación de energía, las ondas salientes deben cumplir

$$|v_2|^2 + |v_3|^2 = (|t|^2 + |r|^2)|v_1|^2 = |v_1|^2$$

Eq. 66

Si queremos proceder análogamente un campo cuántico incidente, a cada amplitud compleja (incidente o de salida) se le debe asociar el operador \hat{a}_i que sigue la relación de conmutación

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_j^\dagger] = 1, \quad j = 0,1,2,3$$

$$[\hat{a}_2, \hat{a}_3] = 0$$

Eq. 67

Nuestro nuevo sistema se diagrama en la ilustración 3,

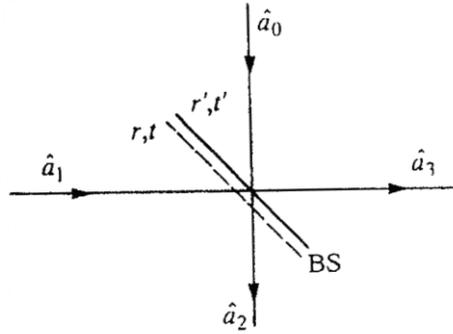


Ilustración 3. Divisor de haz formado por dos láminas dieléctricas, campos cuánticos.

Si no tomamos en cuenta la segunda entrada (pues está vacía) y pensamos en el divisor de haz de la misma forma que con el campo clásico. Bajo estas premisas los operadores $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ se sustituirían directamente en la Eq. 65 en lugar de sus correspondientes v_1, v_2, v_3 . Observe que al sustituir lo anterior en la Eq. 67 obtenemos

$$[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = 1$$

$$[\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] = |r|^2 [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = |r|^2$$

$$[\hat{a}_3, \hat{a}_3^\dagger] = |t|^2 [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = |t|^2$$

$$[\hat{a}_2, \hat{a}_3^\dagger] = r t^* [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = r t^*$$

$$[\hat{a}_3, \hat{a}_2^\dagger] = r^* t [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = r^* t$$

Eq. 68

Observemos las dos últimas relaciones de las Eq. 68, el resultado esperado por la mecánica cuántica es

$$[\hat{a}_2, \hat{a}_3^\dagger] = [\hat{a}_3, \hat{a}_2^\dagger] = 0$$

Eq. 69

Sin embargo en las Eq. 68 $[\hat{a}_2, \hat{a}_3^\dagger], [\hat{a}_3, \hat{a}_2^\dagger] \neq 0$. Al ignoramos el segundo puerto de entrada, \hat{a}_0 o 0, llegamos a un resultado incompatible con las reglas de conmutación.

2.8.2. Tratamiento cuántico de un divisor de haz

Ignorar la entrada vacía, dadas las condiciones del problema que estamos estudiando, está justificado en el estudio clásico de la electrodinámica, porque efectivamente ninguna onda incide en el segundo puerto de entrada del divisor de haz. Sin embargo hacerlo nos lleva a una contradicción; esto sucede porque aún cuando no hay energía fluyendo a través del modo etiquetado como 0, en el tratamiento cuántico del campo existe el vacío, que está presente y contribuye en la entrada no usada. La relación entre las entradas y las salidas del divisor debe escribirse como

$$\hat{a}_2 = r\hat{a}_1 + t'\hat{a}_0$$

$$\hat{a}_3 = t\hat{a}_1 + r'\hat{a}_0$$

Eq. 70

Las relaciones de conmutación establecidas en Eq. 67 al incluir la entrada con el vacío

$$[\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] = |r|^2[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] + |t|^2[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = |r|^2 + |t|^2 = 1$$

$$[\hat{a}_3, \hat{a}_3^\dagger] = |t|^2[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] + |r|^2[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = |r|^2 + |t|^2 = 1$$

$$[\hat{a}_2, \hat{a}_3^\dagger] = rt^*[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] + r'r'^*[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = t'r'^* + rt^* = 0$$

Eq. 71

Así obtenemos los valores esperados por la mecánica cuántica. Ignorar la entrada vacía provocó que los valores encontrados para los conmutadores fueran erróneos y no consistentes con la teoría y las mediciones. El vacío tiene, entonces, consecuencias medibles (interferencia con un solo fotón [3]) que no tienen contraparte en el tratamiento clásico.

La relación de conmutación dada por las Eq. 67 debe ser expandida para tomar en cuenta la entrada vacía y así obtenemos

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_j^\dagger] = 1, \quad j = 0,1,2,3$$

$$[\hat{a}_2, \hat{a}_3] = 0$$

$$[\hat{a}_0, \hat{a}_1] = 0$$

Eq. 72

De las Eq. 70 podemos construir, tomando en cuenta las relaciones de conmutación establecidas en las Eq. 72, el operador número de fotones n_i para las dos salidas ($i = 2,3$) del divisor de haz

$$\hat{n}_2 = \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 = (t'^* \hat{a}_0^\dagger + r^* \hat{a}_1^\dagger)(t' \hat{a}_0 + r \hat{a}_1) = |t|^2 \hat{n}_0 + |r|^2 \hat{n}_1 + t'^* r \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 + r^* t' \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_0$$

$$\hat{n}_3 = \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 = |r|^2 \hat{n}_0 + |t|^2 \hat{n}_1 + r'^* t \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 + t^* r' \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_0$$

Eq. 73

De esto se sigue, dadas las relaciones de reciprocidad que

$$\hat{n}_2 + \hat{n}_3 = \hat{n}_0 + \hat{n}_1$$

Eq. 74

Que es la conservación de fotones entre las entradas y las salidas.

2.8.3. Correlación de fotones

En el capítulo siguiente estudiaremos a fondo la definición de correlación. Basta saber, por ahora, que la correlación mide el grado de dependencia entre dos variables, donde la correlación entre una función consigo misma es siempre uno.

Queremos calcular el valor esperado en algún estado cuántico $\hat{\rho}$. Por facilidad asumimos que en el modo 0 incide el vacío. Entonces el efecto de \hat{a}_0 que actúa en el estado incidente $\hat{\rho}$ se expresa como

$$\hat{a}_0 \hat{\rho} = 0 = \hat{\rho} \hat{a}_0^\dagger$$

Eq. 75

Los valores esperados de \hat{n}_2 y \hat{n}_3 están dadas por las expresiones

$$\langle \hat{n}_2 \rangle = Tr(\hat{n}_2 \hat{\rho})$$

$$\langle \hat{n}_3 \rangle = Tr(\hat{n}_3 \hat{\rho})$$

Eq. 76

Utilizando las expansiones para los operadores de número, dadas por las Eq. 73, podemos describir las relaciones de las Eq. 76

$$\langle \hat{n}_2 \rangle = |r|^2 \langle \hat{n}_1 \rangle$$

$$\langle \hat{n}_3 \rangle = |t|^2 \langle \hat{n}_1 \rangle$$

Eq. 77

Este es, sin embargo, un resultado ya conocido, esperado de las relaciones clásicas. Un resultado más interesante, no-clásico, se obtiene al calcular la correlación entre las salidas 2 y 3.

Suponga que colocamos foto-detectores a la salidas de los puertos 2 y 3. Se puede deducir [4] que la probabilidad de detección conjunta es proporcional a

$$P_{23} = \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 \hat{a}_2 \rangle = \langle : \hat{n}_2 \hat{n}_3 : \rangle = \langle \hat{n}_2 \hat{n}_3 \rangle$$

Eq. 78

Usando Eq. 73 podemos resolver $\langle \hat{n}_2 \hat{n}_3 \rangle$ usando las relaciones establecidas en las Eq. 63

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_2 \hat{n}_3 \rangle &= |r|^2 |t|^2 \langle \hat{n}_1^2 \rangle - |r|^2 |t|^2 \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 \rangle = |r|^2 |t|^2 [\langle \hat{n}_1^2 \rangle - \langle \hat{n}_1 (\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + 1) \rangle] \\ &= |r|^2 |t|^2 [\langle \hat{n}_1^2 \rangle - \langle \hat{n}_1 \rangle] \end{aligned}$$

Eq. 79

Una consecuencia interesante de la relación dada por Eq. 78, es que $\langle \hat{n}_2 \hat{n}_3 \rangle = 0$ cuando el campo incidente es un estado de un fotón para el cuál $\langle \hat{n}_1^2 \rangle = \langle \hat{n}_1 \rangle$. Por lo tanto la probabilidad de detectar un fotón en la salida transmitida y reflejada, al mismo tiempo, es cero. Resultará obvio que no existe una contraparte a este resultado en el estudio del campo clásico.

Es interesante evaluar la correlación entre las variaciones de los conteos en las salidas

$$\langle \Delta \hat{n}_2 \Delta \hat{n}_3 \rangle = \langle \hat{n}_2 \hat{n}_3 \rangle - \langle \hat{n}_2 \rangle \langle \hat{n}_3 \rangle$$

Eq. 80

Con ayuda de las ecuaciones Eq. 77 y Eq. 79 se encuentra un desarrollo para la Eq. 80

$$\langle \Delta \hat{n}_2 \Delta \hat{n}_3 \rangle = |r|^2 |t|^2 [\langle \hat{n}_1^2 \rangle - \langle \hat{n}_1 \rangle - \langle \hat{n}_1 \rangle^2] = |r|^2 |t|^2 [\langle (\Delta \hat{n}_1)^2 \rangle - \langle \hat{n}_1 \rangle]$$

Eq. 81

Para cualquier campo clásico se debe cumplir que $\langle (\Delta \hat{n}_1)^2 \rangle \geq \langle \hat{n}_1 \rangle$, donde el igual es para un estado completamente coherente. Por lo tanto, no hay correlaciones entre las salidas del divisor de haz para un campo coherente, puesto que no hay fluctuaciones en la intensidad. Para campos clásicos, pero no coherente, la correlación entre las salidas es positiva; este fenómeno se conoce como el efecto Hanbury Brown-Twiss [5,6]. Para que la relación dada por la Eq. 81 sea negativa deben incidir campos sub-Poissonianos, que son solo campos no-clásicos [7, 4 Sec. 12.10] por lo que solo con campos no-clásicos esta relación es negativa.

Las relaciones de los operadores establecidas en las Eq. 70 son también validas cuando el campo \hat{a}_0 incidiendo en el puerto 0 no sea el vacío. Al incidir los dos haces, representados por \hat{a}_1 y \hat{a}_0 ,

interfieren; las mismas ecuaciones para los operadores describen el experimento de interferencia y detección homodina [8,9].

CORRELACIÓN, y GRADO DE COHERENCIA

Primeros Experimentos con resultados no clásicos

Función de correlación

Teoría semi-clásica de la foto-detección

Detección del campo cuántico

Probabilidad de foto detección conjunta

Probabilidad de detección conjunta para estados iniciales arbitrarios

Función de coherencia de segundo orden

Una nueva mirada al experimento de Grangier et al.

3. Correlación, coherencia y el experimento de P. Grangier, G. Roger y A. Aspect:

Demostrar la existencia del fotón requiere estudiar la anti-correlación entre las salidas de un divisor de haz; cómo lograrlo será tema de los siguientes capítulos. Primero es necesario establecer los conceptos básicos acerca de qué mediremos. Haremos un repaso breve de diversos temas necesarios para establecer el resultado teórico del experimento planteado para demostrar la existencia del fotón.

3.1. Primer Experimento con fotones Individuales: el experimento de P. Grangier, G. Roger y A. Aspect .

A mediados del siglo pasado se mostró que el experimento de Taylor de 1909 podía ser explicado con física clásica, desarrollar un experimento bajo la misma premisa se convirtió prácticamente en un reto. Más aún, en las décadas de los 60's y los 70's, los trabajos en óptica cuántica experimental se vieron casi abandonados debido, principalmente, al poco desarrollo tecnológico. Casi ochenta años después del experimento de Taylor, en 1986, Philip Grangier, Gerard Roger y Allan Aspect lograron observar, tal como lo hubiese querido Taylor, fotones individuales [1].

Lo primero que hicieron Grangier *et al.* fue asegurarse de que la fuente usada emitía fotones individuales. Dicha fuente consistía en un jet de átomos de Ca^{48} que emitía pares individuales de fotones cuando se excitaban de forma adecuada. Debido a la conservación de momento los fotones producidos en este proceso viajaban en direcciones opuestas. A continuación se muestra un esquema de este primer experimento.

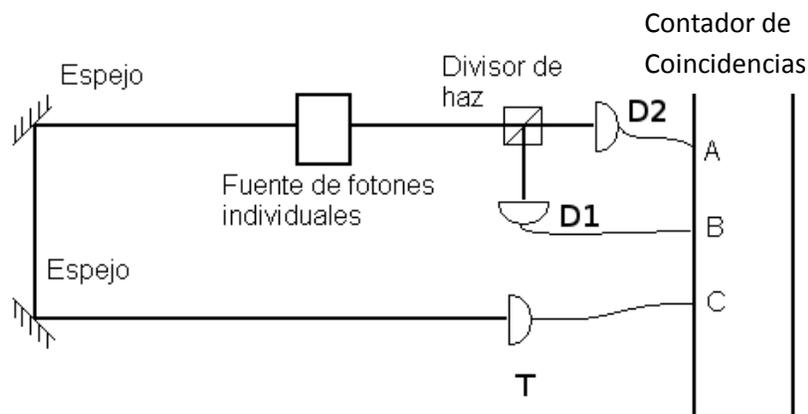


Ilustración 1. Experimento de Grangier.

Uno de los fotones es dirigido al detector T (testigo), mientras que el otro es enviado a un divisor de haz 50:50. A las salidas del divisor se colocan los detectores D1 y D2. Finalmente, los tres detectores se conectan a un correlacionado temporal (contador de coincidencias). Ahora bien, si es verdad que esta fuente emitía pares de fotones individuales, el experimento debe arrojar como

resultado una alta correlación temporal entre los detectores T y D1, al igual que entre T y D2; y, más importante aún, una alta anti correlación entre los detectores D1 y D2. Y eso fue lo que encontraron Grangier et al.

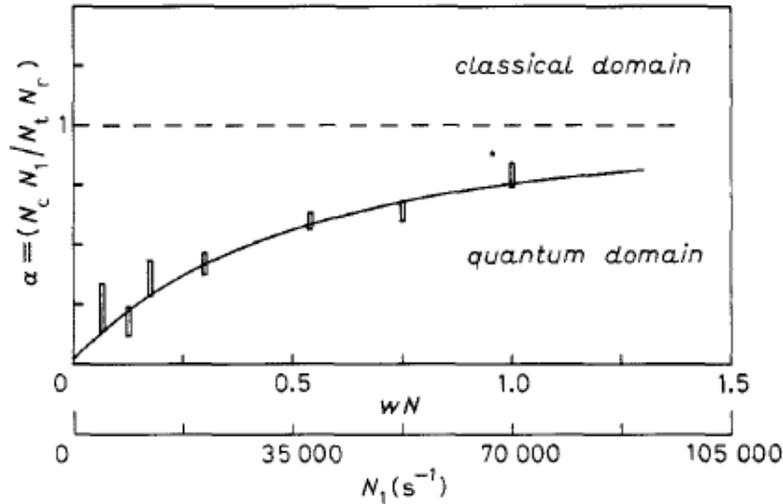


Ilustración 2- Resultados reportados por Grangier et al.[1]

La grafica anterior muestra el resultado de la correlación en función del número de cuentas registradas en el experimento. Observe que la función de correlación es menor que uno, lo que implica una anti correlación completa entre las salidas del divisor de haz. En este capítulo desarrollaremos la teoría necesaria para explicar este resultado.

3.2. Función de correlación [2,3]

Las funciones de correlación nos permiten obtener información sobre la distribución de eventos. Para los procesos estocásticos la función de correlación es la relación entre variables aleatorias en dos puntos diferentes en el espacio o en el tiempo. Cuando se considera la función de correlación en el mismo punto pero en tiempos diferentes se obtiene la función de auto correlación. Cuando se trata de la correlación entre dos variables aleatorias se le conoce como correlación cruzada o covarianza.

Una variable aleatoria x tiene una probabilidad asociada $p(x)dx$ si la variable aleatoria es continua o $p(x_i)$ para cada valor de la variable aleatoria si ésta es discreta. Los momentos de grado r de dicha variable aleatoria continua se definen como

$$v_r = \langle x^r \rangle = \int x^r p(x) dx$$

Eq. 1

Para la variable aleatoria discreta tenemos

$$v_r = \langle x^r \rangle = \sum x_i^r p(x_i)$$

Eq. 2

Las Eq. 1 y Eq. 2 son los momentos definidos alrededor del origen, resulta de mayor utilidad conocer los momentos alrededor del valor promedio $\langle x \rangle$, a este tipo de momento se le conoce como momento central y se denota por μ_r . Para el caso continuo se tiene

$$\mu_r = \langle (x - \langle x \rangle)^r \rangle = \int (x - \langle x \rangle)^r p(x) dx$$

Eq. 3

Y para el caso discreto

$$\mu_r = \langle (x - \langle x \rangle)^r \rangle = \sum (x_i - \langle x \rangle)^r p(x_i)$$

Eq. 4

La diferencia entre $x - \langle x \rangle$ se conoce como la desviación

$$\Delta x = x - \langle x \rangle$$

Eq. 5

Así podemos escribir $\mu_r = \langle (\Delta x)^r \rangle$. El primer momento central $\mu_1 = \langle (\Delta x) \rangle = 0$ sin embargo para los momentos centrales de mayor orden el valor suele ser distinto de cero. El segundo momento central μ_2 se conoce como la varianza o la dispersión que es por construcción positiva y cero sólo en el caso en el que hay una certeza completa sobre el valor de x . La raíz cuadrada de la varianza es la desviación estándar $\sigma = \sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle}$.

Los momentos también se definen para diferentes variables aleatorias x, y, z, \dots . El momento central de orden l, m, n, \dots de una densidad de probabilidad conjunta, $p(x, y, z, \dots)$, es

$$\mu_{lmn \dots} = \langle (\Delta x)^l (\Delta y)^m (\Delta z)^n \dots \rangle$$

Eq. 6

En particular para dos variables aleatorias existen tres varianzas diferentes, las dos varianzas conocidas $\mu_{02} = \langle (\Delta x)^2 \rangle$, $\mu_{20} = \langle (\Delta y)^2 \rangle$ y una tercera conocida como la covarianza que es $\mu_{12} = \langle \Delta x \Delta y \rangle$. Si tenemos N variables aleatorias denotadas por x_1, \dots, x_N la covarianza entre cuales quiera dos de estas variables se denota por

$$\mu_{ij} \equiv \langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle$$

Eq. 7

Cada μ_{ij} puede verse como un elemento de una matriz $N \times N$ donde la diagonal está formada por las varianzas $\mu_{ii} \equiv \langle (\Delta x_i)^2 \rangle$. De la desigualdad de Schwarz se encuentra que

$$|\mu_{ij}|^2 \leq \mu_{ii} \mu_{jj} = \sigma_i^2 \sigma_j^2$$

Eq. 8

De lo anterior podemos definir el coeficiente de correlación ρ_{ij}

$$\rho_{ij} \equiv \frac{\mu_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

Eq. 9

El coeficiente de correlación está delimitado

$$-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$$

Dos variables cuyo coeficiente de correlación sea $+1$ o -1 se encuentran completamente correlacionadas o completamente anti correlacionadas respectivamente. Por ejemplo, la correlación entre las salidas de un divisor de haz cuando incide la luz de un laser en alguna de sus caras será 1 , puesto que el haz se refleja y transmite. En cambio si tenemos una barrera aleatoria que dirige balas en dos direcciones distintas con cincuenta por ciento de probabilidad y nos preguntamos cuál es la correlación entre ambas direcciones, ésta será -1 . Si en cambio $\rho_{ij} = 0$ las variables son estadísticamente independientes; es decir que la matriz de covarianza será diagonal.

3.3. Teoría semi-clásica de la foto detección [4]

Lo que se mide en un experimento en realidad es la foto corriente en un detector necesitamos, por tanto, describir el funcionamiento de un detector

Del estudio del efecto foto-eléctrico [5] sabemos que cuando radiación electromagnética incide en una superficie metálica se liberaran electrones del metal, cuando la energía de la onda electromagnética es la adecuada.

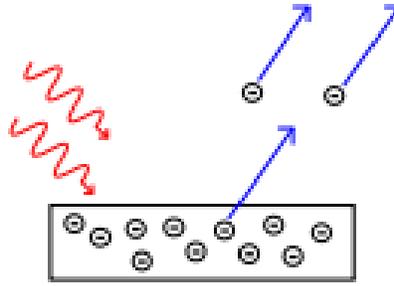


Ilustración 3. Diagrama de campo electromagnético incidente en una superficie foto-receptora

El electrón en el metal se encuentra en un cierto estado $|\psi\rangle$ en el espacio de Hilbert, por simplicidad omitiremos los estados inherentes a las coordenadas internas como espín. Sabemos que la evolución temporal de este estado viene dado por la ecuación de Schrödinger

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} \hat{H}_1(t) |\psi(t)\rangle$$

Eq. 10

Donde $\hat{H}_1(t)$ es la energía de interacción del electrón. Cualquier variable dinámica, en el esquema de interacción, evolucionará en el tiempo siguiendo la regla general

$$\hat{\mathbf{p}}(t) = \exp\left[\frac{i\hat{H}_0(t-t_0)}{\hbar}\right] \hat{\mathbf{p}}(t_0) \exp\left[-\frac{i\hat{H}_0(t-t_0)}{\hbar}\right]$$

Eq. 11

Donde \hat{H}_0 es el Hamiltoniano con energía E_0 .

Para un electrón moviéndose a una velocidad no relativista, con carga e , masa m y momento $\hat{\mathbf{p}}$ que interactúa con una onda electromagnética cuyo vector potencial es $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, la energía de interacción se puede escribir cómo

$$\hat{H}_1(t) = -\frac{e}{m} \hat{\mathbf{p}}(t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

Eq. 12

Queremos determinar $|\psi(t)\rangle$ dado un estado inicial $|\psi(t_0)\rangle$. Para ello tenemos que integrar la ecuación Eq. 11

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}_1(t_1) |\psi(t_1)\rangle dt_1$$

Eq. 13

La Eq. 13 es una integral del tipo Volterra que se puede resolver por iteración, así podemos observar el estado inicial $|\psi(t_0)\rangle$ como una aproximación a orden cero para $|\psi(t_1)\rangle$ lo que da

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}_1(t_1) |\psi(t_0)\rangle dt_1$$

Eq. 14

Que a su vez puede ser utilizado como aproximación a primer orden para $|\psi(t_1)\rangle$ en la integral de la Eq. 13. Substituyendo obtenemos

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}_1(t_1) |\psi(t_0)\rangle dt_1 + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} \hat{H}_1(t_1) \hat{H}_1(t_2) |\psi(t_0)\rangle dt_2$$

Eq. 15

Así obtenemos una serie infinita que es la solución a la Eq. 13, sin embargo, si consideramos el tiempo de interacción $t - t_0$ suficientemente pequeño y estamos interesados en la proyección de $|\psi(t)\rangle$ en algún otro estado, para nuestro propósito resulta suficiente observar el primer termino diferente de cero. Por ejemplo si queremos calcular la probabilidad de una transición del estado $|\psi(t_0)\rangle$ a algún nuevo estado $|\phi\rangle$ (estador ortogonales) lo que tenemos para la probabilidad de transición

$$|\langle\phi|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^t \langle\phi|\hat{H}_1(t_1)|\psi(t_0)\rangle dt_1 \right|^2$$

Eq. 16

3.3.1. Probabilidad semi-clásica de foto detección

Si el estado inicial del fotón $|\psi(t_0)\rangle$ es un estado propio $|E_0\rangle$ del Hamiltoniano \hat{H}_0 con energía E_0 , entonces

$$\hat{H}_0|E_0\rangle = E_0|E_0\rangle$$

Eq. 17

Para los electrones ligados E_0 es del orden de $1 eV$ y si $|E_0| = \hbar\omega_0$, entonces la frecuencia ω_0 corresponde a una longitud de onda óptica del orden $10^{15} s^{-1}$. Al incidir una onda electromagnética, el electrón puede presentar una transición a un estado continuo de energía $|E\rangle$

$$\hat{H}_0|E\rangle = E|E\rangle$$

Eq. 18

Sabemos que la energía de interacción es

$$\hat{H}_1(t_1) = \hat{\mathbf{p}}(t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t_1)$$

Eq. 19

Entonces

$$\langle E | \hat{H}_1(t_1) | E_0 \rangle = -\frac{e}{m} \exp \left[\frac{i(E - E_0)(t_1 - t_0)}{\hbar} \right] \langle E | \hat{\mathbf{p}}(t_0) | E_0 \rangle \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t_1)$$

Eq. 20

Haciendo uso de las ecuaciones para transición encontramos probabilidad de transición para un electrón

$$\left(\frac{e}{\hbar m} \right)^2 |\langle E | \hat{\mathbf{p}}(t_0) | E_0 \rangle \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}, t_0)|^2 \left[\frac{\sin \frac{1}{2} \left(\frac{(E - E_0)}{\hbar} - \omega \right) \Delta t}{\frac{1}{2} \left(\frac{(E - E_0)}{\hbar} - \omega \right)} \right]$$

Eq. 21

En la ecuación anterior hemos escrito $V(\mathbf{r}, t) = \varepsilon I(\mathbf{r}, t)$, donde ε es el vector unitario de polarización que caracteriza la polarización de la luz incidente e $I(\mathbf{r}, t)$ es la intensidad de la onda incidente.

La Eq. 21 es la probabilidad de que un fotoelectrón haga la transición de un estado ligado $|E_0\rangle$ al estado libre $|E\rangle$ en el tiempo Δt . Si estamos interesados solo en la probabilidad de que el electrón se encuentre libre, sin importar cual sea el estado final, debemos sumar sobre todas las energías positivas. Si conocemos la densidad de estados $\sigma(E)$, tal que el número de electrones en un estado de energía dE sea $\sigma(E)dE$. En general puede ocurrir que sea más probable que electrones con una cierta energía sean liberados lo cual podemos dar un peso con una función $g(E)$; obtenemos para la probabilidad de detectar un fotoelectrón

$$P_t = \left(\frac{e}{\hbar m} \right)^2 \int_0^\infty \sigma(E) g(E) |\langle E | \hat{\mathbf{p}}(t_0) | E_0 \rangle \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}, t_0)|^2 \left[\frac{\sin \frac{1}{2} \left(\frac{(E - E_0)}{\hbar} - \omega \right) \Delta t}{\frac{1}{2} \left(\frac{(E - E_0)}{\hbar} - \omega \right)} \right] dE$$

Eq. 22

Note que si $(E_0 + \hbar\omega)\Delta t \gg 1$ entonces el último factor de la integral anterior tiene un pico en $E = E_0 + \hbar\omega$ que cae rápidamente a cero a ambos lados del pico; dado lo anterior a primera aproximación dicho término puede remplazarse por una delta de Dirac $\delta(E - E_0 - \hbar\omega)$ y si $\sigma(E)$, $g(E)$ y $\langle E | \hat{\mathbf{p}}(t_0) | E_0 \rangle$ varían lentamente en la vecindad de $E = E_0 + \hbar\omega$ podemos considerar que los valores anteriores son constantes con valores $\sigma(E_0 + \hbar\omega)$, $g(E_0 + \hbar\omega)$ y $\langle E_0 + \hbar\omega | \hat{\mathbf{p}}(t_0) | E_0 \rangle$; haciendo la integral se obtiene para la probabilidad de foto detección

$$\approx \left(\frac{e}{m\hbar}\right)^2 \sigma(E_0 + \hbar\omega) g(E_0 + \hbar\omega) \times |\langle E_0 + \hbar\omega | \hat{\mathbf{p}}(t_0) | E_0 \rangle \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2 2\pi\hbar I(\mathbf{r}, t_0) \Delta t, \quad \text{Si } E_0 + \hbar\omega > 0$$

$$0 \quad \text{Si } E_0 + \hbar\omega < 0$$

Eq. 23

Cuando $E_0 + \hbar\omega < 0$ la probabilidad de detección en realidad es muy pequeña por lo que el pico de la función delta cae afuera del rango de integración. En la Eq. 23 $I(\mathbf{r}, t_0)$ es la intensidad de la onda incidente al tiempo inicial.

Obtenemos una probabilidad de foto detección $P(t)\Delta t$ cuando la onda ilumina al foto-detector normal a la superficie del mismo

$$P(t)\Delta t \sim \eta I(\mathbf{r}, t)\Delta t$$

Eq. 24

Donde η

$$\approx \left(\frac{e}{m\hbar}\right)^2 \sigma(E_0 + \hbar\omega) g(E_0 + \hbar\omega) \times |\langle E_0 + \hbar\omega | \hat{\mathbf{p}}(t_0) | E_0 \rangle \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2 2\pi\hbar, \quad \text{Si } E_0 + \hbar\omega > 0$$

$$0 \quad \text{Si } E_0 + \hbar\omega < 0$$

En conclusión la probabilidad de foto-detección en un tiempo corto Δt es proporcional a la intensidad de la luz incidente en el intervalo de tiempo Δt .

Si en realidad tenemos un campo electromagnético fluctuante aleatoriamente debemos considerar el promedio de la intensidad sobre todos los miembros del ensamble, entonces la probabilidad de foto detección de un campo óptico fluctuante será

$$P_1(\mathbf{r}, t)\Delta t = \eta \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle$$

Eq. 25

La probabilidad de foto detección conjunta en el caso semi clásico para un campo no fluctuante es

$$P_N(\mathbf{r}_1, t_1, \Delta t_1; \dots, \mathbf{r}_N, t_N, \Delta t_N) = \prod_{i=1}^N \eta_i I(\mathbf{r}_i, t_i) \Delta t_i$$

Eq. 26

Para el campo fluctuante será

$$P_N(\mathbf{r}_1, t_1, \Delta t_1; \dots, \mathbf{r}_N, t_N, \Delta t_N) = \prod_{i=1}^N \eta_i \left\langle \prod_{n=1}^N I(\mathbf{r}_n, t_n) \right\rangle \Delta t_i$$

Eq. 27

Observe que para un campo fluctuante

$$\left\langle \prod_{n=1}^N I(\mathbf{r}_n, t_n) \right\rangle \neq \prod_{n=1}^N \langle I(\mathbf{r}_n, t_n) \rangle$$

Eq. 28

Por lo que

$$P_2(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) \neq P_1(\mathbf{r}_1, t_1)P_1(\mathbf{r}_2, t_2)$$

Eq. 29

Una consecuencia interesante de la Eq. 27 es cuando consideramos dos foto detecciones para un mismo detector que ocurren a tiempos t y $t + \tau$, obtenemos

$$P_2(t, t + \tau) = \eta^2 \langle I(t)I(t + \tau) \rangle$$

Eq. 30

De la desigualdad de Schwarz se sigue que

$$\langle I(t)I(t + \tau) \rangle \leq \langle I^2(t) \rangle$$

Eq. 31

Y por tanto la probabilidad dada en la Eq. 30 debe seguir la desigualdad

$$P_2(t, t + \tau) \leq P_2(t, t)$$

Eq. 32

Así para dos foto detecciones la probabilidad de ocurrir al mismo tiempo, o muy cercanas en tiempo, es mayor que en tiempos separados. Este fenómeno se conoce como *photoelectric bunching*; y ha sido estudiado por Twiss, Brown, Pound, Morgan, Mandel, entre otros en las décadas de 1950 y 1960 [4].

Observe que en el límite $\tau \rightarrow \infty$ las foto detecciones se pueden considerar separadas y por tanto $P_2(t, t + \tau) \rightarrow P_1^2(t)$ conforme $\tau \rightarrow \infty$.

3.4. Detección del campo cuántico

La mayor parte de las mediciones realizadas sobre el campo electromagnético en el dominio óptico se basan en la detección del campo electromagnético. Al analizar la teoría semi-clásica de la foto detección encontramos que la probabilidad de detección del campo clásico es proporcional a la intensidad de éste en un intervalo de tiempo. Cuando consideramos la cuantización del campo

electromagnético la detección en un foto-detector (tubo fotomultiplicador, foto-diodo, fotodiodo de avalancha, etc.) ocurre cuando éste absorbe uno o varios fotones.

En el Apéndice A definimos los operador de campo de frecuencia positiva y negativa respectivamente. Podemos hacer uso de estos operadores para conocer la probabilidad de transición del campo electromagnético. Si inicialmente el campo electromagnético se encuentra en el estado $|\psi_1\rangle$ y tras la detección se encuentra en el estado $|\psi_2\rangle$, como el proceso de detección implica la absorción de un fotón la probabilidad de ocurrencia de dicha transición es

$$|\langle\psi_2|\hat{\mathbf{F}}^+(\mathbf{r},t)|\psi_1\rangle|^2$$

Eq. 33

La probabilidad total de detección será la suma sobre todos los estados finales $|\psi_2\rangle$ está dada por

$$\sum_{\psi_2} |\langle\psi_2|\hat{\mathbf{F}}^+(\mathbf{r},t)|\psi_1\rangle|^2$$

Eq. 34

Cuando el estado inicial $|\psi_1\rangle$ no es un estado puro sino un ensamble de estados caracterizados por el operador de densidad

$$\hat{\rho} = \sum_{\psi_1} p(\psi_1)|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$$

Eq. 35

La razón de foto detección será

$$C_1 \sum_{\psi_1} p(\psi_1) \sum_{\psi_2} |\langle\psi_2|\hat{\mathbf{F}}^+(\mathbf{r},t)|\psi_1\rangle|^2$$

Eq. 36

Donde C_1 es una constante característica del detector. Entonces la probabilidad de foto detección P_1 en un periodo de tiempo pequeño Δt , talque la razón dada por la ecuación anterior no cambie apreciablemente, es

$$\begin{aligned} P_1(\mathbf{r},t)\Delta t &= C_1\Delta t \sum_{\psi_1} p(\psi_1) \sum_{\psi_2} |\langle\psi_2|\hat{\mathbf{F}}^+(\mathbf{r},t)|\psi_1\rangle|^2 = C_1\Delta t \sum_{\psi_1} p(\psi_1)\langle\psi_1|\hat{\mathbf{F}}_i^-(\mathbf{r},t)\hat{\mathbf{F}}_i^+(\mathbf{r},t)|\psi_1\rangle \\ &= C_1\Delta t \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{\mathbf{F}}_i^-(\mathbf{r},t)\hat{\mathbf{F}}_i^+(\mathbf{r},t)] = C_1\Delta t\langle\hat{\mathbf{F}}^-(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{F}}^+(\mathbf{r},t)\rangle \end{aligned}$$

Eq. 37

Definimos un operador de intensidad total $\hat{I}(\mathbf{r}, t)$ en función de los operadores de campo

$$\hat{I}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{F}}^-(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{F}}^+(\mathbf{r}, t)$$

Eq. 38

Observe que existe un conjunto de intensidades diferentes, cada una asociada con un vector de campo $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t)$ de acuerdo a la elección de $l(\mathbf{k}) = \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} l(\omega)$. Entonces podemos reescribir la probabilidad de detección $P_1(\mathbf{r}, t)\Delta t$ como

$$P_1(\mathbf{r}, t) = C_1 \Delta t \langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle$$

Eq. 39

La probabilidad de foto detección, al igual que en el caso semi-clásico, es proporcional a la intensidad promedio del campo en un intervalo de tiempo Δt .

3.4.1. Densidad de fotones

Cuando $l(\mathbf{k}) = 1$ para los operadores de campo podemos definir los nuevos operadores de frecuencia $\hat{\mathbf{V}}^+(\mathbf{r}, t)$ y $\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}, t)$ como

$$\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [\hat{a}_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}]$$

Eq. 40

Mismamente definimos su complejo conjugado como $\hat{\mathbf{F}}^-(\mathbf{r}, t)$ con $l(k) = 1$

$$\hat{\mathbf{V}}^+(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}]$$

Eq. 41

Entonces, el estado $\hat{\mathbf{V}}^+(\mathbf{r}, t)|vac\rangle$ es tal que $\hat{\mathbf{F}}^-(\mathbf{r}, t)$ tiene el efecto de crear un fotón en la vecindad (\mathbf{r}, t) . De manera análoga $\hat{\mathbf{F}}^+(\mathbf{r}, t)$ corresponde a la absorción de un fotón en la misma vecindad.

La relación de los operadores de campo con el operador de intensidad en este caso viene dada por

$$\hat{I}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{F}}^-(\mathbf{r}, t, l(k) = 1) \cdot \hat{\mathbf{F}}^+(\mathbf{r}, t, l(k) = 1) = \hat{\mathbf{V}}^+(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}, t)$$

Eq. 42

La intensidad correspondiente a esta $l(k)$ al integrarse sobre todo el espacio es

$$\begin{aligned} \int_{L^3} \hat{I}(\mathbf{r}, t) d^3r &= \frac{1}{L^3} \int_{L^3} \sum_{\mathbf{k}, s} \sum_{\mathbf{k}', s'} \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'s'} (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'s'}) e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r} - (\omega' - \omega)t} d^3r \\ &= \sum_{\mathbf{k}, s} \sum_{\mathbf{k}', s'} \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'s'} (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}s}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'s'}) \end{aligned}$$

Eq. 43

Aprovechando que los vectores de polarización son orto-normales la ecuación anterior se reduce a

$$\int_{L^3} \hat{I}(\mathbf{r}, t) d^3r = \sum_{\mathbf{k}, s} \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s} = \hat{n}$$

Eq. 44

Obtenemos un operador $\hat{I}(\mathbf{r}, t)$, que es el número de fotones por unidad de volumen; es decir el operador de densidad de fotones.

Si conocemos el área de la superficie del foto-detector S , su eficiencia cuántica α y denotamos por c a la velocidad de la luz; la probabilidad diferencial de foto detección es

$$P_1(\mathbf{r}, t) = \alpha S c \Delta t \langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle$$

Eq. 45

3.5. Probabilidad de foto detección conjunta

Podemos hacer uso de los conocimientos que hemos obtenido sobre la foto detección para calcular la probabilidad de detección conjunta $P_2(\mathbf{r}_1, t_1, \Delta t_1; \mathbf{r}_2, t_2, \Delta t_2)$ para dos foto detectores localizados en \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 respectivamente; y al tiempo t_1 dentro de un intervalo Δt_1 y un tiempo t_2 en el intervalo Δt_2 . Cuando $t_2 \geq t_1$. La probabilidad de detección individual para cada foto detector está dada por la Eq. 41, así para la detección conjunta tenemos

$$P_2(\mathbf{r}_1, t_1, \Delta t_1; \mathbf{r}_2, t_2, \Delta t_2) = \alpha_1 S_1 c \Delta t_1 \langle \hat{I}(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle \alpha_2 S_2 c \Delta t_2 \langle \hat{I}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle$$

Eq. 46

Note que estamos suponiendo que la probabilidad de detección en ambos detectores es independiente, recuerde que una condición necesaria y suficiente para que dos eventos sean independientes es que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Eq. 47

La Eq. 46 se puede extender a un numero N de foto-detectores que hacen mediciones a tiempo t_1, \dots, t_N tal que $t_N \geq \dots \geq t_1$ tiene la forma

$$P_N(\mathbf{r}_1, t_1, \Delta t_1; \dots, \mathbf{r}_N, t_N, \Delta t_N) = \prod_{i=1}^N \alpha_i S_i c \Delta t_i \langle \hat{I}(\mathbf{r}_i, t_i) \rangle$$

Eq. 48

3.6. Probabilidad de detecciones múltiples para estados iniciales arbitrarios

El resultado de la Eq. 48 es válido para estados puros, coherentes $|\{v\}\rangle$ del campo electromagnético. Si en vez de éste estado coherente tenemos un ensamble de estados coherentes y para cada miembro del ensamble usamos el argumento de las probabilidades de detección conjunta para obtener una expresión del tipo la Eq. 48. Asignamos a cada miembro del ensamble un peso $\phi(\{v\})$ para que el operador de densidad inicial del campo sea

$$\hat{\rho}_F = \int \phi(\{v\}) |\{v\}\rangle \langle \{v\}| d\{v\}$$

Eq. 49

Al hacer el promedio utilizando el peso $\phi(\{v\})$ la probabilidad conjunta se escribe como

$$P_N(\mathbf{r}_1, t_1, \dots, \mathbf{r}_N, t_N) \Delta t_1 \dots \Delta t_N = \int \phi(\{v\}) \prod_{i=1}^N \alpha_i S_i c \Delta t_i \langle \hat{I}(\mathbf{r}_i, t_i) \rangle d\{v\} = \langle \prod_{i=1}^N \alpha_i S_i c \Delta t_i \langle \hat{I}(\mathbf{r}_i, t_i) \rangle \rangle$$

Eq. 50

El teorema de equivalencia óptica [4] establece que el valor esperado de cualquier operador de campo normalmente ordenado puede ser remplazado por el promedio de un ensamble, en el cual los operadores de creación y aniquilación son remplazados por sus valores propios derecho e izquierdo, y dicho promedio debe tomarse sobre la función del espacio fase $\phi(\{v\})$ como función de peso.

Sabemos que la intensidad $I(\mathbf{r}_l, t_l) = V^*(\mathbf{r}_l, t_l) \cdot V(\mathbf{r}_l, t_l)$ esta compuesta por los valores propios $V^*(\mathbf{r}_l, t_l)$ y $V(\mathbf{r}_l, t_l)$ y sus operadores de creación son $\hat{V}^\dagger(\mathbf{r}_l, t_l)$ y $\hat{V}(\mathbf{r}_l, t_l)$ respectivamente. Invocando el teorema de equivalencia óptica en reversa escribimos la expresión para P_N en la forma ordenada temporal⁶ $t_N \geq \dots \geq t_1$

$$\begin{aligned}
P_N(\mathbf{r}_1, t_1, \dots, \mathbf{r}_N, t_N) \Delta t_1 \dots \Delta t_N &= \prod_{i=1}^N \alpha_i S_i c \Delta t_i \langle \hat{V}_{l_1}^\dagger(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \hat{V}_{l_N}^\dagger(\mathbf{r}_N, t_N) \hat{V}_{l_N}(\mathbf{r}_N, t_N) \dots \hat{V}_{l_1}(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle \\
&= \prod_{i=1}^N \alpha_i S_i c \Delta t_i \langle \mathcal{T} : \hat{I}(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \hat{I}(\mathbf{r}_N, t_N) : \rangle \\
&= \prod_{i=1}^N \alpha_i S_i c \Delta t_i \Gamma_{l_1, \dots, l_N; l_N, \dots, l_1}^{(N, N)}(\mathbf{r}_1, t_1, \dots, \mathbf{r}_N, t_N; \mathbf{r}_N, t_N, \dots, \mathbf{r}_1, t_1)
\end{aligned}$$

Eq. 51

Donde $\Gamma^{(N, N)}$ es la función ordenada temporal de coherencia de segundo orden.

Consecuencia de la Eq. 51 es que las foto-detecciones realizadas en los puntos espacio-tiempo r_1, t_1 y r_2, t_2 no sean independientes sino que están correlacionadas y por tanto

$$\langle \mathcal{T} : \hat{I}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{I}(\mathbf{r}_2, t_2) : \rangle \neq \langle \hat{I}(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle \langle \hat{I}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle$$

Eq. 52

Por lo que al igual que en el caso semi clásico

$$P_2(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) \neq P_1(\mathbf{r}_1, t_1) P_1(\mathbf{r}_2, t_2)$$

Eq. 53

Calculemos la probabilidad de la detección conjunta $P_2(r_1, t_1, r_2, t_2)$ para el campo de un fotón en el estado de Fock $|1_{k_S}, \{0\}\rangle$

$$\langle 1_{k_S}, \{0\} | \mathcal{T} : \hat{I}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{I}(\mathbf{r}_2, t_2) : | 1_{k_S}, \{0\} \rangle$$

Eq. 54

En la Eq. 54 se aplica dos veces el operador de aniquilación de fotón a la derecha, sobre el estado, esto da cero y por tanto

$$P_2(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = 0$$

Analicemos la probabilidad de detección conjunta para un campo coherente. En la base de estados de Fock un estado coherente puede escribirse como [7]

$$\begin{aligned}
|v\rangle &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \\
\langle v | \mathcal{T} : \hat{I}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{I}(\mathbf{r}_2, t_2) : | v \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 (n-1)n
\end{aligned}$$

3.7. Función de coherencia de segundo orden

En la década de 1960 Glauber [6] entre otros demostraron que se puede construir una teoría cuántica de coherencia sobre cantidades observables como los resultados observados en la interferencia de Young. Los detectores que tenemos hoy en día “miden” la intensidad del campo eléctrico, así que estamos interesados en una función que pueda darnos la coherencia tomando como cantidad observable la intensidad; dicha función es la *coherencia (temporal) de segundo orden* [7] $g^{(2)}$, desarrollada por Hanbury Brown y Twiss en la década de 1950.

De la Eq. 13 del Apéndice C podemos derivar el segundo orden de coherencia, cuando $N = 1$. Este orden tiene una gran importancia ya que nos permite distinguir entre campos clásicos y no-clásicos (cuánticos). El segundo orden de coherencia $g^{(2)}$ se define como

$$g^{(2)} = \gamma^{(1,1)} = \frac{\Gamma^{(1,1)}(x_1, \dots, x_N; y_N, \dots, y_1)}{\prod_{r=1}^N [\Gamma^{(1,1)}(x_r, x_r) \Gamma^{(1,1)}(y_r, y_r)]}$$

Eq. 55

En el Apéndice C se describen las propiedades de la función de coherencia $\Gamma^{(M,N)}$ tanto para el caso clásico como para el cuántico.

3.7.1. Función de coherencia de segundo orden para campos clásicos

En la ilustración 4 se observa el diseño experimental realizado por Hanbury, Brown y Twiss [8], supongamos que el detector D1 recibe una señal al tiempo t y el detector D2 recibe una señal al tiempo $t + \tau$ y queremos saber que relación hay entre la señal recibida en D1 y la recibida en D2, es decir qué correlación guardan. Llamaremos τ_0 al tiempo de coherencia (definición) de la señal que llega al Divisor de Haz, BS. Si la demora τ es menor que el tiempo de coherencia entonces podemos derivar una función estadística que nos dé información sobre la señal que llega originalmente a BS.

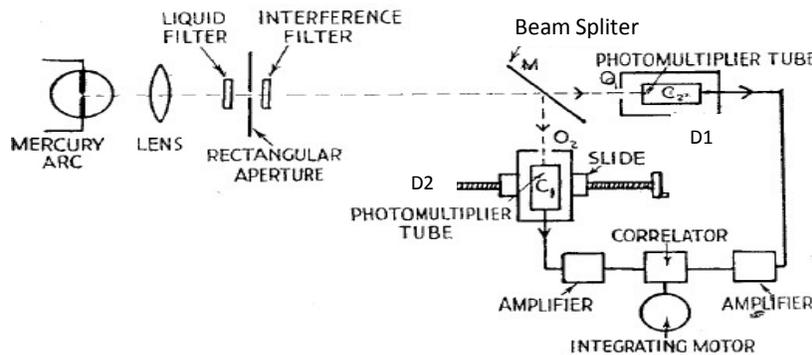


Ilustración 4. Diseño original del experimento de Hanbury Brown y Twiss para demostrar *bunching* y correlaciones temporales [8].

Para un campo clásico, $\vec{E}(\vec{r}, t)$, sabemos que la intensidad del campo electromagnético se relaciona directamente con el cuadrado del campo $|\vec{E}(\vec{r}, t)|^2$, y entonces podemos definir la intensidad promedio como

$$\langle I(t) \rangle = \int_0^t |\vec{E}(\vec{r}, t')|^2 dt'$$

La razón de coincidencias para las señales recibidas en D1 y D2 dentro de un intervalo de tiempo τ

$$C(t, t + \tau) = \langle I(t)I(t + \tau) \rangle$$

Eq. 56

Supongamos que tenemos campos estacionarios, entonces el promedio de las intensidades medidas (clásicas) es sólo función de t . Así, la probabilidad de obtener una coincidencia al tiempo τ

$$\gamma^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t + \tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2}$$

Eq. 57

Si los detectores se encuentran a distancias distintas, entonces la función de coherencia de segundo orden puede escribirse.

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t + \tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle \langle I(t + \tau) \rangle}$$

Eq. 58

Si el retraso es cero entonces, para un divisor 50/50

$$g^{(2)}(\tau = 0) = \frac{\langle I(t)^2 \rangle}{\langle I(t) \rangle^2}$$

Eq. 59

Recordando la desigualdad de Schwartz

$$\langle I(t) \rangle^2 \leq \langle I(t)^2 \rangle$$

Eq. 60

Tenemos lo siguiente

$$1 \leq g^{(2)}(0) \leq \infty$$

Eq. 61

Para una serie de mediciones con retardo se puede demostrar que

$$\langle I(t)I(t + \tau) \rangle \leq \langle I(t) \rangle^2$$

Eq. 62

En consecuencia

$$g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0)$$

Eq. 63

La Eq. 63 se ha derivado pensando en campos electromagnéticos clásicos por lo que cualquier violación de dicha desigualdad mostrará la presencia de fenómenos no clásicos para los que hemos mostrado anteriormente que pueden tener una explicación mecánico cuántica.

En Ilustración 5. Función de coherencia de segundo orden para campos clásicos; estado coherente (azul), luz caótica Lorentziana (roja), y luz caótica Gaussina (verde) [10].

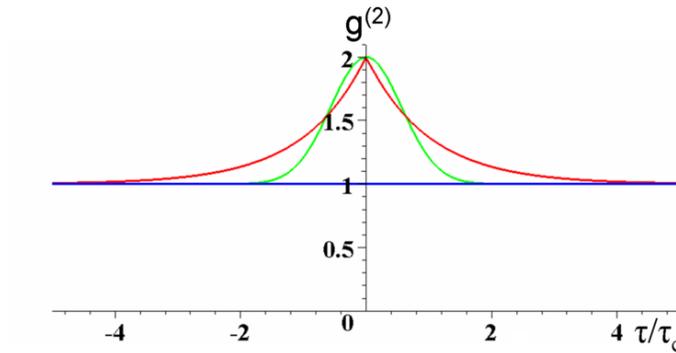


Ilustración 5. Función de coherencia de segundo orden para campos clásicos; estado coherente (azul), luz caótica Lorentziana (roja), y luz caótica Gaussina (verde) [10].

Hemos visto que la probabilidad de tener una cuenta al tiempo t en un detector y otra en el segundo detector un tiempo $t + \tau$, viene dada por

$$P_{RT} \Delta t^2 = \eta_T \eta_R \langle I_T(t + \tau) I_R(t) \rangle \Delta t^2$$

Eq. 64

Donde el subíndice T implica que estamos midiendo en el detector que recibe el haz transmitido, mientras la ecuación anterior es invariante para R , el haz reflejado.

La función de coherencia de segundo orden en función de la probabilidad de detección puede reescribirse como

$$g_{TR}^{(2)} = \frac{P_{TR}}{P_T P_R}$$

Eq. 65

Estamos interesados en detecciones simultáneas, por lo tanto la función de coherencia de segundo orden se simplifica

$$g_{TR}^{(2)}(0) = \frac{P_{TR}(0)}{P_T P_R} = g^{(2)}(0) \geq 1$$

Eq. 66

La Eq. 66 la hemos derivado de la misma forma en que derivamos la Eq. 59 y cumple la condición dada en la Eq. 63, y esta la hemos derivado pensando en campos clásicos. Note que si tenemos una onda perfectamente estable entonces $g^{(2)}(0) = 1$, si el campo es fluctuante entonces $g^{(2)}(0) > 1$.

Lo anterior sucede a causa que el BS divide la onda en dos ondas simétricas, copia. Estos campos salientes fluctúan al unisonó (correlación positiva) o no fluctúan (no hay correlación).

3.7.2. Función de coherencia de segundo orden para las salidas de un divisor de haz 50/50

Sabemos que la intensidad del campo electromagnético puede derivarse utilizando los operadores de creación \hat{a}^\dagger y aniquilación \hat{a} , es decir la intensidad es proporcional al operador *número de fotones* para el campo $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, capítulos 2.2 y 3.6 de esta tesis, y capítulo 16 de la referencia [7].

Note que en la descripción cuántica la correlación para los campos que salen de BS también viene dada por la función de coherencia de segundo orden $g_{TR}^{(2)}$, donde los subíndices TR se refieren a la correlación ente las salidas reflejada y transmitida de un divisor de haz; dado que la intensidad es proporcional al operador *número de fotones* podemos reescribir la función de coherencia de segundo orden en $\tau = 0$, como

$$g_{TR}^{(2)} = \frac{\langle \hat{a}_T^\dagger \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_T \hat{a}_R \rangle}{\langle \hat{a}_T^\dagger \hat{a}_T \rangle \langle \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_R \rangle}$$

Eq. 67

El campo transmitido y el reflejado por el BS pueden ser descritos a partir de los campos incidentes en el BS donde denotaremos por \hat{a}_V (la entrada vacía del divisor de haz) al segundo campo que incide, en la otra entrada de BS; en este caso particular la segunda entrada está vacía, podemos entenderlo como la entrada correspondiente al campo *vacío o cero fotones*; así reescribir los campos reflejado y transmitido para un BS 50/50 se establece de acuerdo a la referencia [7] y lo que hemos estudiado en el capítulo 2 de esta tesis.

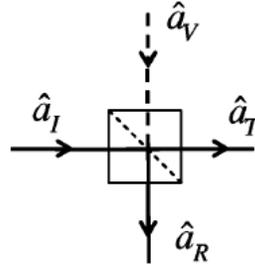


Ilustración 6. Diagrama para entrada de un fotón y el campo vacío a un BS.

De la ilustración 6 y siguiendo nuestros conocimientos para los divisores de haz observamos que las salidas del divisor de haz siguen la relación.

$$\hat{a}_{R,T} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_I \pm \hat{a}_V)$$

Eq. 68

Donde \hat{a}_I es el campo incidente y \hat{a}_V denota la entrada vacía. Sustituyendo lo anterior en la Eq. 67 tenemos

$$g_{TR}^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{n}_I(\hat{n}_I - 1) \rangle}{\langle \hat{n}_I \rangle^2} = g^{(2)}(0)$$

Eq. 69

La Eq. 69 nos permite calcular la función de coherencia de segundo orden como una función del número de fotones incidentes en el divisor de haz. Observe que si $\hat{n}_I = 1$ entonces $g_{TR}^{(2)}(0) = 0$, como esperamos para un fotón que no puede dividirse.

3.7.3. Campos uní-modales y función de coherencia de segundo orden para campos cuánticos

Consideramos, ahora, un campo uní-modal para el cual tenemos, al sustituir en la Eq. 69.

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2} = 1 + \frac{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2}$$

Eq. 70

Para el segundo orden de coherencia cuando se usa un campo no clásico [7] $g^{(2)}(0) < 1$. Por tanto definimos el coeficiente Q

$$\frac{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2}{\langle \hat{n} \rangle^2} = Q$$

Eq. 71

El coeficiente dado en la Eq. 71 tiene las siguientes propiedades

- $Q > 0$ para campos clásicos Gaussianos
- $Q = 0$ para campos Poissonianos
- $Q < 0$ para campos Sub-poissonianos

Para un estado coherente tenemos $g^{(2)}(\tau) = g^{(2)}(0) = \text{constante}$, por lo cual no observamos *bunching* o *antibunching* pues estos solo ocurren para campos multimodales.

Aplicando la función de coherencia de segundo orden a un sistema de luz no clásica debe dar aplicando la desigualdad de Cauchy.

$$g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0)$$

En resumen

- $g^{(2)}(0) < 1$ implica ***antibunching* un fenómeno completamente mecánico cuántico.**
- Si evaluamos la ecuación 15 con un estado de un solo fotón a la vez, $\hat{n}|1\rangle = 1|1\rangle$; lo que encontramos es $g^{(2)}(0) = 0$ que viola la desigualdad para la luz clásica dada por la ecuación 8.

El primer experimento en demostrar la existencia de un campo no clásico se realizó en un experimento de fluorescencia resonante desarrollado por Kimble, Dagenais y Mandel en 1977 [9]. Al medir la luz emitida por un átomo de Na encontraron $g^{(2)}(0) = 0.4 < 1$ probando que el campo presentaba *antibunching*.

Un campo que sufre *antibunching* puede ser interpretado como un experimento donde los fotones llegan al detector uno a uno; es decir cuando llegan al divisor de haz estos son reflejados o transmitidos pero nunca ambas posibilidades, llevando a la anti correlación en las coincidencias entre los detectores.

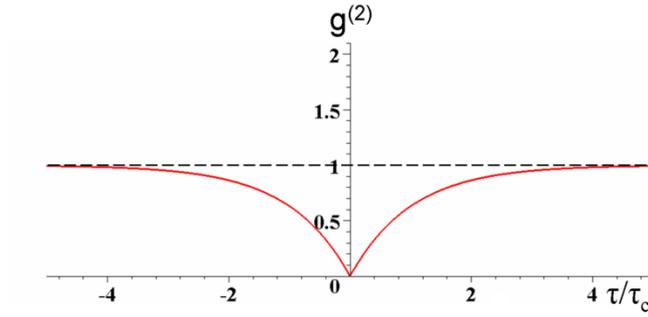


Ilustración 7. Función de correlación para el caso cuántico [10].

3.7.4. Breve paréntesis sobre *bunching* y *antibunching*

Antes de continuar es importante revisar dos conceptos *bunching* y *antibunching*. Dichos conceptos se derivan del comportamiento clásico o cuántico del campo electromagnético. El concepto nace cuando hacemos detección señales en coincidencia, que es lo que necesitamos para este experimento.

Un contador de coincidencias es un circuito electrónico que emite un pulso cada vez que dos pulsos arriban, a sus dos entradas, simultáneamente o en coincidencia. Observe que se consideraran dos señales en *coincidencia* dependerá de la resolución temporal del circuito, que está limitado por el ancho del pulso de salida; dicho tiempo lo denominaremos como T_τ , dos pulsos que arriban al contador de coincidencias uno al tiempo t y otro al tiempo $t + \tau$ se pueden juzgar en coincidencia si $|\tau| \leq \frac{1}{2}T_\tau$.

Sea $P_2(\mathbf{r}_1, t, \mathbf{r}_2, t + \tau)\Delta t\Delta\tau$ la probabilidad conjunta de un pulso en una entrada al tiempo t , dentro de un tiempo Δt ; y el otro pulso en la segunda entrada al tiempo $t + \tau$, en el intervalo $\Delta\tau$. La razón promedio R_c de coincidencias para la cual el circuito emite un pulso será.

$$R_c = \int_{-\frac{1}{2}T_\tau}^{\frac{1}{2}T_\tau} P_2(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t + \tau) d\tau$$

Eq. 72

Recordando la Eq. 12 del Apéndice D podemos reescribir la Eq. 72 como

$$R_c = R_1 R_2 T_\tau \left[1 + \frac{1}{T_\tau} \int_{-\frac{1}{2}T_\tau}^{\frac{1}{2}T_\tau} \lambda(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t + \tau) d\tau \right]$$

Eq. 73

Donde $R_i = \alpha_i c S_i \langle \hat{I}(\mathbf{r}_i) \rangle$, $i = 1, 2$; es la tasa a la que los pulsos arriban a los dos canales del contador de coincidencias.

La parte $\alpha_i c S_i$ representa las contribuciones accidentales o azarosas a las coincidencias dadas por cuentas oscuras o ruido. El segundo término, $\langle \hat{I}(\mathbf{r}_i) \rangle$, representa la corrección por las fluctuaciones en la intensidad del campo electromagnético.

En los experimentos con luz clásica los pulsos fotoeléctricos exhiben *bunching* u ocurren estrictamente de manera azarosa, como hemos visto de la desigualdad de Cauchy, la probabilidad de detección conjunta satisface la desigualdad

$$P_2(\mathbf{r}_1, t, \mathbf{r}_2, t + \tau) \leq P_2(\mathbf{r}_1, t, \mathbf{r}_2, t)$$

Eq. 74

En la Eq. 12 del Apéndice D se establece que la probabilidad de detección conjunta puede ser mayor o menor que el producto de las probabilidades de detección en ambos detectores por separado; en función de la función normalizada de correlación $\lambda(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t + \tau)$.

Si tenemos un campo estacionario la función de correlación λ es solo función de la diferencia de tiempo, $t_2 - t_1 = \tau$. Si $\lambda(0) > \lambda(t)$, implica que es más probable encontrar a cualesquiera dos pulsos fotoeléctricos juntos que separados en el tiempo; es decir si detectamos un pulso la probabilidad de encontrar otro enseguida es mayor que la de encontrarlos a tiempos separados. Esto se conoce como *bunching*. De acontecer lo contrario, encontrar dos pulsos separados en tiempo es más probable que encontrarlos juntos, es decir $\lambda(0) < \lambda(t)$, se considera un fenómeno de *antibunching*, [Ver ilustración 7].

De la Eq. 12 del Apéndice D y la Eq. 74 se puede deducir que la función normalizada de correlación para dos pulsos en el caso clásico (ondas electromagnéticas) debe satisfacer la desigualdad

$$\lambda(0) \geq \lambda(t)$$

Eq. 75

Si encontramos un experimento donde la desigualdad dada por la Eq. 75 no se cumple entonces estaremos ante un fenómeno de *antibunching*, y dado que no puede seguir las relaciones derivadas de la electrodinámica y la óptica clásica; estaremos ante un proceso puramente cuántico.

Un estado coherente $|\nu\rangle$ evaluado en la Eq. 69 dará como resultado $g^{(2)}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$ que es el mismo resultado para una onda clásica estable. Si pensamos en un estado incidente proveniente de una fuente térmica (mezcla incoherente) entonces la función de coherencia $g^{(2)}(\mathbf{0}) = \mathbf{2}$, dicho campo se encontrará *bunched* es decir los fotones tienden a venir juntos, como se observa en la ilustración a continuación

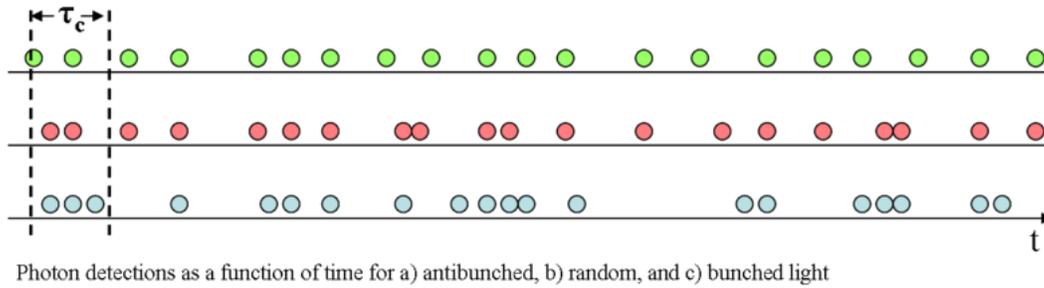


Ilustración 8. Detección de fotones en el tiempo; antibunched (verde), azarosa (roja) y bunched (azul) [10].

Sustituyendo las Eq. 11 y Eq. 12 del Apéndice D en la Eq. 74 (con $r_1 = r_2 = r$) obtenemos la desigualdad

$$\langle \mathcal{T} : \hat{I}(\mathbf{r}, t) \hat{I}(\mathbf{r}, t + \tau) : \rangle \leq \langle : I^2(\mathbf{r}, t) : \rangle$$

Eq. 76

En resumen la función de auto-correlación para intensidades medidas a dos tiempos diferentes, decrece de su valor inicial en $\tau = 0$ ó mantienen su valor inicial constante. Es decir para cualquier campo clásico las detecciones presentan *antibunching* o aleatorios. Los campos no-clásicos, cuánticos, presentan *antibunching*.

$$\langle \mathcal{T} : \hat{I}(\mathbf{r}, t) \hat{I}(\mathbf{r}, t + \tau) : \rangle > \langle : I^2(\mathbf{r}, t) : \rangle$$

Eq. 77

Es decir, que la función de correlación aumenta, en vez de caer, desde su valor inicial en $\tau = 0$. En el capítulo 11.8 de la referencia [4] se dan ejemplos de campos que cumplen la relación dada por la Eq. 77; pero son **no-clásicos**. Por tanto observar *antibunching* implica la presencia de un fenómeno explícitamente mecánico cuántico, mientras que un fenómeno que presenta *bunching* no tiene ésta implicación

En 1976 Kimble y Mandel [11] mostraron *bunching* de un laser de colorante en una intensidad cercana a la umbral; midieron la correlación temporal en la intensidad de dicho laser, el resultado se reproduce en la siguiente ilustración

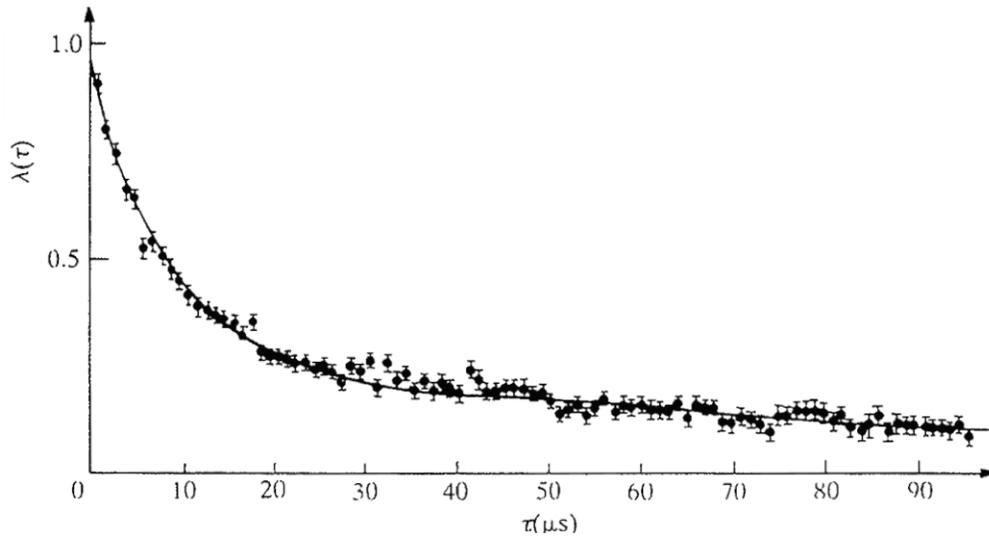


Ilustración 9. Resultados de la correlación temporal para un laser de colorante en la intensidad umbral mínima [11].

Al contrario de lo que se observa en la ilustración 8, una fuente que presenta *antibunching* fue estudiada en 1978 por Dagenais y Mandel [12]. Como se observa en la ilustración 9, al utilizar un átomo de Sodio coherentemente excitado; se obtiene fluorescencia atómica que puede ser colectada por un objetivo de microscopio y proyectada en dos foto-detectores.

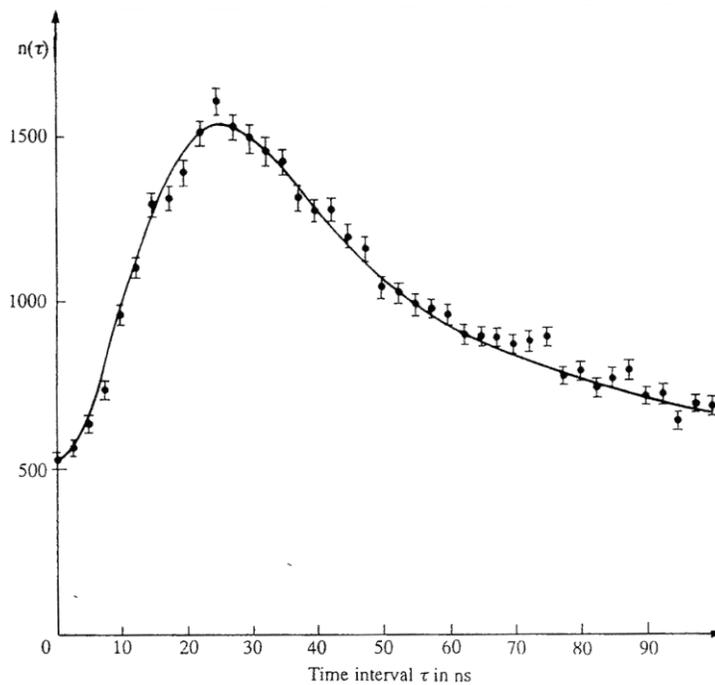


Ilustración 10. Correlación temporal en dos detectores para la fluorescencia de un átomo de Sodio. Observamos *antibunching* [12]

En la ilustración 9, se muestra que la mayor parte de los pulsos en pares fueron medidos con una diferencia de tiempo $\tau \sim 25ns$. Lo que esta en concordancia con la teoría de la florescencia que predice $\lambda(t) > \lambda(0)$, capítulo 15.6 en referencia [4]

3.8. Una nueva mirada al experimento de Grangier *et al.* [13]

En 1986 A. Aspect *et al* desarrollaron un experimento con un jet de átomos de calcio para demostrar que los fotones exhiben *anti bunching*. En la ilustración 11 se puede observar un dibujo esquemático del experimento.

En este experimento en concreto un átomo de Ca absorbe dos fotones cada uno de dos láseres con diferente frecuencia y decae emitiendo dos fotones el primero de una frecuencia ν_1 llando a un nivel intermedio con corta vida media y decae a su estado base emitiendo otro fotón de frecuencia ν_2 . Por conservación de momento angular, los fotones son siempre emitidos en direcciones opuestas uno del otro, así uno de ellos se puede usar como control y el otro se puede llevar al experimento. Cuando un fotón arriba al foto detector *gate* o *G* sabemos que el otro fotón incide en BS.

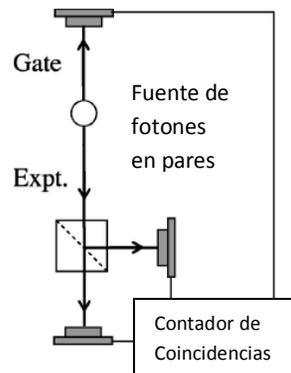


Ilustración 11. Esquema experimento de Aspect *et al.* Para demostrar las anti correlaciones para una fuente teórica de fotones individuales [13].

En este caso las detecciones en los foto detectores *T* y *R* estaban condicionadas a que el detector *gate* *G* detectara un fotón. En un experimento uno no mide directamente la intensidad, sin embargo, hemos visto que la probabilidad de fotodetección se relaciona directamente con la intensidad (ver capítulos 3.4 y 3.5); así la función de coherencia de segundo orden de segundo orden se puede escribir como:

$$g^{(2)}(0) = \frac{P_{GTR}}{P_{GT}P_{GR}}$$

Eq. 78

Donde P_{GT}, P_{GR} es la probabilidad de medir cuentas coincidentes en el detector *T, R* con *G*, y P_{GTR} es la probabilidad de medir tres coincidencias en *T, R* y *G*. Estas probabilidades están dadas

por el número de coincidencias dividido por el número de intentos, es decir por el número total de detecciones en *gate*:

$$P_{GTR} = \frac{N_{GTR}}{N_G}, \quad P_{GT} = \frac{N_{GT}}{N_G}, \quad P_{GR} = \frac{N_{GR}}{N_G}$$

Eq. 79

En la ecuación anterior N_G se usa como el número total de eventos, por lo que es posible normalizar todas las probabilidades.

Si tomamos el número de cuentas que corresponde a cada una, podemos reescribir la Eq. 78 como

$$g^{(2)}(0) = \frac{N_{GTR}N_G}{N_{GT}N_{GR}}$$

Eq. 80

Ahora tenemos la función de coherencia de segundo orden en función del número de cuentas que obtenemos para cada coincidencia. Finalmente lo que medimos en un experimento son el número de coincidencias por ello la Eq. 80 nos da la función de coherencia de segundo orden directamente de las mediciones del experimento.

En el experimento de Aspect et al., midieron una coherencia de segundo orden de $g^{(2)}(0) = 0.18 \pm 0.06$, que viola la desigualdad clásica dada por la Eq. 66

Note que entonces cualquier violación a la desigualdad dada por la Eq. 66 implica un fenómeno cuántico ya que ésta es solo válida para casos clásicos. Encontramos, así, una forma sencilla de demostrar fenómenos cuánticos mediante la medición de la función de coherencia de segundo orden.

ÓPTICA NO LINEAL y FENÓMENOS RELACIONADOS

Conversión paramétrica descendente tipo I

Descripción cuántica de la conversión paramétrica descendente

Cristal Beta Bario Borato (BBO)

4. Óptica no lineal y fenómenos relacionados

Para realizar con éxito nuestro experimento requerimos una fuente cuyo comportamiento sea cuántico, es decir que emita fotones en parejas como el átomo de Ca^{40} utilizado por Grangier *et al.*, uno de los métodos mas utilizados es a través de cristales o medios no-lineales.

Un estudio completo de la teoría básica de la birrefringencia y óptica no lineal se pueden encontrar en la tesis de Licenciatura realizada por E. Barrios en 2008 [1].

Entre los distintos procesos no lineales para la generación de luz no clásica es la conversión paramétrica descendente, o SPDC por sus siglas en ingles, en la que centraremos nuestro estudio. Haremos una revisión breve de la teoría de SPDC tipo I y un análisis cuántico de la fuente.

4.1. SPDC tipo I [2]

La conversión espontánea paramétrica descendente ocurre cuando un fotón de bombeo interactúa con un medio no-lineal dando lugar a dos fotones (denominados uno señal y otro testigo) sujetos a las condiciones de conservación de momento y energía

$$\omega_s + \omega_t = \omega_b \quad \text{y} \quad \vec{k}_s + \vec{k}_t = \vec{k}_b$$

Eq. 1

Donde los sub-índices s, t y b corresponden a los fotones señal, testigo y bombeo respectivamente. Las condiciones de acoplamiento de fase tipo I producen fotones señal y testigo con la misma polarización, que resulta ortogonal a la polarización del fotón de bombeo (ilustración 8). Para ciertos cristales solo una polarización del rayo de fotones de bombeo provocará conversión descendente tipo I, lo cual depende de la estructura del cristal, índices de refracción y eje óptico (comúnmente la polarización que provoca la conversión es la paralela al eje óptico del cristal). El par de fotones, señal y testigo, producidos pueden caer en cualquier plano común con el rayo de fotones de bombeo. El conjunto de pares de fotones señal y testigo, *todos con polarización opuesta al rayo de bombeo*, forman conos concéntricos al rayo de bombeo con ángulos definidos de acuerdo a la división de energía del fotón de bombeo (la conservación de energía y momento definen los ángulos de cada par convertido).

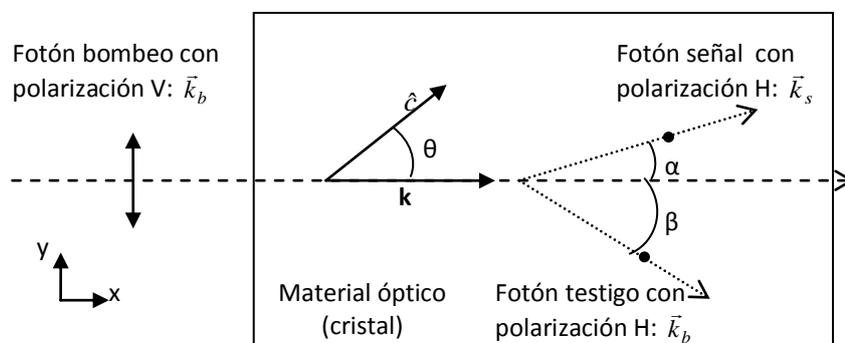


Ilustración 1 División de un fotón de bombeo en dos, un señal y un testigo en acoplamiento tipo I.

Para encontrar los ángulos de acoplamiento de fase α y β para un par señal-testigo (es decir, los ángulos de los conos de fotones señales y testigos), se hace uso de $|\vec{k}_j| = \omega_j n(\omega_j)/c$ y de la aproximación $n_o(\omega_s) \approx n_o(\frac{1}{2}\omega_b) \approx n_o(\omega_t)$, esta aproximación toma en cuenta el caso degenerado de la generación por diferencia de frecuencias, donde, en la ecuación del fenómeno $\omega_s = \omega_b - \omega_t$, se tiene que $\omega_t = \omega_s$, con lo que se obtendrá que los fotones convertidos tendrán una frecuencia igual a la mitad de la frecuencia de bombeo: $\omega_s = \omega_t = \frac{1}{2}\omega_b$; además, en base a las suposiciones hechas al inicio del capítulo, de que no hay dispersión ni absorción, la aproximación nos dice que el índice de refracción ordinario es independiente de la frecuencia.

Al separar Eq. 1 en sus componentes, las componentes en y arrojan la ecuación:

$$k_{sy} + k_{ty} = k_{by}$$

Eq. 2

y las componentes en x :

$$k_{sx} + k_{tx} = k_{bx}$$

Eq. 3

Sin embargo, de la ilustración 8 vemos que:

$$k_{sx} = |\vec{k}_s| \cos \alpha; \quad k_{tx} = |\vec{k}_t| \cos \beta; \quad k_{sy} = |\vec{k}_s| \sin \alpha; \quad k_{ty} = |\vec{k}_t| \sin \beta$$

Eq. 4

Si sustituimos estas expresiones en Eq. 2 y Eq. 2, obtenemos:

$$|\vec{k}_s| \sin \alpha + |\vec{k}_t| \sin \beta = k_{by}$$

Eq. 5

$$|\vec{k}_s| \cos \alpha + |\vec{k}_t| \cos \beta = k_{bx}$$

Eq. 6

Pero, $k_{by} = 0$ por conservación del momento en la dirección y del fotón de bombeo, así:

$$\frac{\omega_s n_o(\omega_s)}{c} \sin \alpha + \frac{\omega_t n_o(\omega_t)}{c} \sin \beta = 0$$

Eq. 7

$$\frac{\omega_s n_o(\omega_s)}{c} \cos \alpha + \frac{\omega_t n_o(\omega_t)}{c} \cos \beta = k_{bx} = \frac{\omega_b n_e(\omega_b, \theta)}{c}$$

Eq. 8

La suposición de la degeneración y la de la igualdad de los índices de refracción ordinarios, para todas las frecuencias involucradas, hace que la Eq. 2 se transforma en:

$$\frac{1/2 \omega_b n_o(1/2 \omega_b)}{c} \text{sen} \alpha + \frac{1/2 \omega_b n_o(1/2 \omega_b)}{c} \text{sen} \beta = 0$$

Eq. 9

que puede ser simplificada a:

$$\text{sen} \alpha = -\text{sen} \beta \Rightarrow \alpha = -\beta$$

Eq. 10

Sustituyendo esta relación en Eq. 2, se obtiene:

$$\frac{1/2 \omega_b n_o(1/2 \omega_b)}{c} \cos \alpha + \frac{1/2 \omega_b n_o(1/2 \omega_b)}{c} \cos \alpha = \frac{\omega_b n_e(\omega_b, \theta)}{c}$$

Eq. 11

O de manera simplificada:

$$\cos \alpha = \frac{n_e(\omega_b, \theta)}{n_o(1/2 \omega_b)} \quad \text{o} \quad \frac{\sec \alpha}{n_o(1/2 \omega_b)} = \frac{1}{n_e(\omega_b, \theta)}$$

Eq. 12

Al sustituir éste resultado en la ecuación siguiente

$$\frac{\text{sen}^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} = \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{n^2(\theta)}$$

Eq. 13

Obtenemos

$$\frac{\text{sen}^2 \theta}{n_e^2(\omega_b)} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2(\omega_b)} = \frac{1}{n_e^2(\omega_b, \theta)} = \frac{\sec^2 \alpha}{n_o^2(1/2 \omega_b)}$$

Eq. 14

Ecuación que puede ser resuelta explícitamente, dados los índices de refracción y el ángulo de corte del cristal. La Eq. 14 nos ayuda a encontrar el ángulo al que los fotones producidos viajan.

4.2. Descripción cuántica de la conversión paramétrica descendente [6]

Partimos de la suposición que los fotones generados por el proceso de conversión paramétrica descendente son indistinguibles por lo que el Hamiltoniano para el proceso paramétrico se puede escribir

$$\hat{H} = \sum_{i=0}^2 \hbar \omega_i \left(\hat{n}_i + \frac{1}{2} \right) + \hbar g (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0 + c.c.)$$

Eq. 15

Donde hemos redefinido los subíndices tal que 0 se refiere al haz de bombeo, 1 y 2 hacen referencia al haz señal y testigo respectivamente. Y g es el parámetro de conversión paramétrica descendente.

El proceso de conversión paramétrica descendente en cristales no lineales fue investigado teóricamente por Klyshko³ en 1968 y experimentalmente por Brunham y Weinber⁴ en 1970.

Observe que el conmutador de los operadores de número con el Hamiltoniano definido en la Eq. 15 toma el siguiente valor

$$[\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + 2\hat{n}_0, \hat{H}] = 0$$

Eq. 16

Por lo que $\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + 2\hat{n}_0$ es una constante que refleja la fisión del campo de bombeo en dos fotones uno señal y otro testigo. Haciendo Taylor sobre $\hat{a}_j(t)$ y usando las ecuaciones de Heisenberg del movimiento se puede construir las derivadas temporales y así obtener soluciones para corto tiempo de $\hat{a}_j(t)$. Graham⁵ en 1984 mostró que es posible reducir el problema a una solución analítica al usar una simplificación de \hat{H} .

Es conveniente introducir una amplitud compleja que varíe lentamente en el tiempo $\hat{\mathcal{A}}_j(t) = \hat{a}_j(t)e^{i\omega_j t}$ para $j = 1, 2$. Y la ecuación de movimiento temporal para $\hat{\mathcal{A}}_j(t)$ es

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathcal{A}}_1(t)}{dt} &= -igv_0 \hat{\mathcal{A}}_2^\dagger(t) e^{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_0)t} \\ \frac{d\hat{\mathcal{A}}_2(t)}{dt} &= -igv_0 \hat{\mathcal{A}}_1^\dagger(t) e^{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_0)t} \end{aligned}$$

Eq. 17

En las ecuaciones anteriores v_0 es la amplitud compleja de \hat{a}_0 , y nos restringiremos al caso donde $\langle \hat{n}_1(t) \rangle, \langle \hat{n}_2(t) \rangle \ll |v_0|^2$. Como sabemos que $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$ encontramos la solución para las ecuaciones Eq. 17.

$$v_0 = |v_0| e^{i\theta}$$

$$\hat{\mathcal{A}}_1(t) = \hat{\mathcal{A}}_1(0) \cosh(g|v_0|t) - ie^{i\theta} \hat{\mathcal{A}}_2^\dagger(0) \sinh(g|v_0|t)$$

$$\hat{\mathcal{A}}_2(t) = \hat{\mathcal{A}}_2(0) \cosh(g|v_0|t) - ie^{i\theta} \hat{\mathcal{A}}_1^\dagger(0) \sinh(g|v_0|t)$$

Eq. 18

4.2.1. Estadística de la producción de fotones

Para calcular los valores esperados de los operadores de creación de los fotones convertidos debemos conocer el estado inicial de ambos estados, testigo y señal; este estado será el vacío $|vac\rangle_{1,2}$. Recordando que $\hat{\mathcal{A}}_j(0)|vac\rangle_{1,2} = 0, j = 1,2$ podemos calcular el r -momento de $\hat{n}_1(t)$ ⁶

$$\langle \hat{n}_1^r(t) \rangle = \langle : \hat{n}_1^r(t) : \rangle_{=1,2} \langle vac | \hat{\mathcal{A}}_1^{\dagger r}(t) \hat{\mathcal{A}}_1^r(t) | vac \rangle_{1,2} = \dots = r! \sinh^{2r}(g|v_0|t)$$

$$\langle : \hat{n}_2^r(t) : \rangle = r! \sinh^{2r}(g|v_0|t)$$

Eq. 19

En particular cuando $r = 1$ obtenemos

$$\langle \hat{n}_1^1(t) \rangle = \langle \hat{n}_2^1(t) \rangle = \sinh^2(g|v_0|t)$$

Eq. 20

Cuando $r = 2$

$$\langle : \hat{n}_1^2(t) : \rangle = \langle : \hat{n}_2^2(t) : \rangle = \sinh^4(g|v_0|t)$$

Eq. 21

Así obtenemos

$$\langle (\Delta \hat{n}_1(t))^2 \rangle = \langle : \hat{n}_1^2(t) : \rangle - \langle \hat{n}_1(t) \rangle^2 + \langle \hat{n}_1(t) \rangle = \langle \hat{n}_1(t) \rangle [1 + \langle \hat{n}_1(t) \rangle] = \langle (\Delta \hat{n}_2(t))^2 \rangle$$

Eq. 22

El número promedio de fotones generados por la conversión paramétrica descendente crece cuadráticamente, en la Eq. 20, en el tiempo para la emisión espontánea mientras $g|v_0|t \ll 1$. Si $g|v_0|t$ excede la unidad la emisión estimulada domina y $\langle \hat{n}_j(t) \rangle$ crece exponencialmente en el tiempo. Note que si $\langle \hat{n}_j(t) \rangle$ crece demasiado, la suposición sobre v_0 constante no es suficiente. Note que en todo el desarrollo anterior t es el tiempo de propagación en el material y dado que en general este es pequeño y el bombeo se realiza usando un estado estable, en general se cumple $g|v_0|t \ll 1$.

Es importante conocer la correlación cruzada o covarianza a partir de las Eq. 18 [6]

$$\langle : \hat{n}_1(t) \hat{n}_2(t) : \rangle = \langle \hat{n}_j(t) \rangle + 2\langle \hat{n}_j(t) \rangle^2 = \langle \hat{n}_j(t) \rangle + \langle : \hat{n}_j^2(t) : \rangle$$

Eq. 23

La covarianza en la fluctuación del número de fotones convertidos está dada por la relación

$$\langle : \Delta \hat{n}_1(t) \Delta \hat{n}_2(t) : \rangle = \langle : \hat{n}_1(t) \hat{n}_2(t) : \rangle - \langle \hat{n}_1(t) \rangle \langle \hat{n}_2(t) \rangle = \langle \hat{n}_j(t) \rangle (1 + \langle \hat{n}_j(t) \rangle)$$

Eq. 24

Usando las Eq. 22 y Eq. 24 obtenemos el coeficiente de covarianza ente el número de fotones señal y testigo

$$\sigma_{12} \equiv \frac{\langle : \Delta \hat{n}_1(t) \Delta \hat{n}_2(t) : \rangle}{\left(\langle (\Delta \hat{n}_1(t))^2 \rangle \langle (\Delta \hat{n}_2(t))^2 \rangle \right)^{\frac{1}{2}}} = 1$$

Eq. 25

Esto nos dice que señal y testigo están completamente correlaciones y por ende por cada incremento en el número de fotones en señal también incrementara el número de testigos.

La situación real es más complicada puesto que siempre mas de dos modos del campo son excitados, y un tratamiento multimodal del campo se vuelve necesario, esto fue estudiado por Mollow [7] en 1973, Hong y Mandel [8] en 1985 y por Ou, Wang y Mandel [9] en 1989.

Podemos introducir la correlación de intensidad normalizada λ_{12}

$$\lambda_{12} = \frac{\langle : \Delta \hat{n}_1(t) \Delta \hat{n}_2(t) : \rangle}{\langle \hat{n}_1(t) \rangle \langle \hat{n}_2(t) \rangle}$$

Eq. 26

La relación entre esta correlación $1/\lambda_{12}$ y $\langle \hat{n}_1(t) \rangle$ del experimento se muestran en la siguiente figura

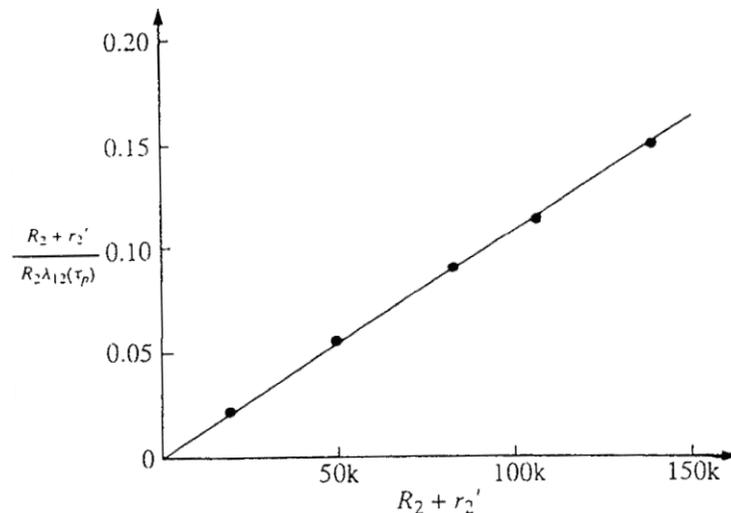


Ilustración 2. Resultados de la medición en la relación entre λ_{12} y la intensidad promedio en la conversión paramétrica descendente [10].

Observar el comportamiento no clásico del campo generado en la conversión descendente se puede demostrar utilizando la expresión dada por la Eq. 23, la demostración explícita fue dada por Graham [11] en 1984. En la sección 11.9 de la referencia [6] se describe el teorema de equivalencia óptica para los operadores ordenados normalmente, lo que nos permite reescribir la relación en la Eq. 23 en una desigualdad

$$\langle |v_1|^2 |v_2|^2 \rangle_\phi > \langle |v_j|^4 \rangle_\phi = [\langle |v_1|^4 \rangle_\phi \langle |v_2|^4 \rangle_\phi]^{\frac{1}{2}}$$

Eq. 27

La ecuación anterior viola la desigualdad de Schwartz

$$\langle |v_1|^2 |v_2|^2 \rangle \leq [\langle |v_1|^4 \rangle \langle |v_2|^4 \rangle]^{\frac{1}{2}}$$

para campos clásicos y muestra explícitamente que la luz generada por medio de la conversión paramétrica descendente tiene una descripción no clásica. Cuando $\langle \hat{n}_1(t) \rangle \ll 1$ se observa que $\langle |v_1|^2 |v_2|^2 \rangle_\phi \gg \langle |v_1|^4 \rangle_\phi$. En 1991 Zou, Mandel y Wang [12] realizaron un experimento donde observaron coincidencias entre la señal y testigo R_{12} , entre dos señales R_{22} y entre dos testigos R_{11} ; que los llevo a concluir tras substrair todas las coincidencias accidentales que R_{12} excede a $(R_{11} + R_{22})$ por mas de 600 desviaciones estándar.

Así el fenómeno de conversión paramétrica descendente nos provee con una aproximación al estado de un solo fotón y nos permite realizar experimentos con un testigo; pues sabemos que cuando una señal es medida esta debe estar acompañada por una gemela testigo. Observe la siguiente ilustración

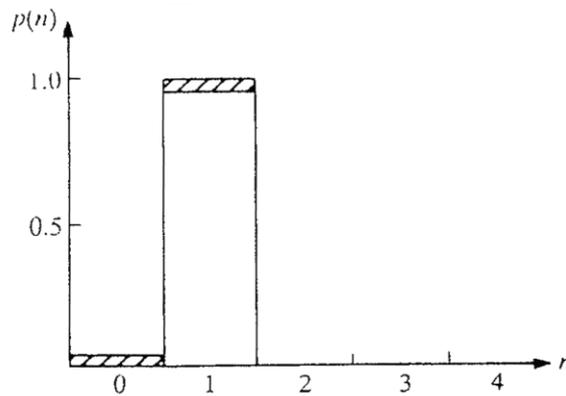


Ilustración 3. Probabilidad $p(n)$ de detectar n testigos condicionado a detectar a su gemela señal [13]

En ella se observa la probabilidad $p(n)$ de medir n cuentas en testigo condicionado a ver a su gemela señal, como se puede concluir de la grafica anterior existe un testigo para cada señal. Con esto demostramos que en la conversión paramétrica descendente efectivamente se producen dos señales.

El retraso que existe ente estas señales fue estudiado por Friberg, Hong y Mandel [14] en 1984 y encontraron que la diferencia de tiempo es del orden de 100 pico segundos. Además el tiempo de correlación resulta independiente de tiempo de coherencia del haz de bombeo y del tiempo de propagación en el cristal.

4.3. Cristales Beta Bario Borato (BBO) [2,15]

También referido como $\beta - BaB_2O_4$, se trata de un material óptico no-lineal y birrefringente común, bastante fácil de usar para investigación. Sus características útiles incluyen transparencia sobre un gran ancho de banda, desde UV hasta infrarrojo, amplia capacidad de acoplamiento de fase, un alto umbral de daño y baja susceptibilidad higroscópica. El corte del cristal, con respecto al eje óptico (variable de la que se tiene control al momento de construir el cristal), determina el ángulo θ que

éste hace con la trayectoria del rayo de bombeo (Eq. 2). Comúnmente, los cristales BBO usados para los experimentos de producción de fotones correlacionados tienen un corte de $\theta = 30^\circ$.

Como se menciona a lo largo de la sección 4.3, y en los Apéndices E, F, y G de la referencia [1], en general, los índices de refracción (y por tanto las susceptibilidades) dependen de la longitud de onda (frecuencia) con que se trabaja. Existen unas ecuaciones llamadas *Ecuaciones de Sellmeier* que proporcionan estas relaciones, dichas ecuaciones son obtenidas generalmente con ayuda de pruebas experimentales de los cristales. Para el cristal de BBO, las ecuaciones son:

$$n_e(\lambda)^2 = 2.7359 + \frac{0.01878}{\lambda^2 - 0.01822} - 0.01354\lambda^2$$

Eq. 28

$$n_o(\lambda)^2 = 2.3753 + \frac{0.01224}{\lambda^2 - 0.01667} - 0.01515\lambda^2$$

Eq. 29

La Ilustración 4 muestra las gráficas de las ecuaciones de Sellmeier para los índices de refracción del BBO como función de la longitud de onda. Como podemos apreciar, para una longitud de onda de 405nm (que es la que se usará en el experimento como frecuencias de bombeo) se tiene $n_o(405nm) = 1.6919$ y $n_e(405nm) = 1.5671$; y para una de 810nm (frecuencia generada por la conversión de fotones a 405nm) se encuentra que $n_o(810nm) = 1.6603$ y $n_e(810nm) = 1.5442$.

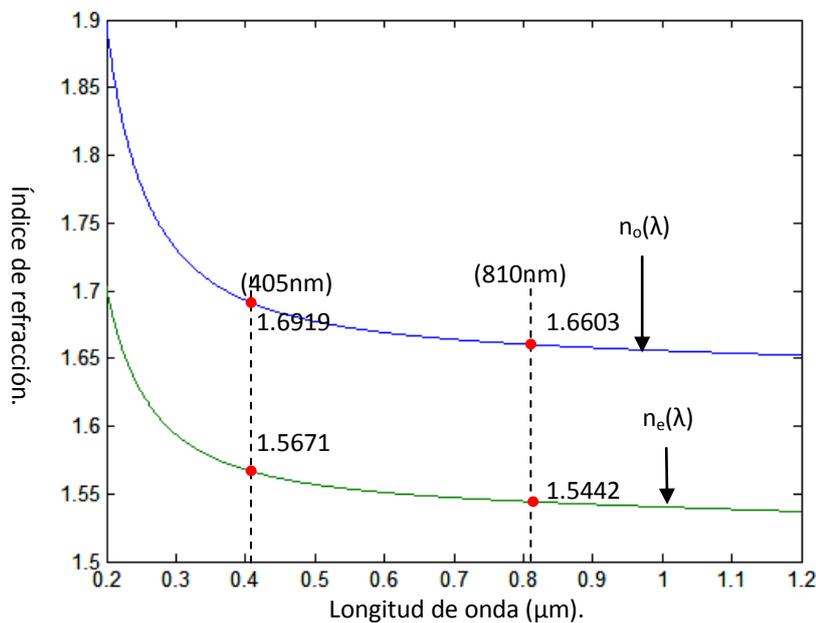


Ilustración 4. Índices de refracción para el BBO dados por las ecuaciones de Sellmeier

Otras propiedades importantes de los cristales BBO se muestran en la Tabla 2.

Simetría y clase del cristal	Romboédrica, 3m	Umbral de daño (GW/cm ²)
Grupo espacial	R3c	A 1.064μm, pulsos de 10ns
		4.6

Índices de refracción a (μm):	n_o, n_e	A 1.064 μm , pulsos de 0.1ns	15
0.2537	----, ----	Susceptibilidades NL, pm/V co GSH a 1.06μm, [$d_{31} = d_{15}$, $d_{32} = d_{24}$] Simetría de Kleinman.	
0.2660	1.7571, 1.6146	d_{22}	2.3
0.4358	1.6868, 1.5564	d_{15}	0.15
0.5461	1.6738, 1.5547	d_{24}	= d_{15} por simetría
0.6328	1.6673, 1.5500	d_{33}	Irrelevante
1.0642	1.6551, 1.5425	d_{ef}	$d_{15} \text{ sen}\theta$, si $\phi=0$
Coefficiente de absorción a λ :	(cm^{-1})	Angulo de acoplamiento de fase a d_{ef} máximo y 25°C	
0.266 μm	0.04 a 0.15	A 0.532 μm Tipo I	47.6°
1.0 μm	0.001 a 0.002	A 1.064 μm Tipo I	22.8°

Tabla 1. Propiedades del BBO

Las ecuaciones de Sellmeier Eq. 28 y Eq. 28 combinadas con la Eq. 28, para un fotón de bombeo de 405nm y con un ángulo de corte de $\theta = 30^\circ$, dan la siguiente relación:

$$\frac{\text{sen}^2 30^\circ}{(1.5671)^2} + \frac{\text{cos}^2 30^\circ}{(1.6919)^2} = \frac{1}{n_e^2(\omega_b, \theta)} = \frac{\text{sec}^2 \alpha}{(1.6603)^2}$$

Eq. 30

Despejando α obtenemos: $\alpha = 3.065^\circ$. En la ilustración 4 se muestra la gráfica de α contra θ .

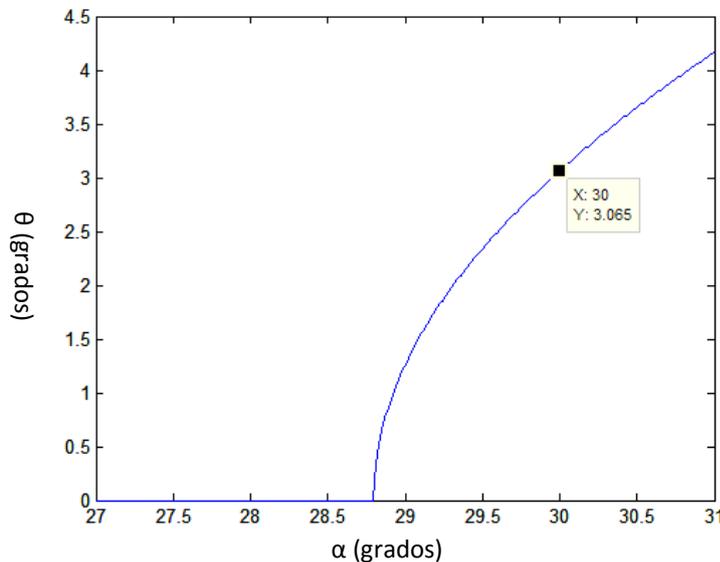


Ilustración 5. Angulo de acoplamiento de fase (α) como función del ángulo de corte del cristal (θ) para una longitud de onda de 405nm. La eficiencia de conversión descendente se relaciona con $\text{cos}^2\theta$, por lo que un corte de 30° es apropiado.

Sin embargo, este ángulo es interno al cristal; es decir, el ángulo α obtenido, es el ángulo que tienen los conos de fotones convertidos dentro de los cristales de BBO (ilustración 1), si queremos conocer cuál sería el ángulo de los conos cuando salen del cristal al aire, tenemos que aplicar la ecuación de Snell para considerar la refracción de los rayos de fotones y, así, poder conocer dicho ángulo (ilustración 5).

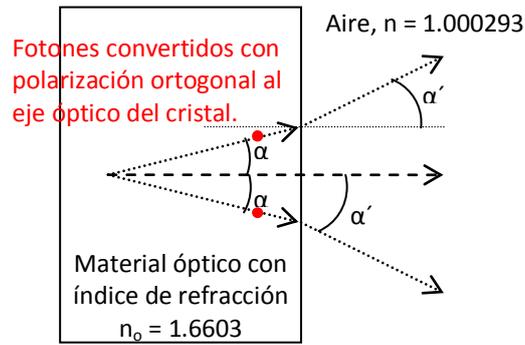


Ilustración 6. Refracción de los rayos de fotones convertidos al pasar del cristal al aire.

En este caso, la ecuación de Snell es:

$$n_o \text{ sen } \alpha = n \text{ sen } \alpha'$$

Eq. 31

Donde n_o es el índice de refracción que sufren los fotones convertidos dentro del cristal ($n_o = 1.6603$), α es el ángulo del cono dentro del cristal, n es el índice de refracción del aire ($n = 1.000293$). Al sustituir los datos en la ecuación:

$$(1.6603) \text{ sen}(3.065^\circ) = (1.000293) \text{ sen } \alpha'$$

Eq. 32

De donde se obtiene que $\alpha' = 5.091^\circ$, este el ángulo al cual se encuentra el cono en el aire, y es el ángulo al cual experimentalmente se deben buscar los fotones convertidos.

EXPERIMENTO

Diagrama del experimento actualizado

Contando coincidencias por pares

Error experimental estadístico, teoría

Descripción técnica de montaje del experimento

Módulos de conteo de fotones o SPCM

Contador de coincidencias

Características del diseño experimental

Contando coincidencias por pares

5. Experimento

Este capítulo desarrolla la teoría y diseño experimental para demostrar la existencia del fotón utilizando anti-correlaciones. Demostrar la existencia del fotón requiere del uso de diversos sistemas opto-electrónicos de detección, sistemas ópticos y laser. El correcto funcionamiento de cada parte por separado y en conjunto es vital para asegurar un resultado fiable. Entender cómo funciona cada pieza es vital para nuestro experimento, por ello dedicamos el siguiente capítulo a un desarrollo teórico y práctico sobre la instrumentación utilizada, los errores y método de medición.

5.1. Diagrama del experimento actualizado [1]

En el montaje final del experimento utilizamos un cristal BBO que al ser bombardeado por el haz proveniente de un laser UV produce un par de fotones enredados que salen en un ángulo aproximado de 5 grados, tomando ventaja de esto diseñamos el experimento; como se observa en la ilustración 1.

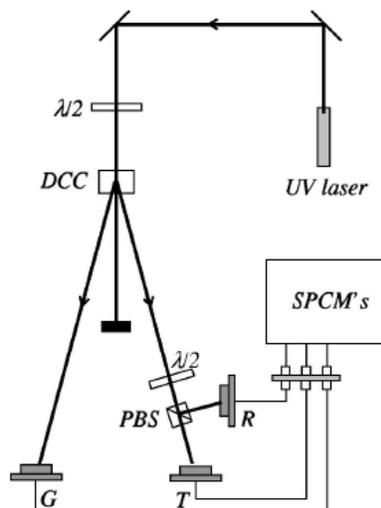


Ilustración 1. Experimento para demostrar existencia del fotón [1].

La ilustración 1 muestra el diagrama final de nuestro experimento. Un laser UV de 404.77 nm se utiliza para bombear un cristal no lineal BBO (DCC) que emite dos fotones a 810 nm , los fotones producidos se emplean en el experimento. Uno de los fotones denominado *testigo* se envía a un detector G y el otro es enviado a un divisor de haz (BS). A la salida del divisor se encuentran dos foto detectores *reflejado* y *transmitido*. Las señales de estos tres se llevan a un módulo contador de fotones y finalmente a un sistema de conteo de coincidencias.

5.2. Contando coincidencias por pares

Nuestro experimento como se detalla en la referencia [1] ha sido modificado para buscar coincidencias en pares para las tres señales. Recordando la ilustración 1, coincidencias entre los canales Testigo-Reflejado, Testigo-Transmitido, Reflejado-Transmitido (donde Testigo se identificará con la letra G).

En el capítulo 3 Eq. 80 definimos a la función de correlación de segundo orden como

$$g^{(2)}(0) = \frac{N_{GTR}N_G}{N_{GT}N_{GR}}$$

Eq. 1

Donde N_{lm} indica el numero de coincidencias entre los canales l y m y el caso N_{GTR} las coincidencias triples.

Mientras medir coincidencias dobles resulta sencillo pues se trata de un circuito o un dispositivo capaz de observar dos señales y decidir que si ambas han llegado con un tiempo menor al umbral establecido, las señales se encuentran en coincidencias y emitir un pulso que puede ser contado por cualquier otro dispositivo. Las coincidencias triples resultan mas complicadas, en este caso se trata de una coincidencia en pares con un trigger, es decir si llega una señal de G entonces se buscan coincidencias con T y R tales que las tres sucedan en un intervalo de tiempo umbral que es el mismo que las coincidencias por pares para $G - T$ Y $G - R$. (El desarrollo de circuitos de coincidencia se puede encontrar en la tesis de Licenciatura presentada por Yanik, "").

Nosotros contamos con una tarjeta contadora de canales simples y en coincidencia desarrollada por el departamento de Robótica de la Benemerita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP)

Como se observa la tarjeta nos permite hacer correlaciones o conteo de coincidencia para cuatro canales dos a dos, nosotros solo utilizaremos tres de los cuatro canales disponibles. La configuración es tal que observaremos las coincidencias $G - T$, $G - R$ Y $T - R$.

Es importante recordar que la expresión experimental para la función de coherencia de segundo orden se puede derivar utilizando la teoría semi clásica de la foto detección o la cuántica; la diferencia estriba en como se calculan las probabilidades.

5.2.1. Coincidencias triples a partir de coincidencias dobles[2]

En algunos laboratorios existe la posibilidad de hacer coincidencias de tres canales por pares, es decir conocemos N_{GT} , N_{GR} , N_{TR} ¿Cómo calcular la función de correlación dada por la Eq. 1 si solo conocemos las coincidencias anteriores?

Recordando teoría de conjuntos tenemos

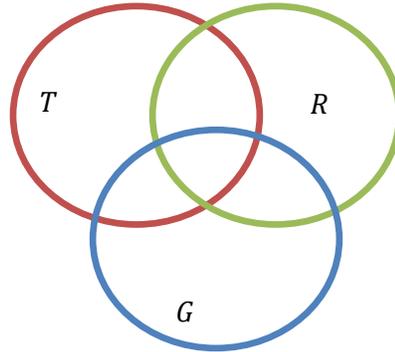


Ilustración 2. Diagrama de Ben para tres conjuntos que se intersectan

De teoría de conjunto sabemos que

$$\begin{aligned} N(G \cup T \cup R) &= N(G) + N(T) + N(R) - \{N(G \cap T) + N(G \cap R) + N(T \cap R)\} + N(G \cap T \cap R) \\ &= N_G + N_T + N_R - \{N_{GT} + N_{GR} + N_{TR}\} + N_{GTR} \end{aligned}$$

Eq. 2

Como deseamos conocer N_{GTR}

$$N_{GTR} = N_{G \cup T \cup R} - \{N_G + N_T + N_R\} + N_{GT} + N_{GR} + N_{TR}$$

Eq. 3

Si dividimos todo por N_G

$$P_{GTR} = P_{G \cup T \cup R} - \{P_G + P_T + P_R\} + P_{GT} + P_{GR} + P_{TR}$$

Eq. 4

Pero $P_{G \cup T \cup R} = 1$, pues es la probabilidad de que ocurra cualquiera de las combinaciones, entonces

$$P_{GTR} = 1 - \{P_G + P_T + P_R\} + P_{GT} + P_{GR} + P_{TR}$$

Eq. 5

Recordando la eq. 27 tenemos

$$g^{(2)}(0) = \frac{P_{GTR}}{P_{GT}P_{GR}} = \frac{1 - \{P_G + P_T + P_R\} + P_{GT} + P_{GR} + P_{TR}}{P_{GT}P_{GR}}$$

Eq. 6

Pero $P_{GT} = \frac{N_{GT}}{N_G}$, $P_{GR} = \frac{N_{GR}}{N_G}$ y $P_{GTR} = \frac{N_{GTR}}{N_G}$

$$g^{(2)}(0) = \frac{P_{GTR}}{P_{GT}P_{GR}} = \frac{N_{GTR}N_G}{N_{GT}N_{GR}} = \frac{(N_{GUTUR} - \{N_G + N_T + N_R\} + N_{GT} + N_{GR} + N_{TR})N_G}{N_{GT}N_{GR}}$$

Eq. 7

Note que la información requerida para encontrar $g^{(2)}(0)$ a partir de la Eq. 16 la conocemos; medimos el número total de fotones N_{GUTUR} , las cuentas por canal N_i y conocemos las coincidencias por pares N_{lm} para los tres canales. Así podemos derivar la función de correlación de segundo orden a partir de los datos entregados por nuestra tarjeta contadora.

Note que si no hubiera ruido y este fuera un experimento perfecto, en el sentido estricto de la palabra entonces

$$N_{GUTUR} = N_G + N_T + N_R - (N_{GT} + N_{GR} + N_{TR})$$

Eq. 8

Y entonces $g^{(2)}(0) = 0$ como esperamos de la teoría.

Sin embargo como hemos visto existen diversas fuentes de ruido en un experimento como el que llevamos a cabo.

5.2.2. Coincidencias pares sin testigo

Supongamos que no contamos con un tercer detector y no podemos conocer N_G , en consecuencia no tenemos la posibilidad de conocer las coincidencias N_{GT} y N_{GR} . ¿Cómo calcular la función de coherencia de segundo orden?

Observe que ahora solo contamos con las coincidencias N_{TR} y conoces el número de fotones que llegan a N_T y N_R , podemos reescribir la función de coherencia de segundo orden $g^{(2)}(t_i, \tau = 0)$ cómo [3]:

$$g_{2D}^{(2)}(t_i, \tau = 0) = \frac{P_{TR}}{P_T P_R}$$

Eq. 9

Donde P_i es la probabilidad de detección en el detector i en un intervalo de tiempo Δt , y P_{TR} es la probabilidad de detección en coincidencia de ambos detectores (transmitido T y reflejado R) en el mismo intervalo temporal.

En los capítulos 3.4 y 3.5 concluimos que la probabilidad de foto detección esta dada por el número promedio de detecciones multiplicado por el tiempo de detección. Es decir que las probabilidad de detección se escriben como

$$P_T = \frac{N_T}{\Delta T} \Delta t, \quad P_R = \frac{N_R}{\Delta T} \Delta t, \quad P_{TR} = \frac{N_{TR}}{\Delta T} \Delta t$$

Eq. 10

Sustituyendo en la Eq. 9 se obtiene la función de coherencia de segundo orden:

$$g_{2D}^{(2)}(t_i, \tau = 0) = \frac{N_{TR}}{N_T N_R} \left(\frac{\Delta T}{\Delta t} \right)$$

Eq. 11

La Eq. 11 es diferente de cualquiera de las formas que puede tomar la Eq. 7, lo anterior se debe a que en el caso de tener un tercer detector (N_G) es posible normalizar la probabilidad de foto detección conjunta como señalamos en el capítulo 3, las detecciones en el canal *gate* se pueden utilizar como el número de eventos totales y no se depende del tiempo total de conteo ΔT , ni del tiempo de cada detección Δt .

Puesto que las mediciones con dos y tres detectores mantienen la misma desigualdad para campos clásicos $g^{(2)}(t_i, \tau = 0) \geq 1$, un resultado que viole la desigualdad, en cualquier caso, es sólo posible en presencia de campos sup-poissonianos, i.e. campos cuya descripción es puramente mecánico cuántica.

5.3. Error experimental estadístico, teoría

Caracterizar todas las fuentes de ruido que existen en este experimento, una por una, resultaría complicado e ineficiente. Dado que lidiamos con un problema estadístico, y los errores de mayor relevancia (electrónicos, ópticos y mecánicos) son de origen aleatorio y tienen características estadísticas, el error para nuestro experimento podemos encontrarlo a función de las desviaciones estándar de las mediciones.

Si tenemos una variable como función de otras, por ejemplo $f(x, y, z)$ sabemos que la expansión en Taylor de esta variable será

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2 \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx dz + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy dz + \dots$$

Eq. 12

Cuando una serie de medidas discretas $\{x_n\}$ se lleva a cabo el valor promedio de dicha medición, asumiendo que todos los eventos tienen la misma probabilidad es:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Eq. 13

Y la medida de la dispersión en esta serie de experimentos, i.e. la desviación estándar o error sobre las mediciones será

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Eq. 14

Si, ahora, realizamos n mediciones discretas sobre i -variables y obtenemos un conjunto de datos $\{\{x_{1,n}\}, \{x_{2,n}\}, \dots, \{x_{i,n}\}\}$; el promedio para cada uno es

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{i,j}$$

Eq. 15

La medida de su dispersión, desviación estándar sobre el valor promedio toma la forma:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_{i,j} - \bar{x}_i)^2}$$

Eq. 16

Dado que estamos analizando un conjunto de variables, resulta interesante conocer como se relacionan esas variables, o qué tan relacionadas se encuentran; i.e. la dependencia o covarianza entre ellas. Para que el error experimental este completo debemos tomar la varianza sobre todos los valores medidos.

Denotamos cada i -variable por X_i , el valor esperado viene dado por $E(X_i)$ y este serpa \bar{x}_i ; definimos la covarianza entre cualesquiera par de variables como

$$\sigma_{X_i X_j} = Cov(X_i, X_j) = E(X_i, X_j) - E(X_i)E(X_j)$$

Eq. 17

Bajo esta definición la varianza es un caso especial de la covarianza; la covarianza de la variable consigo misma

$$\sigma_x^2 = Cov(X_i, X_i) = \sigma_{X_i X_i}$$

Eq. 18

Si la cantidad que medimos esta en dependencia de múltiples variables,

$$X = f(x_1, \dots, x_n)$$

Eq. 19

Entonces el error estadístico para dicha variable será.

$$\sigma_X^2 = \sum_{i,j=0}^n \sigma_{x_i x_j}$$

Eq. 20

La Eq. 17 nos provee de una herramienta sencilla para conocer el error estadístico que hay en una medición; sabemos que el ruido en los detectores obedece distintas reglas estadísticas, sin embargo esto tiene una influencia directa sobre el proceso final i.e. la señal medida, que contiene la información sobre todos los errores encontrados. Ya que lidiamos con un experimento que recae en un gran número de estadísticas y por ende promedios sobre las mediciones, la Eq. 17 representa un error, conservador, pero válido sobre el experimento.

5.3.1. Error experimental de la función de correlación

Conocemos cada uno de los términos necesarios para el cálculo de la función de correlación dada en la Eq. 7. (Recuerde que los números medidos son promedio)

Observe que la Eq. 7 puede verse como el resultado de la división de dos funciones

$$g^{(2)}(0) = \frac{f}{h}$$

Eq. 21

Donde las funciones

$$f = (N_{GUTUR} - \{N_G + N_T + N_R\} + N_{GT} + N_{GR} + N_{TR})N_G$$

Eq. 22

$$h = N_{GT}N_{GR}$$

Eq. 23

Por la regla de la derivada para el error tenemos que

$$\Delta g^{(2)}(0) = \frac{\Delta f}{h} + \frac{f\Delta h}{h^2}$$

Eq. 24

Los errores o variaciones Δf y Δh se pueden calcular siguiendo la Eq. 16 y Eq. 20. Es decir

$$\Delta f = [\sigma_{N_{GUTUR}} + \sigma_{N_G} + \sigma_{N_R} + \sigma_{N_T} + \sigma_{N_{GT}} + \sigma_{N_{GR}} + \sigma_{N_{TR}} + \text{cov}(N_{GT}, N_{GR}) + \text{cov}(N_{GT}, N_{TR}) + \text{cov}(N_{GR}, N_{TR})]N_G + [N_{GUTUR} - \{N_G + N_T + N_R\} + N_{GT} + N_{GR} + N_{TR}]\sigma_{N_G}$$

Eq. 25

$$\Delta h = \sigma_{N_{GT}} N_{GR} + \sigma_{N_{GR}} N_{GT}$$

Eq. 26

Y combinados nos dan el resultado del error para la función de correlación.

5.4. Descripción técnica de montaje del experimento

El experimento de correlaciones requiere, entre otras cosas, de un láser en el violeta o ultravioleta cercano aunado a estabilidad óptica. Para evitar moverlo utilizamos una configuración de espejos en periscopio (con libertad de giro en 2 dimensiones, para facilitar la alineación) a fin de incidir el haz en el cristal BBO. El spot que salía del periscopio se fijó en una pantalla lejana (aprox. 4m), posteriormente se utiliza para alineación ya que éste es la bisectriz del ángulo de salida de los fotones producidos por la conversión paramétrica Descendente.

5.4.1. Sistema de bombeo para Cristal no lineal (PDC, Parametric Down Conversion) y producción de fotones heraldos

Se generan los fotones infrarrojos a través de la conversión paramétrica descendente en el cristal BBO. Para ello, se requiere:

- Láser de diodo de 25 mW (B&W Tek Inc., modelo BWB-405-20E/55872), con polarización horizontal. El pico de emisión de este láser está en 404.77 nm, con un ancho de banda pequeño (aprox. 1 nm). El perfil del láser es un óvalo vertical de aproximadamente 2 mm × 1 mm.
- Mesa elevadora estable (NRS, modelo 280).
- Cristal BBO (β -BaB₂O₄). Las dimensiones del cristal son: 5 mm × 5 mm de área activa y 2 mm de espesor. Para evitar que el cristal absorba agua por la humedad utilizamos un desecante comercial.
- Espejo plano vertical (Edmund Scientific, modelo 2810). La montura del espejo permite giro de precisión en 2 ejes.

- Periscopio
- Base rotatoria (Newport, MRSP-2).
- Porta postes (Newport, MVPH-2 y MVPH-3)
- Postes (Newport)
- Nueces de latón
- Soporte para monturas laterales (Newport, M-360-90).

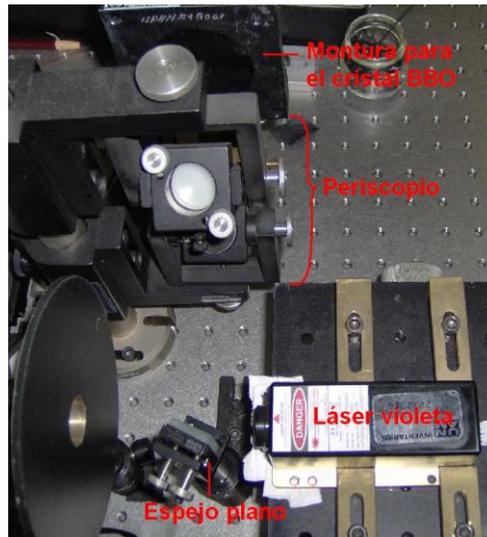


Ilustración 3. Laser y sistema de espejos para bombeo a cristal BBO

Sobre una mesa elevadora, fija a una mesa flotada, se colocó un láser violeta sujetándolo como se observa en la ilustración 3. Para garantizar la estabilidad el plano del láser se alinea con el plano de la mesa óptica flotada. Un espejo plano con alta reflectividad en el azul está para guiar el haz hacia el periscopio. El periscopio nos permite dirigir el haz al cristal BBO. El haz reflejado por el periscopio debe ser paralelo al plano de la mesa, así los haces infrarrojo y la luz violeta no convertida por el proceso DCC, yace en un plano paralelo a la mesa óptica.

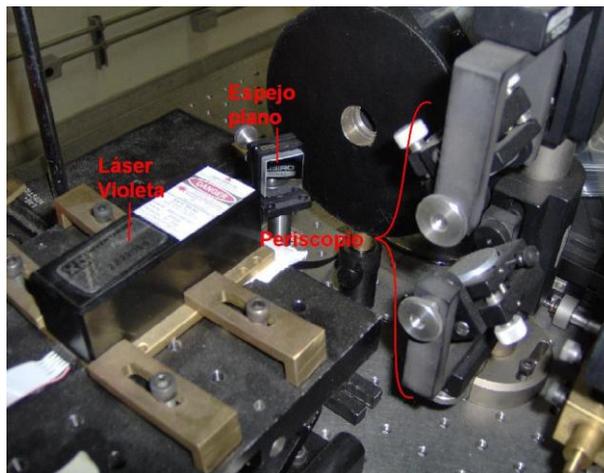


Ilustración 4. Sistema de bombeo

Se debe garantizar la estabilidad óptica del cristal BBO es decir que el plano y la dirección de propagación los fotones producidos mediante PDC se mantenga constante. Se construyó un sistema compuesto por monturas laterales, una base rotatoria y sistemas de sujeción como se observa en la ilustración 5; la base rotatoria nos permite hacer correcciones en el orden de 0.5° del plano del cristal respecto al plano de la mesa.

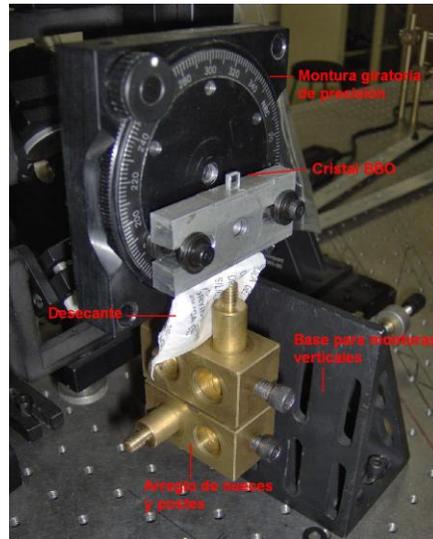


Ilustración 5. Soporte cristal BBO

5.5. Módulos de conteo de fotones o SPCM.

Conocemos distintos sistemas de foto-detección basados en foto-diodos, sería interesante y cómodo tener un sistema que consistiera de un modulo con un APD o SPAD, circuito de refrigeración, control de corriente y distintos filtros para limpiar y obtener señales optimizadas para la detección del campo electromagnético en el régimen de energía correspondiente a la energía de un solo *quanto* del campo; dichos aparatos se conocen como SPCM por sus siglas ingles para Single Photon Counting Module.

Son dispositivos diseñados y optimizados para trabajar con luz incidente de muy baja intensidad, tales como la dada por un *quanto* de energía electromagnética.

Son instrumentos de gran fineza y por tanto deben ser manipulados con cuidado, la mayoría de los manuales recomiendan tener fuentes separadas para los distintos circuitos que le forman (refrigeración, control, conteo, operación) y dada su alta sensibilidad pueden ser dañados muy fácilmente si la intensidad del campo incidente es mayor que algunos miles de *quantos*. Por ello el campo incidente debe viajar por fibras ópticas.

Hay dos presentaciones generales, individuales o en arreglos de cuatro contadores. Típicamente su eficiencia ronda el 65%.

Utilizamos un SPCM de 4 canales, modelo AQ4 diseñado por Perkin Elmer, cuya curva de eficiencia cuántica se da en la ilustración 7 (entre 60% a 65% de eficiencia para infrarrojo cercano).



Ilustración 6. Unidad SPCM Perkin Elmer AQ4 (Perkin Elmer SPCM AQ4 Technical Information)

El SPCM-AQ4C es un arreglo de cuatro SPCMs independientes, capaces de detectar *quantos* de luz entre 400nm y 1060nm. Es decir, el umbral de energía de detección es entre 1.87×10^{-16} mW a 4.97×10^{-16} mW.

Cada detector del SPCM-AQ4C consta de un fotodiodo de avalancha cuyo pico de eficiencia supera el 60% a 650nm; un sistema termo-electrónico de enfriamiento y un circuito contador que permiten $> 4 M c/s$ en experimentos de 500ms y $1.5 M c/s$ en operación continua. En uso continuo el tiempo muerto entre dos detecciones es de 50 ns. La salida de cada canal es una señal TTL para la cual el ancho de pulso es de 25 ns con una amplitud de 4.5 V a una impedancia de 50 Ω . Cada pulso, de la señal TTL, corresponde a un fotón detectado.

En la ilustración siguiente se observa la eficiencia de foto detección en la energía umbral en función de la longitud de onda.

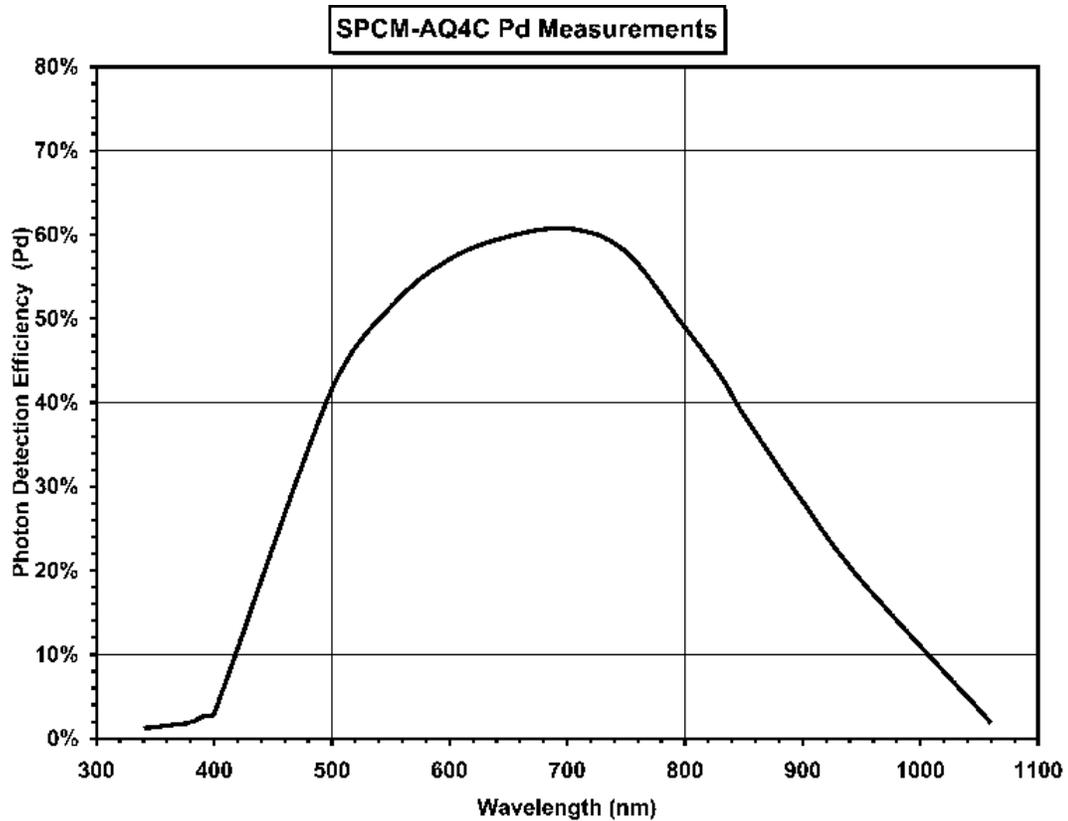


Ilustración 7. Eficiencia de detección Vs. Longitud de onda (Perkin Elmer SPCM-AQ4C Datasheet)

La luz es llevada al SPCM utilizando fibras ópticas, recubiertas con un material opaco para impedir la incidencia de luz ambiente. El SPCM-AQ4C cuenta con receptores ópticos para fibra óptica alineados con los detectores.

Se utilizan acopladores ópticos para coleccionar los haces de salida. Estos tienen un filtro de interferencia o *interference filter* (IF) para el infrarrojo cercano (810 nm) cuya curva de transmisión se ilustra a continuación

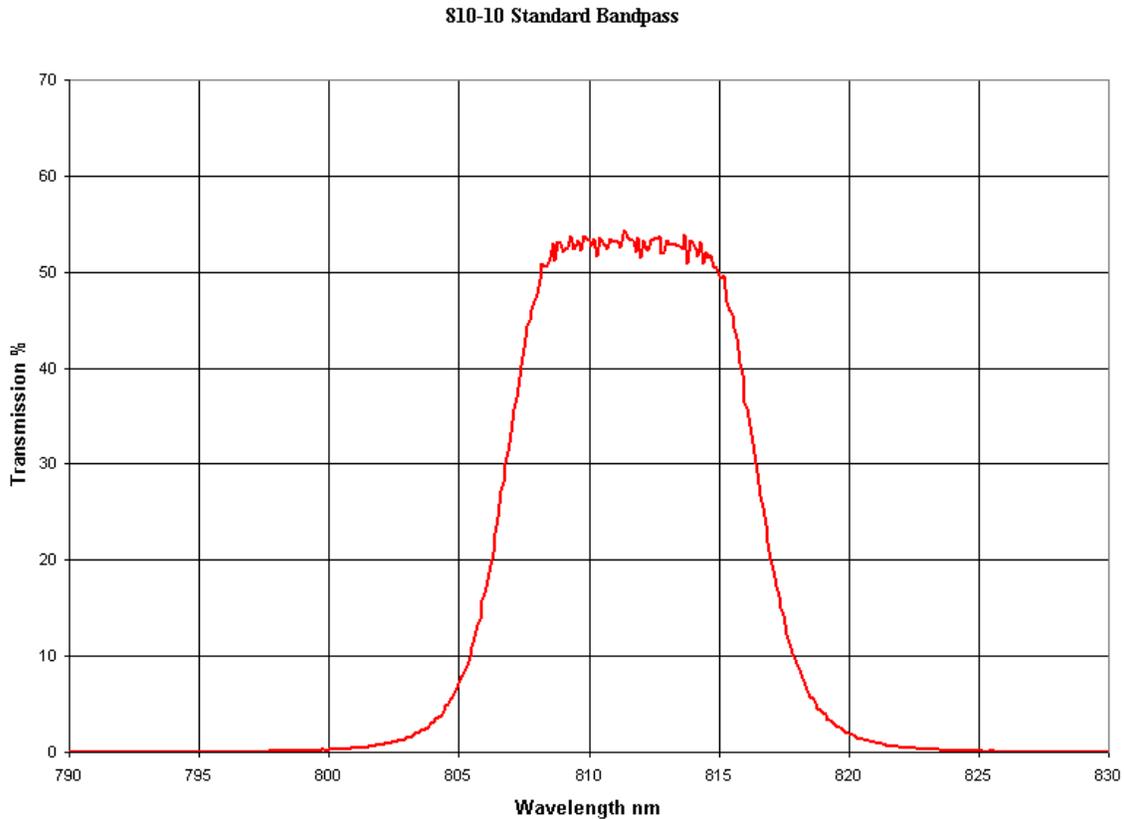


Ilustración 8. Transmisión de los filtros en infrarrojo cercano en función de la longitud de onda.

Este filtro nos asegura que efectivamente medimos solamente luz en el infrarrojo cercano.

5.6. Contador de coincidencias

Para evaluar si dos señales se encuentran en coincidencia necesitamos un dispositivo capaz de observar a ambas en un periodo de tiempo y decidir si éstas se encuentran dentro de un margen de tiempo tal que se puede juzgar que ambas señales se han generado o están en coincidencia.

“Un contador de coincidencias es un circuito electrónico que emite un pulso cada vez que dos pulsos arriban, a sus dos entradas, simultáneamente o en coincidencia. Observe que se considerar dos señales en coincidencia dependerá de la resolución temporal del circuito, que está limitado por el ancho del pulso de salida; dicho tiempo lo denominaremos como T_{τ} , dos pulsos que arriban al contador de coincidencias uno al tiempo t y otro al tiempo $t + \tau$ se pueden juzgar en coincidencia si $|\tau| \leq \frac{1}{2} T_{\tau}$.”

En realidad no es necesario que ambas señales lleguen simultáneamente, ya que estas pueden ser retrasadas por medios físicos como usar cables de distinta longitud o que la detección se realice en dos puntos que se encuentren a una distancia arbitraria de la fuente, entre muchas otras.

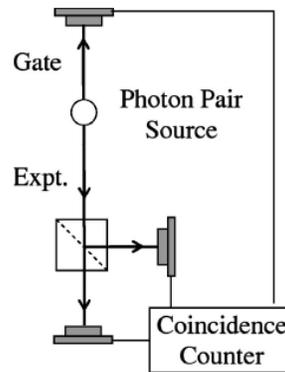


Ilustración 9. Diagrama simplificado del experimento de anti-correlación para demostrar la existencia del fotón [1].

Enfoquemos nuestra atención en sólo dos detectores, por ejemplo los que se encuentran a las salidas del divisor de haz en la ilustración 9. El contador de coincidencias decide si las señales se encuentran en coincidencia si estas llegan dentro de un intervalo de tiempo Δt establecido por el experimentador. Éste tiempo puede ser definido a partir de cálculos básicos sobre el tiempo que le llevara a ambas señales viajar desde la fuente al detector, ser procesadas por el detector y el tiempo que toma a una señal para llegar del detector al contador de coincidencias.

El intervalo Δt comienza a correr a partir de que una de las señales arriba al detector, en general el experimentador decide cual será su señal *trigger* (gatillo) o *start* y cuál será la señal *stop*.

La mayoría de los contadores de coincidencias se basan en TAC (Time Amplitude Converter) o un circuito que emite un pulso de una amplitud proporcional al tiempo entre las señales recibidas

Si Δt equivale a una amplitud V para el pulso de salida; y definimos $\Delta T = t_{stop} - t_{start}$, la amplitud del pulso emitido por el TAC será

$$V_{out} = \alpha_{TAC} \Delta T \cdot V$$

Eq. 27

Donde α_{TAC} es la ganancia del TAC. Y nos permite tener una señal con una amplitud temporal típica de 2.5 a 3 nanosegundos que debe ser analizada para juzgar si las señales se encuentran en coincidencia o no.

En general para asegurar que la señal *start* siempre llegue antes que la señal *stop* se utilizan métodos espaciales (mayor longitud de cable o locación de los detectores), es decir se agrega un retraso entre las señales denotado por $t_{retraso}$.

Para determinar si $\Delta T \leq \Delta t$, debemos analizar si la amplitud del pulso emitido por el TAC cae dentro de la ventana establecida Δt centrada a partir del tiempo de retraso entre las señales, $t_{retraso}$. Es decir si sabemos que

$$\Delta V_{coincidencia} = \alpha_{TAC} 2t_{retraso} \cdot V$$

El rango de amplitud para la señal dada por el TAC debe estar entre

$$V_{min,coincidencia} = \alpha_{TAC} (\Delta t - t_{retraso}) V$$

$$V_{max,coincidencia} = \alpha_{TAC} (\Delta t + t_{retraso}) V$$

O para la amplitud de la señal medida con el TAC esta debe entrarse entre

$$V_{min,coincidencia} \leq V_{out} \leq V_{max,coincidencia}$$

Un SAC (Single Channel Analyzer) se configure para emitir un pulso, en general con amplitud de 5V, si la señal que se le suministra esta en el rango que el usuario desea; es decir si se encuentra entre las amplitudes máxima y mínima calculadas.

En nuestro caso utilizamos una tarjeta contadora desarrollada por el departamento de Robótica de la Benemerita Universidad Autónoma de Puebla que cuenta coincidencias de manera automática haciendo uso de un TAC y SCA integrados, y un reloj de alta frecuencia para realizar *time-stamp*.

Hemos seleccionado como señal *start* a aquella dada por el detector denominado *gate* y que las señales provenientes de los canales transmitido y reflejado tengan una diferencia de 6 ns entre ellas y un retraso de 6 y 12 nanosegundos respecto a *gate* respectivamente.

Una vez que la señal *gate* llega a la tarjeta, ésta busca las señales de los detectores transmitido y reflejado, las señales *stop*; y escribe sus tiempos de llegada. Un análisis de esta diferencia de tiempo le permite al sistema decidir si se encuentran o no, dichas señales, en coincidencia.

Haciendo uso de un tercer canal para coincidencias el sistema buscará coincidencias entre las señales reflejada y transmitida, usando a transmitida como *start* y reflejada como *stop*.

Nuestra ventana Δt se fijo en 2.5ns. En resumen las señales utilizadas tienen un retraso entre ellas como se observa en la tabla 1.

Señal	Retraso respecto a señal	Valor en nano-egundos
<i>Gate</i>	<i>Gate</i>	0
<i>Transmitida</i>	<i>Gate</i>	6
<i>Reflejada</i>	<i>Gate</i>	12
<i>Transmitida</i>	<i>Reflejada</i>	6

Tabla 1. Retraso en nanosegundos de las señales utilizadas para el experimento de anti correlaciones

Realizar conteo de tres coincidencias requiere del uso de un canal extra en el TAC conocido como *start gate coincidence*. Es decir se hace coincidencias entre un canal y las coincidencias de otro. Dado que se utilizan canales separados para cada coincidencia se puede realizar de forma paralela todos los conteos de coincidencias necesarios.

Es decir cada vez que se recibe un pulso de *gate* el sistema busca por coincidencias entre los canales *transmitido* y *reflejado*; y simultáneamente busca coincidencias entre *gate* y *transmitido* o *gate* y *reflejado*.

5.7. Caracterización del diseño experimental

Nos enfocaremos, en esta sección y las siguientes, a tratar los aspectos técnicos de nuestro experimento en la foto-detección, conteo y correlación.

Antes de comenzar cualquier experimento es necesario conocer las diversas fuentes de ruido, aquellas mecánicas o provenientes de fluctuaciones en el laser han sido minimizadas mediante una alineación correcta y manteniendo temperaturas estables. Se ha cuidado la alineación de los diversos dispositivos ópticos y opto-electrónicos para asegurar la precisión en la detección y conteo.

5.7.1. Ruido del SPCM

El ruido proveniente de los sistemas de detección debido a las características tratadas en los capítulos anteriores se mide experimentalmente haciendo uso de un contador de fotones de dos canales (Stanford Research Systems, SR-400) con una impedancia de 50Ω ; el trigger para el contador esta dado por un Generador de funciones (Sony Tektronix, AFG 320); los cables coaxiales tienen la misma longitud y se asegura su buen estado mediante el envío y medición de pulsos en un osciloscopio.

El trigger para el contador es un pulso cuadrado con frecuencia $f = 1Hz$ y para el modo de detección de pulsos, el umbral de detección, en el SR-400, se situó en $300mV$.

Nuestro SPCM es un arreglo de 4 SAPDs separados, de los cuales utilizamos los canales 1,3 y 4. Tomando 17 periodos de conteo por canal, cuando el SPCM se encuentra en modo de detección (las entradas han sido bloqueadas para observar solo cuentas oscuras) encontramos los niveles de ruido propios del SPCM para cada canal

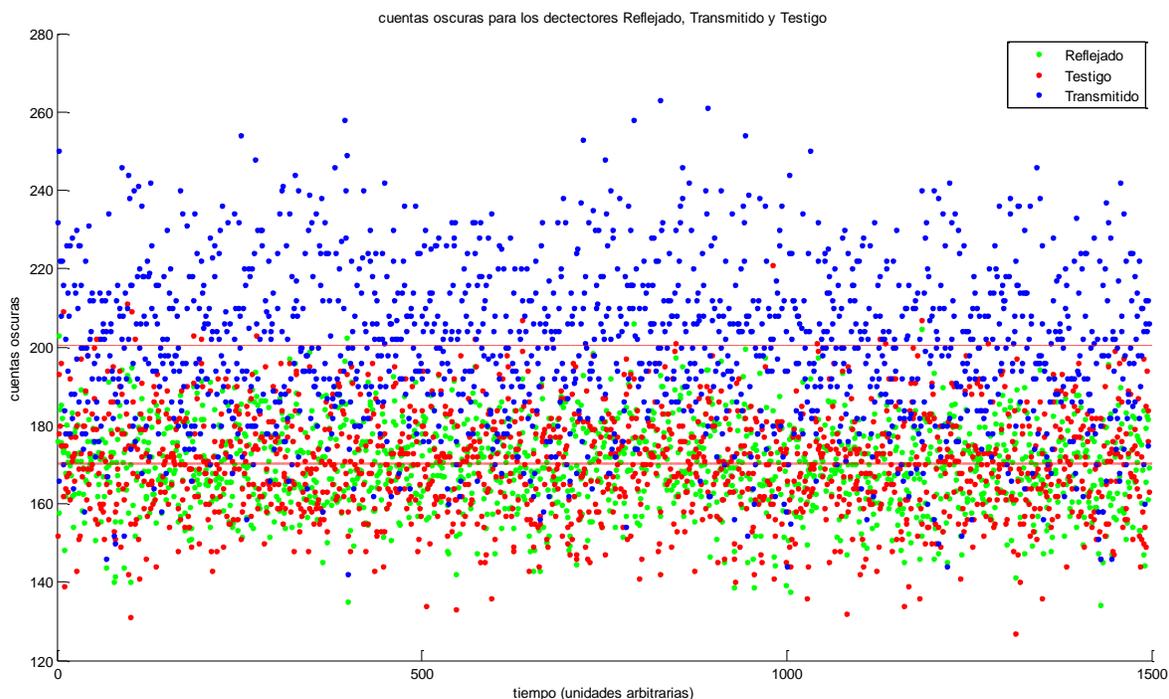


Ilustración 10. Cuentas oscuras para los detectores utilizados en el SPCM-AQ4C utilizado.

Canal	Cuentas oscuras (cuentas/segundo)	promedio	Desviación estándar
Reflejado	170	13	
Transmitido	170	10	
Testigo	200	19	

Tabla 2. Cuentas oscuras para el SPCM-AQ4C utilizado

5.7.2. Determinación del camino de fotones infrarrojos

Conocemos teóricamente el ángulo de separación para los fotones convertidos mediante el proceso de Conversión Paramétrica Descendente (PDC por sus siglas en inglés). Sin embargo cada cristal presenta características únicas y por lo tanto dicho ángulo debe corroborarse experimentalmente.

El ángulo solicitado al fabricante fue 5° . Utilizando bases giratorias alrededor del cristal BBO para cada acoplador, los acopladores además cuentan con ajuste en altura y dirección de cabeceo. Se buscan las señales producidas por los fotones infrarrojos; para asegurar que medimos el haz infrarrojo se coloca un filtro interferencial en el infrarrojo cercano en el acoplador óptico. Al encontrar los haces se fija la base giratoria para cada detector (Transmitido y Testigo) también se fija la posición en cabeceo y altura para los acopladores de fibra óptica que llevarán la luz infrarroja colectada al SPCM. Note que la posición se fija en aquella donde el número de cuentas es máximo.

Una vez que se conoce la posición para la cual las cuentas en el detector *testigo* es máximo, éste se utiliza para medir el ancho del cono de luz. Para lograrlo el detector está montado en una base de desplazamiento micrométrica que corre paralela a la cara de bombeo y salida del cristal BBO. Los resultados se observan en la siguiente ilustración.

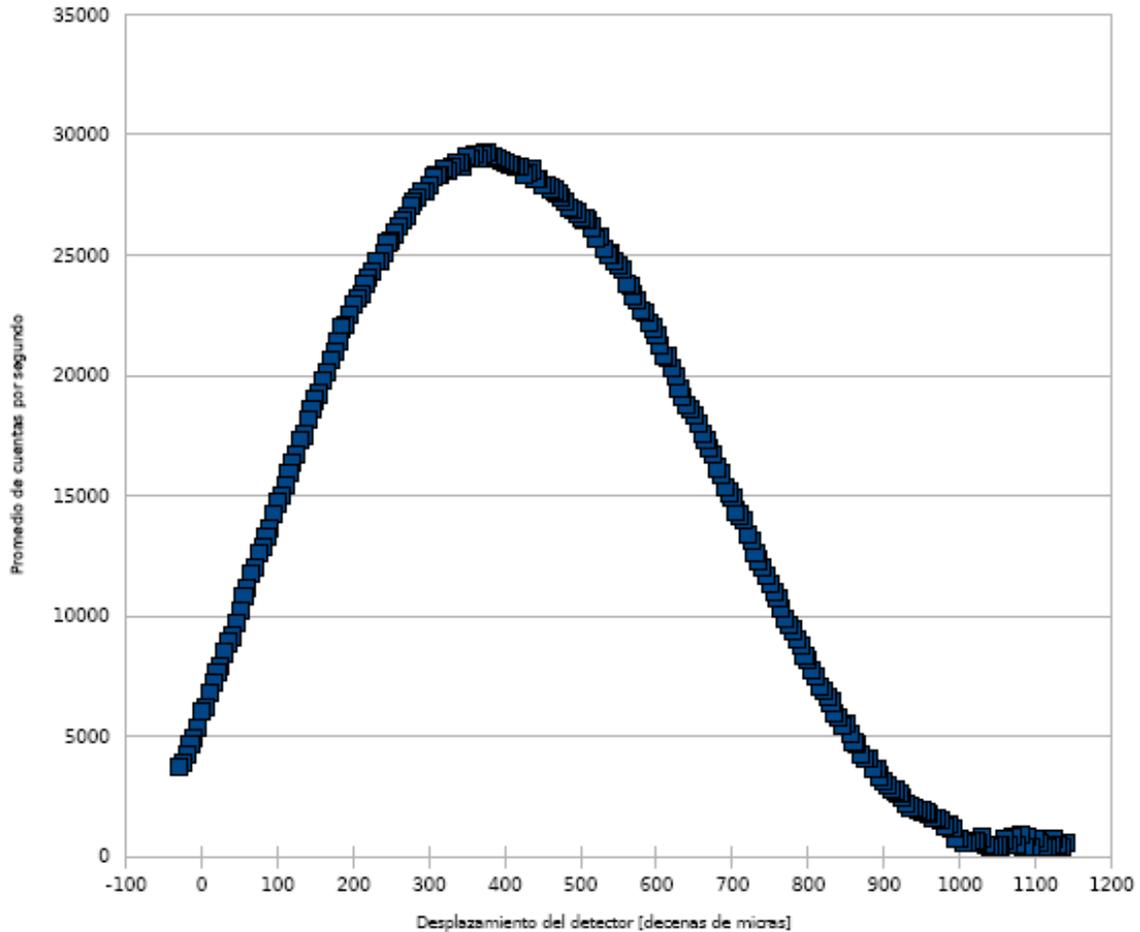


Ilustración 11. Ancho del cono de luz de la PDC por el cristal BBO.

El ancho del cono resulta de $4.1 \times 10^{-3} \text{ m}$ con un pico en $29240 \pm 200 \text{ c/s}$

Encontramos que en la rama *gate* o *testigo* (ver ilustración 1) el número de cuentas promedio es de $29240 \pm 200 \text{ c/s}$, mientras para la vertiente transmitida es $29163 \pm 170 \text{ c/s}$.

Para dar certeza que las señales observadas en cada vertiente están correlacionadas, se observan las coincidencias entre los canales utilizados. Las señales *transmitido* y *testigo* pasan a través de un circuito de coincidencias, la diferencia entre ambas señales es de 6 ns . Un contador de coincidencias busca correlaciones entre las dos señales y emite un pulso, con un voltaje determinado, si encuentra ambas señales en coincidencia; es decir, si las señales llegan a él con una diferencia menor al tiempo de separación de 6 ns .

Utilizamos una tarjeta contadora de coincidencias, en la sección 5.6 se describe el funcionamiento de dicha tarjeta y el sistema contador de coincidencias. Obtenemos 25304 ± 30 coincidencias por segundo.

Recuerde que la distancia lineal del cristal BBO al detector *testigo* y *transmitido* es la misma, $5 \times 10^{-2} m \pm .5 \times 10^{-3} m$.

5.7.3. Error por coincidencias accidentales [1]

Sin ningún haz iluminando los detectores y toda fuente de luz apagada, contamos el número de coincidencias *oscuras* (coincidencias por el ruido en el sistema de conteo de fotones y coincidencias) en diecisiete intervalos de conteo de 10 s a lo que obtenemos

Coincidencia	Coincidencias oscuras (10 s)
G-T	23.97 ± 1.96
G-R	23.03 ± 1.73
T-R	22.36 ± 2.14

Tabla 3. Coincidencias *oscuras*.

Conocemos las características de los elementos utilizados en el experimento, sus errores y modos de funcionamiento; podemos comenzar el experimento y observar los resultados.

5.7.4. Características del divisor de haz

Utilizamos un cubo divisor de haz construido por Edmund Optics, el divisor es no polarizante. Las características del divisor se resumen en la tabla

Característica	Valor
Material	BK7
Región de transmisión/reflexión	780 – 1080 nm
Tolerancia en dimensiones	$\pm 0.1 \times 10^{-3} m$
Tolerancia angular	$\pm 3 \text{ min. arco}$
Calidad de superficie	60 – 40
Precisión de superficie	$\frac{1}{4} \lambda$
Recubrimiento	
Superficie Exterior	Recubrimiento anti reflejante $\frac{1}{4} \lambda$ tipo MgF2
Hipotenusa	Recubrimiento dieléctrico de múltiples capas
Transmitancia	45% ± 5 %
Reflectancia	55% ± 5 %

Tabla 4. Características del cubo divisor de haz para infrarrojo cercano de Edmund Optics.

5.7.5. Diseño experimental final

El divisor de haz se coloca tal que dos de sus caras sean paralelas al acoplador óptico del detector *transmitido*. El acoplador óptico que lleva al detector *reflejado* se coloca a la misma distancia del divisor que el *transmitido*, $0.1 \times 10^{-2} m \pm 0.5 \times 10^{-3} m$. El cubo divisor de haz y el acoplador *reflejado* se rotan y ajustan hasta que se obtiene un máximo en el conteo de coincidencias para *reflejado con transmitido* y *transmitido con testigo*.

5.7.6. Posibilidad de traslape

Sabemos que existen del orden de 25304 ± 30 coincidencias por segundo, que es lo mismo que parejas de fotones producidos por la fuente. Dado cada fotón debe recorrer $5 \times 10^{-2} m \pm .5 \times 10^{-3} m$ antes de llegar al acoplador óptico.

Hemos descrito en las características del SPCM que este tiene un tiempo *muerto* de $50 ns$, y una pregunta importante es si este tiempo no será suficientemente grande como para no observar alguno de los fotones. Para responder a lo anterior observemos que una pareja de fotones se genera

$$t_{conversion} = \frac{1}{25300} \left[\frac{foton}{segundo} \right] = 39.53 \times 10^{-6} s = 39500 ns$$

Como se puede observar de la razón anterior un par de fotones generados por PDC en el cristal BBO se obtiene cada $39.53 \mu s$ ó $39500 ns$ por lo cual existe un tiempo suficiente entre los fotones convertidos para permitir que el SPCM se recupere y esté listo para hacer una nueva detección.

Recorrer la distancia al detector le toma a cada par de fotones

$$t_{recorrido} = 1.66 ns$$

Por lo que no hay posibilidad de que una pareja se traslape con otra.

RESULTADOS

Recapitulación

Primeros resultados

Divisor de haz y análisis del experimento

Coincidencias triples

Segundo orden de coherencia

Conclusiones

6. Resultados

En este capítulo analizamos los resultados obtenidos al realizar el experimento propuesto en el capítulo 5. Medimos las correlaciones entre las salidas de un divisor de haz. Realizamos cuatro mediciones, cada una con un número distinto de muestras lo que nos permite reducir la incertidumbre de nuestros resultados.

6.1. Recapitulación

En la ilustración j se muestra un diagrama del experimento. Contamos con tres detectores que forman parte de un SPCM, las cuentas del SPCM se transmiten por cables *limo* con distintos tiempos de retraso, lo que nos permite asegurar que el conteo de coincidencias se realiza siempre que una cuenta en *testigo* o *gate* es registrada (capítulo 5), a la tarjeta contadora de coincidencias PCI. Un programa LabView nos permite hacer el análisis de las coincidencias entre los detectores dadas las condiciones establecidas en el capítulo anterior.

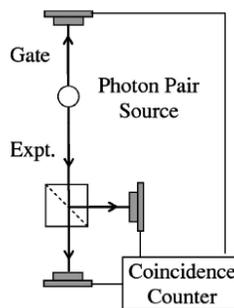


Ilustración 1. Diagrama sintetizado del experimento de existencia del fotón[1]

Un cristal no lineal BBO se utiliza como fuente de fotones individuales. La fuente emite una pareja de fotones que se desplazan en direcciones diferentes, esto nos permite tener un *testigo* o pulso *gate* para asegurar que efectivamente medimos a su par a la salida del divisor de haz. Note que las distancias entre la fuente y el testigo, y la fuente y el divisor de haz; es tal que ambos fotones llegan a su destino al mismo tiempo.

Una vez colectados todos los datos, estos son analizados, un programa diseñado en Matlab permite calcular $g^{(2)}(0)$ y los errores teóricos y estadísticos. Es decir realiza un análisis estadístico de correlación entre los tres pares de coincidencias, *testigo* o *gate* con *transmitido* (G-T), *testigo* o *gate* con *reflejado* (G-R) y *reflejado* con *transmitido* (R-T)

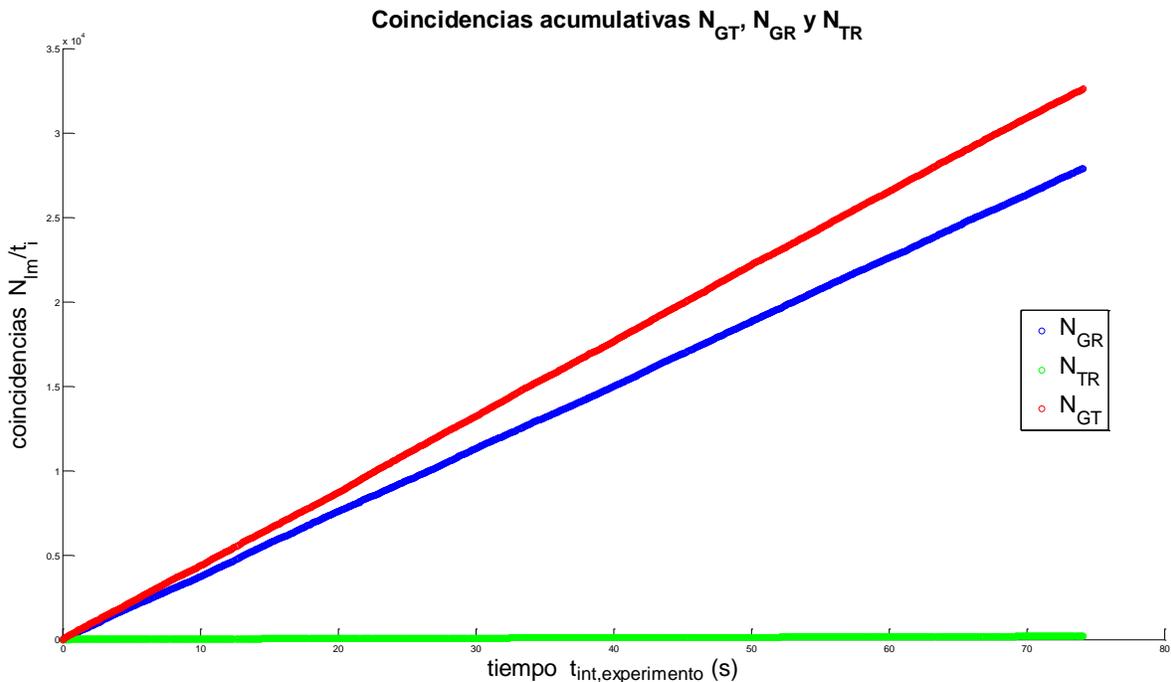
De encontrar correlaciones entre las coincidencias triples y/o de los canales *reflejado* con *transmitido*, por tanto $g^{(2)}(0) \geq 1$; la explicación consecuente con éstos resultados es que en realidad el fotón no puede ser un *quantum* de energía del campo electromagnético, pues se divide al incidir en un divisor de haz.

Por el contrario, si medimos una anti correlación, $g^{(2)}(0) < 1$, a las salidas del divisor de haz, entonces el *quantum* de radiación electromagnética es indivisible. Lo cual implica que el *quantum* de radiación electromagnética que incide en el divisor de haz efectivamente se transmite o refleja.

Asumimos que demostrar la existencia del fotón equivale a observar un efecto que requiera una explicación mecánico cuántica, es decir, el resultado del experimento no puede ser explicado bajo ninguna teoría clásica del campo electromagnético.

6.2. Primeros resultados

Los datos obtenidos en un conteo de coincidencias por 74s con intervalos de integración de 0.0514s se muestran en la siguiente gráfica.

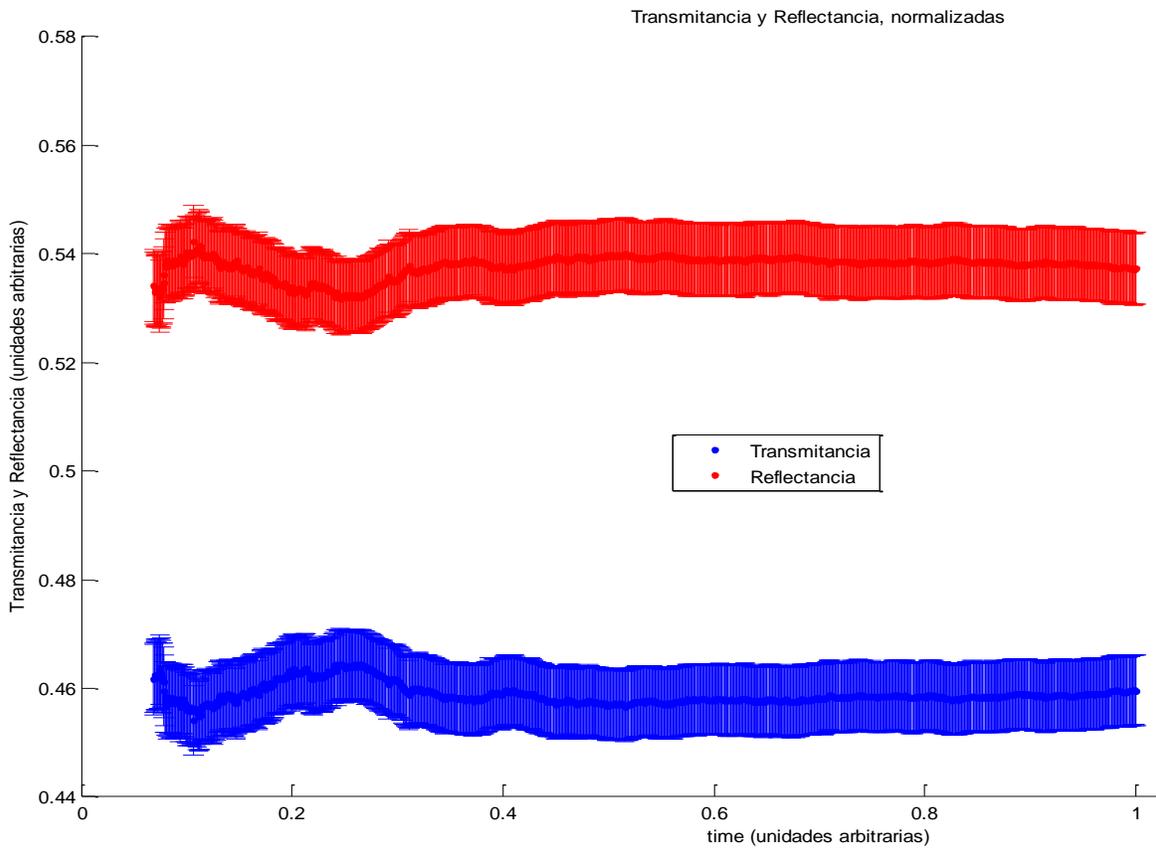


Gráfica 1. Coincidencias por canales G-T, G-R y T-R

En la grafica 1 se observa que las coincidencias N_{GT} y N_{GR} crecen rápidamente, mientras las coincidencias N_{TR} , aquellas entre las salidas del divisor de haz, se mantienen por debajo de las anteriores en al menos dos órdenes de magnitud. En la siguiente sección analizaremos los resultados de la Gráfica 1

6.2.1. Análisis del divisor de haz (BS)

Para medir las propiedades de nuestro divisor de haz utilizamos una fuente de luz en el infrarrojo cercano (810nm), los resultados se presentan en la siguiente grafica.



Gráfica 2. Transmitancia (azul) y Reflectancia (rojo) para el divisor de haz utilizado en el experimento de anti-correlaciones

Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 1.

	Valor normalizado	Error
Transmitancia	0.459	0.002
Reflectancia	0.538	0.002

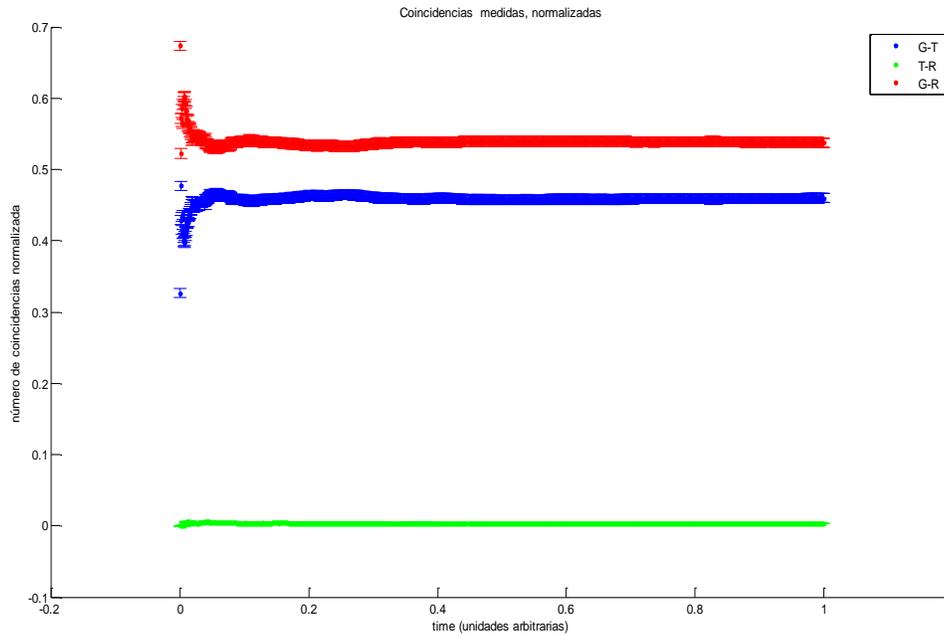
Tabla 1. Valores para reflectancia y transmitancia (normalizadas) para el divisor de haz utilizado.

En la Gráfica 1 observamos que $N_{GT} < N_{GR}$, esto se debe a que

El divisor de haz utilizado no es 50/50, sino $\sim 45/55$ (ver Tabla 1). Esta característica implica que mediremos un mayor número de cuentas en el canal reflejado que en el transmitido y explica porque en la Gráfica 1 observamos que $N_{GT} < N_{GR}$.

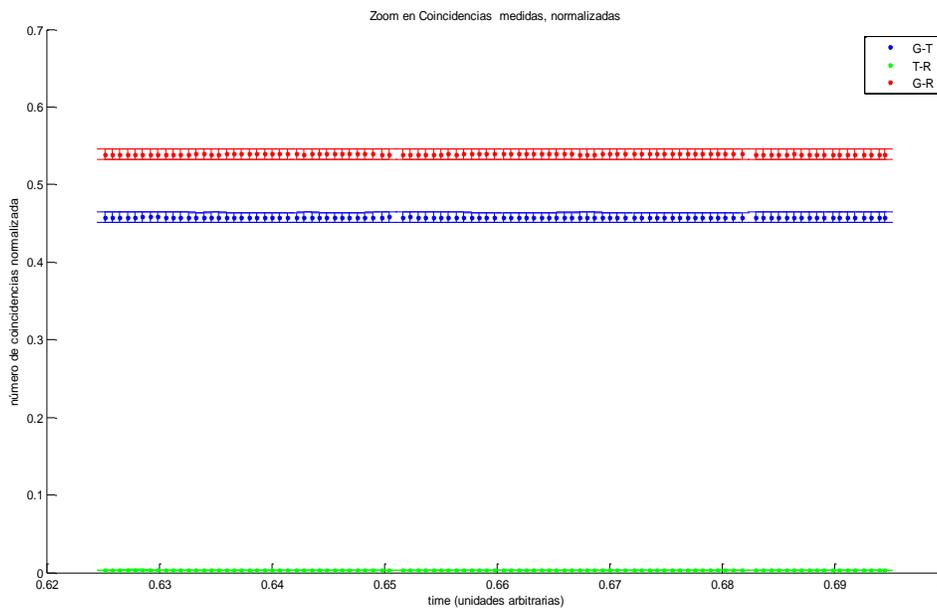
6.2.2. Normalizando los datos de la primera experiencia.

Al normalizar los datos mostrados en la grafica 1. Obtenemos lo siguiente



Grafica 3. Coincidencias normalizadas. G-R (rojo), G-T (azul) y T-R (verde)

En la Grafica 3 las coincidencias medidas guardan relación con las proporciones dadas por el divisor de haz. Si hacemos un acercamiento a algunos de los valores medidos y normalizados observamos la siguiente gráfica:



Grafica 4. Zoom en coincidencias normalizadas. G-R (rojo), G-T (azul) y T-R (verde)

En la tabla siguiente se resumen los resultados observados en la Grafica 3.

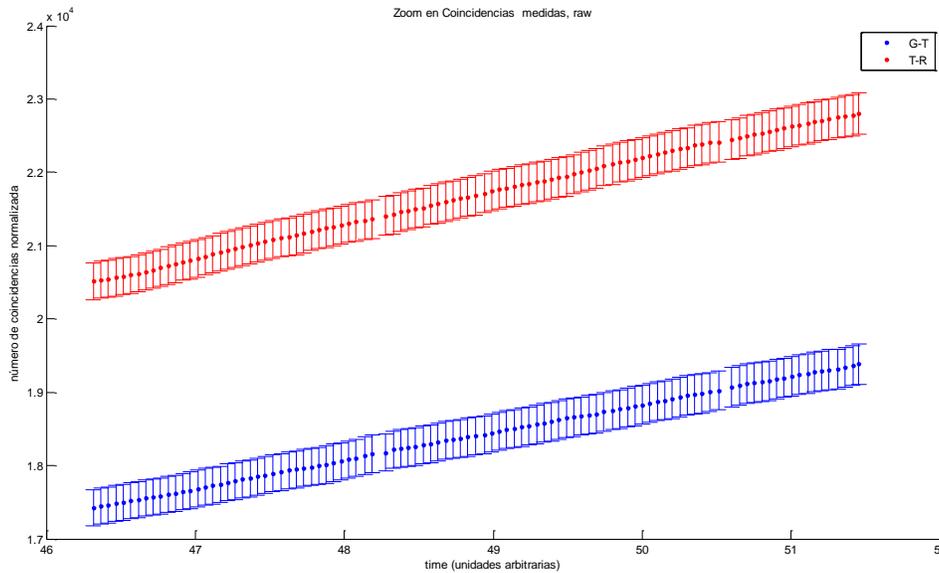
Coincidencia	Valor (normalizado)	Error
G-T	0.458	0.0064
G-R	0.539	0.0066
T-R	0.003	0.0005

Tabla 2. Coincidencias medidas (normalizadas)

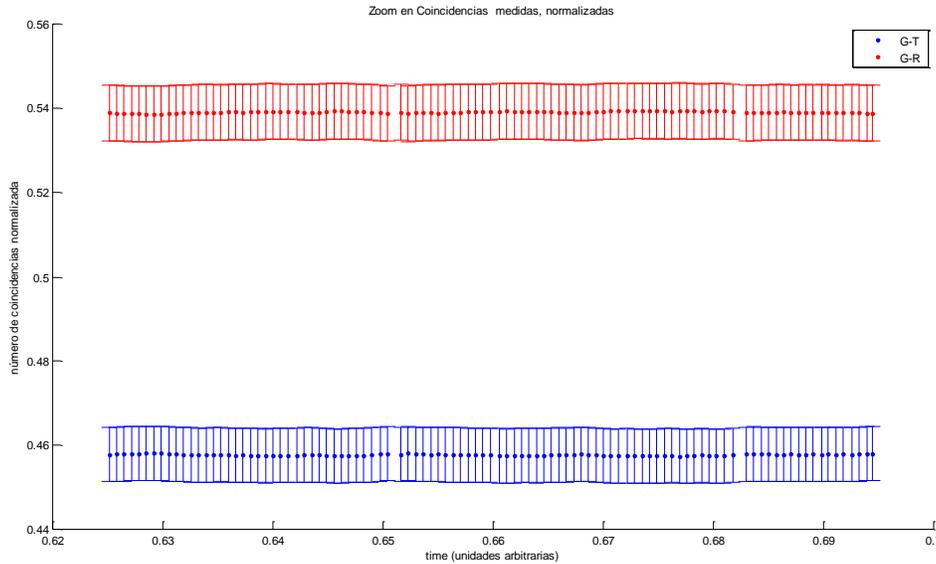
Al normalizar, los resultados de la Gráfica 1, calculamos la proporción del total coincidencias que corresponde a aquellas entre salidas del divisor de haz, estas resultan dos órdenes de magnitud menores que las coincidencias entre G-T o G-R.

El resultado anterior nos provee una primera evidencia de que estamos ante un resultado mecánico cuántico; al incidir un *quantums* de luz proveniente del cristal BBO en el divisor de haz se transmite o refleja pero no ambas simultáneamente.

Si hacemos un acercamiento a los datos medidos y observamos las mediciones y el error correspondiente encontramos para los datos no normalizados o en bruto



Grafica 5. Acercamiento a los datos medidos en experiencia uno. G-T (azul) y G-R (rojo)



Grafica 6. Acercamiento a los datos medidos normalizados en experiencia uno. G-T (azul) y G-R (rojo)

De los datos medidos podemos prever que la función de correlación de segundo orden es efectivamente menor que uno, pues observamos que el número de coincidencias entre las salidas del divisor de haz es 0.3% del total de las coincidencias medidas.

Las mediciones anteriores se realizaron con un tiempo de integración $t_i = 0.0514s$, en promedio medimos un total de 42.1319 coincidencias por 0.514s, con una desviación estándar de $\sigma = 8.1328$. El 0.3% del total de coincidencias medidas corresponde a 0.1260 coincidencias por 0.514s. En la tabla 3 del capítulo 5 se reporta el número de coincidencias oscuras para el caso $T - R$, se midieron 22.36 ± 2.14 coincidencias oscuras por cada 10s, lo que equivale a .115 coincidencias oscuras por tiempo de integración de 0.514s. Así las coincidencias medidas en el experimento son del orden de las coincidencias oscuras para los canales $T - R$. La diferencia entre las medidas se debe a variaciones en el voltaje, cambios en la temperatura de la tarjeta contadora y el SPCM.

6.3. Coincidencias triples

Para demostrar que la función de coherencia de segundo orden es independiente del tiempo de integración, repetimos el experimento cuatro veces, tomando un diferente número de muestras para las coincidencias por pares y en consecuencia para la función de correlación, a saber: diez, treinta y seis, ochenta, y mil cuatrocientos cuarenta muestras. Cada muestra consiste de un tiempo de integración distinto como se muestra en la tabla 3.

Nota: Si M es alguna medición utilizamos σM para denotar la desviación estándar sobre dicha medida y ΔM el error asociado a M . Definimos N_{lm} como el número de coincidencias entre los canales l y m , N_l es el número de cuentas del canal l .

Número de muestras	Tiempo de integración por cada muestra (s)
10	7.4945
36	2.0810
80	0.9353
1440	0.0520

Tabla 3. Numero de muestras y tiempo de integración o colección de coincidencias por muestra.

El experimento se realiza en todos los casos en $\sim 74s$. Medimos el número de cuentas promedio por canal (G, T, R) por segundo

Canal	Cuentas promedio (c/s)
N_G	29240 ± 200
N_T	12539 ± 170
N_R	15748 ± 170

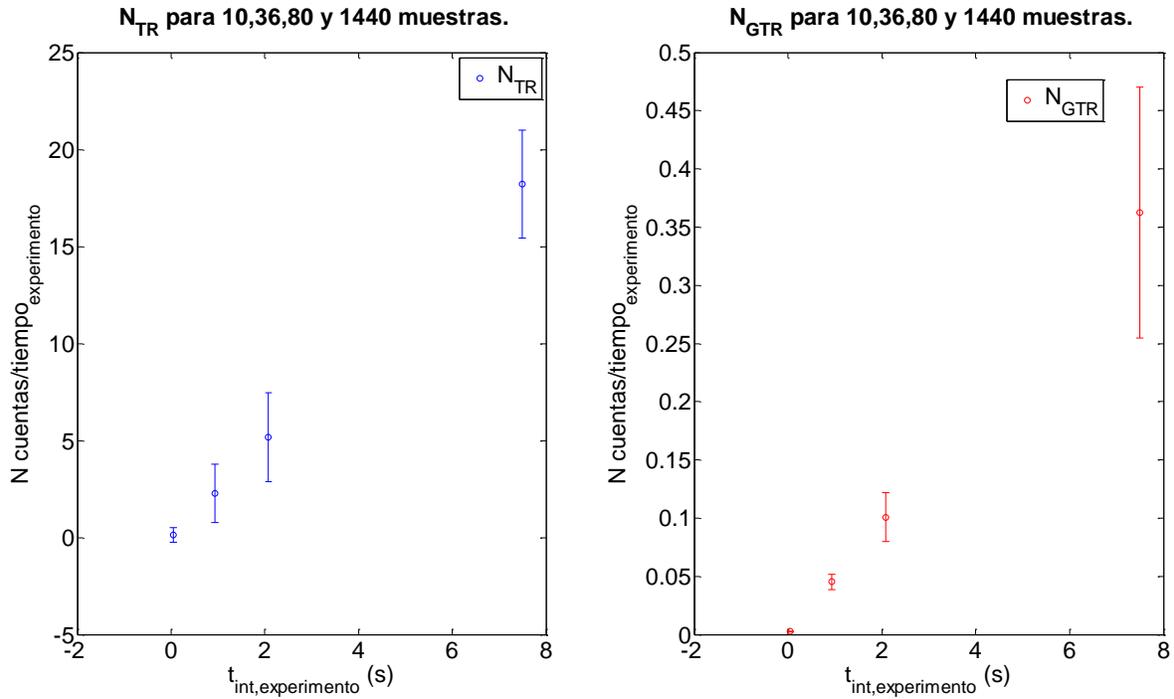
Tabla 4. Cuentas promedio por segundo para cada canal.

Usando la Eq. 3 del capítulo 5 y el número de coincidencias N_{TR} por tiempo integración y por segundo, calculamos el número de coincidencias triples, N_{GTR} , promedio, por tiempo de integración y por segundo. En la Grafica 7 se muestran los resultados para el número de coincidencias triples y el número de coincidencias dobles, en la Grafica 8 se muestra una comparativa entre ambas coincidencias; en ambos casos los resultados se encuentran por tiempo de integración.

La Tabla 5 muestra los resultados para ambas coincidencias por tiempo de integración. Observe que para todos los casos se cumple que $N_{GTR} < N_{TR}$.

$t_{integración} (s)$	$N_{TR} (c/t_i)$	$\sigma N_{TR} (c/t_i)$	$N_{GTR} (c/t_i)$	$\Delta N_{GTR} (c/t_i)$
7.4945	18.20	2.781	0.362	0.1076
2.081	5.17	2.299	0.101	0.0209
0.9353	2.26	1.499	0.045	0.0066
0.0520	0.13	0.367	0.003	8×10^{-5}

Tabla 5. Coincidencias dobles TR y coincidencias triples GTR por tiempo de integración



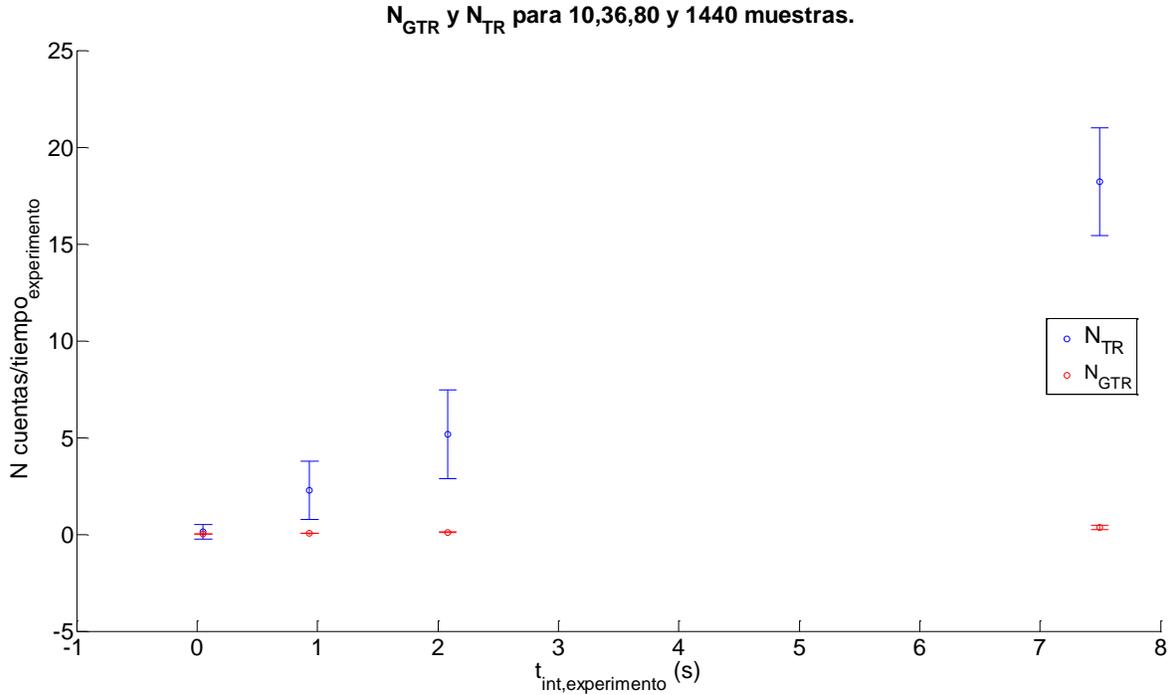
Gráfica 7. Número de coincidencias triples (N_{GTR}) y el número de coincidencias TR (N_{TR}), por tiempo de integración

El número de coincidencias oscuras promedio, entre los canales transmitido y reflejado, por tiempo de integración se detalla en la siguiente tabla.

$t_{integración}$ (s)	$N_{TR,OSCURAS}$ (c/ t_i)
7.4945	16.024
2.081	4.476
0.0300	2.011
0.0017	0.112

Tabla 6. Coincidencias oscuras por tiempo de integración entre los canales $T - R$

De la Gráfica 7 y la Gráfica 8, notamos que el número de coincidencias en ambos casos (TR Y GTR) aumentan conforme el tiempo de integración (t_i) crece, esto es esperado ya que a mayor tiempo de integración más coincidencias verá el detector; en el capítulo 3 establecimos que la probabilidad de foto detección depende del promedio temporal del número de cuentas o la intensidad.



Grafica 8. Comparativa entre el número de coincidencias triples (N_{GTR}) y el número de coincidencias TR (N_{TR}), por tiempo de integración

Para todos los casos (tiempos de integración) se cumple la desigualdad $N_{GTR} < N_{TR}$. Lo anterior está en concordancia con la teoría de conjuntos que utilizamos para derivar la Eq. 3 del capítulo 5.

En resumen: N_{TR} es una cota superior a N_{GTR} . Si el tiempo de integración se fija en un segundo, encontramos que el número de coincidencias para N_{TR} , en promedio sobre 17 intervalos de conteo, es 2.444 ± 0.028 coincidencias por segundo; y el número de coincidencias triples N_{GTR} , sobre el mismo número de intervalos, es $0.0483 \pm 8.24 \times 10^{-3}$ coincidencias triples por segundo. La tabla siguiente muestra una comparativa en las coincidencias promedio por segundo medidas y las coincidencias triples derivadas utilizando la Eq. 3 del capítulo 5.

N_{lm}	coincidencias promedio (c/s)	Fracción de $N_{lm.total}$
N_{GR}	435.233 ± 2.303	.5366
N_{GT}	373.371 ± 2.397	.4603
N_{TR}	2.444 ± 0.028	.0030
N_{GTR}	$0.0483 \pm 8.24 \times 10^{-3}$.0001

Tabla 7. Coincidencias promedio por segundo.

La razón de coincidencia se mantiene al compararse con los parámetros de reflexión y transmisión del divisor de haz que se reportan en la tabla 2. Observe que N_{GTR} es 0.021 veces N_{TR} promedio por segundo.

En total por segundo observamos 25303 ± 21.0026 incidentes en el divisor con una separación temporal de $39.52 \mu s \pm 0.033 \mu s$. De estos solo 811.048 ± 4.7279 hacen coincidencia con el

canal *gate* o *testigo*. Lo anterior concuerda con observaciones hechas por otros testistas del Laboratorio de Óptica Avanzada, quienes también observaron que las coincidencias dobles son un orden de magnitud menores que el número de cuentas simples, usando cristales del mismo tipo pero con diferentes espesores.

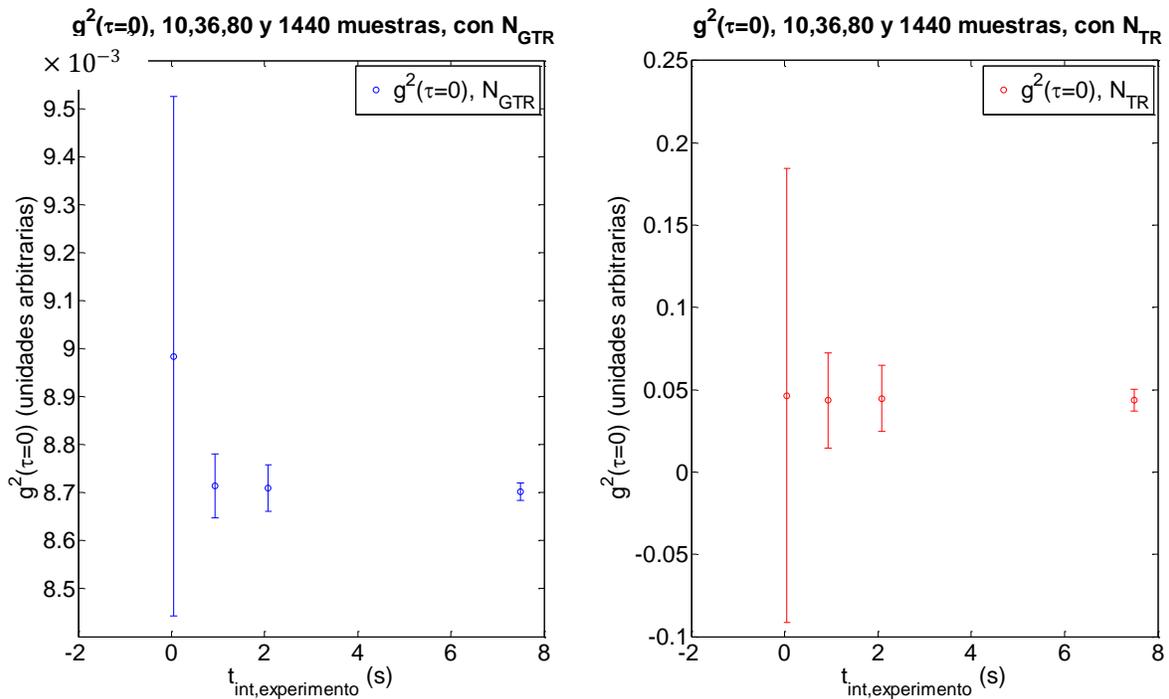
6.4. Segundo orden de coherencia

El número de muestras (10, 36, 80 y 1440) que podemos tomar para cada tiempo de integración, t_i , está limitado por el espacio de memoria asignado por el ordenador que controla la tarjeta contadora de coincidencias y el programa que escribe los valores de la función de correlación para cada experimento.

En cada caso calculamos la función de coherencia de segundo orden utilizando la Eq. 6 del capítulo 5. También hemos calculado la función de coherencia de segundo orden sustituyendo directamente N_{GTR} por N_{TR} . Dado que $N_{GTR} < N_{TR}$, esperamos que

$$\frac{N_{GTR} N_G}{N_{GT} N_{GR}} \leq \frac{N_{TR} N_G}{N_{GT} N_{GR}}$$

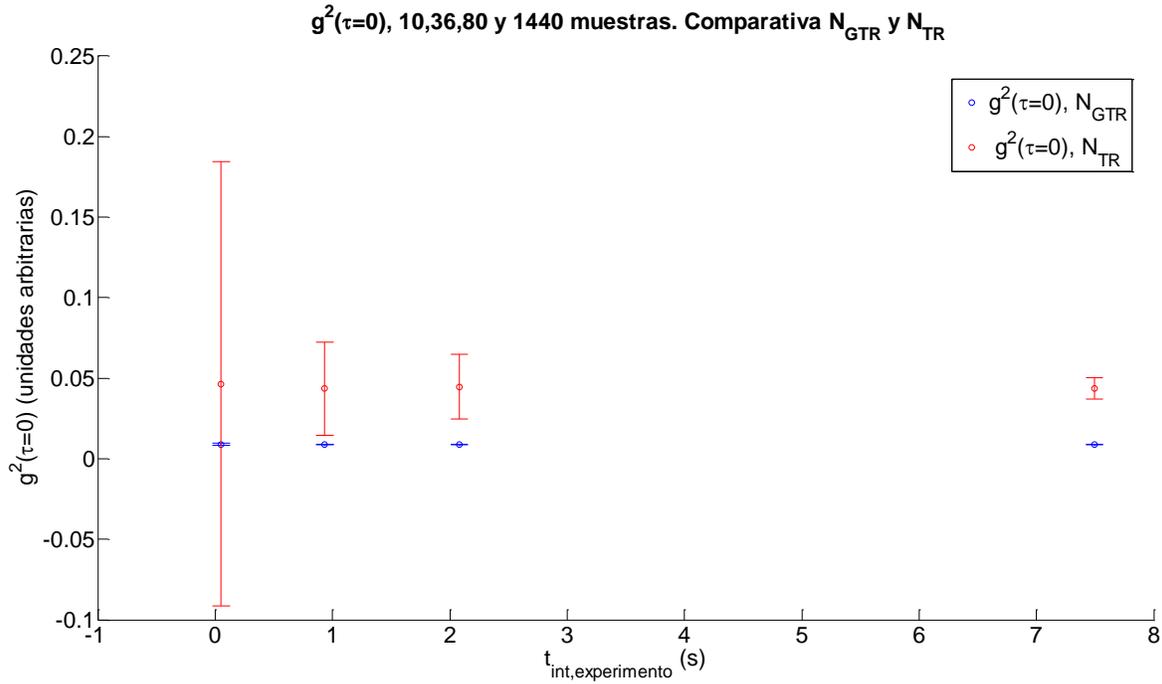
Eq. 1



Grafica 9. Función de segundo orden de coherencia usando coincidencias triples y dobles.

La Grafica 9. Función de segundo orden de coherencia usando coincidencias triples y dobles., muestra en resumen la función de coherencia de segundo orden, sin retraso, para cada tiempo de

integración. Se puede observar que la premisa expuesta en la Eq. 1 es válida. Podemos observar lo anterior con mayor detalle en la siguiente grafica.



Grafica 10. Comparativa para la función de segundo orden de coherencia usando coincidencias triples y dobles.

En la Grafica 10. Comparativa para la función de segundo orden de coherencia usando coincidencias triples y dobles., muestra una comparativa entre la función de coherencia calculada con coincidencias triples, a la vez que muestra el resultado de sustituir las coincidencias triples N_{GTR} por las coincidencias dobles N_{TR} , las ultimas son las que efectivamente medimos en nuestros experimentos. Se observa que para todos los casos se cumple la relación dada por la Eq. 1 como resume la siguiente tabla

$t_{integración}$ (s)	$g_{GTR}^{(2)}(t_i)$	$\sigma g_{GTR}^{(2)}(t_i)$	$g_{TR}^{(2)}(t_i)$	$\sigma g_{TR}^{(2)}(t_i)$
7.4945	0.00870	1.8×10^{-5}	0.0436	66.48×10^{-4}
2.081	0.00871	4.8×10^{-5}	0.0448	200.4×10^{-4}
0.93532	0.00871	6.7×10^{-5}	0.0436	288.5×10^{-4}
0.0520	0.00898	54.1×10^{-5}	0.0465	137.9×10^{-3}

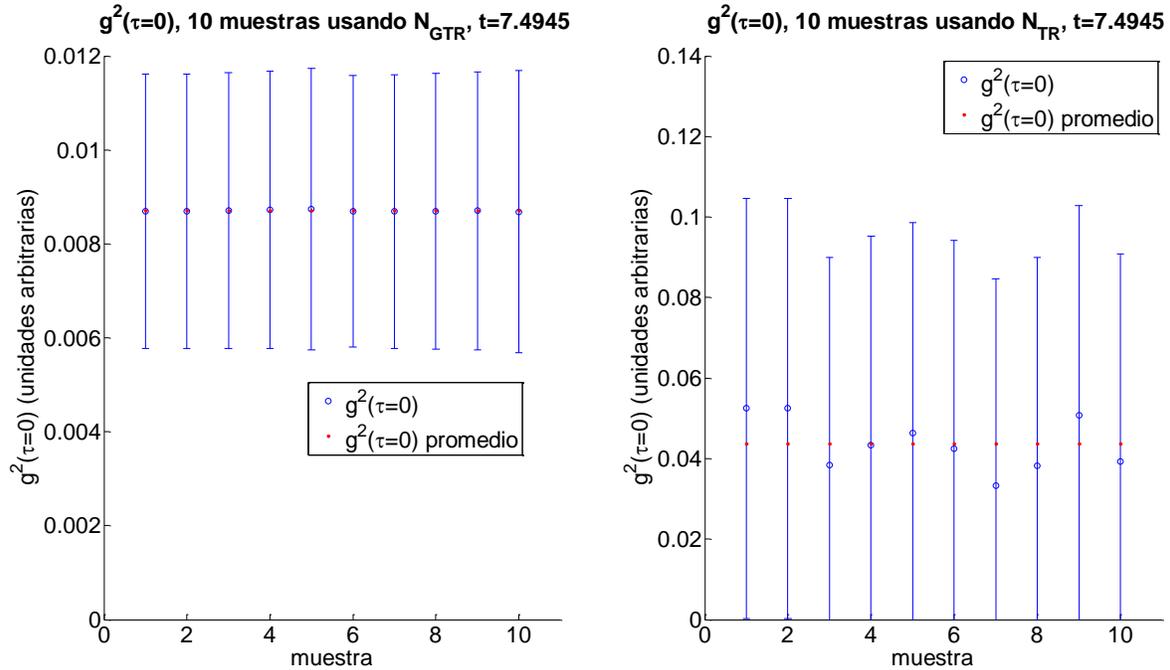
Tabla 8. Función de segundo orden de coherencia

El valor de la función de segundo orden de coherencia se mantiene constante aún cuando cambia el tiempo de integración. Esto se debe a que la función de segundo orden de coherencia es la razón entre cantidades (N_{GT}, N_{GR}, N_{TR} y en consecuencia N_{GTR}) que varían linealmente con el tiempo, por lo que la razón se mantiene constante, es decir la función de coherencia de segundo orden con testigo es independiente del tiempo como notamos en el capítulo 3. La única forma de lograr una medida mejor para la función de coherencia de segundo orden es reduciendo el ruido en los detectores.

Estudiaremos cada uno de los casos anteriores aisladamente. Las gráficas mostradas son comparativas entre la función de coherencia de segundo orden calculada con N_{GTR} y con N_{TR} , en el Anexo ... se encuentran ampliaciones de las gráficas presentadas en las siguientes secciones.

6.4.1. Diez muestras, $g^{(2)}(t_i = 7.4945s, \tau = 0)$

El tiempo de integración para este caso se fija en $t_i = 0.2402 s$, lo que nos permite recabar información durante 10 periodos para calcular la función de coherencia de segundo orden.



Grafica 11. $g^{(2)}(t_i = 7.4945s, \tau = 0)$ Utilizando coincidencias triples (izq.) y dobles (der.)

En la tabla siguiente se muestra un resumen de los resultados graficados.

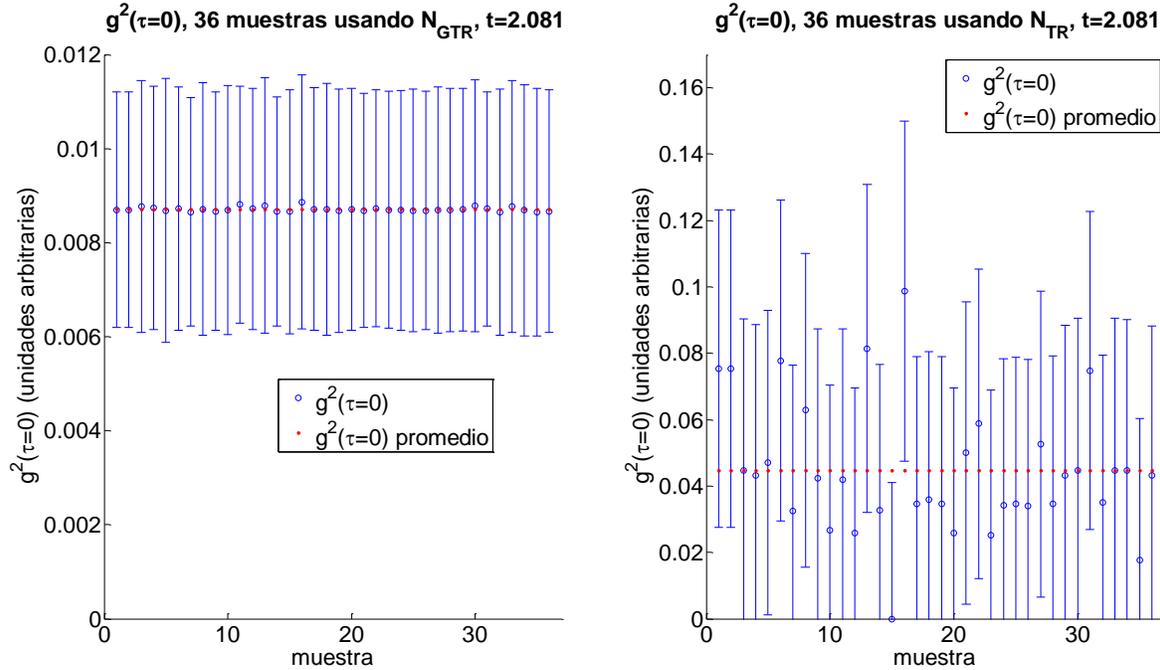
$t_i (s)$	$g_{GTR}^{(2)}(t_i)$	$\sigma_{g_{GTR}^{(2)}}(t_i)$	$\Delta g_{GTR}^{(2)}(t_i)$	$g_{TR}^{(2)}(t_i)$	$\sigma_{g_{TR}^{(2)}}(t_i)$	$\Delta g_{TR}^{(2)}(t_i)$
7.4945	0.00870	1.8×10^{-5}	0.002942	0.04369	66.5×10^{-4}	0.051834

Tabla 9. $g^{(2)}(t_i = 7.4945s, \tau = 0)$ promedio usando coincidencias triples y dobles

El valor medio para la función de coherencia $g_{GTR}^{(2)}(t_i = 7.4945s, \tau = 0)$ viola la desigualdad clásica $g^{(2)}(t_i, \tau = 0) \geq 1$ por 56307 desviaciones estándar. Para el caso $g_{TR}^{(2)}(t_i = 7.4945s, \tau = 0)$ la desigualdad clásica se viola por 144 desviaciones estándar.

6.4.2. Treinta y seis muestras, $g^{(2)}(t_i = 2.081s, \tau = 0)$

En la grafica siguiente se muestra el valor de la función de correlación con treinta y seis muestras a un tiempo de integración $t_i = 0.0667 s$. Observe que comparado con el valor a diez muestras se observa que el valor de la función de coherencia de segundo orden aumenta 0.08%.



Grafica 12. $g^{(2)}(t_i = 2.081s, \tau = 0)$ promedio usando coincidencias triples (izq.) y dobles (der.)

Un resumen de los resultados presentados anteriormente se encuentra en la tabla siguiente.

$t_i (s)$	$g_{GTR}^{(2)}(t_i)$	$\sigma g_{GTR}^{(2)}(t_i)$	$\Delta g_{GTR}^{(2)}(t_i)$	$g_{TR}^{(2)}(t_i)$	$\sigma g_{TR}^{(2)}(t_i)$	$\Delta g_{TR}^{(2)}(t_i)$
2.081	0.00871	4.8×10^{-5}	0.002589	0.04476	200.4×10^{-4}	0.045397

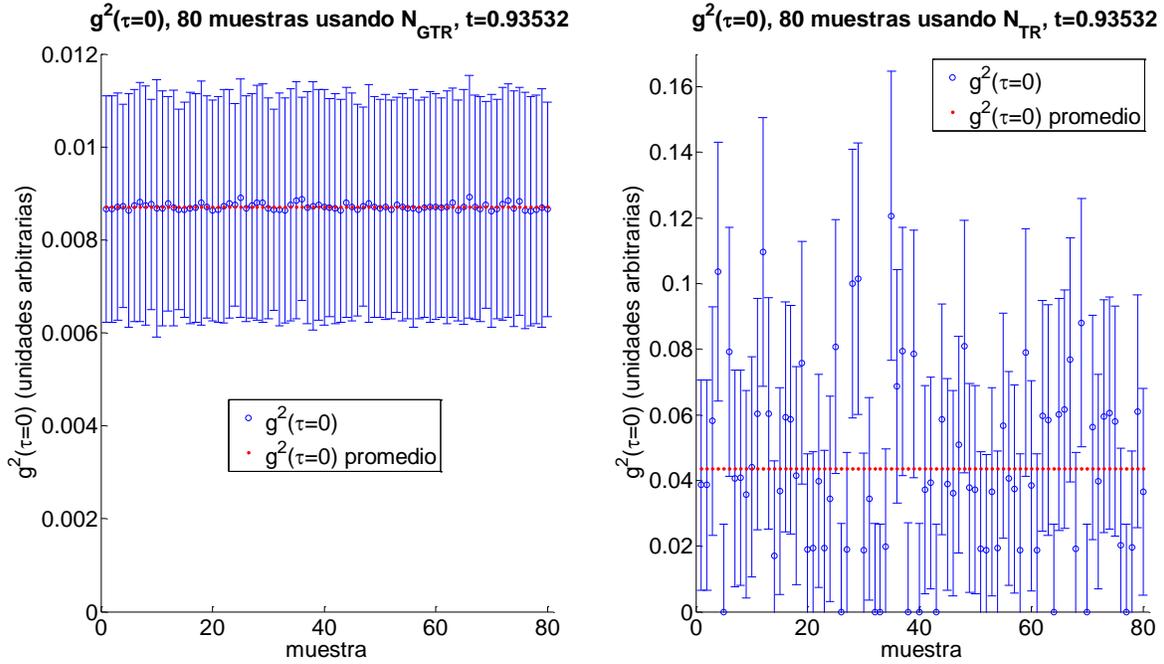
Tabla 10. $g^{(2)}(t_i = 2.081s, \tau = 0)$ promedio usando coincidencias triples y dobles

La desviación estándar sobre la función de coherencia, respecto al experimento anterior, aumenta en promedio 2.88 veces. Sin embargo, los valores medidos para la función de correlación varía un .1% para el caso de la función derivada utilizando coincidencias triples; y un 2.7% para la función de coherencia de segundo orden calculada con las coincidencias dobles.

El valor medio para la función de coherencia $g_{GTR}^{(2)}(t_i = 2.081s, \tau = 0)$ viola la desigualdad clásica $g^{(2)}(t_i, \tau = 0) \geq 1$ por 20488 desviaciones estándar. Para el caso $g_{TR}^{(2)}(t_i = 2.081s, \tau = 0)$ la desigualdad clásica se viola por 48 desviaciones estándar.

6.4.3. Ochenta muestras, $g^{(2)}(t_i = 0.93532s, \tau = 0)$

Realizamos el experimento de nuevo tomando un mayor tiempo de integración, en consecuencia más mediciones de coincidencias, para la función de correlación de segundo orden. Los resultados se presentan en la grafica siguiente



Grafica 13. $g^{(2)}(t_i = 0.93532s, \tau = 0)$. promedio usando coincidencias triples (izq.) y dobles (der.)

Los resultados graficados tiene por promedio los valores presentados en la siguiente tabla.

$t_i (s)$	$g_{GTR}^{(2)}(t_i)$	$\sigma g_{GTR}^{(2)}(t_i)$	$\Delta g_{GTR}^{(2)}(t_i)$	$g_{TR}^{(2)}(t_i)$	$\sigma g_{TR}^{(2)}(t_i)$	$\Delta g_{TR}^{(2)}(t_i)$
0.9353	0.00871	6.7×10^{-5}	0.002435	0.04360	288.5×10^{-4}	0.032819

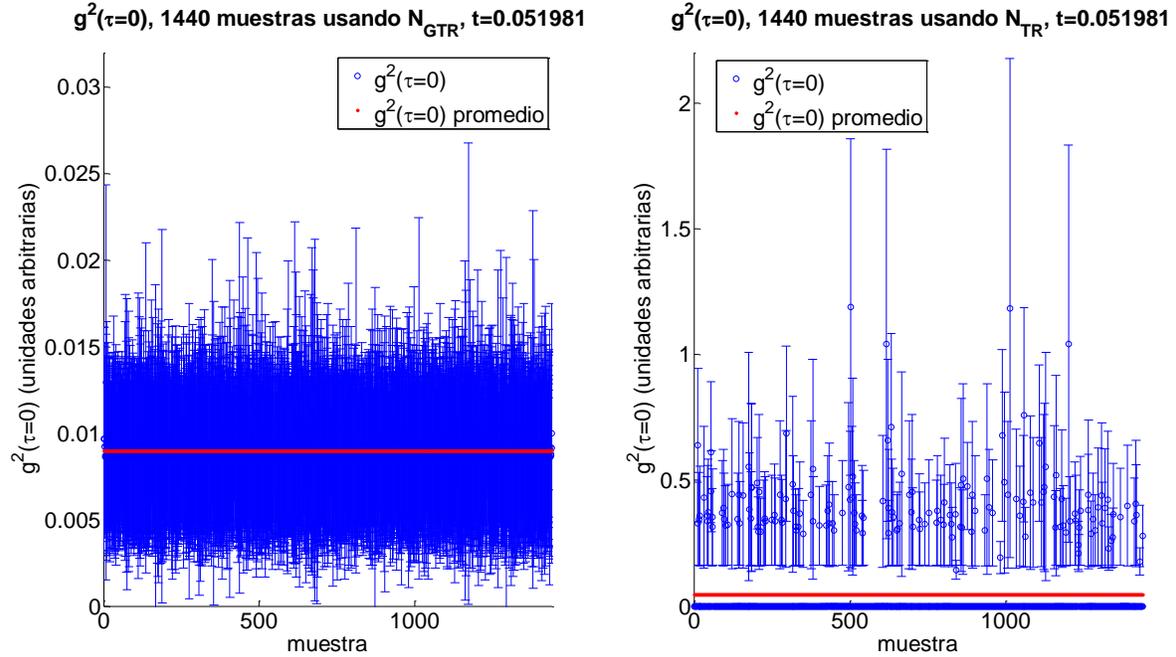
Tabla 11. $g^{(2)}(t_i = 0.93532s, \tau = 0)$ promedio usando coincidencias triples y dobles

En promedio la función de coherencia de segundo orden, para el caso de coincidencias triples, mantiene su valor, pero aumenta la desviación estándar asociada 1.39 veces respecto al experimento anterior. Para el caso cuando la función de coherencia se calcula directamente por sustitución de las coincidencias dobles en vez de las triples el valor de la función se reduce 2.68% respecto al valor obtenido en el experimento anterior, pero su error asociado crece 1.43 veces.

El valor medio para la función de coherencia $g_{GTR}^{(2)}(t_i = 0.9353s, \tau = 0)$ viola la desigualdad clásica $g^{(2)}(t_i, \tau = 0) \geq 1$ por 14813 desviaciones estándar. Para el caso $g_{TR}^{(2)}(t_i = 0.0300s, \tau = 0)$ la desigualdad clásica se viola por 33 desviaciones estándar.

6.4.4. Mil cuatrocientos cuarenta muestras, $g^{(2)}(t_i = 0.0520s, \tau = 0)$

En este caso el tiempo de integración se reduce en un orden de magnitud respecto al experimento anterior, encontramos los siguientes resultados.



Grafica 14. $g^{(2)}(t_i = 0.0520s, \tau = 0)$ promedio usando coincidencias triples (izq.) y dobles (der.)

t_i (s)	$g_{GTR}^{(2)}(t_i)$	$\sigma g_{GTR}^{(2)}(t_i)$	$\Delta g_{GTR}^{(2)}(t_i)$	$g_{TR}^{(2)}(t_i)$	$\sigma g_{TR}^{(2)}(t_i)$	$\Delta g_{TR}^{(2)}(t_i)$
0.0520	0.00898	54.1×10^{-5}	0.005298	0.04649	137.9×10^{-3}	0.032829

Tabla 12. $g^{(2)}(t_i = 0.0520s, \tau = 0)$ promedio usando coincidencias triples y dobles

Observamos que aunque el tiempo de integración se reduce a 52 ms el error crece en un orden de magnitud para el caso $g_{TR}^{(2)}(t_i)$ y es cuatro veces mayor para $g_{GTR}^{(2)}(t_i)$. Esto se debe a que estamos midiendo en tiempos de integración muy cortos y esto permite que existan grandes variaciones en las coincidencias dobles, y devienen en una mayor incertidumbre en las coincidencias triples. Al ser más pequeño el tiempo de integración las variaciones Δ entre las diferentes mediciones se vuelven mayores.

El valor medio para la función de coherencia $g_{GTR}^{(2)}(t_i = 0.0520s, \tau = 0)$ viola la desigualdad clásica $g^{(2)}(t_i, \tau = 0) \geq 1$ por 1830 desviaciones estándar. Para el caso $g_{TR}^{(2)}(t_i = 0.0017s, \tau = 0)$ la desigualdad clásica se viola por 6 desviaciones estándar.

6.5. Conclusiones

El cristal BBO produce mediante SPDC un cono de luz no clásica, *quantums* del campo electromagnético cuya separación temporal es $35.9 \mu\text{s}$. Por tanto, podemos asegurar que a todo tiempo solo un paquete de energía o *quantum* del campo electromagnético se encuentra en el experimento.

La función de coherencia de segundo orden arrojaron valores cercanos independiente del tiempo de integración, oscilando alrededor del valor moda 0.00871 para el caso en el que se usan las coincidencias triples; y alrededor de 0.0446 para el caso en que las coincidencias triples son sustituidas por N_{TR} .

Como analizamos en la sección 6.5, N_{TR} es una cota superior a las coincidencias triples, N_{GTR} . De la Tabla 7, se colige que para todos los casos se cumple la relación expresada por la Eq. 1.

Es decir, dado que N_{TR} es una cota superior a N_{GTR} podemos calcular la función de correlación de segundo orden a partir de dichas coincidencias dobles, sin embargo, es necesario tener en cuenta que entre mayor sea el tiempo de integración mejor será la $g^{(2)}(t_i, \tau = 0)$ medida. En la Tabla 7 se encuentra las coincidencias promedio para ambos casos.

En el capítulo 5, sección 5.7.3. se detallan las coincidencias oscuras por periodos de 10s. Las coincidencias oscuras promedio entre los canales: reflejado y transmitido, son del orden de 2.236 ± 0.214 coincidencias oscuras promedio por segundo; mientras el número de coincidencias medidas en el experimento, entre los mismos canales, es 2.444 ± 0.028 , La diferencia entre ambas medidas se explica por variaciones de voltaje y/o temperatura en los sistemas electrónicos del APD-SPCM; otra fuente de ruido es la alimentación de voltaje para la PC que controla la tarjeta contadora de coincidencias, errores por transmisión y escritura de datos a la memoria del computador.

Puesto que la diferencia entre las coincidencias oscuras por segundo y las coincidencias medidas entre ambos canales (transmitido y reflejado) es menor al diez por ciento, esto nos da un primer indicio de la existencia del fotón, i.e. los paquetes emitidos por la fuente no se dividen. Si el quantum de energía electromagnética se dividiera, entonces deberíamos observar alrededor de 25000 coincidencias para N_{TR} ; sin embargo, observamos .1 milésimas partes de ese total de coincidencias, como hemos explicado están en concordancia con los valores de coincidencias oscuras medidos para N_{TR} .

Para la función de coherencia de segundo orden observamos que al reducir el tiempo de integración el error asociado a las mediciones aumenta, esto se debe a que aumenta el número variaciones en las coincidencias medidas. Para cada medición se requiere de un tiempo de integración, cuando este tiempo es suficientemente pequeño las variaciones de una medición a la siguiente son notorias, sin embargo, concluimos que no son significativas para descartar los resultados de la función de coherencia de segundo orden.

Para la función de coherencia de segundo orden calculada utilizando las coincidencias triples N_{GTR} nuestra mejor medida corresponde al mayor tiempo de integración, pues reduce el error asociado, $g_{GTR}^{(2)}(t_i = 7.4945s, \tau = 0) = 0.00870 \pm 1.8 \times 10^{-5}$, que viola la desigualdad clásica $g^{(2)}(t_i, \tau = 0) \geq 1$ por 56307 desviaciones estándar. Para el caso de sustitución directa por N_{TR} la mejor medición de $g_{TR}^{(2)}(t_i = 7.4945s, \tau = 0) = 0.0436 \pm 66.48 \times 10^{-4}$ la desigualdad clásica se viola por 144 desviaciones estándar.

En promedio la función de coherencia de segundo orden usando las coincidencias triples es: $g_{GTR}^{(2)}(\tau = 0) = 0.00877$, y desviación estándar $\sigma g_{GTR}^{(2)}(\tau = 0) = 1.38 \times 10^{-4}$. Para las coincidencias dobles $g_{TR}^{(2)}(\tau = 0) = 0.0446$, y desviación estándar $\sigma g_{TR}^{(2)} = 1.33 \times 10^{-3}$.

La función de coherencia de segundo orden para las coincidencias oscuras $N_{TR,OSCURAS}$ y $N_{GTR,OSCURAS}$ es: empleando las coincidencias oscuras triples $g_{GTR,OSCURAS}^{(2)}(\tau = 0) = 0.0079 \pm 1.41 \times 10^{-4}$ y con las coincidencias dobles $g_{TR,OSCURAS}^{(2)}(\tau = 0) = 0.0439 \pm 7.82 \times 10^{-3}$.

Para todos los casos $g^{(2)}(0) \ll 1$, por lo tanto podemos asegurar que el fenómeno observado es puramente mecánico cuántico (Capítulo 5).

Como habíamos notado esto implica que el fotón, aquél *quantum* de la radiación electromagnética, es realmente indivisible y por tanto cumple las condiciones esperadas de reflejarse o transmitirse en un divisor de haz, anti correlación entre las salidas del divisor de haz.

CONCLUSIONES

7. Conclusiones

Desarrollamos un experimento capaz de demostrar fehacientemente la existencia del fotón a partir del análisis de las correlaciones a las salidas de un divisor de haz. El experimento se detalla en el capítulo 5; en síntesis medimos las coincidencias entre las salidas: reflejada (R) y transmitida (T) de un divisor de haz, y entre dichas salidas y una señal *testigo*. El dispositivo experimental descrito en el capítulo 5 nos permite obtener una buena estadística de conteo. Utilizamos una fuente no lineal que emite radiación electromagnética en *quantums* por pares, lo que nos permite tener una señal testigo y usar el otro *quantum* para el experimento.

Experimentalmente advertimos que la alineación de cada elemento del dispositivo experimental y el acoplamiento de las fibras ópticas a las lentes debe cuidarse para maximizar el número de cuentas y coincidencias. Notamos que el número de coincidencias es un orden de magnitud menor que el número de cuentas por canal.

Por limitaciones técnicas (limitación de búfer de escritura) el número de muestras para cada tiempo de integración es diferente. Sin embargo, encontramos que el número de muestras tomadas para cada tiempo de integración es suficiente para derivar la función de coherencia de segundo orden dentro de un umbral de error que es lo suficientemente pequeño, un orden de magnitud menor que la medida, para asegurar la validez de los resultados.

Al no contar con un contador de coincidencias triples (TAC-SCA de tres canales) elaboramos, valiéndonos del álgebra de conjuntos, un método que nos permite conocer el número de coincidencias triples a partir de las coincidencias dobles medidas entre los tres canales involucrados en el experimento (Capítulo 5). Notamos que la desigualdad entre el número de coincidencias entre las salidas del divisor de haz y las coincidencias triples es: $N_{GTR} \leq N_{TR}$.

Del capítulo 6, Tabla 5, concluimos que para todos los casos estudiados $N_{GTR} \ll N_{TR}$. Además encontramos que las coincidencias oscuras entre los canales reflejado y transmitido (ver capítulo 5, Tabla 3) son del orden de las coincidencias encontradas en el experimento, i.e.: $N_{TR,ruido} \approx N_{TR,experimento}$. Cuantitativamente entre los canales: reflejado y transmitido, medimos 2.236 ± 0.214 coincidencias oscuras promedio por segundo; mientras el número de coincidencias medidas en el experimento, entre los mismos canales, es 2.444 ± 0.028 . La diferencia entre ambas se debe a fluctuaciones en el voltaje de alimentación y temperatura de los sistemas electrónicos del APD-SPCM y de la tarjeta contadora de coincidencias.

El resultado anterior es una evidencia sólida de la existencia del fotón y que el cristal BBO emite estados cuánticos de radiación electromagnética, estados de un solo fotón, mediante SPDCM. Es decir, patentamos que existe una partícula elemental del campo electromagnético que no se divide al incidir en un divisor de haz; sin embargo, es necesario demostrar su existencia utilizando la función de coherencia de segundo orden, que para cualquier caso clásico tendrá un valor mayor o igual a uno (ver Capítulo 2).

Para la función de coherencia de segundo orden calculada utilizando las coincidencias triples, N_{GTR} , nuestra mejor medida corresponde al mayor tiempo de integración, pues reduce el error asociado, $g_{GTR}^{(2)}(t_i = 0.2402s, \tau = 0) = 0.00870 \pm 1.8 \times 10^{-5}$, que viola la desigualdad clásica $g^{(2)}(t_i, \tau = 0) \geq 1$ por 56307 desviaciones estándar. Para el caso de sustitución directa por N_{TR} la mejor medición de $g_{TR}^{(2)}(t_i = 0.2402s, \tau = 0) = 0.0436 \pm 66.48 \times 10^{-4}$ la desigualdad clásica se viola por 144 desviaciones estándar.

La función de coherencia de segundo orden, derivada en el Capítulo 2, es independiente del tiempo de integración. La diferencia observada es debida a que, a mayor tiempo de integración, al promediar las fluctuaciones se reducen, por lo tanto el error decrece. Como notamos en el Capítulo 6 la única forma de mejorar el resultado de la función de coherencia de segundo orden es reduciendo los niveles de ruido de los detectores y sistemas de conteo de coincidencias.

En el capítulo anterior calculamos la función de coherencia de segundo orden utilizando las coincidencias, triples y dobles, oscuras y las coincidencias medidas en el experimento. Así en el caso de la función de coherencia con coincidencias dobles la diferencia entre la $g_{TR,OSCURAS}^{(2)}(\tau = 0)$ y $g_{TR}^{(2)}(\tau = 0)$ es de 9.9%; y cuando se usan coincidencias triples la diferencia entre $g_{TR,OSCURAS}^{(2)}(\tau = 0)$ y $g_{GTR}^{(2)}(\tau = 0)$ es 1.5%. El valor medido para la función de coherencia puede ser explicado por las coincidencias oscuras y/o ruido lumínico, debidas al ruido de los detectores.

Finalmente en todos los casos estudiados $g^{(2)}(0) \ll 1$, por lo que podemos asegurar que el fenómeno observado es puramente mecánico cuántico (Capítulo 5).

Los resultados del experimento realizado no pueden ser explicados bajo ninguna descripción clásica ondulatoria del campo electromagnético, sin embargo, son consistentes con la descripción mecano cuántica establecida en el Capítulo 2 para un fotón incidente en un divisor de haz, por tanto el experimento prueba la existencia del fotón.

Damián Pablo San Román Alerigi

Marzo de 2009

APÉNDICES

Operadores de campo

Orden temporal y normal

Función general de correlación

Grado de coherencia

Descripción y características de los sistemas de detección de diodo

Apéndice A. Operadores de campo

Los operadores de campo también conocidos como operadores de frecuencia positiva y negativa son útiles para describir el campo cuantizado en un espacio de arista L en función de los operadores de creación y aniquilación.

En el capítulo 2.4 (Eq. 41, Eq. 42 y Eq. 43) encontramos las expansiones del campo electromagnético en función de los modos, operadores de creación y aniquilación. Todos ellos de la forma

$$\frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \sum_s \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0} \right)^{1/2} [l(\omega)\hat{a}_{ks}\boldsymbol{\varepsilon}_{ks}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + l^*(\omega)\hat{a}_{ks}^\dagger\boldsymbol{\varepsilon}_{ks}^*e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}]$$

Eq. 1

La forma anterior se puede escribir como

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{F}}^+(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{F}}^-(\mathbf{r}, t)$$

Eq. 2

Donde

$$\hat{\mathbf{F}}^+(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \sum_s \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0} \right)^{1/2} [l(\omega)\hat{a}_{ks}\boldsymbol{\varepsilon}_{ks}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}]$$

Eq. 3

$$\hat{\mathbf{F}}^-(\mathbf{r}, t) = (\hat{\mathbf{F}}^+(\mathbf{r}, t))^\dagger = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \sum_s \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0} \right)^{1/2} [l(\omega)\hat{a}_{ks}^\dagger\boldsymbol{\varepsilon}_{ks}^*e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}]$$

Eq. 4

Estos operadores, no Hermitianos, juegan el papel de operadores de creación aniquilación para el espacio de configuraciones. $\hat{\mathbf{F}}^+(\mathbf{r}, t)$ es la parte positiva en frecuencia del campo $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t)$ ya que depende solamente del factor de tiempo $e^{i(-\omega t)}$; mientras que su complejo conjugado $\hat{\mathbf{F}}^-(\mathbf{r}, t)$ es la parte negativa de la frecuencia puesto que depende de $e^{i(\omega t)}$

Apéndice B. Orden temporal y normal

Se puede demostrar siguiendo pasos análogos a los que hemos seguido para obtener la probabilidad de detección de un foto-detector [1 Sec. 12.2.1] que la probabilidad de detección conjunta para N detectores en termino de los operadores de campo $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t)$ es

$$P_N(\mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{r}_N, t_N) \Delta t_1 \cdots \Delta t_N = C_N \Delta t_1 \cdots \Delta t_N \langle \hat{F}_{i_1}^-(\mathbf{r}_1, t_1) \cdots \hat{F}_{i_N}^-(\mathbf{r}_N, t_N) \hat{F}_{i_N}^+(\mathbf{r}_N, t_N) \cdots \hat{F}_{i_1}^+(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle$$

Eq. 5

La Eq. 5 no se puede simplificar como el producto de operadores de intensidad, para ello se han desarrollado varios elementos en notación. Por ejemplo, cuando se coloca a un operador entre dos puntos : \hat{O} : esto tiene el efecto de reorganizar al operador para que este un orden normal. Por ejemplo : $\hat{a}\hat{a}^\dagger := \hat{a}^\dagger a$ y : $\hat{a}^\dagger \hat{a} := \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ya que $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ se encuentra en orden normal.

Denotaremos por \mathcal{T} al símbolo de orden temporal que re-arregla los operadores de creación en forma temporal creciente y a los de aniquilación en sentido reverso temporal; si tenemos $t_1 < \dots < t_3$

$$\mathcal{T} \hat{F}_{i_2}^-(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{F}_{i_1}^-(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{F}_{i_3}^-(\mathbf{r}_3, t_3) = \hat{F}_{i_1}^-(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{F}_{i_2}^-(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{F}_{i_3}^-(\mathbf{r}_3, t_3)$$

Eq. 6

Usando estas formas podemos reescribir la Eq. 5 de forma compacta

$$P_N(\mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{r}_N, t_N) \Delta t_1 \cdots \Delta t_N = C_N \Delta t_1 \cdots \Delta t_N \langle \mathcal{T} : \hat{I}(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \hat{I}(\mathbf{r}_N, t_N) : \rangle$$

Eq. 7

Apéndice C. Función general de correlación

La función de correlación mas general que se puede encontrar en mediciones con foto detectores cuando se tienen efectos de interferencia es la correlación ordenada de orden (N, M)

$$\begin{aligned} \Gamma_{i_1, \dots, i_N; j_M, \dots, j_1}^{(N, M)}(\mathbf{r}_1, t_1, \dots, \mathbf{r}_N, t_N; \mathbf{r}_M', t_M', \dots, \mathbf{r}_1', t_1') \\ = \langle \hat{F}_{i_1}^-(\mathbf{r}_1, t_1) \cdots \hat{F}_{i_N}^-(\mathbf{r}_N, t_N) \hat{F}_{j_M}^+(\mathbf{r}_M', t_M') \cdots \hat{F}_{j_1}^+(\mathbf{r}_1', t_1') \rangle \end{aligned}$$

Eq. 8

Por simplicidad usaremos x_k para denotar la coordenada espacial r_k , la temporal t_k y el índice i_k ; y denotemos por y_k la coordenada espacial r_k' , la temporal t_k' y el índice j_k para obtener

$$\Gamma^{(N, M)}(x_1, \dots, x_N; y_M, \dots, y_1) = \langle \hat{F}^-(x_1) \dots \hat{F}^-(x_N) \hat{F}^+(y_M) \dots \hat{F}^+(y_1) \rangle$$

Eq. 9

Algunas propiedades de la Eq. 9 son

$$\begin{aligned} \Gamma^{(N, M)*}(x_1, \dots, x_N; y_M, \dots, y_1) &= \Gamma^{(M, N)}(y_1, \dots, y_M; x_N, \dots, x_1) \\ \Gamma^{(N, N)}(x_1, \dots, x_N; y_N, \dots, y_1) &\geq 0 \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Schwartz

$$|\Gamma^{(N,M)}(x_1, \dots, x_N; y_M, \dots, y_1)|^2 \leq \Gamma^{(N,N)}(x_1, \dots, x_N; y_N, \dots, y_1) \Gamma^{(M,M)}(x_1, \dots, x_M; y_M, \dots, y_1)$$

Si $N = M = 1$

$$\Gamma^{(1,1)}(x_1, y_1) = \langle \hat{I}(x_1) \hat{I}(y_1) \rangle \leq \langle \hat{I}(x_1) \rangle \langle \hat{I}(y_1) \rangle$$

Note que si λ_i es un número complejo arbitrario y x_i es un parámetro arbitrario y temos r de estos parámetros y números complejos entonces para cualquier operador \hat{O} se cumple

$$0 \leq \langle \hat{O}^\dagger \hat{O} \rangle = \sum_{i,j=1}^r \lambda_i^* \lambda_j \Gamma^{(1,1)}(x_i; x_j)$$

Como los operadores están ordenados normalmente, aplicar repetidamente el operador de aniquilación a la derecha, o el de creación a la izquierda, provocará que la correlación desaparezca si el estado tiene menos fotones que operadores

$$\Gamma^{(N,M)}(x_1, \dots, x_N; y_M, \dots, y_1) = 0, \quad \langle m | \hat{\rho} | n \rangle = 0 \quad \forall n \geq N, m \geq M$$

Para el caso de un campo electromagnético clásico representado por la señal analítica $V(\mathbf{r}, t)$ la función de correlación se escribe

$$\Gamma^{(M,N)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{M+N}; t_1, \dots, t_{M+N}) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t_1) \cdots V^*(\mathbf{r}_M, t_M) \cdot V(\mathbf{r}_{M+1}, t_{M+1}) \cdots V(\mathbf{r}_{M+N}, t_{M+N}) \rangle$$

Eq. 10

Ésta ecuación mantiene las mismas propiedades arriba mencionadas.

Apéndice D. Grado de coherencia

Del estudio previo podemos derivar la correlación normalizada de intensidad que definimos como

$$\lambda(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \frac{\langle \mathcal{I} : \hat{I}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{I}(\mathbf{r}_2, t_2) : \rangle}{\langle \hat{I}(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle \langle \hat{I}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle} - 1$$

Eq. 11

Con la cual podríamos redefinir la probabilidad conjunta de foto-detección como

$$P_2(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = P_1(\mathbf{r}_1, t_1) \Delta t_1 P_1(\mathbf{r}_2, t_2) \Delta t_2 [1 + \lambda(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2)]$$

Eq. 12

Dándonos así información sobre la correlación que existe entre ambos detectores. Dicha información se encuentra en el cociente, la primera parte de la Eq. 11. Ésta es la función de grado de coherencia $\gamma^{(N,M)}$ en su forma más general [2].

$$\gamma^{(N,M)} = \frac{\Gamma^{(N,M)}(x_1, \dots, x_N; y_M, \dots, y_1)}{\sqrt[2N]{\prod_{r=1}^N \Gamma^{(N,N)}(x_r, \dots, x_r; x_r, \dots, x_r)} \sqrt[2M]{\prod_{r=1}^M \Gamma^{(M,M)}(y_r, \dots, y_r; y_r, \dots, y_r)}}$$

Otra forma de describir las funciones de orden de coherencia es

$$g^{(N+1)} = \gamma^{(N,N)} = \frac{\Gamma^{(N,N)}(x_1, \dots, x_N; y_N, \dots, y_1)}{\prod_{r=1}^N [\Gamma^{(1,1)}(x_r, x_r) \Gamma^{(1,1)}(y_r, y_r)]}$$

Eq. 13

La anterior es conocida como la función de coherencia de grado $N + 1$. También puede definirse como

$$g'^{(N+1)} = \gamma'^{(N,N)} = \frac{\Gamma^{(N,N)}(x_1, \dots, x_N; y_N, \dots, y_1)}{\prod_{r=1}^N \sqrt{[\Gamma^{(1,1)}(x_r, x_r) \Gamma^{(1,1)}(y_r, y_r)]}}$$

Eq. 14

Note que para la Eq. 14 se cumple dadas las propiedades de la función de correlación (desigualdad de Schwartz)

$$0 \leq \frac{\Gamma^{(N,N)}(x_1, \dots, x_N; y_N, \dots, y_1)}{\prod_{r=1}^N \sqrt{[\Gamma^{(1,1)}(x_r, x_r) \Gamma^{(1,1)}(y_r, y_r)]}} \leq 1$$

Eq. 15

Note que aunque los grados superiores de coherencia son de interés para conocer la coherencia del campo electromagnético completo la utilidad del concepto de coherencia a órdenes superiores al segundo es dudoso. No hay pruebas claras si cabe la posibilidad de campos que tengan cierto orden de coherencia (excepto el segundo) y no lo tengan a otros órdenes. Puede ser que el único orden de coherencia que tenga un significado sea el segundo [1]. En última fecha L. Orozco ha utilizado la función de coherencia de tercer orden para conocer la correlación de la intensidad con un campo.

Apéndice E. Descripción y características de los sistemas de detección de diodo

Este experimento requiere elementos de detección capaces de detectar energía del orden de $h\nu$, i.e. fotones uno por uno. Para realizar esto contamos con foto diodos, semiconductores sensibles a luz incidente en el visible o infrarrojo.

Cuando la luz incidente en un semiconductor tiene energía suficiente para excitar un electrón dándole movimiento y crea un hueco de carga positiva. Si la absorción ocurre en la zona de

agotamiento de la unión P-N, o a una distancia de difusión de él, dichos portadores son expelidos de la unión por el campo eléctrico en la zona de agotamiento, produciendo un flujo de electrones que es conocido como fotocorriente.

El fotodiodo de avalancha tiene una estructura similar al fotodiodo común con la salvedad de que trabaja con voltajes mayores. Esto permite a los portadores de carga, generados por el campo electromagnético incidente, multiplicarse en la zona de *avalancha* del diodo, resultando una ganancia interna que incrementa la velocidad de respuesta del fotodiodo.

Un contador de fotones individuales, SPCM por sus siglas en inglés Single Photon Counting Module; es un dispositivo compuesto de fotodiodos de avalancha operados a temperaturas por debajo de cero, lo que permite reducción en el nivel de ruido y por ende una mejor eficiencia de detección.

E.1. Descripción de términos básicos

Existen diversos términos que caracterizan a los foto-diodos, a continuación repasaremos brevemente los más importantes

E.1.1. Respuesta espectral

La fotocorriente producida por la cantidad de luz incidente varía en función de la longitud de onda λ . Dicha relación entre la sensibilidad foto-eléctrica y la longitud de onda se conoce como respuesta espectral y se puede expresar en término foto-sensibilidad o la eficiencia cuántica, entre otras.

E.1.2. Foto sensibilidad

Mide la sensibilidad como la razón entre la energía radiante incidente expresada en watts (W) y la fotocorriente resultante expresada en Amperes (A). Se puede expresar como una sensibilidad absoluta $\left(\frac{A}{W}\right)$ o como relativa normalizada respecto a la sensibilidad máxima, usualmente expresada en porcentaje respecto al valor pico (longitud de onda para la cual se obtiene la mayor foto-corriente). Resulta practica expresar la foto sensibilidad S de forma absoluta y la región de respuesta espectral como aquella para la cual la sensibilidad es mayor que el 5% del valor pico.

E.1.3. Eficiencia Cuántica

La eficiencia cuántica QE es el número de electrones o huecos que pueden ser detectados como una fotocorriente dividida por el número de fotones incidentes. Se expresa en porcentaje. La eficiencia cuántica está relacionada a la foto sensibilidad para una longitud de onda dada por la expresión

$$QE = \frac{S \times 1240}{\lambda} \times 100\%$$

Eq. 16

Note que en este la foto sensibilidad S esta expresada de manera absoluta y la longitud de onda en nanómetros

E.1.4. Corriente de cortocircuito I_{sc} y voltaje de circuito abierto V_{oc}

La corriente de cortocircuito es la corriente de salida que fluye cuando la impedancia de la carga es 0 y es prácticamente proporcional al área activa del dispositivo. Se le conoce como sensibilidad a la luz blanca, se mide utilizando una lámpara de tungsteno con una distribución de temperatura de color $2856 K$. El voltaje a circuito abierto es el voltaje fotovoltaico que se logra cuando la resistencia de la carga es infinita y exhibe un valor constante independiente del área activa del dispositivo.

E.1.5. Razón de sensibilidad al infrarrojo

La razón entre la corriente de salida I_R , medida con una luz con temperatura de color $2856 K$ al pasar a través de un filtro infrarrojo $R - 70, t = 2.5mm$; y la corriente de cortocircuito I_{sc} sin el filtro, se expresa

$$I_{SR} = \frac{I_R}{I_{SC}} \times 100\%$$

Eq. 17

E.1.6. Corriente oscura (Dark Current) I_D

La corriente invertida u oscura es una pequeña corriente que se presenta cuando un voltaje es aplicado al fotodiodo de forma invertida. Esta es una fuente de ruido para aplicaciones en las cuales se aplica un voltaje invertido, por ejemplo cuando se trabaja con fotodiodos tipo PIN.

E.1.7. Capacitancia C_t

Entre la unión PN del fotodiodo se forma un capacitor, ésta es el factor determinante para la velocidad de respuesta del fotodiodo. Se encuentra listada en los manuales de operación de cada fotodiodo

E.1.8. Tiempo de respuesta t_r

Es el tiempo de respuesta de un fotodiodo cuando incide luz con intensidad escalonada, se define como el tiempo requerido para que la salida cambia de un 10% a 90% del nivel de salida permanente. Depende de la longitud de onda de la luz incidente y la resistencia de carga. Para las hojas de dato generalmente se utiliza luz de una fuente de $GaAsP$ ($655nm$) or GaP ($560nm$) y una resistencia de carga de $1k\Omega$. Esto puede variar de acuerdo al fabricante, nosotros utilizamos fotodiodos desarrollados por Hamamatsu y es para esta compañía que la calibración se realiza con los LED especificados.

E.1.9. Frecuencia de corte f_c

Se utiliza para medir la respuesta temporal de fotodiodos de alta velocidad APD (Avalanche Photodiodes) y fotodiodos PIN cuando la luz incidente es modulada utilizando una onda senoidal. Se define como la frecuencia para la cual la salida del fotodiodo decrece $3dB$ en la salida de $100kHz$. La fuente de luz utilizada es un laser de diodo $830nm$ y una resistencia de carga de 50Ω . El tiempo de respuesta y la frecuencia de corte tienen la relación

$$t_r = \frac{0.35}{f_c}$$

Eq. 18

E.1.10. Potencia de Ruido Equivalente (NEP por siglas en ingles)

NEP es la cantidad de luz equivalente al nivel de ruido de un dispositivo, o el nivel de luz requerido para obtener una razón señal-ruido de una unidad. En las hojas de datos el valor NEP se mide a la longitud de onda pico. Dado que el ruido es proporcional a la raíz cuadrada del ancho de longitud de onda, el NEP se mide a un ancho de banda de $1 Hz$

$$NEP \left[\frac{W}{\sqrt{Hz}} \right] = \frac{\text{Corriente de ruido} \left[\frac{A}{\sqrt{Hz}} \right]}{S(\lambda_p) \left[\frac{A}{W} \right]}$$

Eq. 19

E.1.11. Voltaje máximo invertido. $V_R max$

Aplicar un voltaje inverso a un fotodiodo inicia el rompimiento a cierto voltaje y causa un deterioro severo en el dispositivo. Se especifica el voltaje máximo inverso como el voltaje menor a aquel de rompimiento. El voltaje inverso no debe superar el máximo especificado en ningún momento, ni siquiera instantáneamente.

E.2. Foto diodo

Analicemos la estructura de un fotodiodo. El material de la capa P es la superficie activa y el material de la capa N el substrato que forma la junta o único PN que funciona como un convertidor foto-eléctrico. La región neutral entre las capas P y N se conoce como la capa de depleción; al controlar el grosor de la capa P exterior, la capa N substrato y la última capa N^+ al tiempo que la concentración de elementos dopantes también se controla podemos obtener distintos niveles de respuesta para diferentes frecuencias.

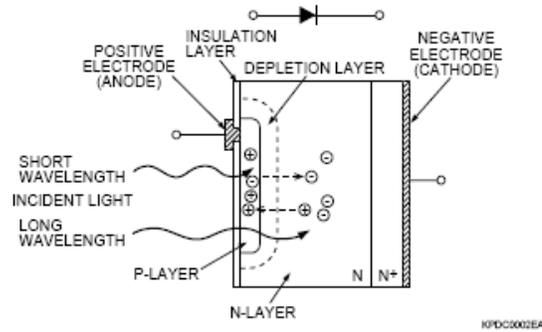


Ilustración 1. Diagrama transversal de un foto diodo (Hamamatsu Photodiode Technical Information).

Cuando luz incide en un fotodiodo los electrones en la estructura cristalina son estimulados, si la luz tiene una energía mayor que la energía de banda los electrones son arrancado hacia la banda de conducción dejando huecos en la banda de valencia. Estos pares electrón-hueco aparecen en la capa P, la de depleción y la capa N.

En la capa de depleción el campo eléctrico acelera a los electrones hacia la capa N y a los huecos hacia la capa P. De los pares electrón-hueco generados en la capa N los electrones se quedan en la capa N junto a los letrones que han llegado de la capa P así quedan en la banda de conducción de la capa N.

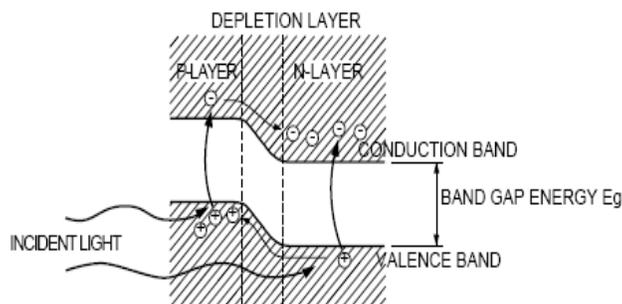


Ilustración 2. Diagrama transversal de las capas de un foto-diodo (Hamamatsu Photodiode Technical Information).

Al tiempo los huecos se van de la capa N a la capa de depleción mientras son acelerados y colectados en la capa P en la banda valencia. De esta forma los pares electrón-hueco que son generados en proporción a la cantidad de luz incidente son colectados en las capas N y P, deviene esto en un carga positiva en la capa P y negativa en la capa N. Si se conecta un circuito externo entre las capas N y P los electros fluirán de la capa N y huecos de la capa P hacia los electrodos opuestos.

Antes de continuar es importante notar que no es el propósito de esta tesis hacer un desarrollo profundo de la teoría y funcionamiento, toda vez que esta ha sido desarrollada en las referencias [3, 4, 5] de este capítulo.

E.2.1. Generación de pares electrón-hueco

La generación de pares electrón-hueco en un semiconductor esta directamente relacionada con la absorción de luz. Cada fotón incidente genera un par electrón-hueco. La generación óptica esta dada por

$$g_{OP} = -\frac{1}{A} \frac{dP_{opt}}{dx} \frac{1}{h\nu} = \frac{\alpha P_{opt}}{Ah\nu}$$

Eq. 20

Donde A es el área iluminada del fotodiodo, P_{opt} es la potencia del haz incidente, α es el coeficiente de absorción.

E.2.2. Fotocorriente debida a la absorción en la región de depleción

Si pensamos que todos los pares electrón-hueco contribuyen a la fotocorriente, entonces esta será la integral d sobre la región de depleción

$$I_{ph} = -qA \int_{-x_p}^{x_N+d} g_{OP} dx$$

Eq. 21

Donde d es el grosor de la región no dopada.

E.2.3. Respuesta total

Si combinamos todos los efectos podemos obtener la respuesta del foto detector, ignorando la corriente oscura

$$\mathcal{R} = \left| \frac{I_{ph}}{P_{in}} \right|$$

Eq. 22

Es decir la respuesta total del foto detector resulta del cociente entre la corriente de huecos y la potencia de la luz incidente. Note que en esta expresión no se toma en cuenta los efectos de ruido que analizaremos a continuación.

E.3. Ruido en sistemas electrónicos

Todos los sistemas de detección presentan ruido, datos o señales no deseadas que acompañan o envuelven a aquella información que nos interesa; en experimentos donde la información buscada puede ser comparada en magnitud con el ruido producido por el sistema de detección es importante conocer cuáles son sus efectos y descripciones.

En la foto-detección usamos una gran variedad de circuitos electrónicos que debido a fluctuaciones térmicas (ruido de Johnson), recombinación de pares electrón/hueco (ruido de recombinación y flicker), variaciones aleatorias en la corriente y voltaje de operación y suministro (ruido aleatorio) y el que resulta más importante al tratar con sistemas donde usamos señales de muy baja intensidad: el ruido Shot. Todos los fenómenos mencionados repercuten en un límite mínimo a la magnitud de la señal que puede detectarse.

E.3.1. Ruido de Johnson o Térmico [6,7]

El ruido de Johnson o de Nyquist está presente en todos los circuitos electrónicos, generado por las alteraciones térmicas producidas por los portadores de carga en un conductor eléctrico en equilibrio, independientemente del voltaje aplicado.

La función de densidad de probabilidad del ruido térmico es de tipo Gaussiana.

La varianza en el voltaje debida a este ruido por Hertz en el ancho de banda es

$$\overline{v_n^2} = 4k_B TR$$

Eq. 23

Donde k_B es la constante de Boltzmann en [joules/kelvin], T es la temperatura absoluta del resistor en [kelvin] y R es la resistencia en [ohms].

E.3.2. Ruido Flicker [8,9]

También conocido como el ruido $1/f$ o rosa. Se presenta en casi todos los dispositivos electrónicos y resulta de una variedad de efectos distintos tales como impurezas en el canal de conducción, generación y recombinación en un transistor, etc. Siempre en relación con la corriente directa. Como se observa se presenta en fenómenos de baja frecuencia ya que al aumentar la frecuencia se ve opacado por el ruido blanco.

E.3.3. Ruido por recombinación [10,11]

El ruido de recombinación se origina por la captura y emisión individual de portadores de carga entre la banda de conducción y la de valencia en cualquier semiconductor. Aunque existen diversos modelos numéricos para calcular el espectro del ruido g-r ninguno se ha comprobado experimentalmente.

La intensidad de ruido en el voltaje S_V en función de la transformada de Fourier de la señal $V(t)$, dada la frecuencia angular ω

$$S_V(\omega) = 2\langle \tilde{V}(\omega)\tilde{V}^*(\omega) \rangle$$

Eq. 24

Van Vliet derivó una expresión general para la intensidad espectral del ruido g-r en un dispositivo unidimensional multi-nivel in-homogéneo

$$S_V(\omega) = 2 \sum_{i,k,l}^{s-1} \int_0^L W_g(x) [M_{ik}(x) + i\omega\delta_{ik}]^{-1} B_{ii}(x) [M_{li}(x) - i\omega\delta_{li}]^{-1} dx$$

Eq. 25

La Eq. 25 aunque complicada puede entenderse cualitativamente; la intensidad del ruido g-r depende de $B_{ii}(x)$, el número total de transiciones desde y hacia el nivel i por unidad de tiempo y distancia. La razón de transición puede especificarse y sumarse sobre todos los niveles. La *forma* espectral del ruido g-r se encuentra en los termino M_{ik} y ω ; dada la expresión de la ecuación 10 puede intuirse que el espectro es Lorentziano con una característica especial: la frecuencia de corte; ésta corresponde al promedio temporal para que un exceso de carga en la banda de conducción descienda y el sistema vuelva al equilibrio. A una frecuencia dada para cada posición es posible medir las contribuciones al ruido de todos los niveles. Reduciendo la expresión de la Eq. 25 a una integral sobre la intensidad del numero de fluctuaciones por unidad de distancia $S_n(\omega, x)$

$$S_V(\omega) = \int_0^L W_g(x) S_n(\omega, x) dx$$

Eq. 26

El factor W_g es el peso, define el factor de conversión de las fluctuaciones en el número de portadores locales en fluctuaciones de voltaje.

El ruido de recombinación es un error estadístico que es importante para los foto-detectores basados en semiconductores.

E.3.4. Ruido de Shoot [12,13,14]

El ruido *shoot* ocurre cuando un número finito de portadores de energía, tales como electrones en un circuito o fotones en un sistema óptico, es pequeño como para dar lugar a fluctuaciones estadísticas detectable. Es la fuente de ruido más importante en electrónica, telecomunicaciones y física fundamental.

La luz y la corriente eléctrica están compuestas del movimiento de paquetes cuantizados. Por ejemplo si tenemos un filamento que emite electrones hacia una pantalla y en ella contamos el número de electrones que llegan a la pantalla (detector), suponga que la diferencia de potencial en el filamento decrece hasta que solo algunos electrones son emitidos a tiempo aleatorio. De observar el contador sabemos que llega un número promedio \bar{n}_e por unidad de tiempo Δt , sin embargo si medimos tiempo a tiempo encontraremos a veces un numero distinto al promedio, es decir fluctuaciones; es a éstas fluctuaciones lo que denominamos por ruido *shoot*.

En los equipos electrónicos las fluctuaciones aleatorias son aquellas en la corriente eléctrica, causadas por el hecho de que la corriente está compuesta por portadores discretos de carga (electrones). De vital importancia en los semiconductores (juntas p-n), pero no así en cables metálicos, ya que la correlación entre los electrones individuales elimina las fluctuaciones.

Observe que el ruido *shoot* es distinto al ruido de Johnson que tiene lugar sin ningún voltaje aplicado.

El ruido *shoot* es un proceso Poissoniano, es decir los portadores de carga siguen una distribución de Poisson. La fluctuación de la corriente es por tanto

$$\sigma_i = \sqrt{2qI\Delta f}$$

Eq. 27

Donde q es la carga elemental, Δf es el ancho de banda sobre el cual el ruido se mida, e I es el promedio de la corriente en el dispositivo. Todas las unidades están en unidades del sistema internacional.

En óptica cuántica, la foto detección de la luz se realiza con tubos foto-multiplicadores y fotodiodos. Dado que la fotocorriente es proporcional a la intensidad de la luz (i.e. número de fotones), las fluctuaciones en el campo electromagnético se reflejan en la corriente eléctrica medida.

Para el caso de luz coherente, como un laser, el ruido es la desviación estándar.

$$\Delta I^2 = \langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle$$

Eq. 28

El error debido al ruido *shoot* puede verse como la desviación estándar en la foto-corriente medida. Aunque es posible reducir el ruido utilizando técnicas de Squeezing no las analizaremos en esta tesis.

E.4. Eficiencia cuántica

Hemos estudiado los aspectos fundamentales de la teoría de foto-detección, las características de los fotodetectores y los diversos tipos de ruido predominantes en los sistemas electrónicos de foto detección así como para las fuentes (ruido *shoot*). Podemos definir, ahora, la eficiencia cuántica; para una fuente radiante será la razón entre el número de *quantos* radiados, energía emitida por segundo, y el número de electrones que fluyen por segundo. Para un detector es la razón de la corriente inducida sobre el flujo incidente.

En todos los dispositivos foto-sensibles ocurren procesos de creación de pares electrón-hueco al incidir el campo electromagnético en la superficie foto-reactiva. La foto-corriente producida es una medida de la respuesta del equipo al campo electromagnético (E.2.3). La energía del campo electromagnético es inversamente proporcional a la longitud de onda por lo que la eficiencia cuántica se mida sobre un rango de longitudes de onda para caracterizar la respuesta del equipo.

De la Eq. 22 podemos definir la eficiencia cuántica para un semiconductor como sigue

$$\eta = \frac{\mathcal{R}h\nu}{q}$$

Eq. 29

Como se observa la eficiencia cuántica depende de la absorción de luz y de la colecta de los portadores de carga en la junta p-n.

Otra forma de medir la eficiencia cuántica es mediante la respuesta espectral, medida en [ampere/watt], i.e. la corriente producida por el dispositivo dada la potencia del campo electromagnético incidente. La relación entre la eficiencia cuántica y la respuesta espectral es

$$QE_{\lambda} = \frac{\mathcal{R}_{\lambda}hc}{\lambda e}$$

Eq. 30

E.5. Foto diodo de avalancha [15,3]

Tras un repaso breve de la teoría del foto-diodo podemos introducir una nueva clase de foto-detectores conocidos como foto-diodos de avalancha o APDs por sus siglas en inglés. Son semiconductores análogos a los foto-multiplicadores. Al aplicar un voltaje inverso *bias*, entre 100 y 200 volts, los APDs muestran una ganancia en la corriente con un factor de 100, debido a la ionización de impacto. Entre mayor sea la diferencia de potencial aplicada mayor será la ganancia en la corriente. Lo anterior permite que pequeñas cantidades de luz puedan ser detectadas. Los APDs se distinguen por su factor de multiplicación M que se define con base al espacio para los portadores de carga acoplados L , y al factor de multiplicación para electrones y huecos α

$$M = \frac{1}{1 - \int_0^L \alpha(x) dx}$$

Eq. 31

El factor α contiene la información, y por tanto es susceptible, del campo eléctrico aplicado, temperatura y dopaje del material. Dadas sus características los APDs son sensibles a la estabilidad de la diferencia de potencial aplicada y la temperatura a la que se encuentra.

Las características de los APDs provocan un nuevo tipo de ruido conocido como *ruido de exceso*, debido al proceso de multiplicación a una ganancia dada M ; el ruido puede expresarse analíticamente como

$$F(M) = \kappa M + \left(2 - \frac{1}{M}\right)(1 - \kappa)$$

Donde κ es la razón entre la ionización por impacto de los huecos y la de los electrones. Se busca tener una asimetría en este factor ya que minimiza $F(M)$ y ésta nos da la mejor resolución posible para el dispositivo.

E.5.1. Principio de operación de los APDs

Como hemos visto en las secciones 5.3.1.3, 5.3.2 y 5.3.4, al incidir el campo electromagnético sobre una superficie foto-reactiva en un foto-diodo se genera una corriente de electrón-hueco si la energía del campo incidente es mayor que la energía de separación entre las bandas del material. Esto tiene una eficiencia cuántica dada por la Eq. 16 de forma simplificada y general por la Eq. 29.

Cuando se generan los pares electrón-hueco en la capa de depleción del fotodiodo al cual se le somete a una diferencia de potencia en la junta p-n, los electrones se mueven hacia el lado N+ y los huecos hacia P+. La velocidad de deriva de estos pares electrón-hueco o portadores depende de la intensidad del campo eléctrico aplicado. Sin embargo cuando el campo eléctrico se incrementa, a partir de cierto nivel, los portadores tienen una mayor probabilidad de colisionar con la red del cristal y se alcanza una velocidad de saturación. Este fenómeno es relevante cuando la densidad de voltaje es superior a $10^4 V/cm$ y la velocidad de saturación en este punto es $10^7 cm/s$. Incrementar el campo más allá de estos valores tendrá como consecuencia que aquellos portadores de carga que no colisionaron con la red del cristal tengan una energía muy grande. Cuando colisionen, al tener una energía suficiente para ionizar al material, provocarán la creación de nuevos pares electrón-hueco. Éstos a su vez generaran nuevos pares y así se obtiene una reacción en cadena; de ahí el nombre de foto-corriente por multiplicación en avalancha, como se muestra esquemáticamente en la siguiente ilustración

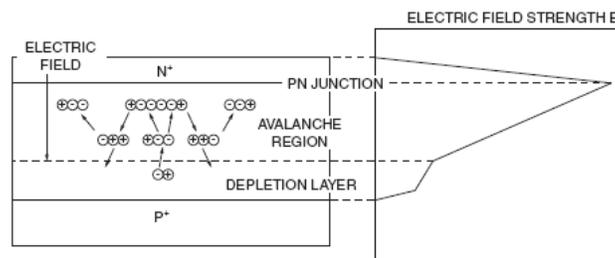


Ilustración 3. Diagrama esquemático de un proceso de generación de foto-corriente por avalancha (Hamatsu Si APD Technical Information)

Como habíamos notado en la sección anterior la ganancia depende de la intensidad del campo eléctrico entre las capas de avalancha, y concluimos que entre mayor fuera el voltaje aplicado mayor sería la ganancia. Es importante notar que a partir de cierto límite ocurrirá lo contrario, es decir una caída repentina en el voltaje tiene lugar debido a la corriente que fluye a través de las resistencias del dispositivo. Es decir el APD tiene un ganancia máxima cuyo valor depende de la foto-corriente, debe cuidarse de no rebasar el voltaje máximo pues de lo contrario la foto-corriente medida no será proporcional a la luz incidente.

Otro factor a cuidarse durante la operación de un APD es la temperatura, si esta se incrementa entonces la ganancia disminuye; debido a las vibraciones de la red cristalina que incrementan con

la temperatura los portadores aptos para colisionar y generar nuevos pares lo hacen antes de tener la energía necesaria para dicha creación.

E.5.2. Diodo de avalancha de alta sensibilidad o SPAD[16]

Aunque los APDs tienen factores de ganancia del orden de 100 o 200 para la señal, y teóricamente podríamos contar fotón por fotón con ellos, sería ventajoso contar con un sistema o detector que amplificara la señal mil veces al tiempo que mantenga bajos niveles de ruido, esto nos permitirá observar con mayor certeza un campo electromagnético incidente de baja intensidad, por ejemplo aquella propia del fotón; recordando que la energía del campo cuantizado es

$$E = h\nu$$

Eq. 32

Un aparato capaz de detectar energía y en consecuencia intensidades tan bajas del campo electromagnético se conoce como SPAD o Single Photon Avalanche Diode, es decir un dispositivo que puede medir efectivamente un campo electromagnético con la energía correspondiente a un *quanto* según su frecuencia.

El SPAD es un dispositivo opto-electrónico que se conoce también por el nombre de APD de modo Geiger o G-APD; se trata de un foto-detector de estado sólido que se basa en el mismo principio que un APD donde una diferencia de potencial se aplica a la junta p-n, en la cual se generan los portadores de carga que disparan una corriente en avalancha debida al mecanismo de ionización por impacto.

El campo eléctrico presente en la junta p-n de este tipo de foto-detectores es de alrededor de $3 \times 10^5 V/cm$; esto permite que un solo portador de carga entre en la capa de depleción e inicie la avalancha. La corriente sube en un par de nanosegundos a un nivel macroscópico de algunos mili amperes. Si el primer portador fue generado por el campo electromagnético incidente entonces el principio del pulso de avalancha esta marcado con una variación repentina de algunos picosegundos. La corriente fluye hasta que la avalancha es cortada al descender el voltaje en la junta, impidiendo que se sigan generando pares electrón-hueco por ionización en la red cristalina.

BIBLIOGRAFÍA

Capítulo 1

- 1 R. Rashed, *The Celestial Kinematics of Ibn al-Haytham*, Arabic Sciences and Philosophy, Cambridge University Press, 17, 7–55. USA. (2007)
- 2 J.C. Maxwell, *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 155, 459–512. UK. (1865)
- 3 H. Hertz, *Über Strahlen elektrischer Kraft*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Alemania. (1888)
- 4 M. Pank, *Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum*. Ann. Phys. 4, 553–563. (1901)
- 5 W. E. Lamb Jr., M. O. Scully, *The photoelectric effect without photons*, Polarization, Matière et Rayonnement, Presses University de France, Paris. Francia (1969)
- 6 G.N. Lewis, *The conservation of photons*, Nature, 118, 874–875. USA. (1926)
- 7 J. Hirsh. O. Castañón, *Enredamiento Cuántico*, Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM. México. (2008)
- 8 Compton, *A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements*, Phys. Rev. 21: 483–502. USA. (1923).
- 9 V V Kobychiev, S B. Popov, *Constraints on the photon charge from observations of extragalactic sources*, Astronomy Letters 31, 147–151. (2005)
- 10 P. Grangier, G. Roger, and A. Aspect, *Experimental Evidence for a Photon Anticorrelation Effect on a Beam Splitter: A New Light on Single-Photon Interferences*, Europhysics Letters 1: 173–179. (1986)
- 11 J. J. Thorn, M. S. Neel, V. W. Donato, G. S. Bergreen, R. E. Davies, and M. Beck *Observing the quantum behavior of light in an undergraduate laboratory* Am. J Phys. 72, 9. (2004)
- 12 H. Kimble, M. Dagenais, L. Mandel, *Photon antibunching in resonance fluorescence*, Phys. Rev. Lett 39, 691-695. (1977)
- 13 M. Fox, *Quantum Optics, An Introduction*, Oxford Master Series in Atomic, Optical and Laser Physics, Oxford University Press.

Capítulo 2

- 1 P. Knight, C. Gerry, *Introductory Quantum Optics*, Cambridge University Press. (2005)
- 2 M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press. (2000)
- 3 G. Armendariz, *Experimento de interferencia con un solo foton*, Facultad de Ciencias. UNAM (2008)
- 4 L. Mandel, E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press. (1995)
- 5 R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, *Interferometry of the intensity fluctuations in light. I. Basic theory: the correlation between photons in coherent beams of radiation*, Proc of the Royal Society of London A 242: 300–324. (1957)
- 6 R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, *Interferometry of the intensity fluctuations in light. II. An experimental test of the theory for partially coherent light*, Proc of the Royal Society of London A 243: 291–319. (1958)
- 7 P. Grangier, G. Roger, and A. Aspect, *Experimental Evidence for a Photon Anticorrelation Effect on a Beam Splitter: A New Light on Single-Photon Interferences*, Europhysics Letters 1: 173–179. (1986)
- 8 S. Parker, *A Single-Photon Double-Slit Interference Experiment*, Am J Phys 39, 420-424. (1971)
- 9 M. Beck, *Experiments with Single Photons*, <http://people.whitman.edu/~beckmk/QM/inter>. (2004)

Ilustración 1. Propuesta para la variación de $g_{r,t}$	42
Ilustración 2. Divisor de haz con campos clásicos[4].	44
Ilustración 3. Divisor de haz formado por dos láminas dieléctricas, campos cuánticos.	45

Capítulo 3

- 1 P. Grangier, G. Roger, and A. Aspect, *Experimental Evidence for a Photon Anticorrelation Effect on a Beam Splitter: A New Light on Single-Photon Interferences*, Europhysics Letters 1: 173–179. (1986)
- 2 J. Cohen, P. Cohen, S.G. West, L.S. Aiken, *Applied multiple regression/correlation analysis for the behavioral sciences*, Lawrence Erlbaum Associates. (2003)
- 3 W. Navidi, *Statistics*, McGraw Hill. (2006)

- 4 L. Mandel, E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press. (1995)
 - 5 B. Arons and M. B. Peppard, Einstein's Proposal of the Photon Concept - a Translation of the *Annalen der Physik* Paper of 1905, *Am. J. Phy.*, Vol 33, No. 5, May, p. 367. (1965)
 - 6 R. J. Glauber, *Quantum Theory and Optical Coherence*, Wiley. (2007)
 - 7 Gerry, P. Knight, *Introductory Quantum Optics*, Cambridge University Press. (2005)
 - 8 R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, Interferometry of the intensity fluctuations in light. II. An experimental test of the theory for partially coherent light, *Proc of the Royal Society of London A* 243, 291–319. (1958)
 - 9 H. Kimble, M. Dagenais, L. Mandel, Photon antibunching in resonance fluorescence, *Phys. Rev. Lett* 39, 691-695. (1977)
 - 10 WIKIPEDIA, www.wikipedia.com
 - 11 H. Kimble, L. Mandel, *Phys. Rev. A* 13,212. (1976)
 - 12 M. Dagenais, L. Mandel, *Phys Rev. A* 18, 2217. (1978)
 - 13 J. J. Thorn, M. S. Neel, V. W. Donato, G. S. Bergreen, R. E. Davies, and M. Beck Observing the quantum behavior of light in an undergraduate laboratory *Am. J Phys.* 72, 9. (2004)
-
- | | |
|---|----|
| Ilustración 1. Experimento de Grangier. | 53 |
| Ilustración 2- Resultados reportados por Grangier et al.[1] | 54 |
| Ilustración 3. Diagrama de campo electromagnético incidente en una superficie foto-receptora | 57 |
| Ilustración 4. Diseño original del experimento de Hanbury Brown y Twiss para demostrar bunching y correlaciones temporales [8]. | 67 |
| Ilustración 5. Función de coherencia de segundo orden para campos clásicos; estado coherente (azul), luz caótica Lorentziana (roja), y luz caótica Gaussina (verde) [10]. | 69 |
| Ilustración 6. Diagrama para entrada de un fotón y el campo vacío a un BS. | 71 |
| Ilustración 7. Función de correlación para el caso cuántico []. | 73 |
| Ilustración 8. Detección de fotones en el tiempo; antibunched (verde), azarosa (roja) y bunched (azul) [10]. | 75 |
| Ilustración 9. Resultados de la correlación temporal para un laser de colorante en la intensidad umbral mínima [11]. | 76 |
| Ilustración 10. Correlación temporal en dos detectores para la fluorescencia de un átomo de Sodio. Observamos antibunching [12] | 76 |
| Ilustración 11. Esquema experimento de Aspect et al. Para demostrar las anti correlaciones para una fuente teórica de fotones individuales []. | 77 |

Capítulo 4

- 1 E. Barrios, Prueba Experimental de la Desigualdad de Bell, Tesis de Licenciatura, UNAM, Facultad de Ciencias, México. (2008)
 - 2 B.A. Betchart, A Test of Bell Inequality for the Undergraduate Laboratory, Oberlin College, Department of Physics and Astronomy. (2004)
 - 3 D.N. Klyshko, Zh. Eksp. Teor. Fiz, 55, 1006 (Sov. Phys. JETP, 28,522). (1969)
 - 4 D.C. Burnham, D.L. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 25, 84. (1970)
 - 5 R. Graham, Phys. Rev. Lett. 52, 117. (1984)
 - 6 L. Mandel, E. Wolf, Optical Coherence and Quantum Optics, Cambridge University Press, USA. (1995)
 - 7 B.R. Mollow, Phys. Rev. A, 8, 2684. (1973)
 - 8 C.K. Hong, L. Mandel, Phys. Rev. A, 31, 2409. (1985)
 - 9 Z.Y. Ou, L.J. Mandel, L. Mandel, Phys. Rev. A, 40, 1428. (1989)
 - 10 S. Friberg, C.K. Hong, L. Mandel, Opt. Commun, 54,311. (1985)
 - 11 R. Graham, Phys. Rev. Lett., 52, 117. (1984)
 - 12 X.Y. Zou, L.J. Wang, L. Mandel, Opt. Commun, 84, 351. (1991)
 - 13 C.K. Hong, L. Mandel, Phys. Rev. Lett., 56, 58.(1986)
 - 14 S. Friberg, C.K. Hong, L. Mandel, Phys. Rev. Lett., 54, 18. (1984)
 - 15 Cleveland Crystals, Inc., BBO Crystals- Beta Barium Borate and Lithium Borate
 - 16 <http://www.clevelandcrystals.com/BBOLBO.htm>, USA. (2007)
-
- | | |
|--|----|
| Ilustración 1 División de un fotón de bombeo en dos, un señal y un testigo en acoplamiento tipo I. | 81 |
| Ilustración 2. Resultados de la medición en la relación entre λ_{12} y la intensidad promedio en la conversión paramétrica descendente []. | 86 |
| Ilustración 3. Probabilidad $p(n)$ de detectar n testigos condicionado a detectar a su gemela señal | 87 |
| Ilustración 4. Índices de refracción para el BBO dados por las ecuaciones de Sellmeier | 88 |
| Ilustración 5. Angulo de acoplamiento de fase (α) como función del ángulo de corte del cristal (θ) para una longitud de onda de 405nm. La eficiencia de conversión descendente se relaciona con $\cos^2\theta$, por lo que un corte de 30° es apropiado. | 89 |

Ilustración 6. Refracción de los rayos de fotones convertidos al pasar del cristal al aire. 90

Tabla 1. Propiedades del BBO 89

Capítulo 5

- 1 J. J. Thorn, M. S. Neel, V. W. Donato, G. S. Bergreen, R. E. Davies, and M. Beck Observing the quantum behavior of light in an undergraduate laboratory Am. J Phys. 72, 9. (2004)
- 2 R. Beaumont, R. S. Pierce, The Algebraic Foundations of Mathematics, Addison-Wesley, USA. (1963)
- 3 M. Beck, Comparing measurements of $g^{(2)}(0)$ performed with different coincidence detection techniques, J. Opt. Soc. Am. B, 24, 12. (2007)

Ilustración 1. Experimento para demostrar existencia del fotón [1].	93
Ilustración 2. Diagrama de Ben para tres conjuntos que se intersectan	95
Ilustración 3. Laser y sistema de espejos para bombeo a cristal BBO	101
Ilustración 4. Sistema de bombeo	101
Ilustración 5. Soporte cristal BBO	102
Ilustración 6. Unidad SPCM Perkin Elmer AQ4 (Perkin Elmer SPCM AQ4 Technical Information)	103
Ilustración 7. Eficiencia de detección Vs. Longitud de onda (Perkin Elmer SPCM-AQ4C Datasheet)	104
Ilustración 8. Transmisión de los filtros en infrarrojo cercano en función de la longitud de onda.	105
Ilustración 9. Diagrama simplificado del experimento de anti-correlación para demostrar la existencia del fotón [1].	106
Ilustración 10. Cuentas oscuras para los detectores utilizados en el SPCM-AQ4C utilizado.	109
Ilustración 11. Ancho del cono de luz de la PDC por el cristal BBO.	110
Tabla 1. Retraso en nanosegundos de las señales utilizadas para el experimento de anti correlaciones	107
Tabla 2. Cuentas oscuras para el SPCM-AQ4C utilizado	109
Tabla 3. Coincidencias oscuras.	111
Tabla 4. Características del cubo divisor de haz para infrarrojo cercano de Edmund Optics.	111

Capítulo 6

- 1 J. J. Thorn, M. S. Neel, V. W. Donato, G. S. Bergreen, R. E. Davies, and M. Beck Observing the quantum behavior of light in an undergraduate laboratory Am. J Phys. 72, 9. (2004)

Ilustración 1. Diagrama sintetizado del experimento de existencia del fotón[] 115

Tabla 1. Valores para reflectancia y transmitancia (normalizadas) para el divisor de haz utilizado.	117
Tabla 2. Coincidencias medidas (normalizadas)	119
Tabla 3. Numero de muestras y tiempo de integración o colección de coincidencias por muestra.	121
Tabla 4. Cuentas promedio por segundo para cada canal.	121
Tabla 5. Coincidencias dobles TR y coincidencias triples GTR por tiempo de integración	121
Tabla 6. Coincidencias oscuras por tiempo de integración entre los canales T-R	122
Tabla 7. Coincidencias promedio por segundo.	123
Tabla 8. Función de segundo orden de coherencia	125
Tabla 9. $g_{2ti}=7.4945s, \tau=0$ promedio usando coincidencias triples y dobles	126
Tabla 10. $g_{2ti}=2.081s, \tau=0$ promedio usando coincidencias triples y dobles	127
Tabla 11. $g_{2ti}=0.93532s, \tau=0$ promedio usando coincidencias triples y dobles	128
Tabla 12. $g_{2ti}=0.0520s, \tau=0$ promedio usando coincidencias triples y dobles	129

APÉNDICES

- 1 L. Mandel, E. Wolf, Optical Coherence and Quantum Optics, Cambridge University Press. (1995)
- 2 R. J. Glauber, Quantum Theory and Optical Coherence, Wiley. (2007)
- 3 B. V. Zeghbroek, Principles of Semiconductor Devices www.colorado.edu/~bart/book/book/title.htm U. Boulder, Colorado, USA. (2007)
- 4 J. Bernstein, P. M. Fishbane, S. Gasiorowicz, Modern Physics, Prentice Hall, New Jersey, USA. (2000)
- 5 S. T. Thornton, A. Rex, Modern Physics for scientists and engineers, Thomson-Brooks-Cole, USA. (2002)
- 6 H. Nyquist, Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors, Phys. Rev. 32, 110. (1928)
- 7 J. Johnson, Thermal Agitation of Electricity in Conductors, Phys. Rev. 32, 97. (1928)
- 8 W. Shottky, Zur Brechnung und Beurteilung des Shroteffektes, Annalen der Physik 373,157. (1922)
- 9 J. Johnson, The Shottky effect in low frequency circuits, Phys. Rev. 26,71. doi: 10.1103. (1925)
- 10 J. Tejada, A. Godoy, A. Palma, P. Cartujo, Temperature dependence of generation-recombination noise in p-n junctions, Proceedings of the 5th European Workshop on Low Temperature Electronics, 71. (2002)

- 11 K. M. Van Vliet, Nonthermal Equilibrium Fluctuations of Electrons and Holes, Phys. Rev. 133, A1182. (1964)
- 12 P. Horowitz, W. Hill, The Art of Electronics, 2nd edition. Cambridge University Press. UK. (1989)
- 13 Physics Department U. Duke, Shot Noise, <http://www.phy.duke.edu/~hx3/physics/ShotNoise.pdf>, University of Duke. USA
- 14 C. Beenakker, C. Schönberger, Quantum Shot Noise, Phys. Today. USA (2003)
- 15 Hamamatsu, Characteristics and use of Si APD (Technical Information), http://sales.hamamatsu.com/assets/applications/SSD/Characteristics_and_use_of_SI_APD.pdf, Japon.
- 16 SensL, http://www.sensl.com/pdfs/Datasheets/PCDMini_Datasheet.pdf, USA. (2008)

Ilustración 1. Diagrama transversal de un foto diodo (Hamamatsu Photodiode Technical Information).	146
Ilustración 2. Diagrama transversal de las capas de un foto-diodo (Hamamatsu Photodiode Technical Information).	146
Ilustración 3. Diagrama esquemático de un proceso de generación de foto-corriente por avalancha (Hamamatsu Si APD Technical Information)	152