UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

ENCAJES DE PRODUCTOS SIMÉTRICOS Y MODELOS DE HIPERESPACIOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

NORBERTO ORDOÑEZ RAMIREZ

DIRECTORA DE TESIS: DRA. VERÓNICA MARTÍNEZ DE LA VEGA Y MANSILLA

MÉXICO, D.F. FEBRERO, 2009

AGRADECIMIENTOS.

Deseo agradecerle a mis padres: Socorro y Raymundo, por haberme enseñado tantas cosas y por siempre estar cuando los necesité.

A mi padre por nuca darse por vencido, por tener siempre fuerzas para salir a delante, por ser siempre un gran ejemplo. Gracias por todo el apoyo y la confianza que me diste.

A mi madre que, aunque no quiera, se preocupa por todos sus hijos.

A Verónica y Alejandro por haber aceptado dirigir esta tesis, por todo el tiempo que me dedicaron y por todos los conocimientos que compartieron conmigo.

.
A todos mis amigos, maestros y personas que, de alguna forma, contribuyeron a la realización de esta tesis.

Índice general

Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío.

Un hiperespacio es una colección de subconjuntos de un continuo, que al dotarlos de una topología, inducida por una métrica, adquieren una estructura de espacio métrico.

Imaginemos un continuo Z del plano, dados un par de puntos p y q en Z, el segmento de recta que los une $\overline{pq}$ es un subcontinuo de Z. De esta manera es muy fácil encajar el conjunto de subconjuntos de a lo más dos puntos de Z (el cual denotamos por $F_2(Z)$), en el conjunto de subcontinuos de Z (el cual denotamos por $C(Z)$) con la función $g(\{p,q\}) = \overline{pq}$.

De manera natural nos preguntamos:

($\star$) ¿para qué continuos X se cumple que $F_2(X)$ se puede encajar en $C(X)$?

En mi tesis de licenciatura "*Encajes de Hiperespacios*" ([8]) probamos la siguiente caracterización:

Teorema. [8, Teorema 134] *La circunferencia es el único continuo localmente conexo cuyo hiperespacio $F_2(X)$ no se puede encajar en $C(X)$.*

El siguiente paso fue averiguar qué pasa con los continuos que no son localmente conexos. Probamos que los **Dendroides**, que son continuos arco conexos y hereditariamente arco conexos, también satisfacen la propiedad que buscamos.

Este trabajo comenzó tratando de ir más lejos con estos resultados y comenzamos a estudiar los continuos que son conocidos como **Compactaciones del Rayo** ccuyo residuo es una gráfica finita y obtuvimos los siguientes resultados originales:

Teorema. [Teorema 58] *Si X es una compactación del rayo cuyo residuo es una circunferencia, entonces el hiperespacio $F_2(X)$ no se puede encajar en el hiperespacio $C(X)$.*

Teorema. [Teorema 59] *Si X* es *una compactación del rayo cuyo residuo es un arco, entonces el hiperespacio $F_2(X)$ no se puede encajar en el hiperespacio $C(X)$.*

Teorema. [Teorema 64]. *Si X* es *una compactación del rayo cuyo residuo es un triodo simple, entonces el hiperespacio $F_2(X)$ no se puede encajar en el hiperespacio $C(X)$.*

Teorema. [Teorema 66]. *Si X* es *una compactación del rayo cuyo residuo es un la paleta, entonces el hiperespacio $F_2(X)$ no se puede encajar en el hiperespacio $C(X)$.*

Los cuales se encuentran en el Capítulo 4.

Para poder trabajar estos resultados es, muchas veces, necesario saber como es el hiperespacio de continuos de un continuo.

En la última parte de esta tesis, damos modelos de los hiperespacios de continuos de las gráficas finitas que son conocidas como el ocho, las pesas y la theta.

Estos hiperespacios contienen 4-celdas, pero demostramos que todos ellos se pueden encajar en $\mathbb{R}^4$.

Quiero mencionar que el modelo del ocho es un resultado que obtuvo Anne Marie Dilks en su tesis doctoral en Tulane University en diciembre de 1980. Los demás modelos son tabajo originale y no se encuentran en la literatura.

El modelo de la theta no lo presentamos en este trabajo, pues faltan algunos detalles por terminar, y una vez terminados dichos detalles tendremos el siguiente resultado:

Teorema. *El hiperespacio de continuos $C(X)$ de un continuo localmente conexo X se puede encajar en $\mathbb{R}^4$ si y sólo si X no contiene 5-odos.*

Este resultado nos da una caracterización muy redonda de los modelos de continuos localmente conexos que se pueden construir en $\mathbb{R}^4$. Para continuos no localmente conexos, el asunto se complica muchísimo y no parece que se pueda tener un resultado tan agradable como éste. De hecho una conjetura de la Teoría de hiperespacios que aún no ha sido resuelta, dice que si para un continuo X, $C(X)$ se puede encajar en $\mathbb{R}^3$, entonces X se puede encajar en el plano.

Queda abierto el problema de caracterizar a los continuos localmente conexos X, tales que $C(X)$ se puede encajar en $\mathbb{R}^5$. Y en general, queda abierto el problema respectiva para $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 5$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción

En el presente capítulo daremos una pequeña introducción al mundo de los hiperespacios, enfocándonos a dos en particular, ya que éstos van a ser de nuestro total interés a lo largo de los primeros cuatro capítulos de este trabajo. También introduciremos algunas definiciones y resultados que nos serán de gran utilidad más adelante; de ellos no incluiremos sus demostraciones pues nos desviarían de nuestro tema de estudio.

1.2. Continuos e Hiperespacios

Definición 1 *Un* ***continuo*** X *es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío.*

Un subconjunto no vacío de un continuo X que sea conexo y cerrado recibe el nombre de **subcontinuo** de X.

Los hiperespacios de un continuo X se definen como:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$$

$$F_n(X) = \{ A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Al hiperespacio 2^X se le define una métrica, la cual es conocida como *la métrica de Hausdorff* ([8, Teorema 3, Página 5]), y está dada para dos elementos A y B en 2^X como:

$$H(A,B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

Donde, dadas $r > 0$, $a \in X$ y $A \subset X$, se define $B_r(a)$ como la bola abierta de radio r y centro en a y $N(r, A) = \{x \in X : x \in B_r(a) \text{ para algún } a \in A\}$, a este conjunto se le llama **nube de radio r con centro en A.**

Dado que los hiperespacios $C_n(X)$ y $F_n(X)$ son subconjuntos de 2^X, H también define una métrica en $C_n(X)$ y $F_n(X)$. Además se sabe que éstos a su vez son continuos para toda $n \in \mathbb{N}$ ([8, Teoremas 16 y 17.]).

A partir de este momento sólo nos enfocaremos al estudio de los siguientes dos hiperespacios:

$C(X) = C_1(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$; que es conocido como el **hiperespacio de subcontinuos** de X.

$F_2(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más dos puntos}\}$; que es conocido como el **segundo producto simétrico** de X.

1.3. Ejemplos de Modelos

Por un modelo de un hiperespacio G entenderemos un objeto que sea homeomorfo a G pero cuyos elementos sean puntos, en lugar de subcontinuos de un continuo y que sea un objeto reconocible. A continuación mencionaremos los modelos de los hiperespacios $F_2(X)$ y $C(X)$, para dos continuos muy particulares que nos serán de utilidad más adelante.

Ejemplo 2 *[2, Ejemplos 3.1 y 3.7] Sea X el intervalo cerrado $[0,1]$, si $A \in C([0,1)$ entonces $A = [x,y]$ para algunos $x, y \in [0,1]$, con $x \leq y$. De está forma la función $f : C([0,1]) \to \mathbb{R}^2$, dada por $f([x,y]) = (x,y)$, es continua en inyectiva, y por lo tanto un encaje (Lema 78).*

Así un modelo para el hiperespacio $C([0,1])$ es homeomorfo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$. Se demuestra también,mediante la función $h : F_2([0,1]) \to \mathbb{R}^2$ dada por $h(\{a,b\}) = (\frac{a+b}{2}, |b-a|)$, que el hiperespacio $F_2([0,1])$ es homeomorfo a una 2-celda (Figura 1.1).

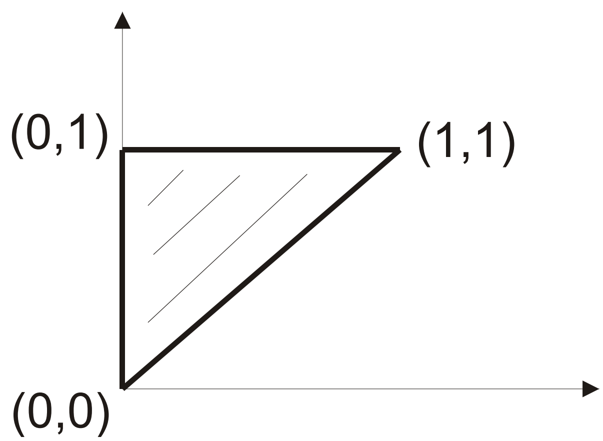

Figura 1.1: El Hiperespacio $C([0,1]) \cong F_2([0,1])$.

Ejemplo 3 *[2, Ejemplos 3.2 y 3.8] Si S es una curva cerrada simple, entonces un modelo del hiperespacio $F_2(S)$ es la banda de Moebius; y un modelo para el hiperespacio $C(S)$ es una 2-celda (Figura 1.2). En la Sección 5.3 del Capítulo 5, se desarrolla la construcción del hiperespacio $C(S)$, pues en esa parte del trabajo se requieren algunas propiedades de éste. El modelo de $F_2(S)$, no lo desarrollaremos aquí, también es elemental pero no es tan simple como el del intervalo.*

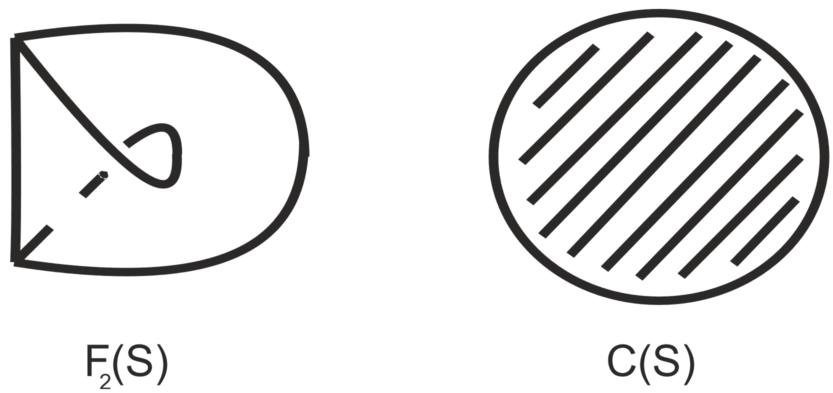

Figura 1.2: Modelos de $F_2(S)$ y $C(S)$.

1.4. Otros Resultados

Definición 4 *Se dice que un continuo A es un* ***n-odo****, si existe un subcontinuo B de A, tal que $A - B$ tiene al menos n componentes. Así, un continuo X contiene un n-odo, si existe un subcontinuo A de X el cual es un n-odo.*

De manera análoga, se dice que A es un ***∞-odo****, si existe un subcontinuo B de A, tal que $A - B$ tiene una infinidad de componentes. Un continuo X contiene un ∞-odo, si existe un subcontinuo A de X el cual es un ∞-odo.*

Definición 5 *Un continuo A es un* ***n-odo simple*** *con vértice p, si A es la unión de n arcos $pq_1, \ldots, pq_n$, tales que, para cualesquiera $k, j \in \{1, \ldots, n\}$, con $k \neq j$, se tiene que $pq_k \cap pq_j = \{p\}$.*

Definición 6 *Una n-celda es cualquier espacio homeomorfo al continuo $[0,1]^n$.*

Teorema 7 *[2, Teorema 7.3] Si X contiene un n-odo, entonces $C(X)$ contiene una n-celda.*

Definición 8 ***El cubo de Hilbert***, *que denotaremos por* I^∞, *es el producto topológico de una cantidad numerable de copias del intervalo* $[0,1]$, *es decir* $I^\infty = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times \cdots$.

Teorema 9 *[2, Teorema 7.4] Si* X *contiene un* ∞*-odo, entonces* $C(X)$ *contiene un cubo de Hilbert.*

Teorema 10 *[2, Teorema 1.2]* I^∞ *es un* $Continuo\ Universal$, *en el sentido de que todo continuo se puede encajar en él.*

Teorema 11 *Sean* X *y* Y *dos continuos y* $n \in \mathbb{N}$. *Si* X *se puede encajar en* $\mathbb{R}^n$ *y* Y *contiene una* n*-celda, entonces* X *se puede encajar en* Y.

Demostración. Como X es un espacio compacto que se puede encajar en $\mathbb{R}^n$, entonces existe un encaje $e_1 : X \to [0,1]^n$. Como Y contiene una n-celda, existe un encaje $e_2 : [0,1]^n \to Y$. Entonces la composición $e_2 \circ e_1 : X \to Y$ es un encaje de X en Y, esto termina la demostración del teorema. ■

Teorema 12 *Si* X *es un continuo que contiene un cubo de Hilbert, entonces para cualquier continuo* Y *existe un encaje* $e : Y \to X$.

Demostración. Como X contiene un cubo de Hilbert, entonces existe un encaje $e_1 : I^\infty \to X$. Sea Y cualquier continuo, por el Teorema 10, existe un encaje $e_2 : Y \to I^\infty$. Entonces la composición $e_2 \circ e_1 : Y \to X$ es un encaje de X en Y, esto termina le demostración del teorema. ■

Definición 13 *Una* ***función de Whitney*** *es una función continua* $\mu : 2^X \to [0,\infty)$, *que satisface las siguientes condiciones:*

(1) $\mu(\{p\}) = 0$ *para toda* $p \in X$;

(2) $\mu(A) < \mu(B)$ *siempre que* $A \subsetneq B$.

Teorema 14 *[2, Teorema 5.3] Para cualquier continuo* X, 2^X *admite funciones de Whitney.*

Capítulo 2

Compactaciones del Rayo

2.1. Introducción

Con respecto a la pregunta:

($\star$) ¿Para qué continuos X, existe un encaje $e : F_2(X) \hookrightarrow C(X)$?

En [8] logramos demostrar los siguientes dos resultados.

Teorema 15 *[8, Teorema 134. Página 122] La circunferencia es el único continuo localmente conexo para el cual no existe un encaje* $e : F_2(X) \hookrightarrow C(X)$.

Teorema 16 *[8, Teorema 111. Pág. 107] Si* X *es un dendroide, entonces existe un encaje* $e : F_2(X) \hookrightarrow C(X)$.

En las siguientes páginas vamos a abordar la pregunta ($\star$), en la clase de continuos no localmente conexos que son conocidos como **Compactaciones del Rayo**.

2.2. Compactaciones

Definición 17 *Un continuo X es una* ***compactación del rayo*** *si existe un encaje $h : [0, \infty) \to X$ tal que $h([0, \infty))$ es denso en X.*

Al conjunto $R = X - h([0, \infty))$ se le llama ***residuo de la compactación.***

Nota 18 *En este capítulo cuando hablemos de un continuo X, que sea compactación de un rayo, R y L siempre denotarán al residuo ($X - h([0, \infty))$) y al rayo ($h([0, \infty))$), respectivamente. De esta forma tenemos que $X = R \cup L$. Además supondremos siempre que R es no degenerado.*

De estas definiciones y de algunos resultados obtenidos en [8], obtenemos las siguientes conclusiones, relacionadas a la pregunta $(\star)$.

Teorema 19 *Sea X una compactación del rayo con residuo R, si R tiene interior no vacío en $\mathbb{R}^n$, para alguna $n > 1$, entonces $F_2(X)$ se puede encajar en $C(X)$.*

Demostración. Como R tiene interior no vacío en $\mathbb{R}^n$ para alguna $n > 1$, existe un encaje $h_1 : D \to R \subset X$; donde D es el disco unitario con centro en el origen en $\mathbb{R}^2$. Por [8, Lema 40, Página 39.], el hiperespacio $C(D)$ contiene un cubo de Hilbert. De esta forma tenemos que existe un encaje $h_2 : I^\infty \hookrightarrow C(D)$, por lo tanto el hiperespacio $C(X)$ contiene un cubo de Hilbert. Pero por el Teorema 10, tenemos que todo continuo se puede encajar en I^∞. Por lo tanto $F_2(X)$ se puede encajar en $C(X)$. ■

Definición 20 *Una* ***gráfica finita*** *es un continuo que se puede poner como una unión finita de arcos, que cumplen que cualesquiera dos de ellos se intersectan en un conjunto finito (puede ser vacío).*

Lema 21 *[8, Teorema 132, Página 121] Si X es un continuo localmente conexo y no es gráfica finita, entonces X contiene un ∞-odo.*

Lema 22 *Sea X una compactación con residuo R. Si R es un continuo localmente conexo y no es una gráfica finita, entonces X contiene un ∞-odo.*

Demostración. Por el Lema 21, tenemos que R contiene un ∞-odo. Como $R \subset X$, tenemos que X contiene un ∞-odo. ■

Teorema 23 *Sea X una compactación del rayo con residuo R. Si R es un continuo localmente conexo y no es una gráfica finita, entonces $F_2(X)$ se puede encajar en $C(X)$.*

Demostración. Por el Lema 22 tenemos que X contiene un ∞-odo. De esta forma, por el Teorema 9, tenemos que el hiperespacio $C(X)$ contiene un cubo de Hilbert. Aplicando el Teorema 10 tenemos que $F_2(X)$ se puede encajar en $C(X)$. ■

2.3. Compactaciones cuyo Residuo es un Dendroide

En esta sección obtendremos algunas respuestas a la pregunta $(\star)$, para una clase particular de compactaciones del rayo, cuyo residuo no necesariamente es localmente conexo.

Definición 24 *Sea X un continuo, un **semipeine** en X es un subcontinuo Y de X que contiene:*

(a) un arco $A \subset Y$,
(b) dos puntos $r, q \in A$ con $r \neq q$,
(c) una sucesión de puntos $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en $Y - A$,
(d) una sucesión de puntos $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en A,

Tales que:

(i) $r_1q_1, r_2q_2, \ldots,$ son arcos ajenos dos a dos, don de los extremos de r_nq_n son r_n y q_n, para toda $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lim r_n = r$, $\lim q_n = q$,
(iii) $Y = A \cup \overline{(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n q_n : n \in \mathbb{N}\})}$,
(iv) $r_n q_n \cap A = \{q_n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 25 *Sea X un continuo, una* ***semiescoba*** *en X es un subcontinuo Y de X que contiene:*

(a) un arco $A \subset Y$,
(b) dos puntos $r, p \in X$ con $r \neq p$,
(c) una sucesión de puntos $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $Y - A$.

Tales que:

(i) $Y = A \cup \overline{[\cup\{pr_n : n \in \mathbb{N}\}]}$, donde pr_n es un arco en X que une a p con r_n, para toda $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $\lim r_n = r$,
(iii) $pr_n \cap pr_m = \{p\}$, si $n \neq m$,
(iv) $pr_n \cap A = \{p\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Definición 26 *Un continuo X es* ***unicoherente*** *si para cualesquiera dos subcontinuos A y B de X tales que $A \cup B = X$ se tiene que $A \cap B$ es conexo.*

Definición 27 *Un continuo es* ***hereditariamente unicoherente*** *si todos sus subcontinuos son unicoherentes.*

Definición 28 *Un continuo X es un* ***dendroide*** *si es un continuo arco conexo y hereditariamente unicoherente.*

Definición 29 *Un continuo X es una* ***dendrita*** *si y sólo si X es un dendroide localmente conexo.*

Lema 30 *[12, Teorema 6.10, Página 62] Sea X un dendroide no localmente conexo, entonces X contiene un semipeine o una semiescoba.*

Lema 31 *Sea X una compactación del rayo con residuo R. Si R es un dendroide que no es una gráfica finita, entonces X contiene un ∞-odo.*

Demostración. Consideremos los siguientes casos para R.

Caso (1). R es localmente conexo. En este caso, como R no es una gráfica finita, por el Lema 22, tenemos que R contiene un ∞-odo. Como $R \subset X$, concluimos que X contiene un ∞-odo.

Caso (2). R no es localmente conexo. Por el Lema 30 tenemos que R, y por lo tanto X, contiene un semipeine o una semiescoba. Si X contiene un semipeine P, de [8, Teoremas 92 y 105] podemos concluir que P contiene un ∞-odo. Análogamente si X contiene una semiescoba E, de [8, Teoremas 96 y 107] podemos concluir que E contiene un ∞-odo. Por lo tanto, cuando R no es localmente conexo, tenemos que X contiene un ∞-odo. Así este lema queda demostrado. ■

Teorema 32 *Sea X una compactación del rayo con residuo R. Si R es un dendroide que no es una gráfica finita, entonces $F_2(X)$ se puede encajar en $C(X)$.*

Demostración. Por el Lema 31 el espacio X contiene un ∞-odo. De esta forma, por el Teorema 9, tenemos que el hiperespacio $C(X)$ contiene un cubo de Hilbert. Aplicando el Teorema 10 tenemos que $F_2(X)$ se puede encajar en $C(X)$. ■

Debemos mencionar que el Teorema 32 es el único resultado, relacionado con $(\star)$, que obtuvimos para compactaciones del rayo cuyo residuo no necesariamente es localmente conexo.

Capítulo 3

Compactaciones cuyo Residuo es una Gráfica Finita

En este capítulo vamos a estudiar algunas propiedades topológicas de las compactaciones del rayo cuyo residuo es una gráfica finita y, con ayuda de éstas, responderemos la pregunta $(\star)$ para esta clase de espacios.

3.1. Dimensión

A continuación enunciarmos algunos resultados de Teoría de Dimensión que serán de gran utilidad.

Lema 33 *[11, Teorema 13.4, Página 73] Si X es un continuo y $dim(X) = n < \infty$, entonces X se puede encajar en el continuo $[0,1]^{2n+1}$.*

Lema 34 *[11, Teorema 7.1, Página 33] Si X es un continuo que es la unión numerable de subconjuntos cerrados de dimensión menor o igual a n, entonces $\dim(X) \leq n$.*

Lema 35 *[8, Lema 67, Página 49] Sea G una gráfica finita, entonces la dimensión del hiperespacio $F_2(G)$ es igual a 2.*

Lema 36 *[11, Teorema 20.2, Página 125] Sea $X = Y \times Z$, donde Y y Z son continuos. Supongamos que la dimensión de Y y Z es menor o igual a n y m, respectivamente, entonces la dimensión de X es menor o igual a $n + m$.*

Lema 37 *[11, Ejercicio 1.4, Página 7] La dimensión de todo arco es igual a 1.*

Teorema 38 *Si G es una gráfica finita, entonces la dimensión de G es igual a 1.*

Demostración. Sea G una gráfica finita, entonces por definición G es una unión finita de arcos, los cuales son cerrados en X. Por el Lema 37 la dimensión de cada arco es 1. De esta forma G es una unión finita de espacios cerrados de dimensión menor o igual a 1, por el Lema 34, tenemos que $dim(G) \leq 1$. Como G es no degenerada entonces existe al menos un arco J tal que $J \subset G$, esto implica que $1 \leq dim(J) \leq dim(G) \leq 1$. Por lo tanto $dim(G) = 1$. ■

Teorema 39 *Si X es una compactación del rayo cuyo residuo es una gráfica finita, entonces* $\dim(F_2(X)) \leq 2$.

Demostración. Supongamos que $X = h([0, \infty)) \cup G$, donde G es una gráfica finita. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos: $L_n = \{\{g, y\} \in F_2(X) : g \in G$ y $y \in h([0, n])\}$. Observemos que la función $f : G \times h([0, n]) \to L_n$, definida por $f((g, y)) = \{g, y\}$ es un homeomorfismo entre estos dos conjuntos (ver Lema 52). De esta forma L_n es un subconjunto cerrado de $F_2(X)$ y además, por el Lema 36, se tiene que $\dim(L_n) = \dim(G \times h([0, n])) \leq \dim(G) + \dim(h([0, n]))$. Por el Teorema 38 tenemos que $\dim(G) = 1$ y como h es un encaje, tenemos que $h([0, n])$ es un arco. De esta manera, por el Teorema 10, tenemos que $dim(h([0, n])) = 1$. Por lo tanto $\dim(L_n) \leq 2$.

De manera análoga para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $H_n = h([0, n])$. Como h es un encaje tenemos que $h([0, n])$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$, de esto $F_2(H_n)$ es homeomorfo a $F_2([0, 1])$ el cual, por el Ejemplo 2, es homeomorfo a una 2-celda. De esta forma concluimos que $\dim(F_2(H_n)) = \dim(F_2([0, 1])) = 2$.

Por último, notemos que $F_2(X) = F_2(G) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} F_2(H_n)) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n)$.

Es decir, $F_2(X)$ es la unión numerable de espacios cerrados cuya dimensión es menor o igual a 2. Por el Teorema 34 tenemos que $\dim(F_2(X)) \leq 2$. ■

3.2. Clasificación con Dimensión

Teorema 40 *Sea X una compactación del rayo cuyo residuo es una gráfica finita G. Si G contiene un 5-odo, entonces existe un encaje $e : F_2(X) \hookrightarrow C(X)$.*

Demostración. Como G contiene un 5-odo, entonces X contiene un 5-odo. Por el Teorema 7, el hiperespacio $C(X)$ contiene una 5-celda. Como X es una compactación del rayo con residuo gráfica finita, por el Teorema 39, $dim(F_2(X)) \leq 2$, de esta forma, por el Lema 33, el hiperespacio $F_2(X)$ se puede encajar en $[0, 1]^5$. Por lo tanto por el Teorema 11, $F_2(X)$ se puede encajar en $C(X)$. ■

Por el Teorema 40, falta estudiar sólo las compactaciones del rayo cuyo residuo es una gráfica finita G, donde G no contiene 5-odos. Al respecto, en [8], demostramos el siguiente teorema.

Teorema 41 *[8, Teorema 75, Página 57] Si G es una gráfica finita. Entonces G no contiene 5-odos si y sólo si G es homeomorfa a alguna gráfica de la Figura 3.1.*

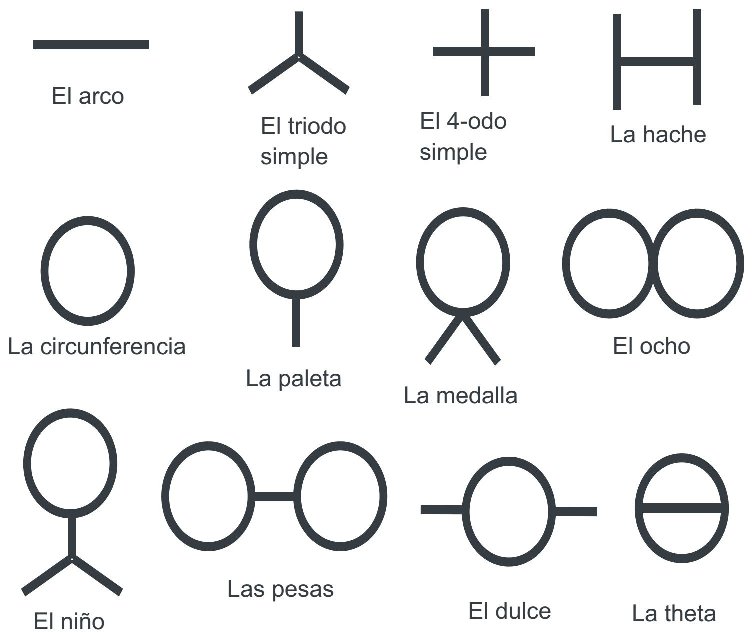

Figura 3.1: Gráficas finitas que no contienen 5-odos.

De esta forma sólo debemos preocuparnos en responder la pregunta ($\star$) para las compactaciones del rayo cuyo residuo es alguna gráfica de la Figura 3.1. A continuación mencionaremos un resultado conocido que nos permitirá concentrarnos, en el siguiente capítulo, a determinadas compactaciones.

Teorema 42 *[9] El hiperespacio* $F_2([0,1]^2)$ *es homeomorfo al espacio* $[0,1]^4$.

Teorema 43 *Si* X *es una compactación plana del rayo cuyo residuo es alguna gráfica de la Figura 3.2, entonces* $F_2(X)$ *se puede encajar en* $C(X)$.

Demostración. Como cada una de las gráficas de la Figura 3.2, contiene un 4-odo simple o a la hache (Figura 3.3), y éstas a su vez son 4-odos, tenemos que X contiene un 4-odo. Por lo tanto, por el Teorema 7, el hiperespacio $C(X)$ contiene una 4-celda. Como X es un espacio que se puede encajar en $[0,1]^2$, obtenemos que el hiperespacio $F_2(X)$ se puede encajar en el hiperespacio

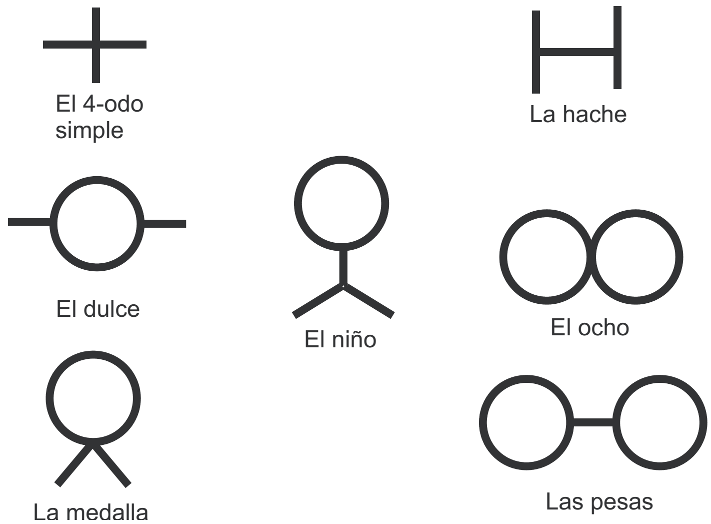

Figura 3.2: .

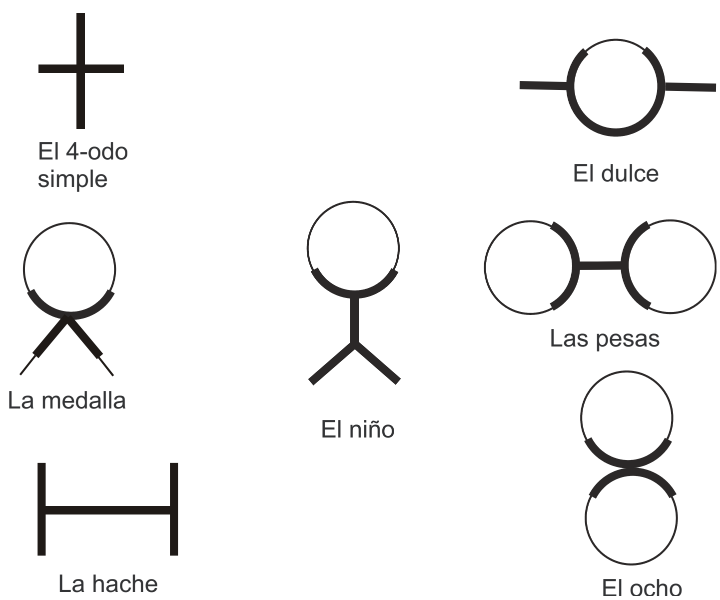

Figura 3.3: Gráficas que continen un 4-odo.

$F([0,1]^2)$ el cual, por el Teorema 42, es homeomorfo a $[0,1]^4$. Por lo tanto, por el Teorema 11, $F_2(X)$ se puede encajar en $C(X)$. ■

El Teorema 43 responde la pregunta ($\star$) para una buena cantidad de compactaciones del rayo cuyo residuo es alguna gráfica de la Figura 3.2. Debo mencionar que para las compactaciones no planas de estas gráficas no obtuvimos ningún otro resultado. Así, se vuelve más interesante ver qué sucede con las compactaciones del rayo cuyo residuo es la gráfica que tiene forma de Theta, pues ninguna compactación cuyo residuo ésta gráfica se puede encajar en $\mathbb{R}^2$.

En el siguiente capítulo nos enfocaremos a ver qué sucede con las compactaciones del rayo cuyo residuo es alguna gráfica de la Figura 3.4, las cuales son, precisamente, las que su hiperespacio $C(X)$ no contiene 4-celdas.

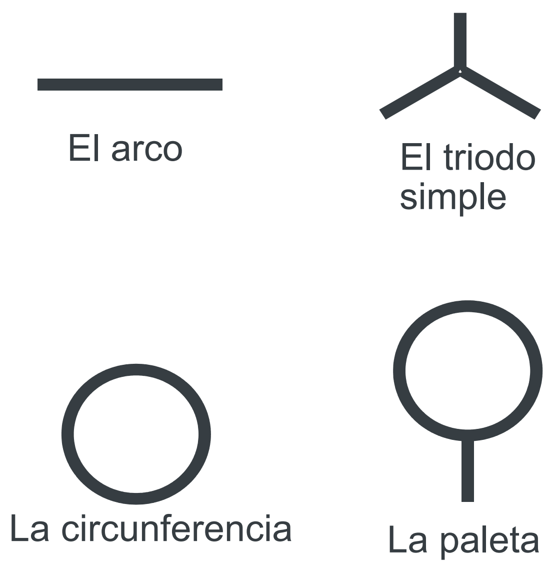

Figura 3.4: .

Capítulo 4

Cuatro Tipos de Compactaciones

Por la discusión del capítulo anterior, en éste, nos enfocaremos a demostrar que las compactaciones del rayo con residuo arco, circunferencia, triodo simple y medalla; no satisfacen $(\star)$. Para esto enunciaremos algunas definiciones y resultados.

4.1. Resultados Previos.

Lema 44 *[3, Lema 13.3, Pagína 106] Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Entonces la función $2^f : 2^X \to 2^Y$, dada por $2^f(A) = f(A)$, es continua.*

Lema 45 *Si $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, es una sucesión de 2-celdas que convergen a una 2-celda D y que son tales que cada D_n es ajena D, entonces el conjunto $(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) \cup D$ no se puede encajar en $\mathbb{R}^2$.*

Demostración. Supongamos que existe un encaje $h : (\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) \cup D \hookrightarrow \mathbb{R}^2$. Como para toda $n \in \mathbb{N}$ $D_n \cap D = \emptyset$ y h es inyectiva tenemos que $h(D_n) \cap$

$h(D) = \emptyset$. Por la continuidad de h y por el Lema44, tenemos que $\lim h(D_n) = h(D)$. Ahora demostremos lo siguiente.

Afirmación 1. El interior de $h(D)$ es vacío en $\mathbb{R}^2$.

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, existen $d \in D$ y $\varepsilon_0 > 0$ tales que $B_{\varepsilon_0}(h(d)) \subset h(D)$. Como $d \in D$ y $\lim D_n = D$, para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $d_n \in D_n$ tal que $\lim d_n = d$. Por ser h una función continua tenemos que $\lim h(d_n) = h(d)$; y por lo tanto, para ε_0, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N_0$ entonces $\|h(d_n) - h(d)\| < \varepsilon_0$. Ahora notemos que, como $\|h(d_{N_0}) - h(d)\| < \varepsilon_0$, tenemos que $h(d_{N_0}) \in B_{\varepsilon_0}(h(d)) \subset h(D)$, lo cual implica que $h(D_{N_0}) \cap h(D) \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $int(D) = \emptyset$. Esto termina la prueba de la afirmación.

Como h es un encaje, la función $h\,|_D \colon D \to h(D)$ es un homeomorfismo y por el Teorema de la Invarianza del Dominio ([11, Teorema 19.2, Página 106]), sabemos que $h(int(D)) = int(h(D))$, donde $int(D)$ es el interior topológico de D (los puntos de D que tienen una vecindad, en D, homeomorfa a $\mathbb{R}^2$), el cual es diferente del vacío. De esta forma $int(h(D))$ también es no vacío, lo cual es una contradicción a la Afirmación 1. Esta contradicción nació de suponer que existe un encaje $h : (\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) \cup D \hookrightarrow \mathbb{R}^2$. Esto completa la demostración del lema. ■

Lema 46 *Sea $X = R \cup h((0,1])$ una compactación del rayo con residuo R. Entonces:*

(*a*) *Para cada $t \in (0,1)$, $h(t)$ separa a X en los conjuntos $R \cup h((0,t))$ y $h((t,1])$; y R es un subcontinuo de X.*

(*b*) *Si A es un subcontinuo de X tal que $A \cap R \neq \emptyset$ y $A \cap h((0,1]) \neq \emptyset$, entonces $R \subset A$.*

(*c*) *Si $\mu : C(X) \to [0,\infty)$ es una función de Whitney y $A \in C(X)$ es tal que $\mu(A) < \mu(R)$, entonces $A \subset R$ o $A \subset h((0,1])$.*

Demostración. (*a*) Sea $t \in (0,1)$. Como $R \subset \overline{h((0,1])} = \overline{h((0,t])} \cup \overline{h([t,1])} = \overline{h((0,t])} \cup h([t,1])$ (pues $h([t,1])$ es compacto) y R es ajeno a $h([t,1])$, tenemos que $R \subset \overline{h((0,t])}$. Ya que $h([t,1])$ es cerrado en $h((0,1])$, $\overline{h((0,t])} \cap h((0,1]) = h((0,t])$. De manera que $\overline{h((0,t])} = R \cup h((0,t])$. Esto demuestra que $R \cup h((0,t])$ es cerrado en X. Dado que $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} (R \cup h((0,\frac{1}{n}]))$, tenemos que R

es cerrado en X, pues cada conjunto de la forma $\overline{h((0,\frac{1}{n}])}$ es un subcontinuo de X y como estos subcontinuos están anidados, tenemos que su intersección que es R, tambien es un subcontinuo de X [2, Teorema 1.1, Página 11].

Además $(R \cup h((0,t])) \cap h([t,1]) = \{h(t)\}$, entonces $X - \{h(t)\} = [(R \cup h((0,t])) - \{h(t)\}] \cup [h([t,1]) - \{h(t)\}]$. Estos dos conjuntos son no vacíos y separados por lo que $h(t)$ separa a X.

(b) Sea A un subcontinuo de X tal que $A \cap R \neq \emptyset$ y $A \cap h((0,1]) \neq \emptyset$. Elegimos un punto $t_0 \in (0,1]$ tal que $h(t_0) \in A$. Dada $t \in (0,t_0)$, como vimos en la prueba de (a), $h(t)$ separa a X en los conjuntos $R \cup h((0,t))$ y $h((t,1])$. Como A intersecta a ambos conjuntos y es conexo, tenemos que $h(t) \in A$. Hemos demostrado que $h((0,t_0]) \subset A$. Como A es cerrado, $\overline{h((0,t_0])} \subset A$. Y como vimos en la prueba de (a), $R \subset \overline{h((0,t_0])}$. Por lo tanto $R \subset A$.

(c) Sea $\mu : C(X) \to [0,\infty)$ es una función de Whitney y A un subcontinuo de X es tal que $\mu(A) < \mu(R)$. Si $A \not\subset R$ y $A \not\subset h((0,1]))$, entonces $A \cap h((0,1])) \neq \emptyset$ y $A \cap R \neq \emptyset$. Por (b) $R \subset A$. De manera que $\mu(A) \leq \mu(R)$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $A \subset R$ o $A \subset h((0,1])$. ■

Nota 47 *En el siguiente lema vamos a suponer que* $X = G \cup h((0,1])$ *es una compactación del rayo cuyo residuo es una gráfica finita* G*; a los puntos sobre el rayo* $h((0,1])$ *les vamos a definir el orden inducido por el intervalo* $(0,1]$*, es decir, para dos puntos* $a, b \in h((0,1])$ *diremos que* $a < b$ *si y sólo si* $h^{-1}(a) < h^{-1}(b)$.

Lema 48 *Sea* $X = G \cup L$ *una compactación del rayo cuyo residuo es una gráfica finita* G*. Si* $x \in G$ *y* x *no es de ramificación, entonces para todo abierto* U *en* X *tal que* $x \in U$*, existe un arco* J *en* G *y una sucesión de arcos* $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ *contenidos en* L*, tales que:*

(i) $x \in J \subset U$ *y* $J_n \subset U$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $J_n \cap J = \emptyset$*, para toda* $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $\lim J_n = J$.

Demostración. Sea $x \in G$ un punto que no sea de ramificación y U un abierto de X tal que $x \in U$. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney.

Como x no es de ramificación, los continuos pequeños de G que tienen a x son arcos. Ya que $0 < \mu(G)$, la continuidad de μ implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \mu(G)$, y para todo $A \in \mu^{-1}(\varepsilon)$, con $x \in A$, entonces A es un arco en G y $A \subset U$. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos en L tal que $\lim x_n = x$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ es posible encontrar $J_n \in \mu^{-1}(\varepsilon)$ tal que $x_n \in J_n$ ([2, Lema 8.1, Página 109]).

Dada $n \in \mathbb{N}$, dado que $\mu(J_n) = \varepsilon < \mu(G)$, por (c) del Lema 46, $J_n \subset G$ o $J_n \subset L$. Pero $x_n \in J_n \cap L$, de manera que $J_n \subset L$. Ya que $C(X)$ es compacto, podemos suponer que la sucesión converge a un elemento $J \in C(X)$. Por ser $\mu^{-1}(\varepsilon)$ cerrado en $C(X)$, $J \in \mu^{-1}(\varepsilon)$.

Como para toda $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in J_n$ y $\lim x_n = x$, entonces $x \in J \cap G$, como además $\mu(G) > \varepsilon = \mu(J)$, tenemos que $J \subset G$ y por la elección de ε, se tiene que $J \subset U$ y J es un arco.

Por último, como $J \subset U$ y U es un abierto de X, debido a que $\lim J_n = J$, existe una $N \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n \geq N$, $J_n \subset U$. De esta forma la sucesión $\{J_n\}_{n=N}^{\infty}$, satisface las condiciones (i), (ii) y (iii), así este lema queda demostrado. ■

Definición 49 *Si X es un continuo y $U_1, \ldots, U_n$ son subconjuntos de X, definimos $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}\}$.*

Consideremos la familia de subconjuntos $V = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle : n \in \mathbb{N}$ y los conjuntos $U_1, \ldots, U_n$ son abiertos de $X\}$, entonces V es una familia de abiertos en 2^X que genera la misma topología que la métrica de Hausdorff. A esta topología se le conoce como la **topología de Vietoris** ([2, Ejercicio 2.8, Pág. 27]). A los conjuntos de la forma $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ se les llama **vietóricos.**

Lema 50 *[8, Lema 5, Página 7] Supongamos que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de elementos de 2^X, tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, donde $A, B \in 2^X$. Entonces $\lim(A_n \cup B_n) = A \cup B$.*

Nota 51 *La topología de Vietoris también se hereda a los hiperespacios. En lo que resta de este capítulo cuando escribamos $\langle A, B\rangle$, estamos pensado en el correspondiente vietorico $\langle A, B\rangle$ restringido al hiperespacio $F_2(X)$, es decir:*

$$\langle A, B\rangle = \{C \in F_2(X) : C \subset A \cup B,\ C \cap A \neq \emptyset \text{ y } C \cap B \neq \emptyset\} = \\ \{\{x, y\} \in F_2(X) : x \in A \text{ y } y \in B\}.$$

Por [2, Ejercicio 2.7, Página 26], $\langle A, B\rangle$ es cerrado en $F_2(X)$, cuando A y B son cerrados en X.

Lema 52 *Sea X un continuo, si A y B son subconjuntos cerrados y ajenos de X, entonces $\langle A, B\rangle$ es homeomorfo a $A \times B$.*

Demostración. Sea $f : A \times B \to \langle A, B\rangle$ definida por $f((a, b)) = \{a, b\}$. Notemos que:

(i) f está bien definida: si $(a, b) \in A \times B$, entonces $\{a, b\} \subset A \cup B$, $\{a, b\} \cap A = \{a\}$ y $\{a, b\} \cap B = \{b\}$, lo cual implica que $f((a, b)) \in \langle A, B\rangle$

(ii) f es continua. Si $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $A \times B$ tal que $\lim(a_n, b_n) = (a, b)$, entonces por el Lema 50, tenemos que $\lim f((a_n, b_n)) = \lim\{a_n, b_n\} = \lim(\{a_n\} \cup \{b_n\}) = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$. Por lo tanto $\lim f((a_n, b_n)) = f((a, b))$, lo que demuestra que f es continua.

(iii) f es inyectiva. Si $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ son dos elementos tales que $f((a_1, b_1)) = f((a_2, b_2))$. Como $(a_1, b_1) \in A \times B$, dado que $A \cap B = \emptyset$, y del hecho de que $\{a_1, b_1\} = \{a_2, b_2\}$, concluimos que $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$, lo que demuestra que f es inyectiva.

(iv) f es suprayectiva. Si $\{a, b\} \in \langle A, B\rangle$, entonces el punto $(a, b) \in A \times B$ es tal que $f((a, b)) = \{a, b\}$. Por lo tanto f es supreyectiva.

Dado que $A \times B$ es compacto y $F_2(X)$ es de Hausdorff, concluimos que f es un homeomorfismo entre $\langle A, B\rangle$ y $A \times B$. $\blacksquare$

Lema 53 *[8, Lema 4, Página 6] Sea X un continuo. Si $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, entonces $H(A, B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.*

Recordemos que H denota la distancia de Hasusdorff entre A y B; y $N(r,A)=\{x\in X : x\in B_r(a)$ para algún $a\in\ A\}$, es la nube de radio r con centro en A.

Lema 54 *Sea X un continuo y sea $A\subset X$ cerrado en X y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos cerrados y no vacíos de X tales que* $\lim A_n=A$. *Si B es un cerrado no vacío de X , entonces* $\lim\langle A_n,B\rangle=\langle A,B\rangle$, *donde esta convergencia se considera en $2^{F_2(X)}$.*

Demostración. Sea $\varepsilon>0$. Como $\lim A_n=A$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que, para toda $n\geq N$, $H(A,A_n)<\varepsilon$. Sea $n\geq N$, dada $\{a,b\}\in\langle A,B\rangle$, con $a\in A$ y $b\in B$, por el Lema 53, ya que $A\subset N(\varepsilon,A_n)$, existe $x\in A_n$ tal que $d(a,x)<\varepsilon$, donde d es la métrica de X. Entonces $\{a,b\}\subset N(\varepsilon,\{x,b\})$.

Esto demuestra que $\langle A,B\rangle\subset N(\varepsilon,\langle A_n,B\rangle)$ (en el espacio $2^{F_2(X)}$). Similarmente, $\langle A_n,B\rangle\subset N(\varepsilon,\langle A,B\rangle)$. Por el Lema 53, $H(\langle A,B\rangle,\langle A_n,B\rangle)<\varepsilon$ (en $2^{F_2(X)}$). Por lo tanto $\lim\langle A_n,B\rangle=\langle A,B\rangle$. ■

Lema 55 *Sea $X=R\cup h((0,1])$ una compactación del reyo con residuo R. Entonces:*

(a) $C(X)=C(R)\cup\{A\in C(X) : A\subset h((0,1])\}\cup\{R\cup h((0,t]) : t\in(0,1]\}$.

(b) *Si $A\in C(X)-C(R)$, entonces A tiene una vecindad en $C(X)$ que se puede encajar en $\mathbb{R}^2$.*

Demostración. (a) Sea $A\in C(X)$. Si $A\notin C(R)$ y $A\not\subset h((0,1])$, por el Lema 46 (b), $R\subset A$. Sea $t_0=\sup\{t\in(0,1] : h(t)\in A\}$. Como A es cerrado, $h(t_0)\in A$, de manera que $A\subset R\cup h((0,t_0])$. Como cada elemento de la forma $h(t)$ con $t\in(0,t_0)$ separa a X en los conjuntos $R\cup h((0,t))$ y $h((t,1])$ (Lema 46 (a)) y A es conexo, tenemos que $h(t)\in A$. Esto demuestra que $A=R\cup h((0,t_0])$. Así que (a) está probado.

(b) Sea $f : X\to[0,1]$ dada por

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x\in R,\\ t, & \text{si } x=h(t).\end{cases}$$

Notemos que $f\mid_{h((0,1])}: h((0,1]) \to (0,1]$ es igual a la función h^{-1}. Veamos que f es continua. Por el Lema 46 (a), $h((0,1]) = X - R$ es abierto en X. Sea U abierto en $[0,1]$, veamos que $f^{-1}(U)$ es abierto. Consideremos dos casos:

Caso 1. $0 \notin U$.

En este caso $U \subset (0,1]$, así que $f^{-1}(U) = h(U)$ que es abierto en $h((0,1])$ y por lo tanto, abierto en X.

Caso 2. $0 \in U$.

Sea $B = [0,1] - U$. Entonces B es compacto y no tiene a 0. De modo que $f^{-1}(B) = h(B)$ es compacto en X y, por lo tanto cerrado. De manera que $f^{-1}(U) = X - f^{-1}(B)$ es abierto en X.

Hemos demostrado que f es continua.

Sea $A \in C(X) - C(R)$. Por el inciso (a), $A \subset h((0,1])$ o $A = R \cup h((0,t]) = \overline{h((0,t])}$, para alguna $t \in (0,1]$. Analicemos dos casos.

Caso 1. $A \subset h((0,1])$.

En este caso $f(A)$ es un subconjunto compacto de [0,1], así que existe $s_0 \in (0,1]$ tal que $f(A) \subset (s_0,1]$. Sea $U = h((s_0,1]) \subset h([s_0,1])$. Como $(s_0,1]$ es abierto en X y $h((0,1])$ es abierto en X (Lema 46 (a)), $h((s_0,1])$ es un abierto en X y $A \subset h((s_0,1])$. Por lo que el conjunto $\mathcal{U} = \{B \in C(X) : B \subset h((s_0,1])\}$ es abierto en $C(X)$. Ya que $\mathcal{U} \subset C(h([s_0,1]))$, tenemos que $C(h([s_0,1]))$ es una vecindad de A en $C(X)$. Como $h([s_0,1])$ es un arco, por el Ejemplo 2, $C([s_0,1])$ es una dos celda. Esto completa la demostración de este caso.

Caso 2. $A = R \cup h((0,t]) = \overline{h((0,t])}$, para alguna $t \in (0,1]$.

Como $f(A)$ es no degenerado, existe una vecindad compacta $\mathcal{U}$ de A en $C(X)$ tal que $f(B)$ es no degenerado, para toda $B \in \mathcal{U}$. Por el Lema 44 la función de $\mathcal{U}$ en $C([0,1])$ que manda a B en $f(B)$ es continua. Mostraremos que esta función también es inyectiva.

Sean $B, C \in \mathcal{U}$ tales que $f(B) = f(C)$. Si $0 \notin f(B)$, entonces $C, B \in h((0,1])$ y $h^{-1}(B) = f(B) = f(C) = h^{-1}(C)$. Por la inyectividad de h^{-1}, $B = C$. Supongamos entonces que $0 \in f(B)$. En este caso, $B \cap R \neq \emptyset$ y $C \cap R \neq \emptyset$, por lo que existen $t, s \in (0,1]$, tales que $B = R \cup h((0,t])$ y $C = R \cup h((0,s])$; y entonces $f(B) = [0,t]$ y $f(C) = [0,s]$; así que $t = s$. Esto completa la prueba de que $B = C$ y que f es inyectiva.

Por lo tanto $\mathcal{U}$ es homeomorfo a un subconjunto de $C([0,1])$ el cual, por el Ejemplo 2, es una 2-celda. Por lo tanto $\mathcal{U}$ se puede encajar en $\mathbb{R}^2$. ■

Lema 56 *Sea $X = G \cup L$ una compactación del rayo cuyo residuo es una gráfica finita G y sea $\mathcal{B} = \langle G, L\rangle \cup F_2(G)$. Si existe un encaje $e : F_2(X) \hookrightarrow C(X)$, entonces $e(\mathcal{B}) \subset C(G)$.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{B}$ y supongamos que $e(A) \in C(X) - C(G)$. Entonces, por el Lema 55 (a), $e(A)$ tiene una vecindad $\mathcal{U}$ en $C(X)$ tal que $\mathcal{U}$ se puede encajar en $\mathbb{R}^2$ y ademas $\mathcal{U} \subset C(X) - C(G)$.Ahora tenemos que considerar los siguientes casos:

Caso (1). $A = \{x, y\}$ con $x \in G$, $y \in L$ y x no es punto de ramificación de G.

Por la continuidad de e, existen dos abiertos ajenos U_x y U_y de X tales que $x \in U_x$, $y \in U_y$ y $e[\langle U_x, U_y\rangle] \subset \mathcal{U}$. Por el Lema 48, existe un arco J_x contenido en G y una sucesión de arcos $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ en L, tales que:

(i) $x \in J_x \subset U$ y $J_n \subset U_x$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $J_n \cap J = \emptyset$, para toda $n \in \mathbb{N}$.
(iii) $\lim J_n = J_x$.

Como $y \in U_y \subset L$, podemos tomar un arco J_y en L tal que $y \in J_y \subset U_y$. Dado que $U_x \cap U_y = \emptyset$, por (i), tenemos que $J_y \cap J_n = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $J_y \cap J_x = \emptyset$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\mathcal{D}_n = \langle J_n, J_y\rangle$ y $\mathcal{D} = \langle J_x, J_y\rangle$. Entonces se tiene que:

(a) $\mathcal{D}_n \cap \mathcal{D} = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n) \cup \mathcal{D} \subset \langle U_x, U_y\rangle$.
(b) $\mathcal{D}_n$ y $\mathcal{D}$ son homeomorfos a una 2-celda para toda $n \in \mathbb{N}$ (Lema 52).

(c) $\lim_n \mathcal{D} = \mathcal{D}$ (Lema 54).

Por ser e un encaje y por (b) tenemos que $e(\mathcal{D})$ y $e(\mathcal{D}_n)$ son 2-celdas para toda $n \in \mathbb{N}$. Por (c) se satisface que $\lim e(\mathcal{D}_n) = e(\mathcal{D})$; y por (a) notamos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} e[\mathcal{D}_n] \cup e[\mathcal{D}] \subset e[\langle U_x, U_y \rangle] \subset \mathcal{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, lo cual es una contradicción al Lema 45. Esta contradicción muestra que este caso es imposible.

Caso (2). $A = \{x, y\}$ con $x \in G$, $y \in L$ y x es punto de ramificación de G.

Por la continuidad de e, existen dos abiertos ajenos U_x y U_y de X tales que $x \in U_x$, $y \in U_y$ y $e[\langle U_x, U_y \rangle] \subset \mathcal{U}$. Por ser U_x abierto en X y ser G una gráfica finita, existe $z \in U_x$ tal que z no es de ramificación. Consideramos al punto $A_0 = \{z, y\}$, entonces $z \in G$, $y \in L$ y z no es punto de ramificación. Además $e(A_0) \in C(X) - C(G)$. De manera que A_0 cae en el Caso 1, pero ya habíamos visto que tal caso es imposible. Por lo tanto, este caso tampoco se puede dar.

Caso (3). $A \in F_2(G)$.

Supongamos que $A = \{x, y\}$, entonces por la continuidad de e, existe dos abiertos U_x y U_y de X tales que $x \in U_x$, $y \in U_y$ y $e[\langle Ux, Uy \rangle] \subset U$. Notemos que ya estamos considerando la posibilidad de que $x = y$. Como U_x y U_y son abiertos de X, podemos tomar dos puntos $z \in U_x$ y $w \in U_y$ tales que $z \in G$, $w \in L$ y z no sea un punto de ramificación de G. Entonces el elemento $A_1 = \{z, w\}$, cae en el *Caso* (1) que no era posible. Por lo tanto, este caso también es imposible.

De los *Casos* (1), (2) y (3) concluimos que $e(\mathcal{B}) \subset C(G)$. ∎

4.2. La Circunferencia como Residuo

El siguiente resultado se demostró en [8], y es un elemento más que nos facilita la demostración de que ninguna compactación del rayo cuyoresiduo es un Circunferencia satisface $(\star)$.

Lema 57 *[8, Teorema 31, Página 24] EL hiperespacio $F_2(S)$ no se puede encajar en el hiperespacio $C(S)$.*

Teorema 58 *Si $X = S \cup L$ es una compactación del rayo cuyo residuo es una Circunferencia S, entonces el hiperespacio $F_2(X)$ no se puede encajar en el hiperespacio $C(X)$.*

Demostración. Supongamos que existe un encaje $e : F_2(X) \hookrightarrow C(X)$. Por el Lema 56, elconjunto $\mathcal{B} = \{\{x, y\} \in F_2(X) : x \in G \;\text{ y } y \in L\} \cup F_2(S)$, es tal que $e(\mathcal{B}) \subset C(S)$. En particular tenemos que $\widehat{e} := e\,|_{F_2(S)}: F_2(S) \hookrightarrow C(S)$ es un encaje del hiperespacio $F_2(S)$ en el hiperespacio $C(S)$, lo cual es una contradicción al Lema 57. Por lo tanto no existen encajes del hiperespacio $F_2(X)$ en el hiperespacio $C(X)$. ■

4.3. El Arco como Residuo

Teorema 59 *Si $X = J \cup L$ una compactación del rayo cuyo residuo es un arco J, entonces el hiperespacio $F_2(X)$ no se puede encajar en el hiperespacio $C(X)$.*

Demostración. Supongamos que existe un encaje $e : F_2(X) \hookrightarrow C(X)$. Por el Lema 48 existe una sucesión $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$, de arcos en L y existe un arco $J_0 \subset J$ tales que $\lim J_n = J_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\mathcal{D}_n = \langle J_0, J_n \rangle$ y $\mathcal{D} = F_2(J_0) = \langle J_0, J_0 \rangle$. Por el Lema 52, para cada $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $\mathcal{D}_n$ es homeomorfa a $J_n \times J_0$ que es una 2-celda y por el Ejemplo 2, sabemos que $\mathcal{D}$ también es una 2-elda. Como $\lim J_n = J\ _0$, por el Lema 54 sabemos que $\lim_n \mathcal{D} = \mathcal{D}$. Por ser e un encaje tenemos que $e(\mathcal{D})$ y $e(\mathcal{D}_n)$ son una 2-celda para toda $n \in \mathbb{N}$, y también se satisface que $\lim e(\mathcal{D}_n) = e(\mathcal{D})$.

Por último notemos que $(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n) \cup \mathcal{D} \subset \mathcal{B} = \langle J, L \rangle \cup F_2(J)$, así, por el Lema 56, tenemos que $(\bigcup_{n=1}^{\infty} e[\mathcal{D}_n]) \cup e[\mathcal{D}] \subset C(J) \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, lo cual es una contradicción al Lema 45. Por lo tanto no existen encajes del hiperespacio $F_2(X)$ en el hiperespacio $C(X)$. ■

4.4. El Triodo como Residuo

Definición 60 *Un **avión** A, es un espacio homeomorfo al subespacio en $\mathbb{R}^3$ dado por* $V = ([0,1] \times \{0\} \times [0,1]) \cup (\{0\} \times [-1,1] \times [0,1])$.

Observemos que si A es un avión, entonces existe un homeomorfismo $h : V \to A$, con esto tenemos que A es la unión de tres 2-celdas A_1, A_2 y A_3 donde:

$A_1 = h([0,1] \times \{0\} \times [0,1])$,
$A_2 = h(\{0\} \times [-1,0] \times [0,1])$ y
$A_3 = h(\{0\} \times [0,1] \times [0,1])$;

Notemos que para cualesquiere $i, j \in \{1,2,3\}$, con $i \neq j$, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_i \cap A_j = J$ donde $J = h(\{0\} \times \{0\} \times [0,1])$ es un arco contenido en la frontera de A_i (Figura 4.1).

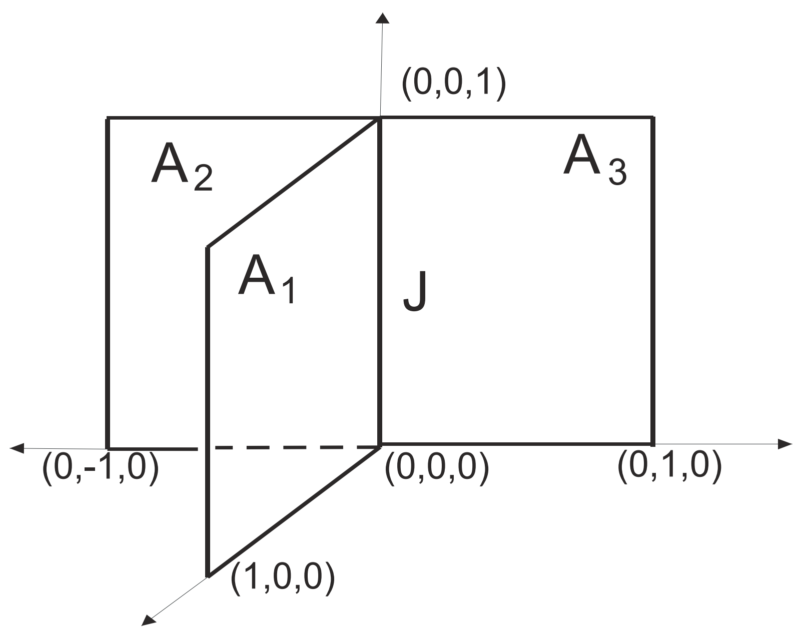

Figura 4.1: .

Definición 61 *Sea* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} = \{A_1^n \cup A_2^n \cup A_3^n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de aviones ajenos dos a dos. Diremos que las sucesión de aviones* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge a un avión* $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ *si* $\lim A_i^n = A_i$ *para cada* $i \in \{1,2,3\}$ *y* $\lim(A_1^n \cap A_2^n \cap A_3^n) = A_1 \cap A_2 \cap A_3$

Por un resultado conocido, que es la generalización en $\mathbb{R}^3$ del Lema 45, tenemos el siguiente resultado.

Lema 62 *Si* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$*, es una sucesión de aviones en un espacio* Y*, que converge a un avión* A *y* $A_n \cap A = \emptyset$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$*, entonces el conjunto* $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cup A$ *no se puede encajar en* $\mathbb{R}^3$*.*

El triodo simple, que lo denotaremos por la letra T, está formado por la unión de tres arcos que coinciden sólo en un punto, que es un extremo de cada arco. En esta sección al triodo lo pensaremos como el subconjunto de $\mathbb{R}^3$, formado por la unión de los tres segmentos convexos que unen a los puntos $(1,0,0),(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ con el punto $(0,0,0)$.

Lema 63 *[2, Ejemplo 3.3] El hiperespacio* $C(T)$ *se puede encajar en* $\mathbb{R}^3$*.*

Teorema 64 *Si* $X = T \cup L$ *es una compactación del rayo cuyo residuo es un tríodo simple* T*, entonces el hiperespacio* $F_2(X)$ *no se puede encajar en el hiperespacio* $C(X)$*.*

Demostración. Supongamos que existe un encaje $e : F_2(X) \hookrightarrow C(X)$. Sea J_v el segmento convexo que une al punto $(1,0,0)$ con el punto $(\frac{2}{3},0,0)$ y T_v el subtriodo de T formado por la unión de los segmentos convexos que unen el punto $(0,0,0)$ con los puntos $(\frac{1}{3},0,0)$, $(0,\frac{1}{3},0)$ y $(0,0,\frac{1}{3})$. Notemos que $T_v \cap J_v = \emptyset$. Como $J_v \subset T$ por el Lema 48, existe una sucesión de arcos $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en L, ajenos a J_v y existe un arco $J_0 \subset J_v$ tales que $\lim J_n = J_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $T_n = \langle J_n, T_v\rangle$ y $\widehat{T} = \langle J_0, T_v\rangle$. Por el Lema 52, T_n es homeomorfo a $J_n \times T_v$ que es un avión; de igual forma $\widehat{T}$ es homeomorfo a $J_0 \times T_v$ que es un avión. Por construcción y por el Lema 54, la sucesión de aviones $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al avión $\widehat{T}$. Por ser e un encaje tenemos que $e(\widehat{T})$ y $e(T_n)$ son aviones para toda $n \in \mathbb{N}$, y también se satisface que $\lim e(T_n) = e(\widehat{T})$. Por último notemos que $(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n) \cup \widehat{T} \subset \mathcal{B} = \langle T, L \rangle \cup F_2(T)$, así, por el Lema 56, tenemos que $(\bigcup_{n=1}^{\infty} e[T_n]) \cup e[\widehat{T}] \subset C(T)$. Pero, por el Lema 63, sabemos que $C(T)$ se puede encajar en $\mathbb{R}^3$. Lo cual implica que $(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n) \cup \widehat{T} \subset \mathcal{B} \subset C(T) \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ y esto es una contradicción al Lema 62. Por lo tanto no existen encajes del hiperespacio $F_2(X)$ en el hiperespacio $C(X)$. ■

4.5. Residuo Paleta.

La Paleta, continuo que representaremos por la letra P, para fines prácticos, vamos a suponer que es el continuo en $\mathbb{R}^3$ que se obtiene al unir el triodo simple, que es la unión de los tres segmentos convexos que unen a los puntos $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ con el punto $(0, 0, 0)$, con el segmento convexo que une a los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$.

Lema 65 *[8, Sección 2.5, Figura 2.9, Página 31] El hiperespacio $C(P)$ se puede encajar en $\mathbb{R}^3$.*

Teorema 66 *Si $X = P \cup L$ es una compactación del rayo cuyo resido es la paleta P, entonces el hiperespacio $F_2(X)$ no se puede encajar en el hiperespacio $C(X)$.*

Demostración. Supongamos que existe un encaje $e : F_2(X) \hookrightarrow C(X)$. Sea J_v el segmento convexo que une al punto $(1, 0, 0)$ con el punto $(\frac{2}{3}, 0, 0)$ y T_v el subtriodo de T formado por la unión de los segmentos convexos que unen el punto $(0, 0, 0)$ con los puntos $(\frac{1}{3}, 0, 0)$, $(0, \frac{1}{3}, 0)$ y $(0, 0, \frac{1}{3})$. Notemos que $T_v \cap J_v = \emptyset$. Como $J_v \subset T$ por el Lema 48, existe una sucesión de arcos $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en L, ajenos a J_v y existe un arco $J_0 \subset J_v$ tales que $\lim J_n = J_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $T_n = \langle J_n, T_v \rangle$ y $\widehat{T} = \langle J_0, T_v \rangle$. Por el

Lema 52, T_n es homeomorfo a $J_n \times T_v$ que es un avión; de igual forma $\widehat{T}$ es homeomorfo a $J_0 \times T_v$ que es un avión. Por construcción y por el Lema 54, la sucesión de aviones $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al avión $\widehat{T}$. Por ser e un encaje tenemos que $e(\widehat{T})$ y $e(T_n)$ son aviones para toda $n \in \mathbb{N}$, y también se satisface que $\lim e(T_n) = e(\widehat{T})$. Por último notemos que $(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n) \cup \widehat{T} \subset \mathcal{B} = \langle T, L\rangle \cup F_2(T)$, así, por el Lema 56, tenemos que $(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e[T_n]) \cup e[\widehat{T}] \subset C(T)$. Pero, por el Lema 65, sabemos que $C(T)$ se puede encajar en $\mathbb{R}^3$. Lo cual implica que $(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n) \cup \widehat{T} \subset \mathcal{B} \subset C(T) \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ y esto es una contradicción al Lema 62. Por lo tanto no existen encajes del hiperespacio $F_2(X)$ en el hiperespacio $C(X)$. ■

Capítulo 5

Modelos de Hiperespacios.

5.1. Introducción.

Cuando comenzamos a desarrollar esta parte del trabajo, nuestro propósito era clasificar a los continuos localmente conexos X, para los cuales su hiperespacio $C(X)$ se puede encajar en $\mathbb{R}^4$. Al respecto, el Teorema 67, nos dice que los candidatos a satisfacer esta propiedad son las gráficas finitas que están en la Figura 5.1, y que hasta el momento hemos estado estado nombrando como: el arco, la circunferencia, el triodo simple, el 4-odo simple, la paleta, la medalla, el ocho, la hache el niño, las pesas, el dulce y la theta.

En la literatura, mediante la construcción de los modelos de los hiperespacios $C(X)$, se conoce que el arco, la circunferencia, el triodo simple, el 4-odo simple y la paleta, satisfacen esta propiedad. En [4, Sección 2], la Dra. Anne Marie Dilks, da la construcción del hiperespacio de subcontinuos de la gráfica en forma de ocho (8). Tomando algunas ideas de ésta construcción, logramos dar un encaje explicito del hiperespacio $C(8)$ en $\mathbb{R}^4$, más aun, también demostramos que hiperespacio de subcontinuos de las pesas se puede encajar en $\mathbb{R}^4$.

Lo anterior responde la pregunta para la medalla, el ocho, la hache el niño y las pesas. Dejando así, esta pregunta abierta para el dulce y las pesas. Nos atrevemos a mencionar que estos dos últimos continuos también satisfacen lo deseado, pues estamos a muy poco de construir, en $\mathbb{R}^4$, un modelo para el hiperespacio de subcontinuos de las pesas.

5.2. Un Teorema de Clasificación

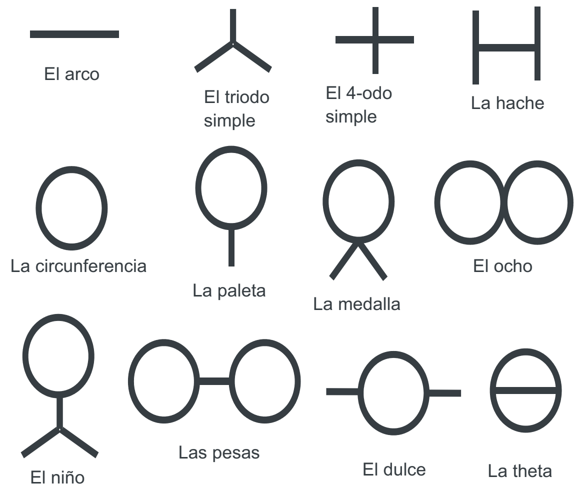

Figura 5.1: Gráficas Finitas.

Teorema 67 *Sea X un continuo localmente conexo. Si X se puede encajar en $\mathbb{R}^4$, entonces X es homeomorfo a alguna gráfica de la la Figura 5.1.*

Demostración. *Caso* 1. Si X no es gráfica finita. Como X es un continuo localmente conexo y no es gráfica finita, por el Teorema 21, X contiene un ∞-odo. Por el Teorema 9 el hiperespacio $C(X)$ contiene un cubo de Hilbert. Por lo tanto $C(X)$ no se puede encajar en $\mathbb{R}^4$, lo cual es una contradicción.

Caso 2. Si X es gráfica finita. Si X no es homeomorfa a alguna gráfica de la Figura 5.1, entonces por el Teorema 41, tenemos que las gráficas de la Figura 5.1, son aquellas que no contienen 5-odos. Por lo tanto X contiene un 5-odo, y por el Teorema 7 tenemos que el hiperespacio $C(X)$ contiene una 5-celda. Por lo tanto el hiperespacio $C(X)$ no se puede encajar en $\mathbb{R}^4$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto si X satisface que su hiperespacio $C(X)$ se puede encjar en $\mathbb{R}^4$, entonces X es homeomorfo a alguna gráfica de la la Figura 5.1. ■

5.3. La circunferencia

En esta sección se construlle el hiperespacio $C(S)$, donde S es la circunferencia, pues nos es de gran utilidad más adelante.

La circunferencia, continuo que denotaremos por la letra S, se define como $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| = 1\}$. Un modelo para $C(S) = \{A \in 2^S : A \text{ es conexo}\}$ se puede construir de la siguiente manera.

Si $A \in C(S)$, tenemos las siguientes posibilidades: que A sea un arco contenido en S, que A sea un punto de S o que $A = S$. En el primer caso el arco A queda determinado por su longitud $\ell(A)$ y su punto medio $m(A)$. Consideremos la recta L_A que une al punto $m(A)$ con el origen, así como al punto $p(A) \in L_A$ que está a distancia $1 - \frac{\ell(A)}{2\pi}$ del origen. Notemos que $p(A)$ depende únicamente de $m(A)$ y $\ell(A)$. Tenemos así asignado un punto $p(B)$, para cada arco (no degenerado) B en S.

En el caso en que $A = \{s\}$, con $s \in S$, siguiendo la idea anterior, podríamos pensar que el punto medio de A es $m(\{s\}) = s$ y que la longitud de A es $\ell(\{s\}) = 0$. Entonces, al considerar la recta $L_{\{s\}}$ que une a s con el origen y al punto $p(\{s\})$ en $L_{\{s\}}$ y que dista del origen $1 - \frac{\ell(\{s\})}{2\pi} = 1$, tendríamos que $p(\{s\}) = s$. En este caso, también tenemos que $p(A)$ queda determinado únicamente por $m(A)$ y por $\ell(A)$. Por lo tanto, dado un subcontinuo de la forma $\{s\}$, con s en S, lo podemos representar por el punto s.

Cuando $A = S$, tratando de seguir la idea de los casos anteriores tenemos lo siguiente; $\ell(S) = 2\pi$. Supongamos que podemos definir $m(S) = r$ para algún $r \in S$. Al considerar la recta R que una a r con el origen y, al punto $p(S)$, que por definición $p(S)$ es el punto sobre R que dista del origen $1 - \frac{l(S)}{2\pi} = 1 - \frac{2\pi}{2\pi} = 0$, tendriamos que $p(S) = \overline{(0,0)}$. Notemos que esto es independiente de la elección de r, por lo tanto podemos definir $p(S) = (0,0)$.

De lo anterior concluimos que una representación de $C(S)$ es el disco $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ y la asignación queda determinada por el homeomorfismo $f : C(S) \rightarrow D$ donde a cada A le asignamos el punto:

$$f(A) = m(A)(1 - \tfrac{\ell(A)}{2\pi}).$$

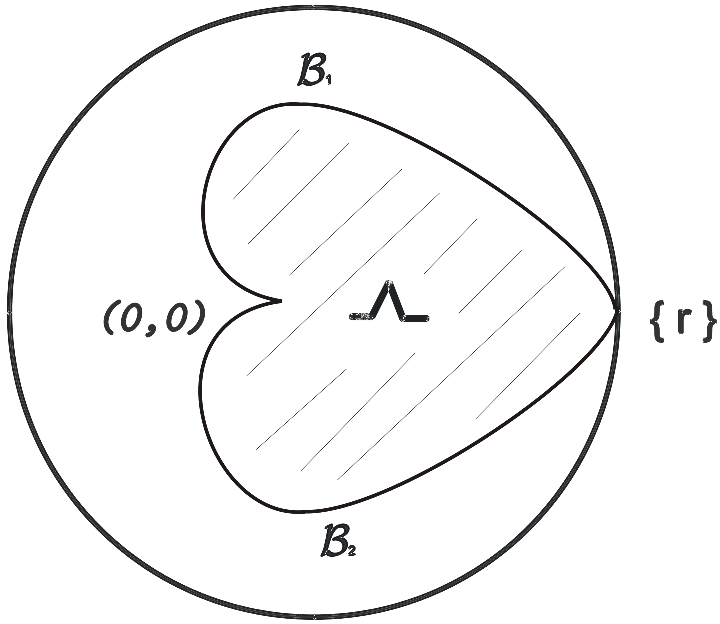

Figura 5.2: Conjunto Λ representado en $C(S)$.

Notemos que en este modelo para $C(S)$, los continuos que constan de un solo punto quedan representados por la frontera de D. Ahora fijemos $r = (1, 0)$, diremos que r es extremo izquierdo (respectivamente extremo derecho) de un arco de S, si r es el extremo del subarco que queda a la izquierda (derecha) cuando nos paramos sobre el arco y vemos en la dirección del origen. Si $\mathcal{B}_1$ es el conjunto de todos los subarcos que tienen como extremo izquierdo a r entonces, para cada $A \in \mathcal{B}_1$, $m(A)$ está en $\{(x, y) \in S : y \geq 0\}$, además, cuando $\ell(A)$ es muy pequeña y distinta de cero, A se parece mucho a $\{r\}$ y, así el número $1 - \frac{\ell(A)}{2\pi}$ es casi uno, de donde $p(A)$ es un punto muy cercano a r, en el interior de la mitad superior del disco D. Por otro lado, cuando $\ell(A)$ se aproxima mucho a 2π tenemos que $m(A)$ se acerca al $(-1, 0)$ y, además, $1 - \frac{\ell(A)}{2\pi}$ decrece a cero, de donde $p(A)$ es un punto muy cercano al origen, también en el interior de la parte superior del disco D. De donde se observa que $\mathcal{B}_1$ queda representado por el conjunto que se ilustra en la Figura 5.2, en la cual se incluye una representación de $\mathcal{B}_2$ que es el conjunto de subarcos que tienen como extremo derecho a r.

De lo anterior obtenemos que el conjunto $\Lambda = \{A \in C(S) : r \in A\}$ está representado por la región delimitada por $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$. Mas precisamente Λ, es una dos celda contenida en D que intersecta sólo en un punto a la frontera de D (el çorazón relleno"que se muestra en la Figura 5.2).

Capítulo 6

El Ocho

6.1. Introducción

En este capítulo vamos a construir, en $\mathbb{R}^4$, el modelo del hiperespacio de subcontinuos de la gráfica en forma de ocho. Para esto enunciaremos un lema que nos ayudará a probar más fácilmente la continuidad de algunas funciones.

Debemos recordar que el modelo del hiperespacio de subcontinuos del ocho ya fue construido en [4, Sección 2] por la Dra. Anne Marie Dilks, y en este trabajo recuperamos las ideas principales de ésa construcción, y le damos un enfoque más analítico.

Sea X un continuo, supongamos que $X = F \cup G$, donde F y G son dos subcontinuos de X tales que $F \cap G = \{p\}$. Sean:

$$C_p = \{A \in C(X) : p \in A\}, \text{ y}$$

$$f : C_p \to C(F), \text{ dada por } f(A) = A \cap F.$$

Lema 68 *f está bien definida.*

Demostración. Para demostrar que f está bien definida necesitamos ver que si $A \in C_p$, entonces $A \cap F$ es un subcontinuo de F. Como $A \cap F$ es la intersección de dos subconjuntos cerrados de X y como además $p \in A \cap F$, tenemos que $A \cap F$ es un subconjunto compacto y no vacío de F. Por lo que sólo resta ver que $A \cap F$ es conexo.

Supongamos que $A \cap F$ es disconexo, entonces existen dos subconjuntos cerrados en F (y entonces en X) ajenos y no vacíos K y L tales que $A \cap F = K \cup L$. Podemos suponer que $p \in K$. Entonces $A = (A \cap F) \cup (A \cap G) = L \cup (K \cup (A \cap G))$. Notemos que $L \cap (A \cap G) \subset L \cap (F \cap G) = L \cap \{p\} = \emptyset$. De manera que L y $K \cup (A \cap G)$ son cerrados, ajenos, no vaciós y su unión es A. Esto contradice la conexidad de A y esto termina la demostración de que f está bien definida. ■

Lema 69 *La función $f : C_p \to C(F)$, dada por $f(A) = A \cap F$, es continua.*

Demostración. Supongamos que la métrica de X es d. Sea $\varepsilon > 0$. Como $F - B_\varepsilon(p)$ y $G - B_\varepsilon(p)$ son compactos ajenos, el número $\eta = \text{mín}(\{1\} \cup \{d(x, y) : x \in F - B_\varepsilon(p),\ y \in G - B_\varepsilon(p)\})$ existe y es positivo. Sea $\delta = \text{mín}\{\eta, \varepsilon\}$.

Sean $A, B \in C_p$ tales que $H(A, B) < \delta$. Aseguramos que $H(f(A), f(B)) < 2\varepsilon$. Dada $x \in A \cap F$, consideramos dos casos: si $x \in B_\varepsilon(p)$, como $p \in B \cap F$, tenemos que $x \in N(\varepsilon, B \cap F)$. Si $x \in F - B_\varepsilon(p)$, como $H(A, B) < \eta \leq \varepsilon$, existe $b \in B$ tal que $d(x, b) < \eta$. Por la definición de η, no es posible que $b \in G - B_\varepsilon(p)$, de manera que $b \in F - B_\varepsilon(p)$. Si $b \in F$, entonces $x \in N(\varepsilon, B \cap F)$, y si $b \in B_\varepsilon(p)$, entonces $d(x, p) \leq d(x, b) + d(b, p) < 2\varepsilon$ y como $p \in B \cap F$, concluimos que $x \in N(\varepsilon, B \cap F)$. Hemos probado que $A \cap F \subset N(2\varepsilon, B \cap F)$. Similarmente se demuestra que $B \cap F \subset N(2\varepsilon, A \cap F)$. Por lo tanto, por el Lema 53, $H(f(A), f(B)) < 2\varepsilon$. Con esto terminamos la prueba del lema. ■

6.2. Modelo de C(8)

En este capítulo denotaremos por 8 al continuo que tiene la forma de un ocho. Es decir, $P = S_1 \cup S_2$, donde S_1 y S_2 son dos circunferencias que se intersectan únicamente en un punto, el cual de llamaremos p (Figura 6.1).

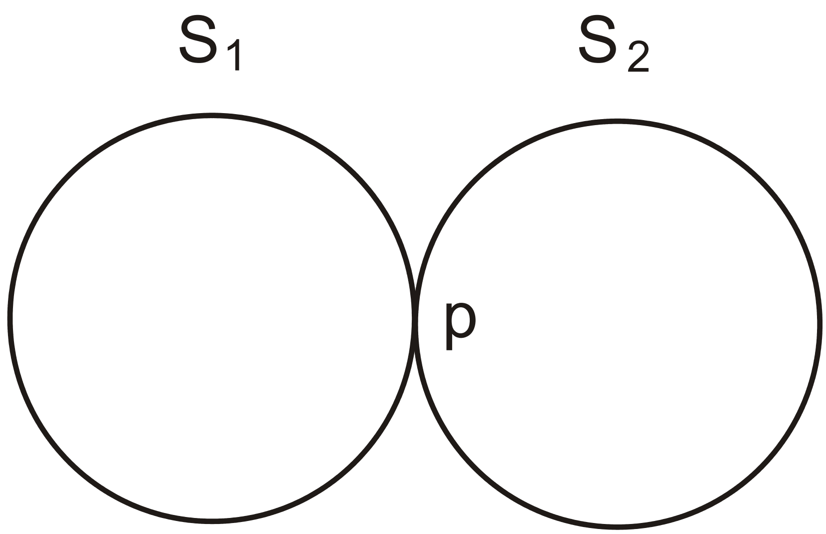

Figura 6.1: El Ocho.

Observemos que si A es un subcontinuo del 8, entonces $p \in A$ o $A \subset S_i$ para alguna $i \in \{1, 2\}$. Denotemos por:

$$\begin{gathered} C_p = \{A \in C(8) : p \in A\}, \\ C(S_1) = \{A \in C(8) : A \in S_1\}, \\ C(S_2) = \{A \in C(8) : A \in S_2\}. \end{gathered}$$

Con esta notación tenemos que :

$$C(8) = C(S_1) \cup C(S_2) \cup C_p.$$

Nota 70 *Observemos que se satisfacen las siguientes igualdades:*

(a) $C(S_1) \cap C(S_2) = \{\{p\}\}$,
(b) $C(S_1) \cap C_p = \{A \in C(S_1) : p \in A\} = C(p, S_1)$,
(c) $C(S_1) \cap C_p = \{A \in C(S_2) : p \in A\} = C(p, S_2)$,

Sea $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (2, 0)\| \leq 2\}$ y $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (1, 0)\| \leq 1\}$.

Observemos que $D_1 \subset D_2$ y $Fr(D_1) \cap Fr(D_2) = \{(0, 0)\}$.

Por la construcción del hiperespacio $C(S)$, donde S es la circunferencia (Capítulo 5, Sección 5.3), sabemos que, para cada $i \in \{1, 2\}$, existe un homeomorfismo $\varphi_i : C(S_i) \to D_2$, tal que:

$$(i)\ \varphi_i(\{p\}) = (0, 0).$$
$$(ii)\ \varphi_i(C(p, S_i)) = D_1.$$

Vamos a encajar a $C(8)$ en $\mathbb{R}^4$, dando las fórmulas explícitas del encaje. Para esto, daremos fórmulas explicítas para encajar cada uno de los uniendos que componen a $C(8)$.

Sea $\phi : C(8) \to \mathbb{R}^4$, dada por:

$$\phi(A) = \begin{cases} (\varphi_1(A), 0, 0), & \text{si } A \in C(S_1), \\ (0, 0, \varphi_1(A)), & \text{si } A \in C(S_2), \\ (\varphi_1(A \cap S_1), \varphi_2(A \cap S_2)), & \text{si } A \in C_p. \end{cases}$$

Lema 71 *La función $\phi : C(8) \to \mathbb{R}^4$ está bien definida.*

Demostración. Para verificar que la función ϕ está bien definida tenemos que checar los siguientes casos.

Caso 1. $A \in C(S_1) \cap C(S_2)$.

Por (a) de la Nota 70, sabemos que $A = \{p\}$. De esta forma tenemos que:

Cuando $\{p\} \in C(S_1)$, por definición $\phi(\{p\}) = (\varphi_1(\{p\}), 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$.
Cuando $\{p\} \in C(S_2)$, por definición $\phi(\{p\}) = (0, 0, \varphi_2(\{p\})) = (0, 0, 0, 0)$.

Por lo tanto ϕ está bien definida en $C(S_1)$ y en $C(S_2)$.

Caso 2. $A \in C(S_1) \cap C_p$.

Por (b) de la Nota 70, sabemos que $A \in C(p, S_1)$, es decir, $A \subset S_1$ y así se tiene que $A \cap S_1 = A$ y $A \cap S_2 = \{p\}$. De esta forma al calcular ϕ tenemos que:

Cuando $A \in C(S_1)$, por definición $\phi(A) = (\varphi_1(A), 0, 0)$.
Cuando $A \in C_p$, por definición $\phi(A) = (\varphi_1(A \cap S_1), \varphi_2(A \cap S_2)) = (\varphi_1(A), \varphi_2(\{p\})) = (\varphi_1(A), 0, 0)$.

Por lo tanto ϕ está bien definida en $C(S_1)$ y en C_p.

Caso 3. $A \in C(S_2) \cap C_p$.

Por (c) de la Nota 70, sabemos que $A \in C(p, S_2)$, es decir, $A \subset S_1$ y así se tiene que $A \cap S_1 = \{p\}$ y $A \cap S_2 = A$. De esta forma al calcular ϕ tenemos que:

Cuando $A \in C(S_2)$, por definición $\phi(A) = (0, 0, \varphi_2(A))$.
Cuando $A \in C_p$, por definición $\phi(A) = (\varphi_1(A \cap S_1), \varphi_2(A \cap S_2)) = (\varphi_1(\{p\}), \varphi_2(A)) = (0, 0, \varphi_2(A))$.

Por lo tanto ϕ está bien definida en $C(S_2)$ y en C_p.

Los Casos 1, 2 y 3 demuestran que ϕ esta bien definida en $C(S_1) \cup C(S_2) \cup C_p = C(8)$. ■

Lema 72 *La función $\phi : C(8) \to \mathbb{R}^4$ es continua.*

Demostración. Observemos que ϕ está definida en tres subconjuntos cerrados $C(S_1)$, $C(S_2)$ y C_p de $C(8)$. Adicionalmente $\phi\mid_{C(S_1)} = (\varphi_1, 0, 0)$ y $\phi\mid_{C(S_2)} = (0, 0, \varphi_2)$ son funciones continuas, pues φ_i es un homeomorfismo para $i \in \{1, 2\}$.

Por el Lema 69, para cada $i \in \{1, 2\}$, la función $f_i : C_p \to C(S_i)$, dada por $f_i(A) = A \cap S_i$, es continua. Así la función $\phi\mid_{C_p} = (\varphi_1 \circ f_1, \varphi_2 \circ f_2)$ es continua por ser composición de funciones continuas.

Esto demuestra que ϕ es una función continua. ■

Lema 73 *La función $\phi\mid_{C_p} : C_p \to \mathbb{R}^4$ es inyectiva.*

Demostración. Observemos que para toda $A \in C_p$, tenemos que $A = (A \cap S_1) \cup (A \cap S_2)$. Así, si A y B son dos elementos en C_p, tales que $\phi\mid_{C_p}(A) = \phi\mid_{C_p}(B)$, entonces:

$$(\varphi_1(A \cap S_1), \varphi_2(A \cap S_2)) = (\varphi_1(B \cap S_1), \varphi_2(B \cap S_2)).$$

Por lo tanto, $\varphi_1(A \cap S_1) = \varphi_1(B \cap S_1)$ y $\varphi_2(A \cap S_2) = \varphi_2(B \cap S_2)$, por ser φ_i un homeomorfismo para $i \in \{1, 2\}$, tenemos que $A \cap S_1 = B \cap S_1$ y $A \cap S_2 = B \cap S_2$, lo cual demuestra que $A = B$.

Por lo tanto ϕ_p es inyectiva. ■

Lema 74 *La función $\phi : C(8) \to \mathbb{R}^4$ es inyectiva.*

Demostración. Sean A y B dos elementos en $C(8)$, tales que $\phi(A) = \phi(B)$. Como $C(8) = C(S_1) \cup C(S_2) \cup C_p$, debemos considerar los siguientes casos.

Caso 1. $A, B \in C(S_i)$, para alguna $i \in \{0, 1\}$.

Como φ_i es un homeomorfismo, se concluye que $A = B$.

Caso 2. $A, B \in C_p$.

Por el Lema 73, sabemos que la función $\phi|_{C_p}$ es inyectiva, así que $A = B$.

Caso 3. $A \in C(S_1)$ y $B \in C(S_2)$.

Por definición de ϕ tenemos que $\phi(A) = (\varphi_1(A), 0, 0)$ y $\phi(B) = (0, 0, \varphi_2(B))$. Por lo tanto $\varphi_1(A) = (0, 0)$ y $\varphi_1(B) = (0, 0)$, por ser φ_1 y φ_2 homeomorfismos tenemos que $A = B = \{p\}$.

Caso 4. $A \in C(S_1)$ y $B \in C_p$.

Por definición de ϕ tenemos que $\phi(A) = (\varphi_1(A), 0, 0)$ y $\phi(B) = (\varphi_1(B \cap S_1), \varphi_2(B \cap S_2))$, lo que implica que $\varphi_1(A) = \varphi_1(B \cap S_1)$ y $(0, 0) = \varphi_2(B \cap S_2)$. Como φ_1 y φ_2 son homeomorfismos tenemos que $A = B \cap S_1$ y $\{p\} = B \cap S_2$. Lo que demuestra que $B = (B \cap S_1) \cup (B \cup S_2) = A$.

Caso 5. $A \in C(S_2)$ y $B \in C_p$.

Por definición de ϕ tenemos que $\phi(A) = (0, 0, \varphi_2(A))$ y $\phi(B) = (\varphi_1(B \cap S_1), \varphi_2(B \cap S_2))$, lo que implica que $(0, 0) = \varphi_1(B \cap S_1)$ y $\varphi_2(A) = \varphi_2(B \cap S_2)$. Como φ_1 y φ_2 son homeomorfismos tenemos que $\{p\} = B \cap S_1$ y $A = B \cap S_2$. Lo que demuestra que $B = (B \cap S_1) \cup (B \cup S_2) = A$.

Esto concluye la demostración de que ϕ es una función inyectiva. ■

Teorema 75 *El hiperespacio $C(8)$ se puede encajar en $\mathbb{R}^4$.*

Demostración. Por los Lemas 72 y 74, sabemos que la función $\phi : C(8) \to \mathbb{R}^4$ es continua e inyectiva. Ya que $C(8)$ es un espacio compacto y $\mathbb{R}^4$ es un espacio Hausdorff, tenemos que ϕ es un encaje. Por lo tanto el hiperespacio $C(8)$ se puede encajar en $\mathbb{R}^4$. ■

Capítulo 7

Las Pesas

7.1. Introducción

En este capítulo denotaremos por P al continuo que tiene la forma de unas pesas. Es decir, $P = S_1 \cup L \cup S_2$, donde S_1 y S_2 son dos circunferencias ajenas, L es un arco cuyos extremos serán llamados p_1 y p_2; y además $S_1 \cap L = \{p_1\}$ y $S_2 \cap L = \{p_2\}$ (Figura 7.1).

A continuación daremos los elementos necesarios para demostrar que el hiperespacio $C(P)$ se puede encajar en $\mathbb{R}^4$. La técnica que utilizaremos, será la misma que empleamos para construir el modelo del hiperespacio $C(8)$.

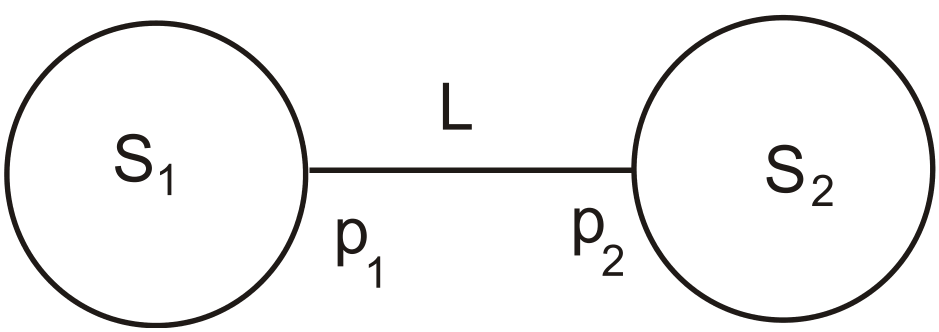

Figura 7.1: Las Pesas.

7.2. Elementos de Construcción

Observemos que si A es un subcontinuo de P, entonces A tiene que caer en alguna de las siguientes categorías:

(a) $p_1, p_2 \notin A$. En este caso se tiene que $A \subset S_1$, $A \subset S_2$ o $A \subset L$.

(b) $p_1 \in A$ y $p_2 \notin A$. En este caso $p_1 \in A \subset S_1 \cup L$.

(c) $p_1 \notin A$ y $p_2 \in A$. En este caso $p_1 \in A \subset S_2 \cup L$.

(d) $p_1 \in A$ y $p_2 \in A$. En este caso $L \subset A$

Definimos:

$$\begin{gathered} C_1 = \{A \in C(P) : p_1 \in A \subset S_1 \cup L\}, \\ C_2 = \{A \in C(P) : p_2 \in A \subset L \cup S_2\}, \\ C_L = \{A \in C(P) : L \subset A\}. \end{gathered}$$

Con esta notación tenemos que:

$$C(P) = C(S_1) \cup C(S_2) \cup C_1 \cup C_2 \cup C_L \cup C(L).$$

Para cada $i \in \{1, 2\}$ definimos:

$$\begin{gathered} C(p_i, S_i) = \{A \in C(S_i) : p_i \in S_i\} \text{ y} \\ C(p_i, L) = \{A \in C(L) : p_i \in A\}. \end{gathered}$$

Nota 76 *Observemos que se satisfacen las siguientes igualdades:*

(a) $C(S_1) \cap C(S_2) = \emptyset$, pues $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.
(b) $C(S_1) \cap C_1 = \{A \in C(S_1) : p_1 \in A\} = C(p_1, S_1)$.
(c) $C(S_1) \cap C_2 = \emptyset$.
(d) $C(S_1) \cap C_L = \emptyset$.
(e) $C(S_1) \cap C(L) = \{p_1\}$.

(f) $C(S_2) \cap C_1 = \emptyset$.
(g) $C(S_2) \cap C_2 = \{A \in C(S_2) : p_2 \in A\} = C(p_2, S_2)$.
(h) $C(S_2) \cap C_L = \emptyset$.
(i) $C(S_2) \cap C(L) = \{p_2\}$.

(j) $C_1 \cap C_2 = \{L\}$.
(k) $C_1 \cap C_L = \{A \in C(S_1 \cup L) : L \subset A\}$.
(l) $C_1 \cap C(L) = \{A \in C(L) : p_1 \in A\} = C(p_1, L)$.

(m) $C_2 \cap C_L = \{A \in C(S_2 \cup L) : L \subset A\}$.
(n) $C_2 \cap C(L) = \{A \in C(L) : p_2 \in A\} = C(p_2, L)$.

(ñ) $C_L \cap C(L) = \{L\}$.

Sea $\alpha : [0,1] \to L$ un homeomorfismo tal que $\alpha(0) = p_1$ y $\alpha(1) = p_2$. Dado un continuo $A \in C(L)$, existen elementos x y y en el intervalo $[0,1]$, tales que $\alpha([x,y]) = A$.

Con esta notación tenemos las siguientes igualdades:

(i) $C(p_1, L) = \{A \in C(L) : p_1 \in A\} = \{\alpha([0,y]) : y \in [0,1]\}$.

(ii) $C(p_2, L) = \{A \in C(L) : p_2 \in A\} = \{\alpha([x,1]) : x \in [0,1]\}$.

(iii) Si $A \in C_1$, entonces $A = (A \cap S_1) \cup \alpha([0,y])$, para alguna $y \in [0,1]$.

(iv) Si $A \in C_2$, entonces $A = \alpha([x,1]) \cup (A \cap S_2)$, para alguna $x \in [0,1]$.

(v) Si $A \in C(p_1, S_1)$, entonces $A = A \cup \alpha([0,0])$.

(vi) Si $A \in C(p_2, S_2)$, entonces $A = \alpha([1,1]) \cup A$.

7.3. Modelo de C(P)

Recordemos que $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)-(2,0)\| \leq 2\}$ y $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)-(1,0)\| \leq 1\}$.

Por la construcción del hiperespacio $C(S)$, donde S es la circunferencia (Capítulo 5, Sección 5.3), sabemos que, para cada $i \in \{1,2\}$, existe un homeomorfismo $g_i : C(S_i) \to D_2$, tal que:

$$\begin{array}{c} (i)\ g_i(\{p_i\}) = (0,0). \\ (ii)\ g_i(C(p_i, S_i)) = D_1. \end{array}$$

Estamos listos demostrar que el hiperespacio $C(P)$ se puede encajar en $\mathbb{R}^4$. Para esto vamos a dar las fórmulas explícitas de una función $e : C(P) \to \mathbb{R}^4$ y después demostraremos que, efectivamente, e es un encaje.

Sea $e : C(P) \to \mathbb{R}^4$, dada por:

$$e(A) = \begin{cases} (g_1(A), -1, 0), & \text{si } A \in C(S_1), \\ (-1, 0, g_2(A)), & \text{si } A \in C(S_2), \\ (g_1(A \cap S_1), y-1, 0), & \text{si } A = (A \cap S_1) \cup \alpha([0,y]) \in C_1, \\ (-x, 0, g_2(A \cap S_2)), & \text{si } A = \alpha([x,1]) \cup (A \cap S_2) \in C_2, \\ (g_1(A \cap S_1), g_2(A \cap S_2)), & \text{si } A \in C_L, \\ (-x, 0, y-1, 0), & \text{si } A = \alpha([x,y]) \in C(L). \end{cases}$$

Lema 77 *La función $e : C(P) \to \mathbb{R}^4$ está bien definida.*

Demostración. Para demostrar que e está bien definida, debemos verificar algunos casos, los cuales se enlistan en las igualdades de la Nota 76. Así, sólo mencionaremos aquellos casos en que el conjunto resultante no es vacío.

Siempre que mencionemos un inciso, estaremos refiriéndonos a los casos de la Nota 76.

Caso 1. $A \in C(S_1) \cap C_1$.

Por (b), sabemos que $A \in C(p_1, S_1)$, así $A = A \cap S_1 = (A \cap S_1) \cup \alpha([0, 0])$. De esta forma, al calcular e tenemos que:

Cuando $A \in C(S_1)$, por definición $e(A) = (g_1(A), -1, 0)$.
Cuando $A \in C_1$, por definición $e(A) = (g_1(A \cap S_1), 0 - 1, 0) = (g_1(A), -1, 0)$.

Por lo tanto e está bien definida en $C(S_1) \cup C_1$.

Caso 2. $A \in C(S_1) \cap C(L)$.

Por (e), sabemos que $A = \{p_1\} = \alpha([0, 0])$. De esta forma, al calcular e tenemos que:

Cuando $A \in C(S_1)$, por definición $e(A) = (g_1(\{p\}), -1, 0) = (0, 0, -1, 0)$.
Cuando $A \in C(L)$, por definición $e(A) = (-0, 0, -1, 0) = (0, 0, -1, 0)$.

Por lo tanto e está bien definida en $C(S_1) \cap C(L)$.

Caso 3. $A \in C(S_2) \cap C_2$.

Por (g), sabemos que $A \in C(p_2, S_2)$, así $A = A \cap S_2 = \alpha([1, 1]) \cup (A \cap S_2)$. De esta forma, al calcular e tenemos que:

Cuando $A \in C(S_2)$, por definición $e(A) = (-1, 0, g_2(A))$.
Cuando $A \in C_2$, por definición $e(A) = (-1, 0, g_2(A \cap S_2)) = (-1, 0, g_2(A))$.

Por lo tanto e está bien definida en $C(S_2) \cup C_2$.

Caso 4. $C(S_2) \cap C(L)$.

Por (i), sabemos que $A = \{p_2\} = \alpha([1, 1])$. De esta forma, al calcular e tenemos que:

Cuando $A \in C(S_2)$, por definición $e(A) = (-1, 0, g_2(\{p_2\})) = (-1, 0, 0, 0)$.
Cuando $A \in C(L)$, por definición $e(A) = (-1, 0, 1 - 1, 0) = (-1, 0, 0, 0)$.

Por la tanto e está bien definida en $C(S_2) \cup C(L)$.

Caso 5. $A \in C_1 \cap C_2$.

Por (j), sabemos que $A = L$. Entonces $A \cap S_i = \{p_i\}$ para $i \in \{1, 2\}$, y así $A = \{p_1\} \cup \alpha([0, 1]) = \alpha([0, 1]) \cup \{p_2\}$. De esta, forma al calcular e tenemos que:

Cuando $A \in C_1$, por definición $e(A) = (g_1(A \cap S_1), 0, 0) = (g_1(\{p_1\}), 1 - 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$.
Cuando $A \in C_2$, por definición $e(A) = (0, 0, g_2(A \cap S_2)) = (0, 0, g_2(\{p_2\})) = (0, 0, 0, 0)$.

Por lo tanto e está bien definida en $C_1 \cup C_2$.

Caso 6. $A \in C_1 \cap C_L$.

Por (k), sabemos que $A \in C(P)$ es tal que $L \subset A \subset L \cup S_1$. Entonces $A = (A \cap S_1) \cup \alpha([0, 1])$ y $A \cap S_2 = \{p_2\}$. De esta forma, al calcular e tenemos que:

Cuando $A \in C_1$, por definición $e(A) = (g_1(A \cap S_1), 1 - 1, 0) = (g_1(A \cap S_1), 0, 0)$.
Cuando $A \in C_L$, por definición $e(A) = (g_1(A \cap S_1), g_2(A \cap S_2)) = (g_1(A \cap S_1), g_2(\{p_2\})) = (g_1(A \cap S_1), 0, 0)$.

Por lo tanto e está bien definida en $C_1 \cup C_L$.

Caso 7. $A \in C_1 \cap C(L)$.

Por (l) sabemos que $A \in C(p_1, L)$. Entonces $A = (A \cap S_1) \cup \alpha([0, y])$, donde $A \cap S_1 = \{p_1\}$. De esta forma, al calcular e tenemos que:

Cuando $A \in C_1$, por definición $e(A) = (g_1(A \cap S_1), y - 1, 0) = (g_1(\{p_1\}), y - 1, 0) = (0, 0, y - 1, 0)$.

Cuando $A \in C(L)$, por definición $e(A) = (0, 0, y - 1, 0)$.

Por lo tanto e está bien definida en $C_1 \cup C(L)$.

Caso 8. $A \in C_2 \cap C_L$.

Por (m) sabemos que $A \in C(P)$ y $L \subset A \subset L \cup S_2$. Entonces $A = \alpha([0,1]) \cup (A \cap S_2)$ y $A \cap S_1 = \{p_1\}$. De esta forma, al calcular e tenemos que:

Cuando $A \in C_2$, por definición $e(A) = (-0, 0, g_2(A \cap S_2)) = (0, 0, g_2(A \cap S_2))$.
Cuando $A \in C_L$, por definición $e(A) = (g_1(A \cap S_1), g_2(A \cap S_2)) = (g_1(\{p_1\}), g_2(A \cap S_2)) = (0, 0, g_2(A \cap S_2))$.

Por lo tanto e está bien definida en $C_2 \cup C_L$.

Caso 9. $A \in C_2 \cap C(L)$.

Por (n) sabemos que $A \in C(p_2, L)$. Entonces $A = \alpha([x, 1]) \cup (A \cap S_2)$, donde $A \cap S_2 = \{p_2\}$. De esta forma, al calcular e tenemos que:

Cuando $A \in C_2$, por definición $e(A) = (-x, 0, g_2(A \cap S_2)) = (-x, 0, g_2(\{p_2\})) = (-x, 0, 0, 0)$.
Cuando $A \in C(L)$, por definición $e(A) = (-x, 0, 1 - 1, 0) = (-x, 0, 0, 0)$.

Por lo tanto e está bien definida en $C_2 \cup C(L)$.

Caso 10. $A \in C_L \cap C(L)$.

Por (ñ) sabemos que $A = \{L\}$. Entonces $A \cap S_1 = \{p_1\}$ y $A \cap S_2 = \{p_2\}$. De esta forma, al calcular e tenemos que:

Cuando $A \in C_L$, por definición $e(A) = (g_1(A \cap S_1), g_2(A \cap S_2)) = (g_1(\{p_1\}), g_2(\{p_2\})) = (0, 0, 0, 0)$.
Cuando $A \in C(L)$, por definición $e(L) = e(\alpha([0, 1])) = (0, 0, 0, 0)$.

Por lo tanto e está bien definida en $C_L \cup C(L)$.

Este análisis por casos demuestra que e está bien definida. ■

Lema 78 *Sea* $h : C(L) \to \mathbb{R}^2$ *la función dada por* $h(\alpha([x,y])) = (x,y)$. *Entonces* h *es continua e inyectiva.*

Demostración. Para ver que h es continua, sea $\{\alpha([x_n,y_n])\}_{n=1}^{\infty}$ una sucisión de elementos en $C(L)$ que converge a $\alpha([x,y])$. Como α es un homeomorfismo, tenemos que $\{[x_n,y_n]\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos en $[0,1]$ que converge a $[x,y]$. Esto implica que $\lim x_n = x$ y $\lim y_n = y$. Por lo tanto $\lim h(\alpha([x_n,y_n])) = \lim(x_n,y_n) = (x,y) = h(\alpha([x,y]))$. Lo que demuestra que h es continua.

Verifiquemos que h es inyectiva. Sean $\alpha([x_1,y_1])$ y $\alpha([x_2,y_2])$ dos elementos en $C(L)$ tales que $h(\alpha([x_1,y_1])) = h(\alpha([x_2,y_2]))$. Esto implica que $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$, por lo tanto $\alpha([x_1,y_1]) = \alpha([x_2,y_2])$. Lo que demuestra que h es inyectiva. ■

Lema 79 *Las siguientes funciones son continuas e inyectivas.*
(i) $e|_{C(S_1)} = (g_1,-1,0)$
(ii) $e|_{C(S_2)} = (-1,0,g_2)$
(iii) $e|_{C_1}$
(iv) $e|_{C_2}$
(v) $e|_{C_L}$
(vi) $e|_{C(L)}$

Demostración. Para ver (i) y (ii), notemos que $e|_{C(S_1)}$ y $e|_{C(S_2)}$ son continuas e inyectivas por que g_2 y g_2 son homeomorfismos.

Para ver (vi), recordemos que la función $e|_{C(L)}$ se aplia así: $e|_{C(L)}(\alpha([x,y])) = (-x,0,y-1,0)$. Por el Lema 78, $e|_{C(L)}$ es composición de funciones continuas e inyecticas, por lo tanto $e|_{C(L)}$ es continua e inyectiva.

Recordemos que, por el Lema 69, las funciones $f_i : C_i \to C(S_i)$, dadas por $f_i(A) = A \cap S_i$, son continuas para cada $i \in \{1,2\}$.

Recordemos que $e|_{C_1}((A \cap S_1) \cup \alpha([0,y])) = (g_1(A \cap S_1), y-1, 0)$. Por lo tanto $e|_{C_1}$es composición de funciones continuas, así que $e|_{C_1}$ es continua. Similarmente $e|_{C_2}$ es continua. Además $e|_{C_L} = (g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2)$ es continua.

Veamos que $e|_{C_1}$ es inyectiva. Sean $A = (A \cap S_1) \cup \alpha([0,y])$ y $B = (B \cap S_1) \cup \alpha([0,z])$ dos elementos de C_1 tales que $e|_{C_1}(A) = e|_{C_1}(B)$. Entonces, por definición:

$$(g_1(A \cap S_1), y-1, 0) = (g_1(B \cap S_1), z-1, 0)$$

Lo cual implica que $g_1(A \cap S_1) = g_1(B \cap S_1)$ y $y = z$. Como g_1 es inyectiva, tenemos que $A \cap S_1 = B \cap S_1$, por lo tanto $A = (A \cap S_1) \cup \alpha([0,y]) = (B \cap S_1) \cup \alpha([0,z]) = B$. Esto demuestra que $e|_{C_1}$ es inyectiva.

Veamos que $e|_{C_2}$ es inyectiva. Sean $A = \alpha([x,1]) \cup (A \cap S_2)$ y $B = \alpha([w,1]) \cup (B \cap S_2)$ dos elementos de C_2 tales que $e|_{C_2}(A) = e|_{C_2}(B)$. Entonces, por definición:

$$(-x, 0, g_2(A \cap S_2)) = (-w, 0, g_2(B \cap S_2)).$$

Lo cual implica que $g_2(A \cap S_2) = g_2(B \cap S_2)$ y $x = w$. Ya que g_1 es inyectiva, tenemos que $A \cap S_2 = B \cap S_2$, por lo tanto $A = \alpha([x,1]) \cup (A \cap S_2) = \alpha([w,1]) \cup (B \cap S_2) = B$. Esto demuestra que $e|_{C_1}$ es inyectiva.

Veamos que $e|_{C_L}$ es inyectiva. Sean A y B dos elementos de C_L tales que $e|_{C_L}(A) = e|_{C_L}(B)$. Por definición tenemos que:
$e|_{C_L}(A) = (g_1(A \cap S_1), g_2(A \cap S_2)) = (g_1(B \cap S_1), g_2(B \cap S_2)) = e|_{C_L}$.

Lo cual implica que $g_1(A \cap S_1) = g_1(B \cap S_1)$ y $g_2(A \cap S_2) = g_2(B \cap S_2)$. Como g_1 y g_2 son inyectivas, tenemos que $A \cap S_i = B \cap S_i$, para cada $i \in \{1,2\}$. Por lo tanto $A = (A \cap S_1) \cup L \cup (A \cap S_2) = (B \cap S_1) \cup L \cup (B \cap S_2) = B$. Esto demuestra que $e|_{C_L}$ es inyectiva.

Con esto terminamos la demostración de este lema. ■

Estos resultados nos para probar que la función $e : C(P) \to \mathbb{R}^4$ es continua e inyectiva.

Lema 80 *La función $e : C(P) \to \mathbb{R}^4$ es continua.*

Demostración. Notemos que e está definida en seis conjuntos cerrados de $C(P)$, a saber $C(S_1)$, $C(S_2)$, C_1, C_2, C_L y $C(L)$.

Por el Lema 79 sabemos que la función e restringida a cada uno de esos conjuntos es continua. En el Lema 77 verificamos que e está bien definida (pues coinciden las definiciones parciales de e en las respectivas intersecciones). Por lo tanto e es continua. ■

Nota 81 *Si $(z, 0)$ pertenece a $g_i(C(S_i)) = D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (2, 0)\| \leq 2\}$, con $i \in \{1, 2\}$, entonces $|z - 2| \leq 2$. Por lo tanto $z \geq 0$.*

Lema 82 *La función $e : C(P) \to \mathbb{R}^4$ es inyectiva.*

Demostración. Sean A y B dos elementos en $C(P)$, tales que $e(A) = e(B)$. Recordemos que $C(P) = C(S_1) \cup C(S_2) \cup C_1 \cup C_2 \cup C_L \cup C(L)$. Si A y B pertenecen a un mismo uniendo, por el Lema 79 tenemos que $A = B$, pues este lema nos dice que la restricción de e a cualquiera de esos conjuntos es inyectiva. Ahora debemos ver qué sucede si A y B no pertenecen al mismo uniendo. Analizamos los casos posibles.

Caso 1. $A \in C(S_1)$ y $B \in C(S_2)$.

Entonces $e(A) = (g_1(A), -1, 0)$ y $e(B) = (-1, 0, g_2(B))$.

Lo que implica que $g_1(A) = (-1, 0) = g_2(B)$. Lo que contradice la Nota 81, pues $-1 \not\geq 0$. Por lo tanto este caso no puede ser posible.

Caso 2. $A \in C(S_1)$ y $B \in C_1$.

Entonces $B = (B \cap S_1) \cup \alpha([0, y])$, así $e(A) = (g_1(A), -1, 0)$ y $e(B) = (g_1(B \cap S_1), y - 1, 0)$.

Lo que implica que $g_1(A) = g_1(B \cap S_1)$ y $y = 0$. Por ser g_1 inyectiva, tenemos que $A = B \cap S_1$. Por lo tanto $B = (B \cap S_1) \cup \alpha([0,0]) = B \cap S_1 = A$.

Caso 3. $A \in C(S_1)$ y $B \in C_2$.

Entonces $B = \alpha([x,1]) \cup (A \cap S_2)$, así $e(A) = (g_1(A), -1, 0)$ y $e(B) = (-x, 0, g_2(B \cap S_2))$.

Lo que implica que $g_2(B \cap S_2) = (-1, 0)$. Esto contradice la Nota 81, pues $-1 \ngeq 0$. Por lo tanto este caso no puede ser posible.

Caso 4. $A \in C(S_1)$ y $B \in C_L$.

Entonces $B = (B \cap S_1) \cup L \cup (B \cap S_2)$, así $e(A) = (g_1(A), -1, 0)$ y $e(B) = (g_1(B \cap S_1), g_2(B \cap S_2))$.

Lo que implica que $g_2(B \cap S_2) = (-1, 0)$. Esto contradice la Nota 81, pues $-1 \ngeq 0$. Por lo tanto este caso no puede ser posible.

Caso 5. $A \in C(S_1)$ y $B \in C(L)$.

Entonces $B = \alpha([x,,y])$, así $e(A) = (g_1(A), -1, 0)$ y $e(B) = (-x, 0, y - 1, 0)$.

Lo que implica que $g_1(A) = (-x, 0)$ y $y = 0$. Como $0 \leq x \leq y = 0$, tenemos que $x = 0$. De esta forma $g_1(A) = (0, 0)$ y $B = \alpha([0,0])$. Ya que g_1 es inyectiva, tenemos que $A = \{p_1\} = \alpha([0,0]) = B$.

Caso 6. $A \in C(S_2)$ y $B \in C_1$.

Entonces $B = (B \cap S_1) \cup \alpha([0,y])$, así $e(A) = (-1, 0, g_2(A))$ y $e(B) = (g_1(B \cap S_1), y - 1, 0)$.

Lo que implica que $g_1(B \cap S_1) = (-1, 0)$. Esto contradice la Nota 81, pues $-1 \ngeq 0$. Por lo tanto este caso no puede ser posible.

Caso 7. $A \in C(S_2)$ y $B \in C_2$.

Entonces $B = \alpha([x,1]) \cup (B \cap S_2)$, así $e(A) = (-1, 0, g_2(A))$ y $e(B) = (-x, 0, g_1(B \cap S_2))$.

Lo que implica $g_2(A) = g_2(B \cap S_2)$ y $x = 1$. Como $1 = x \leq y = 1$, tenemos que $y = 1$, de esta forma $B = (B \cap S_2) \cup \alpha([1,1])$. Ya que g_2 es inyectiva, tenemos que $A = (B \cup S_2)$. Por lo tanto $B = (B \cap S_2) \cup \alpha([1,1]) = B \cap S_2 = A$.

Caso 8. $A \in C(S_2)$ y $B \in C_L$.

Entonces $B = (B \cap S_1) \cup L \cup (B \cap S_2)$, así $e(A) = (-1, 0, g_2(A))$ y $e(B) = (g_1(B \cap S_1), g_2(B \cap S_2))$.

Lo que implica que $g_1(B \cap S_1) = (-1, 0)$. Esto contradice la Nota 81, pues $-1 \ngeq 0$. Por lo tanto este caso no puede ser posible.

Caso 9. $A \in C(S_2)$ y $B \in C(L)$.

Entonces $B = \alpha([x,y])$, así $e(A) = (-1, 0, g_2(A))$ y $e(B) = (-x, 0, y - 1, 0)$.

Lo que implica $g_2(A) = (y - 1, 0)$ y $x = 1$. Como $1 = x \leq y \leq 1$, tenemos que $y = 1$, de esta forma $g_2(A) = (0, 0)$ y $B = \alpha([1,1])$. Ya que g_2 es inyectiva, tenemos que $A = \{p_2\} = \alpha([1,1]) = B$.

Caso 10. $A \in C_1$ y $B \in C_2$.

Entonces $A = (A \cap S_1) \cup \alpha([0,y])$ y $B = \alpha([x,1]) \cup (B \cap S_2)$, así $e(A) = (g_1(A \cap S_1), y - 1, 0)$ y $e(B) = (-x, 0, g_2(B \cap S_2))$.

Lo que implica que $g_1(A \cap S_1) = (-x, 0)$ y $g_2(B \cap S_2) = (1 - y, 0)$. Por la Nota 81, sabemos que $-x \geq 0$ y $y - 1 \geq 0$, de donde deducimos que $x = 0$ y $y = 1$ pues $0 = x \leq y \leq 1$. Por lo tanto $g_1(A \cap S_1) = (0, 0)$ y $g_2(B \cap S_2) = (0, 0)$.

Como g_1 y g_2 son inyectivas, tenemos que $A \cap S_1 = \{p_1\}$ y $B \cap S_2 = \{p_2\}$. Por lo tanto $A = \{p_1\} \cup \alpha([0,1]) = L = \alpha([0,1]) \cup \{p_2\} = B$.

Caso 11. $A \in C_1$ y $B \in C_L$. $= \{A \in C(S_1 \cup L) : L \subset A\}$.

Entonces $A = (A \cap S_1) \cup \alpha([0, y])$ y $B = (B \cap S_1) \cup \alpha([0, 1]) \cup (B \cap S_2)$, así $e(A) = (g_1(A \cap S_1), y - 1, 0)$ y $e(B) = (g_1(B \cap S_1), g_2(B \cap S_2))$.

Lo que implica que $g_1(A \cap S_1) = g_1(B \cap S_1)$ y que $g_2(B \cap S_2) = (y - 1, 0)$. Por la Nota 81, sabemos que $y - 1 \geq 0$, así que $y = 1$.

De esta forma $g_2(B \cap S_2) = (0, 0)$, y como g_1 y g_2 son inyectivas, tenemos que $A \cap S_1 = B \cap S_1$ y $B \cap S_2 = \{p_2\}$. Por lo tanto $A = (A \cap S_1) \cup \alpha([0, 1]) = (B \cap S_1) \cup \alpha([0, 1]) \cup \{p_2\} = B$.

Caso 12. $A \in C_1$ y $B \in C(L)$.

Entonces $A = (A \cap S_1) \cup \alpha([0, y])$ y $B = \alpha([x, z])$, así $e(A) = (g_1(A \cap S_1), y - 1, 0)$ y $e(B) = (-x, 0, z - 1, 0)$.

Lo que implica que $g_1(A \cap S_1) = (-x, 0)$ y que $y = z$. Por la Nota 81, tenemos que $-x \geq 0$ y como $0 \leq x$, obtenemos que $x = 0$. De esta forma $g_1(A \cap S_1) = (0, 0)$. Ya que g_1 es inyectiva, tenemos que $A \cap S_1 = \{p_1\}$. Por lo tanto $A = \{p_1\} \cup \alpha([0, y]) = \alpha([0, z]) = B$.

Caso 13. $A \in C_2$ y $B \in C_L$.

Entonces $A = \alpha([x, 1]) \cup (A \cap S_2)$ y $B = (B \cap S_1) \cup \alpha([0, 1]) \cup (B \cap S_2)$, así $e(A) = (-x, 0, g_2(A \cap S_2))$ y $e(B) = (g_1(B \cap S_1), g_2(B \cap S_2))$.

Lo que implica que $g_1(B \cap S_1) = (-x, 0)$ y que $g_2(A \cap S_2) = g_2(B \cap S_2)$. Por la Nota 81, tenemos que $-x \geq 0$ y como $0 \leq x$, obtenemos que $x = 0$, de esta forma $g_1(B \cap S_1) = (0, 0)$. Como g_1 y g_2 son inyectivas, tenemos que $B \cap S_1 = \{p_1\}$ y $A \cap S_2 = B \cap S_2$. Por lo tanto $B = (\{p_1\}) \cup \alpha([0, 1]) \cup (B \cap S_2) = \alpha([0, 1]) \cup (A \cap S_2) = A$.

Caso 14. $A \in C_2$ y $B \in C(L)$.

Entonces $A = \alpha([x, 1]) \cup (A \cap S_2)$ y $B = \alpha([z, y])$, así $e(A) = (-x, 0, g_2(A \cap S_2))$ y $e(B) = (-z, 0, y - 1, 0)$.

Lo que implica que $x = z$ y $g_2(A \cap S_2) = (y-1, 0)$. Por la Nota 81, tenemos que $y - 1 \geq 0$, de esto $y = 1$. Por lo tanto $g_2(A \cap S_2) = (0, 0)$; y como g_2 es inyectiva, tenemos que $A \cap S_2 = \{p_2\}$. Así $A = \alpha([x, 1]) \cup (A \cap S_2) = \alpha([x, 1]) \cup \{p_2\} = B$.

Caso 15. $A \in C_L$ y $B \in C(L)$.

Entonces $A = (A \cap S_1) \cup \alpha([0, 1]) \cup (A \cap S_2)$ y $B = \alpha([x, y])$, así $e(A) = (g_1(A \cap S_1), g_2(A \cap S_2))$ y $e(B) = (-x, 0, y - 1, 0)$.

Lo que implica que $g_1(A \cap S_1) = (-x, 0)$ y $g_2(B \cap S_2) = (1 - y, 0)$. Por la Nota 81, sabemos que $-x \geq 0$ y $y - 1 \geq 0$, de donde deducimos que $x = 0$ y $y = 1$ pues $0 = x \leq y \leq 1$. Por lo tanto $g_1(A \cap S_1) = (0, 0)$ y $g_2(B \cap S_2) = (0, 0)$.

Como g_1 y g_2 son inyectivas, tenemos que $A \cap S_1 = \{p_1\}$ y $B \cap S_2 = \{p_2\}$. Por lo tanto $A = \{p_1\} \cup \alpha([0, 1]) \cup \{p_2\} = L = \alpha([0, 1]) = B$.

Esto termina demostración de que e es una función inyectiva. ■

Teorema 83 *El hiperespacio $C(P)$ se puede encajar en $\mathbb{R}^4$.*

Demostración. Por los Lemas 80 y 82, sabemos que la función $e : C(P) \to \mathbb{R}^4$ es continua e inyectiva. Ya que $C(P)$ es un espacio compacto y $\mathbb{R}^4$ es un espacio Hausdorff, tenemos que e es un encaje. Por lo tanto el hiperespacio $C(8)$ se puede encajar en $\mathbb{R}^4$. ■

Bibliografía

[1] A. Illanes, *Cells and Cubes in Hyperspaces*, Fund. Math., 130 (1988), 5765.

[2] A. Illanes, *Hiperespacios de Continuos*, Sociedad Matemática Mexicana, Número 28, 2004.

[3] A. Illanes and S. B. Nadler, Jr., *Hiperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[4] A. M. Dilks, *Structure of Hyperspaces*, Dissertation, Tulane University, New Orleans, La., (1980); J. T. Rogers, Jr., Director of Dissertation.

[5] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 28, Providence, RI, 1942, reprinted with corrections 1971.

[6] J. J. Charatonik, *On ramifications points in the classical sence*, Fund. Math. 51 (1962), 229-252.

[7] Lynn Arthur Steen, J. Arthur Seebach, J.r., *Counter Examples in Topology*, Douver, 1970.

[8] N. Ordoñez R., Encajes de Hiperespacios, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias UNAM, Febrero 2007.

[9] R. Molski. On Symmetric Products, Fund. Math, 44 (1957), 165-170.

[10] S. B. Nadler, Jr., *Continuun Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, Inc., New York, Besel and Hong Kong, 1992.

[11] S. B. Nadler, Jr., *Dimension theory: an Introduction whit Exercises*, Sociedad Matemática Mexicana, Número 18, 2002.

[12] V. Martínez de la Vega, *El Hiperespacio de Continuos con la Topología Producto*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias UNAM, Julio 1998.