

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

**Convección natural en un fluido confinado
entre esferas concéntricas (gravedad
laboratorio)**

por Demian Rodríguez Alvear

*Tesis para obtener el grado de
Ingeniero Mecánico
México, D.F., enero de 2009*

Dr. Rubén Ávila Rodríguez
Director de tesis





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A mi madre, María Concepción Alvear Herrera y a mi hermano Oscar, por su apoyo y amor incondicional a lo largo de este proceso.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por su instrucción en muchas áreas para mi formación personal.

Índice general

Resumen	VII
Lista de símbolos	IX
1. Introducción	1
1.1. Objetivo	4
2. Modelo físico y descripción de casos resueltos	5
3. Modelo matemático	9
3.1. Ecuación de continuidad	9
3.2. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento	9
3.3. Ecuación de la energía	10
3.4. Solución analítica de la ecuación de difusión de calor	11
3.5. Número de Rayleigh	12
3.6. Definición del número de Nusselt para la esfera interna (forma analítica)	13
3.7. Definición del número de Nusselt local	15

4. Resultados	19
4.1. Problema unidimensional, caso difusivo	19
4.2. Problema unidimensional, caso difusivo con fuente de calor . .	20
4.3. Distribución de la temperatura en distintos sectores de la esfera	21
4.4. Distribución de la temperatura en distintos sectores de la esfera con término fuente	23
4.5. Número de Nusselt difusivo (forma numérica)	24
4.6. Patrones de flujo cuando la gravedad actúa en una sola dirección	24
5. Conclusiones y trabajo a futuro	33
A. Algoritmo cubo-esfera	35
B. Ecuación de continuidad en coordenadas esféricas	39
C. Ecuaciones de conservación de momento en coordenadas esféricas	41
D. Ecuación de la energía para difusión de calor en coordenadas esféricas	43
E. Método de elementos espectrales	45
. Bibliografía	46

Índice de figuras

1.1. Patrones de flujo reportados por Bishop et al. (a) crescent-eddy, (b) kidney-shaped-eddy y (c) falling-vortices (Bishop et al., 1966)	2
2.1. Sección de esferas concéntricas con fluido confinado entre ellas	5
2.2. División de la esfera en seis regiones	6
2.3. Sección de esferas concéntricas, distintas temperaturas en diversas regiones	6
2.4. Sección de esferas concéntricas a distintas temperaturas con fluido confinado, la gravedad actúa en una sola dirección . . .	7
3.1. Volumen de control diferencial para coordenadas cartesianas .	10
3.2. Componentes del flujo de calor y vector unitario en un nodo sobre una superficie S_i	16
4.1. Comparación numérica y analítica del caso de difusión unidimensional	20
4.2. Comparación numérica y analítica del caso de difusión unidimensional, con una fuente de calor	21
4.3. Temperaturas en distintos sectores de las esferas	21
4.4. Distribución de temperaturas cuando las temperaturas iniciales son distintas en diversas regiones	22
4.5. Distribución de temperaturas cuando las temperaturas iniciales son distintas en diversos sectores con término fuente . .	23

4.6.	Distribución de temperaturas concéntrico en todos casos desarrollados	24
4.7.	Distribución de velocidades casos: $Ra= 1.4 \times 10^5$, $Ra= 5.3 \times 10^5$ y $Ra= 1.0 \times 10^6$	25
4.8.	Rango en el que se encuentran los centros de rotación de los patrones de flujo	26
4.9.	(a) $Ra=1.0 \times 10^5$, $\eta = 2.0$, $Pr= 0.7$ (Chiu and Chen, 1996) (b) $Ra=1.0 \times 10^5$, $\eta = 2.0$, $Pr= 0.7$ (Chu and Lee, 1993)	27
4.10.	(a) $Ra=1.4 \times 10^5$ (b) $Ra=1.4 \times 10^5$ visualización tridimensional	27
4.11.	$Ra= 5.74 \times 10^5$, $\eta = 1.78$, $Pr= 0.7$ (Yin et al., 1973)	28
4.12.	(a) $Ra=5.3 \times 10^5$ (b) $Ra=5.3 \times 10^5$ visualización tridimensional	28
4.13.	Patrón de flujo “crescent-eddy”, $Ra= 9.56 \times 10^5$, $\eta = 1.72$ (Bishop et al., 1966)	29
4.14.	(b) $Ra=1 \times 10^6$ (b) $Ra=1 \times 10^6$ visualización tridimensional .	29
4.15.	(a) $Ra=2 \times 10^6$ (b) $Ra=2 \times 10^6$ visualización tridimensional (c) $Ra=5 \times 10^6$ (d) $Ra=5 \times 10^6$ visualización tridimensional . .	30
4.16.	(a) $Ra=10 \times 10^6$ (b) $Ra=10 \times 10^6$ visualización tridimensional	31
A.1.	Descomposición de una esfera en seis regiones	36
A.2.	Transformación de posiciones cubo-esfera	36
D.1.	Volumen de control diferencial para coordenadas esféricas . . .	43

Resumen

Esta tesis trata sobre la simulación numérica de un fluido incompresible confinado entre dos esferas concéntricas con gravedad orientada a lo largo de uno de los ejes del sistema de coordenadas cartesiano (gravedad laboratorio). Las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía son resueltas numéricamente utilizando el método de Elementos Espectrales.

Con el propósito de validar el esquema numérico desarrollado en esta tesis para generar la discretización del sistema de esferas concéntricas (algoritmo Cubed-Sphere) se realizó la simulación numérica de cuatro casos:

- (1) Difusión de calor en esferas concéntricas (problema unidimensional).
- (2) Difusión de calor en esferas concéntricas con fuente de calor (problema unidimensional).
- (3) Difusión de calor tridimensional considerando sectores de la esfera con diferente temperatura.
- (4) Difusión de calor tridimensional considerando sectores de la esfera con diferente temperatura y con fuente de calor.
- (5) Convección natural de un fluido (agua) confinado en un ánulo esférico, en donde la fuerza de gravedad actúa en la dirección x_3 del sistema coordinado (gravedad laboratorio).

Los resultados obtenidos en la simulación de los seis casos, se comparan satisfactoriamente con soluciones analíticas, numéricas y con datos experimentales previamente publicados en la literatura.

Lista de símbolos

Alfabeto Español

C_1, C_2	constantes de integración
$\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$	vector gravedad [m/s ²]
h	coeficiente de transferencia de calor [W/m ² ·K]
k	conductividad térmica [W/m·K]
$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$	vector normal unitario []
P	presión [N/m ²]
\dot{q}	fuelle de calor [W/m ³]
q	flujo de calor por unidad de superficie [W/m ²]
$\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$	vector flujo de calor [W/m ²]
q_n	flujo de calor a lo largo del vector unitario [W/m ²]
R	coordenada radial adimensional
r_i	radio de esfera interna [m]
r_o	radio de esfera externa [m]
r	coordenada radial [m]
Δr	diferencia de radios $\Delta r = (r_o - r_i)$
T	temperatura [°C]
T_i	temperatura de la esfera interna [°C]
T_o	temperatura de la esfera externa [°C]
ΔT	diferencia de temperaturas $\Delta T = (T_i - T_o)$
t	tiempo [s]
$\vec{v} = (v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3})$	vector velocidad [m/s]
$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$	vector de posición [m]

Símbolos Griegos

α	difusividad térmica [m ² /s]
β	coeficiente de expansión volumétrica [1/K]
η	relación de radios r_o/r_i
ρ_r	densidad de referencia del agua a 0°C [kg/m ³]
ρ	densidad del agua [kg/m ³]
ψ	ángulo de variación del centro de rotación del vórtice [°]
ν	viscosidad cinemática [m ² /s]
μ	viscosidad dinámica [N·s/m ²]
θ	temperatura adimensional

Números Adimensionales

Gr	Número de Grashoff
Nu	Número de Nusselt
\overline{Nu}_i	Número de Nusselt promedio en la esfera interna
Nu_i	Número de Nusselt local en la esfera interna
\overline{Nu}_o	Número de Nusselt promedio en la esfera externa
Nu_o	Número de Nusselt local en esfera externa
Pr	Número de Prandtl
Ra	Número de Rayleigh
Ra_c	Número de Rayleigh crítico

Capítulo 1

Introducción

La convección natural de un fluido confinado entre esferas concéntricas se presenta en la naturaleza y en la industria, en los fenómenos naturales se presenta en el interior de los planetas y la convección del magma terrestre; en la industria se encuentra en colectores de energía solar, sistemas para el diseño de reactores nucleares, diseño de cabinas para avión, diseño de tanques de doble pared, el análisis del comportamiento del fluido lubricante en los giróscopos, etc. Las investigaciones han sido tanto teóricas (Mack and Hardee, 1968), como numéricas ((Ingham, 1981), (Fujii et al., 1984), (Garg, 1992), (Chiu and Chen, 1996), (Tamire and Wrigth, 1998), (Liu and Egbers, 2000), (Wu et al., 2004)) y experimentales ((Bishop et al., 1966), (Scanlan et al., 1970), (Yin et al., 1973), (Powe et al., 1980)). A continuación se describe brevemente lo más relevante de los trabajos publicados sobre el tema de convección natural en esferas concéntricas con gravedad laboratorio.

En los estudio de la convección natural en esferas concéntricas llevados a cabo por Bishop et al., (1966) utilizando aire, se identificaron tres tipos de patrones de flujo al variar la relación de radios entre las esferas ($\eta = r_o/r_i$), estos patrones se conocen (en inglés) como: “crescent-eddy” (ocurren, con mayor frecuencia, con una relación de radios de 1.37 y 1.72); “kidney-shaped-eddy” (ocurren a una relación de radios de 2.53 y 3.14) y “falling-vortices” (ocurren a una relación de radios de 1.19). Bishop et al., (1966) encontraron que los patrones “crescent-eddy” y “kidney-shaped-eddy” son estacionarios y monocelulares, mientras que los patrones “falling-vortices” son no estacionarios y multicelulares. Bishop et al., (1966), además de describir los patrones de flujo presentan una relación entre los números de Nusselt y Grashof.

Mack y Hardee (1968) llevaron a cabo un análisis teórico del trabajo

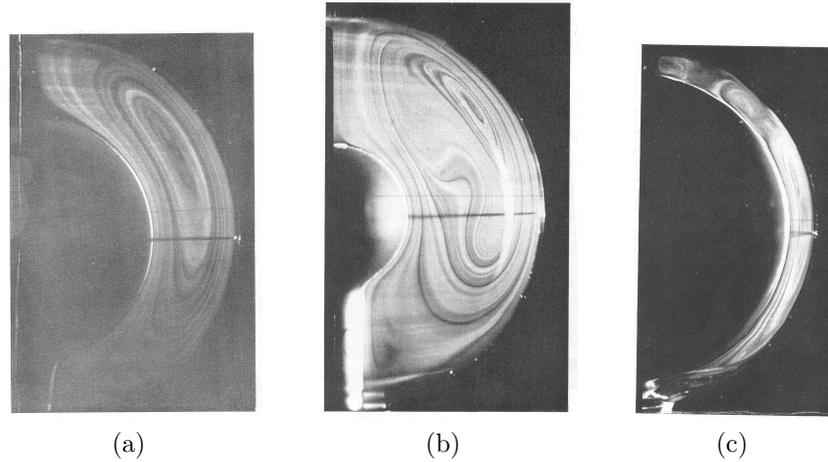


Figura 1.1: Patrones de flujo reportados por Bishop et al. (a) crescent-eddy, (b) kidney-shaped-eddy y (c) falling-vortices (Bishop et al., 1966)

experimental llevado a cabo por Bishop et al., (1966) con bajos números de Rayleigh ($79 < Ra < 1000$) y distintas relaciones de radios ($1.15 < \eta < 3.0$), desarrollaron los procedimientos teóricos para describir los patrones de flujo “crescent-eddy” y “falling-vortices” (Bishop et al., 1966).

Scanlan et al., (1970) experimentaron variando el número de Prandtl ($4.7 < Pr < 4148$), y distintos números de Rayleigh ($1.3 \times 10^3 < Ra < 5.8 \times 10^8$), tomaron en cuenta los resultados obtenidos por Mack y Hardee (1968) para hacer una evaluación analítica en el caso del aire. Entre los resultados obtenidos por Scanlan et al., (1970) se puede mencionar la relación entre el número de Rayleigh y el coeficiente de conductividad térmica, además de presentar los perfiles de temperatura para los experimentos.

Yin et al., (1973) experimentaron con distintas relaciones de radios ($1.09 < \eta < 2.17$) y variaron los números de Grashof ($1.7 \times 10^3 < Gr < 1.5 \times 10^7$); observaron los patrones de flujo “crescent-eddy” y “kidney-shaped-eddy” discerniendo en qué momento estos flujos son no estacionarios por medio de una gráfica entre el número de Grashof y la relación de radios.

Powe et al., (1980) , experimentaron con distintos números de Prandtl ($0.7 < Pr < 4000$), enfocándose en tres casos principalmente: esferas concéntricas, esferas excéntricas y cilindro confinado dentro de una esfera variando la razón de aspecto entre dichas geometrías ($1.4 < \eta < 2.17$). En el caso de esferas concéntricas Powe et al. (1980) identificaron el patrón de flujo

“crescent-eddy” para bajos y altos número de Rayleigh, además obtuvieron gráficas en donde se puede observar el comportamiento estacionario y no estacionario de los patrones de flujo dependiendo de las geometrías y de los números de Prandtl .

Ingham (1981) resolvió las ecuaciones bidimensionales de Navier-Stokes por medio de Diferencias Finitas para los casos de convección natural de un flujo confinado entre un cilindro y una esfera y para el caso de convección natural de un fluido confinado entre esferas concéntricas. Ingham (1981) utilizó aire ($Pr = 0.7$), una relación de radios $\eta = 2$ con números de Rayleigh $10^3 < Ra < 2.5 \times 10^7$, los tamaños de malla que utilizó fueron: 21×11 , 31×11 , 31×16 , 41×21 , 61×31 , 81×41 y 81×81 . Ingham reprodujo satisfactoriamente los resultados analíticos de Mack y Hardee (1968), además obtuvo gráficas donde describió de qué manera varía el número de Nusselt a lo largo del anulo esférico.

Fujii y Honda (1984) resolvieron la ecuaciones de Navier-Stokes por medio de Diferencias Finitas para obtener una solución a la convección libre laminar transitoria de un fluido confinado entre dos esferas concéntricas con número de Prandtl $Pr = 0.7$ y número de Rayleigh $Ra = 100$. El radio de la esfera mayor es 40 veces más grande que el de la esfera interior. Graficaron los números de Nusselt promedio \overline{Nu} a distintos tiempos para los casos de conducción, convección transitoria y convección estacionaria.

V. K. Garg (1992) utilizó Diferencias Finitas para la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes para distintos números de Rayleigh ($10^2 < Ra < 10^6$) con mallas de 41×46 y 61×61 . Los resultados fueron hechos con una razón de diámetros de 2.0 y distintos números de Prandtl: 0.02 (metal líquido), 0.7 (aire) y 6.0 (agua). Reprodujo satisfactoriamente los resultados de Singh y Chen (1980) y Mack y Hardee (1968).

Chiu y Chen (1996) utilizaron Diferencias Finitas con una malla de 41×41 en dos dimensiones en los casos de esferas concéntricas y esferas excéntricas. Verificaron su método comparando con los resultados de Yin et al. (1973) y Caltagirone et al. (1980), además hicieron una comparación de los números de Nusselt promedio (\overline{Nu}) con la literatura publicada, obteniendo resultados similares. Hicieron simulaciones con una relación de radios $\eta = 2.0$, número de Prandtl de 0.7 y con números de Rayleigh $10^4 < Ra < 10^5$. Describieron los fenómenos por medio de patrones de flujo donde observaron que la convección laminar es el modo dominante de la transferencia de calor. Concluyen que el número de Nusselt promedio \overline{Nu} es dependiente del número de Rayleigh y de la eccentricidad.

Tamire y Wriqth (1998) utilizaron Diferencias Finitas para resolver las ecuaciones bidimensionales de Navier-Stokes con distintos tamaños de malla (61×21 la más burda hasta 181×26 la más fina), con número de Prandtl $Pr = 0.7$ variando los números de Grashof ($4.7 \times 10^3 < Gr < 3.2 \times 10^5$) y relaciones de radios ($1.2 < \eta < 1.4$). Validaron sus resultados con trabajos anteriores. Obtuvieron las distribuciones de los números de Nusselt promedio y describieron el efecto de los distintos patrones de flujo sobre la transferencia de calor.

Liu y Egbers (2000), resolvieron las ecuaciones tridimensionales de Navier-Stokes por medio de Diferencias Finitas. Trabajaron con un fluido con un número de Prandtl $Pr = 37.5$, una relación de radios de 0.08 y distintos números de Rayleigh ($1500 < Ra < 20000$). Describieron patrones de flujo, destacando las celdas tipo “banana” las cuales bajan desde el hemisferio norte y se modifican a medida que aumentan el número de Rayleigh. También hicieron un análisis del transporte de calor encontrando relaciones entre los números de Nusselt y Rayleigh, además de compararlos con otras relaciones ya encontradas.

Wu, Tsai y Chou (2004) investigaron la convección natural de un fluido confinado entre esferas concéntricas y excéntricas utilizando el método de Sorenson modificado con distintos números de Prandtl (158, 405 y 720), y números de Rayleigh ($5 \times 10^3 < Ra < 6.5 \times 10^4$) y relación de radios de 2. Concluyeron que la transferencia de calor y los números de Rayleigh varían dependiendo de la eccentricidad

1.1. Objetivo

- Estudiar la transferencia de calor por convección natural y los patrones de flujo de un fluido confinado entre esferas concéntricas con relación de radios $\eta = 2.857$ y distintos números de Rayleigh ($1.4 \times 10^5 < Ra < 10 \times 10^6$) en donde la fuerza de gravedad se orienta a lo largo del eje x_3 del sistema de coordenadas (gravedad laboratorio).

Capítulo 2

Modelo físico y descripción de casos resueltos

En los casos abordados en esta tesis la geometría de estudio es un par de esferas concéntricas. El radio de la esfera interna es r_i y el radio de la esfera externa es r_o . Entre las dos esferas hay un fluido confinado. Las temperaturas de la esferas son distintas: la esfera interna tiene una temperatura T_i y la esfera externa tiene una temperatura T_o (ver fig. 2.1). La temperatura T_i es mayor que la temperatura T_o .

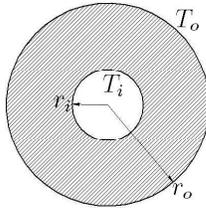


Figura 2.1: Sección de esferas concéntricas con fluido confinado entre ellas

Para resolver las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y la ecuación de la energía usando el método de Elementos Espectrales se discretizó el sistema de esferas concéntricas en seis regiones (ver fig. 2.2), haciendo uso del algoritmo Cubo-Esfera (ver Apéndice A).

En esta tesis, con el propósito de verificar el algoritmo, se resolvieron cinco casos.

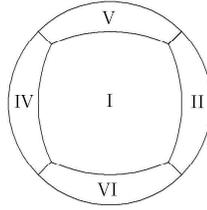


Figura 2.2: División de la esfera en seis regiones

En el primer caso se estudia la difusión de calor unidimensional. Comparamos los resultados numéricos con los analíticos para validar el método numérico. No se tomó en cuenta la fuerza de gravedad.

En el segundo caso se incluye una fuente de calor por unidad de volumen constante y uniforme. Se resuelve analítica y numéricamente para comprobar la exactitud de los resultados.

En el tercer caso de estudio, como se puede ver en la fig. 2.3, se supone que las temperaturas en el centro, en los polos y en el ecuador son distintas: de 0° a 90° y de 180° a 270° tenemos una temperatura T_2 ; de 90° a 180° tenemos una temperatura T_1 ; de 270° a 0° tenemos una temperatura T_2 y la esfera interna tiene una temperatura T_3 .

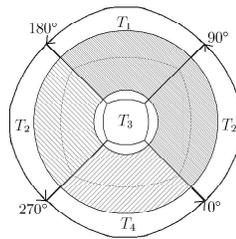


Figura 2.3: Sección de esferas concéntricas, distintas temperaturas en diversas regiones

Como cuarto caso se tiene la misma distribución de temperaturas que en el caso anterior, sin embargo se incluye una fuente de calor tridimensional.

En el quinto y último caso se hace el estudio de la convección natural, como se puede ver en la fig. 2.4, el caso es similar al primero, la diferencia está en que en este se toma en cuenta la gravedad la cual actúa en la dirección (x_3) .

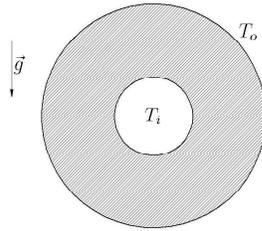


Figura 2.4: Sección de esferas concéntricas a distintas temperaturas con fluido confinado, la gravedad actúa en una sola dirección

El fluido en de trabajo es agua, sus propiedades la podemos encontrar en la tabla 2.1.

Propiedad	Símbolo	Unidades	Valor
Densidad	ρ	kg/m ³	1000
Viscosidad cinemática	ν	m ² /s	1.75x10 ⁻⁶
Difusividad térmica	α	m ² /s	1.32x10 ⁻⁷
Conductividad térmica	k	W m ⁻¹ K ⁻¹	0.569

Tabla 2.1: Propiedades del Agua

Capítulo 3

Modelo Matemático

En las siguientes secciones se presentarán los modelos matemáticos que son utilizados para la solución de los distintos casos que se tratan en esta tesis.

3.1. Ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_3} = 0 \quad (3.1)$$

donde \vec{v} es el vector velocidad del fluido; x_1 , x_2 y x_3 son las coordenadas; v_{x_1} , v_{x_2} y v_{x_3} son las velocidades en la dirección de x_1 , x_2 y x_3 respectivamente.

La cual nos dice que se trata de un fluido incompresible (White, 1979). La forma de la ecuación de continuidad en coordenadas esféricas la podemos encontrar en el Apéndice B.

3.2. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

Esta ecuación es resultado del análisis de esfuerzos sobre un elemento del fluido.

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho\beta(T_o - T)g_i + \mu\nabla^2 v_i \quad (3.2)$$

Donde el segundo término de la ecuación es debido a la aproximación de Bussinesq. La variación de la densidad propicia el movimiento de flotación del fluido.

3.3. Ecuacion de la energía

Tomando en cuenta un volumen de control diferencial en coordenadas cartesianas y los flujos de calor tenemos (ver fig. 3.1):

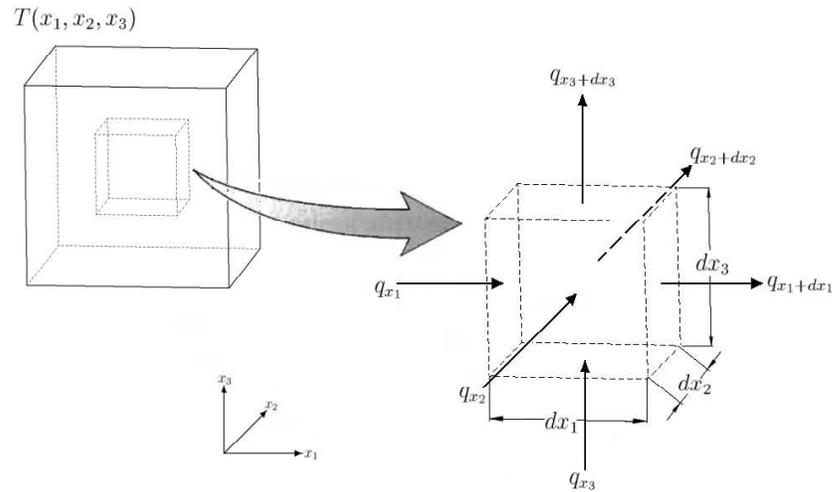


Figura 3.1: Volumen de control diferencial para coordenadas cartesianas

La siguiente es la ecuación de energía para coordenadas cartesianas (ec. 3.3) (White, 2003).

$$\frac{\alpha}{k} \frac{DT}{Dt} + P(\nabla \cdot \vec{v}) = \nabla \cdot (k\nabla T) \quad (3.3)$$

Donde P es la presión. Despreciando los términos convectivos obtenemos la ecuación de difusión de calor en forma general para coordenadas cartesianas (ec. 3.4)(Incropera and DeWitt, 2002).

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.4)$$

Donde α es la difusividad térmica, k la conductividad térmica y \dot{q} es una fuente de calor. La forma de la ecuación de la energía para el caso difusivo en coordenadas esféricas la podemos encontrar en el apéndice D.

3.4. Solución analítica de la ecuación de difusión de calor

En los casos de estudio consideramos que la variación del flujo de calor solamente es en dirección del radio y además es estacionario; lo que determina que en la dirección de θ , de ϕ y en el tiempo, la temperatura (T) no cambia. Tomando en cuenta lo anterior en la ec. D.2 del apéndice D tenemos

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{q} = 0 \quad (3.5)$$

Para saber la distribución de las temperaturas, primero, integramos la ec. (3.5), lo que nos queda

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\dot{q}r}{3k} + \frac{C_1}{r^2} \quad (3.6)$$

Integrando nuevamente

$$T = -\frac{\dot{q}r^2}{6k} - \frac{C_1}{r} + C_2 \quad (3.7)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración. Para obtener dichas constantes sabemos que en r_o tenemos una temperatura T_o y en r_i una temperatura T_i (ver fig. D.1). Por lo tanto

$$T_o = -\frac{\dot{q}r_o^2}{6k} - \frac{C_1}{r_o} + C_2 \quad (3.8)$$

$$T_i = -\frac{\dot{q}r_i^2}{6k} - \frac{C_1}{r_o} + C_2 \quad (3.9)$$

Despejamos C_2 de la ec. (3.8) y sustituimos en la ec. (3.9), obteniendo el valor de C_1

$$C_1 = \frac{r_o r_i [6k(T_i - T_o) - \dot{q}(r_o^2 - r_i^2)]}{6k(r_i - r_o)} \quad (3.10)$$

Sustituimos el valor de C_1 en la ec. (3.9), obteniendo C_2

$$C_2 = T_o + \frac{\dot{q}r_o^2}{6k} + \frac{r_i[6k(T_i - T_o) - \dot{q}(r_o^2 - r_i^2)]}{6k(r_i - r_o)} \quad (3.11)$$

Finalmente, sustituyendo los valores de C_1 y C_2 en la ec. (3.7) tenemos la forma de la distribución de temperaturas en el caso difusivo

$$T = -\frac{\dot{q}r^2}{6k} - \frac{1}{r} \left[\frac{r_o r_i [6k(T_i - T_o) - \dot{q}(r_o^2 - r_i^2)]}{6k(r_i - r_o)} \right] + \frac{\dot{q}r_o^2}{6k} + \frac{r_i[6k(T_i - T_o) - \dot{q}(r_o^2 - r_i^2)]}{6k(r_i - r_o)} + T_o \quad (3.12)$$

3.5. Número de Rayleigh

El número de Rayleigh está definido por:

$$Ra = \frac{g\beta(r_o - r_i)^3 \Delta T}{\nu\alpha} \quad (3.13)$$

Donde ν es la viscosidad cinemática, α es la difusividad térmica y g es la gravedad. El coeficiente de expansión volumétrica β está dado por:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \quad (3.14)$$

Donde ρ es la densidad. La relación densidad-temperatura se aproxima por un polinomio de 4to. grado mediante la siguiente ecuación:

$$\rho = \frac{\rho_r}{1 + aT + bT^2 + cT^3 + dT^4} \quad (3.15)$$

Donde ρ_r es la densidad del agua a $T_r = 0^\circ\text{C}$, y a , b , c , y d son los coeficientes dados por:

$$\begin{aligned} a &= -0.67896452 \times 10^{-4} \text{C}^{-3} & b &= -0.907294338 \times 10^{-5} \text{C}^{-2} \\ c &= -0.96456812 \times 10^{-4} \text{C}^{-3} & d &= -0.873702983 \times 10^{-9} \text{C}^{-4} \end{aligned}$$

Diferenciamos 3.15 con respecto a T :

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = -\rho_r \frac{a + 2bT + 3cT^2 + 4dT^3}{(1 + aT + bT^2 + cT^3 + dT^4)^2} \quad (3.16)$$

Entonces, sustituimos (3.15) y (3.16) en (3.14) :

$$\beta = \frac{\rho_r}{\rho} \frac{a + 2bT + 3cT^2 + 4dT^3}{(1 + aT + bT^2 + cT^3 + dT^4)^2} \quad (3.17)$$

3.6. Definición del número de Nusselt para la esfera interna (forma analítica)

Según Garg (1992) el número de Nusselt local para la esfera interna está dado por

$$\text{Nu}_i = -\frac{r_i}{r_o} \frac{\partial \theta}{\partial R} \Big|_{R=0} \quad (3.18)$$

donde

$$\theta = \frac{T - T_o}{\Delta T} \quad (3.19)$$

y

$$R = \frac{r - r_i}{\Delta r} \quad (3.20)$$

diferenciando (3.19) y (3.20) tenemos

$$\partial\theta = \frac{\partial T}{\Delta T} \quad (3.21)$$

$$\partial R = \frac{\partial r}{\Delta r} \quad (3.22)$$

sustituimos (3.21) y (3.22) en (3.18) obteniendo una ecuación en función de parámetros conocidos

$$\text{Nu}_i = - \frac{r_i}{r_o} \frac{\Delta r}{\Delta T} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_i} \quad (3.23)$$

de la relación entre radios y temperaturas para el caso difusivo entre dos esferas concéntricas (Eckert and Drake, 1972) despejamos T

$$T = \Delta T \left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o}}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}} \right) + T_o \quad (3.24)$$

derivamos (3.24) respecto a r y evaluamos en r_i teniendo que

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_i} = - \frac{\Delta T}{r_i^2 \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o} \right)} \quad (3.25)$$

sustituyendo (3.25) en (3.23) obteniendo

$$\text{Nu}_i = \frac{r_i \Delta r}{r_o \Delta T} \frac{\Delta T}{r_i^2 \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o} \right)}$$

reduciendo términos obtenemos que

$$\text{Nu}_i = 1 \quad (3.26)$$

3.7. Definición del número de Nusselt local

Sabemos que el Nu local está definido por

$$\text{Nu} = \frac{h \Delta r}{k} \quad (3.27)$$

donde h es el coeficiente de transferencia de calor y k es la conductividad térmica. Entonces el h quedaría definido por

$$h = - \frac{r_i k}{r_o \Delta T} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (3.28)$$

por lo tanto, tomando en cuenta lo discutido en la sección anterior, tenemos que

$$\text{Nu} = - \frac{r_i \Delta r}{r_o k \Delta T} \left(k \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (3.29)$$

que para el caso en estudio se calcularía en los nodos que conforman la esfera, tomando en cuenta, un vector unitario perpendicular a la superficie en cada uno de los nodos, suponiendo que el flujo de calor va en dirección de dicho vector unitario (ver fig. 3.2).

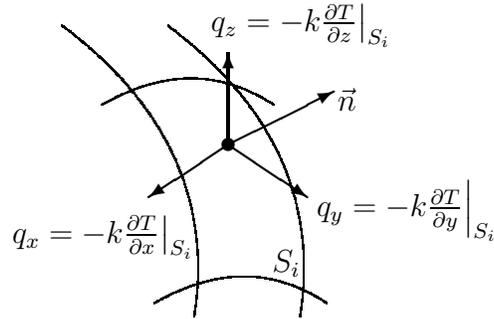


Figura 3.2: Componentes del flujo de calor y vector unitario en un nodo sobre una superficie S_i

donde

$$\vec{q} = q_x \vec{i}_1 + q_y \vec{i}_2 + q_z \vec{i}_3$$

y

$$\vec{n} = n_1 \vec{i}_1 + n_2 \vec{i}_2 + n_3 \vec{i}_3$$

el flujo de calor sobre el vector unitario (q_n) está definido por

$$q_n = \vec{q} \cdot \vec{n}$$

entonces

$$q_n = q_x n_1 + q_y n_2 + q_z n_3 \quad (3.30)$$

por lo tanto, el número Nusselt local se puede definir como

$$\text{Nu} = -\frac{r_i}{r_o} \frac{\Delta r}{k\Delta T} q_n \quad (3.31)$$

Capítulo 4

Resultados

En esta sección presentamos los resultados de los distintos casos que fueron abordados en esta tesis.

En primer lugar presentamos el caso difusivo unidimensional, cuyos resultados son comparados con la solución analítica.

El segundo caso es difusivo unidimensional con fuente de calor; comparamos con la solución analítica.

Como tercer caso presentamos imágenes del cómo van cambiando las temperaturas a lo largo del tiempo al tener inicialmente distintas temperaturas en diversos sectores de la esfera.

En el cuarto caso tenemos la mismas temperaturas que en el tercer caso la diferencia está en que en este caso incluimos una fuente de calor.

Como quinto y último caso presentamos los resultados de convección natural y comparamos con la literatura referente al tema, además de comparar en otras ocasiones con las soluciones analíticas.

4.1. Problema unidimensional, caso difusivo

Para este caso, se emplea una malla de $20 \times 20 \times 20$ para cada uno de los elementos y tenemos un total de seis elementos. Con n puntos de interpolación. La temperatura en la esfera interna (T_i) es de 10°C mientras que la temperatura de la esfera externa (T_o) es de 0°C (ver fig. 2.1).

Comprobamos la exactitud de los resultados numéricos con la solución analítica (sección 3.4 ec. 3.12), tomando en cuenta que no tenemos fuentes de calor ($\dot{q} = 0$).

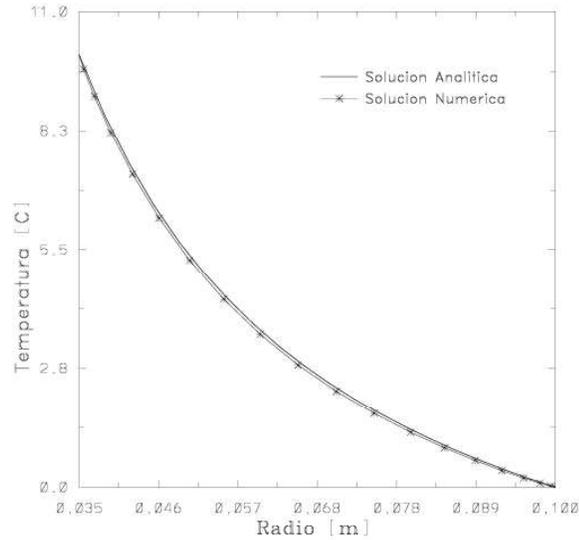


Figura 4.1: Comparación numérica y analítica del caso de difusión unidimensional

Como se puede ver en la fig. 4.1 la solución numérica reproduce de una manera muy buena la solución analítica de la distribución de temperaturas en el caso difusivo.

4.2. Problema unidimensional, caso difusivo con fuente de calor

En este caso las temperaturas y las características de la malla son las mismas que en caso anterior. El valor de la fuente de calor es de $\dot{q} = 10000[W/m^3]$. Para la solución analítica hacemos referencia a la ec.3.12.

Graficamos las soluciones analítica y numérica para validar los resultados numéricos en este caso con fuente de calor.

Puede observarse en la fig. 4.2 que la solución numérica se reproduce de manera similar a la solución analítica descrita por la ecuación 3.12.

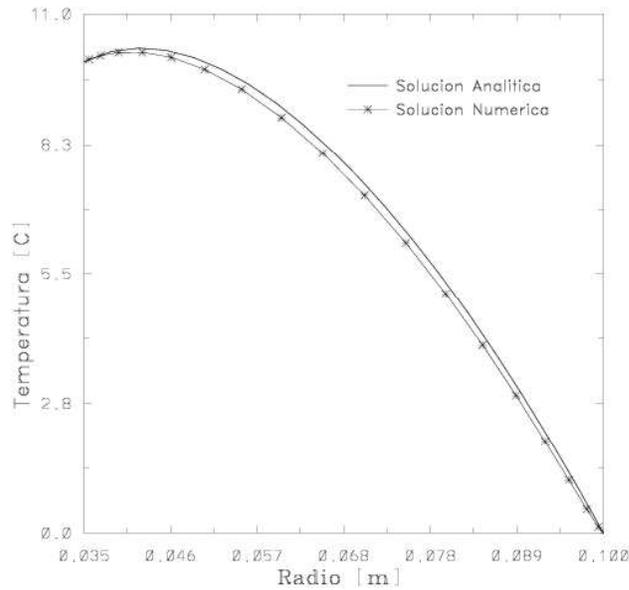


Figura 4.2: Comparación numérica y analítica del caso de difusión unidimensional, con una fuente de calor

4.3. Distribución de la temperatura en distintos sectores de la esfera

En este caso las temperaturas de distintos sectores de las esfera son diferentes como podemos ver en la fig. 4.3

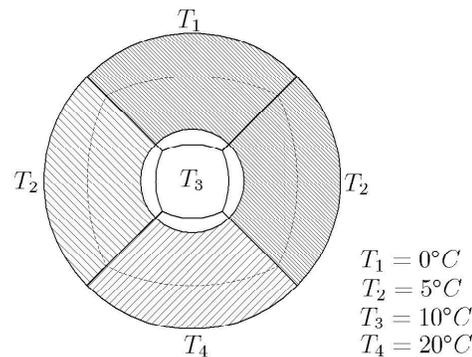


Figura 4.3: Temperaturas en distintos sectores de las esferas

El número de puntos por elemento es de $20 \times 20 \times 20$, con seis elementos

como en los casos anteriores. Como resultado podemos ver cómo varía la temperatura a distintos tiempos hasta que deja de cambiar (fig. 4.4).

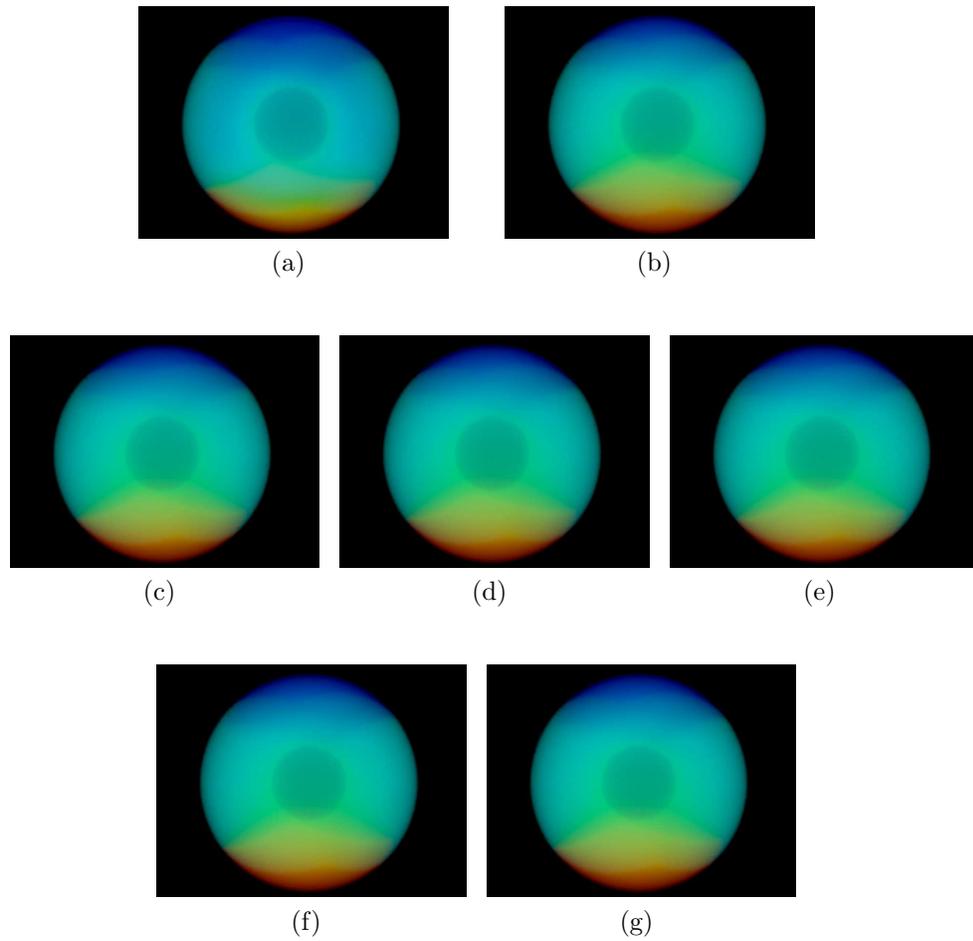


Figura 4.4: Distribución de temperaturas cuando las temperaturas iniciales son distintas en diversas regiones

Para este caso no existe solución analítica. Los polos conservan su temperatura mientras en la zona ecuatorial se ve más influenciada por la difusión de la zona caliente del polo inferior. De igual manera en el centro del anulo la temperatura aumenta alrededor y y más en la región inferior afectada por el polo con temperatura T_4 .

4.4. Distribución de la temperatura en distintos sectores de la esfera con término fuente

En este caso tenemos distintas temperaturas en diferentes sectores (fig. 4.3) además agregamos un término fuente ($\dot{q} = 10000[W/m^3]$) para saber de qué manera se distribuyen las temperaturas a los largo del ánulo.

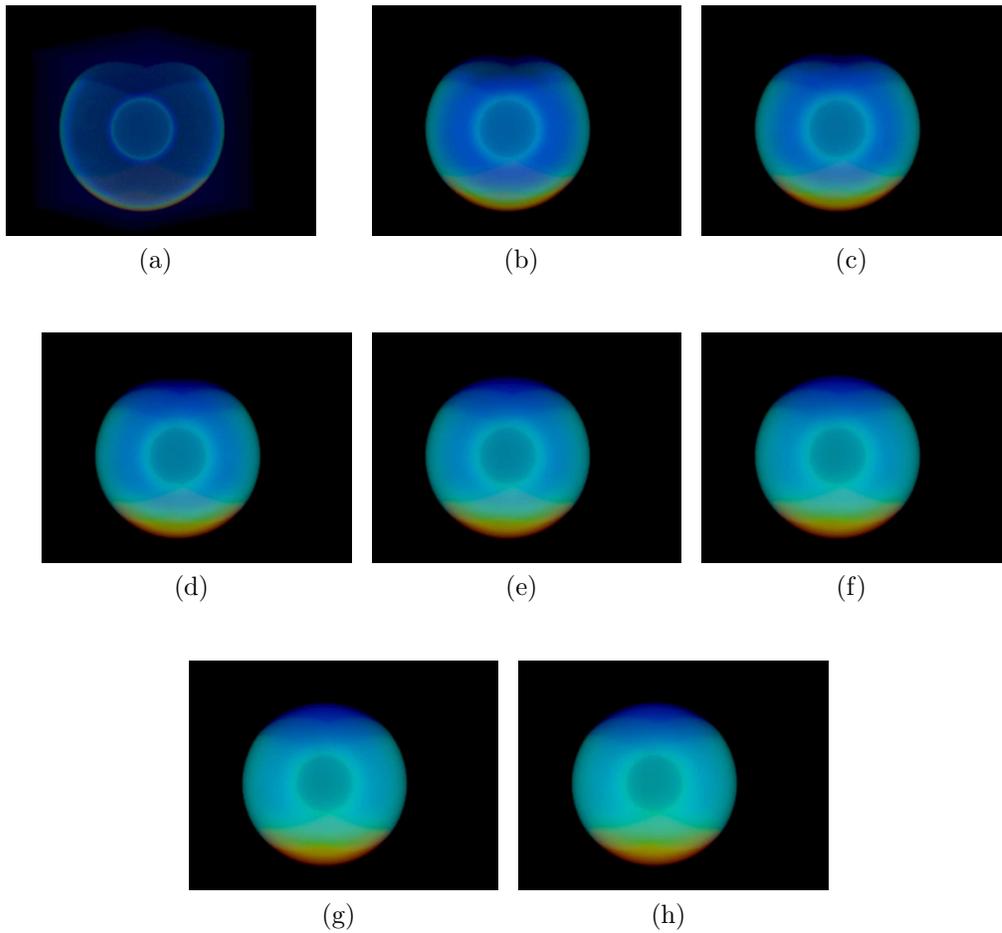


Figura 4.5: Distribución de temperaturas cuando las temperaturas iniciales son distintas en diversos sectores con término fuente

Observamos que al incluir un término fuente las distribuciones de temperaturas cambian a lo largo de la esfera, conservando las temperaturas en las fronteras (fig. 4.5). La distribución de temperaturas es similar a la descrita en el caso anterior.

4.5. Número de Nusselt difusivo (forma numérica)

Como constatamos en la sección 3.6 del capítulo 3 el valor del número de Nusselt para el caso difusivo es de 1.0. El mismo valor se calculó numéricamente según lo visto en la sección 3.7. El valor del número de Nusselt calculado numéricamente fue de 1.0408. Este valor es una buena aproximación comparándolo con el resultado de la solución analítica.

4.6. Patrones de flujo cuando la gravedad actúa en una sola dirección

Para este caso se utilizó una malla de $11 \times 11 \times 11$ por cada elemento. Como se puede observar en la fig.2.4 la gravedad actúa en una sola dirección. La diferencia de temperaturas y el cambio en el número de Rayleigh hacen que empiecen a crecer las fuerzas de flotación en el fluido. El número de Nusselt no cambia, es el mismo valor del calculado numéricamente en la sección anterior. En las figuras 4.10, 4.12, 4.14, 4.15 y 4.16 podemos observar los distintos patrones de flujo que se fueron encontrando a medida a que aumentamos el número de Rayleigh.

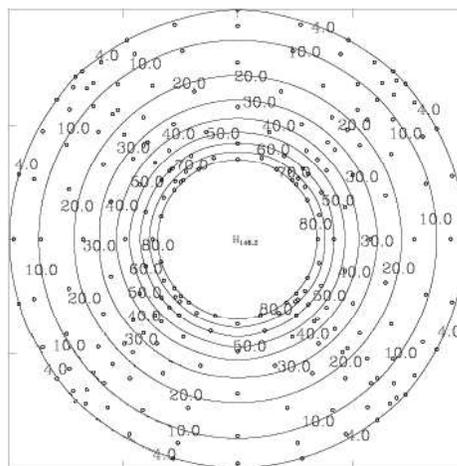


Figura 4.6: Distribución de temperaturas concéntrica en todos casos desarrollados

Una de las características comunes entre todos estos patrones de flujo es su simetría y la distribución de las temperaturas es concéntrica fig. 4.6. En la fig. 4.7 vemos gráficas de velocidad para un punto en común donde observamos que a medida que aumentamos el número de Rayleigh también aumenta la velocidad en dicho punto.

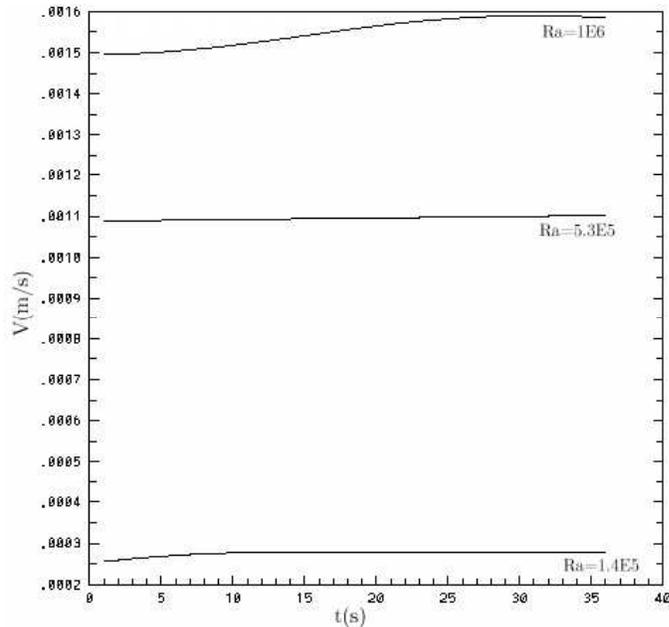


Figura 4.7: Distribución de velocidades casos: $Ra= 1.4 \times 10^5$, $Ra= 5.3 \times 10^5$ y $Ra= 1.0 \times 10^6$

Es característico en todos los casos abordados un flujo que sube por la pared ecuatorial de la esfera interna, llega hasta la esfera externa, baja por la pared interior de la esfera externa y sube de nuevo hacia la pared de la esfera interna. Es importante mencionar que la velocidades más altas de este flujo se encuentran cuando toca la pared ecuatorial de la pared de la esfera interna. Este flujo es dividido por una “chimenea” que se encuentra en la parte superior de la esfera interna. La parte central de este patrón se distingue por una velocidad inferior a la del fluido que viaja por la paredes del ánulo. Todas las características mencionadas anteriormente son las del patrón de flujo “crescent-eddy” (fig. 1.1a). Otro patrón de flujo que encontramos fue el “kidney-shaped-eddy” (fig. 1.1b) que se diferencia cualitativamente del patrón de flujo “crescent-eddy” en que la región de baja velocidad interior se modifica, en forma, hasta formar un riñón. Estos dos patrones de flujo son estacionarios. Dichas características son reportadas por Bishop et al. (1966) y por Yin et al. (1973).

En nuestros casos de estudio podemos observar que a medida de que aumentamos el número de Rayleigh el centro de rotación del vórtice va cambiando de posición, moviéndose de 69° para el número de Rayleigh 1.4×10^5 hasta 52° para 10×10^6 como se puede ver en la fig. 4.8. Identificamos la región de “chimenea” en los flujos la cual se ve afectada a medida que aumentamos el número de Rayleigh pues se va volviendo más estrecha. El patrón de flujo “crescent-eddy” lo encontramos cuando tenemos números de Rayleigh: 1.4×10^5 , 5.3×10^5 , 5.0×10^6 y 10×10^6 (figuras 4.10, 4.12, 4.15c, 4.15d y 4.16). El patrón de flujo “kidney-shaped-eddy” lo encontramos cuando tenemos números de Rayleigh: 1×10^6 y 2×10^6 (figuras 4.14, 4.15a y 4.15b).

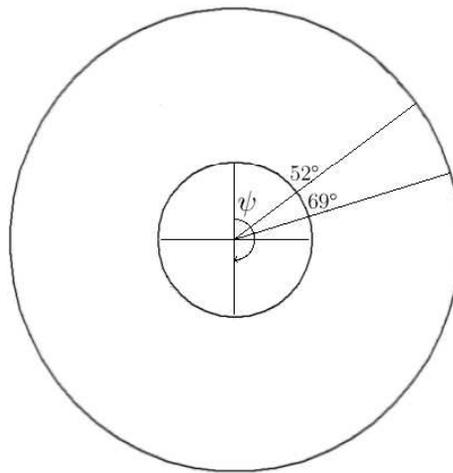


Figura 4.8: Rango en el que se encuentran los centros de rotación de los patrones de flujo

Cabe mencionar que el patrón de flujo “kidney-shaped-eddy” se puede presentar a bajos y a altos números de Rayleigh (Bishop et al., 1966). Las características de los casos abordados por la literatura y los casos estudiados en esta tesis dependen mucho de la relación de aspecto que se maneje así como los números de Prandtl de los fluidos que se estudien.

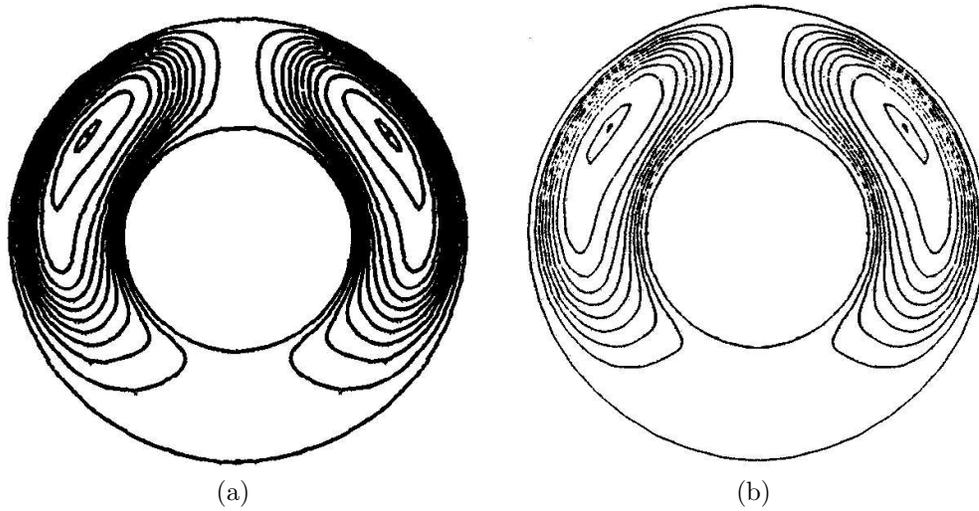


Figura 4.9: (a) $Ra=1.0 \times 10^5$, $\eta = 2.0$, $Pr= 0.7$ (Chiu and Chen, 1996) (b) $Ra=1.0 \times 10^5$ $\eta = 2.0$ $Pr= 0.7$ (Chu and Lee, 1993)

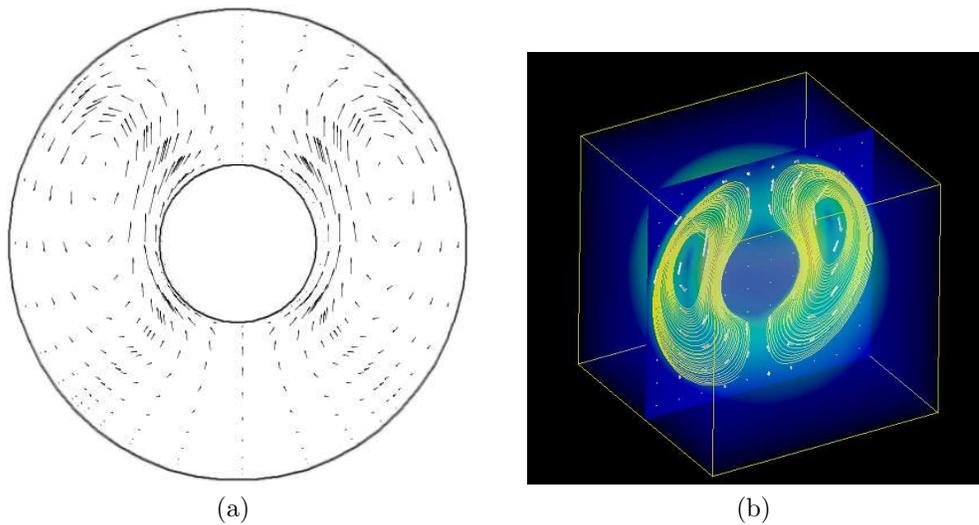


Figura 4.10: (a) $Ra=1.4 \times 10^5$ (b) $Ra=1.4 \times 10^5$ visualización tridimensional

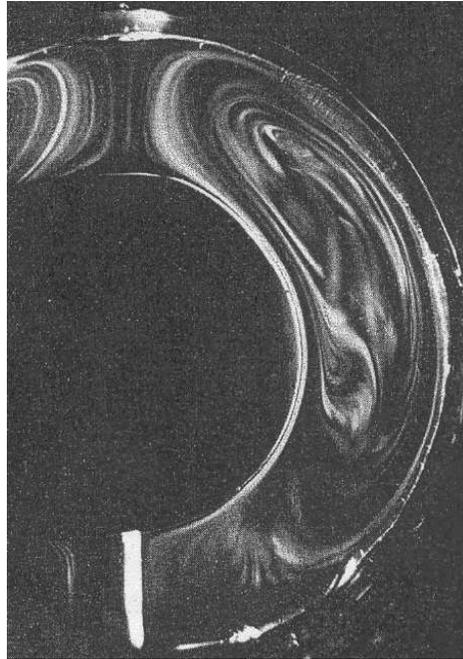
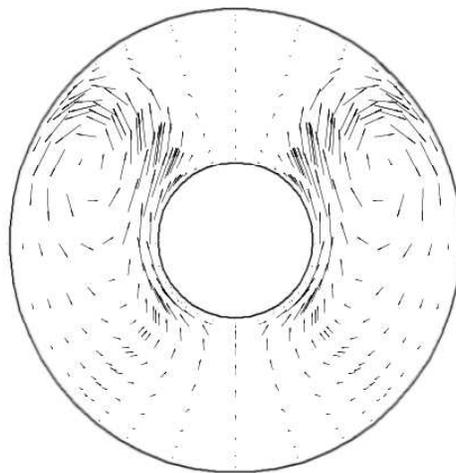
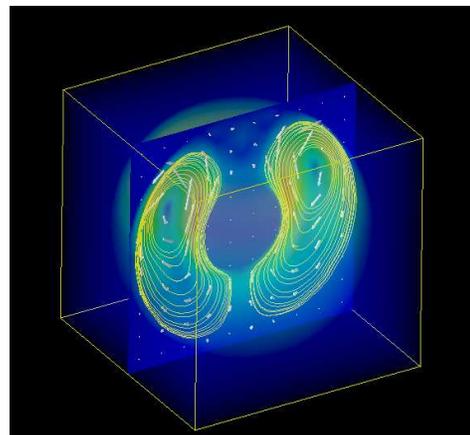


Figura 4.11: $Ra= 5.74 \times 10^5$, $\eta = 1.78$, $Pr= 0.7$ (Yin et al., 1973)



(a)



(b)

Figura 4.12: (a) $Ra=5.3 \times 10^5$ (b) $Ra=5.3 \times 10^5$ visualización tridimensional

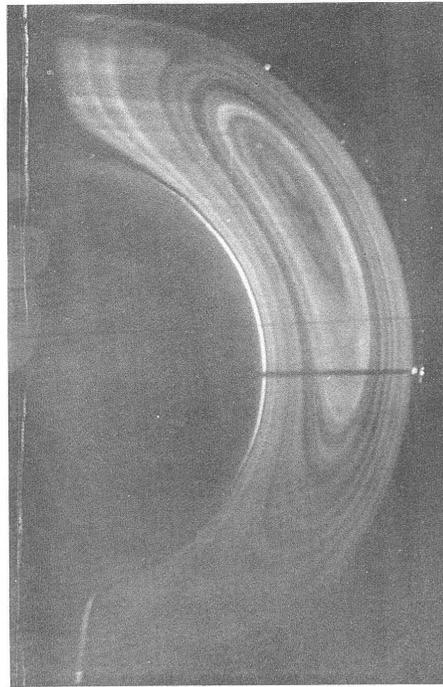
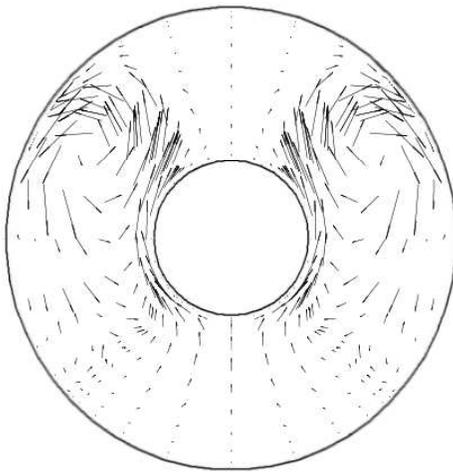
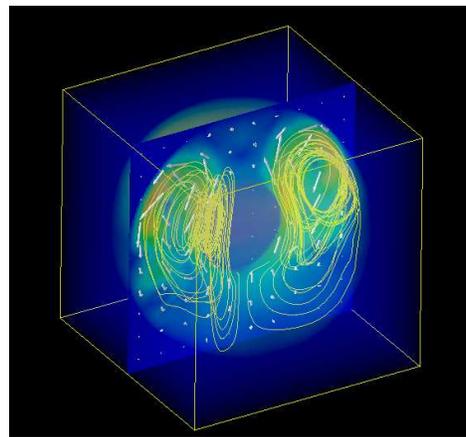


Figura 4.13: Patrón de flujo “crescent-eddy”, $Ra= 9.56 \times 10^5$, $\eta = 1.72$ (Bishop et al., 1966)



(a)



(b)

Figura 4.14: (a) $Ra=1 \times 10^6$ (b) $Ra=1 \times 10^6$ visualización tridimensional

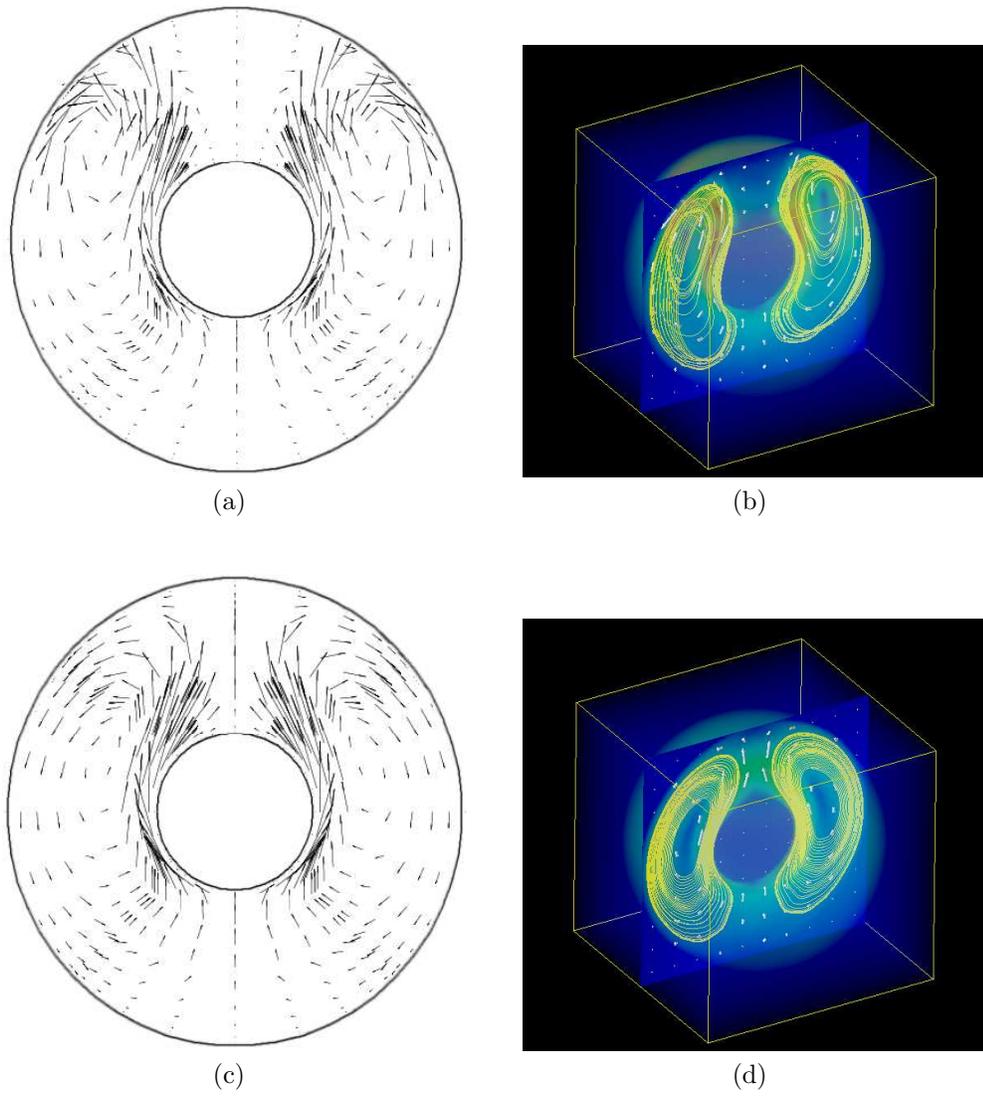


Figura 4.15: (a) $Ra=2 \times 10^6$ (b) $Ra=2 \times 10^6$ visualización tridimensional
(c) $Ra=5 \times 10^6$ (d) $Ra=5 \times 10^6$ visualización tridimensional

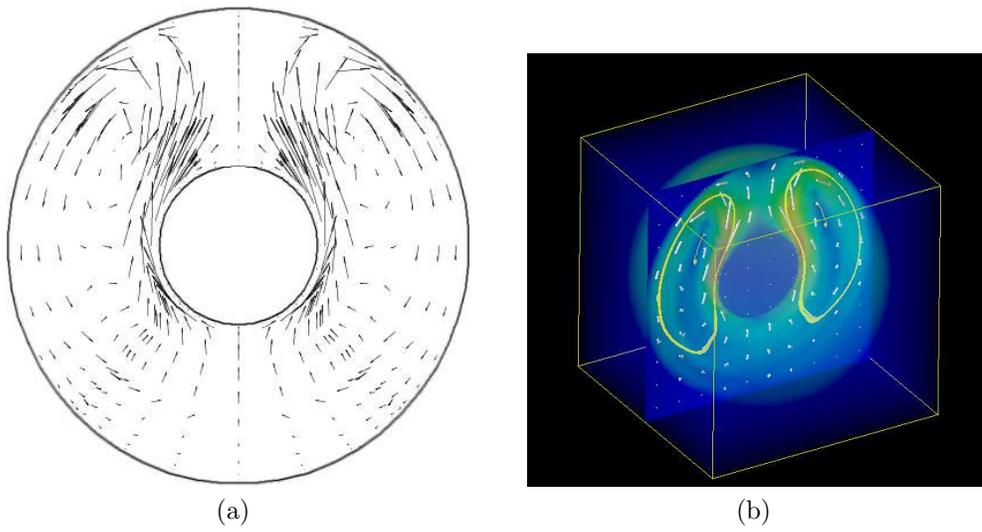


Figura 4.16: (a) $Ra=10 \times 10^6$ (b) $Ra=10 \times 10^6$ visualización tridimensional

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo a futuro

El método de Elementos Espectrales se adapta muy bien a los casos para los que fue requerido. Las soluciones fueron las adecuadas y se pudieron comprobar por medio de las soluciones analíticas y la literatura publicada al respecto.

La división del dominio por medio del algoritmo cubo esfera se adaptó perfectamente a la geometría esférica (valga la redundancia), pues la geometría tuvo poca influencia en los resultados.

Para el caso de convección natural que pudimos comprobar que los patrones de flujo son los esperados pues los trabajos experimentales y numéricos han llegado a demostrarlo así.

Como trabajo a futuro podríamos aumentar el número de puntos de interpolación por el caso convectivo, así como también el número de elementos. Aunque el código numérico fue optimizado con Gotoblas el siguiente paso sería la implementación del paralelismo de sus subrutinas por medio de una división del dominio en estudio y utilizando MPI para la comunicación de datos entre dichas divisiones, en conjunto con OpenMP para los ciclos. También se podría trabajar con números de Rayleigh mayores así como otros números de Prandtl.

Apéndice A

Algoritmo cubo-esfera

Este método es utilizado para descomponer la esfera en seis regiones idénticas, las cuales se obtienen de la proyección de los lados de un cubo circunscrito dentro de una superficie esférica sobre dicha superficie ver fig. A.1. Esta manera de descomponer el dominio nos da varias ventajas, una de ellas, y tal vez la principal es evitar “el problema del polo” donde, según se ha reportado en la literatura, se crean singularidades que afectan a la solución del problema (Ronchi et al., 1996).

Numeramos las caras laterales con las etiquetadas I-IV, la cara de arriba está etiquetada con V y la de abajo con VI.

Para lograr esto se considera un cubo cuyos lados son de longitud $2a$, inscrito en una esfera de radio $R = a\sqrt{3}$. El cubo está orientado de tal manera que los ejes del sistema cartesiano (X, Y, Z) sean normales a sus caras (ver fig. A.2) (Nair et al., 2004). De tal manera que $x, y \in [-a, +a]$ y (λ, θ) son las coordenadas latitud y longitud en esféricas, teniendo que:

$$\begin{aligned} X &= R \cos \lambda \cos \theta \\ Y &= R \sin \lambda \cos \theta \\ Z &= R \sin \theta \end{aligned} \tag{A.1}$$

Del esquema es posible obtener las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \sin \theta = \frac{Z}{R} = Z, \quad \tan \lambda = \frac{x}{a} = \frac{Y}{X}, \quad \frac{Y}{Z} = \frac{x}{y}, \\ r^2 = a^2 + x^2 + y^2 \end{aligned} \tag{A.2}$$

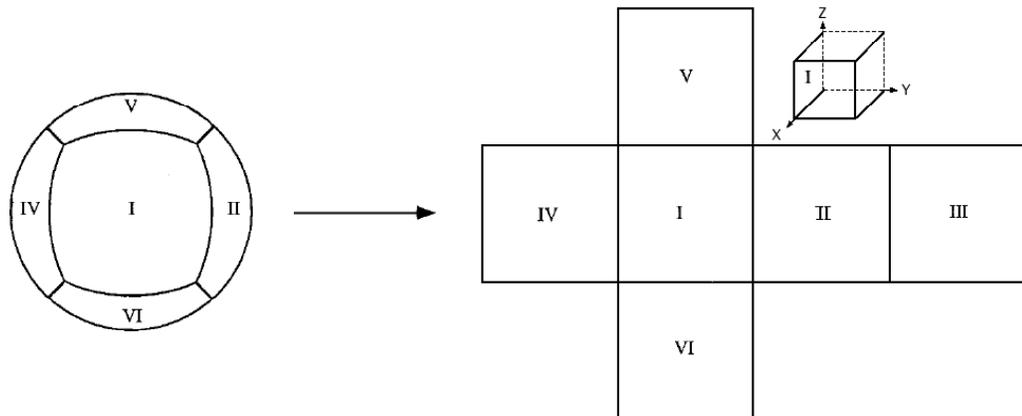


Figura A.1: Descomposición de una esfera en seis regiones, cada región se obtiene por la proyección de los lados de un cubo inscrito hacia la superficie esférica.

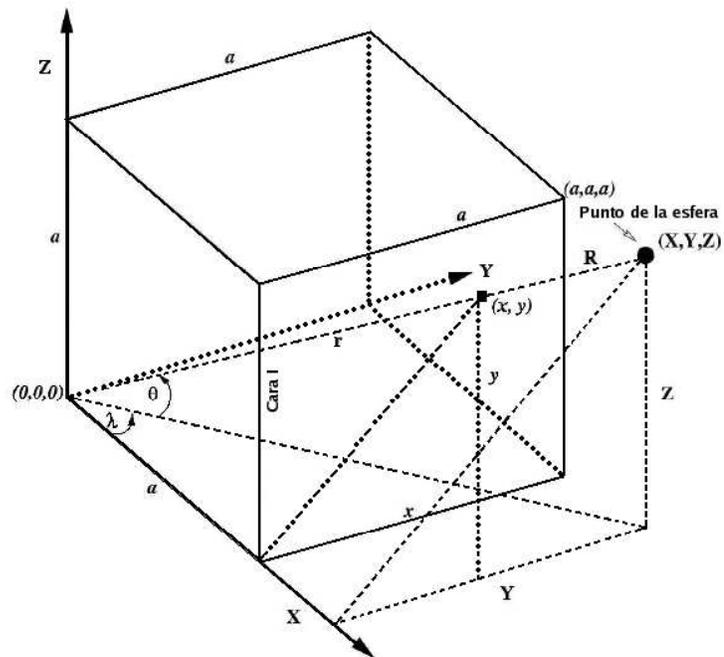


Figura A.2: Relaciones geométricas para la transformación cubo-esfera. Nótese que la figura representa sólo una octava parte del cubo.

De las ecs. (A.1) y las ecs. (A.2) es posible escribir:

$$\begin{aligned} x &= a \tan \lambda \\ y &= a \tan \theta \sec \lambda \end{aligned} \tag{A.3}$$

En la siguiente tabla se presentan las ecuaciones que nos permiten relacionar las coordenadas cartesianas para las posiciones en la esfera (X, Y, Z) y las coordenadas cartesianas para las posiciones en la cara del cubo (x, y) .

Cara	Transformaciones Básicas	Cubo-Esfera	Esfera-Cubo
I	$x = a \tan \lambda$ $y = a \tan \theta \sec \lambda$	$(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(a, x, y)$	$(x, y) = a(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X})$
II	$x = -a \cot \lambda$ $y = a \tan \theta \csc \lambda$	$(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(-x, a, y)$	$(x, y) = (\frac{-X}{Y}, \frac{Z}{Y})$
III	$x = a \tan \lambda$ $y = a \tan \theta \csc \lambda$	$(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(-a, -x, y)$	$(x, y) = a(\frac{Y}{X}, \frac{-Z}{X})$
IV	$x = -a \cot \lambda$ $y = -a \tan \theta \csc \lambda$	$(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(x, -a, y)$	$(x, y) = (\frac{-X}{Y}, \frac{-Z}{Y})$
V	$x = a \sin \lambda \cot \theta$ $y = -a \cos \lambda \cot \theta$	$(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(-y, x, a)$	$(x, y) = a(\frac{Y}{Z}, \frac{-X}{Z})$
VI	$x = -a \sin \lambda \cot \theta$ $y = -a \cos \lambda \cot \theta$	$(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(y, x, -a)$	$(x, y) = a(\frac{-Y}{Z}, \frac{-X}{Z})$

Tabla A.1: Ecuaciones para la transformación de las seis caras del cubo

Apéndice B

Ecuación de continuidad en coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{B.1})$$

donde \mathbf{v} es el vector velocidad del fluido; r , θ y ϕ son las coordenadas; v_r , v_θ y v_ϕ son las velocidades en la dirección de r , θ y ϕ respectivamente.

Apéndice C

Ecuaciones de conservación de momento en coordenadas esféricas

Las ecuaciones de continuidad en el sistema coordenado esférico son las siguientes.

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r \sin(\theta)} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\phi^2 + v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \\ + \rho g_r \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right] - \\ - \rho g_r \mu \left[2 \frac{v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_\theta \cot(\theta)}{r^2} + \frac{2}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] \quad (C.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r \sin(\theta)} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta - v_\phi^2 \cot(\theta)}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ + \rho g_\theta \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] - \\ - \rho g_\theta \mu \left[\frac{v_\theta + 2 \cos(\theta) \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}}{r^2 \sin(\theta)^2} \right] \quad (C.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r \sin(\theta)} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\phi + v_\phi v_\theta \cot(\theta)}{r} \right) &= -\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \\
+ \rho g_\phi \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)^2} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) \right] & \\
+ \left[\frac{2 \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + 2 \cos(\theta) \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - v_\phi}{r^2 \sin(\theta)^2} \right] & \quad (\text{C.3})
\end{aligned}$$

donde v_r , v_θ y v_ϕ son las componentes de la velocidad en el sistema esférico; r , θ y ϕ son las coordenadas del sistema esférico; g_r , g_θ y g_ϕ son las componentes de la gravedad (Bird et al., 2007).

Apéndice D

Ecuación de la energía para difusión de calor en coordenadas esféricas

Tomando en cuenta un volumen de control diferencial (ver fig. D.1) tenemos:

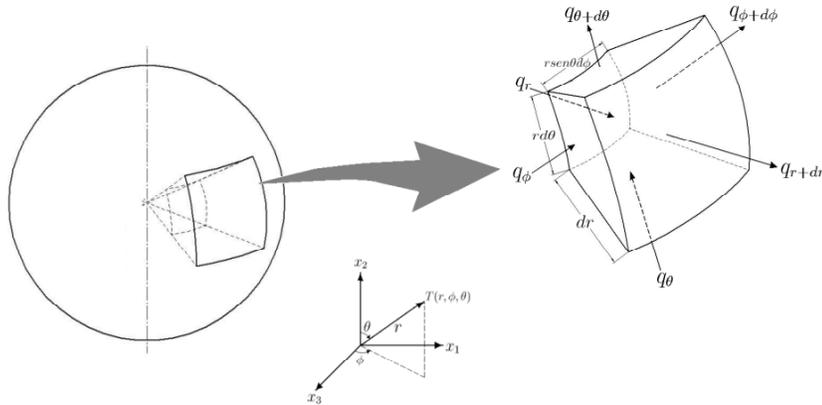


Figura D.1: Volumen de control diferencial para coordenadas esféricas

$$\vec{q} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{i}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \vec{i}_\phi \right) \quad (\text{D.1})$$

La anterior es la ecuación de difusión de calor en coordenadas esféricas (ec. D.1). La siguiente es la ecuación de calor en forma general (ec. D.2)(Incropera and DeWitt, 2002).

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \\ + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \text{sen} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Apéndice E

Método de elementos espectrales

El método de elementos espectrales (SEM), es una técnica de residuos pesados para la solución de ecuaciones diferenciales parciales que combina la flexibilidad geométrica de los métodos de elemento finito de bajo orden h con la rápida razón de convergencia de los métodos espectrales. El principio variacional y la cuadratura numérica de Gauss son empleados para generar un conjunto de ecuaciones discretas, que son resueltas por procedimientos iterativos utilizando la técnica de factorización de sumatorias del producto tensorial, que es necesaria para obtener soluciones iterativas eficientes. La convergencia a la solución exacta en el método se logra mediante el incremento del grado N de las expansiones polinomiales, mientras que el número de elementos K se mantiene fijo (Ronquist, 1988).

La integración en el tiempo de la ecuación de momento se llevará a cabo utilizando un esquema de partición temporal de tres pasos. El tamaño del paso de tiempo es restringido de acuerdo al número de Courant, la condición de incompresibilidad y las correcciones de viscosidad respectivamente. Para la discretización temporal de la ecuación de la energía se utiliza un esquema de partición de dos pasos.

En la discretización, el dominio computacional es dividido en una serie de elementos, y las variables dependientes e independientes en cada elemento son representadas como una interpolación lagrangiana de alto orden a través de los puntos de colocación de Chebyshev (Patera, 1984).

Bibliografía

- Bird, R. B., Stewart, W. E., and Lightfoot, E. (2007). *Transport Phenomena*. John Wiley & Sons, 2nd ed.
- Bishop, E. H., Mack, L. R., and Scanlan, J. A. (1966). Heat transfer by natural convection between concentric spheres. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 9:649–662.
- Chiu, C. and Chen, W. (1996). Transient natural convection heat transfer between concentric and vertically eccentric sphere. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 39:1439–1452.
- Chu, H. and Lee, T. (1993). Transient natural convection heat transfer between concentric spheres. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 36:3159–3170.
- Eckert, E. R. G. and Drake, R. M. (1972). *Analysis of Heat and Mass Transfer*. McGraw-Hill, Inc.
- Fujii, T., Honda, T., and Fujii, M. (1984). A numerical analysis of laminar free convection around an isothermal sphere: finite-difference solution of the full navier-stokes and energy equations between concentric spheres. *Numerical Heat Transfer*, 7:103–111.
- Garg, V. K. (1992). Natural convection between concentric spheres. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 35:1935–1945.
- Incropera, F. P. and DeWitt, D. P. (2002). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley & Sons, New Jersey, 5th ed.
- Ingham, D. B. (1981). Heat transfer by natural convection between spheres and cylinders. *Numerical Heat Transfer*, 4:53–67.

- Liu, M. and Egbers, C. (2000). Three-dimensional natural convection in a narrow spherical shell. In *Physics of Rotating Fluids*, volume 549 of *Lecture Notes in Physics*, pages 269–294. Springer.
- Mack, L. R. and Hardee, H. C. (1968). Natural convection between concentric spheres at low Rayleigh numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 11:387–396.
- Nair, R., Thomas, S., and Loft, R. (2004). A Discontinuous Galerkin Transport Scheme on the Cubed Sphere. *Monthly Weather Review*, 133:814–828.
- Patera, A. T. (1984). A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, 54:468–488.
- Powe, R., Warrington, R., and Scanlan, J. (1980). Natural convective flow between a body and its spherical enclosure. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 23:1337–1350.
- Ronchi, C., Iacono, R., and Paolucci, P. (1996). The “Cubed Sphere”: A New Method for the Solution of Partial Differential Equations in Spherical Geometry. *Journal of Computational Physics*, 124:93–114.
- Ronquist, E. M. (1988). *Optimal Spectral Element Methods for the Unsteady Three-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Scanlan, J. A., Bishop, E. H., and Powe, R. E. (1970). Natural convection heat transfer between concentric spheres. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 13:1857–1872.
- Tamire, C. and Wright, N. (1998). Multiple and unsteady solutions for buoyancy driven flows in spherical annuli. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41:4121–4138.
- White, F. M. (1979). *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, Inc.
- White, F. M. (2003). *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, Inc., New York, 5th ed.
- Wu, H., Tsai, W., and Chou, H. (2004). Transient natural convection heat transfer of fluids with variable viscosity between concentric and vertically eccentric spheres. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:1685–1700.

-
- Yin, S. H., Powe, R. E., Scanlan, J. A., and Bishop, E. H. (1973). Natural convection flow patterns in spherical annuli. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 16:1785–1795.