



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS RESULTADOS SOBRE
UN PROBLEMA DE ERDÖS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

ROBERTO ALATORRE BREMONT

DIRECTOR DE TESIS:

HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ



2009



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's, must be beautiful; the ideas, like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics... It may be very hard to define mathematical beauty, but that is just as true of beauty of any kind – we may not know quite what we mean by a beautiful poem, but that does not prevent us from recognizing one when we read it.

–G. H. Hardy

A mi familia por apoyarme y estar ahí siempre.

A Gaby, por estar a mi lado.

A Hortensia, Laura, Gaby Campero y Antonio, por sus enseñanzas, apoyo y confianza.

A mis amigos Maga, Jessica, Rodrigo, Mónica, Liz, Nahiely, Pamela, Jhoana, Julián, Lalo, Benjamín, Arrigo, Victor, Gabriel, Héctor, Paco, Marko y Jorge que de alguna manera todos apoyaron este trabajo.

A mis maestros.

A todos ellos esta dedicado este trabajo, que sin su ayuda no hubiera podido llevarse a cabo.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Alatorre Bremont Roberto

56 32 58 56

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

302582149

2. Datos del tutor

Dra.

Hortensia

Galeana

Sánchez

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Juan José

Montellano

Ballesteros

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Bernardo

Llano

Pérez

5. Datos del sinodal 3

Mat.

Laura

Pastrana

Ramírez

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Ricardo

Gómez

Aiza

7. Datos del trabajo escrito

Algunos resultados sobre un problema de Erdős

136 p

2009

Índice general

Índice general	1
Introducción	3
1. Conceptos Preliminares	7
1.1. Conjuntos	7
1.2. Gráficas	9
1.3. Digráficas	14
1.4. Algunos Resultados sobre Núcleos	32
2. Núcleos por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas	44
3. Conjuntos Absorbentes por Trayectorias Monocromáticas	76
4. Núcleos por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas en Di-	

gráficas Cuasi-Transitivas	105
Conclusiones	131
Bibliografía	133

Introducción

Un conjunto N , de vértices de una digráfica, es un núcleo si es independiente y absorbente. El concepto de núcleo fue introducido en 1944 por Von Neumann y Morgenstern dentro del contexto de la teoría de juegos, como solución de un problema de decisión. Una generalización de este concepto es el de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, esto es, en una digráfica D donde sus flechas están coloreadas, un conjunto de vértices N es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas si es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas y absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas. Este concepto fue dado por Hortensia Galeana Sánchez en 1996. Actualmente se conocen condiciones suficientes para la existencia de núcleo por trayectorias monocromáticas en ciertas digráficas como son los torneos.

Dado que no todas las digráficas coloreadas tienen núcleo por trayectorias

dirigidas monocromáticas se empezó a analizar conjuntos absorbentes y en particular conjuntos absorbentes mínimos, aunado a esto se encuentra el siguiente problema planteado por Paul Erdős en la década de los sesentas;

Para cada n , ¿existe un (mínimo) entero positivo $f(n)$ tal que cada torneo finito cuyas aristas están coloreadas con n colores contiene un conjunto S de $f(n)$ vértices con la propiedad de que para cada vértice v que no esté en S existe trayectoria dirigida monocromática de v a un vértice de S ? En particular, ¿ $f(3) = 3$?

De esta manera buscamos condiciones suficientes para la existencia de conjuntos absorbentes en torneos n -coloreados. Primero se presenta un resultado clásico, del cual obtenemos como corolario que $f(2) = 1$, es decir, que todo torneo 2-coloreado tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Recordando que el ciclo dirigido de longitud 3 cuyas flechas están coloreadas con 3 colores no tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, y pensando en el resultado antes mencionado, se empiezan a buscar distintas condiciones para la existencia de núcleos en torneos tanto 3-coloreados como, de manera más general, para m -coloreados, empezando con el problema planteado por B. Sands, N. Sauer y R. Woodrow en 1982;

Sea T un torneo cuyas aristas están coloreadas con tres colores

(en general, con m colores) y el cual no contiene \vec{C}_3 . ¿Debe T contener un vértice v tal que para cualquier otro vértice x de T existe trayectoria dirigida monocromática de x a v ?

donde \vec{C}_3 es el ciclo dirigido de longitud 3 cuyas flechas están coloreados con 3 colores. Si pedimos que el torneo m -coloreado T , además de no contener \vec{C}_3 policromáticos, no contenga T_3 policromáticos, donde T_3 es el torneo transitivo de 3 vértices, se prueba que la respuesta es sí, esto es que T contiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Ahora bien, regresando al problema de Erdős, se muestra que si tenemos el torneo 3-coloreado con in-vecindades o ex-vecindades 2-coloreadas entonces la conjetura de Erdős es cierta, esto es, $f(3) = 3$. De la misma manera se prueba que si T es un torneo m -coloreado con ex-vecindades 2-coloreadas entonces podemos encontrar conjuntos absorbentes de cardinalidad m o $m-1$ dependiendo de si ésta es par o impar.

Luego se muestra que si además de pedir que el torneo no tenga \vec{C}_3 policromáticos, encontramos una familia de subconjuntos del conjunto de vértices tales que su unión es el total, cada subtorneo generado por cada subconjunto es núcleo perfecto monocromático y las flechas entre cada subconjunto son de a lo más dos colores entonces la conjetura de Sands, Sauer y Woodrow es

cierta, es decir, el torneo tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Finalmente se presentan resultados para digráficas cuasi-transitivas, esto nos es útil, ya que un torneo en particular es una digráfica asimétrica y cuasi-transitiva, y que cada ciclo contenido en él es cuasi-transitivo en la orilla, y encontramos que la conjetura de Sands, Sauer y Woodrow es cierta para torneos con clases cromáticas cuasi-cromáticas.

Una última observación es que el trabajo es completamente autocontenido, en el primer capítulo se presentan desde algunos conceptos básicos hasta algunos resultados sobre núcleos debidamente probados.

Capítulo 1

Conceptos Preliminares

1.1. Conjuntos

No se dará una definición técnica de conjunto, por conjunto se entenderá una colección de objetos que cumplen una o varias propiedades. La *cardinalidad* de un conjunto S es el número de elementos que contiene dicho conjunto, y la denotamos por $|S|$.

Una relación entre un par de conjuntos A y B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. (A, r) denotará al conjunto A con la relación $r \subseteq A \times A$.

Un conjunto A se dice que es un *conjunto parcialmente ordenado* por la

relación $r \subseteq A \times A$ si y sólo si

1. r es *reflexiva* en A , es decir, para todo $x \in A$ $(x, x) \in r$;
2. r es *antisimétrica* en A , esto es, para toda $x, y \in A$, si $(x, y) \in r$ y $(y, x) \in r$, entonces $x = y$; y
3. r es *transitiva* en A , es decir, para toda $x, y, z \in A$, si $(x, y) \in r$ y $(y, z) \in r$, entonces $(x, z) \in r$.

También se dice que r es un orden parcial sobre A .

Un conjunto (A, r) es un conjunto linealmente ordenado si y sólo si

1. r es *antirreflexiva* en A , es decir, para todo $x \in A$, $(x, x) \notin r$;
2. r es *transitiva* en A , es decir, para toda $x, y, z \in A$, si $(x, y) \in r$ y $(y, z) \in r$, entonces $(x, z) \in r$; y
3. para toda $x, y \in A$ $x=y$, $(x, y) \in r$ o $(y, x) \in r$ y sólo una.

Ahora, sea (A, \leq) un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que dos elementos $x, y \in A$ son comparables si $x \leq y$ o $y \leq x$. Una cadena en A es un subconjunto $\mathcal{C} \subseteq A$ en el cual todos los elementos son comparables. Estos conceptos se pueden extender para una familia de conjuntos F ; por ejemplo,

sea A un conjunto y $\mathcal{P}(A)$ su conjunto potencia, es decir, la familia de todos los subconjuntos de A ; entonces $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y

$$\emptyset \subseteq \{a_0\} \subseteq \{a_0, a_1\} \subseteq \{a_0, a_1, a_2\} \subseteq \dots \subseteq \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} \subseteq \dots$$

es una cadena de $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.

Se dice que una cadena \mathcal{C} , esta *acotada superiormente* cuando existe $b \in A$ tal que para toda $x \in \mathcal{C}$, $x \leq b$; también se dice que un elemento $m \in A$ es maximal cuando para toda $y \in A$ $y < m$

El siguiente Lema es muy conocido, y es equivalente al Axioma de Elección;

Lema 1.1 (Lema de Zorn, [1]) *Para todo (A, \leq) conjunto parcialmente ordenado no vacío tal que toda cadena $\mathcal{C} \subseteq A$ esta acotada superiormente, hay un elemento $m \in A$ maximal.*

1.2. Gráficas

Una *gráfica* $G = (V, A)$ es un conjunto finito no vacío de objetos llamados vértices, o puntos, denotado por $V(G)$, junto con uno de pares no ordenados de distintos elementos de $V(G)$, llamados aristas, denotado por $A(G)$.

Por ejemplo;

$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f\},$$

$$A(G) = \{ab, cd, ea, be, bc, ed, bd\}$$

$$V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$$

$$A(H) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_5\}$$

A $|V(G)|$ se le llamará orden de G y a $|A(G)|$ tamaño de G . En el ejemplo anterior el orden de G es 6 y su tamaño es 7, y el orden de H es 5 y su tamaño es 6.

Generalmente se trabaja con la representación geométrica de una gráfica; esto es, se identifica a cada vértice con un punto y a cada arista se le representa con un segmento de una curva entre los vértices que definen a la arista.

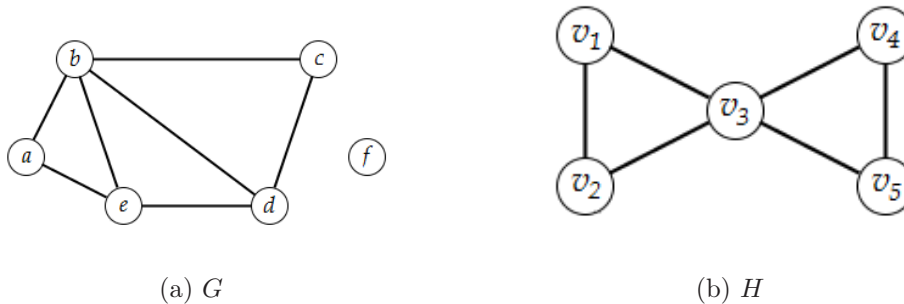


Figura 1.1: Representación geométrica de las gráficas del ejemplo

Sean $u, v \in V(G)$ se dice que u es adyacente a v si $a = uv \in A(G)$.

También se puede decir que u y v son extremos de a , u es vecino de v o v es vecino de u , o que a incide en u y en v . $N_G(v)$ denotará el *conjunto de vecinos de v* en G , esto es $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in A(G)\}$. A la cardinalidad de este conjunto se le llamará *grado de v* y se denotará por $\delta_G(v)$. En el ejemplo, $\delta_G(a) = 2$, $\delta_G(b) = 4$, $\delta_G(c) = 2$, $\delta_G(d) = 3$, $\delta_G(e) = 3$ y $\delta_G(f) = 0$; también, por ejemplo, $N_G(b) = \{a, c, d, e\}$. También decimos que dos aristas son adyacentes si tienen un vértice común.

La gráfica de orden p en donde cada vértice v cumple que $\delta_G(v) = p - 1$, se llamará *gráfica completa* y se denotará por K_p ; se llama completa ya que cada vértice es adyacente a todos los demás.

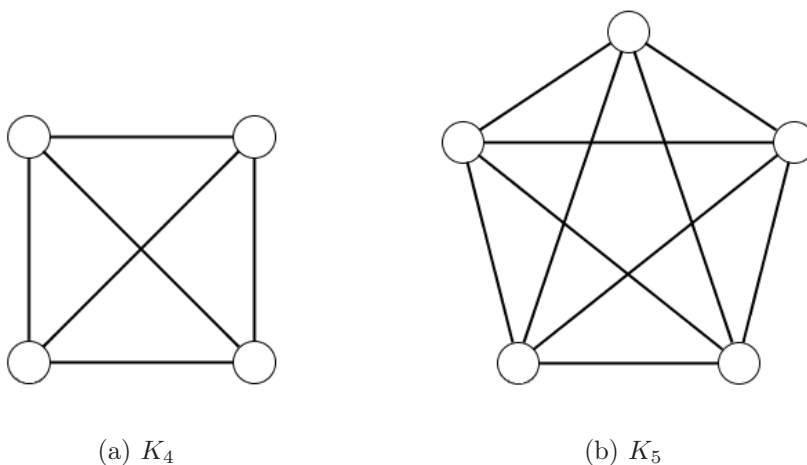


Figura 1.2

Dos gráficas, G y H , son *isomorfas* si existe una función biyectiva

$f : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $uv \in A(G)$ si y sólo si $f(u)f(v) \in A(H)$, esto es si f preserva las adyacencias y las no adyacencias. Lo denotamos por $G \cong H$.

Sea G una gráfica. Un *camino* C en G es una sucesión de vértices $C = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ tal que para toda $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, $x_i x_{i+1} \in A(G)$. Con esta notación de C diremos que n es la longitud de C , es decir, el número de aristas de C . Un camino en H (Fig. 1.1) es $C = (a, b, c, b, e, d)$ y es de longitud 5.

Un *paseo* en G es un camino en G que no repite aristas. Una *trayectoria* en G es un camino en G que no repite vértices. Un paseo en H (Fig. 1.1) es $P = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_3, v_1)$ y una trayectoria es $T = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$. Observemos que una trayectoria es, en particular, un paseo, sin embargo la afirmación contraria no es verdadera. Decimos que un camino es *cerrado* si empieza y termina en el mismo vértice; un *paseo cerrado* es un paseo que empieza y termina en el mismo vértice. Un *ciclo* es una sucesión de vértices $C = (x_0, x_1, \dots, x_n = x_0)$, $n \geq 3$, tal que $x_i \neq x_j$ para toda $i \neq j$, $i, j \notin \{0, n\}$. Un ciclo en G (Fig. 1.1) es $C = (a, b, e, a)$. Un camino que empieza en u y termina en v diremos que es un uv -camino. Esto es análogo para paseos y trayectorias.

Decimos que una gráfica G es conexa si para cualquier par de vértices $u, v \in V(G)$ existe un uv -camino. En la Figura 1.1, G es desconexa ya que no existe af -camino, y por otro lado, H es conexa.

Una *subgráfica* H , de una gráfica G , es cualquier gráfica tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$, y decimos que G *contiene* a H . Para un subconjunto no vacío de vértices, $S \subseteq V(G)$, la *subgráfica de G inducida por S* , denotada por $G[S]$, es la subgráfica de G que tiene por conjunto de vértices a S y las aristas son todas las aristas que hacen adyacentes en G a los vértices de S . De manera análoga definimos para un subconjunto no vacío de aristas $E \subseteq A(D)$ la *subgráfica de G inducida por E* , denotada de la misma manera $G[E]$, como la subgráfica de G tal que

$$V(G[E]) = \{v \in V(D) : uv \in E\}$$

$$A(G[E]) = E$$

Un *apareamiento* M , en una gráfica G , es un conjunto de aristas dos a dos no adyacentes, también se le llama conjunto independiente de aristas. Un apareamiento M es *maximal* si para cualquier otro apareamiento M' $|M'| < |M|$. Un apareamiento M *satura* a un vértice x de G si existe una arista en M que incide en x . Decimos que M es *perfecto* si satura a todos los

vértices de G . En la Figura 1.3 tenemos dos ejemplos de apareamientos (los conjuntos de líneas gruesas); el primer apareamiento es perfecto y el segundo es maximal.

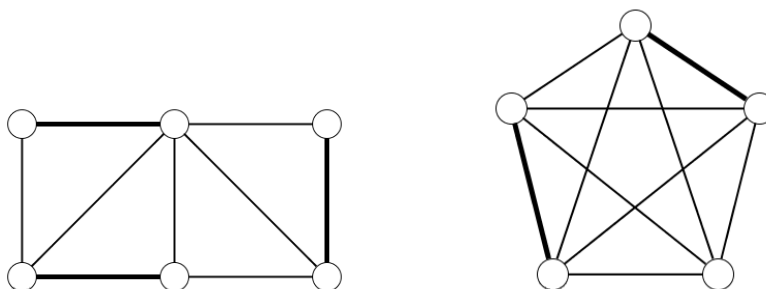


Figura 1.3: Ejemplos de apareamientos

1.3. Digráficas

Una *gráfica dirigida* o *digráfica* $D = (V, F)$ consta de un conjunto finito no vacío de objetos llamados vértices de D , $V(D)$, junto con una colección de pares ordenados de distintos vértices de D , llamados las flechas o arcos de D , $F(D)$. Por ejemplo;

$$V(D_1) = \{u, v, w, x, y\},$$

$$F(D_1) = \{(u, w), (u, x), (v, u), (v, y), (w, v), (w, x), (x, y), (y, w)\}$$

$$V(D_2) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

$$F(D_2) = \{(1, 2), (1, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (6, 7), (7, 8), (8, 6)\}$$

En la representación geométrica de D , de igual manera, identificamos a cada vértice de D con un punto y cada flecha, como dice su nombre, con una flecha de u a v si $(u, v) \in F(D)$.

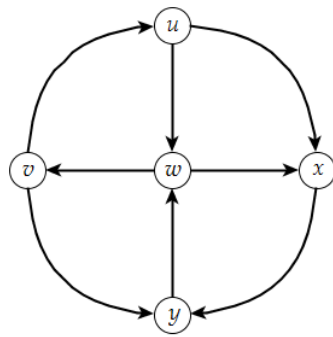
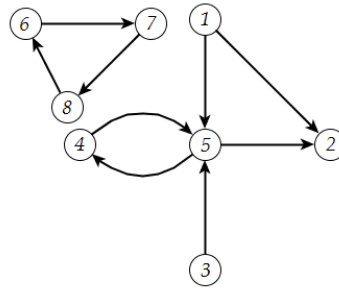
(a) D_1 (b) D_2

Figura 1.4: Representación geométrica de las digráficas del ejemplo

Diremos que $f = (u, v) \in F(D)$ incide desde u e incide hacia v ; también u es adyacente hacia v y v es adyacente desde u .

Consideremos $z \in V(D)$. La *in-vecindad de z en D* , denotada por $N^-(z, D)$ ó $N_D^-(z)$, se define como el conjunto de vértices que son adyacentes hacia z , es decir, $N^-(z, D) = \{x \in V(D) : (x, z) \in F(D)\}$.

De igual manera definimos la *ex-vecindad de z en D* , denotada por

$N^+(z, D)$ o $N_D^+(z)$, como el conjunto de vértices que son adyacentes desde z , es decir, $N^+(z, D) = \{x \in V(D) : (z, x) \in F(D)\}$.

Ahora bien definimos el *ingrado de z en D* , $\delta_D^-(z)$, como el número de vértices adyacentes hacia z , es decir, $|N^+(z, D)|$; el *exgrado de z en D* , $\delta_D^+(z)$, es el número de vértices adyacentes desde z , esto es, $|N^+(z, D)|$. Finalmente, el *grado de z en D* , se define como $\delta_D(z) = \delta_D^+(z) + \delta_D^-(z)$. Por ejemplo en D_1 , $\delta_{D_1}^+(u) = 2$ y $\delta_{D_1}^-(u) = 1$, $\delta_{D_1}^+(v) = 2$ y $\delta_{D_1}^-(v) = 1$, $\delta_{D_1}^+(w) = 2$ y $\delta_{D_1}^-(w) = 2$, etcétera. Por otro lado, en D_2 , $N_{D_2}^+(5) = \{4, 2\}$ y $N_{D_2}^-(5) = \{1, 3, 4\}$ (Fig. 1.4).

En una digráfica D , se tienen dos conceptos de caminos cada uno dependiendo si se consideran las direcciones o no. Un *camino en D* es una sucesión de vértices y flechas $(z_0, f_0, z_1, f_1, \dots, x_{n-1}, f_{n-1}, x_n)$ que empieza y termina en vértices y $f_i = (x_i, x_{i+1})$ ó $f_i = (x_{i+1}, x_i)$. Un *camino dirigido en D* es una sucesión de vértices $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$ con $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Por ejemplo $C = (u, v, w, x, y)$ es un camino en D_1 y, por otro lado, $\vec{C} = (u, x, y, w, v)$ es un camino dirigido en D_1 . (Fig. 1.4)

Para las siguientes definiciones consideraremos D una digráfica y $u, v \in V(D)$.

Un uv -camino es un camino que empieza en u y termina en v ; por otro

lado un uv -camino dirigido es un camino dirigido que empieza en u y termina en v . Decimos que un camino (camino dirigido) es *cerrado* si empieza y termina en el mismo vértice.

Un *paseo* es un camino en el que no se repiten flechas, mientras que un *paseo dirigido* es un camino dirigido en el cual no se repiten flechas.

Una *trayectoria*, es un camino en el que no se repiten vértices, en este caso también tenemos la *trayectoria dirigida*, que es un camino dirigido en el que no se repiten vértices. Un *ciclo dirigido* es un camino dirigido cerrado en el que no se repiten vértices excepto el primero y el último, que son iguales; un *ciclo* es un camino cerrado en el cual no se repiten vértices excepto el primero y el último que son iguales.

Decimos que la longitud del camino $C = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ es n y se denota por $l(C)$, esto es el número de flechas del camino. Al ciclo dirigido de longitud k lo denotaremos por \vec{C}_k . (Fig. 1.5)

Podemos relacionar el concepto de camino dirigido con el de trayectoria dirigida de la siguiente manera;

Teorema 1.1 *Sea D una digráfica. Todo camino dirigido de u a v , con $u, v \in V(D)$, contiene como subsucesión una trayectoria dirigida de u a v .*

Demostración. Sea C un uv -camino dirigido. Procederemos por inducción

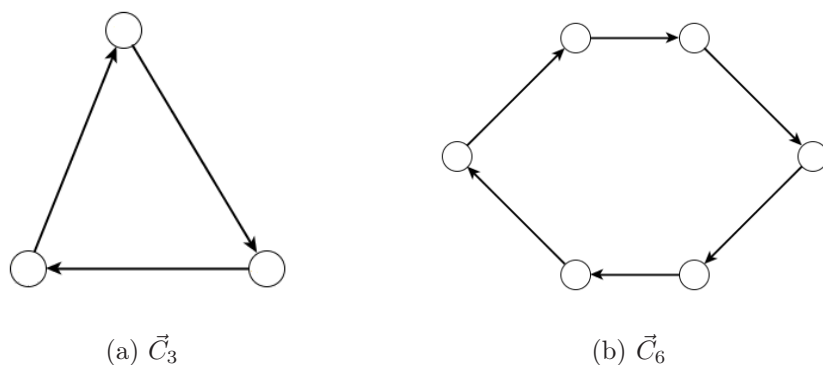


Figura 1.5

sobre la longitud del camino $l(C) = n$.

Si $l(C) = 1$ tenemos que el camino es la flecha (u, v) que es una trayectoria de u a v de longitud 1, por tanto se cumple la afirmación. Supongamos que si C' es un uv -camino dirigido tal que $l(C') < n$ entonces C' contiene como subsucesión una uv -trayectoria.

Sea $C = (u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = v)$ un camino dirigido de u a v de longitud n . Tenemos dos casos:

Caso 1. Si $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$ con $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

En este caso C cumple la definición de trayectoria dirigida, es decir, C es una trayectoria dirigida de u a v .

Caso 2. Si $x_i = x_j$ para algún $i \neq j$ con $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ (Fig. 1.6)

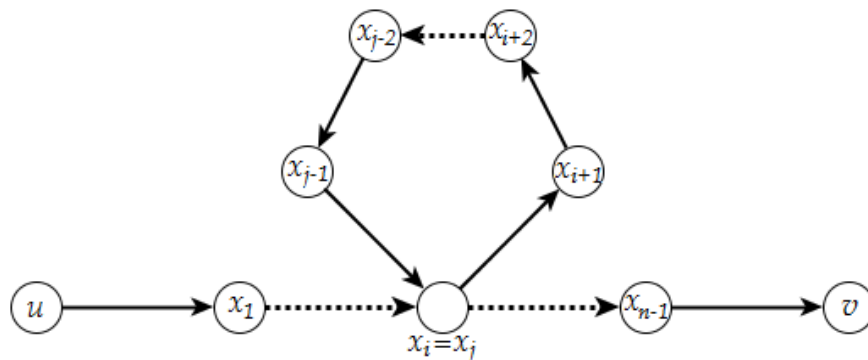


Figura 1.6

Sin pérdida de generalidad supongamos que $i < j$, así

$$C' = (u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n = v)$$

es un uv -camino dirigido de longitud menor a n . Entonces, por hipótesis de inducción, contiene como subsucesión una uv -trayectoria T . Por tanto, como $C' \subset C$, tenemos que $T \subseteq C$, esto es, C contiene a T como subsucesión. Por tanto se cumple el teorema. ■

De manera similar podemos relacionar los conceptos de camino dirigido cerrado y ciclo dirigido.

Teorema 1.2 *Sea D una digráfica. D contiene un camino dirigido cerrado si y sólo si D contiene un ciclo dirigido.*

Demostración. Primero probemos la necesidad. Supongamos que D tiene

un camino dirigido cerrado $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$ y probaremos que C contiene un ciclo dirigido. Ahora supongamos que $l(C) = n$. Como el camino es cerrado, $n > 1$; así si $n = 2$ tenemos que $C = (x_0, x_1, x_0)$ que es un ciclo de longitud 2.

Ahora supongamos que si C' es un camino dirigido cerrado de longitud $l(C') < n$, entonces contiene un ciclo dirigido. Sea C un camino de longitud n . Tenemos dos casos;

Caso 1. Si $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$ con $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

En este caso C es un ciclo dirigido y se cumple la afirmación.

Caso 2. Si $x_i = x_j$ para algún $i \neq j$ con $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ (Fig. 1.7)

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i < j$, entonces,

$$C' = (x_0, x_1, \dots, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n, x_0)$$

es un camino cerrado de longitud menor a n , por hipótesis de inducción tenemos que C' contiene un ciclo dirigido γ y como $C' \subset C$ obtenemos que $\gamma \subset C$.

Para la suficiencia, el ciclo dirigido que tenemos es, en particular, un camino dirigido cerrado.

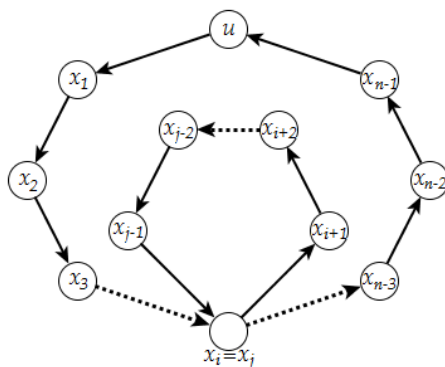


Figura 1.7

Por tanto se cumple el teorema. ■

Sea $S \subseteq V(D)$ entonces decimos que existe zS -flecha si existe $s \in S$ tal que $(z, s) \in F(D)$; análogamente decimos que tenemos Sz -flecha si existe $s \in S$ tal que $(s, z) \in F(D)$. Este concepto de zS -flecha puede ser extendido al de zS -camino de la siguiente manera; decimos que existe un zS -camino si existe $s \in S$ tal que hay un zs -camino de s a z contenido en D ; de manera similar, decimos que existe un zS -camino dirigido si existe $s \in S$ tal que hay un zs -camino dirigido de s a z contenido en D .

Una digráfica D es *transitiva* si para vértices distintos $u, v, w \in V(D)$ tales que $(u, v) \in F(D)$ y $(v, w) \in F(D)$ implica $(u, w) \in F(D)$.

Decimos que una flecha $(u, v) \in F(D)$ es *simétrica* si también $(v, u) \in F(D)$, en otro caso diremos que es *asimétrica*. Una digráfica D

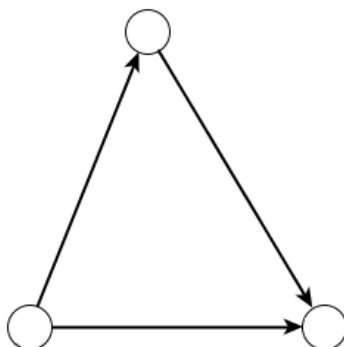


Figura 1.8: Torneo transitivo de tres vértices

es *asimétrica* si cada flecha de D es asimétrica, de manera análoga, decimos que D es *simétrica* si cada flecha de D es simétrica.

A cada digráfica D se le puede asociar una gráfica G con el mismo conjunto de vértices; mientras que por cada flecha de D hay una arista en G con los mismos extremos. En dado caso que este la flecha simétrica entonces sólo consideraremos una arista en G . A G se le llama *gráfica subyacente de D* y la denotamos por G_D . Dicho de otra manera, la gráfica G_D se define como:

$$V(G_D) = V(D)$$

$$u \text{ ady}_{G_D} v \text{ si y sólo si } \begin{array}{l} (u, v) \in F(D) \text{ o} \\ (v, u) \in F(D). \end{array}$$

Inversamente, dada una gráfica G se puede obtener una digráfica de G por medio de asignar a cada arista una dirección en los extremos. A esta digráfica

se le denomina *orientación de G* (Fig. 1.9).

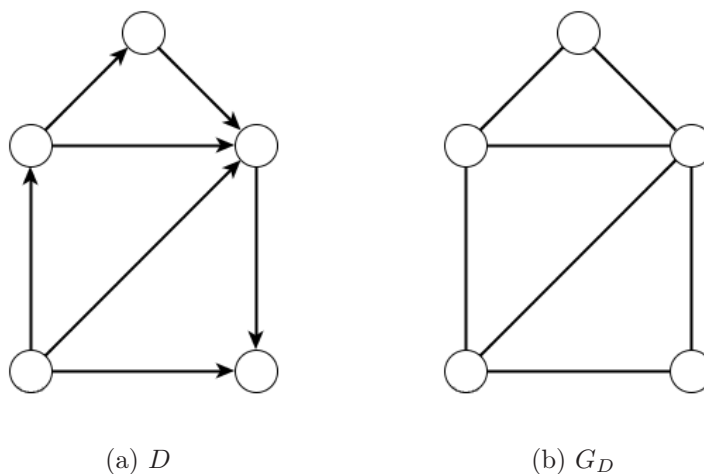


Figura 1.9

En algunos casos denotaremos $[z, w]$ a la flecha (z, w) o a la flecha (w, z) . En digráficas de nuevo tenemos el concepto de conexidad, sin embargo, tenemos distintos tipos de conexidad. Decimos que una digráfica D es *conexa* si G_D es conexa, es decir, para cualesquiera $u, v \in V(D)$ existe un camino entre ellos. Decimos que D es *unilateralmente conexa* si para cualesquiera $u, v \in V(D)$ existe un uv -camino dirigido o un vu -camino dirigido. Finalmente decimos que D es *fuertemente conexa* si para cualesquiera $u, v \in V(D)$ existe un uv -camino dirigido y existe un vu -camino dirigido.

Para la definición de fuertemente conexa podemos dar una equivalencia

que nos ayudará mas adelante.

Proposición 1.1 *Una digráfica D es fuertemente conexa si y sólo si para toda partición de $V(D)$ en dos conjuntos V_1 y V_2 existe V_1V_2 -flecha y existe V_2V_1 -flecha.*

Demostración. Supongamos que D es una digráfica fuertemente conexa y $\{V_1, V_2\}$ cualquier partición de $V(D)$ en dos conjuntos. Sean $x_1 \in V_1$ y $x_2 \in V_2$.

Como D es fuertemente conexa, existe x_1x_2 -camino dirigido $C = (x_1 = z_0, z_1, \dots, z_n = x_2)$. Sea $i_0 = \min\{i \in \{0, 1, \dots, n\} : x_i \in V_2\}$, éste existe pues recordemos que $x_1 \in V_1$ y $x_2 \in V_2$. Por tanto $(x_{i_0-1}, x_{i_0}) \in F(D)$ es una V_1V_2 -flecha. De manera análoga existe la V_2V_1 -flecha.

Ahora supongamos que D es una digráfica tal que para toda partición de $V(D)$ en dos conjuntos V_1 y V_2 existe V_1V_2 -flecha y existe V_2V_1 -flecha y mostraremos que D es fuertemente conexa. Para eso basta mostrar que para cada $x \in V(D)$, $R(x) = \{z \in V(D) : \exists xz - \text{camino dirigido}\} = V(D)$.

Sea $x \in V(D)$ y supongamos por contradicción que $R(x) \subset V(D)$, esto es, existe $y \in V(D) - R(x)$. Observemos que $R(x) \neq \emptyset$ ya que $x \in R(x)$, siempre existe el camino de longitud 0; por nuestra suposición $V(D) - R(x) \neq \emptyset$. Consideremos $V_1 = R(x)$ y $V_2 = V(D) - R(x)$, esta

es una partición de $V(D)$ en dos conjuntos. Por hipótesis existe V_1V_2 -flecha.

Sea $(y_1, y_2) \in F(D)$ tal que $y_1 \in V_1$ y $y_2 \in V_2$.

Como $y_1 \in V_1$ entonces existe xy_1 -camino dirigido C_1 ; por tanto $C_1 \cup (y_1, y_2)$ es un camino dirigido de x a y_2 , por tanto $y_2 \in V_1$, pero $y_2 \in V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por tanto $R(x) = V(D)$. ■

También, como en el caso de las gráficas, podemos definir la *subdigráfica* H de una digráfica D , como una digráfica tal que $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$. Para un subconjunto no vacío $S \subseteq V(D)$, podemos definir la *subdigráfica de D inducida por S* , denotada por $D[S]$, como la subdigráfica de D que tiene por conjunto de vértices a S y las flechas son todas aquellas que hacen adyacentes en D a los vértices de S (Fig. 1.10). De manera análoga definimos para un subconjunto no vacío de flechas $E \subseteq F(D)$ la *subdigráfica de D inducida por E* , denotada por $D[E]$, de la siguiente manera;

$$V(D[E]) = \{z \in V(D) : f = (z, x) \text{ o } f = (x, z), f \in E\}$$

$$F(D[E]) = E$$

Decimos que una subdigráfica H de una digráfica D es generadora si $V(H) = V(D)$.

Se dice que $N \subseteq V(D)$ es un conjunto *absorbente* si para cada $z \in (V(D) - N)$ tenemos que existe zN -flecha. También decimos que N

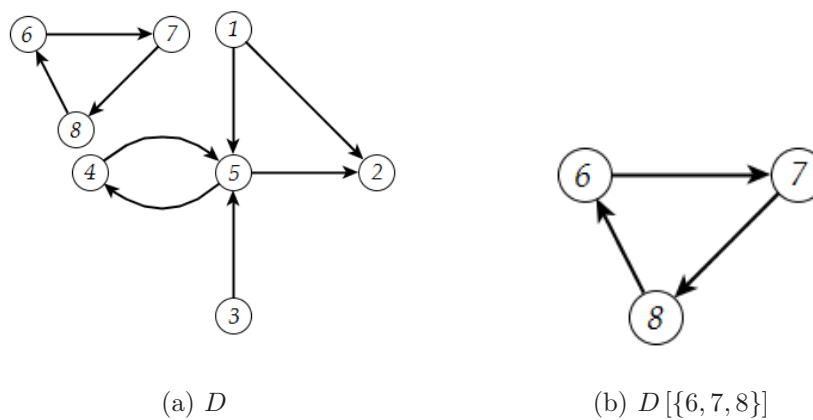


Figura 1.10

es *independiente* si para cualesquiera dos vértices en S no existe flecha entre ellos. Si N cumple ambas propiedades, entonces llamamos a N *núcleo de D* .

Una observación importante es que no todas las digráficas tienen núcleo, un ejemplo de esto son los ciclos dirigidos de longitud impar.

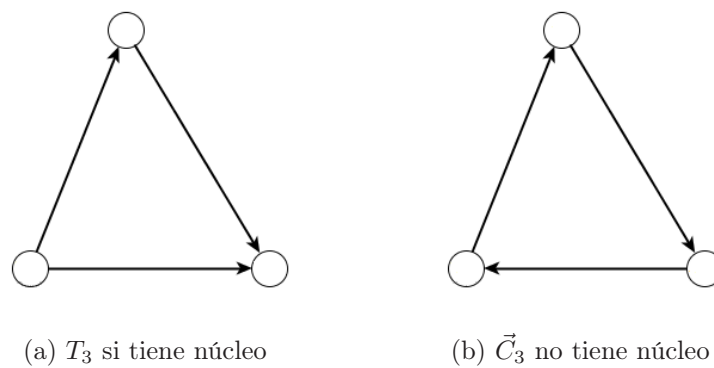


Figura 1.11

De manera similar podemos definir un concepto un poco menos fuerte que es el de seminúcleo. Decimos que un subconjunto $S \subset V(D)$ es *seminúcleo de D* si es independiente y para cada $z \in V(D) - S$ tal que exista Sz -flecha, existe zS -flecha. Observemos que el conjunto vacío cumple, por vacuidad, la propiedad de ser seminúcleo.

Decimos que una digráfica D es *núcleo-perfecta* si toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo. Análogo a esto, decimos que una digráfica D es *núcleo imperfecta crítica* si D no tiene núcleo pero cada subdigráfica inducida propia tiene núcleo.

Proposición 1.2 *Si D es una digráfica sin núcleo entonces existe una subdigráfica inducida H de D la cual es núcleo imperfecta crítica.*

Demostración. Si todas las subdigráficas inducidas de D tiene núcleo entonces D es núcleo imperfecta crítica. Supongamos que existe una subdigráfica inducida H_0 de D que no tiene núcleo, si todas las subdigráficas inducidas de H_0 tienen núcleo, entonces H_0 es la buscada. Supongamos que existe una subdigráfica inducida H_1 de H_0 sin núcleo, si todas las subdigráficas inducidas de H_1 tienen núcleo, entonces H_1 es la subdigráfica buscada, esto porque en particular es una subdigráfica inducida de D . Supongamos ahora que existe

H_2 subdigráfica inducida de H_1 sin núcleo y continuamos con este procedimiento. Como D es finita entonces existe un natural n tal que H_n no tiene núcleo y es mínima por contención y todas sus inducidas son o una flecha o un vértice, y en ambos casos tienen núcleo, por tanto H_n es núcleo imperfecta crítica. ■

Definimos la *parte asimétrica de D* , denotada por $Asim(D)$ como sigue;

$$V(Asim(D)) = V(D)$$

$$(u, v) \in F(Asim(D)) \text{ si y sólo si } (u, v) \in F(D) \text{ y } (v, u) \notin F(D)$$

esto es, $Asim(D)$ es la subdigráfica generadora de D cuyas flechas son las flechas asimétricas de D , por tanto una digráfica es asimétrica si $Asim(D) = D$. De igual manera, definimos la *parte simétrica de D* , denotada por $Sim(D)$ como la subdigráfica generadora de D cuyas flechas son las flechas simétricas de D ; y D es simétrica si $Sim(D) = D$.

Una digráfica D es *semicompleta* si para cualesquiera $u, v \in V(D)$ se cumple al menos una:

$$(i) \quad (u, v) \in F(D)$$

$$(ii) \quad (v, u) \in F(D)$$

Un *torneo* T se define como una orientación de la gráfica completa, es decir, una orientación de K_p . También podemos definir torneo de la siguiente

manera: D es torneo si D es semicompleta y asimétrica. En el caso de que T es un torneo, la subdigráfica inducida por S se denotará como $T[S]$, esto ya que $D[S]$ será también un torneo.

Una digráfica D se dice que está *m-coloreada* si las flechas de D están coloreadas con m colores.

Sea D una digráfica *m-coloreada*. Un camino ya sea dirigido o no, se dice que es *monocromático en D* si todas sus flechas tienen del mismo color. Así podemos trasladar a este contexto los conceptos de paseo, trayectoria, camino cerrado y ciclo y sus correspondientes dirigidos, diciendo que son *monocromáticos* si todas sus flechas son del mismo color. También decimos que son *cuasi-monocromáticos* si son monocromáticos con a lo más una excepción, es decir, todas las flechas son del mismo color con a lo más una distinta. Finalmente decimos que son *policromáticos* si son al menos 3-coloreados. En algunos casos abreviaremos trayectoria(s) dirigida monocromática mediante t.d.m.

Los teoremas 1.1 y 1.2 se pueden aplicar tal cual para digráficas *m-coloreadas*, solo hay que replantearlos de la siguiente manera;

Teorema 1.3 *Sea D una digráfica m-coloreada. Todo camino dirigido monocromático de u a v , con $u, v \in V(D)$, contiene como subsucesión una*

trayectoria dirigida monocromática de u a v .

Teorema 1.4 *Sea D una digráfica m -coloreada. D contiene un camino dirigido monocromático cerrado si y sólo si D contiene un ciclo dirigido monocromático.*

y la demostración es exactamente la misma, basta con agregar la palabra monocromática(o) en los lugares adecuados. Por lo tanto al unir trayectorias dirigidas monocromáticas diremos directamente que se obtiene otra trayectoria dirigida monocromática o un ciclo dirigido monocromático, según sea el caso.

Las definiciones relacionadas con núcleos también se pueden trasladar al contexto de una digráfica D m -coloreada de la siguiente manera, se dice que $N \subseteq V(D)$ es un conjunto *absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas* si para cada $z \in (V(D) - N)$ tenemos que existe una zN -trayectoria dirigida monocromática. También decimos que N es *independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas* si para cualesquiera dos vértices en S no existe trayectoria dirigida monocromática entre ellos. Si N cumple ambas propiedades, entonces llamamos a N *núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D* . En este contexto, diremos que D es *núcleo perfecta monocromática*, si toda subdigráfica inducida tiene núcleo por

trayectorias dirigidas monocromáticas.

Observemos que la definición de independencia por trayectorias dirigidas monocromáticas incluye la definición de independencia sin colores, ya que una flecha coloreada es, en particular, una trayectoria dirigida monocromática.

Consideremos una digráfica m -coloreada D , entonces decimos que la cerradura de D , denotada por $\mathfrak{C}(D)$, es la digráfica m -coloreada definida de la siguiente manera;

$$V(\mathfrak{C}(D)) = V(D)$$

$$F(\mathfrak{C}(D)) = F(D) \cup \{(u, v) \text{ de color } i : \exists uv\text{-t.d.m. de color } i \text{ en } D\}$$

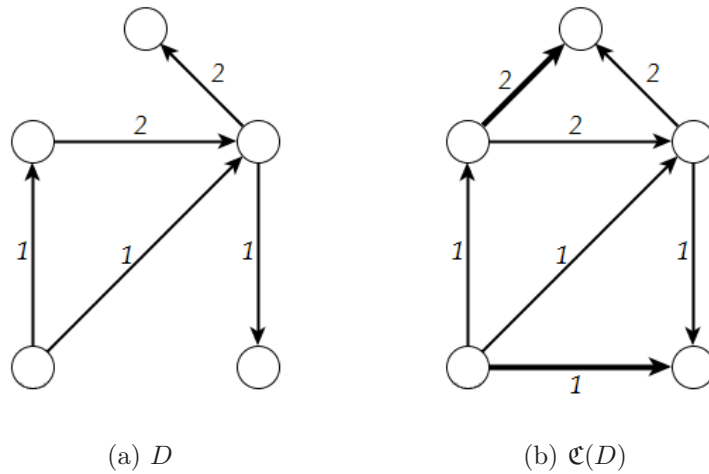


Figura 1.12: Cerradura de D

1.4. Algunos Resultados sobre Núcleos

Para la demostración de algunos teoremas relacionados con núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas, ocuparemos algunos resultados de núcleos dada la siguiente equivalencia;

Teorema 1.5 *Sea D una digráfica m -coloreada. D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas si y sólo si $\mathfrak{C}(D)$ tiene núcleo.*

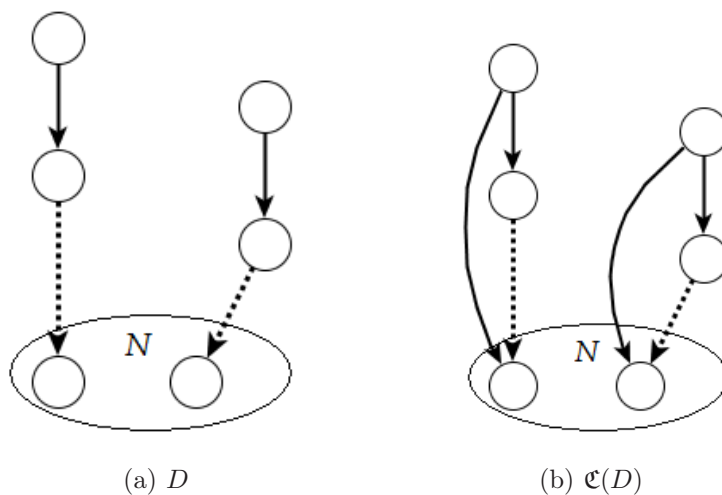


Figura 1.13

Demostración. Supongamos primero que D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, es decir, existe $N \subseteq V(D)$ independiente y absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas. Consideremos $\mathfrak{C}(D)$,

recordemos que $V(D) = V(\mathfrak{C}(D))$, y por esto $N \subseteq V(\mathfrak{C}(D))$. Afirmamos que N es núcleo de $\mathfrak{C}(D)$.

Como N es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas, entonces para cualesquiera $x, y \in N$ no existe trayectoria dirigida monocromática de x a y ni de y a x en D , por tanto para cualesquiera $x, y \in N$, $(x, y) \notin F(\mathfrak{C}(D))$ y $(y, x) \notin F(\mathfrak{C}(D))$, es decir, N es independiente en $\mathfrak{C}(D)$.

Por otro lado, consideremos $x \in V(\mathfrak{C}(D)) - N$. Como N es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D y $x \in V(D) - N$ entonces existe trayectoria dirigida monocromática de x a N . Por tanto, por definición de $\mathfrak{C}(D)$, existe xN -flecha. Por tanto N es absorbente. (Fig. 1.13)

Así queda probada la primera parte del teorema.

Supongamos ahora que $\mathfrak{C}(D)$ tiene núcleo N . De nuevo afirmamos que N es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D .

Como N es independiente en $\mathfrak{C}(D)$, es decir, no existe flecha entre ningún par de vértices de N , entonces no existe trayectoria dirigida monocromática entre ningún par de vértices de N en D , esto por definición de $\mathfrak{C}(D)$. Ahora bien, si consideramos $x \in V(D) - N$, entonces existe xN -flecha en $\mathfrak{C}(D)$, esto porque N es núcleo de $\mathfrak{C}(D)$, y por tanto existe trayectoria dirigida monocromática de x a N en D , por definición de $\mathfrak{C}(D)$. Por tanto N es

núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de D . ■

De esta manera podemos relacionar resultados sobre la existencia de núcleos con resultados sobre núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas. Como se dijo antes, mostraremos algunos de estos resultados sobre núcleos. Para el primero de éstos observemos que si para todo $z \in V(D)$, tenemos que $\delta^+(z) \geq 1$ entonces D contiene al menos un ciclo dirigido. Consideremos $\vec{C} = (z_0, z_1, \dots, z_n)$ un camino dirigido de longitud máxima. Por hipótesis $\delta^+(z_n) \geq 1$, pero por la maximalidad de C , tenemos que $N^+(z_n) \subseteq V(C)$ ya que de otra manera podríamos construir un camino dirigido de longitud mayor. Entonces $(z_n, z_i) \in F(D)$ con $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ y por tanto existe $C' = (z_i, z_{i+1}, \dots, z_n, z_i)$ un camino dirigido cerrado y por tanto un ciclo dirigido en D .

Teorema 1.6 *Si D es una digráfica sin ciclos dirigidos, entonces D posee un único núcleo.*

Demostración. Como D no tiene ciclos dirigidos, entonces, por la observación anterior, existe $z_0 \in V(D)$ tal que $\delta_D^+(z_0) = 0$.

Sea $A_0 = \{z \in V(D) : \delta^+(z) = 0\}$, entonces es claro que si N es un núcleo de D , $A_0 \subseteq N$. Sea $B_0 = \{z \in V(D) : \exists z A_0 - flecha\}$. Definimos $D_0 = D$ y $D_1 = D - (A_0 \cup B_0)$. Si $D_1 = \emptyset$ entonces hacemos $N = A_0$. Por otro

lado, si $D_1 \neq \emptyset$ entonces, como $D_1 \subset D$ tenemos que hereda la propiedad de ser acíclica y entonces podemos definir $A_1 = \{z \in V(D_1) : \delta_{D_1}^+(z) = 0\}$ y $B_1 = \{z \in V(D_1) : \exists z A_1 - \text{flecha en } D_1\}$.

Sea $D_2 = D_1 - (A_1 \cup B_1)$. Si $D_2 = \emptyset$, entonces $N = A_0 \cup A_1$ es núcleo de D . Ahora bien, si $D_2 \neq \emptyset$, entonces, como $D_2 \subset D$, tenemos que hereda la propiedad de ser acíclica y definimos $A_2 = \{z \in V(D_2) : \delta_{D_2}^+(z) = 0\}$ y $B_2 = \{z \in V(D_2) : \exists z A_2 - \text{flecha en } D_2\}$.

Sea $D_3 = D_2 - (A_2 \cup B_2)$. Continuamos con el procedimiento. Como D es finita, entonces podemos encontrar un entero positivo r tal que $D_r = D_{r-1} - (A_{r-1} \cup B_{r-1}) = \emptyset$ y afirmamos que $N = \bigcup_{i=0}^{r-1} A_i$ es núcleo de D .

(1) N es independiente.

Ya que $A_i = \{z \in V(D_i) : \delta_{D_i}^+(z) = 0\}$, tenemos que A_i es independiente para cada $i = 0, 1, 2, \dots, r$ ya que no salen flechas de los elementos de A_i en D_i . Sean $i, j \in \{0, 1, \dots, r\}$, con $i < j$. Sea $x \in A_i$ y $y \in A_j$. Si $(y, x) \in F(D)$ entonces $y \in B_i$ lo cual contradice que $y \in A_j$ con $j > i$ y $A_j \subset D - (\bigcup_{s=0}^{j-1} (A_s \cup B_s))$. No puede pasar que $(x, y) \in F(D)$ ya que $\delta_{D_i}^+(x) = 0$. Por tanto N es independiente.

(2) N es absorbente.

Por construcción tenemos que $V(D) = \bigcup_{i=0}^r (A_i \cup B_i)$ y por tanto $D - N = \bigcup_{i=0}^r B_i$. Ahora bien, si $z \in V(D) - N$ entonces existe $k \in \{0, 1, \dots, r\}$ tal que $z \in B_k$ y por construcción de B_k existe zA_k -flecha. Por tanto existe zN -flecha

Por tanto N es núcleo de D y por construcción es único. ■

Lema 1.2 *Si D es una digráfica tal que toda subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío, entonces D tiene núcleo.*

Demostración. Sea D una digráfica en la cual toda subdigráfica inducida de ésta tiene seminúcleo no vacío. Consideremos S_D un seminúcleo no vacío de D máximo por contención. Afirmamos que S_D es núcleo de D . Por definición S_D es independiente, por tanto basta ver que es absorbente.

Consideremos $B = \{z \in V(D) : \neg \exists zS_D \text{ - flecha en } D\}$. Si $B = \emptyset$ entonces S_D es núcleo de D .

Supongamos pues que $B \neq \emptyset$ y consideremos $D[B]$. Por hipótesis $D[B]$ tiene seminúcleo no vacío, sea S_1 tal. Afirmamos que $S = S_D \cup S_1$ es seminúcleo de D .

S_D y S_1 son, cada uno independiente en D ya que son seminúcleos. No existen S_1S_D -flechas ya que $S_1 \subseteq B$. No existen S_DS_1 -flechas puesto que S_D es seminúcleo y si existe S_Dz -flecha entonces existe zS_D -flecha. Por tanto S es independiente.

Sea $z \in V(D) - S$ tal que existe Sz -flecha. Si es una S_Dz -flecha, entonces como S_D es seminúcleo de D , existe zS_D -flecha. Por otro lado, si es una S_1z -flecha, si $z \in B$ entonces existe zS_1 -flecha, ya que S_1 es seminúcleo de $D[B]$; ahora bien, si $z \notin B$ entonces, por definición de B , existe zS_D -flecha en D . Por tanto existe zS -flecha en D .

Por tanto S es seminúcleo no vacío de D que contiene propiamente a S_D , lo cual contradice la maximalidad de S_D , entonces $B = \emptyset$. Por tanto S_D es núcleo de D . ■

Lema 1.3 *Si la digráfica D es núcleo imperfecta crítica, entonces D no tiene seminúcleo no vacío.*

Demostración. Sea D una digráfica núcleo imperfecta crítica y supongamos por contradicción que D tiene un seminúcleo no vacío, digamos S .

Ya que toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo y todo núcleo es un seminúcleo, (esto pasa por la definición de núcleo, ya que si N es núcleo de H entonces para todo $z \in V(H) - N$ existe zN -flecha, en particular para

los que existe Nz -flecha) se tiene que toda subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo no vacío y por el Lema 1.2 D tiene núcleo, lo cual contradice que D sea núcleo imperfecta crítica. ■

Teorema 1.7 *Si D es una digráfica núcleo imperfecta crítica, entonces la parte asimétrica de D , $Asim(D)$, es fuertemente conexa.*

Demostración. Supongamos por contradicción que $Asim(D)$ no es fuertemente conexa, entonces por la Proposición 1.1, existe una partición de $V(Asim(D)) = V(D)$ en dos conjuntos $\{V_1, V_2\}$ tales que no existe V_1V_2 -flecha en $Asim(D)$ o no existe V_2V_1 -flecha en $Asim(D)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que no existe V_1V_2 -flecha en $Asim(D)$, es decir, toda V_1V_2 -flecha en D es simétrica.

Como $\{V_1, V_2\}$ es partición de $V(D)$ entonces $V_1 \neq \emptyset$ y $V_2 \neq \emptyset$ y tenemos que $D_1 = D[V_1]$ y $D_2 = D[V_2]$ son subdigráficas inducidas propias. Por hipótesis, D_1 y D_2 tienen núcleo. Sea N_1 núcleo de D_1 . Afirmamos que N_1 es seminúcleo de D . Como N_1 es núcleo entonces es independiente y por la observación en la demostración del lema anterior, N_1 es seminúcleo de D_1 , y por otro lado, si existe $z \in V_2$ tal que existe N_1z -flecha en D entonces en particular, esta es una V_1V_2 -flecha y por la hipótesis es simétrica, por tanto

existe zN_1 -flecha en D . Por tanto N_1 es seminúcleo no vacío de D , lo cual contradice el Lema 1.3. ■

Corolario 1.1 *Toda digráfica núcleo imperfecta crítica contiene al menos un ciclo dirigido asimétrico.*

Demostración. Sea D una digráfica núcleo imperfecta crítica y sean $u, v \in V(D)$ distintos. Por el Teorema 1.7, $Asim(D)$ es fuertemente conexa, entonces existe C_1 camino dirigido de u a v y C_2 camino dirigido de v a u . Por tanto $C_1 \cup C_2$ es un camino dirigido cerrado en $Asim(D)$ y por el Teorema 1.2, $Asim(D)$ contiene un ciclo dirigido, esto es, un ciclo dirigido asimétrico. ■

De estos resultados obtenemos el siguiente teorema;

Teorema 1.8 *Si cada ciclo dirigido de una digráfica D tiene al menos una flecha simétrica, entonces D es núcleo-perfecta.*

Demostración. Supongamos por contradicción que D no es núcleo perfecta, entonces existe D' una subdigráfica inducida de D que no tiene núcleo. Por la Propiedad 1.2, existe H una subdigráfica inducida de D' (y por lo mismo de D) que es núcleo imperfecta crítica. Por el corolario anterior tenemos que existe $\vec{\gamma}$ ciclo dirigido asimétrico en $H \subset D$. Por tanto $\vec{\gamma}$ es un ciclo dirigido

asimétrico en D , lo cual es una contradicción, ya que todo ciclo dirigido en D contiene al menos una flecha simétrica. ■

Teorema 1.9 *Una digráfica semicompleta es núcleo perfecta si y sólo si cada ciclo tiene una flecha simétrica.*

Demostración. Supongamos que D es una digráfica semicompleta núcleo perfecta. Si D no tiene ciclos dirigidos entonces por vacuidad se cumple el teorema, por tanto supongamos que existe un ciclo dirigido en D , $\vec{C}_k = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_0)$, y supongamos además que es de longitud mínima. Afirmamos que $k = 3$.

Supongamos que $k > 3$. Como D es semicompleta entonces $D[\vec{C}_k]$ también lo es, y por esta razón, $(u_0, u_2) \in F(D)$ o $(u_2, u_0) \in F(D)$. Si $(u_0, u_2) \in F(D)$, tendríamos un ciclo dirigido $C' = (u_0, u_2, \dots, u_{k-1}, u_0)$ en D de longitud menor que la de \vec{C}_k y esto contradice la minimalidad de \vec{C}_k . Por lo tanto $(u_2, u_0) \in F(D)$, pero en este caso también tenemos que existe $C' = (u_0, u_1, u_2, u_0)$ que es de longitud menor que \vec{C}_k . Por lo tanto $k = 3$.

Si \vec{C}_3 no tuviera una flecha simétrica entonces existe una subdigráfica inducida de D que no tiene núcleo, ya que \vec{C}_3 no tiene núcleo. Por lo tanto se cumple la primera parte del teorema.

De manera inversa si D es una digráfica tal que cada ciclo tiene una flecha simétrica entonces por el Teorema 1.8 tenemos que D es núcleo perfecta. ■

Corolario 1.2 *Si D es una digráfica semicompleta m -coloreada, tal que cada triángulo dirigido es monocromático o simétrico, entonces D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.*

Demostración. Como D es semicompleta, entonces $\mathfrak{C}(D)$ es semicompleta ya que $D \subseteq \mathfrak{C}(D)$. Más aún, sabemos que cada triángulo en D es simétrico o monocromático entonces en $\mathfrak{C}(D)$ todo triángulo dirigido es simétrico; esto pasa ya que si $\vec{C}_3 = (u, v, w, u)$ es un triángulo dirigido en D no simétrico, entonces es monocromático, así (u, v) , (v, w) y (w, u) son de color i , para algún $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ así (u, v, w) , (v, w, u) y (w, u, v) son trayectorias dirigidas monocromáticas de color i en D y por tanto (u, w) , (v, u) y (w, v) son flechas de $\mathfrak{C}(D)$ y por tanto nos da un triángulo dirigido simétrico en $\mathfrak{C}(D)$.

Ahora consideremos un ciclo dirigido $\vec{\gamma} = (z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, z_0)$ en $\mathfrak{C}(D)$. Como observamos antes, $\mathfrak{C}(D)$ es semicompleta, entonces tenemos que $(z_0, z_2) \in F(\mathfrak{C}(D))$ ó $(z_2, z_0) \in F(\mathfrak{C}(D))$. Primero, si $(z_2, z_0) \in F(\mathfrak{C}(D))$ entonces $\vec{C} = (z_0, z_1, z_2, z_0)$ es un triángulo dirigido en $\mathfrak{C}(D)$ ahora, por lo visto arriba, tenemos que todas sus flechas son simétricas, es decir, $\{(z_0, z_2), (z_2, z_1), (z_1, z_0)\} \subseteq F(\mathfrak{C}(D))$. En particular (z_2, z_1) , (z_1, z_0) están en

$\vec{\gamma}$. Por tanto $\vec{\gamma}$ tiene al menos una flecha simétrica. Ahora bien si $(z_0, z_2) \in F(\mathfrak{C}(D))$, entonces existe $z_i \in V(\vec{\gamma})$ tal que $(z_0, z_i) \in F(\mathfrak{C}(D))$ y $(z_{i+1}, z_0) \in F(\mathfrak{C}(D))$ (esto ya que (z_n, z_0)). Así $\vec{C} = (z_0, z_i, z_{i+1}, z_0)$ es un triángulo dirigido en $\mathfrak{C}(D)$ y por tanto todas sus flechas son simétricas esto es (z_0, z_{i+1}) , (z_{i+1}, z_i) y (z_i, z_0) también están en $F(\mathfrak{C}(D))$. En particular (z_{i+1}, z_i) , esta en $\vec{\gamma}$. Por tanto $\vec{\gamma}$ tiene al menos una flecha simétrica. Así todo ciclo contiene una flecha simétrica y por tanto $\mathfrak{C}(D)$ tiene núcleo. Por lo tanto D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas ■

Este último resultado nos ayudará a ver un ejemplo en el siguiente capítulo acerca de las cotas que se tienen de las longitudes de las trayectorias con que absorbe un vértice a los demás, en un torneo.

Teorema 1.10 *Si T es un torneo, entonces existe un vértice x de T tal que existe una zx -trayectoria dirigida de longitud a lo más 2 para cada vértice $z \in V(T)$.*

Demostración. Sea $w \in V(T)$ y

$$\mathfrak{A}(w) = \{z \in V(T) : \exists zw \text{ -trayectoria de longitud menor o igual a } 2\}.$$

Sea $x_0 \in V(T)$ tal que $|\mathfrak{A}(x_0)|$ es máxima. Afirmamos que $\mathfrak{A}(x_0) = V(T)$.

Supongamos que existe $w \in V(T)$ tal que $w \notin \mathfrak{A}(x_0)$. Como T es torneo,

tenemos que $(x_0, w) \in F(T)$. Por esta razón, tenemos que para cada $z \in V(T)$ tal que $(z, x_0) \in F(T)$ existe zw -trayectoria de longitud a lo más 2; además $(z, w) \in F(D)$ ya que si $(w, z) \in F(T)$ entonces $\vec{T} = (w, z, x_0)$ es una trayectoria dirigida de longitud 2 de w a x_0 lo cual contradice la elección de w .

Ahora bien, si $x \in F(T)$ es tal que $\vec{T} = (x = z_0, z_1, z_2 = x_0)$ es la xx_0 -trayectoria dirigida mínima entonces tenemos una xw -trayectoria dirigida de longitud a lo más 2, $\vec{T}' = (x = z_0, z_1, w)$, esto ya que $(z_1, w) \in F(T)$.

Por lo tanto $|\mathfrak{A}(w)| > |\mathfrak{A}(x_0)|$ lo cual contradice que $|\mathfrak{A}(x_0)|$ es máximo.

Por tanto $w \in \mathfrak{A}(x_0)$. ■

Capítulo 2

Núcleos por Trayectorias

Dirigidas Monocromáticas

Recordemos que al definir digráfica dijimos que el conjunto de vértices era un conjunto finito, sin embargo, también se puede considerar un conjunto de vértices infinito lo cual nos daría como resultado una digráfica infinita. En el caso de las digráficas infinitas, podemos tener trayectorias infinitas las cuales empiecen en un vértice y recorran un número infinito de vértices, esto es, que la sucesión de vértices $P = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ es infinita. A este tipo de trayectorias les llamaremos *trayectorias infinitas exteriores*. En el siguiente resultado, al pensar en una digráfica posiblemente infinita, supondremos el

Axioma de Elección y ocuparemos una de sus equivalencias, el Lema de Zorn, presentado en los preliminares. (Lema 1.1)

Teorema 2.1 *Sea G una gráfica dirigida cuyas aristas están coloreadas con dos colores. Si G no contiene trayectorias infinitas exteriores monocromáticas, entonces existe un conjunto independiente S de vértices de G tales que, para cada vértice x que no está en S , existe una trayectoria dirigida monocromática de x a un vértice de S .*

Demostración. Sean 1 y 2 los colores con los cuales están coloreadas las flechas de la gráfica. Sean $S, T \subseteq V(G)$, decimos que $S \leq T$ si y sólo si para cualquier $s \in S$ existe $t \in T$ tal que $s = t$, o existe trayectoria dirigida monocromática de s a t de color 1 y no existe trayectoria dirigida monocromática de t a s de color 1. Observemos que, en particular si $S \subseteq T$ entonces $S \leq T$.

Afirmación 1. La relación \leq , arriba definida, es un orden parcial sobre la familia de conjuntos independientes de G .

Sean $S, T, U \subseteq V(G)$, subconjuntos independientes de $V(G)$. Es claro, por la observación, que $S \leq S$, pues $S \subseteq S$.

Ahora supongamos que $S \leq T$ y $T \leq S$. Sea $s \in S$ entonces como $S \leq T$ por definición existe $t \in T$ tal que $s = t$, o existe trayectoria dirigida mono-

cromática de s a t de color 1 y no existe trayectoria dirigida monocromática de t a s de color 1. Supongamos que $s \neq t$ y sea \vec{T}_1 la st -trayectoria dirigida monocromática. Ahora como $T \leq S$, entonces existe $s' \in S$ tal que $t = s'$, o existe \vec{T}_2 una trayectoria dirigida monocromática de t a s' de color 1 y no existe trayectoria dirigida monocromática de s' a t de color 1. Como S es independiente, entonces $t \neq s'$, ya que si $t = s'$ entonces \vec{T}_1 es una $st = s'$ -trayectoria dirigida monocromática. Así $\vec{T} = \vec{T}_1 \cup \vec{T}_2$ es una trayectoria dirigida monocromática de s a s' , lo cual es una contradicción a que S es independiente. Así $s = t$, y por tanto $s \in T$.

Sea $t \in T$ entonces como $T \leq S$ por definición existe $s \in S$ tal que $t = s$, o existe trayectoria dirigida monocromática de t a s de color 1 y no existe trayectoria dirigida monocromática de s a t de color 1. Supongamos que $t \neq s$ y sea \vec{T}_1 la ts -trayectoria dirigida monocromática. Ahora como $S \leq T$, entonces existe $t' \in T$ tal que $s = t'$, o existe una trayectoria dirigida monocromática \vec{T}_2 de s a t' de color 1 y no existe trayectoria dirigida monocromática de t' a s de color 1. Como T es independiente, entonces $s \neq t'$, ya que si $s = t'$ entonces \vec{T}_1 es una $ts = t'$ -trayectoria dirigida monocromática. Así $\vec{T} = \vec{T}_1 \cup \vec{T}_2$ es una trayectoria dirigida monocromática de t a t' , lo cual es una contradicción a la independencia de T . Así $t = s$, y por tanto $t \in S$.

Por tanto $S = T$, y esto nos da que \leq es antisimétrica.

Supongamos que $S \leq T$ y $T \leq U$ y sea $s \in S$ entonces existe $t \in T$ tal que $s = t$, o existe trayectoria dirigida monocromática \vec{T}_1 de s a t de color 1 y no existe trayectoria dirigida monocromática de t a s de color 1, pues $S \leq T$; ahora como $T \leq U$ entonces tenemos que existe $u \in U$ tal que $t = u$, o existe \vec{T}_2 trayectoria dirigida monocromática de t a u de color 1 y no existe trayectoria dirigida monocromática de u a t de color 1. Así tenemos dos casos;

Caso 1. Sea $s = t$

Subcaso 1.1 $t = u$.

Así por transitividad tenemos que $s = u$ y por tanto $S \leq U$.

Subcaso 1.2 Existe $\vec{T}_2 = (t = x_0, x_1, \dots, x_n = u)$ trayectoria dirigida monocromática de t a u de color 1 y no existe trayectoria dirigida monocromática de u a t de color 1.

Aquí como $s = t$ entonces $\vec{T}_2 = (s = t = x_0, x_1, \dots, x_n = u)$ es una trayectoria dirigida monocromática de s a u de color 1; no existe trayectoria dirigida monocromática de u a s de color 1 ya que $s = t$ y por

hipótesis no existe trayectoria dirigida monocromática de u a t de color

1. Por tanto $S \leq U$.

Caso 2. Existe trayectoria dirigida monocromática de s a t de color 1 y no existe trayectoria dirigida monocromática de t a s de color 1.

Sea $\vec{T}_1 = (s = z_0, z_1, \dots, z_m = t)$ dicha trayectoria.

Subcaso 2.1 $t = u$.

Aquí también, tenemos que $\vec{T}_1 = (s = z_0, z_1, \dots, z_m = t = u)$ es una trayectoria dirigida monocromática de s a u de color 1. Por otro lado no existe trayectoria dirigida monocromática de u a s de color 1 puesto que $u = t$ y por hipótesis no existe trayectoria dirigida monocromática de t a s de color 1. Por tanto $S \leq U$.

Subcaso 2.2 Existe $T_2 = (t = x_0, x_1, \dots, x_n = u)$ trayectoria dirigida monocromática de t a u de color 1 y no existe trayectoria dirigida monocromática de u a t de color 1.

Entonces $\vec{C} = \vec{T}_1 \cup \vec{T}_2 = (s = z_0, z_1, \dots, z_m = t = x_0, x_1, \dots, x_n = u)$ es un camino dirigido monocromático de s a u , por tanto contiene a una

trayectoria dirigida \vec{T} monocromática de s a u de color 1. Ahora, supongamos que existe $\vec{T}_3 = (u = v_0, v_1, \dots, v_r = s)$ trayectoria dirigida monocromática de color 1 de u a s . Así

$$\vec{T}' = (u = v_0, v_1, \dots, v_r = s = z_0, z_1, \dots, z_m = t)$$

es una trayectoria dirigida monocromática de u a t lo cual es una contradicción a que $T \leq U$. Por tanto $S \leq T$.

Por tanto \leq es un orden parcial sobre la familia de subconjuntos independientes de G .

Ahora bien, sea \mathfrak{I} la familia de todos los subconjuntos independientes no vacíos S de G tales que si hay una trayectoria dirigida de color 2 de S a y entonces existe una trayectoria dirigida monocromática de y a S para todos los vértices y de G . Mostraremos que esta familia es no vacía, y veremos que al ordenar la familia con la relación \leq , toda cadena es acotada superiormente y por el Lema de Zorn, tiene un elemento maximal. Finalmente veremos que el elemento maximal de (\mathfrak{I}, \leq) es el conjunto buscado, es decir, es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de G .

\mathfrak{I} es no vacía ya que si existiera un vértice v tal que no es adyacente hacia algún vértice con una flecha de color 2 entonces, por vacuidad, cumple

la propiedad y $\{v\} \in \mathfrak{J}$; ahora bien, supongamos que todos los vértices de G son tales que son adyacentes hacia algún otro vértice con una flecha de color 2. Sea $v_0 \in V(G)$, entonces éste es adyacente a otro vértice $v_1 \in V(G)$ mediante una flecha de color 2. Si v_1 no regresa a v_0 mediante una flecha de color 2 entonces existe $v_2 \in V(G)$ tal que $(v_1, v_2) \in F(G)$ y es de color 2. Si $(v_2, v_j) \in F(G)$, $j = 0, 1$, de color 2 entonces $\{v_j\} \in \mathfrak{J}$ de otra manera, existe $v_3 \in (G)$ tal que $(v_2, v_3) \in F(G)$. Si v_3 regresa a v_j , $j < 3$, mediante una flecha de color 2 entonces $\{v_j\} \in \mathfrak{J}$ de otra forma existe $v_4 \in V(G)$ tal que $(v_3, v_4) \in F(G)$ y es de color 2. Así construimos una sucesión de vértices v, v_1, v_2, v_3, \dots tal que $(v_i, v_{i+1}) \in F(G)$ y es de color 2 y $(v_i, v_j) \notin F(G)$, con $j < i$; la cual tiene que ser finita de otra manera existiría una trayectoria infinita exterior de color 2 lo cual contradice nuestra hipótesis, así existen $j < k$ tales que $(v_k, v_j) \in F(G)$ y es de color 2. Por tanto $\{v_j\} \in \mathfrak{J}$ y por tanto \mathfrak{J} es no vacía.

Afirmación 2. (\mathfrak{J}, \leq) tiene un elemento maximal.

Sea \mathcal{C} una cadena en (\mathfrak{J}, \leq) , y definimos

$$S^\infty = \{s \in \cup \mathcal{C} : \exists S \in \mathcal{C} \text{ tal que } s \in T \text{ siempre que } T \in \mathcal{C} \text{ y } T \geq S\}$$

es decir, S^∞ consiste de todos los vértices de G que pertenecen a cada miembro de \mathcal{C} desde algún punto en adelante. Veamos que $S^\infty \in \mathcal{C}$ y que es cota superior de \mathcal{C} , esto es, $S \leq S^\infty$ para toda $S \in \mathcal{C}$. Sea $S \in \mathcal{C}$ y sea $s \in S$. Si $s \notin S^\infty$ entonces existe $S_1 \in \mathcal{C}$ tal que $S \leq S_1$ y $s \notin S_1$, así existe $s_1 \in S_1$ tal que existe una trayectoria dirigida monocromática de color 1 de s a s_1 y no existe trayectoria monocromática de color 1 de s_1 a s . Si $s_1 \notin S^\infty$ entonces existe $S_2 \in \mathcal{C}$ tal que $S_1 \leq S_2$ y $s_1 \notin S_2$, así existe $s_2 \in S_2$ tal que existe una trayectoria dirigida monocromática de color 1 de s_1 a s_2 y no existe trayectoria monocromática de color 1 de s_2 a s_1 . Si $s_2 \notin S^\infty$ podríamos encontrar de nuevo un $S_3 \in \mathcal{C}$ tal que $S_2 \leq S_3$ y $s_2 \notin S_3$. Continuando con este procedimiento obtenemos una sucesión de vértices que no están en S^∞ $s = s_0, s_1, s_2, s_3, \dots$ tal que $s_i \in S_i$, $S_i \leq S_{i+1}$ y $s_i \notin S_j$ para toda $j \neq i$ y tales que existe una trayectoria dirigida de monocromática de color 1 de s_i a s_{i+1} y no existe trayectoria monocromática de color 1 de s_{i+1} a s_i . Como G no tiene trayectorias infinitas exteriores entonces la sucesión es finita. Así

llegamos a un $S_n \in \mathcal{C}$ tal que existe una trayectoria dirigida monocromática de color 1 de s_{n-1} a s_n y no existe trayectoria monocromática de color 1 de s_n a s_{n-1} y tal que $s_n \in S_i$ para todo $i \geq n$ por tanto $s_n \in S^\infty$, es decir, S^∞ es no vacío.

Consideremos de nuevo $S \in \mathcal{C}$ y $s \in S$. Si $s \in S^\infty$ entonces $S \leq S^\infty$, por otro lado si $s \notin S^\infty$ entonces existe $S_1 \in \mathcal{C}$ tal que $S \leq S_1$ y $s \notin S_1$. Así existe $s_1 \in S_1$ tal que existe una trayectoria dirigida monocromática de color 1 de s a s_1 y no existe trayectoria monocromática de color 1 de s_1 a s . De nuevo, si $s_1 \in S^\infty$ entonces $S \leq S^\infty$, sino, entonces existe $S_2 \in \mathcal{C}$ tal que $S_1 \leq S_2$ y $s_1 \notin S_2$, así existe $s_2 \in S_2$ tal que existe una trayectoria dirigida monocromática de color 1 de s_1 a s_2 y no existe trayectoria monocromática de color 1 de s_2 a s_1 ; y en consecuencia existe una trayectoria dirigida monocromática de color 1 de s a s_2 y no existe trayectoria monocromática de color 1 de s_2 a s ya que si existiera entonces tendríamos una trayectoria dirigida monocromática de color 1 de s_2 a s_1 uniendo la de s_2 a s y la de s a s_1 ya que ambas son dirigidas monocromáticas de color 1. Si $s_2 \in S^\infty$ entonces $S \leq S^\infty$, de otra manera, podemos encontrar $S_3 \in \mathcal{C}$ tal que $S_2 \leq S_3$ y $s_2 \notin S_3$. Continuando con este procedimiento obtenemos una sucesión de vértices que no están en S^∞ $s = s_0, s_1, s_2, s_3, \dots$ tal que $s_i \in S_i, S_i \leq S_{i+1}$ y

$s_i \notin S_j$ para toda $j \neq i$ y tales que existe una trayectoria dirigida monocromática de color 1 de s_i a s_{i+1} y no existe trayectoria monocromática de color 1 de s_{i+1} a s_i ; y en consecuencia existe trayectoria dirigida monocromática de color 1 de s a s_i y no existe trayectoria dirigida monocromática de s_{i+1} a s , es decir, $S \leq S_i$. Como G no tiene trayectorias infinitas exteriores entonces la sucesión es finita, así llegamos a un $S_n \in \mathcal{C}$ tal que existe una trayectoria dirigida monocromática de color 1 de s_{n-1} a s_n y no existe trayectoria monocromática de color 1 de s_n a s_{n-1} y tal que $s_n \in S^\infty$ con $S_i \leq S_n$ para toda i . Como $s_n \in S^\infty$, entonces tenemos que $S_n \leq S^\infty$ y por construcción teníamos que $S_i \leq S_{i+1}$ para toda i , por tanto $S \leq S_1 \leq \dots \leq S_n \leq S^\infty$, es decir, $S \leq S^\infty$. Por tanto S^∞ es cota superior de \mathcal{C} .

Ahora sean $s, t \in S^\infty$ con $s \in S$, $t \in T$ y $S, T \in \mathcal{C}$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $S \leq T$. Así como $s \in S^\infty$ entonces tenemos que está en todo $U \in \mathcal{C}$ tal que $S \leq U$ por tanto en particular tenemos que $s \in T$ y como T es independiente no hay trayectoria dirigida monocromática entre t y s . Así S^∞ es independiente. Ahora, para mostrar que $S^\infty \in \mathfrak{I}$ tomemos un $s \in S^\infty$ tal que existe trayectoria dirigida monocromática de color 2 a un vértice y de G . Por la definición de S^∞ , existe $S \in \mathcal{C}$ tal que $s \in S$ y $s \in U$ para todo $U \in \mathcal{C}$ y $S \leq U$ así como $S \in \mathfrak{I}$. Entonces existe

$t \in S$ tal que existe una trayectoria dirigida monocromática de y a t . Si $t \in S^\infty$ ya acabamos. Supongamos que $t \notin S$ y por tanto $t \neq s$. Como S es independiente, tenemos que la trayectoria monocromática de y a t es de color 1. Ahora como $S \leq S^\infty$, tenemos que existe $t^\infty \in S^\infty$ tal que existe una trayectoria dirigida monocromática de color 1 de t a t^∞ . Por tanto existe una trayectoria dirigida monocromática de y a t^∞ , uniendo la de y a t con la de t a t^∞ , es decir, una trayectoria dirigida monocromática de y a S^∞ . Por tanto $S^\infty \in \mathfrak{I}$.

Como toda cadena esta acotada superiormente, tenemos que por el Lema de Zorn, que (\mathfrak{I}, \leq) tiene un elemento maximal.

Sea S^* un elemento maximal de (\mathfrak{I}, \leq) .

Afirmación 3. S^* es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de G , es decir, es el conjunto buscado.

Como S^* esta en \mathfrak{I} entonces es independiente. Basta ver que para todo vértice $y \in V(G) - S^*$ existe una trayectoria dirigida monocromática de y a S^* .

Supongamos que existe $x \in V(G) - S^*$ tal que no existe trayectoria dirigida monocromática de x a S^* . Como G no tiene trayectorias exteriores

infinitas elegimos x de tal manera que haya una trayectoria dirigida monocromática de color 2 de y a x para todo y que no sea absorbido por S^* y exista una trayectoria dirigida monocromática de color 2 de x a y . Observemos que como $S^* \in \mathfrak{J}$ entonces no existe trayectoria dirigida monocromática de color 2 de S^* a x .

Sea $T = \{t \in S : \text{no existe t. d. m. de color 1 de } t \text{ a } x\}$ entonces, si $T \neq S^*$, tenemos que existe trayectoria dirigida monocromática de color 1 de $S - T$ a x . Entonces $T \cup \{x\}$ es un conjunto independiente (recordemos que $T \subset S^*$) y observemos que $T \cup \{x\} > S^*$, esto último porque para todo $y \in S^*$ o $y \in T$ o existe trayectoria dirigida monocromática de y a x y por otro lado no existe trayectoria dirigida monocromática de x a S^* y $x \notin S^*$. Por la maximalidad de S^* , tenemos que existe un vértice y tal que existe trayectoria dirigida monocromática de color 2 de $T \cup \{x\}$ a y y no existe trayectoria dirigida monocromática de y a $T \cup \{x\}$, de otra manera se contradice la maximalidad de S^* . Notemos que $y \notin S^*$ pues S^* es independiente y $T \subset S^*$ y no existe trayectoria dirigida monocromática de S^* a x . Si la trayectoria monocromática de color 2 fuera de T a y entonces como $T \subset S^*$ tendríamos que en particular la trayectoria va de S^* a y y se sigue de la definición de \mathfrak{J} que existe una trayectoria monocromática de y a $S^* - T$. Si

esta trayectoria fuera de color 2 entonces se contradice la independencia de S^* ; si ésta trayectoria fuera de color 1 entonces como la trayectoria de $S^* - T$ a x es de color 1 tendríamos una trayectoria monocromática de y a x de color 1 y por tanto tendríamos una trayectoria monocromática de y a $T \cup \{x\}$, una contradicción. En consecuencia vemos que la trayectoria monocromática de color 2 de y a $T \cup \{x\}$ va de x a y . Notemos que no existe trayectoria dirigida monocromática de color 2 de y a S^* puesto que no hay trayectoria dirigida monocromática de x a S^* , y que tampoco hay de color 1 puesto que existe trayectoria dirigida monocromática de color 1 de $S^* - T$ a x y no hay de y a $T \cup \{x\}$. Tampoco existe trayectoria dirigida monocromática de color 2 de y a x y esto contradice la elección de x . Por tanto S^* satisface las condiciones del teorema, es decir, S^* es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. ■

Así obtenemos el siguiente resultado directamente, ya que una digráfica finita no puede tener trayectorias infinitas exteriores;

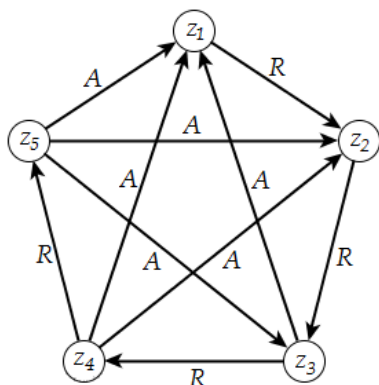
Teorema 2.2 *Si T es un torneo finito 2-coloreado, entonces existe un vértice v de T tal que para cualquier otro vértice x de T existe una xv -trayectoria dirigida monocromática.*

Recordemos que para un torneo T no coloreado (o monocromático) existe un punto que absorbe con una trayectoria dirigida de longitud a lo más dos

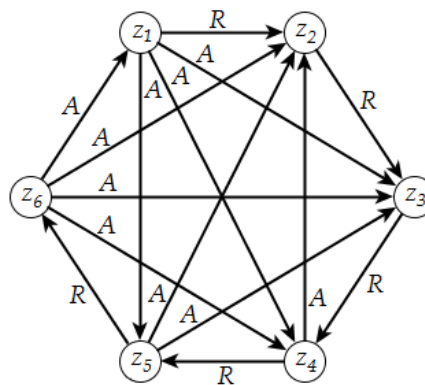
a cualquier otro punto de T (Teorema 1.10). Sin embargo, en términos del teorema anterior, no se puede dar una cota superior para la longitud de dichas trayectorias, un ejemplo de esto es el siguiente torneo. Consideremos el torneo T con conjunto de vértices $V(T) = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ y con conjunto de flechas:

(z_i, z_{i+1}) para $1 \leq i \leq n - 1$ y son de color rojo;

(z_i, z_j) para $i > j + 1$ y son de color azul.



(a) $n = 5$



(b) $n = 6$

Figura 2.1

Afirmación z_n es el único núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas

del torneo; y más aún, la única trayectoria dirigida monocromática de z_1 a z_n pasa por todos los demás vértices.

Demostración. El caso $n = 1$ es claro ya que z_1 es el único vértice de T y un vértice es independiente. El caso $n = 2$ esta mostrado en la Figura 2.2 y es claro que z_2 es el único núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Supongamos, por inducción, que el torneo T con conjunto de vértices

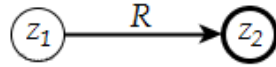


Figura 2.2: $n = 2$

$V(T) = \{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$ ($n \geq 2$) y flechas coloreadas como arriba se menciona, entonces z_{n-1} es el único núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas y la única trayectoria dirigida monocromática de z_1 a z_{n-1} pasa por todos los demás vértices. Sea el torneo T con vértices $V(T) = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ y las flechas de la siguiente manera:

(z_i, z_{i+1}) para $1 \leq i \leq n - 1$ y son de color rojo;

(z_i, z_j) para $i > j + 1$ y son de color azul.

Observemos que si consideramos $T - \{z_n\}$ entonces obtenemos un torneo T' , el cual es el torneo construido como se presenta arriba y con conjunto de vértices

$V(T') = \{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$, y por tanto cumple la hipótesis de inducción, esto es z_{n-1} es el único núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas y la única trayectoria dirigida monocromática de z_1 a z_{n-1} pasa por todos los demás vértices. Sea $P = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$ la trayectoria dirigida monocromática de z_1 a z_{n-1} , por construcción de T , P es de color rojo.

Regresando a T , tenemos que la flecha (z_{n-1}, z_n) es de color rojo, entonces $P' = P \cup (z_{n-1}, z_n)$ es una trayectoria dirigida monocromática de color rojo de z_1 a z_n y es única ya que (z_1, z_2) es la única flecha que sale de z_1 y P ya era única. Por esta misma razón, z_n absorbe a todos los demás vértices mediante una trayectoria monocromática, ya que P' pasa por todos los vértices; y es único puesto que no existe trayectoria dirigida monocromática de z_n a z_{n-1} ya que (z_{n-1}, z_n) es la única flecha que entra a z_n .

Por tanto se cumple la afirmación. ■

Ahora bien, regresando al problema original, el Teorema 2.2 nos dice que $f(2) = 1$ (recordemos que $f(n)$ es el mínimo entero positivo tal que cada torneo finito n -coloreado contiene un conjunto absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas de $f(n)$ elementos). Por tanto gracias al Teorema 2.1 ya tenemos solucionado el problema para los torneos 2-coloreados. Pensando en esto nos podemos preguntar, ¿todo torneo finito 3-coloreado tiene

núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas?

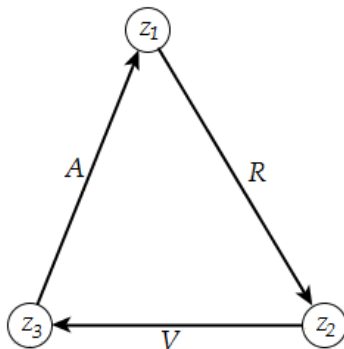


Figura 2.3: \vec{C}_3 policromático

Sin embargo al empezar a analizar este caso, encontramos rápidamente un torneo 3–coloreado sin núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas; consideremos el ciclo de longitud 3, \vec{C}_3 , con conjunto de vértices $V(\vec{C}_3) = \{z_1, z_2, z_3\}$ y las flechas de la siguiente manera, $(z_1, z_2) \in F(\vec{C}_3)$ de color rojo, $(z_2, z_3) \in F(\vec{C}_3)$ de color verde y finalmente $(z_3, z_1) \in F(\vec{C}_3)$ de color azul (Fig. 2.3). Es fácil observar que este torneo no tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, ya que ningún vértice absorbe a los otros dos al mismo tiempo. Agregándole un vértice a la vez a este torneo con flechas hacia los anteriores de color rojo, podemos construir contraejemplos de mayor tamaño. Sin embargo, podemos buscar condiciones suficientes para la existencia de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en torneos

al menos tres coloreados.

En el primer resultado pedimos condiciones sobre el conjunto de vértices del torneo, el cual es un torneo 3-coloreado.

Teorema 2.3 *Sea T un torneo cuyas flechas están coloreadas con tres colores. Si los vértices de T pueden ser particionados en bloques distintos tales que;*

- (i) *dos vértices en diferentes bloques están siempre conectados por una flecha roja;*
- (ii) *dos vértices en el mismo bloque están siempre conectados por una flecha azul o verde.*

Entonces existe un vértice v de T tal que para cualquier otro vértice x de T existe una trayectoria monocromática de x a v .

Demostración. Sean B_1, B_2, \dots, B_n los bloques de T . Definimos primero un orden parcial sobre T consistente en un orden lineal simple sobre cada bloque. El orden en el bloque B_i está determinado como sigue; las flechas de B_i son 2-coloreadas y éste induce un subtorneo de T , entonces por el teorema anterior, tenemos que existe un punto $v_1 \in B_i$ tal que para

cualquier $x \in (B_i - \{v_1\})$ existe una trayectoria monocromática de x a v_1 . $B_i - \{v_1\}$ induce un subtorneo cuyas flechas están 2-coloreadas, entonces existe $v_2 \in (B_i - \{v_1\})$ tal que para cualquier $x \in (B_i - \{v_1, v_2\})$ existe una trayectoria monocromática de x a v_2 . Decimos entonces que $v_2 < v_1$. Continuando con este proceso construimos un orden lineal sobre cada B_i tal que si v y w son vértices de B_i con $v < w$ entonces existe una trayectoria monocromática en B_i de v a w .

Observemos que, en efecto, $(B_i, <)$ es un conjunto linealmente ordenado ya que como cada B_i es finito entonces tenemos una biyección con los naturales y por construcción de $<$ coincide con el orden de los naturales, y como éste es un orden lineal, entonces $<$ es un orden lineal.

Para vértices x y v de T escribiremos que $x \rightarrow^m v$ si

- (i) x y v están en diferentes bloques de T y hay trayectoria dirigida monocromática de color rojo de x a v ; o
- (ii) x y v están en el mismo bloque de T y $x < v$; o
- (iii) x y v están en el mismo bloque de T , $v < x$ y hay trayectoria dirigida monocromática de color rojo de x a v .

Observemos que $x \rightarrow^m v$ implica que existe trayectoria dirigida monocromática de x a v , mas sin embargo, el inverso no siempre es cierto. Para cada vértice v , denotaremos por $N(v)$ al número de vértices x para los cuales $x \rightarrow^m v$. Sea v^* tal que $N(v)$ es el máximo posible y sin pérdida de generalidad supongamos que $v^* \in B_1$.

Afirmación v^* es el vértice buscado, es decir, es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de T .

Supongamos que existe $w \in V(T)$ tal que no es absorbido por v^* .

Caso 1. $w \notin B_1$

Como w no es absorbido por v^* y $w \notin B_1$ entonces $(v^*, w) \in F(T)$ y es de color rojo; más aún, existe trayectoria dirigida monocromática de color rojo de x a w para todo vértice x tal que existe trayectoria dirigida monocromática de color rojo de x a v^* (esto agregándole a dichas trayectorias la flecha (v^*, w)). También, como $N(v^*)$ es máximo, entonces $N(w) \leq N(v^*)$ y por tanto existe $v' \in B_1$ el cual cumple que $v' < v^*$ y que no hay trayectoria dirigida monocromática de color rojo de v' a w , y elegimos v' de tal manera que existe trayectoria dirigida monocromática de color rojo de v'' a w para todo $v'' \in B_1$ que satisface $v' < v'' < v^*$. Como no

hay trayectoria dirigida monocromática de color rojo de v' a w entonces tenemos que $(w, v') \in F(T)$. También tenemos que hay trayectoria dirigida monocromática de color rojo de v^* a v' de otra manera, si hubiera trayectoria dirigida monocromática de color rojo de v' a v^* entonces habría de v' a w . Por tanto existe trayectoria dirigida monocromática de color rojo de v' a v^* y en consecuencia, tenemos que para todo vértice x tal que existe trayectoria dirigida monocromática de color rojo de x a v^* , existe trayectoria dirigida monocromática de color rojo de x a v' ; uniendo dichas trayectorias con la de v^* a v' . Ahora, para todos los vértices $v'' \in B_1$ que satisfacen $v' < v'' < v^*$ tenemos que existe trayectoria dirigida monocromática de color rojo de v'' a w y por tanto obtenemos una trayectoria dirigida monocromática de color rojo de v'' a v' . Por tanto $N(v') > N(v^*)$, lo cual es una contradicción a la elección de v^* .

Caso 2. $w \in B_1$

Observemos que $w \neq v^*$. Entonces como w no es absorbido por v^* , $v^* < w$, así tenemos que $v^* \rightarrow^m w$, y también que no existe trayectoria dirigida monocromática de color rojo de w a v^* . De arriba, tenemos que existe una trayectoria dirigida monocromática de color rojo de x a v^* y por esto, no existe trayectoria dirigida monocromática de color rojo de x a w para

todo vértice $x \notin B_1$. Esto nos da como consecuencia que existe trayectoria dirigida monocromática de color rojo de x a w para todo $x \notin B_1$. Ahora, como $N(w) \leq N(v^*)$ por la elección de v^* , existe un vértice $u \in B_1$ tal que $u \rightarrow^m v$ y $u \rightarrow^m w$, y se sigue que $w < u$. Así, existe una trayectoria dirigida monocromática de color rojo de u a v^* y debe existir un vértice $x \notin B_1$ tal que existe una trayectoria dirigida monocromática de color rojo de u a x . Pero como existe trayectoria dirigida monocromática de color rojo de x a w , ya que $x \notin B_1$, entonces existe trayectoria dirigida monocromática de color rojo de u a w , una contradicción.

Por tanto v^* es el vértice buscado. ■

Ahora bien pensando en esto es de donde nace el siguiente problema, planteado por vez primera por Sands, Sauer y Woodrow;

Sea T un torneo cuyas aristas están coloreadas con tres colores

(en general, con m colores) y el cual no contiene \vec{C}_3 policromático.

¿Debe T contener un vértice v tal que para cualquier otro vértice

x de T existe trayectoria dirigida monocromática de x a v ?

Si consideramos que el torneo tampoco contiene T_3 policromáticos, donde T_3 es el torneo transitivo de 3 vértices, la respuesta es sí, es decir, el torneo tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Teorema 2.4 *Sea T un torneo m -coloreado. Si T no contiene T_3 ni C_3 policromáticos, entonces existe un vértice v de T tal que para cualquier otro vértice x de T existe una trayectoria dirigida monocromática de x a v .*

Demostración. Lo probaremos por inducción sobre n , el orden de T . Los casos $n = 1$ y $n = 2$ están descritos en la Figura 2.4.



Figura 2.4

Supongamos que el resultado es cierto para todos los torneos m -coloreados de orden menor a n , donde $n > 2$; es decir, si T' es un torneo m -coloreado de orden k ($2 < k < n$) entonces existe un vértice v en T' tal que para cualquier otro vértice x de T' existe una trayectoria dirigida monocromática de x a v .

Para cada vértice v consideremos el torneo $T[V(T) - \{v\}]$, éste es un torneo m -coloreado de orden $n - 1$. Así, por hipótesis de inducción, existe $v' \in V(T) - \{v\}$ tal que para cualquier otro vértice x de T' existe una trayectoria dirigida monocromática de x a v' . Definimos $v' = f(v)$ y esto lo

podemos hacer para cada $v \in V(D)$.

Si existiera un vértice v para el cual hay trayectoria dirigida monocromática de v a $f(v)$, entonces $f(v)$ absorbe a todos los vértices de T por trayectorias dirigidas monocromáticas, así, $f(v)$ es el vértice buscado

También si $f(v) = f(u)$ con $u \neq v$ entonces tendríamos que existe trayectoria dirigida monocromática de v a $f(u)$ ya que $v \in V(T) - \{u\}$ pero también tenemos que $f(v) = f(u)$, es decir, existe trayectoria dirigida monocromática de v a $f(v)$, y tenemos lo mismo que en el caso anterior.

Por tanto, podemos suponer que $f(v)$ es inyectiva.

Si existe $v \in V(T)$ para el cual no existe ningún vértice u tal que $f(u) = v$ entonces $T[f(V(T))]$ es un torneo m -coloreado de orden menor a n . Así, por hipótesis de inducción, tenemos que existe un vértice z de T el cual absorbe a cualquier otro por trayectorias dirigidas monocromáticas en $T[f(V(T))]$. Recordemos que $f(V(T)) = \{u \in V(T) : u = f(v) \text{ p.a. } v \in V(T)\}$. Así $f(u) = z$ para algún $u \in V(T)$. Por tanto z es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Por lo que podemos suponer que f es biyectiva, y más aún, que para todo v no existe trayectoria dirigida monocromática de v a $f(v)$. Reetiquetamos los vértices de tal forma que $f(v_i) = v_{i+1}$, así podemos particionar los vértices

en ciclos,

$$(v_1, v_2, \dots, v_{n_1}), (v_{n_1+1}, \dots, v_{n_2}), \dots$$

donde

$$f(v_1) = v_2, f(v_2) = v_3, \dots, f(v_{n_1-1}) = v_{n_1}, f(v_{n_1}) = v_1$$

$$f(v_{n_1+1}) = v_{n_1+2}, \dots, f(v_{n_2}) = v_{n_1+1}.$$

Si existe más de un ciclo de los descritos arriba, entonces $|\{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\}| < n$ y por la hipótesis de inducción existe un vértice $w \in \{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\}$ para el cual existe trayectoria dirigida monocromática de x a w para todo $x \in \{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\} - \{w\}$. Por otro lado, recordemos que $w = f(v_i)$ para alguna $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$. Por tanto w es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de T .

Por lo anterior, podemos suponer que existe un único ciclo (v_1, v_2, \dots, v_n) ; como no hay trayectoria dirigida monocromática de x a $f(x)$ y T es torneo, tenemos que $(f(x), x) \in F(T)$, es decir, $(v_{i+1}, v_i) \in F(T)$ para cada $i \in F(T)$ (con $v_{n+1} = v_1$).

Sea a_i el color de cada flecha (v_{i+1}, v_i) . Si $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = a_n$ entonces cualquier punto absorbe a cualquier otro, ya que tenemos un ciclo dirigido monocromático.

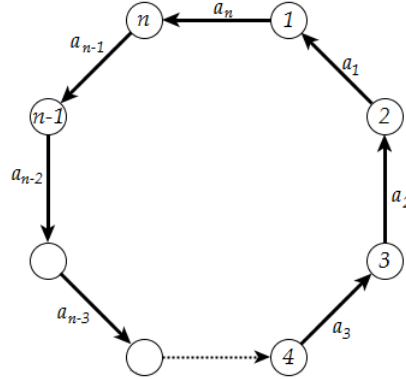


Figura 2.5

Si $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1}$ entonces v_1 absorbe a cualquier otro vértice de T mediante la trayectoria dirigida monocromática $P = (v_{i+1}, v_i, v_{i-1}, \dots, v_2, v_1)$. Ahora supongamos que existe a_s tal que $a_{s-1} \neq a_s$ con $s \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_{s-1} = 1$ y $a_s = 2$. Observemos que a_{s-1} es el color de la flecha (v_s, v_{s-1}) y a_s es el color de la flecha (v_{s+1}, v_s) . Como $v_{s+1} = f(v_s)$ entonces existe trayectoria dirigida monocromática de color b de v_{s-1} a v_{s+1} . Veamos que b no puede ser ni 1 ni 2.

Si $b = 1$ entonces tendríamos una trayectoria dirigida monocromática de color 1 de v_s a v_{s+1} (añadiendo a la trayectoria dirigida monocromática de color 1 de v_{s-1} a v_{s+1} la flecha (v_s, v_{s-1})). Ahora, si $b = 2$ entonces tendríamos una trayectoria dirigida monocromática de color 2 de v_{s-1} a v_s (añadiendo a la trayectoria dirigida monocromática de color 2 de v_{s-1} a

v_{s+1} la flecha (v_{s+1}, v_s)). Entonces en ambos casos tenemos una contradicción ya que suponemos que no hay trayectoria dirigida monocromática de v_i a $f(v_i) = v_{i+1}$. Por tanto $b \notin \{1, 2\}$. Así $b = 3$. Consideremos, ahora, $T = (v_{s-1} = u_0, u_1, \dots, u_r = v_{s+1})$ la trayectoria dirigida monocromática más corta entre v_{s-1} y v_{s+1} de color 3.

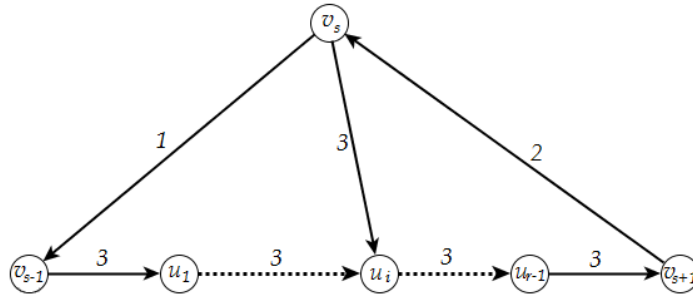


Figura 2.6

Como T es torneo, entonces $(u_i, v_s) \in F(T)$ ó $(v_s, u_i) \in F(T)$, para cada $i \in \{1, 2, 3, \dots, r-1\}$; éstas no pueden ser de color 3 ya que si (u_i, v_s) es de color 3 entonces $P = (v_{s-1} = u_0, u_1, \dots, u_i, v_s)$ es una trayectoria dirigida monocromática de v_{s-1} a v_s . Por otro lado, si (v_s, u_i) fuera de color 3 entonces $P = (v_s, u_i, u_{i+1}, \dots, u_r = v_{s+1})$ es una trayectoria dirigida monocromática de color 3 de v_s a v_{s+1} .

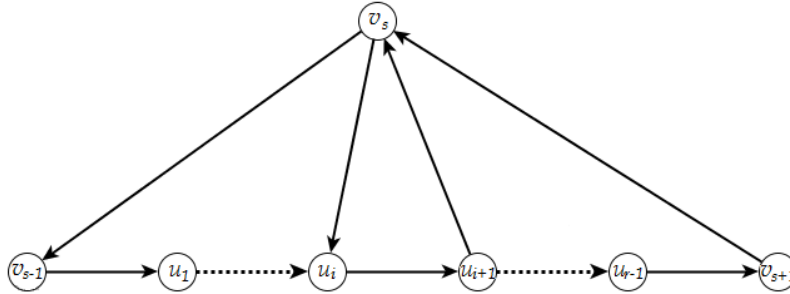


Figura 2.7

Recordemos que $\{(v_s, v_{s-1}), (v_{s+1}, v_s)\} \subseteq F(T)$ y son de colores 1 y 2 respectivamente. Por esta razón, podemos encontrar $i \in \{0, 1, \dots, r\}$ que cumpla que $\{(v_s, u_i), (u_{i+1}, v_s)\} \subseteq F(T)$ y sean de color distinto (Fig. 2.7). Por tanto $\gamma = (v_s, u_i, u_{i+1}, v_s)$ es un triángulo dirigido 3-coloreado lo cual es una contradicción con nuestra hipótesis.

Por tanto el torneo T tiene núcleo. ■

Dado que un torneo 2-coloreado no puede contener T_3 ni C_3 policromáticos, entonces el Teorema 2.2 es corolario del teorema anterior. También podemos fácilmente obtener el siguiente corolario.

Corolario 2.1 *Supongamos que T, H_1, H_2, \dots, H_n son torneos m -coloreados tales que no contienen triángulos policromáticos, y sea $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Si T' es el torneo formado al reemplazar cada vértice v_i de T por H_i , dejando*

las flechas entre H_i y H_j del mismo color que la flecha entre v_i y v_j , pero con direcciones arbitrarias, entonces T' contiene un vértice v tal que para cualquier otro vértice x , existe una trayectoria dirigida monocromática de x a v .

Demostración. Basta mostrar que T' no tiene triángulos policromáticos y así T' cumple las hipótesis del teorema y por tanto se cumple la afirmación.

Sea (u_i, u_j, u_k, u_i) un triángulo en T' . Así tenemos tres casos;

Caso 1. $u_i, u_j, u_k \in H_l$ para alguna $l \in 1, 2, \dots, n$.

En este caso el triángulo no es 3–coloreado ya que, por hipótesis H_l no contiene triángulos policromáticos.

Caso 2. $u_i, u_j \in H_l$ y $u_k \in H_m$ con $l \neq m$, $l, m \in 1, 2, \dots, n$.

Recordemos que las flechas entre H_l y H_m son del color de la flecha $[v_l, v_m]$. Así las flechas (u_j, u_k) y (u_k, u_i) son del mismo color que $[v_l, v_m]$, por tanto el triángulo no es 3–coloreado.

Caso 3. $u_i \in H_l, u_j \in H_m$ y $u_k \in H_r$ con l, m y r distintos; $l, m, r \in 1, 2, \dots, n$.

Análogamente al *Caso 2* tenemos que las flechas (u_i, u_j) , (u_j, u_k) y (u_k, u_i) son del color de las flechas $[v_l, v_m]$, $[v_m, v_r]$ y $[v_r, v_l]$ respectivamente. Recordemos que T no contiene triángulos policromáticos; así en el triángulo

(v_l, v_m, v_r, v_l) , tenemos dos flechas del mismo color, y por tanto en el triángulo en T' tenemos que las dos flechas respectivas tienen el mismo color.

Por tanto T' no tiene triángulos policromáticos y por tanto se cumplen las hipótesis del Teorema 2.4. ■

Observemos también que el Teorema 2.4 nos dice que $f(m) = 1$ si el torneo m -coloreado no contiene ni T_3 ni C_3 policromáticos.

De manera natural, podemos preguntarnos si las condiciones pedidas en el Teorema 2.4 son las mínimas para que un torneo m -coloreado tenga núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas y obtenemos primero que en el caso $m = 5$ si lo son, esto es, es necesario pedir que además de no contener \vec{C}_3 policromáticos, el torneo no debe contener T_3 policromáticos.

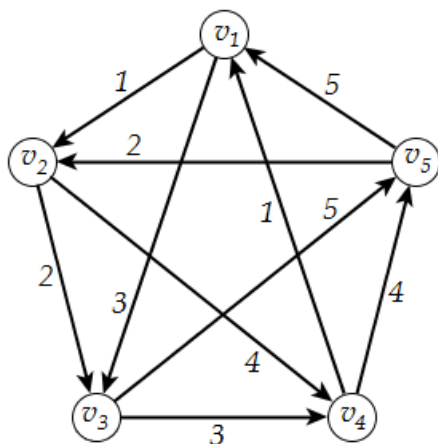


Figura 2.8: G_5

Por ejemplo, consideremos G_5 representado en la Figura 2.8. Es un torneo 5-coloreado de orden 5 en el cual es fácil observar que no contiene \vec{C}_3 policromáticos y además no tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. De hecho, no hay trayectoria dirigida monocromática de v_{i+1} a v_i , donde los índices son tomados mod 5.

Tomando G_5 como base podemos crear torneos 5-coloreados de orden mayor, agregando un vértice a la vez, haciendo cada nuevo vértice adyacente hacia los anteriores con una flecha de color 1.

Esto nos diría que las condiciones son suficientes para torneos m -coloreados con $m \geq 5$. Sin embargo para el caso $m = 4$ también podemos encontrar un ejemplo:

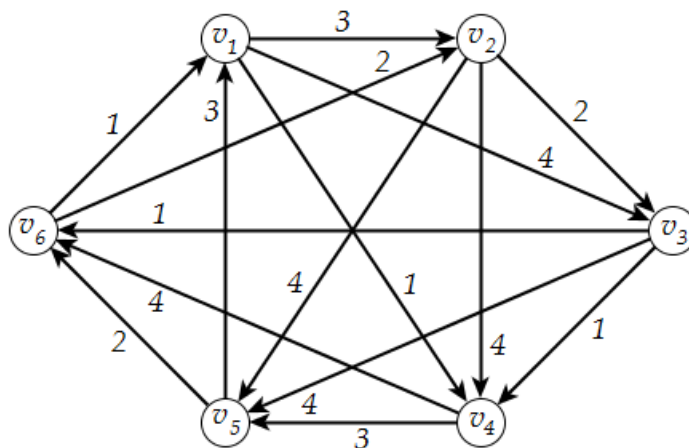


Figura 2.9: T_6

Consideremos T_6 , el torneo representado en la Figura 2.9, el cual es un torneo 4-coloreado de orden 6, en el cual de la misma manera que en el anterior, el lector observará que no contiene \vec{C}_3 policromáticos. Además T_6 no tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas; de hecho no existe trayectoria dirigida monocromática de v_{i+1} a v_i , donde los índices son tomados mod 6.

De la misma manera que en el ejemplo anterior, podemos construir torneos de órdenes mayores al tomar como base a T_6 y agregar un vértice a la vez, haciendo cada nuevo vértice adyacente hacia los anteriores con una flecha de color 1.

Por tanto sabemos que las condiciones son las mínimas para torneos m -coloreados con $m \geq 4$. Sin embargo el problema de sigue abierto para el caso $m = 3$.

Capítulo 3

Conjuntos Absorbentes por Trayectorias Monocromáticas

Los siguientes resultados son en su mayoría cotas superiores para $f(m)$ cuando la in-vecindad o la ex-vecindad es 2-coloreada.

Sea D una digráfica m -coloreada, $M = \{1, 2, \dots, m\}$ su conjunto de colores y $z \in V(D)$. Definimos $A^+(z) = \{(z, v) \in F(D) : v \in V(D)\}$ y $C^+(z)$ como el conjunto de colores que aparecen en $A^+(z)$. De manera similar, $A^-(z) = \{(v, z) \in F(D) : v \in V(D)\}$ y $C^-(z)$ es el conjunto de colores que aparecen en $A^-(z)$. Denotaremos por $\xi^+(z)$ la cardinalidad de $C^+(z)$ y $\xi^-(z)$ la cardinalidad de $C^-(z)$. Finalmente definimos $A(z) = A^+(z) \cup A^-(z)$, $C(z)$

como el conjunto de colores que aparecen en $A(z)$ y $\xi(z) = |C(z)|$. Recordemos que $[z, w]$ denota a la flecha (z, w) o (w, z) en un torneo T .

En este resultado tenemos que si $\xi^+(z) \leq 2$ para cualquier vértice $z \in V(T)$, entonces $f(m) \leq \binom{m}{2}$.

Teorema 3.1 *Sea T un torneo m -coloreado. Si $\xi^+(z) \leq 2$ para cualquier vértice $z \in V(T)$ entonces existe un conjunto absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas $S \subseteq V(T)$, tal que $|S| \leq \binom{m}{2}$.*

Demostración. Para cualquier par de colores $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ($i \neq j$), definimos T_{ij} como el subtorneo de T inducido por el conjunto

$$\{z \in V(T) : C^+(z) \subseteq \{i, j\}\}.$$

Así tenemos que T_{ij} es un subtorneo de T a lo más 2-coloreado, puesto que de cada vértice de T_{ij} cada flecha que sale es de color i ó j . Así, por el Teorema 2.2, existe un vértice $x_{ij} \in V(T_{ij})$, el cual absorbe cualquier otro vértice de T_{ij} por trayectorias dirigidas monocromáticas. Como

$$V(T) = \cup_{\{i,j\} \subseteq \{1,2,\dots,m\}} V(T_{ij})$$

entonces el conjunto

$$S = \{x_{ij} : i, j \in \{1, 2, \dots, m\}, i \neq j\}$$

es un conjunto absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas tal que $|S| \leq \binom{m}{2}$. Esto es porque estamos considerando los subconjuntos de 2 elementos de un conjunto de m elementos. ■

Ahora bien, de manera análoga obtenemos que si $\xi^-(z) \leq 2$ para cualquier vértice $z \in V(T)$, entonces $f(m) \leq \binom{m}{2}$.

Teorema 3.2 *Sea T un torneo m -coloreado. Si $\xi^-(z) \leq 2$ para cualquier vértice $z \in V(T)$, entonces existe un conjunto absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas $S \subseteq V(T)$, tal que $|S| \leq \binom{m}{2}$.*

Demostración. Para cualquier par de colores $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ($i \neq j$), definimos T_{ij} como el subtorneo de T inducido por el conjunto

$$\{z \in V(T) : C^-(z) \subseteq \{i, j\}\}.$$

Así tenemos que T_{ij} es un subtorneo de T a lo más 2-coloreado, puesto que de cada vértice de T_{ij} cada flecha que entra es de color i ó j . Así, por el Teorema 2.2, existe un vértice $x_{ij} \in V(T_{ij})$, el cual absorbe cualquier otro vértice de T_{ij} por trayectorias dirigidas monocromáticas. Como

$$V(T) = \cup_{\{i,j\} \subseteq \{1,2,\dots,m\}} V(T_{ij})$$

entonces el conjunto

$$S = \{x_{ij} : i, j \in \{1, 2, \dots, m\}, i \neq j\}$$

es un conjunto absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas tal que $|S| \leq \binom{m}{2}$. Esto es porque estamos considerando los subconjuntos de 2 elementos de un conjunto de m elementos. ■

Corolario 3.1 *Sea T un torneo 3–coloreado. Si $\xi^+(z) \leq 2$ para cualquier vértice $z \in V(T)$. Entonces existe un conjunto absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas $S \subseteq V(T)$ tal que $|S| \leq 3$.*

Corolario 3.2 *Sea T un torneo 3–coloreado. Si $\xi^-(z) \leq 2$ para cualquier vértice $z \in V(T)$. Entonces existe un conjunto absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas $S \subseteq V(T)$ tal que $|S| \leq 3$.*

Estos resultados son inmediatos de los teoremas anteriores, dado que $\binom{3}{2} = 3$. Entonces hemos probado que la conjetura de Erdős ($f(3) = 3$) es cierta para torneos 3–coloreados con ex-vecindades a lo más bicromáticas, y también para torneos 3–coloreados con in-vecindades a lo más bicromáticas.

El siguiente teorema nos dice que si se cumple al menos una de las condiciones anteriores tenemos que $f(m) \leq 2\binom{m}{2}$.

Teorema 3.3 *Sea T un torneo m –coloreado. Si para cualquier vértice $z \in V(T)$ se cumple al menos una de las siguientes propiedades: $\xi^+(z) \leq 2$ o*

$\xi^-(z) \leq 2$, entonces existe un conjunto absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas $S \subseteq V(T)$ tal que $|S| \leq 2\binom{m}{2}$.

Demostración. Sea T_{ij}^+ (resp. T_{ij}^-) el subtorneo de T inducido por el conjunto

$$\{z \in V(T) : C^+(z) \subseteq \{i, j\}\} \text{ (resp. } \{z \in V(T) : C^-(z) \subseteq \{i, j\}\} \text{)}.$$

Así tenemos que T_{ij}^+ (resp. T_{ij}^-) es un torneo a lo más 2-coloreado, por construcción. Por tanto tenemos que existe un vértice $x_{ij}^+ \in V(T_{ij}^+)$ (resp. $x_{ij}^- \in V(T_{ij}^-)$) el cual absorbe a cualquier otro vértice de T_{ij}^+ (resp. T_{ij}^-) por trayectorias dirigidas monocromáticas. Como

$$V(T) = \cup_{\{i,j\} \subseteq \{1,2,\dots,m\}} (V(T_{ij}^+) \cup V(T_{ij}^-))$$

entonces el conjunto

$$S = \{x_{ij}^+ : i, j \in \{1, 2, \dots, m\}, i \neq j\} \cup \{x_{ij}^- : i, j \in \{1, 2, \dots, m\}, i \neq j\}$$

es un conjunto absorbente tal que $|S| \leq 2\binom{m}{2}$. ■

Recordemos que un apareamiento en una gráfica G es un conjunto de aristas independiente, es decir, que no comparten vértices. Un apareamiento es *maximal* si es de cardinalidad máxima. Este concepto nos será útil para probar el siguiente teorema.

Teorema 3.4 *Sea T un torneo m -coloreado y supongamos que $\xi^+(z) \leq 2$ para cualquier vértice $z \in V(T)$. Si T no tiene triángulos dirigidos policromáticos, entonces existe un conjunto absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas $S \subseteq V(T)$ tal que $|S| \leq m - 1$ si m es par y $|S| \leq m$ si m es impar.*

Demostración. Para cualquier par de colores $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ con $i \neq j$, definimos T_{ij} como el subtorneo de T inducido por el conjunto $\{z \in V(T) : C^+(z) \subseteq \{i, j\}\}$. Así tenemos que T_{ij} es un subtorneo de T a lo más 2-coloreado, puesto que de cada vértice de T_{ij} cada flecha que sale es de color i ó j , y sólo de estos 2 colores por hipótesis. Por lo tanto existe un vértice $x_{ij} \in V(T_{ij})$, el cual absorbe cualquier otro vértice de T_{ij} por trayectorias dirigidas monocromáticas. (Teorema 2.2)

Afirmación 1. Sean i, j, k y l enteros distintos y tales que

$$\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\} \text{ y } \{k, l\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\} \text{ con } \{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset.$$

Si $(x_{kl}, x_{ij}) \in F(T)$ entonces x_{ij} absorbe a cualquier otro vértice de T_{kl}

por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Sabemos que x_{kl} absorbe a cualquier otro vértice de T_{kl} por trayectorias dirigidas monocromáticas y que T_{kl} es un torneo 2-coloreado con color k y

l . Como $x_{kl} \in V(T_{kl})$ entonces $C^+(z) \subseteq \{k, l\}$, así la flecha (x_{kl}, x_{ij}) es de color k o l . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que (x_{kl}, x_{ij}) es de color k . Por tanto cualquier vértice de T_{kl} que sea absorbido por x_{kl} con una trayectoria dirigida monocromática de color k , es absorbido por x_{ij} por una trayectoria dirigida monocromática de color k .

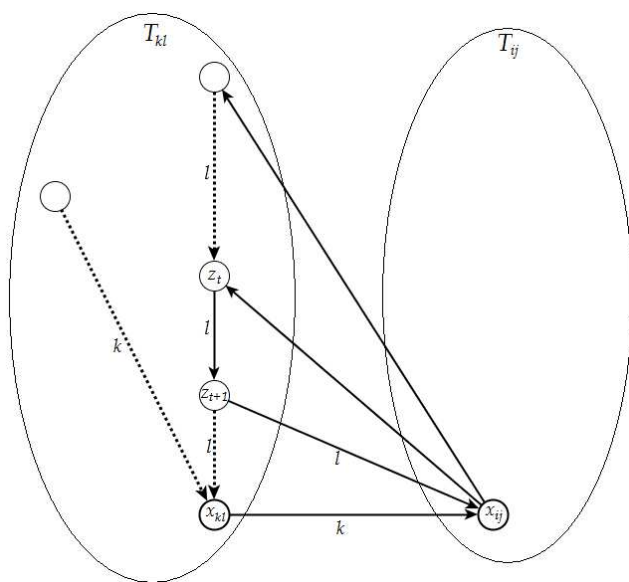


Figura 3.1

Ahora consideremos un vértice $z \in V(T_{kl})$ tal que es absorbido por x_{kl} mediante una trayectoria dirigida monocromática de color l . Sea (z_0, z_1, \dots, z_r) dicha trayectoria, donde $z_0 = z$ y $z_r = x_{kl}$.

Caso 1. Si $(z, x_{ij}) \in F(T)$ entonces x_{ij} absorbe z por una trayectoria dirigida

monocromática.

Caso 2. Si $(z, x_{ij}) \notin F(T)$, entonces $(x_{ij}, z) \in F(T)$, ya que T es torneo. Como $(z_r, x_{ij}) \in F(T)$ y $(x_{ij}, z_0) \in F(T)$ entonces existe $t \in \{1, 2, \dots, r\}$ tal que $(x_{ij}, z_t) \in F(T)$ y $(z_{t+1}, x_{ij}) \in F(T)$, esto ya que si $(z_i, x_{ij}) \in F(T)$ para toda $i \in \{1, \dots, r\}$, entonces $t = 0$ y así las flechas que cumplen esto serían (x_{ij}, z_0) y (z_1, x_{ij}) ; ahora bien, si $(x_{ij}, z_i) \in F(T)$ para toda $i \in \{0, \dots, r-1\}$, entonces $t = r-1$ y así las flechas que cumplen esto serían (x_{ij}, z_{r-1}) y (z_r, x_{ij}) .

2.1 Si $(z_{t+1}, x_{ij}) \in F(T)$ es de color l , entonces tendremos que $(z_0, z_1, \dots, z_{t+1}) \cup (z_{t+1}, x_{ij})$ es una zx_{ij} -trayectoria dirigida monocromática de color l .

2.2 Si $(z_{t+1}, x_{ij}) \in F(T)$ es de color k , entonces $\vec{C}_3 = (z_{t+1}, x_{ij}, z_t, z_{t+1})$ es un triángulo dirigido policromático, ya que (z_{t+1}, x_{ij}) es de color k , (x_{ij}, z_t) es de color i o j , y (z_t, z_{t+1}) es de color l , y como $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$, entonces los colores son distintos. Esto contradice la hipótesis de que T no contiene triángulos policromáticos.

Por tanto se cumple la afirmación.

Ahora consideremos K_m , la gráfica completa con m vértices, y sea

$P = \{M_1, M_2, \dots, M_{n(m)}\}$ una partición de $A(K_m)$, las aristas de K_m , de cardinalidad mínima en apareamientos maximales. Observemos que cuando m es par, estos apareamientos son perfectos y $n(m) = m - 1$; en cambio cuando m es impar tenemos que los apareamientos maximales son de cardinalidad $\frac{m-1}{2}$ y $n(m) = m$.

Definimos $M_i = \{e_i^1, e_i^2, \dots, e_i^{g(m)}\}$, donde $g(m) = \frac{m}{2}$ si m es par y $g(m) = \frac{m-1}{2}$ si m es impar. Identificamos cada punto de K_m con cada uno de los m colores; así a x_{st} lo identificamos con la arista que une al vértice s con el vértice t , es decir, le asignamos e_i^j , donde $e_i^j = st$. Denotaremos x_{st} como $x(e_i^j)$. Sea T_i el subtorneo generado por el conjunto $\{x(e_i^j) : 1 \leq j \leq g(m)\}$.

Afirmación 2. T_i tiene núcleo.

Mostraremos que T_i no tiene ciclos dirigidos, así, por el Teorema 1.6, T_i tiene núcleo.

Supongamos que tengo un ciclo dirigido $\vec{C}_k = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_0)$, supongamos además que es de longitud mínima. Si $k > 3$, entonces como T_i es torneo, tenemos que $T[\vec{C}_k]$ también lo es, y por esta razón, $(u_0, u_2) \in F(D)$ o $(u_2, u_0) \in F(D)$. Si $(u_0, u_2) \in F(D)$, tendríamos un ciclo dirigido $C' = (u_0, u_2, \dots, u_{k-1}, u_0)$ en D de longitud menor que la de \vec{C}_k y esto contradice la minimalidad de \vec{C}_k . Por lo tanto $(u_2, u_0) \in F(D)$, pero en

este caso también tenemos que existe $C' = (u_0, u_1, u_2, u_0)$ que es de longitud menor que \vec{C}_k . Por lo tanto $k = 3$.

En base a eso, basta mostrar que T_i no contiene triángulos dirigidos.

Supongamos por contradicción que T_i contiene un triángulo dirigido $\vec{C}_3 = (u, v, w, u)$. Por tanto,

$$u = x(e_i^r), v = x(e_i^p), w = x(e_i^q)$$

donde r, p y q son enteros distintos y $\{p, q, r\} \subseteq \{1, 2, \dots, g(m)\}$. Como e_i^r, e_i^p y e_i^q son aristas distintas del mismo apareamiento de K_m , se sigue que

$$u = x(e_i^r) = x_{ab}, v = x(e_i^p) = x_{cd}, w = x(e_i^q) = x_{ef}$$

donde $\{a, b, c, d, e, f\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ y $\{a, b\} \cap \{c, d\} \cap \{e, f\} = \emptyset$. Más aún, $\vec{C}_3 = (u, v, w, u) = (x_{ab}, x_{cd}, x_{ef}, x_{ab})$. Entonces (x_{ab}, x_{cd}) es una flecha de T de color a o b , (x_{cd}, x_{ef}) es una flecha de color c o d y (x_{ef}, x_{ab}) es una flecha de T de color e o f , esto es por definición de cada x_{st} . Así $\vec{C}_3 = (x_{ab}, x_{cd}, x_{ef}, x_{ab})$ es un triángulo dirigido 3-coloreado contenido en T , contradiciendo la hipótesis. Así T_i no contiene triángulos dirigidos lo cual implica que T_i no tiene ciclos dirigidos y por el Teorema 1.6, T_i tiene núcleo.

Finalmente, sea $z_i \in V(T_i)$ tal que z_i es un núcleo de T_i y por tanto $(w, z_i) \in F(T)$ para cualquier $w \in V(T_i)$. Como $z_i = x(e_i^j)$, entonces si

$u(e_i^j)$ y $v(e_i^j)$ son los extremos de la arista e_i^j , tenemos que $z_i = x_{u(e_i^j)v(e_i^j)}$ para alguna $j \in \{1, 2, \dots, g(m)\}$, y por lo tanto $(x(e_i^k), x(e_i^j)) \in F(T)$ para toda $k \in \{1, 2, \dots, m\} - \{j\}$. Por la Afirmación 1, z_i absorbe cada vértice de $\cup T_{u(e_i^k)v(e_i^k)}$ para cada $k \in \{1, 2, \dots, g(m)\}$ e $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Como $P = \{M_1, M_2, \dots, M_{n(m)}\}$ es una partición de $A(K_m)$ en apareamientos maximales, se concluye que $S = \{z_i : i \in \{1, 2, \dots, n(m)\}\} \subseteq V(T)$ es un conjunto absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas ■

El siguiente lema intenta generalizar la idea de los teoremas antes mencionados, cambiando un punto por un subconjunto propio que tenga propiedades similares, como que las flechas que salen y entran sean de a lo más 2 colores; y que cada subdigráfica inducida sea núcleo perfecta monocromática, para no tener problemas con la absorbencia.

Lema 3.1 *Sea T un torneo m -coloreado, $M = \{1, 2, \dots, m\}$ el conjunto de colores,*

$$M' \subseteq M^2 = \{S \subseteq M : |S| = 2\}$$

Si $Z = \{V_{ij} : \{i, j\} \in M'\}$ es una familia de subconjuntos no vacíos de $V(T)$

tal que:

- (1) $V_{ij} \subsetneq V(T)$ para cada $V_{ij} \in Z$;

(2) $D[V_{ij}]$ es núcleo perfecta monocromática; y

(3) para cualquier $z \in V_{ij}$ y $w \in V(T) - V_{ij}$, la flecha $[z, w]$ es de color i o j .

Entonces para cualquier $V_{ij}, V_{kl} \in Z$ al menos una de las siguientes propiedades se mantiene:

(i) $V_{ij} = V_{kl}$.

(ii) Existe $x_{ij} \in V_{ij}$ el cual absorbe cualquier otro vértice de V_{ij} por t . d m . y tal que $(y, x_{ij}) \in F(T)$ para cada $y \in V_{kl}$.

(iii) Existe $x_{kl} \in V_{kl}$ el cual absorbe cualquier otro vértice de V_{kl} por t . d m . y tal que $(y, x_{kl}) \in F(T)$ para cada $y \in V_{ij}$.

(iv) $\{i\} = \{i, j\} \cap \{k, l\}$ y existe $x \in V_{ij}$ y $y \in V_{kl}$ tal que x (resp. y) absorbe cualquier otro vértice de $V_{ij} \cup V_{kl}$ por trayectorias dirigidas monocromáticas de color i y alternando entre vértices de V_{ij} y V_{kl} . Más aún, $\{z \in V_{kl} : (z, x) \in F(T)\}$ y $\{z \in V_{ij} : (z, y) \in F(T)\}$ son no vacíos.

Demostración. Basta probar las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. Si $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$, entonces $V_{ij} = V_{kl}$.

Primero demostraremos la inclusión $V_{ij} \subseteq V_{kl}$. Supongamos, por contradicción, que existe $x \in V_{ij} - V_{kl}$ y llegaremos a que $V_{ij} = V(T)$.

Para llegar a eso, veremos primero que $V_{kl} \subseteq V_{ij}$. Supongamos que existe $y \in V_{kl} - V_{ij}$, entonces por (3) tenemos que la flecha $[x, y]$ es de color k o l en V_{kl} y de color i o j en V_{ij} , así $\{i, j\} \cap \{k, l\} \neq \emptyset$, esto contradice la hipótesis. Por tanto $V_{kl} \subseteq V_{ij}$.

Ahora veamos que $V_{ij} = V(T)$. Supongamos que existe $w \in V(T) - V_{ij}$, y sea $z \in V_{kl} \subseteq V_{ij}$. Entonces, de nuevo por la propiedad (3), tenemos que la flecha $[z, w]$ es de color k o l en V_{kl} y por otro lado es de color i o j en V_{ij} ; esto de nuevo contradice la hipótesis de que $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$. Por tanto $V_{ij} = V(T)$, esto contradice la propiedad (1) que dice que cada V_{ij} está contenido propiamente en $V(T)$. Así obtenemos que $V_{ij} \subseteq V_{kl}$.

Ahora mostraremos la otra inclusión, $V_{kl} \subseteq V_{ij}$. Supongamos, por contradicción, que existe $x \in V_{kl} - V_{ij}$ y veamos que $V_{kl} = V(T)$. Supongamos que existe $w \in V(T) - V_{kl}$, y sea $z \in V_{ij} \subseteq V_{kl}$, entonces por la propiedad (3) tenemos que la flecha $[z, w]$ es de color k o l en V_{kl} y es de color i o j en V_{ij} esto contradice la hipótesis de que $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$. Por tanto $V_{kl} = V(T)$, esto contradice la propiedad (1) que dice que cada V_{ij} está contenido propiamente

en $V(T)$. Así obtenemos que $V_{kl} \subseteq V_{ij}$.

Por tanto se cumple la Afirmación.1

Supongamos que, sin pérdida de generalidad, $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \{i\}$. Esto, junto con la propiedad (3), da como resultado que cada flecha entre V_{ij} y V_{kl} es de color i , pues si $z \in V_{ij}$ y $w \in V_{kl}$ tenemos que la flecha $[z, w]$ es de color i o j en V_{ij} y es de color k o l en V_{kl} ; así el color de la flecha es tal que $\{i, j\} \cap \{k, l\}$, es decir, de color i . Si (ii) o (iii) ocurren, ya acabamos. Así, supongamos que (ii) y (iii) no se cumplen y probemos que se cumple (iv).

Antes necesitamos de la siguiente afirmación;

Afirmación 2. Existe $z \in V_{kl} \cup V_{ij}$ tal que

1. z es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en V_{ij} si $z \in V_{ij}$ y en V_{kl} si $z \in V_{kl}$,
2. z absorbe a cada vértice de $V_{ij} \cup V_{kl}$ mediante trayectorias dirigidas monocromáticas de color i y alternadas entre vértices de V_{ij} y V_{kl} .

Sean

$$N_1 = \{z \in V_{ij} : z \text{ es un núcleo por t.d.m. en } T[V_{ij}]\},$$

$$N_2 = \{z \in V_{kl} : z \text{ es un núcleo por t.d.m. en } T[V_{kl}]\}.$$

y $N = N_1 \cup N_2$.

Sea $w \in N$ y definimos

$$\mathcal{A}(w) = \left\{ z \in V_{ij} \cup V_{kl} : \begin{array}{l} \exists zw - t.d.m \text{ de color } i \\ \text{alternante entre vértices de } V_{ij} \text{ y } V_{kl} \end{array} \right\}$$

y sea $n \in N$ tal que $|\mathcal{A}(n)| = \max\{|\mathcal{A}(z)| : z \in N\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $n \in V_{ij}$. Se demostrará que todo vértice de $V_{ij} \cup V_{kl}$ es absorbido por n mediante una trayectoria dirigida monocromática de color i alternando vértices entre V_{ij} y V_{kl} . Por contradicción, supongamos que existe $w \in V_{ij} \cup V_{kl}$ tal que no hay trayectoria dirigida monocromática de color i alternando vértices entre V_{ij} y V_{kl} hacia n . Tenemos dos casos:

Caso 1. $w \in V_{kl}$.

Observemos que por la propiedad (3) de la hipótesis y como $\{i\} = \{i, j\} \cap \{k, l\}$, tenemos que cada flecha entre V_{ij} y V_{kl} es de color i . Por otro lado como n no absorbe a w mediante una trayectoria dirigida monocromática de color i alternando vértices entre V_{ij} y V_{kl} entonces $(n, w) \in F(T)$ y es de color i por la observación. Por tanto, si w fuera núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de $T[V_{kl}]$, es decir, $w \in N$, tendríamos que absorbe a todos los vértices que absorbe n mediante trayectorias dirigidas

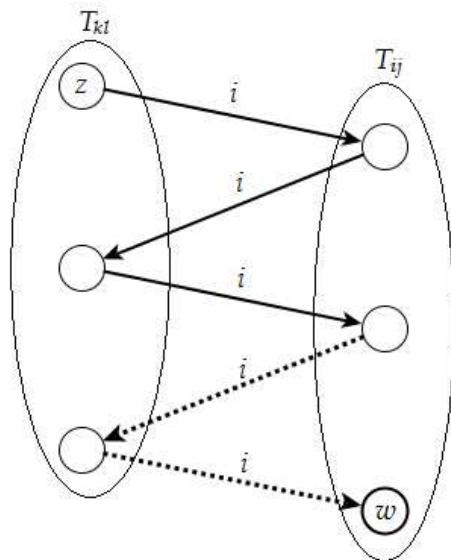


Figura 3.2

monocromáticas de color i alternando vértices entre V_{ij} y V_{kl} , y además absorbe a n , por tanto $|\mathcal{A}(w)| > |\mathcal{A}(n)|$ lo cual contradice la maximalidad de n . Así, w no es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de $T[V_{kl}]$, esto es, existe un $w_1 \in V_{kl}$ tal que no es absorbido por w mediante una trayectoria dirigida monocromática contenida en T . Por tanto $(w, w_1) \in F(T)$ y también $(n, w_1) \in F(T)$, pues de otra manera si estuviera $(w_1, n) \in F(T)$, tendríamos que (w_1, n, w) es una trayectoria dirigida monocromática de w_1 a w contenida en T lo cual es una contradicción.

Ahora si w_1 fuera núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de

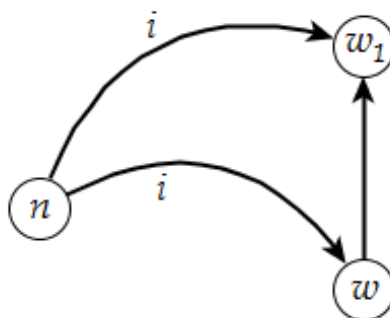


Figura 3.3

$T[V_{kl}]$, es decir, $w_1 \in N$, tendríamos que absorbe a todos los vértices que absorbe n junto con n mediante trayectorias dirigidas monocromáticas de color i alternando vértices entre V_{ij} y V_{kl} , por tanto $|\mathcal{A}(w_1)| > |\mathcal{A}(n)|$ y esto contradice, de nuevo, la maximalidad de n . Por tanto existe $w_2 \in V_{kl}$ tal que no existe trayectoria dirigida monocromática de w_2 a w_1 contenida en T y, análogamente $(w_1, w_2) \in F(T)$ y $(n, w_2) \in F(T)$ (de otra manera, si estuviera $(w_2, n) \in F(T)$, tendríamos que (w_2, n, w_1) es una w_2w_1 -trayectoria dirigida monocromática contenida en T lo cual es una contradicción). Si $w_2 \in N$, es decir, si fuera núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de $T[V_{kl}]$, entonces $|\mathcal{A}(w_2)| > |\mathcal{A}(n)|$, esto es por un argumento análogo al de w_1 , y esto contradice la maximalidad de n .

Así existe $w_3 \in V_{kl}$ tal que no es absorbido por w_2 por una trayecto-

ria dirigida monocromática contenida en T . Más aún, $(n, w_3) \in F(T)$ (de otra manera, si estuviera $(w_3, n) \in F(T)$, tendríamos que (w_3, n, w_2) es una w_3w_2 -trayectoria dirigida monocromática contenida en T lo cual es una contradicción). También tenemos que w_3 no es núcleo de $T[V_{kl}]$, ya que si lo fuera tendríamos que $w_3 \in N$ y por tanto $|\mathcal{A}(w_3)| > |\mathcal{A}(n)|$ y eso contradice la maximalidad de n .

Continuando con este procedimiento encontramos una sucesión de vértices $w = w_0, w_1, w_2, \dots$ tal que no hay $w_{t+1}w_t$ -trayectoria dirigida monocromática contenida T . Como T es finito entonces existen índices r y s (s.p.g. $r < s$) tales que $w_r = w_s$, y $(w_r, w_{r+1}, \dots, w_s)$ es un ciclo dirigido asimétrico en $\mathfrak{C}(T[V_{kl}])$, contradiciendo que $T[V_{kl}]$ es núcleo perfecta por trayectorias dirigidas monocromáticas. (Teorema 1.9 y Proposición 1.5)

Caso 2. $w \in V_{ij}$.

Primero obsérvese que existe $z \in V_{kl}$ tal que $(n, z) \in F(T)$; de otra manera, $(z, n) \in F(T)$ para toda $z \in V_{kl}$ y como n es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de $T[V_{ij}]$, se cumpliría el inciso (ii) del Lema; recordemos que supusimos que (ii) y (iii) no se cumplieran. Recordemos que por lo visto antes $(n, z) \in F(T)$ es de color i . Así tenemos dos subcasos;

Subcaso 2.1. $(w, z) \in F(T)$.

Si $z \in N$ entonces $|\mathcal{A}(z)| > |\mathcal{A}(n)|$, esto por que $n \in A(z) - A(n)$, por tanto z no es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de $T[V_{kl}]$. Por tanto existe $z_1 \in V_{kl}$ tal que no existe z_1z- trayectoria dirigida monocromática contenida en T . Observemos que $(n, z_1) \in F(T)$ pues si $(z_1, n) \in F(T)$ entonces (z_1, n, z) es una trayectoria dirigida monocromática contenida en T de z_1 a z , lo cual es una contradicción; también $(w, z_1) \in F(T)$ ya que si $(z_1, w) \in F(T)$ entonces (z_1, w, z) es una z_1z- trayectoria dirigida monocromática contenida en T , lo cual, de nuevo, es una contradicción.

Si $z_1 \in N$ entonces tendríamos que $|\mathcal{A}(z_1)| > |\mathcal{A}(n)|$, (esto es ya que $n \in A(z_1) - A(n)$). Entonces $z_1 \notin N$, por tanto existe $z_2 \in V_{kl}$ tal que no es absorbido por z_1 mediante una trayectoria dirigida monocromática contenida en T . De nuevo $(n, z_2) \in F(T)$ y $(w, z_2) \in F(T)$ ya que si $(z_2, n) \in F(T)$ entonces (z_2, n, z_1) es una z_2z_1 -t.d.m. contenida en T , lo cual es una contradicción; también si $(z_2, w) \in F(T)$ entonces (z_2, w, z_1) es una z_2z_1- trayectoria dirigida monocromática contenida en T , lo cual, de nuevo, es una contradicción.

Si $z_2 \in N$ entonces de nuevo $|\mathcal{A}(z_2)| > |\mathcal{A}(n)|$. Así, $z_2 \notin N$ y por tanto

existe $z_3 \in V_{kl}$ tal que no es absorbido por z_2 mediante una trayectoria dirigida monocromática contenida en T . Análogamente, $(n, z_2) \in F(T)$ y $(w, z_2) \in F(T)$.

Continuando con este procedimiento encontramos una sucesión de vértices $z = z_0, z_1, z_2, \dots$ tal que no hay $z_{t+1}z_t$ -trayectoria dirigida monocromática contenida T . Como T es finito entonces existen índices r y s (s.p.g. $r < s$) tales que $z_r = z_s$, y $(z_r, z_{r+1}, \dots, z_s)$ es un ciclo dirigido asimétrico en $\mathfrak{C}(T[V_{kl}])$, contradiciendo que $T[V_{kl}]$ es núcleo perfecta por trayectorias dirigidas monocromáticas. (Teorema 1.9 y Proposición 1.5)

Por tanto este subcaso es imposible.

Subcaso 2.2. $(z, w) \in F(T)$.

Si $w \in N$ entonces $|\mathcal{A}(w)| > |\mathcal{A}(n)|$, esto es ya que $n \in A(w) - A(n)$ pues recordemos que $(n, z) \in F(T)$ y (n, z, w) es una trayectoria dirigida monocromática de color i alternando vértices entre V_{ij} y V_{kl} de n a w ; por tanto w no es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de $T[V_{ij}]$. Por tanto existe $x_1 \in V_{ij}$ tal que no hay x_1w -trayectoria dirigida monocromática contenida en T . Observemos que $(n, x_1) \in F(T)$

porque, de otra manera, si $(x_1, n) \in F(T)$ entonces (x_1, n, w) es una trayectoria dirigida monocromática contenida en T , lo que contradice que $w \notin N$; también $(z, x_1) \in F(T)$ ya que si $(x_1, z) \in F(T)$, entonces (x_1, z, w) es una trayectoria dirigida monocromática contenida en T , lo cual contradice $w \notin N$.

Si $x_1 \in N$ entonces tendríamos que $|\mathcal{A}(x_1)| > |\mathcal{A}(n)|$, (esto es ya que $n \in A(x_1) - A(n)$). Entonces $x_1 \notin N$, es decir, x_1 no es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de V_{ij} ; por tanto existe $x_2 \in V_{ij}$ tal que no existe una trayectoria dirigida monocromática de x_1 a x_2 . De nuevo obtenemos que $\{(n, x_2), (z, x_2)\} \subseteq F(T)$, puesto que si $(x_2, n) \in F(T)$ entonces (x_2, n, x_1) es una trayectoria dirigida monocromática de x_2 a x_1 lo cual es una contradicción; por otro lado si $(x_2, z) \in F(T)$ entonces (x_2, z, x_1) es una trayectoria dirigida monocromática de x_2 a x_1 , de nuevo una contradicción.

Si $x_2 \in N$ entonces, de nuevo, $|\mathcal{A}(x_2)| > |\mathcal{A}(n)|$. Así, $x_2 \notin N$ y por tanto existe $x_3 \in V_{ij}$ tal que no existe x_3x_2 -trayectoria dirigida monocromática contenida en T . Análogamente tenemos que $\{(n, x_3), (z, x_3)\} \subseteq F(T)$.

Continuando con este procedimiento encontramos una sucesión de vér-

tices $w = x_0, x_1, x_2, \dots$ tal que no hay $x_{t+1}x_t$ - trayectoria dirigida monocromática contenida T . Como T es finito entonces existen índices r y s (s.p.g. $r < s$) tales que $x_r = x_s$, y $(x_r, x_{r+1}, \dots, x_s)$ es un ciclo dirigido asimétrico en $\mathfrak{C}(T[V_{ij}])$, una contradicción con que $T[V_{ij}]$ es núcleo perfecta por trayectorias dirigidas monocromáticas. (Teorema 1.9 y Proposición 1.5)

Por tanto este subcaso también es imposible.

Así, finalmente, probamos que todo vértice de $V_{ij} \cup V_{kl}$ es absorbido por n mediante trayectorias dirigidas monocromáticas de color i alternando vértices entre V_{ij} y V_{kl} , esto es, la Afirmación 2.

Concluimos, por la Afirmación 2, que, sin pérdida de generalidad, $z \in V_{ij}$ es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en $T[V_{ij}]$ y z absorbe a todo vértice de $V_{ij} \cup V_{kl}$ mediante trayectorias dirigidas monocromáticas de color i alternando vértices entre V_{ij} y V_{kl} . Ahora como la parte (ii) del Lema no se cumple, es decir, existe $y \in V_{kl}$ tal que $(y, z) \notin F(T)$, se sigue que $(z, y) \in F(T)$ (recordemos que T es torneo). Es claro que z y y son los vértices que satisfacen (iv). Esto concluye la prueba del Lema. ■

Teorema 3.5 *Sea T un torneo m -coloreado, $M = \{1, 2, \dots, m\}$ el conjunto*

de colores,

$$M' \subseteq M^2 = \{S \subseteq M : |S| = 2\}$$

y $Z = \{V_{ij} : \{i, j\} \in M'\}$ una familia de subconjuntos no vacíos de $V(T)$ tal

que:

(1) $V(T) = \cup_{V_{ij} \in Z} V_{ij};$

(2) $T[V_{ij}]$ es núcleo perfecta monocromática para todo $V_{ij} \in Z;$

(3) para cualquier $z \in V_{ij}$ y $w \in V(T) - V_{ij}$, la flecha $[z, w]$ es de color i o j .

Si T no contiene triángulos dirigidos 3-coloreados, entonces T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Demostración. Si $V(T) = V_{ij}$ para algún $\{i, j\} \in M'$, el teorema sería cierto por la propiedad (2), por tanto supongamos que $V(T) \neq V_{ij}$ para todo $\{i, j\} \in M'$. Así tenemos que las propiedades (1), (2) y (3) del Lema 3.1 son satisfechas.

Definimos la digráfica D_Z como sigue: $V(D_Z) = Z$, esto es, tomamos un

vértice por cada elemento de Z sin repetir; sea $\{i\} = \{i, j\} \cap \{k, l\}$, así

$(V_{kl}, V_{ij}) \in F(D_Z)$ de color i si (ii) del Lema 3.1 se cumple;

$(V_{ij}, V_{kl}) \in F(D_Z)$ de color i si (iii) del Lema 3.1 se cumple;

$\{(V_{kl}, V_{ij}), (V_{ij}, V_{kl})\} \subseteq F(D_Z)$ de color i si (iv) del Lema 3.1 se cumple.

Afirmación 1. Cada triángulo dirigido en D_Z es monocromático o simétrico.

Sea $\vec{C}_3 = (V_{ij}, V_{kl}, V_{rs}, V_{ij})$ un triángulo dirigido no simétrico en D_Z . Se mostrará entonces que \vec{C}_3 es monocromático.

Como \vec{C}_3 no es simétrico, tenemos que tiene una flecha, digamos (V_{kl}, V_{ij}) , que cumple (ii) del Lema 3.1, es decir, existe $x_{ij} \in V_{ij}$ el cual absorbe cualquier otro vértice de V_{ij} por trayectorias dirigidas monocromáticas y tal que $(y, x_{ij}) \in F(T)$ para cada $y \in V_{kl}$. Sabemos que $(V_{ij}, V_{rs}) \in F(D_Z)$, entonces existen $x_{rs} \in V_{rs}$ y $x_{kl} \in V_{kl}$ tales que $(x_{rs}, x_{kl}) \in F(T)$, por construcción de D_Z . Por tanto tenemos un triángulo dirigido contenido en T , $\gamma = (x_{kl}, x_{ij}, x_{rs}, x_{kl})$. Por hipótesis, T no tiene triángulos dirigidos policromáticos, así γ no es 3-coloreado, es decir, tiene al menos dos flechas del mismo color. Sin pérdida de generalidad, supongamos que (x_{kl}, x_{ij}) y (x_{ij}, x_{rs}) son de color i . Ahora tenemos que (x_{kl}, x_{ij}) es de color i o j por

estar en $x_{ij} \in V_{ij}$ y la propiedad (3), también de color k o l porque $x_{kl} \in V_{kl}$ y la propiedad (3), así $\{i\} = \{i, j\} \cap \{k, l\}$. Por otro lado, (x_{ij}, x_{rs}) es de color i o j por estar en $x_{ij} \in V_{ij}$ y la propiedad (3), también de color r o s porque $x_{rs} \in V_{rs}$ y la propiedad (3), así $\{i\} = \{i, j\} \cap \{r, s\}$. Por tanto $\{i\} = \{k, l\} \cap \{r, s\}$, y por la propiedad (3), tenemos que cada flecha entre V_{kl} y V_{rs} es de color i , en particular (x_{rs}, x_{kl}) es de color i . Así γ es un triángulo dirigido monocromático y por tanto $\vec{C}_3 = (V_{ij}, V_{kl}, V_{rs}, V_{ij})$ es un triángulo monocromático.

Por lo tanto queda probada la afirmación.

Ahora lo que haremos será probar que para cada subconjunto V_{ij} , existe un vértice en él que absorbe a cada vértice de cada subconjunto en $N^-(V_{ij}, D_Z)$, y además es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de V_{ij} . Así por la definición de D_Z , estos vértices y el Lema 3.1, llegamos a que T tiene núcleo.

Sea $V_{ij} \in Z$. Para cada $V_{kl} \in N^-(V_{ij}, D_Z)$, sea $x_{ij,kl}$ un vértice elegido de V_{ij} tal que:

- (i) Si (ii) del Lema 3.1 se cumple, entonces $(y, x_{ij,kl}) \in F(T)$ para todo $y \in V_{kl}$ y $x_{ij,kl}$ es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de $T[V_{ij}]$.

(ii) Si (iv) del Lema 3.1 se cumple, entonces $x_{ij,kl}$ absorbe cada vértice de

$V_{ij} \cup V_{kl}$ por trayectorias dirigidas monocromáticas de color i .

Afirmación 2. Existe $z_{ij} \in V_{ij}$ tal que existe una trayectoria dirigida monocromática de y a z_{ij} de color i en T , para cada $V_{kl} \in N^-(V_{ij}, D_{\mathcal{Z}})$ y todo $y \in V_{kl}$ para el cual $(y, x_{ij,kl}) \in F(T)$ de color i .

Para cada $w \in V_{ij}$ definimos

$$\mathcal{B}(w) = \left\| \left\{ \begin{array}{l} V_{kl} \in N^-(V_{ij}, D_{\mathcal{Z}}) : \\ \forall y \in V_{kl} \ (y, x_{ij,kl}) \in F(T) \text{ de color } i \\ \exists yw - t.d.m. \text{ de color } i \text{ en } T \end{array} \right. \right\|.$$

Sea $z_{ij} \in V_{ij}$ tal que $B(z_{ij}) = \max\{\mathcal{B}(w) : w \in V_{ij}\}$. Se mostrará z_{ij} es el vértice buscado. Si $B(z_{ij}) = \delta_{D_{\mathcal{Z}}}^-(V_{ij}) = |N^-(V_{ij}, D_{\mathcal{Z}})|$ la afirmación se cumple. Así supongamos que $B(z_{ij}) \neq \delta_{D_{\mathcal{Z}}}^-(V_{ij})$, esto es, existe $V_{kl} \in N^-(V_{ij}, D_{\mathcal{Z}})$ tal que para algún $y \in V_{kl}$, $(y, x_{ij,kl}) \in F(T)$ de color i y no existe una yz_{ij} -trayectoria dirigida monocromática de color i contenida en T . Entonces $(z_{ij}, y) \in F(T)$. Más aún, existe $x \in V_{rs}$, con $V_{rs} \in N^-(V_{ij}, D_{\mathcal{Z}})$, tal que $(x, z_{ij}) \in F(T)$ y no existe $xx_{ij,kl}$ -trayectoria dirigida monocromática en T . Si esta trayectoria dirigida monocromática existiera, entonces sería del mismo color por la propiedad (3), y tendríamos que $B(x_{ij,kl}) > B(z_{ij})$, una contradicción. Así (x, z_{ij}, y) y $(y, x_{ij,kl}, x)$ son caminos dirigidos de longitud 2 en T . Tenemos dos posibilidades:

1. Si $(x, y) \in F(T)$, entonces $\vec{C}_3 = (y, x_{ij,kl}, x, y)$ es un triángulo dirigido. Como T no contiene triángulos dirigidos 3-coloreados, \vec{C}_3 tiene al menos dos flechas del mismo color. Por la propiedad (3) de la hipótesis del teorema, \vec{C}_3 es monocromático y tenemos que $(x, y, x_{ij,kl})$ es una $xx_{ij,kl}$ -trayectoria dirigida monocromática en T , una contradicción.
2. Si $(y, x) \in F(T)$, entonces $\vec{C}_3 = (x, z_{ij}, y, x)$ es un triángulo dirigido. Como T no contiene triángulos dirigidos 3-coloreados, \vec{C}_3 tiene al menos dos flechas del mismo color. Por la propiedad (3) de la hipótesis del teorema, \vec{C}_3 es monocromático y tenemos que (y, x, z_{ij}) es una yz_{ij} -trayectoria dirigida monocromática en T , de nuevo, una contradicción.

Así la Afirmación 2 esta demostrada.

Afirmación 3. Existe $z_{ij} \in V_{ij}$ tal que z_{ij} absorbe cada vértice de V_{ij} y hay una trayectoria dirigida monocromática de y a z_{ij} de color i en T , para cada $V_{kl} \in N^-(V_{ij}, D_Z)$ y todo $y \in V_{kl}$ para el cual $(y, x_{ij,kl}) \in F(T)$ de color i .

Por la Afirmación 2 tenemos que existe $z_{ij} \in V_{ij}$, tal que existe una yz_{ij} -trayectoria dirigida monocromática de color i en T , para cada $V_{kl} \in$

$N^-(V_{ij}, D_Z)$ y todo $y \in V_{kl}$ para el cual $(y, x_{ij,kl}) \in F(T)$ de color i . Sea S el subconjunto de vértices de V_{ij} el cual satisface la propiedad de la Afirmación 2, y sea n núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de $T[S]$ (recordemos que $T[V_{ij}]$ es núcleo perfecta por trayectorias dirigidas monocromáticas y $S \subseteq V_{ij}$, por tanto $T[S]$ tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas). Basta probar que n absorbe cualquier vértice de $V_{ij} - S$ mediante trayectorias dirigidas monocromáticas. Sea $w \in V_{ij} - S$ y supongamos que no existe wn -trayectoria dirigida monocromática en T . Así $(n, w) \in F(T)$. Si $(x, n) \in F(T)$ y es de color r , por ejemplo, entonces $(x, w) \in F(T)$ y es de color r . De otra manera tendríamos que $(w, x) \in F(T)$ de color r , pues por la propiedad (3) tenemos que todas las flechas entre V_{ij} y V_{rs} son del mismo color, así (w, x, n) es una trayectoria dirigida monocromática en T , una contradicción. Entonces $(x, w) \in F(T)$ para todo $x \notin V_{ij}$ tal que $(x, n) \in F(T)$. Claramente, se sigue que $w \in S$, una contradicción. Esto concluye la prueba de la afirmación.

Finalmente por la Afirmación 1 y el Corolario 1.2, tenemos que D_Z tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas y por el Lema 3.1, la definición de D_Z y la Afirmación 3, T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. ■

Corolario 3.3 *Sea T un torneo m -coloreado con $m \geq 4$ y supongamos que $\xi(z) \leq 2$ para todo vértice $z \in V(T)$. Si T no tiene triángulos dirigidos 3-coloreados entonces T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.*

Demostración. Sea $M = \{1, 2, \dots, m\}$ el conjunto de colores de T . Consideremos $M^2 = \{S \subseteq M : |S| = 2\}$ y $Z = \{V_S : S \in M^2\}$, donde $V_S = \{z \in V(T) : C(z) \subseteq S, S \in M^2\}$.

Observemos que como estamos tomando todos los subconjuntos de 2 elementos de M y estamos en un torneo entonces $V(T) = \cup_{S \in M^2} V_S$. También tenemos que $T[V_S]$ es un torneo 2-coloreado, así cualquier subtorneo inducido de $T[V_S]$ es 2-coloreado y por el Teorema 2.2, tiene núcleo. Por tanto $T[V_S]$ es núcleo perfecta por trayectorias dirigidas monocromáticas. Basta ver que si $z \in V(T) - V_S$ y $w \in V_S$, entonces el arco $[z, w]$ es de color i o j , si $S = \{i, j\}$, pues recordemos que $C(w) \subseteq S = \{i, j\}$ y $\xi(w) \leq 2$.

Como por hipótesis no tenemos triángulos dirigidos 3-coloreados, entonces se cumplen las hipótesis del Teorema anterior. Por tanto T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. ■

Capítulo 4

Núcleos por Trayectorias

Dirigidas Monocromáticas en

Digráficas Cuasi-Transitivas

Recordando que decimos que una digráfica D es *transitiva* si para vértices distintos $u, v \in V(D)$ tales que $(u, v) \in F(D)$ y $(v, w) \in F(D)$ implica $(u, w) \in F(D)$, entonces podemos decir que D es *cuasi-transitiva* si para vértices distintos $u, v \in V(D)$ tenemos que $(u, v) \in F(D)$ y $(v, w) \in F(D)$, entonces existe al menos $(u, w) \in F(D)$ o $(w, u) \in F(D)$. Un ciclo dirigido $\vec{C}_k = (u_0, u_1, \dots, u_k, u_0)$ en una digráfica D ($k \geq 2$) es *cuasi-transitivo en la*

orilla si para cada $i = 0, 1, \dots, k$, existe $(u_i, u_{i+2}) \in F(D)$ o $(u_{i+2}, u_i) \in F(D)$, donde los índices están tomados módulo $k + 1$.

Observemos que un torneo es una digráfica asimétrica y cuasi-transitiva, y que cada ciclo contenido en él es cuasi-transitivo en la orilla. Antes que nada necesitaremos una proposición, y dos corolarios directos de esta proposición, acerca de digráficas cuasi-transitivas. Estos resultados nos ayudarán para probar los resultados en digráficas con clases cromáticas cuasi-transitivas, la cual es una condición común en los resultados sobre núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas. La definición de clase cromática se dará más adelante.

Proposición 4.1 *Sea D una digráfica cuasi-transitiva. Supongamos que $P = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ es una x_1x_k -trayectoria dirigida minimal. Entonces la digráfica inducida por $V(P) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ es una digráfica semicompleta y $(x_j, x_i) \in F(D)$ para todo $j > i + 1$ excepto para $k = 4$, en tal caso la flecha entre x_1 y x_4 puede no existir.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre k . Si $k = 1$ entonces $D[V(P)] \cong K_1$ por tanto se cumple.

Si $k = 2$ entonces $P = (x_1, x_2)$, que es una semicompleta. Si $k = 3$ entonces $P = (x_1, x_2, x_3)$. Como D es cuasi-transitiva entonces tenemos que

$(x_1, x_3) \in F(D)$ o $(x_3, x_1) \in F(D)$; pero tenemos por hipótesis que P es minimal entre x_1 y x_3 , entonces $(x_1, x_3) \notin F(D)$, por tanto $(x_3, x_1) \in F(D)$ y $D[V(P)]$ es semicompleta y $(x_j, x_i) \in F(D)$ para todo $j > i + 1$.

Ahora, si $k = 4$ entonces $P = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, de nuevo, como D es cuasi-transitiva, entonces $(x_1, x_3) \in F(D)$ o $(x_3, x_1) \in F(D)$ y $(x_2, x_4) \in F(D)$ o $(x_4, x_2) \in F(D)$. En ambos casos, como la trayectoria dirigida es minimal, entonces $(x_1, x_3), (x_2, x_4) \notin F(D)$ ya que si estuviera alguna de éstas tendríamos que $P' = (x_1, x_3, x_4)$ o $P' = (x_1, x_2, x_4)$ son trayectorias dirigidas más pequeñas de x_1 a x_4 . Por tanto $(x_3, x_1), (x_4, x_2) \in F(D)$ y como no necesariamente tenemos trayectoria de long 2 de x_4 a x_1 entonces no necesariamente tenemos la flecha (x_4, x_1) .

Para $k = 5$ tenemos que $P = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, de nuevo, como D es cuasi-transitiva, tenemos que $(x_1, x_3) \in F(D)$ o $(x_3, x_1) \in F(D)$, $(x_2, x_4) \in F(D)$ o $(x_4, x_2) \in F(D)$ y $(x_3, x_5) \in F(D)$ o $(x_5, x_3) \in F(D)$. Como P es minimal entre x_1 y x_5 entonces $(x_1, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_5) \notin F(D)$, esto ya que podríamos formar trayectorias de longitud menor; entonces tenemos que $(x_3, x_1), (x_4, x_2), (x_5, x_3) \in F(D)$. Ahora como tenemos las flechas (x_5, x_3) y (x_3, x_1) y como D es cuasi-transitiva, entonces tenemos que $(x_1, x_5) \in F(D)$ o $(x_5, x_1) \in F(D)$ pero como P es minimal, $(x_1, x_5) \notin F(D)$ y por tanto

$(x_5, x_1) \in F(D)$. Por otro lado, como tenemos que $(x_4, x_5), (x_5, x_1) \in F(D)$ entonces $(x_4, x_1) \in F(D)$ o $(x_1, x_4) \in F(D)$ pero, de nuevo, como P es minimal, entonces $(x_1, x_4) \notin F(D)$, es decir, $(x_4, x_1) \in F(D)$. Y por tanto se cumple la afirmación para $k = 5$.

Supongamos que para $P' = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$, con $k \geq 6$, $D[V(P')]$ es una digráfica semicompleta y $(x_j, x_i) \in F(D)$ para todo $j > i + 1$.

Sea $P = (x_1, x_2, \dots, x_k)$. Consideremos $P_1 = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$ y $P_2 = (x_2, x_3, \dots, x_k)$, ambas son trayectorias, la primera de x_1 a x_{k-1} y la segunda de x_2 a x_k , minimales, ya que si existiera una menor de x_1 a x_{k-1} o de x_2 a x_k entonces podríamos construir una de menor longitud que P de x_1 a x_k . Por hipótesis de inducción tenemos que $D[V(P_1)]$ y $D[V(P_2)]$ son semicompletas y $(x_j, x_i) \in F(D)$ para todo $j > i + 1$. Sólo falta ver que $(x_k, x_1) \in F(D)$. Por hipótesis de inducción tenemos que $(x_3, x_1) \in F(D)$ ($3 > 1 + 1$) y también $(x_k, x_3) \in F(D)$ ($k > 5 > 3 + 1$) y por tanto tenemos que $(x_1, x_k) \in F(D)$ o $(x_k, x_1) \in F(D)$ pues D es cuasi-transitiva, pero como P es minimal, entonces $(x_k, x_1) \in F(D)$.

Por tanto se cumple la proposición. ■

Corolario 4.1 *Si una digráfica cuasi-transitiva D tiene trayectoria dirigida de x a y pero $(x, y) \notin F(D)$ entonces $(y, x) \in F(D)$ o existen vértices*

$u, v \in V(D) - \{x, y\}$ tales que (x, u, v, y) y (y, u, v, x) son trayectorias dirigidas en D .

Demostración. Supongamos que no existen vértices $u, v \in V(D) - \{x, y\}$ tales que (x, u, v, y) y (y, u, v, x) son trayectorias dirigidas en D , entonces mostraremos que $(y, x) \in F(D)$. Como tenemos que existe trayectoria dirigida de x a y , en particular existe una de longitud mínima. Sea P tal trayectoria. Por la Proposición 4.1 tenemos que $D[V(P)]$ es una digráfica semicompleta y $(x_j, x_i) \in F(D)$ para todo $j > i + 1$. Sólo falta ver que $(x_k, x_1) \in F(D)$; en particular tenemos que $(y, x) \in F(D)$.

Recordemos que si $P = (x = v_1, v_2, v_3, v_4 = y)$ entonces la flecha (x_4, x_1) no esta en $F(D)$. Pero tenemos, por la demostración de la proposición que $(x_3, x_1), (x_4, x_2) \in F(D)$, es decir, existen vértices $u = x_2$ y $v = x_3$ tales que $(x = v_1, u, v, v_4 = y)$ y $(y = v_4, u, v, v_1 = x)$ son trayectorias dirigidas de x a y .

Por tanto se cumple el enunciado. ■

Corolario 4.2 *Si una digráfica cuasi-transitiva D es tal que tiene trayectoria dirigida de x a y pero no existe trayectoria dirigida de y a x en D , para $x, y \in V(D)$, entonces $(x, y) \in F(D)$.*

Demostración. Supongamos que $(x, y) \notin F(D)$, entonces por el Corolario 4.1 tenemos que $(y, x) \in F(D)$ o existen vértices $u, v \in V(D) - \{x, y\}$ tales que (x, u, v, y) y (y, u, v, x) son trayectorias dirigidas en D , lo cual en ambos casos es una contradicción, ya que por hipótesis no existe trayectoria dirigida de y a x en D . ■

Sea D una digráfica m -coloreada. Una *clase cromática de D* es el conjunto de flechas del mismo color. Decimos que una clase cromática S es *cuasi-transitiva* si $D[S]$ es una digráfica cuasi-transitiva. Ahora bien, el siguiente lema es un resultado directo del corolario anterior.

Lema 4.1 *Sea D una digráfica m -coloreada tal que cada clase cromática es cuasi-transitiva. Si \vec{C}_k es un ciclo dirigido en $Asim(\mathfrak{C}(D))$, entonces \vec{C}_k es un ciclo dirigido en $Asim(D)$.*

Demostración. Sea $\vec{C}_k = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_0)$ un ciclo dirigido asimétrico en $\mathfrak{C}(D)$. Como $\vec{C}_k \in Asim(\mathfrak{C}(D))$ entonces $(u_i, u_{i-1}) \notin F(\mathfrak{C}(D))$, con $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ donde los índices son tomados módulo k . Ahora, por definición de $\mathfrak{C}(D)$, como $(u_i, u_{i-1}) \notin F(\mathfrak{C}(D))$, no existe trayectoria dirigida monocromática de u_i a u_{i-1} contenida en D , en particular tenemos que $(u_i, u_{i-1}) \notin F(D)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ donde los índices son tomados módulo k .

También por la definición de $\mathfrak{C}(D)$ y como $(u_{i-1}, u_i) \in F(\mathfrak{C}(D))$, para toda $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ donde los índices son tomados módulo k , existen trayectorias dirigidas monocromáticas de u_{i-1} a u_i . Finalmente, por el Corolario 4.2, tenemos que $(u_{i-1}, u_i) \in F(D)$. Por tanto $\vec{C}_k \subset D$. ■

Notemos que si D es una digráfica m -coloreada y \vec{C}_k un ciclo dirigido asimétrico en $\mathfrak{C}(D)$ entonces existe un vértice de \vec{C}_k donde el ciclo cambia el color de sus flechas, sino pasara esto entonces tendríamos que puedo llegar de u_i a u_{i-1} mediante una trayectoria dirigida monocromática y por tanto $(u_i, u_{i-1}) \in F(\mathfrak{C}(D))$ lo cual contradice la asimetría de \vec{C}_k .

Lema 4.2 *Sea D una digráfica m -coloreada tal que*

- (i) *Cada ciclo es cuasi-transitivo en la orilla.*
- (ii) *D no contiene triángulos 3-coloreados.*

Supongamos que, para $k \geq 3$, $\vec{C}_k = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_0)$ es un ciclo dirigido asimétrico en $\mathfrak{C}(D)$ de longitud mínima y para alguna $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ u_i es un vértice donde \vec{C}_k cambia de color B a color R . Entonces

- a) $(u_{i+1}, u_{i-1}) \notin F(D)$ y $(u_{i-1}, u_{i+1}) \in F(D)$.
- b) *Existe trayectoria dirigida monocromática de u_{i+1} a u_{i-1} de color G distinto de B y de R .*

Demostración. Sea $\vec{C}_k = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_0)$ un ciclo asimétrico en $\mathfrak{C}(D)$ de longitud mínima. Por el Lema 4.1 tenemos que \vec{C}_k es un ciclo dirigido asimétrico en D . Como \vec{C}_k es asimétrico en $\mathfrak{C}(D)$, existe un cambio de color en sus flechas en un vértice, esto es, existe $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ tal que (u_{i-1}, u_i) es de color B y (u_i, u_{i+1}) es de color R .

Por la propiedad (i), $(u_{i-1}, u_{i+1}) \in F(D)$ o $(u_{i+1}, u_{i-1}) \in F(D)$. Si $(u_{i+1}, u_{i-1}) \in F(D)$ entonces $(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i-1})$ es un triángulo dirigido, entonces por la propiedad (ii), (u_{i+1}, u_{i-1}) es de color B o R . Si es de color

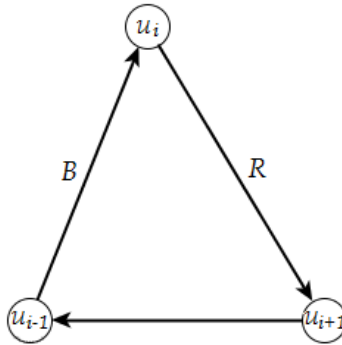


Figura 4.1

B entonces $(u_{i+1}, u_i) \in F(\mathfrak{C}(D))$ ya que (u_{i+1}, u_{i-1}, u_i) es una trayectoria dirigida monocromática de color B ; por otro lado si es de color R entonces $(u_i, u_{i-1}) \in F(\mathfrak{C}(D))$ puesto que (u_i, u_{i+1}, u_{i-1}) es una trayectoria dirigida monocromática de color R . En ambos casos se contradice la asimetría de \vec{C}_k ,

por tanto $(u_{i-1}, u_{i+1}) \in F(D)$.

Como \vec{C}_k es de longitud mínima, entonces existe trayectoria dirigida monocromática de u_{i+1} a u_{i-1} , ya que sino existiera, entonces $\vec{C}'_k = (u_0, u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_{k-1}, u_0)$ es un ciclo dirigido asimétrico de longitud menor que \vec{C}_k . Esta trayectoria es de color G distinto de B y de R ; puesto que si fuera de color B entonces existiría una trayectoria dirigida monocromática de u_{i+1} a u_i y por tanto $(u_{i+1}, u_i) \in F(\mathfrak{C}(D))$, si fuera de color R entonces existiría una trayectoria dirigida monocromática de u_i a u_{i-1} y por tanto $(u_i, u_{i-1}) \in F(\mathfrak{C}(D))$, en ambos casos una contradicción. ■

Teorema 4.1 *Sea D una digráfica m -coloreada. Si*

- (i) *cada clase cromática es cuasi-transitiva;*
- (ii) *cada ciclo es cuasi-transitivo en la orilla; y*
- (iii) *D no contiene triángulos 3-coloreados.*

Entonces D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Demostración. Sea $\mathfrak{C}(D)$ la cerradura de D . Demostraremos que cada ciclo en $\mathfrak{C}(D)$ tiene una flecha simétrica, y por tanto D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Supongamos que existe un ciclo dirigido asimétrico en $\mathfrak{C}(D)$. Sea \vec{C}_k un ciclo en $Asim(\mathfrak{C}(D))$ de longitud mínima. Sea $\vec{C}_k = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_0)$, por el Lema 4.1 \vec{C}_k es un ciclo dirigido en $Asim(D)$. Notemos que se cumplen las propiedades (i) y (ii) del Lema 4.2 y como \vec{C}_k es un ciclo dirigido asimétrico en $\mathfrak{C}(D)$ entonces, si $u_i \in V(\vec{C}_k)$ es el vértice donde \vec{C}_k cambia de color B a color R , $(u_{i+1}, u_{i-1}) \notin F(D)$, $(u_{i-1}, u_{i+1}) \in F(D)$ y existe trayectoria dirigida monocromática de u_{i+1} a u_{i-1} color G distinto de B y de R . Sea $P = (u_{i+1} = x_0, x_1, \dots, x_n = u_{i-1})$

Si $u_i = x_j$ para algún $x_j \in V(P)$ entonces tendríamos trayectoria dirigida monocromática de u_i a u_{i-1} y por tanto \vec{C}_k no sería asimétrico en $\mathfrak{C}(D)$. Por tanto $u_i \notin V(P)$.

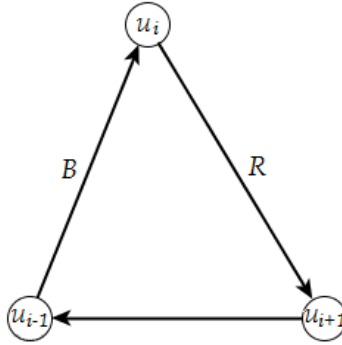


Figura 4.2

La flecha (u_{i-1}, u_{i+1}) no es de color G , si lo fuera, entonces

$T_3 \cong D[u_{i-1}, u_i, u_{i+1}]$ es 3-coloreado lo cual es una contradicción pues por hipótesis no tenemos triángulos 3-coloreados. Por tanto (u_{i-1}, u_{i+1}) es de color B o R . Esto nos dice que (u_{i-1}, u_{i+1}) no esta en la clase cromática de G . La clase cromática de G la denotaremos por \widehat{G} .

Como \widehat{G} es cuasi-transitiva, por el Corolario 4.1 tenemos que $(u_{i+1}, u_{i-1}) \in F(D)$ o existe $v_r, v_s \in V(\widehat{G}) - \{u_{i-1}, u_{i+1}\}$ tal que $(u_{i-1}, v_r, v_s, u_{i+1})$ y $(u_{i+1}, v_r, v_s, u_{i-1})$ son trayectorias dirigidas en \widehat{G} . Como $(u_{i+1}, u_{i-1}) \notin F(D)$ entonces se cumple la segunda parte.

Por hipótesis el ciclo $(u_i, u_{i+1}, v_r, v_s, u_{i-1}, u_i)$ es cuasi-transitivo en la orilla y existe $(u_i, v_r) \in F(D)$ o $(v_r, u_i) \in F(D)$.

(1) Si $(u_i, v_r) \in F(D)$.

No es de color G , pues si lo fuera la trayectoria dirigida (u_i, v_r, v_s, u_{i-1}) es monocromática y por tanto $(u_i, u_{i-1}) \in F(\mathfrak{C}(D))$ lo cual es una contradicción. Por tanto es de color B o R . Si es de color B entonces el $T_3 \cong D[u_{i-1}, u_i, v_r]$ es 3-coloreado y si es de color R el $T_3 \cong D[u_i, u_{i+1}, v_r]$ es 3-coloreado en ambos casos una contradicción con la propiedad (ii).

(2) Si $(v_r, u_i) \in F(D)$.

De nuevo tenemos que no es de color G , ya que la trayectoria dirigida

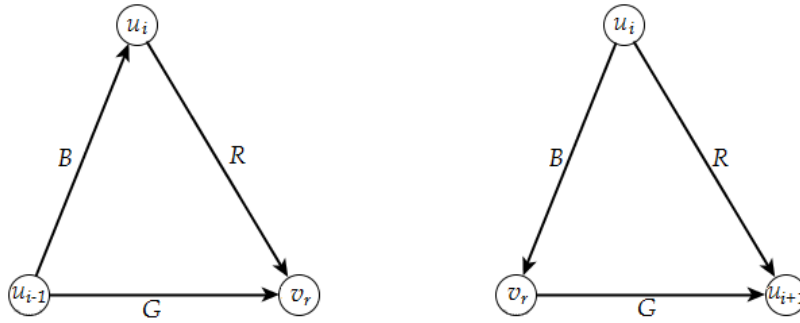


Figura 4.3: $(u_i, v_r) \in F(D)$

(u_{i+1}, v_r, u_i) es monocromática y por tanto $(u_{i+1}, u_i) \in F(\mathfrak{C}(D))$ lo cual es una contradicción. Por tanto es de color B o R . Si es de color B entonces el $\vec{C}_3 = (u_i, u_{i+1}, v_r, u_i)$ es 3-coloreado y si es de color R el $T_3 \cong D[u_i, u_{i+1}, v_r]$ es 3-coloreado en ambos casos una contradicción con la propiedad (ii).

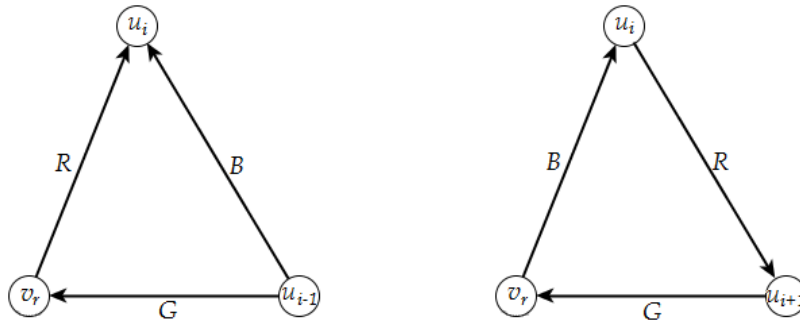


Figura 4.4: $(v_r, u_i) \in F(D)$

Por tanto $[u_i, v_r] \notin F(D)$; esto contradice que \widehat{G} es cuasi-transitiva. Por

tanto \vec{C}_k no es un ciclo dirigido asimétrico en $\mathfrak{C}(D)$. Por tanto todo ciclo dirigido en $\mathfrak{C}(D)$ tiene una flecha simétrica. Por tanto $\mathfrak{C}(D)$ tiene núcleo y D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. ■

Corolario 4.3 *Sea T un torneo m -coloreado tal que*

- (i) *cada clase cromática es cuasi-transitiva; y*
- (ii) *T no contiene triángulos 3-coloreados.*

Entonces T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Teorema 4.2 *Sea D una digráfica m -coloreada. Si*

- (i) *cada clase cromática es cuasi-transitiva;*
- (ii) *cada ciclo es cuasi-transitivo en la orilla;*
- (iii) *existe $k \geq 4$ tal que cada \vec{C}_k es cuasi-monocromático y cada \vec{C}_l ,
 $(3 \leq l \leq k - 1)$, no es policromático; y*
- (iv) *D no contiene triángulos 3-coloreados.*

Entonces D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Demostración. De la misma manera que en el teorema anterior, mostraremos que en $\mathfrak{C}(D)$ todo ciclo dirigido contiene una flecha simétrica. Por contradicción supongamos que existe un ciclo dirigido asimétrico en $\mathfrak{C}(D)$. Sea $\vec{C}_k = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_0)$ el ciclo dirigido asimétrico de longitud mínima. Por el Lema 4.1, \vec{C}_k es un ciclo dirigido en D .

Sea u_i el vértice donde \vec{C}_k cambia de B a R , esto es, (u_{i-1}, u_i) es de color B y (u_i, u_{i+1}) es de color R . Como D cumple las propiedades (ii) y (iii) entonces podemos aplicar el Lema 4.2. Entonces tenemos que $(u_{i-1}, u_{i+1}) \in F(D)$, $(u_{i+1}, u_{i-1}) \notin F(D)$ y existe trayectoria dirigida monocromática de u_{i+1} a u_{i-1} de color G distinto de B y de R . Sea $P = (u_{i+1}, x_1, x_2, \dots, x_n, u_{i-1})$, $n \geq 1$.

Por la demostración del Teorema 4.1 tenemos que $u_i \notin V(P)$ (si $u_i = x_j$ para algún $x_j \in V(P)$ entonces tendríamos trayectoria dirigida monocromática de u_i a u_{i-1} y por tanto \vec{C}_k no sería asimétrico en $\mathfrak{C}(D)$). Ahora supongamos que P es de longitud mínima. Consideremos los siguientes dos casos:

Caso 1. $(u_{i-1}, u_{i+1}) \in F(D)$ no es de color G .

Por (i), la clase cromática de G , \widehat{G} , es cuasi-transitiva y como P es de longitud mínima entonces podemos aplicar el Corolario 4.1, esto es

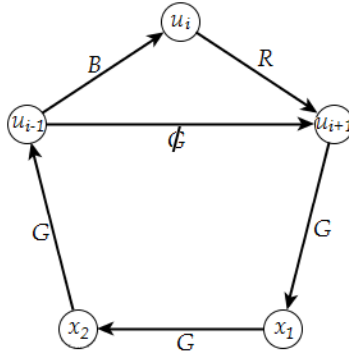


Figura 4.5

$P = (u_{i+1}, x_1, x_2, u_{i-1})$ y $(u_{i+1}, x_1, x_2, u_{i-1})$ son trayectorias dirigidas en \widehat{G} . Entonces $\vec{C}_5 \cong (u_i, u_{i+1}, x_1, x_2, u_{i-1}, u_i)$ es policromático (Fig. 4.5), por tanto si $k \geq 5$ esto contradice la propiedad (iii) del teorema.

Falta ver el caso $k = 4$. Por la condición (ii) \vec{C}_5 es cuasi-transitivo en la orilla, $(u_i, x_1) \in F(D)$ o $(x_1, u_i) \in F(D)$ y $(x_2, u_i) \in F(D)$ o $(u_i, x_2) \in F(D)$.

Afirmación 1.1 $(x_1, u_i) \in F(D)$ y es de color R .

Si $(u_i, x_1) \in F(D)$ entonces $\vec{C}_4 \cong (u_i, x_1, x_2, u_{i-1}, u_i)$ es cuasi-monocromático por (iii), así (u_i, x_1) es de color G , entonces existe trayectoria monocromática de u_i a u_{i-1} de color G , por tanto $(u_i, u_{i-1}) \in F(\mathfrak{C}(D))$, lo cual contradice que \vec{C}_k es asimétrico en $\mathfrak{C}(D)$. Por tanto $(x_1, u_i) \in F(D)$.

Ahora tenemos $\vec{C}_3 \cong (u_i, u_{i+1}, x_1, u_i)$. Por (iii) (x_1, u_i) es de color G o R .

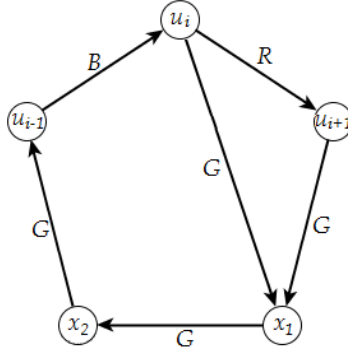


Figura 4.6

Si fuera de color G entonces tendríamos una trayectoria monocromática de u_{i+1} a u_i , (recordemos que (u_{i+1}, x_1) es de color G), y $(u_{i+1}, u_i) \in F(\mathfrak{C}(D))$, una contradicción. Por tanto $(x_1, u_i) \in F(D)$ es de color R .

Así la afirmación 1.1 esta probada.

Afirmación 1.2 $(u_i, x_2) \in F(D)$ y es de color B .

Si $(x_2, u_i) \in F(D)$ entonces $\vec{C}_4 \cong (u_i, u_{i+1}, x_1, x_2, u_i)$, y por la condición (iii) es cuasi-monocromático, así tenemos que (x_2, u_i) es de color G . Por tanto existe trayectoria dirigida monocromática de u_{i+1} a u_i y $(u_{i+1}, u_i) \in F(D)$, lo cual contradice la asimetría de \vec{C}_k . Por tanto $(u_i, x_2) \in F(D)$.

Como (u_i, x_2) pertenece al $\vec{C}_3 \cong (u_i, x_2, u_{i-1}, u_i)$ y por (iii) (u_i, x_2) es de color B o G . Si fuera G , tendríamos trayectoria dirigida monocromática de u_i

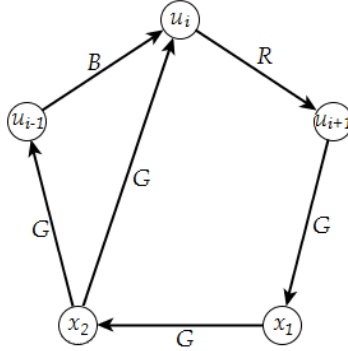


Figura 4.7

a u_{i-1} y $(u_{i-1}, u_i) \in F(\mathfrak{C}(D))$, una contradicción. Por tanto $(u_i, x_2) \in F(D)$ es de color B .

Esta probada la afirmación 1.2.

Por las afirmaciones 1.1 y 1.2, tenemos que $\vec{C}_4 \cong (u_i, x_2, u_{i+1}, x_1, u_i)$. es policromático, lo cual contradice la propiedad (iii) del teorema.

Caso 2. $(u_{i-1}, u_{i+1}) \in F(D)$ es de color G .

Como P (la trayectoria dirigida monocromática de u_{i+1} a u_{i-1} de color G) es de longitud mínima, entonces por la Proposición 4.1, $D[V(P)]$ es una digráfica semicompleta de color G y $(u_{i-1}, x_j) \in F(D)$ para $j = 1, 2, \dots, n-1$, $(x_m, x_j) \in F(D)$ donde $n \geq m > j+1$ y $j = 1, 2, \dots, n-2$, y $(x_j, u_{i+1}) \in F(D)$

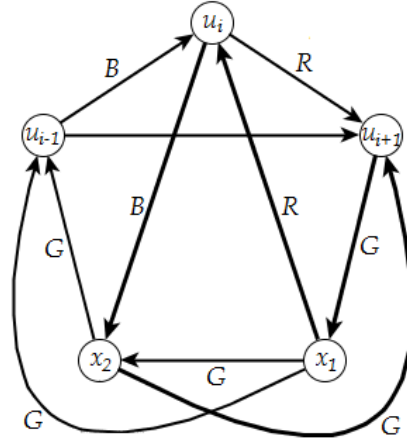


Figura 4.8

para $j = 2, 3, \dots, n$. Y tenemos el ciclo

$$\vec{C}_{n+2} \cong (u_{i-1}, u_{i+1}, x_1, \dots, x_n, u_{i-1})$$

y por la propiedad (iii), $n \geq k - 2$. Notemos que si existe $\alpha \in \{0, 1, \dots, n\}$ tal que $(u_i, x_\alpha) \in F(D)$ entonces tenemos que existe un ciclo dirigido $\vec{\gamma} = (u_i, x_\alpha, x_{\alpha+1}, \dots, x_n, u_{i-1})$ y por (ii) tenemos que $(u_i, x_{\alpha+1}) \in F(D)$ o $(x_{\alpha+1}, u_i) \in F(D)$. Recordemos que $(u_{i+1}, u_i) \in F(D)$.

Analizaremos los siguientes casos:

- (2.1) Si para todo $\beta \in \{0, 1, \dots, n\}$ tal que $(x_\beta, u_i) \notin F(D)$, entonces para toda $\alpha \in \{0, 1, \dots, n\}$ tenemos que $(u_i, x_\alpha) \in F(D)$ y ninguna es de color G , ya que si lo fueran tendríamos trayectoria monocromática de

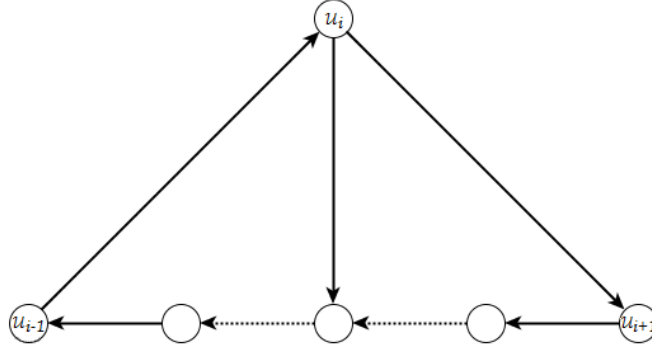


Figura 4.9

u_i a u_{i-1} y $(u_i, u_{i-1}) \in F(\mathfrak{C}(D))$, una contradicción. El ciclo

$$\vec{C} = (u_i, u_{i+1}, x_1, \dots, x_n, u_{i-1}, u_i)$$

es de longitud $l = n + 3 > k$, y como $(u_i, x_\alpha) \in F(D)$ para todo $\alpha \in \{1, 2, \dots, n\}$, existe el ciclo

$$\vec{C}' = (u_i, x_{n-(k-3)}, x_{n-(k-2)}, \dots, x_n, u_{i-1}, u_i)$$

de longitud k el cual no es cuasi-monocromático, una contradicción con la propiedad (iii).

- (2.2) Si $(x_{\alpha+1}, u_i) \in F(D)$ para alguna $\alpha \in \{0, 1, \dots, n\}$ tenemos el ciclo dirigido $\vec{\gamma} = (u_i, u_{i+1}, x_1, \dots, x_\alpha, x_{\alpha+1}, u_i)$, entonces por la condición (ii), $(x_\alpha, u_i) \in F(D)$ o $(u_i, x_\alpha) \in F(D)$. Si para todo

$\beta \in \{0, 1, \dots, n\}$ tal que $(u_i, x_\beta) \notin F(D)$, entonces para toda $\alpha \in \{0, 1, \dots, n\}$ tenemos que $(x_\alpha, u_i) \in F(D)$ y ninguna es de color G , ya que si lo fueran tendríamos trayectoria monocromática de u_{i+1} a u_i y $(u_{i+1}, u_i) \in F(\mathfrak{C}(D))$, una contradicción. El ciclo

$$\vec{C} = (u_i, u_{i+1}, x_1, \dots, x_n, u_{i-1}, u_i)$$

es de longitud $l = n + 3 > k$, y como $(x_\alpha, u_i) \in F(D)$ para todo $\alpha \in \{1, 2, \dots, n\}$, existe el ciclo

$$\vec{C}' = (u_i, u_{i+1}, x_1, x_2, \dots, x_{k-2}, u_i)$$

de longitud k el cual no es cuasi-monocromático, una contradicción con la propiedad (iii).

(2.3) Sea $\alpha = \min \{j \in \{1, 2, \dots, n\} : (x_j, u_i) \in F(D)\}$. Por la condición (ii) tenemos que $(u_i, x_1) \in F(D)$ o $(x_1, u_i) \in F(D)$, y por tanto dicho α existe. Más aún, para cada $\beta < \alpha$, $(u_i, x_\beta) \in F(D)$. Afirmamos que $\alpha < k - 2$. Si no fuera este el caso, $\alpha \geq k - 2$ y

$$\vec{C}_k \cong (u_i, x_{\alpha-(k-2)}, x_{\alpha-(k-3)}, \dots, x_\alpha, u_i)$$

(si $\alpha = k - 2$, entonces $x_{\alpha-(k-2)} = u_{i+1}$) el cual no es cuasi-monocromático, ya que si $(u_i, x_{\alpha-(k-2)})$ o (x_α, u_i) es de color G tendríamos trayectoria

dirigida monocromática de u_i a u_{i-1} en el primer caso, y de u_{i+1} a u_i en el segundo y por tanto $(u_i, u_{i-1}) \in F(\mathfrak{C}(D))$ o $(u_{i+1}, u_i) \in F(\mathfrak{C}(D))$, en ambos casos una contradicción con la asimetría de \vec{C}_k , y por tanto tenemos una contradicción con la propiedad (iii).

Sea $\beta = \max\{j \in \{1, 2, \dots, n\} : (u_i, x_j) \in F(D)\}$. Tenemos que para cada $\eta > \beta$, $(x_\eta, u_i) \in F(D)$ y $\beta > n - (k - 3)$, esto ya que si $\beta \leq n - (k - 3)$

$$\vec{C}_k \cong (u_i, x_\beta, x_{\beta+1}, \dots, x_{\beta+(k-2)}, u_i)$$

(si $\beta = n - (k - 2)$, entonces $x_{\beta+(k-2)} = u_{i-1}$) el cual no es cuasi-monocromático, ya que si (u_i, x_β) o $(x_{\beta+(k-2)}, u_i)$ es de color G tendríamos trayectoria dirigida monocromática de u_i a u_{i-1} en el primer caso, y de u_{i+1} a u_i en el segundo y por tanto $(u_i, u_{i-1}) \in F(\mathfrak{C}(D))$ o $(u_{i+1}, u_i) \in F(\mathfrak{C}(D))$, en ambos casos una contradicción con la asimetría de \vec{C}_k , y por tanto tenemos una contradicción con la propiedad (iii).

Así pues:

(2.3.1) Si $\beta > \alpha$, entonces

(a) Si $\beta - \alpha \geq k - 2$, entonces

$$\vec{C}_k \cong (u_i, x_\beta, x_{\beta-(k-3)}, x_{\beta-(k-2)}, \dots, x_{\beta-1}, x_\alpha, u_i)$$

no es cuasi-monocromático, una contradicción con la propiedad (iii) (recordemos que si (u_i, x_β) o (x_α, u_i) es de color G tendríamos trayectoria dirigida monocromática de u_i a u_{i-1} en el primer caso, y de u_{i+1} a u_i en el segundo y por tanto $(u_i, u_{i-1}) \in F(\mathfrak{C}(D))$ o $(u_{i+1}, u_i) \in F(\mathfrak{C}(D))$), y

(b) si $\beta - \alpha \leq k - 3$, entonces

$$\vec{C}_k \cong (u_i, x_\gamma, x_{\gamma+1}, \dots, x_\alpha, \dots, x_\beta, x_{\beta+1}, \dots, x_\delta, u_i)$$

no es cuasi-monocromático, para $\delta - \gamma = k - 2$, una contradicción con la propiedad (iii) (recordemos que si (u_i, x_γ) o (x_δ, u_i) es de color G tendríamos trayectoria dirigida monocromática de u_i a u_{i-1} en el primer caso, y de u_{i+1} a u_i en el segundo y por tanto $(u_i, u_{i-1}) \in F(\mathfrak{C}(D))$ o $(u_{i+1}, u_i) \in F(\mathfrak{C}(D))$), y

(2.3.2) Si $\beta > \alpha$, entonces, por las definiciones de α y β , $\beta = \alpha - 1$, así

$$\vec{C}_k \cong (u_i, x_\gamma, x_{\gamma+1}, \dots, x_\beta, x_\alpha, x_{\alpha+1}, \dots, x_\delta, u_i)$$

no es cuasi-monocromático, para $\delta - \gamma = k - 2$, una contradicción con la propiedad (iii) (recordemos que (u_i, x_γ) y (x_δ, u_i) no son de color G).

Por tanto $(u_{i-1}, u_{i+1}) \notin F(D)$, lo cual contradice la propiedad (ii). Por tanto no existe ciclo asimétrico en $\mathfrak{C}(D)$, por tanto D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. ■

Proposición 4.2 *Sea D una digráfica m -coloreada asimétrica tal que*

- (i) *cada clase cromática es cuasi-transitiva; y*
- (ii) *D no contiene \vec{C}_3 3-coloreados.*

Si $(u, v) \in F(D)$ es asimétrica en $\mathfrak{C}(D)$, entonces no existe \vec{C}_3 contenido en D que contenga (u, v) .

Demostración. Supongamos que $(u, v) \in F(D)$ es asimétrica en $\mathfrak{C}(D)$ y que existe \vec{C}_3 contenido en D que contenga (u, v) .

Sea $\vec{C}_3 = (u, v, w, u)$. Por (ii) dos flechas de \vec{C}_3 son del mismo color, sea B dicho color. Como la clase cromática de B es cuasi-transitiva y D es asimétrica la flecha restante es de color B . Por tanto \vec{C}_3 es monocromático en D y por tanto es simétrico en $\mathfrak{C}(D)$, una contradicción ya que la flecha (u, v) es asimétrica en $\mathfrak{C}(D)$. Por tanto no existe \vec{C}_3 contenido en D que contenga (u, v) . ■

Teorema 4.3 *Sea D una digráfica m -coloreada asimétrica. Si*

- (i) cada clase cromática de D es cuasi-transitiva;
- (ii) cada ciclo induce una digráfica cuasi-transitiva; y
- (iii) D no contiene \vec{C}_3 3-coloreados.

Entonces D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Demostración. Supongamos que existe un ciclo dirigido asimétrico en $\mathfrak{C}(D)$, $\vec{C}_k = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_0)$. Por el Lema 4.1 \vec{C}_k es un ciclo asimétrico en D . Por la condición (ii) $D[V(\vec{C}_k)]$ es cuasi-transitiva, entonces $(u_0, u_2) \in F((D))$ o $(u_2, u_0) \in F((D))$.

Por la Proposición 4.2 no existe \vec{C}_3 contenido en D que contenga (u_i, u_{i+1}) para toda $i = 0, 1, \dots, k$ (donde los índices están tomados módulo k). Si $(u_2, u_0) \in F((D))$, entonces tendríamos el $\vec{C}_3 \cong (u_0, u_1, u_2, u_0)$ en D que contiene a (u_0, u_1) , una contradicción con la Proposición 4.2 ya que $(u_0, u_1) \in F(D)$ es asimétrica en $\mathfrak{C}(D)$. Por tanto, $(u_0, u_2) \in F((D))$.

De la misma manera $(u_0, u_3) \in F((D))$ ya que si estuviera $(u_3, u_0) \in F((D))$, entonces tendríamos el $\vec{C}_3 \cong (u_0, u_2, u_3, u_0)$ en D que contiene a (u_2, u_3) , una contradicción con la Proposición 4.2 ya que $(u_2, u_3) \in F(D)$ es asimétrica en $\mathfrak{C}(D)$.

Continuando con este procedimiento $(u_0, u_j) \in F((D))$ para toda

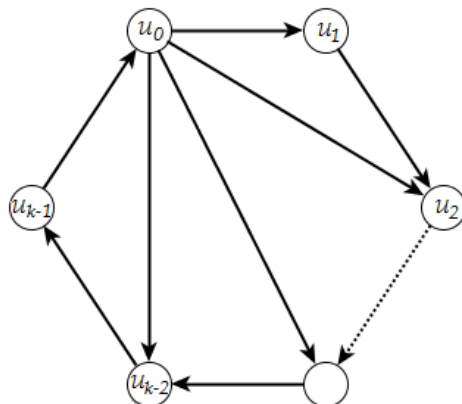


Figura 4.10

$j = 1, 2, \dots, k - 2$, entonces tenemos $\vec{C}_3 \cong (u_0, u_{k-2}, u_{k-1}, u_0)$ en D que contiene a (u_{k-1}, u_0) , una contradicción con la Proposición 4.2 ya que $(u_{k-1}, u_0) \in F(D)$ es asimétrica en $\mathfrak{C}(D)$.

Por tanto no existe ciclo dirigido asimétrico en $\mathfrak{C}(D)$. Por tanto D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. ■

Por la observación inicial que nos dice que un torneo es una digráfica asimétrica y cuasi-transitiva, y que cada ciclo contenido en él es cuasi-transitivo en la orilla, tenemos directamente el siguiente corolario.

Corolario 4.4 *Sea T un torneo m -coloreado tal que*

- (i) *cada clase cromática es cuasi-transitiva; y*

(ii) D no contiene \vec{C}_3 3-coloreados.

Entonces T tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Este corolario resuelve el problema planteado por Sands, Sauer y Woodrow para torneos con clases cromáticas cuasi-transitivas.

Conclusiones

En el presente trabajo se probaron resultados que responden, en algunos casos totalmente, a la pregunta planteada por Paul Erdős. En el Capítulo 2 mostramos que $f(2) = 1$, y que si un torneo m -coloreado no contiene \vec{C}_3 ni torneos transitivos de 3 vértices policromáticos, entonces, de igual manera, $f(3) = 1$. Junto con esto probamos que cualquier digráfica 2-coloreada, inclusive si es infinita, tiene núcleo.

Posteriormente, en el Capítulo 3, demostramos que si un torneo 3-coloreado tiene ex-vecindades o in-vecindades a lo más 2-coloreadas entonces se cumple la conjetura de Erdős, esto es, $f(3) = 3$. Después de esto mostramos que en un torneo m -coloreado con ex-vecindades a lo más 2-coloreadas podemos encontrar conjuntos absorbentes de cardinalidad m o $m - 1$ dependiendo de la paridad de m ; sin embargo el problema sigue abierto para las in-vecindades, el cual sería un teorema similar al que tenemos para ex-

vecindades. Si tuviéramos dicho resultado entonces tendríamos un teorema para el cual pediríamos que los vértices del torneo tuviera o ex-vecindades o in-vecindades a lo más 2-coloreadas. En este mismo capítulo, pidiendo ciertas condiciones, junto con que no contenga \vec{C}_3 policromáticos, para un torneo m -coloreado, llegamos a que también tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Finalmente en el Capítulo 4 probamos que si un torneo m -coloreado sin \vec{C}_3 policromáticos y con clases cromáticas cuasi-transitivas cumple la conjetura de Sands, Sauer y Woodrow, es decir, tiene núcleo. Junto con este resultado mostramos varios resultados relacionados con digráficas con clases de color cuasi-cromáticas y que cumplieran con que cada ciclo es cuasi-transitivo en la orilla. Aunque aún queda abierto si las condiciones son las mínimas necesarias.

Tanto la conjetura de Erdős como la de Sands, Sauer y Woodrow, siguen abiertas, solo se ha conseguido contestarlas parcialmente. En algunos casos se ha demostrado que no es cierta como vimos con los ejemplos de G_5 y T_6 donde vemos que no es suficiente pedir que un torneo m -coloreado no contenga \vec{C}_3 policromáticos, sino también tenemos que pedir que no contenga T_3 policromáticos, donde T_3 es el torneo transitivo de tres vértices.

Bibliografía

- [1] J. A. Amor Montaña, *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias*, Las prensas de Ciencias, México D.F., (2005).
- [2] J. Bang-Jensen and J. Huang, *Quasi-transitive Digraphs*, *J. Graph Theory* **20**, No.2 (1985) 141-161.
- [3] C. Berge, *Graphs*, North-Holland Mathematical Library, The Netherlands, (1989).
- [4] G. Chartrand, *Introductory Graph Theory*, Dover Publications, Mineola, New York, (1984).
- [5] G. Chartrand and L. Lesniak, *Graphs & Digraphs*, Chapman & Hall/CRC, London, (2004).

-
- [6] H. Galeana-Sánchez, B. Llano and J. J. Montellano-Ballesteros, *Absorbent sets and kernels by monochromatic directed paths in m -colored tournaments*, Australasian Journal of Combinatorics, **40** (2008) 197-210.
- [7] H. Galeana-Sánchez, B. Llano and J. J. Montellano-Ballesteros, *Kernels by monochromatic directed paths in m -colored digraphs with quasi-transitive chromatic classes*, Ars Combinatoria. Por aparecer
- [8] H. Galeana-Sánchez and R. Rojas-Monroy, *A counterexample to a conjecture on edge-colored tournaments*, Discrete Math. **282** (2004) 275-276.
- [9] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, (1944).
- [10] B. Sands, N. Sauer and R. Woodrow, *On monochromatic paths in edge-colored digraphs*, J. Combin. Theory Ser. B **33** (1982) 271-275.

-
- [11] M. G. Shen, *On monochromatic paths in m -colored tournaments*, J. Combin. Theory Ser. B **45** (1988) 108-111.