



**Universidad Nacional Autónoma de México**  
**Facultad de Ingeniería**

Programa de maestría y doctorado en Ingeniería

---

*Análisis, diseño y simulación de un microacelerómetro  
basado en SAW y MEMS*

**TESIS**

Que para obtener el grado de:

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

Ingeniería Eléctrica

Sistemas electrónicos

PRESENTA:

**Jaime Octavio Guerra Pulido**



Director: Dr. Pablo Roberto Pérez Alcázar

México, D. F.,

2009



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## **Jurado asignado**

Presidente: Dr. Jorge Rodríguez Cuevas

Secretario: Dr. José Ismael Martínez López

Vocal: Dr. Pablo Roberto Pérez Alcázar

1er. Suplente: M. I. Lauro Santiago Cruz

2do. Suplente: M. I. Luis Arturo Haro Ruíz

Ciudad Universitaria, México, D. F.

Tutor de Tesis

Dr. Pablo Roberto Pérez Alcázar



## **Agradecimientos**

Al Dr. Pablo Pérez, por brindarme esta oportunidad.

A la Coordinación de estudios de posgrado (CEP) de la UNAM, por el apoyo económico proporcionado durante mis estudios.

A la DGAPA, por el apoyo proporcionado al proyecto “Diseño y construcción de un microacelerómetro para aplicación en las áreas automotriz, médica y sísmica”, con número IM109706-3, del cual este trabajo forma parte.



Para ustedes el suicidio no es ningún crimen porque la vida no es para ustedes un valor.  
*La despedida*

De lo que se trata en la vida no es, querido amigo, de conquistar el mayor número de mujeres, por que ése es un éxito demasiado superficial. Se trata más bien de cultivar las exigencias que uno mismo se plantea, porque en ellas se refleja la medida de su propio valor. Recuerda, amigo, que el buen pescador devuelve los peces pequeños al agua.  
*El libro de los amores ridículos*

Milan Kundera





# Índice

Índice	9
1. Introducción	13
2. Sistema Micromecánico	23
2.1 ¿Sismómetro o acelerómetro?	23
2.2 Microestructuras y acelerómetros	30
2.3 Esfuerzos y deformación	32
2.3.1 Tensión	33
2.3.2 Deformación	34
2.3.3 Tensión y deformación en vigas	38
2.3.4 Estudio de estructuras con masas concentradas	42
2.4 Frecuencia de vibración de una estructura mecánica	47
2.4.1 Frecuencia de vibración por el método de la energía	47
2.4.2 Método de Rayleigh-Ritz	48
2.4.3 Frecuencia de vibración de estructuras compuestas por una viga	52
2.4.4 Frecuencias de vibración de orden mayor	55
2.5 Amortiguamiento por aire	56
2.5.1 Flujo de un fluido viscoso	56
2.5.2 Ecuaciones para flujo viscoso	59
2.5.3 Fluido laminar y el número de Reynolds	60
2.5.4 Amortiguamiento por película comprimida	61
2.5.5 Amortiguamiento por película comprimida para una placa rectangular	66
2.5.6 Viscosidad efectiva	69
3. Ondas acústicas superficiales y transductores IDT.	71

3.1 ¿Qué es una onda acústica superficial?	71
3.2 Otros tipos de ondas acústicas	74
3.3 Transductores IDT	76
3.3.1 Conceptos básicos sobre los IDT's	76
3.3.2 Pérdidas y casos de interferencia en los IDT's	79
3.3.3 Modelos de los IDT's	82
3.3.4 Determinación de la capacitancia estática ( $C_s$ ) de un IDT	99
3.3.5 Permitividad eléctrica efectiva	100
3.3.6 Interacción de ondas electroacústicas y una superficie conductora	101
3.4 Otras estructuras SAW importantes	107
3.4.1 Rejilla de reflexión	107
3.4.2 Transductores interdigitales de electrodos dobles	107
4. Acelerómetro SAW y MEMS	109
4.1 Acelerómetro SAW-MEMS realimentado	109
4.2 Acelerómetro SAW-MEMS de operación remota	111
4.2.1 Validación del método de Campbell	112
4.2.2 Algunos resultados obtenidos con el método de Campbell para otros materiales.	116
4.2.3 Reflexión y transmisión de ondas acústicas.	118
4.2.4 Modelo ideal del sistema reflectivo	120
4.3 Metodología de análisis	124
4.4 Análisis y diseño de los componentes del dispositivo	125
4.4.1 Antecedentes de este tipo de acelerómetro	125
4.4.2 Selección del material piezoeléctrico	127
4.4.3 Diseño del IDT	128
4.4.4 Determinación de las dimensiones de la estructura micromecánica	129

5. Resultados	135
5.1 Modos de vibración de la estructura micromecánica	136
5.2 Respuesta de la barra a diferentes señales de aceleración	139
5.2.1 Caracterización de la estructura micromecánica	139
5.2.2 Respuesta del instrumento a aceleraciones ortogonales al eje principal de medición (Z)	149
5.3 Respuesta eléctrica	154
5.4 Respuesta dinámica y ancho de banda	159
6. Conclusiones	163
Referencias	171



# Capítulo 1

## Introducción

En la actualidad existen áreas de la Ingeniería en las que el estudio de las vibraciones que afectan a un medio o estructura es importante, algunas de estas áreas son: la sismológica, la civil, la automotriz, la aeronáutica, etc. Para hacer estos estudios de vibraciones existen diversos instrumentos, uno de ellos es el acelerómetro. En este trabajo se analiza y se plantea el modelo de un microacelerómetro, basado en dos tipos de tecnologías, los sistemas micromecánicos (MEMS, *MicroElectroMechanical System*) y las ondas acústicas superficiales (SAW, *Surface Acoustic Wave*), con la finalidad de determinar sus bondades y desventajas con respecto a otros acelerómetros ya existentes. En los párrafos siguientes se hace una breve reseña de algunos acelerómetros comerciales que se utilizan comúnmente para hacer dichas mediciones, con la finalidad de darle al lector una idea sobre los tipos, así como sus características principales de operación.

El desarrollo de las técnicas de fabricación de circuitos integrados ha permitido el avance y construcción de sistemas microelectromecánicos, microsensores y microactuadores. Con estos dispositivos se busca responder a las necesidades de un mercado competitivo, en el cual se requiere lograr sistemas que garanticen un desempeño confiable, seguro y de costos cada vez menores. En la actualidad son comunes en el mercado acelerómetros basados en principios capacitivos, como el ADXL330, fabricado por *Analog Devices*, el cual es un sistema que consta de una estructura mecánica que le permite al dispositivo medir la aceleración en sus tres ejes; o piezoresistivos, como los modelos MA321 y MA322, fabricados por Honeywell; una ventaja de los transductores de tipo piezoresistivo es que pueden hacer mediciones de señales con frecuencias menores a 1 Hz. También existen

acelerómetros piezoeléctricos, como el MA311 fabricado por Honeywell, en los cuales los circuitos están diseñados para detectar el cambio de carga en el cristal. En la actualidad, *Analog Devices* distingue a estos dispositivos en dos tipos, según su rango de medición, para aceleraciones bajas (hasta  $\pm 18$  g) y para aceleraciones altas (hasta  $\pm 250$  g)<sup>1</sup>. Con ellos han alcanzado características de operación notables; sin embargo, estos sistemas presentan algunas desventajas. Por ejemplo, los cambios en las capacitancias que hay que medir pueden llegar a ser del orden de femtoFarads (fF)<sup>2</sup>, lo cual hace que la electrónica necesaria para medir estos cambios sea compleja; al tener más partes móviles, la probabilidad de que alguna de estas falle es mayor y, por tanto, el tiempo de vida puede ser menor; debido a su complejidad, el proceso de fabricación se vuelve más largo y costoso; operan con una autonomía limitada, es decir, se necesita que estén conectados a una fuente de alimentación o reemplazar periódicamente las baterías; en este último caso, se necesitaría que se les proporcionara mantenimiento regularmente. Todos estos factores dan como resultado un mayor costo final para el usuario.

Cuando se analiza un microsensado se busca encontrar modelos que permitan facilitar su diseño, con la finalidad de ahorrar tiempo y recursos durante su desarrollo. Estos sistemas están compuestos usualmente por un circuito de acondicionamiento y por un circuito de procesamiento de la señal, además de la parte micromecánica. Para que un sistema funcione como se desea, es necesario considerar las respuestas de cada una de las etapas que lo constituyen; sin embargo, los circuitos electrónicos se encuentran sujetos a ciertas limitaciones que pueden mermar el desempeño final del dispositivo, por tanto, es necesario que los diseñadores contemplen dichas limitantes y puedan así, lograr reducir los efectos negativos para las condiciones sobre las cuales va a operar el instrumento. Las características de los circuitos electrónicos utilizados y del tipo de procesamiento de la señal resultante son factores determinantes para la respuesta final del instrumento. A continuación se mencionan dos tipos de acelerómetros uno

---

<sup>1</sup> Datos reportado en su lista de productos por Analog Devices, en [www.analog.com](http://www.analog.com), febrero 2008

<sup>2</sup> Gardner, *Microsensors, MEMS and smart devices*, John Wiley, 2001, p. 256

comercial y el otro reportado por Texas Instruments, con el propósito de hacer notar las características de ellos y encontrar las principales ventajas y desventajas para ambos casos.

El acelerómetro comercial, G-Link, desarrollado por Microstrain es un sistema completo, el cual, según sus fabricantes<sup>3</sup>, ha sido diseñado para poder medir aceleraciones en dos rangos ( $\pm 2g$  o  $\pm 10g$ ), en los tres ejes, de manera remota a través de un transmisor y un receptor sintonizado a 2.4 GHz. En la parte transmisora se hace el procesamiento digital de la señal analógica mediante un convertidor analógico digital de 12 bits y un microprocesador con sus respectivos bancos de memoria. Este sistema es capaz de manejar hasta cuatro canales y enviar en tiempo real hasta cuatro mil muestras por segundo.

Texas Instruments presenta<sup>4</sup> un sistema para la medición de la aceleración. El sistema consta de un acelerómetro triaxial (ACH04-08-05), con un circuito de acondicionamiento de la señal que utiliza 3 amplificadores operacionales TLV2772, uno para la medición de la aceleración en cada eje. Éste es un amplificador operacional de bajo voltaje y salida de fuente a fuente (*rail to rail*), conectado en una configuración de integrador. Las salidas de los integradores están conectadas a un convertidor analógico digital (TLC1544) y éste a un procesador de datos TMS320C.

Para el primer caso, el fabricante no reporta ninguna especificación acerca del comportamiento dinámico del sistema. Para el segundo, el fabricante presenta una gráfica en la que se muestra el diagrama de Bode de la etapa de acondicionamiento de la señal (figura 1.1). En dicha figura se puede observar que el rango en el cual la fase es cero es menor que aquel para el cual la ganancia del circuito es plana, lo cual reduce el ancho de banda final, debido a que la fase tienen pendientes diferentes por intervalos y si la señal que se desea medir tiene componentes espectrales dentro de un rango amplio, se puede asegurar que ocurrirá una distorsión de fase de la señal de aceleración registrada. Este

---

<sup>3</sup> G-Link: wireless accelerometer node. User manual for 2.4GHz. G-Link. Versión 4. Obtenido en: [www.microstrain.com](http://www.microstrain.com), febrero 2008.

<sup>4</sup> Karki, James, 3 V accelerometer featuring TLV2772: application brief, Texas Instruments, Obtenido de [www.ti.com](http://www.ti.com), febrero 2008.



problema del circuito se agrega a las distorsiones que podría producir el transductor mismo y dichos efectos afectan el desempeño final del instrumento.

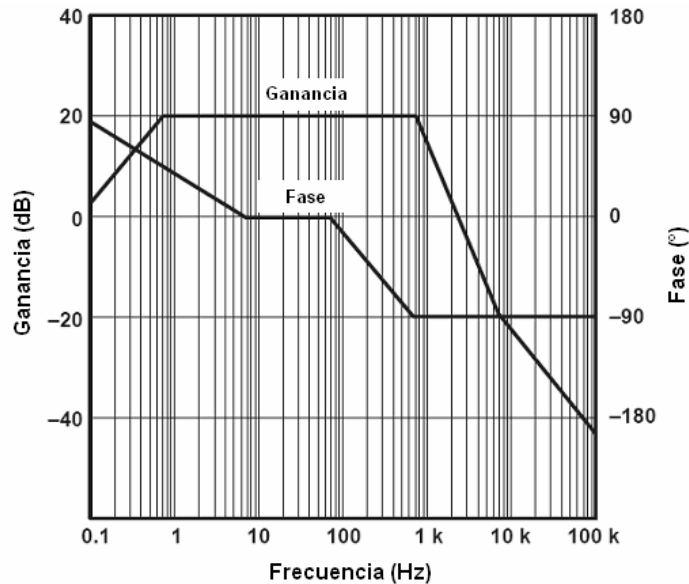


Figura 1.1. Diagrama de Bode del circuito de acondicionamiento de señal presentado por TI. [6]

Según Bao<sup>5</sup>, si se considera que un sistema micromecánico se puede modelar como un resorte, una masa y un amortiguador, entonces, este tipo de sistemas se pueden caracterizar principalmente por su frecuencia natural y su factor de amortiguamiento. La diferencia fundamental entre un sismómetro y un acelerómetro es que la frecuencia natural del primero es baja en comparación con la frecuencia de la vibración a medir, en estos dispositivos la masa  $m$  permanece estacionaria. Cuando la frecuencia natural es alta, comparada con aquella que se va a medir, el instrumento registra aceleración. Sin embargo, el rango de operación de un acelerómetro está limitado según su factor de amortiguamiento. Se debe considerar la distorsión de fase que el acelerómetro puede introducir a la señal de aceleración; por tanto, es importante asegurarse que el acelerómetro operará en una región de fase lineal. Es por estas razones que es fundamental analizar con cuidado la geometría de la estructura micromecánica. Mientras más compleja sea la microestructura es probable que sea más complicado satisfacer las especificaciones impuestas.

<sup>5</sup> Bao, Micromechanical transducers: pressure sensors, accelerometers and gyroscopes, Elsevier, 2000

Los problemas mencionados en los párrafos anteriores podrían resolverse si se utiliza una forma de medición diferente, que resulta de la combinación de los MEMS y las ondas acústicas superficiales.

El desarrollo de la teoría sobre las ondas acústicas superficiales y su propagación, tanto en medios isotrópicos como anisotrópicos, en materiales con y sin características piezoeléctricas, tuvo sus principales avances a finales de la década de los 60's y principios de los 70's; sin embargo, el desarrollo de los MEMS es más reciente y la comercialización de acelerómetros basados en esta tecnología es de principios de la década de los 90's<sup>6</sup>. No fue sino hasta finales de ésta que Subramanian<sup>7</sup> extiende el concepto que se tenía hasta la fecha de los transductores SAW y estudia la posibilidad de que los dispositivos SAW actúen como transductores mecánicos en combinación con MEMS, retomando aquello que se sabía desde el inicio de las investigaciones sobre las SAW, es decir, que éstas pueden ser modificadas e interactuar con elementos que se encuentran sobre la superficie, en contacto directo o por medio del campo electromagnético existente; así por ejemplo, se puede lograr la amplificación de ondas SAW a partir de este principio.

Hace varias décadas que se publicaron por primera vez artículos en los cuales se describen la propagación y comportamiento de las ondas acústicas superficiales y el comportamiento de los transductores interdigitales (IDT, *Interdigital transducer*); sin embargo, en la actualidad el desarrollo de avances teóricos en estas dos áreas ha disminuido y los trabajos recientes se han enfocado en mayor medida a sus aplicaciones o a mejorar los modelos o diseños ya existentes. Desde la década de los 70's se han reportado aplicaciones en las que se han logrado implementar aplicaciones con los transductores interdigitales de una manera exitosa<sup>8</sup>, en algunas ocasiones sin presentar un sustento teórico suficiente como en el artículo presentado por Varadan<sup>9</sup>. En este trabajo se propone un modelo consistente, que

---

<sup>6</sup> Gardner, *Microsensors, MEMS and smart devices*, John Wiley, 2001

<sup>7</sup> Subramanian, V.K. Varadan, V.V. Varadan, M.J. Vellekoop, Design and fabrication of wireless remotely readable MEMS based accelerometers, *Smart Mater. Struct.* 6 (1997) 730-738.

<sup>8</sup> Williamson, R. C., Case studies of successful surface acoustic wave devices, *Ultrasonics IEEE*, 1977

<sup>9</sup> V.K. Varadan, V.V. Varadan, H. Subramanian, Fabrication, characterization and testing of wireless MEMS-IDT based microaccelerometer, Elsevier, *Sensors and Actuators A*, 90 7-19, 2001

permita sustentar teóricamente el trabajo desarrollado en la referencia mencionada anteriormente.

El acelerómetro que se estudiará puede operar de dos maneras, según el lugar donde se haga el tratamiento de la señal resultante, las cuales son: realimentada<sup>10</sup> o remota. En la primera, el sistema funciona como un VCO (*Voltage Controlled Oscillator*) controlado por la señal de aceleración medida. En este caso todos los sistemas electrónicos necesarios para la medición de la aceleración se podrían encontrar dentro del mismo encapsulado; sin embargo, éstos presentan también la desventaja de que necesitan estar conectados a una fuente de alimentación. En la segunda, los acelerómetros pueden operar de manera remota, es decir, no se requiere una fuente de alimentación presente y, por tanto, tienen una estructura diferente a los de la primera. Ambas estructuras y sus diferencias se concretarán más adelante. Otra ventaja que brinda el modo de operación remoto es que la probabilidad de que se necesite darle mantenimiento correctivo es considerablemente menor; después de que ha sido instalado, no se requiere volver a acceder al lugar donde ha sido colocado el sensor a menos de que éste deba ser reemplazado. Esto es particularmente útil cuando se utiliza en regiones remotas o de difícil acceso; además, al hacer la medición de la aceleración sobre la fase de la señal, la distorsión de fase de la señal es menor, así como su ancho de banda no está limitado por factores ajenos al transductor. Este sistema trabaja de manera similar a un modulador de fase (PM), donde la señal moduladora corresponde a la señal de aceleración y la frecuencia de la señal portadora está perfectamente determinada. Una ventaja de trabajar con un sistema pasabanda es que la frecuencia a la que opera el sistema se encuentra reducida a un ancho de banda estrecho. Existen aplicaciones, como las sismológicas, en las que la distorsión de fase es un parámetro muy importante a considerar para la selección de un instrumento. En este trabajo se mostrará cómo los acelerómetros basados en estas dos tecnologías, son instrumentos que pueden satisfacer dichos requerimientos.

---

<sup>10</sup> White, R. M., Surface Acoustic wave sensors, *Transaction of ultrasonics, IEEE*, 1985

La parte SAW del sistema está conformada por una capa de un material piezoeléctrico y uno o dos transductores interdigitales (IDT) ubicados sobre este medio. Un IDT es un par de electrodos con forma de peine intercalados entre sí. Cuando se excitan con una señal eléctrica generan una onda acústica superficial (SAW). Dependiendo del modo de operación del acelerómetro, se pueden tener dos IDT's cuando el dispositivo opera en una configuración realimentada<sup>11</sup>, o uno cuando opera de manera remota<sup>12</sup>. En el primer caso, ambos IDT's están conectados por medio de un amplificador, permitiendo que la realimentación positiva produzca oscilaciones en el circuito y la medición de la señal de interés se realice midiendo los cambios en la frecuencia de resonancia; en el otro caso, el IDT se conecta a una antena y se excita mediante una señal de RF específica; el IDT opera como receptor y transmisor de la señal acústica resultante.

La parte micromecánica consta de una barra ranurada (masa sísmica) fabricada con un material conductor, la cual se encuentra ubicada por encima de la capa de material piezoeléctrico, e interactúa con la onda electromagnética producida por la onda acústica que se propaga por el material piezoeléctrico, sin modificar las condiciones mecánicas del medio de propagación. La finalidad de esta barra es reflejar las ondas hacia el IDT. Cuando ocurre una aceleración, se produce una deformación en la masa sísmica que se traduce en un cambio de fase de la onda reflejada; midiendo este cambio de fase es posible determinar la aceleración. Este resultado ha sido reportado ya por Varadan (2001). Debido a que la estructura es una barra sujeta en sus dos extremos, su sencillez permite establecer un modelo simple (masa, resorte y amortiguador) que aproxime su comportamiento dinámico. Debido a que los cristales piezoeléctricos son materiales anisotrópicos, sus propiedades, piezoeléctricas, elásticas y eléctricas, varían según la orientación del cristal; esto hace que sea necesario conocer una manera que permita determinar la velocidad de las ondas acústicas en tales medios cuando varía su orientación.

---

<sup>11</sup> Ídem

<sup>12</sup> V.K. Varadan, V.V. Varadan, H. Subramanian, Fabrication, characterization and testing of wireless MEMS-IDT based microaccelerometer, Elsevier, *Sensors and Actuators A*, 90 7-19, 2001

Este problema ha sido abordado por Campbell<sup>13</sup>. Dicho autor plantea el método de obtener la velocidad de las SAW cuando varía la orientación del cristal. La solución del problema se hace considerando un medio piezoeléctrico infinito, y sobre él, ubicada a una distancia conocida por encima, una región conductora perfecta. Cuando la placa se encuentra sobre el material piezoeléctrico la velocidad es mínima, por el contrario, cuando la distancia entre el conductor perfecto y el piezoeléctrico es infinita la velocidad de la onda acústica es máxima. A partir de estas dos velocidades es posible obtener un coeficiente de acoplamiento  $(k^2)^{14}$ , el cual es utilizado en el análisis de los IDT. Este método permite calcular la velocidad de las SAW para cualquier ubicación de la placa conductora. Como ya se mencionó antes, la barra ranurada actúa como reflector, debido a que hace que la onda acústica pase de una región con una impedancia acústica dada por la velocidad de propagación en esa región, determinada por la posición del reflector, a otra con una impedancia acústica distinta; esta secuencia se repite a lo largo de toda la estructura. El cambio de posición de cada reflector de la barra produce un cambio de la impedancia acústica del medio, y por tanto, un cambio en la amplitud y en la fase de la onda reflejada. Para la solución de este problema es necesario el estudio de la propagación, reflexión y transmisión de las ondas acústicas en sistemas simples y multicapas.

El desarrollo de esta técnica se encuentra justificado por las siguientes razones: el sistema puede operar de manera remota y realimentada; es posible lograr que el dispositivo final presente dimensiones menores que las de los acelerómetros presentes actualmente en el mercado; el tiempo de vida útil del sistema se incrementa en relación con los acelerómetros capacitivos debido a que no cuenta con tantas partes mecánicas; se necesitan menos circuitos electrónicos adicionales debido a que su estructura mecánica es más simple; se realiza el sensado de la señal de manera indirecta, es decir, la estructura móvil no forma parte del mecanismo de sensado, por lo tanto, no se afecta la señal a medir; si se

---

<sup>13</sup> Campbell, J. J., A method for estimating optimal crystal cuts and propagation directions for excitation of piezoelectric surfaces waves, *Transaction of sonic and ultrasonics, IEEE*, October 1968.

<sup>14</sup> Smith, R., Analysis of interdigital surface wave transducers by use of an equivalent circuit model, *Transaction of microwave theory and techniques, IEEE*, November 1969.

utilizaran procesos de fabricación estándar, su manufacturación podría ser más sencilla, permitiendo reducir los costos; este tipo de sistemas tienen una buena relación señal a ruido (SNR)<sup>15</sup> debido a que operan con señales pasobanda.

Por lo tanto, el objetivo principal de este trabajo es obtener un conocimiento sólido en las diferentes áreas de la física y la ingeniería necesarias para plantear un modelo del acelerómetro SAW-MEMS operando en una configuración remota, que permita diseñar instrumentos con características específicas. A lo largo de este trabajo se ha establecido el sustento teórico indispensable para analizar este tipo de dispositivos y la forma en que este conocimiento fue utilizado para desarrollar las herramientas computacionales que permitieron validar el modelo planteado a través de la comparación entre la propuesta de un prototipo y los resultados reportados por Varadan.

Para alcanzar el objetivo principal hubo que desarrollar una herramienta computacional que permitiera analizar al sistema según el modelo planteado, debido a que no existía un software que pudiera realizarlo todo en su conjunto. Además se establecieron ligas computacionales que permiten extraer los resultados obtenidos con programas como Coventor y procesarlos por aquellos programas que fueron desarrollados para obtener la respuesta total del sistema. Para el desarrollo del software propio, se utilizó MATLAB.

En los párrafos siguientes se mencionan los puntos más importantes que se trataron durante el desarrollo de este trabajo. Este trabajo está compuesto por 5 capítulos además de la introducción.

En el capítulo 2 de este trabajo se hace una breve revisión de los sistemas masa, resorte y amortiguador, tipos de microestructuras básicas y algunos métodos para analizarlas y se mencionan conceptos como esfuerzo y deformación.

Con las bases teóricas tratadas en este capítulo, se determinarán algunos parámetros relevantes que rigen la respuesta mecánica de la estructura. Los parámetros que se estudiarán aquí son: el primer y segundo modo de vibración de la estructura calculados con el método de Rayleigh-Ritz, el ancho de banda dentro

---

<sup>15</sup> Buff, F., Remote sensor systems using passive SAW sensors, *Ultrasonics IEEE*, 1994

del cual se pueden registrar aceleraciones con errores menores a un máximo determinado según las necesidades del usuario y el coeficiente de amortiguamiento. En el capítulo 3 se revisan algunos tipos de ondas acústicas, se introducen los transductores IDT y se presentan algunos de sus modelos. Estos modelos permiten tener herramientas simples que consideran las características de filtrado de los transductores IDT, facilitando el estudio de éstas estructuras complejas. Se tratan las matrices de admitancias de los transductores.

En el capítulo 4 se establece un diagrama a bloques del sistema; se reproducen los resultados obtenidos por Campbell; se valida el programa hecho para resolver el método de Campbell, con la finalidad de calcular las impedancias acústicas de las diferentes regiones determinadas según la geometría propia de la estructura; y así, poder obtener la respuesta del instrumento, al analizarlo como un sistema multicapas acústico; y se concluye acerca del comportamiento de éste en un caso ideal, es decir, retomando los conceptos de los capítulos anteriores se analiza al sistema en su conjunto. Con base en éste modelo, se justifican cada uno de los parámetros del sistema propuesto (frecuencia de operación, dimensiones físicas de la microestructura y del IDT, el material, el corte y la orientación de éste).

En el capítulo 5, para el microacelerómetro propuesto en el capítulo previo, se obtienen las respuestas en fase y amplitud para diferentes entradas de aceleraciones; se muestra el comportamiento de la microestructura ante aceleraciones cruzadas; se determina el modelo masa, resorte y amortiguador equivalente; se calculan las características eléctricas del IDT y se muestra que la estructura micromecánica actúa como un filtro pasobanda de ondas acústicas; se utilizan los resultados obtenidos con Coventor, se contrastan contra los obtenidos por el método de Rayleigh-Ritz y se comparan los resultados con aquellos obtenidos por Varadan.

En el capítulo 6 se concluye acerca de este trabajo y se comentan los puntos sobre los que convendría profundizar en un futuro.

## Capítulo 2

### Sistema micromecánico

#### 2.1 ¿Sismómetro o acelerómetro?

Según Thompson<sup>1</sup>, los elementos básicos que permiten modelar de manera concentrada a muchos sistemas de medición de vibraciones son: una masa, un resorte y un amortiguador. En la figura 2.1 se muestra el diagrama de un sistema de este tipo. Dependiendo del rango de frecuencias de la señal con la que se excita el instrumento, es posible registrar el desplazamiento, velocidad o aceleración a partir del desplazamiento relativo de la masa con respecto a la base. El comportamiento de este sistema está dado por la ecuación diferencial:

$$m\ddot{x} = -c(\dot{x} - \dot{y}) - k(x - y) \quad 2.1$$

donde  $x$  y  $y$  son los desplazamientos de la masa sísmica y de la carcasa a la cual se encuentra sujeta la primera, respectivamente, ambos medidos con respecto de un sistema de referencia inercial, es decir,  $y$  está referida al desplazamiento vertical de la base a la que está sujeto el sistema, mientras que  $x$  se refiere al movimiento vertical de la masa sísmica. El movimiento relativo de la masa  $m$  y de la carcasa que la soporta está dada por:

$$z = x - y$$

---

<sup>1</sup>Thomson, W. T., *Theory of vibration with applications*, Prentice Hall, fourth edition, USA, 1993, p.79



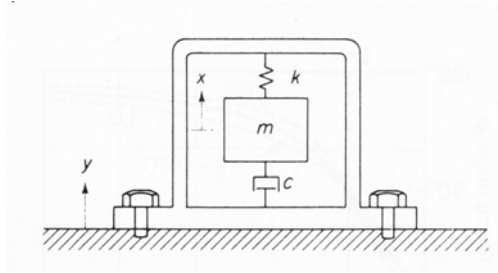


Figura 2.1. Sistema masa, resorte y amortiguador. [14]

Si se asume que el movimiento del cuerpo es senoidal  $y = Y \sin(\omega t)$ . Se obtiene la ecuación:

$$m \ddot{z} + c \dot{z} + kz = m\omega^2 Y \sin(\omega t) \quad 2.2$$

Según Thomson<sup>2</sup> la solución de la ecuación diferencial anterior es de la forma  $z = Z \sin(\omega t - \phi)$ . Donde Z está dada por:

$$Z = \frac{m\omega^2 Y}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{Y \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)}{\sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[ 2\zeta \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) \right]^2}} \quad 2.3$$

y

$$\tan \phi = \frac{\omega c}{k - m\omega^2} = \frac{2\zeta \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad 2.4$$

Donde  $\zeta$  es el factor de amortiguamiento, y está dado por:

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \quad 2.5$$

De las expresiones anteriores se observa que la relación  $\frac{\omega}{\omega_n}$  y el factor de amortiguamiento  $\zeta$  son los principales parámetros de los cuales depende el comportamiento del sistema. En las figuras 2.2 y 2.3 se muestran la respuesta en magnitud y la respuesta en fase de un instrumento de medición de vibraciones de

<sup>2</sup> Ídem, p. 79

este tipo, respectivamente. En las gráficas,  $K = \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)$  y la función  $g$  corresponde a la expresión 2.3.

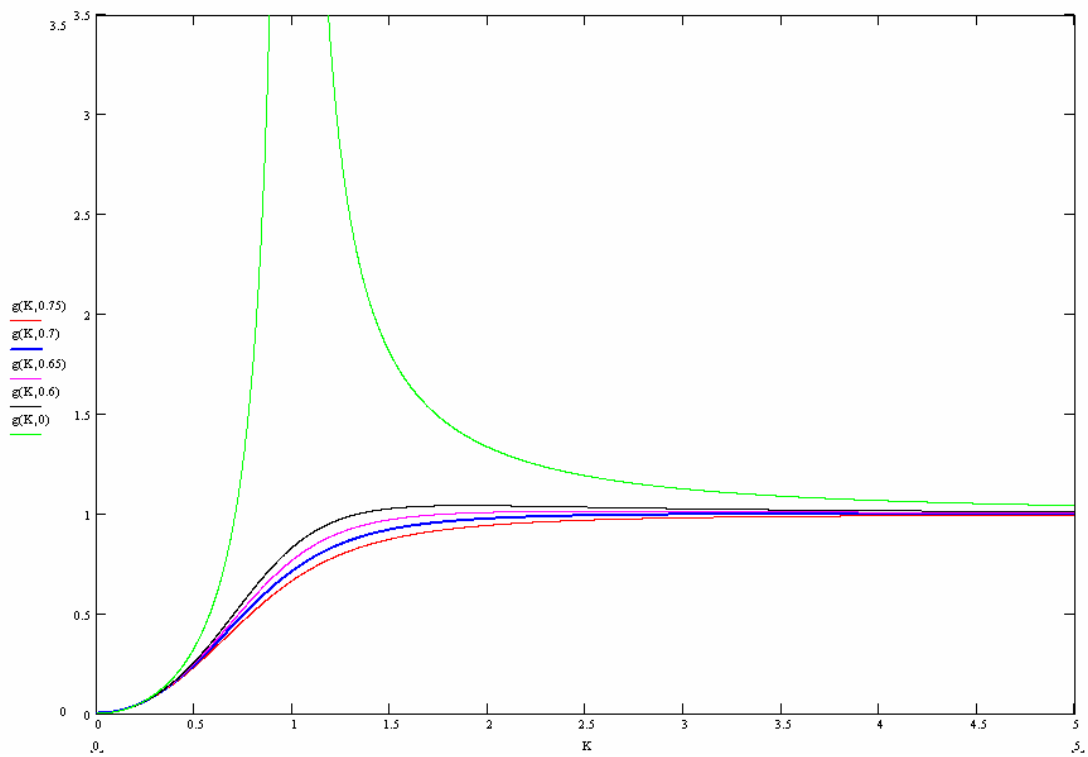


Figura 2.2. Respuesta del instrumento para diferentes valores de  $\zeta$  . [14]

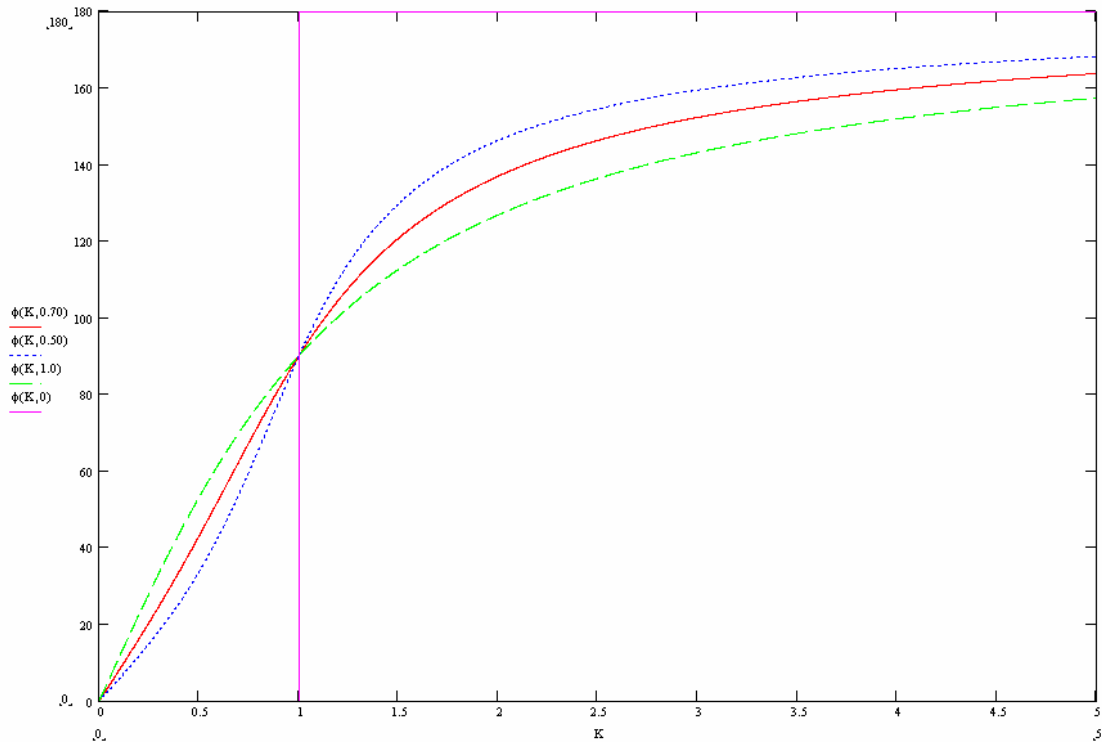


Figura 2.3. Respuesta en fase para diferentes valores de  $\zeta$  . [14]

Debido a que  $x$  y  $y$ , se relacionan a través de  $z$ , el sistema se encuentra totalmente determinado y es posible conocer cada uno de los desplazamientos para cada instante del tiempo.

Un sismómetro y un acelerómetro se pueden modelar, ambos, bajo el principio anterior; sin embargo, la principal diferencia entre estos dos instrumentos es su relación  $\frac{\omega}{\omega_n}$ .

La frecuencia natural,  $\omega_n$ , en un sismómetro es baja en comparación a la frecuencia de vibración, entonces, la relación  $\frac{\omega}{\omega_n}$  es un número grande y, por tanto, el desplazamiento relativo  $Z$  se aproxima a  $Y$  según el factor de amortiguamiento  $\zeta$ . En estos dispositivos la masa  $m$  tiende a permanecer estacionaria, mientras que la carcasa y la base que la sostienen se mueven.

Una desventaja de los sismómetros es su gran tamaño. Debido a que  $Z = Y$ , el movimiento relativo de la masa sísmica debe ser del mismo orden de magnitud

que aquella vibración que se deseé medir, por tanto, la masa de este tipo de instrumentos es de dimensiones considerables.

Cuando la frecuencia natural es alta comparada a aquella que se va a medir, el instrumento registra aceleración, tal como se puede concluir de examinar el denominador de la expresión 2.3

$$\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}$$

el cual se aproxima a la unidad cuando  $\frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow 0$ , entonces

$$Z = \frac{\omega^2 Y}{\omega_n^2} = \frac{\text{aceleración}}{\omega_n^2}$$

Por lo tanto, Z es proporcional a la aceleración del movimiento que se desea medir por un factor de  $\frac{1}{\omega_n^2}$ . El rango útil de un acelerómetro se obtiene de graficar:

$$\frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} \quad 2.6$$

En la figura 2.4 se observa que el rango de operación de un acelerómetro para diferentes factores de amortiguamiento. Para el caso en que el amortiguamiento es nulo  $\zeta = 0$ , su rango de operación es muy limitado. Para una  $\zeta = 0.70$ , el rango de frecuencias útiles es de  $0 \leq \omega / \omega_n \leq 0.20$  con un error máximo menor al 0.1% en el mejor de los casos, como se verá en el capítulo 5. Entonces un instrumento con una frecuencia natural de 100 Hz tendrá un rango de frecuencias de 0 a 20 Hz. El diseñador debe prestar especial interés en  $\zeta$  y en  $\omega_n$  según la aplicación que se le dará al acelerómetro y el método de transducción de la señal mecánica en eléctrica.

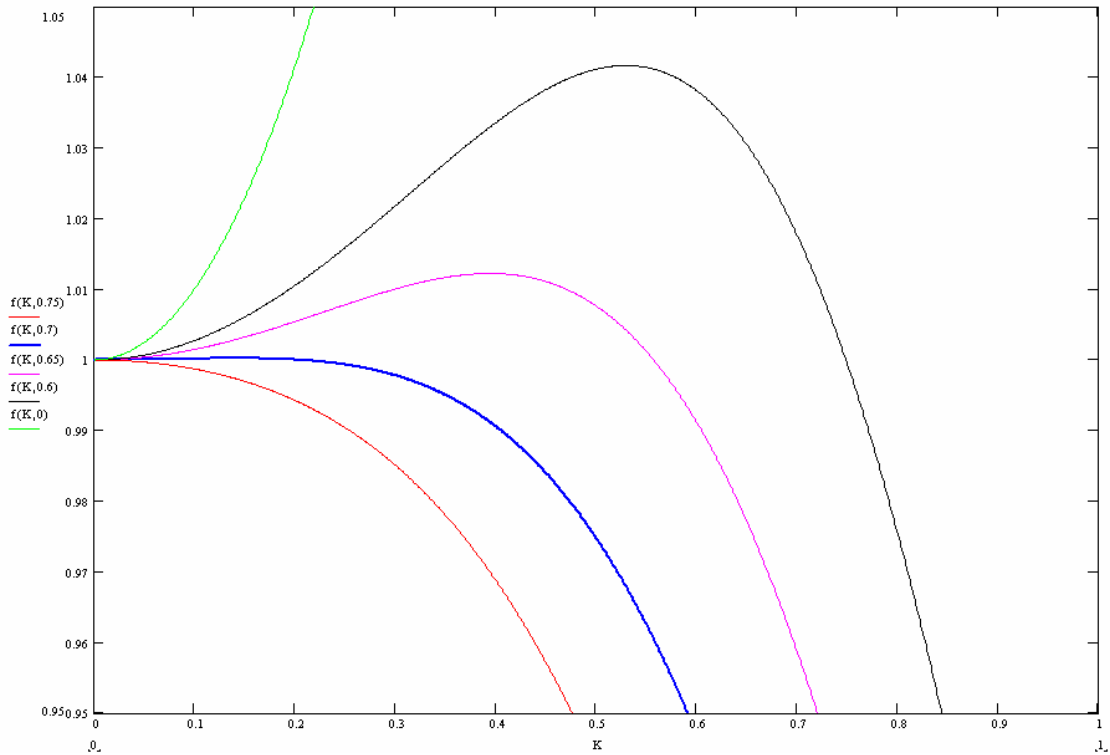


Figura 2.4. Error de la aceleración contra la frecuencia para diferentes valores de  $\zeta$  . [14]

En la actualidad existen muchos tipos de acelerómetros. Los acelerómetros que se basan en la medición del desplazamiento relativo de la masa sísmica son utilizados frecuentemente para medir aceleraciones de baja frecuencia. Una variante de este tipo de acelerómetros, que es más preciso, es aquel en el cual la masa sísmica se encuentra servocontrolada para tener un desplazamiento relativo nulo. La fuerza necesaria para lograr mantener en equilibrio al sistema es una medición indirecta de la aceleración.

Existen acelerómetros en los que se utilizan las propiedades de cristales piezoeléctricos, como el cuarzo, para obtener anchos de banda más elevados, con una frecuencia natural de alrededor de  $50[kHz]$ , lo cual permite hacer mediciones de aceleración de hasta  $3[kHz]$ . Los cristales se montan de tal manera que cuando se someten a una aceleración, estos se deforman produciendo una carga eléctrica. En la siguiente sección se hablará más sobre algunos principios físicos sobre los cuales se fundamentan otros tipos de acelerómetros.

Otro punto importante que hay que considerar durante el diseño y modelado de un acelerómetro es la distorsión de fase. Para reproducir una onda con componentes espectrales diversas, la fase de cada una de ellas debe permanecer sin cambios o debe existir una variación lineal de la fase con respecto a la frecuencia. Esto se satisface si el ángulo de fase en todos los casos es cero (caso 1) o si para todos los componentes espectrales es el mismo (caso 2). El caso 1, es aquel en el que se considera un desfase nulo y ocurre cuando  $\zeta = 0$  si  $\omega / \omega_n < 1$ . En el segundo caso, el desfase es el mismo para todas las componentes espectrales y casi se satisface cuando  $\zeta = 0.70$  si  $\omega / \omega_n < 1$ , en este caso el ángulo de fase se aproxima a:

$$\phi \cong \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_n}$$

Por tanto existen dos casos en los que la distorsión en fase se elimina, si  $\zeta = 0$  la distorsión en fase es cero; sin embargo, el ancho de banda decrece considerablemente. En la realidad, los sistemas físicos siempre tienen pérdidas, por tanto, el diseño debe realizarse con la finalidad de reducir estos efectos. Para el caso de  $\zeta = 0.70$ , la distorsión en fase es aproximadamente cero y el ancho de banda con un error bajo se incrementa. Es deseable que estos instrumentos cumplan preferentemente con esta última condición.

En esta sección nos hemos referido a tres elementos principales, una masa, un resorte y un amortiguador, sin embargo, en un sistema mecánico real la masa ocupa un lugar en el espacio y tiene una geometría determinada, la materia es flexible y disipa energía, es decir, una estructura mecánica presenta los tres elementos que mencionamos anteriormente, sin embargo, en la práctica se utilizan algunas formas más que otras.

La geometría de una estructura, está determinada por muchos factores, por ejemplo, si se desea que la frecuencia natural de una estructura sea elevada, esto se puede lograr si se reducen su dimensiones, además la tendencia a la miniaturización de los sistemas, han dado como resultado la aplicación de los MEMS en la instrumentación. En el área de los MEMS, se utilizan estructuras simples como base para construir los sistemas deseados, en las secciones

siguientes se tratará un poco de ellas y sobre los conceptos básicos que a su análisis se refiere.

## **2.2 Microestructuras y acelerómetros**

Todo sistema micromecánico está compuesto por estructuras que son usadas como bloques básicos funcionales. En su forma más simple estas son:

- Una ménsula. Barra sujeta solo por uno de sus extremos.
- Un puente. Barra sujeta en ambos extremos
- Un diafragma o membrana (Si la estructura es elástica, se considera un diafragma).

Como ya se mencionó en la sección anterior, la respuesta dinámica de estas microestructuras determina el ancho de banda del sistema, esto es, el tiempo que le toma a la estructura responder a una carga estática aplicada o seguir una carga dinámica (que varía con respecto al tiempo).

Las dos principales consideraciones que debe hacer el diseñador son las siguientes: la primera, si las estructuras mecánicas pueden ser hechas en escala micrométrica y la segunda, si estas siguen la teoría clásica, por ejemplo, la teoría clásica de la elasticidad.

El diseñador debe seleccionar cuidadosamente la estructura que utilizará para hacer la transducción de la señal deseada a otra del tipo eléctrico según el método de sensado que se vaya a utilizar. Existen varias formas de detectar el movimiento, algunas de ellas son:

- Transducción capacitiva
- Transducción resistiva
- Transducción inductiva

Las formas más usadas son la transducción resistiva y la capacitiva. En este trabajo se trata en el capítulo 4 sobre otra forma de medición, basada en la interacción de las ondas elásticas con una estructura conductora<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> Guerra, J., Pérez, P., Modulación en fase de ondas elásticas superficiales aplicada a la instrumentación, *Memorias SOMI XXIII*, ISBN 970-32-2673-6

La transducción capacitiva está basada en la variación de la distancia entre dos placas (electrodos), el área A entre ambas placas y la permitividad eléctrica  $\epsilon$  del medio.

Existen muchos microsensores de silicio que utilizan este principio para medir una deflexión vertical (con A y  $\epsilon$  constantes) porque el área puede ser relativamente grande y la distancia entre ambas placas pequeña. Esto significa que el cambio de capacitancia puede ser medido por medio de circuitos electrónicos con una sensibilidad aceptable. Otra ventaja de este método es que la impedancia de entrada es muy elevada y la corriente que se consume es pequeña, lo cual es apropiado para ser utilizado dentro de circuitos integrados de tecnología CMOS. Las desventajas son que requieren una fuente de polarización externa como una batería y la electrónica puede complicarse debido a que a veces es necesario poder medir cambios en la capacitancia del orden de 10 fF o menos y el ancho de banda puede ser menor que en un acelerómetro piezoresistivo, esta diferencia en el ancho de banda puede acentuarse más en las baja frecuencias.

La otra forma importante de medir el movimiento es utilizando elementos piezoresistivos. Las piezoresistencias son de fácil fabricación y tienen un comportamiento dado por la siguiente expresión<sup>4</sup>:

$$\frac{\Delta R}{R} = K_{gf} \epsilon_m$$

Donde  $K_{gf}$  es la constante de esfuerzo del material y  $\epsilon_m$  es el esfuerzo aplicado.

Al hacer variar el esfuerzo al que se somete el piezoresistor varía su resistencia. Una configuración muy común para medir estos cambios en la resistencia es utilizar un puente, cuya configuración básica consta de tres resistencias fijas y una variable (piezoresistencia, es decir, el transductor). Es deseable que los cuatro elementos tengan las mismas resistencias, o sean lo más cercanas posibles. El puente se forma de la siguiente manera: se conectan dos resistencias y la otra resistencia y el transductor en serie, los dos extremos de ambos circuitos se conectan en paralelo. Si se les aplica una diferencia de potencial entre ambas terminales, si los cuatro elementos tienen resistencias iguales la diferencia de

---

<sup>4</sup> Gardner, J., W., *Microsensors, MEMS and smart devices*, John Wiley & Sons., USA, 2001



potencial entre los nodos intermedios entre el transductor y la resistencia, y entre el par de resistencias, será cero. Si se hace variar la resistencia del transductor aparecerá una diferencia de potencial entre ambos nodos, la variación de la resistencia es proporcional a la variación de la señal que se desea medir, de este modo es posible hacer mediciones con este tipo de elementos.

Este tipo de sensores requiere circuitos electrónicos adicionales para acondicionar las señales de tensión y requieren también una fuente de alimentación externa, además de que presentan la desventaja de que la piezoresistencia depende fuertemente del nivel de dopado y de la temperatura ambiente, lo que puede repercutir en la exactitud del sensor.

Como ya se mencionó anteriormente, la masa del instrumento se encuentra distribuida en el espacio que ocupa y la materia es elástica, por tanto, está sujeta a sufrir deformaciones. En la sección siguiente se revisarán dos conceptos importantes con los que se logra explicar y modelar esta particularidad de la materia.

### **2.3 Esfuerzo y deformación**

En la actualidad el silicio es un material muy utilizado en la construcción de estructuras micromecánicas. Su comportamiento mecánico está regido idealmente por la teoría clásica de la elasticidad. Se supone que las propiedades de un material de estado sólido pueden cambiar cuando la geometría de las estructuras mecánicas tienen dimensiones micrométricas, hasta la fecha no se ha observado una diferencia significativa. El silicio en su forma monocristalina o policristalina no es mecánicamente homogéneo, es decir, las características mecánicas del material no son las mismas en todas las direcciones, sin embargo, si se asume que sus propiedades mecánicas sí son homogéneas, se simplifica el análisis y se obtienen errores insignificantes en los resultados finales<sup>5</sup>. Los errores finales en un dispositivo son debidos, principalmente, a las variaciones del proceso de fabricación, más que por supuestos o aproximaciones. Por tanto, haciendo las consideraciones anteriores, es modelar a dichas estructuras bajo los conceptos clásicamente establecidos.

---

<sup>5</sup> Bao, *Micromechanical transducers: Pressure sensors, accelerometers and gyroscopes*, Elsevier, 2000.

### 2.3.1 Tensión

De acuerdo con la teoría de la elasticidad, las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo sólido producen fuerzas internas en el cuerpo y, por lo tanto, deformaciones. Si la fuerza externa no excede un cierto límite, la deformación desaparece una vez que la fuerza cesa. Para describir la fuerza interna, se utiliza una herramienta matemática llamada tensor de esfuerzo. Matemáticamente, el tensor de esfuerzo es un tensor de segundo orden, que tiene nueve componentes como se muestra en la siguiente matriz:

$$T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

donde los tres componentes de la diagonal principal están referidos como esfuerzos normales y las seis componentes restantes se les conoce como esfuerzos cortantes.

En la figura 2.5 se muestra un cubo elemental (región diminuta del cuerpo en estudio). La seis caras del cubo se denotan con  $x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z}$ , donde  $x$  corresponde a la cara anterior del cubo normal al eje  $X$ , mientras que  $\bar{x}$  corresponde a la cara posterior del cubo normal al eje  $X$

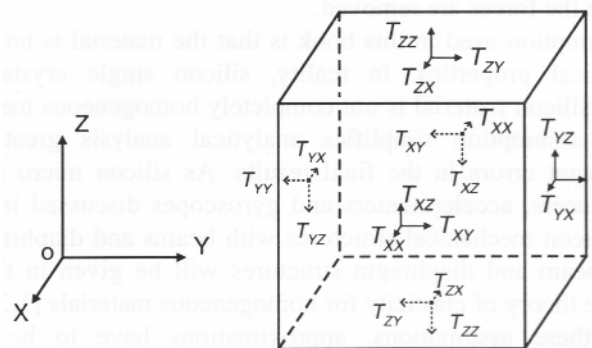


Figura 2.5. Componentes del tensor de esfuerzo. [4]

Una componente del tensor de esfuerzo está definida como la fuerza por unidad de área en una superficie específica del cubo elemental que se muestra en la figura 2.5.  $T_{xx}$  es la fuerza normal por unidad de área en la cara  $X$ ,  $T_{xy}$  es la

fuerza en la dirección Y, aplicada por unidad de área sobre la cara X, y  $T_{xz}$  es la fuerza por unidad de área en la dirección Z aplicada en la cara X.

Los signos de las componentes tensoriales están definidos de acuerdo a la regla de la mano derecha, es decir, se sigue la convención de un sistema coordenado cartesiano derecho (convencional).

De acuerdo con las condiciones de equilibrio, las componentes  $T_{xx}$  en dos planos paralelos opuestos ( $x$  y  $\bar{x}$ ) deberían ser iguales en magnitud y sentido (signo). Lo mismo se aplica para  $T_{yy}$  y  $T_{zz}$ .

También, de las condiciones de equilibrio, se cumple:

$$T_{xy} = T_{yx}, T_{yz} = T_{zy}, T_{xz} = T_{zx}$$

Esto significa que el tensor de esfuerzo es simétrico y sólo tiene seis componentes independientes.

### **2.3.2 Deformación**

De acuerdo con la teoría de la elasticidad, la deformación dentro del material será producida por los diferentes esfuerzos. Si las componentes del desplazamiento para el punto  $P(x, y, z)$  son  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  y  $w(x, y, z)$ , en las direcciones "x", "y" y "z", respectivamente, entonces, el incremento del desplazamiento entre el punto  $P(x, y, z)$  y  $P'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ , puede ser expresado como:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Si un sólido es elásticamente perfecto y no piezoeléctrico, entonces, existe una relación entre la deformación y la tensión que está dada por la ley de Hooke.

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} \quad 2.7$$

donde  $T_{ij}$  es la tensión que actúa a lo largo de la dirección del eje  $x_i$ , en una superficie cuyo vector normal es paralelo al eje  $x_j$ .  $S_{kl}$  es la deformación del medio y está definida como<sup>6</sup>:

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right) \quad 2.8$$

donde  $U_k$  denota el desplazamiento de la partícula en la dirección  $k$  y  $x_l$  es la  $l$ -ésima coordenada de posición ( $l = 1, 2, 3$ ). El tensor  $c_{ijkl}$  es la constante elástica del material.

De esta ley y de la ecuación de fuerza de Newton, se puede obtener la ecuación de onda elástica para un medio homogéneo.

<sup>6</sup> Según la teoría lineal de la elasticidad.

$$\rho \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_i \partial x_l} \quad 2.9$$

donde  $\rho$  es la densidad del medio.

Si se considera que el sólido es piezoeléctrico, la ley de Hooke debe ser reemplazada por las ecuaciones piezoeléctricas de estado, las cuales se enuncian a continuación:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c_{ijkl} S_{kl} - e_{ijm} E_m \\ D_n &= e_{nkl} S_{kl} + \varepsilon_{nm} E_m \end{aligned} \quad 2.10$$

donde  $e_{ijm}$  es el tensor piezoeléctrico del material,  $E_m$  es el campo eléctrico,  $D_n$  es la densidad de campo eléctrico y  $\varepsilon_{nm}$  es el tensor de permitividad eléctrica del medio.

En la primera ecuación de estado piezoeléctrico (2.10), se observa que la tensión en un medio se modifica si se le aplica un campo eléctrico al material (piezoelectricidad). En la segunda, se puede observar que la onda elástica (deformación) va acompañada por un campo eléctrico. Estas dos ecuaciones establecen claramente la reversibilidad del fenómeno piezoeléctrico.

Por otra parte, para materiales homogéneos y no piezoeléctricos, si se considera un paralelepípedo rectangular con sus lados paralelos a los ejes coordenados (Figura 2.5) y se someten los lados opuestos del paralelepípedo, perpendiculares al eje x, a una tensión normal  $T_{xx}$ , la elongación relativa del elemento está dada por:

$$e_{xx} = \frac{T_{xx}}{E} \quad 2.11$$

donde E es una constante relacionada con el tipo de material, llamada módulo de Young.

La extensión del elemento en la dirección x está acompañada por una contracción en las direcciones laterales:

$$e_{yy} = -\nu e_{xx} \text{ y } e_{zz} = -\nu e_{xx} \quad 2.12$$

donde  $\nu$  es otra constante del materia, llamada relación de Poisson.

Si el elemento es sometido simultáneamente a la acción de tensiones normales  $T_{xx}$ ,  $T_{yy}$  y  $T_{zz}$ , las componentes resultantes de la deformación, pueden ser obtenidas como:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= [T_{xx} - \nu(T_{yy} + T_{zz})] / E \\ e_{yy} &= [T_{yy} - \nu(T_{xx} + T_{zz})] / E \\ e_{zz} &= [T_{zz} - \nu(T_{xx} + T_{yy})] / E \end{aligned} \quad 2.13$$

La relación entre las tensiones normales y las deformaciones normales están definidas por ambas constantes: el módulo de Young, E, y la relación de Poisson,  $\nu$ .

Para materiales homogéneos, las relaciones entre las tres componentes de esfuerzos cortantes y sus respectivas componentes de desplazamiento están dadas por:

$$e_{xy} = \frac{T_{xy}}{2G}, \quad e_{yz} = \frac{T_{yz}}{2G} \quad \text{y} \quad e_{zy} = \frac{T_{zy}}{2G} \quad 2.14$$

a G se le conoce como el módulo de cortante y está dado por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad 2.15$$

Para materiales como el silicio, la simetría cúbica del material permite reducir el tensor de la constante elástica a sólo tres componentes independientes diferentes de cero. Dicho tensor queda expresado como:

$$C_{ijkl} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix}$$

A continuación se muestran las relaciones entre E, G y  $\nu$  y las componentes de  $C_{ijkl}$ , estas son:

$$\frac{1}{E} = \frac{c_{11} + c_{12}}{(c_{11} - c_{12})(c_{11} + 2c_{12})} \quad 2.16$$

$$\nu = \frac{c_{12}}{c_{11} + c_{12}} \quad 2.17$$

$$G = c_{44} \quad 2.18$$

En el caso anterior se muestra que  $E$ ,  $G$  y  $\nu$  se relacionan directamente con el tensor de la constante elástica, es decir, las propiedades mecánicas de un material se expresan a través del tensor  $c_{ijkl}$ . En algunos casos, el análisis puede simplificarse haciendo ciertas consideraciones que permiten reducir estructura simples a un modelo de parámetros concentrados, expresando sus propiedades mecánicas con las constantes mencionadas anteriormente. En la sección siguiente se hace el estudio de la tensión y deformación en barras.

### 2.3.3 Tensión y deformación en vigas

Considérese una viga delgada y recta con una sección transversal rectangular de ancho  $b$  y espesor  $h$ , y un sistema de coordenadas con origen en el centro de la sección transversal, el eje  $x$  a lo largo de la longitud de la barra y el eje  $z$  apuntando hacia abajo en dirección del espesor, como se muestra en la figura 2.6. Si la viga se curva en el plano  $x-z$  en dirección ascendente, debido al momento flexionante,  $M$ , como se muestra en la figura 2.7, la parte superior (lado concavo) se encuentra comprimida, mientras que, la parte inferior (lado convexo) de la barra está estirada. Existe un plano neutral en algún lugar entre ambas regiones que no se encuentra ni estirado ni comprimido. Se comprobará que el plano neutral se encuentra ubicado en la mitad de la barra rectangular para una curvatura pura. Se entiende por curvatura pura aquella en la cual no hay una fuerza axial pura sobre la sección transversal de la barra.

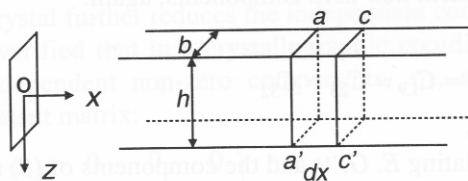


Figura 2.6. Sección de la viga. [4]

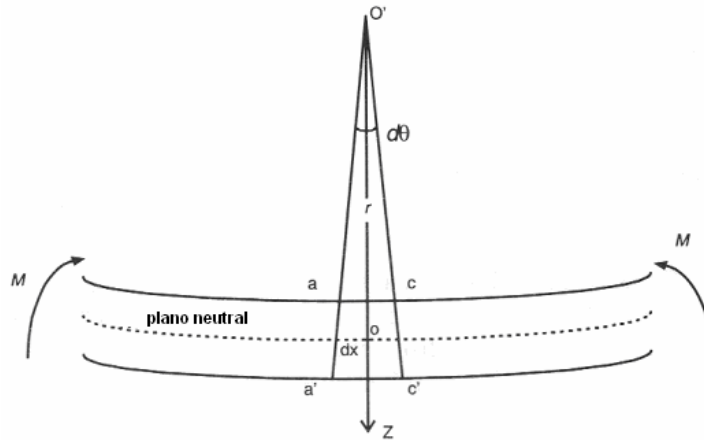


Figura 2.7. Deformación debida a un momento. [4]

Considérese, además, un elemento  $dx$  de la barra, entre dos planos verticales  $aa'$  y  $cc'$ . Generalmente, el desplazamiento en la dirección  $z$  de la viga,  $w$ , es una función de la posición ( $w = w(x)$ ), a dicha función se le conoce como función de posición o función de forma. Si el radio de curvatura del elemento  $dx$  es  $r$ , para la sección en una capa horizontal en el plano central ( $z = 0$ ), se tienen que  $dx = rd\theta$ . Sin embargo, para una capa de la barra fuera del plano central ( $z \neq 0$ ), el material se ha elongado o comprimido debido a la deformación de la barra. La elongación del material en la dirección  $x$  para una capa en  $z$  es:

$$\begin{aligned} \Delta(dx) &= (r + z)d\theta - rd\theta \\ &= zd\theta \end{aligned} \quad 2.19$$

La deformación de la capa es la elongación relativa del material,

$$\begin{aligned} \varepsilon(z) &= \frac{\Delta(dx)}{dx} \\ &= \frac{zd\theta}{rd\theta} \\ &= \frac{z}{r} \end{aligned} \quad 2.20$$

De acuerdo con la ley de Hooke, la tensión en la capa en  $z$  es:

$$T_{xx}(z) = \frac{Ez}{r} \quad 2.21$$

El signo de la tensión o de la deformación es positiva para la extensión y negativo para la compresión. Nótese que las otras tensiones normales y los tres esfuerzos



cortantes no son considerados en este método, por tanto, la barra debe ser delgada de tal manera que el problema se reduzca a una sola dimensión.

El recíproco del radio de curvatura de  $w(x)$  es el valor absoluto de su segunda derivada, es decir:

$$\frac{1}{r} = |w''(x)| \quad 2.22$$

Se obtiene que:

$$|T(z)| = Ez|w''(x)| \quad 2.23$$

Para la condición de flexión de la figura 2.7 se tiene que si una capa está ubicada en  $z < 0$  (compresión),  $w(x) < 0$  y si  $z > 0$ , entonces,  $w(x) > 0$ . Es posible por tanto establecer la siguiente relación:

$$T(z) = -Ezw''(x) \quad 2.24$$

La definición de curvatura pura nos dice que el total de la fuerza axial en la sección transversal es cero. La fuerza axial total en la sección transversal es:

$$\begin{aligned} F &= \int T(z)bdz \\ &= -Eb w''(x) \int_{-h/2}^{h/2} z dz \end{aligned} \quad 2.24$$

El plano neutral de la barra rectangular está al centro de la sección ( $z = 0$ ), este resultado se encuentra cuando se satisface que  $F = 0$ . Si la sección transversal no es rectangular se deberá aplicar esta condición para encontrar la posición del plano neutral.

Dentro de una viga curvada existen fuerzas internas, el momento  $M$  que provoca la curvatura de la barra es la integral de los momentos de dichas fuerzas a través de la sección transversal de la barra:

$$\begin{aligned} M(x) &= \int z dF \\ &= \int z T(z) dA \\ &= -\int Ez^2 w''(x) dA \end{aligned} \quad 2.25$$

Nótese que el origen del eje  $z$  tiene que colocarse en el plano neutral para hacer la integración. Si el origen no está en el plano neutral y la posición del plano neutral

está en  $z = a$ , entonces en la expresión anterior se debe usar  $(z - a)$  en lugar de  $z$ . Adicionalmente si el ancho de la sección no es uniforme, es decir,  $b = b(z)$ , se tiene que  $dA = b(z)dz$  y:

$$M(x) = -Ew''(x) \int z^2 b(z) dz \quad 2.26$$

A la integral  $I = \int z^2 b(z) dz$  se le conoce como momento de inercia. Para una barra con sección transversal de ancho  $b$  y espesor  $h$ , el momento de inercia de la barra está dada por:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad 2.27$$

El momento de la barra puede ser escrito como:

$$M(x) = -EIw''(x) \quad 2.28$$

Despejando se tiene que:

$$T(z) = \frac{zM(x)}{I} \quad 2.29$$

Las dos expresiones anteriores son útiles para hallar  $w(x)$  y el esfuerzo en la barra si se conoce el momento flexionante.

De acuerdo con la definición, el momento flexionante es positivo en signo si la barra se curva hacia arriba en ambos lados de la sección debido a que  $dF$  es positiva para  $z > 0$  y negativa para  $z < 0$ , tal y como se muestra en la figura 2.8. Para las fuerzas externas que crean los momentos flexionantes, la regla de los signos es: si se mira al lado izquierdo del elemento  $dx$  y el momento tiene sentido horario, entonces éste es positivo, y si se mira al lado derecho del elemento  $dx$  y el momento tiene sentido antihorario, entonces éste es positivo. Por el contrario, el momento flexionante es negativo si la barra se curva hacia abajo en ambos extremos.

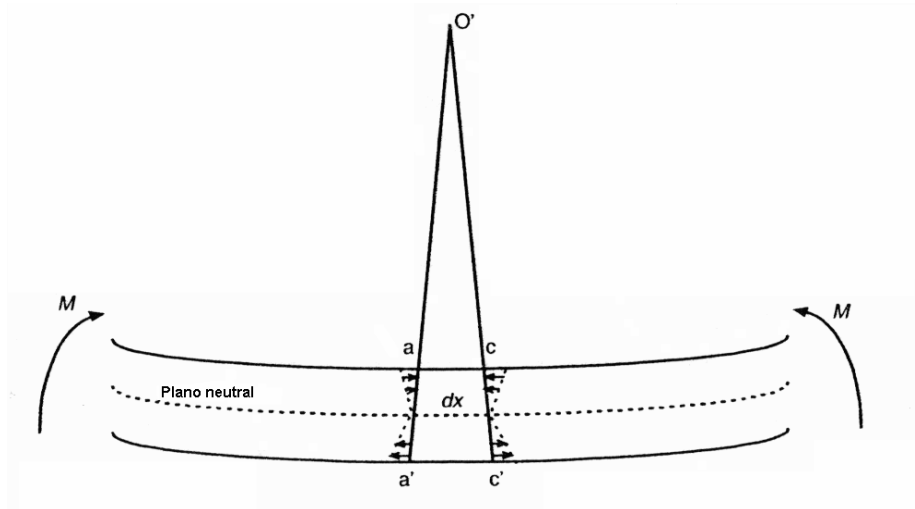


Figura 2.8. Fuerzas causantes del momento flexionante. [4]

### 2.3.4 Estudio de estructuras con masas concentradas

Considérese una ménsula (*cantilever*, voladizo) con sección transversal rectangular y una carga concentrada en su extremo, como se muestra en la figura 2.9. Supóngase que el ancho, el espesor y la longitud de la barra son  $b$ ,  $h$  y  $L$ , respectivamente. Si  $F$  es la fuerza causada por la acción gravitacional que se ejerce sobre la masa  $M$ , ubicada en el extremo libre, entonces  $F = Mg$ , donde  $g$  es la gravedad. Además, supóngase que la masa de la barra,  $M_b$ , es despreciable con respecto a la masa  $M$ . Para balancear a la fuerza  $F$ , por las condiciones de equilibrio, debe existir una fuerza  $F_o$  que se encuentre aplicada en el extremo de la barra que se encuentra fijo. Por la definición de momento existe uno con magnitud  $FL$ , en sentido horario. Para resolver el problema estático, debe existir un momento,  $m_o$ , con magnitud  $FL$ , producido por la curvatura de la barra.

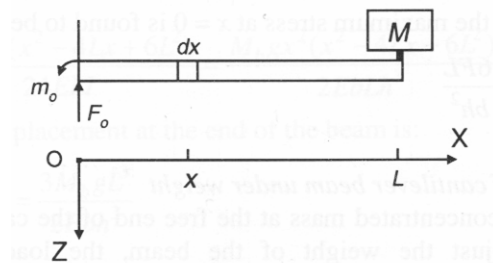


Figura 2.9. Diagrama de la ménsula con una masa concentrada en el extremo. [4]

Aplicando la condición de equilibrio para los momentos, se tiene que:

$$(-m_o + F_o x) = -F(L - x) \quad 2.30$$

El momento flexionante a la izquierda es igual al momento flexionante a la derecha, por tanto, se concluye que:

$$M(x) = -F(L - x) \quad 2.31$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial para  $w(x)$  es:

$$-EIw''(x) = -F(L - x) \quad 2.32$$

Las condiciones de frontera para este problema son:

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0 \quad \text{y} \quad w''(0) = 0$$

La solución de la ecuación diferencial con sus respectivas condiciones iniciales es:

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{F(2L - x)x}{2EI} \\ &= \frac{6F(2L - x)x}{Eb^3} \end{aligned} \quad 2.33$$

y

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{F(3L - x)x^2}{6EI} \\ &= \frac{2F(3L - x)x^2}{Eb^3} \end{aligned} \quad 2.34$$

El máximo desplazamiento del extremo es:

$$\begin{aligned} w_{\max} &= \frac{FL^3}{3EI} \\ &= \frac{4FL^3}{Eb^3} \end{aligned} \quad 2.35$$

La tensión de la barra en  $z = -h/2$  es:

$$\begin{aligned} T(x) &= -E\left(-\frac{h}{2}\right)w''(x) \\ &= \frac{Fh(L - x)}{2I} \\ &= \frac{6F(L - x)}{bh^2} \end{aligned} \quad 2.36$$

La máxima tensión en  $x = 0$  es:

$$T_{\max} = \frac{6FL}{bh^2} \quad 2.37$$

Ahora, si se considera una ménsula bajo la acción de su propio peso, tal como se muestra en la figura 2.10, la ecuación diferencial para la barra es:

$$-EIw''(x) = M_b gx - m_o - \int_0^x \frac{M_b g}{L} (x-s) ds \quad 2.38$$

donde  $M_b$  es la masa total de la barra, dada por:  $M_b = \rho bhL$ ,  $g$  es la aceleración gravitacional y la integral en el lado derecho de la ecuación es el momento flexionante debido al peso distribuido a lo largo de la viga entre 0 y  $x$ . Por lo tanto, la ecuación se simplifica a:

$$-EIw''(x) = M_b gx - m_o - \frac{M_b gx^2}{2L} \quad 2.39$$

Las condiciones de frontera son:

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w''(L) = 0$$

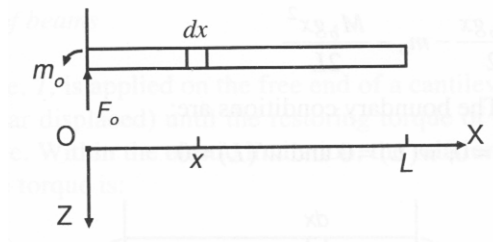


Figura 2.10. Ménsula con peso distribuido. [4]

Resolviendo la ecuación diferencial, considerando que  $m_o = \frac{M_b gL}{2}$ , se obtiene la función de posición  $w(x)$ , dada por:

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{M_b gx^2(x^2 - 4Lx + 6L^2)}{24EI} \\ &= \frac{M_b gx^2(x^2 - 4Lx + 6L^2)}{2EbLh^3} \quad 2.40 \\ &= \frac{\rho g}{2Eh^2} x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2) \end{aligned}$$

El máximo desplazamiento de la barra en el extremo es:

$$\begin{aligned}
w_{\max} &= \frac{M_b g L^3}{8EI} \\
&= \frac{3M_b g L^3}{2Ebh^3} \\
&= \frac{3\rho g L^4}{2Eh^2}
\end{aligned}
\tag{2.41}$$

La tensión en la posición  $x$  en el lado superior de la barra es:

$$\begin{aligned}
T(x) &= -E\left(-\frac{h}{2}\right)w''(x) \\
&= \frac{M_b g(L-x)^2}{4LI} \\
&= \frac{3M_b g(L-x)^2}{bh^2L}
\end{aligned}
\tag{2.42}$$

La tensión máxima ocurre en  $x=0$ , y está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
T_{\max} &= \frac{M_b g h L}{4I} \\
&= \frac{3M_b g L}{bh^2} \\
&= \frac{3\rho g L^2}{h}
\end{aligned}
\tag{2.43}$$

Ahora considérese una barra sujeta en sus dos extremos (puente), como se muestra en la figura 2.11. Si la carga de la viga es su propio peso como se ha dicho antes, entonces la barra está soportada en ambos extremos, existen dos fuerzas restrictivas que sostienen la estructura y tienen magnitud  $F_o = \frac{M_b g}{2}$ . La ecuación diferencial que determina su comportamiento mecánico es similar al caso anterior, pero considerando la magnitud de la fuerza restrictiva, ésta queda expresada como sigue:

$$-EIw''(x) = \frac{M_b g x}{2} - m_o - \frac{M_b g x^2}{2L}
\tag{2.44}$$

donde  $M_b = \rho b h L$ . Las condiciones de frontera son:

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(L) = 0 \quad \text{y} \quad w'(L) = 0$$

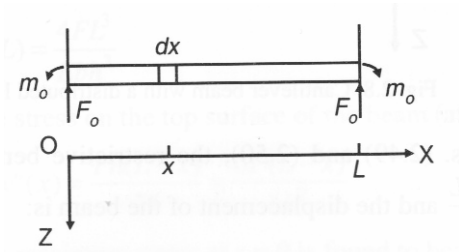


Figura 2.11. Barra sujeta en ambos extremos (Puente). [4]

El momento flexionante  $m_o$  está dado por:

$$\begin{aligned} m_o &= \frac{M_b g L}{12} \\ &= \frac{\rho g b h L^2}{12} \end{aligned} \quad 2.45$$

La función de posición de la viga está dada por:

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{M_b g}{24 E I} x^2 (L - x)^2 \\ &= \frac{\rho g}{2 E h^2} x^2 (L - x)^2 \end{aligned} \quad 2.46$$

El desplazamiento máximo se encuentra en el centro de la barra ( $x = L/2$ ) y está dado por:

$$w_{\max} = \frac{\rho g L^4}{32 E h^2} \quad 2.47$$

La tensión en la cara superior de la barra  $z = -h/2$  es:

$$\begin{aligned} T(x) &= -E \left( -\frac{h}{2} \right) w''(x) \\ &= \frac{M_b g h}{24 I} (L^2 - 6xL + 6x^2) \end{aligned} \quad 2.48$$

La tensión máxima ocurre en ambos extremos ( $x = 0$  y  $x = L$ ) y está dada por:

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \frac{M_b g h L^2}{24 I} \\ &= \frac{\rho g L^2}{2 h} \end{aligned} \quad 2.49$$

La tensión máxima en un puente es más pequeña que en una ménsula en un factor de 6, para las mismas condiciones.

## 2.4 Frecuencia de vibración de una estructura mecánica

### 2.4.1 Frecuencia de vibración por el método de la energía

Para obtener la frecuencia de vibración de una estructura, frecuentemente, ésta es modelada como un sistema masa-resorte, tal como se muestra en la figura 2.7.

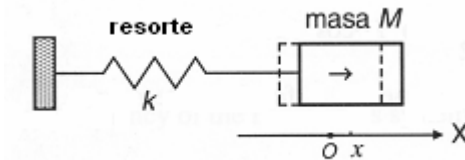


Figura 2.7. Modelo masa resorte. [4]

El origen del eje  $x$  se encuentra ubicado en la posición de equilibrio, en el centro de masa. Un desplazamiento,  $x$ , de la masa desde su posición inicial, provocará una fuerza de recuperación que actúa en ella, dada por  $F = -kx$  (Ley de Hooke), donde  $k$  es la constante elástica del resorte. El signo negativo en la expresión anterior significa que la fuerza se opone al desplazamiento de la masa. Si no existen más fuerzas actuantes en el sistema, la ecuación diferencial de movimiento está dada por:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad 2.50$$

Si  $\omega^2 = k / M$ , se tiene que:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \omega^2 x = 0 \quad 2.51$$

La solución general de la ecuación diferencial anterior está dada por:

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) \quad 2.52$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular de vibración,  $A$  es la amplitud de la vibración y  $\alpha$  es la fase. La frecuencia angular,  $\omega$ , se determina a partir de los parámetros  $k$  y  $M$  del sistema.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad 2.53$$



La amplitud  $A$  y la fase  $\alpha$ , están determinadas por las condiciones iniciales del sistema. Si  $x|_{t=0} = x_o$  y  $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = v_o$ , se tiene que:

$$A = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2} \quad (2.54) \text{ y } \alpha = \arctan\left(\frac{x_o\omega}{v_o}\right) \quad (2.55)$$

La frecuencia de vibración,  $\omega$ , también puede encontrarse por el principio general de la conservación de la energía. La energía potencial y cinética del sistema pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} kx^2 \\ &= \frac{1}{2} A^2 k \sin^2(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad 2.56$$

y

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} Mv^2 \\ &= \frac{1}{2} A^2 k \cos^2(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad 2.57$$

La energía total,  $E$ , para el sistema es:

$$E = E_p + E_c \quad 2.58$$

Cuando  $\omega t + \alpha = 0$ , se tiene que  $E = E_{c\_max} = \frac{1}{2} MA^2\omega^2$  (2.59) y cuando

$\omega t + \alpha = \pi/2$ , entonces,  $E = E_{p\_max} = \frac{1}{2} kA^2$  (2.60). Por el principio de

conservación de la energía se tiene que:  $E = E_{c\_max} = E_{p\_max}$ . Lo que nos lleva al mismo resultado:

$$\omega^2 = \frac{k}{M} \quad 2.61$$

### 2.4.2 Método de Rayleigh-Ritz

Como se mencionó en la sección anterior, es posible calcular la frecuencia de vibración de un sistema de parámetros concentrados  $M$  y  $k$ ; sin embargo, dicho método no funciona para sistemas en los que la masa se encuentra distribuida, a pesar de que cualquier sistema debe satisfacer la ley de la conservación de la

energía. El método de Rayleigh-Ritz es un método más general que también se basa en el principio de conservación de la energía y que se puede aplicar al caso distribuido.

Si se considera la energía almacenada en un elemento de sección,  $dx$ , en una posición  $x$  de la barra como se muestra en la figura 2.8.

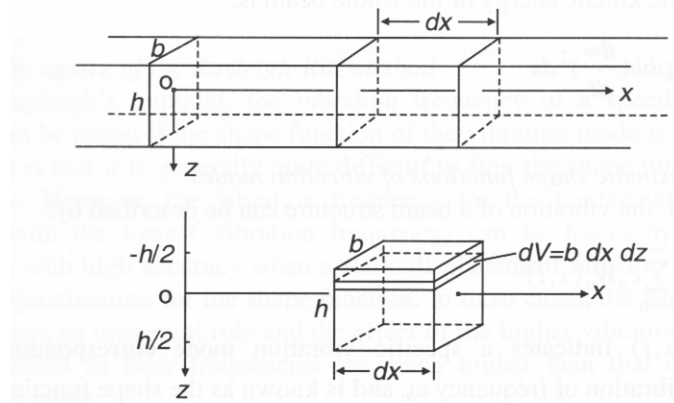


Figura 2.8. Sección elemental de una barra rectangular. [4]

Para una barra con una curvatura en el plano  $xz$ . La tensión y la deformación de la barra están dadas por:  $T = -Ezw''(x, t)$  y  $\varepsilon' = zw''(x, t)$ , respectivamente.

Para una capa delgada de espesor  $dz$  en la sección, las áreas de sus caras posterior y anterior son  $b dz$ , donde  $b$  es el ancho de la barra, y la fuerza normal en ambas caras es:

$$\begin{aligned} df &= Tbdz \\ &= -Ezw''(x, t)b dz \end{aligned} \quad 2.62$$

La elongación de la capa en la dirección  $x$  debido a las fuerzas es:

$$\Delta(dx) = \varepsilon' dx = -zw''(x, t)dx \quad 2.63$$

La energía potencial almacenada en la capa  $dz$  causada por la deformación es:

$$\Delta(dE_p) = \frac{1}{2} df \cdot \Delta(dx) \quad 2.64$$

Se obtiene que:

$$\Delta(dE_p) = \frac{1}{2} Ez^2 w''^2(x, t) b dx dz \quad 2.65$$

La energía potencial almacenada en la sección  $dx$  de la barra es:

$$dE_p = \frac{1}{2} E \left( \int_{-h/2}^{h/2} bz^2 w''^2(x, t) dz \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} E w''^2(x, t) dx$$
2.66

Para toda la barra, con longitud L, la energía potencial total, causada por la deformación, es:

$$E_p = \int_0^L \frac{1}{2} E w''^2(x, t) dx$$
2.67

La energía cinética del elemento con sección dx es:

$$dE_c = \frac{1}{2} \rho b h dx \left( \frac{dw}{dt} \right)^2$$
2.68

Por lo tanto, la energía cinética de la barra completa es:

$$E_c = \int_0^L \frac{1}{2} \rho b h dx \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 dx$$
2.69

En general, la vibración de la estructura puede ser descrita como:

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n W_n(x, t)$$
2.70

donde  $W_n(x, t)$  indica un modo específico de vibración correspondiente a una vibración sinusoidal de frecuencia  $\omega_n$  y se le conoce como función de forma del modo de vibración:

$$W_n(x, t) = W_n(x) \sin(\omega_n t + \alpha_n)$$
2.71

Matemáticamente, las  $W_n(x, t)$  son las eigenfunciones de la ecuación diferencial del sistema vibratorio.

Para un modo específico de vibración, indicado con el subíndice n, la energía potencial y cinética de dicho modo de vibración pueden ser expresadas como:

$$E_p = \frac{1}{2} c_n^2 \int_0^L E I [W_n''(x)]^2 \sin^2(\omega_n t + \alpha_n) dx$$
2.72

y

$$E_c = \frac{1}{2} c_n^2 \int_0^L \rho b h W_n(x)^2 \omega_n^2 \cos^2(\omega_n t + \alpha_n) dx$$
2.73

Haciendo uso del principio de conservación de la energía,  $E = E_{p\_max} = E_{c\_max}$ , para el n-ésimo modo de vibración, se tiene que:

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^L EI W_n''^2(x) dx}{\int_0^L \rho b h W_n^2(x) dx} \quad 2.74$$

A la ecuación anterior se le conoce como el coeficiente de Rayleigh, y puede ser utilizada con secciones transversales no uniformes si el área de la sección transversal  $A(x)$  substituye a  $b \cdot h$ , de la siguiente manera:

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^L EI W_n''^2(x) dx}{\int_0^L \rho A(x) W_n^2(x) dx} \quad 2.75$$

Utilizando el coeficiente de Rayleigh, es posible hallar la frecuencia para un modo específico de vibración si se conoce la función de forma para dicho modo. En algunas ocasiones es difícil hallar la función de forma para una estructura determinada. Sin embargo, la frecuencia de vibración para el modo fundamental puede hallarse por medio del coeficiente de Rayleigh con una alta precisión cuando se utiliza como aproximación de la función de forma, una función de desplazamiento estático  $w(x)$ . En la mayoría de los casos, el modo básico de vibración juega un papel importante y los efectos de los modos de vibración de orden superior pueden ser despreciados debido a que ocurren a frecuencias mucho mayores.

Para modos de vibración más elevados, si se encuentra una aproximación apropiada de la función de forma  $W_n(x)$  (basado en la información de las condiciones de frontera, nodos, etc.), la frecuencia de vibración puede calcularse con el coeficiente de Rayleigh con una precisión razonablemente alta.

Debido a que la función de forma  $W_n(x)$  usada para el cálculo de la frecuencia de vibración por medio del coeficiente de Rayleigh es una aproximación de la eigenfunción real, el resultado es siempre más alto que el eigenvalor correspondiente para ese modo. Sin embargo, la aproximación, normalmente es

muy buena para la frecuencia de vibración. Los resultados para la segunda y tercera armónica pueden ser buenas aproximaciones si la función de forma es aceptable.

### 2.4.3 Frecuencia de vibración de estructuras compuestas por una viga

Si se considera una ménsula, sin una masa en su extremo, sujeta a la acción de su propio peso únicamente, con la siguiente función de posición:

$$w(x) = \frac{\rho g}{2Eh^2} x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2) \quad 2.76$$

es posible calcular la frecuencia fundamental de vibración de la estructura. Utilizando el método de Rayleigh se obtiene:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 3.53 \sqrt{\frac{EI}{M_b L^3}} \\ &= 1.019 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \end{aligned} \quad 2.77$$

donde  $M_b = bhL\rho$  es la masa de la viga.

Para una ménsula con una masa en su extremo y que es mucho mayor que la masa de la barra, la función de posición es:

$$w(x) = \frac{\rho g}{2Eh^2} x^2(3L - x) \quad 2.78$$

Substituyendo en el coeficiente de Rayleigh, se tiene que:

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^L EI/36(L-x)^2 dx}{4ML^6} \quad 2.79$$

Resolviendo la integral y simplificando.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{3EI}{ML^3}} \\ &= \sqrt{\frac{Ebh^3}{4ML^3}} \end{aligned} \quad 2.80$$

Si la masa de la barra no es despreciable, la frecuencia de vibración puede ser calculada con el método de Rayleigh-Ritz con la misma función de posición que aquella que se utilizó para la barra con una masa despreciable. Aplicando el coeficiente de Rayleigh, se tiene:

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^L EI 36(L-x)^2 dx}{\int_0^L \rho b h (3Lx^2 - x^3)^2 dx + 4ML^6} \quad 2.81$$

$$= \frac{Ebh^3}{4\left(M + \frac{33}{140}M_b\right)L^3}$$

entonces

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{Ebh^3}{4\left(M + \frac{33}{140}M_b\right)L^3}} \quad 2.82$$

donde  $M_b = bhL\rho$  es la masa de la barra y  $M$  es la masa en el extremo. Comparando el resultado anterior con el caso en el que la masa de la barra era despreciable, se puede observar que la masa de la barra distribuida,  $M_b$ , es equivalente a una masa concentrada de  $\frac{33}{140}M_b$  en el extremo final de la viga.

Para verificar la exactitud obtenida por la aproximación hecha anteriormente, es posible hacer una sencilla comparación, y así, justificar esta aproximación. Si se usa la ecuación obtenida anteriormente con una barra de masa despreciable, es decir,  $M_b = 0$ , se tiene que:

$$\omega_1 = 1.0299 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad 2.83$$

Comparando ambos resultados, se tiene que ambos valores son muy cercanos. Una ventaja del método es que no es muy sensible a los detalles de la función de posición utilizada<sup>7</sup>.

Para el caso de la viga sujeta en ambos extremos (puente) que como ya se sabe tiene una función de posición:

$$w(x) = \frac{\rho g}{2Eh^2} x^2(L-x)^2 \quad 2.84$$

Substituyendo en el coeficiente de Rayleigh, se tiene que:

<sup>7</sup> Bao hace esta afirmación y nosotros basados en ella, se utiliza el método para la aproximación de la frecuencia de vibración fundamental que se detallará en el capítulo 4 de este trabajo.

$$\omega_1^2 = \frac{4 \int_0^L IE(L^2 - 6Lx + 6x^2)^2 dx}{\int_0^L \rho b h x^4 (L - x)^4 dx} \quad 2.85$$

$$= \frac{504IE}{\rho b h L^4}$$

o bien

$$\omega_1 = \frac{4.738^2}{L^2} \sqrt{\frac{IE}{\rho b h}} \quad 2.86$$

$$= 6.48 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Cuando se compara el resultado anterior con la frecuencia angular de la ménsula considerando la misma geometría de la barra para ambos casos, se obtiene que el puente presenta una frecuencia de vibración mayor que la de la ménsula en un factor de casi 6.4.

Un ejemplo adicional para justificar la afirmación de que el método de Rayleigh-Ritz no es sensible a las variaciones de la función de posición. Considérese que, si y sólo si, se cumple que la función de posición satisface los rasgos básicos del modo de vibración. Suponga que la función de posición para una barra en puente es:

$$w(x) = \frac{\rho g}{2Eh^2} \left( 1 - \cos 2\pi \frac{x}{L} \right) \quad 2.87$$

Esta función de posición parece ligeramente diferente que la anterior, pero la forma general de ambas son similares, debido a que ambas satisfacen las mismas condiciones de frontera:

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0$$

$$w(L) = 0, \quad w'(L) = 0$$

Aplicando el coeficiente de Rayleigh, se obtiene que:

$$\omega_1 = 6.58 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad 2.88$$

Este es un resultado muy próximo al anterior, aunque ligeramente mayor, por lo que aquel es considerado una mejor aproximación.

Bao hace el análisis de las estructuras anteriores utilizando el método de ecuaciones diferenciales y obtiene resultados con diferencias menores al 1%.

#### 2.4.4 Frecuencias de vibración de orden mayor por el método de Rayleigh-Ritz

Se considera ampliamente que la función de posición del segundo modo de vibración para un puente es antisimétrica, con un nodo en el punto central de la barra. Por lo tanto, la función de posición debe de satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} w(0) &= 0, \quad w\left(\frac{L}{2}\right) = 0, \quad w(L) = 0 \\ w'(0) &= 0, \quad w'(L) = 0 \\ w''\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Debido a que la función de posición es antisimétrica y el coeficiente de Rayleigh es una función par de  $x$ , la frecuencia de vibración puede encontrarse calculándolo sólo para una mitad de la longitud de la barra ( $x = 0$  y  $x = \frac{L}{2}$ ).

Si se supone que la función de posición es un polinomio de la forma:

$$w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 \tag{2.89}$$

en el intervalo  $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ .

Satisfaciendo las condiciones de frontera anteriores, se tiene que  $a = -\frac{5}{4}L$  y

$b = \frac{3}{8}L^2$ . Por lo tanto, la función de posición tiene la siguiente forma:

$$w(x) = \frac{\rho g}{2Eh^2} \left( x^4 - \frac{5}{4}Lx^3 + \frac{3}{8}L^2x^2 \right) \tag{2.90}$$

en el intervalo  $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ .

Aplicando el coeficiente de Rayleigh para  $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ , la frecuencia angular para el segundo modo de vibración está dada por:



$$\begin{aligned}\omega_2 &= \frac{7.8621^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \\ &= 17.84 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}\end{aligned}\tag{2.91}$$

## 2.5 Amortiguamiento por aire

En la sección 2.1 se trató acerca del modelo masa, resorte y amortiguador, con el cual es posible aproximar la respuesta de diferentes sistemas inerciales. En la sección 2.4 se plantearon procedimientos para la obtención de la frecuencia de vibración, que está relacionada a la constante elástica del resorte ( $k$ ) y la masa. En esta sección se tratará acerca de los diferentes mecanismos que intervienen en el amortiguamiento en una microestructura.

Para estructuras mecánicas de tamaño convencional cuya velocidad de movimiento no es demasiado elevada, la disipación de energía debido al aire que la rodea puede ser despreciable. Sin embargo, para el diseño y funcionamiento de microestructuras, estimar los efectos de amortiguamiento del sistema es de vital importancia para su desempeño. Por tanto, muchas de las estructuras micromecánicas deben diseñarse considerando este efecto. Por ejemplo, los acelerómetros, deben diseñarse para obtener un coeficiente de amortiguamiento  $\zeta = 0.70$ , mientras que en las estructuras resonantes (resonadores) este debe reducirse al mínimo para obtener un factor de calidad máximo.

### 2.5.1 Flujo de un fluido viscoso

Un fluido en reposo es incapaz de resistir un esfuerzo cortante que tienda a modificar su forma, sin embargo, existe una fuerza viscosa que se opone al movimiento relativo entre las diferentes capas del fluido. La viscosidad es una fricción interna entre capas adyacentes que se mueven con velocidades diferentes.

Las fuerzas internas cortantes en un fluido viscoso que se mueve regularmente son proporcionales al gradiente de velocidad. Si el flujo es en dirección del eje  $x$  y la velocidad del fluido está distribuida a lo largo del eje  $y$ ; la velocidad  $u$  del fluido en la dirección  $x$ , es función de  $y$ , y el esfuerzo cortante  $\tau_{yx}$  es:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du(y)}{dy} \quad 2.92$$

en donde  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad. Para un gas, el coeficiente de viscosidad es constante si el flujo es uniforme. Para muchos líquidos puros, el coeficiente de viscosidad es constante. A estos líquidos se les conoce como líquidos Newtonianos.

A pesar de que los líquidos y los gases son viscosos, los mecanismos que generan la viscosidad son diferentes en ambos casos. En este trabajo se tratará, principalmente, el estudio de los mecanismos de viscosidad en los gases y el amortiguamiento producido por ellos.

Para un líquido uniforme, las posiciones relativas de las moléculas adyacentes en una misma capa se encuentran estables, pero la posición relativa de las moléculas de las capas en un fluido laminar cambian debido al flujo. En la figura 2.9 se muestra el cambio en las posiciones relativas entre las moléculas A y B, en capas adyacentes, con una velocidad diferente para cada grupo. Cuando A y B se aproximan, la energía potencial intermolecular decrece y la energía cinética molecular aumenta. Esto produce un aumento en la entropía entre ambas capas y se forma una adhesión temporal entre ellas. Una fuerza externa debe de realizar un trabajo para separar las moléculas. Dicha adhesión es una fuerza que se opone al movimiento.

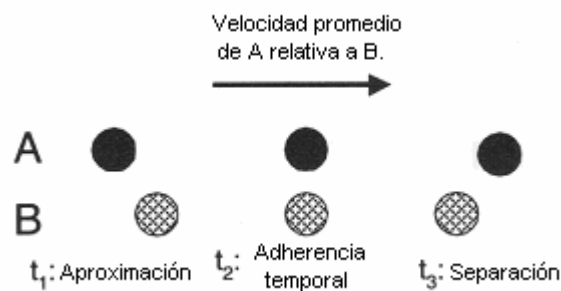


Figura 2.9. Mecanismo de viscosidad en un líquido. [4]

De acuerdo al mecanismo descrito anteriormente, si se incrementa la temperatura, la energía interna de las moléculas aumenta y, como consecuencia, es necesaria

menos energía para que las moléculas puedan separarse. Por tanto, la viscosidad de la mayoría de los líquidos decrece cuando aumenta la temperatura.

Para los gases, el movimiento térmico de una molécula es mucho más grande que su movimiento de deriva relacionado al fluido del gas. En la figura 2.10, la molécula A con una velocidad de deriva más pequeña moviéndose a través de la frontera CD (debido al movimiento térmico), adquiere una velocidad de deriva más grande, por tanto, gana momentum (impulso) de deriva y experimenta una fuerza hacia la derecha. La molécula ha ejercido una fuerza a la izquierda en la capa superior, lo cual tiende a retardar el movimiento de la capa más veloz.

De manera similar, la molécula B en la capa más rápida, se mueve hacia abajo a través de la frontera CD (debido al movimiento térmico) y ejerce una fuerza a la derecha en una capa más lenta dentro de la cual se mueve.

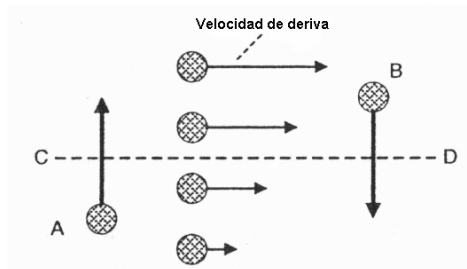


Figura 2. 10. Mecanismo de viscosidad de un gas. [4]

Debido al mecanismo descrito anteriormente, un incremento en la temperatura provoca un aumento en la velocidad térmica de las moléculas, por tanto, se incrementa el ritmo al cual estas atraviesan las capas del fluido. Entonces, la viscosidad del gas aumenta cuando la temperatura del fluido aumenta. Un modelo simple basado en la teoría cinética de los gases, predice que:

$$\mu = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda \quad 2.93$$

donde  $\rho$  es la densidad,  $\bar{v}$  es la velocidad promedio de las moléculas y  $\lambda$  es el espacio libre promedio de las moléculas (*mean free path*). De acuerdo con la teoría cinética de los gases,  $\bar{v}$ ,  $\rho$  y  $\lambda$  son:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_m}} \quad (2.94), \quad \rho = n \frac{M_m}{N_{av}} \quad (2.95) \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{1}{\pi \sqrt{2} n d^2} \quad (2.96)$$

donde  $R$  es la constante molar universal,  $M_m$  es la masa molar,  $d$  el diámetro molecular efectivo del gas,  $T$  es la temperatura absoluta y  $N_{av}$  es la constante de Avogadro, por tanto la viscosidad se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mu = \frac{2\sqrt{R}}{\pi n d^2} \sqrt{M_m T} \quad 2.97$$

La ecuación 2.97 sugiere que la viscosidad es independiente de la presión, P. Maxwell confirmó experimentalmente que este resultado es cierto sobre un amplio rango de presiones, siempre que la presión no sea muy pequeña. También indica que la viscosidad se incrementa en proporción directa a  $\sqrt{M_m}$  y a  $\sqrt{T}$ . Diversos experimentos han confirmado que  $\mu$  se incrementa con la temperatura pero el exponente excede ligeramente a  $\frac{1}{2}$ .

La temperatura y la dependencia molecular de  $\mu$  puede ser expresada por una relación empírica conocida como ecuación de Sutherland:

$$\mu = \mu_o \frac{1 + T_s / T_o}{1 + T_s / T} \sqrt{\frac{T}{T_o}} \quad 2.98$$

donde  $T_o = 273.16[K]$ ,  $\mu_o$  es el coeficiente de viscosidad a una temperatura  $T_o$  y  $T_s$ .  $\mu_o$  y  $T_s$  dependen del gas que se considere.

Usualmente, el coeficiente de viscosidad líquida es mucho más sensible a la temperatura que el de los gases.

### 2.5.2 Ecuaciones para flujo viscoso.

Considérese un cubo elemental de un fluido, tal como se muestra en la figura 2.11. Existen seis esfuerzos cortantes ubicados en las caras del cubo, causado por el gradiente de velocidad del fluido:  $\tau_{xy}(x_o)$ ,  $\tau_{xy}(x_o + dx)$ ,  $\tau_{yz}(y_o)$ ,  $\tau_{yz}(y_o + dy)$ ,  $\tau_{zx}(z_o)$  y  $\tau_{zx}(z_o + dz)$ .

Existen también, seis fuerzas normales en sus superficies causadas por las presiones:  $P(x)dydz$ ,  $P(x + dx)dydz$ ,  $P(y)dxdz$ ,  $P(y + dy)dxdz$ ,  $P(z)dxdy$  y  $P(z + dz)dxdy$ .

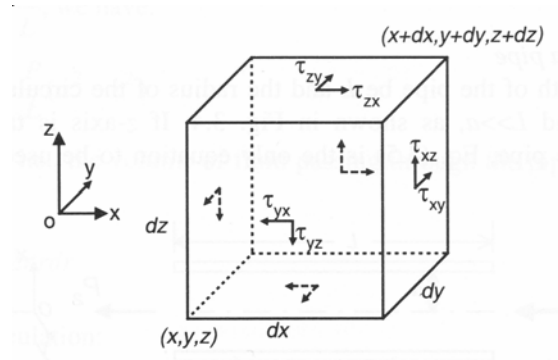


Figura 2.11. Esfuerzos cortantes sobre cada una de las caras del cubo elemental. [4]

Para flujo estacionario, si se asume que el peso del fluido es despreciable la suma de fuerzas en el eje z está dada por:

$$[P(z) - P(z + dz)]dxdy + [\tau_{xz}(x + dx) - \tau_{xz}(x)]dydz + [\tau_{yz}(y + dy) - \tau_{yz}(y)]dxdz = 0 \quad (2.99)$$

Por tanto, se obtiene que:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \quad 2.100$$

pero  $\tau_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}$  y  $\tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad 2.101$$

donde  $w$  es la componente de la velocidad del fluido en el eje z. Por la misma razón, se tiene para las otras dos direcciones:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \text{ y } \frac{\partial P}{\partial x} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad 2.102$$

donde  $u$  y  $v$  son las componentes de la velocidad en direcciones paralelas a los ejes  $x$  y  $y$ , respectivamente.

### 2.5.3 Fluido laminar y el número de Reynolds

Cuando un fluido se mueve de manera uniforme de tal modo que los estratos contiguos del mismo se deslicen entre sí de manera continua, se dice que el flujo es laminar. Este tipo de flujo se caracteriza por el hecho de que cada partícula del fluido sigue una trayectoria uniforme, y por que estas trayectorias no se cruzan

entre sí. Cuando la velocidad del fluido aumenta y rebasa cierto límite, el flujo se vuelve turbulento y aparecen remolinos. Este efecto tiende a aumentar la viscosidad del medio.

El criterio que se considera para diferenciar entre un flujo laminar y uno turbulento es el número de Reynolds, representado como  $Re$ , el cual es adimensional. Para un tubo, el número de Reynolds toma la forma de:

$$Re = \frac{\bar{v}\rho d}{\mu} \quad 2.103$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\bar{v}$  la velocidad del fluido y  $d$  el diámetro del tubo.

$Re$  es un parámetro conveniente para medir la estabilidad de un fluido; sin embargo, el valor crítico de  $Re$  que causa la inestabilidad en un fluido depende fuertemente de la forma del medio a través del cual circula y únicamente puede ser determinado con experimentos. Para tubos con sección circular, se tiene que si  $Re < 2200$  el fluido es laminar, si  $Re \approx 2200$  el fluido es inestable y si  $Re > 2200$  el fluido es turbulento.

El número de Reynold es útil, también, cuando se desea medir la estabilidad de un fluido que se mueve a través de un sólido que se encuentra dentro de dicho fluido, o bien, el movimiento de un sólido a través de un fluido en reposo. La forma general del número de Reynold es:

$$Re = \frac{v\rho l}{\mu} \quad 2.104$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $v$  la velocidad relativa entre el objeto y el fluido y  $l$  es una dimensión característica del objeto. Por ejemplo,  $l$  es el diámetro de una esfera o para una columna de sección transversal circular moviéndose a través del fluido de manera lateral,  $l$  es el diámetro de la sección transversal. El valor crítico del número de Reynolds a partir del cual se considera que el fluido es inestable depende de la forma del objeto y sólo puede ser determinado experimentalmente.

#### **2.5.4 Amortiguamiento por película comprimida**

Cuando se coloca una placa contra una superficie plana y la primera se mueve hacia la segunda, la película de aire entre ambas se comprime, de tal manera que

una parte del aire fluye hacia fuera del hueco. Por tanto, aparece una presión  $\Delta p$ . Por el contrario, cuando la placa se aleja de la superficie, la presión disminuye debido al aire que circula hacia el interior del hueco. En ambos casos esta presión se opone al movimiento de la superficie. La película de aire actúa como un amortiguador. La fuerza de amortiguamiento depende de la distancia entre ambas superficies y mientras más pequeña sea ésta, mayor será la fuerza de amortiguamiento. Cuando la placa se encuentra muy alejada de la superficie plana, dicha presión es despreciable y la fuerza de amortiguamiento es ocasionada únicamente por la fuerza de arrastre.

Este tipo de amortiguamiento se utiliza comúnmente para incrementar el amortiguamiento de la microestructura hasta algún valor deseado. Por tanto, es importante disponer de modelos matemáticos que permitan determinar el comportamiento de este fenómeno en función de algunos parámetros de importancia.

Supónganse dos placas planas paralelas al plano x-y de un sistema de coordenadas cartesianas, tal como se muestra en la figura 2.12. Si las dimensiones de ambas placas son mucho mayores que la distancia entre ellas, entonces, el aire fluye entre las placas debido al movimiento relativo (en dirección z) de ellas.

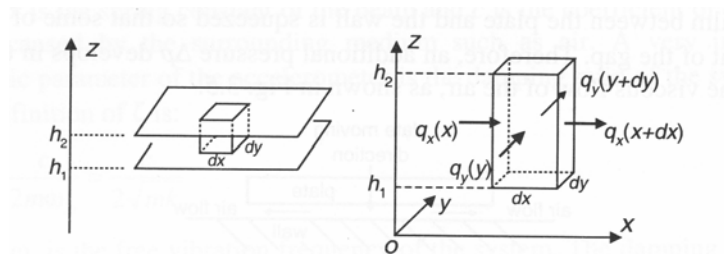


Figura 2.12. Unidad elemental y los flujos de masa que ocurren entre ambas placas. [4]

Considérese un elemento  $h dx dy$ , donde  $h = h_2 - h_1$ , como se muestra en la figura 2.12. Si  $q_x$  es el gasto volumétrico en dirección  $x$  por unidad de longitud en la dirección  $y$  y  $q_y$  es el gasto volumétrico en dirección  $y$  por unidad de longitud en la dirección  $x$ , entonces el balance de masa para el elemento es:

$$(\rho q_x)_x dy - (\rho q_x)_{x+dx} dy + (\rho q_y)_y dx - (\rho q_y)_{y+dy} dx = \left( \frac{\partial \rho h_2}{\partial t} - \frac{\partial \rho h_1}{\partial t} \right) dx dy \quad 2.105$$

Haciendo uso de las siguientes relaciones:

$$(\rho q_x)_{x+dx} = (\rho q_x)_x + \frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} dx \quad 2.106.a$$

$$(\rho q_y)_{y+dy} = (\rho q_y)_y + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} dy \quad 2.106.b$$

y como  $h = h_2 - h_1$ , se tiene:

$$\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0 \quad 2.107$$

Para poder hallar  $q_x$  y  $q_y$ , es necesario determinar la distribución de velocidades en la dirección  $z$ , para lo cual se considera un elemento diferencial de la columna de gas entre  $z$  y  $z + dz$ , como se muestra en la figura 2.13. Haciendo el balance de fuerzas en la dirección  $x$ , se tiene que:

$$P(x) dy dz + T_{zx}(z + dz) dx dy = P(x + dx) dy dz + T_{zx}(z) dx dy \quad 2.108$$

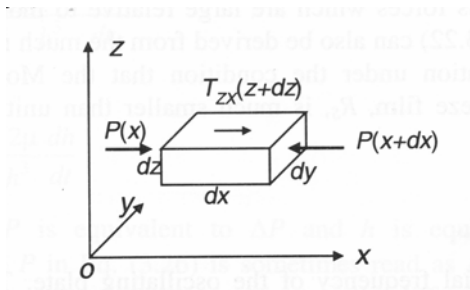


Figura 2. 13. Balance de fuerzas en una sección de la columna. [4]

Por tanto

$$\frac{\partial T_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad 2.109$$

Además se sabe que:

$$T_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad 2.110$$

donde  $u$  es la componente de velocidad en la dirección  $x$ . Entonces, se tiene que:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad 2.111$$



Para una distancia  $h$  pequeña,  $P(x, y)$  no es función de  $z$ . Integrando dos veces la ecuación, se tiene que  $u$  es:

$$u(z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} z^2 + C_1 \frac{1}{\mu} z + C_2 \quad 2.112$$

Si las placas no se mueven lateralmente y se coloca el eje de coordenadas en la parte inferior, las condiciones de frontera para 2.112 son:

$$u(0) = 0 \text{ y } u(h) = 0$$

Evaluando para las condiciones de frontera, se tiene:

$$u(z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} z(z-h) \quad 2.113$$

El gasto volumétrico en la dirección  $x$  por unidad de longitud en la dirección  $y$  está dado por:

$$\begin{aligned} q_x &= \int_0^h u dz \\ &= -\frac{h^3}{12\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad 2.114$$

Aplicando el mismo procedimiento para  $q_y$ , se tiene:

$$q_y = -\frac{h^3}{12\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad 2.115$$

Substituyendo 2.114 y 2.115 en la ecuación 2.107 se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 12 \frac{\partial(h\rho)}{\partial t} \quad 2.116$$

A la ecuación anterior se le conoce como ecuación de Reynolds. Si se supone que  $h$  es uniforme en ambas direcciones  $x$  y  $y$ , se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 12 \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial(h\rho)}{\partial t} \quad 2.117$$

Para una capa isotérmica, la densidad del aire  $\rho$ , es proporcional a la presión, y dicha relación está dada por:

$$\rho = \frac{P}{P_o} \rho_o \quad 2.118$$

La ecuación 2.117 se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} P^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} P^2 &= \frac{24\mu}{h^3} \frac{d(hP)}{dt} \\ \nabla^2 P^2 &= \frac{24\mu}{h^3} \frac{d(hP)}{dt}\end{aligned}\quad 2.119$$

La ecuación anterior se puede desarrollar como:

$$P_o \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + P \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} P + \frac{\partial^2}{\partial y^2} P \right) = \frac{12\mu}{h^3} \left( P \frac{dh}{dt} + h \frac{dP}{dt} \right) \quad 2.120$$

Si se supone que el movimiento de las placas es pequeño,  $h = h_o + \Delta h$  y  $P = P_o + \Delta P$ , por tanto,  $\Delta h \ll h_o$  y  $\Delta P \ll P_o$ . Bajo estas condiciones la expresión anterior se puede aproximar como:

$$P_o \left( \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial y^2} \right) = \frac{12\mu}{h^3} P_o h_o \left( \frac{1}{h_o} \frac{d\Delta h}{dt} + \frac{1}{P_o} \frac{d\Delta P}{dt} \right) \quad 2.121$$

Si  $\frac{\Delta P}{P_o} \ll \frac{\Delta h}{h_o}$ , se tiene:

$$\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial y^2} = \frac{12\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} \quad 2.122$$

Si el movimiento de la placa es una vibración sinusoidal con amplitud  $\delta$ ,  $h = h_o + \delta \sin(\omega t)$ . De la ecuación anterior es posible hacer una estimación de  $\Delta P$ :

$$\frac{\Delta P}{l^2} = \frac{12\mu}{h_o^3} \delta \omega \cos \omega t \quad 2.123$$

o bien

$$\begin{aligned}\frac{\Delta P}{P_o} &= \frac{12\mu l^2 \omega}{P_o h_o^2} \frac{\delta \cos \omega t}{h_o} \\ &= \sigma \frac{\delta \cos \omega t}{h_o}\end{aligned}\quad 2.124$$

donde  $\sigma = \frac{12\mu l^2 \omega}{P_o h_o^2}$ . Como  $\delta \cos \omega t$  tiene el mismo orden de magnitud que

$\Delta h = \delta \sin(\omega t)$ , se tiene que:

$$\frac{\Delta P}{P_o} \cong \sigma \frac{\Delta h}{h_o} \quad 2.125$$

Por tanto, la condición para la validez de la ecuación 2.125 se puede expresar también como  $\sigma \ll 1$ , o como:

$$\frac{l}{h_o} \ll \sqrt{\frac{P_o}{12\mu\omega}} \quad 2.126$$

### 2.5.5 Amortiguamiento por película comprimida para una placa rectangular

Considere un par de placas rectangulares con longitud  $L$  mucho mayor que su ancho  $B$ . El origen del sistema de coordenadas se localiza en el centro de la placa inferior y el eje  $x$  es paralelo al borde que se considera como el ancho de dicha placa, tal como se muestra en la figura 2.14. El problema puede considerarse unidimensional, donde las condiciones de frontera están dadas por:

$$P\left(\pm \frac{1}{2}B\right) = 0$$

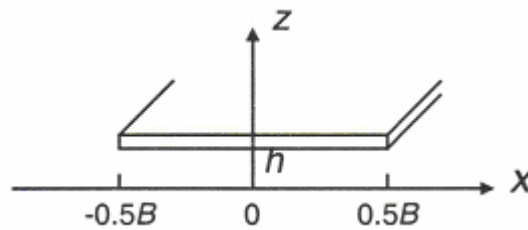


Figura 2. 14. Ubicación de la placa rectangular delgada en el espacio. [4]

Como ya se mencionó, el problema puede considerarse unidimensional, por tanto la ecuación 2.122 puede escribirse como sigue:

$$\frac{d^2 P}{dx^2} = \frac{12\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} \quad 2.127$$

donde  $h$  es la distancia entre ambas placas. Integrando dos veces la ecuación anterior, se tiene que:

$$P(x) = \frac{6\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} x^2 + C_1 x + C_2 \quad 2.128$$

Satisfaciendo las condiciones de frontera se obtiene:

$$P(x) = -\frac{6\mu}{h^3} \left( \frac{B^2}{4} - x^2 \right) \frac{dh}{dt} \quad 2.129$$

$P(x)$  es positiva cuando la película de aire es comprimida  $\left( \frac{dh}{dt} < 0 \right)$  y viceversa. El máximo se presenta al centro de la placa cuando  $(x = 0)$  y está dado por:

$$P(0) = -\frac{3\mu B^2}{2h^3} \frac{dh}{dt} \quad 2.130$$

La fuerza de amortiguamiento en la placa está dada por:

$$F_{ir} = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} P(x)L dx = -\frac{\mu B^3 L}{h^3} \frac{dh}{dt} \quad 2.131$$

De acuerdo con la definición  $F = -c\dot{x}$ , el coeficiente de amortiguamiento de la placa es:

$$c_{ir} = \frac{\mu B^3 L}{h^3} \quad 2.132$$

Es importante señalar que esta expresión es válida solo cuando se satisface que  $L \gg B$ . Si no se satisface la condición anterior el problema es bidimensional, por tanto, la solución al problema cambia.

Si las dimensiones de la placa en las direcciones  $x$  y  $y$  son  $B = 2a$  y  $L = 2b$ , tal como se muestra en la figura 2.15. La ecuación diferencial para la presión de la capa de aire que debe satisfacerse es la 2.122 bajo las siguientes condiciones de frontera:

$$P(\pm a, y) = 0, \quad P(x, \pm b) = 0$$

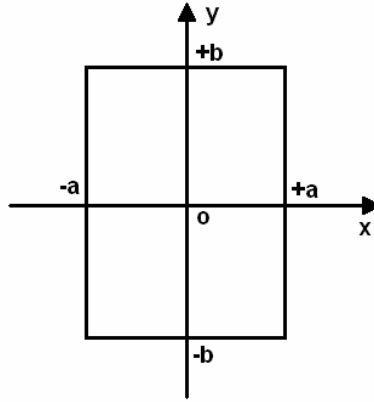


Figura 2.15. Placa rectangular.

Si se divide la solución de la ecuación 2.122 en dos partes:  $P = p_1 + p_2$ , donde  $p_1$  es una solución específica de la ecuación 2.122,  $p_2$  es una solución de la ecuación:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} = \frac{12\mu}{h^3} \dot{h} \quad 2.133$$

$p_2$  es una solución general de la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} = 0 \quad 2.134$$

Resolviendo ambos casos, la solución es:

$$P = -\frac{6\mu\dot{h}}{h^3}(a^2 - x^2) + \frac{192\mu\dot{h}a^2}{h^3\pi^3} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\cosh \frac{n\pi b}{2a}} \cosh \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad 2.135$$

La fuerza de amortiguamiento que se ejerce sobre la placa es:

$$\begin{aligned} F_{rec} &= \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b P(x, y) dy \\ &= -\frac{16a^3 b \mu}{h} \dot{h} \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \left( \frac{a}{b} \right) \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \left( \frac{n\pi L}{2B} \right) \right\} \\ &= -\frac{16a^3 b \mu}{h} \dot{h} \beta \left( \frac{B}{L} \right) \end{aligned} \quad 2.136$$

donde  $\beta \left( \frac{B}{L} \right)$  es una función de la relación  $\frac{B}{L}$  y está dada por:

$$\beta\left(\frac{B}{L}\right) = 1 - \frac{192}{\pi^5} \left(\frac{a}{b}\right) \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh\left(\frac{n\pi L}{2B}\right) \quad 2.137$$

En la figura 2.16 se muestra a  $\beta$  para el intervalo  $0 \leq \frac{B}{L} \leq 1$ . Para una placa muy larga,  $\beta = 1$ , para una placa rectangular ( $a = b$ ),  $\beta = 0.42$ . El coeficiente de amortiguamiento es:

$$c_{rec} = \frac{\mu L B^3}{h^3} \beta\left(\frac{B}{L}\right) \quad 2.138$$

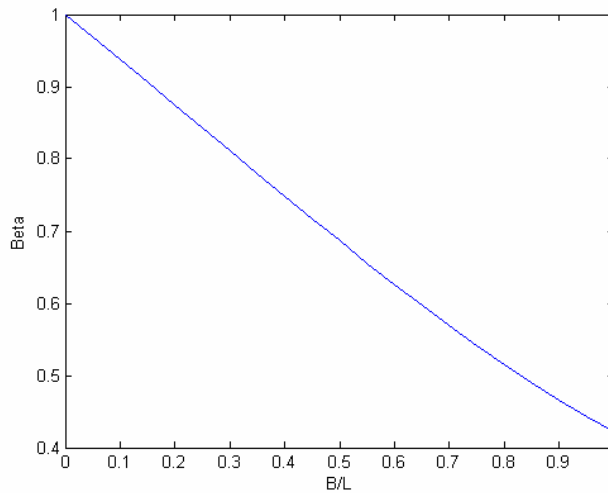


Figura 2.16. Factor de dependencia  $\beta$  vs.  $(B/L)$ . [4]

### 2.5.6 Viscosidad efectiva

Si las dimensiones de una estructura que se mueve inmersa en un fluido (o el fluido se mueve alrededor de la estructura), son cercanas a la distancia media libre del fluido; entonces, es necesario calcular la viscosidad efectiva. La viscosidad efectiva del cuerpo está dada por:

$$\mu_{ef} = \frac{\mu}{1 + 9.638 K_n^{1.159}} \quad 2.139$$

donde  $\mu$  es la viscosidad del fluido y  $K_n$  es el número de Kundsén. Dicho número es la relación entre la distancia media libre del fluido  $\lambda$  y una dimensión característica de la estructura (o una longitud de escala)  $L$ .  $K_n$  está dada por:

$$K_n = \frac{\lambda}{L} \quad 2.140$$

En este capítulo se estudiaron algunas herramientas relacionadas con los modos de vibración y el amortiguamiento al cual está sometida la estructura y que permitirán analizarla en los capítulos 4 y 5 para poder determinar la respuesta del sistema.

# Ondas acústicas superficiales y transductores IDT

### 3.1 ¿Qué es una onda acústica superficial?

Una onda acústica superficial es una onda no dispersiva, es decir, la velocidad de propagación es independiente de la frecuencia de la señal, la amplitud decae exponencialmente al alejarse de la superficie, de tal manera que el 95% de la energía de la onda se encuentra confinada en una región de profundidad igual a una longitud de onda desde la superficie<sup>1</sup>.

Inicialmente las ondas acústicas se utilizaron en osciladores, filtros y líneas de retardo empleando cristales piezoeléctricos, principalmente cuarzo, de dimensiones específicas.

Las ondas acústicas son de especial interés debido a que tienen una velocidad de propagación baja ( $1.5 \times 10^3 \frac{m}{s}$  a  $12 \times 10^3 \frac{m}{s}$ , típicamente) en comparación con las ondas electromagnéticas, lo que permite que un dispositivo de ondas acústicas, que funciona para una frecuencia determinada, sea 100,000 veces más pequeño que otro del mismo tipo que opere con ondas electromagnéticas a la misma frecuencia<sup>2</sup>, esto se debe a que la relación de velocidades entre las ondas electromagnéticas y las acústicas es del orden de  $10^5$ .

Las ondas acústicas volumétricas se pueden propagar en cualquier dirección en cualquier sólido, ya sea éste elásticamente isotrópico o anisotrópico. En un medio cualquiera se pueden propagar tres ondas volumétricas independientes, una de las cuales produce un movimiento de las partículas a lo largo de la dirección de propagación de la onda y se le conoce como onda volumétrica longitudinal. Las

---

<sup>1</sup> White, R. M. Surface elastic waves, *proceedings of IEEE*, vol. 58, no. 8, 1970

<sup>2</sup> Ídem



otras dos ondas son transversales y provocan un desplazamiento de las partículas transversal a la dirección de propagación. Una onda volumétrica que se propaga en un medio que está referido a un sistema cartesiano de tres dimensiones se puede descomponer como la suma de tres ondas volumétricas, cada una de ellas en la dirección de cada eje.

Durante sus inicios esta tecnología se encontraba restringida a dispositivos cuya frecuencia de operación fuera menor a los 100 MHz, debido a que los transductores piezoeléctricos debían de tener un espesor de un medio de la longitud de onda de la señal a propagar, lo cual ocasionaba que la estructura resultante tuviera un cristal muy fino y frágil. Ahora, utilizando las películas delgadas es posible hacer dispositivos cuya frecuencia de operación sea del orden de GHz.

A finales de la década de los 50's, el rango de frecuencias a utilizar se vio incrementado enormemente por el descubrimiento de que las ondas acústicas volumétricas se podían producir en estructuras relativamente masivas. La transducción se podía lograr simplemente produciendo un campo eléctrico de radiofrecuencia (RF) sobre caras bien pulimentadas o aplicándolo en una película piezoeléctrica delgada sobre una estructura grande.

Las ondas acústicas superficiales (Rayleigh) tienen una componente normal y una paralela a la dirección de la velocidad de propagación, es decir, estas ondas tienen dos componentes de desplazamiento de las partículas en el plano sagital. Debido a estas componentes de desplazamiento, existen tensiones y deformaciones longitudinales y transversales asociadas con el movimiento. Las partículas se mueven en forma elíptica, teniendo dos componentes, una normal y otra paralela a la superficie. Debido a que las partículas se encuentran menos restringidas en la superficie que en el interior del material, la velocidad de fase es menor que la de las ondas volumétricas. El campo electromagnético asociado con la onda acústica viaja en la misma dirección. La velocidad de la onda está determinada por el material del substrato y el corte del cristal.

Debido a las investigaciones que se llevaron a cabo sobre la propagación de las ondas, se descubrieron nuevos efectos de éstas y se enfocó el estudio sobre otros temas que, a pesar de que ya se conocían, estaban relegados.

El hecho de que las ondas acústicas se puedan propagar sobre la superficie del medio ya era conocido por Lord Rayleigh en 1885, es por eso que las ondas acústicas superficiales se conocen algunas veces como ondas Rayleigh.

El atractivo de las ondas acústicas superficiales (SAW) está dado por el hecho de que su energía se encuentra confinada en la superficie del medio de propagación. El hecho de que la energía se encuentre confinada sobre la superficie del material, permite cierta libertad para muestrear, modificar e interactuar con las ondas acústicas. La cantidad de dispositivos que se pueden construir utilizando este tipo de ondas es mayor que aquellos que operan con ondas acústicas volumétricas, y las aplicaciones hechas con ondas volumétricas no están exentas de realizarse con SAW.

Las ondas SAW se pueden generar, detectar y modificar en su velocidad y dirección de propagación utilizando algunos elementos superficiales, tal como alguna capa depositada en la superficie o por debajo del material. Los campos electromagnéticos asociados con la propagación de la SAW en un medio piezoeléctrico hacen posible la interacción de la onda con algún cuerpo situado por encima de la superficie. Esto ha hecho posible la amplificación de ondas acústicas y el desarrollo de dispositivos de acoplamiento que no se encuentran en contacto directo con el medio por el cual se propaga la onda. Por ejemplo, en un acelerómetro SAW-MEMS existe una masa sísmica compuesta por una barra conductora ranurada sujeta como un puente, en la que cada ranura se encarga de reflejar una porción de la onda acústica incidente, cuyo desplazamiento provoca una interacción con las ondas SAW proporcionando una forma indirecta de medir la aceleración que sufre el cuerpo.

Para sistemas compuestos por películas delgadas y un sustrato, a bajas frecuencias suele pasar que la película piezoeléctrica tiene un espesor menor que una longitud de onda. Si las velocidades de propagación que pueden alcanzar las ondas en el sustrato son mayores, denotadas como  $V_R'$ , que la velocidad  $V_R$  a la

cual se propagan en la capa del material piezoeléctrico, la velocidad de la onda Rayleigh que se produce, se aproximará a  $V_R'$ . A altas frecuencias este tipo de estructuras pueden propagar ondas Rayleigh con su energía concentrada en la capa piezoeléctrica, esto se debe a que la frecuencia y la longitud de onda son inversamente proporcionales, entonces, la velocidad de onda se aproximará a  $V_R$ . La velocidad varía entre  $V_R'$  y  $V_R$ . Si se desea que las ondas que se propaguen en el medio no sean dispersivas, los materiales deben ser seleccionados de tal manera que la diferencia entre  $V_R'$  y  $V_R$  sea mínima o que el espesor del material piezoeléctrico contenga toda la energía de la onda.

### **3.2 Otros tipos de ondas acústicas**

En todo este texto se ha hecho alusión a las ondas acústicas superficiales conocidas como ondas de Rayleigh; sin embargo, existen otros tipos de ondas acústicas.

El tipo de onda acústica generada en un material piezoeléctrico depende principalmente de las propiedades del sustrato, el corte del cristal y la estructura de los electrodos utilizada para transformar la energía eléctrica en mecánica. Algunos de los otros tipos de ondas acústicas superficiales, se tratan a continuación.

Cuando se tiene un sistema compuesto por varias capas (un sustrato, un material piezoeléctrico y quizá uno o más medios no piezoeléctricos) la solución de las ecuaciones de onda para los diferentes materiales, tienen un número infinito de soluciones, donde el primer modo de vibración para dicho sistema corresponde a las ondas de Rayleigh (si y sólo si estas pueden existir en el medio en el cual se han de propagar principalmente), mientras que el segundo modo de vibración corresponde a las *ondas Sezawa*.

Si se selecciona un corte de cristal diferente es posible obtener ondas SH (*shear horizontal*) en lugar de las ondas de Rayleigh. El desplazamiento de las partículas de este tipo de ondas es transversal a la dirección de propagación de la onda y paralela al plano de la superficie. La frecuencia de operación está determinada por el espaciamiento entre los IDT's y la velocidad de propagación de la onda en un

medio específico. Este tipo de ondas son una gran promesa en el desarrollo de microsensores en medios líquidos. En general, las SH-SAW son sensibles a cambios de masa, viscosidad, conductividad, y permitividad de líquidos adyacentes. Los desplazamientos en la superficie se encuentran prácticamente en un mismo plano.

Las ondas acústicas Love son ondas que se propagan en una guía de onda compuesta de una capa de un material M2 depositado sobre un sustrato hecho de otro material M1 con propiedades acústicas diferentes y de ancho muy grande cuando se compara con la capa original. Estas ondas son transversales y están compuestas sólo por esfuerzos cortantes. El vector de desplazamiento del elemento de volumen es perpendicular a la propagación; así, si ésta se encuentra orientada en dirección  $x$ , dicho vector se encontrará en dirección  $z$ . La energía de la onda que se propaga se encuentra localizada en el medio M2 y cercana a la interfaz. La amplitud de esta decrece exponencialmente con la profundidad.

El factor que hace la diferencia entre la producción de una onda Rayleigh es el corte del cristal. Pueden existir condiciones específicas para que puedan producirse cierto tipo de ondas, por ejemplo, para que las ondas Love existan debe satisfacerse que la velocidad SH en el medio 2 ( $v_2$ ) sea más pequeña que en el sustrato ( $v_1$ ). En la figura 3.1 se muestra la representación de una onda acústica Love.

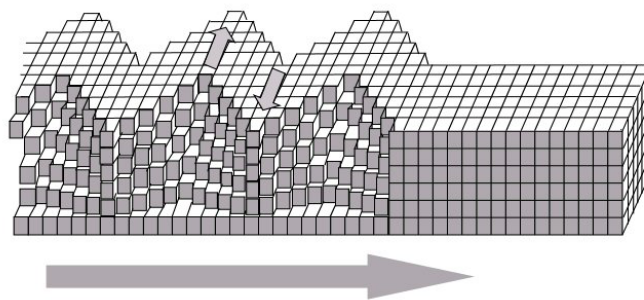


Figura 3.1. Onda acústica superficial Love.

Según Morgan<sup>3</sup>, las ondas *Bleustein-Gulyaev*, ocurren si el plano sagital es normal a un eje de orden par (2-, 4- o 6-*fold*) del cristal. Estas ondas tienen su

<sup>3</sup> Morgan, D., *Surface acoustic wave filters*, Second edition, Academic press, UK, 2007

componente de desplazamiento normal al plano sagital, y tienen un campo eléctrico asociado. Están relacionadas con las ondas SH que se propagan en un semiplano isotrópico; sin embargo, el efecto piezoeléctrico limita la onda en la superficie, pero este tipo de ondas no se encuentran tan restringidas a la superficie, incluso en materiales altamente piezoeléctricos. Por ejemplo, en sulfuro de cadmio, la profundidad de penetración es típicamente cuatro longitudes de onda para una superficie metalizada y 44 longitudes de onda para una superficie libre<sup>4</sup>. Se ha trabajado con este tipo de ondas para la fabricación de sensores en interfases líquido-sólido y se ha observado que el coeficiente de acoplamiento piezoeléctrico puede ser muy elevado para el Niobato de potasio ( $KNbO_3$ ) en comparación con materiales como el niobato de litio<sup>5</sup>.

Estas son sólo algunas de las ondas acústicas superficiales que han sido tratadas en la literatura, sin embargo, este apartado tiene como finalidad introducir al lector en este tema, y para tal fin se ha considerado que con mencionar algunas de ellas es suficiente.

### **3.3 Transductores IDT**

#### **3.3.1 Conceptos básicos sobre los IDT's**

Los transductores interdigitales (IDT's) consisten de una serie de electrodos intercalados. Cuando una señal de voltaje de AC de la forma  $v(t) = v_0 e^{j\omega t}$  es aplicada a través de los electrodos, se produce una onda de tensión mecánica entre los IDT's que viaja a lo largo de toda la superficie del cristal en ambas direcciones. Para asegurar interferencia constructiva y una onda de tensión mecánica en fase, la distancia  $d$  entre dos electrodos circunvecinos debe ser igual a la mitad de la longitud de la onda elástica  $\lambda_R$ <sup>6</sup>, es decir,

$$d = \frac{\lambda_R}{2} \quad 3.1$$

---

<sup>4</sup> Ídem

<sup>5</sup> Zhang, C., Caron, J. J., The Bleustein-Gulyaev wave mode in potassium niobate for liquid sensing applications, *IEEE ultrasonic symposium*, 2000

<sup>6</sup> Gardner, J., W., *Microsensors, MEMS and smart devices*, John Wiley & Sons., USA, 2001

A la frecuencia asociada se le conoce como frecuencia síncrona,  $f_o$ , y está dada por:

$$f_o = \frac{U_R}{\lambda_R} \quad 3.2$$

Donde  $U_R$  es la velocidad de propagación de la onda Rayleigh en un determinado medio.

A esta frecuencia, la eficiencia del transductor en el proceso de convertir energía eléctrica a energía acústica o viceversa es máxima.

Para que la constante de acoplamiento sea máxima, el ancho de los electrodos debe ser igual a la distancia entre los electrodos, este resultado ha sido reportado por Redwood y Milsom<sup>7</sup>. En la figura 3.2 se presenta la gráfica en que dichos autores muestran la variación de  $k^2$  con respecto a la razón entre el ancho del electrodo y la separación entre ellos (relación de metalización). Es importante mencionar que el resultado para el caso en que  $k^2$  es máxima coincide con el resultado predicho por Campbell y Jones. Dicha relación también determina la cantidad de armónicas que se generan alrededor de la fundamental.

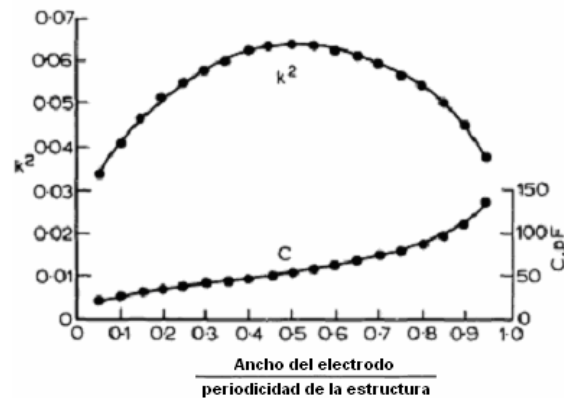


Figura 3.2. Variación de la constante de acoplamiento  $k$  y la capacitancia  $C$  con respecto a la geometría del electrodo (relación de metalización). [19]

Un voltaje aplicado causará, debido al efecto piezoeléctrico, un patrón de tensión en el material con un periodo  $L$ , la periodicidad de la estructura. Si la frecuencia es tal que  $L$  es cercana a la longitud de onda de la SAW, hay un fuerte acoplamiento

<sup>7</sup> Redwood, M., Milsom, R. F., Piezoelectric coupling coefficient of interdigital Rayleigh wave transducers, IEEE electronic letters, Vol 6 No. 14, 1970

entre ambas y, por simetría, las ondas acústicas superficiales se producen en direcciones opuestas sobre el eje “x” de la figura 3.3.

Por lo regular existen dos formas para hacer este tipo de estructuras. La primera forma de fabricación es una combinación de una capa ultra delgada (10-20 nm) de cromo (Cr), seguida por una capa delgada de aproximadamente 150 nm de oro (Au). Un electrodo fabricado de esta forma se le conoce como electródo Cr-Au. En este caso el cromo no solo forma un contacto óhmico con el material piezoeléctrico sino que actúa también como una capa adhesiva para el oro. El oro es usado como la interfase final entre el dispositivo y el ambiente, debido a que es un elemento más inerte a diferencia del cromo y otros metales. La segunda forma es hacer el electrodo en aluminio, aprovechando la adhesión del aluminio que es lo suficientemente elevada para no necesitar usar una capa de cromo intermedia. En la figura 3.3 se muestra una línea de retardo utilizando una configuración de dos IDT's

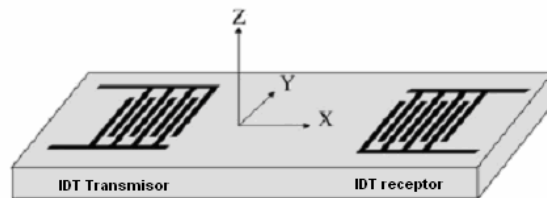


Figura 3.3 Línea de retardo de SAW. Se observan ambos IDT's [9]<sup>8</sup>.

Un medio piezoeléctrico se comporta como si fuera más rígido que uno no piezoeléctrico con características mecánicas similares, debido a la energía potencial adicional resultante del acoplamiento piezoeléctrico, por tanto, las velocidades de las ondas son más elevadas en medios piezoeléctricos que en aquellos que no lo son. La constante elástica efectiva se incrementa en un valor dado por:

$$c_{st} = c(1 + k^2) \quad 3.3$$

donde  $k^2$  se le conoce como coeficiente de acoplamiento piezoeléctrico y su valor máximo es la unidad. Este coeficiente está dado por:

<sup>8</sup> Varadan, V, et. al., Fabrication, characterization and testing of wireless MEMS-IDT based microaccelerometers, *Elsevier, Sensor and actuators A*, 90, 7-19, 2001

$$k^2 = \frac{e}{c\varepsilon} \quad 3.4$$

donde  $e$  es la constante piezoeléctrica;  $c$  es la constante elástica y  $\varepsilon$  es la permitividad eléctrica. Los valores de  $e$ ,  $c$  y  $\varepsilon$  dependen de la dirección de propagación de la onda.

La constante de acoplamiento electromecánico para un transductor de ondas volumétricas está definido como la relación que existe entre la energía elástica y dieléctrica mutuas y el promedio geométrico de las autoenergías dieléctrica y elástica. Para una onda volumétrica unidimensional, la relación entre el cambio de velocidad y su velocidad cuando el campo piezoeléctrico se cortocircuita está dada por:

$$\frac{\Delta v}{v} = 1 - \sqrt{1 + k^2} \cong -\frac{1}{2} k^2 \quad 3.5$$

Para ondas acústicas superficiales la constante de acoplamiento es evaluada según el cambio de velocidad  $\Delta v$  que ocurre al depositar una capa delgada metálica altamente conductora en la superficie del material y cuando la superficie se encuentra libre. La constante de acoplamiento puede expresarse según el cambio de velocidades como<sup>9</sup>:

$$k^2 \cong \frac{2|\Delta v|}{v} \quad 3.6$$

Donde  $v$  es la velocidad de la onda superficial en dicho medio cuando el campo eléctrico en la superficie es cero (la placa conductora se encuentra sobre la superficie).

### 3.3.2 Pérdidas y casos de interferencia en los IDT's

Según el teorema de máxima transferencia de potencia, ésta ocurrirá cuando las impedancias de un circuito Thevenin y de una carga que se encuentran conectadas entre sí, sean complejas conjugadas. Es común que para que esta condición se pueda satisfacer, se agregue entre ambas una red de acoplamiento, sin embargo, en algunos casos es deseable hacer un acoplamiento directo al

---

<sup>9</sup> Campbell, J. J., et. al., A method for estimating optimal crystal cuts and propagation directions for excitation of piezoelectric surfaces waves, *IEEE Trans Sonics and ultrasonics*, 1968.



transductor o hacerlo trabajar en una condición de desacoplamiento, por ejemplo, cuando forma parte de un oscilador pulsado<sup>10</sup> o cuando se desea reducir el efecto de transito triple en el dispositivo<sup>11</sup>, sobre este efecto se hablara posteriormente. La máxima transferencia de potencia para las ondas SAW ocurrirá cuando las impedancias de la fuente y de los IDT se encuentren acopladas, cualquier cambio en las impedancias de la fuente o de la carga provoca un aumento en las pérdidas de inserción del dispositivo.

Si se conecta en paralelo un inductor al IDT, dicho arreglo resonará a la frecuencia  $f_0$ , debido a la capacitancia  $C_T$  (capacitancia total del IDT). A la frecuencia  $f_0$  el coeficiente de reflexión será unitario y éste sólo podrá ser cero cuando el transductor sea cortocircuitado<sup>12</sup>.

Si se excita con una señal de AC a un IDT con un espaciamiento interdigital constante y un traslapamiento constante de sus electrodos, si la potencia que incide sobre este se normaliza a  $P_{in} = 1$ , debido a la bidireccionalidad del dispositivo sólo  $P = \frac{1}{2}$  será transportada al IDT de salida, mientras que la otra mitad de la potencia se perderá. Así las perdidas inherentes al sistema serán de -3 dB, así pues, la señal en el IDT de salida tendrá una potencia  $P_{out} = \frac{1}{4}$ , 6 dB por debajo de la señal original. En la figura 3.4 se muestran los flujos de potencia de las señales considerando los absorbedores en ambos extremos<sup>13</sup>.

---

<sup>10</sup> R. M. White, Direct Piezoelectric coupling to surface elastic waves, *Appl. Phys. Lett.*, 1965

<sup>11</sup> Lewis, M. F., Triple transit suppression in surface acoustic wave devices, *Electronics Lett.* 8, 1972

<sup>12</sup> Morgan, D. P., Surface acoustic wave devices and applications, *IEEE ultrasonics*, 11,1973

<sup>13</sup> Campbell, C. K., *Surface acoustic wave devices for mobile and wireless communications*, San Diego:Academic, 1998

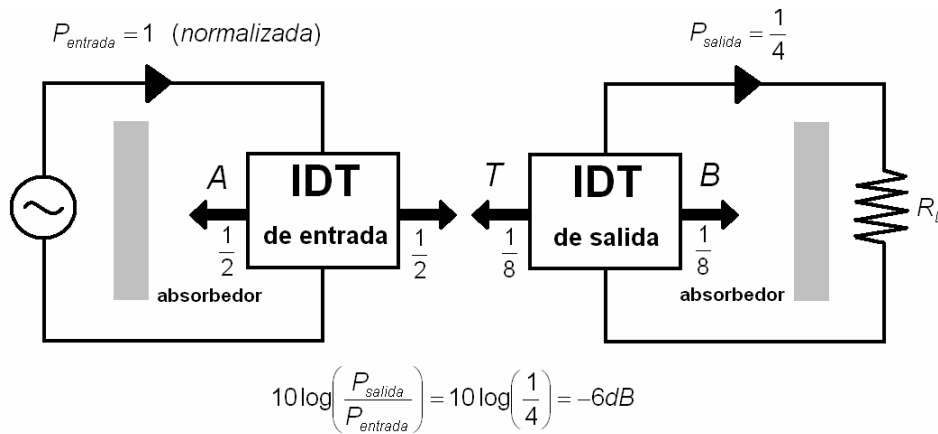


Figura 3.4. Flujos de potencia en un IDT de entrada y otro de salida considerando los absorbedores. [22]

El problema de pérdida de potencia antes mencionado se debe al hecho de que cada IDT que absorbe una onda SAW puede reemitir una porción de la energía (Debido a que la impedancia de la carga es no nula). Este es el mismo fenómeno que se encuentra en una antena electromagnética receptora, en la cual parte de la energía recibida es irradiada por las corrientes inducidas en ella. A este fenómeno se le conoce como *triple transit interference* (TTI). Las corrientes inducidas en el IDT por las ondas acústicas superficiales, pueden hacer que parte de estas corrientes regeneren una nueva onda acústica superficial reemitida en ambas direcciones. Una porción de la energía de las ondas que llegan al IDT de entrada son absorbidas por éste y otra es reemitida. Entre la señal principal y la primera reflexión que llegan al IDT de salida, habrá un desfase de  $2\tau$ , donde  $\tau$  es el tiempo de propagación de la señal entre ambos electrodos. La relación entre las potencias de la señal de salida y la señal debido al TTI es de -12 dB. Ambos fasores se suman y restan en el dominio de la frecuencia provocando un rizo inaceptable en la señal de la salida, que tendrá una frecuencia de  $f_r = \frac{1}{2\tau}$ . En la figura 3.5 se muestra el flujo de potencia cuando ocurre la interferencia de tránsito triple en dos IDT's. Por estas razones, las señales acústicas superficiales no deseadas deben ser absorbidas en el extremo del cristal por medio de cera, algún adhesivo o algún otro material que pueda cumplir con esta función.

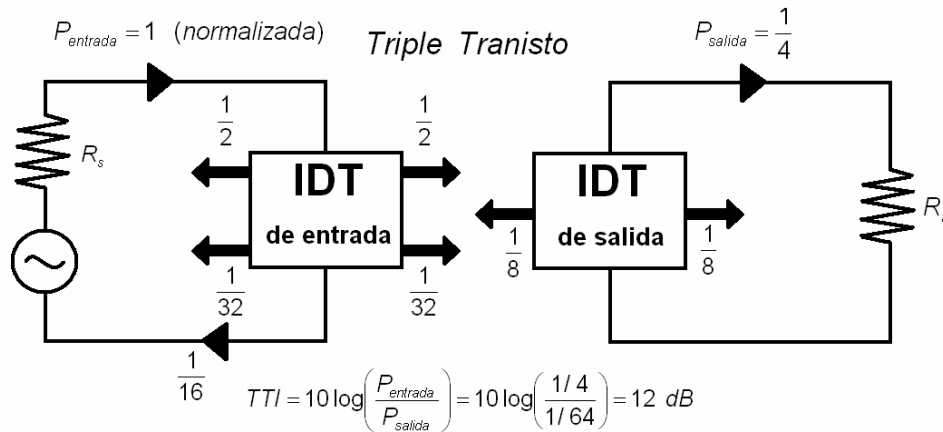


Figura 3.5. Flujos de potencia para TTI. [22]

La difracción ocurre en los IDT's en una forma muy parecida a como ocurre en los sistemas ópticos. Idealmente, las SAW que son excitadas por un IDT tienen idealmente un frente de onda plano, de tal manera que una onda lanzada por un IDT transmisor llega a un IDT receptor con un mismo retardo. Como en óptica, los frentes de ondas SAW son esféricos dentro de un ángulo determinado por el ancho de los IDT's. Este efecto puede ocasionar consecuencias indeseadas en el desempeño del circuito, por esta razón es necesario considerar este efecto en el diseño del ancho de los electrodos.

### 3.3.3 Modelos de los IDT's

Mientras que el modelado de los circuitos LC está basado en el estudio de los polos y ceros de su función de transferencia, este método no puede ser utilizado en el diseño de circuitos SAW. La razón es que el concepto de "polos" en un circuito conformado por elementos pasivos está relacionado al almacenamiento de la energía en los campos eléctricos y magnéticos, mientras que en los dispositivos SAW no se almacena energía, sino que la energía se transfiere de la entrada a la salida, por tanto, la función de transferencia de un filtro SAW contendría sólo ceros. El efecto piezoeléctrico sólo ocurre en materiales anisotrópicos, debido a la configuración de las moléculas en la estructura cristalina, sin embargo, una teoría precisa que hiciera tales consideraciones sería muy complicada. Para ello se han

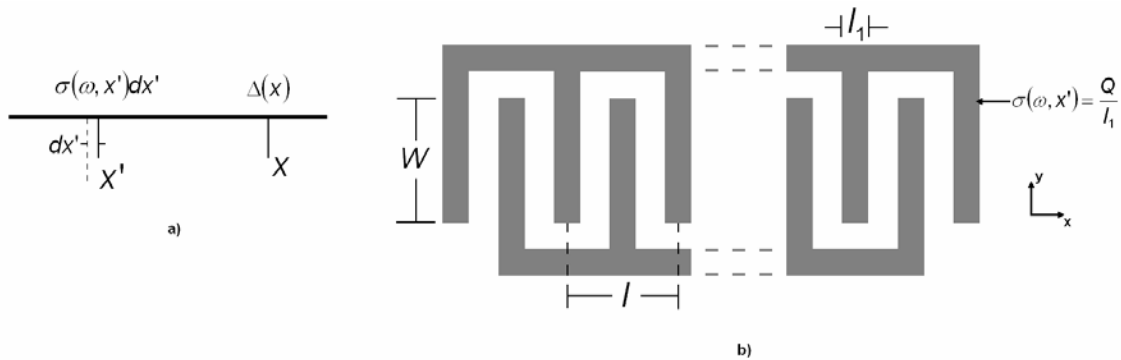
desarrollado diversos modelos que permiten simplificar los cálculos para aproximar la respuesta de los IDT's. A continuación se mencionan algunos.

- *Modelo "función delta"*

Se considera que la excitación producida por un electrodo individual es proporcional a la carga total  $Q$  en el mismo, si cada electrodo tiene una longitud  $w$  en la dirección "y" y la densidad de carga por unidad de longitud, en la dirección del eje de propagación acústica  $x$ , valuada en  $x'$ , en la superficie del material piezoelectrico, es  $\sigma(x')$  (Figura 3.6). Debido a que el sistema es lineal, La señal SAW excitada por la carga en  $dx'$  es proporcional a  $\sigma(x')dx'$ . Esta onda acústica

tiene una constante de propagación  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{V_R}$ . Donde  $V_R$  es la velocidad de

Rayleigh y  $\lambda$  es la longitud de la onda.



Figuras 3.6.a y b Notación usada para estimar la respuesta del transductor y para indicar los parámetros espaciales del transductor, respectivamente. [23]

La señal SAW en el plano  $x$  tiene una amplitud  $A(x, \omega)$ . En un sistema lineal,  $A(x, \omega)$  varía linealmente con el cambio de la tensión, la deformación o la velocidad de la partícula que se desplaza a través del plano  $x$ . Comúnmente,  $|A(x, \omega)|$  se considera como la raíz cuadrada de la potencia en el plano  $x$ . Una onda que se propaga en dirección  $x$  entre los puntos  $x'+dx'$  tendrá una amplitud  $dA(x, x', \omega)$ , que se expresa como:

$$dA(x, x', \omega) = \alpha \sigma(\omega, x') e^{-jk(x-x')} dx' \quad 3.7$$

donde  $\alpha$  es el factor de acoplamiento entre la carga y la excitación acústica y  $k(x - x')$  es el cambio de la fase de la onda entre el punto de excitación  $x'$  y el punto de observación  $x$ . La amplitud de la señal  $A(x)$  inducida en  $x$  debe ser la suma de las contribuciones de todos los elementos de longitud  $dz'$  que se encuentran a la izquierda de  $z$ . La amplitud total en  $z$  está dada por:

$$A(x, \omega) = \alpha \int_{-\infty}^x \sigma(\omega, x') e^{-jk(x-x')} dx' \quad 3.8$$

Si  $x$  se encuentra más allá del último transductor, entonces  $\sigma(x) = 0$ , y la expresión anterior se puede escribir como sigue:

$$A(x, \omega) = \alpha \int_{-\infty}^x \sigma(\omega, x') e^{-jk(x-x')} dx' \quad 3.9$$

Debido a que la señal de amplitud está dada en términos de la frecuencia podemos considerar que esta función es la transformada de Fourier de la carga en los electrodos. Como la función de transferencia del transductor es la transformada de Fourier de su respuesta a un entrada impulso, se deduce que la respuesta al impulso de un transductor es la misma que la distribución espacial de la carga a lo largo de la estructura<sup>14</sup>.

Por ejemplo, si se considera un transductor con una longitud de cada electrodo constante, su espaciamento entre ellos también constante, tal como se muestra en la figura 3.6.b, se asume, por simplicidad, que la carga se encuentra uniformemente distribuida en los electrodos<sup>15</sup> y que las amplitudes de todos los campos varían con respecto a la frecuencia angular  $\omega$ , entonces se puede escribir, para un solo electrodo:

$$\sigma = \frac{Q}{l_1} \quad 3.10$$

Si el centro del electrodo se encuentra ubicado en  $x' = l/4$ , su contribución al campo total en el plano  $x$  es:

<sup>14</sup> Kino, G. S., Acoustic waves: Devices, imaging, and analog signal processing, Prentice Hall, 1987

<sup>15</sup> En la práctica la carga se encuentra concentrada en los bordes de los electrodos: un solo electrodo de ancho  $l_1$  en el espacio libre tiene una distribución de carga de la forma  $\rho = K \sqrt{l_1^2/4 - y^2}$ , donde  $K$  es una constante. Un tratamiento más exacto del problema usa una solución cuasiestática para una arreglo periódico de electrodos.

$$\begin{aligned}
A(x)_{SF} &= \frac{\alpha Q}{l_1} e^{-jk(x-l/4)} \int_{-l_1/2}^{l_1/2} e^{jkx'} dx' \\
&= \frac{\alpha Q}{l_1} e^{-jk(x-l/4)} \frac{\sin(kl_1/2)}{kl_1/2}
\end{aligned}
\tag{3.11}$$

Si a la expresión anterior se le agrega la contribución de la parte complementaria del electrodo anterior, cuyo centro se encuentra ubicado en  $x' = -l/4$  y cuya carga es  $-Q$ , se obtiene que:

$$A(x)_{FP} = 2\alpha j Q e^{-jkx} \sin\left(\frac{kl}{4}\right) \frac{\sin(kl_1/2)}{kl_1/2}
\tag{3.13}$$

Si se agregan todas las contribuciones de N pares de electrodos cuyos centros se encuentran ubicados en  $x' = nl$ , donde  $n = 0..N-1$ , y usando los retardos apropiados se obtiene:

$$A(x) = j\alpha Q e^{-jkx} \frac{\sin(kNl/2)}{\cos(kL/4)} \operatorname{sinc}\left(\frac{l_1}{\lambda}\right) e^{jk(N-1)l/2}
\tag{3.14}$$

Donde la ecuación es, por tanto, la transformada de Fourier de la distribución de carga de los electrodos. Cuando N es grande el término que varía con mayor velocidad de la ecuación anterior es  $\sin(kNl/2)/\cos(kL/4)$ . Usando la ley de L'Hopital, se demuestra que si  $kl \rightarrow 2\pi$ , esta función tiene un máximo en  $\pm 2N$  y es cero en:

$$kl = 2\pi \left(1 \pm \frac{1}{N}\right)
\tag{3.15}$$

La respuesta es máxima en  $kl = 2\pi$ . Para este valor de k se tiene la frecuencia sincrona ( $\omega_o$ ) y  $|A(z)| \rightarrow 2\alpha Q N \operatorname{sinc}(l_1/l)$ . Por otra parte, el ancho de lóbulo principal está dado por:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_o} = \frac{2}{N}
\tag{3.16}$$

Si N es grande, es conveniente escribir:

$$\frac{k - k_o}{k_o} = \frac{\omega - \omega_o}{\omega_o} = \frac{x}{N\pi}
\tag{3.17}$$

Y se puede demostrar que:

$$|A(z)| \approx 2\gamma QN \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \quad 3.18$$

donde

$$\gamma = \alpha \operatorname{sinc} \left( \frac{l_1}{\lambda} \right) \quad 3.19$$

Asumiendo que  $l_1 \ll Nl$ , se tiene que el ancho de banda a -3 dB donde  $x = \pm 0.89\pi/2$  es:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} (3dB) = \frac{0.89}{N} \quad 3.20$$

Este modelo no puede dar información sobre las armónicas, ni la relación que existe entre las armónicas que se generan en el dispositivo con respecto a la relación de metalización  $\eta$  del mismo.

Es posible simplificar más el cálculo necesario para obtener un modelo equivalente.

Considérese un transductor como el que se muestra en la figura 3.7, cuyos electrodos alternan su polaridad, con un espaciamiento  $\lambda_0/2$ , con una frecuencia central de  $f_0 = v/\lambda_0$ , de tal manera que la emisión de las ondas se sumen constructivamente a esta frecuencia, y cuya relación de metalización  $\eta = a/b = 0.5$ . La carga puede ser modelada como fuentes ubicadas como funciones delta en el espacio de campo eléctrico  $E_z$ , tal y como se hizo anteriormente. Como se observa en la figura 3.7.b, cada electrodo tendrá asociado dos fuentes delta de campo eléctrico, cuya amplitud es proporcional al voltaje aplicado. Las dos fuentes delta pueden ser reemplazadas por una fuente delta equivalente como se muestra en la figura 3.7.c.

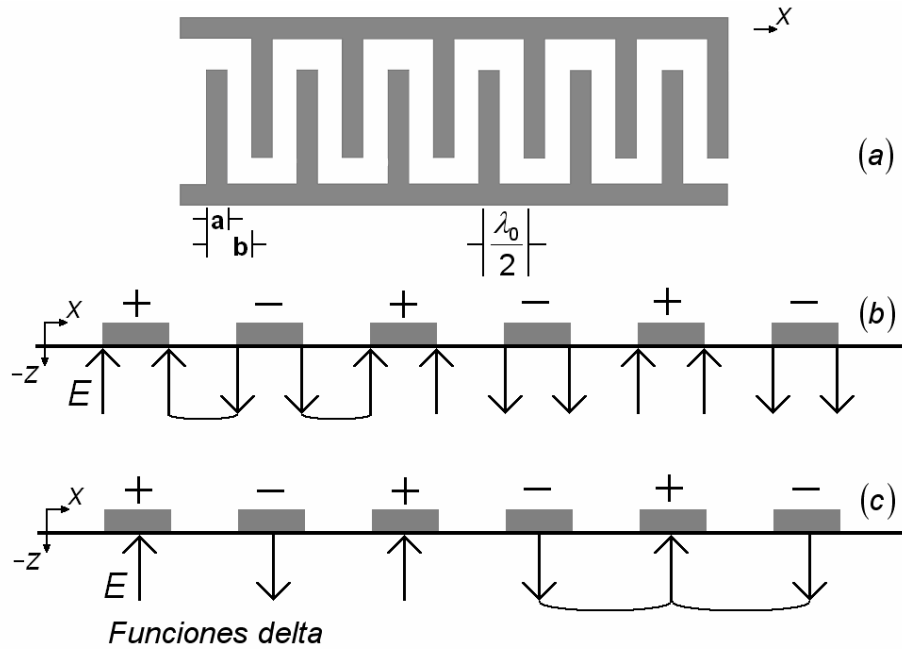


Figura 3.7.a. IDT bidireccional con espaciamiento uniforme. 3.7.b. Modelado función Delta del campo eléctrico E sobre el plano xz sobre los IDT's excitados. 3.7.c. Funciones delta utilizadas para representar cada una de las fuentes de campo. [22]

Todas las contribuciones de las funciones delta distribuidas pueden ser sumadas si se considera un punto de referencia en el espacio a lo largo del eje "x". Por facilidad se considera que el punto de referencia  $x = 0$  está en el centro del IDT, y que el IDT tiene un número impar de electrodos. Si se normalizan las amplitudes de las funciones delta  $|E_z| = 1$ , la sumatoria de las fuentes permite calcular la respuesta en frecuencia  $H_1(f)$ .

A pesar de que las amplitudes de las fuentes delta son constantes, sus contribuciones a la fase de la señal considerando como referencia el punto  $x=0$ , dependerá de su distancia  $x'$  de cada una de las fuentes. Los términos individuales de fase están dados por el término  $e^{-j\beta x_n}$ , para electrodos localizados en puntos discretos  $-x_N \leq x_n \leq +x_N$ . La respuesta en frecuencia resultante es:

$$H_1(f) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} (-1)^n A_n e^{-j\beta x_n} \quad 3.21$$



donde el término  $(-1)^n$  se relaciona a la polaridad alternante de los electrodos y  $A_n$  es la amplitud, que es proporcional al traslapamiento de cada par de electrodos. Si el traslapamiento es uniforme  $A_n = 1$ .

Si se considera  $A_n = 1$  y que  $N_p = (N-1)/2 \approx N/2$  para un número impar  $N$  grande o  $N_p = N/2$  para  $N$  par, la expresión anterior se puede aproximar para frecuencias cercanas a la frecuencia central como:

$$|H(f)| \propto \left| \frac{\sin[N_p \pi (f - f_o) / f_o]}{N_p \pi (f - f_o) / f_o} \right| \quad 3.22$$

Si la respuesta al impulso de un filtro SAW está dada por la función  $h(t)$  y su respuesta en frecuencia por  $H(f)$ , ambas están relacionadas por la transformada de Fourier y su inversa.

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.23),$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df \quad (3.24)$$

Si se desea obtener una respuesta en frecuencia ( $H(f)$ ) particular de un dispositivo de este tipo, por lo mencionado anteriormente, es posible conocer la función respuesta al impulso ( $h(t)$ ) y está puede ser utilizada para sintetizar la distribución geométrica de los electrodos. Dicha distribución se asemeja a una versión muestreada de la respuesta al impulso, convertida al dominio espacial.

Es particularmente útil para este propósito la transformada de Fourier directa e inversa que permiten relacionar a las funciones *sinc* con la respuesta del dispositivo ya sea en el dominio del tiempo o de la frecuencia. Por ejemplo, en la figura 3.8.a se muestran las transformadas de Fourier de una señal cuadrada y de una función *sinc* en bandabase. En la figura 3.8.b se muestran las transformadas de Fourier de las mismas funciones pero ahora trasladadas en la frecuencia (transformación pasobanda).

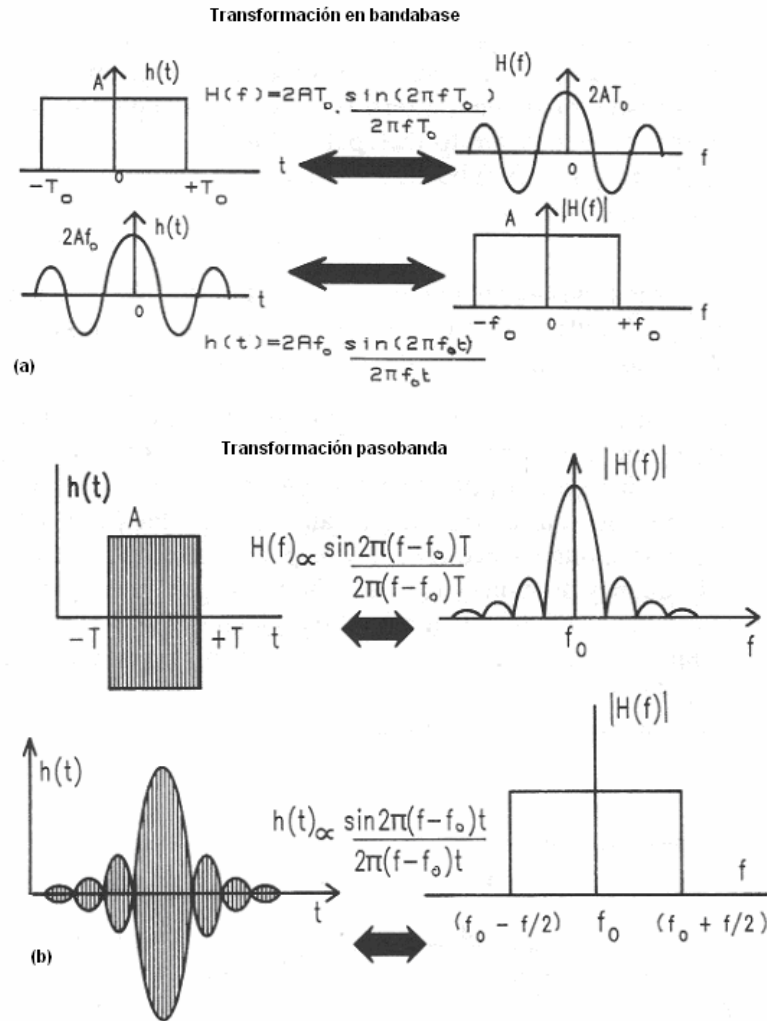


Figura 3.8. (a) Transformadas de Fourier en bandabase para las funciones cuadrada y *sinc*. (b) Transformadas de Fourier pasobanda para las mismas funciones. [22]

Se puede observar que en un filtro IDT, el patrón geométrico está directamente relacionado con la respuesta en frecuencia del dispositivo a través de la transformada de Fourier.

- *Modelos de campo cruzado y en línea*

Considérese un IDT compuesto por N secciones periódicas como se muestra en la figura 3.9. En un principio se deberían resolver las ecuaciones en la frontera para este tipo de configuración con el propósito de hallar una matriz de admitancias que relacione las cantidades eléctricas de un puerto y acústicas de los otros dos. Sin embargo, la solución de dichas ecuaciones es difícil, debido a que el problema es

bidimensional y el material en el cual están asentados los IDT's es un substrato piezoeléctrico anisotrópico.

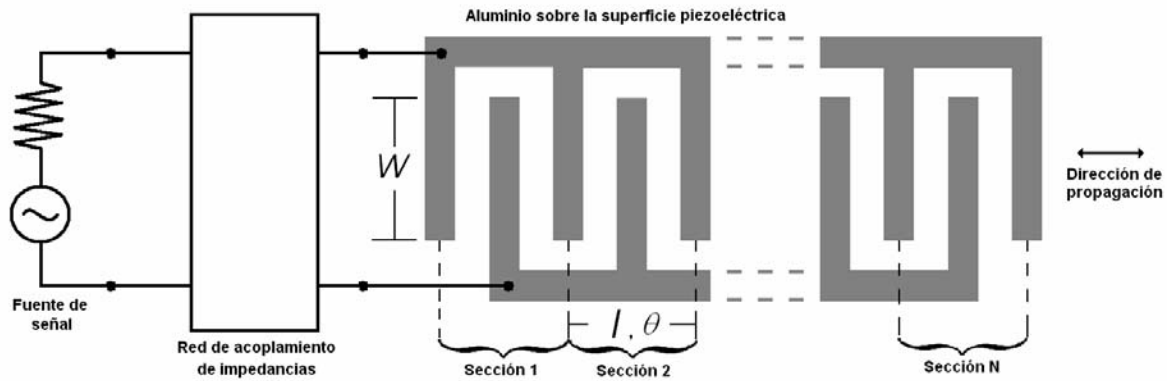


Figura 3. 9. Diagrama del IDT. [24]

Cómo una aproximación de primer orden, cada sección periódica del transductor interdigital puede modelarse por alguna de las configuraciones unidimensionales que se muestran en la figura 3.10.b y 3.10.c

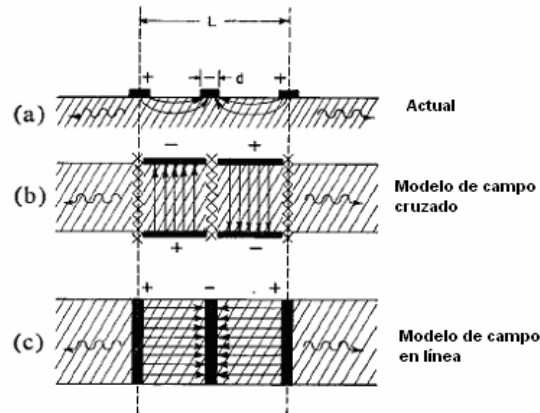


Figura 3.10. Vista lateral de un transductor interdigital, en donde se muestran los patrones de campo. (a) Distribución normal de un transductor. (b) Aproximación del “campo cruzado”. (c) Aproximación del “campo en línea”. [24]

Lo que se hace con estas aproximaciones es que el transductor IDT está representado por un transductor de ondas volumétricas conectado acústicamente en cascada y eléctricamente en paralelo, asegurándose que la alternancia del campo eléctrico necesaria ocurra.

El transductor tiene N secciones, cada una de una longitud L, de tal modo que el número total de electrodos es 2N+1. A cada sección, por analogía con un transductor de ondas volumétricas, se le asigna un circuito equivalente en el cual la constante de acoplamiento electromecánico tendrá un valor apropiado para las ondas acústicas superficiales. El circuito equivalente de todo el transductor está formado por los múltiples circuitos equivalentes en cascada y da la relación entre las señales de entrada en tres bipuertos (dos acústicos y uno eléctrico). Los parámetros necesarios son:

- El número de secciones N.
- La frecuencia síncrona  $f_0$ , es decir, la frecuencia para la cual la longitud de onda de la onda acústica superficial es igual a L.
- La capacitancia estática  $C_s$  por sección.
- La constante de acoplamiento piezoeléctrico  $k^2$ .

La capacitancia total del transductor es  $C_T = NC_s$ . El término  $C_s$  depende de la apertura W y es independiente de la periodicidad L.

Para el modelo de “campo cruzado”, el campo eléctrico aplicado es normal al vector de propagación de las ondas acústicas. El modelo de “campo en línea”, se caracteriza por que el campo eléctrico es paralelo al vector de propagación de la onda acústica. La analogía entre ambos modelos y la verdadera distribución de campo es apropiada, debido a que en la terminal eléctrica y las cantidades acústicas tienen el mismo signo y simetría física. Para un material piezoeléctrico con un corte y orientación dado, la elección entre ambos modelos se hace evaluando la contribución a las ondas de Rayleigh debido a los campos eléctricos perpendiculares y paralelos a la superficie ( $E_{\perp}$  y  $E_{\parallel}$  respectivamente). En particular, se considera la energía mutua almacenada por los campos acústicos y eléctricos. En notación vectorial está dada por:

$$W_m = \frac{1}{4} \int_V (T^* : d \cdot E + E^* : d \cdot T) dV \quad 3.25$$

donde d es la constante de tensión piezoeléctrica y T es la tensión elástica. La energía mutua almacenada puede ser expresada como  $W_m = W_{\perp} + W_{\parallel}$ , donde  $W_{\perp}$

y  $W_{\parallel}$  son las componentes de energía relacionadas a  $E_{\perp}$  y  $E_{\parallel}$ , respectivamente. La relación  $r = W_{\perp} / W_{\parallel}$ , es una medida relativa de la contribución de ambos campos sobre la onda acústica en ambas direcciones. Para  $r > 1$  se selecciona el modelo de “campo cruzado”, por el contrario, si  $r < 1$  se escoge el modelo de “campo en línea”. Según C. K. Campbell<sup>16</sup> se ha encontrado que el modelo de “campo cruzado” se ajusta mejor a los experimentos que el modelo de “campo en línea”, para IDT’s fabricados sobre substratos piezoeléctricos con una alta constante de acoplamiento  $K^2$ , como el niobato de litio; mientras que el modelo de “campo en línea” es aplicable a IDT’s diseñados en substratos como el cuarzo. Smith concluye que el modelo de “campo cruzado” representa adecuadamente a un transductor IDT construido sobre un substrato de niobato de litio en una configuración YZ, es decir, corte Y y Z como el eje de propagación de la onda acústica.

El transductor tiene N secciones, cada una de una longitud L, de tal modo que el número total de electrodos es  $2N+1$ . A cada sección, por analogía con un transductor de ondas volumétricas, se le asigna un circuito equivalente en el cual la constante de acoplamiento electromecánico tendrá un valor apropiado para las ondas acústicas superficiales. El circuito equivalente de todo el transductor está formado por los múltiples circuitos equivalentes en cascada y da la relación entre las señales de entrada en tres bipuertos (dos acústicos y uno eléctrico). Los parámetros necesarios son:

- El número de secciones N.
- La frecuencia síncrona  $f_0$ , es decir, la frecuencia para la cual la longitud de onda de la onda acústica superficial es igual a L.
- La capacitancia estática  $C_s$  por sección.
- La constante de acoplamiento piezoeléctrico  $k^2$ .

La capacitancia total del transductor es  $C_T = NC_s$  (3.26). El término  $C_s$  depende de la apertura W y es independiente de la periodicidad L.

---

<sup>16</sup> Campbell, C. K., Surface acoustic wave devices for mobile and wireless communications, San Diego: Academic Press, 1998, p. 113

Una ventaja importante de un modelo unidimensional es que cada sección periódica puede ser representada por un circuito equivalente de Mason. En la figura 3.11 se muestra dicho circuito. Partiendo de este modelo simple, es posible obtener equivalentes eléctricos de la fuerza  $F_i$  y la velocidad de la partícula  $U_i$  de las terminales acústicas. Estas equivalencias se expresan como:

$$\begin{aligned} e_i &= F_i / \phi \\ i_i &= U_i \cdot \phi \end{aligned} \quad 3.27$$

donde  $\phi = hC_s / 2$ , se interpreta como la relación de transformación de un transformador acústico-eléctrico. Ambas definiciones permiten expresar la impedancia acústica característica del sustrato  $Z_o$  en ohms eléctricos como:

$$R_o = \frac{Z_o}{\phi^2} = \frac{2\pi}{\omega_o C_s k^2} \quad 3.28$$

Para este modelo se utiliza la siguiente notación:  $L$  es la longitud de la sección periódica,  $A$  es el área transversal de la sección,  $V$  es la velocidad acústica,  $\rho$  es la densidad,  $Z_o = A\rho V$  (3.29) es la impedancia acústica,  $h$  es la constante piezoeléctrica,  $f_o = V / L$  es la frecuencia de sincronismo,  $\theta = 2\pi\omega / \omega_o$  es el tránsito angular por sección periódica,  $R_o$  es el equivalente eléctrico de  $Z_o$ ,  $C_s$  es la capacitancia de cada electrodo y  $k$  es la constante de acoplamiento electromecánico.

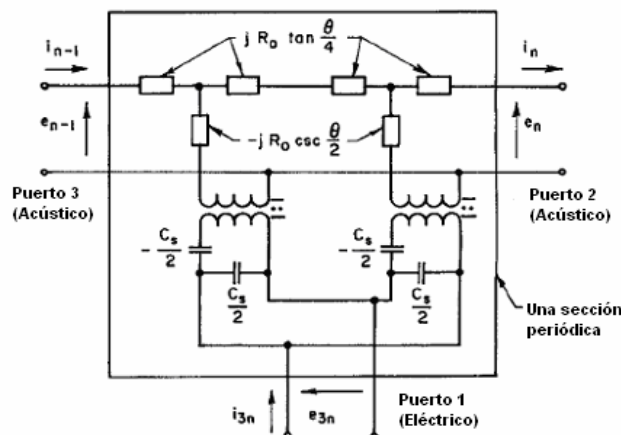


Figura 3.11. Circuito equivalente de Mason para una sección periódica. Los capacitores con signos menos se cortocircuitan para el modelo de “campo cruzado”. [24]

La capacitancia estática del electrodo por sección  $C_s$  puede calcularse o medirse experimentalmente. Más adelante se mencionará la forma en cómo debe calcularse.

En algunos casos es necesario mejorar la aproximación que ya se ha hecho de la constante de acoplamiento electromecánico ( $k^2$ ), mediante la introducción de una constante de proporcionalidad  $F$ , lo cual permite que  $k^2$  pueda expresarse como:

$$k^2 = 2F \left| \frac{\Delta V}{V} \right| \quad 3.30$$

Se ha encontrado que  $F = 1.0 \pm 0.2$  para transductores depositados en niobato de litio con un espaciamiento y anchos iguales<sup>17</sup>. Este resultado nos indica que el error que puede existir entre la constante de acoplamiento teórica y la medida experimentalmente puede ser de hasta un 20%.

Una vez que se ha establecido el circuito equivalente de una sola sección periódica del transductor es posible determinar la matriz de admitancias del transductor completo, considerando el diagrama de bloques de la figura 3.12.

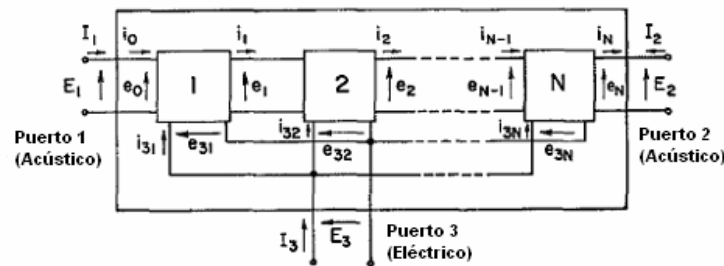


Figura 3.12. Diagrama de bloques del transductor compuesto por  $N$  secciones, acopladas acústicamente en cascada y eléctricamente en paralelo. [24]

La ecuación del transductor considerado como un tripuerto es:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = [Y] \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad 3.31$$

donde  $[Y]$  es la matriz de admitancias y tiene la siguiente forma:

<sup>17</sup> Smith, W. R., et. al., Analysis of interdigital surface wave transducers by use of an equivalent circuit model, *IEEE transaction on microwave theory*, MTT-17, no. 11, November 1969

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{12} & Y_{11} & -Y_{13} \\ Y_{13} & -Y_{13} & Y_{33} \end{bmatrix} \quad 3.32$$

La matriz  $[Y]$  tiene cuatro elementos independientes y es simétrica. Esto se debe a la bidireccionalidad acústica del dispositivo.

Los elementos de la matriz para el modelo de “campo cruzado” son:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= -jG_o \cot(N\theta) \\ Y_{12} &= jG_o \csc(N\theta) \\ Y_{13} &= -jG_o \tan\left(\frac{\theta}{4}\right) \\ Y_{33} &= j\omega C_T + 4jNG_o \tan\left(\frac{\theta}{4}\right) \end{aligned} \quad 3.33$$

donde  $G_o = R_o^{-1}$ ,  $N$  es la longitud del transductor medida en secciones periódicas y  $C_T = NC_s$  es la capacitancia total del transductor. Los elementos de la matriz para el modelo de “campo en línea” son:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= -S_{11} / S_{12} \\ Y_{12} &= 1 / S_{12} \\ Y_{13} &= \frac{-jG_o \tan\left(\frac{\theta}{4}\right)}{1 - 2X \tan\left(\frac{\theta}{4}\right)} \\ Y_{33} &= \frac{j\omega C_T}{1 - 2X \tan\left(\frac{\theta}{4}\right)} \end{aligned} \quad 3.34$$

donde  $X = 2G_o / \omega C_s$  y la matriz  $[S]$  está definida como:

$$[S] = \begin{bmatrix} \cos(N\theta) & -jR_o \sin(N\theta) \\ -jG_o \sin(N\theta) & \cos(N\theta) \end{bmatrix} \quad 3.35$$

Los parámetros de impedancias, transmisión y dispersión pueden calcularse utilizando la teoría general de circuitos.

Si se aplica un voltaje, una respuesta acústica máxima ocurrirá a la frecuencia de sincronismo o a frecuencias cercanas a ella. La matriz de impedancias para el modelo de “campo cruzado” cuando  $\omega = \omega_o$  es:



$$[Y] = \frac{j\omega_o C_s}{16} \begin{bmatrix} -\frac{1}{N} & \frac{1}{N} & 4 \\ \frac{1}{N} & -\frac{1}{N} & -4 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad 3.36$$

Para el modelo de “campo cruzado” los elementos de la matriz  $[Y]$  se vuelven infinitos cuando  $\omega = \omega_o$ , debido a que  $\theta = 2\pi$ . Sin embargo, la impedancia y función de transferencia obtenidas a partir de  $[Y]$  también se indeterminan, pero si  $\theta = 2\pi + \delta$  y se expande la matriz al primer orden en  $\delta$ , entonces la matriz para el modelo de “campo cruzado” es:

$$[Y] \cong \frac{jG_o}{\delta} \begin{bmatrix} -\frac{1}{N} & \frac{1}{N} & 4 \\ \frac{1}{N} & -\frac{1}{N} & -4 \\ 4 & -4 & -16N + \delta \frac{\omega C_T}{G_o} \end{bmatrix} \quad 3.37$$

Las matrices para ambos modelos son similares, sin embargo, difieren en el elemento  $Y_{33}$  y en la magnitud total.

La impedancia total del transductor se puede expresar como circuito en serie o en paralelo de una resistencia, una reactancia capacitiva y otra reactancia. La impedancia queda expresada como:

$$\begin{aligned} Z(f) &= [G_a(f) + jB_a(f) + j2\pi f C_T]^{-1} \\ &= R_a(f) + jX_a(f) + (j2\pi f C_T)^{-1} \end{aligned} \quad 3.38$$

donde  $G_a(f) = R_a(f)^{-1}$  la conductancia y  $B_a(f) = X_a(f)^{-1}$  es la susceptancia del transductor. Ambas se relacionan a través de la transformada de Hilbert y  $G_a(f)$  tiene un máximo en  $f = f_o$ .

La impedancia total del IDT en la frecuencia de sincronía  $\omega_o$ , puede estar representada por un circuito RC en serie o en paralelo, donde la capacitancia es la capacitancia total del transductor y la resistencia representa la disipación de energía en forma de ondas acústicas. Según Smith (1969), el desempeño del modelo de “campo cruzado” está mejor representado por el circuito en paralelo,

mientras que el modelo de “campo en línea” se asemeja mejor a un circuito serie. En la figura 3.13 se muestra la representación de los circuitos serie y paralelo de los transductores.

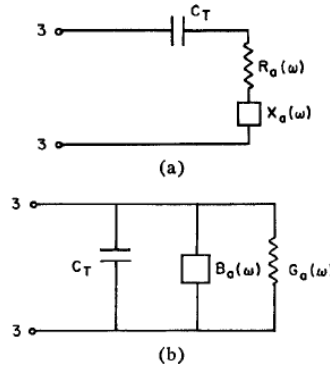


Figura 3.13. Representación serie (a) y paralelo (b) de las impedancias y admitancias eléctricas de entrada para el transductor. [24]

Cuando se considera que el transductor irradia en un medio de longitud infinita (no existe una señal reflejada hacia el transductor), en la práctica esto se logra de dos maneras, utilizando un pulso de RF de corta duración o colocando absorbedores de baja reflexión. Para el modelo de “campo en línea”, la impedancia eléctrica para la frecuencia de sincronía está dada por:

$$Z_3(\omega_o) = \left. \frac{E_3}{I_3} \right|_{\omega_o} = \hat{R}_a + \frac{1}{j\omega_o C_T} \quad 3.39$$

donde  $\hat{R}_a = R_a(\omega_o) = (4/\pi)k^2(1/\omega_o C_s)$  (3.40). Se observa que  $X_a(\omega_o)$  es cero, y que  $\hat{R}_a$  es independiente de  $N$ , es decir, la resistencia de radiación es independiente de la longitud del transductor, medida ésta según el número de secciones periódicas del transductor.

La admitancia para el modelo de “campo cruzado”, a la frecuencia de sincronía, está dada por:

$$Y_3(\omega_o) = \left. \frac{I_3}{E_3} \right|_{\omega_o} = \hat{G}_a + j\omega_o C_T \quad 3.41$$

donde  $\hat{G}_a = G_a(\omega_o) = (4/\pi)k^2(\omega_o C_s)N^2$ .  $B_a(\omega_o)$  (3.42) es cero y  $\hat{G}_a$  es proporcional a  $N^2$ .

Si se desprecian las pérdidas resistivas del IDT, en el modelo de “campo cruzado”, la admitancia de radiación en paralelo,  $G_a(\omega) + jB_a(\omega)$ , estará dada por las siguientes expresiones:

$$G_a(\omega) = 2G_o \left[ \tan \frac{\theta}{4} \sin \frac{N\theta}{2} \right]^2 \quad 3.43$$

$$B_a(\omega) = G_o \tan \frac{\theta}{4} \left[ 4N + \tan \frac{\theta}{4} \sin N\theta \right] \quad 3.44$$

donde  $\theta = \frac{2\pi\omega}{\omega_o}$ .

Para frecuencias cercanas a  $\omega_o$ , la admitancia puede aproximarse como:

$$\begin{aligned} G_a(\omega) &\cong \hat{G}_a \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \\ B_a(\omega) &\cong \hat{G}_a \left( \frac{\sin(2x - 2x)}{2x^2} \right) \end{aligned} \quad 3.45$$

donde  $x = N\pi(\omega - \omega_o)/\omega_o$ . Estas expresiones aproximadas tienen un error de exactitud del diez por ciento máximo para  $|(\omega - \omega_o)/\omega_o| < 0.2$ <sup>18</sup>.

Morgan<sup>19</sup> presenta las gráficas de conductancia y susceptancia para el circuito equivalente en paralelo considerando:  $N = 5$ ,  $k^2 = 0.043$  y  $\hat{R}_a = 50$ . Debido a que en el capítulo siguiente se utilizarán dichas expresiones para hacer el diseño del IDT, es necesario validar el método. En la figura 3.14 se reproducen los resultados obtenidos por Morgan y en la figura 3.15 se muestran los resultados que se obtuvieron al aplicar las expresiones 3.43 y 3.44. Ambos son iguales.

<sup>18</sup> Ídem

<sup>19</sup> Morgan, D. P., Surface acoustic wave devices and applications, *IEEE ultrasonics*, 11,1973

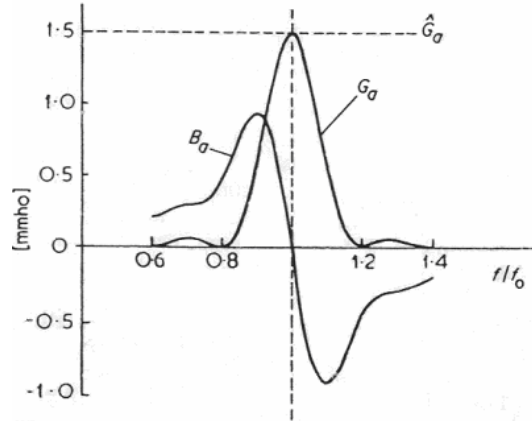


Figura 3.14. Admitancia del modelo de campo cruzado reportadas por Morgan. [25]

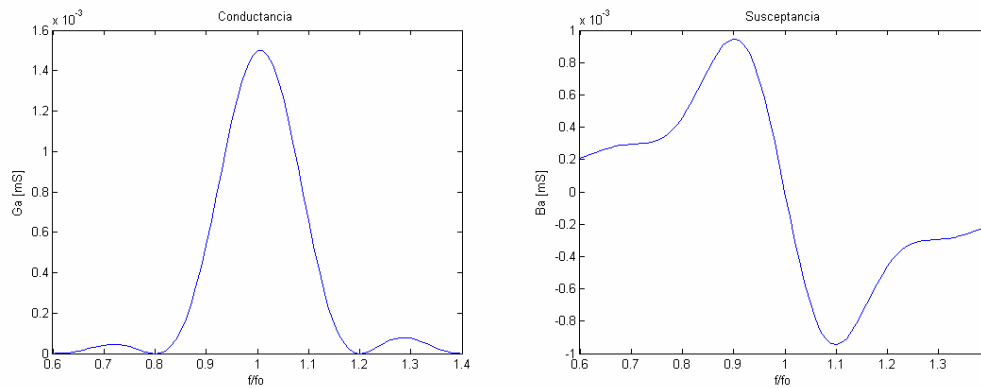


Figura 3.15. Gráficas obtenidas para el caso presentado por Morgan.

### 3.3.4 Determinación de la capacitancia estática ( $C_s$ ) de un IDT

Farnell<sup>20</sup> asegura que en el caso de que los electrodos se depositen en una superficie con una profundidad infinita, con polaridad alternada y sean delgados (el ancho del electrodo es despreciable con respecto a la longitud de onda de la señal), existe un intervalo dentro del cual la capacitancia tiene un comportamiento lineal con respecto a la permitividad eléctrica relativa del material. En la figura 3.16 se muestra la curva de la capacitancia para varios casos.

<sup>20</sup> Farnell, W. G., Cermak, I. A., Wong, S. K., Capacitance and field distributions for interdigital surface-wave transducers

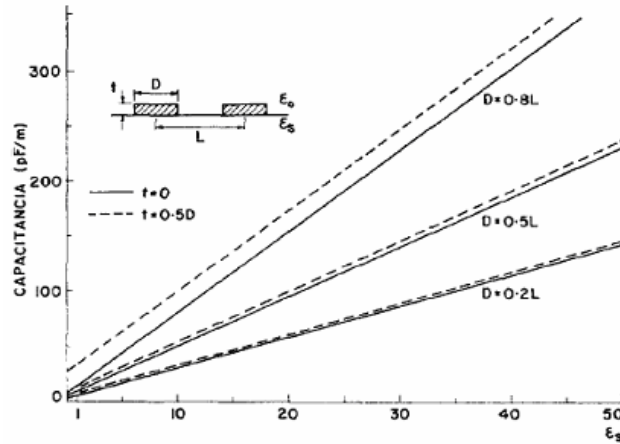


Figura 3.16. Capacitancia por metro de longitud de los electrodos con separación  $L$ .  $\epsilon_0=1$ . [26]

Las curvas de capacitancia para  $0.2 < D/L < 0.8$  y  $0.1 < \epsilon_s < 50$  son lineales, donde  $D$  es el ancho,  $t$  es el espesor y  $L$  es la distancia de centro a centro entre ambos electrodos. Las curvas para  $t=0$  se muestran en la figura 3.14 pueden aproximarse de manera empírica por medio de la siguiente expresión:

$$C_1 \left[ \frac{pF}{m} \right] = K(\epsilon_s + 1) \quad 3.46$$

donde  $K$  está dada por:

$$K = 6.5 \left( \frac{D}{L} \right)^2 + 1.08 \left( \frac{D}{L} \right) + 2.37 \quad 3.47$$

Si la permitividad eléctrica del medio superior es diferente a la del vacío, entonces los valores de la ordenada (capacitancia por unidad de longitud) se multiplican por la permitividad relativa del medio y la abscisa se lee como la relación entre la permitividad relativa del substrato y la del medio superior.

### 3.3.5 Permitividad eléctrica efectiva.

Para calcular la capacitancia de los transductores interdigitales, según el método de Farnell, se consideró que el medio correspondiente al semiplano inferior (donde están apoyados los IDT) es un material isotrópico; sin embargo, ya se mencionó que un material piezoeléctrico siempre es anisotrópico, por tanto, es necesario obtener una permitividad eléctrica efectiva.

Considerando la distribución de los campos eléctricos en el IDT según los métodos presentados por Morgan, se puede afirmar que una buena aproximación de la permitividad eléctrica efectiva está dada por:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_u + \varepsilon_p \quad 3.48$$

donde  $\varepsilon_u$  es la permitividad eléctrica del semiplano superior, comúnmente  $\varepsilon_u = \varepsilon_o$

y  $\varepsilon_p = \sqrt{\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{13}^2}$ . Entonces la permitividad efectiva puede expresarse como:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_o + \sqrt{\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{13}^2} \quad 3.49$$

### 3.3.6 Interacción de ondas electroacústicas y una superficie conductora

Según la expresión 3.30, el coeficiente de acoplamiento piezoeléctrico es proporcional al cambio de velocidad que sufre una onda acústica superficial cuando ésta se propaga en un medio piezoeléctrico, cuando su superficie se encuentra cortocircuitada y cuando la onda electroacústica se propaga libremente a través del material. Como se puede observar en la ecuación 3.42, éste es un parámetro importante en la operación de un IDT. Por esta razón surgió la necesidad de calcular dicho coeficiente de una manera teórica, debido a que calcularlo de manera experimental requería de fabricar un cristal con sus electrodos, para hacer esto se debía invertir recursos y tiempo, además que la información obtenida era pobre. Para resolver este problema J. J. Campbell<sup>21</sup> (1968) realizó un estudio, en el que considera una superficie conductora y sobre ella; a una distancia  $h$ , un conductor perfecto, ambos con una longitud infinita. En la figura 3.17 se muestran ambas regiones y la orientación de los ejes seleccionada por el autor.

---

<sup>21</sup> Campbell, J. J., et. al., A method for estimating optimal cristal cuts and propagation directions for excitation of piezoelectric surfaces waves, *IEEE Trans Sonics and ultrasonics*, 1969

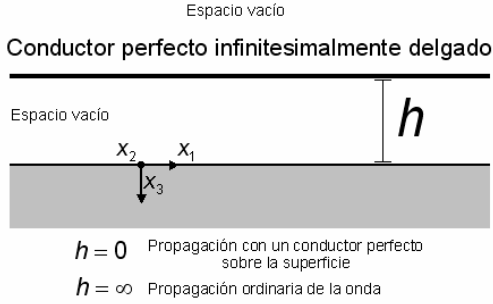


Figura 3.17. Conductor perfecto localizado a una distancia  $h$  del substrato piezoeléctrico. [12]

El análisis se considera que la velocidad de las ondas acústicas que se propagan por el medio piezoeléctrico es mucho menor que la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío, y por lo tanto, son válidas las ecuaciones de Maxwell para el caso electrostático.

Las ondas acústicas que se propagan en el medio piezoeléctrico deben de cumplir con la ecuación de ondas elásticas en medios piezoeléctricos homogéneos y con la ecuación de conservación de la carga en un medio piezoeléctrico (ecuaciones 2.10), y al mismo tiempo, se debe satisfacer las ecuaciones de Maxwell en la región de espacio vacío ubicada entre ambos materiales. En la expresión 3.50 se muestran las ecuaciones principales y las regiones en las que han de satisfacerse:

$$\left. \begin{aligned} c_{ijkl} \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_j \partial x_i} + e_{kij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} &= \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} \\ e_{ikl} \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_j \partial x_i} - \varepsilon_{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} &= 0 \end{aligned} \right\} j = 1,2,3, \quad x_3 > 0 \quad 3.50$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad -h \leq x_3 \leq 0$$

en donde  $\varphi$  es la función de potencial eléctrico, la cual se relaciona con el campo eléctrico mediante  $\bar{E} = -\nabla \varphi$ . Si se substituye  $\bar{E}$  en la ecuación de Maxwell  $\nabla \cdot \bar{E} = 0$  (espacio vacío) se obtiene la tercera de las ecuaciones anteriores.

Si se considera que las ondas viajeras son del tipo superficial e independientes de  $x_2$ , estas tienen una representación matemática del siguiente tipo:

$$\begin{aligned} U_i &= \beta_1 e^{-\alpha \omega x_3 / V_s} e^{i\omega(t - x_1 / V_s)} \\ \varphi &= \beta_4 e^{-\alpha \omega x_3 / V_s} e^{i\omega(t - x_1 / V_s)} \end{aligned} \quad 3.51$$

Substituyendo las expresiones anteriores (3.51) en las ecuaciones de onda, de conservación de la carga y la ecuación de Maxwell (3.50), y considerando las condiciones de la frontera para  $X_3 = 0$ , es posible obtener una ecuación trascendente cuya solución determina la velocidad de la onda acústica superficial para un medio piezoeléctrico con características elásticas, piezoeléctricas y permitividad eléctrica conocidas, siempre que sean expresadas de forma tensorial. Utilizando la matriz de rotación de Euler es posible transformar los tensores del material para calcular la velocidad de la onda en caso de que el cristal estuviera orientado en una dirección diferente.

Campbell utilizó como material de prueba al Niobato de Litio y presenta graficas de velocidad de la onda contra la dirección de propagación para diferentes cortes del cristal. En las figuras 3.18.a, b y c se reproducen las gráficas de velocidad que presenta Campbell en su artículo para los cortes Z, Y y X, respectivamente. Este método permite calcular la velocidad de la onda acústica para cualquier altura a la que se encuentre ubicada la superficie conductora.



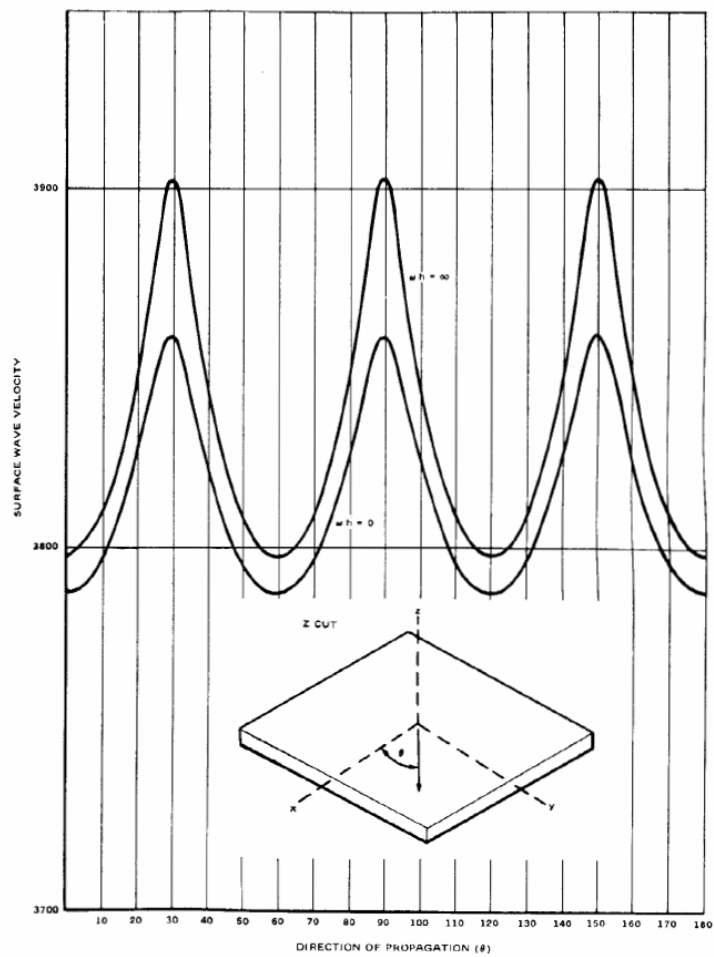


Figura 3.18.a. Velocidad vs. Dirección de propagación obtenida por Campbell para el corte Z. [12]

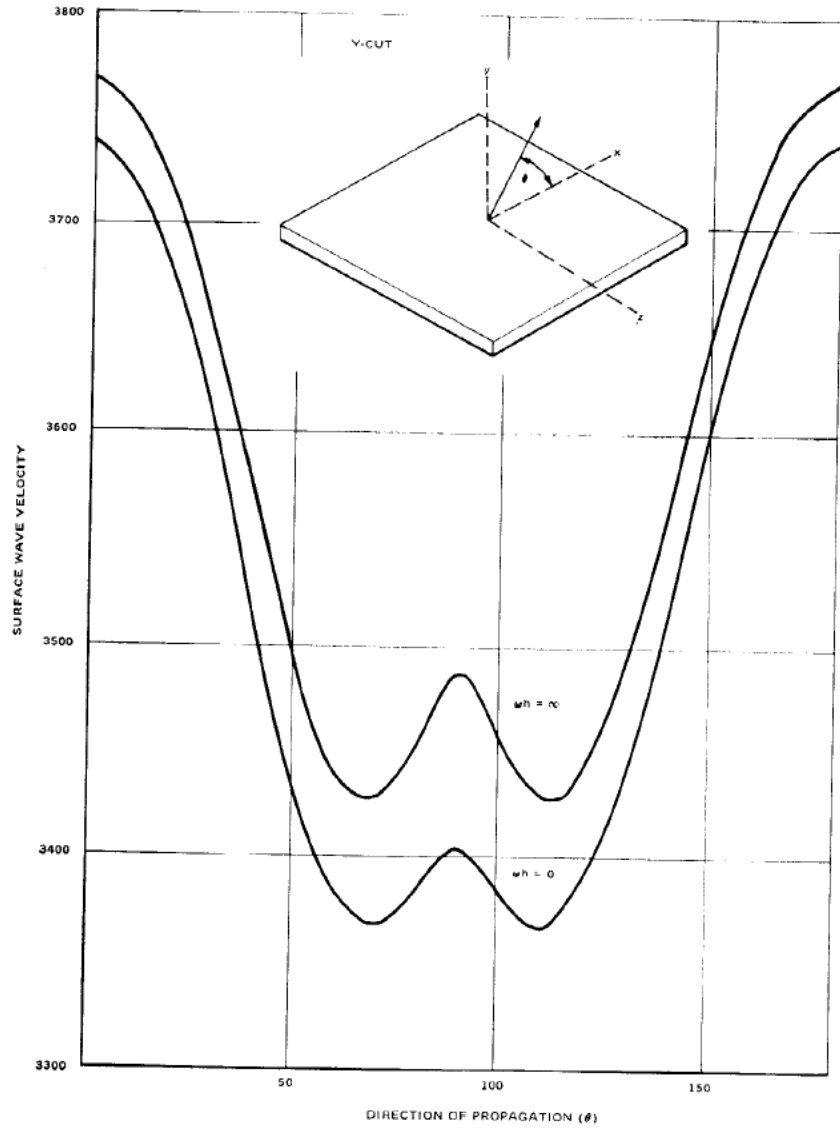


Figura 3.18.b. Velocidad vs. Dirección de propagación obtenida por Campbell para el corte Y. [12]

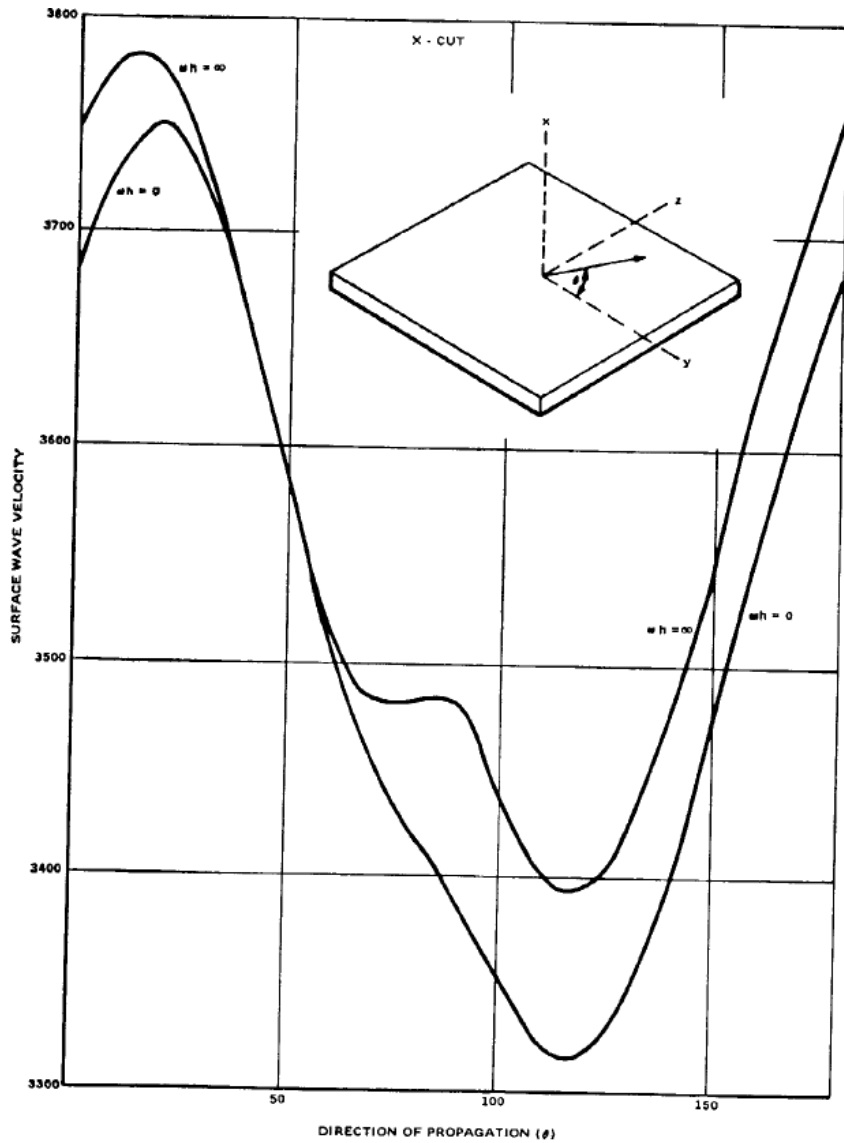


Figura 3.18.c. Velocidad vs. Dirección de propagación obtenida por Campbell para el corte X. [12]

Cuando el parámetro  $\omega h$  cambia, la velocidad de la onda SAW se modifica. Esta variación de la onda ocurre de una manera asintótica. En la figura 3.19. se muestra la gráfica que presenta Campbell para un corte X, con una orientación de  $100^\circ$ , desde  $\omega h = 0$  y  $\omega h \rightarrow \infty$ . En el capítulo 4 se explicará la forma en que esta cualidad del método se utilizó para analizar al microacelerómetro.

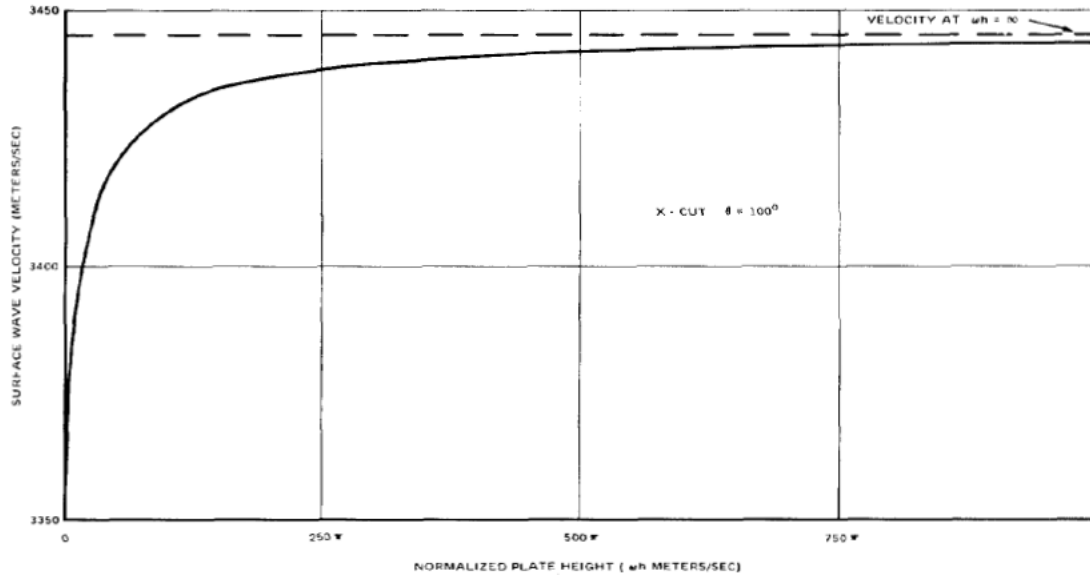


Figura 3.19. Velocidad SAW vs.  $\omega h$  [12]

### 3.4 Otras estructuras SAW importantes

#### 3.4.1 Rejilla de reflexión

Estos dispositivos tienen la finalidad de reflejar las ondas acústicas superficiales. Constan de un arreglo de electrodos cortocircuitados entre sí. Si la periodicidad de la estructura es igual a la mitad de la longitud de onda de la señal, la señal reflejada de cada uno de los electrodos individuales tiene la misma fase, por tanto, se suman coherentemente. Se obtienen fuertes coeficientes de reflexión cuando se cumple que  $N|r_s| > 1$ , donde N es el número de electrodos y  $r_s$  es el coeficiente de reflexión de un solo electrodo. El objetivo de este tipo de estructuras es obtener altos coeficientes de reflexión, a cambio de sacrificar el ancho de banda del dispositivo. La reflexión es fuerte sólo sobre un ancho de banda dado por  $\Delta f / f_0 \approx 2|r_s| / \pi$ .

#### 3.4.2 Transductores interdigitales de electrodos dobles.

En los transductores reales existe un mecanismo de reflexión, además del generado por la carga eléctrica conectada a los transductores. Cada electrodo refleja débilmente, sin embargo, dichas reflexiones se vuelven significativas si estas se suman en fase. En un transductor de electrodos individuales, la longitud

de onda central del dispositivo está dado por  $\lambda_0 = 2p$ , donde  $p$  es la separación entre dos electrodos consecutivos. Las reflexiones se suman en fase a esta frecuencia. Un método común de eliminar este problema es usar un transductor de electrodos dobles. En este caso los electrodos se encuentran dispuestos por pares y la separación entre cada electrodo es  $p = \frac{\lambda_0}{4}$ .

## Capítulo 4

### Acelerómetros SAW y MEMS

La combinación de MEMS-IDT es una técnica reciente que se ha empleado poco hasta la fecha. Este tipo de tecnología ofrece ventajas significativas sobre otros dispositivos MEMS convencionales, por ejemplo, mejor sensibilidad, procesos de fabricación más sencillos, mayor robustez y durabilidad<sup>1</sup>.

Un dispositivo MEMS-IDT está compuesto por una superficie piezoeléctrica, por la cual se propagan las ondas SAW; con uno o varios IDT en su superficie, que se encargan de generar y transformar las ondas SAW en señales eléctricas; y una estructura MEMS. El principio de estos sensores está basado en el hecho de que el tiempo que tardan en viajar las ondas desde el IDT sobre la superficie piezoeléctrica cambia con la variación de las variables físicas<sup>2</sup>. Los IDT's son dispositivos reversibles, es decir, si se aplica una tensión entre las terminales del IDT se genera una onda acústica superficial, del mismo modo, si se aplica una onda acústica sobre un IDT se produce una señal eléctrica, por esta razón estos dispositivos son eficaces para transformar energía acústica en energía eléctrica, lo que permite interactuar con dispositivos electrónicos. Considerando que las características de la onda acústica pueden variar con respecto a una variable física determinada, entonces, es posible medirla a través de estos dispositivos.

#### **4.1 Acelerómetro SAW-MEMS realimentado**

Este tipo de acelerómetro funciona con la configuración de una línea de retardo, es decir, sobre la superficie piezoeléctrica se encuentran dos IDT en oposición, uno de ellos funciona como transmisor de ondas acústicas, mientras que el otro opera como receptor. Ambos se encuentran conectados a un amplificador de RF,

---

<sup>1</sup> Gardner, J., W., *Microsensors, MEMS and smart devices*, John Wiley & Sons., USA, 2001, p. 397

<sup>2</sup> Varadan, V, et. al., Fabrication, characterization and testing of wireless MEMS-IDT based microaccelerometers, *Elsevier, Sensor and actuators A*, 90, 7-19, 2001

el IDT receptor se encuentra conectado a la entrada del amplificador; mientras que la salida de éste, al IDT transmisor. En la figura 4.1 se muestra ésta forma de conexión, a través de ella se logra una retroalimentación positiva sobre el amplificador que lo hace oscilar a la frecuencia síncrona de los IDT. Es importante señalar que ambos IDT's deben tener igual construcción para que un cambio en la velocidad de fase de la onda este relacionado con un cambio en la frecuencia de oscilación por la siguiente expresión<sup>3</sup>:

$$\frac{\Delta v}{v_R} = \frac{\Delta f}{f_o} \quad 4.1$$

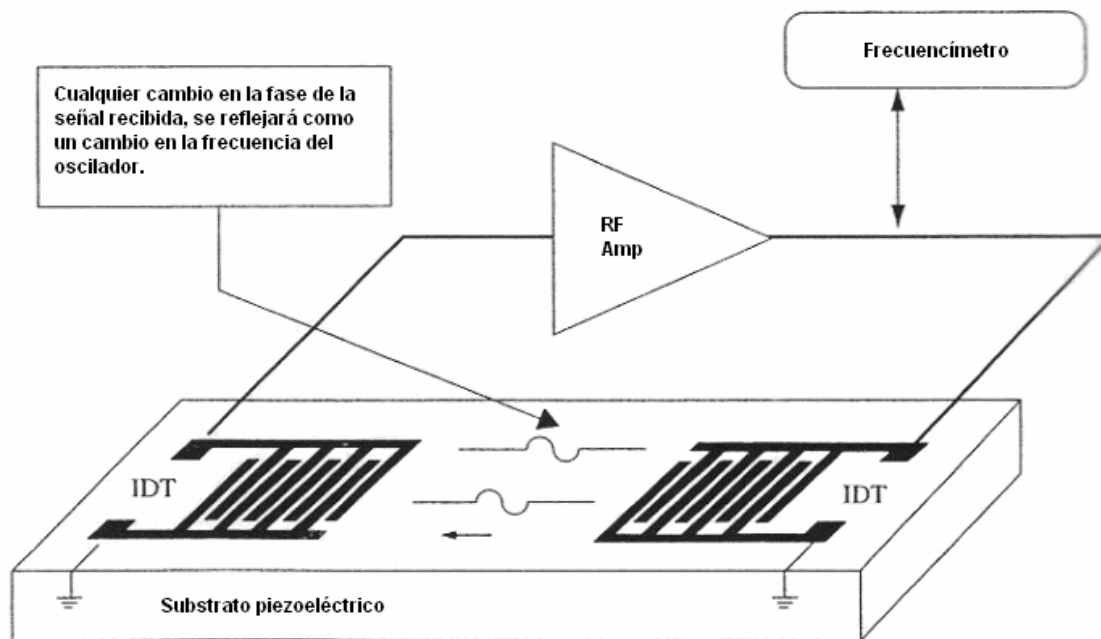


Figura 4.1. Elementos de un sensor en configuración retroalimentada. [3]

En la figura 4.1, si en la región que se encuentra entre ambos IDT's se coloca una estructura MEMS (masa sísmica), con características mecánicas precisas para que haga cambiar la velocidad de propagación de las ondas SAW en el sustrato piezoeléctrico, es posible determinar la aceleración de la estructura a través de cambios en la frecuencia del oscilador. Dicha estructura puede ser una barra, o mejor aún, una estructura como la que se analiza en la sección 4.2 de este

<sup>3</sup> Gardner, J., W., *Microsensors, MEMS and smart devices*, John Wiley & Sons., USA, 2001, p. 310.

capítulo y debe ser de un material conductor<sup>4</sup>. Este dispositivo opera como un VCO, en donde la señal de control es una señal de aceleración.

#### **4.2 Acelerómetro SAW-MEMS de operación remota**

Este sistema está compuesto por una antena receptora, que se encarga de recibir las señales de RF que excitarán al dispositivo; un circuito de acoplamiento de impedancias, en caso de ser necesario acoplar la impedancia de la antena con la del IDT; un IDT que actúa como receptor y transmisor, los absorbedores y la estructura micromecánica. En la figura 4.2 se muestra la estructura propuesta por Varadan.

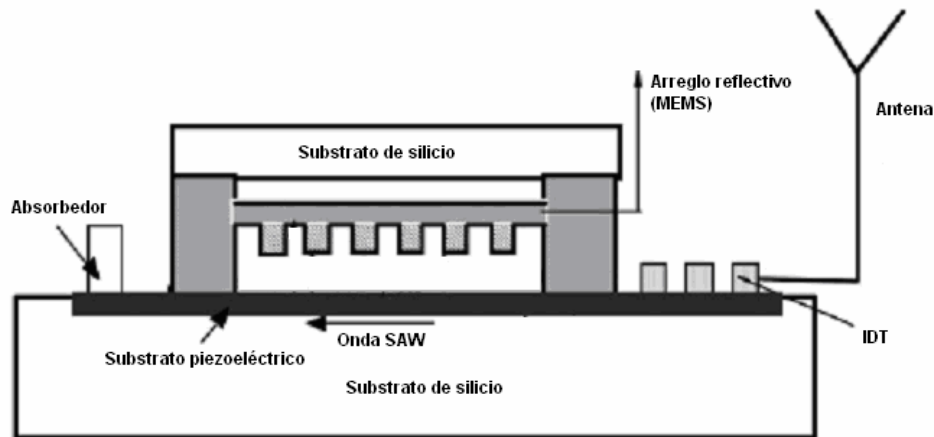


Figura 4.2. Partes constitutivas del acelerómetro. [9]

Para explicar el funcionamiento del sistema es necesario construir modelos de cada una de las partes que lo constituyen, de tal forma que se pueda explicar cómo funciona cada una de ellas y una vez conocido su desempeño individual, poder establecer un modelo completo del sistema. En el capítulo 2 se habló de las estructuras mecánicas y sus características dinámicas, y en el capítulo 3 se trató sobre los diferentes modelos que se han desarrollado para aproximar la respuesta de los IDT's; en este capítulo se encontrará un modelo completo del sistema que permita obtener una señal de salida a partir de una señal de aceleración

<sup>4</sup> Campbell, J. J., et. al., *A method for estimating optimal crystal cuts and propagation directions for excitation of piezoelectric surface waves*, IEEE Trans Sonics and ultrasonics.



Considerando que un IDT puede modelarse como un tripuerto y que la estructura MEMS se puede considerar como un bipuerto, cuyos coeficientes varían en función de la señal de entrada (aceleración), entonces, el diagrama esquemático de este acelerómetro se muestra en la figura 4.3. En dicha figura podemos distinguir la antena del sistema (fuente pulsada de RF) y su circuito de acoplamiento (en caso de estar presente) representados por  $Z_s$ ;  $R_{a1}$  y  $R_{a2}$  son las impedancias de los absorbedores localizados en ambos extremos del substrato piezoeléctrico, la señal de aceleración está representada por una fuente y el puerto del IDT está conectado al puerto que modela a la estructura MEMS.

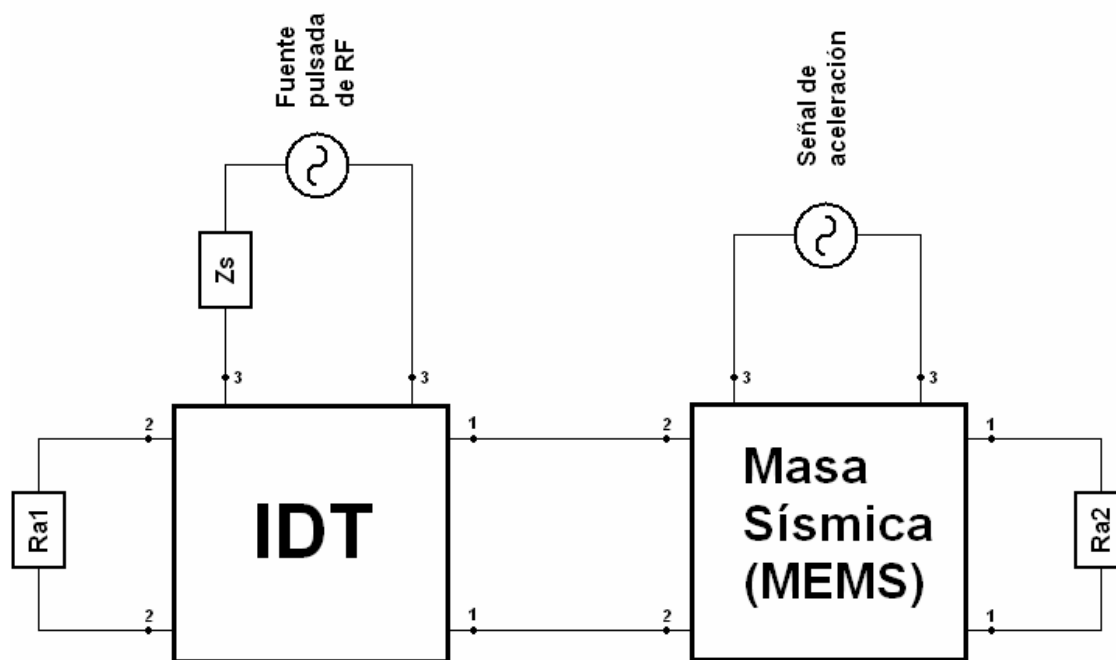


Figura 4.3. Diagrama a bloques del acelerómetro.

#### 4.2.1 Validación del método de Campbell

Como se verá en la sección 4.2.3, para hacer el análisis del microacelerómetro era necesario contar con una herramienta confiable que permitiera calcular la velocidad de propagación de una onda Rayleigh, sin importar el material, el corte del cristal, la orientación y la altura a la cual se encuentre la placa conductora.

Para resolver las ecuaciones planteadas por Campbell se desarrolló un programa computacional en Matlab que permitió reproducir los resultados reportados. En las

figuras 4.4.a, b y c se muestran los resultados obtenidos por el programa desarrollado.

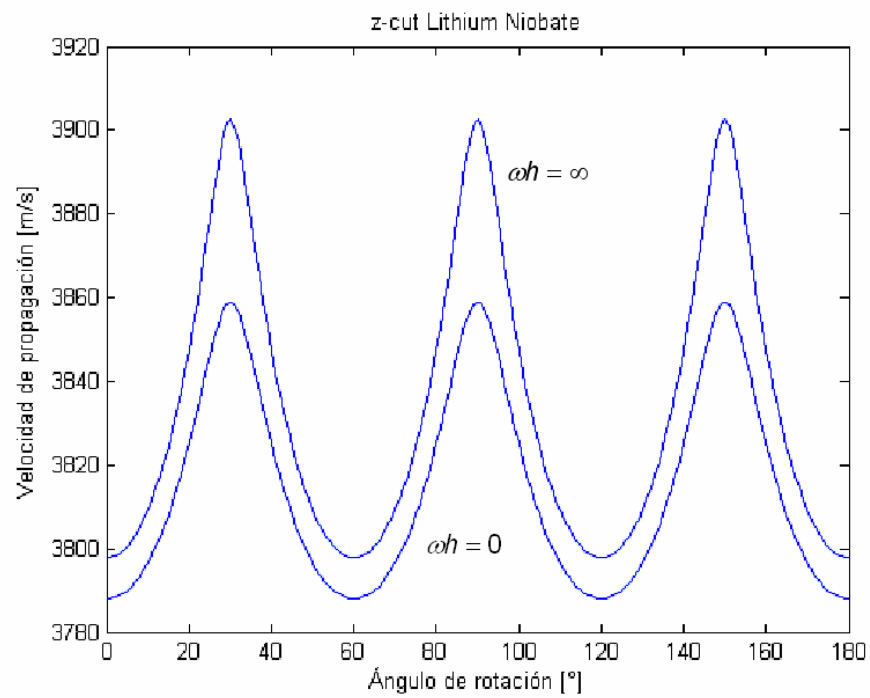


Figura 4.4.a. Velocidad vs. Dirección de propagación obtenida con el programa desarrollado para el corte Z.

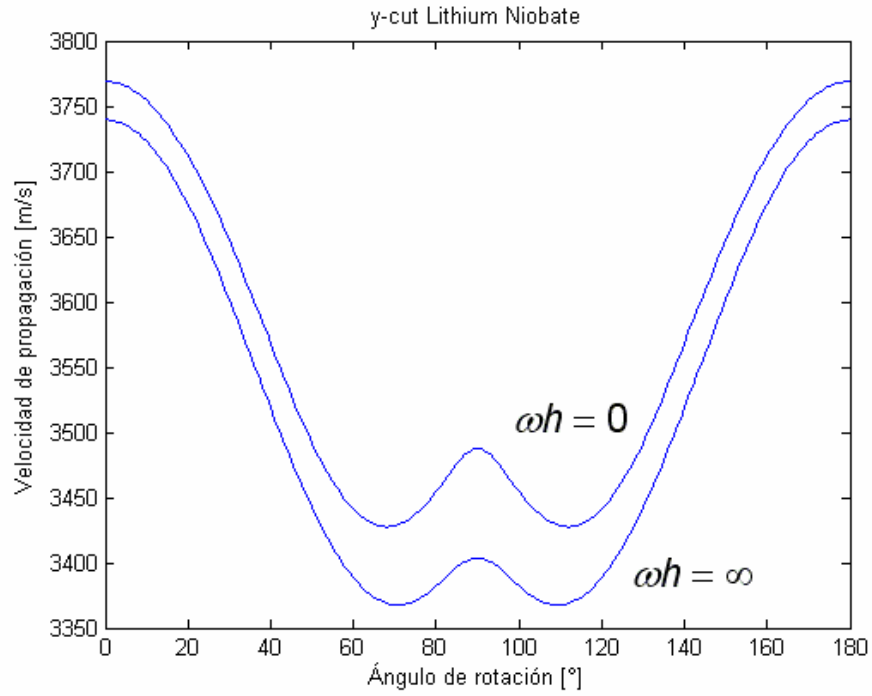


Figura 4.4.b. Velocidad vs. Dirección de propagación obtenida con el programa desarrollado para el corte Y.

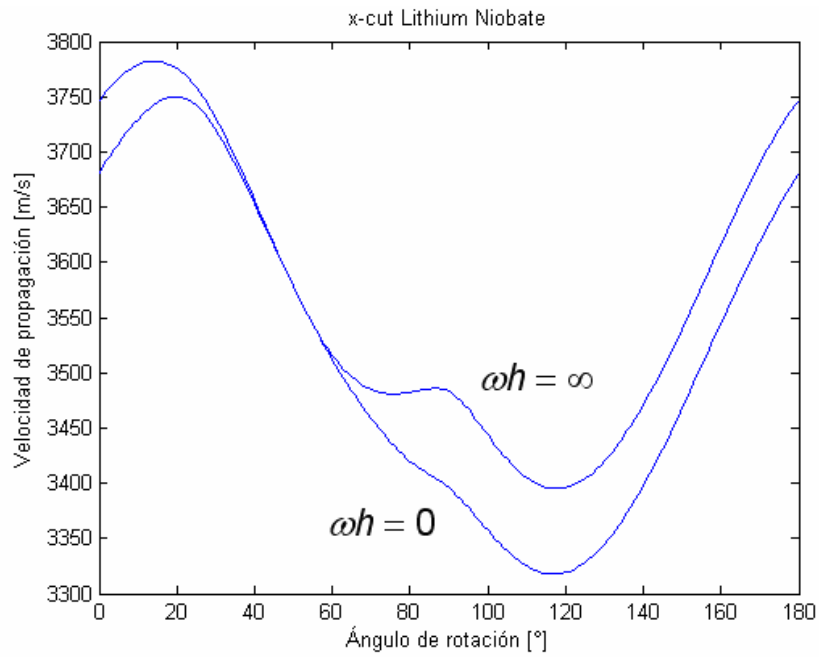


Figura 4.4.c. Velocidad vs. Dirección de propagación obtenida con el programa desarrollado para el corte X.

En la tabla 4.1 se muestran las velocidades y la constante de acoplamiento calculadas a partir del método de Campbell y los mismos datos que han sido reportados por otros autores, para diferentes cortes y direcciones de propagación.

Fuente	Corte	Dirección de propagación	Constante de acoplamiento $k^2$ (%)	Velocidad (m/s)
Método de Campbell	Y	Z	4.94	3488
Grant <sup>5</sup>	Y	Z	4.3	3448
Gardner <sup>6</sup>	Y	Z	4.5	3458
Matthews <sup>7</sup>	Y	Z	4.5	3488
Smith <sup>8</sup>	Y	Z	4.94	3472

Tabla 4.1. Constantes de acoplamiento y velocidades de propagación reportadas para el niobato de litio en diferentes cortes.

De la tabla 4.1 se observa que para el corte Y, con dirección de propagación Z, el error máximo para el coeficiente de acoplamiento que se obtuvo entre el método de Campbell y los demás datos presentados es menor al 20%. De los cuatro datos de velocidad, tres tienen una diferencia menor al 1%, siendo el error máximo sólo del 1.1 %. Las diferencias en las mediciones pueden estar relacionadas con la metodología utilizada durante la experimentación.

Las gráficas de velocidad de la SAW vs. orientación (Figuras 4.4) son importantes debido a que permiten determinar la orientación de los transductores interdigitales, para obtener una constante máxima de acoplamiento piezoeléctrico ( $k$ ). La gráfica de velocidad vs.  $\omega h$  sirve para determinar las dimensiones de la estructura MEMS. En las secciones siguientes se detallan estos puntos.

Si se considera un sistema compuesto por un sustrato y una o más películas delgadas, es posible extender el método propuesto por Campbell, siempre y cuando se satisfagan las siguientes condiciones de frontera:

<sup>5</sup> Grant, P. M., Adam, J. D., Collins, J. H., Surface wave device applications in microwave communication systems, *IEEE transaction of communications*, vol com 22, no. 9, 1974

<sup>6</sup> Gardner, Julian, W., *Microsensors, MEMS and smart devices*, John Wiley & Sons., USA, 2001

<sup>7</sup> Matthews, H., *Surface wave filters*, John Wiley & Sons, USA, 1977

<sup>8</sup> Smith, Design of surface wave delay lines with interdigital transducers, *IEEE Transactions of microwave theory*, vol. MTT-17, no. 11, 1969

- $T_{3j}$  debe ser cero para la superficie libre superior.
- $T_{3j}$  deben ser iguales entre cada una de las capas.
- $U_i$  deben ser iguales entre cada una de las capas y deben ser continuos.

Aplicando estas condiciones resulta un sistema de ecuaciones homogéneo de seis por seis, y al resolverlo de tal manera que su determinante sea cero, se obtiene el valor de la velocidad de propagación de las ondas Rayleigh. Satoshi ha expandido este método y ha obtenido los resultados de las velocidades de propagación en estructuras ZnO/diamante/Si<sup>9</sup>. El diamante se ha utilizado con la finalidad de obtener velocidades de propagación muy elevadas con la finalidad de obtener dispositivos SAW que operen en frecuencias de varios GHz.

#### 4.2.2 Algunos resultados obtenidos con el método de Campbell para otros materiales

Desde que se inició el desarrollo de los transductores interdigitales, la variedad de materiales empleados para la fabricación de estos dispositivos ha ido en aumento. Algunos de los materiales que se utilizan con mayor frecuencia son: el niobato de litio ( $LiNbO_3$ ), tantalato de litio ( $LiTaO_3$ ), tetraborato de litio ( $Li_2B_4O_7$ ) y el cuarzo. Sin embargo, también se han probado con otros materiales como: fosfato de galio, langasita, langanato, langatato, tetraborato de litio y el niobato de potasio, entre otros.

Durante el desarrollo de este trabajo, además del niobato de litio, se ha probado el método de Campbell para materiales como: tantalato de litio, langasita y niobato de potasio.

Este último material es de especial interés debido a que presenta una constante de acoplamiento piezoeléctrico muy elevada<sup>10</sup>, en comparación con otros materiales, además de que tiene un coeficiente de temperatura (TCF) de cero a temperatura ambiente<sup>11</sup>. Este material presenta un coeficiente de acoplamiento

---

<sup>9</sup> Nakahata F., Satoshi F., Theoretical study on SAW characteristics of layered structures including a diamond layer, *IEEE transactions on sonics and ultrasonics*, 1995

<sup>10</sup> Odagawa, H., Yamanouchi, K., Super high electromechanical coupling and zero temperature characteristics of  $KNbO_3$  and its applications for low-loss wide band filters, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.*, 46, 700-705 (1999)

<sup>11</sup> Ídem.

piezoeléctrico alrededor de 10 veces mayor que en el niobato de litio para un corte Y, rotado 30°, y el eje de propagación en la dirección X; sin embargo, según Zhang<sup>12</sup>, la constante de acoplamiento máxima para este material es:  $k^2 = 0.53$ , para un corte Z (0°) con ondas acústicas SH. Lo anterior muestra la existencia de una discrepancia entre Odagawa y Zhang, mientras el primero sugiere que la constante de acoplamiento piezoeléctrico  $k^2 = 0.53$  se alcanza para ondas Rayleigh en un corte Y, rotado 60°; el segundo autor nos indica que dicho coeficiente se alcanza para un corte Z y ondas de tipo SH. En la figura 4.5 se muestran las velocidades de propagación que se obtuvieron para un corte Y rotado 60° al aplicar el método de Campbell.

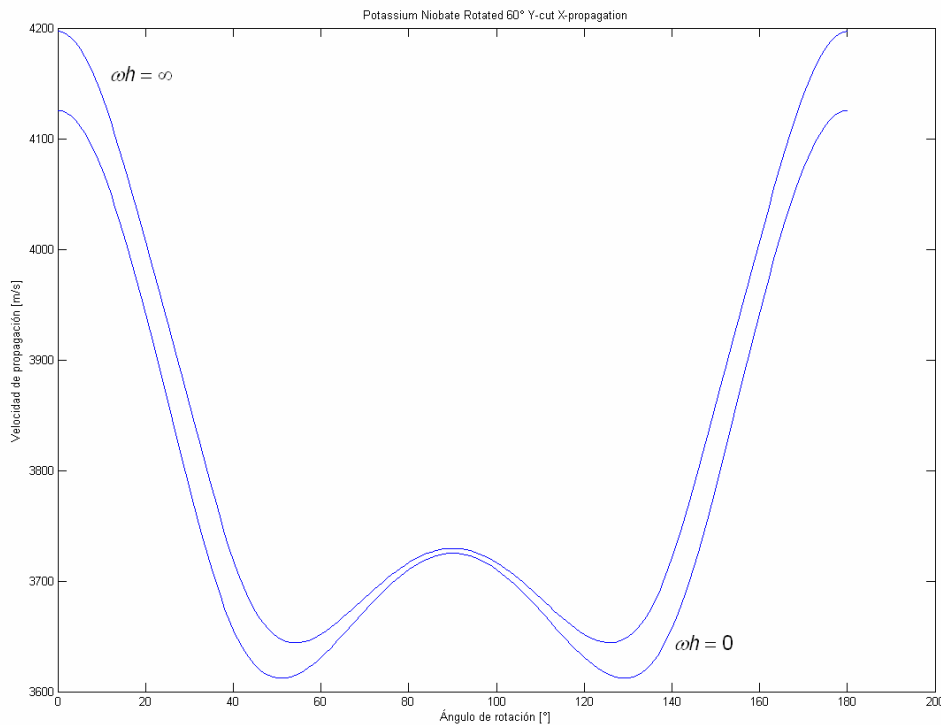


Figura 4.5. Velocidades de propagación obtenidas al aplicar el método de Campbell para un corte Y rotado 60°.

Los resultados obtenidos durante la etapa de diseño de este proyecto, para este material y corte (figura 4.5), no coinciden con los datos presentados por Odagawa.

<sup>12</sup> Zhang, C., Caron, J. J., Vetelino, J. F., The Bleustein-Gulyaev wave mode in potassium niobate for liquid sensing applications, *IEEE ultrasonics symposium*, 2000

Resulta que para dicho corte la constante de acoplamiento piezoeléctrico no es mayor que para materiales como el niobato de Litio. Por esta razón y las contradicciones encontradas entre ambos autores, este material no se seleccionó como material de trabajo, a pesar de haber sido reportado con características recomendables para aplicaciones SAW. Queda para un trabajo posterior aclarar esta diferencia. Aunque no existieran ondas Rayleigh con las propiedades que indica Odagawa, este material podría ser utilizado al trabajar con otro tipo de ondas (SH).

#### 4.2.3 Reflexión y transmisión de ondas acústicas

En la sección anterior se mencionó que cuando una onda SAW viaja en un medio piezoeléctrico y sobre ella se localiza a una altura  $h$  una placa conductora la velocidad de la onda depende de  $h$ .

Si se considera el mismo substrato piezoeléctrico, pero se cambia la geometría de la estructura conductora por una barra ranurada (conductora), dicha barra actúa como un sistema multicapa reflectivo de la onda SAW.

En la figura 4.6 se muestra la estructura MEMS. La velocidad de propagación de la onda SAW en la región determinada por el ancho del reflector está dada por la distancia entre el substrato piezoeléctrico y el reflector. Cuando la onda atraviesa una región cuya velocidad es  $V_1$  a otra con velocidad de propagación  $V_1'$ , la onda sufre un cambio de velocidad. Para entender este fenómeno es indispensable conocer la reflexión y transmisión de ondas acústicas.

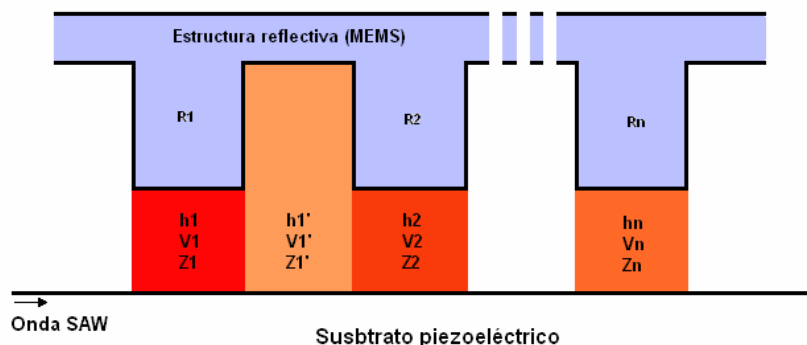


Figura 4.6. Las alturas de cada uno de los reflectores de la estructura MEMS determinan las regiones de impedancia acústica.

Determinar el comportamiento de los sistemas multicapas acústicos es importante porque la estructura micromecánica se comporta como uno. A continuación se hace un breve estudio de este tipo de sistemas.

Para las ondas acústicas se cumple la ley de Snell<sup>13</sup>, la cual está dada por:

$$k_j \sin \theta_j = k_{j+1} \sin \theta_{j+1} \quad 4.2$$

donde  $k = \omega / v$  (4.3),  $k_x = k \sin \theta$  (4.4) y  $k_z = k \cos \theta$  (4.5), y el coeficiente

de refracción es  $n = \frac{k_{j+1}}{k_j} = \frac{v_j}{v_{j+1}}$  (4.6).

La impedancia acústica de una capa  $i$  está dada por:

$$Z_j \equiv \omega \rho_j / k_{zj} = \rho_j v_j / \cos \theta_j \quad 4.7$$

donde  $\rho_i$  es la densidad del medio,  $v_i$  es la velocidad y  $\theta_i$  es el ángulo de incidencia de la onda.

Si se considera que existen  $n-1$  capas entre dos medios semiinfinitos, enumerados por 1 y  $n+1$ ; y las capas interiores por 2, 3, ...  $n$ , y que la onda acústica plana incide con un ángulo  $\theta_{n+1}$ , tal como se muestra en la figura 4.7. Es posible determinar los coeficientes de reflexión y transmisión de la onda al propagarse a través del sistema multicapa.

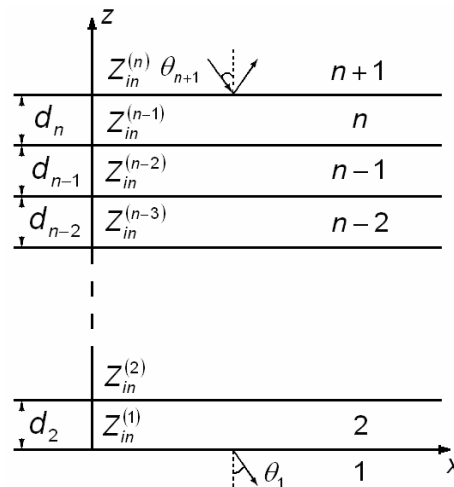


Figura 4.7. Sistema multicapa acústico con un número  $n$  de medios. [38]

<sup>13</sup> Pierce, Allan D., *Acoustics: an introduction to its physical principles and applications*, Woodbury, New York: Acoustical Society of America, 1994



El coeficiente de reflexión está dado por:

$$r = \frac{(Z_{in}^{(n)} - Z_{n+1})}{(Z_{in}^{(n)} + Z_{n+1})} \quad 4.8$$

en donde  $Z_{in}^{(n)}$  es la impedancia de entrada del sistema, y está dada por:

$$Z_{in}^{(n)} = \frac{(Z_{in}^{(n-1)} - iZ_n \tan k_{nz} d_n)}{(Z_n - iZ_{in}^{(n-1)} \tan k_{nz} d_n)} Z_n \quad 4.9$$

en donde  $d_n$  es el ancho de la n-ésima capa. Se considera como condición inicial que  $Z_{in}^{(1)} = Z_1$ .

El coeficiente de transmisión está dado por:

$$t = \frac{A_1}{A_{n+1}} = \prod_{j=1}^n \frac{Z_{in}^{(j)} + Z_j}{Z_{in}^{(j)} + Z_{j+1}} e^{i\phi_j} \quad 4.10$$

Este problema ha sido resuelto por Martin<sup>14</sup> utilizando un método matricial, con este método se obtienen los mismos resultados que al aplicar las expresiones 4.8, 4.9 y 4.10.

#### 4.2.4 Modelo ideal del sistema reflectivo

Al variar la velocidad de la onda acústica entre 3890 y 3960  $m/s$  y considerar que el número de reflectores es  $n=225$ , el ancho  $d=1.5[\mu m]$ , la densidad del material  $\rho = 4700 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$  y la frecuencia  $f = 663[MHz]$ , la amplitud y la fase del coeficiente de reflexión con respecto a la velocidad, se comportan tal como se muestran en las figuras 4.8 y 4.9. Éstas se obtuvieron con el método de la sección 4.2.3 (Ecuaciones 4.8, 4.9 y 4.10).

---

<sup>14</sup> Martin, B. G., Theory of acoustical properties of multilayer and superlattice using an optical approach, *J. Acoust. Soc. Am.*, 95 (3), March 1994

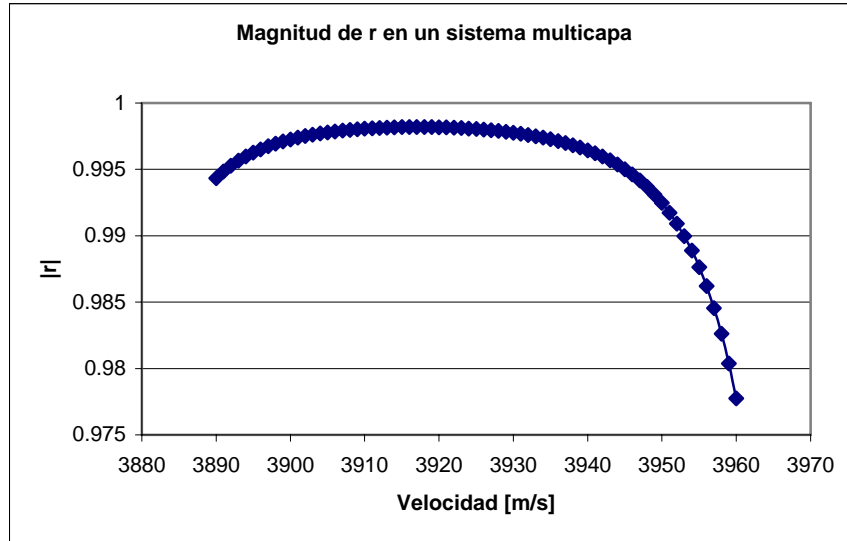


Figura 4.8. Magnitud del coeficiente de reflexión.

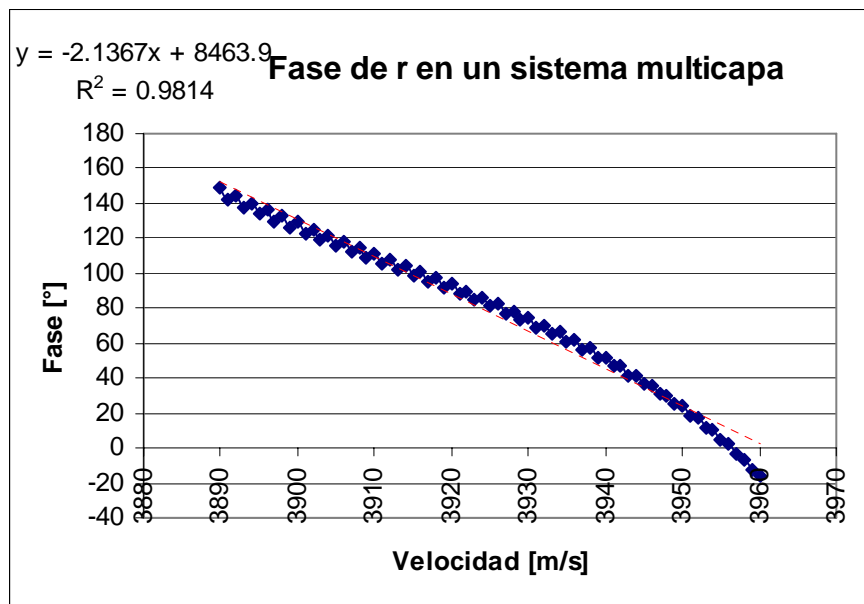


Figura 4.9. Fase del coeficiente de reflexión.

Ajustando los puntos obtenidos para la fase del coeficiente de reflexión a una recta, la ecuación resultante es:  $\theta [^\circ] = -2.1367 \cdot V [m/s] + 8463.9$  para  $3880 \leq V \leq 3960$ , con  $R^2 = 0.9814$ . Se concluye que la fase se puede aproximar como una función lineal de la velocidad. Este resultado es importante debido a que las mediciones que se hagan de la aceleración estarán relacionadas con la fase

de la señal reflejada. El diseño de la parte micromecánica debe estar orientado para cumplir con un coeficiente de reflexión lo más cercano a 1 y una fase lo más lineal posible. Se observó durante la etapa de pruebas que mientras más cercano a 1 se encuentre la magnitud del coeficiente de reflexión, mayor serán las no linealidades en la curva de fase.

Para el caso del microacelerómetro realimentado, un cambio de fase de las ondas SAW que circulan hacia el IDT receptor, se traducen como un cambio de la velocidad promedio de las ondas al circular por el arreglo multicapas. Por tanto, un cambio en la posición de los reflectores provoca una variación en la frecuencia del oscilador. Este cambio de fase es posible estimarlo calculando el coeficiente de transmisión para un medio en particular, según se muestra en la sección 4.2.3.

Si se considera una estructura reflectora como la que se muestra en la figura 4.6 compuesta por un número  $n$  de reflectores y  $n + 1$  de huecos, en la que la altura a la que se encuentran los reflectores es la misma y todos tienen las mismas dimensiones, la impedancia acústica de las regiones comprendidas por los reflectores se hace variar linealmente, mientras que, para las regiones de los huecos ésta no cambia, se obtiene un sistema multicapas formado por 3 medios acústicos principales.

Si se hacen variar las alturas de la estructura de manera uniforme en un intervalo de  $0.5[\mu m]$  a  $1.5[\mu m]$ , se considera un número de reflectores  $N = 225$ , en un medio como el Niobato de Litio, con un corte Y rotado  $41.5^\circ$  (0,41.5,0), cuya densidad es de  $4700 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$ , entonces, el coeficiente de reflexión varía en fase y magnitud tal como se muestra en las figuras 4.10 y 4.11, respectivamente.

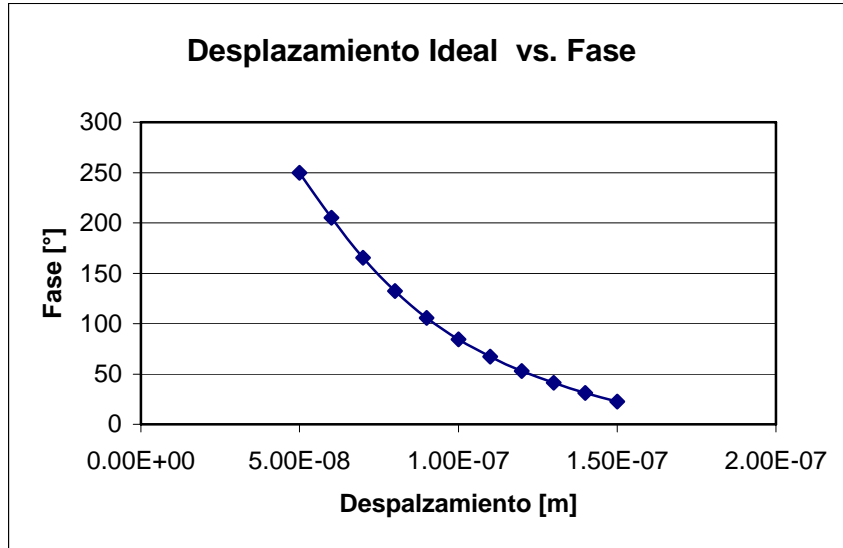


Figura 4.10. Fase del coeficiente de reflexión para el caso del movimiento ideal.

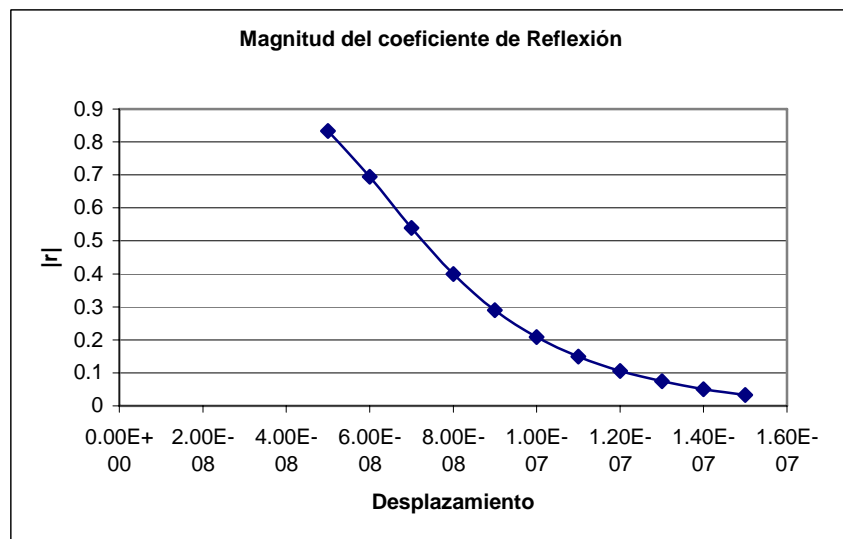


Figura 4.11. Magnitud del coeficiente de reflexión para el caso del movimiento ideal.

Se puede observar que estas curvas son claramente no lineales, sin embargo, como ya se demostró<sup>15</sup>, mientras menor sea el intervalo de movimiento de la estructura, la curva se aproximará más a una recta.

<sup>15</sup> Guerra J., Pérez P., Modulación en fase de ondas elásticas superficiales aplicada a la instrumentación, *Memorias SOMI XXIII*, ISBN 970-32-2673-6

Estas no linealidades se deben a las características de la curva de altura normalizada vs. velocidad de propagación de la onda acústica. En las secciones 3.3.5 y 4.4.4 se trata sobre estas curvas.

Utilizando este principio es posible registrar la aceleración, sin embargo, en un acelerómetro como el que se está estudiando, la estructura mecánica se encuentra sujeta por sus dos extremos, por tanto, no se moverá de manera uniforme, es posible obtener su respuesta utilizando el caso general en el que cada reflector tiene una posición cualquiera.

### **4.3 Metodología de análisis**

Hasta el momento se ha tratado sobre cada una de las partes constitutivas del microacelerómetro: sobre los IDT's y sus modelos, sobre las estructuras reflectoras de ondas acústicas, sobre la velocidad de propagación de las SAW en medios piezoeléctricos y el análisis de estructuras mecánicas simples. El objetivo de esta sección es detallar la metodología de análisis del microacelerómetro, a partir del modelo de bloques (puertos) de la figura 4.3.

El comportamiento dinámico de la estructura está determinado por el material con el cual está construida y sus dimensiones físicas. Para esta estructura en particular se determinó por el método de Rayleigh-Ritz la frecuencia del primer modo de vibración y la forma en que sus dimensiones físicas están relacionadas, sin embargo, dicho método es sólo una aproximación que permite orientar el diseño de la estructura (específicamente la longitud). La respuesta del instrumento se obtendrá utilizando el método de elementos finitos, utilizando un software especializado (Coventor) y el método de Rayleigh-Ritz y se compararán ambos resultados. Una vez obtenidos los resultados, de los desplazamientos de la estructura, se introducirán en el programa diseñado para obtener la respuesta (aceleración vs. fase) de este tipo de microacelerómetros.

Este programa realiza los siguientes pasos para la determinación de la respuesta del sistema:

1. Si se utilizan los datos proporcionados por Coventor, es necesario que el programa extraiga y organice los datos de interés. Si se utiliza el método de Rayleigh- Ritz, el programa deberá utilizar la función de forma para calcular

los desplazamientos de cada una de las posiciones de los huecos y de los reflectores.

2. Con los datos de los desplazamientos, el programa procede a considerar las alturas para cada uno de los reflectores y de los huecos de la estructura micromecánica, con la finalidad de determinar las velocidades de propagación de las ondas SAW en cada una de las regiones, cuando la onda se propaga en el medio piezoeléctrico. Esto se hace para poder considerar a la estructura como un medio multicapas acústico.
3. Con las velocidades para cada una de las regiones, el programa calcula las impedancias acústicas para cada región y determina los coeficientes de reflexión y de transmisión de las señales reflejadas y transmitidas.
4. La señal reflejada será el producto de la señal de salida del puerto acústico por el coeficiente de reflexión (caso remoto). Por esta razón la fase de la señal eléctrica está determinada por la fase de la señal reflejada.
5. La señal reflejada entra a través de uno de los puertos acústicos, y considerando la matriz de admitancias es posible calcular la señal eléctrica que aparecerá debida a la primera.
6. Con la fase de la señal de salida resultante, se construye la gráfica de fase contra aceleración.

#### **4. 4 Análisis y diseño de los componentes del dispositivo**

##### **4.4.1 Antecedentes de este tipo de acelerómetro**

En 2001 fue publicado en *Elsevier: Sensors and actuators A*, el artículo con título: *Fabrication, characterization and testing of wireless MEMS-IDT based microaccelerometers*. En dicho artículo, Varadan reporta la forma en que se construyeron los prototipos de acelerómetros SAW-MEMS, algunas características de éstos, el equipo utilizado en el procesamiento de la señal de salida y sus resultados. La estructura general del microacelerómetro de Varadn se muestra en la figura 4.12 y cuyos detalles han sido descritos en los capítulos anteriores. Hay que resaltar que en este artículo no se hace una sustentación teórica de dicho prototipo.

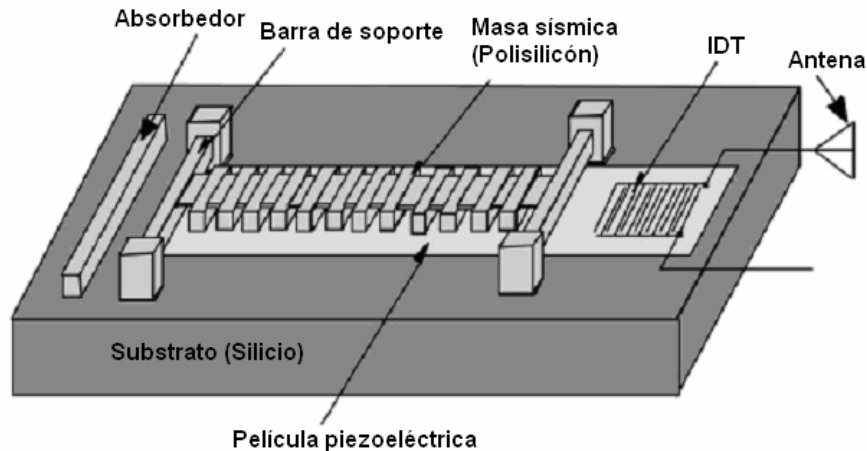


Figura 4.12. Estructura general del microacelerómetro. [9]

Las principales características reportadas del instrumento según Varadan son:

- Se utilizó un sustrato de ZnO/Silicio con una velocidad de propagación de las ondas SAW de  $3980 \text{ [m/s]}$ .
- Teóricamente este sustrato tiene un  $\Delta v = 136 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ , con una  $k^2 \approx 0.03417$ .

Sin embargo, experimentalmente se midió un  $\Delta v_{\text{ex}} = 281 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ ; según los autores, esto podría deberse a la tensión en la frontera debida a la capa de aluminio depositada.

- La longitud periódica  $L = 1.5 \text{ [\mu m]}$ .
- La relación de metalización del IDT es de 0.5.
- La frecuencia de operación de los IDT es de  $f_o = 82.91 \text{ [MHz]}$ .
- El número de electrodos del IDT es de  $N = 22$ .
- Se utilizaron electrodos divididos para reducir las reflexiones debidas a los electrodos.
- La estructura MEMS fue fabricada con silicio tipo p  $\langle 100 \rangle$ , el presenta una resistividad entre 2 y  $5 \Omega$ .

Como resultados el autor presenta una gráfica de la aceleración vs. cambio de fase (Figura 4.13).

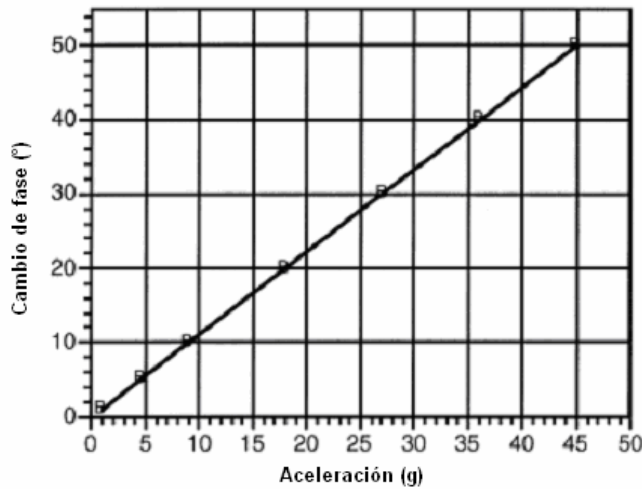


Figura 4.13. Aceleración [g] vs. Cambio de fase [°]. [9]

En las secciones siguientes se hace el uso de la metodología establecida y de las herramientas computacionales desarrolladas para obtener todos los parámetros que han sido tratados a lo largo de este trabajo, de este modo, se obtiene un prototipo propio. En el capítulo 5 se presentan los resultados de aceleración vs. cambio de fase y se comparan contra los resultados de Varadan mostrados en esta sección (Figura 4.13).

#### 4.4.2 Selección del material piezoeléctrico

La selección del material piezoeléctrico es de vital importancia para el diseño del resto de los componentes. Por las razones que se expusieron en la sección 4.2.2, el niobato de potasio fue descartado como material de trabajo.

Como material de trabajo se seleccionó el niobato de litio, en un corte Y, rotado  $41.5^\circ$  (0,41.5,0), con dirección de propagación X, el cual según Zhang tiene un coeficiente de acoplamiento piezoeléctrico máximo ( $\frac{\Delta V}{V_f} = 0.02776$ ) para una onda

tipo Rayleigh. Las velocidades teóricas que se obtuvieron aplicando el método de

Campbell son:  $V_m = 3888.9258 \left[ \frac{m}{s} \right]$  y  $V_f = 3999.9304$ . Donde  $V_m$  es la velocidad

de propagación de la onda cuando la superficie se encuentra en corto circuito ( $\omega h = 0$ ) y  $V_f$  es la velocidad de propagación cuando la superficie se encuentra



libre de alguna interacción eléctrica ( $\omega h = \infty$ ). Por tanto, el coeficiente de acoplamiento piezoeléctrico teórico según la expresión 3.30, considerando  $F = 1$  es:  $k^2 = 0.055503$ , por tanto,  $\frac{\Delta V}{V_f} = 0.02775$ . El resultado teórico obtenido coincide con el resultado reportado por Zhang.

Las constantes elásticas, piezoeléctricas y de permitividad eléctrica relativa para el niobato de litio (cristal clase 3m) sin rotación alguna son:  $c_{11} = 2.03 \times 10^{-11}$ ,  $c_{12} = 0.53 \times 10^{-11}$ ,  $c_{13} = 0.75 \times 10^{-11}$ ,  $c_{14} = 0.09 \times 10^{-11}$ ,  $c_{33} = 2.45 \times 10^{-11}$ ,  $c_{44} = 0.60 \times 10^{-11}$  y  $c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$ , todas con unidades de  $[N/m^2]$ ;  $e_{13} = 3.7$ ,  $e_{13} = 2.5$ ,  $e_{13} = 0.2$  y  $e_{13} = 1.3$ , todas con unidades  $[C/m^2]$  y  $\epsilon_{11}/\epsilon_0 = 44$  y  $\epsilon_{33}/\epsilon_0 = 29$ , respectivamente. Estas constantes fueron tomadas del trabajo de Warner.

#### 4.4.3 Diseño del IDT

Como ya se mencionó anteriormente, para este caso, el diseño de los IDT's está determinado principalmente por la impedancia que se desea que tengan éstos a la frecuencia de operación. Para facilitar su acoplamiento es deseable que la impedancia de los IDT's sea  $|Z_{idt}| = 50[\Omega]$ .

El IDT está compuesto por  $N = 6$  pares de electrodos y su frecuencia de operación es:  $f_o = 663[MHz]$ .

Considerando que el material piezoeléctrico utilizado es niobato de litio, con un corte Y rotado  $41.5^\circ$  (0, 41.5, 0), que tiene una constante de acoplamiento piezoeléctrico,  $k^2 = 0.055503$  y aplicando las ecuaciones propuestas por Smith (3.43 y 3.44) expuestas al final de la sección 3.3.4. Según la longitud de onda de la señal acústica, se determina la separación (d) con la expresión 3.1. Con estos parámetros se determinan las dimensiones que debe tener el transductor interdigital para cumplir con la especificación impuesta.

Es importante estimar la permitividad efectiva del medio, esta permitividad efectiva está dada según la expresión 3.49.

Para los datos anteriores se tiene que las dimensiones del IDT deberán ser las que se muestran en la figura 4.14.

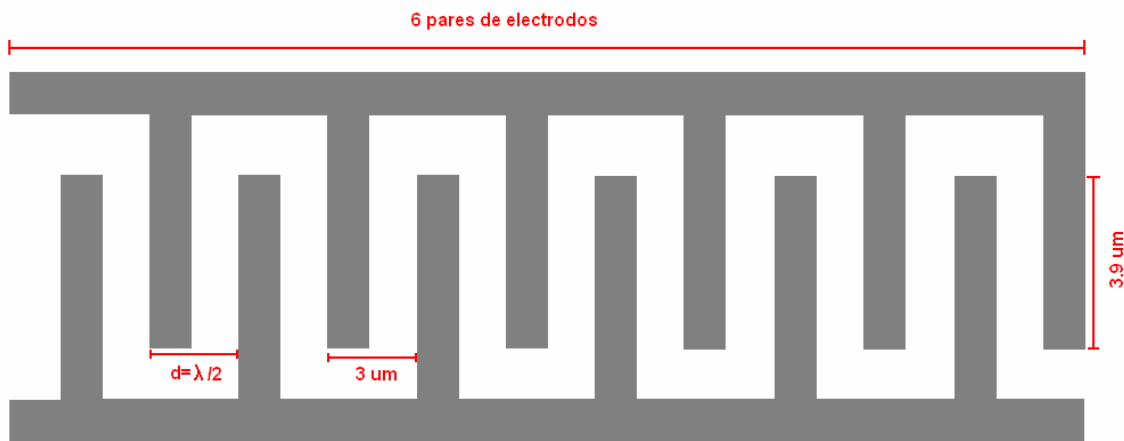


Figura 4.14. Geometría del IDT.

Con estas dimensiones el IDT tiene una impedancia eléctrica de  $Z_{idt} = 19.5573 - i \cdot 46.1243 [\Omega]$ ,  $|Z_{idt}| = 50.0993[\Omega]$  y una longitud de  $34.5 [\mu m]$ .

#### 4.4.4 Determinación de las dimensiones de la estructura micromecánica

La longitud de la estructura depende principalmente del número de reflectores  $N$ . El número de huecos es igual a  $N+1$  reflectores y el número de capas del sistema multicapas acústica es  $2N+1$ . Para que la adición de las ondas reflejadas sea constructiva el ancho de los huecos y reflectores debe ser igual a  $A = \frac{\lambda}{4}$ . Para

este caso, la velocidad de propagación en la superficie libre ( $h = \infty$ ) es de:

$$V_f = 3999.9304 \left[ \frac{m}{s} \right].$$

La longitud de onda de la señal para una frecuencia de  $f = 663 [MHz]$  es de:

$$\lambda = 6.03307 [\mu m]$$

Por tanto, el ancho de los reflectores y huecos debe ser  $A \approx 1.5 [\mu m]$ . Para efectos prácticos  $A = 1.5 [\mu m]$ .

Para determinar las alturas de los reflectores y los huecos de la estructura, es necesario considerar la curva de velocidad de propagación contra altura normalizada  $\omega h / 2\pi$ . Para el caso del niobato de litio en corte Y rotado  $41.5^\circ$  con una dirección de propagación en el eje X se tiene la curva que se muestra en la figura 4.15. Esta curva varía con una forma de cotangente hiperbólica. En ella es posible distinguir tres regiones. La primera es la región que se encuentra más próxima al eje de las ordenadas, donde el cambio de velocidad es mayor y ocurre a cambios de altura pequeños (a frecuencia constante); la segunda es la región de quiebre o de transición; la tercera, es la región asintótica, en la que se puede apreciar que los cambios de la velocidad conforme aumenta la frecuencia normalizada son cada vez más pequeños y tienden al valor calculado para  $h = \infty$ . Como ya se mencionó<sup>16</sup>, la primera región no es lineal, sin embargo, mientras menor sea el intervalo en el se moverán los reflectores, mayor será la linealidad del instrumento. Esto indica que en realidad no es posible diferenciar claramente las fronteras de las tres regiones.

---

<sup>16</sup>Guerra J., Pérez P., Modulación en fase de ondas elásticas superficiales aplicada a la instrumentación, *Memorias SOMI XXIII*, ISBN 970-32-2673-6

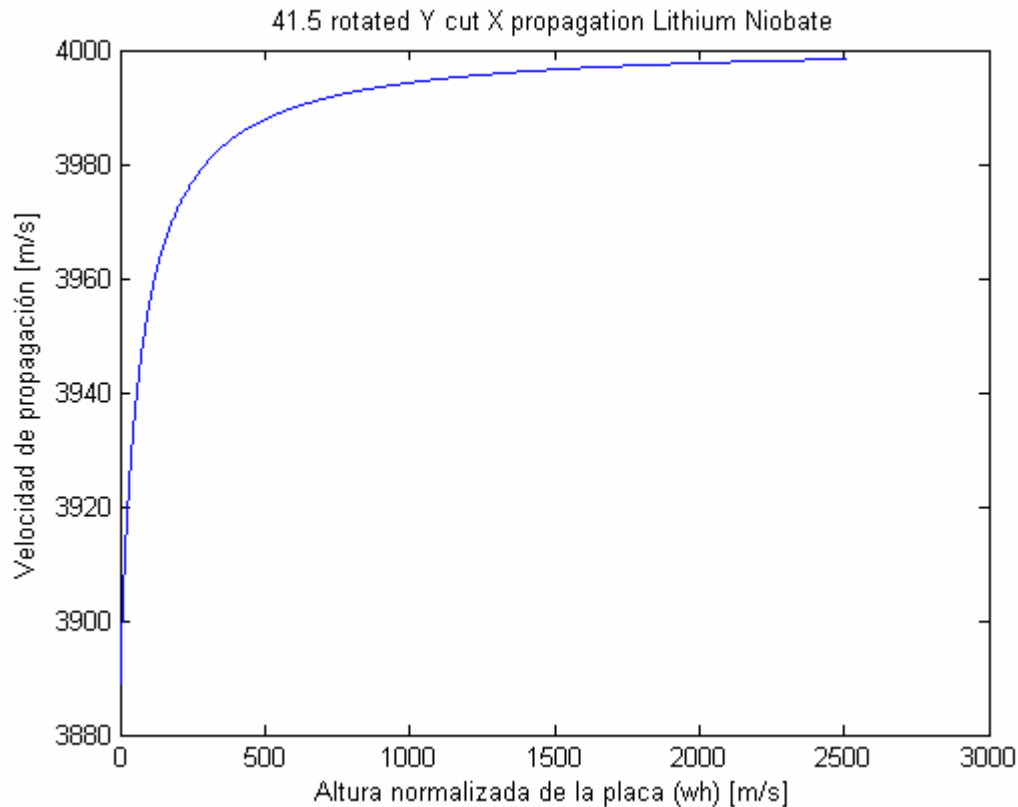


Figura 4.15. Altura normalizada vs. Velocidad de propagación (Niobato de litio 0, 41.5,0).

Considerando la curva de la figura 4.15, para que exista un buen cambio de impedancias acústicas entre un reflector y el hueco que lo precede (ver figura 4.6), es necesario que la diferencia de velocidades sea el máximo posible. Para lograr esto, la altura a la que se encuentra el reflector debe tener una velocidad de propagación asociada comprendida en la primera región (de preferencia lo más cercana al eje de las ordenadas), mientras que la altura del hueco debe tener una velocidad asociada comprendida en la tercera región.

Existen dos factores que limitan la selección de las dimensiones, la frecuencia y el posible proceso de fabricación que se vaya a emplear. Mientras mayor sea la frecuencia, menores serán las alturas de los reflectores y los huecos de la estructura.

En el artículo presentado por Varadan, la altura a la que se ubican los reflectores es de  $0.1[\mu m]$  y el ancho de la barra que lo soporta es de  $1[\mu m]$ . La altura de los reflectores es la magnitud crítica en el diseño, debido a que es la menor dimensión

de todas. Debido a que la construcción ya ha sido reportada por Varadan, se supone que es factible reproducirla y, como no se tiene la certeza si será posible reducirla se considera dicha magnitud. Para terminar de establecer el resto de las dimensiones se considera que la altura de los huecos, es decir, la altura a la cual se encuentra la barra que soporta los reflectores, es de  $1.2[\mu m]$ . Una vez que esta altura se encuentra localizada en la tercera región, los cambios en la velocidad son menores, por tanto, este parámetro pierde relevancia. Esta es la razón que Varadan no le haya dado importancia en su publicación (sólo es relevante según el proceso de fabricación empleado).

Es importante señalar que el ancho de la barra que sustenta a los reflectores es de vital importancia y debe ser calculada de tal manera que los desplazamientos máximos para alguna aceleración máxima no rebase la distancia entre los reflectores y el medio piezoeléctrico. Por ejemplo, si la barra es muy gruesa los desplazamientos serán pequeños y la frecuencia natural de la estructura será mayor, es decir, se pueden hacer mediciones dentro de un rango mayor que si ésta fuera más delgada, pero los cambios de fase serán menores, debido a que las variaciones de impedancia acústica serán también menores. Por el contrario, si la barra fuera más delgada la frecuencia natural sería menor y tendrá una mayor sensibilidad.

Para los valores de las alturas mencionados anteriormente se tienen los siguientes puntos, considerando que la frecuencia es de  $f = 663[MHz]$ :

$$P_{reflector} (0.1 [\mu m], 3943.39 [m/s]) \text{ y } P_{huecos} (1.3 [\mu m], 3993.16 [m/s])$$

El parámetro más difícil de determinar es el coeficiente de amortiguamiento. Debido a que el movimiento de la estructura no es uniforme, para dichos casos no existe una solución cerrada<sup>17</sup>. Sin embargo, es posible hacer alguna estimación sencilla que permita cuantificar estos efectos. En la sección dos se habló acerca del amortiguamiento causado por el efecto de la película comprimida. Por la geometría de la estructura (barra ranurada) y debido a la cercanía entre los reflectores y el substrato, este efecto ha de ser el principal generador de

---

<sup>17</sup> Bao, *Micromechanical transducers: Pressure sensors, accelerometers and gyroscopes*. Elsevier, 2000.

amortiguamiento. Se han probado diversos modelos para aproximar de manera sencilla el amortiguamiento de la estructura, sin embargo, no se ha podido corroborar con algún método computacional de los que se tienen disponibles en el laboratorio UNAMems, pero para no dejar pasar por alto este factor importante en el diseño, se propone el modelo que se explica en los párrafos siguientes.

Debido a que la estructura se encuentra sujeta en los extremos, el rango de movimiento será menor mientras más cerca esté del extremo, alcanzando su punto máximo de movimiento al centro de la estructura, tal como se explicó en el capítulo 2. Por esta razón, se supone que las partes de la estructura que amortiguan en mayor medida debido al efecto de la película comprimida, se encuentran al centro de la barra. De las expresiones de la función de forma (2.46) y la expresión del desplazamiento máximo (2.47), es posible obtener un factor de escala según la posición de la estructura. Este factor de escala está dado por el cociente de la función de forma entre el desplazamiento máximo este factor de escala, es decir:

$$\delta(x) = \frac{w(x)}{w_{\max}} \quad 4.11$$

Donde  $w_{\max} = \frac{\rho g L^4}{32 E h^2}$  y es el desplazamiento máximo y ocurre en  $x = L/2$ , entonces  $\delta(x)$  queda como:

$$\delta(x) = \frac{16}{L^4} x^2 (L - x^2) \quad 4.12$$

De este modo, es posible determinar la ubicación del centro del reflector y así obtener el factor de escala por el cual deberá multiplicarse al amortiguamiento que produce una placa con las dimensiones del reflector.

El método descrito anteriormente tiene como finalidad dar una idea de la magnitud de la principal causa de amortiguamiento de la estructura, sin embargo, deberá ser corroborado con la experimentación.

Así como un resonador debe encontrarse al vacío para incrementar al máximo su factor de calidad (debido a la reducción del amortiguamiento por el fluido

circundante), es posible reducir la presión del aire que rodea la estructura hasta obtener el amortiguamiento deseado para la estructura determinada.

El ancho de la barra está determinado principalmente de dos factores: debe ser mucho menor que el largo de la estructura para que ésta pueda ser considerada una barra y el amortiguamiento de la estructura es proporcional al ancho, por tanto, para condiciones de presión y viscosidad constantes, para un fluido determinado, se deberá determinar dicha dimensión. Para este caso se decidió que el ancho de la barra sería de  $5 [\mu m]$ , sin embargo, a presión de una atmósfera, el factor de amortiguamiento es mayor según el procedimiento descrito en los párrafos anteriores ( $\zeta \approx 2$ ), por tanto, esta estructura deberá encontrarse en un medio con una presión menor.

El ancho del material piezoeléctrico para este caso se consideró que fuera de dos longitudes de onda. Como ya se mencionó, el 95% de la energía de la onda está contenida en una profundidad de una longitud de onda y ésta decrece exponencialmente, entonces, con dos longitudes de onda el efecto del substrato en la propagación de las ondas no es de consideración. Esto se hizo así porque a pesar de que el método de Campbell ya ha sido extendido para medios multicapas, su aplicación a este caso ha de ser estudiado a detalle en algún trabajo posterior.

## Capítulo 5

### Resultados

En el capítulo 2 se trató acerca de todas las herramientas teóricas que permiten obtener un modelo de parámetros concentrados de la parte micromecánica. En el capítulo 3 se habló acerca de los modelos equivalentes para los transductores interdigitales y su respuesta en frecuencia. En el capítulo 4 se retomaron todos los conceptos expuestos anteriormente para explicar el funcionamiento del sistema, se introdujo la forma de sensado propia de este instrumento y se propuso un diseño específico. En este capítulo se exponen los resultados obtenidos para el microacelerómetro cuyas dimensiones fueron expuestas en la sección anterior.

En la figura 5.1 se muestra la representación del microacelerómetro. En esta figura se pueden distinguir los siguientes elementos: en amarillo, se observa el substrato; en verde, el material piezoeléctrico; en rojo, los IDT's y en azul, la estructura micromecánica. En la esquina inferior izquierda es posible distinguir los ejes de referencia que se utilizaron: en azul, el eje X; en verde, el eje Y y en rojo, el eje Z.

En la figura 5.1 se han omitido los absorbedores; sin embargo, se supone que siempre se encuentran presentes. En este trabajo no se han analizado los materiales que podrían servir para esta finalidad. Queda para trabajos posteriores encontrar dichos materiales y la forma en que estos elementos del sistema han de ser fabricados e incorporados al diseño.



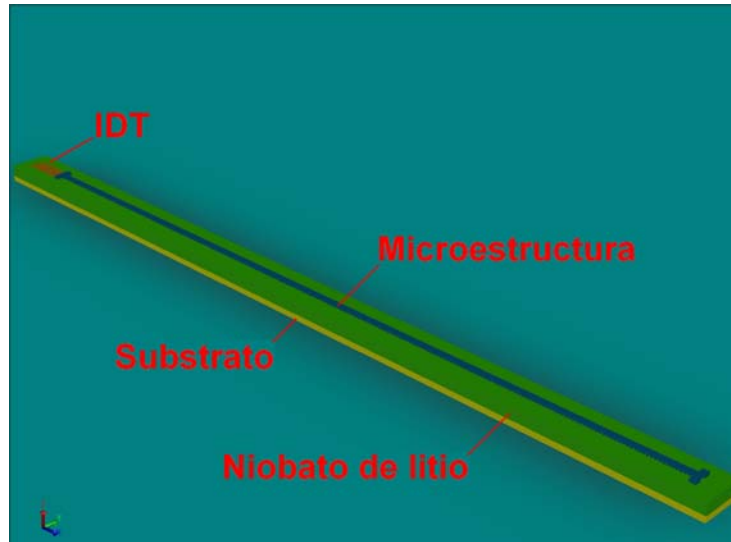


Figura 5.1. Representación del microacelerómetro.

En la figura 5.2 se muestra un acercamiento y se acotan las dimensiones de la misma.

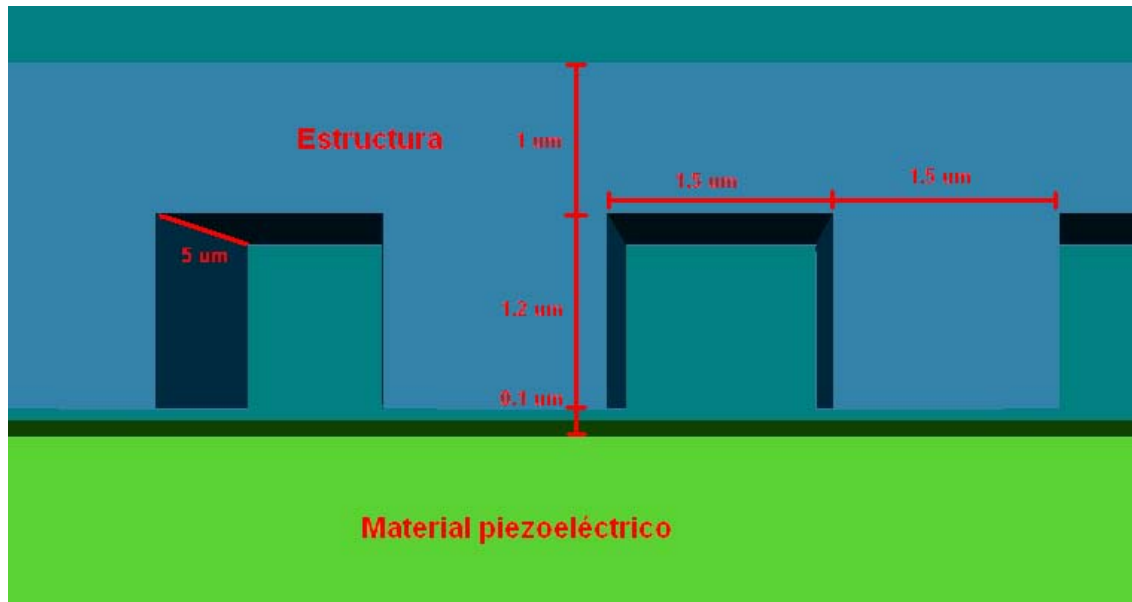


Figura 5.2. Acercamiento de la estructura y sus dimensiones.

### **5.1 Modos de vibración de la estructura micromecánica**

Haciendo uso de Coventor se obtuvieron los cinco primeros modos de vibración de la estructura. Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 5.3.

En la tabla 5.1 se resumen los datos obtenidos con Coventor y los obtenidos con el método de Rayleigh-Ritz para los modos de vibración.

Modo de vibración	Frecuencia [Hz] (Coventor)	Frecuencia [Hz] (Rayleigh-Ritz)	Eje del movimiento	Error [%]
1 <sup>er</sup>	17731.2	19088.3	Z	7.6537
2 <sup>do</sup>	48874.9	52551.7	Z	7.5292
3 <sup>ero</sup>	78645.5	_____	Y	_____
4 <sup>to</sup>	95810	_____	Z	_____
5 <sup>to</sup>	158367	_____	Z	_____

Tabla 5.1. Resultados obtenidos para los modos de vibración de la estructura.

El error que se obtuvo entre los dos métodos y para los dos casos fueron cercanos al 7.5 %, los cuales para una primera aproximación en el diseño resultan satisfactorios.

En la figura 5.3.c se puede apreciar que el desplazamiento dominante ocurre en la dirección Y. Esto nos dice que a frecuencias de vibración cercanas a ella la estructura se moverá en dicha dirección.

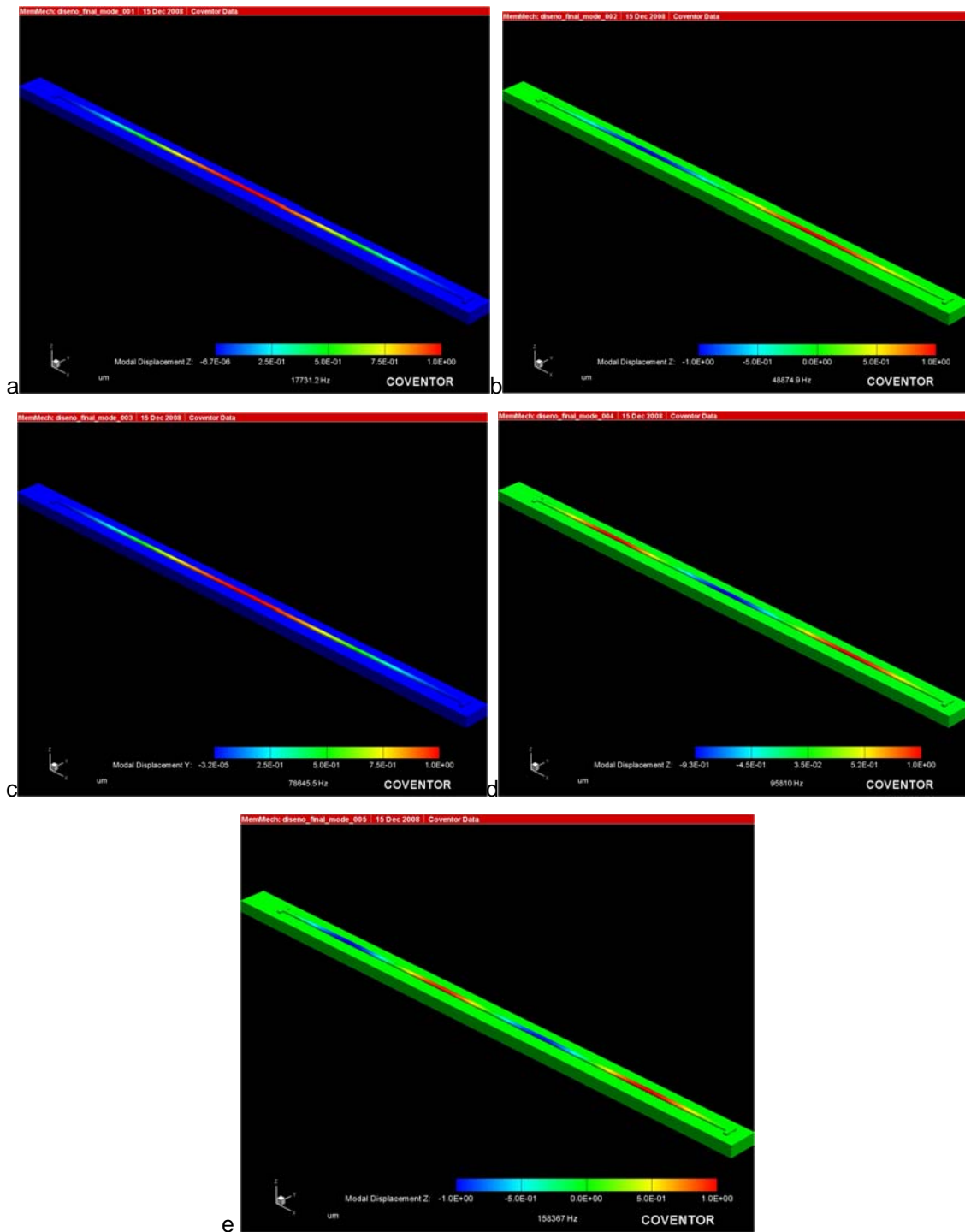


Figura 5.3. De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo se muestran los resultados para los modos de vibración en orden creciente (a, b, c, d y e).

## **5.2 Respuesta de la barra a diferentes señales de aceleración**

### **5.2.1 Caracterización de la estructura micromecánica**

En esta sección se hace la comparación entre los resultados obtenidos con Coventor y utilizando la función de forma para un puente. Al aplicar una aceleración en el eje Z la estructura se deforma, es decir, cada punto de la estructura cambia de posición. Este cambio ha sido estimado con dicha función o con el programa. Una vez que se hubieron obtenido los resultados teóricos (función de forma) se compararon con los resultados extraídos de Coventor. Con Coventor se ha determinado la posición de cada hueco y reflector, y así determinar cada una de las impedancias acústicas del sistema. Con esta información es posible determinar los coeficientes de reflexión y transmisión y con el modelo del IDT, la respuesta eléctrica del instrumento.

Se probaron valores de aceleración de 0 g, 5 g, 10 g, 20 g, 30 g, 40 g, y 50 g en ambos sentidos, sobre el eje Z. En la figura 5.4 se muestra la deformación que sufre la estructura al aplicársele una aceleración de 50 g en sentido positivo. En esta figura es posible observar que los extremos de la barra permanecen prácticamente inmóviles y el centro de la estructura es la región cuyo desplazamiento es máximo. La parte central de la barra tiende a permanecer en estado de reposo (inercia) mientras que el substrato no se deforma, es por esta razón que el desplazamiento de la barra en este caso es negativo. Este parámetro es el que determina el rango de medición, si se le aplica una aceleración tal que el desplazamiento fuera mayor que la distancia entre los reflectores y el material piezoeléctrico, la estructura podría quedar adherida (este efecto sería destructivo) o bien la lectura de la señal de aceleración sería incorrecta.

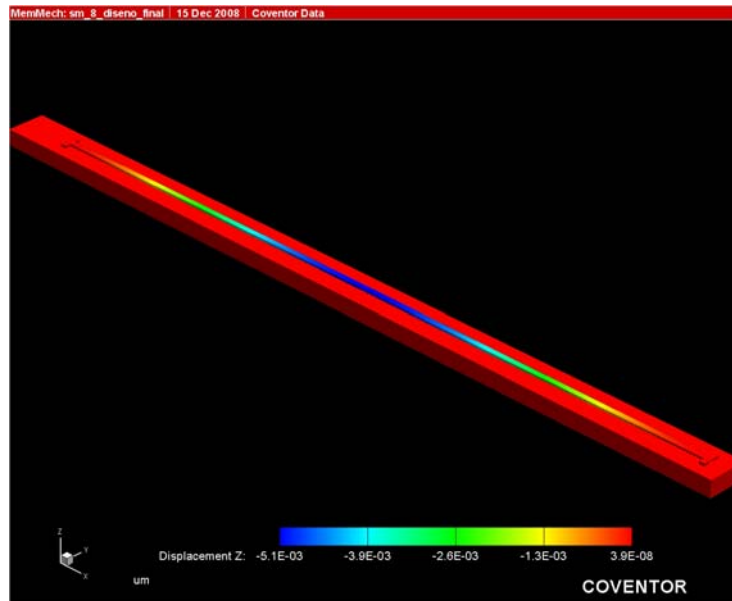


Figura 5.4. Deformación de la estructura al ser sometida a una aceleración de 50 g en el eje Z.

En la tabla 5.2 se muestran los resultados de la deformación máxima calculados con Coventor y los obtenidos a partir de la función de forma de la estructura. Es importante observar que en la tabla 5.2 sólo se incluyen valores positivos de aceleración debido a que es cuando la estructura se mueve hacia el material piezoeléctrico.

Aceleración [g]	Desplazamiento máximo [ $\mu\text{m}$ ] (Coventor)	Desplazamiento máximo [ $\mu\text{m}$ ] (Rayleigh-Ritz)	Eje del movimiento	Error [%]
0	0	0	Z	0
5	$-5.1451 \times 10^{-3}$	$-4.4745 \times 10^{-3}$	Z	13.03
10	$-1.0292 \times 10^{-2}$	$-8.9490 \times 10^{-3}$	Z	13.05
20	$-2.0581 \times 10^{-2}$	$-1.7898 \times 10^{-2}$	Z	13.04
30	$-3.0864 \times 10^{-2}$	$-2.6847 \times 10^{-2}$	Z	13.02
40	$-4.1137 \times 10^{-2}$	$-3.5796 \times 10^{-2}$	Z	12.98
50	$-5.1396 \times 10^{-2}$	$-4.4745 \times 10^{-2}$	Z	12.94

Tabla 5.2. Desplazamiento máximo de la estructura debido a una aceleración.

Con los datos de la tabla 5.2 es posible inferir dos cosas, la primera: se cree que el error entre ambos métodos es consecuencia principalmente de las diferencias entre la geometría de la microestructura y la de una barra simple, es decir, la microestructura tiene una masa mayor que la de la barra y ésta se encuentra distribuida no uniformemente. Al calcular el desplazamiento máximo de la estructura con el método de Rayleigh-Ritz, resulta como una aproximación que permite hacer una primera estimación de lo que se obtendrá. La segunda, en la columna del error, se puede observar que para aceleraciones de 5g, 10g y 20g, se mantienen casi sin cambio (el promedio de los tres valores nos da como resultado el valor intermedio), mientras que para los demás valores de aceleraciones el error empieza a disminuir. Esto quiere decir que el comportamiento de la estructura obtenido con Coventor no resulta en un movimiento lineal cuando se le varía la aceleración aplicada (El modelo de la función de forma sí es lineal cuando se le varía la aceleración si y sólo si el resto de parámetros permanece sin variación). A pesar de que para las aceleraciones mayores, la estructura comienza a moverse de un modo no lineal, este fenómeno dentro del rango de interés es despreciable, porque como se verá más adelante, hay otros fenómenos que introducen una no linealidad mayor en la respuesta del sistema.

Según la ecuación 2.46, para una aceleración de 50 g en sentido positivo, tomará la forma dada por la siguiente función:

$$w(x) = 3.4182 \times 10^6 \cdot x^2 \cdot (676.5 \times 10^{-6} - x)^2 \quad 5.1$$

En la figura 5.4 se muestran los desplazamientos de la estructura para una aceleración de 50 g. Los datos de esta curva se obtuvieron a través de Coventor. En azul se observan los puntos extraídos de Coventor y en rojo la línea de tendencia.

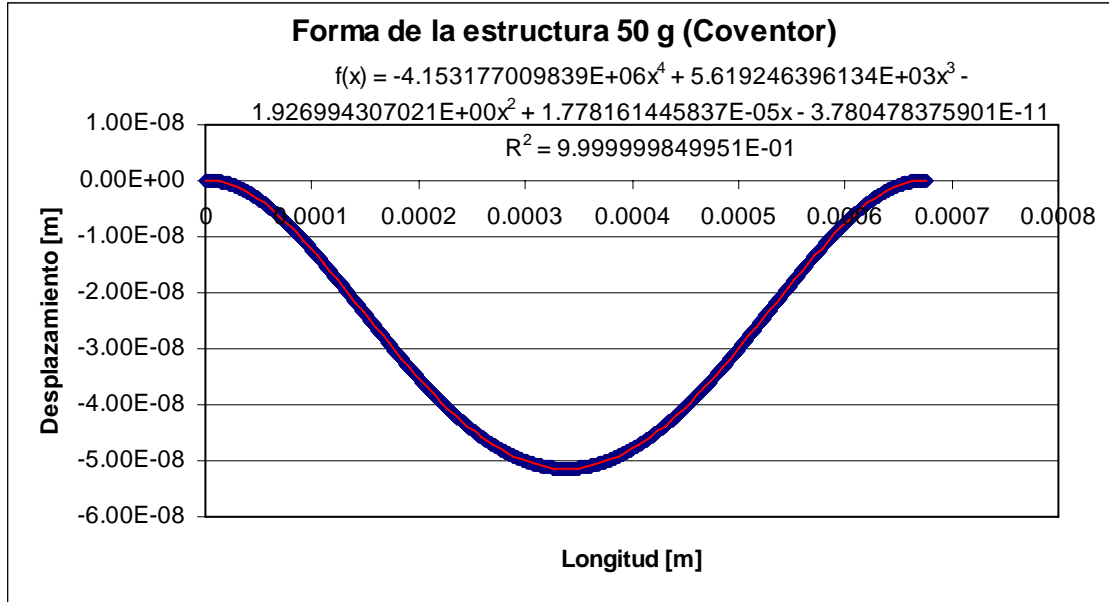


Figura 5.5. Desplazamiento de la estructura para una aceleración de 50g.

En la figura 5.5 se muestra la función polinomial a la cual se ajustan los puntos obtenidos para la curva. Dicha función puede factorizarse en los siguientes términos:

$$f(x) = -4.1532 \times 10^6 \cdot (x - 6.7320 \times 10^{-4}) \cdot (x - 6.704 \times 10^{-4}) \cdot (x - 6.1442 \times 10^{-6}) \cdot (x - 3.2828 \times 10^{-6}) \quad 5.2$$

En  $f(x)$  es posible observar que existen dos factores cuyo término independiente se aproximan a  $L = 6.765 \times 10^{-4} [m]$ , mientras que los otros dos se aproximan a 0. La explicación para que estos dos factores tengan un término independiente no nulo es que en las simulaciones con Coventor se observó una ligera flexión en dirección opuesta al desplazamiento del resto de la estructura muy cerca de los extremos, esto provoca que los ceros de la función polinomial se encuentren después de  $x=0$  y antes de  $x=L$ . Sin embargo, según la  $R^2$  obtenida, los puntos se ajustan por completo al polinomio de cuarto grado. Estas razones permiten afirmar que la función de forma determina el comportamiento de la estructura ante una aceleración dada, y por tanto, se satisface que:

$$f(x) \propto w(x) \quad 5.3$$

Se cree que la constante de proporcionalidad que hace que estas dos funciones sean la misma, está relacionada con la masa adicional debida a los reflectores y a la variación del momento de inercia entre las diferentes partes de la barra (debido a la variación de la sección transversal por segmentos).

Durante el desarrollo de este trabajo no se encontró ningún modo de encontrar dicha constante. Queda para un trabajo posterior investigar un método para obtener dicha constante y mejorar los resultados obtenidos por el método de Rayleigh-Ritz para el caso del puente utilizado en este trabajo.

Una vez que se ha demostrado que existe una correspondencia entre los resultados obtenidos por Coventor y el método de Rayleigh-Ritz, a continuación, se muestran los coeficientes de reflexión en magnitud y fase, calculados por ambos métodos. En las figuras 5.6.a, 5.6.b, 5.7.a y 5.7.b se muestran los resultados obtenidos para los datos extraídos de Coventor y los resultados calculados con el método de Rayleigh-Ritz, respectivamente.

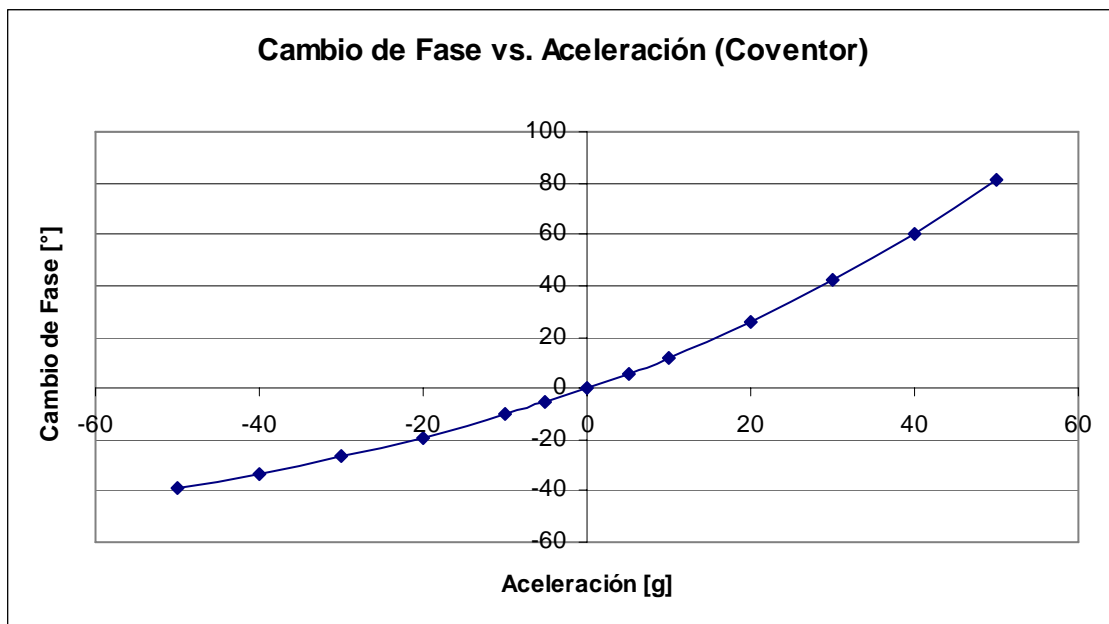


Figura 5.6.a. Cambio de fase del coeficiente de reflexión (Coventor).



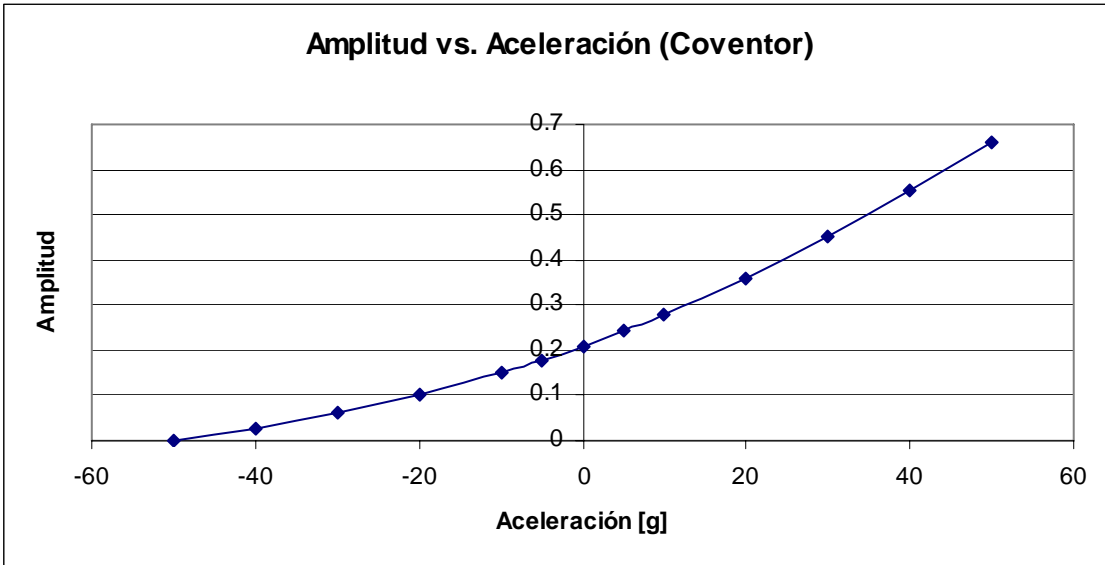


Figura 5.6.b. Amplitud del coeficiente de reflexión (Coventor).

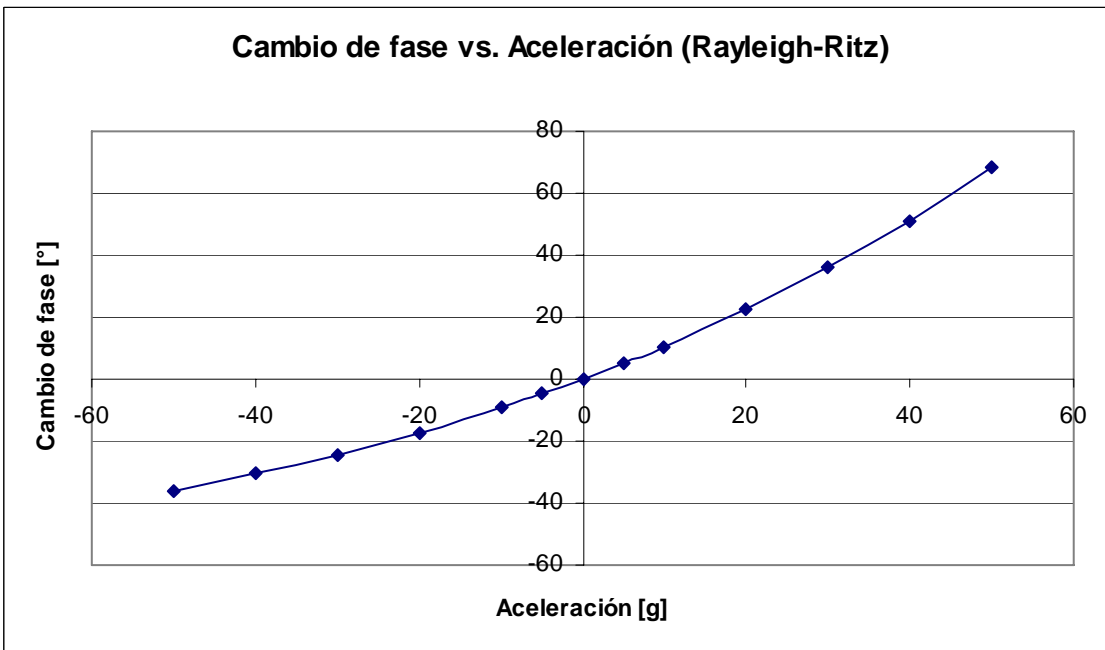


Figura 5.7.a. Cambio de fase del coeficiente de reflexión (Rayleigh-Ritz).

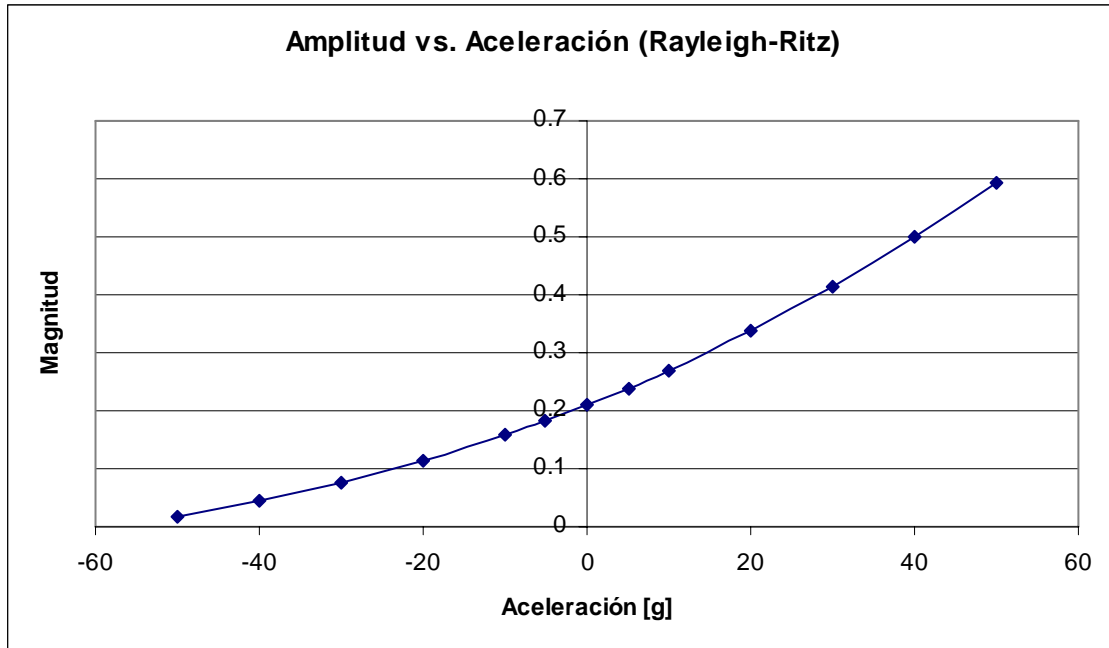


Figura 5.7.b. Amplitud del coeficiente de reflexión (Rayleigh-Ritz).

La fase obtenida para una condición de aceleración cero fue de  $84.4929^\circ$ .

De las figuras 5.6.a, 5.6.b, 5.7.a y 5.7.b se puede decir que este instrumento sirve para medir sólo aceleraciones positivas o aceleraciones positivas y negativas dentro de un intervalo pequeño. Esto se debe a que la amplitud del coeficiente de reflexión es directamente proporcional a la aceleración aplicada (Figura 5.6.b); entonces, como se puede apreciar, mientras menor sea la aceleración, menor será la amplitud. Para una aceleración de  $-50$  g la señal reflejada es prácticamente nula, esto se debe a que la barra al alejarse de la estructura, el cambio de impedancias acústicas entre huecos y reflectores disminuye hasta que el coeficiente de reflexión se vuelve nulo. Además, la respuesta del sistema no es simétrica con respecto a los ejes cartesianos, es decir, para aceleraciones negativas el cambio de fase no es el mismo que se obtendría para aceleraciones positivas.

En la figura 5.8 se muestra el cambio de fase vs. aceleraciones positivas (Coventor), en esta figura podemos encontrar la ecuación lineal (recta en rojo) a la cual se han ajustado los puntos y su coeficiente de correlación lineal al cuadrado el cual es  $R^2 = 0.9909$ , indicando que los puntos sí se ajustan a la recta. En la

figura 5.9 se muestra el cambio de fase vs. aceleraciones positivas obtenidas por el método de Rayleigh-Ritz.

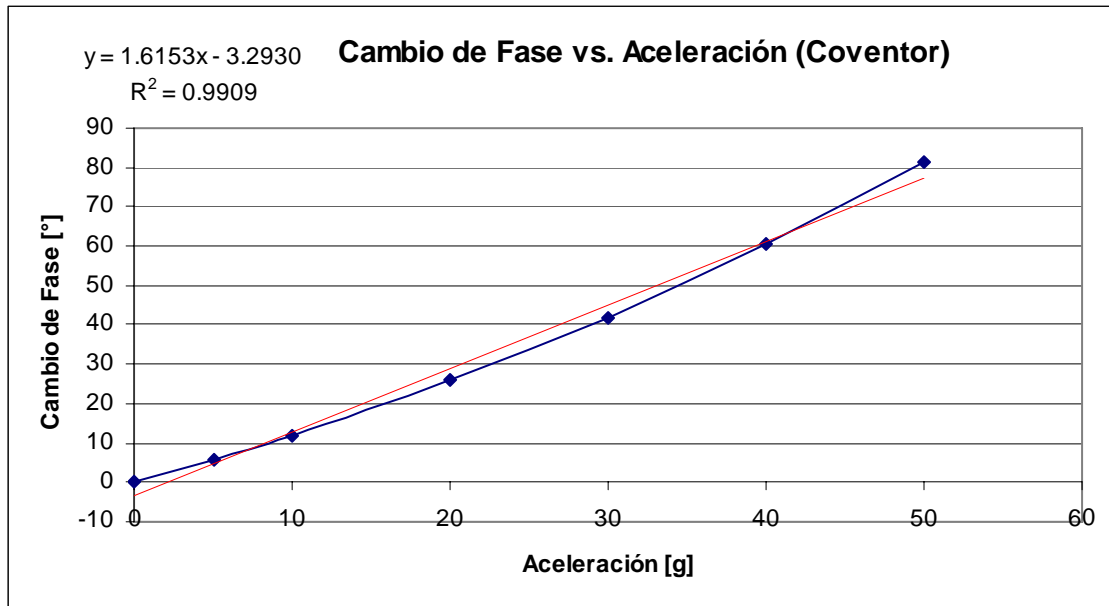


Figura 5.8. Cambio de fase del coeficiente de reflexión vs. Aceleraciones positivas (Coventor).

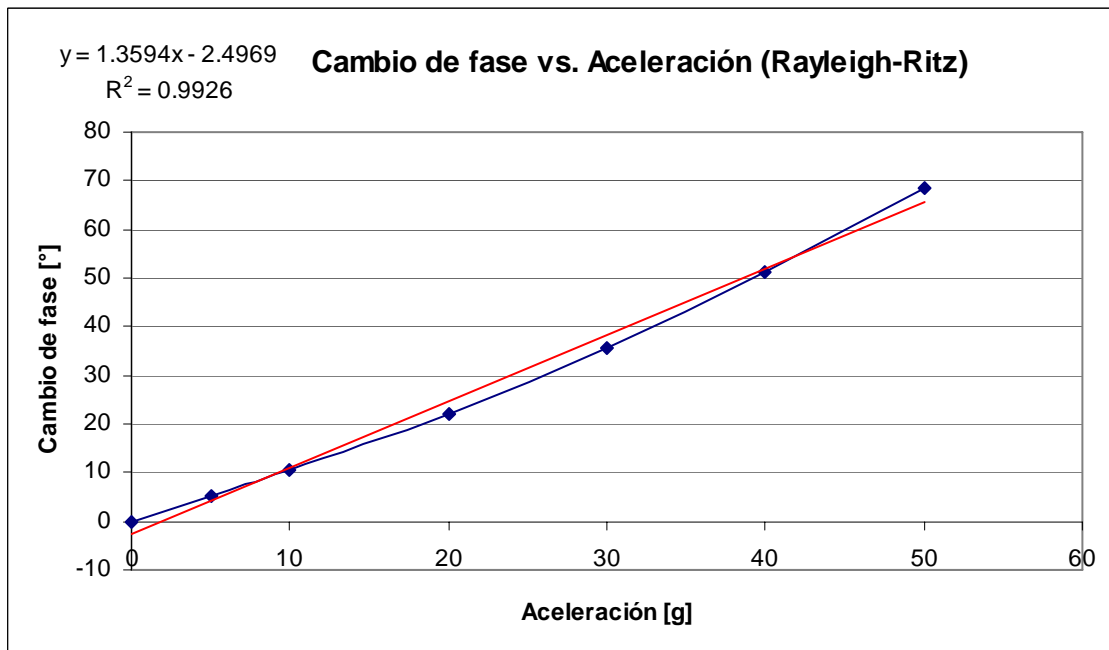


Figura 5.9. Cambio de fase del coeficiente de reflexión vs. Aceleraciones positivas (Rayleigh-Ritz).

En las figuras 5.8 y 5.9 se pueden observar las funciones a las cuales se ajustan los puntos obtenidos por Coventor y por el método de Rayleigh-Ritz. Dicha

pendiente nos determina la sensibilidad del instrumento. En la tabla 5.3 se organizan los datos.

Método	Pendiente $\left[ \frac{^\circ}{g} \right]$	Ordenada al origen $[^\circ]$	Diferencia entre ambas pendientes [%]
Coventor	1.6153	-3.2930	15.8423
Rayleigh-Ritz	1.3594	-2.4696	

Tabla 5.3. Datos de las rectas obtenidas para ambos métodos.

La diferencia entre ambas sensibilidades fue menor al 16 %. La diferencia entre ambos resultados se debe a las diferencias del movimiento de la estructura obtenidas con Coventor y las predichas por la función de forma.

La ordenada al origen es una indicación del error de la lectura para una entrada nula. Ésta es menor para el caso en el que se utilizó el método de Rayleigh-Ritz.

Como se puede apreciar, el ajuste a una recta de los puntos no es malo debido a las  $R^2$  obtenidas, sin embargo, estos puntos se ajustan de una mejor manera a una curva polinomial de segundo orden. Mientras mayor sea el orden del polinomio, la curva de tendencia se ajusta mejor a los puntos, sin embargo, el polinomio de segundo orden da una buena aproximación ( $R^2 = 0.999991462$ ). En la figura 5.10 se muestra el cambio de fase contra la aceleración para los datos obtenidos con Coventor. En dicha figura es posible observar la ecuación polinomial, su coeficiente de correlación que es aproximadamente 1 y sobre los puntos en rojo, la curva de tendencia.

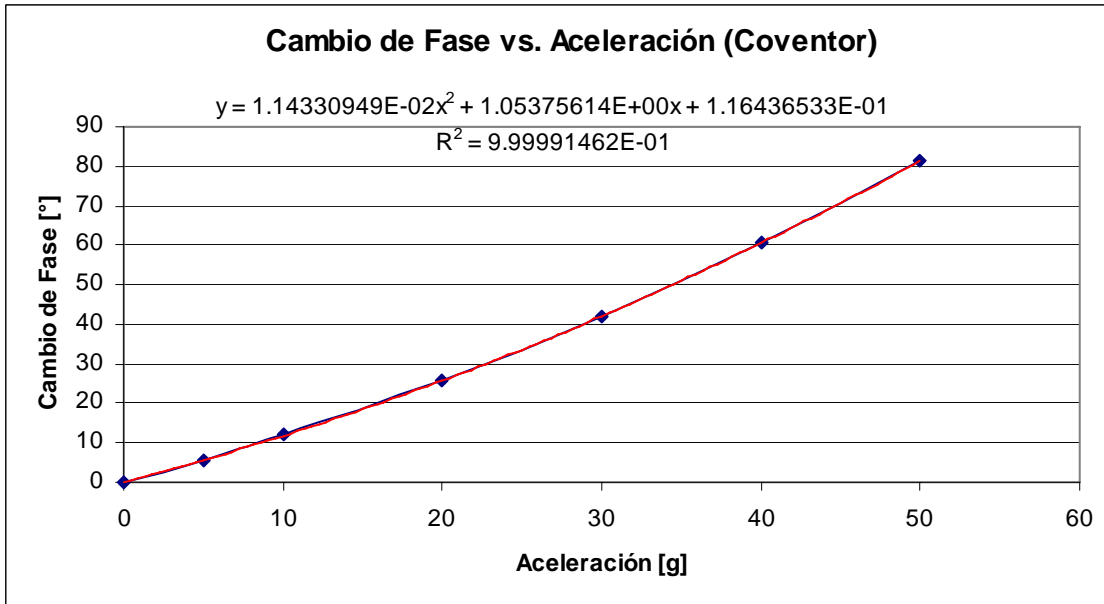


Figura 5.10. Ajuste cuadrático de los resultados obtenidos con Coventor.

El hecho de que la curva de resultados se ajuste a una función no lineal, significa que la sensibilidad del instrumento es dependiente de la entrada (debido a que su primera derivada es diferente de una constante). Este hecho no resulta un problema para hacer una medición, al contrario, es deseable considerar este efecto para así obtener mejores resultados.

Para hacer la medición considerando este efecto, simplemente, hay que encontrar los dos valores de  $x$  que resuelven la ecuación y escoger el que se encuentre dentro del intervalo donde se está midiendo.

Para el caso de valores positivos y negativos en un intervalo menor, se tiene que la cota inferior está restringida por la amplitud del coeficiente de reflexión. Si se considera un intervalo de  $[-10g, 10g]$ , los puntos se ajustan a la función presentada en la figura 5.11.

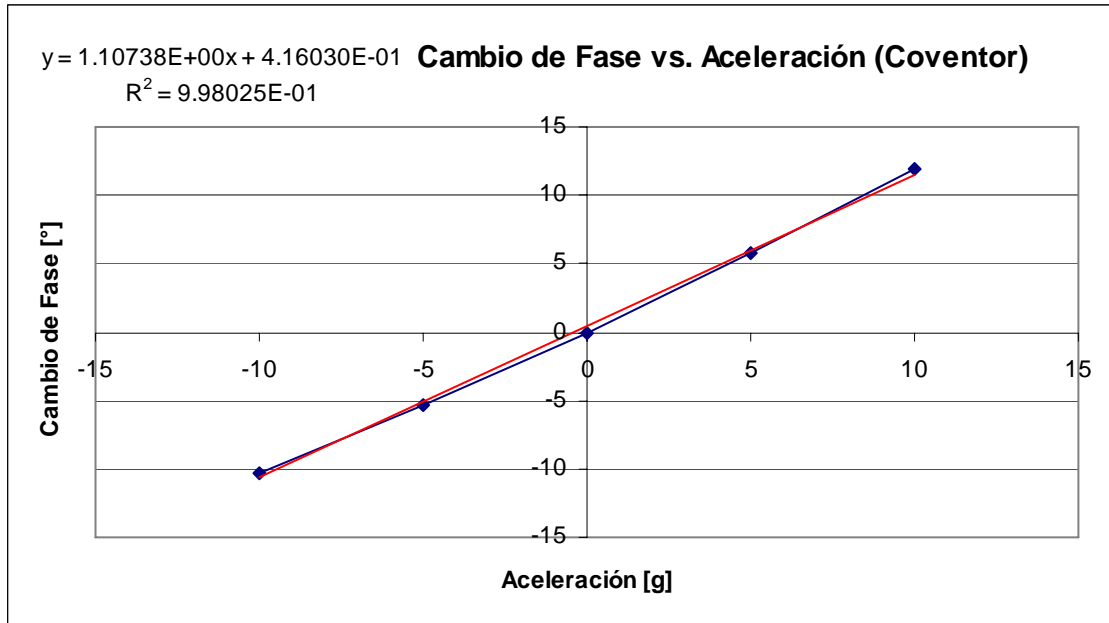


Figura 5.11. Cambio de fase vs. Aceleraciones (-10g, 10g)

Los datos obtenidos para la gráfica se ajustan a una recta, se puede observar que la línea de tendencia no cruza por el origen y la sensibilidad del instrumento es de  $1.1 \left[ \frac{^\circ}{g} \right]$  y este valor se aproxima al obtenido por Varadan y que se muestra en la

figura 4.11. Se puede observar que la respuesta tampoco es simétrica con respecto a los ejes X y Y.

En la figura 4.11 se muestran los resultados de fase vs. aceleración obtenidos por Varadan. Las diferencias principales entre los resultados de este trabajo y los presentados por dicho autor consisten principalmente en la linealidad de la curva. En este trabajo se obtuvo una sensibilidad mayor en un 60% aproximadamente. También se observó que según las dimensiones que presenta el autor arrojarían resultados de amplitud muy pobres.

### 5.2.2. Respuesta del instrumento a aceleraciones ortogonales al eje principal de medición (Z)

Cuando se coloca un acelerómetro sobre algún cuerpo, es común que las fuerzas que le sean aplicadas no sean paralelas a los ejes a los que está referida la

construcción del acelerómetro, pero es posible descomponerlas de tal modo que la aceleración aplicada pudiera tener una componente en el eje Z y otras en los ejes X y Y. Es importante determinar qué tan sensible es el instrumento a estas últimas componentes (aceleraciones “cruzadas”), y así, poder determinar cuáles serán los efectos de éstas sobre la aceleración en el eje de medición (que en este caso es el eje Z).

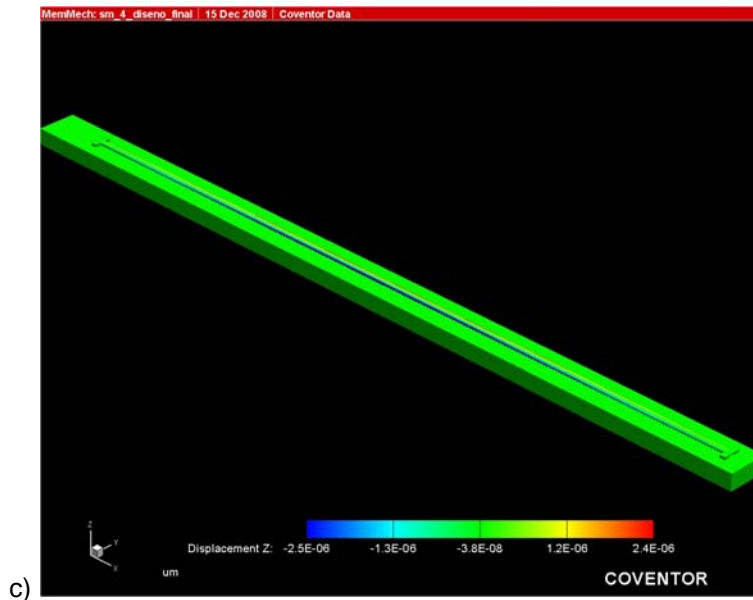
Para apreciar estos efectos, se han aplicado aceleraciones de 50 g paralelas a los ejes X y Y. Utilizando Coventor se ha obtenido la forma en que la estructura ha de moverse para cada caso. En las figuras 5.12.a, 5.12.b y 5.12.c se muestran los desplazamientos en X, Y y Z cuando se le aplica una aceleración en dirección Y con una magnitud de 50 g respectivamente.



Figura 5.12.a. Desplazamientos en X para una aceleración de 50g en dirección Y.



Figura 5.12.b. Desplazamientos en Y para una aceleración de 50g en dirección Y.



c)

Figura 5.12.c. Desplazamientos en Z para una aceleración de 50g en dirección Y.

En la figura 5.12.a se aprecia que las magnitudes del desplazamiento son despreciables ( $3 \times 10^{-11} [m]$ ). En la figura 5.12.b se observa que el máximo desplazamiento ocurre en dirección Y. Para este caso, es posible determinar este desplazamiento utilizando la función de forma considerando el ancho de la barra. El desplazamiento máximo ocurre al centro de ésta y tiene una magnitud



aproximada de  $2.6 \times 10^{-9} [m]$  o  $2.6 \times 10^{-3} [\mu m]$ . Este movimiento podría repercutir en la respuesta del instrumento, por lo tanto, para reducir este efecto, se recomiendan dos cosas: hacer la barra lo más ancha posible (debe considerarse que el ancho de la barra debe ser mucho menor que la longitud de la estructura y mientras más ancha sea, mayor será el amortiguamiento de la estructura) y debe dejarse un margen entre los IDT's y los bordes de la estructura. Para el desplazamiento en Z (figura 5.12.c) se puede observar que la barra rota sobre un eje paralelo al eje x, este fenómeno hace variar la altura de los reflectores, y por tanto, su respuesta. Sin embargo, este desplazamiento tiene una amplitud máxima menor a  $2.5 \times 10^{-12} [m]$ . El desplazamiento en el eje Z cuando la aceleración era de 5g y paralela al mismo eje fue de  $5.1 \times 10^{-9} [m]$  y es mayor más de 2000 veces que el primero. La diferencia entre estos dos desplazamientos permite suponer que el instrumento es inmune (muy poco sensible) a las aceleraciones sobre el eje Y. En las figuras 5.13 se muestran los desplazamientos de la estructura sobre los ejes X, Y y Z cuando ésta es sometida a una aceleración de 50 g paralela al eje X.

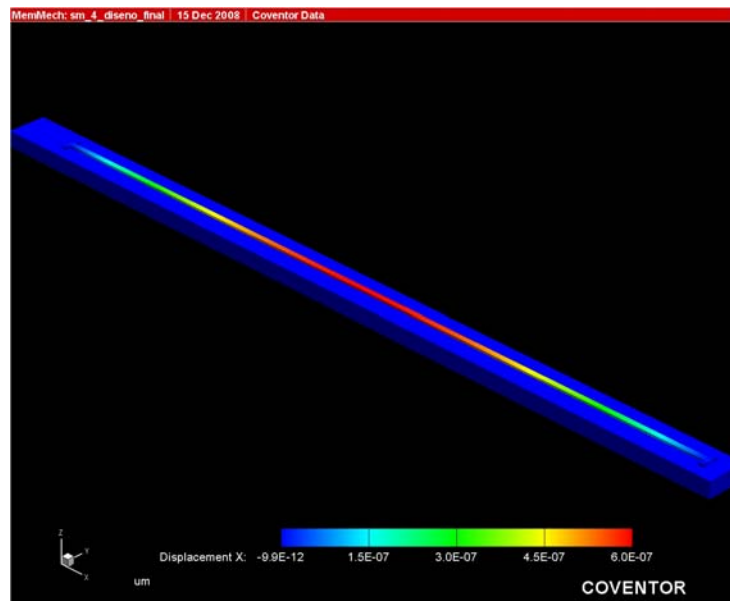


Figura 5.13.a. Desplazamientos en X para una aceleración de 50g en dirección X.

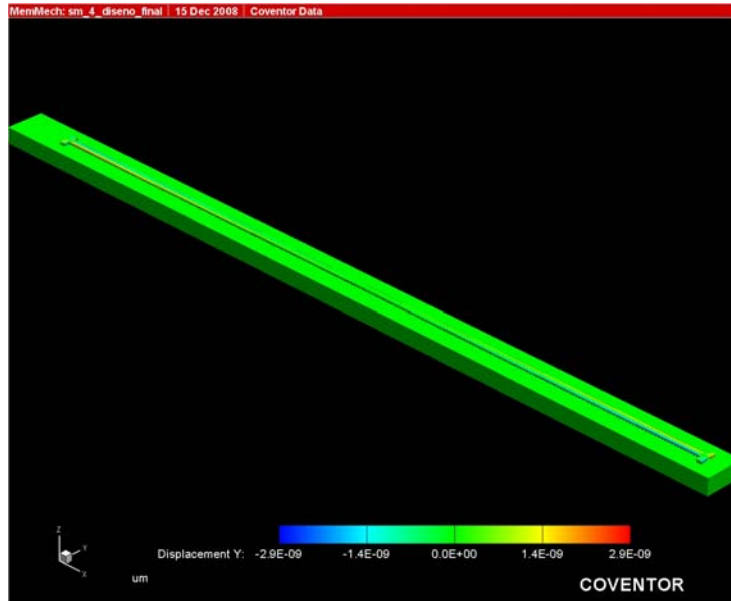


Figura 5.13.b. Desplazamientos en Y para una aceleración de 50g en dirección X.

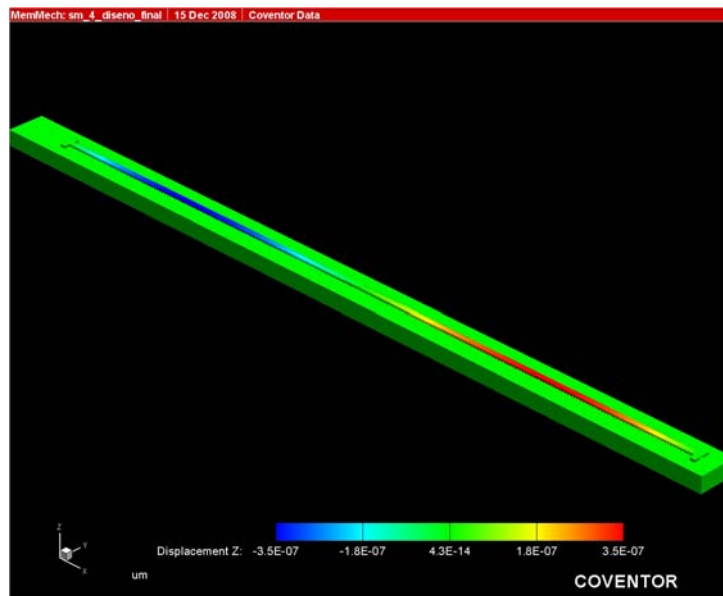


Figura 5.13.c. Desplazamientos en Z para una aceleración de 50g en dirección X.

El máximo desplazamiento en dirección X es de  $6.0 \times 10^{-13} [m]$ , mientras que un reflector tiene un ancho de  $1.5 \times 10^{-6} [m]$ . El reflector tiene una dimensión mayor de 2.5 millones de veces el desplazamiento máximo. El desplazamiento en Y es aún menor que el anterior. El desplazamiento en Z es menor casi 15000 veces. Por las

razones expuestas anteriormente se considera que también es inmune a las aceleraciones en X.

Por las razones expuestas se supone que el instrumento es inmune a cualquier aceleración que no se encuentre aplicada en la dirección Z, siempre y cuando el ancho de la estructura sea adecuado. En la tabla 5.4 se resumen las ideas expuestas en los párrafos anteriores

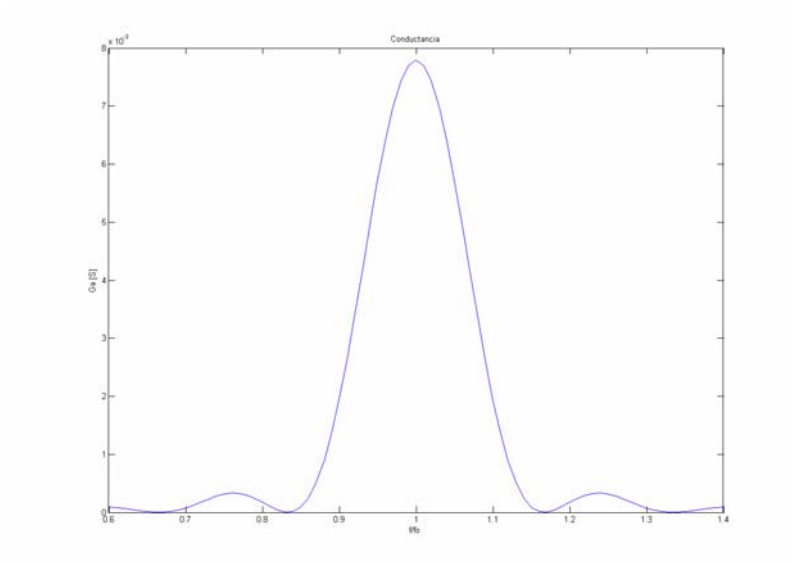
Eje de acción de la aceleración (50g)	Dirección del desplazamiento	Desplazamiento Máximo	¿Podría afectar sobre la respuesta del instrumento?
Y	X	$3.0 \times 10^{-5}$	No
Y	Y	$2.6 \times 10^{-3}$	Sí
Y	Z	$2.4 \times 10^{-6}$	No
X	X	$6.0 \times 10^{-7}$	No
X	Y	$2.9 \times 10^{-9}$	No
X	Z	$3.5 \times 10^{-7}$	No

Tabla 5.4. Desplazamientos máximos debidos a aceleraciones de 50g sobre los ejes X y Y.

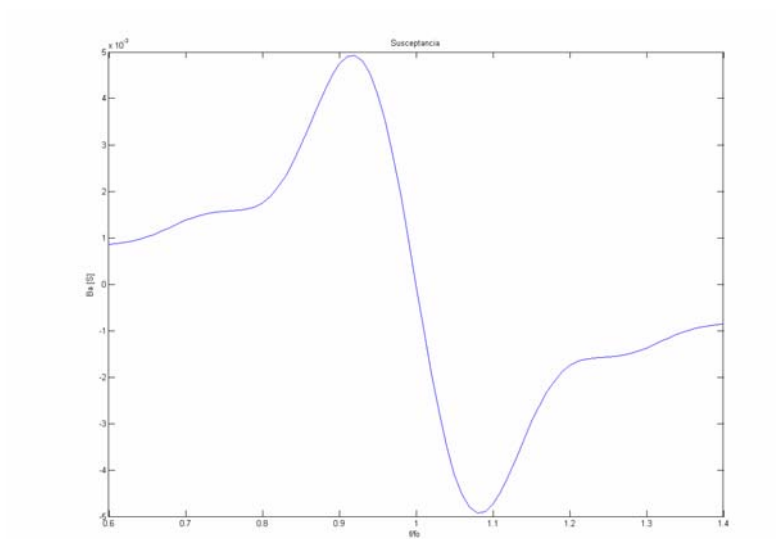
### **5.3 Respuesta eléctrica**

En la sección anterior se trató sobre la forma en que se movería la barra al aplicársele diferentes magnitudes de aceleración y cómo esto afectaría el comportamiento de las señales reflejadas. En esta sección se analiza la forma en que interactúan ambas partes de manera eléctrica.

En las figuras 5.14.a, 5.14.b, y 5.14.c se muestra la conductancia, la susceptancia y la susceptancia capacitiva del IDT, respectivamente. Estos datos se obtuvieron utilizando el modelo del IDT de “campo cruzado”. Se cumplió que  $|Z_{idt}| = 50[\Omega]$ .

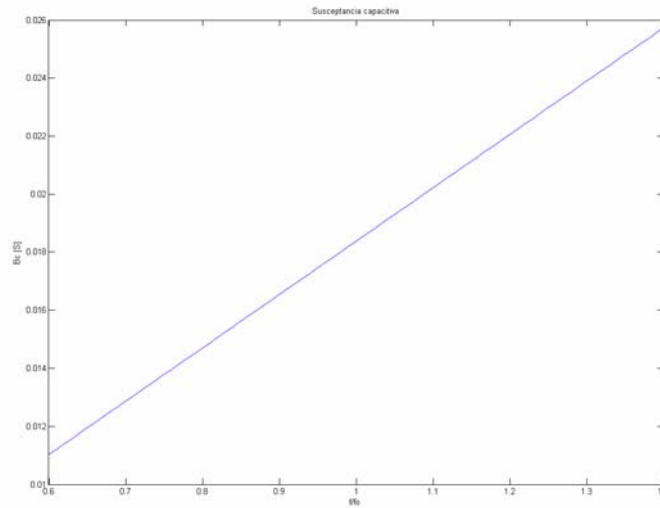


Figuras 5.14.a. Conductancia del transductor interdigital al hacer variar la frecuencia.



b)

Figuras 5.14.b. Susceptancia del transductor interdigital al hacer variar la frecuencia.



Figuras 5.14.c. Susceptancia capacitiva del transductor interdigital al hacer variar la frecuencia.

Según la expresión 3.20, el ancho de banda del IDT es aproximadamente:  
 $\Delta\omega = 98.345 \text{ [MHz]}$ .

Considérese que la estructura micromecánica se encuentra estática y no se encuentra sometida a ninguna aceleración (fuerza externa), por tanto, ésta no se deforma. ¿Cómo varía el coeficiente de reflexión cuando se modifica la frecuencia de la señal? Como las ondas Rayleigh son ondas no dispersivas, la velocidad de propagación de éstas no varía con la frecuencia, por tanto, la variación de la frecuencia produce una variación inversa de la longitud de onda de la señal y la longitud de onda es un parámetro importante dentro de un arreglo multicapas. En la figura 5.15 se muestra el coeficiente de reflexión cuando se hace variar la frecuencia.

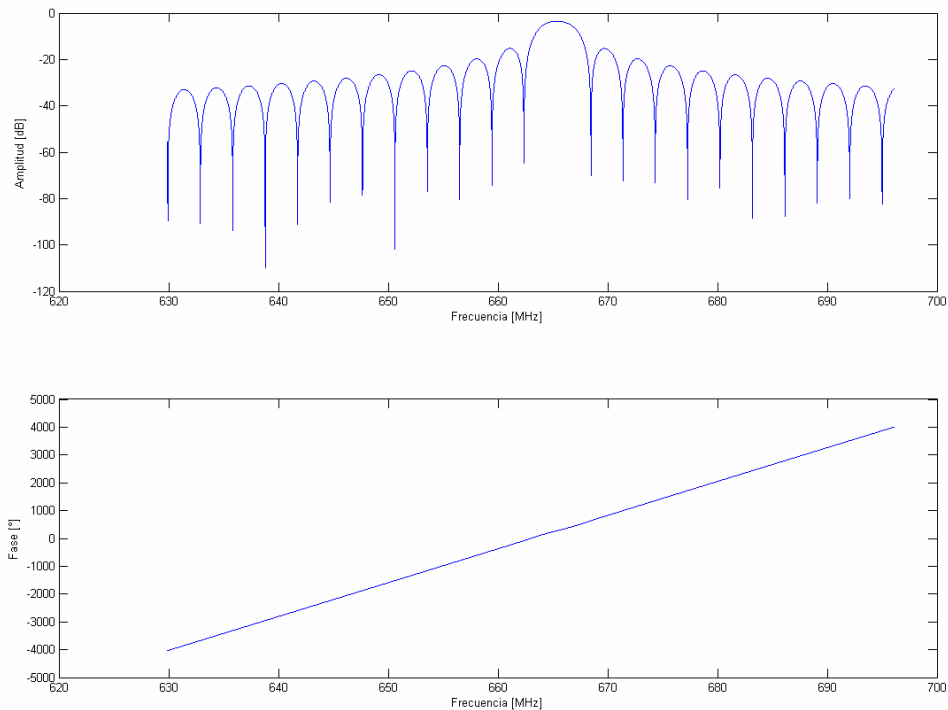


Figura 5.15. Variación del coeficiente de reflexión vs. frecuencia.

El arreglo multicapa actúa como un filtro peine. Es de esperar que las propiedades de filtrado de la estructura, hagan que el sistema sea más selectivo en la frecuencia que si el IDT y la estructura micromecánica trabajaran de manera independiente. Según la forma en la que operan estos dos elementos dentro del sistema, se dice que funcionan como dos filtros conectados en cascada.

Según los datos de la gráfica 5.15, para una frecuencia de  $663\text{[MHz]}$  se tiene una amplitud de  $-13.3632\text{[dB]}$ , mientras que el máximo de la amplitud es aproximadamente  $-3.5006\text{[dB]}$  y ocurre cerca de  $665.4\text{[MHz]}$ . En las figuras 5.16.a y 5.16.b se muestra el coeficiente de reflexión en amplitud y fase cuando se hace variar la aceleración a la que es sometida la estructura micromecánica.

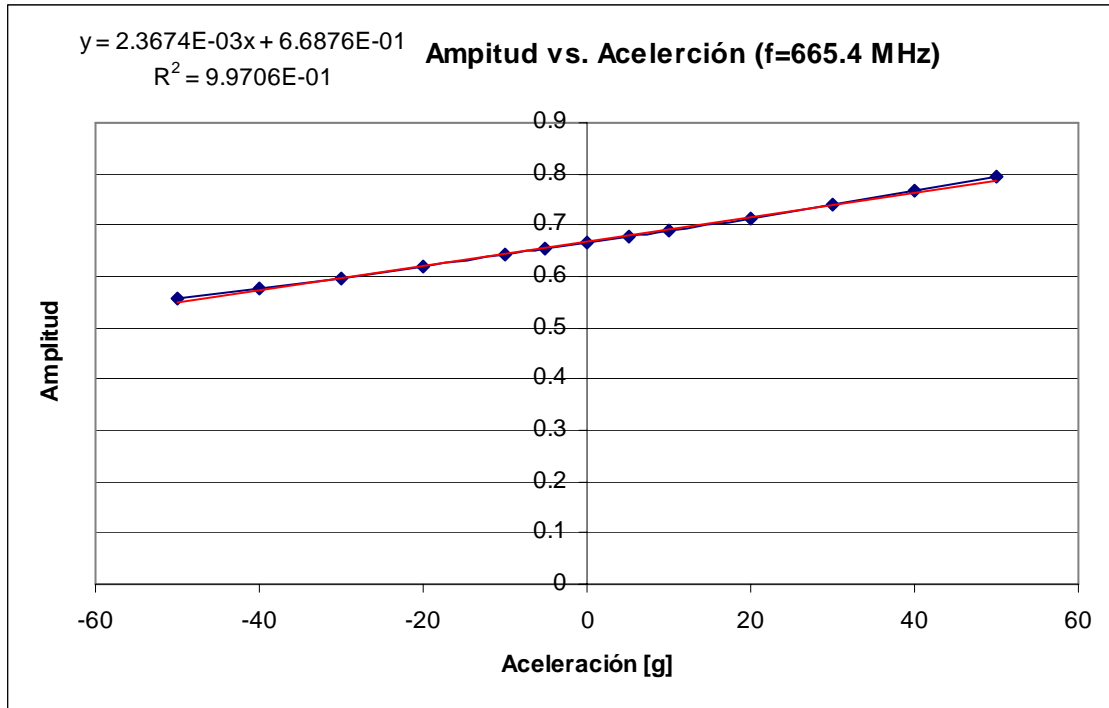


Figura 5.16.a. Amplitud del coeficiente de reflexión.

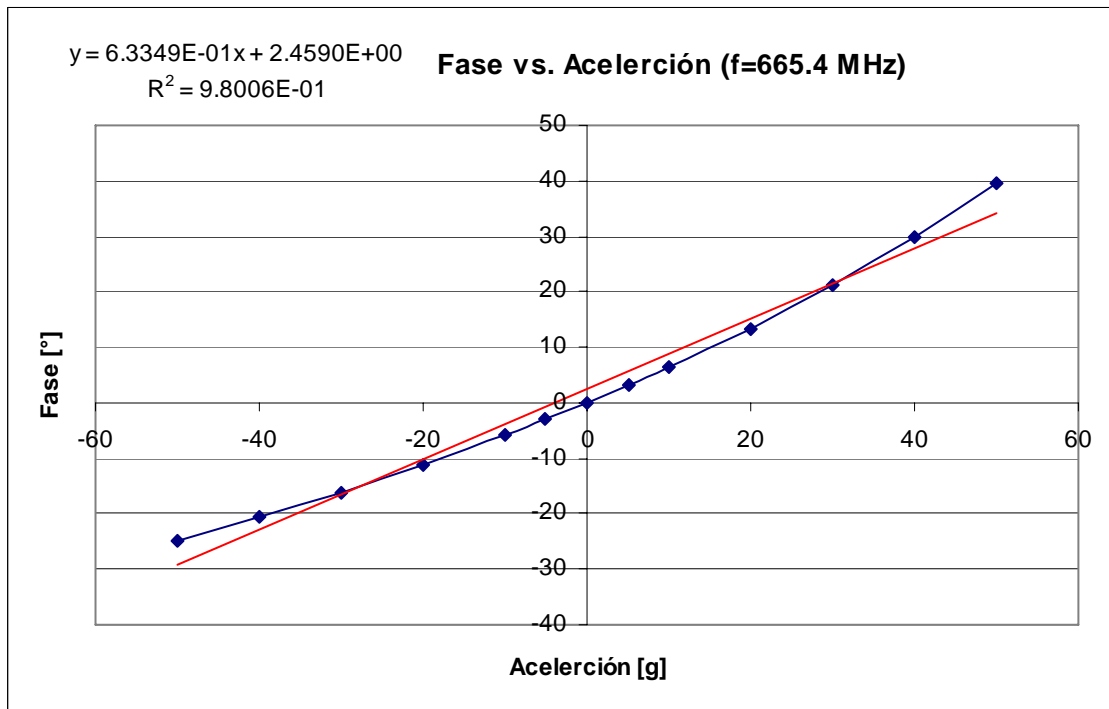


Figura 5.16.b. Fase del coeficiente de reflexión.

En las figuras 5.16 se pueden observar dos cosas, la respuesta del instrumento para aceleraciones positivas y negativas es asimétrica, y la sensibilidad del

instrumento disminuyó en casi dos y media veces. Durante las pruebas que se hicieron se observó que existe una relación inversa entre cambio de fase y amplitud, es decir, a mayor amplitud menor cambio de fase y viceversa. Sin embargo, para este caso sería factible realizar mediciones de aceleraciones negativas a diferencia del caso en que se opera a 663 [MHz]. Es importante que durante el diseño se considere este efecto y ajustar el sistema dependiendo del uso final que se le dará al instrumento.

#### **5.4 Respuesta dinámica y ancho de banda**

En el capítulo 2 se mencionó que un microacelerómetro podía modelarse como un sistema simple compuesto por un resorte, una masa y un amortiguador y se revisó la principal causa de amortiguamiento para este acelerómetro. En el capítulo 3 se revisó cómo obtener la frecuencia natural para una barra por medio del método de Rayleigh-Ritz. En el capítulo 4 se propuso un método para estimar el factor de amortiguamiento, sin embargo, se explicó por qué no existe una solución cerrada para obtener este parámetro. En esta sección se retoma el método para calcular el error y ancho de banda del capítulo 2, utilizando los resultados de frecuencia natural de la barra y considerando que se deberá encontrar en un trabajo posterior un modelo que permita estimar el coeficiente de amortiguamiento (tomando en cuenta la geometría de la estructura, la viscosidad y la presión del gas en el medio circundante), se hace una estimación sobre el comportamiento dinámico de la estructura siempre que se satisfagan ciertas condiciones que se mencionarán adelante.

Para esta sección se debe considerar que el factor de amortiguamiento debería ser  $\zeta = 0.7021$ . Según la estimación hecha a partir del método descrito en el capítulo cuatro, resulta que a presión de 1 atm el factor de amortiguamiento es mayor en un 300 % aproximadamente. Por tanto, la presión del aire a la cual se deberá encapsular el dispositivo deberá ser menor. Queda pendiente obtener un modelo físico que permita estimarla y se deberá verificar experimentalmente.



La frecuencia natural obtenida con Coventor fue  $f_n = 17731.2[\text{Hz}]$  y la masa de la estructura es  $m_b = 12.4350 \times 10^{-12}[\text{kg}]$ ; por tanto, la constante del resorte es  $k = 0.1543$ .

En la figura 5.17 se muestra el ancho de banda vs. factor de amortiguamiento considerando un error máximo de 0.01 %.

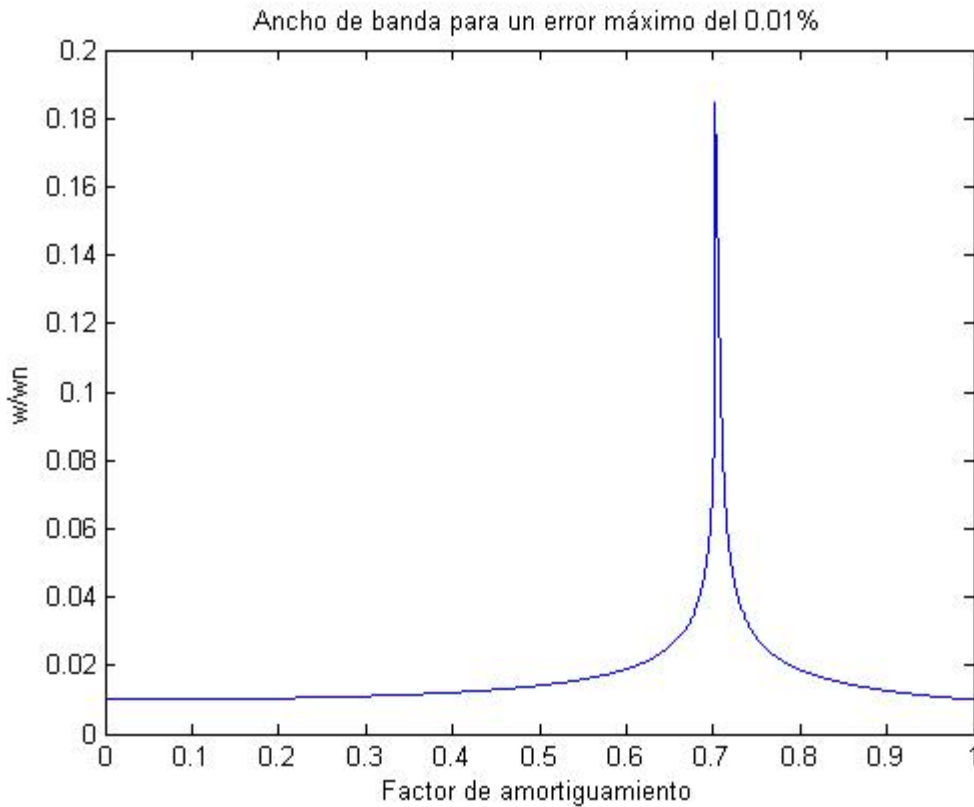


Figura 5.17. Ancho de banda vs. factor de amortiguamiento.

De la figura 5.17 se puede observar que el ancho para el cual ocurre el máximo es  $\zeta \approx 0.7021$ . Los dos valores que satisfacen  $(\omega/\omega_n) = 0.1$  son  $\zeta_1 = 0.70179$  y  $\zeta_2 = 0.70887$ . La diferencia es de  $\Delta\zeta = 7.08 \times 10^{-3}$ . Dentro de este pequeño intervalo se alcanzan valores de  $(\omega/\omega_n)$  entre 0.1 y 0.2. En la práctica, alcanzar un valor de amortiguamiento tan exacto puede resultar muy complicado. Sin embargo, en el peor de los casos ( $\zeta = 0$  o  $\zeta = 1$ ) se pueden alcanzar anchos de

banda de  $0.01 \cdot (\omega / \omega_n)$ , con un error máximo del 0.01%. En este caso se obtendría un ancho de banda (medición de aceleración) de  $177.31[\text{Hz}]$ .



## Capítulo 6

### Conclusiones

Durante el desarrollo de este trabajo se estudió la forma en que opera un acelerómetro basado en una estructura micromecánica (elemento inercial), conformada por una barra ranurada, y en ondas acústicas superficiales (forma de sensado), producidas por un transductor interdigital. En el capítulo 2 se estudió la forma en que una estructura podría modelarse como un sistema masa, resorte y amortiguador. En el capítulo 3 se establecieron las herramientas teóricas que permitirían vincular a las señales acústicas y eléctricas por medio de los IDT's. En el capítulo 4 se utilizaron los conocimientos de los dos capítulos previos para hacer un modelo que explicara el funcionamiento de dicho sistema. Para probar el modelo se propuso un diseño y con base en el modelo se establecieron cada uno de los parámetros característicos del sistema. En el capítulo 5 se hizo una recopilación de los resultados más significativos que se obtuvieron durante este trabajo y se comentaron algunos puntos importantes.

Como parte del capítulo 2 se estudió la forma de obtener y, en el capítulo 5, se calcularon los dos primeros modos de vibración de la barra a partir del método de Rayleigh-Ritz. En la sección 5.1 se mostraron los cinco primeros modos de vibración de la estructura. Se compararon los dos primeros modos de vibración que se obtuvieron por ambos métodos y los resultados calculados con Rayleigh-Ritz estuvieron por arriba de aquellos obtenidos con Coventor por más de un 7%. Considerando que los cálculos que se hicieron con Rayleigh-Ritz toman en cuenta a la estructura como una barra simple y no se incluyen a los reflectores, se puede afirmar que este método es útil para hacer aproximaciones de los dos primeros modos de vibración, además de que su aplicación es muy simple. Durante el desarrollo de este trabajo se buscó plantear un modelo matemático partiendo del

método de Rayleigh-Ritz, en el que se considerara la masa total y la geometría específica de la estructura, sin embargo, no fue posible hallar alguno dentro del tiempo disponible para esta etapa del trabajo. En la figura 5.4 se mostró que a pesar de que la sección transversal de la barra es variable (reflectores) y que la masa de la barra no se encuentra uniformemente distribuida, la deformación que sufre la estructura (según Coventor) es proporcional a la función de forma utilizada en el método de Rayleigh-Ritz (ver ecuaciones 5.1 y 5.2). Este método permitió tener una idea acerca de la deflexión máxima que sufrirá la estructura para una aceleración dada y si dicha excitación no tendría efectos destructivos (adhesión) del instrumento. Las diferencias obtenidas entre el método de Rayleigh-Ritz y los resultados proporcionados por Coventor fueron del 13%. Estos resultados permiten afirmar que el método de Rayleigh-Ritz es adecuado para dar al diseñador una aproximación sobre las deflexiones máximas que habrá de obtener. Si fuera necesario encontrar resultados más exactos, se proponen dos opciones: la primera, desarrollar el método de tal forma que se considere la masa total de la barra y la geometría de la estructura partiendo del método de Rayleigh-Ritz, la segunda, sería considerar a la barra como un conjunto de masas, resortes y amortiguadores distribuidos a lo largo de la estructura, donde el valor de cada uno de estos tres elementos dependería de las características mecánicas de la estructura en un intervalo determinado.

Debido a la diferencias de las deflexiones de la barra encontradas entre ambos métodos, era de esperar que la sensibilidad del instrumento (Ver tabla 5.3) fuera mayor para los resultados obtenidos con Coventor, en este caso se obtuvo una diferencia de casi 16 %.

Debido a que la señal de salida depende directamente de la señal acústica reflejada, durante este trabajo se hizo énfasis sobre el coeficiente de reflexión. Dicho coeficiente determina la amplitud y la fase de la señal reflejada hacia el IDT. Después de haber obtenido el coeficiente de reflexión para diferentes valores de aceleración, se concluye que el sistema es un sistema no lineal; sin embargo, se pueden obtener resultados aproximadamente lineales sobre todo cuando el rango de aceleraciones está dentro de cierto intervalo, como se muestra en la figura

5.10, para este caso se consideró un rango de -10 [g] a 10 [g]. Dichas no linealidades se deben principalmente a que la curva de velocidad contra altura normalizada (Figura 4.13) está dada por una función cotangente hiperbólica. Como ya se sabe, una función puede expresarse como una suma infinita de monomios (serie de Taylor), entonces, la función cotangente tiene una representación polinomial con un número infinito de términos. Es por esta razón que mientras mayor sea el orden del polinomio al que se ajusten los resultados de la fase menores serán los errores en la aceleración. Para el caso de estudio se verificó que un ajuste cuadrático de los resultados de fase obtenidos se aproxima satisfactoriamente y de una mejor manera que el ajuste lineal. Para el caso lineal, en que se miden aceleraciones positivas (figuras 5.7 y 5.9), se obtuvo una  $R^2 = 0.9909$  contra una  $R^2 = 0.9999$  para el caso cuadrático. A pesar de que el sistema tiene una respuesta en fase no lineal, esto no impide realizar mediciones de aceleración con él. Una vez que se hubiera caracterizado el instrumento con una función de cualquier orden, al hacer la medición de la fase de la señal es posible determinar la aceleración por medio de la función inversa de la función que se obtuvo al calibrar el instrumento, y así, obtener la aceleración a la cual corresponde una fase determinada. Procesar la señal de esta forma podría ser complicado, sobre todo si se utilizan circuitos discretos. Es posible que ajustar el instrumento por medio de una curva polinomial con orden diferente de 1 o 2 no mejore significativamente la lectura de la aceleración, el diseñador deberá hacer estas consideraciones durante su implementación.

Esta tendencia no lineal se puede corregir si se hace que la estructura se desplace menos, es decir, se aumenta su rigidez. Sin embargo, para no perder sensibilidad del instrumento es necesario encontrar un material con coeficientes de acoplamiento piezoeléctrico mayores. Un material con un coeficiente de acoplamiento notable podría hacer que se mejoraran las especificaciones del sistema tales como: ancho de banda, sensibilidad, linealidad, rango de operación, etc. Este es un punto en el que se deberá prestar especial atención si se desea mejorar las especificaciones de un sistema que opera con este principio (SAW-MEMS)

Se observó que el instrumento tiene una respuesta en fase no simétrica con respecto a los ejes, es decir, la respuesta del instrumento varía para aceleraciones negativas y positivas. Además, para las aceleraciones negativas disminuye la amplitud del coeficiente de reflexión debido a la separación de los reflectores (5.6.b); este efecto podría hacer que la señal se perdiera antes de la recepción de la señal en la base.

Utilizando Coventor, se le aplicó a la estructura un valor de 50 [g], en las direcciones X y Y, con la finalidad de determinar si el instrumento es sensible a aceleraciones ortogonales al eje principal de medición (Z). Debido a que el desplazamiento de la estructura en el eje Y, cuando se le aplica una aceleración es mayor que en cualquiera de los otros casos, el instrumento podría ser sensible a aceleraciones aplicadas sobre dicho eje, sobre todo si el ancho de la estructura y el del IDT son casi iguales. Para reducir esto, durante el diseño de la estructura, se consideró que el ancho de ésta debería ser mayor que el ancho del IDT por lo menos en un 10%. Para los demás desplazamientos, en las otras direcciones, y para las aceleraciones en ambas direcciones, no se observó algún efecto que pudiera modificar la respuesta del sistema. Considerando la recomendación anterior, el acelerómetro debería tener una sensibilidad “muy baja” a las aceleraciones “cruzadas”. Sólo se hace referencia de este fenómeno en términos cualitativos, queda abierto para estudios posteriores encontrar el método de determinar en términos cuantitativos estos efectos.

Haciendo uso del modelo de “campo cruzado” se hizo el diseño del IDT para obtener una impedancia de  $50 \Omega$ . Se obtuvo la admitancia de éste cuando se hace variar la frecuencia y se pudo observar que el IDT actúa como un filtro pasobanda. Además, la estructura micromecánica actúa como un filtro peine variable de ondas acústicas y sus cualidades de filtrado dependen de la señal de aceleración. El IDT y la microestructura, operando en conjunto, harán este sistema más selectivo en la frecuencia.

Se observó que existe una relación inversa entre la amplitud del coeficiente de reflexión y la fase de éste. En la figura 5.15 se observa el coeficiente de reflexión en amplitud y fase para una frecuencia de 665 MHz, y la amplitud fue mayor en

todos los puntos que los resultados obtenidos para la frecuencia de 663 MHz (Figura 5.5), mientras que la fase fue menor en todos los casos. Se observó que existe una relación inversa entre la fase y la amplitud de la señal. Debido a que las lecturas de la aceleración se hacen sobre la fase de la señal de salida, se le dio prioridad a este parámetro en el diseño, sin embargo, se podrá considerar que tan importante es la amplitud para el sistema que se desee construir, y así ajustar la frecuencia de operación del sistema.

Uno de los puntos críticos en el diseño de un acelerómetro es el factor de amortiguamiento. Para este caso, como mencionó Bao, debido a que la estructura no se desplaza de manera uniforme no existe una solución cerrada; sin embargo, se intentó hacer una aproximación del coeficiente de amortiguamiento, a través de ponderar el efecto de amortiguamiento por película comprimida, debido a cada reflector y se obtuvo como resultado que el aire deberá tener una presión menor a una atmósfera. La presión a la que debería encapsularse el sistema no se ha determinado debido a que hace falta considerar un modelo que relacione la presión con la viscosidad del gas. Para aproximar el factor de amortiguamiento de la microestructura a  $\zeta = 0.7021$ , que acercaría al instrumento al ancho de banda máximo, se cree que la mejor forma de obtenerla sería determinarla experimentalmente. Se comentó que en el peor de los casos se podrían hacer mediciones de señales de aceleración de por lo menos 177 Hz, una forma de aumentar éste ancho de banda podría ser modificar las dimensiones de la microestructura, en específico, reducir su longitud.

Reducir la longitud de la estructura implicaría, para una misma frecuencia, reducir el número de reflectores, y por tanto, disminuir la amplitud y la fase del coeficiente de reflexión. Si se reduce el tamaño de la estructura y se mantiene el número de reflectores, habría que modificar la frecuencia de operación, y al aumentar la frecuencia de operación se debería reducir la distancia entre los reflectores y el medio piezoeléctrico. Todos estos compromisos hacen que el diseñar un sistema de este tipo sea complicado. Debido a que existen muchas ecuaciones que deben de ser resueltas de manera numérica para analizar este instrumento, implementar un método de optimización puede resultar complicado y hacer necesaria una gran



inversión de recursos computacionales y tiempo de programación. Dado que la ecuación propuesta por Campbell para determinar la velocidad de propagación de la onda acústica superficial es una ecuación trascendente, fue necesario desarrollar un método para resolverla. Primero se trató de encontrar su solución evaluándola reiteradamente hasta que la función para una velocidad dada fuera menor que la tolerancia; sin embargo, para una resolución de milésimas, obtener una figura como la 4.10 tardó cinco días para una computadora personal, con procesador Intel *Pentium D dual core 805*. Se desarrolló un método que permitió obtener los resultados en una hora aproximadamente con la precisión de un número en formato *double*. Para realizar dicha mejora hubo que probar varios materiales, varios cortes y analizar si la parte real, imaginaria o ambas de la función eran significativas. Para hacer aún más eficiente el proceso habrá de estudiarse con más detalle otro método, como el método de Kuhn. Una vez que se logró obtener un procedimiento más eficiente en la solución del método de Campbell, fue posible relacionar las alturas de cada uno de los huecos y reflectores con una impedancia acústica, y como la altura de cada punto de la barra varía según la deformación que ésta sufra, dicha deformación se relacionó con una aceleración por medio del método de Rayleigh-Ritz o por los datos arrojados por Coventor, para después ser tratado como un sistema multicapa, así fue como se desarrolló una herramienta computacional que permite analizar este tipo de sistemas. También se desarrollaron programas para calcular la respuesta del IDT y calcular sus características eléctricas. En total, el programa está formado por más de mil quinientas líneas de código.

Durante el desarrollo de este trabajo han quedado temas pendientes que deberán ser tratados en trabajos posteriores y que ampliarán los resultados arrojados; quizá su desarrollo resultaría en un sistema con mejores características de operación, además de las ya mencionadas anteriormente, como son:

- Durante este trabajo se trató principalmente del acelerómetro en su modo de operación remoto. Analizar este tipo de acelerómetro para el modo de operación realimentada aumentaría el conocimiento que se tiene acerca de este tipo de microacelerómetros y sobre la combinación de la tecnología

SAW y MEMS. Según los compromisos observados para el diseño de la estructura, el diseño de un sistema realimentado podría ser más flexible y quizá brindar mejores resultados. También en el modo realimentado se podría trabajar de una manera remota, si la salida del oscilador se conecta a una antena, pero este método se encuentra limitado por la autonomía de la fuente de alimentación.

- En el capítulo 4 se mencionó que había reportes de otros tipos de ondas acústicas que presentan características atractivas (coeficiente de acoplamiento piezoeléctrico) para su utilización en dispositivos SAW; quizá utilizar otro tipo de ondas acústicas podría hacer que se mejorara el rendimiento del sistema.
- Durante el desarrollo de este trabajo el modelo que se utilizó considera que la profundidad del material en el que se propaga la onda (medio piezoeléctrico) es infinito, sin embargo, se mencionó en el capítulo 4 que el substrato puede estar compuesto por varios medios y las ondas acústicas producirse por medio de una película delgada. Se han reportado coeficientes de acoplamiento piezoeléctricos y velocidades de propagación de las ondas atractivos para el desarrollo de este tipo de sistemas, y así, quizá elevar su frecuencia de operación. Habrá que estudiar cómo afecta el hecho de que las ondas superficiales sí sean dispersivas bajo estas circunstancias.
- Queda pendiente investigar más acerca de otros tipos de materiales y sobre las divergencias entre dos autores respecto a las características de propagación de las ondas para un material en un corte específico (Niobato de potasio), presentadas en el capítulo 4, y determinar si es un material que se puede utilizar para este caso específico de diseño.
- No se ha hecho ningún estudio sobre cómo la tolerancia de los procesos de fabricación podrían modificar la respuesta del sistema.
- Durante este trabajo no se consideraron las variaciones que pudieran ocurrir en el sistema debido a la temperatura.
- El principio con el cual opera este microacelerómetro puede ser empleado en otro tipo de sensores, en filtros variables, en líneas de retardo variables, etc.

- Se deberá en un futuro validar todo lo planteado en este trabajo a través de la experimentación.

En resumen, este microacelerómetro resultó ser un instrumento con bondades claras, por ejemplo, es un sensor pasivo (no necesita una fuente de alimentación), trabaja con señales pasobanda, se cumplió que la distorsión en fase fuera lineal sobre todo en el intervalo de -10 g a 10 g. Este instrumento también presenta ciertas desventajas, como que el proceso de fabricación no es estándar, su análisis y diseño es complicado, por mencionar algunas. Sin embargo, este trabajo ofrece posibilidades de crecimiento y desarrollo, no sólo en el área de la instrumentación, sino de las comunicaciones, el procesamiento de señales y otras. Es por esta razón y por las bondades que este tipo de instrumento ofrece que debería continuarse con su estudio.

## Referencias

1. ADXL330 datasheet, obtenido de *www.analog.com*, el día 25 de junio del 2007.
2. ADXL193 datasheet, obtenido de *www.analog.com*, el día 25 de junio del 2007.
3. Gardner, J., W., *Microsensors, MEMS and smart devices*, John Wiley & Sons., USA, 2001
4. Bao, *Micromechanical transducers: Pressure sensors, accelerometers and gyroscopes*. Elsevier, 2000.
5. G-Link: wireless accelerometer node. User manual for 2.4GHz. G-Link. Versión 4. Obtenido en: *www.microstrain.com*, febrero 2008.
6. Karki, James, 3 V accelerometer featuring TLV2772: application brief, Texas Instruments, Obtenido de *www.ti.com*
7. Subramanian, V.K. Varadan, V.V. Varadan, M.J. Vellekoop, Design and fabrication of wireless remotely readable MEMS based accelerometers, *Smart Mater. Struct.* 6 (1997) 730-738
8. Williamson, R. C., Case studies of successful surface acoustic wave devices, *Ultrasonics IEEE*, 1977
9. Varadan, V, et. al., Fabrication, characterization and testing of wireless MEMS-IDT based microaccelerometers, *Elsevier, Sensor and actuators A*, 90, 7-19, 2001
10. White, R. M., Surface Acoustic wave sensors, *Transaction of ultrasonics*, IEEE, 1985
11. Schmidh, F., Remote sensing of physical parameters by means of passive surface acoustic wave transducers, *ultrasonic symposium IEEE*, 1994.
12. Campbell, J. J., et. al., A method for estimating optimal crystal cuts and propagation directions for excitation of piezoelectric surface waves, *IEEE Trans Sonics and ultrasonics*, vol SU-15, no. 4, October 1968.
13. Buff, F., Remote sensor systems using passive SAW sensors, *Ultrasonics IEEE*, 1994
14. Thompson, W. T., *Theory of vibration with applications*, fourth edition, prentice Hall, USA, 1993
15. Guerra, J., Pérez, P., Modulación en fase de ondas elásticas superficiales aplicada a la instrumentación, *Memorias SOMI XXIII*, ISBN 970-32-2673-6
16. White, R. M. Surface elastic waves, *proceedings of IEEE*, vol. 58, no. 8, 1970
17. Morgan, D., *Surface acoustic wave filters*, Second edition, Academic press, UK, 2007
18. Zhang, C., Caron, J. J., The Bleustein-Gulyaev wave mode in potassium niobate for liquid sensing applications, *IEEE ultrasonic symposium*, 2000
19. Redwood, M., Milsom, R. F., Piezoelectric coupling coefficient of interdigital Rayleigh-wave transducers, *IEEE electronic letters*, Vol 6 No. 14, 1970
20. White, R. M., Direct Piezoelectric coupling to surface elastic waves, *Appl. Phys. Lett.*, 1965

21. Lewis, M. F., Triple transit suppression in surface acoustic wave devices, *Electronics Lett.* 8, 1972
22. Campbell, C. K., *Surface acoustic wave devices for mobile and wireless communications*, San Diego: Academic, 1998
23. Kino, G. S., *Acoustic waves: Devices, imaging, and analog signal processing*, Prentice Hall, 1987
24. Smith, W. R., Analysis of interdigital surface wave transducers by use of an equivalent circuit model, *IEEE transaction on microwave theory*, MTT-17, no. 11, November 1969
25. Morgan, D. P., Surface acoustic wave devices and applications, *IEEE ultrasonics*, 11, 1973
26. Farnell, W. G., Cermak, I. A., Wong, S. K., Capacitance and field distributions for interdigital surface-wave transducers, *IEEE Sonics and Ultrasonics*, SU-17, 3, July 1970
27. Coquin, G. A., Tiersten, H. F., Analysis of the excitation and detection of piezoelectric surface waves in quartz by means of surface electrodes, *J. Acoust. Soc. Am.*, 1966
28. Grant, P. M., Adam, J. D., Collins, J. H., *IEEE transaction of communications*, vol 22, no. 9, 1974
29. Matthews, H., *Surface wave filters*, John Wiley & Sons, USA, 1977
30. Smith, Design of surface wave delay lines with interdigital transducers, *IEEE Transactions of microwave theory*, vol. MTT-17, no. 11, 1969
31. Ingebrigtsen, K. A., Surface waves in piezoelectrics, *J. Appl. Phys.*, 40, 2681-2686, 1969
32. Warner A. M., Onoe M., Coquin G. A., Determination of elastic and piezoelectric constants for crystals in class (3m), *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol 42, p.1223, 1967.
33. Gualteri, J. G., Kosinski, J. A., Piezoelectric materials for acoustic wave applications, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.*, 41 no. 1, January 1994.
34. Nakahata F., Satoshi F., Theoretical study on SAW characteristics of layered structures including a diamond layer, *IEEE transactions on sonics and ultrasonics*, 1995
35. Odagawa, H., Yamanouchi, K., Super high electromechanical coupling and zero temperature characteristics of  $KNbO_3$  and its applications for low-loss wide band filters, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.*, 46, 700-705 (1999)
36. Zgonik, M., Materials constants of  $KNbO_3$  relevant for electro- and acousto-optics, *J. Appl. Phys.*, 74 (2), July 1993
37. Pozar, D. M., *Microwave engineering*, John Wiley, 2005
38. Brekhovskikh, L. M., *Waves in layered media*, New York: Academic, 1980.
39. Martin, B. G., Theory of acoustical properties of multilayer and superlattice using an optical approach, *J. Acoust. Soc. Am.*, 95 (3), March 1994
40. Pierce, Allan D., *Acoustics: an introduction to its physical principles and applications*, Woodbury, New York: Acoustical Society of America, 1994